



**HAL**  
open science

# Analyse a posteriori et adaptation de maillage pour des problèmes d'écoulements souterrains et à surface libre

Tarek Ghoudi

► **To cite this version:**

Tarek Ghoudi. Analyse a posteriori et adaptation de maillage pour des problèmes d'écoulements souterrains et à surface libre. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Sorbonne Paris Cité, 2018. Français. NNT : 2018USPCD059 . tel-02519225

**HAL Id: tel-02519225**

**<https://theses.hal.science/tel-02519225>**

Submitted on 25 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



---

## THÈSE

Pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XIII**

ÉCOLE DOCTORALE GALILÉE

Laboratoire Analyse Géométrie et Applications

Présentée par

**Tarek GHOUDI**

---

---

**Analyse a posteriori et adaptation de maillage pour des problèmes d'écoulements souterrains et à surface libre**

---

Directeur de thèse : **M. Fayssal BENKHALDOUN**

Soutenue le 19 Décembre 2018

Devant la Commission d'Examen

### JURY

Mme. Laurence Halpern	Professeure à l'Université Paris 13
Mme. Hanen Amor	Ingénieure-Chercheuse à l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire de Fontenay-aux-Roses
M. Jean-Michel Ghidaglia	Professeur à l'École Normale Supérieure de Cachan
M. Jean Claude Latché	Directeur de recherche à l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire de Cadarache
M. Fayssal Benkhaldoun	Professeur à l'Université Paris 13
M. Mohammed Seaid	Professeur à l'Université de Durham, Royaume-Uni
M. Pascal Omnes	Professeur associé à l'Université Paris 13 et CEA
M. Emmanuel Audusse	Maître de Conférences HDR à l'Université Paris 13
M. Abdallah Bradji	Professeur à l'Université de Annaba, Algérie



---

# Remerciements

*« L'esprit reconnaissant est constamment tourné vers le meilleur, ainsi il tend à devenir meilleur, il prend la forme ou le caractère du meilleur et il recevra, en retour, le meilleur. »*

**Wallace D. Wattles**

Cette thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, elle n'aurait pas vu le jour sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la bienveillance, la générosité, et l'intérêt manifestés à l'égard de ma recherche m'ont permis d'évoluer et de dépasser mes limites jour après jour, aussi bien humainement que scientifiquement.

En premier lieu, mes remerciements vont à mon cher directeur de thèse, monsieur le Professeur Fayssal BENKHALDOUN, pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant d'encadrer ce travail, pour son soutien indéfectible, sa disponibilité et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. Je tiens aussi à lui dire à quel point j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et d'empathie. J'ai trouvé auprès de lui le conseiller qui m'a reçu en toutes circonstances avec sympathie, sourire et bienveillance. Je le remercie pour m'avoir toujours guidé vers le meilleur. Le savoir et le sens de la rigueur qu'il m'a transmis ne cesseront de m'accompagner dans ma future carrière.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude à messieurs les Professeurs Jean-Claude LATCHÉ et Jean-Michel GHIDAGLIA. Je suis infiniment sensible à l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger cette thèse et d'apporter leur expérience à sa critique.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Madame la Professeure Laurence HALPERN pour l'immense honneur qu'elle me fait en acceptant de juger ce travail.

Je sais infiniment gré à monsieur le Professeur Mohammad SAIED, pour sa disponibilité à

chaque fois que j'ai sollicité son aide et surtout pour son accueil enthousiaste et pour l'ambiance de travail très agréable qu'il a su créer lors mon passage à l'Université de DURHAM. Mes remerciements s'adressent aussi à monsieur le Professeur Emmanuel AUDUSSE, pour sa très grande ouverture d'esprit et pour s'être rendu disponible pendant la phase de pré soutenance.

Je souhaiterais également exprimer ma gratitude la plus profonde à monsieur le Professeur Pascal OMNES pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de cette recherche.

Je suis particulièrement reconnaissant l'IRSN en la personne de Madame Hanen AMOR, pour sa collaboration et pour avoir facilité et enrichi mon travail de recherche. Je la remercie pour n'avoir cessé de m'encourager et de me conseiller.

Je souhaiterais adresser ma gratitude à monsieur le Professeur Abdallah BRADJI pour avoir accepté de participer à ce jury de thèse et pour ses conseils pertinents sans lesquels ce travail aurait été moins riche.

Mes remerciements vont au directeur de l'Université Mohammed VI Polytechnique, monsieur le Professeur Driss OUAZAR, pour m'avoir toujours accueilli à bras ouverts dans son prestigieux établissement ainsi que pour l'intérêt qu'il n'a cessé de manifester vis-à-vis de ce travail. Notre collaboration avec son université a été d'un grand apport.

Je tiens aussi à remercier monsieur le Professeur Mofdi EL AMRANI, pour son hospitalité lors de mon séjour à Tanger et pour tous les conseils qu'il m'a prodigués. Je souhaite également remercier monsieur Mohammed BOUBEKEUR, ingénieur de recherche au sein de l'équipe MCS du LAGA, de sa précieuse aide dans la partie attenante à la programmation.

Je remercie également Slah SAHMIM et Amadou MAHAMANE pour leur aide, leur encouragements et leur collaboration. Leurs conseils, leurs propositions et les nombreux échanges scientifiques m'ont largement inspirés. Ces remerciements seraient incomplets si je n'en adressais pas à l'ensemble du personnel et à mes collègues du laboratoire LAGA, et tout particulièrement à madame Yolande JIMINEZ, pour la très bonne ambiance que j'ai toujours trouvée. Ils représentent pour moi une seconde famille, qui m'a incessamment soutenu et réconforté.

J'adresse mille mercis à mes compagnons de route Imad KISSAMI, Mohamed Amine BEY, Oussama LANDOULSI, Souhail MAAZIOUI, Ayoub CHARHABIL et Lotfi BECHRIA. Qu'ils trouvent ici, le témoignage de toute mon affection et de ma reconnaissance pour leur inlassable soutien. Je leur souhaite une vie comblée de bonheur.

Je tiens à remercier infiniment Chaïma BARHOUMI pour son aide et ses conseils en lui souhaitant tout le bonheur et toute la réussite.

Mon infinie reconnaissance va à ceux qui ont plus particulièrement assuré le soutien affectif de cette thèse : ma famille.

Papa et maman, tous les mots du monde ne sauraient exprimer l'immense gratitude que je vous témoigne pour tous les sacrifices que vous n'avez jamais cessé de consentir pour mon instruction et mon bien-être. J'espère avoir répondu aux espoirs que vous avez fondés en moi. Je vous rends hommage par ce modeste travail en guise de ma reconnaissance et de mon amour le plus profond.

Mes frères et sœurs, que vous trouvez ici l'expression de ma gratitude pour votre indéfectible soutien. Que Dieu vous protège.

A la mémoire de ma grand-mère et de ma nièce Khadija, puisse Le Tout Puissant assurer le repos de leurs âmes par sa sainte miséricorde.



## Résumé

L'objectif de cette thèse est d'analyser et de développer des outils numériques adaptatifs efficaces pour les problèmes d'écoulements souterrains et à surface libre, en proposant une nouvelle méthode d'adaptation basée sur les estimateurs d'erreur a posteriori.

Dans la première partie, nous appréhendons le cadre mathématique en présentant une analyse détaillée sur l'existence et l'unicité ainsi que la convergence d'erreur dans les différentes normes pour les équations d'écoulement et de transport en milieux poreux.

La deuxième partie est dédiée à une nouvelle stratégie d'adaptation de maillage qui consiste à coupler deux stratégies d'adaptation, à savoir la méthode Adapt et la stratégie Newest Vertex bisection (NVB). La première consiste à diviser un triangle en quatre-sous triangles, et la deuxième, consiste à le diviser en joignant le sommet opposé à l'arête la plus longue par son milieu. La conformité de notre méthode émane de cette dernière méthode.

La troisième partie est consacrée à la démarche empruntée pour valider notre nouvelle stratégie. Celle-ci s'appuie sur le schéma volumes finis "vertex centered", en considérant l'équation elliptique de second ordre à coefficients discontinus afin de prendre en compte les hétérogénéités du milieu. Des tests numériques viendront corroborer l'efficacité de notre méthode, ainsi que la convergence de l'erreur exacte et de l'estimateur, dont le rapport définit l'indice d'efficacité qui est proche de 1.

Dans la quatrième partie, nous avons essayé d'optimiser cette stratégie d'adaptation, en concevant une stratégie multi-niveaux pour aboutir enfin à une nouvelle méthode numérique volumes finis-semi lagrangienne. Son principe est de résoudre le problème par une phase volume finis (phase correcteur) précédée d'une phase lagrangienne utilisant la méthode des caractéristiques (phase prédicteur). La phase volumes finis utilise comme flux numérique aux interfaces le vrai flux physique évalué en un état approché aux interfaces, obtenu dans la phase prédicteur par la méthode des caractéristiques. Elle fait également appel à des processus d'interpolation devant être judicieusement choisis.

Mots clés : Milieux poreux ; méthode des volumes finis "vertex centered" ; adaptation de maillage ; Adapt ; Newest Vertex bisection ; semi lagrangienne ; estimateur d'erreur a posteriori.



# Abstract

The main objective of this thesis is to analyze and develop effective adaptive numerical tools for the problems of underground and free-surface flow by suggesting a new adaptation method based on a posteriori error estimators.

The first part sets the mathematical framework by providing a detailed analysis of the existence, the uniqueness, and the error convergence in different norms for flow equations and transport in porous media.

The second part has been dedicated to a new strategy of mesh adaptation which consists of coupling two strategies; namely (i) the method Adapt, in which a triangle is divided into four-sub-triangles; and (ii) the strategy Newest Vertex bisection (NVB), in which a triangle is divided by joining the middle of the longest edge to the opposite vertex. The conformity of our method emanates from the latter.

The objective of the third part is to validate our new strategy. The finite volume scheme "vertex centered" has been then used in consideration of the second-order elliptic equation with discontinuous coefficients to take into account the heterogeneities. The effectiveness of the method is proven and confirmed by numerical tests, as well as the convergence of the exact error and the estimator; the ratio of which, when close to 1, defines the efficiency index.

In the fourth part, the adaptation strategy has been optimized by designing a multi-level strategy which led to a new numerical method denominated finite volume-semi lagrangian. Its principle is to solve problems by a finite volume phase (corrector phase) preceded by a Lagrangian phase using the characteristics method (predictor phase). The former phase uses a numerical flow at the interfaces. The true physical flow is evaluated in an approximated state at these interfaces. It is obtained during the predictor phase by the characteristics method which is also based on judiciously chosen interpolation processes.

Keywords : Porous media; finite volume "vertex centered" method; mesh adaptation; Adapt; Newest Vertex bisection; Semi Lagrangian; a posteriori error estimates.

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1 Contexte général . . . . .	1
2 Contexte Scientifique . . . . .	2
3 Le milieu poreux . . . . .	3
4 Les équations d'écoulement . . . . .	6
4.1 Loi de Darcy . . . . .	6
4.2 Équation de continuité . . . . .	7
4.3 Équation de diffusivité . . . . .	9
5 Équation de transport . . . . .	9
6 Modèles mathématiques étudiés . . . . .	10
7 Méthode des volumes finis . . . . .	11
7.1 Volumes de contrôle . . . . .	13
8 Estimateur d'erreur a posteriori . . . . .	14
9 Plan de la thèse . . . . .	17
<b>Bibliographie</b>	<b>19</b>
<b>I Analyse du problème couplé Darcy-Transport</b>	<b>25</b>
1 Résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour l'équation de Darcy . . . . .	25
1.1 Résultats d'existence et d'unicité pour l'équation (I.1) . . . . .	25
2 Résultats de régularité . . . . .	27
3 Résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour le système couplé Darcy- Transport . . . . .	28

3.1	Description du modèle général . . . . .	28
3.2	Problème de convection-diffusion . . . . .	29
3.3	Problème couplé . . . . .	31
<b>Bibliographie</b>		<b>33</b>
<b>II Processus d'adaptation de maillage</b>		<b>35</b>
1	Introduction . . . . .	35
2	Procédure de raffinement et de déraffinement dynamique de maillage . . . . .	37
2.1	Critères de raffinement . . . . .	37
2.2	Déraffinement . . . . .	38
2.3	Qualité du maillage . . . . .	38
2.4	Méthodes de raffinement par bisection . . . . .	39
2.5	Méthode Adapt . . . . .	40
2.6	Newest-Vertex-Bisection (NVB) . . . . .	42
2.7	Couplage Adapt-Newest vertex bisection (AdaptNVB) . . . . .	44
<b>Références bibliographiques</b>		<b>49</b>
<b>III Schéma Volumes Finis centré sur le sommet et adaptation de maillages pour l'équation de Darcy</b>		<b>51</b>
1	Introduction . . . . .	51
2	Définition des cellules duales en dimension 2 d'espace . . . . .	52
3	Discrétisation volumes finis vertex centered de l'équation (III.22) . . . . .	54
4	Estimateur d'erreur a posteriori . . . . .	57
4.1	Construction du flux $t_h$ par la méthode directe . . . . .	57
5	Tests numériques . . . . .	59
5.1	Cas test 1 : problème avec une solution présentant une couche limite . . . . .	60
5.2	Cas test 2 : modèle d'un régime dominé par diffusion pure à solution régulière avec fort gradient localisé . . . . .	62
5.3	Cas test 3 : problème modèle avec tenseur de diffusion fortement hétérogène . . . . .	65
6	Raffinements multiniveaux . . . . .	75
6.1	Présentation de la méthodologie . . . . .	75
6.2	Algorithme . . . . .	75
6.3	Résultats numériques . . . . .	76

6.4	Conclusion . . . . .	78
<b>Références bibliographiques</b>		<b>81</b>
<b>IV Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées</b>		<b>83</b>
1	Introduction . . . . .	83
2	Schéma volumes finis-semi lagrangien . . . . .	85
2.1	Étape lagrangienne fractionnaire . . . . .	86
2.2	Étape Eulérienne fractionnaire . . . . .	88
3	Technique d'interpolation : Interpolation TPS "Thin plate spline interpolation" .	89
4	Résultats numériques . . . . .	90
4.1	Gaussienne en rotation . . . . .	90
4.2	Example of viscous flow of Burgers . . . . .	108
4.3	Exemple de flux de déformation . . . . .	112
4.4	Dispersion dans le détroit de Gibraltar . . . . .	120
5	Conclusions . . . . .	123
<b>Références bibliographiques</b>		<b>125</b>
<b>V Résultats de convergence d'un schéma Volumes Finis multi-dimensionnel pour une équation parabolique semi-linéaire à retard</b>		<b>129</b>
1	Introduction . . . . .	129
2	Description du modèle . . . . .	130
3	Discrétisation spatiale et temporelle . . . . .	131
4	Formulation d'un nouveau schéma de Volumes Finis pour une équation à retard	133
5	Ordre de convergence du schéma (V.8)-(V.9) . . . . .	133
6	Conclusion et perspectives . . . . .	134
<b>Références bibliographiques</b>		<b>137</b>
<b>Annexe A</b>		<b>141</b>
7	Preuve de lemme 3 . . . . .	142
8	Preuve du théorème 8 . . . . .	143
9	Démonstration de $H = r^\alpha(a_i \cos(\alpha\theta) + b_i \sin(\alpha\theta)) \in H^1(\Omega)$ . . . . .	146
10	Construction de matrice de rigidité et celle de masse . . . . .	148
10.1	Algorithme d'implémentation de la matrice de rigidité . . . . .	149

Table des matières

---

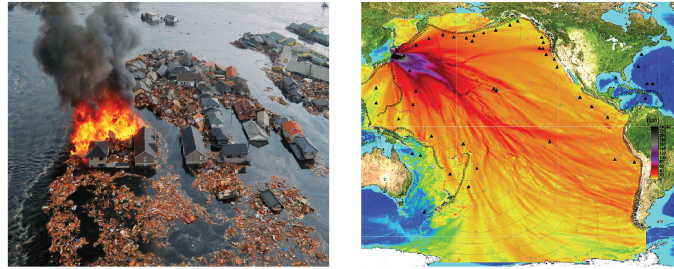
10.2	Matrice de masse . . . . .	150
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>153</b>

---

# Introduction

## 1 Contexte général

La préservation de la nappe phréatique et le développement durable sont devenus indéniablement un des enjeux majeurs des sociétés modernes. L'étude des écoulements et du transport en milieu poreux et à surface libre est un sujet d'actualité, car il s'intéresse à la partie souterraine du cycle de l'eau, ressource vitale se faisant de plus en plus rare et subissant la pollution liée aux activités humaines. Prenons comme exemple le problème de modélisation du transport des déchets autour d'un site de stockage souterrain ou en surface. Inéluctablement, le stockage commencera à fuir, ces déchets seront dissous dans l'eau puis transportés par celle-ci. Par exemple, le tremblement de terre et le tsunami de mars 2011 dans l'est du Japon ont gravement endommagé trois réacteurs de la centrale nucléaire de Fukushima, entraînant une importante libération de radiations dans l'environnement. L'écoulement des eaux souterraines à travers ces réacteurs paralysés continue d'être l'une des principales causes de contamination et du transport associé de radionucléides dans l'océan Pacifique. En 2002, le pétrolier Prestige a coulé au large des côtes espagnoles. C'est la plus grande catastrophe écologique d'Europe depuis des décennies. Environ 125 tonnes de pétrole ont été déversées, polluant les fonds marins et le littoral, en particulier le long du territoire de la Galice, où les dommages environnementaux ont été les plus graves. La zone touchée est une région écologique importante, supportant des récifs coralliens et de nombreuses espèces de requins et d'oiseaux, ainsi que l'industrie de la pêche. La forte pollution côtière a obligé le gouvernement de la région à suspendre la pêche hauturière pendant six mois. Innombrables sont les autres exemples qui illustrent l'importance de la compréhension et la maîtrise des phénomènes d'écoulements de l'eau et du transport en milieu poreux.



**Figure 1** – Catastrophe nucléaire de Fukushima et dispersion d'aérosols radioactifs dans l'océan pacifique



**Figure 2** – Naufrage du pétrolier "Le Prestige"

## 2 Contexte Scientifique

Les expérimentations des écoulements et du transport souterrains étant difficiles voire parfois impossibles, la modélisation numérique occupe une place prépondérante dans ces domaines, car elle se propose comme une alternative à la fois peu coûteuse et assez fiable. Par exemple, les échelles d'étude pour le transport de contaminants sont typiquement de l'ordre de la dizaine de kilomètres voire de la centaine de kilomètres sur des dizaines ou des centaines de milliers d'années. Dans ces conditions, on est confronté à plusieurs problèmes de modélisation d'ordre purement numérique tel que la taille du maillage, la variation des paramètres du problème et le temps de calcul. Les hétérogénéités du domaine de calcul sont sources de difficultés de modélisation spécifiques. Elles sont rencontrées à différentes échelles spatiales. A la plus grande

---

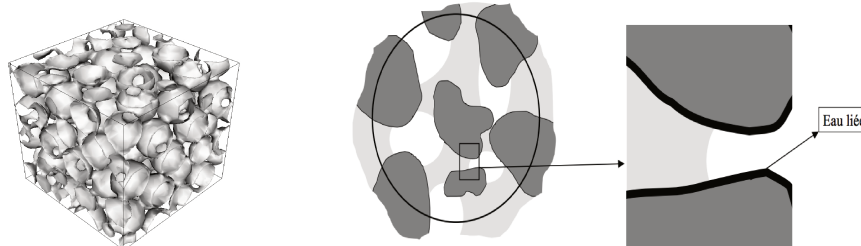
échelle, elles sont générées par les changements de couches géologiques. Cela correspond à des mutations portant sur les caractéristiques hydrogéologiques des roches formant ces couches, ce qui est à l'origine de variations de perméabilités ou de coefficients de diffusion-dispersion de plusieurs ordres de grandeur. Ces hétérogénéités s'expriment par des discontinuités dans les coefficients des équations au passage d'une couche géologique à l'autre. Néanmoins pour certaines quantités physiques, les débits en eau, la pression et les flux de contaminants restent continus. Par ailleurs, les maillages étant non structurés, les méthodes des éléments finis et des différences finis ne conservent pas les propriétés de convergence, de conservation de masse ou encore la stabilité. Une autre contrainte est la durée de la simulation qui reste incontestablement la préoccupation majeure des industriels. Généralement, elle est longue du fait de la relative lenteur des écoulements souterrains. Prenons le cas des déchets nucléaires, la durée de cette simulation est particulièrement longue, de l'ordre du million d'années, car on considère des déchets radioactifs à vie longue. Aussi, la gestion des incertitudes et les études de sûreté, qu'elles soient faites par des méthodes stochastiques ou déterministes, réclament un très grand nombre de simulations numériques. Soulignons que les questions soulevées ici s'appliquent en ingénierie pétrolière, que ce soit dans la simulation de la genèse des bassins sédimentaires ou dans la simulation de réservoirs pétroliers.

### 3 Le milieu poreux

Les roches et les sols poreux sont formés d'une partie solide et d'une autre partie vide représentée par les pores. Ces derniers peuvent avoir différentes formes, occuper plus ou moins d'espace, et être plus ou moins connectés. On appelle milieu poreux l'ensemble composé par le solide et les pores. L'eau qui y est contenue peut être de deux types:

1. eau liée ou adsorbée: couche extrêmement fine d'eau entourant les surfaces minérales auxquelles elle est attachée par les forces d'attraction moléculaire ;
2. eau libre ou encore eau gravitaire: elle se trouve en dehors du champ d'attraction des particules solides. Elle circule librement dans la macroporosité du sol. Cette eau libre est susceptible de se déplacer sous l'effet des forces gravitationnelles ou des gradients de pression.





**Figure 3** – Milieu poreux en 2D (gauche), Eau contenue dans les pores (droite)

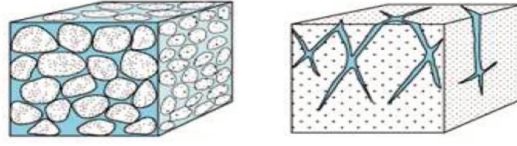
Dans un milieu poreux donné, les fluides circulent à travers l'interconnexion qui existe entre ses différents pores. Chaque milieu est essentiellement caractérisé par deux quantités physiques:

1. La porosité, notée  $\phi$ , est définie comme le rapport entre le volume des pores d'un échantillon de matériau et son volume total.  $0 \leq \phi \leq 1$ .

$$\phi = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}}$$

On distingue deux types de porosité: la porosité d'interstice et la porosité de fissure, ces deux types peuvent coexister au sein d'un seul et même géo-matériau.

- 1.1. La porosité d'interstice désigne la propriété des roches, composées de particules minérales solides plus ou moins cimentées réalisant un squelette, de former autour de ce dernier des vides interconnectés ou non. Ce type de porosité caractérise la plupart des roches et témoigne de toute leur histoire (genèse initiale, conditions de formation, transformations ultérieures telles que diagénèse, compaction, déformations, ruptures et altérations).
- 1.2. La porosité de fracture, quant à elle, est due à l'existence de fissures, de failles et de diaclases ouvertes, diversement interconnectées, généralement d'origine secondaire. Ce type de porosité intéresse la grande majorité des roches de l'écorce terrestre. Par opposition à la porosité d'interstice, elle est de nature lithologique et de caractéristiques mécaniques différentes. Ces fractures naissent sous l'effet de régimes tectoniques qui déterminent leurs orientations. La roche est ainsi découpée en plusieurs blocs délimités par des fissures ayant au moins deux directions différentes. L'ensemble aboutit à un réseau de fissures plus ou moins intriquées. Des vides au sein de la roche peuvent ainsi se former, définissant la porosité de fissure.



**Figure 4** – Porosité d'interstice (gauche), porosité de fissure(droite)

2. La perméabilité, notée  $K$ , mesure la résistance de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur des pores du milieu. Dans la plupart des problèmes relatifs à l'écoulement en milieu poreux, le fluide choisi par convention est l'eau. La perméabilité est définie de deux manières:

2.1. La perméabilité intrinsèque s'applique au milieu poreux sans tenir compte des caractéristiques du fluide.

2.2. La perméabilité des hydrogéologues dépend du fluide et de sa viscosité.

Il est néanmoins possible de passer aisément de la perméabilité intrinsèque  $K_r$  à celle des hydrogéologues  $K$  grâce à la formule suivante:

$$K = \frac{\rho \vec{g}}{\mu} K_r,$$

où,  $K$  est la perméabilité des hydrogéologues ( $\text{m.an}^{-1}$ ),  $K_r$  la perméabilité intrinsèque ( $\text{m}^2$ ),  $\rho$  la masse volumique du fluide ( $\text{kg.m}^{-3}$ ),  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur ( $\text{m.an}^{-2}$ ) et  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide ( $\text{kg.m}^{-1}.\text{an}^{-1}$ ).

Deux phases peuvent circuler dans la roche poreuse du sous-sol, à savoir l'air et l'eau. L'écoulement est dit diphasique. En revanche, si l'on descend à une profondeur suffisamment importante, la proportion d'air décroît progressivement jusqu'à ce que l'air devienne immobile et que l'eau occupe la presque la totalité du volume des pores. Le milieu est alors dit saturé. Si le milieu poreux est isotrope, en d'autres termes, si l'écoulement est unidirectionnel, alors le coefficient de perméabilité  $K$  est un coefficient scalaire. À l'opposé, lorsque le milieu dans l'espace tridimensionnel est anisotrope,  $K$  est défini par un tenseur symétrique de la forme suivante:

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz} & K_{yz} & K_{zz} \end{bmatrix}$$

Dans un repère ayant comme axes les directions pour lesquelles l'écoulement est parallèle au

---

gradient de pression, le tenseur de perméabilité  $K$  est diagonal:

$$K = \begin{bmatrix} K_h & 0 & 0 \\ 0 & K_h & 0 \\ 0 & 0 & K_v \end{bmatrix},$$

où  $K_h$  est le coefficient de perméabilité horizontale, et  $K_v$  le coefficient de perméabilité verticale. Le milieu poreux est dit homogène lorsque  $\phi$  et  $K$  sont constantes. Dans le cas contraire, il est dit hétérogène. Dans cette étude, le milieu poreux considéré est hétérogène et saturé en eau.

## 4 Les équations d'écoulement

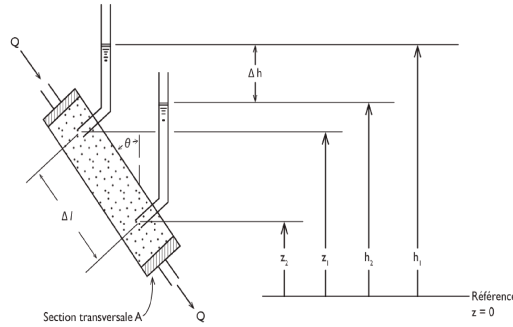
### 4.1 Loi de Darcy

En 1856, Henry Darcy a proposé pour la première fois une loi portant son nom qui traduit mathématiquement l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux. Elle reste toujours d'actualité et elle est encore largement utilisée dans des domaines aussi divers que l'hydrologie, le génie chimique ou encore l'exploitation des gisements d'hydrocarbures... Cette loi est applicable à un milieu poreux homogène et isotrope parcouru par un écoulement lent. Dans son expérience, Henry Darcy a modélisé l'écoulement de l'eau à travers un cylindre rempli de sable, d'axe vertical, sous la forme suivante:

$$Q = \frac{KS\Delta h}{e},$$

où  $Q$  est le débit,  $S$  l'aire de la section droite,  $e$  la hauteur du cylindre rempli de sable et  $\Delta h$  la différence de charge hydraulique entre les extrémités inférieure et supérieure du cylindre. Il s'agit donc d'une loi linéaire, exprimant la proportionnalité entre le débit par unité de section  $Q/S$  d'une part et le quotient de la différence de charge par la hauteur  $\Delta h/e$  d'autre part.

Des lois exprimant la proportionnalité entre un flux et le déséquilibre dont il est à l'origine, existaient bien avant la loi de Darcy. Parmi elles, citons celle de Fourier (1807) pour la conduction de la chaleur, la loi d'Ohm (1827) pour la conduction de l'électricité, la loi de Poiseuille (1844) pour l'écoulement laminaire d'un fluide dans un tube cylindrique, et enfin la loi de Fick (1855) pour la diffusion.



**Figure 5** – Dispositif expérimental illustrant la loi de Darcy

L'équation de Darcy s'exprime sous la forme vectorielle suivante:

$$\vec{q} = -\frac{K}{\mu}(\vec{\nabla}p - \rho\vec{g}),$$

où  $\vec{q}$  est la vitesse de filtration,  $\vec{\nabla}p$  le vecteur gradient de la pression  $p$ ,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $\mu$  sa viscosité dynamique,  $\vec{g}$  le vecteur accélération de la pesanteur et  $K$  le tenseur de perméabilité.

L'unité pratique de perméabilité est le Darcy, toujours largement utilisée bien qu'elle ne fasse pas partie d'un système d'unités cohérent. Il importe de souligner que les grandeurs figurant dans cette équation peuvent dépendre du point de l'espace considéré, voire du temps.

Sous cette forme généralisée, la loi de Darcy est très bien vérifiée empiriquement, du moins dans un certain domaine à condition que les déformations du milieu poreux soient négligeables, et que l'écoulement du fluide à l'échelle des pores soit bien décrit par les équations de Navier-Stokes.

Une étude approfondie des conditions de validité de la loi de Darcy a été faite dans [59]. Même lorsqu'aucune de ces conditions n'est satisfaite, on reste encore en mesure de l'utiliser en lui ajoutant des termes correctifs.

## 4.2 Équation de continuité

Outre la loi de Darcy, il est impératif que les grandeurs qui décrivent les propriétés de l'écoulement à l'échelle macroscopique vérifient également une relation exprimant la conservation de la masse du fluide, appelée équation de continuité, qui s'écrit comme suit (pour un milieu poreux parfaitement rigide et immobile et un fluide isotherme de composition constante):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{q}) = 0,$$

---

Les différentes quantités utilisées sont définies à l'échelle macroscopique, échelle à laquelle se fait l'étude de l'écoulement. La vitesse de Darcy précédemment détaillée, n'est autre que la vitesse macroscopique d'un fluide dans un milieu poreux. L'équation de continuité dans un milieu poreux s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{q}) + \rho J = 0,$$

où  $J$  désigne le terme d'apport externe ( $\text{an}^{-1}$ ). La masse volumique  $\rho$  est alors liée à la pression par une relation de la forme:

$$\rho = \rho_0 \exp(\lambda(p - p_0)),$$

où  $\lambda$  est la compressibilité du fluide. C'est ainsi qu'on peut former, à partir de cette relation, de l'équation de Darcy et de l'équation de continuité, une équation aux dérivées partielles n'ayant désormais plus qu'une seule fonction inconnue, représentée par la pression. Dans un milieu homogène, et lorsqu'on néglige les termes non linéaires, cette équation s'écrit ainsi:

$$\Delta p - 2\rho_0\lambda \vec{\nabla} p \cdot \vec{g} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial p}{\partial t},$$

où le coefficient  $\kappa$  (parfois appelé coefficient de diffusivité) a pour expression:

$$\kappa = \frac{K}{\mu\lambda\phi}.$$

C'est une équation similaire à celle régissant la diffusion ou la propagation de la chaleur (elle est calculée sur l'équation de la chaleur lorsque les effets de la pesanteur sont négligeables). Son utilisation était largement répandue, tant en hydrologie que dans l'exploitation des gisements d'hydrocarbures, jusqu'aux années soixante. Elle est parfaitement adaptée à la description de l'écoulement d'un fluide légèrement compressible dans une couche poreuse homogène. Ainsi, la loi de Darcy s'exprime en fonction de la charge hydraulique de la manière suivante:

$$\vec{q} = -K\nabla h,$$

Il s'en déduit que, le mouvement de l'eau à travers les sols est principalement lié au gradient de charge hydraulique.

---

### 4.3 Équation de diffusivité

L'aptitude qu'a un milieu à stocker de l'eau (en  $m^{-1}$ ) définit son coefficient d'emmagasinement  $S$ . Ce dernier se définit comme le rapport du volume d'eau libérée (ou emmagasinée) par unité de surface d'un aquifère pour une perte (ou un gain) de charge hydraulique donnée, sans référence au temps. Le coefficient d'emmagasinement ( $S$ ) représente la quantité d'eau libérée sous une variation unitaire de la charge hydraulique, c'est-à-dire sous l'effet d'une baisse du niveau d'eau. Il existe une relation simple entre le coefficient d'emmagasinement, la porosité d'un milieu et la charge hydraulique:  $\phi = Sh$ . En fusionnant l'équation de Darcy et l'équation de continuité, et au moyen de la dernière égalité, l'équation de diffusivité s'écrit:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (K \nabla h) + J = 0$$

**Remarque 1** *On démontre aisément que D un domaine d'intégration donné de l'équation de diffusivité, muni de ses conditions initiales et aux limites qui doivent être celle de Dirichlet sur au moins une partie de la frontière. On démontre mathématiquement, que si  $h$  vérifie ces conditions aux limites et initiales, et que si  $h$  vérifie de plus l'équation de diffusivité, alors  $h$  est en général l'unique solution du problème. Ceci se vérifie aussi bien en régime permanent qu'en régime transitoire.*

## 5 Équation de transport

Le transport de matière par un fluide en mouvement est régi par des phénomènes physico-chimiques intriqués reposant sur les processus de convection, de diffusion, de dispersion et par les interactions physico-chimiques avec le milieu. L'équation de transport est une combinaison des équations de diffusion et de convection (ou advection). Elle traduit le déplacement d'une substance soluble dans l'eau, et soumise au déplacement dans l'aquifère. Tout d'abord, commençons par un rappel portant sur le lexique lié au transport:

1. L'advection est le transport de matière par le mouvement (et donc la vitesse) du milieu environnant. L'équation de la convection s'écrit:

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{q} C) = 0$$

- 
- $C$ : concentration du soluté dans le fluide ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
  - $\vec{q}$ : vitesse de Darcy du fluide ( $\text{m.an}^{-1}$ )
  - $\phi$ : porosité du milieu
  - La diffusion est un phénomène de transport de particules sans mouvement macroscopique. Ce transport se produit dans un système initialement hors d'équilibre, des régions riches en particules vers les régions qui en sont pauvres: la diffusion tend à rendre homogènes leurs concentrations. Ce phénomène traduit le mouvement des éléments à une échelle plus petite que celle de la particule. L'équation de la diffusion ou première loi de Fick exprime le flux diffusif:

$$\vec{\mathcal{F}}_{df} = -D\nabla C,$$

où  $D$  est le tenseur de diffusion-dispersion de l'espèce soluble dans le fluide ( $\text{m}^2.\text{an}^{-1}$ ). L'équation de diffusion s'écrit:

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} - \nabla \cdot (D\nabla C) = 0$$

- La convection de matière correspond à un mouvement en bloc de particules entraînées par le milieu fluide. Ces particules ont une vitesse d'ensemble macroscopique. Il en ressort ainsi que l'équation de convection correspond bien à la définition des termes de "convection" et "advection" du moment où le déplacement du soluté se fait en fonction de la vitesse de Darcy du fluide qui le contient.

L'équation de transport s'obtient en ajoutant le flux diffusif au flux convectif dans l'équation de la convection:

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} - \nabla \cdot (D\nabla C - C\vec{q}) = f,$$

où  $f$  est un paramètre traduisant la disparition ou l'arrivée de matière dans l'aquifère ( $\text{kg.m}^{-3}.\text{an}^{-1}$ ).

## 6 Modèles mathématiques étudiés

Les problèmes elliptiques de second ordre à coefficients discontinus se rencontrent notamment dans la modélisation mathématique des écoulements dans les milieux poreux. Dans de nombreuses applications, les données décrivant les propriétés du milieu (conductivité, perméabilité, porosité) impliquent des discontinuités manifestes ou des hétérogénéités excessives. Par

conséquent, la résolution des équations elliptiques à coefficients discontinus par les méthodes numériques constitue un véritable challenge. En général, pour résoudre numériquement de telles équations, nous optons couramment les méthodes d'éléments finis ou des volumes finis.

Pour cette classe de problèmes, la diffusion et le transport dans un milieu fermé bidimensionnel  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$  sont décrits par les deux systèmes d'équations suivantes:

$$-\nabla \cdot (\kappa(x)\nabla u(x)) = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = g, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

où  $f$  est le terme source et  $\kappa$  le coefficient de diffusion supposé être constant par morceaux.

$$-\nabla \cdot (\kappa(x)\nabla u(x)) = f_1, \quad \forall x \in \Omega, \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbb{D}\nabla c - \vec{V}c) = f_2, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (4)$$

$(u, c)$  sont les inconnues des équations, qui représentent respectivement la charge hydraulique et la concentration.  $f_2$  est le terme source et  $\vec{V} = -\kappa\nabla u$  représente la vitesse de Darcy.  $\mathbb{D}$  est le tenseur de diffusion-dispersion. Le système est complété par les conditions aux limites et des conditions initiales appropriées.

## 7 Méthode des volumes finis

Il est largement admis que la méthode des volumes finis est bien adaptée pour la discrétisation des lois de conservation [56], qui sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles dépendant du temps et usuellement non linéaires. Ces lois peuvent générer des équations aux dérivées partielles de natures différentes: elliptique, parabolique ou hyperbolique mais aussi divers systèmes d'équations différentielles couplées. En dimension  $d$  de l'espace, ces équations prennent la forme générale suivante:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathbb{F}_j(U(x, t))}{\partial x_j} = 0, \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d, t > 0 \quad (5)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad (6)$$

où  $U : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$  est un vecteur à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ ,  $\Omega$  étant un ouvert borné de  $\mathbb{R}^p$ .

Les fonctions  $\mathbb{F}_j, j = 1, \dots, d$  sont dites fonctions flux. Pour la méthode des volumes finis, il faut



tout d'abord diviser la triangulation en éléments polyédriques ou cellules. Ces dernières doivent être non chevauchantes. D'une façon générale, on désigne sous le terme de maillage un domaine ainsi divisé. Ses différents éléments constitutifs sont représentés par les sommets, les faces et les cellules. Le principe de la méthode en une dimension de l'espace consiste à diviser le domaine spatial en volumes de contrôle  $\mathbf{T}_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  centrés en  $x_i = (x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}})/2$  avec un pas d'espace  $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ .  $U_i^n$  est la valeur de  $U$  sur la cellule  $]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$ :

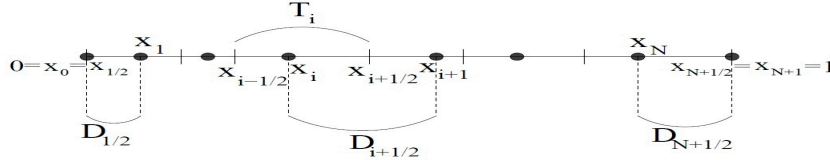
$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t_n) dx.$$

On divise aussi l'intervalle de temps en sous-intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$  avec  $t_n = n\Delta t$  et  $\Delta t$  le pas de temps. Les cellules duales sont notées par  $\mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}} = [x_i, x_{i+1}]$ . Le schéma volumes finis sous forme conservative s'écrit ainsi:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}),$$

où  $\phi_{i+\frac{1}{2}}$  est une approximation de la moyenne en temps de flux sur  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ :

$$\phi_{i-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{F}(U(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt$$



**Figure 6** – Maillage 1D et notations associées

Une question souvent posée est la différence entre la méthode des volumes finis et celle des éléments finis. La réponse se trouve, à vrai dire, dans les concepts des méthodes. Mais dans certains cas, ces méthodes génèrent des schémas similaires. Globalement, on peut dire que la méthode des éléments finis a pour base une formulation couplée faible avec une approximation convenable des espaces fonctionnels. La méthode des volumes finis, quant à elle, émane d'une équation d'équilibre, plutôt que de l'équation à dérivée partielle elle-même, avec une approximation consistante du flux sur le bord des volumes de contrôle. De plus, elle est applicable sur différentes géométries aussi bien pour les maillages structurés que non structurés. C'est une méthode robuste qui conserve localement les flux numériques. Elle peut aussi être assimilée à une méthode discontinue de Galerkin de plus bas ordre. Au-delà de la stabilité et

---

de la précision classiques, la méthode des volumes finis offre plusieurs propriétés hautement souhaitables, telles que la conservation de masse locale, le principe du maximum discret, etc., qualités essentielles pour capturer les profils des solutions de problèmes complexes. À cause des coefficients hétérogènes dans les équations considérées, les schémas des volumes finis standard à quatre points n'est pas exploitable dans ce cas précis. Pour résoudre les équations de diffusion, plusieurs types de méthodes de volumes finis ont également été étudiées dans la littérature, telle que la méthode des volumes finis discrète [57, 58]. La méthode DDFV découle également de la construction d'analogues discrets des opérateurs de divergence et de flux qui remplissent la contrepartie discrète des identités du calcul vectoriel. Néanmoins, cette méthode nécessite de résoudre l'équation de diffusion non seulement sur le maillage primal, mais également sur le maillage dual.

## 7.1 Volumes de contrôle

Concernant la méthode des volumes finis, il faut effectuer une moyenne des variables d'intérêt sur des volumes de contrôle définis par des cellules "cell-centered" ou "vertex centered" (voir Figure 7).

- i) Les volumes de contrôle "cell-centered" ne sont autres que les cellules du maillage. Le stockage des moyennes des variables se fait aux centres des cellules. En s'aidant des valeurs des variables dans les cellules voisines qui entourent la face, on est en mesure d'estimer ses flux.
- ii) C'est en joignant successivement les centres de gravité des mailles ou les centres des cercles circonscrits à chaque maille, qu'on obtient les volumes de contrôle "vertex-centered". Pour cette formulation, le stockage des valeurs des solutions se fait aux nœuds des mailles.



**Figure 7** – Volumes de contrôle utilisés dans la méthode des volumes finis "cell-centered" (gauche) et dans celle des volumes finis "vertex-centered" (droite).

Chaque méthode a ses propres atouts. Ainsi, la formulation "vertex-centered" offre l'avantage d'avoir moins d'inconnues à évaluer. En revanche, et contrairement à la méthode "cell-centered", les aires des volumes de contrôle y sont plus larges. Si le maillage est rectangulaire et uniforme,

---

ces deux méthodes sont équivalentes. En effet, ce n'est que sur un domaine partitionné en triangles que des différences substantielles entre ces deux approximations deviennent perceptibles. L'approximation "vertex-centered" est plutôt efficace même dans le cas d'équations elliptiques et paraboliques. Cela a été vérifié dans de nombreux travaux au cours des cinq dernières décennies. La théorie unifiée de ces outils d'analyse discrète, initiée à la fin des années 80, a permis d'aborder l'analyse numérique de systèmes complexes. L'intérêt que nous portons pour les schémas "vertex-centered" est principalement motivé par leur large utilisation dans les codes industriels. En effet, le maillage dual (surtout en 3D) d'un maillage primal non structuré conduit à une complexité rédhibitoire.

## 8 Estimateur d'erreur a posteriori

Les techniques adaptatives employant les estimateurs d'erreur se sont révélées être indispensables dans un large panel d'applications. En effet, lors d'un calcul numérique, le maillage utilisé occupe une place déterminante. Si celui-là est grossier, un temps de calcul court se fera au prix de résultats approximatifs. Au contraire, un maillage très fin impliquera un temps de calcul extrêmement long. Pour remédier à cet inconvénient, l'adaptation de maillage offre la possibilité d'avoir un maillage fin électivement là où cela est nécessaire. Grâce à ce type d'estimateurs, il est possible de mesurer la qualité de la solution calculée et d'avoir une information pour contrôler l'algorithme d'adaptation de maillage. L'importance des estimations d'erreur a posteriori pour contrôler un processus de raffinement de maillage automatique et auto-adaptatif a été bien établie au cours des dernières décennies. De ce fait, afin de traiter les problèmes elliptiques de second ordre à coefficients discontinus qui traitent l'écoulement des fluides en milieux poreux, on a usuellement recours à la méthode des volumes finis vertex centered basée sur ces estimateurs. Cette méthode convient aux grilles non structurées et au raffinement adaptatif du maillage. Elle a été appliquée avec succès aux équations de convection-diffusion-réaction. Elle consiste essentiellement à chercher une solution approchée linéaire sur chaque triangle du maillage primal et vérifiant la conservativité locale sur les cellules duales. Plusieurs paramètres conditionnent le succès de l'implémentation de la méthode des volumes finis vertex centered basée sur les estimateurs d'erreurs a posteriori. Ces derniers doivent obéir à des conditions bien précises. En effet, leur robustesse est facteur de l'indépendance des constantes qui interviennent dans la formulation des paramètres du problème. En outre, l'évaluation de l'estimateur nécessite la définition d'un taux d'efficacité qui doit tendre vers 1. Deux autres conditions sont représentées:

- i) d'une part par la localisation de l'estimateur ;

- 
- ii) et d'autre part par le raffinement du maillage là où la valeur des indicateurs locaux dépasse un certain seuil, laquelle condition est remplie par le biais de raffinements adaptatifs du maillage.

L'étude des estimations d'erreur a posteriori pour la méthode des volumes finis est plus récente que pour celle des éléments finis. L'un des premiers auteurs à l'avoir adoptée est Angermann [9]. Dans son travail, l'auteur s'est intéressé à l'étude des estimations d'erreur a posteriori pour la discrétisation des équations de convection-diffusion stationnaires en dimension 2 par la méthode des volumes finis sur des maillages de Voronoï. En ce qui concerne les schémas volumes finis centrés par les sommets, on exploite généralement les liens avec le cas des éléments finis afin d'obtenir des estimations d'erreur a posteriori. En ce qui se rapporte à l'équation de convection-réaction-diffusion, Lazarov et Tomov [37] avancent une estimation d'erreur a posteriori par résidu en calculant l'erreur en norme  $H^1$ . Dans le cadre des schémas volumes finis centrés par mailles, divers techniques ont été décrites pour obtenir des estimations d'erreur a posteriori. Plusieurs auteurs postulent qu'elles sont équivalentes aux méthodes des éléments finis. En vue d'obtenir un indicateur d'erreur, Agouzal et Oudin [41] mettent à contribution des relations entre les éléments finis mixtes de Raviart-Thomas de plus bas ordre, les éléments finis non conformes de plus bas ordre et les méthodes des volumes finis centrées par maille sur des maillages triangulaires. Omnes, Penel et Rosenbaum [12], quant à eux, se démarquent par l'emploi de la méthode DDFV pour l'obtention d'estimations d'erreur a posteriori pour le problème de diffusion sur des maillages en deux dimensions très généraux. Une autre technique est présentée par Vohralík [35] pour un problème de réaction-diffusion. Les estimations proposées ont comme base une reconstruction  $H(\text{div}; \Omega)$ -conforme du flux diffusif. Elles sont garanties, localement efficaces et robustes par rapport à la dominance de la réaction. Le principe est de construire une solution post-traitée qui réponde à certaines exigences:

- i) Tout d'abord, elle doit préserver avec exactitude les flux diffusifs discrets.
- ii) Ensuite, sa valeur moyenne dans chaque maille doit être fixée par la solution constante par morceaux fournie par le schéma volumes finis.

Ce post-traitement présente un double intérêt. D'une part, il permet d'obtenir une solution approchée adaptée à la mesure d'erreur par la norme d'énergie. En effet, le gradient sur chaque élément de la solution donnée par la méthode des volumes finis centrés par maille est nul, ce qui rend la mesure d'erreur par la norme d'énergie dans ce cas inadéquate. D'autre part, le flux diffusif relié à cette construction appartient à l'espace  $H(\text{div}; \Omega)$ .

La même approche a été utilisée par Vohralík [53], pour aborder des problèmes de diffusion avec des coefficients de diffusion constants par morceaux sur les éléments du maillage mais discontinus à travers les interfaces entre les éléments.

---

Il existe deux catégories d'estimateurs d'erreur:

- i) Les estimateurs d'erreur a priori, qui donnent une borne à la différence entre la solution exacte  $u_e$  et la solution approchée  $u$  dans une certaine norme:

$$\|u_e - u\| \leq Ch^\alpha \|u_e\|^*$$

où  $\|\cdot\|$  diffère en général de  $\|\cdot\|^*$ .

Sur le plan théorique, ces estimations confirment la convergence de la méthode numérique. Par contre, sur le plan pratique, cette borne ne peut être utilisée du moment où elle fait intervenir la solution exacte qui est inconnue.

- ii) Les estimateurs d'erreur a posteriori fournissent une estimation de la norme de l'erreur  $\|u_e - u\|$  ne faisant intervenir que la solution numérique, les données du problème et la géométrie du maillage:

$$\|u_e - u\| \leq \eta(\mathcal{T}, D, u),$$

où  $\mathcal{T}$  est le maillage et  $D$  désigne l'ensemble des données du problème.

La norme  $\|\cdot\|$  dépend du problème considéré (cela peut être la norme  $L_2$  ou la norme énergie ou autre). L'estimateur d'erreur a posteriori peut donc être calculé numériquement. Il est essentiel de souligner qu'un estimateur d'erreur a posteriori doit être calculable localement en l'occurrence sur chaque maille. De façon générale, on a:

$$\eta(\mathcal{T}, D, u) = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2(\mathcal{T}, D, u) \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\eta_T(\mathcal{T}, D, u)$ : estimateur d'erreur a posteriori défini sur la maille  $\mathcal{T}$ .
- $\eta(\mathcal{T}, D, u)$ : estimateur d'erreur a posteriori global.

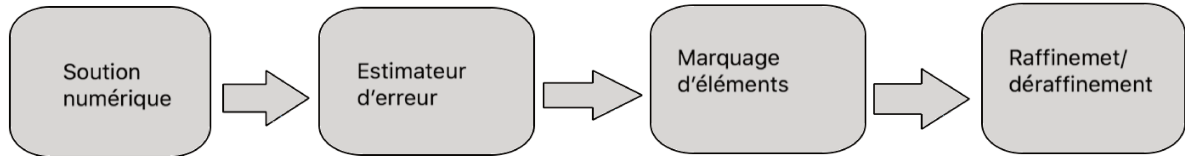
L'estimateur d'erreur local permettra d'indiquer si un raffinement ou un déraffinement de la maille est nécessaire selon certains critères. La démarche à suivre est détaillée ci-après:

1. Une équation est résolue numériquement.
2. Une estimation d'erreur a posteriori globale (sur l'ensemble du domaine de calcul) est par la suite calculée.
3. Si cette dernière est supérieure à une tolérance préalablement établie par l'utilisateur alors:
  - 3.1. On procède à un raffinement du maillage, et ce en faisant appel aux estimations d'erreur a posteriori locales définies sur chaque maille puis le calcul est relancé.

---

3.2. Dans le cas où cette estimation est inférieure à la tolérance, le calcul est arrêté.

Cette démarche s'applique également pour un calcul instationnaire, à chaque pas de temps. Les différentes étapes précédemment détaillées peuvent être décrites par la boucle suivante:



## 9 Plan de la thèse

Le chapitre 1, sera dédié à l'analyse de l'existence et de l'unicité ainsi que de la régularité et de la convergence de l'erreur dans le problème de Darcy et dans celui couplé Darcy-Transport. Dans le chapitre 2, nous rappellerons les deux méthodes de raffinement NVB et Adapt développée au LAGA, avant de présenter notre nouvelle stratégie d'adaptation de maillage appelée AdaptNVB qui consiste à coupler ces deux premières méthodes.

Dans le chapitre 3, nous détaillerons la démarche empruntée pour prouver l'efficacité de la stratégie AdaptNVB. Pour ce faire, nous avons considéré le schéma volumes finis "vertex centered". Cette discrétisation volumes finis aboutit un système linéaire à matrice creuse que l'on résout avec une matrice LU directe. De plus, prenant en compte le risque de propagation inutile du raffinement, dans la version originale du traitement de la conformité dans la méthode Adapt, nous démontrerons que cette nouvelle approche traitant la conformité par la méthode NVB permet d'éviter la propagation de niveaux d'adaptions et de raffiner uniquement les zones où des singularités résident. Concernant le critère de raffinement, nous opterons pour les estimateurs d'erreur proposé par Vohralík en particulier la prescription directe. Nous effectuerons un nombre important de tests et de comparaisons en appliquant le calcul d'estimateur avec les méthodes NVB et AdaptNVB sur différents problèmes modèles d'un régime dominé par diffusion pure. En plus, nous investirons le champs des raffinements multiniveaux et mènerons des comparaisons en termes de temps de calcul et de précision entre le raffinement classique à un niveau et celui multiniveaux.

Dans le chapitre 4, en vue du couplage entre l'équation de diffusion portant sur l'écoulement (et fournissant le champs de vitesse) et le transport de solutés, nous allons considérer un problème de transport par convection et lui appliquerons un schéma innovant Caractéristique volumes finis, ayant l'avantage de produire une solution conservative de grande précision et peu coûteuse. Il s'agit de la première fois qu'une telle méthode est mise en œuvre dans le cadre de

---

maillages non structurés. Son principe provient de la famille de schémas proposés par (Benkhaldoun 2002) conçue pour une grande classe de problèmes de transport ne s'appêtant pas à un traitement par des solveurs de Riemann approchés dans le cadre des volumes finis. Le concept consiste à résoudre le problème par une phase volume finis (phase correcteur) précédée d'une phase lagrangienne utilisant la méthode des caractéristiques (phase prédicteur).

La phase volumes finis utilise comme flux numérique aux interfaces le vrai flux physique évalué en un état approché aux interfaces, et obtenu dans la phase prédicteur par la méthode des caractéristiques, ainsi que des processus d'interpolation devant être soigneusement sélectionnés. Enfin, le dernier chapitre sera dédié à l'étude de la convergence en utilisant un schéma implicite volumes finis d'une équation parabolique semi-linéaire à retard.

---

## Bibliographie

- [1] M.Ainsworth, A.Allendes, G.Barrenchea , R.Rankin. Fully computable a posteriori error bounds for stabilized FEM approximations of convention reaction diffusion problems in three dimensions. *International journal for numerical methods in fluids* 2013, 73 : 765-790.
- [2] Z.Chen, S.Dai. On the efficiency of adaptative finite element methods for elliptic problems with discontinuous coefficients. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(2), 443-462 (2006).
- [3] M.Vohralík, A.Ern. Flux reconstruction and a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin methods on general nonmatching grids. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 347, 7-8 (2009), 441-444.
- [4] M.Vohralík. Guaranteed and fully robust a posteriori error estimates for conforming discretizations of diffusion problems with discontinuous coefficients.*J. Sci. Comput.* 46, 3 (2011), 397-438.
- [5] M.Vohralík. Residual flux-based a posteriori error estimates for finite volume related locally conservative methods. *Numerische Mathematik.* 111, 1 (2008), 121-158.
- [6] M.Petzoldt. A posteriori error estimators for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Advances in Computational Mathematics* 16 : 47-75, 2002.
- [7] B.Rivière, M.Wheeler. A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin method applied to elliptic problems. *Computers and Mathematics with Applications* 2003.
- [8] Angermann, L. An a posteriori estimation for the solution of elliptic boundary value problems by means of upwind FEM. *IMA J. Numer. Anal.* 12,2 (1992), 201-215.



- 
- [9] Angermann, L. Balanced a posteriori error estimates for finite-volume type discretizations of convection-dominated elliptic problems. *Computing* 55, 4 (1995), 305-323. [15](#)
- [10] Vohralík, M. Residual flux-based a posteriori error estimates for finite volume and related locally conservative methods. *Numer. Math.* 111, 1 (2008), 121-158.
- [11] Vohralík, M, Hilhorst, D . A posteriori error estimates for combined finite volume-finite element discretizations of reactive transport equations on nonmatching grids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200, 5-8 (2011), 597-613.
- [12] Omnes, P., Penel, Y., and Rosenbaum, Y. A posteriori error estimation for the discrete duality finite volume discretization of the Laplace equation. *SIAM J. Numer. Anal.* 47, 4 (2009), 2782-2807. [15](#)
- [13] Ern, A., and Vohralík, M. A posteriori error estimation based on potential and flux reconstruction for the heat equation. *SIAM J. Numer. Anal.* 48, 1 (2010), 198-223.
- [14] Zienkiewicz, O. C., and Zhu, J. Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 24, 2 (1987), 337-357.
- [15] Neittaanmäki, P., and Repin, S. *Reliable methods for computer simulation*, vol. 33 of *Studies in Mathematics and its Applications*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004. Error control and a posteriori estimates.
- [16] Repin, S. *A posteriori estimates for partial differential equations*, vol. 4 of *Radon Series on Computational and Applied Mathematics*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008.
- [17] Ainsworth, M., and Oden, J. T. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. *Pure and Applied Mathematics (New York)*. Wiley- Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000.
- [18] Verfürth, R. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Teubner-Wiley, Stuttgart, 1996.
- [19] Babuska, I., and Rheinboldt, W. C. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.* 15, 4 (1978), 736-754.
- [20] Babuska, I., and Rheinboldt, W. C. A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12, 10 (1978), 1597-1615.

- 
- [21] Verfürth, R. Error estimates for some quasi-interpolation operators. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 33 (6 1999), 695-713.
- [22] Veeder, A., and Verfürth, R. Explicit upper bounds for dual norms of residuals. *SIAM J. Numer. Anal.* 47, 3 (2009), 2387-2405.
- [23] Ladevèze, P. Comparaison de modèles de milieux continus. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 1975.
- [24] Ladevèze, P. Constitutive relation error estimators for time-dependent nonlinear FE analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 188, 4 (2000), 775-788. IV WCCM, Part II (Buenos Aires, 1998).
- [25] Ladevèze, P., and Leguillon, D. Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM J. Numer. Anal.* 20, 3 (1983), 485-509.
- [26] A. Bergam, Z. Mghazli, R. Verfürth. Estimations a posteriori d'un schéma de volumes finis pour un problème non linéaire. *Numer. Math.* (2003) 95 : 599-624.
- [27] Angermann, L. An a posteriori estimation for the solution of elliptic boundary value problems by means of upwind FEM. *IMA J. Numer. Anal.* 12, 2 (1992), 201-215.
- [28] Angermann, L. Balanced a posteriori error estimates for finite-volume type discretizations of convection-dominated elliptic problems. *Computing* 55, 4 (1995), 305-323.
- [29] Afif, M., Bergam, A., Mghazli, Z., and Verfürth, R. A posteriori estimators for the finite volume discretization of an elliptic problem. *Numer. Algorithms* 34, 2-4 (2003), 127-136. *International Conference on Numerical Algorithms, Vol. II (Marrakesh, 2001)*.
- [30] Xu, J., Zhu, Y., and Zou, Q. New adaptive finite volume methods and convergence analysis. Preprint AM296, Mathematics Department, Penn State, 2006.
- [31] Lazarov, R., and Tomov, S. A posteriori error estimates for finite volume element approximations of convection-diffusion-reaction equations. *Comput. Geosci.* 6, 3-4 (2002), 483-503. *Locally conservative numerical methods for flow in porous media.* 15
- [32] Carstensen, C., Lazarov, R., and Tomov, S. Explicit and averaging a posteriori error estimates for adaptive finite volume methods. *SIAM J. Numer. Anal.* 42, 6 (2005), 2496-2521 (electronic).

- 
- [33] Ju, L., Tian, L., and Wang, D. A posteriori error estimates for finite volume approximations of elliptic equations on general surfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198, 5-8 (2009), 716-726.
- [34] Afif, M., Amaziane, B., Kunert, G., Mghazli, Z., and Nicaise, S. A posteriori error estimation for a finite volume discretization on anisotropic meshes. *J. Sci. Comput.* 43, 2 (2010), 183-200.
- [35] Cheddadi, I., Fucík, R., Prieto, M. I., and Vohralík, M. Guaranteed and robust a posteriori error estimates for singularly perturbed reaction diffusion problems. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 43, 5 (2009), 867-888. [15](#)
- [36] Bergam, A., Mghazli, Z., and Verfürth, R. Estimations a posteriori d'un schéma de volumes finis pour un problème non linéaire. *Numer. Math.* 95, 4 (2003), 599-624.
- [37] Bi, C., and Ginting, V. A residual-type a posteriori error estimate of finite volume element method for a quasi-linear elliptic problem. *Numer. Math.* 114, 1 (2009), 107-132. [15](#)
- [38] Yang, M. A posteriori error analysis of nonconforming finite volume elements for general second-order elliptic PDEs. *Numer. Methods Partial Differential Equations* 27, 2 (2011), 277-291.
- [39] Ye, X. A posteriori error estimate for finite volume methods of the second order elliptic problem. *Numer. Methods Partial Differential Equations* 27, 5 (2011), 1165-1178.
- [40] Liu, J., Mu, L., and Ye, X. An adaptive discontinuous finite volume method for elliptic problems. *J. Comput. Appl. Math.* 235, 18 (2011), 5422-5431.
- [41] Agouzal, A., and Oudin, F. A posteriori error estimator for finite volume methods. *Appl. Math. Comput.* 110, 2-3 (2000), 239-250. [15](#)
- [42] Achdou, Y., Bernardi, C., and Coquel, F. A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy's equations. *Numer. Math.* 96, 1 (2003), 17-42.
- [43] Omnes, P., Penel, Y., and Rosenbaum, Y. A posteriori error estimation for the discrete duality finite volume discretization of the Laplace equation. *SIAM J. Numer. Anal.* 47, 4 (2009), 2782-2807.
- [44] Estep, D., Pernice, M., Pham, D., Tavener, S., and Wang, H. A posteriori error analysis of a cell-centered finite volume method for semilinear elliptic problems. *J. Comput. Appl. Math.* 233, 2 (2009), 459-472.

- 
- [45] Nicaise, S. A posteriori residual error estimation of a cell-centered finite volume method. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 338, 5 (2004), 419-424.
- [46] Nicaise, S. A posteriori error estimations of some cell-centered finite volume methods. *SIAM J. Numer. Anal.* 43, 4 (2005), 1481-1503 (electronic).
- [47] Eymard, R., Gallouët, T., and Herbin, R. Finite volume methods. In *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. VII. North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 713-1020. (Cité en pages 8, 9, 15, 21, 41, 42 et 49.)
- [48] Nicaise, S. A posteriori error estimations of some cell centered finite volume methods for diffusion-convection-reaction problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 44, 3 (2006), 949-978 (electronic).
- [49] Erath, C., and Praetorius, D. A posteriori error estimate and adaptive mesh refinement for the cell-centered finite volume method for elliptic boundary value problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 47, 1 (2008/09), 109-135.
- [50] Vohralík, M. Residual flux-based a posteriori error estimates for finite volume and related locally conservative methods. *Numer. Math.* 111, 1 (2008), 121-158.
- [51] Eymard, R., Gallouët, T., and Herbin, R. Finite volume approximation of elliptic problems and convergence of an approximate gradient. *Appl. Numer. Math.* 37, 1-2 (2001), 31-53.
- [52] Vohralík, M. A posteriori error estimates for lowest-order mixed finite element discretizations of convection-diffusion-reaction equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 45, 4 (2007), 1570-1599.
- [53] Vohralík, M. Guaranteed and fully robust a posteriori error estimates for conforming discretizations of diffusion problems with discontinuous coefficients. *J. Sci. Comput.* 46, 3 (2011), 397-438. [15](#)
- [54] Cochez-Dhondt, S., Nicaise, S., and Repin, S. A posteriori error estimates for finite volume approximations. *Math. Model. Nat. Phenom.* 4, 1 (2009), 106-122.
- [55] Jiránek, P., Strakoš, Z., and Vohralík, M. A posteriori error estimates including algebraic error and stopping criteria for iterative solvers. *SIAM J. Sci. Comput.* 32, 3 (2010), 1567-1590. [11](#)
- [56] Herbin, R., Eymard, R., Gallouët, T. *Finite Volume Methods, Handbook of Numerical Analysis*. Elsevier Science, 2000. [11](#)

- 
- [57] F. Hermeline. A finite volume method for approximating 3D diffusion operators on general meshes. *J. Comput. Phys.*, 228 :5763-5786, 2009. [13](#)
- [58] Domelevo, K., Omnes, P. A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two dimensional grids. *ESAIM, Math. Mod. Numer. Anal.*, 39(6) :1203-1249, 2005. [13](#)
- [59] Houpeurt, A. *Mécanique des fluides dans les milieux poreux, critique et recherche*, éditions Technip, Paris (1974). [7](#)

---

---

# Chapitre I

---

## Analyse du problème couplé Darcy-Transport

Le but de ce chapitre est de fournir un cadre mathématique complet du problème couplé Darcy-Transport, par un rappel des Théorèmes d'existence, d'unicité et de régularité dans le cas des problèmes linéaires.

### 1 Résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour l'équation de Darcy

L'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux est obtenu en résolvant l'équation aux dérivées partielles suivante sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ :

$$-\nabla \cdot (\kappa(x)\nabla p) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{I.1})$$

où  $p$  représente la charge hydraulique,  $\kappa$  le tenseur de perméabilité et  $f$  le terme source.  $U = \kappa\nabla p$  désigne la vitesse de Darcy.

#### 1.1 Résultats d'existence et d'unicité pour l'équation (I.1)

Considérons l'équation elliptique suivante:

$$-\text{div}(\kappa(x)\nabla p(x)) = f, \quad (\text{I.2})$$

par souci de simplicité, nous considérons les conditions aux limites de Dirichlet:

$$p(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (\text{I.3})$$

$\partial\Omega$  désigne la frontière de  $\Omega$ . Nous supposons en outre que:

**Hypothèse 1** 1.  $\Omega$  est un sous-ensemble polygonal ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ .

- 
2.  $\kappa$  est une matrice symétrique, c'est-à-dire.  $\kappa = (\kappa_{ij})_{i,j=1}^d$  et  $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$ . Nous supposons que  $\kappa_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ .
  3. Il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , pour  $x \in \Omega$ ,

$$\kappa \xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^d \kappa_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad (\text{I.4})$$

où  $|\xi|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^d$ , i.e.  $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^d \xi_i^2$ .

Cette propriété signifie que l'opérateur  $L$  donné par  $L = -\text{div}(\kappa \nabla p)$  est uniformément elliptique.

4.  $f \in L^2(\Omega)$ .
5.  $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$  est tel qu'il existe  $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$  satisfaisant  $\tilde{\gamma}(\tilde{g}) = g$  ( $\tilde{\gamma}$  désigne l'opérateur de trace défini à partir de l'espace  $H^1(\Omega)$  vers l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ).

**Remarque 2** La condition (I.4) signifie que la plus petite valeur propre de l'opérateur  $L$  est supérieure ou égale à  $\alpha$ .

Le Théorème suivant prouve l'existence et l'unicité d'une solution faible au problème (I.2)-(I.3):

**Théorème 1** Sous les hypothèses 1-5, il existe une unique solution au problème (I.2)-(I.3) dans le sens suivant: il existe  $p \in H^1(\Omega)$  telle que la fonction  $w = p - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)$  satisfait l'équation suivante, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \kappa(x) \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = - \int_{\Omega} \kappa(x) \nabla \tilde{g}(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (\text{I.5})$$

Pour prouver le Théorème 1, nous devons utiliser le Lemme de Lax-Milgram que nous rappelons ici par souci d'exhaustivité.

**Lemme 1 ( Lemme de Lax-Milgram)**

Soit  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire définie sur  $F \times F$ , où  $F$  est un espace de Hilbert satisfaisant l'hypothèse suivante:

1. Continuité. Il existe  $C_1 > 0$  tel que, pour tout  $u, v \in F$

$$\mathbf{a}(u, v) \leq C_1 \|u\| \|v\| \quad (\text{I.6})$$

2. Cœrcivité. Il existe  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $u \in F$

$$\mathbf{a}(u, u) \geq \alpha \|u\|^2. \quad (\text{I.7})$$

---

Soit  $\varphi$  une forme linéaire continue sur  $F$ , c'est-à-dire qu'il existe  $C_2 > 0$  tel que, pour tout  $v \in F$

$$\varphi(v) \leq C_2 \|v\|. \quad (\text{I.8})$$

Alors, il existe  $u \in F$  unique tel que, pour tout  $v \in F$

$$\mathbf{a}(u, v) = \varphi(v). \quad (\text{I.9})$$

**Preuve du Théorème 1** (voir l'Annexe A).

## 2 Résultats de régularité

Il y a plusieurs résultats de régularité qui conduisent à la régularité  $p \in H^2(\Omega)$ . Cette dernière est principalement utilisée pour obtenir un ordre de convergence optimal. Nous citons certains d'entre eux.

1. Premier résultat de régularité ([4], Théorème 3.2.1.2)

**Théorème 2** (*Premier résultat de régularité: Hypothèse de convexité*)

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert borné convexe de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que  $\kappa_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$  et que l'hypothèse I.4 est satisfaite. Alors, il existe une unique solution  $w \in H^2(\Omega)$  pour I.5 et on obtient l'estimation a priori suivante:

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \right). \quad (\text{I.10})$$

Donc la fonction  $p$  donnée par  $w + \tilde{g}$ , où  $\tilde{g} \in H^2(\Omega)$  telle que  $\gamma(\tilde{g}) = g$ , satisfait

$$\|p\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \right). \quad (\text{I.11})$$

2. Deuxième résultat de régularité ([2], Théorème 4)

**Théorème 3** (*Deuxième résultat de régularité: Conditions de bords régulières*)

Soit un sous-ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\partial\Omega$  est de Classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que  $\kappa_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$  et que l'hypothèse I.4 est satisfaite. Alors, il existe une unique solution  $w \in H^2(\Omega)$  pour I.5, ce qui donne l'estimation a priori suivante:

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \right). \quad (\text{I.12})$$



---

Donc, la fonction  $p$  donnée par  $w + \tilde{g}$ , où  $\tilde{g} \in H^2(\Omega)$  telle que  $\gamma(\tilde{g}) = g$ , satisfait

$$\|p\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)}\right). \quad (\text{I.13})$$

Le Théorème technique suivant sera utile dans la sous-section 2.3 (Page 67) et l'Annexe A (Page 150), (cf [12]).

**Théorème 4** Soit  $\nu$  une fonction continue sur  $\Omega = \bigcup_{i=1}^d \Omega_i$ , telle que la restriction  $\nu|_{\Omega_i}$  de  $\nu$  à  $\Omega_i$  appartient à  $H^1(\Omega_i)$ , pour tout  $i = 1, \dots, d$ . Alors  $\nu$  appartient à  $H^1(\Omega)$ .

### 3 Résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour le système couplé Darcy-Transport

Le but de cette étude est de fournir des résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour le système à deux équations aux dérivées partielles couplé Darcy-Transport qui modélise l'écoulement et le transport dans les milieux poreux.

#### 3.1 Description du modèle général

Nous nous intéressons au modèle à deux équations suivant:

$$-\text{div}(\kappa(\mathbf{x}, H(\mathbf{x}, t))\nabla H(\mathbf{x}, t)) = f_1(\mathbf{x}, t, C), \quad (\text{I.14})$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \text{div}(VC)(\mathbf{x}, t) - \text{div}(\epsilon D(\mathbf{x}, t)\nabla C(\mathbf{x}, t)) = f_2(\mathbf{x}, t), \quad (\text{I.15})$$

$$V = -\kappa\nabla H. \quad (\text{I.16})$$

##### 3.1.1 Cas linéaire

Supposons que:

- $\kappa$  est constante. Posons  $\kappa \equiv 1$ .
- $f_1$  dépend seulement de  $\mathbf{x}$ .
- $\epsilon \equiv 1$ .

Le problème (I.14)-(I.16) revient à:

$$-\Delta H(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (\text{I.17})$$

---


$$\frac{\partial C}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(VC)(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div}(D(\mathbf{x}, t)\nabla C(\mathbf{x}, t)) = f_2(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } t \in (0, T), \quad (\text{I.18})$$

$$V = -\nabla H. \quad (\text{I.19})$$

Supposons qu'en plus de l'équation de Poisson (I.17), nous avons les conditions aux limites homogènes de Dirichlet suivantes pour l'inconnue H:

$$H(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (\text{I.20})$$

où  $\partial\Omega$  est le bord de  $\Omega$ . En plus de l'équation parabolique (I.18), nous supposons également que nous avons les conditions aux limites de Dirichlet et des conditions initiales pour C.

$$C(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \text{et} \quad t \in (0, T), \quad (\text{I.21})$$

$$C(\mathbf{x}, 0) = C^0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (\text{I.22})$$

L'étude de l'existence et de l'unicité du problème (I.17)-(I.19) a été faite dans la section 2.1.

Une formulation faible pour le problème (I.17)-(I.20) (voir [1]) est donnée par:

Trouver  $H \in H_0^1(\Omega)$  tel que pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on a:

$$\int_{\Omega} \nabla H(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) dx = \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) dx. \quad (\text{I.23})$$

## 3.2 Problème de convection-diffusion

### 3.2.1 Formulation faible pour le problème (I.18) avec (I.21) et (I.22)

La définition d'une formulation faible requiert les hypothèses suivantes:

#### Hypothèse 2 (Hypothèse sur les données)

*Les hypothèses suivantes sur les données sont nécessaires:*

1.  $f_1 \in L^2(\Omega)$
2.  $f_2 \in L^2(\Omega \times (0, T))$
3.  $C^0 \in L^2(\Omega)$
4. *L'hypothèse I.4 est satisfaite.*

Le Théorème suivant donné dans [3] fournit un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (I.18) avec (I.21) et (I.22):

---

**Théorème 5 (Existence et unicité pour le problème (I.18) avec (I.21) et (I.22), cf. [3])**

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . En plus de l'hypothèse 2, nous supposons que les éléments  $d_{ij}$  de la matrice  $D$  et les composantes  $V_i$  de  $V$  satisfont  $d_{i,j}, V_i \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ . Il existe alors une unique solution au problème (I.18) avec (I.21) et (I.22) dans le sens suivant:

- $C \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  et  $C_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$
- Pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , pour tout  $t \in (0, T)$

$$\langle C_t(t), v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} C(x, t) V(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} D(x, t) \nabla C(x, t) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f_2(x, t) v(x) dx, \quad (\text{I.24})$$

où  $H^{-1}(\Omega)$  est le dual de  $H_0^1(\Omega)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$  dénote l'injection de Sobolev de  $H^{-1}(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

- Condition initiale:

$$C(0) = C^0. \quad (\text{I.25})$$

### 3.2.2 Résultats de régularité pour le problème (I.18) avec (I.21) et (I.22)

Il est intéressant de noter que l'équation (I.18) peut être écrite sous la forme de l'équation parabolique traitée dans [2], à savoir [2, (1)-(2), Page 350]. Cela nous permettra d'appliquer les résultats de régularité donnés dans [2]. En effet, (I.18) peut être écrit comme

$$C_t(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial C}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) + l(\mathbf{x}, t)C(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div}(D(\mathbf{x}, t)\nabla C(\mathbf{x}, t)) = f_2(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \quad (\text{I.26})$$

$$b_i = V_i \quad \text{et} \quad l = \operatorname{div}(V). \quad (\text{I.27})$$

Nous citons ici quelques résultats de [2]. Il est à noter que l'hypothèse de régularité sur les coefficients de l'opérateur elliptique citée dans [2, Page 360] peut être obtenue en utilisant [2, Théorème 4]. La comparaison des résultats de [2, Théorème 4] avec l'opérateur elliptique  $L = \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial C}{\partial x_i} + l(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div}(D\nabla C)$  de (I.26)-(I.27) donne  $D \in C(\bar{\Omega})$  et  $V \in W^{1,\infty}(\Omega)$  lorsque  $D$  et  $V$  ne dépendent pas de  $t$ .

**Théorème 6 (Régularité pour la solution faible du problème (I.18)-(I.21)-(I.22), cf. [2])**

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ . Supposons que  $C^0 \in H_0^1(\Omega)$  et que  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Outre l'hypothèse 2, nous supposons que les matrices  $D$  et  $V$  impliquées dans (I.24) ne dépendent

---

pas de  $t$  et qu'ils satisfont  $D \in C(\bar{\Omega})$  et  $V \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$ .

Alors  $C \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$  et  $C_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

### 3.3 Problème couplé

#### 3.3.1 Existence et unicité pour une solution faible pour le système (I.17)-(I.22)

Une formulation faible pour (I.17)-(I.22) peut être définie comme le couple  $(H, C)$  satisfaisant (I.23), (I.24), et (I.25) à condition que  $V_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega)$ . Par exemple:

1. **Dans le cas d'une dimension, i.e.  $d = 1$ .** En utilisant le résultat de régularité du Théorème 2, nous avons  $H \in H^2(\Omega)$  à condition que  $\Omega$  soit un sous-ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et que  $f_1 \in L^2(\Omega)$ . Donc  $\nabla H \in H^1(\Omega)^d$ . L'utilisation de l'injection de Sobolev de  $H^1(\Omega)$  dans  $C(\bar{\Omega})$  (voir [3, Théorème 1.3.4]) implique que  $\nabla H \in C(\bar{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$ .
2. **Lorsque la dimension de l'espace  $d=2$  ou  $3$ .** En utilisant le résultat de régularité du Théorème 3 (quand  $m = 1$ ), nous avons  $H \in H^3(\Omega)$  à condition que  $\partial\Omega$  soit  $C^3$  et que  $f_1 \in H^1(\Omega)$ . Donc  $\nabla H \in H^2(\Omega)^d$ . En utilisant l'injection de Sobolev de  $H^2(\Omega)$  dans  $C(\bar{\Omega})$ , quand  $d \in \{2, 3\}$  (voir [3, Théorème 1.3.4]), on prouve que  $\nabla H \in C(\bar{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$ .

#### 3.3.2 Résultat de régularité pour le système (I.17)-(I.22)

En utilisant le Théorème 6, et à condition que ses hypothèses soient satisfaites, nous avons  $C \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$  et  $C_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . La condition  $V \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$  signifie que  $V_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . Pour obtenir cette régularité, il suffit que  $H$  vérifie  $H \in W^{2,\infty}(\Omega)$ . C'est le cas lorsque par exemple  $H \in H^4(\Omega)$ . En fait, en utilisant l'injection de Sobolev de  $H^2(\Omega)$  dans  $C(\bar{\Omega})$ , quand  $d \in \{1, 2, 3\}$  (voir [3, Théorème 1.3.4]), nous avons  $D^\alpha H \in C(\bar{\Omega})$  pour tout indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  tel que  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq 2$ . Cela implique que  $H \in C^2(\bar{\Omega}) \subset W^{2,\infty}(\Omega)$ . La régularité  $H \in H^4(\Omega)$  peut être atteinte.

---

---

## Bibliographie

- [1] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Theory and applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. [29](#)
- [2] L.C. Evans. Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010 [27](#), [30](#)
- [3] A. Quarteroni, A. Valli. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer Series in Computational Mathematics 23. Berlin:Springer, 2008. [29](#), [30](#), [31](#)
- [4] P. Grisvard. Elliptic problems in non-smooth domains. Monographs and Studies in Mathematics, 24. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985. [27](#)
- [5] Bellen, A., Zennaro, M. Numerical Methods for Delay Differential Equations. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford:Oxford University Press (2003).
- [6] Bradji, A. An analysis for the convergence order of gradient schemes for semilinear parabolic equations. *Comput. Math. Appl.* 72/5, 1287-1304 (2016).
- [7] Bradji, A., Fuhrmann, J. Some abstract error estimates of a finite volume scheme for a nonstationary heat equation on general nonconforming multidimensional spatial meshes. *Appl. Math.* 58/1, 1-38 (2013).
- [8] Eymard, R., Gallouët, T., Herbin, R. Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes. *IMA J. Numer. Anal.* 30/4, 1009-1043 (2010).
- [9] Kuang, Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Mathematics in Science and Engineering. 191. Boston, MA:Academic Press (1993).

- 
- [10] Li, D., Zhang, C.  $L^\infty$ -error estimates of discontinuous Galerkin methods for delay differential equations. *Appl. Numer. Math.* 82, 1-10 (2014).
- [11] Zhang, Q., Zhang, C. A new linearized compact multisplitting scheme for the nonlinear convection-reaction-diffusion equations with delay. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 18/12, 3278-3288 (2013).
- [12] Raviart, P. A., Thomas, J. M. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. [28](#)

---

---

# Chapitre II

---

## Processus d'adaptation de maillage

### 1 Introduction

On propose ici un nouveau processus adaptatif de raffinement/déraffinement du maillage basé sur une technique de marquage des éléments de type estimateur d'erreur a posteriori qui combine deux méthodes d'adaptation à savoir Adapt pour le découpage de triangles et Newest-vertex-bisection (NVB) pour la phase de conformité. Cette combinaison s'avère particulièrement intéressante pour les architectures de traitement parallèle modernes. Dans le troisième chapitre nous illustrerons numériquement l'efficacité de cette technique d'adaptation innovante par plusieurs tests numériques pour différents problèmes en particulier ceux elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Dans ce chapitre, nous aborderons les différents types de méthodes adaptatives qui se distinguent les unes des autres par la manière avec laquelle le maillage est modifié. Le maillage utilisé, et notamment ses pas de discrétisation et le nombre de points qui le subdivisent, est déterminant pour la précision des calculs, et ce au même titre que les schémas numériques élaborés. Il peut ne pas être suffisamment fin pour détecter les zones à raffiner. Afin de remédier à ce problème, deux solutions peuvent être envisagées:

- La première solution consiste à utiliser un grand nombre de points dans le but de discrétiser le domaine de calcul. Mais on constate facilement que cette approche manque d'efficacité tout particulièrement lorsque ce domaine est grand, du fait de la mémoire et du temps CPU qu'elle nécessite.
- La deuxième solution est représentée par l'adaptation locale du maillage. En effet, les zones ne nécessitant pas de raffinement sont résolues avec une distribution grossière de points. Le raffinement local, quant à lui, sera réservé aux seules régions critiques de telle sorte que les discontinuités et les forts gradients puissent être résolus avec un nombre suffisant de points.

On peut se référer à l'article de Powell et al (cf [1]) pour une revue exhaustive des techniques de raffinement de maillage adaptatif. De façon générale, l'adaptation du maillage pour la solution



## Chapitre II. Processus d'adaptation de maillage

---

peut se faire de deux manières représentées par les approches r-raffinement et p-raffinement:

- Dans l'approche r-raffinement, on procède simplement à une redistribution des nœuds de manière à avoir une bonne résolution au niveau des zones critiques, en étirant le maillage vers une direction particulière. Dans cette méthode, on se trouve confronté à certaines difficultés dont les plus importantes sont le croisement des lignes, la formation de cellules arbitraires très petites, etc. Néanmoins, le grand atout du raffinement par étirement est la possibilité d'interpoler simplement des variables de l'ancien maillage au nouveau une fois que l'adaptation aura abouti à un maillage valide. Ceci peut être effectué, si besoin est, de façon conservative.
- Dans l'approche p-raffinement, on ajuste localement le degré des fonctions de base afin qu'il corresponde à la variation de la solution. Dans cet abord, les cellules sont localement subdivisées ou fusionnées.

Selon leur façon de représenter la solution numérique du problème, ces méthodes adaptatives peuvent être structurées ou non structurées:

- Quand elles sont structurées, elles appliquent une hiérarchie de niveaux de maillages emboîtés, où chaque niveau est subdivisé en plusieurs grilles rectangulaires simples. À ce propos, M. Berger et J. Olinger (cf [2]) ont proposé un algorithme général de raffinement adaptatif du maillage, employant des grilles cartésiennes pour les EDP hyperboliques. Dans leur méthode, des sous-grilles rectangulaires sont placées dans les régions qui nécessitent une meilleure résolution. Ce procédé est réitéré d'une manière récursive: des grilles de plus en plus fines sont générées au fur et à mesure, et ce, jusqu'à obtention de la résolution requise. En faisant appel aux techniques des différences finies standard, une approximation de la solution sur chaque sous-grille est obtenue.
- A l'opposé, les méthodes non structurées font appel à des représentations en graphe ou en arbre pour stocker la solution. En ce qui concerne les problèmes instationnaires, les régions critiques ne sont pas fixes au cours du temps. Les sous-grilles sont alors déplacées pour suivre le champ d'écoulement. G. Manzini et A. Rosella (cf [3]) ont utilisé avec succès la méthode AMR pour la simulation d'écoulements bidimensionnels dans un milieu poreux. Cette méthode a été extrapolée à l'étude de chocs aérodynamiques par Berger et Colella (cf [4]).

Grâce à leur structure flexible pour l'adaptation dynamique, les maillages non structurés triangulaires se révèlent être particulièrement intéressants dans le domaine d'adaptation du maillage. Disposant de structures de données appropriées, le maillage peut être localement enrichi en y insérant des nœuds de façon élective dans les régions d'intérêt particulier. Il est également

possible de procéder à un déraffinement local en retirant des points que l'on ne juge plus nécessaires, en l'occurrence dans les zones où l'écoulement est uniforme. Le maillage global reste une discrétisation conforme et admissible du domaine discret. Les maillages non structurés offrent également plus de liberté pour les contraintes géométriques dans le système. Généralement, ils sont plus faciles à mettre en œuvre, en particulier sur des domaines de géométrie complexe. L'algorithme détaillé ci-après s'appuie sur une structure de données hiérarchique multi-niveaux. Il s'agit d'une méthode dynamique de raffinement et de déraffinement du maillage, c'est-à-dire, capable de suivre la solution physique du problème, et c'est le raffinement local du maillage dans les régions d'intérêt qui en garantit la précision. Les déraffinements successifs aux endroits où la structure n'est plus intéressante permettent, quant à eux, d'en garantir l'efficacité.

## 2 Procédure de raffinement et de déraffinement dynamique de maillage

Dans cette section, nous nous intéressons au procédé de raffinement et de déraffinement dynamique de maillage. Il vise à construire un maillage adaptatif qui suit dynamiquement au cours du temps la solution physique du problème. Une présentation concise des principes de base de l'algorithme sera donnée. Le point de départ est un maillage grossier couvrant le domaine de calcul, à partir duquel la solution sera évaluée. De plus, les régions précédemment raffinées peuvent se révéler ne plus être intéressantes, et doivent de ce fait être déraffinées, afin de suivre le mouvement continu de la solution du problème en question.

### 2.1 Critères de raffinement

C'est à partir d'une fonction dite critère qui va marquer les éléments, évaluée sur chaque élément de la triangulation, que les décisions de raffinement sont généralement prises. Cette fonction indique à chaque pas de temps les régions où une meilleure résolution est nécessaire. Il peut s'agir du gradient ou de la différence d'une certaine variable physique. Généralement, un critère est jugé bon s'il permet de générer un maillage optimal assez régulier. Ce critère doit tenir compte du caractère non stationnaire du problème et doit aussi détecter les singularités. Il est possible de faire appel à différentes familles de critères:

- Critère basé sur des erreurs de troncature
- Critère basé sur des erreurs d'approximation
- Critère basé sur des mesures de convergence
- Critère basé sur des principes variationnels

— Critère basé sur des quantités physiques

### 2.2 Déraffinement

Le déraffinement est associé à un processus temps. Considérons une triangulation  $\mathcal{T}_h^{n-1}$  à l'instant  $t_{n-1}$ ,  $\mathcal{T}_h^n$  est la triangulation à l'instant  $t_n$  créée en faisant appel au procédé d'adaptation. Dans la phase de raffinement, si un triangle  $T$  est divisé dans  $\mathcal{T}_h^{n-1}$  sans l'être dans  $\mathcal{T}_h^n$ , toute sa descendance est éliminée. Insistons sur le fait que l'ensemble du maillage n'est pas reconstruit en ayant pour point de départ le maillage grossier. Tous les éléments de l'ancienne triangulation qui restent valides sont maintenus pour la nouvelle triangulation. Il est à noter que toutes les décisions prises ici pour le raffinement, dépendent du critère qui est évalué sur le maillage grossier. Par conséquent, une réévaluation de la solution sur les éléments du maillage grossier avant chaque nouvelle adaptation est nécessaire. Ceci est obtenu par interpolation conservative à partir des solutions sur les triangles.

### 2.3 Qualité du maillage

Au cours de la génération et de l'adaptation d'une triangulation, le respect de certaines règles de maillage s'impose afin d'assurer une régularité raisonnable sur ses éléments. Une approximation satisfaisante des équations paraboliques ou elliptiques exige un maillage de qualité.

Considérons une triangulation  $\mathcal{T}_h$  d'un domaine de  $\mathbb{R}^2$ . Lors du raffinement du maillage, les propriétés suivantes sont fortement requises:

- (i) La conformité du maillage:  $\forall (T_i, T_j)$  paires de triangles distincts,  $T_i \cap T_j$  est soit réduit à un point, soit à une arête commune soit à l'ensemble vide.
- (ii) Dans n'importe quel triangle de la partition, l'angle intérieur minimal entre deux arêtes doit être borné inférieurement, et l'angle maximal borné supérieurement. C'est de cette condition que dépend la stabilité de la solution des algorithmes numériques des équations aux dérivées partielles. Elle s'écrit comme suit:

$$\exists \rho, \theta > 0 / \forall T_i \in \mathcal{T}_h ; \rho \leq \frac{h_i}{\rho_i} \leq \theta,$$

où  $h_i$  est la plus longue arête de  $T_i$  et  $\rho_i$  le rayon du cercle circonscrit à  $T_i$ .

- (iii) A chaque déplacement d'un triangle à un autre voisin, la variation des surfaces doit se faire de façon continue et régulière.

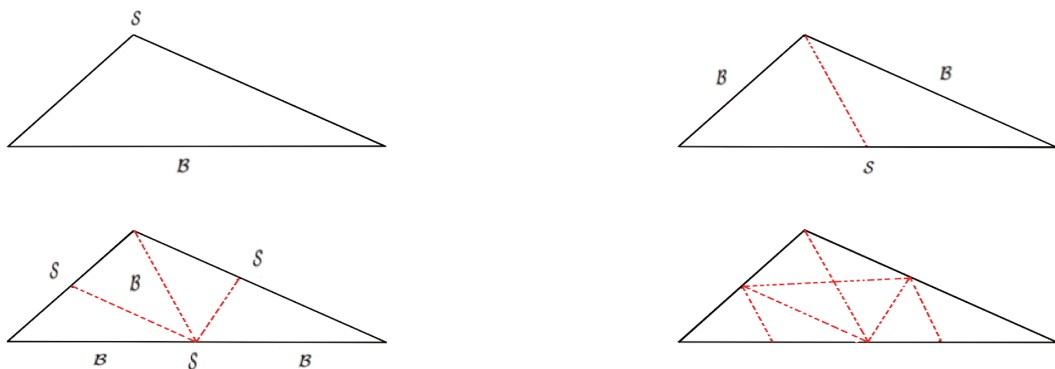
La régularité uniforme des triangulations garantit que ses angles restent loin de 0 et  $\pi$ . Ceci revêt une importance capitale dans le contrôle de l'interpolation de l'erreur en norme  $H^1$ . Après avoir marqué un ensemble de triangles où un raffinement est requis, il faut définir les

règles de division des triangles marqués de telle façon que le maillage raffiné reste conforme et uniformément régulier.

### 2.4 Méthodes de raffinement par bisection

Le raffinement par bisection peut être abordé par plusieurs approches:

- L'approche statique (cf [5]), dans laquelle un triangle est subdivisé en connectant le nouveau nœud au point milieu de la base. Ainsi, on obtient quatre classes similaires par triangle. Dans cette approche, on arrive à satisfaire la propriété (ii) sur les angles. Par souci de conformité, le processus doit être répété plusieurs fois. L'impossibilité de décomposer le triangle au delà de 2 ou 3 sous-triangles constitue une entrave à sa conformité.



**Figure II.1** – Approche statique de raffinement par bisection

- L'approche dynamique a été introduite dans (cf [6]): elle consiste à diviser un triangle marqué pour le raffinement en joignant le point milieu de sa plus grande arête au nœud opposé, ce qui assure des transitions régulières entre les triangles de petite taille et ceux plus larges (propriété (iii)). Pour un maillage conforme, il est nécessaire de répéter le processus de bisection plusieurs fois. Enfin, en relation avec la propriété (ii), il a été prouvé que le plus petit angle du maillage raffiné est minoré par la moitié du plus petit angle du maillage initial ce qui permet de garantir une certaine régularité du maillage au cours du processus de raffinement/déraffinement.

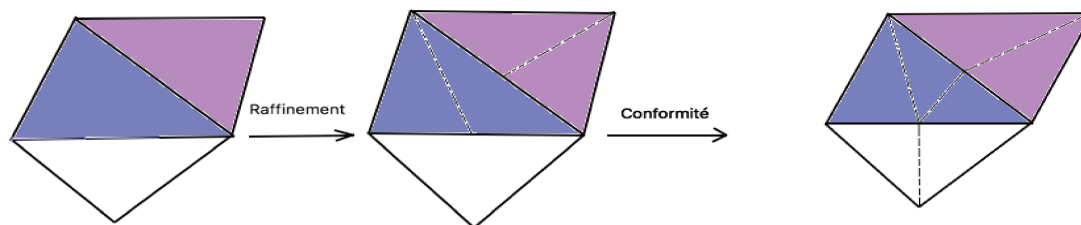


Figure II.2 – Approche de raffinement par bisection de la plus longue arête

## 2.5 Méthode Adapt

### 2.5.1 Raffinement et déraffinement

Le principe de la méthode Adapt est de commencer avec un maillage grossier qui couvre le domaine de calcul et d'y évaluer la solution. Par la suite, et à partir des résultats obtenus, on choisit un critère qui permettra d'identifier les zones où la résolution doit être plus précise. Enfin, on raffine le maillage dans ces zones. Le niveau de raffinement pour chaque élément n'est pas limité. Les régions précédemment raffinées et qui ne se révèlent plus intéressantes sont déraffinées. Ce procédé peut être répété récursivement. On divise les triangles marqués pour le raffinement en quatre sous-triangles en joignant les points milieux de leurs arêtes.

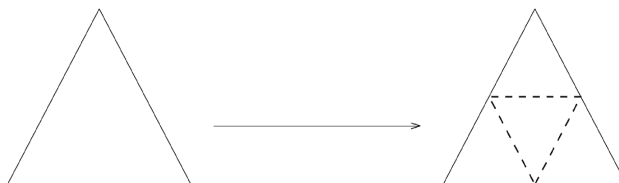


Figure II.3 – Raffinement par Adapt

### 2.5.2 Structure hiérarchique

On stocke les éléments à raffiner dans un tableau  $L$ . On définit un tableau d'entiers nommé IADIV dont la taille est le nombre de nœuds initialisé à zéro. Les valeurs de ce tableau peuvent être soit 0 soit 1: la valeur 1 indique que le triangle qui contient ce nœud doit être raffiné. Sinon, la valeur 0 sera attribuée. Pour un entier  $m$  donné,  $\text{IADIV}(T) = m$ , signifie que le triangle  $T$  doit être raffiné  $m$  fois. On note  $\eta_{T_k}$  l'estimateur d'erreur spatiale associé au triangle  $T_k$ . Le niveau de raffinement  $\text{IADIV}(T_k)$  du triangle  $T_k$  donné est défini ainsi:

$$\text{Si } \eta_{T_k} > \frac{j}{m+1} \text{ alors } \text{IADIV}(T_k) = j$$

## II.2 Procédure de raffinement et de déraffinement dynamique de maillage

Les triangles du maillage initial sont dits "triangles de niveau 0", alors que les triangles descendants ou fils sont appelés "triangles de niveau 1". On répète le raffinement pour les triangles fils et on construit ainsi "les triangles de niveau 2". Ainsi de suite et de manière récursive, on construit les "triangles de niveau m", et on crée une hiérarchie multi-niveaux, avec le nombre maximal de niveaux de raffinements  $l_{max}$  fixé dès le départ. Dans la stratégie Adapt, l'adaptation repose sur l'utilisation d'un maillage de référence  $\mathcal{M}_{ref}$  et de plusieurs niveaux de raffinement. Ainsi, après avoir résolu l'équation d'écoulement puis l'équation de transport pour un certain pas de temps et avec un certain maillage primal  $\mathcal{M}_n$ , les résultats obtenus sur le maillage  $\mathcal{M}_{ref}$  sont interpolés sur le maillage  $\mathcal{M}_n$ . C'est donc à chaque triangle du maillage de référence qu'est attribué un estimateur d'erreur a posteriori.

Dans le but d'avoir un maillage conforme, on ajuste ensuite les niveaux de raffinement afin que la différence de niveaux entre deux cellules voisines soit tout au plus égale à 1. Si le niveau de raffinement d'un triangle est égal à un, ce dernier est découpé en 4 sous-triangles par les milieux des arêtes. Si le niveau de raffinement d'un triangle est égal à deux ; chacun des 4 sous-triangles sera à son tour découpé en 4. Une fois le maillage raffiné, il est nécessaire d'en vérifier la conformité. Chacune de ses faces doit être commune à deux triangles. Pour un triangle quelconque  $\mathcal{T}_k$  du maillage, trois cas de figures peuvent se présenter en fonction du niveau de raffinement de ses trois voisins:

- Si aucun de ses voisins n'est raffiné,  $\mathcal{T}_k$  reste tel quel.
- Si un de ses voisins est raffiné,  $\mathcal{T}_k$  est découpé en 2.
- Si 2 de ses voisins sont raffinés,  $\mathcal{T}_k$  est découpé en 3 et ainsi de suite.

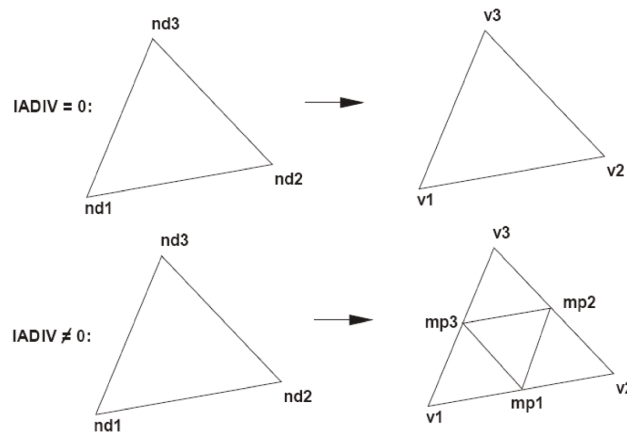


Figure II.4 – Raffinement de cellule

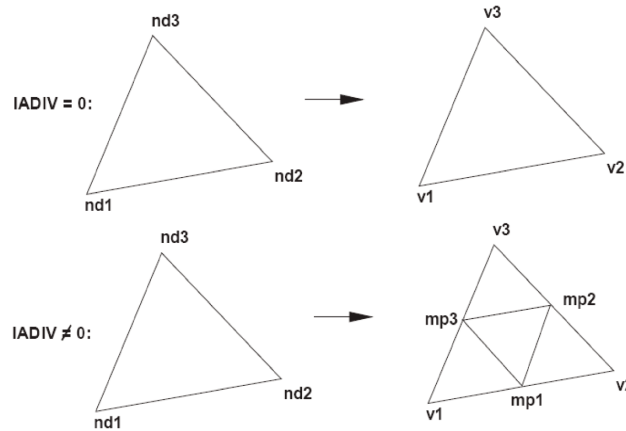


Figure II.5 – Conformité du maillage

## 2.6 Newest-Vertex-Bisection (NVB)

Le raffinement de triangles dans la stratégie Newest-vertex-Bisection(NVB) se fait comme suit: Un triangle est raffiné en connectant un sommet appelé le "newest" au côté opposé appelé l'arête de raffinement. Les deux triangles résultants sont les descendants, ou les fils du triangle père raffiné. La question qui se pose est de savoir comment choisir le "newest".

Dans NVB, le sommet sélectionné comme "newest" ainsi que l'ordre dans lequel les triangles sont divisés en deux sont très soigneusement contrôlés. Lorsqu'un triangle est divisé en deux, le sommet créé au milieu de l'arête est appelé "newest vertex" ou bien le "newest". Ce dernier est sélectionné comme sommet des deux triangles descendants. C'est ainsi qu'on obtient l'algorithme récursif suivant pour un raffinement uniforme:

On note  $\mathcal{T}_0$  la triangulation initiale. Pour chaque  $T \in \mathcal{T}_0$ , la plus longue arête est choisie comme référence. On note  $\mathcal{T}_i$  une triangulation obtenue depuis  $\mathcal{T}_0$  après une succession de NVB. Pour cette méthode, la règle de raffinement se définit comme suit:

- (i) Pour raffiner l'élément  $T \in \mathcal{T}_i$ , le milieu  $\mathcal{S}_T$  de l'arête de référence  $\mathcal{B}_T$  devient le nouveau "newest" du maillage et le triangle  $T$  est découpé en deux triangles fils  $t_1$  et  $t_2$  en joignant  $\mathcal{B}_T$  au nœud qui lui est opposé.
- (ii) Une fois que tous les triangles marqués sont découpés en deux, la triangulation obtenue comporte généralement des nœuds non conformes. Par conséquent, certaines bisections supplémentaires sont nécessaires pour obtenir  $\mathcal{T}_{i+1}$ .

La dernière étape ne conduit qu'à un nombre fini de bisections supplémentaires. On garantit ainsi que la division intéressera toujours le plus grand angle du triangle marqué. Ce dernier est constamment supérieur à la moitié de l'angle minimal de la triangulation initiale.

### 2.6.1 Stratégie de marquage dans NVB

Si une arête est marquée, alors la base des triangles la partageant doit aussi l'être. Ce principe peut être résumé par le sous-algorithme suivant:

Marquer la base du triangle  $t_1$

$t_2 =$  voisin de  $t_1$  opposé au sommet de  $t_1$

**Si** la base de  $t_2$  n'est pas marquée **alors**

    Marquer  $t_2$

**Fin Si**

Nous considérons la bisection de la plus longue arête comme une méthode apparentée de NVB s'en démarquant par un schéma de numérotation différent. En d'autres termes, la base de chaque triangle correspond à sa plus longue arête. Contrairement à la méthode NVB, méthode la plus récente, ce type de numérotation est effectué au début de chaque boucle. Dans certains cas, en l'occurrence à chaque fois où la plus longue arête est opposée au newest vertex, ces deux méthodes se valent. Afin d'obtenir un raffinement à partir du maillage actuel, nous résolvons d'abord l'équation aux dérivées partielles pour avoir la solution dans le maillage courant. L'erreur est estimée en utilisant la solution, qui servira dans le marquage de l'ensemble des triangles à raffiner.

Grâce à ce procédé, on parvient à préserver les deux propriétés fondamentales des triangulations, à savoir la régularité et la conformité. Récemment, nombreux sont les résultats en termes de convergence et d'optimalité, obtenus pour les méthodes d'adaptation de maillage sur les équations aux dérivées partielles elliptiques [7–9]. Cela prouve l'importance du raffinement local par opposition au raffinement uniforme des triangulations. Dans la plupart de ces travaux, la NVB intervient au cours de l'étape "raffiner". Il a été démontré que le maillage obtenu avec cette règle de division est conforme et uniformément régulier. De plus, le nombre d'éléments rajoutés à chaque étape est connu, ce qui est d'une importance cruciale pour l'optimalité du raffinement local. C'est à ce titre que notre discussion sera principalement axée autour de la méthode newest vertex bisection.

Nous présenterons également une stratégie de bisection apparentée, à savoir la bisection par la plus longue arête.



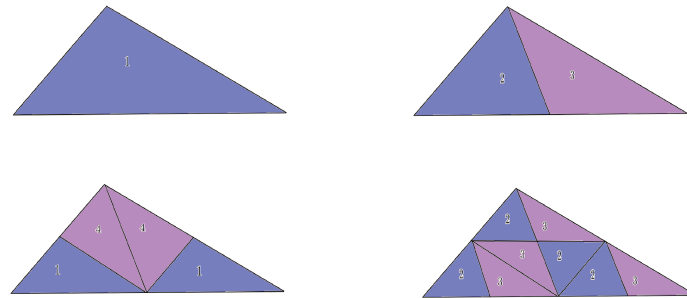


Figure II.6 – Stratégie Newest vertex bisection

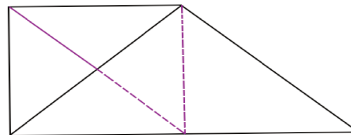


Figure II.7 – Complétion avec Newest vertex bisection

## 2.7 Couplage Adapt-Newest vertex bisection (AdaptNVB)

On propose ici une nouvelle méthode d'adaptation qui consiste à coupler les méthodes Adapt et NVB. D'abord, on raffine notre maillage par la stratégie Adapt. Puis, on utilise la méthode Newest vertex bisection pour la conformité afin de préserver la régularité du maillage.

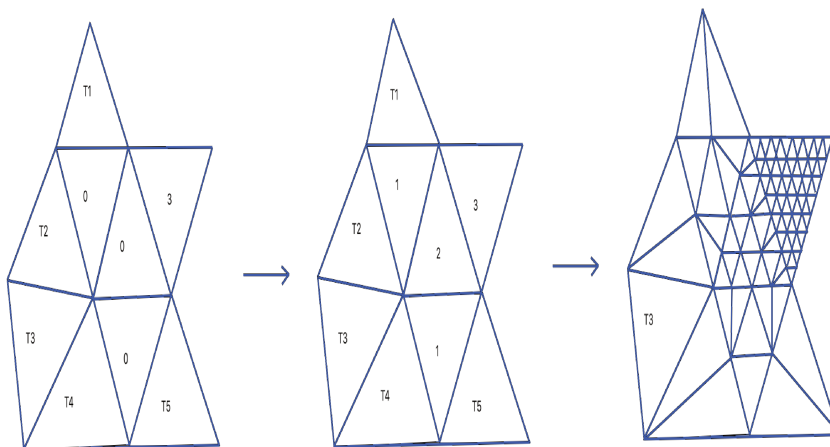
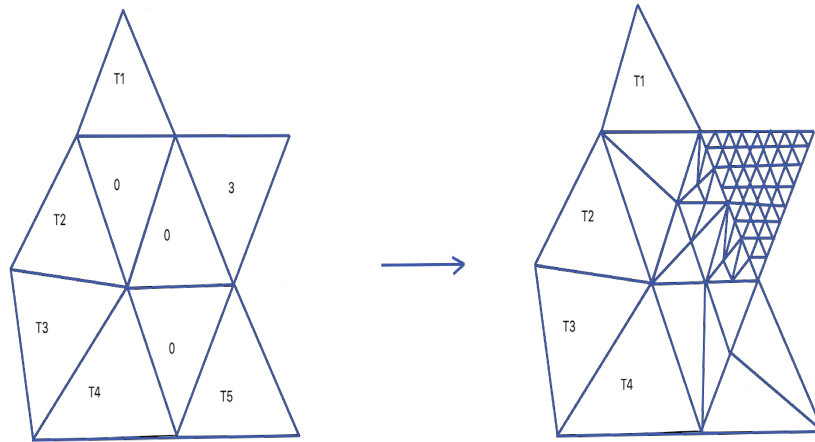


Figure II.8 – Raffinement du maillage avec Adapt et conformité par propagation de niveaux

## II.2 Procédure de raffinement et de déraffinement dynamique de maillage



**Figure II.9** – Raffinement du maillage avec AdaptNVB

Contrairement à la méthode classique Adapt (figure II.8), et comme illustré dans la figure II.9, le raffinement ne s'est pas propagé avec notre stratégie et les triangles  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$  ne sont pas divisés.

### 2.7.1 Algorithmes d'adaptation

**Tableau II.1** – Initialisation du tableau des paramètres

Paramètres	Significations
$J_{div}$	Ce tableau contient les valeurs 0, 1: 1 indique que le triangle qui contient ce nœud doit être raffiné, 0 sinon.
$\mathcal{J}_{div}$	Ce tableau contient les valeurs 0, 1 ou $-1$ . La valeur 1 signifie que le triangle doit être raffiné, 0 sinon et $-1$ signifie que c'est un triangle à raffiner par conformité par la méthode NVB.
Marker	Tableau qui indique si une arête doit être marquée ou non.
$N_{div}$	Ce tableau contient les valeurs 0 et 1: 0 signifie que le milieu de l'arête n'est pas encore créé, et 1 que le nœud est déjà créé.
$N_{\mathcal{B}_{tot}}$	Nombre total de triangles.
$\mathcal{E}_{div}$	Ce tableau donne pour un triangle $t$ à raffiner par conformité l'arête marquée par NVB.
$\mathcal{J}_{tr}$	Triangles à traiter par conformité obtenus à la fin de la phase Adapt.
$N_{tr}$	Taille du tableau de $\mathcal{J}_{tr}$ .
$\mathcal{J}_{Left}, \mathcal{J}_{Right}$	Les deux triangles voisins par face.
$\mathcal{B}_t$	Face la plus longue du triangle $t$ , opposée au sommet de $t$ .
$nv, ve1, ve2$	Les 3 sommets de $t$ , tels que $\mathcal{B}_t$ est opposée à $nv$ .
$Node_3$	Troisième colonne du tableau des nœuds. Ses valeurs sont de 1 ou 0 selon l'existence ou non d'un nœud sur le bord.

2.7.2 Algorithme 1: Raffinement par Adapt

```

1 Pour  $J_{tr}$  jusqu'à  $N_{tr}$  faire
  Initialisation:  $Index \leftarrow 0$ 
   $t :=$  c'est le triangle courant
  2 While (  $Index = 1$  ) faire
    3 Si (  $\mathcal{T}div(t) \leq 0$  ) alors
      Récupération de  $nv, ve1, ve2$  et  $\mathcal{B}_t$ 
      4 Si  $\mathcal{B}_t$  est marquée alors
         $Index \leftarrow 0$ 
      Sinon 4 :  $\mathcal{B}_t$  n'est pas marquée
         $Marker(\mathcal{B}_t) \leftarrow vm$ 
        Récupération de  $J_{Left}$  et  $J_{Right}$  de  $\mathcal{B}_t$ 
        5 Si  $\mathcal{B}_t$  n'est pas une arête de bord alors
          6 Si (  $t = J_{Right}$  ) alors
             $tneig \leftarrow J_{Left}$ 
          Sinon 6
             $tneig \leftarrow J_{Right}$ 
          Fin 6
           $\mathcal{T}div(t) \leftarrow -1$ 
        Sinon 5  $\mathcal{B}_t$  est une arête de bord alors
           $Index \leftarrow 0$ 
           $Node_3(vm) \leftarrow 1$ 
        Fin 5
      Fin 4
    Sinon 3
       $Index \leftarrow 0$ 
    Fin 3
  Fin While 2
Fin pour 1

```

**Raffinement:** Une fois le marquage terminé, on passe au raffinement qui consiste à diviser les éléments en joignant le vertex au milieu de la plus longue arête. Ainsi, le nouveau point milieu devient le newest pour les deux nouveaux triangles "Children".

### 2.7.3 Algorithme 2 : Conformité par NVB

**1** Pour  $t = 1$  jusqu'à  $\mathcal{NB}_{tot}$  faire

**2** Si le triangle  $t$  est marqué alors

        Récupération de 3 sommets  $n_k, k = 1...3$

        Récupération de  $\mathcal{B}_t$  en face de  $n_1$

**3** Si  $\mathcal{B}_t$  est marquée alors

        Construction de deux nouveaux triangles "Children"

        Les sommets de  $t$  sont  $n_1, n_2$  et  $\text{Marker}(\mathcal{B}_t)$

        Les sommets du second triangle  $nt_1$  sont  $n_1, \text{Marker}(\mathcal{B}_t)$  et  $n_3$

        Récupération des deux arêtes  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_3$  opposées à  $n_2$  et  $n_3$

**4** Si  $\mathcal{B}_2$  est marquée alors

        Construction de deux nouveaux triangles "Children"

        Les sommets de  $nt_1$  sont  $n_1, \text{Marker}(\mathcal{B}_t)$ , et  $\text{Marker}(\mathcal{B}_2)$

        Le second triangle  $nt_2$  est défini par  $\text{Marker}(\mathcal{B}_2), \text{Marker}(\mathcal{B}_t)$  et  $n_3$

**Fin 4**

**5** Si  $\mathcal{B}_3$  est marquée alors

        Construction de deux nouveaux triangles "Children":

$t$  devient définie par  $n_1, \text{Marker}(\mathcal{B}_3)$ , et  $\text{Marker}(\mathcal{B}_t)$

        Le second triangle  $nt_3$  est défini par  $\text{Marker}(\mathcal{B}_3), n_2$  et  $\text{Marker}(\mathcal{B}_t)$

**Fin 5**

**Fin 3**

**Fin 2**

**Fin pour 1**



---

## Références bibliographiques

- [1] K. G. Powell, P. L. Roe, and J. J. Quirk. Adaptive-mesh algorithms for computational fluid dynamics. New York, Algorithmic Trends in Computational Fluid Dynamics, M. Y. Hussaini, A. Kumar and M. D. Salas edition, 1992. [35](#)
- [2] M. J. Berger and J. Olinger. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *J. Comput. Phys.* , 53 :484-512, 1984. [36](#)
- [3] G. Manzini and A. Rosella. The adaptive mesh refinement method applied to 2D flows in porous media. In *8<sup>th</sup> Conference of the European Consortium for Mathematics in Industry*, University of Kaiserslautern, Germany, 6-10 Sept. 1994. [36](#)
- [4] M. J. Berger and P. Colella. Local adaptive mesh refinement for shock aero-dynamics. *J. Comput. Phys.* , 82(1) :64-84, 1989.216. [36](#)
- [5] W. Mitchell. Optimal multilevel iterative methods for adaptive grids. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* , 13 :146, 1992. [39](#)
- [6] M. C. Rivara. Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* , 20 :745-756, 1984.222. [39](#)
- [7] L. Chen, M. Holst, and J. Xu. Convergence and optimality of adaptive mixed finite element methods, 2006. [43](#)
- [8] P. Morin, R. Nochetto, and K. Siebert. Data oscillation and convergence of adaptive FEM. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(2) :466-488, 2000. [43](#)
- [9] W. Dörfler. A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33 :1106-1124, 1996. [43](#)

## Références bibliographiques

---

---

---

# Chapitre III

---

## Schéma Volumes Finis centré sur le sommet et adaptation de maillages pour l'équation de Darcy

### 1 Introduction

La méthode des volumes finis adaptative centrée sur les sommets est couramment utilisée pour aborder des problèmes complexes découlant de plusieurs phénomènes physiques. Elle est satisfaisante pour traiter les éventuelles discontinuités dans les résultats de calcul. Notre stratégie de marquage des éléments à raffiner est basé sur une technique du type estimateur d'erreur a posteriori. Ces estimateurs mesurent la qualité de la solution calculée et fournissent des informations pour contrôler les algorithmes d'adaptation de maillage ([2]). Pour cette classe de problèmes, nous considérons des équations elliptiques de second ordre à coefficients hétérogènes, où la diffusion dans un milieu fermé bidimensionnel  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ayant  $\partial\Omega$  comme bord, est décrite par l'équation suivante:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathbb{K}\nabla u(\mathbf{x})) &= f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{III.1}$$

où  $f$  est le terme source,  $g$  est la condition aux limites de type Dirichlet et  $\mathbb{K}$  est le coefficient de diffusion constant par morceaux. On utilise deux triangulations, à savoir le maillage primal et une nouvelle partition du domaine  $D$  qu'occupe le fluide de manière à ce que chaque sommet du maillage primal soit inclus exclusivement dans un polygone de la nouvelle partition. Le terme maillage dual désigne celui généré suite à ce second partitionnement et le terme cellules duales ou encore volumes de contrôle, les polygones qui le subdivisent. Une partition du domaine  $D_h$  est ainsi définie.



## 2 Définition des cellules duales en dimension 2 d'espace

Ce volet sera dédié à la définition de la forme géométrique et au calcul de l'aire d'intersection de la cellule duale associée à un nœud avec un élément triangulaire.

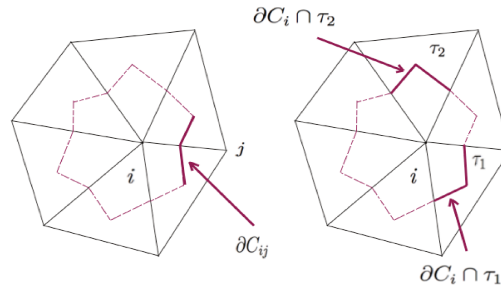
**Définition 1** Soit  $\{C_i, i = 1, \dots, N_c\}$  une partition de  $D_h$  qui représente le maillage dual:

$$\bigcup_{i=1}^{N_c} C_i = D_h \quad \text{avec} \quad \dot{C}_i \cap \dot{C}_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j \quad (\text{III.2})$$

$\dot{C}_i$  représente l'intérieur de  $C_i$ .

**Définition 2** On désigne par  $\partial C_i$  la frontière de  $C_i$  et par  $\partial C_{ij}$  l'intersection entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ . Soit  $S_i$  l'ensemble des indices des sommets reliés à  $i$ , alors:

$$\partial C_i = \bigcup_{j \in S_i} \partial C_{ij} \quad (\text{III.3})$$



**Figure III.1** – Cellule de contrôle pour le calcul des flux numériques

**Définition 3** La surface  $\partial C_i \cap \tau$  désigne la surface d'intersection entre la cellule duale associée au nœud  $i$  d'une part et le triangle  $\tau$  d'autre part. Soit  $E_i$  l'ensemble des éléments du maillage ayant comme sommet  $i$ , alors:

$$\partial C_i = \bigcup_{\tau \in E_i} \partial C_i \cap \tau \quad (\text{III.4})$$

Comme le confirment les travaux publiés par Barth [3] et Viozat et al. [4], le comportement numérique de la discrétisation est fortement influencé par la forme des cellules de contrôle. En effet, l'ordre de précision varie considérablement selon que le maillage est étiré ou régulier, et ce d'autant plus que l'exactitude de l'approximation des flux dépend étroitement de la forme

### III.2 Définition des cellules duales en dimension 2 d'espace

des cellules de contrôle. Souvent, le principal corollaire de cette situation est des difficultés de convergence. L'expression des vecteurs normaux aux surfaces  $\partial C_{ij}$  et  $C_i$  joue un rôle dans l'expression des flux numériques convectifs et visqueux. Rappelons que  $C_i$  représente la cellule duale associée au nœud  $i$  et  $\tau$  un élément du maillage. Dans la Fig. III.1, on trouvera une représentation des surfaces  $C_{ij}$  et  $C_i$ .

Soient  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux triangles de centres de gravité respectifs  $G_1$  et  $G_2$  et  $M$  le milieu de l'arête

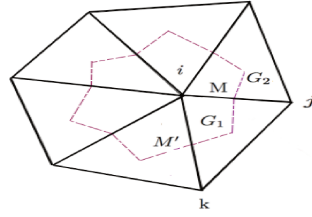


Figure III.2 – Cellule duale

$[ij]$ . Les segments  $[G_1M]$  et  $[MG_2]$  composent la surface  $\partial C_{ij}$ . Le vecteur  $\vec{n}_{ij}^{\tau_1}$  normal à  $\vec{n}_{ij}^{\tau_2}$  se subdivise en:

$$\vec{n}_{ij} = \vec{n}_{ij}^{\tau_1} + \vec{n}_{ij}^{\tau_2},$$

où  $\vec{n}_{ij}$  et  $\vec{n}_{ij}^{\tau_1}$  désignent respectivement les vecteurs normaux aux segments  $[G_1M]$  et  $[MG_2]$ .

En faisant appel aux notations de la Fig III.2, on écrit:

$$\vec{G_1M} = \frac{1}{3}(\vec{iM} + \vec{jM} + \vec{kM}) = \frac{1}{6}(\vec{ki} + \vec{kj}),$$

puis en procédant à une rotation d'angle  $\pi/2$ , on obtient:

$$\vec{n}_{ij}^{\tau_1} = \frac{1}{6}(\vec{n}_{kj} - \vec{n}_{ki}),$$

où  $\vec{n}_{ki}$  définit la normale au segment  $[ki]$  orientée vers l'extérieur de l'élément qui a pour norme la longueur du segment  $[ki]$ . On note l'aire d'un triangle donné  $T$  par  $|T|$ .

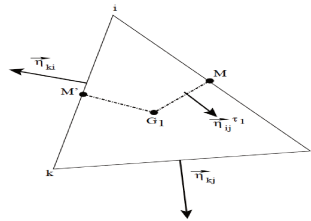


Figure III.3 – Les différents vecteurs normaux du triangle  $ijk$

**Théorème 7** (*Calcul de l'aire de la cellule duale pour un maillage de triangles*)

L'aire de l'intersection  $C_i \cap \tau$  est exactement le tiers de l'aire de l'élément  $\tau$ .

En effet,  $|iG_1k| = \frac{1}{2} \|\vec{iG_1} \wedge \vec{ik}\| = \|\vec{iG_1} \wedge \vec{iM'}\|$ , comme  $M'$  est le milieu de  $[ik]$ , on aura alors:

$$|ijk| = \frac{1}{2} \|\vec{ij} \wedge \vec{ik}\|,$$

en coordonnées barycentriques on a:

$$G_1 = \frac{1}{3}(i + j + k),$$

donc:

$$\vec{iG_1} = \frac{1}{3}(\vec{ij} + \vec{ik}) = \frac{2}{3}\vec{iM''},$$

soit  $M''$  le milieu de  $[jk]$ , on obtient:

$$A = \frac{1}{3} \|\vec{iM''} \wedge \vec{ik}\| = \frac{1}{3} \left\| \left( \frac{1}{2}(\vec{ij} + \vec{ik}) \right) \wedge \vec{ik} \right\| = \frac{1}{6} \|\vec{ij} \wedge \vec{ik}\|,$$

d'où:

$$|iG_1k| = \frac{1}{3}|ijk|; \quad |iG_1M'| = \frac{1}{2}|iG_1k| = \frac{1}{6}|ijk|; \quad |iG_1M| = \frac{1}{2}|iG_1j| = \frac{1}{6}|ijk|,$$

enfin:

$$|iM'G_1M| = |iG_1M| + |iG_1M'| + |iG_1M'| = \frac{1}{3}|ijk|.$$

### 3 Discrétisation volumes finis vertex centered de l'équation (III.22)

Cette partie a fait l'objet d'une publication dans les proceedings à l'occasion de la conférence "Topical Problems of Fluid Mechanics 2017, Prague, Czech Republic".

On se donne sur  $\Omega$  une triangulation primale  $\mathcal{T}_h$  dont les triangles sont notés  $T_k$  de sommets  $S_i, \leq i \leq 3$  et  $B$  son barycentre. On note  $\mathcal{D}_h$  le maillage dual. On nomme respectivement  $\Sigma_1^{opp}$ ,  $\Sigma_2^{opp}$  et  $\Sigma_3^{opp}$  les arêtes  $[S_2S_3]$ ,  $[S_1S_3]$  et  $[S_1S_2]$  de milieux respectifs  $M_{23,k}$ ,  $M_{13,k}$ ,  $M_{12,k}$  et  $\vec{n}_1^{opp}$ ,  $\vec{n}_2^{opp}$  et  $\vec{n}_3^{opp}$  leurs normales unitaires sortantes. Soit  $\vec{n}_{ij}$  le vecteur normal unitaire sortant à arête  $[BM_{ij,k}]$  tel que:

$$\vec{n}_{ij} \perp \overrightarrow{M_{ij,k}B} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{ij} \cdot \overrightarrow{S_iS_j} > 0, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

### III.3 Discrétisation volumes finis vertex centered de l'équation (III.22)

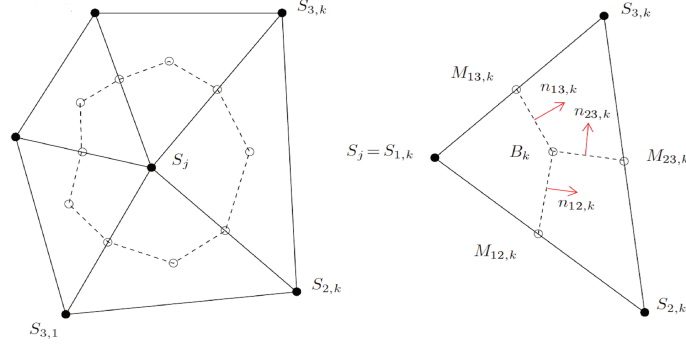


Figure III.4 – Maillage primal  $\mathcal{T}_h$  et maillage dual  $\mathcal{D}_h$

Pour une variable quelconque  $C$ ,  $u_k$  désignera l'approximation de  $C$  au nœud  $S_k$ . Considérons l'équation elliptique suivante:

$$-\operatorname{div}(\mathbb{K}(x)\nabla u(x)) = f(x) \quad (\text{III.5})$$

On intègre l'équation (III.5) sur le maillage dual  $\mathcal{D}_h$  pour avoir un schéma volumes finis centré sur les sommets. Sur le maillage primal  $\mathcal{T}_h$ , le potentiel  $u$  est une fonction éléments finis  $P_1$ .

$$-\int_{\mathcal{D}_h} \nabla \cdot (\mathbb{K}\nabla u) \, dx = \int_{\mathcal{D}_h} f(x) \, dx$$

En utilisant la formule de Green, on obtient:

$$-\int_{\mathcal{D}_h} \nabla \cdot (\mathbb{K}\nabla u) \, dx = -\int_{\partial\mathcal{D}_h} \mathbb{K}_k \nabla u_k \cdot \vec{n} \, d\sigma = -\sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \int_{\partial\mathcal{D}_h \cap T_k} \mathbb{K}_k \nabla u_k \cdot \vec{n} \, d\sigma, \quad (\text{III.6})$$

où  $\mathbb{K}_k$  est une approximation du tenseur de perméabilité sur le triangle  $T_k$ .

$$-\sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \int_{\partial\mathcal{D}_h \cap T_k} \mathbb{K}_k \nabla u_k \cdot \vec{n} \, d\sigma = -\sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \mathbb{K}_k \nabla u_k \cdot \left( \int_{\partial\mathcal{D}_h \cap T_k} \vec{n} \, d\sigma \right) \quad (\text{III.7})$$

$$= -\sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \mathbb{K}_k \nabla u_k \cdot (|BM_{12,k}| \vec{n}_{12} + |BM_{13,k}| \vec{n}_{13}) \quad (\text{III.8})$$

$$= \sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \frac{1}{2} \mathbb{K}_k \nabla u_k \cdot (|\Sigma_2^{\text{opp}}| \vec{n}_2^{\text{opp}} + |\Sigma_3^{\text{opp}}| \vec{n}_3^{\text{opp}}) \quad (\text{III.9})$$

$$= \sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \frac{1}{2} \mathbb{K}_k \nabla u_k \cdot (-\overrightarrow{S_2 S_3})^\perp \quad (\text{III.10})$$

$$= \sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \frac{1}{2} \mathbb{K}_k \nabla u_k \cdot (-\mathbf{M}_{\frac{\pi}{2}} \overrightarrow{S_2 S_3}) \quad (\text{III.11})$$

### Chapitre III. Schéma Volumes Finis centré sur le sommet et adaptation de maillages pour l'équation de Darcy

---

Avec  $\mathbf{M}_{\frac{\pi}{2}}$  la matrice de rotation de  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\text{or } \mathbf{M}_{\frac{\pi}{2}} (\overrightarrow{S_1 S_2} + \overrightarrow{S_2 S_3} = \overrightarrow{S_1 S_3}) = \mathbf{M}_{\frac{\pi}{2}} \overrightarrow{S_1 S_2} + \mathbf{M}_{\frac{\pi}{2}} \overrightarrow{S_2 S_3} = \mathbf{M}_{\frac{\pi}{2}} \overrightarrow{S_1 S_3},$$

alors,

$$-|\Sigma_3^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_3^{opp} - |\Sigma_2^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_2^{opp} = |\Sigma_1^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_1^{opp} (|\Sigma_3^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_3^{opp} + |\Sigma_2^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_2^{opp}) = -|\Sigma_1^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_1^{opp},$$

finalement,

$$- \sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \int_{\partial \mathcal{D}_h \cap T_k} \mathbb{K}_k \nabla \mathbf{u}_k \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}} \, d\sigma = - \sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \frac{1}{2} \mathbb{K}_k \nabla \mathbf{u}_k \cdot (|\Sigma_1^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_1^{opp}),$$

en utilisant le fait que  $\mathbf{u}$  soit  $P_1$ , on a:

$$\nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{2|T_k|} ((\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)|\Sigma_3^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_3^{opp} + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3)|\Sigma_1^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_1^{opp} + (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3)|\Sigma_2^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_2^{opp}) \quad (\text{III.12})$$

$$= -\frac{1}{2|T_k|} (|\Sigma_1^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_1^{opp} \mathbf{u}_1 + |\Sigma_2^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_2^{opp} \mathbf{u}_2 + |\Sigma_{12}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_3^{opp} \mathbf{u}_3) \quad (\text{III.13})$$

$$= -\frac{1}{2|T_k|} \sum_{k=1,3} |\Sigma_k^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_k^{opp} \mathbf{u}_k \quad (\text{III.14})$$

On obtient alors:

$$- \sum_{T_k \in \mathcal{D}_h} \int_{\partial \mathcal{D}_h \cap T_k} \mathbb{K}_k \nabla \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}} \, d\sigma = - \sum_{T_k \in \mathcal{D}_h} \frac{1}{4|T_k|} \mathbb{K}_k \left( \sum_{k=1,3} |\Sigma_k^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_k^{opp} \mathbf{u}_k \right) \cdot |\Sigma_1^{opp}| \overrightarrow{\mathbf{n}}_1^{opp} \quad (\text{III.15})$$

**Lemme 2** Soient  $K$  un triangle donné de sommets respectifs  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  et  $C(x_C, y_C)$  et une fonction  $f$  telle que  $f(x, y) = ax + by + c$ , on note  $f_A$  l'image de  $A$  par  $f$  (respectivement  $f_B$  et  $f_C$ ), alors on a:

$$\int_K f(x, y) \, dx dy = \frac{1}{3} |K| (f_A + f_B + f_C). \quad (\text{III.16})$$

Pour la discrétisation du second membre de l'équation, on utilise la formule de quadrature (III.16)

$$\begin{aligned} \int_{D_h} f(x) \, dx &= \sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \int_{T_k \cap \mathcal{D}_h} f(x) \, dx = \sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \left( \int_{S_1 M_{12,k} B} f(x) \, dx + \int_{S_1 B M_{13,k}} f(x) \, dx \right) \\ &= \sum_{T_k \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset} \left( \frac{1}{3} |S_1 M_{12,k} B| (f_{S_1} + f_{M_{12,k}} + f_B) + \frac{1}{3} |S_1 B M_{13,k}| (f_{S_1} + f_B + f_{M_{13,k}}) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } f_{M_{12,k}} = \frac{1}{2}(f_{S_1} + f_{S_2}); \quad f_{M_{13,k}} = \frac{1}{2}(f_{S_1} + f_{S_3}); \quad f_B = \frac{1}{3}(f_{S_1} + f_{S_2} + f_{S_3})$$

et  $|S_1 M_{12,k} B| = |S_1 B M_{13,k}| = \frac{1}{6}|T_k|$ , alors:

$$\begin{aligned} \int_{D_h} f(x) dx &= \sum_{T_k \cap D_h \neq \emptyset} \frac{1}{6}|T_k| \left( \frac{1}{3}(2f_{S_1} + 2f_B + f_{M_{12,k}} + f_{M_{13,k}}) \right) \\ &= \sum_{T_k \cap D_h \neq \emptyset} \frac{1}{6}|T_k| \left( \frac{11}{9}f_{S_1} + \frac{13}{18}f_{S_2} + \frac{13}{18}f_{S_3} \right) \end{aligned}$$

Pour la construction de la matrice de rigidité et celle de masse, voir l'Annexe A.

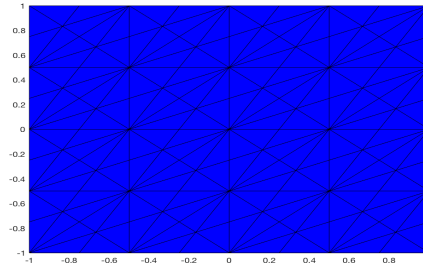
## 4 Estimateur d'erreur a posteriori

### 4.1 Construction du flux $t_h$ par la méthode directe

Si l'idée de construction de flux  $H(\text{div}, \Omega)$ -conformes dans les estimations d'erreur remonte aux années 40 (citons le travail de Prager et Synge [6]), son application aux problèmes d'advection-diffusion-réaction est plus récente (on peut citer le travail de Vohralík [2]). L'intérêt de cette construction est qu'elle est réalisée localement. On rappelle que  $H(\text{div}, \Omega)$  est l'espace engendré par les fonctions à valeurs vectorielles dont la divergence faible est de carré intégrable

$$H(\text{div}, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \nabla \cdot u \in L^2(\Omega)\}.$$

Dans cette partie, en plus du maillage primal  $T_h$  et de son maillage dual  $D_h$ , on définit le maillage simplicial fin  $S_h$  obtenu à partir des deux maillages  $T_h$  et  $D_h$  (voir figure III.5).



**Figure III.5** – Les différents maillages  $T_h$ ,  $D_h$  et  $S_h$

On rappelle aussi l'espace de Raviart-Thomas-Nédélec  $RTN_0(S_h)$ , il s'agit de l'espace fonctionnel où les flux diffusif et convectif dans la méthode de volumes finis sont reconstruits. Pour tout

### Chapitre III. Schéma Volumes Finis centré sur le sommet et adaptation de maillages pour l'équation de Darcy

---

$T \in \mathcal{T}_h$ , on pose:

$$\text{RTN}_0(T) := [P_0(T)]d + xP_0(T)$$

Dans le cas  $d = 2$ , en un point  $X=(x,y)$  de  $T$ , une fonction  $W \in \text{RTN}_0(T)$  s'écrit sous la forme suivante:

$$W(X) = \begin{pmatrix} a_T + d_T x \\ b_T + d_T y \end{pmatrix}$$

Soit  $u_h$  la solution numérique approchée de  $u$ , solution de l'équation 3. L'idée de la construction du flux est de chercher une approximation du flux physique  $-\mathbb{K}\nabla u_h \notin H(\text{div}, \Omega)$ , qu'on nomme  $t_h$ . Donc  $t_h \in \text{RTN}_0(\mathcal{S}_h)$  est définie par:

$$t_h \cdot \vec{n}_\sigma = -\{\{\mathbb{K}\nabla u_h \cdot \vec{n}_\sigma\}\}, \text{ où } \sigma \text{ est une face de la triangulation } \mathcal{S}_h$$

On cherche le flux  $t_h$  dans l'espace  $\text{RTN}(\mathcal{S}_h)$  qui est un sous-espace de dimensions finies de  $H(\text{div}, \Omega)$ . La condition  $\text{RTN}(\mathcal{S}_h) \subset H(\text{div}, \Omega)$  implique la continuité de trace de la normale aux faces intérieures,  $v_h \cdot \vec{n}_\sigma$  est constante pour toute face  $\sigma$  de  $\mathcal{S}_h$  pour toute fonction  $v_h \in \text{RTN}(\mathcal{S}_h)$ . Les flux  $\langle v_h \cdot \vec{n}_\sigma, 1 \rangle_\sigma$  à travers les faces représentent les degrés de liberté de l'espace de Raviart-Thomas  $\text{RTN}(\mathcal{S}_h)$ . En pratique, et pour les arêtes sur les bords de la maille duale  $\mathcal{D}_h$ , on calcule  $t_h$  telle que:

$$t_h \cdot \vec{n}_\sigma = -\mathbb{K}\nabla u_h \cdot \vec{n}_\sigma \quad \forall \sigma \in \partial \mathcal{D},$$

pour les arêtes internes à  $\mathcal{S}_h$ , sur chaque  $K \in \mathcal{S}_h$  on a:

$$(\nabla \cdot t_h, 1)_K = (f, 1)_K, \quad \forall K \in \mathcal{S}_h$$

et pour une arête  $\sigma$  interne telle que  $\sigma = K_1 \cap K_2$ , on prend la moyenne telle que:

$$t_h \cdot \vec{n}_\sigma = -\omega_{K_1,s}(\mathbb{K}\nabla u_h|_{K_1}) - \omega_{K_2,s}(\mathbb{K}\nabla u_h|_{K_2}) \cdot \vec{n}_\sigma$$

Deux choix de  $\omega_{K_1,s}$  et  $\omega_{K_2,s}$  sont possibles:

- Choix 1: moyenne arithmétique:  $\omega_{K_1,s} = \omega_{K_2,s} = \frac{1}{2}$
- Choix 2: moyenne harmonique:  $\omega_{K_1,s} = \frac{\mathbb{K}_{K_2}}{\mathbb{K}_{K_1} + \mathbb{K}_{K_2}}$ ,  $\omega_{K_2,s} = \frac{\mathbb{K}_{K_1}}{\mathbb{K}_{K_1} + \mathbb{K}_{K_2}}$

Pour calculer les flux sur les arêtes de chaque triangle appartenant à  $\mathcal{S}_h$ , on résout un système de trois équations qui détermine les trois inconnues  $a_K$ ,  $b_K$  et  $d_K$ .

L'erreur en norme d'énergie  $\|u - u_h\|_\Omega$  est donnée par:

$$\epsilon_1 = |||u - u_h|||_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\mathbb{K}^{\frac{1}{2}} \nabla u + \mathbb{K}^{-\frac{1}{2}} t_h)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbb{K}^{\frac{1}{2}} \nabla u + \mathbb{K}^{-\frac{1}{2}} t_h)^2$$

On donne l'estimation d'erreur a posteriori suivante:

$$|||u - u_h|||_{\Omega} \leq \left\{ \sum_{D \in \mathcal{D}_h} (\eta_{R,D} + \eta_{DF,D})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

- Estimateur résiduel:  $\eta_{DF,D} := \|\mathbb{K}^{\frac{1}{2}} \nabla u_h + \mathbb{K}^{-\frac{1}{2}} t_h\|_D, \quad \forall D \in \mathcal{D}_h$
- Estimateur de flux:  $\eta_{DF,D} := m_{D,\mathbb{K}} \|f - \nabla \cdot t_h\|_D, \quad \forall D \in \mathcal{D}_h$

$$m_{D,\mathbb{K}} = \frac{C_{P,D} h_D^2}{c_{\mathbb{K},D}}, \quad \text{si } D \in \mathcal{D}_h^{\text{int}},$$

$$m_{D,\mathbb{K}} = \frac{C_{F,D} h_D^2}{c_{\mathbb{K},D}}, \quad \text{si } D \in \mathcal{D}_h^{\text{ext}}$$

avec  $C_{P,D}$  la constante de l'inégalité de Poincaré et  $C_{F,D}$  la constante de l'inégalité de Friedrichs:  $C_{P,D}$  est égale à  $\frac{1}{\pi^2}$  si  $D$  est convexe.  $C_{F,D}$  est généralement égale à 1.

- L'indice d'efficacité  $f_{\eta}$  est défini comme le rapport entre l'estimateur d'erreur et la vraie erreur en norme d'énergie:

$$f_{\eta} = \frac{\left( \sum_{D \in \mathcal{D}_h} (\eta_{R,D} + \eta_{DF,D})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{|||u - u_h|||_{\Omega}}$$

## 5 Tests numériques

Dans cette section, nous testons notre stratégie adaptatif de raffinement du maillage basée sur l'estimation d'erreur a posteriori sur trois problèmes. Aussi une comparaison avec la méthode de raffinement NVB est faite. Dans tous les calculs rapportés ici, les systèmes linéaires d'équations algébriques sont résolus en utilisant un solveur direct. Les deux premiers problèmes représentent un régime dominé par la diffusion. Le troisième problème contient un tenseur de diffusion fortement hétérogène. Dans les trois cas, la solution analytique est donnée.



## 5.1 Cas test 1: problème avec une solution présentant une couche limite

Soit  $\Omega = (-1, 1)^2$ , on considère le problème elliptique sur  $\Omega$  suivant:

$$-\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \quad (\text{III.17})$$

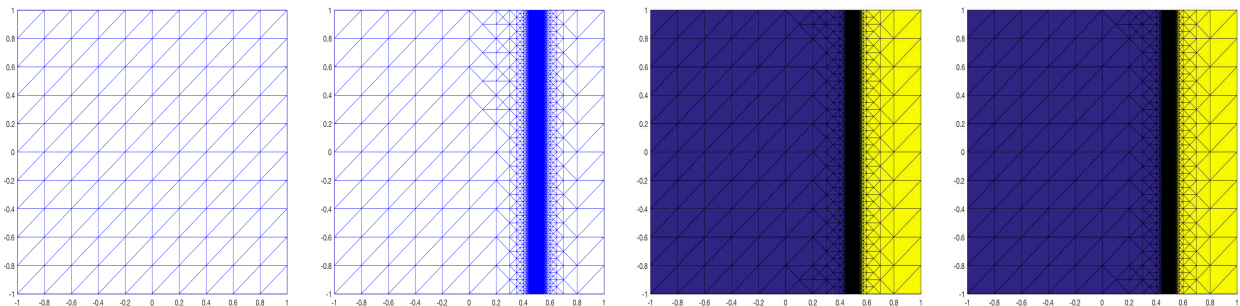
$$u = u_{\text{ex}} \text{ sur } \partial\Omega, \quad (\text{III.18})$$

$f$  est le terme source, le coefficient de diffusion  $\mathbb{K}$  est égal à  $\text{Id}$ . Soit  $a = 0.02$ , la solution exacte possède une couche interne de largeur  $a$  donnée par:

$$u(x, y) = 0.5 \left( 1 - \tanh \left( \frac{0.5 - x}{a} \right) \right)$$

Cette couche limite a la forme typique de ce que l'on obtient dans un cas à convection dominante lorsque l'on se donne une condition de Dirichlet sur une frontière où l'écoulement est sortant. Nous commençons les calculs à partir d'une grille structurée de  $\Omega$  composée de 200 triangles. Le raffinement adaptatif du maillage repose sur deux stratégies: la stratégie AdaptNVB et la stratégie NVB, que nous comparerons dans cette section.

### 5.1.1 Raffinement adaptatif avec la stratégie AdaptNVB



**Figure III.6** – Maillage initial, maillage raffiné, solution exacte et solution numérique

Dans la figure III.6, sont dressées les courbes des solutions exacte et numérique ainsi que le maillage adapté raffiné en utilisant la stratégie AdaptNB. De toute évidence, on observe que l'adaptation du maillage est concentré autour de la singularité. La distribution de l'erreur, les différentes courbes d'erreurs en norme  $L^2$ , estimée et en norme d'énergie en fonction du nombre d'éléments sont tracées dans la figure III.7. Leur convergence est prouvée dans le tableau III.1, où on constate que ces valeurs décroissent au cours du raffinement. De plus, notre stratégie

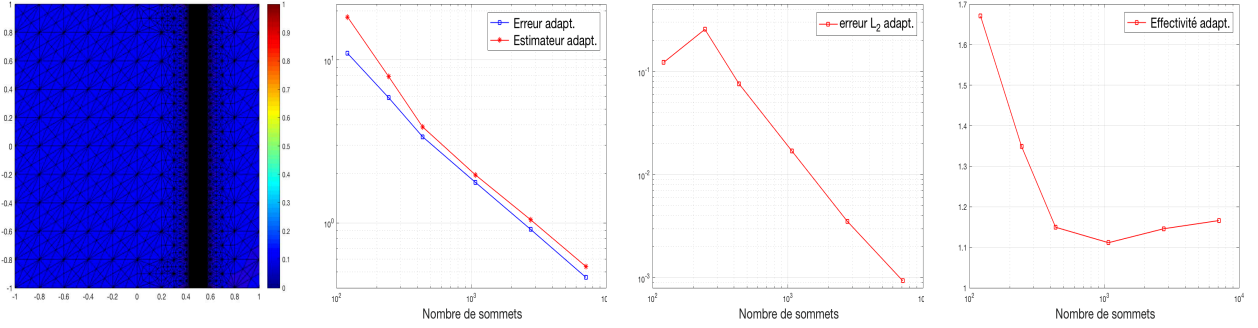


Figure III.7 – Distribution d'erreur, estimateur, erreur d'énergie, erreur  $L_2$  et indice d'efficacité

d'adaptation basée sur l'estimateur a reproduit très précisément la distribution de l'erreur. L'indice d'efficacité tend vers 1.17 ce qui prouve l'efficacité de notre stratégie d'adaptation.

Tableau III.1 – Approche AdaptNVB pour un maillage régulier

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU (s)
1	440	18.346	10.9812	0.12258	1.6707	0.386816
2	816	7.9186	5.8718	0.25616	1.3486	0.504966
3	2088	3.8857	3.3801	0.076081	1.1496	0.683294
4	5448	1.9708	1.7731	0.016908	1.1115	1.255315
5	14088	1.0462	0.913	0.0035246	1.1459	3.917333
6	42944	0.5409	0.46387	0.00093686	1.1661	18.876214

### 5.1.2 Raffinement adaptatif avec la stratégie NVB

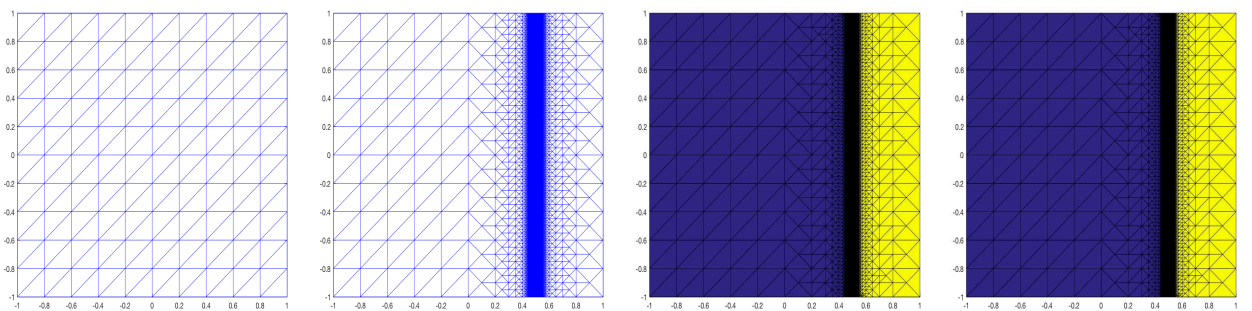


Figure III.8 – Maillage initial, maillage raffiné, solution exacte et solution numérique

Dans cette section, l'adaptation du maillage est faite par la stratégie NVB. En comparant les maillages raffinés dans les deux figures III.6 et III.8, on observe la prévention de propagation des niveaux de raffinement en utilisant la stratégie AdaptNVB. On observe aussi des oscillations,

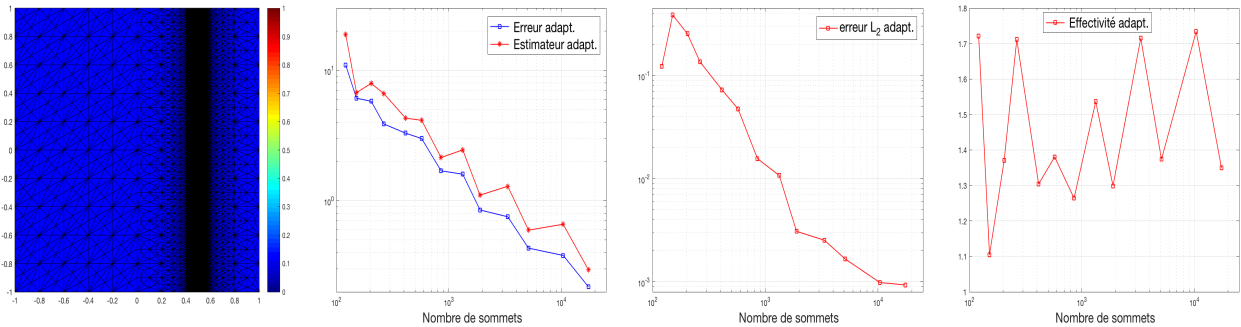


Figure III.9 – Distribution d'erreur, estimateur, erreur d'énergie, erreur  $L_2$  et indice d'efficacité

indésirables par les physiciens, sur les courbes d'erreurs exacte et estimée ainsi que sur la courbe d'efficacité (voir figure III.9). Dans le tableau III.2, on remarque le gain en termes de nombre d'itérations et d'éléments. En effet, la stratégie NVB nécessite 13 itérations et 74164 triangles pour obtenir une erreur  $L_2$  de même ordre que celle de la stratégie adaptNVB où seulement 6 itérations avec 42944 triangles sont requises. Le gain est aussi remarquable en termes de temps CPU.

Tableau III.2 – Approche AdaptNVB pour un maillage régulier

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU (s)
1	260	18.8964	10.9812	0.12258	1.7208	0.37
6	1650	4.1364	2.9966	0.04753	1.3804	1.13
8	3722	2.4544	1.5972	0.010764	1.5367	2.46
9	6614	1.1035	0.84966	0.00309	1.2988	3.70
10	10134	1.2914	0.75294	0.0028321	1.7151	7.33
11	20694	0.59499	0.43312	0.002001	1.3737	14.11
12	34770	0.66006	0.38062	0.0016671	1.7342	44.55
13	74164	0.29502	0.21861	0.00093483	1.3495	109.62

## 5.2 Cas test 2: modèle d'un régime dominé par diffusion pure à solution régulière avec fort gradient localisé

On considère le problème elliptique suivant:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathbb{K}\nabla u) &= f & \text{dans } \Omega &= (-1, 1)^2 \\ u &= u_{\text{ex}} & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

On donne la solution exacte suivante:  $u(x, y) = x(1-x)y(1-y)$ . Ici, la perméabilité  $\mathbb{K} = \text{Id}$ . Ce problème est intéressant car il présente une singularité (présence d'un fort gradient).

### 5.2.1 Raffinement adaptatif avec la stratégie AdaptNB

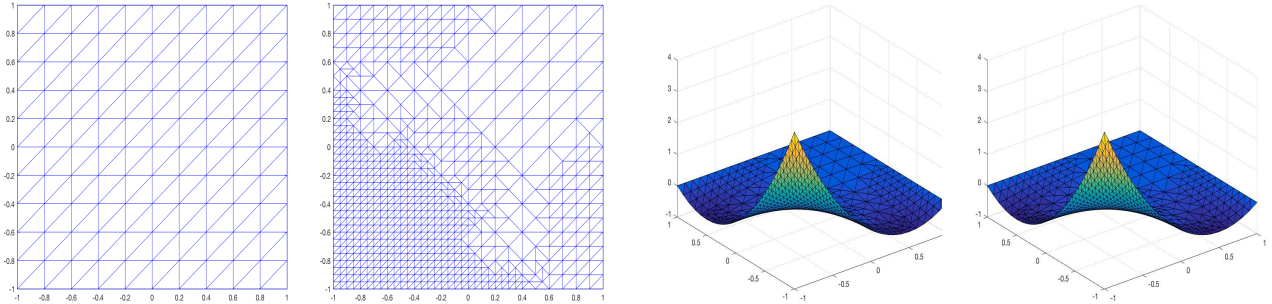


Figure III.10 – Maillage initial, raffiné, solution exacte et solution numérique

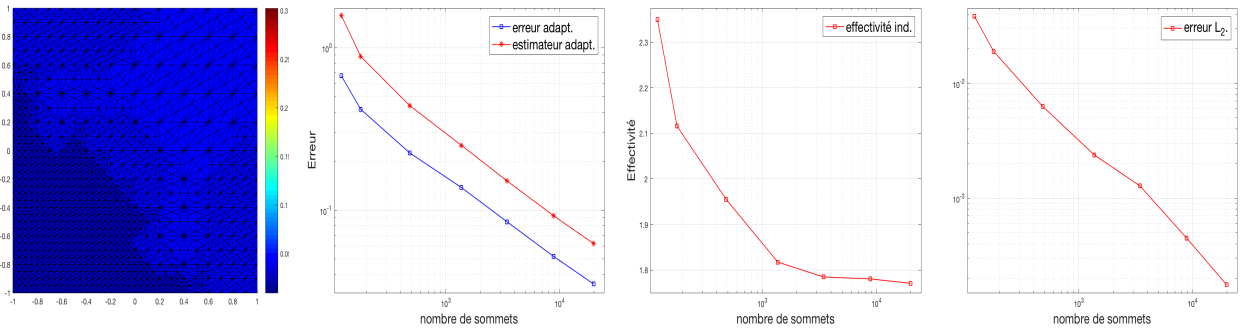


Figure III.11 – Distribution d’erreur, estimateur, erreur d’énergie, indice d’efficacité et erreur  $\mathbb{L}_2$

Le maillage initial et celui adapté ainsi que les deux solutions exacte et numérique sont représentés dans la Figure (III.10). L’adaptation est faite dans la zone qui présente une singularité. Comme dans le cas test 1, on considère que la perméabilité  $\mathbb{K} = \text{Id}$  est constante. Le terme source  $f$  est extrait de l’opérateur  $\text{div.}(\nabla u)$  tel que  $f = \text{div.}(\nabla u)$ . On considère la condition de Dirichlet  $u = u_{\text{ex}}|_{\partial\Omega}$  et  $\Gamma_n = 0$ . L’erreur estimée, l’erreur exacte en norme d’énergie ainsi que l’indice d’efficacité représentés dans la figure III.11, décroissent au cours du raffinement du maillage. Leurs valeurs sont données dans le tableau III.3.

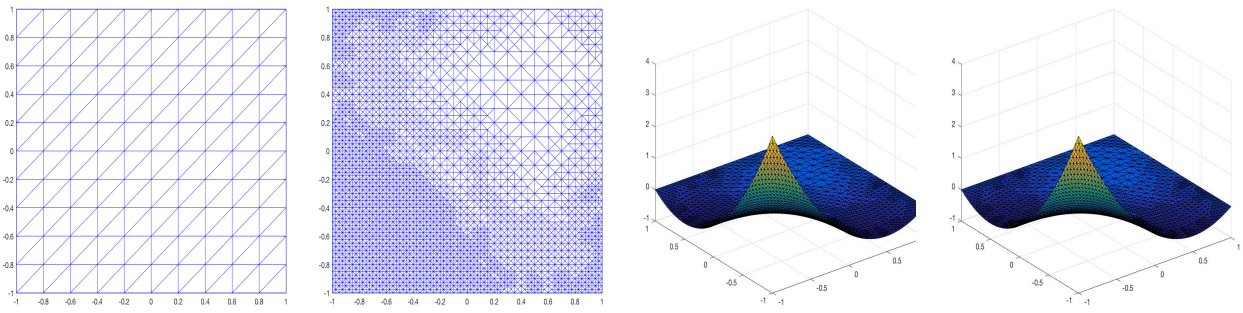
### 5.2.2 Raffinement adaptatif avec la stratégie NVB

Afin de comparer les deux stratégies d’adaptation AdaptNVB et NVB, nous commençons par comparer les maillages raffinés (après 5 itérations) dans les deux cas donnés dans les figures III.10 et III.12. Comme dans le premier problème, la propagation des niveaux de raffinement en utilisant la stratégie AdaptNVB est garantie. Les oscillations apparaissent aussi pour ces cas de fort gradient sur les différentes courbes d’erreur exacte et estimée ainsi sur la courbe

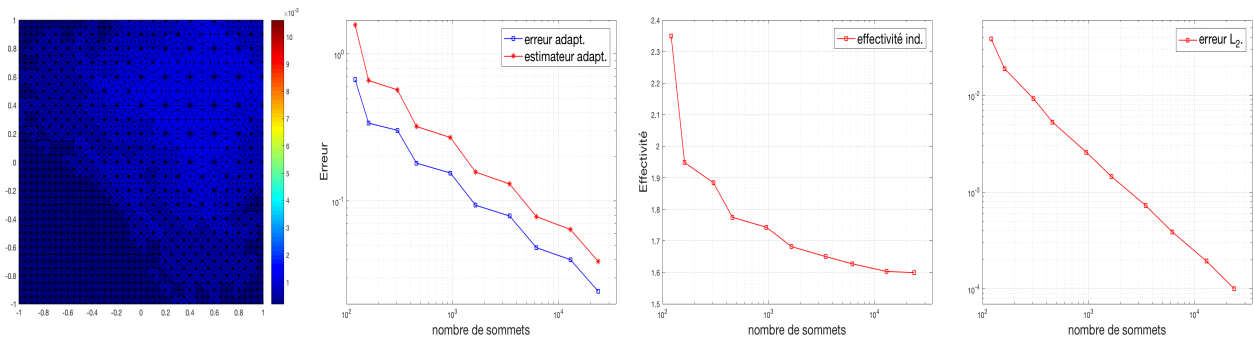
### Chapitre III. Schéma Volumes Finis centré sur le sommet et adaptation de maillages pour l'équation de Darcy

**Tableau III.3** – Approche AdaptNVB pour un maillage régulier

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU(s)
1	304	1.5751	0.67034	0.038341	2.3497	0.31
2	868	0.88283	0.41716	0.018918	2.1163	0.14
3	2550	0.43967	0.22486	0.0062776	1.9553	0.25
4	6570	0.25062	0.13791	0.0023745	1.8172	1.01
5	17186	0.1514	0.084833	0.0012775	1.7847	4.33
6	38894	0.092397	0.051895	0.00044914	1.7805	13.52
7	92962	0.062211	0.035132	0.000100615	1.7708	90.17



**Figure III.12** – Maillage initial, raffiné, solution exacte, solution numérique



**Figure III.13** – Distribution d'erreur, estimateur, erreur d'énergie, indice d'efficacité et l'erreur  $\mathbb{L}_2$

d'efficacité (voir figure III.13). Le tableau III.4 montre le gain en termes de nombre d'itérations et de nombre d'éléments pour obtenir une erreur  $\mathbb{L}_2$  de même ordre ( $10^{-4}$ ). La stratégie NVB a exigé 10 itérations et 97586 triangles tandis que 7 itérations et 92962 triangles étaient suffisants dans la stratégie AdaptNVB. Cette nouvelle stratégie a permis de réduire sensiblement le temps CPU.

**Tableau III.4** – Approche NVB pour un maillage régulier

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU (s)
1	282	1.5751	0.67034	0.67034	2.3497	0.27
4	1790	0.32147	0.18117	0.0052892	1.7744	0.21
5	3174	0.27042	0.15515	0.0025798	1.743	0.55
6	6692	0.15756	0.093696	0.0014487	1.6816	1.22
7	12156	0.13064	0.079175	0.00072768	1.65	4.26
8	25478	0.078371	0.048167	0.00038672	1.6271	10.90
10	97586	0.038948	0.024355	0.00010048	1.5992	144.72

### 5.3 Cas test 3: problème modèle avec tenseur de diffusion fortement hétérogène

Soit  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$  subdivisé en 4 sous-domaines  $\Omega_i$ . Ce problème de diffusion se trouve dans [5], c'est un cas très intéressant vu que dans plusieurs applications réelles, le tenseur de diffusion  $\mathbb{K}$  peut être discontinu et fortement hétérogène.

$$-\operatorname{div}(\mathbb{K}(x)\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \quad (\text{III.20})$$

$$u = g \text{ sur } \partial\Omega \quad (\text{III.21})$$

Le second membre  $f \equiv 0$ , et le coefficient de diffusion  $\mathbb{K}$  est constant pour chaque sous-domaine  $\Omega_i$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_i$  dans  $\Omega_i$ . La solution analytique dont la restriction à chaque  $\Omega_i$  s'écrit:

$$u(r, \theta)|_{\Omega_i} = r^\alpha (a_i \sin(\alpha\theta) + b_i \cos(\alpha\theta))$$

Elle est continue à travers les interfaces mais seule la composante normale de son flux  $\mathbf{v} = -\mathbb{K}\nabla u$  est continue, et présente une singularité à l'origine.  $(r, \theta)$  désignent les coordonnées polaires dans  $\Omega$  et  $\alpha$  est un paramètre, tels que la condition aux limites  $g$  qui apparaît dans l'équation (III.21) est égale à la solution analytique.


 Sous-domaines  $\Omega_i$ 

- $a_i, b_i$  sont des constantes liées à  $\Omega_i$ .
- On considère deux configurations correspondant à deux jeux de paramètres pour la perméabilité:
  - ✓  $i_1 : \mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_3 = 5; \quad \mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_4 = 1; \quad \alpha = 0.535$
  - ✓  $i_2 : \mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_3 = 100; \quad \mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_4 = 1; \quad \alpha = 0.127$

### Chapitre III. Schéma Volumes Finis centré sur le sommet et adaptation de maillages pour l'équation de Darcy

$\alpha = 0.535$		$\beta = 0.127$	
$a_1 = 0.44721360$	$b_1 = 1$	$a_1 = 0.1$	$b_1 = 1$
$a_2 = -0.74535599$	$b_2 = 2.33333333$	$a_2 = -9.60396040$	$b_2 = 2.96039604$
$a_3 = -0.94411759$	$b_3 = 0.55555556$	$a_3 = -0.48035487$	$b_3 = -0.88275659$
$a_4 = -2.40170264$	$b_4 = -0.48148148$	$a_4 = 7.70156488$	$b_4 = -6.45646175$

#### 5.3.1 Raffinement adaptatif avec la stratégie AdaptNVB: maillage irrégulier avec $\alpha = 0.535$

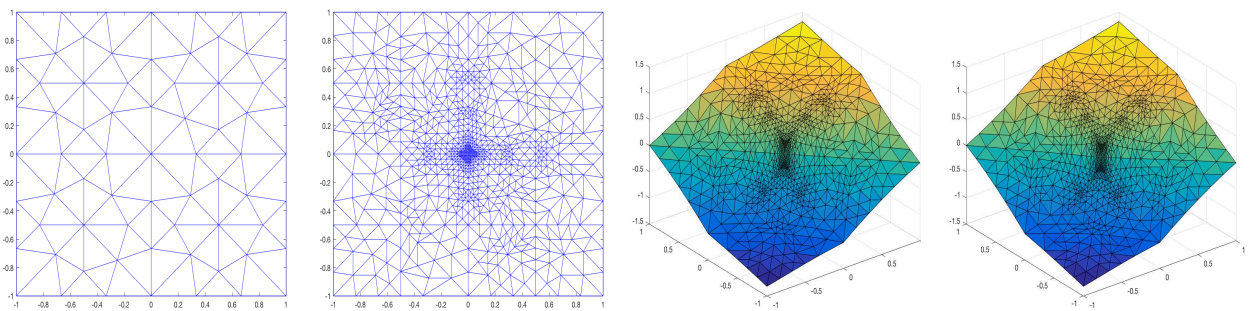


Figure III.14 – Maillage initial, maillage raffiné, solution exacte et solution numérique

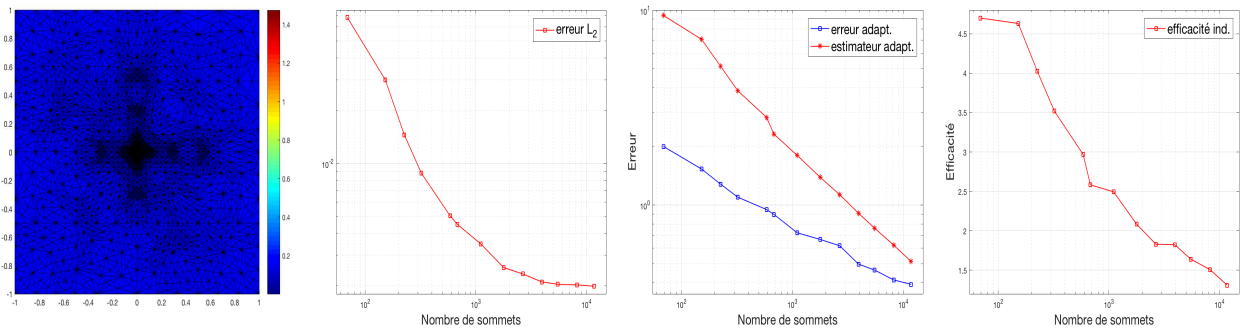


Figure III.15 – Distribution d'erreur, erreur  $L_2$ , erreur d'énergie, estimateur, erreur d'énergie et indice d'efficacité

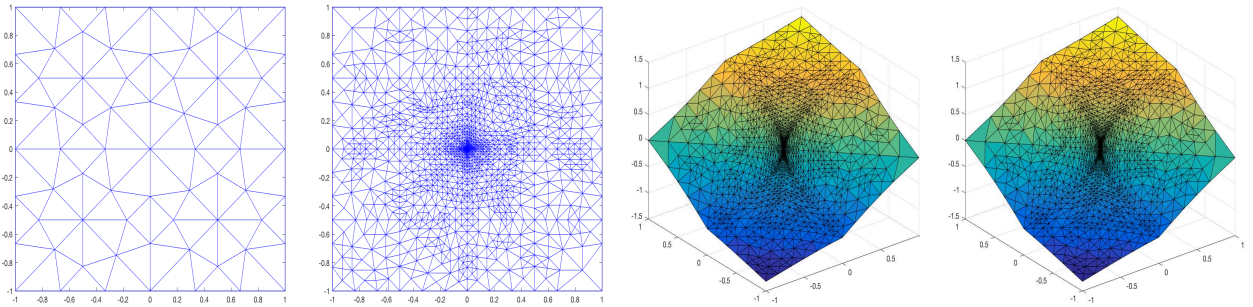
Dans ce premier cas,  $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_3 = 5$ ,  $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_4 = 1$ . Le maillage primal est irrégulier et contient 112 triangles, le raffinement adaptatif basé sur l'estimation d'erreur a posteriori est réalisé par la stratégie AdaptNVB. En fait, dans ce cas, l'estimateur  $\eta_{DF,D}$  est dominé par l'estimateur résiduel  $\eta_{DF,D}$  qui est nul pour chaque triangle  $T$  du maillage primal  $\mathcal{T}_h$ . La figure III.14 représente les solutions exacte et approchée pour un maillage adaptatif irrégulier, le raffinement est fait par la stratégie AdaptNB avec  $\alpha = 0.535$ . Il est patent que ce problème admet une singularité au centre du maillage, point de coordonnées  $(0,0)$ . La singularité est beaucoup plus importante

en ce point et par conséquent le maillage est raffiné autour de l'origine. Dans la figure III.15, nous avons tracé l'erreur  $\mathbb{L}_2$  entre les deux solutions ainsi que l'erreur estimée et l'erreur exacte en norme d'énergie. Nous pouvons constater que la distribution prédite est excellente et que, la singularité est bien reconnue. Leurs valeurs sont dressées dans le tableau III.6. On observe la convergence des deux erreurs estimée et exacte, ainsi que l'indice d'efficacité qui exprime simplement le nombre de fois où nous avons surestimé l'erreur réelle. Sa valeur tend vers 1.2 ce qui prouve l'exactitude de notre stratégie d'adaptation basée sur l'estimateur a posteriori malgré que le problème soit à coefficients discontinus.

**Tableau III.5** – Approche AdaptNVB pour un maillage irrégulier avec  $\alpha = 0.535$

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU (s)
1	278	9.3847	1.997	0.0068	4.6994	0.80
5	1338	2.8132	0.94763	0.0050165	2.9686	3.54
9	7798	1.1302	0.61814	0.0023377	1.8283	10.40
11	16228	0.76108	0.46395	0.0020429	1.6404	22.956
13	31955	0.5131	0.39166	0.0019912	1.3101	48.840

### 5.3.2 Raffinement adaptatif avec la stratégie NVB: maillage irrégulier avec $\alpha = 0.535$



**Figure III.16** – Maillage initial, maillage raffiné, solution exacte et solution numérique

Les maillages irréguliers adaptés dans les deux cas représentés dans les figures III.14 et III.16, ainsi que la distribution d'erreur tracée, dans les figures III.15 et III.17 font ressortir la concentration de l'adaptation autour de la singularité. De plus, les oscillations existent tant dans les courbes d'erreur que dans les courbes d'efficacité. Par ailleurs, cette stratégie offre un gain considérable en termes de temps CPU qui se trouve divisé par 3, tout en permettant de diminuer de moitié le nombre d'itérations.



## Chapitre III. Schéma Volumes Finis centré sur le sommet et adaptation de maillages pour l'équation de Darcy

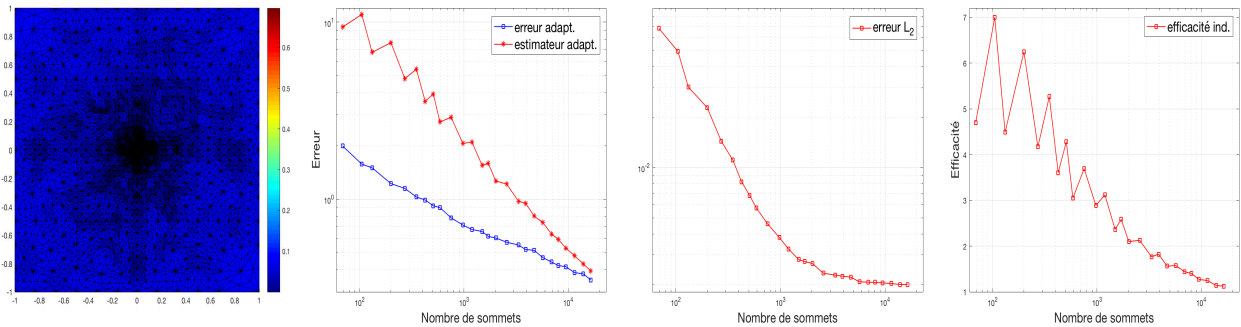


Figure III.17 – Distribution d'erreur, estimateur, erreur d'énergie, erreur  $L_2$  et indice d'efficacité

Tableau III.6 – Approche NVB pour un maillage irrégulier avec  $\alpha = 0.535$

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU (s)
1	184	9.3847	1.997	0.068127	4.6994	0.81
9	1482	2.732	0.89695	0.005722	3.0459	6.271749
13	3373	1.5555	0.65777	0.0028124	2.3649	11.067
16	6605	1.2175	0.57232	0.002328	2.1272	7.27
19	11292	0.80378	0.51472	0.0022044	1.5616	30.80
23	22755	0.52982	0.41618	0.002038	1.2731	78.04
26	39138	0.39433	0.35013	0.0019923	1.1262	184.76

### 5.3.3 Raffinement adaptatif avec la stratégie AdaptNVB: maillage régulier avec $\alpha = 0.535$

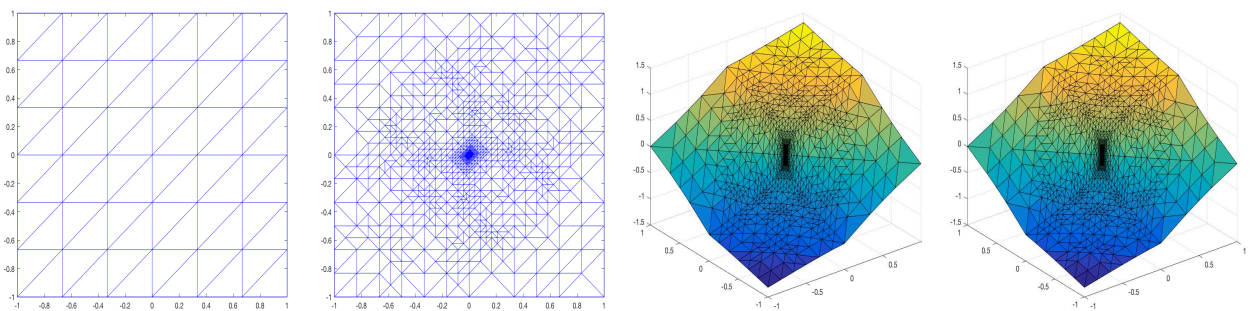
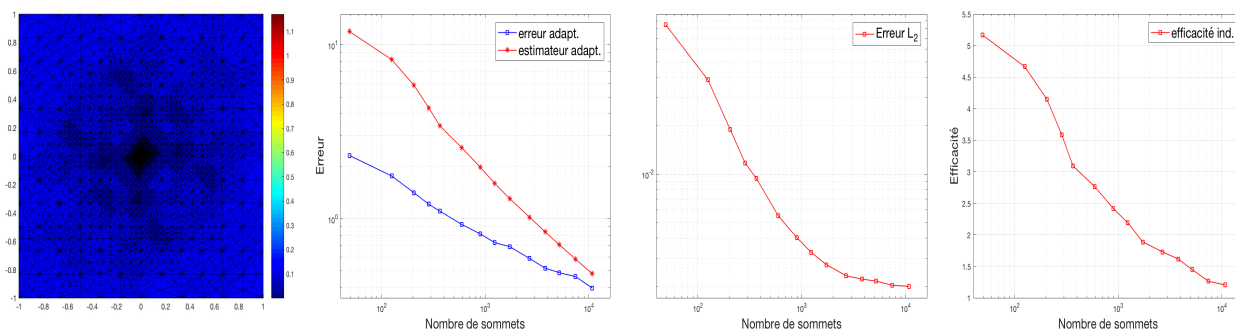


Figure III.18 – Maillage initial, maillage raffiné, solution exacte et solution numérique

De la même manière que précédemment, les deux solutions exacte et numérique pour un maillage adaptatif régulier en utilisant la méthode AdaptNB pour  $\alpha = 0.535$  sont données dans la figure III.18. Il va sans dire que dans que celui-ci est concentré dans les régions où la solution présente des singularités. Les différentes courbes d'erreurs  $L_2$ , estimée et en norme d'énergie sont dressées dans la figure III.19. À l'instar du cas irrégulier, ces courbes décroissent au cours



**Figure III.19** – Distribution d'erreur, estimateur, erreur d'énergie, erreur  $L_2$  et indice d'efficacité

du raffinement du maillage (voir tableau III.7). L'indice d'efficacité est proche 1.2, ce qui confirme l'efficacité et la performance du schéma ainsi que de l'adaptation du maillage basée sur l'estimateur d'erreur a posteriori.

**Tableau III.7** – Approche AdaptNVB pour un maillage régulier avec  $\alpha = 0.535$

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU (s)
1	278	11.9146	2.3052	0.085094	5.1686	0.808
8	1534	1.5968	0.72792	0.0032645	2.1936	6.527
10	3470	1.0196	0.58969	0.0023314	1.729	11.247
11	6734	0.83792	0.51843	0.0022253	1.6163	15.738
13	10342	0.58581	0.46385	0.0020375	1.2629	35.968
14	13975	0.48118	0.39921	0.0020121	1.2053	61.511

5.3.4 Raffinement adaptatif avec la stratégie NVB: maillage régulier avec  $\alpha = 0.535$

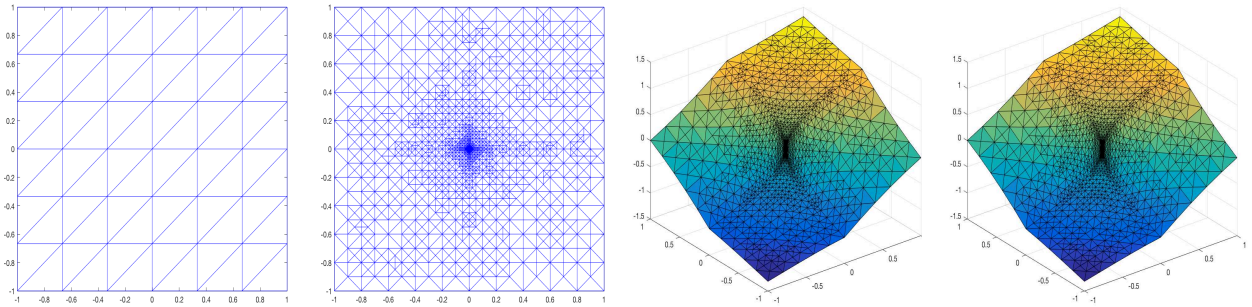


Figure III.20 – Maillage initial, maillage raffiné, solution exacte et solution numérique

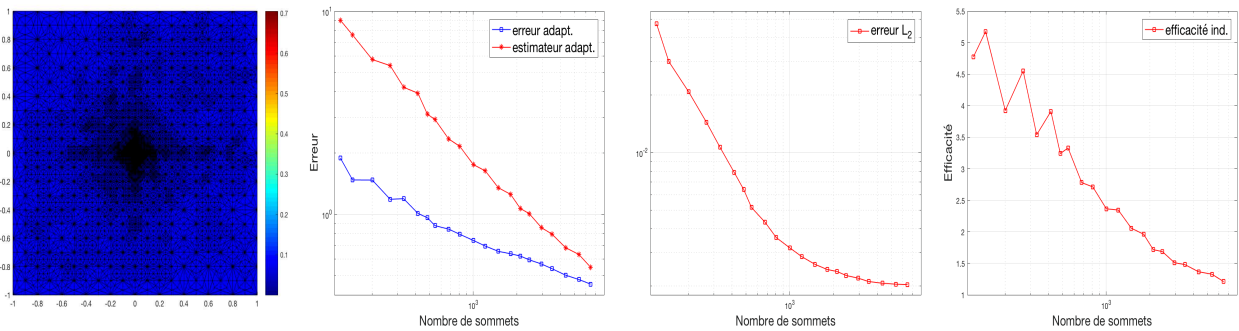


Figure III.21 – Distribution d'erreur, estimateur, erreur d'énergie, erreur  $L_2$  et indice d'efficacité

Comme dans le cas du maillage irrégulier, le raffinement se fait autour de la singularité aussi bien avec la stratégie AdaptNVB qu'avec NVB. En adoptant la nouvelle stratégie, on parvient à éviter la propagation inutile du raffinement. Le gain en temps CPU, en nombre d'éléments ainsi qu'en nombre d'itérations est substantiel (voir tableau III.8).

Tableau III.8 – Approche NVB pour un maillage régulier avec  $\alpha = 0.535$

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU (s)
1	252	9.0167	1.8893	0.047235	4.7724	0.78
7	1048	3.1105	0.95969	0.0064033	3.2412	4.74
12	2936	1.6326	0.69606	0.002852	2.3454	9.51
13	3568	1.3481	0.65532	0.0026014	2.0571	10.90
17	6900	0.85755	0.56767	0.0022017	1.5106	19.17
19	10639	0.68342	0.50016	0.0020713	1.3664	27.21
21	15490	0.54702	0.4519	0.0020364	1.2105	41.88

### 5.3.5 Raffinement adaptatif avec la stratégie AdaptNVB: maillage irrégulier avec $\alpha = 0.127$

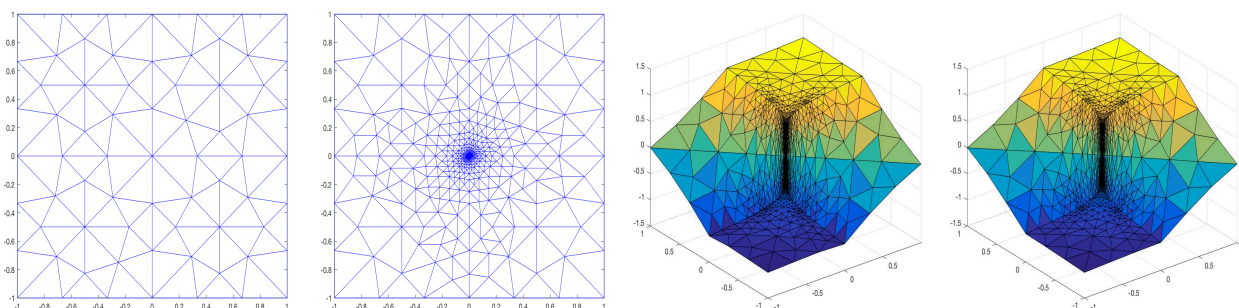


Figure III.22 – Maillage initial, maillage raffiné, solution exacte et solution numérique

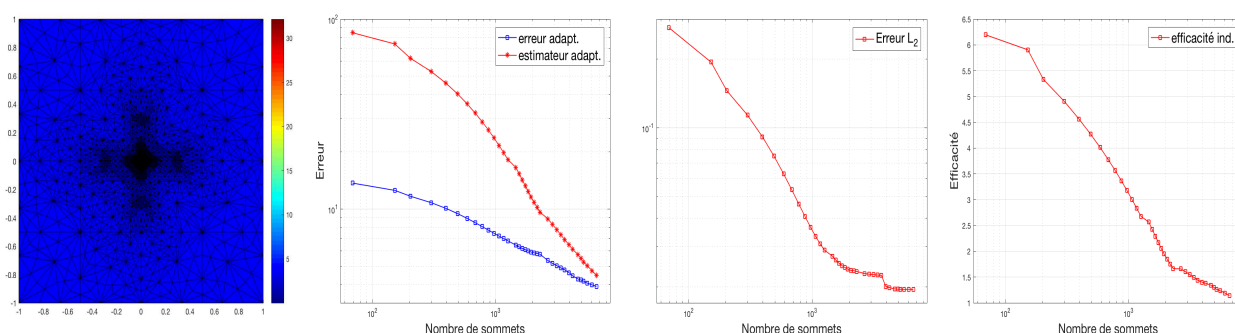


Figure III.23 – Distribution d'erreur, estimateur, erreur d'énergie, erreur  $L_2$  et indice d'efficacité

La figure III.22 illustre les solutions exacte et approchée dans un maillage irrégulier raffiné (adaptativement) pour  $\alpha = 0.127$ . Elle fait ressortir la concentration du maillage là où des singularités existent. L'erreur  $L_2$ , l'erreur estimée ainsi que l'erreur d'énergie, résumées dans la figure III.23, décroissent au cours du raffinement. Leurs valeurs sont détaillées dans le tableau III.9. On remarque que cet indice tend vers 1.2 corroborant ainsi l'exactitude de notre estimateur bien qu'il s'agisse d'un problème à coefficients discontinus et que la solution exacte présente une singularité au centre.

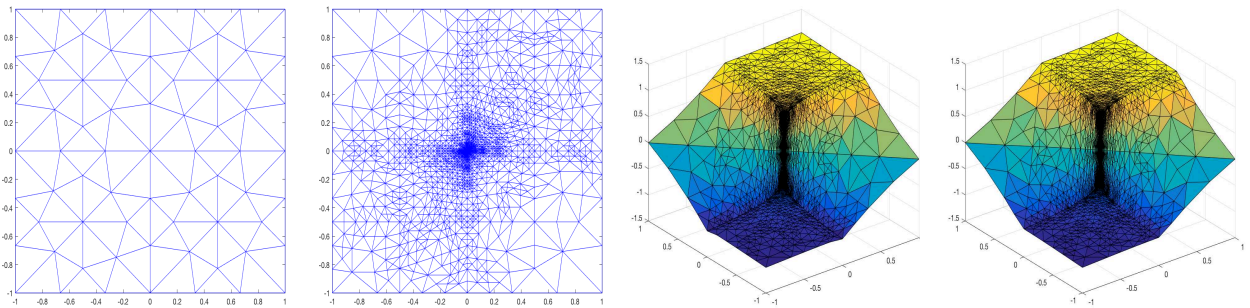
### 5.3.6 Raffinement adaptatif avec la stratégie NVB: maillage irrégulier avec $\alpha = 0.127$

Comme pour  $\alpha = 0.127$ , on voit bien sur les figures III.22 et III.24 que le raffinement est concentré autour des singularités (moins propagé dans le cas AdaptNVB). De même pour la

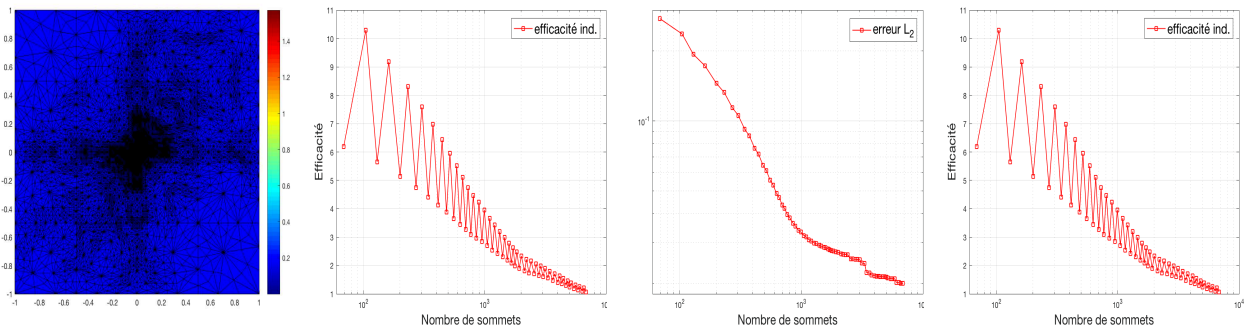
### Chapitre III. Schéma Volumes Finis centré sur le sommet et adaptation de maillages pour l'équation de Darcy

**Tableau III.9** – Approche AdaptNVB pour un maillage irrégulier avec  $\alpha = 0.127$

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU (s)
1	278	84.7592	13.6799	0.27562	6.1959	0.840
8	1534	31.9668	8.4613	0.053372	3.778	5.889
17	3470	14.1878	6.1901	0.025388	2.292	16.698
26	6734	7.7657	5.0219	0.022617	1.5464	34.825
32	10342	5.4819	4.2196	0.019544	1.2992	57.184
36	13975	4.462	3.9079	0.019476	1.1418	80.758



**Figure III.24** – Maillage initial, maillage raffiné, solution exacte et solution numérique



**Figure III.25** – Distribution d'erreur, estimateur, erreur d'énergie, erreur  $L_2$  et indice d'efficacité

distribution de l'erreur (voir les figures [III.23](#) et [III.25](#)), on remarque aussi des oscillations dans les différentes courbes pour la stratégie NVB. En comparant les deux tableaux [III.9](#) et [III.10](#), on constate que le nombre d'itérations est divisé par deux dans le cas AdaptNVB, ainsi qu'un important gain en termes de temps CPU.

Tableau III.10 – Approche NVB pour un maillage irrégulier avec  $\alpha = 0.127$

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU (s)
1	184	84.7592	13.6799	0.27562	6.1959	0.797049
13	1008	32.6131	8.767	0.064464	3.88	8.60
30	2528	20.844	6.0844	0.030421	3.4258	24.06
46	5088	11.3607	5.2588	0.026484	2.1603	47.188
63	0286	5.5692	4.4735	0.021254	1.2449	96.16
71	14039	4.398	4.1194	0.019985	1.0676	137.087

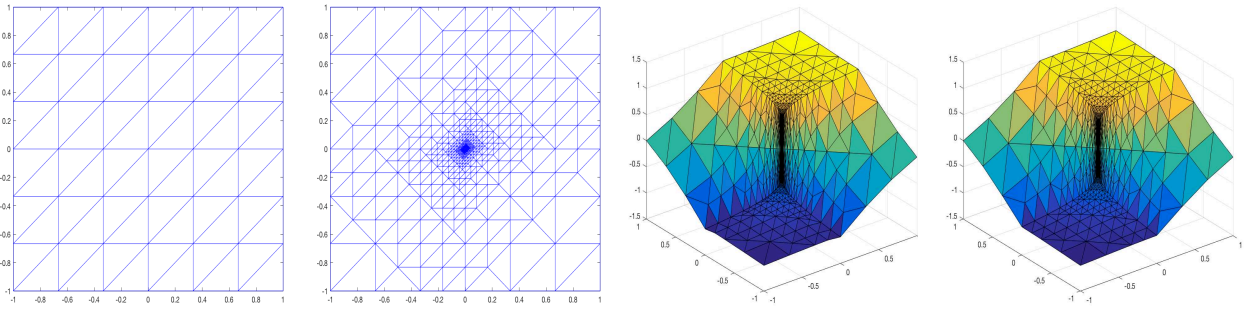


Figure III.26 – Maillage initial, maillage raffiné, solution exacte et solution numérique

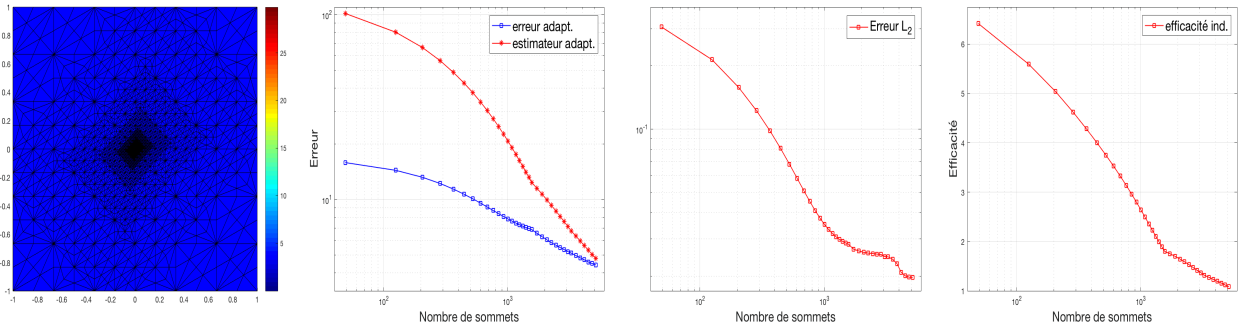


Figure III.27 – Distribution d’erreur, estimateur, erreur d’énergie, erreur  $L_2$  et indice d’efficacité

### 5.3.7 Raffinement adaptatif avec la stratégie AdaptNVB: maillage régulier avec $\alpha = 0.127$

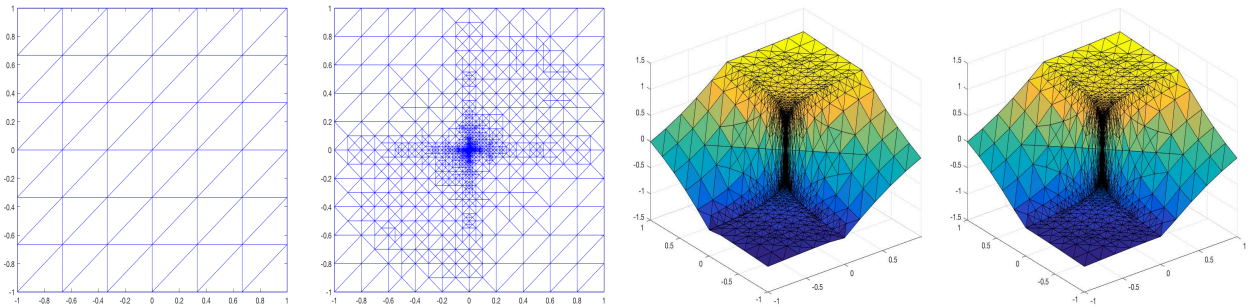
Les solutions exacte et approchée ainsi que le maillage adapté tracés dans la figure III.26 pour un maillage régulier avec  $\alpha = 0.127$  montrent bien une singularité au centre du maillage. Comme illustré dans la figure III.26, le maillage est concentré dans les régions où la solution présente des singularités. Les erreurs  $L_2$ , estimée, et en norme d’énergie ainsi que l’indice d’efficacité convergent (voir la figure III.27). En particulier, on obtient une efficacité proche de 1. Leurs valeurs sont données dans le tableau III.11.

### Chapitre III. Schéma Volumes Finis centré sur le sommet et adaptation de maillages pour l'équation de Darcy

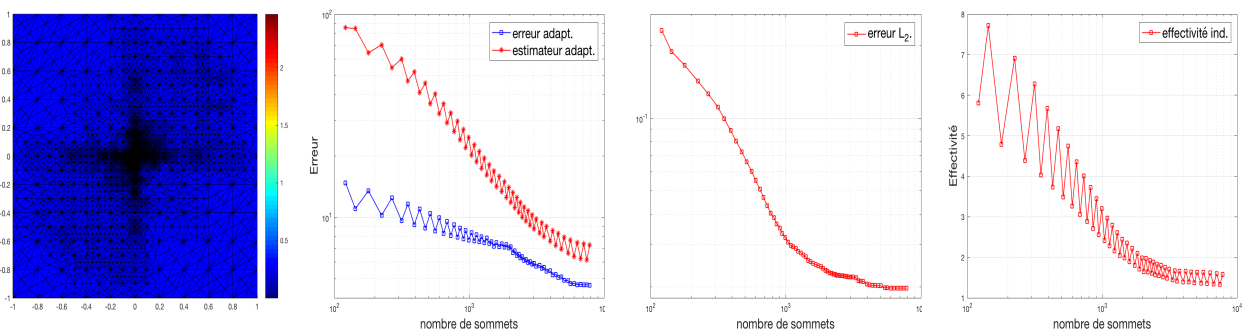
**Tableau III.11** – Approche AdaptNVB pour un maillage régulier avec  $\alpha = 0.127$

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU (s)
1	220	101.6213	15.836	0.30586	6.4171	0.783
9	1500	30.2758	9.1035	0.050939	3.3258	6.580
19	3100	13.1727	6.9572	0.028746	1.8934	17.455
27	6096	7.593	5.3582	0.025346	1.4171	31.9522
33	9582	5.3155	4.5875	0.020044	1.1587	50.538
35	10938	4.7928	4.4213	0.019721	1.084	59.2712

#### 5.3.8 Raffinement adaptatif avec la stratégie NVB: maillage régulier avec $\alpha = 0.127$



**Figure III.28** – Maillage initial, maillage raffiné, solution exacte et solution numérique



**Figure III.29** – Distribution d'erreur, estimateur, erreur d'énergie, erreur  $L_2$  et indice d'efficacité

Finalement, pour le maillage régulier, en analysant les courbes [III.26](#), [III.27](#), [III.28](#) et [III.29](#), on conclut que la nouvelle stratégie d'adaptation fournit un raffinement du maillage autour de la singularité, ainsi qu'une distribution d'erreur sur l'ensemble du maillage. Dans le cas du maillage régulier, des oscillants persistent dans le cas NVB. Les tableaux [III.11](#) et [III.12](#) confirment le gain offert par la stratégie AdaptNVB.

**Tableau III.12** – Approche NVB pour un maillage régulier avec  $\alpha = 0.127$

iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU (s)
1	244	85.7166	14.7666	0.23129	5.8048	0.44
11	1076	36.2305	10.3921	0.066046	3.4864	2.15
27	2526	17.3421	8.0183	0.028113	2.1628	9.64
45	5004	9.9997	6.3698	0.022294	1.5699	27.94
62	10655	7.9654	4.8771	0.020191	1.6332	68.24
70	16237	7.2943	4.6201	0.019755	1.5788	114.75

## 6 Raffinements multiniveaux

### 6.1 Présentation de la méthodologie

Pour les problèmes stationnaires, la stratégie adoptée jusqu'à présent consistait à effectuer des boucles où la solution est recalculée à chaque itération. On reconstruit ensuite le flux et on établit des estimateurs d'erreurs fournissant un critère de raffinement, puis on procède à un raffinement de maillage. Cette stratégie s'avère coûteuse et induit des temps de calculs prohibitifs. Nous avons donc opté pour une nouvelle stratégie plus économe tout en étant aussi précise. On effectue une boucle principale de calcul de la solution, des estimateurs d'erreurs et du critère de raffinement. Cette boucle est répétée  $\mathcal{N}_{Ref}$  fois qui est le nombre maximal de raffinements avec recalcul de la solution et des critères. Les triangles du maillage précédent de la boucle principale étant marqués 1 ou 0 selon qu'ils sont à raffiner ou pas, une boucle de 1 à  $\mathcal{N}_{Lev}$ , où  $\mathcal{N}_{Lev}$  est le nombre maximal de raffinements multiniveaux à critère constant est activée. À chacune des itérations de cette sous-boucle, un triangle marqué 1 est raffiné et ses 4 triangles "fils" sont marqués à raffiner.

Cette partie a fait l'objet d'une publication dans les proceedings de la conférence "Topical Problems of Fluid Mechanics 2018, Prague, Czech Republic".

### 6.2 Algorithme

Paramètre	Signification
$J_{div}$	Tableau avec les valeurs 0 ou 1, 1 : le triangle doit être raffiné et 0 sinon
Marker	Tableau qui indique si une arête doit être divisée ou non.
$\mathcal{N}_{Ref}$	Nombre maximal de raffinements avec recalcul de solution et de critère
$\mathcal{N}_{div}$	Tableau pour les arêtes : 0 si le milieu n'est pas encore créé, 1 si le nœud est déjà créé.
$\mathcal{N}_{Lev}$	Nombre maximal de raffinements multiniveaux à critère constant



Algorithme

**Pour**  $t = 1$  jusqu'à  $\mathcal{N}_{Ref}$ .

Création de la structure de données du nouveau maillage.

Calcul de la solution numérique.

Calcul des estimateurs d'erreur a posteriori.

Calcul de l'erreur exacte.

Calcul du critère de raffinement fonction des estimateurs.

Marquage des éléments à raffiner.

**Pour**  $k = 1$  jusqu'à  $\mathcal{N}_{Lev}$ .

Raffinement du maillage avec la stratégie Adapt.

Conformité avec la stratégie NVB.

Marquage des nouveaux triangles créés comme étant à raffiner.

**Fin Pour**

**Fin Pour**

### 6.3 Résultats numériques

Nous résolvons le problème dit de diffusion bidimensionnelle (III.22), le coefficient de diffusion hétérogène est  $\mathbb{K}$  pour cette application.

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathbb{K}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) &= f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{III.22}$$

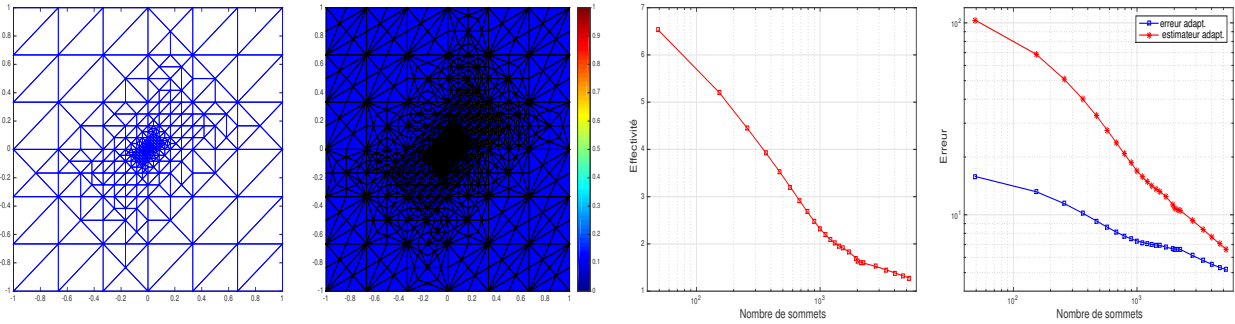
où  $f$  est la force externe,  $g$  est la source limite.  $\mathbb{K}(\mathbf{x})$  est le coefficient de diffusion constant par morceaux. Ici, le domaine  $\Omega = (-1, 1)^2$  est divisé en quatre sous-domaines  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) et le coefficient de diffusion  $\mathbb{K}$  est constant dans chaque sous-domaine ( $\mathbb{K}|_{\Omega_i} = \mathbb{K}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ). Comme détaillé dans le cas test 3, les fonctions  $f$  et  $g$  sont choisies de telle sorte que la solution exacte  $u$  en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  soit donnée par l'expression suivante:

$$u|_{\Omega_i}(r, \theta) = r^\alpha \left( a_i \sin(\alpha\theta) + b_i \cos(\alpha\theta) \right), \quad i = 1, \dots, 4,$$

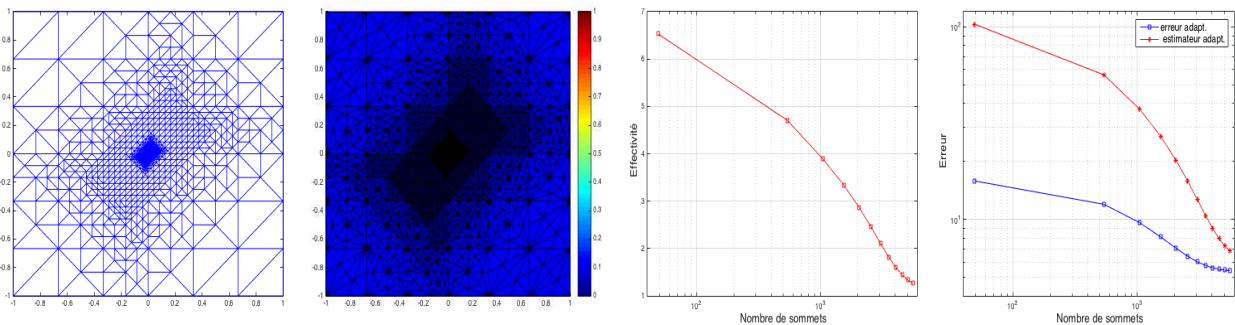
ici  $\alpha = 0.127$ ,  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes liées aux sous-domaines  $\Omega_i$  données dans le tableau du cas test 3. Les valeurs de perméabilité sont  $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_3 = 100$  et  $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_4 = 1$ .

Dans un premier temps, nous avons comparé l'approche de NVB à notre approche AdaptNVB pour le raffinement de maillage. Cette comparaison est faite dans le cadre de la stratégie clas-

sique à un seul raffinement par itération calculant la solution et l'erreur. À cette fin, nous avons effectué plusieurs tests numériques pour différents problèmes, en particulier le cas d'un tenseur de diffusion fortement hétérogène (cas test 3). Les figures des maillages finaux obtenus en utilisant les deux approches à partir du même maillage initial montrent des caractéristiques similaires et capturent bien la singularité autour de l'origine. Toutefois, la comparaison des erreurs et les indices d'efficacité dans les figures précédentes, relève des oscillations dans les résultats obtenus par l'approche NVB dont on s'affranchit par l'approche AdaptNVB. Comme on s'y attendait, l'approche NVB nécessite environ deux fois le temps CPU requis pour l'approche AdaptNVB. Ceci est cohérent avec le fait que pour diviser un triangle en quatre sous-triangles, l'approche NVB utilise deux itérations par rapport à une seule dans notre approche AdaptNVB. La réduction de l'estimateur et des erreurs  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  dans les tableaux précédemment dressés est également plus rapide dans l'approche AdaptNVB.



**Figure III.30** – Maillage raffiné et distribution d'erreur, indice d'efficacité et erreur exacte et estimée pour l'approche AdaptNVB.



**Figure III.31** – Maillage raffiné, distribution d'erreur, indice d'efficacité et erreur exacte et estimée pour l'approche multiniveaux.

Dans un second temps, nous avons comparé les résultats numériques obtenus par l'approche AdaptNVB classique avec la nouvelle approche multiniveaux proposée utilisant trois niveaux

### Chapitre III. Schéma Volumes Finis centré sur le sommet et adaptation de maillages pour l'équation de Darcy

---

pour AdaptNVB. Les figures (III.30) et (III.31) illustrent les résultats obtenus en terme de maillages adaptés, d'erreurs et d'indices d'efficacité pour les deux méthodes. Encore une fois, le raffinement est concentré au centre du domaine dans les deux méthodes ainsi que dans l'approche multiniveaux. Les profils d'erreurs de la figure (III.31) montrent une convergence plus rapide de notre approche par rapport à la méthode conventionnelle AdaptNVB. Ces caractéristiques peuvent être clairement vues dans le tableau (III.13) où les erreurs et le temps CPU sont calculés pour plusieurs itérations en utilisant les deux approches. Il est évident que pour une erreur fixe dans les deux méthodes, l'approche AdaptNVB nécessite plus d'itérations et de temps de calcul que l'approche multiniveaux. Cela s'explique principalement par le fait que, dans l'approche AdaptNVB, chaque raffinement est suivi de la résolution du problème de diffusion et du calcul d'erreur sur le maillage raffiné, alors que l'approche multiniveaux fait appel à la solution du problème uniquement après trois niveaux de raffinement.

**Tableau III.13** – Comparaison entre l'approche AdaptNVB et l'approche multiniveaux

Approche AdaptNVB						
iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU
1	240	103.3915	15.836	0.30586	6.5289	0.71
6	2256	42.0556	10.298	0.079115	4.0838	1.45
20	9903	10.617	5.2289	0.020684	2.0305	5.5
Total						<b>60.691</b>
Approche multiniveaux						
iter	DoFs	$\eta$	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$f_\eta$	CPU
1	1046	103.3915	15.836	0.30586	6.5289	0.39
3	3054	37.5234	9.6343	0.065962	3.8948	1.5
10	10082	7.9307	5.5007	0.024378	1.4418	6.8
Total						<b>35.13</b>

## 6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons prouvé l'efficacité de la nouvelle technique d'adaptation de maillage AdaptNVB à travers plusieurs tests numériques pour une solution volumes finis pour des problèmes de diffusion. La discrétisation volumes finis centrée sur le sommet "vertex-centered" est utilisée pour l'opérateur elliptique et des estimations d'erreur a posteriori dans la norme d'énergie sont considérées pour l'adaptation de maillage. Dans une autre étape, on a conçu extension multiniveaux de cette stratégie. Contrairement à l'approche AdaptNVB à un seul niveau, dans laquelle l'équation de diffusion est résolue après chaque estimation d'erreur, la méthode actuelle permet des adaptations multiples de maillage dans une seule estimation

d'erreur. Cette nouvelle méthode multiniveaux ("nested") adaptative ne nécessite que le traitement de la conformité du maillage pour des adaptations multiples qui sont traitées en utilisant la nouvelle procédure de bisection. Notre méthode offre une réduction substantielle du coût de calcul par rapport à d'autres méthodes.

### Chapitre III. Schéma Volumes Finis centré sur le sommet et adaptation de maillages pour l'équation de Darcy

---

---

## Références bibliographiques

- [1] Ohlberger. M. A posteriori error estimates for vertex centered finite volume approximations of convection-diffusion-reaction equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 35, 2 (2001), 355-387.
- [2] M.Vohralík. Guaranteed and fully robust a posteriori error estimates for conforming discretizations of diffusion problems with discontinuous coefficients. *J. Sci. Comput.* 46, 3 (2011), 397-438. [51](#), [57](#)
- [3] Barth T.J. Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier-Stokes equations. Annual lecture series, von Karman Institut, 1994. [52](#)
- [4] Viozat C., Held C., Mer K., and Dervieux A. On vertex-centered unstructured finite volume methods for stretched anisotropic triangulations. Rapport de recherche n3464, INRIA, 1998. [52](#)
- [5] Eigestad, G. T., and Klausen, R. A. A note on the convergence of the multi-point flux approximation O-method ; numerical experiments. Preprint, Centre of Mathematics for Applications, University of Oslo (November 2003). [65](#)
- [6] W. Prager and J. L. Synge. Approximation in elasticity on the concept of function space. *Quart. Appl. Math.*, 5 :241269, 1947. [57](#)

## Références bibliographiques

---

---

---

# Chapitre IV

---

## Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées

### 1 Introduction

Nous proposons un nouveau schéma volumes finis pour résoudre les problèmes de convection-diffusion sur des grilles triangulaires non structurées. Il s'agit de combiner la méthode modifiée des caractéristiques (SLAG) avec une discrétisation en volumes finis centrée sur les sommets. Cette méthode peut être interprétée comme une technique à pas fractionnaires (splitting) où la partie de convection et celle de diffusion sont traitées séparément. Pour optimiser la précision du schéma proposé, nous mettons également en œuvre une procédure d'adaptation du maillage utilisant les estimations d'erreur a posteriori dans la norme d'énergie. Contrairement à l'approche classique dans laquelle l'équation de diffusion est résolue après chaque estimation d'erreur, la méthode actuelle permet de multiples adaptations de maillage pour une seule estimation d'erreur. Cette méthode de volumes finis adaptatifs imbriqués ("nested") ne nécessite que le traitement de la conformité dans les maillages pour les adaptations multiples, en faisant appel à la nouvelle procédure de bisection. Nous mettons à l'épreuve la performance de l'approche proposée pour les équations linéaires d'advection-diffusion avec des solutions analytiques connues et pour l'équation non linéaire visqueuse de Burgers. Nous proposons également un exemple réel, à savoir la dispersion dans le détroit de Gibraltar, où le schéma adaptatif volumes finis pour le transport s'est révélé être réalisable et satisfaisant. La méthode modifiée des caractéristiques ou méthode semi-lagrangienne (SLAG) telle que connue dans la communauté météorologique a des applications importantes dans divers domaines physiques et techniques tels que la prévision météorologique, la circulation océanique, le réservoir pétrolier, etc. Dans ces domaines, les phénomènes physiques peuvent être modélisés par des équations de transport-diffusion qui



## Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées

---

ont comme propriété des termes convectifs nettement plus importants que les termes diffusifs, et ce particulièrement lorsque certains paramètres non dimensionnels atteignent des valeurs élevées. Comme exemples de ces paramètres, nous mentionnons le nombre de Péclet pour les équations de convection-diffusion et le nombre de Reynolds pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. Il est bien établi que pour les grandes valeurs de ces paramètres, les termes convectifs sont sources de difficultés de calcul et d'oscillations non physiques. De plus, les fronts raides, les discontinuités de choc et les couches limites sont parmi les difficultés que la plupart des méthodes eulériennes ne parviennent pas à résoudre avec précision. Il est bien connu que ces dernières utilisent des grilles fixes et intègrent une certaine pondération en amont dans leurs formulations pour stabiliser les schémas. Ces méthodes eulériennes incluent celles de Petrov-Galerkin, de Galerkin discontinues et bien d'autres telles que les méthodes de haute résolution de la dynamique des fluides, en particulier celles de Godunov et les méthodes essentiellement non-oscillantes. Leur principal inconvénient réside dans les conditions de stabilité qui imposent une restriction sévère de la taille des pas de temps dans les simulations numériques. La méthode semi-lagrangienne conventionnelle est précise et d'ordre 2 dans l'espace et dans le temps à condition que les courbes caractéristiques soient exactement calculées. Cependant, pour les problèmes généraux de convection non linéaire, la précision du schéma numérique dépend de l'ordre de la procédure d'interpolation utilisée pour calculer les points de départ et de la procédure d'intégration temporelle. L'analyse de la convergence et de la stabilité de la méthode semi-lagrangienne conventionnelle a fait l'objet de nombreux articles, entre autres, [1, 4]. L'objectif principal de notre travail est le développement d'une méthode semi-lagrangienne hautement précise pour résoudre numériquement les problèmes d'écoulement dominés par la convection. L'idée centrale est de réécrire les équations gouvernantes en termes de coordonnées lagrangiennes telles que définies par les trajectoires de particules (ou caractéristiques) associées au problème considéré. Le traitement lagrangien réduit considérablement les erreurs de troncature temporelle provenant des méthodes eulériennes ; voir par exemple [5, 6]. De plus, la méthode semi-lagrangienne offre la possibilité d'utiliser des pas de temps supérieurs à ceux permis par la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) dans les méthodes eulériennes pour les écoulements dominés par la convection. Une classe de méthodes semi-lagrangienne a été étudiée dans les références [2, 5] et [7, 9]. Entre autres, El-Amrani M, Seaid M dans [10] ont analysé une méthode semi-lagrangienne pour les équations de Navier-Stokes incompressibles dans le cadre des Éléments Finis. Dans cette référence, les solutions aux pieds des caractéristiques sont approchées par interpolation à partir des fonctions de base par Éléments Finis. Dans [3], une méthode semi-lagrangienne de premier ordre combinée à la méthode des Éléments Finis a été analysée pour les équations de Navier-Stokes. Il a été démontré que la méthode est inconditionnellement stable pourvu que les caractéristiques soient transportées par un champ

sans divergence déduit de la vitesse d'écoulement. Le cas où les caractéristiques sont transportées par un champ de vitesse discret dont la divergence n'est pas nulle a été étudié dans [4]. L'analyse d'une méthode semi-lagrangienne avec l'utilisation de la discrétisation par différence finie standard a été traitée dans [2] pour les équations de convection-diffusion. Dans toutes ces références, la convergence et la stabilité de la méthode sont prouvées sous l'hypothèse que tous les produits internes soient calculés avec exactitude. La présente étude constitue une étape vers la mise en œuvre d'une interpolation TPS (Thin plate spline interpolation) pour la solution semi-lagrangienne-volumes finis de problèmes d'écoulement dominés par la convection. La reconstruction des flux numériques dans la plupart des schémas classiques de volumes finis nécessite la résolution des problèmes de Riemann à l'interface des volumes de contrôle. Cette étape peut exiger des calculs prohibitifs pour les lois de conservation en deux et trois dimensions d'espace. En outre, ces méthodes ne peuvent pas être appliquées à des lois de conservation pour lesquels des problèmes de Riemann ne sont pas résolubles comme ceux associés à des problèmes non-hyperboliques.

Ce chapitre est structuré comme suit: Au début, nous décrivons le schéma transport volume finis pour une équation de convection-diffusion. Cette partie comprend la discrétisation en volume finis, l'approximation des points de départ et la méthode semi-lagrangienne classique. La procédure d'adaptation du maillage est la stratégie Adapt-Newest présentée précédemment. La dernière section est consacrée aux résultats numériques et aux exemples.

## 2 Schéma volumes finis-semi lagrangien

Nous considérons le problème de convection-diffusion d'un soluté  $u$  en deux dimensions:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u - \nabla \cdot (K \nabla u) &= f, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \tag{IV.1}$$

$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})^T$  est le vecteur gradient,  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  et  $(0, T)$  est un intervalle de temps.  $u(\mathbf{x}, t)$  est la concentration de certaines espèces,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t))^T$  le champ de vitesse de convection et  $u_0(\mathbf{x})$  Une fonction initiale donnée.  $K$  est le coefficient de diffusion. Nous supposons que des conditions limites appropriées sont données de telle sorte que le problème soit bien défini et ait une solution unique.

## 2.1 Étape lagrangienne fractionnaire

### Recherche de trajectoire arrière dans la méthode semi-lagrangienne

Nous considérons le problème de transport d'un soluté  $u$  en deux dimensions :

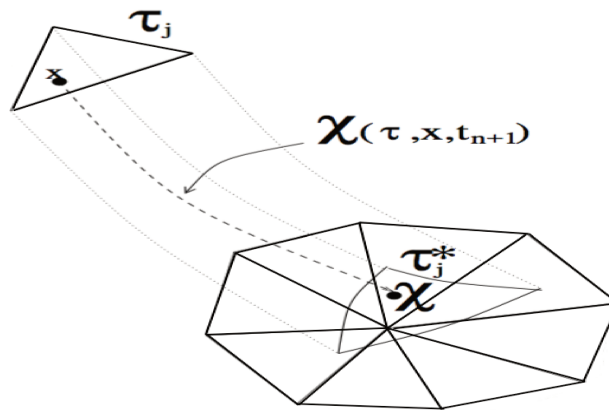
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u &= f, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Afin de décrire la formulation de la méthode semi-lagrangienne-volumes finis, remarquons d'abord que l'on peut noter par:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u$$

le taux de changement de la fonction  $u$  suivant les trajectoires des particules sous l'action du champs de vitesse  $\mathbf{v}$ . On résout ici:

$$\frac{Du}{Dt} = 0$$



**Figure IV.1** – Diagramme schématisant les principales quantités utilisées dans l'approximation des points de départ. Ici,  $\tau_j$  est un élément de maillage fixe,  $\tau_j^*$  est l'élément hôte auquel  $X$  appartient.

Les courbes caractéristiques du problème (IV.2) sont la solution du problème à valeur initiale suivante:

$$\begin{aligned}\frac{dX_k(\tau; \mathbf{x}_k, \mathbf{t}_{n+1})}{d\tau} &= \mathbf{v}\left(\tau, \mathbf{X}_k(\tau; \mathbf{x}_k, \mathbf{t}_{n+1})\right), \quad \tau \in [\mathbf{t}_n, \mathbf{t}_{n+1}], \\ X_k(\tau; \mathbf{x}_k, \mathbf{t}_{n+1}) &= \mathbf{x}_k.\end{aligned}\tag{IV.3}$$

Où  $k$  est un sommet du maillage primal.  $X_k(\tau; \mathbf{x}_k, \mathbf{t}_{n+1}) = \left(X_k(\tau; \mathbf{x}_k, \mathbf{t}_{n+1}), \mathbf{Y}_k(\tau; \mathbf{x}_k, \mathbf{t}_{n+1})\right)^T$ , est le point de départ à l'instant  $\tau$  d'une particule qui arrivera à  $\mathbf{x}_k$  à l'instant  $\mathbf{t}_{n+1}$ .

Les méthodes semi-lagrangiennes ne suivent pas les particules d'écoulement dans le temps, comme le font les schémas lagrangiens, au lieu de cela, on détermine par recherche arrière la position à l'instant  $t_n$  des particules qui atteindront les points d'un maillage fixe à l'instant  $t_{n+1}$ . Les méthodes semi-lagrangiennes évitent les difficultés de distorsion de la grille que les schémas Lagrangiens traditionnels occasionnent. Les solutions de (IV.3) peuvent être exprimées sous la forme suivante :

$$\chi_k(t_n; \mathbf{x}_k, t_{n+1}) = \mathbf{x}_k - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{v}(\tau, \chi_k(\tau; \mathbf{x}_k, t_{n+1})) d\tau.\tag{IV.4}$$

L'algorithme consiste à calculer les points de départ  $\chi_{kj}^n := \chi_k(t_n; \mathbf{x}_j, t_{n+1})$ ,  $j = 1, \dots, M$ , Puis nous écrivons la solution de (IV.4) sous la forme :

$$\chi_{kj}^n = \mathbf{x}_j - \alpha_{kj},\tag{IV.5}$$

où le déplacement  $\alpha_{kj}$  est calculé par la procédure d'itérations successives :

$$\begin{aligned}\alpha_{kj}^{(0)} &= \frac{\Delta t}{2} \left[ 3\mathbf{v}_k^n(\mathbf{x}_j) - \mathbf{v}_k^{n-1}(\mathbf{x}_j) \right], \\ \alpha_{kj}^{(i+1)} &= \frac{\Delta t}{2} \left[ 3\mathbf{v}_k^n\left(\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\alpha_{kj}^{(i)}\right) - \mathbf{v}_k^{n-1}\left(\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\alpha_{kj}^{(i)}\right) \right], \quad i = 0, 1, \dots,\end{aligned}\tag{IV.6}$$

où les valeurs de vitesse  $\mathbf{v}_k^n\left(\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\alpha_{kj}^{(i)}\right)$  et  $\mathbf{v}_k^{n-1}\left(\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\alpha_{kj}^{(i)}\right)$  sont calculées par interpolation sur l'élément du maillage  $\tau_j$  auquel appartient  $\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\alpha_{kj}^{(i)}$ .

Les itérations (IV.6) sont terminées lorsque les critères suivants :

$$\frac{\|\alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)}\|}{\|\alpha^{(i-1)}\|} < \epsilon,\tag{IV.7}$$

## Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées

---

sont vérifiés pour la norme euclidienne  $||\cdot||$  et une tolérance donnée  $\epsilon$ . Les points de départ  $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}_n, \mathbf{x}_{\mathbf{k}}, \mathbf{t}_{n+1})$  ne se trouveraient pas sur un point de grille. La solution aux pieds caractéristiques  $u^n(\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}_n, \mathbf{x}_{\mathbf{k}}, \mathbf{t}_{n+1}))$  doit être obtenue par interpolation à partir des valeurs connues aux points de la grille de l'élément où  $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}_n, \mathbf{x}_{\mathbf{k}}, \mathbf{t}_{n+1})$  fait parti.

$$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [t_n; t_{n+1}], \quad u^{n+1}(\mathbf{x}) = u^n(\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}_n, \mathbf{x}_{\mathbf{k}}, \mathbf{t}_{n+1})) \quad (\text{IV.8})$$

$\forall j = 1, \dots, M$ , où  $M$  est le nombre de points de maillage, les paires  $(\chi_j(\mathbf{t}_n, \mathbf{x}_j, \mathbf{t}_{n+1}), \tau_j^*)$ , avec  $\tau_j^*$  est le maillage où le pied de caractéristique  $\chi_j(\mathbf{t}_n, \mathbf{x}_j, \mathbf{t}_{n+1})$  est situé.

### 2.2 Étape Eulérienne fractionnaire

Pour formuler notre méthode, nous exigeons une discrétisation du domaine spatial  $\Omega$ . Pour effectuer cette étape, nous générons une partition quasi-uniforme  $\Omega_h = \bigcup_{j=1}^{N_e} \tau_j \subset \Omega$  de petits éléments  $\tau_j$  avec  $N_e$  le nombre d'éléments dans  $\Omega_h$ . Ensuite, nous divisons l'intervalle de temps en  $N$  sous-intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$  de longueur  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  pour  $n = 0, 1, \dots, N$ . Nous utilisons la notation  $w^n$  pour indiquer la valeur d'une fonction générique  $w$  au temps  $t_n$ . La discrétisation volumes finis du problème est la suivante:

$$\int_{D_h} \left( \frac{Du}{Dt} - \nabla \cdot (K \nabla u) \right) dx = \int_{D_h} f dx$$

$$\int_{D_h} \frac{Du}{Dt} dx - \int_{D_h} \nabla \cdot (K \nabla u) dx = \int_{D_h} f dx$$

L'approximation du flux diffusif repose sur un schéma implicite:

$$- \int_{D_h} \nabla \cdot (K \nabla u) dx = - \int_{\partial D_h} K \nabla u \cdot \vec{n} d\sigma = - \sum_{T \in D_h} \int_{\partial D_h \cap T} K_{T_k} \nabla u \cdot \vec{n} d\sigma$$

Où  $K_{T_k}$  est une approximation du tenseur de perméabilité sur le triangle  $T_k$ .

$$- \sum_{T \in D_h} \int_{\partial D_h \cap T} K_{T_k} \nabla u \cdot \vec{n} d\sigma = - \sum_{T_k \in D_h} K_{T_k} \nabla u \cdot \left( \int_{\partial D_h \cap T_k} \vec{n} d\sigma \right)$$

### 3 Technique d'interpolation: Interpolation TPS "Thin plate spline interpolation"

La solution numérique obtenue par la méthode SLAG développe des oscillations parasites qui se détériorent souvent la précision de la solution, au point de la rendre parfois physiquement inacceptable. C'est pour cette raison que la plupart des méthodes SLAG utilisent des procédures d'interpolation linéaire. En effet, nous devons mettre à jour la solution après avoir calculé les pieds caractéristiques. Dans ce travail nous utilisons l'interpolation TPS qui consiste à reconstruire une fonction à partir des valeurs discrètes obtenues après le calcul des pieds caractéristiques.

Le nom "spline en plaque mince" fait référence à une analogie physique impliquant la flexion d'une mince feuille de métal. Dans le cadre physique, la déviation est dans la direction  $z$ , orthogonale au plan. Pour appliquer cette idée au problème de transformation des coordonnées, on interprète la levée de la plaque comme un déplacement des coordonnées  $x$  ou  $y$  dans le plan. Ainsi, deux splines en plaques minces sont généralement nécessaires pour spécifier une transformation de coordonnées en deux dimensions. L'interpolation TPS est l'analogue bidimensionnel de l'interpolation spline cubique dans une dimension. C'est la solution fondamentale de l'équation biharmonique, et a la forme:

$$U(r) = r^2 \ln(r)$$

En considérant un ensemble de points de données, une combinaison pondérée de TPS centrée autour de chaque point exprime la fonction d'interpolation qui passe exactement par les points tout en minimisant ce que l'on appelle "l'énergie de flexion". Cette dernière est défini ici comme le problème d'interpolation suivant: pour une fonction  $g$  et des points  $X_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, \dots, N$ , trouver une fonction  $s$  telle que:  $s(X_i) = g_i \quad \forall i \in 1, \dots, N$ , où  $s$  minimise l'intégrale  $I$  suivante:

$$I(s) = \int \int_{\mathbb{R}^2} (s_{xx}^2 + 2s_{xy}^2 + s_{yy}^2) dx dy,$$

et  $X = (x, y)$ ,  $s(X) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \|X - X_i\|^2 \ln(\|X - X_i\|) + c_0 + c_1 x + c_2 y$ .

$\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne. De plus, les coefficients  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  vérifient la condition suivante:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i = 0$$

Cela garantit que l'intégrale I soit finie. Finalement, on peut écrire la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} \phi & Q \\ Q^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

Avec  $\phi \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  et  $\phi_{ij} = \|X - X_i^2\| \ln(\|X - X_i\|)$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ .  $Q \in M_{n \times 3}(\mathbb{R})$  avec  $P_i = (1 \ x_i \ y_i)$ ,  $\lambda = \lambda_i$ ,  $g = g_i$   $i = 1, \dots, N$  et  $c = c_0, c_1, c_2$ . Si la matrice du système n'est pas singulière, la fonction g est unique.

## 4 Résultats numériques

Un nombre d'exemples numériques est sélectionné pour illustrer la précision de la nouvelle méthode semi-lagrangienne-volumes finis que nous avons introduite dans les sections précédentes. Ces exemples vont de l'advection linéaire, au problème non linéaire de Burgers visqueux. Pour certains d'entre eux, la solution analytique est connue, si bien qu'on est en mesure d'évaluer la fonction d'erreur  $e$  au temps  $t_n$  comme:

$$e_h^n = u_h^n - u_{\text{exact}}(\mathbf{x}_k, t_n), \quad (\text{IV.10})$$

où  $u_{\text{exact}}(\mathbf{x}_k, t_n)$  et  $u_h^n$  sont respectivement les solutions exactes et numériques, au point  $\mathbf{x}_h$  et à  $t_n$ . On définit la condition CFL associée aux équations (IV.2) et (IV.1) comme suit:

$$\text{CFL}_x = \max_{x,y} |u| \frac{\Delta t}{h}, \quad \text{CFL}_y = \max_{x,y} |v| \frac{\Delta t}{h}, \quad \text{CFL} = \sqrt{\text{CFL}_x^2 + \text{CFL}_y^2}. \quad (\text{IV.11})$$

Il convient de souligner que, dans tous nos calculs, le système algébrique d'équations linéaires résultant a été résolu en utilisant la méthode du gradient conjugué préconditionné avec une tolérance fixée à  $10^{-6}h$  comme critère d'arrêt.

Nous désignons par adapt niveau 2 et adapt niveau 3 l'adaptation du maillage avec respectivement 2 et 3 niveaux de raffinement.

### 4.1 Gaussienne en rotation

Parmi les exemples traités dans ce travail, nous commençons par présenter celui de l'advection-diffusion d'une gaussienne en rotation. Cet exemple a été largement utilisé pour tester la précision des méthodes semi-lagrangiennes. Les équations sont de la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla u - \nu \Delta u &= 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \tag{IV.12}$$

où  $\nu$  est un coefficient de diffusion (viscosité),  $\mathbf{v} = (-\omega \mathbf{y}, \omega \mathbf{x})^T$  et  $\omega = 4$ .

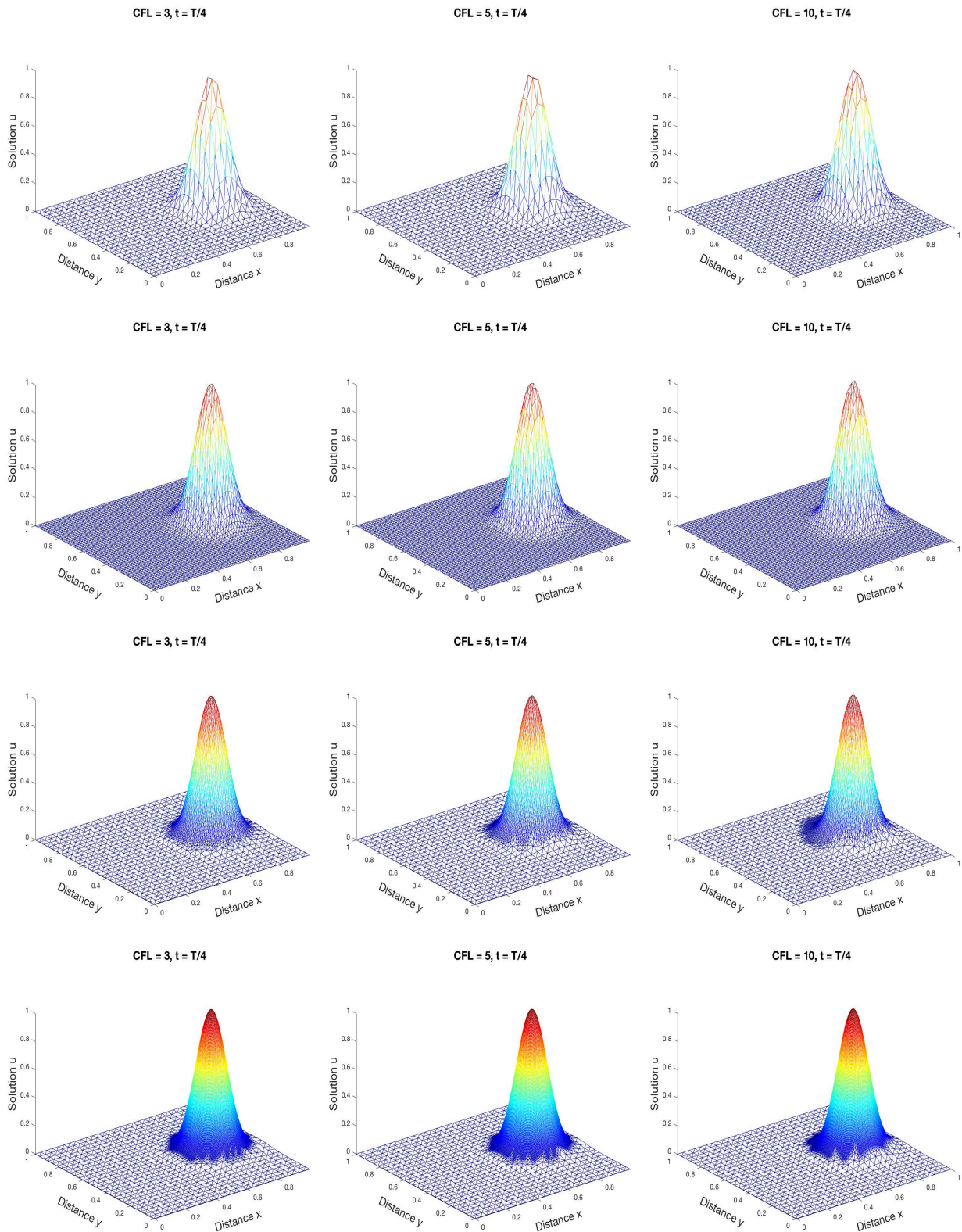
Les conditions initiales sont déterminées à partir de la solution exacte suivante:

$$u(x, y, t) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 4\nu t} \exp\left(-\frac{(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2}{\sigma^2 + 4\nu t}\right),$$

où  $\bar{x} = x \cos(4t) + y \sin(4t)$ ,  $\bar{y} = -x \sin(4t) + y \cos(4t)$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $y_0 = 0.75$ ,  $\sigma^2 = 0.002$ ,  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . D'abord, on considère le cas test de l'advection pure correspondant à  $\nu = 0$ .

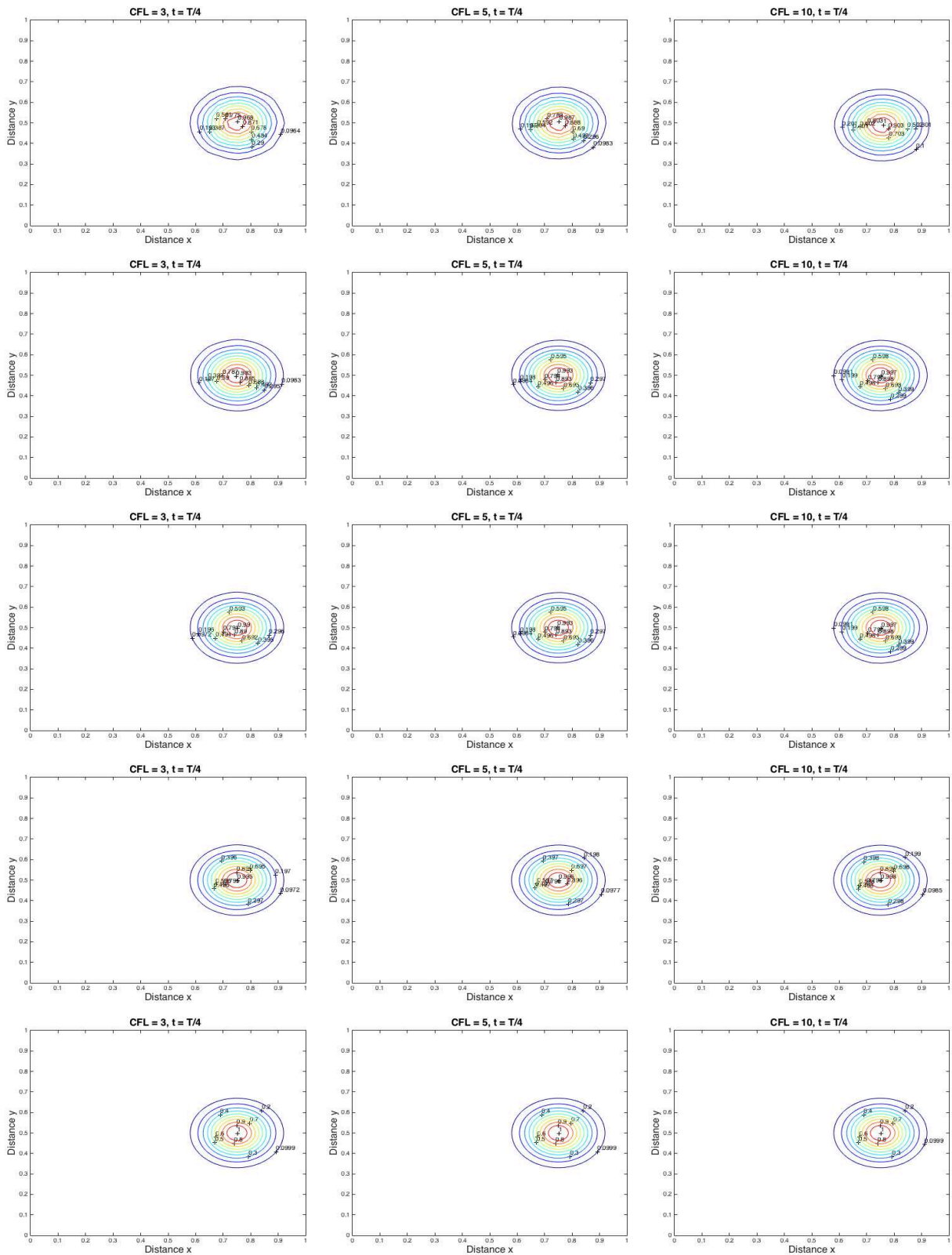


# Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées



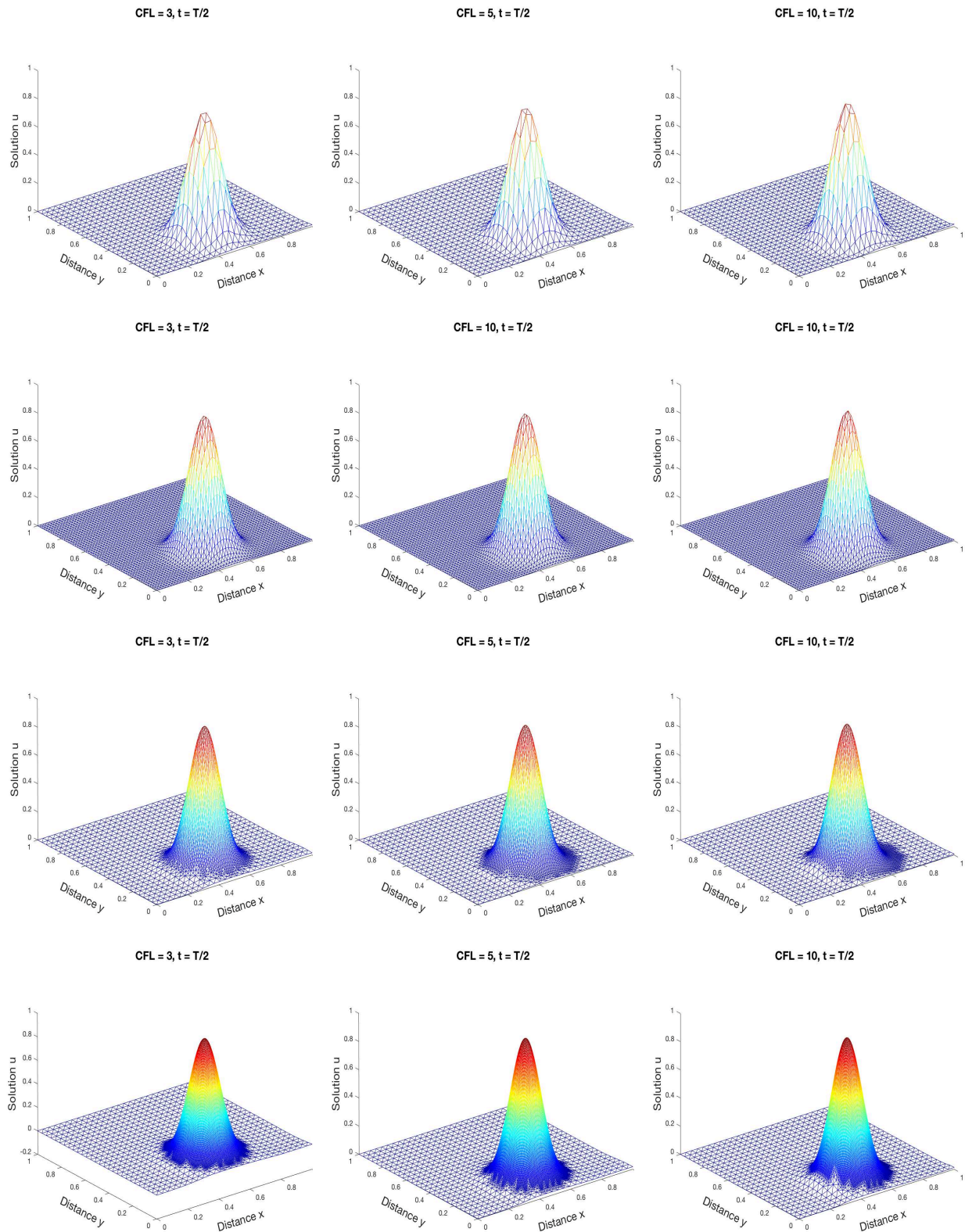
**Figure IV.2** – Solution numérique après  $1/4$  de tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec  $CFL = 3$  (gauche) (respectivement avec  $CFL = 5$  (centre) et  $CFL = 10$  (droite)), sans diffusion.

## IV.4 Résultats numériques



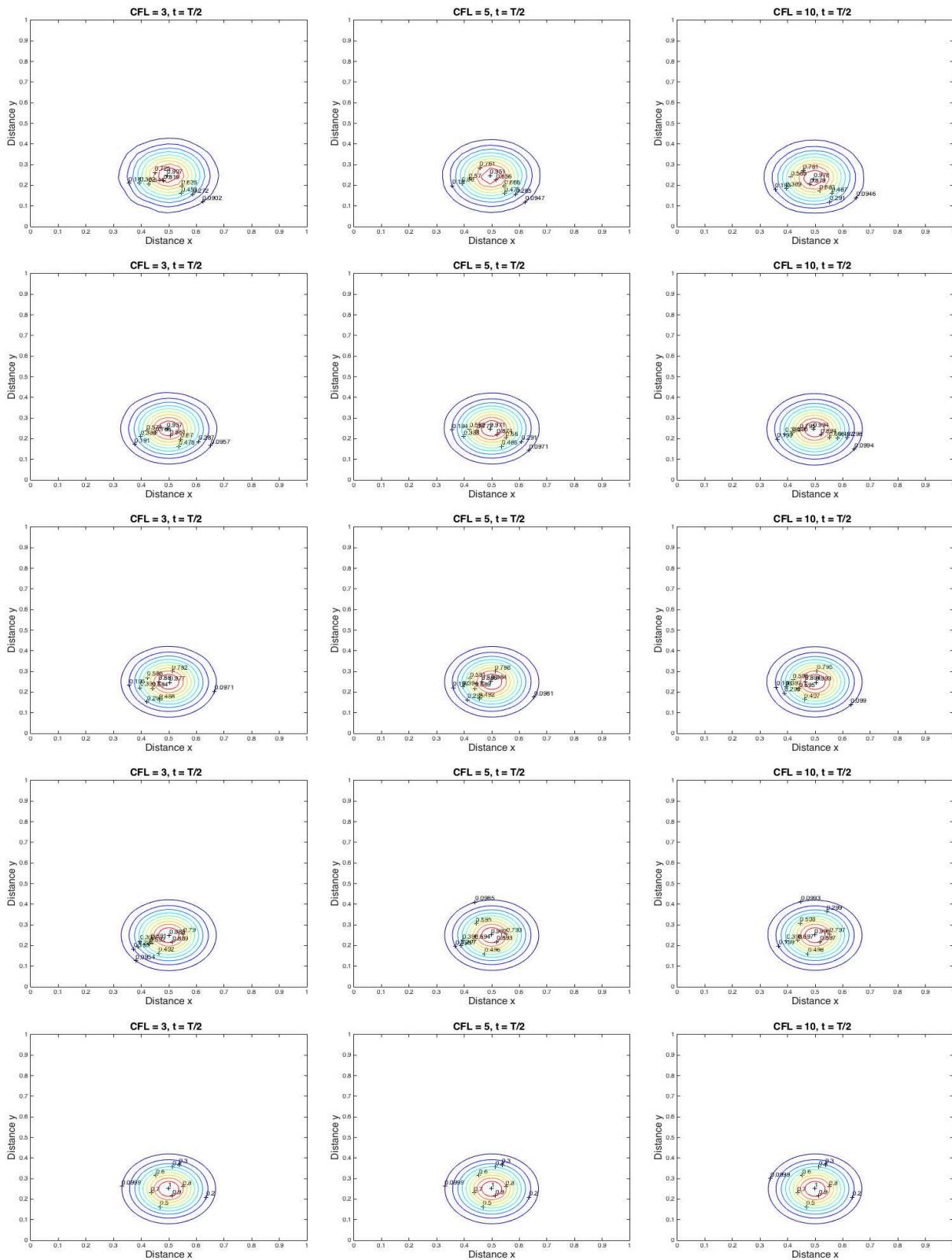
**Figure IV.3** – Contours des résultats après 1/4 de tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec CFL = 3 (gauche) (respectivement avec CFL = 5 (centre) et CFL = 10 (droite)), sans diffusion.

# Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées



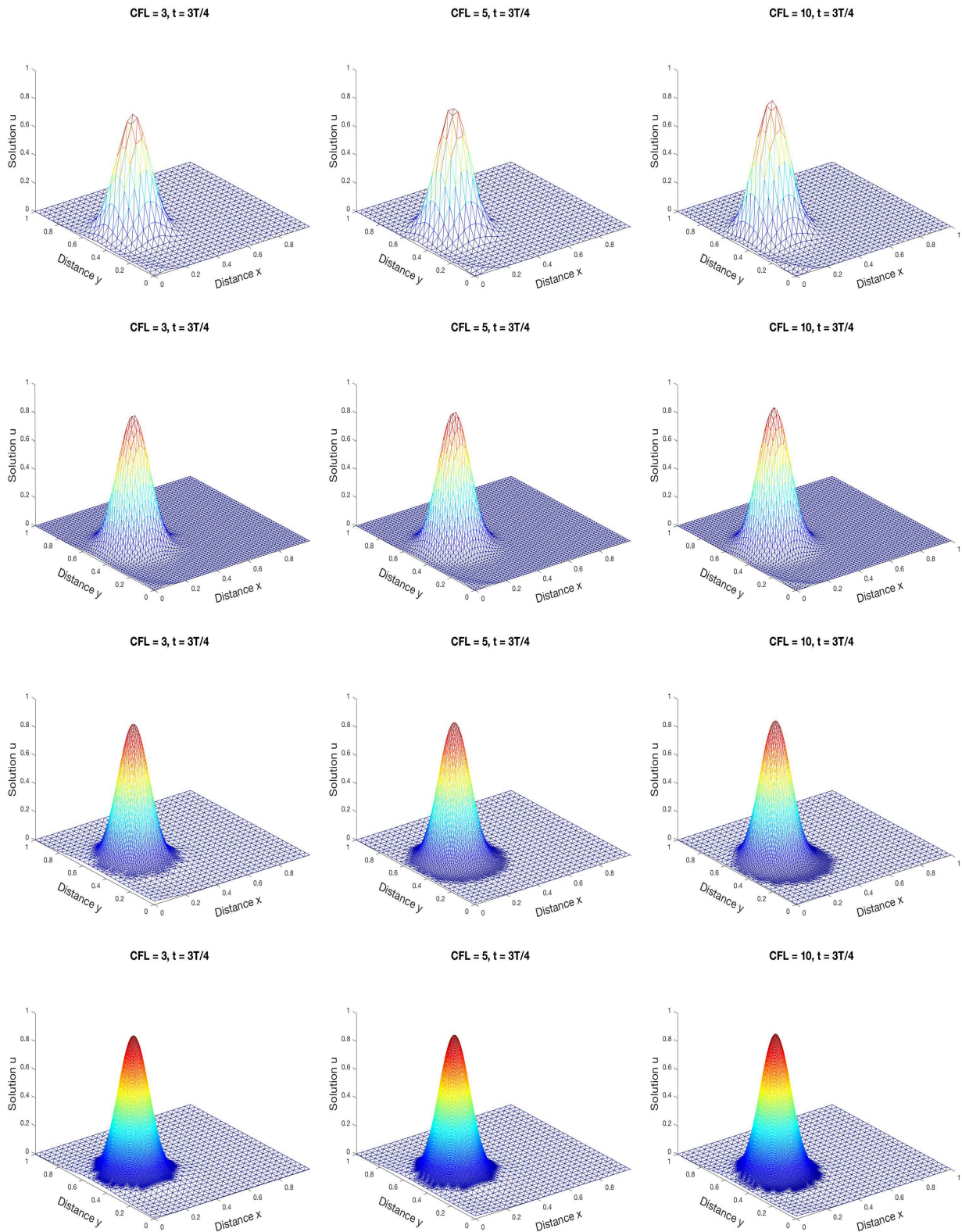
**Figure IV.4** – Solution numérique après  $1/2$  de tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec CFL = 3 (gauche) (respectivement avec CFL = 5 (centre) et CFL = 10 (droite)), sans diffusion.

## IV.4 Résultats numériques



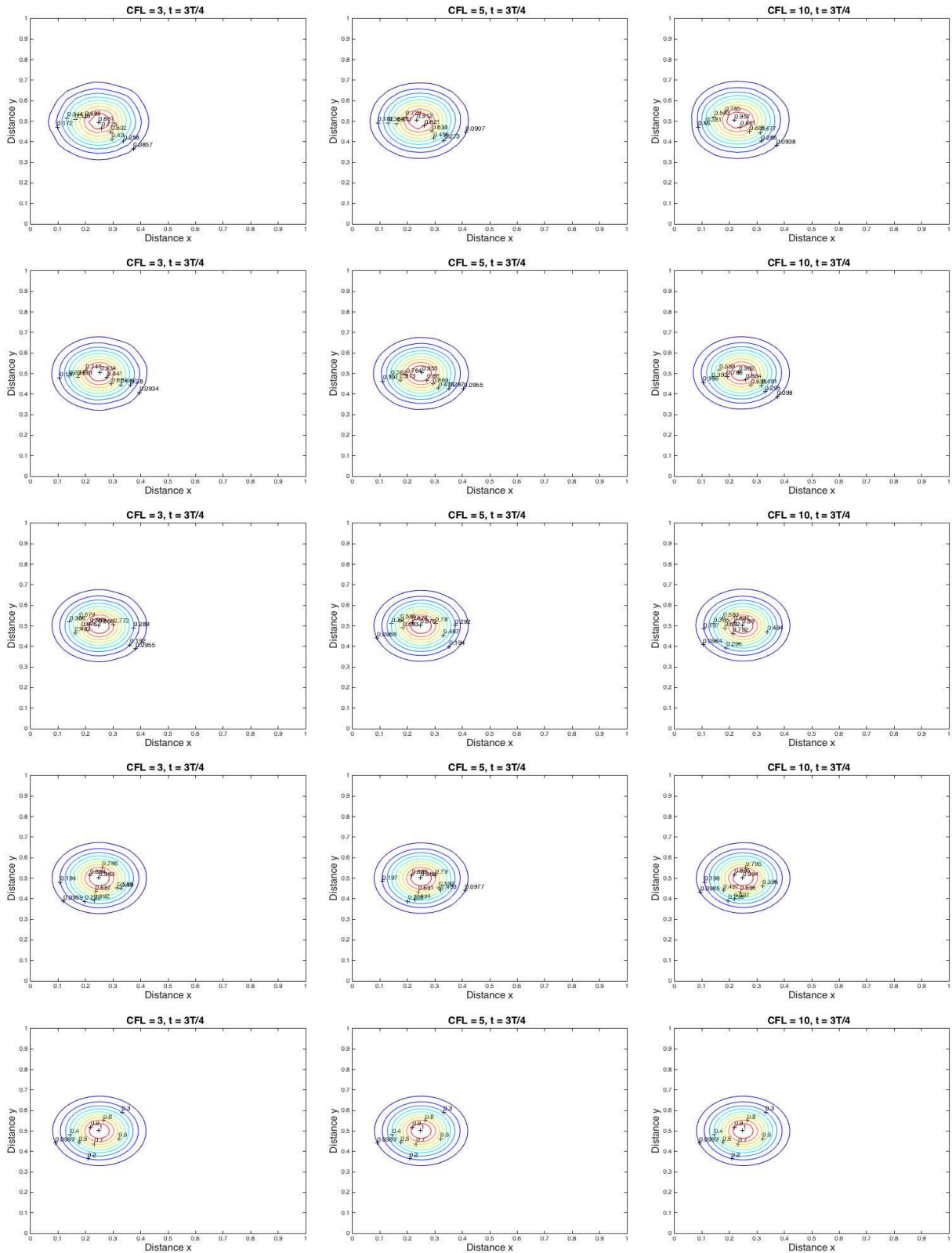
**Figure IV.5** – Contours des résultats après 1/2 de tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec CFL = 3 (gauche) (respectivement avec CFL = 5 (centre) et CFL = 10 (droite)), sans diffusion.

# Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées



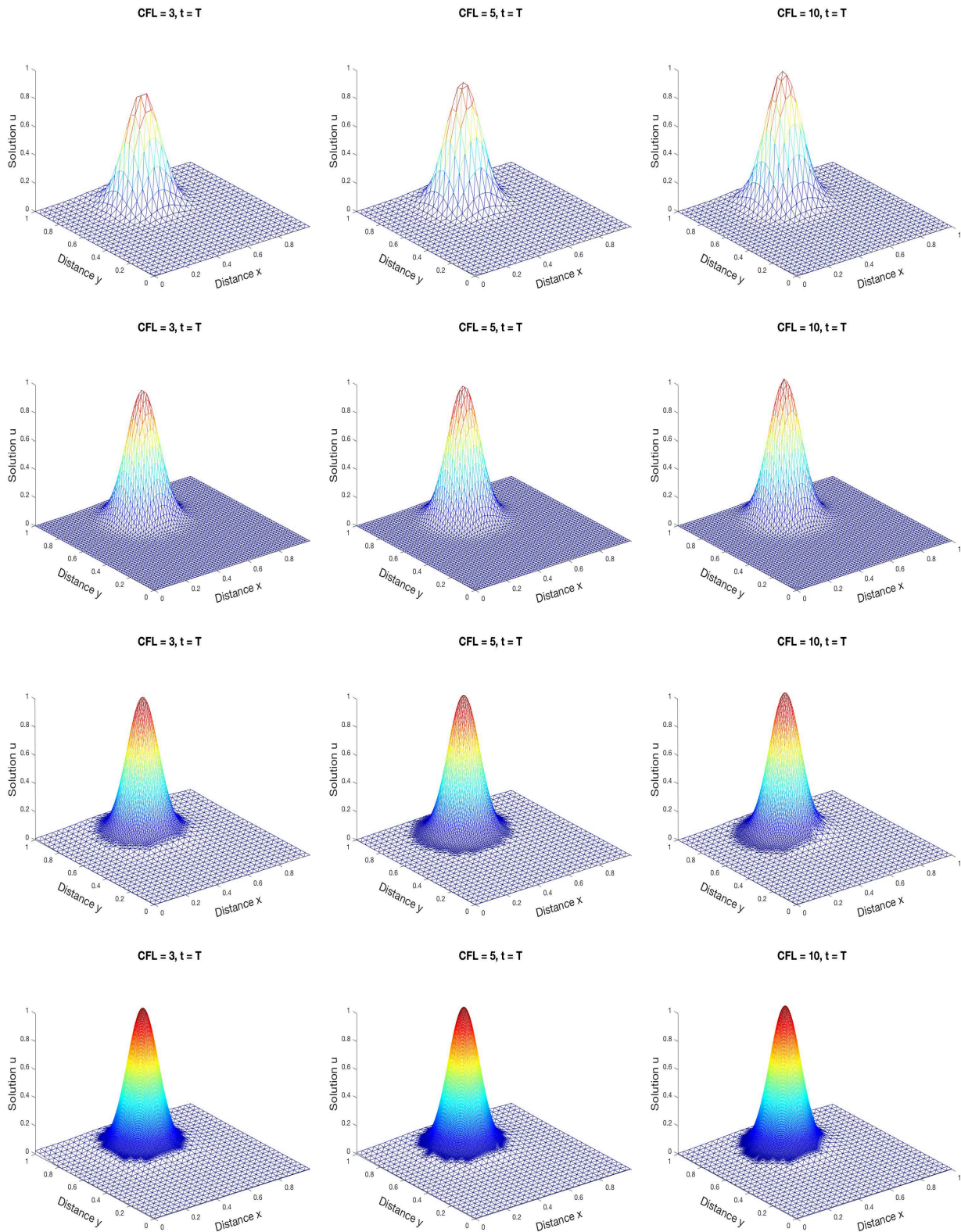
**Figure IV.6** – Solution numérique après  $3/4$  de tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec  $CFL = 3$  (gauche) (respectivement avec  $CFL = 5$  (centre) et  $CFL = 10$  (droite)), sans diffusion.

## IV.4 Résultats numériques



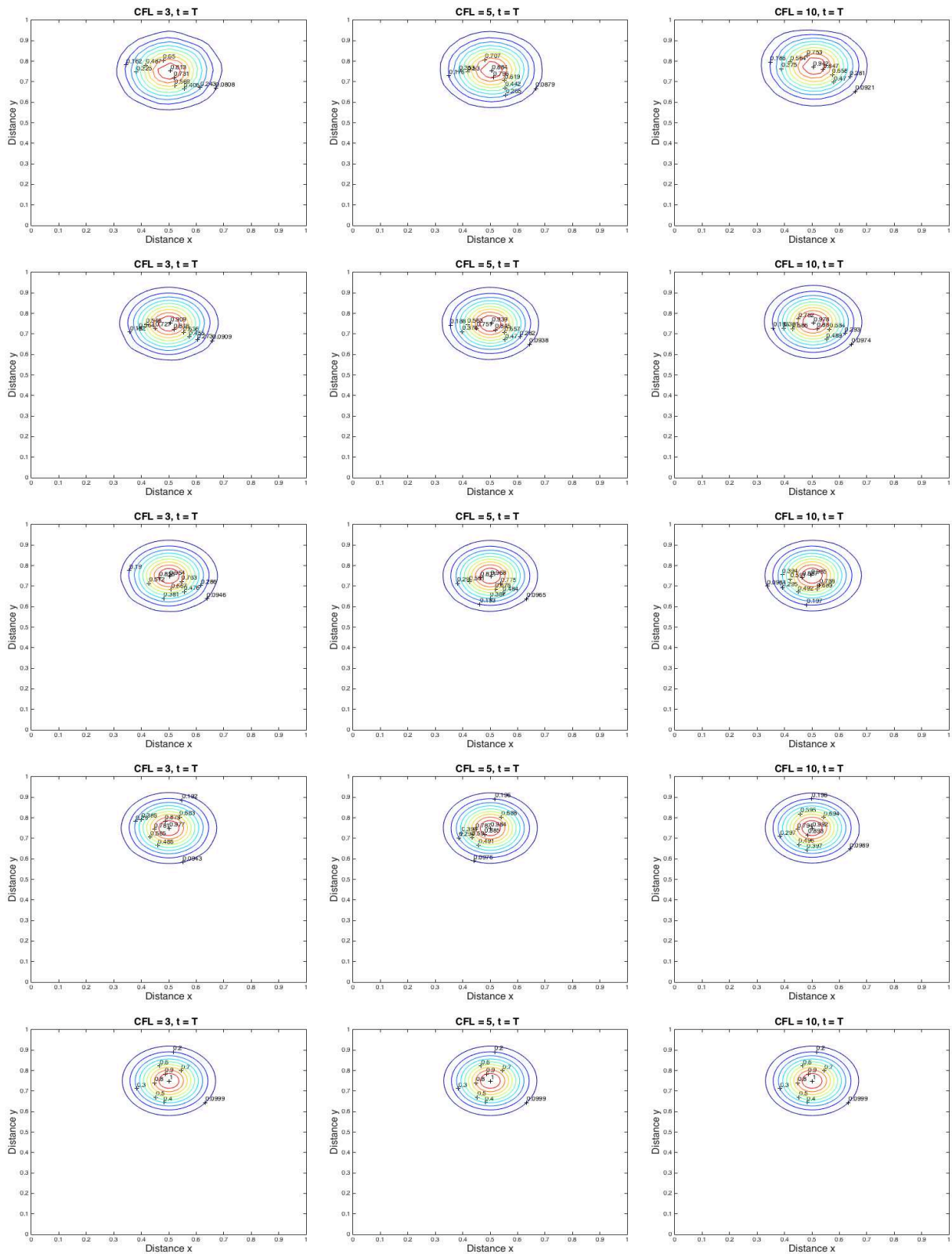
**Figure IV.7** – Contours des résultats après  $3/4$  de tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec  $CFL = 3$  (gauche) (respectivement avec  $CFL = 5$  (centre) et  $CFL = 10$  (droite)), sans diffusion.

## Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées



**Figure IV.8** – Solution numérique après 1 tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec CFL = 3 (gauche) (respectivement avec CFL = 5 (centre) et CFL = 10 (droite)), sans diffusion.

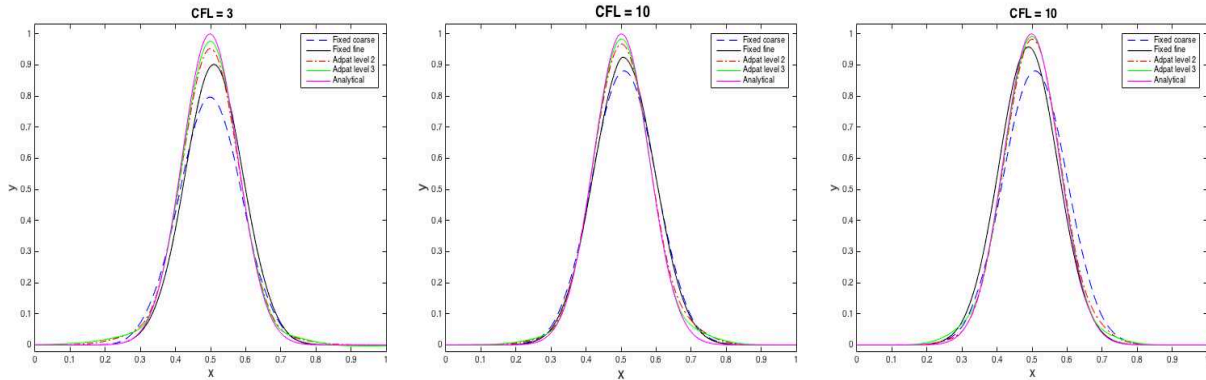
## IV.4 Résultats numériques



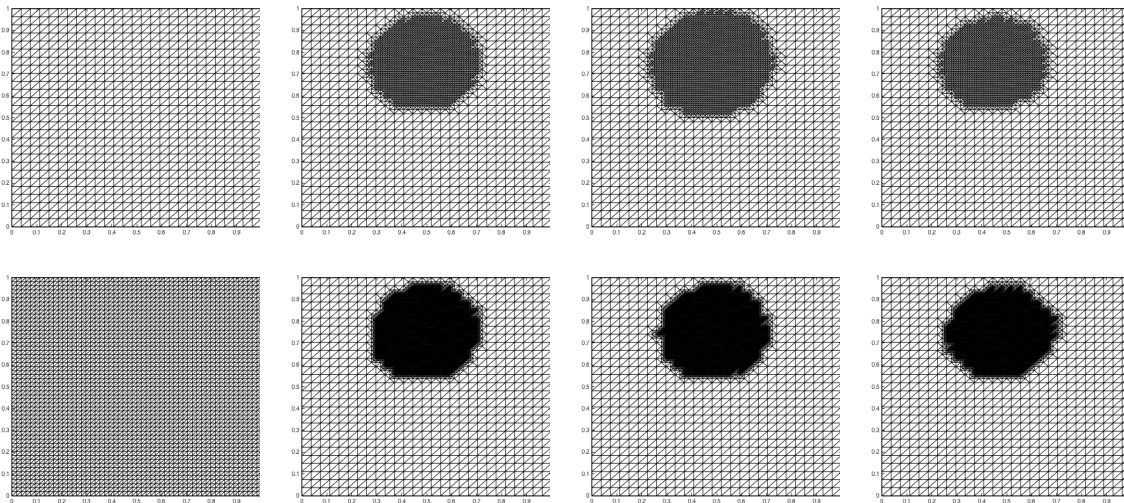
**Figure IV.9** – Contours des résultats après 1 tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec  $CFL = 3$  (gauche) (respectivement avec  $CFL = 5$  (centre) et  $CFL = 10$  (droite)), sans diffusion.



## Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées



**Figure IV.10** – Coupes transversales des résultats du problème d'advection à  $x = 0.5$  après 1 tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec  $CFL = 3$  (gauche) (respectivement avec  $CFL = 5$  (centre) et  $CFL = 10$  (droite)), sans diffusion.



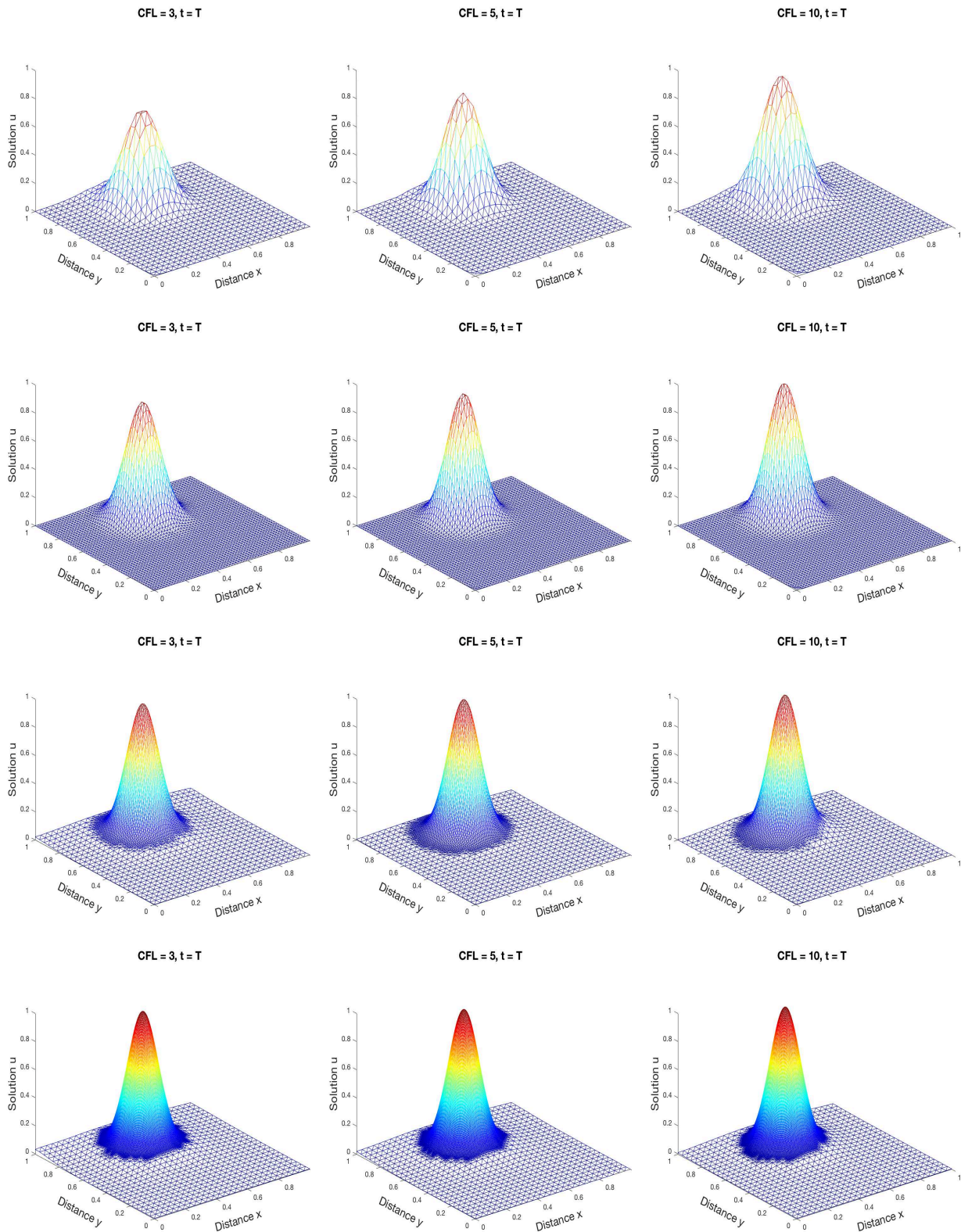
**Figure IV.11** – Maillage grossier et fin (colonne 1), maillage adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec  $CFL = 3$  (colonne 2), maillage adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec  $CFL = 5$  (colonne 3), maillage adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec  $CFL = 10$  (colonne 3), sans diffusion.

## IV.4 Résultats numériques

**Tableau IV.1** – Normes d’erreur et temps de calcul pour la gaussienne en rotation, sans diffusion après 1 tour

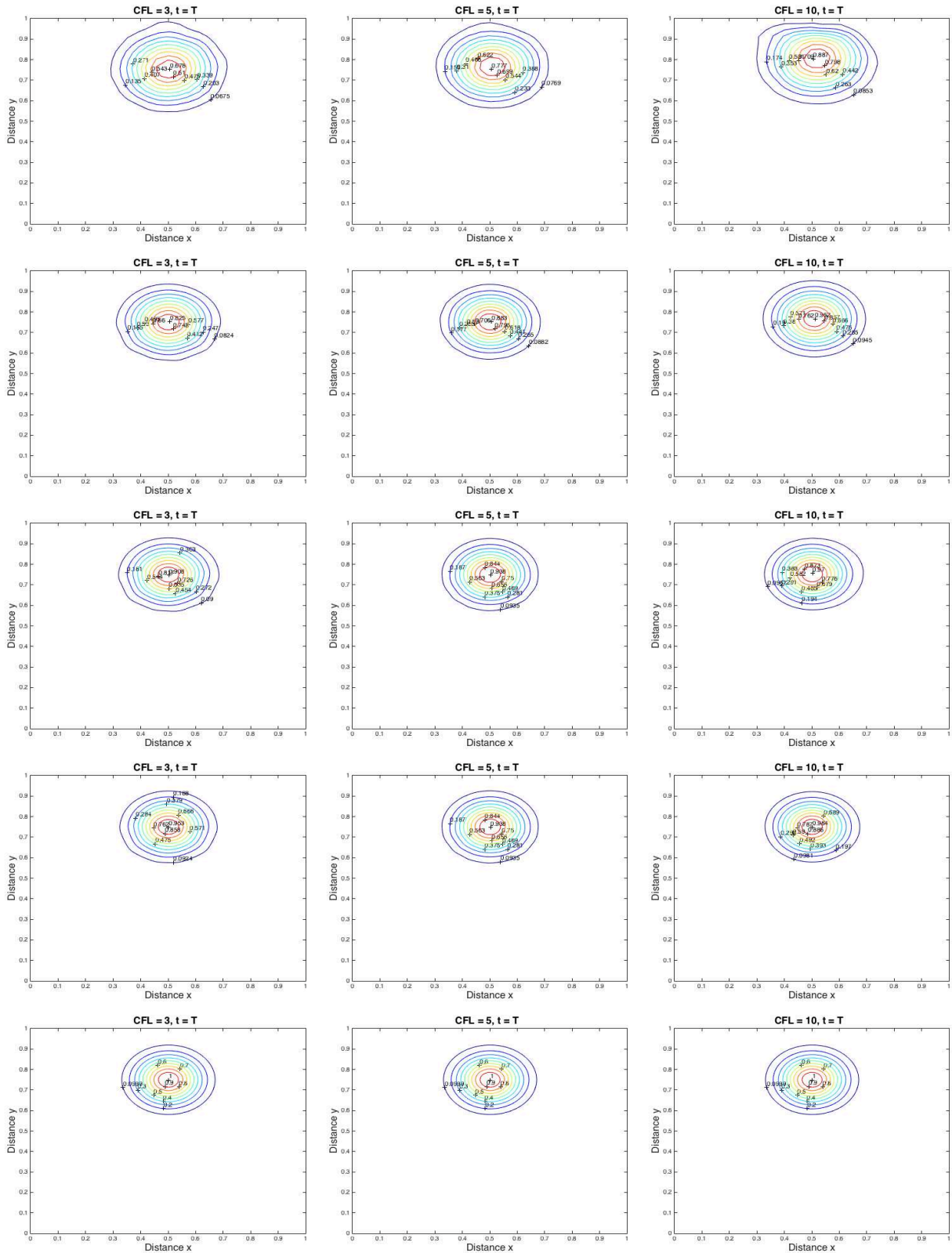
Maillage	#Éléments	#Nœuds	Max sol	Min sol	Erreur- $L^1$	CPU(s)	Min $\Delta t$	Mass
CFL = 3								
Grossier fixe	1458	784	0.77406955	-1.0034e-04	2.4239e-04	2.35	0.07856742	0.9453
Fin fixe	5832	3025	0.89717094	-6.1000e-05	9.7988e-05	19.102	0.03928371	0.9829
Adapt niveau 2	3690	1840	0.95233828	-2.7066e-05	7.5750e-05	56.92	0.01964186	0.9911
Adapt niveau 3	9450	4796	0.97631132	-4.1456e-06	1.1350e-05	340.27	0.00982093	0.9929
CFL = 5								
Grossier fixe	1458	784	83554675	-0.00313566	2.6195e-03	1.55	0.13094570	0.9707
Fin fixe	5832	3025	0.92661195	-1.3273e-05	7.9630e-05	12.53	0.06547285	0.9860
Adapt niveau 2	4864	2487	0.96667751	-1.1235e-05	4.9370e-05	65.46	0.03273643	0.9941
Adapt niveau 3	14600	7355	0.98304756	-3.534e-06	9.5600e-06	198	0.01636821	0.9951
CFL = 10								
Grossier fixe	1458	784	0.90818992	-0.00336918	0.0015	0.96	0.19506394	0.9841
Fin fixe	5832	3025	0.97665905	-1.5930e-05	6.5880e-05	6.56	0.13094570	0.9910
Adapt niveau 2	4746	2428	0.98348328	-1.0156e-05	4.3330e-05	33.17	0.06547285	0.9962
Adapt niveau 3	12736	6423	0.99182878	-1.2156e-06	6.5200e-06	99	0.03273643	0.9991

## Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées



**Figure IV.12** – Solution numérique après 3 tours en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec CFL = 3 (gauche) (respectivement avec CFL = 5 (centre) et CFL = 10 (droite)), sans diffusion.

## IV.4 Résultats numériques

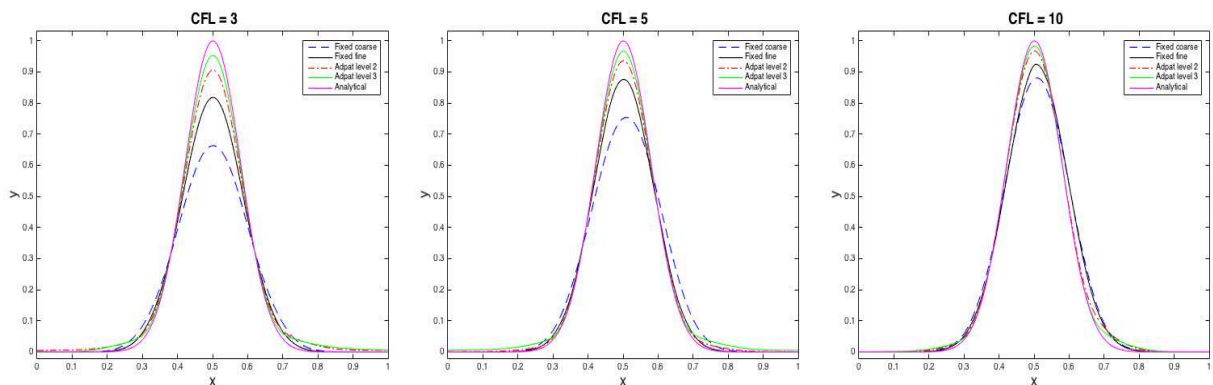


**Figure IV.13** – Contours des résultats après 3 tours en utilisant un maillage grossier, un maillage fin, un maillage adapt niveau 2 et un maillage adapt niveau 3 avec  $CFL = 3$  (gauche) (respectivement avec  $CFL = 5$  (centre) et pour  $CFL = 10$  (droite)), sans diffusion.

## Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées

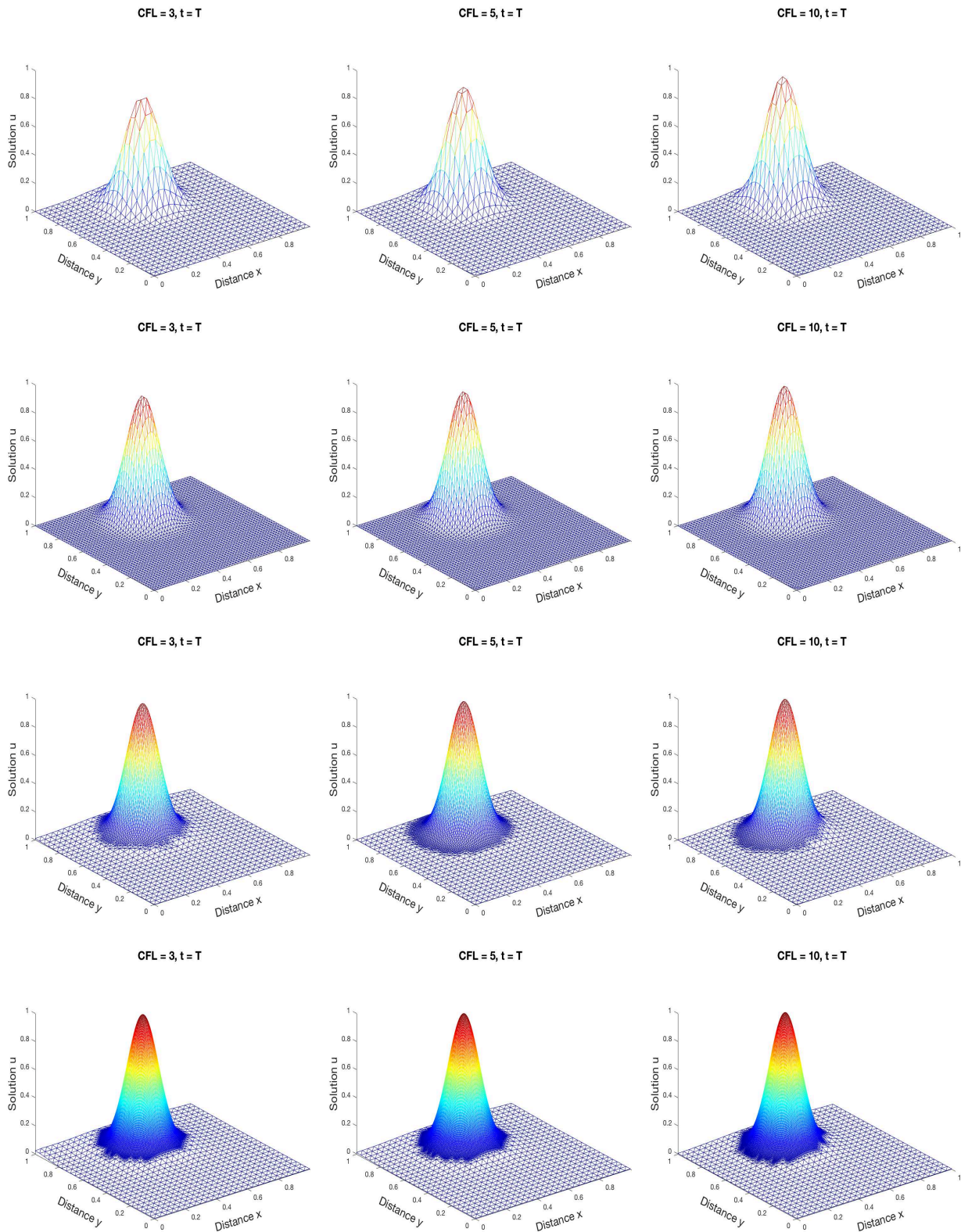
**Tableau IV.2** – Normes d’erreur et temps de calcul pour la gaussienne en rotation, sans diffusion après 3 tours

Maillage	#Éléments	#Nœuds	Max sol	Min sol	Erreur- $L^1$	CPU(s)	Min $\Delta t$	Mass
CFL = 3								
Grossier fixe	1458	784	0.64999329	-1.4594e-04	4.4244e-04	3.61	0.07856742	0.9384
Fin fixe	5832	3025	0.81424580	-5.1200e-04	5.3258e-05	29.03	0.03928371	0.9653
Adapt niveau 2	5363	2799	0.90666134	-9.3591e-05	4.6329e-05	111.92	0.01964186	0.9816
Adapt niveau 3	16130	8099	0.95297292	-7.7291e-06	7.4311e-06	663	0.00982093	0.9884
CFL = 5								
Grossier fixe	1458	784	0.76165184	-1.8097e-04	4.3584e-04	2.40	0.13094570	0.9401
Fin fixe	5832	3025	0.87217095	-1.3431e-04	3.8287e-05	17.88	0.06547285	0.9794
Adapt niveau 2	6229	3162	0.93614177	-2.6845e-05	2.6527e-05	88.98	0.03273643	0.9855
Adapt niveau 3	15540	7884	0.96682313	-5.9119e-06	5.1400e-06	622.43	0.01636821	0.9905
CFL = 10								
Grossier fixe	1458	784	0.87220128	-5.0851e-04	6.0138e-04	2.26	0.19506394	0.9520
Fin fixe	5832	3025	0.94269719	-1.0000e-04	7.9770e-05	11.76	0.13094570	0.9827
Adapt niveau 2	5068	2589	0.96730239	-2.0670e-05	3.5040e-05	49.40	0.06547285	0.9898
Adapt niveau 3	15132	7621	0.98368930	-3.1830e-04	3.8200e-06	370	0.03273643	0.9943



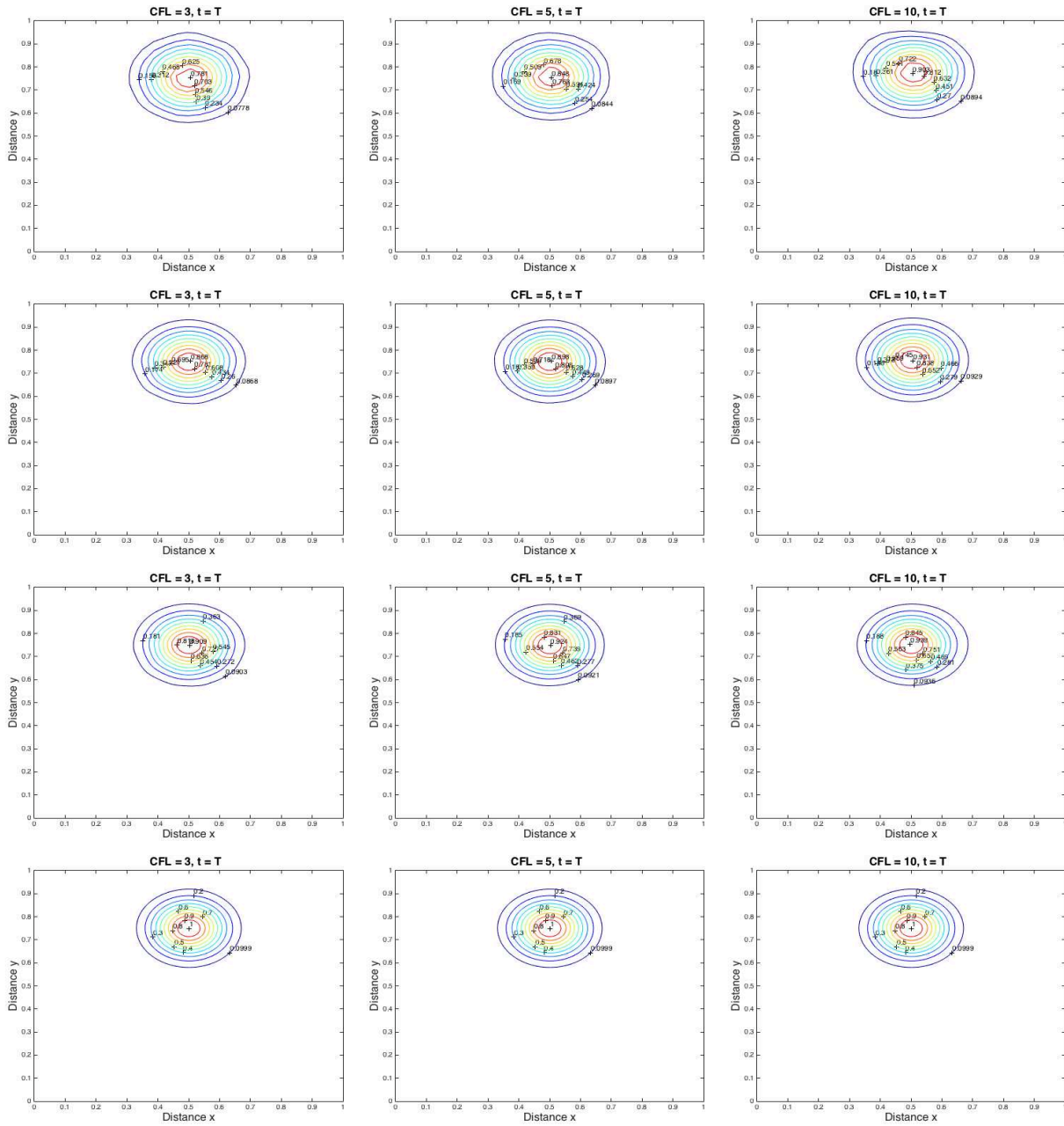
**Figure IV.14** – Coupes transversales des résultats du problème d’advection à  $x = 0.5$  après 3 tours en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec CFL = 3 (gauche) (respectivement avec CFL = 5 (centre) et CFL = 10 (droite)), sans diffusion.

## IV.4 Résultats numériques



**Figure IV.15** – Solution numérique après 1 tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec CFL = 3 (gauche) (respectivement avec CFL = 5 (centre) et CFL = 10 (droite)), avec diffusion  $\nu = 10^{-3}$ .

# Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées

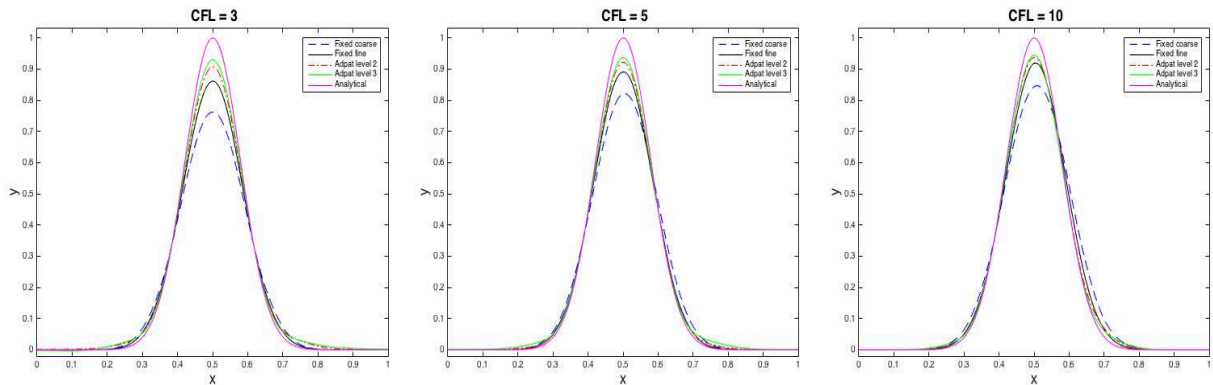


**Figure IV.16** – Contours des résultats après 1 tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec CFL = 3 (gauche) (respectivement avec CFL = 5 (centre) et CFL = 10 (droite)), avec diffusion  $\nu = 10^{-3}$ .

## IV.4 Résultats numériques

**Tableau IV.3** – Normes d’erreur et temps de calcul pour la gaussienne en rotation, après 1 tour avec diffusion  $\nu = 10^{-3}$

Maillage	#Éléments	#Nœuds	Max sol	Min sol	Erreur- $L^1$	CPU(s)	Min $\Delta t$	Mass
<b>CFL = 3</b>								
Grossier fixe	1458	784	0.74465640	-0.00315637	2.7994e-04	2.68	0.07856742	0.8363
Fin fixe	5832	3025	0.85716920	-6.2000e-04	3.8954e-05	20.14	0.03928371	0.9343
Adapt niveau 3	5156	2633	0.90781647	-5.9423e-04	7.5750e-05	67.22	0.01964186	0.9761
Adapt niveau 3	15702	7906	0.93007130	-7.2220e-05	8.2556e-06	381.12	0.00982093	0.9917
<b>CFL = 5</b>								
Grossier fixe	1458	784	0.80163900	-0.00125335	2.5794e-04	1.72	0.13094570	0.9292
Fin fixe	5832	3025	0.88647677	-2.9000e-04	3.0480e-05	19.50	0.06547285	0.9816
Adapt niveau 2	6024	3074	0.92228545	-2.3440e-04	2.3620e-05	62.59	0.03273643	0.9940
Adapt niveau 3	15332	7721	0.93704615	-5.7710e-05	7.0600e-06	210.74	0.01636821	0.9946
<b>CFL = 10</b>								
Grossier fixe	1458	784	0.87025855	-6.4680e-04	6.0364e-04	1.52	0.19506394	0.9692
Fin fixe	5832	3025	0.92568242	-2.8710e-04	4.5550e-05	7.49	0.13094570	0.9816
Adapt niveau 2	4980	2545	0.93748104	-1.1456e-04	2.1720e-05	48.82	0.06547285	0.9918
Adapt niveau 3	15540	7825	0.94479130	-3.0416e-05	6.4600e-06	114.61	0.03273643	0.9936



**Figure IV.17** – Coupes transversales des résultats du problème d’advection à  $x = 0.5$  après 1 tour en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec CFL = 3 (gauche) (respectivement avec CFL = 5 (centre) et CFL = 10 (droite)), avec diffusion  $\nu = 10^{-3}$



## 4.2 Example of viscous flow of Burgers

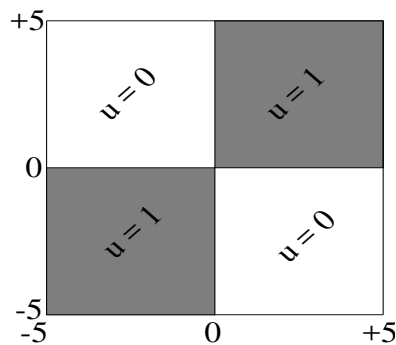
Cet exemple résout l'équation visqueuse de Burgers suivante qui évolue vers un état stable hautement convectif.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda y \left(u - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda x \left(u - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial y} - \Delta u = 0,$$

où  $\lambda$  est une constante contrôlant la taille du terme convectif non linéaire, voir par exemple [20] pour plus de détails. Les conditions aux limites de Dirichlet sont données par la solution exacte en régime permanent

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{th} \left( \frac{\lambda xy}{2} \right) \right).$$

Les dimensions du domaine et les conditions initiales utilisées dans nos calculs sont décrits à la Figure IV.18.



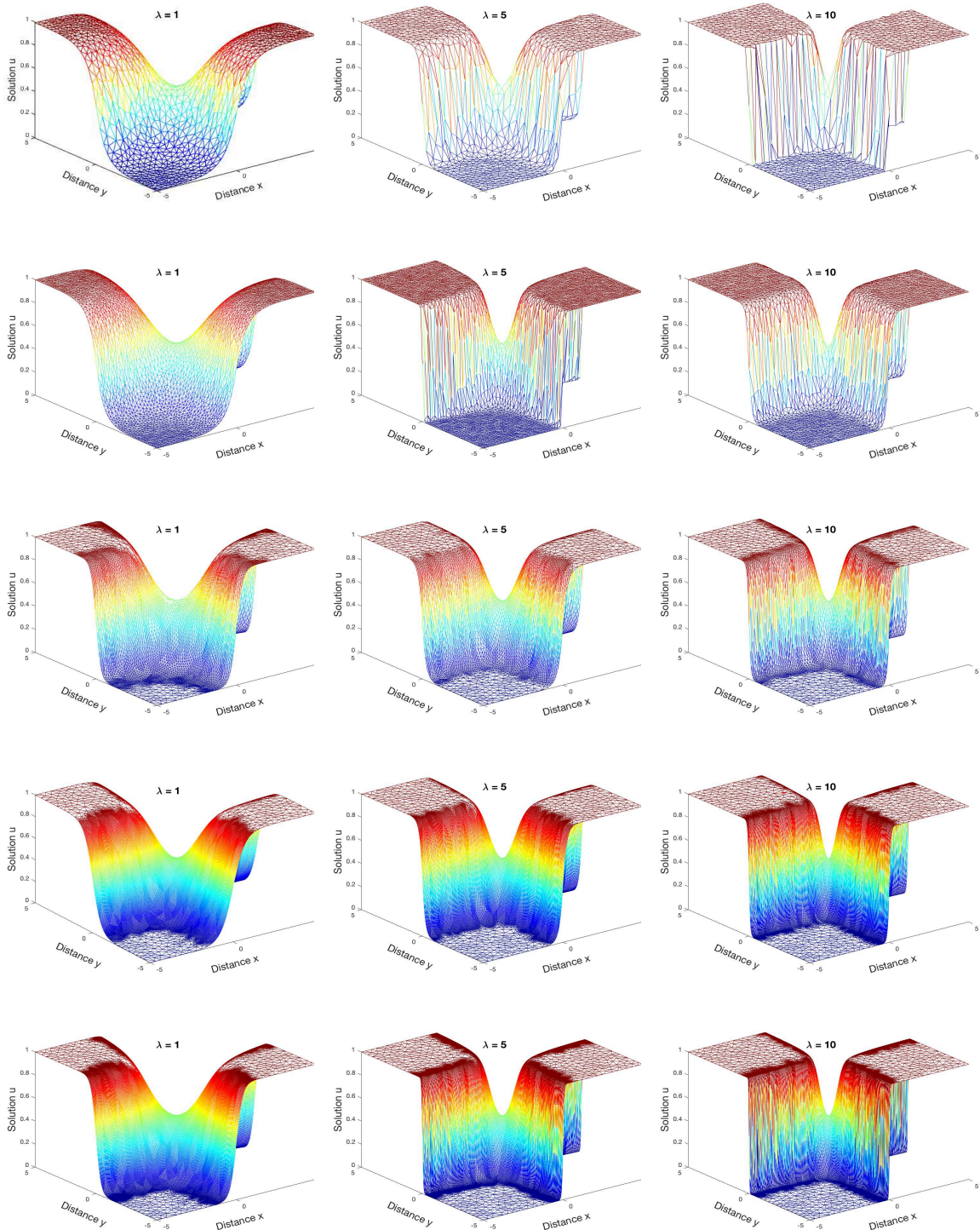
**Figure IV.18** – Dimensions du domaine et conditions initiales pour l'équation visqueuse de Burgers. Nous fixons  $u = 0.5$  sur les deux lignes centrales.

Nous avons utilisé la nouvelle méthode semi-lagrangienne-volumes finis pour calculer les solutions en régime permanent pour trois valeurs différentes de  $\lambda$ , à savoir  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 5$  et  $\lambda = 10$ . Pour ces solutions en régime permanent, le processus d'intégration temporelle est arrêté lorsque l'inégalité

$$\frac{\|u^{n+1} - u^n\|}{\|u^n\|} \leq \epsilon, \quad (\text{IV.13})$$

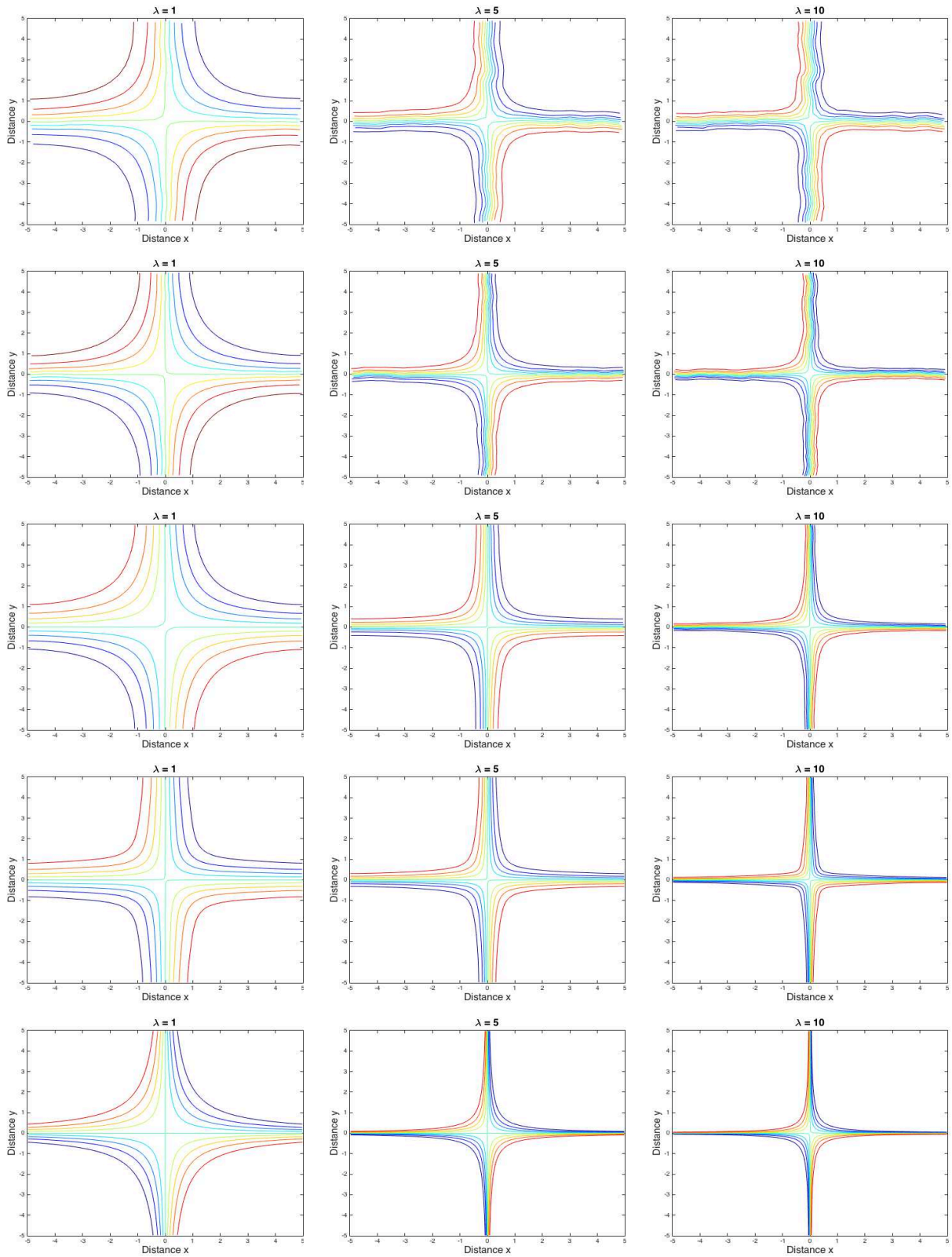
est satisfaite. Ici,  $\|\cdot\|$  désigne la norme  $L^1$  et  $\epsilon$  est une tolérance donnée fixée à  $10^{-6}\Delta t$  dans nos calculs. Il convient de noter que le nombre d'itérations pour atteindre cette tolérance dépend des valeurs prises par  $\lambda$ , de sorte que, pour un nombre CFL fixe, davantage d'itérations sont nécessaires pour des valeurs plus grandes de  $\lambda$ .

## IV.4 Résultats numériques



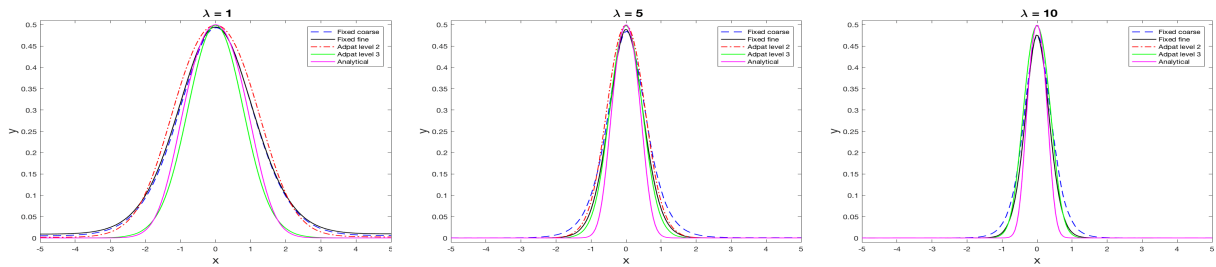
**Figure IV.19** – Solution numérique en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec  $\lambda = 1$  (gauche) (respectivement avec  $\lambda = 5$  (centre) et  $\lambda = 10$  (droite)).

# Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées

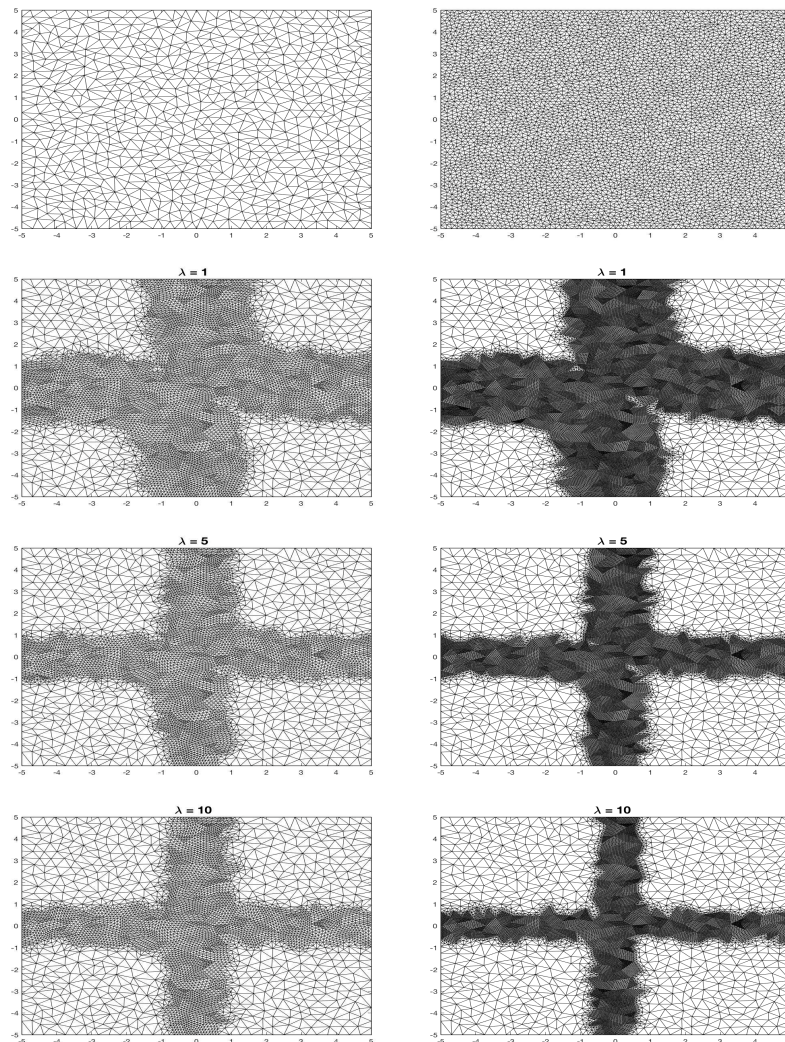


**Figure IV.20** – Contours des résultats en utilisant un maillage grossier, fin, adapt niveau 2 et adapt niveau 3 avec  $\lambda = 1$ (gauche) (respectivement avec  $\lambda = 5$  (centre) et  $\lambda = 10$  (droite)).

## IV.4 Résultats numériques



**Figure IV.21** – Coupes transversales des résultats du problème du Burgers avec  $\lambda = 1$  (gauche),  $\lambda = 5$  (centre) et  $\lambda = 10$  (droite).



**Figure IV.22** – Maillage grossier, adapt niveau 2 avec  $\lambda = 1$ , adapt niveau 2 avec  $\lambda = 5$  et adapt niveau 2 avec  $\lambda = 10$  (colonne 1), maillage fin, adapt niveau 3 avec  $\lambda = 1$ , adapt niveau 3 avec  $\lambda = 5$  et adapt niveau 3 avec  $\lambda = 10$  (colonne 2).

**Tableau IV.4** – Normes d’erreur et temps de calcul pour l’écoulement visqueux de Burgers

Maillage	#Éléments	#Nœuds	Erreur- $L^1$	CPU(s)
$\lambda = 1$				
Grossier fixe	2222	1176	0.003119	3.17
Fin fixe	8160	4208	2.3500e-04	59.55
Adapt niveau 2	14859	7561	1.1550e-04	51.23
Adapt niveau 3	51171	25613	4.3200e-05	598.56
$\lambda = 5$				
Grossier fixe	2222	1176	0.00124	2.81
Fin fixe	8160	4208	3.4900e-04	45.72
Adapt niveau 2	10183	5189	4.3620e-05	30.57
Adapt niveau 3	32271	16300	7.0600e-06	212.51
$\lambda = 10$				
Grossier fixe	1458	784	7.7823e-04	4.87
Fin fixe	8160	4208	1.3168e-04	12.39
Adapt niveau 2	9298	4728	2.4514e-05	88.35
Adapt niveau 3	24588	12389	1.1383e-06	324.63

### 4.3 Exemple de flux de déformation

Notre deuxième exemple est le problème de flux de déformation. Ce type de test a largement servi de prototype pour tester les performances des schémas d’advection et des méthodes semi-lagrangiennes, voir par exemple [22, 23]. Ici, nous résolvons l’équation d’advection linéaire (IV.12) dans le domaine spatial  $\Omega = [-4, 4] \times [-4, 4]$  équipé d’un champ d’écoulement fortement déformé et de la condition initiale du champ scalaire:

$$u(x, y, 0) = -\text{th}\left(\frac{y - y_0}{\delta}\right), \quad (\text{IV.14})$$

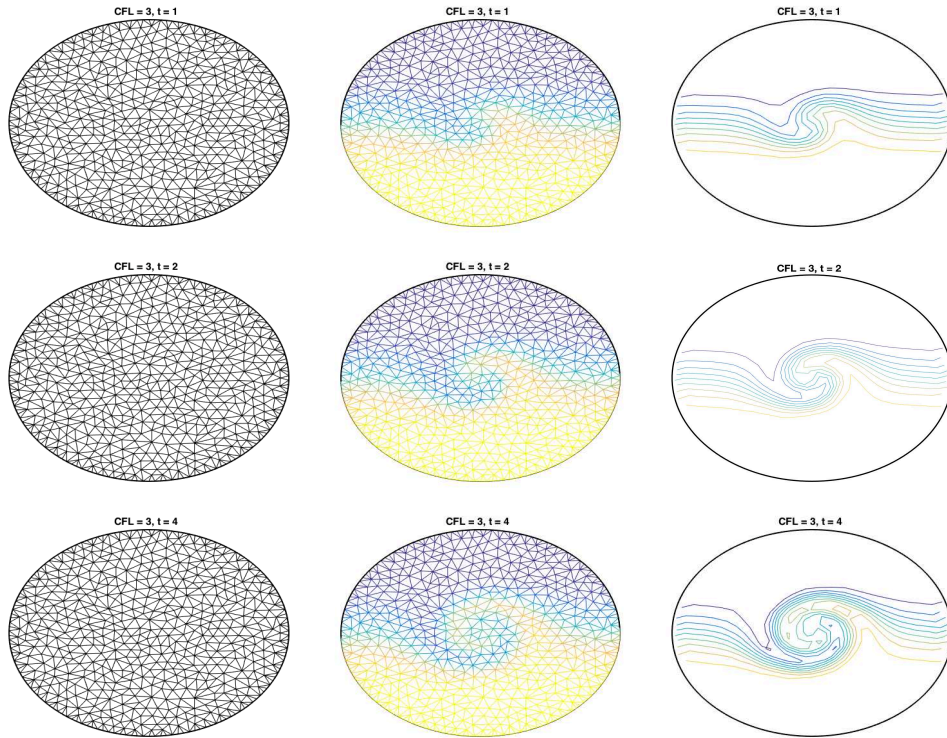
avec  $\delta$  la largeur de la zone avant. Le champ de vitesse est un vortex circulaire régulier dont la vitesse tangentielle dépend de son rayon.

$$V_T(\mathbf{r}) = V_0 \text{ch}^2(\mathbf{r}) \text{th}(\mathbf{r}), \quad (\text{IV.15})$$

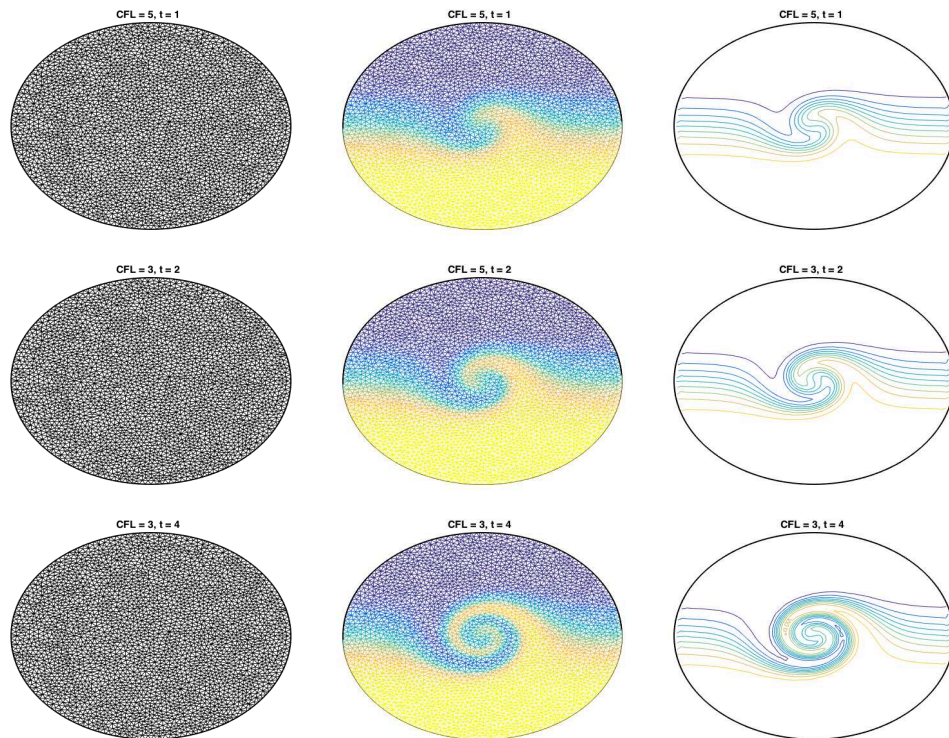
où  $V_0$  est une valeur sélectionnée de sorte que la valeur maximale de  $VT$  ne dépasse jamais l'unité. La solution analytique du problème considéré est définie par:

$$u_{\text{exact}}(x, y, t) = -\text{th} \left( \frac{y - y_0}{\delta} \cos(\omega t) - \frac{x - x_0}{\delta} \sin(\omega t) \right), \quad (\text{IV.16})$$

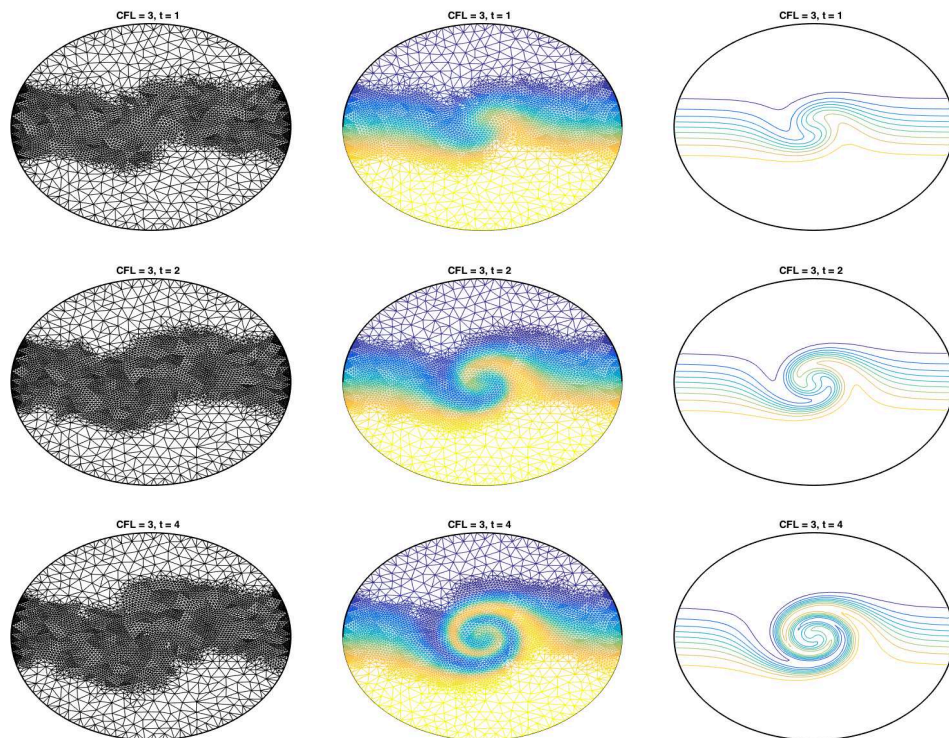
avec  $(x_0, y_0)$  le centre du vortex et  $\omega = \frac{V_T}{r}$  sa vitesse angulaire. Dans nos simulations, le vortex est centré à l'origine du domaine de calcul,  $V_0 = 2.58$ ,  $\delta = 0.05$  et les résultats numériques sont présentés à l'instant  $t = 4$ . Notons que la valeur sélectionnée de  $\delta$  dans les données initiales correspond à un profil de tangente hyperbolique serré qui conduit à une solution non lisse car le problème est intégré dans le temps (la solution est de plus en plus multi-scalée avec le temps).



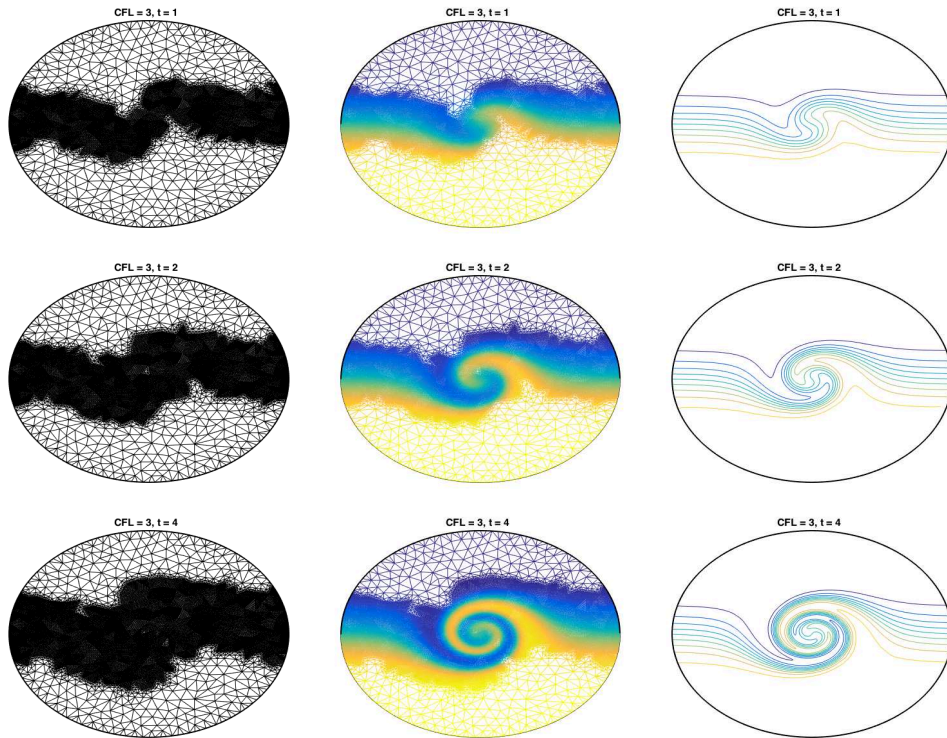
**Figure IV.23** – Maillage grossier fixe (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $\text{CFL}=3$ .



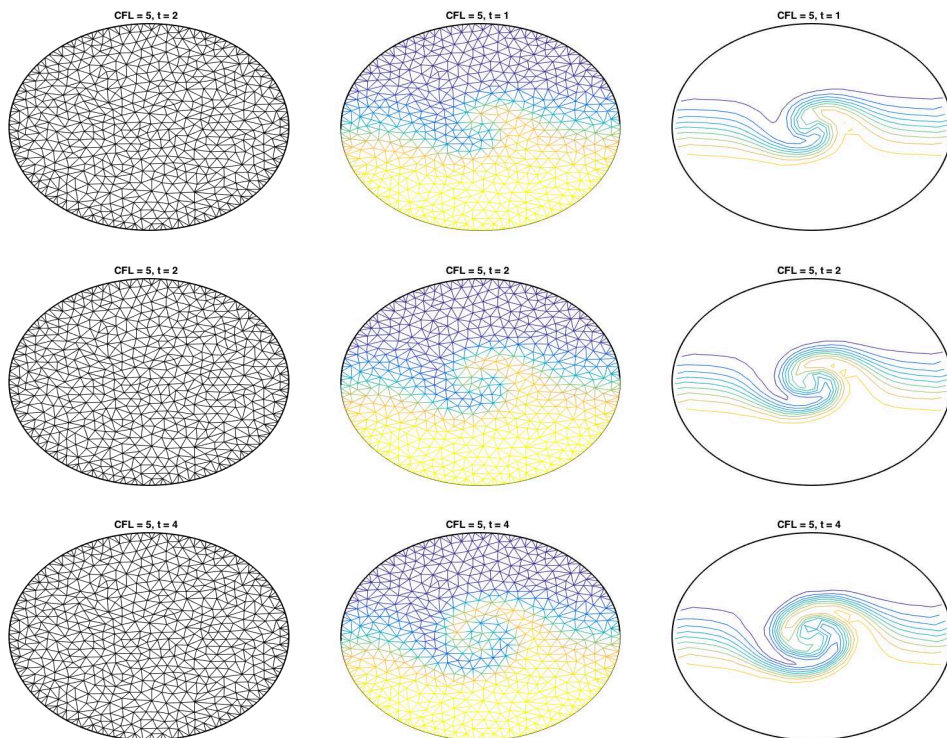
**Figure IV.24** – Maillage fin fixe (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $CFL=3$ .



**Figure IV.25** – Maillage Adapt niveau 2 (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $CFL=3$ .



**Figure IV.26** – Maillage Adapt niveau 3 (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $CFL=3$ .



**Figure IV.27** – Maillage grossier fixe (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $CFL=5$ .



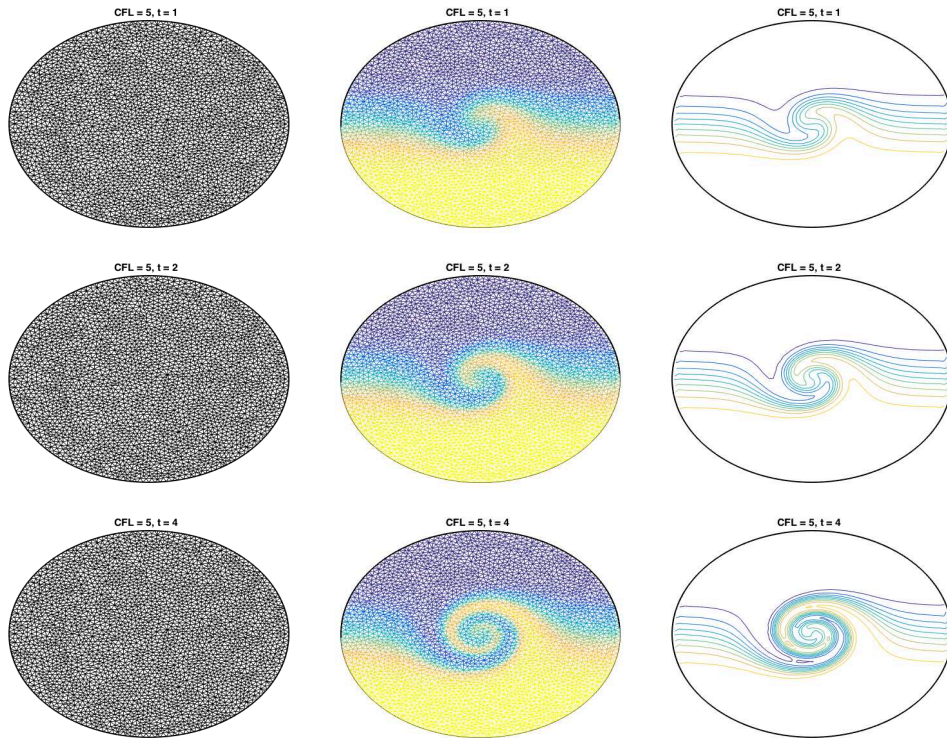


Figure IV.28 – Maillage fin fixe (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $CFL=5$ .

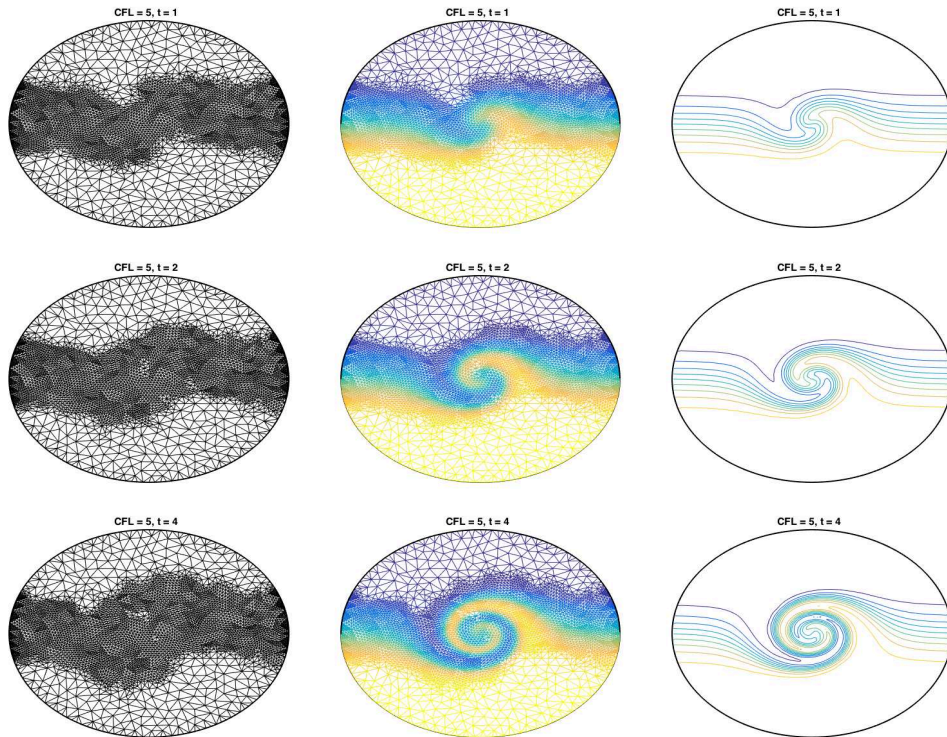
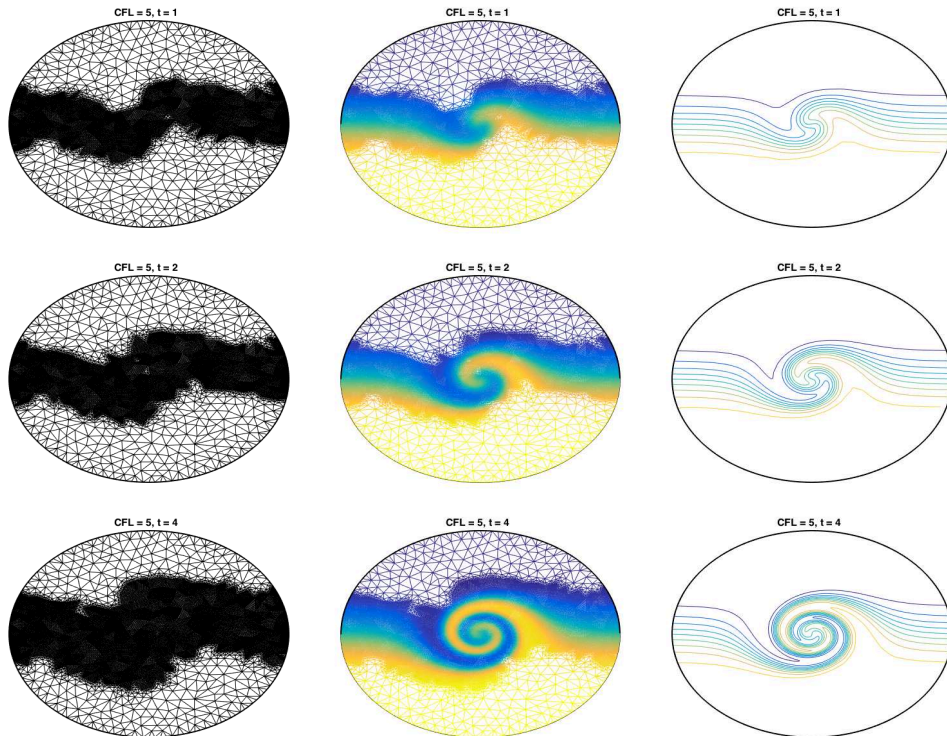
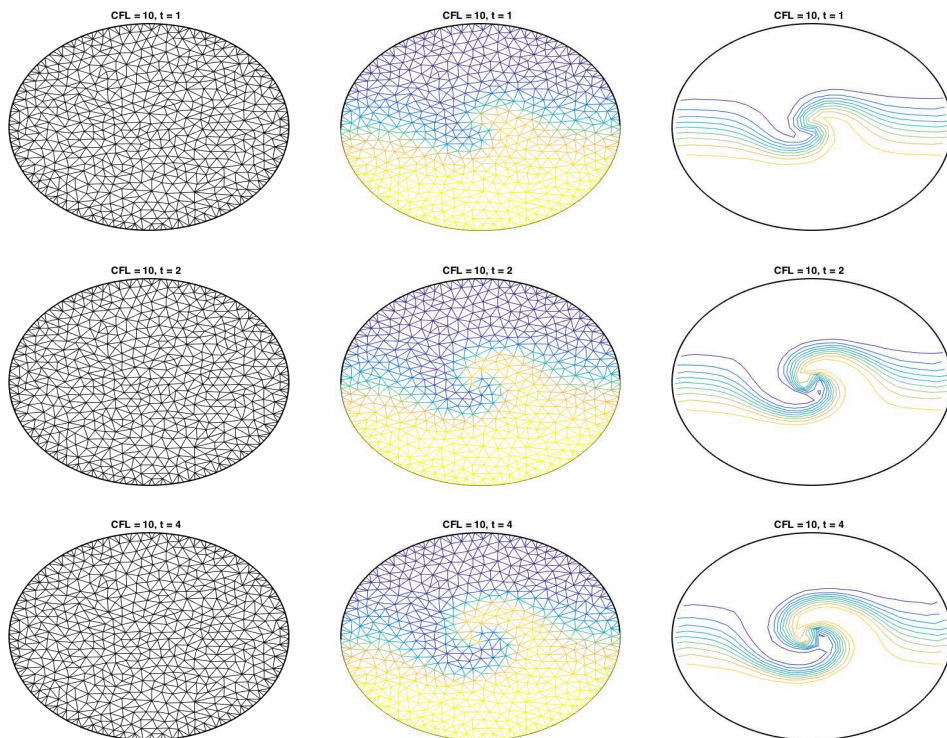


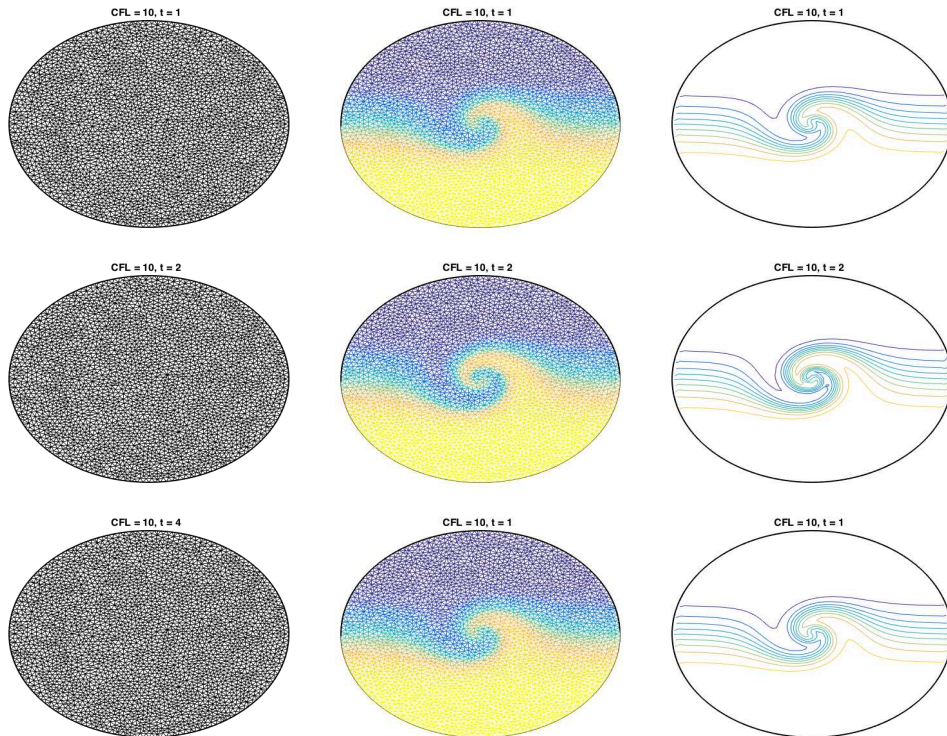
Figure IV.29 – Maillage Adapt niveau 2 (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $CFL=5$ .



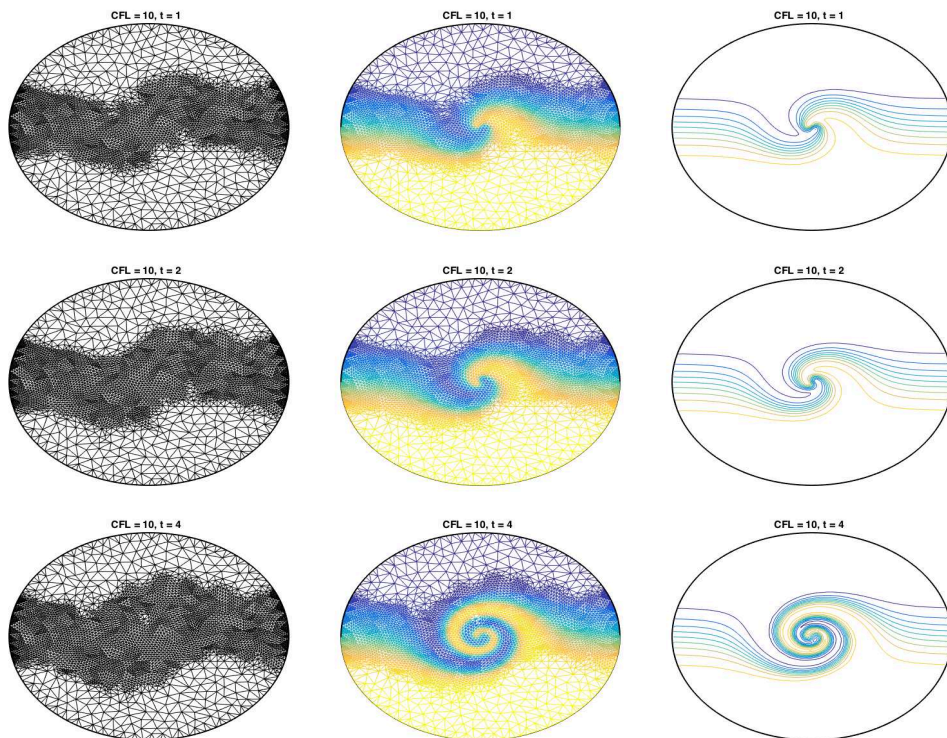
**Figure IV.30** – Maillage Adapt niveau 3 (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $CFL=5$ .



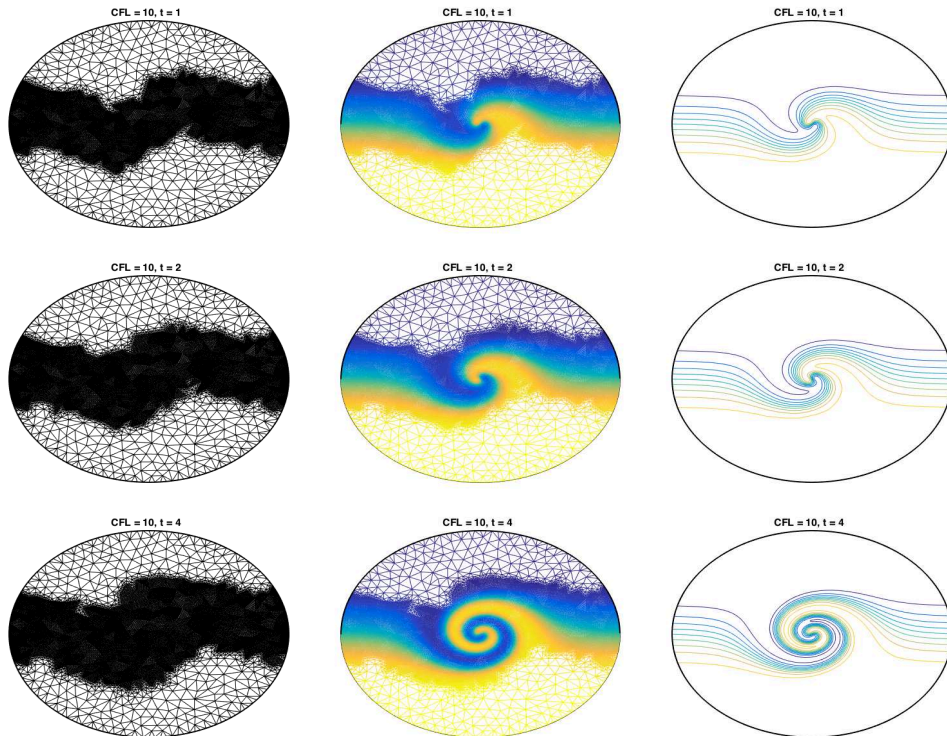
**Figure IV.31** – Maillage grossier fixe (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $CFL=10$ .



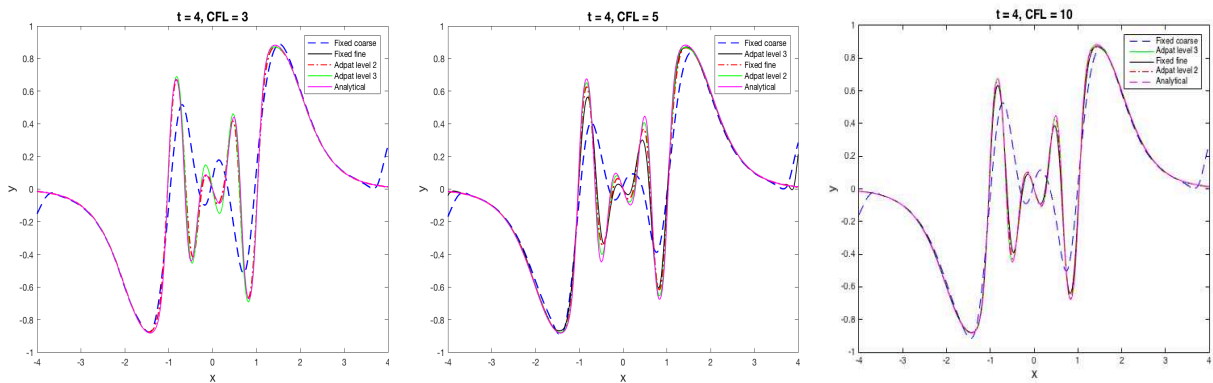
**Figure IV.32** – Maillage fin fixe (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $CFL=10$ .



**Figure IV.33** – Maillage Adapt niveau 2 (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $CFL=10$ .



**Figure IV.34** – Maillage Adapt niveau 3 (colonne 1), solution numérique (colonne 2) et contours des résultats (colonne 3), à  $t = 1$ ,  $t = 2$  et  $t = 4$  pour  $CFL=10$ .



**Figure IV.35** – Coupes transversales des résultats du problème de flux de déformation à  $t = 4$  avec  $CFL = 3$  (gauche),  $CFL = 5$  (centre) et  $CFL = 10$  (droite).

## Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées

**Tableau IV.5** – Normes d’erreur et temps de calcul pour le problème d’écoulement de déformation à  $t = 4$  en utilisant différents maillages et différents nombres CFL.

Maillage	#Éléments	#Nœuds	Min sol	Max sol	Mass	Erreur- $L^1$	Min $\Delta t$	CPU(s)
<i>CFL = 3</i>								
Grossier fixe	1060	606	-0.99930582	0.99926051	0.9744	0.289833997	0.51913511	0.581268
Fin fixe	5918	3052	-0.99930551	0.999275335	0.9795	0.16522945	0.25197527	7.248906
Adapt niveau 2	8594	4427	-0.9993	0.999254	0.9885	0.00993261	0.12606157	46.7766
Adapt niveau 3	31615	16007	-0.9993	0.999253	0.9886	0.00528532	0.519135	522.1075
<i>CFL = 5</i>								
Grossier fixe	1060	606	-0.9993062	0.99926641	0.9541	0.15953454	0.8652219	0.434512
Fin fixe	5918	3052	-0.9993	0.999277	0.9704	0.04645892	0.41995879	3.9320
Adapt niveau 2	8266	4263	-0.99930580	0.99925954	0.9822	0.00181305	0.8735897	24.2474
Adapt niveau 3	34328	17368	-0.99930554	0.999257	0.9938	0.00054131	0.865225	346.2429
<i>CFL = 10</i>								
Grossier fixe	1060	606	-0.99930597	0.99927216	0.9899	0.11331128	1.73045038	0.3787
Fin fixe	5918	3052	-0.9993	0.99928066	0.9905	0.01504739	0.83991758	2.2415
Adapt niveau 2	7856	4052	-0.99930655	0.999270	0.9935	0.00153700	0.4206603	11.1053
Adapt niveau 3	30819	156000	-0.9993120	0.99926797	0.9999	0.00048626	0.209875	111.7180

### 4.4 Dispersion dans le détroit de Gibraltar

Le dernier problème traité dans ce chapitre concerne le cas pratique de la dispersion des polluants dans les flux à canaux ouverts. Le détroit de Gibraltar (voir tracé de gauche sur la Figure IV.36) est délimité au nord et au sud par les avant-pays continentaux ibériques et africains, à l’ouest et à l’est respectivement par l’océan Atlantique et la mer Méditerranée. La circulation de base dans le détroit de Gibraltar se compose d’une couche supérieure d’eau froide de surface et d’un courant profond opposé d’eau chaude salée méditerranéenne [24, 25],[26]. Le système fait environ 60 km de long entre sa section ouest Barbate-Tanger et sa section est Gibraltar-Sebta. Sa largeur varie entre un minimum d’environ 14 km à la section Tarifa-Punta Cires et un maximum de 44 km à la section Barbate-Tanger. Le détroit est fortement utilisé par les transports maritimes et pétroliers, étant l’une des régions les plus polluées de façon chronique [27]. Notez que cet exemple n’est que schématique, car les conditions d’écoulement et les capacités des sources de pollution dans le détroit correspondent partiellement à la situation réelle.

Cet exemple est inspiré de la marée noire du "Prestige", le plus grand désastre environnemental de l’histoire de l’Espagne. Le pétrolier, qui a sombré en 2002 au large de la Galice, a pollué les fonds marins et a contaminé plusieurs plages des côtes espagnoles et françaises. La zone touchée est une région écologique très importante comprenant des récifs coralliens, des espèces de poissons et d’oiseaux en voie d’extinction et une industrie de pêche vitale pour la région. Le processus de nettoyage du littoral a nécessité plusieurs mois, des milliers de volontaires et des millions d’euros.

L'objectif de notre étude est de tester les performances de notre méthode numérique et de montrer qu'elle est applicable sur des problèmes concrets similaires.

L'énoncé de notre problème consiste à résoudre l'équation IV.1 dans le domaine spatial montré dans la Figure IV.36.

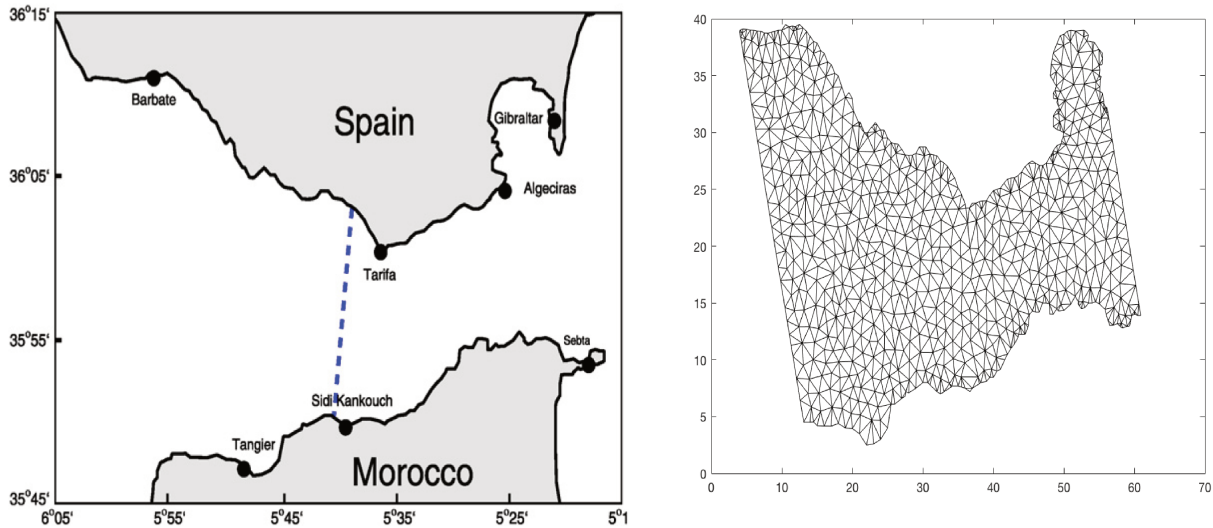


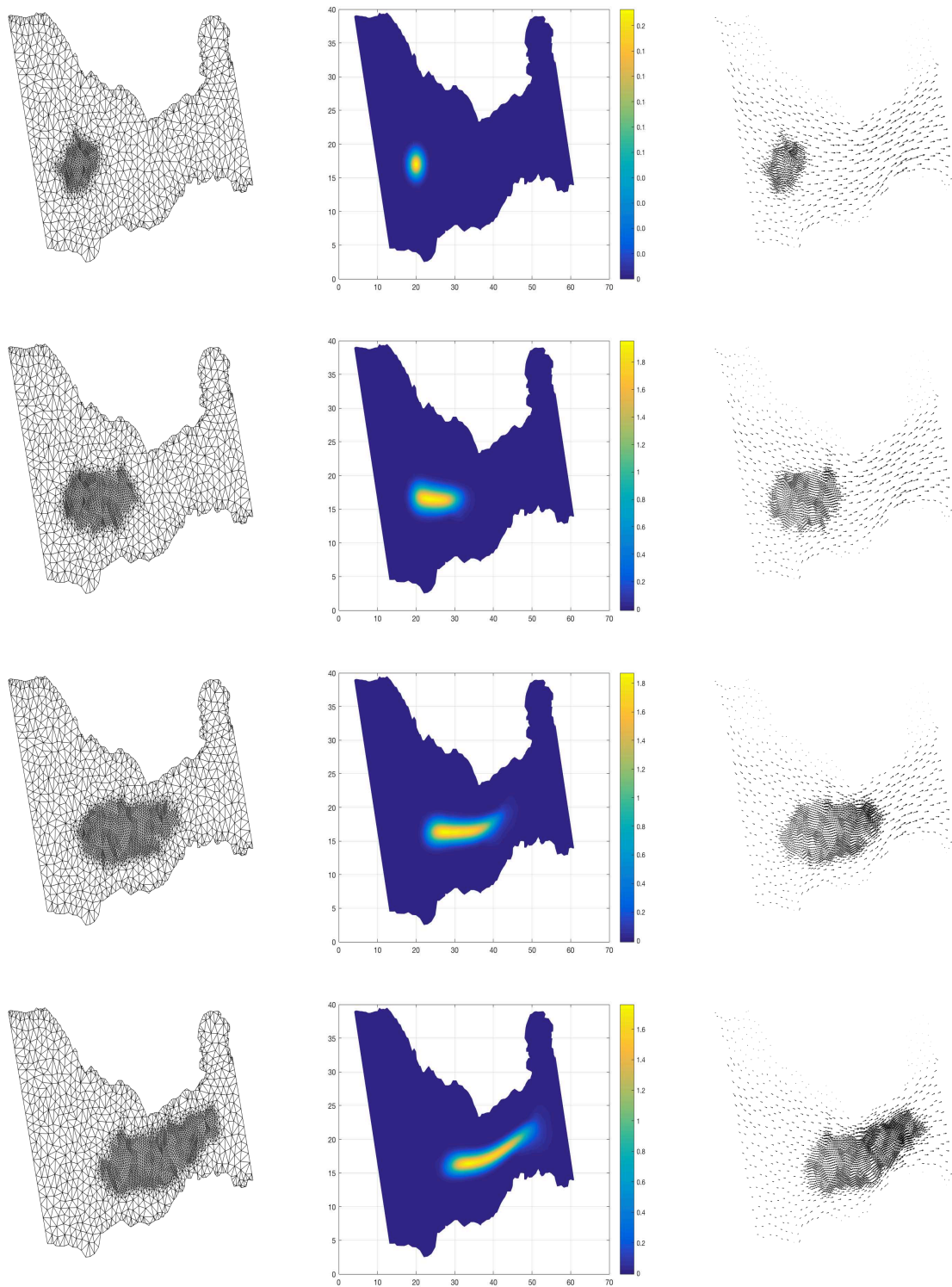
Figure IV.36 – Détroit de Gibraltar (à gauche), maillage associé (à droite)

À  $t = 0$ , un polluant est injecté à l'emplacement du détroit et suivi à travers le temps. L'injection est choisie comme gaussienne donnée par :

$$u_0(x, y) = \alpha \exp(-(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2)$$

Où le coefficient de diffusion  $\nu = 10^{-2}$ ,  $(x_0, y_0) = (20, 19)$  et  $\alpha = \frac{1}{3}$ . Le domaine est discrétisé avec un maillage triangulaire non structuré dont le nombre d'éléments total est égal à 1409, et le nombre total de nœuds est égal à 849.

## Chapitre IV. Schéma Volumes Finis-Semi Lagrangien et adaptation du maillage pour le transport sur des grilles triangulaires non structurées



**Figure IV.37** – Maillage adapté (gauche), solution numérique (centre) et flux du problème de dispersion dans le détroit de Gibraltar (droite) à différents temps.

## 5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons développé une nouvelle méthode numérique basée sur la combinaison de la méthode SLAG et volumes finis pour la résolution des équations de convection-diffusion. Cette méthode tire profit des caractéristiques intéressantes offertes par chacune des deux techniques pour un traitement numérique hautement précis des problèmes de convection-diffusion. Le principal atout de la nouvelle méthode est le traitement du terme convectif par la méthode semi lagrangienne, et de la partie diffusion par la méthode des volumes finis réputée pour son caractère conservatif. Une série d'exemples numériques comprenant l'équation visqueuse de Burgers a été considérée pour mettre à l'épreuve la précision de la méthode proposée. Les résultats obtenus en utilisant la nouvelle méthode montrent une bonne résolution de la solution et une dissipation numérique moindre par rapport à ceux obtenus en utilisant la méthode semi-lagrangienne conventionnelle. L'apport de notre travail est d'avoir basé nos calculs numériques sur des maillages non structurés pour résoudre des problèmes bidimensionnels de convection-diffusion.





---

## Références bibliographiques

- [1] Douglas J, Huang C, Pereira F. The modified method of characteristics with adjusted advection. *Numerische Mathematik* 1999 ; 83 :353-369. [84](#)
- [2] Douglas J, Russell TF. Numerical methods for convection dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite elements or finite differences. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1982 ;19 :871-885. [84](#), [85](#)
- [3] Pironneau O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik* 1982 ; 38 :309-332. [84](#)
- [4] Süli E. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik* 1988 ; 53 :1025-1039. [84](#), [85](#)
- [5] Rui H, Tabata M. A mass-conservative characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *Journal of Scientific Computing* 2010 ; 43 :416-432. [84](#)
- [6] Xiu D, Karniadakis GE. A semi-Lagrangian high-order method for Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics* 2001 ; 172 :658-684. [84](#)
- [7] El-Amrani M, Seaid M. A semi-Lagrangian method for large-eddy simulation of turbulent flow and heat transfer. *SIAM Journal on Scientific Computing* 2008 ; 30 :2734-2754. [84](#)
- [8] El-Amrani M, Seaid M. A finite element modified method of characteristics for convective heat transport. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 2008 ; 24 :776-798.

## Références bibliographiques

---

- [9] El-Amrani M, Seaid M. Numerical simulation of natural and mixed convection flows by semi-Lagrangian method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2007 ; 53 :1819-1845. [84](#)
- [10] El-Amrani M, Seaid M. Convergence and stability of finite element modified method of characteristics for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Numerical Mathematics* 2007 ; 15 :101-135. [84](#)
- [11] Robert A. A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmosphere-Ocean* 1981 ; 19 :35-46.
- [12] Temperton C, Staniforth A. An efficient two-time-level semi-Lagrangian semi-implicit integration scheme. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 1987 ; 113 :1025-1039.
- [13] Pudykiewicz J, Staniforth A. Some properties and comparative performance of the semi-lagrangian method of robert in the solution of advection-diffusion equation. *Atmosphere-Ocean* 1984 ; 22 :283-308.
- [14] Giraldo FX. The Lagrange-Galerkin spectral element method on unstructured quadrilateral grids. *Journal of Computational Physics* 1998 ; 147 :114-146.
- [15] Kaazempur-Mofrad MR, Ethier CR. An efficient characteristic Galerkin scheme for the advection equation in 3D. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2002 ; 191 :5345-5363.
- [16] Allievi A, Bermejo R. A generalized particle search-locate algorithm for arbitrary grids. *Journal of Computational Physics* 1992 ; 132 :157-166. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2012 ; 90 :1485-1507.
- [17] Seaid M. Semi-Lagrangian integration schemes for viscous incompressible flows. *Computational Methods in Applied Mathematics* 2002 ; 4 :392-409.
- [18] Abramowitz M, Stegun IA. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. U.S. Department of Commerce, 1972.
- [19] Dunavant D. High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1985 ; 21 :1129-1148.

- [20] Krisnamachari SV, Hayes LJ, Russel TF. A finite element alternating-direction method combined with a modified method of characteristics for convection-diffusion problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1989 ; 26 :1462-1473. [108](#)
- [21] Takacs LL. A two-step scheme for the advection equation with minimized dissipation and dispersion errors. *Monthly Weather Review* 1985 ; 113 :1054-1065.
- [22] Hólm EV. A fully two-dimensional, non-oscillatory advection scheme for momentum and scalar transport equations. *Monthly Weather Review* 1995 ; 123 :536-552. [112](#)
- [23] Nair R, Côté J, Staniforth A. Monotonic cascade interpolation for semi-Lagrangian advection. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 1999 ; 125 :197-212. [112](#)
- [24] J.G. Lafuente, J.L. Almazán, F. Catillejo, A. Khribeche, A. Hakimi, Sea level in the Strait of Gibraltar : Tides, *Int. Hydrogr. Rev.* LXVII. 1 (1990) 111-130. [120](#)
- [25] J.I. Almazán, H. Bryden, T. Kinder, G. Parrilla, (Eds.), *Seminario Sobre la Oceanografía Física del Estrecho de Gibraltar*, SECEG, Madrid, 1988. [120](#)
- [26] M. González, A. Sánchez-Arcilla, Un Modelo Numérico en Elementos Finitos para la Corriente Inducida por la Marea. *Aplicaciones al Estrecho de Gibraltar*, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. 11 (1995) 383-400. [120](#)
- [27] F. Gómez, The role of the exchanges through the Strait of Gibraltar on the budget of elements in Western Mediterranean Sea : consequences of humain-induced modifications, *Marine Pollut. Bull.* 46 (2003) 685-694. [120](#)

## Références bibliographiques

---

---

---

# Chapitre V

---

## Résultats de convergence d'un schéma Volumes Finis multi-dimensionnel pour une équation parabolique semi-linéaire à retard

### 1 Introduction

Ce chapitre a pour but d'extrapoler l'étude faite dans le premier chapitre à d'autres conditions de transport d'un fluide dans un milieu poreux, en l'occurrence en présence d'un retard. En effet, au cours de son déplacement, le fluide est susceptible d'entraîner avec lui des éléments dissous. Plusieurs phénomènes physiques tels que la convection et la dispersion, et chimiques tels que la diffusion moléculaire, l'absorption et les précipitations, régissent le transport des polluants dans les milieux poreux qui peut se voir retardé ou au contraire accéléré. Les équations à retard sont utilisées dans un large spectre d'applications telles que l'écologie, la biologie et la mécanique. Elles ont longtemps joué des rôles importants dans la littérature de la dynamique de la population théorique, et continuent à servir de modèles utiles. En effet, dans de nombreux phénomènes réels, les conditions initiales ou les conditions aux limites ne suffisent pas pour prédire le comportement de la solution du problème considéré. Par conséquent, pour faire face à de telles complexités, il est nécessaire d'avoir une connaissance du comportement antérieur de la solution. Il y a une littérature abondante traitant de l'approximation d'équations différentielles ordinaires à retard ("ordinary delay differential equations ODDEs"). Certains des travaux qui se sont penchés sur l'approximation numérique des équations à dérivées partielles à retard ("Delay Partial Differential Equations DPDEs") étaient exclusivement dédiés au cas unidimensionnel. Les méthodes numériques qui sont effectuées avec des équations différentielles partielles (ou ordinaires) ne suffisent pas pour traiter les équations différentielles à retard. En effet, la mise en œuvre de schémas et certains résultats de précision et de stabilité souhaitables, connus pour les équations différentielles partielles, peuvent être remis en question lorsque ces méthodes

sont appliquées pour retarder les équations différentielles partielles, cf. [5, Pages 9-19]. De plus, si les méthodes numériques pour les équations de retard sont bien développées dans le cas des équations différentielles ordinaires, le sujet de l'analyse numérique pour les équations différentielles à retard n'a pas suscité l'intérêt qu'il mérite, voir [5, 11]. Pour autant que nous sachions, nous ne connaissons aucun travail antérieur ayant traité des méthodes des volumes finis pour les équations aux différences partielles avec retard.

Dans cette contribution, nous construisons un schéma implicite linéarisé, dans lequel la discrétisation de l'espace est effectuée en utilisant une classe générale de maillages Volumes Finis non conformes, de manière à approcher une équation parabolique semi linéaire avec un retard en temps. Nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution discrète.

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans les proceedings de la conférence "Ninth International Conference on Numerical Methods and Applications NM&A'18".

## 2 Description du modèle

Nous considérons l'équation parabolique semi-linéaire à retard en temps suivante:

$$u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t), u(\mathbf{x}, t - \tau)), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (\text{V.1})$$

Où  $\Omega$  est un sous-ensemble borné polygonal ouvert dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $f$  est une fonction donnée, et  $T > 0$  et  $\tau > 0$  sont donnés. La condition initiale est donnée par:

$$u(\mathbf{x}, t) = u^0(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (\text{V.2})$$

pour une fonction donnée  $u^0$  définie sur  $\Omega$ . Les conditions aux limites homogènes de Dirichlet sont données par:

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (\text{V.3})$$

Dans notre analyse, l'hypothèse suivante sur la fonction  $f$  est nécessaire:

**Hypothèse 3** (*Hypothèse sur  $f$* ) Nous supposons que la fonction  $f(\mathbf{x}, t, s, r)$  est Lipschitz continue par rapport à  $(s, r)$  avec  $\kappa$  constante:

$$|f(\mathbf{x}, t, s, r) - f(\mathbf{x}, t, s', r')| \leq \kappa (|s - s'| + |r - r'|), \quad \forall (\mathbf{x}, t, s, r), (\mathbf{x}, t, s', r') \in \Omega \times \mathbb{R}^3.$$

Notez que l'hypothèse 3 est vérifiée quand par exemple  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}^3)$  et

$$\sup_{\Omega \times \mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right| \leq \kappa.$$

Le cas 1D de l'équation (V.1) est considéré dans [11] où un schéma compact de différences finies "multi splitting" est analysé. Une version différentielle ordinaire pour l'équation (V.1), c'est-à-dire sans tenir compte du domaine spatial  $\Omega$ , est considérée dans [10] où les méthodes Galerkin discontinues sont appliquées. Nous établissons d'abord un schéma numérique linéaire dans lequel la discrétisation de l'espace est effectuée en utilisant la méthode SUSHI [8], tandis que le schéma en temps est Euler implicite. Nous fournissons ensuite une analyse de convergence pour ce schéma. La méthode SUSHI développée dans [8] fait référence au "schéma utilisant des interfaces de stabilisation et hybrides" et utilise des maillages non conformes dans lesquels les volumes de contrôle ne peuvent être que polyédriques. En plus de cela, la formulation de SUSHI implique un gradient discret cohérent et stable.

## 3 Discrétisation spatiale et temporelle

**Définition 4 (Discrétisation spatiale, cf. [8])** *Soit  $\Omega$  un sous-ensemble polyédrique de  $\mathbb{R}^d$ , où  $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$  représente sa frontière. Une discrétisation de  $\Omega$ , notée  $\mathcal{D}$ , est définie comme le triplet  $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$ , où:*

1.  $\mathcal{M}$  est une famille finie de sous-ensembles disjoints ouverts non connectés de  $\Omega$  (les "volumes de contrôle") tels que  $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{M}} \overline{K}$ . Pour tout  $K \in \mathcal{M}$ , soit  $\partial K = \overline{K} \setminus K$  la frontière de  $K$ . Soient  $\mathbf{m}(K) > 0$  la mesure de  $K$  et  $h_K$  son diamètre.
2.  $\mathcal{E}$  est une famille finie de sous-ensembles disjoints de  $\overline{\Omega}$  (les "faces" du maillage), de sorte que, pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ ,  $\sigma$  est un sous-ensemble ouvert non vide d'un hyperplan de  $\mathbb{R}^d$ , de dimension  $(d - 1)$ . Pour tout  $K \in \mathcal{M}$ , il existe un sous-ensemble  $\mathcal{E}_K$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $\partial K = \cup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sigma$ .

*Pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ , nous notons  $\mathcal{M}_\sigma = \{K, \sigma \in \mathcal{E}_K\}$ . Nous supposons alors que, pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{M}_\sigma$  a exactement un élément, puis  $\sigma \subset \partial\Omega$  (l'ensemble de ces interfaces, appelées interfaces extérieures frontières, est noté  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$ ) où  $\mathcal{M}_\sigma$  a exactement deux éléments (l'ensemble de ces interfaces, appelées interfaces intérieures, est noté par  $\mathcal{E}_{\text{int}}$ ). Pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ , nous notons  $\mathbf{x}_\sigma$  le barycentre de  $\sigma$ . Pour tout  $K \in \mathcal{M}$  et  $\sigma \in \mathcal{E}$ , nous notons  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  le vecteur normal unité à  $\sigma$  extérieur à  $K$ .*

3.  $\mathcal{P}$  est une famille de points de  $\Omega$  indexés par  $\mathcal{M}$ , notés  $\mathcal{P} = (\mathbf{x}_K)_{K \in \mathcal{M}}$ , telle que pour tout  $K \in \mathcal{M}$ ,  $\mathbf{x}_K \in K$  et pour tout  $\mathbf{x} \in K$ , la propriété  $[\mathbf{x}_K, \mathbf{x}] \subset K$  est vérifiée. En notant par



## Chapitre V. Résultats de convergence d'un schéma Volumes Finis multi-dimensionnel pour une équation parabolique semi-linéaire à retard

---

$d_{K,\sigma}$  la distance euclidienne entre  $\mathbf{x}_K$  et l'hyperplan incluant  $\sigma$ , on suppose que  $d_{K,\sigma} > 0$ . On note alors  $\mathcal{D}_{K,\sigma}$  le cône avec le sommet  $\mathbf{x}_K$  et la base  $\sigma$ .

La discrétisation temporelle est effectuée avec un pas de temps contraint  $k$  tel que  $\frac{\tau}{k} \in \mathbb{N}$ . On pose alors  $k = \frac{\tau}{M}$ , où  $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Notons par  $N$  la partie entière de  $\frac{T}{k}$ , c'est-à-dire  $N = \left\lfloor \frac{T}{k} \right\rfloor$ . On notera  $t_n = nk$ , pour  $n \in \llbracket -M, N \rrbracket$ . Comme cas particuliers  $t_{-M} = -\tau$ ,  $t_0 = 0$  et  $t_N \leq T$ . Un des avantages de cette discrétisation temporelle est que le point  $t = 0$  est un point de maillage convenable puisque l'équation (V.1) est définie pour  $t \in (0, T)$  et que la condition initiale (V.2) est définie pour  $t \in (-\tau, 0)$ . On note  $\partial^1$  la dérivée discrète de première fois donnée par

$$\partial^1 v^{j+1} = \frac{v^{j+1} - v^j}{k}. \quad (\text{V.4})$$

Dans ce chapitre, la lettre  $C$  représente une constante positive indépendante des paramètres des discrétisations spatiales et temporelles.

Nous définissons l'espace discret  $\mathbf{x}_{\mathcal{D},0}$  comme l'ensemble de  $\mathbf{v} = ((v_K)_{K \in \mathcal{M}}, (v_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}})$ , où  $v_K, v_\sigma \in \mathbb{R}$  et  $v_\sigma = 0$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ . Soit  $H_{\mathcal{M}}(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$  l'espace des fonctions qui sont constantes sur chaque volume de contrôle  $K$  du maillage  $\mathcal{M}$ . Pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{x}_{\mathcal{D}}$ , on note  $\Pi_{\mathcal{M}} \mathbf{v} \in H_{\mathcal{M}}(\Omega)$  la fonction définie par  $\Pi_{\mathcal{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_K$ , pour  $\mathbf{x} \in K$ , pour tout  $K \in \mathcal{M}$ .

Pour analyser la convergence, il faut considérer la taille de la discrétisation  $\mathcal{D}$  définie par  $h_{\mathcal{D}} = \sup \{\text{diam}(K), K \in \mathcal{M}\}$  et la régularité du maillage donnée par:

$$\theta_{\mathcal{D}} = \max \left( \max_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, K, L \in \mathcal{M}} \frac{d_{K,\sigma}}{d_{L,\sigma}}, \max_{K \in \mathcal{M}, \sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{h_K}{d_{K,\sigma}} \right). \quad (\text{V.5})$$

Le schéma que nous voulons considérer est basé sur l'utilisation du gradient discret donné dans [8]. Pour  $\mathbf{u} \in \mathbf{x}_{\mathcal{D}}$ , nous définissons, pour tout  $K \in \mathcal{M}$ :

$$\nabla_{\mathcal{D}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla_K \mathbf{u} + \left( \frac{\sqrt{d}}{d_{K,\sigma}} (u_\sigma - u_K - \nabla_K \mathbf{u} \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_K)) \right) \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad \text{ae } \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{K,\sigma}, \quad (\text{V.6})$$

où  $\nabla_K \mathbf{u} = \frac{1}{\mathbf{m}(K)} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathbf{m}(\sigma) (u_\sigma - u_K) \mathbf{n}_{K,\sigma}$ .

En utilisant le gradient discret  $\nabla_{\mathcal{D}}$ , nous pouvons établir la forme bilinéaire suivante définie sur  $\mathbf{x}_{\mathcal{D}} \times \mathbf{x}_{\mathcal{D}}$  par:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\text{F}} = \int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{D}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathcal{D}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{x}_{\mathcal{D}} \times \mathbf{x}_{\mathcal{D}}. \quad (\text{V.7})$$

## 4 Formulation d'un nouveau schéma de Volumes Finis pour une équation à retard

Nous définissons maintenant un schéma implicite Volumes Finis linéaires pour le problème (V.1)-(V.3). Les inconnues de ce schéma sont l'ensemble  $\{u_{\mathcal{D}}^n; n \in \llbracket -M, N \rrbracket\}$  qui devrait se rapprocher de l'ensemble des inconnues

$$\{u(t_n); n \in \llbracket -M, N \rrbracket\}.$$

1. **Approximation de la condition initiale (V.2).** La discrétisation de la condition initiale (V.2) peut être effectuée comme suit:

$$\forall n \in \llbracket -M, 0 \rrbracket, \quad \langle u_{\mathcal{D}}^n, v \rangle_F = - \left( \Delta u^0(t_n), \Pi_{\mathcal{M}} v \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathbf{x}_{\mathcal{D},0}. \quad (\text{V.8})$$

2. **Approximation de (V.1) et (V.3).** Pour tout  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , trouver  $u_{\mathcal{D}}^n \in \mathbf{x}_{\mathcal{D},0}$  tel que, pour tout  $v \in \mathbf{x}_{\mathcal{D},0}$

$$\left( \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} v \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle u_{\mathcal{D}}^{n+1}, v \rangle_F = \left( f(t_{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^n, \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^{n+1-M}), \Pi_{\mathcal{M}} v \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad (\text{V.9})$$

où  $f(t_{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^n, \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^{n+1-M})$  désigne la fonction

$$\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, t_{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^n(\mathbf{x}), \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^{n+1-M}).$$

## 5 Ordre de convergence du schéma (V.8)-(V.9)

Le principal résultat de cette partie est le théorème développé ci-après, qui traduit l'existence, l'unicité et l'ordre de convergence du schéma de Volumes Finis (V.8) - (V.9).

**Théorème 8** (*Estimations d'erreur pour le schéma de Volumes Finis (V.8) - (V.9)*)

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble polyédrique ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , où  $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$  sa frontière. Supposons que la solution de (V.1) - (V.3) vérifie  $u \in \mathcal{C}^2([0, T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))$ . Soit  $k = \frac{\tau}{M}$ , où  $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Notons par  $N$  la partie entière de  $\frac{T}{k}$ , c'est-à-dire que  $N = \left\lfloor \frac{T}{k} \right\rfloor$ . On notera  $t_n = nk$ , pour  $n \in \llbracket -M, N \rrbracket$ . Comme cas particuliers  $t_{-M} = -\tau$  et  $t_0 = 0$ . Soit  $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$  une discrétisation au sens de la définition 4. Supposons que  $\theta_{\mathcal{D}}$  (donné par V.5) vérifie  $\theta \geq \theta_{\mathcal{D}}$ . Soit  $\nabla_{\mathcal{D}}$  le gradient discret donné par (V.6) et notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  la forme bilinéaire définie par (V.7).

Il existe alors une solution unique  $(u_{\mathcal{D}}^n)_{n=-M}^N \in \mathbf{x}_{\mathcal{D},0}^{M+N+1}$  pour le problème discret (V.8) - (V.9). Si nous supposons en outre que l'hypothèse 3 est vérifiée, les estimations d'erreur suivantes sont

## Chapitre V. Résultats de convergence d'un schéma Volumes Finis multi-dimensionnel pour une équation parabolique semi-linéaire à retard

---

conservées:

— L'estimation  $\mathbf{L}^\infty(\mathbf{H}_0^1)$ . Pour tout  $n \in \llbracket -M, N \rrbracket$

$$\|\nabla_{\mathcal{D}} u_{\mathcal{D}}^n - \nabla u(t_n)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C(k + h_{\mathcal{D}}) \|u\|_{\mathcal{C}^2([0, T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))}. \quad (\text{V.10})$$

— L'estimation  $W^{1,2}(\mathbf{L}^2)$ .

$$\left( \sum_{n=-M+1}^N k \left\| u_t(t_n) - \Pi_{\mathcal{M}} \partial^1 u_{\mathcal{D}}^n \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(k + h_{\mathcal{D}}) \|u\|_{\mathcal{C}^2([0, T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))}. \quad (\text{V.11})$$

Pour la preuve du théorème 8 (voir l'Annexe A).

**Lemme 3 (Estimation a priori du problème discret)** *Sous les mêmes hypothèses du théorème 8, supposons qu'il existe  $(\eta^n)_{n=0}^N \in (\mathbf{x}_{\mathcal{D}, 0})^{N+1}$  tel que pour tout  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$*

$$\left( \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} v \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}, v \rangle_{\mathbf{F}} = \left( \mathfrak{S}^{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} v \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad (\text{V.12})$$

où  $\mathfrak{S}^{n+1} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , pour tout  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ .

Ensuite, l'estimation suivante est valable pour tout  $J \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\sum_{n=0}^{J-1} k \left\| \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1} \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \left\| \nabla_{\mathcal{D}} \eta_{\mathcal{D}}^J \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{n=0}^{J-1} k \left( \mathfrak{S}^{n+1} \right)^2 + \left\| \eta_{\mathcal{D}}^0 \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2. \quad (\text{V.13})$$

Idée de preuve (voir l'Annexe A).

**Remarque 3 (Une possible extension)** *Les résultats actuels peuvent être étendus à l'équation parabolique générale semi-linéaire suivante avec des retards qui se produisent non seulement dans la solution exacte mais aussi dans son gradient:*

$$u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t), u(\mathbf{x}, t - \tau), \nabla u(\mathbf{x}, t), \nabla u(\mathbf{x}, t - \tau)).$$

## 6 Conclusion et perspectives

Nous avons considéré la convergence d'un schéma implicite de volumes finis, dans n'importe quelle dimension spatiale, pour une simple équation parabolique à retard semi-linéaire. L'ordre s'est avéré être un (à la fois dans le temps et dans l'espace). L'une des principales tâches sur laquelle nous travaillerons est l'utilisation de la méthode Crank Nicolson afin d'améliorer l'ordre dans le temps. Une autre voie intéressante à suivre est de considérer l'équation de diffusion

fractionnaire dans le temps semi-linéaire avec un retard, c'est-à-dire que la dérivée temporelle  $u_t$  dans (V.1) est remplacée par une dérivée fractionnaire  $\partial_t^\alpha u$  avec  $0 < \alpha < 1$ .



---

## Références bibliographiques

- [1] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Theory and applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [2] L.C. Evans. Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010
- [3] A. Quarteroni, A. Valli. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer Series in Computational Mathematics 23. Berlin : Springer, 2008.
- [4] P. Grisvard. Elliptic problems in non-smooth domains. Monographs and Studies in Mathematics, 24. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [5] Bellen, A., Zennaro, M. Numerical Methods for Delay Differential Equations. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford : Oxford University Press (2003). [130](#)
- [6] Bradji, A. An analysis for the convergence order of gradient schemes for semilinear parabolic equations. *Comput. Math. Appl.* 72/5, 1287-1304 (2016).
- [7] Bradji, A., Fuhrmann, J. Some abstract error estimates of a finite volume scheme for a nonstationary heat equation on general nonconforming multidimensional spatial meshes. *Appl. Math.* 58/1, 1-38 (2013).
- [8] Eymard, R., Gallouët, T., Herbin, R. Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes. *IMA J. Numer. Anal.* 30/4, 1009-1043 (2010). [131](#), [132](#)
- [9] Kuang, Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Mathematics in Science and Engineering. 191. Boston, MA : Academic Press (1993).

## Références bibliographiques

---

- [10] Li, D., Zhang, C.  $L^\infty$ -error estimates of discontinuous Galerkin methods for delay differential equations. *Appl. Numer. Math.* 82, 1-10 (2014). [131](#)
- [11] Zhang, Q., Zhang, C. A new linearized compact multisplitting scheme for the nonlinear convection-reaction-diffusion equations with delay. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 18/12, 3278-3288 (2013).

---

## Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude et à l'analyse de l'écoulement et du transport en milieux poreux avec une méthode des volumes finis "vertex centered" adaptative. Pour ce faire, nous avons proposé une nouvelle stratégie d'adaptation AdaptNVB qui découpe le maillage en utilisant la méthode Adapt du LAGA et traitant la conformité par la méthode NVB. Cette nouvelle stratégie permet l'amélioration du raffinement dans la version du traitement de la conformité dans la méthode Adapt, ainsi que les propagations remarquées en utilisant la méthode NVB seule. Aussi, nous avons intégré l'estimateur d'erreur a posteriori proposé par Vohralík, dans notre code, puis nous avons appliqué le calcul d'estimateur avec les méthodes NVB et AdaptNVB sur différents problèmes à solution exacte déterminée. Ces estimations, calculées dans la norme d'énergie, permettent le contrôle global de l'erreur par le biais de bornes calculables et fournissent des indicateurs permettant le raffinement adaptatif en espace et en temps. Nous avons proposé un algorithme adaptatif basé sur ces estimations et présenté des essais numériques qui démontrent l'efficacité de notre stratégie adaptative. Les cas tests ont montré l'absence de propagation de niveaux de raffinement en utilisant la nouvelle stratégie AdaptNVB, les estimateurs approchent ainsi correctement la vraie erreur avec des taux d'efficacité très satisfaisants. Nous avons également remarqué un comportement oscillant pour les estimateurs obtenus avec la méthode NVB au cours des raffinement successifs, ce qui n'est pas le cas avec la méthode AdaptNVB. Dans une autre étape et afin d'améliorer les courbes de l'erreur exacte en norme de l'énergie et les courbes des erreurs estimées, nous avons reconsidéré des méthodes de quadratures numériques intervenant dans les différentes intégrales impliquant la solution exacte et le flux reconstruit  $t_h$ . Le choix de méthodes de quadratures appropriées et de degré élevé a permis de retrouver de parfaites convergences en norme  $L_2$  pour la solution dans le cas régulier sur maillage raffiné uniformément. De même les courbes de l'erreur exacte en norme de l'énergie et les courbes de l'erreur estimée retrouvaient des comportement



---

cohérents induisant un facteur d'efficacité tendant bien vers une constante proche de 1. Cette étude nous a permis d'analyser en profondeur les estimateurs mis en oeuvre pour les problèmes linéaires homogènes et non homogènes, permettant parfaitement de localiser les zones à raffiner et de diminuer les erreurs par raffinement successifs, y compris pour des problèmes à solution singulière. Dans une autre étape, nous avons investi le champs des raffinements multi-niveaux c'est une extension de la première partie. Nous avons aussi mené des comparaisons du point de vue des temps de calcul et de la précision entre le raffinement classique à un niveau et le celui multi-niveaux. Les résultats obtenues montrent un gain important en terme de temps CPU et en nombre d'itérations. Ensuite on a couplé l'équation de diffusion et le transport de solutés, nous avons considéré un problème de transport par convection et lui avons appliqué un schéma innovant semi-lagrangien-Volumes finis (SLAG-VF). Il s'agit de la première fois que cette méthode est mise en oeuvre dans le cadre de maillages non structurés. Le principe est de résoudre le problème par une phase Volume Finis (phase correcteur) précédée par une phase lagrangienne utilisant la méthode des caractéristiques (phase prédicteur). Plusieurs tests numériques ont été réalisés qui montrent l'efficacité de ce schéma innovant qui est un schéma assez prometteur.

A l'issu du travail effectué dans cette thèse, une prochaine étape consistera à appliquer les méthodes développés pour le problème d'écoulement en milieu poreux avec transport de soluté, au même problème couplé en plus avec des équations d'écoulement de surface (type Saint-Venant) et induisant des infiltrations d'eau dans le milieu poreux. On pourra considérer en un premier temps un couplage Saint-Venant 1D - Darcy 2D, avant d'envisager un couplage Saint-Venant 2D - Darcy 3D.

---

## Annexe A

### Preuve 1 (*Preuve du théorème 1*)

Posons  $F = H_0^1(\Omega)$ . L'espace  $F$  peut être muni de la norme  $\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x) dx$  (c'est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$  grâce à l'inégalité de Poincaré). Nous définissons  $\mathbf{a}$  et  $\varphi$  respectivement par:

$$\mathbf{a}(u, v) = \int_{\Omega} \kappa(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad (\text{V.14})$$

$$\text{et } \varphi(v) = - \int_{\Omega} \kappa(x) \nabla \tilde{g}(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (\text{V.15})$$

Nous vérifions maintenant que les hypothèses de (I.6) à (I.8) sont bien vérifiées, ce qui nous permettra d'appliquer le Lemme 1.

1. Hypothèse (I.6): En combinant l'inégalité triangulaire avec celle de Cauchy Schwarz on obtient:

$$|\mathbf{a}(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} \kappa(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \right| \quad (\text{V.16})$$

$$\leq \max_{i,j=1}^d |\kappa_{ij}| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right| dx \quad (\text{V.17})$$

$$\leq \max_{i,j=1}^d |\kappa_{ij}| \|u\| \|v\|. \quad (\text{V.18})$$

2. Hypothèse (I.7): L'hypothèse (I.4) implique que

$$\mathbf{a}(u, u) = \int_{\Omega} \kappa(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx \quad (\text{V.19})$$

$$\begin{aligned} &\geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2(x) dx \\ &= \alpha \|u\|^2. \end{aligned} \quad (\text{V.20})$$

3. Hypothèse (I.8): L'emploi des techniques utilisées pour prouver (V.18) avec l'inégalité de Poincaré implique que

$$|\varphi(v)| = \left| - \int_{\Omega} \kappa(x) \nabla \tilde{g}(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \right| \quad (\text{V.21})$$

$$\leq \max_{i,j=1}^d |\kappa_{ij}| \|\tilde{g}\| \|v\| + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{V.22})$$

$$\leq \max_{i,j=1}^d |\kappa_{ij}| \|\tilde{g}\| \|v\| + C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\| \quad (\text{V.23})$$

$$= \left( \max_{i,j=1}^d |\kappa_{ij}| \|\tilde{g}\| + C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|. \quad (\text{V.24})$$

Nous avons donc prouvé que  $\mathbf{a}$  et  $\varphi$ , donnés respectivement par (V.14) et (V.15), satisfont les hypothèses du Lemme 1. Il existe alors une solution unique  $w \in F = H_0^1(\Omega)$  telle que, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\mathbf{a}(w, v) = \varphi(v) \quad (\text{V.25})$$

Ceci est équivalent à, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \kappa(x) \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = - \int_{\Omega} \kappa(x) \nabla \tilde{g}(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} f(x)v(x) dx. \quad (\text{V.26})$$

La solution  $p$  est alors donnée par  $w + \tilde{g}$ . Cela complète la preuve du Théorème 1.

## 7 Preuve de lemme 3

Pour dériver une estimation pour la solution  $\eta_{\mathcal{D}}^{n+1}$  de (V.12), nous prenons  $v = \partial^1 \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}$  dans (V.12), nous obtenons pour tout  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$

$$\|\partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}, \partial^1 \eta_{\mathcal{D}}^{n+1} \rangle_F = \left( \mathfrak{S}^{n+1}, \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1} \right)_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{V.27})$$

La règle suivante sera utile:

$$\langle \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}, \partial^1 \eta_{\mathcal{D}}^{n+1} \rangle_F = \frac{1}{2k} \langle \eta_{\mathcal{D}}^{n+1} - \eta_{\mathcal{D}}^n, \eta_{\mathcal{D}}^{n+1} - \eta_{\mathcal{D}}^n \rangle_F + \frac{1}{2k} \left( \langle \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}, \eta_{\mathcal{D}}^{n+1} \rangle_F - \langle \eta_{\mathcal{D}}^n, \eta_{\mathcal{D}}^n \rangle_F \right).$$

Rassemblons maintenant (V.27) et (V.28), on aura

$$2k \|\partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}, \eta_{\mathcal{D}}^{n+1} \rangle_F - \langle \eta_{\mathcal{D}}^n, \eta_{\mathcal{D}}^n \rangle_F \leq 2k \left( \mathfrak{S}^{n+1}, \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Résumons l'inégalité précédente sur  $n \in \llbracket 0, J-1 \rrbracket$  où  $J \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , ce qui donne

$$2 \sum_{n=0}^{J-1} k \|\partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_{\mathcal{D}} \eta_{\mathcal{D}}^J\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \sum_{n=0}^{J-1} k \left( \mathfrak{S}^{n+1}, \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\eta_{\mathcal{D}}^0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

L'utilisation de l'inégalité de Cauchy Schwarz avec l'inégalité de Young implique que

$$\begin{aligned} \left( \mathfrak{S}^{n+1}, \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq \|\mathfrak{S}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \|\partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\|\mathfrak{S}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} + \frac{\|\partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{V.28})$$

En utilisant cette inégalité, l'inégalité (V.28) donne l'estimation souhaitée (V.13).

## 8 Preuve du théorème 8

**1. Existence et unicité pour le schéma (V.8)-(V.9).** L'existence et l'unicité de  $(u_{\mathcal{D}}^n)_{n \in \llbracket -M, 0 \rrbracket}$  pour (V.8) est simple (voir [2]). Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution  $(u_{\mathcal{D}}^n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  pour le schéma linéaire (V.9) avec (V.8), nous définissons (comme d'habitude pour prouver l'unicité des systèmes linéaires)  $f(t_{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^n, \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^{n+1-M}) = 0$  et  $u_{\mathcal{D}}^n = 0$ . Prendre  $v = u_{\mathcal{D}}^{n+1}$  dans (V.9) donne  $\|\nabla_{\mathcal{D}} u_{\mathcal{D}}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} = 0$ . Étant donné que  $u_{\mathcal{D}}^{n+1} \in \mathbf{x}_{\mathcal{D},0}$ , alors  $u_{\mathcal{D}}^{n+1} = 0$ . Cela confirme l'unicité de la solution  $u_{\mathcal{D}}^{n+1}$  pour (V.9) pour  $u_{\mathcal{D}}^n$  et  $u_{\mathcal{D}}^{n+1-M}$ . L'existence de  $u_{\mathcal{D}}^{n+1}$  suit l'unicité, puisque (V.9) est un système linéaire de dimension finie par rapport aux inconnues  $\{(u_K^{n+1}, u_{\sigma}^{n+1}); K \in \mathcal{M}, \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}\}$ . On parvient ainsi à prouver successivement sur  $n$ , l'existence et l'unicité de  $u_{\mathcal{D}}^n$  pour tout  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .

**2. Preuve des estimations (V.10)-(V.11).** Pour prouver (V.10)-(V.11), on compare (V.8)-(V.9) avec le schéma auxiliaire suivant:  $n \in \llbracket -M, N \rrbracket$ , trouver  $\bar{u}_{\mathcal{D}}^n \in \mathbf{x}_{\mathcal{D},0}$  tel que

$$\langle \bar{u}_{\mathcal{D}}^n, v \rangle_F = (-\Delta u(t_n), \Pi_{\mathcal{M}} v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathbf{x}_{\mathcal{D},0}. \quad (\text{V.29})$$

---

**2.1. Comparaison entre la solution (V.29) et la solution du problème (V.1)-(V.3).** Les résultats de convergence suivants sont valables, voir [1, 2]:

— Estimation d'erreur discrète  $\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^2)$ . Pour tout  $n \in \llbracket -M, N \rrbracket$

$$\|u(t_n) - \Pi_{\mathcal{M}} \bar{u}_{\mathcal{D}}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \text{Ch}_{\mathcal{D}} \|u\|_{\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))}. \quad (\text{V.30})$$

— Estimation d'erreur  $\mathcal{W}^{1, \infty}(\mathbf{L}^2)$ . Pour tout  $n \in \llbracket -M + 1, N \rrbracket$

$$\|u_t(t_n) - \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \bar{u}_{\mathcal{D}}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C(h_{\mathcal{D}} + k) \|u\|_{\mathcal{C}^2([0, T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))}. \quad (\text{V.31})$$

— Estimation d'erreur dans l'approximation du gradient. Pour tout  $n \in \llbracket -M, N \rrbracket$

$$\|\nabla u(t_n) - \nabla_{\mathcal{D}} \bar{u}_{\mathcal{D}}^n\|_{(\mathbf{L}^2(\Omega))^d} \leq \text{Ch}_{\mathcal{D}} \|u\|_{\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))}. \quad (\text{V.32})$$

**2.2. Comparaison entre la solution de (V.8)-(V.9) et le schéma auxiliaire (V.29).** On définit l'erreur

$$\eta_{\mathcal{D}}^n = u_{\mathcal{D}}^n - \bar{u}_{\mathcal{D}}^n \in \mathbf{x}_{\mathcal{D}, 0}. \quad (\text{V.33})$$

Comparons (V.29) avec (V.8), étant donné que  $u(t_n) = u^0(t_n)$  pour tout  $n \in \llbracket -M, 0 \rrbracket$  (sujet de (V.2)), pour tout  $n \in \llbracket -M, 0 \rrbracket$  on a:

$$\eta_{\mathcal{D}}^n = 0. \quad (\text{V.34})$$

écrivons le schéma (V.29) à l'ordre  $n + 1$  et en soustrayant le résultat de (V.9), nous obtenons pour tout  $v \in \mathbf{x}_{\mathcal{D}, 0}$

$$\left( \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} v \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}, v \rangle_{\mathbf{F}} = \left( f(t_{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^n, \Pi_{\mathcal{M}} u_{\mathcal{D}}^{n+1-M}) + \Delta u(t_{n+1}), \Pi_{\mathcal{M}} v \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Soustrayons  $\left( \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \bar{u}_{\mathcal{D}}^{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} v \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  des deux côtés de l'équation précédente et remplaçons  $\Delta u(\mathbf{x}, t_{n+1})$  par  $u_t(\mathbf{x}, t_{n+1}) - f(\mathbf{x}, t_{n+1}, u(\mathbf{x}, t_{n+1}), u(\mathbf{x}, t_{n+1} - \tau))$  (qui provient de (V.1)), nous obtenons, pour tout  $v \in \mathbf{x}_{\mathcal{D}, 0}$

$$\left( \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} v \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \langle \eta_{\mathcal{D}}^{n+1}, v \rangle_{\mathbf{F}} = \left( \mathfrak{S}^{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}} v \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad (\text{V.35})$$

où

$$\mathfrak{S}^{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbb{T}^1(\mathbf{x}) + \mathbb{T}^2(\mathbf{x}), \quad (\text{V.36})$$

avec

$$\mathbb{T}^1(\mathbf{x}) = u_t(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \bar{u}_{\mathcal{D}}^{n+1} \quad (\text{V.37})$$

et (rappelons que  $-\tau = t_{-M}$ )

$$\begin{aligned}\mathbb{T}^2(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}, t_{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_{\mathcal{D}}^n, \Pi_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_{\mathcal{D}}^{n+1-M}) - f(\mathbf{x}, t_{n+1}, u(\mathbf{x}, t_{n+1}), u(\mathbf{x}, t_{n+1} - \tau)) \\ &= f(\mathbf{x}, t_{n+1}, \Pi_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_{\mathcal{D}}^n(\mathbf{x}), \Pi_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_{\mathcal{D}}^{n+1-M}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x}, t_{n+1}, u(\mathbf{x}, t_{n+1}), u(\mathbf{x}, t_{n+1-M})).\end{aligned}\quad (\text{V.38})$$

En utilisant l'hypothèse (V.31), on obtient

$$\|\mathbb{T}^1\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C(h_{\mathcal{D}} + k)\|u\|_{\mathcal{C}^2([0,T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))}. \quad (\text{V.39})$$

Combinons l'hypothèse 3 avec (V.30), cela implique que

$$\begin{aligned}\|\mathbb{T}^2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq C\left(\|\Pi_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_{\mathcal{D}}^n - u(t_{n+1})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\Pi_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_{\mathcal{D}}^{n+1-M} - u(t_{n+1-M})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right) \\ &\leq C\left(\|\Pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{D}}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\Pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{D}}^{n+1-M}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + (h_{\mathcal{D}} + k)\|u\|_{\mathcal{C}^1([0,T]; \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))}\right).\end{aligned}\quad (\text{V.40})$$

Dès lors que  $(\eta^n)_{n=0}^N \in (x_{\mathcal{D},0})^{N+1}$  est satisfaite (V.35), l'hypothèse (V.12) du lemme 3 l'est aussi. Appliquons maintenant (V.13) du lemme 3. En utilisant (V.34) et (V.39)-(V.40), on obtient pour tout  $J \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{J-1} k \|\partial^1 \Pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{D}}^{n+1}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_{\mathcal{D}}\eta_{\mathcal{D}}^J\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &\leq \sum_{n=0}^{J-1} k (\mathfrak{S}^{n+1})^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{J-1} k \|\Pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{D}}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{J-1} k \|\Pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{D}}^{n+1-M}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + C(h_{\mathcal{D}} + k)^2 \|u\|_{\mathcal{C}^2([0,T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))}^2 \\ &\leq 2 \sum_{n=0}^{J-1} k \|\Pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{D}}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + C(h_{\mathcal{D}} + k)^2 \|u\|_{\mathcal{C}^2([0,T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))}^2.\end{aligned}$$

En prenant en considération l'inégalité de Poincaré [2, Lemme 5.4, Page 1038],

$$\sum_{n=0}^{J-1} k \|\partial^1 \Pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{D}}^{n+1}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_{\mathcal{D}}\eta_{\mathcal{D}}^J\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{n=0}^{J-1} k \|\nabla_{\mathcal{D}}\eta_{\mathcal{D}}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + C(h_{\mathcal{D}} + k)^2 \|u\|_{\mathcal{C}^2([0,T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))}^2.$$

Il en découle que

$$\|\nabla_{\mathcal{D}}\eta_{\mathcal{D}}^J\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{n=0}^{J-1} k \|\nabla_{\mathcal{D}}\eta_{\mathcal{D}}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + C(h_{\mathcal{D}} + k)^2 \|u\|_{\mathcal{C}^2([0,T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))}^2 \quad (\text{V.41})$$

et

$$\sum_{n=0}^N k \|\partial^1 \Pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{D}}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{n=0}^{N-1} k \|\nabla_{\mathcal{D}}\eta_{\mathcal{D}}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + C(h_{\mathcal{D}} + k)^2 \|u\|_{\mathcal{C}^2([0,T]; \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))}^2. \quad (\text{V.42})$$

L'utilisation d'une forme discrète du lemme de Gronwall avec le fait que  $\sum_{n=0}^{N-1} k \leq T$ , (V.41) implique que, pour tout  $J \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\|\nabla_{\mathcal{D}} \eta_{\mathcal{D}}^J\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(h_{\mathcal{D}} + k)^2 \|u\|_{C^2([0, T]; C^2(\bar{\Omega}))}^2. \quad (\text{V.43})$$

En utilisant cette estimation, (V.42) il s'ensuit que

$$\sum_{n=0}^N k \|\partial^1 \Pi_{\mathcal{M}} \eta_{\mathcal{D}}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(h_{\mathcal{D}} + k)^2 \|u\|_{C^2([0, T]; C^2(\bar{\Omega}))}^2. \quad (\text{V.44})$$

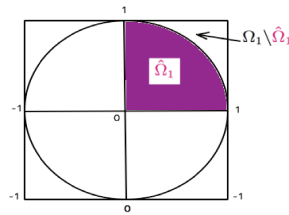
En utilisant maintenant l'inégalité du triangle, (V.31)-(V.32), et (V.43)-(V.44) fournissent les estimations souhaitées (V.10)-(V.11) du théorème 8.

## 9 Démonstration de $H = r^\alpha (a_i \cos(\alpha\theta) + b_i \sin(\alpha\theta)) \in H^1(\Omega)$

Considérons une fonction  $H$  définie sur  $\Omega$  par  $H = r^\alpha (a_i \cos(\alpha\theta) + b_i \sin(\alpha\theta))$  en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\theta = \arctan(y/x)$ ) sur  $\Omega_i$  avec  $\bigcup_{i=1}^4 \Omega_i = \Omega$ . Avec  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  et  $\alpha < 1$ .

Justifions que si  $a_i, b_i$  sont choisis tels que  $H \in C(\Omega)$  alors  $H \in H^1(\Omega)$ .

Pour cette raison, on applique le Théorème 4. Il suffit alors de justifier que  $H \in H^1(\Omega_i)$  pour  $i = 1, \dots, 4$ . Comme  $H$  est une combinaison linéaire de  $\varphi(r, \theta) = r^\alpha \sin(\alpha\theta)$ , il suffit que  $\varphi \in H^1(\Omega_i)$ .



**Figure V.1** – Les différents sous-domaines  $\Omega_i$

On prend le domaine  $\Omega_1$ ,  $\varphi \in C(\Omega_1)$  implique que  $\varphi \in L^2(\Omega_1)$ . En effet:

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega_1)}^2 = \int \int_{\Omega_1} \varphi^2 \, dx dy = \int \int_{\hat{\Omega}_1} \varphi^2 \, dx dy + \int \int_{\Omega_1 \setminus \hat{\Omega}_1} \varphi^2 \, dx dy$$

On a  $\int \int_{\Omega_1 \setminus \hat{\Omega}_1} \varphi^2 \, dx dy < \infty$  car  $\varphi$  est une fonction continue.

Sur  $\hat{\Omega}_1$ , on a:  $0 < x = r \cos(\theta) < 1$  et  $0 < y = r \sin(\theta) < 1$

$$\begin{aligned} \int \int_{\hat{\Omega}_1} \varphi^2 \, dx dy &= \int \int_{\hat{\Omega}_1} r^{2\alpha} \sin^2(\alpha\theta) \, dx dy \leq \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2\alpha} \, r dr d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{(2\alpha+1)} \, dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^{(2\alpha+1)} \, dr \leq \infty \end{aligned}$$

**Conclusion:**  $\int \int_{\Omega_1} \varphi^2 \, dx dy < \infty$ . Il en découle que  $\varphi \in L^2(\Omega)$

On a  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \alpha r^{(\alpha-1)} \sin(\alpha\theta) \\ \frac{\partial r}{\partial x} = \cos(\theta) \end{cases} ; \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \alpha r^\alpha \cos(\alpha\theta) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin(\theta)}{r} \end{cases}$$

Donc  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha r^{(\alpha-1)} \sin(\theta(\alpha - 1))$

De même, on a  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \alpha r^{(\alpha-1)} \sin(\alpha\theta) \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin(\theta) \end{cases} ; \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \alpha r^\alpha \cos(\alpha\theta) \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos(\theta)}{r} \end{cases}$$

Donc  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha r^{(\alpha-1)} \cos(\theta(\alpha - 1))$ .

Finalemment:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega_1} |\nabla \varphi|^2 \, dx dy &= \int \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \, dx dy \\ &= \int \int_{\Omega_1} \alpha^2 r^{2(\alpha-1)} \left( \sin(\theta(\alpha - 1)) + \cos(\theta(\alpha - 1)) \right)^2 \, dx dy \\ &= \alpha^2 \int \int_{\Omega_1} r^{2(\alpha-1)} \left( 1 + 2 \sin(2(\alpha - 1)\theta) \right) \, dx dy \\ &= \alpha^2 \int \int_{\hat{\Omega}_1} r^{2(\alpha-1)} \left( 1 + 2 \sin(2(\alpha - 1)\theta) \right) \, dx dy \\ &+ \alpha^2 \int \int_{\Omega_1 \setminus \hat{\Omega}_1} r^{2(\alpha-1)} \left( 1 + 2 \sin(2(\alpha - 1)\theta) \right) \, dx dy \end{aligned}$$



Sur  $\Omega_1 \setminus \hat{\Omega}_1$ , la fonction  $(r, \theta) \longrightarrow r^{2(\alpha-1)}(1 + 2 \sin(2(\alpha-1)\theta))$  est bornée comme  $r > 1$ .

Donc,  $\alpha^2 \int \int_{\Omega_1 \setminus \hat{\Omega}_1} r^{2(\alpha-1)}(1 + 2 \sin(2(\alpha-1)\theta)) \, dx dy \leq 3\alpha^2$

D'où,  $\alpha^2 \int \int_{\Omega_1 \setminus \hat{\Omega}_1} r^{2(\alpha-1)}(1 + 2 \sin(2(\alpha-1)\theta)) \, dx dy < \infty$

Sur  $\hat{\Omega}_1$ , on a:  $\alpha^2 \int \int_{\Omega_1} r^{2(\alpha-1)}(1 + 2 \sin(2(\alpha-1)\theta)) \, dx dy \leq 3\alpha^2 \int \int_{\Omega_1} r^{2(\alpha-1)} \, dx dy$

$$\begin{aligned} &\leq 3\alpha^2 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2(\alpha-1)} \, r dr d\theta \\ &= 3\alpha^2 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2\alpha-1} \, dr d\theta \\ &= \frac{3}{2} \pi \alpha^2 \int_0^1 r^{2\alpha-1} \, dr \\ &= \frac{3}{4} \pi \alpha < \infty \end{aligned}$$

Donc,  $\int \int_{\Omega_1} |\nabla \varphi|^2 \, dx dy < \infty$ . Les constantes  $a_i$  et  $b_i$  sont calculées telles que la fonction  $H$  soit continue sur  $\Omega$ . De la même façon, on justifie que  $\varphi = r^\alpha \sin(\alpha\theta) \in H^1(\Omega_i), i = 1, \dots, 4$ . Donc d'après le théorème 4, on affirme que  $H \in H^1(\Omega)$ .

## 10 Construction de matrice de rigidité et celle de masse

Dans le triangle  $T_k$ , on renomme localement  $S_1, S_2$ , et  $S_3$  ses sommets et on note  $(x_k, y_k)$  les coordonnées de  $S_k$ . On considère sur  $T_k$  la fonction polynomiale de degré 1  $p$  qui vaut  $p_1$  en  $S_1$ ,  $p_2$  en  $S_2$ ,  $p_3$  en  $S_3$ . Sur chaque triangle  $T_k$ ,  $p$  s'écrit donc sous la forme:  $p(x, y) = ax + by + c$  et on a:  $p_1 = ax_1 + by_1 + c$ ;  $p_2 = ax_2 + by_2 + c$  et  $p_3 = ax_3 + by_3 + c$ .

Ce système de trois équations à trois inconnues nous permet donc d'avoir une formule analytique pour le gradient de  $p$ :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = a = -\frac{p_1}{\gamma}(y_2 - y_3) + \frac{p_2}{\gamma}(y_1 - y_3) - \frac{p_3}{\gamma}(y_1 - y_2) \quad (\text{V.45})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = b = p_1 \frac{(\gamma + (x_1 - x_2)(y_2 - y_3))}{\gamma(y_1 - y_2)} - p_2 \frac{(\gamma + (y_1 - y_3)(x_1 - x_2))}{\gamma(y_1 - y_2)} + p_3 \frac{(x_1 - x_2)}{\gamma} \quad (\text{V.46})$$

$$\text{Avec: } \gamma = (x_2 - x_3)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) \quad (\text{V.47})$$

$y_1$  pouvant être égal à  $y_2$  (si  $S_1$  et  $S_2$  sont sur le bord d'un carré par exemple), on choisira alors

$$b = p_1 \frac{(x_1 - x_2)}{\gamma} + p_2 \frac{(\gamma - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3))}{\gamma(y_2 - y_3)} + p_3 \frac{(-\gamma + (y_1 - y_2)(x_2 - x_3))}{\gamma(y_2 - y_3)} \quad (\text{V.48})$$

---

On pose alors:  $\alpha_1 = -\frac{y_2 - y_3}{\gamma}$ ;  $\alpha_2 = \frac{y_1 - y_2}{\gamma}$ ;  $\alpha_3 = -\frac{(y_1 - y_2)}{\gamma}$   
 $\beta_1 = \frac{\gamma + (x_1 - x_2)(y_2 - y_3)}{\gamma(y_1 - y_2)}$ ;  $\beta_2 = \frac{\gamma + (x_1 - x_2)(y_1 - y_3)}{\gamma(y_1 - y_2)}$ ;  $\beta_3 = \frac{\gamma(x_1 - x_2)}{\gamma}$  si  $y_1 \neq y_2$   
 $\beta_1 = \frac{(x_1 - x_2)}{\gamma}$ ;  $\beta_2 = \frac{\gamma - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)}{\gamma(y_2 - y_3)}$ ;  $\beta_3 = \frac{-\gamma + (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)}{\gamma(y_2 - y_3)}$  Sinon  
Ainsi,

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 \\ \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 \end{pmatrix} \quad (\text{V.49})$$

Sur  $T_k$ ,  $p$  étant  $P_1$ ,  $\nabla p$  est constant, et  $\mathcal{V}_k$  l'ensemble des triangles ayant  $S_k$  comme sommet.

$$\begin{aligned} & - \sum_{T_k \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset} \int_{M_{12,k} B} \mathbb{K}_k \nabla p \cdot \vec{n}_{12,k} d\sigma - \sum_{T_k \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset} \int_{M_{13,k} B} \mathbb{K}_k \nabla p \cdot \vec{n}_{13,k} d\sigma = \\ & - \sum_{T_k \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset} \mathbb{K}_k \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \cdot (\vec{n}_{12,k} \|M_{12,k} B\| + \vec{n}_{13,k} \|M_{13,k} B\|) \end{aligned}$$

D'où en posant  $L_{pq,k} = \|M_{pq,k} B\|$  (longueur du segment) et  $\vec{n}_{12,k} = \mathbb{K}_k \cdot (n_{12,k}^x, n_{12,k}^y)$

$$\begin{aligned} & - \sum_{T_k \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset} \int_{M_{12,k} B} \mathbb{K}_k \nabla p \cdot \vec{n}_{12,k} d\sigma - \sum_{T_k \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset} \int_{M_{13,k} B} \mathbb{K}_k \nabla p \cdot \vec{n}_{13,k} d\sigma = \\ & - \sum_{T_k \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset} (\alpha_{1,k} p_{1,k} + \alpha_{2,k} p_{2,k} + \alpha_{3,k} p_{3,k}) (n_{12,k}^x L_{12,k} + n_{13,k}^x L_{13,k}) \\ & - \sum_{T_k \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset} (\beta_{1,k} p_{3,k} + \beta_{2,k} p_{2,k} + \beta_{3,k} p_{3,k}) (n_{12,k}^y L_{12,k} + n_{13,k}^y L_{13,k}) \end{aligned}$$

Voulant résoudre un système linéaire, on réécrit la dernière égalité sous la forme:

$$\begin{aligned} & - \sum_{T_k \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset} \mathbb{K}_k \begin{pmatrix} a_k \\ p_{1,k} b_k \end{pmatrix} \cdot (\vec{n}_{12,k} \|M_{12,k} B\| + \vec{n}_{13,k} \|M_{13,k} B\|) = \\ & - \sum_{T_k \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset} p_{1,k} (\alpha_{1,k} (n_{12,k}^x L_{12,k} + n_{13,k}^x L_{13,k}) + \beta_{1,k} (n_{12,k}^y L_{12,k} + n_{13,k}^y L_{13,k})) \\ & - \sum_{T_k \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset} p_{2,k} (\alpha_{2,k} (n_{12,k}^x L_{12,k} + n_{13,k}^x L_{13,k}) + \beta_{2,k} (n_{12,k}^y L_{12,k} + n_{13,k}^y L_{13,k})) \\ & - \sum_{T_k \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset} p_{3,k} (\alpha_{3,k} (n_{12,k}^x L_{12,k} + n_{13,k}^x L_{13,k}) + \beta_{3,k} (n_{12,k}^y L_{12,k} + n_{13,k}^y L_{13,k})) \end{aligned}$$

La dernière égalité nous permet donc de construire la matrice du système: chaque ligne de la matrice sera associée à un sommet  $S_k$  du maillage. A la  $k$ -ième ligne de la matrice, il y aura donc une contribution de tous les sommets des triangles ayant  $S_k$  comme sommet.

## 10.1 Algorithme d'implémentation de la matrice de rigidité

**Pour**  $i = 0$  à nombre de triangle **Faire**

Calcul des coordonnées de  $M_{12,k}$ ,  $M_{13,k}$  et  $M_{23,k}$  milieux respectifs de  $[S_1 S_2]$ ,  $[S_1 S_3]$  et  $[S_2 S_3]$ .

---

Calcul des coordonnées des vecteurs  $\vec{n}_{12}$ ,  $\vec{n}_{13}$  et  $\vec{n}_{23}$ .

Multiplication des vecteurs normaux obtenus par la perméabilité.

Calcul de  $L_{12} = \|\text{BM}_{12,k}\|$ ,  $L_{13} = \|\text{BM}_{13,k}\|$  et  $L_{23} = \|\text{BM}_{23,k}\|$ .

Construction de la matrice de rigidité:

$$R(S_1, S_1) \leftarrow R(S_1, S_1) + (\alpha_1(n_{12}^x L_{12} + n_{13}^x L_{13}) + \beta_1(n_{12}^y L_{12} + n_{13}^y L_{13})).$$

$$R(S_1, S_2) \leftarrow R(S_1, S_2) + (\alpha_2(n_{12}^x L_{12} + n_{13}^x L_{13}) + \beta_2(n_{12}^y L_{12} + n_{13}^y L_{13})).$$

$$R(S_1, S_3) \leftarrow R(S_1, S_3) + (\alpha_3(n_{12}^x L_{12} + n_{13}^x L_{13}) + \beta_3(n_{12}^y L_{12} + n_{13}^y L_{13})).$$

$$R(S_2, S_1) \leftarrow R(S_2, S_1) + (\alpha_1(n_{23}^x L_{23} - n_{12}^x L_{12}) + \beta_1(n_{23}^y L_{12} - n_{12}^y L_{12})).$$

$$R(S_2, S_2) \leftarrow R(S_2, S_2) + (\alpha_2(n_{23}^x L_{23} + n_{12}^x L_{12}) + \beta_2(n_{23}^y L_{12} - n_{12}^y L_{12})).$$

$$R(S_2, S_3) \leftarrow R(S_2, S_3) + (\alpha_3(n_{23}^x L_{23} + n_{12}^x L_{12}) + \beta_3(n_{23}^y L_{12} - n_{12}^y L_{12})).$$

$$R(S_3, S_1) \leftarrow R(S_3, S_1) + (\alpha_1(-n_{13}^x L_{13} - n_{23}^x L_{23}) + \beta_1(-n_{13}^y L_{13} - n_{23}^y L_{23})).$$

$$R(S_3, S_2) \leftarrow R(S_3, S_2) + (\alpha_2(-n_{13}^x L_{13} - n_{23}^x L_{23}) + \beta_2(-n_{13}^y L_{13} - n_{23}^y L_{23})).$$

$$R(S_3, S_3) \leftarrow R(S_3, S_3) + (\alpha_3(-n_{13}^x L_{13} - n_{23}^x L_{23}) + \beta_3(-n_{13}^y L_{13} - n_{23}^y L_{23})).$$

Calcul de  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  et  $\mathcal{A}_3$ , aires respectives de  $S_1 M_{12,k} \text{BM}_{23,k}$ ,  $S_2 M_{23,k} \text{BM}_{12,k}$  et  $S_3 M_{13,k} \text{BM}_{23,k}$ .

**Fin pour**

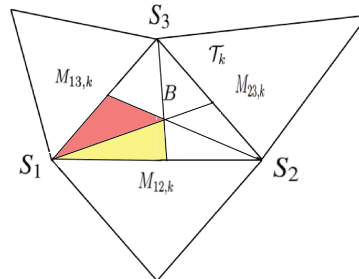
Construction du second membre:

**Pour**  $i = 0$  à nombre de nœuds **Faire**

$$B(i) \leftarrow A(i) \times f(x_i, y_i)$$

**Fin pour**

## 10.2 Matrice de masse



**Figure V.2** – Matrice de masse

---


$$\int_{D_h} p \, dv = \sum_{T_k \cap D_h \neq \emptyset} \left( \int_{D_h \cap T_k} p \, dv \right) = \sum_{T_k \cap D_h \neq \emptyset} \left( \int_{S_1 M_{12,k} B} p \, dv + \int_{S_1 B M_{13,k}} p \, dv \right)$$

Au point  $M_{12,k}$  on a:  $p(M_{12,k}) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ , au point B:  $p(B) = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$ .

Ensuite, on applique la formule de quadrature (III.16). Alors, on obtient:

$$\int_{S_1 M_{12,k} B} p \, dv = \frac{1}{3} |S_1 M_{12,k} B| \left( \frac{11}{6} p_1 + \frac{5}{6} p_2 + \frac{1}{3} p_3 \right)$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{S_1 S_{M_{12,k}}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{S_1 S_2}; \quad \overrightarrow{S_1 B} = \frac{2}{3} \overrightarrow{S_1 S_{M_{23,k}}}, \text{ donc } \overrightarrow{S_1 S_{M_{23,k}}} = \overrightarrow{S_1 S_3} + \frac{1}{2} \overrightarrow{S_3 S_2}.$$

$$\text{Ce qui implique: } |S_1 M_{12,k} B| = \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{2} \overrightarrow{S_1 S_2} \wedge \frac{2}{3} (\overrightarrow{S_1 S_3} + \frac{1}{2} \overrightarrow{S_3 S_2}) \right\| = \frac{1}{12} \left\| \overrightarrow{S_1 S_2} \wedge \overrightarrow{S_3 S_2} \right\| = \frac{1}{6} |T_k|$$

$$\text{Alors } \int_{S_1 M_{12,k} B} p \, dv = \frac{1}{18} |T_k| \left( \frac{11}{6} p_1 + \frac{5}{6} p_2 + \frac{1}{3} p_3 \right)$$

$$\text{De même pour l'autre intégrale on a: } \int_{S_1 B M_{13,k}} p \, dv = \frac{1}{3} |S_1 B M_{13,k}| \left( \frac{11}{6} p_1 + \frac{5}{6} p_2 + \frac{1}{3} p_3 \right)$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{S_1 S_{M_{13,k}}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{S_1 S_3} \text{ donc on a:}$$

$$|S_1 B M_{13,k}| = \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{2} \overrightarrow{S_1 S_3} \wedge \frac{2}{3} (\overrightarrow{S_1 S_3} + \frac{1}{2} \overrightarrow{S_3 S_2}) \right\| = \frac{1}{12} \left\| \overrightarrow{S_1 S_3} \wedge \overrightarrow{S_3 S_2} \right\| = \frac{1}{6} |T_k|$$

$$\text{D'où } \int_{S_1 B M_{13,k}} p \, dv = \frac{1}{18} |T_k| \left( \frac{11}{6} p_1 + \frac{1}{3} p_2 + \frac{5}{6} p_3 \right)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \int_{S_1 M_{12,k} B} p \, dv + \int_{S_1 B M_{13,k}} p \, dv &= \frac{1}{18} |T_k| \left( \frac{11}{6} p_1 + \frac{5}{6} p_2 + \frac{1}{3} p_3 \right) + \frac{1}{18} |T_k| \left( \frac{11}{6} p_1 + \frac{1}{3} p_2 + \frac{5}{6} p_3 \right) \\ &= \frac{1}{9} |T_k| \left( \frac{11}{3} p_1 + \frac{7}{6} p_2 + \frac{7}{6} p_3 \right) \end{aligned}$$

Ceci nous permet donc de construire la matrice de masse du système.

---

---

## Références bibliographiques

- [1] Bradji, A., Fuhrmann, J. Some abstract error estimates of a finite volume scheme for a nonstationary heat equation on general nonconforming multidimensional spatial meshes. *Appl. Math.* 58/1, 1-38 (2013). [144](#)
- [2] Eymard, R., Gallouët, T., Herbin, R. Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes. *IMA J. Numer. Anal.* 30/4, 1009-1043 (2010). [143](#), [144](#), [145](#)

---

