



HAL
open science

Interactions non-linéaires d'ondes internes de gravité et mélange en milieu stratifié

Pauline Hussein

► **To cite this version:**

Pauline Hussein. Interactions non-linéaires d'ondes internes de gravité et mélange en milieu stratifié. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSE1285 . tel-02507942

HAL Id: tel-02507942

<https://theses.hal.science/tel-02507942>

Submitted on 13 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2019LYSE1285

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

École Doctorale ED52
Physique et Astrophysique

Spécialité de doctorat : Physique

Soutenue publiquement le 11/12/2019 par :
Pauline HUSSEINI

Interactions non-linéaires d'ondes internes de gravité et mélange en milieu stratifié

Devant le jury composé de :

Catherine BARENTIN	Professeure	Université Lyon 1	Présidente
Patrice MEUNIER	Directeur de Recherche CNRS	Université Aix Marseille	Rapporteur
Jan-Bert FLOR	Directeur de Recherche CNRS	Université Grenoble 1	Rapporteur
Sabine ORTIZ	Professeure	ENSTA ParisTech	Examinatrice
Philippe ODIER	Maître de conférence	ENS de Lyon	Directeur de thèse
Thierry DAUXOIS	Directeur de Recherche CNRS	ENS de Lyon	Co-directeur de thèse

Résumé

Pour pouvoir expliquer le mélange océanique, il est essentiel de comprendre les phénomènes aux petites échelles et en particulier les transferts d'énergie vers celles-ci. Les ondes internes sont étudiées dans ce contexte : en déferlant, en se déstabilisant et en générant des sous-harmoniques par instabilité résonante triadique (TRI), elles contribuent à ce transfert. Nous avons porté notre étude expérimentale sur la propagation d'ondes sur des temps de forçage longs. Les précédentes expériences réalisées dans ces conditions au sein de l'équipe présentaient, après plusieurs heures, un profil avec de nettes couches mélangées. L'explication physique proposée jusqu'alors, purement turbulente, était incorrecte. Notre dispositif expérimental nous place en réalité dans une situation singulière où la stratification est modifiée conjointement par propagation d'ondes et par double-diffusion : des couches mélangées peuvent ainsi se former et le fluide se comporte alors comme un guide d'ondes. De plus, la stratification fortement modifiée par les ondes a un effet en retour sur leur propagation : les ondes filles issues de la TRI disparaissent petit à petit du fluide, ce qui limite le transfert aux plus petites échelles et donc le mélange. Deux ondes internes peuvent également interagir entre elles pour générer, cette fois, une onde super-harmonique dont la structure est conditionnée par la structure des ondes qui lui ont donné naissance. Nos travaux ont abouti à la première mise en évidence expérimentale de la génération d'une telle onde super-harmonique. Les résultats sont en excellent accord avec la théorie développée par Thorpe (1966). En particulier, l'onde super-harmonique a la forme prédite, naît dans un intervalle mince autour de la résonance et les taux de croissance spatiaux sont très proches de ceux attendus.

Remerciements

Au-delà des remerciements traditionnels aux directeurs de thèse, Philippe et Thierry, je tiens à en adresser à tous ceux qui m'ont aidée d'une manière ou d'une autre au cours de ces 3 années.

À Mani, pour la collaboration en fin de troisième année de cette thèse.

Au saff du PSMN pour leurs coups de pouce numériques et pour leur disponibilité.

À Laure, Laurence, et un petit clin d'œil à Fatiha - je ne suis finalement pas tombée dans les escaliers.

Aux habitués des canapés du premier pour les barres de fou rire et chocolatées qu'on y a partagées.

Aux habitants successifs de *la mezza* - en particulier Laura, Richard, sans oublier les gardons Géraldine et Timothée - et aux visiteurs occasionnels ou réguliers - Lucas, Jérémy, Jérôme, Raphaël, Alizée, Antoine R., Samuel P., Denis, Bastien, Marine, Caroline, Antoine N. et Sylvain - pour les discussions, la bonne humeur et le soutien apportés.

À tous les oncles et tantes - merci encore pour le coup de pouce au pot.

À Ma et Noune.

À Pauline, Glenn, Sophie, Mourtaza, Nicolas, Pierre, Octavie, Yannick et Thibaud.

À celles et ceux qui ne sont pas cités nommément mais que je n'oublie pas et qui se reconnaîtront.

Un poème inédit composé par Géraldine pour célébrer les nuits de manip' et le doux ronron de GOAL.

Chère Pauline,

Entrant dans notre bureau
Notre belle mezzanine
J'entendis un bruit de ruisseau
Comme une comptine.

Je tendis l'oreille
Et écouta son histoire
Elle me raconta sa veille
Depuis hier au soir

Elle me parla, ravie
De marches, de mélange !
D'océans engloutis
Par leurs propres échanges !

Mais je sais que ce chant
Est comme celui des sirènes
Il s'insinue lentement
Dans chaque petite veine
Un bruit lancinant..
Une croissante gêne..
Je me bas vaillamment !
Je suis dans l'arène !!
Ah que c'est entêtant..
La lutte est vaine.

Ici Goal est roi
Nul ne peut oublier sa loi

Alors je m'en vais.

On verra plus tard...
Qui de nous deux,
est le plus bavard !!

G. Davis (13 avril 2018)

Table des matières

1	Introduction générale	8
1.1	Circulation thermohaline et mélange	8
1.1.1	Un peu d'histoire	8
1.1.2	Un circuit fermé	10
1.1.3	Le mélange océanique	13
1.2	Les ondes internes	16
1.2.1	Physique d'un fluide stratifié	16
1.2.2	Théorie linéaire des ondes internes	17
1.2.3	Propagation de modes	19
1.2.4	Les ondes internes dans la nature	21
1.2.5	Les ondes internes comme source de mélange	24
1.3	Les ondes internes en laboratoire	26
1.3.1	Obtention d'une stratification	26
1.3.2	Génération d'ondes internes	28
1.3.3	Observation des ondes internes	29
1.3.4	Outils d'analyse	32
2	Stratification soumise à un forçage long : formation d'escalier	34
2.1	Effet du nombre de Richardson Ri	35
2.2	Dispositif expérimental	37
2.2.1	Étude de l'efficacité du générateur	37
2.2.2	Description du dispositif expérimental	39
2.3	Mesure du nombre de Richardson	41
2.4	Double diffusion	43
2.4.1	Le phénomène physique	43
2.4.2	Le Schlieren Synthétique pour suivre le phénomène	46
2.4.3	Intrusion par chauffage latéral	47
2.4.4	Propagation d'ondes internes : confinement des couches mélangées	49
3	Rétro-action de la stratification sur les ondes internes	53
3.1	Modification des modes	53
3.1.1	D'un mode 1 à deux mode 1	54
3.1.2	En présence de double-diffusion : guide d'onde	56
3.2	Sélection des ondes filles	57
3.3	Zoologie des ondes filles	59
4	Génération d'onde super-harmonique par interaction résonante de mode	62
4.1	Introduction	63
4.2	Experiment and data processing	65
4.3	Theory	67
4.3.1	Constant-amplitude solutions	67
4.3.2	Amplitude evolution equations	68

4.4	Results	70
4.4.1	Superharmonic wave generation (case-1 resonant triad)	70
4.4.2	Forcing at resonant frequency (case-1 resonant triad)	72
4.4.3	Forcing at off-resonant frequencies (case-1 resonant triad)	74
4.4.4	Effect of forcing amplitude at resonance (case-1 resonant triad)	75
4.4.5	Case-2 resonant triad	77
4.5	Discussion	78
4.5.1	Slow temporal evolution	78
4.5.2	Viscous effects	79
4.6	Conclusions	81
	Conclusion	82

Chapitre 1

Introduction générale

Sommaire

1.1 Circulation thermohaline et mélange	8
1.1.1 Un peu d'histoire	8
1.1.2 Un circuit fermé	10
1.1.3 Le mélange océanique	13
1.2 Les ondes internes	16
1.2.1 Physique d'un fluide stratifié	16
1.2.2 Théorie linéaire des ondes internes	17
1.2.3 Propagation de modes	19
1.2.4 Les ondes internes dans la nature	21
1.2.5 Les ondes internes comme source de mélange	24
1.3 Les ondes internes en laboratoire	26
1.3.1 Obtention d'une stratification	26
1.3.2 Génération d'ondes internes	28
1.3.3 Observation des ondes internes	29
1.3.4 Outils d'analyse	32

1.1 Circulation thermohaline et mélange

1.1.1 Un peu d'histoire

La Terre, planète bleue. Si elle porte si joliment ce nom, c'est que l'eau des océans et des mers recouvre 71% de sa surface. Cette très mince pellicule d'eau salée - le rapport d'aspect est le même que celui d'une feuille de papier standard - a pendant longtemps été la seule frontière, le seul obstacle infranchissable, dans la découverte des terres émergées par Homo Sapiens, *l'homme moderne*. Nomade de son état, explorateur parmi les explorateurs, il avait déjà découvert une grande surface du globe avant de pouvoir s'aventurer sur la mer : la navigation demande un développement des techniques que seules les expériences répétées ainsi qu'une conception du monde élaborée ont permis d'acquérir.

Avec le développement des techniques maritimes, l'océan n'est plus un espace infranchissable et l'homme, de bon marcheur, est devenu bon marin. Les mers sont alors parcourues de plus en plus souvent, tout à la fois comme un espace d'aventure, de commerce et de guerres : de la route de la Soie aux pétroliers dans le détroit d'Ormuz, en passant par le commerce d'esclaves et le tour du monde par Magellan, les mers ne s'ennuient jamais des hommes.

Des scientifiques ont également fait leur petit bout de chemin : la mer et ses entrailles, c'est tout un monde à découvrir, à caractériser, à mettre en équations. Les marins-explorateurs sont

nombreux à la surface du globe, mais le premier que l'on puisse probablement qualifier de scientifique est Pythéas. Né à Massalia - aujourd'hui Marseille, mais c'est une colonie grecque fondée par les Phocéens à cette période - aux environs de 350 avant J.-C, il a en effet cherché à accumuler des données d'observation, à les analyser et à en déduire des lois générales. Il a par ailleurs laissé un compte-rendu manuscrit de ses pérégrinations, dans un ouvrage intitulé *De l'Océan*, aujourd'hui disparu mais dont on trouve trace dans les écrits de ses contemporains (Aujac, 1972).

L'ouvrage de Pythéas restera le seul du genre pendant près de 2000 ans (Toulmond, 2006), les seules observations de la mer étant faites par des scientifiques uniquement sur la base des animaux ramenés par l'activité de pêche. Il faut attendre le 18^{ème} siècle pour qu'un érudit soit embarqué lors d'une expédition sans pour autant être marin, à l'instar de Luigi de Ferdinando, comte de Marsigli, le premier à élaborer une étude des fonds marins, de la température de l'eau, des mouvements de la mer et des animaux habitant dans le golfe du Lion, observations qu'il publiera à Venise en 1711.

La deuxième moitié du 18^{ème} est marquée par une volonté concurrente de l'Angleterre et de la France d'élargir leurs emprises sur les océans et sur les terres encore non colonisées. Dans ce contexte, l'exploration marine est soutenue par les États.

En France par exemple, le premier tour du monde est organisé par la Marine royale, sous le commandement de Louis Antoine de Bougainville (Kury, 1998). À bord du bateau, Véron, astronome, et Commerson, botaniste. Cependant, les traces de ces expéditions parlent essentiellement des observations réalisées à chaque escale : les terres où l'équipage a posé le pied, les ressources ou minéraux susceptibles d'exploitation. On n'y trouve que peu de choses à proprement parler sur les océans. Dans les années qui suivirent, il y eut également l'expédition dirigée par La Pérouse, embarquant à son bord pas moins de 16 scientifiques en août 1785, dont les limites en termes de connaissance des océans sont les mêmes que pour l'expédition de Bougainville. La première expédition française qui se distingue sur cet aspect est finalement celle conduite par Nicolas Baudin, qui a levé l'ancre fin 1800, embarqué 15 jeunes scientifiques et rapporté des informations sur les planctons et une classification des méduses.

C'est néanmoins du côté anglais que les plus célèbres expéditions furent menées, en particulier sous l'égide de James Cook : au cours de 3 voyages, entre 1769 et 1780, il accumula une quantité impressionnante de données concernant les vents et les grands courants océaniques de surface. Plus tard, fin 1831, une autre expédition est connue, peut-être moins du nom de son capitaine, Robert FitzRoy, ou du nom du navire, le H.M.S Beagle, mais parce qu'à son bord se trouve un jeune « homme de compagnie » qui se trouve en réalité être Charles-Robert Darwin. S'il est connu pour son exposé le plus célèbre, publié en 1859 sous le titre *On the Origin of Species*, il a également fait de pertinentes observations sur les récifs coralliens publiées dès 1842.

Il est à noter que des « terriens » s'intéressent également de plus en plus à la faune marine, au rang desquels Jeanne Villepreux-Power qui invente l'aquarium dans les années 1830 pour ses études sur l'argonaute (Debaz, 2012).

On constate néanmoins qu'aucune expédition jusqu'alors n'est à proprement une expédition dédiée à l'étude des mers et de ses fonds. Seulement, les précédentes expéditions ont fini par rendre compte de manière assez précise du contour des côtes : l'intérêt qui était porté aux dessins des cartes va donc se reporter petit à petit sur les océans à proprement parler. Qui plus est, la connaissance des fonds marins devient un enjeu majeur pour l'installation du télégraphe électrique : les premiers essais entre Calais et Douvres, ont lieu autour de 1850, en particulier parce que les industries Siemens viennent d'inventer un moyen d'isoler les câbles avec une résine. Ils se soldent néanmoins par des échecs : la topographie et les courants marins étant méconnus, les câbles finissent généralement par se briser en différents endroits.

C'est donc seulement vers 1850 que l'océan prend sa place comme objet d'étude. Une rupture

de câble est coûteuse, tant en temps qu'en finances, il devient alors essentiel de connaître les fonds marins. Ce contexte voit ainsi naître le premier navire océanographique, le H.M.S Challenger (fig. 1.1), qui a sillonné les mers du monde entier entre 1872 et 1876. La publication des résultats de cette expédition constitue un jalon dans les données scientifiques.



Figure 1.1: À gauche, les H.M.S Challenger, premier navire d'exploration océanographique qui a parcouru les mers de 1872 à 1876 (extrait du rapport de l'expédition).

À droite, le H.M.S Agamemnon, posant un câble télégraphique en 1858 (*H.M.S. Agamemnon Laying the Atlantic Telegraph Cable in 1858 : a Whale Crosses the Line*, Robert Charles Dudley, The MET, New York). Tous deux sont d'anciens navires de guerre.

Dès lors, les expéditions océanographiques, à l'initiative de différents pays, vont se succéder et la discipline d'océanographe est peu à peu reconnue comme telle : le terme apparaît par exemple en France dans les années 1880. Le but n'est pas ici d'en faire un historique exhaustif, sinon de souligner que, depuis 1850 l'exploration scientifique des mers et océans a pris un tournant, et ne cesse d'intéresser tant les industriels que les académiciens - on peut citer les projets Tara Océan (Pesant *et al.*, 2015), dans le cadre duquel plus d'une dizaine d'expéditions ont été réalisées sur tous les océans du globe depuis 2006, ou encore la conception en cours du Polar Pod, une plateforme imaginée pour se laisser dériver autour de l'Antarctique dans les cinquantièmes hurlants.

Il y a ainsi mille et une manières de s'intéresser aux océans, que ce soit en analysant leurs faunes, leurs flores, la géologie de leurs fonds et leurs topographies ou la physique de leurs écoulements.

1.1.2 Un circuit fermé

Certains courants marins tiennent le haut du pavé en termes de notoriété, la première marche étant probablement décernée au Gulf Stream, ce courant chaud et intense se déplaçant à une vitesse moyenne de 2 m/s le long de la côte Est des États-Unis d'Amérique. Mais en réalité ce sont toutes les eaux des océans qui sont en perpétuel mouvement, aussi bien en surface (fig. 1.2) qu'en profondeur.

Si les vitesses horizontales peuvent être très fortes sur le globe, les mouvements verticaux eux sont bien moindres du fait de la faible épaisseur de l'océan (de l'ordre de 5 km) comparée à son étendue (des milliers de kilomètres). Par ailleurs, l'océan n'est pas un milieu homogène. En particulier, la température et la salinité changent avec la profondeur et en différents points du globe. La densité varie donc en différents endroits puisqu'on peut la relier à la salinité et à la température *via* l'équation d'état approchée

$$\rho - \rho_0 \simeq \beta_T(T - T_0) + \beta_S(S - S_0) + \beta_p p \quad (1.1)$$

avec $\beta_T \sim -0.15 \text{ kg/m}^3/\text{K}$ le coefficient d'expansion thermique à T_0 , $\beta_S \sim 0.78 \text{ kg/m}^3$ le

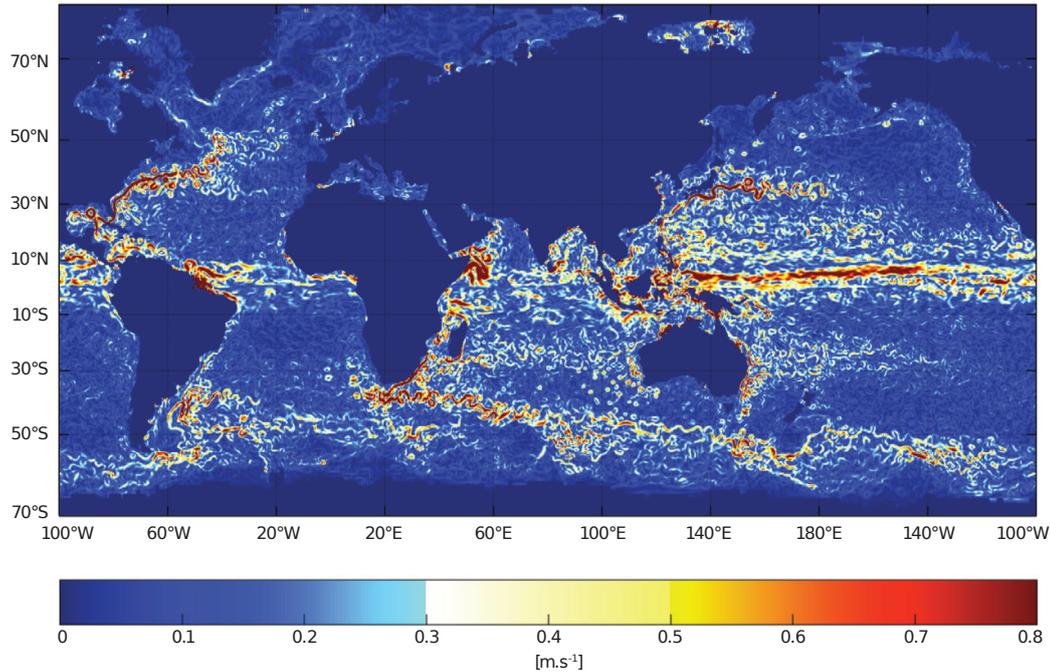


Figure 1.2: Carte d'intensité des courants océaniques de surface mesurés par altimétrie satellitaire (extrait de Fieux *et al.* (2017)) : l'océan n'est jamais au repos.

coefficient de contraction haline à T_0 et $\beta_p \sim 4.5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^3/\text{dbar}^1$ le coefficient de compressibilité pour $T_0 = 10^\circ$, $S_0 = 35$, $p = p_0 = 1 \text{ atm}$ et $\rho_0 = 1026.97 \text{ kg/m}^3$ (toutes les valeurs sont extraites de Fieux (2010)).

En plus du gradient de densité vertical, on observe des gradients de densité horizontaux. Longtemps, ce sont ces gradients de densité horizontaux qui étaient vus comme la source de la circulation marine : la densité étant fonction de la température et de la salinité, on parlait ainsi de *circulation thermohaline* pour nommer la circulation océanique. Dans les faits, il n'est pas si aisé de savoir si ce sont ces gradients de densité qui sont la source du mouvement océanique ou l'inverse. La littérature se demande ainsi *What is the thermohaline circulation ?*. Dans cet article, Wunsch (2002) relève les multiples significations qui peuvent se trouver derrière ce mot, en dénombre pas moins de 7 et fait le choix de définir le mouvement des océans comme celui des masses d'eau. Les flux de masse affectent les transports de toutes les autres quantités, comme la température, le sel, l'oxygène... Ainsi, l'appellation la plus appropriée pour la circulation des océans semble dorénavant être la *circulation méridienne de retournement* (*MOC* en anglais pour *Meridional Overturning Circulation*). La question est donc de comprendre ce qui met ces masses d'eau en mouvement.

En surface, les eaux des océans sont soumises au forçage des vents, dont l'impact direct est visible sur plusieurs centaines de mètres de longueur. Cela concerne de très grands courants comme le Gulf Stream ou encore le Courant Circumpolaire. Dans le fond des océans, la stratification est d'une telle stabilité qu'il est difficile de déterminer précisément si ce sont les gradients de densité, et donc de pression, qui sont à la source de la circulation océanique ou l'inverse. Par contre, il est une interaction qui impacte directement les grandes masses d'eau, c'est l'attraction gravitationnelle entre la Terre et la Lune, ainsi qu'entre la Terre et le Soleil : elle est à l'origine des marées, le deuxième moteur de la circulation océanique. La littérature semble marquer un pas et l'océan, d'abord vu comme une machine thermique, est maintenant regardé comme ces masses d'eau en mouvement sous l'effet des vents et des marées. Grossièrement, une vue de la circulation méridienne de retournement est celle d'une boîte qui est en

interaction avec l'atmosphère (Stommel, 1958), comme le montre la vue schématique donnée figure 1.3.

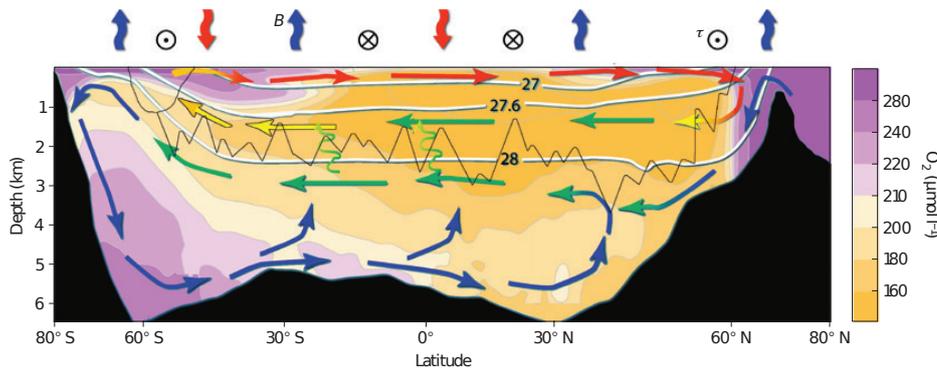


Figure 1.3: Représentation schématique de la circulation méridienne de retournement. Le champ en oxygène est ajouté à la circulation représentée par des flèches (de moins en moins denses du bleu au rouge). Dans le fond, les processus de mélange associés à la topographie induisent une remontée des eaux. Extrait de Marshall and Speer (2012).

Lorsqu'une particule fluide commence son périple à travers le globe, elle prend une bonne respiration : le voyage est en effet millénaire d'après les estimations au carbone 14 (Fieux, 2010). Celui-ci commence toujours en surface car c'est là que les masses d'eau se forment sous l'effet des échanges soutenus avec l'atmosphère : une évaporation intense ou une formation de glace rapide, comme en mer de Weddell ou en mer du Groenland, sont les deux phénomènes qui augmentent, localement, la salinité en surface. Cela n'est réalisé qu'en certains points très localisés, à chacun des pôles du globe. Si les deux pôles contribuent à former les eaux des océans, il est à noter que chaque pôle présente sa spécificité : du pôle Nord (mers polaires et mer du Labrador) naissent les eaux profondes, tandis que du pôle Sud (mers de Weddell et de Rooss) naissent des eaux plus denses encore, dites eaux de fond.

Les eaux de surface deviennent si denses qu'elles finissent par plonger, ce qui génère de grands mouvements de convection qui ventilent l'océan de subsurface. Après avoir plongé, ces eaux tapissent les fonds marins et constituent ce qu'on appelle les eaux profondes. Elles gardent très longtemps la trace de leur lieu de naissance, avec des valeurs en sel et température spécifiques, comme une carte d'identité. Mais au cours de leur trajet, ces caractéristiques changent à la faveur du mélange avec les eaux sous et sus-jacentes. Les masses d'eau remontent en certains endroits du globe, près de l'Antarctique, dans l'océan Indien ainsi que dans l'océan Pacifique. Elles sont transformées en surface puis acheminées à nouveau vers les zones de naissance, depuis lesquelles le cycle peut reprendre.

La première représentation de ce cycle est due à Broecker *et al.* (1991). Dans cette étude, une place particulière était donnée au Pacifique Nord puisque l'on pensait que la remontée des eaux se faisait principalement en son sein. Les études plus récentes donnent pourtant une place toute particulière au pôle Sud, puisqu'il s'avère qu'une grande partie de la remontée des eaux se fait autour de l'Antarctique (Toggweiler and Samuels, 1995; Schmitz Jr, 1996; Toggweiler and Samuels, 1998), une hypothèse déjà formulée par Sverdrup (1933). Une nouvelle représentation de la circulation méridienne de retournement a ainsi été proposée par Marshall and Speer (2012) qui soulignent davantage l'asymétrie entre les océans Atlantique, Pacifique et Indien, ainsi qu'entre l'hémisphère nord et sud en mettant en évidence le rôle majeur de l'Océan Austral (fig. 1.4).

Si l'on comprend assez bien la formation des masses d'eau aux pôles, appelée *downwelling* par emprunt à l'anglais, la raison de la remontée en surface de masses d'eau, appelée *upwelling*,

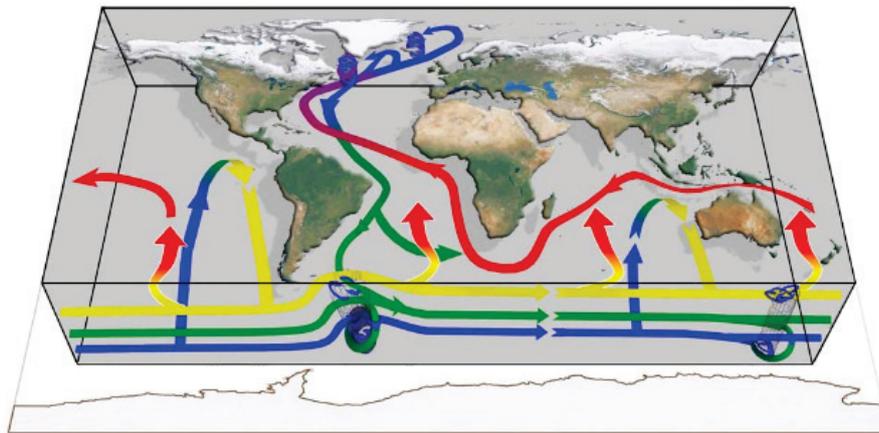


Figure 1.4: Représentation moyenne de la circulation méridienne de retournement. Les flèches indiquent les courants, du plus dense (bleu) au moins dense (rouge). Les zones convectives de formation d'eau sont aux pôles, à l'origine des flèches bleues. Les zones d'*upwelling* se font surtout dans l'Océan Austral (flèches jaune-rouge) : il correspond à un *upwelling* adiabatique, le long de surfaces d'isodensité principalement sous les effets des vents et des nombreux tourbillons qui sillonnent la mer dans cette zone. Extrait de Marshall and Speer (2012).

est encore un sujet très discuté.

Pour boucler la circulation, il a d'abord été supposé que l'eau dense remontait des abysses vers la surface en traversant la thermocline¹ (Munk, 1966; Munk and Wunsch, 1998a) : cela supposait un mélange intense qui n'est pas observé *in situ* (Toole *et al.*, 1997; Kunze *et al.*, 2006; Ledwell *et al.*, 2011).

En ce sens, les récentes observations menées dans l'Océan Austral permettent de lever ce paradoxe d'un mélange trop faible : le processus de remontée ne serait pas le même pour les eaux qui se situent à mi-profondeur que pour les eaux de fond. Les premières semblent remonter en longeant des surface d'isodensité inclinées (Marshall and Speer, 2012), ce qui est un processus adiabatique. Les secondes quant à elles, remonteraient à la surface grâce au mélange qui s'y opère.

1.1.3 Le mélange océanique

Grossièrement, un océan est constitué comme suit : en surface, une couche de surface de plusieurs dizaine de mètres homogénéisée par les vents, sous laquelle les eaux sont stratifiées en densité, les eaux les plus denses se situant au fond. La stratification des océans, très stable, cache en réalité une grande complexité : l'océan est par essence un milieu turbulent (Thorpe, 2005) et est donc le siège de mécanismes qui présentent une grande diversité tout à la fois dans les échelles spatiales et temporelles : cela va de la seconde au millier d'années comme du millimètre au millier de kilomètres. Comme il est impossible de rendre compte de tous ces processus par une simulation numérique, il est nécessaire de paramétrer les plus petites échelles, c'est-à-dire les représenter en termes d'effets globaux qu'il est ensuite possible de manipuler dans les modèles. Les modèles étant très sensibles à ces paramétrisations, il est par ailleurs crucial de comprendre le plus finement possible les phénomènes qui se cachent derrière ces paramétrisations.

La circulation méridienne de retournement est le lieu d'échanges d'énergie permanents. Munk and Wunsch (1998a) ont estimé qu'elle dépose 2 TW d'énergie par dissipation visqueuse. Cette

1. La thermocline est la couche qui sépare la couche homogène de surface, chaude, et les eaux froides. Elle est marquée par de forts gradients de température et de salinité.

perte mécanique en énergie potentielle doit être compensée pour garantir une stratification stable sur le globe. Parmi les événements qui perturbent la stratification, il y a ceux qui engendrent du mélange. Celui-ci permet de redistribuer les caractéristiques des eaux et influence tout le climat. Par ailleurs, il permet également de redistribuer les gaz, les nutriments, et contribue ainsi à l'équilibre de toute la biodiversité marine. Le mélange est aussi ce qui permet à l'océan de maintenir sa stratification : en son absence, la formation continue d'eaux froides et salées aux pôles finirait par imposer des profils de température et de sel uniformes, à l'exception de la couche en surface en interaction avec le soleil.

Une paramétrisation classique de l'advection turbulente de la masse volumique par la vitesse verticale est donnée par l'équation

$$\overline{v'_z \rho'} = -\kappa_t(z) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}, \quad (1.2)$$

en décomposant la vitesse verticale v_z et la masse volumique ρ chacune comme la somme de leur moyenne statistique, dénotée par une barre, à laquelle s'ajoute une perturbation : $v_z = \bar{v}_z + v'_z$ et $\rho = \bar{\rho} + \rho'$. Le coefficient κ_t est appelé coefficient de diffusion turbulente. Sa mesure *in situ* est compliquée : il est difficile de mesurer la corrélation entre les perturbations de vitesse verticale et de densité.

Cette paramétrisation est à rapprocher de la définition de mélange turbulent. Les couches de fluides de différentes densités peuvent avoir des mouvements adiabatiques, c'est-à-dire sans transfert thermique ni de matière, et réversibles. Mais un épisode turbulent peut ajouter à ce mouvement de forts cisaillement ainsi que des gradients locaux de densité importants : ils favorisent les phénomènes diffusifs par nature diabatiques et irréversibles dans l'océan stratifié, autrement dit, ils favorisent le mélange. Ces phénomènes sont donc catalysés par les processus advectifs aux échelles de la turbulence, ce qui est sous-tendu par l'équation (1.2).

Les zones d'*upwelling* doivent abriter des processus capables de faire monter le centre de masse des eaux. C'est effectivement ce qu'il se passe lors du processus de mélange. En effet, une cuve remplie initialement de 2 fluides tels que $\rho_1 < \rho_2$ et stratifiée stablement a une énergie potentielle de pesanteur initiale (fig. 1.5)

$$GPE_i : \int_{-h_2}^{h_1} \rho g z \, dz = \frac{\rho_1 g h_1^2}{2} - \frac{\rho_2 g h_2^2}{2}. \quad (1.3)$$

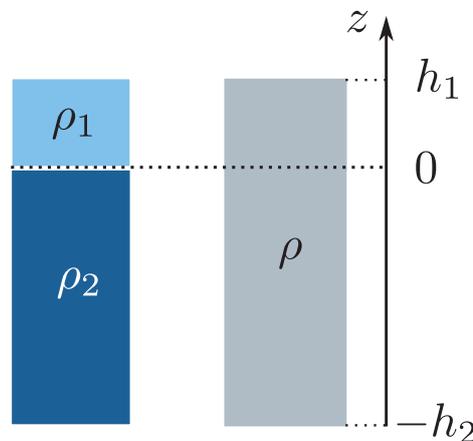


Figure 1.5: Avant mélange à gauche : la cuve est remplie de deux fluides tels que $\rho_1 < \rho_2$. Après mélange complet à droite : la cuve est remplie d'un fluide homogène.

Si cette cuve est complètement mélangée, le fluide est homogène de densité

$$\rho = \frac{1}{h_1 + h_2}(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2). \quad (1.4)$$

L'énergie potentielle finale vaut alors

$$GPE_f = \frac{\rho g}{2}(h_1 + h_2)(h_1 - h_2). \quad (1.5)$$

Le mélange a donc redistribué l'énergie potentielle et le centre de masse a bougé puisque

$$\Delta GPE = GPE_f - GPE_i = h_1 h_2 (\rho_2 - \rho_1) > 0. \quad (1.6)$$

Munk (1966) propose une approche unidimensionnelle valable en dessous de 1000 m de fond, où température, salinité et densité varient uniquement en fonction de la profondeur et où les vitesses horizontales ainsi que le mélange sont faibles. L'équilibre entre diffusion et advection est donné par

$$v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} - \kappa_t \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0. \quad (1.7)$$

À partir de mesures de profils en carbone 14 océanique, cette approche a permis la première estimation de la vitesse verticale et du coefficient de diffusivité : en supposant que la remontée des eaux est uniforme sur l'océan profond à haute latitude, l'*upwelling* serait caractérisé par $v_z \simeq 10^{-7}$ m/s et $\kappa_t \simeq 10^{-4}$ m²/s. La mesure de la vitesse est cohérente avec le débit observé pour les eaux de fond ($Q \simeq 25 \times 10^9$ kg/s). Il est à noter que cette valeur est supérieure au coefficient de diffusion du sel $\kappa_S \simeq 1.5 \times 10^{-9}$ m²/s et de la température $\kappa_T \simeq 1.4 \times 10^{-7}$ m²/s, ce qui souligne le rôle primordial du mélange turbulent dans les phénomènes diffusifs au sein des mouvements océaniques. En effet, les longueurs caractéristiques qui seraient mises en jeu avec des phénomènes de diffusion thermique sont de l'ordre du mètre, et de l'ordre du centimètre pour la diffusion moléculaire : ce ne sont pas du tout les bons ordres de grandeur de variation de la densité dans l'océan qui sont plutôt de l'ordre du kilomètre. L'interprétation la plus juste de κ_t est de le voir comme un paramètre représentant un processus de transfert de masse et de quantité de mouvement perpendiculaire aux isopycnes (Wunsch and Ferrari, 2004)² : un tel processus est qualifié de *diapycnal*.

Par ailleurs, le coefficient de diffusivité κ_t dépend de la profondeur. C'est par exemple ce qu'a montré la mesure de Polzin *et al.* (1997) qui représente le coefficient de diffusivité κ_t dans le bassin brésilien (fig. 1.6, à gauche). Cette mesure souligne également que κ_t est plus fort à proximité des topographies escarpées, ce qui laisse à penser qu'il dépend aussi fortement du point du globe. Cela est confirmé par la collection de mesures de κ_t regroupées par Waterhouse *et al.* (2014) (fig. 1.6, à droite).

Munk and Wunsch (1998a) proposent une autre évolution théorique pour κ_t qui soit dépendante de la profondeur. Le résultat qu'ils obtiennent n'est pas si différent de celui de 1966, avec une valeur de l'ordre de 10^{-4} m²/s en dessous de 1000 m. Différentes mesures de κ_t sont réalisées sur le globe, toutes donnant des valeurs de diffusivité allant de 10^{-5} à 10^{-4} m²/s : la circulation océanique globale profonde demande, pour se maintenir, un apport faible de mélange abyssal. Parmi les sources possibles du mélange se trouvent les vents, les marées et les ondes internes. Ces dernières font l'objet de la section suivante.

2. Les isopycnes sont quasiment horizontales dans le cœur des océans, loin des topographies.

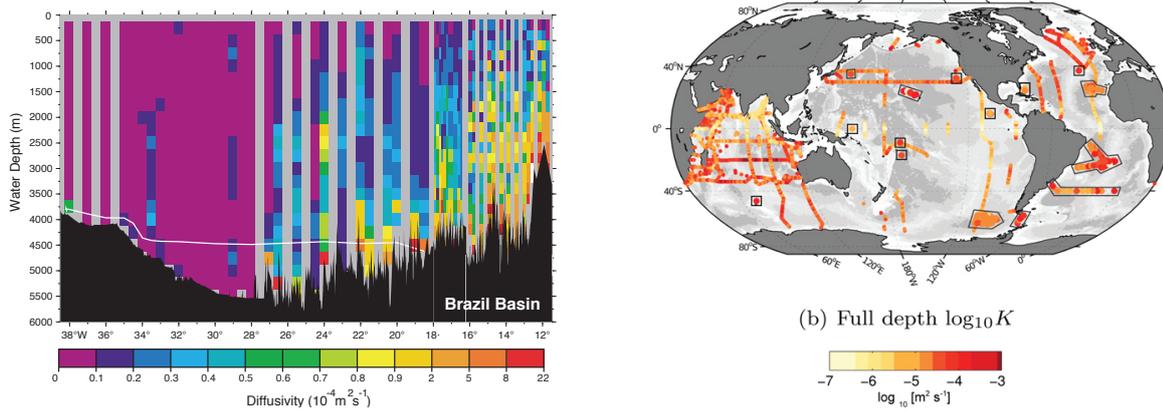


Figure 1.6: À gauche, mesure du coefficient de diffusivité turbulente κ_t dans le bassin brésilien. Extrait de Polzin *et al.* (1997). À droite, une collection des valeurs de κ_t mesurées à travers le globe en dessous de 1000 m de fond. Extrait de Waterhouse *et al.* (2014).

1.2 Les ondes internes

1.2.1 Physique d'un fluide stratifié

Un fluide stratifié est un fluide dont la densité est inhomogène selon l'axe vertical : dans le cas océanique, elle varie avec la profondeur. Une stratification est stable si la densité augmente avec la profondeur. L'équilibre mécanique à une profondeur z donnée est décrit par la loi hydrostatique, qui traduit la compétition entre les forces de pression et de pesanteur

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\bar{\rho}(z)g, \quad (1.8)$$

où p est la pression, z la profondeur donnée par un axe (Oz) vertical ascendant, $\bar{\rho}$ la densité du fluide à l'équilibre et g l'accélération de la gravité.

Pour ce qui est de la dynamique, une particule fluide de masse volumique ρ_p située en z est soumise à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = \bar{\rho}(z)g\vec{e}_z$ ainsi qu'à la force volumique de pesanteur, donnée par $-\rho_p g\vec{e}_z$. La résultante \vec{R} de ces deux forces, appelée flottabilité, est donc

$$\vec{R} = (\bar{\rho}(z) - \rho_p)g\vec{e}_z. \quad (1.9)$$

Ainsi, si l'on perturbe une particule fluide, la forçant par exemple à s'élever par rapport à sa position d'équilibre dans une stratification stable, elle va garder sa densité mais va être entourée d'un fluide moins dense et va donc retomber. L'inertie du mouvement l'empêche de s'arrêter à sa position d'équilibre, qu'elle dépasse, et se retrouve plus bas, entourée d'un fluide cette fois plus dense : elle va reprendre une ascension. Cela donne une idée de l'oscillation qui peut être mise en équation.

Supposons pour cela que le fluide soit stratifié et stable et qu'une particule de fluide à sa position d'équilibre z_p , telle que $\rho_p = \rho(z_p)$ soit éloignée de celle-ci de δz , le principe fondamental de la dynamique donne

$$\bar{\rho}(z_p)\frac{d^2\delta z}{dt^2} = (\bar{\rho}(z_p + \delta z) - \bar{\rho}(z_p))g \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = \frac{g}{\bar{\rho}(z_p + \delta z)} \frac{\partial \bar{\rho}(z_p)}{\partial z} \delta z \quad (1.11)$$

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = -N^2(z_p)\delta z. \quad (1.12)$$

Cette équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique : chaque particule va donc osciller, du fait de la force de rappel \vec{R} , autour de sa position d'équilibre à la pulsation $N(z_p)$ définie par

$$N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\bar{\rho}(z)} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}}, \quad (1.13)$$

qui est bien réelle dans le cadre d'un fluide stratifié stable, puisque $\partial_z \bar{\rho} < 0$. Cette pulsation, caractéristique du milieu, est appelée pulsation de flottabilité ou pulsation de Brunt-Väisälä : un fluide homogène est caractérisé par $N = 0$ rad/s, tandis que plus le milieu est stratifié, plus N est grand et plus la période d'oscillation $T = 2\pi/N$ est courte.

Ainsi, les mouvements d'oscillation peuvent gagner les particules de fluide et une onde peut se propager dans le milieu : on parle d'ondes internes, par opposition aux ondes de surface. Si le milieu est excité à la pulsation des oscillateurs N , chaque particule de fluide va donc suivre un mouvement vertical à cette pulsation. Par contre, si la pulsation d'excitation est plus faible que N , les particules ne peuvent pas simplement suivre un trajet vertical : elles vont devoir osciller avec un certain angle par rapport à la verticale, ce qui a pour effet de diminuer la pulsation de l'oscillateur de sorte à ce qu'il corresponde à celle de l'excitation. Cela donne une idée des propriétés surprenantes des ondes internes que nous allons maintenant détailler.

1.2.2 Théorie linéaire des ondes internes

Pour dégager les principales propriétés des ondes internes, considérons un fluide incompressible, stratifié stablement selon l'axe z vertical ascendant. La pulsation de flottabilité est notée N , supposée uniforme et constante. La densité $\rho(z, t)$ en chaque point est décomposée en deux termes. Le premier représente la stratification moyenne dépendant uniquement de z tandis que le second dénote les fluctuations de densité autour de cette valeur moyenne, de sorte que $\rho(z, t) = \bar{\rho}(z) + \rho'(z, t)$. Par ailleurs, la densité moyenne sur toute la stratification est notée ρ_0 . L'équation de Navier-Stokes pour un tel fluide est donnée par

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v}, \quad (1.14)$$

la conservation de la masse par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = \kappa \Delta \rho \quad (1.15)$$

et l'incompressibilité se traduit par

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.16)$$

où $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ est le vecteur vitesse du fluide, ν est la viscosité cinématique du fluide et κ le coefficient de diffusion massique de l'agent stratifiant.

En géophysique, une approximation régulièrement opérée est celle de Boussinesq, qui consiste à considérer $\bar{\rho}(z) \simeq \rho_0$ et à considérer de faibles fluctuations, $\rho' \ll \bar{\rho}$. Avec ces hypothèses, les fluctuations de densité ρ' peuvent être négligées dans tous les termes des équations (1.14) à (1.16) sauf dans celui de flottabilité. C'est une approximation tout à fait recevable dans le cadre de nos expériences, où les densités avoisinent les 1000 g/L et l'écart de densité entre le haut et le bas de la cuve vaut $\rho_{\max} - \rho_{\min} \simeq 30$ g/L. Les équations ci-dessus deviennent alors

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{\rho'}{\rho_0} \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \bar{\rho} = \kappa \Delta \rho' \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.19)$$

Supposer l'écoulement bidimensionnel dans le plan (xOz) permet par ailleurs d'introduire la fonction de courant ψ telle que $\partial_x \psi = -v_z$ et $\partial_z \psi = v_x$ pour remplir la condition d'incompressibilité de l'écoulement. Les équations (1.14) et (1.15) se réécrivent alors

$$\partial_{tz} \psi + J(\partial_z \psi, \psi) = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x p + \nu \partial_z \Delta \psi \quad (1.20)$$

$$\partial_{tx} \psi + J(\partial_x \psi, \psi) = \frac{\rho'}{\rho_0} g + \frac{1}{\rho_0} \partial_z p + \nu \partial_x \Delta \psi \quad (1.21)$$

$$\partial_t \rho' + J(\rho', \psi) = \frac{d\bar{\rho}}{dz} \partial_x \psi + \kappa \Delta \rho', \quad (1.22)$$

où J est un jacobien de définition $J(f, g) = \partial_x f \partial_z g - \partial_z f \partial_x g$.

En réalisant l'opération $\partial_z(1.20) + \partial_x(1.21)$, la pression peut être éliminée du jeu d'équation pour aboutir à

$$\partial_t(\Delta \psi) + J(\Delta \psi, \psi) - \nu \Delta(\Delta \psi) = \frac{g}{\rho_0} \partial_x \rho' \quad (1.23)$$

$$\partial_t \rho' + J(\rho', \psi) - \kappa \Delta \rho' = -N^2 \frac{\rho_0}{g} \partial_x \psi. \quad (1.24)$$

Dans le cadre de l'approximation linéaire, le système se simplifie comme

$$\partial_t(\Delta \psi) - \nu \Delta(\Delta \psi) = \frac{g}{\rho_0} \partial_x \rho' \quad (1.25)$$

$$\partial_t \rho' - \kappa \Delta \rho' = -N^2 \frac{\rho_0}{g} \partial_x \psi. \quad (1.26)$$

En cherchant des solutions de type ondes planes, c'est-à-dire $\psi = \psi_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ et $\rho' = \rho_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, avec le vecteur d'onde $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_z \vec{e}_z$ de norme k , le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} -k^2(i\omega + \nu k^2) & i\frac{g}{\rho_0} k_x \\ iN^2 \frac{\rho_0}{g} k_x & i\omega + \kappa k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \rho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Cette équation possède des solutions non triviales si le déterminant de la matrice est nul, ce qui donne la relation de dispersion

$$k^2(i\omega + \nu k^2)(i\omega + \kappa k^2) + N^2 k_x^2 = 0. \quad (1.28)$$

Cas d'un fluide parfait Un fluide parfait est un fluide au sein duquel les phénomènes dissipatifs, comme la diffusion et la viscosité, sont négligés. L'équation de propagation peut alors se résumer à

$$\frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial t^2} + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.29)$$

et la relation de dispersion se simplifie comme

$$\left(\frac{\omega}{N}\right)^2 = \frac{k_x^2}{k^2}. \quad (1.30)$$

En introduisant θ comme l'angle entre la verticale et le vecteur d'onde, cette relation de dispersion peut encore se réécrire

$$\frac{\omega}{N} = \pm \sin \theta. \quad (1.31)$$

Il s'agit là de l'une des caractéristiques principales des ondes internes : un objet oscillant à la fréquence ω est susceptible de générer des ondes dans 4 directions données par les valeurs de θ solutions de (1.31). Autrement dit, la fréquence d'excitation détermine la direction de propagation des ondes dans le milieu : les 4 faisceaux sont visibles sur la figure (1.7). Par ailleurs, pour $\omega > N$, cette équation n'a pas de solution : les ondes ne se propagent pas dans le milieu, elles sont alors évanescentes.

Il est possible d'exprimer les vitesses de groupe et de phase à partir de la relation de dispersion (1.31) comme

$$\vec{c}_\phi = \frac{\omega}{k^2} \vec{k} = N \frac{k_x}{k^3} \vec{k} \quad (1.32)$$

$$\vec{c}_g = \text{sign}(k_x) N \frac{k_z}{k^3} (k_z \vec{e}_x - k_x \vec{e}_z). \quad (1.33)$$

avec $\text{sign}(k_x) = 1$ si $k_x > 0$ et -1 sinon.

On voit ici se dessiner deux propriétés intéressantes des ondes internes : les vitesses de groupe³ et de phase sont perpendiculaires et leurs composantes verticales sont de signe opposé (fig. 1.7).

Pour que cela soit plus visible, on définit les vecteurs unitaires $\vec{e}_k = \vec{k}/k$ et $\vec{e}_{\perp k}$ tels que $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_{\perp k} = 0$ et $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_z$ et $\vec{e}_{\perp k} \cdot \vec{e}_z$ soient de signe opposé. Les vitesses de phase et de groupe précédemment calculées deviennent alors

$$\vec{c}_\phi = \frac{N}{k} \sin \theta \vec{e}_k \quad (1.34)$$

$$\vec{c}_g = \frac{N}{k} \cos \theta \vec{e}_{\perp k}. \quad (1.35)$$

On remarque qu'à θ fixé, ces deux vitesses sont proportionnelles à la longueur d'onde. Les grandes propriétés des ondes internes ont été dégagées dans ce chapitre à partir de l'étude linéaire d'ondes planes. Néanmoins, les travaux à l'étude dans cette thèse s'intéressent surtout à des forçages par mode verticaux.

1.2.3 Propagation de modes

La propagation d'ondes planes suppose que le fluide considéré est d'extension infinie, ce qui est loin d'être le cas dans les eaux des océans, sans parler de nos cuves expérimentales. En effet, l'océan est une couche d'eau très mince et donc confinée verticalement. Il est ainsi pertinent de s'intéresser à la propagation horizontale de modes verticaux que l'on cherche sous la forme

$$\psi(x, z, t) = \psi_0 f(z) e^{i\omega t - ik_x x} \quad (1.36)$$

3. La vitesse de groupe typique dans l'océan est de l'ordre de 1 cm s^{-1} (Thorpe, 2018).

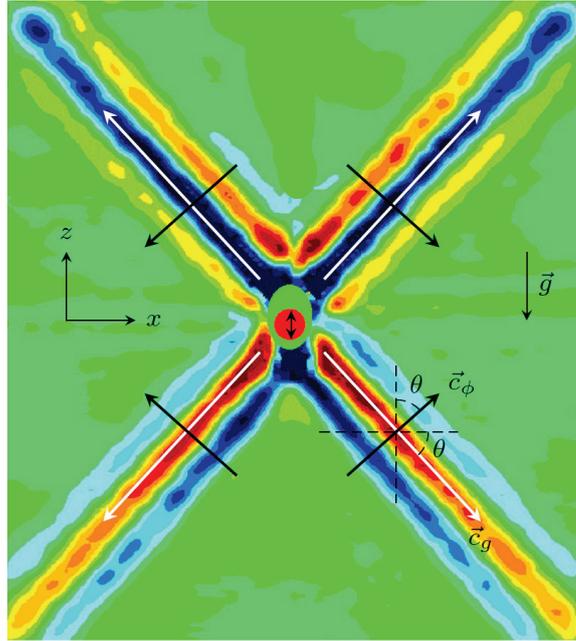


Figure 1.7: Visualisation des quatre faisceaux engendrés par l'oscillation d'un cylindre, en rouge au centre de l'image, dans un fluide stratifié. Les flèches noires indiquent les vitesses de phase, alignées avec \vec{e}_k et les flèches blanches les vitesses de groupe, alignées avec $\vec{e}_{\perp k}$. Figure extraite de Brouzet (2016), réalisée par E.Ermanuyk à partir d'une expérience.

pour avoir une onde stationnaire suivant la verticale et propagative dans la direction horizontale. Dans le cadre des fluides parfaits, nous avons vu que l'équation en termes de fonction de courant s'écrit

$$\frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial t^2} + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0. \quad (1.37)$$

Si l'on injecte le mode comme défini en (1.36) dans cette équation de propagation, on obtient

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + k_x^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) f(z) = 0. \quad (1.38)$$

Pour la simplicité du calcul, supposons N constant, ce qui n'était pas un prérequis pour obtenir l'équation précédente. La dérivée seconde de f impose d'avoir deux conditions aux bords pour pouvoir résoudre (1.38). Celles-ci sont données par le fait que le fluide ne peut pas franchir les bords : la fonction de courant doit donc s'y annuler, soit $f(0) = f(h) = 0$, où h dénote la hauteur d'eau. Les solutions de (1.38) sont alors

$$f_p(z) \propto \sin \left(p\pi \frac{z}{h} \right) \quad (1.39)$$

où p est un entier. Le système étant linéaire, il est possible de sommer toutes les solutions, ce qui donne une fonction de courant de la forme

$$\psi(x, z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \sin(k_{z,p} z) e^{i\omega t - ik_{x,p} x} \quad (1.40)$$

où $k_{z,p} = p\pi/h$, $k_{x,p}$ est la composante horizontale du vecteur d'onde donnée par la relation de dispersion (1.31) et A_p des constantes. Un mode peut être vu comme la somme de deux ondes planes, dont les vecteurs d'onde ont la même composante suivant \vec{e}_x mais de signe opposé suivant \vec{e}_z : un mode est en quelque sorte une superposition guidée d'ondes planes.

Cette expression ne prend pas en compte la dissipation visqueuse. Celle-ci peut avoir lieu au sein de l'écoulement, en volume, ou dans les couches limites, en particulier le long des parois des cuves expérimentales. Une estimation de la dissipation en volume est possible en introduisant un facteur de correction $e^{-\alpha_p X}$ par lequel l'amplitude du mode p est multiplié, où α_p est défini par

$$\alpha_p = \frac{\nu p^3}{2\omega} \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left(\frac{N^2}{N^2 - \omega^2} \right)^2, \quad (1.41)$$

avec ν la viscosité cinématique, h la hauteur du fluide et X la distance de propagation adimensionnée (Echeverri *et al.*, 2009a). Ce facteur correctif représente l'atténuation spatiale de l'onde au cours de sa propagation selon x . Il est à noter que α_p dépend du mode de forçage puisque $\alpha_p \propto p^3$: plus le mode est élevé, plus la décroissance attendue est rapide.

Pour ce qui est de la dissipation aux parois, elle a été récemment mise en équation dans les travaux de Beckebanze *et al.* (2018) qui a estimé la perte d'énergie dans les couches limites. En s'appuyant sur ces travaux, Davis (2019) a pu raffiner le bilan énergétique d'attracteurs d'ondes internes de gravité dans une géométrie quasi 2D : en régime linéaire, 90 % de la dissipation totale a lieu dans les couches limites ; en régime non-linéaire, mettant en jeu de plus petites échelles, cette proportion est de 70 %.

1.2.4 Les ondes internes dans la nature

Dans les lacs

Les lacs peuvent ne pas être homogènes et présenter une structure interne propice à la propagation d'ondes internes. C'est le cas par exemple du lac Baïkal, situé dans la zone montagneuse du sud de la Sibérie. Il s'agit d'un des plus anciens et des plus profonds lacs du monde (600 kilomètres de long, 80 de large avec des fonds à plus de 1600 mètres...), ce qui le place comme la plus grande réserve d'eau douce de la planète (près de 20 % des ressources mondiales). Ce lac a également la particularité d'être stratifié en température, comme le montre la figure 1.8.

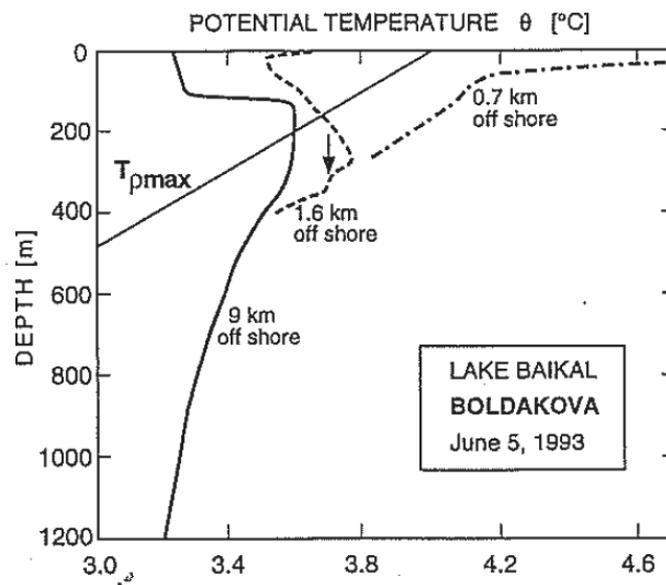


Figure 1.8: Profil vertical de température du lac Baïkal. À l'exception des 200 premiers mètres de fond, la température diminue avec la profondeur. Extrait de Imboden and Wüest (1995).

On peut définir une pulsation de flottabilité à l'instar de celle définie en présence d'un gradient

de densité : $N = \sqrt{(g/\theta)\partial_z\theta}$. À partir de 200 m de fond, la température diminue avec la profondeur : le lac présente donc toute une région où la stratification est stable, ce qui est propice à la propagation d'ondes internes, qui peuvent être source de mélange (Imboden and Wüest, 1995).

Dans l'atmosphère

L'atmosphère est également un milieu stratifié. Cependant, à la différence de l'eau, l'hypothèse d'incompressibilité n'est plus valide dans le cas de l'air. Le phénomène est donc différent de celui exposé plus haut : une particule d'air que l'on éloigne de sa position d'équilibre ne gardera pas la même densité, et pour pouvoir caractériser le mouvement à venir de cette particule, il faut donc pouvoir comparer sa densité à celle du fluide environnant. Il est d'usage de choisir une altitude de référence à laquelle les densités de la particule et du fluide environnant sont recalculées, en supposant que l'on fait effectuer à ces fluides un chemin adiabatique, c'est-à-dire sans phénomènes diffusifs. Ces densités calculées sont appelées densités potentielles. Un exemple de stratification de l'atmosphère est présentée en figure (1.9).

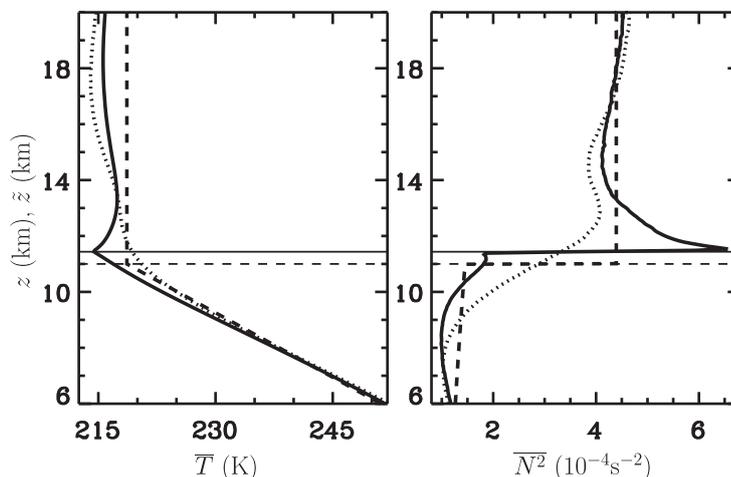


Figure 1.9: Profils de température (à gauche) et de pulsation de flottabilité (à droite) obtenus en moyennant 80 profils acquis dans différentes stations du territoire des États-Unis. Jusqu'à 12 km d'altitude, N est très faible : cela correspond à la troposphère, très peu stratifiée. Un saut brutal marque ensuite le passage à la stratosphère, où N est plus grand et l'atmosphère stratifiée. Extrait de Birner (2006).

Comme on le voit en partie sur cette figure, l'atmosphère peut être découpée en différentes couches aux caractéristiques différentes. Proche du sol, sur une épaisseur de 8 à 15 km, se trouve la troposphère qui est très peu stratifiée. Au-dessus de cette couche et séparée d'elle par la tropopause, qui est aux environs de 12 km sur la mesure présentée, se trouve la stratosphère, bien plus stratifiée et donc sujette à la propagation d'ondes internes.

Dans le cas de la troposphère, un vent suffisamment fort sur une topographie de l'ordre de quelques kilomètres peut remplir les conditions de forçage d'ondes internes. Les ondes induisent des mouvements verticaux et l'air humide se condense en altitude, soulignant le motif de l'onde (fig. 1.10 à gauche)

Dans l'océan

L'océan est un milieu stratifié à la fois en température et en sel, excepté dans la *couche homo-*

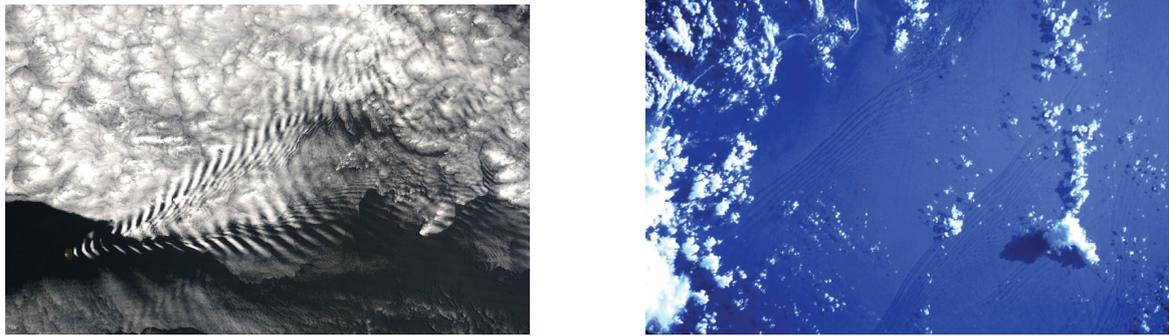


Figure 1.10: À gauche, des nuages soulignant la présence d'ondes internes atmosphériques au-dessus de l'île d'Amsterdam, dans le sud de l'Océan Indien (photographie de la NASA, 19 décembre 2005). À droite, des ondes internes océaniques dont la trace est visible en surface dans le sud de la mer de Chine (photographie prise lors de la mission STS-7, juin 1983).

gène juste sous la surface⁴. Des mesures *in situ* sont réalisées à l'aide de sondes permettant à la fois de mesurer la conductivité, afin de remonter à la salinité, et la température. Ces deux paramètres donnent accès au calcul de la densité ainsi que de la pulsation de flottabilité. Un exemple d'une telle mesure est présentée sur la figure 1.11.

La thermocline, évoquée en section 1.1.2 est ici visible : elle correspond à la forte transition thermique présente sur la première centaine de mètres sous la surface. Elle correspond généralement à la pycnocline, qui marque la séparation entre la couche homogène et les eaux abyssales. Dans la pycnocline, la pulsation de flottabilité est typiquement de l'ordre de 10^{-2} rad/s, tandis que dans les eaux plus profondes, elle est plutôt de 10^{-3} à 10^{-4} rad/s.

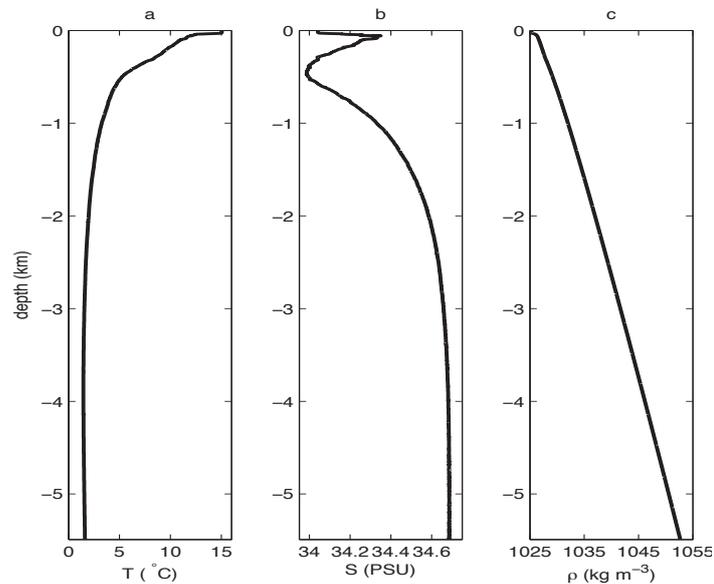


Figure 1.11: Mesure *in situ* des profils de température (a) et de salinité (b) dont est déduit celui de densité (c). La mesure est réalisée dans le Pacifique. Extrait de Gerkema and Zimmerman (2008).

Comme nous l'avons vu en 1.1.2, la circulation méridienne de retournement a deux principaux moteurs : les vents et les marées. Ceux-ci sont aussi les raisons de la présence d'ondes internes dans l'océan.

Les vents, lorsqu'ils sont suffisamment forts comme dans le cas d'ouragans, de tempêtes ou de cyclones, peuvent créer de fortes variations de pression à la surface et perturber la pycnocline (Price, 1983). Les ondes internes ainsi générées présentent des périodes fortement dépendantes

4. L'épaisseur de cette couche mélangée peut varier de quelques mètres à quelques centaines de mètres.

de la force de Coriolis, raison pour laquelle elles sont qualifiées d'ondes inertielles : leur période est d'environ une douzaine d'heures aux pôles et est bien plus grande en se rapprochant de l'équateur.

Par ailleurs les courants marins, les tourbillons et marées interagissent avec la topographie escarpée des fonds marins. Plutôt que d'avoir un objet oscillant dans un fluide stratifié immobile, c'est l'inverse qui se produit, mais le résultat est le même : des ondes internes peuvent être générées comme dans l'expérience de la figure (1.7). Lorsque le courant est celui d'une marée, il a la particularité d'être oscillant et les ondes internes qui naissent par ce mécanisme sont appelées marées internes. Elles sont principalement constituées de modes qui se propagent sur de longues distances. Une marée interne de mode 1 a par exemple été observée par altimétrie satellitaire à 1000 km de son origine au niveau de la dorsale d'Hawaï (Ray and Mitchum, 1996). L'observation satellite est possible puisque la propagation du mode fait varier l'altitude de surface de l'ordre de 5 cm (fig. 1.10 à droite). Celle-ci a été confirmée par la suite par des mesures *in situ* (Rainville and Pinkel, 2006).

1.2.5 Les ondes internes comme source de mélange

La diffusivité mesurée dans les océans par l'intermédiaire de κ_t peut être le résultat soit d'un mélange *mécanique* lié à la turbulence, soit d'un mélange lié à des effets *thermodynamique*, comme dans le cas de phénomènes double-diffusifs. Ces derniers ne sont pas abordés plus avant dans cette section.

Comme cela a été dit en section 1.1.3, ce sont 2 TW qui sont nécessaires pour maintenir la stratification par mélange diapycnal. Les eaux des océans représentant approximativement 1.4×10^{21} kg, cela revient en moyenne à 1.4 nW kg^{-1} (Thorpe, 2018). Cela semble faible, mais c'est néanmoins un apport en énergie nécessaire et crucial dans la circulation océanique. Cette énergie doit provenir du transfert d'énergie cinétique en énergie potentielle : les ondes internes sont de bonnes candidates pour effectuer ce transfert.

Les écoulements et phénomènes océaniques présentent une très large palette de longueurs caractéristiques. Le déferlement d'ondes internes est généralement considéré comme le processus dominant dans le transfert d'énergie vers de plus petites échelles, jusqu'à la turbulence, au mélange et à la dissipation (fig. 1.12). Le déferlement d'ondes internes doit ici être compris comme un processus turbulent par lequel les ondes perdent leur énergie par un mécanisme produisant du mélange diapycnal.

En omettant les phénomènes double-diffusifs, ce sont principalement les instabilités convectives et de cisaillement de Kelvin-Helmholtz qui sont à l'origine du mélange dans les océans. Les ondes internes peuvent être à l'origine de ces instabilités : l'instabilité convective peut avoir lieu si l'onde interne est suffisamment raide et provoque un retournement des isopycnes tandis que l'instabilité de Kelvin-Helmholtz est susceptible d'entrer en jeu dès lors que l'onde provoque un cisaillement suffisamment fort pour faire passer le nombre de Richardson, $Ri = (N/\partial_z v_x)^2$, sous le seuil théorique de 0.25. Cependant, ces scénarii ne sont visibles qu'à des interfaces nettes de densité : il n'y a aucune observation de déferlement dans un gradient de densité uniforme (Thorpe, 2018). La cascade énergétique vers la turbulence dépend de l'énergie des ondes internes : plus celle-ci est forte, plus elle va être capable de transférer de l'énergie aux petites échelles par effets non-linéaires. Mais il semblerait par ailleurs que cette cascade dépende également de la latitude : une onde interne qui transporte la même énergie engendre plus de mélange à basse qu'à haute latitude (Garrett, 2003; MacKinnon and Winters, 2005).

Les vents et les marées ont par ailleurs un rôle actif dans la naissance d'ondes internes. La

prise en compte de ces deux sources d'ondes internes sont primordiales dans la compréhension du mélange océanique. Des simulations numériques réalisées par Holloway and Proshutinsky (2007) ont par exemple montré que la prise en compte des marées internes a un impact considérable sur les prédictions de mélange par rapport aux modèles qui ne les prennent pas en compte.

Par ailleurs, les ondes internes peuvent être le siège d'instabilités. Parmi celles-ci, on trouve en particulier l'instabilité résonante triadique, qui sera dorénavant abrégée *TRI* : une onde mère suffisamment énergétique peut céder une partie de son énergie pour donner naissance à deux autres ondes, dites filles, à des fréquences et longueurs d'ondes différentes. La condition de résonance est donnée par :

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \quad (1.42)$$

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad (1.43)$$

où (ω_0, \vec{k}_0) représente la pulsation et le vecteur d'onde de l'onde mère, tandis que les indices 1 et 2 représentent les quantités caractéristiques des ondes filles. Les ondes filles, de fréquences plus faibles que l'onde mère, peuvent avoir des longueurs d'onde plus petites ou plus grandes que l'onde mère⁵.

Dans le cas d'un transfert vers des plus petites échelles spatiales, cette instabilité est une bonne candidate pour potentiellement favoriser le mélange. Elle a déjà été observée en contexte océanique (MacKinnon and Winters, 2005; Alford, 2008).

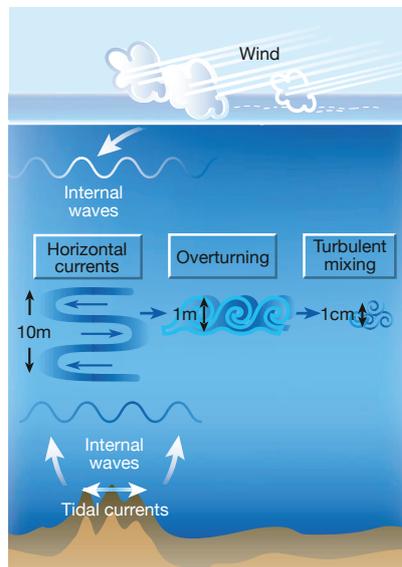


Figure 1.12: Les ondes générées en surface et dans le fond des océans se propagent, générant du mélange aux petites échelles. Des déferlements peuvent aussi avoir lieu du fait de la variation verticale des grands courants horizontaux : ceux-là sont de l'ordre du mètre. Extrait de Garrett (2003)

5. Lorsque l'onde mère est une onde plane en milieu non visqueux, les ondes filles ont des longueurs d'onde plus petites.

1.3 Les ondes internes en laboratoire

1.3.1 Obtention d'une stratification

Remplissage

La condition préalable pour pouvoir observer des ondes internes en laboratoire est de pouvoir créer un « océan miniature », avec un profil de densité piloté par les conditions de salinité et de température. Il est cependant difficile de contrôler expérimentalement un profil de température et d'en garantir la stabilité. Nous nous servons donc du sel comme agent stratifiant, qui en plus d'être plus facilement contrôlable que la température, présente également l'avantage de diffuser beaucoup plus lentement, ce qui garantit une stabilité plus longue de la stratification. Cela est particulièrement nécessaire lorsque plusieurs expériences sont réalisées avec le même remplissage.

La méthode de remplissage que nous avons utilisée dans ces expériences est celle dite *des deux bacs* (Oster and Yamamoto, 1963), illustrée en figure (1.13).

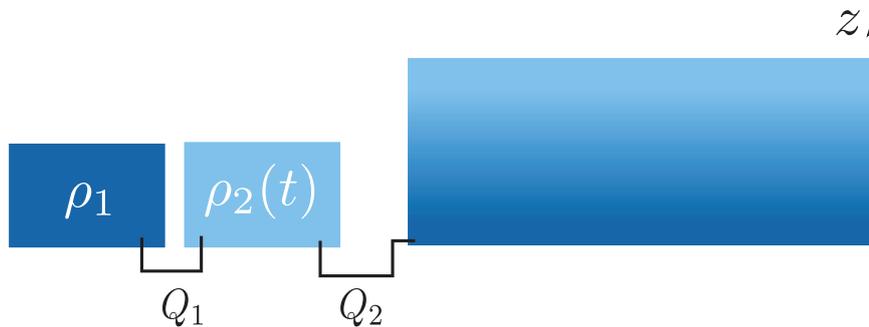


Figure 1.13: Représentation schématique de la méthode des deux bacs. Dans le cadre d'un remplissage par le bas, l'eau salée, de densité ρ_1 , se déverse au fur et à mesure dans le bac contenant initialement l'eau douce. Ce dernier voit donc sa densité augmenter avec le temps, elle est notée $\rho_2(t)$.

L'un des bacs contient de l'eau douce - ou de l'eau douce additionnée d'éthanol dans le cas d'expériences nécessitant une correspondance d'indice optique, tandis que le second contient l'eau salée. Tous les remplissages présentés dans le manuscrit sont dits *par le bas* : une pompe prélève du fluide dans le bac qui est initialement rempli d'eau douce pour l'amener dans la cuve expérimentale avec un débit Q_2 . Sa densité $\rho_2(t)$ évolue au cours du temps puisque les deux bacs sont reliés : par équilibre hydrostatique, l'eau salée de masse volumique ρ_1 va donc se déverser dans l'autre bac avec un débit Q_1 et l'eau initialement douce va devenir de plus en plus salée. Des petites pompes sont placées dans le bac de densité $\rho_1(t)$ pour garantir son homogénéité au cours du temps. La stratification obtenue est linéaire à la condition que $Q_1 = Q_2/2$, ce qui est vérifié si les deux bacs ont la même section.

À la fin du remplissage, qui dure 3 à 4 heures en fonction de la taille de la cuve d'expérience, nous avons donc un milieu stratifié que l'on caractérise par sa pulsation de flottabilité N . Nos stratifications sont toutes linéaires, N est donc constante sur toute la hauteur du remplissage. Pour s'assurer du bon déroulé du remplissage et connaître la valeur effective de N dans les expériences, une mesure de la stratification est réalisée avant toute génération d'ondes.

Mesure de la stratification

Une connaissance précise de la pulsation de flottabilité est nécessaire pour choisir les paramètres qui piloteront la propagation des ondes internes. À cet effet, nous utilisons une sonde conductimétrique PME (*Precision Measurement Engineering*). Celle-ci nous donne accès à deux tensions, V_σ et V_T , qui sont respectivement l'image de la conductivité et de la température dans le milieu.

Il est nécessaire d'étalonner la sonde pour faire le lien entre les tensions V_σ et V_T et la densité du fluide. Nous utilisons pour cela une série d'échantillons qui servent d'étalon. La densité de chacun de ces échantillons est mesurée grâce à un densimètre Anton Paar précis à 0.001 g/cm^3 . En plongeant la sonde dans ces échantillons, nous avons par ailleurs accès à V_σ et V_θ . L'étalonnage en température est réalisé une fois pour toute pour la sonde conductimétrique PME : V_θ donne directement accès à la température du fluide. En effet, le constructeur donne l'évolution de la température en fonction de la tension mesurée aux bornes de la sonde selon la loi suivante

$$\theta(V) = \frac{m}{\ln(V_\theta - V_{\text{offset}}) - b} - 273,15 \quad (1.44)$$

où θ est la température en degrés Celsius, V_θ la tension mesurée en volts aux bornes de la thermistance de la sonde, V_{offset} la tension à vide, c'est-à-dire la tension délivrée sans brancher la sonde.

Nous avons réalisé un étalonnage pour estimer avec plus de précision les coefficients m et b , qui peuvent légèrement dévier des valeurs données par le constructeur avec le vieillissement de la sonde. Un échantillon d'eau douce a été prélevé dont nous avons fait varier la température de $5.1 \text{ }^\circ\text{C}$ à $26.9 \text{ }^\circ\text{C}$, intervalle dans lequel se trouve la totalité de nos expériences (*cf.* fig. 1.14 à gauche).

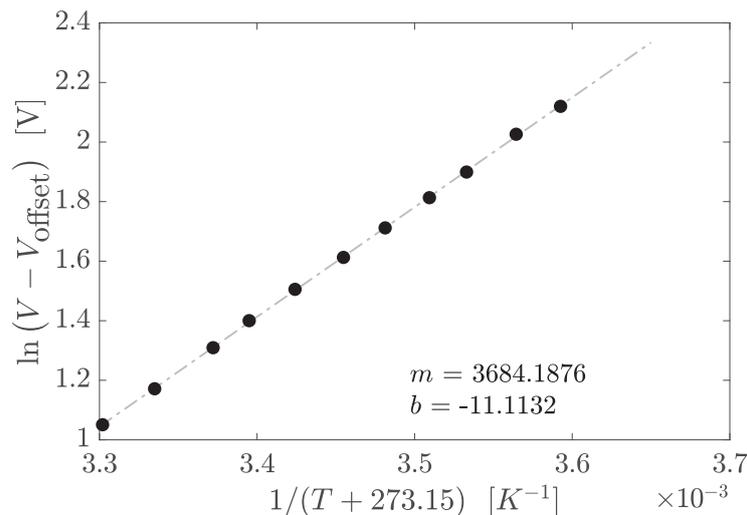


Figure 1.14: Mesure des coefficients de température par régression affine.

Ainsi, la température du fluide est connue directement par V_θ , et le lien entre conductivité et densité est réalisé sans équivoque par notre lot d'échantillons.

Un moteur pas à pas permet de descendre la sonde à vitesse constante sur toute la hauteur de la cuve, en prenant garde à ne pas aller trop vite pour ne pas perturber le milieu. La mesure est continue et réalisée lors de la descente de la sonde plutôt qu'à sa remontée pour éviter que la mesure ne soit perturbée par le sillage. L'hypothèse de travail d'une stratification linéaire est vérifiée avant chaque expérience (fig. 1.15 à droite), et la valeur de N utilisée est celle donnée par régression linéaire. Il est à noter qu'en surface, il est fréquent d'avoir une couche homogène, dite couche mélangée, typiquement de l'ordre du centimètre, liée aux interactions entre la surface libre et l'air ambiant. Par ailleurs, l'état de la stratification en surface et en fond de cuve peut aussi être impacté par les effets de remplissage ainsi que par la diffusion.

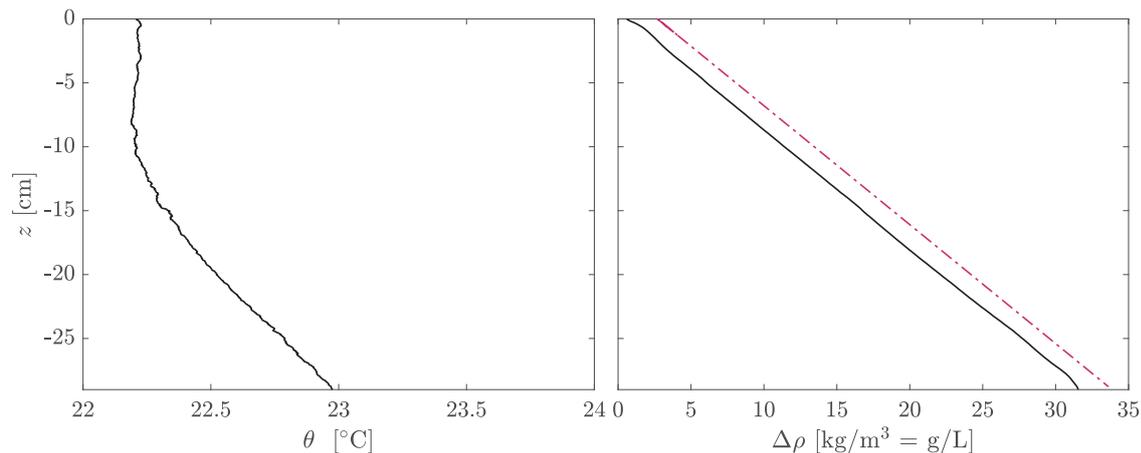


Figure 1.15: À gauche, le profil de température mesuré en fin de remplissage. Il est fréquent d’observer une variation de l’ordre de 1 degré Celsius du fait du remplissage. À droite, la mesure de la densité associée à ce profil de température, qui prend à la fois en compte les mesures de V_σ et V_θ ainsi que la régression linéaire en pointillés.

Par ailleurs, la mesure de la température sur la hauteur de la cuve nous permet de nous assurer que nous travaillons à température constante qui correspond idéalement à la température ambiante. Cela est globalement vérifié à $\pm 0.5^\circ\text{C}$, bien qu’un gradient vertical de température soit généralement observé en fin de chaque remplissage (fig. 1.15 à gauche). En effet, comme signalé dans la section (section 1.3.1), des petites pompes sont placées dans les bacs de remplissage pour garantir l’homogénéité. La contrepartie de l’usage de ces pompes est de voir la température de l’eau augmenter, et cela d’autant plus en fin de remplissage que les volumes sont faibles : en fin de remplissage par le bas, l’eau en fond de cuve est donc légèrement plus chaude que la température ambiante. La partie haute de la stratification, elle, a par ailleurs eu le temps de se thermaliser au cours du remplissage.

1.3.2 Génération d’ondes internes

Generator Oscillating As you Like (GOAL) à commande numérique

Jusqu’à présent, dans la plupart des expériences réalisées au sein de l’équipe, le générateur était composé de plaques entraînées par un arbre à cames (Gostiaux *et al.*, 2007a; Mercier *et al.*, 2010a). Toute modification des conditions de forçage nécessite, avec cette technique, une intervention directe sur le générateur. Cela présente l’inconvénient d’obliger à ôter le générateur de la cuve expérimentale et donc de vider cette dernière à chaque changement configurationnel, ce qui est très contraignant.

Pour y remédier, une nouvelle version de générateur d’ondes a ainsi été élaborée par les services d’ingénierie mécanique et électronique du laboratoire (fig. 1.16). Ce générateur est composé de 50 plaques mobiles en translation, chacune étant pilotée par un moteur indépendant ce qui permet d’imposer un profil particulier à l’une des extrémités de la cuve. En particulier, la forme en mode ou en onde plane, la fréquence de forçage ainsi que l’amplitude de celui-ci sont données comme consignes par ordinateur, sans avoir à toucher le générateur. Cela permet une très grande flexibilité sur le choix des paramètres et nous prémunit de devoir changer de stratification à chaque fois qu’ils sont modifiés.

La structure est réalisée en téflon de sorte à diminuer au maximum les frottements. Les 50 moteurs sont gérés par deux automates pilotés par Labview *via* un mode bus TCP/IP. Puis chaque moteur est piloté par son contrôleur *via* un bus CAN. La position initiale est repérée

par la technique de *homing* comme la position de référence : en fin d'expérience, le générateur peut automatiquement être remis à cette position.



Figure 1.16: À gauche, le générateur GOAL dans une cuve d'expérimentation. À droite, une vue plus large du dispositif, avec l'armoire qui contient les automates et les contrôleurs des moteurs.

L'ensemble des expériences réalisées lors de cette thèse ont eu recours à des forçages en modes verticaux.

1.3.3 Observation des ondes internes

Schlieren Synthétique

Le Schlieren Synthétique, abrégé Schlieren par la suite, est une méthode de visualisation qui repose sur le caractère non-uniforme de l'indice optique. Une stratification en sel correspond à cette situation puisque la relation entre la densité du fluide et son indice optique est affine

$$\nabla n = \beta \frac{n_0}{\rho_0} \nabla \rho \quad (1.45)$$

où $\rho_0 = 1000 \text{ g/L}$ est la densité de référence, n_0 l'indice optique associé et $\beta = 0.184$ (Dalziel *et al.*, 2000). Le gradient d'indice optique est donc directement une image du gradient de densité.

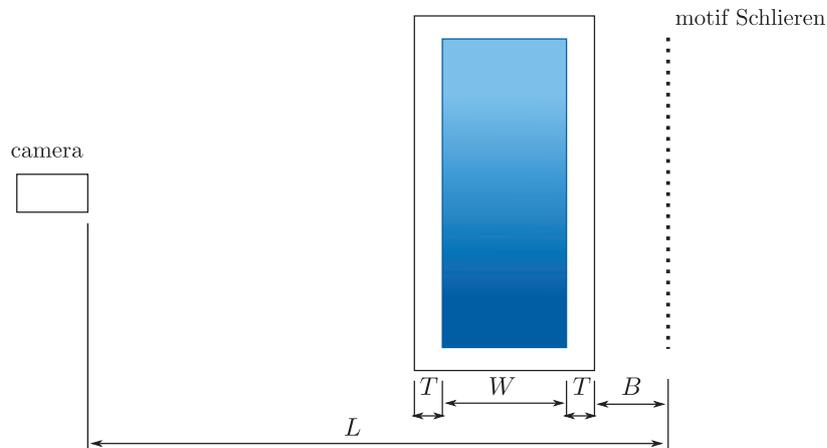


Figure 1.17: Schéma de principe du calcul effectué par la méthode du Schlieren.

Un motif de points aléatoire est placé à l'arrière de la cuve et une image, dite de référence, est prise au repos, avant tout passage des ondes. Une fois la génération d'ondes lancée, la propagation de celles-ci entraîne une variation d'indice optique en chaque point de la cuve touchée par le passage des ondes. Les rayons lumineux sont donc déviés, ce qui induit un déplacement apparent du motif par rapport à l'image de référence. On note $\overrightarrow{\Delta\zeta}$ le déplacement apparent du motif dans son plan. Il est possible de relier $\overrightarrow{\Delta\zeta}$ à la perturbation de l'indice optique par la relation

$$\Delta\zeta_x = -\frac{1}{2}W \left(W + 2\frac{n_0}{n_a}B + 2\frac{n_0}{n_t}T \right) \frac{1}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial x} \quad (1.46)$$

$$\Delta\zeta_z = -\frac{1}{2}W \left(W + 2\frac{n_0}{n_a}B + 2\frac{n_0}{n_t}T \right) \frac{1}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial z} \quad (1.47)$$

où n_0 est la valeur nominale de l'indice optique du fluide, $n' \ll n_0$ la perturbation de cet indice, n_a l'indice optique de l'air, n_t celle du matériau de la cuve d'expérimentation (Dalziel *et al.*, 2007). Les longueurs W , T , B sont respectivement la largeur de la cuve expérimentale, l'épaisseur de ses parois et la distance du motif Schlieren à la cuve. La distance totale de la caméra au motif Schlieren est notée L .

Dans nos expériences, ce n'est pas tant le déplacement apparent dans le plan du motif qui nous intéresse mais le déplacement correspondant en centre de cuve, noté $\Delta\gamma$. Le facteur pour passer à ce déplacement est simplement donné par

$$\frac{\Delta\gamma_i}{\Delta\zeta_i} = 1 - \frac{W + 2B + 2T}{2L}, \quad (1.48)$$

l'indice i indiquant l'une des deux composantes dans le plan, dans l'hypothèse où $W \ll L$.

Il est enfin possible de relier le déplacement apparent du motif $\Delta\zeta$ (en m) au déplacement en termes de pixels sur le capteur de la caméra Δp_i par la relation de conjugaison

$$r\Delta p_i = \frac{f}{f-L}\Delta\zeta_i \quad (1.49)$$

où r est la taille physique d'un pixel et f la focale de la lentille. Il est ainsi possible de relier les gradients de densité aux déplacements apparents enregistrés sur le capteur de la caméra Δp_i via

$$\Delta p_i = \frac{1}{r} \frac{f}{L-f} \left(1 - \frac{W + 2B + 2T}{2L} \right) \frac{1}{2}W \left(W + 2\frac{n_0}{n_a}B + 2\frac{n_0}{n_t}T \right) \frac{\beta}{\rho_0} \partial_i \rho'. \quad (1.50)$$

Un algorithme de corrélation permet ensuite de calculer le déplacement apparent d'un motif de points entre les images à différents instants et l'image de référence, qui correspond à la stratification linéaire du début d'expérience.

PIV

La PIV, acronyme anglais de la Vélométrie par Imagerie de Particules, est une mesure du champ de vitesse. Cette méthode consiste à suivre une particule fluide que l'on repère à l'aide de traceurs. Le milieu estensemencé à cet effet par des particules réfléchissantes, dans nos expériences des particules de borosilicate de densité 1.1 kg/L et de diamètre moyen 10 μm , que l'on éclaire à l'aide d'une nappe laser. Le laser utilisé a une longueur d'onde de 532 nm et une puissance maximale de 2 W. La vitesse de sédimentation de ces particules étant faible devant les vitesses associées aux ondes, le suivi de ces particules permet de remonter directement au champ de vitesse dans toute la cuve. Afin de garantir un ensemencement uniforme dans

la cuve d'expérience, les particules sont systématiquement réparties entre les deux bacs de remplissage. Le mouvement des particules est suivi par une caméra dont la fréquence d'acquisition, de 5 Hz, permet de s'assurer que l'on mesure en effet le champ de vitesse instantané en comparant deux images consécutives. Pour cela, le même algorithme de corrélation que pour le Schlieren est utilisé, sauf que la comparaison se fait désormais entre deux images successives.

LIF

La LIF, acronyme anglais pour Fluorescence Induite par Laser, repose sur l'usage d'un composé fluorescent, dans notre cas de la Rhodamine 6G, pour mesurer des concentrations de manière non-intrusive. En effet, excité par le laser à 532 nm, ce composé réémet dans une longueur d'onde différente de la longueur d'onde excitatrice et l'intensité lumineuse réémise dépend de la concentration en colorant. Ainsi, introduire une quantité connue de colorant dans le bac de remplissage contenant l'eau salée, de concentration connue, garantit une relation de proportionnalité entre concentration en colorant et en sel, ce qui permet par conséquent de remonter à la densité du fluide en chaque point. Cela suppose que la diffusion de la Rhodamine est comparable à celle du sel et que la température reste constante et uniforme au cours de l'expérience. Cette technique, classiquement utilisée lors d'expériences mettant en jeu deux fluides distincts (Troy and Koseff, 2005) a été mise en place au sein de l'équipe pour des mesures dans le cadre d'un fluide continûment stratifié (Bourget, 2014). Ces deux usages possibles de la LIF sont représentés dans la figure (1.18).

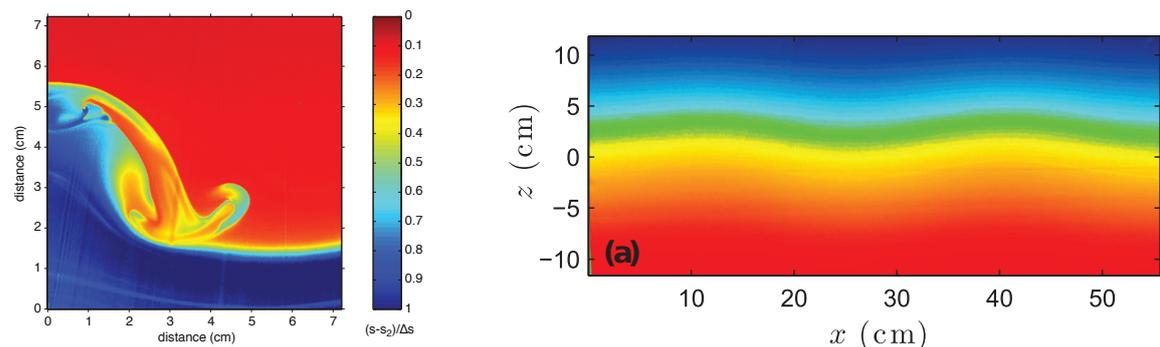


Figure 1.18: À gauche, l'utilisation de la LIF dans le cadre d'un fluide bicouche (extrait de Troy and Koseff (2005)). À droite, la même technique dans le cadre d'un fluide continûment stratifié et soumis à un forçage en mode 1 : les couleurs indiquent les concentrations en rhodamine, de 0 (bleu) à 40 $\mu\text{g/L}$ (rouge).

PIV-LIF

Par ailleurs, la combinaison de la PIV et de la LIF, que nous abrègerons PIV-LIF dans la suite du manuscrit, présente un intérêt non négligeable car la connaissance simultanée des champs de vitesse et de densité permet de remonter à des grandeurs caractéristiques du mélange. L'ensemble du dispositif expérimental et de la technique, dont nous rappelons ici les grandes lignes, est détaillé dans la thèse de Bourget (2014) et repris dans Dossmann *et al.* (2016).

L'usage de la Rhodamine était justifié pour des raisons pratiques : sa longueur d'onde d'absorption est compatible avec le laser que nous utilisons pour la PIV (532 nm). Deux caméras sont ainsi utilisées : l'une, pour la PIV permet de ne garder que l'image des particules à l'aide

d'un filtre optique passe-bande ((530 ± 5) nm) qui ne laisse passer que la lumière du laser ; l'autre, pour la LIF, munie d'un filtre optique passe-haut de longueur de coupure 550 nm, ne laisse passer que la longueur d'onde émise par le colorant (555 nm) et supprime celle du laser.

Pour être certain que l'ensemble de la cuve est éclairé de manière homogène, ce qui est crucial pour pouvoir ensuite comparer les intensités de fluorescence, nous utilisons un miroir oscillant plutôt qu'une lentille divergente pour créer la nappe laser. Un nombre entier d'oscillations est effectué lors de l'ouverture de l'obturateur de la caméra. Cela ne suffit pas si un ajustement en indice optique n'est pas réalisé. En effet, une stratification en sel présente non seulement un gradient de densité, mais aussi en conséquence un gradient d'indice optique. Ce gradient d'indice optique induit une déviation des rayons lumineux lors de leurs parcours dans la cuve : il n'est donc pas possible de garantir un éclairage uniforme du fluide, qui est pourtant nécessaire. Pour y remédier, de l'éthanol est ajouté au réservoir d'eau douce : cela a pour effet d'augmenter l'indice optique, que l'on ajuste pour qu'il soit égal à celui du réservoir d'eau salée. Par ailleurs, l'ajout d'éthanol dans l'eau diminue la densité du mélange, ce qui permet de réaliser des stratifications présentant des gradients de densité du même ordre que lors d'un remplissage sans ajustement d'indice.

Un autre phénomène à prendre en considération est la dénaturation du colorant par le laser : on parle de *photobleaching*. Pour limiter le temps d'exposition du colorant au laser, une synchronisation du miroir et des caméras est nécessaire, que nous réalisons à l'aide d'un programme Labview : un signal en créneaux donne la fréquence d'acquisition des caméras, et le front montant est par ailleurs le trigger pour déclencher l'oscillation du miroir via un générateur de fonction Agilent. Ce dernier délivre un signal triangulaire d'un nombre entier de périodes à chaque front montant. En dehors de ces périodes d'oscillation, le miroir dirige le faisceau laser dans un collecteur de sorte à laisser la cuve inéclairée.

1.3.4 Outils d'analyse

Transformée de Hilbert temporelle

L'analyse par transformée de Hilbert temporelle est un outil numérique que nous avons utilisé en pratique pour filtrer le champ d'onde à une fréquence donnée.

Cela présente l'intérêt de pouvoir analyser la structure spatiale de l'onde à ladite fréquence et de pouvoir observer les effets non-linéaires : on peut ainsi filtrer à fréquence nulle pour observer un éventuel courant moyen, à 2ω pour observer une harmonique, comme sur la figure (1.19), ou encore à des pulsations plus faibles que ω qui pourraient apparaître dans le milieu par instabilités sous-harmoniques.

Diagramme temps-fréquence

Comme mentionné dans le paragraphe précédent, les non-linéarités peuvent entraîner un enrichissement spectral du champ observé. Ainsi des harmoniques, des sous-harmoniques ou encore un courant moyen peuvent apparaître. Le diagramme temps-fréquence, abrégé simplement *temps-fréquence* par la suite, permet justement de se rendre compte de la composition en fréquence du champ en fonction du temps. L'algorithme utilisé se base sur les travaux de Flandrin (1999). Sommairement, cela revient à réaliser une série de transformées de Fourier sur une fenêtre glissante en temps. La figure 1.20 montre par exemple le cas pour un forçage à la pulsation ω : au cours de l'expérience, une harmonique à la pulsation 2ω apparaît.

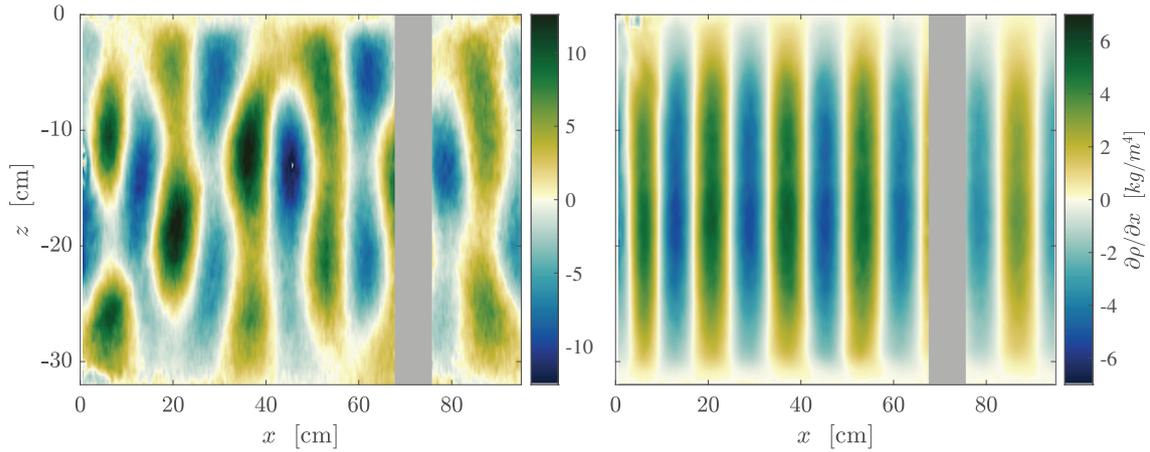


Figure 1.19: Exemple d’usage de la transformée temporelle de Hilbert. Un forçage à la pulsation ω est réalisé et génère des ondes internes dans toute la cuve : le champ de gradient horizontal de densité, $\partial\rho/\partial x$, obtenu par Schlieren est visible à gauche. Il présente une structure spatiale complexe. En appliquant une analyse par transformée de Hilbert, et en ne sélectionnant que les signaux à 2ω , nous pouvons observer qu’une harmonique est présente dans le milieu, avec une structure spatiale bien différente du champ total : on reconnaît un mode 1. La zone grise sur les deux images représentent la jonction entre deux cuves expérimentales : l’acquisition de données sur cette zone n’est pas possible.

Le fenêtrage que nous avons utilisé est celui de Hanning. Le choix de la taille de la fenêtre est sensible : un intervalle de temps large garantit une meilleure résolution fréquentielle mais une moins bonne résolution temporelle et inversement dans le cas d’un intervalle de temps petit. On obtient un ensemble de spectrogrammes qui, mis bout à bout, donnent une image du contenu fréquentiel du champ au cours de l’expérience. Il est possible, en fonction des intérêts de l’expérience, de sélectionner la zone de la cuve sur laquelle l’analyse est effectuée. Un calcul à partir du champ total a pour avantage de diminuer le bruit. Cependant, les phénomènes physiques ne sont pas forcément identiques dans toute la cuve : il peut être intéressant de ne calculer le diagramme que sur une zone particulière pour voir s’il présente un trait caractéristique par rapport au reste de la cuve.

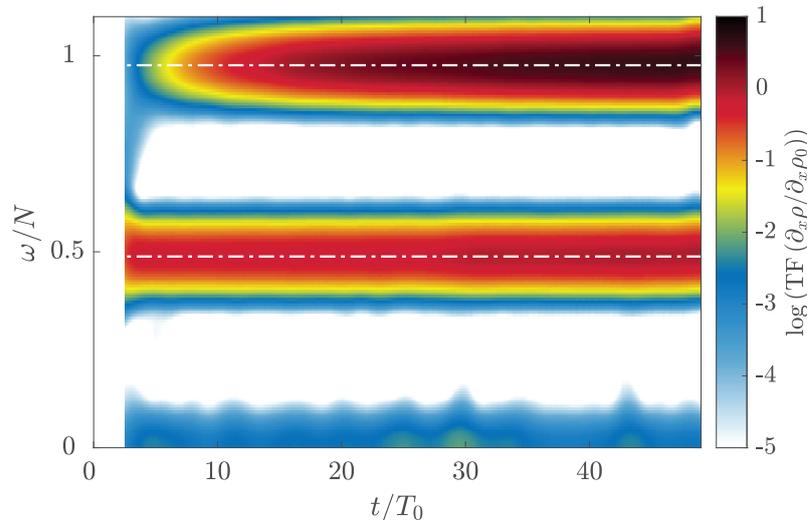


Figure 1.20: Un exemple de temps-fréquence pour une expérience réalisée avec $N = 1.02$ rad/s, une période de forçage $T_0 = 12.56$ s telle que $\omega_0/N = 0.488$ rad/s. Ce temps-fréquence est calculé à partir du champ de gradient de densité horizontal, $\partial\rho/\partial x$ et normalisée par le gradient de densité à la pulsation de forçage $\partial_x\rho_0$.

Chapitre 2

Stratification soumise à un forçage long : formation d’escalier

Sommaire

2.1	Effet du nombre de Richardson Ri	35
2.2	Dispositif expérimental	37
2.2.1	Étude de l’efficacité du générateur	37
2.2.2	Description du dispositif expérimental	39
2.3	Mesure du nombre de Richardson	41
2.4	Double diffusion	43
2.4.1	Le phénomène physique	43
2.4.2	Le Schlieren Synthétique pour suivre le phénomène	46
2.4.3	Intrusion par chauffage latéral	47
2.4.4	Propagation d’ondes internes : confinement des couches mélangées	49

Introduction

Comme cela a été mentionné en 1.1.3 et en 1.2.5, le mélange océanique peut avoir plusieurs origine, l’une d’elles étant la propagation d’ondes internes : celles-ci, par des mécanismes non-linéaires, peuvent en effet déferler et perturber de manière irréversible la stratification. La TRI joue un rôle particulier dans ce processus : l’onde, en se déstabilisant, transfère de l’énergie aux plus petites échelles, ce qui est susceptible de favoriser des processus irréversibles par diffusion. C’est dans cette optique que des expériences ont déjà été menées au sein du laboratoire (Joubaud *et al.*, 2012a; Bourget, 2014). En particulier, l’un des défis des océanographes est de mesurer *in situ* le coefficient de diffusivité turbulente κ_t . Une technique de mesure de ce coefficient a été mise en place au sein de l’équipe par PIV-LIF (Bourget, 2014) utilisant une mesure simultanée des champs de vitesse et de densité. Les mesures de κ_t réalisées par Dossmann *et al.* (2016) sur la base de cette technique l’étaient sur des temps courts, au maximum quelques dizaines de périodes de l’onde, durée pendant laquelle aucune variation quantitative de la stratification n’est mesurable en fin de forçage par mesure conductimétrique. La question de la part de mélange irréversible contenue dans l’expression de κ_t est encore soumise à discussion : pour pouvoir l’évaluer, des expériences sur temps longs, à l’issue desquelles le mélange irréversible de la stratification est quantifiable, sont nécessaires. Cela permettrait d’estimer la quantité d’énergie fournie par les ondes au mélange ainsi que l’impact de la présence de TRI dans le milieu.

Ce chapitre s’inscrit dans ce contexte et fait donc suite aux expériences déjà réalisées au sein du laboratoire. Il s’intéresse à la situation particulière d’une stratification soumise à un forçage

de longue durée, c'est-à-dire typiquement de l'ordre de la dizaine d'heures. En particulier, il fait écho aux travaux de Dossmann *et al.* (2017) qui, lors d'expériences de durée semblable, observent la formation de couches mélangées en centre de cuve. Ils expliquent la formation de ces couches par un effet de diminution locale du nombre de Richardson $Ri = (N/\partial_z v_x)^2$ liée à la présence de TRI : comme l'efficacité de mélange augmente avec la diminution de Ri , cela pourrait expliquer l'apparition de ces couches si singulières au centre de la cuve (Linden, 1979; Phillips, 1972; Posmentier, 1977). L'une de mes mesures, qui présente un profil typique avec ces couches mélangées, est en figure 2.1.

Les premières expériences réalisées au cours de cette thèse s'intéressent à l'étude de l'apparition de ce profil de densité *en escalier*. L'idée initiale était d'explorer les effets des paramètres de forçage (fréquence, amplitude, mode,...) sur l'apparition de ce genre de profil et d'essayer de faire un lien entre la mesure de κ_t , locale et instantanée, et l'évolution globale de la stratification de fond.

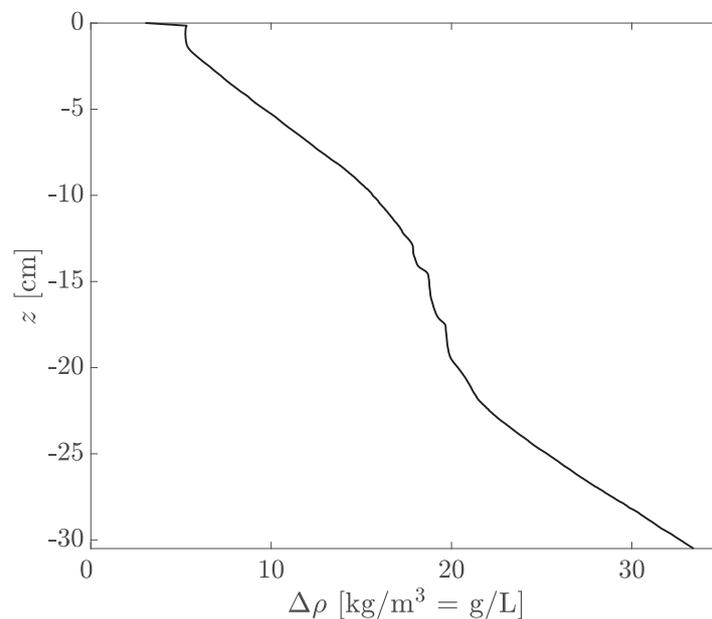


Figure 2.1: Lors d'un forçage long, ici après $4400T_0$ ce qui correspond à 7h30 environ, la stratification évolue et présente un profil particulier avec des couches mélangées séparées par des interfaces minces caractérisées par de forts gradients de densité. Ce profil sera dit *en escalier*. Expérience réalisée avec $N_0 = 1.1$ rad/s, $T_0 = 6.2$ s et l'amplitude du générateur $a_0 = 6.8$ mm.

2.1 Effet du nombre de Richardson Ri

La diffusivité κ_t introduite en 1.1.3 permet de révéler des zones potentielles de mélange, mais ne permet pas de traduire l'efficacité du processus en cours. Pour évaluer cette efficacité, il est d'usage d'utiliser le nombre de Richardson de flux, noté R_f et défini par la relation

$$R_f = \frac{b}{P} \quad (2.1)$$

où $b = g < \rho' v_z > / \bar{\rho}$ est la flottabilité et P le taux de production d'énergie turbulente. Ce paramètre reflète la part d'énergie cinétique turbulente qui est transférée, de façon irréversible, en énergie potentielle de pesanteur par mélange turbulent. L'efficacité du mélange dans le milieu peut être reliée à différentes grandeurs et en particulier au nombre de Richardson, Ri .

Ce nombre donne une mesure de la stabilité de l'écoulement soumis à un cisaillement et est défini par

$$Ri = \left(\frac{N}{\partial v_x / \partial z} \right)^2. \quad (2.2)$$

Plus le nombre de Richardson est grand, plus la force de flottabilité est prédominante par rapport aux effets de cisaillement et plus l'écoulement est stable, et inversement pour un nombre de Richardson faible.

Plusieurs études expérimentales ont mesuré l'évolution de l'efficacité de mélange avec Ri , dont les données ont été regroupées par Linden (1979) (fig. 2.2). Le premier constat est que l'efficacité de mélange augmente jusqu'à atteindre un maximum puis diminue à haut Richardson. Ce maximum n'est pas identique selon les expériences réalisées même si l'on peut garder en mémoire, à titre indicatif, la valeur d'une efficacité de mélange maximale pour $0.2 < Ri < 0.25$. Cette évolution correspond au fait qu'à très bas Ri , le milieu est quasiment homogène et donc très peu sensible au mélange, tandis qu'à grand Richardson la stratification l'emporte sur le mélange turbulent. Entre ces deux situations, on peut donc s'attendre à ce qu'il existe une plage de Richardson sur laquelle le mélange soit optimal. Par ailleurs, Linden (1979) suggère qu'à grand Richardson, une part significative de l'énergie turbulente génère des ondes internes qui, si elles ne déferlent pas, n'engendrent pas de mélange et finissent par se dissiper par viscosité.

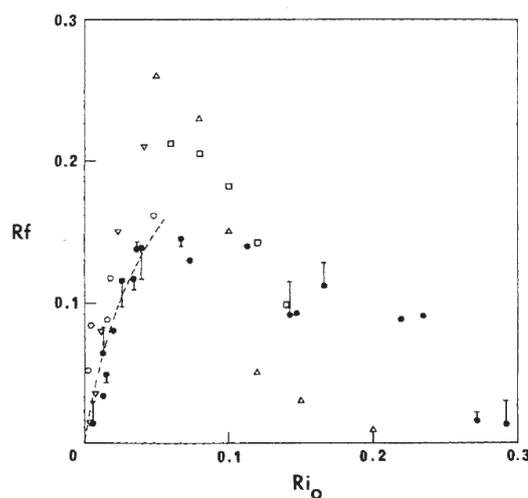


Figure 2.2: Linden (1979) a regroupé une collection de données sur l'évolution du nombre de Richardson de flux R_f , qui est une image directe de l'efficacité de mélange, en fonction du nombre de Ri .

Les expériences que nous réalisons en fluide stratifié sont toutes à des valeurs de Ri grandes devant 1 aux premiers instants de la propagation d'ondes. Le forçage induit progressivement un cisaillement de plus en plus important, ce qui peut avoir pour effet de diminuer Ri et donc d'augmenter localement l'efficacité de mélange. Ainsi, une zone où le Richardson diminue est susceptible de devenir une couche mélangée.

Le mécanisme de formation d'interface invoqué par Dossmann *et al.* (2017) a été développé par Phillips (1972) et Posmentier (1977). Ils ont en effet suggéré la formation d'interfaces dans un processus résumé par Linden (1979) : si le flux de densité décroît avec le gradient vertical de densité, alors toute perturbation qui aurait tendance à augmenter localement le gradient de densité, caractéristique d'une interface, serait amplifié. En effet, le flux de densité est alors plus faible au niveau de cette interface naissante que dans la portion de fluide directement

au-dessus ou en-dessous, ce qui renforce le gradient de densité à cet endroit. Les limites de cette approche reposent sur le fait qu'il faudrait pouvoir déterminer l'évolution du flux de densité en fonction du gradient vertical de densité (fig. 2.3) et que le flux ne dépende que du gradient de densité. Cela suppose que les échelles turbulentes soient suffisamment petites devant les échelles caractéristiques du gradient de densité (Linden, 1979) .

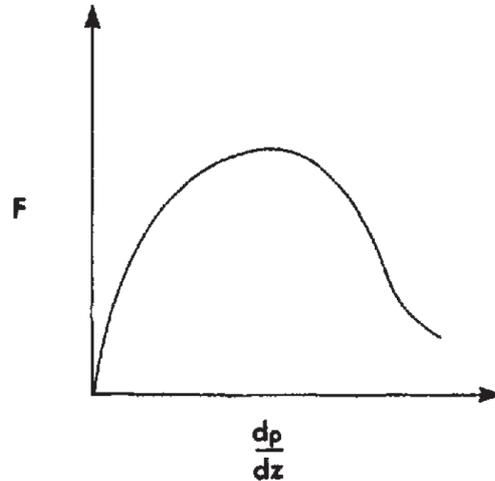


Figure 2.3: Représentation schématique de l'évolution du flux de densité avec le gradient vertical de densité, extrait de Linden (1979).

Dans l'expérience réalisée par Dossmann *et al.* (2017), le scénario proposé pour expliquer l'apparition de cette stratification en escalier est le suivant : l'intensité du mélange turbulent varie avec la profondeur puisqu'elle dépend du forçage, qui est un mode dans les expériences réalisées, et les couches mélangées se forment au milieu de la cuve où les contraintes de cisaillement sont les plus fortes, mais où la turbulence est suffisamment faible pour permettre l'apparition de couches mélangées. La propagation d'ondes internes dans le milieu, par leurs déferlements, contribue au cisaillement et au transfert d'énergie aux petites échelles : elle génère ainsi et entretient la stratification en escalier.

Dossmann *et al.* (2017) soulignent par ailleurs que de pareilles stratifications peuvent également être le résultat d'un processus de double-diffusion, bien connu des océanographes. Cette hypothèse est écartée par la supposition que la contribution du sel à la stratification était la seule à jouer, la température restant constante à ± 0.1 °C. Cela avait été vérifié en prélevant, en fin d'expérience, un peu de fluide à quelques centimètres de la surface libre.

Les expériences réalisées dans cette thèse utilisent le même dispositif expérimental que Dossmann *et al.* (2017). Nous allons brièvement le décrire et caractériser un peu plus précisément le générateur utilisé.

2.2 Dispositif expérimental

2.2.1 Étude de l'efficacité du générateur

Une série d'expériences a été menée pour caractériser le générateur d'ondes GOAL. Pour cela, nous avons imposé un forçage à différentes amplitudes et fréquences et mesuré l'amplitude des gradients de densité à l'aide du Schlieren Synthétique. Nous attendons pour cela que le régime stationnaire soit établi près du générateur, c'est-à-dire une dizaine de périodes. Le temps de forçage ainsi que les amplitudes mises en jeu sont suffisamment faibles pour garder

constante la pulsation de flottabilité N_0 . Cette opération a été réalisée en choisissant un mode 1, un mode 2 et un mode 3. L'étude donne des résultats similaires selon que l'on regarde le gradient horizontal ou vertical. Nous les présenterons ici en fonction du gradient horizontal. La prédiction théorique de l'évolution du gradient horizontal de densité pour un mode m est donnée par

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x}(x, z, t) = \frac{\rho_0 N_0^2 a_m}{g H \cot^2 \theta} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \cos(k_m x - \omega t) \quad (2.3)$$

où

$$k_m = \frac{m\pi}{H \cot \theta} \quad \text{et} \quad \cot \theta = \sqrt{\frac{N_0^2 - \omega^2}{\omega^2}} \quad (2.4)$$

avec a_m l'amplitude de forçage du générateur, ω la pulsation de forçage, k_m le nombre d'onde horizontal et H la hauteur du mode, qui correspond aussi à celle du remplissage dans nos expériences.

L'efficacité η du générateur est ensuite définie comme le rapport entre l'amplitude du mode mesurée par Schlieren puis décomposition modale et la valeur théorique attendue. Les mesures sont réalisées à 5 cm du générateur, pour avoir l'amplitude de l'onde à sa génération. Celle-ci s'atténue en effet au cours de sa propagation par dissipation visqueuse : son amplitude diminue d'environ 20 % sur 40 cm. Les résultats sont présentés dans la figure 2.4.

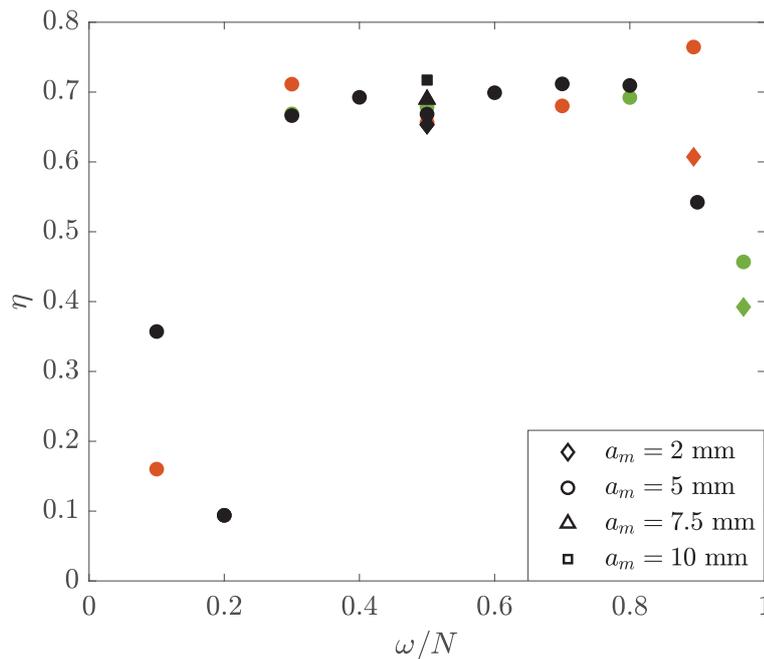


Figure 2.4: Mesure de l'efficacité du générateur. En vert, le mode 1 ($m = 1$), en orange le mode 2 ($m = 2$), en noir le mode 3 ($m = 3$). Les différents symboles indiquent les différentes amplitudes de forçage comme mentionnées dans la légende. Les mesures sont réalisées à 5 cm du générateur.

À basses fréquences, pour $\omega/N < 0.3$ l'efficacité du générateur chute fortement du fait du rôle prépondérant des effets visqueux à ces fréquences, ce qui a déjà été vu pour un générateur axisymétrique également utilisé dans l'équipe (Boury *et al.*, 2019). À hautes fréquences, pour $\omega/N > 0.9$, une diminution de l'efficacité du générateur est également observée. Rappelons que pour $\omega/N > 1$, les ondes sont évanescentes et cessent de se propager dans le milieu : l'efficacité du générateur dans ces conditions est donc nulle. La diminution de l'efficacité est néanmoins visible dès $\omega/N = 0.8$, avec une décroissance nette : à $\omega/N = 0.9$, l'efficacité

n'est plus que de 40 %. Entre ces deux extrêmes, sur la plage $0.3 < \omega/N < 0.9$, le générateur présente la même efficacité, de l'ordre de 70 %. Notons que l'efficacité du générateur présente une évolution tout à fait similaire quel que soit le mode de forçage et l'amplitude appliquée.

2.2.2 Description du dispositif expérimental

La cuve, dont les parois sont en plexiglas, est de dimension $80 \text{ cm} \times 17 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$. La hauteur de remplissage est gardée constante pour toutes les expériences réalisées et égale à 32.5 cm , ce qui correspond à la hauteur du générateur d'ondes. Le dispositif est visible en figure 2.5.

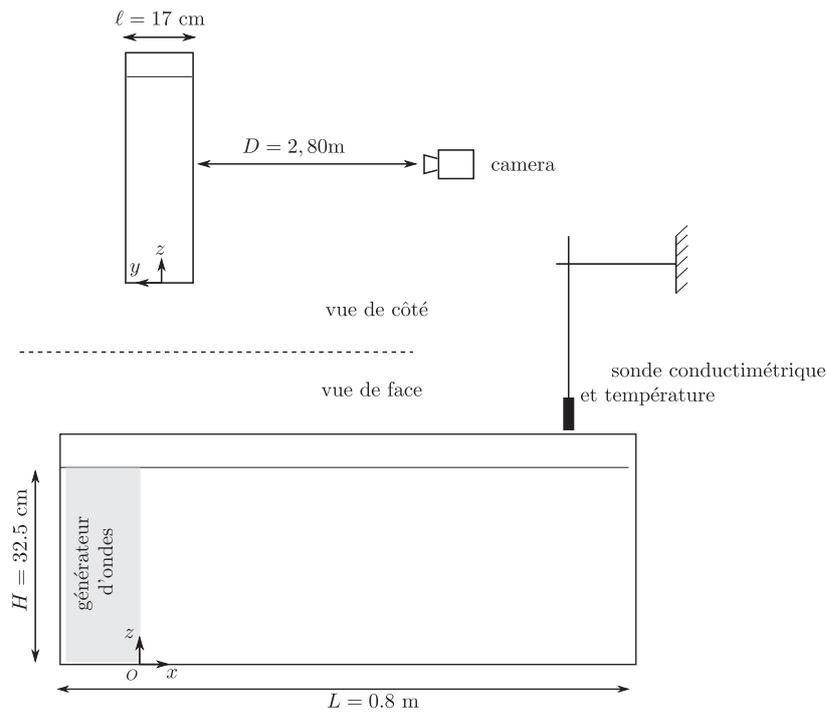


Figure 2.5: Dispositif expérimental. La cuve est de dimension $80 \text{ cm} \times 17 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$, la hauteur de remplissage est gardée constante pour toutes les expériences réalisées et égale à 32.5 cm ce qui correspond à la hauteur du générateur d'ondes. Lors d'expérience en PIV-LIF, une nappe laser est créée au centre de la cuve dans le plan (xOz) . Dans le cadre d'expérience Schlieren, un nuage de point rétro-éclairé est placé à l'arrière de la cuve, à l'extérieur, toujours dans le plan (xOz) .

Dans l'expérience de Dossmann *et al.* (2017) comme dans celles que j'ai menées, sauf mention explicite, le forçage est assuré par le générateur GOAL et correspond à un mode 1 d'amplitude 9 mm . Une vue schématique de la position initiale de GOAL pour un mode 1 visible en figure 2.6 : l'amplitude est maximale en haut et en bas de cuve, le mode 1 correspond au noeud unique au centre de cuve. Le champ de vitesse fait voir des rouleaux qui se propagent le long de la cuve.¹

Le champ de vitesse typique pour un tel forçage est visible en figure 2.7 : cet écoulement présente un cisaillement maximal au centre de la cuve. La fréquence est choisie telle que $\omega/N = 0.9$.

Ces conditions sont particulièrement favorables au développement d'instabilités dans l'écoulement : le diagramme temps-fréquence de cette expérience est visible en figure 2.8. On y reconnaît la fréquence fondamentale de forçage, à $\omega/N = 0.9$ et l'on note que l'écoulement

1. Pour les modes d'ordre supérieur n (2, 3, ...) c'est exactement le même principe avec autant de noeuds correspondants (2, 3, ...) sur la hauteur de la cuve, qui engendrent n rouleaux sur la hauteur de la cuve.

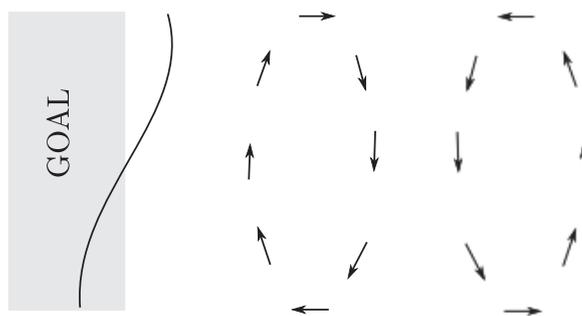


Figure 2.6: Vue schématique de la position initiale de GOAL en mode 1 et champ de vitesse résultant.

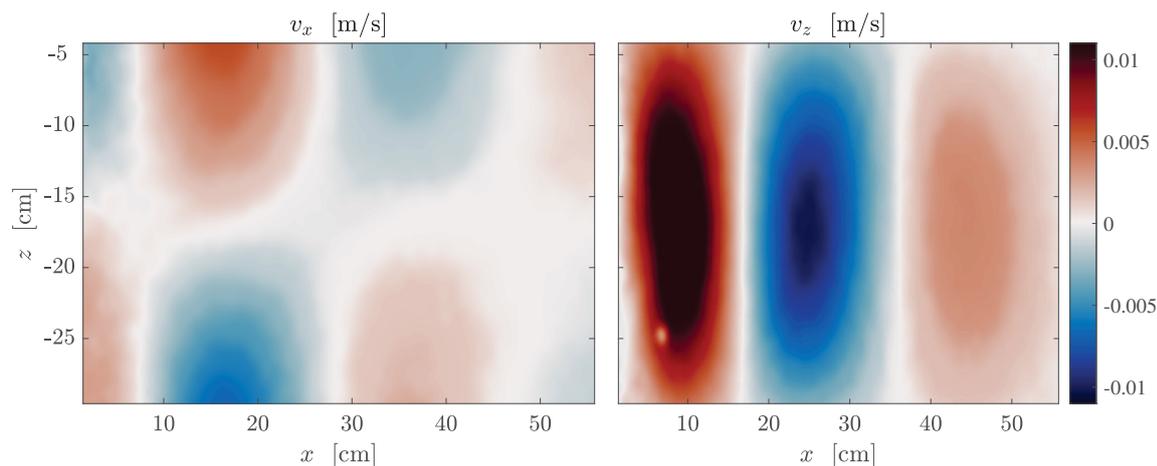


Figure 2.7: Champ de vitesse en tout début d'expérience ($7T_0$). Ce champ de vitesse est typique d'un forçage en mode 1, le cisaillement $\partial_z v_x$ étant maximal au centre de la cuve.

présente très rapidement des signaux pour des fréquences plus basses, caractéristiques de la TRI : on a de plus la condition de résonance $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ où ω_1 et ω_2 sont les pulsations des ondes filles et ω_0 la pulsation de l'onde mère. C'est sur la base de ce constat qu'un scénario comme celui évoqué par Phillips (1972) et Posmentier (1977) avait été avancé par Dossmann *et al.* (2017) : la présence d'ondes internes aux plus petites échelles maintient, au centre de la cuve, un cisaillement suffisamment fort pour assurer la formation des couches mélangées. Il convient cependant de noter que cette activité non-linéaire disparaît au cours de l'expérience : si les instabilités jouent un rôle, il doit être prépondérant au début de l'expérience.

Pour s'en assurer, il est nécessaire de porter un regard attentif à l'évolution temporelle et spatiale du Ri et à la propagation des ondes dans la cuve. En effet, si le profil en escalier est bien lié à un effet du nombre de Richardson, cette mesure doit permettre de s'assurer que :

- le Ri décroît avec le temps, du fait de la propagation d'ondes internes et des non-linéarité associées,
- le champ spatial de Ri témoigne d'une particularité spatiale puisque les couches mélangées apparaissent au centre de la cuve, là où le cisaillement est maximal.

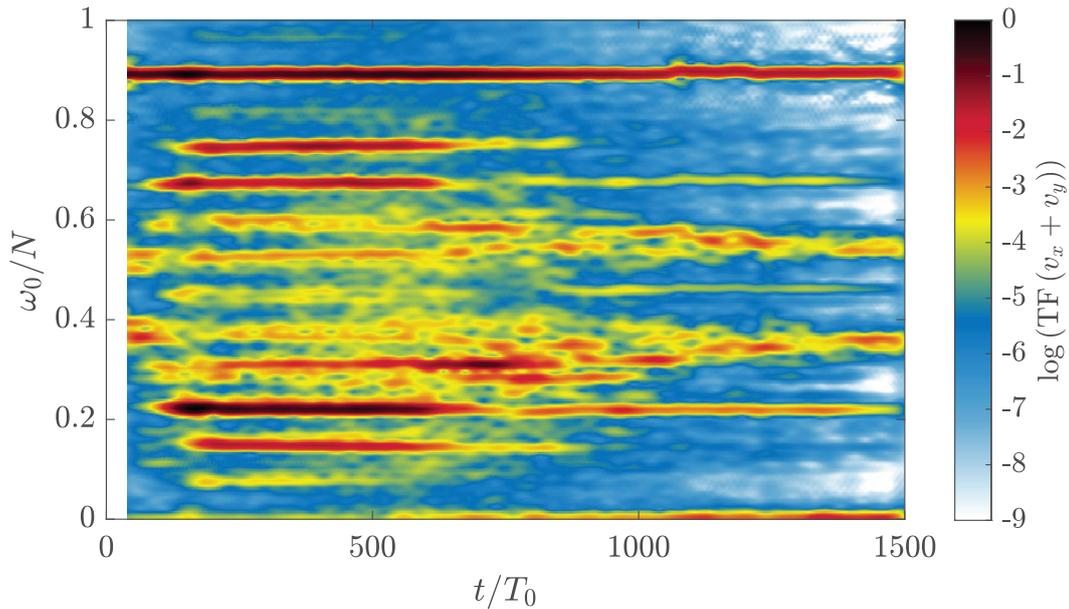


Figure 2.8: Le temps-fréquence de l'expérience, obtenu par PIV, indique une forte présence d'ondes filles issues de la TRI en début d'expérience : les conditions de forçage en amplitude et en fréquence sont favorables à l'apparition de l'instabilité dans ces expériences.

2.3 Mesure du nombre de Richardson

La mesure de l'évolution du champ du nombre de Richardson avec le temps suppose une connaissance de l'état de la stratification de fond ainsi que le champ de vitesse à chaque instant. Nous avons choisi de ne réaliser cette mesure que sur les premières 400 périodes de forçage, ce qui correspond typiquement à une durée de 1h15 dans cette expérience. Dans ces conditions, la stratification ne varie que faiblement, ce qui permet de calculer le nombre de Richardson en considérant la pulsation de flottabilité constante. Par ailleurs, comme le temps-fréquence visible en figure 2.8 le montre, les non-linéarités des ondes internes sont visibles surtout sur les premières centaines de périodes. Le nombre de Richardson est ainsi supposé chuter très vite avec l'apparition des instabilités : la formation de couches mélangées par cisaillement devrait avoir lieu durant ces premiers instants de l'expérience. Une mesure PIV suffit donc à connaître le champ de vitesse instantané et de remonter au champ du nombre de Richardson.

La mesure de ce champ est visible en figure 2.9. Le champ donné à $15T_0$ montre une asymétrie assez franche entre la partie proche du générateur, situé à $x = 0$ cm, et la partie qui en est la plus éloignée. Les instabilités apparaissent proches du générateur et les ondes qui en sont issues se propagent ensuite dans le reste de la cuve. Ainsi, le nombre de Richardson à $15T_0$ est plus faible proche du générateur du fait de ces instabilités naissantes. Les champs représentés aux instants suivants, $200T_0$, $350T_0$, $400T_0$, présentent tous des zones où le Richardson est de l'ordre de la dizaine, et beaucoup plus rarement des zones où il est plus petit que 1. Comme cela a été rappelé en (1.2.5), pour que l'instabilité de Kelvin-Helmholtz ait lieu et que les effets de cisaillement puissent générer du mélange, le nombre de Richardson doit théoriquement passer sous le seuil de 0.25. Ce critère est concordant avec les mesures d'efficacité de mélange représentée en figure 2.2 : l'efficacité du mélange est plus grande pour $Ri < 0.25$.

Le premier constat est que le nombre de Richardson dans nos expériences n'est qu'extrêmement rarement sous ce seuil, même au plus fort de l'activité non-linéaire de l'expérience. Par ailleurs, même en considérant des nombres de Richardson allant de 1 à 10, il se trouve que

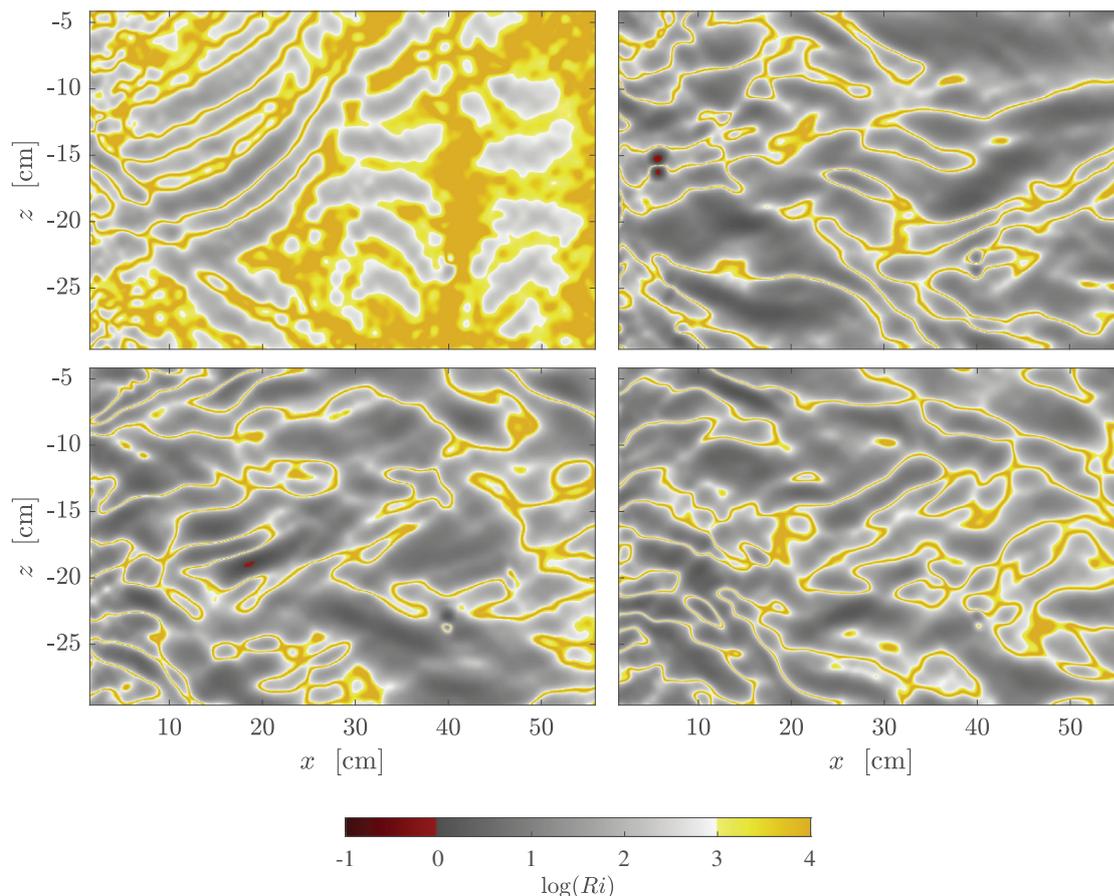


Figure 2.9: Mesure du nombre de Richardson, de gauche à droite et de bas en haut, à $15T_0$, $200T_0$, $350T_0$ et $400T_0$. Il peut arriver, très localement et sporadiquement que la valeur de Ri soit plus petite que 1, en particulier proche du générateur. Par ailleurs, nous aurions pu nous attendre à retrouver une structure spatiale régulière sur le champ de Ri puisque les couches mélangées sont au centre de la cuve et de hauteur assez régulière. Cependant, aucune structure spatiale ne se détache du champ de Ri .

toutes les zones de la cuve sont à un moment ou à un autre représentées par ces valeurs de Ri : aucune structure particulière n'apparaît sur ces champs au centre de la cuve, là où justement le profil en escalier est visible en fin d'expérience.

L'interprétation physique de l'apparition du profil en escalier comme suggéré par Dossmann *et al.* (2017) n'est donc pas confirmée par ces mesures du nombre de Richardson. Par ailleurs, de nombreuses difficultés expérimentales concernant l'ajustement des indices optiques (*cf.* (1.3.3)) nous ont laissé penser que celui-ci n'était pas fiable dans la durée, probablement à cause de phénomènes double-diffusifs. La première double-diffusion possible est celle liée aux nécessités expérimentales de la PIV-LIF, qui met en jeu du sel et de l'éthanol. Cependant la différence de diffusion entre le sel ($\kappa_S = 2 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$) et l'éthanol ($\kappa_{\text{eth}} = 1.15 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$) est trop faible pour être mise en cause. De plus, si ce phénomène avait été le seul en jeu, le problème d'ajustement en indice n'a pas de raison particulière d'être localisé dans la cuve, alors que nous ne l'avons observé qu'au centre de celle-ci. Nous avons donc exploré l'hypothèse, écartée par Dossmann *et al.* (2017), de la double-diffusion thermohaline. Bien connu des océanographes, ce phénomène est à l'origine de structures en couches mélangées qui s'observent en différents points du globe.

2.4 Double diffusion

2.4.1 Le phénomène physique

La double diffusion est un phénomène physique qui peut avoir lieu dans des milieux stratifiés stables lorsque la densité dépend de deux paramètres qui diffusent à des vitesses différentes. Dans l'océan, la densité est à la fois fonction de la température, dont le coefficient de diffusion dans l'eau est de $\kappa_\theta = 1.4 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, et de la salinité, dont le coefficient de diffusion dans l'eau est $\kappa_S = 2 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$: la température diffuse 100 fois plus vite que la salinité. Le rapport de ces deux coefficients est noté $\tau = \kappa_S/\kappa_\theta$. Nous pouvons distinguer deux cas

- le gradient de salinité est instable mais le gradient de température est stable
 - le gradient de salinité est stable mais le gradient de température est instable
- le tout en ayant finalement une stratification stable en densité².

Ces deux situations ne sont pas symétriques puisque dans la première, le gradient instable est lié à la quantité qui diffuse le plus lentement, tandis que dans la seconde, le gradient instable est liée à la quantité qui diffuse le plus rapidement. La première situation donne lieu à ce qui est appelé des *doigts de sel*, tandis que la seconde sera propice à de la *convection diffusive*. Ces deux situations sont visibles sur le globe, les deux pouvant être à l'origine de mélange. Lorsque ces mécanismes sont en jeu, ils donnent naissance à des structures impressionnantes : les profils de densité et de température présentent une structure avec des couches mélangées régulièrement espacées, raison pour laquelle on trouve souvent la dénomination de structure *en escalier* (fig. 2.10).

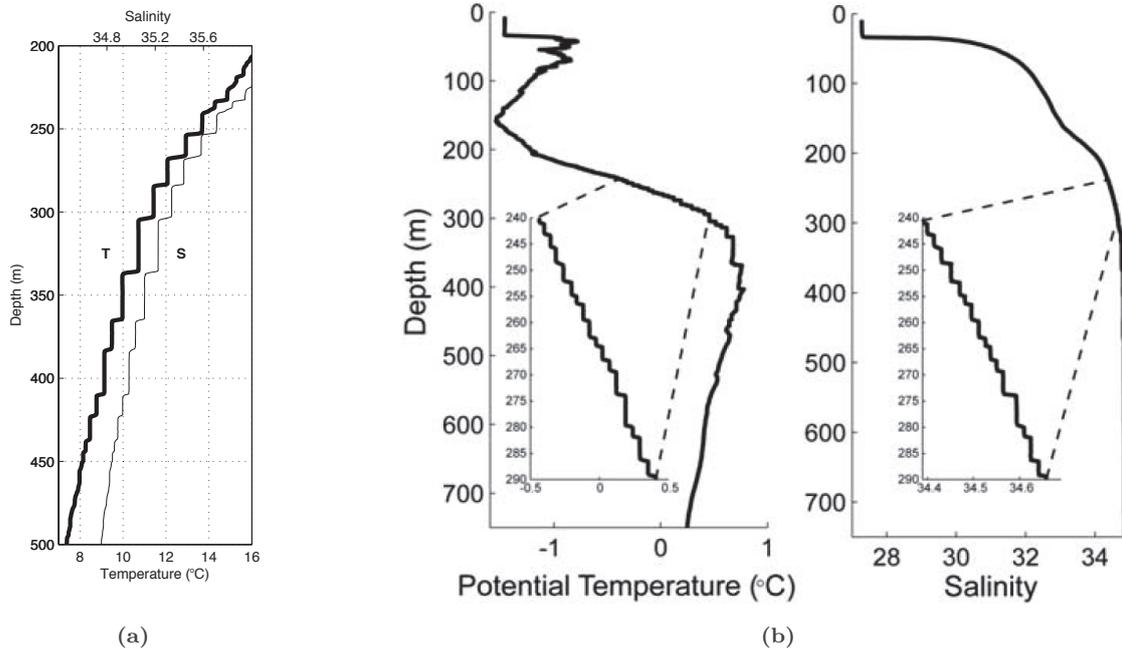


Figure 2.10: Ces deux situations de double diffusion sont visibles sur le globe : les doigts de sel (a, extrait de Schmitt *et al.* (2005)) sont ici observés en Atlantique, la convection diffusive (b, extrait de Timmermans *et al.* (2008)) dans le bassin du Canada.

La double-diffusion est un processus de mélange pour le moins surprenant : il tend à rendre plus denses, respectivement moins denses, les zones qui l'étaient déjà. Des observations de

2. Les deux autres situations envisageables sont : les deux gradients sont stables, la stratification est stable ; les deux gradients sont instables, c'est la configuration caractéristique de la convection de Rayleigh-Bénard, qui peut aussi avoir lieu si seulement l'un des deux gradients est instable mais dominant.

ce phénomène avaient déjà eu lieu à la fin du 19^{ème} siècle et au début du 20^{ème} siècle : nous pouvons par exemple citer Jevons (1858) ou encore Ekman (1904). Mais c'est Stern (1960) qui établit une théorie concernant la formation de doigts de sel et ouvre ainsi tout un nouveau champ de recherche pour la mécanique des fluides.

Dans cette section, nous nous concentrerons sur la convection diffusive. C'est celle-ci qui est susceptible d'apparaître dans nos expériences : les stratifications sont toutes dominées par un gradient de densité stable, pouvant éventuellement être perturbées par un gradient de température que nous supposons quasi nul. En l'absence de gradient de température, la perturbation de particules fluides dans un milieu stablement stratifié en sel donne naissance à une onde interne : c'est le mouvement représenté par la ligne pointillée de la figure 2.11. Le phénomène est cependant différent en présence d'un gradient instable de température. En effet, si la force de rappel de la stratification n'est pas trop forte, une particule fluide perturbée peut avoir le temps de se réchauffer lors de son mouvement descendant et de se refroidir lors de son mouvement ascendant par diffusion thermique, plus rapide que la diffusion de sel. Sous certaines conditions, le mouvement oscillant de la particule est donc accentué.

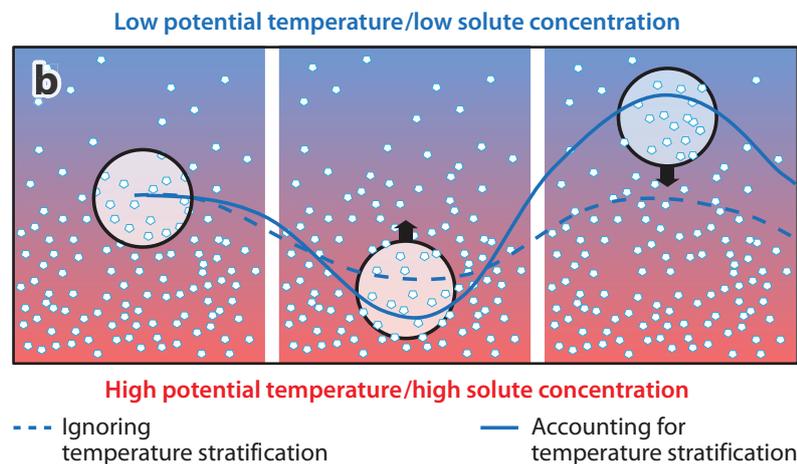


Figure 2.11: En l'absence de gradient de température, la trajectoire d'une particule fluide en milieu stablement stratifié est celle d'une onde interne. En présence d'un gradient instable de température, sous certaines conditions, la particule fluide peut avoir le temps de voir sa température changer : elle se réchauffe en bas de trajectoire et se refroidit en haut. Extrait de Garaud (2018).

En effet, suivons la particule fluide de la figure 2.11. S'il n'y a pas de gradient de température, la particule fluide oscille et son mouvement est celui d'une onde interne : on note z_{\min} et z_{\max} les altitudes, respectivement minimale et maximale, de la particule. Imaginons qu'au cours du mouvement, et en présence cette fois d'un gradient de température, la diffusivité thermique ait le temps de jouer un rôle. Au cours de sa descente, en particulier quand elle arrive au plus bas de sa trajectoire autour de z_{\min} , la particule fluide voit sa température augmenter. Elle reprend ensuite un mouvement ascendant et arrivée à z_{\max} , elle est plus chaude que le fluide ambiant : elle poursuit donc sa trajectoire à une altitude supérieure à z_{\max} , où elle se refroidit. Il est donc possible, pour une certaine plage de paramètres, que le mouvement soit amplifié. Cette instabilité conduit à l'existence de modes localisés d'amplitude suffisamment importante pour provoquer des retournements de densité, créant ainsi des couches dans lesquelles des rouleaux de convection de type Rayleigh-Benard se développent. Ceux-ci conduisent à un mélange vigoureux et créent ainsi des couches mélangées, qui sont séparées par des interfaces nettes. Ce phénomène peut aussi bien avoir lieu dans les mers (Timmermans *et al.*, 2008) que

dans certains lacs (Bouffard and Wüest, 2019).

Ce mouvement peut être mis en équation comme

$$\rho_m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p - \rho g \vec{e}_z + \rho_m \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\rho}{\rho_m} = -\alpha \theta + \beta S, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta + \left(\frac{d\theta_0}{dz} - \frac{d\theta_{\text{ad}}}{dz} \right) v_z = \kappa_\theta \nabla^2 \theta, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla S + \frac{dS_0}{dz} v_z = \kappa_S \nabla^2 S, \quad (2.9)$$

où ρ_m est la densité moyenne de la région concernée, $d\theta_0/dz$ et dS_0/dz sont respectivement les stratifications moyennes de fond pour la température et la concentration saline. $d\theta_{\text{ad}}/dz = -g/c_p$ est le gradient adiabatique de température où c_p est la capacité calorifique à pression constante (Garaud, 2018).

L'étude linéaire de stabilité de ce système d'équations a été réalisé par Baines and Gill (1969). Les nombres adimensionnés qui interviennent sont

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa_\theta}, \tau = \frac{\kappa_S}{\kappa_\theta} \quad \text{et} \quad R_0 = \frac{\alpha \left| \frac{d\theta_0}{dz} - \frac{d\theta_{\text{ad}}}{dz} \right|}{\beta \left| \frac{dS_0}{dz} \right|}, \quad (2.10)$$

où Pr désigne le nombre de Prandtl, τ le rapport des coefficients de diffusion, et R_0 est appelé ratio de densité. L'étude linéaire montre que la convection diffusive est instable par double diffusion lorsque

$$1 < R_0^{-1} < \frac{Pr + 1}{Pr + \tau}, \quad (2.11)$$

la situation où $R_0^{-1} > \frac{Pr+1}{Pr+\tau}$ étant linéairement stable.

Dans le cas des océans, $Pr \simeq 7$ et $\tau \simeq 0.01$, ce qui donne, comme plage d'instabilité

$$1 < R_0^{-1} < 1.1. \quad (2.12)$$

L'étude linéaire pourrait ainsi laisser à penser, étant donné cette faible plage dans le jeu de paramètres, que des instabilités de la convection diffusive ne s'observent que très rarement. Ce n'est cependant pas le cas et il existe de nombreuses observations *in situ* qui témoignent de la présence de cette instabilité même en dehors du cadre donné par l'étude linéaire (Timmermans *et al.*, 2008; Radko, 2013), ce qui suggère que d'autres mécanismes déstabilisants entrent en jeu (Huppert and Moore, 1976; Radko, 2016). Tout récemment, Brown and Radko (2019) ont étudié les effets de la présence d'un forçage du milieu par propagation d'ondes internes sur l'apparition de couches double-diffusives. Ils ont conclu que la présence de ces couches mélangées pouvait être liée à la présence de modes instables, caractérisés par une pulsation très proche de la pulsation de flottabilité.

Avec des profils de densité comme ceux que nous avons observés, la question est entière : s'il y a un effet de double diffusion, d'où vient la source de chaleur ?

2.4.2 Le Schlieren Synthétique pour suivre le phénomène

Le Schlieren Synthétique nous a permis de suivre l'évolution de la stratification au cours du temps : en moyennant les gradients de densité obtenus sur un nombre entier de périodes de forçage, nous nous ramenons à la stratification moyenne de fond. La fréquence d'acquisition de la caméra est de 3 Hz. Il convient de noter que le choix du nombre de périodes pour calculer la moyenne de ces gradients de densité n'est pas trivial : au plus fort de l'activité non-linéaire, un nombre entier de périodes de forçage ne correspond pas nécessairement à un nombre entier de périodes des ondes filles générées par instabilité. Néanmoins, le calcul de la moyenne sur 4 ou 8 périodes de forçage donne des résultats identiques. Nous avons donc fait le choix de réaliser la moyenne sur 4 périodes, ce qui permet un gain de temps dans le post-traitement des données.

Pour s'assurer de la fiabilité de la méthode, nous avons comparé la stratification obtenue à l'aide du Schlieren à celle obtenue par mesure conductimétrique.

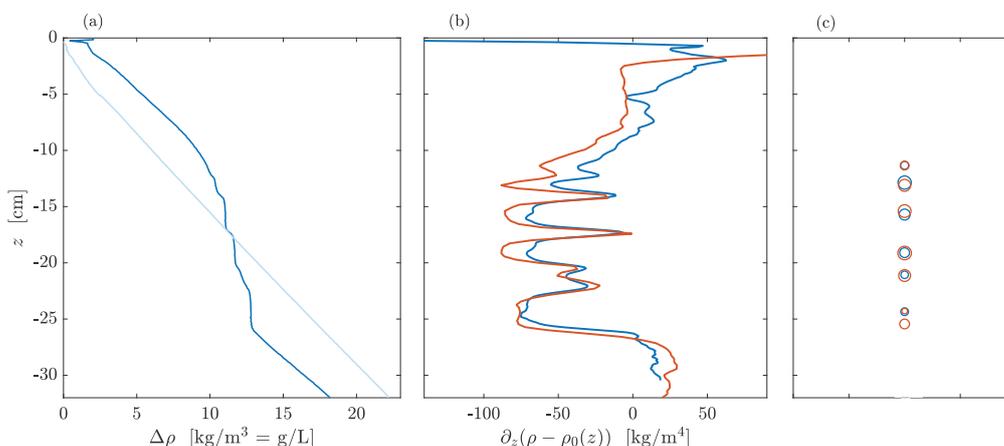


Figure 2.12: (a) : la stratification initiale linéaire (en clair) et la stratification en fin d'expérience après $4400T_0$ (en foncé). (b) : le gradient de densité vertical obtenu par Schlieren (en orange) moyenné sur la longueur de la cuve et celui obtenu par mesure conductimétrique (en bleu). (c) : les zones repérées comme des zones de mélange par observation Schlieren (en orange) et par mesure conductimétrique (en bleu) : le rayon du cercle est lié au rapport d'aspect du minima de gradient vertical de densité. Les deux méthodes donnent des résultats très proches. Les deux mesures sont faites à quelques centimètres du générateur.

La stratification, mesurée par conductimétrie, évolue d'une situation initiale avec un profil linéaire, c'est-à-dire avec un gradient $\partial_z \rho_0$ constant, à une situation présentant un profil en escalier (fig. 2.12, a). En comparant le profil de gradient $\partial_z(\rho - \rho_0)$ obtenu par mesure conductimétrique avec celui obtenu par Schlieren, on constate que les résultats sont tout à fait comparables (fig. 2.12, b). Les zones de mélange, caractérisées par des minima du profil de $\partial_z(\rho - \rho_0)$ peuvent être identifiées sur chacun des deux profils : elles sont localisées de manière similaire que l'on utilise le Schlieren ou la sonde conductimétrique.

Cela confirme que le Schlieren est une bonne méthode de suivi des gradients de densité. Il présente par ailleurs l'avantage de permettre de suivre leur évolution en continu tout au long de l'expérience, ce que ne permet pas la sonde conductimétrique. En effet, celle-ci ne donne qu'une mesure à une distance x donnée du générateur et il faudrait pouvoir prendre plusieurs mesures pour se défaire du signal du passage de l'onde.

2.4.3 Intrusion par chauffage latéral

Comme nous l'avons dit précédemment, GOAL est le dernier né des générateurs que nous utilisons au laboratoire. Les premières expériences faisant appel à ses services sont celles de Dossmann *et al.* (2017). Dans toutes les autres expériences de l'équipe, le forçage était assuré par un générateur monté sur un arbre à cames. Ces deux générateurs ne présentent pas de différences structurelles qui puissent jouer de manière forte sur la propagation des ondes : tous deux ont suffisamment de plaques, 52 pour GOAL et 50 pour le générateur monté sur arbre à cames, pour garantir un profil de forçage que l'on puisse supposer approximativement continu. La seule réelle différence réside dans la méthode d'entraînement des plaques : par des moteurs individuels pour GOAL, par un moteur relié à l'arbre à cames pour les générateurs traditionnels. Si l'explication du profil en escalier repose uniquement sur la propagation des ondes, ledit profil devrait être visible quel que soit le générateur d'ondes utilisé, toutes choses égales par ailleurs.

Nous avons donc monté un générateur à cames sur la même configuration que celle mentionnée par Dossmann *et al.* (2017) pour s'assurer de la reproductibilité ou non de l'apparition des couches mélangées, en imposant un forçage dans les mêmes conditions. Le résultat est présentée en figure 2.13.

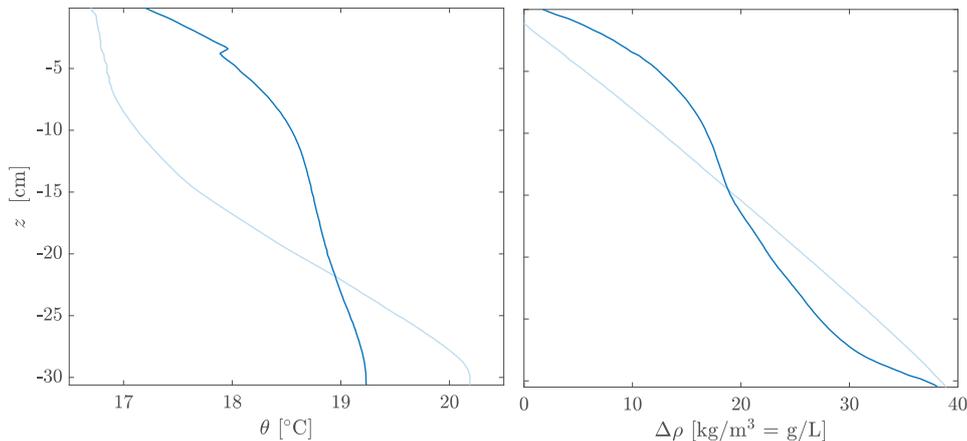


Figure 2.13: Reproduction de l'expérience présentée par Dossmann *et al.* (2017) en forçant avec un générateur entraîné par un arbre à cames plutôt qu'avec GOAL, toutes choses égales par ailleurs. En clair, la stratification initiale, en plus foncé celle en fin d'expérience après $4400T_0$. La mesure est réalisée à 5 cm à droite du générateur. La stratification s'est raidie au centre mais ne présente pas de couche mélangée.

La stratification ici ne présente aucune couche mélangée, bien qu'elle se soit raidie au centre de la cuve du fait combiné du cisaillement et de la propagation d'ondes internes. La présence de GOAL est donc nécessaire pour que la stratification présente une structure en escalier.

Comme nous l'avons souligné, la particularité de GOAL réside dans les 52 moteurs qui entraînent chacune des plaques du générateur d'ondes. Ces moteurs, à l'extérieur de la cuve, chauffent de manière non négligeable, d'autant plus sur de longues durées d'utilisation du générateur. La chaleur dégagée par les moteurs est-elle transmise jusqu'au fluide et provoque-t-elle une intrusion suffisante pour entraîner de la double-diffusion ?

Pour s'en convaincre, et attester du caractère double-diffusif des ces couches mélangées, nous avons utilisé GOAL et imposé un forçage tel que $\omega/N = 1.5 > 1$ pendant la même durée, $4400T_0$. Avec ce choix de fréquence de forçage, les ondes ne se propagent pas dans le milieu. Le profil résultant, visible en figure 2.14 à droite, présente des couches mélangées sur toute la hauteur de la cuve. Celles-ci ne sont donc pas liées à la propagation d'ondes. Par ailleurs, le

profil de température, sur la même figure à gauche, présente de fortes variations par rapport à la situation initiale : le milieu s'est réchauffé d'environ 1°C au centre de cuve et le profil en escalier est également visible. L'augmentation de température plus nette au centre de la cuve peut s'expliquer par le fait que les moteurs des plaques centrales sont entourés de nombreux autres moteurs, ce qui empêche l'évacuation de la chaleur.

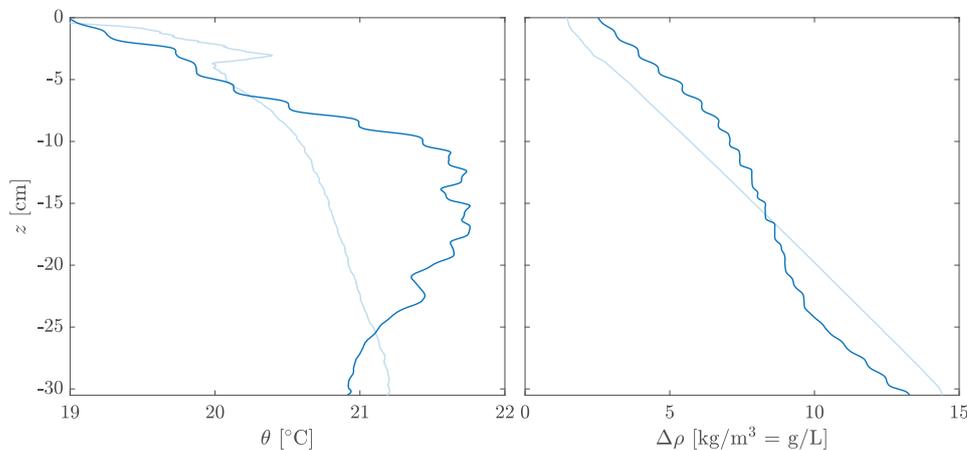


Figure 2.14: Expérience réalisée avec GOAL, en choisissant $\omega/N = 1.5$, $N = 0.65$ rad/s. En clair, la stratification initiale, en plus foncée à la fin de l'expérience, après $4400T_0$. Les ondes sont évanescentes et ne se propagent pas dans le milieu. Pourtant des couches mélangées sont visibles sur toute la hauteur de la cuve en fin d'expérience. La mesure est réalisée à 5 cm du générateur.

Chen *et al.* (1971) ont exploré les caractéristiques des structures de mélange issues de la convection par chauffage latéral dans un milieu stratifié. L'estimation proposée pour la hauteur h des couches mélangées est

$$h = g \frac{\alpha \Delta \theta}{N_0^2} \quad (2.13)$$

où N_0 est la pulsation de flottabilité initiale, α est le coefficient d'expansion thermique introduit en 1.1.2 et $\Delta \theta = \theta_{\text{paroi}} - \theta_0$ l'écart entre la température initiale du fluide et la température à la paroi chauffée. La correspondance entre notre expérience et celles répertoriées dans la littérature est rendue complexe par le fait que nous n'avons pas de mesure instantanée de la température et que par ailleurs le chauffage, artefact du dispositif expérimental, n'est pas contrôlé. Il est difficile de faire précisément le lien avec notre expérience : le profil de température derrière le générateur n'est pas accessible et la stratification initiale n'est pas parfaitement homogène en température. Pour vérifier que l'ordre de grandeur de la hauteur des couches mélangées est cohérent nous avons prélevé un échantillon d'eau près du générateur et mesuré $\theta_{\text{paroi}} \simeq 22.5^\circ\text{C}$. Avec $\alpha = 2 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\Delta \theta \simeq 2^\circ\text{C}$ et $N_0 = 0.65$ rad/s, nous obtenons $h \simeq 1$ cm, ce qui est l'ordre de grandeur observé pour les couches mélangées très nettes visibles entre 5 et 15 cm sous la surface, où le gradient de température est déstabilisant.

Il est à noter que notre expérience présente des conditions assez particulière : le chauffage est latéral, comme dans le cas présenté par Chen *et al.* (1971), mais il n'est pas homogène ce qui pourrait expliquer que le critère sur la hauteur des marches ne soit pas systématiquement atteint dans les effets de gradients thermiques que nous observons. Par ailleurs le gradient thermique vertical que l'on observe au centre de la cuve, qui pourrait correspondre à de la double-diffusion, n'est pas présente sur toute la hauteur de la cuve du fait du chauffage inhomogène.

À titre de comparaison, l'échelle de couches mélange dans le cadre d'un mélange lié à la

turbulence de grille sont données par Holford and Linden (1999) comme étant

$$h = 3.07 \frac{v}{N_0}, \quad (2.14)$$

où v est la vitesse de la grille, N_0 la pulsation de flottabilité de la stratification. Dans notre cas, nous avons des vitesses v de l'ordre de 1 cm/s, ce qui donnerait des couches mélangées d'une hauteur de l'ordre de 4.5 cm.

L'étude jusqu'alors a permis de mettre en évidence que l'hypothèse formulée par Dossmann *et al.* (2017) est fautive : l'apparition de couches mélangées au centre de la cuve n'est pas le résultat d'un phénomène purement turbulent lié à la propagation d'ondes internes. Ce profil en escalier est en réalité la conséquence d'un artefact du dispositif expérimental utilisé : les moteurs qui mettent en mouvement les plaques du générateur chauffent et induisent une intrusion de température suffisante pour provoquer de la double-diffusion au sein de la cuve expérimentale.

2.4.4 Propagation d'ondes internes : confinement des couches mélangées

Nous avons donc conclu que la présence des couches mélangées au centre de cuve est la conséquence d'une double-diffusion thermohaline. Cependant, les mesures conductimétriques réalisées en fin d'expérience ne permettent pas de savoir comment la présence des ondes modifie la formation de couches mélangées par double-diffusion. Pour cela, il faut pouvoir suivre leur formation de manière continue au cours de l'expérience.

Du fait des forts gradients de température entre chaque couche mélangée, la PIV-LIF n'est pas une technique adaptée : les rayons du laser produisant la nappe sont fortement déviés à chaque interface, ce qui entraîne un éclairage inhomogène de la cuve. Nous avons donc opté pour un suivi de la formation de ces couches mélangées par Schlieren Synthétique.

Nous avons donc utilisé cette méthode tout au long de l'expérience. L'évolution du gradient vertical de densité est donné en figure 2.15, chaque courbe étant l'image du profil à un instant donné, de $200T_0$ (en bleu) à $4200T_0$ (en orange). Jusqu'à $400T_0$, le profil de densité n'a pas beaucoup évolué par rapport au profil initial : $\partial_z(\rho - \rho_0(z)) \simeq 0 \text{ kg/m}^4$. Petit à petit, $\partial_z(\rho - \rho_0(z))$ devient négatif, principalement au centre de la cuve : c'est dans cette zone qu'a lieu le mélange le plus fort, par cisaillement et propagation des ondes. La première zone de très fort mélange se distingue à partir de $1000T_0$ à environ 20 cm de fond, profondeur à laquelle s'observe le premier faisceau d'ondes issu de la TRI.

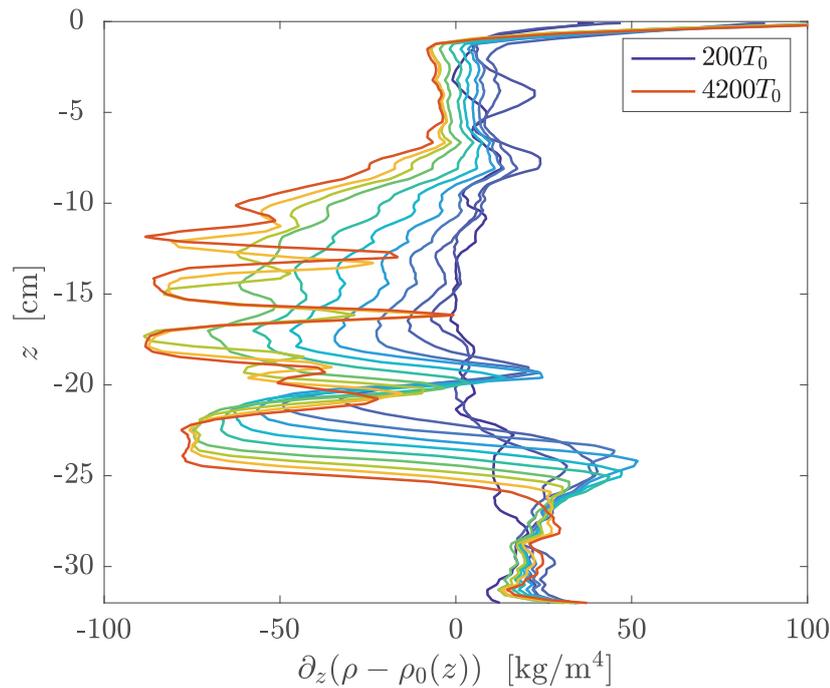


Figure 2.15: Évolution du gradient vertical de densité avec la profondeur, de $200T_0$ (en bleu) à $4200T_0$ (en orange) par pas de $400T_0$. La première étape consiste en un mélange au centre de cuve. Une première zone de mélange apparaît à 20 cm de fond, et est très marquée dès $1000T_0$. Puis les couches mélangées centrales apparaissent plus nombreuses au centre de cuve après $3400T_0$. Les gradients sont mesurés près du générateur.

Le profil de densité ne présente finalement une structure en escalier qu'après $3400T_0$, structure qui se maintient sur la suite de l'expérience. Rappelons que la double-diffusion oscillante peut être observée lorsque la contribution du gradient de température à la stratification devient comparable à celle du gradient de densité : $1 < R_0^{-1} < 1.1$. Avec la propagation des ondes, ce phénomène est accentué par mélange au centre de la cuve : le gradient en salinité diminue, tandis que le générateur chauffe davantage cette même zone. Tant que le générateur tourne, les zones de mélange sont stables. Nous avons cependant remarqué qu'après une nuit de repos, le fluide s'est thermalisé et la structure en escalier n'est plus visible.

En repérant les minimas des profils de la figure 2.15, il est possible de mettre en regard les zones de mélange avec le temps-fréquence de l'expérience. La figure 2.16 permet ainsi de souligner que les zones de mélange en centre de cuve apparaissent à partir de $3000T_0$, alors que les effets non-linéaires ne sont plus visibles : les dernières ondes filles disparaissent du milieu aux alentours de $1800T_0$. Cela tend à confirmer le rôle prépondérant du chauffage par le générateur sur les non-linéarités dans l'apparition des zones de mélange.

Un courant moyen très fort est aussi observé : c'est le signal visible à fréquence nulle. La présence de ce courant moyen est une constante dans nos expériences, que l'on n'arrive pas encore à expliquer.

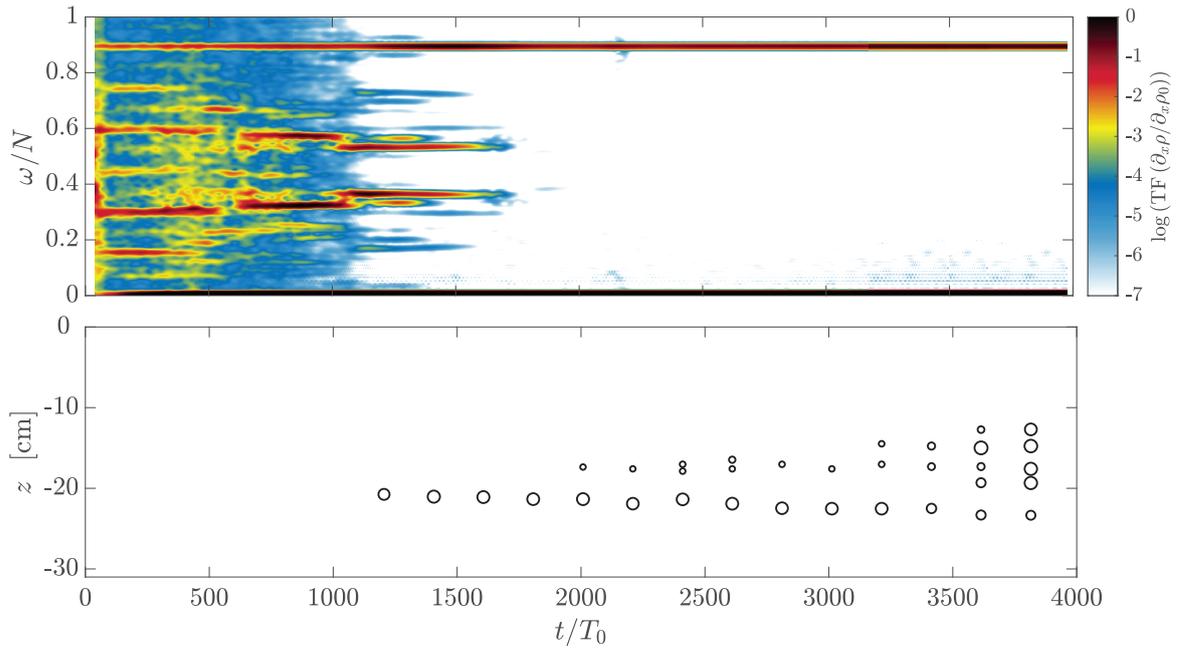


Figure 2.16: En haut, le temps fréquence associé à l'expérience. En bas, les zone de mélange identifiées par analyse Schlieren. L'évolution de la stratification vers un profil en escalier a lieu principalement après $3000T_0$, alors que les ondes filles ne se propagent plus dans le milieu.

Il convient de noter que dans le cas où les ondes ne se propageaient pas, comme en figure 2.14, les couches mélangées apparaissent sur toute la hauteur de la cuve, tandis que dans le cas d'un mode 1 se propageant, celles-ci sont très localisées.

Par ailleurs, nous observons une non-uniformité en fonction de la distance au générateur, placé en $x = 0$ cm. En effet, les différentes mesures conductimétriques réalisées en fin d'expérience à 5, 25 et 45 cm du générateur ne présentent pas la même allure, comme le montre la figure 2.17. Sur cette figure, la ligne verticale rouge représente, dans l'épaisseur du trait, le faible intervalle de R_0^{-1} prédit par la théorie linéaire. Les couches mélangées sont bien présentes près du générateur, ne sont presque plus visible au centre de la cuve et sont totalement absentes en bout de cuve.

Par ailleurs, R_0^{-1} est effectivement très faible au centre de cuve près du générateur : de l'ordre de la dizaine voire de l'unité, alors qu'il est beaucoup plus élevé dans les 10 premiers centimètres sous la surface et dans les 10 derniers centimètres au fond de la cuve. Notons également que ce nombre est d'autant plus grand que la distance au générateur est grande : à 45 cm du générateur, R_0^{-1} est supérieur à 30, raison pour laquelle il n'est pas visible sur le graphique. Cela confirme le chauffage par les moteurs qui mettent en mouvement les plaques du générateur. Rappelons que le fait que R_0^{-1} soit plus grand que l'intervalle prédit par la théorie linéaire n'invalide pas la conclusion du phénomène double-diffusif, comme cela a été mentionné en 2.4.1.

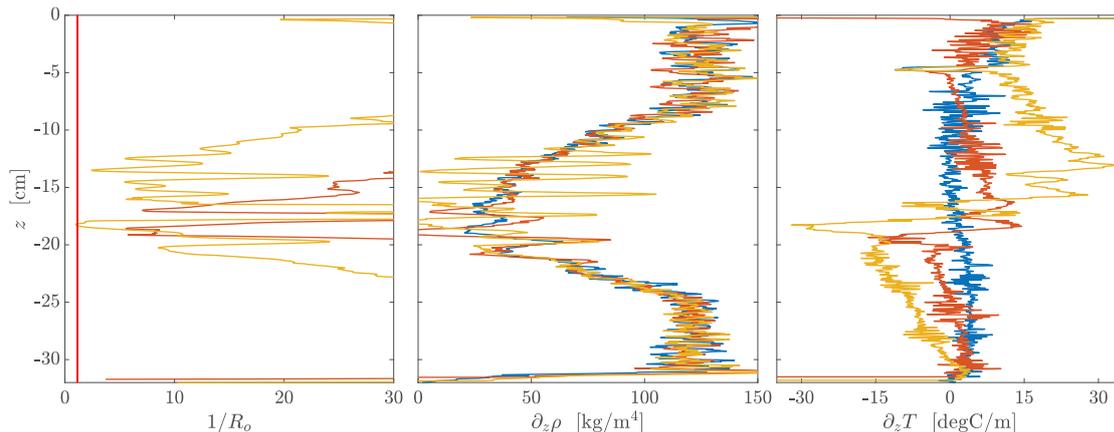


Figure 2.17: Expériences réalisées avec GOAL en mode 1, $\omega_0/N = 0.9$, $N = 1$ rad/s. Les couleurs indiquent les distances au générateur : $x = 5$ cm (en jaune), $x = 25$ cm (en rouge), $x = 45$ cm (en bleu). À gauche est présenté le profil de R_0^{-1} . L'intervalle théorique pour lequel la double-diffusion oscillante a lieu est rappelé par la ligne rouge verticale (l'intervalle mince est contenu dans l'épaisseur du trait). Au centre le profil de gradient de densité vertical. À droite, celui de gradient de température vertical. Les couches mélangées, dont on retrouve la signature en densité et en température, correspondent bien à des zones où R_0^{-1} est faible.

Bilan

Les expériences présentées dans ce chapitre avaient pour but initial d'utiliser la PIV-LIF, technique développée les années précédentes au sein de l'équipe, pour étudier l'évolution d'une stratification soumise à un forçage de longue durée. En particulier, il s'agissait de compléter les observations réalisées par Dossmann *et al.* (2017) d'un profil présentant des couches mélangées au centre de la cuve. Finalement, nos résultats montrent que l'hypothèse physique formulée par Dossmann *et al.* (2017) est fautive : les couches mélangées ne sont pas le résultat d'un processus purement turbulent liés aux ondes internes mais apparaissent par double-diffusion entre le sel et la chaleur. Cette double-diffusion est un artefact de l'expérience. Le chauffage, entretenu par les moteurs du générateur GOAL, n'avait pas été mesuré : il est aussi inattendu qu'incontrôlé. La localisation des marches que l'on observe dans nos cuves est par ailleurs liée à l'effet combiné de la propagation d'ondes internes et des effets double-diffusifs.

Tout ce processus n'a été compris que très tardivement au cours de la thèse et nous n'avons pas eu l'occasion de nous pencher en détail sur l'action simultanée des ondes et de la double-diffusion sur la stratification. Quelques pistes d'étude sont néanmoins proposées dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Rétro-action de la stratification sur les ondes internes

Sommaire

3.1	Modification des modes	53
3.1.1	D'un mode 1 à deux mode 1	54
3.1.2	En présence de double-diffusion : guide d'onde	56
3.2	Sélection des ondes filles	57
3.3	Zoologie des ondes filles	59

Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, notre dispositif expérimental nous place dans une situation singulière : alors que des ondes internes se propagent dans le milieu sous l'effet du générateur GOAL et modifient la stratification de manière globale, il se trouve par ailleurs que ce même générateur chauffe le fluide ce qui entraîne de la double-diffusion générant des couches mélangées localisées. Les observations présentées dans ce chapitre sont les pistes que nous avons pu aborder dans ce contexte expérimental particulier, pistes qui restent cependant largement à explorer.

En effet, la modification de la stratification, qu'elle soit liée à la propagation d'ondes ou à des phénomènes double-diffusif, a des effets en retour sur la propagation desdites ondes. Cet effet de *feedback* est intéressant dans la mesure où il conditionne la manière dont les ondes se propagent dans cette stratification modifiée. C'est un point crucial, entre autres dans la compréhension de la propagation des ondes : est-ce que ce feedback aura tendance à stabiliser le système et l'amener vers une saturation, ou bien le conduire à une éventuelle instabilité ? Cela aura par ailleurs un impact direct sur le mélange auquel on peut s'attendre par déferlement d'ondes internes.

3.1 Modification des modes

La propagation des ondes internes modifie la stratification en induisant du mélange. Comme les ondes ne se propagent qu'à la condition $\omega/N(z) < 1$, une modification de la stratification a un impact en retour sur les ondes qui se propagent. Les pistes évoquées dans cette section reposent sur ce constat, que l'on soit ou non en présence de double-diffusion.

L'expérience présentée dans la section 3.1.1 est réalisée avec un générateur monté sur un arbre à cames pour éviter les phénomènes double-diffusifs. Celle de la section 3.1.2 est réalisée avec le générateur GOAL.

3.1.1 D'un mode 1 à deux mode 1

Les ondes internes en se propageant, modifient la stratification par un processus de mélange irréversible. En particulier, dans le cas d'un forçage avec un mode 1, le mélange est plus intense au centre de la cuve, où le cisaillement est maximal, comme nous l'avons vu en figure (2.13). Le fluide tend ainsi vers plus d'homogénéité au centre de la cuve, où le gradient de densité vertical γ devient plus faible (Bourget, 2014). Par conséquent la valeur de la pulsation de flottabilité diminue dans cette zone. Le rapport ω_0/N n'est plus homogène sur toute la hauteur de la cuve et tend à augmenter au centre de celle-ci. On peut donc s'attendre à ce que la propagation du mode impulsé par le générateur soit perturbée. Nous avons réalisé une expérience dans des conditions semblables aux expériences précédentes, mais en utilisant un générateur monté sur un arbre à cames pour éviter la double diffusion et les effets optiques associés, et pouvoir ainsi utiliser la technique de PIV-LIF. De manière à favoriser l'apparition de TRI, la pulsation des ondes doit être proche de la pulsation de flottabilité, typiquement $\omega_0/N_0 > 0.8$, et leur amplitude doit être forte. L'amplitude du générateur est donc fixée à $a = 9$ mm et $\omega_0/N_0 = 0.9$. Pour une stratification initiale linéaire, de pulsation de flottabilité $N_0 = 0.9$ rad/s, cela donne une période de forçage $T_0 = 7.2$ s. La figure (3.1) montre l'évolution du profil de ω_0/N avec le temps, obtenue par LIF.

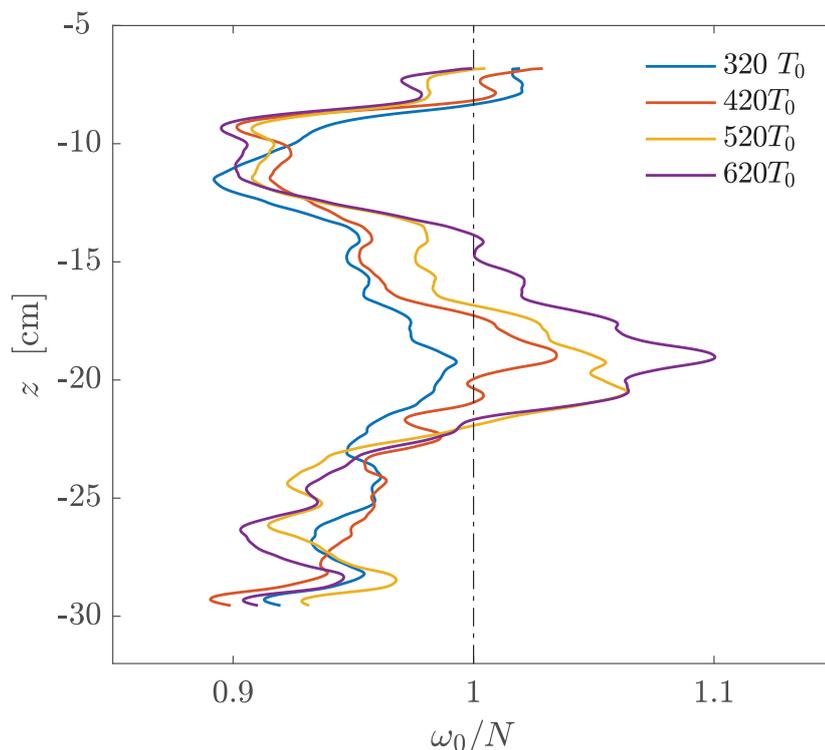


Figure 3.1: Évolution du profil de $\omega_0/N(z)$ avec le temps, par mesure LIF. Conditions expérimentales : générateur monté sur un arbre à cames, $\omega_0/N_0 = 0.9$, $T_0 = 7.2$ s, $a = 9$ mm. La zone centrale est la plus soumise au mélange : c'est entre 15 et 25 cm de fond que le gradient de densité diminue le plus fortement.

Cette figure montre que le mélange au centre de la cuve est déjà visible dès $300T_0$. Aux alentours de $400T_0$, $\omega_0/N(z)$ devient plus grand que 1 sur une fine bande au centre de la cuve,

bande dont l'épaisseur augmente avec le temps. Ainsi, à $600T_0$, l'onde mère doit être évanescence sur toute la zone $15 \text{ cm} < z < 22 \text{ cm}$.

La stratification étant modifiée, avec une bande interdite au centre de la cuve, on peut s'attendre à ce que la propagation du mode soit modifiée. La PIV réalisée de manière synchrone avec la LIF permet d'observer l'évolution du mode. Les champs de vitesse verticale obtenus sont visibles en figure 3.2. Sur cette figure, en (a), il s'agit du champ de vitesse verticale en début d'expérience ($20T_0$) ; en (b), ce même champ plus tard au cours de l'expérience ($900T_0$).

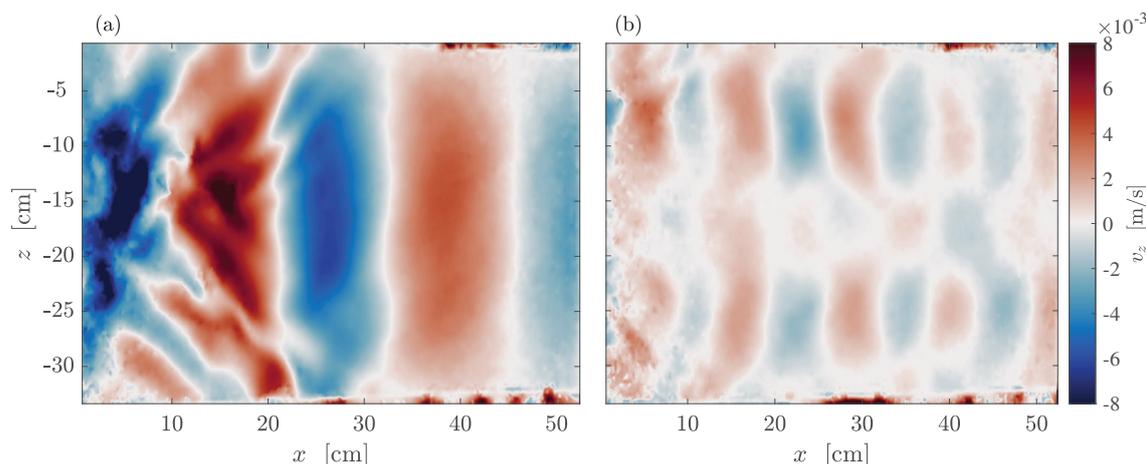


Figure 3.2: Champs de vitesse verticale par mesure PIV. (a) en début d'expérience ($20T_0$) ; (b) plus tard dans l'expérience ($900T_0$). Les conditions expérimentales sont les suivantes : générateur monté sur un arbre à cames, $\omega_0/N_0 = 0.9$, $T_0 = 7.2 \text{ s}$, $a = 9 \text{ mm}$. En début d'expérience, en (a), le mode 1 de forçage occupe toute la cuve, et commence à se déstabiliser près du générateur du fait des conditions propices à l'apparition de TRI. Plus tard, en (b), on constate que le mode s'est scindé en deux modes 1, chacun se propageant sur une moitié de cuve. Leur amplitude est 2 à 3 fois plus faible que celle du mode 1 observé en début d'expérience. Au centre, une zone où l'amplitude de l'onde générée par le forçage est très faible : l'onde ne s'y propage quasiment pas.

À $20T_0$ (*cf.* fig. 3.2a), on reconnaît bien la signature du mode 1 : la vitesse verticale est maximale en centre de cuve. Il est à noter que les premiers 20 cm juste après le générateur sont déjà marqués par la présence d'instabilités triadiques, qui perturbent le motif du mode 1 : on le reconnaît mieux pour $x > 20 \text{ cm}$ où l'onde mère est encore stable. Plus tard au cours de l'expérience, à $900T_0$ (*cf.* fig. 3.2b) on constate un réel changement : le mode 1 initial s'est scindé en deux, et l'on observe deux modes 1 qui occupent chacun une moitié de cuve. Au centre de celle-ci on observe une zone où l'onde générée par le générateur ne se propage pas. Cette zone correspond à celle pour laquelle la condition $\omega_0/N(z) < 1$ n'est plus respectée.

La division du mode 1 en deux a quelque chose de singulier : à partir d'un forçage de type mode 1 sur toute la hauteur de la cuve on retrouve cette signature sur chacune des demi-cuve, malgré l'évolution de la stratification. Tout se passe comme si la longueur d'onde n'était plus imposée par la configuration du générateur en particulier mais aussi par celle de la stratification.

Il est à noter que les amplitudes de modes qui se propagent sur une demi-hauteur de cuve sont 2 à 3 fois plus faibles que celle du mode 1 initial. Cela est probablement lié au fait que le mode 1 forcé par le générateur ne correspond plus à un mode propre de la nouvelle stratification.

Par ailleurs, nous avons vu ici la situation où seule la zone centrale devient interdite à la propagation d'onde. On peut donc se demander si un phénomène similaire est observable dans le cas où des phénomènes double-diffusifs entrent aussi en jeu.

3.1.2 En présence de double-diffusion : guide d'onde

Dans le cadre de nos expériences, les forçages réalisés avec le générateur GOAL entraînent des effets double-diffusifs par intrusion latérale de température, comme nous l'avons mentionné en section 2.4.3. Un profil de densité en escalier est ainsi visible en milieu de cuve, qui alterne des couches mélangées caractérisées par un gradient vertical de densité faible, à des zones de fortes variations en densité. L'expérience présentée est réalisée dans les conditions suivantes : le générateur utilisé est GOAL, $N_0 = 1.4$ rad/s, $\omega_0/N_0 = 0.7$ rad/s, $T_0 = 6.4$ s et l'amplitude du forçage est $a = 7$ mm. Un phénomène proche de celui évoqué dans la section précédente se produit. Sur la figure 3.3a, est représenté le champ de vitesse vertical filtré à la fréquence de forçage à $8000T_0$: les ondes se propagent dans la couche de fluide correspondant aux 10 cm sous la surface, ainsi que sur celle correspondant aux 10 cm du fond de cuve, mais aussi à des altitudes très spécifiques au centre de cuve où l'on reconnaît la signature d'un mode 1. Sur la figure 3.3b est représenté le profil moyen de $\omega_0/N(z)$ au même instant. Ce profil montre que les altitudes où les ondes à fréquence ω_0 se propagent correspondent aux zones de forts gradients en densité (les contre-marches de l'escalier) ; les zones de gradients de densité faible (les marches de l'escalier) correspondent à des altitudes où les ondes à la fréquence ω_0 sont évanescentes.

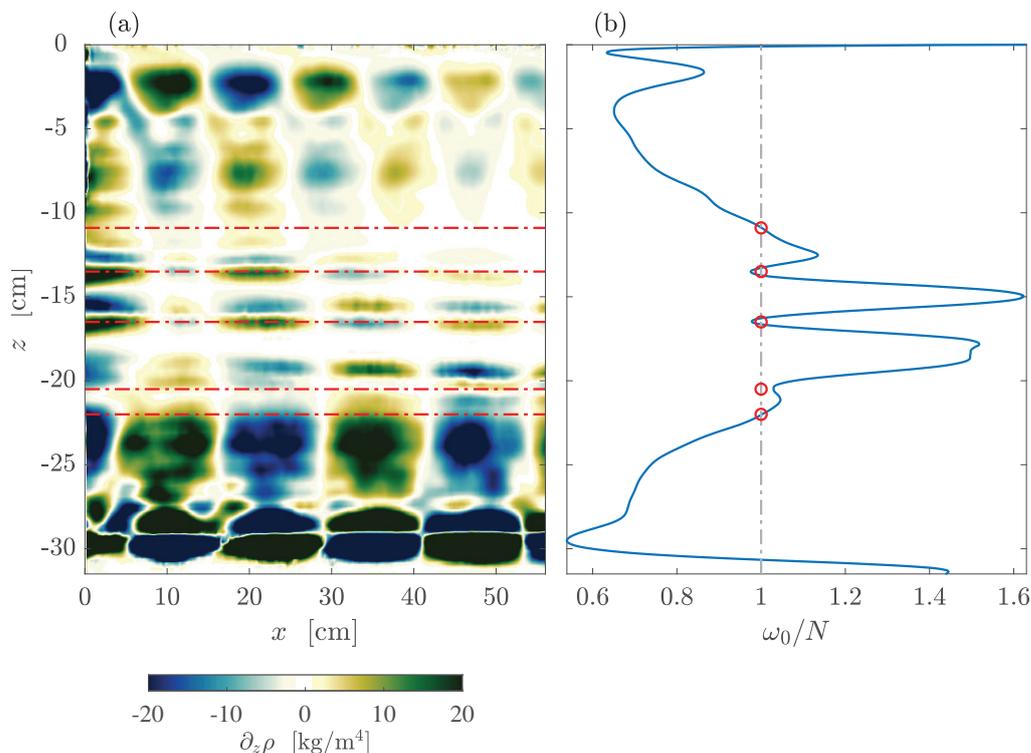


Figure 3.3: Gradient de densité vertical filtré par transformée de Hilbert à la fréquence de forçage en (a), à partir de mesure Schlieren, à $8000T_0$. Profil moyen de $\omega_0/N(z)$ au même instant en (b). Conditions expérimentales : générateur GOAL, $N_0 = 1.4$ rad/s, $\omega_0/N = 0.9$ rad/s, $T_0 = 6.4$ s, $a = 7$ mm. En (a), des ondes à la fréquence de forçage se propagent en haut et en bas de la cuve, sur une dizaine de centimètres, mais aussi au centre de la cuve à des altitudes bien définies. En (b), le profil de ω_0/N montre que ces altitudes correspondent aux zones de forts gradients en densité (les contre-marches de l'escalier). Les zones de gradients de densité faible (les marches de l'escalier), correspondent à des altitudes où les ondes à ω_0 sont évanescentes.

La stratification, par effets combinés de la propagation d'ondes internes et de la double-diffusion, agit finalement comme un guide d'onde. Ici aussi, tout comme dans la section 3.1.1 qui précède, le mode 1 forcé sur toute la hauteur de la cuve s'est scindé en plusieurs modes

1, dont l'extension verticale est conditionnée par la hauteur des zones vérifiant le critère $\omega_0/N(z) < 1$.

3.2 Sélection des ondes filles

Nous avons vu en 3.1.1 que le mode 1, en se propageant, modifie suffisamment la stratification pour empêcher sa propagation sur toute la hauteur du fluide : il se scinde en deux modes 1 sur chaque demi-hauteur du fluide. Nous avons cherché à mettre cette observation en regard avec le temps-fréquence de cette même expérience, visible en figure 3.4. Les premiers instants de l'expérience sont marqués par une très forte activité non-linéaire : les conditions de forçage en fréquence et en amplitude ont été choisies à cet effet. Il est ainsi possible de distinguer des signaux forts qui correspondent à des ondes filles identifiables par la condition de résonance de l'instabilité triadique : $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ où ω_1 et ω_2 sont les pulsations filles et ω_0 celle de l'onde mère, égale à 0.88 rad/s ici. Il est possible d'identifier 4 paires (ω_1, ω_2) données en rad/s : (0.15, 0.73), (0.19, 0.69), (0.23, 0.65), (0.31, 0.57).

Cependant, le milieu est beaucoup plus riche que cet ensemble discret de fréquences d'ondes filles. En effet, on observe une présence de quasiment toutes les fréquences pour $0.1 < \omega/N_0 < 0.9$. Ce fond diffus (en jaune sur les diagrammes temps-fréquence) est présent dès $50T_0$ de l'expérience jusqu'à $500T_0$ environ : cela correspond approximativement au moment où l'onde mère ne peut plus se propager en centre de cuve, où le mélange a suffisamment diminué le gradient de densité pour que $\omega_0/N(z) > 1$.

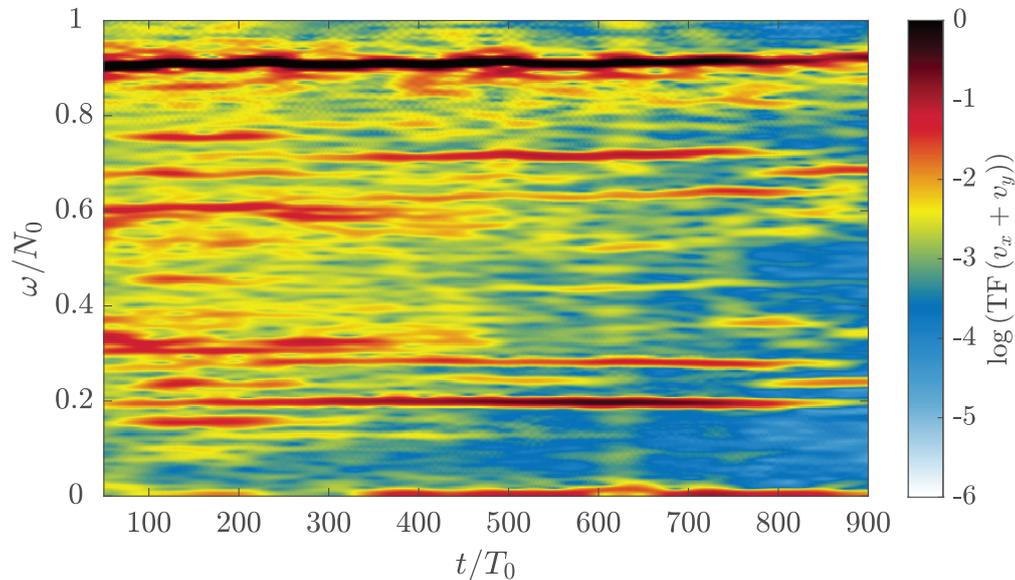


Figure 3.4: Temps-fréquence associé à l'expérience dont les conditions ont été présentées en section 3.1.1. En début d'expérience, du fait de la TRI, de nombreuses ondes filles peuplent le milieu, dont les fréquences sont clairement définies et vérifient la condition de résonance. Néanmoins, jusqu'à $500T_0$ environ, on remarque également un fond diffus (en jaune sur le diagramme) qui indique la présence de toutes les fréquences pour $0.1 < \omega/N_0 < 0.9$. On note que $500T_0$ correspond approximativement au moment où le mode 1 se scinde en deux du fait de l'évolution de la stratification.

On peut donc imaginer le scénario suivant. La stratification initiale est linéaire, le mode 1 adapté à cette stratification caractérisée par N_0 constant, se propage, se déstabilise et donne naissance à des ondes filles par TRI. Le déferlement des ondes qui résultent des instabilités induit du mélange diapycnal qui modifie la stratification de manière irréversible. La strati-

fication présente alors une pulsation de flottabilité $N(z)$ qui dépend de la hauteur, et dont les variations sont suffisamment fortes pour empêcher la propagation du mode 1 sur toute la hauteur de la cuve. Ce mode 1 se modifie progressivement, entraînant avec lui la sélection des ondes filles qu'il a générées. Lorsque le mode 1 est définitivement scindé en 2, il ne peut plus alimenter la formation d'ondes filles, qui disparaissent finalement du milieu. Cela est à mettre en relation avec la remarque faite en section 3.1.1 : le mode 1 perd en intensité quand il est généré dans une stratification dont il n'est plus un mode propre : les modes 1 qui se propagent sur des demi-hauteurs de cuves sont d'intensité plus faible. Finalement, le mode 1 en se propageant est à l'origine des conditions de sa disparition. Par ailleurs les ondes filles générées, en intensifiant le mélange, accélèrent probablement ce processus.

Nous nous sommes de plus interrogés sur le lien entre ce fond diffus et la présence de mélange. Nous avons donc tracé des diagrammes temps-fréquence en découpant la cuve dans sa hauteur, en trois zones : $0 < z < -10$ cm, -10 cm $< z < -20$ cm et -20 cm $< z < -30$ cm. Les diagrammes respectifs de chaque zone sont visibles en figure (3.5). Le fond diffus représente la propagation d'ondes à de multiples échelles, et en particulier aux petites qui favorisent le mélange. On aurait donc pu s'attendre à ce qu'il soit plus marqué au centre de la cuve là où spécifiquement le mélange est plus intense. Le constat est néanmoins que ce fond diffus est présent partout dans la cuve, quelle que soit la zone d'observation choisie : les diagrammes 3.5a,b,c ne présentent pas de différences notables.

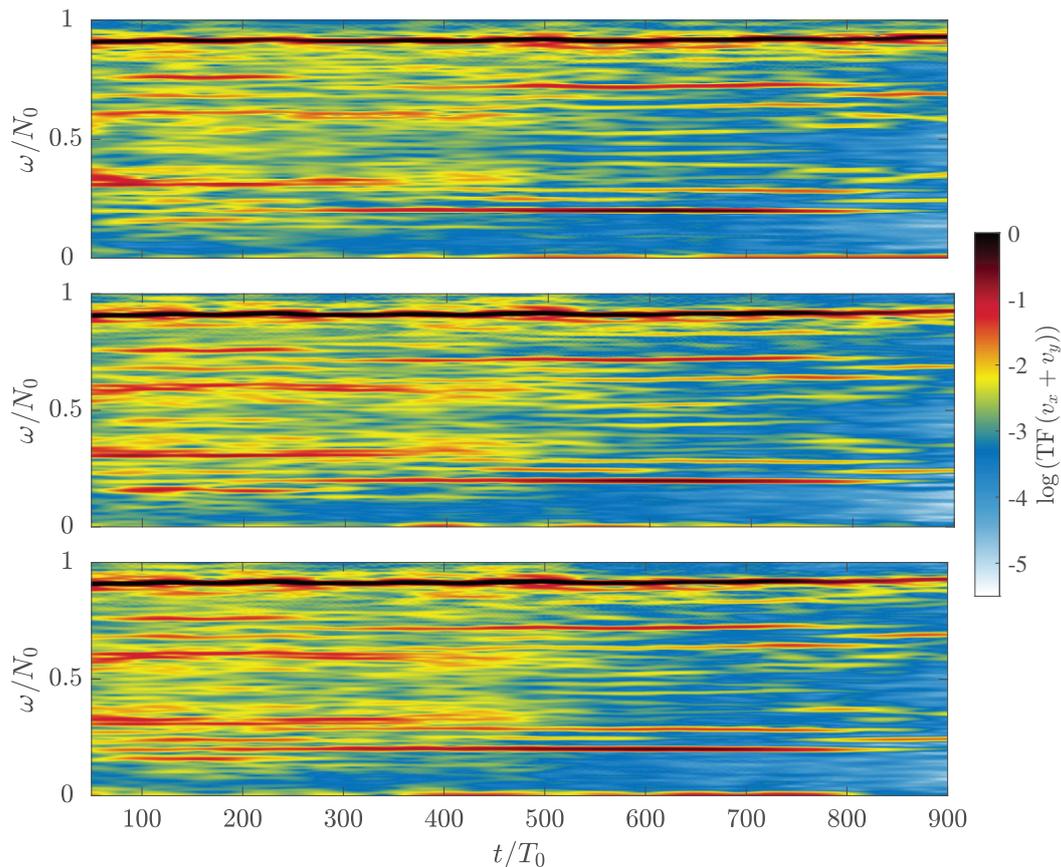


Figure 3.5: Temps-fréquence associés à l'expérience dont les conditions ont été présentées en section 3.1.1. En a) pour $0 < z < -10$ cm, b) pour -10 cm $< z < -20$ cm, c) pour -20 cm $< z < -30$ cm. Les trois diagrammes ne présentent pas de différence concernant la présence du fond diffus présent de $50T_0$ à $500T_0$: sa présence ne semble pas liée à une zone plus propice au mélange.

Il est à noter que ce constat a été fait à la fois lors d'expériences longues sans effets de température que lors d'expériences réalisées avec GOAL, donc avec présence de double-diffusion.

Nous avons vu précédemment que le changement du profil en densité, autrement dit l'apparition de couches mélangées dans le milieu, semble interrompre la génération d'ondes secondaires (fig. 2.16). Par ailleurs, le fait que le spectre évalué à différentes altitudes ne présente pas de différence semble suggérer que le processus de génération des ondes secondaires est un processus global et non local. Ce constat reste le même en l'absence de formation de marches : le raidissement du profil en centre de la cuve (fig. 3.2) correspond au même phénomène mais à plus grande échelle.

3.3 Zoologie des ondes filles

Si l'on connaît le mode de forçage, qui est un mode 1 dans l'expérience considérée, la structure spatiale des ondes filles, autrement dit des sous-harmoniques générées par instabilités, est inconnue. Nous avons ainsi commencé à nous pencher sur la question. Pour cela, nous avons réalisé des filtrages par transformée de Hilbert de sorte à ne récupérer que le champs aux fréquences des ondes filles. Une vue non-exhaustive de la diversité des motifs observés est proposée en figure 3.6.

Cette figure montre, autour du diagramme temps-fréquence présenté en figure 3.4, les champs de vitesse verticale associés à quelques ondes filles présentes dans le milieu. Les champs de vitesse des ondes filles appariées sont regroupés autour du diagramme par paire.

On constate que certaines ondes filles présentent une structure qui, à première vue, semble régulière, semblable à des modes ou des superpositions de mode. Souvent, il s'agit du champ le plus fort des deux ondes appariées, la seconde onde ne présentant pas une structure aussi remarquable. Les premières analyses en décomposition de modes montrent que même les structures qui semblent les plus régulières voient leur signature modale varier au cours du temps. Par ailleurs, cette structure n'est pas non plus homogène dans toute la cuve à chaque instant. C'est par exemple très visible sur le champ correspondant à l'onde $\omega/N_0 = 0.6 \text{ rad/s}$: une structure de mode ne semble reconnaissable que pour $x > 20 \text{ cm}$.

Une remarque générale, en l'état actuel de nos observations, est qu'un forçage par mode 1 ne semble pas donner naissance à d'autres modes 1 parmi les ondes filles : les structures de celles-ci sont plus complexes, et si elles s'apparentent à des modes, ce sont des modes d'ordre supérieur à 1.

Pour pouvoir tirer davantage de conclusions, une étude plus systématiques des ondes filles générées par TRI doit être menée, en commençant par exemple par analyser le cas d'une unique triade dans le milieu.

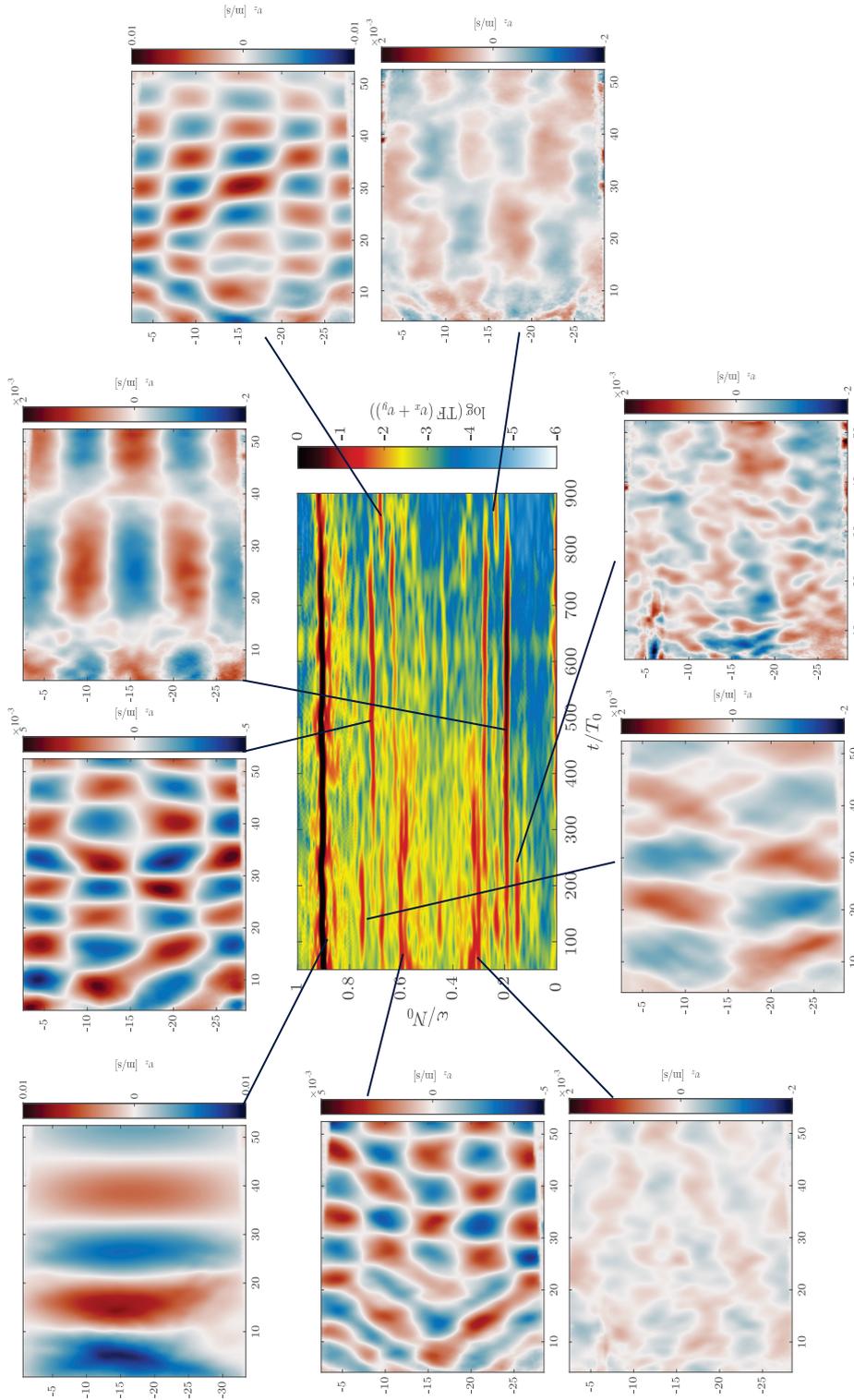


Figure 3.6: Portrait des ondes files à partir de leur champs de vitesse verticale. Les fréquences associées sont indiquées sur le temps-fréquence. Les champs de vitesse des ondes files apparées sont regroupés autour du diagramme par paire. Certaines ondes files semblent avoir des structures régulières, ressemblant fortement à des modes ou à des combinaisons de modes, ce qui est moins le cas pour d'autres, souvent associées à des champs de vitesse plus faibles.

Bilan

Nous avons exploré dans ce court chapitre quelques pistes, qui pourraient faire l'objet d'une étude plus poussée à l'avenir. En particulier nous avons vu :

- qu'un mode 1 forcé sur toute la hauteur de fluide, dans des conditions favorables à l'apparition de TRI, génère des filles clairement identifiables par paire. Néanmoins, tout un continuum de fréquences pour $0.1 < \omega/N_0 < 0.9$ est également présent dans le milieu. Une première analyse semble faire le lien entre la disparition de ces fréquences et la division du mode 1 en deux sur la hauteur de la cuve.
- qu'un mode 1 forcé à ω_0 peut donner plusieurs mode 1 sur les zones où la condition $\omega_0/N < 1$ est vérifiée. Dans le cas d'une stratification en escalier liée à la présence de double-diffusion, cela conduit à la formation d'un guide d'onde.
- que le fait que le mode 1 ne puisse plus se propager sur toute la hauteur du fluide semble également entraîner la disparition des ondes filles.
- que la structure spatiale des ondes filles peut présenter des allures de modes ou de combinaisons de modes, ce qui reste largement à étudier en commençant par des configurations plus simples, par exemple une triade unique.

Nous avons dans ce chapitre brièvement évoqué les structures spatiales des ondes. En particulier, dans le cas la TRI, une onde mère dont on impose la structure spatiale donne naissance à deux ondes filles, de fréquences plus faibles, dont la structure reste à explorer.

Il existe par ailleurs un autre type d'instabilité triadique où une combinaison de modes de même fréquence ω_0 donne naissance à un autre mode à fréquence double. Pour cette instabilité, la structure du mode naissant à fréquence double est conditionnée par les structures des modes de fréquence ω_0 . L'étude de cette instabilité fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Génération d'onde super-harmonique par interaction résonante de mode

Ce chapitre correspond à un article en cours d'écriture. Il est reproduit ci-dessous à l'identique en l'état actuel.

Le travail présenté est le résultat d'une collaboration avec Manikandan Mathur et Dheeraj Varma de l'*Indian Institute of Technology Madras*, à Chennai (Inde).

Les expériences ont été réalisées au sein du laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon.

Sommaire

4.1	Introduction	63
4.2	Experiment and data processing	65
4.3	Theory	67
4.3.1	Constant-amplitude solutions	67
4.3.2	Amplitude evolution equations	68
4.4	Results	70
4.4.1	Superharmonic wave generation (case-1 resonant triad)	70
4.4.2	Forcing at resonant frequency (case-1 resonant triad)	72
4.4.3	Forcing at off-resonant frequencies (case-1 resonant triad)	74
4.4.4	Effect of forcing amplitude at resonance (case-1 resonant triad)	75
4.4.5	Case-2 resonant triad	77
4.5	Discussion	78
4.5.1	Slow temporal evolution	78
4.5.2	Viscous effects	79
4.6	Conclusions	81

Experimental study on superharmonic wave generation by resonant interaction between internal wave modes

Pauline Husseini¹, Dheeraj Varma^{1,2}, Thierry Dauxois¹, Sylvain Joubaud¹, Philippe Odier¹, Manikandan Mathur^{1,2}

1. Univ de Lyon, ENS de Lyon, Univ Claude Bernard, CNRS, Laboratoire de Physique
2. Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology Madras, Chennai

Abstract

We present an experimental study of resonant generation of superharmonic internal waves as a result of interaction between horizontally propagating vertical internal wave modes m and n at frequency ω_0 in a uniformly stratified finite-depth fluid. Thorpe (J. Fluid Mech. **24**, 737, 1966) has shown theoretically that modes m and n at frequency ω_0 and mode- $p = |m - n|$ at frequency $2\omega_0$ are in triadic resonance at specific values of ω_0 . We demonstrate the occurrence of this triadic resonance by forcing a primary wave field of modes m and n at various ω_0 using a novel internal wave generator, and observing the spontaneous growth (or lack thereof) of the superharmonic mode- $p = |m - n|$ at frequency $2\omega_0$. A superharmonic wave field with a predominantly mode- $p = |m - n|$ structure is observed over a finite range of frequency ($\Delta\omega_0 \simeq 0.03N$) around the resonant value, where N is the uniform buoyancy frequency. The spatial growth of the superharmonic wave field is then quantitatively measured, to subsequently compare with the predictions from amplitude evolution equations at resonance at various forcing amplitudes, thereby validating this model. It is furthermore shown that a large scale spatial evolution of the wave field is more suited to describe our experiments than the slow temporal evolution approach. The paper concludes with a brief discussion of viscous effects.

4.1 Introduction

Internal waves, which are propagating disturbances in stably stratified fluids, have been a subject of active research in the last few decades. In oceanic and atmospheric applications, their potential to transport energy and momentum to large horizontal and vertical distances has important implications (Gill, 2016). More importantly, they transfer energy irreversibly from large spatial scales (tides, winds) to significantly smaller scales in the ocean, ultimately contributing to small-scale turbulence and mixing (Munk and Wunsch, 1998b). From a fundamental point of view, the internal wave dispersion relation (Lighthill and Lighthill, 2001) contains several interesting characteristics : (i) anisotropic propagation, (ii) single frequency supporting an infinite number of wavenumbers, (iii) orthogonality between phase and group velocities for plane internal waves. Hence, the manifestations of classical wave phenomena such as resonant generation (Grimshaw and Smyth, 1986; Gayen and Sarkar, 2010), scattering by topography (Robinson, 1969; Bühler and Holmes-Cerfon, 2011) and nonuniform stratifications (Nault and Sutherland, 2007; Mathur and Peacock, 2010), wave-wave interactions (Hasselmann, 1967; Javam *et al.*, 2000), and solitary wave generation (Helfrich and Melville, 2006; Gerkema, 2001) represent fascinating topics in internal waves.

In a uniformly stratified fluid of infinite depth, the dispersion relation for plane internal waves in the two-dimensional xz -plane is

$$\sin^2 \theta = \frac{\omega^2}{N^2}, \quad (4.1)$$

where ω is the internal wave frequency and N the constant buoyancy frequency determined by the background density gradient. The angle θ represents the angle between the wave vector \mathbf{k} and the vertical z -axis (gravity acts along the negative z -axis). Alternately, θ also represents the angle between the group velocity and the horizontal x -axis. Therefore, for given values of ω and N , the horizontal and vertical wavenumbers can take any value in the range of $(-\infty, +\infty)$, while being related by Eq. (4.1). In the presence of rigid horizontal boundaries at $z = 0$ and $z = H$, however, the vertical structure of the stream function is constrained to be of the form $\sin(n\pi z/H)$, where the mode number n takes integer values. As a consequence, the horizontal wavenumbers are also discretized owing to the dispersion relation, and are given by $k = n\pi/(H \cot \theta)$, with propagation occurring only along the horizontal. While plane wave studies in infinite depth are often insightful, there can also be significant deviations when finite-depth effects are included. For example, internal tide generation in a finite-depth ocean can be substantially weaker than in an infinite-depth ocean if the topographic and internal tide length scales are comparable (Llewellyn Smith and Young, 2002). In the current study, we investigate resonant and near-resonant wave-wave interactions in internal wave modes.

For oceanic applications, internal wave research has focused broadly on two different questions. The first relates to mechanisms *via* which internal waves are generated, the amount of energy input into them, and their spatial/temporal scales. Reasonable estimates are now available on internal tide generation by barotropic forcing on bottom topography (Garrett and Kunze, 2007) and wind-forced near-inertial waves in the upper ocean (Alford *et al.*, 2016). The second question relates to the mechanisms *via* which the internal wave energy gets dissipated. Several mechanisms have been proposed, summaries of which can be found in (Staquet and Sommeria, 2002; Lamb, 2014; Dauxois *et al.*, 2018). Triadic resonance represents one such pathway towards dissipation, where energy is transferred to other frequencies and wavenumbers. Specifically, three plane internal waves that satisfy $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ and $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$ spontaneously exchange energy between each other, and are termed together as a resonant triad. In fact, triadic resonance is the underlying mechanism for almost all instabilities in finite-amplitude plane internal waves (Sommer and Klaassen, 1997; Ghaemsaïdi and Mathur, 2019). Triadic resonance is possible in internal wave modes too (Thorpe, 1966), and this paper presents an experimental investigation of the same.

Most studies on triadic resonance consider a primary wave with a finite amount of initial energy and two secondary daughter waves with an infinitesimally small initial energy. Those resonant triads for which the frequencies of the secondary waves are smaller (in magnitude) than the primary wave frequency are referred to as subharmonic resonant triads. For plane internal waves in a uniform stratification, Hasselmann (1967) has theoretically shown that subharmonic resonant triads are unstable, *i.e.* the primary wave would lose its energy to the subharmonic daughter waves. Several numerical studies have then performed detailed investigations of subharmonic triadic resonance in plane waves (Koudella and Staquet, 2006) and realistic ocean settings (Gerkema *et al.*, 2006). In laboratory settings, finite-depth effects are inevitable, and primary standing internal wave modes have been shown to generate other modes at subharmonic frequencies (McEwan, 1971; Martin *et al.*, 1972; McEwan *et al.*, 1972; Benielli and Sommeria, 1998). In contrast to subharmonic triadic resonance, it is also possible that the primary wave field contains two waves of a resonant triad, which in turn generates a superharmonic wave whose frequency is the sum of the primary wave frequencies. We term such resonant triads as superharmonic resonant triads, a classic example of which is the generation of superharmonic internal waves by colliding wave beams (Tabaei *et al.*, 2005). Numerical studies have shown that subharmonic and superharmonic frequencies are simultaneously generated as a result of wave-wave interactions (Korobov and Lamb, 2008).

One of the challenges in laboratory experiments to study internal wave triadic resonance is to force a desired primary wave field, *i.e.* input specific amounts of energy into desired frequencies and wavenumbers. The advent of the internal wave generator (Gostiaux *et al.*, 2007b) has addressed this challenge, and the possibility of exciting various internal wave forms has been demonstrated (Mercier *et al.*, 2010b). Indeed, experimental studies on subharmonic triadic resonance in a plane internal wave (Bourget *et al.*, 2013) and a mode-1 internal wave (Joubaud *et al.*, 2012b) have been performed using the internal wave generator. In this paper, we use this generator to force a primary wave field that contains two different modes at the same frequency, and study the superharmonic wave

generation due to triadic resonance. The theoretical prediction (Thorpe, 1966) of the resonant forcing frequency and the superharmonic mode number are verified, the theoretical estimates (Varma *et al.*, 2019) of energy transfer rates are validated, and near-resonant behaviour is investigated.

The rest of the paper is organized as follows. Section II presents the details of our experimental set-up and measurement techniques. Section III presents the theory that motivates our experiments, and the amplitude evolution equations that are validated by our experiments. Our experimental results are presented in section IV, followed by discussions in section V. A summary of conclusions and future directions are provided in section VI.

4.2 Experiment and data processing

As mentioned in section I, we performed experiments to investigate superharmonic resonant triads, where the primary wave field comprises modes m and n at frequency ω_0 . In a uniform stratification N , internal wave modes m and n at frequency ω_0 are in triadic resonance with mode $p = |m - n|$ at frequency $2\omega_0$ if

$$\frac{\omega_0^2}{N^2} = \frac{(m+n)^2 - 4(m-n)^2}{4[(m+n)^2 - (m-n)^2]} \quad (4.2)$$

is satisfied (Thorpe, 1966). As described below, the internal wave generator was tuned to excite the aforementioned primary wave field. The growth of the superharmonic wave field was then quantitatively measured, and compared with the predictions from the amplitude evolution equations presented in section III. Experiments were also performed at near-resonant frequencies to measure the corresponding resonance width.

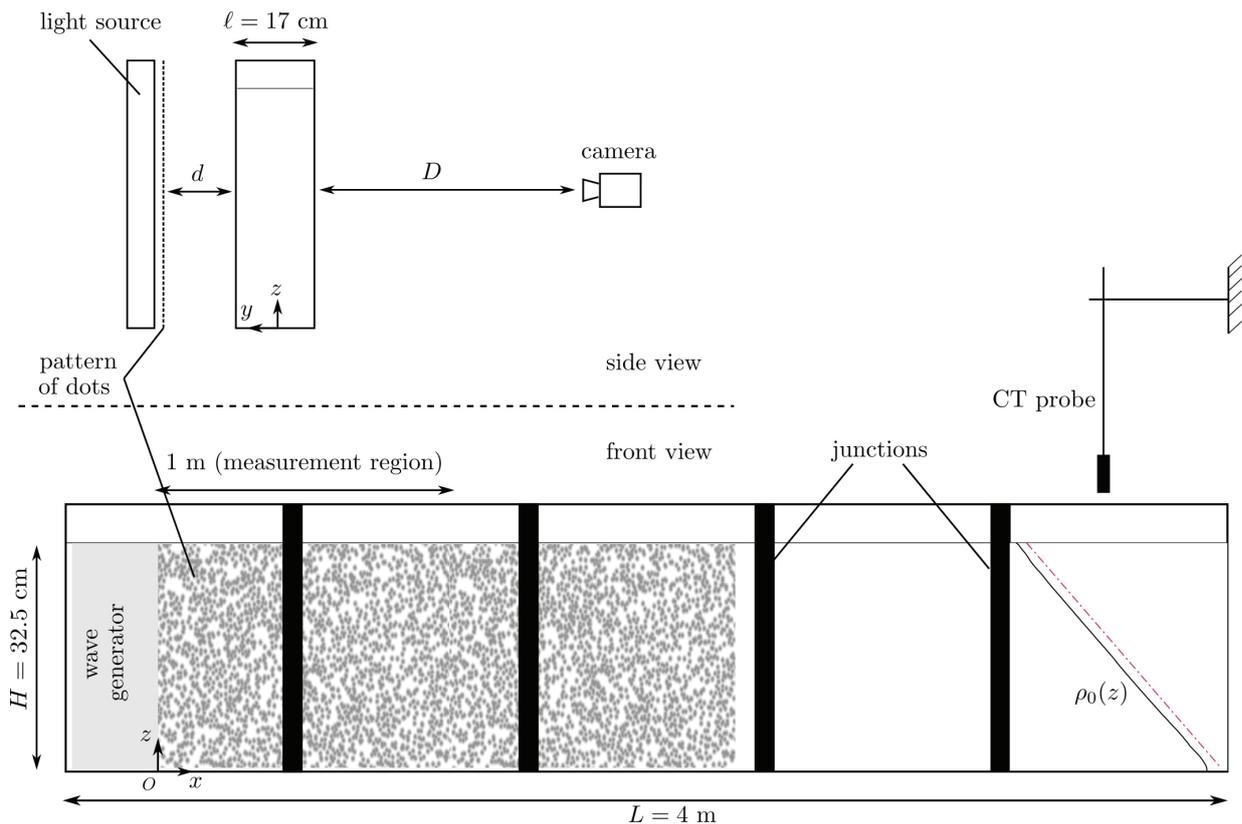


Figure 4.1: Schematic of the experimental set-up used in the current study. The uniform stratification in the perspex tank was measured using a conductivity-temperature (CT) probe before the wave generator was started. A sample measured density profile (black solid line) and a linear fit (red dashed-dotted line) are shown at the right end of the tank. Typical values of $\rho_0(z)$ at the bottom and top of the tank were 1033.1 kg/m^3 and 1000 kg/m^3 , respectively, corresponding to $N = 1 \text{ rad/s}$.

Experiments were performed in a perspex tank of 4 m length and 17 cm width. The perspex tank was

composed of five different components that were each of 0.8 m in length, joined together using screws in the threaded holes on their frames, with a rubber gasket at the joints to prevent leaks. In every experiment, a uniform stratification with $N = \sqrt{(-g/\rho_{ref})d\rho_0/dz} \approx 1$ rad/s over a depth of $H = 32.5$ cm was set up using the double-bucket method (Oster, 1965), with the salinity of the water uniquely determining the density (ρ_0) at different depths in the tank. Here, (x, z) denote the horizontal and vertical coordinates, with gravity $g = 9.8$ m/s² acting along negative z , and $\rho_{ref} = 1000$ kg/m³ is a reference density. The entire experimental facility was maintained at constant room temperature ensuring the background stratification to be function of salinity alone. After each filling, the density profile in the tank was accurately measured using a conductivity-temperature (CT) probe, which was *a priori* calibrated using known density samples. A sample linear density profile measured in one of our experiments is shown at the right end of Fig. 4.1, which also shows a schematic of the entire experimental set-up.

Internal waves at a fixed frequency ω_0 (time period $T_0 = 2\pi/\omega_0$), and comprising specific modes, were forced at the left end of the tank using an internal wave generator whose principle of operation was similar to what is reported in (Mercier *et al.*, 2010b). The internal wave generator comprised 50 plates of 0.65 mm thickness each, and they were independently driven by 50 different motors. Each plate executed constant amplitude oscillations along the horizontal such that the vertical profile of the horizontal displacement field at the wave generator location ($x = 0$) was given by (t denotes time)

$$\Gamma_x(x = 0, z, t) = \left[A_m \cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right) + A_n \cos\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \right] \cos \omega_0 t, \quad (4.3)$$

thus comprising left-to-right propagating modes m and n at amplitudes A_m and A_n , respectively. Since the wave generator forces only the horizontal velocity, and its forcing is (i) discretized (finite thickness of the plates) and (ii) not strictly at a fixed x location (moving plates), not all its forcing is converted into internal waves. Hence, the measured modal amplitudes even in a close neighbourhood of the wave generator would be weaker than what are enforced according to Eq. (4.3).

Quantitative measurements of the instantaneous density gradient perturbation fields were performed using the synthetic Schlieren technique (Dalziel *et al.*, 2000). A back-lit random pattern of dots, as shown in Fig. 1, was placed at a distance of $d = 12.5$ cm behind the back wall of the tank. A 2452×2454 pixels CCD Pike camera (Allied Vision), looking through the tank, captured images (at 5 Hz) of the random pattern of dots from a distance of $D = 280$ cm from the front wall of the tank. Each of the captured images, along with the reference image captured with no flow, was analyzed to estimate the apparent displacement of the dots caused by the density gradient perturbations in the flow. The apparent displacement field was estimated using correlation image velocimetry (Fincham and Delerce, 2000), implemented in the open source software UVMAT (Sommeria, Sommeria). The final output of the processing of the images was a quantitative measurement (at 5 Hz) of the horizontal and vertical density gradient perturbation fields specified on a 128×128 grid, spanning a physical domain of 1 m in the horizontal and the water depth of 32.5 cm in the vertical.

The finite time Fourier transform of any measured quantity $Q(x, z, t)$ is denoted as $\widehat{Q}(x, z, t, \omega)$, using which the quantity filtered at any desired frequency ω (denoted $Q|^\omega$) is reconstructed. For the Fourier transform operation, a time window of $5T_0$ centered around a given time t is used to obtain \widehat{Q} corresponding to t . For the inverse Fourier transform operation used to obtain $Q|^\omega$, a frequency window of 0.8ω to 1.2ω is used. The measured density gradient perturbation fields, filtered at a frequency ω , are then written as

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x}(x, z, t)|^\omega = \sum_{q=1}^{\infty} R_q^\omega(x, t) \sin\left(\frac{q\pi z}{H}\right) \cos(k_q^\omega x - \omega t + \gamma_q^\omega), \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial z}(x, z, t)|^\omega = \sum_{q=1}^{\infty} S_q^\omega(x, t) \cos\left(\frac{q\pi z}{H}\right) \sin(k_q^\omega x - \omega t + \gamma_q^\omega), \quad (4.5)$$

where $k_q^\omega = q\pi/(H \cot \theta^\omega)$ with $\cot \theta^\omega = \sqrt{N^2 - \omega^2}/\omega$, and γ_q^ω the associated phase. The spatial evolution of the modal amplitudes $R_q^\omega(x, t)$ and $S_q^\omega(x, t)$ (estimated by a modal decomposition of the measured density gradient fields, as in Eqs. (4.4)-(4.5)) is then compared with the predictions based on the amplitude evolution equations in section 4.3.2. It is noteworthy that comparisons with the theory presented in section 4.3.2 require steady state amplitudes from the experiments, which we estimate by waiting sufficiently long for steady state to be reached at a given x , but not so long

that the reflected waves from the right end of the tank affect our estimates. Typically, experimental measurements during $15T_0$ to $25T_0$ were observed to be reliable estimates of the steady-state wave field.

Experiments were performed to study two different modal interactions :

Case-1 - $(m, n, p) = (3, 4, 1)$: mode-3 and mode-4 at ω_0 , which are in triadic resonance with mode-1 at $2\omega_0$ if $\omega_0/N = 0.4841$, based on theory (Eq. 4.2). At resonance, assuming $H = 32.5$ cm, the theoretical estimates of horizontal wavelenghts ($\lambda_i = 2\pi/k_i$, $i = 3, 4, 1$) of the three waves are $\lambda_3 = 0.392$ m, $\lambda_4 = 0.294$ m and $\lambda_1 = 0.168$ m.

Case-2 - $(m, n, p) = (3, 5, 2)$: mode-3 and mode-5 at ω_0 , which are in triadic resonance with mode-2 at $2\omega_0$ if $\omega_0/N = 0.4472$, based on theory (Eq. 4.2). At resonance, assuming $H = 32.5$ cm, the theoretical estimates of horizontal wavelenghts ($\lambda_i = 2\pi/k_i$, $i = 3, 5, 2$) of the three waves are $\lambda_3 = 0.433$ m, $\lambda_5 = 0.26$ m and $\lambda_2 = 0.163$ m.

For both cases, experiments were performed for forcing frequencies at and around the resonant frequency so as to demonstrate the occurrence of resonance, investigate the wave field at off-resonant frequencies, and validate the theoretical predictions at resonance. Further experiments were performed at resonance for case-1 to study the effect of forcing amplitudes.

4.3 Theory

In this section, we present the theoretical ideas that motivate our experiments, which concern the nonlinear effects that result from the interaction between two internal wave modes at the same frequency. The equations governing an inviscid, incompressible, non-rotating, two-dimensional flow within the Boussinesq approximation are

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \psi + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [J(\psi, b)] - \frac{\partial}{\partial t} [J(\psi, \nabla^2 \psi)], \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -J(\psi, b) + N^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4.7)$$

where $\psi(x, z, t)$ and $b(x, z, t)$ represent the stream function and buoyancy perturbation, respectively. The background stratification is specified by the buoyancy frequency N , which is assumed constant in the rest of this paper. The Jacobian and Laplacian operators are defined as $J(A, B) = (\partial A / \partial x)(\partial B / \partial z) - (\partial B / \partial x)(\partial A / \partial z)$ and $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$, respectively. The velocity field is given by $(u, w) = (-\partial \psi / \partial z, \partial \psi / \partial x)$.

We consider a flow field given by a regular perturbation series in a small nonlinearity parameter ϵ

$$\psi(x, z, t) = \epsilon \psi_1(x, z, t) + \epsilon^2 \psi_2(x, z, t) + \mathcal{O}(\epsilon^3) + \dots, \quad (4.8)$$

$$b(x, z, t) = \epsilon b_1(x, z, t) + \epsilon^2 b_2(x, z, t) + \mathcal{O}(\epsilon^3) + \dots, \quad (4.9)$$

representing perturbations to the background flow state described by a quiescent fluid with a constant stable stratification N .

4.3.1 Constant-amplitude solutions

Assuming the wave field at $\mathcal{O}(\epsilon)$ to be described by a superposition of linear internal wave modes m and n at frequency ω_0 in a uniformly stratified fluid of depth H , we write

$$\psi_1(x, z, t) = \frac{\Psi_m}{2} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) e^{i(k_m x - \omega_0 t)} + \frac{\Psi_n}{2} \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) e^{i(k_n x - \omega_0 t)} + c.c., \quad (4.10)$$

$$b_1(x, z, t) = -N^2 \left[\frac{\Psi_m k_m}{2\omega_0} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) e^{i(k_m x - \omega_0 t)} + \frac{\Psi_n k_n}{2\omega_0} \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) e^{i(k_n x - \omega_0 t)} + c.c. \right] \quad (4.11)$$

where the complex amplitudes Ψ_m and Ψ_n are assumed to be constant in this subsection. The horizontal wave numbers k_m and k_n are given by $k_m = m\pi / (H \cot \theta_0)$ and $k_n = n\pi / (H \cot \theta_0)$, where $\cot \theta_0 = \sqrt{N^2 - \omega_0^2} / \omega_0$ results from the linear internal wave dispersion relation (4.1). Note that the no-normal-flow boundary condition is satisfied at the horizontal boundaries at $z = 0$ and $z = H$.

Substituting Eqs. (4.8)-(4.9) in the governing Eqs. (4.6)-(4.7), with ψ_1 and b_1 being given by Eqs. (4.10)-(4.11), the flow field at $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ can be shown to be

$$\begin{aligned} \psi_2(x, z, t) = & I_{mn} \sin\left(\frac{(n-m)\pi z}{H}\right) \frac{\Psi_m \Psi_n}{4} e^{i[(k_m+k_n)x-2\omega_0 t]} \\ & + J_{mn} \sin\left(\frac{(n+m)\pi z}{H}\right) \frac{\Psi_m \Psi_n^*}{4} e^{i[(k_m-k_n)x]} + c.c., \end{aligned} \quad (4.12)$$

where

$$I_{mn} = \frac{mn(m^2 - n^2)}{\cot \theta_0} \frac{N^2}{\omega_0} \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \left(\frac{1}{(m+n)^2(N^2 - 4\omega_0^2) - (m-n)^2 4\omega_0^2 \cot^2 \theta_0} \right), \quad (4.13)$$

and

$$J_{mn} = \frac{-2mn}{\omega_0 \cot \theta_0} \left(\frac{\pi}{H}\right)^2. \quad (4.14)$$

The corresponding buoyancy $b_2(x, z, t)$ at $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ is given by

$$\begin{aligned} b_2(x, z, t) = & a_{mn} \sin\left(\frac{(n-m)\pi z}{H}\right) \frac{\Psi_m \Psi_n}{4} e^{i[(k_m+k_n)x-2\omega_0 t]} \\ & + b_{mn} t \sin\left(\frac{(n+m)\pi z}{H}\right) \frac{\Psi_m \Psi_n^*}{4} e^{i[(k_m-k_n)x]} + c.c., \end{aligned} \quad (4.15)$$

where

$$a_{mn} = \left(\frac{N_0^2}{\omega_0}\right) \frac{4mn(m-n)}{\cot^2 \theta_0} \left(\frac{\pi}{H}\right) \left(\frac{(m+n)^2 - (m-n)^2 \cot^2 \theta_0}{(m+n)^2(N_0^2 - 4\omega_0^2) - (m-n)^2 4\omega_0^2 \cot^2 \theta_0} \right), \quad (4.16)$$

$$b_{mn} = \left(\frac{iN_0^2}{\omega_0}\right) \frac{mn(m-n)}{\cot^2 \theta_0} \left(\frac{\pi}{H}\right) [1 + (m-n)^2]. \quad (4.17)$$

The weakly nonlinear solution (4.12) and (4.15) thus comprises one term at frequency $2\omega_0$ and another at zero frequency, with the latter corresponding to Eulerian mean flow. The linear dependence on time of the second term in Eq. (4.15) suggests that the buoyancy associated with the Eulerian mean flow continuously increases with time, thus raising questions about the validity of the solutions in Eq. (4.12) & (4.15) at large times. For the experimental conditions we consider in this paper, it would take of the order of 10^5 primary wave time periods before the second term in Eq. (4.15) became comparable to the buoyancy associated with the background stratification. Since we report measurements from much smaller times (of the order of a few tens of the primary wave time period), the effect of the linear growth in time seen in Eq. (4.15) is likely to be insignificant in our results.

The amplitude of the term at frequency $2\omega_0$ in Eq. (4.12) and Eq. (4.15) diverges if Eq. (4.2) is satisfied, a result previously shown in (Thorpe, 1966), and extended further to the case of non-zero background rotation and nonuniform stratification in (Varma and Mathur, 2017). In other words, for the values of ω_0 given by Eq. (4.2), modes m and n at frequency ω_0 are in triadic resonance with mode $|m-n|$ at frequency $2\omega_0$.

For the triadic resonance that results from the frequency ω_0 satisfying Eq. (4.2), allowing temporal or spatial evolution of the modal amplitudes could rectify the unphysical divergence of the flow field at $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Such amplitude evolution equations are derived using the classical method of multiple scales (Nayfeh, 2008), where it is assumed that the temporal or spatial scales over which the modal amplitudes evolve are much larger than those corresponding to the frequencies or spatial wavenumbers of the waves.

4.3.2 Amplitude evolution equations

In our lab experiments, a wave generator continuously forces the primary waves from a spatially local region, *i.e.* around $x = 0$. The wave field then evolves nonlinearly as it propagates away from the wave generator. Thus, we assume the existence of a slowly varying spatial coordinate $X = \epsilon x$ over

which the internal wave modal amplitudes vary. At the leading order $\mathcal{O}(\epsilon)$, the wave field comprises all three waves forming the resonant triad, *i.e.* modes m and n at frequency ω_0 and mode $p = |m - n|$ at frequency $2\omega_0$, given as

$$\begin{aligned} \psi_1(x, z, t) = & \frac{\Psi_m(X)}{2} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) e^{i(k_m x - \omega_0 t)} + \frac{\Psi_n(X)}{2} \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) e^{i(k_n x - \omega_0 t)} \\ & + \frac{\Psi_p(X)}{2} \sin\left(\frac{(n-m)\pi z}{H}\right) e^{i(k_p x - 2\omega_0 t)} + c.c., \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} b_1(x, z, t) = & -N^2 \left[\frac{\Psi_m(X)k_m}{2\omega_0} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) e^{i(k_m x - \omega_0 t)} + \frac{\Psi_n(X)k_n}{2\omega_0} \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) e^{i(k_n x - \omega_0 t)} \right. \\ & \left. + \frac{\Psi_p(X)k_p}{4\omega_0} \sin\left(\frac{(n-m)\pi z}{H}\right) e^{i(k_p x - 2\omega_0 t)} + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Here, the horizontal wavenumber $k_p = p\pi/(H \cot \theta_p)$, with $\cot \theta_p = \sqrt{N^2 - 4\omega_0^2}/(2\omega_0)$, satisfies $k_p = k_m + k_n$, thus causing triadic resonance. In terms of the streamfunction amplitudes, the modal amplitudes of the horizontal displacement forced by the wave generator A_m and A_n in Eq. (4.3) can be written as $|A_m| = \epsilon |\Psi_m(X=0)| m\pi/(H\omega_0)$ and $|A_n| = \epsilon |\Psi_n(X=0)| n\pi/(H\omega_0)$, where ϵ appears since $\epsilon\psi_1$ is what represents the primary wave field.

The amplitude evolution equations can be shown to be (Varma *et al.*, 2019)

$$\frac{d\Psi_j}{dX} = i\alpha_j \Psi_q^* \Psi_p, \quad \text{where } (j, q) = (m, n) \text{ or } (n, m) \quad (4.20)$$

$$\frac{d\Psi_p}{dX} = i\alpha_p \Psi_m \Psi_n, \quad (4.21)$$

where the constants α_m , α_n and α_p are given by

$$\alpha_j = \frac{-1}{4k_j} \frac{\int_0^H \phi_j(z) [B_{qp}(z) + B_{pq}(z)] dz}{\int_0^H \phi_j^2(z) [N^2 - \omega_0^2] dz}, \quad \text{where } (j, q) = (m, n) \text{ or } (n, m) \quad (4.22)$$

$$\alpha_p = \frac{-1}{4k_p} \frac{\int_0^H \phi_p(z) [C_{mn}(z) + C_{nm}(z)] dz}{\int_0^H \phi_p^2(z) [N^2 - 4\omega_0^2] dz}. \quad (4.23)$$

The expressions for $C_{jq}(z)$ and $B_{jq}(z)$ are ($j = m, n$ or p and $q = m, n$ or p)

$$\begin{aligned} C_{jq}(z) = & \frac{k_q}{\omega_q} (k_j + k_q) \left(k_j N^2 \phi_j \phi'_q - k_q N^2 \phi'_j \phi_q \right) \\ & - (\omega_j + \omega_q) \left(k_j \phi_j (\phi_q'' - k_q^2 \phi'_q) - k_q \phi'_j (\phi_q'' - k_q^2 \phi_q) \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} B_{jq}(z) = & \frac{k_q}{\omega_q} (k_j - k_q) \left(k_j N^2 \phi_j \phi'_q + k_j \frac{d(N^2)}{dz} \phi_j \phi_q + k_q N^2 \phi'_j \phi_q \right) \\ & - (\omega_j - \omega_q) \left(k_j \phi_j (\phi_q''' - k_q^2 \phi'_q) + k_q \phi'_j (\phi_q'' - k_q^2 \phi_q) \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

where $\phi_m = \sin(m\pi z/H)$, $\phi_n = \sin(n\pi z/H)$ and $\phi_p = \sin((n-m)\pi z/H)$.

Figure 4.2(a) shows the horizontal spatial evolution of the primary and superharmonic modal amplitudes (of the horizontal density gradient perturbation, defined in Eq. 4.4) based on the numerical solution of Eqs. (4.20)-(4.21) for the case-1 resonant triad. The superharmonic wave, extracting energy from the primary waves, grows in amplitude from $x = 0$. For small values of x , the primary wave amplitudes decrease relatively slowly, resulting in an almost linear growth of the superharmonic wave amplitude. The superharmonic wave amplitude reaches values that are significantly larger than

the primary wave amplitudes by around $x = 0.5$ m, beyond which the spatial evolution of all three amplitudes becomes evidently nonlinear. In terms of energy content, by $x = 1.66$ m, the mode-4 primary wave has lost all its initial energy, while the mode-1 superharmonic wave contains 85% of the total energy. Energy then flows from the superharmonic to the primary waves from $x = 1.66$ m to $x = 3.32$ m, and the relative energy distribution between the three waves at $x = 3.32$ m is identical to that at $x = 0$. The amplitude evolution between $x = 0$ and $x = 3.32$ m repeats for larger x , assuming that the flow remains in the weakly nonlinear inviscid regime of the isolated resonant triad under consideration. The amplitude evolution for the case-2 resonant triad (Fig. 4.2b) is qualitatively similar to that for case-1, with the superharmonic mode-2 containing 75% of the total energy by $x = 1.63$ m.

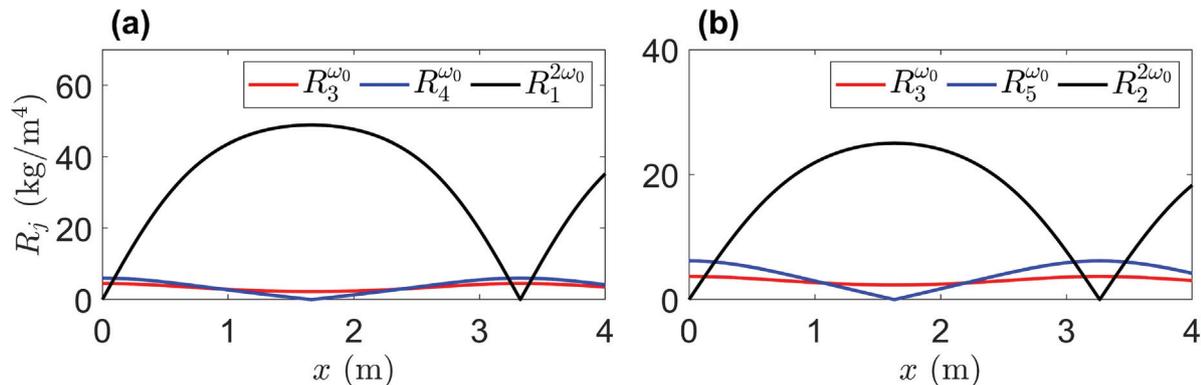


Figure 4.2: Theoretical spatial evolution of the modal amplitudes, R_j , of $\partial\rho'/\partial x$ for the (a) case-1 resonant triad, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 4, 1)$ at $\omega_0/N = 0.4841$ and (b) case-2 resonant triad, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 5, 2)$ at $\omega_0/N = 0.4472$. In each of the plots, the amplitudes of mode- m at ω_0 , mode- n at ω_0 and mode- p at $2\omega_0$ are shown in red, blue and black, respectively. The plots in this figure have been obtained by numerically solving Eqs. (4.20)-(4.21) for the corresponding resonant triad, with $H = 0.325$ m and $N = 1$ rad/s. The initial conditions $\Psi_m(X = 0)$ and $\Psi_n(X = 0)$ correspond to $(A_m, A_n) = (5, 5)$ mm in Eq. (4.3), with $\Psi_p(X = 0) = 0$.

In summary, Fig. 4.2 shows that the superharmonic wave grows linearly with x for small x as the primary wave modes contain finite and slowly varying energies. For typical experimental conditions considered in this paper (primary waves forced at resonance with a horizontal displacement amplitude of 5 mm each), the superharmonic wave is predicted to contain the bulk of the total energy by around $x = 1.6$ m. In our experiments, we aim to validate the theoretical predictions presented in Fig. 4.2. As discussed in section 4.4, the spatial growth at small x is rigorously validated by experiments. The longer term spatial evolution, however, is not so easily validated due to viscous effects and the end walls of the tank generating a reflected wave field in our measurement region. The viscous effects, including a methodology on how to incorporate them in theory, are discussed in section 4.5.2.

4.4 Results

In this section, we present our experimental results obtained for the case-1 and case-2 resonant triads. Sections 4.4.1-4.4.4 concern the case-1 resonant triad, sequentially showing the generation of a superharmonic wave field, validation of the theoretically predicted spatial structure and the amplitude evolution equations at resonance, investigation of the superharmonic wave field at off-resonant frequencies, and finally a presentation of results on the effect of the primary wave forcing amplitudes. Section 4.4.5 concerns the case-2 resonant triad, demonstrating the occurrence of resonance, validating the theoretical amplitude evolution equations, and studying the off-resonant behaviour.

4.4.1 Superharmonic wave generation (case-1 resonant triad)

Figure 4.3 shows the time frequency plots based on the measured horizontal density gradient field from four different experiments with the forcing corresponding to $(m, n) = (3, 4)$. Figure 4.3(a), corresponding to the experiment with $(A_3, A_4) = (5, 5)$ mm and the resonant forcing frequency of $\omega_0/N = 0.4841$, shows the emergence of a strong signal at the superharmonic frequency $2\omega_0$. By around $10T_0$, the wave field at $2\omega_0$ seems to be as strong as the wave field at the forcing frequency

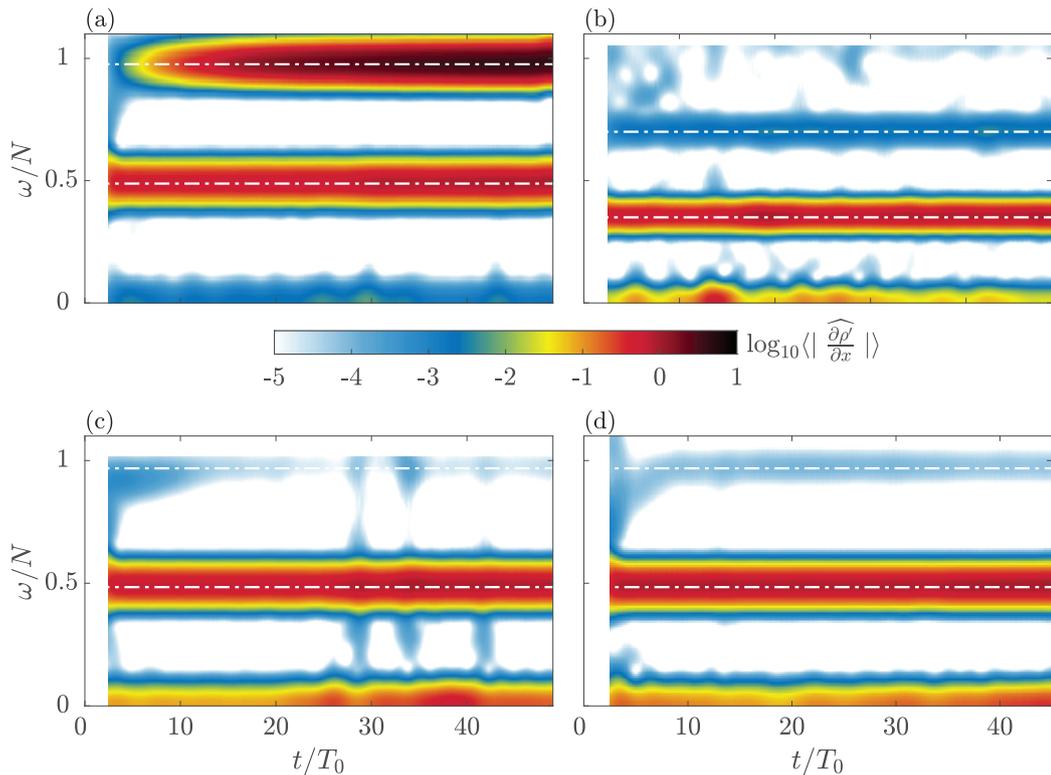


Figure 4.3: Time frequency spectrum $|\widehat{\frac{\partial \rho'}{\partial x}}(\omega, t)|$, spatially averaged over $6 \leq x \leq 25$ cm, $0 \leq z \leq 32.5$ cm, in four different experiments for the case-1 resonant triad, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 4, 1)$. The four panels correspond to (a) the resonant forcing frequency $\omega_0/N = 0.4841$ with $(A_3, A_4) = (5, 5)$ mm, (b) the off-resonant forcing frequency $\omega_0/N = 0.3$ with $(A_3, A_4) = (5, 5)$ mm, (c) the resonant forcing frequency $\omega_0/N = 0.4841$ with $(A_3, A_4) = (5, 0)$ mm, and (d) the resonant forcing frequency $\omega_0/N = 0.4841$ with $(A_3, A_4) = (0, 5)$ mm. The white dashed-dotted lines in all the plots correspond to $\omega/N = \omega_0/N$ and $2\omega_0/N$. Every plot has been normalized such that the maximum value at the forcing frequency $\omega = \omega_0$ is unity.

ω_0 . In contrast, at the off-resonant forcing frequency of $\omega_0/N = 0.3$ (Fig. 4.3b), the superharmonic generation is significantly weaker, with a strength that is at least a couple of orders of magnitude smaller than the primary wave field. It is noteworthy that the forcing amplitudes are $(A_3, A_4) = (5, 5)$ mm in Fig. 4.3(b) too, and hence the difference between Figs. 4.3(a) & (b) is attributed entirely to the difference in the forcing frequencies.

To highlight the role of simultaneous presence of modes- m and n in the primary wave field for resonant superharmonic generation, the bottom row of Fig. 4.3 shows results from experiments where only mode-3 (Fig. 4.3c) or mode-4 (Fig. 4.3d) was forced, both at the resonant forcing frequency of $\omega_0/N = 0.4841$. Both experiments show negligible generation of a superharmonic wave field, thus confirming that the interaction between modes 3 and 4 is essential for the superharmonic generation observed in Fig. 4.3(a). In summary, Fig. 4.3 presents experimental confirmation of strong superharmonic generation due to resonant interaction between modes 3 and 4 at the primary wave frequency of $\omega_0/N = 0.4841$. We then proceed to investigate the spatial structure of the superharmonic wave field observed in Fig. 4.3(a), and verify if it indeed contains predominantly mode- p with $p = |m - n| = 1$.

4.4.2 Forcing at resonant frequency (case-1 resonant triad)

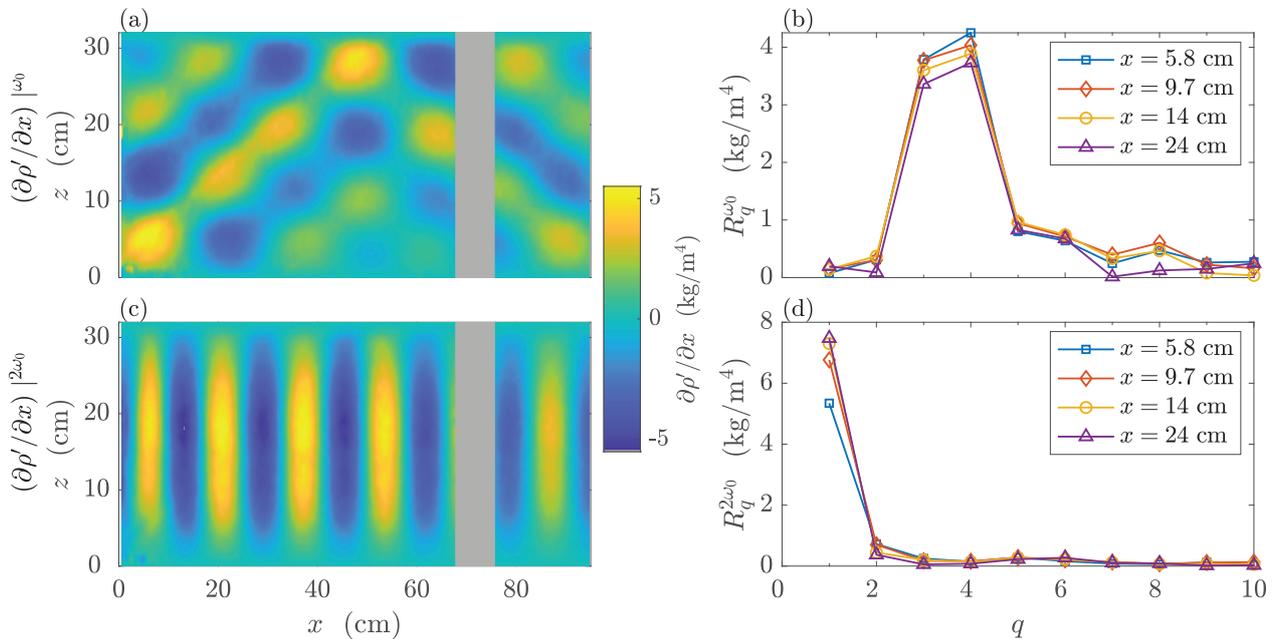


Figure 4.4: Experimental measurements for the case-1 resonant triad, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 4, 1)$, at the resonant forcing frequency of $\omega_0/N = 0.4841$, and forcing amplitudes of $(A_3, A_4) = (5, 5)$ mm. (a) Horizontal density gradient field filtered at the forcing frequency ω_0 . (b) Modal decomposition at four different x locations (see legend) of the wave field shown in (a). (c) Horizontal density gradient field filtered at twice the forcing frequency, *i.e.* $2\omega_0$. (d) Modal decomposition at four different x locations (see legend) of the wave field shown in (c). All the plots correspond to $t = 20T_0$, thus representing the steady state wave field.

Figure 4.4(a) shows the spatial structure of the steady-state wave field filtered at the forcing frequency ω_0 in the experiment corresponding to Fig. 4.3(a), *i.e.* $(m, n) = (3, 4)$, $(A_3, A_4) = (5, 5)$ mm and $\omega_0/N = 0.4841$. The observed wave field can be understood as a superposition of spatially evolving modes 3 and 4 that are forced at $x = 0$. Indeed, modal decomposition at different x locations reveals that the steady-state wave field predominantly contains modes 3 and 4 (Fig. 4.4b). Furthermore, we also observe that the primary wave amplitudes decay with x , with modes 3 and 4 reducing in amplitude by 13.8% and 11.5%, respectively, over 0.182 m. The occurrence of weak but non-zero amplitudes at modes 5 and 6 is attributed to both the discrete nature of forcing by the wave generator, and finite resolution (in space and time) of the experimental measurements.

Figure 4.4(c) shows the spatial structure of the steady-state wave field filtered at the superharmonic frequency $2\omega_0$ in the same experiment as in Fig. 4.4(a). A mode-1 structure is clearly evident, and is consistent with the theoretical prediction that the generated superharmonic wave will have a mode- p structure with $p = |m - n| = 1$. Furthermore, the observed horizontal wavelength of 15.5 cm is close to the theoretical estimate of 16.8 cm for the mode-1 internal wave horizontal wavelength at $2\omega_0/N$ (see end of section 4.2). The results from modal decomposition (Fig. 4.4d) confirm that the superharmonic wave field is dominated by mode-1, with its amplitude increasing with x .

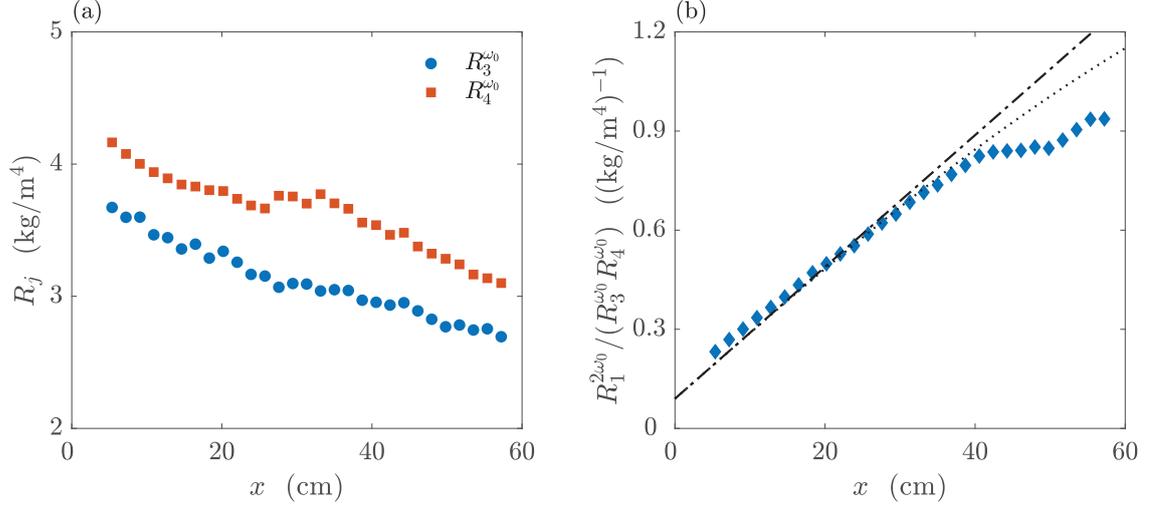


Figure 4.5: Spatial evolution of the steady-state modal amplitudes at resonance for the case-1 resonant triad experiment shown in Fig. 4.4. (a) Spatial evolution of the primary wave modal amplitudes, $R_3^{\omega_0}$ and $R_4^{\omega_0}$, (b) Spatial evolution of the superharmonic mode- $p = |m - n| = 1$ amplitude $R_1^{2\omega_0}$, normalized by $R_3^{\omega_0} R_4^{\omega_0}$ measured at $x = 5.5$ cm. The black dashed-dotted line indicates theoretical linear growth for small x , based on Eq. (4.27). The dotted line indicates the numerical solution of Eqs. (4.20)-(4.21). All the experimental data shown in this figure are based on the measurements between $20T_0$ to $25T_0$.

We proceed to compare the observed spatial growth of the steady-state superharmonic modal amplitude in the resonant forcing frequency experiment with the theoretical predictions based on the amplitude evolution Eqs. (4.20)-(4.21). Figure 4.5(a) shows the spatial evolution of the steady-state primary wave modal amplitudes in the case-1 resonant triad experiment with $(A_3, A_4) = (5, 5)$ mm and the resonant forcing frequency of $\omega_0/N = 0.4841$. In other words, we perform modal decomposition at all x in the wave field shown in Fig. 4.4(a) to plot $R_3^{\omega_0}$ and $R_4^{\omega_0}$ as a function of x . The observed mode-3 and mode-4 primary wave amplitudes show a decay of 25% and 24.7%, respectively, over 50 cm; corresponding values based on the inviscid amplitude evolution equations (with initial conditions taken from measured primary wave amplitudes at $x = 5.5$ cm) are 6.8% and 12.9%. We attribute the relatively stronger observed decay to viscous effects, an aspect that is discussed further in section 4.5.2. The superharmonic mode-1 amplitude, normalized by $R_3^{\omega_0} R_4^{\omega_0}$ measured at $x = 5.5$ cm, shows an almost linear growth till around $x \simeq 40$ cm, beyond which it shows an evidently nonlinear evolution (Fig. 4.4b). To understand the linear growth, one can integrate Eq. (4.21) to write

$$\Psi_p(X) = \Psi_p(X = 0) + i\alpha_p \Psi_m(X = 0) \Psi_n(X = 0) X, \quad (4.26)$$

where we assume that $\Psi_m(X)$ and $\Psi_n(X)$ remain invariant with X . Indeed, in the inviscid limit, this assumption is valid for small X , as seen in the numerical solution of the amplitude evolution equations in Fig. 4.2. Writing in terms of the actual wave field (recall that $\epsilon\psi_1$ is what represents the primary wave field) and the physical coordinate x (recall that $X = \epsilon x$), Eq. (4.26) becomes

$$\tilde{\Psi}_p(x) = \tilde{\Psi}_p(x = 0) + i\alpha_p \tilde{\Psi}_m(x = 0) \tilde{\Psi}_n(x = 0) x, \quad (4.27)$$

where $\tilde{\Psi}_j = \epsilon\Psi_j$ for $j = m, n$ or p . Therefore, with $\tilde{\Psi}_p(x = 0) = 0$, $\tilde{\Psi}_p(x)/(\tilde{\Psi}_m(x = 0)\tilde{\Psi}_n(x = 0))$ goes as $i\alpha_p x$, with the normalization by $\tilde{\Psi}_m(x = 0)\tilde{\Psi}_n(x = 0)$ allowing us to isolate the effects of forcing frequency from the forcing amplitudes. The resulting theoretical slope for the linear growth of $R_1^{2\omega_0}/(R_3^{\omega_0} R_4^{\omega_0})$ accurately captures the experimental observation for x values at least till around 40 cm, as shown by the dashed dotted line in Fig. 4.5(b). Here, the normalizing factor $R_3^{\omega_0} R_4^{\omega_0}$ is taken as what is measured at $x = 5.5$ cm, which is the closest location to the wave generator where the measured primary wave field is without any noticeable noise. In summary, Fig. 4.5 quantitatively validates the theoretical prediction of linear growth of the steady-state superharmonic mode- p amplitude for sufficiently small x . However, the relatively stronger decay in the observed primary wave amplitudes (Fig. 4.5a), and the nonlinear features in the superharmonic wave field for $x > 40$ cm (Fig. 4.5b) are in contrast to the fully numerical solution of the inviscid amplitude evolution equations (Fig. 4.2). While

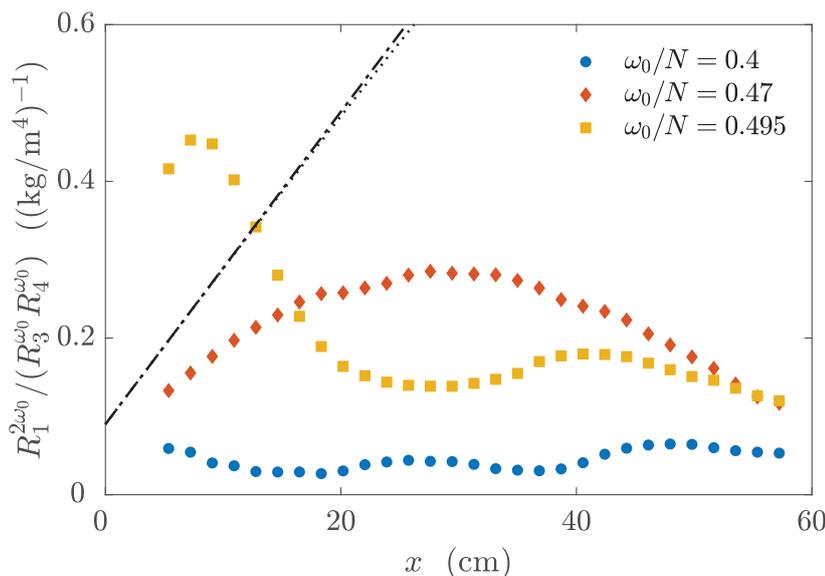


Figure 4.6: Spatial evolution of the normalized steady-state superharmonic mode- p amplitude at off-resonant forcing frequencies for the case-1 resonant triad, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 4, 1)$. All three experiments in this plot were performed with $(A_3, A_4) = (5, 5)$ mm at forcing frequencies indicated in the legend. The black dashed-dotted line indicates theoretical linear growth for small x at resonance based on Eq. (4.27). The dotted line indicates the numerical solution of Eqs. (4.20)-(4.21). The normalizing factor is $R_3^{\omega_0} R_4^{\omega_0}$ as measured at $x = 5.5$ cm in the corresponding experiment.

the viscous wave field evolution over larger x is discussed in section 4.5.2, we recall that reflected waves from the right end of the tank make it difficult to observe the steady-state wave field at large x .

4.4.3 Forcing at off-resonant frequencies (case-1 resonant triad)

Modal decomposition and spatial evolution analyses such as in Figs. 4.4 & Fig. 4.5(b) are performed for all off-resonant forcing frequency experiments to investigate the frequency extent (around the resonant frequency) over which superharmonic wave generation occurs. It is, however, worth highlighting that the superharmonic wave need not be an internal wave if the forcing is away from the resonant frequency. In other words, at off-resonance, what we obtain as mode-1 at $2\omega_0$ may not satisfy the dispersion relation for internal wave modes.

As a result of the modal analysis, Fig. 4.6 shows the spatial evolution of steady state normalized superharmonic mode- $p = 1$ amplitude from experiments at three different off-resonant frequencies (indicated in the legend). Far from resonance, *i.e.* $\omega_0/N = 0.4$, superharmonic wave generation is observed to be negligible. At a forcing frequency closer to resonance, *i.e.* $\omega_0/N = 0.47$, a somewhat linear growth is observed up to around 20 cm, albeit with a slope smaller than what is observed at resonance (black dashed-dotted line). Furthermore, the superharmonic wave amplitude decays beyond $x = 30$ cm for $\omega_0/N = 0.47$, which is in contrast to what we observe at resonance in Fig. 4.5(b). For $\omega_0/N = 0.495$, which is larger than the resonant frequency, we observe relatively weak superharmonic waves for $x > 20$ cm when compared to $\omega_0/N = 0.47$. For $x < 20$ cm, however, relatively strong superharmonic waves are observed for $\omega_0/N = 0.495$. We attribute this occurrence to the possibility of other resonant interactions generating superharmonic mode-1. The presence of weak modes 5 and 6 in the primary wave field (see Fig. 4.4b) may result in the resonant generation of superharmonic mode-1 due to the interaction between modes 4 & 5 or 5 & 6; the resonant forcing frequencies for $(m, n, p) = (4, 5, 1)$ and $(5, 6, 1)$ are $\omega_0/N = 0.4905$ and 0.4937 , respectively, therefore relatively close to 0.495. The theoretical slope of linear growth of $R_p^{2\omega_0} / (R_m^{\omega_0}(x=0) R_n^{\omega_0}(x=0))$ at small x (Eq. (4.27)) for $(m, n, p) = (3, 4, 1)$, $(4, 5, 1)$ and $(5, 6, 1)$ are 1.28, 2.15 and 3.24 m^3/kg , respectively. This suggests that other resonant interactions at larger (m, n) , and hence larger ω_0/N for resonance based on Eq. (4.2), could result in relatively faster growth of the superharmonic mode-1 amplitude at small x even if the primary wave amplitudes are relatively weak. Furthermore, for $\omega_0/N = 0.495$,

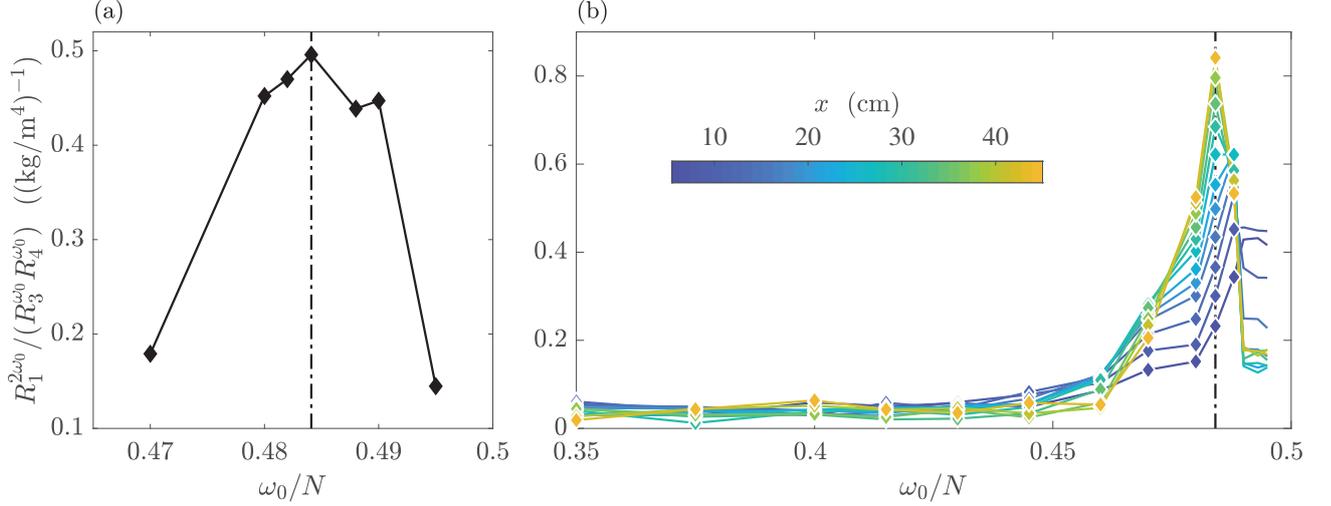


Figure 4.7: (a) Normalized steady-state superharmonic mode-1 amplitude at $x = 25$ cm as a function of the forcing frequency ω_0 for the case-1 resonant triad, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 4, 1)$. (b) Normalized steady-state superharmonic mode-1 amplitude at various x (see legend) as a function of the forcing frequency ω_0 for the case-1 resonant triad, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 4, 1)$, over a wider range of ω_0 than in (a). In both (a) and (b), the normalizing factor is $R_3^{\omega_0} R_4^{\omega_0}$ as measured at $x = 5.5$ cm in the corresponding experiment. The vertical dashed dotted line in both plots is drawn at the theoretical resonant forcing frequency of $\omega_0/N = 0.4841$.

the superharmonic frequency is very close to evanescent behaviour, and the corresponding enhanced viscous decay (see section 4.5.2) could explain why the superharmonic mode-1 rapidly decays.

We proceed to explore several other off-resonant frequencies, and compute the steady-state normalized superharmonic mode- p amplitude at a fixed x location for several ω_0/N around the resonant frequency. It is noteworthy that constant horizontal displacement amplitudes ($A_3 = A_4 = 5$ mm is forced at all frequencies) do not correspondingly lead to the same amplitudes at different frequencies for the horizontal density gradient, thus motivating the normalization of the superharmonic wave amplitude. Figure 4.7(a) shows $R_1^{2\omega_0} / (R_3^{\omega_0} R_4^{\omega_0})$ at $x = 25$ cm as a function of ω_0/N . A clear peak is observed very close to $\omega_0/N = 0.4841$, thus confirming the occurrence of resonance at the theoretically predicted forcing frequency. Normalization of the superharmonic amplitude eliminates any role for the forcing primary amplitudes in the occurrence of the resonant peak. In Fig. 4.7(b), we present a similar plot as in Fig. 4.7(a), but for a wider range of ω_0/N and several x locations (see legend). A resonant peak at the theoretical prediction of $\omega_0/N = 0.4841$ is present for all $x > 24$ cm, with the peak being slightly shifted to the right for $x < 24$ cm. As discussed earlier for Fig. 4.6, relatively strong superharmonic mode- p generation at small x for $\omega_0/N > 0.4841$ could be due to other resonant interactions involving modes 5 or 6 that are present in the forced primary wave field. In summary, Fig. 4.7 presents experimental demonstration of resonant generation of superharmonic mode-1 at $\omega_0/N = 0.4841$ for $(m, n, p) = (3, 4, 1)$, with the resonance peak being around $\Delta(\omega_0/N) = 0.03$ in width.

4.4.4 Effect of forcing amplitude at resonance (case-1 resonant triad)

In this subsection, we present results from experiments at resonance ($\omega_0/N = 0.4841$) for the case-1 resonant triad, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 4, 1)$, with varying A_4 while A_3 was held fixed at 5 mm. As shown in Fig. 4.8(a), linear growth of the steady-state superharmonic mode-1 amplitude is observed for small x in every experiment, with the legend indicating the measured $R_4^{\omega_0}$ at $x = 5.5$ cm. As expected based on Eq. (4.27), the slope of the linear growth increases as $R_4^{\omega_0}$ increases. A plot of the measured slope as a function of $R_4^{\omega_0}$ is in fair agreement with the theoretical prediction shown using the solid straight line in Fig. 4.8(b). Figure 4.8 therefore provides further quantitative validation of the amplitude evolution in Eq. (4.21) at small x .

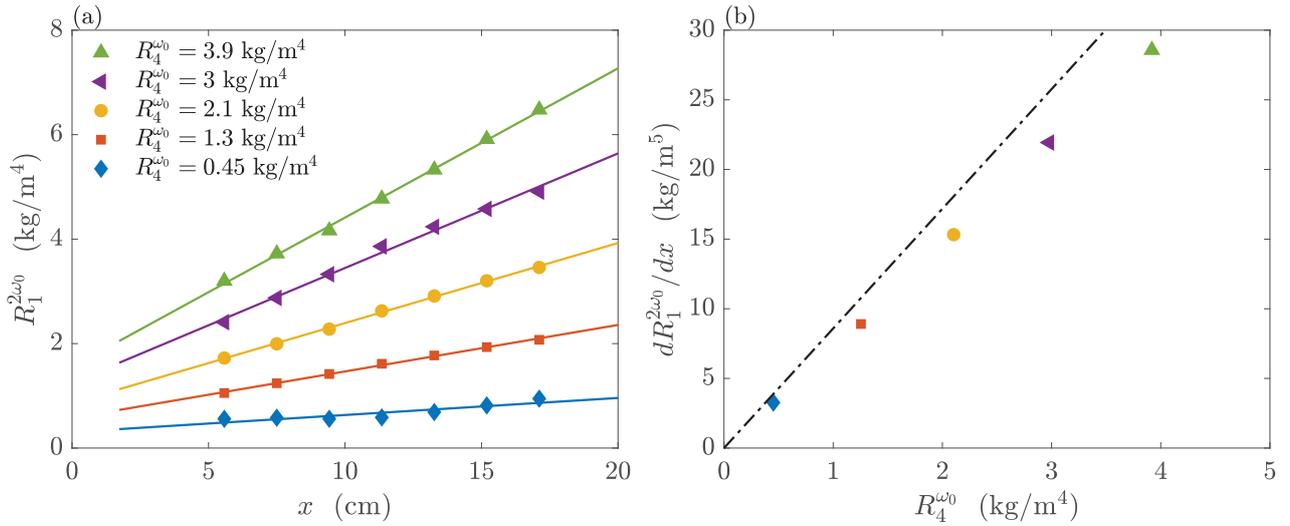


Figure 4.8: Effects of forcing amplitude for the case-1 resonant triad at resonance, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 4, 1)$ and $\omega_0/N = 0.4841$. (a) Spatial evolution of the steady-state superharmonic mode-1 amplitude for different mode-4 forcing amplitudes ($A_4 = 5, 4, 3, 2, 1$ mm, with the corresponding measured $R_4^{\omega_0}$ at $x = 6$ cm indicated in the legend), while the mode-3 forcing amplitude was held fixed at $A_3 = 5$ mm. The solid lines indicate the best fit straight line for the corresponding experiment. (b) Variation of the slope of the best fit straight lines from (a), *i.e.* the spatial growth rate of the steady-state superharmonic mode-1 amplitude, with the mode-4 forcing amplitude. The solid line indicates the theoretical prediction based on the amplitude evolution equations.

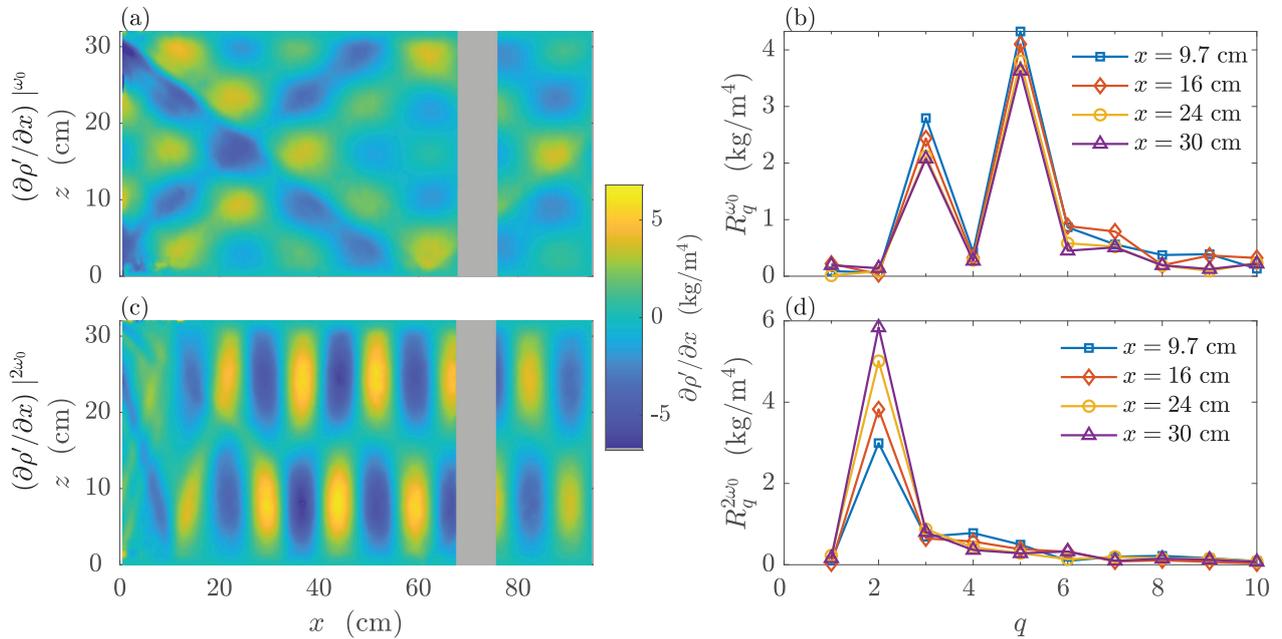


Figure 4.9: Experimental measurements for the case-2 resonant triad, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 5, 2)$, at the measured resonant forcing frequency of $\omega_0/N = 0.46$, and forcing amplitudes of $(A_3, A_5) = (5, 5)$ mm. (a) Horizontal density gradient field filtered at the forcing frequency ω_0 . (b) Modal decomposition at four different x locations (see legend) of the wave field shown in (a). (c) Horizontal density gradient field filtered at twice the forcing frequency, *i.e.* $2\omega_0$. (d) Modal decomposition at four different x locations (see legend) of the wave field shown in (c). All the plots correspond to $t = 20T_0$, thus representing the steady state wave field.

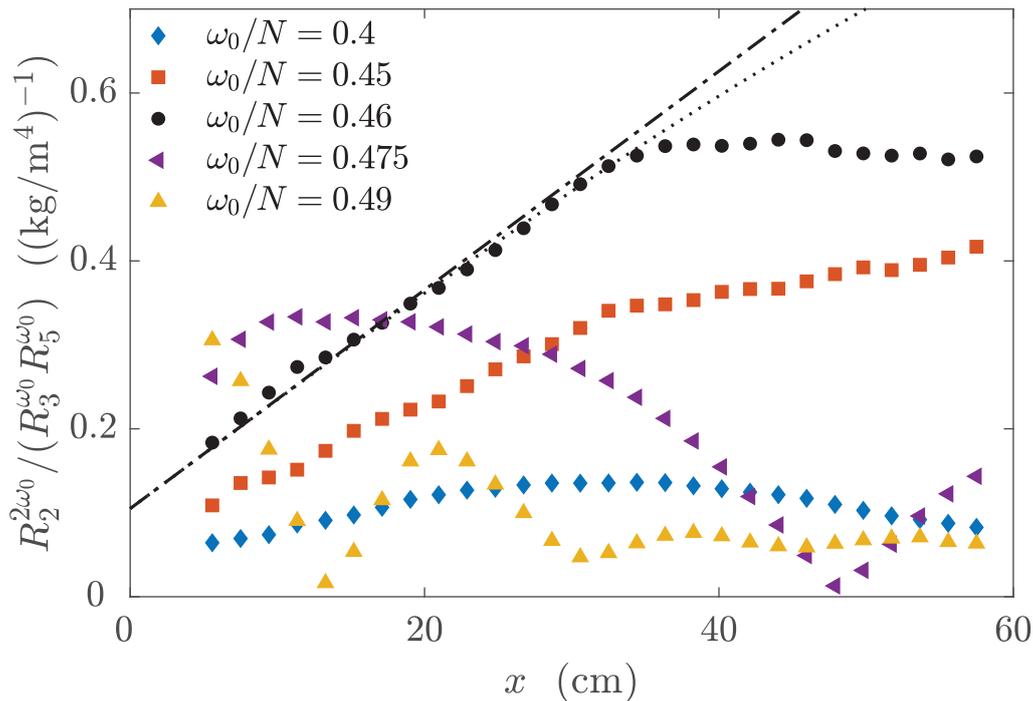


Figure 4.10: Spatial evolution of the normalized steady-state superharmonic mode- p amplitude at resonant ($\omega_0/N = 0.46$) and off-resonant forcing frequencies for the case-2 resonant triad, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 5, 2)$. All five experiments in this plot were performed with $(A_3, A_5) = (5, 5)$ mm at forcing frequencies indicated in the legend. The normalizing factor is $R_3^{\omega_0} R_5^{\omega_0}$ as measured at $x = 5.5$ cm in the corresponding experiment. The black dashed-dotted line indicates theoretical linear growth for small x at resonance based on Eq. (4.27). The dotted line indicates the numerical solution of Eqs. (4.20)-(4.21).

4.4.5 Case-2 resonant triad

To demonstrate the robustness of our experimental results, and subsequent quantitative validation of the amplitude evolution equations, we performed experiments for another resonant triad. The case-2 resonant triad is specified by $(m, n, p) = (3, 5, 2)$, whose resonant forcing frequency according to Eq. (4.2) is $\omega_0/N = 0.4472$. Based on plots similar to Figs. 4.7(a) & (b) (not shown) with $(A_3, A_5) = (5, 5)$ mm, we observe a resonance peak at around $\omega_0/N = 0.46$. The small shift in the resonant frequency from the theoretical prediction could be due to the weak presence of other resonantly interacting modes in the forced primary wave field. For example, the resonant forcing frequency for $(m, n, p) = (4, 6, 2)$ is $\omega_0/N = 0.4677$.

Figure 4.9 shows the spatial structure of the steady-state wave field filtered at ω_0 (top row) and $2\omega_0$ (bottom row) in the case-2 resonant triad experiment at the measured resonant forcing frequency of $\omega_0/N = 0.46$. Indeed, a modal decomposition of the wave field in Fig. 4.9(a) reveals amplitudes predominantly at modes 3 & 5, though relatively weak amplitudes are present at other modes as well (Fig. 4.9b). Weak spatial decay is observed in the amplitudes of both modes 3 & 5, which we attribute to viscous effects. The steady state superharmonic wave field shows a clearly predominant mode-2 spatial structure (Fig. 4.9c), which is consistent with the resonant generation of mode- $p = |m - n| = 2$. The modal decomposition in Fig. 4.9(d) shows a spatial growth of the mode-2 amplitude in the steady-state superharmonic wave field, which we compare with the prediction from the amplitude evolution equations in Fig. 4.10.

Fig. 4.10 shows that the spatial growth of the normalized, steady-state mode-2 amplitude at the measured resonant forcing frequency of $\omega_0/N = 0.46$ is predicted accurately till around $x = 35$ cm by the theoretical linear growth at small x in Eq. (4.27). For smaller forcing frequencies, spatial linear growth of the normalized steady-state mode-2 is observed at small x , with progressively smaller slopes as we move away from resonance. For $\omega_0/N > 0.46$, relatively large mode-2 amplitude is observed for very small x , before rapid decay of the same for larger x . Similar to the proposed

mechanism for other resonant interactions generating mode-1 for large ω_0/N in the case-1 resonant triad (Fig. 4.6), it is possible that resonant interaction between relatively weak modes-4 & 6 or mode-5 & relatively weak mode-7 in the forced primary wave field may generate superharmonic mode-2. For resonant triads specified by $(m, n, p) = (4, 6, 2)$ and $(m, n, p) = (5, 7, 2)$, the resonant forcing frequencies are $\omega_0/N = 0.4677$ and 0.4781 , respectively. The theoretical slope of linear growth of $R_2^{2\omega_0}/(R_m^{\omega_0}(x=0)R_n^{\omega_0}(x=0))$ at small x (Eq. (4.27)) for $(m, n, p) = (3, 5, 2)$, $(4, 6, 2)$ and $(5, 7, 2)$ are 0.75 , 1.25 and $1.84 \text{ m}^3/\text{kg}$, respectively. This suggests that other resonant interactions at larger (m, n) , and hence larger ω_0/N for resonance based on Eq. (4.2), could result in relatively rapid growth of the superharmonic mode-2 amplitude at small x even if the primary wave amplitudes are relatively weak. Furthermore, the enhanced viscous effects at these large $2\omega_0/N$ may also result in rapid decay of the superharmonic mode-2 amplitude (section 4.5.2).

In this subsection, we have presented an experimental demonstration of resonant generation of superharmonic mode-2 for the case-2 resonant triad, i.e. $(m, n, p) = (3, 5, 2)$. The observed spatial growth at small x of the superharmonic mode-2 in the steady-state wave field is well captured by the theoretical amplitude evolution equations. Finally, experiments at off-resonant forcing frequencies revealed that the superharmonic mode-2 generation becomes weaker as we move away from resonance, whose frequency width is observed to be a similar value as that for the case-1 resonant triad, i.e. $\Delta\omega_0 \approx 0.03N$.

4.5 Discussion

In section 4.4, we reported experimental observations of superharmonic generation due to triadic resonance, and validated the amplitude evolution equations in describing the spatial growth of the steady-state superharmonic wave. In this section, we investigate two important questions that were not addressed in the previous section - (i) what governs the temporal evolution of the wave field towards steady state? (section 4.5.1), (ii) what is the role of viscous effects in our experimental observations? (section 4.5.2)

4.5.1 Slow temporal evolution

The spatial growth of the steady-state superharmonic wave at small distances from the wave generator is captured accurately by the amplitude evolution equations (4.20)-(4.21), wherein it was assumed that the steady-state modal amplitudes evolve over relatively large spatial scales. During the transient period in the experiment, however, the wave amplitudes at a fixed spatial location are temporally evolving, thus rendering the amplitude evolution equations (4.20)-(4.21) not well-suited. We proceed to explore how well amplitude evolution equations based on a slow temporal evolution could describe the observed wave fields before steady state is reached.

In contrast to the large scale spatial evolution assumed in section 4.3.2, previous studies (Thorpe, 1966; Bourget *et al.*, 2013) on triadic resonance have used a framework which assumes a slow temporal evolution of the amplitudes of each of the waves forming the resonant triad. Defining the slow time $\tau = \epsilon t$, the wave field at $\mathcal{O}(\epsilon)$ is written as

$$\begin{aligned} \Psi_m(x, z, t) = & \frac{\Psi_m(\tau)}{2} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) e^{i(k_m x - \omega_0 t)} + \frac{\Psi_n(\tau)}{2} \sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) e^{i(k_n x - \omega_0 t)} \\ & + \frac{\Psi_p(\tau)}{2} \sin\left(\frac{(n-m)\pi z}{H}\right) e^{i((k_p x - 2\omega_0 t))} + c.c., \end{aligned} \quad (4.28)$$

where it is assumed that the same modal amplitudes exist at all x . It is noteworthy that the transient wave field in our experiments contains quite strong amplitude variations along x too. In this subsection, however, we ignore these spatial variations to potentially capture the leading order temporal evolution of the amplitudes before they reach steady state.

Following a procedure that is very similar to how Eqs. (4.20)-(4.21) were derived, the amplitude evolution equations can now be shown to be

$$\frac{d\Psi_j}{d\tau} = i\beta_j \Psi_q^* \Psi_p, \quad \text{where } (j, q) = (m, n) \text{ or } (n, m) \quad (4.29)$$

$$\frac{d\Psi_p}{d\tau} = i\beta_p \Psi_m \Psi_n, \quad (4.30)$$

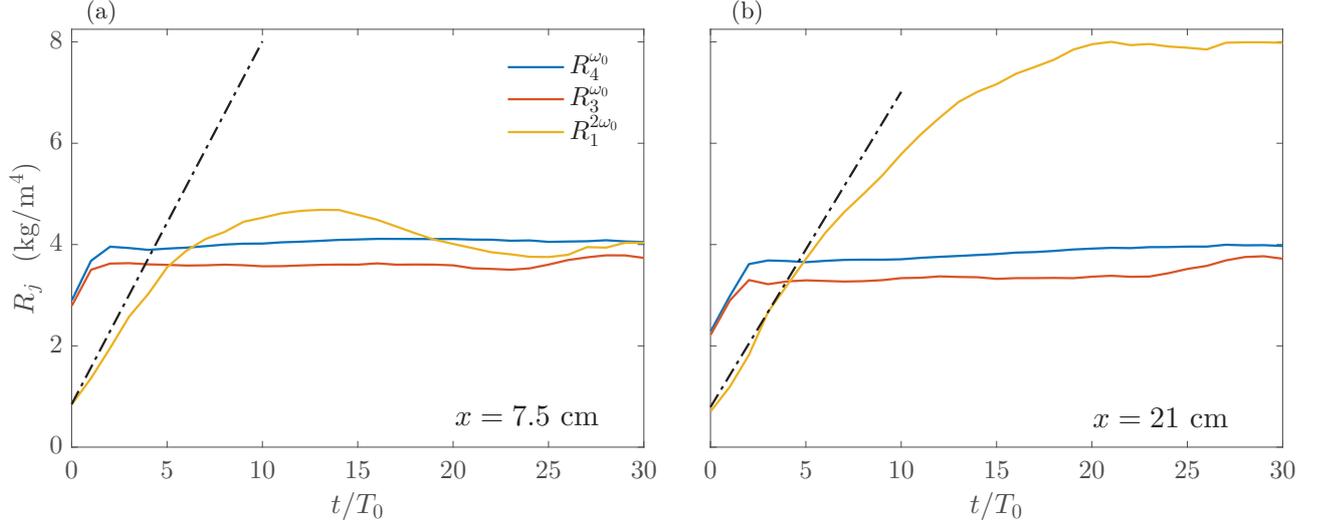


Figure 4.11: Temporal evolution of the modal amplitudes at a fixed x location for the case-1 resonant triad at resonance, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 4, 1)$ at $\omega_0/N = 0.4841$, with $(A_m, A_n) = (5, 5)$ mm. (a) $x = 7.5$ cm, and (b) $x = 21$ cm. The dashed-dotted lines in (a) and (b) indicate predictions of initial growth from the slow temporal evolution theory presented in section 4.5.1, using the measured steady state primary wave amplitudes at the corresponding x as initial conditions for the growth of the superharmonic wave.

where

$$\beta_j = \alpha_j \left(\frac{\omega_j}{k_j} \right) \left(1 - \frac{\omega_j^2}{N_0^2} \right) \text{ for } j = m, n \text{ \& } p. \quad (4.31)$$

The coefficients α_j appeared earlier in the amplitude evolution equations (4.20)-(4.21).

We investigate the usefulness of Eqs. (4.29)-(4.30) in describing the temporal evolution of the observed transient wave field in the case-1 resonant triad experiment, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 4, 1)$, forced at resonance. The temporal evolution (from very early times) of the primary and superharmonic wave amplitudes at two different x locations are shown in Fig. 4.11. At $x = 7.5$ cm (Fig. 4.11a), we observe that the primary wave amplitudes reach steady state by around $t = 3T_0 - 4T_0$, by which point the superharmonic mode-1 has also started growing. The slope of initial growth of the superharmonic mode-1 is well captured by the theoretical slope of initial growth (black dashed-dotted line) based on Eqs. (4.29)-(4.30). A similar result holds at $x = 21$ cm (Fig. 4.11b), except that the slope of initial growth of the superharmonic mode-1 sustains for a longer duration. As a result, and as already discussed, the steady-state superharmonic mode-1 amplitude is larger at $x = 21$ cm than at $x = 7.5$ cm. In summary, Fig. 4.11 has shown that the slow temporal evolution theory is useful in describing the initial growth of the superharmonic mode-1 wave at a fixed location, which subsequently saturates at its steady value. Once the wave field reaches steady state, the amplitude evolution equations (4.20)-(4.21) take over to quantitatively describe the spatial growth of the superharmonic mode-1 for distances of around one wavelength of the primary mode-3.

4.5.2 Viscous effects

As reported in Fig. 4.5, while the inviscid amplitude evolution equations (4.20)-(4.21) accurately capture the spatial growth of the superharmonic wave at small x , they evidently underestimate the spatial decay of the primary wave amplitudes. We approximately incorporate viscous effects in the amplitude evolution equations in the following manner :

$$\frac{d}{dx}(\epsilon\Psi_j) = i\alpha_j\epsilon\Psi_q^*\epsilon\Psi_p - C_j\epsilon\Psi_j, \text{ where } (j, q) = (m, n) \text{ or } (n, m) \quad (4.32)$$

$$\frac{d}{dx}(\epsilon\Psi_p) = i\alpha_p\epsilon\Psi_m\epsilon\Psi_n - C_p\epsilon\Psi_p, \quad (4.33)$$

where C_j ($j = m, n$, or p) represents the spatial viscous decay rate for mode- j at its corresponding frequency. We recall that $\epsilon\Psi_j$ represents the modal amplitude in the physical wave field. In the

C_j (in m^{-1})	C_3	C_4	C_1
2D (Eq. 4.34)	0.0238	0.0564	0.4625
individual mode experiments	0.66	0.73	-

Table 4.1: Theoretical (Eq. 4.34) and experimentally observed spatial viscous decay rates C_j (in m^{-1}) for mode-3 at ω_0 (column 1), mode-4 at ω_0 (column 2) and mode-1 at $2\omega_0$ (column 3) from analytical expression (4.34) and individual mode experiments.

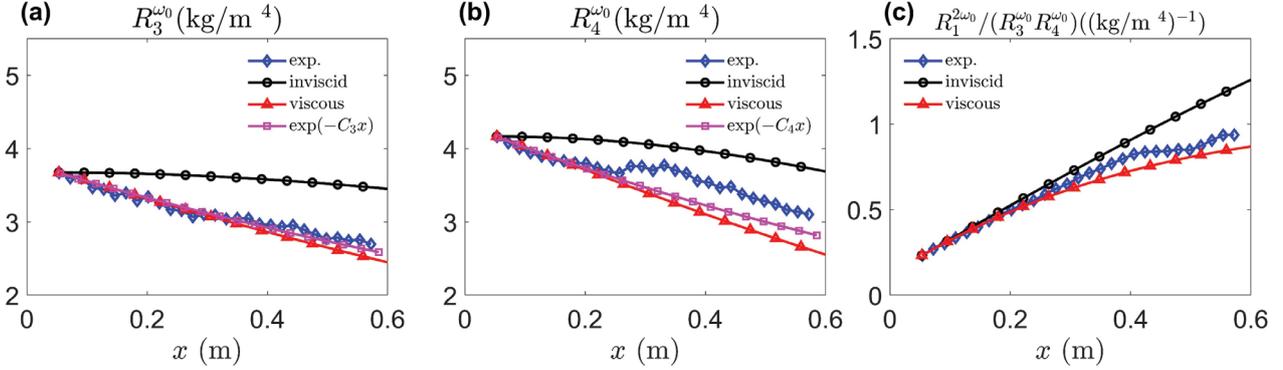


Figure 4.12: Comparison between observations and inviscid/viscous theory at resonance for the case-1 resonant triad experiment presented in Fig. 4.5. (a) Spatial evolution of the experimental steady-state mode-3 amplitude (\diamond). Predictions from the inviscid amplitude evolution Eqs. (4.20)-(4.21) and the viscous amplitude evolution Eqs. (4.32)-(4.33) are shown in black (\circ) and red (\triangle), respectively. Shown in pink (\square) is the viscous decay of the primary mode-3 as observed in an individual mode-3 experiment (observed decay rate C_3 is given in Table I). (b) Same as (a), but for the primary mode-4. (c) Spatial evolution of the experimental normalized steady-state superharmonic mode-1 amplitude (\diamond). Predictions from the inviscid amplitude evolution Eqs. (4.20)-(4.21) and the viscous amplitude evolution Eqs. (4.32)-(4.33) are shown in black (\circ) and red (\triangle), respectively. The normalization factor $R_3^{\omega_0} R_4^{\omega_0}$ is as measured at $x = 5.5$ cm.

absence of viscous effects, Eqs. (4.32)-(4.33) reduce to the inviscid amplitude evolution equations (4.20)-(4.21). In the absence of amplitude evolution due to triadic resonance, each modal amplitude evolves spatially as $\exp(-C_j x)$. The values of C_j are directly measured from experiments where mode- j is forced in isolation at the corresponding frequency with a relatively small amplitude of $A_j = 2$ mm. Before discussing the observed viscous decay rates, it is instructive to discuss their physical origins.

Based on viscous dissipation in linear, two-dimensional flows with a kinematic viscosity ν , the spatial viscous decay rate of mode- j at frequency ω_j is given (Echeverri *et al.*, 2009b) by

$$C_j^{2D} = j^3 \left(\frac{\pi}{H} \right)^3 \frac{\nu}{2N} \frac{1}{(1 - \omega_j^2/N^2)^{7/2}}. \quad (4.34)$$

Equation (4.34) suggests that the decay rate goes as the cube of the mode number, hence resulting in larger viscous decay for higher modes. Furthermore, the closer ω_j/N is to unity, the larger the viscous decay is. For the three waves that form the case-1 resonant triad, *i.e.* $(m, n, p) = (3, 4, 1)$ with $\omega_0/N = 0.4841$, the corresponding values of C_j^{2D} are shown in Table 4.1. C_j^{2D} is largest for the superharmonic mode-1 owing to its frequency being close to N_0 . The measured viscous decay rates C_3 and C_4 for the individual primary modes are, however, an order of magnitude larger than what is estimated based on Eq. (4.34) (Table 4.1). These significantly larger measured viscous decay rates can be attributed to the viscous effects acting at the side walls of the tank in the experiments (Beckebanze *et al.*, 2018), an effect that is not captured in a two-dimensional model such as that corresponding to Eq. (4.34). For the superharmonic mode-1, it was difficult to estimate its viscous decay rate from the individual mode experiment owing to the occurrence of parametric subharmonic instability (Joubaud *et al.*, 2012b). As a result, the corresponding entry in Table 4.1 is left blank. For the viscous amplitude evolution equations, while we use the experimentally measured C_3 and C_4 as reported in the second row of Table 4.1, $C_p = C_p^{2D}$ is assumed for the superharmonic wave. Owing to the frequency of the superharmonic wave being close to N_0 , it is reasonable to assume that the corresponding viscous

decay is dominated by the 2D effect captured in Eq. (4.34).

Figure 4.12 shows a comparison between experimental observations and predictions from viscous amplitude evolution equations (4.32)-(4.33) for the case-1 resonant triad experiment at resonance, *i.e.* the same experiment as presented in Fig. 4.5. Figures 4.12(a)-(b) show the spatial evolution of the primary wave amplitudes, indicating a good quantitative agreement between observations and the viscous theory. Furthermore, the viscous damping estimated from the individual mode experiments (shown using \square in Figs. 4.12a-b) also describe the observed spatial decay well. In summary, the observed decay is mainly due to viscous damping rather than energy transfer to the superharmonic wave. In contrast, the spatial growth of the superharmonic wave is described well by the inviscid theory, with the incorporation of viscous effects seemingly capturing the departure from linear growth from around $x = 0.3$ m (Fig. 4.12c).

4.6 Conclusions

In this paper, we have presented an experimental study of triadic resonance in internal wave modes when the primary wave field contains two waves of the triad. Using the internal wave generator to force two different modes simultaneously at the theoretically predicted resonant frequency, spontaneous excitation of a superharmonic wave of a mode number equal to the difference between the mode numbers of the primary waves was observed. The steady-state wave field was then shown to comprise a combination of spatially evolving internal wave modes that constitute the resonant triad. The spatial growth of the steady-state superharmonic wave at small distances from the wave generator is captured accurately by the inviscid amplitude evolution equations, based on the method of multiple scales. Indeed, the assumption of a large-scale spatial evolution of the modal amplitudes effectively describes the observed steady-state wave field, at least for small distances from the wave generator. Experiments at off-resonant frequencies suggest that superharmonic wave generation due to triadic resonance is non-negligible at least over a forcing frequency range (around the resonant frequency) of around 0.03 times the buoyancy frequency associated with the uniform stratification. Inviscid amplitude evolution equations based on a slow temporal evolution of the modal amplitudes were then shown to reasonably describe the transient evolution of the wave field towards steady state. Finally, viscous effects were shown to be the dominant factor in the spatial decay of steady-state primary wave amplitudes.

For a validation of the viscous theory over larger distances, it would be necessary to eliminate the effect of the right-to-left propagating waves reflected from the right end of the tank in the experiments. Also, a more rigorous treatment of viscous effects in deriving the amplitude evolution equations, *i.e.* by including viscous terms that capture decay due to 2D and side wall effects in the governing equations, may also improve the theoretical predictions of spatial evolution over larger distances. It would be interesting to perform experiments where primary waves of multiple resonant triads are simultaneously forced, a scenario that may occur in internal wave generation mechanisms like tide-topography interaction. The relative importance of superharmonic wave generation due to triadic resonance with respect to other mechanisms such as parametric subharmonic instability, interaction with the mean flow or topography *etc.* remains to be explored for realistic oceanic regimes. Finally, incorporating the effects of nonuniform stratification (Sutherland, 2016; Varma and Mathur, 2017; Varma *et al.*, 2019), background rotation (Varma and Mathur, 2017; Wunsch, 2017) and three-dimensionality (Munroe and Lamb, 2005) would make our study more relevant for oceanic settings.

Acknowledgments The authors acknowledge funding from the Indian Ministry of Human Resource Development under the SPARC. Dheraj Varma and Manikandan Mathur acknowledge funding and hospitality from ENS de Lyon during their stay at ENS de Lyon. This work was supported by the grant ANR-17-CE30-0003 (DisET) and by the LABEX iMUST (ANR-10-LABX-0064) of Université de Lyon, within the program “Investissements d’Avenir” (ANR-11-IDEX-0007), operated by the French National Research Agency (ANR). It has been achieved thanks to the resources of PSMN from ENS de Lyon.

Conclusion

Cette thèse s'est placée dans le sillage des expériences présentées par Dossmann *et al.* (2017). Ces expériences, où le milieu est soumis à un forçage modal sur de longues durées, conduisent à la formation de stratifications *en escalier*, c'est-à-dire présentant des couches mélangées localisées et séparées par de nettes interfaces. Dossmann *et al.* (2017) expliquent la formation de ces couches mélangées par la présence d'instabilités résonantes triadiques dans le milieu. Nous avons vu que

- l'explication physique formulée par Dossmann *et al.* (2017) pour interpréter la formation de ces couches mélangées est fautive. Dans le cadre de ces expériences, les couches mélangées ne sont pas le résultat d'un phénomène purement turbulent, comme cela était suggéré, mais est le résultat d'une double-diffusion thermohaline. La source de température est le générateur GOAL, dont les moteurs qui actionnent les plaques chauffent le milieu fluide. La présence de ces couches mélangées est donc un artefact de notre dispositif expérimental.
- le Schlieren Synthétique est adapté pour le suivi de ce genre de phénomène. Cette technique permet en effet d'avoir une idée probante de l'évolution continue de la stratification globale.
- La localisation des marches que l'on observe dans nos cuves est liée à l'effet combiné de la propagation d'ondes internes et des effets double-diffusifs.
- la stratification, inhomogène en présence ou non de double-diffusion, agit comme un guide d'ondes sur la propagation des ondes internes. En particulier, les ondes ne se propagent plus dans les couches mélangées où le rapport ω/N devient plus grand que 1. Sur les zones où $\omega/N < 1$, un forçage en mode 1 conduit à la propagation de mode 1 de hauteur réduite à la hauteur de la couche correspondante.
- qu'une sélection des ondes filles a lieu de manière systématique, en présence ou non de double-diffusion. Une interprétation possible est que le mode 1, en se propageant et en se déstabilisant, modifie durablement la stratification, suffisamment pour que le mode ne soit plus un mode propre pour cette stratification modifiée.

Une autre interaction entre ondes internes a été étudiée expérimentalement : celle de deux modes qui donnent naissance à un mode superharmonique. Nous avons ainsi pu

- mettre en évidence expérimentalement, pour la première fois, la génération de superharmoniques dans un milieu stratifié et vérifier la prédiction théorique de Thorpe (1966) : deux modes m et n se propageant à la fréquence ω_0 peuvent, sous certaines conditions sur ω_0 , donner naissance à une onde à la fréquence $2\omega_0$, dont la structure est un mode- $p = |m - n|$.
- les expériences réalisées pour $n = 3$ et $p = 4$ montrent que l'onde superharmonique apparaît sur un intervalle mince $\Delta\omega_0 \simeq 0.03N$ autour de la fréquence de résonance.
- la croissance spatiale de l'onde superharmonique à la résonance est en très bon accord avec la prédiction théorique.

Perspectives

Les travaux menés au cours de ces trois ans ouvrent quelques perspectives intéressantes.

Mesure de κ_t : lien avec la stratification globale

L'objectif initial de cette thèse était l'utilisation de la PIV-LIF, technique mise au point dans l'équipe, pour tenter de mieux comprendre le lien entre les effets aux petites échelles et l'évolution globale de la stratification. En particulier, la PIV-LIF permet de mesurer la diffusivité turbulente κ_t , qui est une image de l'advection turbulente de masse volumique par la vitesse verticale. Ce coefficient κ_t est donc un bon candidat pour broser un portrait du mélange océanique. La mesure en laboratoire aurait permis d'affiner la compréhension du mélange en particulier si l'on avait été en mesure de mettre en relation l'évolution de κ_t à chaque instant à l'évolution globale de la stratification sur le long terme. Cela n'a pas été possible au cours de cette thèse pour les raisons évoquées dans le chapitre 2.4.4, à savoir la présence de double-diffusion liée à notre dispositif expérimental.

Cela reste néanmoins une piste intéressante à explorer. Pour cela, il faudrait entre autres :

- faire en sorte de prendre en compte l'évolution de la stratification globale pour évaluer les perturbations à la stratification ρ' puis calculer κ_t
- se placer dans des conditions où les effets de température sont négligeables, même lors d'expériences longues, de sorte à ne pas perturber l'ajustement en indice requis par la technique.

La propagation d'ondes internes peut modifier durablement la stratification, ce qui est caractéristique d'un mélange irréversible. Des mesures de κ_t , comparées à la stratification en fin d'expérience, pourraient permettre de déterminer quelle est la part de ce coefficient qui représente réellement du mélange irréversible.

Structure spatiale des ondes filles

De nombreuses expériences présentées dans cette thèse se déroulent dans un contexte propice à la TRI : des ondes filles de fréquences plus basses apparaissent dans le milieu. Si la structure spatiale de l'onde mère obtenue par le forçage est connue, celle des ondes filles est encore inconnue. En particulier, nous avons pu voir, que ces ondes peuvent présenter des structures ayant l'allure de mode ou d'une superposition de modes. Les premières images obtenues par filtrage indiquent que ces structures semblent fortement varier au cours du temps pour une même onde fille. Une analyse plus détaillée, qui pourrait commencer par le cas d'une triade simple et s'appuyant sur une décomposition en modes comme celle mentionnée en chapitre 4.6, permettrait d'aller plus loin dans cette analyse.

Sélection des ondes filles

Toutes les expériences longues, impliquant une modification durable de la stratification, ont présenté des diagrammes temps-fréquence montrant une sélection des ondes filles se propageant dans le milieu. Cette rétro-action de la stratification sur les ondes reste à explorer. En particulier, nous avons souligné qu'il est possible que la disparition des ondes filles soit corrélée avec le fait que le mode 1 finisse par ne plus être adapté à la stratification, elle-même modifiée par le passage des ondes. Le mode 1 se scinde alors en deux modes 1 d'amplitudes plus faibles. Il serait ainsi intéressant de chercher à corréler plus précisément la disparition des ondes filles avec l'évolution globale de la stratification.

Ondes internes et double diffusion

L'effet combiné de la propagation d'ondes internes et de double-diffusion est un sujet pleinement d'actualité (Radko, 2019). En particulier, l'une des questions encore ouvertes est le mécanisme qui conduit à l'observation de couches mélangées caractéristiques de la double-diffusion oscillante dans des régions où $2 < R_0^{-1} < 10$, c'est-à-dire en dehors du mince intervalle prédit par la théorie linéaire. C'est le cas par exemple dans l'océan Austral (Kelley *et al.*, 2003) : l'observation est en dehors du cadre linéaire théorique, néanmoins la signature sur les profils en densité et en température est tout à fait représentative du phénomène. Par ailleurs, les ondes internes dans ces régions australes sont peu énergétiques (Halle and Pinkel, 2003; Rainville and Woodgate, 2009) : ces mers ne sont donc pas propices à l'apparition d'instabilités de Kelvin-Helmholtz qui pourraient déclencher la formation de couches mélangées double-diffusives. Les autres phénomènes qui sont envisagés sont une

intrusion extérieure de température ou de sel (Turner and Stommel, 1964; Stern, 2003) ou encore une déstabilisation non-linéaire (Veronis, 1965). Radko (2019) conclut pour sa part que l'initiation d'un mécanisme de convection double-diffusive pourrait être lié à la présence d'un écoulement stable de cisaillement, dont l'origine pourrait très bien être la propagation d'ondes internes. Des expériences en laboratoires pourraient étayer cette piste.

Bibliographie

- Alford, M. (2008). Observations of parametric subharmonic instability of the diurnal internal tide in the south china sea. *Geophysical Research Letters* 35(15).
- Alford, M. H., J. A. MacKinnon, H. L. Simmons, and J. D. Nash (2016). Near-inertial internal gravity waves in the ocean. *Annual review of marine science* 8, 95–123.
- Aujac, G. (1972). Les traités "sur l'océan" et les zones terrestres. *Revue des études anciennes* 74(1), 74–85.
- Baines, P. and A. Gill (1969). On thermohaline convection with linear gradients. *Journal of Fluid Mechanics* 37(2), 289–306.
- Beckebanze, F., C. Brouzet, I. Sibgatullin, and L. Maas (2018). Damping of quasi-two-dimensional internal wave attractors by rigid-wall friction. *Journal of Fluid Mechanics* 841, 614–635.
- Benielli, D. and J. Sommeria (1998). Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability. *Journal of Fluid Mechanics* 374, 117–144.
- Birner, T. (2006). Fine-scale structure of the extratropical tropopause region. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* 111(D4).
- Bouffard, D. and A. Wüest (2019). Convection in lakes. *Annual Review of Fluid Mechanics* 51, 189–215.
- Bourget, B. (2014). *Ondes internes, de l'instabilité au mélange. Approche expérimentale*. Ph. D. thesis, ENS de Lyon.
- Bourget, B., T. Dauxois, S. Joubaud, and P. Odier (2013). Experimental study of parametric subharmonic instability for internal plane waves. *J. Fluid Mech.* 723, 1–20.
- Boury, S., T. Peacock, and P. Odier (2019). Excitation and resonant enhancement of axisymmetric internal wave modes. *Physical Review Fluids* 4(3), 034802.
- Broecker, W. S. *et al.* (1991). The great ocean conveyor. *Oceanography* 4(2), 79–89.
- Brouzet, C. (2016). *Internal wave attractors : from geometrical focusing to non-linear energy cascade and mixing*. Ph. D. thesis.
- Brown, J. M. and T. Radko (2019). Initiation of diffusive layering by time-dependent shear. *Journal of Fluid Mechanics* 858, 588–608.
- Bühler, O. and M. Holmes-Cerfon (2011). Decay of an internal tide due to random topography in the ocean. *Journal of Fluid Mechanics* 678, 271–293.
- Chen, C., D. Briggs, and R. Wirtz (1971). Stability of thermal convection in a salinity gradient due to lateral heating. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 14(1), 57–65.
- Dalziel, S., G. O. Hughes, and B. R. Sutherland (2000). Whole-field density measurements by 'synthetic schlieren'. *Experiments in fluids* 28(4), 322–335.
- Dalziel, S. B., M. Carr, J. K. Svein, and P. A. Davies (2007). Simultaneous synthetic schlieren and piv measurements for internal solitary waves. *Measurement Science and Technology* 18(3), 533.

- Dauxois, T., S. Joubaud, P. Odier, and A. Venaille (2018). Instabilities of internal gravity wave beams. *Annual Review of Fluid Mechanics* 50, 131–156.
- Davis, G. (2019). *Attracteurs d'ondes internes de gravité : des résonances en cascade*. Ph. D. thesis, Université Lyon 1.
- Debaz, J. (2012). Jeanne villepreux-power : une pionnière de la biologie marine. *Bull Rayonnement CNRS* 58, 70–75.
- Dossmann, Y., B. Bourget, C. Brouzet, T. Dauxois, S. Joubaud, and P. Odier (2016). Mixing by internal waves quantified using combined piv/plif technique. *Experiments in Fluids* 57(8), 132.
- Dossmann, Y., F. Pollet, P. Odier, and T. Dauxois (2017). Mixing and formation of layers by internal wave forcing. *Journal of Geophysical Research : Oceans* 122(12), 9906–9917.
- Echeverri, P., M. Flynn, K. B. Winters, and T. Peacock (2009a). Low-mode internal tide generation by topography : an experimental and numerical investigation. *Journal of Fluid Mechanics* 636, 91–108.
- Echeverri, P., M. Flynn, K. B. Winters, and T. Peacock (2009b). Low-mode internal tide generation by topography : an experimental and numerical investigation. *J. Fluid Mech.* 636, 91–108.
- Ekman, V. (1904). On dead water, scientific results of the norwegian north polar expedition. *Christiania* 5, 1–152.
- Fieux, M. (2010). *L'océan planétaire*. Les Presses de l'ENSTA.
- Fieux, M., G. Reverdin, S. Sabrina, and P. Delécluse (2017, 09). *La circulation océanique*.
- Fincham, A. and G. Delerce (2000). Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Experiments in Fluids* 29(1), S013–S022.
- Flandrin, P. (1999). *Time-Frequency/Time-Scale Analysis, Time-Frequency Toolbox for Matlab*©. Academic Press, San Diego.
- Garaud, P. (2018). Double-diffusive convection at low prandtl number. *Annual Review of Fluid Mechanics* 50, 275–298.
- Garrett, C. (2003). Oceanography : mixing with latitude. *Nature* 422(6931), 477.
- Garrett, C. and E. Kunze (2007). Internal tide generation in the deep ocean. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 39, 57–87.
- Gayen, B. and S. Sarkar (2010). Turbulence during the generation of internal tide on a critical slope. *Physical review letters* 104(21), 218502.
- Gerkema, T. (2001). Internal and interfacial tides : beam scattering and local generation of solitary waves. *Journal of Marine Research* 59(2), 227–255.
- Gerkema, T., C. Staquet, and P. Bouruet-Aubertot (2006). Decay of semi-diurnal internal-tide beams due to subharmonic resonance. *Geophysical research letters* 33(8).
- Gerkema, T. and J. Zimmerman (2008). An introduction to internal waves. *Lecture Notes, Royal NIOZ, Texel* 207.
- Ghaemsaidi, S. J. and M. Mathur (2019). Three-dimensional small-scale instabilities of plane internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics* 863, 702–729.
- Gill, A. E. (2016). *Atmosphere—ocean dynamics*. Elsevier.
- Gostiaux, L., H. Didelle, S. Mercier, and T. Dauxois (2007a, JAN). A novel internal waves generator. *Experiments in Fluids* 42(1), 123–130.
- Gostiaux, L., H. Didelle, S. Mercier, and T. Dauxois (2007b). A novel internal waves generator. *Exp. Fluids* 42(1), 123–130.

- Grimshaw, R. and N. Smyth (1986). Resonant flow of a stratified fluid over topography. *Journal of Fluid Mechanics* 169, 429–464.
- Halle, C. and R. Pinkel (2003). Internal wave variability in the beaufort sea during the winter of 1993/1994. *Journal of Geophysical Research : Oceans* 108(C7).
- Hasselmann, K. (1967). A criterion for nonlinear wave stability. *Journal of Fluid Mechanics* 30(4), 737–739.
- Helfrich, K. R. and W. K. Melville (2006). Long nonlinear internal waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 38, 395–425.
- Holford, J. M. and P. Linden (1999). Turbulent mixing in a stratified fluid. *Dynamics of atmospheres and oceans* 30(2-4), 173–198.
- Holloway, G. and A. Proshutinsky (2007). Role of tides in arctic ocean/ice climate. *Journal of Geophysical Research : Oceans* 112(C4).
- Huppert, H. E. and D. R. Moore (1976). Nonlinear double-diffusive convection. *Journal of Fluid Mechanics* 78(4), 821–854.
- Imboden, D. M. and A. Wüest (1995). Mixing mechanisms in lakes. In *Physics and chemistry of lakes*, pp. 83–138. Springer.
- Javam, A., J. Imberger, and S. Armfield (2000). Numerical study of internal wave-wave interactions in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 415, 65–87.
- Jevons, W. S. (1858). On clouds; their various forms, and producing causes. *Sydney Magazine of Science and Art* 1(8), 163–176.
- Joubaud, S., J. Munroe, P. Odier, and T. Dauxois (2012a). Experimental parametric subharmonic instability in stratified fluids. *Physics of Fluids* 24(4), 041703.
- Joubaud, S., J. Munroe, P. Odier, and T. Dauxois (2012b). Experimental parametric subharmonic instability in stratified fluids. *Phys. Fluids* 24(4), 041703.
- Kelley, D., H. Fernando, A. Gargett, J. Tanny, and E. Özsoy (2003). The diffusive regime of double-diffusive convection. *Progress in Oceanography* 56(3-4), 461–481.
- Korobov, A. S. and K. G. Lamb (2008). Interharmonics in internal gravity waves generated by tide-topography interaction. *Journal of Fluid Mechanics* 611, 61–95.
- Koudella, C. and C. Staquet (2006). Instability mechanisms of a two-dimensional progressive internal gravity wave. *Journal of Fluid Mechanics* 548, 165–196.
- Kunze, E., E. Firing, J. M. Hummon, T. K. Chereskin, and A. M. Thurnherr (2006). Global abyssal mixing inferred from lowered adcp shear and ctd strain profiles. *Journal of Physical Oceanography* 36(8), 1553–1576.
- Kury, L. (1998). Les instructions de voyage dans les expéditions scientifiques françaises (1750-1830). *Revue d'histoire des sciences*, 65–91.
- Lamb, K. G. (2014). Internal wave breaking and dissipation mechanisms on the continental slope/shelf. *Annual Review of Fluid Mechanics* 46, 231–254.
- Ledwell, J. R., L. C. St. Laurent, J. B. Girton, and J. M. Toole (2011). Diapycnal mixing in the antarctic circumpolar current. *Journal of Physical Oceanography* 41(1), 241–246.
- Lighthill, M. J. and J. Lighthill (2001). *Waves in fluids*. Cambridge university press.
- Linden, P. (1979). Mixing in stratified fluids. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 13(1), 3–23.
- Llewellyn Smith, S. G. and W. Young (2002). Conversion of the barotropic tide. *Journal of Physical Oceanography* 32(5), 1554–1566.

- MacKinnon, J. and K. Winters (2005, AUG 6). Subtropical catastrophe : Significant loss of low-mode tidal energy at 28.9 degrees. *Geophys. Res. Lett.* 32(15), L15605.
- Marshall, J. and K. Speer (2012). Closure of the meridional overturning circulation through southern ocean upwelling. *Nature Geoscience* 5(3), 171.
- Martin, S., W. Simmons, and C. Wunsch (1972). The excitation of resonant triads by single internal waves. *Journal of Fluid Mechanics* 53(1), 17–44.
- Mathur, M. and T. Peacock (2010). Internal wave interferometry. *Physical review letters* 104(11), 118501.
- McEwan, A. (1971). Degeneration of resonantly-excited standing internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics* 50(3), 431–448.
- McEwan, A., D. Mander, and R. Smith (1972). Forced resonant second-order interaction between damped internal waves. *Journal of Fluid Mechanics* 55(4), 589–608.
- Mercier, M. J., D. Martinand, M. Mathur, L. Gostiaux, T. Peacock, and T. Dauxois (2010a). New wave generation. *J. Fluid Mech.* 657, 308–334.
- Mercier, M. J., D. Martinand, M. Mathur, L. Gostiaux, T. Peacock, and T. Dauxois (2010b). New wave generation. *J. Fluid Mech.* 657, 308–334.
- Munk, W. and C. Wunsch (1998a). Abyssal recipes ii : Energetics of tidal and wind mixing. *Deep Sea Research Part I : Oceanographic Research Papers* 45(12), 1977–2010.
- Munk, W. and C. Wunsch (1998b). Abyssal recipes ii : Energetics of tidal and wind mixing. *Deep-Sea Res.* 45(12), 1977–2010.
- Munk, W. H. (1966). Abyssal recipes. In *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, Volume 13, pp. 707–730. Elsevier.
- Munroe, J. and K. Lamb (2005). Topographic amplitude dependence of internal wave generation by tidal forcing over idealized three-dimensional topography. *J. Geophys. Res.* 110(C2).
- Nault, J. and B. R. Sutherland (2007). Internal wave transmission in nonuniform flows. *Physics of Fluids* 19(1), 016601.
- Nayfeh, A. H. (2008). *Perturbation Methods*. John Wiley & Sons.
- Oster, G. (1965). Density gradients. *Scientific American* 213(2), 70–79.
- Oster, G. and M. Yamamoto (1963). Density gradient techniques. *Chemical Reviews* 63(3), 257–268.
- Pesant, S., F. Not, M. Picheral, S. Kandels-Lewis, N. Le Bescot, G. Gorsky, D. Iudicone, E. Karsenti, S. Speich, R. Troublé, *et al.* (2015). Open science resources for the discovery and analysis of tara oceans data. *Scientific data* 2, 150023.
- Phillips, O. (1972). Turbulence in a strongly stratified fluid—is it unstable? In *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, Volume 19, pp. 79–81. Elsevier.
- Polzin, K., J. Toole, J. Ledwell, and R. Schmitt (1997). Spatial variability of turbulent mixing in the abyssal ocean. *Science* 276(5309), 93–96.
- Posmentier, E. S. (1977). The generation of salinity finestructure by vertical diffusion. *Journal of Physical Oceanography* 7(2), 298–300.
- Price, J. F. (1983). Internal wave wake of a moving storm. part i. scales, energy budget and observations. *Journal of Physical Oceanography* 13(6), 949–965.
- Radko, T. (2013). *Double-Diffusive Convection*. Cambridge University Press.
- Radko, T. (2016). Thermohaline layering in dynamically and diffusively stable shear flows. *Journal of Fluid Mechanics* 805, 147–170.

- Radko, T. (2019). Thermohaline-shear instability. *Geophysical Research Letters* 46(2), 822–832.
- Rainville, L. and R. Pinkel (2006). Baroclinic energy flux at the hawaiian ridge : Observations from the r/p flip. *Journal of Physical Oceanography* 36(6), 1104–1122.
- Rainville, L. and R. A. Woodgate (2009). Observations of internal wave generation in the seasonally ice-free arctic. *Geophysical Research Letters* 36(23).
- Ray, R. D. and G. T. Mitchum (1996). Surface manifestation of internal tides generated near hawaii. *Geophysical Research Letters* 23(16), 2101–2104.
- Robinson, R. (1969). The effects of a vertical barrier on internal waves. In *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, Volume 16, pp. 421–429. Elsevier.
- Schmitt, R. W., J. Ledwell, E. Montgomery, K. Polzin, and J. Toole (2005). Enhanced diapycnal mixing by salt fingers in the thermocline of the tropical atlantic. *Science* 308(5722), 685–688.
- Schmitz Jr, W. J. (1996). On the world ocean circulation. volume 1. some global features/north atlantic circulation. Technical report, Woods Hole Oceanographic Institution MA.
- Sommeria, J. Uvmat toolbox for matlab. Technical report, LEGI/CNRS-UJF-INPG. <http://coriolis.legi.grenoble-inp.fr>.
- Sonmor, L. and G. Klaassen (1997). Toward a unified theory of gravity wave stability. *Journal of the atmospheric sciences* 54(22), 2655–2680.
- Staquet, C. and J. Sommeria (2002). Internal gravity waves : from instabilities to turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics* 34(1), 559–593.
- Stern, M. E. (1960). The “salt-fountain” and thermohaline convection. *Tellus* 12(2), 172–175.
- Stern, M. E. (2003). Initiation of a doubly diffusive convection in a stable halocline. *Journal of marine research* 61(2), 211–233.
- Stommel, H. (1958). The abyssal circulation. *Deep-Sea Res.* 5, 80–82.
- Sutherland, B. R. (2016). Excitation of superharmonics by internal modes in non-uniformly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* 793, 335–352.
- Sverdrup, H. U. (1933). *On vertical circulation in the ocean due to the action of the wind with application to conditions within the Antarctic Circumpolar Current*. University Press.
- Tabaei, A., T. Akylas, and K. G. Lamb (2005). Nonlinear effects in reflecting and colliding internal wave beams. *Journal of Fluid Mechanics* 526, 217–243.
- Thorpe, S. (2018). Models of energy loss from internal waves breaking in the ocean. *Journal of Fluid Mechanics* 836, 72–116.
- Thorpe, S. A. (1966). On wave interactions in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 24(4), 737–751.
- Thorpe, S. A. (2005). *The turbulent ocean*. Cambridge University Press.
- Timmermans, M.-L., J. Toole, R. Krishfield, and P. Winsor (2008). Ice-tethered profiler observations of the double-diffusive staircase in the canada basin thermocline. *Journal of Geophysical Research : Oceans* 113(C1).
- Toggweiler, J. and B. Samuels (1995). Effect of drake passage on the global thermohaline circulation. *Deep Sea Research Part I : Oceanographic Research Papers* 42(4), 477–500.
- Toggweiler, J. and B. Samuels (1998). On the ocean’s large-scale circulation near the limit of no vertical mixing. *Journal of Physical Oceanography* 28(9), 1832–1852.
- Toole, J., J. Ledwell, K. Polzin, R. Schmitt, E. Montgomery, L. S. Laurent, and W. Owens (1997). The brazil basin tracer release experiment. *International WOCE Newsletter* 28, 25–28.

-
- Toulmond, A. (2006). Les scientifiques sur les chemins des mers : une brève histoire illustrée de l’océanographie.[en ligne]. *Site de la station biologique de Roscoff*.
- Troy, C. and J. Koseff (2005). The generation and quantitative visualization of breaking internal waves. *Experiments in fluids* 38(5), 549–562.
- Turner, J. and H. Stommel (1964). A new case of convection in the presence of combined vertical salinity and temperature gradients. *Proceedings of the national academy of sciences* 52(1), 49–53.
- Varma, D., V. Chalamalla, and M. Mathur (2019). Spontaneous superharmonic internal wave generation by modal interactions in uniform and nonuniform stratifications. *Journal of Fluid Mechanics*, submitted.
- Varma, D. and M. Mathur (2017). Internal wave resonant triads in finite-depth non-uniform stratifications. *Journal of Fluid Mechanics* 824, 286–311.
- Veronis, G. (1965). On finite amplitude instability in thermohaline convection. *J. mar. Res* 23(1), 1–17.
- Waterhouse, A. F., J. A. MacKinnon, J. D. Nash, M. H. Alford, E. Kunze, H. L. Simmons, K. L. Polzin, L. C. St. Laurent, O. M. Sun, R. Pinkel, *et al.* (2014). Global patterns of diapycnal mixing from measurements of the turbulent dissipation rate. *Journal of Physical Oceanography* 44(7), 1854–1872.
- Wunsch, C. (2002). What is the thermohaline circulation? *Science* 298(5596), 1179–1181.
- Wunsch, C. and R. Ferrari (2004). Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 36, 281–314.
- Wunsch, S. (2017). Harmonic generation by nonlinear self-interaction of a single internal wave mode. *J. Fluid Mech.* 828, 630–647.