Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS

Sylvain Martinez-Ibanez

▶ **To cite this version:**

Sylvain Martinez-Ibanez. Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS. Education. Université Sorbonne Paris Cité, 2018. Français. NNT : 2018USPCB145 . tel-02524942v1

HAL Id: tel-02524942

https://theses.hal.science/tel-02524942v1

Submitted on 30 Mar 2020 (v1), last revised 7 Apr 2020 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MEMBRE DE

USPC
Université Sorbonne
Paris Cité

Université Paris Descartes

Membre de l'Université Paris Sorbonne Cité

École doctorale « Sciences humaines et sociales : cultures, individus, sociétés » (ED 180)

Laboratoire « Education, discours, apprentissages » (EA 4071)

THÈSE DE DOCTORAT

pour l'obtention du grade de

docteur en sciences de l'éducation de l'Université Paris Descartes

Spécialité : didactique des mathématiques

Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS

Présentée et soutenue publiquement par

Sylvain MARTINEZ-IBANEZ

Le 30 novembre 2018

Sous la direction d'Éric RODITI

Devant un jury composé de :

Mme Lalina COULANGE	Professeure des universités	Rapporteur
M. Jean-Luc DORIER	Professeur ordinaire	Rapporteur
Mme Cécile ALLARD	Maitresse de conférences	Examinateur
Mme Magali HERSANT	Professeure des universités	Examinateur
M. Éric RODITI	Professeur des universités	Directeur

RÉSUMÉ

Résumé

Cette thèse propose une analyse comparative de la transposition didactique externe du concept de fraction, en croisant, d'une part, les savoirs élaborés par les didacticiens dans ce domaine, et d'autre part, le contenu des programmes d'enseignement, et cela pour onze territoires, répartis dans trois zones géographiques (l'Amérique du Nord, l'Europe de l'Ouest et l'Asie du Sud-Est). Cette analyse est utilisée pour tenter de déterminer comment les savoirs à enseigner, entendus dans leurs composantes topogénétiques et chronogénétiques, sont corrélés aux performances des élèves aux évaluations internationales TIMSS, en particulier dans les tests de quatrième année pour l'année 2015 auxquels la France a participé. Elle s'appuie sur la théorie anthropologique du didactique pour établir comment les contraintes définies par les auteurs des programmes au niveau sociétal de l'échelle de codétermination didactique déterminent la diffusion des praxéologies relatives aux fractions. Ce cadre fournit également les outils d'examen des items, dont le contenu est étudié en fonction des organisations mathématiques mises en jeu. La pertinence de cette approche didactique des faits d'évaluation est comparée à l'analyse cognitive de ces mêmes faits réalisée par les auteurs de TIMSS, et la capacité des élèves à réussir différents types de tâches lorsque aucun enseignement n'est prescrit est discutée. En outre, l'inscription de la transposition didactique dans le contexte du système scolaire et de la société a également été prise en compte pour comprendre les résultats des élèves. Les déclarations de ces derniers, des parents et des enseignants à propos de l'enseignement des mathématiques en général, et des fractions en particulier, issues des questionnaires proposés par les auteurs de TIMSS, ont été analysées, ce qui a permis la mise au jour de caractéristiques spécifiques des systèmes didactiques étudiés, et d'une relation entre ces caractéristiques, le contenu des programmes scolaires et les performances des élèves.

Mots-clés

Comparaisons internationales, didactique des mathématiques, fractions, programmes d'enseignement, TIMSS, transposition didactique.

Title

External Didactic Transposition and Mastering the Concept of Fractions: An International Comparison of Eleven TIMSS Participants.

Abstract

This thesis provides an analysis of the external didactic transposition of the concept of fractions by comparing the knowledge that has been generated from researchers in this field with the contents of teaching programs in eleven territories across three geographical areas (North America, Western Europe, Southeast Asia). This study is used as a means to determine how knowledge that is taught in schools, in its topogenetic and chronogenetic aspects, correlates to student performance in the international TIMSS evaluations, in particular in the fourth year tests for which France was a participant in 2015. It draws upon the anthropological theory of didactics to establish how constraints that have been defined by the authors of programs at the societal level of the didactic codetermination scale influence the dissemination of fractions-related praxeologies. This research framework also provides the appropriate tools to examine TIMSS items by considering the knowledge, techniques, and tasks required by students for success. To understand which approach better explains student results, the didactic approach has been compared with the cognitive analysis carried out by the TIMSS authors for these assessments. In addition, didactic transposition, in the context of school systems and society, has also been taken into consideration as a way to better understand student outcomes. Analysis of student, parent and teacher input about mathematics education in general, and fractions in particular, from the questionnaires proposed by the TIMSS authors, has led to the identification of specific characteristics of these educational systems and the relationship of these characteristics to the content of school curricula and student performance.

Keywords

Curriculum, didactics of mathematics, didactic transposition, fractions, international comparisons, TIMSS.

REMERCIEMENTS

Je tiens à à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Eric Roditi, pour la bienveillance avec laquelle il a su m'accompagner durant les sept années qui viennent de s'écouler. Réaliser ce travail de de recherche sous sa direction aura été non seulement stimulant et fructueux d'un point de vue intellectuel, mais également enrichissant et bénéfique d'un point de vue humain. Savoir la porte de son bureau toujours ouverte pour évoquer une question didactique pointue ou un doute métaphysique plus profond aura été d'un grand confort, et la passion qu'il porte à l'enseignement des mathématiques constituera immanquablement un modèle pour la suite de ma carrière professionnelle. Sans sa présence attentive, cette étude n'aurait certainement jamais abouti.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Mme Lalina Coulange, à M. Jean-Luc Dorier, Mme Magali Hersant et Mme Cécile Allard pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir siéger dans mon jury de thèse. Qu'ils aient accepté de se pencher sur ce travail de recherche est une source de joie, mêlée au poids de la responsabilité de me montrer à la hauteur de leurs attentes. Je voudrais dire également toute ma reconnaissance aux personnes qui ont contribué à l'achèvement de ce travail, en me permettant d'accéder à des documents ou des données difficiles d'accès. Je pense notamment au personnel de la direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance, et à celui du Centre d'études internationales TIMSS & PIRLS, qui ont toujours répondu avec célérité et précision à mes requêtes.

Un grand merci également à toute l'équipe du laboratoire, au secrétariat de l'école doctorale, et à Jérôme Brocheriou en particulier, pour son aide précieuse, chaque année, lorsqu'il s'est agi de renouveler mon inscription ou de naviguer dans les méandres des contraintes administratives. Je n'oublie pas l'ensemble des doctorants avec lesquels j'ai pu échanger tout au long des séminaires auxquels nous participions, pour certains après leur journée de travail. Ces moments étaient toujours l'occasion de trouver un nouveau souffle, lorsque les idées venaient à manquer, ou lorsque la motivation commençait à fléchir. Encore une fois, sans ces personnes, ce travail n'aurait jamais pu être achevé.

Je voudrais également mettre en lumière la contribution de mes proches dans le dénouement heureux que constitue la présentation de cette recherche. Leur soutien sans faille m'aura permis de surmonter les périodes les plus difficiles, en particulier l'instant doux-amer où l'on prend la mesure de la somme de travail à laquelle on s'est engagé. Relecteurs inlassables, curieux de mon objet de recherche, ils ont formé un point d'appui indéfectible pendant toutes ces années. Je me rappelle en particulier un jour de départ en vacances où, assis côté passager, je continuais à coder les résultats obtenus par les élèves aux évaluations TIMSS, pestant contre un virage un peu trop serré ou un freinage un peu trop brutal, sous l'œil moqueur de l'ensemble de la famille. La fierté et le bonheur que j'éprouve à partager cette recherche, je les leur dois.

Par ailleurs, comment ne pas avoir un mot pour le personnel de l'école dans laquelle j'enseigne depuis si longtemps ? Les discussions que nous y avons eues ont nourri mon envie d'approfondir la question didactique, et se trouvent à l'origine de cette étude. Les interrogations des élèves, leur manière parfois originale d'aborder les exercices, leur soif de comprendre les mathématiques, ont formé le carburant intarissable de notre réflexion. Notre pratique professionnelle quotidienne a alimenté le sentiment que les séances que nous élaborions étaient perfectibles et nous ont poussé à tenter de découvrir de nouvelles voies. S'il ne s'était pas trouvé un chef d'établissement et des collègues susceptibles de nous permettre de les explorer, nul doute que cette recherche n'aurait même pas débuté.

Avec une pointe d'humour, je souhaiterais remercier tous ceux qui ont contribué à l'émergence du réseau Internet, ainsi que ceux qui participent à son bon fonctionnement. Il nous faut reconnaitre que, sans cet outil, une telle étude, parce qu'elle étend ses ramifications dans des pays si éloignés les uns des autres, n'aurait pas pu voir le jour. S'il participe à une simplification de la vie quotidienne, il transforme aussi la vie du chercheur, lui permettant d'accéder à une masse de données considérable, et facilitant le partage de ses travaux. Quel bonheur de pouvoir, en l'espace de quelques instants, consulter les instructions officielles en vigueur à Singapour ou en Floride !

AVERTISSEMENTS

Cette thèse a été écrite en suivant les recommandations du Conseil supérieur de la langue française du 6 décembre 1990, relatives aux « Rectifications de l'orthographe » (*Journal officiel de la République française, édition des documents administratifs*, n° 100). Pour prendre un exemple, nous écrirons « curriculums », plutôt que « curricula », puisque les noms d'origine étrangère doivent avoir un singulier et un pluriel réguliers. De même, nous écrirons « transparait » au lieu de « transparaît », au présent de l'indicatif, à la troisième personne du singulier, puisque l'accent circonflexe ne doit être placé sur le « i » qu'en cas d'homophonie ou pour les formes verbales du passé simple, de l'imparfait du subjonctif et du plus-que-parfait du subjonctif.

Toutes les données numériques fournies par le bureau TIMSS& PIRLS (en particulier le pourcentage de réussite des participants à chaque item) ont été arrondies au dixième près par les auteurs. Sauf mention contraire, nous avons décidé de nous conformer à cet usage, en arrondissant toutes les données issues de nos calculs au dixième près.

Certains développements de cette thèse auraient pu être placés dans les annexes. Afin de faciliter la lecture des résultats et de permettre une discussion sur les choix délicats opérés à propos de l'interprétation de tel ou tel élément des programmes, nous avons choisi de les intégrer dans le corps du texte, au risque de l'allonger considérablement. Pour permettre au lecteur de faire la différence entre les développements qui constituent le cœur de notre recherche, et ceux qui viennent au soutien de notre argumentation, nous avons signalé ces derniers par une bordure en pointillés à droite du texte. Les critères nous permettant de distinguer les uns et les autres seront précisés dans l'introduction. Sans ces développements annexes, la thèse est constituée de 432 pages.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 1

PARTIE I. LA TRANSPOSITION EXTERNE DU CONCEPT DE FRACTION 19

TITRE I. CADRES THÉORIQUES DE L'ÉTUDE 21

Chapitre I. Une approche anthropologique 23

Chapitre II. Une approche didactique 87

TITRE II. RÉSULTATS DE L'ÉTUDE 147

Chapitre I. Topogénèse des programmes d'enseignement 149

Chapitre II. Chronogénèse des programmes d'enseignement 227

PARTIE II. LES RÉSULTATS DES ÉLÈVES AUX ÉVALUATIONS TIMSS 317

TITRE I. PORTÉE DE L'ÉTUDE 321

Chapitre I. Les aspects qualitatifs de la transposition interne 323

Chapitre II. Les aspects quantitatifs de la transposition interne 379

TITRE II. RÉSULTATS DE L'ÉTUDE 457

Chapitre I. Le lien entre les programmes et les acquis des élèves 459

Chapitre II. Les limites du lien entre les programmes et les acquis des élèves 521

CONCLUSION GÉNÉRALE 601

SOURCES 619

BIBLIOGRAPHIE 627

TABLE DES ILLUSTRATIONS 641

TABLE DES MATIÈRES 651

ANNEXES 661

INTRODUCTION

> « Des ailes, un autre appareil respiratoire, et qui nous permissent de traverser l'immensité, ne nous serviraient à rien. Car si nous allions dans Mars et dans Vénus en gardant les mêmes sens, ils revêtiraient du même aspect que les choses de la Terre tout ce que nous pourrions voir. Le seul véritable voyage, le seul bain de Jouvence, ce ne serait pas d'aller vers de nouveaux paysages, mais d'avoir d'autres yeux, de voir l'univers avec les yeux d'un autre, de cent autres, de voir les cent univers que chacun d'eux voit, que chacun d'eux est […]. »
>
> Marcel PROUST, *À la recherche du temps perdu, Tome III, La Prisonnière*, éditions Gallimard, 1988, p. 762.

Cette image poétique, reflétant si profondément l'œuvre proustienne, suppose que la rencontre avec de nouveaux objets est moins féconde qu'une modification de l'angle de vue avec lequel on peut aborder un objet qui nous est familier. Autrement dit, nul besoin de parcourir le monde pour trouver l'inspiration ; une personne, un paysage contiennent à eux seuls la matière suffisante pour écrire un livre, pour peu que l'on soit capable d'y voir la multitude des facettes qu'ils recouvrent. L'exhaustivité dans ce domaine semble d'ailleurs un graal inaccessible aux yeux de l'auteur : un même individu ne saurait embrasser l'ensemble des aspects potentiellement dégagés par un objet. Le chantier est trop vaste et le cerveau humain trop étroit. Chacun ne peut rendre compte, à travers ce qu'il est, que d'une vision unique parmi une infinité. Cette réflexion, utilisée à l'orgine pour évoquer le travail de l'écrivain, n'est-elle pas transposable à la didactique ? En effet, si « l'artiste […] a pour démarche essentielle de transmettre, par son art, une vision intime et singulière qu'il a du monde » (Jean Milly, in Tverdota, 1995, p. 186), de même le didacticien n'a-t-il pas pour mission de préciser comment, selon lui, une notion mathématique peut trouver des applications dans les classes, être enseignée et reliée à d'autres concepts ? Alors, combinant les points de vue de chacun, nous pourrions

aller plus avant dans la description d'un certain paysage didactique. Néanmoins, pour que l'on puisse continuer à filer la métaphore, il faut que la matière scientifique soit, à l'instar de la matière poétique, plurivoque. Or, on a tendance à penser qu'il existe une vérité scientifique unique, alors que la sensibilité face au monde serait spécifique à chacun d'entre nous. Prenant l'exemple des fractions, nous allons montrer que, en ce qui concerne la didactique des mathématiques, la définition d'un concept peut faire l'objet de multiples interprétations, chacune venant enrichir la compréhension que nous en avons.

Le choix des fractions comme sujet d'étude trouve son origine dans la lecture d'une recherche longitudinale récente (Siegler *et al.*, 2012). Celle-ci a montré que les fractions et la division étaient, parmi plusieurs autres thèmes testés en cinquième année d'enseignement obligatoire, le mieux corrélé à la maitrise de l'algèbre, et plus largement à la réussite en mathématiques des étudiants cinq ou six ans plus tard. Cette étude portait sur un panel de 4 276 élèves anglais et américains, et les auteurs ont conclu que la maitrise des fractions et de la division permettait davantage de prédire les résultats futurs des élèves en mathématiques, non seulement en comparaison avec d'autres champ des mathématiques (addition, soustraction ou multiplication), mais également par rapport aux capacités intellectuelles générales des sujets, à leur mémoire de travail, à l'éducation et aux revenus familiaux. Cette relation entre la maitrise du partage en parts égales et la compréhension ultérieure de l'algèbre ne semble pas due au fait que ces deux thèmes présentent un niveau de difficulté élevé relativement à l'âge des élèves (les élèves les plus capables à un âge précoce seraient alors aussi les plus capables à la fin de l'adolescence), mais à l'importance de la maitrise de ce concept pour réaliser les acquisitions proposées à un stade ultérieur de la scolarité. En conséquence, une meilleure appréhension de la notion de fraction dès l'école élémentaire devrait permettre aux élèves de montrer une plus grande aisance dans les apprentissages mathématiques de l'enseignement secondaire et universitaire. C'est pourquoi les auteurs de l'article parviennent à la conclusion que « la maitrise des fractions et de la division est requise si des améliorations substantielles veulent être réalisées dans la compréhension de l'algèbre et d'autres aspects des mathématiques universitaires »[1] (*ibid.*, p. 696). Cette idée que les fractions jouent un rôle important dans la réussite scolaire est l'une des raisons qui nous ont conduit à choisir le thème des fractions,

1. La traduction des programmes ou des articles publiés en langue anglaise est de notre fait.

quand bien même la question plus large de l'apprentissage des nombres rationnels pourra être évoquée dans notre travail.

En outre, les fractions continuent de poser des difficultés aux élèves, malgré les nombreux travaux publiés sur ce sujet. Cette difficulté, nous l'avons observée dans notre pratique de professeur des écoles, et elle nous a été confirmée par la lecture des résultats des élèves français dans ce domaine aux évaluations internationales. Aux tests *Trends in International Mathematics and Science Study*[1] 2015, sur l'ensemble des quatorze questions destinées aux élèves de quatrième année impliquant des fractions, le taux de réussite moyen des élèves français s'élève à 36,7 %, avec un écart-type de 17,9 points de pourcentage. À titre d'exemple, le taux de réussite des élèves nord-irlandais est de 64,9 %, avec un écart-type de 17,6 points de pourcentage.

Cependant, cette faiblesse de la performance des élèves français aux évaluations TIMSS ne se rencontre pas seulement à propos des items relatifs aux fractions. Leur performance globale en mathématiques se situe en-dessous de la moyenne des pays participants (qui se trouve toujours fixée à 500), puisque la France obtient un score de 488. Certes, la France n'a participé que deux fois aux évaluations TIMSS (en 1995 et en 2015), ce qui ne permet pas de déterminer s'il s'agit d'une contre-performance circonstancielle ou d'une difficulté durable. Cependant, il nous semble nécessaire de rechercher de manière approfondie les raisons qui peuvent expliquer ce résultat, qui est le plus faible des 26 pays de l'OCDE ayant participé au test[2]. Évidemment, nous ne pourrons étudier l'ensemble des paramètres susceptibles d'affecter les performances des élèves français. Nous apportons notre contribution à cet effort, à travers une analyse didactique de onze programmes d'enseignement provenant de trois régions différentes (l'Amérique du Nord, l'Europe de l'Ouest et l'Asie du Sud-Est) et la recherche d'une corrélation entre leur contenu et les scores obtenus par les élèves. Puisque notre étude se situe dans le contexte de la recherche universitaire française, nous avons considéré que les

1. Nous utiliserons dans la suite du texte l'acronyme usuel TIMSS pour désigner les *Trends in International Mathematics and Science Study*, que l'on peut traduire par *Étude internationale mesurant les tendances en mathématiques et en sciences*.

2. Voir à ce sujet la présentation des résultats de l'évaluation TIMSS 2015 sur le site du Conseil national d'évaluation du système scolaire. Elle est disponible à l'adresse suivante : https://www.cnesco.fr/fr/comparaison-pisa-timss/volet-mathematiques/analyse-des-resultats-timss/.

fractions et les évaluations TIMSS constituaient donc, à la fois séparément et *a fortiori* de façon combinée, un sujet susceptible d'intéresser les praticiens et les décideurs publics.

Il se trouve par ailleurs que l'analyse faite par Siegler *et al.* conduit à penser que « l'une des limites à la maitrise des fractions et de la division par les élèves est le manque de compréhension profonde de ces deux concepts de la part des enseignants américains » (*ibid.*). Pourtant, les difficultés des élèves dans le domaine des fractions sont bien documentées. Nous proposerons une synthèse de ces connaissances dans le cadre de cette recherche, toutefois nous allons donner ici un premier exemple destiné à montrer, d'une part, une procédure usuelle mise en œuvre de manière erronée par les élèves, et d'autre part, la variété des stratégies qui peuvent être utilisées pour manipuler le concept de fraction. Ainsi, pour comparer 2/3 et 5/12, de nombreux élèves vont comparer les numérateurs et les dénominateurs pour énoncer de façon erronée que 5/12 est plus grand que 2/3 (Neagoy[1], 2017, p. 158) : l'utilisation infructueuse avec les nombres rationnels de procédures pourtant valables avec les nombres entiers est observée de façon récurrente chez les élèves[2]. C'est le cas de nombreux élèves français à l'item M0705 des évaluations TIMSS 2015 : 74,7 % d'entre eux considèrent que 1/5 est une fraction supérieure à 1/2. À ce stade de l'étude, il n'est pas encore possible de déduire de ces résultats qu'une telle conception subsiste malgré un enseignement. Il est envisageable, par exemple, que la question de la comparaison ne soit pas inscrite au programme à ce niveau de la scolarité et qu'elle n'ait, en conséquence, pas été abordée dans les classes. L'un des objectifs de notre recherche est donc de comprendre si la maitrise insuffisante du concept de fraction par les élèves français est due à l'organisation de notre curriculum. L'une des manières de comparer 2/3 et 5/12 est de trouver un dénominateur commun à ces deux fractions. Néanmoins, il est possible aussi de comparer les deux fractions à une fraction de référence : ainsi la fraction 2/3 est supérieure à la fraction 1/2, tandis que la fraction 5/12 ne l'est pas. Les élèves peuvent également réaliser un schéma afin de constater que $2/3 > 5/12$. Nous avons donc, pour une même tâche, une variété de stratégies, valables ou non. Le contenu des instructions officielles,

1. Nous citons à plusieurs reprises cette auteure, qui n'est pas didacticienne, pour la synthèse fort bien documentée des difficultés des élèves face à l'apprentissage des fractions, présentée dans son livre *Unpacking Fractions. Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding* (2017).

2. Pour une synthèse sur la question des procédures utilisées lors de la comparaison de nombres rationnels, voir Neagoy (2017) pour les fractions, et Roditi (2007) pour les décimaux.

fera donc l'objet d'une analyse relative aux stratégies envisagées par les auteurs, afin de déterminer s'il existe ou non des injonctions favorables à la réussite des élèves aux tests.

La notion de fraction est éminemment complexe, en raison de son caractère plurivoque. Les multiples facettes du concept ouvrent de nombreuses possibilités pour organiser les apprentissages dans ce domaine à l'échelle d'une classe ou d'un pays, à travers les programmes d'enseignement. D'ailleurs, il n'y a pas unanimité au sein de la communauté des chercheurs pour catégoriser les différents sens de la fraction. Ainsi, Kieren (1976) a divisé ce concept en quatre notions interdépendantes (rapport, opérateur, quotient, mesure), tandis que Nunes et Bryant (1996), à la suite des travaux de Behr, Lesh, Post et Silver (1983), ont fait de la fraction partie d'un tout une catégorie à part entière, portant à cinq le nombre de facettes de cette notion. Grégoire (2008) ne distingue quant à lui que trois catégories (fraction-opérateur, fraction-rapport, fraction-nombre), tout comme Brousseau (2009), qui propose de différencier la fraction utilisée en tant que mesure, en tant qu'opérateur, et en tant qu'application linéaire. L'enseignement de l'une ou l'autre de ces facettes suppose de proposer aux élèves des types de tâches différents ; celles-ci seront résolues selon des procédures spécifiques, et les liens que l'on établit entre ces aspects du concept impliquent la mise en œuvre d'une progression spécifique de l'enseignement. Par exemple, lorsque Behr, Lesh, Post et Silver (1983) considèrent que la fraction partie d'un tout est à l'origine de toutes les autres, il en découle un travail important des élèves sur cet aspect du concept. En revanche, les activités suggérées en fin d'école élémentaire par Brousseau (1987) relèvent davantage de la fraction-rapport : il s'agit de comprendre assez tôt dans la scolarité qu'une fraction instaure un lien de nature multiplicative entre le numérateur et le dénominateur. Il existe donc dans le domaine des fractions différents types de tâches et, pour chaque type de tâches, une variété de techniques. Ces tâches et ces techniques dépendent de l'aspect du concept que l'on souhaite mettre en avant, et nous amènent à raisonner en termes de praxéologies. Ce concept, élaboré par Yves Chevallard, conduit à considérer toute activité mathématique sous la forme d'une tâche appartenant à un type de tâche et réalisée à l'aide d'une technique particulière. Le discours permettant la compréhension d'une technique est appelé « technologie ». Cette dernière n'est valable que dans un certain cadre et trouve donc à son tour une justification appelée « théorie » (Chevallard, 2002a, p. 3). Cette association d'un type de tâche et d'une technique forment un « bloc pratico-technique (ou praxique) » ou « savoir-faire » et constituent avec le « bloc technologico-théorique » ou « savoir au sens restreint » dont elle dépend un ensemble appelé « praxéologie » (Chevallard, 1994, p. 1).

Les praxéologies qui doivent faire l'objet d'un enseignement sont définies au moins en partie, en ce qui concerne la France, dans les programmes[1] scolaires nationaux. Cependant, les combinaisons entre les types de tâches et les techniques sont si nombreuses qu'il est difficile de trouver un consensus sur ce qui doit apparaitre dans les instructions officielles. Ainsi, lors des consultations menées afin d'écrire les instructions officielles pour l'école élémentaire de novembre 2015, des voix divergentes se sont élevées à propos de l'enseignement des fractions. Perrin-Glorian voit dans les fractions à l'école primaire un objectif intermédiaire servant à la construction du concept de nombre décimal : « le mot "fraction" ne devrait à mon avis pas apparaître dans un grand titre du programme tout en faisant l'objet d'un paragraphe, parce que l'objectif, c'est bien les décimaux. Seuls les décimaux devraient donc apparaître dans le titre selon moi » (2014, p. 26). La même idée se dégage de la contribution d'Emprin lorsqu'il propose une séquence d'apprentissage partant d'un partage de longueur en morceaux égaux, pour arriver à la construction d'un tableau de numération : « les élèves ont une bande unité (la même pour tous). Ils ont une bande qui n'est pas mesurable exactement avec la bande unité (1/2, 1/3, 2/3, 3/2 … mais ils ne le savent pas). Ils doivent élaborer un message pour qu'un autre groupe puisse construire la même bande que celle qu'ils ont. La seule solution est de plier la bande et de communiquer une fraction de bande. Après plusieurs situations proches, on travaillera sur les dixièmes de bande et on étendra le tableau de numération » (2014, p. 10).

Charnay propose quant à lui de repousser l'emploi de cette écriture dans l'enseignement secondaire pour focaliser l'attention de l'élève sur les régularités de notre système de numération en base dix. Certes, « il peut être envisagé de conserver le principe de cette présentation des nombres décimaux, mais sans nécessairement utiliser dès le départ l'écriture fractionnaire. Il est en effet possible de travailler sur les fractions en utilisant leurs désignations verbales : un demi, trois-quarts, cinq-tiers pour les fractions simples ou avec les mots dixième, centième… pour les fractions décimales (en continuité alors avec les termes dizaine, centaine…). Dans cet esprit, la notation fractionnaire pourrait n'être envisagée qu'en sixième. Cela permettrait d'insister sur le fait que le système d'écriture des nombres décimaux obéit aux mêmes règles que celui des nombres entiers, en relation avec des groupements ou des

1. Les termes « instructions officielles » et « curriculum » seront utilisés, dans cette recherche, comme des synonymes de « programmes d'enseignement ».

fractionnements successifs par 10, sans que l'écriture fractionnaire ne vienne "faire écran" à cette continuité » (2014, p. 10).

Houdement n'est pas de cet avis, puisqu'elle propose, après la réalisation d'une activité similaire à celle décrite par Emprin, une synthèse écrite que les enseignants pourraient proposer à leurs élèves à propos de la notion de fraction. L'auteur précise que « ce texte (avec dessins représentant des longueurs associées, ou des aires) du registre scientifique remplace utilement tout autre texte sur les parts de galette, le quatre-quarts… qui sont dans le registre familier » (2014, p. 4). Dans d'autres programmes que nous analyserons ultérieurement (dans le Taipei chinois par exemple), l'utilisation de supports concrets est un élément central pour l'enseignement des fractions, non seulement au début de l'apprentissage, mais également ensuite, pour la maitrise des opérations impliquant des fractions, ce qui montre la variété, non seulement des objectifs d'apprentissage, mais également des moyens de cet apprentissage. Autrement dit, outre la diversité des tâches et des techniques proposées par les auteurs, nous constatons que la variété des ostensifs susceptibles d'être utilisés (c'est-à-dire des éléments qui peuvent être manipulés par les élèves pour matérialiser leur réflexion : objets, schémas, droite graduée, nombres, etc.) complexifie encore l'organisation des enseignements.

Fractions d'une unité :	
Un demi $\frac{1}{2}$	L'unité et partagée en deux parties égales, chaque partie est une **demie-unité** : $\frac{1}{2}$ *unité* (la **moitié** d'une unité Une demie-unité plus une demie-unité égale une unité : $\frac{1}{2}$ *unité* + $\frac{1}{2}$ *unité* = **1** *unité*
Un quart $\frac{1}{4}$	L'unité et partagée en quatre parties égales, chaque partie est **un quart** d'unité : $\frac{1}{4}$ *unité* Quatre quarts d'unité égalent une unité : 4 x $\frac{1}{4}$ *unité* = 1 *unité* Un quart d'unité est la moitié d'une demi- unité :
Un huitième $\frac{1}{8}$	L'unité et partagée en huit parties égales, chaque partie est un **huitième** d'unité: $\frac{1}{8}$ *unité* ; Deux huitièmes d'unité égalent un quart d'unité : 2 x $\frac{1}{8}$ *unité* = $\frac{1}{4}$unité

Figure 1. Synthèse écrite susceptible d'être proposée aux élèves à propos des fractions (Houdement, 2014, p. 4)

Pour sa part, Urruty insiste sur le caractère plurivoque de la notion de fraction et sur l'importance de clarifier auprès des élèves les différents sens qu'elle recouvre : « les programmes doivent clairement rappeler la distinction entre les deux grandes interprétations possibles d'une fraction : 3/8 peut désigner "trois huitièmes" (c'est-à-dire une quantité qu'on produit en partageant une unité en huit parties égales et en gardant trois parts obtenues) ou alors "3 divisé par 8" (c'est-à-dire une quantité qu'on produit en partageant en huit parties égales la valeur de 3 unités). L'enseignant doit être conscient du fait que l'équivalence entre ces deux interprétations ne va pas de soi pour un élève qui découvre ces notions dans des contextes différents » (2014, p. 5-6). D'ailleurs, il indique qu'il existe des divergences à propos de la façon dont doivent être présentées les différentes facettes du concept, notamment sur le plan temporel. Ainsi, « tous les auteurs (de manuels en particulier) ne s'accordent pas sur la chronologie de ces apprentissages (faut-il commencer par associer la fraction à la division ou le faire seulement dans un deuxième temps ?). Dans tous les cas, à la fin de la sixième, l'élève doit maîtriser ces deux sens, tandis qu'en parallèle la progression sur la division (dans le cas décimal) sera achevée » (*ibid.*, p. 6).

Enfin, le concept de fraction est lié à d'autres notions. Si la relation entre les fractions et la division ont été évoqués par Urruty, Grugeon et Coppé élargissent cette réflexion : pour ces auteures, « il faudrait indiquer que la division ainsi que la proportionnalité qui sont liées entre elles et à d'autres notions (fractions, décimaux) sont en cours d'apprentissage et seront vraiment exigées au collège. […] » (2014, p. 5). De plus, en raison de la complexité du concept de fraction, il leur semble nécessaire de décrire précisément les apprentissages attendus à chaque niveau de la scolarité. « En effet, si presque toutes les notions travaillées en sixième ont été abordées à l'école primaire, elles n'ont été vues que sous certaines facettes (ceci est particulièrement vrai pour les fractions, les décimaux, la proportionnalité). Ce qui peut sembler être une reprise pour l'enseignant peut se révéler être une découverte pour les élèves qui ne reconnaissent pas les objets mathématiques car ils sont vus sous une autre facette et utilisés différemment. Il faudrait préciser des limites sur ces sujets dans les programmes de l'école primaire même si la classe de 6^{e} est rattachée au cycle 3 » (*ibid.*).

À travers cette synthèse, nous voyons qu'il existe des points de vue divergents sur le nombre de sous-constructions qui composent le concept de fraction : certains en voient trois (Grégoire, Brousseau), d'autres quatre (Kieren), d'autres encore cinq (Behr, Lesh, Post et Silver, ainsi que Nunes et Bryant). Des didacticiens considèrent que cette notion doit être

enseignée à l'école élémentaire (Houdement, Urruty, Grugeon et Coppé), d'autres pensent qu'elle relève du secondaire (Charnay) tandis que d'autres encore suggèrent que l'on intègre les fractions dans un ensemble plus large ayant pour but la maitrise des nombres décimaux (Perrin-Glorian, Emprin). Or, toutes ces propositions, sans être nécessairement antinomiques, délimitent l'étendue des connaissances que sont susceptibles d'acquérir les élèves. La question des ostensifs privilégiés à chaque étape de l'enseignement (désignations verbales, écritures fractionnaires, galettes, bandelettes de papier, droite numérique, etc.) apporte au législateur des possibilités supplémentaires pour définir le cadre dans lequel les professeurs et les élèves vont travailler. La comparaison des choix opérés dans différents pays est donc en mesure de faire apparaitre des différences importantes. Cette question de l'élaboration du savoir à chaque niveau du système éducatif correspond à une problématique ayant été largement discutée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et qui a abouti à la création du concept de transposition didactique. Nous nous réfèrerons donc à ce dernier tout au long de notre recherche. Voici comment, en 1985, Chevallard définit le concept de transposition (p. 39) :

> « Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le "travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique. »

L'auteur distingue la transposition didactique *lato sensu*, qui est « le passage d'un objet de savoir, à un objet à enseigner, puis à un objet d'enseignement » et la transposition didactique *stricto sensu*, qui est le passage d'un contenu de savoir précis à une version didactique de cet objet de savoir. Lorsque nous parlerons de la transposition didactique sans mention particulière, nous nous référerons à la définition *lato sensu* de la transposition, qui peut être scindée en deux phases : la transposition didactique externe et la transposition didactique interne. Au cours de la première, les savoirs sont « décrits, précisés, dans l'ensemble des textes "officiels" (programmes, instructions officielles, commentaires…) ; ces textes [définissant] des contenus, des normes, des méthodes » (Audigier, 1988, p. 14). Les savoirs deviennent alors des objets à enseigner. Au cours de la seconde, ces objets à enseigner subissent de nouvelles transformations pour devenir des objets d'enseignement, selon une formulation et un cadre d'utilisation qui leur est adapté. Ces deux parties de la transposition didactique forment une première dichotomie utile pour comprendre le plan de notre thèse, nous allons en préciser les termes.

La transposition didactique externe tire son nom du fait qu'elle se déroule en dehors du système d'enseignement *stricto sensu*, formé de systèmes didactiques locaux professeur-élèves-savoir (figure 3), au sein de ce que Chevallard nomme, non sans ironie, la « noosphère ». Ce terme, dérivé des mots grecs *νοῦς* (qui signifie « l'esprit ») et *σφαῖρα* (qui signifie « la sphère ») désigne « la sphère où l'on pense » (1991, p. 25). Plus précisément, elle est définie comme l'ensemble « des représentants du système d'enseignement, mandatés ou non (du président d'une association d'enseignants au simple professeur militant) » rencontrant, « directement ou non (par le libelle dénonciateur, la requête comminatoire, le projet transactionnel, ou les débats assourdis d'une commission ministérielle), les représentants de la société (les parents d'élèves, les spécialistes de la discipline qui militent autour de son enseignement, les émissaires de l'organe politique) » (*ibid.*). Elle comprend donc l'ensemble des personnes qui prennent part, de près ou de loin, à la détermination des contenus de savoir à enseigner, sans participer directement à leur enseignement. Cette définition large inclut aussi bien les universitaires qui participent à l'analyse du système éducatif, que les associations de parents d'élèves à travers les demandes qu'elles formulent auprès du ministère, le personnel politique qui s'intéresse aux questions éducatives tout autant que les services du ministère qui rédigent les circulaires ministérielles. L'environnement (notamment les chercheurs) produisent les données dont se nourrit la noosphère. Toutefois, la frontière entre l'environnement, la noosphère et le système éducatif est poreuse, puisque les enseignants peuvent contribuer, directement (par exemple, en répondant à un questionnaire en ligne sur une première version des programmes en cours d'élaboration) ou par l'intermédiaire de leurs représentants, à orienter les décisions du législateur. De même, des chercheurs sont parfois invités à apporter leur contribution aux programmes d'enseignement.

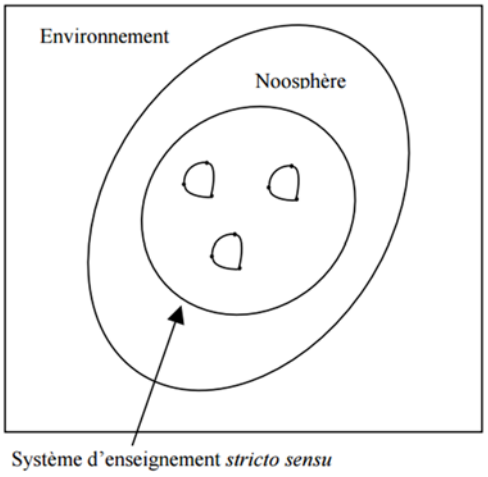


Figure 2. Liens entre l'environnement, la noosphère et le système d'enseignement *stricto sensu* composé de systèmes didactiques locaux (Chevallard, 1991, p. 24)

Évidemment, une thèse ne suffirait pas à décrire les facteurs qui influencent la délimitation du savoir instruit dans une société donnée, puisque ces champs s'étendent dans des domaines aussi variés que la didactique, la sociologie ou les sciences politiques. L'acquisition du savoir par les élèves soulève des questions qui portent tout à la fois sur l'efficacité des systèmes d'enseignement et sur les facteurs de réussite ou d'échec qui dépassent l'institution scolaire (par exemple, la corrélation avec l'origine socio-économique des élèves, les inégalités filles-garçons, etc.). Afin de ne pas nous éloigner du cadre de notre travail, nous limiterons notre recherche aux questions didactiques, en cherchant à mettre au jour des convergences et des divergences entre d'une part, les travaux des didacticiens, et d'autre part, les choix opérés par les législateurs (de différents pays, ou successivement au sein d'un même pays). Cependant, ce choix ne nous empêchera pas de porter notre attention, de façon marginale, sur quelques aspects économiques ou sociologiques éclairants pour notre étude didactique.

La deuxième étape de la transposition (celle qui consiste à adapter et transformer, en savoirs enseignés, les savoirs à enseigner tels qu'ils apparaissent dans les programmes et les manuels, et donc, indirectement, les savoirs savants dont ils sont issus) est appelée « transposition didactique interne », car elle est le fait des enseignants et se concrétise par une mise en œuvre dans les classes. Ainsi, l'une des possibilités ouvertes pour notre recherche consistait à décrire l'ensemble d'un processus de transposition d'un bout à l'autre du système éducatif français, en nous appuyant sur les publications des didacticiens, sur les instructions officielles et sur les pratiques d'un ou plusieurs enseignants. C'est ainsi qu'a procédé, par exemple, Laetitia Ravel (2003) dans sa thèse consacrée à l'arithmétique en classe de terminale S. Néanmoins, le chapitre relatif aux fractions est si peu dense dans les programmes français, en particulier à l'école élémentaire, que la matière de notre étude aurait probablement été insuffisante. De plus, elle n'aurait pas permis de mettre au jour toute la variété des conceptions envisageables de la fraction, et de confronter aux résultats obtenus par les élèves des choix fort différents de ceux effectués par le législateur français. Cela aurait exclu toute possibilité de compréhension des phénomènes conduisant les élèves français à des résultats aussi bas dans les évaluations internationales. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de réaliser un travail de comparaison entre plusieurs pays. Ainsi, nous avons pu mettre en relation les choix effectués par les autorités et les performances des élèves. De plus, cela nous a permis de regarder les décisions prises par le législateur français avec un certain recul. En ce qui concerne la méthodologie utilisée, nous avons considéré que les savoirs enseignés étaient difficiles à connaître. Ainsi que l'indique Le Pellec, « la salle de classe est le domaine réservé du maître et

il est difficile d'observer le savoir enseigné, de repérer des constantes dans la multiplicité. Il faudrait pourvoir pénétrer dans le sanctuaire. Ce n'est pas toujours chose aisée, car ce métier est exercé en solitaire, et souvent une présence étrangère est considérée comme une immixion » (1991, p. 47). Trouver des enseignants québécois, anglais, singapouriens, etc. qui acceptent de nous recevoir dans le cadre de cette thèse paraissait une entreprise difficilement réalisable. La méthodologie que nous avons évoquée n'était donc pas adaptée à la réalisation d'une comparaison internationale, et nous avons choisi de nous intéresser principalement à la transposition didactique externe (en particulier à son incidence sur les résultats des élèves, à partir d'un corpus de documents formé des programmes d'enseignement et des données issues des évaluations TIMSS).

Les praxéologies scolaires, qu'elles soient mathématiques ou didactiques, « peuvent être fortement naturalisées, au point de devenir complètement transparentes pour les sujets de l'institution qui les assument et les transmettent à travers leurs pratiques institutionnalisées » (Bosch & Gascón, 2002, p. 32). Ainsi, à l'échelle de notre pays, la vision de l'enseignement des fractions que possèdent les enseignants est circonscrite par de multiples facteurs tels que les programmes scolaires, les manuels et les autres ressources qu'ils utilisent pour se former et pour élaborer des séances à destination des élèves. Selon nous, parmi les sources du savoir que nous venons de citer, les instructions officielles jouent un rôle central dans la délimitation du concept de fraction. En effet, elles ont un caractère obligatoire, ce qui les distingue de toutes les autres sources que peuvent employer les professeurs. En outre, il nous semble que ce sceau de l'impérativité pare cette conception singulière de l'enseignement de la fraction portée par les auteurs d'une aura qui n'incite pas les enseignants à chercher des solutions qui s'en éloigneraient. Or, l'un des objectifs de la théorie anthropologique du didactique est de « se déprendre de la naturalisation des objets et des attitudes communes, […] et définir la rupture épistémologique qui permet de "s'arracher à l'illusion de la transparence" pour rendre visibles les créations et même, *les substitutions didactiques d'objets mathématiques* » (Mercier, 2002, p. 140). Pour ce faire, nous avons élargi notre recherche du point de vue géographique, considérant que l'une des façons de neutraliser le biais méthodologique des contraintes qui pèsent sur la pratique des enseignants français, qu'il s'agisse des questions d'organisation scolaire ou de culture professionnelle, consistait à faire porter notre regard sur des systèmes éducatifs étrangers, et notamment sur leur curriculum.

Notre étude s'inscrit dans le cadre de la didactique des mathématiques, entendue comme « la dimension du réel social qui est coextensive à la présence d'une intention, portée par une personne ou, plus généralement, par une institution, de faire quelque chose pour que quelqu'un, personne ou institution, "apprenne" quelque chose » (Chevallard, 2010, p. 141). C'est une conception large de la notion, dans laquelle est reconnue « comme geste didactique toute intervention visant à instaurer ou à modifier une condition de quelque niveau que ce soit dans l'échelle de codétermination afin de contribuer à la survenue d'un type déterminé d'apprentissages » (*ibid.*, p. 142). Or, les personnes et institutions qui participent, d'une façon ou d'une autre, à l'acquisition du concept de fraction au sein d'un système éducatif donné sont nombreuses. Il peut s'agir des auteurs des instructions officielles, comme de l'équipe pédagogique qui organise une progression des apprentissages au sein d'un école ou d'un professeur qui prépare sa séance de mathématiques. Pour cette raison, la théorie anthropologique du didactique a distingué plusieurs niveaux auxquels les personnes et les institutions contribuent à l'élaboration des praxéologies scolaires, dans une échelle appelée « échelle de codétermination didactique ». Selon cette théorie, « l'écologie et l'économie du didactique ne peuvent se comprendre et se maîtriser si l'on ne prend pas en compte l'ensemble des niveaux de codétermination » (*ibid.*).

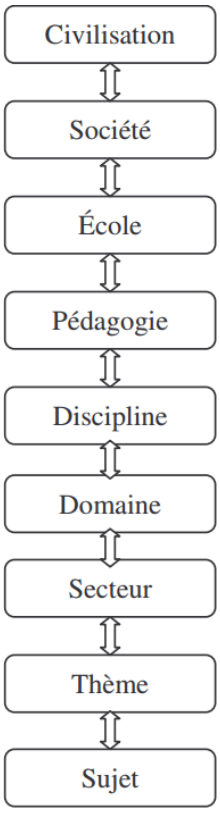


Figure 3. Échelle de codétermination d'Yves Chevallard (2005, p. 22)

Ainsi, « lorsqu'un didacticien étudie la diffusion d'une praxéologie (ou d'un fragment praxéologique) comme réponse R à une question Q, c'est *a priori* à tous ces niveaux qu'il pourra avoir à enquêter (et pas seulement, par exemple, au niveau du thème d'études, ou au niveau pédagogique) pour y repérer les contraintes dont la conversion didactique peut constituer une condition pesant fortement sur l'organisation didactique examinée (ou envisagée) » (Chevallard, 2005, p. 22). Or, les nombreux travaux didactiques relatifs aux nombres rationnels menés dans l'espace francophone ont été le plus souvent réalisés à un niveau microscopique, c'est-à-dire aux niveaux « Sujet » et « Thème » (c'est ce que fait, par exemple, Adjiage lorsqu'il expérimente un dispositif didactique dans une classe de Sélestat). Dans le cadre de notre étude, nous allons traiter ce sujet à un niveau macroscopique, c'est-à-dire aux niveaux « Civilisation » et « Société ». C'est principalement ce dernier niveau qui sera étudié, dans la mesure où nous comparerons ce que chaque société entend faire apprendre par ses élèves à travers les programmes d'enseignement, et cette démarche rend incontournable la discussion de quelques aspects civilisationnels de la question.

De nombreux travaux comparatifs ont été réalisés en didactique des mathématiques, y compris dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, avec des objectifs divers. Ainsi, au moins quatre perspectives ont été dégagées (Bessot & Comiti, 2013, p. 74) : « dénaturalisation du regard sur le fonctionnement scolaire d'une institution didactique » (Tran Luong C. K., 2006), « nécessité de la prise en compte de niveaux de détermination plus élevés que celui du domaine » (Lê Van T., 2001), « importance de l'étude des rapports institutionnels pour l'évaluation des praxéologies mathématiques » (Nguyen A. Q., 2006), « recherche de conditions et contraintes essentielles à l'existence d'une séquence d'enseignement sur un thème donné (ingénierie didactique) pour enrichir le questionnement sur l'autre système et faire émerger du générique » (Lê Thai Bao T. T., 2007 et 2012). Comme nous l'avons signalé, le thème retenu (celui des fractions) et la nécessité de comparer plusieurs pays pour mettre en perspective les résultats obtenus par la France aux évaluations TIMSS nous obligent à sortir de l'environnement scolaire. Notre contribution consistera donc à prendre en considération un niveau de détermination des organisations praxéologiques plus élevé, et à analyser comment

les contraintes que posent les institutions à ce niveau de l'échelle de codétermination influencent les acquis des élèves dans le domaine des fractions.

Étant considéré que « chaque niveau impose, à un moment donné de la vie du système éducatif, un ensemble de contraintes et de points d'appui » et que « l'écologie qui en résulte est déterminée à la fois par ce que les contraintes interdisent ou poussent en avant, et par l'exploitation que feront les acteurs des points d'appui que les différents niveaux leur offrent » (Chevallard, 2002b, p. 49), le contenu des instructions officielles des pays que nous étudierons devra d'abord faire l'objet d'une analyse approfondie, afin de déterminer les limites et les opportunités offertes aux acteurs du système éducatif. Ensuite, les acquis des élèves à propos des fractions seront confrontés à ces données. Nous concédons que la question de la transposition interne du concept de fraction échappera à notre analyse. Deux injonctions similaires peuvent être interprétées de façon fort différente par deux enseignants, qu'il s'agisse de professeurs d'un même pays, ou, *a fortiori*, de professeurs exerçant dans des pays différents. Les acquis des élèves et les performances qu'ils réalisent aux évaluations internationales dépendent donc aussi de la transposition du savoir qui est réalisée aux autres niveaux de l'échelle, en particulier par le professeur au sein de sa classe. Cependant, cette limite constitue un aspect des questions que nous posons dans cette recherche : le contenu des instructions officielles a-t-il effectivement une influence sur ce qu'apprennent les élèves dans les classes ? Les auteurs de manuels scolaires et autres ressources, les enseignants à travers leur pratique professionnelle, et tous ceux qui s'emparent des savoirs à enseigner pour les mettre à portée des élèves ne jouent-ils pas un rôle plus important pour l'apprentissage ? Pour répondre à ces questions, il nous faudra chercher, non seulement si le contenu du curriculum est lié aux scores obtenus par les élèves, mais également si la précision des intitulés influe sur l'homogénéité de leurs résultats. Nous indiquerons également comment l'agencement des items relatifs aux fractions au sein du curriculum peut favoriser ou au contraire nuire aux apprentissages. Enfin, l'un des moyens de mesurer l'influence des instructions officielles sur les acquis des élèves consiste, outre les comparaisons inter-pays, à réaliser une étude longitudinale permettant de déterminer si, lorsque les normes changent, les performances des élèves évoluent. En conséquence, les comparaisons diachroniques intra-pays feront également partie des outils méthodologiques que nous allons utiliser.

Pour rendre compte des acquis des élèves, nous nous appuierons sur les évaluations TIMSS, qui mettent en jeu de nombreux exercices relatifs aux fractions depuis plusieurs années.

D'une part, il s'agit de la plus grande étude internationale évaluant les acquis des élèves en mathématiques avec PISA. La quantité de données que nous pourrons utiliser est un gage de fiabilité pour notre étude. D'autre part, les élèves sont évalués par TIMSS en quatrième année et en huitième année d'enseignement obligatoire. Or, en quatrième année (c'est-à-dire au moment où les élèves sont âgés de dix ans environ), l'enseignement des fractions a démarré dans tous les pays dont nous avons eu à connaitre des programmes scolaires, et il est encore loin d'être achevé à ce stade de la scolarité (il débute même pour les élèves français). En revanche, l'apprentissage du concept de fraction est bien souvent terminé en huitième année (c'est-à-dire vers l'âge de quatorze ans), ce qui nous donnera l'occasion, non seulement de mesurer ce qu'ont retenu les élèves du concept après son apprentissage, mais également de comparer ces données avec celle obtenues au moment où l'apprentissage débute. Les tests PISA étant soumis à des élèves de quinze ans uniquement, notre choix s'est porté sur les évaluations TIMSS, plus riches d'enseignement pour l'objet de notre étude.

Le cadre théorique de notre recherche sera celui de la théorie anthropologique du didactique, puisque nous y avons puisé les principaux concepts que nous avons cités jusqu'à présent : le concept de transposition didactique, la notion de praxéologie scolaire, le terme d'ostensif, l'échelle de codétermination didactique, ou encore la définition de la didactique retenue pour cette étude. En outre, cette recherche porte principalement sur l'institution scolaire. Or, l'étude des rapports institutionnels est un thème central de cette théorie. La méthodologie utilisée est double. Nous allons essentiellement réaliser des comparaisons entre onze pays dont la sélection sera examinée dans le premier chapitre de cette recherche. Les comparaisons porteront sur leur curriculum et sur les résultats obtenus par leurs élèves aux évaluations TIMSS. Lorsque ces comparaisons inter-pays ne permettront pas d'éclairer de façon satisfaisante les résultats des élèves, des comparaisons seront effectuées entre les performances des élèves d'un même pays, mais dont l'apprentissage a été réalisé d'après des programmes scolaires différents. Ces outils méthodologiques, utilisés dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, permettront de répondre à la problématique qui sous-tend notre recherche. Elle peut être ainsi formulée : comment les performances des élèves de quatrième et de huitième année aux évaluations TIMSS sont-elles corrélées à la transposition didactique externe du concept de fraction, entendue dans ses composantes topogénétiques et chronogénétiques ?

Notre recherche est organisée selon un plan binaire (c'est-à-dire dans lequel chaque partie est scindée successivement en deux sous-parties). La première partie est consacrée à l'étude de la transposition didactique externe du concept de fraction (Partie I) et la deuxième partie à l'étude des résultats des élèves aux items des évaluations TIMSS impliquant des fractions (Partie II).

Dans la première partie, nous commencerons par préciser le cadre théorique de notre étude que nous avons jusqu'ici seulement évoqué de façon succinte. Ces développements seront l'occasion, dans un premier chapitre, d'expliquer en quoi notre étude comporte un aspect anthropologique : le choix des onze pays retenus pour l'étude sera justifié, la validité des comparaisons effectuées sera discutée et nous détaillerons la méthodologie utilisée pour mener ces comparaisons. Le deuxième chapitre nous conduira à aborder les aspects didactiques de notre recherche : nous indiquerons quelle catégorisation du concept de fraction nous a paru la plus pertinente pour une analyse du contenu des programmes d'enseignement ; nous décrirons les praxélogogies relatives à ce concept susceptibles d'être mises en œuvre dans un cadre scolaire et nous expliciterons la façon dont nous envisageons d'observer le phénomène de transposition didactique au sein de notre corpus. Ensuite, nous comparerons le contenu des programmes dans le domaine des fractions et nous discuterons leur relation aux savoirs établis par les didacticiens. Le troisième chapitre sera l'occasion d'analyser ces praxélogies sous l'angle topogénétique, en relevant non seulement les types de tâches et les techniques priviligiés dans chaque pays, État ou province[1], mais également les ostensifs imposés dans chaque territoire. Dans le quatrième chapitre, ces praxélogies seront analysées sous l'angle chronogénétique, afin de mettre au jour des différences inter-pays quant à l'organisation de ces enseignements dans le temps.

Dans la seconde partie, nous préciserons la portée de notre étude, en définissant les facteurs susceptibles de distendre le lien entre les programmes d'enseignement et les performances des élèves. Le cinquième chapitre mettra au jour les caractéristiques des acteurs de la tranposition didactique interne (élèves, enseignants, chefs d'établissement) selon le territoire considéré. Elles seront décrites à travers l'analyse de leurs réponses aux questionnaires fournis par les auteurs des évaluations TIMSS 2015. Le sixième chapitre traitera des facteurs

1. Dans la suite du texte, pour alléger sa lecture, nous écrirons seulement « pays », « territoire » ou « participant » au lieu de « pays, État ou province ».

qui ne sont pas liés à ces caractéristiques, et qui tiennent à la durée du travail scolaire auxquels sont soumis les élèves ainsi qu'au contenu des évaluations que nous venons de citer. Enfin, nous opposerons les résultats obtenus par les élèves aux instructions officielles correspondantes. Dans le septième chapitre, l'influence des contraintes posées par les institutions (à travers les programmes scolaires) sur les performances des élèves sera alors précisée, qu'il s'agisse de la présence des intitulés dans les instructions officielles, de la précocité des apprentissages ou encore de leur durée. Dans le huitième chapitre, les limites des actions qui peuvent être menées à ce niveau de l'échelle de codétermination didactique seront envisagées. Nous mettrons notamment en évidence le rôle des enseignants dans la réussite des élèves, par le biais des réponses qu'ils fournissent dans les questionnaires TIMSS et par leur capacité à mettre en œuvre les changements apportés par un nouveau curriculum.

Le contenu des programmes d'enseignement a été analysé en faisant systématiquement référence aux textes officiels. Néanmoins, l'interprétation que nous proposons des intitulés peut être discutée, d'autant plus lorsqu'ils sont rédigés en langue anglaise. En effet, certains termes ambigus rendent malaisée la catégorisation des items. Par exemple, dans les programmes français de 2008 pour le secondaire, les auteurs indiquent que « les procédures utilisées pour comparer, encadrer, intercaler des nombres sont justifiées en s'appuyant sur la signification des écritures décimales ou le placement des points sur une demi-droite graduée » (MEN-MENESR, 2008b, p. 14). Or, qui est supposé justifier ces procédures : l'élève, au cours de la réalisation des tâches qui lui sont données, ou le professeur, lors de l'enseignement des techniques permettant de comparer, encadrer et intercaler des fractions ? Pour rendre compte des choix que nous avons effectués et faciliter la lecture des résultats, nous avons décidé de placer dans le corps du texte des éléments qui auraient pu être repoussés dans les annexes, avec pour effet de rallonger notablement la thèse. Pour permettre au lecteur de distinguer ces parties du texte où l'interprétation des sources est discutée, nous avons accolé au texte une brodure, à gauche et droite, en pointillés.

PARTIE I. LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT DE FRACTION

> « Une grande partie du problème du professeur se trouve là : le système des tâches professorales n'est ni fixé une fois pour toutes, même à l'échelle d'une carrière, ni entièrement prédéfini ; il varie en synchronie, dans l'espace des institutions didactiques, mais il varie aussi en diachronie, dans l'histoire des institutions didactiques. À cet égard il existe, dans la pléthore de commentaires sur le fait scolaire, une interrogation apparemment taboue : y a-t-il, en matière d'enseignement, un progrès, comme il y a un progrès en matière médicale ? ».
>
> Yves Chevallard (2002a), « Organiser l'étude : 1. Structures & fonctions » *Actes de la XI^e^ école d'été de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 6.

Comme il est difficile de caractériser un progrès dans le domaine de l'enseignement ! Toute évolution ne peut être jugée qu'à l'aune des attentes que l'on pose vis-à-vis d'un objet d'étude. On pourrait penser que cela est simple dans le champ de la médecine : tout ce qui contribue à l'amélioration de l'état de santé d'un patient serait constitutif d'un progrès. Les débats vifs que l'on observe à propos de bioéthique nous montrent que cela n'est pas si clair. Définir ce que représente un progrès dans le domaine de l'éducation parait encore plus compliqué. En effet, tout apprentissage se trouve circonscrit par des limites temporelles, en particulier dans le contexte scolaire. Si l'on met l'accent sur tel ou tel aspect d'un concept, cela se fera nécessairement au détriment des autres, dans la mesure où l'on aura moins de temps à consacrer à ces derniers. L'allocation des ressources temporelles dont on dispose représente donc une part importante du travail de décision en matière d'éducation qu'une société se doit de réaliser. On peut avoir l'illusion de se montrer plus efficace dans un domaine en particulier, sans mesurer ce que l'on perd dans un autre. L'objectif de cette partie va donc être d'analyser

les choix effectués par les pays de notre étude, pour les comparer à ce qu'il est possible de faire dans le domaine de l'apprentissage des fractions. Évidemment, nous ne pensons pas que l'on doive tout enseigner à propos des fractions. Notre objectif est d'abord de mettre au jour la présence de caractéristiques nationales, au sein des curriculums, dans chacun des territoires qui composent notre corpus. Puis, lorsque cela sera possible, nous distinguerons des spécificités régionales dans les trois zones géographiques dont nous analysons les données (l'Amérique du Nord, l'Europe de l'Ouest et l'Asie du Sud-Est).

Comme nous l'avons indiqué dans notre introduction, notre recherche s'appuie sur des modèles théoriques élaborés dans le cadre de la didactique des mathématiques, et nos références proviennent pour la plupart de la théorie anthropologique du didactique. Cependant, nous n'avons fait qu'évoquer ces modèles, sans développer notre propos sur le point de savoir comment ils vont être appliqués à notre thèse. C'est pourquoi les cadres théoriques de l'étude seront précisés dans le titre I. Nous présenterons ensuite les choix didactiques opérés par le législateur dans le domaine des fractions. Cela sera l'occasion de comprendre ce qui différencie les curriculums des pays que nous avons sélectionnés pour notre recherche. Ces résultats de l'étude comparative seront l'objet du titre II.

TITRE I. CADRES THÉORIQUES DE L'ÉTUDE

Le choix des priorités fixées par les autorités à propos des enseignements revêt un fort caractère discrétionnaire : seule la correspondance avec les besoins qu'elle cherche à couvrir peut nous donner des indices sur sa pertinence. À l'échelle d'une société, ces besoins sont définis pour les élèves d'une génération donnée, au regard de l'intérêt qu'ils présentent pour leur développement intellectuel, ainsi que de l'utilisation qu'ils peuvent faire des savoirs dans leur vie quotidienne et dans leur future vie professionnelle. Les auteurs des instructions officielles sont donc contraints de prendre en compte, non seulement les travaux des mathématiciens et des didacticiens (comme nous l'avons montré, dans notre introduction, à propos de la genèse des programmes français de 2015), mais également les besoins du système d'enseignement entendu dans un sens très large (professeurs, élèves, éditeurs de manuels, associations de parents d'élèves, etc.). Par exemple, le nombre de praxéologies scolaires que l'on trouve dans un curriculum est limité en raison du temps de travail des enseignants et de la durée des apprentissages des élèves. Or, ceux-ci dépendent des rapports qui s'instaurent dans une société donnée entre les syndicats, les représentants des parents d'élèves et les gouvernements successifs.

Ainsi complétée, « l'analyse de la transposition didactique consiste en l'analyse des flux et des équilibres de savoir dans les différentes institutions que sont la sphère de production des savoirs, ses sphères d'utilisation, et le système d'enseignement – dont la noosphère est l'écotone, la marge qui reçoit des immigrants venus des deux côtés, une zone de transition » (Mercier, 2002, p. 153). Pour que des comparaisons puissent porter sur la manière dont cette transposition est menée dans différents pays, il convient de s'assurer qu'il existe une certaine homogénéité des besoins des systèmes d'enseignement considérés. Nous allons donc justifier le choix des pays étudiés et montrer l'intérêt et les limites de ces comparaisons. Cette approche anthropologique (au sens courant du terme) sera l'objet du titre I ; une étude directement fondée sur la théorie anthropologique du didactique sera menée dans les chapitres suivants. Toutefois, il est toujours possible de mesurer la capacité d'un système éducatif à à répondre aux besoins qu'il a lui-même défini. L'un des objectifs de la didactique peut consister à contribuer à l'augmentation du rendement entre, d'une part, le temps consacré à une notion, et d'autre part, la compréhension de cette notion que l'élève tire des enseignements qu'il a reçus. En s'appuyant

sur des invariants psychologiques et épistémologiques, elle contribue à définir des règles susceptibles de renforcer l'efficacité du système éducatif. Cette approche didactique, consistant en la description des éléments théoriques utilisés dans notre étude, sera l'objet du titre II.

CHAPITRE I. UNE APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

Notre travail consiste à porter un regard comparatiste sur les programmes d'enseignement. Si cette problématique nous semble si importante, c'est que les comparaisons internationales amènent « à reconsidérer la pertinence des catégories analytiques héritées » (Dogan *et al.*, 1982, p. 12) et pourraient permettre, au moins partiellement, d'expliquer les faibles performances des élèves français aux évaluations TIMSS. Toutefois, comme l'explique West, professeure de politiques éducatives à la *London School of Economics and Political Science*, « les différences de structure entre systèmes éducatifs posent des problèmes particuliers à la comparaison internationale » (2003, p. 200). Pour mener notre étude, nous nous appuierons donc sur les travaux des linguistes belges Jucquois et Swiggers, qui envisagent trois axes pour les recherches comparatistes. Seuls deux axes concernent notre thèse. Nous allons en présenter les principaux traits et expliquer comment nous comptons surmonter les difficultés méthodologiques que posent les comparaisons inter-pays à l'aide de ces éléments théoriques.

Le premier axe étudié est celui des « moyens : là on a à faire à des "techniques" ou des "stratégies" de comparaison qui permettent de replacer des recherches spécifiques, bien déterminées, dans un contexte plus global […] » (Jucquois et Swiggers, 1991, p. 8). Cette approche vise à fournir une explication historique, sociologique ou structurelle à une caractéristique spécifique d'un système étudié. Il est assimilé à une vision culturaliste de la comparaison, qui présuppose « la discontinuité des phénomènes sociaux d'un espace à l'autre à cause de leur spécificité ou leurs identités culturelles » (Join-Lambert *et al.*, 2012, point 12[1]). Il nous conduira à émettre des hypothèses sur l'enseignement des fractions dans certaines zones géographiques, à partir d'une comparaison des résultats obtenus par les élèves et des programmes d'enseignement (ou de l'évolution des programmes d'enseignement). Cependant, elle trouve deux limites notables : d'une part, « elle est toujours, en partie, historico-régressive (ce qui impose des contraintes sur la multiplication de contextes d'observation et de contrôle) et d'autre part, […] elle ne veut pas formuler une règle de généralité à valeur prédictive » (Jucquois et Swiggers, *op. cit.*, p. 15). Par exemple, le lien de cause à effet entre des nouveaux programmes et une meilleure performance aux évaluations internationales ne peut pas être

1. Cet article, consulté sur le réseau CAIRN, était partagé en 76 points, la pagination orginale n'apparaissant pas.

prouvé par cette simple confrontation entre les deux séries de données : de nombreux autres paramètres ont pu avoir changé entre temps. Nous nous plaçons donc dans une perspective théorique d'explicitation des potentialités de tel ou tel système éducatif, non dans l'explication de ce qu'il est vraiment. La question de « la cohésion culturelle des sociétés examinées » (Lallement, 2003, p. 114) se pose également : les instructions officielles ne sont sans doute pas interprétées de façon uniforme sur l'ensemble du territoire sur lequel elles s'appliquent. Toutefois, en choisissant d'analyser les données TIMSS, nous fondons nos observations sur les réponses fournies par un grand nombre d'élèves (par exemple, pour l'item 0504A des évaluations TIMSS 2015, 699 réponses d'élèves français ont été prises en compte ; pour les onze pays que nous avons sélectionnés, cela correspond à 6 383 réponses). En outre, nous admettrons que « les évaluations ont été administrées à des échantillons représentatifs et bien documentés au niveau national dans chaque pays » (Mullis et Martin, 2016a, p. 9).

Le deuxième axe est celui des « rencontres » (Jucquois et Swiggers, *op. cit.*, p. 8). Cet axe est assimilé à une vision universaliste (appelée aussi fonctionnaliste) de la comparaison, qui présuppose « une continuité entre les phénomènes et objets sociaux […] comparés dans chaque pays » (Join-Lambert *et al.*, *op. cit.*, point 11). Dans notre travail, nous mettons au jour comment des institutions issues d'horizons géographiques et culturels divers envisagent ces « même types de phénomènes » didactiques relatifs aux fractions (autrement dit la nécessité de formuler des savoirs à enseigner) et nous comparons les choix opérés dans chacun des pays de notre corpus. L'un des écueils de cette stratégie consiste précisément à minimiser l'impact des différences culturelles dans la perspective d'un éventuel transfert d'un pays à l'autre. À ce sujet, Mercier *et al.* précisent que, lorsque la recherche a pour but la transformation d'un système de connaissances déterminé par l'étude d'un autre système, cette étude peut être réalisée à travers la recherche de « l'intention didactique », c'est-à-dire à travers la contrainte institutionnelle exercée sur la construction des disciplines et les savoirs étudiés, ou encore à travers la recherche de « l'émergence d'autres occasions sociales de modification par un – U – (à caractériser) des connaissances de – A – (également à définir) à l'égard d'un système d'objets – O – (dont la nature et la structure sont également à spécifier) » (2002, p. 8). Certes, notre recherche n'a pas vocation à proposer des transferts culturels entre pays, mais cette définition de l'intention didactique correspond à l'objectif que nous lui assignons : comparer la nature et les effets des contraintes institutionnelles posées par onze pays dans le domaine des fractions, à travers les programmes d'enseignement, sans interroger les conditions d'émergence de ces contraintes ou leurs finalités quant à la transformation des sytèmes éducatifs considérés.

Notre thèse tiendra compte des « deux aspects qui sont constitutifs du comparatisme même : ses unités descriptives et ses approches corrélatives » (Jucquois et Swiggers , *op. cit.*, p. 14). Afin de circonscrire les possibilités offertes par cette comparaison internationale, nous allons étudier, dans le chapitre I, les points de convergence entre ces territoires, relativement à l'apprentissage et à l'enseignement de la notion de fraction. Dans le chapitre II, nous analyserons les divergences qui apparaissent à ce sujet.

Section I. Points de convergence

Les fractions ont fait l'objet d'un nombre important d'études didactiques, en France et dans le monde. Outre les articles issus de chercheurs canadiens (Kieren, 1976), américains (Behr, Lesh, Post et Silver, 1983), britanniques (Nunes et Bryant, 1996), belges (Grégoire, 2008) et français (Brousseau, 1987) que nous avons déjà cités, nous nous sommes notamment appuyé sur une note de synthèse rédigée par une universitaire australienne (Mitchell, 2012), présentée à un congrès qui se déroulait à Singapour. Les idées formulées par la communauté scientifique circulent donc très largement, au-delà des barrières frontalières. À travers ces études, nous avons pu mettre au jour des caractéristiques qui transcendent les systèmes éducatifs. Ces invariants portent aussi bien sur les fractions elles-mêmes (sous-section I), que sur les difficultés rencontrées par les élèves et les professeurs à l'occasion respectivement de leur apprentissage et de leur enseignement (sous-section II).

Sous-section I. Universalité du concept de fraction

L'utilisation large du concept de fraction s'explique par le fait qu'elles répondent à un besoin qui s'est construit historiquement et consiste à représenter des nombres entre les entiers. C'est ainsi qu'elles ont pu trouver, progressivement, une place qui est assez bien définie aujourd'hui dans le champ numérique. Afin de montrer que les fractions constituent un concept dont la connaissance est suffisamment répandue dans le monde pour pouvoir mener des comparaisons internationales, nous étudierons successivement les aspects historiques (§ 1) et les aspects contemporains (§ 2) de la notion de fraction.

§ 1. Aspects historiques

L'histoire des fractions n'étant pas le thème central de notre étude, notre propos sera volontairement synthétique et cette histoire brossée à grands traits : l'objectif est de montrer que la notion de rompu a été appréhendée différemment dans les régions du monde où elle a

émergé, pour ensuite se consolider et s'uniformiser sous la forme des écritures fractionnaires. Ainsi que l'indiquent Benoit *et al.*, « puisque les fractions sont représentées comme des ensembles de nombres, elles nécessitent, tout particulièrement, pour leurs notations, pour leurs opérations, une organisation spatiale » (1992, p. 396). C'est l'évolution de cette représentation spatiale que nous allons présenter. Pour comprendre comment les notations en écriture fractionnaires se sont dispersées à travers le monde (B), il nous faut d'abord préciser comment elles sont apparues (A) dans six civilisations antiques.

A. Naissance des écritures fractionnaires

Le problème de la représentation de quantités inférieures à l'unité est fort ancien. Les premières traces d'écriture fractionnaires ont été retrouvées à Babylone. Ainsi, dès le « début du II^{e} millénaire avant J.-C., les Babyloniens ont utilisé une écriture, dite cunéiforme, qui permet de représenter des grands nombres mais également des cas particuliers de fractions » (*Alahmadati*, 2016, p. 24). Les fractions étaient limitées à celles dont le dénominateur était une puissance de 60, en concordance avec leur système sexagésimal de numération. Cela constituait donc un système relativement complexe où la fraction 2/5 était exprimée sous la forme 24/60. S'il était aisé de représenter dans ce système des fractions dont le dénominateur est un diviseur de 60, il était beaucoup plus compliqué de représenter des fractions telles que 1/7. En outre, les nombres entiers et fractionnaires étant écrits avec les mêmes symboles, et la place des unités dans le nombre n'étant pas précisée, il en résultait « une ambiguïté dans la lecture du nombre » (*ibid.*).

Chez les Égyptiens, le concept de partage en parts égales était exprimé à l'aide d'un « d'un hiéroglyphe particulier [représentant] "la bouche" qui signifiait alors "partie" » (*ibid.*, p. 26). Cependant, ils ne désignaient que des fractions unitaires, à l'exception des fractions 2/3 et 3/4, qui faisaient l'objet d'un symbole tout particulier et d'un statut spécial. Ainsi, « les Égyptiens n'ont jamais regardé les fractions 2/3 et 3/4 comme des fractions réelles, mais comme des symboles divins » (*ibid.*, p. 27, voir également à ce sujet Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986, p. 14). Les fractions permettaient alors de résoudre des problèmes de partage dans le cadre de ce que nous appellerions aujourd'hui la fraction-quotient (c'est-à-dire représentant un partage de pluralité). Par exemple, le « le problème 6 du papyrus Rhind » consiste à « partager 9 pains entre 10 hommes » (*ibid.*). Les fractions non unitaires étaient exprimées sous la forme d'une décomposition de fractions unitaires, mais pas, comme on pourrait l'imaginer, en utilisant le dénominateur de la fraction unitaire : ils réalisaient cette décomposition à l'aide des

dénominateurs les plus petits possibles utilisés successivement. Ifrah indique qu'au lieu de décomposer « 3/5 en 1/5 + 1/5 + 1/5 », les Égyptiens privilégiaient la décomposition suivante : « 3/5 = 1/2 + 1/10 » (1981, p. 406). De même, pour décomposer 47/60, ils utilisaient une décomposition de fractions unitaires qui semble assez simple (1/3 + 1/4 + 1/5), mais qui nécessite pour être bien comprise de maitriser un raisonnement mathématique très élaboré. Afin de se faciliter le travail de calcul, les Egyptiens se servaient de tables de décomposition.

Les Grecs ont bénéficié des savoirs développés en Égypte et en Mésopotamie pour développer de nouvelles connaissances à propos des opérations impliquant des fractions. Ainsi, ils « donneront les méthodes de calcul pour ajouter, soustraire, multiplier et diviser des fractions » (Alahmadati, *op. cit.*, p. 28). Bien que « le système grec se prête difficilement à l'écriture des fractions » (Dahan-Dalmedico et Peiffer, *op. cit.*, p. 19), ils améliorent également son formalisme, qui se rapproche du nôtre avec le mathématicien Diophante (qui vécut probablement au II^{e} ou III^{e} siècle de notre ère) : le dénominateur est au-dessus du numérateur à la manière d'un exposant (toutefois le trait de fraction n'était pas encore apparu). Ce n'est pas la notation couramment utilisée par ses prédécesseurs, qui se servaient plutôt d'un système d'accentuation spécifique au numérateur et au dénominateur.

Chez les Romains, les fractions sont d'abord peu utilisées. Le système se rapproche de celui des Babyloniens, mais au lieu d'utiliser une base sexagésimale, les Romains se servent d'une base duodécimale, instituant un système à la fois plus simple et suffisant pour représenter efficacement les demis, les tiers et les quarts. L'unité, appelée « *as* », était partagée en douze parts égales que l'on appelait « *unciae* » (Lamboley, 1995, p. 57-58). Non seulement chaque subdivision de l'unité portait un nom spécifique (par exemple, *semis* pour 1/2, *bes* pour deux tiers, *dodrans* pour 3/4, etc.), mais elle était également écrite à l'aide d'un symbole numérique particulier, où chaque point valait une *uncia*, et où six points étaient convertis en un S (par exemple, S pour 1/2, S•• pour 2/3, S••• pour 3/4, etc.). Cette écriture symbolique ne facilitant pas les calculs, le système romain évolua pour parvenir, vers le III^{e} siècle, à une représentation sous la forme d'un numérateur et d'un dénominateur placé en exposant, de telle sorte que 3/4 était noté ^{IV}III, dans un formalisme qui rappelle celui proposé par Diophante.

Dans la Chine ancienne du I^{er} siècle, on constate qu'à l'intérieur des « *Neuf Chapitres sur les procédures mathématiques*, où l'algorithme de division n'est pas rappelé, et dans la tradition que ce livre fonde, le résultat d'une […] division est constamment donné sous la forme

de l'entier *a* et de la fraction $\frac{b}{c}$ » (Benoit *et al.*, 1992, p. 265). Toutefois, le résultat ne prend pas la forme moderne qui est utilisée ici. Il est donné de façon constante sous la forme *a b c*, où les trois nombres sont écrits les uns en dessous des autres. Si la mise en page du résultat d'une opération visant, par exemple, à extraire la racine carrée ou la racine cubique, change entre le I^er^ et le XIII^e^ siècle, « elles évoluent toutes de manière à s'achever sur une configuration de trois lignes, qui constitue le résultat et qui est lue de la même manière : $a + \frac{b}{c}$ » (*ibid.*). Cette écriture sur trois lignes se trouve aussi bien dans les *Neuf chapitres* précités que dans le *Classique mathématique de Zhang Qiujian* qui est plus récent, puisqu'il date du V^e^ siècle.

Nous évoquerons les apports des mathématiciens indiens, quand bien même « les rapports entre l'Inde et la Chine consécutifs à l'introduction du bouddhisme en Chine vers la fin du I^er^ siècle constituent l'arrière-plan historique sur lequel il convient de se demander s'il n'y a pas lieu de parler là d'une même communauté scientifique, plutôt que de traditions aux particularités irréductibles » (Benoit *et al.*, *op. cit.*, p. 180). Si nous distinguons les apports de ces deux civilisations, c'est que « l'un des grands intérêts des textes indiens est que, contrairement aux textes chinois anciens, ils nous fournissent les mises en page des calculs effectués sur la poussière » (*ibid.*). Les Indiens sont les premiers pour lesquels nous ayons la trace d'une fraction écrite sous la forme d'un numérateur placé sur le dénominateur, tandis que les nombres mixtes sont formés de trois nombres alignés verticalement, le nombre entier étant noté au-dessus. Certes, la barre de fraction n'a pas encore été introduite, mais cela fait écrire à Saidan que « le concept de fraction a/b est un concept indien » (1997, p. 19). Cette notation, selon Alahmadati, « a pu apparaître en Inde en même temps que la notation numérique » : « les fractions sont déjà notées par des configurations de nombres sur deux ou trois lignes » (*op. cit.*, p. 29) dans le manuscrit de Bakhshali, c'est-à-dire, pour les fragments les plus anciens, au III^e^ siècle de notre ère.

Nous voyons ici comment la naissance du concept de fraction est diffuse dans l'Histoire, et comment sa dispersion s'opère de façon progressive, au fil des constructions locales de mathématiciens et de son appréhension par différentes sociétés. Comme l'indique Catherine Goldstein à propos de la naissance des fractions décimales, « il va de soi que les questions de priorité, d'origine d'une invention ou d'un concept, rarement pertinentes, ne le sont pas du tout ici, d'une part à cause des ambiguïtés multiples de la notion de fraction décimale, d'autre part à cause de notre ignorance sur de nombreux phénomènes de transmissions inter-culturelles » (2010, p. 3). Pour l'apparition du concept de fraction, nous faisons face aux mêmes difficultés,

puisque les problèmes relatifs au comptage ou au calcul portant sur des quantités inférieures à l'unité sont apparus à des époques proches, dans différentes régions du monde, avec des échanges et appropriations de savoirs qui sont encore mal connus des historiens. En revanche, les sources permettant de comprendre comment, à partir de ces connaissances premières, se diffusèrent progressivement, dans le monde entier, le concept de fraction puis, bien plus tard, celui de nombre décimal, sont mieux documentées.

B. Dispersion des écritures fractionnaires

La façon dont les formes de numération indienne se diffusèrent à l'ouest est bien décrite par *Benoit et al.* Ces auteurs indiquent que, « dans les décennies qui suivirent la mort du prophète, en 632, les Arabes se rendirent maitre d'une grande partie du Moyen-Orient et des pays baignés par la Méditerranée. Après s'être assurés le contrôle de l'Égypte, de la Syrie et de l'Iraq, ils atteignirent l'Atlantique et l'Indus, en 711 » (*op. cit.*). S'en est suivi un travail de traduction et d'appropriation des savoirs formulés dans des langues diverses, qui a duré au moins jusqu'au IX^{e} siècle et qui a abouti au fait que l'on voit « fleurir à partir de cette époque des traités de calcul indien, qui font la part belle aux fractions » (*ibid.*, p. 181). Il faut attendre plusieurs siècles pour que des mathématiciens arabes, s'inspirant de la notation indienne, introduisent la barre de fraction : l'une des premières utilisations de la barre de fraction horizontale est attribuée à Abu Bakr Al-Hassar, peu avant 1200, dans des manuscrits tels que celui conservé par l'université de Pennsylvanie sous la cote UPenn LJS 293 (Cajori, 1929, p. 269). Ensuite, « ce furent Ibn al-Banna, ou ses prédécesseurs à l'ouest, qui adoptèrent définitivement l'idée de la forme générale de la fraction ordinaire a/b avec un trait pour séparer le numérateur et le dénominateur » (Alahmadati, *op. cit.*, p. 31), au XIII^{e} siècle. Certes, de telles formes ont pu être observées dans des documents beaucoup plus anciens[1], mais ce n'est qu'avec les mathématiciens arabes précités que cette pratique devint systématique. Peu après les écrits de Al-Hassar, la notation des fractions sous la forme d'un numérateur et d'un dénominateur séparés par un trait de fraction fut introduite en Europe, par le biais des traductions de Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci (Cajori, *op. cit.*, p. 311). Toutefois, elle peina à s'imposer, possiblement en raison des difficultés d'impression qu'elle suscitait : elle apparait dans certains ouvrages comme ceux de Rudolff (1500-1545) pour les fractions écrites en gros

1. Voir à ce sujet Chrisomalis (2010).

caractères, mais pas pour celles écrites en petits caractères (Smith, 1958, p. 216). De plus, les écrits de Fibonaci restèrent temporairement dans l'ombre, supplantés par d'autres traductions qui connurent plus de succès au siècle suivant, comme « l'*Algorismus Vulgaris* de Jean de Sacrobosco ou le *Carmen de algorismo* d'Alexandre de Villedieu » (Allard, 1992, p. 301). Il faut dire également que ces premiers textes mêlaient arithmétique arabe et arithmétique latine, par ajouts ou transformation de la traduction originale du texte.

L'essor du commerce en Europe a contribué à une utilisation accrue des écritures fractionnaires. Ainsi, « au milieu du XIV^{e} siècle, les marchands français utilisaient déjà systématiquement certaines fractions plus ou moins intégrées à des systèmes de mesure traditionnels » (Benoit *et al.*, 1992, p. 380). Cependant, l'utilisation de la notation romaine persistait, en particulier pour l'écriture de 1/2, comme le montrent les auteurs à travers l'analyse de la comptabilité de Paul de Sade pour les années 1390 et 1391. L'exemple des « marchands messins de la fin du XVe siècle » qui « avaient l'habitude de faire leurs calculs en chiffres arabes » (*ibid.*, p. 314) montre une évolution dans l'emploi des fractions au Moyen Âge : leur notation se rapprocha de celle employée aujourd'hui, avec une systématisation de l'utilisation des chiffres arabes. Toutefois, dans ce contexte, le concept était encore peu développé : dans le Kadran aux marchans (1485), « la fraction est définie comme un *nombre rompu* ou *nombre rout* qui ne peut être supérieur à l'unité » (*ibid.*, p. 315). En revanche, la notation écrite était stable : « le numérateur et le dénominateur portent des noms qui ne sont pas encore fixés […], mais ils se placent, comme actuellement, le numérateur sur le dénominateur, et sont séparés par une barre de fraction » (*ibid.*). Au début de la Renaissance, « non seulement les fractions sont connues d'un public de plus en plus large en Occident, mais le règne de la fraction telle que l'Europe l'a conçue à travers le modèle arabe s'étend » (Goldstein, 1992, p. 340). En effet, « l'ère de l'impérialisme politique et économique de l'Europe […] s'accompagne d'un impérialisme culturel et scientifique » (*ibid.*) favorable à une diffusion dans le monde entier des savoirs occidentaux en général, et de ceux concernant les fractions en particulier. À travers les expéditions des explorateurs et des missionnaires, et notamment de la découverte de l'Amérique par Christophe Colomb, en 1492, et du voyage de Vasco de Gama en Extrême-Orient en 1498, « les mathématiques européennes s'imposent en Amérique, pénètrent en Asie où elles rencontrent d'autres traditions séculaires, et avec elles, les fractions » (*ibid.*).

Parallèlement au développement de cette arithmétique marchande, les mathématiciens identifièrent de nouvelles applications pour les fractions et firent évoluer les pratiques de calcul.

Ainsi, avant l'apparition des nombres décimaux, les fractions sexagésimales étaient très utilisées en particulier dans le domaine de la trigonométrie. Bien que d'autres les aient utilisées avant lui, François Viète établit l'intérêt de l'usage des fractions décimales contre les fractions sexagésimales, en 1579, dans le *Canon des mathématiques*. Pour lui, « les soixantièmes et les soixantaines doivent être d'un usage rare ou nul. Au contraire les millièmes et les mille, les centièmes et les centaines, les dixièmes et les dizaines doivent être d'un usage fréquent ou constant »[1]. À cette époque, les divers sens de la fraction commencèrent à être explorés, et « certains textes considèrent déjà la fraction comme l'expression d'une division » (Smith, *op. cit.*, p. 219, cité par Goldstein, *ibid.*). L'auteur conclut qu'au XVI^{e} siècle, « les traités d'arithmétique présentent le calcul fractionnaire d'une manière très proche de ce qu'il sera dans les livres des écoliers aux XIX^{e} et XX^{e} siècle » (Goldstein, 1992, p. 339).

Par la suite, les fractions furent progressivement concurrencées par les nombres décimaux, écrits sous différentes formes. Sans avoir connaissance de l'œuvre d'Al-Kashi sur de telles écritures, le mathématicien flamand Simon Stevin publia en 1582 un ouvrage sur les nombres décimaux intitulé *La disme*. Dans ce livre, il détailla les avantages des nombres décimaux pour les domaines les plus divers : arpentage, astronomie, commerce, et prôna le partage des monnaies en puissances de dix, écrivant entre parenthèses le rang de chaque chiffre (zéro pour les unités, un pour les dixièmes, deux pour les centièmes, trois pour les millièmes, etc.). En 1592, l'italien Giovanni Antonio Magini (1555-1617) proposa une notation proche de la nôtre et qui est encore utilisée dans les pays anglo-saxons : le point sépare la partie entière et la partie décimale, tandis qu'en 1595, le suisse Jost Bürgi (1552-1632) fit surmonter le chiffre des unités par un petit cercle. Enfin, au début du XVII^{e} siècle, le néerlandais Willebrord van Roijen Snell (1580-1626), aussi connu sous le nom de Snellius, puis l'écossais John Napier (1550-1617), utilisèrent la virgule dans l'écriture des nombres décimaux, pratique qui perdure aujourd'hui en Europe continentale. Malgré l'utilisation, devenue courante, des nombres décimaux pour représenter les nombres rationnels, les fractions n'ont pas disparu. Comme l'indique Goldstein, elles « ont pu servir à certaines périodes à boucher les vides entre les entiers : mais si elles continuent d'être étudiées, c'est en partie parce qu'une communauté professionnelle de théoriciens des nombres a émergé au XIXe siècle et qu'elle a identifié

1. L'ouvrage, disponible à l'adresse suivante : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k52673b.image (consultée le 30/08/2018), n'est pas paginé.

comme son sujet d'étude propre les propriétés des nombres rationnels » (*op. cit.*, p. 388). Elles conservent donc encore aujourd'hui une place bien définie dans le système numérique contemporain, comme une façon parmi d'autres d'écrire les nombres rationnels, avec ses avantages (cette présentation met notamment en avant un rapport de nature multiplicative instauré entre « un couple d'entiers » [*ibid.*]) et ses inconvénients (en particulier les difficultés qu'elles présentent pour la réalisation de certains calculs effectués à la main).

§ 2. Aspects contemporains

Les fractions constituent une écriture des nombres rationnels parmi d'autres, mais leur forme spécifique fait qu'elles occupent une place particulière dans le champ numérique (A). Comme expression des rationnels, elles jouent par ailleurs un rôle important dans l'enseignement des mathématiques (B). Ces développements constituent l'occasion de préciser les limites du concept de fraction tel que nous l'envisageons dans notre étude, circonscrivant ainsi le nombre d'éléments des instructions officielles et d'items des tests TIMSS que nous allons utiliser.

A. La place des fractions dans le champ numérique

Comme l'indique Goldstein (*op. cit.*, 1992, p. 377), « au premier abord, tout est simple : pour les mathématiciens, la notion fondamentale en l'occurrence est celle de nombre rationnel ». Une fraction représente un nombre rationnel, entendu comme un quotient de nombres entiers relatifs. Les fractions font partie de cet ensemble mathématique noté $\mathbb{Q}$, quand bien même les nombres rationnels peuvent prendre des formes très diverses (fractions, nombres décimaux, pourcentages, rapports, etc.). Cet ensemble est une extension de l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$ (qui peuvent être exprimés sous la forme d'une fraction décimale, c'est-à-dire dont le dénominateur est une puissance de 10), qui est lui-même une extension de l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$ (entiers positifs ou négatifs), qui est lui-même une extension de l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$ (entiers positifs uniquement). $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ peuvent donc être représentés sous la forme d'ensembles emboîtés, comme on peut le voir sur la figure ci-dessous, où des exemples de fraction pouvant appartenir à chaque ensemble sont donnés. Au-delà des rationnels, point de fraction : les nombres irrationnels sont précisément ceux qui ne peuvent être écrits sous la forme d'une fraction a/b, comme, par exemple, $\sqrt{2}$.

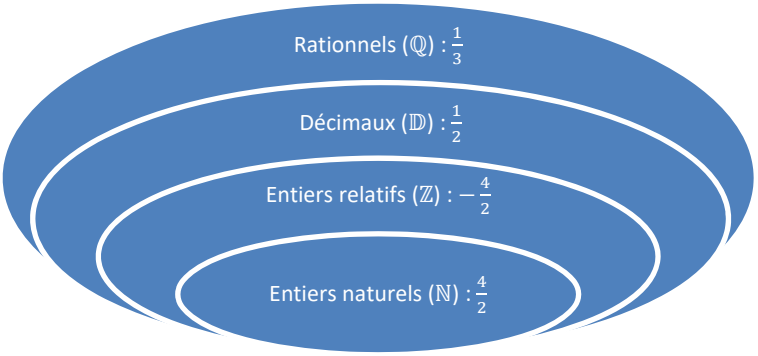


Figure 4. Relations d'inclusion entre les différents ensembles de nombres auxquels peuvent appartenir les fractions

Les fractions se distinguent des écritures fractionnaires, qui constituent un ensemble plus large et sont définies comme des nombres écrits sous la forme a/b, où a et b sont des nombres quelconques et b est non nul, tandis que les fractions sont constituées d'un couple d'entiers. Les écritures fractionnaires peuvent appartenir à l'ensemble des irrationnels noté $\mathbb{R}$. Ce dernier contient les nombres rationnels, ainsi que les nombres dont la représentation décimale est infinie et non périodique, comme $\sqrt{2}$ et π. Par exemple, on a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui appartient à l'ensemble des nombres réels constructibles, ou encore $\frac{\pi}{2}$ qui appartient à l'ensemble des nombres réels transcendants.

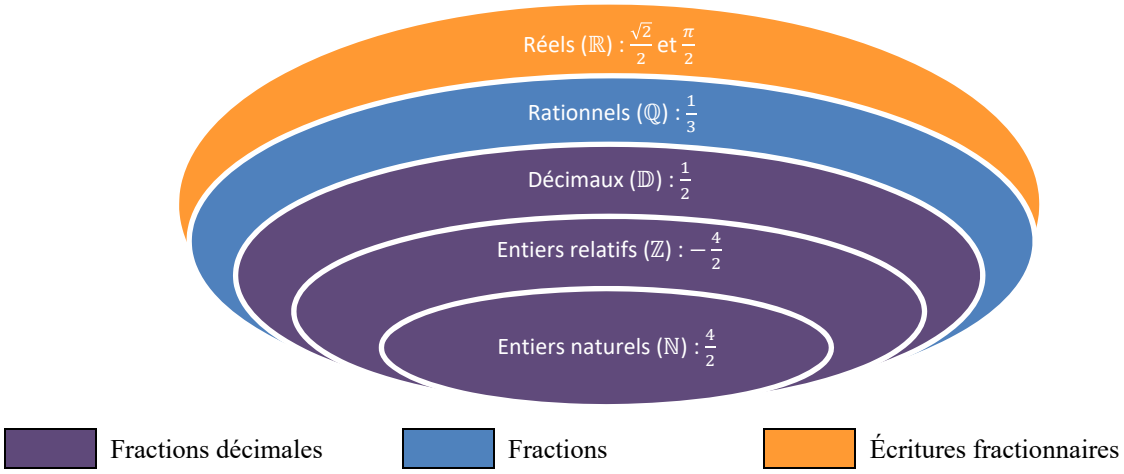


Figure 5. Relations d'inclusion entre les différents ensembles de nombres auxquels peuvent appartenir les écritures fractionnaires

Puisque notre étude concerne l'enseignement et l'apprentissage initial des fractions, nous nous limiterons à l'analyse des items des programmes qui traitent des fractions, non des écritures fractionnaires, c'est-à-dire des nombre écrit sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des nombres

entiers et b est non nul[1]. Nous n'avons pas rencontré, en fin de scolarité primaire ou en début de scolarité secondaire, d'intitulé faisant référence à des écritures fractionnaires, ni dans les instructions officielles, ni dans les évaluations TIMSS. Si la définition des fractions semble, pour ce qui concerne sa place dans le champ numérique, assez clairement établie, celle-ci devient plus complexe lorsqu'on s'intéresse à son enseignement.

B. La place des fractions dans l'enseignement des mathématiques

Le terme de « fraction » est issu du verbe latin *frangere*, qui signifie « rompre », « briser ». Ce mot latin trouve son origine dans le mot arabe *kasr*, que l'on traduire par « rompu », « fracturé », lui-même probablement tiré du sanskrit *bhinna*, dont le verbe *bhid* évoque l'idée de fendre, de rompre ou de diviser (Benoit *et al.*, op. cit., p. 212). On le trouve pour la première fois dans un ouvrage d'Adélard de Bath, traduisant l'œuvre d'Al-Kwarizmi au XII^{e} siècle. Les fractions sont donc étymologiquement des « nombres rompus ». Le mot « dénominateur » provient quant à lui du latin *denominare*, qui signifie « nommer » : c'est lui qui permet de comprendre quelle fraction est en jeu (les demis, les tiers, les quarts, les cinquièmes…), tandis que le mot « numérateur » est tiré du latin *numerus*, qui désigne un nombre (à l'origine un nombre de parts). L'étymologie de la fraction, parce qu'elle décrit les premières utilisations qui sont faites du concept, induit à l'époque contemporaine un risque de glissement vers une vision réductrice de la fraction : travailler avec des fractions ne consiste pas seulement à partager une unité, nommer et compter les parts.

Le concept de fraction, entendu comme une écriture instaurant un rapport entre deux nombres, entretient des liens avec de nombreuses autres notions mathématiques, qu'il s'agisse de la proportionnalité, des pourcentages, des agrandissements, des réductions, des échelles, des vitesses, etc. Pour prendre l'exemple de la proportionnalité, il est possible d'établir, dans le tableau ci-contre, un coefficient de proportionnalité qui unit la masse des oranges et leur prix, égal à $\frac{12}{5}$ ou $\frac{36}{15}$, d'où l'égalité suivante : $\frac{12}{5} = \frac{36}{15}$.

1. Dans notre travail, nous utilisons (lorsque cela est sans incidence sur la compréhension) l'écriture a/b dans un souci de conserver des interlignes homogènes, plutôt que l'écriture $\frac{a}{b}$.

Masse des oranges (en kg)	5	15
Prix (en €)	12	36

Les liens entre les fractions et la proportionnalité apparaissent encore plus étroits à l'évocation du calcul de la quatrième proportionnelle. Pour trouver l'inconnue, par exemple, le prix de 10 kg d'oranges, on pourra résoudre l'égalité suivante :

$$\frac{12}{5} = \frac{x}{10}$$

Les méthodes de résolution passant par le calcul et visant l'identification d'une quatrième proportionnelle sont similaires à celles qui visent la production de fractions équivalentes : en utilisant la constante, on peut considérer que si la masse des oranges est multipliée par deux, le prix sera également multiplié par deux. En utilisant le coefficient de proportionnalité, on peut considérer que si le prix des oranges correspond à 2,4 fois la masse des oranges, alors il suffit de multiplier 10 par 2,4 pour trouver le prix de 10 kg d'oranges. Enfin, on peut utiliser un procédé couramment appelé « règle de trois » qui, à partir des produits en croix ($5x = 12 \times 10$), conduit à l'équation $x = \frac{12 \times 10}{5}$. Il s'en suit que toute situation de proportionnalité peut être représentée sous la forme d'une égalité de fractions, et que les raisonnements employés par les élèves dans le cadre de l'étude de la proportionnalité sont similaires à ceux employés dans le cadre de l'étude des fractions équivalentes.

Comme cela a été le cas historiquement, les fractions décimales servent aussi très souvent de point d'appui pour l'enseignement des nombres décimaux et des pourcentages, ceux-ci étant expliqués comme une façon plus simple d'écrire une décomposition de fractions décimales ou une fraction de dénominateur 100, et plus pratique pour la réalisation de calculs. En cas de difficulté pour comprendre les nombres décimaux et les pourcentages, il est donc vraisemblable que les professeurs vont s'appuyer sur des explications impliquant des fractions. C'est le sens des injonctions fournies par les auteurs des programmes français de 2008, lorsqu'il est indiqué que « les procédures utilisées pour comparer, encadrer, intercaler des nombres sont justifiées en s'appuyant sur la signification des écritures décimales » (*op. cit.*) : 0,3 est supérieur à 0,21 parce $0{,}3 = \frac{3}{10}$ tandis que $0{,}21 = \frac{2}{10} + \frac{1}{100}$. Les fractions peuvent donc être convoquées alors même qu'elles ne constituent pas le thème principal de l'enseignement. Outre l'apprentissage des décimaux et des pourcentages, c'est le cas également dans le cadre de

l'apprentissage de l'algèbre, où les élèves vont devoir manipuler des équations et inéquations impliquant des fractions, voire des coefficients fractionnaires.

Enfin, il est établi que les élèves possèdent, dès le plus jeune âge des connaissances informelles sur les nombres rationnels (Pitkethly et Hunting, 1996) et que les fractions dans leur forme oralisée, en particulier les plus simples (demis, quarts, tiers), sont évoquées bien avant d'être formalisées par une écriture fractionnaire. Ainsi, on trouve fréquemment, dans les programmes d'enseignement, des tâches telles que « trouver la moitié, le quart et les trois quarts de formes et de collections d'objets » (Department for Education, 2006, p. 74) bien avant que les auteurs imposent l'enseignement des fractions sous leur forme écrite en chiffres. Dans notre exemple, l'intitulé précité est destiné aux élèves de deuxième année, tandis que la lecture et l'écriture des fractions sont inscrites au programme de troisième année.

Ces trois exemples d'utilisation des fractions dans un contexte scolaire montrent la difficulté de dire clairement où commence et où s'arrête l'enseignement de cette notion. Si les fractions peuvent être utilisées dans des domaines très divers, notre étude se limite à l'analyse de l'enseignement et de l'apprentissage initial du concept, depuis une première approche par une représentation en lettres ou oralisée, jusqu'à la fin de l'enseignement du concept dans l'enseignement secondaire (pour réaliser des correspondances avec les résultats des élèves aux évaluations TIMSS, nous avons fixé la limite de notre étude à la huitième année de scolarité obligatoire). Le réinvestissement des connaissances des élèves relatives aux fractions dans l'étude de notions qui s'en détachent (proportionnalité, algèbre, nombres décimaux, pourcentages, etc.) ne fera pas l'objet d'une analyse approfondie. De cette façon, nous disposons d'un socle commun à de nombreux pays du monde, nous permettant de réaliser des comparaisons internationales avec des données suffisantes.

Conclusion de la sous-section

L'édification du concept de fraction et l'homogénéisation des différentes écritures qu'il peut revêtir est un processus qui s'est étendu sur plusieurs millénaires, depuis les Babyloniens jusqu'à la période contemporaine. À la Renaissance, par le biais de la mondialisation du commerce et des missions religieuses, sa connaissance s'est étendue dans les différentes régions du globe, puis les mathématiciens ont construit, pour représenter les nombres rationnels, d'autres écritures telles que les écritures décimales et les pourcentages. Pour autant, les fractions ont continué à être utilisées, notamment parce que leur écriture induit une relation entre deux

entiers qui peut revêtir plusieurs significations (en particulier une partition de l'unité ou une partition de plusieurs unité), et parce qu'elle constitue un point d'entrée couramment utilisé dans l'enseignement pour parvenir à la compréhension des autres écritures des rationnels. Aujourd'hui, il existe une certaine universalité de l'enseignement des fractions, comme en atteste les évaluations TIMSS : sur les cinquante-deux participants aux tests 2015 dont les données ont été publiées, seuls quatre déclarent que l'item M0701 (le plus simple concernant les fractions, puisqu'il s'agissait d'associer la fraction 1/4 avec le dessin correspondant) n'est pas couvert pas leurs programmes d'enseignement au plus tard en quatrième année : la Bulgarie, la Croatie, le Maroc et la Slovaquie. Cet apprentissage initial pose néanmoins des difficultés importantes aux élèves, et de nombreuses questions subsistent sur la façon sur la façon dont cet enseignement devrait être conduit.

Sous-section II. Universalité des difficultés des élèves à propos des fractions

La didactique des mathématiques s'est longuement penchée sur les obstacles les plus fréquemment rencontrés par les élèves dans le cadre de l'apprentissage des fractions[1]. Les difficultés des élèves dans ce domaine sont donc bien documentées, et nous allons décrire dans un premier temps les problèmes que pose l'acquisition de ce concept à travers une synthèse de l'abondante littérature dans ce domaine (§ 1). Néanmoins, les fractions continuent de constituer une notion dont l'apprentissage (et, par conséquent, l'enseignement) pose question. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder les résultats des élèves aux évaluations nationales et internationales, qui restent particulièrement bas comparativement à ceux que l'on observe dans d'autres champs des mathématiques. Dans un deuxième temps, nous montrerons donc que les difficultés des élèves demeurent, en nous appuyant sur les pourcentages de réussite des élèves aux items impliquant des fractions dans différents tests réalisés récemment (§ 2).

§ 1. Obstacles les plus fréquemment rencontrés

Brousseau (1998, p. 124-125) distingue plusieurs types d'obstacles que peuvent rencontrer les élèves dans leurs apprentissages. Parmi eux, on trouve des obstacles de nature

1. Voir notamment Behr et al. (1983), Moss et Case (1999), Grégoire et Meert (2005) et Charalambous et Pitta-Pantazi (2007) pour une synthèse des difficultés rencontrées par les élèves au cours de l'apprentissage des fractions.

épistémologique et des obstacles de nature didactique. Pour définir les premiers, nous dirons avec lui qu'un « [...] obstacle épistémologique est constitutif de la connaissance achevée, en ce sens que son rejet doit finalement être incontournablement explicité, et par conséquent qu'il laisse des traces parfois profondes dans le système de connaissance [...] ». Les seconds « sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif ». Comme tout nombre rationnel, la fraction pose des difficultés liées au dépassement des conceptions construites par les élèves à propos des nombres entiers, et qui deviennent erronées pour les nombres rationnels. Il existe donc des difficultés liées au concept lui-même : ce sont des obstacles épistémologiques (A). Parallèlement, les écritures fractionnaires posent des difficultés spécifiques liées à leur enseignement, qui se révèle particulièrement délicat : ce sont des obstacles didactiques (B).

A. Les obstacles épistémologiques

L'apprentissage des fractions suppose « une réorganisation conceptuelle, qui intègrerait les rationnels comme une nouvelle sorte de nombres, avec leurs propriétés et leurs règles de fonctionnement propres » (Carette et al., 2009, p. 20). Or, les élèves ont déjà acquis de nombreuses connaissances sur les nombres à travers l'étude des entiers. Ils ont développé par ce biais un système de pensée organisé et cohérent, qui leur a permis de résoudre de nombreuses situations rencontrées dans un cadre scolaire ou dans leur vie quotidienne. Il est donc difficile pour eux de se défaire de ces règles bien établies pour en créer de nouvelles, spécifiques aux nombres rationnels. Ce « biais des nombres naturels » (Ni et Zhou, 2005, p. 27) s'applique à la construction du concept de nombre rationnel, et donc aux fractions qui constituent l'une des formes que celui-ci peut revêtir. Comme pour tout nombre rationnel, il existe entre deux fractions une infinité de fractions, ce qui n'est pas le cas pour les nombres entiers. De même, il n'est pas possible d'indiquer le prédécesseur et le successeur d'un nombre écrit sous une forme fractionnaire, puisqu'il sera toujours possible de trouver une fraction plus proche que celle que nous serions tenté de citer. Enfin, la notion d'équivalence n'existe pas dans le système des nombres entiers naturels, alors que toutes les fractions peuvent trouver une infinité de fractions équivalentes. En ce qui concerne les opérations avec des nombres rationnels, les règles établies pour les entiers ne fonctionnent pas toujours. Par exemple, le produit de deux nombres rationnels peut être strictement inférieur à chacun des facteurs et, dans une division par un nombre rationnel, le quotient peut être supérieur au dividende : avec les nombres entiers naturels, ces deux situations sont inenvisageables. En outre, les nombres rationnels peuvent être

exprimés sous des formes très différentes (fractions, écritures décimales, rapports, pourcentages, etc.). Le concept de fraction présente donc toutes les difficultés que l'on retrouve pour l'acquisition du concept de nombre rationnel. Cependant, d'autres problèmes spécifiques se font jour, en raison de cette forme d'écriture particulière, composée d'un numérateur et d'un dénominateur exprimés sous la forme d'entiers et séparés par une barre de fraction. Les difficultés liées à la nature des nombres rationnels ont bien été décrits par Carette *et al.* (*op. cit.*), nous n'approfondirons donc pas cette question. En revanche, nous allons décrire plus avant les obstacles que rencontrent les élèves pour la maitrise de l'écriture des rationnels sous une forme fractionnaire.

Le concept de fraction est plurivoque : il existe plusieurs facettes de ce concept. Comme ce dernier recouvre de nombreux aspects dont la description serait à la fois longue et inutile pour les observations que nous ferons ultérieurement, notre description portera sur les éléments les plus simples de ce concept, ceux généralement acquis au stade de la scolarité élémentaire et donc relatifs à la conception « partie d'un tout » de la fraction. À l'intérieur même de cette conception, il existe des difficultés qui se présentent à propos de certains types de tâches en particulier et qui doivent être reliées aux modalités de la tâche. Cette analyse des variables susceptibles d'affecter les résultats des élèves aux items des évaluations internationales pourrait permettre d'affiner les « catégories de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques » (Roditi et Salles, 2015, p. 241). Dans cette répartition, le premier niveau « est celui où l'élève effectue une tâche courante et obtient directement le résultat attendu par la mise en œuvre d'une procédure, souvent unique, qui est indiquée ou suggérée par l'énoncé, et dont les programmes scolaires permettent de penser qu'elle est automatisée pour les élèves » (*ibid.*, p. 240). Pour réussir les items du second niveau, « l'élève adapte ou transforme l'énoncé – les données ou la question posée – avant d'appliquer ses connaissances. La transformation peut prendre la forme d'une transformation d'information : convertir, par exemple, une donnée dans une autre unité de mesure. Il peut s'agir d'un changement de point de vue sur des objets mathématiques ou sur une relation entre des objets » (*ibid.*, p. 241). Enfin, « dans les items du troisième niveau, la mise en fonctionnement des contenus nécessite que l'élève, de manière autonome, introduise un ou plusieurs intermédiaires » (*ibid.*). La description des difficultés rencontrées par les élèves contribuera donc à distinguer les items des première et deuxième catégories, en définissant les tâches qui induisent une adaptation de l'énoncé.

Par exemple, pour l'association d'une fraction et d'un dessin, il faut que les élèves parviennent à comprendre que les parts dans l'unité, dont le nombre forme le dénominateur, sont égales. Ainsi, la partie grisée du carré ci-dessous ne représente pas 2/3 car les parts que nous avons créées ne sont pas égales. Pourtant, certains élèves ne reconnaitront pas 3/4, mais, de façon erronée, 2/3. C'est pourquoi les auteurs insistent généralement sur l'idée d'une manipulation par pliage, partage et distribution de façon à construire chez l'élève l'idée que le dénominateur représente le nombre de parts de taille égale dans l'unité (Pitkethly & Hunting, 1996, p. 8).

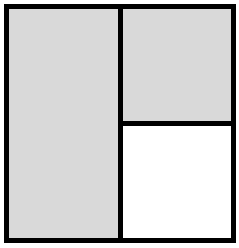


Figure 6. Exemple de distracteur envisageable pour vérifier la prise en compte de la nécessité d'un partage en parts égales

L'idée erronée selon laquelle toutes les parts doivent être représentées se rapproche de la conception que nous venons d'évoquer. Ainsi, des élèves pourraient ne pas reconnaitre la fraction 2/3 car les trois parties égales n'apparaissent pas dans le dessin ci-dessous. Cependant, ce type de représentation pose un problème supplémentaire. En raison de l'absence de matérialisation des parts, les élèves sont tenus de recomposer les parts dans l'unité par eux-mêmes, dans un processus itératif consistant à reporter la fraction unitaire autant de fois que nécessaire dans l'unité.

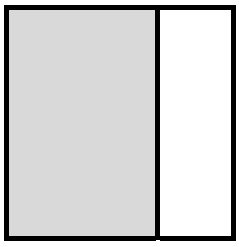


Figure 7. Exemple de figure envisageable pour vérifier la prise en compte des parts qui restent masquées

Une mauvaise compréhension de ce que représente le dénominateur peut également être source d'erreurs commises par les élèves. Dans ce cas, celui-ci est souvent interprété comme indiquant le nombre de parts qui ne sont pas grisées, au lieu d'indiquer le nombre total de parts égales dans l'unité. Cette procédure visant à compter séparément les parts sélectionnées et les parts non sélectionnées a possiblement des origines didactiques, lorsque l'on cherche à imposer

trop rapidement aux élèves une procédure visant à établir le numérateur et le dénominateur par le biais d'un comptage des parts, en s'appuyant sur la maitrise antérieure de la procédure de comptage telle qu'elle s'apprend dans les classes maternelles. Cette conception erronée est d'autant plus susceptible d'être mise en œuvre que la représentation que l'on propose aux élèves correspond à l'organisation formelle de l'écriture fractionnaire. Dans l'exemple que nous proposons ci-dessous, nous ne doutons pas que des élèves seront tentés de répondre que les 2/3 du rectangle sont grisés, dans la mesure où les deux parts grisées sont situées dans la partie haute de la figure (comme le numérateur est au-dessus de la barre de fraction), tandis que les trois parts non grisées sont situées dans la partie basse de la figure (comme le dénominateur est au-dessous de la barre de fraction). De plus, il existe bien un rapport entre les parts grisées et les parts non grisées qui est de deux pour trois, constant pour la fraction 2/5. Les élèves qui fournissent de telles réponses mettent donc en œuvre un autre concept mathématique que la notion de fraction, celui de ratio.

Figure 8. Exemple de distracteur envisageable pour vérifier la bonne compréhension du sens du dénominateur

Pour certains élèves, il semble nécessaire que les parts sélectionnées ou grisées soient contigües. Ainsi, lorsque l'on mange un gâteau ou une baguette, il est rare que l'on coupe un morceau d'un côté, un morceau au milieu et un morceau de l'autre côté ! Or, si cela est peu probable dans la vie quotidienne, d'une part, cela est possible, et d'autre part, cela ne change rien à la quantité qui aura été mangée. Donc, la fraction 2/3 peut être représentée avec des parties grisées qui ne se touchent pas.

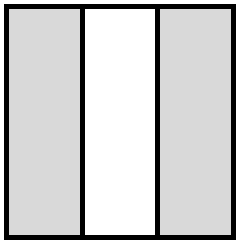


Figure 9. Exemple de figure envisageable pour vérifier la capacité des élèves à prendre en compte des parts non contigües

Dans la veine de ce que nous venons d'expliquer, il est possible également que les élèves ne perçoivent pas une quantité grisée comme représentant les 2/3 du carré lorsque cette quantité est dispersée dans la figure en morceaux dont le nombre est supérieur au numérateur indiqué. Cette tâche d'identification se rapproche des activités de simplication de fractions qu'ils sont susceptibles d'effectuer dans le domaine numérique. Avec un modèle visuel, cette simplification consiste à recomposer mentalement la figure pour avoir une représentation plus claire de la fraction 2/3. De même, il reste difficile de percevoir une figure comme représentant une certaine fraction lorsque les parts sont elles-mêmes partagées à nouveau, ce partage complexifiant la figure et mettant en jeu, outre des capacités de comptage, des capacités de reconfiguration spatiale (toutes les parts doivent contenir le même nombre de « morceaux » de même taille).

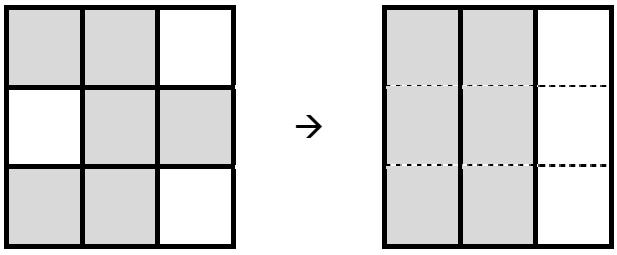


Figure 10. Exemple de figure envisageable pour vérifier la capacité des élèves à recomposer mentalement une figure et à éluder les partages superflus

Enfin, l'idée s'installe chez certains élèves que les parts sélectionnées doivent avoir la même forme pour représenter une fraction donnée. Ce n'est pas le cas : en conséquence, « nous devons encourager les élèves à se focaliser sur l'aire de chaque part (ou combinaison de parts) plutôt que d'être distrait par sa forme » (Neagoy[1], 2017, p. 71). Ainsi, dans la figure ci-contre, les deux parties grisées n'ont pas la même forme : l'une est plus allongée que l'autre. Toutefois, chacune de ces parties grisées représente bien 1/3 de la figure.

1. Voir, page 4, la note 1.

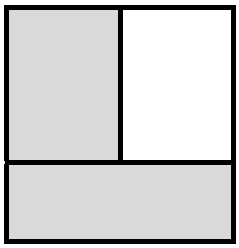


Figure 11. Exemple de figure envisageable pour vérifier que les élèves prennent en compte l'idée que des parts de formes différentes peuvent avoir la même aire

En ce qui concerne les modèles visuels des fractions, les conceptions à tester chez les élèves peuvent donc être classées en deux catégories : celles qui impliquent de comprendre que le partage doit être réalisé en parts égales, et celles qui impliquent de comprendre qu'une même fraction peut être représentée par des formes différentes. La difficulté à comprendre que ces dernières peuvent représenter la même fraction en constitue le prolongement lorsque les élèves sont amenés à identifier des fractions équivalentes ou comparer des fractions. Elle consiste à envisager que deux fractions différentes peuvent représenter le même nombre, ou à tout le moins coder la même aire. L'origine de cette difficulté se trouve dans la notation de l'écriture fractionnaire à l'aide de deux nombres entiers que sont le numérateur et le dénominateur. Cela nous ramène à des difficultés bien établies en didactique des mathématiques à propos des fractions et, plus largement, des nombres rationnels, « y compris la difficulté éprouvée par beaucoup d'élèves avec l'utilisation de différents noms ou étiquettes pour décrire le même nombre (ou la même quantité) ; conceptualiser une fraction comme un nombre unique ; et se focaliser sur la relation entre les deux nombres entiers qui composent la fraction, plutôt que sur les nombres eux-mêmes » (*ibid.*, p. 117).

Le niveau de difficulté augmente lorsqu'on propose aux élèves des activités de comparaison avec des quantités discrètes, plutôt qu'avec des quantités continues. En travaillant avec ces dernières, l'élève peut assez facilement utiliser sa compréhension du concept partie-tout pour établir une relation d'égalité, avec une perception visuelle du fait que les deux quantités représentées sont équivalentes. Comme nous l'indiquions précédemment, si les parts sont dispersées dans la figure, la tâche sera plus complexe, mais l'élève pourra tout de même relativement aisément recomposer la figure pour visualiser, par exemple, la fraction 1/5.

(a) 3 des 15 parts égales sont blanches.

(b) 1 des 5 parts égales sont blanches.

(c) 3 des 15 parts égales sont blanches, mais dispersées.

Figure 12. Exemple de figures représentant l'égalité entre 1/5 et 3/15 avec des quantités continues (Neagoy, *ibid.*, p. 119)

La reconnaissance de l'égalité entre fractions est beaucoup plus difficile à percevoir à partir d'une représentation de ces fractions avec des quantités discrètes. Ainsi, deux possibilités s'ouvrent aux élèves pour comprendre que les cubes blancs représentent 1/5 de l'ensemble des cubes. D'une part, cela suppose d'organiser les quantités discrètes de façon à faire apparaitre la fraction 1/5, en particulier pour le cas où trois cubes sur quinze sont blancs. D'autre part, cela suppose d'avoir une maitrise suffisante de la notion de proportionnalité, pour comprendre que le rapport de 1 à 5 est équivalent au rapport qui existe entre 3 et 15. Cette dernière remarque est fondamentale pour que les élèves puissent acquérir l'idée que ce rapport est de nature multiplicative, et non additive, afin de pouvoir identifier des fractions équivalentes en multipliant le dénominateur et le numérateur par un nombre unique.

(a) 1 sur 5 ou $\frac{1}{5}$ des cubes sont blancs.

(b) 3 sur 15 ou $\frac{3}{15}$ des cubes sont blancs.

Figure 13. Exemple d'utilisation de quantités discrètes pour représenter l'égalité entre 1/5 et 3/15 (Neagoy, *ibid.*, p. 118)

En effet, pour comprendre la notion d'équivalence, les élèves doivent passer d'un monde dans lequel les relations sont principalement additives à un monde où elles sont principalement multiplicatives. Dans l'exemple ci-dessous, nous expliquons comment une pensée additive peut conduire à instaurer des relations erronées, d'une part, entre les numérateurs et les dénominateurs de deux fractions égales, et d'autre part, entre le numérateur et le dénominateur de chacune des deux fractions égales.

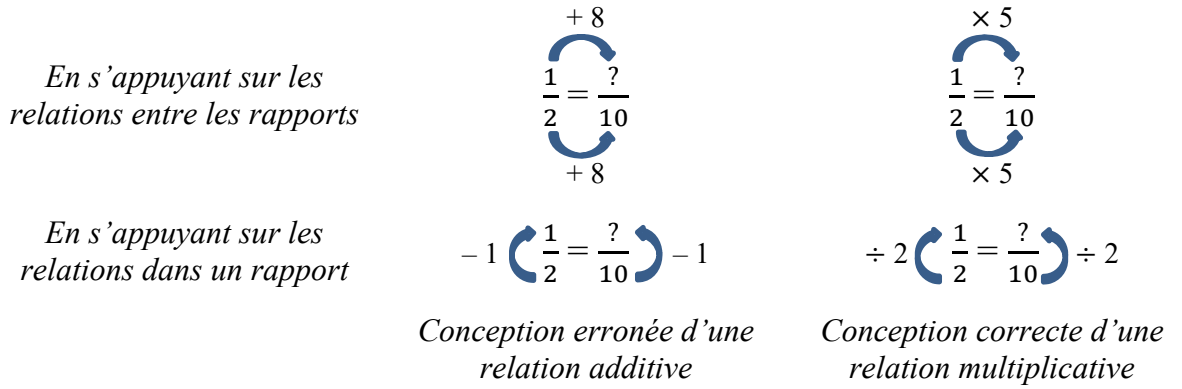


Figure 14. Conceptions additives et multiplicatives des relations numériques qui s'instaurent entre deux fractions égales

En outre, la maitrise de l'égalité entre fractions suppose d'interpréter le signe égal, non plus avec l'idée qu'un résultat d'une opération doit suivre, mais comme l'instauration d'une relation d'équivalence. Il ne s'agit pas, comme dans le cadre des opérations, de penser une transformation du premier terme, mais une reconfiguration de l'ensemble. Cette difficulté ne se pose qu'avec l'égalité entre fractions : avec les comparaisons et les rangements, les signes « inférieur à » et « supérieur à » tiennent des rôles identiques à ceux qu'ils jouaient lors de la comparaison d'entiers.

Dans les problèmes de comparaison, ce sont les règles développées à propos des entiers qui viennent interférer dans le travail réalisé autour de la notion de fraction. Ainsi, lorsque les élèves vont comparer des fractions unitaires, ils risquent de penser « qu'un tiers est inférieur à 1/4 car 3 < 4 » (*op. cit.*, p. 157). De façon similaire, ils risquent de penser que « sept-neuvièmes sont plus grands que 5/6 car 7 > 5 et 9 > 6 » (*ibid.*, p.158). À l'inverse, il est plausible de croire que « trois tiers ne sont pas égaux à 4/4 puisque 3 ≠ 4 » (*ibid.*). Il faut dire également que les comparaisons ne sont valables que lorsque l'unité est la même, et les élèves doivent comprendre qu'une demi-pizza n'est pas nécessairement plus grande qu'un quart d'une autre pizza : tout dépend de la taille des deux pizzas.

En ce qui concerne l'addition et la soustraction de fractions, on trouve des conceptions erronées qui s'appuient également sur une intégration fautive de relations additives qui fonctionnent pourtant très bien avec les entiers, mais pas avec des fractions. Ainsi, lorsqu'on demande à certains élèves d'additionner 2/3 et 1/6, ils additionnent les numérateurs et les dénominateurs pour répondre 3/9, sans se rendre compte que les dénominateurs, parce qu'ils renseignent simplement sur la taille de la part, ne doivent pas être additionnés. De plus, si l'on tient un raisonnement sur la quantité exprimée par la somme des deux fractions, on constate

que la somme de deux fractions positives dont l'une est 2/3 ne peut pas être inférieure à 2/3. Or, comme 2/3 > 3/9, cette dernière fraction ne peut pas être la somme recherchée. Il faut dire que l'écart entre deux fractions est beaucoup plus subtil à déterminer que lorsqu'il s'agit de deux entiers, tout en étant beaucoup moins nécessaire pour traiter des situations de la vie quotidienne. Ainsi, la mesure de l'écart entre 1/10 et 1/100 apparait seulement après un temps de réflexion nécessaire pour convertir les dixièmes en centièmes. Il ne peut être calculé en mesurant l'écart entre les deux numérateurs, ou entre les deux dénominateurs.

Enfin, le lien entre les fractions et les écritures décimales met en jeu l'interprétation que font les élèves, à la fois de la barre de fraction et de la virgule. Il n'est pas rare de voir des élèves associer 1/4 à 1,4 comme si les deux symboles étaient équivalents, alors que l'un sépare le numérateur du dénominateur, tandis que l'autre sépare la partie entière de la partie décimale. Là encore, il s'agit d'une interprétation qui est certes inexacte, mais qui présente l'avantage de la simplicité. Il faudra donc du temps et du travail pour que ces élèves abandonnent leurs conceptions erronées pour construire des concepts mathématiques plus complexes que ceux étudiés préalablement avec les entiers. Dès lors, un enseignement rigoureux, avec une progression qui tient compte des difficultés potentielles des élèves, est nécessaire. Or, cet enseignement se révèle délicat, en raison de nombreux obstacles didactiques qui freinent l'émergence du concept.

B. Les obstacles didactiques

Certes, le concept de fraction est plurivoque. Toutefois, c'est la conception partie-tout de la fraction qui est principalement étudiée au cours de la scolarité obligatoire. Le fait que la littérature scientifique indique cette pluralité de signification comme une difficulté de l'apprentissage et, *in fine*, de l'enseignement (Carette, *op. cit.*, p. 27), est dû à la prévalence de cette conception sur les autres, tant du point de vue de la chronologie des apprentissages que de leur durée. Dès lors, les connaissances des élèves dans le domaine des fractions restent restreintes, et les autres conceptions peuvent être difficilement développées car les élèves associent à la notion de fraction une conception unique, celle qui a été abordée en premier (Kerslake, 1986). Certes, tous les auteurs ne sont pas d'accord sur les facettes du concept qui doivent être abordées au cours de la scolarité obligatoire. Par exemple, Brissiaud (1998) insiste sur la partition de pluralité, c'est-à-dire sur la fraction-quotient. Néanmoins, la conception partie-tout de la fraction occupe toujours une place dominante, y compris dans les évaluations TIMSS, comme nous le verrons plus loin dans cette recherche.

Pour Kieren, les élèves ne parviennent pas à dissocier le savoir du contexte dans lequel celui-ci a été acquis, c'est-à-dire un « contexte visuel ou manipulatoire (généralement avec des quantités continues seulement) » (Carette, *op. cit.*, p. 25). D'où l'incapacité à se représenter les fractions comme des nombres, et plus exactement à considérer l'ensemble formé du numérateur et du dénominateur comme un nombre unique. Ce qui fonde cette unicité de la fraction, c'est le rapport entre les deux nombres qui la composent, rapport que les élèves ont du mal à percevoir. En effet, il peut difficilement être représenté, ce qui rend sa conceptualisation délicate. C'est pourquoi les auteurs insistent sur la variété des contextes d'apprentissage et la nécessité de diversifier les représentations de la fraction, ainsi que sur le rapprochement avec des situations tirées de la vie quotidienne (Pitkethly & Hunting, 1996). Cette diversité dans le choix des unités qui servent de support à l'apprentissage des fractions participe à ce détachement du concret pour aller vers l'abstrait, entendu comme la conceptualisation d'un rapport entre le numérateur et le dénominateur. L'enseignement ne doit pas se limiter au stade concret ou semi-concret, et des liens avec l'algèbre doivent être tissés (Rouche, 1998 et Neagoy, 2017). À l'inverse, la pauvreté des situations abordées est associée à « une vision réductrice, stéréotypée des fractions : une fraction est toujours une partie plus petite que l'unité ; il faut diviser puis multiplier ; etc » (Carette et al., *op. cit.*, p. 26). Selon Coquin et Camos, cette conception « empêche totalement [les] élèves de considérer les fractions comme des nombres » et « le fait que les fractions évoquent une représentation concrète (la fameuse "part de tarte") rend l'idée même d'opérations sur les fractions difficilement concevable par les enfants » (2006, p. 149 et 151). En effet, il est inconcevable de multiplier une part de tarte par une autre part de tarte. En outre, l'emploi de quantités discrètes et de quantités continues permet de développer chez les élèves une « conception flexible de l'unité » selon la formule de Carette (*op. cit.*, p. 29). Comme l'indique cet auteur, « les quantités continues inciteraient davantage les élèves à se représenter les fractions comme une partie d'un tout, dont le tout est un objet entier. Les représentations évoquées par des quantités discrètes seraient moins restrictives : le concept d'unité serait plus souple, les fractions peuvent également être conçues comme des rapports, etc. » (*ibid.*, p. 24). L'un des objectifs serait ainsi de développer, avec les quantités discrètes, l'idée d'un rapport entre les nombres, et de faire passer plus aisément l'idée qu'une fraction peut être plus grande que 1. De plus, cela induirait des stratégies de détermination de la fraction différente, avec des activités de mesure et des activités de comptage. Cependant, si les quantités continues sont associées en théorie aux activités de mesure, et les quantités discrètes aux activités de comptage, les élèves utilisent parfois le comptage dans le cadre des quantités continues, en particulier

lorsque le partage en parts égales est déjà réalisé et qu'ils n'ont plus qu'à compter les parts (Pitkethly & Hunting, 1996, p. 10).

Un autre problème que pose l'enseignement des fractions est de déterminer quelle est l'unité choisie dans un exercice. L'utilisation des nombres entiers naturels induit dès le plus jeune âge la manipulation de quantités discrètes, dont la délimitation est clairement définie. Or, le choix de l'unité n'est pas aussi aisé lorsqu'on manipule des fractions. Comme on peut le voir dans l'exemple fourni par Neagoy (2017, p. 99), les réponses apportées à la question de savoir quelle est la fraction représentée ci-dessous peuvent être diverses, selon que l'on prend pour unité une pizza ou les deux pizzas. Dans le premier cas, on dira que la fraction représentée est 2/5 (de pizza) tandis que dans le second cas, on dira que la fraction représentée est 2/10 (des deux pizzas).

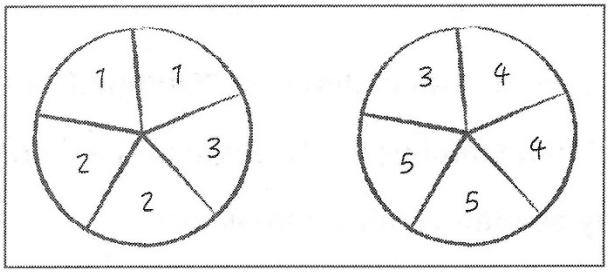


Figure 15. Représentation de la fraction 2/5 dans le cadre de l'étude de la fraction-quotient (Neagoy, 2017, p. 99)

Kieren (1980, p. 136) précise à ce sujet que « l'identification de l'ensemble (unité) dans les situations de partie à tout est difficile parce que le "tout" est implicite par opposition à l'unité explicite de la sous-construction de mesure ». D'où l'importance de développer l'utilisation de la droite graduée dans les classes, afin de traiter des fractions dans un cadre où l'unité est explicite. Cependant, le caractère explicite de l'unité dans le cadre de la fraction-mesure n'empêche pas les erreurs des élèves, notamment lorsque deux unités ou plus sont représentées sur une droite graduée : ils peuvent coder, par exemple, un quart de deux unités au lieu d'un quart de l'unité. Parallèlement, la partie fractionnaire doit aussi être envisagée comme une unité qui peut être « comptée, répliquée et groupée », ou encore « une unité de mesure qui peut être fractionnée ou divisée » (Pitkethly et Hunting, 1996, p. 27). À partir de là, différentes activités ont été suggérées, visant à partager l'unité pour déterminer la partie fractionnaire, à retrouver l'unité à partir de l'une des parties fractionnaires ou, la partie fractionnaire et l'unité étant données, à réorganiser la représentation visuelle pour qu'elle fasse apparaitre de façon plus évidente le numérateur et le dénominateur de la fraction considérée.

En outre, il n'est pas chose aisée d'organiser une progression cohérente dans la présentation des différentes écritures des nombres rationnels. Dans quel ordre aborder les fractions, écritures décimales, pourcentages, rapports et autres formes d'écriture des nombres rationnels ? La littérature scientifique est assez unanime pour dire que les rationnels doivent être abordés à travers les fractions (Brousseau, 1980, Brissiaud, 1999). Cependant, l'étude du concept de fraction s'étale sur un temps très long, avec des types de tâches à acquérir très variés. Dès lors, il faut décider du moment de l'introduction des écritures décimales : ceux-ci doivent-ils être présentés très rapidement après l'abord des fractions, ou faut-il laisser aux élèves plusieurs années pour intégrer la notion de fraction avant de travailler avec d'autres formes d'écriture ? Quels types de tâches doivent être maitrisés par les élèves avant de pouvoir utiliser les nombres décimaux ? De plus, l'apprentisage des fractions pose des questions qui font toujours l'objet de débats à propos des nombres entiers. À quel moment doit-on soumettre aux élèves des opérations avec des fractions ? Doit-on aborder les quatre opérations en même temps ? La comparaison et le rangement de fractions peuvent-ils être travaillés de façon concomitante aux apprentissages premiers, généralement constitués par l'étude de l'association d'une fraction et d'un dessin ? Enfin, les fractions offrent un cadre d'apprentissage très large, qui s'étend dans le domaine de la mesure (1/4 de litre), des ratios (les perles bleues représentent 1/4 des perles rouges), des taux (le prix de l'essence a augmenté de 1/4), de la géométrie (1/4 de tour) et des probabilités (la probabilité de gagner est de 1/4). Comment doit-on ordonner ces enseignements ? Dans quelle mesure chacun contribue-t-il à améliorer la compréhension du concept de fraction chez les élèves ? La notion de partage peut aussi bien conduire à des apprentissages scolaires dans le domaine numérique, avec les fractions, que dans le domaine du calcul, avec la division euclidienne. Comment ces deux notions sont-elles liées dans les programmes scolaires ? Doit-on attendre l'étude de la fraction-quotient pour faire le lien ? Il faut également tenir compte du fait que, comme l'indiquent les instructions officielles du Taipei chinois en préambule, « les élèves n'ont que peu d'expériences antérieures à l'apprentissage scolaire qui impliquent des nombres rationnels : il y a moins de scénarios dans leur vie quotidienne qui nécessitent leur utilisation, par rapport à ceux qui nécessitent l'utilisation de nombres entiers » (*Curriculum*, 2005, p. 84). Dès lors, comment relier l'apprentissage des fractions à la vie quotidienne ? Quelle place offrir à la résolution de problèmes dans le domaine des fractions ? En outre, étant donnée la diversité des écritures des nombres rationnels, les élèves seront amenés, à un moment de leur scolarité, à identifier celle qui est la plus pertinente pour résoudre tel ou tel problème : dans un cas, il sera préférable d'utiliser des écritures décimales, tandis que dans un autre cas, il sera plus pertinent d'utiliser des fractions. Se pose

donc la question de la place des fractions dans le champ des nombres rationnels, et de sa discussion dans un cadre scolaire. Quels liens sont faits entre ces différentes écritures ? Ne s'agit-il que de passer de l'une à l'autre, ou parle-t-on des avantages et des inconvénients de chacune pour la résolution de problèmes ? Nous n'avons pas trouvé de réponses précises à l'ensemble de ces questions chez les didacticiens, ou à tout le moins des réponses sur lesquelles ces derniers s'accordent. À partir des données empiriques que nous serons en mesure de tirer des programmes d'enseignement et des résultats des élèves dans les différents pays que nous étudions, nous proposons de permettre une meilleure compréhension des enjeux, de la portée et des implications de l'enseignement initial des fractions.

§ 2. Matérialité statistique de la difficulté propre aux fractions

Malgré une bonne connaissance des obstacles que doivent franchir les élèves, les performances qu'ils réalisent restent en-deçà des attentes. Autrement dit, il existe une contradiction entre la somme des savoirs accumulés par les didacticiens, et l'acquisition par les élèves du concept : les items impliquant des fractions continuent d'être assez mal réussis, aux évaluations nationales (A) comme aux évaluations internationales (B).

A. Dans les évaluations nationales

Si nous avons choisi de nous intéresser aux fractions, c'est parce que malgré le nombre important de travaux produits dans ce domaine, notamment en France (notamment Brousseau, 1987, Douady et Perrin-Glorian, 1986), la notion continue de poser difficulté pour une part importante des élèves. Par exemple, en France, lors d'évaluations diagnostiques passées en septembre 2002, des élèves de septième année (5e) devaient placer des fractions sur une droite graduée dont chaque unité était segmentée en douze morceaux. Les items 9 et 10, qui correspondent respectivement au placement des fractions 1/6 et 5/3, présentent un taux de réussite de 12,4% et 10,3%, parmi les plus faibles du livret (Ministère de l'éducation nationale, 2003).

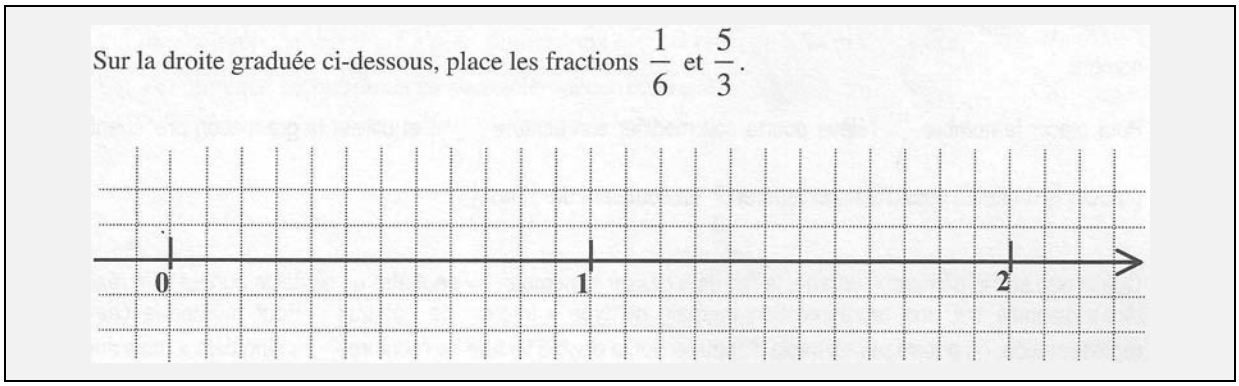


Figure 16. Évaluations nationales de 5e (2002), items 9 et 10

C'est dire que, alors que l'enseignement du concept de fraction est presque achevé (en France, il est principalement étudié en CM1, en CM2 et en 6e, et dans une moindre mesure, en 5e et en 4e), les élèves ne peuvent pas, pour la plupart, placer une fraction inférieure à 1 sur la droite graduée. Cette constatation est d'autant plus problématique que, d'une part, cette question de la droite graduée fait l'objet d'une attention spécifique dans les programmes d'enseignement français, et d'autre part, les fractions sont principalement étudiées, en France, pour la construction du concept de nombre décimal, en conséquence l'idée que les fractions constituent un nombre qui peut être placé sur la droite numérique est un objectif majeur pour le législateur. Certes, les tiers et les sixièmes, en tant que fractions rationnelles non décimales, ne sont certainement pas les fractions les plus étudiées à l'école élémentaire comme au collège. Néanmoins, le principe qui conduit à pouvoir placer convenablement des fractions sur une droite graduée est à la fois largement présent dans les manuels d'enseignement et dans les injonctions ministérielles.

Cette difficulté face aux rationnels n'est pas un problème spécifiquement français. Dans d'autres pays, cette notion pose également des problèmes d'apprentissage. Cependant, comme nous allons le voir avec l'analyse des résultats aux évaluations internationales, les élèves français réussissent particulièrement mal les items impliquant des fractions, en comparaison de scores que l'on peut observer dans certains territoires (notamment dans le Sud-Est de l'Asie, mais aussi, par exemple, en Irlande du Nord), ce qui nous a conduit à envisager des comparaisons internationales.

B. Dans les évaluations internationales

L'OCDE fournit une riche base de données sur les systèmes éducatifs à travers le monde, permettant de déterminer dans quelle mesure les élèves des autres pays rencontraient

des difficultés similaires à celles rencontrées par les élèves français. Pour ce faire, nous disposions de deux grandes études. Les évaluations PISA sont soumises à des élèves âgés de quinze ans, quel que soit leur niveau de classe, en français et en mathématiques. Les évaluations TIMSS concernent quant à elle des niveaux de classe, avec deux tests, l'un proposé en quatrième année de scolarité obligatoire, et l'autre proposé en huitième année, en mathématiques comme en sciences. Dans les études PISA, nous avons trouvé très peu d'items impliquant spécifiquement des fractions, probablement parce qu'à l'âge de quinze ans, cet apprentissage est déjà ancien. C'est pourquoi nous avons choisi d'analyser les items tirés des évaluations TIMSS, qui correspondent bien au moment de la scolarité où les fractions sont travaillées en classe, avec de nombreux exercices dont l'objectif est de mesurer les connaissances des élèves dans ce domaine. Notre but est, outre le fait de prendre la mesure des difficultés que posent les fractions aux élèves, d'identifier les pays susceptibles de faire réussir leurs élèves aux items relatifs aux fractions, afin de pouvoir ensuite étudier les principes qui sous-tendent cet apprentissage. Dans notre recherche, nous évoquerons par priorité les résultats obtenus aux évaluations TIMSS 2015, d'une part, parce qu'il s'agit de l'étude la plus récente dont nous disposons, et d'autre part, parce que ce sont les seules auxquelles les écoliers français ont participé (en classe de CM1, niveau qui nous intéresse au plus haut point puisqu'il correspond au début de l'apprentissage des fractions). En ce qui concerne l'item le plus simple que nous ayons identifié (l'item M0701, pour lequel il fallait trouver, parmi quatre figures, celle qui représentait 1/4), le taux de réussite moyen est très élevé (avec $\bar{x}$ = 77,5 % pour l'ensemble des pays participants). Seuls deux pays ont un taux de réussite inférieur à 50 % : le Maroc (avec 32,3 %) et l'Allemagne (avec 44,8 %). Cela confirme notre hypothèse selon laquelle la notion de fraction est abordée, de façon assez universelle, au plus tard en quatrième année d'enseignement obligatoire. En ce qui concerne l'addition de fractions, nous constatons en revanche une grande hétérogénéité et des résultats généralement très faibles (c'est le score moyen le plus bas que nous ayons observé dans le domaine des fractions, si l'on ne tient pas compte d'un item où il était demandé aux élèves de justifier leur réponse). Ainsi, à l'item M0906 impliquant d'additionner 1/2 et 3/10, on a $\bar{x}$ = 21,2 %, avec des écarts très importants entre les pays dont le taux de réussite moyen est inférieur à 10 % (Allemagne, Arabie Saoudite, Chili, Croatie, Espagne, Géorgie, Koweït, Maroc, Slovaquie, Suède, Turquie) et Singapour qui obtient un taux de réussite de 82,2 %, loin devant Hong Kong SAR (60 % de bonnes réponses). De même, les résultats sont très variés lorsqu'on évalue la comparaison de fractions. L'item M0705, dans lequel il fallait désigner, parmi quatre propositions, la fraction unitaire la plus grande, est réussi par 92,7 % des élèves hongkongais, mais par seulement 21,1 % des élèves

français (de tous les pays participants aux évaluations TIMSS en 2015, seules la Croatie et la Slovaquie ont un score inférieur, avec respectivement 12,3 % et 18,6 % de réussite). Ces observations sont cohérentes avec l'idée que, dans certains pays, certains aspects des fractions sont abordés plus tôt qu'ailleurs, et qu'en quatrième année, les élèves de certains pays ont beaucoup plus de connaissances à ce sujet que d'autres. En plus d'une certaine disparité des réussites des élèves aux différents items relatifs aux fractions, nous avons pu constater que les programmes scolaires, suivant les pays, sont assez contrastés quant à la progressivité de l'apprentissage des types de tâches relatifs aux fractions. L'hypothèse d'un décalage dans le temps des acquisitions doit donc être étudiée, mais nous ne tirons pas de conclusions à partir des seuls pourcentages que nous venons de citer. En effet, il nous faut auparavant comprendre les variables qui peuvent influer sur le score obtenu par les élèves, définir le contenu des tests, indiquer comment ce contenu correspond aux objectifs des programmes locaux, etc.

À ce sujet, les auteurs des évaluations internationales définissent des types de tâches que les élèves doivent maitriser et qui peuvent éventuellement amener les instructions officielles nationales à changer. D'ailleurs, c'est l'objet même de l'OCDE que de fournir des données dans le but de faire évoluer les politiques publiques de ses membres. Or, les recherches visant à mesurer les effets des évaluations internationales sur les réformes des systèmes éducatifs sont rares. Grek, à la suite d'une étude portant sur la Finlande, l'Allemagne et le Royaume-Uni, indique que les études PISA sont utilisées à l'échelle nationale comme une ressource pour les gouvernements, car elles founissent aux acteurs politiques une « forme de légitimation de leur politique intérieure, ou un moyen de désamorcer le débat en présentant une réforme fondée sur des preuves solides » (2009, p. 14). Cette conclusion est partagée par Jenny Ozga lorsqu'elle indique que les décideurs publics « ne se considèrent pas comme redevables, face à leur électorat, des faibles performances établies par PISA. Ils utilisent plutôt PISA pour justifier les orientations politiques qu'ils se voient déjà adopter dans leurs propres contextes » (2012, p. 168, citée par Demeuse, 2012, p. 7). Pourtant, les enquêtes internationales « fournissent […] des données uniques qui devraient inciter les chercheurs en sciences de l'éducation du monde entier à entreprendre toute une série d'analyses secondaires » (Olsen et Lie, 2006, p. 11), et ce,

même si les chercheurs en discutent les partis pris méthodologiques comme les objectifs[1]. Le but que nous assignons à notre recherche est double. D'une part, l'analyse didactique que nous ferons des items des évaluations internationales nous permettra, dans un domaine précis, celui des fractions, de mieux cerner les enjeux et les raisons d'une réussite ou d'un échec aux évaluations internationales. D'autre part, nous chercherons à déterminer, par une étude longitudinale, si certains pays tiennent compte des résultats obtenus par leurs élèves pour modifier leurs programmes d'enseignement. De cette interrogation découlent d'autres questions : lorsqu'un pays change ses instructions officielles dans le sens d'un rapprochement avec les attendus formulés par les auteurs des évaluations TIMSS, ses élèves se montrent-ils effectivement plus performants ? La couverture par les tests des différents types de tâches se rapportant aux fractions est-elle suffisamment large pour faire apparaitre une véritable amélioration de la compréhension du concept par les élèves, ou traduit-elle une focalisation des autorités sur certains types de tâches en particulier, en vue de gonfler artificiellement le score obtenu par les élèves ?

Conclusion de la sous-section

Les obstacles rencontrés par les élèves lors de l'apprentissage du concept de fraction ont été largement étudiés par des personnes de spécialités diverses (didacticiens, psychologues, etc.). Pour notre part, nous avons distingué les obstacles épistémologiques et les obstacles didactiques, tout en étant conscient du fait que les élèves peuvent être confrontés à des obstacles d'une autre nature (en particulier les obstacles d'origine ontogénétique, que nous aborderons plus loin dans cette recherche). Il ressort de cette analyse que les difficultés liées à l'écriture fractionnaire sont nombreuses. Elles tiennent pour la plupart à la nécessité de faire évoluer, dans le travail relatif aux fractions, des conceptions qui étaient valables pour les nombres entiers, mais qui ne fonctionnent plus pour les fractions. Ainsi, les procédures de comptage des parts peuvent conduire à des réponses erronées, qui ne tiennent pas compte de la taille des parts et de l'aire qu'elles représentent. Les élèves doivent donc passer d'un stade où ils se montrent

1. Pour des exemples, voir l'article de Pierre Vrignaud (2006) intitulé « La mesure de la littéracie dans PISA : la méthodologie est la réponse, mais quelle était la question ? », dans la *Revue française de pédagogie*, 57, 27-41 ; ou la communication d'Antoine Bodin (2009) intitulée « Organisation et fonctionnement des comparaisons internationales à grande échelle, avec un accent particulier sur PISA » au 5e Congrès de l'Espace Mathématique Francophone, à Dakar (université Cheikh Anta Diop).

capables de compter, à un stade où ils se montrent capables de partager. Or, l'enseignement met plutôt l'accent sur des procédures de comptage, sans percevoir qu'avant de pouvoir comprendre la relation entre la partie et le tout, les élèves doivent d'abord apprendre le concept de partition, à travers des pliages, des partages et des activités de distribution. Cette tendance renforce les élèves dans une conception de la fraction vue comme une grandeur représentée par deux nombres entiers séparés. Ensuite, pour parvenir à saisir que deux fractions peuvent être équivalentes, les élèves doivent effectuer un nouveau saut conceptuel, en intégrant l'idée que les rapports instaurés par les fractions sont de nature multiplicative. Or, avant l'apprentissage des fractions, les élèves ont principalement évolué dans un monde fait de relations additives. En s'appuyant trop rapidement sur des procédures de calcul mal comprises, les enseignants prennent le risque, non seulement de ne pas provoquer chez eux cette révolution conceptuelle que constitue le passage à un monde fait de relations multiplicatives (et qui fonde les notions de rapport, de pourcentage, de taux, etc.), mais également de provoquer leur découragement face à la manipulation de concepts mal maitrisés.

Cette double difficulté (passage des nombres entiers aux nombres rationnels et passage des relations additives aux relations multiplicatives) explique les faibles résultats obtenus par les élèves dans le domaine des fractions. Les performances des élèves français sont particulièrement basses, qu'il s'agisse des évaluations nationales ou des évaluations internationales. Pourtant, dans ces dernières, les élèves de certains pays montrent qu'il est possible de surmonter les obstacles posés par l'apprentissage des fractions. En analysant les systèmes éducatifs les plus performants dans ce domaine, nous souhaitons dégager des constantes et donc des pistes permettant aux autres de transposer ou d'adapter localement les éléments qui peuvent l'être. En plus d'être globalement bas, les taux de réussite des élèves aux items impliquant des fractions sont très hétérogènes : si associer une fraction et un dessin est un type de tâches bien réalisé, les autres items tels que ceux impliquant de comparer ou d'additionner des fractions sont en moyenne beaucoup moins bien réussis. Cela montre la complexité de l'acquisition du concept de fraction, qui se construit progressivement : il semble que ce n'est pas parce qu'un élève est capable de représenter convenablement des fractions, qu'il pourra comparer ou additionner deux fractions. La capacité des élèves à réaliser des transferts entre différents types de tâches sera donc approfondie afin de mieux comprendre les variables qui les restreignent ou les facilitent, à travers un examen plus fin des résultats obtenus par les élèves aux items TIMSS. Cette analyse sera d'autant plus intéressante que les

évaluations TIMSS mettent bien en lumière les conceptions erronées des élèves, à l'aide de distracteurs choisis en fonction des savoirs élaborés par les didacticiens.

Conclusion de la section consacrée aux points de convergence entre les territoires relativement au concept de fraction

Les fractions constituent un objet d'étude intéressant pour réaliser des comparaisons internationales. En effet, elles présentent un certain caractère d'universalité dans leur représentation mathématique comme dans les difficultés rencontrées par les élèves, et pourtant les choix qui peuvent être faits pour leur enseignement sont très nombreux, tant en ce qui concerne le contenu des apprentissages, qu'à propos de leur organisation temporelle. Notre étude comparative permettra de mieux comprendre comment les auteurs des programmes utilisent, éventuellement, les résultats des recherches menées en didactique au sujet des fractions : les difficultés des élèves sont-elles anticipées ? Cherche-t-on, par des indications méthodologiques, à lever les écueils qui se présentent lors de leur enseignement ? Cette étude conduira également à mettre au jour des contraintes institutionnelles posées par les instructions officielles favorables à la réussite des élèves aux évaluations internationales. Elle contribuera à définir si, dans leur travail de transposition didactique, les auteurs prennent en compte le contenu des évaluations TIMSS, en modifiant les textes dans le sens d'un rapprochement avec le contenu des tests. Toutefois, bien que les points communs relevés entre les zones géographiques étudiées soient suffisants pour autoriser des comparaisons, il existe des différences de pratiques à propos des fractions entre ces territoires, et nous en tiendrons compte dans notre analyse.

Section II. Discontinuités

Les ingénieries didactiques que produisent les chercheurs sont caractérisées par la partie du concept de fraction qu'elles mettent en jeu. Ainsi, Guy Brousseau, lorsqu'il présente sa situation relative au calcul de l'épaisseur d'une feuille de papier, se situe dans le cadre de la fraction en tant que mesure. Lorsqu'il développe une situation relative à l'agrandissement d'un puzzle, il se situe dans le cadre de la fraction en tant qu'application linéaire. Lorsque plusieurs chercheurs américains, sous l'impulsion de Merlyn J. Behr, ont développé le *Rational number project* visant à fournir aux professeurs des séquences d'apprentissage, la fraction partie d'un tout occupe une place centrale de leurs écrits. Or, les chercheurs sont bien souvent consultés pour l'élaboration des programmes d'enseignement, comme nous l'avons vu avec l'exemple du

curriculum français de 2015 dans notre introduction. À leur tour, les programmes contraignent les auteurs de manuels, qui doivent s'y conformer afin de répondre à des exigences éditoriales et commerciales (cette idée est appuyée par un rapport de l'Unesco qui précise que « les manuels représentent un support du processus enseignement-apprentissage et doivent correspondre aux programmes » [Seguin, 1989]). Des chercheurs participent parfois directement à la rédaction d'un manuel, comme Rémi Brissiaud ou Marie-Lise Peltier. Malgré un consensus sur les traits principaux qui caractérisent l'enseignement des fractions (nécessité de cet enseignement, prise en compte des difficultés spécifiques qu'elles représentent pour les élèves), nous ne doutons pas qu'il existe une diversité dans la façon dont cet enseignement est conduit à travers le monde, comme des facettes du concept de fraction qui sont enseignées. Cette section nous permettra tout à la fois de considérer qu'il existe des particularismes nationaux quant aux besoins sociaux liés à l'utilisation des fractions (sous-section I), qui entrainent eux-mêmes des besoins spécifiques en ce qui concerne l'utilisation des fractions dans un cadre scolaire (sous-section II).

Sous-section I. Des spécificités locales dans l'utilisation sociale des fractions

Compte tenu de notre choix d'analyser de façon détaillée les programmes d'enseignement locaux dans le domaine des fractions, et de considérer tout à la fois leur genèse et l'influence qu'elles peuvent avoir sur les performances des élèves aux évaluations internationales, nous avons restreint le nombre de pays qui ont fait l'objet de notre étude. Nous allons justifier ce choix (§ 1). Toutefois, les aires géographiques sur lesquelles nous avons souhaité nous pencher ne présentent pas toutes les mêmes caractéristiques : les fractions n'y tiennent pas la même place dans la vie quotidienne, soit parce qu'elles sont employées dans des contextes inédits, soit parce que leur forme diffère, ce qui pourra avoir des conséquences sur l'apprentissage. Nous allons donc définir les spécificités locales relatives aux fractions les zones géographiques que nous avons sélectionnées (§ 2).

§ 1. Le choix des zones étudiées

Soixante-quatre pays ou régions ont participé aux évaluations TIMSS 2015. Parmi ceux-ci, nous en avons sélectionné onze pour faire partie de notre corpus. Ce choix n'est pas le fruit du hasard : il répond à des contraintes matérielles et à des choix liés à notre objet d'étude. Nous allons préciser les critères de sélection qui nous ont permis de restreindre notre corpus (A). Par la suite, nous exposerons les principales caractéristiques des participants étudiés sur le plan

économique et en matière d'éducation (B), afin de confirmer la valadité des comparaisons envisagées.

A. Les critères de sélection

Les critères de sélection tiennent à la fois à la langue dans laquelle les instructions officielles sont rédigées, à leur accessibilité par le biais du réseau Internet, à l'économie des territoires considérés, à leur localisation dans le monde, à la nature centralisée ou décentralisée du système éducatif considéré, ainsi qu'au nombre de participations aux évaluations TIMSS et aux résultats obtenus à ces tests.

Le premier critère que nous avons retenu est donc l'accessibilité des programmes d'enseignement. Nous avons choisi par priorité de faire porter l'analyse sur des documents francophones et anglophones, de façon à faciliter la traduction des documents : ce sont les deux langues que nous maitrisons le mieux. Ce critère induit une couverture assez large des pays participants à TIMSS, avec l'ensemble de l'Amérique du Nord, une partie de l'Europe de l'Ouest (Royaume-Uni, France, Belgique), une partie importante du continent africain, la majeure partie de l'Océanie et plusieurs territoires d'Asie du Sud-Est dont les programmes sont rédigés en deux langues au moins, dont l'anglais (comme, par exemple, à Hong Kong SAR). À l'inverse, cela exclut *de facto* de l'analyse les pays hispanophones et lusophones, soit l'ensemble des pays d'Amérique du Sud, ainsi que tous les territoires d'Europe du Nord, de l'Est et du Sud. Le choix des pays a ensuite été contraint par la possibilité d'accéder aux instructions officielles. Pour des raisons pratiques, nous n'avons dû retenir que ceux pour lesquels ces documents étaient disponibles en ligne, en règle générale sur le site officiel du ministère local en charge de la question scolaire. C'est le cas dans la plupart des pays développés ; ce critère a donc été, dans les faits, un facteur limitant faiblement l'étendue de notre liste. Il était également nécessaire que la rédaction des programmes scolaires soit une compétence du pouvoir central. En Allemagne, chaque Land rédige les programmes applicables dans ses écoles, ce qui rend délicate l'analyse du système d'enseignement allemand dans son ensemble. En Suisse, chaque canton a la responsabilité de déterminer le curriculum applicable sur son territoire. En Belgique, seule la Flandre (avec des objectifs d'apprentissage différents de ceux des régions francophones) a participé aux évaluations TIMSS 2015. Nous avons donc exclu les territoires dans lesquels les élèves ne travaillaient pas tous d'après les mêmes instructions officielles. Toutefois, nous avons conservé les pays dans lesquel une différenciation s'opère, mais à l'échelle nationale. Ainsi, à Singapour, les élèves sont orientés dans deux filières

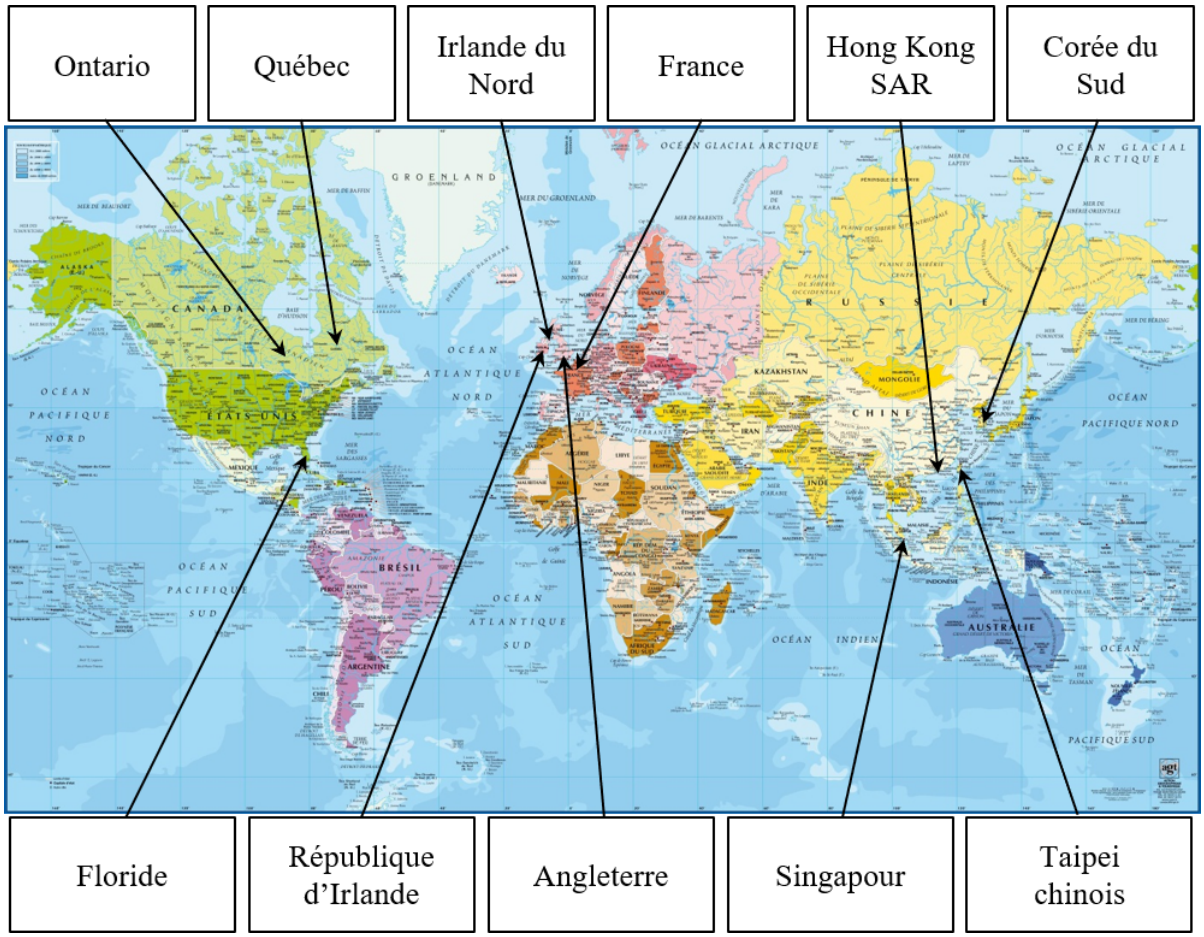
différentes en fonction de leurs résultats scolaires dès la cinquième année d'enseignement obligatoire. Cela ne nous a pas empêché de comparer, d'une part, les résultats obtenus par ce pays aux évaluations TIMSS, et d'autre part, les types de tâches dont l'enseignement est imposé par le législateur, qu'il s'agisse de la filière offrant les stardards les plus élevés ou celle permettant de consolider les bases.

Les résultats obtenus aux dernières évaluations TIMSS ont également été déterminants. Nous souhaitions inclure dans notre analyse des participants dont les performances en mathématiques étaient très élevées, afin de comprendre les raisons de ces taux de réussite et d'établir si ces systèmes éducatifs pouvaient servir de modèle pour les pays dont les scores étaient moins bons. Sur les six participants obtenant, pour la quatrième année, les scores les plus élevés en 2015, nous en avons retenu cinq (Singapour, Hong Kong SAR, la Corée du Sud, le Taipei chinois et l'Irlande du Nord). Le Japon n'a pas été retenu à cause de l'indisponibilité des instructions officielles en langue anglaise. Cela nous a conduit à retenir des pays appartenant à trois aires géographiques, afin de comparer, non seulement des participants très éloignés géographiquement, mais également des participants se trouvant à proximité les uns des autres, et partageant des spécificités culturelles : l'Asie du Sud-Est (avec les pays très performants que nous venons d'évoquer), l'Europe de l'Ouest (avec une partie du Royaume-Uni, la République d'Irlande et la France) et l'Amérique du Nord (où les participants sont moins performants, mais avec des instructions officielles facilement accessibles et très détaillées, et partageant avec le Royaume-Uni une partie de la culture anglo-saxonne). Nous souhaitions en outre pouvoir étudier l'évolution des résultats des participants au fil des tests. C'est pourquoi le cas de l'Angleterre nous paraissait intéressant : ses élèves ont participé à toutes les évaluations TIMSS depuis le lancement de ces tests en 1995. Nous avons donc posé le critère de la participation à au moins un autre test à un même niveau de la scolarité, en plus de celui de 2015. Nous avons fait une exception pour la France, qui n'a pris part aux évaluations destinées aux élèves de quatrième année que pour les évaluations les plus récentes. En effet, cette recherche s'effectuant en France, il nous a semblé incontournable qu'elle contribue à une meilleure compréhension du système éducatif français. Notre décision quant aux pays à étudier a aussi été circonscrite par la nécessité de pouvoir comparer les pays sur des critères économiques. C'est pourquoi tous les participants retenus ont des économies développées au sens que donne l'OCDE à ce mot.

Tous ces éléments nous ont conduit à retenir onze territoires répartis dans trois zones géographiques que sont l'Amérique du Nord, l'Asie et l'Europe de l'Ouest. Certains participants, parce qu'ils représentent des villes, des régions, des États ou des provinces à l'intérieur de pays qui, dans leur intégralité, ne participent pas aux tests, voient leurs résultats traités par les auteurs TIMSS dans une liste complémentaire. Lorsque c'est le cas pour les participants que nous avons choisis, nous avons ajouté la mention « en tant que participant à l'analyse comparative » :

- Angleterre ;
- Corée du Sud ;
- Floride (en tant que participant à l'analyse comparative) ;
- France ;
- Hong Kong SAR ;
- Irlande du Nord ;
- Ontario (en tant que participant à l'analyse comparative) ;
- Québec (en tant que participant à l'analyse comparative) ;
- République d'Irlande ;
- Singapour ;
- Taipei chinois.

Afin de mieux percevoir la répartition géographique de ces participants et de cerner les trois aires géographiques dont nous venons de parler, nous avons localisé les territoires retenus sur la carte ci-contre.



La sélection des participants formant l'objet de notre étude étant faite, nous allons présenter plus en détail ces systèmes éducatifs. Ainsi, nous pourrons vérifier la pertinence des comparaisons que nous allons effectuer à leur endroit.

B. Présentation de la sélection

Notre objectif n'est pas de présenter ici toutes les caractéristiques des onze systèmes éducatifs retenus pour notre recherche. D'abord, à supposer que cela soit possible, une telle description serait bien trop longue à réaliser au sein de cette étude qui n'en est pas l'objet. Ensuite, nous avons estimé qu'il nous fallait présenter uniquement ce qui pouvait légitimer les comparaisons que nous allions effectuer entre les participants. En conséquence, nous présenterons seulement quelques éléments relatifs à leur économie et à la philosophie qui transcende leur organisation scolaire.

En ce qui concerne l'économie, les territoires qui forment notre corpus sont tous des économies développées au sens de l'OCDE. Pour le montrer, nous nous sommes appuyé sur les données fournies par la Banque mondiale, qui présentent l'avantage de porter sur des sujets

variés, y compris l'éducation. En revanche, l'absence de données relatives au Taipei chinois est un inconvénient. Nous complèterons donc notre analyse à l'aide de quelques données provenant du Fonds monétaire international. Le PIB par habitant est assez homogène au sein de notre corpus, dans la mesure où le rapport entre le plus faible (celui de la Corée du Sud) et le plus élevé (celui de la République d'Irlande) est, en 2015, de 1 à 2,3. Toutefois, on peut voir sur le graphique ci-dessous que les habitants de Corée du Sud sont, selon l'indicateur de la Banque mondiale, un peu moins riches que les autres. Pourtant, il s'agit d'un pays très performant aux évaluations TIMSS, et c'est également un territoire dans lequel les parents consacrent beaucoup d'argent à l'inscription de leurs enfants dans des cours du soir, que l'on appelle des *hagwons*. En ce qui concerne le Taipei chinois, les données fournies par le FMI montrent que le PIB par habitant y est plus faible qu'en Corée du Sud (de 20 % environ). Là encore, cela n'empêche pas leurs élèves d'obtenir d'excellents résultats aux tests TIMSS.

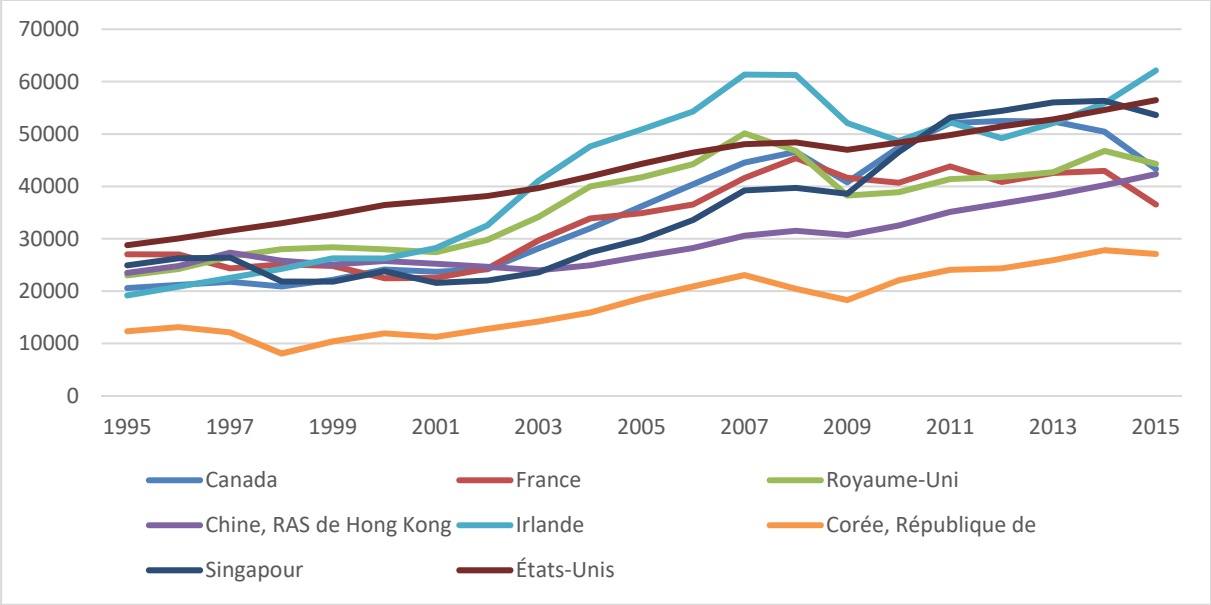


Figure 17. Evolution du PIB anuuel par habitant (en $ US courants) selon la banque mondiale entre 1995 et 2015

Si la richesse des habitants ne semble pas être un frein pour les performances des élèves, il est possible que la différence majeure concerne l'investissement dans l'éducation. C'est pourquoi nous avons comparé les dépenses publiques dans le domaine de l'éducation, en pourcentage du PIB. Or, les données fournies par la Banque mondiale montrent que c'est à Singapour que l'on investit le moins, en proportion, dans les politiques scolaires. À Hong Kong SAR également, ces dernières occupent une place plus faible qu'ailleurs dans l'économie du territoire. Or, Singapour et Hong Kong SAR prennent respectivement la première et la seconde place aux dernières évaluations TIMSS pour la quatrième année. Avec un investissement

relativement faible, il semble donc qu'ils soient en capacité de proposer un enseignement efficace à l'aune des résultats de leurs élèves aux évaluations TIMSS. Néanmoins, on peut également imaginer que la faiblesse des dépenses publiques soient compensées par un effort financier fourni par les parents dans la sphère privée, en particulier par le biais des cours complémentaires.

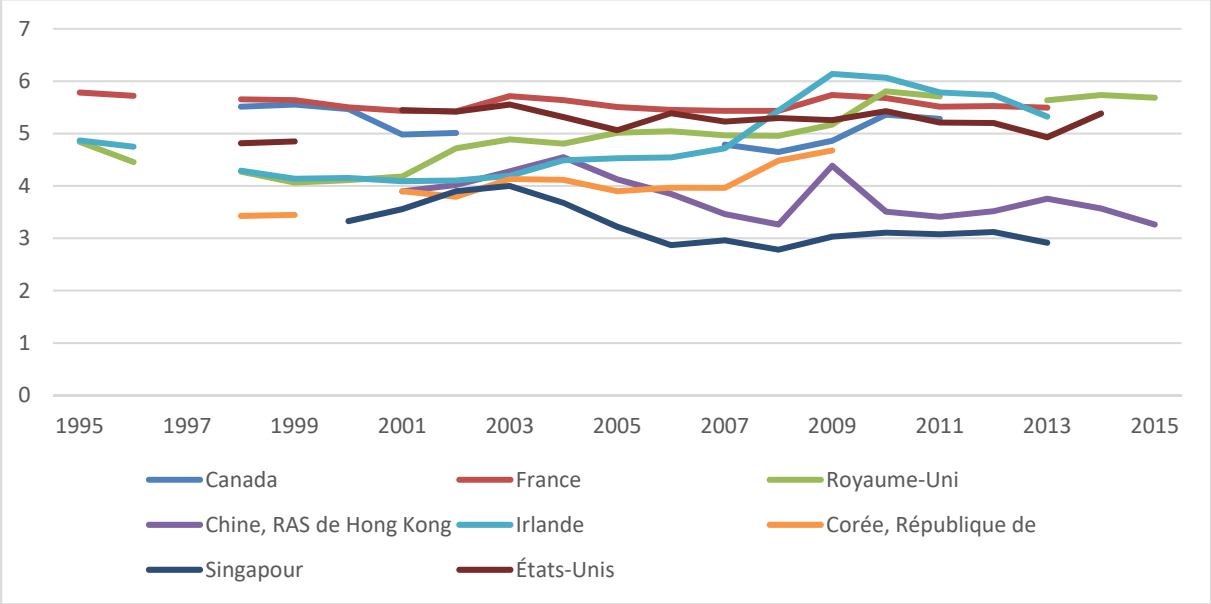


Figure 18. Évolution des dépenses publiques en éducation (en % du PIB) selon la banque mondiale entre 1995 et 2015

Si les critères économiques sont assez homogènes au sein du corpus, le regard que ces sociétés portent sur l'éducation et la matière scolaire est en revanche bien différent. Dans leur ouvrage *Les sociétés et leur école* (2010), Dubet, Duru-Bellat et Vérétout ont classé les styles éducatifs en quatre grandes catégories : la communauté démocratique, la communauté bienveillante, l'école du savoir et l'excellence pour tous. La communauté démocratique est caractérisée « par un niveau de scolarisation et d'acquis élevé, des inégalités faibles ou moyennes et une forte cohésion scolaire » (*ibid.*, p. 116). Les auteurs rangent dans cette catégorie les pays de tradition anglo-saxonne, c'est-à-dire que nous pouvons y inclure, en ce qui concerne notre corpus, la Floride, la République d'Irlande, l'Irlande du Nord et bien évidemment l'Angleterre. Ces territoires « se caractérisent par l'influence d'un modèle éducatif de tradition démocratique et expressif dans les relations entre les élèves et les maitres », privilégiant « l'expérience individuelle et les relations avec les pairs » (*ibid.*). On y trouve une « faible valorisation de l'inculcation du savoir pour le savoir » ainsi que le « souci plus affirmé de proximité avec la vie quotidienne » (*ibid.*, p. 117).

L'école du savoir est bien représentée par le système éducatif français. En effet, il s'agit « d'un pays scolairement inégalitaire et faiblement cohésif » où « la priorité est la transmission, l'initiation aux disciplines et à la culture nationale » (*ibid.*, p. 123). Le cadre proposé aux élèves est constitué par « un mode d'organisation scolaire dans lequel les matières sont isolées les unes des autres, les savoirs scolaires tellement distingués des savoirs non scolaires et familiers, ceci dans un système hiérarchisé où une discipline ferme et un rythme d'apprentissage précis sont imposés » (*ibid.*, p. 124). Les auteurs ajoutent que les élèves « se montrent particulièrement peu intégrés à leur école et peu confiants envers leurs enseignants. En définitive, ils sont indifférents, voire hostiles, à une école qui ne semble jamais vraiment les juger dignes d'êtres là » (*ibid.*, p. 126). Nous verrons que les comparaisons relatives au climat scolaire réalisées à partir des questionnaire TIMSS ne sont pas si défavorables au système français.

Les pays asiatiques sont classés parmi les sytèmes éducatifs prônant « l'excellence pour tous », et sont caractérisés « par un niveau de scolarisation élevé, des inégalités moyennes ou limitées et une cohésion faible » (*ibid.*). Les remarques faites par les auteurs à propos du Japon sont valables également pour les territoires sélectionnés pour notre recherche (Corée du Sud, Hong Kong SAR, Singapour, Taipei chinois). En effet, une tradition confucianiste est largement ancrée dans ces territoires, « où le fait d'apprendre a toujours joui d'une forte valorisation » (*ibid.*, p. 127). Comme au Japon, de nombreuses réformes ont été menées, dans une histoire récente, « pour conforter l'unification idéologique du pays, sa modernisation, son indépendance et [leur] donner une place dans la compétition économique ». La croyance que les efforts fournis par les élèves sont déterminants par rapport aux aptitudes innées semble particulièrement prégnante dans cette région du monde. La contrepartie de cette confiance placée en la capacité de tous les élèves à réussir est une sélection qui peut être ressentie, du moins de l'extérieur, comme particulièrement rigide et déshumanisée. Cette exigence en termes de performances scolaires conduit les élèves à fréquenter « deux écoles : l'école publique qui les éduque de façon assez commune et homogène, et les cours privés qui les placent dans une compétition précoce » (*ibid.*, p. 128-129). Cette remarque pousse les auteurs à s'interroger sur l'influence de cette scolarisation parallèle sur les résultats des élèves aux évaluations internationales. Comme nous le verrons avec l'analyse de leurs réponses aux questionnaires TIMSS, le cours de mathématiques semble perçu de façon moins positive dans les territoires asiatiques que dans les territioires occidentaux, à tout le moins au sein de notre corpus.

Le style éducatif appelé *Communauté bienvaillante* n'est pas représenté dans notre corpus, puisqu'il concerne les pays du Sud de l'Europe tels que « l'Espagne, l'Italie ou la Grèce, auxquels il faut associer le Portugal ». Signalons tout de même que dans ces territoires, « la scolarisation y est relativement faible, le niveau des acquis est relativement médiocre, les études y sont souvent assez courtes, tout ceci, bien sûr, par comparaison avec les pays les plus riches de la planète auxquels ils appartiennent » (*ibid.*, p. 119). Les trois styles éducatifs illustrés par des participants que nous avons intrégrés à notre sélection semblent au contraire en capacité de conduire à des performances élevées, soit à des stades précoces de la scolarité comme le montrent les évaluations TIMSS et PISA, soit plus tardivement, à travers des distinctions scientifiques prestigieuses comme la médaille Fields[1]. Il nous semble donc tout particulièrement intéressant de comprendre comment ces styles ont une influence sur la transposition didactique telle qu'elle s'effectue localement, à la fois dans l'organisation des programmes d'enseignement, leur contenu et les performances réalisées par les élèves aux évaluations TIMSS. Il nous faut toutefois nuancer les typologies que nous venons de présenter. En effet, il existe une certaine perméabilité des systèmes éducatifs, et leur description ne peut être référencée à un modèle qui prétendrait à l'exhaustivité. Ainsi, les auteurs indiquent, en parlant du modèle anglo-saxon, que « ces pays sont inscrits dans une tradition protestante où la communauté des fidèles et la relation directe aux textes sacrés étaient au cœur de la pratique religieuse, dans une communauté où le pasteur est l'expression et pas le représentant d'une autorité supérieure comme c'est le cas du prêtre catholique » (*ibid.*, p. 116). Ils en déduisent que « le modèle de transmission catholique place plus directement le croyant, puis l'élève, dans une relation d'obéissance au prêtre, puis au maitre, conçus comme des médiateurs entre le dogme et le fidèle, puis entre la connaissance et l'élève » (*ibid.*). On ne peut cependant que rattacher la République d'Irlande au modèle anglo-saxon, bien que le catholicisme y soit la religion majoritaire. En effet, outre la communauté de langue, le système éducatif de ce pays partage de nombreuses similitudes avec celui établi en Angleterre, notamment dans les contenus de leurs curriculums respectifs. De même, le Canada est considéré par les auteurs comme un pays à classer parmi les *Communautés éducatives*, mais qu'en est-il du Québec en particulier ?

1. La France compte un nombre particulièrement important de médaillés Fields, y compris dans la période récente, puisqu'entre 2002 et 2014, un mathématicien de nationalité française a reçu cette prestigieuse distinction à chaque remise de prix (rappelons que, tous les quatre ans, quatre médailles Fields au maximum sont attribuées à des mathématiciens de moins de quarante ans).

On peut supposer qu'avec une langue commune, les échanges avec la France ont été nombreux, mais qu'en raison de la proximité géographique, les emprunts au système américain ou aux autres provinces canadiennes anglophones ont également contribué à façonner le système éducatif québécois. Sans doute existe-t-il, plus largement et dans tous les sytèmes, une part d'hybrité qui fonde leur spécificité. Ainsi, l'une des caractéristiques de l'école du savoir est de faire de « l'acquisition de connaissances dont [les élèves] doivent faire preuve lors d'examens standardisés » (*ibid.*, p. 124). Or, ce type d'évaluations se développe dans des régions dont le modèle scolaire est différent, comme aux États-Unis avec le programme *No Child Left Behind*, instauré sous l'impulsion du président George W. Bush en 2002. Cette loi a conditionné l'obtention de financements publics à l'acquisition d'un niveau suffisant par les élèves, la preuve de celui-ci étant rapportée par des tests standardisés. D'ailleurs, la prise en compte croissante des évaluations internationales dans les politiques éducatives nationales participe également à l'hybridation des systèmes éducatifs, et à un certain rapprochement entre ces derniers. Cela n'empêche pas qu'il existe des besoins locaux qui sont pris en compte dans les programmes d'enseignement. Dans le domaine des fractions, ces spécificités tiennent souvent au système de mesure des pays considérés.

§ 2. Les spécificités locales dans les zones étudiées

Les pays que nous avons sélectionnés sont pour certains très éloignés, et chacun a son histoire propre. Le substrat dans lequel évolue la notion de fraction est donc très différent dans les territoires qui forment notre corpus, ce qui s'explique par des spécificités liées aux systèmes de mesure (A), et conduit à des spécificités à propos des formes d'écriture des notations fractionnaires (B).

A. Les spécificités liées à leur système de mesure

Dans les pays de notre corpus, le système métrique est parfois encore en concurrence avec le système impérial. Le premier a été créé à la Révolution française, pour unifier un système de mesure extrêmement dépendant des particularismes locaux. Un étalon-mètre fut défini « afin que cette unité reposât sur une base commune à tous les peuples de la Terre, les Français ont mesuré un arc du méridien terrestre, et ont partagé en 100 degrés le quart de ce méridien, ou la distance du pôle à l'équateur. Chaque degré a été subdivisé en 100 minutes ou kilomètres, et la millième partie du kilomètre est le mètre, unité fondamentale » (Lécluse, 1839,

entrée « mètre »[1]). Le décret d'application de la loi du 4 juillet 1837, paru en 1840, interdit l'utilisation de tout autre système de mesure en France, tandis que, grâce au commerce, le système métrique se répand en Europe. En 1875, la Convention du mètre est signée par les dix-sept pays l'ayant adopté. Un Bureau international des poids et mesures (BIPM), qui existe toujours aujourd'hui, est chargé de garantir l'uniformité des mesures à l'échelle mondiale. Le Système international d'unités est fondé en 1960, afin d'élargir l'emploi d'unités de mesure communes (mètre, kilogramme, seconde, ampère, Kelvin, Mole et Candela) et de redéfinir la longueur du mètre. Il favorise les notations décimales par l'utilisation de multiples et sous-multiples de l'unité en base 10.

Le système impérial a été adopté en 1824 pour unifier les unités de mesure en vigueur dans l'ensemble de l'empire britannique. Il trouve son orgine dans le système de mesure de la Rome antique, et s'appuie notamment sur des éléments du corps humain pour les mesures de longueurs (pieds, pouces). Comme il s'agit d'un système non décimal, les fractions et les nombres mixtes sont nécessaires pour assurer la correspondance entre multiples et sous-multiples. Ainsi, un pied est équivalent à 1/3 de *yard*, et un pouce est équivalent à 1/12 de pied. Aujourd'hui, tous les pays de notre corpus ont rejoint le BIPM, soit en qualité d'État membre, soit en qualité d'associé.

Participant	Statut	Date d'adhésion
Canada	État membre	1907
Corée du Sud	État membre	1959
États-Unis	État membre	1878
France	État membre	1875
Hong Kong SAR	Associé	2000
Royaume Uni	État membre	1884
République d'Irlande	État membre	1925
Singapour	État membre	1994
Taipei chinois	Associé	2002

Figure 19. Statut des participants de notre corpus au sein du Bureau international des poids et mesures

Pour autant, les unités anglo-saxonnes de mesure n'ont pas disparu. Alors que le Canada a achevé sa « décimalisation avec succès il y a quelques années » (Poisard et Barton, 2007, p. 3), les États-Unis n'imposent l'utilisation du système international d'unités que dans les documents administratifs fédéraux, et ces données sont fournies à partir de conversions d'unités

1. L'ouvrage est un lexique dont la pagination n'apparait pas dans l'édition que nous avons consultée.

impériales, si bien que l'utilisation du système impérial perdure dans la vie quotidienne. Par exemple, sur la route, les distances sont données en fractions de *mile*, comme on peut le voir sur l'image ci-dessous.

Figure 20. Panneaux indicateurs de l'échangeur *Route 10* à Providence County, Rhode Island, le 5 aout 2017 (auteur : JJBers Public)

Au Royaume-Uni et en République d'Irlande, la décimalisation a beaucoup progressé au début des années 2000 : « les signes routiers et les compteurs automobiles sont devenus métriques et affichent aussi des kilomètres » (*ibid.*). Dans les programmes scolaires, il est indiqué que les mesures sont notées « en utilisant les unités du système métrique approprié » (Government of Ireland, 1999, p. 76). Des traces de l'ancien système subsistent néanmoins dans la vie quotidienne, par exemple pour les mesures de contenance avec la célèbre pinte de bière ! En ce qui concerne Singapour et Hong Kong SAR, l'adoption du système décimal fait suite à la sortie de ces territoires de l'empire britannique, en 1963 pour le premier, en 1997 pour le second. Pour la Corée du Sud et le Taipei chinois, ce sont les difficultés politiques qui ont retardé l'adhésion au BIPM, avec la guerre de Corée dans les années 1950, et la revendication toujours d'actualité du Taipei chinois par la République populaire de Chine.

Les échanges culturels ont conduit à une certaine perméabilité des systèmes (les télévisions vendues en Europe continentale sont mesurées en pouces), mais certaines habitudes liées à l'utilisation des fractions perdurent : nombre de recettes de cuisine continuent, dans les pays de culture anglo-saxonne, d'être formulées avec des fractions de tasse ou de cuillère. Cette

pratique donne aux enfants l'occasion de maniupuler des fractions dès le plus jeune âge, et aux professeurs l'opportunité de proposer à leurs élèves des exercices qui correspondent à une réalité extra-scolaire.

Ingredients needed to make sixty chocolate-chip cookies

Number of dozens of cookies	5
Sticks of butter	2
Cups of sugar	3/4
Cups of brown sugar	3/4
Eggs	2
Teaspoons of vanilla	1
Teaspoons of salt	1/2
Teaspoons of baking soda	1
Cups of flour	2 1/4
Cups of chocolate chips	2

Figure 21. Exemple de recette impliquant des fractions et des unités de mesure anglo-saxonnes (Brinker, 1998, p. 219)

Les élèves acquièrent des connaissances à propos des fractions en dehors de l'école (Mack, 1993). Il est donc très probable que ceux qui vivent dans des sociétés où elles sont fréquemment utilisées (en particulier aux États-Unis et au Royaume-Uni) prennent un avantage sur ceux où elles sont moins présentes (comme en France, où l'emploi du système métrique est la plus ancienne) dans la construction du concept. Toutefois, parmi les curriculums que nous avons consultés, aucun ne fait référence à une utilisation des fractions dans le contexte d'unités de mesure anglo-saxonnes. De plus, entre pays ayant une histoire proche sur la question des systèmes de mesure en vigueur, les résultats aux évaluations TIMSS sont très variés, ce qui incite à étudier avec la plus grande attention les apprentissages scolaires.

B. Les spécificités liées aux formes d'écriture

Les formes d'écriture des fractions peuvent varier légèrement d'un territoire à l'autre. En particulier, les nombres mixtes (c'est-à-dire composés d'un nombre entier et d'une fraction) sont largement utilisés dans les régions anglophones (ainsi qu'au Québec, où ils sont appelés « nombres fractionnaires »), alors que dans les pays de culture latine, leur emploi est marginal dans un contexte scolaire. Dans les programmes d'enseignement français, le terme « nombre mixte » n'apparait pas, pas plus qu'une écriture telle que $1\frac{1}{5}$ (nous avons reproduit ci-contre un extrait du curriculum anglais de 2014 par lequel son usage est prescrit). Nous écririons plutôt $1 + \frac{1}{5}$ ainsi qu'invitent à le faire les auteurs de nos instructions officielles : savoir « écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 » (Ministère de

l'Éducation, 2008, p. 38) est un type de tâches que les élèves de cinquième année doivent pouvoir réaliser.

recognise mixed numbers and improper fractions and convert from one form to the other and write mathematical statements > 1 as a mixed number [for example, $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$]

Figure 22. Exemple d'écriture sous la forme d'un nombre mixte dans les programmes d'enseignement anglais (2014, p. 139)

Le vocabulaire relatif aux fractions que les élèves doivent utiliser diffère également en fonction des aires culturelles. Par exemple, dans le monde anglo-saxon, les termes « fraction unitaire » et « fraction non unitaire » apparaissent davantage dans les textes officiels, comparativement à ce que l'on a pu observer dans le curriculum français. Ils utilisent couramment le terme de « *proper fraction* » et « *improper fraction* » pour désigner respectivement des fractions inférieures à 1 et des fractions supérieures à 1. Ces expressions pourraient être traduit respectivement par « fraction véritable » ou « vraie fraction », et « fraction inauthentique » ce qui n'était pas satisfaisant, raison pour laquelle nous avons conservé la périphrase « inférieure à 1 » ou « supérieure à 1 » pour désigner de telles fractions. Enfin, pour désigner deux fractions dont le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre, nous avons rencontré le terme de « fractions liées » (« *related fractions* », comme dans *Ministry of Education, Singapore*, 2006, p. 19). Dans un souci de commodité, nous utiliserons parfois cette expression qui présente l'avantage de la concision.

Ces différences formelles restent minimes et ne mettent pas en cause la validité des comparaisons internationales que nous présentons. Toutefois, il nous faut préciser que l'existence d'un curriculum en langue anglaise ne signifie pas nécessairement un enseignement en anglais. Or, les difficultés des élèves francophones ou anglophones dans la construction des nombres procèdent en partie des irrégularités du système oral de numération (par exemple, le fait de dire « seize » au lieu de « *dix-six* »), entrainant un retard « de 1 an 1/2 voire 2 ans dans la mémorisation des relations numériques additives » (Brissiaud, 2014, p. 24). Ces observations sont également valables pour les fractions[1]. Dans l'analyse que nous ferons des instructions officielles en vigueur dans les pays asiatiques de notre corpus (Corée du Sud, Hong Kong SAR,

1. Voir, dans ce domaine, l'étude de Miura, Okamoto, Vlahovic-Stetic et Kim & Han (1999).

Singapour et Taipei chinois), un apprentissage plus précoce pourra être expliqué, au moins partiellement, par l'avantage lié aux régularités des langues asiatiques dans le champ de la numération.

Conclusion de la sous-section

Les onze participants aux évaluations TIMSS 2015 faisant l'objet de cette étude ont été présentés (Angleterre, Corée du Sud, Floride, France, Hong Kong SAR, Irlande du Nord, Ontario, Québec, République d'Irlande, Singapour, Taipei chinois). Chacun d'entre eux dispose d'instructions officielles facilement accessible et disponibles en français ou en anglais. À l'exception de la France, tous ont un nombre de participations aux évaluations TIMSS suffisant pour envisager une étude longitudinale. Parmi eux, nous trouvons les participants ayant les scores les plus élevés aux derniers tests (Singapour, Hong Kong SAR, la Corée du Sud et le Taipei chinois occupent les quatre premières places aux évaluations TIMSS 2015 de quatrième année), ce qui nous permettra d'identifier des points de divergence avec les curriculums des pays dans lesquels les élèves sont moins performants. Certes, quelques différences apparaissent à propos les usages sociaux qui sont faits des fractions : ils diffèrent selon que le système de mesure anglo-saxon a longtemps été utilisé (alors elles seront davantage mises en avant) ou que le système métrique est implanté de longue date (dans ce cas, la numération décimale est privilégiée). De même, les langues utilisées par les élèves induisent des obstacles à l'apprentissage de nature et d'intensité variables. Toutefois, ces facteurs n'empêchent pas de considérer la question de l'enseignement comme un élément décisif dans l'acquisition du concept de fraction.

Sous-section II. Des spécificités locales dans l'enseignement des fractions

Si l'on considère que « la discontinuité des phénomènes sociaux d'un espace à l'autre » est liée à « leur spécificité ou leurs identités culturelles » (Join-Lambert *et al.*, *op. cit.*, point 12), alors la singularité des phénomènes sociaux relatifs aux fractions dans un pays donné a sans doute des conséquences sur les objectifs fixés par le législateur quant à l'apprentissage des élèves : la sphère scolaire ne peut être à ce point déconnectée de la société à laquelle elle doit préparer les élèves qui lui sont confiés qu'on n'en viendrait à ne mesurer aucune différence entre les pays de notre corpus. Ces besoins exprimés par la société vont se traduire dans les instructions officielles. C'est pourquoi nous commencerons par présenter les programmes d'enseignement (§ 1), avant de décrire les objectifs qu'ils assignent au système éducatif quant

à la maitrise des fractions par les élèves (§ 2). Cette présentation des instructions officielles, pays par pays, aurait pu figurer dans les annexes, mais nous la faisons figurer ici parce qu'elle permet au lecteur d'accéder plus facilement à des informations qui seront utilisées ultérieurement dans la thèse. Toutefois, celui-ci pourra se référer directement à la synthèse proposée dans la conclusion de cette sous-section.

§ 1. Présentation des programmes d'enseignement

Dans tous les pays de notre corpus, le curriculum prend la forme d'un texte de référence publié par les autorités administratives ou gouvernementales. Nous allons, dans un premier temps, décrire les programmes d'enseignement sur lesquels nous nous sommes appuyé pour mener notre étude (A). Cependant, tous n'ont pas la même densité ni la même importance dans les pratiques professionnelles des enseignants. Il existe parfois des documents d'accompagnement qui viennent préciser des instructions officielles très concises et qui ont potentiellement une grande influence sur les choix réalisés par les professeurs. Nous présenterons donc, dans un second temps, les textes complémentaires sur lesquels nous avons fondé notre analyse (B).

A. Les programmes d'enseignement

Nous allons présenter les instructions officielles utilisées pour notre recherche[1]. Comme nous traitons en priorité les données issues des tests de 2015, nous évoquons ici les programmes en vigueur au moment de ces évaluations TIMSS. Nous donnons également quelques informations sur leur contexte d'application ou, plus largement, sur le système éducatif correspondant, dès lors que ces informations sont utiles pour appréhender le curriculum. Chacun des pays de notre corpus fait l'objet d'un paragraphe, ceux-ci étant analysés dans l'ordre alphabétique.

En Angleterre, les instructions officielles à destination des professeurs des écoles ont été renouvelées en 2006, avec l'objectif de proposer une meilleure progression dans l'apprentissage tout au long de la scolarité primaire (Department for education and skills, 2006, p. 2). Les rédacteurs ont mis en évidence les éléments du programme qui leur paraissaient importants en utilisant une police en gras, que nous avons conservé dans notre présentation lorsque c'était possible. Les programmes scolaires pour le collège (*Key stages III and IV*) ont été publiés en 2007 par une autorité intitulée *Qualifications and Curriculum Authority* (Q.C.A.) et sa mise en œuvre dans les établissements a débuté en septembre 2008. Le changement le plus important a été l'accent mis sur l'enseignement des concepts clés, alors même que le contenu des programmes a subi peu de modifications. Il est beaucoup moins détaillé que les instructions fournies dans l'enseignement primaire, et les professeurs doivent s'emparer de chaque sujet pour permettre à leurs élèves d'acquérir ces concepts fondamentaux. Les nouveaux programmes

1. Les références des programmes scolaires des pays retenus dans notre étude figurent dans les sources. Les éléments des programmes qui concernent la notion de fraction (reproduits ou traduits) figurent dans les annexes.

(2014) n'ont été appliqués dans les écoles primaires et secondaires qu'en 2015, c'est-à-dire l'année des évaluations TIMSS. Les élèves concernés par ce test ont donc travaillé selon ces injonctions au cours d'une seule année. Ces instructions officielles comportent non seulement des objectifs d'apprentissage, mais également un paragraphe explicatif en-dessous de chaque objectif, apportant des éclaircissements sur le concept en jeu ou les procédures que doivent utiliser les élèves. L'une des particularités du système éducatif anglais est d'avoir une scolarité obligatoire qui débute une année plus tôt qu'ailleurs. C'est pourquoi les élèves anglais sont évalués par TIMSS en cinquième et en neuvième années d'enseignement obligatoire, à un âge similaire à celui des élèves des autres pays. Dans nos comparaisons, nous conserverons cette dénomination de cinquième année, en gardant à l'esprit que les élèves des autres pays de notre corpus (à l'exception de l'Irlande du Nord) sont évalués en quatrième et huitième années de scolarité obligatoire.

Les instructions officielles de Corée du Sud ont été publiées en 2007, mais elles furent introduites progressivement dans le système éducatif. Ainsi, en 2009, le curriculum révisé de mathématiques a été utilisé par les enseignants de première, deuxième, septième et dixième années. En 2010, il a été appliqué pour la première fois dans les classes de troisième, quatrième, huitième et onzième années. En 2011, ce sont les élèves de cinquième, sixième, neuvième et douzième années qui ont étudié selon les nouvelles instructions officielles. Ces programmes d'enseignement ont donc été appliqués pendant toute la scolarité des élèves ayant passé les évaluations TIMSS de 2011 et 2015. Les objectifs du programme sont présentés de manière concise, sous la forme d'une phrase contenant un verbe à l'infinitif. Ils ne comportent ni explication supplémentaire, ni exemple, les conseils pédagogiques et recommandations didactiques étant publiés dans des textes séparés.

Les *Next Generation Sunshine State Standards* de Floride ont été approuvés par le Conseil de l'éducation de l'État de Floride en septembre 2007. Il s'agit d'un texte court, qui inclut des attentes distinctes pour chaque niveau de classe, et qui énonce les connaissances et compétences qu'un élève devrait avoir acquis de la maternelle à la huitième année. Les districts scolaires locaux sont chargés de déterminer de façon plus précise le contenu des apprentissages, leur portée et leur répartition, et de veiller à ce que les compétences développées par les élèves répondent aux normes de l'État. Les processus et les méthodes d'enseignement sont établis par les districts scolaires locaux. Néanmoins, l'État de Floride met à disposition des enseignants un site très complet proposant des séquences d'apprentissage, afin de faciliter la mise en œuvre des programmes, intitulé CPALMS. Il propose des ressources pédagogiques variées (cours, vidéos, ressources pédagogiques et activités). La Floride a adopté les *Common Core State Standards for Mathematics* en juillet 2010. Ces normes, beaucoup plus précises et rédigées à un niveau fédéral, sont devenues pleinement effectives à la rentrée scolaire 2014/2015. Pour cette raison, les élèves ayant passé les évaluations TIMSS 2015 n'ont travaillé qu'un an selon ces nouvelles directives, soit en quatrième année, soit en huitième année.

En France, les *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire* (les seuls dont nous allons tenir compte pour notre analyse comparée des performances des élèves, puisque les collégiens français n'ont pas participé aux évaluations TIMSS 2015) ont été promulgués par le biais du Bulletin officiel hors-série n° 3 du 19 juin 2008. Ils reprennent le principe des cycles d'apprentissage qui ont été mis en place dès 1989. Ce sont les équipes pédagogiques qui déterminent, à l'échelle d'une école ou d'une circonscription, les éléments qui doivent être acquis par les élèves à chaque niveau de la scolarité,

au sein d'un cycle. L'enseignement des fractions étant prévu, à l'école élémentaire, au cycle 3 (c'est-à-dire dans les classes de CE2, CM1 et CM2), nous nous intéresserons presque exclusivement à celui-ci. De nouvelles directives ont été publiées pour la rentrée 2015 : si elles nous conduiront à formuler quelques observations sur l'évolution des programmes français à propos de l'enseignement des fractions, elles n'ont pas pu être mises en œuvre dans les classes avant la passation des tests TIMSS 2015.

Les instructions officielles de Hong Kong ont été publiées en 2000, et couvrent le programme d'enseignement de la première à la sixième année. Comme à Singapour dans les instructions officielles de 2012, l'apparition des nouvelles technologies est l'un des motifs ayant conduit le *Curriculum Development Council Mathematics Subject Committee (Primary)* à proposer l'adoption de nouveaux programmes. Ceux-ci ont été appliqués progressivement dans les écoles, en 2002 pour les élèves de première année, en 2003 pour les élèves de deuxième année, et ainsi de suite jusqu'en 2007 pour la sixième année. Ce document propose une organisation temporelle très précise des enseignements, dans la mesure où il prescrit des objectifs d'apprentissage pour chaque semestre. Toutefois, les écoles sont susceptibles de concevoir leur propre curriculum.

En l'Irlande du Nord, les programmes d'enseignement de l'école élémentaire datent de 2007, avec une implantation dans les écoles qui s'est étalée entre cette année-là et 2010. La scolarité obligatoire débutant deux ans plus tôt qu'ailleurs, les élèves nord-irlandais sont évalués en sixième année à un âge similaire à celui des élèves des autres pays. Comme pour l'Angleterre, nous conserverons cette dénomination de sixième année lorsqu'il sera possible de la faire apparaitre, en gardant à l'esprit que pour la plupart des pays de notre corpus, l'année du test correspond à la quatrième année, et non à la sixième année, et que c'est ainsi que sont libellées les évaluations TIMSS (« évaluations pour la quatrième année »). Le curriculum inclut des types de tâches à acquérir pour chaque domaine (par exemple, « Les mesures ») et pour chaque cycle d'enseignement, ainsi que des compétences transversales à travailler (par exemple, « Utiliser les mathématiques »). Toutefois, il est rédigé dans des termes extrêmement généraux qui ne permettent pas une répartition des compétences relatives aux fractions par niveau de classe. En effet, un principe-clé des nouveaux programmes réside dans l'augmentation de la flexibilité apportée aux établissements scolaires pour s'adapter aux besoins des élèves. La législation prévoit donc un minimum, que les écoles sont obligées de couvrir, et il appartient aux écoles de définir la meilleure façon de mettre en œuvre ce document cadre. Ces remarques s'appliquent également au curriculum de l'enseignement secondaire.

Les programmes de l'Ontario ont été mis en place à la rentrée 2005, remplaçant des instructions officielles datant de 1997. Ils définissent des objectifs d'apprentissage pour les élèves de la première à la huitième année, et sont publiés en français ainsi qu'en anglais. Bien que les méthodes d'enseignement et d'évaluation ne soient pas prescrites dans ces instructions officielles provinciales, l'introduction du document présente, pour chaque année scolaire, un ensemble de sept attentes. Ces dernières décrivent les processus mathématiques que les élèves doivent apprendre et savoir appliquer pour atteindre les objectifs énoncés dans les cinq domaines des mathématiques définis par les auteurs (le sens du nombre et la numération ; la mesure ; la géométrie et le sens de l'espace ; la modélisation et l'algèbre ; la gestion des données et les probabilités). L'évaluation des élèves est encadrée par une grille d'évaluation dont la norme est fixée à l'échelle provinciale.

Au Québec, les instructions officielles organisent la scolarité primaire en trois cycles comprenant chacun deux classes. Des objectifs d'apprentissage spécifiques sont décrits pour chaque cycle, et des indications concernant les compétences transversales à faire acquérir par les élèves sont fournies. Néanmoins, les items des instructions officielles ne sont pas directement exploitables pour notre analyse, en raison de leur trop grande concision (par exemple, pour l'enseignement des fractions au cycle 1, nous avons cette seule mention : « Fractions en lien avec le quotidien de l'élève » [Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation, 2001, p. 134]).

Les programmes d'enseignement de la République d'Irlande datent de 1999, avec une mise en place progressive dans les classes entre les années scolaires 2002-2003 et 2004-2005. Ils n'ont pas été modifié depuis leur introduction dans les écoles, et imposent des objectifs pour chaque niveau d'enseignement, depuis la maternelle, jusqu'à la sixième année d'enseignement obligatoire. Ils préconisent des méthodes et procédures d'instruction, des supports (manuels, matériel d'instruction), ainsi que des activités ou méthodes d'évaluation. Bien que le curriculum ne soit pas obligatoire, il est presque universellement adopté par les établissements scolaires. Un organisme appelé *National Council for Curriculum and Assessment* est chargé de modifier les programmes d'enseignement : un processus a été engagé en 2014 pour les réécrire, mais en 2018, celui-ci n'a toujours pas abouti. En revanche, les instructions officielles pour le premier cycle de l'enseignement secondaire (appelé « *Junior cycle* ») ont été modifiées en 2014.

À Singapour, les autorités fournissent un document cadre qui décrit les connaissances, compétences et attitudes que les élèves doivent acquérir de la première année de scolarité obligatoire jusqu'en sixième année. Il est modifié tous les six ans. À chaque fois qu'un nouveau programme d'enseignement est publié, les éditeurs sont invités à développer et publier des manuels de mathématiques et les supports associés, tels que des fichiers ou des livres d'activité. Ces manuels et leur matériel sont soumis à un processus d'examen et d'autorisation par le ministère de l'Éducation. Il existe à Singapour, en cinquième et sixième années, des classes particulières (les *Foundation stages*) où les élèves identifiés comme ayant des difficultés importantes consolident leurs apprentissages sur des notions fondamentales. Il s'agit d'une orientation précoce et les programmes applicables sont légèrement différents (ils sont plus étendus, avec des types de tâches allant des plus simples à ceux travaillés dans le cursus ordinaire). Pour notre analyse, nous ne tiendrons compte que des programmes qui valent pour la filière majoritaire, ceux-ci étant plus restreints. Le processus de réécriture des programmes de 2006 est désormais achevé. Comme la publication et l'entrée en vigueur des nouvelles instructions officielles a été progressive (entre 2012 et 2018), les élèves ayant passé les évaluations TIMSS 2015 n'ont pas eu à connaitre du contenu de ce nouveau curriculum. Nous notons que les auteurs mentionnent les évaluations TIMSS et PISA comme des moteurs des changements apportés aux programmes d'enseignement (Ministry of Education, Singapore, 2012, p. 6). En outre, les instructions officielles sont accompagnées de paragraphes explicatifs, ce qui n'était pas le cas dans les textes précédents. Ils précisent les concepts sous-jacents et donnent des exemples d'exercices qui peuvent être effectués en classe.

Les enseignants du Taipei chinois disposent de directives précises, accompagnées de nombreux commentaires et exemples d'activités visant à mettre en œuvre les objectifs définis en amont, ou destinés à préparer les apprentissages ultérieurs. Les instructions officielles datent de 2001, avec des révisions

successives en 2003, et 2008, pour une introduction dans les classes en 2011. Les objectifs sont définis pour chaque niveau de classe, de la première à la neuvième année de scolarité obligatoire, moment où se termine le premier cycle de l'enseignement secondaire. Des programmes entièrement renouvelés sont attendus pour la rentrée 2018.

B. Les textes complémentaires

Pour la plupart des pays de notre corpus, les instructions officielles proprement dites donnent la matière suffisante pour notre analyse : elles définissent les types de tâches et les connaissances que les élèves doivent maitriser dans le domaine des fractions de façon suffisamment précise. Nous n'avons donc pas recherché d'éventuelles injonctions complémentaires susceptibles d'éclairer des directives qui nous semblaient claires, d'autant plus que ces documents d'accompagnement étaient parfois extrêmement difficiles d'accès. Néanmoins, dans de rares cas, les termes employés dans les instructions officielles pour évoquer les fractions étaient beaucoup trop larges pour permettre une analyse fine des notions étudiées par les élèves à chaque niveau de la scolarité. Cette difficulté est notamment survenue lorsque les éléments des programmes étaient donnés pour un cycle d'enseignement, et non pour un niveau de classe. Nous allons donc détailler ici les textes que nous avons utilisés pour définir les acquis attendus à chaque stade de la scolarité lorsque ce cas s'est présenté, de façon à réaliser des comparaisons valables intégrant la France, l'Irlande du Nord et le Québec.

En France, les instructions officielles de 2008 imposent des enseignements pour toutes les classes d'un même cycle sans distinction. Les professeurs sont ensuite chargés, au sein d'une école ou d'une circonscription, de répartir les types de tâches entre ces classes (deux ou trois selon les cycles). Pour les guider dans leurs choix, le ministère de l'Education a proposé des *Progressions*, et c'est sur ces dernières que nous allons nous appuyer pour décrire la répartition des enseignements entre les différents niveaux. Ainsi, dans les *Progressions pour le cours élémentaire deuxième année et le cours moyen*, les auteurs indiquent ce qui relève de chacune des classes de CE2, de CM1 et de CM2, tandis que dans les programmes, les compétences à acquérir sont fournies pour l'ensemble de ces trois classes. Dans les nouveaux programmes, publiés en novembre 2015 et appliqués à la rentrée 2016, des « repères de progressivité » permettent aux professeurs de répartir les compétences à enseigner par niveaux de classe. Ce sont ces repères de progressivité que nous utiliserons pour définir ce qui doit être enseigné à chaque niveau de la scolarité. Par ailleurs, le cycle 3, celui au cours duquel sont principalement enseignées les fractions, comprend désormais le CM1, le CM2 et la sixième, alors qu'auparavant il était composé des classes de CE2, CM1 et CM2.

En Irlande du Nord, un document appelé *Education (Curriculum Minimum Content) Order (Northern Ireland)* et publié en 2007 prévoit un curriculum minimum qui doit être couvert par toutes les écoles. Toutefois, ce texte est très court et son analyse ne permet pas de déterminer la politique éducative de ce pays concernant les fractions. En effet, pour le premier cycle de scolarité, les élèves doivent simplement « reconnaitre et utiliser des fractions simples de la vie quotidienne » (p. 62). À la fin du deuxième cycle de scolarité, ils doivent « comprendre et utiliser des fractions usuelles, des notations décimales et des pourcentages, et explorer les relations qu'ils entretiennent » (p. 65). Afin d'avoir une connaissance plus fine des attentes de l'institution à chaque niveau de la scolarité, nous avons consulté les documents d'accompagnement appelés *Revised Lines of Development for Mathematics and*

Numeracy. Ces documents, publiés en 2006 et toujours utilisés aujourd'hui, déterminent des niveaux de compétence dans chaque domaine. La difficulté réside dans le fait que chaque niveau de progression correspond à l'utilisation d'une couleur particulière, sans que les auteurs précisent à quel niveau de la scolarité correspond chaque couleur. Étant donné que le nombre de couleurs différentes est égal au nombre de niveaux de la scolarité primaire, nous faisons l'hypothèse que chacune des couleurs correspond à un niveau de la scolarité. Cette progression servira de fondement à l'analyse, quand bien même nous concédons qu'elle laisse subsister une certaine incertitude sur l'organisation temporelle des apprentissages. En ce qui concerne l'enseignement secondaire, nous n'avons pas trouvé d'indications relatives à une quelconque progression. Notre analyse s'arrêtera donc aux acquis de l'école élémentaire, en raison de l'impossibilité de procéder à une analyse fine des intitulés impliquant des fractions.

Au Québec, pour savoir plus précisément ce qui est attendu par l'instution dans le domaine des fractions, nous nous sommes appuyé sur des progressions disponibles sur le site Internet du ministère de l'éducation québécois. Ces progressions sont très précises, et constituent une interprétation précieuse des libellés souvent laconiques des instructions officielles. Dans les annexes, nous les avons ajoutées en italique à côtés des items des programmes. Elles ont été mises en ligne le 24 août 2009 par le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, sous l'intitulé *Progression des apprentissages au primaire* et *Progression des apprentissages au secondaire*. Ce sont ces progressions disponibles en ligne qui constitueront le fondement de notre analyse.

§ 2. Les objectifs des programmes d'enseignement

Les programmes d'enseignement que venons d'évoquer déterminent des objectifs qui reflètent tout à la fois des besoins socialement situés et un certain degré de maturité dans le domaine didactique. Nous avons mis au jour des différences dans la construction des acquis des élèves, pour le cas où l'objectif assigné consiste à maitriser les fractions pour elles-mêmes, et pour le cas où elles ne constituent qu'une propédeutique à l'apprentissage des écritures décimales. De même, certaines instructions officielles mettent en avant l'apprentissage de procédures décontextualisées par les élèves, tandis que d'autres privilégient la capacité à résoudre des problèmes. Nous allons donc décrire les objectifs généraux des programmes d'enseignement (A), avant de préciser ce qui est attendu dans le domaine des fractions (B).

A. En général

Parfois, des propos préliminaires aux instructions officielles précisent les objectifs généraux des programmes et donnent des indications didactiques pour mener les enseignements. Toutefois, de telles indications n'apparaissent pas dans tous les textes. Par exemple, en Floride, dans les instructions officielles de 2007, on ne trouve pas d'introduction précisant les objectifs généraux des auteurs. Le curriculum consiste simplement en une liste décrivant, à l'aide de verbes d'action, tout ce que doivent savoir faire les élèves à la fin de chaque année scolaire. Lorsqu'elles sont présentes, les orientations fournies par les autorités peuvent nous permettre d'appréhender, certes très partiellement et à grands traits, la façon dont doivent être conduites les séances dans les classes, y compris dans le domaine des fractions. Nous décrirons successivement les objectifs généraux de chacun des pays de notre corpus, lorsque ceux-ci ont été publiés.

En Angleterre, les auteurs des instructions officielles de 2006 ont souhaité mettre l'accent sur « la construction par l'enfant de la compréhension de la résolution de problèmes, du raisonnement et de la numération dans une variété de contextes leur permettant d'explorer, de s'amuser, d'apprendre, de s'entrainer et de parler de leur compréhension en développement » (*op. cit.*, 2006, p. 4). Au collège, les concepts clés à développer étaient la compétence, la créativité, les applications et implications des mathématiques et de la compréhension critique. Les processus clés des mathématiques (représenter, analyser, interpréter, évaluer, communiquer et réfléchir) ont été définis comme des compétences essentielles sur lesquelles les élèves anglais ont encore une marge de progression. En 2014, les auteurs ont fixé trois objectifs principaux en ce qui concerne les acquis des élèves. Ceux-ci doivent « maitriser les notions fondamentales des mathématiques, y compris en résolvant fréquemment des problèmes variés et de plus en plus complexes », « raisonner de façon mathématique en suivant une ligne d'enquête, en faisant des conjectures sur les relations et les généralisations, et en développant des arguments, justifications et preuves en utilisant le langage mathématique » et « résoudre des problèmes en appliquant des connaissances mathématiques dans une variété de problèmes routiniers ou non de plus en plus complexes, y compris ceux incluant une séries d'étapes simples » (Department for Education, 2014, p. 108). À travers cette liste, les auteurs mettent l'accent sur la résolution de problèmes : nous verrons plus loin dans cette recherche si cela vaut également pour l'enseignement des fractions.

Les auteurs des programmes de Corée du Sud ont fixé trois objectifs en ce qui concerne les mathématiques : « en observant d'un point de vue mathématique et en manipulant des phénomènes de la vie quotidienne, cultiver la capacité à comprendre des concepts, des principes et des règles mathématiques simples ; cultiver la capacité à penser et communiquer en utilisant les mathématiques pour résoudre des problèmes de la vie quotidienne d'une façon pratique ; porter un intérêt aux mathématiques et comprendre sa valeur pour développer une attitude positive face à cette matière » (Ministry of Education and Human Resources Development, 2007, p. 3-4). Par rapport à l'Angleterre, l'accent est moins mis sur la résolution de problèmes, et davantage sur la maitrise des procédures et règles mathématiques. L'intérêt des élèves pour la matière est évoqué, sans doute en raison de sa faiblesse, d'après les réponses des élèves aux questionnaires TIMSS, par rapport aux autres pays de notre corpus.

En France, les indications données sont à la fois très larges et très vagues, puisque les autorités indiquent que « la pratique des mathématiques développe le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision » (MEN 2008, p. 22). Ce sont les qualités attendues des élèves qui sont développées ici, mais rien n'est dit sur la manière dont les enseignants vont s'y prendre pour faire naitre ou grandir celles-ci. Tout au plus sait-on que, « du CE2 au CM2, dans les quatre domaines du programme, l'élève enrichit ses connaissances, acquiert de nouveaux outils, et continue d'apprendre à résoudre des problèmes. Il renforce ses compétences en calcul mental. Il acquiert de nouveaux automatismes. L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification » (*ibid.*). Quand au but de ces apprentissages, il est indiqué que « la maîtrise des principaux éléments mathématiques aide à agir dans la vie quotidienne et prépare la poursuite d'études au collège » (*ibid.*).

À Hong Kong SAR, les auteurs précisent que « les programmes n'ont pas seulement pour but de réussir les objectifs en termes d'apprentissage de connaissances et de compétences mathématiques,

mais également de mettre l'accent sur le développement d'une attitude positive d'apprentissage des élèves, telle que le sérieux dans les activités mathématiques, être attentif et avoir un esprit d'exploration » (The Education Department, 2000, p. 2). En outre, ils indiquent que « les programmes insistent sur le lien entre les thèmes du programme de mathématiques et les expériences des élèves à travers des activités et des exemples tirés de la vie réelle » (*ibid.*, pp. 2-3). En ce qui concerne les modalités d'apprentissage, « une approche spiralaire est adoptée dans les instructions officielles. Cela permet aux élèves de construire le nouveau savoir sur les bases du savoir acquis et des expériences » (*ibid.*, p. 3). La résolution de problèmes n'est pas particulièrement mise en avant, même si l'utilisation de diagrammes destinés à modéliser un problème est encouragée (*ibid.*, p. 50). Par ailleurs, « les élèves peuvent être conduit à faire usage d'un logiciel approprié pour explorer des modèles numériques, les caractéristiques de formes et les relations entre les concepts mathématiques afin d'enrichir les connaissances des élèves » (*ibid.*, p. 56).

En Irlande du Nord, les auteurs précisent d'une façon générale la manière dont les enseignants doivent construire leurs cours : « les idées mathématiques doivent être présentées aux enfants dans des contextes qui font sens pour eux » et « les activités doivent être équilibrées entre des tâches qui développent les connaissances, les compétences et la compréhension, et celles qui développent la capacité à appliquer les connaissances mathématiques et à résoudre des problèmes » (Council for the Curriculum, Examinations & Assessment, 2007, p. 57).

En Ontario, les auteurs précisent que « les attentes énoncent en termes généraux les savoirs et savoir-faire que l'élève doit avoir acquis à la fin de son année d'études » et que, « par rapport à ces attentes claires et précises, l'élève doit démontrer son degré de compétence dans le contexte d'activités et de travaux divers » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005, p. 6). En revanche, « les exemples qui accompagnent les contenus d'apprentissage servent à illustrer l'envergure, la portée ou le degré de complexité visés pour les éléments à l'étude. Ils ne sont ni obligatoires ni exhaustifs. L'enseignante ou l'enseignant pourra choisir de concentrer sa leçon sur un ou deux des exemples suggérés ou choisir d'autres exemples pertinents » (*ibid.*). Un autre point mis en avant par les rédacteurs des programmes concerne la progressivité des apprentissages. Ainsi, les auteurs estiment que « l'organisation des attentes et des contenus d'apprentissage reflète une progression cognitive. Elle tient compte, lors du passage de l'élève d'une année d'études à une autre, du degré croissant de complexité des concepts et des connaissances à assimiler, ainsi que celui de la capacité à utiliser les habiletés requises pour mettre en application ces concepts et connaissances et en communiquer la compréhension » (*ibid.*). En revanche, rien n'est dit, de façon générale, sur la résolution de problèmes.

Dans l'introduction des programmes de 2001, modifiés en 2006, le ministre québécois de l'Éducation précise que ce texte « s'appuie sur les plus récentes recherches menées en Occident, aussi bien dans le domaine de l'éducation que dans celui de l'apprentissage. Les jeunes Québécoises et Québécois pourront donc bénéficier des contenus disciplinaires les plus à jour que l'on puisse trouver » (p. 1). Les auteurs soulignent à propos des mathématiques que, « bien que son enseignement gagne toujours à prendre appui sur des situations et des objets concrets, il doit néanmoins se donner comme objectif de traiter dans l'abstrait des relations entre les objets ou entre les éléments d'une situation » (*ibid.*, p. 124). Néanmoins, le sens resurgit dans les titres consacrés au domaine numérique : « sens et écriture des nombres » (*ibid.*, p. 134), « sens des opérations sur les nombres » (*ibid.*, p. 135). Ce dernier

titre est immédiatement suivi par un autre ainsi rédigé : « opérations sur les nombres », ce qui suggère une phase d'apprentissage du sens, et une phase d'utilisation des concepts dans le cadre de la résolution de problèmes. Par ailleurs, ils soumettent trois pistes de travail aux enseignants par le biais d'une définition du raisonnement mathématique : « il est déductif, dans la mesure où l'élève doit apprendre à dégager une conclusion sur la base des données d'une situation-problème. Il est inductif dans la mesure où on demande à l'élève de dégager des règles ou des lois à partir de ses observations. Il est créatif, parce que l'élève doit imaginer des combinaisons d'opérations pour trouver diverses réponses à une situation-problème » (*ibid.*, p. 124). La résolution de problèmes mathématiques semble donc être au cœur du processus d'enseignement.

En République d'Irlande, les *Teacher Guidelines for Mathematics* indiquent que les manuels doivent mettre l'accent sur « la manipulation des objets appartenant au monde physique » (Government of Ireland, 1999, p. 3) et encourager la recherche en fournissant aux élèves des opportunités structurées de pour s'engager dans des activités d'exploration. Le curriculum irlandais est fondé sur « une approche constructiviste des mathématiques » (*ibid.*) et souligne le besoin de relier l'apprentissage à l'environnement et aux expériences des élèves. Par exemple, pour la catégorie « raisonnement », les auteurs des programmes d'enseignement mettent l'accent sur le développement d'hypothèses, l'observation de récurrences, le raisonnement dans un contexte mathématique, et sur la justification des procédures et résultats des activités, problèmes et projets mathématiques.

À Singapour, dès l'introduction, les auteurs affirment que « les programmes d'enseignement modifiés continuent de mettre l'accent sur la compréhension des concepts, les compétences de haut niveau et les capacités de réflexion dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ces composantes sont intégrées au développement de l'habileté à résoudre des problèmes mathématiques » (*op. cit.*, 2006, p. 2). Pour illustrer leur pensée, ils ont réalisé un schéma que nous reproduisons ci-contre.

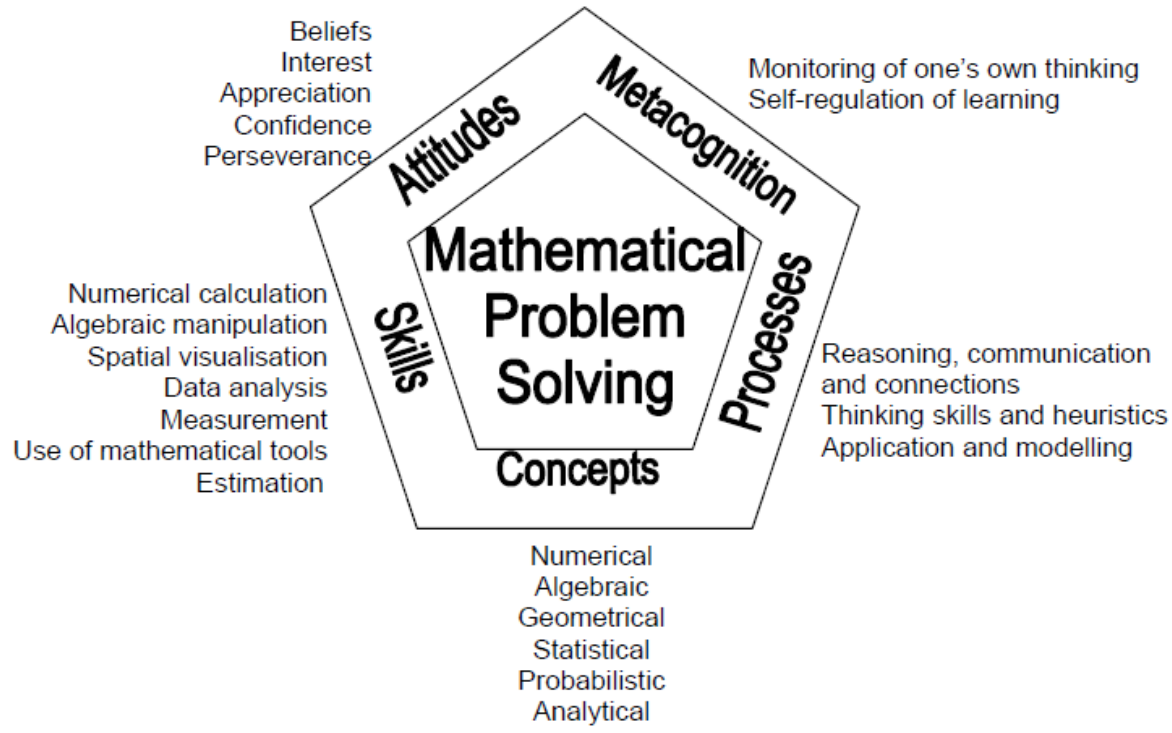


Figure 23. Cadre théorique des enseignements de mathématiques à Singapour (Mathematics Syllabus Primary, 2006, p. 6)

Ce schéma montre que toutes les activités réalisées par les élèves doivent être au service de la résolution de problèmes. Certes, l'un des points qui a motivé le changement de programmes en 2012 est la nécessité d'intégrer les nouvelles technologies dans les apprentissages (*op. cit.*, 2012, p. 2) et la recherche d'un « meilleur équilibre entre les connaissances et les compétences » (*ibid.*, p. 6). Toutefois, le texte reste « centré sur la résolution de problèmes mathématiques » (*ibid.*, p. 3). D'ailleurs, le schéma figurant dans les instructions officielles de 2006 est toujours présent dans le texte de 2012. Un autre schéma, nouveau celui-ci, montre comment la résolution de problèmes passe par la modélisation (*ibid.*, p. 16). Il apparait dans le chapitre visant à expliquer les procédures qui doivent être utilisées par les élèves, et illustre une approche spécifique, identifiée sous le nom de *C-P-A approach* (approche permettant un passage progressif du concret à la représentation symbolique, puis de cette dernière à l'abstrait), qui peut se traduire également dans la résolution de problèmes.

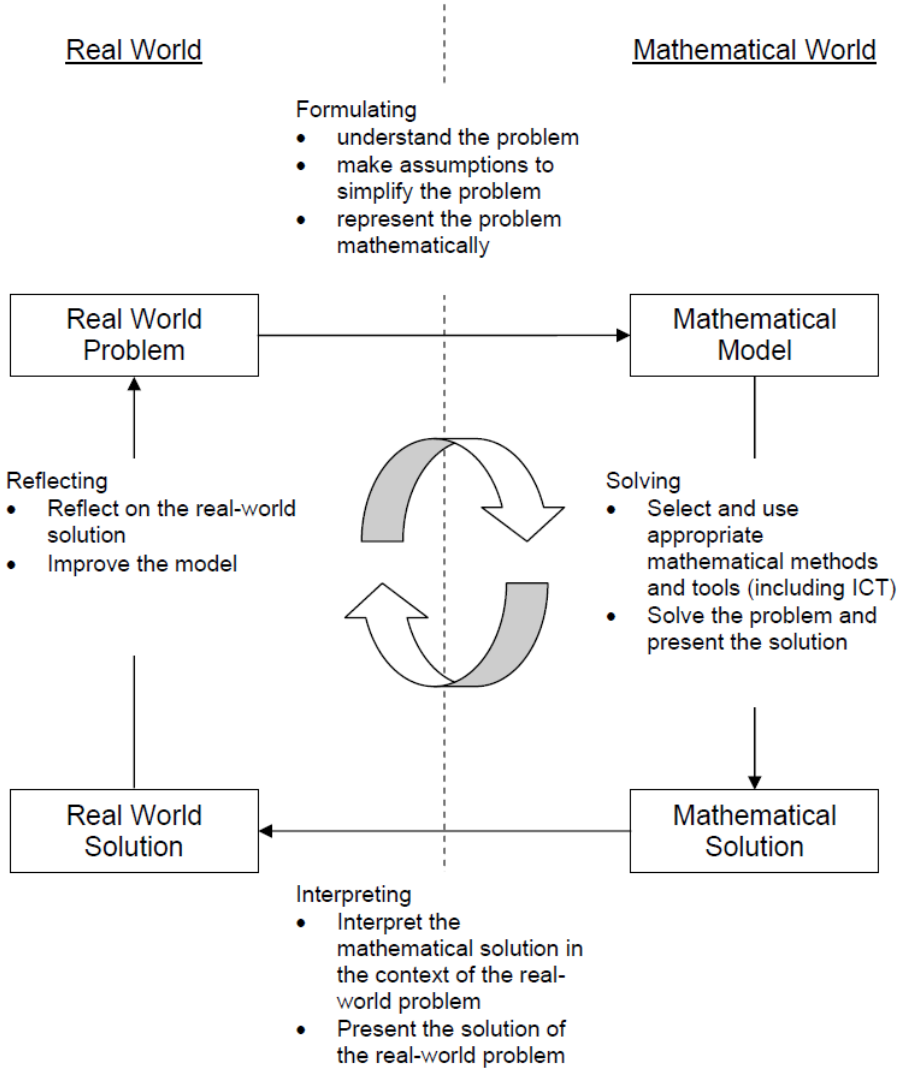


Figure 24. Processus d'enseignement de la résolution de problèmes à Singapour (Mathematics Syllabus, 2012, p. 16)

Les autorités singapouriennes ont donc une idée très précise de la manière dont doivent être conduits les apprentissages qu'elles prescrivent. Les élèves de ce pays obtenant régulièrement les meilleurs résultats aux évaluations internationales, il nous faudra prendre en considération, dans notre analyse, que la précision du modèle didactique et sa diffusion auprès des enseignants puissent largement y contribuer.

Dans le Taipei chinois, l'école a souvent été critiquée pour imposer une forte exigence de résultats aux élèves. Dans les documents préparatoires au renouvellement des instructions officielles, les auteurs citent John Dewey (pour les interactions entre élèves) et Edgar Morin (pour le développement de la pensée complexe) et indiquent que « la scolarité doit davantage chercher à inspirer plutôt qu'à contrôler »[1]. L'objectif est de passer progressivement « d'une attention centrée sur la façon dont les professeurs enseignent, à une attention portée sur la façon dont les élèves apprennent » (*ibid.*). Ils ont également défini trois pôles autour desquels les programmes doivent être construits : la spontanéité (donner aux élèves les moyens de faire face à des situations et des problèmes inédits), l'interaction (les rendre capables de communiquer, s'exprimer et s'intéresser à d'autres points de vue que le sien) et le bien commun (comprendre que l'apprentissage n'est pas que pour soi, mais pour bénéficier à la société et au monde).

B. À propos des fractions

Comme pour les objectifs transversaux des instructions officielles, les considérations générales relatives aux fractions sont développées dans certains textes, mais pas dans d'autres. Elles sont même plutôt rares, puisque seuls la France, l'Ontario, la République d'Irlande et le Taipei chinois ont publié, au sein de leurs programmes d'enseignement, des indications sur la manière d'enseigner les fractions.

En France, les programmes de 2008 ne donnent aucune indication sur les processus qui conduisent à la maitrise des nombres rationnels, ni sur les buts profonds des auteurs dans ce domaine. En revanche, en 2016, le paragraphe consacré à la progression à adopter pour l'apprentissage des fractions propose quelques considérations sur les objectifs du législateur. Il est notamment rappelé la double nature de l'apprentissage initial des fractions : celles-ci « sont à la fois objet d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux » (Ministère de l'Éducation, 2016, p. 204). Une étude plus approfondie du texte montre toute l'importance qui est accordée à la valeur propédeutique du concept de fraction, plutôt qu'à l'enseignement des fractions pour elles-mêmes : « les fractions *puis* les nombres décimaux[2] apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée » (*ibid.*, p. 200). L'utilisation des fractions comme point d'appui pour l'apprentissage des notations décimales est même explicitée : « l'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales » et « permet de mettre au jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison (qui se différencient de celles mises en œuvre pour les entiers) et de calcul » (*ibid.*). Cette vision explique sans doute le faible nombre de types de tâches relatifs aux fractions dans les programmes et le caractère tardif de leur enseignement par rapport aux autres curriculums étudiés.

1. Les informations sont tirées d'un article non signé, disponible à l'adresse suivante (consultée le 2 septembre 2018) : https://www.brookings.edu/opinions/education-in-taiwan-the-vision-and-goals-of-the-12-year-curriculum/.

2. Pourtant, les fractions permettent une première approche des nombres décimaux. Nous supposons que le législateur évoque ici les écritures décimales.

En Ontario, il s'agit de « développer des procédures qui permettront [aux élèves] d'effectuer avec précision des opérations sur les nombres » et « d'acquérir le sens du nombre » (*ibid.*, p. 8). Pour cela, « les concepts et les opérations liés aux fractions doivent […] être présentés à l'aide de matériel concret » (*ibid.*). De même, « on doit garder à l'esprit que l'utilisation la plus fréquente des fractions en situation réelle fait appel à l'estimation (par exemple, « j'ai couru la moitié de la distance autour de la piste »), et que les élèves devraient acquérir cette habileté en même temps que celle à calculer avec précision » (*ibid.*). Les auteurs insistent donc sur la représentation de la quantité symbolisée par les fractions, de façon à ce que ces apprentissages ne paraissent pas trop abstraits, et qu'ils ne soient pas fondés sur l'acquisition de procédures mal comprises des élèves.

En République d'Irlande, dans la présentation qu'ils font des programmes de mathématiques, les auteurs mentionnent six objectifs généraux concernant les nombres : « 1. Comprendre, développer et appliquer les principes de la numération décimale. 2. Comprendre et utiliser les propriétés du nombre. 3. Comprendre la nature des quatre opérations et les appliquer de façon appropriée. 4. Réaliser des valeurs approchées, des estimations, calculer mentalement et rappeler des faits basiques concernant les nombres. 5. Comprendre le lien entre les fractions, les pourcentages et les écritures décimales, et établir des équivalences. 6. Utiliser les concepts, compétences et processus acquis dans la résolution de problèmes. » (*Government of Ireland*, 1999, p. 45). Le législateur impose donc l'étude de types de tâches très divers. Est-ce que cette variété est susceptible de favoriser la réussite des élèves ?

Pour les auteurs des instructions officielles du Taipei chinois de 2005, « la numération joue le rôle le plus important dans le champ mathématique » (*Curriculum*, 2005, p. 80) tout au long des neuf années que celles-ci couvrent. Pour les auteurs, les rationnels constituent même « le sujet de l'enseignement le plus difficile au sein du curriculum de mathématiques » (*ibid.*, p. 84). Selon eux, « il n'y a pas d'accord sur un programme d'enseignement infaillible des nombres rationnels. Toutefois, le consensus général est que les élèves ont besoin de plus de temps pour apprendre le concept. Peu importe si la connaissance de l'écriture intervient avant de comprendre le concept, ou vice versa : il est clair que les deux méthodes doivent se soutenir mutuellement » (*ibid.*). Ainsi, les rédacteurs proposent d'utiliser du matériel et de commencer avec des exercices de distribution ou de mesure, avant d'introduire progressivement d'autres applications des rationnels. Leur but est de développer l'intuituion des élèves dans ce domaine. Ensuite, la droite numérique doit servir à unifier le domaine des rationnels, en y plaçant des nombres entiers, des fractions et des nombres en écriture décimale. D'une façon générale, il s'agit de combiner quatre applications des rationnels (*ibid.*, pp. 84-85) : le partage en parts égales, les mesures de longueurs, la proportionnalité et la relation entre la partie et le tout. Plus tard dans la scolarité, la représentation d'un quotient de nombres entiers sera ajoutée à cette liste. En outre, les auteurs recommandent d'utiliser, au début de l'apprentissage, les fractions comme des unités que l'on peut compter, afin de faciliter leur acquisition par le biais des connaissances des élèves sur les nombres naturels et les unités de mesures (*ibid.*, p. 85).

Conclusion de la sous-section

Les textes applicables dans chaque pays de notre corpus sont comparables : tous nous permettent de connaitre les types de tâches à effectuer par les élèves, soit par le biais des

programmes proprement dits, soit par le biais d'une progression complémentaire. Il n'y a qu'en Irlande du Nord où la progression des apprentissages reste quelque peu obscure. En revanche, la nature des savoirs à enseigner y apparait clairement, c'est pourquoi nous avons conservé ce participant parmi les territoires faisant l'objet de notre étude, pour l'école élémentaire uniquement. Des différences notables ont été mises au jour entre les territoires à propos des objectifs définis par les auteurs des instructions officielles. Si la plupart des pays étudiés placent la résolution de problèmes au centre de leurs préoccupations, les autorités proposent des lectures variées des priorités concernant le degré de complexité des exercices qui doivent être proposés aux élèves. Certains considèrent qu'il est important de mettre l'accent sur les tâches les plus simples (Floride, République d'Irlande et Taipei chinois), tandis que d'autres optent pour une répartition plus équilibrée entre le développement de compétences de haut niveau et les maitrise des compétences fondamentales (Irlande du Nord, Ontario, Hong Kong SAR), ou éventuellement privilégient les compétences de haut niveau (Québec, Singapour). À Singapour, le ministère impose un processus d'apprentissage original, que nous n'avons pas rencontré de façon aussi précise dans les autres textes réglementaires. Il s'agit d'une approche visant à faire apprendre les concepts mathématiques en trois étapes bien déterminées : un stade où des objets concrets sont manipulés, une phase où le concret est appréhendé à travers un schéma, et enfin une étape où les concepts sont travaillés de façon abstraite. Peu d'instructions officielles donnent des préconisations pour l'enseignement des fractions. Cependant, lorsque c'est le cas, c'est dans des directions très diverses : en France, il s'agit surtout de fonder la compréhension des nombres décimaux ; en Ontario, il s'agit de développer le sens du nombre ; en République d'Irlande, l'étude des fractions participe à la construction du sens des nombres rationnels, en faisant des liens entre les différentes formes d'écriture ; enfin, dans le Taipei chinois, les auteurs font une synthèse des différents éléments que nous venons d'évoquer, puisque les élèves doivent dans un premier temps développer une intuition des quantités représentées à l'aide des fractions, pour ensuite unifier le champ des nombres rationnels à travers l'utilisation de la droite graduée. La diversité des choix réalisés par les autorités renforce l'intérêt d'une comparaison internationale des programmes d'enseignement.

Conclusion de la section consacrée aux discontinuités entre les territoires relativement au concept de fraction

Les divergences que nous avons observées entre les participants ont principalement dues à deux facteurs. D'une part, les usages sociaux que l'on fait des fractions dans ces territoires

sont variés, sans que l'on puisse déterminer avec précision la nature et la portée de ces différences. Tous les programmes d'enseignement imposent l'utilisation du système métrique, mais l'héritage récent du système de mesures anglo-saxon laisse à penser que les fractions sont encore employées, dans certains pays, dans des domaines tels que la circulation routière, les mesures de contenance ou encore la cuisine. Ces usages, qui relèvent pour certains de la sphère personnelle, sont difficile à quantifier. Bien que l'on sache que les connaissances informelles acquises par les élèves en dehors du cadre scolaire influent sur les apprentissages réalisés à l'école, nous ne pouvons dire dans quelle mesure l'acquisition du concept de fraction est favorisée au sein des territoires n'ayant adopté que récemment le système métrique. Des études complémentaires pourront être menées pour mieux comprendre les enjeux de cette question, qui ne sera pas étudiée plus avant dans notre recherche. D'autre part, les objectifs assignés aux professeurs quant à l'enseignement des mathématiques sont très divers (développement de connaissances fondamentales, de la capacité à résoudre des problèmes, de la rigueur, de l'imagination, etc.), si bien que nous ne doutons pas qu'avec un contenu du curriculum similaire, les élèves de deux pays pourront réaliser des tâches très différentes. Afin de ne pas étendre de façon déraisonnable le contenu de cette thèse, nous étudierons uniquement la relation éventuelle entre le contenu des programmes scolaires et la maitrise du concept par les élèves, sans prendre compte l'avantage éventuel qui pourrait être tiré par les élèves d'une utilisation plus fréquente des fractions dans leur vie quotidienne.

Conclusion du chapitre consacré à l'approche anthropologique du concept de fraction

Depuis plus d'un siècle, l'approche comparatiste se développe dans les sciences humaines (voir à ce sujet Jucquois G. et Vielle C., 2000). Comme le note Anne West, « avec le marché unique européen, la globalisation de l'économie et les liens entre universitaires à travers le monde toujours plus nourris, l'intérêt des chercheurs pour les comparaisons va croissant » (2003, p. 214). Nous avons choisi de mener ce travail de comparaison à propos de l'enseignement et de l'apprentissage initial des fractions. Dans ce but, nous avons sélectionné onze participants aux évaluations TIMSS, répartis dans trois grandes aires géographiques (l'Amérique du Nord, l'Europe de l'Ouest et l'Asie du Sud-Est). Ceux-ci présentent des points communs qui permettent la comparaison de leurs curriculums et de leurs performances aux tests, notamment une utilisation ancienne des fractions et des difficultés face aux exercices impliquant des fractions qui, si elles sont d'intensité variable, revêtent des caractéristiques semblables et bien établies par les didacticiens. Il existe des différences notables entre ces

territoires, qui tiennent à l'importance prise par les fractions dans les usages sociaux et aux objectifs fixés par les législateurs quant aux buts de l'enseignement des mathématiques en général, et des fractions en particulier. Néanmoins, ces divergences ne permettent pas en cause la validité des comparaisons qui seront réalisées : celles-ci portent sur la corrélation entre le contenu des items impliquant des fractions et les performances réalisées aux évaluations TIMSS. Elles s'inscrivent donc principalement dans le cadre d'une réflexion didactique dont nous allons détailler la méthodologie.

CHAPITRE II. UNE APPROCHE DIDACTIQUE

Nous utilisons, dans notre étude, les outils créés dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, et considérons que le contenu des programmes d'enseignement peut être analysé comme un phénomène praxéologique (ce qui sera l'objet de la section I) et comme un phénomène tranpositif (ce qui sera l'objet de la section II). Dans ce chapitre, la comparaison des programmes n'est pas encore abordée : nous indiquons les moyens de cette comparaison, à travers un inventaire des praxéologies possibles. Ces développements constituent un outil pour analyser, par la suite, les savoirs à enseigner propres à chaque pays. Nous détaillons également les critères qui fondent cette comparaison, à travers l'étude des conditions de rédaction et d'application des programmes. Nous préciserons alors comment on passe du savoir établi par les auteurs à un corpus utilisable par les enseignants pour construire des séances à destination des élèves, et nous définirons les liens qui ont pu être tissés entre les savoirs à enseigner et l'acquisition du concept par les élèves.

Section I. Un phénomène praxéologique

Selon la théorie anthopologique du didactique, « toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une certaine technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui a son tour est justifiable par une théorie Θ. […] En bref, toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on peut noter [T/τ/θ/Θ] et qu'on nomme praxéologie, ou organisation praxéologique » (Chevallard, 2002a, p. 3). Concernant la tâche t, nous dirons avec Yves Chevallard, que « toute activité humaine se laisse décomposer en un certain nombre de tâches (ouvrir la porte, se laver les dents, monter un escalier, résoudre une équation du second degré, élaborer une axiomatique de la géométrie du plan, donner une leçon d'orthographe, etc.) » (1994, p. 1) et qu'un ensemble de tâches de même nature peut être regroupé sous un type de tâche T. La résolution de ce type de tâche est subordonnée à la mise en œuvre d'une technique ; c'est l'un des postulats de cette théorie : « concrètement, une tâche d'un type donné se présente, dès lors qu'elle est routinière pour le sujet qui l'accomplit, comme la mise en œuvre d'une technique déterminée. Il faut entendre le terme de technique en un sens très large, comme une "manière de faire" particulière, et non selon l'acception courante de procédé structuré et méthodique, voire algorithmique – ce qui n'est qu'un cas très particulier de technique » (*ibid.*). L'association d'une tâche et d'une technique forme un premier bloc appelé bloc pratico-

technique (ou praxique) [T/τ], que l'on appelle couramment un savoir-faire. Toutefois, à l'intérieur d'une institution, une technique ne peut exister que si elle est « un tant soit peu compréhensible, lisible et justifiée. Il s'agit là d'une contrainte institutionnelle minimale pour permettre le contrôle et garantir l'efficacité des tâches accomplies, qui sont généralement des tâches coopératives, supposant la collaboration de plusieurs acteurs. Cette contrainte écologique implique alors l'existence d'un discours descriptif et justificatif des tâches et techniques qu'on appelle la technologie de la technique. » (*ibid.*) Ce discours sur la technique procède de postulats qu'il est nécessaire d'expliciter ; « à son tour, la technologie d'une technique donnée doit apparaître comme compréhensible et justifiable : on appelle théorie la technologie d'une technologie ». L'association d'une technologie et d'une théorie forme un second bloc, qui est appelé bloc technologico-théorique [θ/Θ] et qui définit un savoir au sens restreint du terme. L'ensemble d'une praxéologie constitue un savoir au sens large.

Les praxéologies scolaires peuvent être analysées pour une technique donnée (on parle alors d'organisation mathématique ponctuelle), mais ce n'est pas l'objet de notre recherche. Dans les programmes, autour de l'élément technologique constitué du concept de fraction s'agrègent un certain nombre de techniques, permettant de résoudre divers types de tâches. L'analyse que nous proposons est donc réalisée un niveau au-dessus : « l'organisation mathématique qui en découle, résultant de l'agrégation de différentes organisations mathématiques ponctuelles autour de l'élément technologique θ = « [concept de fraction] », et qui peut se noter $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ avec $i \in \{1,2,3\}$, est alors appelée une organisation mathématique locale autour du thème [de concept de fraction] » (Matheron, 2000, p. 59). Nous allons conserver, dans notre plan, la dichotomie entre savoir-faire et savoirs au sens restreint du terme, en présentant d'abord le bloc pratico-technique $[T_i/\tau_i]$ (sous-section I) de cette organisation mathématique locale, puis son bloc technologico-théorique [θ/Θ] (sous-section II).

Sous-section I. Le bloc pratico-technique $[T_i/\tau_i]$

Un type de tâches peut être précisément décrit en référence à ce que l'élève va devoir faire avec la ou les fractions qu'on lui soumet, ainsi qu'en évoquant la nature des fractions que les élèves devront manipuler. Nénmoins, on ne pourra être complet quant à la description des types de tâches proposés aux élèves sans parler des techniques permettant leur résolution. En effet, tous ceux que nous avons rencontrés dans les instructions officielles ouvrent la voie à la mise en œuvre d'une pluralité de techniques. Pour décrire le bloc pratico-technique des praxéologies scolaires relatives aux fractions, nous évoquerons donc d'abord la variété des

types de tâches susceptibles d'être proposés aux élèves (§ 1), avant de décrire la variété des techniques qu'ils pourront utiliser pour les résoudre (§ 2).

§ 1. Types de tâches T_i

Il nous a semblé vain de rechercher de façon exhaustive l'ensemble des types de tâches susceptibles d'être soumis aux élèves dans le domaine des fractions : le travail serait trop vaste, sans avoir la certitude parvenir à une liste complète. Pour surmonter cette difficulté, nous avons considéré l'ensemble des types de tâches présents dans les programmes (en vigueur au moment des évaluations TIMSS 2015) des pays de notre corpus, avec cette limite que les comparaisons effectuées entre les possibilités offertes et les choix réalisés par les auteurs seront relatives, et non absolues. Néanmoins, le nombre de types de tâches est élevé (56), avec des types de tâches communs et des types de tâches différents, assurant la validité de ces comparaisons. Nous allons présenter de façon systématique des différents types de tâches que nous avons rencontrés dans les instructions officielles (A). Une définition de certains paramètres de la tâche est bien souvent envisagée par le législateur. C'est pourquoi nous décrirons également les modalités de la tâche, qui fluctuent dans les programmes que nous avons consultés (B).

A. Présentation des types de tâches

Pour classer les types de tâches que nous avons relevés dans les instructions officielles, la typologie de Behr *et al.* (1983) ne pouvait être retenue parce que la sous-construction « partie d'un tout » recouvrait l'immense majorité d'entre eux. Nous avons donc retenu trois grandes catégories selon une persepective opératoire, permettant une répartition équilibrée des types de tâches. Dans la première, nous avons placé tous les types de tâches ayant trait à l'aspect cardinal de la fraction, en prenant pour critère que l'élève ne doit manipuler qu'une seule fraction à la fois pour réaliser la tâche qui lui est soumise. Par exemple, lorsqu'il doit identifier la fraction représentée par un dessin, son activité porte sur une fraction unique. Lorsque le regard de l'élève porte successivement sur plusieurs fractions (par exemple, identifier une fraction parmi plusieurs dessins), nous avons considéré que le type de tâches correspondant relevait de la même catégorie. Dans la deuxième catégorie, nous avons placé tous les types de tâches ayant trait à l'aspect ordinal des fractions, en prenant pour critère que l'élève doit traiter successivement deux fractions afin de les comparer (par exemple, pour dire si deux fractions sont équivalentes). Lorsque l'élève devait comparer plusieurs fractions (par exemple, pour ranger des fractions dans l'ordre croissant), nous avons considéré que le type de tâches

correspondant appartenait à la même catégorie. Dans la troisième catégorie, nous avons placé tous les types de tâches impliquant des fractions dans des opérations, en prenant pour critère que, lorsque deux fractions sont données à l'élève, celui-ci doit en trouver une troisième (par exemple, lorsqu'on lui demande d'additionner deux fractions, qu'elles possèdent ou non le même dénominateur). Là encore, la discussion sur la définition de chaque type de tâches relatif aux fractions aurait pu être intégrée en annexe. Néanmoins, nous avons souhaité la placer ici afin de permettre un accès plus simple, et donc de faciliter la compréhension de la répartition, présentée en fin de paragraphe, des types de tâches dans les différentes catégories. En outre, dans la suite du texte, nous parlerons parfois de « type de tâches » et parfois de « compétences ». Pour différencier les deux, nous considérons que la compétence se situe du côté de l'élève, et présente un certain niveau de complexité, tandis que la tâche et le type de tâche se rapportent à un ou plusieurs exercices, et présentent une certaine unicité dans les actions qu'ils impliquent. Nous aurions pu également présenter des sous-tâches en fonction des variables utilisées par les auteurs (par exemple, proposer une tâche « T_1 : Comparer des fractions », décomposée en sous-tâches « T_{1a} : Comparer des fractions de même dénominateur », « T_{1b} : Comparer des fractions de dénominateurs différents », etc. »). Étant donné le niveau de complexité élevé des différentes catégorisations à présenter à propos du concept, des techniques et des tâches, nous avons préféré définir plus simplement une tâche nouvelle dès lors que la mise en œuvre d'une technique différente était nécessaire pour sa résolution (d'où la distinction entre le fait d'identifier une fraction à partir d'un dessin, et le fait de représenter une fraction sous la forme d'un dessin).

En ce qui concerne la première catégorie, une multitude de tâches peuvent y être incluses, en particulier la plus simple d'entre elles, qui consiste à associer une fraction et un dessin. Ce type de tâches est travaillé par les élèves sous deux formes. Soit il s'agira d'identifier la fraction d'une longueur, d'une figure plane ou d'un solide. Par exemple, nous trouvons dans les programmes du Québec, pour les élèves de deuxième année : « Reconnaître des fractions se rapportant à des éléments du quotidien (représentations concrètes ou imagées) » (*op. cit.*, 2001, p. 134). Soit il s'agira de représenter la fraction d'une longueur, d'une figure plane ou d'un solide. Par exemple, nous trouvons dans les programmes de Floride, pour les élèves de troisième année : « Représenter des fractions, y compris des fractions supérieures à un, en utilisant les aires, les collections, et les modèles de mesures » (*op. cit.*, 2007, p. 6). Ces deux tâches peuvent être réalisées dans le cadre de l'étude de la fraction partie d'un tout, comme nous venons de la voir, mais également dans le cadre de la partition. Nous distinguerons donc également le fait d'identifier la fraction d'une collection, et le fait de représenter la fraction d'une collection. La première tâche se trouve dans les programmes anglais, à destination des élèves de deuxième année : « Reconnaitre, trouver, nommer et écrire les fractions 1/3, 1/4, 2/4 et 3/4 d'une longueur, une forme, une collection d'objets ou une quantité » (*op. cit.*, 2014, p. 118). La deuxième tâche se trouve dans les programmes québécois, dès la première année : « Avec l'intervention de l'enseignant, représenter une

fraction de différentes façons à partir d'un tout ou d'une collection » (*op. cit.*, 2001, p. 134). Quelques variantes de ces tâches ont pu être rencontrées, notamment le fait de réaliser une estimation, sous la forme d'une fraction, de la quantité représentée par le dessin. Cet exemple est tiré des programmes anglais pour la quatrième année : « Estimer une proportion (par exemple, « environ un quart des pommes dans la boîte sont vertes » (*op. cit.*, p. 78). Le fait d'exprimer un rapport sous la forme d'une fraction constitue également une variante de la tâche visant à associer une fraction et un dessin, ainsi lorsque les programmes anglais pour la cinquième année imposent « d'exprimer un nombre entier plus petit comme une fraction d'un nombre plus grand (par exemple, reconnaitre que 5 sur 8 est 5/8 » (*op. cit.*, 2006, p. 80). On trouve cette compétence à un niveau d'abstraction plus élevé dans les programmes de la Floride, en sixième année : « Exprimer un rapport sous la forme d'une fraction. Comprendre le concept d'un taux unitaire a / b associé à un rapport a:b avec b ≠ 0, et utiliser le vocabulaire correspondant dans le cadre d'une relation de proportionnalité » (*op. cit.*, 2014, p. 1).

Les activités de mesure contribuent également au développement de l'aspect cardinal de la fraction. On trouve par exemple, dans les programmes de la Floride à destination des élèves de troisième année, de telles activités : « Mesurer des objets en utilisant des fractions d'unités de mesures telles que 1/2, 1/4, et 1/10 » (*op. cit., 2007*, p. 7). À ces activités de mesure proprement dites, nous avons associé les travaux effectués avec une demi-droite numérique, dès lors que les élèves sont amenés à réitérer la fraction unitaire à partir de l'origine de la demi-droite pour représenter ou identifier la distance entre celle-ci et le cardinal de la fraction. Dans les pays de notre corpus, la demi-droite numérique est utilisée, par exemple, en France, à l'école élémentaire, dans des tâches d'identification. C'est ce que sous-entend l'intitulé suivant : « Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs » (*op. cit.*, 2008, p. 38). Elle est également utilisée dans des tâches de représentation, par exemple au Québec, en cinquième année : « Avec l'intervention de l'enseignant, situer des fractions sur un axe de nombres (droite numérique) » (*op. cit.*, 2001, p. 134). Nous avons également classé dans cette catégorie les activités de comptage avec des fractions, parce que le comptage est en relation étroite avec le fait de mesurer. Un exemple de ces activités est donné dans les instructions officielles de l'Irlande du Nord, en troisième année : « Compter oralement en avançant et en reculant en demis et puis en quarts » (*op. cit.*, 2006, onglet « Nombres »[1]).

Il arrive également que les activités impliquant des fractions sortent du cadre numérique, pour rejoindre celui de la géométrie, des probabilités, de l'organisation de données ou de l'algèbre. Dans le cadre géométrique, nous avons identifié deux tâches complémentaires : identifier et effectuer une rotation d'une fraction de tour. En Ontario, ces deux tâches sont imposées en quatrième année : « Identifier, effectuer et décrire des rotations d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour, à l'aide de matériel concret ou de calquage sur papier quadrillé ou à points, en utilisant un des sommets de la figure comme centre de rotation » (*op. cit.*, p. 55). Les fractions servent à exprimer des probabilités également en Ontario, cette fois en sixième année : « Décrire la probabilité d'un évènement à l'aide de fractions et de pourcentages » (*ibid.*, p. 73). Comme nous l'avons déjà indiqué, la lecture de

1. Les documents que nous utilisons pour déterminer le curriculum applicable en Irlande du Nord sont dissociés en plusieurs onglets (Nombres, Additions et soustractions, Multiplications et divisions, Mesures, Formes et espace, Manipulation de données), chacun indiquant en une page les types de tâches supposés être enseignés.

diagrammes est une tâche qui n'apparait de façon explicite qu'en Irlande du Nord, en troisième année : « Développer la conscience des diagrammes circulaires (avec au maximum quatre secteurs, en utilisant la discrimination visuelle et les fractions simples, par exemple les demis et les quarts » (*op. cit.*, 2006, p. 1). La question de l'utilisation des fractions dans un cadre algébrique implique plutôt le développement de compétences calculatoires, qui seront développées ultérieurement. Cependant, pour réaliser des calculs algébriques avec des fractions, il est nécessaire que les élèves puissent « interpréter une fraction comme la division du numérateur par le dénominateur (a / b = a ÷ b) », ce qui est requis par les instructions officielles de la Floride, en cinquième année (*op. cit.*, 2014, p. 3). Dans le même esprit, les fractions peuvent être utilisées pour exprimer le reste d'une division, comme à Singapour, en cinquième année : « Diviser un nombre entier par un nombre entier à un chiffre, et écrire la réponse sous la forme d'une fraction, à la place d'un quotient et d'un reste, ou d'une écriture décimale » (*op. cit.*, 2012, p. 53).

Nous supposons que les conversions de représentations, au sens que leur donne Duval[1] (1995) contribuent également au développement, chez l'élève, de la compréhension du concept de fractions. Or, ces conversions apparaissent très fréquemment dans les programmes d'enseignement. Si la fraction sert souvent de support à l'apprentissage des notations décimales (par exemple, en Floride, en quatrième année : « Passer des fractions décimales aux écritures décimales. Utiliser la notation décimale pour des fractions de dénominateurs 10 ou 100 » [*op. cit.*, 2014, p. 5]), d'autres types de liens ont pu être rencontrés. Par exemple, savoir convertir des écritures décimales en fractions décimales a été un attendu des programmes anglais pour la cinquième année : « Relier les fractions à leurs représentations décimales, c'est-à-dire reconnaître l'équivalence entre les formes décimales et fractionnaires […] des dixièmes et centièmes (par exemple, 7/10 = 0,7 ; 27/100 = 0,27) » (*op. cit.*, 1999, p. 22). Parfois, les auteurs imposent un niveau de compétence supérieur, en demandant aux élèves de passer, non plus des fractions décimales aux notations décimales, mais des fractions usuelles (1/2, 1/3, 1/4, 2/3, 3/4, etc.) aux écritures décimales. Ce fut le cas notamment en Floride, en quatrième année : « Passer des fractions non décimales usuelles aux notations décimales. Relier moitiés, quarts, dixièmes et centièmes, aux écritures décimales et aux pourcentages » (*op. cit.*, 2007, p. 9). Inversement, il a été demandé aux élèves anglais de quatrième année de pouvoir convertir des notations décimales en fractions usuelles, ou plus exactement de pouvoir passer de l'un à l'autre, quel que soit le sens de la conversion : « Reconnaître l'équivalence entre les formes décimales et fractionnaires d'un demi, d'un quart » (*op. cit.*, 1999, p. 18). Cette compétence peut concerner, non seulement des fractions non décimales usuelles telles que celles que nous avons citées, mais également des fractions dont la conversion est plus complexe, comme les huitièmes. Pour cela, les élèves anglais de sixième année pourront utiliser la division : « Commencer à convertir une fraction en une écriture décimale au moyen de la division. Sixième année (*ibid.*, 1999, p. 26) Associer une fraction à une division et calculer la fraction décimale équivalente (par exemple, 0,375) pour une fraction simple (par exemple, 3/8) » (*op. cit.*, 2014, p. 145). De la même façon, le passage des fractions aux pourcentages peut être imposé dans ce sens (par exemple, dans les programmes anglais de 1999 pour la cinquième année : « Exprimer la moitié, le quart, les trois quarts, les dixièmes et les centièmes en pourcentage (par exemple, savoir que 3/4 = 75 %) » [*op. cit.*, 1999, p. 22]), dans l'autre sens (par exemple, dans les programmes anglais de 2014 pour la cinquième année : « Écrire des

1. C'est-à-dire le passage d'un type de représentation à un autre.

pourcentages comme une fraction de dénominateur 100, et comme une écriture décimale » [*op. cit.*, 2014, p. 139]), voire même dans les deux sens (par exemple, dans les programmes anglais de 2006 pour la sixième année : « Trouver des équivalences entre pourcentages, écritures décimales et fractions » [*op. cit.*, 2006, p. 82]). En outre, le choix de l'écriture la plus adaptée au contexte est, dans certains programmes scolaires, laissée au soin de l'élève, comme dans les instructions officielles de l'Irlande du Nord pour la cinquième année : « Choisir une façon appropriée d'exprimer un reste dans une division : une fraction, un nombre decimal ou un nombre entier » (*op. cit.*, 2006, p. 1). Parfois, les auteurs indiquent en des termes plus vagues que les élèves doivent « exprimer les dixièmes et les centièmes sous la forme de fractions et de notations décimales » (*op. cit.*, 1999, p. 69). De même, pour les pourcentages, nous avons rencontré des intitulés tels que, en Irlande du Nord, « explorer le concept de pourcentage simple, et le relier aux fractions, par exemple en utilisant un carré de cent cases » (*op. cit.*, 2006, p. 1). Le mot « relier » ne nous permet pas de déterminer comment s'effectue le passage des uns aux autres. Dans ce cas, nous avons considéré que des conversions dans les deux sens étaient attendues.

En ce qui concerne la deuxième catégorie, nous avons identifié deux types de tâches principaux : comparer deux fractions, et faire le lien entre des fractions équivalentes. Cependant, à l'intérieur de ces types de tâches, de nombreuses tâches ont été envisagées par les auteurs des programmes. En ce qui concerne la comparaison de fractions, nous avons ainsi distingué les intitulés impliquant de comparer des fractions de même dénominateur (par exemple, en Ontario, en quatrième année : « Comparer et ordonner des fractions ayant un dénominateur commun à l'aide de matériel concret ou illustré » [*op. cit.*, p. 51]), des fractions de dénominateurs liés, c'est-à-dire dont l'un est un multiple de l'autre (par exemple, en Angleterre, en cinquième année : « Comparer et ordonner des fractions dont les dénominateurs sont tous des multiples du même nombre » [*op. cit.*, 2014, p. 139], ou avec une autre formule, en République d'Irlande, en troisième année : « Comparer, ordonner des fractions de dénominateurs bien choisis […] » [*op. cit.*, p. 68]) et de dénominateurs sans lien multiplicatif entre eux. Bien souvent, nous déduisons la liberté de choisir n'importe quel dénominateur de l'absence de restriction à leur sujet (par exemple, en Angleterre, en sixième année : « Comparer et ordonner des fractions, y compris les fractions supérieures à un » [*op. cit.*, 2014, p. 145]). Il arrive également que le législateur impose la comparaison de fractions de même numérateur, soit pour comparer deux fractions unitaires, comme à Singapour, en deuxième année (« Utiliser des disques pour représenter et comparer deux fractions unitaires et expliquer pourquoi plus le dénominateur est grand, plus la fraction unitaire est petite, par exemple, 1/6 est plus petit que 1/3 » [*op. cit.*, 2012, p. 38]), soit pour comparer des fractions qui ne sont pas nécessairement unitaires, comme en Ontario, en quatrième année (« Comparer et ordonner des fractions ayant un même numérateur à l'aide de matériel concret ou illustré [p. ex., réglettes, bandes de carton, cercles de fraction, jetons] » [*op. cit.*, p. 51]). Parfois, différentes écritures des nombres rationnels sont mélangées, et l'élève est invité à réaliser des comparaisons sur ces nombres, ce qui implique une bonne connaissance des liens que l'on peut tisser entre les différentes formes prises par les nombres rationnels (par exemple, au Québec, en septième année : « Comparer et ordonner des nombres écrits en notation fractionnaire ou en notation décimale » [*op. cit.*, 2009b, p.8]). De même, le niveau de réflexion attendu des élèves augmente lorsqu'on leur demande de comparer des fractions qui ne se rapportent pas à la même unité, comme en Floride, en troisième année : « Reconnaitre que les comparaisons ne sont valables que lorsque les deux fractions se réfèrent au même entier » (*op. cit.*, 2014, p. 4).

Assez tôt dans la scolarité, des auteurs de notre corpus demandent aux élèves de reconnaitre des fractions équivalentes. Ainsi, en Angleterre, les élèves de troisième année devaient jusqu'en 2006 « commencer à reconnaître les fractions équivalentes simples : par exemple, cinq dixièmes et un demi, cinq cinquièmes et un entier » (*op. cit.*, 1999, p. 14). Il est possible aussi de leur apprendre à générer des fractions équivalentes (par exemple, dans le Taipei chinois, en cinquième année : « Les élèves peuvent produire des fractions équivalentes en réduisant et en multipliant les dénominateurs » [*op. cit.*, 2005, p. 158]), voire même à produire des listes de fractions équivalentes (par exemple, à Singapour, en troisième année : « Lister les huit premières fractions équivalentes à une fraction donnée » [*op. cit.*, 2006, p. 18]). La réduction d'une fraction à sa plus simple expression représente un niveau de difficulté supplémentaire, puisque les élèves doivent être en mesure de trouver le plus grand commun diviseur du numérateur et dénominateur. Ce type de tâche se trouve dans les programmes québécois, en cinquième année : « Avec l'intervention de l'enseignant, réduire une fraction à sa plus simple expression » (*op. cit.*, p. 136). Dans d'autres pays, on cherche à faire raisonner les élèves, soit sur la forme des parts (par exemple, en Floride, en deuxième année : « Reconnaître que les parts égales d'entiers identiques n'ont pas besoin d'avoir la même forme » [*op. cit.*, 2014, p. 5]), soit sur la taille des parts (toujours en Floride, en troisième année : « Décrire comment la taille de la partie fractionnaire est en relation avec le nombre de morceaux de taille égale dans l'entier » [*op. cit.*, 2007, p. 6]). Enfin, un travail est parfois imposé pour tisser un lien entre les nombres entiers et les écritures fractionnaires. Il peut consister à exprimer un entier sous la forme d'une fraction (comme en Floride, en troisième année : « Exprimer des nombres entiers sous forme de fractions […]. Exemple : exprimer 3 sous la forme 3 = 3/1 » [*op. cit.*, 2014, p. 4]) ou inversement à exprimer une fraction sous la forme d'un entier (toujours en Floride, la même année : « Reconnaitre les fractions qui sont équivalentes à des nombres entiers […]. Exemples : reconnaitre que 6/1 = 6 ; localiser 4/4 et 1 au même point sur la droite numérique » [*ibid.*]). En France, nous avons trouvé une activité inédite qui contribue également à percevoir la fraction comme un nombre que l'on peut comparer à des nombres entiers : il s'agit, en cinquième année, « d'encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs » (*op. cit.*, p. 38). De même, Hong Kong SAR est le seul territoire de notre corpus où il est imposé d'explorer la relation entre les fractions et 1, c'est-à-dire d'apprendre à déterminer si une fraction est inférieure, égale ou supérieure à un en observant la relation entre le numérateur et le dénominateur (en troisième année : « Reconnaitre la relation entre les fractions et 1 » [*op. cit.*, 2000, p. 32]).

En ce qui concerne la troisième catégorie, nous y avons classé certaines tâches qui se rapprochent du travail de comparaison avec les entiers. Ainsi, le fait de décomposer une fraction supérieure ou égale à 1 en un nombre mixte (par exemple, en Angleterre, en cinquième année : « Convertir une fraction supérieure ou égale à 1 en un nombre mixte [par exemple, transformer 13/10 en 1+3/10] » [*op. cit.*, 1999, p. 22]) et, à l'inverse, de convertir un nombre mixte en une fraction supérieure ou égale à 1, obligeant les élèves à transformer un entier en une fraction, puis à ajouter deux fractions de même dénominateur (par exemple, en Floride, en quatrième année, « Ajouter et soustraire des nombres mixtes ayant le même dénominateur, par exemple en remplaçant chaque nombre mixte par une fraction équivalente » [*op. cit.*, 2014, p. 4]). La recherche du complément à l'unité est une tâche que nous avons très rarement rencontrée dans les instructions officielles que nous avons consultées. Au sein de notre corpus, seule l'Angleterre a imposé cette activité, jusqu'en 2006, en quatrième année. C'est ce que nous déduisons de la formulation suivante : « Identifier deux fractions simples avec un total de 1 (par exemple 3/10 et 7/10) » (*op. cit.*, 1999, p. 18).

L'addition de fractions de même dénominateur peut prendre plusieurs formes. Sous sa forme la plus simple, elle est exprimée ainsi, en Ontario, dans un intitulé à destination des élèves de sixième année : « Additionner et soustraire des fractions ayant des dénominateurs communs à l'aide de matériel concret ou illustré et de symboles (p. ex., contenants d'œufs, réglettes) » (*op. cit.*, p. 71). À l'inverse, certains auteurs visent à établir un lien entre une fraction a/b, et sa décomposition additive. Toujours dans les programmes de la Floride, il est ainsi écrit que les élèves de quatrième année doivent être capables de « décomposer une fraction en une somme de fractions avec le même dénominateur de plus d'une façon, notant chaque décomposition sous la forme d'une équation […]. Exemples : 3/8 = 1/8 + 1/8 + 1/8 ; 3/8 = 1/8 + 2/8 ; 2 + 1/8 = 1 + 1 + 1/8 = 8/8 + 8/8 + 1/8 » (*ibid.*). Comme pour les comparaisons, les auteurs distinguent le plus souvent les additions et soustractions de fractions de même dénominateur, des additions et soustractions de fractions de dénominateurs liés (par exemple, au Québec, en cinquième année : « Avec l'intervention de l'enseignant, à l'aide d'un matériel concret et de schémas, addition et soustractions de fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre » [*op. cit.*, p. 135]) et des additions et soustractions de fractions dont les dénominateurs n'ont pas de lien multiplicatif les unissant (par exemple, en Floride, en cinquième année : « Ajouter et soustraire des fractions avec des dénominateurs différents [y compris des nombres mixtes] par le remplacement de fractions par des fractions équivalentes de manière à produire une somme ou une différence équivalente avec des fractions ayant des dénominateurs communs. Par exemple, 2/3 + 5/4 = 8/12 + 15/12 = 23/12 » [*op. cit.*, 2014, p. 3]).

La multiplication impliquant une fraction et un nombre entier peut entretenir des liens avec l'addition de fractions de même dénominateur, dans le sens où $\frac{b}{c} \times a$ peut être calculé par l'élève de la façon suivante :

$$\frac{b}{c} \times a = \left.\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \ldots\right\} \text{a fois}$$

C'est le sens de l'intitulé que l'on trouve dans les programmes de Floride, en quatrième année : « Comprendre un multiple de a/b comme un multiple de 1/b, et utiliser cette compréhension pour multiplier une fraction par un nombre entier » (*op. cit.*, 2014, p. 4). Cependant, le même calcul peut également correspondre à des situations très différentes, où la multiplication ne correspond plus à une addition réitérée, mais à l'application d'un opérateur à un nombre donné. Ainsi, lorsqu'on calcule la fraction d'une quantité donnée (par exemple, calculer 1/3 de 24 bonbons), lorsqu'on réalise un agrandissement ou une réduction d'une figure (par exemple, reproduire une figure à l'échelle 1/5) ou encore quand on calcule une fraction de l'aire ou du périmètre de figures (par exemple, calculer l'aire des 3/4 d'un disque, alors que le disque entier à une aire de 60 cm^2). Pour correspondre à l'idée de partage qui se dégage de ces situations, le calcul a $\times \frac{b}{c}$ sera alors plus naturellement pensé de la façon suivante, plutôt que par le bais d'une addition réitérée :

$$a \times \frac{b}{c} = (a \div c) \times b$$

Cet apprentissage est dans certains programmes réalisé en deux étapes, puisque le niveau de difficulté de la mise en œuvre du raisonnement qui le sous-tend dépend largement du fait que la fraction est unitaire ou non. Ainsi, si la fraction en jeu est unitaire, le calcul est beaucoup plus simple :

$$a \times \frac{1}{c} = a \div c$$

C'est pourquoi, en Angleterre, il a d'abord été demandé aux élèves de quatrième année de « commencer à relier les fractions à la division et à trouver des fractions simples comme 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10… de nombres ou de quantités » (*op. cit.*, 1999, p. 18), c'est-à-dire d'utiliser la fraction-opérateur avec des fractions unitaires. Ce n'est qu'ensuite, en cinquième année, que les élèves anglais devaient « relier les fractions à la division, et utiliser la division pour trouver des fractions simples, y compris des dixièmes et des centièmes, de nombres et de quantités (par exemple, 3/4 de 12, 1/10 de 50, 1/100 de 3 £) » (*ibid.*, p. 22). Les fractions en jeu n'étaient alors plus nécessairement unitaires. Le cas de la multiplication de deux fractions entre elles est généralement étudié assez tardivement au cours de la scolarité obligatoire. Pour continuer à prendre l'exemple de l'Angleterre et des programmes de 1999, cette compétence était travaillée en sixième année : « Multiplier des paires simples de fractions propres, en écrivant la réponse dans sa forme la plus simple (par exemple, 1/4 × 1/2 = 1/8) » (*op. cit.*, 2014, p. 145). Parfois, des tâches moins techniques et plus réflexives (dans le sens où un discours est attendu de la part de l'élève à propos de son travail) sont proposées. C'est le cas notamment en Floride, où il est demandé aux élèves de cinquième année « d'observer l'effet de la multiplication par une fraction, en expliquant pourquoi la multiplication d'un nombre donné par une fraction supérieure à 1 donne un produit supérieur au nombre donné (reconnaissant la multiplication par des nombres entiers supérieurs à un comme un cas bien connu) ; en expliquant pourquoi la multiplication d'un nombre donné par une fraction inférieure à un se traduit par un produit plus petit que le nombre donné ; et en reliant le principe de l'équivalence des fractions $a / b = (n \times a) / (n \times b)$ à l'effet de la multiplication de a / b par un » (*op. cit.*, 2014, p. 4).

Les compétences relatives à la division et impliquant des fractions apparaissent beaucoup moins fréquemment dans les programmes. Cependant, nous avons trouvé quelques éléments s'y rapportant, que ce soit pour diviser une fraction unitaire par un entier (par exemple, en Angleterre, en sixième année : « Diviser des fractions appropriées par des nombres entiers [par exemple, 1/3 ÷ 2 = 1/6] » [*op. cit.*, 2014, p. 145]), pour diviser un entier par une fraction (par exemple, en Floride, en cinquième année : « Interpréter la division d'un nombre entier par une fraction unitaire, et calculer de tels quotients » [*op. cit.*, 2014, p. 4]) ou pour diviser deux fractions entre elles (toujours en Floride, en sixième année : « Interpréter et calculer des quotients de fractions, et résoudre des problèmes comportant une division de fraction par une fraction » [*ibid.*, p. 2]). Mathématiquement, le fait de partager à nouveau une part en parts égales implique la réalisation d'une division. Cependant, en particulier lors d'un partage en deux, ou lors de l'étude des fractions décimales, il est parfois demandé aux élèves d'identifier empiriquement le résultat du partage. C'est le sens de l'intitulé suivant, tiré des programmes anglais pour les élèves de sixième année : « Reconnaître les relations entre les fractions, par exemple que 1/10 est dix fois 1/100, et que 1/16 est la moitié de 1/8 » (*op. cit.*, 1999, p. 26). La spécificité de cet intitulé, c'est que l'élève effectue une division sans pour autant être amené à dégager un algorithme de calcul lui permettant de travailler avec tous les nombres. Son savoir-faire se limite donc à quelques situations bien déterminées. On trouve également, dans les instructions officielles de la République d'Irlande par exemple, une

situation dont la résolution relève, mathématiquement, de l'utilisation de la division, mais qui est bien souvent résolue de manière empirique, à l'aide d'un schéma. Il s'agit pour l'élève de retrouver la valeur de l'unité, alors que la valeur de la partie fractionnaire lui a été donnée. Cet exercice peut être donné avec une fraction unitaire, ce qui facilite le travail de l'élève (par exemple, en République d'Irlande, en troisième année : « Trouver l'entier, la partie fractionnaire étant donnée » et « Calculer un nombre, étant donnée la fraction unitaire du nombre » [*op. cit.*, p. 68]), ou avec une fraction non unitaire, ce qui rend la tâche beaucoup plus complexe (par exemple, dans le même pays, en quatrième année : « Calculer un nombre, étant donnée la fraction dont le dénominateur est un diviseur du nombre. 3/10 du nombre = 45, trouve le nombre » [*ibid.*]).

D'autres types de tâches auraient pu être intégrées dans les programmes scolaires. Nous pensons en particulier aux activités impliquant la recherche du complément à l'unité (avec, soit la recherche du complément proprement dit, soit la soustraction d'une fraction à un entier). Cependant, nous n'en avons pas trouvé trace dans les instructions officielles des pays de notre corpus. À l'inverse, nous avons parfois identifié des tâches impliquant des fractions, sans pour autant les retenir dans notre analyse, pour des raisons que nous allons expliciter ici. Ainsi, nous avons exclu les tâches impliquant une écriture en lettres, ou la manière de dire les fractions, dans la mesure où nous avons estimé que ces tâches dépassaient le cadre des mathématiques et dépendaient de la langue considérée (par exemple, en Ontario, en quatrième année : « Lire et écrire en lettres et en chiffres des fractions simples [p. ex., 2/3, deux cinquièmes] » [*op. cit.*, p. 52]). Les intitulés évoquant des fractions sans préciser l'utilisation qui devait faire l'élève de celles-ci ont également été ignorés. C'est assez souvent le cas lorsque le paragraphe a principalement trait à la résolution de problèmes (par exemple, en Angleterre, en quatrième année : « Résoudre des problèmes simples de mesures et d'argent impliquant des fractions et des écritures à deux décimales » [*op. cit.*, 2014, p. 131]).

Nous avons donc relevé vingt-quatre types de tâches qui relèvent de l'enseignement des aspects cardinaux du concept de fraction, avec le critère qu'une seule fraction est impliquée dans la réalisation de la tâche :

- T_1 : Identifier la fraction d'une figure géométrique ;
- T_2 : Représenter la fraction d'une figure géométrique ;
- T_3 : Identifier la fraction d'une collection ;
- T_4 : Représenter la fraction d'une collection ;
- T_5 : Réaliser des estimations de quantités à l'aide de fractions ;
- T_6 : Exprimer un rapport sous la forme d'une fraction ;
- T_7 : Mesurer à l'aide de fractions ;
- T_8 : Identifier une fraction sur la droite numérique ;
- T_9 : Représenter une fraction sur la droite numérique ;
- T_{10} : Compter avec des fractions ;
- T_{11} : Identifier une rotation d'une fraction de tour ;

- T_{12} : Effectuer une rotation d'une fraction de tour ;
- T_{13} : Exprimer une probabilité à l'aide d'une fraction ;
- T_{14} : Lire un diagramme impliquant une quantité fractionnaire ;
- T_{15} : Représenter une partition de pluralité ;
- T_{16} : Exprimer le reste d'une division à l'aide d'une fraction ;
- T_{17} : Passer des fractions décimales aux écritures décimales ;
- T_{18} : Passer des écritures décimales aux fractions décimales ;
- T_{19} : Passer des fractions non décimales aux écritures décimales ;
- T_{20} : Passer des écritures décimales aux fractions non décimales ;
- T_{21} : Passer des fractions aux écritures décimales à l'aide d'une division ;
- T_{22} : Passer des fractions aux pourcentages ;
- T_{23} : Passer des pourcentages aux fractions ;
- T_{24} : Choisir une écriture des nombres rationnels adaptée à la situation.

Seize types de tâches relèvent de l'enseignement des aspects ordinaux du concept de fraction, avec le critère que deux fractions au moins sont impliquées dans la réalisation de la tâche :

- T_{25} : Comparer ou ordonner des fractions de même dénominateur ;
- T_{26} : Comparer ou ordonner des fractions de dénominateurs liés ;
- T_{27} : Comparer ou ordonner des fractions de dénominateurs différents ;
- T_{28} : Comparer ou ordonner des fractions unitaires ;
- T_{29} : Comparer ou ordonner des fractions de même numérateur ;
- T_{30} : Comparer ou ordonner différentes écritures des nombres rationnels ;
- T_{31} : Comparer des fractions qui ne portent pas sur la même unité ;
- T_{32} : Identifier des fractions équivalentes ;
- T_{33} : Produire des fractions équivalentes, y compris sous la forme d'une liste ;
- T_{34} : Réduire une fraction à sa plus simple expression ;
- T_{35} : Trouver plusieurs façons de représenter une même fraction ;
- T_{36} : Associer la taille des parts au nombre de parts dans l'unité ;
- T_{37} : Exprimer un entier sous la forme d'une fraction ;
- T_{38} : Exprimer une fraction sous la forme d'un entier ;
- T_{39} : Encadrer une fraction entre deux entiers ;
- T_{40} : Comparer des fractions un nombre de référence (1/2 ou 1).

Seize types de tâches relèvent des opérations avec des fractions, avec le critère qu'à partir de deux fractions au moins, les élèves doivent en identifier une autre qui ne leur est pas fournie :

- T_{41} : Passer d'une fraction supérieure ou égale à 1 à un nombre mixte ;
- T_{42} : Passer d'un nombre mixte à une fraction supérieure ou égale à 1 ;
- T_{43} : Trouver le complément à l'unité ;
- T_{44} : Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur ;
- T_{45} : Décomposer une fraction (décomposition additive) ;
- T_{46} : Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs liés ;
- T_{47} : Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents ;
- T_{48} : Multiplier une fraction par un entier (addition réitérée) ;
- T_{49} : Multiplier un entier par une fraction (fraction-opérateur) ;
- T_{50} : Calculer le produit de deux fractions ;
- T_{51} : Observer l'effet de la multiplication d'un nombre par une fraction ;
- T_{52} : Diviser une fraction unitaire par un entier ;
- T_{53} : Diviser un entier par une fraction unitaire ;
- T_{54} : Calculer le quotient de deux fractions ;
- T_{55} : Observer l'effet de la subdivision d'une part en plusieurs parts ;
- T_{56} : Calculer la valeur de l'unité, la partie fractionnaire étant donnée.

B. Présentation des modalités de la tâche

Les modalités de la tâche influent sur le taux de réussite des élèves, car elles conditionnent non seulement le niveau de difficulté de la tâche, mais également les techniques qui pourront être utilisées par les élèves pour l'effectuer. Pour le montrer, prenons l'exemple du type de tâches « Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs » qui se trouvait dans les programmes français de 2008 (*op. cit.*, p. 38). Si l'on donne aux élèves une fraction telle que $\frac{7}{3}$, ils pourront facilement utiliser un schéma ou la demi-droite numérique pour parvenir à la conclusion que ce nombre se trouve entre 2 et 3. Si l'on leur demande d'effectuer la même tâche avec une fraction telle que $\frac{81}{5}$, l'utilisation d'un schéma ou de la demi-droite numérique devient fastidieuse, et le calcul du quotient de 81 par 5 deviendra nécessaire pour déterminer que ce nombre se trouve entre 16 et 17. Sans doute parce que les nombres en jeu influent sur la

technique utilisée par l'élève, de nombreux programmes scolaires contiennent des informations relatives aux fractions qui peuvent être incluses dans les exercices.

Parmi les variables que nous avons envisagées, il existe les nombres utilisés, la nature de la réponse (questionnaire à choix multiples ou réponse libre), la complexité de l'énoncé, le caractère discret ou continu des unités, etc. Toutefois, comme pour les tâches, nous avons relevé de manière pragmatique celles que nous avons identifiées au sein de notre corpus, sans chercher à établir de façon exhaustive toutes les modalités envisageables pour chacune des tâches retenues. D'ailleurs, certaines ont déjà été abordées lors de l'étude des différents types de tâches, par exemple, lorsque nous avons fait la distinction entre les additions de fractions de même dénominateur et les additions de fractions de dénominateurs différents. Dans ce cas, nous avons considéré que la variable utilisée induisait un nouveau type de tâches. Encore une fois, les exemples tirés des instructions officielles qui nous servent à illustrer les différentes modalités de la tâche envisagées par les auteurs auraient pu être placées dans les annexes. Nous avons estimé que ces développements avaient leur place dans le cœur de texte, afin de permettre au lecteur de percevoir plus facilement le sens des conclusions que nous tirons en fin de paragraphe.

Dans certains pays de notre corpus, les élèves commencent à manipuler les fractions très tôt, avec un panel de nombres très restreint. Au cours des années suivantes, ils travaillent à nouveau la même compétence, mais avec des nombres plus variés. C'est le cas en Irlande du Nord, où l'apprentissage des fractions commence en deuxième année avec l'étude des demis et des quarts (« explorer le concept de demis, quarts en utilisant des formes entières et des collections d'objets » [*op. cit.*, p. 1]). En troisième année, les tâches sont identiques, mais la variété des fractions rencontrées augmente (« étendre le concept de fraction à une large série de fractions en utilisant des formes entières et des collections d'objets », [*ibid.*]). À Singapour, en deuxième et en troisième année, les dénominateurs ne doivent pas dépasser douze, qu'il s'agisse d'explorer la relation partie-tout à propos d'un entier (« interpréter une fraction comme la part d'un entier » [*op. cit.*, 2006, p. 15]), de « lire et écrire les fractions » (*ibid.*), de « comparer et ordonner des fractions dont le numérateur est 1 ou dont le dénominateur est identique » [*ibid.*]) ou encore « d'additionner et de soustraire des fractions de même dénominateur à l'intérieur d'un entier » [*ibid.*, p. 16]). C'est-à-dire que les auteurs recherchent, non pas comme en Irlande du Nord une augmentation progressive du niveau de difficulté relatif à un type de tâches en particulier, mais la maitrise d'une large série de types de tâches autour d'un nombre restreint de fractions. Ce qui semble attendu ici, c'est l'approfondissement plus que la progressivité. Le niveau de difficulté peut être limité, non seulement en raison de l'âge des élèves, mais également en raison de la complexité de la situation d'apprentissage. Ainsi, dans l'Ontario, en quatrième année, les connaissances acquises dans le domaine des fractions sont réinvesties dans le cadre des probabilités : les fractions permettent alors de « prédire et décrire […] la probabilité qu'un évènement ou que certains évènements se produisent (par exemple, si une roulette est divisée en quatre sections dont une seule est de la couleur rouge, la probabilité que

l'aiguille de la roulette arrive sur le rouge est d'un quart) » (*op. cit.*, p. 67) ou de « comparer les résultats obtenus à la liste des résultats prévus » après avoir réalisé « une expérience simple de probabilité (par exemple, obtenir les couleurs bleue et jaune en tournant deux roulettes) » (*ibid.*). À cette occasion, les exemples fournis suggèrent l'emploi de fractions simples telles que les demis ou les quarts. Il semble que l'objectif étant la compréhension des probabilités, les auteurs ont choisi de faire manipuler des fractions très simples afin de ne pas complexifier l'apprentissage de cette nouvelle notion. En plus des fractions parfois qualifiées de « simples » dans des programmes d'enseignement (c'est-à-dire généralement avec des dénominateurs inférieurs ou égaux à douze), certains auteurs apportent bien souvent une importance particulière aux fractions décimales. En effet, leur compréhension est presque systématiquement un point d'appui pour l'apprentissage des nombres décimaux. Nous observerons donc, dans les textes, si les fractions décimales font l'objet d'un paragraphe spécifique, ou si leur utilisation est intégrée dans des tâches pourvant impliquer également d'autres fractions. Cela nous permettra de comprendre l'importance du lien entre les fractions et les écritures décimales, et de comparer les chemins qui mènent à cet apprentissage. En ce qui concerne le degré d'autonomie des élèves, il fait parfois l'objet de restrictions, comme au Québec, où la mention « Avec l'intervention de l'enseignant » est attachée à de nombreux types de tâches, avant qu'au cours des années ultérieures, l'autonomie de l'élève dans la réalisation de la tâche soit attendue (par exemple, en troisème année : « Avec l'intervention de l'enseignant, vérifier l'équivalence de deux fractions »).

À l'exception des variables qui nous ont conduit à reconnaitre des tâches distinctes (par exemple, la présence d'un dénominateur commun ou de dénominateurs différents pour la comparaison), celles-ci consistent le plus souvent, au sein des curriculums, en une limitation le niveau de difficulté des exercices en prévoyant l'utilisation de fractions simples, c'est-à-dire avec un petit dénominateur. Néanmoins, ce n'est pas parce que le législateur ne circonscrit pas la nature des fractions à utiliser, que les professeurs vont proposer des fractions avec de grands dénominateurs. Seules des études complémentaires nous permettraient de l'affirmer. Les modalités de la tâche prévues par les législateurs présentent donc un intérêt modéré pour notre analyse, dans le sens où des recherches complémentaires seraient nécessaires pour mieux comprendre quelles fractions sont mises en jeu dans les exercices soumis aux élèves de chaque pays. Toutefois, dans l'analyse des items TIMSS, nous proposerons des observations sur les variables utilisées dans des cas très spécifiques, pour fournir une explication, soit sur les performances réalisées par les élèves de pays différents, soit sur les performances réalisées par les élèves d'un même pays à deux items différents. Dès lors, une comparaison des catégories de fractions (unitaires, décimales, etc.) dont l'enseignement est prévu par le législateur reste nécessaire. Dans l'analyse des choix opérés par les auteurs des programmes, nous évoquerons également l'autonomie de l'élève telle qu'elle transparait des tâches qui s'y trouvent, parce que cela peut expliquer certains résultats obtenus aux tests TIMSS (au Québec en particulier).

§ 2. Techniques τ_i

Nous n'allons pas présenter toutes les techniques envisageables pour tous les types de tâches que nous avons définis. Nous allons uniquement définir celles qui, en raison de la concurrence qu'elles entretiennent avec d'autres et de la variété des tâches qu'elles recouvrent, offrent aux législateurs des choix ayant une incidence potentielle sur la maitrise du concept de fraction par les élèves. Parmi les tâches dont les techniques de résolution sont plurielles, deux nous ont paru particulièrement intéressantes, parce que des orientations précises ont été identifiées dans les instructions officielles. Les développements des curriculums étant tout de même trop limités sur ce point pour opérer des comparaisons, nous avons pris en compte des publications extérieures pour établir une liste de techniques suffisamment large, couvrant les types de tâches considérés. Nous avons distingué les techniques permettant d'identifier ou représenter des fractions (A) et celles permettant de comparer ou additionner des fractions (B). Ces deux dernières se recoupent très largement, de même que les deux premières.

A. Les techniques permettant d'identifier ou représenter des fractions

Pour identifier ou représenter une fraction à partir d'un dessin, les techniques qui peuvent être mises en œuvre par les élèves dépendent très largement de la nature de la tâche (Neagoy[1], *op. cit.*, p. 63). Il en existe principalement deux (le partage et l'itération), mais dans le cas de figures complexes, d'autres compétences sont parfois nécessaires (notamment la capacité à reconfigurer des figures).

La première technique consiste à partager la figure en parts égales, et convient tout particulièrement aux activités de représentation de fractions lorsque l'unité est donnée à l'élève. Par exemple, pour représenter un quart du cercle ci-dessous, les élèves pourront le partager en quatre parts égales, puis en colorier une part.

1. Voir, page 4, la note 1.

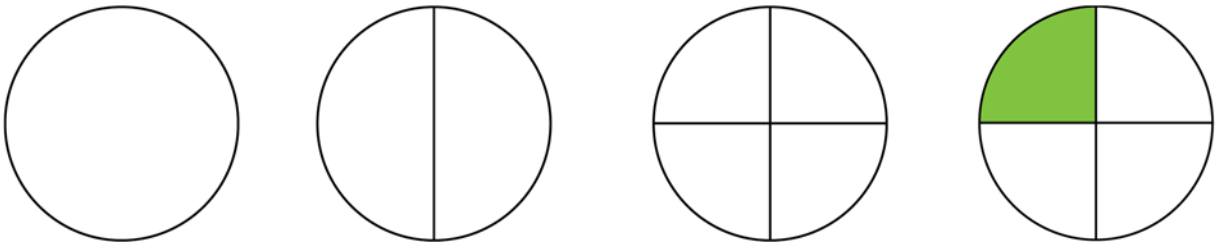


Figure 25. Exemple de représentation de la fraction 1/4 par le biais d'un partage en parts égales

En revanche, lorsque l'unité n'est pas connue de l'élève, seul le report de la figure autant de fois que nécessaire permettra la recomposition de l'unité. Par exemple, si on lui donne une figure représentant un quart de l'unité, il faudra qu'il reporte trois fois ce quart pour recomposer l'unité. Ce mécanisme est appelé « itération » (*ibid.*).

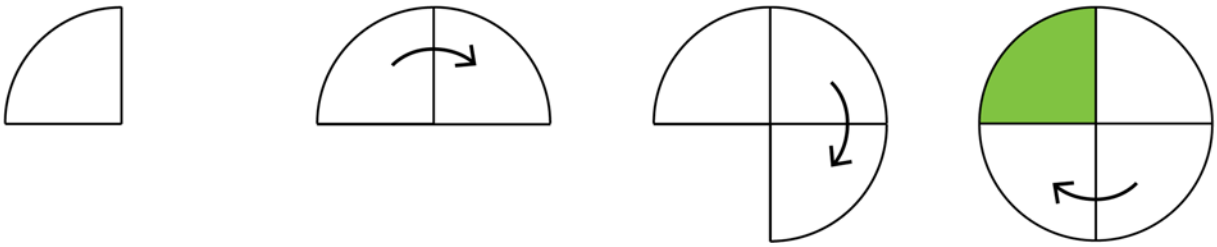


Figure 26. Exemple de représentation de la fraction 1/4 par itération

Un mécanisme similaire est mis en œuvre lorsque l'élève doit identifier une fraction pour laquelle le partage en parts égales n'apparait pas dans l'unité. Afin de faire apparaitre l'ensemble des parts égales, l'élève reportera autant de fois que nécessaire la part apparente.

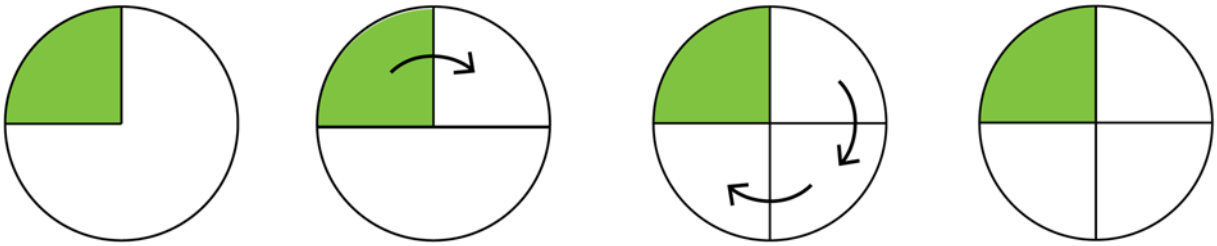


Figure 27. Exemple d'identification de la fraction 1/4 par itération

À l'inverse, lorsque toutes les parts égales sont représentées, la technique repose sur la capacité de l'élève à compter avec des nombres entiers : elle consiste à compter le nombre de parts colorées pour obtenir le numérateur, et le nombre total de parts dans l'unité pour obtenir le dénominateur.

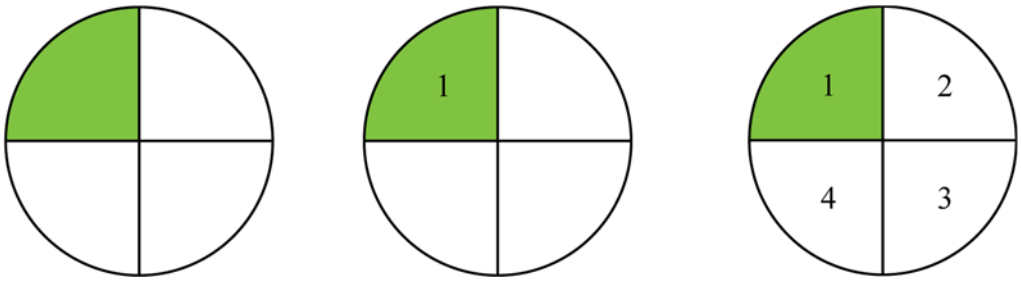


Figure 28. Exemple d'identification de la fraction 1/4 par comptage

Lorsque les morceaux colorés sont dispersés dans la figure, l'élève peut être amené à reconfigurer la figure, rendant alors nécessaire l'utilisation combinée de techniques (recomposition et comptage, ou recomposition et itération). Néanmoins, nous ne développerons pas cette question. D'une part, de telles tâches pourraient entrer dans la troisième catégorie de fonctionnement des connaissances établie par Roditi et Salles (*op. cit.*). Or, des tâches d'une telle complexité ne sont incluses dans les évaluations TIMSS que de façon marginale à propos des fractions. D'autre part, la distinction fondamentale nous parait être celle existant entre comptage (ou partage) et itération. En effet, la première technique est la plus simple, celle dont les élèves font l'expérience au début de l'apprentissage et que l'on voit apparaitre de façon prépondérante dans les manuels destinés à l'école élémentaire. Or, l'idée que dans une fraction a/b, a représente le nombre de parts colorées et b représente le nombre de parts total induit chez l'élève la conception erronée selon laquelle une fraction ne peut pas être supérieure à 1 (Neagoy, *op. cit.,* p. 51). À l'inverse, la seconde permet de comprendre que « dans une fraction a/b, a représente le nombre de copies de $1/b$ » (*ibid.*, p. 111) et facilite l'apprentissage des fractions supérieure à 1, dans la mesure où l'on peut représenter autant de copies de $1/b$ qu'on le souhaite. Nous retiendrons donc sur ce point les techniques suivantes :

- τ_1 : Représentation ou identification de fractions par partage ou comptage ;
- τ_2 : Représentation ou identification de fractions par itération.

B. Les techniques permettant de comparer ou d'additionner des fractions

Si l'on traite de la question de la comparaison, quatre grands ensembles de techniques ont été envisagés : « la recherche du même numérateur, la recherche du même dénominateur, des stratégies transitives et des stratégies résiduelles » (Cramer *et al.*, 2009, p. 19).

La première technique envisageable consiste à mettre les deux fractions sur le même numérateur. Il existe deux possibilités, selon que le numérateur de l'une des fractions est un

multiple du numérateur de l'autre (les numérateurs des deux fractions sont alors considérés comme « liés ») ou non. Dans le premier cas, on a :

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } \frac{c}{b(\frac{c}{a})} > \frac{c}{d}$$

tandis que dans le second cas, on a :

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } \frac{ac}{bc} > \frac{ca}{da}$$

La deuxième technique envisagable consiste à mettre les deux fractions à comparer sur le même dénominateur. Dans ce cas, on a :

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } \frac{ad}{bd} > \frac{cb}{db}$$

Cette technique est parfois plus simple à mettre en œuvre lorsque le dénominateur de l'une des fractions est un multiple du dénominateur de l'autre. La technique mise en œuvre se justifie alors ainsi :

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } \frac{a(\frac{d}{b})}{d} > \frac{c}{d}$$

Il existe une technique dite « transitive » et qui consiste à utiliser une fraction ou un nombre de référence (comme par exemple 1/2 ou 1) pour comparer deux fractions. En effet, on peut dire que :

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ si et seulement si } \frac{a}{b} > \frac{e}{f} \text{ et } \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$$

D'autres techniques sont envisageables dans le cas où, si le dénominateur est x, le numérateur est $x - 1$. Elles ont été qualifiées de « stratégies résiduelles, parce que les élèves se concentrent sur la partie restante » (*ibid.*, p. 20). Par exemple, pour comparer 2/3 et 3/4, on peut réaliser un dessin représentant les deux fractions, avec deux unités identiques, pour voir quelle partie restante est la plus petite. L'autre moyen de comparer de telles fractions consiste en l'utilisation d'un raisonnement par extrapolation, reposant sur l'inégalité $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$. Ainsi, on peut déduire l'inégalité $\frac{10}{11} < \frac{11}{12}$ à partir de la connaissance de la suite que nous avons reproduite ci-contre.

$$\left(\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \dots\right)$$

En plus de ces quatre techniques faisant appel à un raisonnement mathématique susceptible d'être formalisé, il est possible de recourir à des représentations visuelles de la fraction. Ainsi, il est possible de « comprendre deux fractions comme équivalentes si elles sont de la même taille, ou si elles sont sur le même point de la droite graduée » (*Mathematics Florida Standards Grade 3*, 2014 p. 4). Par analogie, on déduit que deux fractions ne sont pas équivalentes et donc que l'une est supérieure à l'autre si elles ne sont pas de la même taille, ou si elles ne sont pas sur le même point de la droite graduée. À la place de la droite graduée, les élèves pourront aussi bien utiliser un schéma, un dessin, un graphique, etc.

Pour l'addition et la soustraction de fractions de dénominateurs différents, le choix d'un dénominateur commun permettra de réaliser les calculs correspondants, selon une technique qui dépend du fait que le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre ou non. L'emploi de supports visuels est également envisageable, par exemple pour additionner 1/2 et 1/4, ou pour additionner 1/2 et 3/10. Cependant, pour ce dernier exemple, passer par le dessin semble plus difficile, car le nombre de parts à dessiner devient important. L'analyse des techniques permettant d'additionner et soustraire des fractions n'allonge pas la liste de celles que nous avons déjà évoquées à propos de la comparaison. Nous avons donc :

- τ_3 : Utilisation d'un numérateur commun ;
- τ_4 : Utilisation d'un dénominateur commun ;
- τ_5 : Utilisation d'une stratégie transitive ;
- τ_6 : Utilisation d'une stratégie résiduelle ;
- τ_7 : Utilisation de représentations visuelles de la fraction.

Précisons qu'il existe des sous-ensembles pour chacune des catégories de techniques que nous venons de définir. Par exemple, sous la catégorie T_4 « Utilisation d'un dénominateur commun », nous distinguons différentes procédures visant à l'identification de ce dénominateur commun, notamment pour la recherche du plus petit commun multiple (PPCM) des deux dénominateurs : il est possible d'écrire la liste des premiers multiples de chaque dénominateur, jusqu'à trouver le premier qui appartient aux deux listes ; il est également envisageable de rechercher le plus grand commun diviseur (PGCD) aux deux dénominateurs et de l'utiliser pour déterminer le PPCM recherché. Les différentes variantes au sein d'une même catégorie de techniques, nous les avons appelées les « variables de la technique », par analogie avec les «

variables de la tâche ». Elles nous permettront de considérer différents niveaux d'analyse dans les comparaisons effectuées à propos des curriculums.

Conclusion de la sous-section

Nous avons construit, de façon empirique, la liste des types de tâches à considérer à propos des fractions, en confrontant les programmes d'enseignement des pays de notre corpus, et en notant l'ensemble des types de tâches qui ne se recoupaient pas. Cette liste nous permettra de comparer les curriculums, à la fois à propos de la diversité des activités envisagées et de leur organisation dans le temps. Puisque les tâches sont très différentes les unes des autres (avec l'étude des aspects ordinaux et cardinaux du concept, et la maitrise des opérations impliquant des fractions) et incluses dans des domaines variés (connaissance des nombres, géométrie, probabilités, etc.), notre étude cherchera à mettre en évidence l'existence de transferts d'un type de tâches à l'autre par les élèves. Par exemple, ceux qui peuvent représenter les fractions 1/4 et 1/3 sont-ils capables de dire laquelle des deux est la plus grande ? Nous avons également identifié plusieurs techniques que des publications ont mis en avant, soit pour identifier ou représenter des fractions, soit pour comparer ou additionner des fractions. Nous indiquerons dans quelle mesure ces techniques sont présentes dans les instructions officielles, et comment la présence des unes et des autres est corrélée aux performances des élèves aux évaluations TIMSS. Par exemple, la présence d'une technique transitive de comparaison dans le curriculum conduit-elle à l'obtention de meilleures performances aux items où elle pourrait trouver à s'appliquer ? Afin de justifier d'éventuels transferts, et de mieux comprendre les relations qui unissent les tâches et les techniques, nous allons décrire ce qui représente la condition même de leur existence, c'est-à-dire leur lien avec des savoirs au sens restreint du terme.

Sous-section II. Le bloc technologico-théorique [θ/Θ]

Pour Chevallard, « il n'existe pas de connaissance isolée, toute connaissance est un agrégat. C'est la modélisation en termes de praxéologie qui décompose en *praxis* et en *logos* ces agrégats qui va permettre une avancée significative pour décrire et expliquer les savoirs en

fonctionnement »[1]. Après avoir envisagé la question praxique à travers l'analyse du bloc pratico-technique, nous allons donc nous intéresser à la question du *logos*. Plus que de scinder la réflexion entre l'analyse des éléments technologiques et théoriques (la justification de l'existence du concept de fraction au sein des nombres rationnels nécessiterait des développements dépassant le cadre de cette thèse), nous examinerons les limites apportées par le bloc technologico-théorique aux types de tâches (§ 1) et aux techniques (§ 2) susceptibles d'être rencontrées dans les programmes d'enseignement. En d'autres termes, nous déterminerons comment le discours que l'on porte sur la notion de fraction influe sur les savoir-faire que les élèves construisent dans les classes. Pour ce faire, nous utiliserons les apports de la didactique, les curriculums ne traitant que très rarement des savoirs au sens restreint du terme.

§ 1. Les limites apportées par le bloc technologico-théorique aux types de tâches

Dès lors que « la question génératrice de la théorie de la transposition didactique est de mieux déterminer quel est l'objet d'étude qui n'est pas tout à fait le même et qui ne vit pas de la même manière d'une institution à une autre puisqu'on ne l'utilise pas pour faire la même chose » (*ibid.*), l'analyse des praxélogies relatives aux fractions implique de comprendre comment l'élément technologique (en l'occurrence la notion de fraction) circonscrit le champ des types de tâches et des techniques qui lui sont reliés. Ce n'est qu'ainsi que nous pourrons définir la portée des choix réalisés par les législateurs à propos des éléments praxiques sur le plan des savoirs. En ce qui concerne les types de tâches, on déduit de la pluralité de significations de ce concept (A) que les fractions vont permettre de résoudre des problèmes très différents les uns des autres. Par ailleurs, ces problèmes ne concernent pas que la connaissance des nombres, qui est pourtant le champ privilégié de l'étude des fractions. En conséquence, nous détaillerons ensuite la pluralité des domaines mathématiques traversés par le concept de fraction (B).

---

1. Cet extrait est tiré de la présentation de la théorie anthropologique du didactique réalisée par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM). Le texte est disponible en ligne à l'adresse suivante (consultée le 30/08/2018) : https://ardm.eu/qui-sommes-nous-who-are-we-quienes-somos/yves-chevallard-la-theorie-anthropologique-du-didactique/.

A. Les significations du concept de fraction

Les chercheurs dont nous avons consulté les travaux s'accordent pour dire que le concept de fraction recouvre plusieurs significations. En revanche, ils ne sont d'accord, ni sur le nombre des facettes que comprend la notion de fraction, ni sur leur contenu. Cette question étant encore loin de faire consensus dans la littérature scientifique, nous allons simplement expliquer comment elle a émergé à la fin des années 1970, et présenter les significations relevées par les principaux chercheurs ayant travaillé sur ce sujet, sans prétendre à l'exhaustivité.

La littérature scientifique anglo-saxone, choisissant un axe cognitif, explicite les différentes composantes fonctionnelles de la notion de rationnel (qu'ils nomment « sous-constructions »). Les recherches de Kieren, au département d'éducation secondaire de l'université d'Alberta, illustrent bien l'idée d'une définition du concept de fraction toujours en évolution. En effet, dans ses premiers travaux portant sur les fractions proprement dites, il propose cinq éléments significatifs pour caractériser le concept : partie d'un tout ; quotient ; mesure ; rapport ; opérateur (Kieren, 1980, p. 134). La fraction en tant que partie d'un tout « quantifie la relation entre un tout (une unité ou une collection d'unités) et le nombre de parts égales qui le composent. Cette conception est mobilisée dans les propositions : "les trois quarts de la tarte ont été mangés" ou "dans cette classe, les trois cinquièmes des élèves sont des filles" » (Martinez et Roditi, 2017, p. 26). La fraction-quotient correspond à l'interprétation de a/b comme le quotient de a par b. Par exemple, si on partage équitablement trois melons entre sept personnes, chaque personne aura 3/7 de melon. Lorsque, à partir d'une unité fixée préalablement, la « fraction [est] utilisée pour exprimer la mesure d'une grandeur : par exemple, la longueur d'une corde est 5/4 lorsque la corde tendue coïncide avec cinq reports d'un quart de l'unité » (*ibid.*), on parle de fraction-mesure. La fraction-ratio « met en relation la mesure de deux parties, sans référence à celle du tout, comme dans la phrase "L'équipe de direction comporte trois femmes pour deux hommes" » (*ibid.*). Enfin, la fraction envisagée comme un opérateur « ne représente pas une quantité mais une transformation. Ainsi, la multiplication du prix affiché par la fraction 4/5 permet de calculer le prix à payer lors d'une remise de 20 % » (*ibid.*).

Les relations entre ces sous-constructions a fait l'objet de nombreux développements. C'est ainsi que « la conception d'une fraction comme partie d'un tout est considérée par Kieren (1988), et de nombreux autres auteurs ensuite, comme la base des connaissances sur les

fractions » (Carette *et al.*, *op. cit.*, p. 25). D'ailleurs, « selon Marschall (1993), il s'agit de l'une des premières situations rencontrées par les enfants lorsque, par exemple, ils partagent leur collation de manière équitable avec leurs camarades. De plus, cette notion figure parmi les premières enseignées lorsque les fractions sont abordées à l'école primaire, notamment en utilisant l'exemple typique de la tarte divisées en plusieurs morceaux égaux (Nunes et Bryant, 1996). Enfin, cette conception reste souvent dominante durant l'ensemble des enseignements dispensés sur les fractions » (*ibid.*). Pour plusieurs auteurs, les concepts de « partie-tout » et de rapport entretiennent des relations étroites, et se trouvent au fondement de l'apprentissage des fractions (Pitkethly et Hunting, 1996). Par exemple, Kieren envisage la relation partie-tout comme « un cas particulier de relations de rapport » : les deux notions partagent une même « notion formelle d'équivalence » (*op. cit.*, p. 135). De la notion de rapport, nous distinguons celle de proportion qui « est issue du constat que plusieurs couples de nombres (au moins deux) possèdent le même rapport, par exemple 1/3 et 3/9. La proportion implique donc de considérer simultanément quatre données numériques et d'envisager la relation entre elles : les élèves raisonnent sur "des couples d'entiers" et non sur le fractionnement ou la partition d'entiers » (Carette *et al.*, *op. cit.*, p. 26). Dans la synthèse proposée par Pitkethly et Hunting (1996), les auteurs montrent que les élèves ont, dès le plus jeune âge, « une capacité de raisonner (de façon non numérique) à propos de relations entre des quantités d'objets » (Carette *et al.*, *op. cit.*). En grandissant, les élèves deviennent moins performants sur la reconnaissance des rapports (Pitkethly et Hunting, *op. cit.*, p. 29). De même, Nunes et Bryant (1996) ont mis en évidence que, dans le cadre de problèmes d'équivalence ou d'ordre impliquant des quantités représentées par fractions, les enfants réussissent mieux face aux situations de quotient que face aux situations de partie-tout. Ces résultats soutiennent l'idée que les enfants ont des connaissances informelles sur l'équivalence et l'ordre des quantités représentées par des fractions (Mamede, 2009) et « remettent quelque peu en question l'affirmation d'une conception partie d'un tout qui précéderait les autres et les imprégneraient toutes » (Carette *et al.*, *op. cit.*). Selon Kieren, la fraction envisagée comme un quotient est également une sous-construction étroitement liée à la relation partie-tout. Pourtant, pour l'apprenant, elle « émerge et est appliquée dans un contexte différent » (*op. cit.*), et l'accompagnement du langage liant ces deux sous-constructions constitue « une véritable tâche pédagogique pour l'éducation mathématique des élèves de dix à quatorze ans » (*ibid.*). La fraction envisagée comme une mesure est, selon l'auteur, encore une fois étroitement liée à la relation partie-tout. Cette activité de mesure est généralement réalisée « à travers une itération du processus de comptage du nombre d'unités entières utilisables couvrant la région, puis une subdivision appropriée des unités en parts

égales » (*ibid.*, p. 136). L'accent est mis ici « sur l'unité arbitraire et sa subdivision plutôt que sur les relations partie-tout ». La sous-construction « mesure » est un « cadre naturel pour deux aspects importants de la construction du nombre rationnel » (*ibid.*). D'une part, la réunion de deux mesures visant à trouver une nouvelle mesure envisagée comme la somme des deux premières dévoile les mécanismes additifs liés aux rationnels. D'autre part, l'utilisation du mètre comme une unité permet d'établir un lien avec la notation décimale, les sous-multiples du mètre servant de modèle physique aux dixièmes, centièmes, millièmes, etc. Ainsi, la fraction-mesure est peu à peu « considérée comme un nombre qui communique la grandeur de la fraction » (Carette *et al.*, 2009, page 22). La fraction envisagée comme un opérateur « focalise l'attention sur les rationnels en tant qu'éléments dans l'algèbre de fonctions » (Kieren, 1980, p. 136). Pour cet auteur, cet aspect « fournit une base très simple pour l'apprentissage de la multiplication des nombres rationnels » (*ibid.*). Les relations entre les sous-constructions ont été synthétisées par Kieren dans le schéma reproduit ci-dessous.

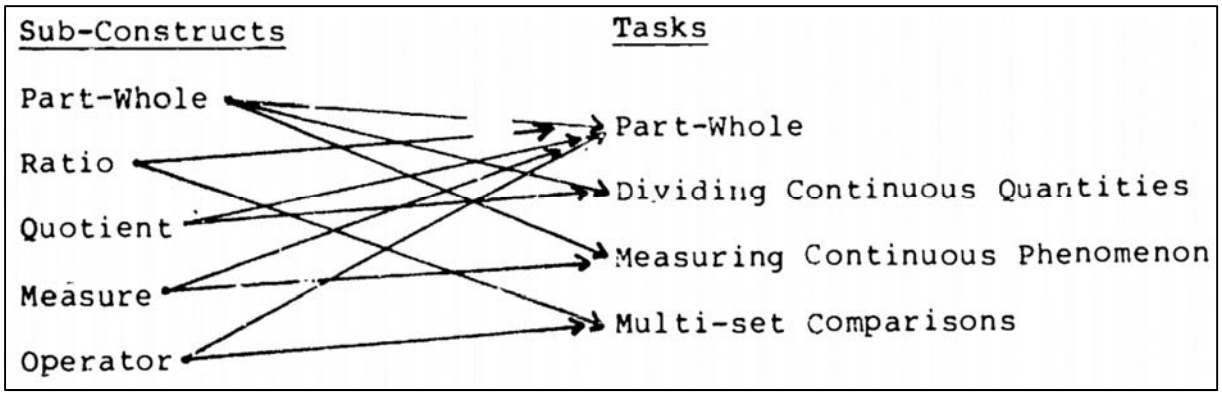


Figure 29. Liens entre sous-constructions et tâches (Kieren, 1980, p. 137)

Behr et al. (1983) ont également distingué cinq catégories, s'alignant ainsi sur les propositions formulées en 1980 par Kieren. La nouveauté de ces travaux est de proposer une organisation différente des liens entre les sous-constructions. Celles-ci sont reliées aux opérations, à l'équivalence entre fractions et à la résolution de problèmes. À la lecture du schéma ci-dessous, on constate que la relation partie-tout est dissociée des partitions. Dans notre recherche, nous suivrons cette organisation et nous scinderons la conception partie d'un tout en deux conceptions complémentaires : la fraction partie-tout au sens strict (avec des unités continues) et la fraction-partition (avec des unités discrètes). Nous constatons par ailleurs que cette catégorie occupe une place centrale du modèle théorique de Behr *et al.*, puisqu'elle est placée au-dessus, et constitue la condition de toutes les autres.

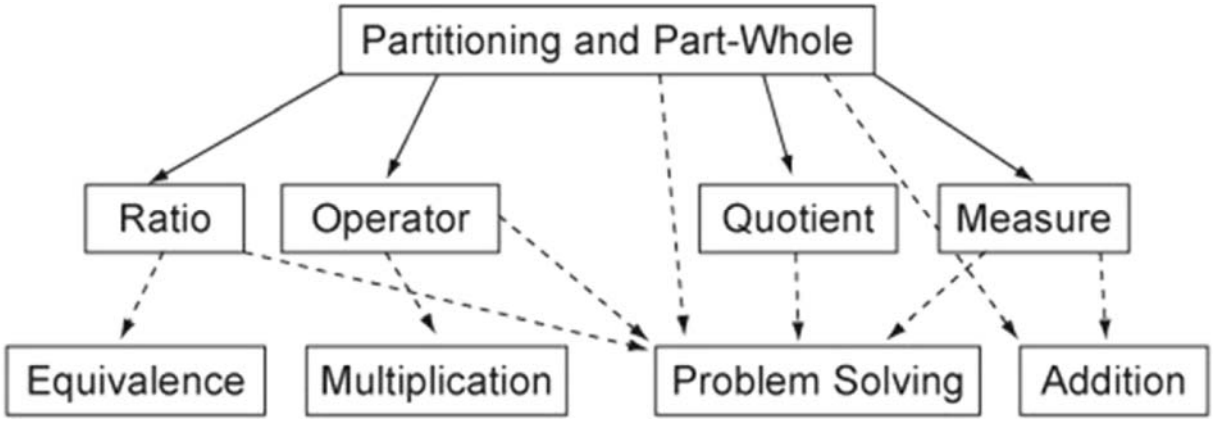


Figure 30. Relations entre les sous-constructions selon Behr *et al.* (1983, p. 100)

Par la suite, d'autres modèles ont été développés dans lesquels seules quatre sous-constructions sont décrites. Ainsi, constatant que l'idée de partie-tout imprègne l'ensemble des autres sous-constructions, Kieren (1988, 1993) décide, dans des travaux ultérieurs, de ne conserver que quatre significations pour le concept de fraction : mesure, quotient, rapport et opérateur multiplicatif. Toutefois, ces quatre sous-constructions sont complétées par trois concepts complémentaires : le partage, l'équivalence, et la formation d'unités. L'ensemble de ces quatre sous-constructions et trois concepts peuvent être travaillés selon quatre niveaux de compréhension, ce qui a donné son nom au modèle : le modèle quatre-trois-quatre (*four-three-four model*). Dans ce modèle, ce que Kieren (1995) appelle « partionnement » sont les actions de partage en parts égales effectuées par les élèves, sous forme de pliage ou de dessin, pour représenter des fractions. Le concept d'équivalence était précédemment considéré comme la manifestation de la compréhension de la fraction en tant que rapport, mais il prend ici son indépendance par rapport aux autres significations. La formation d'unités correspond à une décomposition additive des fractions, non seulement avec des fractions de même dénominateur, mais également avec des fractions de dénominateurs différents. L'objectif est de montrer que les fractions sont des « quantités additives combinables » (1995, p. 32). Kieren donne pour exemple le problème suivant : « voici quatre pizzas rectangulaires coupées en moitiés, quarts, sixièmes et douzièmes. Choisissez des morceaux provenant d'au moins trois de ces pizzas tels que leur "somme" est une pizza » (1993, cité par Mitchell, 2012, p. 515).

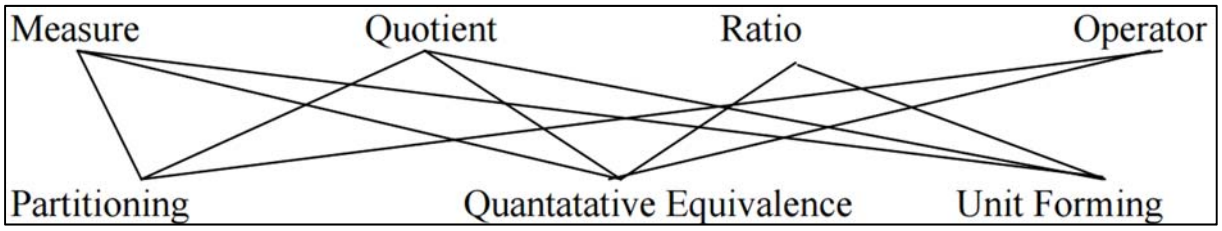


Figure 31. Liens entre les sous-constructions et les concepts complémentaires (Kieren, 1993, d'après Mitchell, 2012)

Carette *et al.* (2009, p. 27) n'ont retenu pour leur étude que quatre catégories principales, selon une organisation différente de celle que nous venons d'évoquer (partie d'un tout et partition, correspondant aux situations de partage, avec des quantités continues et discrètes ; rapport, recouvrant l'idée de relation entre des quantités et amenant à l'idée de fractions équivalentes ; nombre, impliquant de considérer les fractions comme pouvant être placées sur la droite numérique et possédant des propriétés différentes de celles des nombres naturels ; mesure, se rapportant aux nombreuses situations dans lesquelles les fractions sont utilisées en lien avec le système métrique : mesures de longueurs, masses, volumes, surfaces, durées, etc.). Dans cette liste, les fractions-quotients ou les fractions-opérateurs disparaissent du cadre conceptuel. Cependant, ce dernier est complété par un volet procédural, visant à étudier la façon dont les élèves réalisent des opérations, des comparaisons, des transformations ou des simplifications portant sur des fractions.

Rémi Brissiaud (1998) a également attribué quatre significations au concept de fraction : proportion, rapport, partition de la pluralité et fractionnement de l'unité. Il insiste notamment sur l'importance de lier la partition de la pluralité et le fractionnement de l'unité. La conception « proportion » correspond à des nombres rationnels qui « renvoient à des grandeurs de natures différentes et alors 13/4 se lit le plus souvent treize pour quatre » (*ibid.*, p. 5). Par exemple, 13/4 représente « 13 cas de maladie pour 4 milliers d'habitants ». La fraction-rapport fait quant à elle référence à des nombres rationnels qui « renvoient à des grandeurs de même nature et […] 13/4 se lit souvent treize divisé par quatre » (*ibid.*). Cette conception de la fraction évoque la division-quotition. Par exemple, 13/4, dans le cadre d'un rapport trigonométrique, traduira la question suivante : « en 13 mm, combien de fois 4 mm ? » (*ibid.*) Selon l'auteur, la partition de la pluralité constitue aussi une catégorie à part entière, où les nombres rationnels « renvoient à une grandeur alors que le nombre est sans dimension. Dans ce cas, la fraction 13/4 […] se lit également treize divisé par quatre, mais elle renvoie au partage de la totalité des 13 mm en 4 parties égales » (*ibid.*). Cette conception de la fraction évoque la division-partition. Enfin, dans le cas du fractionnement de l'unité, les nombres sont « sans dimension » et « ils opèrent sur un rationnel ». Par exemple, 13/4 représente « treize fois un quart de mm. La fraction 13/4 se lit alors treize quarts et il s'agit d'une partition de l'unité suivie d'une multiplication » appelée « de manière abrégée, fractionnement de l'unité » (*ibid.*).

Plusieurs auteurs n'évoquent que trois sous-constructions du concept de fraction. Nicolas Rouche (1998) propose de ne conserver que les significations suivantes : opérateur,

rapport et mesure. Ce qu'il nomme « fraction-opérateur » concerne « le fractionnement des grandeurs. Elle consiste en une opération de partage d'un ou plusieurs objets entre une ou plusieurs personnes. L'exemple prototypique de cette catégorie est le partage d'une tarte en plusieurs morceaux égaux » (Carette *et al.*, *op. cit.*, p. 23). L'idée de rapport inclut des sous-catégories qui précisent la nature du rapport envisagé (rapport partie-tout, rapport entre deux grandeurs, pourcentages, échelles, probabilités), tandis que dans le cas de la mesure, « la barre de la fraction est identifiée à la division et le dénominateur au diviseur » (*ibid.*).

Grégoire (2005, 2008) a repris ces trois catégories, mais il leur attribue un ordre d'apprentissage, partant du plus concret au plus abstrait. Le premier stade (celui de la fraction-opérateur) correspond aux situations de partage. Le deuxième stade (celui de la fraction-rapport) implique « de se détacher des nombres pris isolément (numérateur et dénominateur) pour considérer la relation entre eux » (Carette et al., *op. cit.*, p. 24). Au troisième stade (celui de la fraction-nombre), la fraction est envisagée comme un nombre avec de nouvelles propriétés par rapport aux entiers. Les fractions « peuvent à ce stade être placées sur la droite numérique » (*ibid.*).

Brousseau (2009) envisage au moins trois catégories, parfois divisées en sous-catégories. Dans la première, la fraction exprime une mesure non entière à l'aide d'entiers. Dans ce cas, elle est toujours accompagnée d'une unité. Elle est parfois employée avec une unité intermédiaire, qui est le nombre de quantièmes. Par exemple, « 7/3 d'acre exprime sept fois le quantième 1/3 d'acre » (2009, diapositive 5[1]). Elle est parfois employée sans unité intermédiaire, c'est une commensuration. Par exemple, « trois fois la quantité mesurée coïncide avec sept acres » (*ibid.*). Dans la deuxième, elle exprime un rapport. Il peut s'agir d'un rapport interne s'il est scalaire ou sans unité exprimée. Par exemple, « 1203 et 2807 sont dans le rapport de 3 à 7 » (*ibid.*). Il peut s'agir d'un rapport externe si deux unités différentes entrent en jeu. Par exemple, « 3 m/s » (*ibid.*). Dans la troisième, elle exprime une fonction ou une application linéaire. Par exemple, « cet actionnaire prélèvera 21/100 des bénéfices obtenus » (*ibid.*).

La typologie qui fait le plus fréquemment référence dans les recherches reste celle de Behr *et al.* (1983) qui distinguent cinq conceptions (Cramer *et al.*, 2002). Pour ces auteurs, les

1. Le cours est disponible sous la forme d'un diaporama à l'adresse suivante : http://guy-brousseau.com/1982/cours-2010-2011-ingenierie-didactique-des-curriculums-2-rationnels-et-decimaux-au-cm2/.

sous-constructions partie-tout, quotient, rapport, opérateur et mesure ont passé l'épreuve du temps et suffisent à clarifier la notion de nombre rationnel. De plus, le nombre suffisamment élevé de sous-constructions facilite les comparaisons entre les curriculums, étant donné la quantité de tâches à analyser. C'est pourquoi nous nous appuierons sur cette catégorisation pour notre étude. Les liens qui unissent les différentes conceptions du concept de fraction font toujours l'objet de débats, et notre recherche contribuera, à travers l'analyse des transferts entre différents types de tâches effectués par les élèves, à mieux comprendre comment, éventuellement, elles s'enrichissent les unes les autres. À ce stade de la réflexion, nous indiquerons simplement qu'un même type de tâches (par exemple, « Identifier la fraction d'une figure géométrique » [T_1]), peut mettre en jeu, selon les variables que l'on choisit, non seulement des techniques différentes (« Représentation ou identification de fractions par partage ou comptage » [τ_1] et « Représentation ou identification de fractions par itération » [τ_2]), mais également des significations différentes (en l'occurrence, respectivement la fraction partie-tout et la fraction-mesure).

B. Les domaines mathématiques incluant le concept de fraction

Selon Douady et Perrin-Glorian, « la diversité d'un concept doit être reliée à la diversité de ces cadres » (1986, p. 3). Or, les fractions peuvent être utilisées dans différents domaines mathématiques. Il nous faut donc préciser quels sont les domaines mathématiques dans lesquels ce concept peut être mis en jeu. Certes, le domaine numérique est le cadre privilégié de l'utilisation des fractions dans un cadre scolaire, et la résolution de problèmes donne l'occasion aux élèves de réaliser des calculs avec des fractions. Toutefois, ces dernières peuvent être incluses dans des contextes plus originaux. Par exemple, en géométrie, les expressions « demi-tour » et « quart de tour » peuvent conduire à explorer les rotations d'une figure géométrique en lien avec les connaissances acquises dans le domaine des fractions. De même, elles peuvent permettre d'exprimer une probabilité. Ainsi, si on lance une pièce, la probabilité de la voir tomber côté pile est de 1/2. Les fractions peuvent également être évoquées dans le cadre de l'étude des mesures (1/2 litre, 1/2 heure, etc.) ou de la lecture de graphiques (par exemple, sur un graphique, le nombre d'élèves possédant un chien pourrait représenter une certaine fraction de l'ensemble des élèves de la classe). Enfin, l'algèbre peut être l'occasion d'utiliser des fractions. Par exemple, en Floride, en septième année, l'utilisation de coefficients rationnels pour la résolution d'équations linéaires à une ou deux étapes permet aux élèves d'être confrontés à des calculs algébriques comportant des fractions. Toutefois, il nous semble que,

bien souvent, cette injonction reste tacite. Pour prendre l'exemple de la France et du programme de la classe de quatrième, les auteurs indiquent que les élèves doivent pouvoir, « sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs » (*op. cit.*, 2008b, p. 28). Rien n'indique, dans cet intitulé, que les professeurs sont supposés intégrer des fractions dans ces calculs. Pourtant, la présence peu avant de l'injonction visant à enseigner la multiplication, l'addition et la soustraction de nombres relatifs en écriture fractionnaire nous conduit à penser que les fractions seront très largement incluses dans des calculs algébriques. De plus, l'utilisation de calculs algébriques induit des tâches qui dépassent le contexte de l'enseignement et de l'apprentissage initial des fractions, de sorte que nous avons exclu ce domaine de l'analyse. Nous avons donc distingué six grands cadres d'utilisation du concept :

- C_1 : le cadre numérique ;
- C_2 : le cadre géométrique ;
- C_3 : le cadre des probabilités.
- C_4 : le cadre des mesures ;
- C_5 : le cadre graphique.

La théorie des changements de cadre suppose que l'on « peut construire effectivement des connaissances mathématiques en faisant jouer la dialectique outil-objet au sein de jeu de cadres appropriés, grâce à des problèmes répondant à certaines conditions » (Douady, 1986, p. 9). Par le biais des programmes d'enseignement, les auteurs sont susceptibles de favoriser les jeux de cadre, et ainsi de contribuer à la « mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas » (*ibid.*, p. 11). Par exemple, en Irlande du Nord, il est demandé aux élèves de « dire l'heure en minutes après l'heure pile (5, 10, 15, 20, 25, 30) » et de « relier cette notion à "une demi-heure" et "un quart d'heure" » (*op. cit.*, p. 1). En République d'Irlande, il s'agit de « relier les graphiques aux fractions » (*op. cit.*, p. 108). Dans d'autres instructions officielles, cette relation reste implicite, mais l'enseignement des fractions dans différents domaines mathématiques est tout de même prévu. Les deux questions que nous posons dans cette recherche sont les suivantes : le fait de prévoir, dans les programmes d'enseignement, l'étude des fractions dans plusieurs cadres est-elle corrélée à de meilleures performances aux évaluations TIMSS dans le domaine des fractions ? Peut-on mettre au jour des transferts entre les différents cadres, autrement dit, les élèves peuvent-ils des réussir des items mettant en jeu

les fractions dans un certain cadre, alors que l'étude de ce dernier n'est pas prévue par les instructions officielles ?

§ 2. Les limites apportées aux techniques par le bloc technologico-théorique

La relation entre technologie et techniques peut être analysée selon deux points de vue complémentaires. D'une part, « la valence pragmatique [d'une technique] exprime son potentiel à produire des résultats » (Artigue, 2009, p. 319, note 8), c'est-à-dire que les propriétés des fractions induisent un ensemble de techniques, possédant chacune un champ d'application qui lui est propre : ce sont ces potentialités qui seront comparées (A). D'autre part, « la valence épistémique d'une technique exprime le potentiel qu'elle offre pour la compréhension des objets mathématiques qu'elle engage directement ou indirectement [...] » (*ibid.*), c'est-à-dire qu'il existe une relation entre les connaissances conceptuelles des élèves (dont les éléments technologiques constituent le pendant sous l'angle de l'analyse praxéologique) et leurs connaissances procédurales (dont les techniques constituent le pendant sous l'angle de l'analyse praxéologique). Cette interdépendance entre la maitrise du concept de fraction et la capacité des élèves à mettre en œuvre des techniques (B) est discutée, mais ces développements nous permettront de mieux comprendre les enjeux de la prise en compte des techniques dans les programmes d'enseignement.

A. Le champ d'application des techniques propres aux fractions

Dans l'analyse des potentialités offertes par une technique, nous tiendrons compte du fait que, si une technique peut présenter un caractère d'universalité dans sa capacité à résoudre des situations, sa mise en œuvre est rarement opportune pour l'ensemble de ces situations. Évidemment, il n'est pas possible de décrire le champ d'application de toutes les techniques que nous avons évoquées précédemment. Pour montrer les opportunités offertes par l'enseignement d'une ou plusieurs techniques, nous prendrons l'exemple de la comparaison de fractions de dénominateurs différents.

Pour comparer de telles fractions, la technique consistant à rechercher un dénominateur commun permet de résoudre toutes les tâches susceptibles d'être proposées aux élèves, quelles que soient les fractions en jeu. Néanmoins, l'utilisation d'une autre technique plus efficace (c'est-à-dire plus rapide et plus économe en ressources cognitives) pourra être préférable dans certains cas précis. Ainsi, si la question est de savoir quelle fraction est la plus grande entre 2/3

et 3/4, un simple dessin apportera plus facilement la réponse que la transformation des tiers et des quarts en douzièmes. En revanche, si l'on doit comparer 4/7 et 5/12, le dessin ne semble pas opportun car il est difficile de dessiner des septièmes et des douzièmes à partir de la même unité. On peut opportunément soulever l'idée que la première est supérieure à 1/2, tandis que la seconde lui est inférieure, pour en déduire que 4/7 > 5/12.

Le choix de la technique ne dépend donc pas seulement de la taille des nombres, mais également de leur organisation, des relations que l'on peut établir entre eux, etc. Il s'en suit que les élèves peuvent réussir l'ensemble des items TIMSS à l'aide d'une seule technique, ou échouer en maitrisant plusieurs techniques. Comme nous ne disposons que de la réponse de l'élève, et pas la procédure utilisée, nous étude ne traitera que de la question des opportunités offertes par les programmes d'enseignement et des nécessités de la tâche : l'enseignement précoce d'une technique permettant de résoudre un grand nombre de situations est-elle corrélée à l'obtention de scores élevés ? Ou bien l'enseignement d'une pluralité de techniques, au risque que l'élève se trompe dans le choix de la technique la plus appropriée à la situation qu'il doit résoudre, entraine-t-il de meilleures performances aux items correspondants ?

B. La relation entre les connaissances conceptuelles et procédurales

La relation entre la maitrise des procédures impliquant des fractions (par exemple, dans les activités de comparaison ou d'addition) et la compréhension du concept par les élèves est débattue. Selon certains auteurs (Byrne & Wasik, 1991, cité par Carette *et al.*, 2009, p. 30), la première contribue à enrichir la seconde. Cependant, cet enrichissement ne serait pas automatique : il supposerait une intervention de l'enseignant pour proposer aux élèves une réflexion sur le fonctionnement et les fondements des procédures utilisées. Or, dans sa recherche, Carette *et al.* (*op. cit.*), a constaté que « dans la plupart des classes de 4e et surtout 5e années, les fractions sont peu travaillées du point de vue conceptuel : l'essentiel des activités présentées aux élèves est centré sur l'acquisition de procédures (transformer en fractions équivalentes, réduire au même dénominateur, simplifier, additionner des fractions…) » (*ibid.*, p. 116). Dans d'autres études, le lien entre les deux n'apparait pas, montrant que les élèves peuvent tout à fait utiliser des procédures adaptées sans que leur compréhension du concept s'améliore, en particulier lorsque les concepts sont difficiles à saisir. Ainsi, « dans un domaine tel que la multiplication de fractions, de nombreux enfants apprennent les procédures adéquates mais semblent ne jamais comprendre les principes sous-jacents » (*ibid.*).

À l'inverse, la possibilité qu'une meilleure compréhension du concept permette aux élèves d'améliorer leur maitrise des procédures relatives aux fractions a été évoquée. Dans ce cas, « il suffirait qu'un élève maitrise parfaitement tous les aspects conceptuels de la notion de fraction pour être capable de résoudre, par simple raisonnement, les tâches qui exigent d'utiliser une procédure », et cette interaction est nommée « activation simultanée » (Byrnes & Wasik, 1991, cité par Carette *et al.*, *op. cit.*, p. 117). Pour ces derniers., de façon générale, « les résultats de [leur] étude ne semblent pas confirmer cette hypothèse, car globalement les élèves des classes expérimentales ont progressé moins que ceux des classes témoins pour résoudre des opérations et pour les simplifications » (*ibid.*). Cependant, ils concèdent que dans certains cas particuliers, un entrainement portant sur la compréhension du concept permet de réaliser des tâches qui pourraient être réussies uniquement à l'aide de connaissances procédurales. Il cite en exemple la comparaison de fractions de même numérateur, ainsi que l'addition et la soustraction de fractions de même dénominateur, indiquant que « dans ce cas, vraisemblablement, la construction de représentations mentales de la magnitude des fractions permet donc bien de répondre à certaines questions classées "procédurales" » (*ibid.*). En revanche, lorsqu'une procédure est nécessaire, par exemple pour additionner deux fractions de dénominateurs différents, l'enseignement des principes sous-jacents ne peut pas se substituer à une présentation explicite de cette procédure de résolution.

La troisième voie envisagée est « celle d'un développement itératif et interactif : il serait nécessaire d'effectuer un va et vient entre les deux types d'apprentissages afin que l'un alimente l'autre » (*ibid.*). Ce modèle a pris le nom « d'interactions dynamiques » (*ibid.*). L'hypothèse est qu'une meilleure compréhension du concept favorise, d'une part, la mémorisation des procédures, et d'autre part, l'utilisation pertinente de ces dernières dans la résolution de problèmes complexes. Sur ce point, la recherche menée par Carette a montré que « la maitrise des connaissances procédurales n'est pas suffisante pour résoudre une tâche complexe si elle n'est pas accompagnée d'une compréhension des aspects conceptuels des fractions » et qu'un moyen d'expliquer ces résultats serait de dire « qu'une bonne maitrise conceptuelle est nécessaire pour effectuer un cadrage adéquat (interprétation de la tâche), ou qu'elle contribue à décider des procédures qui seront mises en oeuvre pour tenter de la résoudre » (*ibid.*). L'analyse des possibilités offertes par chaque procédure en termes de résolution de problèmes contribue en retour à un développement de la connaissance du concept et de son champ d'application, si bien que « deux conditions [sont] nécessaires à la résolution de problèmes complexes : la

maitrise des procédures nécessaires à la résolution de tâches et la capacité des élèves à déterminer les traits pertinents nécessaires à la résolution de la tâche proposée » (*ibid.*, p. 33).

Dans notre étude, nous ne pourrons trancher sur le point de savoir dans quelle mesure les connaissances conceptuelles enrichissent les connaissances procédurales (et inversement) : de telles recherches ne peuvent être menées que dans un cadre micro-didactique. À l'échelle macro-didactique, nous décrirons la façon dont les auteurs des programmes scolaires se sont approprié ces recherches. Quels ostensifs privilégient-ils ? Plutôt des représentations visuelles des fractions susceptibles de développer chez les élèves un sens de la magnitude des fractions, ou plutôt l'acquisition de procédures fondées les propriétés numériques des fractions ? Quels liens sont tissés entre les deux ? Peut-on mettre au jour un ordre chronologique dans leur enseignement ? D'un point de vue praxéologique, ces deux voies ne peuvent pas être distinguées de façon aussi tranchée : d'une part, elles constituent toutes deux des techniques suspectibles de permettre une résolution de la tâche, et d'autre part, « l'algorithmisation de l'apprentissage » (Mercier, 1985, p. 16) peut atteindre l'une comme l'autre. Toutefois, ces deux grandes catégories de techniques seront réutilisées dans cette thèse pour caractériser les programmes d'enseignement et réaliser des comparaisons.

Conclusion de la sous-section

Dans cette sous-section, nous avons vu qu'il n'existait pas unanimité pour définir l'ensemble des facettes du concept de fraction. Ce dernier recouvre des tâches très diverses, dans des domaines variés. Cela est dû, non seulement à la quantité de situations qui peuvent être potentiellement résolues à l'aide des nombres rationnels, et donc des fractions, mais également à l'écriture spécifique de ces dernières, particulièrement adaptée pour mettre en relation deux quantités. Au-delà des divergences théoriques, notre but premier est de comprendre comment, dans les instructions officielles, les différentes significations du concept sont représentées. Nous avons retenu la répartition adoptée par Behr *et al.* (1983), qui séparent le concept de fraction en cinq sous-constructions (partie-tout, rapport, opérateur, quotient et mesure). La place centrale qu'y occupe la fraction partie d'un tout nous a semblé particulièrement intéressante pour analyser l'enseignement initial des fractions : cette conception apparait-elle, dans les instructions officielles, en premier ? A-t-elle une place prépondérante dans les injonctions ministérielles, et si oui, jusqu'à quel stade de la scolarité ? Dans quels domaines des mathématiques fait-elle l'objet d'un apprentissage ? Plus largement, nous chercherons à comprendre quelles sont les conceptions induites par les différents types de

tâches présents dans les programmes, et à comparer la variété des sous-constructions supposées être enseignées dans chaque pays.

La relation entre le concept de fraction et les techniques utilisées par les élèves a également été analysée. Nous avons conclu que le champ d'application de certaines techniques était plus large que d'autres, mais que cette étendue n'était pas un gage d'efficacité, d'autres techniques avec un champ d'application beaucoup plus restreint pouvant faciliter la résolution de la tâche. Nous avons distingué les techniques faisant appel aux connaissances conceptuelles des élèves, à travers des représentations visuelles de la fraction, et celles fondées sur leurs connaissances procédurales, le plus souvent à partir des propriétés des fractions. Dans l'analyse que nous ferons des programmes d'enseignement, nous comparerons les opportunités offertes dans ce domaine aux enseignants et aux élèves de chaque pays. Dans l'analyse que nous ferons des résultats des élèves aux évaluations TIMSS, nous chercherons une corrélation entre la présence de techniques dans les curriculums et la capacité des élèves à réaliser les tâches correspondantes.

Conclusion de la section consacrée à la présentation des aspects praxéologiques de notre recherche

L'analyse du « couple technologie/théorie » relatif au concept de fraction nous a permis « de reconstruire l'ensemble des techniques de la praxéologie, c'est-à-dire le "savoir-faire" correspondant » (Bosch et Chevallard, 1999, p. 87) et de relier les tâches susceptibles d'être proposées au cours de l'enseignement à des significations de cette notion. Certes, nous avions déjà relevé, de façon pragmatique, ces techniques et ces tâches dans les instructions officielles. Cependant, la recherche d'un lien avec des éléments technologico-théoriques nous a permis de les catégoriser et de formuler les questions d'ordre didactique que nous posons dans cette recherche. Le terme de savoir peut maintenant être élargi : plus que comme l'association d'une technologie et d'une théorie, il doit être considéré comme « une organisation praxéologique particulière, douée d'une certaine "générativité" lui permettant de fonctionner comme appareil de production de connaissances, c'est-à-dire de nouvelles praxéologies » (*ibid.*). C'est ainsi que cette praxélogie singulière qui nous avons décrite à propos des fractions, ce savoir au sens large, nous conduira à examiner et comparer des praxéologies spécifiques qui ont été générées dans chacun des pays de notre corpus. Pour autant, le travail de transposition des auteurs des programmes, consistant à élaborer une praxéologie par nécessité plus restreinte que celle que nous avons décrite, soulève de nouvelles questions : quelles sont les caractéristiques des

praxéologies élaborées à ce niveau de l'institution ? Sur quel fondement les choix sont-ils réalisés ? Peut-on faire apparaitre une certaine cohérence dans ces choix ? La deuxième section sera donc consacrée à une description plus précise du phénomène de transposition.

Section II. Un phénomène transpositif

Comme l'indique Bosch et Chevallard, « ce sont fréquemment les besoins de la pratique, c'est-à-dire les besoins de techniques, qui sont à l'origine des praxéologies » (*ibid.*). Outre le savoir relatif aux fractions, la prise en compte, par les législateurs, des besoins des enseignants et des élèves s'avère nécessaire pour assurer la possibilité d'une transmission effective du savoir au sein des systèmes didactiques. Plus largement, les contraintes identifiées dans le passage d'un savoir savant à un savoir à enseigner ont été décrites comme faisant partie du phénomène de « transposition didactique ». Certaines caractéristiques de cette tranposition externe, c'est-à-dire réalisée à l'occasion de la rédaction des programmes d'enseignement, apparaissent universelles. Nous les analysons dans la sous-section I. Au contraire, certaines d'entre elles sont contigentes : elles sont liées aux institutions dans lesquelles elles sont nées. Cette écologie de la transposition (au sens où l'on étudie les conditions dans lesquelles les praxéologies scolaires naissent, évoluent et meurent à ce niveau de l'institution) fera l'objet de la sous-section II.

Sous-section I. Les caractéristiques convergentes de la transposition didactique externe

Les programmes d'enseignement des pays de notre corpus présentent des points communs. Ils témoignent de ce que la transposition didactique externe est réalisée selon des caractéristiques qui présentent un certain degré d'universalité. Cela est dû au fait que l'on s'adresse des enseignants dont l'objectif est le même partout : permettre aux élèves d'acquérir des concepts mathématiques. Le métier de professeur requiert de s'appuyer sur des directives présentant des caractéristiques incontournables, que nous présentons dans le paragraphe consacré à l'effectivité de la transposition (§ 1). Toutefois, « lorsque les programmes sont fabriqués, signés, et prennent force de loi, un autre travail commence : celui de la transposition didactique interne » (Chevallard, 1982, p. 16). Or, « quelques-unes des plus belles trouvailles de la noosphère, à ce jeu-là ne résistent pas » et « l'ambitieuse théorie des opérateurs, en peu de temps, est étrillée par le fonctionnement didactique », tandis que « d'autres éléments, au contraire, se fondent dans le paysage comme si, de toujours, ils avaient été là » (*ibid.*). Notre objectif est de contribuer à lever le voile sur une partie de ce que Chevallard appelle les « mystères de l'ordre didactique – dont, à ce jour, nous savons encore si peu de choses – »

(*ibid.*), en cherchant à mieux comprendre la relation qui unit les praxéologies scolaires établies par les législateurs, et les praxéologies que semblent acquérir les élèves à travers ce qu'ils produisent dans les évaluations TIMSS. Nous considérons donc la tranposition didactique externe comme incomplète (§ 2) parce qu'elle n'a pas vocation à exister pour elle-même : elle doit être complétée par la transposition didactique interne.

§ 1. Une transposition effective

La transposition didactique externe « représente le processus de transformation, d'interprétation et de réélaboration didactique du savoir scientifique constitué dans différents domaines de connaissance » (Paun, 2006, point 2[1]), en ce qui concerne notre travail, celui des fractions. Elle prend le nom de « tranposition curriculaire externe » (*ibid.*, point 9), sous la plume de cet auteur, directeur du département des sciences de l'éducation de l'université de Bucarest, pour désigner la sélection « de ce qu'il faut transmettre, de manière organisée, aux élèves à l'école », c'est-à-dire du contenu des praxéologies scolaires élaborées par le législateur. Néanmoins, ces praxéologies, pour être concrétisées dans un texte ayant un caractère normatif, doivent revêtir certaines caractéristiques formelles. Ce travail d'écriture constitue une part du travail de transposition didactique externe, complémentaire à celui de la transposition curriculaire. Pour répondre aux besoins des enseignants et des élèves, ils sont rédigés selon des règles qui restent informelles (elles ne sont jamais évoquées par les auteurs), mais que la théorie anthropologique du didactique a mises au jour. Ces règles concernent le régime didactique interne des savoirs (Mercier, 2002, p. 143), c'est-à-dire les caractéristiques liées à leur reformulation (A), ainsi que le régime didactique externe des savoirs (*ibid.*), c'est-à-dire leur adaptation aux contraintes posées par leur enseignement (B).

A. Le régime didactique interne des savoirs

Lors de l'appréhension du savoir scientifique, les auteurs des programmes scolaires mettent principalement en œuvre deux processus : un processus de désyncrétisation et un processus de dépersonnalisation (Chevallard, 1985, p. 58). Le travail de désyncrétisation

1. Cet article, consulté sur le réseau CAIRN, était partagé en 55 points, la pagination orginale n'apparaissant pas.

consiste en « la délimitation de savoirs partiels, chacun s'exprimant dans un discours (fictivement) autonome » (*ibid.*, p. 59), ce qui masque le cheminement qui a permis son élaboration et les hésitations ou débats qui entourent encore la notion. Le travail de dépersonnalisation consiste à détacher les savoirs « des individus et des groupes qui le produisent ou s'en servent » (Perrenoud[1], 1998, p. 489). Il est à noter que les phénomènes de désyncrétisation et dépersonnalisation sont immédiatement suivis d'une resyncrétisation des savoirs (puisque ceux-ci sont intégrés à un ensemble possédant une cohérence propre : le curriculum) et de leur repersonnalisation (puisque les auteurs, ou plus largement l'institution, assurent la production de ces savoirs à enseigner). À la suite de Chevallard, d'autres auteurs ont proposé des caractéristiques du savoir résultant du processus de transposition externe. Ainsi, pour Paun, « une première transformation significative, imposée par les restrictions de type didactique, c'est la simplification (ou la présentation simplifiée) du modèle scientifique de référence » (*op. cit.*, point 22). L'un des objectifs de notre recherche est de montrer les transformations que subissent les savoirs au moment de la transposition en raison des caractéristiques de l'objet curriculaire : la désyncrétisation entraine-elle une réorganisation des blocs pratico-techniques et technologico-théoriques ? Quelle est l'incidence de la présentation simplifiée évoquée par Paun sur le contenu des praxéologies scolaires relatives aux fractions ? L'analyse du contenu des programmes et leur comparaison avec les références théoriques que nous avons décrites permettra d'apporter des éléments de réponse à ces questions.

B. Le régime didactique externe des savoirs

Le savoir tel qu'il est transposé pour être utilisé dans un cadre scolaire doit également répondre à des exigences de programmabilité, de publicité et de contrôle social des apprentissages (Chevallard, *op. cit.*, p. 58). La nécessité d'une programmation des enseignements « tient au fait qu'un savoir étendu ne peut être assimilé en une fois et passe par un chemin de formation balisé » (Perrenoud, *op. cit.*, p. 490). Cette organisation temporelle des apprentissages suppose non seulement l'établissement d'un ordre des enseignements, mais également leur implantation dans le temps, au cours d'une année scolaire, d'un semestre parfois, ou d'un cycle d'enseignement composé de plusieurs années scolaires. Elle sera ensuite affinée,

1. Ce sociologue suisse a beaucoup travaillé sur la question des curriculums réels et cachés. Si son propos ne peut éclairer des questions strictement didactiques, il apparait pertinent pour décrire le mécanisme général de la transposition et ses limites.

dans les établissements scolaires, par les équipes pédagogiques ou par les professeurs. La publicité du savoir « trouve son achèvement dans les référentiels et les programmes qui permettent à chacun de saisir sur quoi porte l'intention d'instruire » (*ibid.*). Le public visé par cette publicité n'est pas constitué seulement des enseignants : les parents d'éléves, et plus largement tout un pan de l'électorat intéressé par les questions d'éducation, vont avoir connaissance du contenu des programmes, directement ou indirectement. Bien qu'il soit difficile de dire dans quelle mesure cela joue sur la transposition des savoirs, nous pensons que la réception des textes par l'opinion publique est un facteur pris en compte par les législateurs. La nécessité du contrôle social des apprentissages est matérialisée par l'injonction faite aux professeurs d'évaluer les acquis de leurs élèves. Or, la nature de ces acquis que l'institution scolaire mesure a beaucoup évolué à la fin du XX^{e} siècle et au début du XXI^{e} siècle. Ainsi, dans l'Union européenne, la stratégie de Lisbonne, adoptée en mars 2002 lors d'un conseil européen, doit conduire les États membres à « adopter un cadre européen définissant les nouvelles compétences de base dont l'éducation et la formation tout au long de la vie doivent permettre l'acquisition : compétences en technologies de l'information, langues étrangères, culture technologique, esprit d'entreprise et aptitudes sociales » (Rey, 2008, p. 2). La notion de compétence a alors été mise en lumière, et reprise dans les législations internes (nous pensons, par exemple, en France, au *Socle commun des connaissances et des compétences*, issu de la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'École du 23 avril 2005). Sans entrer dans les débats qui entourent la notion, tant du point de vue de son utilité que de sa définition, « on s'accorde souvent sur l'idée que l'élève compétent est celui qui est capable de résoudre des tâches complexes et inédites qui demandent le choix et la combinaison de procédures apprises » (d'après Carette, 2009, cité par Rey, 2012, p. 2), si bien que « lorsqu'on parle de compétences comme nouveau paradigme éducatif, on se réfère plutôt à la possibilité pour un individu de mobiliser de manière intériorisée un ensemble intégré de ressources, en vue de résoudre une famille de situations-problèmes » (d'après Roegiers, 2004, cité par Rey, 2008, p. 4). Sous l'angle praxéologique, il y a donc un glissement du centre de gravité des instructions officielles de la technologie vers les types de tâches. C'est l'idée développée par Legendre, 2008, cité par Rey (*ibid.*) : « la prise en compte des compétences dans le monde de la formation dénote de façon plus générale le passage progressif d'une centration sur les savoirs, considérés comme préalables à l'activité et souvent abordés de manière dé-contextualisée, à une prise en compte des activités dans lesquelles ces savoirs s'incarnent ». Dans notre recherche, nous montrerons que les types de tâches sont bien au cœur des développements curriculaires, et que cela n'est

pas sans incidence sur le travail de transposition qui reste à fournir au sein des systèmes didactiques.

§ 2. Une transposition incomplète

Nous allons confronter d'une part, les scores obtenus par les élèves aux évaluations TIMSS, et d'autre part, le contenu des programmes d'enseignement. Or, des recherches ont déjà établi que le curriculum officiel ne correspondait que partiellement à ce que les élèves apprenaient : les pratiques professionnelles des enseignants viennent modifier la portée des programmes d'enseignement, tout comme l'activité des élèves. Il existe donc des savoirs enseignés, distincts des savoirs à enseigner, qui correspondent à ce que les enseignants mettent en place de façon concrète dans leur classe (A), et des savoirs appris et retenus, distincts des savoirs enseignés, qui correspondent à ce que les élèves ont acquis de façon effective (B). En décrivant l'un et l'autre, nous montrerons que la transposition didactique externe a un impact limité sur les performances du système éducatif, la recherche que nous menons ayant pour but de décrire ces limites de façon plus précise à propos de la maitrise du concept de fraction par les élèves.

A. Savoir enseigné

Les programmes d'enseignement sont insuffisamment précis pour être utilisés sans transformation dans la classe. L'enseignant doit réaliser un travail de transposition, directement à partir des directives officielles ou indirectement, par exemple à travers l'utilisation d'un manuel scolaire. Le savoir enseigné (aussi appelé curriculum réel) « représente le résultat des transformations subies par le curriculum formel, dans son parcours du professeur à l'élève et à l'intérieur du processus d'enseignement » (Paun, *op. cit.*, point 33). Comme pour le travail de transposition effectué par le législateur, l'enseignant est pris entre les exigences posées par l'institution qui se trouve, d'un point de vue hiérarchique au-dessus de lui, et la nécessité de tenir compte des besoins des utilisateurs à un instant donné, qui se traduit par la mise en place d'un « contrat didactique » (Brousseau, 1998, p. 61-62) entre le professeur et ses élèves. La nécessité de rencontrer une adhésion suffisante de la part des élèves oblige l'enseignant à prendre en compte leur rythme de travail, la dynamique qui s'instaure dans la classe face à telle ou telle forme de travail, et les acquis qu'ils sont susceptibles d'atteindre en fonction de leurs connaissances au début de l'apprentissage. C'est dire que « le double processus de contextualisation et de personnalisation [affecte] inévitablement aussi le travail de l'enseignant

lorsqu'il prend la responsabilité d'extraire des manuels et autres documents didactiques les tâches, les problèmes, les questions jugés aptes à soutenir son action enseignante et partant l'action apprenante des élèves » (Schubauer-Leoni et Leutenegger, 2005, p. 423). L'une des différences fondamentales entre la transposition externe et la transposition interne provient du fait que dans le second cas, les savoirs établis par les didacticiens ont déjà subi des transformations, et que les enseignants se trouvent pris entre au moins trois pôles susceptibles d'influencer leur activité de transposition : les programmes d'enseignement, leurs élèves et l'état de leurs connaissances didactiques (en l'occurrence à propos de la notion de fraction). Pour être complet, il faudrait prendre en compte d'autres facteurs tels que « la dimension sociale des pratiques enseignantes » qui induisent que « l'enseignant [dépend] de ses collègues, des autres professionnels et des parents d'élèves » (Roditi, 2011, p. 104) et qui complexifient encore le sujet (la transposition didactique interne n'est certainement pas effectuée de la même façon dans des établissements aux caractéristiques socio-économiques différentes). Les questionnaires TIMSS apportent quelques indications sur ce point. La transposition didactique externe est donc incomplète, non seulement parce qu'elle rend nécessaire un second travail de transposition, mais également parce qu'elle ne fournit que des éléments de praxéologies. Or, si les programmes d'enseignement fournissent principalement des types de tâches, alors ils laissent aux enseignants la responsabilité de construire (ou reconstruire) dans des conditions qu'il convient d'analyser, les savoirs et savoir-faire qu'ils entendent transmettre à leurs élèves. L'un de nos objectifs est de donc de mieux cerner la place laissée aux pratiques enseignantes par les auteurs des curriculums en raison de leur activité de tranposition.

B. Le savoir appris et retenu

Le savoir appris et retenu (que l'on appelle également le curriculum réalisé) « est constitué d'un ensemble d'expériences éducatives négociées. Il est le résultat des multiples négociations inhérentes à la relation professeur-élève et représente ce qu'on pourrait appeler un curriculum personnalisé, exprimant le rapport particulier de l'élève au savoir scolaire » (Paun, *op. cit.*, point 34). Ce savoir, qui est mesuré dans les tests TIMSS, se distingue du savoir à enseigner : tout ce qui est enseigné n'est pas appris, et tout ce qui est appris n'est pas enseigné. Il dépend donc partiellement du travail de tranposition réalisé par le professeur, de sa capacité à transmettre des savoirs (c'est-à-dire de ses qualités dans les domaines didactiques et pédagogiques). Il est lié également à des facteurs qui tiennent aux particularités du système éducatif (nombre d'heures de cours, caractéristiques sociologiques des élèves, quantité de

travail fourni en dehors du temps scolaire, etc.), qui rendent difficiles les travaux de comparaison internationale. De façon plus fine que nous ne l'avons fait dans le chapitre précédent, il nous faudra donc, pour pouvoir déterminer l'incidence du contenu des instructions officielles sur les résultats des élèves, mesurer l'hétérogénéité des participants sur ce point. Pour ce faire, nous nous appuierons sur les questionnaires TIMSS, qui fournissent de nombreuses informations sur les élèves, les parents et les enseignants.

Conclusion de la sous-section

Sur la tranposition didactique externe pèsent des contraintes qui tiennent à la fois au régime didactique interne des savoirs (désyncrétisation et dépersonnalisation) et à leur régime externe (programmabilité, publicité et contrôle social des apprentissages). Ces contraintes induisent une écriture spécifique du curriculum : les praxéologies sont simplifiées et les auteurs décrivent surtout des types de tâches, ce qui peut s'expliquer par l'instauration de la notion de compétence comme « paradigme éducatif » (Rey, 2008, p. 4) : le cœur des apprentissages consiste en la confrontation à des types de tâches formant des familles de situations, les techniques et les savoirs au sens restreint faisant partie de l'ensemble des ressources permettant leur réalisation. Nous préciserons la nature de la relation entre les contraintes d'écriture que nous venons d'évoquer et la transposition des praxéologies relatives aux fractions. Nous montrerons comment la tranposition didactique externe telle qu'elle est effectuée chez les onze participants de notre étude implique une reconstruction partielle des praxéologies par les enseignants, et contribue, parmi d'autres facteurs liés aux caractéristiques de la tranposition interne, à un fléchissement de la corrélation entre le contenu des programmes d'enseignement et les résultats des élèves.

Sous-section II. L'écologie de la transposition didactique externe

S'il existe des invariants dans la réalisation de la transposition didactique externe, nous considérons tout de même les praxéologies scolaires qui en résultent comme spécifiques à une société donnée : tous les participants ne sont pas régis par les mêmes programmes d'enseignement, et les conditions dans lesquelles ces textes sont mis en œuvre diffèrent également, si bien que les savoirs et savoir-faire maitrisés par les élèves, mesurés de façon synthétique, peuvent être très divers d'un pays à l'autre. Ainsi que l'indique Chevallard, « toute technologie, toute technique ou toute théorie a […] pour premier mérite d'exister en un cadre institutionnel donné » (2002b, p. 3). Cette diversité nous amène à poser des questions d'ordre

écologique : « d'où viennent ces nouveaux objets [à enseigner] ? Comment sont-ils arrivés là ? Quelles interrelations avec quels autres objets y nouent-ils ? Et, aussi, surtout : pourquoi sont-ils arrivés jusque-là ? » (Chevallard, 1994, p.142) En d'autres termes, il s'agit de s'interroger sur « qu'est-ce qui existe et pourquoi ? Qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Quels objets sont poussés à vivre, ou au contraire empêchés de vivre, sous tel ensemble de conditions ? » (Artaud, 1997, p. 111) Pour répondre à ces questions, la théorie anthropologique du didactique suppose qu'à chaque niveau de l'échelle de codétermination didactique présentée en introduction, les institutions posent un ensemble de contraintes qui enserrent l'activité des institutions qui leur sont subordonnées. Plus précisément, elle « se voue à étudier les conditions et contraintes sous lesquelles les praxéologies se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer, à dépérir, à disparaître, à renaître, etc., au sein des institutions humaines » (Chevallard, 2007, p. 14). Notre objectif principal est de comprendre dans quelle mesure les praxéologies maitrisées par les élèves (telles qu'elles apparaissent à travers les évaluations TIMSS) dépendent des praxéologies élaborées par les auteurs des programmes d'enseignement. Cependant, la comparaison de ces derniers suppose une réflexion sur les spécificités locales qui entourent la transposition didactique externe dans chacun des pays de notre corpus. C'est pourquoi nous allons présenter la manière dont les instructions officielles ont été rédigées dans ces territoires (§ 1). Le contexte scientifique dans lequel elles ont été adoptées nous parait également décisif pour éclairer leur contenu. Nous évoquerons donc les principaux travaux sur lesquels ont pu s'appuyer les législateurs (§ 2).

§ 1. Le processus de rédaction des programmes d'enseignement

Le contenu des programmes d'enseignement est défini par les auteurs selon une procédure qui vise à contrôler le travail qu'ils effectuent. Ce processus étant le garant de la qualité du texte qui sera imposé aux professeurs, il nous a semblé qu'il participait de la construction des praxéologies scolaires, en impliquant de façon plus ou moins importante des didacticiens susceptibles d'apporter un éclairage sur la variété des tâches, techniques et techonologies qui pourraient s'y trouver. Nous n'envisageons pas de comparer de façon détaillée les procédures d'adoption des programmes : nous souhaitons simplement nous assurer d'une certaine homogénéité de ces processus, pour éviter que les différences observées entre les instructions officielles puissent être attribuées au statut (praticiens, didacticiens) des personnes les ayant rédigées. Le résultat de ce processus peut par ailleurs être influencé par la volonté des auteurs de mettre en avant tel ou tel fragment praxéologique. Nous allons donc

présenter successivement les procédures d'adoption des instructions officielles (A) et l'incidence que peuvent avoir les intentions des auteurs des programmes sur leur appréhension par les enseignants (B).

A. Les procédures d'adoption des programmes

Nous allons, dans la mesure de la disponibilité des informations, décrire ce processus pour les pays qui composent notre corpus. Comme pour la présentation des instructions officielles, cette description aurait pu figurer dans les annexes, car elle ne constitue pas le cœur de notre recherche. Néanmoins, nous avons considéré qu'elle était indispensable à la compréhension de notre propos, et notamment de la synthèse qui suit ces développements. Celle-ci nous permettra de conclure sur le point de savoir si ces procédures sont suffisamment homogènes et si les choix didactiques effectués peuvent être considérés comme suffisamment documentés. Les références qui figurent dans la description de chaque processus proviennent des sites sur lesquels nous nous appuyés pour rédiger cette description (ce sont, sauf mention contraire, des sites institutionnels, c'est-à-dire rattachés à un organe du pouvoir exécutif).

En Angleterre[1], c'est le ministre de l'Education qui prend la décision de changer les instructions officielles, comme l'a fait *Rt. Hon.* Michael Gove, en janvier 2011, pour les programmes dont la mise en œuvre a débuté trois ans plus tard. Il décide également des grandes orientations qu'il entend donner à ce texte, ainsi que de la procédure qui devra être suivie pour son élaboration. Ainsi, pour le curriculum que nous venons d'évoquer, plusieurs grandes étapes. D'abord, le ministère a défini les matières qui devaient continuer à faire partie des programmes d'enseignement. Ensuite, un travail d'analyse des recherches existantes, y compris internationales, ainsi que des ateliers de travail et des réunions avec des experts, des universitaires, des enseignants et d'autres partenaires, a permis de construire une première version du nouveau texte. Un questionnaire a dans le même temps été publié pour recueillir l'avis des professeurs, à propos des changements qui devaient être apportés au curriculum. Enfin, le ministère a lancé une consultation publique portant sur la première version des textes, avant d'en publier une version définitive environ une année avant leur mise en œuvre dans les classes.

En Corée du Sud[2], le curriculum est défini par les services du ministère de l'Éducation, qui en assure périodiquement la mise à jour de façon à « refléter les nouvelles exigences en matière

1. Pour une plus ample connaissance de ces procédures, le lecteur pourra consulter les sites suivants : https://www.gov.uk/government/organisations/qualifications-and-curriculum-development-agency (pour les programmes antérieurs à 2014) et https://www.gov.uk/government/organisations/standards-and-testing-agency (pour les programmes de 2014).

2. http://english.moe.go.kr/sub/info.do?m=0105&s=english.

d'éducation, les nouveaux besoins d'une société en mutation et les nouvelles frontières des disciplines universitaires ». Ni la composition des équipes chargées de la rédaction des programmes, ni la procédure suivie pour organiser la consultation des différents partenaires n'ont à notre connaissance été rendues publiques, de façon officielle, sur le site du ministère. En revanche, il existe des groupes de réflexion tel que le *Korean Educational development Institute* (KEDI) qui contribuent de façon plus transparente à nous éclairer quant aux problématiques qui traversent la société sud-coréenne en matière d'éducation.

En Floride[1], jusqu'en 2006, les programmes étaient élaborés au niveau de l'État, l'éducation n'étant pas une compétence fédérale. C'est donc le Département de l'Éducation qui était chargé de rédiger les textes, puis de les faire appliquer dans les écoles de Floride. C'est toujours le cas actuellement, mais l'instauration de normes facultatives au niveau fédéral ont quelque peu changé le processus de rédaction. En effet, l'État de Floride les a reprises mot pour mot en ce qui concerne les fractions. C'est donc à l'échelle supérieure qu'il faut aller analyser le processus d'établissement de ces normes. Ainsi, aux États-Unis[2], les *Common Core Standards* ont été adoptés après un processus qui s'est étalé entre l'été 2009 et juin 2010. Des groupes de travail ont été formés, en fonction de la matière et du niveau de classe envisagés. Des chercheurs et des enseignants désignés par la NGA et la CCSSO ont participé à ces sessions. Après la publication d'une première version des nouvelles normes auprès d'enseignants choisis pour les tester, plus de mille commentaires ont été reçus et analysés à des fins d'ajustement. Les États et un groupe d'universitaires ont apporté un nouveau point de vue sur le travail jusque là effectué. Enfin, après une publication sur un site dédié et la prise en compte des observations fournies par le public, un comité de validation a défini le contenu du texte définitif, en s'appuyant sur des critères établis *a priori* (« reflétant les connaissances de base et les compétences en ELA et en mathématiques que les étudiants doivent être prêts pour le collège et la carrière, conviennent en termes de niveau de clarté et de spécificité, comparable aux attentes des autres grandes nations, informé par la recherche disponible ou la preuve, le résultat de processus qui reflètent les meilleures pratiques pour le développement de normes, un point de départ solide pour l'adoption de normes de base communes interétatiques, une base solide pour le développement éventuel d'évaluations fondées sur des normes »).

En France[3], la décision de changer les instructions officielles relève du ministre de l'Éducation nationale, qui élabore avec ses services une « lettre de cadrage » qui « trace les grandes orientations et les principaux axes du nouveau programme, avec le souci de garantir la validité scientifique des contenus ainsi que l'amélioration des cohérences verticales (différents niveaux d'enseignement) et horizontales (diverses disciplines) des programmes ». Des experts sont nommés pour rédiger les nouveaux programmes, avec à leur tête un universitaire ou un inspecteur général de l'Éducation nationale. Cette

1. Pour la partie activités et évaluations, voir http://www.cpalms.org/CPALMS/about_us.aspx et pour la partie consacrée aux programmes proprement dits, voir http://www.fldoe.org/academics/standards/subject-areas/math-science/mathematics/.

2. http://www.corestandards.org/about-the-standards/development-process/.

3. Voir à ce sujet, pour les programmes de 2008, http://eduscol.education.fr/cid46462/elaboration-d-un-programme.html, et pour les programmes de 2015, http://www.education.gouv.fr/cid75495/le-conseil-superieur-des-programmes.html.

équipe est composée de personnes possédant des compétences diverses (didacticiens, enseignants, formateurs et inspecteurs) et la coordination de leur travail est assurée par le bureau des programmes d'enseignement de la direction générale de l'Enseignement scolaire. Au cours du processus, les acteurs concernés par la mise en œuvre du texte (les enseignants à travers leurs syndicats et plus directement à travers une consultation, les parents d'élèves à travers leurs représentants, les maisons d'éditions) sont invités à donner leur avis. Avant publication, d'autres organes institutionnels sont consultés, comme le Conseil supérieur de l'éducation ou le Haut Conseil de l'éducation. La mise en œuvre des nouveaux programmes est confiée quant à elle à la DGESCO, qui « pilote la mise en œuvre des actions de formation continue qui s'y rapportent, actions mises en place sous la responsabilité des recteurs » et « dirige le cas échéant la publication de ressources pédagogiques pour faire la classe proposées par l'Inspection générale ». Pour l'élaboration des instructions officielles de 2015, la procédure a été légèrement différente en raison de la création du Conseil supérieur des programmes. Celui-ci « émet des avis et formule des propositions » sur le contenu du curriculum, et forme les Groupes d'élaboration des projets de programmes qui comportent nécessairement, outre les experts sollicités, des enseignants « susceptibles d'apporter des avis fondés sur leur expérience professionnelle ». Avant publication d'un nouveau texte, une large consultation des enseignants doit être organisée sous l'égide de la DGESCO.

À Hong-Kong SAR[1], il existe un organe spécifique au sein de l'exécutif qui traite des questions liées au curriculum. Il s'agit du Conseil de développement du curriculum (*Curriculum Development Council*) dont les membres sont nommés par le gouverneur de la Région administrative spéciale de Hong Kong. Cet organe a un rôle consultatif auprès du gouvernement, et forme une structure à deux niveaux : au sommet, le Conseil de développement du curriculum et son comité permanent, et à la base, les comités et les comités fonctionnels de la zone d'apprentissage clé (UCK). Une « certaine flexibilité est laissée à chaque comité du Conseil de développement du curriculum pour constituer ses propres comités *ad hoc* afin de réaliser des tâches spécifiques en fonction des besoins ». Lors de la formation de cette structure, l'un des objectifs était « de permettre au Conseil de développement du curriculum de mieux répondre aux besoins actuels et futurs des écoles et d'accroître les opportunités, pour les enseignants en exercice, de participer activement à toutes les étapes du processus d'élaboration des programmes ».

En Irlande du Nord[2], le CCEA (C*ouncil for the Curriculum, Examinations and Assessment*) est un organe consultatif qui dépend du ministère de l'Éducation. Outre sa mission de développement de ressources pédagogiques (tant pour l'information du public que pour la mise en œuvre des instructions officielles dans les classes), son rôle est notamment « d'étudier tous les aspects des programmes, des examens et des évaluations des écoles subventionnées et des collèges d'enseignement complémentaire » et « de réaliser des consultations statutaires sur les propositions relatives à la législation », ainsi que de « conseiller le ministère de l'Éducation sur les questions relatives aux programmes, aux évaluations, aux examens et aux qualifications externes ». Si les douze membres que comprend le Conseil, ainsi que son président, sont nommés de façon discrétionnaire par l'exécutif, ils doivent cependant être représentatifs

1. http://cd1.edb.hkedcity.net/cd/cdc/en/index.html.

2. http://ccea.org.uk/about_us.

des partenaires du ministère, aussi bien dans l'éducation que dans l'industrie et le commerce. Des évaluateurs du gouvernement (en anglais) font également partie de ce Conseil.

En Ontario[1], il est intéressant de noter que le processus d'élaboration des programmes est précédé d'une « d'une analyse comparative du curriculum de l'Ontario par rapport à ceux de l'ensemble du Canada et du monde entier ». De plus, ce sont des équipes d'experts qui s'occupent de la rédaction du texte. Si des groupes de discussion et des consultations sont organisés, la description du processus de révision met moins en avant qu'ailleurs la participation des praticiens. Après avoir recueilli des commentaires formulés par le biais d'entretiens ou par Internet, et une révision finale du texte par des personnes spécifiquement désignées à cet effet, celui-ci est publié. Le ministère de l'Éducation propose ensuite du matériel pédagogique et met en place des sessions de formation afin de s'assurer d'une interprétation commune des modifications effectuées.

Au Québec, les programmes de 2001 ont pour origine diverses conférences et séminaires qui se sont déroulés dans les années 1990. Ainsi, ils font référence, en préambule, aux travaux du groupe *Préparer les jeunes au 21e siècle* (1994), qui « insistait sur les grandes tendances dont il faut tenir compte : internationalisation, mondialisation, explosion des connaissances, développement accéléré des technologies et complexification de la vie en société » et « définissait les grands domaines d'apprentissage devant constituer la trame d'un curriculum scolaire, dans lequel il incluait des compétences générales liées à des méthodes et des savoir-faire intellectuels ». Ces orientations ont été précisées dans un document intitulé *L'école, tout un programme* (1997), incluant les remarques formulées par un *Groupe de travail sur la réforme du curriculum*, et ont constitué le fondement des instructions officielles actuelles. C'est ce qui a fait dire au ministre d'État à l'Éducation et à la Jeunesse que celles-ci « s'appuient sur les plus récentes recherches menées en Occident, aussi bien dans le domaine de l'éducation que dans celui de l'apprentissage ». Pour autant, les remarques des professeurs ont été prises en compte, puisque « ce document est l'aboutissement des efforts conjugués de plus de 500 personnes venant du milieu scolaire, majoritairement des enseignantes et des enseignants ». D'ailleurs, ces interventions ont conduit à simplifier la version initiale du texte. Si les chercheurs et les praticiens ont chacun contribué à la rédaction des programmes d'enseignement, ce sont les services du ministère qui coordonnent l'ensemble et prennent une décision de nature politique lorsque les avis des uns et des autres s'avèrent contradictoires.

En République d'Irlande[2], c'est le Conseil national des programmes et de l'évaluation (NCCA) qui traite des questions relatives au curriculum, et qui définit en particulier les modifications qu'il doit subir. Il s'agit d'un groupe constitué au sein du ministère de l'Éducation. Il comporte vingt-cinq membres, nommés par le ministre de tutelle pour un mandat de trois ans. Ils sont représentatifs des partenaires du ministère, que ce soit « dans l'éducation, l'industrie et les intérêts syndicaux, les organisations de parents et d'autres intérêts éducatifs ». Le ministère de l'Éducation lui-même est représenté par un membre, tout comme le ministère de la Jeunesse. Le Conseil s'appuie sur les travaux de trois groupes de travail permanent, représentatifs également de la diversité des partenaires du

1. http://www.edu.gov.on.ca/revisionducurriculum/process.html.

2. https://www.ncca.ie/en.

ministère, et d'autres groupes de développement en fonction des besoins. Dans le but de s'assurer de la cohérence des programmes d'enseignement, le Conseil est compétent depuis le cycle de la petite enfance jusqu'au cycle secondaire. Il coordonne les travaux de groupes plus réduits, qui traitent d'un domaine plus spécifique à partir d'un cahier des charges. Ils ont l'occasion de « discuter de questions importantes au fur et à mesure qu'elles émergent dans chaque secteur et d'établir des liens avec les développements réalisés dans d'autres secteurs ». Les groupes de travail sont quant à eux chargés de « fournir aux équipes permanentes une base solide, représentative et adaptée à leurs besoins dans les domaines ou matières du programme ».

À Singapour[1], il existe un bureau de planification et de développement du curriculum dont l'objectif est de définir des programmes d'enseignement qui « correspondent aux besoins de la nation, des communautés et des individus ». Les membres de ce bureau sont chargés non seulement de la rédaction des instructions officielles, mais également de superviser leur mise en œuvre et de proposer des modes d'évaluation correspondant aux buts définis. Par ailleurs, l'une de leurs attributions consiste à produire et approuver du matériel pédagogique. Tous les six ans, de nouveaux programmes sont publiés, et leur préambule indique les objectifs de ce renouvèlement.

Dans le Taipei chinois[2], l'accent est mis sur la mise en œuvre des programmes plutôt que sur leur rédaction dans le cadre d'un effort de décentralisation. Lors de la rédaction des nouveaux programmes, le ministère a distingué trois phases : une phase de formulation, une phase de construction, et une phase d'expérimentation. Elles ne doivent pas se succéder : certes, elles seront menées selon un calendrier différent, mais elles dérouleront, dans une certaine mesure, simultanément. Les enseignants et directeurs d'école sont impliqués dans cette réforme, puisque les documents cadres indiquent que celle-ci « ne devra pas entrainer trop d'heures de travail supplémentaires pour le personnel des établissements ». Les premières analyses consistent en des projets de recherche portant sur le système éducatif et les textes en vigueur, ainsi que des comparaisons internationales (notamment les États-Unis, le Royaume-Uni, la Chine, Hong Kong, le Japon, la Finlande et la Nouvelle-Zélande). Elles sont réalisées par un institut placé sous la tutelle du ministère : Taiwan's National Academy for Educational Research (NAER), sur lequel les services du ministère s'appuieront pour rédiger première version du nouveau curriculum.

Dans l'ensemble des pays de notre corpus, les procédures conduisant à la mise en place des instructions officielles sont assez similaires. Elles impliquent à la fois des chercheurs et des enseignants, avec des phases de tests et des corrections en fonction des retours obtenus. Certes, les organes impliqués, leur composition et leur fonctionnement sont différents d'un pays à l'autre. Toutefois, l'implication de personnes ressources en didactique, la constitution d'équipes spécifiques pour la rédaction des programmes, la complexité et la longueur du processus

1. https://www.moe.gov.sg/about/org-structure/cpdd.

2. Les informations sont tirées d'un article disponible à l'adresse suivante (consultée le 30/08/18) : https://www.brookings.edu/opinions/education-in-taiwan-the-vision-and-goals-of-the-12-year-curriculum/.

d'adoption du curriculum sont une constante chez les participants que nous étudions, et constituent la garantie d'une documentation des éléments qui y figurent suffisante pour permettre la comparaison de leur contenu.

B. Les intentions des auteurs des programmes

Le processus de rédaction des programmes doit être envisagé selon une perspective dynamique : « un accent trop fortement mis sur une notion, une technique ou au contraire une absence (parce qu'on suppose la notion incontournable dans les pratiques), décuple son importance ou son inutilité pour les apprentissages » (Houdement, *op. cit.*, p. 3). Autrement dit, « toute notion très explicitée peut faire de l'ombre aux notions proches moins traitées dans les programmes », si bien qu'un « programme est aussi une affaire d'équilibre entre un attendu des enseignants et une volonté de transformations des pratiques pour un apprentissage plus efficace des savoirs à enseigner » (*ibid.*). Nous avons déjà évoqué les objectifs des instructions officielles à propos de l'enseignement des mathématiques et de la notion de fraction, mais il n'est pas possible de mettre au jour l'intention des auteurs de modifier la façon d'enseigner ce thème sans envisager l'évolution des textes successifs. C'est pourquoi nous déduirons la volonté de transformer les systèmes didactiques de la comparaison de programmes différents pour un même pays, c'est-à-dire en réalisant, lorsque c'est possible, des observations longitudinales. Cela nous permettra de déterminer si les changements dans le curriculum entrainent une évolution des acquis des élèves. Par exemple, si des tâches relatives à l'addition et à la soustraction de fractions sont introduits dans les programmes scolaires, les performances des élèves aux items correspondants des évaluations TIMSS augmentent-elles ? Si nous savons que les habitudes des professeurs ne « changent pas dans l'immédiat » (*ibid.*), le fait de disposer des résultats des élèves depuis 1995, avec des données publiées tous les quatre ans, nous donne le recul suffisant pour dire si des changements finissent ou non par intervenir. D'ailleurs, elles ne « changent pas toujours dans le sens voulu » : pour que l'intention du législateur se traduise par une modification des pratiques enseignantes, il faut que « les auteurs de manuels intègrent les nouveautés du programme en respectant leur esprit » (*ibid.*) et que le nouveau curriculum soit « accompagné de formation » (*ibid.*, p. 2). Notre recherche indiquera, au sein de notre corpus, dans quelle mesure les changements curriculaires sont suivis d'effet.

§ 2. Le contexte scientifique entourant l'adoption des programmes d'enseignement

Les didacticiens n'ayant pas tous la même opinion à propos de l'enseignement des fractions, nous avons examiné si des chercheurs ayant publié des travaux dans ce domaine se trouvaient dans les comités de rédaction. Dans ce cas, nous pourrions alors dire quelle facette du concept de fraction ils ont contribué à mettre en lumière, avec l'idée sous-jacente que les sous-constructions, techniques ou types de tâches objets de leurs travaux trouveraient potentiellement une place particulière dans les programmes scolaires. Dans le cas contraire, nous pourrions conclure que les fractions constituent un sujet n'ayant pas fait l'objet d'une attention spécifique, renforçant ainsi la portée des propos que nous allons formuler sur le processus de tranposition didactique externe. Nous allons donc présenter les thèmes de recherche des didacticiens ayant contribué à la rédaction des programmes scolaires (A). Nous proposerons également une synthèse des principaux travaux scientifiques publiés dans le domaine des fractions (B), ceux-ci ayant pu inspirer les didacticiens à l'occasion de leur contribution.

A. Les thèmes de recherche des didacticiens ayant contribué aux instructions officielles

Nous avons vu que des didacticiens étaient systématiquement impliqués dans la rédaction des programmes d'enseignement de tous les pays de notre corpus. Si leur rôle reste souvent consultatif et qu'ils partagent cette charge avec des praticiens (la rédaction finale échéant aux services administratifs), leur sensibilité vis-à-vis de la problématique des fractions est susceptible de les conduire à mettre ce thème en avant, à le valoriser quantitativement ou qualitativement, avoir des répercussions sur le contenu des instructions officielles. D'où l'interrogation suivante : les chercheurs ayant participé à des révisions curriculaires ont-ils été impliqués dans des travaux importants ayant trait aux fractions ? Il est difficile de répondre à cette question, car la composition des équipes de travail est rarement accessible. Notre présentation sera donc limitée aux cas de la France et des États-Unis, seuls pays pour lesquels ces informations ont pu être trouvées.

En France, nous nous sommes penché sur l'élaboration des programmes les plus récents, les seuls pour lesquels nous connaissions les chercheurs qui ont contribué à éclairer les rédacteurs des programmes dans le domaine des fractions. Marie-Jeanne Perrin-Glorian a beaucoup travaillé sur le thème des nombres rationnels, aussi bien dans sa thèse (1992) que dans des travaux ultérieurs (voir notamment Daoudy et Perrin-Glorian, 1986). D'ailleurs, elle

indique la question des nombres dans la scolarité obligatoire comme faisant partie de ses principales thématiques de recherche[1]. La bibliographie des autres participants révèle un intérêt moins marqué pour la notion. Par exemple, Emprin présente l'analyse de la formation et des pratiques enseignantes, ainsi que les apprentissages géométriques comme les principaux thèmes de recherche qu'il développe[2]. Houdement cite la résolution de problèmes mathématiques, l'étude de la dimension sémiotique de l'activité mathématique, ainsi que l'enseignement des mathématiques en milieu spécialisé comme les sujets priviligiés de ses recherches[3]. Brigitte Grugeon met en avant la conception d'environnements informatiques et le développement professionnel des professeurs[4]. Les textes publiés par Sylvie Coppé, Roland Charnay ou Patrick Urruty ne montrent pas plus une attention particulière portée à l'enseignement ou à l'apprentissage du concept de fraction.

Dans les groupes de travail[5] ayant conduit à la rédaction des *Common Core Standards* (ce texte, à l'origine de nombreux programmes d'enseignement aux Etats-Unis, a été adopté par la Floride et appliqué dans les établissements scolaires à partir de septembre 2014) ou dans les comités de validation[6], nous n'avons pas identifié de chercheur ayant particulièrement travaillé sur les fractions. Nous pensions notamment aux didacticiens américains ayant publié une version actualisée du *Rational Number Project*, à la suite des travaux dirigés par Behr, Lesh et Post. Il s'agit de Kathleen Cramer, assistée de Sue Ahrendt, Debra Monson, Seth Leavitt et

---

1. Selon la présentation de l'auteur sur le site du laboratoire de didactique André Revuz : https://www.ldar.website/marie-jeanne-perrin-glorian.

2. Selon la présentation de l'auteur sur le site de l'université de Reims Champagne-Ardenne : http://www.univ-reims.fr/formation/ufr-instituts-et-ecoles/l-iufm-champagne-ardenne/formation/observatoire-des-formations/equipe,8296,15826.html.

3. Selon la présentation de l'auteur sur le site du laboratoire de didactique André Revuz : https://www.ldar.website/catherine-houdement.

4. Selon la présentation de l'auteur sur le site de l'université Paris-Est Créteil : http://espe.u-pec.fr/recherche-et-innovation/recherche-et-internationalisation/chercheurs/annuaire-des-enseignants-chercheurs/ldar/grugeon-allys-brigitte-634618.kjsp.

5. La composition de ces groupes de travail est disponible à l'adresse suivante : http://www.nga.org/files/live/sites/NGA/files/pdf/2010COMMONCOREK12TEAM.PDF (consulté le 23 juillet 2018).

6. La composition de ces comités de validation est disponible à l'adresse suivante : http://www.corestandards.org/assets/CommonCoreReport_6.10.pdf (consulté le 23 juillet 2018).

Terry Wyberg. Leur nom ne figure pas dans la liste des contributeurs. Nous en déduisons que les fractions constituent un sujet ordinaire pour les auteurs des programmes, dans le sens où les didacticiens qui auraient pu le valoriser n'ont pas été invités à donner leur point de vue. Pour autant, si ces scientifiques n'ont pas fait partie des groupes de travail que nous venons d'évoquer, il est possible que leurs idées aient été portées par ceux ayant eu à traiter des fractions. C'est pourquoi nous allons décrire les principaux travaux scientifiques ayant pour thème les fractions et contenant des propositions relatives aux tâches qui peuvent être proposées aux élèves, en France et aux États-Unis.

B. Les principales propositions des didacticiens pour l'enseignement des fractions

L'objectif de ce paragraphe est de mieux cerner les types de tâches dont les didaticiens préconisent l'utilisation, puisqu'on retrouve principalement des types de tâches dans les programmes d'enseignement. Nous avons donc circonscrit l'analyse aux travaux scientifiques dans lesquels les auteurs incluent des recommandations pratiques, ou des exemples de séances d'enseignement. Cette présentation ne prétend pas à l'exhaustivité, puisqu'il s'agit simplement de comprendre le contexte qui entoure l'adoption des curriculums relatifs aux fractions, en France et aux États-Unis. Nous ne cherchons pas à établir un lien direct entre une proposition précise et le contenu des instructions officielles : nous souhaitons observer si les grands principes qu'ils posent et si les sous-constructions qu'ils privilégient se retrouvent dans les textes officiels. Notre propos porte sur les deux seuls pays pour lesquels nous ayons eu à connaitre des travaux de grande ampleur, élaborés par des didacticiens, visant à formuler des propositions pour l'enseignement des fractions.

En France, ces propositions sont très diverses et mettent l'accent sur des facettes différentes du concept de fraction. Guy Brousseau a présenté plusieurs situations-problèmes dans lesquelles les représentations anciennes conduisent provisoirement à une impasse, les nouvelles représentations (celles visées) étant les seules à permettre une résolution de la tâche. Par exemple, les élèves sont invités à trouver la mesure d'une feuille de papier quand trente feuilles mesurent deux millimètres (partition de plusieurs entiers) ou la mesure des pièces d'un puzzle après un agrandissement de 7/4 (utilisation de la fraction-opérateur). L'accent est donc mis sur l'idée que les fractions sont un couple d'entiers liés entre eux par un rapport : « (50 ; 4) désigne un tas de 50 feuilles qui mesure 4 mm d'épaisseur, l'épaisseur d'une de ces feuilles s'écrit 4/50 que l'on lit "quatre cinquantièmes de millimètres" » (1986, p. 140). Régine Douady et Marie-Jeanne Glorian-Perrin ont développé l'idée selon laquelle un changement de cadre est

bénéfique pour la construction de la notion chez les élèves. Dans une brochure, elles ont soumis plusieurs séquences d'apprentissage dans lesquelles les fractions étaient tour à tour envisagées comme des instruments de mesure de longueurs (Douady & Perrin-Glorian, 1986, 29-50) ou d'aires (*ibid.*, 51-62). Adjiage, dans sa thèse sur *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial* (1999, p. 36) a distingué « quatre stades d'appréhension des phénomènes rationnels », précisant toutefois que cette progression n'était pas linéaire (ces quatre phases seront détaillées plus loin dans cette recherche). Il a développé une ingénierie didactique qui s'appuyait sur l'outil informatique et l'étude de la droite graduée. Vergnaud (1983) a proposé une perspective différente suivant laquelle les nombres rationnels et plus particulièrement les fractions sont considérés comme un élément du champ conceptuel multiplicatif, ces structures multiplicatives renvoyant à « l'ensemble des situations qui peuvent être analysées dans le cadre d'une proportion simple ou multiple et dont la résolution nécessite l'emploi d'une ou de plusieurs multiplications ou divisions » (Vergnaud, 1988). Cet auteur envisage les concepts de fraction et de rapport dans le cadre de trois types de problèmes : isomorphisme des mesures, produit des mesures et proportions multiples. Cette proposition est différente de celles déjà discutées car, dans cette perspective, la tendance est de classifier les problèmes correspondant à des situations, sans relier le concept aux sous-constructions qui caractérisent les nombres rationnels (partie-tout, rapport, quotient, etc.).

Aux États-Unis, la question des nombres rationnels a fait l'objet d'un projet impliquant plusieurs chercheurs, sous l'égide de la National Science Foundation (une agence indépendante chargée de soutenir financièrement la recherche scientifique fondamentale) : le *Rational Number Project* (Cramer et *al.*, 2009). Conçu en 1979, il impliquait à l'origine trois universités et comprenait, parmi ses membres fondateurs, Merlyn Behr (de l'université de l'Illinois), Thomas Post (de l'université du Minnesota) et Richard Lesh (de l'université de l'Indiana). Il est composé de deux parties, actulisées à plusieurs reprises. La première, intitulée *Initial Fraction Ideas*, décrit la façon dont les élèves doivent développer les premières connaissances scolaires à propos de la notion de fraction. La seconde, intitulée *Fraction Operations & Initial Decimal Ideas*, rassemble des leçons, à destination des professeurs, destinées à faciliter l'enseignement des opérations comportant des fractions et du lien entre les fractions et les écritures décimales. Ces deux documents sont conséquents : le premier comporte 270 pages avec 23 leçons, et le second comporte 473 pages, avec 28 leçons. Pour ses auteurs, nombre d'erreurs s'expliquent par l'absence d'images mentales liées à la quantité que peuvent représenter les fractions (*ibid.*, p. 13). En ce qui concerne l'enseignement initial des fractions,

leur objectif est donc de « développer une conscience de la magnitude des fractions » (*ibid.*, p. 15). Plus précisément, ils souhaitent « développer le sens des fractions en utilisant un modèle partie-tout, construire des stratégies de comparaison informelles fondées sur une représentation mentale des fractions, créer le sens de l'équivalence dans des conditions concrètes, ainsi qu'additionner et soustraire des fractions en utilisant des modèles concrets » (p. 1). Si une grande importance est accordée aux représentations visuelles des fractions, c'est qu'ils posent pour principe que les élèves « apprennent mieux par une implication active avec de multiples modèles concrets ». Toutefois, « les supports concrets ne sont que l'une des composantes de l'acquisition des concepts : les représentations verbales, picturales, symboliques et du monde réel sont aussi importantes » et « les enfants doivent avoir des opportunités pour parler ensemble et avec leur professeur d'idées mathématiques » (*ibid.*, p. 12). Par exemple, il est possible de demander aux élèves de vérifier le caractère plausible d'une réponse d'un élève fictif, concernant une addition qu'ils n'ont pas appris à résoudre. Ainsi, en observant le travail suivant : « 2/3 + 1/4 = 3/7 », on peut dire que le résultat est faux sans pour autant savoir trouver le bon résultat : 2/3 étant supérieur à 1/2, la somme de ces deux nombres positifs ne peut pas être inférieure à 1/2. Pour les auteurs, les idées mathématiques peuvent être exprimées à travers cinq supports qui permettent un enrichissement mutuel, comme exprimé dans le schéma ci-dessous.

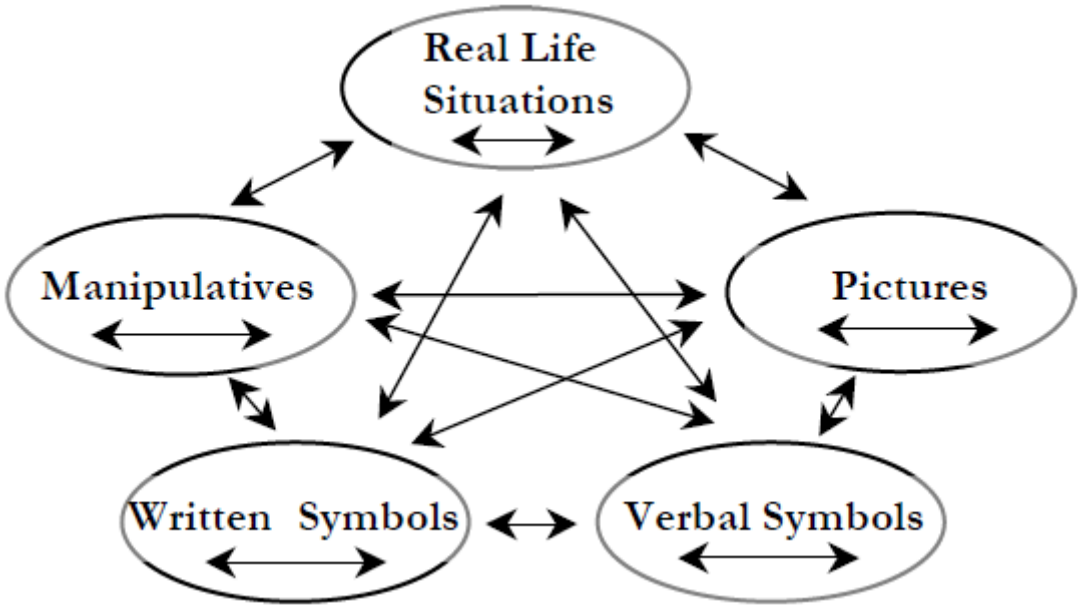


Figure 32. Schéma général du processus d'apprentissage d'après les auteurs du Rational Number Project (2009, p. 16)

Les auteurs fournissent également des exemples d'erreurs couramment commises par les élèves, observées lors de leurs expérimentations. D'après le bilan que les chercheurs en font,

« les élèves utilisant les leçons du *Rational Number Project* conçoivent les fractions d'une manière conceptuelle, tandis que les élèves utilisant le manuel conçoivent les fractions d'une façon procédurale » (*ibid.*, p. 10). Nous verrons avec l'analyse comparative des programmes d'enseignement si des rapprochements peuvent être faits entre ces travaux, décrits à grands traits, et le contenu des curriculums français et américain. Cela nous donnera des indices sur la prise en compte des productions didactiques dans ces deux pays, et donc sur l'influence du contexte scientifique entourant l'adoption des instructions officielles dans le travail de transposition didactique externe.

Conclusion de la sous-section

Dans cette sous-section, nous avons cherché à présenter, au moins partiellement, les conditions dans lesquelles les instructions officielles sont produites dans chacun des pays de notre corpus. Étant donnée la variété des éléments à prendre en compte, notre étude n'a été que sommaire. Néanmoins, elle a permis de vérifier que les comparaisons que nous allons faire entre les programmes d'enseignement sont valables : dans l'ensemble, les procédures conduisant à rédiger de nouveaux textes sont assez proches, impliquant le plus souvent des chercheurs et des enseignants, et plus rarement d'autres partenaires comme les représentants des parents d'élèves ou les représentants d'intérêts commerciaux (notamment les éditeurs de manuels scolaires). Il existe des différences que nous ne souhaitons pas minimiser. Ainsi, certains pays possèdent une équipe permanente chargée de superviser l'efficacité du curriculum et d'envisager des modifications (par exemple, à Singapour). Dans d'autres, la décision de changer les programmes d'enseignement est une décision politique, et l'équipe chargée de leur rédaction est contrainte par une lettre de mission qui fixe les grandes orientations du projet (par exemple, en Angleterre et en France). Toutefois, cela ne remet pas en cause l'analyse didactique que nous souhaitons faire des instructions officielles.

Nous avons également cherché à identifier des didacticiens ayant particulièrement travaillé dans le domaine des fractions au sein des équipes de rédaction des programmes. En France comme aux États-Unis, les chercheurs ayant consacré une grande partie de leurs recherches (à l'exception de Marie-Jeanne Perrin-Glorian qui a publié plusieurs travaux sur l'apprentissage et l'enseignement des nombres rationnels) ne semblent pas avoir participé à leur élaboration. La portée des conclusions que nous tirons doit être nuancée dans la mesure où il est difficile de trouver les noms des personnes ayant contribué aux programmes d'enseignement et que seuls deux pays ont pu faire l'objet d'une analyse. Néanmoins, les fractions paraissent

constituer un élément du curriculum auquel le législateur n'a pas attribué une importance particulière, faisant de la comparaison des instructions officielles que nous envisageons une comparaison des pratiques ordinaires en matière de tranposition didactique externe.

Conclusion de la section consacrée à la présentation des aspects transpositifs de notre recherche

Les didacticiens ont distingué plusieurs niveaux d'analyse du curriculum, qui correspondent chacun à une étape de la transposition didactique. Les auteurs des évaluations TIMSS s'inscrivent dans ce cadre théorique, d'après le schéma que nous avons reproduit ci-dessous. Pour notre part, puisque nous travaillons dans le cadre de la théorie anthropologique, nous parlerons davantage de savoirs à enseigner, de savoirs enseignés et de savoirs appris et retenus que de curriculum formel, de curriculum réel et de curriculum réalisé. Néanmoins, le principe d'une appropriation des savoirs à chaque niveau du système éducatif subsiste.

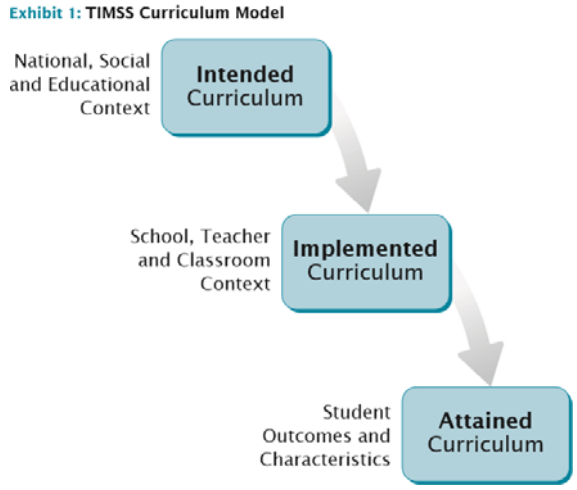


Figure 33. Modèle de transposition didactique établie par les auteurs des évaluations TIMSS (2016, p. 5).

Notre thèse interroge la validité de ce schéma qui décrit au premier abord une réalité que chacun peut percevoir (les programmes scolaires sont mis en œuvre par les enseignants et les élèves s'approprient les notions présentées par leurs professeurs). D'abord, le phénomène de transposition n'est pas seulement descendant : la décontextualisation du savoir qui provient de l'échelon supérieur est suivie d'une recontextualisation qui tient compte des contraintes qui pèsent sur l'échelon inférieur. Cette dualité apparait dans l'échelle de codétermination didactique, mais pas ici. Ensuite, la linéarité de la tranposition est discutée : les enseignants et les auteurs de manuels ne tranposent probablement pas le savoir relatif aux fractions uniquement à travers le prisme des programmes scolaires. Ils peuvent, pour une part et dans des conditions qui restent à déterminer, utiliser directement les savoirs transposés dans les instructions officielles, ou bien utiliser d'autres savoirs qui n'y apparaissent pas. De même, les techniques et savoirs des élèves ne sont pas tous élaborés dans le contexte scolaire : même si les connaissances informelles sur les nombres rationnels avec lesquelles les élèves arrivent en classe sont encore mal connues, il est établi

qu'elles existent (Mamede, 2009). Enfin, cette linéarité n'a de sens que si la modification subie à un échelon de l'échelle se répercute sur les échelons suivants. Or, nous avons vu que cela était le cas seulement à certaines conditions générales (formation, adhésion des auteurs de manuels scolaires, etc.). Notre étude enrichit cette analyse, par la recherche d'une corrélation entre la présence, l'absence et la modification d'un fragment praxéologique relatif aux fractions dans les programmes, et la maitrise de cet élément par les élèves telle qu'elle apparait dans les évaluations TIMSS.

Conclusion du chapitre consacré à l'approche didactique du concept de fraction

La réflexion à propos des principes qui régissent la tranposition didactique externe a été doublée d'une réflexion relative à la construction des praxéologies scolaires relatives aux fractions. Après avoir circonscrit le champ des possibles à l'aide des données que nous avons recueillies dans les curriculums qui forment notre corpus, nous avons établi qu'il existait potentiellement une grande variété de savoirs et savoir-faire à enseigner, et que les comparaisons internationales que nous proposons devraient mettre au jour des choix très différents d'un pays à l'autre. Ces différences tiennent aux significations du concept de fraction étudiées (parmi les cinq que nous avons distinguées), à la diversité des techniques mises en jeu (notamment à propos des situations qu'elles permettent de résoudre et des choix relatifs à leur articulation) et à la multiplicité des tâches qui peuvent être proposées aux élèves (avec une attention particulière portée aux variables de la tâche qui induisent souvent l'emploi de techniques spécifiques).

Nous avons également défini des éléments susceptibles d'influer sur la formation de ces praxéologies. La prise en compte des besoins des enseignants pour construire des séances et évaluer les élèves, la fragmentation du savoir et sa simplification, la focalisation du système éducatif sur la notion de compétence nous conduisent à poser l'hypothèse selon laquelle les praxéologies issues des programmes sont incomplètes, centrées sur les types de tâches à proposer aux élèves, de sorte qu'elles doivent être, au moins partiellement, reconstruites au sein des institutions locales (circonscriptions, établissements scolaires et classes). Nous pensons donc que les injonctions faites aux enseignants ont une influence modérée sur la maitrise du concept de fraction par les élèves. Si notre hypothèse est confirmée, alors la corrélation entre les performances des les élèves aux évaluations TIMSS et le contenu des curriculums sera sans doute modeste, et influencée par des variables telles que la précision des auteurs quant aux techniques à utiliser, et l'autonomie attendue des élèves dans la réalisation de la tâche.

CONCLUSION DU TITRE CONSACRÉ AUX CADRES THÉORIQUES DE L'ÉTUDE

En introduction, nous posions la question de savoir si l'on pouvait caractériser un progrès dans le domaine de l'enseignement. Sans aucun doute cela est possible, au vu de la somme considérable de connaissances produites au sujet de l'enseignement des fractions, des difficultés que rencontrent les élèves, et qui laissent à penser que leur prise en compte par les auteurs des programmes et les professeurs doit permettre une intégration plus facile et plus large d'un tel concept par les élèves. À travers une meilleure compréhension des phénomènes qui entourent la transposition didactique externe, et du rôle qu'elle peut jouer dans la construction de la notion, nous souhaitons apporter notre contribution à ce progrès. Pour y parvenir, il nous faut certes explorer les hypothèses que nous venons de poser, qui suggèrent qu'une définition plus précise des praxéologies établies au niveau sociétal entrainerait une meilleure corréalation avec les résultats des élèves, conduisant à un pilotage plus efficace des acquis des élèves à ce niveau de l'institution. En outre, le fait de mieux caractériser les praxéologies mises en jeu dans les tests permettra une compréhension plus fine de la manière dont ce concept est acquis, y compris à propos des transferts entre des types de tâches différents, c'est-à-dire le fait qu'un travail portant sur une praxéologie puisse avoir un effet sur la capacité des élèves à traiter des types de tâches relevant d'autres praxéologies. C'est pourquoi, à la suite de Carette *et al.* (2009, p. 32), nous interrogeons également « l'éventuelle influence qu'exercent les éléments les uns sur les autres » : une conception, une tâche ou une technique « peut-elle en bloquer une autre ou au contraire faciliter son accès ? À quelles conditions ? Quelle place occupe la conception partie d'un tout dans la compréhension de la multiplicité de sens des fractions ? Quelles relations lient les connaissances conceptuelles et procédurales ? Une meilleure compréhension conceptuelle des fractions est-elle utile, nécessaire pour maitriser l'utilisation des procédures ? » Les résultats de notre étude participeront à la construction d'une réponse à l'ensemble de ces questions.

TITRE II. RÉSULTATS DE L'ÉTUDE COMPARATIVE DES PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT

Comment les auteurs des instructions officielles ont-ils réalisé la tranposition didactique du concept de fraction dans les pays de notre corpus ? Pour répondre à cette question, nous supposons que les autorités déterminent d'abord l'ensemble des notions qu'un élève doit acquérir au cours de sa scolarité (qu'elle soit primaire ou secondaire), et qu'elles répartissent ensuite ces notions et les niveaux d'acquisition dans le temps. Un professeur fait de même lorsqu'il appréhende les concepts qu'il doit enseigner et les organise sous la forme d'une progression annuelle. C'est l'hypothèse sur laquelle nous nous appuyons pour organiser ce titre. L'analyse synchronique permettra de « mettre en évidence et caractériser les productions différentes et similaires de la transposition didactique d'un même objet de savoir […] ; questionner les ressemblances et les dissemblances institutionnelles en termes de conditions et de contraintes ; initier un répertoire de praxéologies existantes et envisager leurs développements possibles » (Tran Luong C. K., 2006, p. 7, cité par Bessot & Comiti, 2013, p. 56). Pour sa part, l'analyse diachronique mettra en lumière, non « l'évolution temporelle d'un système, évolution qui a abouti à son état actuel, et par conséquent, de mieux comprendre cet état (d'équilibre) » (*ibid.*), mais plus simplement la répartition des types de tâches à enseigner au sein des années scolaires, entre la première et la huitième année de scolarité obligatoire.

Nous allons donc d'abord étudier les choix réalisés par le législateur à propos des facettes du concept de fraction qu'il souhaite couvrir. Le terme « topogenèse » désigne « l'évolution du partage des responsabilités et des tâches, en fonction de certaines dispositions, capital ou potentiel "à savoir" des sujets mathématiques ». (Ligozat et Leutenegger, 2008, p. 329). Il décrit « à la fois l'ensemble des opérations qui organisent les différents "lieux" occupés par les acteurs de la relation didactique et le résultat de ces opérations, c'est-à-dire l'organisation des différents espaces. Lieux est à entendre ici dans un sens symbolique : comme places par rapport au savoir » (Reuter *et al.*, 2007, p. 217). Si cette définition évoque le travail du professeur et celui des élèves, elle peut également être utilisée pour décrire le travail effectué par les auteurs des programmes. En effet, ces derniers répartissent les responsabilités respectives des enseignants et du législateur dans la construction des praxéologies relatives aux fractions : les premiers imposent des constructions partielles, qui doivent être complétées par

les seconds. La topogenèse telle qu'elle est réalisée dans les pays de notre corpus sera l'objet du chapitre I.

Le terme « chronogenèse » recouvre l'ensemble des questions relatives à la « temporalité dans les processus d'apprentissage ». Si le professeur constitue le « "gardien" du temps didactique (chronogénèse) dans le sens où il décide de la durée d'exposition des "objets" sur le plan synchronique de la leçon, et diachronique de la séquence »[1], il est contraint par les auteurs des programmes sur ce point. En effet, à l'échelle d'une scolarité, c'est le législateur qui détermine le moment de la présentation d'une notion, et qui définit au moins partiellement la durée de son enseignement (une année ou plus). À l'échelle d'une année scolaire, il impose un nombre plus ou moins important de types de tâches à étudier, et met parfois l'accent sur un concept plutôt qu'un autre, conduisant les enseignants à augmenter ou à diminuer le temps passé sur les différents savoirs enseignés. Nous considérons en conséquence que le législateur participe à la chronogenèse, en ce qu'il fixe une répartition temporelle des types de tâches à acquérir au fil de la scolarité. La façon dont la chronogenèse est réalisée à travers les injonctions qui sont faites aux enseignants sera l'objet du chapitre II.

1. Cette définition est tirée de la contribution de Jean-Paul Bronckart à l'encyclopédie Universalis, à l'entrée « Didactique des disciplines ».

CHAPITRE I. TOPOGÉNÈSE DU CONCEPT DE FRACTION

L'encadrement du travail de l'enseignant à propos de la définition des praxéologies scolaires constitue, au niveau sociétal de l'échelle de codétermination didactique, l'objet de la topogenèse. Les autorités imposent un certain nombre de contraintes qui tiennent à la fois aux concepts qui doivent être enseignés, aux situations qui doivent être rencontrées par les élèves et aux moyens de les résoudre. Toutefois, ces éléments peuvent prendre différentes formes, qu'il s'agisse de l'exercice donné à l'élève (à travers les modalités de la tâche), de la façon dont celui-ci va proposer une solution (les exigences rédactionnelles évoluant dans le temps et dans l'espace) ou du savoir qu'il en tirera (les formulations pouvant varier). Pour faire la différence entre les savoirs au sens large et leur matérialisation, nous utilisons, dans notre plan, la distinction entre les ostensifs et les non-ostensifs. En effet, « toute technique suppose l'activation d'un complexe d'objets, les uns ostensifs (ils seront manipulés), les autres non ostensifs (ils seront évoqués) » (Chevallard, 1994, p. 5). Autrement dit, les ostensifs sont constitués de tous éléments que l'on peut percevoir lorsqu'on observe un élève travailler, tandis que les non-ostensifs sont des constructions intellectuelles qui ne peuvent être exposées qu'à l'aide des ostensifs. Par exemple, le non-ostensif « comparaison de fractions » ne peut être matérialisé qu'à travers un ou plusieurs ostensifs : un schéma, des nombres, une explication verbale, etc. En d'autres termes, « la manipulation des ostensifs est réglée à l'aide notamment des non-ostensifs, et ces derniers, inversement, sont évoqués à l'aide des ostensifs. Il y a ainsi une dialectique nécessaire entre ostensifs et non-ostensifs » (*ibid.*). En outre, la notion d'ostensif peut être appliquée, non seulement à une technique, mais également à un type de tâches ou à une technologie, pour décrire, par exemple, l'énoncé d'un exercice ou la forme prise par une leçon. En ce qui concerne la méthodologie, nous continuerons à utiliser, pour le recensement des ostensifs et des non-ostensifs, une approche pragmatique qui nous conduira à en dresser la liste, non pas *ex nihilo* à partir d'une analyse épistémologique de la notion, mais à partir de tous ceux que nous avons rencontrés par la lecture des programmes scolaires des pays de notre corpus. La quantité des éléments que nous avons identifiés dans les instructions officielles relatifs à l'une ou l'autre de ces catégories laisse à penser que cette dichotomie est pertinente pour assurer leur description. Nous présenterons les aspects non-ostensifs du concept de fraction, tels qu'ils apparaissent dans les curriculums, dans la section I, et ses aspects ostensifs dans la section II.

Section I. Non-ostensifs

Les non-ostensifs forment une catégorie dans laquelle sont placées toutes les constructions de l'esprit, et de laquelle on exclut toutes leurs manifestations concrètes, que ce soit par l'intermédiaire du langage ou par le biais d'un écrit au sens large. Comme l'indique Chevallard, « au contraire des ostensifs, les non-ostensifs – soit ce que l'on nomme usuellement notions, concepts, idées, etc. – ne peuvent pas, à strictement parler, être manipulés. Ils peuvent seulement être évoqués, à travers la manipulation d'ostensifs associés » (1994, p. 5). Évoquer la topogenèse des non-ostensifs, c'est donc former une carte des responsabilités respectives des professeurs et du législateur dans la construction des praxéologies scolaires. Par exemple, les aspects qui relèvent du bloc technologico-théorique sont rarement évoqués dans les curriculums. En règle générale, les auteurs n'imposent l'acquisition que de savoir-faire. Nous avons identifié quelques considérations d'ordre technologique dans plusieurs instructions officielles, comme celles de l'Angleterre (« Interpréter le dénominateur comme le nombre de parts dans un entier et le numérateur comme le nombre de parts » [*op. cit.*, 2006, p. 76]), de la France (par exemple, en sixième année, les élèves doivent pouvoir « interpréter a/b comme quotient de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire comme le nombre qui multiplié par b donne a » et savoir qu'un « quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre » [*op. cit.*, 2008b, p. 15]) et floridiennes (en quatrième année : « Comprendre la fraction $1/b$ comme la quantité formée par une part lorsque l'entier est divisé en b parts égales ; comprendre la fraction a/b comme la quantité formée par a parts de taille $1/b$ » [*op. cit.*, 2014, p. 3]). Toutefois, ces intitulés sont peu nombreux. Dans la très grande majorité des cas, les auteurs des programmes circonscrivent le choix des tâches soumises aux élèves, avec parfois la mention de la technique à utiliser. Cette définition offre toutefois un espace de liberté aux enseignants, plus ou moins grand selon la précision des injonctions qui leur sont destinées. Par exemple, si les instructions officielles indiquent qu'il faut apprendre à ranger des fractions dont les dénominateurs sont identiques, il reste encore à déterminer si cela se fera dans l'ordre croissant ou décroissant, à choisir le nombre de fractions qui seront mises en jeu, ou encore à définir les dénominateurs et les numérateurs utilisés. Puisque la densité des éléments relatifs au bloc technologico-théorique dans les curriculums est insuffisante pour mener une analyse de laquelle nous pourrions tirer des enseignements, nous allons décrire la topogenèse des instructions officielles, pour chacun des pays de notre corpus, à propos des types de tâches (sous-section I) et des techniques (sous-section II), ce qui ne nous empêchera pas de réaliser, ponctuellement, des observations sur les savoirs au sens restreint.

Sous-section I. Les types de tâches

Les types de tâches sont notamment caractérisés par la signification du concept de fraction qu'ils mettent en jeu et par le domaine dans lesquels ils s'inscrivent : ceux-ci peuvent modifier la perception qu'ont les élèves, non seulement de la tâche, mais également de la notion de fraction elle-même, par le biais des changements de cadre. Par signification, nous entendons la facette du concept de fraction impliquée dans l'exercice, en lien avec les cinq sous-constructions évoquées dans le chapitre précédent ; par domaine, nous entendons le champ mathématique en jeu, tel que la connaissance des nombres ou la géométrie. Nous allons d'abord montrer comment ces deux caractéristiques déterminent un contexte d'apprentissage qui délimite les types de tâches proposées aux élèves (§ 1). Nous comparerons ensuite les types de tâches dans les programmes d'enseignement qui forment notre corpus (§ 2).

§ 1. La définition du contexte

Les fractions possèdent une pluralité de significations. Quand les auteurs des programmes prévoient l'enseignement d'un certain type de tâches, ils induisent l'utilisation de l'un de ces aspects du concept de fraction. Par exemple, lorsqu'ils mettent en jeu des tâches qui s'apparentent au partage d'une pluralité d'unités (« si trois gâteaux sont partagés entre quatre personnes, quelle fraction de gâteau recevra chacun ? »), on comprend que les élèves construisent la notion de fraction-quotient. De même, la pluralité des champs mathématiques dans lesquels le législateur inscrit le travail des élèves se déduit de la présence de tâches relatives aux fractions dans différents secteurs des programmes scolaires. Par exemple, la géométrie pourra être l'occasion de proposer des activités originales impliquant des fractions (par exemple, effectuer une rotation d'une figure d'une fraction de tour). Les conceptions de la fraction privilégiées dans chacun des pays de notre corpus seront donc précisées (A) à partir de l'analyse des types de tâches présents dans les curriculums, avant mesurer la variété des champs mathématiques envisagés par les auteurs des programmes d'enseignement (B).

A. Significations privilégiées

La fraction partie d'un tout est la conception qui, dans l'ensemble du corpus, est enseignée le plus précocément. Cela n'est pas surprenant dans la mesure où il s'agit aussi de la conception de fraction la plus simple à comprendre, la mieux liée à l'utilisation des fractions que l'on fait au quotidien, par exemple quand on indique qu'on a lu un quart d'un livre ou que

chacun aura un quart du gâteau que l'on vient de préparer. Elle est donc présente dans tous les programmes d'enseignement, et ce point n'a donc pas lieu d'être développé ici : il le sera lors de l'étude de la chronogénèse du concept de fraction. Si l'on tient compte de la fraction-partition envisagée séparément de la fraction partie-tout au sens strict, la conclusion est proche : son enseignement est prévu dans tous les pays de notre corpus, sauf en France, où l'utilisation de collections n'est pas imposée en dehors de l'étude de la fraction-opérateur. En revanche, les autres conceptions de la fraction sont présentes à des degrés très divers dans les curriculums, et l'analyse de ces derniers permettra de réaliser une première mesure de l'étendue des connaissances attendues à propos de la notion de fraction. Au Québec, les auteurs font directement référence aux différentes significations de la fraction. Les élèves doivent, à partir de la troisième année et « avec l'intervention de l'enseignant, reconnaître différents sens de la fraction (partage, division, rapport) » (*op. cit.*, 2009a, p. 6]). En huitième année, les différentes interprétations du sens de la fraction doivent être reconnues par les élèves sans l'aide de leur enseignant. Pour les autres territoires, la relation entre les tâches et les significations du concept ne sont pas aussi transparentes, et une analyse plus détaillée est indispensable.

L'utilisation de la fraction-mesure a été identifiée dans sept instructions officielles. En Floride, les notions acquises par les élèves de troisième année dans le cadre numérique sont réutilisées pour mesurer des longueurs. À cette occasion, seuls les demis, les quarts et les dixièmes sont abordés (« mesurer des objets en utilisant des fractions d'unités de mesures telles que 1/2, 1/4, et 1/10 » [*op. cit.*, 2007, p. 7]). Ces activités impliquent de considérer la fraction comme un nombre susceptible d'évaluer une quantité, et incluent le report d'une fraction unitaire un certain nombre de fois. La présence des dixièmes constitue un indice laissant penser que les rédacteurs envisagent ce travail comme une propédeutique à l'étude des écritures décimales. En France, outre des activités de partage d'unités, il est prévu le codage de mesures à l'aide des fractions, ce qui est cohérent avec l'idée que les fractions servent principalement à préparer le passage aux notations décimales (« utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs » [*op. cit.*, 2008, p. 38]). En sixième année, le travail sur les fractions et les écritures décimales se poursuit, et ces deux dernières écritures des rationnels sont utilisées concurremment pour donner l'abscisse d'un point. En Irlande du Nord et en République d'Irlande, on trouve des intitulés semblables. Par exemple, les élèves nord-irlandais doivent « estimer et comparer des contenances exprimées en litres », puis utiliser « des capacités plus petites, telles que le demi-litre et le quart de litre » (*op. cit.*), tandis que les élèves de la République d'Irlande doivent « estimer, mesurer et noter des capacités en utilisant des

bouteilles d'un litre, un demi-litre et un quart de litre, et résoudre des problèmes simples » (*op. cit.*, p. 55). Dans le Taipei chinois, en cinquième année, le travail effectué à propos de la division-quotient est poursuivi dans des situations de mesure impliquant des quantités continues (« les élèves comprennent le fonctionnement de la division à travers des situations de mesures » [*ibid.*, p. 159]). Dans ce cadre, les élèves « exprimeront les résultats sous forme de fractions supérieures ou égales à 1 et de nombres mixtes, et examineront le sens de cette équivalence » (*ibid.*, p. 160). Sans prévoir explicitement l'utilisation des fractions pour réaliser des mesures, d'autres textes envisagent le placement de fractions sur la demi-droite numérique, ce qui nous semble l'une des manifestations de la fraction-mesure (en recherchant une distance à partir de l'origine de cette demi-droite). C'est le cas en Ontario (« Comparer et ordonner des fractions propres et supérieures ou égales à 1 et des nombres décimaux jusqu'aux centièmes [p. ex., sur une droite numérique] » [*op. cit.*, p. 61]) et du Québec (« Situer des fractions sur un axe de nombres [droite numérique] » [*op. cit.*, 2009a, p. 7]).

En ce qui concerne la fraction-quotient, on la retrouve dans six programmes scolaires. En Angleterre, les élèves sont invités à « exprimer un quotient comme une fraction ou une écriture décimale (par exemple, 67 ÷ 5 = 13,4 ou 13 + 2/5) » (*op. cit.*, 2006, p. 82). En Corée du Sud, c'est en cinquième année que les élèves comprennent la fraction comme un quotient de deux nombres entiers (« savoir exprimer la division de nombres entiers sous forme de fractions » [*op. cit.*, p. 26]). En France, si « à l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire est introduite en référence au partage d'une unité (par exemple, 7/3 est 7 fois un tiers), le programme de la classe de 6^{e} a pour objectif d'interpréter aussi 7/3 comme le tiers de 7 ; le nombre qui multiplié par 3 donne 7 ; un nombre dont une valeur approchée est 2,33 » (Ministère de l'Éducation nationale, 2008b, p. 15). En Irlande du Nord, en troisième année, dans un intitulé particulièrement court (« explorer le lien avec la division » [*op. cit.*, p. 1]), les auteurs imposent l'exploration du lien entre les fractions et la division. En l'absence de précisions, il est difficile de saisir leurs intentions. Évoquent-ils l'introduction de la fraction-quotient et l'enseignement de la fraction de pluralité ? Ou suggèrent-ils d'initier les élèves à la fraction-opérateur ? Nous retenons la seconde solution, dans la mesure où tout au long des années ultérieures, les élèves devront calculer des fractions de quantités. De plus, l'intitulé est proche d'un item des programmes anglais (« relier les fractions à la multiplication et à la division » [*op. cit.*]) pour lequel les exemples montrent une utilisation de la fraction en tant qu'opérateur (« 6 ÷ 2 = 1/2 de 6 = 6 × 1/2 » [*ibid.*]). De même, à Singapour, en cinquième année, les auteurs préconisent « d'associer la fraction à la division » (*op. cit.*, 2006a, p. 26). Nous pensons que, comme dans

les programmes anglais que nous venons d'évoquer, il s'agit d'associer 1/4 de 12 à 12 ÷ 4. Ce n'est donc selon nous qu'en septième année que la fraction doit être interprétée comme un quotient par les élèves. Cet apprentissage est fait dans le cadre de l'étude de l'algèbre : les élèves doivent comprendre que « $a/b = a \div b$ » pour pouvoir ensuite déduire des égalités telles que « $\frac{3 \pm y}{5} = (3 \pm y) \div 5 = \frac{1}{5} \times (3 \pm y)$ » (*ibid.*, 2006b, p. 7). Dans le Taipei chinois, l'interprétation de la fraction comme un quotient de nombres entiers est explicitée en quatrième année, mais seulement dans le cadre de la division-partition (« les élèves comprennent le sens de l'équivalence entre la division de nombres entiers et les fractions » [*ibid.*, p. 140]). Les élèves rencontrent alors des situations mettant en jeu des partages de plusieurs éléments tirées de la vie quotidienne. Il leur est demandé de faire la différence entre l'utilisation de quantités discrètes, où le partage conduit à une distribution d'entiers plus un reste, et l'utilisation de quantités continues, pour lesquelles il n'y aura pas de reste.

La fraction-opérateur apparait également dans six curriculums au moment des évaluations TIMSS 2015. En Angleterre, l'utilisation des fractions dans un tel contexte est envisagée avec des fractions qui ne sont plus seulement unitaires (« trouver des fractions et des pourcentages de quantités exprimées sous la forme de nombres entiers [par exemple, 5/8 de 96, 65 % de 260 £] » [*op. cit.*, 2006, p. 82]). En France, de telles tâches sont prévues en sixième année (« Prendre une fraction d'une quantité » [*op. cit.*, 2008b, p. 15]). En ce qui concerne l'Irlande du Nord, l'interprétation du seul intitulé susceptible de permettre son utilisation (« explorer le lien avec la division » [*op. cit.*, p. 1]) a déjà été discutée : nous avons conclu à une injonction à utiliser la fraction-opérateur. En Ontario, la frontière entre l'étude de la fraction-partition et l'étude de la fraction-opérateur n'est pas clairement établie. Lorsqu'on demande aux élèves « d'utiliser une variété d'objets et d'illustrations pour représenter des fractions simples en tant que parties d'un tout et parties d'un ensemble dans divers contextes » (*op. cit.*, p. 52), on pense plutôt à la fraction-partition, tandis que l'exemple fourni par les auteurs suggère plutôt l'emploi de la fraction en tant qu'opérateur : « six enfants s'amusent dans la cour de l'école. Deux tiers jouent au ballon. Combien d'enfants jouent au ballon ? » (*ibid.*). En République d'Irlande, les fractions sont mises en rapport avec les unités de mesures en quatrième année (« résoudre des tâches et des problèmes impliquant des fractions » [*op. cit.*, p. 69]). À cette occasion, deux activités complémentaires sont proposées. La première consiste à trouver la fraction d'une quantité exprimée dans une unité de mesure (« trouver combien font ¾ d'un mètre de ficelle. Trouver 1/5 de 2 500 mètres » [*ibid.*]) et correspond à l'emploi de fractions-opérateurs. La seconde implique de noter des mesures sous différentes formes, soit à

l'aide de nombres entiers, soit à l'aide de fractions ou d'écritures décimales (« renommer des unités de mesures (longueurs, masses, capacités) en utilisant des formes décimales ou fractionnaires. 250 g = 0,25 kg = 1/4 kg » [*ibid.*, p. 82]), et correspond davantage à des changements de registre de représentation. À Singapour, la présence dans les programmes de types de tâches relevant de la fraction-opérateur apparait, en dehors de l'intitulé concis que nous avons déjà évoqué, en quatrième année. Les élèves sont alors invités à « interpréter la fraction comme la part d'un ensemble d'objets » [*op. cit.*, 2006, p. 22]). En géométrie, elles semblent également nécessaires pour « trouver l'aire et la circonférence de demi-cercles et de quarts de cercles » et « trouver l'aire et le périmètre d'une figure composée des éléments suivants : carré, rectangle, triangle, demi-cercle et quart de cercle » (*ibid.*, p. 31).

L'étude de la fraction comme expression d'un ratio mettant en relation deux quantités est beaucoup plus rare (deux références seulement). Elle est introduite, en Corée du Sud, dans le cadre de l'étude de la proportionnalité (« comparer la taille de deux quantités, et les exprimer sous la forme d'une fraction », « en comparant deux quantités, discuter la relation entre une part et un entier, entre une part et une part dans des situations variées » [*op. cit.*, p. 29]). Aucune précision n'est apportée par les rédacteurs sur les activités que peuvent proposer les enseignants, mais nous pensons à transformer des phrases telles que « 3 fleurs sur 10 sont des roses » en « 3/10 des fleurs sont des roses », ou, à un niveau de difficulté supérieur, « il y a trois roses rouges pour quatre roses blanches » en « les roses rouges représentent 3/4 des roses blanches ». Les fractions ne sont toutefois qu'un moyen parmi d'autres (écritures décimales, pourcentages) rencontré par les élèves pour exprimer des proportions (« comprendre le sens d'un rapport et d'un taux entre deux quantités. Exprimer un taux de plusieurs façons » [*ibid.*]). La fraction-ratio est également abordée dans le Taipei chinois au moment de l'étude des pourcentages, même si elle n'apparait pas dans l'intitulé (« connaitre le sens des proportions et des taux, et les appliquer dans des problèmes tirés de situations du monde réel » [*op. cit.*, p. 163]), mais dans les commentaires associés. Les auteurs fournissent un exemple dans lequel la phrase « un kilogramme de farine coute 16 dollars » devient « 1/16 de kg coute 1 dollar ».

Le graphique ci-dessous semble confirmer la prévalence de la conception partie-tout dans l'enseignement initial des fractions. À l'inverse, la mise en relation de deux quantités à l'aide d'une fraction est un sujet d'étude peu fréquent chez les participants qui forment notre corpus. On peut y voir le résultat d'une gradation dans le niveau de difficulté des tâches mettant

en jeu les différentes significations de la fraction, puisque le partage d'une unité est une tâche plus simple effectuer que la mise en relation de deux quantités impliquant des unités différentes.

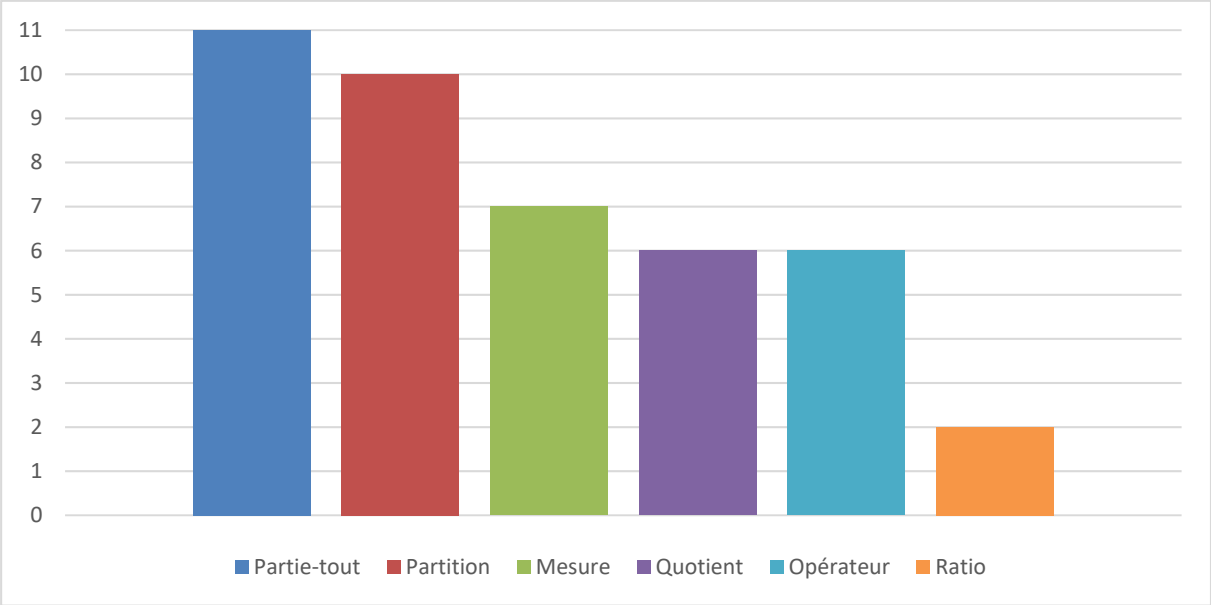


Figure 34. Nombre de programmes scolaires dans lesquels ont été identifié les différentes significations du concept de fraction, sur les onze qui composent notre corpus

Néanmoins, il nous faut apporter quelques nuances à notre propos. D'abord, dans les territoires dans lesquels la fraction-ratio doit être enseignée (Corée du Sud et Taipei chinois), les autres significations ne sont pas toutes enseignées (dans le curriculum de la première, on ne trouve pas trace de la fraction-mesure, ni de la fraction-opérateur ; pour le second, il manque la fraction-opérateur). Cela infirme l'idée d'une linéarité dans l'enseignement des différentes significations de la fraction. Ensuite, il existe des programmes dans lesquels leur diversité reste faible (à Hong Kong SAR et en Floride, avec respectivement deux et trois significations identifiées), ce qui montre que le législateur ne considère pas comme indispensable l'étude de toutes les facettes du concept de fraction. D'ailleurs, aucun d'entre eux n'a choisi d'imposer l'enseignement des six catégories que nous avions définies, en nous appuyant sur la typologie de Behr *et al.* (1983). L'idée qui ressort du tableau ci-dessous n'est donc pas la recherche par les auteurs d'une augmentation progressive du niveau de complexité, mais davantage l'idée que l'étude des fractions comme partie d'un tout ou d'un ensemble est indispensable, et que les autres sens peuvent faire éventuellement l'objet d'un enseignement, au gré des choix opérés dans chaque pays, sans qu'on puisse en expliquer les ressorts. Enfin, le graphique proposé n'indique pas la proportion d'intitulés relatifs à chaque signification. Si nous avions mené un tel travail, les écarts en termes d'utilisation aurait probablement été encore plus grands, les significations partie-tout, partition et mesure représentant la très grande majorité des items.

Participants	Partie-tout	Partition	Mesure	Quotient	Opérateur	Rapport	Total
Angleterre	Oui	Oui	Non	Oui	Oui	Non	4
Corée du Sud	Oui	Oui	Non	Oui	Non	Oui	4
Floride	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Non	3
France	Oui	Non	Oui	Oui	Oui	Non	4
Hong Kong SAR	Oui	Oui	Non	Non	Non	Non	2
Irlande du Nord	Oui	Oui	Oui	Non	Oui	Non	4
Ontario	Oui	Oui	Oui	Non	Oui	Non	4
Québec	Oui	Oui	Oui	Oui	Non	Non	4
République d'Irlande	Oui	Oui	Oui	Non	Oui	Non	4
Singapour	Oui	Oui	Non	Oui	Oui	Non	4
Taipei chinois	Oui	Oui	Oui	Oui	Non	Oui	5

Figure 35. Enseignement des différentes significations du concept de fraction au sein de notre corpus

Plus précisément, la prise en compte par le législateur de ces sous-constructions lors de l'élaboration des programmes est difficile à mettre au jour. À l'exception du Québec, où le lien entre celles-ci et l'intitulé « reconnaître différents sens de la fraction (partage, division, rapport) » (*op. cit.*, 2009a, p. 6) apparait clairement, la caractérisation des types des tâches relevant de significations différentes de celle de la fraction partie d'un tout est complexe. Comme nous l'avons vu en présentant les techniques visant à associer une fraction à un dessin, une même tâche peut, en fonction des variables, mettre en jeu différentes significations. Ainsi, la reconnaissance des fractions équivalentes peut s'inscrire dans le cadre de l'étude de la fraction partie-tout, ou de l'étude de la fraction-mesure, ainsi que le montre les programmes floridiens de 2014, en troisième année : « Comprendre deux fractions comme équivalentes (égales) si elles sont de la même taille, ou si elles sont sur le même point de la droite graduée » (*op. cit.*, 2014, p. 4). Si l'on prend en compte des tâches complexes, on s'aperçoit que leur résolution peut même impliquer deux conceptions utilisées successivement. Par exemple, pour additionner deux fractions de dénominateurs différents, l'élève peut, dans un schéma, redécouper les parts de façon à obtenir des fractions de même dénominateur (fraction-partage) avant de mettre les morceaux bout à bout pour les compter (fraction-mesure). Proposer une inteprétation unique pour un intitulé est parfois même impossible. Nous songeons à cet extrait des programmes sud-coréens : « Comprendre le sens et le principe de calcul de la multiplication entre des nombres entiers et des fractions, et entre fractions » (*op. cit.*, p. 26) : la multiplication d'une fraction et d'un entier peut aussi bien être envisagée dans le cadre des mesures comme une addition réitérée, ou pour prendre la fraction d'une quantité. La déduction de l'utilisation d'une facette du concept de fraction ne peut donc se faire seulement à partir des tâches : cela nécessite une définition précise de la technique utilisée par l'élève. Or, l'association d'un type

de tâche et d'une technique apparait assez rarement dans les programmes scolaires. La liste que nous avons dressée ne tient compte que des éléments des curriculums qui prévoient explicitement l'enseignement de telle ou telle signification. Néanmoins, il ne fait aucun doute que les instructions officielles offrent de nombreuses autres possibilités de mettre en jeu plusieurs facettes du concept, saisies ou non par les professeurs, à partir des tâches : les éléments technologiques des praxéologies relatives aux fractions sont bien souvent à construire (ou reconstruire) par les enseignants.

B. Domaines privilégiés

À l'évidence, le domaine numérique est le champ mathématique privilégié de l'expression des fractions à l'école : ces dernières sont enseignées dans ce contexte dans l'ensemble des pays qui forment notre corpus. Néanmoins, celles-ci sont aussi utilisées d'autres domaines. Ainsi, la géométrie est parfois l'occasion de faire des liens entre les figures que les élèves rencontrent dans le cadre de l'apprentissage des fractions, et les tracés réalisés dans le cadre de la géométrie. Par exemple, dans le Taipei chinois, en quatrième année, les élèves comprennent que le partage d'un cercle en quarts résulte du tracé de deux perpendiculaires passant par le centre du cercle (« dans l'exemple de la division du cercle en parties égales, deux partages successifs en deux produisent un quart ; les élèves reconnaissent que le quart est le résultat naturel de la perpendiculaire » [*op. cit.*, p. 149-150]). La relation qui existe entre les quatre parties du cercle à la suite du tracé des perpendiculaires est donc étudiée sous les angles géométrique et numérique, en lien avec la signification partie d'un tout, renforçant l'idée que, pour obtenir des quarts, les quatre morceaux dans l'unité doivent avoir la même aire. Il arrive également que la géométrie soit l'occasion de réaliser des activités spécifiques, permettant d'envisager les fractions sous un angle nouveau. Par exemple, à Singapour, en quatrième année, les fractions sont employées pour identifier et réaliser des rotations. Elles sont associées à une mesure en degrés (« associer un quart de tour à l'angle droit et à 90°, un demi-tour à 180°, trois quarts de tour à 270° et un tour complet à 360° » [*op. cit.*, 2006, p. 24]), au contraire de ce que nous avons pu observer en Irlande du Nord (« Décrire des rotations dans les sens horaire et anti-horaire, en termes de […] fractions d'un tour complet » [*op. cit.*, onglet « Formes et espace »]), en Ontario (« Identifier, effectuer et décrire des rotations d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour » [*op. cit.*, p. 55]) et en République d'Irlande (« Explorer les […] les roues qui font un tour complet, un demi-tour ou un quart de tour, dans la cour ou dans la classe.

[…] Discuter la relation entre l'angle droit et le quart de tour » [*op. cit.*, p. 51]). Dans de telles tâches, c'est la fraction-mesure qui est utilisée pour mesurer des angles.

Les fractions peuvent aussi être employées dans le champ du calcul de probabilités. Par exemple, en Ontario, en deuxième année comme en cinquième année, les fractions permettent d'indiquer la probabilité qu'un évènement survienne. En huitième année, les élèves seront amenés à « utiliser un nombre décimal, un pourcentage ou une fraction pour exprimer une probabilité » (*op. cit.*, p. 91). Au Québec, en cinquième et sixième année, ils doivent « utiliser la notation fractionnaire, la notation décimale ou le pourcentage pour quantifier une probabilité » (*op. cit.*, 2009a, p. 21). En République d'Irlande, les acquis des élèves relatifs aux fractions sont réinvestis dans le cadre du calcul de probabilités, en sixième année (« estimer la probabilité d'occurrence d'évènements ; les ordonner sur une échelle de 0 à 100 %, de 0 à 1 » [*op. cit.*, p. 110]). Les élèves sont invités à « enregistrer des résultats pour construire et utiliser des tableaux et graphiques de fréquence » [*ibid.*] et à comparer les résultats à ce qui était attendu. Dans un même intitulé, nous avons donc deux domaines qui font l'objet d'une utilisation des fractions : celui des probabilités et celui des graphiques.

Les fractions sont également utilisées dans le domaine de la mesure. Nous avons déjà décrit la plupart des activités imposées dans les développements relatifs à la fraction-mesure. Néanmoins, celles-ci peuvent apparaitre dans le domaine de la mesure et ne pas concerner cette facette du concept de fraction. Par exemple, en Angleterre, les collégiens « agrandissent des figures en utilisant un facteur scalaire fractionnaire » (*op. cit.*, 2007, p. 151), ce qui suppose un agrandissement de longueurs par le biais de la fraction-opérateur. C'est la même chose à Singapour où, les auteurs prévoient que les élèves puissent « trouver l'aire et le périmètre de demi-disques et de quarts de disques » (*op. cit.*, 2006, p. 31). Dans le Taipei chinois, le curriculum indique également que « le calcul d'une aire d'un secteur circulaire peut impliquer des fractions afin que les élèves sachent comment trouver l'aire d'un demi-cercle, d'un quart de cercle, d'un huitième de cercle » [*op. cit.*, p. 182]. De nombreuses tâches relèvent des conversions de représentations, comme en Irlande du Nord (« Dire l'heure en minutes après l'heure pile (5, 10, 15, 20, 25, 30). Relier cette notion à "une demi-heure" et "un quart d'heure" » [*op. cit.*, onglet « Mesures »]) ou en République d'Irlande (« Renommer des unités de longueur en utilisant des formes décimales ou fractionnaires. 25 cm = 0,25 m = $\frac{1}{4}$ m » [*op. cit.*, p. 76]). À l'inverse, la fraction-mesure peut être mise en jeu à l'extérieur du domaine des mesures, par exemple pour identifier une fraction dessinée sous la forme d'un diagramme à

l'aide d'un processus itératif (l'association d'une fraction et d'un dessin se trouve généralement dans les instructions officielles au sein du paragraphe relatif à la connaissance des nombres). Ce domaine n'est donc lié ni à un type de tâches, ni à une signification du concept de fraction.

L'organisation de données, avec la réalisation ou l'interprétation de graphiques, est un domaine susceptible de mettre en jeu des fractions. Ainsi, en Irlande du Nord, les élèves de troisième année développent leur capacité à identifier des demis et des quarts par la lecture de diagrammes circulaires (« développer la conscience des diagrammes circulaires (avec au maximum quatre secteurs, en utilisant la discrimination visuelle et les fractions simples, par exemple les demis et les quarts) » [*op. cit.*, p. 1]). De même, en République d'Irlande, il est demandé aux élèves de « lire et interpréter des diagrammes en bâtons et circulaires simples impliquant 1/2, 1/3, 1/4 » (*op. cit.*, p. 82). Évidemment, il est tout à fait possible que l'utilisation de diagrammes intervienne dans d'autres pays de notre corpus, parmi les problèmes qui seront donnés aux élèves : tous les curriculums ne contiennent pas une section spécifique à ce thème. Néanmoins, l'Irlande du Nord et la République d'Irlande sont les seuls territoires dans lesquels, d'après les instructions officielles, les graphiques sont l'occasion de mettre en jeu des fractions.

Comme pour les significations du concept de fraction, il existe un domaine qui prévaut (celui de la connaissance des nombres), tandis que les autres sont présents à des degrés divers dans les programmes d'enseignement. L'enseignement de la relation entre les mesures et les fractions est assez fréquente, tout comme l'intégration des fractions dans des travaux géométriques. En revanche, le contexte des probabilités et celui des graphiques sont moins souvent sollicités, comme on peut le voir sur le graphique ci-contre.

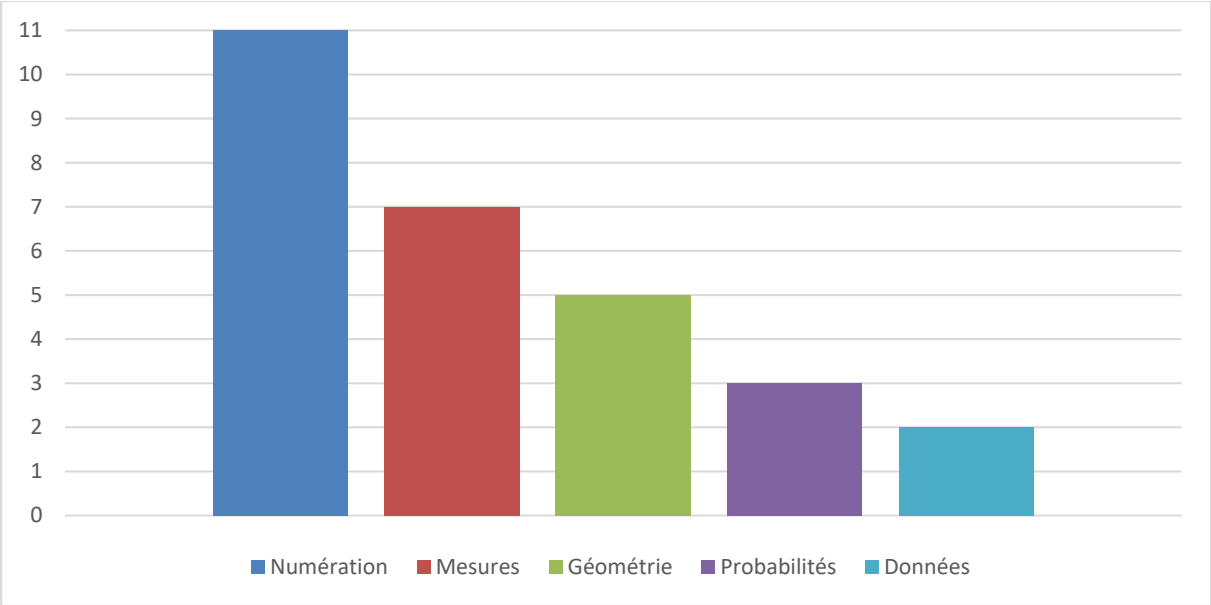


Figure 36. Nombre de programmes scolaires dans lesquels ont été identifiés les différents domaines pour l'enseignement des fractions, sur les onze qui composent notre corpus

En revanche, la variété des choix opérés par les législateurs est plus grande que pour les significations du concept de fraction. En République d'Irlande, les cinq domaines que nous avons identifiés apparaissent, tandis qu'en Corée du Sud et à Hong Kong SAR, l'étude des fractions s'inscrit dans le seul cadre numérique. L'utilisation imposée par les instructions officielles des fractions dans des cadres différents conduit-elle les élèves à construire une interprétation plus fine du concept de fraction ? Les données que nous avons relevées montrent que non, puisque Hong Kong SAR, qui est le territoire dans lequel le curriculum prévoit à la fois l'enseignement du nombre le plus faible de significations, et l'intégration des fractions dans le moins de domaines, est également le participant qui obtient le taux de réussite le plus élevé aux items impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 2015 (83 %).

Participants	Numération	Mesures	Géométrie	Probabilités	Données	Total
Angleterre	Oui	Oui	Non	Non	Non	2
Corée du Sud	Oui	Non	Non	Non	Non	1
Floride	Oui	Oui	Non	Non	Non	2
France	Oui	Oui	Non	Non	Non	2
Hong Kong SAR	Oui	Non	Non	Non	Non	1
Irlande du Nord	Oui	Oui	Oui	Non	Oui	4
Ontario	Oui	Non	Oui	Oui	Non	3
Québec	Oui	Non	Non	Oui	Non	2
République d'Irlande	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	5
Singapour	Oui	Oui	Oui	Non	Non	3
Taipei chinois	Oui	Oui	Oui	Non	Non	3

Figure 37. Domaines des mathématiques dans lesquels sont enseignées les fractions au sein de notre corpus

Néanmoins, cela ne veut pas dire que des changements de cadre ne permettent pas une meilleure compréhension des fractions. D'une part, le domaine forme un contexte, mais il ne dit rien de la tâche ni du concept de fraction qui sont mis en jeu : nous avons vu qu'un même domaine pouvait recouvrir plusieurs tâches relevant de significations différentes, et donc impliquant diverses techniques. Il n'est donc pas automatique que l'utilisation des fractions dans différents domaines entraine « la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas » (Douady, 1986, p. 11). Cette observation renforce notre intérêt pour les transferts opérés par les élèves : comment les élèves réussissent-ils des tâches appartenant à un domaine qui n'est pas le même, mais supposant l'activation de techniques identiques ? Et de techniques différentes ? Par ailleurs, étant donnée la variété des techniques susceptibles d'être apprises dans le seul domaine numérique, il est possible que le passage de l'une à l'autre suffise pour constituer un changement de cadre (au sens de Douady, *op. cit.*, p. 9) bénéfique pour la compréhension du concept. D'autre part, des éléments apparaissent ou disparaissent d'une version du curriculum à l'autre. Par exemple, le fait « d'utiliser les angles droits, les fractions d'un tour et, plus tard, les degrés, pour mesurer une rotation », et l'emploi du « langage associé » (Department for Education, 1995, p. 29) conduisait les élèves anglais à manipuler des fractions dans un cadre géométrique. Cette notion a disparu dans les programmes de 1999, et n'est pas réapparue depuis. Il est donc difficile de savoir quelles traces ces injonctions anciennes ont laissées dans les pratiques enseignantes et, éventuellement, dans les manuels scolaires. Une étude longitudinale nous permettra de déterminer une éventuelle relation entre l'évolution des instructions officielles et la réussite des élèves, mais nous constatons qu'une analyse fine des types de tâches imposés par les programmes est indispensable.

§ 2. La définition de la tâche

Le travail de l'élève est, au moins sur le plan réglementaire, encadré par les types de tâches sélectionnés par les auteurs des programmes. D'ailleurs, tous les programmes scolaires auxquels nous avons eu accès imposent principalement des types de tâches, plutôt que l'enseignement de savoirs ou de techniques. C'est pourquoi nous allons étudier tout particulièrement les types de tâches rencontrées dans les pays de notre corpus (A). Toutefois, l'appartenance à un type de tâches ne suffit pas pour caractériser la tâche. Les modalités susceptibles de la faire varier peuvent entrainer l'utilisation de procédures différentes par les élèves. En conséquence, nous étudierons également les modalités de la tâche privilégiées dans

chacun des pays de notre corpus, et notamment la nature des fractions dont l'enseignement est imposé (B).

A. Types de tâches privilégiés

Pour percevoir de façon synthétique les types de tâches privilégiés dans chacun des pays de notre corpus, nous proposons le tableau ci-contre. Pour le construire, nous avons tenu compte des instructions officielles en vigueur au moment des évaluations TIMSS 2015. Nous concédons que certains intitulés des programmes sont parfois ambigus, et que le choix binaire entre « oui » qui indique une présence dans les textes, et un vide qui indique une absence n'est pas toujours aisé. Toutefois, nous avons argumenté nos choix[1]. Pour chaque catégorie (cardinalité, ordinalité, opérations), nous avons indiqué en en-tête de colonne le pourcentage de types de tâches présents dans chaque curriculum. Par exemple, le nombre « 58 » que l'on trouve dans la deuxième colonne, à la deuxième ligne, signifie que 58 % des intitulés que nous avons rattachés à l'étude de la cardinalité ont été identifiés dans le curriculum de l'Angleterre, à un niveau ou à un autre de la scolarité. En fin de ligne, nous avons indiqué le pourcentage de présence de chaque intitulé dans les instructions officielles qui forment notre corpus. Par exemple, le nombre « 82 », que l'on trouve dans la dernière colonne, à la troisième ligne, signifie que 82 % des programmes scolaires que nous étudions contiennent l'intitulé « Identifier la fraction d'une figure géométrique ».

1. Voir, dans le chapitre II, le paragraphe intitulé « Présentation des types de tâches ».

	Angleterre	Corée du Sud	Floride	France	Hong Kong SAR	Irlande du Nord	Ontario	Québec	République d'Irlande	Singapour	Taipei chinois	Pourcentage
CARDINALITE	58	38	54	46	46	79	54	54	67	46	54	
T_1 : Identifier la fraction d'une figure géométrique.	Oui	Oui		Oui	Oui	Oui		Oui	Oui	Oui	Oui	82
T_2 : Représenter la fraction d'une figure géométrique.	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	100
T_3 : Identifier la fraction d'une collection.	Oui	Oui	Oui		Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	91
T_4 : Représenter la fraction d'une collection.	Oui	Oui	Oui		Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	91
T_5 : Réaliser des estimations de quantités à l'aide de fractions.	Oui											9
T_6 : Exprimer un rapport sous la forme d'une fraction.		Oui				Oui					Oui	27
T_7 : Mesurer à l'aide de fractions.			Oui	Oui		Oui			Oui			36
T_8 : Identifier une fraction sur la droite numérique.				Oui								9
T_9 : Représenter une fraction sur la droite numérique.			Oui	Oui			Oui	Oui	Oui		Oui	55
T_{10} : Compter avec des fractions.	Oui					Oui						18
T_{11} : Identifier une rotation d'une fraction de tour.						Oui	Oui		Oui	Oui		36
T_{12} : Effectuer une rotation d'une fraction de tour.						Oui	Oui		Oui	Oui		36
T_{13} : Exprimer une probabilité à l'aide d'une fraction.							Oui	Oui	Oui			27
T_{14} : Lire un diagramme impliquant une quantité fractionnaire.						Oui			Oui			18
T_{15} : Représenter une partition de pluralité.	Oui	Oui		Oui				Oui		Oui	Oui	55
T_{16} : Exprimer le reste d'une division à l'aide d'une fraction.	Oui					Oui		Oui			Oui	36
T_{17} : Passer des fractions décimales aux écritures décimales.	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	100
T_{18} : Passer des écritures décimales aux fractions décimales.	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	100
T_{19} : Passer des fractions non décimales aux écritures décimales.	Oui		Oui	Oui	Oui	Oui	Oui		Oui		Oui	73
T_{20} : Passer des écritures décimales aux fractions non décimales.	Oui		Oui	Oui	Oui	Oui			Oui		Oui	64
T_{21} : Passer des fractions aux écritures décimales à l'aide d'une division.		Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui				Oui	64
T_{22} : Passer des fractions aux pourcentages.	Oui		Oui		Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui		73
T_{23} : Passer des pourcentages aux fractions.	Oui		Oui		Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui		73
T_{24} : Choisir une écriture des nombres rationnels adaptée à la situation.			Oui			Oui		Oui				27
ORDINALITE	44	38	63	25	44	31	50	44	31	56	63	
T_{25} : Comparer ou ordonner des fractions de même dénominateur.	Oui	Oui	Oui		Oui	Oui	Oui			Oui	Oui	73
T_{26} : Comparer ou ordonner des fractions de dénominateurs liés.	Oui		Oui				Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	64
T_{27} : Comparer ou ordonner des fractions de dénominateurs différents.	Oui		Oui	Oui		Oui	Oui		Oui	Oui	Oui	73
T_{28} : Comparer ou ordonner des fractions unitaires.							Oui					9
T_{29} : Comparer ou ordonner des fractions de même numérateur.	Oui	Oui	Oui		Oui	Oui	Oui	Oui		Oui	Oui	82
T_{30} : Comparer ou ordonner différentes écritures des nombres rationnels.		Oui					Oui		Oui			27
T_{31} : Comparer des fractions qui ne portent pas sur la même unité.			Oui								Oui	18
T_{32} : Identifier des fractions équivalentes.	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	100
T_{33} : Produire des fractions équivalentes, y compris sous la forme d'une liste.	Oui		Oui	Oui		Oui		Oui	Oui	Oui		64
T_{34} : Réduire une fraction à sa plus simple expression.	Oui	Oui	Oui		Oui			Oui		Oui	Oui	64
T_{35} : Trouver plusieurs façons de représenter une même fraction.								Oui			Oui	18
T_{36} : Associer la taille des parts au nombre de parts dans l'unité.			Oui								Oui	18
T_{37} : Exprimer un entier sous la forme d'une fraction.					Oui					Oui		18
T_{38} : Exprimer une fraction sous la forme d'un entier.					Oui						Oui	18
T_{39} : Encadrer une fraction entre deux entiers.				Oui								9
T_{40} : Comparer des fractions un nombre de référence (1/2 ou 1).		Oui	Oui		Oui		Oui	Oui		Oui		55
OPERATIONS	31	69	56	44	44	19	69	13	63	81	69	
T_{41} : Passer d'une fraction supérieure ou égale à 1 à un nombre mixte.	Oui	Oui		Oui	Oui		Oui		Oui	Oui	Oui	73
T_{42} : Passer d'un nombre mixte à une fraction supérieure ou égale à 1.	Oui	Oui	Oui		Oui		Oui		Oui	Oui	Oui	73
T_{43} : Trouver le complément à l'unité.												0
T_{44} : Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur.	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui			Oui	Oui	82
T_{45} : Décomposer une fraction (décomposition additive).		Oui	Oui	Oui			Oui			Oui	Oui	55
T_{46} : Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs liés.		Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	91
T_{47} : Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents.		Oui	Oui		Oui		Oui		Oui	Oui	Oui	64
T_{48} : Multiplier une fraction par un entier (addition réitérée).		Oui	Oui	Oui			Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	73
T_{49} : Multiplier un entier par une fraction (fraction-opérateur)	Oui			Oui		Oui	Oui		Oui	Oui		55
T_{50} : Calculer le produit de deux fractions.		Oui	Oui	Oui	Oui		Oui		Oui	Oui	Oui	73
T_{51} : Observer l'effet de la multiplication d'un nombre par une fraction.												0
T_{52} : Diviser une fraction unitaire par un entier.		Oui	Oui				Oui		Oui	Oui	Oui	55
T_{53} : Diviser un entier par une fraction unitaire.		Oui							Oui	Oui	Oui	36
T_{54} : Calculer le quotient de deux fractions.		Oui	Oui		Oui		Oui			Oui	Oui	55
T_{55} : Observer l'effet de la subdivision d'une part en plusieurs parts.	Oui											9
T_{56} : Calculer la valeur de l'unité, la partie fractionnaire étant donnée.									Oui	Oui		18

Figure 38. Synthèse des types de tâches relatifs aux fractions présents dans les programmes d'enseignement, entre la première et la huitième année de scolarité obligatoire, au moment des évaluations TIMSS 2015

En ce qui concerne les tâches que nous avons désignées comme visant l'étude de la cardinalité, le type de tâches consistant à associer une fraction à un dessin est enseigné dans l'ensemble des pays du corpus. De la même façon, les changements de registre entre fractions et écritures décimales, dans un sens comme dans l'autre, sont inclus dans tous les curriculums. Toutefois, si l'enseignement du premier semble assez homogène, les seconds sont approfondis de façon diverse : toutes les tâches que nous avons distinguées à propos des changements de registre sont présentes dans le curriculum de l'Irlande du Nord, tandis qu'en Corée du Sud, seul le passage des fractions décimales aux ecritures décimales (et inversement), éventuellement à l'aide d'une division, apparait. Les autres types de tâches sont enseignés de façon éparse, de la même façon que nous avons observé, à propos des significations du concept, une signification priviligiée et d'autres diversement représentées, et à propos des domaines mathématiques abordés, un domaine principal et d'autres plus rarement évoqués.

En ce qui concerne les tâches que nous avons désignées comme visant l'étude de l'ordinalité, les auteurs sont unanimes pour écrire que les élèves doivent apprendre à reconnaitre des fractions équivalentes. En revanche, la réalisation d'un travail approfondi autour de cette notion (avec la production de fractions équivalentes et la réduction d'une fraction à sa plus simple expression) est plus rare. Elle est le fait de quatre participants (Angleterre, Floride, Québec, Singapour). Cette liste est assez proche de celle que l'on peut établir à partir des territoires dans lesquels est prévu un travail approfondi autour de la comparaison de fractions (c'est-à-dire où cette tâche est réalisée avec le même dénominateur, le même numérateur, des dénominateurs liés et des dénominateurs non liés) : il s'agit de l'Angleterre, de la Floride, de l'Ontario, de Singapour et du Taipei chinois. Il est à noter que la France est le pays dans lequel la diversité des types de tâches relatifs à la comparaison de fractions est la plus faible, avec une seule mention en huitième année de scolarité obligatoire (c'est-à-dire en classe de quatrième)[1].

---

1. Il existe bien dans les programmes français un paragraphe qui autorise l'enseignement des comparaisons de fractions dès la sixième année. En effet, dans la partie des instructions officielles consacrée aux nombres décimaux, il est indiqué que les élèves doivent être capables de « les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, les comparer, les ranger, produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000… et 0,1 ; 0,01 ; 0,001 » (*op. cit.*, 2008a, p. 38). Comme certaines fractions sont des nombres décimaux, il est sans aucun doute possible, pour les professeurs, de proposer des comparaisons de nombres décimaux exprimés sous une forme fractionnaire. Néanmoins, ils peuvent aussi faire le choix de ne

À Hong Kong SAR, les auteurs semblent avoir mis l'accent sur l'étude de la relation entre les fractions et l'unité, puisqu'on trouve dans ce curriculum le passage des unes aux autres dans les deux sens, ainsi que la comparaison de fractions par rapport à l'unité. Cette étude de la relation entre les fractions et les unités apparait dans une moindre mesure dans les programmes de Singapour et du Taipei chinois, ainsi qu'en France. Dans ce dernier pays, le travail est réalisé sous une forme différente, puisque le lien n'est pas établi entre une fraction et une unité, mais entre une fraction et plusieurs unités, avec l'encadrement de fractions entre deux entiers.

En ce qui concerne les opérations, le texte le plus exhaustif est celui de Singapour qui impose l'apprentissage de l'ensemble des types de tâches que nous avons relevées dans les pays de notre corpus, à l'exception des tâches métacognitives, dans lesquelles les élèves sont invités à proposer une réflexion sur le savoir qu'ils ont acquis (« observer l'effet de la multiplication d'un nombre par une fraction » et « observer l'effet de la subdivision d'une part en plusieurs parts ») et de la recherche du complément à l'unité, qui n'apparait dans aucun texte pour cette génération d'élèves (nous avons tout de même fait apparaitre ce type de tâche dans le tableau, car il est mis en jeu dans un item des évaluations TIMSS). Les élèves de Corée du Sud et du Taipei chinois ont également un programme relatif aux calculs impliquant des fractions particulièrement dense. Par rapport à Singapour, il ne manque que le type de tâches « calculer la valeur de l'unité, la partie fractionnaire étant donnée ». Cependant, celui-ci peut être réalisé de différentes façons, et notamment par le biais d'une division. Or, la division avec des fractions est un élément des instructions officielles sud-coréennes. Il est donc fort possible que la réalisation de ce type de tâches ait été envisagée par les auteurs sous l'intitulé relatif aux divisions de fractions. Les types de tâches à enseigner dans ces deux territoires sont proches de ceux identifiés en Floride, en Ontario et en République d'Irlande. Certes, à Hong Kong SAR, leur nombre est beaucoup plus faible. Néanmoins, pour chaque opération, ce sont les types de tâches les plus complexes qui sont cités (« additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents », « calculer le produit de deux fractions » et « calculer le quotient de

---

proposer des comparaisons de nombres décimaux que sous la forme d'écritures décimales, notamment parce que les écritures à virgule sont les seules évoquées dans ce paragraphe, et parce que les fractions font l'objet d'un paragraphe spécifique plus loin dans les programmes. C'est pourquoi nous estimons que les instructions officielles n'imposent pas, *stricto sensu*, à ce niveau de la scolarité, l'enseignement de la comparaison de fractions, alors que des mentions spécifiques aux fractions ont été relevées dans tous les autres curriculums étudiés au plus tard en quatrième année.

deux fractions »). On perçoit donc l'exigence du législateur quant aux capacités attendues des élèves dans ce domaine. À l'inverse, les opérations avec des fractions sont assez peu étudiées en France, en Irlande du Nord (rappelons toutefois que les dispositions relatives à l'enseignement secondaire n'ont pas pu être analysées pour ce participant), en Angleterre et surtout au Québec, où seule l'addition de fractions de même dénominateur doit être maitrisée par les élèves.

Nous avons donc identifié cinq pôles autour desquels gravitent la plupart des tâches relatives aux fractions prévues dans les programmes scolaires : l'association d'une fraction et d'un dessin (imposée de façon systématique et homogène dans tous les pays du corpus), les conversions de représentations (avec un socle constitué de l'étude de la relation entre les fractions et les notations décimales, et d'autres tâches plus diversement imposées, comme l'étude de la relation entre les fractions et les pourcentages), la comparaison de fractions (dont l'enseignement est prévu partout, sauf en France, mais avec des variables diverses, notamment sur le point de savoir si les fractions doivent être de même dénominateur ou non), la maitrise des fractions équivalentes (systématiquement envisagée, mais avec une densité variable : la production de fractions équivalentes, et la réduction d'une fraction à sa plus simple expression pouvant s'agréger aux activités de reconnaissance) et les opérations impliquant des fractions (avec l'étude de l'addition de fractions de dénominateurs différents dans tous les pays, au moins lorsque les dénominateurs sont liés, sauf en Angleterre où les dénominateurs doivent être identiques, et de la multiplication sous des formes diverses, tandis que la soustraction et la division ne sont présentes que dans certaines instructions officielles). À ce propos, deux remarques complémentaires peuvent être formulées. D'une part, il n'est pas de curriculum qui prévoie l'enseignement de tous les types de tâches que nous avons distingués, et il est difficile de distinguer un pays (ou un ensemble de pays) pour la couverture particulièrement étendue qu'il pourrait proposer du concept de fraction. D'autre part, il existe des points communs dans les types de tâches qu'il convient d'enseigner au sein de notre corpus (ceux que nous venons d'évoquer). Or, ce « socle commun » correspond bien aux tâches mises en jeu dans les évaluations TIMSS. Si des différences quant aux résultats obtenus par les élèves doivent être attribuées aux programmes scolaires, alors ce sont moins leurs aspects topogénétiques que chronogénétiques qu'il nous faut analyser.

B. Modalités de la tâche privilégiées

Parmi les modalités permettant de faire varier la tâche (dont la présentation a été faite dans le chapitre précédent), nous avons retenu la nature des fractions comme étant celle qui était à la fois la plus appréhendée par les auteurs des programmes, et la plus importante pour déterminer la ou les techniques susceptibles d'être employées par les élèves. D'autres modalités ont été évoquées précédemment (notamment celles que nous avons intégrées aux types de tâches, par exemple le fait de proposer des fractions de même dénominateur ou de dénomintaeurs différents). Dans ce paragraphe, nous nous appuierons sur les termes qui permettent de catégoriser ces fractions (unitaires, non unitaires, inférieures à 1, supérieures à 1, décimales, non décimales, réductibles, irréductibles, etc.) pour comparer les instructions officielles. Chacune mobilisant des propriétés et des enjeux différents, le choix des unes ou des autres sont susceptibles de faire varier la technique utilisée par les élèves. Nous indiquerons également si les autorités enserrent la taille des dénominateurs et des numérateurs, car cela peut aussi avoir une incidence sur les procédures utilisées par les élèves.

Disons d'emblée qu'il est assez rare de pouvoir déterminer si le lexique se rapportant aux fractions doit être maitrisé par les élèves. Ainsi, lorsqu'en Angleterre, on demande aux élèves de « trouver des fractions unitaires de nombres et de quantités (par exemple, 1/2, 1/3, 1/4 et 1/6 de 12 litres » (*op. cit.*, 2006, p. 76), rien ne permet de dire que les élèves doivent maitriser le terme « fractions unitaire ». Il n'y a qu'en Corée du Sud et au Québec que les auteurs prennent soin de faire la liste des termes que les élèves doivent maitriser. Nous ne cherchons donc pas à savoir ce que les élèves sont tenus de connaitre, mais plutôt à déterminer la nature des fractions qu'on leur propose de manipuler, en tant que modalité caractérisant la tâche. Cette analyse, parce qu'elle est menée pour chaque pays successivement, aurait pu se trouver dans les annexes, mais nous avons estimé que la discussion qu'elle présentait enrichirait significativement la compréhension des développements ultérieurs. Aussi l'avons-nous laissée dans le texte de la thèse, avec un format caractéristique qui permet au lecteur de la reconnaitre et de se dispenser de sa lecture. Nous ferons de même à chaque fois qu'il sera nécessaire de présenter une description des curriculums les uns à la suite des autres.

En Angleterre, l'identification de fractions équivalentes est utilisée pour simplifier des fractions (« simplifier des fractions en annulant des facteurs communs » [*ibid.*, p. 82]). Le caractère gras du paragraphe nous indique que cette notion est prioritaire dans les programmes de sixième année. Nous pensons donc que les élèves vont devoir faire la différence entre les fractions irréductibles, et celles qui peuvent encore être simplifiées. Pour le reste, les auteurs font référence aux fractions unitaires

(« Trouver des fractions unitaires de nombres et de quantités (par exemple, 1/2, 1/3, 1/4 et 1/6 de 12 litres » [*ibid.*, p. 76]) et aux fractions décimales, même si ce n'est qu'à travers l'évocation des dixièmes et des centièmes (Reconnaître et écrire les décimaux équivalents de tout nombre de dixièmes ou centièmes » [*op. cit.*, 2014, p. 131] et « exprimer les dixièmes et les centièmes sous forme de pourcentages » [*op. cit.*, 2006, p. 82]).

En Corée du Sud, la relation entre les fractions unitaires et les fractions propres est explicitée, le lien entre les deux pouvant être traduit par l'égalité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ (« comprendre le sens des fractions unitaires et des fractions propres, et leur relation » [*op. cit.*, p. 18]). Les fractions décimales sont également citées (« Par le biais des fractions propres dont le dénominateur est 10, comprendre le concept de nombre décimal » [*ibid.*]). L'année suivante, les élèves étendent leur compréhension de la fraction aux fractions supérieures ou égales à 1 et aux nombres mixtes. Ils doivent pouvoir passer des unes aux autres et définir ces notions (« comprendre les concepts de fraction propre, fraction supérieure ou égale à 1, nombre mixte, et leur relation » [*ibid.*, p. 21]). En cinquième année, l'un des objectifs concernant les fractions est la réduction à la plus simple expression ou à un dénominateur commun (« réduction de fractions, et réduction au même dénominateur » [*ibid.*, p. 25]), et les auteurs précisent que l'expression « fraction irréductible » fait partie des termes qui doivent être connus des élèves.

En Floride, les fractions supérieures ou égales à 1 sont citées en troisième année, mais le travail réalisé à leur propos n'est pas spécifique : il peut inclure également des fractions propres (« Représenter des fractions, y compris des fractions supérieures à un, en utilisant les aires, les collections, et les modèles de mesures » [*op. cit.*, 2007, p. 6]). La même expression (« y compris des fractions supérieures à un ») est utilisée pour la comparaison de fractions et la reconnaissance des fractions équivalentes, ce qui montre bien que les fractions supérieures ou égales à 1 doivent être considérées à travers les mêmes principes que les fractions inférieures à un. Ce n'est qu'en quatrième année que les nombres mixtes apparaissent de façon explicite, avec l'introduction des nouveaux programmes (« Ajouter et soustraire des nombres mixtes ayant le même dénominateur, par exemple en remplaçant chaque nombre mixte par une fraction équivalente, et/ou en utilisant les propriétés des opérations et la relation entre l'addition et la soustraction » [*op. cit.*, 2014, p. 4]) ; de même pour les fractions décimales (« Utiliser la notation décimale pour des fractions de dénominateurs 10 ou 100 » [*ibid.*, p. 5]). En revanche, les fractions unitaires ne sont jamais citées : elles n'apparaissent que dans les exemples, d'où l'existence d'un doute sur le point de savoir si la notion de fraction unitaire est incluse dans les programmes ou non (« Décomposer une fraction en une somme de fractions avec le même dénominateur de plus d'une façon, notant chaque décomposition sous la forme d'une équation. Justifier les décompositions, par exemple en utilisant un modèle de fraction visuel. Exemples : 3/8 = 1/8 + 1/8 + 1/8 ; 3/8 = 1/8 + 2/8 ; 2 + 1/8 = 1 + 1 + 1/8 = 8/8 + 8/8 + 1/8 » [*ibid.*, p. 4]). Comme ces décompositions sont réalisés de différentes façons, y compris en mélangeant les fractions unitaires et les fractions non-unitaires, nous avons considéré que cette notion ne faisait l'objet d'aucune attention particulière de la part des auteurs du curriculum.

En France, les fractions décimales sont citées à plusieurs reprises dans les programmes d'enseignement (en quatrième année : « Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième » [*op. cit.*, 2008, p. 38], en cinquième année : « Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur » [*ibid.*] et en

sixième année : « Associer diverses désignations d'un nombre décimal : écriture à virgule, fractions décimales » [*op. cit.*, 2008b, p. 14]). La distinction entre les fractions unitaires et non-unitaires n'est pas faite, les auteurs lui préférant le terme « fractions simples », employée elle aussi à plusieurs reprises dans les programmes. Les nombres mixtes sont évoqués (« Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 » [*op. cit.*, 2008, p. 38]), mais leur forme ne prendra pas celle que nous avons pu observer dans les autres pays du corpus. En effet, les nombres mixtes sont écrit sous la forme d'une addition dont les termes sont séparés par le signe « + », et non séparés par un espace.

À Hong Kong SAR, le curriculum impose de travailler sur des fractions de natures variées, avec une attention portée au vocabulaire et aux concepts sous-jacents, en particulier en quatrième année. Cette année-là, les élèves abordent les fractions supérieures ou égales à 1 et les nombres mixtes (« développer le concept de fraction inférieure à 1, supérieure à 1 et de nombre mixte » [*op. cit.*, p. 36]). Même si le terme de « fraction irréductible » n'est pas cité, nous pensons qu'il sera nécessairement utilisé par les élèves à travers des exercices impliquant « d'ajouter et soustraire des fractions avec le même dénominateur et [de] réduire la réponse à sa plus simple expression » (*ibid.*). En revanche, les fractions décimales ne sont pas citées, bien que l'on puisse déduire de l'intitulé imposant de « reconnaitre les écritures décimales comme une autre façon de noter les fractions » (*ibid.*) l'existence d'activités impliquant de telles fractions. De même, les fractions unitaires ne font l'objet d'aucune mention dans les programmes scolaires.

En Irlande du Nord, l'écriture sous la forme d'un nombre mixte est introduite afin de noter le résultat d'une division comportant un reste (« partager des collections d'objets pour développer la compréhension du sens de la fraction d'une quantité, avec pour résultats des nombres mixtes, par exemple 1/3 de 10 égale 3 + 1/3 » [*op. cit.*, p. 1]). Les auteurs précisent que les élèves doivent, en sixième année, « comprendre et utiliser les fractions usuelles » (*ibid.*), sans pour autant définir cette notion, ouvrant la possibilité d'interprétations variées de la part des enseignants. Si le terme de « fraction simple » est utilisé plusieurs fois dans les programmes, aucune distinction n'est faite entre les fractions inférieures à 1 et celles qui sont supérieures à 1. En revanche, les fractions unitaires n'apparaissent pas seulement pour faciliter le travail de comparaison au début de l'apprentissage, mais également pour faire l'objet d'une étude spécifique (« Explorer et ordonner les fractions avec le même dénominateur [1/6, 2/6, 5/6] et où le numérateur est un [1/3, 1/5, 1/8] » [*ibid.*]). Cette notion n'est donc pas abordée pour elle-même. De même, les fractions décimales sont évoquées pour aborder les écritures décimales (« Être sensibilisé à la notation décimale en relation avec les concepts de dixième et de centième » [*ibid.*]).

En Ontario, la référence aux fractions décimales est d'abord implicite, et ressort des exemples utilisés par les auteurs (« Explorer la relation entre les fractions et les notations décimales [p. ex., 1/10 = 0,1] » [*op. cit.*, p. 51]). Par la suite, les auteurs se montrent plus précis (« Établir et expliquer la relation entre une écriture décimale et une fraction dont le dénominateur est 10 ou 100, et vice versa » [*ibid.*, p. 61]). Le concept de fraction unitaire n'est quant à lui pas étudié, puisque dès le début de l'apprentissage des fractions, les élèves doivent pouvoir « lire et écrire en lettres et en chiffres des fractions simples (p. ex., 2/3, deux cinquièmes) » (*ibid.*, p. 52). En revanche, les auteurs prévoient un apprentissage spécifique des fractions supérieures ou égales à 1 et des nombres mixtes, d'une part à travers l'exploration de « l'équivalence entre une fraction supérieure ou égale à 1 et un nombre fractionnaire à l'aide de matériel concret ou illustré (p. ex., 8/3 = 2 + 2/3) » (*ibid.*, p. 61), et d'autre part à travers une étude séparée de

ces deux concepts, en utilisant « une variété d'objets et d'illustrations pour représenter des fractions supérieures ou égales à 1 et des nombres fractionnaires (p. ex., papier pliage, géoplan, mosaïque géométrique) » (*ibid.*).

Au Québec, les auteurs mettent l'accent sur l'apprentissage du vocabulaire relatif aux fractions, avec la maitrise dès la troisième année des mots « numérateur », « dénominateur », « entier », « partie équivalente » et « fraction équivalente », ainsi que la maitrise des « symboles » à travers la « notation fractionnaire » (*op. cit.*, 2009a, p. 7). Cette maitrise du vocabulaire est associée au sens, puisque l'élève doit, « avec l'intervention de l'enseignant, distinguer le rôle du numérateur de celui du dénominateur » et, toujours avec l'intervention de l'enseignant, se montrer capable de « lire et écrire une fraction » (*ibid.*, p. 6-7). En cinquième année, la nouveauté réside dans la réduction de fractions à sa plus simple expression, avec utilisation du vocabulaire associé (« avec l'intervention de l'enseignant, réduire une fraction à sa plus simple expression » et « utiliser l'expression "fraction irréductible" » [*ibid.*, p. 12]). Comme en Ontario, la référence aux fractions décimales reste implicite, puisque les auteurs indiquent simplement que les élèves doivent pouvoir « associer une fraction à un nombre décimal », et ce « jusqu'à l'ordre des centièmes (dixième, centième) » (*ibid.*, p. 7). En outre, dans les programmes québécois, il n'est question ni de fractions unitaires, ni de fractions supérieures ou égales à 1.

Dans une formulation très similaire à celle utilisée en Angleterre, les auteurs de République d'Irlande évoquent l'étude des fractions unitaires dans le cadre de la recherche d'une fraction d'une quantité (« Calculer une fraction unitaire d'un nombre et calculer un nombre, étant donnée la fraction unitaire du nombre. Combien fait 1/4 de 12 ? 1/8 du nombre = 6, trouve le nombre » [*op. cit.*, p. 68]). La même année, les fractions décimales doivent également être abordées par les élèves (« Identifier les dixièmes et les exprimer sous une forme décimale. Exprimer 1/10 sous la forme 0,1 » [*ibid.*, p. 69]). En quatrième année, la relation entre les fractions et les écritures décimales se poursuit avec des centièmes (« Exprimer les dixièmes et les centièmes sous la forme de fractions et de notations décimales » [*ibid.*]). En ce qui concerne les fractions supérieures à 1, les auteurs indiquent que les équivalences entre les fractions supérieures ou égales à 1 et les nombres mixtes doivent être représentées « schématiquement [et] numériquement », ce que nous entendons par un usage parallèle des représentations concrètes et symboliques de ces fractions (« établir des équivalences en utilisant du matériel concret. Explorer, comparer et noter des fractions supérieures ou égales à 1 ou sous forme de nombres mixtes schématiquement, numériquement et sur la droite numérique » [*ibid.*]). Par la suite, pour la même compétence, nous constatons la disparition des références aux représentations visuelles de la fraction. Seule la mention de la droite numérique subsiste pour relier la représentation symbolique des fractions à une idée de la quantité que celles-ci représentent (« exprimer des fractions supérieures ou égales à 1 sous forme de nombres mixtes et vice versa, et les placer sur la droite numérique » [*ibid.*]).

À Singapour, les fractions unitaires ne sont évoquées que pour faciliter le travail de comparaison au début de l'apprentissage (« Comparer et ordonner des fractions dont le numérateur est 1 ou dont le dénominateur est identique » [*op. cit.*, 2006a, p. 15]). De même, les fractions inférieures à 1 sont citées pour limiter le niveau de difficulté des divisions impliquant des fractions (« Diviser un nombre entier ou une fraction inférieure à 1 par une fraction inférieure à 1 sans l'aide de la calculatrice » [*ibid.*, p. 30]). Les fractions supérieures ou égales à 1 et les nombres mixtes font aussi l'objet d'une étude spécifique en quatrième année, soit pour étudier le lien qui les unit (« Parvenir à la maitrise des conversions entre

nombres mixtes et fractions supérieures ou égales à 1 en jouant avec des cartes de fractions (images et symboles), y compris des jeux numériques » [*op. cit.*, 2012a, p. 48]), soit de façon indépendante (« Utiliser des fractions de disque ou une droite graduée pour représenter et interpréter des fractions supérieures à un, comme des fractions supérieures ou égales à 1 ou des nombres mixtes » [*ibid.*]). Dans les anciens programmes, les fractions décimales apparaissaient clairement dans le programme de quatrième année (« convertir une fraction dont le dénominateur est un facteur de 10 ou 100 en une écriture décimale » [*op. cit.*, 2006a, p. 22]). Cependant, les instructions officielles de 2012, applicables aux élèves de ce niveau l'année des évaluations TIMSS 2015, cette référence apparait moins clairement, les fractions de dénominateur 10 et 100 n'étant pas mentionnées (« Reconnaitre qu'un décimal est formé d'une partie entière et d'une partie fractionnaire, […] et faire des liens entre les notations décimales, les fractions et les mesures » [*op. cit.*, 2012a, p. 49]). Par ailleurs, nous considérons que l'intitulé « Exprimer une fraction sous sa forme la plus simple » (*op. cit.*, 2006a, p. 18) va conduire les enseignants à confronter leurs élèves à l'expression « fraction irréductible ».

Dans le Taipei chinois, les élèves commencent à utiliser l'écriture symbolique de la fraction en deuxième année : à ce stade de la scolarité, seules les fractions unitaires permettent de modéliser les situations rencontrées. Dès la troisième année, ils sont confrontés à des fractions supérieures ou égales à 1 et manipulent des nombres mixtes, entendus comme une autre façon de noter des fractions supérieures ou égales à 1. Parallèlement, les enseignants sont invités à « présenter le nouveau chiffre des "dixièmes", en expliquant que ce nom est dû à l'égalité 1/10 = 0,1 » (*op. cit.*, p. 132), ce que nous interprétons comme l'introduction de la notion de fraction décimale. Ces connaissances sont étendues aux millièmes l'année suivante (« Les élèves étendent leurs connaissances relatives aux écritures décimalesaux centièmes et aux millièmes, et apprennent que les noms des chiffres proviennent des relations 1/100 = 0,01 et 1/1 000 = 0,001 » [*ibid.*, p. 144]). En quatrième année, le vocabulaire relatif aux fractions supérieures à un est introduit (« les élèves peuvent distinguer les fractions propres, supérieures ou égales à 1 et les nombres mixtes » [*ibid.*, p. 141]). Celles-ci sont employées dans des activités de conversion (« ils maîtrisent les conversions des fractions supérieures ou égales à 1 en nombres mixtes » [*ibid.*]). Les auteurs précisent que « pour passer d'une fraction supérieure ou égale à 1 à un nombre mixte, les élèves utilisent la division ». Enfin, les activités visant à « réduire une fraction à sa plus simple expression » (*ibid.*, p. 174) permettront très probablement aux élèves de rencontrer l'expression « fraction irréductible ». Les fractions rencontrées par les élèves du Taipei chinois sont donc très variées, avec une augmentation du niveau de difficulté au fil des années.

L'utilisation de la variable « nature des fractions » n'est pas du tout homogène dans les textes qui forment notre corpus. Leur point commun est de fonctionner comme un mécanisme affectant à la fois la technique utilisée et le niveau de difficulté de l'exercice. Néanmoins, les types de tâches auxquels ces variables sont rattachées sont très diverses. Par exemple, les fractions unitaires sont imposées à Singapour, en deuxième année, pour la comparaison de fractions, conduisant les élèves à porter leur attention sur la relation entre la taille du dénominateur et la taille des parts. En Angleterre et en République d'Irlande, elles sont citées à propos de la multiplication d'un entier par une fraction, de sorte que l'élève, pour identifier la fraction d'une collection, ne doit réaliser qu'une division, et non une division suivie d'une

multiplication. Les fractions supérieures à 1 sont souvent évoquées, soit pour dire qu'elles doivent faire l'objet d'une attention particulière (comme en République d'Irlande : « Explorer […] des fractions supérieures ou égales à 1 ou sous forme de nombres mixtes schématiquement, numériquement et sur la droite numérique » [*op. cit.*, p. 68]), soit au contraire pour dire que les tâches doivent inclure des fractions inférieures à 1 et des fractions supérieures à 1 (comme en Floride : « Représenter des fractions, y compris des fractions supérieures à un, en utilisant les aires, les collections, et les modèles de mesures » [*op. cit.*, 2007, p. 6]). Or, les techniques à mettre en œuvre pour représenter ou identifier des fractions sont susceptibles de varier selon que les fractions soient inférieures ou supérieures à 1, notamment parce que les premières sont davantage reliées à la fraction partie-tout et les secondes à la fraction-mesure. Les fractions irréductibles ne sont évoquées qu'à propos de la simplification de fraction. De la même façon, les fractions décimales sont presque toujours rattachées à des tâches incluant des changements de registre. Toutefois, des techniques différentes auraient pu être distinguées selon que les fractions utilisées par les élèves n'incluent que des dixièmes, ou d'autres types de fractions décimales (dans ce cas, il serait alors possible de procéder à une décomposition de fractions décimales avant la conversion de représentation).

La seconde question que nous posons est de savoir si la taille des nombres est une variable appréhendée par le législateur. L'objectif de ce paragraphe n'est pas d'expliquer, tâche après tâche, comment les auteurs circonscrivent l'activité de l'élève, mais plutôt de dégager, globalement, les orientations données par les auteurs quant à la liberté (ou l'absence de liberté) laissée aux enseignants pour choisir les nombres qu'ils incluent dans les exercices proposés à leurs élèves. L'idée sous-jacente est que les techniques utilisées par les élèves peuvent être affectées par l'utilisation de nombres plus ou moins grands. Comme nous l'avons indiqué, on peut comparer 2/3 et 3/4 en réalisant un dessin, mais cette procédure sera beaucoup plus difficile à mettre en œuvre pour comparer 5/8 et 11/15.

En Angleterre, dans les programmes de 2006, les dénominateurs qui doivent être utilisés se déduisent exclusivement des exemples fournis par les auteurs. Par exemple, en troisième année, les auteurs des instructions officielles demandent aux élèves de manipuler correctement la fraction-opérateur et donnent deux exemples de fractions qui peuvent être incluses dans des exercices (« Trouver des fractions de nombres, de quantités ou de formes [par exemple, 1/5 de 30 prunes, 3/8 d'un rectangle de 6 par 4] » [*op. cit.*, p. 78]). Il semble donc ici que l'étude soit limitée aux fractions propres et, dans les exemples, les dénominateurs restent inférieurs à dix. Le nombre auquel s'applique la fraction-opérateur est 30 dans un cas, et 24 dans l'autre. On peut penser que ce n'est pas un hasard si 30 est un multiple de 5, et si 24 est un multiple de 8. Nous déduisons donc de ces exemples la règle selon laquelle,

afin de faciliter les calculs, le nombre auquel s'applique la fraction-opérateur doit être un multiple du dénominateur. En 2014, des exemples sont toujours donnés, mais ils sont moins nombreux. À la place, les auteurs indiquent, pour certaines compétences et de façon assez peu précise, que fractions doivent mettre en jeu des petits dénominateurs (« Reconnaitre et montrer, en utilisant des diagrammes, des fractions équivalentes avec des petits dénominateurs » [*op. cit.*, 2014, p. 125]).

Dans les programmes scolaires sud-coréens, chaque chapitre se termine par la liste des termes et symboles que doivent maitriser les élèves, ainsi que par quelques recommandations à destination des enseignants. Par exemple, en deuxième année, les auteurs indiquent que dans la division des quantités continues en parts égales, il ne faut proposer « que des figures qui peuvent être partagées en parts de forme et de taille égales » (*op. cit.*, p. 13). Il existe ainsi d'autres recommandations visant à « inclure les fractions dans des problèmes tirés de situations de la vie quotidienne », ou à « réaliser des estimations avant d'additionner ou de soustraire des fractions » (*ibid.*). Néanmoins, aucune indication n'est fournie quant à la nature des fractions qui doivent être incluses dans les exercices proposés aux élèves.

En Floride, l'organisation des programmes a beaucoup changé, puisque, dans les programmes de 2007, les auteurs ne prévoyaient aucune limite à l'utilisation des fractions, quel que fût le type de tâche considéré. En revanche, dans les *Common Core Standards* (normes transposées dans la réglementation floridienne en 2014), le dénominateur des fractions proposées aux élèves doit être conforme aux indications des instructions officielles. De façon originale, cette limitation n'est pas donnée pour une compétence en particulier, mais l'ensemble du chapitre relatif aux fractions, c'est-à-dire pour toutes les compétences figurant au programme pour une année donnée. Ainsi, en troisième année, les attentes « sont limitées aux fractions de dénominateur 2, 3, 4, 6, 8 » (*Common Core State Standards for Mathematics*, 2010, p. 24). En quatrième année, l'étude est étendue « aux fractions de dénominateur 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 ou 100 » (*ibid.*, p. 30). Néanmoins, un doute subsiste quant à l'applicabilité de ces normes dans l'État de Floride, car si le texte rédigé à un niveau fédéral a été intégré presque mot pour mot dans les programmes floridiens de 2014, les notes de page qui s'y trouvaient n'apparaissent pas dans le curriculum local. Or, ce sont les notes de bas de page des *Common Core Standards* qui limitent les fractions utilisables dans les exercices.

En France, les auteurs utilisent souvent le terme de « fraction simple » pour limiter le niveau de difficulté de la tâche par le biais des fractions mises en jeu. Nous retrouvons ce terme à plusieurs reprises dans les programmes de quatrième année (« Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième ; […] utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs » [*op. cit.*, p. 38]), de cinquième année (« Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs ; […] Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur » [*ibid.*]). En revanche, il n'apparait plus dans les instructions officielles de l'enseignement secondaire (c'est-à-dire à partir de la sixième année d'enseignement obligatoire). Il n'est pas utilisé non plus, en cinquième année, pour décrire la compétence : « Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 » (*ibid.*), ce qui suggère que l'on puisse décomposer une fraction supérieure ou égale à 1, non seulement par le biais de schémas, mais également par le biais du calcul lorsque les nombres en jeu sont trop grands pour réaliser un dessin. Pour les autres compétences, aucune limitation ni aucun exemple ne nous permettent de circonscrire les nombres soumis aux élèves à des fractions de quelque nature que ce soit.

Les programmes scolaires de Hong Kong SAR sont très succincts. En conséquence, les tâches sont très rarement décrites dans leurs modalités. En cinquième année, lorsque les élèves développent leur capacité à additionner et à soustraire des fractions de dénominateurs différents (« réaliser l'addition et la soustraction de fractions simples avec différents dénominateurs, pour des sommes impliquant au plus deux facteurs » [*op. cit.*, p. 38]), et qu'ils utilisent leurs acquis pour résoudre des problèmes (« résoudre des problèmes impliquant l'addition et la soustraction de fractions simples » [*ibid.*]), les auteurs limitent la variété des nombres rationnels utilisés aux « fractions simples », ce qu'ils définissent comme une fraction dont le dénominateur n'excède pas douze. De même, on comprend que le nombre de facteurs dans le calcul ne doit pas dépasser deux lorsque de cet apprentissage, ce qui permet de réduire la difficulté de la tâche. En revanche, cette mention n'apparait pas dans le cadre de la résolution de problèmes. Pour les autres compétences, les instructions officielles ne donnent aucune indication sur la nature des fractions qui doivent être utilisées.

En Irlande du Nord, la nature des fractions est utilisée comme outil de progressivité de l'apprentissage. En deuxième année, ce sont les demis et les quarts qui sont travaillés (« explorer le concept de demis, quarts en utilisant des formes entières et des collections d'objets » [*op. cit.*, 2006, onglet « Nombres »]). En troisième année, les mêmes tâches sont reprises, avec des fractions plus variées (« étendre le concept de fraction à une large série de fractions en utilisant des formes entières et des collections d'objets », [*ibid.*]). Les rédacteurs des instructions officielles ne précisent pas les limites de cette augmentation, ce qui suggère des interprétations variées de la part des enseignants. Les exemples donnés dans le deuxième paragraphe suggèrent à tout le moins l'utilisation des tiers, des quarts et des cinquièmes. En effet, en parallèle, une première approche de l'écriture fractionnaire est proposée aux élèves (« être sensibilisé à la notation de ces fractions, par exemple 1/5, 3/4, 2/3 » [*ibid.*]). Dans la suite du texte, les fractions proposées permettent de limiter le niveau de difficulté des tâches, sans reprise ultérieure de la tâche avec d'autres fractions. Par exemple, en quatrième année, les élèves doivent « calculer avec des fractions : 1/3 de, 1/4 de, 2/3 de, 3/5 de, mentalement, à l'écrit, à l'aide de la calculatrice. » [*ibid.*]. De même, en cinquième année, les professeurs devront leur faire « partager des collections d'objets pour développer la compréhension du sens de la fraction d'une quantité, avec pour résultats des nombres mixtes, par exemple 1/3 de 10 est égal à 3 + 1/3 » [*ibid.*]. En sixième année, les auteurs précisent que l'utilisation des fractions dans le cadre des changements de registre se limite aux « fractions usuelles » (« comprendre et utiliser les fractions usuelles, les écritures décimales et les pourcentages, et explorer les relations qu'ils entretiennent » [*ibid.*]), sans pour autant définir cette notion, ouvrant encore une fois la possibilité d'interprétations variées de la part des enseignants.

En Ontario, les auteurs indiquent plus souvent les supports qui doivent être utilisés (papier quadrillé, diagrammes, etc.) que les fractions qui doivent être manipulées. Néanmoins, ponctuellement, les exemples qui accompagnent certaines compétences permettent aux enseignants de comprendre la nature des fractions à inclure dans les exercices (« Comparer deux fractions en utilisant une fraction repère telle que 1/4, 1/2, 3/4 et 1 [p. ex., 8/14 est plus grand que 7/16, car 8/14 est plus grand que 1/2 et 7/16 ne l'est pas] » [*op. cit.*, p. 61]). Comme dans d'autres pays, la limitation des fractions conduit à instaurer une progressivité des apprentissages pour une même compétence. Ainsi, on passe de la compétence « Représenter les tiers en tant que partie d'un élément et d'un ensemble d'éléments à l'aide de matériel concret » (*ibid.*, p. 43) en troisième année, à la compétence « Utiliser une variété d'objets et d'illustrations pour représenter des fractions simples en tant que parties d'un tout et parties d'un

ensemble dans divers contextes » (*ibid.*, p. 52) en quatrième année. Les fractions simples remplacent donc les tiers, sans que la notion de fraction simple ne soit précisée.

Au Québec, la nature des fractions utilisées n'est jamais définie dans les programmes d'enseignement. De plus, il n'y a pas d'exemple qui permettrait aux enseignants de définir quels dénominateurs ils doivent inclure dans les exercices qu'ils proposent à leurs élèves. Seul le vocabulaire qui doit être maitrisé est spécifié, ce qui fait qu'en première et en deuxième année, on sait que les élèves ne manipuleront que « des demis, des tiers et des quarts » (*op. cit.*, 2009a, p. 7). On sait par ailleurs que la lecture et l'écriture des fractions n'est pas encore requise à ce stade de la scolarité. Cependant, pour les années ultérieures, aucune indication n'est fournie. Néanmoins, comme l'apprentissage « se fera par un recours systématique à du matériel concret et à des schémas lorsqu'il traitera des situations où interviennent des fractions » (*ibid.*, p. 5), les dénominateurs et les numérateurs ne pourront pas être trop grands. L'une des spécificités des instructions officielles du Québec est donc de limiter la difficulté de la tâche, non pas en restreignant les nombres mis en jeu dans les exercices aux fractions possédant un dénominateur simple, mais en prévoyant l'intervention de l'enseignant et en limitant les attentes vis-à-vis de l'autonomie de l'élève.

En République d'Irlande, on trouve une utilisation similaire des modalités relatives à la nature des fractions mises en jeu. En quatrième année, les tâches sont similaires à celles déjà réalisées par les élèves au cours de la troisième année. Néanmoins, les dénominateurs rencontrés sont plus variés (« identifier des fractions et leur forme équivalente de dénominateur 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 12 » [*op. cit.*, p. 68]). En effet, les tiers, les sixièmes, les neuvièmes et les douzièmes, ainsi que les cinquièmes, sont introduits. Cet élargissement pourra notamment permettre aux professeurs de proposer un travail sur les multiples de trois (par exemple, la reconnaissance de l'égalité 1/3 = 2/6 = 3/9 = 4/12). Enfin, en cinquième année, les dénominateurs 7 et 11 peuvent être utilisés pour réaliser les mêmes activités : « Comparer et ordonner des fractions et identifier des fractions équivalentes avec des dénominateurs de 2 à 12 » (*ibid.*, p. 89). En revanche, si une compétence n'est pas enseignée à nouveau au cours de la scolarité, les auteurs ne limitent pas les fractions utilisées : ils se contentent de donner des exemples. Ainsi, en quatrième année, les professeurs s'appuireront sur l'exemple fourni par les auteurs, afin de donner à leurs élèves des activités d'un niveau de difficulté adapaté à propos de la compétence : « calculer un nombre, étant donnée la fraction dont le dénominateur est multiple du nombre. *3/10 du nombre = 45, trouve le nombre* » (*ibid.*, p. 68).

À Singapour, des types de tâches très divers sont enseignés dès la deuxième année. Pourtant, pour l'ensemble de ces types de tâches, les auteurs limitent les dénominateurs utilisés à 12 (*op. cit.*, 2006a, p. 15-16). Comme ils ne réapparaissent pas sous cette forme ensuite, on comprend qu'il ne s'agit pas de limiter le niveau de difficulté au début de l'apprentissage pour ensuite parvenir à exécuter ces activités avec des nombres plus complexes. Il semble plutôt que les auteurs aient préféré que les élèves, à ce stade de la scolarité, aient une bonne représentation de ces fractions et soient capables de les utiliser dans des contextes variés. Il se dégage de ce texte l'impression que les auteurs ont considéré cet ensemble de fractions dont le dénominateur est inférieur ou égal à 12, et ont ensuite défini les tâches qui pourraient impliquer de tels nombres, plutôt que de définir d'abord des types de tâches, et d'associer ensuite pour chacune d'elles les fractions qui pourraient être manipulées. D'ailleurs, cette limitation intervient encore en troisième, quatrième et cinquième année. Jusqu'à un stade avancé de la scolarité

obligatoire, les auteurs obligent donc les élèves à travailler avec de petits dénominateurs, sans doute pour faciliter les activités de manipulation et ouvrir la possibilité de travailler avec des représentations concrètes (du matériel) et semi-concrètes (des schémas). En outre, se trouvent exclues les additions et les soustractions impliquant, non pas plus de deux termes comme à Hong Kong SAR, mais plus de deux dénominateurs différents (*ibid.*, p. 22).

Dans le Taipei chinois, les explications qui accompagnent l'intitulé des compétences à enseigner sont généralement très précises sur les fractions qui doivent être manipulées par les élèves. Cette information est explicitement donnée par les auteurs (« Nous suggérons l'utilisation de dénominateurs inférieurs à 20 et en particulier les nombres couramment utilisés tels que 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 16 et 20. Dans le but de faire le lien avec les notations décimales, le dénominateur des fractions pourra être également 100 et 1 000 » [*op. cit.*, p. 142]) ou peut être déduite des exemples fournis (« Par exemple, les élèves comprennent "trois quarts de 32 grains de raisin représentent 24 grains" en référence à la division des 32 grains de raisin par quatre [$32 \div 4 = 8$ grains pour chaque groupe] et à la réunion de trois groupes [$8 \times 3 = 24$ grains] » [*ibid.*, p. 131]). Quelle que soit la compétence, il nous a semblé que les auteurs cherchent à établir une progression, à travers le choix des nombres, qui permette aux élèves de travailler d'abord avec des éléments concrets pour ensuite parvenir à abstraire les connaissances attendues et généraliser le savoir-faire sur lequel ils ont travaillé. On le voit bien lorsque les élèves apprennent à lire les fractions : « Les élèves peuvent commencer avec $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ qui sont facilement divisibles, et comprendre que $\frac{1}{2}$ pizza est la moitié d'une pizza, $\frac{1}{4}$ est un quart d'une pizza. Ensuite, les élèves peuvent apprendre $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, … , $\frac{1}{12}$ avec des dénominateurs généraux » [*ibid.*, p. 114].

À l'exception de la Corée du Sud, tous les programmes prévoient, pour un ou plusieurs types de tâches, de limiter la taille des dénominateurs. Cette limitation prend toutefois des formes différentes. Dans certains territoires, l'apprentissage des fractions est mené avec des fractions de dénominateur inférieur à 12 (par exemple, en République d'Irlande) ou à 20 (par exemple, dans le Taipei chinois). Dans d'autres, les auteurs évoquent des fractions « simples », sans que ce terme soit défini (par exemple, en France), ou bien la taille des dénominateurs ne peut être déduite que des exemples fournis dans le curriculum (par exemple, en Angleterre). Parfois, cette limitation a une portée générale et concerne tous les types de tâches relatifs aux fractions pour une année scolaire donnée (par exemple, à Singapour) ; le plus souvent, elle est associée à un type de tâches (par exemple, en Irlande du Nord). L'idée générale qui se dégage de ces injonctions est sans doute la volonté du législateur de voir les élèves travailler avec des fractions qui ne soient pas trop complexes, probablement pour leur permettre, surtout au début de l'apprentissage, de développer des représentations visuelles et mentales des écritures fractionnaires. En dehors du cas des fractions décimales, nous n'avons trouvé dans aucun texte des exemples laissant à penser que les élèves travaillent avec des nombres qui ne permettraient pas leur représentation schématique. Progressivement, les limitations relatives aux nombres

utilisés deviennent moins fréquentes. Le silence du législateur rend nécessaire des études complémentaires pour comprendre comment les enseignants déterminent la taille des fractions qu'ils incluent dans les exercices : quelle relation avec la tâche ? Avec le niveau de scolarité des élèves ? Avec leur compétence réelle ou supposée en calcul mental ? De telles recherches permettraient également de déterminer l'incidence éventuelle de ces choix sur la maitrise des techniques par les élèves. À partir de l'analyse des instructions officielles, nous faisons deux observations. D'une part, les indications faites par les auteurs des programmes quant à la taille des fractions ne modifient pas les techniques à utiliser par les élèves (telles que nous les avions identifiées à partir des types de tâches). D'autre part, les préconisations relatives à l'utilisation de petits dénominateurs correspondent aux pratiques des auteurs de TIMSS : ces tests mettent systématiquement en jeu des fractions de petits dénominateurs (ou des fractions décimales, pour la relation avec les écritures décimales et les pourcentages).

Conclusion de la sous-section

En cherchant à établir une cartographie des différents aspects de la notion de fraction que les élèves doivent acquérir, nous avons pu observer qu'il existait une conception dominante (la partie d'un tout), et que cette facette du concept de fraction était complétée avec des enseignements épars, dont l'organisation était spécifique à chaque pays. De la même façon, la connaissance des nombres est le champ d'application priviligié de la notion de fraction chez tous les participants que nous étudions, tandis que les autres domaines dans lesquels elle pourrait trouver à s'appliquer sont investis avec une grande diversité (géométrie, probabilités, etc.). La même observation a été réalisée à propos des types de tâches : certaines d'entre elles sont systématiquement étudiées (associer une fraction et un dessin, convertir une fraction en une écriture décimale et inversement, comparer des fractions, identifier des fractions équivalentes, additionner et multiplier des fractions), la spécificité des curriculums résidant dans la nature des variables associées à ces tâches, et aux autres types de tâches dont les législateurs ont choisi d'imposer l'étude. Nous avons vu que l'évaluation de types de tâches similaires était prévue dans TIMSS, ce qui renforce notre intérêt pour la chronologie de ces enseignements, pour la comparaison des résultats des élèves et pour les tranferts qu'ils sont susceptibles de réaliser entre des types de tâches différentes relevant de la même signification (ou de significations différentes) ou du même domaine (ou d'un domaine différent). En ce qui concerne les variables de la tâche, elles ne sont proposées que pour des types de tâches particuliers (notamment la comparaison et l'addition de fractions, à travers une description des

dénominateurs) ou, de façon moins homogène dans les programmes, à travers les catégories de fractions ou la taille des nombres qui doivent être utilisés. Toutefois, cela reste rare, et l'absence d'indication empêche parfois de déterminer avec précision la facette du concept qui est étudiée, la technique à mettre en œuvre par les élèves et parfois même de caractériser la tâche elle-même (par exemple, l'injonction à multiplier une fraction et un entier ne donne aucune indication sur les familles de situations qu'une telle opération doit permettre de résoudre). L'analyse des techniques s'avère donc indispensable pour décrire avec plus précision les praxéologies scolaires telles qu'elles sont conçues par les législateurs.

Sous-section II. Les techniques

Les techniques que doivent utiliser les élèves pour résoudre les tâches qui leur sont proposées ne sont pas toujours indiquées par les auteurs des instructions officielles. Lorsque ce n'est pas le cas, toute liberté est laissée aux enseignants pour déterminer quelle(s) technique(s) peuvent être utilisées au sein de leur classe, entrainant une plus grande responsabilité des professeurs dans la définition des praxéologies relatives aux fractions. Lorsque c'est le cas, la technique à employer est systématiquement rattachée à un type de tâches en particulier, circonscrivant le champ des tâches susceptibles d'être proposées à l'élève (celles que la technique permet de résoudre) et induisant un travail autour d'une facette du concept de fraction en particulier. En conséquence, le rôle joué par les enseignants dans la définition des praxéologies relatives aux fractions est moindre. Pour comparer les choix réalisés dans les pays de notre corpus à propos des techniques, nous allons commencer par définir dans quelle mesure elles apparaissent dans ces instructions officielles (§ 1), pour ensuite préciser la nature des techniques que les rédacteurs ont privilégiées (§ 2).

§ 1. Leur présence dans les programmes d'enseignement

Le choix d'imposer une technique ou de laisser toute liberté aux enseignants sur ce point est étroitement lié au type de tâches considéré. Les auteurs peuvent considérer indispensable de prévoir l'apprentissage de la technique consistant à mettre deux fractions sur un même dénominateur pour l'addition et la soustraction de fractions, et faire silence à propos des comparaisons de fractions, alors même qu'une technique identique aurait pu être imposée. Par ailleurs, dans les textes que nous étudions, la description des techniques est variable : le législateur justifie parfois son choix à l'aide d'éléments technologiques, ce qui est révélateur d'un degré de précision supplémentaire dans la définition du savoir que l'on transmet aux

enseignants, contribuant à un encadrement plus strict du travail de tranposition didactique interne effectué par les professeurs. Néanmoins, le plus souvent, les techniques sont énoncées sous le seul angle de la procédure ou des supports utilisés par les élèves. Nous détaillerons donc les types de tâches auxquels sont associées des techniques dans les curriculums (A), avant de décrire la façon dont elles sont rédigées par les législateurs (B).

A. Les types de tâches concernés

La présence de techniques dans les programmes scolaires n'est pas si fréquente. Comme nous l'avons souligné, les auteurs privilégient la description de types de tâche. Certes, ils proposent parfois des variables qui suggèrent l'emploi de techniques différentes (par exemple, quand le législateur prévoit l'enseignement de l'addition de fractions de même dénominateur, puis de l'addition de fractions de dénominateurs différents), mais ces dernières restent bien souvent implicites (dans l'exemple proposé, on peut penser respectivement à l'addition des numérateurs et à l'utilisation d'un dénominateur commun, mais l'emploi d'un schéma peut tout aussi bien conduire à la réussite de la tâche). Après avoir décrit le contenu de chaque curriculum à ce sujet, nous dirons de façon synthétique pour quels types de tâches les auteurs prennent le plus souvent soin d'expliciter les procédures à utiliser.

En Angleterre, la mention des techniques qui doivent être utilisées par les élèves est assez rare. On la trouve pour les compétences visant à identifier ou produire des fractions équivalentes (par exemple, en troisième année : « Utiliser des diagrammes pour comparer les fractions et établir des équivalents » [*op. cit.*, 2006, p. 76]) ou à l'addition et la soustraction de fractions (par exemple, dans l'enseignement secondaire : « [Les élèves] additionnent et soustraient des fractions en les écrivant avec un dénominateur commun » [*op. cit.*, 2007, p. 151]). Dans les nouveaux programmes, des formulations similaires sont utilisées, et ils ne contiennent davantage d'informations relativement aux techniques supposées être employées par les élèves.

En Corée du Sud, les auteurs donnent très peu d'indications relatives aux techniques. Il faut dire que les programmes sont très concis. En outre, il est nécessaire de procéder à des déductions à partir d'une analyse sémantique pour entrevoir une suggestion méthodologique. Ainsi, en troisième année, il est demandé aux élèves de « savoir comment comparer la taille des fractions propres de même dénominateur et de fractions unitaires simples » (*op. cit.*, p. 18), tandis qu'en quatrième année, ils doivent « comparer la taille de fractions de même dénominateur » (*ibid.*, p. 21). Selon nous, la différence entre « savoir comment comparer » et « comparer » suggère que l'apprentissage initial est fondé sur l'acquisition d'une technique formelle telle que « lorsque je compare deux fractions unitaires, la plus grande est celle dont le dénominateur est le plus petit » ou « lorsque je compare deux fractions de même dénominateur, la plus grande est celle dont le numérateur est le plus grand », d'où l'utilisation de l'adverbe de manière « comment ». L'année suivante, cette procédure est supposée acquise, puisque

seule la tâche « comparer » est évoquée, sans mention de l'apprentissage d'un savoir-faire. De même, en cinquième année, les auteurs font la différence entre d'une part, l'acquisition du sens et du principe de calcul (« Comprendre le sens et le principe de calcul de la multiplication entre des nombres entiers et des fractions, et entre fractions » [*ibid.*, p. 26]) et d'autre part, l'acquisition du principe de calcul seul (« Comprendre le principe de calcul de la division d'une fraction par un nombre entier et calculer » [*ibid.*]). Nous supposons que l'apprentissage du sens repose sur des représentations visuelles de la fraction, tandis que l'acquisition du principe de calcul vise à la maitrise d'un algorithme. Finalement, la seule technique clairement énoncée dans les programmes se trouve en cinquième année, lorsque les auteurs imposent de « créer des fractions équivalentes en utilisant les propriétés des fractions » (*ibid.*), ce que nous comprenons comme l'utilisation de la propriété $a/b = ac/bc$.

En Floride, il est fait mention de techniques, mais leur nature et leur diversité dépend du curriculum dont il s'agit. Dans les programmes de 2007, les auteurs emploient des termes peu précis, laissant une grande liberté aux enseignants pour déterminer les techniques que doivent maitriser les élèves. Néanmoins, qu'il s'agisse de la comparaison de fractions (en troisième année : « Comparer et ordonner des fractions, y compris des fractions supérieures à un, en utilisant des modèles et des stratégies » [*op. cit.*, 2007, p. 6]) ou de l'addition et la soustraction de fractions (en cinquième année : « Représenter l'addition et la soustraction de nombres décimaux et de fractions ayant des dénominateurs communs ou différents, en utilisant des modèles, la valeur des chiffres ou des propriétés » [*ibid.*, p. 10]), les auteurs préconisent toujours l'enseignement de plusieurs techniques. De plus, ces techniques sont variées : il peut s'agir de représentations visuelles (que nous déduisons du mot « modèles ») ou de l'utilisation de propriétés mathématiques (que nous déduisons du mot « stratégies »). Parfois, l'exploration d'une technique constitue la tâche elle-même : par exemple, lorsque les auteurs imposent « d'utiliser des modèles pour représenter des fractions équivalentes, y compris des fractions supérieures à un, et identifier des représentations d'équivalence » [*ibid.*, p. 6]). Dans les programmes de 2014, les injonctions se font plus précises. Ainsi, les auteurs n'imposent plus des catégories de techniques (à partir d'un modèle visuel ou de propriétés des nombres), mais des techniques bien définies (par exemple, en quatrième année, les élèves devront être capables de « comparer deux fractions avec des numérateurs et des dénominateurs différents, par exemple en créant des dénominateurs ou des numérateurs communs, ou en les comparant à une fraction de référence telle que 1/2 » [*op. cit.*, 2014, p. 4]). Toutefois, ils laissent également une certaine liberté aux enseignants, dans la mesure où les techniques proposées ne sont que des exemples : les professeurs sont donc susceptibles d'enseigner d'autres techniques, incluant celles-ci ou non. De plus, l'utilisation de la conjonction de coordination « ou » implique un choix entre les deux techniques proposées, et un doute subsiste sur le point de savoir si ce choix doit être effectué par l'élève, dans l'exécution de la tâche, ou par l'enseignant, dans les notions qu'il choisit de transmettre aux élèves. À propos des additions et soustractions de fractions, l'intitulé présente la même ambiguité, à travers l'emploi des conjonctions « et/ou » (« Ajouter et soustraire des nombres mixtes ayant le même dénominateur, par exemple en remplaçant chaque nombre mixte par une fraction équivalente, et/ou en utilisant les propriétés des opérations et la relation entre l'addition et la soustraction. » [*ibid.*]).

En France, aucune technique n'est mentionnée dans les programmes de l'école élémentaire. Dans l'enseignement secondaire, les auteurs indiquent que « la bonne compréhension s'appuie sur le sens et non sur des procédures ». Nous pensions donc trouver, dans la suite du texte, des éléments susceptibles de soutenir cette affirmation. Pourtant, le seul embryon de technique que nous ayons

identifié concerne la compétence « Prendre une fraction d'une quantité » et « il s'agit de faire comprendre la modélisation de ce type de problème par une multiplication » (*op. cit.*, 2008 [2], p. 15). Certes, il est possible d'utiliser des modèles visuels afin construire l'idée que la multiplication d'un entier par une fraction permet de résoudre des situations telles que « prendre la fraction d'une quantité ». Néanmoins, l'intitulé des programmes nous parait davantage imposer l'acquisition d'un algorithme de calcul. Pour toutes les autres compétences, toute liberté est laissée aux professeurs pour enseigner la ou les techniques qu'ils jugent adaptées à la résolution de chaque type de tâches.

Le curriculum de Hong Kong SAR contient très peu d'indications méthodologiques, ce qui est cohérent avec la concision de sa rédaction : les auteurs indiquent les types de tâches à enseigner, et les professeurs sont responsables du choix des techniques à utiliser. Toutefois, ces dernières font l'objet de deux phrases. En quatrième année, les élèves sont invités à « explorer les méthodes pour convertir des fractions équivalentes » (*op. cit.*, p. 36). En sixième année, il est prévu de « comparer des fractions en les convertissant en écritures décimales » (*ibid.*, p. 42). Ces choix sont antagonistes, dans la mesure où le premier intitulé suppose un enseignement exhaustif de toutes les méthodes permettant de produire des fractions équivalentes (à travers l'utilisation de l'article défini « les »), tandis que le second restreint drastiquement les méthodes susceptibles d'être utilisées pour comparer des fractions (seule la conversion en écritures décimales doit conduire à comparer des fractions). En conséquence, les auteurs donnent ponctuellement des indications, sans que l'on puisse dégager une tendance nette relative à la variété des techniques qu'utilisent les élèves dans les classes.

En Irlande du Nord, très peu de techniques sont citées dans les instructions officielles. Nous en avons identifié deux. Ainsi, c'est l'utilisation « des connaissances relatives aux fractions équivalentes » qui doit permettre « d'ajouter et soustraire des fractions simples, par exemple 1/2 + 1/4 + 1/8 = 4/8 + 2/8 + 1/8 ; 5/6 - 1/3 » (*op. cit.*, p. 1). C'est dire que les auteurs réduisent le champ des possibles dans le domaine, en imposant une procédure de remplacement par des fractions équivalentes au détriment d'autres telles que l'utilisation d'un schéma. En cinquième année, l'une des techniques conduisant à prendre la fraction d'une quantité devient la tâche elle-même, puisque les élèves doivent « partager des collections d'objets pour développer la compréhension du sens de la fraction d'une quantité, avec pour résultats des nombres mixtes, par exemple 1/3 de 10 est égal à 3 + 1/3 » (*ibid.*). Pour ce type de tâches, l'accent est mis sur la représentation visuelle des fractions, au détriment d'une procédure de calcul reposant sur la maitrise de la division, procédure favorisée dans d'autres programmes. La circonscription des techniques reste donc marginale en Irlande du Nord, et aucune similitude dans les techniques proposées ne nous permet de définir une tendance claire à ce sujet.

En ce qui concerne le passage des fractions aux nombres mixtes et inversement, on trouve un exemple de technique imposée en Ontario. Ainsi, lorsque les fractions supérieures ou égales à 1 apparaissent dans les instructions officielles (en cinquième année), celles-ci doivent être mises en relation avec une écriture sous forme de nombre mixte (« explorer l'équivalence entre une fraction supérieure ou égale à 1 et un nombre fractionnaire […] (par exemple, 8/3 = 2 + 2/3) » [*op. cit.*, p. 61]). Or, cette équivalence n'est pas traduite de façon formelle : elle est « réalisée à l'aide de matériel concret ou illustré » [*ibid.*]), excluant le recours à la division, comme en Irlande du Nord. Plus largement, préconiser d'utiliser des supports visuels est un élément récurrent des programmes ontariens. De même, pour la compétence « prendre la fraction d'une quantité », le matériel reste le support privilégié de

l'apprentissage (en quatrième année : « Utiliser une variété d'objets et d'illustrations pour représenter des fractions simples en tant que parties d'un tout et parties d'un ensemble dans divers contextes [p. ex., six enfants s'amusent dans la cour de l'école. Deux tiers jouent au ballon. Combien d'enfants jouent au ballon ?] » [*ibid.*, p. 52]) Cependant, les auteurs ont cherché à organiser une progression dans laquelle les techniques utilisées par les élèves deviennent à la fois plus complexes et plus variées. Par exemple, en cinquième année, il est demandé aux élèves « d'explorer les fractions équivalentes à l'aide de matériel concret (p. ex., réglettes) » (*ibid.*, p. 61), tandis qu'en sixième année, il s'agit de « déterminer des fractions équivalentes à l'aide de différentes stratégies (p. ex., matériel de manipulation, dessin, tableau) » (*ibid.*, p. 70). Cette dernière expression se trouve d'ailleurs utilisée pour décrire d'autres compétences (par exemple, toujours en sixième année : « Multiplier et diviser une fraction par un nombre naturel à l'aide de diverses stratégies (p. ex., matériel concret, dessins, tableau, droite numérique) » [*ibid.*, p. 71]). Les auteurs définissent donc la référence à un schéma ou au matériel comme le point d'entrée incontournable de l'apprentissage. Par la suite, les élèves s'ouvrent à de nouvelles techniques, dont la liste fournie par le législateur n'est pas exhaustive (ce ne sont que des exemples). Toutefois, il est intéressant de noter que les stratégies évoquées n'impliquent que des ostensifs graphiques, sans proposer des techniques liées à des propriétés numériques.

La référence à des représentations « concrètes ou imagées » est également employée au Québec. Ainsi, Au Québec en cinquième et sixième année, les élèves commencent, « à l'aide d'un matériel concret et de schémas, à additionner et soustraire des fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre » (*op. cit.*, 2009a, p. 12). Toujours « à l'aide d'un matériel concret et de schémas », ils apprennent également à « multiplier un nombre naturel par une fraction » (*ibid.*). Bien que ces compétences apparaissent à un stade avancé de la scolarité obligatoire, la question de l'utilisation de propriétés numériques n'est pas abordée. Il faut attendre la septième année pour que soient envisagées dans les textes de telles procédures. En effet, en septième année, les élèves doivent « effectuer par écrit les quatre opérations avec des nombres facilement manipulables (y compris de grands nombres) en recourant à des écritures équivalentes et en s'appuyant sur les propriétés des opérations (nombres positifs écrits en notation fractionnaire avec ou sans l'aide de matériel concret ou de schémas) » (*op. cit.*, 2009b, p. 11). À l'exception des items que nous venons de mentionner, nous ne trouvons pas trace d'autres procédures dans les programmes québécois, sauf pour l'apprentissage de la comparaison de fractions, en troisième et quatrième année. Cependant, à cette occasion, la comparaison de fractions à 0, à 1/2 et à 1 n'est pas perçue comme un moyen que l'élève peut mettre en œuvre pour comparer deux fractions, mais comme une tâche à part entière (« Comparer une fraction à 0, à 1/2 ou à 1 » [*op. cit.*, 2009a, p. 7]).

En République d'Irlande, jusqu'en quatrième année, les auteurs ne donnent pas d'indications méthodologiques. Toutefois, l'intitulé « comparer, ordonner des fractions de dénominateurs bien choisis et les placer sur la droite numérique » (*op. cit.*, p. 68) est ambigu, dans la mesure où il est difficile de savoir si les deux propositions séparées par la conjonction de coordination « et » font référence à deux activités qui doivent être traitées séparément, ou si le placement sur la demi-droite graduée permet de vérifier la bonne réalisation des tâches de comparaison et de rangement. Dans ce dernier cas, l'utilisation de la droite numérique constituerait une technique parmi d'autres (avec un rôle de vérification) pour réussir ces tâches. À partir de la cinquième année, les tâches sont systématiquement accompagnées des techniques à enseigner. Ces techniques peuvent impliquer des représentations visuelles uniquement (par exemple, les élèves devront « explorer, comparer et noter des équivalences simples à l'aide de matériel

concret, pliages en papier, et graphiques » [*ibid.*, p. 89]), des propriétés numériques uniquement (par exemple, pour « additionner et soustraire des fractions simples et des nombres mixtes simples », les élèves devront « utiliser des fractions équivalentes pour simplifier les calculs » [*ibid.*]) ou encore une grande variété de techniques (ainsi, trois propositions sont faites pour « explorer, comparer et noter des fractions supérieures ou égales à 1 ou sous forme de nombres mixtes » : « schématiquement, numériquement et sur la droite numérique » [*ibid.*]). Il sera donc intéressant de voir si l'on observe une différence entre les résultats obtenus aux évaluations en quatrième année (c'est-à-dire lorsque les professeurs ont toute latitude pour choisir une ou plusieurs techniques adaptées à la tâches) et en huitième année (c'est-à-dire lorsques ces techniques sont imposées par les instructions officielles).

À Singapour, les programmes scolaires de 2006 sont concis, et peu de techniques y ont été introduites. En troisième année, ce qui aurait pu constituer une technique destinée à comparer des fractions est instauré comme une tâche à part entière (« Comparer des fractions à la moitié » (*op. cit.*, 2006a, p. 18). De façon très spécifique, une technique est imposée pour que les élèves parviennent à « trouver l'entier, la partie fractionnaire étant donnée » (*ibid.*, p. 22) : il leur est demandé de passer par l'unité. Pour le reste, les enseignants ont toute liberté pour choisir la ou les techniques qui leur semblent les plus adaptées. En revanche, dans les programmes introduits progressivement dans le système scolaire depuis 2012, des procédures sont très fréquemment proposées, soit sous la forme d'une liste d'exemples non exhaustive (par exemple, en troisième année : « Travailler en groupes pour comparer des fractions en utilisant différentes stratégies telles que l'élaboration d'un schéma, la comparaison par rapport à la moitié, et expliquer les stratégies utilisées » [*op. cit.*, 2012a, p. 43-44]), soit de façon péremptoire (par exemple, en quatrième année : « Comparer des fractions en utilisant des fractions de disque, puis sans utiliser des fractions de disque en utilisant des dénominateurs communs » [*ibid.*, p. 48]).

Dans le Taipei chinois, les moyens de résoudre la tâche sont assez bien décrits : les auteurs ont rédigé de longs développements pour indiquer comment chaque élément des instructions officielles devait être enseigné dans les classes. Pour donner un exemple, il se trouve que les auteurs fournissent, en troisième année, une « astuce » permettant de calculer mentalement un quotient sous la forme d'un nombre mixte (« pour diviser 36 par trois, les élèves peuvent diviser 30 par trois pour obtenir dix et puis diviser six par trois pour obtenir deux. Ainsi, ils peuvent obtenir la somme de 12. Telle est la première expérience pour les élèves de la division posée et de la division fraction [par exemple : $10 \div 3 = 3 + 1/3$] » [*op. cit.*, p. 124]). Il nous a semblé par ailleurs que les auteurs ont cherché à obtenir une adéquation entre d'une part, la technique utilisée par l'élève, et d'autre part, son âge et la difficulté de la tâche. Ainsi, l'apprentissage de la comparaison s'étale sur plusieurs années, et chacune d'elles correspond une augmentation de la variété des situations que les élèves sont capables de résoudre. En deuxième année, « les élèves peuvent […] comparer la taille des différentes fractions unitaires dans des conditions concrètes » (*ibid.*, p. 113), ces derniers termes suggérant l'emploi de supports visuels. En troisième année, ils « comparent des fractions […] dans des conditions concrètes » (*ibid.*, p. 128), c'est-a-dire que la diversité des fractions s'accroit, mais que les procédures utilisées sont les mêmes. En revanche, en quatrième année, ils « utilisent leur connaissance des fractions équivalentes pour comparer des fractions de dénominateurs différents et passer des fractions simples à une écriture décimale et inversement » (*ibid.*, p. 143). La technique à privilégier repose donc sur la maitrise des propriétés numériques relatives aux fractions. Enfin, en sixième année, la compréhension des relations entre les fractions s'étend grâce à la possibilité de rechercher l'existence d'un multiple commun, conduisant les

élèves à comparer des fractions de dénominateurs différents : ils « trouvent un multiple commun aux dénominateurs originaux et utilisent ce principe pour comparer, additionner, soustraire des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*, p. 158).

Le législateur n'impose l'utilisation d'une technique déterminée que pour certains types de tâches bien spécifiques : en dehors de quelques exceptions (comme le choix, en France, de modéliser le type de tâche « Prendre la fraction d'une quantité » par la multiplication d'une fraction par un entier), il s'agit de la comparaison de deux fractions ayant des dénominateurs différents (auxquelles nous associons l'identification de fractions équivalentes) et de l'addition de fractions de dénominateurs différents. Cette observation peut être expliquée par le fait que ce sont des tâches qui apparaissent très fréquemment dans les programmes scolaires et pour lesquelles il existe à la fois un grand nombre de variables et une pluralité de techniques susceptibles d'être mises en jeu. Les autres tâches souvent intégrées dans les curriculums (l'association d'une fraction et d'un dessin, et les changements de registre) ne font jamais l'objet de précisions d'ordre technique, sauf, de façon exceptionnelle, lorsqu'on demande aux élèves de passer d'une fraction à une écriture décimale en utilisant une division. Pourtant, une multiplicité de techniques et de variables existe également à propos de ces types de tâches. Nous l'avons déjà montré à propos de l'association d'une fraction et d'un dessin (avec le partage et l'itération), et cela est vrai aussi pour la tâche qui consiste à passer d'une fraction à un nombre décimal. En dehors de la division que nous venons de citer, elle peut être effectuée en s'appuyant sur un schéma, sur des connaissances procédurales telles que « quand on convertit des centièmes, la notation décimale comporte deux chiffres après la virgule », sur une décomposition de fractions décimales, etc. En ce qui concerne les tâches qui apparaissent de façon plus éparse dans les instructions officielles, elles se prêtent en général assez mal à une description d'ordre technique. Par exemple, il est difficile d'expliquer d'une manière concise comment identifier une rotation d'un quart de tour, et l'utilisation de plusieurs techniques n'apparait pas de façon évidente pour la réalisation de cette tâche. En outre, ces caractéristiques expliquent peut-être une moindre présence dans les programmes de notre corpus.

B. La formulation des techniques

Le cas que l'on trouve le plus fréquemment dans les programmes est l'association d'une technique à une tâche déterminée, sans la présence d'éléments technologiques de nature à éclairer la portée de la technique considérée. Ce couple type de tâche-technique est néanmoins suffisant pour avoir une idée précise à la fois des exercices qui pourront être donnés aux élèves

et des procédures que ces derniers vont utiliser. Par exemple, la distinction est nette entre les programmes de sixième année de l'Ontario (qui imposent de « comparer et ordonner des nombres fractionnaires et des fractions en utilisant une variété de stratégies [p. ex., matériel concret, dessin, droite numérique, fraction repère] » [*op. cit.*, p. 70]), de l'Angleterre (qui imposent « d'ordonner un ensemble de fractions en les convertissant en fractions avec un dénominateur commun » [*op. cit.*, 2006, p. 82]) et de Hong Kong SAR (qui imposent de « comparer des fractions en les convertissant en notations décimales » [*op. cit.*, p. 42]). Chaque texte impose la mise en œuvre d'une technique différente, obligeant les enseignants à choisir des fractions adaptées. Ainsi, le choix de la fraction-repère induit la mise en jeu de fractions pouvant être rangées en fonction de ces repères (par exemple, $x < 1/2 < y < 1 < z$) ; l'utilisation d'un dénominateur commun pourra permettre de comparer facilement 3/7 et 5/14, tandis que les changements de registre pourront être sollicités pour comparer des nombres avec de grands dénominateurs où l'identification d'un dénominateur commun entrainerait la réalisation de calculs complexes, tels que 24/15 (égal à 1,6) et 35/25 (égal à 1,4)[1]. Toutefois, si ce type de présentation des instructions officielles permet de déduire l'utilisation de tel ou tel signification du concept (le premier exemple que nous avons proposé met en jeu la fraction-mesure ; le deuxième, la fraction partie-tout, le troisième, des conversions de représentations), il ne donne aucune indication sur le niveau de généralisation ni sur le degré de conceptualisation de la technique attendu des élèves.

Plus rarement, les techniques sont reliées à la fois à un type de tâches et à des considérations d'ordre technologique. La justification des techniques proposées aux élèves est, par exemple, devenue assez fréquente dans les programmes de Floride, avec la transposition des *Common Core Standards* dans les instructions officielles de 2014. Ainsi, au sujet de la multiplication d'une fraction par un entier, les auteurs indiquent que les élèves de quatrième année doivent « comprendre un multiple de *a*/*b* comme un multiple de 1/*b*, et utiliser cette compréhension pour multiplier une fraction par un nombre entier. *Par exemple, utiliser un modèle de fraction visuel pour exprimer 3 × 2/5 que 6 × 1/5, en reconnaissant ce produit comme étant 6/5. (En général, n × (a / b) = (n × a) / b)* » (*op. cit.*, 2014, p. 4). Nous avons donc

1. Pour la démonstration du fait que les calculs doivent être réalisés, au plus, jusqu'à la quatrième décimale incluse, afin de déterminer si deux fractions sont équivalentes par le calcul du quotient décimal, voir l'article de Chevallard intitulé *La calculatrice, ce bon objet* (2006, p. 7).

un type de tâches (la multiplication d'une fraction par un entier), une technique (l'utilisation d'un modèle de fraction visuelle) et une explication d'ordre technologique ($n \times (a / b) = (n \times a) / b$). Les auteurs n'indiquent pas si ce dernier élément doit être maitrisé sous cette forme par les élèves ou si cette connaissance restera implicite. Cette ambiguité nous conduit à penser que la forme prise par ce savoir dans les classes sera, comme dans les autres pays, plurielle, en raison de la variété des processus d'institutionnalisation[1]. Nous ne pouvons développer cette analyse en raison de la faible présence d'éléments technologiques au sein des curriculums qui forment notre corpus : comme nous l'avons indiqué, la relation type de tâches-technique est plus fréquente que la relation tâche-technique-technologie. Toutefois, nous conclurons en indiquant que, dans le cas présenté ci-dessus, la technologie proposée semble viser davantage une compréhension de la technique par l'enseignant qu'une formulation d'un savoir destiné, *in fine*, aux élèves.

§ 2. Les techniques privilégiées par les rédacteurs

Les techniques étant spécifiques à chaque type de tâches, il nous faut, pour proposer une analyse synthétique, raisonner en termes de catégories de techniques. Pour cela, nous allons observer l'articulation entre les connaissances conceptuelles et les connaissances procédurales. Rappelons que les premières peuvent être définies « comme la compréhension explicite ou implicite des principes qui gouvernent un domaine et des interrelations entre les différentes parties de connaissance d'un domaine » (Rittle-Johnson & Alibali, 1999, cités par Carette et al., 2009, p. 28). Selon ces derniers, « certains auteurs émettent, dès lors, l'hypothèse selon laquelle elle serait stockée sous la forme de représentation relationnelle, comme des schémas, des réseaux sémantiques ou hiérarchiques » (*ibid.*). À l'inverse, les connaissances procédurales sont définies par « Rittle-Johnson et Alibali (1999) […] comme des séquences d'action permettant de résoudre des problèmes » et « certains auteurs la considèrent donc comme la connaissance des opérations et des conditions dans lesquelles elles peuvent être utilisées pour atteindre un certain but » (Carette et al., *op. cit.*). Nous limiterons l'analyse aux types de tâches pour lesquels nous disposons de suffisamment de matière pour nos comparaisons : les techniques le plus fréquemment observées dans les instructions officielles concernent la comparaison de fractions (A) et l'addition de fractions (B).

1. Voir, à ce sujet, Allard, 2015.

A. Pour les tâches de comparaison

La présence d'une technique concerne, le plus souvent, les tâches de comparaison de fractions de dénominateurs différents. Néanmoins, dans certains territoires, le législateur fournit également des indications pour la comparaison de fractions de même dénominateur.

Tout d'abord, il existe des territoires dans lesquels l'utilisation de représentations visuelles est la seule technique envisagée par les auteurs (avec un enseignement centré sur le développement de connaissances conceptuelles). Ainsi, en Ontario, la quatrième année est l'occasion pour les élèves de commencer à comparer des fractions « ayant un dénominateur commun » ou « ayant un même numérateur à l'aide de matériel concret ou illustré (par exemple, réglettes, bandes de carton, cercles de fraction, jetons) » (*op. cit.*, p. 51). Lorsque les dénominateurs sont différents, les élèves peuvent utiliser « une fraction repère telle que 1/4, 1/2, 3/4 et 1 (p. ex., 8/14 est plus grand que 7/16, car 8/14 est plus grand que 1/2 et 7/16 ne l'est pas) » (*ibid.*, p. 61). La demi-droite numérique est également le moyen d'effectuer des tâches de comparaison, en particulier quand différentes écritures des nombres rationnels sont mélangées (en cinquième année : « Comparer et ordonner des fractions propres et supérieures ou égales à 1 et des écritures décimales jusqu'aux centièmes (p. ex., sur une droite numérique) » [*ibid.*]). En sixième année, les auteurs semblent proposer une ouverture vers d'autres techniques à travers l'utilisation de l'expression « une variété de stratégies » pour décrire les techniques que peuvent employer les élèves pour « comparer et ordonner des nombres fractionnaires et des fractions en utilisant une variété de stratégies » [*ibid.*, p. 70]. Cependant, les exemples de stratégies fournies par les auteurs sont tous liés à une représentation visuelle de la fraction (« matériel concret, dessin, droite numérique, fraction repère » [*ibid.*]). Certains d'entre eux avaient déjà été évoqués les années précédentes, comme la référence à une fraction repère, l'utilisation du matériel concret ou le placement sur la droite numérique. L'élargissement des pratiques de comparaison réside finalement dans le fait que ces moyens ne sont que des exemples, et que les professeurs et leurs élèves peuvent en utiliser d'autres. Ainsi, l'utilisation des propriétés numériques, même si elle n'est pas citée dans le curriculum, n'est pas à exclure. En République d'Irlande, les tâches de comparaison sont identiques en troisième et en quatrième année : il s'agit de « comparer, ordonner des fractions de dénominateurs bien choisis et les placer sur la droite numérique » [*op. cit.*, p. 68]). Nous avons déjà évoqué cette difficulté d'interprétation sur le point de savoir si les deux propositions sont liées ou non (s'agit-il de placer des fractions sur la droite numérique dans un but de comparaison, ou s'agit-il de deux tâches qui doivent être séparément ?). Cependant, d'autres arguments que la présence de la droite numérique dans les programmes nous conduisent à penser que les élèves ne doivent s'appuyer que sur des représentations visuelles de la fraction pour comparer. En effet, d'une part, de nombreuses références aux représentations visuelles de la fraction sont disséminées dans les intitulés impliquant des fractions cette année-là (recours à des « formes géométriques », « diagrammes », « schémas », « matériel concret »). D'autre part, la question des fractions équivalentes n'a pas encore été abordée à ce stade de la scolarité. Ce n'est qu'en cinquième année que cette compétence apparait, après la référence aux activités de comparaison (« Comparer et ordonner des fractions et identifier des fractions équivalentes avec des dénominateurs de 2 à 12 » [*ibid.*, p. 89]). Cependant, à cette occasion, les auteurs ne manquent pas de rappeler que les apprentissages doivent être menés en s'appuyant sur des représentations visuelles de la fraction (« Explorer, comparer et noter des équivalences simples à l'aide de matériel concret, pliages en papier, et graphiques » [*ibid.*]).

De même, lorsque sont comparés des nombres rationnels exprimés sous des formes différentes, aucune propriété numérique ni aucune activité de conversion n'est citée. Il est toujours imposé « d'explorer [la notion], comparer et noter à l'aide de matériel concret et d'argent » et « d'ordonner à l'aide de diagrammes ou sur la droite numérique » (*ibid.*, p. 91). En sixième année, les supports évoluent quelque peu, puisqu'il s'agit « d'ordonner des fractions équivalentes sur la droite numérique et sur des diagrammes » (*ibid.*, p. 89). Cependant, ils mettent toujours exclusivement en jeu des représentations visuelles des fractions.

À l'inverse, le législateur prévoit parfois d'utiliser uniquement des propriétés numériques pour comparer des fractions (avec un développement centré sur les connaissances conceptuelles). En ce qui concerne notre corpus, le seul territoire dans lequel cette option a été retenue est Hong Kong SAR. Dans ce curriculum, il est prévu, de façon laconique, de « comparer des fractions en les convertissant en écritures décimales » (*op. cit.*, p. 42). C'est la seule fois où des comparaisons de fractions de dénominateurs différents apparaissent dans le curriculum : une seule technique est donc envisagée par les auteurs.

Enfin, les deux techniques apparaissent assez fréquemment dans les instructions officielles (le plus souvent successivement, au cours de deux années scolaires différentes). En Angleterre, la distinction est très nette. En troisième année, les élèves sont invités à « utiliser des diagrammes pour comparer les fractions et établir des équivalents » (*op. cit.*, 2006, p. 76), tandis qu'en sixième année, il leur est demandé « d'ordonner un ensemble de fractions en les convertissant en fractions avec un dénominateur commun » (*ibid.*, p. 82). En Corée du Sud, la référence à des représentations visuelles n'est pas explicite, mais elle se déduit du fait que les auteurs évoquent une réflexion à propos de la taille des fractions (par exemple, en quatrième année : « Comparer la taille de fractions de même dénominateur » [*ibid.*, p. 21]). Par ce conseil méthodologique, les auteurs préviennent l'utilisation de procédés formels détachés de tout rapport avec la quantité que ces nombres représentent. Nous interprétons cette expression comme une invitation à utiliser des schémas, ou à comparer les nombres à des entiers ou à des fractions de référence comme 1/2. Néanmoins, lorsqu'en cinquième année, les auteurs imposent de « comparer des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*), nous pensons que ces tâches seront résolues au moins partiellement en remplaçant l'une des fractions par une fraction équivalente. En effet, les élèves sont censés apprendre à « créer des fractions équivalentes en utilisant les propriétés des fractions ». Or, cette compétence, indispensable pour substituer une fraction à une autre dans les activités de comparaison, est inscrite dans les programmes peu avant celle relative aux comparaisons. Les aspects visuels et numériques sont donc conjointement utilisés pour comparer des fractions. En Floride, les auteurs proposent, au cours de la scolarité, une variété de techniques parmi les plus larges que nous ayons pu voir apparaitre dans les textes de notre corpus, bien que certains termes utilisés manquent parfois de précision. Ainsi, en troisième année, ils font référence à l'utilisation de « modèles et des stratégies » pour « comparer et ordonner des fractions, y compris des fractions supérieures à 1 » (*op. cit.*, 2007, p. 6). Certes, la présence des modèles dans la liste induit le recours à des représentations visuelles de la fraction, mais aucun exemple n'étant donné en relation avec le mot « stratégie », il nous est impossible de connaitre leur nature. Pour la quatrième année, les auteurs ont été plus précis, proposant au moins trois techniques différentes : pour « comparer deux fractions avec des numérateurs et des dénominateurs différents », les élèves peuvent s'appuyer sur « des dénominateurs ou des numérateurs communs », ou les comparer « à une fraction de référence telle que 1/2 ». De plus, la

justification des résultats que les auteurs proposent implique l'utilisation « d'un modèle visuel de la fraction » (*op. cit.*, 2014, p. 4). Par ailleurs, ces trois techniques ne sont que des exemples, et les professeurs sont susceptibles d'enseigner d'autres stratégies pour comparer des fractions. Enfin, en sixième année, l'utilisation de la demi-droite numérique est préconisée (« Comparer et ordonner des fractions, des écritures décimales et des pourcentages, y compris en trouvant leur emplacement approximatif sur la droite numérique » [*op. cit.*, 2007, p. 13]). Dans le Taipei chinois, l'intitulé « Comparer la taille des différentes fractions unitaires dans des conditions concrètes » (*op. cit.*, p. 113) constitue une autre manière de formuler que les élèves doivent s'appuyer sur des représentations visuelles pour comparer des fractions. Cependant, les propriétés numériques ne sont pas négligées, puisque les professeurs doivent également pouvoir « expliquer comment relier, d'une part, la comparaison et les opérations sur les entiers, et d'autre part, la comparaison et les opérations avec des fractions de même dénominateur » (*ibid.*, p. 142). De plus, la même année, « les élèves utilisent leur connaissance des fractions équivalentes pour comparer des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*, p. 143). On peut supposer que cette exploration des propriétés numériques est effectuée dans le cas où le dénominateur de l'une des fractions est un multiple du dénominateur de l'autre. En effet, ce n'est que l'année suivante que « les élèves trouvent un multiple commun aux dénominateurs originaux et utilisent ce principe pour comparer […] des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*, p. 158). À Singapour, la question des comparaisons fait l'objet de moins amples développements. Elle n'apparait qu'en troisième année, et les élèves doivent apprendre à « comparer des fractions à la moitié » et « comparer et ordonner des fractions de dénominateur différent » (*op. cit.*, 2006a, p. 18). La comparaison à une fraction de référence constitue une tâche à part entière, mais nous pensons qu'elle peut également permettre, dans certains cas, aux élèves de comparer deux fractions. En effet, cet intitulé est immédiatement suivi de celui relatif à la comparaison de fractions en général. Comme elle est susceptible de conduire les élèves à visualiser mentalement les deux fractions à comparer, nous avons considéré, malgré l'absence de référence à des modèles visuels, que les programmes singapouriens impliquaient d'avoir une représentation mentale de la quantité exprimée par les fractions en jeu. Cependant, le paragraphe relatif aux fractions contient également d'autres items faisant référence aux fractions équivalentes (« Reconnaitre et nommer des fractions équivalentes », « Lister les huit premières fractions équivalentes à une fraction donnée » et « Écrire la fraction équivalente à une fraction donnée en connaissant le dénominateur ou le numérateur » [*ibid.*]), et leur utilisation dans des tâches de comparaison est sans aucun doute une volonté des auteurs : ces compétences doivent être enseignées la même année, et se suivent dans le curriculum.

En revanche, nous n'avons pas trouvé de suggestions concernant les techniques à utiliser pour comparer des fractions en France et en Irlande du Nord. Au Québec, la comparaison « d'une fraction à 0, à 1/2 ou à 1 » (*op. cit.*, 2009a, p. 7) apparait, mais seulement comme une tâche à part entière, et non pas comme un moyen de comparer deux fractions de dénominateurs différents.

Nous avons donc distingué les territoires dans lequels les comparaisons étaient effectuées à l'aide de connaissances conceptuelles uniquement (Ontario, Québec, République d'Irlande), à l'aide de connaissances procédurales uniquement (Hong Kong SAR), à l'aide des deux types de connaissances (Angleterre, Corée du Sud, Floride, Singapour, Taipei chinois). Il arrive également qu'aucune indication ne soit fournie (France, Irlande du Nord). Afin de

rechercher une éventuelle cohérence dans le choix des techniques privilégiées par le législateur, nous allons comparer cette répartition à celle élaborée pour la réalisation des tâches d'addition.

B. Pour les tâches d'addition

Comme pour les tâches de comparaison, les additions de fractions de dénominateurs différents font l'objet d'une attention particulière de la part du législateur, tandis que la présence dans les instructions officielles de techniques pour des tâches consistant à additionner des fractions de même dénominateur est moins fréquente.

En ce qui concerne les tâches d'addition, le recours aux seules représentations visuelles est rare dans notre corpus : il n'est le fait que des instructions officielles de l'Ontario. Qu'il s'agisse d'additionner des fractions de même dénominateur (en sixième année : « Additionner et soustraire des fractions ayant des dénominateurs communs à l'aide de matériel concret ou illustré et de symboles [p. ex., contenants d'œufs, réglettes] » [*op. cit.*, p. 71]) ou de dénominateurs différents (en septième année : « Additionner et soustraire dans divers contextes des fractions positives en utilisant une variété de stratégies [par exemple, matériel concret, dessins, tableau] » [*ibid.*, p. 78]), les auteurs ne font référence qu'à des supports visuels. Nous concédons que la liste qu'ils fournissent n'est pas exhaustive, puisque ce ne sont que des exemples. Néanmoins, l'intention du législateur de privilégier les représentations concrètes est manifeste.

Il arrive également que certains textes ne prévoient que le recours à des connaissances procédurales pour additionner des fractions, laissant parfois, par leur silence, la possibilité d'utiliser d'autres techniques. Par exemple, en Angleterre, les auteurs ne donnent aucune indication, en quatrième année, lorsque les élèves doivent « ajouter et soustraire des fractions avec le même dénominateur » (*op. cit.*, 2014, p. 131). En revanche, en huitième année, lorsque les dénominateurs sont différents, « ils additionnent et soustraient des fractions en les écrivant avec un dénominateur commun » (*op. cit.*, 2007, p. 151). De même, en Irlande du Nord, aucune technique n'est imposée pour l'ajout de de fractions de même dénominateur. En revanche, les auteurs sont très clairs lorsque les dénominateurs sont différents. Les élèves doivent passer par une étape intermédiaire consistant à remplacer les fractions de dénominateurs différents par des fractions équivalentes possédant le même dénominateur (« par exemple 1/2 + 1/4 + 1/8 = 4/8 + 2/8 + 1/8 » [*op. cit.*, p. 1]). C'est la seule technique proposée par les auteurs nord-irlandais. Au contraire, en République d'Irlande, la manipulation de propriétés de plus en plus complexes permet aux élèves de réaliser des additions et des soustractions dans une grande variété de situations. D'abord, ils utilisent « des fractions équivalentes pour simplifier les calculs » (*op. cit.*, p. 89). Puis, « le dénominateur commun devra être trouvé en énumérant les multiples » (*ibid.*), ce qui suggère que, désormais, les dénominateurs des fractions comparées n'ont pas de lien entre eux, tandis qu'auparavant, le dénominateur de l'une devait être un multiple du dénominateur de l'autre. Enfin, « des algorithmes sont utilisés pour résoudre des problèmes impliquant des quantités fractionnaires » (*Government of Ireland*, 2014, p. 22) dans l'enseignement secondaire, ce qui suppose une maitrise des techniques opératoires et l'absence de recours à des supports visuels. À Singapour, les auteurs ne donnent que très peu d'indications sur les techniques qui doivent être employées par les élèves.

Cependant, par déduction, nous pouvons proposer quelques hypothèses sur les techniques privilégiées dans ce pays. Ainsi, les élèves apprennent à « additionner et soustraire deux fractions liées à l'intérieur de l'entier » (*op. cit.*, 2006a, p. 19) en troisième année. Or, la même année, se déroule l'apprentissage visant à « reconnaitre et nommer des fractions équivalentes », « lister les huit premières fractions équivalentes à une fraction donnée » et « écrire la fraction équivalente à une fraction donnée en connaissant le dénominateur ou le numérateur » (*ibid.*, p. 18). Comme pour la comparaison, nous pensons que les professeurs vont faire des liens entre ces compétences et amener les élèves à utiliser leurs connaissances relatives aux fractions équivalentes pour substituer une fraction équivalente à une autre fraction de façon à simplifier une addition de fractions de dénominateurs différents. De même, en cinquième année, les élèves apprennent d'abord à « associer la fraction à la division » et à « convertir les écritures décimales en fractions et vice versa », avant « d'additionner et de soustraire des fractions inférieures à 1 sans l'aide de la calculatrice » (*ibid.*, p. 26). En raison de cet ordre spécifique des apprentissages, et de la mention « sans la calculatrice », nous pensons que les élèves vont réaliser ces additions en convertissant les fractions en notations décimales. À tout le moins, l'absence de calculatrice suggère la mise en œuvre de compétences en calcul, privilégiées par rapport à l'utilisation de supports visuels.

D'autres législateurs imposent l'enseignement de plusieurs techniques, impliquant séparément l'utilisation de représentations visuelles des fractions, et de propriétés numériques. Par exemple, en Floride, l'addition et la soustraction de fractions sont d'abord envisagées en quatrième année « comme l'assemblage et la séparation de parts se rapportant à un même entier » (*op. cit.*, 2014, p. 4). Les actions d'assembler et de séparer supposent la manipulation de matériel concret, et donc l'utilisation de supports visuels. Cependant, cet apprentissage est doublé d'une attention porté aux écritures mathématiques et aux relations entre les nombres, comme l'indique l'intitulé relatif à la résolution de problèmes impliquant des additions et des soustractions de fractions (« Résoudre des problèmes comportant des additions et des soustractions de fractions se référant au même entier et ayant le même dénominateur, par exemple en utilisant des modèles de fractions visuels et des équations pour représenter le problème » (*ibid.*). D'ailleurs, pour résoudre ces problèmes, les élèves peuvent également utiliser des « informations placées sur une droite graduée » (*ibid.*, p. 6). Dans le cadre de l'apprentissage des fractions décimales, ils pratiquent la substitution de fractions, afin de calculer plus facilement des additions telles que « 3/10 + 4/100 = 34/100 », en exprimant « 3/10 sous la forme 30/100 » (*ibid.*, p. 5). En cinquième année, les intitulés applicables proviennent des programmes de 2007 et fournissent moins de précisions sur les techniques à employer. Nous savons que l'apprentissage des additions de fractions de dénominateurs différents est mené « en utilisant des modèles, la valeur des chiffres ou des propriétés » (*op. cit.* 2007, p. 10), ce qui laisse une marge d'appréciation importante aux enseignants, et permet l'utilisation de supports visuels comme de propriétés numériques. Cependant, la façon dont est rédigé l'objectif général dans ce domaine montre l'équilibre recherché par les auteurs entre la représentation concrète et l'automatisation des tâches de calcul : il s'agit à la fois de « développer une compréhension et une pratique courante de l'addition et de la soustraction de fractions et de nombres décimaux » (*ibid.*). Au Québec, deux phases de l'apprentissage doivent être distinguées. En cinquième et sixième années, les additions sont réalisées « à l'aide d'un matériel concret et de schémas » (*op. cit.*, 2009a, p. 12), y compris dans le cadre de la résolution de problèmes (« traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou par une opération et vice versa [exploitation des différents sens de l'addition, de la soustraction et de la multiplication par un nombre naturel] » [*ibid.*, p. 10]). En revanche, en septième et

huitième années, les élèves sont censés réutiliser une compétence dont l'apprentissage a déjà été mené. En conséquence, il leur sera demandé, progressivement, de ne plus utiliser le matériel pour parvenir à « effectuer par écrit les quatre opérations avec des nombres facilement manipulables (y compris de grands nombres) en recourant à des écritures équivalentes et en s'appuyant sur les propriétés des opérations (nombres positifs écrits en notation fractionnaire avec ou sans l'aide de matériel concret ou de schémas) » (*op. cit.*, 2009b, p. 11). Dans le Taipei chinois, on retrouve des expressions similaires à celles utilisées pour la comparaison de fractions, et notamment la référence à une exploration de la notion « dans des conditions concrètes » (*op. cit.*, p. 128) pour l'addition de fractions de même dénominateur. En quatrième année, la référence à ces conditions concrètes disparait, ce que nous interprétons comme une injonction à enseigner l'addition de fractions en s'appuyant sur des propriétés numériques connues des élèves (c'est-à-dire les règles qu'ils utilisaient déjà avec des nombres entiers). Toutefois, les commentaires qui suivent la compétence suggère encore une large utilisation de schémas faisant référence à des situations de la vie quotidienne. Ce n'est qu'en cinquième année qu'une technique fondée sur les propriétés des nombres apparait explicitement : « les élèves trouvent un multiple commun aux dénominateurs originaux et utilisent ce principe pour […] additionner, soustraire des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*, p. 158).

Dans les programmes français et hongkongais, rien n'est dit sur les techniques que doivent utiliser les élèves pour additionner des fractions, laissant ainsi toute latitude aux enseignants pour déterminer celle qui leur parait la plus adaptée à la réalisation de la tâche. En Corée du Sud, cet apprentissage, en ce qui concerne les fractions de dénominateurs différents, est concomitant à celui de la production de fractions équivalentes, réalisé à partir de l'utilisation des « propriétés des fractions » (*op. cit.*, p. 26). Il est donc possible que les professeurs demandent à leurs élèves de réutiliser cette connaissance pour substituer, à l'une des deux fractions, une fraction équivalente de même dénominateur et faciliter les calculs. Cependant, nous ne pouvons pas l'affirmer à la lecture des textes officiels. Nous avons donc considéré, pour notre étude, les instructions officielles de Corée de Sud n'imposaient pas de technique spécifique.

Nous avons distingué les territoires dans lequels les additions étaient effectuées à l'aide de connaissances conceptuelles uniquement, à l'aide de connaissances procédurales uniquement, à l'aide des deux types de connaissances, et ceux dans lesquels aucune indication n'était fournie.

	Référence à des connaissances procédurales	Pas de référence à des connaissances procédurales
Référence à des connaissances conceptuelles	Floride, Québec, Taipei chinois	Ontario
Pas de référence à des connaissances conceptuelles	Angleterre, Irlande du Nord, République d'Irlande, Singapour	Corée du Sud, France, Hong Kong SAR

Figure 39. Utilisation des connaissances conceptuelles et procédurales, dans les pays de notre corpus, pour la réalisation d'additions impliquant des fractions, en 2015

Par rapport aux types de tâches relatifs à la comparaison, nous constatons que les curriulums ne rattachant les types de tâches relatifs à l'addition qu'à des connaissances procédurales sont plus nombreux, tandis que ceux qui ne proposent que l'utilisation de connaissances conceptuelles sont moins nombreux, ce qui laisse à penser que, pour les législateurs, la conscience de la magnitude apparait plus importante dans les tâches de comparaison que dans les tâches d'addition, pour lesquelles les « techniques opératoires » sont davantage mises en avant. Néanmoins, l'Ontario continue de favoriser l'utilisation de représentations visuelles, révélant dans cette province une attention particulière portée aux connaissances conceptuelles. Le curriculum français est le seul qui ne mentionne aucune technique pour la résolution de ces deux tâches.

Conclusion de la sous-section

Les techniques à utiliser apparaissent peu fréquemment dans les programmes d'enseignement. Elles sont mentionnées surtout pour la comparaison et l'addition de fractions de dénominateurs différents. À ce propos, il existe, relativement aux techniques privilégiées, des choix variés au sein de notre corpus. Or, la nature et la diversité des techniques maitrisées par les élèves influe sans doute sur le nombre de situations susceptibles d'être résolues, et donc sur leurs résultats aux évaluations internationales. Nous confronterons donc, dans la deuxième partie de cette recherche, les observations que nous venons de présenter aux scores obtenus par les élèves aux items correspondants. Toutefois, une telle classification des pays, séparant ceux qui imposent l'emploi de techniques fondées sur des connaissances conceptuelles et ceux qui s'appuient sur des connaissances procédurales, ne traduit pas toujours les doutes subsistant quant à l'interprétation qui doit être faite des textes officiels. Par exemple, en Ontario, les élèves doivent, en quatrième année, « comparer et ordonner des fractions ayant un même numérateur à l'aide de matériel concret ou illustré (p. ex., réglettes, bandes de carton, cercles de fraction, jetons) » (*op. cit.*, p. 51). Toutefois, ces représentations visuelles de la fraction constituent-elles une technique permettant la comparaison, ou un simple support de l'apprentissage que les élèves doivent abandonner au cours du processus ? À l'inverse, le curriculum singapourien ne mentionne que des techniques faisant référence à des propriétés numériques. Or, on sait que l'approche globale de l'apprentissage à Singapour préconise une progression partant de manipulations concrètes pour aller vers des constructions abstraites (*C-P-C approach*). Il est donc tout à fait possible que les auteurs des instructions officielles imposent l'objectif final de la séquence, en sachant que des représentations visuelles de la fraction seront proposées aux

élèves au début de l'apprentissage. En outre, nous avons montré que la présence des techniques dans les instructions officielles se manifestait surtout à propos de la comparaison et de l'addition de fractions de dénominateurs différents, c'est-à-dire à propos de tâches pour lesquelles il existe une multitude de techniques envisageables. Néanmoins, il est des pays qui n'imposent aucune technique, pour l'une ou l'autre de ces tâches, et nous avons indiqué que d'autres tâches induisaient une pluralité de techniques permettant de les résoudre, sans pour autant susciter l'intérêt du législateur. Pourtant, leur présence permet d'éclairer, non seulement la nature des tâches qui sont soumises aux élèves, mais également la facette du concept de fraction qui doit être étudiée, en particulier lorsque des indications d'ordre technologique sont ajoutées par les auteurs (comme en Floride, dans le curriculum le plus récent).

Conclusion de la section consacrée aux non-ostensifs

Dans notre corpus, les auteurs des programmes scolaires explicitent une partie seulement des praxéologies relatives aux fractions. Si les types de tâches que les enseignants doivent proposer aux élèves sont systématiquement présents, les techniques que ces derniers doivent employer pour résoudre les types de tâches imposés sont rarement indiquées. De plus, lorsqu'elles le sont, il est encore plus rare de voir ces techniques justifiées par un savoir mathématique rattaché au concept de fraction. Les savoirs habituellement non maitrisés par les élèves que nous avons exposés dans le chapitre I (« les fractions correspondent à un partage en parts égales », « toutes les parts n'ont pas besoin d'être représentées », « elles ne sont pas nécessairement contigües », « elles doivent être de même aire mais pas forcément de même forme », etc.) ne sont pas du tout appréhendés par les auteurs. De plus, les éléments technologiques que l'on y trouve sont parfois isolés, ce qui ne facilite pas leur mise en œuvre. Nous pensons en particulier aux programmes de Floride, qui indiquent que les élèves de quatrième année doivent « comprendre la fraction $1/b$ comme la quantité formée par une part lorsque l'entier est divisé en b parts égales » et « comprendre la fraction a/b comme la quantité formée par a parts de taille $1/b$ » (*op. cit.*, 2014, p. 3). Les auteurs donnent ainsi la définition de la fraction partie-tout et de la fraction-mesure, sans préciser les tâches et les techniques qui vont former le contexte d'utilisation de ces savoirs, ce que l'on pourrait rapprocher d'une « exposition des connaissances », c'est-à-dire à l'énonciation « d'éléments généraux, décontextualisés » (Bridoux *et al.*, 2016) avec les risques associés (notament celui d'une déconnexion possible entre ce texte de savoir et les activités potentiellement proposées aux élèves). Par ailleurs, quand bien même ces trois éléments seraient présents dans les programmes

(comme cela arrive assez régulièrement dans les programmes floridiens), ils ne formeraient qu'une partie du travail demandé à l'élève : sa composante intellectuelle. Dans un contexte scolaire, l'élève ne réfléchit pas seulement : il doit produire, d'où l'intérêt d'analyser ce qu'imposent les instructions officielles à ce propos, et de rechercher des interactions entre non-ostensifs et ostensifs.

Section II. Ostensifs

Le terme « ostensif » désigne « les objets qui ont pour nous une forme matérielle, sensible » (Chevallard, 1994, p. 4), par opposition aux non-ostensifs qui relèvent de l'abstraction. L'auteur distingue plusieurs catégories d'ostensifs, car les moyens de matérialiser une abstraction mathématique sont nombreux. Ainsi, « le propre des ostensifs, c'est de pouvoir être manipulés, ce mot étant entendu en un sens large : un objet matériel (un stylo, un compas, etc.), des gestes : nous parlerons d'ostensifs gestuels, des mots, et, plus généralement, du discours : nous parlerons ici d'ostensifs discursifs (ou langagiers), des schémas, dessins, graphismes : on parlera en ce cas d'ostensifs graphiques, des écritures et formalismes : nous parlerons alors d'ostensifs scripturaux » (*ibid.*, p. 4-5). Les ostensifs constituent à la fois un support de la pensée et un moyen de partager avec autrui le chemin qui a conduit au résultat. Autrement dit, « un objet ostensif apparaît comme possédant deux valences : une valence instrumentale, d'une part, une valence sémiotique, d'autre part, ces deux valences apparaissant, au sein d'une technique donnée, associées comme le recto et le verso d'une feuille » (*ibid.*, p. 6). Cette question des outils et supports de la pensée est si large qu'elle concerne les théories, les technologies, les techniques, les tâches, et peut permettre d'analyser, non seulement l'activité des élèves et des enseignants, mais également celle des auteurs des programmes : ils peuvent imposer l'utilisation d'un certain type d'ostensifs, par exemple la droite graduée pour comparer des fractions. Pour notre part, nous parlerons des ostensifs prévus par les programmes scolaires, séparant les ostensifs discursifs (qui feront l'objet de la sous-section I) et les ostensifs graphiques et scripturaux (qui feront l'objet de la sous-section II), les ostensifs gestuels n'étant pas présents dans les textes que nous avons consultés.

Sous-section I. Ostensifs discursifs

La capacité à élaborer un discours sur les savoirs ou les savoir-faire mis en jeu au sein de l'institution scolaire est au cœur de la théorie anthropologique du didactique. Comme l'indique Chevallard, « l'emploi du mot praxéologie a pour mérite de donner à entendre un fait

anthropologique banal autant que fondamental : il n'est pas de praxis sans logos ; il n'est pas de logos à jamais innocent d'implications "praxiques" » (2002a, p. 4). La relation entre le discours relatif aux fractions et l'activité intellectuelle attendue des élèves à propos de ce concept est l'objet de cette sous-section. Ce discours peut porter sur l'utilité du concept, ou sur sa compréhension. C'est cette dichotomie que nous avons retenue pour notre plan, la relation type de tâches-technique étant si étroite qu'il nous a paru vain de vouloir évoquer les ostensifs relatifs aux unes et aux autres. D'abord, nous verrons comment le développement d'un discours relatif à l'utilité du concept de fraction est intégré dans les programmes (§ 1). Ensuite, nous préciserons comment le discours relatif à la compréhension du concept de fraction est pris en compte par le législateur (§ 2). Ces comparaisons nous permettront peut-être de mieux comprendre les résultats obtenus par les élèves aux évaluations TIMSS, puisque certains items sont contextualisés, tandis que d'autres portant sur le même type de tâches ne le sont pas. De plus, pour certains items une justification de la réponse est demandée, alors que pour d'autres seul le résultat est attendu.

§ 1. Le discours relatif à l'utilité du concept de fraction

Le discours que l'élève porte vis-à-vis de l'utilité du concept de fraction doit pouvoir lui permettre, non seulement de développer son intérêt pour cette notion, mais également de mieux cerner le concept lui-même en le reliant à des situations déjà vécues. C'est pourquoi il est prévu dans certaines instructions officielles une présentation du lien qu'entretiennent les fractions avec des situations de la vie quotidienne (A). L'intégration du concept de fraction dans des problèmes à résoudre participe également à l'élaboration d'un lien entre l'expérience de l'élève et la notion de fraction (B). L'un des points communs à ces deux catégories d'intitulés est de conduire à l'utilisation de fractions avec une unité concrète. L'une des différences entre les deux, c'est que les problèmes introduisent une difficulté liée à la compréhension de l'énoncé, qui suppose un cadrage de la part de l'élève pour choisir une technique adaptée. C'est le sens qui se dégage des termes anglais *word problems*, *real world problems* et *everyday life problems* que nous avons rencontrés à de multiples reprises dans les programmes d'enseignement[1].

1. Par exemple, nous trouvons l'expression *word problems* dans les programmes d'enseignement de la République d'Irlande (1999, p. 71). L'expression *real world problems* apparait notamment dans les instructions

A. Le lien avec la vie quotidienne

Il est rare que les auteurs prennent soin de préciser que les apprentissages doivent se référer à des situations de la vie quotidienne. Le plus souvent, il est fait référence à cette dernière à travers la résolution de problèmes, mais elle n'est pas convoquée pour servir de support à l'apprentissage initial du concept de fraction. Pourtant, c'est le cas en Irlande du Nord, où les élèves de deuxième année, doivent être capables de « reconnaitre et utiliser des fractions simples de la vie quotidienne (*op. cit.*, p. 1), ce qui suggère qu'un lien est fait, par exemple, avec un partage de gâteau, de boisson, etc. que les élèves sont susceptibles de réaliser, y compris à l'école, par exemple pour fêter un anniversaire. La même formulation est utilisée dans les programmes québécois (« Fractions en lien avec le quotidien de l'élève » [*op. cit.*, 2001, p. 134]), uniquement en première et en deuxième année de scolarité obligatoire. Une relation est également établie en Corée du Sud (« Trouver des situations de la vie quotidienne où les fractions et les ecritures décimales sont utilisées » [*op. cit.*, p. 18]), même si l'injonction que nous venons de citer ne se trouve pas dans la liste des types de tâches à effectuer, mais dans les éléments complémentaires auxquels les professeurs doivent prêter attention lors de l'enseignement des fractions. De même, dans le Taipei chinois, l'intégration d'éléments du quotidien dans les apprentissages n'apparait pas dans les intitulés, mais dans les commentaires. L'apprentissage des fractions se fait souvent à partir d'un ruban, ou d'une pizza. Voici, par exemple, comment les enseignants sont supposés faire comprendre la fraction 3/4 à leurs élèves.

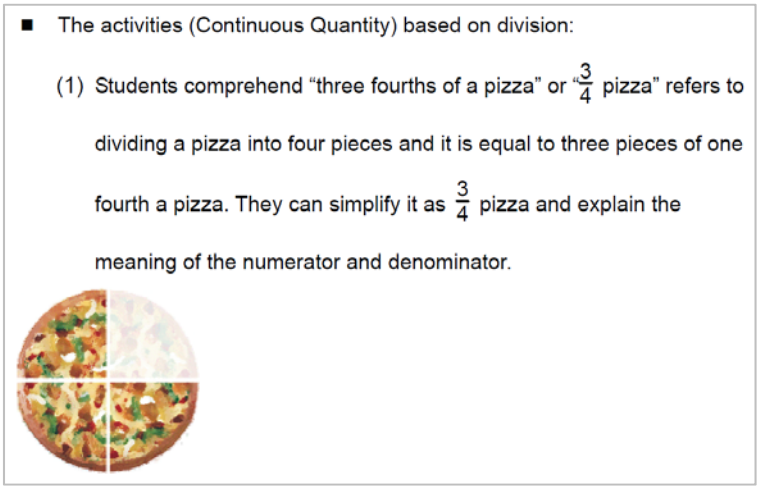


Figure 40. Exemple de référence à une situation de la vie quotidienne dans les programmes scolaires du Taipei chinois (Curriculum, 2005, p. 128)

officielles du Taipei chinois (2005, p. 29). Pour un exemple de l'emploi du terme *every day life problems*, il faut consulter les textes singapouriens (2006, p. 10).

De telles activités référées à une unité connue des élèves sont présentes dans l'ensemble du texte, quelle que soit le type de tâches en jeu (reconnaissance de fractions équivalentes, comparaison, addition, multiplication, etc.). C'est le cas, notamment, en sixième année, lorsque les élèves sont invités à exprimer la relation qui unit deux grandeurs sous la forme d'une fraction (« Connaitre le sens des proportions et des taux, et les appliquer dans des problèmes tirés de situations du monde réel » [*ibid.*, p. 178]). À cette occasion, les auteurs fournissent des exemples dans lesquels la phrase « un kilogramme de farine coute 16 dollars » devient « 1/16 de kg coute 1 dollar ».

Il arrive également que des éléments de la vie quotidienne soient introduits, non dans les commentaires des programmes, mais dans les exemples fournis par les auteurs. C'est le cas, par exemple, en Angleterre, lorsque la reconnaissance de fractions est étendue aux fractions supérieures à 1 en sixième année. Cet apprentissage s'appuie, comme dans le Taipei chinois, sur la représentation de pizzas, mais le lien avec la vie quotidienne ne se déduit que de l'exemple accompagnant l'intitulé (« exprimer un nombre entier plus grand comme une fraction d'un nombre entier plus petit (par exemple, reconnaitre que huit tranches de pizzas pour une pizza de cinq tranches représentent 8/5 ou 1+3/5 de pizzas » [*op. cit.*, 2006, p. 82]). C'est le choix réalisé par les auteurs ontariens, lorsqu'ils imposent l'utilisation « d'une variété d'objets et d'illustrations pour représenter des fractions simples en tant que parties d'un tout et parties d'un ensemble dans divers contextes » (*op. cit.*, p. 52) : l'exemple fait référence à un jeu de ballon qu'ils connaissent probablement très bien (« six enfants s'amusent dans la cour de l'école. Deux tiers jouent au ballon. Combien d'enfants jouent au ballon ? » [*ibid.*]).

Dans les autres territoires de notre corpus (Floride, France, Hong Kong SAR, République d'Irlande, Singapour), aucun rapprochement entre les fractions et la vie quotidienne n'est explicitement prévu par les auteurs : soit les auteurs ne formulent aucune proposition, soit l'apprentissage du concept est réalisé à partir d'un matériel disponible dans la classe (figures géométriques, bandes de papier, etc.). Nous avons donc sur cette question deux conceptions divergentes de l'apprentissage des fractions : l'une dans laquelle celui-ci est ancré dans des situations connues des élèves en dehors du contexte scolaire, l'autre dans laquelle celui-ci s'appuie sur des éléments immédiatement disponibles au sein de la classe. L'interprétation de certains textes est toutefois complexe. Ainsi, les instructions officielles de Hong Kong SAR préconisent d'instaurer un lien avec la vie quotidienne pour la découverte des pourcentages (en sixième année « Reconnaitre des pourcentages à travers des exemples de la vie quotidienne »

[*op. cit.*, p. 42]), mais la formule n'apparait pas avec autant de clarté pour les fractions (en troisième année : « Développer le concept de fraction vue comme la part d'un entier et comme la part d'une collection d'objets » [*ibid.*, p. 32]). Rien n'est dit sur la nature de ces objets, alors que ceux-ci pourraient permettre de relier les apprentissages aux expériences extra-scolaires des élèves. En outre, même si la distinction apparait assez nettement pour les pays précités, elle n'apparaitra probablement pas aussi clairement dans les faits. Le cas de Singapour en apporte l'illustration. Dans ce pays, ce n'est que dans les nouveaux programmes, beaucoup plus développés que les anciens, que des références au vécu de l'élève apparaissent. Les élèves doivent pouvoir « donner des exemples de fractions dans des situations de la vie quotidienne » (*op. cit.*, 2012, p. 38). Il est intéressant de noter que la vie quotidienne n'offre pas seulement, comme en Irlande du Nord et dans le Taipei chinois, un suppport pour l'apprentissage des fractions. Elle est l'occasion de proposer aux élèves des activités à part entière, dans lesquelles ceux-ci sont invités à produire eux-mêmes un lien entre le concept de fraction et ce qu'ils vivent en dehors de leur établissement scolaire. Or, en raison de l'introduction progressive des nouveaux programmes dans les textes, il est possible que cette invitation à faire le lien avec la vie quotidienne soit plus ancienne que la seule prise en compte de l'entrée en vigueur des programmes le laisse à penser.

B. La contextualisation dans des problèmes

Les énoncés de problèmes, parce qu'ils sont reliés à des situations concrètes, peuvent amener les élèves à percevoir l'utilité du concept de fraction. Ils peuvent également enrichir leur compréhension de la notion de fraction. En effet, la confrontation du résultat obtenu mathématiquement avec sa traduction dans une situation de la vie réelle est susceptible de conduire à une remise en question, chez l'élève, de processus qu'il jugeait auparavant pertinents et qui lui semblent tout à coup inappropriés, notamment lors de l'apprentisage de la comparaison ou des opérations impliquant des fractions. Dans ce paragraphe, notre étude porte donc sur les différences observables entre les programmes scolaires des pays de notre corpus, relativement à la résolution de problèmes, dans le domaine des fractions.

En Angleterre, c'est en quatrième année, par le biais de la mise en place des nouveaux programmes, que les connaissances des élèves dans le domaine des fractions et des notations décimales sont réinvesties dans la résolution de problèmes (« Résoudre des problèmes qui nécessitent de connaitre les pourcentages et les écritures décimales équivalentes à 1/2, 1/4, 1/5, 2/5, 4/5 et les fractions ayant un dénominateur multiple de 10 ou 25. » [*op. cit.*, 2014, p. 139]). Le contexte de ces problèmes est précisé, puisqu'il s'agit de « problèmes de mesures et d'argent ». Signalons que les problèmes n'apparaissent

pas dans les programmes pour l'école élémentaire de 2006. Il faut consulter les injonctions à destination des collégiens pour trouver trace d'un intitulé comportant le terme « problème » (« Ils choisissent d'utiliser les fractions ou les pourcentages pour résoudre des problèmes impliquant des transformations proportionnelles répétées ou pour calculer la quantité originelle étant donné le résultat de la transformation proportionnelle » [*op. cit.*, 2007, p. 152]). En 2014, la référence à des problèmes devient systématique, à tous les niveaux de la scolarité, ce qui laisse à penser que cette question fut au cœur de la discussion lors du changement d'instructions officielles.

En Corée du Sud, les problèmes sont mentionnés en troisième année, mais seulement dans les points de vigilance à prendre en compte pour l'enseignement de la notion, pas en tant que compétence à acquérir à part entière (« Reconnaitre l'utilité des fractions et des écritures décimales dans des situations-problèmes » [*op. cit.*, p. 18]). Les années suivantes, l'utilisation des problèmes n'est plus imposée par les textes. Elle est remplacée par des considérations liées à la fluidité des calculs, et à l'aisance des élèves dans ce domaine. La présence des problèmes dans les programmes sud-coréens est donc très faible, mais il faut tenir compte de la concision de ces instructions officielles pour mettre cette donnée en perspective.

En Floride, au contraire de l'Angleterre, le changement de programmes n'a pas entrainé de modifications importantes quant à la place de la résolution de problèmes. Ceux-ci sont toujours proposés entre la quatrième et la septième année. Il s'agit d'abord de résoudre des problèmes additifs (« Résoudre des problèmes comportant des additions et des soustractions de fractions se référant au même entier et ayant le même dénominateur, par exemple en utilisant des modèles de fractions visuels et des équations pour représenter le problème » [*op. cit.*, 2014, p. 3]). Cette contextualisation est imposée, en cinquième année, par les anciennes instructions officielles, la résolution de problèmes portant sur des tâches identiques (« Ajouter et soustraire des fractions et des nombres décimaux couramment, et vérifier la vraisemblance des résultats, y compris dans des situations de problèmes » [*op. cit.*, 2007, p. 10]). Toutefois, le degré de guidage est moins fort, puisque la somme ou la différence n'est pas nécessairement une fraction inférieure à 1, et la référence à des techniques permettant la résolution des problèmes a disparu. En sixième année, les élèves réaliseront des multiplications et des divisions de fractions en contexte (« résoudre des problèmes du monde réel portant sur la multiplication et la division de fractions et de nombres décimaux » [*ibid.*, p. 12]), tandis qu'en en septième année, les programmes prévoient une synthèse conduisant les élèves à « additionner, soustraire, multiplier et diviser des entiers, des fractions et des décimaux […], y compris en résolvant des problèmes de la vie quotidienne » (*ibid.*, p. 14). L'objectif semble donc être le développement de la fluidité de calcul, ainsi que le choix pertinent de l'opération en vue de résoudre le problème donné, plutôt que le développement du concept de fraction, puisque différentes écritures des nombres rationnels sont évoquées pour ces activités.

À Hong Kong SAR, il faut attendre la cinquième année pour voir apparaitre des problèmes dans les instructions officielles. Comme en Floride, la contextualisation des apprentissages ne concerne que des tâches impliquant des opérations (« résoudre des problèmes impliquant l'addition et la soustraction de fractions simples » et « résoudre des problèmes simples, à l'exclusion des problèmes consistant à chercher le nombre de départ » impliquant « des multiplications de fractions » et « des divisions de fractions » [*op. cit.*, p. 38]). Toutes les activités de résolution de problèmes comportant des fractions sont concentrées sur cette année scolaire : auparavant, les tâches impliquant des fractions ne sont pas

contextualisées ; après, les problèmes mettent en jeu la notion de pourcentage, et non plus celle de fraction.

En Ontario, en troisième année, les problèmes ne sont pas cités directement, mais les exemples fournis montrent que les auteurs attendent des élèves qu'ils soient capables de traiter des situations tirées de la vie quotidienne (« à l'aide de matériel concret [p. ex., il y a 18 pommes, si nous en prenons chacun le tiers, nous aurons 6 pommes chacun] » [*op. cit.*, p. 43]). De même, en quatrième année, les problèmes sont évoqués à travers un exemple, et ne concernent à ce stade de la scolarité que le type de tâches « prendre la fraction d'une quantité » (« six enfants s'amusent dans la cour de l'école. Deux tiers jouent au ballon. Combien d'enfants jouent au ballon ? » [*ibid.*, p. 52]). Par la suite, les auteurs prévoient une plus grande variété de contextes, avec une formule qui permet d'inclure différents types de tâches travaillés au cours de l'année (recherche de fractions équivalentes, comparaison, addition, etc.) : « Expliquer les stratégies utilisées ainsi que la démarche effectuée pour résoudre divers problèmes comportant des nombres naturels, des écritures décimales ou des fractions » (*ibid.*, p. 71). En parallèle, des activités d'estimation sont prévues, de façon à vérifier la vraisemblance des résultats obtenus.

En République d'Irlande, les problèmes sont déconnectés des compétences tout au long de la scolarité, dans une formulation similaire à celle que l'on trouve en Ontario (par exemple, en troisième année, « Résoudre des tâches et des problèmes impliquant des fractions » [*op. cit.*, p. 69]). Cependant, la lecture de l'exemple (« Quelle fraction du graphique est coloriée en jaune / n'est pas verte ? » [*ibid.*]) suggère une relation avec la recherche de la fraction d'une quantité, ou l'exploration de la fraction entendue comme une division, qui sont deux compétences au programme de la troisième année. De la même façon, l'exemple fourni pour la quatrième année montre que les situations choisies doivent être mises en rapport avec des unités de mesures (« trouver combien font ¾ d'un mètre de ficelle. Trouver 1/5 de 2 500 mètres » [*ibid.*]), en cohérence à la présence dans les instructions officielles d'activités décontextualisées telles que celle visant à « renommer des unités de mesures (longueurs, masses, capacités) en utilisant des formes décimales ou fractionnaires. 250 g = 0,25 kg = 1/4 kg » (*ibid.*, p. 82). À partir de la cinquième année, les auteurs ne fournissent plus d'exemple impliquant des fractions pour la résolution de problèmes. De plus, différentes écritures des nombres rationnels sont mentionnées, ce qui laisse une grande liberté aux enseignants, tout à la fois pour le choix des compétences qui seront mises en jeu dans les problèmes, et pour le choix de l'écriture la plus adaptée à sa résolution (par exemple, en cinquième année : « Résoudre des problèmes impliquant des opérations avec des nombres entiers, des fractions, des écritures décimales et des pourcentages simples » [*ibid.*, p. 91]). Ici encore, les auteurs des programmes prévoient le recours à des modèles visuels (« utiliser des diagrammes » [*ibid.*]). Ils envisagent également la réalisation d'estimations, ce qui nous parait susceptible d'établir un lien entre la représentation symbolique des fractions et une idée de la quantité qu'elles représentent (« estimer et calculer des réponses avec une calculatrice » [*ibid.*]).

À Singapour, les instructions officielles de 2006 ne proposaient qu'un seul intitulé relatif aux problèmes et impliquant des fractions. C'était en cinquième année (« Résoudre des problèmes incluant les quatre opérations » [*op. cit.*, 2006a, p. 26]). Or, à ce stade de la scolarité, l'apprentissage des fractions est déjà presque achevé. Les élèves devaient donc réinvestir leurs connaissances pour résoudre différents problèmes, dans une synthèse dont la nouveauté consistait en la diversité des situations qu'ils étaient susceptibles de rencontrer. En effet, comme nous le savons par le biais du préambule, les problèmes

sont un élément central du curriculum, et ils sont supposés constituer le socle de chaque étape de l'apprentissage. Nous supposons que les élèves ne résoudront pas uniquement des problèmes en cinquième année, toutefois nous concédons que si c'est le cas, l'intégration des compétences relatives aux fractions dans des situations concrètes reste largement implicite dans les paragraphes correspondants. Dans les nouveaux programmes, cette progression a été conservée à l'identique. Cependant, les auteurs ont ajouté des activités consistant à faire produire des problèmes par les élèves, au cours de travaux de groupe (« Travailler en groupes pour créer des problèmes à deux étapes impliquant l'addition et la soustraction de fractions pour les faire résoudre par d'autres groupes » [*op. cit.*, 2012a, p. 49]). Nous n'avons rencontré de telles injonctions que dans les nouveaux programmes floridiens, mais de façon plus discrète, parmi les exemples de tâches qui peuvent permettre de construire les savoirs relatifs aux opérations en sixième année (« Par exemple, créer une histoire pour mettre la division (2/3) ÷ (3/4) en contexte » [*op. cit.*, 2014, p. 2]).

Dans le Taipei chinois, la résolution de problèmes est proposée au cours de la cinquième et de la sixième année. Cette question est systématiquement abordée en relation avec un type de tâches précis (par exemple, en cinquième année : « Les élèves peuvent comprendre le sens et utiliser la multiplication comportant des fractions pour résoudre des problèmes de la vie quotidienne » [*op. cit.*, p. 160] ; en sixième année : « Comprendre le sens et le calcul et calculer dans le cas où le diviseur est une fraction, et appliquer ce concept pour résoudre des problèmes » [*ibid.*, p. 175] »). On notera toutefois que les problèmes ne sont pas évoqués pour l'addition et la soustraction de fractions, mais seulement pour la multiplication et la division. Par ailleurs, les auteurs précisent que les élèves doivent maitriser à la fois les formules et les conditions de leur utilisation. Avant de formaliser les calculs, les élèves comprennent le sens de la division à travers des problèmes tirés de la vie quotidienne (par exemple, « il y a quatre pizzas. Si chaque enfant reçoit 1/3 de pizzas, combien d'enfants pourront être servis ? » [*ibid.*, p. 160]) Ils trouvent ensuite un algorithme de calcul, en s'appuyant sur les propriétés de la multiplication et de la division déjà connues dans le cadre de l'étude des nombres entiers. Les élèves doivent également être capables de passer d'une écriture des rationnels à l'autre pour résoudre des problèmes Les auteurs donnent l'exemple suivant : « il ya 18 filles sur 32 personnes en classe, de sorte que les filles sont 18/32, fraction qui peut être transformée en 0,5625, puis en un pourcentage entier de 56% » (*ibid.*, p. 163). Enfin, à l'occasion de l'apprentissage de l'algèbre, les élèves utilisent « des variables pour mettre en équation un problème mathématique à deux étapes et examiner le caractère vraisemblable des réponses dans des conditions concrètes » (*ibid.*, p. 184).

La contextualisation dans des problèmes est imposée dans la plupart des curriculums que nous avons consultés (Angleterre, Corée du Sud, Floride, Hong Kong SAR, Ontario, République d'Irlande, Singapour, Taipei chinois), le plus souvent pour des types de tâches bien précises (en particulier pour l'apprentissage des opérations impliquant des fractions). Dans les autres territoires dont nous avons étudié les instructions officielles (France, Irlande du Nord, Québec), aucune relation n'est établie entre la résolution de problèmes et le concept de fraction (la France étant le seul pays de notre corpus qui ne prévoit explicitement ni le recours à la vie quotidienne, ni à la résolution de problèmes pour le concept de fraction). Encore une fois, cela ne signifie pas que les professeurs n'incluent pas des problèmes dans leur enseignement : d'une

part, l'importance de cette activité est parfois rappelée dans l'introduction des instructions officielles, et d'autre part, son utilisation comme support de l'apprentissage peut constituer un implicite des programmes, en tant qu'outil didactique faisant l'objet d'une attention particulière en formation d'enseignants. En outre, même dans les pays qui l'imposent, le nombre d'occurrences constituant une référence à la résolution de problèmes est très variable. Leur caractérisation est insuffisante pour mettre au jour des situations de référence (c'est-à-dire des « problèmes, mis en valeur par des scénarios adéquats ; que les étudiants vont rencontrer à de nombreuses reprises dans l'année, sous des facettes différentes, et qui pourraient constituer pour eux des terrains d'expérience très familiers, petits îlots de connaissances disponibles » [Robert, 1998, p. 173]) que l'on pourrait comparer aux problèmes tirés des évaluations TIMSS. Néanmoins, leur prise en compte représente un indice du niveau de complexité attendu en termes de mise en fonctionnement des connaissances. À ce titre, elle est utile à l'analyse des performances des élèves à ces tests.

§ 2. Le discours relatif à la compréhension du concept de fraction

Si les savoirs ne sont pas souvent explicités dans les programmes d'enseignement, cela n'empêche pas les professeurs de proposer des dispositifs supposés les faire émerger. Ce travail d'institutionnalisation a été largement étudié par Cécile Allard dans sa thèse consacrée à l'enseignement des fractions à la fin de l'école primaire (2015). Pour notre part, nous proposons d'observer dans quelle mesure les législateurs favorisent la mise en place de ce « moment de l'institutionnalisation » (Chevallard, 2002a, p. 14) à travers la présence, dans les curriculums, d'ostensifs discursifs. Ces derniers peuvent être utilisés, non seulement pour résoudre ou contextualiser des tâches, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, mais également pour évoquer un savoir, soit à propos d'une technique, en exigeant une justification de sa réponse par l'élève (A), soit à propos du concept de fraction lui-même, en instaurant des temps de discussion permettant aux élèves de formuler leurs connaissances (B).

A. La justification par les élèves des techniques utilisées

Il arrive que les auteurs des évaluations TIMSS ne se contentent pas du résultat apporté par l'élève et lui demandent de justifier son choix. Par exemple, dans l'item M0504 des évaluations TIMSS 2015, il fallait d'abord préciser quel disque avait une certaine fraction de sa surface grisée parmi les quatre proposés, avant « d'expliquer » ou de « montrer » pourquoi la réponse était correcte. Ce type de justification suppose une argumentation portant sur le choix

de la technique utilisée ou sur sa mise en œuvre, en particulier lorsque la situation supporte plusieurs moyens de parvenir au résultat attendu. Ainsi, dans l'item que nous venons de citer, l'élève doit d'abord opérer un cadrage de la situation et choisir une technique adaptée, qui peut consister, par exemple, à partager le disque en huit parts égales, et à en colorier quatre, à reproduire huit fois la partie grisée pour compléter l'unité ou à repérer que la fraction 3/8 est à la fois supérieure à 1/4 et inférieure à 1/2, une seule figure correspondant à ces critères. Ensuite, il faut qu'il parvenienne à expliquer le cheminement qu'il a emprunté dans l'espace qui lui est laissé, ce qui suppose la mise en œuvre d'autres compétences, notamment rédactionnelles. Or, ce travail spécifique ne fait presque jamais l'objet d'une attention de la part du législateur.

Les programmes envisagent presque exclusivement la relation type de tâches-technique comme unique. C'est le cas, par exemple, à Hong Kong SAR, lorsque les élèves doivent « comparer des fractions en les convertissant en écriture décimale » (*op. cit.*, p. 42). Nul besoin pour l'élève d'argumenter en l'espèce, ce qu'on attend de lui, c'est l'application satisfaisante d'une technique définie en amont. Le même principe est à l'œuvre lorsque le législateur considère plusieurs techniques, mais que celles-ci sont envisagées successivement, au cours d'années différentes ou dans des intitulés différents. C'est le cas, par exemple, dans le Taipei chinois, lorsque « les élèves reconnaissent et comparent des fractions […] dans des conditions concrètes » (*op. cit.*, p. 128) en troisième année, et qu'ils « trouvent un multiple commun aux dénominateurs originaux et utilisent ce principe pour comparer […] des fractions de dénominateurs différents » (op. cit., p. 158) en quatrième année. L'analyse est beaucoup plus difficile à mener lorsque plusieurs techniques apparaissent dans un même intitulé. Par exemple, lorsqu'il dit que les élèves ontariens doivent pouvoir « comparer et ordonner des nombres fractionnaires et des fractions en utilisant une variété de stratégies (p. ex., matériel concret, dessin, droite numérique, fraction repère) », il est difficile de savoir si les techniques proposées doivent être enseignées séparément, les unes à la suite des autres, ou si les enseignants peuvent proposer à leurs élèves de choisir l'une d'entre elles pour résoudre des tâches de comparaison. Quand bien même la deuxième hypothèse devrait être retenue, les élèves n'auraient pas à expliquer, selon une interprétation stricte du curriculum, pourquoi ils ont privilégié une technique plutôt qu'une autre. De plus, le travail de cadrage et d'argumentation ne transparait pas d'une telle injonction : il semble que les élèves puissent choisir la procédure avec laquelle ils se trouvent le plus à l'aise, sans que la question de l'opportunité de la technique choisie ne soit soulevée. L'autre ambiguité que nous avons pu relever au sein de notre corpus porte sur le point de savoir qui est supposé apporter la justification demandée. Nous pensons à un intitulé

des programmes français pour la classe de sixième, déjà évoqué, indiquant que « les procédures utilisées pour comparer, encadrer, intercaler des nombres [décimaux] sont justifiées en s'appuyant sur la signification des écritures décimales ou le placement des points sur une demi-droite graduée ». On comprend bien que le passage aux écritures fractionnaires peut constituer un moyen de comparer des nombres écrits sous une forme décimale. Toutefois, la justification dont parlent les auteurs est-elle du ressort de l'enseignant, lorsqu'il explique comment comparer des nombres décimaux, ou du ressort de l'élève, après avoir effectué la tâche demandée ? En dehors des problèmes, qui peuvent conduire les élèves à s'interroger sur l'adéquation entre la technique et la tâche, nous n'avons trouvé que trois items rendant nécessaire un véritable travail de justification. En Floride, pour « comparer deux fractions », les élèves de troisième et de quatrième année doivent, depuis 2014, « justifier [leurs] conclusions, *par exemple*, en utilisant un modèle de fraction visuel » (*op. cit.*, 2014, p. 4). D'une part, la locution adverbiale « par exemple » laisse ouverte la possibilité d'utiliser des techniques variées ; d'autre part, la nécessité pour l'élève d'apporter une justification est clairement indiquée. La même formule est utilisée à propos des décompositions de fractions, uniquement en quatrième année (« Justifier les décompositions, par exemple en utilisant un modèle de fraction visuel » [*ibid.*]). Il est vrai que, lorsque aucune technique n'est envisagée par le législateur (ce qui arrive très fréquemment), les professeurs peuvent organiser leur enseignement de manière à donner la possibilité aux élèves, à la fois de maitriser plusieurs techniques et de discuter de celle qui apparait la plus opportune pour résoudre la tâche qui leur est confiée. Néanmoins, cela se fera sur leur initiative, puisqu'en dehors de la Floride, ce type de discours n'est pas envisagé par les auteurs des programmes.

B. Le discours portant sur des éléments technologiques

Les capacités d'expression des élèves ne sont pas sollicitées uniquement par le biais des activités de justification des techniques utilisées. L'institutionnalisation des savoirs ou les échanges entre pairs sont autant d'occasion de mobiliser leurs capacités langagières. Toutefois, ces pratiques courantes dans les classes n'apparaissent pas dans les instructions officielles, à moins que les auteurs ne les instituent comme des tâches à réaliser, reliées à un savoir en particulier. Cela arrive rarement dans notre corpus, et pour des éléments technologiques sans rapport les uns avec les autres. Par exemple, en République d'Irlande, les élèves de deuxième année sont amenés à « discuter la relation entre une moitié et un quart » (*op. cit.*, p. 45). En Floride, le fait de « décrire comment la taille de la partie fractionnaire est en relation avec le

nombre de morceaux de taille égale dans l'entier » (*op. cit.*, 2007, p. 6) permettait, dans les programmes de 2007, d'évoquer le fait que, si $a > b$, alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. À partir de 2014, les élèves doivent simplement « reconnaitre que les comparaisons ne sont valables que lorsque les deux fractions se réfèrent au même entier » (*op. cit.*, 2014, p. 4).

Certes, le verbe « expliquer » revient assez souvent dans les textes de Floride (« Expliquer pourquoi une fraction a/b est équivalente à une fraction $(n \times a)/(n \times b)$ en utilisant des modèles de fractions visuels, avec une attention à la façon dont le nombre et la taille des parts diffèrent, même si les deux fractions sont elles-mêmes de la même taille » [*op. cit.*, 2014, p. 3]) et de l'Ontario (en cinquième année : « Établir et expliquer la relation entre une écriture décimale et une fraction dont le dénominateur est 10 ou 100, et vice versa » [*op. cit.*, p. 61] et en sixième année : « Établir et expliquer les relations entre les fractions, les écritures décimales et les pourcentages » [*ibid.*, p. 70]). Néanmoins, cette explication échoit-elle au professeur ou à l'élève ? Là encore, l'ambiguité résiste à l'exégèse. Les élèves sont sans doute en capacité, à la fin d'un apprentissage, de pouvoir « expliquer pourquoi une fraction a/b est équivalente à une fraction $(n \times a)/(n \times b)$ » ou « dire comment les fractions et les divisions sont liées ». Néanmoins, nous savons que le législateur n'évoque pas toujours l'activité de l'élève, mais parfois celle du professeur, ainsi pour lui demander de « présenter le nouveau chiffre des "dixièmes", en expliquant que ce nom est dû à l'égalité 1/10 = 0,1 », dans les programmes du Taipei chinois (*op. cit.*, p. 132).

Les nouveaux programmes de Singapour proposent une progression dans laquelle les moments où l'élève est amené à parler des savoirs qu'il acquiert sont davantage présents, à différents niveaux de la scolarité. Ces activités sont de nature variée : elles relèvent de l'explicitation des savoirs (« Utiliser des disques pour représenter et comparer deux fractions unitaires et expliquer pourquoi plus le dénominateur est grand, plus la fraction unitaire est petite, par exemple, 1/6 est plus petit que 1/3 » [*op. cit.*, 2012, p. 39]) ou de la discussion à propos de techniques, soit par le biais de l'échange entre pairs (« Travailler en groupes pour comparer des fractions en utilisant différentes stratégies telles que l'élaboration d'un schéma, la comparaison par rapport à la moitié, et expliquer les stratégies utilisées » [*ibid.*, p. 43-44]), soit en classe entière (« Discuter des avantages de la simplification de fractions avant leur multiplication » [*ibid.*, p. 48]). Il est possible que cette évolution découle de l'observation des scores très faibles, obtenus par leurs élèves comme par ceux des autres pays, à des items TIMSS semblables à ceux que nous avons présentés au début de ce paragraphe. Néanmoins, au moment

des évaluations TIMSS 2015, ces injonctions ne sont pas encore entrées en vigueur. On peut donc considérer que, dans l'ensemble des pays de notre corpus, le contenu et l'initiative des phases d'institutionnalisation relèvent principalement des pratiques enseignantes.

Conclusion de la sous-section

L'instauration d'un lien avec la vie quotidienne, la contextualisation des tâches dans des problèmes, la justification des procédures utilisées et l'institutionnalisation sont autant d'éléments sur lesquels le législateur donne peu d'indications spécifiques aux fractions. Certes, il arrive que le préambule d'un texte rappelle que toute situation d'apprentissage doit avoir pour objectif la résolution d'un problème (nous pensons en particulier aux instructions officielles de Singapour) ou que l'organisation du curriculum mette en évidence l'importance des savoirs (les programmes français du secondaire incluent une colonne « connaissances » dans laquelle sont listés les éléments technologiques que les élèves doivent maitriser). Toutefois, ces considérations générales se concrétisent rarement par un apport d'informations susceptibles d'enrichir ou de compléter les praxéologies que l'on a pu établir principalement à partir des types de tâches. Par exemple, rien n'est dit à propos des savoirs que l'élève doit extraire de ses observations sur l'utilisation des fractions dans la vie quotidienne. Par ailleurs, la faible présence d'intitulés qui imposent une justification de la procédure employée par l'élève sont révélateurs de l'absence de prise en compte, dans la plupart des programmes d'enseignement, de la pluralité des techniques susceptibles d'être mise en œuvre pour la résolution d'une même tâche. Les questions de la validité et de l'opportunité des techniques, pourtant essentielles pour solutionner des problèmes mathématiques (Carette *et al.*, *op. cit.*, p. 33), n'apparaissent explicitement qu'en Floride, et la possibilité pour l'élève de discourir sur le savoir qu'il a construit n'est prescrite par le législateur que très ponctuellement. Si cela ne veut pas dire que ces éléments ne seront pas appréhendés par les systèmes didactiques, ces observations induisent néanmoins l'hypothèse d'une grande hétérogénéité inter-pays, liée notamment aux différences de formation initiale et continue des professeurs.

Sous-section II. Ostensifs graphiques et scripturaux

Selon le psychologue américain David W. Carraher, beaucoup d'élèves et certains professeurs pensent « qu'une fraction est une part d'un entier et que l'écriture fractionnaire est son nom » (1996, p. 241). Cette idée qu'une fraction est une substance physique et non un nombre viendrait du fait qu'elles sont introduites, à l'école primaire, par le biais de

représentations concrètes, stéréotypées et récurrentes (telles que la part de pizza). Le choix des ostensifs (§ 1) n'est donc pas neutre : leur nature et leur variété ont un impact sur la construction du concept de fraction par l'élève. Par ailleurs, un soutien est souvent apporté aux élèves dans la manipulation de ces ostensifs (§ 2), soit en diminuant le degré d'automie attendu, soit en diminuant les exigences relatives à la maitrise de ces ostensifs.

§ 1. Le choix des ostensifs

Dans les évaluations TIMSS, nous avons relevé la présence d'ostensifs de natures différentes. En dehors des ostensifs discursifs que nous avons déjà évoqués (et notamment des énoncés de problèmes), des ostensifs graphiques (disques, carrés, rectangles, schémas, etc.) cotoient des ostensifs scripturaux (en particulier des fractions et des notations décimales). En comparant les supports matériels de l'apprentissage dans les pays de notre corpus, nous proposons à la fois de comprendre comment le législateur organise le passage du concret à l'abstrait, en sachant que la frontière entre les deux est poreuse et que de nombreux liens sont établis, et de permettre, dans les chapitres ultérieurs, de déceler la présence d'une corrélation éventuelle entre les performances des élèves et la mise en jeu d'un ostensif évoqué par les auteurs des instructions officielles. Si la dichotomie est parfois difficile à mettre au jour dans les textes, nous allons tout de même étudier successivement les ostensifs graphiques (A) et les ostensifs scripturaux (B). Ainsi, nous conserverons la distinction proposée par Chevallard (1994, p. 4-5).

A. Les ostensifs graphiques

L'indication d'ostensifs graphiques dans les programmes d'enseignement peut renseigner sur le niveau de difficulté de la tâche (par exemple, partager un cercle en trois parties égales est plus complexe que de partager un rectangle en trois parties égales), sur la variété des supports d'apprentissage et sur la correspondance avec les ostensifs identifiés dans les évaluations TIMSS. Tous trois sont nécessaires pour l'analyse des performances des élèves à ces tests. D'abord, à moins que les élèves apprennent à partir d'exercices plus difficiles que ceux qui leur sont donnés dans les tests, une bonne adéquation entre d'une part, la difficulté des tâches proposées aux cours de l'apprentissage, et d'autre part, la difficulté des tâches observées dans les items, est susceptible de contribuer à l'amélioration du score des élèves. Ensuite, la diversité des supports de l'apprentissage participe à la mise en œuvre de changements de cadre favorables à la maitrise du concept de fraction par les élèves. Enfin, à moins que les élèves

puissent facilement opérer des transferts entre une représentation et une autre, une correspondance entre les ostensifs proposés aux cours de l'apprentissage et ceux apparaissant dans les items contribue probablement à la réalisation de bonnes performances. Après avoir décrit les ostensifs privilégiés dans chaque pays de notre corpus, nous indiquerons si les caractéristiques des programmes scolaires permettent de fournir les renseignements attendus pour l'analyse que nous venons de présenter.

En Angleterre, pour « comparer les fractions et établir des équivalents » (*op. cit.*, 2006, p. 76), les enseignants proposeront à leurs élèves « d'utiliser des diagrammes » (*ibid.*), expression qui revient à plusieurs reprises dans les textes. Le type et la forme de ces diagrammes n'est pas précisée. Ce n'est que lorsque les élèves travaillent sur leur capacité à « trouver des fractions de nombres, de quantités ou de formes » ou à « estimer une proportion » que les supports visuels sont plus diversifiés, à travers l'utilisation de plusieurs unités discrètes : ce peut être des « pommes », des « prunes » ou encore « un rectangle » (*ibid.*, p. 78). Ce n'est qu'à partir de la sixième année que l'on impose des supports visuels pour l'étude des quantités continues, lors de l'étude des fractions supérieures ou égales à 1 et des nombres mixtes. L'exemple des pizzas est cité (« exprimer un nombre entier plus grand comme une fraction d'un nombre entier plus petit [par exemple, reconnaitre que huit tranches de pizzas pour une pizza de cinq tranches représentent 8/5 ou 1+3/5 de pizzas] » [*ibid.*, p. 82]).

Dans certains pays, les auteurs délimitent un cadre plus large, en donnant les caractéristiques des ostensifs graphiques utilisés. C'est le cas en Corée du Sud, en deuxième année : en ce qui concerne la division de quantités continues en parts égales, ils circonscrivent ces ostensifs aux « figures qui peuvent être divisées en parts de formes et de tailles égales » (*op. cit.*, p. 13). Nous déduisons de ce propos l'utilisation de figures géométriques telles que le disque, le carré, le rectangle, etc., mais pas seulement, car le terme *« figure »* a un sens plus large en anglais que celui qu'il recouvre dans notre langue. Dans le reste du curriculum, nous n'avons pas relevé d'ostensif graphique qui concerne les fractions, ce qui peut être expliqué par la concision des programmes sud-coréens.

En Floride, les tâches relatives à la représentation de fractions sont réalisées, en troisième année, avec « des aires, des collections, et des modèles de mesures » [*op. cit.*, 2007, p. 6]), ce qui constitue un cadre encore plus vaste que ceux délimités en Angleterre et en Corée du Sud. Par la suite, l'expression « modèle » est utilisée, qu'il s'agisse des nouveaux programmes en quatrième année (« Expliquer pourquoi une fraction a/b est équivalente à une fraction $(n \times a)/(n \times b)$ en utilisant des modèles de fractions visuels, avec une attention à la façon dont le nombre et la taille des parts diffèrent, même si les deux fractions sont elles-mêmes de la même taille. Utiliser ce principe pour reconnaître et générer des fractions équivalentes » [*op. cit.*, 2014, p. 3]), ou des anciens programmes pour les années suivantes (« représenter l'addition et la soustraction de nombres décimaux et de fractions ayant des dénominateurs communs ou différents, en utilisant des modèles, la valeur des chiffres ou des propriétés » [*op. cit.*, 2007, p. 10]).

En France, la droite graduée est un ostensif graphique cité dans les programmes de l'enseignement secondaire à propos des fractions (« Lire et compléter une graduation sur une demi-droite graduée, à l'aide d'entiers naturels, de décimaux, de fractions simples 1/2, 1/10, 1/4, 1/5 *ou de

quotients » [*op. cit.*, 2008b, p. 13]). À l'école élémentaire, il est écrit que les fractions sont utilisées dans « des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs » (*op. cit.*, 2008a, p. 38). Le champ des ostensifs potentiellement employés dans les classes est donc très large : il peut s'agir de longueurs, d'aires, de volumes, de contenances, de masses, etc.

En Ontario, les ostensifs graphiques sont évoqués dès la première année (« à l'aide de matériel concret ou illustré » [*op. cit.*, p. 27]), dans une formulation qui rappelle celle utilisée au Québec, et qui réapparait tout au long de la scolarité. Un premier exemple de matériel concret est fourni en deuxième année (« à l'aide de matériel concret (par exemple, une horloge) » [*ibid.*, p. 35]). En troisième année, les pommes sont présentées comme un nouvel exemple. La référence au matériel illustré a disparu. Pourtant, nous doutons que les pommes puissent être utilisées dans les classes autrement qu'à l'aide d'illustrations (« à l'aide de matériel concret [p. ex., il y a 18 pommes, si nous en prenons chacun le tiers, nous aurons 6 pommes chacun] » [*ibid.*, p. 43]). De même en quatrième année, pour la comparaison de fractions « ayant un même numérateur » ou « ayant un dénominateur commun », de nouveaux exemples de matériel sont utilisés (« par exemple, réglettes, bandes de carton, cercles de fraction, jetons) » [*ibid.*, p. 51]). La recherche d'une grande variété dans les supports est attestée par la présence d'unités discrètes et d'unités continues. Par ailleurs, ces représentations sont spécifiques à la notion de fraction, car on trouve d'autres expressions, par exemple dans le domaine de la géométrie. Ainsi, pour « identifier, effectuer et décrire des rotations d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour […] en utilisant un des sommets de la figure comme centre de rotation. », les élèves pourront recourir à du « matériel concret ou de calquage sur papier quadrillé ou à points » (*ibid.*, p. 55). Au fur et à mesure des années scolaires, les expressions utilisées par les auteurs pour décrire les ostensifs graphiques évoluent. Parfois, elles sont peu précises (« utiliser une variété d'objets et d'illustrations » [*ibid.*, p. 52]), laissant tout latitude aux enseignants pour trouver un contexte et des supports adaptés. À d'autres occasions, cette formulation est doublée d'exemples qui semblent faire le lien avec la géométrie (« papier pliage, géoplan, mosaïque géométrique » [*ibid.*, p. 61]). L'étude des rotations se poursuit en cinquième année. Toutefois, la référence au matériel concret a quant à elle disparu, seule est restée la mention des « calquages sur du papier quadrillé ou à points » (*ibid.*). En sixième année, par une formulation semblable à celle présente dans les instructions de quatrième année, les auteurs invitent les élèves à « utiliser une variété d'objets et d'illustrations pour représenter des nombres fractionnaires et des fractions » (*ibid.*). Cependant, les supports de l'apprentissage fournis dans les exemples sont différents en quatrième (« papier pliage, géoplan, mosaïque géométrique ») et en cinquième année (« papier quadrillé ou à points, bloc de base dix » [*ibid.*]). Bien que l'emploi de représentations visuelles de la fraction soit continu tout au long de l'apprentissage des fractions, nous constatons donc une évolution dans les supports utilisés. Dans ce cas, l'utilisation de papier quadrillé ou de bloc de base 10 est à considérer en relation avec l'introduction des pourcentages, et donc avec l'utilisation de fractions de dénominateur 100.

Au Québec, en première et deuxième année, lors des activités de reconnaissance, les élèves prennent appui sur des modèles visuels de la fraction, qui sont « des représentations concrètes ou imagées » [*op. cit.*, 2009a, p. 6]). En ce qui concerne les supports, le titre du chapitre précise que l'étude de la fraction se fait à l'aide de matériel concret et de schémas. Les auteurs précisent qu'une même fraction devra être représentée de différentes façons, ce qui permettra d'éviter l'instauration chez l'élève d'une vision stéréotypée des demis, des tiers et des quarts. En troisième année, l'apprentissage de la

fraction devient plus abstrait, puisque la référence au quotidien de l'élève disparait. Néanmoins, celui-ci peut toujours s'appuyer sur représentations « concrètes ou imagées » pour développer sa compréhension du concept. En septième année, dans le paragraphe consacré à la compréhension du sens du nombre réel, les auteurs des instructions officielles prévoient la représentation de fractions de « différentes façons (concrètes ou imagées) ». En ce qui concerne la multiplication, cet apprentissage s'appuie sur des représentations visuelles (encore une fois, du « matériel concret » et des « schémas » [*ibid.*]). Par ailleurs, l'intitulé des programmes montrent bien leur objectif : développer, non la technique opératoire des élèves, mais leur sens des opérations. La résolution de problèmes s'appuiera sur des représentations visuelles de la fraction, et les élèves seront invités à décrire une situation à partir de sa représentation visuelle, tissant ainsi des liens entre les ostensifs graphiques et les ostensifs discursifs (« traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou par une opération et vice versa [exploitation des différents sens de l'addition, de la soustraction et de la multiplication par un nombre naturel] » [*ibid.*, p. 10]). Cela montre que les représentations visuelles ne sont pas une spécificité de l'apprentissage des fractions. Il s'agit de principes pédagogiques qui transcendent les thèmes abordés.

En République d'Irlande, le lien entre les fractions et les écritures décimales est explicité à partir de modèles visuels et de matériel concret (« identifier les dixièmes et les exprimer sous une forme décimale. Exprimer 1/10 sous la forme 0,1. Découper un dixième et/ou 0,1 de formes régulières. Noter en utilisant des diagrammes ou des schémas » [*op. cit.*, p. 69]). L'attention est portée sur des formes géométriques dont le partage est facilité par leur régularité, plus que sur des objets tirés de la vie quotidienne (par exemple, comme nous avons pu le voir en Ontario, les pommes). Parallèlement à l'exploration de la relation entre la partie et le tout, la fraction-opérateur est enseignée, avec le calcul de « fractions de » (« développer et comprendre la relation entre les fractions et la division. 1/4 de 32 = 8 ; 32/4 = 8 » [*ibid.*, p. 68]). À cette fin, du matériel concret est utilisé (« calculer la fraction d'une collection en utilisant du matériel concret » [*ibid.*]). Dans le cadre de l'organisation de données, des fractions simples (demis, tiers ou quarts) sont utilisées pour interpréter des diagrammes. Ces derniers peuvent prendre la forme de diagrammes en bâtons ou de diagrammes circulaires (« lire et interpréter des diagrammes en bâtons et circulaires simples impliquant 1/2, 1/3, 1/4 » [*ibid.*, p. 82]). Les diagrammes servent également de support, en cinquième année, à des activités de résolution de problèmes. En ce qui concerne les activités de comparaison et d'ordre (« comparer et ordonner des fractions et identifier des fractions équivalentes avec des dénominateurs de 2 à 12 » [*ibid.*, p. 89]), les élèves disposent de supports concrets et visuels dont la variété s'accroit, mais la droite numérique n'est plus citée (« explorer, comparer et noter des équivalences simples à l'aide de matériel concret, pliages en papier, et graphiques » [*ibid.*, p. 90]). L'apprentissage de la multiplication d'une fraction par un nombre entier prend appui sur les mêmes représentations visuelles de la fraction. Toutefois l'exemple fourni par les auteurs laisse entrevoir la possibilité d'utiliser des représentations tirées de la vie quotidienne, et notamment la pizza (« développer le concept avec du matériel concret, des pliages de papier et des diagrammes. Quatre fois 3/4 d'une pizza, cela fait combien de pizzas ? » [*ibid.*, p. 90]). En sixième année, les tâches proposées aux élèves sont semblables à celles qu'ils ont déjà rencontrées au cours de leur scolarité (« comparer et ordonner des fractions et identifier des fractions équivalentes » [*ibid.*, p. 89]). Cependant, la droite numérique remplace le matériel concret et les pliages en papier en tant que support de l'apprentissage (« ordonner des fractions équivalentes sur la droite numérique et sur des diagrammes » [*ibid.*]).

Dans le Taipei chinois, l'exploration de la relation entre la partie et le tout débute avec du matériel concret et semi-concret comme support de l'apprentissage. Deux modèles visuels doivent être travaillés parallèlement : « le modèle visuel (tel qu'une pizza) et le modèle linéaire (tel qu'un ruban ou une règle) » (*op. cit.*, p. 113). Le premier « convient pour l'enseignement [des fractions] » tandis que le second « est important car il permet de faire des liens avec la mesure » (*ibid.*). Il est fait référence à ces deux modèles pour la plupart des types de tâches qui concernent l'enseignement initial des fractions. En outre, pour commencer à calculer avec des fractions, les supports utilisés sont des modèles visuels de la fraction formés à partir d'exemples de la vie quotidienne. Cependant, les auteurs conseillent de ne pas laisser les élèves partager les unités : ceux-ci doivent simplement juger de l'équivalence des parts.

Certes, les pratiques relatives à l'intégration des ostensifs graphiques dans les programmes d'enseignement sont variées. Ainsi, en Ontario, les auteurs proposent plusieurs exemples précis d'ostensifs graphiques, et ce pour plusieurs types de tâches (par exemple, un tangram, des réglettes, du papier quadrillé ou à points, du bloc de base dix, etc.). Dans le Taipei chinois, les commentaires situés en dessous des intitulés qui montrent que les professeurs doivent s'appuyer sur des représentations sous forme de pizzas et de rubans. À l'inverse, d'autres textes ne disent rien des supports qui doivent être utilisé, comme en Irlande du Nord et à Hong Kong SAR. Néanmoins, le plus souvent, la description des ostensifs graphiques se fait par le biais d'hyperonymes (figures, aires, diagrammes, schémas, supports concrets etc.), et nous avons trouvé peu d'exemples précis qui pourraient éclairer le lecteur sur la nature précise de ces représentations. On en déduit que chaque enseignant choisit, dans le cadre fixé par le législateur, des ostensifs dont la description n'apparait, le plus souvent, que sommairement dans les instructions officielles. En conséquence, le degré de précision des curriculums à propos des ostensifs graphiques ne permet pas de considérer, sauf dans des cas particuliers et pour certains pays seulement (par exemple, la représentation sous forme de pizzas régulièrement évoquée dans le curriculum du Taipei chinois est utilisée dans certains items TIMSS), une possible correspondance avec la nature des ostensifs et le degré de difficulté des items des évaluations TIMSS relatifs aux fractions. De même, l'utilisation de grandes catégories et de listes non exhaustives interdisent toute considération sur la variété des ostensifs utilisés dans les classes. Par exemple, à Singapour, les programmes ne font référence à aucun modèle visuel de la fraction. Toutefois, on sait par le biais de l'introduction que les représentations concrètes et semi-concrètes sont au cœur du modèle d'apprentissage singapourien, fondé sur l'approche C-P-A (*Concrete-Pictorial-Abstract*). Les ostensifs graphiques sont donc intégrés à ce qui semble être une routine d'apprentissage, et dont le processus n'est pas rappelé à propos des fractions. En outre, l'analyse des ostensifs n'a pas permis de compléter les praxéologies relatives aux fractions élaborées à ce niveau de l'institution scolaire : tous les ostensifs se rapportant à une

même tâche conduisent à l'utilisation d'une même technique et mettent en jeu un savoir similaire. Par exemple, en République d'Irlande, pour « développer le concept [de fraction] », les élèves travaillent « avec du matériel concret, des pliages de papier et des diagrammes » (*op. cit.*, p. 90]). Ces trois ostensifs se rapportent à la fraction partie-tout, et suggèrent un partage de la figure en parts égales : que ce partage soit effectué avec un stylo ou par pliage peut avoir des implications différentes sur le plan du développement cognitif, mais cela ne change pas la nature de la technique utilisée.

B. Les ostensifs scripturaux

À l'évidence, toutes les instructions officielles prévoient l'enseignement de l'ostensif scriptural $\frac{a}{b}$. Qu'en est-il des autres écritures que l'on pourrait envisager, telles que a/b, $n\,\frac{a}{b}$, $n+\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, etc. ? Nous ferons trois observations à ce sujet. D'abord, les programmes ne fournissent que très peu d'informations sur l'utilisation éventuelle d'autres formes d'écriture que $\frac{a}{b}$. Par exemple, les décompositions de fractions décimales ne sont pas évoquées dans les textes étudiés. Ensuite, cette question est liée à celle des types de tâches. Par exemple, l'emploi des nombres mixtes doit être mis en correspondance avec le fait d'imposer l'étude du passage des fractions supérieures à 1 aux nombres mixtes et inversement. Or, nous avons déjà montré, dans le paragraphe consacré aux types de tâches, que seuls l'Irlande du Nord et le Québec ne prévoyaient pas cet enseignement. Nous avons également mis en évidence qu'il existait de légères différences dans l'écriture des nombres mixtes[1], qui n'en modifiaient ni le principe, ni les propriétés. Enfin, dans l'évaluations des compétences des élèves relatives aux fractions, les tests TIMSS ne contiennent pas d'item mettant en jeu d'autres formes scripturales que $\frac{a}{b}$. En conséquence, nous concluons à l'existence d'une grande homogénéité de l'utilisation des ostensifs scripturaux, non seulement au sein du corpus, mais également dans les évaluations que nous venons d'évoquer.

§ 2. La manipulation des ostensifs

Les précisions apportées par les curriculums quant à la manipulation des ostensifs conditionnent dans une certaine mesure l'autonomie laissée à l'élève dans son travail. Ainsi,

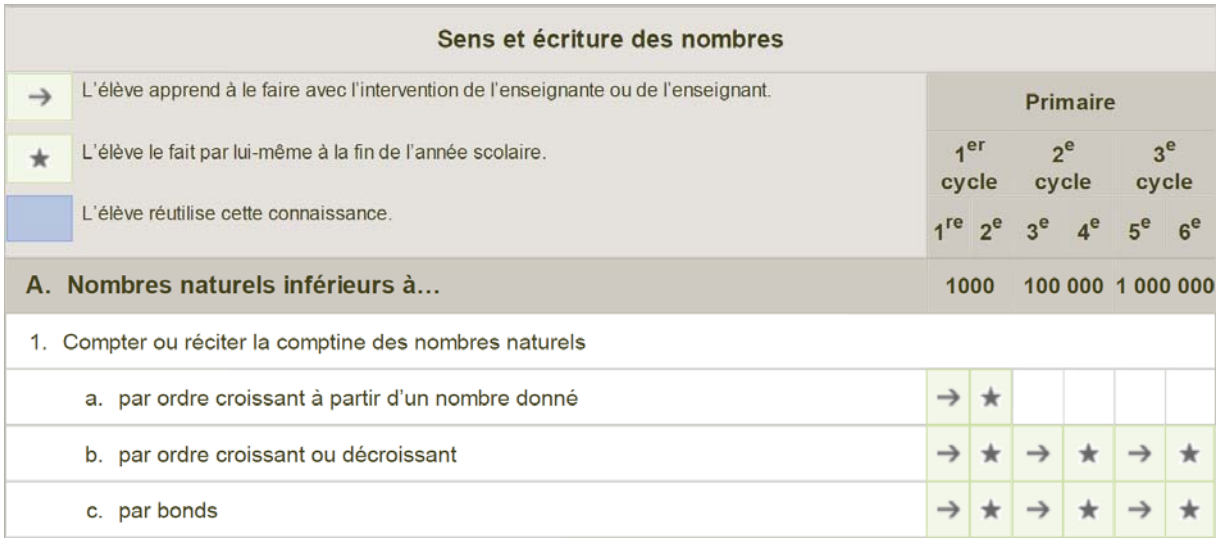
1. Voir p. 69-70.

lorsqu'on lui permet d'utiliser du matériel au soutien d'une opération ou d'une comparaison qu'il doit effectuer sur son cahier, on peut considérer que son autonomie diminue, puisque la réussite de la tâche dépend de la possibilité d'utiliser un support qui ne sera pas disponible, par exemple, lors de la passation des évaluations TIMSS. Nous concédons que l'autonomie de l'élève n'est pas seulement régulée par les écrits du législateur à propos de la manipulation des ostensifs : la définition de la tâche peut également déterminer le degré de maitrise attendu des techniques. Parfois, les élèves doivent parvenir à la maitrise d'une procédure bien précise ; parfois, le travail de l'élève ne constitue qu'une simple approche de la notion. Au risque de nous éloigner quelque peu de la question des ostensifs, nous allons donc analyser successivement le degré d'autonomie des élèves (A) et le degré d'exigence des curriculums (B).

A. Le degré d'autonomie des élèves

Les conditions dans lesquelles les ostensifs sont manipulés sont rarement réglées par les programmes scolaires. Le territoire dans lequel de telles considérations apparaissent le plus clairement est le Québec, où la progression officielle des apprentissages définit trois niveaux d'autonomie dans la réalisation de la tâche. Pour chaque élément des programmes, dans l'enseignement primaire comme dans l'enseignement secondaire, l'élève apprend d'abord « à le faire avec l'intervention de l'enseignant ou de l'enseignante » (*op. cit.*, 2009, p. 5). Au cours d'une année ultérieure, il « le fait par lui-même à la fin de l'année scolaire » (*ibid.*). Enfin, il « réutilise cette connaissance » (*ibid.*), éventuellement, au cours de sa scolarité. Ce choix est cohérent avec l'organisation des programmes en cycles d'apprentissage : les élèves disposent de plusieurs années pour parfaire leurs acquis. Chaque étape est matérialisée par un symbole, comme on peut le voir dans l'extrait du curriculum reproduit ci-contre. Si la troisième phase apparait plus rarement dans les textes, les deux premières sont systématiquement présentes : il n'existe pas de type de tâches qui doivent être maitrisé par les élèves de façon autonome l'année de sa découverte. En ce qui concerne les fractions, il existe donc, en quatrième année, des tâches que l'élève doit savoir résoudre avec le guidage de l'enseignant, mais pas nécessairement de façon autonome, par exemple celles consistant à « associer une notation décimale ou un pourcentage à une fraction », « vérifier l'équivalence de deux fractions » ou « ordonner des fractions ayant un même dénominateur » (*ibid.*, p. 7). Or, des items des évaluations TIMSS mettent en jeu de tels types de tâches. Afin de mettre au jour une éventuelle corrélation entre cette limitation de l'autonomie et une baisse des résultats, nous comparerons les scores des élèves à ceux obtenus aux items impliquant de « lire et écrire une fraction » et « comparer une

fraction à 0, à 1/2 ou à 1 », types de tâches dont la maitrise est supposée acquise en fin de quatrième année, ainsi qu'à ceux obtenus par les élèves de pays dans lesquels une pleine autonomie dans la réalisation de la tâche est exigée. La complexité de cette analyse est renforcée par le fait que la durée de l'apprentissage guidé est variable selon les types de tâches. Ainsi, au moment des évaluations TIMSS, les écoliers ont travaillé durant quatre ans sur le type de tâches « Représenter une fraction de différentes façons à partir d'un tout ou d'une collection », mais seulement deux ans sur la tâche « « Vérifier l'équivalence de deux fractions ». Pourtant, pour l'une comme pour l'autre, l'autonomie de l'élève n'est pas attendue en fin de quatrième année.



Sens et écriture des nombres

→ L'élève apprend à le faire avec l'intervention de l'enseignante ou de l'enseignant.

★ L'élève le fait par lui-même à la fin de l'année scolaire.

L'élève réutilise cette connaissance.

	Primaire					
	1er cycle		2e cycle		3e cycle	
	1re	2e	3e	4e	5e	6e
A. Nombres naturels inférieurs à…	1000		100 000		1 000 000	
1. Compter ou réciter la comptine des nombres naturels						
a. par ordre croissant à partir d'un nombre donné	→	★				
b. par ordre croissant ou décroissant	→	★	→	★	→	★
c. par bonds	→	★	→	★	→	★

Figure 41. Extrait de la progression officielle des enseignements au Québec (*op. cit.*, 2009a, p. 5)

Par ailleurs, la question des supports utilisés rencontre celles relatives aux techniques utilisées, à la variété des situations qu'elles permettent de résoudre, et à l'autonomie des élèves face à la tâche. Considérons, partant du concret vers l'abstrait, trois grandes catégories d'ostensifs : l'utilisation de matériel en trois dimensions, de supports en deux dimensions (schémas, dessins, etc.) et de symboles mathématiques. Les deux premières restreignent la capacité de l'élève à travailler en autonomie dans le contexte d'évaluations standardisées : aucun matériel n'est mobilisable dans le cadre des évaluations TIMSS ; l'espace et le temps dont dispose l'élève ne permettent pas toujours de réaliser un schéma. Nous avons donc choisi de relever les pays qui préconisent l'utilisation de matériel autre qu'un stylo, sans prévoir d'autres approches pour la résolution d'un certain type de tâches. C'est le cas de l'Ontario, où les élèves doivent « comparer et ordonner des fractions ayant un même numérateur à l'aide de matériel concret ou illustré (p. ex., réglettes, bandes de carton, cercles de fraction, jetons) » (*op. cit.*, p. 51). Seront-ils capables de réaliser des comparaisons en l'absence de matériel concret ou illustré ? Cette question, récurrente à la lecture des programmes ontariens, se pose pour

d'autres thèmes, tels que les opérations impliquant des fractions, en sixième année notamment (« Additionner et soustraire des fractions ayant des dénominateurs communs à l'aide de matériel concret ou illustré et de symboles [p. ex., contenants d'œufs, réglettes] » [*ibid.*, p. 71]). À l'exception de l'Ontario, où de telles injonctions sont présentes plusieurs fois dans les instructions officielles, peu d'auteurs ont rédigé des intitulés faisant exclusivement référence à l'utilisation de matériel. En Irlande du Nord, nous avons identifié un type de tâches où il est le seul support de l'apprentissage, en troisième année, à propos de la construction du concept de nombre décimal (« Être sensibilisé à la notation décimale en relation avec les concepts de dixième et de centième à travers l'utilisation de matériel » [*op. cit.*, p. 1]). Cependant, cette formulation est unique au sein de la progression nord-irlandaise. En République d'Irlande, le matériel comme support exclusif de l'apprentissage est présent dans les programmes de troisième et de quatrième année pour les activités visant à prendre la fraction d'une quantité (« Calculer la fraction d'une collection en utilisant du matériel concret » [*op. cit.*, p. 68]).

B. Le degré d'exigence des programmes

Nous formulons l'hypothèse que l'alternative consistant, pour le législateur, à prescrire un enseignement, ou bien à attendre des élèves qu'il ait réalisé un apprentissage, conduit à une maitrise différente des notions mathématiques en général, et de celles concernant les fractions en particulier. Or, les formulations diverses que nous avons rencontrées dans les textes laissent à penser que les exigences vis-à-vis des élèves ne sont pas les mêmes dans les différents pays de notre corpus. Certains intitulés sont rédigés dans des termes assez vagues, de telle sorte qu'on ne sait pas précisément ce qui est attendu des élèves. Par exemple, en Irlande du Nord, en troisième année, une première approche de l'écriture fractionnaire est proposée aux élèves, dans un intitulé qui suggère qu'elle n'a pas à être maitrisée par tous les élèves à la fin de l'année scolaire (« *être sensibilisé* à la notation de ces fractions, par exemple 1/5, 3/4, 2/3 » [*op. cit.*, p. 1]). Cette même formulation est utilisée en quatrième année, pour décrire le travail des élèves à propos de l'introduction des écritures décimales (« Être sensibilisé à la notation décimale en relation avec les concepts de dixième et de centième à travers l'utilisation de matériel » [*ibid.*]). Plus loin, les auteurs utilisent le terme « explorer », dont la portée est difficile à déterminer (« explorer le lien avec la division » [*ibid.*]). Qu'attend-on des élèves ? L'exploration est un processus qui est mené en classe, mais à la fin de ce processus, que doivent être capables de faire les élèves ? D'ailleurs, comment sait-on qu'un élève a effectivement « exploré » une notion ? Malgré l'imprécision du terme, c'est un mot que l'on trouve dans d'autres curriculums

au sein de notre corpus. Nous l'avons rencontré dans les programmes de Hong Kong SAR (« Explorer les méthodes pour convertir des fractions équivalentes » [*op. cit.*, p. 36]) et de l'Ontario, à plusieurs reprises (par exemple, en quatrième année : « Explorer la relation entre les fractions et les écritures décimales [p. ex., 1/10 = 0,1] » [*op. cit.*, p. 51] et en cinquième année : « Explorer l'équivalence entre une fraction supérieure ou égale à 1 et un nombre fractionnaire à l'aide de matériel concret ou illustré (p. ex., 8/3 = 2 + 2/3) » [*ibid.*, p. 61]). Plus largement, nous avons relevé, de façon éparse, d'autres expressions laissant toute liberté aux enseignants pour conduire des activités, sans souci de savoir quel ostensif permettra de faire la preuve d'un apprentissage de la part des élèves :

- « développer » (à Hong Kong SAR : « Développer le concept de numération de position pour les notations décimales » [*op. cit.*, p. 36]) ;
- « manipuler » (toujours à Hong Kong SAR : « Manipuler des fractions algébriques avec des facteurs linéaires en tant que dénominateurs » [*Key Stage 3*, 1999, p. 18]) ;
- « faire des liens » (à Singapour, dans les nouveaux programmes : « Faire des liens entre le concept de facteurs communs et la simplification de fractions, et entre le concept de multiple commun et la recherche d'un dénominateur commun à deux fractions » [*op. cit.*, 2012a, p. 47]) ;
- « observer » (toujours à Singapour : « Observer les différentes orientations d'un rectangle (ou d'un carré) quand il subit une rotation de 90° (un quart de tour), 180° (un demi-tour), 270° (trois quarts de tour) et 360° (un tour complet), dans le sens horaire ou anti-horaire » [*ibid.*, p. 51].
- « Interpréter » (à Singapour, dans les programmes de 2006 : « Interpréter des notations : $a/b = a \div b$ » [*op. cit.*, 2006b, p. 7]).
- « Comprendre » (dans le Taipei chinois : « Les élèves comprennent le sens de l'équivalence entre la division de nombres entiers et les fractions » [*op. cit.*, p. 140]).

Des comparaisons inter-pays et intra-pays nous conduiront à mettre au jour une éventuelle corrélation entre la précision des termes utilisés dans les programmes scolaires et les scores obtenus par les élèves aux évaluations TIMSS. Toutefois, en matière d'exigence et de recherche de l'excellence scolaire, la culture professionnelle des enseignants et, plus largement, la pression sociale conduiront possiblement une partie des professeurs à ne pas tenir compte de ces subtilités langagières. En cas de corrélation, l'objectif sera de déterminer si ce phénomène peut être observé avec plus d'intensité dans certains de ces territoires que dans d'autres.

Conclusion de la sous-section

Au contraire des ostensifs discursifs, les ostensifs graphiques sont assez largement représentés dans les programmes d'enseignement. Leur présence est liée à celle de techniques fondées sur des connaissances conceptuelles, c'est pourquoi on en trouve dans la plupart des pays de notre corpus, mais, par exemple, ni à Singapour, ni à Hong Kong. D'une façon générale, on peut dire que ceux-ci sont suffisamment caractérisés pour définir la technique qui doit être utilisée par les élèves. Par exemple, lorsque le législateur indique, en République d'Irlande, que les élèves doivent « calculer la fraction d'une collection en utilisant du matériel concret », la dernière proposition instaure à la fois un ostensif manipulé par l'élève et le support d'une technique clairement identifiable. En revanche, le niveau de précision de leur formulation n'autorise pas, sauf exception, la recherche d'une correspondance avec ceux des items TIMSS. La manipulation des ostensifs est abordée par les auteurs des programmes sous l'angle de l'autonomie attendue des élèves : au Québec, ils peuvent bénéficier d'une aide de leur enseignant pendant plusieurs années avant d'avoir à mettre en œuvre une procédure seuls. Dans d'autres curriculums, les limites posées se déduisent de termes qui suggèrent une moins grande exigence du législateur quant à la manipulation des ostensifs (« explorer », « développer », « manipuler », etc.). Par ailleurs, nous avons considéré que la présence d'une technique unique, fondée sur l'utilisation de matériel, était de nature à diminuer l'autonomie de l'élève : cette aide dont bénéficient les élèves à travers l'utilisation du matériel n'existe pas dans le cadre de la passation des évaluations TIMSS.

Conclusion de la section consacrée aux ostensifs

Cette section, consacrée à la présence des différentes catégories d'ostensifs dans les programmes d'enseignement, a mis en lumière la variété des choix faits par les auteurs dans les pays étudiés. Des tendances ont pu être dégagées : par exemple, l'encadrement important des apprentissages au Québec et dans l'Ontario, avec une forte intervention des enseignants dans le premier et une utilisation très fréquente de supports concrets dans le second. L'accompagnement semble beaucoup plus faible en Corée du Sud et à Singapour, où les objectifs relatifs aux fractions apparaissent sans la mention de dispositifs pédagogiques particuliers et où les techniques s'appuient sur des connaissances procédurales. Nous avons émis des réserves au sujet de ces observations, en expliquant par exemple que le préambule des instructions officielles de Singapour prévoyait une large utilisation de matériels pédagogiques et de représentations visuelles pour l'ensemble des enseignements en mathématiques, et que les

curriculums pouvaient être rédigés de façon à insister sur un élément du système éducatif déficitaire, avec pour conséquence d'être très éloignés des pratiques enseignantes. Nous avons également signalé que plusieurs intitulés posaient des problèmes d'interprétation, comme celui qui impose, en Ontario, « d'établir et expliquer la relation entre une notation décimale et une fraction dont le dénominateur est 10 ou 100, et vice versa » [*op. cit.*, p. 61] : un doute subsiste sur le point de savoir si l'explication attendue relève du professeur ou de l'élève. Lorsque la rédaction d'un intitulé nous paraissait ambigüe, nous avons proposé des pistes d'interprétation, en nous appuyant sur le contexte, et plus particulièrement sur les exemples fournis par les auteurs, sur les intitulés se trouvant à proximité, ou encore sur l'évolution de la formulation au fil du texte. Nous parvenons à la conclusion que l'analyse des ostensifs ne contribue pas à préciser les praxéologies qui doivent être mises en œuvre dans les classes, en dehors de quelques exceptions (par exemple, les ostensifs graphiques permettent de mettre en avant des techniques fondées des connaissances conceptuelles). Les ostensifs discursifs (par leur faible présence ou leur formulation) ne participent presque jamais à ce travail de clarification : les mentions qui concernent les problèmes ou la justification par l'élève de sa réponse ne résolvent pas la question de la multiplicité des techniques, ni à propos de leur enseignement (articulation, synthèse), ni à propos de leur apprentissage (cadrage, validité, opportunité) ; les mentions qui concernent le relation avec la vie quotidienne ou les moments d'institutionnalisation n'apportent pas d'éclaircissements quant aux éléments technologiques que doivent maitriser les élèves. De même, l'utilisation des ostensifs scripturaux est très homogène au sein du corpus et ne met pas en évidence des différences inter-pays notables.

Conclusion du chapitre consacré à la topogénèse du concept de fraction

Peut-on parler de transposition didactique à propos du travail effectué par les auteurs des programmes scolaires ? La focalisation des textes sur les types de tâches montre davantage une prise en compte des « besoins de la pratique » évoqués par Bosch et Chevallard (*op. cit.*, p. 87), qu'une transposition du savoir scientifique. Pour modéliser ce travail et répondre à cette question, nous avons associé le concept de transposition didactique à celui d'organisation mathématique locale (ou praxéologie), le second permettant un développement du premier, comme on peut le voir dans le schéma ci-contre.

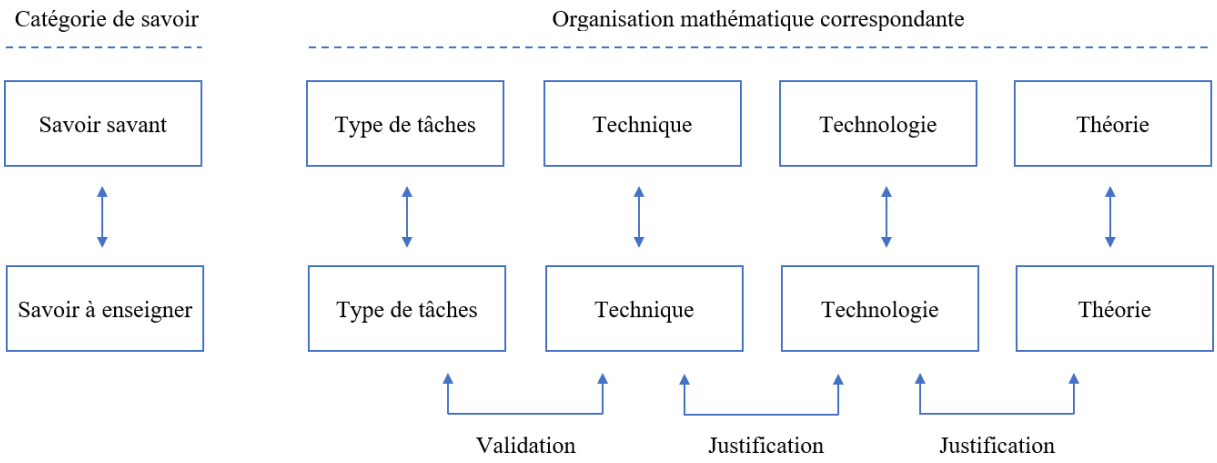


Figure 42. Combinaison des modèles de transposition didactique et d'organisation mathématique

Le savoir scientifique suppose une organisation praxéologique, dans laquelle tous les éléments sont décrits à l'aide d'ostensifs particuliers et permettant leur appréhension. Par exemple, l'une des techniques pour comparer des fractions peut être exprimée sous la forme « $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si et seulement si $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$ et $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ ». Cette technique est valide pour résoudre certains types de tâches (dans cet exemple, les tâches de comparaison dans lesquelles on a $\frac{c}{d} < \frac{e}{f} < \frac{a}{b}$). Ces techniques sont justifiées par une technologie (en l'occurrence la propriété des nombres rationnels qui indique qu'entre deux nombres rationnels, on peut toujours trouver un autre nombre rationnel), qui à son tour est justifiée par une théorie (notre système numérique, qui organise des relations d'inclusion entre plusieurs ensembles numériques). Les savoirs à enseigner sont formés d'une organisation mathématique semblable. Toutefois, l'expression de chaque élément suppose l'activation d'ostensifs différents. Les types de tâches sont, dans un contexte scolaire, le plus souvent décrits à l'aide d'un verbe d'action et de variables didactiques qui permettent d'induire l'utilisation d'une technique (pour la comparaison, ce pourrait être « Comparer des fractions *à 1/2* », où nous avons souligné la description de la tâche et mis en italique les variables). Les techniques sont fréquemment rédigées sous forme de phrases, et nous pourrions imaginer que les auteurs ajoutent à la description de la tâche un complément tel que « en s'appuyant sur des représentations visuelles de la fraction ». La formulation de l'élément technologique est adaptée pour pouvoir être appréhendée par l'élève. Dans notre exemple, cela pourrait être « Si le numérateur est supérieur à la moitié du dénominateur, alors la fraction est supérieure à 1/2 » (bien d'autres phrases sont envisageables). En ce qui concerne l'élément théorique, il semble trop abstrait pour faire l'objet d'une formulation accessible aux élèves de l'école primaire ou du début du secondaire. Notre travail concernant l'enseignement

inital des fractions, nous l'avons exclu de l'analyse. Dans le schéma ci-dessous, nous faisons la synthèse d'un travail possible de tranposition externe à propos de la comparaison de fractions.

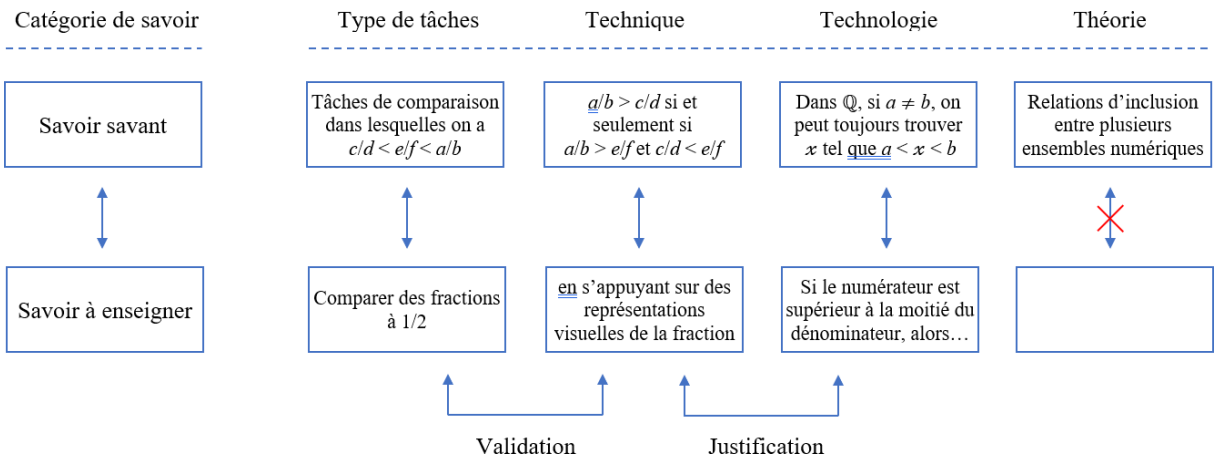


Figure 43. Exemple de transposition didactique externe possible à propos de la comparaison de fractions

Les doubles flèches illustrent le fait qu'on peut tranposer un élément à partir d'un autre, dans les deux sens. Par exemple, il est possible de formuler une technique à enseigner à partir de sa formulation savante. À l'inverse, on peut reformuler scientifiquement une technique identifiée dans les programmes, de façon à pouvoir l'analyser. La présence d'une technique peut permettre de construire un répertoire de tâches pour lesquelles elle est valable ; à l'inverse, la présence, dans les instructions officielles, d'un certain type de tâches peut permettre de définir plusieurs de techniques valables. De même, l'emploi d'une technique peut être justifié par un élément technologique, tandis que ce dernier peut contribuer à l'identification de techniques nouvelles. Il est à noter que les activités de validation et de justification, pour ce schéma comme pour celui qui précède et celui qui suit, concernent toutes les catégories de savoir (savoir savant, savoir à enseigner, etc.).

Quand on analyse les praxéologies issues des programmes scolaires à propos de la comparaison de fractions de dénominateurs différents, on s'aperçoit qu'aucune ne contient d'élément technologique, et qu'un tiers ne donne aucune indication quant à la technique à utiliser (le Québec ne prévoyant pas l'étude de ce type de tâche, les données le concernant n'ont pas été prises en compte). Or, il s'agit de l'un des types de tâches pour lesquels les auteurs fournissent les développements les plus détaillés, avec l'addition de fractions. Nous en concluons que le travail de tranposition réalisé par les auteurs est très partiel, portant principalement sur la formulation des tâches à mettre en jeu dans les classes. Si des techniques peuvent apparaitre ponctuellement, la question du savoir n'est presque jamais abordée par les auteurs. Nous n'avons identifié l'association d'un type de tâches, d'une technique et d'une

technologie que dans les nouveaux programmes de Floride, mais de façon non systématique (par exemple, en troisième année : « Comprendre une fraction comme un nombre sur la droite numérique ; […] Représenter une fraction 1/*b* sur une droite numérique en définissant l'intervalle de 0 à 1 comme l'entier et le partager en *b* parts égales. Reconnaître que chaque partie a la taille 1/*b* et que le point final de la partie qui commence à 0 localise le nombre 1/*b* sur la droite numérique » [*op. cit.*, p. 3-4]).

Participant	Formulation du type de tâches	Formulation de la technique
Angleterre	Comparer des fractions.	Utiliser des diagrammes.
Corée du Sud	Comparer la taille […] de fractions.	
Floride	Comparer deux fractions de numérateurs ou de dénominateurs différents.	En créant des dénominateurs ou des numérateurs communs, ou en les comparant à une fraction repère telle que 1/2.
France	Comparer deux nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire.	Connaitre et utiliser l'équivalence entre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et ad = bc (b et d étant non nuls).
Hong Kong SAR	Comparer des fractions.	En les convertissant en écritures décimales.
Irlande du Nord	Ordonner des fractions avec des numérateurs et des dénominateurs différents, par exemple 1/3, 3/4, 5/8.	
Ontario	Comparer et ordonner des nombres fractionnaires et des fractions.	En utilisant une variété de stratégies (p. ex., matériel concret, dessin, droite numérique, fraction repère).
République d'Irlande	Comparer, ordonner des fractions [de dénominateurs bien choisis].	En les plaçant sur la droite numérique ; avec du matériel concret, des pliages en papier, et des graphiques.
Singapour	Comparer et ordonner des fractions de dénominateurs différents.	
Taipei chinois	Comparer des fractions de dénominateurs différents.	Dans des conditions concrètes ; en utilisant leur connaissance des fractions équivalentes ; en trouvant un multiple commun aux dénominateurs originaux.

Figure 44. Fragments praxélogiques fournis par les auteurs des programmes d'enseignement à propos de la comparaison de fractions de dénominateurs différents

Le fait que les savoirs imposés aux systèmes didactiques soient incomplets infirme la conception selon laquelle la tranposition didactique serait un phénomène linéaire et descendant : par nécessité, des fragments praxéologiques doivent émerger à tous les niveaux du système d'enseignement pris dans un sens large. Leur transposition peut naitre d'un changement de catégorie de savoir (par exemple, lorsqu'un enseignant reformule ce que dit un élève, la tranposition s'effectue du savoir acquis vers le savoir enseigné, avant que celui-ci soit formulé, à nouveau et d'une autre manière, par l'élève) ou d'un changement de catégorie praxéologique (lorsqu'une technique est généralisée pour devenir un élément de savoir). Cela

ouvre des perspectives d'étude, notamment pour savoir si, à la fin du processus de tranposition, des éléments restent implicites (et si oui, pour savoir quelles conséquences cela peut avoir sur l'apprentissage). Dans la recherche d'une corrélation entre les performances des élèves et le contenu des programmes, nous tiendrons compte, non seulement de la précision des praxéologies définies par les auteurs, mais également des possibilités de transferts opérés par les élèves. C'est pourquoi nous présentons ci-dessous le modèle théorique global de formation des praxéologies scolaires sur lequel nous nous appuyons pour mener ces recherches.

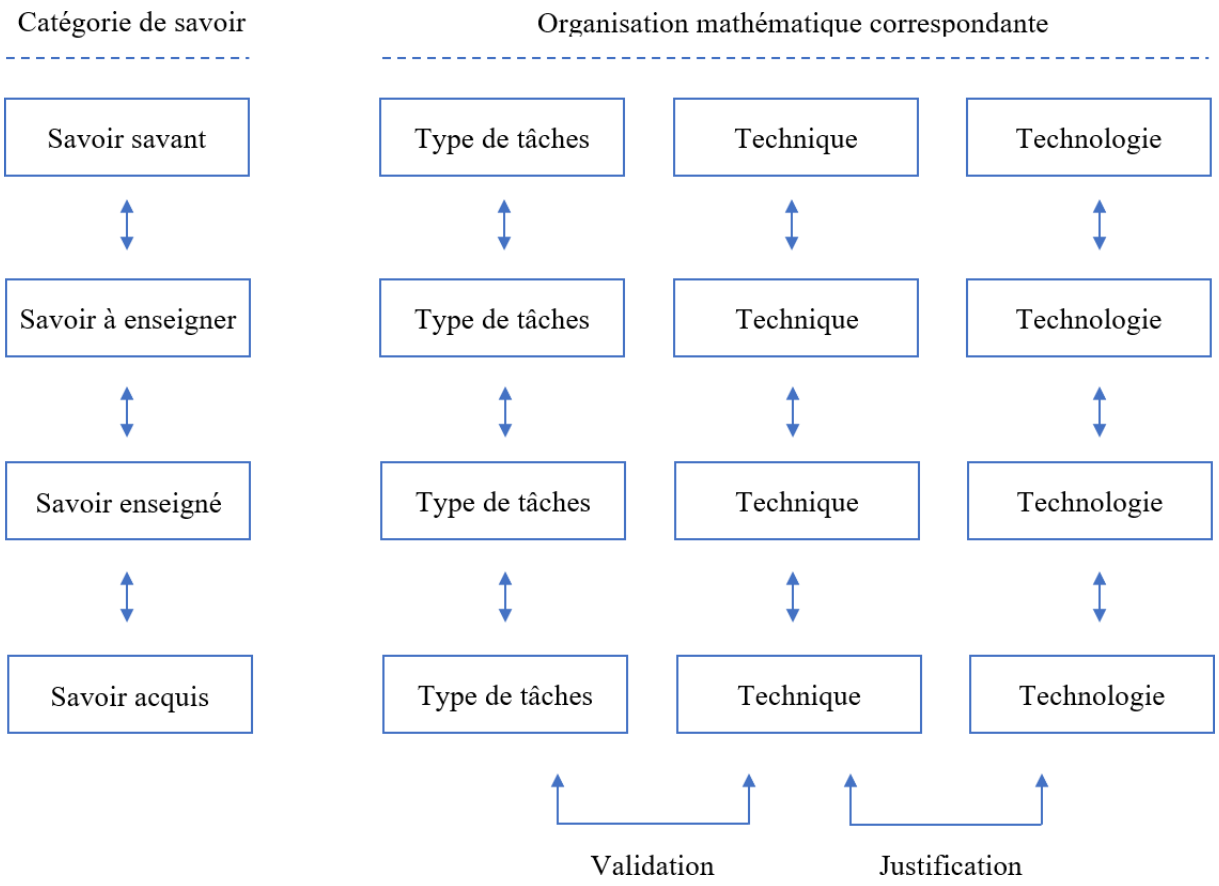


Figure 45. Tranposition didactique des fragments praxéologiques du savoir savant au savoir acquis par les élèves.

Cette illustration nous conduit à ajouter quelques considérations à propos des relations entre la transposition externe et la tranposition interne, notamment l'idée que l'emploi de techniques dans les classes peut amener le législateur, soit à les confirmer en les intégrant dans les programmes, soit à vouloir diminuer leur utilisation en insistant sur une autre technique. Considérons également qu'une technique proposée par un élève peut être prise en compte par un professeur pour devenir un fragment praxéologique à enseigner, et donc à maitriser par tous les élèves de sa classe. Nous conclurons en indiquant que la relation entre le score des élèves et les instructions officielles doit faire l'objet d'une analyse nuancée, et que le travail qui reste à fournir dans les classes à propos de la seule définition des savoirs est très important. Pour autant,

il ne faudrait pas en déduire que les contraintes posées au niveau sociétal, à travers les instructions offielles, sont faibles, car la délimitation des types de tâches contraint fortement les techniques et technologies qui peuvent être mises en œuvre dans les classes. De plus, les thèmes abordés par les législateurs sont assez proches dans l'ensemble des pays du corpus (l'accent est mis sur l'association d'une fraction et d'un dessin, sur les conversions de représentations, sur la comparaison et la reconnaissance de fractions, ainsi que sur l'addition et la multiplication d'une fraction et d'un entier). Certes, il existe quelques différences notables (par exemple, en France, avec la faible présence de tâches de comparaison, et au Québec, avec un travail peu développé sur les opérations impliquant des fractions). Toutefois, les écarts ne sont pas aussi conséquents que ceux qu'il est possible d'observer à propos des aspects chronogénétiques de l'enseignement du concept de fraction.

CHAPITRE II. CHRONOGÉNÈSE DU CONCEPT DE FRACTION

La chronogenèse est l'activité qui vise à organiser l'apprentissage d'une notion dans le temps. Elle est caractérisée par au moins trois facteurs : le moment de l'apprentissage, la durée de l'apprentissage et l'ordre des apprentissages. Elle échoit en partie au législateur, puisque celui-ci impose à chaque étape de la scolarité l'étude de types de tâches correspondant aux notions dont un apprentissage est visé. L'objectif de ce chapitre est de comprendre comment a été réalisée cette chronogenèse, dans chacun des pays de notre corpus, à propos du concept de fraction. Nous faisons l'hypothèse que l'enseignement des types de tâches évalués par TIMSS est indispensable à l'obtention de scores élevés aux items correspondants. Néanmoins, afin de ne pas créer d'obstacles d'origine ontogénétique (« ceux qui surviennent du fait des limitations [neurophysiologique entre autres] du sujet à un moment de son développement : il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts à cet âge-là » [Brousseau, 1998, p.124]), un enseignement trop précoce (c'est-à-dire mené avant que les élèves aient les capacités cognitives nécessaires pour comprendre la notion) doit être évité. Il en est de même d'un enseignement trop tardif par rapport aux choix de TIMSS. La question de la chronogénèse est donc liée, non seulement aux besoins des élèves en raison de leur développement cognitif, mais également aux besoins sociaux liés aux connaissances visées pour chaque classe d'âge, ainsi qu'à leur évaluation à un niveau international. Pour notre part, nous envisageons uniquement les aspects didactiques de la question en recherchant une éventuelle corrélation entre l'organisation temporelle choisie par chaque pays et les performances des élèves aux évaluations TIMSS. Cette éventuelle corrélation sera étudiée dans les chapitres ultérieurs ; les développements qui suivent participent à l'exposé des moyens de cette étude, en indiquant les choix réalisés par chaque pays quant à cette chronogénèse. À ce titre, ils contribuent également à enrichir les résultats de notre analyse comparative des programmes d'enseignement des onze participants aux évaluations TIMSS qui forment notre corpus.

En ce qui concerne le plan de ce chapitre, nous nous sommes appuyé sur une problématique dont la dualité est exposée dans les programmes français : « les fractions sont à la fois objet d'étude et support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux » (*op. cit.*, 2015, p. 205). Nous admettons que, d'une part, les fractions participent à l'acquisition du concept de nombre décimal, voire de nombre rationnel avec l'étude, par exemple, des tiers. Dans les pays qui privilégient cette approche, elles sont étudiées *a minima*, uniquement pour l'utilité qu'elles revêtent relativement à la maitrise des écritures décimales, finies ou infinies.

D'autre part, les fractions peuvent être étudiées pour les propriétés spécifiques qu'elles mettent en jeu. Dans ce cas, les élèves acquerront des techniques propres aux écritures fractionnaires (par exemple, à propos de l'équivalence, de la comparaison, ou encore des opérations impliquant des fractions). C'est pourquoi, si notre étude porte tout à la fois sur l'ordre des apprentissages, l'âge auquel ils sont menés, leur durée ainsi que sur les objectifs établis par les auteurs des instructions officielles, nous allons étudier successivement l'acquisition du concept de nombre rationnel à travers les fractions (section I), et l'acquisition des techniques qui leur sont propres (section II).

Section I. L'acquisition du concept de nombre rationnel

Pour Adjiage (1999, p. 39), les nombres rationnels peuvent être appréhendés selon quatre stades, dont la lecture n'est « ni linéaire, ni normative », mais qui peuvent constituer « un premier parcours » pour l'élève de l'école primaire. Seuls les trois premiers concernent les fractions, nous les décrivons ci-dessous.

Le premier stade est celui des partitions (que l'auteur appelle également « *partitioning* ») et qui recouvre l'ensemble des situations dans lesquelles l'élève est amené à partager ou répartir une collection ou une quantité continue. C'est à ce stade que l'on comprend que « plus grand le nombre de parts, plus petite la taille de chaque part », même si « ce constat, évident dans un contexte continu illustré par un schéma de type "parts de tartes", ou dans un contexte discret de type "Dealing", sera inhibé pour beaucoup d'élèves lors de sa description fractionnaire aux stades ultérieurs » (*ibid.*, p. 41).

Au deuxième stade, on s'émancipe du contexte concret pour entrer dans une conception de la fraction fondée sur les structures multiplicatives (*ibid.*, p. 42), et dans laquelle on considère le lien entre la partie et le tout sous la forme « T = *n*P, avec *n* est entier ». En jeu ici, ce n'est plus la capacité de l'élève à partager un entier, mais à le reconstruire, et ce stade recouvre des problèmes variés tels que le fait de prendre la fraction d'une quantité ou d'identifier des fractions de quantités continues ou discrètes. « Le lien partie-tout n'est pas encore un nombre, mais une suite d'opérations impliquant des nombres entiers » (*ibid.*, p. 52), si bien que l'élève peut être amené à résoudre, de façon empirique, des comparaisons ou des additions de fractions, mais que celles-ci ne peuvent pas encore être formalisées.

Le troisième stade est celui des rationnels mesures, dans lequel les fractions sont envisagées comme un opérateur n'étant pas rattaché à une unité, permettant de réaliser des réductions ou des agrandissements, et amenant les élèves à l'utilisation de pourcentages. C'est à ce stade que l'on peut être amené à réaliser des comparaisons avec des fractions en rapport avec le sens qu'elles recouvrent, et non de façon fortuite ou incidente comme au stade précédent. Enfin, au stade des nombres rationnels, « les opérateurs rationnels deviennent nombres lorsqu'ils se détachent des objets auxquels ils s'appliquent, pour devenir à leur tour arguments et images d'opérations » (*ibid.*, p. 63-64). C'est à ce stade que les élèves réalisent des calculs formels sur les fractions.

Les fractions ne constituent qu'une forme d'écriture des nombres rationnels parmi d'autres (on note par exemple $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25 = 25\ \%$ ou $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$). Néanmoins, il nous faut expliquer le rôle spécifique qu'elles jouent dans l'acquisition de ce concept. D'une part, elles apparaissent toujours, dans les programmes que nous avons consultés, préalablement aux autres formes d'écriture que sont les notations décimales et les pourcentages. D'autre part, elles constituent bien souvent un point d'appui pour leur apprentissage. Nous allons donc commencer par décrire comment se construit, dans les textes, la notion de fraction (sous-section I), avant d'étudier comment les auteurs établissent un lien avec les autres formes d'écriture des décimaux et des rationnels (sous-section II).

Sous-section I. Les fractions

Dans un cadre scolaire, le passage des nombres entiers aux fractions représente une étape significative dans le développement des connaissances numériques des élèves, en raison des propriétés différentes des uns et des autres (par exemple, on peut toujours trouver un nombre entre deux nombres dans $\mathbb{Q}$, mais pas dans $\mathbb{N}$). Elle l'est d'autant plus dans le contexte du système scolaire français, où le début de l'apprentissage des nombres rationnels intervient tardivement dans la scolarité et donc où les nombres entiers ont constitué, pendant une durée plus longue qu'ailleurs, le seul cadre d'expression des connaissances numériques. D'ailleurs, la question du biais des nombres entiers n'est pas seulement un problème d'interférence entre les connaissances antérieures et les connaissances nouvelles dans la construction du concept de fraction, mais un ensemble de questions plus générales relatives à l'origine et au développement de la cognition numérique (Ni et Zhou, *op. cit.*, p. 49). Psychologues et didacticiens s'accordent toutefois pour dire qu'il est nécessaire que les symboles relatifs aux fractions soient introduits

après que « les fondations conceptuelles des fractions [ont] été posées » (Pitkethly et Hunting, 1996, p. 28). Cela signifie que la capacité à partager en parts égales est un préalable indispensable à la compréhension du rôle joué par le numérateur et le dénominateur dans les fractions. Autrement dit, il est nécessaire que les élèves maitrisent les « partitions », premier stade de l'apprentissage des nombres rationnels, avant d'introduire les écritures fractionnaires. C'est pourquoi nous étudierons d'abord comment la notion de partage est envisagée par les auteurs des curriculums (§ 1), avant de nous intéresser aux premières utilisations des écritures fractionnaires (§ 2).

Cette étude nécessitant une longue description des curriculums, nous ferons la synthèse de nos observations et comparerons les programmes d'enseignement dans la conclusion de la sous-section. Il en sera de même pour les autres développements qui concernent la chronogénèse du concept de fraction.

§ 1. Le concept de partage

Pour Carette, on trouve trois procédures de partage bien distinctes : l'action de partager en deux, qui « peut être répétée de façon itérative, tant avec des quantités discrètes que continues », la distribution, entendue comme « une forme primitive de partage qui consiste à répartir les parts de manière égale » et le pliage, qui « est une façon de partager une grandeur continue (par exemple une bande de papier) en parts égales » (*op. cit.*, 2009, p. 25). Adjiage distingue trois types de partitions (qui correspondent partiellement aux techniques exposées par Carette), selon que celui-ci se déroule dans un cadre numérique (« dans un contexte discret – par décomposition additive […] ou encore par distribution cyclique, en parts égales à chaque tour, jusqu'à épuisement de la collection »), géométrico-physique (« dans un contexte continu – par découpage, pliage... en parts égales ou pas ») ou que l'on demande aux élèves de décrire leur action, conduisant l'élève à utiliser des moyens langagiers (*op. cit.*, 1999, p. 39). Dans les programmes scolaires, la notion de partage est effectivement parfois introduite dans le domaine géométrique, à travers des activités désignées comme étant préparatoires à l'étude des écritures fractionnaires, et dans lesquelles les élèves vont pouvoir commencer à utiliser les termes demis, quarts, tiers, etc (par exemple, *un quart* de cercle). Elle est le plus souvent mise en jeu dans le domaine numérique, en calcul mental, avec l'apprentissage du langage relatif aux fractions et la réalisation des calculs correspondants (par exemple, calculer *un quart* de 12). Néanmoins, il arrive également que les premières situations de partage soient reliées, non à la notion de fraction, mais à celle de division. Dans ce cas, on ne trouve aucune mention relative au vocabulaire des fractions dans les intitulés ; le terme « quotient » est mis en avant et une relation est établie avec la résolution de problèmes. Pour le développement de la capacité des élèves à réaliser des partages en parts égales, nous ferons donc la différence entre les types de tâches qui peuvent être rattachés au concept de fraction (A) et ceux qui peuvent être rattachées au concept de division (B).

A. Types de tâches à rattacher au concept de fraction

Les programmes mettant le plus l'accent sur l'acquisition du concept de partage avant même l'abord des fractions sont ceux de la République d'Irlande. La partition d'une collection apparait aussi bien en première année (« Établir et identifier la moitié de collections jusqu'à 20 objets. Partager également des collections d'objets entre deux personnes » [*op. cit.*, p. 45]) qu'en deuxième année, dans des situations plus complexes (« Établir et identifier les moitiés et les quarts de collections jusqu'à 20 objets » [*ibid.*]). Avec une progression similaire des demis vers les quarts, la question de la partition est également abordée avec des quantités continues, en première année (« Plier des formes en papier en deux, et couper pour former de nouvelles formes » [*ibid.*, p. 49]) comme en deuxième année (« Identifier des moitiés et des quarts de formes » [*ibid.*]). De plus, le fait de « discuter la relation entre une moitié et un quart » (ibid.) permet d'évoquer avec les élèves les partages successifs en deux parts égales, avec des unités discrètes et avec des unités continues. Bien avant l'apprentissage des fractions, les partages en deux et en quatre sont étudiés dans des contextes aussi divers que la symétrie (« Plier des formes en deux, peindre un côté de la feuille et la plier » [*ibid.*, p. 51]), les rotations (« Explorer les choses qui tournent : les poignées de porte, les roues qui font un tour complet, un demi-tour ou un quart de tour, dans la cour ou dans la classe. […] Discuter la relation entre l'angle droit et le quart de tour » [*ibid.*]), les unités de mesure (« Estimer, mesurer et noter des capacités en utilisant des bouteilles d'un litre, un demi-litre et un quart de litre, et résoudre des problèmes simples » [*ibid.*, p. 55]) ou la lecture de l'heure (« Lire l'heure pile, les demi-heures et les quarts d'heure sur une horloge analogique comportant 12 heures » [*ibid.*, p. 56]).

Les programmes de l'Irlande du Nord présentent une variété similaire quant aux activités prévues pour développer la capacité des élèves à réaliser des partages élémentaires. Ces derniers s'appliquent à des collections et à des figures géométriques dès la deuxième année (« Explorer le concept de demis, quarts en utilisant des formes entières et des collections d'objets » [*op. cit.*, p. 1]). À ce stade de la scolarité, ils sont réalisés dans des contextes divers, comme la lecture de l'heure (« Dire l'heure en utilisant les demi-heures » [*ibid.*]) et les rotations (« Reconnaitre les mouvements de rotation, par exemple, à gauche, à droite, demi-tour et tour complet » [*ibid.*]), deux thèmes qui étudiés à nouveau, en troisième année, avec les quarts. Concomitamment à l'apprentissage des fractions proprement dit, les activités de mesure impliquant des fractions simples sont prévues, avec des longueurs (« Introduire des longueurs plus courtes, telles que le demi-mètre, le quart de mètre, le décimètre et le centimètre » et « Utiliser une règle pour tracer et mesurer des segments au demi-centimètre près » [*ibid.*]), des masses (« Introduire des masses plus petites, telles que le demi-kilogramme et le quart de kilogramme » [*ibid.*]), des contenances (« Introduire des capacités plus petites, telles que le demi-litre et le quart de litre » [*ibid.*]) ou encore des aires (« Trouver l'aire de figures en comptant le nombre de carreaux, avec une réponse exprimée sous la forme […] d'un nombre entier de carreaux et d'un demi-carreau ; d'un nombre entier de carreaux et d'un morceau de carreau » [*ibid.*]).

En Angleterre, dès la première année, il est demandé aux élèves de « Utiliser le vocabulaire des demis et des quarts en contexte » (*op. cit.*, 2006, p. 72). Au regard des intitulés de deuxième année, nous considérerons que cette mention du contexte implique de partager des unités discrètes et des unités continues. En effet, avec une formulation similaire, les auteurs imposent en deuxième année de réaliser une activité similaire, avec en plus la possibilité d'identifier les trois quarts d'une forme ou d'une

collection (« Trouver la moitié, le quart et les trois quarts de formes et de collections d'objets » [*ibid.*, p. 74]). Cependant, au contraire de ce que nous avons observé en République d'Irlande et en Irlande du Nord, le vocabulaire des fractions n'est pas utilisé dans d'autres contextes (géométrie, mesures, etc.), ce qui en fait un texte moins riche en ce qui concerne les activités préparatoires aux fractions.

En Floride, une approche de la partition est proposée aux élèves dès la première année. Celle-ci est réalisée dans le cadre de la géométrie, et porte sur des figures planes aussi bien que sur des solides (« Composer et décomposer des figures planes et des solides, y compris en faisant des prédictions, afin de construire une compréhension des relations partie-tout et des propriétés des formes » [(*op. cit.*, 2007, p. 3]). Ici, aucune référence n'est faite à un partage en parts égales. Il s'agit simplement d'observer comment se construit la relation entre la partie et le tout. La notion de fraction est donc encore assez lointaine, mais l'élève comprend qu'une unité peut faire l'objet d'un partage, et uniquement à l'intérieur de l'unité (les partages de collections ne sont pas évoqués). Évidemment, comme dans d'autres pays, le concept de partie et de tout est également travaillé dans le cadre de l'apprentissage de l'addition (« Modéliser des situations d'addition et de soustraction en utilisant les concepts de "partie-tout", "additionner à", "retirer de", "comparer" et "ce qu'il manque pour arriver à" » [*ibid.*, p. 2]). Cependant, l'objectif n'est pas celui d'une propédeutique à l'apprentissage des fractions, alors que les activités effectuées en géométrie en deuxième année le sont (« Utiliser des modèles géométriques pour démontrer les relations entre les entiers et leurs parties comme fondement pour les fractions » [*ibid.*, p. 5]).

En Ontario, une progression est organisée au cours des trois premières années d'enseignement obligatoire, afin de préparer les élèves à l'utilisation des écritures fractionnaires, celles-ci étant enseignées à partir de la quatrième année. Cet apprentissage porte non seulement sur des figures géométriques, mais également sur des collections d'objet. En première année, seuls les demis sont convoqués (« Représenter les moitiés en tant que parties d'un élément et parties d'un ensemble d'éléments, à l'aide de matériel concret ou illustré [p. ex., en découpant une pomme, en utilisant un tangram ou des réglettes, en coloriant 2 fleurs d'un ensemble de 4] » [*op. cit.*, p. 27]). Même si la nature des tâches reste identique par la suite, le niveau de difficulté augmente, avec l'introduction des quarts en deuxième année, et l'introduction des tiers en troisième année. L'étude porte sur les demis, les tiers et les quarts. Ainsi, les élèves ne sont pas seulement confrontés à des partages successifs en deux (ainsi pour les demis et les quarts), mais également à des partages en trois, ce qui représente un niveau de difficulté supplémentaire. Cet apprentissage portant sur des figures planes est doublé d'une réflexion sur les moitiés dans le cadre du calcul mental, puisqu'en première année, les élèves doivent pouvoir « déterminer, à l'aide de matériel concret, le double des nombres naturels jusqu'à 10 et la moitié des nombres naturels inférieurs à 20 (p. ex., la moitié de 10 est 5) » (*ibid.*). En revanche, la recherche du quart et du tiers de nombres n'apparait pas dans les instructions officielles. Les quarts ne sont évoqués qu'à propos de l'enseignement des probabilités, en deuxième année (« Déterminer les résultats possibles d'une expérience de probabilité simple [p. ex., lancer une pièce de monnaie, obtenir la couleur jaune sur une roulette colorée à moitié en jaune, à un quart en bleu et à l'autre quart en rouge] » [*ibid.*, p. 40]).

Au Québec, la propédeutique à l'apprentissage des fractions s'étale sur les deux premières années de la scolarité, sans que les auteurs ne posent une distinction claire entre ce qui relève de l'une ou de l'autre. Seule l'autonomie des élèves est supposée augmentée, les élèves les plus âgés n'ayant plus besoin de l'intervention de l'enseignant pour « Reconnaître des fractions se rapportant à des éléments

du quotidien (représentations concrètes ou imagées) » (*op. cit.*, 2009a, p. 6), ni pour « utiliser le vocabulaire (fraction, demi, tiers, quart) » (*ibid.*, p. 7). Comme en Ontario, il ne s'agit pas seulement de partager successivement une figure en deux parts égales, puisque l'utilisation des tiers est imposée. En ce qui concerne la représentation des fractions, celle-ci est toujours requise en fin de deuxième année, et pendant encore de nombreuses années. Cependant, cette injonction nous apporte une information intéressante : les élèves sont susceptibles de travailler « à partir d'un tout ou d'une collection » (*ibid.*, p. 6).

En France, les premières activités de partage sont prévues dans le domaine numérique, à travers des calculs mentaux : d'abord avec les moitiés en deuxième année (« Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant » [*op. cit.*, 2008a, p. 33]), puis avec les quarts en troisième année (« Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier » [*ibid.*, p. 38]). Il n'existe pas, à notre connaissance, d'activités visant à réaliser des partages portant sur une unité, que ce soit dans le cadre de la géométrie ou dans le cadre des mesures, avant l'enseignement du concept de fraction, dans les programmes français.

Les progressions proposées à Singapour et dans le Taipei chinois sont assez similaires. Dans les deux territoires, la seule référence à des écritures fractionnaires avant l'apprentissage proprement dit de la notion apparait avec l'enseignement de la lecture de l'heure, dès la première année (à Singapour : « Dire et écrire l'heure pile et les demi-heures [*op. cit.*, 2006a, p. 13] ; dans le Taipei chinois : « En première année, les élèves ne lisent que les heures entières et les demi-heures, telles qu'une heure pile ou trois heures et demie » [*op. cit.*, p. 103]). Le partage de figures en demis, en quarts et en tiers n'est pas évoqué avant l'année où l'apprentissage des fractions débute (soit, à Singapour, en deuxième année : « Identifier, nommer, décrire des demi-cercles et des quarts de cercle et former différentes figures en 2-D à partir de […] demi-cercles et quarts de cercle » [*op. cit.*, p. 17]), voire même après, puisque dans le Taipei chinois, c'est en troisième année que cette notion apparait dans les instructions officielles (« Pratiquer une division simple de figures planes, par exemple diviser un rectangle en deux triangles, et les composer pour former un parallélogramme » [*op. cit.*, p. 136]), alors que les écritures fractionnaires sont abordées en deuxième année.

Dans les curriculums de la Corée du Sud et de Hong Kong SAR, nous n'avons pas trouvé trace d'activités visant à préparer les élèves à l'apprentissage des fractions en les initiant à la question des partages en parts égales. Il est possible que la notion de partage soit travaillée l'année au cours de laquelle les écritures fractionnaires sont présentées aux élèves (comme une première approche du concept), mais cela n'apparait pas dans les injonctions ministérielles.

B. Type de tâche à rattacher au concept de division

En Angleterre, l'apprentissage de la division est très progressif. Dès l'école maternelle, les élèves sont invités à « partager des objets en groupes égaux et compter combien il y a d'objets dans chaque groupe » (*op. cit.*, 2006, p. 70). Au cours des années suivantes, les situations rencontrées se diversifient, et les méthodes pour résoudre des problèmes de partage se font plus complexes. Ainsi, en première année, la division-quotition est introduite, sans pour autant que les élèves utilisent le symbole de la division (« Résoudre des problèmes qui impliquent de combiner des groups de 2, 5 ou 10, ou de

partager en parts égales » [*ibid.*, p. 72]). Ce n'est qu'en deuxième année que celui-ci apparait pour « représenter le partage et la soustraction répétée (groupement) comme une division » (*ibid.*, p. 74). À ce stade de la scolarité, les élèves n'utilisent encore que des méthodes empiriques pour réaliser les calculs (« utiliser des méthodes écrites pratiques et informelles et les relier au vocabulaire correspondant pour effectuer une multiplication ou une division, y compris les calculs avec des restes » [*ibid.*]), et la technique de la division posée verticalement ne sera enseignée que bien plus tard, à partir de la quatrième année. Les élèves sont donc capables d'interpréter le symbole de la division avant de comprendre le sens de la barre de fraction, mais les deux notions (les divisions et les fractions) font l'objet d'un apprentissage qui s'étend sur un temps commun pendant plusieurs années.

En Corée du Sud, le symbole de la division est introduit postérieurement à celui de la barre de fraction, en troisième année (« Calculer "nombre à deux chiffres ÷ nombre à un chiffre", et comprendre la signification du quotient et du reste » [*op. cit.*, p. 17]). Cet apprentissage d'une technique formelle de la division n'est pas précédé d'une étude informelle du concept. En revanche, il semble relié, la même année, à la recherche de la fraction d'une quantité. Le mot « division » est même employé dans le paragraphe relatif aux fractions (« Comprendre les fractions comme la division en parts égales d'une quantité discrète » [*ibid.*]), plutôt que le mot « partager ». Les tâches impliquant des divisions se poursuivent ensuite avec un nombre croissant de chiffres au dividende comme au diviseur, puis avec des notations décimales.

En Floride, les fractions et les divisions sont deux notions dont l'enseignement débute en troisième année. Dans les deux cas, les élèves s'appuient d'abord sur des représentations visuelles. Ainsi, pour la division, ils sont invités à « modéliser la multiplication et la division, y compris avec des problèmes présentés en contexte : addition répétée, comparaisons multiplicatives, tableaux, rechercher le nombre de combinaisons, mesures et partages » (*op. cit.*, 2007, p. 5-6). En revanche, aucune indication n'est fournie à propos de l'utilisation ou non du symbole mathématique de la division. L'année suivante, avec l'application des nouveaux programmes floridiens, les directives se font plus précises et les tâches sont plus exigeantes : il s'agit de « trouver des quotients entiers et des restes, avec des dividendes constitués de quatre chiffres au plus et des diviseurs constitués d'un chiffre au plus, en utilisant des stratégies fondées sur la place des chiffres, les propriétés des opérations, et/ou sur la relation entre la multiplication et la division » (*op. cit.*, 2014, p. 3). Les deux concepts se construisent donc parallèlement, avec une progression s'étalant sur plusieurs années.

En France, le processus d'acquisition du concept de division est déjà bien engagé lorsque les élèves, en quatrième année, sont confrontés pour la première fois à des fractions. En effet, dès la deuxième année, ils doivent « approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements » et « diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier) » (*op. cit.*, 2008a, p. 33). En troisième année, ils acquièrent un algorithme de la division (« Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre » [*ibid.*, p. 38]) qui sera développé ultérieurement pour le cas où le diviseur possède plusieurs chiffres, et pour le cas de la division impliquant des nombres décimaux.

À Hong Kong, la technique opératoire de la division est enseignée en deuxième année, c'est-à-dire préalablement aux écritures fractionnaires qui sont enseignées en troisième année. À ce stade de la

scolarité, les auteurs prévoient que les élèves puissent non seulement « développer le concept de division : partager et faire des groupements », mais également « calculer des quotients par la division, y compris avec des restes » (*op. cit.*, p. 28). Par la suite, les élèves amélioreront leur maitrise de cette technique opératoire, soit en découvrant de nouvelles manières de faire (par exemple, en passant de la « division courte » à un algorithme plus complexe), soit par une augmentation du niveau de difficulté des nombres utilisés (nombres entiers à plusieurs chiffres ou nombres décimaux). Cependant, la nature des activités proposées et des supports reste inchangée.

En Irlande du Nord, les enseignements des fractions et des divisions débutent tous deux en troisième année. L'une des particularités des programmes nord-irlandais est de proposer l'introduction du symbole de la division l'année de l'exploration du concept (« Explorer le concept de division à l'intérieur de 25 à travers des activités de partage et de regroupement […] en commençant à utiliser le symbole de la division » [*op. cit.*, p. 1]). Au cours des années ultérieures, le curriculum ne prévoit qu'un approfondissement de compétences déjà travaillées, notamment pour « étendre la division à n'importe quel nombre entier à deux ou trois chiffres divisé par un nombre à un chiffre en utilisant différentes méthodes écrites » (*ibid.*). Une autre de ses particularités est de faire des liens entre les fractions et la division. Ce lien est parfois explicite. Ainsi, dans les programmes de troisième année, lorsque les élèves doivent « être sensibilisé à la notation de ces fractions, par exemple 1/5, 3/4, 2/3 », il leur est demandé à cette occasion « d'explorer le lien avec la division » (*ibid.*). L'instauration d'un tel lien suggère par ailleurs l'antériorité de l'apprentissage de la division, par rapport à l'apprentissage des écritures fractionnaires. Ce lien peut également être implicite. Ainsi, en quatrième année, les élèves doivent « utiliser les connaissances sur la multiplication des nombres entiers par 10 et 100 pour explorer la division par 10 et 100 » et « reconnaitre les nombres qui sont exactement divisibles par 10, 100 ». Or, c'est précisément cette année-là que sont étudiées les fractions décimales et les notations décimales.

En Ontario, les divisions et les fractions font l'objet d'un apprentissage très progressif, s'étalant sur plusieurs années. Sans que cela fasse l'objet d'une mention dans les programmes d'enseignement, il semble que les auteurs aient prévu des passerelles entre les deux. Par exemple, en première année, lorsque les élèves doivent « représenter les moitiés en tant que parties d'un élément et parties d'un ensemble d'éléments, à l'aide de matériel concret ou illustré », il leur est également demandé de « déterminer, à l'aide de matériel concret, […] la moitié des nombres naturels inférieurs à 20 » (*op. cit.*, p. 27). De même, en deuxième année, lorsque les élèves doivent « représenter les demis et les quarts en tant que parties d'un élément et d'un ensemble d'éléments à l'aide de matériel concret », il leur est également demandé de « partager un nombre d'objets selon une régularité de correspondance multivoque (p. ex., partager 12 carottes entre 4 personnes signifie que chaque personne en obtiendra 3) » (*ibid.*, p. 35). À partir de la troisième année, ce lien devient moins net, puisque les tiers sont abordés, tandis que les nombres utilisés dans les situations de division ne sont pas limités. Néanmoins, il est intéressant de noter que la technique opératoire de la division ne débute qu'en quatrième année (« Estimer et vérifier le quotient d'un nombre naturel à trois chiffres par un nombre naturel à un chiffre » [*ibid.*, p. 52]), c'est-à-dire l'année où sont introduites les écritures fractionnaires.

Au Québec, le processus qui mène à la maitrise du concept de division est assez similaire à celui que nous avons analysé pour l'Ontario. Au cours des premières années, la notion est abordée de façon informelle, avec du matériel, sans introduction du symbole mathématique correspondant (« Traduire une

situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou d'équations et vice versa [exploitation des différents sens de la multiplication et de la division] » (*op. cit.*, 2009a, p. 9). De la même façon, les fractions sont abordées, mais la maitrise des écritures fractionnaires n'est pas encore requise à ce stade de la scolarité. À partir de la troisième année, la technique opératoire se construit parallèlement à l'utilisation des écritures fractionnaires pour des tâches de plus en plus variées, et une autonomie attendue dans ce domaine en quatrième année. Ce sont d'abord des « processus personnels » (*ibid.*, p. 12) qui sont utilisés, puis des « processus conventionnels » (*ibid.*) en fin de scolarité primaire. En outre, les liens entre les deux notions sont supposés être explicités (« reconnaître différents sens de la fraction [partage, division, rapport] » [*ibid.*, p. 12]).

En République d'Irlande, les deux premières années de scolarité obligatoire permettent d'effectuer des tâches de partage et de découvrir le vocabulaire de la division. En première année, les élèves doivent « établir et identifier la moitié de collections jusqu'à 20 objets » et « partager également des collections d'objets entre deux personnes » (*op. cit.*, p. 45). En deuxième année, il s'agit « d'établir et identifier les moitiés et les quarts de collections jusqu'à 20 objets », ce que nous interprétons, en nous appuyant sur la formulation de l'intitulé de première année, comme une injonction à partager également des collections d'objets entre deux ou quatre personnes (*ibid.*). À partir de la troisième année, non seulement la variété des situations augmente, avec le développement « d'une comprehension de la division en tant que partage et en tant que soustraction répétée, avec et sans reste », mais un algorithme de la division est introduit (« Diviser un nombre à un chiffre ou à deux chiffres par un nombre à un chiffre, avec et sans reste » [*ibid.*, p. 67]). C'est également à ce moment que les écritures fractionnaires sont utilisées. D'ailleurs, comme en Irlande du Nord, le lien entre les deux concepts est explicite (« Développer et comprendre la relation entre les fractions et la division. 1/4 de 32 = 8 ; 32/4 = 8 » [*ibid.*, p. 68]). Par la suite, la maitrise de l'algorithme de division est approfondie avec des nombres plus complexes (nombres entiers comportant davantage de chiffres et nombres décimaux).

À Singapour, le processus est le même, mais la progression des apprentissages est organisée sur un temps plus court. En première année, la division-partition et la division-quotition sont étudiées (« Division d'une quantité [inférieure ou égale à 20] en collections égales : étant donné le nombre d'objets dans chaque collection ; étant donné le nombre de collections » (*op. cit.*, 2006a, p. 13). Cependant, « l'utilisation du symbole de la division est exclu (÷) » (*ibid.*). En deuxième année, les écritures fractionnaires sont introduites, tout comme le symbole de la division (« Utiliser le symbole de la division (÷) pour écrire une phrase mathématique à propos d'une situation donnée » [*ibid.*, p. 15]). Toutefois, il faut attendre la troisième année pour que les élèves soient confrontés à des divisions avec un reste (« Utiliser les termes "produit", "quotient" et "reste" » et « division de nombres jusqu'à trois chiffres par des nombres à un chiffre » (*ibid.*, p. 18). Si les symboles sont proposés aux élèves au même moment, à aucun moment un lien n'apparait dans les textes entre le concept de fraction et le concept de division.

Dans le Taipei chinois, l'apprentissage du concept de division débute, de façon informelle, en deuxième année (« les élèves peuvent réaliser des activités de division dans des conditions concrètes », mais « la notation à l'aide du symbole de la division ne doit pas être enseignée et les élèves ne doivent rencontrer que des situations dans lesquelles il n'y a pas de reste [*op. cit.*, p. 112]). Les écritures fractionnaires sont abordées la même année, ce qui signifie que les élèves manifestent l'existence d'un

partage à l'aide d'un trait de fraction avant d'employer le symbole de la division. En troisième année, non seulement le signe mathématique correspondant à la division est utilisé, mais les élèves rencontrent des situations dans lesquelles un reste apparait après la recherche du quotient. De plus, lorsque les élèves travaillent sur des collections, les enseignants font le lien entre les fractions et la division (par exemple entre les demis et la division par deux). La fraction sert à exprimer le reste dans une division, que ce soit pour effectuer une division posée ou pour calculer mentalement un quotient (« les élèves utilisent des astuces pour le calcul de plus grands nombres. Par exemple : pour diviser 36 par trois, les élèves peuvent diviser 30 par trois pour obtenir dix et puis diviser six par trois pour obtenir deux. Ainsi, ils peuvent obtenir la somme de 12. Telle est la première expérience pour les élèves de la division posée et de la division fraction (par exemple : $10 \div 3 = 3 + 1/3$) » [ibid., p. 124]). Enfin, en quatrième année, les auteurs précisent que « pour passer d'une fraction supérieure ou égale à 1 à un nombre mixte, les élèves utilisent la division ». L'interprétation de la fraction comme un quotient de nombres entiers est également explicitée, ce qui montre que l'égalité doit être maitrisée dans les deux sens (« les élèves comprennent le sens de l'équivalence entre la division de nombres entiers et les fractions » [*ibid.*, p. 140]).

§ 2. L'introduction des écritures fractionnaires

Les auteurs (didacticiens, psychologues, auteurs de manuels, etc.) ne s'accordent pas sur l'ordre dans lequel doivent être conduits les apprentissages relatifs aux fractions. Par exemple, le partage d'une unité en parts égales a été priviligié pour la découverte des fractions par les auteurs américains Empson (1999), Sophian *et al.* (1997) et Streefland (1991) car « les activités de partage en parts égales ont une relation intime avec les expériences d'apprentissage vécues par les enfants » (Ni et Zhou, *op. cit.*, p. 49). Comme ce type de partage ne favorise pas la compréhension des fractions supérieures à un, d'autres auteurs suggèrent l'emploi de la fraction-mesure comme point de départ de l'apprentissage initial des fractions. Pour Davydov et Tsyetkovich (1991), ainsi que pour Lehrer (2003), celle-ci permettrait de concevoir la fraction unitaire comme une partie itérable constituant un invariant, et d'envisager les fractions non-unitaires comme établissant une relation multiplicative par rapport cette partie itérable de référence (Ni et Zhou, *ibid.*). Cela explique sans doute que les choix réalisés par les auteurs des programmes soient également très différents. L'étude de la fraction-mesure, n'étant pas imposée, au sein de notre corpus, dans tous les curriculums, nous présenterons plus largement l'introduction des enseignements relatifs à la fraction utilisée avec des quantités continues (A) puis avec des quantités discrètes (B).

A. Avec des quantités continues

En Angleterre, en troisième année, les auteurs des instructions officielles demandent aux élèves de manipuler correctement l'écriture symbolique des fractions (« lire et écrire des fractions propres (par exemple, 3/7, 9/10) » [*op. cit.*, 2006, p. 76]), et de maitriser son sens dans le cadre de la relation partie-tout (« interpréter le dénominateur comme le nombre de parts dans un entier et le numérateur comme le nombre de parts » [*ibid.*]). L'étude est limitée aux fractions propres et, dans les exemples, les dénominateurs restent inférieurs à dix. Les activités proposées consistent à « identifier et estimer des fractions de formes » (*ibid.*), ce qui suggère que le découpage n'apparait pas et que l'élève doit lui-même partager la forme en parts égales.

En Corée du Sud, en deuxième année, un premier paragraphe des programmes est consacré aux fractions. Il s'agit pour les élèves de représenter des fractions de quantités continues (« en divisant en parts égales des quantités continues, comprendre les fractions » [*op. cit.*, p. 13]), et d'associer ces représentations concrètes aux représentations symboliques correspondantes (« savoir comment les lire et les écrire » [*ibid.*]). L'expression « comprendre les fractions » est susceptible de recevoir plusieurs interprétations. Nous l'entendons comme l'invitation à explorer la relation partie-tout, en reliant le numérateur à un nombre de parts sélectionnées et le dénominateur à un nombre de parts dans l'unité. En ce qui concerne la division de quantités continues en parts égales, les auteurs circonscrivent le travail aux « figures qui peuvent être divisées en parts de formes et de tailles égales » (*ibid.*). En revanche, la nature des fractions (unitaires, propres, supérieures ou égales à 1) n'est pas précisée.

En Floride, de nouveaux programmes ont été mis en place en 2014. Antérieurement à cette date (« Représenter des fractions, y compris des fractions supérieures à un, en utilisant les aires, les collections, et les modèles de mesures » [*op. cit.*, 2007, p. 6]) comme postérieurement (« Comprendre une fraction 1/*b* comme la quantité formée par une part quand l'unité est partagé en *b* parts égales » [*op. cit.*, 2014, p. 3]), l'apprentissage du concept de fraction débute en troisième année. Si l'on tient compte des instructions officielles sous l'empire desquelles les élèves ayant passé les évaluations TIMSS 2015 ont étudié, l'apprentissage initial des écritures fractionnaires s'appuie sur la relation entre la partie et l'entier déjà abordée au cours des deux premières années, puisqu'il s'agit notamment de considérer le lien entre le nombre de parts égales dans l'entier et la taille de chacune des parts (« décrire comment la taille de la partie fractionnaire est en relation avec le nombre de morceaux de taille égale dans l'entier » [*op. cit.*, 2007, p. 6]).

En France, l'apprentissage des fractions débutait en cycle 3, c'est-à-dire entre la troisième et la cinquième année. Des progressions par année complétaient les instructions officielles et plaçaient le début de l'acquisition du concept de fraction en quatrième année (« Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs », [*op. cit.*, 2008a, p. 38]). Par ailleurs, c'est en CM1 que les élèves devaient être capables de « nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième » (*ibid.*). Il n'est pas précisé si ces tâches sont circonscrites au cas des fractions propres, ce qui laisse la possibilité d'utiliser des fractions supérieures ou égales à 1. En outre, il est prévu des activités de partage, mais également de mesure, ce qui montre combien les auteurs sont attachés à lier les fractions à la droite numérique, afin de préparer le passage aux écritures décimales.

A Hong Kong, l'exploration du concept de fraction débute en troisième année, avec l'étude de la relation partie-tout à propos d'unités ou de collections (« Développer le concept de fraction vue comme la part d'un entier et comme la part d'une collection d'objets » [*op. cit.*, p. 32]). Le choix des dénominateurs est laissé à l'appréciation des enseignants, étant entendu que le champ d'étude est celui des fractions propres. Les auteurs prescrivent par ailleurs de prêter attention au lien qui unit la part à l'entier (« reconnaitre la relation entre les fractions et 1 » [*ibid.*]). Toutefois, la nature des activités envisagées n'est pas précisée. On peut penser à l'instauration d'égalités telles que $2/2 = 3/3 = 4/4 = 1$, ou aux compléments à un ($3/4 + 1/4 = 1$; $2/3 + 1/3 = 1$). Cependant, le caractère laconique de l'intitulé ne permet pas de trancher.

En Irlande du Nord, le rapport entre la partie et le tout est abordé relativement à des aires ou à des collections, et placé dans le contexte de situations de la vie quotidienne (« reconnaitre et utiliser des fractions simples de la vie quotidienne » [*op. cit.*, p. 1]). Cependant, même si le terme de « fraction » est employé dans les textes, les élèves ne manipulent pas d'écritures fractionnaires. Il faut attendre la troisième année pour que les élèves soient « sensibilisé[s] à la notation de ces fractions, par exemple 1/5, 3/4, 2/3 » (*ibid.*). En outre, les activités sont toujours constituées de tâches d'identification et de représentation, mais la variété des fractions rencontrées augmente (« étendre le concept de fraction à une large série de fractions en utilisant des formes entières et des collections d'objets », [*ibid.*]). Les supports de l'apprentissage sont toujours les aires et les collections d'objets. Les rédacteurs des instructions officielles ne précisent pas les limites de cette augmentation, ce qui suggère des interprétations variées de la part des enseignants. Les exemples donnés dans le deuxième paragraphe prescrivent à tout le moins l'utilisation des tiers, des quarts et des cinquièmes.

En Ontario, dès la première année, les instructions officielles prévoient que les élèves apprennent à représenter des moitiés (« représenter les moitiés en tant que parties d'un élément et parties d'un ensemble d'éléments » [*op. cit.*, p. 27]). Ces activités de représentation sont prolongées en deuxième année avec l'étude des quarts, et en troisième année avec l'étude des tiers. Toutefois, malgré l'utilisation du vocabulaire associé (quart, tiers), le terme de « fraction » n'est pas utilisé par les auteurs. Il n'apparait qu'en quatrième année, où la représentation de fractions en tant que parties d'un élément et d'un ensemble d'éléments est exigée (« représenter des fractions simples en tant que parties d'un tout et parties d'un ensemble dans divers contextes », [*ibid.*]).

Au Québec, le terme de « fraction » est utilisé pour évoquer les activités réalisées par les élèves de première et de deuxième année (« Fractions en lien avec le quotidien de l'élève » [*op. cit.*, 2001, p. 134]). Lors des activités de reconnaissance, ils prennent appui sur des modèles visuels de la fraction (des « représentations concrètes ou imagées » [*ibid.*]), et les tâches de représentation sont susceptibles de porter aussi bien sur la fraction d'une unité, que sur la fraction d'une collection. Cependant, malgré la présence du mot « fraction » dans les programmes et l'utilisation du vocabulaire associé (quart, tiers), nous doutons du fait que les écritures fractionnaires doivent être utilisées en classe avant la troisième année. En effet, ce n'est qu'à ce stade de la scolarité qu'il est demandé aux élèves de pouvoir lire et écrire les fractions (« Fractions à partir d'un tout ou d'une collection d'objets : lecture, écriture, numérateur, dénominateur », [*ibid.*]).

En République d'Irlande, dès la première année de scolarité obligatoire, un chapitre portant le titre de « Fractions » apparait. Les élèves s'entrainent à reconnaitre et à représenter des fractions de collections (« établir et identifier la moitié de collections jusqu'à 20 objets » [*op. cit.*, p. 45]). À ce stade, il s'agit de partager ces collections en deux parts égales (« partager également des collections d'objets entre deux personnes » [*ibid.*]). La fraction et la division se confondent. D'ailleurs, les programmes parlent de « moitié », et non de « demi ». En deuxième année, les quarts sont introduits (« établir et identifier les moitiés et les quarts de collections jusqu'à 20 objets » [*ibid.*]), et ce sera l'occasion pour les élèves d'établir des premiers liens entre fractions (« discuter la relation entre une moitié et un quart » [*ibid.*]). En troisième année, l'étude des fractions ne porte plus seulement sur des collections, mais également sur des aires. Surtout, la lecture et l'écriture des fractions doit être enseignée et l'apparition du terme de « dénominateur » laisse à penser que l'écriture fractionnaire apparait seulement à ce stade

de la scolarité, soit pour des activités de reconnaissance, soit pour des activités de représentation (« Identifier des fractions et leurs formes équivalentes de dénominateur 2, 4, 8 ou 10 » et « couper et construire des fractions simples de formes géométriques régulières, les noter sous forme de diagrammes ou de schémas » [*ibid.*, p. 68]). C'est pourquoi nous considérons que la troisième année constitue en République d'Irlande le point de départ de l'utilisation des écritures fractionnaires.

À Singapour, l'acquisition du concept de fraction débute en deuxième année. Les auteurs des programmes précisent que les dénominateurs ne doivent pas dépasser douze, et que, à ce stade, la recherche de la fraction d'un ensemble d'objets est exclue. On peut penser que cela se traduira dans les classes par des partages d'aires ou de solides (« Interpréter une fraction comme la part d'un entier » [*op. cit.*, 2006a, p. 15]). Depuis 2013, les programmes de l'école primaire changent progressivement, mais le point de départ de l'apprentissage des fractions est inchangé. Si la première expression utilisée par les élèves pour décrire la relation entre la partie et le tout contient la préposition « sur » (« utiliser des expressions comme "deux sur trois" pour décrire des fractions » [*op. cit.*, 2012a, p. 38]), ceux-ci utilisent rapidement les écritures fractionnaires (« Utiliser des objets concrets, des disques et des représentations picturales pour représenter et interpréter les fractions en termes de fractions unitaires. Par exemple, 3/5 est trois unités de 1/5, 1/5 + 1/5 + 1/5, ou 3 cinquièmes » [*ibid.*]).

Enfin, dans le Taipei chinois, c'est également en deuxième année que débute l'acquisition du concept de fraction (« Les élèves peuvent reconnaître la fraction unitaire dont le dénominateur est inférieur à 12 » [*op. cit.*, p. 113]). Les auteurs recommandent de commencer avec des demis et des quarts (qui constituent une moitié d'une moitié) avant de reconnaitre des fractions ayant un dénominateur plus complexe. Ils invitent les enseignants à proposer du matériel concret comme support de l'apprentissage, cependant ils conseillent de ne pas laisser les élèves partager les unités : ceux-ci doivent simplement juger de l'équivalence des parts. Deux modèles visuels doivent être travaillés parallèlement : les disques et les lignes. En outre, les élèves comprennent que plus le dénominateur est grand, plus la part est petite (« comparer la taille des différentes fractions unitaires dans des conditions concrètes » [*ibid.*]).

B. Avec des quantités discrètes

Il n'est pas de pays qui, dans notre corpus, n'envisage pas l'étude de la fraction partie d'un tout avec des collections (ce que nous avons nommé l'étude de la fraction partition). Pourtant, nous avons distingué deux catégories de participants : ceux pour lesquels l'enseignement de la fraction partie d'un tout et celui de la fraction partition ont lieu la même année, et ceux pour lesquels le second est postérieur au premier, les deux enseignements ne débutant pas la même année.

Dans la plupart des instructions officielles, l'utilisation de collections est parallèle au fractionnement d'unités continues, et les deux enseignements débutent la même année. C'est le cas en Angleterre, où la fraction partition est abordée dès la deuxième année. On trouve ainsi dans les programmes de 2006 la compétence suivante : « Trouver la moitié, le quart et les trois quarts de formes et de collections d'objets » (*op. cit.*, 2006, p. 74). Elle est située dans le curriculum la même année que celle au cours delaquelle les élèves apprennent à lire et écrire les fractions. En 2014, les auteurs des programmes utilisent une formulation différente, mais l'année de l'apprentissage est inchangée : « Reconnaitre, trouver, nommer et écrire les fractions 1/3, 1/4, 2/4 et 3/4 d'une longueur, une forme,

une collection d'objets ou une quantité » (*op. cit.*, 2014, p. 118). De même, en Irlande du Nord, les enseignants permettent à leurs élèves « d'explorer le concept de demis, quarts en utilisant des formes entières et des collections d'objets » (*op. cit.*, p. 1) dès la deuxième année. Dans l'Ontario, l'apprentissage débute la même année (« Représenter les demis et les quarts en tant que parties d'un élément et d'un ensemble d'éléments à l'aide de matériel concret (p. ex., horloge) » [*op. cit.*, p. 35]). En République d'Irlande, l'apprentissage des fractions débute une année plus tard (« Couper et construire des fractions simples de formes géométriques régulières, les noter sous forme de diagrammes ou de schémas » [*op. cit.*, p. 68]), et l'utilisation des collections également (« Calculer la fraction d'une collection en utilisant du matériel concret » [*ibid.*]).

Dans d'autres curriculums, minoritaires au sein de notre corpus, ces compétences apparaissent successivement. C'est le cas en en Corée du Sud, où les élèves s'attèlent à comprendre les fractions dès la deuxième année, dès lors que le travail porte sur des quantités continues (« En divisant en parts égales des quantités continues, comprendre les fractions, et savoir comment les lire et les écrire » [*op. cit.*, p. 13]). En revanche, il faut attendre la troisième année pour trouver trace d'un travail avec des unités discrètes (« Comprendre les fractions comme la division en parts égales d'une quantité discrète » [*ibid.*, p. 17]). À Singapour, c'est seulement en quatrième année que l'interprétation du concept de fraction est étendue aux partages de collections (« interpréter la fraction comme part d'un ensemble d'objets » [*op. cit.*, 2006a, p. 22]), alors même que la notion de fractions pour les unités continues est connue depuis la deuxième année. Dans les programmes français, les unités discrètes font leur apparition très tardivement dans le curriculum. Elles sont évoquées à l'occasion de l'étude de la fraction-opérateur, dans l'enseignement secondaire (soit en sixième année : « Prendre une fraction d'une quantité » [*op. cit.*, 2008b, p. 15]), tandis qu'à l'école élémentaire, l'apprentissage est principalement réalisé à partir de fractions d'une quantité continue (« Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs » [*op. cit.*, 2008a, p. 38]). Certes, l'étude des fractions supérieures ou égales à 1 et de leurs relations avec les nombres entiers pourrait être, en cinquième année, l'occasion d'évoquer la fraction de collections. Cependant, les intitulés (« Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs » et « Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 » [*ibid.*]) suggèrent des activités impliquant des nombres, et non des objets comme dans les instructions officielles des autres pays. Nous pensons donc qu'il s'agira plus de manipuler la droite graduée et d'utiliser la fraction-mesure, plutôt que de partager des collections et d'utiliser la fraction-partition.

Conclusion de la sous-section

Dans cette sous-section, nous avons étudié comment, dans les programmes, se construit le concept de fraction, depuis des premières activités de partage jusqu'aux utilisations initiales des écritures fractionnaires, avec des quantités continues et discrètes. Pour montrer la densité du travail réalisé préalablement à l'introduction des écritures fractionnaires, nous proposons le graphique ci-contre. En jaune, nous signalons la présence, au cours d'une ou plusieurs d'années scolaires, de types de tâches qui peuvent être rattachées au concept de fraction (l'ostensif $\frac{a}{b}$ n'est pas utilisé, mais les demis, les quarts et les tiers sont évoqués, soit pour décrire des mesures,

soit réaliser des calculs mentaux). La couleur verte informe de la présence, au cours d'une ou plusieurs d'années scolaires, de types de tâches qui peuvent être rattachées au concept de division, jusqu'à ce qu'un algorithme de la division soit enseigné. L'année au cours de laquelle les élèves commencent à utiliser des écritures fractionnaires est indiquée en bleu.

Nous constatons ainsi que dans les quatre pays asiatiques de notre corpus, il n'existe aucune tâche préparatoire rattachée au concept de fraction, sauf peut-être à Singapour et dans le Taipei chinois, avec l'étude des demi-heures et des quarts d'heure. Toutefois, comme ces éléments n'étaient pas l'objet principal de l'intitulé (celui-ci portant sur la lecture de l'heure), nous n'en avons pas tenu compte dans notre graphique. Dans les autres pays, cette propédeutique à l'enseignement des écritures fractionnaires dure entre un an (en Floride) et trois ans (en Ontario). Toutefois, la variété des activités prévues est très différente d'un pays à l'autre, ce qui n'apparait pas sur le graphique. En Irlande du Nord et en République d'Irlande, les situations de partage sont inscrites très tôt dans les instructions officielles, dans des domaines très variés (aires, angles, capacités, calcul, etc.). En Ontario et en Angleterre, des telles activités sont également introduites précocément, mais pour des activités moins diverses (uniquement avec des aires et pour des tâches de calcul). En Floride et Québec, le travail ne porte que sur des figures géométriques, ce qui laisse à penser que les écritures fractionnaires seront introduites par le biais de la fraction partie-tout. À l'inverse, en France, les activités dans lesquelles le langage relatif aux fractions est utilisé appartiennent toutes au domaine du calcul.

Dans la plupart des pays du corpus, l'enseignement de la division peut aussi pontentiellement aider les élèves à comprendre les fractions lors de leur apprentissage initial, en contribuant préalablement à l'acquisition d'une bonne capacité à partager en parts égales. Néanmoins, cet enseignement est postérieur aux premières utilisations des écritures fractionnaires en Corée du Sud, et concomitant en Floride, en Irlande du Nord et dans le Taipei chinois. Comme pour les activités reliées à la notion de fraction, la durée des activités rattachées la notion de division avant l'introduction des écritures fractionnaires est très variable (d'un an à Singapour à trois ans en Ontario).

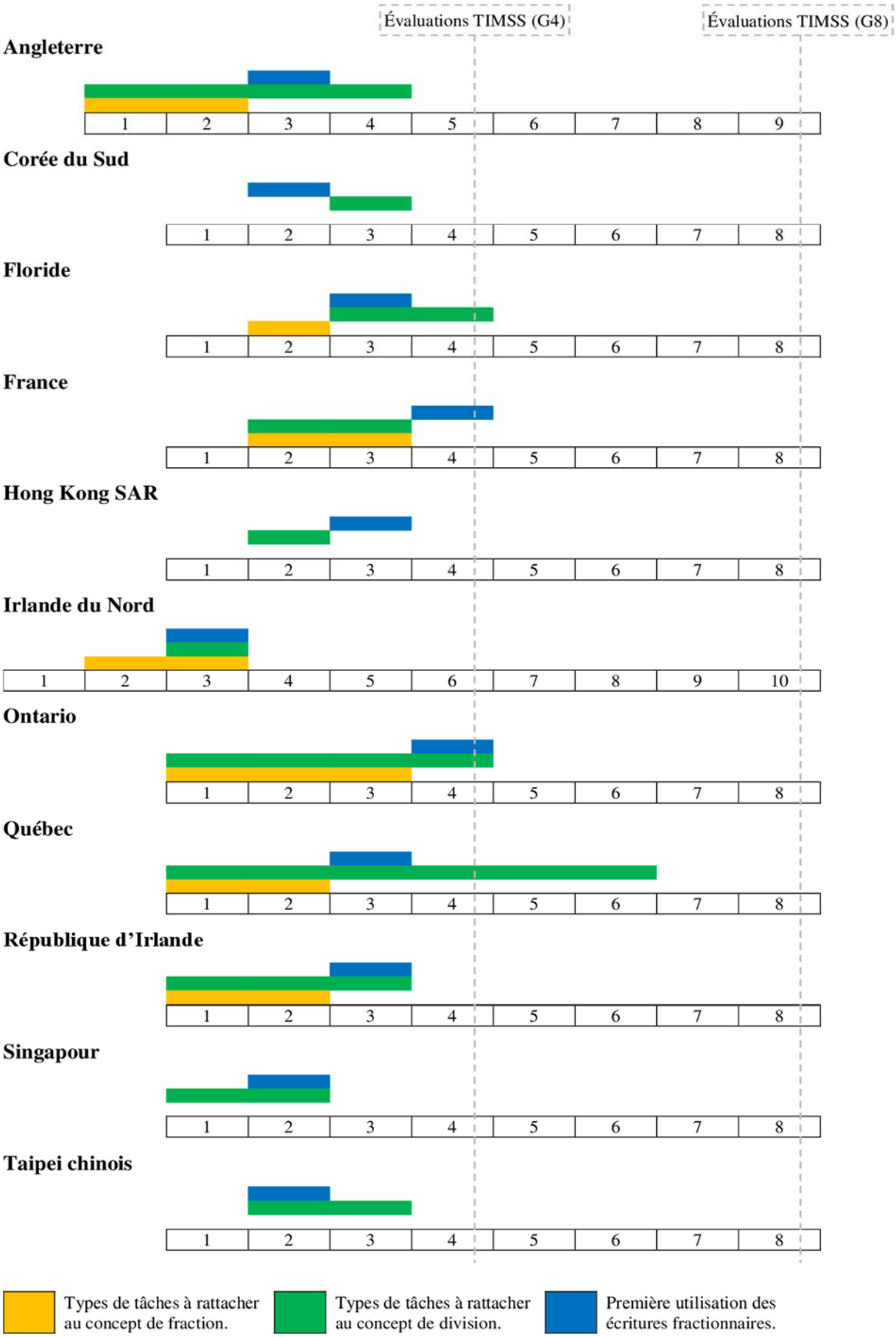


Figure 46. Chronogénèse du concept de fraction dans les instructions officielles de notre corpus (2015)

Dans cinq pays sur onze, la capacité des élèves à partager en parts égales s'exprime, avant l'apprentissage des fractions, de façon exclusivement numérique. Il est donc difficile de dire si les fondements conceptuels des fractions seront maitrisés avant avant que les élèves utilisent des écritures fractionnaires. En outre, lorsque les auteurs évoquent l'idée de partionnement assez tôt dans la scolarité, les intitulés restent imprécis (par exemple, en Angleterre, les élèves de première année doivent « utiliser le vocabulaire des demis et des quarts en contexte » [*op. cit.*, 2006, p. 72]). La nature des tâches qui pourront être données aux élèves, les techniques qu'ils développeront, ou le savoir qu'ils en tireront restent le plus souvent indéterminés. Par ailleurs, lorsque les écritures fractionnaires sont introduites, toute liberté est laissée aux enseignants pour choisir d'interroger d'abord leurs élèves sur la signification d'un partage en parts égales, ou pour proposer assez rapidement une écriture formalisée des quantités fractionnaires.

En ce qui concerne l'apprentissage initial des fractions, aucun pays ne fait de la fraction-mesure le support exclusif de cette découverte. Soit cette dernière est réalisée à partir d'une combinaison de la fraction partie-tout et de la fraction-mesure (comme en France, en Floride et dans le Taipei chinois), soit elle est réalisée à partir de la seule fraction partie-tout (dans tous les autres pays du corpus, sauf en Irlande du Nord où rien ne permet de définir, dans les programmes, quelle signification de la fraction doit être privilégiée). L'utilisation des quantités discrètes est en général couplée à l'utilisation des quantités continues. Toutefois, elle a lieu un an plus tard en Corée du Sud, et deux ans plus tard à Singapour et en France. La singularité de ce dernier pays est d'imposer l'utilisation de quantités discrètes postérieurement à la passation des tests TIMSS. Or, certains items mettent en jeu de telles quantités. Nous observerons donc avec une particulière attention les résultats de la France dans ce domaine, en particulier pour voir dans quelle mesure les élèves réussissent à associer une fraction et un dessin avec les deux types de quantités. Plus largement, il existe des écarts importants concernant l'année durant laquelle les élèves commencent à utiliser des écritures fractionnaires, de sorte qu'au moment des évaluations TIMSS, celles-ci sont manipulées depuis moins d'un an à plus de trois ans (en Irlande du Nord, avec cette réserve que, dans ce pays, les progressions ne sont pas rattachées explicitement à une année scolaire : la mise en correspondance s'appuie sur le fait qu'il existe autant de paliers que d'années). Nous rechercherons donc également une corrélation entre, d'une part, la durée de l'expérience des élèves avec les fractions au moment des tests telle qu'elle ressort des curriculums, et d'autre part, leurs performances.

Sous-section II. Le lien avec les autres formes d'écriture des rationnels

Il est admis que les conversions de registres de représentation (et donc le passage d'une écriture des rationnels à une autre) décrites par Duval (1995) ont un effet bénéfique sur l'apprentissage car, « en articulant diverses représentations d'un même objet, elle[s] amène[nt] les élèves à se questionner sur le fond commun de ces diverses représentations et donc à prendre conscience de l'existence d'objets mathématiques au-delà de la diversité de leurs représentations » (Adjiage, 2007, p. 7). Il n'est donc pas surprenant que tous les curriculums que nous avons consultés comportent de telles tâches. La diversité des textes réside, d'une part, dans le choix et le nombre des conversions qui doivent être réalisées par les élèves, et d'autre part, dans leur répartition temporelle : la question qui se pose est de savoir si toutes les conversions de représentations sont concentrées sur une seule année scolaire, ou bien si chaque écriture des rationnels est abordée au cours d'une année différente. Au sein de notre corpus, la fraction est bien souvent première dans l'apprentissage, et sert de point d'appui pour la présentation de deux autres formes d'écriture des rationnels[1] que sont les notations décimales et les pourcentages. Nous étudierons donc les rapprochements qui sont faits entre les fractions et les premiers (A), puis entre les fractions et les seconds (B).

---

1. Au sein de notre corpus, les fractions constituent d'abord le point d'appui de l'enseignement des écritures décimales de nombres décimaux, avant d'être un support de l'enseignement des écritures décimales de nombres rationnels. Cependant, nous n'avons pas voulu distinguer les deux cas et nous parlerons donc, de façon générale, de la relation entre les fractions et les autres formes d'écriture des nombres rationnels, ceux-ci incluant les nombres décimaux. En effet, même si, dans la plupart des programmes, seuls les nombres décimaux sont évoqués, il arrive que les nombres rationnels soient mentionnés également, comme en Corée du Sud ou à Hong Kong SAR. Précisons également que les formulations utilisées par les auteurs des programmes présentent parfois une certaine ambigüité sur le point de savoir si les rationnels doivent faire l'objet d'un enseignement. Par exemple, à Hong Kong SAR, l'intitulé en langue anglaise est le suivant : « *Convert decimals into fractions, rounding off the answers to the nearest tenths or hundredths* » (*op. cit.*, p. 42). Il s'agit donc de convertir des écritures décimales en fractions, en arrondissant au dixième ou au centième. L'utilisation des arrondis suggère la mise en jeu de nombres rationnels (nous interprétons cet intitulé ainsi). Néanmoins, ce n'est pas certain, dans la mesure on peut également arrondir des nombres décimaux au dixième ou au centième, par exemple l'écriture décimale de 1/8.

§ 1. L'instauration d'un lien entre les fractions et les écritures décimales

Selon une idée développée par les auteures américaines Collins et Dacey[1] (2010, p. 16), « l'une des plus grandes erreurs commises usuellement par les enseignants consiste à introduire les conversions de fractions en écritures décimales avant que les élèves maitrisent les fractions à un niveau conceptuel ». Cette affirmation, suggérant qu'un enseignement des écritures décimales proposé trop rapidement après l'introduction des écritures fractionnaires nuit à l'apprentissage, aiguise notre intérêt pour les questions suivantes : comment ces deux enseignements sont-ils répartis au cours de la scolarité dans les pays de notre corpus ? Les écritures décimales font-elles l'objet d'un enseignement antérieur, concomitant ou postérieur aux fractions ? En outre, les auteurs présupposent que les écritures décimales sont présentées par les enseignants comme une autre manière d'écrire les fractions. Or, bien qu'un lien soit systématiquement établi entre les deux dans les instructions officielles, l'apprentissage premier des écritures décimales s'appuie parfois, dans les textes, sur une extension du système décimal en base dix ou sur des représentations visuelles. Après avoir indiqué les types de tâches de conversion imposés entre ces deux formes d'écriture (A), nous allons donc indiquer l'objectif des auteurs des programmes à propos de ces premières conversions, celles-ci pouvant permettre d'introduire les notations décimales, ou bien de réaliser un rapprochement entre deux formes d'écriture déjà connues des élèves (B).

A. Les types de tâches de conversion entre fractions et écritures décimales

En Angleterre, l'enseignement des écritures décimales débute en quatrième année. À la fin de l'année scolaire, les élèves devraient être en mesure d'associer les dixièmes et les centièmes à leur écriture décimale (« Utiliser la notation décimale pour les dixièmes et les centièmes et décomposer des décimaux » [*op. cit.*, 2006, p. 78]) et les demis et les quarts à leur écriture décimale (« Reconnaître l'équivalence entre les formes décimales et fractionnaires d'un demi, des quarts, des dixièmes et des centièmes » [*ibid.*]). En cinquième année, les élèves continuent d'associer des fractions à des notations décimales, dans un sens (« Identifier, nommer et écrire des fractions équivalentes d'une fraction donnée, représentée visuellement, y compris les dixièmes et centièmes » [*op. cit.*, 2014, p. 139]) comme dans l'autre (« Lire et écrire des nombres décimaux sous forme de fractions [par exemple, 0,71 = 71/100] » [*ibid.*]). En sixième année, le caractère gras du paragraphe relatif à la capacité des élèves à passer d'une écriture des rationnels à l'autre, entre les fractions, les écritures décimales, et les pourcentages (« trouver des équivalences entre pourcentages, notations décimales et fractions » [*op. cit.*, 2006, p. 82]) nous indique que cette notion est un élément prioritaire des programmes anglais.

En Corée du Sud, en troisième année, les professeurs sont simplement invités à proposer à leurs élèves de « trouver des cas de la vie courante dans lesquels les fractions et les notations décimales sont utilisées » et de « reconnaitre l'utilité des fractions et des écritures décimales dans des situations problèmes » (*op. cit.*, p. 18). En quatrième année, le lien entre les fractions et les notations décimales est exploré jusqu'aux millièmes (« relier les notations décimales aux fractions » [*ibid.*, p. 22]). Aucune

1. Professeurs en éducation à l'université de Lesley, dans le Massachusetts, et auteurs de nombreux ouvrages pratiques sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

précision n'est fournie quant à la nature de ce lien ou des activités qui peuvent conduire à le mettre au jour. En cinquième année, les élèves doivent maitriser le passage entre ces deux formes d'écriture des nombres décimaux (« comprendre la relation entre les écritures décimales et les fractions, et savoir comment exprimer les fractions en écritures décimales, et les écritures décimales en fractions » [*ibid.*, p. 26]). Par rapport à la quatrième année, le travail n'est plus limité aux millièmes. En huitième année, les professeurs doivent faire comprendre aux élèves la signification d'une décimale qui se répète, et mettre en lien les nombres rationnels et cette récurrence de la décimale. Les instructions officielles précisent que les professeurs n'ont pas besoin d'insister sur l'expression et la formulation de ces décimales récurrentes (*ibid.*, p. 40). En revanche, quand un enseignant intègre dans son cours des valeurs approchées, il doit les relier à des situations de la vie courante, ou à des questions de sciences (*ibid.*, p. 41).

En Floride, l'enseignement des nombres décimaux débute en quatrième année. Les nouvelles instructions officielles imposent d'étudier le passage des fractions aux notations décimales, cette étude étant limitée aux dixièmes et aux centièmes (« Exprimer une fraction de dénominateur 10 sous la forme d'une fraction équivalente de dénominateur 100, et utiliser cette technique pour ajouter deux fractions avec pour dénominateurs respectifs 10 et 100. Par exemple, exprimer 3/10 sous la forme 30/100, et ajouter 3/10 + 4/100 = 34/100 » [*op. cit.*, 2014, p. 5]). Cet apprentissage est envisagé non seulement de façon abstraite, mais également lié à des unités de mesures ou à des représentations visuelles. Ainsi, les exemples fournis évoquent des transformations dans le cadre de mesures de longueurs ou des placements sur la droite numérique (« utiliser la notation décimale pour des fractions de dénominateurs 10 ou 100. Par exemple, réécrire 0,62 comme 62/100 ; décrire une longueur de 0,62 mètre ; localiser 0,62 sur une droite numérique » [*op. cit.*, 2014, p. 5]). Dans la suite de la scolarité, la relation entre les décimaux et les fractions est évoquée à partir de la sixième année pour indiquer que des problèmes ou des travaux algébriques pourront contenir différentes écritures des rationnels, et que leur résolution impliquera de savoir passer de l'une à l'autre (par exemple : « Utiliser des formes équivalentes de fractions, de notations décimales et de pourcentages pour résoudre des problèmes » (*op. cit.*, 2007, p. 13]).

En France, le lien entre les nombres décimaux et les fractions est tissé en quatrième année, dans un paragraphe consacré aux premiers (« savoir : les repérer, les placer sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement » [*op. cit.*, 2008a, p. 38]). L'exploration des relations entre les notations décimales et les fractions est également prévue, dans les deux sens, en sixième année (« Associer diverses désignations d'un nombre décimal : écriture à virgule, fractions décimales » [*op. cit.*, 2008b, p. 14]). De plus, les fractions servent à justifier des conclusions relatives aux écritures décimales : « l'objectif est d'assurer une bonne compréhension de la valeur des chiffres en fonction du rang qu'ils occupent dans l'écriture à virgule » (*ibid.*). En revanche, en cinquième année, le passage d'une écriture à l'autre des nombres rationnels n'est pas évoqué.

À Hong Kong SAR, le passage des fractions aux notations décimales fait l'objet d'un paragraphe en quatrième et sixième année. En quatrième année, la capacité à convertir n'est prévue, de façon explicite, que dans un sens : des fractions vers les écritures décimales (« reconnaitre les écritures décimales comme une autre façon de noter les fractions » [*op. cit.*, p. 36]). En sixième année, il s'agit en revanche pour les élèves de pouvoir passer de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire et

inversement (« convertir des écritures décimales en fractions » et « convertir des fractions en écritures décimales, en arrondissant les résultats au dixième ou au centième le plus proche » [*ibid.*, p. 42]). Les rédacteurs précisent que l'arrondi au dixième ou au centième est imposé lors de la conversion des fractions en notations décimales. Cette mention suggère l'emploi de rationnels non décimaux, tels que 1/3 ou 1/11, ou de décimaux impliquant des millièmes, tels que 1/8. Dès lors, l'élève ne peut plus passer d'une écriture à l'autre en se référant à la valeur des chiffres : il est obligé d'utiliser la division.

En Irlande du Nord, le lien entre ces deux formes d'écriture des rationnels doit faire l'objet d'un enseignement en quatrième année, y compris pour des fractions non décimales (« relier les fractions aux écritures décimales, par exemple 1/2 est égal à 0,5 » [*ibid.*]). Au cours des cinquième et sixième années, les élèves sont « sensibilisé[s] aux relations entre les fractions simples, les notations décimales et les pourcentages », puis doivent « comprendre et utiliser les fractions usuelles, les notations décimales et les pourcentages, et explorer les relations qu'ils entretiennent » [*ibid.*], ce qui suggère une élévation du niveau d'exigence quant la maitrise des relations entre les fractions et les écritures décimales, quel que soit le sens de la conversion.

En Ontario, la quatrième année est l'occasion pour les élèves de réaliser des conversions des fractions vers les écritures décimales (« explorer la relation entre les fractions et les nombres décimaux[1] (p. ex., 1/10 = 0,1) » (*op. cit.*, p. 51). En cinquième année, le lien entre les fractions décimales et les écritures décimales est étudié jusqu'aux centièmes. Le passage de l'expression « explorer », employée en quatrième année, à celle « d'établir et expliquer la relation » (*ibid.*, p. 61), en cinquième année, suggère également une exigence accrue dans la connaissance de cette relation, et l'utilisation d'ostensifs scripturaux en plus des ostenstifs graphiques. Dans la suite de la scolarité, même si la variété des représentations des nombres rationnels augmente, les termes utilisés sont similaires. Ainsi, jusqu'en huitième année, les élèves sont invités à « établir et expliquer à l'aide de matériel concret, la relation entre les fractions, les nombres décimaux, les pourcentages et les rapports » (*ibid.*, p. 78). Il est prévu également que les élèves puissent « représenter la même valeur sous forme de fraction, sous forme décimale et sous forme de pourcentage (par exemple, 1/2 = 0,5 = 50 %) » (*ibid.*).

Au Québec, l'établissement d'une relation entre les fractions et les écritures décimales est fixé en troisième année, avec un sens de conversion bien précis (« avec l'intervention de l'enseignant, associer une fraction à une écriture décimale » [*op. cit.*, 2009a, p. 7]). En quatrième et cinquième années, l'enseignement des notations décimales se poursuit parallèlement à celui des fractions, toujours jusqu'aux centièmes. Le lien entre les uns et les autres s'effectue désormais dans les deux sens, puisque les élèves doivent pouvoir, de façon autonome, « associer une écriture décimale ou un pourcentage à une fraction » (*ibid.*). En sixième année, les types de tâches imposés sont les mêmes, mais une autonomie accrue des élèves est exigée (*ibid.*, p. 6-7).

---

1. Une telle formulation ne tient pas compte du fait qu'une partie des fractions sont des nombres décimaux. Nous supposons que le sens que les auteurs attribuent à cette phrase est de prescrire le passage des fractions aux notations décimales de nombres décimaux. Toutefois, nous avons conservé la rédaction originale utilisée par les auteurs ontariens.

En République d'Irlande, la liaison entre les fractions et les écritures décimales est étudiée en troisième et en quatrième année (« identifier les dixièmes et les exprimer sous une forme décimale. Exprimer 1/10 sous la forme 0,1. Découper un dixième et/ou 0,1 de formes régulières. Noter en utilisant des diagrammes ou des schémas » [*ibid.*, p. 69]). Toutefois, en passant de l'une à l'autre, cet apprentissage est prolongé jusqu'aux centièmes et les conversions se font dans les deux sens (« Exprimer les dixièmes et les centièmes sous la forme de fractions et de notations décimales » [*ibid.*]). De plus, la référence à des modèles visuels (diagrammes, schémas) et à du matériel concret a disparu. En cinquième année, les différentes écritures des décimaux sont employées dans le cadre de la résolution de problèmes (« résoudre des problèmes impliquant des opérations avec des nombres entiers, des fractions, des écritures décimales et des pourcentages simples » [*ibid.*]). Pour ce type de tâches, les auteurs des programmes prévoient le recours à des modèles visuels (« utiliser des diagrammes » [*ibid.*]). En outre, la compréhension de la relation entre les fractions et les nombres décimaux est étendue aux millièmes (« exprimer des dixièmes, des centièmes et des millièmes à la fois sous forme fractionnaire et décimale » [*ibid.*]). Si les auteurs précisent que ce lien est exploré à l'aide de « matériel concret » (*ibid.*), excluant ainsi le recours précoce à des règles formelles de conversion, ils ne disent pas s'il s'agit d'exprimer une quantité avec des écritures variées, ou s'il s'agit de passer d'une écriture à l'autre. En sixième année, à propos du lien entre les fractions décimales et les notations décimales, la formulation de l'intitulé est identique à celle employée pour la cinquième année (« exprimer des dixièmes, des centièmes et des millièmes à la fois sous forme fractionnaire et décimale » [*ibid.*]). En revanche, la lecture des exemples d'activités proposées montre une disparition de la référence aux modèles visuels. Il semble que le sens de la notion est considéré comme acquis, et que l'on vise une aisance dans les conversions par la répétition.

À Singapour, en quatrième année, les notations décimales sont mises en rapport avec l'écriture fractionnaire jusqu'aux centièmes (« convertir une écriture décimale en une fraction » [*op. cit.*, 2006a, p. 22]). Dans un second temps, des conversions dans le sens inverse sont prévues (« convertir une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 ou 100 en une écriture décimale » [*ibid.*]). En cinquième année, le passage des fractions aux notations décimales (et inversement) est étendu aux millièmes (« convertir les écritures décimales en fractions et vice versa » [*ibid.*, p. 26]). En outre, il ne concerne plus seulement les fractions décimales (cette prévention était présente dans les programmes de quatrième année, mais elle n'apparait plus ici). La méthode de conversion n'est pas précisée, mais l'emploi de la division n'est pas à exclure lorsque le dénominateur n'est pas une puissance de dix.

Dans le Taipei chinois, les conversions ont d'abord pour objet, en troisième année, de « présenter le nouveau chiffre des "dixièmes", en expliquant que ce nom est dû à l'égalité 1/10 = 0,1 » (*op. cit.* , p. 132) : les conversions sont donc effectuées des fractions vers les écritures décimales. En quatrième année, les élèves vont pouvoir utiliser « leur connaissance des fractions équivalentes pour comparer des fractions de dénominateurs différents et passer des fractions simples à une écriture décimale et inversement » (*ibid.*, p. 143), l'expression « fractions simples » suggérant la conversion en notation décimale de fractions telles que 1/2 ou 1/4. De plus, le sens des conversions n'est plus limité, et les centièmes ainsi que les millièmes sont évoqués (« [les élèves] apprennent que les noms des chiffres proviennent des relations 1/100 = 0,01 et 1/1 000 = 0,001 » [*ibid.*]). En sixième année, la capacité des élèves à convertir des écritures décimales en fractions est réinvestie dans le cadre de l'étude de la division décimale (« calculer des divisions de nombres décimaux en transformant ces derniers en

fractions » [*ibid.*]). Les auteurs citent l'exemple de 3,24 ÷ 1,2 qui peut être écrite sous la forme 324/100 ÷ 12/10 puis 324/100 × 10/12. De la même façon, en septième année, pour calculer avec des nombres décimaux, on demande aux élèves de transformer des notations décimales en fractions (par exemple, 0,125 en 1/8). En cinquième année, nous n'avons pas trouvé trace d'activité impliquant des conversions. Toutefois, les élèves doivent pouvoir « placer des fractions et des nombres décimaux sur la droite numérique » (*op. cit.*, p. 163), ce qui permet potentiellement d'évoquer la relation entre les unes et les autres.

B. L'objectif des auteurs concernant les conversions entre fractions et écritures décimales

En Angleterre, l'idée que « les écritures décimales et les fractions sont différentes façons d'exprimer des nombres et des proportions » (*op. cit.*, 2014, p. 132) est désormais rappelée aux élèves tout au long de l'apprentissage. Selon les indications qui accompagnent les instructions officielles, la construction du sens des nombres décimaux s'appuie à la fois sur la compréhension du système de numération en base dix et sur la valeur des décimales liée à la division du nombre entier par dix ou par cent (donc aux fractions décimales). La question des conversions apparaissant en premier dans les programmes, on peut considérer que les fractions constituent le point d'appui de l'apprentissage initial des nombres décimaux. Dans les programmes de 2006, seules les fractions étaient évoquées dans la construction du sens des écritures décimales, en quatrième année. Les élèves ayant passé les évaluations TIMSS en 2015 ont abordé ces nouveaux nombres selon cette approche, puisque ce texte était applicable lorsqu'ils étaient en quatrième année.

En Corée du Sud, il est explicitement prévu que les élèves de troisième année abordent le concept de nombre décimal par l'intermédiaire des fractions (« Par le biais des fractions propres dont le dénominateur est 10, comprendre le concept de nombre décimal » [*op. cit.*, p. 18]). Ce n'est que dans un second temps que les élèves devront pouvoir « lire et écrire des nombres décimaux et comparer leur taille » (*ibid.*). En revanche, en quatrième année, la compréhension des nombres à deux ou trois décimales s'appuie « sur le principe de position » (*ibid.*, p. 21).

En Floride, dans les anciens programmes, il s'agissait de construire le concept jusqu'aux millièmes en s'appuyant sur deux idées principales. Premièrement, les nombres décimaux permettent de nommer des nombres entre deux entiers et consituent une extension du système numérique en base dix déjà étudié à propos des nombres entiers. Deuxièmement, les écritures décimales représentent une autre façon d'écrire les fractions (« relier les fractions et les notations décimales équivalentes avec et sans modèle, y compris le placement sur la droite numérique » [*op. cit.*, 2007, p. 8]). Dans les programmes de 2014, applicables au moment des évaluations TIMSS 2015, il s'agit uniquement, pour les élèves de quatrième année, de considérer les écritures décimales comme une autre manière d'écrire les fractions (« Utiliser la notation décimale pour des fractions de dénominateur 10 ou 100 » [*op. cit.*, 2014, p. 5]).

En France, la question des nombres décimaux est d'abord abordée, en quatrième année, sans référence explicite aux fractions (« connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au centième) » [*op. cit.*, 2008a, p. 38]). Dans un second temps, parmi nombre d'autres tâches concernant les nombres décimaux, l'idée de passer d'une écriture des rationnels à l'autre est évoquée (« savoir : les repérer, les placer sur une droite graduée, les comparer, les ranger,

les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement » [*ibid.*]). Cette dualité persiste en sixième année, avec un intitulé relatif à la maitrise des nombres décimaux fondée sur la valeur des chiffres (« Connaître et utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un entier ou d'un décimal » [*op. cit.*, 2008b, p. 14]) et un intitulé spécifique pour les tâches de conversion.

À Hong Kong SAR, les notations décimales sont d'abord présentées, en quatrième année, comme une autre forme d'écriture que celle qu'ils connaissent déjà (« reconnaitre les écritures décimales comme une autre façon de noter les fractions » [*op. cit.*, p. 36]). L'exploration du système de numération décimale n'est imposée que dans un second temps, la même année (« développer le concept de numération de position pour les nombres décimaux » [*ibid.*]). Dans la suite de la scolarité, la construction du concept de nombre décimal n'est plus évoquée.

En Irlande du Nord, la quatrième année est également l'occasion d'introduire les notations décimales, en s'appuyant sur les connaissances des élèves à propos des dixièmes et des centièmes (« être sensibilisé à la notation décimale en relation avec les concepts de dixième et de centième à travers l'utilisation de matériel » [*op. cit.*, p. 1]). Si les auteurs évoquent les connaissances des élèves à propos des fractions décimales, c'est pourtant la première fois que ce type de fractions apparait dans les instructions officielles. Nous considérons donc que cet intitulé invite les professeurs à la fois à enseigner les fractions décimales et à se servir de cet apprentissage pour introduire les écritures décimales. Les auteurs évoquent ensuite les mesures comme support de l'enseignement de ces derniers.

En Ontario, le terme de nombre décimal apparait pour la première fois en quatrième année dans un paragraphe relatif au lien entre les fractions et les nombres décimaux (« explorer la relation entre les fractions et les nombres décimaux (p. ex., 1/10 = 0,1) » (*op. cit.*, p. 51). On comprend alors que les premières servent de support à l'apprentissage des écritures décimales, qui sont présentées aux élèves comme une autre façon d'écrire les fractions décimales. Par la suite, les élèves représentent « à l'aide de matériel concret des nombres décimaux » (*ibid.*, p. 52). De plus, ils doivent pouvoir « décrire des relations qui existent dans la composition d'un nombre naturel inférieur à 10 001 et d'un nombre décimal », ce que nous interprétons comme une invitation à observer les régularités du système décimal, y compris avec des nombres possédant une partie décimale.

Au Québec, la troisième année est pour l'élève l'occasion de découvrir les écritures décimales, jusqu'aux centièmes. Dans les programmes, il existe deux paragraphes bien distincts pour les fractions et les notations décimales (*op. cit.*, 2001, p. 134). Ce n'est que dans les développements suivants que le lien est fait entre les deux. Si des représentations variées sont évoquées dans l'intitulé relatif aux notations décimales, une telle organisation suggère des enseignements indépendants, avec un rapprochement postérieur entre ces deux formes d'écriture. La formulation utilisée dans les progressions officielles (« avec l'intervention de l'enseignant, associer une fraction à un nombre décimal » [*op. cit.*, 2009a, p. 7]) renforce l'idée que les fractions ne sont pas, pour les auteurs, le point d'appui de l'enseignement des notations décimales, mais plutôt une manière parmi d'autres de les représenter.

En République d'Irlande, en troisième année, les écritures décimales font l'objet d'une première mention dans un paragraphe intitulé « Numération de position », au sein duquel les fractions ne sont pas évoquées. Cet apprentissage consiste à « explorer et identifier la valeur des décimales (une décimale) »

(*op. cit.*, p. 64). Cinq pages plus loin, la capacité des élèves à convertir les fractions en notations décimales est énoncée en première position, dans un paragraphe intitulé « Nombres décimaux » (« identifier les dixièmes et les exprimer sous une forme décimale. Exprimer 1/10 sous la forme 0,1. Découper un dixième et/ou 0,1 de formes régulières. Noter en utilisant des diagrammes ou des schémas » [*ibid.*, p. 69]). Pour notre analyse, nous nous appuyons sur la partie des instructions officielles explicitement consacrée aux nombres décimaux, et considérons les fractions comme le support de l'introduction des écritures décimales.

À Singapour, les notations décimales font d'abord l'objet d'un enseignement spécifique, et ne sont pas présentés d'emblée aux élèves comme une autre manière d'écrire les fractions. Les élèves construisent le sens des décimales et placent des nombres écrits sous cette forme sur la droite numérique avant d'être confrontés aux tâches de conversion. Certes, tous ces types de tâches sont regroupés dans un même paragraphe. Néanmoins, ce n'est qu'en fin de liste que le législateur impose de convertir des fractions décimales en écritures décimales (« convertir une fraction dont le dénominateur est un facteur de 10 ou 100 en notation décimale » [*ibid.*]), après avoir invité les élèves à réaliser des conversions en sens inverse (« convertir une écriture décimale en une fraction » [*op. cit.*, 2006a, p. 22]).

Dans le Taipei chinois, le contexte des mesures doit être privilégié pour l'apprentissage des notations décimales, et les auteurs proposent notamment de commencer avec l'observation des graduations sur une règle. C'est l'enseignement du vocabulaire qui s'appuie sur les connaissances des élèves à propos des fractions (« présenter le nouveau chiffre des « dixièmes », en expliquant que ce nom est dû à l'égalité 1/10 = 0,1 » [*op. cit.* , p. 132]) et les auteurs soulignent que « les enseignants devraient insister sur le fait que 10 fois 0,1 a pour résultat 1,0, c'est-à-dire 10/10 (un) et non 0,10 ». En quatrième année, la mise en évidence du lien avec les fractions est également suggérée par le biais du vocabulaire (« [les élèves] apprennent que les noms des chiffres proviennent des relations 1/100 = 0,01 et 1/1 000 = 0,001 » [*ibid.*, p. 144]). Toutefois, immédiatement après, les auteurs précisent que « les élèves doivent comprendre que les relations qui unissent les dixièmes, les centièmes et les millièmes sont similaires à celles qui unissent les chiffres dans les nombres entiers » (*ibid.*).

§ 2. L'instauration d'un lien entre les fractions et les pourcentages

De la même façon que pour les écritures décimales, nous allons questionner le lien établi par les auteurs entre les fractions et les pourcentages. D'un point de vue théorique, il existe une ambivalence à propos de l'enseignement de ce concept. D'un côté, les pourcentages peuvent être présentés comme une autre façon d'écrire une fraction sur 100. À cet égard, cela en fait une notion moins complexe à aborder que les notations décimales, qui peuvent être présentés comme une autre façon d'écrire des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10, mais pas forcément 100. D'un autre côté, la variété des contextes dans lesquels cette notion est utilisée, ainsi que les problèmes qui y sont rattachés (liés à la proportionnalité, aux taux, etc.), en feraient plutôt une notion plus difficile à acquérir. Afin de comprendre comment, au sein de notre corpus, les auteurs ont relié la notion de pourcentage à celle des fractions, nous allons étudier successivement les types de tâches de conversions (A) et l'objectif qui leur est assigné par les auteurs des programmes (B).

A. Les types de tâches de conversion entre fractions et pourcentages

En Angleterre, une première approche des pourcentages est proposée aux élèves de cinquième année. Non seulement les élèves apprennent à « reconnaître le symbole pourcent (%) » et comprennent « que les pourcentages concernent le nombre de parties par centaine », mais ils sont également invités à « écrire des pourcentages comme une fraction de dénominateur 100 » (*op. cit.*, 2014, p. 139). Autrement dit, les auteurs instaurent des conversions des pourcentages en fractions, mais l'inverse n'est imposé qu'avec la résolution de « problèmes qui nécessitent de connaitre les pourcentages et les écritures décimales équivalents à 1/2, 1/4, 1/5, 2/5, 4/5 et les fractions ayant un dénominateur multiple de 10 ou 25 » [*ibid.*]). Les tâches de conversion sont alors entourées d'un contexte, qui rend nécessaire pour l'élève la recherche de l'opportunité de leur utilisation. En sixième année, l'apprentissage de l'équivalence entre fractions permet ensuite d'exprimer une quantité en pourcentage d'une autre. Ainsi 400 £ sur 1000 £ devient 400/1000 du prix, c'est-à-dire 40/100 soit 40 % du prix. Le caractère gras du paragraphe nous indique que cette notion est prioritaire dans les programmes de sixième année, tout comme la capacité des élèves à passer d'une écriture des rationnels à l'autre, entre les fractions, les notations décimales, et les pourcentages (« trouver des équivalences entre pourcentages, écritures décimales et fractions » [*ibid.*]).

En Corée du Sud, il est difficile de connaitre la nature des activités relatives aux pourcentages, car les auteurs parlent de façon très générale de la compréhension de la signification « d'un rapport et d'un taux entre deux quantités » (*op. cit.*, p. 29), tandis que le terme et le symbole des pourcentages ne sont évoqués que dans une liste annexe. Cependant, il est possible de faire quelques déductions à partir de ces considérations sur les rapports et taux, même si la façon dont se construit le concept n'est pas mentionnée. Ainsi, le fait « d'exprimer un taux de différentes façons » (*ibid.*) correspond, selon nous, à des activités de transposition entre les fractions, les notations décimales et les pourcentages, tandis que la recherche du sens des rapports et des taux entre deux quantités correspond soit à l'expression d'une quantité par rapport à une autre (par exemple, 50 sur 100 correspond à 50 %), soit au développement de l'idée que deux rapports peuvent être équivalents (par exemple, 1/5 = 20 %). En outre, la cinquième année est la seule pour laquelle les pourcentages sont mentionnés.

En Floride, si l'on tient compte de l'application des nouveaux programmes en quatrième et en huitième année, on ne trouve que deux intitulés qui concernent les pourcentages, tous en sixième année. Il s'agit d'une part, « d'utiliser des formes équivalentes de fractions, d'écritures décimales et de pourcentages pour résoudre des problèmes », et d'autre part, « de comparer et ordonner des fractions, des notations décimales et des pourcentages, y compris en trouvant leur emplacement approximatif sur la droite numérique » (*op. cit.*, 2007, p. 13). Le travail réalisé avec les pourcentages est donc similaire à celui réalisé avec les écritures décimales, l'idée principale étant que les nombres rationnels peuvent être écrits de différentes façons. C'est pourquoi sont prévues non seulement des activités de conversion, mais également des tâches de comparaison mélangeant des fractions, des notations décimales et des pourcentages.

En France, le symbole des pourcentages est introduit en cinquième année lors de la résolution de problèmes de proportionnalité (« Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux

conversions d'unité, en utilisant des procédures variées [dont la "règle de trois"] » [*op. cit.*, 2008a, p. 39]). En sixième année, il est demandé aux élèves « d'appliquer un taux de pourcentage », de « connaître le sens de l'expression "…% de" et savoir l'utiliser dans des cas simples où aucune technique n'est nécessaire » (*op. cit.*, 2008b, p. 13), ce que l'on peut rapprocher, dans le domaine des fractions, à l'intitulé « Prendre une fraction d'une quantité » (*ibid.*, p. 15). Cependant, les programmes ne prévoient pas de relier les écritures fractionnaires ou décimales aux pourcentages, sauf en neuvième année (« Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, le fait que, par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95 est établi » [*ibid.*, p. 34]), ce qui dépasse le cadre de notre étude.

À Hong Kong SAR, la question des pourcentages occupe une place importante dans le programme de sixième année relatif aux rationnels (« développer une compréhension des pourcentages » [*op. cit.*, p. 42]). Le concept est relié aux autres écritures des nombres rationnels que sont les écritures décimales (« convertir les pourcentages en notation décimale et vice versa » [*ibid.*]) et les fractions (« convertir les pourcentages en fractions et vice versa » [*ibid.*]), avec des conversions effectuées dans les deux sens. Les pourcentages sont également utilisés dans le cadre de la résolution de problèmes, pour être appliqués à un nombre, ou en rechercher la valeur (« résoudre des problèmes simples de pourcentages, incluant le fait de trouver des pourcentages, exprimer la valeur d'un pourcentage d'une quantité, une réduction » [*ibid.*, p. 44]).

En Irlande du Nord, en quatrième année, l'enseignement des fractions est lié aux connaissances des élèves sur les fractions, et plus précisément à leur maitrise des centièmes (« explorer le concept de pourcentage simple, et le relier aux fractions, par exemple en utilisant un carré de cent cases » [*op. cit.*, p. 1]). Néanmoins, le terme « explorer » ne permet pas de définir précisément les tâches qui seront confiées aux élèves, à l'exception de celle consistant à « reconnaitre que 1 % de 100 est 1 » (*ibid.*), qui suggère des activités simples d'application de pourcentages. En cinquième année, les élèves apprennent à passer d'une écriture des rationnels à l'autre (« être sensibilisé aux relations entre les fractions simples, les écritures décimales et les pourcentages » [*ibid.*]). La capacité des élèves à déterminer le pourcentage d'une quantité est désormais explicite (« calculer d'autres pourcentages de quantités, par exemple 75 % de 880 ; 90 % de 50 » [*ibid.*]). Il est intéressant de noter que les auteurs ont envisagé des activités de calcul mental, ce qui n'apparait pas explicitement dans les autres instructions officielles que nous avons consultées (« utiliser des stratégies de calcul mental pour calculer un pourcentage d'une quantité, par exemple 5 % de 240 représente la moitié de 10 % de 240 » [*ibid.*]).

En Ontario, l'idée sous-jacente en sixième année est le développement chez l'élève d'une conscience du caractère unitaire de l'ensemble des rationnels. Les rédacteurs insistent sur le lien entre les pourcentages et les fractions (« Convertir en pourcentage une écriture décimale ou une fraction dont le dénominateur est un diviseur de 100, et vice versa [p. ex., 2/5 = 40/100 = 40 %, 0,18 = 18/100 = 18 %] » [*op. cit.*, p. 70]). En sixième année toujours, la probabilité qu'un évènement se produise doit pouvoir être décrite « à l'aide de fractions et de pourcentages » (*ibid.*, p. 75), alors qu'auparavant seule la forme fractionnaire était exigée. En septième année, les élèves sont invités à « établir et expliquer à l'aide de matériel concret, la relation entre les fractions, les écritures décimales, les pourcentages et les rapports » (*ibid.*, p. 78). Cet item est complémentaire de celui qui apparait un peu plus loin et qui indique

que les élèves doivent « représenter la même valeur sous forme de fraction, sous forme décimale et sous forme de pourcentage (par exemple, 1/2 = 0,5 = 50 %) » (*ibid.*).

Au Québec, la notion de pourcentage intervient pour la première fois en quatrième année. Ainsi, les élèves doivent, « avec l'intervention de l'enseignant, associer un nombre décimal ou un pourcentage à une fraction » (*op. cit.*, 2009a, p. 7). Toutefois, l'utilisation du symbole « % » n'est introduite qu'en cinquième année, pour la réalisation d'activités diverses de conversion (« passage d'une forme d'écriture à une autre : notation fractionnaire, notation décimale, pourcentage », « exprimer par un pourcentage un nombre exprimé en notation fractionnaire et vice versa » et « choisir une forme d'écriture appropriée selon le contexte » [*ibid.*, p. 13]). Les pourcentages sont également utilisés, en concurrence avec les fractions et les écritures décimales, pour exprimer une probabilité (« Utiliser la notation fractionnaire, la notation décimale ou le pourcentage pour quantifier une probabilité » [*ibid.*, p. 21]). En sixième année, les intitulés sont les mêmes. Toutefois, la mention « avec l'intervention de l'enseignant » a disparu, indiquant que les élèves doivent réaliser les tâches proposées en pleine autonomie. Dans l'enseignement secondaire, les élèves sont aussi amenés à utiliser « les pourcentages (calcul du tant pour cent et du cent pour cent) dans de multiples situations : rabais, taxe, agrandissement, réduction, etc. » (*op.cit.*, 2009b, p. 6). Les comparaisons de « nombres exprimés sous différentes formes » (*ibid.*, p. 8) les conduisent à continuer de réaliser des conversions entre les pourcentages et les fractions.

En République d'Irlande, les pourcentages sont introduits en cinquième année (« développer une compréhension des pourcentages simples et les relier aux fractions décimales » [*op. cit.*, p. 91]). Les élèves doivent se montrer capables de passer d'une écriture à l'autre, quel que soit le sens de la conversion (« exprimer des pourcentages en fractions et en notations décimales, et vice-versa » [*ibid.*]). Ils s'entrainent également à calculer des pourcentages simples, ce qui sera pour eux l'occasion, d'une part, de mettre en évidence le lien entre un demi et 0,5 (ou 50 %) et un quart et 0,25 (ou 25 %), et d'autre part, de « calculer des pourcentages simples, par exemple 50 %, 25 %, 10 % » (*ibid.*). En outre, le calcul de pourcentages est à rapprocher de l'utilisation de la fraction-opérateur, à laquelle les rédacteurs ont fait une large place dans ces instructions officielles (« inclure des réductions et des augmentations simples, par exemple 10 % sur tous les jeans, 20 % supplémentaires gratuits » [*ibid.*]). En sixième année, le travail relatif aux pourcentages devient plus dense. Certes, les élèves continuent de s'entrainer à passer des fractions et des écritures décimales aux pourcentages et inversement, mais dans le cadre de la résolution de problèmes, la variété des contextes rencontrés augmente, avec l'introduction des taux d'imposition et des taux d'intérêt (« résoudre des problèmes relatifs aux pertes et profits, aux réductions, à la T.V.A., aux intérêts, aux augmentations, aux diminutions » [*ibid.*]).

À Singapour, en cinquième année, il est demandé aux élèves réaliser des conversions dans les deux sens (« écrire les fractions et les écritures décimales en pourcentages, et vice versa » [*op. cit.*, 2006a, p. 27]). Il leur faudra également trouver et calculer des pourcentages dans le cadre de la résolution de problèmes (« trouver le pourcentage d'un entier » [*ibid.*]). Néanmoins, si ces derniers peuvent comporter deux étapes (« résoudre des problèmes à deux étapes impliquant un pourcentage (réductions, taxes et intérêts annuels) » [*ibid.*]), les auteurs ne manquent pas de limiter le niveau de difficulté des situations rencontrées par les élèves. Ainsi, « l'expression d'une quantité en pourcentage d'une autre, par exemple « A est 60 % de B » », et la comparaison de « deux quantités par pourcentage, par exemple « A est 20 % de plus que B » » ne sont pas au programme, ce qui exclut l'enseignement des ratios. En

sixième année, le travail relatif aux pourcentages se poursuit, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes (« résoudre des problèmes impliquant un pourcentage » [*ibid.*, p. 30]). Ainsi, il ne s'agit plus seulement de calculer un pourcentage, mais de « trouver l'entier étant donnés la part et le pourcentage » ou de « trouver le pourcentage d'augmentation ou de diminution » (*ibid.*). Les auteurs précisent toutefois que « la recherche du pourcentage de profits ou de pertes n'est pas au programme » (*ibid.*).

Dans le Taipei chinois, la cinquième année est l'occasion pour les élèves d'utiliser des pourcentages. Ils doivent être capables de passer d'une écriture des rationnels à l'autre pour résoudre des problèmes (« les élèves peuvent reconnaître des rapports (y compris des pourcentages et des réductions) et leur application dans la vie quotidienne » [*op. cit.*, p. 163]), en sachant que « le calcul de pourcentages est généralement réalisé en arrondissant » (*ibid.*). Les auteurs donnent l'exemple suivant : « il ya 18 filles sur 32 personnes en classe, de sorte que les filles sont 18/32, fraction qui peut être transformée en 0,5625, puis en un pourcentage entier de 56 % » (*ibid.*). La fraction est interprétée comme l'expression d'un rapport entre deux quantités, et les pourcentages constituent une façon parmi d'autres d'exprimer ce rapport. En sixième année, la formulation est plus large et ne comprend plus le terme de « pourcentage » (« Connaitre le sens des proportions et des taux, et les appliquer dans des problèmes tirés de situations du monde réel » [*ibid.*, p. 178]). De plus, les exemples fournis à propos de la notation de ces rapports sont uniquement de type *a*:*b* et *a*/*b*.

B. L'objectif des auteurs concernant les conversions entre fractions et pourcentages

En Angleterre, le point de départ de l'apprentissage des pourcentages est placé en cinquième année. À ce stade de la scolarité, leur enseignement s'appuie sur le fait qu'ils « concernent le nombre de parties par centaine » (*op. cit.*, 2014, p. 139). Plus que des fractions, il semble que les élèves doivent utiliser des représentations visuelles pour construire ce concept : les écritures fractionnaires constituent un moyen parmi d'autres de vérifier leur bonne compréhension du sens des pourcentages (« écrire des pourcentages comme une fraction de dénominateur 100, et sous une forme décimale » [*ibid.*]). De même, dans la résolution de problèmes, les fractions ne sont pas particulièrement mises en avant (« Résoudre des problèmes qui nécessitent de connaitre les pourcentages et les écritures décimales équivalents à 1/2, 1/4, 1/5, 2/5, 4/5 et les fractions ayant un dénominateur multiple de 10 ou 25 » [*ibid.*]).

En Corée du Sud, il n'y a pas de paragraphe consacré aux pourcentages. Le symbole doit pourtant être employé par les élèves de cinquième année, car il est inclus dans la liste des termes et symboles que doivent maitriser les élèves (*op. cit.*, p. 29). Il est rattaché à des développements plus généraux concernant les « rapports et taux », et qui disposent que les élèves doivent « comprendre le sens d'un rapport et d'un taux entre deux quantités » et « exprimer un taux de plusieurs façons » (*ibid.*). Là encore, les fractions ne font pas l'objet d'une mention particulière qui laisserait supposer qu'elles permettent, plus qu'une autre écriture des rationnels, de fonder le concept de pourcentage.

En Floride, une première approche des pourcentages était prévue en quatrième année. Les élèves construisaient alors le concept de pourcentage (et de nombre décimal) à partir de leur connaissance des fractions dans des cas simples (« relier moitiés, quarts, dixièmes et centièmes aux notations décimales et aux pourcentages » [*op. cit.*, 2007, p. 9]). Les programmes de 2014 ont remplacé ceux de 2007 l'année

de passation des évaluations TIMSS, et l'enseignement des pourcentages a été repoussé en sixième année. Toutefois, l'utilisation des fractions comme support de l'apprentissage est également préconisée dans ce texte. Les auteurs imposent de comprendre « un pourcentage d'une quantité comme un taux pour 100 », et les exemples font immédiatement la liaison avec les fractions (« par exemple, 30 % d'une quantité signifie 30/100 de fois la quantité » [*op. cit.*, 2014, p. 1]).

En France, la question des pourcentages est intégrée au chapitre relatif à la proportionnalité. En conséquence, la résolution de problème est mise en avant, et l'exploration des relations entre les différentes écritures des rationnels n'est pas imposée au moment de la présentation du symbole « % » (« Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées [dont la "règle de trois"] » [*op. cit.*, 2008a, p. 39]). Il appartient donc aux enseignants de déterminer les supports qu'ils souhaitent utiliser pour faire comprendre ce concept à leurs élèves.

À Hong Kong SAR, la notion de pourcentage est introduite en sixième année. Si l'on s'en tient à l'ordre des intitulés, les élèves doivent d'abord être confrontés à des activités de reconnaissance (« Reconnaitre des pourcentages à travers des exemples de la vie quotidienne » [*op. cit.*, p. 42]), puis à des activités visant à la compréhension du concept (« Développer une compréhension des pourcentages » [*ibid.*]), pour ensuite développer une capacité à convertir différentes écritures des rationnels (« Convertir les pourcentages en écritures décimales et and vice versa » et « Convertir les pourcentages en fractions et and vice versa » [*ibid.*]). Les fractions ne semblent donc pas jouer un rôle particulier dans l'élaboration du concept de pourcentage.

En Irlande du Nord, il est demandé aux élèves de quatrième année « d'explorer le concept de pourcentage simple, et de le relier aux fractions, par exemple en utilisant un carré de cent cases » (*op. cit.*, onglet « Nombres »). Le lien entre les fractions et la construction du concept de pourcentage est donc rendu explicite par les auteurs des programmes. Néanmoins, l'utilisation de l'expression « et le relier » plutôt que « en le reliant » induit que les professeurs sont susceptibles de proposer d'autres voies pour mener cet enseignement.

En Ontario, les pourcentages sont introduits en sixième année en tant que nouvelle manière d'exprimer des nombres rationnels. Nulle référence à un contexte ou à des problèmes à ce stade de la scolarité : il s'agit simplement de faire le lien entre l'une ou l'autre de ces écritures (« établir et expliquer les relations entre les fractions, les notations décimales et les pourcentages » [*op. cit.*, p. 70]). Toutefois, rien ne permet de dire si ce sont les fractions, les écritures décimales ou un autre support qui permettent d'aboutir à une première compréhension du concept.

Au Québec, nous comprenons à la lecture d'un paragraphe relatif aux fractions que le concept de pourcentage doit être abordé, en quatrième année, par ce biais. Les élèves doivent, « avec l'intervention de l'enseignant, associer un nombre décimal ou un pourcentage à une fraction » (*op. cit*, 2009a, p. 7). Toutefois, dans le vocabulaire que doivent maitriser les élèves, nous ne trouvons pas trace du mot « pourcentage » ou du symbole « % ». Pour que ceux-ci soient censés être maitrisés, il faut attendre la cinquième année. Cette année-là, les activités relatives aux pourcentages sont étendues à l'étude des conversions entre les différentes écritures des nombres rationnels, et les auteurs n'attribuent aucun rôle spécifique aux fractions dans ce travail. Pour notre étude, nous retiendrons comme point de

départ l'apprentissage du concept en quatrième année : ce n'est pas parce que les élèves ne sont pas supposés avoir retenu le terme « pourcentage » et le symbole « % », que ceux-ci ne sont pas employés en classe et introduits dans des exercices.

En République d'Irlande, c'est en cinquième année que les pourcentages sont manipulés pour la première fois. Il s'agit alors de « développer une compréhension des pourcentages simples et les relier aux fractions décimales » (*op. cit.*, p. 91). Encore une fois, cette formulation est ambigüe : l'utilisation de la conjonction « et » peut laisser penser que le concept se construit dans un premier temps en dehors de toute référence aux fractions, et que dans un second temps le lien entre les deux notions est établi. Comme, dans les commenaires associés (« exprimer des pourcentages en fractions et en écritures décimales, et vice-versa » [*ibid.*]), les fractions ne sont pas particulièrement mises en avant, nous considérons qu'elles ne sont pas le support de l'enseignement initial des pourcentages.

À Singapour, les élèves apprennent en cinquième année à « exprimer une partie d'un ensemble sous forme de pourcentage » (*op. cit.*, 2006a, p. 27), ce qui indique moins l'utilisation des fractions comme support de l'apprentissage initial de ce concept, mais plutôt l'emploi de supports visuels. D'ailleurs, dans le paragraphe relatif aux pourcentages, si l'on suit l'ordre des intitulés, les élèves commencent à « utiliser le symbole pourcentage (%) » avant de pouvoir « écrire les fractions et les écritures décimales en pourcentages, et vice versa » (*ibid.*). En outre, les fractions sont citées au même titre que les notations décimales pour les tâches de conversion.

Enfin, dans le Taipei chinois, les fractions sont utilisées par les élèves de cinquième année pour comprendre le concept et réaliser des calculs. D'une part, les auteurs indiquent que « l'étude des rapports constitue une partie du curriculum relatif aux fractions » (*op. cit.*, p. 163). D'autre part, dans les exemples, les pourcentages sont convertis en fractions (« les élèves peuvent déduire la part étant donnée la quantité totale et le pourcentage. Par exemple : il y a un total de 500 élèves dans l'école et 53/100 sont des filles. Combien de filles y a-t-il dans l'école ? La réponse est $500 \times \frac{53}{100} = 265$ filles » [*ibid.*, p. 164]). En outre, ils « savent que 75/100 = 0,75 et peuvent associer cette égalité à 75 % » (*ibid.*), et reconnaissent des égalités telles que « 50 % = 1/2 (une moitié), 25 % = 1/4 (un quart), 75 % = 3/4, 20 % = 1/5, 40 % = 2/5, 60 % = 3/5, 80 % = 4/5, 10 % = 1/10 » (*ibid.*), ce qui montre que ces deux écritures sont très largement associées.

Conclusion de la sous-section

Dans tous les pays de notre corpus, un travail conséquent est prévu à propos des fractions, des écritures décimales et des pourcentages. Certes, il existe des différences relatives à la quantité et à la nature des types de tâches imposés. Toutefois, dans la majorité des textes, les fractions constituent le support de l'enseignement des notations décimales, et l'étude de ces derniers se fait à partir de conversions de représentations, de façon à obtenir des écritures plus simples (comme cela fut le cas historiquement). En France, au Québec, à Singapour et dans le Taipei chinois, il ressort des textes le choix d'une autre voie qui consiste à enseigner les écritures décimales à partir de représentations visuelles (par exemple, une règle graduée ou la

droite numérique), pour effectuer ensuite un rapprochement entre celles-ci et les fractions. Pour l'enseignement des pourcentages, c'est l'inverse : la règle est une élaboration du concept indépendante des fractions, et une liaison qui s'instaure postérieurement à cette première approche. Il n'y a qu'en Floride, au Québec et dans le Taipei chinois, que le concept de pourcentage est construit à partir des fractions, par le biais de conversions de représentations.

Quel que soit le choix effectué par les auteurs, l'enseignement des écritures décimales comme des pourcentages intervient à un moment semblable de la scolarité. Pour les notations décimales, c'est en troisième année (pour quatre pays) ou en quatrième année de scolarité obligatoire (pour sept pays). Tous les participants que nous étudions prévoient donc cet enseignement au plus tard en quatrième année, c'est-à-dire l'année de passation des évaluations TIMSS. Pour les pourcentages, le début de l'enseignement est fréquemment imposé en cinquième année de scolarité obligatoire (pour sept pays), mais trois participants l'instituent en sixième année et un participant en quatrième année.

Participant	Début de l'enseignement des écritures décimales	Début de l'enseignement des pourcentages
Angleterre	4e année	5e année
Corée du Sud	3e année	5e année
Floride	4e année	6e année
France	4e année	5e année
Hong Kong SAR	4e année	6e année
Irlande du Nord	4e année	4e année
Ontario	4e année	6e année
Québec	3e année	5e année
République d'Irlande	3e année	5e année
Singapour	4e année	5e année
Taipei chinois	3e année	5e année

Figure 47. Début de l'enseignement des écritures décimales et des pourcentages pour les élèves ayant participé aux évaluations TIMSS 2015

Outre la question du moment de l'apprentissage, notre interrogation portait sur l'organisation temporelle de l'enseignement des différentes écritures des rationnels, notamment pour savoir si les écritures décimales étaient présentées après que « les élèves maitrisent les fractions à un niveau conceptuel » (Collins et Dacey, *op. cit.*). Au niveau macro-didactique, nous pourrons seulement indiquer si les différentes écritures des rationnels que nous avons évoquées sont présentées la même année, ou au cours d'une année différente. Pour ce faire, nous avons construit un tableau qui présente, de façon synthétique, le moment de l'étude de

chacune d'entre elles. Les années au cours desquelles les élèves apprennent à lire et écrire les fractions (c'est-à-dire au cours desquelles ils associent une fraction et un dessin) sont indiquées en bleu. En vert, nous avons indiqué toutes les années au cours desquelles étaient prévues, dans les programmes, des conversions entre fractions et écritures décimales (quel que soit le sens de la conversion). En rose, ce sont les années au cours desquelles des conversions sont prévues entre fractions et pourcentages.

Dans la majorité des pays, le début de l'enseignement des fractions et celui des notations décimales se déroulent au cours de deux années distinctes. Toutefois, les autorités françaises, ontariennes, québécoises et irlandaises les ont placés la même année, ce qui induit une période de temps plus courte entre l'introduction de ces deux écritures. À l'inverse, Singapour est le seul pays dans lequel deux ans s'écoulent entre le moment où les écritures fractionnaires commencent à être utilisées et le moment où les écritures décimales sont présentées. L'enseignement des pourcentages est en règle générale plus tardif dans la scolarité. Néanmoins, de la même façon que pour les écritures décimales, des différences se font jour chez les participants que nous étudions : la France et le Québec sont les seuls territoires dans lesquels cette forme d'écriture des décimaux est enseignée l'année qui suit l'introduction des écritures fractionnaires (c'est-à-dire avec une durée réduite entre les deux par rapport aux autres pays du corpus). L'Irlande du Nord est le seul pays dans lequel les apprentissages des notations décimales et des pourcentages débutent la même année, suggérant un travail dense autour de la notion de nombre décimal cette année-là.

En ce qui concerne la durée des enseignements, les écarts sont également importants. Dans certains territoires, les conversions entre fractions et écritures décimales sont imposées pendant deux ans (Floride, France, Hong Kong SAR, Singapour), alors que cette durée est au moins deux fois supérieure dans d'autres (Ontario, Québec, République d'Irlande, Taipei chinois). Les conversions entre fractions et pourcentages sont le plus souvent prévues pour une année seulement ; cependant, cette durée est de trois ans au Québec. Si l'on raisonne de façon synthétique, le cas de la France est particulier, dans la mesure où l'introduction des trois écritures étudiées s'effectue sur un temps plus court qu'ailleurs, et que le nombre d'années qui séparent les premières conversions de représentations des dernières est également réduit par rapport aux autres pays du corpus.

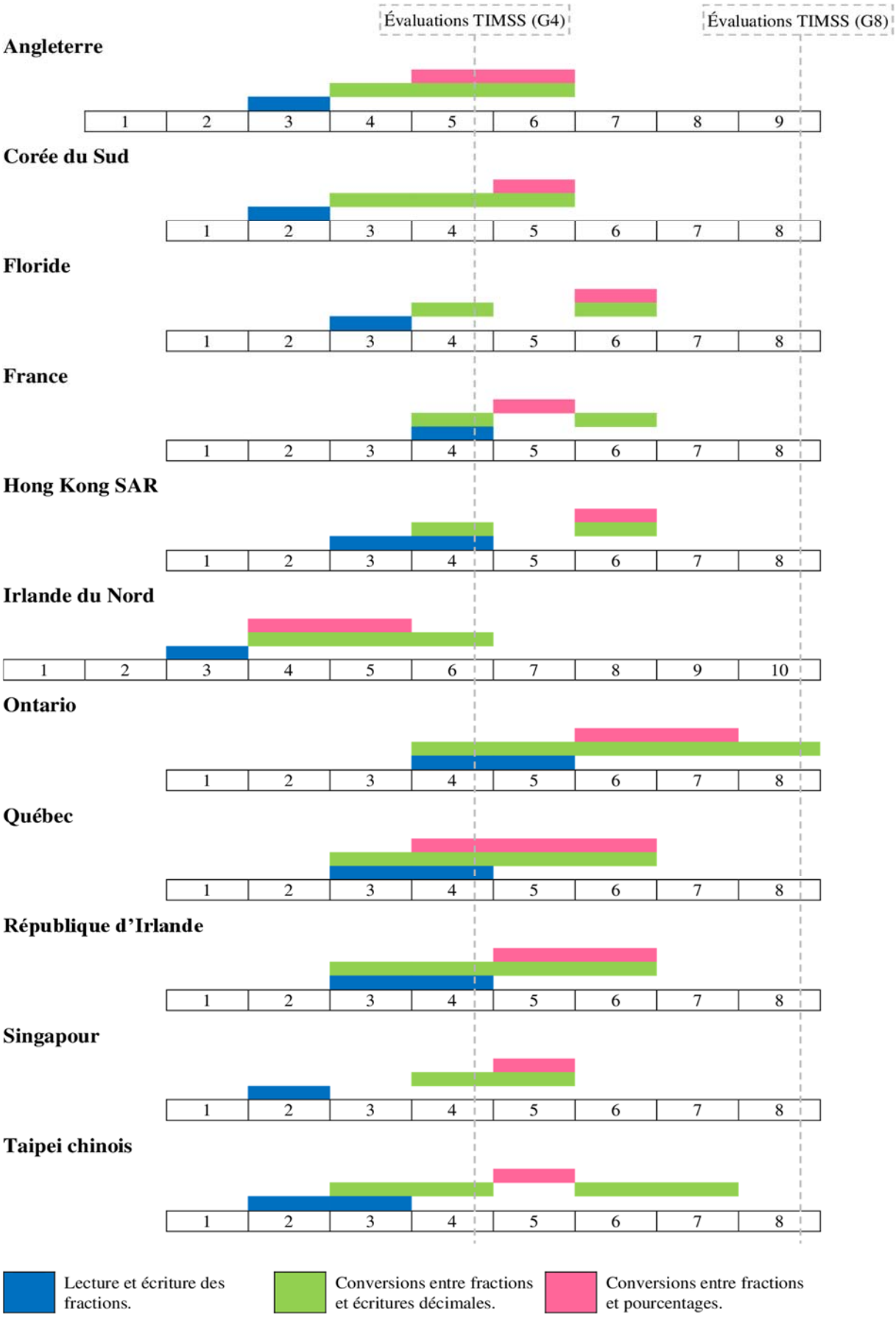


Figure 48. Chronogénèse des liens entre, d'une part, les fractions, et d'autre part, les écritures décimales et les pourcentages dans les instructions officielles de notre corpus (2015)

Par ailleurs, que prévoient les auteurs lorsqu'ils imposent l'enseignement de types de tâches similaires pendant plusieurs années ? Il peut s'agir d'un élargissement des conversions, limitées dans un premier temps à un seul sens, puis effectuées ensuite dans les deux sens. C'est le choix réalisé, par exemple, à Hong Kong SAR. Les nombres mis en jeu sont susceptibles d'évoluer, soit en passant des dixièmes aux centièmes (comme en Ontario), soit en passant des fractions décimales aux fractions non décimales (comme en Irlande du Nord). Une autonomie plus grande de l'élève peut être attendue (comme au Québec), ou une synthèse peut être proposée (comme en France ou en Angleterre : « trouver des équivalences entre pourcentages, notations décimales et fractions » [*op. cit.*, 2006, p. 82]). Néanmoins, les auteurs n'indiquent jamais les conséquences que peuvent avoir la modification des variables didactiques sur les techniques utilisées par les élèves. Par exemple, la lecture des programmes singapouriens ne permet pas de connaitre l'incidence du changement, opéré entre la quatrième et la cinquième année, et consistant à réaliser des conversions avec des millièmes, après avoir travaillé avec des dixièmes et des centièmes : les techniques mises en jeu sont-elles les mêmes ? Les supports de l'apprentissage sont-ils semblables ?

Conclusion de la section consacrée à l'acquisition du concept de nombre rationnel

L'objectif de cette section était de mieux comprendre l'organisation de l'enseignement des nombres rationnels au sein des pays de notre corpus, avec, au cœur de cet apprentissage, les fractions. Or, si les enseignements des écritures décimales et des pourcentages commencent à peu près au même moment, avec une relation qui s'instaure systématiquement et très rapidement avec les fractions, les écarts sont importants lorsqu'on observe la façon dont l'apprentissage des écritures fractionnaires est envisagé dans les textes. Les différences inter-pays sont fortes à propos de la durée, la nature et la quantité des activités préparatoires, au cours desquelles les élèves apprennent à partager en parts égales (soit par le bais d'activités que l'on peut rattacher au concept de fraction, soit par le biais d'activités que l'on peut rattacher au concept de division). Le moment de l'introdution des écritures fractionnaires est très variable, tout comme la durée des activités de conversion qui mettent en jeu des fractions.

En ce qui concerne l'adéquation des textes avec les conclusions des productions scientifiques que nous avons citées, celle-ci n'apparait pas toujours. À propos des conversions de représentations, exposées par Duval (*op. cit.*) comme favorables à l'acquisition de concepts mathématiques, nous avons montré qu'elles étaient présentes dans l'ensemble des curriculums, certes sous des formes diverses, mais de façon réitérée à différents niveaux de la scolarité. En

ce qui concerne la nécessité pour les élèves de maitriser le principe de « partition » (Adjiage, *op. cit.*) avant de manipuler des écritures fractionnaires, nous n'en avons trouvé l'expression que dans quelques instructions officielles, mais pour la majorité d'entre elles, le développement de la capacité à partager en parts égales est subordonné à l'initiative des enseignants. L'introduction des fractions à travers la fraction-mesure, plutôt que par le biais de la fraction partie-tout, afin de faciliter la compréhension des fractions supérieures à 1 (Davydov et Tsyetkovich, 1991 ; Lehrer, 2003) est une proposition qui n'a été intégrée que partiellement, dans trois textes sur onze (les deux significations sont évoquées l'année où les écritures fractionnaires sont introduites). La prise en compte du besoin, pour les élèves, de poser les fondements conceptuels des fractions avant d'aborder d'autres écritures des rationnels (Collins et Dacey, *op. cit.*) est difficile à évaluer. Certes, une minorité de pays impose d'enseigner les écritures fractionnaires et décimales la même année, mais ce choix est-il nécessairement le reflet d'une différence quant à l'abord de cette problématique ? En d'autres termes, une année entière est-elle nécessaire pour établir une compréhension suffisante du concept de fraction avant d'introduire d'autres écritures ? Ces questions ouvrent des perspectives de recherche pour mieux comprendre comment les aspects temporels de l'enseignement influent sur la maitrise du concept de fraction par les élèves. Étant donnée la méthodologie choisie pour notre recherche, nos observations ne peuvent être réalisées qu'à l'échelle d'une année scolaire, et non de façon plus fine, à l'échelle d'une séquence d'enseignement. Sur le plan macro-didactique, la relation entre, d'une part, les performances des élèves à propos de la compréhension du concept de nombre rationnel, et d'autre part, les choix effectués par le législateur, peut toutefois être explorée sous l'angle de :

- la durée et la précocité des activités préparatoires ;
- la durée et la précocité de l'utilisation des écritures fractionnaires ;
- la durée et la précocité des conversions entre fractions et écritures décimales ;
- la durée et la précocité des conversions entre fractions et pourcentages ;
- la durée écoulée entre l'introduction des différentes écritures des rationnels.

Les différences inter-pays importantes que nous avons relevées, au sujet de la participation des fractions à l'élaboration du concept de nombre rationnel, laissent à penser que les écarts sont encore plus grands à propos de l'acquisition des techniques propres aux écritures fractionnaires. En effet, s'il est assez universellement admis que les fractions ont un rôle à jouer dans la construction du concept de nombre rationnel, l'étude de leurs propriétés spécifiques

dépend en partie du rôle qu'elles jouent dans l'organisation sociale. Or, nous avons vu, par exemple, que les systèmes de mesure impliquaient une utilisation variée des fractions dans les pays de notre corpus. Dans la deuxième sous-section, nous allons donc chercher à vérifier l'hypothèse selon laquelle l'enseignement des fractions pour leurs spécificités présente une diversité plus importante que l'enseignement des fractions pour leurs propriétés communes avec d'autres formes d'écriture des rationnels.

Section II. L'acquisition des techniques propres aux fractions

La construction du concept de fraction n'est pas pleinement réalisée à travers son édification en tant que nombre rationnel. Certes, il est possible que le législateur circonscrive les enseignements au minimum nécessaire pour comprendre la notion de nombre décimal. D'ailleurs, les activités mettant en jeu des comparaisons ou des calculs avec des fractions ne sont pas absolument nécessaires pour comprendre l'idée de rompu : ce sont des tâches qui peuvent tout aussi bien être menées avec des écritures décimales. Toutefois, les « outils et techniques » (Douady, 1986, p. 11) mis en œuvre pour résoudre de tels exercices sont bien différents avec des écritures fractionnaires et instaurent en conséquence un « changement de cadre » (*ibid.*, p. 9) qui peut être bénéfique pour l'apprentissage. L'utilité de l'enseignement des techniques propres aux fractions ressort également d'une analyse menée sous l'angle de la théorie anthropologique du didactique : l'utilisation de techniques inédites doit permettre aux élèves d'accéder à savoirs nouveaux. C'est pourquoi nous portons sur les fractions un double regard qui les institue, non seulement comme « support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux », mais également comme « objet d'étude » (Ministère de l'Éducation nationale, 2015, p. 204). En outre, ces techniques spécifiques font l'objet d'une évaluation dans TIMSS et, à un moment ou un autre de la scolarité, toutes les instructions officielles prévoient l'enseignement des comparaisons de fractions et des opérations relatives aux fractions. Nous allons donc comparer la densité et la répartition des apprentissages envisagés pour les premières (sous-section I) comme pour les secondes (sous-section II).

Sous-section I. Comparaison de fractions

Le terme « comparaison » inclut non seulement la possibilité qu'une fraction soit supérieure à l'autre, mais également la possibilité que celles-ci soient égales. Dans les programmes scolaires, ces deux hypothèses font systématiquement l'objet d'intitulés spécifiques. De plus, l'idée que deux fractions peuvent être équivalentes apparait souvent bien

plus tôt dans les instructions officielles que les tâches de comparaison proprement dites. Afin de mieux comprendre comment s'articulent ces deux enseignements, nous avons donc choisi d'étudier successivement la notion d'équivalence entre fractions (§ 1) et les activités de comparaison et de rangement (§ 2).

§ 1. Notion d'équivalence

Comme l'ont indiqué Bruner et Kenney (1966), l'idée que 1/2 et 2/4 aboutissent au même résultat revient à instaurer une équivalence entre deux rapports, c'est-à-dire une première notion de la proportion. Celle-ci se développe jeune, bien plus que le raisonnement proprement dit sur la proportionnalité naisse beaucoup plus tard, à l'adolescence. La question que nous posons est de savoir comment le législateur accompagne le développement de cette première compréhension de la proportion (c'est-à-dire antérieure à celle qui repose sur un raisonnement) à travers l'enseignement du concept de fraction. Dans les textes, il arrive souvent que les auteurs limitent le niveau de difficulté des tâches relatives à la notion d'équivalence en imposant d'abord des activités de reconnaissance (A), puis des activités de production (B). C'est cette distinction que nous avons retenue pour l'organisation de notre plan.

A. Dans des activités de reconnaissance

En Angleterre, la troisième année est l'occasion de découvrir que certaines fractions sont équivalentes. Pour cela, les enseignants proposeront à leurs élèves des supports visuels de la fraction, en particulier des diagrammes (« Utiliser des diagrammes pour comparer les fractions et établir des équivalents » [*op. cit.*, 2006, p. 76]). De même, en quatrième année, les auteurs précisent que la reconnaissance des fractions équivalentes est réalisée au moyen de diagrammes, empêchant ainsi l'emploi précoce d'un algorithme de calcul tel que la multiplication du numérateur et du dénominateur par le même nombre (« Utiliser des diagrammes pour identifier les fractions équivalentes (par exemple, 6/8 et 3/4, ou 70/100 et 7/10) » [*ibid.*, p. 78]). En cinquième année, les représentations visuelles constituent toujours le fondement de la technique permettant d'identifier des fractions équivalentes (« Identifier, nommer et écrire des fractions équivalentes d'une fraction donnée, représentée visuellement, y compris les dixièmes et centièmes. » [*ibid.*]).

En Floride, les élèves apprennent à représenter ou identifier des fractions équivalentes en troisième année (« Utiliser des modèles pour représenter des fractions équivalentes, y compris des fractions supérieures à un, et identifier des représentations d'équivalence » [*op. cit.*, 2007, p. 6]). C'est dire que les tâches de reconnaissance et de production s'effectuent la même année, et puisqu'elles font partie d'un même intitulé, il est possible de considérer que des interactions entre les unes et les autres sont attendues. Selon les programmes de 2007, toutes les activités effectuées par la suite dans le but de maitriser les équivalences entre fractions relèvent de la production. Les tâches de reconnaissance constituent donc une première approche de la notion, puis elles sont remplacées par des tâches plus complexes, notamment la génération de fractions équivalentes pour simplifier des fractions, en quatrième année. Les programmes de 2014 prévoient un apprentissage plus progressif de la capacité à reconnaitre des fractions équivalentes, d'abord dans des cas particuliers, en troisième année

(« Reconnaitre et générer des fractions équivalentes simples, par exemple, 1/2 = 2/4, 4/6 = 2/3. Expliquer pourquoi les fractions sont équivalentes, par exemple, en utilisant un modèle de fraction visuel » [*op. cit.*, 2014, p. 4]), puis de façon générale, en quatrième année (« Expliquer pourquoi une fraction a/b est équivalente à une fraction $(n \times a)/(n \times b)$ en utilisant des modèles de fractions visuels, avec une attention à la façon dont le nombre et la taille des parts diffèrent, même si les deux fractions sont elles-mêmes de la même taille. » [*ibid.*, p. 3]). Comme dans le curriculum précédent, toutes les activités de reconnaissance sont couplées à des activités de production.

En France, on trouve une organisation similaire à celle analysée dans les nouveaux programmes de Floride, avec une première approche des fractions équivalentes réalisée à partir de fractions usuelles, puis une généralisation des régularités observées, l'apprentissage étant étalé sur deux années différentes. Toutefois, si cette progression est organisée entre la troisième et la quatrième année en Floride, elle l'est entre la sixième et la septième année en France. Ainsi, c'est en sixième année que l'on demande aux élèves de « reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre » (*op. cit.*, 2008b, p. 15), tandis qu'en septième année, ils devront « utiliser sur des exemples numériques des égalités du type $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ » (*ibid.*, p. 22). Les auteurs ne précisent pas si cette égalité doit permettre de reconnaitre ou de générer des fractions équivalentes, c'est pourquoi nous avons considéré que les deux possibilités étaient ouvertes par le curriculum, bien que l'annulation de facteurs communs que l'on peut observer dans l'exemple suggère plutôt des tâches de simplifications de fractions. En outre, l'exploration des égalités entre fractions se poursuit en huitième année, avec la mise en relation des fractions équivalentes et les produits en croix (« connaître et utiliser l'équivalence entre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $ad = bc$ [b et d étant non nuls] » [*ibid.*, p. 29]).

À Hong Kong SAR, les élèves de quatrième année doivent « développer le concept de fractions équivalentes » (*op. cit.*, p. 36), ce que nous interprétons comme le fait de comprendre que deux fractions différentes peuvent désigner le même nombre. C'est pourquoi nous estimons que cet intitulé implique, non de produire des fractions équivalentes, mais de les reconnaitre et de les distinguer de celles désignant des nombres différents. Dans la suite de la scolarité, les auteurs ne font plus mention de cette compétence : d'après les instructions officielles, les élèves ont donc une seule année pour acquérir cette notion.

De la même façon, les élèves nord-irlandais de quatrième année sont invités à « étudier l'équivalence des fractions, et regrouper des fractions équivalentes dans des "familles de fractions" » (*op. cit.*, p. 1). Le choix du terme « regrouper » laisse penser que les fractions manipulées par les élèves sont fournies par l'enseignant, et que l'élève n'est pas supposé, à ce stade de la scolarité, générer des fractions désignant toutes le même nombre. La reconnaissance des fractions équivalentes, parce qu'elle est prévue au cours d'une année scolaire seulement, semble servir d'introduction pour des tâches plus complexes relevant de la production de fractions équivalentes.

En Ontario, si l'on considère un cadre légèrement plus large que celui des écritures fractionnaires, l'équivalence entre les nombres rationnels est étudiée pendant quatre ans. En effet, en cinquième année, les élèves « explorent les fractions équivalentes à l'aide de matériel concret » (*op. cit.*, p. 61), ce que l'on comprendra par des tâches de reconnaissance et de production de fractions équivalentes. Cette équivalence ne se traduit pas par un algorithme de calcul, mais s'appuie sur des

représentations visuelles de la fraction (« par exemple, des réglettes » [*ibid.*]). En sixième année, la nature des activités évolue peu. Ainsi, le travail concernant les fractions équivalentes se poursuit, même si quelques inflexions quant aux pratiques attendues dans les classes se déduisent des mots choisis par les auteurs. Ainsi, à propos des supports utilisés par les élèves, on ne parle plus de matériel concret ou illustré, mais de « différentes stratégies » (*ibid.*, p. 70). Plus précisément, l'élève est invité à utiliser « du matériel de manipulation, des dessins et des tableaux » (*ibid.*). Le mot « explorer » a été remplacé par celui, plus précis, de « déterminer », ce qui n'exclut pas les activités de reconnaissance, mais suppose davantage des tâches de production. Enfin, en septième et huitième année, on trouve deux compétences très proches (respectivement « Reconnaître des rapports et des taux équivalents » [*ibid.*, p. 78] et « Identifier des rapports et des taux équivalents » [*ibid.*, p. 86]. Certes, nous ne pouvons affirmer qu'à cette occasion seront identifiées des fractions équivalentes, car tout dépend de la manière dont sont exprimés ces rapports. Cependant, même si les écritures utilisées sont différentes, le concept en jeu est le même. C'est pourquoi nous avons inclus ces développements dans ce paragraphe. Toutefois, dans le souci de respecter le thème de notre étude qui est celui des écritures fractionnaires, nous avons exclu ces compétences de l'analyse comparative inter-pays.

Au Québec, la reconnaissance de l'équivalence entre fractions s'étale sur quatre années consécutives, à partir de la troisième année. Si l'intitulé ne change pas au fil du temps (« vérifier l'équivalence de deux fractions » [*op. cit.*, 2009a, p. 7]), l'autonomie attendue de la part des élèves évolue : jusqu'en cinquième année, ils sont censés réussir ce type de tâches avec l'intervention de l'enseignant, tandis qu'en sixième année, ils doivent pouvoir effectuer cette activité seuls. Selon la progression officielle québécoise, cette connaissance est même supposée être réutilisée en septième et huitième année (*op. cit.*, 2009b, p. 7]), ce qui montre l'importance accordée à cette notion par les auteurs.

En République d'Irlande, la question des fractions équivalentes est abordée très tôt, puisque dès la deuxième année, les élèves sont invités à « discuter la relation entre les moitiés et les quarts » (*op. cit.*, p. 68). Il est donc tout à fait possible qu'à cette occasion, l'égalité 1/2 = 2/4 soit présentée aux élèves. En troisième année, la recherche de fractions équivalentes apparait de façon plus explicite dans les instructions officielles (« Identifier des fractions et leurs formes équivalentes de dénominateur 2, 4, 8 ou 10. Couper et construire des fractions simples de formes géométriques régulières, les noter sous forme de diagrammes ou de schémas » [*ibid.*, p. 68]). Étant donnés les dénominateurs en jeu, on peut penser principalement à la reconnaissance des égalités 1/2 = 2/4 = 4/8 et 1/2 = 5/10, mais cette liste n'a pas un caractère exhaustif. En outre, cet apprentissage s'appuie sur des représentations visuelles de la fraction. Dans la suite de la scolarité, l'étude de cette notion est renouvelée, mais la liste des dénominateurs est élargie en quatrième année aux dénominateurs 3, 5, 6, 9 et 12, c'est-à-dire principalement aux multiples de trois, puis en cinquième et sixième année à tous les dénominateurs entre 2 et 12.

À Singapour, la notion d'équivalence entre fractions n'est présente dans les programmes qu'en troisième année. De plus, les tâches de reconnaissance sont définies par un intitulé très large (« reconnaitre et nommer des fractions équivalentes » [*op. cit.*, 2006a, p. 18]), qui ne renseigne ni sur les supports permettant cet apprentissage, ni sur la nature des fractions en jeu. L'enseignement de cette compétence se déroule donc, comparativement aux autres pays, sur un temps court, et prépare les élèves

à la production de fractions équivalentes, utilisées dans d'autres contextes, comme la simplification de fractions, l'addition de fractions de dénominateurs différents, etc.

Dans le Taipei chinois, la liste des types de tâches à acquérir ne contient, en troisième année, aucun intitulé prévoyant explicitement l'étude des fractions équivalentes. Néanmoins, on trouve dans les commentaires accompagnant la compétence « Les élèves reconnaissent et comparent des fractions ; ils exploitent l'addition et la soustraction de même dénominateur dans des conditions concrètes » (*op. cit.*, p. 128), des exemples d'activités dont l'une consiste à reconnaitre l'égalité entre 2/4 et 1/2. Pour cela, les élèves s'appuient sur des représentations visuelles de la fraction, notamment des pizzas, comme on peut le voir dans l'illustration ci-dessous, extraite du curriculum. Le contexte choisi est celui de la partition d'une unité.

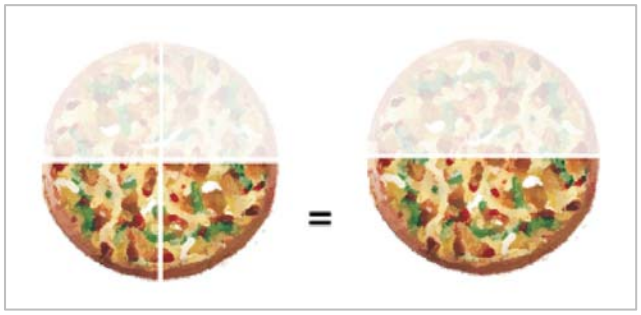


Figure 49. Support visant à faire comprendre aux élèves l'égalité entre 2/4 et 1/2 dans les instructions officielles de troisième année du Taipei chinois (*ibid.*, p. 129)

En quatrième année, l'intitulé devient explicite (« Les élèves peuvent comprendre les fractions équivalentes pour comparer des fractions de dénominateurs différents et passer des fractions simples à une écriture décimale et inversement » [*ibid.*, p. 143]) et l'explication change de nature. En effet, les auteurs s'appuient désormais sur la partition de pluralité pour faire reconnaitre aux élèves que deux fractions différentes peuvent désigner la même quantité, comme on peut le voir dans l'illustration ci-dessous.

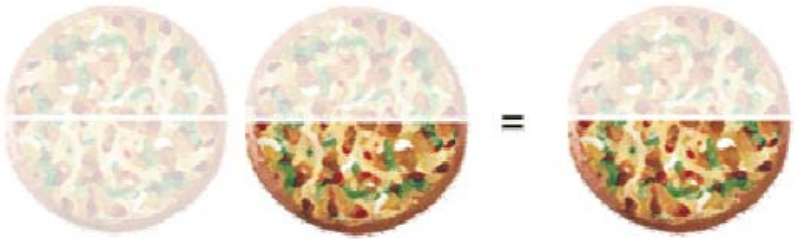


Figure 50. Support visant à faire comprendre aux élèves l'égalité entre 2/4 et 1/2 dans les instructions officielles de quatrième année du Taipei chinois (*ibid.*)

Ces supports visuels sont accompagnés de réflexions touchant aux relations entre les nombres, d'une part pour observer, par exemple, que « $\frac{1\times2}{4\times2} = \frac{2}{8}$ » (*ibid.*, p. 144) parce que quand on subdivise les quarts de pizza en deux, il y a deux fois plus de parts, et que la subdivision d'un quart donne deux parts plus petites parmi huit parts égales ; d'autre part pour observer, par exemple, que « $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ » (*ibid.*) parce que le quotient tiré de $3 \div 9$ est égal au quotient de $1 \div 3$ (quotient établi non par le calcul, mais par l'utilisation d'une schéma similaire à celui que nous avons reproduit ci-dessus).

Dans le curriculum de la Corée du Sud, nous n'avons pas trouvé mention de compétence relative à la reconnaissance des fractions égales. Pour autant, nous avons vu avec les programmes du Taipei chinois que ce type de tâches peut être inclus dans des intitulés plus larges, et que seuls de plus amples développements sont susceptibles de le faire apparaitre. Or, les instructions officielles de la Corée du Sud sont très concises. Donc, la question de savoir si une telle activité est considérée par les professeurs comme faisant partie des directives ministérielles ne peut être résolue qu'en menant une étude locale, ce qui n'est pas l'objet de notre recherche.

B. Dans des activités de production

En Angleterre, l'intitulé « Utiliser des diagrammes pour comparer les fractions et établir des équivalents » (*op. cit.*, 2006, p. 76), présent dans les programmes de troisième année, est difficile à interpréter : s'agit-il seulement de reconnaitre des fractions égales, ou les élèves sont-ils amenés à produire de telles fractions ? Deux éléments nous conduisent à penser que seules les tâches de reconnaissance sont prévues. D'une part, cette activité est liée à des tâches de comparaison, et l'on peut penser que les professeurs devront faire comprendre, non seulement que des fractions sont supérieures ou inférieures à d'autres, mais également que des fractions peuvent désigner la même quantité. D'autre part, l'année suivante, ce ne sont que des tâches d'identification qui sont requises (« Utiliser des diagrammes pour identifier les fractions équivalentes [par exemple, 6/8 et 3/4, ou 70/100 et 7/10] » [*ibid.*, p. 78]). Nous considérons donc que, dans les programmes de 2006 les activités impliquant la production de fractions équivalentes ne débutent qu'en cinquième année, lorsqu'il est demandé aux élèves de « trouver des fractions équivalentes (par exemple 7/10 = 14/20 ou 19/10 = 1 + 9/10) » [*ibid.*, p. 80]. Elle ne s'appuie pas nécessairement sur des diagrammes (puisque ceux-ci ne sont pas évoqués alors qu'ils l'étaient les années précédentes), sans qu'une quelconque technique ne soit évoquée dans les programmes. Cette remarque est valable pour l'activité consistant à ordonner des fractions, qui est proposée en sixième année et fondée sur la production de fractions équivalentes possédant toutes un même dénominateur (« ordonner un ensemble de fractions en les convertissant en fractions avec un dénominateur commun » [*ibid.*, p. 82]). L'équivalence entre fractions permettra ensuite d'exprimer une quantité en pourcentage d'une autre. Ainsi 400 £ sur 1000 £ devient 400/1000 du prix, c'est-à-dire 40/100 soit 40 % du prix. La production de fractions équivalentes est également utilisée pour simplifier des fractions (« simplifier des fractions en annulant des facteurs communs » [*ibid.*]). De même, dans les programmes de 2014, les élèves doivent, en cinquième année, « identifier, nommer et écrire des fractions équivalentes d'une fraction donnée, représentée visuellement, y compris les dixièmes et centièmes. » (*op. cit.*, 2014, p. 139). Les élèves ayant passé les évaluations TIMSS ont reçu un enseignement faisant référence à ces nouvelles directives en 2015. Ces dernières n'apportent toutefois pas de changement décisif en ce qui concerne les comparaisons de fractions.

En Corée du Sud, c'est en cinquième année que les élèves sont invités à « créer des fractions équivalentes en utilisant les propriétés des fractions » (*op. cit.*, p. 26). Il est probable que cette compétence soit réinvestie pour réaliser nombre de tâches étudiées la même année, et qui peuvent être résolues en produisant des fractions équivalentes. Ainsi, les élèves devront « savoir comment simplifier et réduire des fractions » (*ibid.*), « comparer des fractions de dénominateurs différents » et « additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents », ce qui peut être fait en créant des fractions de même dénominateur. Certes, les rédacteurs laissent toute liberté aux enseignants pour choisir la méthode

qui leur semble la plus appropriée. Cependant, rien n'est dit sur l'emploi d'une règle de calcul ou de modèles visuels de la fraction. De plus, la lecture des termes que les élèves doivent connaitre (« diviseur, diviseur commun, plus grand commun diviseur, multiple commun, plus petit commun multiple, réduction de fraction, réduction au même dénominateur, fraction irréductible ») nous indique que les propriétés des nombres doivent être utilisées. Au cours des années suivantes, aucune référence n'est faite à la production de fractions équivalentes ou à l'étude de notions susceptibles de mettre en jeu cette compétence.

En Floride, les activités de reconnaissance et de production débutent simultanément en troisième année. Il s'agit alors « d'utiliser des modèles pour représenter des fractions équivalentes, y compris des fractions supérieures à un, et identifier des représentations d'équivalence » (*op. cit.*, 2007, p. 6). En quatrième année, il nous faut distinguer ce qui est attendu dans les programmes de 2007, et ce qui est prévu par les instructions officielles de 2014. En 2007, les élèves devaient utiliser leurs connaissances pour « générer des fractions équivalentes » (*ibid.*, p. 9), ce qui supposait la création éventuelle d'une liste de plusieurs fractions équivalentes, et « simplifier des fractions » (*ibid.*), ce qui impliquait le choix d'un dénominateur approprié. Dans les programmes de 2014, applicables pour l'année des évaluations TIMSS, le principe selon lequel « une fraction a/b est équivalente à une fraction $(n \times a)/(n \times b)$ » est utilisé « pour reconnaître et générer des fractions équivalentes » (*op. cit.*, 2014, p. 3), la dernière partie de l'intitulé étant assez proche de celle de 2007. En revanche, les activités susceptibles de mettre en jeu la production de fractions équivalentes sont différentes, puisque les tâches de simplification sont enseignées plus tardivement dans la scolarité, et qu'à l'inverse, la comparaison de « deux fractions avec des numérateurs et des dénominateurs différents, par exemple en créant des dénominateurs ou des numérateurs communs […] » (*ibid.*, p. 4) a été incluse dans les instructions officielles de quatrième année. Cette dernière compétence était auparavant enseignée en cinquième année, au cours de laquelle les élèves étaient supposés « représenter l'addition et la soustraction de nombres décimaux et de fractions ayant des dénominateurs communs ou différents, en utilisant des modèles, la valeur des chiffres ou des propriétés » (*op. cit.*, 2007, p. 10) : il nous semble que l'utilisation des propriétés relatives aux fractions correspondait à la recherche d'un dénominateur commun. De plus, cela permettra aux élèves « d'identifier et relier des nombres premiers et composites, des facteurs et des multiples dans le contexte de fractions » (*ibid.*, p. 11). Cependant, l'utilisation de fractions équivalentes n'étant pas explicite, nous l'avons écartée de l'analyse pour cette année-là.

En France, selon les instructions officielles, il faut attendre la septième année pour que les élèves commencent à « utiliser sur des exemples numériques des égalités du type $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ » (*op. cit.*, 2009b, p. 22), et donc soient invités à produire des fractions équivalentes. En effet, seule la reconnaissance de cette équivalence était requise en sixième année. Le sens de l'égalité suggère des tâches de simplification de fractions par l'annulation de facteurs communs. On peut supposer également que c'est à dessein que les auteurs ont placé à la suite la compétence conduisant à « additionner et soustraire deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où […] le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre » (*ibid.*). La maitrise des fractions équivalentes sera ainsi réinvestie pour produire une fraction avec un dénominateur commun. En outre, les tâches de comparaison impliquant des fractions de dénominateurs différents et la recherche d'un dénominateur commun n'apparaissent qu'en huitième année (« Comparer deux nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire, en particulier connaître et utiliser l'équivalence entre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $ad = bc$ [b et d étant non nuls] » [*ibid.*, p. 29]).

À Hong Kong, après avoir développé le concept de fractions équivalentes, les élèves de quatrième année explorent « les méthodes pour [en] convertir » [*op. cit.*, p. 36]). L'utilisation d'un article défini (« *the methods* ») suppose une certaine exhaustivité dans la présentation des techniques permettant de passer d'une fraction à une autre équivalente, et donc l'utilisation de supports visuels comme des relations entre les nombres. Cependant, un paragraphe entier des programmes de quatrième année est consacré à la recherche des facteurs communs et aux multiples, ce qui peut inciter les enseignants à privilégier les méthodes de calcul par rapport à un modèle visuel. De plus, la nécessité de « réduire la réponse à sa plus simple expression » (*ibid.*) ou, en cinquième année, l'apprentissage de « l'addition et la soustraction de fractions simples avec différents dénominateurs, pour des sommes impliquant au plus deux facteurs » (*ibid.*, p. 38) vont rendre indispensable l'emploi d'une technique fondée sur les relations numériques. En revanche, les comparaisons de fractions de dénominateurs différents ne passent pas par la recherche d'un dénominateur commun, mais par la conversion en écritures décimales.

En Irlande du Nord, le cheminement est assez similaire. Après avoir appris à « regrouper des fractions équivalentes dans des "familles de fractions" » [*op. cit.*, p. 1]), les élèves de quatrième année sont invités à « étendre la compréhension de l'équivalence des fractions », ce qui passe par la production de fractions équivalentes, comme le montre l'exemple fourni par les auteurs (« 1/5 = 2/? = 4/? » [*ibid.*]). La même année, ils réinvestissent leur maitrise des fractions équivalentes pour réaliser des additions et des soustractions (« En utilisant les connaissances relatives aux fractions équivalentes, ajouter et soustraire des fractions simples, par exemple 1/2 + 1/4 + 1/8 = 4/8 + 2/8 + 1/8 ; 5/6 – 1/3 » [*ibid.*]). En revanche, rien n'est dit sur la technique à employer pour comparer des fractions de dénominateurs différents en cinquième année.

En Ontario, nous avons indiqué précédemment que, en cinquième année, l'intitulé imposant « d'explorer les fractions équivalentes à l'aide de matériel concret » (*op. cit.*, p. 61) était difficile à interpréter en raison du caractère peu précis du terme « explorer ». C'est pourquoi nous avons considéré que des tâches de reconnaissance et de production de fractions équivalentes étaient envisageables à ce stade de la scolarité. L'année suivante, la formulation utilisées dans la progression officielle des apprentissages indique plus clairement des activités impliquant la production de fractions équivalentes, puisqu'il s'agit de « déterminer des fractions équivalentes à l'aide de différentes stratégies (p. ex., matériel de manipulation, dessin, tableau) » (*ibid.*, p. 70). Les tâches de production semblent donc moins développées que les tâches de reconnaissance, d'autant plus que rien n'indique, dans les programmes, que la maitrise des fractions équivalentes est utilisée pour comparer, additionner ou soustraire des fractions.

Au Québec, la reconnaissance et la production de fractions équivalentes sont enseignées au cours des mêmes années, c'est-à-dire entre la troisième et la cinquième année, pour le cas où le professeur est amené à soutenir le travail de l'élève, et en sixième année, en pleine autonomie. Cependant, les deux intitulés n'appartiennent pas au même paragraphe, puisque les tâches de reconnaissance sont imposées dans le paragraphe relatif au sens et l'écriture des nombres, tandis que les tâches de production sont imposées dans le paragraphe relatif aux opérations sur les nombres (« construire un ensemble de fractions équivalentes » [*op. cit.*, 2009a, p. 12]). Cela montre la volonté des auteurs de faire construire cette compétence par les élèves dans le but de faciliter les calculs portant

sur les opérations. D'ailleurs, à la suite de cet intitulé, on en trouve deux autres pour lesquels la production de fractions équivalentes pourra être utilisée : « réduire une fraction à sa plus simple expression » et « Additionner et soustraire des fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre » (*ibid.*).

En République d'Irlande, il nous semble qu'aucune distinction ne doit être faite, en ce qui concerne l'utilisation des fractions équivalentes, entre l'intitulé de quatrième année, qui impose « d'identifier des fractions et leur forme équivalente de dénominateur 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 12 » (*op. cit.*, p. 68), et celui de cinquième année, qui impose de « comparer et ordonner des fractions et identifier des fractions équivalentes avec des dénominateurs de 2 à 12 » (*ibid.*, p. 89). Tous deux prévoient simplement la reconnaissance des fractions équivalentes, le premier lors d'activités d'identification et de représentation, le second lors d'activités de comparaison. Évidemment, on ne peut exclure que les professeurs ajoutent des activités de production de fractions équivalentes, mais ce n'est pas ce qui ressort, selon nous, des injonctions ministérielles. En revanche, celles-ci prévoient explicitement le passage d'une fraction à une autre équivalente, non comme une activité à part entière, mais pour réaliser des additions et des soustractions (d'abord en cinquième année : « Additionner et soustraire des fractions simples et des nombres mixtes simples. Utiliser des fractions équivalentes pour simplifier les calculs » [*ibid.*], puis en sixième année : « Ajouter et soustraire des fractions simples et nombres mixtes simples. Le dénominateur commun devra être trouvé en énumérant les multiples » [*ibid.*]). Cette mention de l'utilisation des fractions équivalentes n'apparait pas à propos des comparaisons de fractions de dénominateurs différents.

À Singapour, en plus des tâches d'identification (« reconnaitre et nommer des fractions équivalentes » [*op. cit.*, 2006a, p. 18]), les élèves de troisième sont amenés à réaliser des tâches de production de fractions égales (« lister les huit premières fractions équivalentes à une fraction donnée » [*ibid.*]). Ils doivent également être capables « d'écrire la fraction équivalente à une fraction donnée en connaissant le dénominateur ou le numérateur » (*ibid.*) et réduire des fractions à leur plus simple expression, ce qui suppose le choix d'un dénominateur approprié (« exprimer une fraction sous sa forme la plus simple » [*ibid.*]). À ce stade de la scolarité, les dénominateurs ne doivent pas excéder douze, cependant, nous constatons cette année-là une grande densité dans les compétences à acquérir à propos de cette notion des fractions équivalentes. De plus, ces dernières pourront être utiles pour « comparer et ordonner des fractions de dénominateur différent » (*ibid.*), en concurrence avec la technique visant à comparer les fractions à une fraction de référence telle que 1/2, ainsi que pour « additionner et soustraire deux fractions liées à l'intérieur de l'entier » (*ibid.*, p. 19).

Dans le Taipei chinois, les élèves construisent le concept de fraction équivalente en quatrième année. Les auteurs précisent que « l'étude des fractions équivalentes constitue le fondement pour l'addition et la soustraction de fractions dans son principe général » et qu'elle « peut aussi constituer une première expérience de la réduction et de l'expansion de fractions » (*op. cit.*, p. 134). Ils indiquent dans le même temps que « cet item spécifique met l'accent sur la compréhension de l'équivalence entre fractions et les opérations seront enseignées en cinquième année » (*ibid.*). Toutefois, cette maitrise de l'équivalence entre fractions est déjà utilisée pour comparer des fractions, par exemple « en faisant comprendre aux élèves que 3/4 et 6/8 sont des fractions équivalentes et en faisant comparer deux fractions en remplaçant les dénominateurs différents par des fractions équivalentes (seulement dans le

cas où un dénominateur est un multiple de l'autre dénominateur), telles que 3/4 = 6/8 > 5/8 » (*ibid.*). Effectivement, l'année suivante, les élèves vont apprendre spécifiquement à étendre et réduire les fractions (« [ils] peuvent produire des fractions équivalentes en réduisant et en multipliant les dénominateurs » [*ibid.*, p. 158]). Plus généralement, ils devront être capables « trouver un multiple commun aux dénominateurs originaux et utiliser ce principe pour comparer, additionner, soustraire des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*).

§ 2. Comparaison et rangement

Une distinction nous semble devoir être faite entre les activités de comparaison et les activités de rangement, quand bien même les techniques utilisées par les élèves sont assez similaires dans les deux cas (les rangements constituant une succession de comparaisons). En effet, cela nous permettra de rechercher par la suite si « un enseignement riche et exigeant favorise des performances élevées » (Martinez et Roditi, *op. cit.*, p. 113) : la complexité des secondes, qui impliquent un nombre de fractions supérieur à deux, est plus grande que celle des premières, qui impliquent deux fractions seulement. En outre, des capacités organisationnelles (ou mnémoniques) supplémentaires sont nécessaires dans le cas des rangements, afin de retenir le résultat des différentes comparaisons effectuées. Nous allons donc présenter ce que chaque participant de notre corpus impose respectivement pour les tâches de comparaison (A) et pour les tâches de rangement (B).

A. Les tâches de comparaison

En Angleterre, dans les instructions officielles de 2006, la notion de comparaison apparait en troisième année et à ce stade de la scolarité, celles-ci s'appuient encore sur des représentations graphiques (« Utiliser des diagrammes pour comparer les fractions et établir des équivalents », *op. cit.*, 2006, p. 76). La formulation très générale utilisée par les auteurs laisse la possibilité de proposer aux élèves, non seulement des comparaisons de fractions de même dénominateur, mais également des comparaisons de fractions de dénominateurs différents. En 2014, les auteurs ont affiné la progression dans ce domaine, en indiquant que les élèves devaient « comparer et ordonner des fractions unitaires et des fractions avec le même dénominateur » (*op. cit.*, 2014, p. 125) en troisième année, alors que le cas où les dénominateurs sont liés est repoussé en cinquième année (« Comparer et ordonner des fractions dont les dénominateurs sont tous des multiples du même nombre » [*ibid.*, p. 139]).

On trouve une progression similaire en Corée du Sud, où les comparaisons sont limitées au cas où les dénominateurs sont identiques jusqu'en quatrième année (d'abord, en troisième année, avec des fractions inférieures à 1 : « Savoir comment comparer la taille des fractions propres de même dénominateur et de fractions unitaires simples » [*op. cit.*, p. 18], puis avec des fractions supérieures à 1 : « Comparer la taille de fractions de même dénominateur » [*ibid.*, p. 21]). Les fractions comparées sont soit des fractions unitaires, soit des fractions de même dénominateur, suggérant un raisonnement sur la taille des parts, et sa relation avec le nombre de parts dans l'unité. Toutefois, le choix des stratégies de comparaison est laissé à la discrétion des enseignants. Cette restriction est levée en cinquième année (« Comparer les tailles de nombres en écriture décimale et de fractions » [*ibid.*, p. 26).

En Floride, dans les instructions officielles de 2007, les élèves étaient amenés à réaliser des comparaisons variées dès la troisième année (« Comparer et ordonner des fractions, y compris des fractions supérieures à un, en utilisant des modèles et des stratégies » [*op. cit.*, 2007, p. 6-7]). Les auteurs n'indiquaient pas quels étaient les modèles et stratégies qui devaient être employés par les élèves. Cependant, ces derniers étaient invités à « décrire comment la taille de la partie fractionnaire est en relation avec le nombre de morceaux de taille égale dans l'entier », c'est-à-dire qu'à partir de représentations visuelles de la fraction, ils devaient conclure que plus le dénominateur est grand, plus la part est petite, et inversement. Quant aux autres stratégies que celles fondées sur une représentation visuelle de la fraction, on peut penser à l'utilisation d'un dénominateur commun ou à la comparaison à une fraction de référence telle que 1/2, mais les auteurs laissent toute liberté aux enseignants pour déterminer celles qui leur paraissent devoir être maitrisées par les élèves. En 2014, les auteurs des instructions officielles ont maintenu les comparaisons de même numérateur ou de même dénominateur en troisième année (*op. cit.*, 2014, p. 4), en demandant aux professeurs de privilégier l'utilisation de modèles visuels. Toutefois, ils ont repoussé les comparaisons de dénominateurs différents en quatrième année (« Comparer deux fractions de numérateurs ou de dénominateurs différents » [*ibid.*, p. 4]). En outre, les techniques permettant aux élèves de réaliser ces comparaisons ont été explicitées : il s'agit effectivement de raisonner « en créant des dénominateurs ou des numérateurs communs, ou en les comparant à une fraction repère telle que 1/2 » (*ibid.*), et la justification de leurs réponses par les élèves continue d'être exigée à partir d'un modèle visuel de la fraction. Plus tard dans la scolarité, les élèves comparent différentes écritures des nombres rationnels (en sixième année : « Comparer et ordonner des fractions, des écritures décimales et des pourcentages, y compris en trouvant leur emplacement approximatif sur la droite numérique » [*op. cit.*, 2007, p. 13]). Si la droite numérique est évoquée, elle ne constitue une technique susceptible d'être utilisée parmi d'autres. En effet, en utilisant la locution « y compris », les auteurs permettent d'enseigner d'autres techniques de comparaison, telles que conversion d'une écriture en une autre, des modèles visuels, etc.

En France, les tâches de comparaison de fractions n'apparaissent pas dans les instructions officielles de l'école primaire. Toutefois, des tâches permettent aux élèves de développer une notion des relations d'ordre avec des nombres en écriture fractionnaire (par exemple, les encadrements, en cinquième année : « Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs » [*op. cit.*, 2008, p. 38], ou le placement de fractions sur la demi-droite numérique, en sixième année : « Placer le quotient de deux entiers sur une demi-droite graduée dans des cas simples » [*op. cit.*, 2008b, p. 15]). Dans les instructions officielles de l'enseignement secondaire, nous n'en avons trouvé trace qu'en classe de quatrième, c'est-à-dire en huitième année de scolarité obligatoire (« Comparer deux nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire, en particulier connaitre et utiliser l'équivalence entre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et ad = bc [b et d étant non nuls] » [*op. cit.*, 2009b, p. 29]). Nous savons que les manuels scolaires de cinquième année et de sixième année proposent fréquemment des exercices impliquant des comparaisons de fractions. Toutefois, dans les textes, le terme « comparer » n'est pas employé, à ce stade de la scolarité, à propos des fractions[1].

1. Voir, pages 165-166, la note 1.

Les instructions officielles de Hong Kong SAR ne sont pas très développées concernant la comparaison de fractions. En troisième année, elles imposent la comparaison de fractions de même dénominateur ou de même numérateur (*op. cit.*, p. 32), sans plus de précisions. En sixième année, elles indiquent que les élèves doivent comparer des fractions en les convertissant en écritures décimales (*ibid.*, p. 42), en relation avec le travail réalisé par les élèves dans le domaine des changements de registre sémiotique (c'est cette année-là que sont tissés les liens entre les fractions, les notations décimales et les pourcentages, quel que soit le sens de la conversion). En revanche, rien n'est dit sur la possibilité de comparer des fractions de dénominateurs différents en leur trouvant un dénominateur commun ou en les comparant à une fraction repère.

En Irlande du Nord, les auteurs n'évoquent que des tâches de rangement, à travers l'utilisation du terme « ordonner » (par exemple, en quatrième année, les élèves doivent « explorer et ordonner les fractions avec le même dénominateur [1/6, 2/6, 5/6] et où le numérateur est un [1/3, 1/5, 1/8] » [*op. cit.*, p. 1]). Si l'on considère que ces tâches sont plus complexes à réaliser que celles visant simplement à comparer deux fractions, alors il est permis de penser que des activités de comparaison sont implicitement prévues par les textes. Dans ce cas, l'idée de ranger des fractions n'est pas entendue au sens strict comme le fait de comparer un ensemble de fractions comportant plus de deux éléments, mais de façon plus souple comme le fait de comparer des fractions, quel que soit le nombre de fractions en jeu. Dès lors, nous considérons que les élèves nord-irlandais seront amenés à comparer des fractions, outre en quatrième année, en cinquième année (« ordonner des fractions avec des numérateurs et des dénominateurs différents, par exemple 1/3, 3/4, 5/8 » [*ibid.*]). Une analyse plus approfondie de cette progression est proposée dans le paragraphe relatif aux rangements.

Dans l'Ontario, la progression est assez similaire, quoi que beaucoup plus longue. La quatrième année est l'occasion pour les élèves de commencer à comparer des fractions « ayant un même numérateur » ou « ayant un dénominateur commun » (« Comparer et ordonner des fractions ayant un même numérateur à l'aide de matériel concret ou illustré [p. ex., réglettes, bandes de carton, cercles de fraction, jetons] » et « Comparer et ordonner des fractions ayant un dénominateur commun à l'aide de matériel concret ou illustré » [*op. cit.*, 2005, p. 51]). En cinquième année, les activités de comparaison impliquent des fractions de dénominateurs différents. De plus, elles ne sont plus soutenues par du matériel concret ou illustré, et leur réalisation s'appuie sur une fraction de référence, en l'occurrence le demi ou les quarts (« comparer deux fractions en utilisant une fraction repère telle que 1/4, 1/2, 3/4 et 1 [p. ex., 8/14 est plus grand que 7/16, car 8/14 est plus grand que 1/2 et 7/16 ne l'est pas) » [*ibid.*, p. 61]) ou sur la demi-droite numérique (« Comparer et ordonner des fractions propres et supérieures ou égales à 1 et des nombres décimaux jusqu'aux centièmes (p. ex., sur une droite numérique) » [*ibid.*]). La formulation de l'intitulé, ambigüe, ne permet pas de savoir avec certitude si les auteurs ont envisagé des comparaisons de nombres rationnels exprimés sous des formes différentes (fractionnaires et décimales), ou les comparaisons doivent être effectuées séparément avec des fractions et avec des écritures décimales. Néanmoins, l'idée centrale est exprimée clairement : pour comparer des rationnels, les élèves doivent avoir une représentation, même approximative, de la quantité évoquée par la fraction. En sixième année, le champ des techniques envisageables pour comparer deux fractions s'élargit encore (« Comparer et ordonner des nombres fractionnaires et des fractions en utilisant une variété de stratégies [p. ex., matériel concret, dessin, droite numérique, fraction repère] » [*ibid.*, p. 70]. Cette variété suggère que, tandis qu'auparavant celles-ci étaient étudiées l'une après l'autre, la responsabilité du choix de la

technique la plus appropriée est désormais transférée à l'élève. Par ailleurs, nous remarquons que, parmi les stratégies évoquées par les auteurs, l'utilisation d'un dénominateur commun n'apparait pas. Certes, la liste n'est pas exhaustive, mais cette absence nous semble significative : ce n'est pas une technique à privilégier à ce stade de la scolarité. C'est en huitième année que toute liberté est laissée aux enseignants dans le choix des fractions comme dans le choix des techniques (« Comparer, ordonner et représenter des fractions et des nombres décimaux » [*ibid.*, p. 86]).

Au Québec, les élèves doivent être capables de « comparer une fraction à 0, à ½ ou à 1 » (*op. cit.*, 2009a, p. 7), d'abord avec l'intervention de l'enseignant (en troisième année), puis de façon autonome (en quatrième année). Entre la cinquième et la huitième année, cette compétence est réutilisée par les élèves, mais l'apprentissage est supposé être achevé. L'originalité de cette progression est de prévoir, pour le reste, non pas des activités de comparaison, mais des tâches de rangement, avec l'emploi du verbe « ordonner ». De plus, ces tâches, que nous détaillerons dans le paragraphe suivant, sont postérieures à celle visant à comparer des fractions à un nombre repère, y compris lorsque les fractions en jeu sont de même dénominateur, ou de même numérateur.

En République d'Irlande, les activités de comparaison portent, en troisième et en quatrième année, sur des fractions « de dénominateurs bien choisis », sans que cette notion ne soit précisée (« Comparer, ordonner des fractions de dénominateurs bien choisis et les placer sur la droite numérique » [*op. cit.*, p. 68]). À la lecture des autres instructions officielles, nous suggérons que cette expression signifie à la fois des dénominateurs qui ne sont pas trop grands, et des dénominateurs dont l'un est un multiple de l'autre. Elle disparait cependant en cinquième année, puisque la liste des dénominateurs susceptibles d'être mis en jeu est établie de façon exhaustive (« Comparer et ordonner des fractions et identifier des fractions équivalentes avec des dénominateurs de 2 à 12 » [*ibid.*, p. 89]). De plus, la demi-droite numérique n'est plus mentionnée en tant que support de l'apprentissage : elle est remplacée par d'autres : « matériel concret, pliages en papier, et graphiques » (*ibid.*). La même année, un deuxième intitulé concernant la comparaison de fractions est inclus dans les programmes. Il s'agit de « comparer et ordonner des fractions et des nombres décimaux » (*ibid.*, p. 91). Comme il appartient au paragraphe relatif aux nombres décimaux, à un endroit où sont évoqués les liens entre les différentes écritures des rationnels, nous considérons que les fractions et les écritures décimales seront mélangées dans des exercices communs. Pour réaliser ces tâches, les élèves pourront s'appuyer sur l'utilisation « de matériel concret et d'argent, […] de diagrammes ou sur la droite numérique » (*ibid.*). En sixième année, la droite numérique est à nouveau évoquée (« Comparer et ordonner des fractions et identifier des fractions équivalentes. Ordonner des fractions équivalentes sur la droite numérique et sur des diagrammes » [*ibid.*, p. 89]), si bien qu'il est difficile de dégager une logique dans la progression des aides qui doivent être fournies par les professeurs pour soutenir l'apprentissage relatif aux comparaisons de fractions.

À Singapour, l'apprentissage des comparaisons impliquant des fractions est à la fois court et précoce. Des tâches de comparaison doivent être proposées par les enseignants dès la deuxième année, à condition qu'il s'agisse de fractions unitaires ou que les fractions soient de même dénominateur (« comparer et ordonner des fractions dont le numérateur est 1 ou dont le dénominateur est identique » [*op. cit.*, 2006a, p. 15]). Comme pour les autres activités relatives aux fractions, le cadre de l'étude est limité aux fractions propres de dénominateur inférieur à douze. En troisième année, les enseignants

peuvent donner à comparer des fractions de dénominateurs différents (« comparer et ordonner des fractions de dénominateur différent » [*ibid.*, p. 18]). C'est au cours de cette même année que les élèves singapouriens apprennent à « comparer des fractions à la moitié » (*ibid.*). Dans les nouveaux programmes, la formulation change pour donner aux professeurs des pistes d'activités, et les techniques envisagées par les auteurs sont plus variées. Cependant, le moment de l'apprentissage reste identique (« Travailler en groupes pour comparer des fractions en utilisant différentes stratégies telles que l'élaboration d'un schéma, la comparaison par rapport à la moitié, et expliquer les stratégies utilisées » et « Parvenir à la maîtrise des fractions équivalentes et des comparaisons de fractions en jouant avec des cartes de fractions [images et symboles], y compris des jeux numériques » [*op. cit.*, 2012a, p. 43-44]). Au-delà de la troisième année, aucun item des instructions officielles ne fait référence à la comparaison de fractions.

Dans le Taipei chinois, en deuxième année, les élèves comprennent que plus le dénominateur est grand, plus la part est petite (« comparer la taille des différentes fractions unitaires dans des conditions concrètes » [*op. cit.*, p. 113]), ce qui leur permet de dire, par exemple, que « 1/3 de pizza > 1/5 de pizza » parce que « partager une pizza entre trois personnes conduit chaque personne à obtenir un plus gros morceau que lorsque cette pizza est partagée entre cinq personnes » (*ibid.*, p. 114). L'exploration des comparaisons de fractions se poursuit en troisième année, avec cette limite que les fractions comparées doivent être de même dénominateur. En revanche, elles ne sont pas nécessairement inférieures à 1. Ces deux conditions ne se déduisent pas de l'intitulé (« Les élèves reconnaissent et comparent des fractions » [*ibid.*, p. 128]), mais des commentaires qui lui sont associés. En outre, les auteurs précisent que cet apprentissage est contextualisé en lien avec des situations de la vie quotidienne et que les élèves peuvent travailler sur des collections, et non pas seulement à partir d'unités continues. Du matériel concret reste à la disposition des élèves pour faciliter les comparaisons et pouvoir raisonner sur la taille des fractions, conduisant les élèves à comprendre que les comparaisons ne sont valables que si elles se réfèrent à la même unité. En quatrième année, les élèves vont pouvoir utiliser « leur connaissance des fractions équivalentes pour comparer des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*, p. 143). Même si la référence à des objets du quotidien subsiste, l'apprentissage devient donc plus abstrait avec l'introduction de techniques fondées sur des propriétés des nombres. Les auteurs suggèrent de commencer avec des cas où le dénominateur de l'une des fractions est un multiple de l'autre, dans le but de faciliter l'identification d'un dénominateur commun et la production de fractions équivalentes. Ils limitent également les dénominateurs utilisés aux « dénominateurs usuels, tels que 2, 4, 5, 8, 10, 100 ou 1 000 » (*ibid.*, p. 144). Enfin, en cinquième année, « les élèves trouvent un multiple commun aux dénominateurs originaux et utilisent ce principe pour comparer [...] des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*, p. 158). Cela implique qu'ils puissent effectuer des comparaisons alors même que le dénominateur de l'une des fractions n'est pas un multiple de l'autre. Afin de limiter le niveau de difficulté de l'exercice, si aucune relation directe ne peut être identifiée entre les deux dénominateurs, alors ceux-ci devront être des nombres à un chiffre, ou bien un dénominateur commun pourra être trouvé en multipliant les deux dénominateurs par 2, 3, 4 ou 5 (les auteurs donnent pour exemple les dénominateurs 12 et 18). Par ailleurs, les exemples ouvrent la possibilité d'identifier un dénominateur commun en multipliant l'un par l'autre (ainsi, pour comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, les élèves considèreront $\frac{ad}{bd}$ et $\frac{cb}{db}$ sans chercher à minimiser le dénominateur commun).

B. Les tâches de rangement

En Angleterre, les programmes de 2006 ne prévoient des activités de rangement qu'en sixième année, pour des fractions de dénominateurs différents (« ordonner un ensemble de fractions en les convertissant en fractions avec un dénominateur commun » [*op. cit.*, 2006, p. 82]). Toutes les autres activités impliquant d'ordonner des fractions ont trait à la comparaison, non au rangement. La progression choisie par les auteurs dans les instructions officielles les plus récentes sont très différentes. En effet, les tâches de comparaison et de rangement sont systématiquement associées, à toutes les étapes de l'apprentissage, dans l'enseignement primaire : ainsi en troisième année (« comparer et ordonner des fractions unitaires et des fractions avec le même dénominateur » [*op. cit.*, 2014, p. 125]), en cinquième année (« Comparer et ordonner des fractions dont les dénominateurs sont tous des multiples du même nombre » [*ibid.*, p. 139]) et en sixième année (« Comparer et ordonner des fractions, y compris les fractions supérieures à un » [*ibid.*, p. 145]). En revanche, les seules tâches de rangement sont prévues dans l'enseignement secondaire, en lien avec les autres formes d'écriture des nombres rationnels (« ranger des nombres entiers positifs et négatifs, des écritures décimales et des fractions » [*ibid.*, p. 155]). Parmi ces compétences, seules celles de cinquième année nourriront notre analyse, puisque c'est la seule année pour laquelle les nouveaux programmes ont été appliqués avant les évaluations TIMSS.

En Floride, le cheminement est inverse. Dans les anciens programmes, les activités de comparaison et de rangement sont toujours associées dans les textes, quel que soit le niveau de la scolarité. En revanche, dans les textes les plus récents, les deux types de tâches sont dissociés. Plus précisément, les auteurs ne mentionnent que des comparaisons, en troisième année (« Comparer deux fractions avec le même numérateur ou le même dénominateur en raisonnant sur leur taille » [*op. cit.*, 2014, p. 4]) comme en quatrième année (« Comparer deux fractions avec des numérateurs et des dénominateurs différents, par exemple en créant des dénominateurs ou des numérateurs communs, ou en les comparant à une fraction de référence telle que 1/2 » [*ibid.*]). Les élèves ayant passé les évaluations TIMSS ayant étudié selon les anciens programmes pendant toute leur scolarité, hormis en quatrième année ou en huitième année, il nous faut donc considérer que des activités de rangement leur ont été proposées en troisième année (« Comparer et ordonner des fractions, y compris des fractions supérieures à un, en utilisant des modèles et des stratégies » [*op. cit.*, 2007, p. 6-7]) et en sixième année (« Comparer et ordonner des fractions, des écritures décimales et des pourcentages, y compris en trouvant leur emplacement approximatif sur la droite numérique » [*ibid.*, p. 13]).

En Irlande du Nord, il existe une progression très claire, organisée en deux étapes : en quatrième année sont étudiés les rangements de fractions de même dénominateur ou de même numérateur (« Explorer et ordonner les fractions avec le même dénominateur [1/6, 2/6, 5/6] et où le numérateur est un [1/3, 1/5, 1/8] » [*op. cit.*, p. 1]), tandis qu'en cinquième année, les tâches de rangement sont réalisées avec des fractions de dénominateurs et de numérateurs différents (« Ordonner des fractions avec des numérateurs et des dénominateurs différents, par exemple 1/3, 3/4, 5/8 » [*ibid.*]). Si la lecture des textes offre une idée assez précise des fractions qui doivent être utilisées, en revanche aucune précision n'est fournie quant à la nature des techniques qui doivent permettre d'effectuer ces tâches, en particulier lorsque les dénominateurs sont différents.

En Ontario, les tâches de comparaison sont toujours associées à des tâches de rangement (par exemple, en quatrième année : « Comparer et ordonner des fractions ayant un dénominateur commun à l'aide de matériel concret ou illustré » [*op. cit.*, p. 51]) sauf lorsque cela n'a pas de sens, ainsi lorsqu'il s'agit de comparer une fraction à une fraction repère (en cinquième année : « Comparer deux fractions en utilisant une fraction repère telle que 1/4, 1/2, 3/4 et 1 » [*ibid.*, p. 61]). En effet, comparer plusieurs fractions à une fraction repère ne permet pas d'ordonner ces fractions.

Au Québec, on retrouve cette spécificité de l'intitulé visant à « comparer une fraction à 0, à 1/2 ou à 1 » (*op. cit.*, 2009a, p. 7), qui est la seule tâche pour laquelle le terme « comparer » est utilisé à la place du terme « ordonner ». En effet, à partir de la quatrième année, les élèves doivent parvenir à « ordonner des fractions ayant un même dénominateur » (*ibid.*) avec l'intervention de l'enseignant (leur autonomie n'est requise qu'en cinquième année), tandis qu'à partir de la cinquième année, ils doivent « ordonner des fractions, le dénominateur de l'une étant un multiple de l'autre (ou des autres) » et « ordonner des fractions ayant un même numérateur » (*ibid.*), toujours avec l'intervention de l'enseignant, l'autonomie des élèves n'étant exigée que l'année suivante. Le fait de prévoir l'étude de la comparaison de fractions de même numérateur postérieurement à la comparaison de fractions de même dénominateur constitue une originalité des programmes québécois : dans les autres territoires, les fractions unitaires sont généralement enseignées au tout début de l'apprentissage des fractions, et leur comparaison, lorsqu'elle est prévue, intervient très tôt dans la scolarité. En outre, on voit bien, lorsque les auteurs indiquent que le dénominateur doit être un multiple « de l'autre (ou des autres) », que le nombre de fractions en jeu peut être égal ou supérieur à deux, et que les tâches de rangement incluent donc des activités de comparaison. Dans l'enseignement secondaire, en septième et huitième année, les élèves doivent pouvoir « comparer et ordonner des nombres exprimés sous différentes formes (fractionnaire, décimale, exponentielle [exposant entier], pourcentage, racine carrée) » (*op. cit.*, 2009b, p. 8), permettant aux élèves de mettre en avant leur maitrise des différentes écritures des nombres irrationnels.

En République d'Irlande, les tâches de comparaison et celles de rangement sont systématiquement liées (par exemple, en troisième année : « Comparer, ordonner des fractions de dénominateurs bien choisis et les placer sur la droite numérique » [*op. cit.*, p. 68]). Les deux termes semblent souvent être utilisés indifféremment par les auteurs. Par exemple, pour l'étude de la compétence « Comparer et ordonner des fractions et identifier des fractions équivalentes avec des dénominateurs de 2 à 12 » (*ibid.*, p. 89) en cinquième année, ceux-ci n'utilisent plus que le terme « comparer » dans les explications associées en italique (« Explorer, *comparer* et noter des équivalences simples à l'aide de matériel concret, pliages en papier, et graphiques » [*ibid.*]). À l'inverse, pour l'étude de la compétence « Comparer et ordonner des fractions et identifier des fractions équivalentes » (*ibid.*) en sixième année, les auteurs n'emploient que le terme « ordonner » dans les explications associées en italique (« *Ordonner* des fractions équivalentes sur la droite numérique et sur des diagrammes » [*ibid.*]). Toutefois, une distinction est parfois faite quant aux techniques qui doivent être utilisées pour réaliser les unes et les autres, comme, par exemple, pour « comparer et ordonner des fractions et des nombres décimaux » (*ibid.*, p. 91) en cinquième année. Ainsi, les commentaires mettent en évidence la différence entre « explorer, comparer et noter », trois actions réalisées « à l'aide de matériel concret et d'argent », et « ordonner », action réalisée « à l'aide de diagrammes ou sur la droite numérique » (*ibid.*).

À Singapour, l'articulation entre les tâches de comparaison et de rangement est similaire à celle que nous avons décrite en Ontario. En principe, les deux activités vont de pair (par exemple, en deuxième année : « Comparer et ordonner des fractions dont le numérateur est 1 ou dont le dénominateur est identique » [*op. cit.*, 2006a, p. 15]). Cependant, lorsque cela n'est pas possible, les rangements sont exclus, en particulier lorsqu'il s'agit d'utiliser une fraction repère pour réaliser des comparaisons en troisième année (« Comparer des fractions à la moitié » [*ibid.*, p. 18]).

Dans de nombreux territoires au sein de notre corpus, l'enseignement des rangements de fractions n'est pas imposé : la Corée du Sud, la France, Hong Kong SAR et le Taipei chinois. Toutefois, si nous avons vu que la mention d'activités consistant à ordonner des fractions impliquait parfois de comparer seulement deux fractions, il est possible que l'inverse soit vrai également, et que les auteurs utilisent le mot « comparaison » dans un sens large incluant des rangements. Seules des études plus approfondies permettront de mieux comprendre comment s'articule l'enseignement des deux notions dans chaque pays. Dans cette recherche, nous nous limitons à la description des orientations proposées par les instructions officielles.

Conclusion de la sous-section

Qu'il s'agisse des tâches de reconnaissance et de production de fractions équivalentes, ou des tâches de comparaison et de rangement, nous avons constaté que la plupart des pays de notre corpus prévoyaient un apprentissage conséquent, avec une progression du niveau de difficulté souvent étalée sur plusieurs années. Par ailleurs, l'enseignement des rangements de fractions est imposé dans la majorité des participants, non pas sous la forme d'une progression qui irait du plus simple (les comparaisons) au plus complexe (les rangements), mais plutôt sous la forme d'un choix qui persiste malgré les changements de niveau scolaire. Il est vrai que les auteurs français ont choisi une orientation différente pour travailler l'aspect ordinal des fractions. Ainsi, à l'école élémentaire, ils privilégient l'utilisation de la droite graduée et l'étude de la relation avec les nombres entiers. Dans l'enseignement secondaire, les comparaisons de fractions sont prescrites très tardivement (en huitième année de scolarité obligatoire), en lien avec l'étude des nombres relatifs. Toutefois, le tableau ci-contre montre une forte présence de la notion dans les pays que nous étudions.

Participants	Comparaisons	Rangements
Angleterre	Oui	Oui
Corée du Sud	Oui	Non
Floride	Oui	Oui
France	Oui	Non
Hong Kong SAR	Oui	Non
Irlande du Nord	Non	Oui
Ontario	Oui	Oui
Québec	Oui	Oui
République d'Irlande	Oui	Oui
Singapour	Oui	Oui
Taipei chinois	Oui	Non

Figure 51. Indication relative aux types de tâches « Comparaisons » et « Rangements » dans les instructions officielles de notre corpus, au moment des évaluations TIMSS 2015

En revanche, l'analyse de l'organisation temporelle de ces enseignements a permis de mettre au jour des différences inter-pays importantes, comme on peut le voir dans le schéma ci-contre. Sur ce graphique, les années au cours desquelles la reconnaissance de fractions équivalente était imposée, au moment des évaluations TIMSS 2015, sont représentées en rouge. En bleu clair, nous signalons les années au cours desquelles la production de fractions équivalentes était requise. En gris, nous indiquons les années au cours desquelles les élèves devaient travailler la comparaison ou le rangement de fractions. Nous n'avons pas distingué ces deux types de tâches, car notre analyse n'a pas révélé l'existence d'une progression des enseignements sur ce point.

Les écarts se manifestent à propos du moment où débute l'enseignement (celui de l'équivalence est précoce à Singapour, mais tardif en France) et de sa durée (toujours à propos de l'équivalence, il se déroule en une année à Hong Kong SAR, contre cinq en République d'Irlande). De plus, l'ordre des apprentissages varie et les chevauchements n'ont pas toujours la même densité. Par exemple, en Floride, tous les types de tâches (reconnaissance et production de fractions équivalentes, comparaison, rangement) sont travaillés la même année. À l'inverse, l'enseignement est beaucoup plus progressif en République d'Irlande, puisqu'il commence, pour chaque type de tâche, au cours d'une année différente.

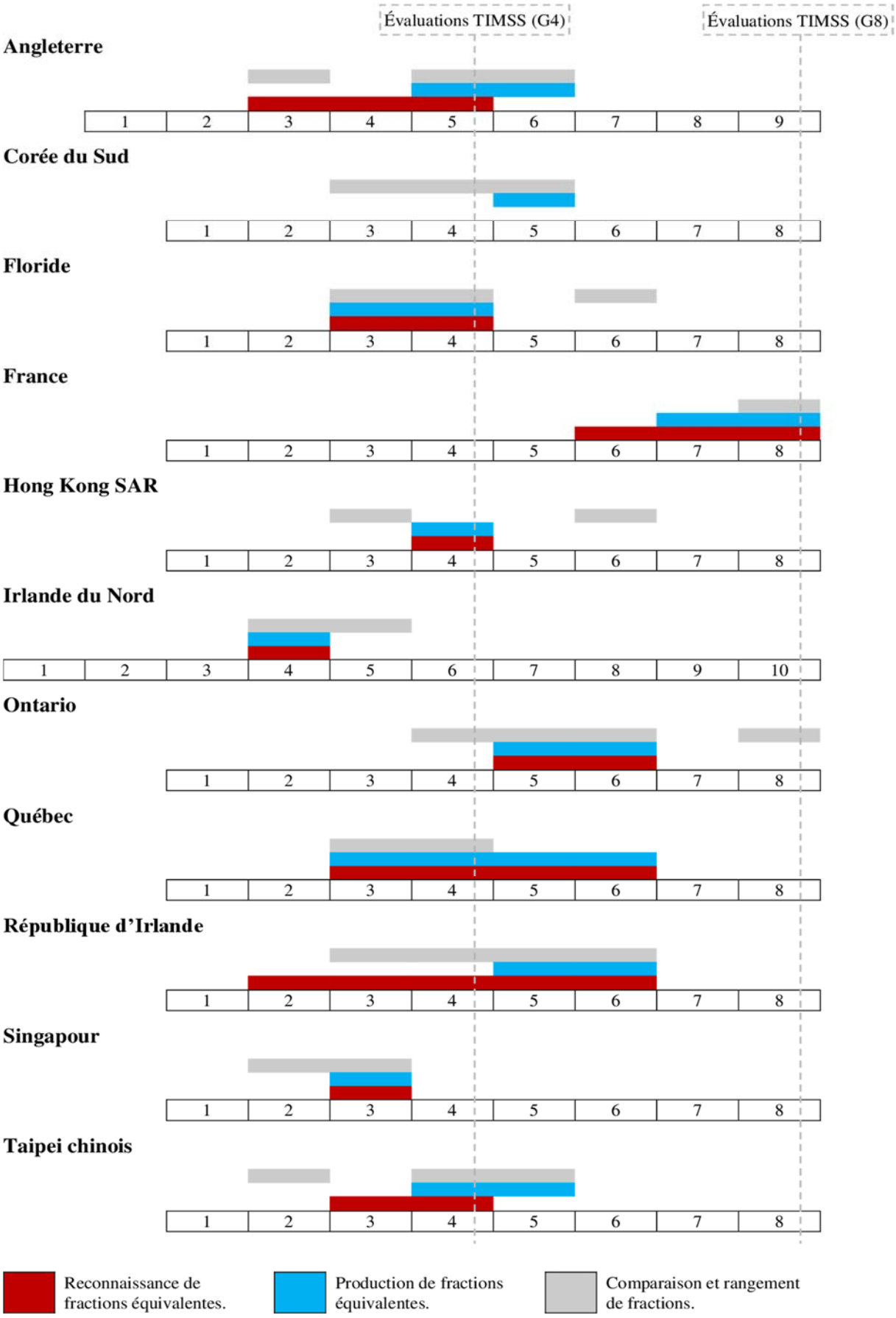


Figure 52. Chronogénèse de la reconnaissance et de la production de fractions équivalentes, ainsi que de la comparaison et du rangement de fractions dans les instructions officielles de notre corpus (2015)

Pour chaque type de tâches, nous avons pu distinguer trois grandes catégories de progressions. D'abord, il y a les programmes scolaires dans lesquels les variables changent, mais où la technique utilisée par les élèves n'est pas, potentiellement, affectée par cette modification. Un exemple de cette catégorie de progressions se trouve dans le curriculum de la République d'Irlande, à propos de la reconnaissance de fractions équivalentes : pour « identifier des fractions et leurs formes équivalentes de dénominateur 2, 4, 8 ou 10 » en troisième année ou pour « identifier des fractions et leur forme équivalente de dénominateur 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 12 » en quatrième année, les élèves doivent toujours « couper et construire des fractions simples de formes géométriques régulières, les noter sous forme de diagrammes ou de schémas » (*op. cit.*, p. 68). Ensuite, il y a les programmes scolaires dans lesquels les variables changent, et où la technique à utiliser par les élèves se trouve affectée par cette modification. Un exemple se trouve dans les programmes de Singapour, à propos de la comparaison de fractions : en deuxième année, les élèves comparent « des fractions dont le numérateur est 1 ou dont le dénominateur est identique » [*op. cit.*, p. 15]), tandis qu'en troisième année, ils comparent « des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*, p. 18). Or, les variables « de même dénominateur » et « de dénominateurs différents » supposent la mise en œuvre de techniques de comparaison différentes. Enfin, il y a les programmes scolaires dans lesquels la description de la tâche est similaire, mais où la technique imposée change. Un exemple se trouve dans les programmes de l'Ontario : en cinquième année, les élèves comparent « deux fractions en utilisant une fraction repère telle que 1/4, 1/2, 3/4 et 1 » (*ibid.*, p. 61) ou à l'aide de la demi-droite numérique, tandis qu'en sixième année, ils comparent « des nombres fractionnaires et des fractions en utilisant une variété de stratégies [p. ex., matériel concret, dessin, droite numérique, fraction repère] ». Signalons qu'il existe également des territoires dans lesquels l'intitulé est exactement le même d'une année sur l'autre, notamment lorsque les programmes scolaires sont organisés en cycles d'enseignement (nous pensons en particulier au curriculum du Québec). On a donc :

- P_0 : aucune évolution des variables de la tâche n'est proposée ;
- P_1 : une ou plusieurs variables de la tâche sont modifiées sans affecter la nature des techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre ;
- P_2 : une ou plusieurs variables de la tâche sont modifiées et cela affecte la nature des techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre ;
- P_3 : le législateur ne modifie pas la description de la tâche ou la modifie peu ; en revanche, il impose l'utilisation d'une ou plusieurs techniques nouvelles.

Évidemment, il arrive que ces progressions soient combinées dans les textes. Ainsi, dans les programmes de la République d'Irlande, l'intitulé ne change pas entre la troisième et la quatrième année ; en revanche, les variables de la tâche évoluent entre la quatrième et la cinquième année, de façon à affecter les techniques qu'utilisent les élèves (les fractions sont librement choisies par l'enseignant) ; les techniques imposées diffèrent entre la cinquième année (« à l'aide de matériel concret, pliages en papier, et graphiques » [*op. cit.*, p. 89]) et la sixième année (où la droite numérique est évoquée). Nous proposons ci-dessous une analyse des progressions des instructions officielles au sujet de la comparaison : il s'agit d'un type de tâches du graphique pour lequel tous les pays (sauf la France) prévoient un enseignement qui s'étale sur plusieurs années. Elle permet de mettre en évidence que la progression P_2 revient le plus souvent (dans neuf pays sur dix), montrant l'importance accordée par les législateurs à la description de la tâche dans l'avancée du temps didactique.

Participants	Type de progression
Angleterre	P_2
Corée du Sud	P_2
Floride	P_2
France	Sans objet
Hong Kong SAR	P_2
Irlande du Nord	P_2
Ontario	P_3
Québec	P_0/P_2
République d'Irlande	$P_0/P_2/P_3$
Singapour	P_2
Taipei chinois	P_2/P_3

Figure 53. Type de progression retenue pour la comparaison de fractions de dénominateurs différents par les auteurs des programmes, au moment des évaluations TIMSS 2015

Nous proposerons, au moment de l'analyse des items TIMSS, des considérations plus détaillées pour chaque pays, en fonction des tâches rencontrées, afin de vérifier leur adéquation avec le contenu des programmes. Néanmoins, ces évaluations ayant lieu en quatrième et en huitième année, nous pouvons déjà dire que des écarts se font jour quand au point de savoir si l'enseignement a débuté à ce moment-là. Ainsi, au moment des tests destinés aux écoliers, la notion de fraction équivalente n'a été abordée ni en Corée du Sud, ni en Ontario, ni en France, tandis que la comparaison n'a pas fait l'objet d'un enseignement dans ce dernier pays. Ces observations sont révélatrices d'une certaine orientation des instructions officielles quant à l'importance accordée par les auteurs aux techniques propres aux écritures fractionnaires, parmi lesquelles se trouvent les opérations impliquant des fractions.

Sous-section II. Opérations avec des fractions

L'apprentissage des opérations impliquant des fractions s'étale, dans les instructions officielles que nous avons étudiées, sur plusieurs années. L'addition et la soustraction sont systématiquement étudiées en premier (bien que, dans certains textes, la soustraction soit tout à fait négligée), tandis que la multiplication et la division font l'objet d'un enseignement ultérieur (lorsqu'elles sont inscrites dans les programmes). En outre, les propriétés et les techniques opératoires des unes et des autres sont bien différentes. Que l'on choisisse d'opérer un regroupement selon un point de vue chronologique, ou selon un point de vue notionnel, celui-ci conduira toujours à étudier dans un premier temps l'addition et la soustraction de fractions (§ 1), et dans un deuxième temps la multiplication et la division de fractions (§ 2).

§ 1. Addition et soustraction de fractions

Les techniques opératoires de ces opérations dépendent largement du fait que les dénominateurs en jeu sont identiques ou distincts. Dans le premier cas, elle se rapproche de celle que les élèves utilisent avec des nombres entiers, puisque l'addition des numérateurs suffit à calculer la somme, pour peu que l'on reporte le dénominateur. Dans le second cas, cette procédure n'est pas valide, puisqu'il est nécessaire de déterminer préalablement le dénominateur avec lequel on souhaite exprimer les termes de la somme. Bien entendu, l'apprentissage des additions suppose bien d'autres activités que la seule mise en œuvre de techniques fondées sur des connaissances procédurales. Néanmoins, la variable que nous venons d'évoquer induit sans aucun doute des niveaux de complexité différents dans les tâches qui sont proposées aux élèves. Nous allons donc étudier successivement l'addition et la soustraction de fractions de même dénominateur (A) et l'addition et la soustraction de fractions de dénominateurs différents (B).

A. Fractions de même dénominateur

En Angleterre, cette notion n'apparaissait pas dans les programmes de 2006. Ce n'est qu'avec les instructions officielles de 2014 que l'addition et la soustraction « de fractions avec le même dénominateur à l'intérieur d'un entier (par exemple, 5/7 + 1/7 = 6/7) » (*op. cit.*, 2014, p. 125) sont abordées, en troisième année. L'année suivante, il s'agit toujours « d'ajouter et soustraire des fractions avec le même dénominateur » (*ibid.*, p. 131). Toutefois, les sommes et les différences peuvent prendre la forme de fraction supérieures à un, puisque la mention des programmes limitant le résultat à une fraction inférieure à un a disparu. Enfin, en cinquième année, il est à nouveau demandé aux élèves « d'ajouter et soustraire des fractions avec le même dénominateur » (*ibid.*, p. 139). À cette occasion, ils apprennent à « écrire des sommes et des différences supérieures à un sous la forme d'un nombre mixte (par exemple, 2/5 + 4/5 = 6/5 = 1 + 1/5) » (*ibid.*). En ce qui concerne les élèves ayant passé les évaluations TIMSS 2015, il nous faut considérer que, les nouveaux programmes n'ayant été appliqués qu'en cinquième année, ils ont eu à additionner et soustraire des fractions de même dénominateur au cours d'une année seulement (la cinquième).

En Corée du sud, la quatrième année est l'occasion de commencer à réaliser des calculs comprenant des fractions. Les élèves doivent alors « additionner et soustraire des fractions de même dénominateur » (*op. cit.*, p. 21). Les auteurs prennent soin de préciser que les élèves doivent, « avant de calculer avec des nombres entiers, des fractions ou des décimaux, estimer la réponse » (*ibid.*, p. 22). Avec les écritures décimales, ces estimations peuvent prendre la forme d'un calcul mental avec des valeurs approchées avant d'effectuer le calcul avec les valeurs exactes. Avec les fractions, les activités d'estimation apparaissent moins évidentes. Nous pensons à l'utilisation d'un schéma représentant le calcul à réaliser, ce qui conduirait les élèves à associer l'écriture fractionnaire à une idée de la quantité qu'elle représente, à éviter d'additionner à la fois les numérateurs et les dénominateurs, erreur couramment commise dans l'addition de fractions. Les auteurs n'indiquent pas la nature des fractions à mettre en jeu (supérieures ou inférieures à un, petits ou grands dénominateurs, etc.), laissant toute liberté aux enseignants pour déterminer le niveau de difficulté des exercices qu'ils donnent à leurs élèves.

En Floride, il faut distinguer la progression envisagée dans les instructions officielles de 2007 et dans celles de 2014. Dans les anciens programmes, les apprentissages relatifs à l'addition et à la soustraction de fractions sont concentrés sur la cinquième année, avec un travail réalisé aussi bien avec des fractions de même dénominateur qu'avec des fractions de dénominateurs différents (« Représenter l'addition et la soustraction de nombres décimaux et de fractions ayant des dénominateurs communs ou différents, en utilisant des modèles, la valeur des chiffres ou des propriétés » [*op. cit.*, 2007, p. 10]). Après l'apprentissage des multiplications et divisions de fractions en sixième année, la septième année était l'occasion de faire le point sur les connaissances des élèves à propos des quatre opérations effectuées avec des fractions, et de réviser ces notions (« Additionner, soustraire, multiplier et diviser des entiers, des fractions et des décimaux et réaliser des opérations exponentielles avec des bases rationnelles et des nombres entiers, y compris en résolvant des problèmes de la vie quotidienne » [*ibid.*, p. 14]). Dans les nouveaux programmes, les acquis sont davantage espacés dans le temps. De plus, ils donnent une idée très précise des activités qui doivent être menées en classe. Ainsi, c'est en quatrième année que les élèves commencent à « comprendre l'addition et la soustraction de fractions comme l'assemblage et la séparation de parts se rapportant à un même entier » (*op. cit.*, 2014, p. 4). Pour se faire, ils décomposent « une fraction en une somme de fractions avec le même dénominateur de plus d'une façon, notant chaque décomposition sous la forme d'une équation et justifient les décompositions, par exemple en utilisant un modèle de fraction visuel. Exemples : 3/8 = 1/8 + 1/8 + 1/8 ; 3/8 = 1/8 + 2/8 ; 2 + 1/8 = 1 + 1 + 1/8 = 8/8 + 8/8 + 1/8 » (*ibid.*), apprennent à « ajouter et soustraire des nombres mixtes ayant le même dénominateur, par exemple en remplaçant chaque nombre mixte par une fraction équivalente, et/ou en utilisant les propriétés des opérations et la relation entre l'addition et la soustraction » (*ibid.*) et résolvent « des problèmes comportant des additions et des soustractions de fractions se référant au même entier et ayant le même dénominateur, par exemple en utilisant des modèles de fractions visuels et des équations pour représenter le problème » (*ibid.*). Les élèves ayant passé les évaluations TIMSS ayant eu à connaitre de ces notions à travers les nouveaux programmes, il faut considérer qu'ils ont appris à additionner et soustraire des fractions de même dénominateur.

En France, les programmes de 2008 prévoyaient en cinquième année l'ajout par les élèves de « deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur » (*op. cit.*, 2008a, p. 38). La première originalité des instructions officielles françaises était de ne pas avoir envisagé la soustraction de fractions concomitamment à l'addition : dans les autres territoires, ces deux notions sont

le plus souvent liées. Nous suggérons que cette absence tient à l'objectif final des injonctions relatives aux fractions dans ce texte : la maitrise des écritures décimales. Il s'agit de comprendre, par exemple, que 3/10 + 1/100 = 31/100 pour interpréter ensuite 0,31 comme la somme de 3/10 et 1/100. Dans ce contexte, l'utilisation de la soustraction n'a pas d'utilité. La seconde originalité du curriculum français est de prévoir l'addition de fractions décimales : cette précision n'apparait dans aucun autre des textes que nous avons consultés, et peut être mise en lien avec l'importance accordée à la maitrise des notations décimales par les auteurs. De plus, cet apprentissage semble pouvoir être mené avec des fractions de dénominateurs différents, si l'on considère que le complément du nom « de même dénominateur » ne se rapporte qu'au groupe nominal « deux fractions simples », et non au syntagme « deux fractions décimales ou deux fractions simples ». En conséquence, on a, dès l'apprentissage initial de l'addition de fractions, des tâches impliquant des dénominateurs différents, et des tâches impliquant le même dénominateur. De plus, en septième année, on trouve un intitulé similaire (« Additionner et soustraire deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre » [*op. cit.*, 2008b, p. 22]), d'où la difficulté à mettre au évidence la cohérence des programmes quand à l'augmentation progressive du niveau de difficulté sur cette notion.

À Hong Kong SAR, les notions d'addition et de soustraction de fractions de même dénominateur s'acquièrent en quatrième année. À ce stade de la scolarité, les élèves doivent en effet pouvoir « ajouter et soustraire des fractions avec le même dénominateur et réduire la réponse à sa plus simple expression » (*op. cit.*, p. 36). Étant donné que les élèves sont supposés avoir appris peu avant à représenter et identifié des fractions supérieures à un, il est probable que les professeurs incluront de telles fractions dans les calculs. Cependant, les auteurs ne donnent pas davantage d'indications sur les tâches qui doivent être soumises aux élèves, et ce thème n'est pas étudié à nouveau au cours des années ultérieures.

De même, les instructions officielles nord-irlandaises relatives aux additions et soustractions de fractions de même dénominateur sont très succintes, et ne concernent que la quatrième année. Il s'agit alors pour les élèves « d'ajouter des fractions de même dénominateur » [*op. cit.*, onglet « Additions et soustractions »], sans mention de la nature des fractions qui doivent être utilisées (supérieures ou inférieures à un, petits ou grands dénominateurs, etc.), ni du contexte dans lequel cet apprentissage est mené (avec ou sans supports visuels, au sein de problèmes ou non, etc.). De plus, le cas où les fractions sont de dénominateurs différents est étudié la même année, ce qui limite encore le temps que les professeurs peuvent consacrer à l'étude des fractions de même dénominateur.

En Ontario, nous n'avons pas trouvé trace de cette notion avant la sixième année. À ce stade de la scolarité, cet apprentissage s'appuie sur des représentations visuelles de la fraction (« Additionner et soustraire des fractions ayant des dénominateurs communs à l'aide de matériel concret ou illustré et de symboles [p. ex., contenants d'œufs, réglettes] » [*op. cit.*, p. 71]). Si l'autonomie des élèves semble réduite en raison du point d'appui offert par l'utilisation de matériel, les élèves doivent également parvenir, la même année, à « expliquer les stratégies utilisées ainsi que la démarche effectuée pour résoudre divers problèmes comportant des nombres naturels, des écritures décimales ou des fractions » (*ibid.*). Dans ce cadre, il est possible que l'on demande aux élèves d'avoir une certaine aisance dans la réalisation des calculs, et qu'ils doivent se passer de tout support concret. Toutefois, cela n'est pas

indiqué explicitement dans les textes, qui restent toutefois très imprécis sur la manière dont les élèves sont supposés s'y prendre pour résoudre les problèmes, ainsi que sur les problèmes eux-mêmes.

Le Québec est l'un des deux territoires de notre corpus (avec la République d'Irlande) dans lequel l'addition de fractions de même dénominateur n'apparait pas dans les instructions officielles : seules l'addition et la soustraction de fractions « dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre » (*op. cit.*, 2009a, p. 12) sont prévues à partir de la cinquième année. Il existe un intitulé qui pourrait permettre cet apprentissage : dans le chapitre relatif au développement du sens des opérations sur les nombres et relativement aux fractions, les auteurs prévoient que les élèves traduisent « une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou par une opération et vice versa (exploitation des différents sens de l'addition, de la soustraction et de la multiplication par un nombre naturel) » (*ibid.*, p. 10). Or, la nature des fractions à additionner et soustraire n'est pas précisée, laissant la possibilité aux professeurs de choisir des fractions possédant le même dénominateur. Cependant, cet apprentissage se déroule sur la même période que celui invitant les élèves à additionner des fractions de dénominateurs liés, et rien ne limite les enseignants dans le choix des fractions. Nous considérons donc que l'étude des additions et soustractions de fractions de même dénominateur n'est pas inscrit au programme de l'école québécoise.

Comme au Québec, le curriculum de la République d'Irlande ne prévoit pas l'apprentissage intermédiaire que constituent les additions et soustractions de fractions de même dénominateur. En cinquième année, les élèves apprennent directement à réaliser des calculs, quelles que soient les fractions en jeu, en recherchant un dénominateur commun à l'aide de leur connaissance des fractions équivalentes (« Additionner et soustraire des fractions simples et des nombres mixtes simples. Utiliser des fractions équivalentes pour simplifier les calculs. » [*op. cit.*, p. 89]). Il est possible qu'à l'initiative des professeurs irlandais, cette notion soit introduite par le biais du cas où les fractions sont de même dénominateur, mais ce n'est pas suggéré par les programmes.

À Singapour, la deuxième année est l'occasion de réaliser les premiers calculs incluant des fractions, dès lors que ces fractions sont de même dénominateur, que celui-ci n'est pas supérieur à douze, et que la somme ou la différence prend la forme d'une fraction propre (« additionner et soustraire des fractions de même dénominateur à l'intérieur d'un entier » [*op. cit.*, 2006a, p. 16]). C'est dire que cet apprentissage est à la fois précoce et bien encadré, dans la mesure où les enseignants ont une idée très précise des calculs qu'ils devront proposer aux élèves. En outre, cet apprentissage est progressif puisque, contrairement à ce que l'on a pu observer dans d'autres territoires, le cas où les fractions sont de même dénominateur n'est pas étudié au cours de la même année que celui où les fractions sont de dénominateurs différents.

L'organisation des apprentissages est différente dans le Taipei chinois. Ceux-ci débutent une année plus tard : le travail spécifique sur les additions et soustractions de même dénominateur commence ainsi en troisième année (« Les élèves […] exploitent l'addition et la soustraction de fractions de même dénominateur dans des conditions concrètes » [*op. cit.*, p. 128]). Les supports utilisés sont des modèles visuels de la fraction formés à partir d'exemples de la vie quotidienne (par exemple, des pizzas). De plus, les élèves apprennent que, pour l'addition et la soustraction, les règles valables pour les entiers fonctionnent à la condition que les dénominateurs soient les mêmes. Les exemples fournis par les auteurs

montrent que des petits dénominateurs doivent être utilisés (notamment les demis, les tiers et les quarts). Cependant, ils précisent également que des fractions supérieures à 1 pourront être utilisées, afin de ne pas développer une vision stéréotypée de la fraction. De plus, les sommes ou différences seront simplifiées le cas échéant (par exemple, l'énoncé « cinq quarts de pizza plus trois quarts de pizza = huit quarts de pizza = deux pizzas » peut être écrit « $\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=\frac{8}{4}=2$ » [*ibid.*, p. 130]). Il faut préciser également que ces apprentissages s'étalent sur deux années. En effet, la quatrième année est également l'occasion de calculer « des additions et des soustractions de fractions de même dénominateur (mais pas de nombres mixtes) » (*ibid.*, p. 141). Selon les auteurs, c'est à ce moment que commence véritablement l'apprentissage des calculs impliquant des fractions, dans le sens où une première approche de la notion par le biais de situations concrètes aboutit à la maitrise d'un algorithme de calcul. Les élèves utilisent leur connaissance des nombres entiers et le contexte fourni par leur professeur pour construire cet algorithme. Par ailleurs, pour commencer à calculer avec des fractions, les auteurs proposent d'utiliser des « dénominateurs courants » (*ibid.*, p. 142), tels que 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 100 et 1 000.

B. Fractions de dénominateurs différents

En Angleterre, nous avons trouvé, dans les anciens programmes, qu'une seule référence à de tels calculs. Ceux-ci font l'objet d'un apprentissage dans l'enseignement secondaire, au niveau 6 de la répartition des compétences à acquérir, ce qui suggère une maitrise de la notion par les élèves au milieu du cycle (« [Les élèves] additionnent et soustraient des fractions en les écrivant avec un dénominateur commun » [*op. cit.*, 2007, p. 151]). En revanche, il existe dans les instructions officielles de 2014 une progression plus développée relative aux additions et soustractions de fractions de dénominateurs différents, qui se déroule en deux étapes. Ainsi, en cinquième année, les élèves sont invités à « ajouter et soustraire des fractions avec le même dénominateur et des dénominateurs qui sont des multiples du même nombre » (*op. cit.*, 2014, p. 139). L'obligation de proposer des dénominateurs dont l'un est un multiple de l'autre limite le niveau de difficulté de la tâche, dans la mesure où l'on sait, au moment de convertir l'une des fractions en une fraction équivalente, quel dénominateur doit être utilisé : c'est le plus grand dénominateur parmi les deux. Par exemple, si l'on doit ajouter 3/4 et 5/8, on sait qu'il faudra convertir les quarts en huitièmes. En sixième année, cette mention disparait (« Ajouter et soustraire des fractions avec des dénominateurs différents et des nombres mixtes, en utilisant le concept de fractions équivalentes » [*ibid.*, p. 145]) et le dénominateur commun est beaucoup plus difficile à trouver. Par exemple, pour additionner 3/4 et 2/3, les élèves doivent identifier les douzièmes comme étant le plus petit dénominateur commun. D'autres notions sont donc mises en jeu, comme la recherche du plus petit commun multiple (PPCM) à deux nombres, d'où un niveau de difficulté accru. Cependant, comme les élèves ayant passé les évaluations TIMSS pour l'école élémentaire n'ont eu à connaitre ces nouveaux programmes qu'en cinquième année, nous devons considérer qu'ils ne maitrisaient que l'addition et la soustraction de fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre en fin de huitième année de scolarité obligatoire.

En Corée du Sud, l'addition et la soustraction de fractions sont étendues, en cinquième année, aux cas où les dénominateurs sont différents (« Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents » [*op. cit.*, 2008, p. 25]). Cet apprentissage s'appuie sans doute sur les connaissances des élèves relatives aux équivalences entre fractions, car celles-ci sont construites la même année. De plus, les calculs ne semblent pas limités au cas où le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre, dans la

mesure où les notions de plus petit commun multiple (PPCM) et plus grand commun diviseur (PGCD) constituent également une partie importante des programmes cette année-là. Les tâches susceptibles d'être confiées aux élèves sud-coréens sont donc potentiellement très larges, et le temps donné pour l'acquisition du concept est court, puisque celui-ci n'apparait pas dans le curriculum après la cinquième année.

En Floride, comme nous l'avons indiqué précédemment, le cas où les fractions sont de même dénominateur et celui où les dénominateurs sont différents sont étudiés la même année dans les instructions officielles de 2007 (en cinquième année : « Représenter l'addition et la soustraction de nombres décimaux et de fractions ayant des dénominateurs communs ou différents, en utilisant des modèles, la valeur des chiffres ou des propriétés » [*Mathematics Standards*, 2007, p. 10]). À ce stade de la scolarité, les activités impliquant des additions et soustractions de fractions sont nombreuses puisque, outre l'apprentissage initial du concept et des différentes techniques qui peuvent être utilisées, les auteurs imposent des tâches d'estimation (« Réaliser des estimations raisonnables de sommes et de différences de fractions et de nombres décimaux, et utiliser des techniques d'arrondissement » [*ibid.*]), et demandent aux élèves de parvenir à une certaine aisance dans la réalisation des calculs, afin « d'ajouter et soustraire des fractions et des nombres décimaux couramment, et vérifier la vraisemblance des résultats, y compris dans des situations de problèmes » (*ibid.*). Dans les programmes de 2014, les apprentissages relatifs à l'addition et à la soustraction de fractions de dénominateurs différents sont dissociés de ceux relatifs à l'addition et à la soustraction de fractions de même dénominateur. Cependant, ils se déroulent toujours en cinquième année (« additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents [incluant des nombres mixtes] en remplaçant les fractions données par des fractions équivalentes de façon à produire une somme ou une différence équivalente avec des fractions de même dénominateur » [*op. cit.*, 2014, p. 3]). Dès lors, le changement de curriculum a été sans effet sur les élèves de quatrième année ou de huitième année ayant passé les évaluations TIMSS en 2015.

En France, les deux possibilités (avec ou sans dénominateur commun) sont étudiées ensemble à différents stades de la scolarité. Ainsi, en cinquième année, les élèves doivent pouvoir additionner « deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur » (*op. cit.*, 2008a, p. 38). Nous avons développé dans le paragraphe précédent l'idée que les deux fractions décimales à additionner étaient potentiellement de dénominateurs différents, afin de proposer une première approche de la valeur des chiffres dans les nombres décimaux : nous considérons donc que l'addition de fractions de dénominateurs différents est incluse dans cet item. En septième année, la formulation est beaucoup plus générale et conduit à utiliser des dénominateurs plus variés (« Additionner et soustraire deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes *et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre » [*op. cit.*, 2008b, p. 22]). Cependant, la seconde partie de la phrase (celle située après l'astérisque et concernant l'addition et la soustraction de fractions de dénominateurs différents) n'est pas exigible pour le socle commun. En conséquence, les élèves pourront bénéficier de plus de temps pour maitriser cette notion. Ce n'est qu'en huitième année que tous les élèves devront maitriser cette notion, avec un intitulé formulé comme un bilan des acquis des élèves relativement aux opérations impliquant des fractions (« Multiplier, additionner et soustraire des nombres relatifs en écriture fractionnaire » [*ibid.*, p. 28]).

À Hong Kong SAR, selon les instructions officielles, les élèves développent leur capacité à additionner et à soustraire des fractions de dénominateurs différents en cinquième année uniquement (« réaliser l'addition et la soustraction de fractions simples avec différents dénominateurs, pour des sommes impliquant au plus deux facteurs » [*op. cit.*, p. 38]). Néanmoins, les auteurs ont prévu cette année-là plusieurs items qui concernent cette notion. Ainsi, outre cet apprentissage initial du concept, les élèves utilisent leurs acquis pour « résoudre des problèmes impliquant l'addition et la soustraction de fractions simples » (*ibid.*) et « réaliser une estimation des résultats » (*ibid.*). Les rédacteurs limitent le potentiel des nombres rationnels utilisés aux « fractions simples », ce qu'ils définissent comme une fraction dont le dénominateur n'excède pas douze. De plus, le nombre de facteurs dans le calcul ne doit pas dépasser deux lorsque les élèves apprennent à calculer, ce qui contribue également à réduire le niveau de difficulté des exercices qui sont donnés aux élèves. En revanche, rien n'est dit sur les moyens mis à disposition par l'enseignant pour réaliser ces apprentissages, ni sur les techniques que doivent employer les élèves.

En Irlande du Nord, l'enseignement des additions et des soustractions de fractions de dénominateurs différents est au programme de la quatrième année (« en utilisant les connaissances relatives aux fractions équivalentes, ajouter et soustraire des fractions simples » [*op. cit.*, p. 1]), tout comme l'addition et la soustraction de fractions de même dénominateur. Par « fractions simples », nous pensons que les auteurs des programmes entendent des fractions dont les dénominateurs sont tous des multiples du même nombre. En effet, c'est le cas dans tous les exemples fournis par les auteurs (« par exemple $1/2 + 1/4 + 1/8 = 4/8 + 2/8 + 1/8$; $5/6 – 1/3$ » [*ibid.*]). De plus, la technique à utiliser est clairement établie : les élèves doivent trouver un dénominateur commun et convertir l'une des fractions en fraction équivalente de même dénominateur. Cet apprentissage précis, avec une limitation de la variété des fractions susceptibles d'être mises en jeu, est peut-être à mettre en lien avec le peu de temps accordé par les auteurs pour le construire : après la quatrième année, aucune référence n'est faite à l'addition et à la soustraction de fractions dans le curriculum.

En Ontario, le travail concernant les opérations avec des fractions se poursuit en septième année : il s'agit alors « d'additionner et soustraire dans divers contextes des fractions positives en utilisant une variété de stratégies (par exemple, matériel concret, dessins, tableau) » (*op. cit.*, p. 79). Ces connaissances établies à propos des opérations sont utilisées pour résoudre des problèmes comportant des fractions. Il est à noter qu'une aide à la résolution de problèmes est systématiquement prévue. Cette aide peut consister en du matériel concret, semi-concret ou l'utilisation de la calculatrice. Étant donnés les supports envisagés pour l'apprentissage de l'addition et de la soustraction de fractions (« matériel concret, dessin, tableau »), les auteurs n'attendent pas des élèves qu'ils puissent conduire des calculs en s'appuyant sur des symboles mathématiques uniquement, ce qui peut potentiellement limiter leur autonomie (il n'est pas toujours possible d'utiliser du matériel, en particulier dans une évaluation standardisée) et leur vitesse de travail (la réalisation d'un schéma est chronophage par rapport au cas où la technique opératoire de l'addition a été automatisée).

De la même façon, au Québec, toutes les opérations impliquant des fractions sont réalisées « à l'aide de matériel concret ou de schémas » (*op. cit.*, 2009a, p. 12). C'est le cas lorsqu'on demande aux élèves « d'additionner et soustraire des fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre » (*ibid.*) à partir de la cinquième année. L'autonomie de l'élève n'est requise qu'en sixième

année, autonomie limitée dans le sens où la réalisation de la tâche nécessite l'emploi de matériel concret ou l'utilisation d'un schéma, ce qui n'est pas toujours possible en contexte. Ces supports disparaissent progressivement dans l'enseignement secondaire, avec pour objectif « d'effectuer par écrit les quatre opérations avec des nombres facilement manipulables (y compris de grands nombres) en recourant à des écritures équivalentes et en s'appuyant sur les propriétés des opérations » (*op. cit.*, 2009b, p. 11). En effet, ces quatre opérations doivent être maitrisées avec des « nombres positifs écrits en notation fractionnaire avec ou sans l'aide de matériel concret ou de schémas », d'abord avec l'intervention de l'enseignant en septième année, puis sans cette intervention en huitième année. La formulation utilisée suppose, outre l'élimination progressive des soutiens à la réalisation de la tâche (qui ne sera pleinement achevée qu'en neuvième année), la mise en jeu de fractions dont le dénominateur de l'une n'est pas nécessairement le mutiple de l'autre, puisque cette restriction n'apparait plus dans les programmes de l'enseignement secondaire.

En République d'Irlande, la cinquième et la sixième année sont l'occasion « d'additionner et soustraire des fractions simples et des nombres mixtes simples » (*op. cit.*, p. 89). Des précisions fournies par les auteurs, nous déduisons une évolution dans la difficulté de la tâche entre ces deux années. En effet, en cinquième année, il s'agit « d'utiliser des fractions équivalentes pour simplifier les calculs » (*ibid.*), tandis qu'en sixième année, « le dénominateur commun devra être trouvé en énumérant les multiples » (*ibid.*). Au début de l'apprentissage, il semble donc que les élèves doivent produire une fraction équivalente pour mettre les deux fractions sur le même dénominateur. Par la suite, le dénominateur commun est plus difficile à trouver, puisque l'utilisation d'une liste est nécessaire. Autrement dit, nous pensons donc que dans un cas, le dénominateur de l'une des fractions est un multiple de l'autre, alors que dans l'autre cas, ce n'est pas nécessairement vrai. Dès lors, la notion de « fraction simple », non précisée par les rédacteurs des instructions officielles, ne peut plus être envisagée comme l'expression de dénominateurs liés par une relation numérique simple. Notre hypothèse est donc que les nombres mis en jeu (numérateurs et dénominateurs) ne doivent pas être trop grands, de façon à simplifier les calculs, et notamment la recherche d'un multiple commun aux deux dénominateurs.

À Singapour, cette tâche apparait dès la troisième année, avec cette restriction que la somme ou la différence ne doit pas être supérieure à 1 (« Additionner et soustraire deux fractions liées à l'intérieur de l'entier » [*op. cit.*, 2006a, p. 19]). Par l'emploi du terme « liées », les auteurs indiquent que le dénominateur de l'une des fractions doit être un multiple de l'autre. De plus, le nombre de termes est limité à deux, et les dénominateurs ne peuvent pas être supérieurs à douze. En quatrième année, les fractions additionnées ou soustraites doivent toujours être liées. Cependant, si le nombre de facteurs n'est pas limité, les auteurs excluent les calculs impliquant plus de deux dénominateurs différents, ainsi que l'emploi de fractions dont le dénominateur dépasse douze. De plus, la somme ou la différence n'a plus à être une fraction propre, ce qui suggère l'utilisation de fractions supérieures à un. Cette nouveauté explique que les auteurs imposent une nouvelle fois, non seulement l'étude des additions et soustractions de fractions de dénominateurs différents, mais également des calculs portant sur des fractions de même dénominateur (« Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur et des fractions liées » [*ibid*., p. 22]). En cinquième année, les élèves additionnent et soustraient des entiers et des fractions. En outre, ils effectuent ce type d'opérations sur des fractions inférieures à 1 sans l'aide de la calculatrice. La mention des dénominateurs liés a disparu, ce qui indique un degré supplémentaire dans le niveau de difficulté des exercices proposés aux élèves : la recherche d'un dénominateur commun suppose en effet

l'identification d'un multiple commun aux deux dénominateurs. Les auteurs précisent toutefois que les « dénominateurs ne doivent pas excéder douze, pour les calculs réalisés sans l'aide de la calculatrice » (*ibid.*, p. 26) et que les calculs impliquant plus de deux dénominateurs différents sont exclus. En septième année, les élèves poursuivent le travail entrepris sur les additions et soustractions de fractions dans le cadre de l'étude de l'algèbre. Leur maitrise des calculs avec des écritures fractionnaires leur permettront d'aborder « la simplification d'expressions algébriques linéaires » ainsi que la résolution « des équations simples impliquant des fractions qui peuvent être réduites à des équations linéaires » (*op. cit.*, 2006b p. 7). Les auteurs donnent les exemples suivants : « $\frac{2x}{3} - \frac{3(x-5)}{2}$ » et « $\frac{x}{3} + \frac{x-2}{4} = 3$ » (*ibid.*).

Dans le Taipei chinois, en cinquième année, « les élèves trouvent un multiple commun aux dénominateurs originaux et utilisent ce principe pour comparer, additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents » (*op. cit.*, p. 158). Les auteurs précisent que l'enseignement ne porte, à ce stade de la scolarité, que sur des fractions simples. L'une des originalités de ces instructions officielles est de définir très précisément ce terme. Ainsi, l'adjectif « simple fait reference au fait que les deux dénominateurs satisfont à l'une des conditions suivantes : 1. Les dénominateurs sont tous les deux des nombres à un chiffre. 2. L'un des dénominateurs est un multiple de l'autre dénominateur. 3. Multiplier les dénominateurs par 2, 3, 4 ou 5 permet de trouver un dénominateur commun aux deux dénominateurs (par exemple, 12 et 18) » (*ibid.*, p. 159), ce qui suggère que les élèves seront à même, à la fin de l'apprentissage, de résoudre une grande variété de situations, avec un niveau de difficulté élevé. La septième année sera l'occasion pour les élèves d'utiliser leurs connaissances sur l'addition et la soustraction de fractions de façon décontextualisée. Ainsi, ils devront « maitriser les calculs impliquant de multiplier et réduire une fraction autant que possible en utilisant le plus grand diviseur commun, et le plus petit multiple commun » (*ibid.*, p. 192). Les auteurs donnent peu de précisions sur la mise en œuvre cet item, laissant la possibilité aux enseignants d'augmenter le niveau de difficulté des exercices par rapport au travail réalisé en cinquième année. Néanmoins, l'exemple fourni ne suggère pas la réalisation de tâches nouvelles (« $\frac{7}{38} - \frac{3}{19} = \frac{7}{38} - \frac{6}{38} = \frac{1}{38}$ » [*ibid.*]).

§ 2. Multiplication et division de fractions

Comme pour l'addition et la soustraction, les techniques opératoires de la multiplication et de la division évoluent en fonction des variables de la tâche. Néanmoins, elles ne dépendent pas du fait que les fractions soient ou non de même dénominateur, mais plutôt du fait que la fraction soit multipliée (ou divisée) par un entier ou par une autre fraction. Dans le premier cas, la multiplication (ou la division) pourra être réalisée en calculant le produit (ou le quotient) du numérateur par le nombre entier, procédure que les élèves maitrisent le plus souvent déjà avec les nombres entiers. Dans le second cas, la division et la multiplication mettent en jeu des techniques spécifiques. C'est pourquoi nous étudierons successivement la multiplication et la division d'une fraction par un entier (A), et la multiplication et la division d'une fraction par une autre fraction (B). Dans le curriculum irlandais, nous avons rencontré une autre situation (la division d'un entier par une fraction) que nous présenterons dans le deuxième paragraphe, puisque la technique qu'elle engage est similaire à celle que l'on peut utiliser pour diviser une fraction par une autre fraction.

A. Par un entier

Dans ce paragraphe, nous ne prenons en compte que les situations faisant l'objet d'un calcul incluant le signe « × » ou « ÷ ». Pour prendre un exemple, dans certaines instructions officielles, le fait de prendre la fraction d'une quantité n'est pas modélisée par une multiplication, tandis qu'elle l'est dans d'autres. Cela suggère des techniques qui ne sont pas les mêmes et surtout une maitrise différente des calculs impliquant des fractions. Puisque ce qui nous intéresse ici, c'est la capacité des élèves à réaliser des opérations avec les fractions, nous n'inclurons dans l'analyse que les items imposant formellement le calcul d'un produit ou d'un quotient.

En Angleterre, les programmes de 2006 ne prévoyaient que peu d'activités impliquant des opérations avec des fractions. En ce qui concerne la multiplication et la division, il était simplement demandé aux élèves de sixième année de « relier les fractions à la multiplication et à la division (par exemple, 6 ÷ 2 = 1/2 de 6 = 6 × 1/2) » (*op. cit.*, 2006, p. 82). Or, interpréter 6 × 1/2 comme égal à 1/2 de 6 ne va pas de soi, cela nécessitant une bonne maitrise du sens de la multiplication et du rôle joué par le multiplicateur. De plus, cette vision ne représente qu'une facette parmi les significations du concept de la multiplication d'un entier et d'une fraction, 1/2 × 6 étant un calcul susceptible de modéliser une situation complètement différente. En 2014, c'est cette modélisation qui a été privilégiée, au détriment de l'autre qui a disparu. Ainsi, en cinquième année, les élèves apprennent à « multiplier des fractions propres et des nombres mixtes par des nombres entiers, soutenus par du matériel et des diagrammes » (*op. cit.*, 2014, p. 139) et maitrisent l'année suivante sa réciproque, la division de « fractions appropriées par des nombres entiers (par exemple, 1/3 ÷ 2 = 1/6) » (*ibid.*, p. 145). Pour la division, rien n'est dit sur les supports permettant aux élèves de comprendre pourquoi 1/3 ÷ 2 = 1/6. C'est curieux car, pour la multiplication, qui peut être traitée à l'aide des connaissances des élèves sur les nombres entiers, les auteurs imposent l'utilisation de représentations visuelles, tandis que celles-ci ne sont pas évoquées ici, alors que cela semble indispensable à la compréhension.

En Corée du Sud, c'est en cinquième année que les élèves apprennent à multiplier une fraction avec un entier (« comprendre le sens et le principe de calcul de la multiplication entre des nombres entiers et des fractions […] » [*op. cit.*, p. 26]). Les auteurs utilisent l'expression « comprendre le sens et le principe de calcul », et nous en déduisons que non seulement l'apprentissage doit être contextualisé ou relié à des modèles visuels de la fraction, mais qu'il doit aussi aboutir à un algorithme de calcul. En ce qui concerne la division, elle est limitée, à ce stade de la scolarité, au cas où le diviseur est un nombre entier (« comprendre le principe de calcul de la division d'une fraction par un nombre entier et calculer » [*ibid.*]). Là encore, le principe visant à ne pas dissocier le sens et la technique de calcul apparait.

En Floride, les auteurs des programmes de 2007 ont clairement distingué l'apprentissage des additions et des soustractions, qui avait lieu en cinquième année, et l'apprentissage des multiplications et des divisions, qui avait lieu en sixième année. En revanche, ils n'ont pas fait de distinction entre d'une part, la multiplication et la division de fractions par un nombre entier, et d'autre part, la multiplication et la division de fractions entre elles. La formulation de les intitulés est très large et inclut les notations décimales. Ainsi, les élèves doivent pouvoir « expliquer et justifier des procédures pour multiplier et diviser des fractions et des nombres décimaux » (*op. cit.*, 2007, p. 12), ce qui suppose à la fois une attention portée à la compréhension du sens des techniques opératoires, et le développement de plusieurs

stratégies pour mener les calculs. Ces dernières ne sont toutefois pas explicitées (il peut s'agir de l'utilisation d'un schéma, de matériel concret, des propriétés des nombres, etc.). Un autre impératif est de parvenir à une aisance dans la réalisation des calculs (« multiplier et diviser des fractions et des nombres décimaux efficacement » [*ibid.*]), ce qui suggère l'acquisition d'un algorithme de calcul par les élèves. De plus, l'objectif général de ce paragraphe est de permettre aux élèves de « développer une compréhension et une pratique *courante* de la multiplication et de la division de fractions et de nombres décimaux » (*ibid.*). La résolution de problèmes conduira à mettre en œuvre cette technique opératoire, et à réaliser des multiplications et des divisions de fractions en contexte (« résoudre des problèmes du monde réel portant sur la multiplication et la division de fractions et de nombres décimaux » [*ibid.*]). En septième année, dans le cadre de l'étude de l'algèbre, les connaissances des élèves à propos des quatre opérations sont réutilisées, dans le cadre de la résolution de problèmes ou de façon décontextualisée (« additionner, soustraire, multiplier et diviser des entiers, des fractions et des décimaux et réaliser des opérations exponentielles avec des bases rationnelles et des nombres entiers, y compris en résolvant des problèmes de la vie quotidienne » [*ibid.*, p. 14]). En 2014, les auteurs des programmes ont considérablement développé le thème des multiplications et des divisions impliquant des fractions au sein du curriculum. De plus, ces apprentissages interviennent plus tôt dans la scolarité. Nous ne ferons pas l'analyse complète de ces développements, car nous ne nous intéressons qu'aux textes en vigueur au moment où les élèves ayant passé les évaluations TIMSS 2015 ont étudié, c'est-à-dire aux textes de quatrième et huitième année pour les nouveaux programmes. La quatrième année est précisément le moment où les élèves doivent désormais « appliquer et étendre la compréhension antérieure de la multiplication pour multiplier une fraction par un nombre entier » (*op. cit.*, 2014, p. 4). Les fractions ne jouent pas le rôle d'opérateur, et bien que les exemples des instructions officielles les positionnent en tant que multiplicateurs, on comprend à la lecture des textes qu'elles jouent le rôle de multiplicande, c'est-à-dire de nombre que l'on multiplie. Ainsi, les élèves doivent *in fine* « comprendre un multiple de *a*/*b* comme un multiple de 1/*b*, et utiliser cette compréhension pour multiplier une fraction par un nombre entier. Par exemple, utiliser un modèle de fraction visuel pour exprimer 3 × 2/5 sous la forme 6 × 1/5, en reconnaissant ce produit comme étant 6/5 » (*ibid.*). La suite du curriculum nous éclaire sur les situations susceptibles d'être modélisées par la multiplication d'une fraction par un nombre entier. Ainsi, les élèves auront à « résoudre des problèmes comportant la multiplication d'une fraction par un nombre entier, par exemple […], si chaque personne à une fête mange 3/8 de livre de rôti de bœuf, et qu'il y aura 5 personnes à la fête, combien de livres de rôti de bœuf seront nécessaires ? » (*ibid.*, p. 4-5).

En France, la multiplication d'un entier par une fraction est enseignée en sixième année afin de permettre aux élèves de « prendre une fraction d'une quantité » (*op. cit.*, 2008b, p. 15). Dans ce cadre, « il s'agit de faire comprendre la modélisation de ce type de problème par une multiplication » (*ibid.*). C'est donc, de façon originale, la fraction-opérateur qui constitue le cadre de la première rencontre avec les multiplications impliquant des fractions, tandis que son étude dans le contexte de la fraction partie-tout est imposée plus tardivement, en huitième année. Les élèves doivent alors « connaître et utiliser l'égalité : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ » (*ibid.*, p. 28), égalité fondamentale pour comprendre, par exemple, que $\frac{3}{4}$ représente 3 fois $\frac{1}{4}$. Cependant, les auteurs ne semblent pas assigner cette fonction à l'égalité que nous venons d'évoquer, puisqu'ils la placent dans un paragraphe destiné à imposer un travail sur la notion d'inverse. Pour autant, la relation entre la notion d'inverse et cette égalité n'est pas explicitée.

À Hong Kong SAR, la multiplication et la division de fractions sont abordées en cinquième année. Les auteurs ne font pas la distinction entre le cas où deux fractions sont en jeu, et le cas où ce sont une fraction et un entier qu'il faut prendre en compte. Ils séparent les apprentissages en deux grandes parties, les multiplications d'un côté (« Réaliser des multiplications de fractions, pour des produits impliquant au plus deux facteurs » [*op. cit.*, p. 38] et les divisions de l'autre (« Réaliser des divisions de fractions pour des quotients impliquant au plus deux facteurs » [*ibid.*, p. 40]). Les premières doivent être étudiées au premier semestre, tandis que les secondes doivent être étudiées au second semestre. Toutefois, les attendus sont similaires, car après avoir acquis la technique opératoire, les élèves sont amenés dans les deux cas à « résoudre des problèmes simples » et « réaliser une estimation des résultats » (*ibid.*).

En Irlande du Nord, nous n'avons pas trouvé trace d'une utilisation du symbole « × » à propos des fractions. De nombreuses compétences ont trait au fait de prendre la fraction d'une quantité. Toutefois, la modélisation de cette situation ne passe pas par la multiplication, mais par l'emploi de la préposition « de » (par exemple, en quatrième année : « Calculer avec des fractions : 1/3 de, 1/4 de, 2/3 de, 3/5 de, mentalement, à l'écrit, à l'aide de la calculatrice » [*op. cit.*, p. 1]). Ces items ont donc été exclus de l'analyse menée ici.

En Ontario, c'est en sixième année que les élèves acquièrent la capacité à « multiplier et diviser une fraction par un nombre naturel à l'aide de diverses stratégies (p. ex., matériel concret, dessins, tableau, droite numérique) » (*op. cit.*, p. 71). Ces différentes démarches sont réinvesties dans le cadre de la résolution de problèmes (« Expliquer les stratégies utilisées ainsi que la démarche effectuée pour résoudre divers problèmes comportant des nombres naturels, des écritures décimales ou des fractions » [*ibid.*]). Cette diversité des démarches utilisées par les élèves, ainsi que les exigences des programmes quant à leurs capacités d'argumentation, est susceptible de leur permettre de mieux comprendre les calculs qu'ils effectuent. En revanche, les auteurs ne font pas mention d'une technique opératoire conduisant les élèves à généraliser les observations faites à l'aide du matériel (notamment pour mettre en évidence que $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$ ou que $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{bc}$). En effet, c'est seulement en septième année que se développe l'aisance des élèves dans la réalisation de calculs impliquant des multiplications ou des divisions de fractions. Ainsi, les propriétés de la distributivité doivent permettre de faciliter les calculs des élèves, notamment ceux portant sur des nombres mixtes. Les auteurs donnent l'exemple de la ligne de calcul suivante : « $5 \times 3\frac{1}{5} = 5 \times (3 + \frac{1}{5}) = (5 \times 3) + (5 \times \frac{1}{5}) = 15 + 1 = 16$) » (*ibid.*, p. 79). De plus, des activités d'estimation sont prévues, de façon à faire vérifier la vraisemblance des résultats obtenus par les élèves.

Au Québec, les multiplications impliquant des fractions sont étudiées en cinquième année. À ce stade de la scolarité, l'un des facteurs doit être un nombre entier, ce qui exclut la multiplication de fractions entre elles, et les divisions ne sont pas mentionnées (« Multiplier un nombre naturel par une fraction » [*op. cit.*, 2009a, p. 12]). À travers le titre du paragraphe, les auteurs indiquent que cet apprentissage s'appuie sur des représentations visuelles (l'apprentissage est réalisé « à l'aide de matériel concret ou de schémas » [*ibid.*]), conduisant à prévenir une utilisation trop rapide des algorithmes de calcul. De même, la résolution de problèmes s'appuiera sur des supports concrets ou imagés, et les élèves seront invités à décrire une situation à partir de sa représentation visuelle, tissant ainsi des liens entre les ostensifs graphiques et les ostensifs discursifs (« traduire une situation à l'aide de matériel concret, de

schémas ou par une opération et vice versa (exploitation des différents sens de l'addition, de la soustraction et de la multiplication par un nombre naturel) » [*ibid.*, p. 10]). En sixième année, les élèves devront montrer leur autonomie dans toutes les tâches que nous venons d'évoquer, alors qu'elles étaient auparavant réalisées avec l'intervention de l'enseignant. L'année suivante, les opérations mettant en jeu des fractions demeurent limitées à l'addition, la soustraction et la multiplication par un entier naturel. Les élèves sont supposés maitriser ces notions et les utiliser dans des activités de révision ou de réinvestissement. Par ailleurs, il est intéressant de voir que, dans l'enseignement secondaire, la formulation de l'intitulé évolue : en plus de « multiplier un nombre naturel par une fraction », les élèves s'entrainent à multiplier « une fraction par un nombre naturel » (*op. cit.*, 2009b, p. 10). L'apprentissage de la fraction-opérateur est donc antérieur à l'apprentissage de multiplication dans le cadre de l'étude de la fraction partie-tout.

En République d'Irlande, l'ordre des apprentissages est similaire, mais le fait de prendre la fraction d'une quantité n'est pas modélisé par une multiplication. Selon le curriculum, c'est donc pour « multiplier une fraction par un nombre entier » (*op. cit.*, p. 90) que les élèves de cinquième année vont associer pour la première fois les fractions et le symbole « × ». L'apprentissage prend appui sur des représentations visuelles de la fraction (« Développer le concept avec du matériel concret, des pliages de papier et des diagrammes. Quatre fois 3/4 d'une pizza, cela fait combien de pizzas ? » [*ibid.*]). Par les exemples, on voit bien qu'il s'agit de multiplier le nombre de parts, et non d'appliquer une fraction à un nombre entier. Ainsi, le calcul « quatre fois 3/4 d'une pizza » peut être traduit par « 4 fois 3 quarts d'une pizza » ou même traité comme « 3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4 de pizza ».

À Singapour, nous avons observé que, comme dans les nouveaux programmes anglais, l'enseignement de la multiplication d'une fraction par un entier et celui de la division d'une fraction par un entier ne se déroulent pas la même année. En quatrième année, le multiplicande est une fraction et le multiplicateur est un nombre entier (« multiplier une fraction propre ou supérieure ou égale à 1 avec un nombre entier » [*op. cit.*, 2006a, p. 22]). En revanche, le lien entre la recherche de la fraction d'une collection et un calcul tel que « a $\times \frac{b}{c}$ » n'est pas évoqué. En cinquième année, l'une des nouveautés rencontrées par les élèves consiste à « diviser une fraction inférieure à 1 par un nombre entier sans l'aide de la calculatrice » (*ibid.*, p. 26). Cependant, les auteurs limitent le niveau de difficulté des exercices, en indiquant que « la division d'une fraction supérieure ou égale à 1, un nombre mixte par un nombre entier ou une fraction propre n'est pas au programme » (*ibid.*). En outre, les enseignants ont toute liberté quant au choix de la méthode et des supports d'apprentissage. Par ailleurs, les élèves sont invités à résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations avec des fractions (« résoudre des problèmes incluant les quatre opérations » [*ibid.*]). Toutefois, la résolution de ces problèmes ne doit pas nécessiter des calculs trop compliqués : les auteurs soulignent que « les calculs incluant plus de deux dénominateurs différents ne sont pas au programme » (*ibid.*). De plus, même si les auteurs ne donnent pas davantage d'explications, cet item semble inviter les élèves à utiliser les compétences qu'ils viennent de construire dans des situations concrètes, plutôt qu'à développer de nouvelles compétences à propos de ces opérations.

Dans le Taipei chinois, il n'y a pas d'item dont la formulation induit un travail sur la multiplication avec des fractions avant la cinquième année. Cependant, lors de l'étude de la fraction partie d'un tout en quatrième année, les auteurs précisent que le symbole « × » est introduit pour

modéliser la multiplication d'une fraction par un entier (« Après avoir travaillé sur cet item spécifique, les élèves doivent être capables de comprendre ou calculer […] $\frac{2}{3} \times 3 = 2$; $\frac{9}{8} \times 3 = \frac{27}{8}$ » [*op. cit.*, p. 143]). Dès ce stade de la scolarité, les enseignants sont donc invités à développer ce concept par le biais de l'addition réitérée, et en travaillant à partir de situations concrètes. En cinquième année, la fraction-opérateur est présentée aux élèves dans le cadre de la résolution de problèmes familiers des élèves. Ainsi, si « une pizza coute 300 NTD », et que « chaque personne mange un tiers de la pizza » (*ibid.*, p. 160), les élèves devront calculer le prix payé par chacun, afin de « construire l'idée que $\times \frac{1}{2}$ signifie divisé par 2, $\times \frac{1}{3}$ signifie divisé par 3 » (*ibid.*, p. 161). Puis, progressivement, ils utilisent des fractions non unitaires et parviennent à la compréhension de la formule générale $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$. Dans le domaine de l'algèbre, la multiplication d'un nombre mixte par un nombre entier est introduite à l'occasion d'un paragraphe relatif à la distributivité, donnant à nouveau aux élèves l'occasion de multiplier une fraction par un entier (« La distributivité sera utilisée lorsque les enseignants devront expliquer la multiplication comportant des nombres mixtes et des nombres entiers » [*ibid.*, p. 169]) Les auteurs donnent l'exemple suivant : « (3 + 1/2) × 3 = 3 × 3 + 1/2 × 3 = 9 + 3/2 = 10 + 1/2 » (*ibid.*, p. 170), la compétence étant travaillée à nouveau en septième année, avec des nombres plus grands (« Maitriser les opérations impliquant des fractions mixtes. Par exemple, $100 \times (-22\frac{1}{5}) = 100 \times (-\frac{111}{5})$ » [*ibid.*, p. 193]).

B. Par une autre fraction

En Angleterre, les programmes de 2006 ne prévoient aucune activité visant à multiplier ou diviser des fractions entre elles. Il faut consulter les instructions officielles de 2014 pour trouver, en sixième année, la capacité à « multiplier des paires simples de fractions propres, en écrivant la réponse dans sa forme la plus simple (par exemple, 1/4 × 1/2 = 1/8) » (*op. cit.*, 2014, p. 145). Toutefois, comme ces injonctions ne s'appliquaient pas encore au moment des évaluations TIMSS 2015, nous ne développerons pas l'analyse de cet intitulé.

En Corée du Sud, l'apprentissage de la multiplication d'une fraction par un entier, et celui de la multiplication de deux fractions entre elles, ont lieu la même année (en cinquième année : « Comprendre le sens et le principe de calcul de la multiplication entre des nombres entiers et des fractions, et entre fractions » [*op. cit.*, p. 26]). En revanche, les tâches impliquant de diviser une fraction par un entier, ou de calculer le quotient de deux fractions, ont été dissociées : les premières sont soumises aux élèves en cinquième année, tandis que les secondes ne sont réalisées que l'année suivante (« comprendre le sens et le principe de calcul de la division pour le cas où le diviseur est une fraction, et savoir comment la calculer » [*ibid.*, p. 30]). Selon une formule utilisée à plusieurs reprises, les auteurs soulignent l'importance de construire parallèlement le sens et la technique opératoire. Enfin, comme un bilan, les élèves de sixième année sont invités à utiliser les quatre opérations dans des calculs mélangeant les différentes écritures des rationnels (« effectuer des calculs simples mélangeant des fractions et des écritures décimales » [*ibid.*]).

En Floride, la sixième année est l'occasion de « développer une compréhension et une pratique courante de la multiplication et de la division de fractions et de nombres décimaux » (*op. cit.*, 2007, p. 12), notamment à travers la résolution de problèmes du monde réel. Nous avons indiqué précédemment

que, dans cet item, les auteurs ne font pas de différence entre d'une part, les calculs incluant une fraction et un nombre entier, et d'autre part, ceux incluant deux fractions. De la même façon, en septième année, les auteurs des instructions officielles utilisent une formulation très large concernant les opérations que doivent maitriser les élèves avec des fractions (« additionner, soustraire, multiplier et diviser des entiers, des fractions et des décimaux » [*ibid.*, p. 14]). Nous interprétons cette formulation comme ouvrant la voie à tous types de calculs avec des rationnels : multiplication de fractions entre elles, division d'une fraction par une fraction, etc. En outre, l'utilisation de coefficients rationnels pour la résolution d'équations linéaires à une ou deux étapes permet aux élèves d'être confrontés à des calculs comportant des fractions, tout comme l'utilisation des fractions dans le cadre de l'étude des exposants.

En France, un seul item évoque la multiplication de nombres écrits sous une forme fractionnaire. Il s'agit, en septième année, « d'effectuer le produit de deux nombres écrits sous forme fractionnaire ou décimale, le cas d'entiers étant inclus » (*op. cit.*, 2008b, p. 22), ce qui suppose non seulement la recherche du produit de deux fractions, mais également la recherche du produit d'un entier et d'une fraction. Cet apprentissage doit être contextualisé, et permettre d'aborder différentes facettes du concept de fraction. De plus, les élèves ne devront pas seulement effectuer les calculs : ils devront montrer une compréhension de la technique utilisée. En effet, selon les auteurs, « le travail porte à la fois sur les situations dont le traitement fait intervenir le produit de deux nombres en écritures fractionnaires (en relation avec différentes significations de ces écritures) et sur la justification du procédé de calcul » (*ibid.*). En huitième année, les élèves continuent de « multiplier […] des nombres relatifs en écriture fractionnaire » (*ibid.*, p. 28), et la maitrise de ce type de tâches devient exigible dans le cadre du socle commun. De plus, ils apprennent à « diviser des nombres relatifs en écriture fractionnaire » (*ibid.*).

En ce qui concerne Hong Kong SAR, nous avons déjà indiqué que la cinquième année était l'occasion pour les élèves de réaliser des activités mettant en jeu des multiplications et des divisions de fractions, sans distinction entre les calculs impliquant deux fractions et ceux impliquant une fraction et un entier. La limitation du niveau de difficulté passe par la restriction du nombre de facteurs (« réaliser des multiplications de fractions, pour des produits impliquant au plus deux facteurs » [*op. cit.*, p. 38] et « réaliser des divisions de fractions pour des quotients impliquant au plus deux facteurs » [*ibid.*, p. 40]), et pour les divisions, par l'exclusion « des problèmes consistant à chercher le nombre de départ » (*ibid.*).

En Ontario, le travail effectué en huitième année et consistant à « multiplier et diviser des fractions positives » (*op. cit.*, p. 86) s'inscrit dans la continuité du celui proposé aux élèves en sixième et septième année à propos de la multiplication et de la division d'une fraction par un entier. Ainsi, les élèves sont toujours susceptibles de s'appuyer sur des représentations visuelles de la fraction, même si cela n'a pas un caractère obligatoire. En l'occurrence, le concept se construit « à l'aide ou non de matériel concret ou semi-concret dans divers contextes » (*ibid.*). Une aisance dans la réalisation des calculs semble néanmoins attendue en fin d'apprentissage, dans la mesure où les élèves vont réutiliser ces connaissances pour « formuler et résoudre des problèmes portant sur des situations complexes avec des nombres provenant de différents ensembles (par exemple, nombres naturels, entiers et fractionnaires) » (*ibid.*, p. 87).

Au Québec, la multiplication et la division de fractions entre elles ne sont abordées que dans l'enseignement secondaire. À ce stade de la scolarité, les tâches envisagées par les auteurs couvrent un

champ de compétences très large (« Effectuer par écrit les quatre opérations avec des nombres facilement manipulables [y compris de grands nombres] » [*op. cit.*, 2009b, p. 11]). Les auteurs posent toutefois quelques limites à la difficulté de la tâche : même s'ils peuvent être grands, les nombres en jeu doivent être « facilement manipulables ». De plus, les élèves peuvent s'appuyer sur « des écritures équivalentes », sur « les propriétés des opérations » ainsi que, éventuellement, sur « du matériel concret et des schémas » (*ibid.*). En outre, ces calculs sont d'abord réalisés, en septième année, avec l'intervention de l'enseignant, et ce n'est qu'en en huitième année que les élèves doivent pouvoir identifier les produits et quotients en toute autonomie. Indiquons également qu'en raison de la formulation imprécise des textes officiels (notamment en ce qui concerne l'importance à accorder à la maitrise de chacune des opérations, et à la complexité attendue des apprentissages pour chacune d'elles), le risque est grand de voir des pratiques variées s'instaurer dans les classes.

En République d'Irlande, la multiplication de fractions entre elles est au programme de la sixième année. Pour parvenir à une maitrise de ce type de calculs, les élèves utilisent des supports concrets et visuels. Cependant, les auteurs précisent que ces activités contribuent *in fine* à construire un algorithme (« explorer et développer le concept en utilisant du matériel concret et la droite numérique, et en dessinant des diagrammes pour illustrer des exemples, ce qui conduit à l'élaboration d'un algorithme » [*op. cit.*, 1999, p. 90]). D'ailleurs, dans l'enseignement secondaire, ce sont ces algorithmes qui « sont utilisés pour résoudre des problèmes impliquant des quantités fractionnaires » (*op. cit.*, 2014, p. 22). La division d'un nombre entier par une fraction est une spécificité du programme irlandais (« diviser un nombre entier par une fraction unitaire. Combien de quarts dans 2 ? 2 ÷ 1/4 ; 15 ÷ 1/5 » [*ibid.*]). Cet apprentissage est lié, à travers les exemples, à la maitrise du sens de la division-quotition (c'est-à-dire à la recherche du nombre de parts). Il met également en lumière la réciprocité de la relation entre la multiplication et la division : calculer 2 ÷ 1/4, c'est aussi trouver le nombre qui multiplie 1/4 pour obtenir 2, amenant les élèves à réfléchir à la multiplication d'une fraction par un nombre entier.

À Singapour, en cinquième année, les élèves s'entrainent à multiplier deux fractions, étant entendu que l'un des facteurs au moins est une fraction propre lorsque la calculatrice est interdite (en effet, nous trouvons à proximité deux compétences qui se distinguent principalement par la mention de ce support technologique : « multiplier une fraction inférieure à 1 avec une fraction inférieure ou supérieure à 1 sans l'aide de la calculatrice » et « multiplier des fractions supérieures à 1 » [*op. cit.*, 2006a, p. 26]). Aucune indication n'est fournie aux enseignants à propos des supports d'apprentissage (à titre d'exemples, on aurait pu penser à l'appui sur des modèles visuels de la fraction ou à l'utilisation de matériel concret). En sixième année, l'enseignement de la division dans laquelle le diviseur est une fraction propre est imposé avec quelques restrictions qui tiennent à la nature des fractions en jeu. Ainsi, le dividende est soit un nombre entier, soit une fraction propre. En revanche, « la division d'une fraction supérieure ou égale à 1 ou d'un nombre mixte par une fraction propre, ainsi que la division par une fraction supérieure ou égale à 1 ou un nombre mixte ne sont pas au programme » (*ibid.*, p. 30). Enfin, la huitième année sera l'occasion pour les élèves d'aborder « la multiplication et la division de fractions algébriques simples » (*op. cit.*, 2006b, p. 9) et donc de parfaire leur maitrise des techniques opératoires. Les auteurs donnent les exemples suivants : « $\left(\frac{3a}{4b^2}\right)\left(\frac{5ab}{3}\right)$; $\frac{3a}{4} \div \frac{9a^2}{10}$ » (*ibid.*).

Dans le Taipei chinois, cet apprentissage débute en cinquième année. Les auteurs expliquent que c'est seulement après avoir étudié la multiplication de fractions par un entier qu'ils peuvent proposer

aux élèves un raisonnement tel que $\frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4} \times 3 \div 2 = \frac{5\times3}{4} \div 2 = \frac{5\times3}{4\times2} = \frac{15}{8}$. Pour mener cet enseignement, ils suggèrent d'utiliser les aires avec des longueurs et des largeurs en écritures fractionnaires. Ainsi, pour l'exemple que venons d'évoquer, un enseignant pourrait demander à ses élèves de rechercher l'aire d'un « rectangle de longueur $\frac{3}{2}$ cm et de largeur $\frac{5}{4}$ cm » (*op. cit.*, p. 162). Ces activités avec les aires ne seront menées que « si les professeurs veulent achever l'enseignement des multiplications de fractions en une seule fois », (*ibid.*, p. 161), ce qui suppose que les années ultérieures seront l'occasion de parfaire la maitrise des multiplications de fractions. En effet, en sixième année, il est demandé aux élèves de « réaliser des calculs arithmétiques à deux étapes impliquant des fractions », ce qui les conduira à faire le point sur leur capacité à effectuer des « calculs avec des nombres et des quantités dont l'apprentissage a été mené au cours des six dernières années » (*ibid.*, p. 178). Les professeurs doivent s'assurer qu'ils ont bien compris le fondement de ces calculs et qu'ils se sont entrainés, sans penser que les fractions constituent à ce stade de la scolarité un objet familier. En outre, la division de fractions est au programme de la sixième année. Dans les précisions qui accompagnent les programmes, les auteurs indiquent que les élèves s'entrainent d'abord avec des fractions unitaires, puis avec tous types de fractions, y compris des nombres mixtes. De plus, ils travaillent avec des fractions utilisées en tant que dividende et en tant que diviseur, pour pouvoir ensuite calculer le quotient de deux fractions. Avant de formaliser les calculs, les élèves comprennent le sens de la division à travers des situations de la vie quotidienne (par exemple, « il y a quatre pizzas. Si chaque enfant reçoit 1/3 de pizzas, combien d'enfants pourront être servis ? »). Lors de la matérialisation des calculs, les professeurs doivent se montrer « patients face aux erreurs des élèves […] en raison de la conception erronée qu'ils tirent de leur expérience précédente selon laquelle le quotient est toujours plus petit que le dividende » [*ibid.*, p. 175]. En outre, la découverte du principe selon lequel $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ et son application permettent aux élèves de perfectionner dans le même temps leur maitrise des multiplications de fractions. Enfin, même si l'importance de ce paragraphe est qualifiée de mineure dans les instructions officielles, les rédacteurs prévoient d'inclure des fractions dans des équations servant à représentations des problèmes à deux étapes (« utiliser des variables pour mettre en équation un problème mathématique à deux étapes et examiner le caractère vraisemblable des réponses dans des conditions concrètes » [*ibid.*, p. 177]). La capacité des élèves à identifier le quotient de deux fractions est réinvestie lorsque les facteurs sont exprimés sous une forme décimale, car l'utilisation des fractions à la place des notations décimales facilite les calculs. Les auteurs citent l'exemple de la division 3,24 ÷ 1,2 qui peut être écrite sous la forme 324/100 ÷ 12/10 puis 324/100 × 10/12. Enfin, en septième année, le cadre algébrique ouvre la voie à la réalisation de calculs beaucoup plus complexes impliquant des multiplications et des divisions de fractions, en lien avec d'autres notions comme les puissances, ou le concept de nombre négatif. Les auteurs proposent l'exemple suivant : « $(\frac{1}{2})^4 \times (\frac{4}{3})^2 = \frac{4^2}{2^4\ 3^2}$ » (*ibid.*, p. 193), qui montre bien la difficulté des exercices proposés aux élèves.

Conclusion de la sous-section

Comme pour l'équivalence et la comparaison, les progressions choisies par les législateurs relativement aux opérations impliquant des fractions sont très variées. Dans le graphique ci-contre, nous avons fait la synthèse de nos observations pour les onze participants étudiés. Les additions et soustractions de fractions de même dénominateur apparaissent en violet : leur enseignement débute entre la deuxième année (à Singapour) et la sixième année (en Ontario). Les curriculums du Québec et de la République d'Irlande ne prévoient pas ce type de tâches. En bleu, l'organisation temporelle des enseignements relatifs à l'addition et à la soustraction de fractions de dénominateurs différents est matérialisée : leur enseignement commence le plus précocément en Irlande du Nord (en quatrième année) et le plus tardivement en Ontario (en septième année). Tous les programmes des pays de notre corpus prescrivent ce type de tâches. En rose, nous signalons la présence d'un intitulé concernant les multiplications et divisions de fractions par un entier. Il s'agit de l'enseignement dont la répartition est la plus homogène au sein de notre corpus (avec un début entre la quatrième et la sixième année). Toutefois, il n'est imposé ni à Hong Kong SAR, ni en Irlande du Nord (pour ce pays, rappelons que nous n'avons pas pu analyser les programmes du secondaire). En orange, nous indiquons les années au cours desquelles les auteurs prescrivent l'enseignement des multiplications et divisions de fractions entre elles, entre la cinquième et la huitième année. Ce type de tâches n'apparait ni dans les instructions officielles anglaises, ni dans celle de l'Irlande du Nord.

Il existe donc de fortes différences inter-pays, qui concernent à la fois le moment de l'apprentissage, sa durée et sa nature. Pour l'analyse des résultats des élèves, une analyse détaillée tenant compte des caractéristiques de la tâche sera nécessaire. Toutefois, nous constatons que les activités relatives aux opérations avec des fractions sont peu nombreuses avant les évaluations TIMSS de quatrième année. Seul le curriculum de Singapour propose un travail à la fois précoce et dense à ce sujet, avec des additions de fractions de même dénominateur, des additions de fractions de dénominateurs différents, et des multiplications d'une fraction par un entier, chaque enseignement débutant au cours d'une année différente. En conséquence, plus que la réalisation d'une comparaison portant sur les onze participants qui forment notre corpus, ces tests nous permettront de déterminer si cette progression particulière confère un avantage aux élèves singapouriens dans le domaine des opérations impliquant des fractions.

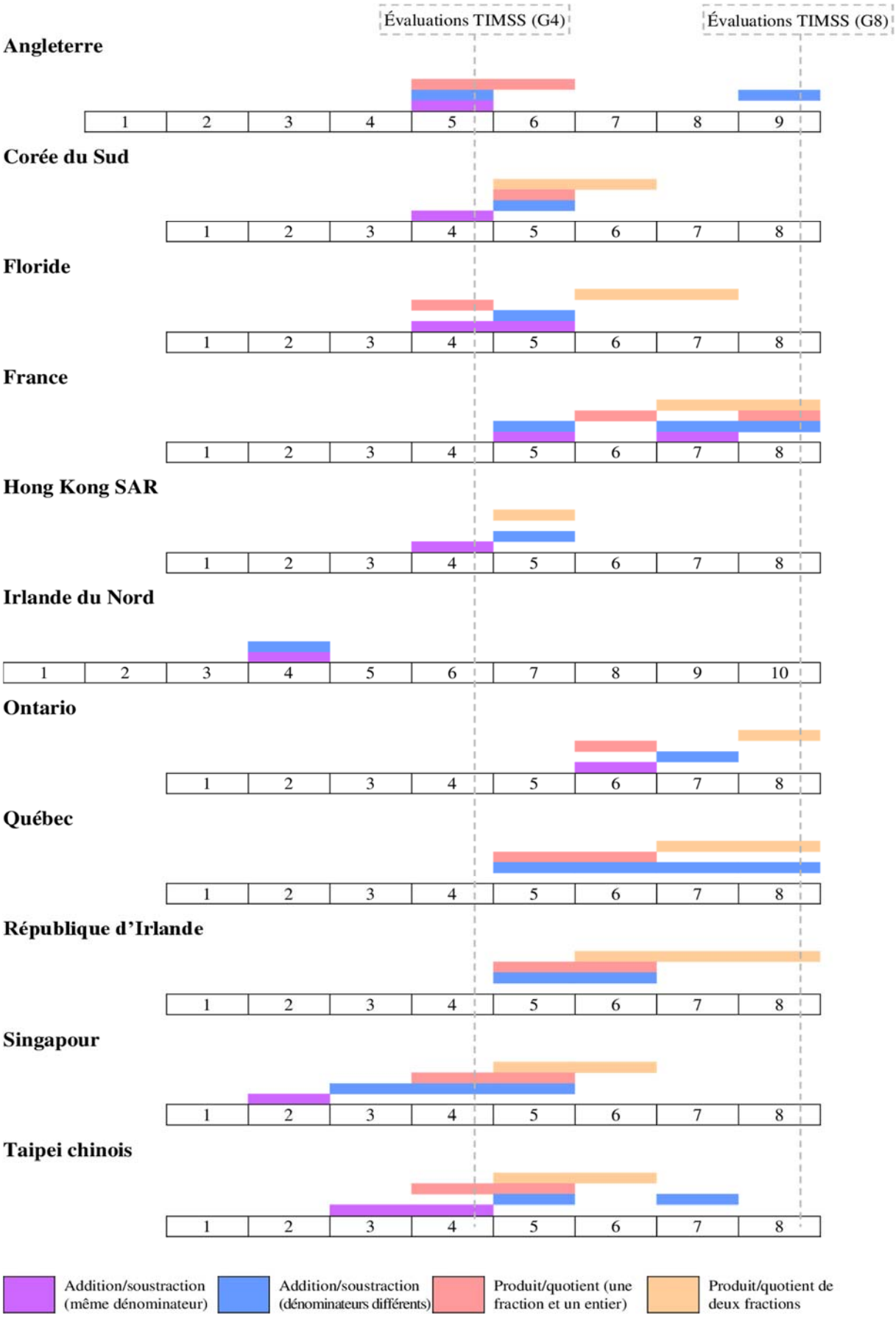


Figure 54. Chronogénèse des compétences relatives aux opérations impliquant des fractions dans les instructions officielles de notre corpus (2015)

Comme pour l'équivalence et la comparaison, nous trouvons, relativement à chaque type de tâches, des progressions que l'on peut distinguer en fonction de l'élément praxéologique modifié par le législateur (les variables de la tâche ou la technique à utiliser). Si l'on prend l'exemple de l'addition de fractions de dénominateurs différents, la progression de la République d'Irlande repose sur une modification de la technique utilisée (pour « additionner et soustraire des fractions simples », les élèves de cinquième année utilisent « des fractions équivalentes pour simplifier les calculs », et ceux de sixième année recherchent un « dénominateur commun […] en énumérant les multiples » [*op. cit.*, p. 89]), tandis qu'à Singapour, elle repose sur une modification des variables utilisées (les élèves réalisent d'abord des additions de fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre, puis cette restriction est levée). Au premier abord, il existe une forte proximité entre les deux praxéologies que nous venons d'évoquer : pour additionner deux fractions de dénominateurs liés, l'une des techniques possibles est l'utilisation de fractions équivalentes pour identifier un dénominateur commun. De même, la recherche d'un dénominateur commun à travers l'énumération des multiples peut conduire à trouver la somme de deux fractions dont les dénominateurs sont librement définis par l'enseignant. Néanmoins, on objectera que, dans le premier cas, la réalisation d'un schéma est une voie possible pour trouver la somme. Dans le second cas, au lieu d'énumérer les multiples des deux dénominateurs pour trouver le PPCM, on peut toujours considérer $\frac{ad}{bd}$ et $\frac{cb}{db}$ comme une solution possible pour mettre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sur le même dénominateur.

Le choix d'une progression fondée sur l'évolution des variables présente donc l'avantage d'offrir des opportunités plus nombreuses aux professeurs pour guider les élèves dans la réalisation de la tâche. Toutefois, la variété des techniques utilisées est laissée à l'appréciation des enseignants. Le choix d'une progression fondée sur l'évolution des techniques présente quant à lui l'avantage de la précision : les professeurs savent exactement quelles situations ils vont pouvoir proposer aux élèves, et quelles procédures ceux-ci vont utiliser pour les résoudre. En revanche, cela limite les techniques utilisées par rapport au champ des possibles. À propos des additions de fractions de dénominateurs différents, les deux branches de l'alternative sont sélectionnées à la même fréquence dans notre corpus : parmi les six participants qui imposent cet enseignement pendant plusieurs années, trois font évoluer les variables de la tâche (Angleterre, France, Singapour) et trois font évoluer les techniques à mettre en œuvre (Québec, République d'Irlande, Taipei chinois).

Conclusion de la section consacrée à l'acquisition des techniques propres aux fractions

Si tous les auteurs des programmes prévoient des enseignements portant sur des techniques spécifiques aux écritures fractionnaires, ceux-ci ne prennent pas la même forme et n'ont pas lieu au même moment dans tous les pays. Étant donnée la grande variété des choix qu'ils réalisent, ainsi que la multiplicité des variables qui peuvent affecter les tâches que nous avons décrites, la recherche d'une corrélation entre le contenu des programmes et les performances des élèves ne pourra être effectuée de la même manière que pour les tâches qui concernent la construction du concept de nombre rationnel. Si ces dernières ont fait émerger des questionnements portant sur l'incidence de l'ancienneté et de la durée des enseignements, l'analyse que nous avons menée dans cette section a davantage mis au jour une variabilité liée à la présence, à la complexité et aux caractéristiques des types de tâches tels qu'ils apparaissent dans les instructions officielles. Par exemple, nous avons montré qu'au moment des évaluations TIMSS de quatrième année, les élèves de plusieurs pays n'avaient pas encore abordé la notion de comparaison avec des fractions. Nous avons également évoqué le fait que certaines tâches étaient plus complexes que d'autres (par exemple, le rangement par rapport à la comparaison) et que les exigences portées par les autorités de chaque pays sur ce point pourraient être corrélées avec la capacité des élèves à réussir certains items. Enfin, nous avons vu que chaque type de tâche pouvait faire l'objet d'une progression spécifique, dans laquelle les variables de la tâche ou les techniques à utiliser évoluaient au fil de la scolarité. La prise en compte de ces variables apparait indispensable pour expliquer les scores obtenus par les élèves.

Conclusion du chapitre consacré à la chronogénèse du concept de fraction

Les écarts inter-pays relatifs à l'organisation temporelle des enseignements sont-ils plus importants lorsque la fraction est objet d'étude, par rapport au cas où elle sert de point d'appui à l'acquisition d'autres formes d'écriture des rationnels ? La réponse est oui, si l'on considère que tous les pays imposent des conversions entre, d'une part, les fractions, et d'autre part, les notations décimales et les pourcentages, à un moment semblable de la scolarité. Les différences se font jour principalement à propos de l'utilisation des écritures fractionnaires. À cet égard, la France est, parmi les participants dont nous étudions les programmes, le territoire dans lequel les instructions officielles fournissent les indications les moins denses. L'introduction des fractions est tardive, et les écritures décimales sont découvertes par les élèves la même année. Les tâches que nous avons désignées comme visant l'étude de la cardinalité sont repoussées assez loin dans la scolarité : la France est à la fois le pays dans lequel la notion de fraction

équivalente est travaillée le plus tardivement, et le seul dans lequel des comparaisons de fractions ne sont pas prescrites au plus tard en quatrième année. La fraction-mesure occupe une place importante dans le curriculum, et la droite graduée est un ostensif cité par les auteurs pour des tâches de reconnaissance, ce qui n'est pas le cas dans les autres programmes étudiés. À l'inverse, la question des opérations y est assez peu développée. Dans l'équilibre qui est recherché entre les deux, il semble donc que les fractions soient davantage, au moment des évaluations TIMSS 2015, un « support pour l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux » qu'un « objet d'étude » (Ministère de l'Éducation nationale, *op. cit.*). Une autre différence entre l'acquisition du concept de nombre rationnel et celle des techniques propres aux fractions réside dans le fait que les multiples points de départ des enseignements qui concernent la seconde sont plus tardifs et davantage regroupés autour de la quatrième année que ceux qui concernent la première. Par ailleurs, il a été possible de définir une progression commune dans la construction du concept de nombre rationnel, même si la première étape n'est pas imposée par dans tous les programmes scolaires :

1. activités préparatoires destinées à travailler la capacité des élèves à partager en parts égales ;
2. introduction des écritures fractionnaires ;
3. instauration d'une relation entre les fractions et les écritures décimales ;
4. instauration d'une relation entre les fractions et les pourcentages.

Cette recherche n'a pas abouti pour l'organisation des enseignements portant sur les propriétés spécifiques des fractions. Nous avons constaté que la notion d'équivalence était abordée aussi bien avant qu'après celle de comparaison. En ce qui concerne les opérations, une forme de chronologie des tâches apparait dans le curriculum de Singapour (additions de fractions de même dénominateur, additions de fractions de dénominateurs différents, multiplications d'une fraction et d'un entier, multiplications de deux fractions). Toutefois, si cet ordre transparait dans une moindre mesure dans les instructions officielles du Taipei chinois, il ne peut être identifié dans les autres textes étudiés. Pour parvenir à identifier une progression, il est nécessaire de faire porter l'analyse sur un type de tâche en particulier, une technique ou une signification du concept. Nous avons effectué ce travail pour deux types de tâches en particulier (la comparaison et l'addition de fractions de dénominateurs différents), montrant que les progressions envisagées par les auteurs pouvaient être classées en quatre catégories (aucune évolution des variables de la tâche n'est proposée ; une ou plusieurs variables de la tâche sont

modifiées sans affecter la nature des techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre ; une ou plusieurs variables de la tâche sont modifiées et cela affecte la nature des techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre ; le législateur ne modifie pas la description de la tâche ou la modifie peu, mais il impose l'utilisation d'une ou plusieurs techniques nouvelles).

CONCLUSION DU TITRE CONSACRÉ À L'ÉTUDE COMPARATIVE DES PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT

Notre recherche a porté, relativement à construction du concept de fraction, sur deux aspects complémentaires des programmes d'enseignement : leur organisation topogénétique (dont l'analyse permet de définir les praxéologies dont l'étude est attendue dans les classes) et leur organisation chronogénétique (dont l'analyse permet de comprendre comment se répartit leur étude au cours de la scolarité). La première a permis de mettre en évidence que le travail de transposition réalisé par le législateur porte principalement sur des types de tâches, dont la formulation est adaptée de façon à permettre une mise en œuvre dans les classes. Il s'en suit que la définition des techniques et des savoirs (au sens restreint du terme) relève surtout des systèmes didactiques. L'une des difficultés qui se présente à ces derniers repose sur le fait que les organisations mathématiques ne sont pas univoques : il n'existe pas, pour un type de tâches donné, une technique et une technologie uniques. Comme nous l'avons représenté dans le schéma ci-dessous, on trouve pour chaque type de tâches, une pluralité de techniques, et pour chaque technique, une pluralité de significations. À l'inverse, une même signification du concept de fraction peut justifier une pluralité de techniques, et une technique peut conduire à la résolution de diverses tâches.

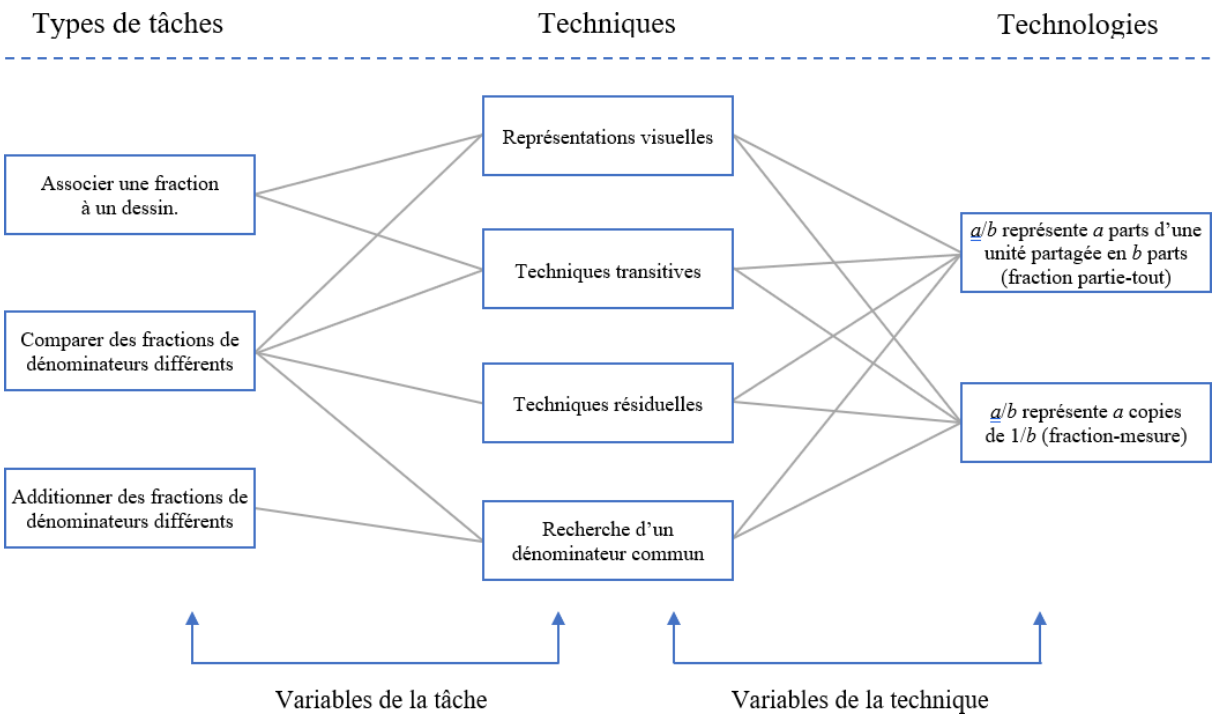


Figure 55. Exemple de relations qui s'instaurent entre les types de tâches, techniques et technologies autour du type de tâches « Comparer des fractions de dénominateurs différents »

Par exemple, pour comparer des fractions de dénominateurs différents, nous avons comptabilisé quatre techniques différentes dans les textes étudiés (par rapport, à la liste établie par Cramer *et al.* [*op. cit.*, p. 19], seule la recherche d'un même numérateur n'est pas envisagée par les législateurs). Ce sont les variables de la tâche qui permettent de déterminer l'opportunité de choisir l'une ou l'autre de ces techniques. Par exemple, l'utilisation de représentations visuelles devient de moins en moins adaptée à mesure que la taille des numérateurs et des dénominateurs augmente. À l'inverse, si l'on prend en considération une technique donnée, celle-ci limite les variables que les enseignants peuvent appliquer aux exercices qu'ils donnent à leurs élèves. Par exemple, si le législateur impose d'employer des stratégies transitives, alors les tâches de comparaison sont limitées à celles dans lesquelles on a $\frac{c}{d} < \frac{e}{f} < \frac{a}{b}$, $\frac{e}{f}$ étant la fraction-repère. Cette technique peut par ailleurs permettre la réalisation d'autres tâches (comme l'association d'une fraction à un dessin : nous l'avons montré avec l'exercice tiré de TIMSS où les élèves devaient reconnaitre la fraction 3/8 parmi quatre figures). De la même façon, une technique peut être rattachée à plusieurs significations, en fonction de ce que nous avons appelé les variables de la technique (c'est-à-dire les modalités de mise en œuvre d'une technique décrite de façon générale). Par exemple, si la technique choisie repose sur une représentation visuelle des fractions comparées, l'utilisation de la droite graduée induit le cadre technologique de la fraction-mesure, tandis que le partage d'une figure géométrique en parts égales induit le cadre technologique de la fraction partie-tout. Le choix d'une signification contraint quant à lui les techniques qui peuvent être enseignées. Ainsi, en privilégiant la signification partie-tout de la fraction, il est toujours possible d'utiliser une technique reposant sur une représentation visuelle des fractions, mais les modalités de sa mise en œuvre sont limitées. La question qui se pose lors de l'analyse chronogénétique des programmes est donc de savoir comment les auteurs prennent en compte cette pluralité : comment les autorités organisent-elles une progression au sujet des types de tâches, des techniques et des facettes du concept de fraction ? À ce sujet, nous avons identifié quatre possibilités.

La première possibilité, pour les auteurs, consiste à faire comme si la liaison entre tous les éléments de la praxéologie était univoque. Par exemple, dans les instructions officielles sud-coréennes, lorsque les auteurs indiquent que les élèves doivent « comprendre le sens et le principe de calcul de la multiplication entre des nombres entiers et des fractions » (*op. cit.*, p. 26), l'emploi de l'article défini « le » donne l'impression qu'il existe une seule technique pour ce type de tâches (« le » principe de calcul) et qu'une seule signification (« le » sens). Or, pour

calculer $5 \times \frac{3}{4}$, on peut tout aussi bien s'appuyer le calcul intermédiaire $5 \times 0{,}75$ que sur $\frac{15}{4}$. De plus, les situations nécessitant l'utilisation d'une multiplication d'une fraction et d'un entier peuvent impliquer la fraction mesure (pour répéter 5 fois une longueur de 3/4 de mètre) comme la fraction-opérateur (pour trouver 3/4 de 5 €). La deuxième possibilité est de reconnaitre cette pluralité, sans donner davantage de précisions, de sorte qu'il revient aux professeurs, non seulement de déterminer les éléments des praxéologies qu'ils souhaitent enseigner, mais également d'organiser les liaisons entre elles. Nous en trouvons un exemple dans les nouveaux programmes anglais, en sixième année (« Rappeler et utiliser des équivalences entre des fractions simples, des écritures décimales et des pourcentages, y compris dans des contextes différents » [*op. cit.*, 2014, p.]. On sait qu'il existe différents contextes d'utilisation des conversions de représentations, mais ceux-ci ne sont indiqués. La troisième possibilité recouvre les cas où les auteurs proposent une progression par le biais d'une modification des variables de la tâche. Nous avons montré, à propos de la comparaison de fractions, que le fait d'imposer que les dénominateurs soient différents ne permettaient pas une définition précise des techniques utilisées, plusieurs restant envisageables. Là encore, le caractère implicite de plusieurs fragments praxéologiques laisse à la charge des enseignants à la fois le choix des techniques à utiliser, et leur articulation, tant en ce qui concerne l'ordre des enseignements que la possibilité ou non pour l'élève de choisir la technique qui permettra la résolution de la tâche. La quatrième possibilité recouvre les cas où les auteurs proposent une progression par le biais des techniques. C'est un cas que nous avons assez rarement rencontré au sein de notre corpus, et cela n'a jamais permis de mettre en évidence l'ensemble des techniques évoquées dans des ouvrages didactiques ou de vulgarisation que nous avons consultés. Nous en avons proposé un exemple avec la République d'Irlande, pour l'addition des fractions de dénominateurs différents : une seule technique est imposée par le législateur, alors que d'autres auraient pu faire l'objet d'un enseignement. En Ontario, parmi les techniques susceptibles de résoudre des tâches de comparaison de fractions, les autorités ne citent que les représentations visuelles et les techniques transtives (en sixième année : « Comparer et ordonner des nombres fractionnaires et des fractions en utilisant une variété de stratégies [p. ex., matériel concret, dessin, droite numérique, fraction repère] [*op. cit.*, p. 70]). Pourtant, les moyens permettant la mise en œuvre de techniques fondées sur la recherche d'un numérateur ou d'un dénominateur commun ont été fournis aux élèves en cinquième année (« Explorer les fractions équivalentes à l'aide de matériel concret (p. ex., réglettes) [*ibid.*, p. 61]) et en sixième année (« déterminer des

fractions équivalentes à l'aide de différentes stratégies (p. ex., matériel de manipulation, dessin, tableau) » (*ibid.*, p. 70).

Par ailleurs, ces progressions ne concernent que la pluralité de techniques pour un même type de tâches, jamais l'idée qu'une seule technique peut conduire à la résolution de plusieurs types de tâches, ou alors de façon très exceptionnelle et implicite. Par exemple, en Corée du Sud, les trois premiers intitulés de sixième année peuvent être rattachés à une technique de production de fractions équivalentes (« Créer des fractions équivalentes en utilisant les propriétés des fractions », « Savoir comment simplifier et réduire des fractions » et « Comparer des fractions de dénominateurs différents » (*op. cit.*, p. 26). Néanmoins, les auteurs ne fournissent aucune indication en ce sens, l'interprétation selon laquelle c'est à dessein que ces trois intitulés se trouvent côte à côte est de notre fait. En outre, la question du choix de la procédure par les élèves est rarement abordée par les auteurs des instructions officielles : seuls les nouveaux programmes de Floride imposent de fournir une justification pour certaines tâches bien précises. L'exemple de l'Ontario est significatif à cet égard : le nombre de techniques de comparaison de fractions de dénominateurs différents augmente progressivement entre la quatrième et la sixième année, suggérant la possibilité pour les élèves d'utiliser plusieurs techniques pour résoudre les exercices qui leur sont proposés. Toutefois, rien n'indique qu'un débat doit s'instaurer à propos de l'opportunité des techniques mises en œuvre : il est possible, plus simplement, que les élèves choisissent systématiquement la procédure avec laquelle ils se sentent le plus à l'aise. La résolution de problèmes peut également constituer une occasion pour les élèves de réaliser un cadrage de la tâche, afin de sélectionner la technique la plus adaptée. Néanmoins, il est envisageable que des enseignants proposent à leurs élèves des problèmes dont la résolution suppose la mise en œuvre d'une technique unique, apprise en amont. La présence d'intitulés relatifs à la résolution de problèmes n'induit donc pas automatiquement un travail portant sur l'opportunité d'utiliser une technique plutôt qu'une autre en fonction des variables de la tâche. Pour conclure, nous reprendrons l'hypothèse de *Carette et al.* selon laquelle « une bonne maitrise conceptuelle est nécessaire pour effectuer un cadrage adéquat (interprétation de la tâche), ou elle contribue à décider des procédures qui seront mises en oeuvre pour tenter de la résoudre » (*ibid.*). Dans les programmes scolaires, les aspects *conceptuels* sont très peu abordés, tout comme les *procédures*, tandis que la question du *cadrage* est tout à fait absente. Cela montre toute l'étendue du travail qui reste à fournir, dans la définition des savoirs comme dans l'organisation de leur enseignement, par les professeurs.

CONCLUSION DE LA PARTIE CONSACRÉE À LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT DE FRACTION

Dans notre introduction, nous cherchions un moyen de caractériser un progrès dans le domaine de l'enseignement. Comme l'indique Chevallard, « l'un des facteurs de ce progrès se trouve indubitablement dans la création d'ostensifs, efficaces tant du point de vue instrumental que du point de vue sémiotique » (1994, p. 8). Cette affirmation, formulée à l'origine à propos des ostensifs manipulés par les élèves, peut également s'appliquer au travail de tranposition de didactique externe. En effet, les intitulés des instructions officielles constituent un instrument de travail pour les professeurs, et leur formulation participe sans aucun doute au fonctionnement des systèmes didactiques, à la fois comme support de réflexion pour l'enseignement des mathématiques et comme outil professionnel dont l'utilisation est règlementée. À ce propos, notre recherche a contribué à « l'analyse des flux et des équilibres de savoir dans les différentes institutions que sont la sphère de production des savoirs, ses sphères d'utilisation, et le système d'enseignement – dont la noosphère est l'écotone, la marge qui reçoit des immigrants venus des deux côtés, une zone de transition » (Mercier, 2002, p. 153). Nous avons montré, en associant une réflexion de nature praxéologique à une étude portant sur la transposition didactique du concept de fraction, que ces flux étaient plus complexes que ne le suggère l'établissement de relations hiérarchiques sous la forme « savoirs savants ↔ savoirs à enseigner ↔ savoirs enseignés ↔ savoirs acquis ». Le caractère partiel des organisations mathématiques élaborées dans la noosphère suppose, de la part des enseignants, plus qu'un travail de transposition du savoir à enseigner : une œuvre de (re)construction praxéologique.

Des recherches complémentaires pourraient permettre de mieux comprendre pourquoi les auteurs fournissent des organisations mathématiques centrées sur les types de tâches. L'une des hypothèses consiste à dire que les techniques à utiliser par les élèves sont clairement établies au sein des systèmes didactiques. Effectivement, si les procédures apparaissent suffisamment ancrées dans les pratiques enseignants ou suffisamment encadrées (par exemple, par des textes complémentaires ou par le biais des manuels), il n'y a pas d'utilité à ce que le législateur fournisse des précisions à ce sujet. En prenant l'exemple de l'Angleterre, pays pour lequel nous disposons de curriculums anciens, nous constatons qu'une telle hypothèse n'est pas à exclure.

Comme on peut le voir ci-contre, entre 1995 et 2006, les techniques imposées par le législateur se succèdent, puis, en 2014, aucune procédure n'est mentionnée :

- « Comprendre et utiliser, en contextes, des fractions et des pourcentages, pour estimer, décrire et comparer des proportions à l'intérieur de l'unité » (*op. cit.*, 1995, p. 27) ;
- « Comparer des fractions familières : par exemple, savoir que sur la droite numérique un demi se situe entre un quart et trois quarts » (*op. cit.*, 1999, p. 14).
- « Utiliser des diagrammes pour comparer les fractions et établir des équivalents » (*op. cit.*, 2006, p. 76).
- « Comparer et ordonner des fractions unitaires et des fractions avec le même dénominateur » (*op. cit.*, 2014, p. 125).

Il est donc possible qu'après huit années d'utilisation dans le cadre des programmes de 2006, les autorités ont considéré que la technique reposant sur l'utilisation des diagrammes était suffisamment bien intégrée dans les pratiques pour ne plus avoir à l'expliciter. Toutefois, cette conception semble difficilement concevable : comment les professeurs nouvellement nommés pourraient-ils saisir cette subtilité ? De plus, en ne mentionnant aucune procédure en particulier, le législateur n'a-t-il voulu au contraire élargir le champ des techniques à utiliser ? D'autres recherches complémentaires pourraient permettre de déterminer les incidences du caractère incomplet des praxéologies construites dans la noosphère. Nous faisons notamment l'hypothèse que les descriptions très sommaires que nous avons observées en France sont liées au fait que, dans ce pays, « le sens donné aux fractions […] est assez pauvre » (Allard, 2015, p. 288). Toutefois, l'introduction de formulations de nature technologique pourrait-elle contribuer à élargir ce sens ? La « production d'énoncés formels » dans le contexte de « la nature des mathématiques enseignées en primaire (mathématiques ancrées dans une réalité) » (Allard, 2011, p. 15) est-elle même indispensable ? Une description précise des variables de la technique n'est-elle pas suffisante pour caractériser les savoirs à enseigner ? Pour notre part, nous avons établi des similitudes et des différences dans la caractérisation du concept de fraction au sein de onze curriculums. Dans le chapitre relatif à la topogénèse du concept de fraction, nous avons plutôt identifié des points communs entre les pays qui composent notre corpus : les types de tâches sur lesquels les législateurs mettent l'accent sont semblables (association d'une fraction et d'un dessin, conversions de représentations, identification de fractions équivalentes, comparaison de fractions, addition de fractions et multiplication d'une fraction par un entier).

Les utilisations qu'ils proposent des ostensifs sont proches : les ostensifs graphiques sont privilégiés par rapport aux ostensifs discursifs, et s'il existe quelques différences formelles quant aux écritures des nombres mixtes, cela ne semble pas avoir de conséquences sur la construction du concept de fraction. La prise en compte des difficultés rencontrées par les élèves, dont nous avons proposé de nombreux exemples dans le premier chapitre, ne transparait pas dans les textes étudiés. Il faut dire que chacune d'entre elles met en jeu une tâche, une technique et une technologie spécifique. En définissant principalement des types de tâches, décrits de façon assez générale, les auteurs ne fournissent pas un cadre d'analyse suffisamment fin pour les enseignants puissent tirer de cette lecture des pistes dont la mise en œuvre serait susceptible de limiter leur apparition. L'étude de la chronogénèse du concept de fraction a davantage permis de mettre en lumière des différences inter-pays. L'enseignement des écritures fractionnaires débute à des moments divers de la scolarité, et les progressions imposées par les autorités sont très hétérogènes, sauf en ce qui concerne les conversions de représentations. De plus, les variables de la tâche auxquelles sont confrontés les élèves lors de l'apprentissage, ainsi que la prise en compte de la pluralité des techniques et des significations, sont spécifiques à chaque participant. À ce sujet, nous avons montré que la France était un pays dans lequel l'enseignement des fractions était à la fois tardif et centré sur la construction du concept de nombre décimal, au moins en ce qui concerne la scolarité primaire. C'est le seul territoire dans lequel aucune référence à des problèmes ou à la vie quotidienne n'est proposée. Cette particularité nous interroge dans la mesure où nous avons indiqué que la résolution de problèmes était un moyen d'engendrer chez l'élève une réflexion sur l'opportunité des techniques qu'il met en œuvre. Cependant, il est possible de relier cette approche spécifique du concept de fraction au fait que la France est le pays dans lequel le système décimal de mesure est le plus ancien, d'où cet attrait pour les écritures décimales.

L'étude des résultats des élèves aux évaluations TIMSS sera l'objet de la partie II. Pour sa mise en œuvre, nous disposons de points de comparaisons (par exemple, certains types de tâches sont présents dans l'ensemble des curriculums étudiés) et d'éléments de différenciation (par exemple, le point de départ de l'enseignement des écritures fractionnaires est variable). Nous avons également une question didactique : la « grande "liberté" dans la lecture des déroulements et des contenus », offerte par le législateur en raison du caractère partiel des praxéologies élaborées, constitue-t-elle « une cause de création des inégalités scolaires » (Allard, 2015, p. 286) entre les participants ?

PARTIE II.
LES RÉSULTATS DES ÉLÈVES AUX ÉVALUATIONS TIMSS DANS LE DOMAINE DES FRACTIONS

> « Lorsque […] le didacticien tente de pénétrer dans l'histoire d'une classe, il doit se rendre à l'évidence : les faits d'évaluation qu'il peut alors y observer ne sont pas simplement un existant contingent, un mal nécessaire que l'on pourrait ignorer, mais bien l'un des aspects déterminants du processus didactique – qui règle et régule tout à la fois les comportements de l'enseignant comme l'apprentissage des élèves. Bref, quiconque pénètre un peu longuement dans la vie d'une classe ne peut longtemps ignorer la "tyrannie" du processus d'évaluation ».
>
> Yves Chevallard et Serge Feldmann (1986), *Pour une analyse didactique de l'évaluation*, IREM D'Aix Marseille, p. 2.

Les évaluations proposées ou imposées par les institutions, qu'elles soient nationales ou internationales, font partie du paysage éducatif depuis plusieurs dizaines d'années. En France, les premières évaluations ont été réalisées à la fin des années 1970 (Levasseur, 1996, p. 101). Puis, elles ont été inscrites dans la loi d'Orientation sur l'éducation du 10 juillet 1989 qui indique que l'évaluation « contribue à l'amélioration du système éducatif en vérifiant la mise en œuvre des objectifs nationaux, en les adaptant aux différents publics auxquels ils s'adressent et en opérant une régulation permanente de l'ensemble du système éducatif ». On voit donc qu'il y a un triple objectif à l'analyse du système éducatif français par le biais d'évaluations standardisées. D'abord, l'institution souhaite vérifier que les objectifs d'apprentissage qu'elle pose dans les programmes d'enseignement ont été atteints par les élèves. Par rapport à l'échelle de codétermination didactique, la perspective envisagée ici est verticale et descendante : en bout de chaine, les évaluations certifient les connaissances acquises. Ensuite, les évaluations portent l'ambition d'une meilleure connaissance des élèves, de leurs réussites et de leurs difficultés.

Par l'analyse des obstacles qu'ils rencontrent et de leurs représentations, l'institution espère pouvoir développer de nouvelles connaissances didactiques. Enfin, les résultats aux évaluations vont permettre de modifier les instructions données aux enseignants : il s'agit réguler le système éducatif en fonction des données tirées de ces tests.

Les évaluations internationales évaluant les connaissances des élèves sont plus récentes : les premières enquêtes PISA ont été menées en 2000, tandis que les tests TIMSS ont débuté en 1995. Les premières évaluent les connaissances des élèves à l'âge de quinze ans, quelle que soit la classe dans laquelle ils se trouvent. Elle concerne aussi bien la littéracie que la culture scientifique ou mathématique. L'objectif est de déterminer si, à la fin de la scolarité obligatoire, les élèves d'un pays ont les compétences suffisantes pour devenir des citoyens autonomes. Les secondes, pour la scolarité obligatoire, évaluent les connaissances des élèves en quatrième et huitième années (bien qu'en 1999, seuls les élèves de huitième année aient été évalués). Les connaissances des élèves sont mesurées tous les quatre ans dans des domaines disciplinaires précis : nombres, formes géométriques et mesures, organisation de données (en quatrième année) ; nombres, algèbre, géométrie, données et probabilités (en huitième année). En raison de cette référence à des domaines mathématiques clairement identifiés, les items issus des évaluations TIMSS peuvent plus aisément être mis en correspondance avec les intitulés des programmes d'enseignement que ceux issus de PISA. C'est l'une des raisons pour lesquelles nous avons choisi les premières pour notre étude. Voici les objectifs généraux annoncés par les auteurs[1], en ce qui concerne les bénéfices apportés aux pays participants :

- mesurer l'efficacité de leur système éducatif dans un contexte mondialisé ;
- identifier les lacunes dans les ressources et opportunités d'apprentissage ;
- identifier les points faibles et stimuler la réforme des programmes ;
- mesurer l'impact de nouvelles initiatives éducatives ;
- former des chercheurs et des enseignants à l'évaluation.

Ces tests ne sont donc pas seulement un outil d'analyse : ils sont envisagés comme un moyen d'orienter les politiques éducatives. Or, l'un des moyens les plus simples et les plus économiques pour apporter un changement en cette matière constitue à modifier les instructions

1. Ces objectifs sont disponibles sur le site de l'organisation en charge de ces tests, à l'adresse suivante : https://timssandpirls.bc.edu/about.html (consulté le 08/08/15).

officielles en vigueur. D'ailleurs, cet aspect prospectif représente l'un des objectifs de TIMSS. Le curriculum forme la fois une « ressource » pour l'enseignement (du moins un texte, contraignant, sur lequel sont supposés s'appuyer les enseignants dans leurs pratiques quotidiennes) et un outil pour la mise en place de « nouvelles initiatives éducatives ». Pour autant, comment faire pour déterminer si sa composition a une réelle incidence sur l'efficacité du système éducatif ? Pour partie, les auteurs de TIMSS considèrent cette mesure à travers la capacité des élèves à réussir des items pour lesquels un enseignement est imposé antérieurement à la passation des tests. Afin d'interroger l'adéquation des tests aux curriculums, ils utilisent deux outils. L'un d'eux, appelé *Curriculum Almanac*, inclut des questions relatives au contenu des programmes et au système éducatif en général (par exemple, la position de chaque pays à propos du redoublement). Il contient notamment des questions sur d'éventuelles indications relatives à l'ensignement du concept de fraction. Toutefois, celles-ci sont très générales et permettent difficilement d'établir la nature des praxéologies scolaires élaborées. Par exemple, dans ce document publié, on trouve la question suivante : « Parmi tous les niveaux de l'enseignement préprimaire à l'enseignement secondaire supérieur, à quel(s) moment(s) les thèmes suivants sont-ils principalement destinés à être enseignés : ajouter et soustraire des fractions, comparer et ranger des fractions ? » Une réponse unique est attendue pour l'ensemble de ces types de tâches, alors que nous avons vu que chacune d'entre elles pouvait faire l'objet d'un enseignement à un moment différent, ce dernier dépendant également de la variable considérée (par exemple, selon que les fractions comparées sont de même dénominateur ou non). L'autre outil est appelé *Curriculum Matching Analysis Data*. Il s'agit d'un tableau dans lequel les autorités indiquent, pour chaque item, si le type de tâche en jeu fait partie du curriculum. Néanmoins, les conditions dans lesquelles ce questionnaire a été complété n'ont pas été rendues publiques, et il existe des contradictions avec les observations que nous avons proposées dans la première partie de notre recherche. Par exemple, la comparaison de fractions unitaires identifiée dans l'item M0705 est, selon les autorités françaises, incluse dans les instructions officielles pour l'école élémentaire, alors que nous n'en avons pas trouvé trace dans les programmes de 2008. En conséquence, pour rechercher une corrélation entre les performances des élèves et le contenu des curriculums, nous utiliserons les observations réalisées dans la première partie de notre recherche, en les complétant, le cas échant, avec des observations issues directement des instructions officielles étudiées.

De la même façon, pour l'analyse des items, nous ne nous fierons pas à la catégorisation fournie par les auteurs de TIMSS, qui repose sur le thème abordé et sur des critères cognitifs.

Nous indiquerons précisément le type de tâches auquel ils se rattachent, ainsi que les variables qui peuvent influer sur la technique utilisée par les élèves. Nous concédons plusieurs limites à notre analyse. D'une part, celle-ci se fonde sur le pourcentage de bonnes réponses à chaque item et non sur une analyse fine des procédures employées par les élèves pour parvenir à un résultat. Cela laisse la porte ouverte à plusieurs voies de résolution, y compris des raisonnements inappropriés qui conduisent au bon résultat. La manière dont les élèves traitent la question du doute peut aussi avoir une influence sur leurs performances : certains préféreront s'abstenir de répondre, tandis que d'autres fourniront une réponse malgré l'incertitude, augmentant ainsi la probabilité d'obtenir une bonne réponse. D'autre part, la mesure de l'efficacité d'un système éducatif ne peut se mesurer seulement à l'aune de la corrélation entre les résultats des élèves et les contenus des programes : la capacité à faire réussir des élèves de milieux socio-économiques divers, ou le rapport entre la quantité de travail fournie par les élèves et leurs performances sont autant d'exemples de facteurs que les auteurs de TIMSS prennent en compte. Nous nous appuierons donc sur les questionnaires TIMSS pour mieux définir le contexte de production de ces performances. Ce sera notamment l'occasion de préciser dans quelle mesure nos observations didactiques sont transposables à d'autres domaines des mathématiques. La portée de l'étude sera l'objet du titre I.

Par ailleurs, nous ne doutons pas que la « tyrannie du processus d'évaluation » que dénoncent Chevallard et Feldman touche aussi bien les évaluations internes que les évaluations externes, quand bien même l'apparition récente des tests menés à l'échelle internationale et le peu d'élèves impliqués à l'échelle nationale, par rapport à la population scolaire, conduisent à réduire la pression exercée sur les systèmes didactiques. Si nous savons déjà que « les différents acteurs, aussi bien les milieux d'enseignants que les décideurs politiques, recourent largement aux résultats des évaluations internationales pour argumenter ou justifier des décisions de politiques éducatives sans que le lien entre la décision et le résultat puisse être démontré » (*ibid.*, p. 79), nous contribuerons à l'analyse de cette emprise, en mettant en évidence d'éventuels changements des programmes d'enseignement dans le sens d'une plus grande convergence avec les tests. Dans le même temps, cela nous permettra d'indiquer si les changements apportés dans les curriculums entrainent une modification des performances réalisées par les élèves. Notre analyse de la relation entre la tranposition didactique externe et les résultats aux évaluations TIMSS comportera donc un volet diachronique et un volet synchronique. Les résultats de notre étude seront l'objet du titre II.

TITRE I. PORTÉE DE L'ÉTUDE

Pour mettre en perspective les résultats obtenus par les élèves aux évaluations TIMSS, une description des conditions dans lesquelles les programmes sont mis en œuvre est indispensable. Sans cela, non seulement nous ne pourrions pas expliquer certaines différences inter-pays relatives à la corrélation entre le contenu du curriculum et les performances des élèves, mais il serait également impossible d'envisager une généralisation de nos observations. Toutefois, il est matériellement inenvisageable de mesurer de l'ensemble des contraintes institutionnelles qui pèsent sur le système éducatif, *a fortiori* dans le cadre de cette thèse. C'est un ensemble trop vaste et trop disparate : il existe des contraintes financières, démographiques, culturelles, historiques, etc. Dans la première partie, nous avons fourni quelques pistes ayant trait aux systèmes de mesure, à l'économie et à la philosophie des systèmes éducatifs. Dans cette deuxième partie, nous allons concentrer nos recherches sur les contraintes qui touchent plus spécifiquement l'enseignement ou l'apprentissage. L'une des limites à notre recherche est constituée par les aspects qualitatifs de la transposition interne (chapitre I). C'est pourquoi nous mettrons en lumière quelques caractéristiques des élèves et des enseignants ayant participé aux tests TIMSS dans chacun des pays de notre corpus. Cela nous conduira à aborder les conditions dans lesquelles se déroule la scolarité obligatoire dans ces territoires, notamment l'accompagnement dont les élèves bénéficient en dehors de leur établissement scolaire et la nature de la formation des enseignants. Une autre limite à notre recherche est constituée par les aspects quantitatifs de la transposition interne (chapitre II), c'est-à-dire par la quantité de travail fourni par les enseignants et, surtout, par les élèves. Cela implique en particulier de connaitre le temps passé à étudier les mathématiques dans chaque pays, et de déterminer la place occupée par les fractions dans les textes étudiés. Cela suppose également de préciser l'importance des items TIMSS évaluant la maitrise du concept de fraction relativement à l'ensemble. Ainsi, nous pourrons mettre en correspondance la façon dont ce concept est mis en valeur par les législateurs et la façon dont il est mis en valeur par les auteurs de TIMSS.

CHAPITRE I. LES ASPECTS QUALITATIFS DE LA TRANSPOSITION INTERNE

Lorsqu'ils mettent en œuvre les programmes qui leur sont confiés, les enseignants ne sont pas uniquement tenus par les objectifs didactiques fixés par le législateur. Le poids des contraintes institutionnelles (durée de la séance, nombre d'élèves dans la classe, habitudes professionnelles) ou ergonomiques (matériel disponible, taille de la salle) influencent le choix des activités qu'ils mettent en œuvre[1]. De la même façon, les savoirs acquis par les élèves ne dépendent pas uniquement de l'enseignement qu'ils ont reçu. L'impact du milieu socio-écononique sur leur apprentissage est attesté, quand bien même son influence varie d'un pays à l'autre[2]. En outre, leur âge au moment des tests n'est pas sans doute pas sans incidence sur leurs résultats. Il existe donc des limites à l'action menée par les autorités à travers la rédaction du curriculum liées, d'une part, à l'apprentissage (section I), et d'autre part, à l'enseignement (section II).

Section I. Limites liées à l'apprentissage

Étant donnée la méthodologie que nous avons élaborée et décrite dans la première partie de cette recherche, nous ne pouvons réaliser une analyse fine du travail de l'élève dans des classes et observer ensuite son incidence sur les résultats obtenus par les élèves aux évaluations TIMSS. Nous nous appuyons donc sur les questionnaires soumis aux élèves et à leurs parents, à l'occasion des évaluations TIMSS, pour appréhender le rapport au savoir des élèves dans chacun des pays de notre corpus. Celui-ci peut être affecté par des facteurs aussi différents que l'âge, le sexe, l'apport culturel qui leur est donné dans leur foyer, leur attrait pour les mathématiques ou le climat qui règne dans l'école. Parmi toutes les variables susceptibles de jouer sur leur capacité à progresser, nous avons distingué celles qui n'ont pas spécifiquement trait aux mathématiques (elles seront analysées dans la sous-section I) et celles qui relèvent du rapport de l'élève aux mathématiques (elles seront analysées dans la sous-section II).

1. À ce sujet, voir Robert, A. & Rogalski, J. (2002).

2. Ce thème est longuement développé dans le document cadre des évaluations TIMSS 2015, au chapitre III (Mullis, I. V. S., Martin, M. O. [2016b]).

Sous-section I. Limites liées à des considérations d'ordre général relatives aux élèves

Les enquêtes TIMSS commencent par des questions simples permettant de définir ce que nous avons appelé les caractéristiques des élèves ayant participé aux évaluations TIMSS 2015 (§ 1) : quel est leur âge ? quel est leur sexe ? quelle langue parle-t-il ? Quels sont les diplômes de leurs parents ? Ensuite, les questions se font plus large et portent les conditions matérielles dans lesquelles ils étudient, non seulement au sein de leur établissement scolaire, mais également à leur domicile. C'est ce que nous avons appelé les conditions de leur apprentissage (§ 2). Comme cette étude nécessite de longs développements qui ne constituent pas le cœur de notre thèse, nous proposons au lecteur d'en lire seulement la synthèse en conclusion de cette sous-partie. Nous procéderons ainsi pour tous les paragraphes qui ont trait à la portée de notre étude. En outre, lorsque nous recherchons l'incidence éventuelle d'un facteur sur les scores obtenus par les élèves, nous évoquons le plus souvent une corrélation linéaire entre les deux séries de données à travers le calcul du R^2. En effet, d'autres types de relations entre les données ont pu être mises en évidence (par exemple, à travers des courbes exponentielles ou gaussiennes), mais avec une fréquence bien moindre.

§ 1. Les caractéristiques des élèves ayant participé aux évaluations TIMSS 2015

Les premières questions portent sur les caractéristiques des élèves (A) : l'âge (pour avoir une idée de leur développement cognitif) et le sexe (pour observer d'éventuelles différences culturelles dans les rapports des garçons et des filles aux savoirs mathématiques). Les suivantes portent sur les caractéristiques du milieu familial (B) : la langue parlée au sein du foyer, le niveau de diplôme des parents, leur désir de réussite scolaire pour leur enfant, le nombre de livres et de consoles de jeux vidéo disponibles au domicile. Nous étudierons successivement le lien que chacun de ces facteurs entretient avec les performances des élèves aux évaluations TIMSS à travers des comparaisons inter-pays.

A. Leurs caractéristiques propres

Au sein de notre corpus, l'âge des élèves a-t-il une influence sur leurs performances aux évaluations TIMSS[1] ? À première vue, on pourrait le penser : en quatrième année, les deux pays qui obtiennent les totaux les plus faibles sont également ceux dans lesquels l'âge moyen des élèves au

1. Pour répondre à cette question, nous avons utilisé les données produites par le bureau d'études TIMSS & PIRLS et publiées dans les almanachs « Élèves » de la quatrième et de la huitième année respectivement sous les intitulés ASDAGE et BSDAGE.

moment du test est le plus bas (annexe 1). Il s'agit de la France (dont le score est de 488 pour un âge moyen de 9,9 ans[1]) et l'Ontario (dont le score est de 512 pour un âge moyen de 9,8 ans). Dans l'enseignement secondaire, les deux pays dans lesquels les élèves sont en moyenne les moins âgés obtiennent des résultats très inférieurs à la moyenne du corpus, fixée à 557,7. Il s'agit de l'Angleterre (dont le score est de 518 pour un âge moyen de 14,1 ans) et encore une fois de l'Ontario (dont le score est de 522 pour un âge moyen de 13,8 ans). À l'inverse, les deux pays qui réalisent les meilleures performances sont aussi ceux dans lesquels l'âge des élèves est le plus élevé. Il s'agit de Singapour (dont le score est de 621 pour un âge moyen de 14,4 ans) et de la Corée du Sud (dont le score est de 606 pour un âge moyen de 14,4 ans). En quatrième année, le lien entre l'âge et des performances élevées n'apparait pas de façon aussi flagrante. Néanmoins, si l'on regarde les données des trois pays dont le score total est supérieur à 600, l'un est le pays dans lequel l'âge moyen des élèves est le plus élevé (la Corée du Sud, avec un score de 608 pour un âge moyen de 10,5 ans), l'un est le deuxième pays dans lequel l'âge des élèves est le plus élevé, à égalité avec d'autres (Singapour, avec un score de 618 pour un âge moyen de 10,4 ans). Seuls les élèves Hong Kong SAR parviennent à obtenir un taux de réussite très élevé, avec un âge moyen en dessous de la moyenne du corpus fixée à 10,2 ans (avec un score de 615 pour un âge moyen de 10,1 ans). Dans l'ensemble, être plus âgé semble donc être un facteur favorable à la performance. Pour autant, avec un âge moyen des écoliers identique à celui de Hong Kong (10,1 ans), qui est un pays ayant des performances très élevées, le Québec et l'Angleterre ont un score aux évaluations TIMSS inférieur à la moyenne du corpus. De même, les élèves de la République d'Irlande obtiennent des résultats de 71 points inférieurs à ceux de Singapour, avec un âge moyen égal (10,4). En huitième année, les élèves du pays le plus performant (Singapour) et ceux du participant le moins performant (Floride) ont le même âge moyen. La droite de régression linéaire entre l'âge et la performance ayant un coefficient directeur positif en quatrième année et en huitième année, on peut considérer que l'âge moyen des écoliers et des collégiens au moment du test TIMSS est un facteur qui contribue, même faiblement, à la performance de ce pays. Les tendances sont les même lorsque l'on cherche à mettre en relation l'âge des élèves et la réussite dans le domaine des fractions. Le lien de corrélation est toutefois un peu plus fort : le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est plus élevé en quatrième année ($R^2 = 0,49$, contre 0,38 pour le lien entre l'âge moyen et le score total) comme en huitième année ($R^2 = 0,2$ au lieu de 0,1). Cela nous incite à penser que la maturité des élèves est plus décisive dans le domaine des fractions que dans un autre. Notre hypothèse est que la notion que nous avons choisie en tant que thème de notre étude est difficile à acquérir, et que le développement cognitif de l'enfant, fût-il de quelques mois plus avancé, influe légèrement sur la maitrise qu'il peut avoir du concept de fraction.

En ce qui concerne le lien entre le sexe et le score des élèves (annexe 2), nous observons une pente ascendante lorsqu'on effectue une régression linéaire entre le pourcentage de garçons et le résultat des élèves aux évaluations TIMSS 2015. Il pourrait sembler qu'être un garçon soit un avantage pour réussir les tests qui nous occupent. Néanmoins, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est faible, pour les écoliers ($R^2 = 0,17$) comme pour les collégiens ($R^2 = 0,23$). De plus, on s'aperçoit, pour les élèves les plus jeunes, qu'un seul pays est responsable du sens de la pente : si on élimine Hong Kong SAR, ce coefficient est proche de zéro ($R^2 = 0,04$). En effet, les élèves de ce territoire sont

1. Il s'agit bien du nombre décimal 9,9, et non de l'idée que les élèves sont âgés de 9 ans et 9 mois.

majoritairement des garçons (54,2 %, sans rapport avec la politique de l'enfant unique qui s'appliquait l'année de naissance des enfants concernés par le test en Chine, mais pas à Hong Kong, ancien territoire britannique) et ceux-ci obtiennent d'excellents résultats. On peut donc obtenir un taux de réussite très élevé ou très faible avec le même rapport entre les filles et les garçons, et qu'on peut également avoir des performances similaires avec un rapport très différent. En huitième année, les résultats de la Floride sont les plus bas du corpus, alors que le pourcentage de garçons (51,8 %) se situe entre ceux des quatre pays ayant les taux de réussite les plus élevés : le Taipei chinois (51,3 %) et Singapour (51,5 %) d'une part, Hong Kong SAR (52,5 %) et la Corée du Sud (52,6 %) d'autre part. Globalement, il existe un groupe de pays asiatiques très performants avec une majorité de garçons, et un groupe de pays occidentaux moins performants dans lesquels la répartition est plus diverse : ces données nous permettent de conclure à une indépendance du sexe des élèves par rapport à leurs performances en mathématiques à TIMSS.

B. Les caractéristiques du milieu familial

Si la langue maternelle de l'élève n'est pas celle qui est utilisée dans le test qui lui est présenté, celle-ci constitue potentiellement un obstacle : elle peut entrainer des malentendus sur le sens à donner à certains énoncés, et donc faire chuter le score de l'élève. Toutefois, cela ne semble pas être le cas : les pays dans lesquels il existe une forte adéquation entre la langue utilisée dans le test et celle qui est parlée à la maison ne sont pas les plus performants (annexe 3). Ainsi en quatrième année de la République d'Irlande et de l'Irlande du Nord, dont les élèves sont dans chacun de ces pays 83,7 % à toujours parler la langue du test dans un cadre familial : ils obtiennent respectivement un score de 547 et 570. À Singapour, pays le plus performant de notre corpus, ils ne sont que 28,2 % à choisir cette réponse, contre 47,7 % qui emploient cette langue de temps en temps à la maison. En huitième année, la Corée du Sud (88,7 %) et l'Angleterre (85,3 %) ont les deux pourcentages indiquant l'emploi d'une langue unique les plus élevés du corpus, et leurs résultats sont très différents : la première se trouve dans le peloton de tête avec un score de 606, tandis que la deuxième dépasse de peu la moyenne avec un score de 518. Beaucoup de pays font mieux que l'Angleterre avec une homogénéité moins grande dans l'utilisation de la langue : Hong Kong, l'Ontario, le Québec, la République d'Irlande, Singapour et le Taipei chinois. En outre, en cherchant un lien de corrélation linéaire entre l'utilisation à la maison d'une langue identique à celle employée dans le test, nous avons remarqué que la pente était négative, suggérant que le multilinguisme constituerait, au sein de notre corpus, davantage un atout qu'un inconvénient.

L'idée que le diplôme des parents a une influence importante sur la capacité des élèves à réussir les tests n'est pas confirmée par les données que nous avons analysées : lorsqu'on met en relation leur niveau de diplôme avec les performances des élèves par une régression linéaire, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est proche de zéro quand on s'intéresse au père, et reste bas quand on tient compte des déclarations de la mère ($R^2 = 0,22$). Néanmoins, dans les onze territoires étudiés, le niveau moyen est élevé (annexes 4 et 5). En ce qui concerne le diplôme obtenu par la mère, Singapour présente systématiquement des pourcentages supérieurs à l'Ontario pour les diplômes de niveaux I (primaire) à III (lycée), et inférieurs pour les diplômes de niveaux IV (post-secondaire) à VIII (doctorat). Or, les résultats de cette province canadienne sont loins d'être aussi élevés ceux de Singapour. Au sein de notre corpus, Hong Kong est le pays dans lequel le niveau I est le plus représenté (11,2 %), devant Singapour (6,7 %), et ses résultats aux évaluations TIMSS sont très bons. Les données reflètent

également pour certains pays un certain niveau d'inégalités : la France est à la fois le pays dans lequel le pourcentage de mères qui déclarent ne pas être allées à l'école est le plus élevé (sans toutefois dépasser 1 %), et celui comptant le pourcentage le plus important de diplomées de master ou doctorat (16,7 %). Le niveau de diplôme est beaucoup plus homogène dans les provinces du Canada que nous étudions (l'Ontario et le Québec) : les mères y sont également d'une façon générale les plus diplômées. Or, le score de la France (488) n'est pas si éloigné de celui de l'Ontario (512). Nous ne doutons pas que le niveau de diplômes des parents influe sur la réussite des élèves, en particulier dans le cadre de comparaisons intra-pays, ou même dans des comparaisons inter-pays lorsque les différences sont importantes. Toutefois, il semble que les écarts ne sont pas suffisamment importants au sein de notre corpus pour que l'on puisse établir des tendances nettes. Autrement dit, les observations que nous avons faites ne permettent pas de mettre en avant ce facteur en tant qu'explication de la réussite des élèves les plus performants aux évaluations TIMSS, par rapport aux élèves des autres pays étudiés.

Il est des pays dans lesquels une part non négligeable des parents interrogés attend simplement de leur enfant qu'il parvienne à un niveau minimal d'éducation (annexes 6 et 7). Ainsi, 27,7 % des parents nord-irlandais espèrent que leur enfant parviendra à décrocher un diplôme de niveau II ou III (c'est-à-dire issu de l'enseignement secondaire), de même que 24,5 % des parents français. La moyenne dans le corpus est de 8,6 % (1,5 % à Singapour). À l'inverse, dans d'autres pays, l'ambition des parents est plus forte : dans trois des pays asiatiques de notre corpus, le taux de parents indiquant vouloir voir leur enfant obtenir un diplôme de niveau VI (c'est-à-dire une licence ou son équivalent) ou plus est supérieur à 90 % (en Corée du Sud, à Hong Kong et dans le Taipei chinois). À titre de comparaison, ce pourcentage n'est que de 50,1 % en France (et la moyenne dans le corpus est de 75,4 %). De plus, dans ce dernier pays, la répartition est très favorable aux niveaux VII et VIII par rapport au niveau VI, ce qui est unique dans notre corpus). Cela induit une opposition nettement tranchée entre une partie de la population française qui attend un seuil minimal d'éducation et une autre partie de la population qui recherche l'excellence. Pour l'ensemble des pays que nous étudions, les données issues de la colonne « Diplôme de niveau VI » sont celles dont la corrélation avec le score global aux évaluations TIMSS est la plus forte, avec un coefficient de Bravais-Pearson élevé ($R^2 = 0,83$) et une pente positive ($a = 2,7$). Il semble donc bien y avoir un lien entre l'ambition des parents et les performances des élèves, pour peu que cette ambition vise prioritairement des diplômes de type « licence », et secondairement des diplômes de type « Master » ou « Doctorat ». Lorsqu'on mesure l'ambition des parents d'une façon globale, on constate par ailleurs que les quatre pays asiatiques sont en tête[1]. Cette tendance, dans ces territoires, à fixer comme objectif un diplôme de niveau VI est confirmée par les réponses données par les élèves de huitième année. Lorsqu'on leur demande quel niveau de la scolarité ils souhaitent atteindre, c'est ce niveau de diplôme qu'ils citent en majorité. Le coefficient de corrélation linéaire est élevé ($R^2 = 0,81$)

1. Pour mesurer l'ambition globale des parents dans chacun des pays, nous avons attribué une valeur à chacun des niveaux de diplômes (de 0/5 pour les diplômes de niveau II, qui forment la première colonne, jusqu'à 1 pour les diplômes de niveaux VII et VIII qui sont regroupés dans une colonne unique, la dernière de ce tableau). Nous avons ensuite additionné ces valeurs, après les avoir pondérées par la fréquence à laquelle les diplômes correspondants étaient cités, ce qui fournit un indice synthétique de l'ambition des parents situé entre 0 et 100. Par exemple, pour Singapour, on a $\bar{x} = \frac{0}{5} \times 0,7 + \frac{1}{5} \times 0,8 + \frac{2}{5} \times 2,1 + \frac{3}{5} \times 14,5 + \frac{4}{5} \times 55,5 + 1 \times 26,5 = 80,6$.

entre, d'une part, les déclarations des parents à propos des ambitions qu'ils ont pour leur enfant scolarisé en primaire, et, d'autre part, les déclarations des collégiens vis-à-vis de leurs propres ambitions (nous parlons ici uniquement des diplômes assimilés à la licence). Les ambitions des parents semblent donc similaires à celles exprimées par leurs enfants. Le fait que les données des parents anglais et floridiens ne soient pas disponibles affaiblit toutefois l'analyse. De plus, les collégiens de Floride expriment des ambitions très fortes, que l'on peut penser semblables à celles de leurs parents. Ainsi, ils sont 49,2 % à envisager un master ou un doctorat, loin devant la Corée du Sud (12 %), le Taipei chinois (23,3 %), Singapour (25,8 %) ou Hong Kong SAR (26,6 %). Mesurée de façon synthétique, leur ambition est également supérieure à celle des pays asiatiques. Toutefois, leur taux de réussite en mathématiques est le plus faible de l'ensemble des pays que nous étudions, avec un score de 493. Donc, que l'on parle du diplôme privilégié ou de l'ambition exprimée en général, la seule conclusion qui ressort des données est que le désir de réussir à l'école à travers l'obtention d'un niveau de qualification élevé semble nécessaire mais insuffisant pour obtenir un très bon score au test.

Les parents des écoliers (sauf en Angleterre et en Floride) ont également été interrogés sur le point de savoir combien de livres pour enfants ils possédaient à leur domicile (annexe 8). Cinq choix leur étaient proposés (entre 0 et 10, entre 11 et 25, entre 26 et 50, entre 51 et 100, plus de 100). En tête pour les deux premières colonnes, on trouve trois pays asiatiques, pourtant très performants au test : le Taipei chinois (44,6 %), Hong Kong (39,8 %) et Singapour (31 %). À l'inverse, en Corée du Sud, on trouve dans la plupart des foyers un très grand nombre de livres pour enfants : c'est le pays qui arrive en tête pour la dernière colonne, et de loin, puisque 65,2 % des parents déclarent posséder plus de 100 livres (l'Irlande du Nord, pays placé deuxième, présente un taux de 28,7 %). Les données pour les pays occidentaux se situent entre ces deux extrêmes, avec une répartition plus équilibrée entre les différentes propositions. Chez les collégiens, on observe des tendances similaires : une forte présence de l'objet-livre au sein du foyer en Corée du Sud, une place moins prépondérante dans les autres pays asiatiques de notre corpus, et les pays européens et nord-américains dans un entre-deux (annexe 9). D'ailleurs, la corrélation entre le nombre de livres pour enfants déclaré par les parents des élèves de quatrième année et le nombre total de livres estimé par les collégiens est forte ($R^2 = 0, 88$). En Angleterre et en Floride, on constate que le livre est peu présent par rapport aux autres pays de notre étude, et ce phénomène est plus marqué dans l'État américain (52,1 % des élèves interrogés déclarent que leur famille détient entre 0 et 25 livres, ce qui est supérieur aux trois pays asiatiques que nous avons cités précédemment) que dans le premier (39,7 %). Sur ce point, on ne peut donc pas établir, à l'aide des questionnaires TIMSS, de relation entre la valorisation de la possession du livre par la famille, et les performances des élèves. Il n'y a pas non plus de spécificités régionales, puisqu'on trouve des variations importantes en Asie ou au Royaume-Uni. Néanmoins, différentes utilisations du livre sont possibles : on peut en acheter peu, certes, mais en emprunter beaucoup, ou bien revendre les livres que l'on possède une fois leur lecture achevée. Le nombre de livres disponibles au foyer n'est donc pas la marque définitive de la place qui est faite à la culture au sein d'un foyer.

C'est une opinion courante de dire que la lecture est remplacée par des activités digitales, en particulier le jeu vidéo. Nous allons donc tenter de quantifier la relation qu'entretiennent les élèves ces loisirs. À ce propos, on trouve une distinction très nette entre les pays asiatiques de notre corpus et les pays occidentaux (annexe 10). La question de la présence d'une console de jeux au sein du foyer n'était posée qu'aux élèves de huitième année. Seule la moitié environ des élèves asiastiques possède un tel

outil de divertissement, tandis les adolescents européens et nord-américains sont plus de 85 % à pouvoir y jouer chez eux. Il était envisageable que les premiers ne jouent pas sur une console de jeux, mais sur une tablette ou un ordinateur. Nous avons donc comparé les données portant sur la question (annexe 11) : « avez-vous un ordinateur ou une tablette pour vous seul ? » Les quatre pays asiatiques ont le taux le plus faible de réponses positives pour notre corpus (avec 36,9 %, ce pourcentage est particulièrement faible en Corée du Sud : c'est le seul inférieur à 50 %). En revanche, les écarts sont moindres lorsqu'on interroge les élèves sur le point de savoir si un dispositif numérique est partagé entre les membres de la famille (annexe 12). À cet item, la Corée se distingue par le pourcentage le plus élevé (91,2 %, pour une moyenne du corpus établie à 80,4 %). Certes, il n'est pas possible d'affirmer que le temps passé à jouer est supérieur dans les pays occidentaux de notre corpus : ce n'est pas parce qu'on possède un tel moyen de se divertir qu'on l'utilise, *a fortiori* de façon excessive. Néanmoins, cela indique des différences dans les choix éducatifs qui sont faits par les parents : en 2013, le PIB par habitant de Singapour est supérieur à celui de tous les autres pays du corpus, il est donc difficile de croire que les parents aient moins les moyens qu'ailleurs d'offrir une console, une tablette ou un ordinateur à leur enfant.

§ 2. Les conditions de leur apprentissage

Disposer d'un espace de travail, avoir un accès à Internet, être aidé dans son travail scolaire, semblent constituer autant d'atouts pour construire de solides compétences académiques. Nous avons donc cherché à établir un lien entre les conditions d'apprentissage offertes aux élèves, telles qu'elles sont décrites à travers les questionnaires TIMSS, et leurs performances. Pour ce faire, nous avons traité séparément l'influence des conditions d'apprentissage proposées au domicile de l'élève (A), et celles offertes par l'établissement scolaire (B), les unes et les autres n'étant pas nécessairement liées.

A. Au domicile de l'élève

Au-delà de l'environnement culturel qui entoure les élèves, les moyens qu'on leur offre pour apprendre nous semblent devoir participer de la construction de leurs compétences. Ainsi, le fait de disposer de son propre bureau apparait, dans les enquêtes TIMSS, comme l'une des variables de ces conditions d'apprentissage. Les élèves n'ont été interrogés sur ce point qu'en huitième année, au moment où le travail réalisé au domicile devient plus conséquent (annexe 13). Les données analysées ne permettent pas de conclure à l'existence de spécificités régionales : le taux de réponses positives est très élevé en Corée du Sud (93,9 %) et au Québec (93 %), tandis qu'il est plus faible à Hong Kong (75 %) et en Floride (75,2 %). En revanche, les données deviennent riches d'enseignement lorsqu'on les compare à celles tirées de la question « avez-vous votre propre chambre ? » (annexe 14). Dans les territoires occidentaux, à l'exception du Québec, davantage d'élèves indiquent avoir leur propre chambre, plutôt que leur propre bureau. Cela suppose un pourcentage d'élèves (faible certes, puisqu'il représente en moyenne 3,5 % de l'échantillon) qui ont une chambre qu'ils ne partagent pas, mais dans laquelle ils ne disposent pas d'un bureau pour travailler. À l'inverse, dans les pays asiatiques, il y a systématiquement plus d'élèves pour dire qu'ils ont un bureau pour leur usage personnel que d'élèves pour indiquer qu'ils ont une chambre pour eux seuls. Cela suppose un pourcentage de la population scolaire qui partage sa chambre, mais qui dispose tout de même de son propre bureau (22,5 % des élèves sont concernés). Nous concédons que les habitudes concernant le partage de l'espace peuvent être différentes d'une région à une autre, et que le fait de vivre dans la même chambre est plus répandu là où

il y a une forte densité de population (comme à Singapour, par exemple). Néanmoins, nous soulignons qu'il se trouve des pays dans lesquels les parents semblent davantage avoir la volonté de permettre à leur enfant d'avoir un bureau pour travailler. Ainsi de la Corée du Sud et du Québec, que nous avons déjà cités, mais également de Singapour (où seuls 52,5 % des élèves ont une chambre pour eux-seuls, alors qu'ils sont 85,3 % à déclarer avoir leur propre bureau) et du Taipei chinois (où 63 % des élèves occupent seuls leur chambre, tandis que 85,5 % indiquent ne pas partager leur bureau).

Qu'ils travaillent sur un bureau occupé par eux seuls ou sur la table du salon, la quasi-totalité des élèves (96,7 % en moyenne) dispose d'une connexion Internet pour travailler (annexe 15). Les écarts sont faibles entre les pays de notre corpus (l'écart-type est de 2,5 points de pourcentage), seul le Taipei chinois présente un taux d'accès au réseau légèrement inférieur aux autres (90,4 %), à plus d'un écart-type de la moyenne. Néanmoins, l'usage que font les élèves font de la toile est très varié (annexes 16 à 22). Ainsi, quand on demande aux élèves de huitième année à quelle fréquence ils l'utilisent pour le travail scolaire, 61,9 % des élèves de l'Ontario déclarent un usage quotidien, contre seulement 23,4 % dans le Taipei chinois. En revanche, quand on les interroge sur l'emploi de l'Internet dans le cadre scolaire, ce sont les élèves de Singapour qui indiquent le plus accéder à des devoirs postés en ligne par leur professeur, communiquer avec celui-ci, ou encore collaborer avec leurs camarades grâce à cet outil. Le Taipei chinois arrive en tête pour l'accès aux manuels *via* le réseau (73,7 % des élèves déclarent y recourir contre 52,3 % en Ontario). Dans ces deux pays, l'utilisation de l'Internet est donc moins fréquente, mais les formes qu'elle revêt sont plus diverses en ce qui concerne le travail scolaire.

Lorsqu'on interroge les parents des élèves de quatrième année sur la fréquence à laquelle ils vérifient les devoirs de leur enfant ou aident ce dernier à effectuer son travail personnel, on ne peut analyser ces réponses que dans la mesure où l'on connait la fréquence à laquelle les enseignants donnent des devoirs. C'est pourquoi, avant de définir l'encadrement du travail personnel de leur enfant (vérification, aide apportée par les parents, soutien sous la forme de cours complémentaires), nous allons évoquer la fréquence à laquelle il est donné des devoirs aux élèves, selon leurs responsables légaux, dans le cadre de leur établissement scolaire (annexe 23). Sur ce point, il existe une grande variété qui n'est pas liée à une zone géographique. Si un travail quotidien est nettement privilégié à Hong Kong SAR et dans le Taipei chinois, le constat est beaucoup plus nuancé en Corée du Sud ou à Singapour. Faire des devoirs tous les jours est une pratique beaucoup plus fréquente en France (64,1 %) et en Irlande du Nord (66,1 %), que dans ces deux derniers pays. En revanche, cette habitude est assez rare dans l'Ontario (23,4 %), où les fréquences « une ou deux fois par semaine » et « moins d'une fois par semaine » sont les plus citées comparativement aux autres pays du corpus. Néanmoins, ces données ne nous laissent pas sans questions. Ainsi, on aimerait savoir ce que recouvre la notion de « travail à la maison » dans chacun des pays de notre corpus : l'implication des parents est-elle la même lorsqu'on astreint les élèves à apprendre une leçon ou à effectuer un exercice écrit ? L'intitulé lui-même présente une légère ambiguité : le terme *every day* correspond-il à tous les jours de la semaine, ou à tous les jours d'école ?

Sur le point de savoir à quelle fréquence les parents demandent à leur enfant si les devoirs sont faits (annexe 24), on remarque que cela est particulièrement dans les mœurs en France (89,7 % des responsables légaux précisent le faire tous les jours), tandis que ça l'est nettement moins en Corée du Sud (63,8 % s'en assurent quotidiennement). Une fréquence inférieure à trois fois par semaine est

relativement marginale : elle représente 6,7 % des réponses, ce qui montre que partout, les parents manifestent un intérêt pour la chose scolaire, et surveillent, au moins de temps à autre, le travail qui est fait par leur enfant. On constate d'ailleurs que cette question relative à l'achèvement des devoirs semble ritualisée, car elle est posée tous les jours, même dans des familles qui déclarent que les devoirs sont loin d'être donnés quotidiennement. Ainsi dans l'Ontario où 71,9 % des parents interrogent leur enfant à cette fréquence, alors qu'ils ne sont que 23,4 % à reconnaitre que leur enfant a des devoirs à faire chaque jour de la semaine. Néanmoins, demander à son enfant s'il a fait ses devoirs peut être un moyen d'échapper à la contrainte qui consisterait à l'aider à effectuer ses exercices, ou à vérifier que les devoirs ont été faits correctement. Or, ces deux tâches constituent un niveau d'encadrement supérieur du travail de l'élève. Si l'importance accordée à la question de l'achèvement du travail personnel ne marque pas des différences notables entre les pays de notre corpus, celles-ci seront peut-être l'occasion de voir émerger des pratiques spécifiques à un territoire.

C'est une chose de demander à son enfant s'il a fait ses devoirs, et une autre de vérifier si ceux-ci ont été faits correctement (annexe 25). Logiquement, la fréquence à laquelle la première est faite est supérieure à la fréquence à laquelle la seconde est réalisée, celle-ci étant à la fois plus exigeante (il faut pouvoir être capable de déceler les erreurs que contiendrait le travail de l'élève) et plus chronophage. Toutefois, l'écart entre l'une et l'autre n'est pas le même partout. Ainsi, il est particulièrement spectaculaire à Singapour (47,4 points de pourcentage) et dans une moindre mesure en Corée du Sud (39,6 points de pourcentage), à Hong Kong SAR et dans l'Ontario (37,2 points de pourcentage chacun). Il est en revanche le plus faible en Irlande du Nord (17,9 points de pourcentage), dans le Taipei chinois (19,9 points de pourcentage), en France et en République d'Irlande (22,2 points de pourcentage). Cela montre que dans les premiers, on demande aux élèves si le travail est fait sans vérifier la qualité de cette production, tandis que dans les seconds, les deux tâches sont effectuées conjointement. Toutefois, les parents peuvent indiquer ne pas vérifier la qualité du travail de leur enfant pour la raison qu'ils l'ont aidé à effectuer les exercices, et qu'en conséquence, ils savent bien que les réponses sont justes. On ne saurait donc comment analyser ces données, sans l'indication des parents sur la fréquence à laquelle ils viennent au soutien des apprentissages de leur enfant.

Aider son enfant à faire son travail personnel représente un degré supplémentaire dans le contrôle des acquis réalisés à la maison : nous allons donc tenter de quantifier cette aide (annexe 26). Pour ce faire, nous avons donc comparé la fréquence des devoirs donnés par les professeurs (selon les responsables légaux) et la fréquence à laquelle les parents fournissent une aide pour leur réalisation. En ce qui concerne la première colonne, celle qui indique un soutien quotidien, l'écart entre les deux données est grand à Hong Kong SAR (40,5 points de pourcentage), dans le Taipei chinois (31,8 points de pourcentage) et en Corée du Sud (27,2), et à chaque fois la fréquence des devoirs donnés par les professeurs est plus élevée que l'aide apportée : cela montre une certaine distance des parents vis-à-vis du travail effectué par leur enfant, qui travaille seul (ou accompagné autrement) dans une certaine proportion. À l'inverse, il est des pays dans lesquels les pourcentages sont très proches, notamment en République d'Irlande (0,6 point de pourcentage), en Irlande du Nord (5,6 points de pourcentage) et en France (7,9 points de pourcentage). Dans ce cas, l'adéquation entre la quantité de devoirs donnés et l'aide apportée est très forte, ce qui indique un suivi très rigoureux du travail de l'élève par l'entourage familial. En outre, quand on compare, d'une part, la différence entre le pourcentage de parents qui indiquent demander tous les jours si leur enfant a fait ses devoirs et celui des parents qui précisent aider

leur enfant quotidiennement, et d'autre part, la différence entre le pourcentage de parents qui indiquent demander tous les jours si leur enfant a fait ses devoirs et le celui des parents qui vérifient chaque jour la qualité de ce travail, on s'aperçoit qu'il y une corrélation très forte ($R^2 = 0,84$). Il semble donc raisonnable d'exclure tout effet de vase communiquant entre ceux qui vérifieraient si les devoirs sont bien faits, et ceux qui aideraient leur enfant. La mesure de l'encadrement du travail de l'enfant conduit à l'observation de tendances similaires, que l'on choisisse l'une ou l'autre des variables. Par ailleurs, l'Ontario présente un taux de réponses indiquant une aide quotidienne supérieure au taux de réponses mentionnant le fait que des devoirs sont donnés tous les jours (7,6 points de pourcentage au-dessus). Comme l'Ontario est également le territoire dans lequel, selon les parents, les professeurs donnent le moins de devoirs au quotidien, on peut penser que certains parents en viennent à étaler le travail donné dans la semaine, ou font faire des exercices supplémentaires à leur enfant. Cette question nous conduit à envisager la possibilité de cours supplémentaires, reçus en dehors de l'établissement scolaire habituel de l'élève.

L'une des hypothèses que nous posons est que, pami les parents qui suivent de plus loin les devoirs de leur enfant, certains délèguent cette tâche à des intervenants extérieurs (par exemple, des professeurs particuliers, ou dans le cadre de cours du soir). Pour la vérifier, nous allons nous appuyer sur la question HQ-10AB du document destiné aux parents (annexes 27 et 28). Celle-ci était ainsi rédigée : « depuis combien de temps votre enfant suit-il des cours supplémentaires en dehors du temps scolaire ? » Quatre possibilités de réponses étaient offertes :

- ne prend pas de cours ;
- depuis moins de quatre mois ;
- depuis quatre à huit mois ;
- depuis plus de huit mois.

La structure des réponses est très différente dans les pays occidentaux et dans les pays asiatiques de notre corpus. Le pourcentage d'élèves qui ne prennent pas de cours en dehors du temps scolaire est beaucoup plus élevé dans les premiers (81,5 %) que dans les seconds (46,9 %). Quand bien même on ne tiendrait compte que des élèves qui prennent des cours, on constate que la réponse « depuis plus de huit mois » représente les deux tiers des pourcentages qui se sont portés sur les trois dernières réponses (contre 28 % dans les pays occidentaux). Cela signifie que les élèves asiatiques, non seulement prennent davantage de cours en dehors du temps scolaire, mais également les suivent pendant un temps plus long. La part des élèves qui prennent des cours depuis plus de huit mois est particulièrement élevée en Corée du Sud (46,7 %). Il nous semble qu'il n'est pas anodin que ce pays soit aussi celui de notre corpus dans lequel les parents apportent l'aide la moins fréquente à leurs enfants. Ce système de vases communiquants est observable en additionnant le pourcentage d'élèves recevant quotidiennement une aide de leurs parents et le pourcentage d'élèves suivant des cours supplémentaires depuis plus de huit mois. Par exemple, en Corée du Sud, on a 14 + 46,7 = 60,7, tandis qu'en France, on a 56,2 + 3,3 = 59,5. Bien qu'on ne puisse pas affirmer que ces pourcentages s'additionnent en réalité (des élèves recevant une aide quotidienne de leurs parents pouvant aussi suivre des cours supplémentaires), on a l'impression que le pourcentage d'élèves dont le travail est très encadré est le même dans ces deux pays, mais que cet encadrement est d'une nature différente : par les parents en France, par d'autres personnes (qu'il s'agisse de professeurs, d'étudiants ou d'autres personnes) en Corée du Sud. Avec une moyenne de

58,6 % cumulés et 13,1 points de pourcentage d'écart-type, il existe une relative homogénéité dans le corpus sur ce point. Néanmoins, dans l'Ontario (38,1 % cumulés) et au Québec (35,7 % cumulés), l'encadrement du travail semble plus faible que dans les autres pays du corpus[1]. À l'inverse, il semble particulièrement fort à Singapour et dans le Taipei chinois[2].

B. Dans l'établissement scolaire

Dans le questionnaire destiné aux élèves, on ne trouve que peu d'informations sur les conditions matérielles dans lesquelles ils évoluent au sein de leur établissement scolaire. Ils sont principalement interrogés sur l'ambiance qui y règne, et sur le plaisir qu'ils ont à s'y rendre, à travers trois questions. La première proposition qu'on leur a soumise à ce sujet est toute simple (annexes 29 et 30) : « J'aime être à l'école ». Les élèves pouvaient indiquer être « tout à fait d'accord », « plutôt d'accord », « plutôt pas d'accord », « pas du tout d'accord » avec cette affirmation. Afin d'obtenir un indicateur unique des choix réalisés par les élèves, nous avons attribué la valeur 1 à la première réponse, la valeur 2/3 à la deuxième réponse, la valeur 1/3 à la troisième réponse et la valeur 0 à la dernière réponse. Ensuite, nous avons additionné ces valeurs, après les avoir pondérées par la fréquence à laquelle les réponses étaient citées, fournissant ainsi une estimation de l'adhésion des élèves à la proposition « J'aime être à l'école » à travers un indice I située entre 0 et 100 : le nombre 0 signifie que 100 % des élèves ne sont pas du tout d'accord avec cette affirmation ; le nombre 100 signifie que 100 % des élèves sont tout à fait d'accord avec elle. En revanche, si ce nombre n'est ni 0, ni 100, on ne pourra pas déduire la fréquence de chaque réponse. Par exemple, le nombre 50 ne nous permet pas de dire si la moitié des élèves est « tout à fait d'accord » et l'autre moitié n'est « pas du tout d'accord » ou si, comme c'est probable, il s'agit d'une autre répartition. La formule générale (où R_1 est la fréquence, sur 100, à laquelle les élèves ont répondu « Tout à fait d'accord », R_2, la fréquence, sur 100, à laquelle les élèves ont répondu « Plutôt d'accord », etc.) est[3] :

$$I = 1 \times R_1 + \frac{2}{3} \times R_2 + \frac{1}{3} \times R_3 + 0 \times R_4$$

Par exemple, pour la France, en quatrième année, nous avons :

$$I_F = 1 \times 45 + \frac{2}{3} \times 42{,}2 + \frac{1}{3} \times 6{,}5$$
$$I_F = 75{,}3$$

En France, l'adhésion des élèves vis-à-vis de cette première proposition est donc assez forte, avec un indice de 75,3. Cette donnée est légèrement supérieure à la moyenne du corpus, qui est établie

1. C'est-à-dire que la somme que nous avons calculée est inférieure à la moyenne moins un écart-type.

2. C'est-à-dire que la somme que nous avons calculée est supérieure à la moyenne plus un écart-type.

3. Cette méthode sera réutilisée chaque fois que plusieurs propositions seront faites aux élèves, et que nous aurons besoin, pour notre analyse, d'un indicateur synthétique (par exemple pour chercher une corrélation avec les scores obtenus par les élèves). À cette occasion, nous préciserons seulement le nombre de réponses, et la valeur attribuée à chacune d'entre elles.

à 73,3. Avec un écart-type de 3,6 seulement, on peut dire un sentiment positif assez unanime des élèves des pays que nous étudions à l'égard de leur établissement scolaire. En huitième année, les écarts restent faibles au sein du corpus (avec un écart-type de 4,1), et si la moyenne baisse un peu ($\bar{x}$ = 66), elle laisse tout de même transparaitre une vision plutôt positive du collège. Des écarts aussi faibles excluent toute corrélation entre le fait que, dans un pays, les élèves « aiment aller à l'école », et la performance de ce pays aux évaluations TIMSS.

En ce qui concerne la deuxième proposition (« Les enseignants de mon établissement sont justes avec moi »), les écarts sont plus importants (annexes 31 et 32). En quatrième année, trois groupes apparaissent. Dans l'un, on trouve les pays occidentaux de notre corpus à l'exception de la France, avec un indice supérieur à 85 indiquant une forte adhésion à l'idée que leur enseignant est juste avec eux, et des performances moyennes. Dans un autre, on trouve les pays asiatiques de notre corpus, avec un indice compris entre 77 et 82 qui induit une adhésion un peu moins forte à l'idée que leur professeur se comporte de façon juste avec eux, mais restant dans la tranche « tout à fait d'accord ». Les performances des élèves dans ces territoires sont très élevées. Dans un troisième, la France est isolée, avec un indice de 66,9 (indiquant que les élèves sont « plutôt d'accord » avec la proposition qui leur est soumise) et des performances inférieures à la moyenne de l'ensemble des pays participants. On peut donc penser qu'une adhésion trop faible des élèves aux décisions prises par leur professeur est de nature à nuire à leurs performances. À l'inverse, une adhésion forte des élèves ne signifie pas pour autant l'obtention de meilleurs résultats. Cette idée est corroborée par les réponses apportées par les élèves de huitième année : les pays de notre corpus ont tous un indice environ égal à 70, et obtiennent des performances éparses. Cependant, la Floride a l'indice le plus bas (63,7 soit 1,9 écarts-types en dessous de la moyenne), et obtient également les résultats les moins bons. Une analyse plus fine, portant sur des données intra-pays (dont nous ne disposons pas), serait nécessaire pour enrichir nos observations, car l'idée de justice peut prendre des formes différentes d'une aire culturelle à l'autre.

Une troisième question portait plus directement sur les apprentissages scolaires : les auteurs de TIMSS ont mesuré l'adhésion des élèves à la proposition « J'apprends beaucoup à l'école » (annexes 33 et 34). En quatrième année, les élèves sont tout à fait d'accord avec cette affirmation : l'indice moyen au sein du corpus est de 91. Les quatre pays ayant l'indice le moins élevé correspondent aux quatre pays asiatiques de notre corpus, de sorte qu'on pourrait penser que, dans ces territoires, on insiste sur les compétences de base, sans rechercher à enseigner la complexité. Peut-être aussi que de nombreux élèves asiatiques ont le sentiment d'apprendre davantage en dehors de l'école, à l'occasion des cours complémentaires qu'ils suivent, comme nous l'avons vu, fréquemment. Toutefois, l'écart-type est si faible entre les territoires étudiés (2,6 points d'indice) que cette conclusion reste incertaine. D'ailleurs, cette spécificité des pays asiatiques n'apparait pas en huitième année : dans tous les pays de notre corpus, les élèves ont le sentiment d'apprendre beaucoup ($\bar{x}$ = 78), quoi que moins qu'à l'école primaire. L'écart-type est faible (3 points d'indice) et le coefficient de détermination de Bravais-Pearson entre cet indice et les performances des élèves est proche de zéro. Les réponses sont donc très homogènes et il n'y a pas de relation linéaire entre l'impression qu'ont les élèves d'apprendre beaucoup et les résultats obtenus aux évaluations TIMSS. De plus, là encore, l'idée d'apprendre beaucoup est très subjective.

N'ayant pas trouvé de relation entre le ressenti des élèves et leurs résultats, nous avons émis l'hypothèse que l'opinion des élèves manquait peut-être de lucidité. C'est pourquoi nous avons

également analysé celle des parents, à propos de l'établissement dans lequel étudiait leur enfant (recueillie à travers l'item HQ-11 du questionnaire qui leur était destiné). Ceux-ci devaient donner leur avis sur huit propositions (annexes 35 à 42) :

- l'école de mon enfant effectue un bon travail pour m'associer à son éducation ;
- l'école de mon enfant lui procure un environnement sûr ;
- l'école de mon enfant prête attention à sa progression ;
- l'école de mon enfant effectue un bon travail pour m'informer de ses progrès ;
- l'école de mon enfant promeut un haut niveau d'exigences académiques ;
- l'école de mon enfant effectue un bon travail pour l'aider à progresser en lecture ;
- l'école de mon enfant effectue un bon travail pour l'aider à progresser en mathématiques ;
- l'école de mon enfant effectue un bon travail pour l'aider à progresser en sciences.

La répartition des réponses des parents est sensiblement la même pour l'ensemble des propositions : l'indicateur synthétique que nous avons calculé pour chacune d'elles varie peu pour un même pays (l'écart-type moyen est de 4,7 points d'indice). Analyser les réponses pour chaque assertion serait donc redondant. C'est pourquoi nous avons choisi de nous appuyer sur la moyenne des indices pour déterminer la nature du regard porté par les parents sur l'établissement de leur enfant. Celui-ci est particulièrement positif en Irlande du Nord (90) et en République d'Irlande (89,5). Il l'est moins en Corée du Sud (66,8) et, dans une moindre mesure, en France (74,3). On se souvient que la Corée du Sud était également le pays dans lequel les parents avaient le plus fréquemment recours à des leçons supplémentaires en dehors du temps scolaire. Notre hypothèse est donc que, outre un certain tropisme partagé dans les sociétés du sud-est asiatique pour ce type de cours, la défiance des parents sud-coréens à l'égard des institutions scolaires n'est pas étrangère à ce phénomène. Le manque de confiance qui leur est porté ne se retrouve pas dans une telle proportion à Singapour (81,9), à Hong Kong (81,1) ou dans le Taipei chinois (78,8). Il est vrai que des attentes très élevées peuvent conduire à porter un jugement négatif sans rapport avec la qualité du travail qui est réalisé au quotidien dans les écoles. Peut-être aussi que la défiance des parents correspond à une réalité : dans ce cas, les apprentissages des élèves sud-coréens seraient réalisés pour une bonne partie à l'extérieur du système scolaire. Pour trancher (si cela est possible), nous évoquerons dans la prochaine section les pratiques enseignantes qui ont cours dans les pays de notre corpus.

Conclusion de la sous-section

L'analyse que nous avons faite, à partir des questionnaires TIMSS, des caractéristiques des élèves ayant passé les tests et des conditions dans lesquelles ils ont effectué leurs apprentissages nous ont conduit à éliminer plusieurs facteurs qui auraient pu expliquer des écarts de résultats inter-pays (rapport filles/garçons, niveau de diplôme des parents, langue parlée au domicile différente de celle du test, nombre de livres au domicile, présence d'une chambre et d'un bureau pour chaque enfant). Des spécificités régionales ont toutefois émergé. Nous avons mis en évidence que les élèves des pays asiatiques de notre corpus étaient en moyenne légèrement plus âgés que les élèves occidentaux (sauf à Hong Kong SAR), ce qui a

pu évidemment contribuer à forger des différences de performances. De plus, l'ambition scolaire des parents pour leurs enfants est plus homogène et globalement plus élevée dans les territoires asiatiques qu'en Occident. Par ailleurs, les parents européens et nord-américains supervisent le plus souvent eux-mêmes les apprentissages scolaires, tandis que les parents d'Asie du Sud-Est sont beaucoup plus enclins à déléguer cette activité à d'autres personnes, sous la forme de cours complémentaires. Le taux d'équipement des élèves relatif aux consoles de jeux et tablettes est supérieur dans les pays occidentaux, ce qui semble laisser transparaitre un rapport différent au travail et aux loisirs par rapport aux sociétés asiatiques. Les réponses des parents sud-coréens ont mis en lumière un regard critique vis-à-vis des établissements scolaires locaux, ce qui n'est sans doute pas sans lien avec la présence au sein de leur foyer de plus de livres pour enfants qu'ailleurs, ainsi qu'avec le recours plus fréquent que dans les autres pays du corpus à des cours complémentaires (y compris par rapport aux autres participants asiatiques). Concernant l'attrait des élèves pour l'école en général, nous avons constaté qu'il était très homogène au sein du corpus : cela ne conforte pas les analyses que nous avions faites *a priori* des systèmes éducatifs à partir de la catégorisation de Dubet *et al.* (2010) : les élèves français y étaient décrits comme « indifférents, voire hostiles, à une école qui ne semble jamais vraiment les juger dignes d'êtres là » (*ibid.*, p. 126). Toutefois, la description par les élèves de leur ressenti est un élément très subjectif qui nécessiterait des analyses plus approfondies. De plus, il serait intéressant de voir si ces observations se vérifient dans le cadre de comparaisons intra-pays. En effet, si notre étude montre que les pays dans lesquels les élèves sont plus âgés réussissent en moyenne mieux les tests, cela ne sera problement pas vrai dans des pays où le redoublement est prononcé fréquemment. De la même façon, le multilinguisme, qui ne semble pas un obstacle pour les élèves singapouriens, le sera peut-être dans des pays où l'ouverture à l'international est moins forte.

Sous-section II. Limites liées à des considérations spécifiques aux mathématiques

Aucun item issu des questionnaires TIMSS destinés aux élèves ou aux parents ne porte sur les fractions (ni sur l'usage du concept dans un cadre scolaire, ni sur son utilisation dans la vie quotidienne). Nous évoquerons donc plus largement le rapport que les élèves et leur famille entretiennent avec les mathématiques en général. Quand bien même le sujet principal de notre étude n'est pas abordé de façon spécifique, il est utile pour notre recherche de connaitre leur point de vue sur la matière. De cette façon, nous pourrons déterminer s'il existe des corrélations avec les résultats obtenus aux évaluations TIMSS, et éventuellement évoquer des facteurs de la

performance qui ne sont pas strictement didactiques. Existe-t-il des différences concernant la perception des mathématiques par les élèves au sein de notre corpus ? Pour répondre à cette question, nous étudierons successivement leur rapport aux savoirs mathématiques (§ 1) et à l'apprentissage de cette matière dans un cadre scolaire (§ 2).

§ 1. Le rapport des élèves aux savoirs mathématiques

Nous disposons de données qui nous permettent d'appréhender la compréhension que les élèves pensent avoir de ce champ disciplinaire (A), et l'intérêt qu'ils portent à la discipline (B). En analysant les réponses des élèves dans ces deux domaines, nous pourrons mieux cerner la perception que les élèves ont de leur propre travail de tranposition, à la fois à propos de son utilité et de son efficacité. À cet égard, des différences inter-pays importantes se font jour. Certains systèmes éducatifs mettent l'accent sur la confiance ressentie par les élèves, tandis que d'autres ne masquent pas des exigences fortes, incitant l'élève à penser que ce qu'il fait n'est pas suffisant. Cela expliquerait pourquoi les taux de réussite les plus élevés se trouvent dans les territoires où l'intérêt et le sentiment de compréhension des mathématiques sont les plus bas : ils seraient la conséquence d'objectifs d'apprentissage très élevés, inaccessibles à une partie des élèves.

A. La compréhension des mathématiques

En 2015, une question[1] des enquêtes TIMSS avait trait au sentiment des élèves de quatrième et huitième années à propos de leur compréhension des mathématiques. Elle comportait neuf propositions, pour lesquelles ils devaient indiquer s'ils étaient « tout à fait d'accord », « plutôt d'accord », « plutôt d'accord » ou « pas du tout d'accord » (annexes 43 à 60). Voici les assertions sur lesquelles ils devaient se prononcer :

- je réussis habituellement en mathématiques ;
- les mathématiques sont plus difficiles pour moi que pour beaucoup de mes camarades ;
- je ne suis simplement pas bon en mathématiques ;
- j'apprends les choses rapidement en mathématiques ;
- les mathématiques me rendent nerveux ;
- je suis bon pour résoudre des problèmes mathématiques difficiles ;
- mon enseignant me dit que je suis bon en mathématiques ;
- les mathématiques sont plus difficiles pour moi que tout autre matière ;
- les mathématiques me mettent dans l'embarras.

1. En quatrième année, cet item porte l'identifiant SQMS-03, ce qui signifie qu'il s'agit de la deuxième question de la partie du questionnaire consacrée aux mathématiques. En huitième année, la distinction entre les questions générales et celles relatives à la matière qui nous occupe n'existe pas. L'identifiant de cet item est donc SQG-19.

Il semble qu'un minimum de confiance en ses capacités soit nécessaire pour réaliser de grandes performances aux tests TIMSS, notamment parce qu'un doute trop important entrainerait une absence de réponse à de trop nombreuses reprises. En revanche, ce n'est pas parce qu'un élève a une image très valorisante de ses propres capacités qu'il obtiendra de très bons résultats : ce peut-être aussi le signe qu'il travaille habituellement sur des exercices simples, ou qu'il reçoit des paroles d'encouragement qui ne sont pas nécessairement en rapport avec son niveau de compétence effectif. Nous avons d'abord cherché à vérifier s'il existait un lien, de façon générale et avant de rentrer dans le détail, entre la confiance exprimée par les élèves et leurs résultats au test. Pour le savoir, nous avons analysé la relation entre, d'une part, la moyenne des indices synthétiques calculés pour ces neuf questions[1], et d'autre part, les performances des élèves aux évaluations TIMSS 2015. En quatrième année, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est relativement élevé ($R^2 = 0{,}62$) et la pente est négative ($a = -5{,}3$). En huitième année, il est un peu plus faible ($R^2 = 0{,}49$), mais la pente est négative également ($a = -5{,}5$). Cela signifierait que les pays dont les élèves ont davantage confiance en eux ne sont pas les plus performants. Tentons de comprendre ce constat. Le nombre de pays est faible et, plus qu'une relation linéaire, on observe une dichotomie entre les pays asiatiques et les pays européens. En quatrième année, dans les premiers, l'indice moyen est compris entre 50 et 60. Dans les seconds, l'indice moyen est compris entre 65 et 75. Cette distinction se confirme avec l'analyse des données de la huitième année. En effet, la moyenne des indices mesurant, d'une façon générale, le sentiment des élèves vis-à-vis de leur compréhension de la matière est toujours strictement inférieur à 53 dans les pays asiatiques de notre corpus, tandis qu'il est systématiquement supérieur à ce nombre dans les pays occidentaux. Nous en concluons d'une part, que le sentiment de compréhension des élèves diminue avec l'âge (ce qui semble cohérent avec le fait que le niveau de difficulté augmente), et d'autre part, que les écarts se resserrent entre le groupe des pays asiatiques et le groupe des pays occidentaux. L'écart-type moyen intra-pays (entre chacune des neuf propositions) est assez faible (5,2 points d'indice en quatrième année, 5,5 en huitième année) : l'analyse de chaque proposition n'apporterait que peu à l'analyse. Néanmoins, les données concernant l'affirmation selon laquelle « Mon enseignant me dit que je suis bon en mathématiques » sont intéressantes. Elles montrent de façon plus précise des différences importantes entre les pays asiatiques et les pays européens. En Corée du Sud (avec un indice global de 46,2), à Hong Kong SAR (47,1) et dans le Taipei chinois (47,8), les écoliers ne seraient plutôt « pas d'accord avec cette proposition ». L'adhésion des écoliers singapouriens est à peine plus forte (51). À l'inverse, l'opinion des élèves occidentaux est largement positive : avec un indice moyen de 71,8, on peut considérer que l'adhésion à la proposition est forte. Pour donner un autre exemple éclairant, les élèves

1. Pour homogénéiser l'analyse des données et rendre cohérentes les moyennes, nous avons modifié la forme des phrases induisant une vision négative de leurs habiletés en mathématiques par les élèves. Les propositions 2, 3, 5, 8 et 9 sont concernées. Par exemple, l'affirmation « 30 % des élèves sont tout à fait d'accord avec l'idée que les mathématiques sont plus difficiles pour eux que pour beaucoup de leurs camarades » a été modifiée pour devenir « 30 % des élèves ne sont pas du tout d'accord avec avec l'idée que les mathématiques ne sont pas plus difficiles pour eux que pour beaucoup de leurs camarades ». En outre, nous avons attribué la valeur 1 à la réponse « Tout à fait d'accord », la valeur 2/3 à la réponse « Plutôt d'accord », la valeur 1/3 à la réponse « Plutôt pas d'accord » et la valeur 0 à la réponse « Pas du tout d'accord ». Pour une description détaillée de la méthode utilisée, voir p. 333.

anglais sont 47,8 % à choisir la colonne « Tout à fait d'accord », tandis qu'ils ne sont que 8,8 % en Corée du Sud. En outre, c'est dans les quatre territoires asiatiques que l'on opte le plus pour la colonne « Pas du tout d'accord ». En ce qui concerne les collégiens, la structure des résultats est similaire : dans ces territoires, ils ne sont en moyenne plutôt pas d'accord avec le fait que leur enseignant leur dit qu'ils sont bons en mathématiques ($\bar{x}$ = 40,6). En Europe et en Amérique du Nord, ils seraient plutôt d'accord avec cette affirmation ($\bar{x}$ = 54,7). Il est possible qu'il y ait une explication culturelle à cet écart statistique : dans certains pays, l'idée même de dire à un élève que ce qu'il a fait est bien n'est pas un élément qui a sa place dans le contrat pédagogique. Cependant, il est curieux de constater que le manque de confiance en leurs capacités amène les écoliers de Hong Kong SAR, de Singapour et du Taipei chinois à indiquer plus fréquemment qu'ailleurs qu'ils ont plus de mal en mathématiques que les autres élèves de leur classe. Il est donc fort possible que les professeurs du premier degré y émettent plus souvent que dans les autres territoires étudiés un jugement négatif sur les productions des élèves, non seulement collectivement, mais également individuellement. En huitième année, le constat est plus nuancé. Si les réponses à Hong Kong SAR et dans le Tapei chinois restent en retrait, celles de Singapour se rapprochent de celles des pays occidentaux. Les observations que nous faisons valent, même lorsqu'on demande aux élèves une description plus objective de leurs performances, à travers la proposition « Je réussis habituellement en mathématiques » (la question n'est pas de savoir s'ils se trouvent bons, mais ils obtiennent souvent la bonne réponse) : ils évoquent des habiletés moindres que dans les autres pays de notre corpus. Pour les élèves les plus jeunes, ces participants arrivent en tête pour les réponses « Pas du tout d'accord » et « Plutôt pas d'accord », et derniers pour les réponses « Tout à fait d'accord » et « Plutôt d'accord ». Pour les élèves les plus âgés, l'indice représentant l'adhésion des élèves à la proposition y est plus faible qu'ailleurs. Pour autant, leurs performances sont supérieures, comme on peut le voir sur le graphique ci-dessous :

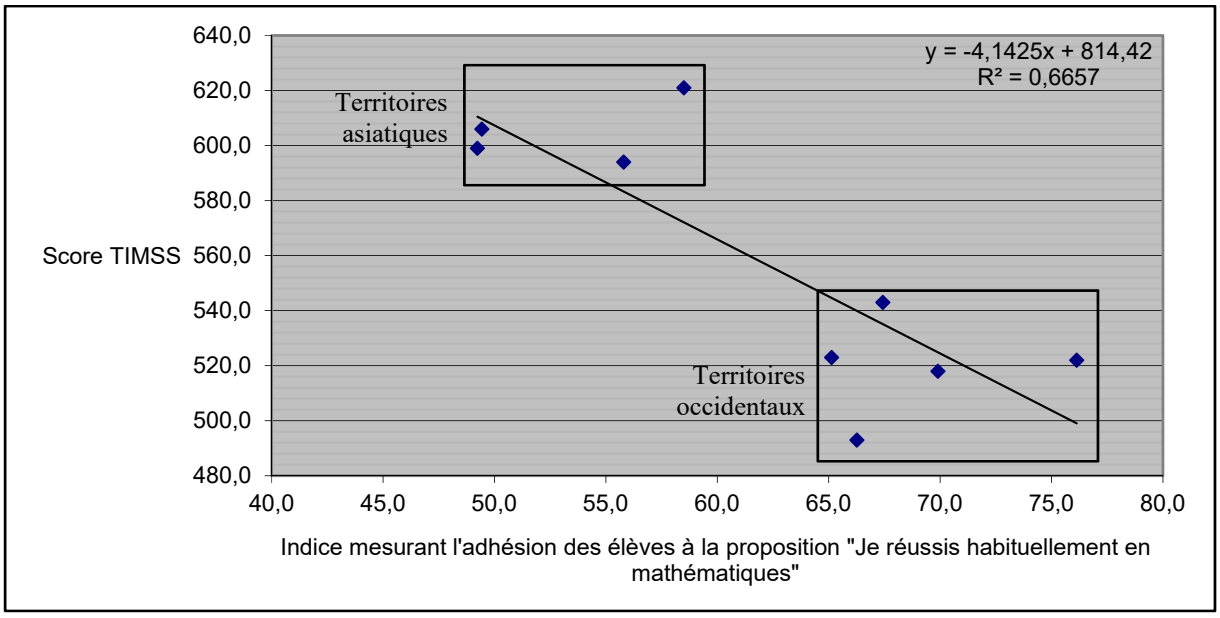


Figure 56. Corrélation entre le score TIMSS 2015 et l'indice mesurant l'adhésion des élèves à la proposition « Je réussis habituellement en mathématiques »

Cela renforce l'idée selon laquelle les exigences sont fortes dans ces pays. À l'école comme au collège, les élèves asiatiques ont également l'impression d'apprendre moins vite qu'ailleurs (hormis en

huitième année à Singapour, pays pour lequel l'indice est légèrement supérieur à la moyenne du corpus), ce qui montre que les connaissances qu'ils acquièrent leur coutent beaucoup d'efforts.

B. L'intérêt porté à la matière

L'intérêt porté aux mathématiques peut provenir d'un attrait pour la matière, ou de l'utilité qu'elle revêt pour la vie future des élèves (par exemple, pour suivre des études supérieures ou trouver un emploi).

En ce qui concerne le premier, les questions MS1 (destinée aux écoliers) et SQG-17 (destinée aux collégiens) étaient divisées en plusieurs items, correspondant chacun à une proposition pour laquelle les élèves devaient indiquer s'ils étaient « tout à fait d'accord », « plutôt d'accord », « plutôt pas d'accord » ou « pas du tout d'accord ». Parmi celles-ci, nous en avons isolé trois portant *stricto sensu* sur l'intérêt que portent les élèves aux mathématiques (annexes 61 à 68) :

- Les mathématiques sont ennuyeuses ;
- J'aime les mathématiques ;
- J'aime tous les travaux scolaires qui impliquent des nombres ;
- J'aime résoudre des problèmes mathématiques.

Le point commun à ces quatre phrases est qu'elles n'impliquent pas nécessairement les mathématiques dans le cadre du cours consacré à cette matière : on peut aimer les mathématiques parce qu'on a chez soi un cahier d'énigmes numériques, ce qui nous conduira à apprécier l'utilisation des nombres sans lien avec l'apprentissage dans cette matière. D'une façon générale, les collégiens apprécient moins les mathématiques que les écoliers (avec un indice moyen de 50,6 pour les collégiens, contre 67,9 pour les écoliers). De plus, les élèves disent plus facilement qu'ils aiment les mathématiques en général plutôt qu'un domaine précis parmi ceux qui leur sont proposés (le domaine numérique et la résolution de problèmes). Néanmoins, les écarts sont faibles : la moyenne des écarts-types au sein du corpus est de 3,9 points d'indice en quatrième année, et 4,3 points d'indice en huitième année[1]. Une analyse proposition par proposition nous semble donc peu appropriée. C'est pourquoi nous appuierons notre réflexion sur une analyse globale des réponses des élèves, à partir de la moyenne des indices relatifs à ces quatre affirmations. Sur ce point, chaque point d'indice indiquant un attrait supplémentaire fait perdre près de 6 points au test ($a = -5{,}7$). Nuançons cette affirmation : le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est moyen ($R^2 = 0{,}51$). En outre, les écarts entre les participants sont faibles (5,4 points d'indice) et le constat est différent en huitième année, où aucun lien de linéarité n'apparait ($R^2 = 0{,}04$). Toutefois, cela soulève quelques interrogations : les activités mathématiques

1. Pour homogénéiser l'analyse des données et rendre cohérentes les moyennes, nous avons traité la proposition « Les mathématiques sont ennuyeuses » comme étant « Les mathématiques ne sont pas ennuyeuses ». Ainsi, nous tiendrons pour équivalentes les phrases « 30 % des élèves sont tout à fait d'accord avec l'idée que les mathématiques sont ennuyeuses » et « 30 % des élèves ne sont pas du tout d'accord avec l'idée que les mathématiques ne sont pas ennuyeuses ».

dans les pays les plus performants conduisent-elles à amenuiser le goût des élèves pour la matière ? Si leur intérêt diminue avec l'augmentation du niveau de complexité, est-ce qu'il est plus faible dans les pays ayant un fort taux de réussite parce que les enseignants proposent des apprentissages plus complexes ? Les pays ayant de moins bons résultats privilégient-ils l'aspect ludique au détriment des apprentissages ? Est-il possible de développer efficacement les acquis des élèves tout en suscitant leur intérêt pour les mathématiques ? On pourrait aussi objecter que l'utilisation d'échelles identiques pour des pays culturellement très différents n'est pas judicieuse. Pour conclure, précisons que les élèves de deux pays manifestent, selon les données TIMSS, un intérêt particulièrement faible pour les mathématiques : la Corée du Sud (avec une moyenne des indices à 59,8, à 2,6 écarts-types de la moyenne du corpus) et le Taipei chinois (avec une moyenne des indices à 58,4, à 3 écarts-types de la moyenne du corpus). Le premier, c'est parce que les élèves qui ont répondu sélectionnent rarement la colonne « Tout à fait d'accord » ; le second, c'est parce que les élèves qui ont répondu sélectionnent souvent la colonne « Pas du tout d'accord ». À Hong Kong SAR et Singapour, le gout pour la matière est inférieur à la moyenne, mais il reste dans la norme (à moins d'un écart-type de la moyenne).

En ce qui concerne la motivation externe (relative à ce que peuvent apporter les mathématiques dans leur vie actuelle ou future), elle a été mesurée, en huitième année, à travers l'adhésion à l'une des propositions de la question SQG-20. Celle-ci concernait l'importance accordée par les parents aux apprentissages mathématiques de leur enfant (annexe 69). Elle était ainsi rédigée : « Mes parents pensent que c'est important que je travaille bien en mathématiques ». L'adhésion des élèves européens et nord-américains à cette affirmation est extrêmement forte ($\bar{x} = 88{,}7$). Parmi les pays asiatiques, seul Singapour se rapproche de cette moyenne, avec un indice de 84,2. Dans les autres (Taipei chinois, Hong Kong SAR et Corée du Sud), cette adhésion est beaucoup moins forte (avec respectivement des indices de 63,5, 65,5 et 67,9). Une analyse des réponses fournies par les parents de quatrième année montre une cohérence avec les propos des collégiens. Dans ces territoires, les familles ont moins l'impression que « leur enfant a besoin des mathématiques pour aller de l'avant dans le monde »[1] (annexe 70). Le nombre de familles n'adhérant pas à la proposition (soit la somme des colonnes « Plutôt pas d'accord » et « Pas du tout d'accord ») y représente en moyenne 20,4 % du total, contre 3,2 % dans les autres pays participants. En revanche, les écarts sont moindres lorsqu'on demande aux parents si « les mathématiques sont applicables dans la vie réelle »[2] (annexe 71). Seule la Corée du Sud est à plus d'un écart-type en-deçà de la moyenne du corpus (avec un indice de 71,3). Cette dernière s'établit à 86,7 points d'indice, ce qui indique que, partout, on pense fortement que les mathématiques peuvent trouver une application dans la vie quotidienne. Ce n'est donc pas l'intérêt pratique des mathématiques qui est jeu, mais son utilité professionnelle, qui semble plus faible dans certaines sociétés que dans d'autres. Que l'on parle de la vie quotidienne, du monde professionnel, du cadre scolaire, la motivation des élèves pour les mathématiques dans les trois pays asiatiques dont nous venons de parler semble plus faible qu'ailleurs. Par ailleurs, c'est dans l'Ontario qu'elle est la plus élevée. Or, le taux de réussite aux

1. Il s'agit de la question HQ-16D du questionnaire destiné aux parents d'élèves de quatrième année. Les données pour l'Angleterre et la Floride ne sont pas disponibles.

2. Il s'agit de la question HQ-16G du questionnaire destiné aux parents d'élèves de quatrième année. Comme pour la question HQ-16D, les données pour l'Angleterre et la Floride ne sont pas disponibles.

évaluations TIMSS 2015 est bas dans cette province (avec un score de 522). De plus, avec une motivation assez élevée comparativement aux autres pays du corpus, on peut avoir le score le plus élevé (Singapour, avec un score de 621 pour un indice de 85,2) ou le plus faible (la Floride, avec un score de 493 pour un indice de 83,2).

§ 2. Le rapport des élèves à l'apprentissage des mathématiques

Les élèves ayant participé aux évaluations TIMSS ont été interrogés à propos des séances de mathématiques suivies au cours de l'année scolaire. Or, cela constitue le moment principal de la transposition didactique interne, là où se matérialisent les savoir enseignés et les savoirs appris. En cela, la nature des activités proposées par les enseignants semble pouvoir constituer un facteur important de l'efficacité de la transmission des savoirs au sein du sytème éducatif. Néanmoins, les connaissances préalables des élèves peuvent biaiser l'analyse : s'ils maitrisent par avance les notions étudiées, il est sûr que la capacité des professeurs à réaliser une présentation limpide des notions ne pourra être évaluée de la même façon que si les élèves avaient tout à découvrir. Nous avons déjà évoqué la possibilité pour les élèves de suivre des cours supplémentaires. C'est pourquoi nous ne traiterons ici que de la question des acquis antérieurs à l'apprentissage des fractions dans le domaine numérique (A), sur lesquels vont pouvoir se contruire cette nouvelle notion, avant de décrire la perception par les élèves des séances de mathématiques (B).

A. Les acquis en mathématiques à l'entrée dans la scolarité obligatoire

Dans les enquêtes TIMSS, les parents devaient indiquer les capacités de leur enfant dans le domaine numérique au moment de son entrée dans la scolarité obligatoire. Plus précisément, il leur fallait dire s'il était capable de compter jusqu'à dix, jusqu'à vingt, jusqu'à cent et au-delà, ou pas du tout. Or, que l'on évoque le comptage oral, la reconnaissance des nombres écrits ou leur écriture (annexes 72 à 74), le taux d'élèves asiatiques maitrisant les nombres « jusqu'à cent et au-delà » est toujours supérieur à 50 %. Dans les pays occidentaux, ces élèves sont systématiquement minoritaires, sauf en République d'Irlande pour le comptage oral uniquement. En France en particulier, ils représentent une part faible : par exemple, 13,2 % des élèves français sont capables d'écrire les nombres jusqu'à cent ou plus, tandis que les élèves du Taipei chinois sont 72,4 % à pouvoir le faire (d'après leurs parents). Par ailleurs, la corrélation avec la réussite des élèves aux évaluations TIMSS le coefficient de détermination de Bravais-Pearson élevé ($R^2 = 0,78$), suggérant que les capacités des élèves dans le domaine numérique avant l'entrée à l'école élémentaire est un prédicteur de la réussite future des élèves. Dans le domaine du calcul (annexes 75 et 76), les élèves asiatiques ont également des connaissances plus vastes à ce moment-là. Ainsi, selon leurs parents, ils sont les plus nombreux à pouvoir réaliser des petites additions et des petites soustractions. Parmi les pays occidentaux, seule la République d'Irlande présente un profil assez proche des pays asiatiques de notre corpus, avec lequel elle fait jeu égal à propos des additions (91,9 % de réponses positives contre 95 % en moyenne dans les pays asiatques). En revanche, les écarts se creusent lorsque l'on évoque les soustractions (l'écart-type passe de 14,5 points de pourcentage pour les additions à 22,1 points de pourcentage pour les soustractions). Cette baisse s'explique par une chute des résultats plus importante dans les pays occidentaux (19,9 points de pourcentage) que dans les pays asiatiques (6,3 points de pourcentage). La France se distingue par un pourcentage de réponses positives particulièrement faible : seuls 28,1 % des élèves de ce pays peuvent

réaliser des additions simples au sortir de l'école maternelle, contre 90 % à Singapour. Là encore, le lien de corrélation entre les performances des élèves au test et leur capacité à réaliser de petites soustractions avant leur entrée à l'école élémentaire est élevé (R^2 = 0,82, avec une pente positive). Ce constat doit toutefois être nuancé : en l'absence des données relatives aux élèves floridiens, anglais et nord-irlandais, seules les réponses de huit participants seulement ont été analysées. De plus, l'âge d'entrée dans la scolarité obligatoire n'est pas le même partout. Pour illustrer notre propos, précisons qu'en Corée du Sud et à Singapour, l'école devient obligatoire dans la septième année de l'élève, avec pour la première, une rentrée au mois de mars (Mullis et Martin, 2016c, p. 6-7). Dans le Tapei chinois, les enfants doivent être âgés de six ans révolus pour débuter la scolarité élémentaire. Tout ceci implique un décalage de trois à six mois avec l'âge d'entrée des élèves français dans la scolarité obligatoire, qui s'effectue au mois de septembre, dans la sixième année de l'enfant. Néanmois, même en tenant compte de ces différences d'organisation scolaire, il subsiste sans doute des distinctions à faire dans les connaissances maitrisées par les élèves à un âge donné. Par exemple, l'arrivée des élèves de Hong Kong SAR à l'école élémentaire s'effectue en septembre, alors que l'élève sont âgés d'au moins 5 ans et neuf mois. Nous interprétons ce nombre comme étant la manifestation du fait que l'élève doit fêter ses six ans avant la fin du mois de novembre : le décalage avec la France n'est donc que d'un mois. Or, nous avons vu que les compétences des élèves hongkongais et français étaient fort différentes, et combler un tel écart en termes de connaissances en un mois parait impossible. Par ailleurs, les élèves de Hong Kong SAR sont également légèrement plus jeunes que les autres élèves asiatiques au moment du test, avec des performances similaires : cela nous conduit à relativiser l'importance de l'âge pour la maitrise des connaissances, ou à renforcer notre estimation de l'efficacité de l'enseignement dans ce territoire. Par exemple, au Québec, l'élève doit être âgé de six ans révolus pour débuter sa scolarité obligatoire, selon une règlementation qui est proche de celle en vigueur dans le Taipei chinois, mais avec des résultats très éloignés. Néanmoins, pour analyser ces écarts, il faut tenir compte du fait que la capacité des élèves asiatiques à compter de façon précoce est facilitée par les régularités de leur système de numération orale[1].

B. La perception par les élèves des séances de mathématiques

Est-ce que le monde des mathématiques est, pour les élèves, circonscrit à son utilisation dans un cadre scolaire, ou est-ce que l'on peut aimer cette matière sans apprécier l'enseignement qui en est fait ? Cette question est importante, car si le gout des mathématiques développé par les enfants se confond avec l'intérêt porté aux cours de mathématiques, alors la responsabilité qui pèse sur les enseignants s'en trouverait alourdie. La réponse pourrait être apportée par une comparaison des opinions formulées à propos des propositions « J'aime les mathématiques » (ASBM01E), et « J'aime apprendre les mathématiques » (ASBM01A)[2]. En effet, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson qui unit

1. Voir p. 70-71.

2. En quatrième année, cet item porte l'identifiant SQMS-01, ce qui signifie qu'il s'agit de la deuxième question de la partie du questionnaire consacrée aux mathématiques. En huitième année, la distinction entre les questions générales et celles relatives à la matière qui nous occupe n'existe pas. L'identifiant de cet item est donc SQG-17.

les deux séries de données est très élevé ($R^2 = 0,97$ en quatrième année, et $R^2 = 0,95$ en huitième année), montrant que, pour les élèves, les mathématiques sont limitées au cours correspondant. Certes, les intitulés étant très proches, on peut penser que des élèves qui lisent rapidement le questionnaire ont pu ne pas faire la distinction entre les deux. Toutefois, les termes utilisés sont différents : les mots « *enjoy* » et « *learning* » associés évoquent l'idée de tâches liées à la vie de la classe, tandis que l'expression « *I like mathematics* » réfère uniquement au savoir. En outre, les questions ne se succèdent pas (l'une est la première proposition, l'autre est la cinquième proposition), empêchant ainsi de cocher mécaniquement la même case pour deux affirmations qui semblent proches. Si pour les élèves, le cours de mathématiques est l'image parfaite de la matière elle-même, alors cela ne peut que renforcer notre intérêt pour le rapport des élèves à l'apprentissage des mathématiques dans un cadre scolaire. Cette question a été traitée par les auteurs de TIMSS, à travers la mesure de l'adhésion des élèves aux cinq propositions suivantes (annexes 77 à 86) :

- j'aime apprendre les mathématiques ;
- je souhaiterais ne pas avoir à étudier les mathématiques ;
- j'apprends beaucoup de choses intéressantes en mathématiques ;
- j'attends avec impatience le cours de mathématiques ;
- les mathématiques sont une de mes matières favorites.

Les moyennes des indices que nous avons calculés pour l'ensemble de ces propositions[1] confirment ce que nous avons appris à propos de l'intérêt des élèves pour les mathématiques. En quatrième année, le cours dispensé est moins apprécié des élèves dans le Taipei chinois (la moyenne des indices pour les cinq propositions est de 54 soit 1,9 écart-type en dessous de la moyenne du corpus) et en Corée du Sud (avec un indice moyen de 58,7 soit 1,3 écart-type en dessous de la moyenne). Les élèves de Hong Kong SAR manifestent également un intérêt inférieur à la moyenne, mais dans la norme (0,1 écart-type en dessous de la moyenne), tandis que ceux de Singapour sont plus enthousiastes que la moyenne du corpus, mais de façon très modérée (0,3 au dessus de la moyenne). Ce qui est spécifique aux deux premiers pays que nous avons cités, outre un indice moyen faible comparativement aux autres, c'est l'écart-type plus important qu'ailleurs entre les indices relatifs aux différentes questions. Ainsi, l'écart-type est de 10,5 points d'indice en Corée du Sud et de 15,9 dans le Taipei chinois, contre 7,9 en moyenne dans le corpus. On s'aperçoit que le taux d'adhésion y est particulièrement faible pour les deux propositions qui concernent, non la perception du cours de mathématiques de façon absolue, mais plutôt relativement aux autres matières (« J'attends avec impatience le cours de mathématiques » et « Les mathématiques sont une de mes matières favorites »). Pour prendre un exemple, dans le Taipei chinois, seul 0,3 % des écoliers sont d'accord avec le fait que les mathématiques sont l'une de leurs matières favorites, alors qu'ils sont 52,1 % en Angleterre, 55,6 % en France et 57,2 % en Floride. De même, les élèves sud-coréens ne sont que 37,6 % à déclarer qu'ils attendent avec impatience le cours de mathématiques, contre 76,6 % en Angleterre, 77,1 % en France et 73,7 % en Floride. Cela montre que dans ces pays, le cours de mathématiques est moins apprécié que les autres. En outre, on constate que les pays dans lesquels le cours de mathématiques est le plus apprécié ont des résultats assez faibles aux

1. Pour le détail de la méthode utilisée afin de mesurer l'indice global d'adhésion à ces propositions, voir p. 333.

évaluations TIMSS. Ainsi, au sein du corpus, la France est à la fois le pays qui obtient le score le plus bas, et celui dans lequel les élèves montrent le plus d'enthousiasme pour cette matière scolaire (avec un indice moyen de 77,7 soit 1,1 écart-type au dessus de la moyenne).

En huitième année, la répartition des réponses est assez différente. Certes, la Corée du Sud et le Taipei chinois sont les deux participants dont l'opinion des élèves est la plus dégradée. Toutefois, quand on étudie les données pour chaque proposition, on constate qu'ils ne sont plus les seuls à déconsidérer le cours de mathématiques par rapport aux autres matières. Si l'on tient compte de la proposition « Les mathématiques sont une de mes matières favorites », l'Angleterre perd 30,6 points d'indice entre la quatrième année et la huitième année, tandis que le Taipei chinois en gagne 12, ce qui conduit à l'obtention d'une mesure de l'adhésion à cette proposition équivalente pour les deux participants (38,3 pour l'Angleterre et 38 pour le Taipei chinois). De même pour la proposition « J'attends avec impatience le cours de mathématiques », le Québec perd 29,6 points d'indice entre la quatrième année et la huitième année, tandis que le Taipei chinois n'en perd que 8,8, ce qui conduit à l'obtention d'une mesure de l'adhésion à cette proposition égale (39,2 pour les deux participants). Par ailleurs, Singapour est le pays dans lequel la perception des cours de mathématiques est la plus positive, alors qu'il était dépassé par plusieurs pays occidentaux dans le premier degré. L'Ontario se place deuxième, ce qui met en lumière deux faits : d'une part, l'opinion des élèves quant aux leçons dispensées au sein de l'établissement n'est pas corrélé à la performance aux évaluations TIMSS (le taux de réussite de l'Ontario étant très éloigné de celui de Singapour) ; d'autre part, il peut exister des disparités importantes entre deux provinces d'un même État (la considération de la matière étant très supérieure à la moyenne du corpus dans l'Ontario, et plutôt inférieure à cette moyenne au Québec). Surtout, cela peut traduire une forte augmentation des exigences entre le primaire et le secondaire dans les pays occidentaux, tandis que l'écart semble moins grand dans les pays asiatiques, ce qui renforce encore notre intérêt pour la recherche de différences concernant les pratiques enseignantes dans ces deux régions.

Conclusion de la sous-section

Les élèves des pays obtenant des scores très élevés aux évaluations TIMSS apprécient en moyenne moins que les autres les cours de mathématiques, en particulier dans l'enseignement primaire. C'est peut-être, en partie, en raison des fortes exigences des professeurs : les élèves asiatiques sont, au sein de notre corpus, à la fois ceux qui réalisent les meilleures performances, et ceux qui ont le moins le sentiment de comprendre cette matière. Il faut dire également que la motivation exprimée pour les mathématiques en tant qu'outil de réussite professionnelle y est moins développée qu'ailleurs, en particulier dans l'environnement familial des élèves, et que les enseignants disent moins souvent qu'ailleurs à ces derniers qu'ils sont bons en mathématiques. L'analyse des réponses des élèves dans ce domaine repose donc sur des facteurs divers, qui relèvent d'aspects sociaux, culturels et pédagogiques. En outre, il serait intéressant de confronter ces observations à des comparaisons intra-pays : nous faisons l'hypothèse qu'au sein d'un même territoire, les résultats seraient inverses, et que les élèves

ayant le plus de plaisir à faire des mathématiques, et l'impression la plus forte de l'utilité de cette matière, auraient également les meilleurs résultats. Des études complémentaires permettraient également de déterminer comment cet intérêt pour la matière influe sur le parcours des élèves lors de leur entrée dans l'enseignement supérieur, et notamment sur le choix de leur spécialité : le moindre attrait des élèves asiatiques pour les mathématiques se traduit-il par une orientation vers d'autres voies universitaires ?

Conclusion de la section consacrée aux limites à la portée de notre étude liées à l'apprentissage

L'objectif de cette section était de définir comment les variables relatives à l'apprentissage pouvaient influer sur les performances des élèves. Nous avons vu apparaitre des différences notables, parfois entre groupes de pays appartenant à des régions différentes, parfois entre territoires plus proches d'un point de vue culturel et géographique. Ainsi, les élèves des pays asiatiques construisent très tôt de solides connaissances à propos des nombres et du calcul (en République d'Irlande également, mais dans une moindre mesure), dans le cadre d'un système numérique dont les caractéristiques facilitent les apprentissages (Brissiaud, 2014, p. 24). En outre, nous avons vu que dans ces territoires, le recours à des professeurs extérieurs était plus qu'ailleurs susceptible de renforcer des compétences déjà étendues. En revanche, l'intérêt pour la matière y est peu développé, en particulier dans le Taipei chinois et en Corée du Sud. Dans ce dernier pays, on perçoit l'existence d'un système cohérent, dans lequel les élèves et leurs parents ont une certaine défiance vis-à-vis des institutions scolaires, qui se manifeste par une faible compréhension déclarée de la discipline, un gout très bas pour les mathématiques et un recours massif aux cours complémentaires. Ces derniers n'étant pas encadrés par le curriculum officiel, nous observerons tout particulièrement la corrélation entre le contenu des instructions officielles sud-coréennes et les performances des élèves aux tests TIMSS, pour voir si ceux-ci réussissent des items pour lesquels aucun enseignement n'a été prescrit par le législateur. À l'inverse, on trouve dans les pays occidentaux un attrait plus prononcé pour la matière, en particulier chez les écoliers, une plus grande confiance en leurs capacités et un moindre recours à des intervenants extérieurs. Cela n'empêche pas les parents de s'impliquer beaucoup dans les apprentissages de leur enfant, mais probablement en relation beaucoup plus forte avec le travail réalisé en classe que dans les *hagwons* asiatiques (qui sont davantage des cours du soir que des cours particuliers). On voit bien ici comment l'efficacité d'un système éducatif évoquée par les auteurs de TIMSS ne se mesure pas seulement à l'aune

de la relation entre les intitulés des programmes et les résultats des élèves. Quel que soit le score obtenu, celui-ci ne dispense pas d'une analyse critique : pourquoi les élèves asiatiques apprécient-ils moins que les autres les cours dispensés au sein de leur établissement scolaire ? Pourquoi l'attrait pour les mathématiques déclaré par les élèves occidentaux ne se traduit-il pas par des performances supérieures ? La possibilité d'une troisième voie, conciliant plaisir d'apprendre et scores élevés, est-elle possible ? Les données relevées à Singapour laissent penser que cela est envisageable. En analysant les réponses fournies par les professeurs aux questionnaires TIMSS, nous donnerons quelques éléments de compréhension à ce propos. Surtout, cela permettra de de circonscrire la portée de notre recherche en décrivant les limites qui tiennent au travail de transposition réalisé par les enseignants.

Section II. Limites liées à l'enseignement

L'hypothèse sous-jacente à cette étude est que la capacité des professeurs à reconstruire les praxéologies, fournies de façon partielle par les auteurs des programmes, est déterminée par des facteurs tels que leur expérience ou leur formation. Par exemple, des professeurs davantage formés seraient susceptibles de proposer une variété de techniques plus large pour résoudre un même type de tâches. Pour développer cette idée, nous sommes contraint par les sources que nous utilisons : parmi tous les éléments qui pèsent sur l'activité professionnelle des enseignants, nous ne pourrons évoquer que ceux que les auteurs de TIMSS ont pris en compte. Comme pour l'analyse réalisée à propos des élèves, nous allons commencer par décrire, dans la première sous-section, les caractéristiques générales des professeurs (âge, sexe, intérêt et implication dans le métier, niveau de formation). Dans la deuxième sous-section, nos observations porteront sur des considérations plus directement rattachées à l'exercice du métier (conditions d'enseignement, pratiques professionnelles en mathématiques).

Sous-section I. Limites liées aux caractéristiques des enseignants

Grâce aux questionnaires soumis aux professeurs, nous avons de multiples informations qui portent tout à la fois sur leur parcours et leur ressenti. Nous allons nous focaliser sur les réponses les plus récentes pour établir des résultats et, pour confirmer ces derniers, ou étayer une hypothèse, nous utiliserons parfois les données des années antérieures. Toutefois, il est à noter que les questions ne sont pas toujours les mêmes d'un millésime à l'autre, ce qui rend difficile les comparaisons. Nous allons d'abord évoquer des caractéristiques assez générales

des enseignants (§ 1), avant de décrire la nature de leur formation, qu'il s'agisse de la formation initiale ou continue (§ 2).

§ 1. Les caractéristiques générales des enseignants

Sans aucun doute, leur âge, leur expérience et leur intérêt pour le métier influencent les professeurs dans leur travail de transposition ; de façon diverse d'ailleurs : un enseignant plus expérimenté aura plus de connaissances, mais il pourra se contenter d'enseigner les techniques qu'il a toujours proposées, tandis qu'un autre, moins expériementé, pourra se montrer plus novateur, mais avec une réussite inégale. C'est pourquoi nous avons estimé utile de rechercher, au sein du corpus, des spécificités locales à ce sujet. Certes, l'établissement d'une corrélation de chacun des facteurs avec les résultats des élèves ne saurait être fructueuse, dans la mesure où chacun d'entre eux peut conduire à des effets contraires, comme nous venons de le montrer. Néanmoins, la mise en évidence d'un ensemble de caractéristiques (par exemple, une part importante d'enseignants expérimentés et très motivés, ou à l'inverse, un fort pourcentage de professeurs nouvellement nommés et faiblement motivés) devra permettre de poser des hypothèses sur la qualité du travail de tranposition interne. Dans une première partie, nous étudierons les éléments qui se rapportent à la carrière des enseignants (A). Dans une seconde partie, nous analyserons leur implication dans le métier (B).

A. La carrière des enseignants

Nous nous sommes appuyés sur les trois premières questions du questionnaire destiné aux enseignants[1] pour déterminer si l'expérience (annexe 87), l'âge (annexes 88 et 89) et le sexe (annexe 90) pouvaient avoir être corrélés aux performances des élèves aux tests TIMSS 2015. Nous avons pu établir que les enseignants des pays de notre corpus exercent ce métier depuis quatorze ans en moyenne à l'école primaire. Ils sont moins expérimentés en Angleterre et à Singapour (10,6 ans d'ancienneté), et plus expérimentés dans le Taipei chinois (16,7 ans d'ancienneté), en Corée du Sud (15,5 ans d'ancienneté) et au Québec (15,3 ans d'ancienneté). Les professeurs français se situent légèrement au-dessus de la moyenne, avec une expérience de 14,9 ans. Au collège, l'expérience moyenne est de treize ans. Encore une fois, elle est faible à Singapour (8,8 ans d'ancienneté) et en Angleterre (10,5 ans d'ancienneté), même si les données de la Floride (10,3 ans d'ancienneté) nous empêchent d'affirmer que ce sont les deux pays dans lesquels l'ancienneté est la plus faible. Les professeurs les plus expérimentés se trouvent au Québec, avec 17 ans d'ancienneté en moyenne. De façon unanime, les deux catégories d'âge les plus représentées sont les 30-39 ans et les 40-49 ans. En outre, l'écart-type est faible, dans le premier degré comme dans le second degré (2,1 années dans les deux cas[2]), ce qui indique que,

1. Il s'agit des questions TQG-01, TQG-02 et TQG-03, qui concernent aussi bien les enseignants du premier degré que les enseignants du second degré.

2. Pour avoir une idée de l'âge moyen des enseignants à partir des six réponses proposées, nous avons attribué la valeur 22 à la réponse « Moins de 25 ans », la valeur 27 à la réponse « Entre 25 et 29 ans », la valeur

dans les pays étudiés, l'âge moyen des professeurs est assez proche. Certes, en Angleterre, 9,4 % des enseignants de l'école primaire ayant participé à l'étude ont moins de 25 ans (10,4 % au collège), ce qui représente une part importante comparé aux autres pays du corpus, dont la moyenne est établie 3 % (2,7 % au collège). On ne trouvera donc pas de corrélation entre, d'une part, l'âge moyen ou l'expérience des professeurs d'un pays, et d'autre part, les performances de ses élèves. Par exemple, l'âge des enseignants sud-coréens du second degré est très proche de celui des enseignants de Floride (avec des âges moyens respectifs évalués selon nos calculs à 40,5 ans et 40,1 ans), pour un score global au test très différent (606 pour la Corée du Sud et 493 pour la Floride). À l'inverse, il est possible de réaliser des performances semblables avec des répartitions très différentes. Ainsi, en quatrième année, les professeurs de moins de 40 ans représentent 67 % de la corporation à Singapour, tandis qu'ils n'en représentent que 35,8 % dans le Taipei chinois. Or, leurs scores aux évaluations TIMSS ne sont pas si éloignés (avec 618 pour le premier et 597 pour le second).

Dans tous les pays de notre corpus, il y a une majorité de femmes parmi les enseignants du premier degré. Elles représentent 91 % des personnes interrogées au Québec, contre seulement 53,5 % à Hong Kong. La France se trouve ici aussi légèrement au-dessus de la moyenne, établie à 77,9 % pour le corpus, avec 84,1 % de femmes. D'ailleurs, le taux calculé pour la France est très proche de celui du Taipei chinois (82,5 %), et les résultats de leurs élèves sont tout à fait opposés. Dans le second degré, les données sont légèrement différentes : la prévalence des enseignantes est moins forte. Ainsi, elles ne représentent plus que 57,9 % des professeurs de mathématiques, en moyenne, dans le corpus, contre 77,9 % à l'école élémentaire. Les enseignants de sexe masculin sont majoritaires à Hong Kong (62,8 %) et dans le Taipei chinois (55,8 %). Cependant, ils ne sont que 37,6 % à Singapour et 29 % en Corée du Sud. Ces quatre participants obtiennent tous d'excellents résultats, ce qui confirme que, au premier comme au second degré, avoir un homme ou une femme pour professeur ne conduit pas à la réalisation de performances spécifiques.

La mesure de la satisfaction des enseignants à propos de leur métier est fournie par la question G10 du questionnaire (annexes 91 à 104), qui était ainsi formulée : « à quelle fréquence ressentez-vous les choses suivantes à propos de votre métier d'enseignant ? » Quatre propositions étaient offertes aux enseignants (« très souvent », « souvent », « parfois » et « jamais ou presque jamais »[1]) pour qualifier leur adhésion aux propositions suivantes :

- je suis content de ma profession d'enseignant ;
- je suis satisfait d'être professeur dans cette école ;
- je trouve du sens à mon travail ;
- je suis enthousiaste à propos de mon travail ;

34,5 à la réponse « Entre 30 et 39 ans », la valeur 44,5 à la réponse « Entre 40 et 49 ans », la valeur 54,5 à la réponse « Entre 50 et 59 ans » et la valeur 62 à la réponse « Plus de 60 ans ».

1. Pour créer un indicateur unique destiné à réaliser plus aisément des comparaisons, nous avons attribué la valeur 1 à la réponse « très souvent », la valeur 2/3 à la réponse « souvent », la valeur 1/3 à la réponse « parfois » et la valeur 0 à la réponse « jamais ou presque jamais ». La méthode détaillée se trouve en pages 327-328.

- mon travail m'inspire ;
- je suis fier du travail que je fais ;
- je vais continuer à enseigner aussi longtemps que je le peux.

En quatrième année, il existe plusieurs participants dont la moyenne des indices calculés pour chacune des propositions est supérieure à 80, ce qui suggère une grande satisfaction des professeurs à propos de leur métier : l'Ontario, le Québec, la République d'Irlande, l'Irlande du Nord et la Corée du Sud. Comme les élèves de ces territoires obtiennent des résultats très différents, on conclut qu'il n'est pas possible de lier, dans le cadre de comparaisons internationale (l'analyse serait peut-être différente avec des comparaisons intra-pays), l'enthousiasme déclaré par les enseignants en ce qui concerne l'exercice de leur métier et la réussite des élèves qui leur sont confiés. Tous les autres pays parviennent à un indice situé entre 70 et 80. La France possède certes l'indice le plus faible avec 70,9, mais celui-ci est très proche de celui de Hong Kong (71,9). Si l'on compare plus finement les données de la France et celles de Hong Kong, on s'aperçoit toutefois que les caractéristiques sont très différentes. En France, le taux de satisfaction est plutôt bas chez les enseignants lorsqu'il s'agit d'évoquer la profession d'enseignant (ATBG10A) et sa capacité à l'exercer longtemps (ATBG10G), renvoyant à la thématique des conditions de travail (salaire, temps passé devant les élèves). À Hong Kong, les enseignants indiquent plutôt qu'ils ne sont pas satisfaits de l'école dans laquelle ils se trouvent (ATBG10B), ou que ce métier les inspire moins que dans les autres pays (ATBG10E), ce qui correspond à des questions relatives à l'enseignement au quotidien. Ils partagent cependant un point commun : lorsqu'on leur demande s'ils sont fiers du métier qu'ils font, ils répondent moins souvent que la moyenne, établie à 80,5 pour le corpus, par l'affirmative (68,1 pour la France, 66,8 pour Hong Kong). En huitième année, les constations sont assez similaires, avec un fort taux de satisfaction chez les enseignants du Québec, de l'Ontario, de la République d'Irlande (en revanche, les données de la Corée du Sud se situent légèrement en dessous de la moyenne). Dans le premier comme dans le second degré, les professeurs de Singapour sont moins satisfaits de leur statut que la moyenne des pays du corpus (dans les deux cas, à plus d'un écart-type de la moyenne).

B. L'implication des enseignants

L'analyse de l'implication des enseignants est fondée sur les réponses des enseignants à deux items des questionnaires TIMSS. Le premier a trait à leur capacité à collaborer avec leurs collègues pour améliorer leur pratique professionnelle. La seconde concerne leur capacité à s'investir pour la réussite des élèves et la mise en œuvre des programmes.

À partir des données de la question G9 (annexes à 105 à 118), nous avons créé un indicateur unique de façon à estimer la fréquence des interactions entre enseignants. Cet indicateur a été construit

de la même façon que pour la question G10 analysée précédemment[1]. Les enseignants devaient indiquer à quelle fréquence ils avaient avec leurs pairs ces sept types d'interactions :

- discuter comment enseigner un sujet particulier ;
- collaborer pour planifier l'enseignement et préparer le matériel ;
- partager ce que j'ai appris de mon expérience d'enseignant ;
- visiter une autre classe pour améliorer ma capacité à enseigner ;
- travailler ensemble pour trouver de nouvelles idées ;
- travailler en groupe pour la mise en place des programmes d'enseignement ;
- travailler avec des professeurs de niveaux différents pour assurer la continuité de l'apprentissage.

Nous avons ensuite confronté la quantité des interactions entre les enseignants et les résultats des élèves, sans trouver de corrélation linéaire ($R^2 = 0,1$ en quatrième année et $R^2 = 0,03$ en huitième année). En quatrième année, les deux pays qui obtiennent les scores les plus faibles (la France, avec un score de 488, et l'Ontario, avec un score de 512) sont aussi deux pays dans lesquels les échanges entre les enseignants sont très faibles (avec respectivement des indices de 46,5 et 46,2 pour une moyenne du corpus fixée à 54,2 et un écart-type à 6,7 points de pourcentage). Toutefois, les performances des élèves du Taipei chinois sont excellentes, alors que les interactions entre leurs professeurs sont similaires (avec un indice de 46,1). De plus, l'observation que nous avons faite dans le premier degré ne se vérifie pas au regard des données disponibles dans le second degré : la Floride est le participant qui présente à la fois l'indice mesurant les échanges entre les enseignants le plus élevé du corpus, et le score le plus bas. Lorsqu'on détaille chacune des propositions, on s'aperçoit toutefois que certaines d'entre elles sont dépendantes du contexte d'enseignement : nous pensons en particulier aux interactions destinées à mettre en place les programmes d'enseignement[2]. En effet, on peut aisément imaginer que ces interactions seront plus importantes dans un pays dont le curriculum est rédigé pour une tranche d'âges (ainsi les programmes par cycle en France) que dans un pays où les instructions officielles sont rédigées par niveau de classe (comme à Singapour par exemple). Or, les données issues des questionnaires ne permettent pas de valider cette hypothèse. En effet, la fréquence des échanges dans ce domaine est semblable en France et à Singapour (avec un indice de 55,6 pour la première et de 57,7 pour le second). Cela provient peut-être du fait que les programmes d'enseignement français étaient, en 2015, en place depuis plusieurs années, avec des progressions suggérées, tandis que les instructions officielles de Singapour se trouvaient en plein renouvellement. Les données relatives à cette question sont donc difficiles à interpréter et nous pensons que les réponses peuvent évoluer très fortement selon l'année de remplissage du questionnaire. Néanmoins, quelques conclusions semblent pouvoir être mises en avant.

---

1. Les choix de réponse étaient identiques (« très souvent », « souvent », « parfois » et « jamais ou presque jamais ») : les mêmes valeurs ont donc été attribués à chacune d'entre elles. Une fois calculé l'indice estimant la fréquence de chaque type d'interaction, nous avons fait la moyenne de ces indices pour chaque pays, afin de déterminer la quantité globale des interactions entre enseignants.

2. Celles-ci font l'objet d'une estimation par le biais de la question TQG-09f du questionnaire TIMSS 2015 destiné aux enseignants.

Ainsi, en quatrième année comme en huitième année, la seule proposition pour laquelle la pente est positive et le coefficient de détermination de Bravais-Pearson n'est pas nul ou presque, c'est la proposition « Visiter une autre classe pour améliorer ma capacité à enseigner ». Il s'agit également de la proposition pour laquelle les résultats présentent l'écart-type le plus important (13 points d'indice dans le premier degré, et 12,3 points dans le second degré). En particulier, en quatrième année, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est assez élevé ($R^2 = 0,63$) et des différences notables apparaissent entre les pays. Par exemple, 80,2 % des enseignants français indiquent ne jamais ou presque jamais aller dans une autre classe pour voir comment travaillent leurs collègues, tandis qu'ils ne sont que 1,5 % à choisir cette réponse en Corée du Sud, 2,2 % à Hong Kong (pour une moyenne du corpus établie à 30,1 %). À Singapour et dans le Taipei chinois, ce taux est faible également (inférieur à 15 %), ce qui montre une culture régionale des échanges de ce type. De même en huitième année, le pourcentage moyen pour la réponse « Jamais ou presque jamais » est de 13,6 % dans les pays asiatiques de notre corpus, tandis qu'il est de 51 % dans les territoires occidentaux. Le fait de visiter d'autres classes n'est pas la garantie d'un enseignement efficace : les professeurs des écoles et de collège anglais le font tout autant que les enseignants asiatiques sans pour autant obtenir les mêmes résultats. Toutefois, nous notons que cette pratique semble faire partie de la culture des pays dont les scores TIMSS sont les plus élevés.

Les auteurs du questionnaire ont tenté de mesurer les efforts fournis individuellement par les professeurs à travers la question G6 (annexes 119 à 128). Les propositions qui leur étaient faites dans ce paragraphe ne concernaient pas seulement l'implication des enseignants, mais aussi celle des parents, des élèves et de la direction. Pour notre analyse, nous avons donc exploité uniquement, pour le moment, les propositions relatives aux enseignants, que nous avons listées ci-dessous :

- la compréhension par les enseignants des objectifs programmatique de l'école ;
- le degré de succès des enseignants dans la mise en œuvre des programmes de l'école ;
- les attentes des professeurs quant à la réussite des élèves ;
- les professeurs travaillant ensemble pour améliorer la réussite des élèves ;
- l'aptitude des enseignants à inspirer les élèves.

Nous concédons que ces propositions ne traitent pas toutes directement de l'implication des enseignants : il est question également de leurs qualités professionnelles. Néanmoins, l'analyse des réponses donnera une idée assez précise de l'opinion des professeurs à propos de la capacité de leurs collègues à réaliser un travail de tranposition efficace (en particulier à travers les deux premières propositions). À ce titre, leur inclusion dans cette recherche nous a paru opportune. Après avoir défini un indicateur global de cette opinion[1], de façon à identifier si elle était plutôt positive ou négative, nous avons confronté ces données aux scores obtenus par les élèves aux évaluations TIMSS 2015, sans trouver de relation entre les deux. Il est intéressant de noter que trois pays dont les élèves obtiennent des scores parmi les meilleurs aux évaluations TIMSS 2015 (Hong Kong SAR, Singapour, Taipei chinois)

1. Les réponses possibles étaient au nombre de cinq : « très élevé » (à laquelle nous avons attribué une valeur de 1), « élevé » (à laquelle nous avons attribué une valeur de 0,75), « moyen » (à laquelle nous avons attribué une valeur de 0,5), « bas » (à laquelle nous avons attribué une valeur de 0,25) et « très bas » (à laquelle nous avons attribué une valeur de 0).

ne paraissent pas manifester des attentes très élevées vis-à-vis des performances de leurs élèves. En effet, lorsqu'on demande aux enseignants de quatrième année quelles sont leurs attentes quant à la réussite de leurs élèves, tous les pays du corpus ont un indice compris entre 80 et 87, sauf Singapour (72,6), Hong Kong (75,3) et le Taipei chinois (75,4). De même, en huitième année, 40 % des professeurs de mathématiques de la Floride évoquent des attentes très élevées vis-à-vis de leurs élèves, contre seulement 9,4 % à Hong Kong SAR, 15,6 % dans le Taipei chinois et 18,7 % à Singapour. Or, les élèves de Floride obtiennent les scores les plus bas du corpus aux évaluations TIMSS. Il est possible que les professeurs floridiens aient des attentes élevées précisément parce qu'ils ont conscience que leurs élèves peuvent mieux faire. De la même façon, les professeurs sud-coréens (qu'il s'agisse des professeurs des écoles ou des professeurs de collège) s'estiment les plus aptes à inspirer leurs élèves, alors que nous avons vu que la défiance à leur égard (qu'elle provienne des parents ou de leurs enfants) était la plus forte de tout le corpus. Le regard que les uns et les autres nous renvoient semble donc bien subjectif, et les pistes d'interprétation sont parfois incertaines.

§ 2. La formation des enseignants

La question de la formation des enseignants est complexe ; divers aspects peuvent être abordés, en lien avec leur monovalence ou leur polyvalence : leur formation universitaire, leur formation professionnelle et leur formation continue. Pour chacun de ces éléments, leur durée et leur contenu peuvent être analysés (quel rapport avec les mathématiques ? Avec l'enseignement des mathématiques ?). Pour mener cette analyse, nous allons suivre l'organisation des enquêtes TIMSS. Dans une première partie, nous étudierons le lien entre le niveau de formation initiale et les résultats des élèves (A). Dans une seconde partie, nous évoquerons la formation continue des enseignants (B), avec l'idée que, même si la formation initiale des enseignants dans le domaine des mathématiques est faible, ceux-ci pourront toujours acquérir des connaissances utiles pour cet enseignement ultérieurement. Les professeurs n'ont en revanche pas été interrogés sur leur formation professionnelle. Les seules informations disponibles sur le sujet dans TIMSS sont fournies dans un fichier intitulé *Curriculum data*, rempli par les autorités de chaque pays. Toutefois, la description de ces formations est très succinte, avec des données disparates (parfois, la durée apparait ; parfois, elle n'apparait pas). En outre, tous les pays n'organisent pas une formation professionnelle pour les enseignants distincte de la formation universitaire, ce qui ne facilite pas les comparaisons. Notre analyse se limitera donc aux déclarations des enseignants concernant la nature des formations initiales et continues qu'ils ont suivies.

A. La formation initiale

Pour déterminer le niveau de formation initiale atteint par les enseignants des pays de notre corpus, nous avons utilisé les données tirées de la question G4 du questionnaire qui leur était destiné (annexes 129 à 130). Elle était ainsi rédigée : « quel est le plus haut niveau de formation que vous ayez obtenu ? » Les auteurs faisaient six propositions, si l'on excepte le cas où l'enseignant n'a pas suivi un cursus équivalent au lycée, ce qui ne concerne aucun des professeurs des pays que nous étudions. Les propositions étaient les suivantes :

- deuxième cycle de l'enseignement secondaire (niveaux II et III) ;
- enseignement post-secondaire non-supérieur (niveau IV) ;

- enseignement supérieur de cycle court (niveau V) ;
- licence ou niveau équivalent (niveau VI) ;
- master ou niveau équivalent (niveau VII) ;
- doctorat ou niveau équivalent (niveau VIII).

Afin d'avoir une estimation du niveau de formation des enseignants d'un pays et de faciliter les comparaisons, nous avons créé un indicateur, avec la méthode détaillée précédemment, mesurant leur niveau de diplôme moyen[1]. Voici la synthèse des résultats de cette étude :

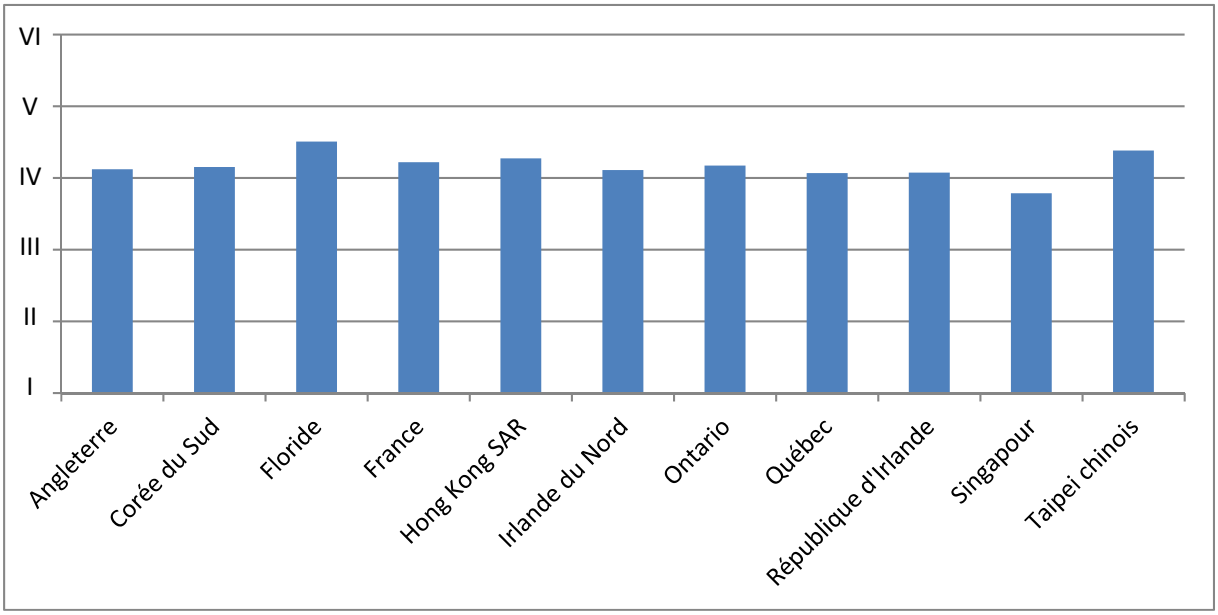


Figure 57. Niveau de diplôme moyen des enseignants de quatrième année

Singapour est le seul pays de notre étude dont le niveau moyen de formation des enseignants est inférieur à la licence, tous les autres se situant entre la licence et le master. Dans ce pays, il existe un pourcentage de professeurs qui ont un niveau de diplôme inférieur à la licence plus important qu'ailleurs (21,8 %, pour une moyenne dans les autres pays du corpus égale à 2,9 %). Ce cas est également plus fréquent que la moyenne en France (12,7 %), sans que l'on mesure une quelconque influence sur les résultats des élèves : Singapour est le pays le plus performant de notre corpus, tandis que la France est celui qui obtient le score le plus bas. Au collège, la part des enseignants ne possédant pas une licence est encore plus faible (1 %). La part des docteurs est marginale également : ils ne représentent que 0,8 % des personnes interrogées. Ce qui fait la différence entre les pays, c'est la répartition entre les professeurs titulaires d'une licence, et ceux qui possèdent un master. Singapour est le pays dont la part des enseignants titulaires d'un diplôme plus élevé que la licence est la plus faible (10,7 %), alors que le

1. Nous avons attribué une valeur de 1/6 à la réponse « deuxième cycle de l'enseignement secondaire », une valeur de 2/6 à la réponse « enseignement post-secondaire non-supérieur », une valeur de 3/6 à la réponse « enseignement supérieur de cycle court », une valeur de 4/6 à la réponse « licence ou niveau équivalent », une valeur de 5/6 à la réponse « master ou niveau équivalent » et une valeur de 1 à la réponse « master ou niveau équivalent ».

Taipei chinois est le territoire dans lequel elle est la plus grande (50,7 %). Ces participants obtiennent tous les deux d'excellents résultats. À l'inverse, cette part est presque identique en Corée du Sud et en Floride (avec respectivement 34,3 % et 34,8 %), alors que le score atteint lors des évaluations TIMSS diffère énormément (celui de la Corée du Sud, 606, est très élevé, tandis que celui de la Floride, 493, est le plus faible au sein de notre corpus). Dans notre recherche, le niveau de diplôme des enseignants semble donc sans incidence pour l'obtention d'un taux de réussite élevé, ce qui s'explique sans doute par le fait que les écarts inter-pays sont assez faibles.

En ce qui concerne le contenu de cette formation initiale (annexes 131 à 138), il y a un net décalage entre la France, dont seulement 28,2 % des enseignants de primaire déclarent avoir fait leur formation initiale dans le domaine de l'éducation, et les autres pays, dans lesquels ce taux ne descend pas en dessous de 65 %. Lorsqu'on se pose la question de savoir si les enseignants du premier degré ont réalisé des études de mathématiques, la moyenne des pays du corpus est très basse (20,6 %) et la France se trouve juste en dessous de cette moyenne (19,7 %). En revanche, deux pays se distinguent par un taux beaucoup plus important que la moyenne, et les élèves de ces pays réalisent les meilleures performances : il s'agit de Singapour (62,4 %) et de Hong Kong (59,2 %). Singapour se distingue également par un niveau très élevé de professeurs ayant fait des études de sciences (49,9 % contre 16,5 % en moyenne). Par ailleurs, si le total est supérieur à 100 %, c'est parce que les auteurs de TIMSS demandaient aux enseignants d'indiquer « leurs domaines d'étude principaux », ouvrant la voie à des choix multiples. Pour les professeurs qui ont suivi un cursus dans le domaine des sciences de l'éducation, les enseignants de ce pays sont parmi les plus enclins à opter pour une spécialisation dans le domaine des mathématiques (49,7 % contre 20 % en moyenne). Ils sont devancés par ceux de Hong Kong (68 %), et suivis par ceux du Taipei chinois (37,5 %). Les quatre pays asiatiques de notre corpus sont ceux dans lesquels une spécialisation en sciences dans le cadre des sciences de l'éducation est la plus prisée : 34,3 % à Singapour, 25,9 % dans le Taipei chinois, 21,7 % à Hong Kong et 19,1 % en Corée du Sud. Si on calcule la moyenne pour les autres pays du corpus, on obtient 6 %. Les enseignants de l'école élémentaire des pays asiatiques n'ont donc pas un niveau de formation générale supérieur à celui des autres pays du corpus (il serait même plus faible à Singapour). En revanche, ils sont davantage spécialisés dans les matières scientifiques, soit en suivant un cursus dans ce domaine, soit en choisissant une spécialité en mathématiques au cours d'un cursus de sciences de l'éducation. En huitième année, le pourcentage moyen de professeurs ayant fait des études de mathématiques au sein de leur cursus post-secondaire est nettement plus élevé (61,1 % en moyenne, contre 20,6 % en quatrième année). Si l'on additionne la part des enseignants ayant suivi un tel cursus, et la part de ceux qui ont reçu une spécialisation à propos de cette matière dans le cadre d'études dans le domaine de l'éducation, la somme est supérieure à 100 dans la plupart des pays de notre corpus (ce qui signifie que, potentiellement, tous les professeurs peuvent avoir reçu une formation en mathématiques ou en didactique des mathématiques). Néanmoins, ce n'est le cas ni en Floride (où 50,7 % des professeurs ont fait des mathématiques à l'université, et 40,9 % ont suivi un cursus de didactique des mathématiques) ni dans l'Ontario (où seulement 9,1 % ont choisi les mathématiques comme domaine disciplinaire à l'université, et où 13,1 % d'entre eux se sont spécialisés dans l'enseignement des mathématiques). Dans cette province, le pourcentage très inférieur à celui des autres pays est dû à la polyvalence des enseignants de

collège[1]. À l'inverse, les enseignants de Singapour semblent particulièrement bien formés en mathématiques, puisque 84,2 % d'entre eux ont réalisé des études de mathématiques de niveau universitaire, et 59,4 % ont reçu un enseignement en didactique des mathématiques (la somme des deux pourcentages est la plus élevée du corpus). On voit ici que le profil des enseignants de Floride ou de l'Ontario diffère notablement de celui des enseignants singapouriens. Parce que les résultats des deux premiers participants que nous avons cités sont bas, et que ceux de Singapour sont les meilleurs du corpus (et de l'ensemble des pays participants au test), nous pourrions penser que la formation initiale des professeurs du secondaire constitue un point clé dans la qualité des performances des élèves. Toutefois, le constat est plus nuancé : la part des professeurs anglais ayant fait des études de mathématiques (80,4 %) est grande, nettement supérieure à celle qui prévaut en Corée du Sud (48,3 %), alors que la comparaison des résultats est largement en faveur de ce pays asiatique (avec un score de 606 contre 518 pour l'Angleterre). De même, la part des professeurs anglais ayant reçu un enseignement en didactique des mathématiques (48 %) est supérieure à celle des enseignants du Taipei chinois (34,4 %), alors que les scores obtenus par les élèves du Taipei chinois sont bien meilleurs que ceux obtenus par les élèves anglais.

Le thème de la polyvalence des professeurs n'apparait pas dans les questionnaires TIMSS 2015. Nous avons donc conduit notre analyse avec les données fournies par la question TQG-14 du questionnaire TIMSS 2011 (annexes 139 et 140), en sachant que les données pour la France ne sont pas disponibles, ce pays n'ayant pas participé à cette étude. Néanmoins, nous savons que, au moins d'un point de vue institutionnel, les professeurs français du premier degré sont polyvalents, bien que des échanges de service soient parfois réalisés dans les classes. En outre, elle ne concerne que les enseignants de quatrième année, ce sujet n'ayant pas été abordé avec les professeurs de collège (il est possible que les auteurs du questionnaire estiment que la monovalence y est tellement prédominante que la question n'a pas d'intérêt ; nous avons vu que cela n'était pas vrai avec l'exemple de l'Ontario). Les résultats confirment la grande spécialisation des professeurs de Hong Kong SAR et, dans une moindre mesure, de Singapour. En moyenne, les enseignants des pays de notre corpus sont 80,1 % à enseigner également la langue principale du pays, alors que dans ces deux pays, ils sont respectivement 5,4 % et 56,4 %. Cette spécialisation, en particulier à Hong Kong SAR, apparait également lorsqu'on demande à ces professeurs s'ils enseignent les sciences. En effet, seuls 12,8 % des enseignants de ce pays déclarent enseigner cette matière à la classe, 57,3 % à Singapour, contre 67,9 % pour la moyenne des pays du corpus. Cette spécialisation est perceptible dans une moindre mesure dans le Taipei chinois, puisque 100 % des professeurs s'occupent de l'apprentissage de la langue, mais seulement 4 % enseignent les sciences. Il nous faut noter par ailleurs que d'autres pays dont les élèves réussissent très bien aux

1. Voici comment le ministère de l'immigration de l'Ontario présente le métier d'enseignant aux personnes arrivant sur son sol : « Les enseignants au niveau intermédiaire en 7e et 8e année enseignent habituellement toutes les matières à une seule classe. Selon l'école, un enseignant peut enseigner une seule ou plusieurs matières. Si vous travaillez dans une école élémentaire (7e et 8e année), vous enseignez la plupart des matières. Si vous travaillez dans une école secondaire (9e et 10e année), vous enseignez deux ou trois matières. » (le document, mis à jour en octobre 2014, a été consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : https://stage.iaccess.gov.on.ca/OI/fr/working/OI_FR_HOW_WORK_TEACHER_CM.html).

évaluations TIMSS ont des enseignants polyvalents. Ainsi, en Corée du Sud, 95,1 % des professeurs ont en charge l'apprentissage de la langue, 88,8 % enseignent également les sciences. Or, le score de leurs élèves était de 605 en 2011, ce qui constitue un excellent résultat. Tous les pays de notre corpus qui ont fait le choix de la spécialisation obtiennent de grandes performances de la part de leurs élèves, mais tous ceux qui obtiennent de grandes performances n'ont pas fait le choix de la spécialisation.

B. La formation continue

La question M10 du questionnaire TIMSS 2015, ainsi rédigée, traitait de la formation continue des enseignants (annexes 141 et 142) : « au cours des deux dernières années, combien d'heures au total avez-vous passé en formation (par exemple, ateliers de travail, séminaires…) de mathématiques ? » Comme plusieurs choix étaient offerts aux enseignants, nous avons créé un indicateur unique destiné à estimer, dans chaque pays, le nombre d'heures de formation continue dans les deux années qui précédaient les évaluations[1]. Nous avons synthétisé les données obtenues dans le tableau suivant :

	Indicateur	Traduction en heures et en minutes	Score aux évaluations TIMSS 2015
Angleterre	11,2	11 h 12 min	546
Corée du Sud	8,0	8 h	608
Floride	18,1	18 h 6 min	546
France	3,9	3 h 54 min	488
Hong Kong SAR	17,9	17 h 54 min	615
Irlande du Nord	6,7	6 h 42 min	570
Ontario	18,4	18 h 24 min	512
Québec	10,8	10 h 48 min	536
République d'Irlande	8,1	8 h 6 min	547
Singapour	17,0	17 h	618
Taipei chinois	6,8	6 h 48 min	597
Moyenne (corpus)	**11,5**	**11 h 30 min**	**562**
Moyenne (générale)	**11,9**	**11 h 54 min**	**500**

Figure 58. Estimation du nombre d'heures de formation continue suivies par les enseignants de quatrième année au cours des deux années précédent le test TIMSS 2015

Les professeurs français du premier degré ont un nombre d'heures de formation continue très inférieur à la moyenne du corpus comme à la moyenne de l'ensemble des pays participant aux évaluations TIMSS 2015. Pourtant, cette faiblesse de la formation continue explique-t-elle les résultats en-deçà des attentes des élèves français ? Nous avons vu que la Corée du Sud était représentée par des professeurs largement polyvalents, et que peu d'entre eux avaient suivi des études de mathématiques ou de didactique des mathématiques à l'université. Or, le nombre d'heures qu'ils passent en formation

1. Les enseignants devaient cocher l'une des réponses suivantes : « aucune » (à laquelle nous attribuons une valeur de 0), « moins de 6 heures » (à laquelle nous attribuons une valeur de 3), « 6-15 heures » (à laquelle nous attribuons une valeur de 10,5), « 16-35 heures » (à laquelle nous attribuons une valeur de 25,5), « plus de 35 heures » (à laquelle nous attribuons une valeur de 43, ayant considéré de façon arbitraire que cette catégorie correspondait à une fourchette comprise entre 36 et 50 heures).

continue est assez faible (8 h au cours des deux dernières années, en moyenne et selon nos calculs, contre 11 h 30 min pour l'ensemble des pays du corpus), tandis que les résultats de leurs élèves sont excellents. Il est vrai que ces résultats s'expliquent peut-être par l'utilisation très importante des cours complémentaires par les élèves, et que le nombre d'heures de formation continue est tout de même plus de deux fois supérieur à celui de la France. Par ailleurs, les professeurs de l'Ontario, de Floride et de Singapour passent beaucoup de temps en formation continue. Or, ces trois participants obtiennent des résultats très différents aux évaluations TIMSS (avec des scores respectifs de 512, 546 et 618). En conséquence, les données ne mettent pas en évidence un lien direct entre la formation continue et les résultats des élèves. Évidemment, on ne peut imaginer que quelques heures de formation puissent compenser une moindre spécialisation des enseignants dès leur formation initiale, ce que confirme l'analyse des données de huitième année.

	Indicateur	Traduction en heures et en minutes	Score
Angleterre	15,4	15 h 24 min	518
Corée du Sud	16,0	16 h	606
Floride	25,9	25 h 54 min	493
Hong Kong SAR	14,8	14 h 48 min	594
Ontario	18,9	18 h 54 min	522
Québec	13,0	13 h	543
République d'Irlande	20,2	20 h 12 min	523
Singapour	20,5	20 h 30 min	621
Taipei chinois	16,9	16 h 54 min	599
Moyenne (corpus)	**18,0**	**18 h**	558
Moyenne (générale)	**18,1**	**18 h 6 min**	500

Figure 59. Estimation du nombre d'heures de formation continue suivies par les enseignants de huitième année au cours des deux années précédent le test TIMSS 2015

Ainsi, les professeurs de Floride sont à la fois ceux qui passent le plus de temps en formation continue (25 h 54 min en moyenne, selon nos calculs, au cours des deux dernières années, soit 2,2 écarts-types au-dessus de la moyenne du corpus fixée à 18 h), et ceux dont les élèves ont les résultats les plus bas du corpus (avec un score de 493). Nous ferons également deux remarques plus générales. D'une part, le nombre d'heures de formation continue en mathématiques est plus élevé en huitième année qu'en quatrième année (de 56,5 % en moyenne dans le corpus). Cela nous semble cohérent avec le fait que les enseignants de l'élémentaire, polyvalents, doivent se former dans plusieurs matières, tandis que les enseignants du secondaire, plutôt monovalents, ne se forment que dans la discipline qui nous occupe. D'autre part, en quatrième année comme en huitième année, le nombre moyen d'heures de formation continue estimée pour le corpus est semblable au nombre moyen d'heures de formation continue estimée pour tous les pays participants aux évaluations TIMSS 2015. Or, les pays que nous avons sélectionnés sont globalement bien plus performants que les autres : cette constatation contribue encore à affaiblir l'idée que les heures de formation continue des enseignants en mathématiques contribuent, en elles-mêmes, à améliorer les résultats des élèves à ce test.

Conclusion de la sous-section

Nous concédons que notre recherche a été limitée à certains facteurs qui n'épuisent pas toutes les caractéristiques du corps enseignant. Nous avons notamment passé sous silence les différences qui touchent aux salaires, à la fréquence et aux critères d'évaluation de leur travail, aux conditions d'embauche ou de licenciement, ainsi qu'aux nombres d'heures passées devant les élèves par semaine : ces thèmes ne sont pas abordés dans les questionnaires TIMSS, et susciteraient de nombreux développement qu'il nous faut repousser à des études ultérieures. Néanmoins, elle a permis de mettre en lumière certaines spécificités locales, comme la moindre expérience des professeurs singapouriens et anglais, ou l'extrême faiblesse du nombre d'heures de formation continue en France. Cette étude a montré que les professeurs des pays participants les plus performants n'avaient pas un niveau de diplôme supérieur aux autres, mais qu'ils avaient suivi plus fréquemment un cursus en mathématiques ou en didactique des mathématiques, en particulier dans l'enseignement élémentaire, en lien avec une polyvalence moins affirmée dans les territoires asiatiques de notre corpus, à l'exception de la Corée du Sud. Dans ce pays, les élèves réussissent malgré des enseignants peu spécialisés et peu formés en mathématiques, ce qu'il est possible de mettre en lien avec un recours particulièrement fréquent des élèves à des cours complémentaires, avec des professeurs qui se consacrent peut-être davantage à l'enseignement d'un nombre réduit de matières. Certaines pratiques apparaissent beaucoup plus fréquemment dans les territoires asiatiques, telles que les visites dans la classe d'un autre professeur dans un objectif de formation. Les attentes manifestées par ces enseignants vis-à-vis de leurs élèves sont également plutôt moins fortes qu'ailleurs, ce qui semble cohérent avec les déclarations des élèves recueillies à ce sujet. Pour mettre ces résultats en perspective, il faut tenir compte de paramètres qui n'ont pas fait l'objet d'une attention de la part des auteurs : par exemple, la formation initiale professionnelle des enseignants français n'est pas prise en compte, dans la mesure où les professeurs ne sont interrogés que sur leur formation initiale effectuée dans un cadre universitaire. Avec ces données très générales, on ne peut évidemment pas se prononcer sur la maitrise du concept de fraction par les professeurs, ni sur leur capacité à élaborer des praxéologies à partir d'un type de tâches donné. Toutefois, il est probable que les professeurs des écoles de Hong Kong SAR, de Singapour et du Taipei chinois aient davantage de connaissances en mathématiques, d'une part, en raison de leur spécialité universitaire, et d'autre part, en raison de leur moins grande polyvalence.

Sous-section II. Limites liées à la pédagogie mise en œuvre

Comme nous l'avons souligné en introduction, les choix opérés par les professeurs ne sont pas uniquement didactiques : ils sont aussi contraints par des questions ergonomiques. Par exemple, il est plus difficile pour un professeur d'apporter un soutien individuel aux élèves lorsque leur nombre dans la classe augmente. Nous allons donc étudier dans une première partie les conditions de la mise en œuvre des choix pédagogiques (§ 1). Ces contraintes mises à part, il peut être mis au jour un style d'enseignement propre aux professeurs d'un pays donné, caractérisé par un modèle d'organisation privilégié (par exemple, demander aux élèves d'écouter l'enseignant résoudre un problème, ou, au contraire, demander aux élèves de résoudre des problèmes avec un faible guidage, en s'appuyant éventuellement sur les pairs). L'étude des habitudes pédagogiques dominantes dans chaque pays, État ou province sera l'objet d'une deuxième partie (§ 2).

§ 1. Les conditions de cette mise en œuvre

Les conditions d'enseignement ne sont pas uniquement liées à la qualité du bâtiment ou du matériel : le nombre d'élèves par classe, le sentiment de sécurité, ainsi que le poids des contraintes administratives constituent des facteurs pris en compte par les auteurs de TIMSS. L'ensemble de ces éléments seront analysés dans le paragraphe consacré aux conditions d'enseignement (A). Toutefois, même avec de faibles moyens, les professeurs peuvent avoir le sentiment d'exercer leur métier dans des conditions satisfaisantes dès lors qu'ils ressentent une implication forte de la part des parents et des élèves (B).

A. Les conditions d'enseignement

Pour mesurer la qualité des conditions matérielles, les auteurs du questionnaire demandaient aux enseignants d'évaluer la sévérité de différents problèmes au sein de leur école (annexes 143 à 156). Les propositions étaient les suivantes :

- l'immeuble a besoin de réparations significatives ;
- les enseignants ne disposent pas d'un espace de travail convenable (par exemple, pour la préparation, la collaboration ou les rencontres avec les élèves) ;
- les enseignants n'ont pas les fournitures et le matériel d'enseignement adéquat ;
- la salle de classe n'est pas nettoyée assez souvent ;
- la salle de classe a besoin de travaux de maintenance ;
- les enseignants n'ont pas les ressources technologiques adéquates ;
- les enseignants n'ont pas le support adéquat pour l'utilisation de la technologie.

Dans le premier degré, la France est à la fois le pays de notre corpus dans lequel les professeurs se plaignent le plus des problèmes matériels[1], et le pays obtenant le score le plus faible. À l'inverse, Singapour est à la fois le pays de notre corpus dans lequel les professeurs se plaignent le moins des conditions matérielles, et le pays obtenant le score le plus élevé. Toutefois, nous observons que les élèves du Taipei chinois réalisent un score très élevé, alors que le niveau d'insatisfaction des enseignants à propos des conditions matérielles est supérieur à la moyenne du corpus. L'Angleterre et la Floride obtiennent le même score avec des indices assez différents (19,6 pour la première et 29 pour la seconde, selon notre indice mesurant la sévérité des problèmes sur une échelle de 0 à 100). En revanche, nous pouvons affirmer qu'il existe des difficultés propres à certains pays. Ainsi, les professeurs français évoquent de façon notable un manque de ressources technologiques adéquates (avec un indice de 54,3 alors que la moyenne du corpus est de 27,5), ainsi qu'un support insuffisant pour l'utilisation de ces ressources technologiques (avec un indice de 59,3 alors que la moyenne du corpus est de 29,6). Ils évoquent également plus fréquemment que les autres la vétusté des classes et des bâtiments. Au Québec, c'est davantage la propreté des locaux qui pose souci. Dans le Taipei chinois, c'est le problème de l'espace de travail trop faible pour les professeurs qui est relevé, et ceux-ci indiquent également plus fréquemment que la moyenne manquer de matériel et de fournitures pour enseigner.

La question G7 portait sur les conditions de sécurité et sur le comportement des élèves (annexes 157 à 172). Elle impliquait pour les enseignants de se prononcer sur les propositions suivantes[2] :

- cette école est située dans un quartier sûr ;
- je me sens en sécurité dans cette école ;
- les politiques et pratiques de cette école dans le domaine de la sécurité sont suffisantes ;
- les élèves se comportent de façon disciplinée ;
- les élèves sont respectueux envers les professeurs ;
- les élèves sont respectueux du matériel de l'école ;
- cette école a des règles claires régissant la conduite des élèves ;
- les règles de cette école sont appliquées de manière équitable et cohérente.

Nous avons constaté que les professeurs français étaient à la fois ceux qui présentaient le deuxième taux de satisfaction le plus bas dans ce domaine, et ceux dont les élèves obtenaient les scores

---

1. Quatre réponses étaient possibles : « pas un problème » (à laquelle nous attribuons une valeur de 0), « problème mineur » (à laquelle nous attribuons une valeur de 1/3), « problème modéré » (à laquelle nous attribuons une valeur de 2/3), « problème sérieux » (à laquelle nous attribuons une valeur de 1). À partir de ces valeurs, nous avons calculé un indice estimant l'adhésion des enseignants à chaque proposition. La méthode détaillée se trouve en pages 327 et 328.

2. Pour calculer un indice unique de l'adhésion des enseignants à ces propositions, nous avons attribué un coefficient 1 à la réponse « tout à fait d'accord », un coefficient 2/3 à la réponse « plutôt d'accord », un coefficient 1/3 à la réponse « plutôt pas d'accord », un coefficient 0 à la réponse « pas du tout d'accord ». Nous avons ensuite calculé la moyenne des indices pour avoir une estimation globale du sentiment des professeurs concernant la sécurité et la discipline.

les plus bas au sein du corpus. Au collège, nous pourrions formuler une remarque similaire pour la Floride, dont l'adhésion des enseignants à ces propositions est la plus faible, et dont les élèves réalisent les performances les plus basses du corpus. Toutefois, l'indice moyen du Taipei chinois est inférieur à celui de la France, et pourtant les élèves de ce territoire réalisent des scores très élevés. Dans l'enseignement secondaire, celui de la Corée du Sud (72,2) n'est pas si éloigné de l'indice de la Floride (68,2 pour une moyenne du corpus établie à 78,3), alors que les résultats de leurs élèves sont très éloignés (avec un score de 493 pour la Floride, et de 606 pour la Corée du Sud). En outre, les pays dont les indices sont les plus élevés (l'Irlande du Nord avec 92,8 et la République d'Irlande avec 90,8) obtiennent pour le premier des résultats légèrement supérieurs à la moyenne, pour le second des résultats légèrement inférieures à la moyenne du corpus. Des conditions presque parfaites de sécurité et un grand respect des professeurs de la part des élèves ne suffisent pas à obtenir des performances élevées.

Les décisions prises récemment en France en classe de CP[1] montrent que le nombre d'élèves par classe est un élément qui est considéré par la puissance publique comme susceptible de jouer sur les performances des élèves. L'hypothèse du législateur, qui rejoint celle de beaucoup d'enseignants, est qu'il est plus facile d'enseigner lorsque le nombre d'élèves par classe est moins élevé. Nous avons donc exprimé le nombre moyen d'élèves par classe de quatrième année, dans les pays de notre corpus, dans le graphique ci-dessous[2] (annexe 173).

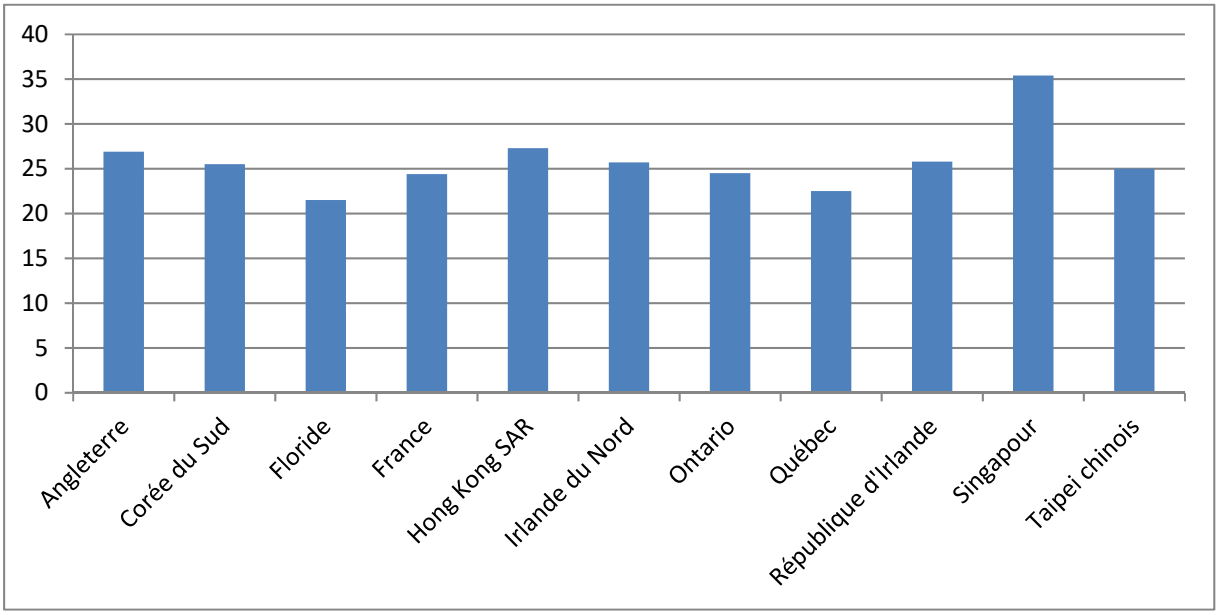


Figure 60. Nombre moyen d'élèves par classe en quatrième année (TIMSS 2015)

On s'aperçoit que le pays qui obtient le score le plus élevé aux évaluations TIMSS 2015 (Singapour) est également le pays qui place, en moyenne, le plus d'élèves par classe : plus de 35 ! À

1. Nous faisons référence à la décision de limiter à douze le nombre d'élèves de C.P. dans les classes des écoles françaises rentrant dans la catégorie REP+ à la rentrée 2017.

2. Les données sont tirées de la question G12A du questionnaire TIMSS 2015 destiné aux enseignants de quatrième année.

Hong Kong SAR, dont les élèves sont également très performants, le nombre moyen d'élèves par classe (27,3) est supérieur à la moyenne du corpus, qui est de 25,9. Les autres pays asiatiques de notre corpus, le Taipei chinois et la Corée du Sud, ont un nombre moyen d'élèves par classe semblable à l'Irlande du Nord et la République d'Irlande, alors que les résultats de leurs élèves sont très différents. Le nombre d'élèves par classe est très faible en Floride (21,5), et dans une moindre mesure au Québec (22,5). Or, les scores de ces deux participants sont inférieurs à la moyenne du corpus. En huitième année, la moyenne du nombre d'élèves par classe est supérieure à 30 dans tous les territoires asiatiques de notre corpus, tandis qu'elle est inférieure à 30 dans tous les territoires européens et nord-américains, comme le montre le graphique ci-dessous[1].

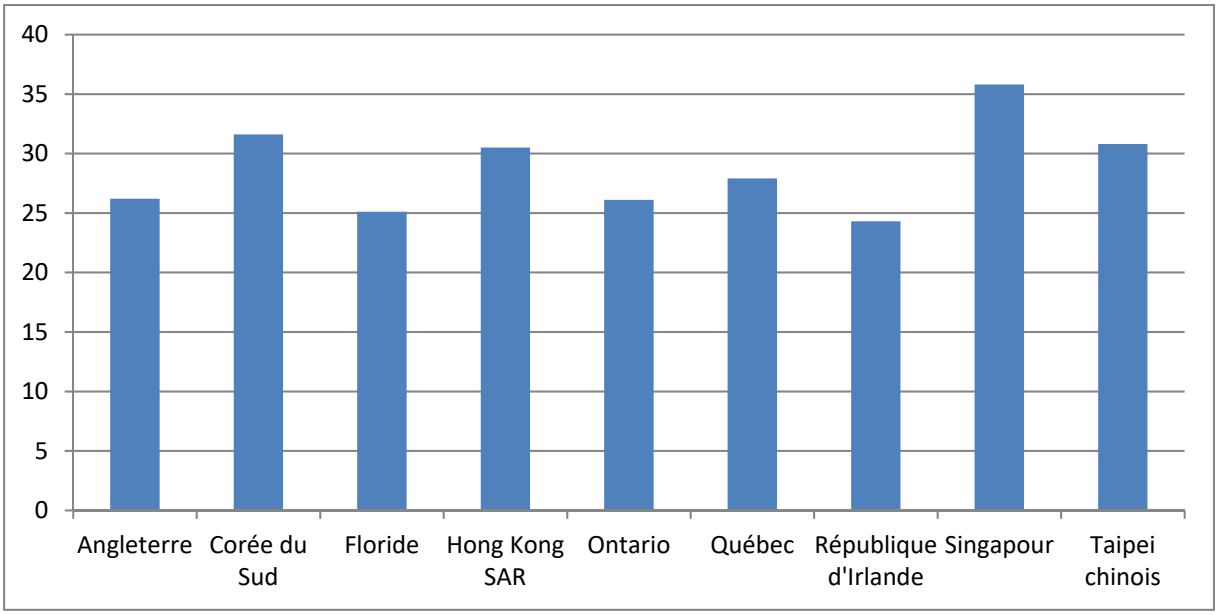


Figure 61. Nombre moyen d'élèves par classe en huitième année (TIMSS 2015)

Nous serions tenté d'en déduire que le fait d'avoir peu d'élèves dans une classe n'est pas un facteur de réussite aux évaluations TIMSS. Néanmoins, les questionnaires ne nous permettent pas d'accéder à des informations pourtant nécessaires pour affiner notre analyse. Ainsi, nous ne savons pas combien d'adultes travaillent en classe avec les élèves : le poste de professeur assistant n'existe pas en France, certes, mais nous aimerions savoir dans quelle mesure il est développé ailleurs et à quels niveaux de la scolarité. Nous n'aurions pas le même point de vue sur le travail effectué à Singapour s'il était réalisé seul par un professeur dans sa classe comportant 35 élèves, ou s'il recevait l'aide d'un tiers.

La question G12B, qui permet de connaitre le nombre d'élèves de quatrième année se trouvant dans la classe (annexe 174), apporte une information importante pour connaitre les spécificités de certains systèmes éducatifs (cette question n'était pas posée en huitième année). Elle nous permet de déterminer si les professeurs travaillent dans des classes à niveaux multiples. Or, cela demande un surcroit de préparation pour les enseignants, qui doivent préparer des séances adaptées pour les élèves

1. Les données sont tirées de la question G12A du questionnaire TIMSS 2015 destiné aux enseignants de huitième année.

de chaque tranche d'âge : le travail de transposition qu'ils réalisent est quantitativement plus important. En calculant le pourcentage d'élèves de la classe qui ne sont pas en quatrième année, on s'aperçoit qu'il est nul dans tous les pays asiatiques du corpus, ce qui indique qu'aucune de ces classes n'est multi-niveaux. Ensuite, on voit qu'il existe, en dehors du cas asiatique, non des spécificités régionales, mais des caractéristiques propres à chaque pays. Ainsi, le taux d'élèves de la classe qui ne sont pas en quatrième année est nul au Québec, mais de 8,3 % dans l'Ontario, nul en Irlande, mais de 7,7 % en République d'Irlande et de 3,4 % en Angleterre. C'est en France que le pourcentage est le plus élevé (12 %). Cela ne signifie pas que 12 % des classes françaises sont multi-niveaux : cela signifie que 12 % en moyenne des élèves des classes françaises interrogées ne sont pas en quatrième année. Comme dans ces classes, il y a généralement plus de 12 % d'élèves qui appartiennent à un autre niveau, le pourcentage de classes multi-niveaux est probablement très inférieur. Nous notons que l'Ontario et la France sont donc les deux pays du corpus qui ont le taux le plus élevé d'élèves qui n'appartiennent pas à la quatrième année, et que ce sont aussi les deux pays du corpus qui ont le score global le plus faible.

Enfin, en ce qui concerne le ressenti des enseignants à propos des contraintes professionnelles, nous nous sommes appuyé sur la question G11 (annexes 176 à 191), afin de connaitre celles qui, selon eux, constituent un frein à leur activité. Les propositions faites par les auteurs étaient les suivantes :

- il y a trop d'élèves dans les classes ;
- j'ai trop d'éléments à couvrir en classe ;
- j'ai trop d'heures d'enseignement ;
- j'ai besoin de plus de temps pour préparer ma classe ;
- j'ai besoin de plus de temps pour aider individuellement les élèves ;
- je ressens trop de pression de la part des parents ;
- j'ai des difficultés à suivre avec tous les changements apportés aux programmes ;
- j'ai trop de tâches administratives.

Encore une fois, le poids des contraintes institutionnelles ressenti par les enseignants français est plus important que dans les autres pays du corpus : lorsqu'on établit la moyenne des indices qui estiment l'adhésion des professeurs à chacune de ces propositions[1], on obtient pour la France $\bar{x} = 68{,}5$ contre une moyenne de 61,3 pour l'ensemble des pays du corpus. Ils mettent particulièrement en avant le fait qu'il y a trop d'élèves dans les classes et qu'il y a trop d'éléments à couvrir en classe. À l'inverse, les contraintes sont faiblement ressenties dans le Taipei chinois dans le premier comme dans le second degré (en quatrième année, l'indice du Taipei chinois se situe 2,2 écarts-types en dessous de la moyenne du corpus ; en huitième année, il se situe 2 écarts-types en dessous de la moyenne). L'adhésion aux deux dernières propositions est très faible (« j'ai des difficultés à suivre avec tous les changements apportés aux programmes » et « j'ai trop de tâches administratives »). Si ce participant obtient un score très élevé, on ne peut pas en déduire pour autant l'existence d'un lien entre le poids des contraintes institutionnelles et les scores obtenus à l'évaluation TIMSS 2015. En effet, si on enlève les deux extrêmes que représentent la France et le Taipei chinois, on a en quatrième année un R^2 arrondi au centième près égal

1. Les choix offerts pour la réponse étaient les mêmes que pour la question G7 : nous avons donc attribué les mêmes valeurs à chaque réponse.

à zéro. Par ailleurs, on ne trouve pas de lien de linéarité entre le nombre moyen d'élèves par classe et l'adhésion des enseignants à la proposition « il y a trop d'élèves dans les classes » ($R^2 = 0,03$ en élémentaire, et $R^2 = 0,1$ au collège). Deux possibilités permettent d'expliquer cette absence de corrélation linéaire : ou bien le nombre d'adultes par classe est différent au sein des pays de notre corpus, et dans ce cas on comprend que les ressentis des enseignants ne divergent pas seulement à cause du nombre d'élèves se trouvant dans leur classe ; ou bien les pratiques variées des enseignants ne sont pas affectées de la même façon par le nombre d'élèves se trouvant dans leur classe (par exemple, un style d'enseignement magistral se trouverait peu affecté par un nombre important d'élèves dans la classe, tandis qu'un enseignement fondé sur un suivi individualisé des élèves deviendrait plus compliqué à réaliser avec l'augmentation du nombre d'élèves au sein de la classe).

B. L'implication des parents et des élèves

À partir des déclarations des élèves et des parents, nous avons réalisé des observations qui peuvent paraitre, à certains égards, contradictoires (dans les territoires asiatiques, les parents ont des exigences de réussite scolaire plus élevés qu'ailleurs, mais ils pensent moins que les parents occidentaux qu'il est important de bien travailler en mathématiques). Pour mieux cerner les attentes du cercle familial dans chaque pays, nous avons donc analysé les réponses des enseignants aux cinq propositions suivantes (annexes 192 à 201), qui concernaient le rôle des parents dans l'école et auprès de leurs enfants :

- l'implication des parents de l'école dans les activités de l'école ;
- l'engagement des parents pour s'assurer que les élèves sont prêts à apprendre ;
- les attentes des parents quant à la réussite des élèves ;
- le support des parents pour la réussite des élèves ;
- la pression des parents pour que l'école maintienne un haut niveau d'exigences académiques.

Après avoir calculé l'indice moyen estimant l'adhésion des professeurs de quatrième année à chacune de ces propositions[1], nous constatons que l'expression d'une attente forte des parents quant à la réussite scolaire de leurs enfants n'est pas liée à l'obtention de scores élevés aux évaluations TIMSS 2015. En effet, les enseignants de l'école élémentaire à Singapour (avec un indice de 67,1) et dans le Taipei chinois (67,6) évoquent un investissement inférieur de la part des parents par rapport au Québec (77,6), ou même à la France (70,1). Au collège, la Floride, qui obtient le score le plus bas du corpus aux évaluations TIMSS 2015, est aussi le participant pour lequel les professeurs évoquent l'implication des parents la plus faible. Toutefois, ce déficit d'investissement apparait également en quatrième année, et cela n'empêche pas les élèves à ce stade d'obtenir des résultats plus élevés. En outre, les deux territoires dans lesquels l'implication des parents est, selon les enseignants, la plus forte sont l'Ontario et le Québec. Or, les performances de leurs élèves se situent en dessous de la moyenne du corpus. Par ailleurs, on constate qu'il existe, comparativement aux autres pays de notre corpus, une pression élevée des

1. Pour estimer l'adhésion des enseignants à chaque proposition, nous avons attribué la valeur 1 à la réponse « très élevé », la valeur 3/4 à la réponse « élevé », la valeur 2/4 à la réponse « moyen », la valeur 1/4 à la réponse « bas » et la valeur 0 à la réponse « très bas ».

parents vis-à-vis de leurs enfants en Corée du Sud (avec, pour la troisième proposition, un indice de 82,1 soit 1,9 écart-type au-dessus de la moyenne du corpus). Ce pays est aussi celui dans lequel l'implication des parents dans les activités de l'école est, d'après les professeurs, la plus importante (avec, pour la première proposition, un indice de 68,7 soit 1,6 écart-type au-dessus de la moyenne du corpus). Ce n'est donc pas parce que les parents sud-coréens ont une certaine défiance vis-à-vis des établissements scolaires qu'ils ne s'impliquent pas dans vie de l'école. On perçoit également la relation entre le point de vue des parents d'élèves sud-coréens, qui pensent que les enseignants ne sont pas assez exigeants (seuls 15,9 % sont tout à fait d'accord avec l'idée que l'établissement « promeut un haut niveau d'exigences académiques »[1] contre 75,3 % en Irlande du Nord), et le point de vue des professeurs, qui indiquent que leurs attentes des parents sont particulièrement élevées. À ce propos, il est intéressant de noter que c'est en Irlande du Nord que la pression des parents pour maintenir un haut niveau d'exigence est la plus fortement ressentie par les enseignants, alors que, contrairement à la Corée du Sud, les parents estiment que ce niveau d'exigence est très satisfaisant (75,3 % des parents nord-irlandais sont tout à fait d'accord avec l'idée que l'établissement « promeut un haut niveau d'exigences académiques »). Le support des parents pour la réussite des élèves est décrit par les enseignants comme étant le plus fort au Québec, ce que confirment les déclarations des parents, indiquant un contrôle très fréquent des devoirs effectués par leur enfant. La France se distingue par la plus faible exigence des parents pour que l'école maintienne un haut niveau d'exigences académiques (avec un indice de 53,8 alors que la moyenne du corpus est de 61,7) et par un engagement peu important des parents pour s'assurer que leurs enfants sont prêts à apprendre, même si celui-ci est encore plus bas en Floride (avec un indice de 49,6 alors que la moyenne du corpus est de 58,6), ce que l'on peut relier à leur ambition plus modeste à propos du niveau de diplôme espéré pour leur enfant. En ce qui concerne la proposition « l'engagement des parents pour s'assurer que les élèves sont prêts à apprendre », il existe une ambigüité : qu'attendent les professeurs exactement dans ce domaine ? Nous avons utilisé la question G15, pour fournir quelques précisions à ce sujet (annexes 202 à 215). Les professeurs devaient exprimer leur adhésion aux sept propositions suivantes :

- le manque de capacités ou de connaissances prérequises des élèves ;
- les élèves souffrant de malnutrition ;
- les élèves souffrant d'un manque de sommeil ;
- les élèves perturbateurs ;
- les élèves non intéressés ;
- les élèves avec un handicap physique ;
- les élèves avec un handicap mental, émotionnel ou psychologique.

1. Ces données sont tirées de l'analyse de la question HQ-11e du questionnaire TIMSS 2015 destiné aux familles des élèves de quatrième année.

Les résultats[1] mettent en exergue des écarts inter-pays relatifs au ressenti des professeurs dans ce domaine. Les enseignants français remarquent plus qu'ailleurs des « élèves souffrant d'un manque de sommeil » de nature à entraver leurs capacités d'apprentissage (avec un indice de 53,4), alors que c'est beaucoup moins fréquent chez des participants très performants comme la Corée du Sud (22,3), à Singapour (26,5) et à Hong Kong (27,7). À l'inverse, l'adhésion des professeurs français à la proposition « Les élèves souffrent de malnutrition » est très faible (avec un indice de 8) comparé à la moyenne du corpus (15). L'indice le plus élevé sur cette question revient à la Floride, État dans lequel les professeurs considèrent que les parents préparent moins qu'ailleurs leurs enfants à l'apprentissage. Lorsqu'on évoque les élèves perturbateurs comme frein à l'enseignement, on trouve des enseignants particulièrement sensibles à cette question en Corée du Sud (avec un indice de 61 en quatrième année et 65,1 en huitième année), alors qu'en République d'Irlande (avec respectivement des indices de 32,8 et 29) et en Irlande du Nord (32,3 en quatrième année), c'est nettement moins le cas. Cela montre encore une fois une certaine harmonie, dans ces derniers territoires, entre l'activité des enseignants et celle des élèves, et une certaine défiance à l'encontre du travail fourni par les uns et les autres en Corée du Sud. Les caractéristiques des réponses données par les enseignants à propos du désintérêt des élèves sont assez sembables : l'Angleterre (avec des indices de 31,8 à l'école élémentaire et 42,9 au collège) et la République d'Irlande (avec 35,9 et 45,8) ont les indices les plus bas du corpus à l'école élémentaire comme au collège. À l'inverse, quel que soit le niveau de la scolarité considéré, la Corée du Sud a un indice supérieur à la moyenne du corpus (mais qui reste dans la limite d'un écart-type par rapport à cette moyenne). En quatrième année, c'est la France qui a l'indice le plus élevé (55,8) : les élèves qui y étudient sont, selon les enseignants, assez disciplinés mais peu concernés. Pourtant, nous avons vu que l'intérêt manifesté par les élèves était supérieur à la moyenne du corpus. C'est aussi en Corée du Sud que le manque de prérequis des élèves est le moins évoqué, ce qui n'est pas surprenant quand on sait la place prise par les cours particuliers dans ce pays, tandis que cette difficulté est ressentie avec le plus d'intensité dans les écoles primaires françaises. Dans le second degré, ce problème est largement évoqué par les professeurs floridiens (72,5 % des enseignants considèrent qu'elle limite « beaucoup » leur façon d'enseigner, alors que la moyenne dans les autres pays est de 22 %). Or, ce sont les élèves français qui réalisent les performances les plus basses du corpus en quatrième année, et les élèves de Floride en huitième année. La question des prérequis, qui mêle à la fois l'organisation des apprentissages dans le temps et leur efficacité, semble donc particulièrement intéressante à étudier. Dans le domaine des fractions, les observations que nous pouvons faire à partir du contenu des programmes sont très limitées. En France, nous avons indiqué que les différentes écritures des rationnels étaient introduites à la même année, et que les activités préparatoires, visant à développer la capacité des élèves à partager en parts égales, étaient peu variées, ce qui pourrait expliquer certaines difficultés liées aux prérequis et à la densité des apprentissages. Toutefois, rien dans nos observations ne permet de poser une hypothèse sur l'origine de cette difficulté relative aux prérequis en Floride, si ce n'est le contenu des activités proposées aux élèves par les enseignants.

1. Les enseignants avaient le choix entre trois réponses : « pas du tout » (à laquelle nous avons attribué une valeur de 0), « moyennement » (à laquelle nous avons attribué une valeur de 0,5) et « pas du tout » (à laquelle nous avons attribué une valeur de 1).

§ 2. Les habitudes pédagogiques

Dans les enquêtes TIMSS, les enseignants déclarent privilégier certaines activités au détriment d'autres, c'est ce que nous avons appelé leurs « habitudes pédagogiques ». Ce peut être leur propension à lier les apprentissages à la vie quotidienne des élèves, ou leur volonté d'encourager les discussions entre les élèves au sein de la classe, qui peuvent être très variées selon les pays. Notre objectif est avant tout didactique : par exemple, l'utilisation de la calculatrice contribue à la mise en œuvre de certaines techniques et, au contraire, diminue l'intérêt de l'étude de certaines d'entre elles. Nénamoins, la description des habitudes pédaogiques des enseignants participe à l'analyse de résultats des élèves aux tests TIMSS (par exemple, pendant ces tests, l'utilisation de la calculatrice est interdite). Pour réaliser cette description, nous avons pu nous appuyer non seulement sur les déclarations des enseignants (A), mais également sur les déclarations des élèves (B).

A. Selon les enseignants

Pour comprendre comment la caculatrice était utilisée au cours de l'apprentissage au sein de notre corpus, en particulier à l'école élémentaire, nous nous sommes appuyé sur les réponses fournies à l'item TQM-04 (annexes 216 et 217) : « les élèves de cette classe sont-ils autorisés à utiliser une calculatrice pendant les cours de mathématiques ? » Trois possibilités de réponse étaient offertes aux enseignants : « oui, sans restriction », « oui, avec des restrictions » et « non ». D'abord, nous remarquons que l'utilisation de la calculatrice sans restriction est marginale parmi les professeurs des pays étudiés ($\bar{x} = 1{,}3\ \%$). Ensuite, elle est majoritairement non autorisée dans tous les pays asiatiques de notre corpus ($\bar{x} = 78{,}9\ \%$), tandis que dans les pays occidentaux, cela est beaucoup moins fréquent ($\bar{x} = 31{,}5\ \%$). Enfin, le seul territoire occidental dans lequel ce taux est supérieur à 50 % est la Floride. Pour autant, le score obtenu par les élèves de cet État est moyen (546). À l'inverse, elle est autorisée (avec restriction) par 83,9 % des personnes interrogées en Irlande du Nord, et ce participant est bien plus performant, avec un score de 570. Au collège, les données sont différentes : si en Corée du Sud et dans le Taipei chinois, la calculatrice est encore souvent bannie (avec respectivement 61,8 % et 60,3 % de « non »), elle est largement autorisée dans les autres territoires, en particulier à Singapour et à Hong Kong SAR (avec respectivement 89,6 % et 80,2 % de « oui, sans restriction »). Pour établir une relation avec les résultats des élèves, il faudrait pouvoir définir dans quel contexte elle est utilisée et pour quelle tâche. Avec les données dont nous disposons, nous notons simplement qu'en quatrième année, l'usage de la calculatrice chez les participants les plus performants est conforme aux usages en vigueur au cours de la passation des évaluations TIMSS.

En ce qui concerne le déroulement des séances de mathématiques, nous avons cherché à vérifier une hypothèse évoquée par Andreas Schleicher (comme un fait acquis) dans un article d'un numéro hors-série du point. Ce dernier, directeur de l'éducation à l'OCDE et responsable du classement Pisa, indique pour expliquer les difficultés des élèves français aux évaluations internationales que « le système français, avec sa vision très figée de l'école, héritée d'une tradition scolaire de plusieurs siècles, ne sait pas s'adapter à ce que la société attend de ses jeunes diplômés : flexibilité, inventivité, adaptation à des enjeux qu'ils n'ont pas forcément rencontrés à l'école mais pour lesquels ils doivent faire preuve d'un peu d'imagination… […] Or, le rapport maitre-élève très passif ou l'apprentissage des leçons "par cœur"

qu'elle pratique encore beaucoup ne sont plus adaptés au monde actuel »[1]. Nous supposons qu'en comparant les réponses des enseignants français aux réponses proposées par les enseignants des pays les plus performants, nous trouverons une fréquence plus importante pour les activités correspondant aux items ATBM03A (« m'écouter expliquer un contenu mathématique nouveau ») et ATBM03B (« m'écouter expliquer comment résoudre un problème »), car elles participent à ce que Schleicher appelle « un rapport maitre-élève très passif ». Nous pensons également que la fréquence à laquelle les enseignants français demandent aux élèves de « mémoriser des règles, procédures et faits » (item ATBM03C) sera plus importante que dans les autres pays, illustrant l'idée soulevée par Schleicher que l'apprentissage par cœur est un point central de la pédagogie des enseignants français. À l'inverse, nous imaginons que ces derniers feront moins travailler leurs élèves sur des problèmes (items ATBM03D, ATBM03E et ATBM03F) que leurs homologues des pays les plus performants. Or, il se trouve que les professeurs français du premier degré utilisent moins fréquemment que les autres les tâches consistant à demander aux élèves de les écouter expliquer un contenu mathématique nouveau et de les écouter résoudre un problème (annexes 218 à 221)[2]. On peut par ailleurs distinguer trois groupes de pays ou régions distincts. Un premier groupe constitué de la France et de l'Ontario propose ces activités de façon peu fréquente (autour de 65 % en moyenne pour la somme des pourcentages des réponses « à tous les cours ou presque » et « environ à la moitié des cours ») et obtient des résultats faibles (inférieurs à 530). Un deuxième groupe constitué de l'Angleterre, du Québec, de la Floride et de l'Irlande du Nord propose cette activité de façon fréquente (autour de 80 %) et obtient des résultats moyens (entre 530 et 580). Un troisième groupe composé de la Corée du Sud, de Hong Kong, de la Chine de Taipei et de Singapour utilise cette activité de façon moyenne (autour de 70 %) et obtient les meilleurs résultats (supérieurs à 580). En huitième année, la distribution des résultats est similaire. Les résultats au questionnaire donné aux enseignants ne permettent donc pas de conclure qu'il existe en France un enseignement passif basé sur une transmission du savoir de l'enseignant à l'élève. Au contraire, il semblerait que les enseignants français utilisent plutôt moins l'explication frontale que dans les pays qui ont les meilleurs résultats. En outre, il n'apparait pas que le cours magistral nuise aux performances des élèves : son emploi est fréquent dans les pays qui réalisent les meilleurs scores aux évaluations TIMSS.

Comparativement à leurs homologues de notre corpus, les enseignants français demandent effectivement plutôt souvent à leurs élèves de mémoriser des « mémoriser des règles, procédures et faits » (avec un indice de 57,8, tandis que la moyenne du corpus est de 47,7 et l'écart-type de 9 points d'indice). Toutefois, il n'y a pas de lien entre la réussite des élèves aux évaluations TIMSS 2015 et la fréquence à laquelle les élèves sont contraints de retenir des règles, des procédures ou des faits mathématiques : avec un taux similaire, d'autres pays obtiennent un score bien supérieur à celui de la

1. Ces propos sont extraits d'une interview publiée dans un numéro hors-série du Point consacré à *L'éducation idéale*, en 2016 (p. 92).

2. Les quatre réponses possibles étaient « à tous les cours ou presque », « environ à la moitié des cours », « à quelques leçons » et « jamais ». Nous attribué la valeur 1 à la première, 0,5 à la deuxième, 0,25 à la troisième et 0 à la quatrième. Après avoir calculé l'indice mesurant l'adhésion des enseignants à chaque proposition, nous avons établi la moyenne des indices pour chaque groupe de propositions (ATBM03A et ATBM03B ; ATBM03C ; ATBM03D, ATBM03E et ATBM03F).

France. Ainsi, avec un indice de 58,9, la République d'Irlande obtient un score de 547, avec un indice de 58, la Chine de Taipei obtient un score de 597. En huitième année, le lien de corrélation linéaire entre la fréquence à laquelle les professeurs demandent à leurs élèves de mémoriser des régles, faits ou procédures et les résultats aux évaluations TIMSS est très faible (R^2 = 0,19). Surtout, la pente est positive, ce qui suggère que, quand bien même une relation pourrait être établie entre les deux, elle conduirait à conclure que le fait de solliciter fréquemment la mémoire des élèves a plutôt un effet bénéfique sur les apprentissages.

Concernant les problèmes, aucun lien n'apparait entre la réussite aux évaluations TIMSS 2015 de quatrième année et la fréquence à laquelle les enseignants déclarent soumettre des problèmes à leurs élèves, quel que soit le contexte dans lequel sont donnés ces problèmes. Ainsi, pour les problèmes travaillés individuellement ou avec les pairs sous le contrôle de l'enseignant (item ATBM03D) : la France obtient un score de 488 avec un indice estimant la fréquence de l'utilisation de ce dispositif pédagogique de 52,5, tandis que Singapour obtient un score beaucoup plus élevé (618) avec un indice proche (56,4). De même, pour les problèmes réalisés individuellement ou avec des pairs pendant que l'enseignant est occupé à une autre tâche (item ATBM03F), l'indice estimant la fréquence, en France ou à Singapour, est semblable (31,9 pour le premier pays cité et 30,4 pour le second). Enfin, les problèmes travaillés en classe entière avec un guidage direct de la part de l'enseignant (item ATBM03E) sont une activité moins fréquente en France que dans les autres pays, mais leur fréquence d'utilisation n'est pas très éloignée de celle de Hong Kong (avec des indices respectifs de 37,7 et 43,4), pays qui obtient d'excellents résultats.

La dernière question dont nous avons analysé les réponses correspond à l'item G14 des enquêtes TIMSS (annexes 222 à 236). On y soumettait plusieurs propositions aux enseignants, pour savoir à quelle fréquence ils prenaient en compte certains besoins des élèves au sein de leur classe. L'une d'elles avait trait aux instructions officielles (la quatrième) :

- relier la leçon à la vie quotidienne des élèves ;
- demander aux élèves d'expliquer leurs réponses ;
- apporter du matériel intéressant en classe ;
- demander aux élèves de travailler sur des exercices difficiles qui les obligent à aller au-delà du programme ;
- encourager les discussions entre les élèves au sein de la classe ;
- relier un nouveau contenu aux connaissances préalables des élèves ;
- demander aux élèves de décider de leurs propres procédures de résolution de problèmes ;
- encourager les élèves à exprimer leurs idées en classe.

Nous avons mis en relation la capacité des élèves à réaliser un cadrage de la tâche et leurs performances (Carette *et al.*, *op. cit.*), faisant l'hypothèse que la justification de leurs réponses par les élèves participait à la compréhension de l'opportunité d'utiliser telle ou telle technique. On aurait donc pu penser que cette tâche de justification serait plus fréquente dans les classes des pays les plus

performants. Il n'en est rien : elle est même moins fréquente[1] que dans les autres pays, comme le montre le graphique ci-dessous :

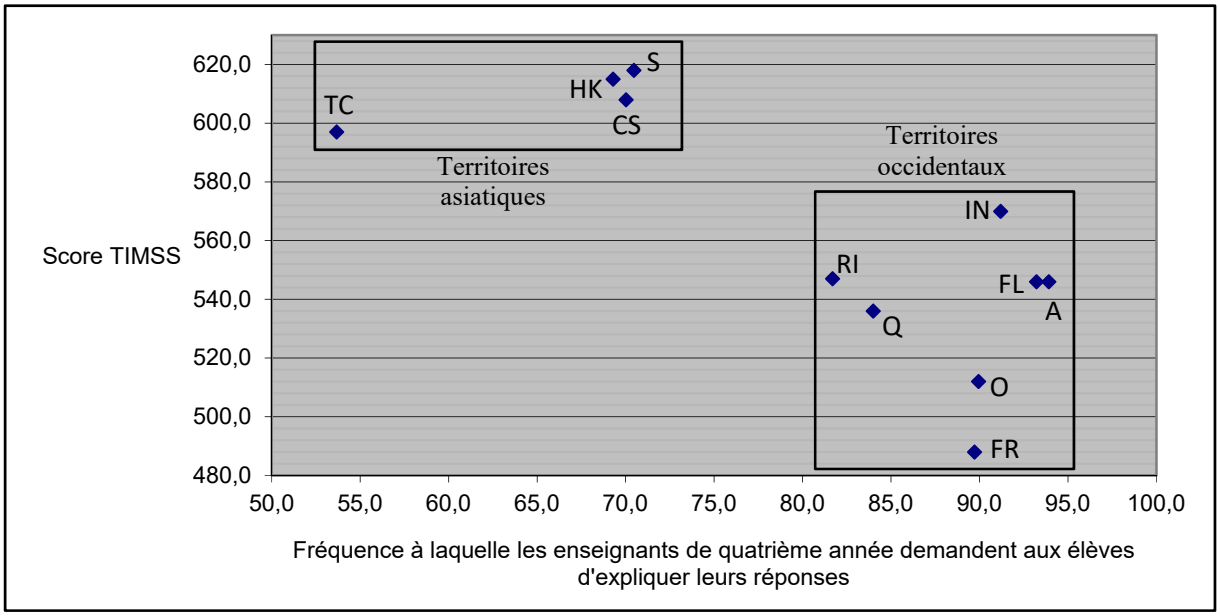


Figure 62. Corrélation entre la fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année demandent aux élèves d'expliquer leurs réponses et le score obtenu par les élèves aux évaluations TIMSS 2015

Toutefois, dans les territoires asiatiques, les demandes de justification ne sont pas marginales, elles sont simplement moins systématiques que dans les pays occidentaux. Là encore, des études complémentaires seraient nécessaires pour comprendre à quel moment et sur quels critères les enseignants demandent à leurs élèves d'expliquer le choix ou la mise en œuvre de leur technique.

En ce qui concerne la mesure de la fréquence à laquelle les professeurs demandent aux élèves de décider de leurs propres procédures de résolution de problèmes, les résultats sont semblables. Lorsqu'on calcule l'indice moyen de l'ensemble des pays asiatiques de notre corpus, on obtient, en quatrième année, $\bar{x} = 52{,}7$ alors que, quand on effectue cette moyenne pour l'ensemble des territoires occidentaux, on trouve $\bar{x} = 64{,}4$. De même, au collège, la moyenne pour les participants asiatiques ($\bar{x} = 46{,}4$) est toujours inférieure à celle des participants occidentaux ($\bar{x} = 54{,}2$). Néanmoins, dans nombre de territoires européens (Angleterre, République d'Irlande) et nord-américains (Québec), les choix opérés sont similaires à ceux effectués par les enseignants asiatiques. Seuls l'Ontario (M = 68,1) et dans une moindre proportion la Floride (M = 58,9), permettent plus fréquemment à leurs élèves de trouver par eux-mêmes leurs propres méthodes de résolution de problèmes par rapport aux territoires asiatiques. Pourtant, qu'entend-on par « décider de leurs propres procédures de résolution de problèmes », s'agit-il d'élaborer une technique sans apprentissage préalable ou de choisir parmi plusieurs techniques apprises au préalable ? Dans le deuxième cas, sur quels critères les élèves se fondent-ils pour choisir une technique ? Pour cet item comme pour d'autres, il existe donc des difficultés importantes d'interprétation des réponses des enseignants.

1. L'estimation de la fréquence à laquelle les professeurs prennent en compte ces besoins a été calculée de la même façon que pour la question précédente sur la mise en place de dispositifs pédagogiques.

À propos de la relation entre la fréquence à laquelle les enseignants relient le savoir nouveau au savoir ancien, on retrouve une répartition des réponses des enseignants semblable : les pays asiatiques ont tous un indice pour cette proposition qui ne dépasse pas 73, alors que pour les autres pays du corpus, celui-ci ne descend jamais en dessous de 83, comme le montre le graphique ci-dessous :

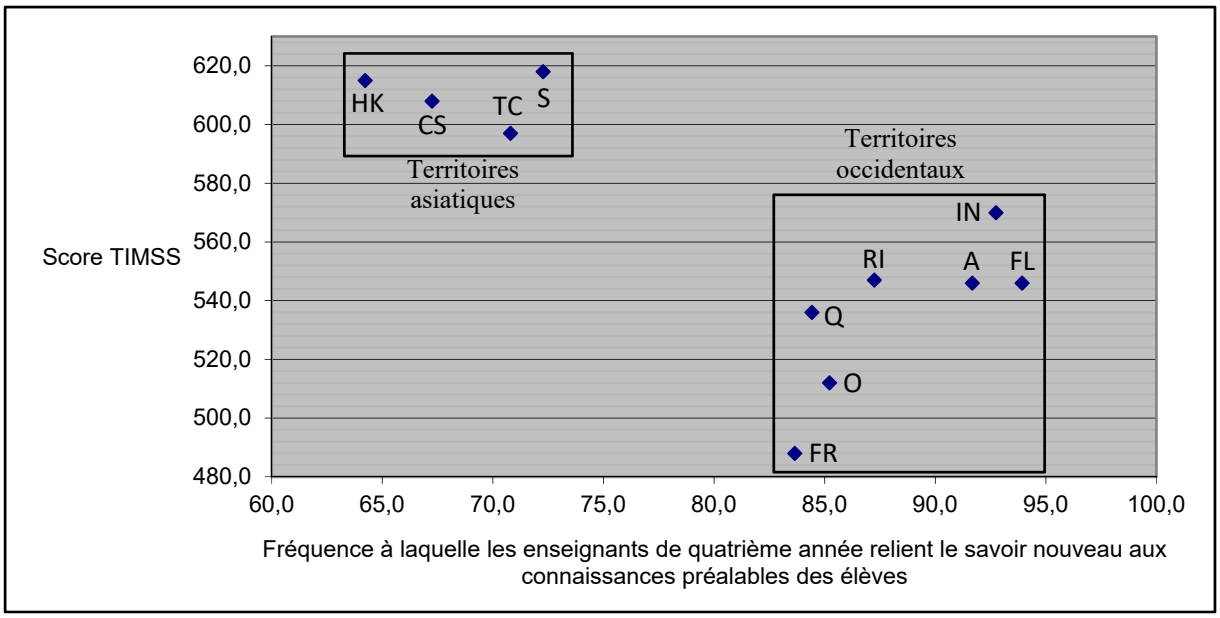


Figure 63. Corrélation entre la fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année relient le savoir nouveau aux connaissances préalables des élèves et le score obtenu par les élèves aux évaluations TIMSS 2015

Il semble donc que, plus souvent qu'ailleurs, les enseignants asiatiques ne fassent pas le lien entre ce que les élèves ont appris précédemment, et les notions que ceux-ci doivent acquérir. C'est particulièrement intéressant pour comprendre comment est mené l'enseignement du concept de nombre rationnel, dont les propriétés sont différentes de celles de nombres entiers, Toutefois, les questionnaires ne sont pas suffisamment précis pour savoir à quel moment et comment ce lien est tissé.

En huitième année, il existe également des différences inter-régions, notamment à propos de la proposition « encourager les élèves à exprimer leurs idées en classe ». Comme nous pouvons le voir sur le graphique ci-contre, cette pratique est moins développée dans les établissements asiatiques de l'enseignement secondaire, par rapport à ceux des pays occidentaux. En quatrième année, le constat est quelque peu différent, puisque si Hong Kong SAR et Singapour permettent moins souvent que les autres à leurs élèves d'exprimer leurs idées (1,9 écart-type en dessous de la moyenne du corpus), en Corée du Sud et dans le Taipei chinois, les réponses sont similaires à celles relevées dans les pays occidentaux. Il est possible que le jeune âge des élèves incite les professeurs de ces deux derniers territoires à laisser les élèves s'exprimer, mais que par la suite, l'augmentation du rythme de travail et des attentes des professeurs laissent moins de place à l'expression des élèves. À Hong Kong SAR et à Singapour, les professeurs n'auraient pas cette précaution.

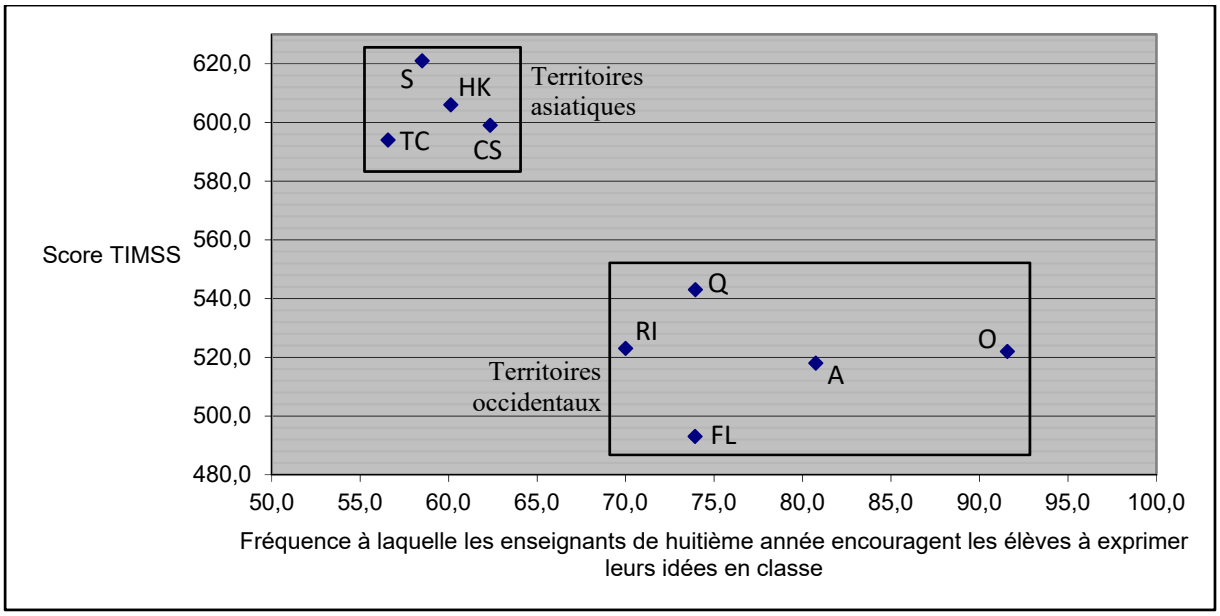


Figure 64. Corrélation entre la fréquence à laquelle les enseignants de huitième année encouragent les élèves à exprimer leurs idées en classe et le score obtenu par les élèves aux évaluations TIMSS 2015

Les professeurs asiatiques déclarent donc moins souvent à leurs élèves de justifier leurs réponses, tiennent moins compte de ce qu'ils savent pour construire de nouveaux acquis, et les laissent moins souvent exprimer leurs idées, ce qui ne les empêche pas d'être très efficaces. Plus généralement, le rôle de l'élève est moins central que dans nos sociétés occidentales : cette spécificité des pays asiatiques de notre corpus apparait aussi lorsqu'on demande aux enseignants de dire à quelle fréquence ils permettent aux élèves de discuter entre eux au sein de la classe. Cette autorisation est moins fréquente dans les territoires asiatiques que dans le reste du corpus, même si, à l'école élémentaire, l'écart est moins grand que pour les propositions que nous avons présentées précédemment. Pour les autres propositions, les tendances sont peu marquées. Nous nous contenterons donc de signaler que les enseignants français et, surtout, ceux de Hong Kong relient peu les apprentissages à la vie quotidienne des élèves par rapport aux professeurs des autres pays du corpus, qu'en France, les professeurs apportent peu de matériel en classe, et enfin, qu'en Angleterre, ils demandent fréquemment aux élèves de travailler sur des exercices difficiles qui les obligent à aller au-delà du programme.

B. Selon les élèves

Nous avons vu que l'attrait des élèves des pays asiatiques de notre corpus pour le cours de mathématiques semble plus faible qu'ailleurs. Qu'est-ce qui, parmi les habitudes pédogogiques des enseignants, provoque ce déficit d'intérêt ? L'un des items du questionnaire destiné aux élèves était consacré à cette thématique[1] (annexes 237 à 246). Les élèves étaient invités à se prononcer sur leur adhésion relative à dix affirmations :

1. En quatrième année, cet item porte l'identifiant SQMS-02, ce qui signifie qu'il s'agit de la deuxième question de la partie du questionnaire consacrée aux mathématiques. En huitième année, la distinction entre les

- je sais ce que mon professeur attend de moi ;
- mon professeur est facile à comprendre ;
- je suis intéressé par ce que mon professeur dit ;
- mon professeur me donne des choses intéressantes à faire ;
- mon professeur répond de façon claire à mes questions ;
- mon professeur explique bien les mathématiques ;
- mon professeur me permet de mesurer ce que j'ai appris ;
- mon professeur met en place des choses variées pour nous aider à apprendre ;
- mon professeur me dit comment faire mieux quand je fais une erreur ;
- mon professeur écoute ce que j'ai à dire.

Si l'on fait la moyenne des indices pour l'ensemble des propositions[1], nous constatons qu'à l'école élémentaire, l'adhésion des élèves à ces affirmations est faible en Corée du Sud (avec un indice de 68,6 situé 2,4 écarts-types en dessous de la moyenne du corpus), à Hong Kong (avec un indice de 77,1 situé 0,9 écart-type en dessous de la moyenne du corpus), dans le Taipei chinois (avec un indice de 77,3 soit 0,9 écart-type en dessous de la moyenne) et à Singapour (avec un indice de 79,7 situé 0,5 écart-type en dessous de la moyenne). Dans les pays occidentaux, cet indice n'est jamais inférieur à 84. Cela confirme ce que nous avons établi dans les paragraphes précédents : le cours de mathématiques est moins bien perçu dans les pays asiatiques que dans les territoires européens ou nord-américains. Au collège, la perception des élèves est dans l'ensemble moins positive (avec un indice moyen de 68 pour l'ensemble des propositions, contre 82,4 en quatrième année). L'indice des pays occidentaux chutant davantage que celui des pays asiatiques, il en résulte un resserrement des écarts.

Quand on se montre attentif à chacune des propositions prises individuellement, on constate que, de façon plus ou moins marquée, la répartition des réponses est similaire. Toutefois, les réponses apportées par les écoliers sud-coréens à propos de la proposition « je sais ce que mon professeur attend de moi » sont particulièrement éclairantes : plus de la moitié des élèves ne sont pas d'accord avec cette idée, alors que ce pourcentage ne dépasse pas 12 % dans les autres pays. Seuls 12,3 % des collégiens sud-coréens sont tout à fait d'accord pour dire que leur professeur leur indique comment faire mieux lorsqu'ils commettent une erreur, alors qu'ils sont en moyenne 45,3 % chez les autres participants. La spécificité sud-coréenne apparait également quand on évoque le fait de savoir si les élèves sont intéressés par ce que dit leur professeur. En particulier, dans le second degré, 52,5 % des collégiens sud-coréens ne sont pas d'accord avec cette affirmation, alors que cette opinion est minoritaire partout ailleurs. Plus largement, pour la proposition « mon professeur me donne des choses intéressantes à faire », la moyenne des indices estimant leur adhésion à la proposition est de 68,7 pour les écoliers asiatiques tandis qu'elle

---

questions générales et celles relatives à la matière qui nous occupe n'existe pas : l'identifiant de cet item est donc SQG-18.

1. Les élèves avaient le choix entre quatre possibilités de réponse pour chaque proposition : « tout à fait d'accord » (à laquelle nous avons attribué la valeur 1), « plutôt d'accord » (à laquelle nous avons attribué la valeur 2/3), « plutôt pas d'accord » (à laquelle nous avons attribué la valeur 1/3), « pas du tout d'accord » (à laquelle nous avons attribué la valeur 0).

est de 82,6 pour les écoliers européens et nord-américains. Cette observation rejoint celle que nous pouvons faire à propos de la proposition « mon professeur met en place des choses variées pour nous aider à apprendre » : dans l'enseignement secondaire, l'adhésion à cette affirmation est moindre dans les pays d'Asie, et en particulier en Corée du Sud. Nous constatons que les écarts sont beaucoup plus réduits lorsqu'on évoque les propositions « mon professeur est facile à comprendre », « mon professeur répond de façon claire à mes questions » et « mon professeur explique bien les mathématiques » : en moyenne, l'adhésion est forte partout. La qualité de l'exposition des savoirs n'est donc pas remise en cause : les différences tiennent davantage à la perception des tâches par les élèves.

Conclusion de la sous-section

L'étude des conditions d'enseignement au sein du corpus (qualité des locaux, sentiment de sécurité et discipline des élèves, nombre d'élèves dans les classes, poids des contraintes administratives, implication des parents et des élèves) n'a pas permis de définir des critères de réussite des élèves aux évaluations TIMSS. Au contraire, certaines caractéristiques que l'on aurait pu penser défavorables aux apprentissages (comme un nombre élevé d'élèves par classe) sont partagés par les participants les plus performants. En revanche, nous avons pu mettre en évidence des spécificités locales. Par exemple, dans chaque territoire, les difficultés matérielles sont différentes (le manque de matériel informatique en France, la propreté des locaux au Québec, l'insuffisance des espaces de travail dans le Taipei chinois, etc.). Cette étude nous a également permis de mettre en perspective des observations que nous avions faites dans les paragraphes précédents. Ainsi, nous avons mis en relation les déclarations des professeurs sud-coréens indiquant que les parents ont une grande exigence vis-à-vis de leurs enfants, le fait que les parents pensent les enseignants moins capables qu'ailleurs de faire progresser leurs enfants et le recours important à des cours complémentaires. À l'inverse, en Irlande du Nord, on peut faire le lien entre les attentes élevées des parents, la pression ressentie par les enseignants, ainsi que la discipline stricte et le fort investissement des élèves. En France et en Floride, une partie importante du corps enseignant estime que les élèves arrivent peu préparés à l'école : d'une part, parce qu'ils manquent de sommeil ou souffrent d'une alimentation déséquilibrée, et d'autre part, parce qu'ils manquent des connaissances nécessaires à la construction des savoirs nouveaux qu'ils sont censés acquérir. Par ailleurs, les professeurs français estiment plus que les autres qu'ils ont un programme trop large à couvrir. Nous observerons donc avec une attention particulière la relation entre le contenu du curriculum et les performances des élèves de ce pays.

Dans ce contexte, les enseignants proposent des activités de même nature (donner des problèmes à résoudre, mémoriser des faits, des règles et des procédures, soumettre les élèves à des tests écrits, etc.) et à une fréquence semblable, ce qui semble infirmer l'hypothèse de

Schleicher[1] selon laquelle « le rapport maitre-élève très passif ou l'apprentissage des leçons "par cœur" [que la France] pratique encore beaucoup » constitue une cause de leur faible taux de réussite aux évaluations internationales. Nos observations évoquent plutôt des connaissances peu reliées à la vie quotidienne des élèves et s'appuyant moins souvent qu'ailleurs sur du matériel, corroborant l'analyse que nous avons faite du curriculum français. Par ailleurs, il existe des divergences inter-régions fortes relativement à la prise en compte des besoins des élèves (besoin de s'exprimer, de mesurer ce qu'ils apprennent, d'échanger avec leurs pairs, de savoir ce qu'on attend d'eux…). L'attention portée aux élèves semblent moins forte dans les territoires asiatiques que dans les territoires occidentaux, ce qui pourrait expliquer le moindre plaisir qui y est pris à faire des mathématiques dans un cadre scolaire. La moindre présence de la calculatrice dans les classes de l'école primaire est également un trait saillant de ces systèmes éducatifs : il est possible que cette interdiction conduise les élèves à développer des facultés de calcul bénéfiques pour nombre de tâches proposées dans le domaine des fractions, renforçant ainsi des capacités déjà supérieures à l'entrée dans la scolarité obligatoire. Toutefois, des analyses complémentaires seraient nécessaires pour connaitre, là où elle est autorisée, les utilisations qui en sont faites. De même, d'autres résultats nécessiteraient une analyse plus fine que la méthode par questionnaire ne permet pas. Par exemple, les professeurs des écoles asiatiques demandent moins souvent à leurs élèves de justifier leurs réponses. Le fait que nous ne connaissions pas les critères qui fondent cette demande, ainsi que les conditions de sa mise en œuvre, interdisent de formuler des hypothèses sur l'incidence que cela peut avoir sur la maitrise des concepts mathématiques par les élèves.

Conclusion de la section consacrée aux limites à la portée de notre étude liées à l'enseignement

L'objectif de cette section était de mieux cerner les limites à l'observation d'une éventuelle corrélation entre les programmes d'enseignement et les performances des élèves, limites liées aux caractéristiques et conditions de travail des professeurs. L'idée sous-jacente à cette étude était que des enseignants mieux formés et exerçant dans de meilleures conditions seraient susceptibles de mettre en œuvre des praxéologies plus riches, notamment avec l'enseignement de techniques plus variées pour un même type de tâches. Cette capacité des

1. Voir, page 369, la note 1.

professeurs semble particulièrement importante pour expliquer les résultats des élèves aux évaluations TIMSS, en raison du caractère incomplet des praxéologies fournies par les législateurs. Sur ce point, la moindre polyvalence des professeurs des écoles de Hong Kong SAR, de Singapour et du Taipei chinois ainsi que leurs études plus fréquentes dans le domaine mathématique constituent indéniablement un atout. Dans les territoires asiatiques, les élèves évoquent toutefois des activités d'un intérêt et d'une variété moins élevés que chez les participants occidentaux, ce qui ne les empêche pas d'obtenir les meilleurs scores aux tests TIMSS. Pourtant, les types de tâches que nous avons relevées dans les instructions officielles y sont plutôt plus diverses qu'ailleurs, ce qui nous conduit à émettre quelques réserves sur les résultats que nous avons mis en lumière. D'abord, la question des dispositifs pédagogiques n'apparait pas comme ayant un impact direct sur les résultats des élèves aux évaluations TIMSS, ce qui invite à s'intéresser plus spécifiquement à des questions didactiques. Ensuite, les réponses tirées des questionaires sont suffisantes pour donner quelques pistes d'interprétation. Néanmoins, elles suscitent également de nombreuses questions qui nécessiteraient la réalisation de nouvelles études, par exemple pour savoir comment les professeurs envisagent la pluralité de procédures dans le cadre de la résolution de problèmes. Enfin, nous ne négligerons pas les éventuels biais culturels pouvant expliquer des différences inter-régions ou inter-pays : la plupart des questions utilisées portent sur le ressenti des participants, dont l'expression est éminemment subjective.

Conclusion du chapitre consacré aux limites à la portée de notre étude liées aux aspects qualitatifs de la transposition interne

Plus que les conditions des performances des élèves, nous avons mis en lumière des traits saillants des systèmes éducatifs que nous comparons. La méthode utilisée a été déterminée par la construction des enquêtes TIMSS : en raison des différentes possibilités de réponses, nous avons eu besoin, pour réaliser des comparaisons entre onze participants, de créer un indicateur estimant l'adhésion des professeurs à chacune des propositions. Cette estimation fondée sur une moyenne peut évidemment masquer des réalités fort différentes (est-ce deux catégories de réponses extrêmes qui s'opposent, ou est-ce qu'une majorité des sondés donnent une réponse modérée ?). Néanmoins, nous avons le plus souvent obtenu des courbes gaussiennes et, quand la distribution des données présentait des particularités intéressantes, nous les avons signalées. Cela nous a permis de soulever des problématiques que nous allons évoquer de façon plus précise dans les chapitres suivants. Par exemple, nous avons vu que le

rapport aux loisirs semblait différent dans les pays occidentaux et asiatiques : cela se traduit-il par des écarts quant à la quantité de travail effectuée par les élèves de chacune de ces régions ? L'indication des professeurs français selon laquelle le curriculum est trop dense affaiblit-elle le lien entre son contenu et la maitrise du concept de fraction par les élèves ? En France et en Floride, les acquis des élèves dans les classes précédentes semblent poser difficulté pour l'enseignement, respectivement en quatrième et huitième année de scolarité obligatoire. À l'inverse, les élèves asiatiques manifestent dans le domaine numérique des acquis précoces. Cela a-t-il un rapport avec la durée des enseignements dans ces pays ? Autrement dit, la qualité du travail de transposition ne semble pas suffisante pour rendre compte des acquis des élèves : ses aspects quantitatifs contribuent sans doute également à faire varier les scores obtenus.

CHAPITRE II. LES ASPECTS QUANTITATIFS DU TRAVAIL DE TRANSPOSITION

Le travail de transposition des enseignants tel que nous l'avons défini dans la première partie consiste à élaborer une organisation mathématique à partir, le plus souvent, de la seule indication du type de tâches à étudier. Il implique notamment de transposer une ou plusieurs techniques que les élèves devront maitriser, et de définir des variables de la tâche en conséquence. La quantité de techniques que les élèves vont acquérir, ainsi que la diversité des variables mises en jeu forment ce que nous avons appelé les aspects « quantitatifs » du travail de transposition. Nous les avons appréhendés partiellement à travers l'étude des programmes d'enseignement. Pour réaliser cette analyse de façon plus approfondie et relativement au concept de fraction, il faudrait effectuer des observations dans les classes, ce que ne permet pas la méthode retenue pour notre étude. Au niveau macro-didactique, nous allons toutefois étudier deux facteurs qui concernent précisément ces aspects quantitatifs. Tout d'abord, nous estimerons la durée des enseignements et des apprentissages en mathématiques (section I). Nous faisons l'hypothèse qu'en travaillant plus longtemps sur un même type de tâches, la probabilité de rencontrer des tâches avec des variables nouvelles augmente, tout comme la possibilité de développer des techniques plus diverses. Ensuite, nous indiquerons, parmi la pluralité des types de tâches ayant trait aux fractions qui peuvent faire l'objet d'un enseignement, celles qui ont été incluses dans les évaluations TIMSS (section II). Cela nous permettra de quantifier la part occupée par le concept dans ces tests, et de circonscrire la portée de la recherche d'une corrélation entre leur contenu et celui des curriculums.

Section I. La durée des enseignements et des apprentissages en mathématiques

La durée des enseignements de mathématiques, prévue par un pays et pour une année scolaire, peut être assez facilement identifiée, car le nombre d'heures de mathématiques que les élèves doivent suivre est généralement fixé dans les programmes scolaires. Toutefois, pour déterminer la durée des apprentissages, il nous faut tenir compte des heures passées par les élèves à travailler en dehors du temps scolaire. Celles-ci sont beaucoup plus difficiles à évaluer à l'échelle d'un pays. Nous nous sommes appuyé sur les questionnaires soumis aux élèves pour en réaliser une estimation. Cela nous permettra de comparer, au sein de notre corpus, les durées moyennes passées par les élèves à étudier les mathématiques. Ce calcul sera l'objet de la sous-section I. Cependant, la durée du travail fournie dans le domaine des mathématiques ne correspond pas à la durée du travail fournie dans le domaine des fractions. Or, les programmes

d'enseignement ne définissent pas le nombre d'heures que les élèves doivent passer sur chaque thème. Nous avons donc choisi de réaliser une estimation de la part que ce thème représente dans l'ensemble des éléments des programmes. Celle-ci sera l'objet de la sous-section II. Nous concédons que le temps passé à travailler sur tel ou tel élément des instructions officielles peut varier considérablement en fonction de l'importance que leur attribuent les enseignants, Toutefois, le fait que les fractions soient noyées dans une grande diversité de thèmes à traiter pourrait expliquer de faibles résultats dans ce domaine. Le fait qu'elles constituent un thème mis en valeur parmi un nombre restreint de chapitres serait, à l'inverse, susceptible d'expliquer des performances élevées.

Sous-section I. La durée des apprentissages en mathématiques

Les institutions prévoient une certaine durée des enseignements de mathématiques pour chaque année de la scolarité (celle-ci n'est pas déterminée *a priori* par les professeurs), tandis que la durée du travail attendu en dehors du temps scolaire est définie en partie par les enseignants. En outre, nous avons vu que les élèves suivaient parfois des cours complémentaires ou qu'ils recevaient une aide de la part de leurs parents, ce qui induit potentiellement une somme de travail échappant au contrôle de l'enseignant. Grâce aux enquêtes TIMSS effectuées auprès des élèves, nous sommes néanmoins en mesure de réaliser une estimation du temps passé à étudier les mathématiques en dehors du temps scolaire, incluant le travail personnel des élèves complémentaire à celui exigé par les enseignants. Nous allons donc étudier séparément la quantité de travail effectuée dans les établissements scolaires (§ 1), et celle réalisée en dehors du temps scolaire (§ 2).

§ 1. Dans les établissements scolaires

Le temps passé à étudier les mathématiques au sein des établissements scolaires peut être mesuré de deux façons au moins. Il peut être défini à partir des programmes d'enseignement (A) ou en tenant compte des déclarations des acteurs, c'est-à-dire des directeurs d'école, des chefs d'établissement et des professeurs (B). Nous allons donc étudier successivement ces deux points de vue, à la recherche, éventuellement, d'une concordance.

A. Selon les programmes

Les programmes d'enseignement définissent parfois une durée officielle des apprentissages mathématiques au sein de l'établissement, mais ce n'est pas systématique. Ainsi, en quatrième année, les pays que nous avons sélectionnés sont très partagés. En Angleterre, en Irlande du Nord, en Ontario et en Floride, les instructions officielles ne précisent pas quelle doit être la durée annuelle ou

hebdomadaire des apprentissages en mathématiques. À l'inverse, une durée (ou un encadrement) est imposée en Corée du Sud (181 h 20 min par an, soit 14 % du temps d'enseignement), en France (où les mathématiques occupent 5 heures sur les 24 que compte une semaine d'école, soit 21 % du temps d'enseignement), à Hong Kong SAR (où les mathématiques occupent 12 à 15 % du temps d'enseignement), au Québec (où les mathématiques occupent 5 heures sur les 25 que compte une semaine d'école, soit 20 % du temps d'enseignement), en République d'Irlande (où les mathématiques occupent 4 h 10 min sur les 22 h 30 min que compte une semaine d'école), à Singapour (où les mathématiques représentent 5 heures 30 min sur les 27 h 30 min que compte une semaine d'école, soit 20 % du temps d'enseignement) et dans le Taipei chinois (où les mathématiques occupent 10 à 15 % du temps d'enseignement). Dans les pays occidentaux, les mathématiques représentent environ un cinquième des apprentissages proposés aux élèves. Dans trois des pays asiatiques de notre corpus (Corée du Sud, Hong Kong SAR, Taipei chinois), cette part est plus faible (entre 10 et 15 % du temps d'enseignement). Seul Singapour présente des caractéristiques proches de celles des pays occidentaux, avec 20 % du temps scolaire dévolus aux mathématiques. Cependant, les autorités de ce pays précisent que les écoles pourront faire varier ce nombre en fonction des besoins de leurs élèves, ce qui suggère une grande souplesse dans l'application des directives nationales[1].

En huitième année, nous remarquons que les territoires occidentaux de notre corpus (Angleterre, Floride, Ontario et République d'Irlande) ne prévoient pas de durée règlementaire des apprentissages en mathématiques, à l'exception du Québec (où les cours de mathématiques occupent 150 heures dans l'année, soit 17 % du temps d'enseignement). En revanche, tous les territoires asiatiques que nous avons sélectionnés imposent une durée précise des apprentissages pour la matière qui nous occupe. Ainsi, en Corée du Sud, les élèves doivent suivre des cours de mathématiques pendant 280 heures 30 minutes au cours de l'année, représentant 11 % du temps d'enseignement. À Hong Kong SAR, les mathématiques occupent entre 12 et 15 % du temps d'enseignement. À Singapour, la durée des enseignements en mathématiques dépend de la filière dans laquelle est inscrit l'élève. Dans la filière « *Express* » menant à l'examen de fin d'études secondaires en quatre ans, les élèves ont trois heures de mathématiques par semaine, représentant 12,5 % du temps d'apprentissage. Dans la filière « *Normal (Academic)* », susceptible de mener les élèves au même examen en cinq ans, ceux-ci ont 3 h 30 min de mathématiques, représentant 15 % du temps d'apprentissage. Dans la filière « *Normal (Technical)* », menant plus sûrement à un simple certificat général d'éducation, les élèves ont 4 h 30 min de mathématiques, représentant 17,5 % du temps d'enseignement. Enfin, dans le Taipei chinois, les mathématiques occupent entre 10 et 15 % du temps d'enseignement. Nous observons donc une baisse de la part occupée par les mathématiques dans l'enseignement secondaire, puisque les pourcentages varient de 10 à 17,5 % (alors que dans l'enseignement primaire, ce taux montait jusqu'à 21 %. Nous notons également une plus grande liberté, puisque la République d'Irlande, qui prévoit un horaire hebdomadaire précis en

1. Cette mention apparait à l'item MA405TB du questionnaire TIMSS remli par les autorités (*Curriculum questionnaire*). Après leur avoir demandé si les programmes d'enseignement ou tout autre document officiel prévoyait un temps total d'instruction dévolu aux mathématiques en quatrième année, chaque pays pouvait inscrire librement ses commentaires.

quatrième année, n'indique plus qu'un nombre minimal annuel d'heures de mathématiques (80 heures) en huitième année. Les autorités précisent que la plupart des collèges dépassent cette quantité[1], ce qui suppose une grande variété des pratiques et une impossibilité de caractériser d'une façon générale le temps passé au collège en cours de mathématiques dans ce pays.

Les données dont venons de faire mention ne facilitent pas les comparaisons. D'abord, la durée légale des cours de mathématiques est parfois hebdomadaire, parfois annuelle. Elle est tantôt donnée sous la forme d'un simple pourcentage, tantôt sous la forme d'un nombre d'heures ou d'unités d'enseignement (en nombre de cours de 45 minutes par exemple). Certaines informations font défaut (en particulier, le nombre de semaines d'enseignement, pour indiquer un nombre d'heures de mathématiques hebdomadaire en nombre d'heures de mathématiques annuel, et vice versa). Parfois, nous disposons du pourcentage représenté par les mathématiques dans le temps total d'instruction, sans la mention du nombre d'heures d'enseignement toutes matières confondues, ce qui ne nous aide pas à mesurer la durée du travail fourni par les élèves. Ensuite, il est des pratiques locales qui peuvent influer sur le temps d'apprentissage. Nous pensons aux pauses quotidiennes, communément appelées « récréations ». En effet, elles ne sont pas toujours incluses dans le calcul des durées d'enseignement. Nous pensons au cas de la France, où les professeurs sont censés dispenser vingt-quatre heures de cours par semaine (dont cinq heures de mathématiques). Or, même si cette quantité peut varier en fonctions de l'organisation choisie par l'école, les pauses représentent environ deux heures hebdomadaires, qui seront déduites des vingt-quatre heures que nous venons d'évoquer. Leur déduction du temps d'enseignement effectif se fera sur une ou plusieurs matières, sans que nous puissions savoir lesquelles. Or, une baisse de la durée d'enseignement ne serait-ce que d'une demi-heure par semaine ne doit pas être négligée, car cela aboutit, par exemple, à diminuer le nombre annuel d'heures de mathématiques de 16,5 heures (pour la France). Enfin, nous avons vu que certains participants laissaient toute latitude aux écoles ou aux autorités locales pour définir le temps d'enseignement dévolu à chaque matière. D'autres prévoient une plage horaire plus ou moins précise, soit pour l'ensemble de la population scolaire, soit en fonction de la filière empruntée par les élèves. D'où notre difficulté à comparer le temps passé en cours de mathématiques dans chacun des pays de notre corpus. Pour toutes ces raisons, nous avons choisi de nous attarder davantage sur la durée des enseignements telle qu'elle est évaluée par les acteurs eux-mêmes, en l'occurrence les enseignants, plutôt que seulement sur la durée imposée par les programmes d'enseignement.

B. Selon les acteurs

Dans le questionnaire qui leur était destiné, les enseignants étaient invités à indiquer le temps hebdomadaire passé à enseigner les mathématiques pour la classe faisant l'objet du test[2]. Comme nous disposons grâce au questionnaire rempli par les chefs d'établissement du nombre de semaines au cours

1. Nous faisons référence aux commentaires indiqués à l'item MA805TB, qui correspond pour l'enseignement secondaire à l'item MA405TB que nous venons d'évoquer à propos de l'enseignement élémentaire.

2. En quatrième année, il s'agit de l'item TQM-01. En huitième année, il s'agit de l'item TQM-16.

desquelles les élèves sont en cours, nous sommes en mesure de calculer ensuite la durée annuelle effective d'exposition aux savoirs mathématiques au sein de l'établissement, telle qu'elle est envisagée par les enseignants. En ce qui concerne la durée hebdomadaire des cours de mathématiques dispensés aux écoliers, il existe de grandes disparités parmi les participants qui forment notre corpus, comme il est possible de le constater dans le tableau ci-dessous.

	Temps de travail hebdomadaire moyen déclaré (en minutes)	Traduction en heures, en minutes et secondes
Angleterre	299,3	4 h 59 min 18 s
Corée du Sud	154,8	2 h 34 min 48 s
Floride	354,6	5 h 54 min 36 s
France	305,9	5 h 5 min 54 s
Hong Kong SAR	249,7	4 h 9 min 42 s
Irlande du Nord	332,6	5 h 32 min 36 s
Ontario	306,9	5 h 6 min 54 s
Québec	363,7	6 h 3 min 42 s
République d'Irlande	269,7	4 h 29 min 42 s
Singapour	327,2	5 h 27 min 12 s
Taipei chinois	171,4	2 h 51 min 24 s
Moyenne (corpus)	**285,1**	**4 h 45 min 6 s**

Figure 65. Durée hebdomadaire des enseignements de mathématiques au sein de l'établissement en quatrième année, selon les enseignants (TIMSS 2015)

Les écarts sont importants, puisque les élèves québecois passeraient chaque semaine, dans leur école, 2,3 fois plus de temps à étudier les mathématiques que leurs homologues sud-coréens. En outre, des disparités régionales apparaissent, dans la mesure où tous les participants nord-américains de notre corpus présentent des durées d'enseignement hebdomadaires très élevées (supérieures à cinq heures). À l'inverse, le temps passé chaque semaine en cours de mathématiques est plus faible dans les territoires asiatiques, à l'exception de Singapour. En France, cette durée est supérieure à la moyenne du corpus, ce qui contribue à expliquer le sens descendant de la pente lorsqu'on cherche à établir un lien de corrélation linéaire entre le temps passé en cours de mathématiques chaque semaine et le score des élèves aux évaluations TIMSS 2015 ($a = -0{,}3$). Quoi qu'il en soit, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est trop faible pour envisager une relation de linéarité entre ces deux séries de données ($R^2 = 0{,}25$). Celui-ci induit davantage une grande disparité des situations. Comme nous l'avons évoqué, le temps d'enseignement hebdomadaire ne préjuge en effet pas de la durée annuelle d'exposition aux savoirs mathématiques. Or, c'est cette dernière qui nous semble importante : qu'elle soit répartie sur un nombre restreint ou sur un grand nombre de semaines nous parait, au moins à ce stade de la recherche, secondaire. En huitième année, les écarts sont moins importants, ce qu'on l'on peut percevoir à la lecture du tableau ci-contre.

	Temps de travail hebdomadaire moyen déclaré (en minutes)	Traduction en heures, en minutes et secondes
Angleterre	195,4	3 h 15 min 24 s
Corée du Sud	177,1	2 h 57 min 6 s
Floride	240,8	4 h 48 s
Hong Kong SAR	232,6	3 h 52 min 36 s
Ontario	282,9	4 h 42 min 54 s
Québec	247,1	4 h 7 min 6 s
République d'Irlande	192,7	3 h 12 min 42 s
Singapour	208,8	3 h 28 min 48 s
Taipei chinois	236,6	3 h 56 min 36 s
Moyenne (corpus)	**223,8**	**3 h 43 min 48 s**

Figure 66. Durée hebdomadaire des enseignements de mathématiques au sein de l'établissement en huitième année, selon les enseignants (TIMSS 2015)

Ainsi, le rapport entre la durée hebdomadaire des cours de mathématiques dans le pays où elle est la plus courte (la Corée du Sud) et dans celui où elle est la plus longue (l'Ontario) est de 1 pour 1,6 au collège (contre 1 pour 2,3 à l'école élémentaire). La durée moyenne du temps passé à étudier les mathématiques chaque semaine est elle aussi en baisse, passant de 4 h 45 min dans le premier degré à 3 h 44 min dans le second degré, soit une baisse de 21,5 %. Cette diminution nous semble due, non à une volonté de resteindre l'importance de cette matière avec l'augmentation de l'âge des élèves, mais plutôt à la diversification des enseignements, avec l'apparition de nouvelles thématiques d'apprentissage (seconde langue vivante, langues anciennes, physique, chimie, etc.) qui laissent moins de place pour les mathématiques. Cette constatation est conforme à ce que nous avons observé dans les instructions officielles, à savoir une baisse de la part représentée par les mathématiques dans l'enseignement secondaire. Par ailleurs, cette diminution moyenne masque des disparités importantes, notamment entre la Corée du Sud, où les collégiens bénéficient de 22,3 minutes de mathématiques supplémentaires, et Singapour, où ceux-ci ont presque deux heures de mathématiques en moins. Ici encore, ces évolutions variées peuvent être expliquées par des réorganisations diverses de l'année scolaire : par exemple, un allongement de l'année scolaire pourrait avoir pour effet de conduire les autorités à décider d'une baisse de la durée hebdomadaire des enseignements de mathématiques.

Pour affiner notre recherche, il nous faut donc déterminer le nombre de semaines travaillées au cours de l'année, afin d'estimer le nombre d'heures annuelles que les élèves passent à faire des mathématiques. Pour cela, nous avons utilisé le questionnaire destiné aux directeurs d'école et aux chefs d'établissement (annexes 247 à 250). Celle-ci comprenait deux questions utiles pour résoudre la problématique que nous venons de soulever[1] :

- combien de jours par an votre école est-elle ouverte pour l'enseignement ?
- dans une semaine ordinaire, combien de jours votre école est-elle ouverte pour l'enseignement ?

1. Il s'agit respectivement des items ACBG08A et ACBG08C pour la quatrième année, ainsi que BCBG07A et BCBG07C pour la huitième année.

Pour calculer le nombre de semaines d'école travaillées dans une année scolaire, nous avons donc divisé le nombre de jours travaillés dans une année par le nombre de jours que contient une semaine d'école ordinaire. Toutefois, le nombre de jours moyen dans une semaine d'école n'est pas exprimé sous la forme d'une moyenne dans les almanachs fournis par TIMSS. Les directeurs d'école pouvaient cocher six cases : « six jours », « cinq jours et demi », « cinq jours », « quatre jours et demi », « quatre jours » et « autre ». Il nous a donc fallu déterminer un indicateur unique, que nous avons appelé J, destiné à avoir une estimation du nombre de jours ouvrés dans une semaine d'école pour un pays donné[1]. En reprenant ensuite la moyenne des jours ouvrés dans l'année, nous avons pu calculer le quotient $\frac{nombre\ de\ jours\ ouvrés\ dans\ l'année}{nombre\ de\ jours\ ouvrés\ dans\ la\ semaine}$, afin d'obtenir une estimation du nombre de semaines de travail effectuées au cours d'une année scolaire pour chaque pays. Enfin, nous avons multiplié le nombre moyen de minutes passées à enseigner les mathématiques par semaine, mesuré précédemment, par le nombre de semaine de cours dans l'année, de façon à établir une estimation du temps passé en cours de mathématiques par les élèves pendant l'année scolaire. Nous avons synthétisé les résultats de nos calculs dans le tableau ci-contre.

---

1. Nous avons attribué la valeur 6 à la réponse « six jours » (dont la fréquence est notée R_1), 5,5 à la réponse « cinq jours et demi » (dont la fréquence est notée R_2), 5 à la réponse « cinq jours » (dont la fréquence est notée R_3), 4,5 à la réponse « quatre jours et demi » (dont la fréquence est notée R_4), 4 à la réponse « quatre jours » (dont la fréquence est notée R_5) et nous avons éliminé les données de la colonne « autre » de l'analyse en raison de son caractère marginal. Comme la somme $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$ est différente de 100 et variable d'un pays à l'autre, nous avons donc remis les fréquences R_1, R_2, R_3, R_4 et R_5 en pourcentages de cette somme. Pour expliquer notre méthode de calcul, nous prendrons l'exemple de la France. 0 % des directeurs d'école interrogés dans ce pays répondent « six jours », 0,6 % « cinq jours et demi », 6 % « cinq jours », 80,5 % « quatre jours et demi » et 11,1 % « quatre jours ». En pourcentage du total, cela nous donne 0 % pour R_1, 0,6 % pour R_2, 6,1 % pour R_3, 82 % pour R_4, 11, 3 % pour R_5. Nous avons donc :

$J = \frac{6\times R_1 + 5{,}5\times R_2 + 5\times R_3 + 4{,}5\times R_4 + 4\times R_5}{100}$

Pour la France, l'indicateur J_F a donc pu être construit de la manière suivante :

$J_F = \frac{6\times 0 + 5{,}5\times 0{,}6 + 5\times 6{,}1 + 4{,}5\times 82 + 4\times 11{,}3}{100}$

$J_F = 4{,}5$ (arrondi au dixième)

Cet indicateur nous donne une estimation du fait que les écoles françaises sont ouvertes en moyenne 4,5 jours par semaine pour instruction.

	Nombre de jours ouvrés dans l'année	Nombre de jours ouvrés dans la semaine (arrondi au dixième)	Nombre de semaines ouvrées dans l'année (arrondi au dixième)	Durée annuelle des enseignements de mathématiques (en minutes)	Durée annuelle des enseignements de mathématiques (arrondie à la minute)
Angleterre	190,6	5,0	38,0	11359,3	189 h 19 min
Corée du Sud	193,6	5,0	38,7	5989,7	99 h 50 min
Floride	180,1	5,0	36,0	12772,7	212 h 53 min
France	166,4	4,5	37,1	11361,6	189 h 22 min
Hong Kong SAR	189,0	5,0	37,8	9448,2	157 h 28 min
Irlande du Nord	189,0	5,0	37,8	12564,7	209 h 25 min
Ontario	191,2	5,0	38,2	11724,1	195 h 24 min
Québec	181,1	5,0	36,2	13173,2	219 h 33 min
République d'Irlande	183,0	5,0	36,6	9871,0	164 h 31 min
Singapour	184,0	5,0	36,8	12041,0	200 h 41 min
Taipei chinois	199,9	4,6	43,9	7527,5	125 h 28 min
Moyenne (corpus)	**186,2**	**4,9**	**37,9**	**10712,1**	**178 h 32 min**

Figure 67. Estimation de la durée annuelle des enseignements de mathématiques à partir des déclarations des acteurs de quatrième année (TIMSS 2015)

Nous observons que le nombre de semaines ouvrées en France est plus faible qu'ailleurs, ce qui contribue à diminuer le nombre de jours travaillés dans l'année. Toutefois, la durée annuelle des enseignements de mathématiques reste supérieure à la moyenne du corpus, en raison d'une durée hebdomadaire élevée de ces enseignements. De même, le nombre de jours ouvrés est faible dans le Taipei chinois (4,6 en moyenne), mais cette spécificité est en partie compensée par une année scolaire particulièrement longue (plus de 43 semaines de cours en moyenne). À l'inverse, la Corée du Sud ne compense pas une durée hebdomadaire des enseignements très faible par une année scolaire plus longue qu'ailleurs, ce qui conduit ce pays à présenter la plus faible durée annuelle des enseignements de mathématiques au sein de notre corpus. D'une façon générale, nous pouvons dire que les écarts entre les participants sont grands (la durée annuelle des enseignements peut varier du simple au double, ainsi entre la Corée du Sud d'une part, et la Floride, l'Irlande du Nord, le Québec et Singapour d'autre part). Nous pouvons dire également que cette étude n'a mis en évidence qu'un lien de corrélation linéaire très faible entre le temps passé en cours de mathématiques chaque année, et les performances des élèves aux évaluations TIMSS ($R^2 = 0,26$). Chez tous les participants européens et nord-américains, le premier est systématiquement supérieur à 160 heures, alors que les scores des élèves ne dépassent pas 570. Dans les territoires asiatiques, la durée annuelle d'exposition aux savoirs mathématiques au sein des établissements scolaires est très variable : dans trois d'entre eux (Corée du Sud, Hong Kong SAR et Taipei chinois), elle ne va pas au-delà de 160 heures, et pourtant les performances des élèves sont excellentes (avec des scores supérieurs à 590), tandis qu'à Singapour, elle atteint 200 heures, pour des résultats encore plus élevés (avec le meilleur score des évaluations TIMSS 2015 : 618). Nous estimons chargé de sens d'une part, le fait que Singapour soit à la fois le pays asiatique dans lequel cette durée est la plus élevée, et celui qui obtient les meilleurs résultats, et d'autre part, que la France soit le pays occidental dans lequel cette durée est la moins élevée après la République d'Irlande, et celui qui obtient les moins bons résultats. Toutefois, il est évident que d'autres facteurs rentrent en jeu, y compris sur la question du temps d'apprentissage, notamment le temps passé sur les devoirs ou le rôle joué par les

cours complémentaires dans une société donnée. À ce stade, nous voyons simplement émerger quelques tendances, qui peuvent différer selon l'âge des élèves, comme le montre le tableau ci-dessous consacré à la durée annuelle des apprentissages en mathématiques en huitième année, élaboré avec la même méthode que celui de quatrième année.

	Nombre de jours ouvrés dans l'année	Nombre de jours ouvrés dans la semaine (arrondi au dixième)	Nombre de semaines ouvrées dans l'année (arrondi au dixième)	Durée annuelle des enseignements de mathématiques (en minutes)	Durée annuelle des enseignements de mathématiques (arrondie à la minute)
Angleterre	192,6	5,0	38,3	7483,4	124 h 43 min
Corée du Sud	192,8	5,0	38,6	6829,0	113 h 49 min
Floride	186,0	5,0	37,2	8957,8	149 h 18 min
Hong Kong SAR	179,7	5,0	35,9	8339,6	138 h 60 min
Ontario	191,7	5,0	38,3	10837,7	180 h 38 min
Québec	180,8	5,0	36,2	8935,1	148 h 55 min
République d'Irlande	167,0	4,9	33,9	6532,2	108 h 52 min
Singapour	185,0	5,0	37,0	7725,6	128 h 46 min
Taipei chinois	202,7	5,0	40,4	9561,0	159 h 21 min
Moyenne (corpus)	**186,5**	**5,0**	**37,3**	**8355,7**	**139 h 16 min**

Figure 68. Estimation de la durée annuelle des enseignements de mathématiques à partir des déclarations des acteurs de huitième année (TIMSS 2015)

Il permet de constater que les données sont plus homogènes en huitième année. D'abord, le nombre de jours ouvrés dans la semaine est semblable dans l'ensemble des pays du corpus (malgré un pourcentage faible d'établissements ouverts quatre jours et demi par semaine en République d'Irlande, conduisant à une diminution de la moyenne d'un dixième par rapport aux autres territoires étudiés). Ensuite, l'écart entre le territoire qui compte le moins de semaines travaillées dans l'année (la République d'Irlande), et celui qui en compte le plus (le Taipei chinois) est moindre au collège (6,5 semaines en huitième année contre 7,9 semaines en quatrième année). La République d'Irlande glisse à la dernière place du corpus en ce qui concerne la durée annuelle des enseignements, en raison d'un nombre de semaines ouvrées plus faible qu'ailleurs. Néanmoins, avec la durée annuelle des apprentissages la plus élevée du corpus, l'Ontario ne parvient pas à réaliser un meilleur score que la République d'Irlande (avec 522 pour le premier contre 523 pour la seconde, alors que le temps passé en cours de mathématiques est supérieur de 65,9 % dans la province du Canada que nous venons de citer). On voit également que la quantité de travail au sein de l'établissement est plus importante à Hong Kong SAR qu'à Singapour, ce qui n'était pas le cas à l'école élémentaire. Or, l'écart en termes de résultats entre ces deux participants s'est creusé en faveur de Singapour. Le temps passé à étudier les mathématiques en classe n'est donc pas un gage de réussite. Bien entendu, le travail des élèves n'est pas seulement fourni au sein des établissements scolaires. Les élèves travaillent les mathématiques lorsqu'ils font leurs devoirs, et il faut tenir compte de ce temps si l'on veut estimer la durée globale de travail effectuée par un élève en mathématiques, dans un pays donné, au cours d'une année scolaire.

§ 2. En dehors du temps scolaire

En ce qui concerne le travail personnel, le temps estimé par les professeurs ne correspond pas nécessairement au temps de travail réalisé effectivement par les élèves, et ce pour au moins deux raisons. Premièrement, parce que le temps que les professeurs estiment nécessaire pour réaliser un devoir n'est pas le temps mis par l'élève pour le réaliser : l'enseignant peut sous-estimer ou surestimer la vitesse de travail de l'élève. Deuxièmement, parce que l'élève peut prendre l'initiative de s'entrainer davantage (ou moins s'il ne fait pas le travail que lui donne son enseignant). Nous allons donc étudier successivement le temps de travail réalisé en dehors de l'établissement scolaire d'après les enseignants (A) et d'après les élèves (B).

A. Selon les enseignants

Deux questions nous permettent de cerner le travail fourni par les élèves après l'école (respectivement à propos de sa fréquence et de sa durée). La première, posée aux enseignants, était ainsi rédigée[1] (annexe 251) : « À quelle fréquence donnez-vous des devoirs en mathématiques aux élèves de votre classe ? » Cinq possibilités de réponse étaient offertes aux enseignants : « pas de devoirs », « moins de une fois par semaine », « une ou deux fois par semaine », « trois ou quatre fois par semaine » et « tous les jours ». Pour mieux percevoir la quantité de travail telle qu'elle est déclarée par les enseignants, nous avons créé un indicateur F destiné à en fournir une estimation globale[2]. L'ensemble des résultats obtenus pour la quatrième année a été synthétisé dans le graphique ci-contre.

---

1. En quatrième année, cette question porte la référence TQM-07A, tandis qu'en huitième année, cette question porte la référence TQM-22A.

2. Nous avons attribué la valeur 0 à la réponse « Pas de devoirs » (dont la fréquence est notée R_1), et la valeur 0,5 à la réponse « moins d'une fois par semaine » (dont la fréquence est notée R_2) qui nous semble représenter l'idée que le travail n'est pas nécessairement égal à zéro, mais qu'il ne correspond pas à un exercice par jour. Pour la même raison, nous avons attribué la valeur 1,5 à la réponse « Une ou deux fois par semaine » (dont la fréquence est notée R_3), la valeur 3,5 à la réponse « Trois ou quatre fois par semaine » (dont la fréquence est notée R_4) et la valeur 5 à la réponse « Tous les jours » (dont la fréquence est notée R_5) dans la mesure où la plupart des élèves vont à l'école cinq fois par semaine, que ce soit pour recevoir un enseignement pendant cinq jours pleins ou quatre jours et demi. Après avoir multiplié ces valeurs par la fréquence de chaque réponse, et calculé la somme de ces produits, nous avons divisé la somme obtenue par 100, de sorte qu'un pays dont 100 % enseignants donnent des devoirs tous les jours obtienne un indice de 5. On a donc :

$$F = \frac{0\times R_1 + 0{,}5\times R_2 + 1{,}5\times R_3 + 3{,}5\times R_4 + 5\times R_5}{100}$$

Pour donner un exemple, l'indicateur concernant France noté F_F a été ainsi calculé :

$$F_F = \frac{0\times 33{,}3 + 0{,}5\times 12{,}1 + 1{,}5\times 31{,}2 + 3{,}5\times 14{,}2 + 5\times 9{,}1}{100}$$

$F_F = 1{,}5$ (arrondi au dixième)

Ce nombre constitue une estimation indiquant que les enseignants français donnent en moyenne 1,5 fois des devoirs par semaine à leurs élèves.

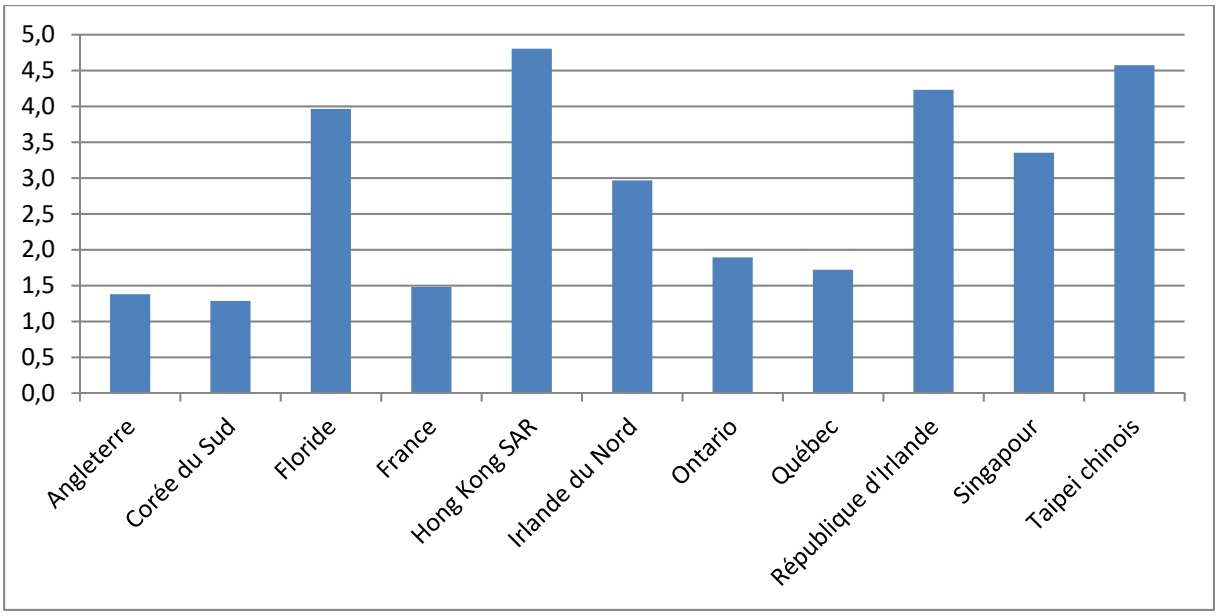


Figure 69. Fréquence hebdomadaire à laquelle les enseignants de quatrième année donnent des devoirs à leurs élèves (TIMSS 2015)

Le graphique montre que le pays dans lequel les enseignants donnent le plus fréquemment des devoirs de mathématiques est Hong Kong (où 91,8 % des enseignants donnent des devoirs de mathématiques quotidiennement à leurs élèves), suivi par le Taipei chinois (où 72,7 % des enseignants donnent des devoirs de mathématiques quotidiennement à leurs élèves). Parmi les enseignants qui donnent en moyenne environ quatre fois par semaine des devoirs de mathématiques à leurs élèves, nous trouvons deux participants occidentaux : la République d'Irlande et la Floride (où la répartition des réponses entre « trois ou quatre fois par semaine » et « tous les jours » est assez équilibrée). À Singapour, la fréquence est un peu moins élevée, puisqu'on a une courbe gaussienne dont le point le plus élevé est constitué de la proposition « trois à quatre fois par semaine » (plus de la moitié des enseignants sélectionnent cette réponse). À l'inverse, le pays dont les enseignants donnent le moins fréquemment des devoirs de mathématiques est la Corée du Sud (où la réponse la plus représentée est « une ou deux fois par semaine » avec 42 % des réponses). Les choix des enseignants y sont assez variés, mais tout de même moins que dans l'Ontario, participant dans lequel les réponses sont les plus hétérogènes, et où les pourcentages s'étalent de 10,6 % pour la réponse « tous les jours » à 36,9 % pour la réponse « une ou deux fois par semaine ». En Angleterre, au contraire, il y a une grande homogénéité du point de vue des professeurs (la proposition « une ou deux fois par semaine » représente 82,7 % des réponses). De même, au Québec, un certain consensus se fait jour pour choisir la proposition « une ou deux fois par semaine » (66 % des réponses). La France est le pays dans lequel la proposition « pas de devoirs » est la plus représentée, avec un tiers des réponses. C'est aussi la réponse qui est la plus souvent sélectionnée par les professeurs français, devant la proposition « une ou deux fois par semaine », avec 31,2 % des réponses. Nous concédons une certaine ambiguité dans la formulation de la question : le terme « *homework* » ne recouvre-t-il que les devoirs écrits, ou inclut-il également les leçons à réviser ? Le pourcentage élevé, comparativement aux autres participants, d'enseignants français indiquant ne pas donner de devoirs à leurs élèves nous semble révéler une interprétation stricte de la notion de devoir

(dans le sens de « devoir écrit »). En effet, cette spécificité entre en cohérence avec les directives ministérielles qui leur sont faites d'éviter de donner un travail écrit aux élèves à l'école primaire[1].

Avec la même méthodologie, nous avons analysé les données relatives à fréquence du travail donné par les enseignants en dehors du temps scolaire en huitième année (annexe 252). Comme le montre le graphique ci-dessous, quelques infléchissements apparaissent par rapport aux constatations réalisées pour l'école primaire.

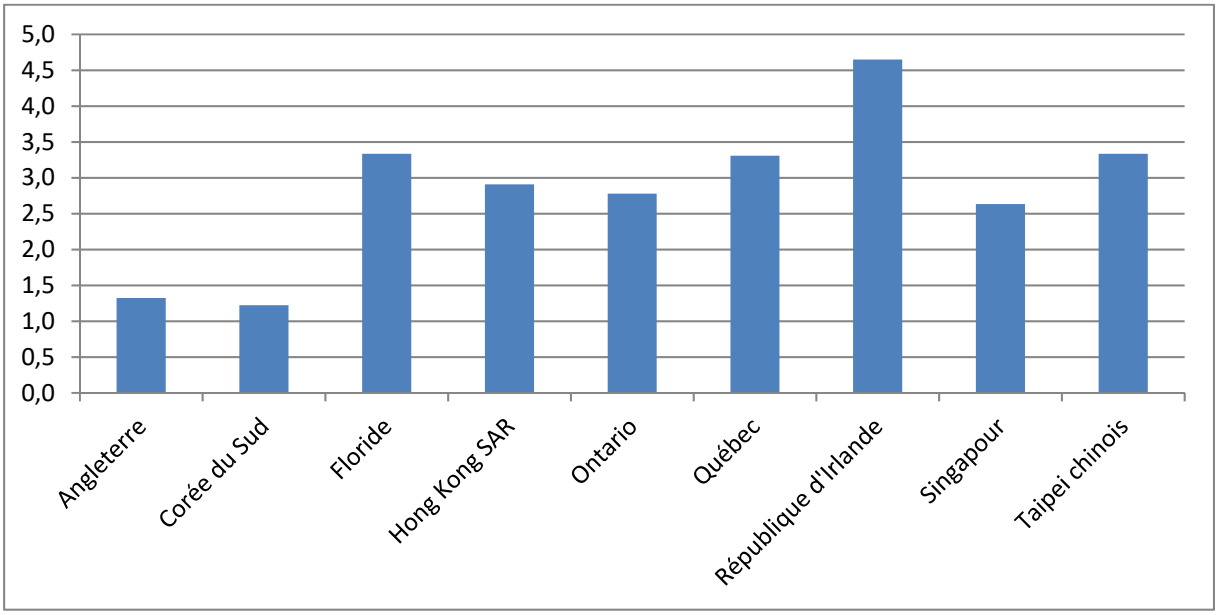


Figure 70. Fréquence hebdomadaire à laquelle les enseignants de huitième année donnent des devoirs à leurs élèves (TIMSS 2015)

Ainsi, Hong Kong SAR et le Taipei chinois ne sont plus les territoires dans lesquels la fréquence à laquelle les professeurs donnent du travail personnel en mathématiques est la plus élevée. Dans ces deux pays, la répartition des réponses est assez homogène entre les propositions « une ou deux fois par semaine », « trois ou quatre fois par semaine » et « tous les jours », ce qui donne, selon nos calculs, une moyenne située autour de trois fois par semaine. Les enseignants de la Floride et du Québec donnent des réponses réparties de façon similaire, quoi que la proposition « trois ou quatre fois par semaine »

1. Nous faisons référence aux différentes circulaires qui se sont succédé pour organiser et rappeler cette interdiction, en particulier celle du 29 décembre 1956 indiquant « qu'aucun devoir écrit, soit obligatoire, soit facultatif, ne sera demandé aux élèves hors de la classe » ou ou celle en date du 6 septembre 1994 qui précise que « les élèves n'ont pas de devoirs écrits en dehors du temps scolaire ». Les injonctions les plus récentes sont plus souples. Ainsi, la réponse fournie le 31 mars 2017 par l'administration à la question « Peut-on donner à un élève du primaire des devoirs à faire à la maison ? » nous permet de comprendre « qu'un enseignant peut donner à ses élèves un travail oral (lecture ou recherche par exemple), ou des leçons à apprendre à la maison » mais « qu'il doit éviter de donner à faire à ses élèves un travail écrit à la maison ». Cependant, il peut toujours le faire, à la condition qu'il vérifie qu'il a été réalisé (cette réponse a été consultée le 29 septembre 2017 à l'adresse suivante : https://www.service-public.fr/particuliers/vosdroits/F21842).

soit plus souvent choisie par les premiers (65,4 %) que par les seconds (51,5 %). Les autres choix portent principalement sur les réponses « une ou deux fois par semaine » et « tous les « jours » (les taux pour les propositions « pas de devoirs » et « moins d'une fois par semaine » ne dépassent pas 4 %). Dans l'Ontario, les réponses sont un peu plus hétérogènes, mais la réponse privilégiée est la même. La fréquence la plus élevée revient à la République d'Irlande, où 80 % des enseignants donnent des devoirs quotidiennement à leurs élèves. À Singapour, les professeurs sont partagés : 45,8 % choisissent la réponse « une ou deux fois par semaine », tandis que 43,8 % choisissent la réponse « trois ou quatre fois par semaine ». Comme en quatrième année, les fréquences les plus faibles se trouvent en Angleterre et en Corée du Sud. Néanmoins, la structure des résultats est différente dans ces deux pays. En Angleterre, la grande majorité des professeurs (79,7 %) indiquent donner à leurs élèves des devoirs « une ou deux fois par semaine ». En Corée du Sud, les réponses sont plus hétérogènes, puisqu'aucune proposition n'a été sélectionnée par plus de la moitié des enseignants. Ces derniers sont partagés, principalement entre la réponse « moins d'une fois par semaine » (41,4 %) et « une ou deux fois par semaine » (40,1 %). Par ailleurs, nous constatons que, dans la plupart des pays de notre corpus, la fréquence à laquelle les enseignants donnent des devoirs est réduite par rapport à l'école primaire (toutefois, ce n'est pas vrai en Ontario, au Québec et en République d'Irlande). Ces infléchissements peuvent être dûs à des changements organisationnels : il est possible en effet que dans l'enseignement secondaire, les élèves ne suivent pas un enseignement de mathématiques quotidiennement, au contraire de l'enseignement primaire, où la fréquence des cours de mathématiques serait plus régulière. Dans ce cas, une fréquence moindre pourrait être compensée par une quantité de travail supérieure pour chaque devoir donné.

La fréquence à laquelle les enseignants donnent des devoirs de mathématiques doit être analysée en relation avec la durée passée sur chaque devoir donné. En effet, on peut donner beaucoup de travail en une seule fois, ou peu de travail régulièrement. Cette question a été appréhendée par les enquêtes TIMSS, à travers la question suivante (annexes 253 et 254) : « Lorsque vous donnez des devoirs de mathématiques aux élèves de votre classe, combien de minutes estimez-vous que ceux-ci prendront habituellement ? »[1] Afin de mieux percevoir la durée des devoirs de mathématiques donnée par les enseignants, nous avons créé un indicateur D de façon similaire à celui utilisé pour la fréquence[2]. L'ensemble des résultats obtenus a été synthétisé dans le graphique ci-contre.

---

1. En quatrième année, cette question porte la référence TQM-07B, tandis qu'en huitième année, cette question porte la référence TQM-22B.

2. La somme des pourcentages indiquant la fréquence de chaque réponse étant souvent inférieure à 100 et différente pour chaque pays, nous avons calculé cette fréquence en pourcentage de cette somme, et utilisé ces données de façon à réaliser des comparaisons pertinentes. Ensuite, la valeur 10 a été attribué à la réponse « 15 minutes ou moins », représentant l'idée que le travail fourni n'est pas nul, mais qu'il est inférieur à 15 minutes (il nous parait difficilement concevable de passer moins de cinq minutes sur ses devoirs). Nous avons, pour des raisons similaires, attribué la valeur 22,5 à la réponse « entre 15 et 30 minutes », la valeur 45 à la réponse « entre 30 et 60 minutes » et le coefficient 75 à la réponse « plus de 60 minutes » (nous avons traduit la colonne « plus de 60 minutes » en « entre 60 et 90 minutes).

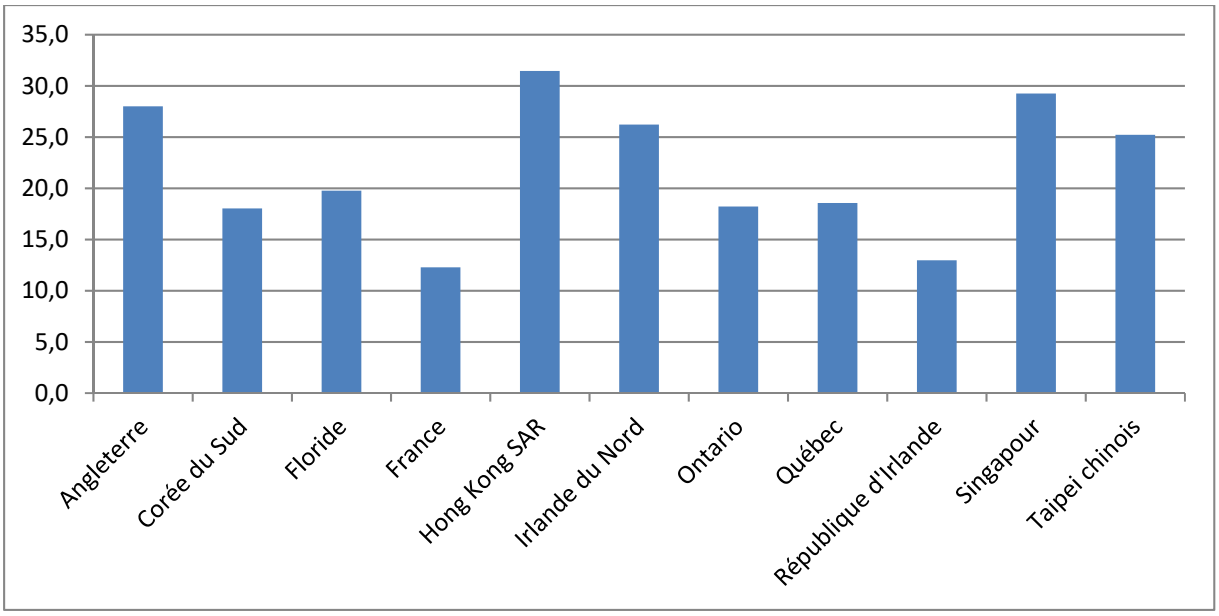


Figure 71. Estimation, en minutes, du temps passé par les élèves de quatrième année sur chaque devoir (TIMSS 2015)

Parmi les élèves qui passent le plus temps sur chaque devoir de mathématiques, on trouve au premier rang ceux de Hong Kong, et au deuxième rang, ceux de Singapour. Dans ces deux pays, les réponses des enseignants se répartissent principalement entre les propositions « 16-30 minutes » (avec respectivement 58,8 % et 66,1 %) et « 31-60 minutes » (avec respectivement 37,7 % et 30,1 %). Or, chez ces deux participants, la fréquence à laquelle les enseignants donnent des devoirs est également élevée comparativement aux autres pays de notre corpus. En ce qui concerne l'Angleterre, qui arrive en troisième position, elle compense au contraire une faible fréquence relativement aux autres territoires qui sont l'objet de notre étude, avec une répartition sur les mêmes propositions (67,9 % pour la colonne « 16-30 minutes » et 24,4 % pour la colonne « 31-60 minutes »). Dans le Taipei chinois et en Irlande du Nord, la durée moyenne du temps passé sur chaque devoir est semblable (25,2 minutes pour le premier et 26,2 minutes pour la seconde). Les choix des enseignants y sont assez homogènes, avec une majorité des réponses qui se portent sur la deuxième proposition, et le reste qui se répartit entre la première et la troisième. Dans tous les autres territoires qui composent notre corpus, les professeurs sélectionnent principalement les deux premières propositions, dans des proportions variées. La réponse « 16-30 minutes » est majoritaire dans la plupart d'entre eux. Ainsi, en Floride, 62,2 % des enseignants la choisissent, contre 33,2 % pour la réponse « moins de 15 minutes ». Dans l'Ontario et au Québec, on est plus proche de l'équilibre avec respectivement 53,6 % et 55,7 % pour la proposition « 16-30 minutes », 42,3 % et 39,8 % pour la proposition « moins de 15 minutes ». La France (où 82,4 % des enseignants déclarent donner des travaux dont la durée n'excède pas quinze minutes) et la République d'Irlande (avec 76,2 % des professeurs qui choissent cette réponse) ont les durées pour chaque devoir donné en dehors du temps scolaire les plus basses de notre corpus. Toutefois, ces constations ne s'inscrivent pas dans le même contexte : il existe République d'Irlande une fréquence élevée qui vient compenser cette faible durée, mais ce n'est pas le cas pour la France. Aussi pour mesurer la quantité de travail donnée par les enseignants, il nous faut créer un nouvel indicateur synthétique qui tiendrait compte à la fois de la fréquence et de la durée. Nous savons déjà qu'elle est énorme à Hong Kong SAR (qui cumule une fréquence et une durée élevées), et qu'elle sera faible en France (qui cumule une fréquence et une durée très basses). Cependant, avant de nous engager dans ce travail, il nous faut mesurer la durée des travaux donnés en huitième année : il est possible que dans certains territoires, une

faible quantité de travail à l'école primaire soit compensée par un surcroit d'efforts fournis dans l'enseignement secondaire. Nous avons donc placé dans le tableau ci-dessous, la durée moyenne de chaque devoir en huitième année, calculée avec la même méthodologie que nous venons d'utiliser pour la quatrième année.

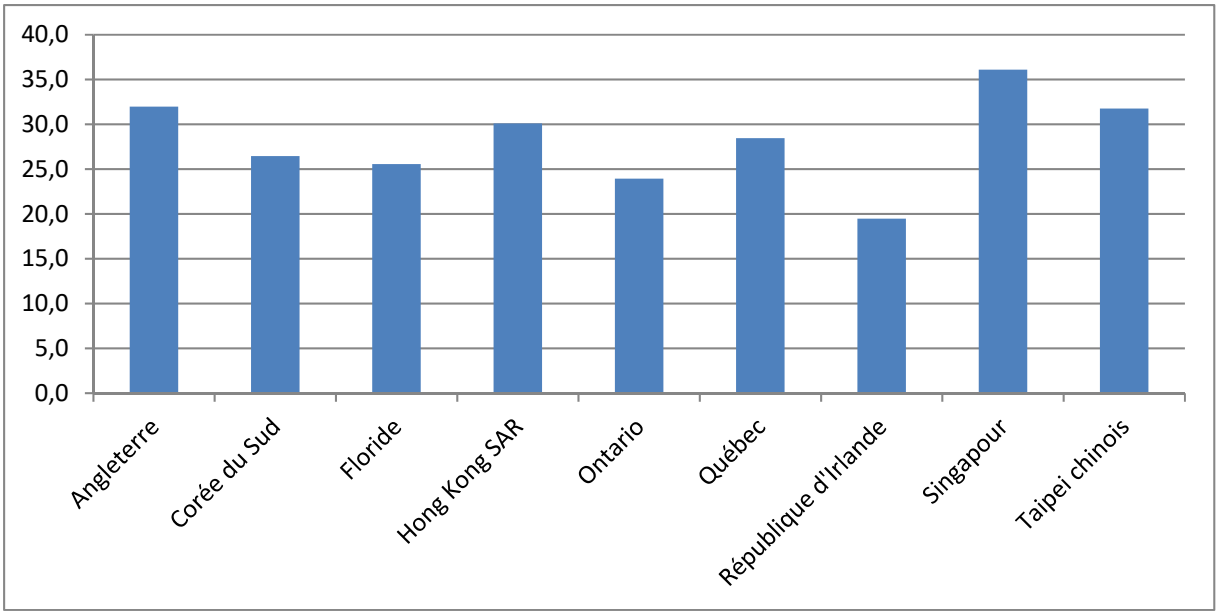


Figure 72. Estimation du temps passé par les élèves de huitième année sur chaque devoir en minutes (TIMSS 2015)

Des similitudes se font jour avec les données que nous avons mises en évidence à l'école primaire. Ainsi, les quatre territoires dans lesquels la durée des travaux est la plus élevée (Angleterre, Hong Kong SAR, Singapour et le Taipei chinois) présentaient déjà de telles caractéristiques en quatrième année, même si l'ordre est différent et en l'absence de l'Irlande du Nord. À l'inverse, la République d'Irlande est toujours le participant dans lequel les enseignants donnent les devoirs les plus courts. Là encore, l'absence de la France ne nous permet pas de confirmer plus avant l'analyse selon laquelle il existe une grande continuité des pratiques entre le premier et le second degré. Entre la Floride, la Corée du Sud, le Québec et l'Ontario, les écarts se sont légèrement creusés par rapport à la quatrième année. Néanmoins, ils restent faibles (moins de cinq minutes par devoir), et la durée passée sur chaque travail est toujours dans la moyenne. Si l'on raisonne de façon globale, on constate que cette durée est plus élevée au collège qu'à l'école primaire, sauf à Hong Kong SAR, où elle est assez stable (31,5 minutes en quatrième année, 30,1 minutes en huitième année). L'augmentation moyenne dans notre corpus est de 30 %. Cela valide l'hypothèse d'une plus grande quantité de travail personnel demandée aux collégiens dans presque tous les pays de notre corpus, dans la mesure où, dans chacun d'entre eux, la fréquence ne diminue pas dans les mêmes proportions que l'augmentation de la quantité (sauf à Hong Kong SAR, où la fréquence diminue de 39,5 % et où la quantité diminue également de 4,3 %). On trouve, soit une faible diminution de la fréquence et une grande augmentation de la quantité, soit une augmentation de la fréquence et une augmentation de la quantité. À ce propos, nous constatons l'importance de confronter les données liées à la durée et à la fréquence, puisque l'une peut compenser l'autre quand on cherche à mesurer la quantité de travail fournie par les élèves.

En croisant les données liées à la fréquence et à la durée des devoirs, nous allons pouvoir déterminer le temps de travail hebdomadaire attendu par les enseignants, selon leurs déclarations, en

dehors du temps scolaire. Pour cela, nous avons conservé nos indicateurs de fréquence (F) et de durée (D), calculant F × D de sorte qu'un pays dont les enseignants donneraient une fois par semaine des devoirs à leurs élèves pour une durée de 30 minutes obtienne un score équivalent au pays dont les enseignants donneraient quatre fois par semaine des devoirs pour une durée de 7 min 30 s chacun. Le produit de la fréquence par la durée donne un indicateur synthétique T de la quantité de travail imposée aux élèves chaque semaine. Par exemple, pour la France dont l'indicateur de fréquence T_F est 1,5 et l'indicateur de durée D_F est 12,3, nous obtenons :

$T_F = 1{,}5 \times 12{,}3$
$T_F = 18{,}5$ (arrondi au dixième)

Ce nombre constitue une estimation du nombre de minutes que passent les élèves, selon leurs professeurs, sur leurs devoirs de mathématiques chaque semaine. Dans notre exemple, 1,5 et 12,3 sont des valeurs approchées. Dans le tableau ci-dessous, qui synthétise l'ensemble des résultats obtenus, celui de la France est calculé à partir des valeurs exactes, ce qui donne un nombre légèrement différent :

	Indicateur T_4	Traduction en heures, en minutes et secondes
Angleterre	38,6	38 min 36 s
Corée du Sud	23,2	23 min 12 s
Floride	78,4	1 h 18 min 24 s
France	18,2	18 min 12 s
Hong Kong SAR	151,1	2 h 31 min 6 s
Irlande du Nord	77,8	1 h 17 min 48 s
Ontario	34,5	34 min 30 s
Québec	31,9	31 min 54 s
République d'Irlande	54,9	54 min 54 s
Singapour	98,1	1 h 38 min 6 s
Taipei chinois	115,3	1 h 55 min 18 s
Moyenne (corpus)	**65,6**	**1 h 5 min 36 s**

Figure 73. Estimation de la quantité de travail hebdomaire fournie en mathématiques, en dehors du temps scolaire, par les élèves de quatrième année, selon les enseignants

Nous voyons sur ce graphique que trois pays de l'aire asiatique occupent les trois premières places en ce qui concerne la durée du travail donné aux élèves en mathématiques en dehors du temps scolaire (Hong Kong, Singapour et le Tapei chinois). Ils sont suivis par la Floride, l'Irlande du Nord, et dans une moindre mesure, la République d'Irlande. Parmi notre corpus, les pays dont les enseignants imposent le travail le moins long en mathématiques (en dehors du temps scolaire) sont la France et la Corée du Sud. Les écarts sont très importants entre les pays. Pour donner un exemple, le rapport entre la quantité de travail donnée aux élèves dans le pays ou la région où les professeurs en donnent le moins (la France) et celui où ils en donnent le plus (Hong Kong) est de 1 à 8,3. Peut-on dire pour autant qu'il existe une corrélation linéaire entre le temps consacré aux devoirs à l'école primaire et la réussite aux évaluations TIMSS 2015 ? Pour le savoir, nous avons mis en relation ces deux données dans le graphique ci-contre.

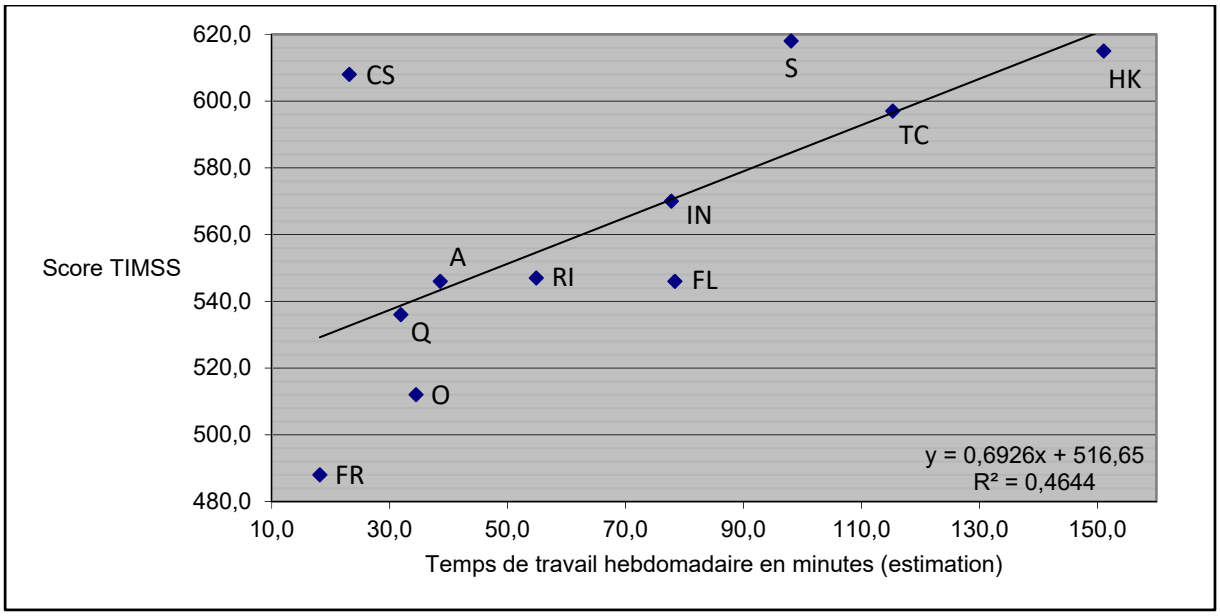


Figure 74. Corrélation entre la quantité hebdomadaire de devoirs donnée par les enseignants de quatrième année en mathématiques et le score obtenu par les élèves aux évaluations TIMSS 2015

À la lecture du coefficient de détermination de Bravais-Pearson ($R^2 = 0,46$), on peut penser que le lien de corrélation linéaire entre la quantité de travail donnée par les enseignants en dehors du temps scolaire et la réussite aux évaluations TIMSS 2015 n'est pas établi. En approfondissant quelque peu l'analyse, on s'aperçoit que la Corée du Sud fait figure d'exception : si on ne tient pas compte de ce pays, le R^2 passe à 0,82 ce qui montre un lien fort entre les deux séries de données. Or, nous savons que la Corée du Sud est le pays dans lequel les parents ont le plus recours à des cours complémentaires : 66,4 % des élèves en suivent en dehors du temps scolaire. En outre, nous avons vu qu'il existait une forte demande des parents relativement au niveau d'exigence académique à laquelle ne semblait pas répondre les établissements scolaires, ce qui suggère la possibilité d'entrainements supplémentaires dispensés à l'initiative des parents, non seulement par le biais des cours particuliers, mais également par eux-mêmes. Il semble donc qu'au sein de notre corpus, plus les enseignants donnent de travail à la maison aux écoliers, plus les chances d'obtenir de bons résultats aux évaluations TIMSS 2015 sont élevées. Les écarts sont nettement moins grands en huitième année, comme on peut le constater dans le tableau ci-dessous :

	Indicateur T_8	Traduction en heures, en minutes et secondes
Angleterre	42,3	42 min 18 s
Corée du Sud	32,3	32 min 18 s
Floride	85,2	1 h 25 min 12 s
Hong Kong SAR	87,5	1 h 27 min 30 s
Ontario	66,5	1 h 6 min 30 s
Québec	94,1	1 h 34 min 6 s
République d'Irlande	90,5	1 h 30 min 30 s
Singapour	95,1	1 h 35 min 6 s
Taipei chinois	105,9	1 h 45 min 54 s
Moyenne (corpus)	**77,7**	**1 h 17 min 42 s**

Figure 75. Estimation de la quantité de travail hebdomaire fournie en mathématiques, en dehors du temps scolaire, par les élèves de huitième année, selon les enseignants

Les différences sont réduites du fait de la diminution du travail demandé dans les trois pays où les enseignants donnent les devoirs les plus longs à leurs élèves. Ainsi, à Hong Kong SAR, la quantité de travail effectuée en dehors du temps scolaire en mathématiques est diminuée de 42,1 %. À Singapour, elle est diminuée de 3,1 %, tandis que dans le Taipei chinois, elle est diminuée de 8,1 %. À l'inverse, les pays dans lesquels la quantité de travail personnel attendue était basse à l'école élémentaire tendent à exiger un investissement beaucoup plus important en mathématiques dans l'enseignement secondaire. Ainsi, en République d'Irlande, les enseignants imposent 65 % de temps de travail en plus en mathématiques en dehors de l'établissement. Dans l'Ontario, l'augmentation est de 92,9 %, tandis qu'au Québec, elle est de 195 % ! Notre hypothèse est que, dans les pays où la durée du travail personnel est élevée dès l'enseignement primaire, il ne peut pas y avoir d'augmentation supplémentaire, du fait probablement de l'apparition de nouvelles matières, et du fait de la diminuation de la fréquence des cours de mathématiques. D'où une certaine stabilité, voire une réduction de l'investissement attendu en mathématiques. Finalement, on parvient à mesurer des temps de travail personnel des collégiens assez similaires au sein du corpus, autour d'une heure trente minutes par semaine. Toutefois, les professeurs anglais (42 min en arrondissant à l'unité près) et sud-coréens (32 min) prévoient des temps beaucoup plus courts pour les devoirs de leurs élèves, tout comme, dans une moindre mesure, les enseignants de l'Ontario (1 h 7 min). Ceux du Taipei chinois donnent la plus grande quantité de travail hebdomadaire à leurs élèves, avec 1 h 46 min. Même en excluant la Corée du Sud pour les raisons que nous avons mentionnées précédemment (l'importance prise par les cours particuliers), on ne parvient pas à établir une relation entre la quantité de travail exigée par les professeurs en dehors du temps scolaire et la réussite aux évaluations TIMSS 2015. Pour donner un exemple, les élèves de la Floride, qui obtiennent le score le plus faible de notre corpus (493), passent, à trois minutes près, autant de temps à travailler les mathématiques chez eux chaque semaine que les élèves de Hong Kong SAR. Or, les résultats de ces derniers sont bien meilleurs, avec un score de 594. Ces écarts importants en quatrième année, associés à une forte corrélation, et ces écarts réduits en huitième année, associés à une faible corrélation, nous interrogent : la clé pour l'obtention de résultats élevés résiderait-elle dans la réalisation d'une grande quantité de travail personnel dès le plus jeune âge ? Nous avons vu par ailleurs que les élèves asiatiques possédaient dès l'entrée dans la scolarité obligatoire des connaissances plus étendues que les autres. Cette hypothèse est plausible, et il nous faudra voir dans notre étude si des savoirs qui ne sont pas acquis à un moment de la scolarité dans les pays occidentaux peuvent l'être ultérieurement.

En outre, quand on additionne la durée passée en cours de mathématiques et la durée passée à effectuer le travail donné par l'enseignant dans cette matière en dehors du temps scolaire (telles que nous les avons calculées précédemment), nous obtenons la durée du travail effectué par les élèves en mathématiques en une année. En confrontant cette quantité aux résultats obtenus par les élèves aux évaluations TIMSS 2015 de quatrième année, il est possible de construire le graphique ci-dessous.

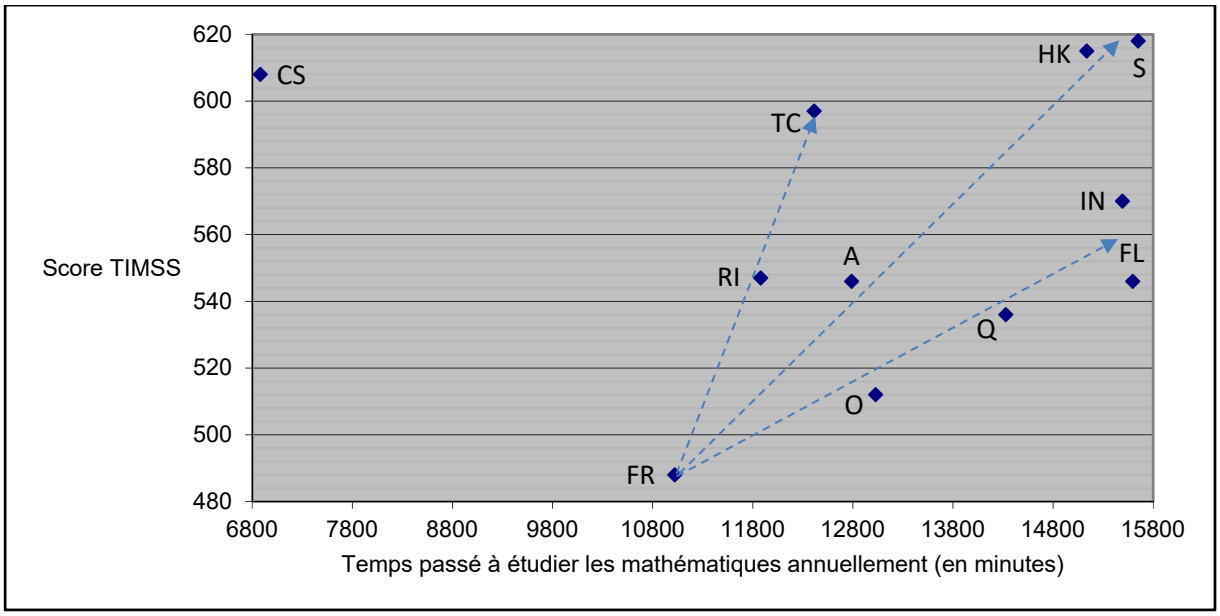


Figure 76. Relation entre la durée annuelle des apprentissages mathématiques (incluant les heures de cours et le temps passé sur les devoirs en quatrième année) et les performances des élèves (TIMSS 2015)

Le lien entre la quantité de travail globale et les résultats est moins forte que lorsqu'on tient compte seulement du travail effectué en dehors du temps scolaire. Sans tenir compte des données de la Corée du Sud (en raison de la place prise par les cours privés dans ce pays) et que l'on imagine une augmentation du temps passé à travailler les mathématiques, trois perspectives se dessinent pour la France en cas d'augmentation du temps de travail des élèves en mathématiques : une progression efficace permettant, comme la République d'Irlande et le Taipei chinois, d'obtenir de bons résultats avec un temps de travail supplémentaire faible, une progression moyennement efficace, permettant, comme Singapour et Hong Kong SAR, d'obtenir d'excellents résultats, mais avec un accroissement très fort du temps de travail, et une progression faiblement efficace permettant d'obtenir, comme le Canada et la Floride, des résultats moyens avec un accroissement très fort de la quantité de travail. Ces projections restent toutefois très fagiles, à cause des nombreux autres facteurs qui influent sur la réussite des élèves. En huitième année, on pourrait faire des projections inverses, pour déterminer ce qui arriverait si le temps de travail en mathématiques venait à diminuer, en partant des données disponibles pour le Taipei chinois. Dans les pays asiatiques, cela ne semble pas avoir d'incidence sur les résultats des élèves, tandis que celle-ci serait modérée pour l'Angleterre, le Québec, la République d'Irlande, et forte pour la Floride et l'Ontario

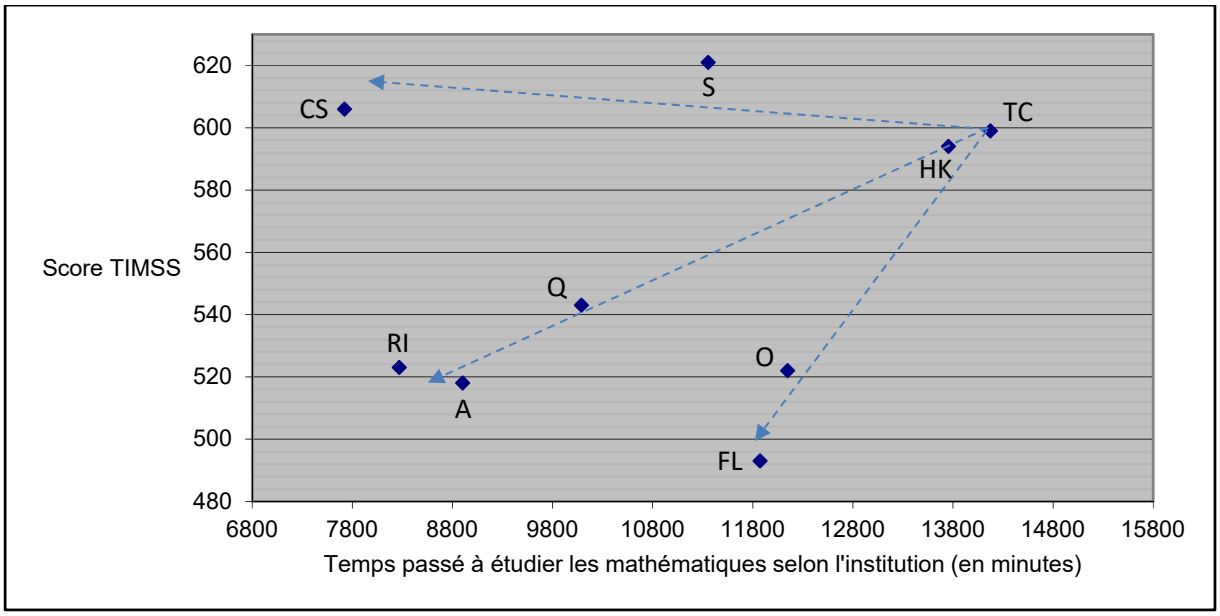


Figure 77. Durée des apprentissages mathématiques incluant les heures de cours et le temps passé sur les devoirs en huitième année (TIMSS 2015)

Si l'on peut penser qu'une augmentation par le législateur du temps passé à étudier les mathématiques est susceptible d'aider les élèves à progresser, il est donc très difficile de mesurer les effets que cela pourrait avoir. Surtout, l'influence du temps de travail est presque exclusivement liée, au sein de notre corpus, au travail personnel des élèves.

B. Selon les élèves

La quantité de travail estimée par ces enseignants reflète-t-elle le temps que les élèves déclarent passer sur leurs devoirs ? Ce travail de comparaison est facilité par le fait les questions auxquelles les élèves ont répondu étaient similaires à celles posées aux professeurs. En revanche, seuls les collégiens faisaient l'objet d'une telle étude, les écoliers n'ayant pas été interrogés sur ce point. En ce qui concerne la fréquence, l'énoncé de l'item SQSS_38Aa était ainsi rédigé (annexe 255) : « À quelle fréquence votre professeur vous donne-t-il des devoirs dans les matières suivantes ? Mathématiques » Nous avons ensuite comparé les données obtenues aux déclarations des enseignants à l'item TQM-22A, notre objectif étant de vérifier s'il y existait une concordance entre les points de vue des différents acteurs. Nous constatons que la fréquence indiquée par les élèves est légèrement supérieure à celle indiquée par les professeurs (de 9,9 % en moyenne)[1]. Ces écarts ne sont toutefois pas négligables, en particulier à Singapour, où les élèves font état d'une fréquence supérieure de 23,1 % à celle fournie par les enseignants. Quoi qu'il en soit, les estimations fournies par les uns et les autres correspondent bien : nous obtenons un lien de linéarité entre les deux séries de données révélé par un coefficient de détermination de Bravais-Pearson très élevé ($R^2 = 0,93$). La prise en compte du point de vue de l'élève nous permet en outre de distinguer trois fréquences bien distinctes : une fréquence faible dans les pays

1. Nous avons mesuré l'écart d'estimation de la durée selon les déclarations des enseignants et selon les déclarations des élèves sous la forme d'un pourcentage ($\frac{F.Elèves - F.enseignants}{F.enseignants}$ x 100).

où les professeurs donnent des devoirs une à deux fois par semaine en moyenne (Angleterre, Corée du Sud), une fréquence moyenne dans les pays où les professeurs donnent des devoirs trois à quatre fois par semaine en moyenne (Floride, Hong Kong SAR, Ontario, Québec, Singapour, Taipei chinois) et une fréquence élevé où les professeurs donnent des devoirs plus de quatre fois par semaine en moyenne (République d'Irlande).

En ce qui concerne le temps passé sur chacun des devoirs, nous pouvons nous appuyer sur les réponses fournies par les élèves à l'item SQSS_38Ba (annexe 256). Il était ainsi rédigé : « Quand votre enseignant vous donne des devoirs dans chacune des matières suivantes, combien de minutes passez-vous environ sur votre devoir ? » Cette formulation est proche de celle utilisée pour demander leur opinion aux enseignants à l'item TQM-22B. Néanmoins, afin de pouvoir comparer les déclarations des professeurs et des élèves de huitième année, nous avons supprimé la colonne « Pas de devoirs » dans le tableau indiquant les réponses des élèves. En effet, la question posée aux enseignants ne concerne que le cas où ceux-ci donnent des devoirs (« lorsque que vous donnez des devoirs de mathématiques à vos élèves […] »). Comme pour la fréquence, l'estimation par les élèves du temps passé sur chaque devoir est supérieure à celle fournie par les professeurs (de 9,2 % en moyenne). Cependant, le participant chez qui cette différence est la plus nette n'est pas Singapour, mais l'Ontario (où les élèves pensent que la réalisation de chaque devoir est plus longue de 31 % par rapport à leurs enseignants) suivi par la République d'Irlande (où les élèves pensent que la réalisation de chaque devoir dure 27,8 % de temps en plus par rapport à leurs enseignants). À l'inverse, les élèves anglais estiment que cette durée est moindre, de 18,2 %. À travers ces exemples, nous voyons que les écarts sont un peu plus importants que pour la fréquence (avec un écart-type de 15 points de pourcentage pour les différences de durée, contre 9,1 pour les différences de fréquence). De même, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson entre les estimations respectives des élèves et des professeurs est beaucoup moins élevé que pour la fréquence (R^2 = 0,41), de cela nous déduisons des variations plus diverses entre les deux séries de données. Ces constations ne sont pas surprenantes, la mesure du temps par les élèves parait en effet beaucoup plus aléatoire que la mesure de la fréquence : une simple consultation de l'agenda peut permettre de déterminer cette dernière, tandis qu'on a assez rarement l'œil sur sa montre pour déterminer le temps passé sur un devoir.

De la même façon que pour les données issues des déclarations des enseignants, nous avons multiplié la fréquence moyenne hebdomadaire à laquelle les professeurs donnent des devoirs, et la durée moyenne de chaque devoir, afin de définir un temps hebdomaire passé à travailler les mathématiques sur des exercices imposés par l'enseignant. Nous avons synthétisé les résultats obtenus dans le tableau ci-contre.

	Durée hebdomadaire des devoirs de mathématiques selon les élèves (en minutes)	Traduction en heures, en minutes et secondes	Durée hebdomadaire des devoirs de mathématiques selon les enseignants	Écart entre les déclarations des enseignants et des élèves (en pourcentage de la durée exprimée par les enseignants)
Angleterre	40,4	40 min 24 s	42 min 18 s	– 4,3 %
Corée du Sud	33,3	33 min 18 s	32 min 18 s	3,0 %
Floride	98,1	1 h 38 min 6 s	1 h 25 min 12 s	15,1 %
Hong Kong SAR	118,3	1 h 58 min 18 s	1 h 27 min 30 s	35,2 %
Ontario	100,6	1 h 40 min 36 s	1 h 6 min 30 s	51,3 %
Québec	130,8	2 h 10 min 48 s	1 h 34 min 6 s	39,0 %
République d'Irlande	112,4	1 h 52 min 24 s	1 h 30 min 30 s	24,2 %
Singapour	131,6	2 h 11 min 36 s	1 h 35 min 6 s	38,5 %
Taipei chinois	101,1	1 h 41 min 6 s	1 h 45 min 54 s	– 4,6 %
Moyenne (corpus)	**96,3**	**1 h 36 min 18 s**	**1 h 17 min 42 s**	**23,9 %**

Figure 78. Comparaison entre les déclarations des enseignants et des élèves de huitième année à propos de la durée hebdomadaire des devoirs en mathématiques (TIMSS 2015)

Dans l'ensemble, les élèves fournissent une estimation plus élevée de leur temps de travail en mathématiques que les enseignants (en moyenne, la durée indiquée par les élèves est de 23,9 % supérieure à celle estimée par leurs professeurs). C'est particulièrement vrai pour les participants dans lesquels le temps de travail personnel est important, à l'exception du Taipei chinois. Ainsi, dans l'Ontario, la durée passée sur son travail personnel est selon les élèves supérieure de 51,3 % à la durée indiquée par les enseignants. En Angleterre et en Corée du Sud, pays dans lesquels cette quantité est faible comparativement aux autres pays du corpus, les différents acteurs s'accordent bien sur le temps nécessaire pour effectuer le travail demandé (dans un sens ou dans l'autre, l'écart entre la durée estimée par les élèves et celle estimée par les professeurs ne dépasse pas 5 %). Cela confirme les conclusions fournies à partir des déclarations des enseignants. Toutefois, nous ne pouvons pas connaitre l'origine des écarts mesurés : un surcroit de travail peut être occasionné par une mauvaise compréhension en classe des concepts réinvestis dans les devoirs, aussi bien que par une application extrême de la part des élèves. À l'inverse, une durée moindre que celle attendue par les enseignants peut refléter une mauvaise estimation des professeurs, comme le fait que les devoirs sont faits de manière superficielle. De plus, rien n'est dit dans les enquêtes TIMSS sur la façon dont sont réalisés ces devoirs : en particulier, nous aurions aimé pouvoir définir le temps passé sur les questions formelles (recopier la consigne, présenter son travail) et le temps passé à réfléchir sur des questions mathématiques.

Conclusion de la sous-section

Dans cette sous-section, nous avons analysé la durée des enseignements en mathématiques au sein des établissements scolaires. Nous n'avons pas pu établir de corrélation avec les résultats des élèves aux évaluations TIMSS. En revanche, nous avons pu mesurer des écarts entre les prescriptions officielles et les durées estimées par les enseignants. Par exemple,

en Corée du Sud, les programmes de quatrième année prévoient la réalisation de 272 unités d'enseignement de 40 minutes chacune au cours de l'année, ce qui correspond à 181 heures et 20 minutes de mathématiques. D'après les déclarations des professeurs, nous avons estimé la durée des enseignements en mathématiques à 99 heures et 45 minutes. En huitième année, au lieu des 280 heures et 30 minutes de mathématiques prévues, nous estimons cette durée à 113 heures et 49 minutes, soit 2,5 fois moins que ce que préconisent les autorités. En comparaison, la durée officielle des apprentissages mathématiques semble assez bien respectée en France, puisque les professeurs des écoles interrogés dispensent en moyenne et selon nos calculs 173 heures et 23 minutes de mathématiques chaque année, alors que la durée règlementaire est de 180 heures. Par ailleurs, en analysant les réponses des enseignants à propos des devoirs qu'ils donnent à leurs élèves, nous avons mis au jour des différences inter-pays très importantes. En quatrième année, les élèves de Hong Kong SAR, de Singapour et du Taipei chinois, travaillent en moyenne 2,7 fois plus longtemps, chaque semaine, en mathématiques, que les élèves des autres pays. L'écart est immense entre Hong Kong SAR (pays dans lequel les écoliers fournissent le travail personnel le plus long : 2 h 31 min chaque semaine) et la France (pays dans lequel les écoliers fournissent le travaillent le plus court : 18 min chaque semaine), avec un rapport de 1 pour 8,3. Précisons néanmoins, pour ce dernier pays, que les directives ministérielles déconseillant les devoirs écrits incitent peut-être les professeurs à minimiser la quantité de travail qu'ils donnent à leurs élèves. Il existe également une relation forte, au sein de notre corpus, entre d'une part, la durée du travail réalisé en mathématiques en dehors du temps scolaire, et d'autre part, les performances des écoliers. Sur ce point, la Corée du Sud fait exception, puisque la durée du travail fourni par les élèves en mathématiques est très faible comparée aux autres pays, et ils obtiennent pourtant des scores très élevés. Toutefois, il faut indiquer que c'est également le pays dans lequel le recours aux cours complémentaires est le plus important. En huitième année, les écarts sont nettement moindres, pourtant les performances des élèves sont toujours très diverses, ce qui tend à montrer que des apprentissages à la fois denses et précoces sont nécessaires pour l'obtention d'excellents scores aux évaluations TIMSS. Ces observations renforcent l'intérêt d'une observation des attendus TIMSS pour la quatrième et pour la huitième année, et leur mise en correspondance avec le contenu des programmes.

Sous-section II. La durée des enseignements relatifs aux fractions

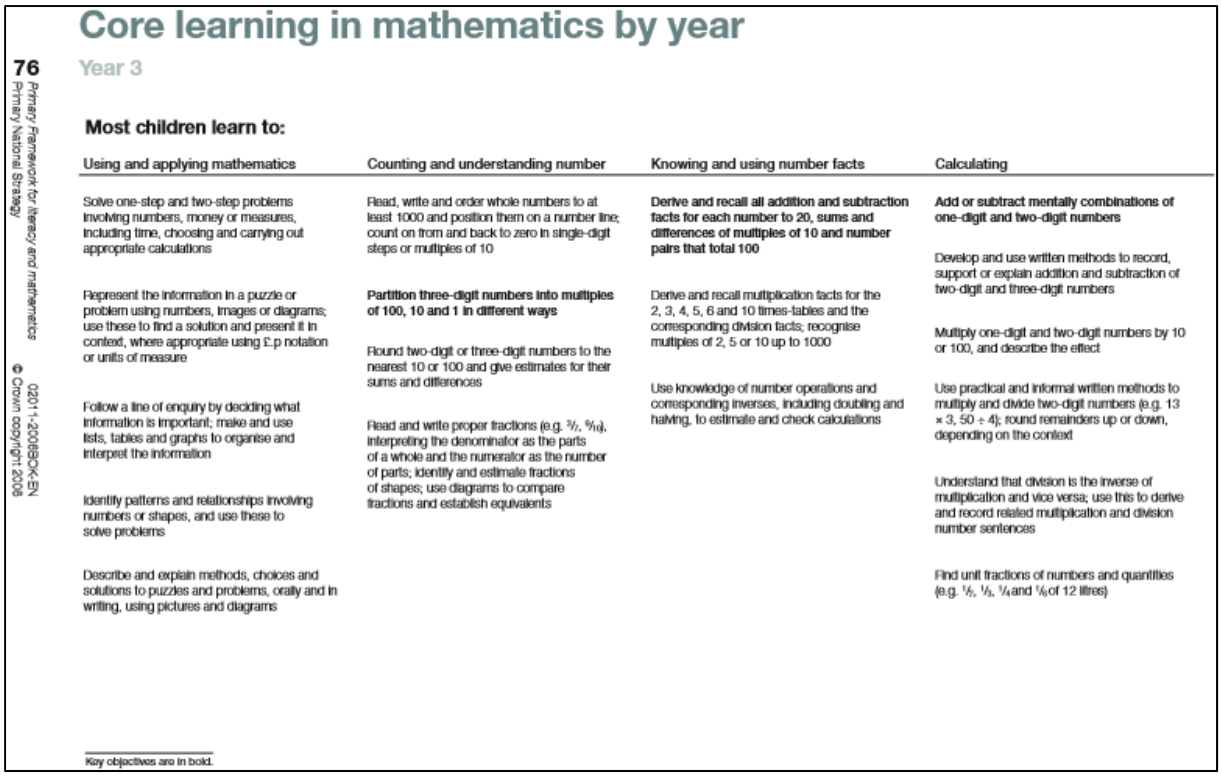
Nous avons observé, au sein de notre corpus, une corrélation entre la quantité de travail fournie par les élèves en mathématiques en dehors de leur établissement scolaire, et la réussite des élèves. L'objectif de cette sous-section est de vérifier si le temps passé à étudier les fractions a une incidence sur leurs performances dans ce domaine en particulier. Autrement dit, les auteurs des programmes qui mettent l'accent sur cette notion et lui accordent une grande place dans les textes permettent-ils aux élèves d'obtenir de meilleurs scores aux items correspondants ? Dans un premier temps, nous allons donc tenter de réaliser le plus précisément possible une estimation de la quantité de travail réalisée à propos des fractions dans chaque pays, à partir des items des programmes d'enseignement (§ 1). Dans un second temps, nous mettrons ces résultats en perspective en nous appuyant sur les durées fournies par les autorités et par les enseignants (§ 2).

§ 1. En comptabilisant les items relatifs aux fractions dans les programmes d'enseignement

En travaillant à partir des curriculums, nous concédons qu'il est difficile, voire impossible, de réaliser une estimation, même large, de la durée des enseignements consacrées aux fractions. Notre but est donc plus modestement d'apprécier l'importance accordée par les auteurs à ce concept dans les instructions officielles. Pour ce faire, nous allons déterminer, pour chaque curriculum, la proportion des items relatifs aux fractions par rapport à l'ensemble des items. La principale difficulté pour comparer les données obtenues réside dans le fait que les programmes d'enseignement ne sont pas uniformes. Dans certains pays, il y a de nombreux items, dans d'autres ce nombre est très restreint. Parfois, les items sont difficilement sécables. Il nous a donc fallu établir une méthode de comptage des items (A) avant de réaliser des comparaisons inter-pays (B).

A. Méthode de comptage des items

Les programmes en vigueur en Angleterre à partir de 2006 présentent une progression par année, avec des items commençant par un verbe d'action. Comme on peut le constater sur l'exemple ci-dessous, ils précisent ce que « la plupart des élèves apprennent à [faire] ». Ces items sont répartis en sept colonnes : « utiliser et appliquer des mathématiques », « compter et comprendre les nombres », « connaitre et utiliser des faits numériques », « calculer », « comprendre les formes », « mesurer » et « manipuler des données ». Pour déterminer la place occupée par les fractions dans les programmes, nous avons choisi de comptabiliser les paragraphes, qui forment chacun une unité d'apprentissage que l'on peut appréhender. Ainsi, dans l'exemple ci-contre, nous comptabilisons 18 items dans l'ensemble de la feuille.



Core learning in mathematics by year

76 Primary Framework for literacy and mathematics
Primary National Strategy

© Crown copyright 2006 02011-2006BOK-EN

Year 3

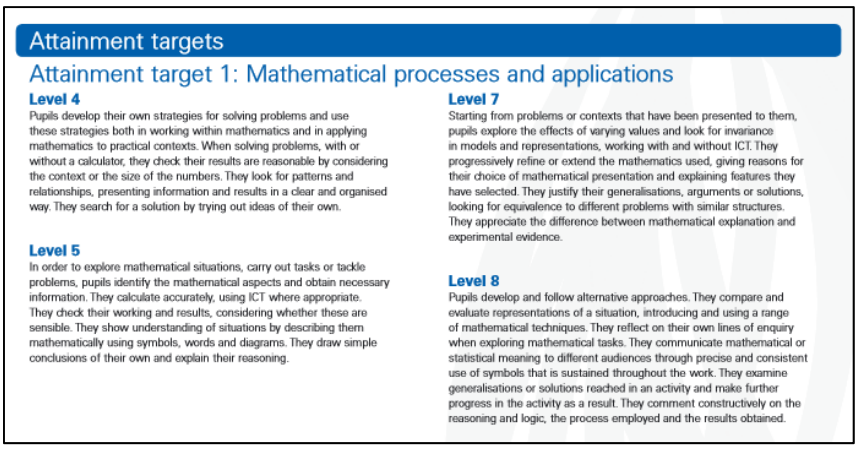
Most children learn to:

Using and applying mathematics	Counting and understanding number	Knowing and using number facts	Calculating
Solve one-step and two-step problems involving numbers, money or measures, including time, choosing and carrying out appropriate calculations	Read, write and order whole numbers to at least 1000 and position them on a number line; count on from and back to zero in single-digit steps or multiples of 10	**Derive and recall all addition and subtraction facts for each number to 20, sums and differences of multiples of 10 and number pairs that total 100**	**Add or subtract mentally combinations of one-digit and two-digit numbers**
Represent the information in a puzzle or problem using numbers, images or diagrams; use these to find a solution and present it in context, where appropriate using £.p notation or units of measure	**Partition three-digit numbers into multiples of 100, 10 and 1 in different ways**	Derive and recall multiplication facts for the 2, 3, 4, 5, 6 and 10 times-tables and the corresponding division facts; recognise multiples of 2, 5 or 10 up to 1000	Develop and use written methods to record, support or explain addition and subtraction of two-digit and three-digit numbers
Follow a line of enquiry by deciding what information is important; make and use lists, tables and graphs to organise and interpret the information	Round two-digit or three-digit numbers to the nearest 10 or 100 and give estimates for their sums and differences	Use knowledge of number operations and corresponding inverses, including doubling and halving, to estimate and check calculations	Multiply one-digit and two-digit numbers by 10 or 100, and describe the effect
Identify patterns and relationships involving numbers or shapes, and use these to solve problems	Read and write proper fractions (e.g. ½, 9/10), interpreting the denominator as the parts of a whole and the numerator as the number of parts; identify and estimate fractions of shapes; use diagrams to compare fractions and establish equivalents		Use practical and informal written methods to multiply and divide two-digit numbers (e.g. 13 × 3, 50 ÷ 4); round remainders up or down, depending on the context
Describe and explain methods, choices and solutions to puzzles and problems, orally and in writing, using pictures and diagrams			Understand that division is the inverse of multiplication and vice versa; use this to derive and record related multiplication and division number sentences
			Find unit fractions of numbers and quantities (e.g. ½, ⅓, ¼ and ⅙ of 12 litres)

Key objectives are in bold.

Figure 79. Extrait des instructions officielles anglaises pour l'école élémentaire (*op. cit.*, 2006, p. 76)

À partir de la septième année, les instructions officielles sont organisées différemment. Tout au long du premier cycle secondaire, que l'on appelle *Key Stage 3*, les élèves doivent atteindre des niveaux de compétence, depuis le niveau 4 jusqu'au niveau 8. Les niveaux de compétence ne correspondent pas aux niveaux de classe, puisque ce cycle de scolarité comprend trois classes (les années 7, 8 et 9) et cinq niveaux de compétence. Nous n'avons donc pu évaluer la place des fractions dans les programmes que de façon très approximative. Nous avons comptabilisé le nombre total de phrases dans les différents niveaux, et nous avons divisé ce nombre par trois, puisque ces compétences doivent être atteints par les élèves au cours des trois niveaux. En effet, on peut supposer qu'il y aura probablement répartition entre les trois niveaux, plutôt que répétition. Le nombre élevé d'items que l'on obtiendrait sans cette division par rapport au nombre d'items de l'école primaire nous le laisse penser. Par ailleurs, il existe un niveau supérieur, appelé « Performance exceptionnelle », que nous n'avons pas comptabilisé parce qu'il ne concerne qu'un faible pourcentage d'élèves.



Attainment targets

Attainment target 1: Mathematical processes and applications

Level 4
Pupils develop their own strategies for solving problems and use these strategies both in working within mathematics and in applying mathematics to practical contexts. When solving problems, with or without a calculator, they check their results are reasonable by considering the context or the size of the numbers. They look for patterns and relationships, presenting information and results in a clear and organised way. They search for a solution by trying out ideas of their own.

Level 5
In order to explore mathematical situations, carry out tasks or tackle problems, pupils identify the mathematical aspects and obtain necessary information. They calculate accurately, using ICT where appropriate. They check their working and results, considering whether these are sensible. They show understanding of situations by describing them mathematically using symbols, words and diagrams. They draw simple conclusions of their own and explain their reasoning.

Level 7
Starting from problems or contexts that have been presented to them, pupils explore the effects of varying values and look for invariance in models and representations, working with and without ICT. They progressively refine or extend the mathematics used, giving reasons for their choice of mathematical presentation and explaining features they have selected. They justify their generalisations, arguments or solutions, looking for equivalence to different problems with similar structures. They appreciate the difference between mathematical explanation and experimental evidence.

Level 8
Pupils develop and follow alternative approaches. They compare and evaluate representations of a situation, introducing and using a range of mathematical techniques. They reflect on their own lines of enquiry when exploring mathematical tasks. They communicate mathematical or statistical meaning to different audiences through precise and consistent use of symbols that is sustained throughout the work. They examine generalisations or solutions reached in an activity and make further progress in the activity as a result. They comment constructively on the reasoning and logic, the process employed and the results obtained.

Figure 80. Extrait des instructions officielles anglaises pour l'enseignement secondaire (*op. cit.*, 2007, p. 148)

En 2014, les instructions officielles ont été modifiées, y compris en ce qui concerne les aspects formels. Toutefois, la comptabilisation des items n'en est pas plus aisée : nous nous sommes appuyé sur les points placés devant la description des différentes compétences à enseigner. En huitième année, la présentation est similaire, mais les contenus sont donnés pour la septième, la huitième et la neuvième année sans distinction. Parfois, des listes de deuxième niveau sont apparues : nous n'en avons pas tenu compte, dans la mesure où elles constituaient clairement la déclinaison d'une même idée.

Statutory requirements

Pupils should be taught to:

- recognise and show, using diagrams, families of common equivalent fractions
- count up and down in hundredths; recognise that hundredths arise when dividing an object by one hundred and dividing tenths by ten
- solve problems involving increasingly harder fractions to calculate quantities, and fractions to divide quantities, including non-unit fractions where the answer is a whole number
- add and subtract fractions with the same denominator
- recognise and write decimal equivalents of any number of tenths or hundredths
- recognise and write decimal equivalents to $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$
- find the effect of dividing a one- or two-digit number by 10 and 100, identifying the value of the digits in the answer as ones, tenths and hundredths
- round decimals with one decimal place to the nearest whole number
- compare numbers with the same number of decimal places up to two decimal places
- solve simple measure and money problems involving fractions and decimals to two decimal places.

Figure 81. Extrait des nouvelles instructions officielles anglaises pour l'école élémentaire (*op. cit.*, 2014, p. 131)

Les instructions officielles de Corée du Sud de 2008 sont présentées sous la forme de titres, constitués de phrases nominales et très généraux (dans l'exemple ci-dessous, « addition et soustraction de nombres à deux chiffres »[1]), suivis de compétences commençant par un verbe d'action. En fin de chapitre, se trouvent des indications relatives au vocabulaire à utiliser (« *Terms and Symbols* ») et des conseils pour enseigner les notions au programme (« *Attend to the following when teching/learning* »). Ici, on constate que l'apprentissage de l'addition de nombres à trois chiffres doit être limité aux cas où la somme est inférieure à mille. Nous avons comptabilisé les items sous les titres, commençant par une phrase nominale, excluant de notre comptabilité le vocabulaire à utiliser et les conseils pour enseigner, dans la mesure où ceux-ci constituent des éclaircissements de ce qui est écrit précédemment, et non des compétences supplémentaires à enseigner.

1. La répartition des éléments, que nous avons trouvée particulièrement claire dans la page reproduite, nous a conduit à choisir cette section des programmes traitant des nombres entiers, plutôt qu'une des sections relatives aux fractions, dans lesquelles on trouve bien souvent également des instructions ayant trait aux écritures décimales, et qui sont donc trop développées pour donner au lecteur une idée précise de l'organisation des instructions officielles.

5 Understanding Fractions

① By the division into equal parts of continuous quantity, understand fractions, and know how to read and write them.

<Terms and Symbols> product, multiplication, multiplication table, fraction, ×

<Attend to the following when teaching/learning>

① Addition of three-digit numbers should be limited to those in which the sum is below 1000.
② Before adding and subtracting, try making estimations.
③ Treat the meaning of multiplication as adding the same number or with the concept of multiples, and relate it to daily life.
④ In the division into equal parts of continuous quantity only deal with figures which can be divided into equal shapes and sizes.

Figure 82. Extrait des instructions officielles sud-coréennes (*op. cit.*, p. 13)

Les instructions officielles instaurées en Floride en 2007 comprennent pour chaque niveau un ensemble de grandes idées (« Big Idea »). Ces dernières sont déclinées en objectifs commençant par un verbe d'action. Un code est attribué à chaque référence, celles-ci présentent un niveau de complexité estimé par les auteurs (bas, modéré ou haut). Nous avons comptabilisé chaque compétence matérialisée par un code. Lorsque plusieurs points étaient regroupés sous un même code, nous n'avons pas tenu compte de ces subdivisions, puisqu'il nous a semblé que ce code matérialisait une séquence d'enseignement représentant une unité de temps.

Big Idea 2: BIG IDEA 2 **Develop an understanding of fractions and fraction equivalence.**	
BENCHMARK CODE	**BENCHMARK**
MA.3.A.2.1	Represent fractions, including fractions greater than one, using area, set, and linear models. *Cognitive Complexity/Depth of Knowledge Rating:* Moderate
MA.3.A.2.2	Describe how the size of the fractional part is related to the number of equal sized pieces in the whole. *Cognitive Complexity/Depth of Knowledge Rating:* Moderate
MA.3.A.2.3	Compare and order fractions, including fractions greater than one, using models and strategies. *Cognitive Complexity/Depth of Knowledge Rating:* Moderate
MA.3.A.2.4	Use models to represent equivalent fractions, including fractions greater than 1, and identify representations of equivalence. *Cognitive Complexity/Depth of Knowledge Rating:* Moderate

Figure 83. Extrait des instructions officielles floridiennes (*op. cit.*, 2007, p. 6)

Lorsque les autorités floridiennes ont intégré les *Common Core State Standards for Mathematics* élaborés au niveau fédéral, elles ont conservé la présentation à laquelle étaient habitués leurs enseignants. Seuls quelques évolutions dans les termes utilisés sont venues apporter une touche de

nouveauté. Ainsi, au lieu d'employer l'expression « *Big idea* », le législateur utilise désormais le mot « *Cluster* » qui porte l'idée d'un groupement de tâches tout en étant moins familier. De même, les niveaux de complexité « bas », « modéré » et « haut » sont remplacé par échelle de nombres de 1 à 3, correspondant aux tâches suivantes : « rappel », « application basique de compétences et concepts » et « pensée stratégique et raisonnement complexe ». Ces instructions officielles étant plus détaillées que les précédentes, on y trouve régulièrement des compétences déclinées en sous-items identifiés par des lettres. Dans le souci de garder une méthodologie identique à celle utilisée pour les programmes de 2007, et parce que l'ensemble de ces tâches sont connexes et peuvent faire l'objet d'une même séquence d'enseignement, nous avons passé outre ces distinctions.

Cluster 2: Build fractions from unit fractions by applying and extending previous understandings of operations on whole numbers. (Major Cluster)

Don't sort clusters from Major to Supporting, and then teach them in that order. To do so would strip the coherence of the mathematical ideas and miss the opportunity to enhance the major work of the grade with the supporting clusters.

STANDARD CODE	STANDARD
MAFS.4.NF.2.3	Understand a fraction a/b with a > 1 as a sum of fractions 1/b. a. Understand addition and subtraction of fractions as joining and separating parts referring to the same whole. b. Decompose a fraction into a sum of fractions with the same denominator in more than one way, recording each decomposition by an equation. Justify decompositions, e.g., by using a visual fraction model. *Examples: 3/8 = 1/8 + 1/8 + 1/8 ; 3/8 = 1/8 + 2/8 ; 2 1/8 = 1 + 1 + 1/8 = 8/8 + 8/8 + 1/8.* c. Add and subtract mixed numbers with like denominators, e.g., by replacing each mixed number with an equivalent fraction, and/or by using properties of operations and the relationship between addition and subtraction. d. Solve word problems involving addition and subtraction of fractions referring to the same whole and having like denominators, e.g., by using visual fraction models and equations to represent the problem. *Cognitive Complexity:* Level 2: Basic Application of Skills & Concepts

Figure 84. Extrait des nouvelles instructions officielles floridiennes pour la quatrième année (*op. cit.*, 2014, p. 4)

En France, les progressions du premier degré sur lesquelles nous nous sommes appuyé pour déterminer les attentes du législateur sont partagées en trois colonnes, chacune indiquant les enseignements à réaliser pour l'une des classes du cycle considéré. Dans l'extrait ci-dessous, qui concerne le cycle 3, on voit que les fractions n'ont pas à être évoquées en classe de CE2, mais seulement en CM1 (colonne du milieu) et en CM2 (colonne de droite). Le comptage des items est facilité par la présence de tirets, correspondant chacun à un type de tâches à enseigner. Lorsque ces types de tâches étaient décomposés en plusieurs points, nous avons comptabilisé chacun d'entre eux comme un item. Ainsi, dans notre exemple, nous avons compté l'intitulé « savoir passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement » comme un item indépendant. Dans cette case, nous comptons donc cinq items.

	Fractions - Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. - Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.	*Fractions* - Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs. - Ecrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.
	Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème). - Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée, . les comparer, les ranger, . les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, . passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.	*Nombres décimaux* - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème). - Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, . les comparer, les ranger, . produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001... - Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.

Figure 85. Extrait des instructions officielles française pour l'école élémentaire (*op. cit.*, 2008a, p. 38)

Au collège, les colonnes correspondent non aux différentes classes, mais respectivement aux « connaissances », « capacités » que doivent acquérir les élèves, ainsi qu'aux « commentaires » associés. Comme nous considérons les types de tâches présents dans les curriculums, nous avons comptabilisé les énoncés différents se trouvant dans la colonne « capacités ». Pour isoler ces énoncés, nous avons pris en compte les tirets qui les introduisent. Dans l'exemple ci-dessous, nous comptons quatre types de tâches, tous se rapportant aux fractions.

2.3 Nombres en écriture fractionnaire Écriture fractionnaire. * *Quotient exact.* * *Un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre.*	-* *Interpréter* $\frac{a}{b}$ *comme quotient de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire comme le nombre qui multiplié par b donne a.* - * *Placer le quotient de deux entiers sur une demi-droite graduée dans des cas simples.* - Prendre une fraction d'une quantité. **Il s'agit de faire comprendre la modélisation de ce type de problème par une multiplication.* -* *Reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre.*	À l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire est introduite en référence au partage d'une unité. Par exemple $\frac{7}{3}$ *est 7 fois un tiers.* Le vocabulaire relatif aux écritures fractionnaires est utilisé : numérateur, dénominateur. **Le programme de la classe de 6e a pour objectif d'interpréter aussi* $\frac{7}{3}$ *comme* *- le tiers de 7* *- le nombre qui multiplié par 3 donne 7 ;* *- un nombre dont une valeur approchée est 2,33.* *L'utilisation de quotients, sous forme fractionnaire, permet de gérer plus facilement les raisonnements et de repousser la recherche d'une valeur approchée décimale à la fin de la résolution.* *La connaissance des tables de multiplication est notamment exploitée à cette occasion.*

Figure 86. Extrait des instructions officielles françaises pour l'enseignement secondaire (*op. cit.*, 2008b, p. 15)

Les instructions officielles de Hong Kong SAR (2000) sont organisées en unités, au sein desquelles sont rédigés des objectifs d'apprentissage. Ils présentent la particularité de fournir une estimation du temps qu'il faut passer sur chaque chapitre. Cependant, nous avons d'abord comptabilisé le nombre d'items, comme pour les autres programmes. Lorsqu'un objectif d'apprentissage est décliné en sous-objectifs, nous n'avons compté que les sous-objectifs. Dans l'exemple ci-dessous, pour l'unité

4N6, nous avons comptabilisé les items a, b, c, 2, 3, et 4 pour un total de 6. En effet, nous avons considéré que la division en lettres a, b et c est une manière de ne pas répéter le début de la phrase « réaliser des opérations mixtes de ». À partir de la septième année, les programmes sont rédigés pour le cycle, et non plus pour une année. Comme pour l'Angleterre, nous avons divisé le nombre d'items pour le cycle par trois, car le premier cycle du secondaire (appelé *Key Stage 3*) comprend trois années. Les résultats nous paraissent cohérents dans la mesure où le nombre d'items que l'on obtient est semblable à celui que nous avons établi pour les programmes de l'école primaire, qui sont quant à eux organisés par année.

Unit	Learning Objectives	Suggested Time Ratio
Dimension : Number		
4N6 Mixed operations (II)	1. Perform mixed operations of a. division and addition; b. division and subtraction; c. multiplication and division. (For sums involving at most two operations.) 2. Perform mixed operations for sums involving at most four steps. 3. Solve problems involving mixed operations. 4. Estimate the answers. Remark : Use of large numbers is not encouraged.	10
4N7 Fractions (II)	1. Develop the concept of proper fractions, improper fractions and mixed numbers. 2. Develop the concept of equivalent fractions. 3. Explore the methods for converting equivalent fractions. 4. Add and subtract fractions with the same denominators and reduce the answers to the simplest form.	16
4N8 Decimals (I)	1. Recognize decimals as another way of recording fractions. 2. Develop the concept of place value in decimals. 3. Recognize the use of decimals in daily life situations.	5

Figure 87. Extrait des instructions officielles de Hong Kong SAR (*op. cit.*, p. 36)

En Irlande du Nord, les différents intitulés ne sont pas introduits par des tirets. Toutefois, les sauts de ligne permettent de les distinguer assez aisément. Comme on peut le voir dans l'extrait reproduit ci-contre, certains font l'objet d'une subdivision matérialisée par des points. Dans ce cas, nous avons comptabilisé chacun d'entre eux comme un type de tâches indépendant. Dans notre exemple, nous considérons que « explorer et ranger des fractions de même dénominateur, par exemple 1/6, 2/6, 5/6 » constituait un type de tâches distincts de celui consistant à « explorer et ranger des fractions dont le numérateur est 1, par exemple 1/3, 1/5, 1/8 ».

Explore the effect of multiplying by 10 and 100.

Use the knowledge of multiplying whole numbers by 10 and 100 to explore division by 10 and 100.

Explore and order fractions:

- with the same denominator, *eg* $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{6}$;
- where the numerator is 1, *eg* $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$.

Investigate the equivalence of fractions within fraction families.

Figure 88. Extrait des progressions officielles de l'Irlande du Nord (*op. cit.*, onglet « Nombres »)

Les instructions officielles de l'Ontario (2005) sont segmentées, année par année, en chapitres (« Numération et sens du nombre », « Mesure », « Géométrie et sens de l'espace », « Modélisation et algèbre », « Traitement des données et probabilité »). À l'intérieur de chaque chapitre, les auteurs présentent de façon générale les attentes de l'institution vis-à-vis des élèves. Ensuite, les auteurs précisent leurs attentes dans une partie intitulée « Contenus d'apprentissage ». Ces compétences commencent par un verbe d'action, sont précises. Il est à noter qu'il ne s'agit pas de ce qu'il faut enseigner, mais de ce que l'élève doit savoir faire. Nous avons comptabilisé chacune de ces compétences matérialisées par un tiret.

3e année – Numération et sens du nombre

Attentes

À la fin de la 3e année, l'élève doit pouvoir :

- reconnaître les liens entre un nombre naturel et une quantité au moins jusqu'à 1 000, et vice versa.
- décrire les relations qui existent dans la composition d'un nombre naturel inférieur à 1 001.
- identifier et représenter les nombres naturels au moins jusqu'à 1 000 dans divers contextes.
- résoudre des problèmes d'ajout, de réunion, de comparaison, de retrait et de groupement, selon les opérations étudiées, en utilisant diverses stratégies de dénombrement ou un algorithme personnel.

Contenus d'apprentissage

Pour satisfaire aux attentes, l'élève doit :

Dénombrement

- compter jusqu'à 100 par intervalles de 3, de 6 et de 9 à partir d'un multiple ou d'un nombre donné à l'aide ou non de matériel concret ou de calculatrice (p. ex., droite numérique, grille de 100).
- compter au moins jusqu'à 1 000 par intervalles de 25 et de 100 et à partir d'un multiple de 25 et de 100.
- compter à rebours par intervalles de 2, de 5, de 10 et de 25 à partir d'un nombre naturel inférieur à 101, à l'aide ou non de matériel concret.

Quantité et relations

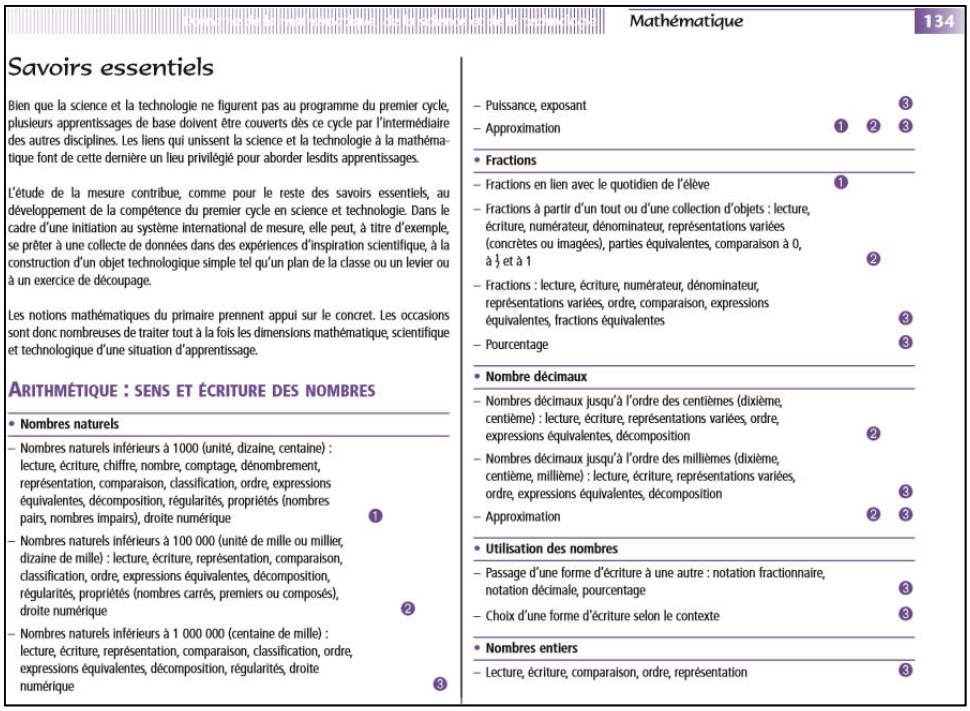
- estimer une quantité d'objets jusqu'à 1 000.
- comparer, ordonner et représenter les nombres naturels jusqu'à 1 000 à l'aide de matériel concret, d'illustrations ou de symboles [p. ex., plus grand (>), plus petit (<) ou égal (=)].
- décomposer un nombre naturel inférieur à 1 001 et identifier la valeur de chacun des chiffres selon sa position, à l'aide de matériel concret, illustré ou symbolique (p. ex., 327 = 300 + 20 + 7 ou 327 = 32 dizaines + 7 unités).
- représenter les triples et les quadruples des nombres dans des situations réelles.
- représenter les tiers en tant que partie d'un élément et d'un ensemble d'éléments à l'aide de matériel concret (p. ex., il y a 18 pommes, si nous en prenons chacun le tiers, nous aurons 6 pommes chacun).
- arrondir des nombres naturels à une valeur de position (dizaine et centaine près) pour faire des estimations et des opérations de calcul mental.
- estimer, compter et enregistrer des montants d'argent en pièces de monnaie et en billets jusqu'à 100 $.

Représentations

- lire et écrire en lettres les nombres naturels jusqu'à cent.
- écrire en chiffres les nombres naturels au moins jusqu'à 1 000 et les lire.
- utiliser les nombres ordinaux jusqu'à 100.
- utiliser une variété d'objets et d'illustrations pour représenter des nombres naturels (p. ex., blocs de base dix, grille de nombres).
- utiliser les équivalences entre la valeur des pièces de monnaie et des billets pour représenter des montants d'argent inférieurs à 100 $, à l'aide de matériel concret ou illustré.

Figure 89. Extrait des instructions officielles de l'Ontario (*op. cit.*, p. 43)

Au Québec, la scolarité primaire est organisée en trois cycles de deux ans. Les programmes de 2001 précisent au cours de quel cycle doivent être abordées les différentes notions. Ces savoirs sont écrits sous la forme d'une phrase nominale commençant par un nom commun, non par un verbe.



Mathématique 134

Savoirs essentiels

Bien que la science et la technologie ne figurent pas au programme du premier cycle, plusieurs apprentissages de base doivent être couverts dès ce cycle par l'intermédiaire des autres disciplines. Les liens qui unissent la science et la technologie à la mathématique font de cette dernière un lieu privilégié pour aborder lesdits apprentissages.

L'étude de la mesure contribue, comme pour le reste des savoirs essentiels, au développement de la compétence du premier cycle en science et technologie. Dans le cadre d'une initiation au système international de mesure, elle peut, à titre d'exemple, se prêter à une collecte de données dans des expériences d'inspiration scientifique, à la construction d'un objet technologique simple tel qu'un plan de la classe ou un levier ou à un exercice de découpage.

Les notions mathématiques du primaire prennent appui sur le concret. Les occasions sont donc nombreuses de traiter tout à la fois les dimensions mathématique, scientifique et technologique d'une situation d'apprentissage.

Arithmétique : sens et écriture des nombres

• Nombres naturels

– Nombres naturels inférieurs à 1000 (unité, dizaine, centaine) : lecture, écriture, chiffre, nombre, comptage, dénombrement, représentation, comparaison, classification, ordre, expressions équivalentes, décomposition, régularités, propriétés (nombres pairs, nombres impairs), droite numérique ❶

– Nombres naturels inférieurs à 100 000 (unité de mille ou millier, dizaine de mille) : lecture, écriture, représentation, comparaison, classification, ordre, expressions équivalentes, décomposition, régularités, propriétés (nombres carrés, premiers ou composés), droite numérique ❷

– Nombres naturels inférieurs à 1 000 000 (centaine de mille) : lecture, écriture, représentation, comparaison, classification, ordre, expressions équivalentes, décomposition, régularités, droite numérique ❸

– Puissance, exposant ❸

– Approximation ❶ ❷ ❸

• Fractions

– Fractions en lien avec le quotidien de l'élève ❶

– Fractions à partir d'un tout ou d'une collection d'objets : lecture, écriture, numérateur, dénominateur, représentations variées (concrètes ou imagées), parties équivalentes, comparaison à 0, à $\frac{1}{2}$ et à 1 ❷

– Fractions : lecture, écriture, numérateur, dénominateur, représentations variées, ordre, comparaison, expressions équivalentes, fractions équivalentes ❸

– Pourcentage ❸

• Nombre décimaux

– Nombres décimaux jusqu'à l'ordre des centièmes (dixième, centième) : lecture, écriture, représentations variées, ordre, expressions équivalentes, décomposition ❷

– Nombres décimaux jusqu'à l'ordre des millièmes (dixième, centième, millième) : lecture, écriture, représentations variées, ordre, expressions équivalentes, décomposition ❸

– Approximation ❷ ❸

• Utilisation des nombres

– Passage d'une forme d'écriture à une autre : notation fractionnaire, notation décimale, pourcentage ❸

– Choix d'une forme d'écriture selon le contexte ❸

• Nombres entiers

– Lecture, écriture, comparaison, ordre, représentation ❸

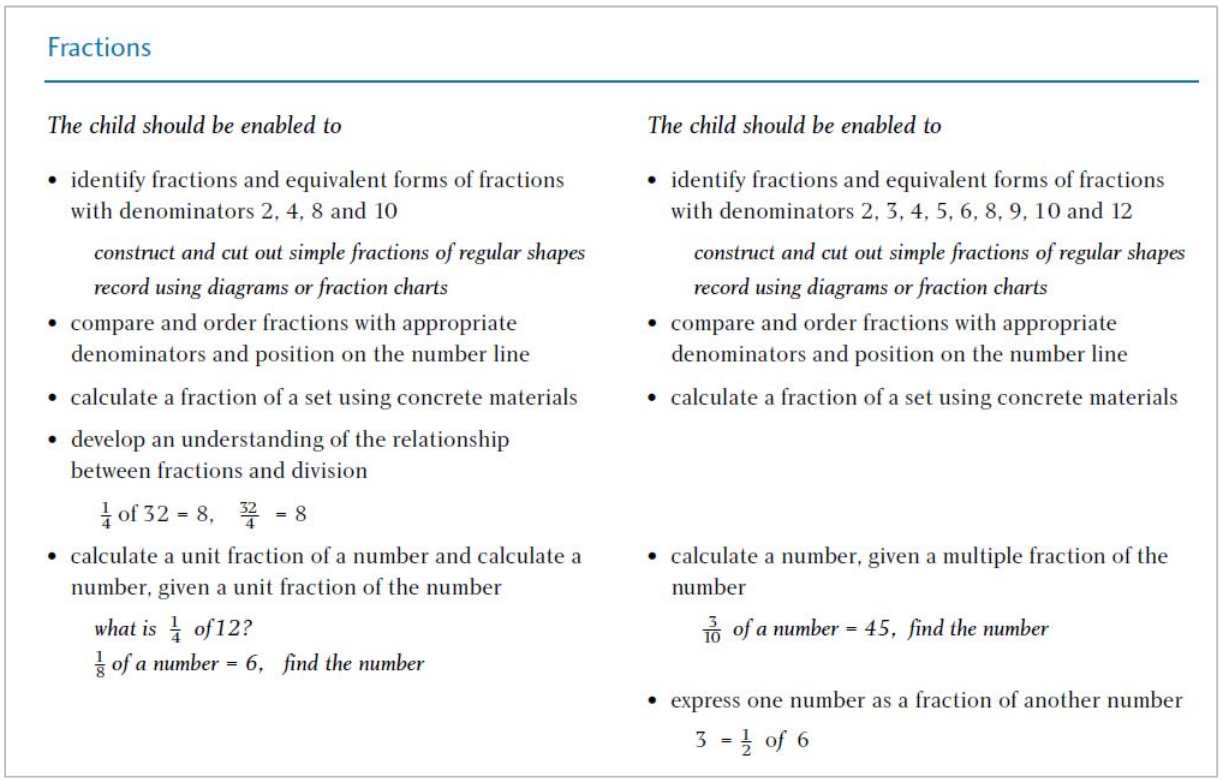
Figure 90. Extrait des instructions officielles québécoises (*op. cit.*, 2001, p. 134)

En 2009, une progression annuelle a été publiée en ligne. Reprenant les contenus des instructions officielles, elle les décline en objectifs commençant par un verbe d'action. Ainsi, on retrouve dans les programmes ci-dessus et dans la progression ci-dessous le même titre de chapitre (« Sens et écriture des nombres »). Trois types d'objectifs sont distingués, selon le degré d'autonomie attendu de l'élève. Une flèche symbolise le cas où « l'élève apprend à le faire avec l'intervention de l'enseignante ou de l'enseignant ». Une étoile symbolise le cas où « l'élève le fait par lui-même à la fin de l'année scolaire ». Une case bleue symbolise le cas où « l'élève réutilise cette connaissance ». Cette progression est construite de la même façon pour l'enseignement primaire et pour l'enseignement secondaire. Afin de pouvoir comparer plus facilement les enseignements menés au Québec et dans les autres pays, nous avons choisi de comptabiliser les items dans la progression, plutôt que dans les instructions officielles proprement dites, dans la mesure où ces dernières ont une structure similaire à celle des instructions officielles des autres pays. Nous avons comptabilisé tous les items, quel que soit le degré d'autonomie attendu de la part de l'élève.

B. Fractions (à l'aide de matériel concret ou de schémas)	1re	2e	3e	4e	5e	6e
1. Reconnaître des fractions se rapportant à des éléments du quotidien (représentations concrètes ou imagées)	→	★				
2. Représenter une fraction de différentes façons à partir d'un tout ou d'une collection	→	→	→	→	→	★
3. Associer une fraction à une partie d'un tout (parties isométriques ou parties équivalentes) ou d'un groupe d'objets et vice versa			→	★		
4. Reconnaître différents sens de la fraction (partage, division, rapport)			→	→	→	→
5. Distinguer le rôle du numérateur de celui du dénominateur			→	★		

Figure 91. Extrait de la progression préconisée au Québec depuis 2009 pour l'école élémentaire (*op. cit.*, 2009a, p. 6)

En République d'Irlande, les instructions officielles destinées aux professeurs des écoles regroupent les années par deux. Ainsi, dans l'exemple ci-dessous, les compétences à assimiler en troisième année sont placées dans la colonne de gauche, tandis que les compétences enseignées en quatrième année sont placées dans la colonne de droite. Pour chaque couple sont imposées des tâches semblables, même si une activité peut dans de rares cas être abandonnée ou ajoutée d'une année sur l'autre. Le plus souvent, ce sont les variables qui évoluent, notamment la nature des dénominateurs utilisés, comme on peut le voir dans notre exemple à propos de la compétence « *Identify fractions and equivalent forms of fractions* ». Pour chaque exemple, des exemples ou des précisions sont apportés en gras. En ce qui concerne le comptage des compétences, nous n'avons pas tenu compte de ces ajouts, nous avons pris en compte les paragraphes matérialisés par des points, qui représentent à notre sens une unité d'apprentissage. Pour le chapitre reproduit ci-dessous, nous avons donc comptabilisé cinq éléments pour la troisième année, et autant pour la quatrième année.



Fractions

The child should be enabled to	*The child should be enabled to*
• identify fractions and equivalent forms of fractions with denominators 2, 4, 8 and 10 ***construct and cut out simple fractions of regular shapes*** ***record using diagrams or fraction charts***	• identify fractions and equivalent forms of fractions with denominators 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 and 12 ***construct and cut out simple fractions of regular shapes*** ***record using diagrams or fraction charts***
• compare and order fractions with appropriate denominators and position on the number line	• compare and order fractions with appropriate denominators and position on the number line
• calculate a fraction of a set using concrete materials	• calculate a fraction of a set using concrete materials
• develop an understanding of the relationship between fractions and division $\frac{1}{4}$ of 32 = 8, $\frac{32}{4}$ = 8	
• calculate a unit fraction of a number and calculate a number, given a unit fraction of the number *what is* $\frac{1}{4}$ *of 12?* $\frac{1}{8}$ *of a number = 6, find the number*	• calculate a number, given a multiple fraction of the number $\frac{3}{10}$ *of a number = 45, find the number*
	• express one number as a fraction of another number 3 = $\frac{1}{2}$ of 6

Figure 92. Extrait des instructions officielles irlandaises pour l'école élémentaire (*op. cit.*, 1999, p. 68)

Dans l'enseignement secondaire, c'est-à-dire à partir de la septième année, le comptage devient beaucoup plus complexe en raison du fonctionnement par cycle. Le programme est donné pour les septième, huitième et neuvième années en un seul bloc, en vue de la préparation à un examen appelé « *Junior Certificate Examination* » et qui se trouve être l'équivalent du brevet français. Nous avons compté les objectifs d'apprentissage matérialisés par des tirets. Ceux-ci apparaissent, dans l'exemple ci-dessous, dans la colonne de droite, et nous en comptons six. Cependant, des informations complémentaires sont fournies au sein de la colonne centrale. Or, il se trouve que les fractions y sont parfois évoquées, alors même que cette notion n'est pas mentionnée dans les objectifs d'apprentissage. Ainsi, à la page 16, il est indiqué dans la description du sujet que « [les élèves] voient un ensemble de données comme un entier et sont ainsi capables d'utiliser les fractions, quartiles et médianes pour décrire ces données ». En revanche, le terme « fraction » n'apparait pas dans les objectifs d'apprentissage. Nous

avons alors cherché à quels objectifs d'apprentissage pouvait être rattachée la notion de fraction évoquée dans la description du sujet. Ici, nous avons considéré qu'il n'en existait qu'un seul, celui pour lequel on demande aux élèves de « sélectionner des méthodes graphiques ou numériques appropriées pour décrire l'échantillon », les fractions constituant un moyen de décrire cet échantillon. Il nous a fallu par ailleurs éliminer les objectifs d'apprentissage transversaux, puisque ceux-ci n'impliquaient pas directement des notions mathématiques identifiables (par exemple, « justifier ses conclusions », ou encore « communiquer à l'oral et à l'écrit »). En géométrie, les tâches à réaliser avec les théorèmes sont dissociées des théorèmes eux-mêmes, ce qui nous conduit à penser que le nombre de combinaisons possibles est très largement supérieur au nombre de tâches que nous avons comptabilisées.

Topic	**Description of topic** Students learn about	**Learning outcomes** Students should be able to
1.6 **Representing data graphically and numerically**	Methods of representing data. Students develop a sense that data can convey information and that organising data in different ways can help clarify what the data have to tell us. They see a data set as a whole and so are able to use fractions, quartiles and median to describe the data. **Mean of a grouped frequency distribution.**	Graphical – select appropriate graphical or numerical methods to describe the sample (univariate data only) – evaluate the effectiveness of different displays in representing the findings of a statistical investigation conducted by others – use pie charts, bar charts, line plots, histograms (equal intervals), stem and leaf plots **and back-to-back stem and leaf plots** to display data – use appropriate graphical displays to compare data sets Numerical – use a variety of summary statistics to describe the data: central tendency – mean, median, mode variability – range, **quartiles and inter-quartile range** **– recognise the existence of outliers**

Figure 93. Extrait des instructions officielles pour l'enseignement secondaire (*op. cit.*, 2014, p. 16)

Pour chaque année de la scolarité, les instructions officielles de Singapour (2006) prévoient un ensemble de compétences. Celles-ci sont classées à l'intérieur d'un titre (par exemple, « Fractions ») et d'un sous-titre (par exemple, « Fractions équivalentes »). Les auteurs précisent ce que les programmes comprennent (« Include »), mais aussi, lorsque c'est nécessaire, ce qu'ils ne contiennent pas, soit en ajoutant la mention « *Exclude* », soit en ouvrant une parenthèse (comme dans l'exemple ci-dessous pour indiquer que les dénominateurs des fractions utilisées ne dépasseront pas douze). Nous avons donc comptabilisé toutes les compétences matérialisées par une puce noire, évidemment à l'exclusion de celles sous la mention « *Exclude* ».

2 FRACTIONS	
Equivalent fractions	Include: • recognising and naming equivalent fractions, • listing the first 8 equivalent fractions of a given fraction, • writing the equivalent fraction of a fraction given the denominator or the numerator, • expressing a fraction in its simplest form, • comparing fractions with respect to half, • comparing and ordering unlike fractions. (Denominators of given fractions should not exceed 12.)

Figure 94. Extrait des instructions officielles singapouriennes (*op. cit.*, 2006, p. 18)

Les compétences présentes dans les instructions officielles du Taipei chinois (2005) sont numérotées, ce qui en facilite le comptage (dans l'exemple ci-dessous, on trouve les compétences 3-n-01, 3-n-02 et 3-n-03). Le nombre de gauche représente l'année (dans notre exemple, la troisième année). La lettre au milieu indique le sujet : « Nombre et quantité », « Géométrie », « Algèbre » et « Statistiques et probabilités » (dans notre exemple, on trouve le « n » qui signifie donc « Nombre et quantité »). Le nombre de droite fait référence au numéro de la compétence au sein du chapitre. Ces compétences indiquent ce qui est attendu des élèves (ainsi, pour la première compétence ci-dessous, « pouvoir reconnaitre », et pour la deuxième et la troisième compétences, « maitriser »). Les auteurs prennent le temps de fournir une explication sous chaque compétence, soit en donnant des exemples, soit en donnant des conseils pour mener la séquence d'apprentissage. Nous avons comptabilisé chacune de ces compétences.

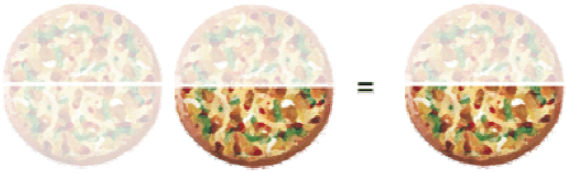
4-n-08	Students can comprehend equivalent fractions to compare fractions with different denominators and interchange simple fractions and decimals.	N-2-08 N-2-13
Explanation:	■ Equivalent fractions are the foundation for adding and subtracting general fractions. It could also be the priming experience of reducing and expanding a fraction. (Refer to 5-n-04). This specific item emphasizes the comprehension of equivalent fractions and the operation will be taught through 5-n-04. ■ Discuss the question "How to divide two pizzas among four kids?" First, teachers not only teach the way to divide each pizza into four pieces, but also introduce the students to the similar question "How to divide one pizza among two kids?".  Below is the result: Two-fourths of a pizza is one-half of a pizza; can be simplified as $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.	

Figure 95. Extrait des instructions officielles du Taipei chinois (*op. cit.*, p. 143)

Si la présentation des instructions officielles est unique chez chacun des participants de notre corpus, nous trouvons des similitudes formelles, telles que la matérialisation des compétences sous la forme de courts paragraphes distincts les uns des autres. Ce choix facilite le comptage des différentes compétences dont l'apprentissage est imposé. Il n'y a que dans l'enseignement secondaire (en particulier en Angleterre et à Hong Kong SAR) que l'on trouve une écriture linéaire pour décrire les contenus d'enseignement. Cependant, les paragraphes sont dans ce cas suffisamment concis pour que chaque phrase désigne, le plus souvent, une compétence comptabilisable. Nous concédons que cet exercice de comptage ne peut pas conduire à des données précises, dès lors que certains choix doivent être opérés, et que d'autres auraient pu conduire à des résultats différents. Toutefois, notre démarche consiste à décrire la place prise par les fractions dans les instructions officielles et façon à les comparer aux résultats obtenus, et des variations minimes dues à la méthodologie de comptage n'entraineront pas, à notre sens, de modifications quant aux conclusions que nous pourrons tirer à ce sujet : les écarts entre les pays sont plus importants que ceux inhérents aux critères sélectionnés pour le comptage.

B. Comparaison inter-pays

Pour avoir une estimation de l'importance accordée à la notion de fraction par les auteurs, nous avons comptabilisé le nombre total d'items dans le curriculum de chaque pays (N_t), et le nombre d'items consacrés aux fractions (N_f). Ensuite, nous avons calculé le rapport entre les deux (N_f/N_t) afin de connaitre la part des items consacrés aux fractions dans l'ensemble des items (annexes 257 à 266). Cette méthodologie passe sous silence des différences inter-pays très importantes en ce qui concerne le nombre d'items identifiés dans chacune des instructions officielles (notamment entre la Floride, territoire pour lequel nous en avons comptabilisé 174 entre la première et la huitième année de scolarité obligatoire, et le Québec, territoire pour lequel nous en avons comptabilisé 1244). Toutefois, nous avons estimé que ces nombres correspondait à des spécificités rédactionnelles qui n'apportaient pas matière à une réflexion didactique dans le cadre de notre recherche. Par exemple, au Québec, la plupart des types de tâches sont étudiés pendant plusieurs années, ce qui augmente fortement à la fois le nombre de types de tâches à enseigner chaque année, et le nombre total de types de tâches étudiés au cours de l'ensemble des années scolaires que nous avons évoquées. Par ailleurs, pour compter les items relatifs aux fractions, nous avons retenu une acception large de ce concept, en incluant les activités préparatoires que nous avons analysées précédemment comme pouvant être rattachées au concept de fraction. Une autre méthode aurait pu être de comptabiliser les types de tâches pour chaque année, à partir de la liste construite dans la première partie de cette recherche. Néanmoins, cela n'a pas été possible : un même intitulé dans les programmes peut impliquer deux types de tâches. Par exemple, les programmes de cinquième année de Singapour imposent de « convertir les écritures décimales en fractions et vice versa » (ibid., p. 26), ce qui correspond dans notre liste aux tâches « Convertir des écritures décimales en fractions » et « Convertir des fractions en écritures décimales ». Pour ne pas surévaluer le nombre de types de tâches impliquant des fractions par rapport aux types de tâches n'impliquant pas des fractions, il aurait alors fallu déterminer le nombre de types de tâches différents dans tous les intitulés de chacun des programmes, ce qui représentait un travail trop important.

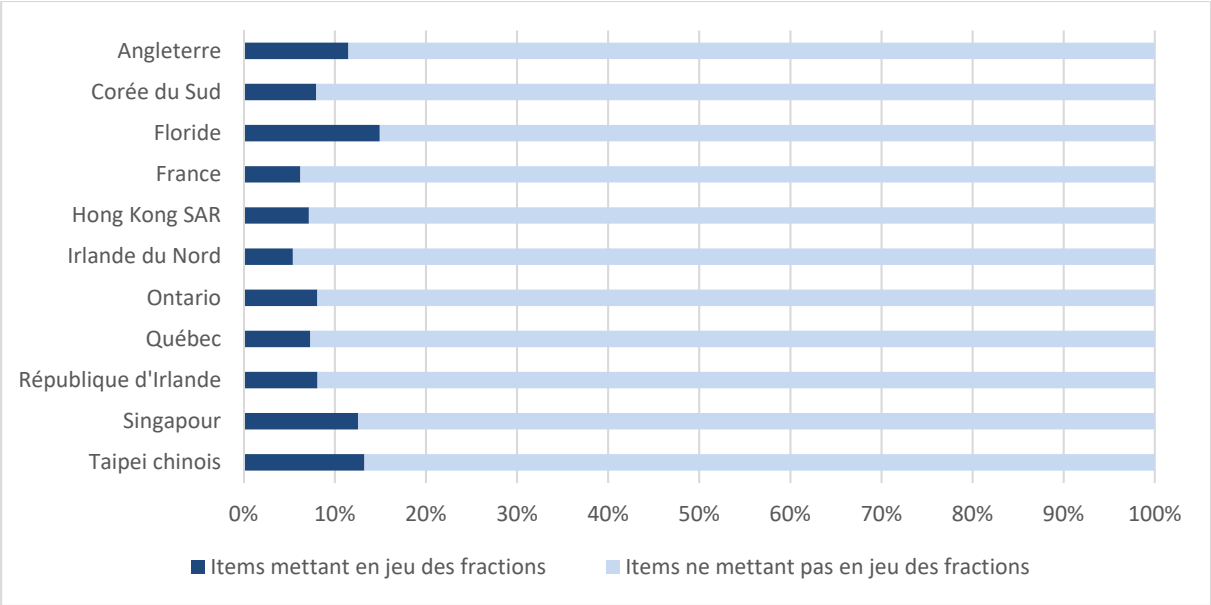


Figure 96. Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015

Quand on met au jour les pays pour lesquels le pourcentage d'items mettant en jeu des fractions est supérieur à 10 % (Angleterre, Floride, Singapour, Taipei chinois) et les autres, on s'aperçoit qu'il n'y a pas à ce sujet de spécificités régionales (dans le sens d'une distinction entre les pays nord-américains, européens et asiatiques). De plus, ces participants obtiennent des résultats très divers aux évaluations TIMSS dans le domaine des fractions. Par exemple, le taux de réussite à ces items est semblable à Singapour (82,9 %) et à Hong Kong SAR (83 %). Pourtant, l'importance que semble accorder le législateur aux fractions dans ces deux territoires est différente, si on la mesure à travers les pourcentages d'items impliquant des fractions dans les programmes (avec respectivement 13 % et 7 %). Nous remarquons également qu'en France, ce taux est faible comparativement aux autres pays du corpus, avec cette particularité qu'il s'agit du pays dans lequel le nombre d'items impliquant des fractions au cours de la scolarité est le plus bas en valeur absolue (21). En Irlande du Nord, la part des fractions est moindre, mais le nombre de types de tâches identifiées comme différentes est supérieur (30). De plus, nous ne disposons pas des données au-delà de la cinquième année. Or, il est probable que cette part augmente dans l'enseignement secondaire, au vu des constatations que nous avons effectuées à propos des autres participants. Les spécificités régionales apparaissent lorsqu'on s'intéresse à l'évolution de ce taux au fil années scolaires. Dans les pays asiatiques de notre corpus, les apprentissages relatifs aux fractions semblent prendre, progressivement, une part de plus en plus importante au sein des instructions officielles, jusqu'en cinquième ou sixième année. Ces années-là, les types de tâches impliquant des fractions représentent entre 20 % et 38 % de l'ensemble. Ensuite, ce taux diminue progressivement jusqu'à la huitième année (sauf en Corée du Sud, où la courbe remonte légèrement entre la septième et la huitième année).

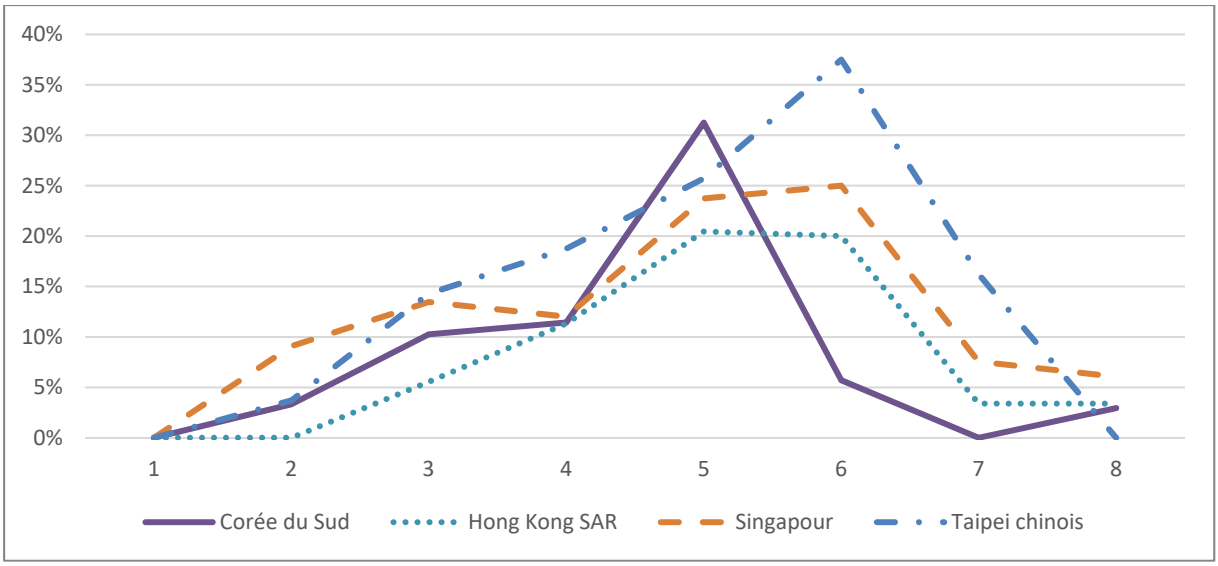


Figure 97. Évolution de la part des items mettant en jeu des fractions dans les programmes scolaires asiatiques entre la première et la huitième année de scolarité obligatoire au moment des évaluations TIMSS 2015

Dans les pays occidentaux, on retrouve cette forme de courbe à propos du curriculum de la République d'Irlande. Toutefois, le taux maximal d'items mettant en jeu des fractions est plus faible que pour les pays asiatiques (18 %). En ce qui concerne les autres pays, les fractions peuvent représenter dans la scolarité une proportion assez stable des apprentissages (au Québec) ; représenter une forte proportion des apprentissages au début, pour ensuite décliner (en France et en Angleterre) ; représenter une part progressivement plus importante des apprentissages jusqu'en cinquième année, puis assez stable par la suite (Ontario). La Floride représente un cas particulier pour deux raisons. D'une part, c'est le seul territoire occidental dans lequel les pourcentages les plus élevés dépassent 20 %, c'est-à-dire qu'ils sont semblables à ceux que nous avons calculés chez les participants asiatiques. D'autre part, il s'agit du seul cas pour lequel nous observons deux « pics », l'un en troisième année (où les intitulés concernant des fractions représentent 29 % du total), et l'autre en sixième année (où ils représentent 32 % du total). Dans le graphique ci-contre, nous n'avons pas représenté l'Irlande du Nord, en raison de l'impossibilité d'analyser le curriculum de ce pays jusqu'en huitième année.

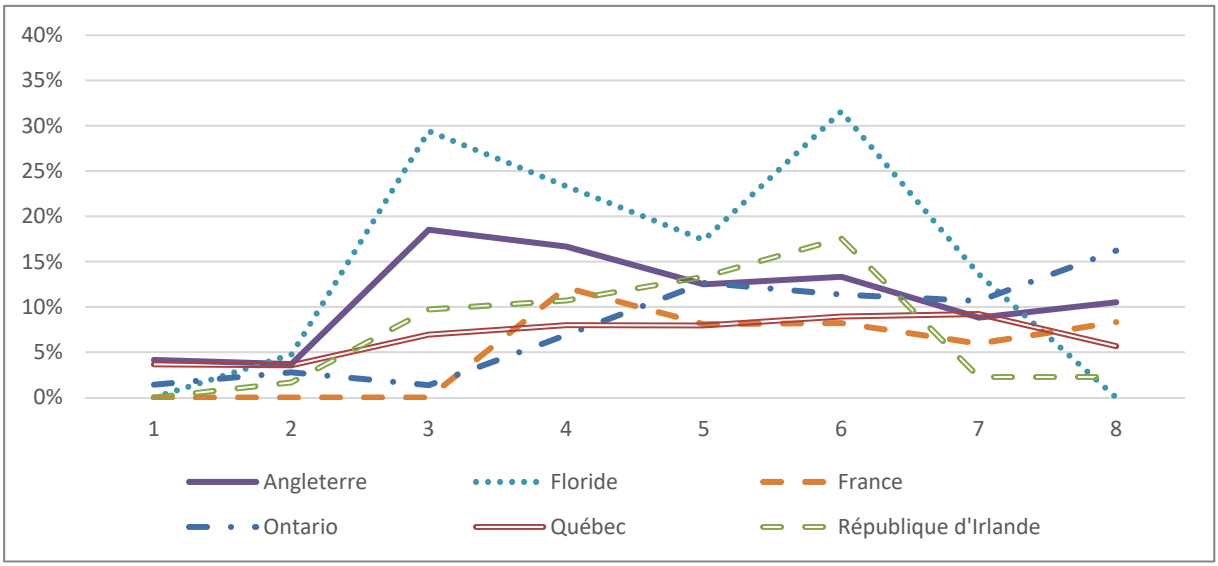


Figure 98. Évolution de la part des items mettant en jeu des fractions dans les programmes scolaires occidentaux entre la première et la huitième année de scolarité obligatoire au moment des évaluations TIMSS 2015

Proportionnellement, les élèves anglais et floridiens réalisent donc un travail plus important sur les fractions que les élèves asiatiques jusqu'en quatrième année. Certes, ils obtiennent des scores bien plus faibles. Toutefois, nous notons que la Floride est à la fois le territoire dans lequels ces pourcentages sont les plus élevés jusqu'en quatrième année et celui qui obtient, parmi les participants occidentaux, le taux de réussite le plus élevés, aux items des évaluations TIMSS 2015, dans le domaine des fractions (69,2 %). Ces observations devraient toutefois faire l'objet d'analyses plus approfondies, car les différences rédactionnelles identifiées dans les programmes rendent les comparaisons délicates. En outre, l'utilisation d'autres sources pourraient permettre de compléter ces résultats, ce que nous allons faire à partir des indications temporelles contenues dans certains programmes et des déclarations des professeurs.

§ 2. En utilisant d'autres sources permettant d'estimer le temps passé à étudier les fractions

Notre étude repose sur l'analyse des programmes d'enseignants et des données fournies par TIMSS. Or, le temps consacré à l'enseignement d'un concept tel que celui de fraction n'est jamais précisé, ni dans les uns, ni dans les autres. Néanmoins, quelques indications peuvent être relevées à partir de ces deux sources. Ces pistes tiennent au cas où le législateur, sans donner une durée, pondère le temps que les enseignants doivent passer sur chaque séquence d'enseignement qu'il prévoit dans ses programmes (A), ainsi qu'aux choix effectués par les enseignants à propos de la durée allouée à l'étude des nombres, par rapport aux autres domaines mathématiques (B).

A. La pondération par le législateur du temps passé sur chaque item

Nous faisons ici référence aux seuls programmes d'enseignement de Hong Kong SAR qui suggèrent une allocation d'unités de temps pour chacune des compétences qu'il impose. L'emploi du verbe « suggérer » montre déjà l'étendue du rôle des enseignants dans la détermination de la durée qui doit être consacrée à chaque élément du programme : la répartition proposée n'a rien d'obligatoire. En outre, l'utilisation d'unités de temps dont la nature n'est pas définie entretient ce flou : il n'est pas dit aux enseignants qu'ils doivent consacer 5 heures à l'étude des fractions, mais 5 unités de temps qui doivent être mises en relation avec la globalité des unités de temps. Ces unités correspondent à des périodes d'enseignement (« *teaching periods* ») dont la durée n'est pas explicitée. De plus, le nombre total de séances dans l'année se situe autour de 130, mais il est variable.

En comparant la proportion des items relatifs aux fractions par rapport à l'ensemble des items et les unités de temps qui leur sont consacrées par rapport à l'ensemble des unités de temps, nous souhaitons déterminer si le législateur met l'accent sur cet apprentissage (auquel cas le pourcentage d'unités de temps sera supérieur au pourcentage d'items comptabilisés) ou si les fractions constituent pour lui un apprentissage auquel il accorde une moindre importance (auquel cas le pourcentage d'unités de temps sera inférieur au pourcentage d'items comptabilisés). Certaines périodes d'enseignement mêlent toutefois des apprentissages relatifs aux fractions et d'autres apprentissages. Dans l'exemple que nous avons reproduit au sein du paragraphe évoquant la méthodologie de comptage, les auteurs prévoient cinq unités de temps pour achever le chapitre consacré aux nombres décimaux, à l'intérieur duquel se trouve l'item « Reconnaitre les notations décimales comme une autre façon de noter les fractions », qui concerne les fractions, et l'item « Reconnaitre l'utilité des décimaux dans des situations

de la vie quotidienne », qui ne concerne pas les fractions. Comme deux items sur trois concernent les fractions, nous avons comptabilisé les 2/3 des 5 unités de temps allouées à ce chapitre. Ainsi, nous avons pu élaborer un indicateur précis mesurant la proportion du temps scolaire que les professeurs doivent consacrer au sujet de notre étude chaque année. Nous avons pu observer que la place accordée aux fractions est nettement plus importante lorsqu'on suit les recommandations temporelles des auteurs, par rapport au cas où l'on se fie à la part des compétences écrites dans les instructions officielles. Pour l'ensemble de la scolarité, on passe d'une proportion moyenne des enseignements relatifs aux fractions de 7 % chaque année en prenant appui sur le nombre d'items inscrits dans les programmes ayant trait aux fractions, à 12 % selon la répartition temporelle définie par les auteurs (annexe 267). De plus, il existe une très forte corrélation linéaire entre les deux proportions mesurées pour chaque année scolaire ($R^2 = 0,98$), ce qui signifie que les fractions sont, à Hong Kong SAR et quelle que soit l'étape de la scolarité, un thème sur lequel il faut passer plus de temps en moyenne que sur les autres sujets, dans des proportions semblables.

Les instructions officielles dans les autres pays du corpus ne prévoient pas une telle description temporelle de la progression à suivre en mathématiques. Parfois, d'autres éléments, moins explicites, permettent de comprendre que les fractions constituent un élément important des programmes. Par exemple, en Angleterre, dans les instructions officielles de 2014, les auteurs indiquent qu'en troisième et quatrième années, « le principal objectif de l'enseignement des mathématiques […] est de faire en sorte que les élèves maîtrisent de mieux en mieux les nombres entiers et les quatre opérations, y compris les chiffres et le concept de valeur en fonction de la position » (*op. cit.*, 2014, p. 122). De même, en cinquième et sixième années, « le principal objectif […] est de faire en sorte que les élèves approfondissent leur compréhension du système de numération de position pour inclure des nombres entiers plus grands » (*ibid.*, p. 135). On voit ici que l'accent est mis sur la maitrise des nombres entiers, plus que sur l'apprentissage des fractions. De telles précisions sont toutefois assez rares dans les programmes d'enseignement que nous avons consultés, et cela interdit donc toute comparaison pertinente entre les pays qui forment notre corpus à ce sujet. En conséquence, le temps alloué aux fractions est sans doute parfois bien supérieur à ce que laisse penser l'analyse réalisée à partir du comptage des items dans nombre de pays. Néanmoins, il faut aussi envisager qu'il puisse être plus faible chez certains participants. On voit donc que l'importance accordée aux fractions par le législateur telle que nous l'avons mesurée à partir des items fait sans aucun doute l'objet d'ajustements en pratique.

B. Le temps passé à l'étude des nombres d'après les enseignants

Pour définir si les enseignants mettaient davantage l'accent sur l'étude des nombres dans certains pays, nous nous sommes appuyé sur les items du questionnaire qui leur était destiné en 2011[1], ces questions n'apparaissent pas dans le questionnaire de 2015. En conséquence, par rapport aux pays que nous étudions habituellement, le point de vue des professeurs français ne pourra être traité en quatrième année, et le point de vue des professeurs irlandais ne pourra être traité en huitième année (ces deux pays n'ayant pas participé aux évaluations TIMSS 2011). L'énoncé fourni par les auteurs des questionnaires était le suivant (annexes 268 et 269) : « À la fin de cette année scolaire, quel pourcentage

1. Il s'agit de l'item TQM-08 pour la quatrième année, et de l'item TQM-24 pour la huitième année.

approximatif de temps d'enseignement avez-vous consacré à [nom du domaine] avec les élèves de cette classe ? » Quatre domaines mathématiques avaient été retenus dans le premier degré :

- nombres et calculs ;
- géométrie ;
- données et graphiques ;
- autres.

Dans le second degré, cinq domaines avaient été proposés, avec l'ajout de l'algèbre et la modification de l'intitulé de la colonne « données et graphiques » en « données et probabilités ». Il en ressort que les écoliers passent en moyenne environ la moitié du temps d'étude des mathématiques sur des questions numériques. Les écarts sont assez faibles entre les participants, puisqu'entre l'Ontario (où les nombres et le calcul représentent 49,4 % du temps d'enseignement) et l'Angleterre (où les nombres et le calcul représentent 57,3 % du temps d'enseignement), nous trouvons sept des dix pays de notre corpus. Seule la Corée du Sud se démarque, dans la mesure où la part consacrée à ce domaine y est nettement plus faible qu'ailleurs, avec 37,9 % du temps d'enseignement. À la place, les élèves sud-coréens passent plus de temps que les autres à travailler la gestion de données et les exercices impliquant des graphiques. Hong Kong SAR est le territoire dans lequel l'apprentissage de la géométrie est le plus mis en valeur, même si les écarts sont faibles. En outre, le participant qui arrive en deuxième position est la Corée du Sud, et celui qui arrive en troisième position est le Taipei chinois, ce qui montre que, chez ces participants qui réussissent pourtant très bien aux items impliquant des fractions, l'accent ne semble pas mis plus qu'ailleurs sur l'étude des nombres.

Chez les collégiens, le domaine numérique représente une part nettement moins importante qu'à l'école élémentaire (celle-ci ne représente que 19,6 % du temps d'enseignement en moyenne). Cette baisse se fait au profit de l'étude de l'algèbre (qui représente 34,3 % du temps d'enseignement en moyenne). Si l'on additionne ces deux pourcentages, on retrouve l'idée que les nombres, pris dans une acception large incluant le domaine numérique et le calcul, constituent un peu plus de la moitié du temps d'étude des mathématiques. Finalement, le domaine numérique au sens strict (sans inclure l'algèbre) continue représenter une part importante de l'ensemble en Angleterre (28,1 %) et surtout dans l'Ontario (32,4 %). Or, les scores obtenus par ces deux participants aux évaluations TIMSS 2011 en ce qui concerne les fractions (avec respectivement 48,2 % et 52,5 % de réussite) sont les deux plus faibles de notre corpus après ceux de la Floride. Nous ne concluons pas que le fait de passer moins de temps à étudier les nombres au collège permettra d'obtenir de meilleurs résultats concernant les fractions : le temps consacré au domaine numérique est peu important en Floride (16,4 %) puisque les élèves de cet État approfondissent l'algèbre (qui représente 50,7 % du temps d'enseignement), et pourtant le score obtenu aux évaluations est encore plus bas que celui de l'Angleterre et de l'Ontario. On en déduit plutôt que le fait de passer du temps à étudier les nombres et le calcul ne garantit pas de bonnes performances aux items qui y ont trait, tels ceux qui mettent en jeu des fractions.

Conclusion de la sous-section

Notre analyse quantitative menée à partir du comptage des items relatifs aux fractions dans les programmes scolaires a montré que leur part dans les instructions officielles était assez

variée (entre 5 % et 15 %, en moyenne, entre la première et la huitième année). Toutefois, nous n'avons pas pu relier ce pourcentage aux résultats des élèves, sauf possiblement en Floride, où leur réussite par rapport à celle des autres pays occidentaux s'explique sans doute en partie par la proportion particulièrement importante représentée par les fractions dans les programmes scolaires de troisième et de quatrième année. Pour le vérifier, encore faudrait-il pouvoir relier les contenus de ces derniers aux tâches mises en jeu dans les tests, ce que nous ferons ultérieurement dans cette recherche. Par ailleurs, des différences régionales apparaissent lorsqu'on s'intéresse à l'évolution de ces taux au fil de la scolarité. Dans les territoires asiatiques, c'est en cinquième et en sixième année que l'on trouve les pourcentages les plus importants, tandis que pour les autres années, ils sont beaucoup plus faibles. L'écart-type entre les pourcentages calculés pour les différentes années est plus faible dans les territoires européens et nord-américains. En outre, les taux maximaux y sont le plus souvent beaucoup plus bas. Ces considérations piquent notre curiosité : une amélioration des résultats se ferait-elle sentir si l'on augmentait la part consacrée aux fractions dans les programmes ? Nous aurons l'occasion d'évoquer cette question ultérieurement dans notre recherche, à propos de l'Angleterre, puisque les instructions officielles de ce pays ont beaucoup évolué sur ce point entre 1995 et 2014.

Conclusion de la section consacrée à la durée des enseignements et des apprentissages en mathématiques

Quand on demande aux élèves à quelle fréquence il leur arrive de manquer les cours, on s'aperçoit que l'assiduité est la plus forte chez les écoliers sud-coréens (annexes 270 et 271) : 92,9 % d'entre eux se disent « jamais ou presque jamais absents », tandis qu'ils ne sont que 67,8 % en Floride et 65,3 % dans l'Ontario. Dans l'enseignement secondaire, on perçoit une nette différence entre les territoires asiatiques de notre corpus et les territoires occidentaux. D'abord, dans les premiers, le pourcentage d'élèves qui indiquent n'être « jamais ou presque jamais absents » est systématiquement supérieur à celui observé en quatrième année, tandis que dans les seconds, il est systématiquement inférieur. En outre, il existe un écart notable entre la moyenne des pourcentages d'élèves indiquant n'être « jamais ou presque jamais absents » chez les participants asiatiques que nous étudions (88,7 %) et chez les participants occidentaux (62 %). Cela tend à montrer une implication plus forte des premiers dans le travail scolaire, et conforte les observations que nous avons faites à propos du travail personnel des élèves, qui est beaucoup plus long, en particulier pour les élèves les plus jeunes, dans les territoires asiatiques

(soit en raison du temps passé sur les devoirs, soit en raison de la quantité de cours pris en dehors du temps scolaire, comme en Corée du Sud) que dans les territoires occidentaux.

L'exemple de l'assiduité montre également que les interrogations que le thème du travail fourni par les élèves soulève sont plus larges et plus complexes que ce que les réponses aux questionnaires nous permettent d'aborder. Par exemple, l'intensité du travail fourni par les élèves n'a pas été prise en compte dans les enquêtes TIMSS. Or, c'est le lien entre la durée et l'intensité qui définit la quantité de travail effectuée. Néanmoins, nous avons pu dégager quelques pistes. Ainsi, la durée des apprentissages semble fortement corrélée à l'obtention d'un score élevé aux évaluations TIMSS, mais, plus que le temps scolaire, c'est le temps passé à étudier en dehors de l'établissement qui parait donner un avantage aux pays asiatiques de notre corpus. En outre, la répartition des durées d'enseignement entre les différents domaines qui composent les mathématiques est assez similaire en quatrième année, alors qu'en huitième année, les pays les plus performants ont délaissé le domaine numérique pour l'algèbre, ce qui montre chez eux une progression plus rapide et plus nette dans l'acquisition des savoirs, confirmant l'idée que la quantité de travail effectuée par les élèves a une incidence sur la manière dont les enseignants tranposent didactiquement les savoirs. Nous avons également mis au jour des différences inter-pays concernant la part des programmes consacrés aux fractions (par exemple, son augmentation plus régulière, en début de scolarité, dans les pays asiatiques). L'une des questions que nous posons dans la section suivante est de déterminer la part des items impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS, afin de définir le degré d'adéquation entre les choix effectués par les législateurs et ceux réalisés par les auteurs de TIMSS.

Section II. Les fractions dans les évaluations TIMSS

Les évaluations TIMSS sont rédigées au sein du centre d'études internationales TIMSS & PIRLS, dont le siège est situé dans les locaux de la *Lynch School of Education* de l'Université de Boston (Massachusetts). Ce bureau est actuellement dirigé par Ina Mullis et Michael Martin, tous deux étant d'anciens professeurs de l'université qui les accueille. Le risque de mettre en avant dans les tests une vision anglosaxone des compétences attendues aux différents stades de la scolarité doit donc être examiné, quand bien même ce groupe de travail est placé sous l'égide de l'*International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (I.E.A.), association enregistrée en Belgique et dont les bureaux se situent à Amsterdam et à Hambourg. Cette association est une organisation internationale à but non lucratif dont l'objet est de

favoriser la coopération entre les institutions, gouvernements et agences de recherche par le biais de tests réalisés dans le domaine de l'éducation.

Les exercices inclus dans TIMSS sont créés au sein du centre d'études internationales TIMSS & PIRLS en relation avec des coordinateurs de recherche et experts nationaux appartenant aux pays objets de l'étude[1]. Un cadre de recherche est défini en amont et limite le champ des possibles. Les coordinateurs nationaux donnent leur point de vue sur la manière dont pourront être corrigés les items et permettent de s'assurer qu'une traduction précise de ces derniers, qui sont en première instance rédigés en anglais, est possible. Des experts sont par ailleurs invités à donner leur avis sur la pertinence des items ainsi élaborés. Pour les évaluations de 2015, le consultant principal était Liv Sissel Gronmo, de l'université d'Oslo. Toutefois, étant donnée la variété des tâches que l'on peut envisager autour de la notion de fraction, il est évident que les évaluations TIMSS ne pourront en proposer qu'une partie. C'est pourquoi il nous semble indispensable de définir quels sont les types de tâches relatifs aux fractions évalués par TIMSS et d'expliquer quelle place occupe ce concept dans les tests. Nous allons donc étudier dans une première sous-section la place des fractions au sein des évaluations TIMSS. Dans une seconde sous-section, nous traiterons des tâches impliquant des fractions au sein de ces mêmes évaluations.

Sous-section I. La place des fractions au sein des évaluations TIMSS

Nous nous intéresserons d'abord à l'importance prise par les fractions dans les tests (§ 1), puisqu'un nombre suffisant d'exercices dans lesquels les fractions sont mises en jeu est la condition *sine qua non* pour que les résultats que nous présenterons ultérieurement nous permettent de formuler des conclusions générales. Ensuite, nous pourrons évoquer le lien qui existe entre d'une part, l'acquisition du concept de fraction par les élèves, et d'autre part leurs performances en mathématiques en général (§ 2). Ainsi, nous indiquerons si les spécificités relevées dans les curriculums à propos de la part occupée par les fractions sont corrélées aux résultats des élèves dans ce domaine.

1. La procédure d'élaboration des items est décrite de façon détaillée dans le document de l'I.E.A. intitulé *Methods and Procedures in TIMSS 2015* (2016d, paragraphes 1.2 et 1.3).

§ 1. L'importance des fractions dans les évaluations

La quantité d'items impliquant des fractions (A) va déterminer pour partie la portée de notre étude : si ce nombre est trop faible, il ne nous sera pas possible de tirer des conclusions générales. D'autres études seront nécessaires pour confirmer ce que nous n'aurons pu établir à partir de données trop peu nombreuses. Si le nombre d'items impliquant des fractions est suffisamment important, il faut également qu'il représente une part non négligeable dans le total des items. Ce n'est qu'à ces conditions que l'on pourra envisager la possibilité d'un transfert des observations réalisées à d'autres thèmes abordés dans les évaluations. C'est pourquoi nous allons mesurer également la part des fractions dans les évaluations (B).

A. Le nombre d'items impliquant des fractions

Les items soumis aux élèves sont classés par les auteurs de TIMSS selon plusieurs critères[1]. Le domaine mathématique est systématiquement mentionné par les auteurs : il peut s'agir d'un item relatif aux nombres ou au calcul, aux formes géométriques et aux mesures, aux données et graphiques (pour les écoliers), ainsi qu'à l'algèbre et aux probabilités (pour les collégiens). À l'intérieur de chaque domaine, des distinctions sont faites. Par exemple, dans le domaine numérique, en quatrième année, on distingue les items qui incluent des « nombres entiers », ceux qui traitent des « fractions et décimaux ». Néanmoins, les exercices classés dans cette dernière catégorie ne sont pas triés selon qu'ils mettent en jeu des écritures décimales ou décimales, ce qui nous empêche d'utiliser cette classification pour sélectionner les items se rapportant aux fractions. C'est pourquoi, comme pour l'analyse des programmes, nous n'avons pas tenu compte de l'intitulé de la catégorie choisie par les auteurs des évaluations pour réaliser notre sélection. Cela nous a contraint à analyser les items un par un, pour vérifier s'ils correspondaient aux critères définis, c'est-à-dire à l'un des types de tâches au moins que nous avons identifiés en parcourant les programmes scolaires des pays de notre corpus.

Toutefois, tous les items n'étant pas rendus publics, il nous a fallu tenir compte des redondances au fil des différents tests pour inclure le plus d'items possible à travers l'utilisation des almanachs. Il arrive en effet assez souvent que des items soient publiés après avoir été

1. Les données sont regroupées dans une feuille de calcul appelée *Item Information Tables* disponible dans l'onglet *International Database* du site officiel consacré aux évaluations TIMSS 2015.

proposés aux élèves dans des évaluations précédentes, sans publication. Par exemple, un item intitulé « Recipe for 3 people » (M0503, grade 4) a été publié dans le cadre des évaluations TIMSS 2011. Après avoir constaté que l'exercice mettait bien en jeu le concept de fraction, nous avons repris la liste des items des évaluations précédentes, afin de voir si cet item avait déjà été proposé aux élèves. Nous avons trouvé deux intitulés identiques en 2003 et 2007, dont les résultats des élèves étaient assez proches de ceux de 2011. Nous avons alors considéré qu'il s'agissait d'items mettant en jeu le même type de tâches, et nous les avons intégrés à l'analyse. Il convient toutefois d'être prudent dans les conclusions que nous pourrons tirer de ces items dont le contenu reste inaccessible. Après leur publication, il est rare de voir des items réutilisés à nouveau par les auteurs, mais cela est déjà arrivé. Or, la comparaison d'items ayant été publiés deux fois sous le même intitulé montre que, si la tâche reste la même, les variables peuvent changer. Par exemple, dans un exercice dont la consigne était simplement de calculer la somme de trois fractions, ces dernières étaient différentes en 1995 (3/4 + 8/3 + 11/8) et en 2007 (2/5 + 5/4 + 9/8). Certes, il s'agit toujours de trouver un dénominateur commun qui n'est aucun de ceux qui apparaissent dans les termes de l'addition. Néanmoins, ce dénominateur, qui pouvait être 24 en 1995, ne pourra être inférieur à 40 en 2007. Or, pour ce type de tâches, plus les nombres en jeu sont grands, plus le risque de se tromper est important. De même, pour un exercice consistant à identifier la représentation circulaire d'une fraction représentée initialement sous une forme rectangulaire, la fraction en jeu était 10/18 en 1995 et 5/12 en 2007 : le type de tâches est identique, mais les nombres sont différents (cette fois le niveau de difficulté a diminué entre les deux évaluations). Nous verrons ultérieurement dans notre étude que ces variables peuvent revêtir une grande importance.

Par ailleurs, des exercices qui mettent en jeu des fractions sont classés dans d'autres domaines que les nombres et le calcul. Par exemple, un exercice visant à faire tourner une forme géométrique d'un quart de tour (TIMSS 2011, grade 4, M0511) est classé dans le domaine « Formes géométriques et mesures », alors qu'il est tout à fait pertinent pour notre analyse. De façon semblable, un exercice consistant à déterminer, sous la forme d'une fraction, la probabilité de tirer une bille rouge (TIMSS 2011, grade 8, M0213) est classé dans le domaine « Probabilités », alors que le concept de fraction est essentiel pour parvenir à le réussir. Nous avons donc retenu tous les exercices qui mettaient en jeu des types de tâches relatifs aux fractions, sans nous cantonner aux exercices appartenant au domaine numérique. Les champs de la géométrie, des probabilités, mais aussi des graphiques nous ont permis d'enrichir notre liste d'items retenus pour l'analyse.

En revanche, nous n'avons pas tenu compte, pour notre analyse, d'exercices mettant pourtant en jeu des fractions, dès lors que la maitrise de ce concept n'était pas centrale pour la réussite de l'élève. Nous avons notamment éliminé de notre liste tous les exercices d'algèbre, par exemple lorsqu'on demande aux élèves de résoudre l'inéquation $x/2 < 7$ (TIMSS 1995, grade 8, K4) ou lorsqu'on leur demande de déduire la valeur de $a/2b$ à partir de l'égalité $a/b = 70$ (TIMSS 2003, grade 8, M1005). Nous avons également écarté tout exercice de calcul de durée comportant une donnée en fraction, dans la mesure où la difficulté principale est relative non aux fractions, mais aux calculs portant sur le système sexagésimal (par exemple, pour un exercice consistant à ajouter trois quarts d'heure à 6 h 40 min [TIMSS 2003, grade 8, M0312]).

Parfois, une fraction est présente dans l'énoncé, mais la question est sans rapport avec les fractions. Par exemple, les élèves n'ont pas besoin de connaissances approfondies à propos de ce concept pour traiter l'énoncé suivant : « lorsqu'on lance une pièce, la probabilité qu'elle tombe face vers le haut est de 1/2. Durant quatre lancers successifs, la pièce tombe face vers le haut. Quelle est la probabilité qu'elle tombe face vers le haut au cinquième lancer ? » (TIMSS 1999, grade 8, F08). La probabilité pourrait être exprimée autrement qu'avec une fraction, cela ne changerait rien à la nature de l'exercice, dont l'objectif est de mesurer la compréhension par l'élève du fait que la probabilité d'obtenir un résultat n'est pas modifiée par le nombre de fois que l'on réalise l'expérience. C'est le cas également lorsque ce qui apparait au premier abord comme une écriture fractionnaire constitue simplement un motif dont il s'agit de trouver la suite : « quel est le prochain terme de la suite : 1/2 ; 2/3 ; 3/4 ; 4/5 ; 5/6 ? » (TIMSS 2011, grade 8, M0605). Enfin, nous avons éliminé les items dans lesquels la fraction n'est qu'un distracteur : elle fait partie des réponses possibles parmi d'autres écritures dans un questionnaire à choix multiples, mais ce n'est pas la réponse attendue (pour un exemple, TIMSS 2003, grade 8, M0202).

Dans la sélection des items impliquant le concept de fraction, nous ne prétendons pas à l'exhaustivité. S'il est douteux que la formulation d'un énoncé induise un exercice contenant des fractions, et que celui-ci ne peut pas être rattaché à un item ayant été publié ultérieurement ou précédemment, nous l'avons tout simplement écarté de l'analyse. Après comptage des items retenus, nous parvenons à une liste arrondie à l'unité de 12 éléments en moyenne pour chaque millésime du test en quatrième année, 23 éléments en huitième année, soit un total de 200 items pour l'ensemble des évaluations. Toutefois, comme on peut le voir sur le graphique ci-contre, les variations inter-années sont importantes, en particulier en huitième année.

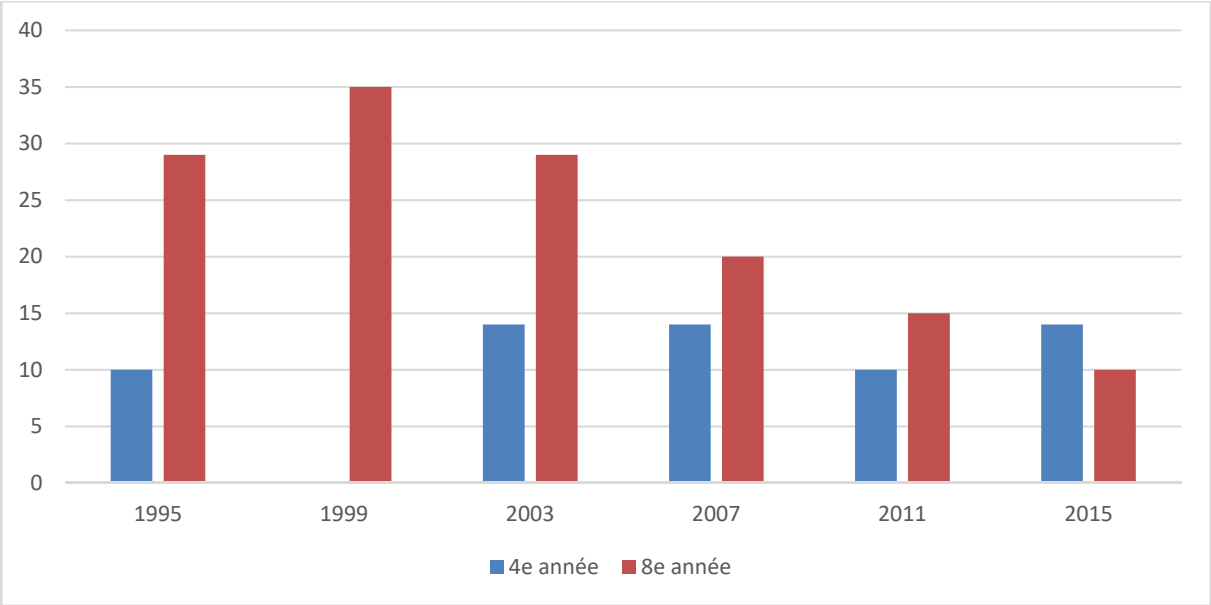


Figure 99. Nombre d'items identifiés comme impliquant des fractions dans les tests de quatrième et huitième année depuis 1995

À travers la lecture du graphique ci-dessus, on constate que le nombre d'items impliquant des fractions que nous avons identifiés est assez stable dans le premier degré. En revanche, il accuse une baisse régulière depuis 1999 dans le second degré. Celle-ci provient pour partie du faible nombre d'exercices non publiés que nous avons pu rattacher à des exercices rendus publics au cours des années précédentes dans les évaluations les plus récentes (en particulier en 2015). Néanmoins, cette baisse apparait même lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux éléments inédits des différents tests. Quand nous évoquerons les attentes des auteurs des tests relatives à la maitrise du concept de fraction, il nous faudra donc voir si celles-ci sont stables, auquel cas on pourra évoquer une diminution de l'importance accordée au concept de fraction, ou si elles sont de moins en moins denses également, auquel cas un transfert, vers le premier degré, des types de tâches évaluées dans le domaine des fractions est envisageable. Toutefois, il est possible également que le nombre global d'items baisse dans les mêmes proportions : alors la part des évaluations représentée par les items impliquant des fractions serait stable.

B. La part des fractions dans les évaluations

Le pourcentage d'items impliquant des fractions dans les tests pour une année correspond à $\frac{Nombre\ d'items\ identifiés\ comme\ impliquant\ des\ fractions}{Nombre\ total\ d'items\ dans\ le\ test} \times 100$, où lorsqu'un même item était décomposé en plusieurs éléments comportant chacun une lettre (par exemple, M0101A, M0101B, etc.), nous avons comptabilisé chaque élément comme un item. En effet, chaque élément correspond à une question distincte et fait l'objet d'un traitement statistique

indépendant. Nous constatons que le nombre total d'items dans les tests (pas seulement ceux se rapportant aux fractions) a plutôt tendance à augmenter : entre 1995 et 2015, il est passé de 107 à 179 en quatrième année, et de 157 à 215 en huitième année. Cependant, quel que soit le niveau de la scolarité, la quantité d'items en jeu dans les tests se stabilise depuis 2007. La diminution de la part des fractions dans les évaluations est donc due, entre 1999 et 2007, à la fois à une baisse du nombre d'items impliquant des fractions et à une hausse du nombre total d'items, et à partir de 2007, uniquement à une baisse du nombre d'items impliquant des fractions. Le graphique ci-dessous, qui représente la part des items identifiés comme impliquant des fractions dans les tests, montre donc une évolution semblable à celle que l'on peut observer quand on s'intéresse seulement au nombre d'items mettant en jeu des fractions. Si nous avons précisé que notre sélection d'items ne prétendait pas à l'exhaustivité, la tendance ne fait pour autant guère de doute : la place des fractions dans les évaluations est assez stable en quatrième année, tandis qu'elle est est décroissante en huitième année.

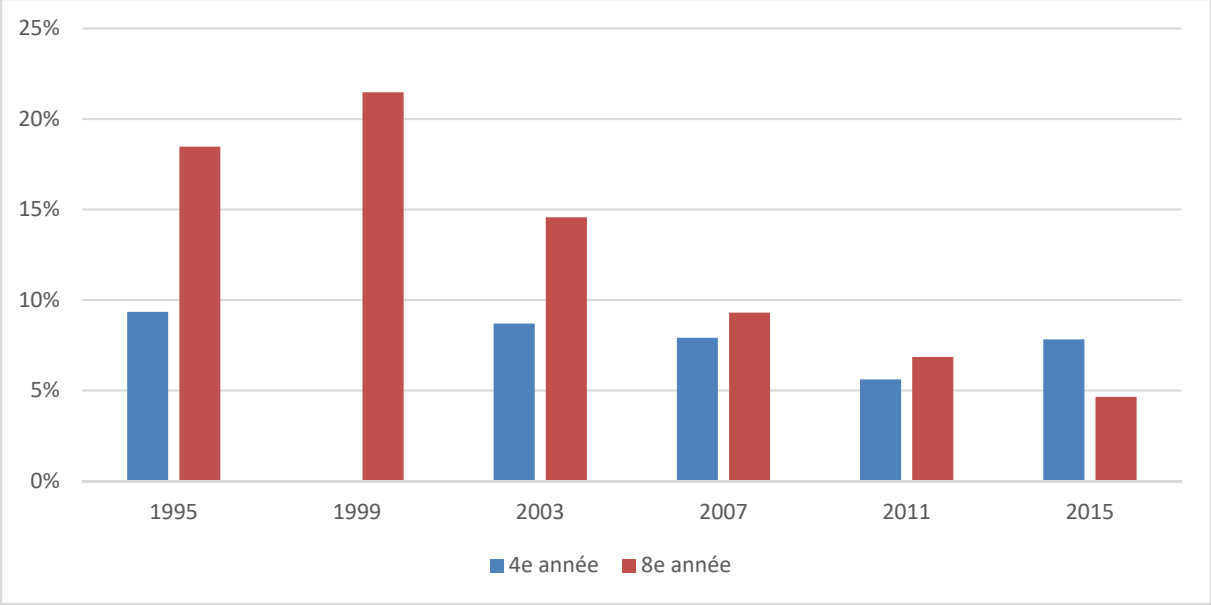


Figure 100. Part des items identifiés comme impliquant des fractions dans les tests de quatrième et huitième année depuis 1995

En quatrième année, les fractions concernent moins de 10 % des exercices soumis aux élèves. Cette proportion, qui parait faible au premier abord, n'est pas surprenante dans la mesure où les thèmes à aborder sont nombreux, en particulier dans le domaine numérique (maitrise des nombres entiers et des nombres décimaux, calcul posé et mental avec des mêmes nombres, problèmes numériques, proportionnalité, etc.). En outre, en 2015, ce domaine ne représente que 54 % des items, puisque la géométrie ainsi que la gestion de données et les graphiques faisaient aussi l'objet d'une évaluation. À l'intérieur du champ numérique, les nombres entiers ont

quantitativement une importance supérieure à celle accordée aux fractions et aux écritures décimales, ce qui semble logique, dès lors que l'apprentissage des entiers est déjà bien engagé, alors que l'enseignement des fractions et décimaux débute à peine dans certains pays. Ainsi, dans les évaluations les plus récentes, les nombres entiers représentent 28 % de l'ensemble des items, tandis que les fractions et décimaux n'en représentent que 14 %. L'idée que les items concernant les fractions et les écritures décimales soient alors répartis à parts égales parait cohérente avec le fait que, certes l'enseignement des fractions est préalable à l'enseignement des notations décimales, mais tous les deux ont été abordés en fin de quatrième année. Néanmoins, les progressions que nous venons d'évoquer ne valent que pour les pays de notre corpus, et il est envisageable de trouver d'autres participants pour lesquels l'abord des notations décimales serait plus tardif. En outre, comme nous l'avons précisé précédemment, les items impliquant des fractions ne sont pas tous classés dans la catégorie « Nombres et calcul ». Toutefois, ils le sont pour l'essentiel, c'est pourquoi nous pensons que les fractions occupent une place suffisante pour ne pas limiter la portée de notre étude, mais pas non plus trop importante pour ne pas conduire les pays dans lesquels cet apprentissage commence à peine à obtenir un score global démesurément bas.

En huitième année, les fractions occupaient une place importante dans les tests (autour de 20 %) en 1995 et 1999. Cette proportion parait élevée, si l'on pense à tous les autres thèmes qui doivent y être abordés, en particulier avec l'introduction de l'algèbre et des probabilités. Notre hypothèse est donc que la diminution du nombre d'items impliquant des fractions, à partir de 2003, correspond à une correction supposée laisser plus de place aux autres thèmes. C'est ainsi que les pourcentages les plus récents sont assez proches de ceux que l'on observe dans le premier degré. Par ailleurs, le choix des niveaux de scolarité pour la passation des tests ne favorise pas la mise en lumière de cette thématique : en quatrième année de scolarité obligatoire, l'apprentissage des fractions est loin d'être achevé, tandis qu'en huitième année, il a bien souvent été mené à son terme (d'après les instructions officielles que nous avons consultées). Nous avons vu dans les programmes qu'à partir de la septième année, la part des enseignements consacrés aux fractions diminuait dans la plupart des pays de notre corpus. De plus, dans les tests de huitième année, le domaine numérique ne représente plus que 30 % des items. Nous constatons un transfert des types de tâches évalués de cette catégorie vers l'algèbre, puisque quand on additionne les deux colonnes, on obtient un pourcentage proche de celui calculé pour le domaine numérique seul dans les tests destinés aux élèves les plus jeunes (58 % contre 54 % dans ces derniers). Ce processus rappelle celui observé à partir des déclarations des enseignants

d'école élémentaire et de collège, lorsqu'on leur demandait le temps passé à enseigner les différents domaines des mathématiques. Par exemple, les professeurs anglais consacrent, selon leurs déclarations, 57,3 % du temps d'enseignement à l'étude des nombres et du calcul dans le premier degré, tandis que, dans le second degré, 28,1 % de ce temps est dévolu au domaine numérique et 26,4 % à l'algèbre, soit un total de 54,5 %. On voit que cette répartition est très proche de celle adoptée par les auteurs des tests (c'est la plus proche parmi les pays de notre corpus). Ce n'est pas pour autant que les élèves anglais réalisent des performances élevées : au contraire, elles sont plus faibles que la moyenne des participants que nous étudions. Cette constatation pose la question de l'incidence de l'adéquation des contenus d'enseignement au test, question que nous aborderons dans les chapitres suivants.

§ 2. Le lien entre les résultats relatifs aux fractions et les performances en mathématiques

En comparant les scores obtenus par les élèves dans le domaine des fractions et leur taux de réussite au test dans son ensemble, nous avons pu déterminer dans quelle mesure la capacité des élèves en mathématiques était corrélée aux performances aux items impliquant des fractions. Les résultats mettent en évidence un lien fort entre les premiers et les seconds (A). Toutefois, dans certains pays, ce lien est légèrement distendu (B) : il nous faut expliquer la raison de cet écart qui apparait contraire à la tendance générale.

A. Un lien fort entre le taux de réussite aux items impliquant des fractions et les performances globales

La réussite totale en mathématiques est déterminée par un nombre de points, étalonné de telle sorte que la moyenne de l'ensemble des participants est toujours 500. En quatrième année et pour chaque millésime du test, nous avons donc établi la moyenne obtenue par chacun des pays aux items concernant les fractions, et nous l'avons comparée aux résultats obtenus par chacun des pays aux items qui constituent l'ensemble de l'étude, afin d'élaborer le graphique ci-contre (annexes 272 à 276).

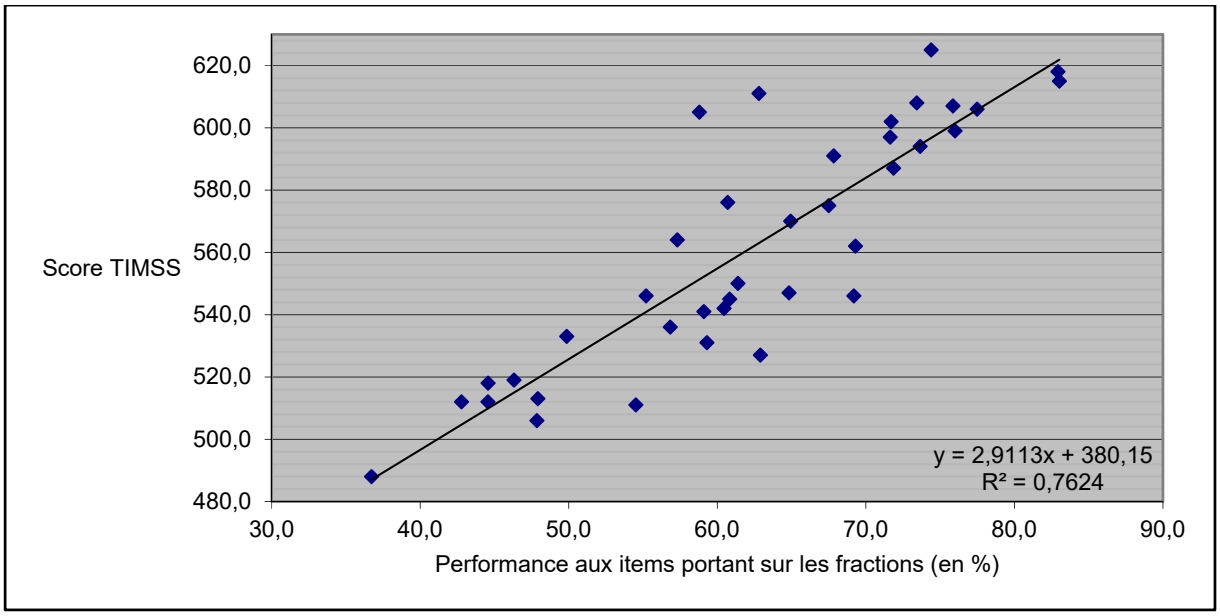


Figure 101. Corrélation entre la réussite aux fractions et la réussite totale en mathématiques depuis 1995 (quatrième année)

Depuis 1995, la corrélation linéaire entre la réussite dans le domaine des fractions et la réussite globale aux évaluations est assez forte ($R^2 = 0,76$). Siegler *et al.* (2012) ont montré que la maitrise des fractions était un bon indicateur de la réussite des élèves en mathématiques sur le long terme. Nos résultats mettent au jour que la maitrise des fractions est également un bon indicateur de la réussite des élèves en mathématiques aux évaluations TIMSS. Toutefois, il faut envisager que de bonnes capacités en mathématiques soient nécessaires pour réussir les items impliquant des fractions. On voit ainsi que les participants qui obtiennent les scores les plus faibles sont également ceux qui sont les moins performants dans le domaine qui nous occupe. De même, les participants qui obtiennent les meilleurs scores sont également ceux qui sont les plus performants aux items impliquant des fractions. En revanche, une bonne maitrise des mathématiques n'est pas la garantie absolue de bonnes performances dans le domaine des fractions. En particulier, deux points indiquent une grande réussite totale (605 et 611 points) pour un score moyen relatif aux fractions (avec respectivement 58,8 % et 62,8 % de réussite). Il s'agit de la Corée du Sud lors des évaluations TIMSS de 2011 et de 1995. Avec une telle maitrise de la matière, on peut donc obtenir des pourcentages de réussite variés dans le domaine des fractions. Ainsi, la République d'Irlande obtient en 2011 une moyenne de 62,9 % aux items impliquant des fractions (c'est-à-dire supérieure à la Corée du Sud la même année), avec un score total de 527 points (soit 78 de moins que la Corée du Sud). Il faut dire que ce graphique, qui synthétise les résultats des élèves depuis 1995, masque des différences importantes, notamment entre les évaluations de 2007 (où le coefficient de détermination de Bravais-Pearson

reliant les deux séries de données est de 0,94) et celles de 2011 (où le coefficient de détermination de Bravais-Pearson reliant les deux séries de données est de 0,52).

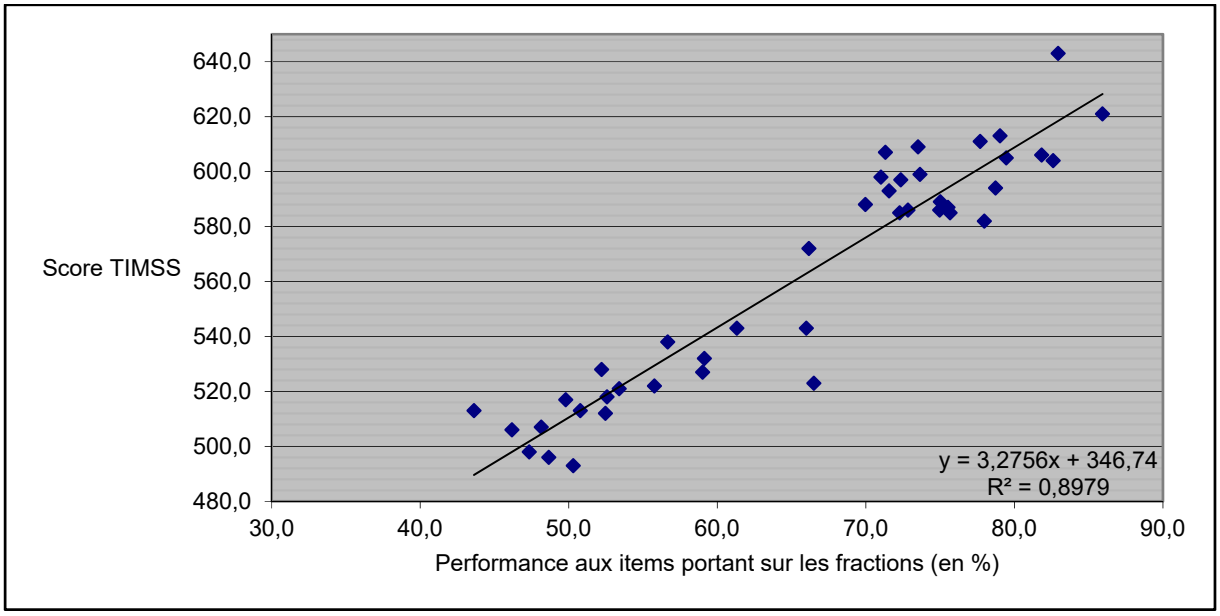


Figure 102. Corrélation entre la réussite aux fractions et la réussite totale en mathématiques depuis 1995 (huitième année)

En huitième année, même si la relation linéaire (qui se déduit de l'égalité $R^2 = 0,9$) apparait clairement dans le graphique ci-dessus, on peut distinguer deux groupes : le premier, formé des pays obtenant à la fois un score inférieur à 540 et un taux de réussite inférieure à 60 % dans le domaine des fractions, et le second, formé des pays obtenant à la fois un score supérieur à 580 et un taux de réussite supérieur ou égal à 70 % dans le domaine des fractions (annexes 277 à 282). Quatre points sur les quarante-deux que comporte ce nuage de points se trouvent dans un entre-deux difficile à analyser (il s'agit par deux fois du Québec, en 2003 et 2015, de Hong Kong en 2007 et de la République d'Irlande en 2015). Cependant, ces constatations laissent une double impression : celle correspondant à un creusement des écarts par rapport à la quatrième année, et celle correspondant à un renforcement du lien entre les performances dans le domaine des fractions et les performances globales. En ce qui concerne l'augmentation des écarts entre les participants, notre hypothèse est corroborée par la légère augmentation de l'écart-type entre les scores globaux des participants (42,4 points contre 38,2 en quatrième année) comme entre les taux de réussite aux fractions (12,3 points de pourcentage contre 11,5 en quatrième année). En ce qui concerne le renforcement du lien entre les performances dans le domaine des fractions et les performances globales, il apparait à travers les coefficients de détermination de Bravais-Pearson, qui sont beaucoup plus proches de 1 que ne l'étaient ceux de quatrième année. Aussi, le R^2 calculé pour l'ensemble des données depuis

1995 ($R^2 = 0,9$), déjà élevé, masque un lien très fort quand on isole les données recueillies pour chacun des millésimes du test de huitième année.

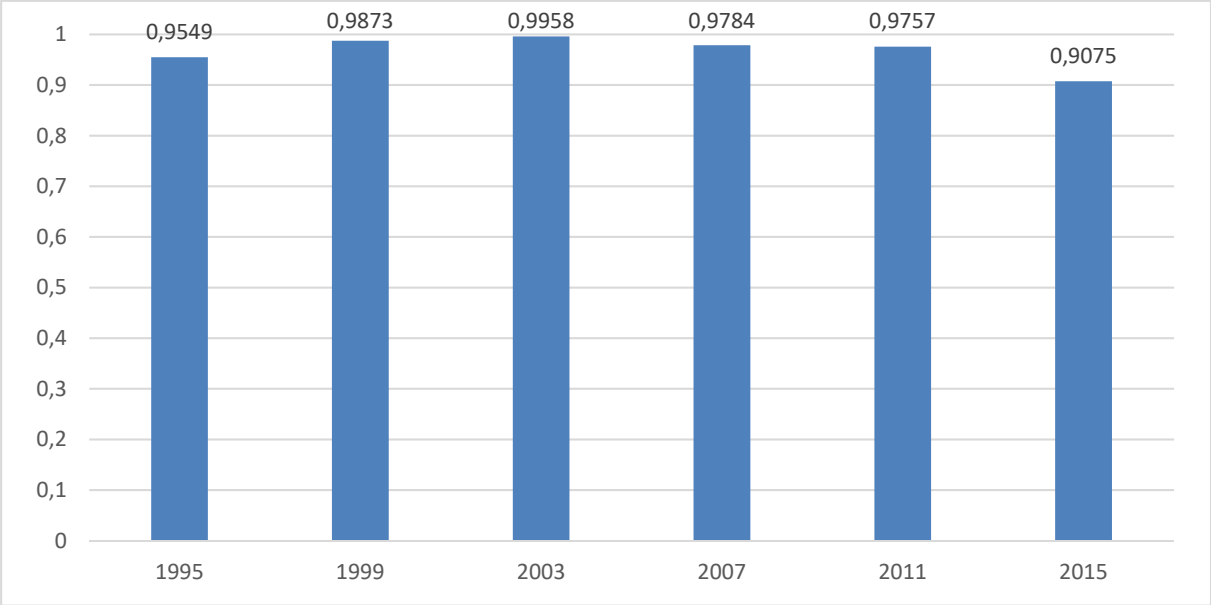


Figure 103. Coefficients de détermination de Bravais-Pearson indiquant le lien entre les résultats en mathématiques et les performances dans le domaine des fractions depuis 1995 (huitième année)

De plus, quand on cherche dans quelle mesure la réussite dans le domaine des fractions peut prédire les performances globales aux évaluations TIMSS (de la même façon que nous l'avons fait en quatrième année), on s'aperçoit que la moyenne des écarts entre le prévu et le réalisé est plus faible (10,7 points contre 13,5 points dans le premier degré), tout comme l'écart-type entre les participants (8,3 points contre 12,8 points dans le premier degré). Ces données confirment que les fractions sont un bon indicateur de la réussite en mathématiques. Néanmoins, il est probable que l'augmentation de la difficulté des exercices induise davantage la nécessité d'être compétent en mathématiques (notamment en raisonnement et en calcul) pour réussir les items mettant en jeu des fractions.

Par ailleurs, nous avons utilisé la fonction affine qui décrit la relation entre le pourcentage de réussite aux items impliquant des fractions et le score TIMSS obtenu par les élèves ($y = 2,9113x + 380,15$ où y est le score TIMSS et x la performance des élèves dans le domaine des fractions). À partir des résultats obtenus dans le domaine des fractions, nous avons calculé un score global théorique que les élèves étaient supposés obtenir, et nous l'avons

comparé au score réellement obtenu[1]. L'écart moyen entre le prévu et le réalisé est de 13,5 points (comme certains scores réalisés étaient en dessous du score prévu, et d'autres au-dessus, nous avons utilisé les valeurs absolues pour calculer cette moyenne). C'est assez peu, comparé à l'écart-type entre les scores TIMSS obtenus par les pays participants, qui est de 38,2 points. En revanche, l'écart-type entre entre les différences constatées est égal à 12 points, ce qui ouvre la voie à une analyse plus fine de la relation entre les instructions officielles et les résultats obtenus dans le domaine des fractions. Ces écarts ne sont pas surprenants, puisque les fractions sont à ce moment de la scolarité une notion en construction, et que l'avancée de cet enseignement est variable selon les participants.

B. La possibilité d'un lien distendu entre le score aux items impliquant des fractions et le score global

Il existe des pays qui obtiennent un meilleur score total que ne le laisse présager le pourcentage de réussite obtenu dans le domaine des fractions, et à l'inverse, des pays qui obtiennent un score total inférieur à ce qu'on aurait pu déduire en consultant le pourcentage de réussite obtenu dans le domaine des fractions. Comme il est très rare que le prévu et le réalisé coïncident parfaitement, il nous faut déterminer un seuil à partir duquel cet écart nous parait remarquable par rapport ce que l'on peut observer par ailleurs, que nous avons fixé à un écart-type de plus que la moyenne[2]. Pour notre corpus, nous trouvons treize cas dans lesquels l'écart avec ce qui était attendu est supérieur en valeur absolue à ce seuil, six en quatrième année et sept en huitième année.

1. Pour prendre l'exemple de la France, les élèves qui l'ont représentée aux évaluations TIMSS 2015 ont réussi en moyenne 36,7 % des items impliquant des fractions. En utilisant la fonction affine décrite ci-dessus, nous avons calculé le score théorique qu'elle était supposée obtenir :

$y = 2{,}9113x + 380{,}15$

$y = 2{,}9113 \times 36{,}7 + 380{,}15$

$y = 487$ (arrondi au dixième)

Cela signifie que le score prévisible de la France à partir de ses résultats dans le domaine des fractions est 487. Or, elle obtient effectivement un score de 488, soit un écart entre le prévu et le réalisé de 1 point.

2. Soit, pour la quatrième année, 26,3 points d'écart (13,5 + 12,8), et pour la huitième année, 19 points d'écart (10,7 + 8,3).

Quatrième année	Huitième année
Corée du Sud (1995, + 48 points) Singapour (1995, + 28,2 points) Ontario (2003, − 27,9 points) Corée du Sud (2011, + 53,7 points) République d'Irlande (2011, − 36,3 points) Floride (2015, − 35,6 points)	Corée du Sud (1995, + 26,7 points) Singapour (1995, + 24,5 points) Hong Kong SAR (1999, − 20,2 points) Angleterre (2007, + 23,4 points) Taipei chinois (2011, + 21,5 points) Québec (2015, − 19,9 points) République d'Irlande (2015, − 41,6 points)

Dans les pays où les valeurs sont positives, cela signifie que le score effectivement réalisé est supérieur à celui prédit à partir des items impliquant des fractions. Autrement dit, ces participants sont meilleurs en mathématiques que ne le laisse supposer leur maitrise des fractions. Dans les pays où les valeurs sont négatives, cela signifie que le score effectivement réalisé est inférieur à celui prédit à partir des fractions. Autrement dit, ces participants sont moins performants en mathématiques que ne le suggère leur maitrise des fractions. En regardant la liste des pays où l'écart entre l'attendu et le réalisé est important, on constate que dans onze cas sur treize, il y a une distinction à faire entre les territoires asiatiques, qui sont moins bons dans le domaine des fractions que ce qu'ils devraient être, et les pays occidentaux, qui sont meilleurs dans le domaine des fractions que ce qu'ils devraient être. C'est l'inverse dans deux cas sur treize, uniquement en huitième année (à Hong Kong SAR en 1999 et en Angleterre en 2007). Il semble donc que les fractions constituent davantage une faiblesse pour les participants asiatiques qu'un atout. C'est que nous avons tenté de confirmer en faisant la moyenne des écarts pour chacun des pays de notre corpus (cette fois-ci en conservant les signes positifs et négatifs). Nous constatons que la réalité n'est pas aussi tranchée que ne le laissent penser les cas particuliers que nous avons mentionnés. Les valeurs sont assez largement positives en Corée du Sud (+ 16 points en moyenne) et dans le Taipei chinois (+ 11,2 points), mais elles sont dans l'ensemble conformes aux attentes à Singapour (+ 4,1 points) et surtout à Hong Kong SAR (− 0,7 point). De même, les valeurs sont assez largement négatives en République d'Irlande (− 24,3 points) et en Floride (− 16,6 points), mais elles sont dans l'ensemble conformes aux attentes en Angleterre (− 2,7 points) et dans l'Ontario (− 2,2 points). On en conclut que les fractions ne sont pas un thème qui influe favorablement sur le score des pays asiatiques (qui sont aussi les plus performants), ce qui contribue à renforcer la validité de notre étude : nous

savons maintenant que les fractions constituent un sujet d'étude ordinaire pour les élèves les plus performants en mathématiques, et que l'accent n'est pas mis sur cette notion.

Pourquoi certains pays ont-ils régulièrement un décalage entre leur performance globale, et leur performance dans le domaine des fractions ? Quatre pays montrent un écart moyen par rapport au score attendu particulièrement élevé : la Corée du Sud et le Taipei chinois (dont le score aux items impliquant des fractions est inférieur au score qu'ils sont supposés obtenir au regard des performances de leurs élèves en mathématiques), la Floride et la République d'Irlande (dont le score aux items impliquant des fractions est supérieur au score qu'elles sont supposées obtenir au regard des performances des élèves en mathématiques). Considérons que la Corée du Sud est à la fois le pays dans lequel les professeurs des écoles consacrent le moins de temps au domaine numérique comparé aux autres domaines (37 % du temps d'enseignement contre 52,2 % en moyenne dans le corpus) et un pays dans lequel la place dévolue aux fractions dans les instructions officielles est plutôt plus faible (8 % du total des items contre 10 % en moyenne dans le corpus). À l'inverse, la Floride est à la fois un participant dans lequel les professeurs des écoles consacrent une partie importante du temps scolaire à étudier les nombres et le calcul (55,8 % du temps d'enseignement) et le participant qui accorde la plus grande place aux fractions dans ses programmes d'enseignement (15 % du total des items). En ce qui concerne le Taipei chinois et la République d'Irlande, nous ne disposons pas de données statistiques qui expliqueraient pourquoi nous constatons un décalage entre la réussite en mathématiques et les performances dans le domaine des fractions. Il est possible que, par habitude professionnelle, les enseignants de ces territoires mettent particulièrement l'accent sur le concept de fraction. Cependant, il faut aussi considérer qu'ils puissent être particulièrement efficaces sur cette thématique et moins sur d'autres, ce qui conduirait à replacer la didactique au cœur de notre réflexion.

Conclusion de la sous-section

Quand on mélange les données issues des tests de quatrième année et celles issues des tests de huitième année, la corrélation entre les performances réalisées en mathématiques et celles réalisées dans le domaine des fractions est toujours positive, avec un coefficient de détermination de Bravais-Pearson élevé ($R^2 = 0,82$). La restriction de notre recherche au domaine des fractions n'apparait donc pas, *a priori*, comme une limite à sa portée. Au contraire, nous avons vu que l'étude des mécanismes à l'œuvre dans l'apprentissage des fractions pouvait être décisive pour comprendre et expliquer la construction des connaissances mathématiques

chez les élèves (Siegler *et al.*). Toutefois, ce lien est complexe et, par moments, distendu, sans que des aspects quantitatifs liés à une plus grande durée des apprentissages ne viennent toujours justifier ces écarts. Certes, la Corée du Sud accorde une importance moindre aux questions numériques à l'école élémentaire, et l'on perçoit que ses résultats dans le domaine des fractions sont souvent moins bons que ce que pourraient laisser imaginer les capacités des élèves au regard de leur score TIMSS. Néanmoins, nombre de pays présentent des caractéristiques similaires en ce qui concerne la part des items liés aux fractions dans les programmes d'enseignement, ou le pourcentage du temps d'enseignement consacré au domaine numérique, et obtiennent des taux de réussite dans le domaine qui nous occupe très variés. De plus, les résultats obtenus dans le domaine des fractions constituent une moyenne, et il peut y avoir des variations importantes dans la série, mettant en évidence des points faibles et des points forts dans les types de tâches acquis par les élèves. Enfin, les résultats des élèves à propos des fractions sont très dépendants de l'enseignement qu'ils ont reçu et des choix réalisés par les auteurs des tests, probablement plus que pour tout autre thématique, en raison de la pluralité de significations du concept, de la variété des situations qu'il recouvre et du fait qu'il est en cours de construction lors des évaluations de quatrième année. Les fractions constituent donc un bon indicateur de la réussite globale, mais la mise en évidence de ce lien ne dispense pas d'un travail approfondi visant à établir comment s'opère le travail de transposition par les enseignants, et dans quelle mesure ce travail concorde avec les attentes formulées par les auteurs des tests ou induites par la nature des items proposés aux élèves.

Sous-section II. La nature des fractions dans les évaluations TIMSS

Les types de tâches relatifs aux fractions tels que nous les avons définis dans la première partie de notre étude sont très nombreux. Cela justifie que l'on s'intéresse au contenu des évaluations (§ 1). En outre, les évaluations TIMSS existent depuis 1995. Si le contenu est similaire dans chacune des évaluations, il est possible que les pays participants fassent évaluer leurs programmes d'enseignement dans le sens d'un rapprochement avec ce qui est demandé dans les évaluations. Ils prendraient alors un avantage qui traduirait leur capacité à faire progresser leur système d'enseignement en adéquation avec des critères internationaux. Nous avons donc mis à l'épreuve la fiabilité des items soumis aux élèves (§ 2) pour la mesure de la maitrise du concept de fraction.

§ 1. Le contenu des évaluations

À la lumière des observations que nous avons faite dans la première partie de cette recherche, nous allons analyser les choix effectués quant aux types de tâches évalués dans le cadre des questionnaires TIMSS. Il ne s'agira pas d'étudier la validité curriculaire du questionnaire relativement au thème des fractions puisque, d'une part, l'ensemble des connaissances relatives aux fractions ne pourra être traité avant la fin de la scolarité obligatoire, et, d'autre part, les différents pays n'adoptent pas la même programmation quant à leur enseignement. Il s'agira plutôt de saisir si les items des questionnaires sont révélateurs d'une orientation quant à la connaissance des fractions à ces deux niveaux de la scolarité que sont la quatrième et la huitième années d'enseignement obligatoire. Ces attentes seront certainement différentes en fonction de l'âge des élèves. Nous avons donc étudié séparément les items de quatrième année (A) et les items de huitième année (B).

A. En quatrième année

Nous avons vu dans la première partie qu'il existait plusieurs façons d'appréhender le concept de fraction. La typologie qui fait le plus fréquemment référence dans les recherches reste celle de Behr *et al.* qui distinguent cinq conceptions. Nous avons donc recherché à catégoriser les items TIMSS selon ces différentes significations. Les différentes conceptions ne s'acquièrent pas aussi facilement les unes que les autres, la plus facile à assimiler étant la fraction « partie-tout » ou « partition », avec une difficulté plus grande pour « partition ». C'est pourquoi l'enseignement des fractions débute généralement par cette conception, et que nous faisons l'hypothèse que les contenus des évaluations de quatrième et de huitième année pourront présenter des différences sur ce point. Toutefois, comme nous l'avons indiqué précédemment, cette catégorisation se prête assez mal à l'analyse des types de tâches que l'on peut extraire des programmes d'enseignement comme des items TIMSS. Dans l'exemple de l'item M0504A (2015), où il fallait trouver le dessin correspondant à une fraction donnée, nous avons identifié deux techniques possibles (partager la figure en huit parts égales ou bien trouver la fraction unitaire pour la reporter huit fois dans l'unité) qui mettent en jeu deux conceptions différentes (fraction partie-tout pour la première et fraction-mesure pour la seconde). De plus, les différentes significations de la fraction ont été élaborées pour évoquer l'emploi d'une fraction dans un contexte particulier, pas pour évoquer des exercices impliquant deux fractions ou plus, comme des comparaisons de fractions ou des additions de fractions. En associant la fraction partie-tout et la fraction-mesure, qui peuvent être mises en jeu dans des types de tâches

similaires en fonction de la technique utilisée par l'élève (annexes 283 à 287), le graphique ci-dessous montre donc à la fois que, depuis 1995, les écoliers travaillent principalement sur des quantités continues (puisque la fraction-partition ne représente que 8 % des items) et que les significations autres que partie-tout et mesure sont marginales (3 % des items impliquent une fraction en tant qu'opérateur, tandis que les fractions utilisées en tant que quotient ou ratio n'apparaissent pas). Nous avons également indiqué la part des conversions pour montrer que leur inclusion dans les tests était peu fréquente (elles représentent 5 % des items).

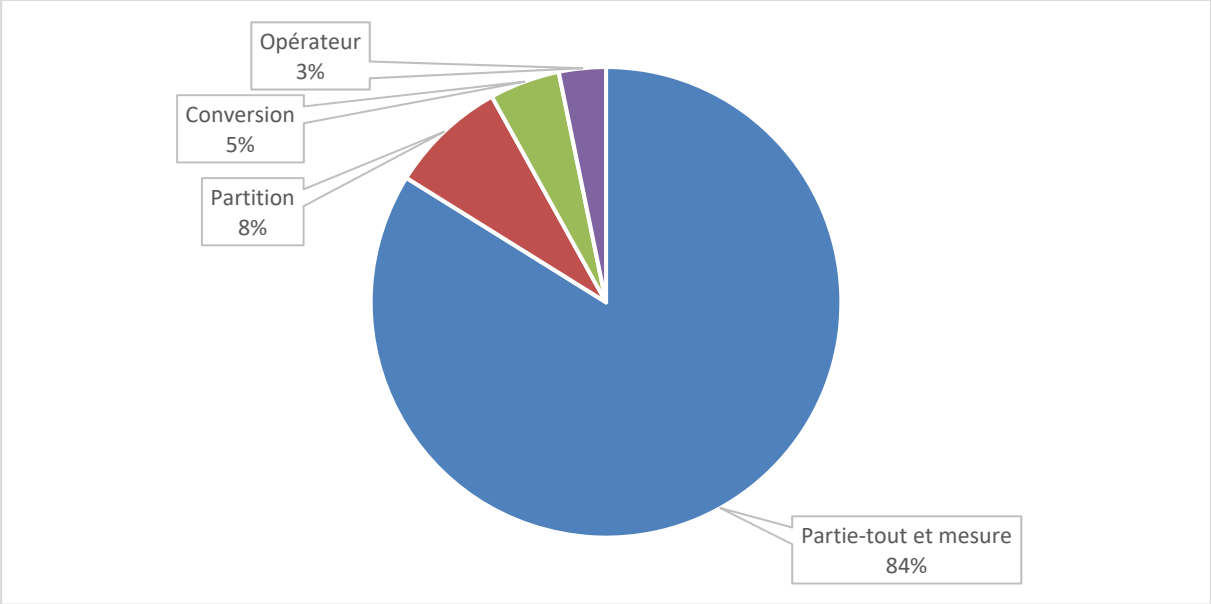


Figure 104. Part des différentes conceptions de la fraction dans les évaluations TIMSS de quatrième année depuis 1995

Ce constat ne doit pas conduire à conclure au manque de validité du questionnaire car les élèves débutent l'apprentissage des fractions : il est donc normal que les auteurs du questionnaire évaluent les conceptions les plus faciles à assimiler, c'est-à-dire celles qui viennent en premier dans l'apprentissage. En outre, la conception « partie-tout » recouvre des types de tâches très variés qui présentent chacun des difficultés spécifiques (identifier, comparer, additionner, trouver le complément à l'unité, etc.). Pour mesurer la variété des tests dans ce domaine, et effectuer des comparaisons avec les choix réalisés par les législateurs, nous avons indiqué dans le tableau ci-contre les types de tâches correspondant aux items inclus dans les tests depuis 1995. Les deux dernières colonnes du tableau permettent ces comparaisons : nous y indiquons le pourcentage des tests au cours desquels chaque type de tâches a été évalué, ainsi que le pourcentage de présence de chacun d'entre eux dans les curriculums, au sein de notre corpus.

	1995	2003	2007	2011	2015	% de présence dans les tests TIMSS	% de présence dans les programmes scolaires
CARDINALITE	8 %	21 %	17 %	13 %	21 %		
T_1 : Identifier la fraction d'une figure géométrique.	1	3	1		3	80	82
T_2 : Représenter la fraction d'une figure géométrique.		2	1	1	4	80	100
T_3 : Identifier la fraction d'une collection.	2	1			1	60	91
T_4 : Représenter la fraction d'une collection.			1		1	40	91
T_5 : Réaliser des estimations de quantités à l'aide de fractions.						0	9
T_6 : Exprimer un rapport sous la forme d'une fraction.						0	27
T_7 : Mesurer à l'aide de fractions.						0	36
T_8 : Identifier une fraction sur la droite numérique.						0	9
T_9 : Représenter une fraction sur la droite numérique.						0	55
T_{10} : Compter avec des fractions.						0	18
T_{11} : Identifier une rotation d'une fraction de tour.						0	36
T_{12} : Effectuer une rotation d'une fraction de tour.		2	3	2		60	36
T_{13} : Exprimer une probabilité à l'aide d'une fraction.						0	27
T_{14} : Lire un diagramme impliquant une quantité fractionnaire.						0	18
T_{15} : Représenter une partition de pluralité.						0	55
T_{16} : Exprimer le reste d'une division à l'aide d'une fraction.						0	36
T_{17} : Passer des fractions décimales aux écritures décimales.		1				20	100
T_{18} : Passer des écritures décimales aux fractions décimales.				1	1	40	100
T_{19} : Passer des fractions usuelles aux écritures décimales.						0	73
T_{20} : Passer des écritures décimales aux fractions usuelles.						0	64
T_{21} : Passer des fractions aux écritures décimales à l'aide d'une division.						0	64
T_{22} : Passer des fractions aux pourcentages.						0	73
T_{23} : Passer des pourcentages aux fractions.						0	73
T_{24} : Choisir une écriture des nombres rationnels adaptée à la situation.						0	27
ORDINALITE	13 %	6 %	13 %	25 %	13 %		
T_{25} : Comparer ou ordonner des fractions de même dénominateur.						0	73
T_{26} : Comparer ou ordonner des fractions de dénominateurs liés.						0	64
T_{27} : Comparer ou ordonner des fractions de dénominateurs différents.			1	1		40	64
T_{28} : Comparer ou ordonner des fractions unitaires.						0	9
T_{29} : Comparer ou ordonner des fractions de même numérateur.	1				1	40	82
T_{30} : Comparer ou ordonner différentes écritures des nombres rationnels.						0	27
T_{31} : Comparer des fractions qui ne portent pas sur la même unité.						0	18
T_{32} : Identifier des fractions équivalentes.	2	1	3	1	1	100	100
T_{33} : Produire des fractions équivalentes, y compris sous la forme d'une liste.				1		20	64
T_{34} : Réduire une fraction à sa plus simple expression.						0	64
T_{35} : Trouver plusieurs façons de représenter une même fraction.						0	18
T_{36} : Associer la taille des parts au nombre de parts dans l'unité.						0	18
T_{37} : Exprimer un entier sous la forme d'une fraction.						0	18
T_{38} : Exprimer une fraction sous la forme d'un entier.						0	18
T_{39} : Encadrer une fraction entre deux entiers.						0	9
T_{40} : Comparer des fractions un nombre de référence (1/2 ou 1).				1		20	55
OPERATIONS	6 %	25 %	25 %	13 %	13 %		
T_{41} : Passer d'une fraction supérieure ou égale à 1 à un nombre mixte.						0	73
T_{42} : Passer d'un nombre mixte à une fraction supérieure ou égale à 1.						0	73
T_{43} : Trouver le complément à l'unité.					1	20	0
T_{44} : Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur.		1	2			40	82
T_{45} : Décomposer une fraction (décomposition additive).						0	55
T_{46} : Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs liés.		1	1	2	1	80	91
T_{47} : Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents.						0	64
T_{48} : Multiplier une fraction par un entier (addition réitérée).						0	73
T_{49} : Multiplier un entier par une fraction (fraction-opérateur)		1	1			40	55
T_{50} : Calculer le produit de deux fractions.						0	73
T_{51} : Observer l'effet de la multiplication d'un nombre par une fraction.						0	0
T_{52} : Diviser une fraction unitaire par un entier.		1	1	1		60	55
T_{53} : Diviser un entier par une fraction unitaire.	1					20	36
T_{54} : Calculer le quotient de deux fractions.						0	55
T_{55} : Observer l'effet de la subdivision d'une part en plusieurs parts.						0	9
T_{56} : Calculer la valeur de l'unité, la partie fractionnaire étant donnée.						0	18

Figure 105. Types de tâches relatifs aux fractions évaluées dans les items TIMSS de quatrième année depuis 1995

Nous constatons que plusieurs types de tâches que nous avions identifié comme souvent présents dans les programmes sont également très fréquemment évalués dans les tests TIMSS (associer une fraction à un dessin, identifier des fractions équivalentes et additionner des fractions). Toutefois, les conversions entre les écritures fractionnaires et les écritures décimales, qui apparaissent systématiquement dans les instructions officielles ne font pas toujours l'objet d'une attention de la part des auteurs de TIMSS. De même, la présence des tâches de comparaison est plus fréquente dans les curriculums que dans les évaluations. Il existe à l'inverse des types de tâches qui sont peu inclus dans les programmes, mais qui reviennent souvent dans les tests. Par exemple, la tâche « Diviser une fraction unitaire par un entier » a été identifiée dans 60 % d'entre eux, alors qu'elle est présente dans seulement 36 % des instructions officielles étudiées, postérieurement à la quatrième année. Si ce type de tâche semble *a priori* difficile, les élèves devraient pouvoir réussir cet item à l'aide de leurs seules connaissances conceptuelles à propos des fractions, par exemple en réalisant un dessin, en raison des petits nombres utilisés par les auteurs (il fallait trouver la quantité de lait nécessaire pour réussir une recette pour 3 personnes, en sachant que dans la recette pour 6 personnes, 1/2 tasse de lait est requise : il s'agit donc de calculer $1/2 \div 2$). D'une façon générale, les auteurs de TIMSS choisissent des variables de la tâche qui ont tendance à la simplifier : par exemple, lorsque des additions de fractions sont demandées, c'est toujours avec des fractions de même dénominateur, ou avec des fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre (et avec des petits nombres). Les évaluations TIMSS semblent donc correspondre assez bien à ce que les élèves sont supposés avoir appris en fin de quatrième année, avec quelques items qui ne correspondent pas à des types de tâches présents dans les programmes, de façon à observer si les élèves parviennent à mobiliser leurs connaissances pour réussir des tâches inédites pour eux. Certains types de tâches qui apparaissent peu fréquemment dans les instructions officielles reviennent toutefois assez souvent dans les tests, ce qui nous incite à vérifier si les législateurs n'adaptent pas ces derniers pour avoir une correspondance plus forte entre l'enseignement et le contenu des évaluations.

B. En huitième année

En huitième année, la variété des significations du concept de fraction évaluées augmente (annexes 288 à 293). La part des items mettant en jeu la fraction partie-tout ou mesure ne représente plus que 55 % des items, contre 84 % en quatrième année. La proportion d'items impliquant des quantités discrètes augmente beaucoup, non seulement à travers l'utilisation de

la fraction-partition (dont la part passe de 8 % à 12 %), mais surtout à travers l'utilisation de la fraction-opérateur (dont la part passe de 3 % à 18 %). La capacité des élèves à réaliser des tâches de conversions prend également une part plus importante dans les évaluations destinées aux collégiens, avec 10 % des items, contre 5 % dans les tests soumis aux écoliers. Les autres significations de la fraction (ratio et opérateur) sont très rarement mises en jeu, puisqu'elles ne concernent respectivement que 5 et 2 items, soit 4 % et 1 % de l'ensemble.

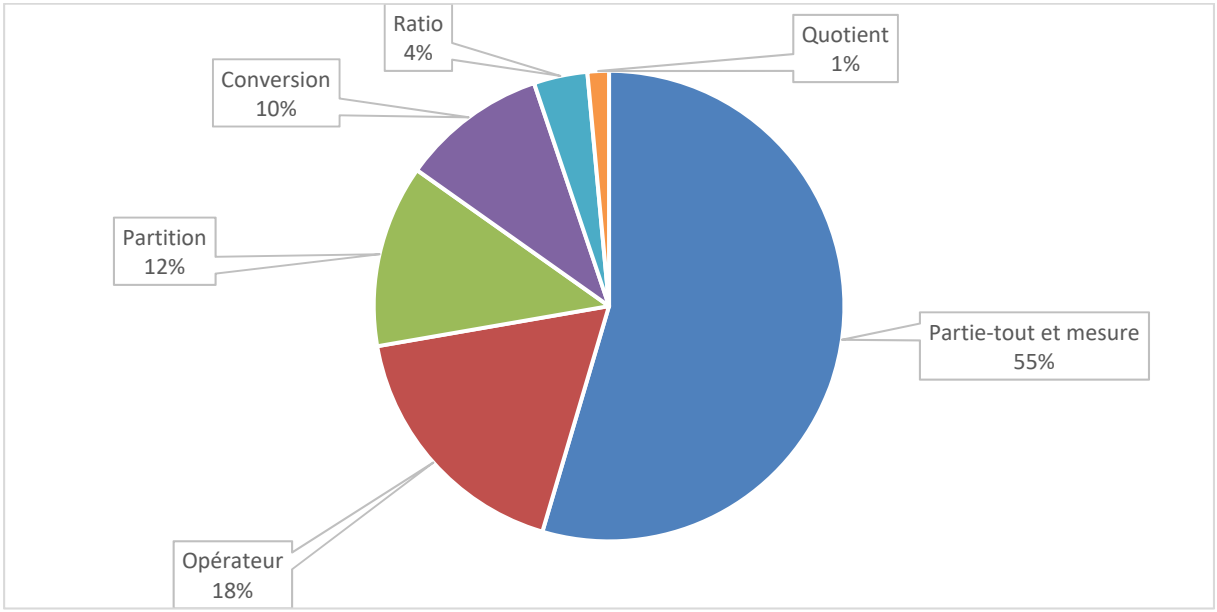


Figure 106. Part des différentes conceptions de la fraction dans les évaluations TIMSS de huitième année depuis 1995

La part des significations de la fraction les plus complexes (opérateur, quotient, ratio) augmente dans les tests. Pourtant, les items mettant en jeu la fraction partie-tout ou mesure, celles que nous avons identifiées comme étant à la fois les plus présentes dans les programmes restent majoritaires. En ce qui concerne les types de tâches, nos observations sont similaires : la diversité est plus grande. Néanmoins, la plupart d'entre eux font déjà l'objet d'une évaluation en quatrième année. Ce sont les variables de la tâche qui changent, ce qui va nous permettre de déterminer, dans les pays où certains types de tâches sont enseignés tardivement, si les élèves rattrapent le retard qui pouvait, éventuellement, se manifester à l'école primaire (notamment pour les tâches consistant à associer une fraction et un dessin).

	1995	1999	2003	2007	2011	% de présence dans les tests TIMSS	% de présence dans les programmes scolaires
CARDINALITE	25 %	25 %	42 %	29 %	33 %		
T_1 : Identifier la fraction d'une figure géométrique.	3	4	1			60	82
T_2 : Représenter la fraction d'une figure géométrique.	1	2	1			60	100
T_3 : Identifier la fraction d'une collection.	2	4	1	1	1	100	91
T_4 : Représenter la fraction d'une collection.						0	91
T_5 : Réaliser des estimations de quantités à l'aide de fractions.						0	9
T_6 : Exprimer un rapport sous la forme d'une fraction.	1		1	1		60	27
T_7 : Mesurer à l'aide de fractions.						0	36
T_8 : Identifier une fraction sur la droite numérique.						0	9
T_9 : Représenter une fraction sur la droite numérique.						0	55
T_{10} : Compter avec des fractions.						0	18
T_{11} : Identifier une rotation d'une fraction de tour.			1	1	1	60	36
T_{12} : Effectuer une rotation d'une fraction de tour.	1			1	1	60	36
T_{13} : Exprimer une probabilité à l'aide d'une fraction.					1	20	27
T_{14} : Lire un diagramme impliquant une quantité fractionnaire.						0	18
T_{15} : Représenter une partition de pluralité.		1	1			40	55
T_{16} : Exprimer le reste d'une division à l'aide d'une fraction.						0	36
T_{17} : Passer des fractions décimales aux écritures décimales.			1	1	1	60	100
T_{18} : Passer des écritures décimales aux fractions décimales.	1	1		1	1	80	100
T_{19} : Passer des fractions usuelles aux écritures décimales.		1	1		1	60	73
T_{20} : Passer des écritures décimales aux fractions usuelles.						0	64
T_{21} : Passer des fractions aux écritures décimales à l'aide d'une division.			1	1	1	60	64
T_{22} : Passer des fractions aux pourcentages.			1			20	73
T_{23} : Passer des pourcentages aux fractions.						0	73
T_{24} : Choisir une écriture des nombres rationnels adaptée à la situation.						0	27
ORDINALITE	44 %	38 %	31 %	19 %	6 %		
T_{25} : Comparer ou ordonner des fractions de même dénominateur.						0	73
T_{26} : Comparer ou ordonner des fractions de dénominateurs liés.						0	64
T_{27} : Comparer ou ordonner des fractions de dénominateurs différents.	1	2	1	1		80	64
T_{28} : Comparer ou ordonner des fractions unitaires.						0	9
T_{29} : Comparer ou ordonner des fractions de même numérateur.	1	1	1			60	82
T_{30} : Comparer ou ordonner différentes écritures des nombres rationnels.	1					20	27
T_{31} : Comparer des fractions qui ne portent pas sur la même unité.						0	18
T_{32} : Identifier des fractions équivalentes.	2	4	2	1		80	100
T_{33} : Produire des fractions équivalentes, y compris sous la forme d'une liste.	1	1	1	1	1	100	64
T_{34} : Réduire une fraction à sa plus simple expression.	1	1				40	64
T_{35} : Trouver plusieurs façons de représenter une même fraction.						0	18
T_{36} : Associer la taille des parts au nombre de parts dans l'unité.						0	18
T_{37} : Exprimer un entier sous la forme d'une fraction.						0	18
T_{38} : Exprimer une fraction sous la forme d'un entier.						0	18
T_{39} : Encadrer une fraction entre deux entiers.						0	9
T_{40} : Comparer des fractions un nombre de référence (1/2 ou 1).	1	1	1			60	55
OPERATIONS	50 %	56 %	56 %	50 %	38 %		
T_{41} : Passer d'une fraction supérieure ou égale à 1 à un nombre mixte.			1	1		40	73
T_{42} : Passer d'un nombre mixte à une fraction supérieure ou égale à 1.						0	73
T_{43} : Trouver le complément à l'unité.		1	1	1		60	0
T_{44} : Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur.	1	1	1			60	82
T_{45} : Décomposer une fraction (décomposition additive).						0	55
T_{46} : Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs liés.	3	3	3	2	1	100	91
T_{47} : Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents.	1	1	2	2	1	100	64
T_{48} : Multiplier une fraction par un entier (addition réitérée).					1	20	73
T_{49} : Multiplier un entier par une fraction (fraction-opérateur)	5	5	4	2	1	100	55
T_{50} : Calculer le produit de deux fractions.	1	1	2	1		80	73
T_{51} : Observer l'effet de la multiplication d'un nombre par une fraction.			1	1	1	60	0
T_{52} : Diviser une fraction unitaire par un entier.						0	55
T_{53} : Diviser un entier par une fraction unitaire.	1	1	1			60	36
T_{54} : Calculer le quotient de deux fractions.	1	1				40	55
T_{55} : Observer l'effet de la subdivision d'une part en plusieurs parts.						0	9
T_{56} : Calculer la valeur de l'unité, la partie fractionnaire étant donnée.	1	1		1	1	80	18

Figure 107. Types de tâches relatifs aux fractions évaluées dans les items TIMSS de huitième année depuis 1995

À la lecture du tableau, on s'aperçoit également que les types de tâches que nous avons définis comme visant l'étude de l'ordinalité et les opérations impliquant des fractions sont beaucoup plus présents dans les tests de huitième année qu'ils ne le sont dans ceux de quatrième année. Néanmoins, si nous avons vu que le nombre d'items impliquant des fractions baissait de façon importante dans les tests destinés aux collégiens, la répartition des types de tâches semble également évoluer. Par exemple, en 2011, un seul item correspond à un type de tâche visant l'étude de l'ordinalité, et la variété des types de tâches mettant en jeu des opérations avec des fractions est en baisse. À l'inverse, les types de tâches que nous avons défini comme visant l'étude de l'ordinalité représentent une part en hausse des items ayant trait aux fractions dans les tests, notamment dans les domaines de la géométrie, des probabilités et des conversions de représentations. Or, si ce dernier est bien souvent inscrit dans les programmes d'enseignement, les deux premiers le sont beaucoup moins fréquemment. En conséquence, la transformation du contenu des tests ne se traduira pas nécessairement par une facilité accrue.

§ 2. La fiabilité des évaluations

La possibilité pour les pays participant aux évaluations TIMSS d'adapter leur curriculum aux besoins identifiés dans les tests dépend de la proportion d'items impliquant des tâches inédites dans chacun d'entre eux. Si cette part est grande, alors les participants pourront difficilement s'appuyer sur des redondances pour faire évoluer les injonctions à destination des enseignants. À l'inverse, si on constate que ce qui est demandé évolue peu d'un test à l'autre, alors les pays ayant participé plusieurs fois, ou ceux ayant mené des études longitudinales, pourront faire évoluer leurs instructions officielles en vue d'augmenter le taux de réussite de leurs élèves. Nous avons donc analysé l'évolution des attentes formulées par les auteurs des tests et les changements apportés dans le curriculum de Singapour, puisque nous possédons plusieurs textes successifs et que ce pays obtient d'excellents résultats (A). Il est possible également que les pays participants tirent avantage d'une connaissance fine des évaluations. Pour le savoir, nous avons mesuré l'évolution des résultats des élèves aux items redondants (B).

A. L'évolution des attentes

Pour définir les attentes des auteurs des tests dans le domaine des fractions, nous disposons, outre des items eux-mêmes, d'un document de travail appelé *Mathematics Framework* ou *Assessment Frameworks* selon les années considérées. Depuis 2003, on y trouve les types de tâches évalués dans TIMSS pour chacun des grands domaines des mathématiques,

y compris le domaine numérique. À travers son analyse, nous pourrons dire, pour la quatrième comme pour la huitième année, si le contenu des tâches proposées aux élèves est conforme à celles que le cadre théorique rendait possible, et si ce cadre a changé au fil des évaluations.

Dans le premier degré, les attentes des auteurs des évaluations TIMSS ont évolué entre 2003 et 2015, en particulier en ce qui concerne les opérations portant sur des fractions (annexes 294 à 297). En 2003, il s'agissait « d'ajouter et soustraire des fractions avec le même dénominateur ». À partir de 2007, la restriction relative au même dénominateur pour les termes de l'addition et de la soustraction disparaissent et est remplacée par la précision selon laquelle les fractions utilisées pour les calculs doivent être « simples ». C'est-à-dire que l'on peut trouver dans les tests des additions et des soustractions de fractions de dénominateurs différents. Comme la liste des dénominateurs est limitée à certains nombres bien précis pour l'ensemble des tâches relatives aux fractions (2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 et 100), on peut penser que les fractions « simples » envisagées ici ont des dénominateurs encore plus petits. En 2015, à la suite de l'indication « ajouter et soustraire des fractions simples », les auteurs ont ajouté « y compris dans le cadre de situations problèmes », ce qui nous amène à penser que les calculs pourront être contextualisés dans le test, mais qu'ils ne le seront pas systématiquement. Toutefois, il faut dire que certaines tâches prévues dès 2003 pouvaient être résolues à l'aide de l'addition de fractions de dénominateurs différents et que ces tâches avaient déjà lieu dans le cadre de la résolution de problèmes. Par exemple, on demandait aux éléves de résoudre le problème suivant (2003, grade 4, M0207) : « Janis, Maija et leur mère ont mangé un gâteau. Janis a mangé 1/2 du gâteau. Maija a mangé 1/4 du gâteau. Leur mère a mangé 1/4 du gâteau. Quelle quantité du gâteau reste-t-il ? » Voilà un problème qui peut tout à fait être résolu en trouvant la somme de 1/2 + 1/4 + 1/4 qui est égale à 1, alors même que l'addition de dénominateurs différents n'est pas un attendu des auteurs des évaluations TIMSS en 2003. On note que, quel que soit le millésime du test considéré et bien que cette règle ne soit pas explicitée, les dénominateurs en jeu dans les calculs sont toujours liés, dans le sens où l'un est le multiple de l'autre. De même, ni la multiplication, ni la division ne sont prévues dans les attendus. Or, ces notions peuvent parfois être utilisées avec des fractions dans le cadre de problèmes de proportionnalité. Par exemple, on a demandé aux élèves de dire quelle quantité de lait il fallait utiliser pour réaliser une recette pour trois personnes, lorsque dans la recette pour six personnes, 1/2 tasse de lait était nécessaire (2011, grade 4, M0503). L'une des procédures de résolution valables pour cet exercice était la division de 1/2 par deux. Cela montre bien que les procédures formelles ne sont pas celles attendues par les auteurs : les élèves doivent s'appuyer sur des modèles et sur leur

connaissance de la quantité représentée par les fractions en jeu pour résoudre les problèmes qui leur sont soumis. D'autant plus que les demi-tasses et les quarts de tasse sont dans certains pays des unités de mesure usuelles, et qu'il n'est alors pas besoin de réaliser un calcul formel lorsqu'on visualise que la moitié d'une demi-tasse est un quart de tasse. On trouve par ailleurs dans les items des tâches consistant à convertir une écriture fractionnaire en écriture décimale et vice versa, alors que le passage de l'un à l'autre n'est prévu explicitement qu'en huitième année. Il y a donc un attendu implicite selon lequel la démonstration « d'une connaissance de la valeur des décimales » (*Mathematics Framework*, 2015, p. 15) doit s'appuyer sur les fractions. À l'inverse, le placement d'une fraction sur la droite numérique est une tâche prévue par les auteurs TIMSS depuis l'origine, pour autant celle-ci n'est absolument pas présente dans les items. Donc, le cadre défini par les auteurs ne rend pas toujours bien compte du contenu des items et ne fait pas cas de toutes les techniques qui peuvent être employées par les élèves.

Dans le second degré, on perçoit l'augmentation de la variété des concepts de fraction mis en jeu par rapport à la quatrième année (annexes 298 à 301), puisque les auteurs évoquent la notion de rapport et la conversion « des pourcentages, des proportions et des fractions » (*Mathematics Framework*, 2015, p. 20). La formulation utilisée en quatrième année (« reconnaitre des fractions comme des parts d'entiers, des parts de collections ou des emplacements sur la droite numérique, et représenter des fractions avec des mots, des nombres et des modèles ») et en huitième année (« identifier, comparer et ordonner des nombres rationnels [fractions, écritures décimales et entiers] en utilisant des modèles et représentations variés ») est moins précise et ouvre vers davantage de tâches possibles. De même, dans le domaine du calcul, les auteurs ne limitent pas leur évaluation à des types de tâches très spécifiques : les élèves doivent savoir « calculer avec des nombres rationnels ». Le lien entre le contenu des tests et le cadre théorique dans lequel il est situé est donc difficile à établir en raison de l'imprécision de la rédaction des types de tâches associés. En revanche, les attentes des auteurs TIMSS sont assez stables depuis 2003 : même si la formulation de celles-ci évolue, les notions restent les mêmes. En ce qui concerne les problèmes, on s'aperçoit qu'ils sont bien détachés des notions relatives au calcul, signifiant ainsi que l'on peut demander aux élèves des tâches de calcul en dehors de tout contexte. Ainsi, en 2003 et 2007, le calcul et les problèmes sont évoqués dans deux phrases séparées. En 2011 et 2015, ceux-ci sont évoqués dans la même phrase, mais ils ne sont pas forcément liés (« calculer avec des fractions et des écritures décimales, et résoudre les problèmes les impliquant » et « calculer avec des nombres rationnels (fractions, écritures décimales et entiers), y compris dans le cadre de situations problèmes »).

Cela montre que les auteurs attendent de la part des élèves que certaines procédures de calcul soient automatisées. Or, l'automatisation de l'ensemble des techniques opératoires, qui correspondent à des procédures bien précises, n'est pas prévue, même en fin de huitième année, dans certains pays de notre corpus. La comparaison des résultats des élèves en fonction des instructions officielles de leur pays pourra donc apporter des exemples de l'écart entre le savoir à enseigner et le savoir acquis.

Les pays qui participent régulièrement aux évaluations TIMSS et qui y sont performants adaptent-ils leurs programmes d'enseignement aux attentes des auteurs ou aux contenus des tests pour parfaire leurs résultats ? Les nouvelles instructions officielles qui entrent en vigueur progressivement à Singapour nous laissent à penser que ce n'est pas la recherche d'une adéquation entre les contenus des tests et les notions enseignées qui est la source des scores très élevés de leurs élèves. En effet, le poids de la fraction-mesure y est renforcé, avec davantage de références à la droite graduée et au comptage avec des fractions. Or, le placement de fractions sur une droite graduée et le comptage avec des fractions sont des tâches qui ne sont jamais apparues dans les tests de quatrième année depuis 1995. Pour nous assurer de façon plus rigoureuse de la capacité des évaluations TIMSS à évaluer des types de tâches relatifs aux fractions, sans possibilité pour les participants de s'entrainer préalablement sur des exercices qui seront ensuite inclus dans les tests, nous avons observé l'évolution des résultats des élèves aux items utilisés plusieurs fois au fil des années.

B. L'évolution des résultats des élèves aux items redondants

Certains items sont utilisés dans plusieurs évaluations TIMSS. Par exemple, le problème visant à faire identifier la moitié de 1/2 a été soumis aux élèves en 2003 (sous l'identifiant M1103), en 2007 (sous l'identifiant M0903) et en 2011 (sous l'identifiant M0503). En 2011, pour la quatrième année, sur les dix items que nous avons identifiés comme se rapportant au concept de fraction, nous comptabilisons neuf items ayant déjà été donnés aux élèves dans des évaluations précédentes. En regardant si les scores des pays participants s'améliorent au fur et à mesure des années sur ces items redondants, nous espérons mettre au jour des mécanismes visant à entrainer les élèves pour des tâches spécifiquement destinées à augmenter le score des élèves aux évaluations TIMSS. Toutefois, différents facteurs peuvent intervenir dans l'amélioration des résultats d'un pays, notamment la modification des instructions officielles, ou l'amélioration générale de la qualité de l'enseignement. Nous n'avons pas pu comparer l'évolution concernant les items redondants et celle concernant les items non redondants : le

nombre d'items non redondants est trop faible et la part représentée par les items redondants trop importante. Nous avons donc comparé l'évolution des résultats des élèves des différents pays de notre étude, en considérant que si tous évoluent de façon semblable, l'origine de l'évolution serait davantage à trouver dans la composition de l'item lui-même que dans l'enseignement reçu par les élèves.

Nous nous sommes intéressé à la période 2003-2015, qui comprend les évaluations TIMSS 2003, TIMSS 2007, TIMSS 2011 et TIMSS 2015. En effet, l'année 1999 nous parait introduire une rupture en raison de l'absence de test pour les élèves de quatrième année). Nous avons donc sélectionné les pays dont les écoliers ont participé à toutes les évaluations TIMSS entre 2003 et 2015. Cela nous a conduit à établir une liste de six pays ou régions ainsi constituée : Angleterre, Hong Kong, Ontario, Québec, Singapour et Taipei chinois. Nous avons par ailleurs isolé tous les items relatifs aux fractions présents de façon récurrente dans les évaluations TIMSS susmentionnées, ce qui nous donne une liste de dix items :

- « *4/5 minus 1/5* » (utilisé en 2003 et 2007) ;
- « *Recipe for 3 people* » (utilisé en 2003, 2007 et 2011) ;
- « *Rotate the shape 1/4 clockwise* » (utilisé en 2003, 2007 et 2011) ;
- « *Select a fraction larger than 1/2* » (utilisé en 2003, 2007 et 2011) ;
- « *Position of the shape after a half turn* » (utilisé en 2003, 2007 et 2011) ;
- « *Shade 1/2 of the larger triangle* » (utilisé en 2007 et 2011) ;
- « *Fraction of the cake eaten* » (utilisé en 2007 et 2011) ;
- « *Fraction of the cake left* » (utilisé en 2003, 2011 et 2015) ;
- « *Equivalent fractions* » (utilisé en 2007 et 2011) ;
- « *Which is the largest fraction?* » (utilisé en 2007, 2011 et 2015).

Nous avons mesuré l'évolution des résultats obtenus par chacun des pays entre deux évaluations successives (annexes 302 à 311). Ainsi, pour les pays ayant participé à trois évaluations, nous avons d'abord mesuré l'évolution entre 2003 et 2007, puis entre 2007 et 2011. Nous avons ensuite calculé la moyenne des points de pourcentage d'évolution pour chacun des participants de notre corpus. L'évolution moyenne pour l'ensemble des pays que nous avons sélectionnés est de 0,2 point de pourcentage, ce qui est très faible et tend à montrer que ceux-ci ne profitent pas des items passés pour entrainer leurs élèves à des fins d'obtention d'un résultat plus élevé. L'écart-type entre les évolutions moyennes des pays aux différents items est de 3,4 points de pourcentage, suggérant une assez grande homogénéité au sein du corpus en ce qui

concerne cette faible évolution moyenne. Néanmoins, l'écart-type entre les évolutions relatives à chaque item pour un pays donné est de 8,5 points de pourcentage, indiquant des évolutions variées selon les items considérés. Parmi les items présentés ci-dessous, nous avons choisi d'analyser plus précisément ceux qui nous paraissaient les plus riches d'enseignement. Par exemple, l'item qui marque la plus forte évolution moyenne est celui intitulé « *Fraction of the cake left* », entre 2003 et 2011. Or, il s'agit d'une évolution à la baisse (− 28,2 points de pourcentage). Pour les deux items, la tâche proposée est similaire, mais les nombres utilisés sont très différents, suggérant une augmentation du niveau de complexité de l'item. Les pays les plus performants ont une diminution des performances qui est très limitée (par exemple, à Singapour, la baisse n'est que de 3,2 points de pourcentage) tandis que dans les pays les moins performants, cette diminution est très importante (par exemple, en Angleterre, la baisse est de 57,4 points de pourcentage). L'impression qui ressort de ces résultats est que les pays qui obtiennent les meilleurs résultats sont mieux préparés pour faire face à l'inédit, plutôt que mieux préparés pour faire face aux items déjà publiés. La confirmation de cette idée est apportée par l'item pour lequel les résultats sont au départ les plus faibles (« *Recipe for 3 people* »). Nous pourrions en effet penser que les pays souhaitant améliorer leurs résultats feraient porter leurs efforts sur les items les moins bien réussis. Par exemple, les élèves de Singapour obtiennent en 2003 un taux de réussite égal à 56,9 % à cet item, loin de leur taux de réussite moyen dans le domaine des fractions qui était de 73,7 %. Il est aussi l'un des rares items où les élèves de Singapour n'occupent pas la première place. Or, comme le montre le graphique ci-dessous, cet item a été proposé trois fois, et on ne constate pas d'augmentation spectaculaire du taux de réussite qui laisserait penser à un travail spécifique sur la compétence nécessaire pour réussir cet item (être capable d'identifier la moitié de 1/2, c'est-à-dire 1/4).

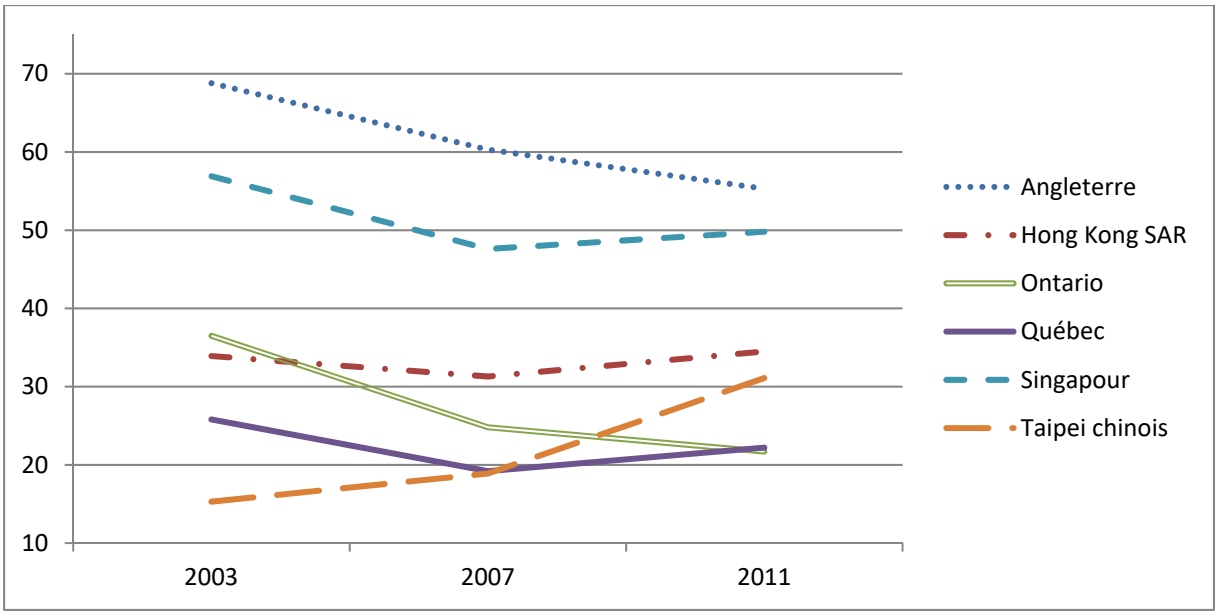


Figure 108. Évolution des scores obtenus aux évaluations TIMSS à l'item "Recipe for 3 people" entre 2003 et 2011

De même, à Hong Kong, les résultats à cet item sont très faibles en valeur absolue (inférieurs à 40 %) comme en valeur relative comparativement à Singapour ou à l'Angleterre. Sur la période, la stabilité que l'on observe alors même que la plupart des autres participants ont des résultats en baisse peut laisser penser qu'un effort a été réalisé pour mieux réussir cette tâche (en particulier dans le Taipei chinois, où le taux de réussite des élèves est en hausse). Néanmoins, si des efforts ont été entrepris dans le but d'améliorer leurs performances à cet item, ils n'ont que des conséquences modestes sur le score obtenu par les élèves. Toutefois, on peut imaginer que certains pays entrainent leurs élèves pour qu'ils aient de bons scores, même si l'entrainement n'est pas ciblé sur des items évalués avant.

Tous les items redondants que nous avons analysés jusqu'à présent ont été rendus publics lors de leur dernière utilisation, empêchant ainsi les enseignants de se les approprier (seules les autorités y avaient accès, mais avec l'engagement que ceux-ci devaient rester confidentiels). Néanmoins, en huitième année, il existe deux items qui ont été rendus publics deux fois, en 1995 et 2007 (il s'agit des items « *Compute sum of three fractions* » et « *Circle with same shaded fraction* » que nous avons décrits dans le paragraphe relatif au nombre d'items impliquant des fractions). Si les professeurs se sont emparés de ces items en 1995 pour les faire travailler dans les classes, il est probable que l'on constate une amélioration en 2007.

	Item « *Circle with same shaded fraction* »			Item « *Compute sum of three fractions* »		
	1995	2007	Evolution	1995	2007	Evolution
Angleterre	78,5 %	77 %	– 1,5	12,4 %	34 %	21,6
Corée du Sud	84,3 %	89,3 %	5,0	81,4 %	85,3 %	3,9
Hong Kong SAR	72,4 %	81,6 %	9,2	79,3 %	83,1 %	3,8
Singapour	80,1 %	80,9 %	0,8	90,5 %	86,3 %	– 4,2

Figure 109. Évolution des taux de réussite des élèves de huitième année aux items TIMSS rendus publics en 1995 et 2007

Seuls quatre pays de notre corpus ont participé aux évaluations de huitième année en 1995 et en 2007. Cependant, cela est suffisant pour percevoir des différences importantes entre les participants. Ainsi, à Singapour, on voit que les résultats sont plutôt stables pour l'item « *Circle with same shaded fraction* » et en baisse pour l'item « *Compute sum of three fractions* ». Dans les autres pays asiatiques du corpus, on remarque une hausse pour les deux items. Enfin, en Angleterre, on remarque une légère baisse à l'item où les élèves se montraient performants en 1995 et une forte hausse à l'item qui était très mal réussi cette même année. Il est donc tout à fait possible que des pays, par l'intermédiaire de leurs autorités ou directement par les professeurs, fournissent des efforts avec l'objectif de mieux réussir les évaluations TIMSS. Cela ne semble pas illégitime : l'un des objectifs de ces tests est de permettre aux systèmes éducatifs de progresser en pointant leurs faiblesses. À l'inverse, les résultats de Singapour, qui obtient bien souvent les meilleurs scores à ces tests, ne semblent pas affectés par la redondance des items, ce qui conforte l'idée que les acquis des élèves sont solides dans ce pays, et que leur réussite ne semble pas être le fruit d'une préparation spécifique aux évaluations TIMSS à partir des items déjà parus. Si des progrès sont réalisés sur les items redondants par la Corée du Sud, Hong Kong SAR et le Taipei chinois, ce n'est pas dans une proportion de nature à modifier profondément les résultats des élèves. Cela peut toutefois être révélateur d'une capacité plus marquée de ces systèmes éducatifs à se remettre en question à partir des résultats obtenus, ou plus généralement d'un intérêt plus fort pour ce que disent les résultats à ces tests des forces et des faiblesses des élèves.

Conclusion de la sous-section

Les items TIMSS ont été analysés à la lumière des connaissances élaborées dans le cadre de la didactique des mathématiques. Il existe une progression organisée par les auteurs entre la

quatrième et la huitième année. En quatrième année, la conception « partie-tout » de la fraction est hégémonique. On attend des élèves qu'ils associent convenablement l'écriture formelle d'une fraction à la quantité qu'elle représente, le plus souvent à travers un schéma et dans un problème concret, y compris pour résoudre des types de tâches qui ne figurent pas dans les programmes d'enseignement (par exemple pour trouver la moitié de 1/2). Malgré quelques différences (dont celle que nous venons de citer), les choix réalisés par les auteurs de TIMSS correspondent assez bien à ceux réalisés par les législateurs de notre corpus, notamment parce que tous deux insistent sur la capacité des élèves à associer une fraction à un dessin, à identifier des fractions équivalentes et à réaliser des additions simples comportant des fractions (bien que ce dernier type de tâches soit souvent supposé être enseigné postérieurement à la quatrième année). En huitième année, les conceptions de la fraction utilisées se diversifient, tout comme les types de tâches en jeu dans les items. Les activités ayant trait à la comparaison et au rangement de fractions sont plus nombreuses, tout comme celles nécessitant de réaliser des calculs avec des fractions. Néanmoins, il existe encore de nombreux items qui évaluent des types de tâches simples, tels que ceux conduisant à associer une fraction et un dessin. Les évaluations TIMSS contiennent donc des items suffisamment divers pour que nous puissions analyser des résultats relatifs à des types de tâches enseignés dans tous les pays ou dans certains seulement, ainsi que pour pouvoir observer des évaluations entre les scores obtenus par les écoliers et les collégiens pour des items se rapportant à un même type de tâches. En outre, dans le premier degré comme dans le second degré, les tâches concernant les fractions sont bien isolées, ce qui facilite les comparaisons. Il arrive que des exercices impliquent successivement deux types de tâches différents, mais cela est rare. La recherche d'un lien entre les programmes scolaires, qui prévoient ces types de tâches indépendamment les uns des autres, et la réussite des élèves pour un item donné (et donc pour un type de tâche précis) n'est donc pas remise en cause. Il semble par ailleurs que les participants ne préparent pas spécifiquement leurs élèves à répondre aux exigences des évaluations TIMSS en utilisant des items déjà parus. En effet, les items qui apparaissent plusieurs fois dans les tests, y compris ceux qui avaient été publiés avant d'être réutilisés par la suite, ne sont pas mieux réussis, en moyenne, dans les évaluations les plus récentes, ou alors pour un gain modeste qui ne change pas l'analyse globale que l'on peut faire de la réussite à l'item.

Conclusion de la section consacrée aux fractions dans les évaluations TIMSS

Avec les évaluations TIMSS, nous disposons d'un échantillon suffisamment important d'items impliquant des fractions pour mener à bien l'analyse que nous proposons : celle du lien entre les instructions officielles et les savoirs acquis par les élèves. Nous y trouvons des items portant sur des tâches semblables (par exemple, associer une fraction à un dessin) mais comportant des variables différentes (par exemple, deux fractions différentes sont utilisées), ce qui nous permettra de comprendre l'importance des variables pour les techniques utilisées par les élèves. Nous y trouvons des items comportant des variables identiques (par exemple, la même fraction est utilisée), mais mettant en jeu des tâches différentes (par exemple, identifier une fraction et comparer des fractions), ce qui nous permettra de percevoir l'importance du type de tâches dans la mise au jour de la compréhension par l'élève du concept de fraction. Nous y trouvons des tâches similaires ayant été proposées plusieurs fois au fil des années, ce qui nous permettra de mener une étude longitudinale et de mesurer l'incidence des changements de programmes scolaires sur l'évolution de la réussite des élèves.

Nous avons également montré que la part des fractions dans les évaluations TIMSS était suffisamment élevée pour permettre une analyse, mais suffisamment faible pour que l'on puisse trouver de réelles différences entre le score obtenu dans le domaine des fractions et le score global. Or, la relation entre les deux est très forte : il semble difficile de réaliser de grandes performances pour le sujet qui nous occupe sans être bon en mathématiques, et à l'inverse, les fractions constituent un excellent indicateur du niveau général des élèves en mathématiques. Il n'existe donc pas de limite *a priori* à ce que les résultats que nous obtenons en ce qui concerne les fractions ne puissent pas être généralisés. Enfin, nous avons montré qu'il n'y avait pas de préparation spécifique de la part des pays à partir d'items rendus publics, ce qui n'exclut pas une préparation plus générale, notamment pour aborder des questionnaires à choix multiples. La variété des situations en jeu, le renouvellement des variables didactiques, permettent de penser que les performances des élèves reflètent un niveau de compréhension du concept de fraction dont la mesure est fiable dans le contexte donné. Nous n'avons pas observé une augmentation spectaculaire des résultats des élèves lorsque des items ont été proposés à plusieurs reprises ; la question de la préparation des élèves aux tests ne doit donc pas atténuer la portée des conclusions que nous pourrons formuler.

Conclusion du chapitre consacré aux limites à la portée de notre étude liées aux aspects quantitatifs de la transposition interne

Nous avons défini les aspects quantitatifs du travail de transposition comme se rapportant au nombre de tâches, de types de tâches, de techniques et de significations du concept de fraction abordés par les élèves, soit à travers l'idée qu'en donnent les instructions officielles, soit dans les tests. Ayant déjà évoqué la diversité des types de tâches dont l'étude est imposée par les législateurs dans la première partie de cette recherche, nous avons principalement abordé, dans ce chapitre, la quantité de travail effectuée par les élèves, dans le domaine des mathématiques en général et dans celui des fractions en particulier. Nous avons constaté que le nombre d'heures passées à étudier les mathématiques dans les établissements scolaires était assez varié dans notre corpus, mais sans rapport avec les résultats obtenus par les élèves. Ces différences sont moindres que celles qui concernent le temps de travail personnel en mathématiques. Celles-ci sont à l'inverse fortement corrélées aux scores obtenus par les élèves, notamment en quatrième année. En outre, ces observations sont à mettre en correspondance avec celles que nous avions faites à propos des cours pris en dehors du temps scolaire. Nous ne savons pas si le temps passé dans ces cours s'ajoute au temps estimé par les élèves pour faire leurs devoirs ou s'ils se confondent : s'agit-il de cours particuliers dispensant une aide aux devoirs, ou de cours supplémentaires proposant des exercices autres que ceux donnés par les enseignants ? Dans le deuxième cas, les écarts en termes de temps de travail en mathématiques en dehors du temps scolaire seraient encore plus importants entre les élèves asiatiques et les élèves occidentaux (nous avons calculé un rapport de 1 pour 8,3 entre le temps passé sur les devoirs, dans cette matière, par les écoliers français et celui passé par les élèves de Hong Kong SAR). Nous faisons l'hypothèse que le temps passé à étudier les mathématiques détermine non seulement la durée de l'entrainement visant à assimiler une technique donnée, mais également la variété des techniques qui pourront être appréhendées par les élèves. La réussite aux évaluations TIMSS requérant la maitrise d'un certain nombre de techniques, plus les élèves maitriseraient un nombre de techniques élevé, plus ils seraient susceptibles de posséder celles qui sont nécessaires pour la réalisation des tâches proposées. Néanmoins, nous ne connaissons pas le contenu des devoirs proposés aux élèves, et des études complémentaires seraient indispensables pour mieux comprendre la relation qui unit la durée des devoirs et les performances des élèves.

Par ailleurs, nous avons montré qu'il existait une correspondance assez forte entre la place occupée par les fractions dans les curriculums et dans les tests : la part des fractions par rapport à l'ensemble représente environ 10 % dans les deux cas (même si la proportion d'items impliquant des fractions tend à baisser dans les tests, en particulier en huitième année). Les différences inter-pays tiennent plus à la répartition temporelle des enseignements : dans les pays asiatiques, ceux-ci sont fortement concentrés en cinquième et sixième années, tandis que dans les pays occidentaux, ils sont davantage étalés au cours de la scolarité, et l'utilisation des fractions semble moins progressive. Dans notre étude, il faudra tenir compte des différents paramètres qui relèvent de la rédaction des programmes scolaires (précocité, richesse, précision des programmes d'enseignement, etc.) pour analyser le lien avec les résultats des élèves, tout en sachant que des différences de performances sont inévitables en raison des spécificités locales qui échappent largement au législateur (notamment le travail réalisé par les élèves en dehors du temps scolaire). D'un point de vue méthodologique, pour assurer la validité de nos observations, nous ne pourrons donc nous contenter des résultats bruts : il nous faudra mettre les résultats de chaque pays en relation avec leur performance globale.

CONCLUSION DU TITRE CONSACRÉ À LA PORTÉE DE NOTRE ÉTUDE

Pour déterminer la portée des observations réalisées dans les chapitres suivants, nous avons d'abord cherché à déterminer les caractéristiques des systèmes éducatifs étudiés, à travers les réponses des institutions, des enseignants, des élèves et de leurs parents aux questionnaires TIMSS. Nous avons réussi à dégager des tendances nettes, qu'elles soient régionales (comme l'absence d'utilisation de la calculatrice à l'école primaire ou le recours fréquent à des cours complémentaires en dehors du temps scolaire dans les territoires asiatiques) ou locales (faible recours à la formation continue en France ou défiance des parents à l'égard des établissements scolaires en Corée du Sud). Nous avons pu également exclure certains facteurs potentiels de la réussite des élèves aux évaluations TIMSS (par exemple, l'intérêt manifesté par les élèves pour le cours de mathématiques ou les conditions matérielles telles qu'elles sont perçues par les enseignants). Toutefois, nombre des questions posées aux acteurs à l'occasion des évaluations TIMSS ouvrent la voie à des interprétations variées. Par exemple, nous connaissons le nombre moyen d'élèves dans les classes, mais nous ne connaissons pas le nombre d'adultes qui s'y trouvent. Nous connaissons le niveau de diplôme moyen des enseignants, mais nous ne connaissons ni les conditions d'entrée à l'université, ni le contenu des formations qui y sont proposées, ni les conditions précises d'accès au métier d'enseignant. En outre, à l'exception du temps de travail en dehors du temps scolaire consacré aux mathématiques, nous n'avons pas pu mettre au jour une relation directe entre un facteur pris isolément et les performances des élèves aux évaluations TIMSS 2015. Même pour la durée passée à effectuer des devoirs, nous avons dû croiser les données issues de plusieurs questions TIMSS pour parvenir à établir une telle relation. De même, ce n'est qu'en recoupant diverses observations que l'on arrive à identifer des facteurs explicatifs des performances des élèves dans tel ou tel pays. Par exemple, pourquoi la Corée du Sud obtient-elle des scores très élevés avec une durée des enseignements en mathématiques aussi faible ? Nous sommes tenté de penser que l'importance prise par les cours complémentaires dans ce pays n'y est pas étrangère, phénomène que l'on pourrait relier à la forte exigence des parents vis-à-vis des enseignements, qui ne semble qu'assez modérément satisfaite par les établissements scolaires, et par le sentiment assez fort des élèves de ne pas comprendre les attentes de leur professeur. Ce contexte posé, nous allons présenter le contenu des items et pouvoir mener une analyse qui sera plus strictement didactique. Si nous avons vu que la structure des tests ne constituait pas une restriction à la portée de notre étude concernant les fractions, les caractéristiques différentes des systèmes éducatifs nous contraignent toutefois à prendre certaines précautions méthodologiques que nous allons détailler dans le titre suivant.

TITRE II. RÉSULTATS DE L'ÉTUDE COMPARATIVE DES PERFORMANCES DES ÉLÈVES AUX ÉVALUATIONS TIMSS

Après avoir défini les limites à la portée de notre étude, nous allons en présenter les résultats. Notre objectif est de mieux comprendre le lien qui unit le contenu des programmes d'enseignement et les performances des élèves aux évaluations TIMSS. Autrement dit, nous cherchons à déterminer dans quelle mesure la tranposition didactique externe a une incidence sur l'apprentissage du concept de fraction par les élèves, dans le cadre d'une analyse réalisée à partir des outils de la théorie anthropologique du didactique. Nous avons mis au jour des caractéristiques de cette transposition : les praxéologies dont l'étude est imposée sont différentes au sein de notre corpus, tout comme l'organisation temporelle des enseignements, le degré de précision et d'exigence du législateur ou encore l'autonomie attendue de l'élève dans la réalisation des tâches. L'étude de la relation entre, d'une part, ces facteurs, et d'autre part, la réussite des élèves à des items mettant en jeu des types de tâches bien précis, vont permettre non seulement de caractériser cette relation, mais également de préciser la capacité éventuelle des élèves à réaliser des transferts entre des types de tâches différents. Pour mener cette étude, nous disposons de trois éléments : les programmes d'enseignement, des taux de réussite des élèves pour chacun des items, ainsi que les déclarations des enseignants à propos des enseignements dispensés. Ces dernières pourront expliquer, parfois, le lien distendu entre les instructions officielles et les scores obtenus. En outre, elles nous conduiront à mieux comprendre l'incidence des programmes d'enseignement sur les choix réalisés par les enseignants, et à montrer que l'adhésion des professeurs aux instructions officielles n'est pas homogène au sein de notre corpus. Le chapitre I sera donc consacré à la mise en évidence de l'existence d'un lien entre les programmes et les performances des élèves, tandis que le chapitre II en décrira les limites.

CHAPITRE I. L'EXISTENCE D'UN LIEN ENTRE LES PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT ET L'ACQUISITION DU CONCEPT DE FRACTION PAR LES ÉLÈVES

Avant de mettre en évidence l'existence d'un lien entre les curriculums et les scores obtenus par les élèves aux évaluations TIMSS, nous avons analysé de façon détaillée les performances des élèves dans chaque pays. En effet, les scores bruts ne peuvent pas être confrontés de façon directe aux instructions officielles, en raison des autres facteurs qui influent sur ces taux de réussite (nous pensons en particulier à la durée du travail fourni en mathématiques, à propos de laquelle nous avons montré que les écarts étaient très importants au sein de notre corpus). Nous avons ainsi mis en évidence des performances relatives pour chaque type de tâche, afin de pouvoir réaliser des comparaisons inter-pays plus pertinentes. En conséquence, dans ce chapitre, nous présenterons, dans la première section, les caractéristiques des résultats des élèves aux évaluations TIMSS. Dans la seconde section, nous effectuerons des comparaisons portant sur leur corrélation avec les curriculums (section II).

Section I. Les caractéristiques des résultats des élèves aux évaluations TIMSS

De nombreuses approches sont susceptibles d'être utilisées pour appréhender les résultats des élèves aux évaluations TIMSS. Notre recherche présentant des aspects anthropologiques et didactiques, nous nous sommes intéressé à deux variables en particulier : le pays considéré (puisque ces tests mettent en avant les performances de systèmes éducatifs spécifiques) et les tâches en jeu dans les items (puisque nous avons vu que ce niveau d'analyse, par rapport à l'étude des techniques et des significations du concept de fraction, était le plus pertinent pour analyser à la fois les programmes d'enseignement et les évaluations). Ces deux aspects seront abordés dans la sous-section I. Toutefois, pour expliquer les résultats des élèves, il nous faut déterminer si ces derniers sont capables de réaliser des transferts, c'est-à-dire de réussir des items pour lesquels aucun enseignement n'était prescrit. Cette analyse est proposée dans la sous-section II.

Sous-section I. Les résultats des élèves aux tests

Les résultats bruts nous renseignent sur les scores obtenus dans le domaine des fractions à chaque test, en quatrième année comme en huitième année. Même si nous avons déjà proposé quelques observations à ce propos, leur analyse détaillée permettra non seulement de définir les

pays ou les aires géographiques dans lesquels les élèves sont les plus performants, mais également de mesurer de façon précise les écarts entre les participants. Il s'agit alors principalement de réaliser une analyse inter-pays (§ 1). Toutefois, ces tendances établies à partir de moyennes peuvent masquer des variations importantes au sein d'un même territoire. Nous allons donc étudier les variations internes (pour les différents items d'un même test) et externes (entre les élèves de catégories d'âge différentes) des taux de réussite pour chacun des participants de notre corpus. Cela nous conduira à définir des territoires dans lesquels les résultats sont plus hétérogènes, et à étudier cette variété des scores obtenus. Il s'agit alors principalement de réaliser une analyse intra-pays (§ 2).

§ 1. L'analyse inter-pays

Une étude longitudinale nous permettra de quantifier les différences de résultats entre les pays les plus performants et ceux qui ont des taux de réussite plus faibles, ainsi que de voir si les performances des élèves sont plutôt dans une phrase ascendante ou descendante (A). Elle nous conduira à vérifier la validité des comparaisons effectuées, en mettant au jour des disparités importantes. Nous pourrons ensuite mesurer la variabilité des résultats en fonction des items considérés. Cela nous permettra d'affirmer que les écarts sont suffisamment importants pour rechercher une relation avec les programmes d'enseignement (B).

A. Les résultats de chaque pays

La première lecture que nous proposons est une analyse des scores globaux obtenus par les élèves aux évaluations TIMSS depuis 1995. Bien que nous sachions déjà qu'il existe une forte corrélation entre les performances en mathématiques et la réussite dans le domaine des fractions, cette étude nous conduira à présenter les grandes évolutions au sein de notre corpus. Précisons toutefois que ces scores constituent une mesure parmi d'autres de la performance des élèves sur des questions mathématiques. D'une part, il peut exister des facteurs qui influent sur la performance des élèves au moment de la passation des évaluations. Nous pensons notamment à l'habitude qu'ont les élèves de compléter des tests standardisés en général, et des questionnaires à choix multiples en particulier. Nous pensons également au contexte dans lequel ces évaluations sont passées : quelle importance leur accordent les élèves ? Quelle pression sociale entoure leur passation ? D'autre part, les élèves possèdent sans doute d'autres compétences que celles qui sont appréhendées dans les tests, et qui revêtent une grande importance dans certains pays : la créativité, la capacité à travailler en équipe, l'aptitude à

dégager des régles mathématiques par l'observation de récurrences, etc. Or, ces compétences ne sont pas mesurées par les évaluations TIMSS.

Participant	1995	2003	2007	2011	2015
Angleterre	513	531	541	542	546
Corée du Sud	611			605	608
Floride				545	546
France					488
Hong Kong SAR	587	575	607	602	615
Irlande du Nord				562	570
Ontario		511	512	518	512
Québec		506	519	533	536
République d'Irlande	550			527	547
Singapour	625	594	599	606	618
Taipei chinois		564	576	591	597
Moyenne	**577**	**547**	**559**	**563**	**562**

Figure 110. Scores obtenus par les participants de notre corpus aux évaluations TIMSS de quatrième année

Au sein de notre corpus, les participants les plus performants sont asiatiques : ce sont les seuls qui parviennent à dépasser le score de 600 (Corée du Sud, Hong Kong SAR, Singapour) ou à s'en approcher (comme le Taipei chinois, avec un score de 597 en 2015). Si l'on considère les territoires occidentaux, le meilleur score obtenu en quatrième année l'est par l'Irlande du Nord, avec un score de 570 en 2015. Le résultat le plus faible est obtenu par la France, avec un score de 488 en 2015. Il est à noter que c'est le seul score parmi ceux des participants que nous étudions qui se trouve en dessous de la moyenne de l'ensemble des pays participants, qui est toujours fixée à 500. La méthode consistant à rapporter les résultats à une valeur fixe n'est pas neutre. On pourrait penser en effet que que les résultats de l'Angleterre s'améliorent d'année en année, puisque le score de ce pays passe de 513 en 1995 à 546 en 2015. C'est possible en effet, mais il faut bien considérer que les performances de l'Angleterre s'améliorent relativement à celles des autres pays participants. Or, la liste des pays dont les élèves passent les évaluations n'est pas la même d'une année sur l'autre. On le voit avec la France, dont les écoliers participaient aux tests pour la première fois en 2015. Néanmoins, certaines trajectoires peuvent être relevées. Ainsi, l'Ontario est le seul participant de notre corpus dont les résultats ont baissé entre 2011 et 2015. À l'inverse, la République d'Irlande gagne vingt points sur la même période, ce qui semble constituer une progression de grande ampleur. Pour autant, les programmes scolaires n'ont changé ni en Ontario, ni en République

d'Irlande. Ces résultats semblent montrer que des variations des performances des élèves peuvent survenir sans aucune intervention du législateur sur les instructions officielles, et que celles-ci ne constituent qu'un moyen parmi d'autres d'influer sur les acquis des élèves : cette hypothèse sera explorée plus loin dans cette recherche.

Participant	1995	1999	2003	2007	2011	2015
Angleterre	506	496	498	513	507	518
Corée du Sud	607	587	589	597	613	606
Floride					513	493
Hong Kong SAR	588	582	586	572	586	594
Ontario			521	517	512	522
Québec			543	528	532	543
République d'Irlande	527					523
Singapour	643	604	605	593	611	621
Taipei chinois		585	585	598	609	599
Moyenne	**574**	**571**	**561**	**560**	**560**	**558**

Figure 111. Scores obtenus par les participants de notre corpus aux évaluations TIMSS de huitième année

En huitième année, les territoires asiatiques se distinguent également par les hautes performances de leurs élèves : comme dans l'enseignement primaire, ce sont les seuls qui obtiennent un score moyen supérieur à 600 (Corée du Sud, Singapour, Taipei chinois) ou s'en approchent (Hong Kong SAR, avec 594 en 2015). L'Irlande du Nord ne participant pas aux évaluations destinées aux collégiens, il manque le représentant le plus performant de notre corpus en quatrième année, en ce qui concerne les pays occidentaux. C'est donc le Québec qui occupe cette place pour la huitième année, avec un score de 543 en 2003 et en 2015. Les pays les moins performants sont l'Angleterre et la Floride : ce sont les seuls de notre corpus dont les scores sont inférieurs à 500 (en 1999 et 2003 pour l'Angleterre, en 2015 pour la Floride). Néanmoins, comme nous l'avons signalé, les scores globaux ne disent rien de la performance des pays en valeur absolue. C'est pourquoi nous allons analyser les résultats des participants aux items impliquant des fractions, ceci pouvant être exprimés sous la forme d'un taux de réussite.

Participant	1995	2003	2007	2011	2015
Angleterre	47,9 %	59,3 %	59,1 %	60,5 %	55,2 %
Corée du Sud	62,8 %			58,8 %	73,4 %
Floride				60,8 %	69,2 %
France					36,7 %
Hong Kong SAR	71,9 %	67,5 %	75,9 %	71,7 %	83,0 %
Irlande du Nord				69,3 %	64,9 %
Ontario		54,5 %	42,8 %	44,6 %	44,6 %
Québec		47,9 %	46,3 %	49,9 %	56,8 %
République d'Irlande	61,4 %			62,9 %	64,8 %
Singapour	74,4 %	73,7 %	76,0 %	77,5 %	82,9 %
Taipei chinois		57,3 %	60,7 %	67,8 %	71,6 %
Moyenne	**63,7 %**	**60,0 %**	**60,1 %**	**62,4 %**	**62,5 %**

Figure 112. Pourcentage de réussite moyen aux items relatifs aux fractions obtenu par les participants de notre corpus aux évaluations TIMSS de quatrième année

Le taux de réussite des élèves dans le domaine des fractions donne la mesure des écarts qui existent entre les performances des élèves au sein de notre corpus. Pour prendre l'exemple des évaluations 2015, la différence entre celui de la France (36,7 %) et celui de Hong Kong SAR (83 %) est de 46,3 points de pourcentage en quatrième année. Par ailleurs, ces données confirment ce que nous avions observé à partir des scores globaux : les pays asiatiques sont les plus performants de notre corpus (notamment en raison de la progression du taux de réussite du Taipei chinois au fil des évaluations). Parmi les pays européens et nord-américains, seule la Floride obtient un pourcentage proche de celui du Taipei chinois, avec 69,2 % pour la première, contre 71,6 % pour le second. En France et en Ontario, les résultats sont inférieurs à 50 %, ce qui confirme que la faiblesse des performances de ces deux participants. En ce qui concerne la moyenne du taux de réussite pour l'ensemble du corpus, elle fluctue selon les années entre 60 % et 64 % ce qui montre une certaine stabilité des résultats malgré le fait que la liste des pays participants n'est pas toujours la même d'une année à l'autre. On a l'impression toutefois d'un léger changement de la structure des résultats entre 2011 et 2015, puisque l'Angleterre, la Corée du Sud et la Floride avaient obtenu des résultats similaires au premier test, tandis qu'au second, il existe des différences bien marquées entre ces trois participants (la Corée du Sud dépassant nettement la Floride, et cette dernière se montrant plus performante que l'Angleterre).

Participants	1995	1999	2003	2007	2011	2015
Angleterre	46,2 %	48,7 %	47,3 %	43,6 %	48,2 %	52,6 %
Corée du Sud	71,3 %	75,5 %	75,0 %	72,4 %	79,0 %	81,8 %
Floride					50,8 %	50,3 %
Hong Kong SAR	70,0 %	78,0 %	75,0 %	66,2 %	72,8 %	78,7 %
Ontario			53,4 %	49,8 %	52,5 %	55,8 %
Québec			61,3 %	52,2 %	59,1 %	66,0 %
République d'Irlande	59,0 %					66,5 %
Singapour	83,0 %	82,6 %	79,5 %	71,6 %	77,7 %	85,9 %
Taipei chinois		75,7 %	72,3 %	71,0 %	73,5 %	73,7 %
Moyenne	**65,9 %**	**72,1 %**	**66,3 %**	**61,0 %**	**64,2 %**	**67,9 %**

Figure 113. Pourcentage de réussite moyen aux items relatifs aux fractions obtenu par les participants de notre corpus aux évaluations TIMSS de huitième année

En huitième année, la moyenne du taux de réussite dans le domaine des fractions pour l'ensemble du corpus varie entre 61 % et 73 %, ce qui est à la fois meilleur qu'en quatrième année, mais aussi plus hétérogène. En revanche, les écarts-types constatés sont assez similaires dans le premier degé (10,8 points de pourcentage en moyenne) et dans le second degré (11,8 points de pourcentage). On ne retrouve pas la hausse régulière des résultats du Taipei chinois que nous avions remarquée en quatrième année : ce participant obtient dès sa première participation en 1999 un taux de réussite élevé. Nous en déduisons que les efforts des autorités se sont portés sur l'amélioration de la maitrise du concept de fraction à l'école primaire, en particulier avec l'introduction des programmes d'enseignement de 2005. Conformément à ce que nous avions observé à propos du score global, les participants qui sont les moins performants dans le domaine des fractions sont la Floride et l'Angleterre, tandis que le plus performant est Singapour. L'écart entre le premier et le dernier est de 35,6 points de pourcentage. Nous pouvons donc affirmer qu'il existe une grande variabilité inter-pays quant aux performances des élèves dans le domaine des fractions. Cependant, cette variabilité des moyennes ne recèle-t-elle pas des écarts très dépendants de la tâche en jeu ? Pour le savoir, nous allons exposer les disparités des performances des élèves en fonction des items.

B. Les résultats pour chaque item

Une analyse plus fine est nécessaire pour évoquer les écarts de performances en fonction des items. Nous allons donc étudier les données les plus récentes dont nous disposons : celles qui concernent les évaluations TIMSS 2015. Nous constatons qu'au sein du corpus, la réussite

moyenne des élèves est très variable (avec un écart-type de 15 points de pourcentage), comme le montre le graphique ci-contre. Entre l'item le moins bien réussi (M0504B) et celui qui a été le mieux réussi (M0701), la différence est de 56,5 points de pourcentage. Si l'on considère que l'item M0504B ne doit pas être pris en compte dans l'analyse en raison de sa spécificité (il s'agit du seul exercice dans lequel on demande aux élèves de justifier leur réponse), l'écart maximal est de 49,9 points de pourcentage, entre les items M0906 (39,7 % de réussite en moyenne) et M0701 (89,6 %).

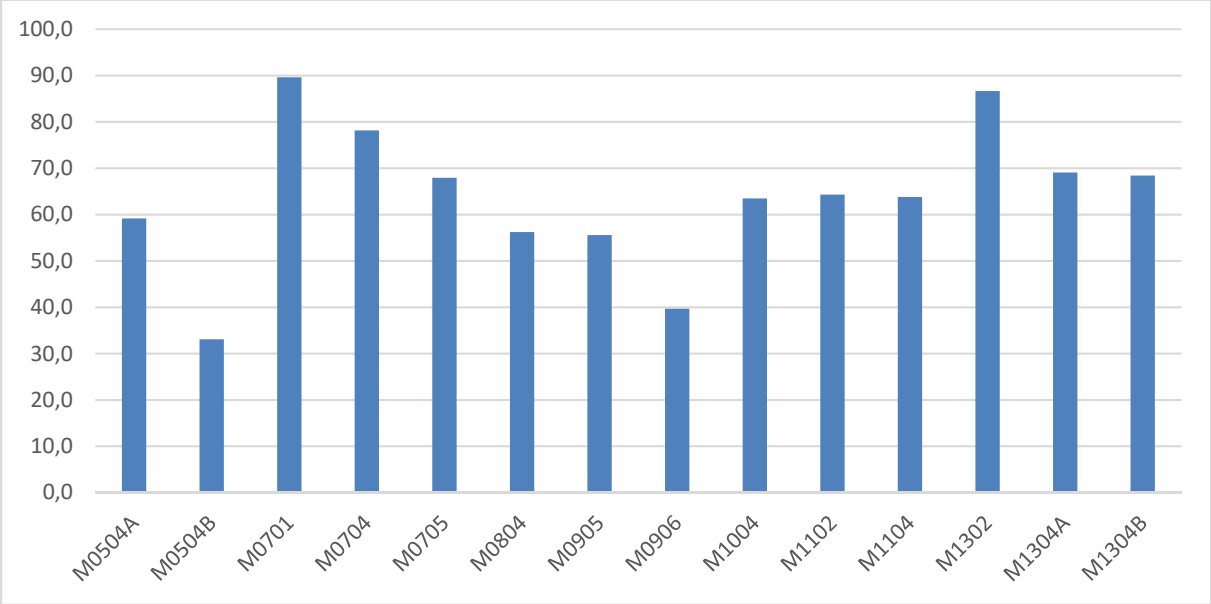


Figure 114. Pourcentage de réussite moyen à chaque item, en quatrième année, au sein de notre corpus (TIMSS 2015)

Ces deux items correspondent à des types de tâches très différents, puisque dans l'item M0701, il s'agit d'associer une fraction à un dessin, tandis que dans l'item M0906, il s'agit d'additionner deux fractions, le dénominateur de l'une étant un multiple du dénominateur de l'autre. Il n'est pas surprenant que la réussite moyenne soit plus faible pour le second exercice que pour le premier : le niveau de complexité des tâches d'addition de fractions est plus élevé que celui des tâches de reconnaissance de fractions. Il existe donc des écarts de performances liés au type de tâches, ainsi qu'aux variables de la tâche mises en jeu dans les items. Si ces différences avaient été minimes, alors nous en aurions déduit que la maitrise du concept de fraction en général déterminait largement les résultats obtenus dans le domaine des fractions, quelle que soit la tâche envisagée, suggérant une forte capacité des élèves à réaliser des transferts. Toutefois, comme on peut l'observer sur le graphique ci-contre, les écarts sont très divers selon les items : la maitrise du concept de fraction en général n'est donc pas suffisante pour réussir des items correspondant à des types de tâches différents ou mettant en jeu des

variables spécifiques, ouvrant la voie à une analyse plus fine de l'incidence de chacun d'entre eux. Par ailleurs, l'analyse des programmes d'enseignement trouve son intérêt pour interpréter des écarts importants au sein de notre corpus pour un même item.

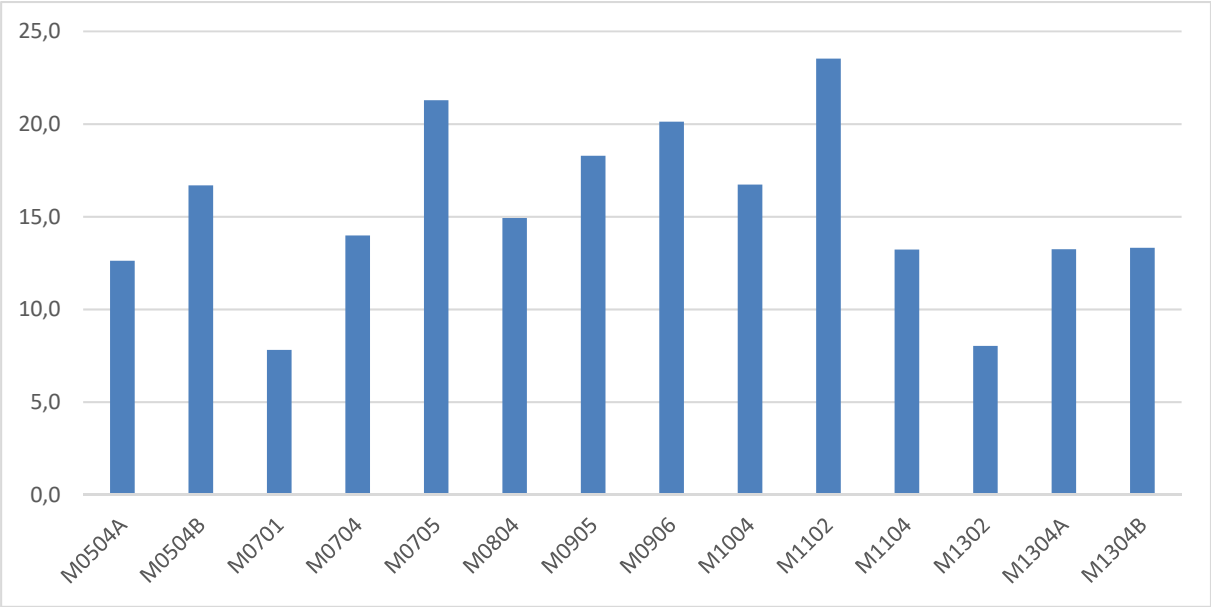


Figure 115. Écart-type, en points de pourcentage, au sein de notre corpus, pour chaque item, en quatrième année (TIMSS 2015)

En quatrième année, l'item pour lequel l'écart-type est le plus faible est l'item M0701, avec 7,8 points de pourcentage. C'est également l'item le mieux réussi, en moyenne, au sein de notre corpus. Les résultats à l'item M1302, qui met en jeu le même type de tâches (« associer une fraction à un dessin »), présentent des caractéristiques assez similaires. En ce qui concerne les autres exercices, les écarts sont beaucoup plus importants. Par exemple, pour l'item M0906 que nous avons cité précédemment (relatif à l'addition de fractions), l'écart-type est de 20,1 points de pourcentage, et l'acquisition de la notion semble très différente entre les élèves français (11,3 % de réussite) et les élèves singapouriens (82,2 % de réussite). L'item pour lequel l'écart-type est le plus élevé est l'item M1102, avec 23,5 points de pourcentage. Il s'agissait de trouver la fraction équivalente à 0,4 parmi quatre possibilités. Les écarts entre les participants sont très élevés, notamment entre l'Ontario (26,1 % de réussite) et Singapour (92,7 % de réussite). Nous posons donc l'hypothèse que le type de tâches influe sur la réussite des élèves, non pas seulement en raison de la difficulté de la tâche, mais également en raison des enseignements qu'ils ont reçus.

En huitième année, l'analyse est assez similaire. L'item pour lequel l'écart-type est le plus faible est l'item M0301, avec 5,9 points de pourcentage. L'item pour lequel l'écart-type

est le plus important est l'item M1304, avec 23,2 points de pourcentage. La différence entre les deux est de 17,3 points de pourcentage, ce qui semble suffisant pour montrer que certains items sont réussis de façon assez homogène, tandis que d'autres sont réussis de façon très hétérogène. Toutefois, les deux items ont trait à des types de tâches très proches (que l'on peut regrouper sous l'intitulé « associer une écriture décimale à une fraction »). En ce qui concerne l'item M0301, il s'agissait trouver la notation décimale la plus proche de la fraction 3/4 (la différence entre les résultats de l'Angleterre, pays où le score est le plus faible [76,4 % de réussite], et ceux de Singapour, pays où le score est le plus élevé [95 % de réussite], est moyenne). Dans l'item M1304, les élèves devaient convertir une écriture décimale en fraction (la différence entre les résultats de l'Ontario, territoire où le score est le plus faible [34,8 % de réussite], et ceux de Singapour, territoire où le score est le plus élevé [93 % de réussite], est très importante). Ce n'est donc pas seulement le type de tâches qui joue sur les performances des élèves, mais également les variables de la tâche. Une analyse plus détaillée permettra d'indiquer si toutes les variables ont une incidence sur leurs résultats, ou si ce sont uniquement celles qui entrainent un changement dans la technique à mettre en œuvre pour réussir l'exercice.

§ 2. L'analyse intra-pays

La comparaison entre les performances réalisées par les écoliers et par les collégiens nous permettra de définir l'hétérogénéité des résultats en fonction de l'âge des élèves (A). Cela nous conduira à mettre au jour, éventuellement, un rattrapage de la part des pays occidentaux en termes de scores, puisque nous avons vu que la durée du travail fourni par les collégiens dans ces territoires se rapprochait de celle mesurée chez les participants asiatiques. Nous étudierons ensuite les variations de performances pour un test donné (B), afin de mettre en évidence un lien éventuel entre l'hétérogénéité des résultats des élèves et leur taux de réussite moyen dans le domaine des fractions.

A. L'hétérogénéité des résultats en fonction de l'âge des élèves

Incidemment, nous avons vu qu'il existait des différences notables entre les performances des élèves de l'école élémentaire et de l'enseignement secondaire pour un même pays. Afin de déterminer plus précisément l'évolution des résultats entre le premier et le second degré, nous avons calculé de façon systématique la différence entre les deux. Certes, les résultats des élèves les plus âgés sont le plus souvent légèrement supérieurs à ceux des élèves les plus jeunes, ce qui conduit à calculer une différence positive dans la plupart des pays de

notre corpus. En confrontant ces différences, nous pourrons déterminer si une baisse ou une hausse des résultats peut être liée à des facteurs pédagogiques (quantité de travail fourni, perception des cours de mathématiques par les élèves) et ainsi circonscrire la part de l'analyse qui se rattache à des questions didactiques. Nous avons synthétisé ces différences dans le tableau ci-dessous, qui indique la différence entre les résultats de quatrième année et les résultats obtenus en huitième année pour chacun des millésimes du test aux items impliquant des fractions (l'année 1999 n'a pas été prise en compte dans la mesure où les évaluations n'ont concerné que les élèves de huitième année). Par exemple, le nombre – 1,7 dans la première ligne signifie que, en 1995, les collégiens anglais ont un taux de réussite dans ce domaine de 1,7 points de pourcentage inférieur à celui des écoliers anglais la même année. À l'inverse, le nombre 8,3 dans la deuxième ligne signifie que, en 1995, les collégiens sud-coréens ont un taux de réussite aux items concernant les fractions de 8,3 points de pourcentage supérieur à celui des écoliers sud-coréens la même année. La France et l'Irlande du Nord n'apparaissent pas dans le tableau, car ces deux pays n'ont jamais participé simultanément aux évaluations de quatrième et de huitième année.

Participants	1995	2003	2007	2011	2015
Angleterre	– 1,7	– 12,0	– 15,5	– 12,3	– 2,6
Corée du Sud	8,6			20,3	8,4
Floride				– 10,1	– 18,9
Hong Kong SAR	– 1,9	7,5	– 9,7	1,1	– 4,3
Ontario		– 1,1	7,0	7,9	11,2
Québec		13,5	5,9	9,3	9,2
République d'Irlande	– 2,4				1,6
Singapour	8,5	5,8	– 4,4	0,2	3,0
Taipei chinois		15,0	10,3	5,7	2,0
Moyenne	**2,2**	**4,8**	**– 1,1**	**2,8**	**1,1**

Figure 116. Différence entre le taux de réussite, dans le domaine des fractions, des élèves de huitième année et celui des élèves de quatrième année, aux évaluations TIMSS, depuis 1995 (en points de pourcentage)

Dans le Taipei chinois, l'écart se resserre progressivement entre les résultats obtenus par les écoliers et ceux obtenus par les collégiens, du fait d'une amélioration des performances dans le premier degré. La même trajectoire est observée, sur une durée moindre, en Corée du Sud, avec une forte hausse des résultats des écoliers qui contribue à réduire l'écart entre les performances du premier et du second degré. En Floride, l'amélioration du taux de réussite des écoliers se traduit par un creusement des écarts en raison d'un score à la fois faible et stable en

huitième année. Or, nous avons vu dans les questionnaires TIMSS que les collégiens de cet État se démarquaient par leurs lacunes, qui posaient difficulté à leurs professeurs pour l'acquisition de nouvelles notions. Il est donc possible que l'amélioration des résultats des écoliers se traduise, dans plusieurs années, par une amélioration des résultats dans le second degré. Toutefois, les enseignants estiment que les collégiens floridiens arrivent dans les établissements « peu prêts à apprendre » (sans que cette notion ait été précisée), ce qui nous conduit à penser qu'il existe d'autres difficultés qui limitent la performance des collégiens floridiens. Il est intéressant de voir que les résultats de l'Ontario et du Québec sont nettement meilleurs dans le second degré que dans le premier degré, quand on sait que les programmes d'enseignement proposent une progression assez uniformément répartie des fractions sur l'ensemble de la scolarité. Il est donc possible que le concept ne soit pas encore bien maitrisé en quatrième année, mais qu'il le soit beaucoup mieux du fait que les élèves continuent à étudier différents types de tâches sur un temps assez long. Rappelons également qu'une forte hausse du travail demandé en dehors du temps scolaire a lieu dans ces deux provinces lors du passage des élèves dans le second degré. La progression des élèves peut donc également être due à des considérations liées au temps de travail. En outre, à Hong Kong SAR, la différence entre les résultats de quatrième année et ceux de huitième année est tantôt positive, tantôt négative. À Singapour, les performances des collégiens sont le plus souvent supérieures à celles des écoliers, mais l'année 2007 a montré que l'inverse était possible. Enfin, en République d'Irlande, il ne semble pas y avoir une différence notable entre le taux de réussite obtenu dans le premier degré et celui obtenu dans le second degré. Néanmoins, les élèves n'ont participé simultanément qu'à deux évaluations seulement, à des dates très éloignées, c'est pourquoi nous ne pouvons tirer de conclusions dénuées de réserves en ce qui concerne ce pays.

Nous avons donc mis au jour un ensemble de pays dont les résultats sont meilleurs en quatrième année qu'en huitième année (Angleterre, Floride), ou, à l'inverse, dont les résultats sont meilleurs en huitième année qu'en quatrième année (l'Ontario, le Québec). Chez les autres participants, les résultats sont proches (République d'Irlande), fluctuants (Hong Kong SAR et Singapour) ou ont tendance à s'uniformiser (Corée du Sud et Taipei chinois). Cependant, même lorsque les performances des participants occidentaux se rapprochent de celles des pays asiatiques, ce n'est que dans une faible mesure : par exemple, en 2015, les taux de réussite de l'Ontario (52,9 %) et du Québec (59,7 %) dans le domaine des fractions restent très éloignés de ceux de Hong Kong SAR (73,4 %). On ne peut donc pas parler de rattrapage à leur endroit. L'avance prise par les pays asiatiques dès l'enseignement primaire semble se maintenir dans

l'enseignement secondaire, ce qui montre à la fois l'incidence des acquis initiaux dans le domaine des fractions (puisque les différences persistent tout au long de la scolarité malgré une durée du travail qui devient plus homogène) et la possibilité de réaliser des apprentissages sur des fondements moins solides (puisque les écarts entre les pays occidentaux et asiatiques ne se creusent pas). Encore ces conclusions sont-elles réalisées à partir de moyenne et ouvrent de nombreuses questions : par exemple, les items correspondant à un certain type de tâches, et moins bien réussis en raison d'un enseignement tardif ou non imposé en quatrième année, sont-ils mieux réussis en huitième année ? Les élèves continuent-ils de progresser relativement aux tâches les plus simples (associer une fraction et un dessin) alors qu'aucun enseignement n'est prévu entre la quatrième et la huitième années ? Il est donc légitime de s'intéresser plus précisément au contenu des items : ils ne sont pas identiques pour chaque test, et les variations que nous observons peuvent être révélatrices de la maitrise de certaines notions et de lacunes sur d'autres points.

B. L'hétérogénéité des résultats en fonction des tâches proposées

Selon Daoudy (1986, p. 9), les changements de cadre sont bénéfiques pour l'apprentissage. En ayant une acception large de cette notion, nous avons cherché à déterminer si la capacité des élèves à réussir des items différents (soit par le type de tâches, soit par les variables qu'ils mettent en jeu) était corrélée à leur maitrise globale du concept de fraction. En d'autres termes, une maitrise plus large de la notion conduit-il systématiquement à des résultats plus élevés ? À l'inverse, les élèves peuvent-ils obtenir des scores à la fois homogènes et moyens ? Pour le savoir, nous avons mis en lien l'écart-type entre les résultats obtenus aux différents items, et le taux de réussite moyen pour l'ensemble de l'évaluation.

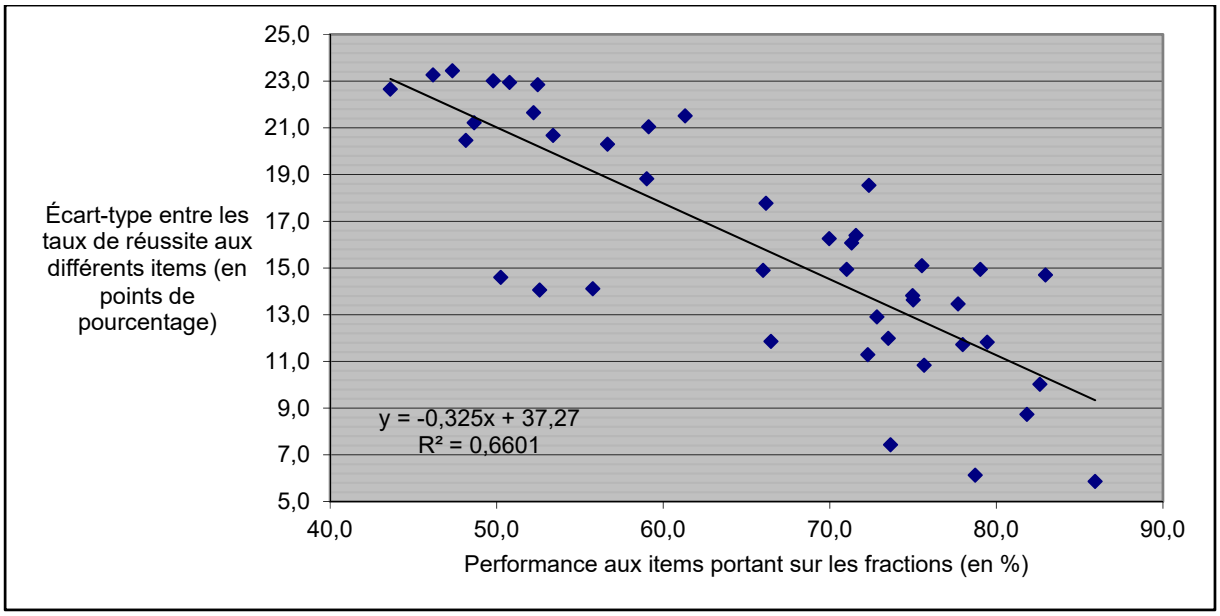


Figure 117. Corrélation entre l'écart-type et la performance aux items portant sur les fractions, dans les évaluations TIMSS, depuis 1995 (huitième année)

En huitième année, le lien de linéarité entre les deux séries de données apparait assez fort. D'une part, parce que le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est plutôt élevé ($R^2 = 0,66$), et d'autre part, parce que la pente, négative, est bien marquée. Le graphique tend à montrer que, dans les pays ayant des taux de réussite élevés, l'écart-type entre les scores obtenus à chacun des items est faible, tandis que les pays ayant des taux de réussite bas, cet écart-type est élevé. D'ailleurs, le fait de mélanger les différents tests depuis 1995 affaiblit les coefficients calculés. Ainsi, les points les plus éloignés de la droite de régression linéaire correspondent tous à l'année 2015 : si l'on traite les tests séparément, année par année, on constate que le R^2 est nettement plus élevé. Toutefois, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson baisse, légèrement certes, mais de façon continue depuis 1995.

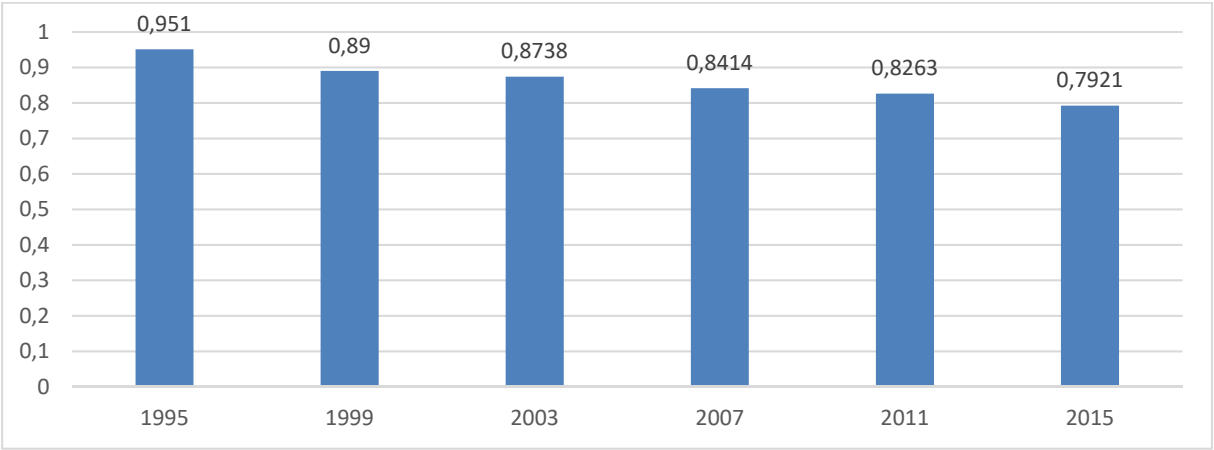


Figure 118. Coefficients de détermination de Bravais-Pearson indiquant le lien entre l'écart-type et les performances moyennes dans le domaine des fractions depuis 1995 (huitième année)

Du point de vue statistique, ces observations s'expliquent assez facilement : comme nous l'avons vu précédemment, les items les plus simples sont assez bien réussis par tous les participants, avec un écart-type assez faible, tandis que les items les plus complexes sont très inégalement réussis. En d'autres termes, les différences de performances s'expliquent par la capacité diverse des participants à réussir les items les plus complexes. Du point de vue didactique, des interrogations demeurent : la moyenne des pays ayant les résultats les plus homogènes est-elle plus élevée uniquement en raison de la capacité de leurs élèves à réaliser des exercices portant sur des types de tâches complexes, ou ceux-ci se montrent-ils également plus performants aux items les plus simples ? Autrement dit, des connaissances plus diverses conduisent-elles à une compréhension plus profonde du concept ? En observant les résultats des élèves aux évaluations de 1995 (c'est-à-dire celle où la corrélation entre l'homogénéité des performances et le taux de réussite moyen est la plus forte), on s'aperçoit effectivement que l'écart-type est très faible pour des items simples tels que ceux où il s'agit d'associer une fraction et un dessin (par exemple, pour l'item H8, il est de 4,6 points de pourcentage), tandis qu'ils sont forts pour des items présentant un haut niveau de complexité tels que ceux mettant en jeu la recherche d'un quotient de deux fractions (par exemple, pour l'item J12, il est de 24,6 points de pourcentage). De plus, la moyenne pour l'item H8 est très élevée pour l'item H8 (86,2 %), alors qu'elle est basse pour l'item J12 (51,2 %). Dans les tests postérieurs, les tâches consistant à associer une fraction et un dessin sont progressivement moins présentes. Dès lors, on trouve moins d'items avec à la fois un faible écart-type et une moyenne élevée, ce qui contribue sans doute à affaiblir le lien entre l'homogénéité des résultats et la performance globale. Nous constatons également que les élèves ayant les résultats les plus homogènes se montrent également plus performants aux exercices les plus simples, par exemple à l'item H8, où il fallait identifier, parmi cinq possibilités, la figure dont 2/3 de la surface avaient été grisés.

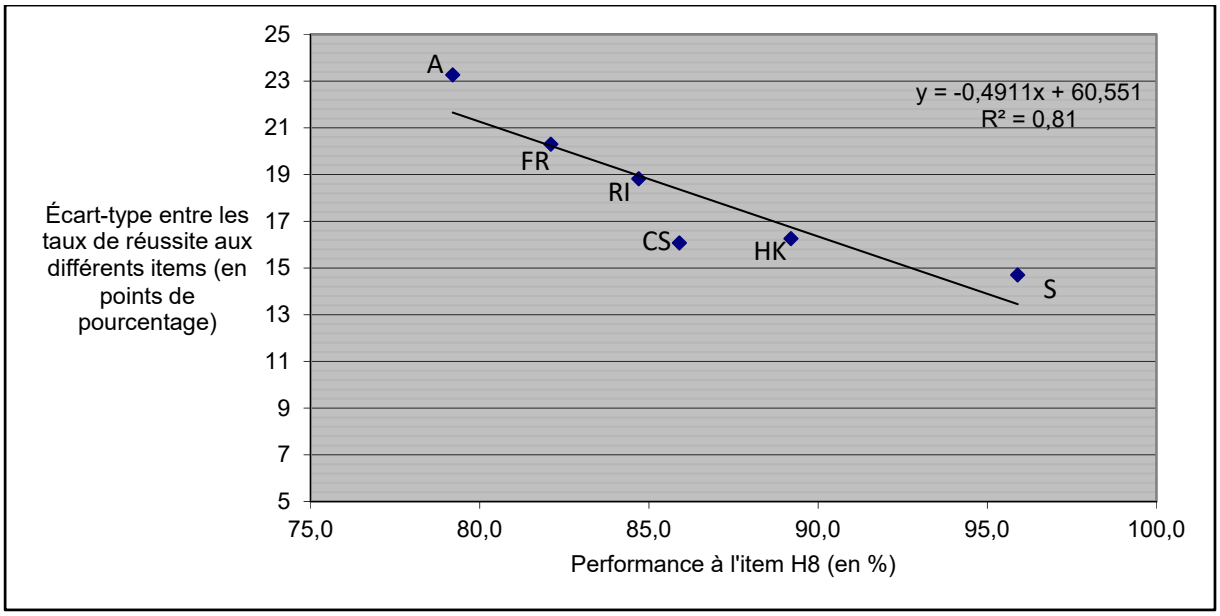


Figure 119. Corrélation entre l'écart-type portant sur l'ensemble des items de huitième année et la performance à l'item H8 (TIMSS 1995)

Lorsqu'on prend en compte les scores de quatrième année depuis 1995, aucun lien de corrélation linéaire n'apparait entre l'homogénéité des résultats et le taux de réussite moyen dans le domaine des fractions, d'une part, en raison d'une pente, certes négative, mais faible, et d'autre part, en raison d'un coefficient de détermination de Bravais-Pearson proche de zéro ($R^2 = 0,09$). Il faut dire qu'à ce moment de la scolarité, le concept de fraction est en construction, et on identifie rarement des items suffisamment simples pour présenter à la fois un écart-type faible et une moyenne élevée, comme nous avons pu en voir davantage en huitième année. Par ailleurs, si l'on s'intéresse uniquement aux données de 2015, on s'aperçoit qu'on peut obtenir des résultats similaires avec un écart-type très différent (par exemple, Hong Kong SAR et Singapour), ou bien des résultats très différents avec un écart-type similaire (par exemple, la France et la Corée du Sud).

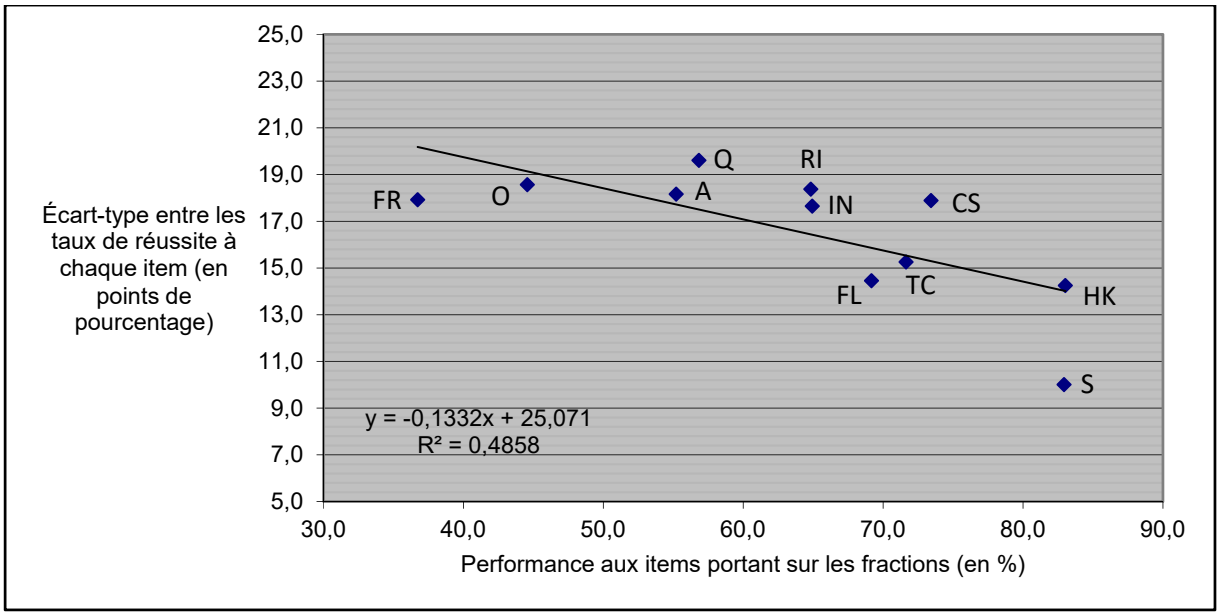


Figure 120. Corrélation entre l'écart-type et la performance aux items portant sur les fractions aux évaluations TIMSS 2015 de quatrième année

En ce qui concerne la réussite aux items mettant en jeu des types de tâches de faible complexité, certes les pays dont les résultats sont les plus homogènes réalisent des scores très élevés. Par exemple, pour l'item M0701 (dans lequel il fallait associer une fraction et un dessin), les élèves de Hong Kong SAR, de Floride, de Singapour et du Taipei chinois obtiennent des taux de réussite respectifs de 97,6 %, 95,5 %, 96,3 % et 94,5 %. Toutefois, certains participants parviennent à obtenir des scores proches pour cet item avec une plus grande hétérogénéité des performances à l'ensemble du test : la Corée du Sud (avec un taux de réussite de 95,7 %) et surtout le Québec (96 %) dont l'écart-type est le plus élevé de tout le corpus. En outre, les résultats des cinq autres territoires occidentaux restent en retrait (82,1 % de réussite en moyenne). Or, certains d'entre eux (comme l'Irlande du Nord et la République d'Irlande) réussissent mieux, dans l'ensemble, les tests que les élèves québécois. Cela montre, d'une part, qu'une bonne capacité à identifier ou représenter des fractions n'est pas suffisante pour obtenir un score élevé aux évaluations TIMSS, et d'autre part, qu'une grande variété des types de tâches acquis n'est pas absolument nécessaire pour avoir une excellente maitrise de ceux qui présentent une faible complexité. D'ailleurs, la possibilité d'obtenir des résultats moyens mais très homogènes apparait en quatrième année (par exemple, en 2007, l'Angleterre a un taux de réussite de 59,1 % avec l'un des écart-types les plus faibles rencontrés : 10,1 points de pourcentage). Le gain lié à une plus grande étendue des connaissances est donc difficile à caractériser. À l'évidence, la maitrise de compétences plus vastes est bénéfique pour le taux de réussite des élèves, mais cette considération n'est-elle pas reliée à la durée des enseignements ? Peut-on obtenir un score plus élevé en augmentant le nombre de types de tâches abordées en

classe si la durée des enseignements est stable ? En d'autres termes, la confrontation à des tâches nouvelles conduit-elle à une meilleure compréhension des fractions et donc à une plus grande réussite des tâches anciennement travaillées ? Les scores réalisés aux items les plus simples par les élèves ayant les résultats les plus homogènes ne sont-ils pas dû, plutôt qu'à des transferts, à la maitrise de techniques plus adaptées à la réalisation de la tâche ou à un travail plus important sur cette notion ? Pour répondre à ces questions, il nous faudra étudier de façon plus détaillée à quelles conditions les élèves parviennent à réaliser transferts entre les différents types de tâches.

Conclusion de la sous-section

L'analyse des scores TIMSS montre une grande disparité dans la maitrise des fractions en fonction des pays. Les écarts se manifestent plus nettement lorsqu'on s'intéresse au taux de réussite aux items impliquant des fractions. Ainsi, ce taux varie selon un rapport de 1 pour 2,3 entre la France et Singapour, dans les évaluations de quatrième année les plus récentes. Par ailleurs, il existe une grande diversité des performances des élèves en fonction du type de tâche considéré et des variables de la tâches. En outre, pour un même item, nous avons mis au jour des différences inter-pays très diverses, qui nous interrogent quant à leur origine. On peut supposer, devant une telle variété, que la différence ne provient pas seulement de la manière dont sont enseignées ces notions, mais aussi de ce qui est enseigné et du moment de la scolarité auquel ces enseignements sont prévus. Sans doute, certaines de ces causes dépassent le cadre didactique. Par exemple, pour le Québec, nous avons mis en lien le fait que les résultats sont meilleurs au collège qu'à l'école élémentaire, et le fait que l'augmentation de la quantité de travail effectuée par les élèves entre les deux niveaux de la scolarité s'effectue dans des proportions qui ne se retrouvent pas dans les autres pays du corpus. Nous avons pu également mettre en lien que le fait qu'en Floride, les résultats sont au contraire bien meilleurs à l'école élémentaire qu'au collège, et le fait que les professeurs du second degré estiment que leurs élèves arrivent en classe très mal préparés pour l'apprentissage, dans une proportion que l'on ne retrouve ni en quatrième année, ni dans un autre pays du corpus. Toutefois, les explications que l'on tire des questionnaires TIMSS n'expliquent pas toutes les variations. Enfin, nous avons établi une corrélation entre l'écart-type entre les taux de réussite aux items pour un même participant et ses performances dans le domaine des fractions (plus les résultats sont homogènes, plus le taux de réussite moyen est élevé). Cette relation est toutefois dépendante, non seulement de l'âge des élèves, mais également de l'année considérée, ce qui justifie que l'on s'intéresse plus avant aux tâches contenues dans les tests.

Sous-section II. Les résultats des élèves en fonction des tâches

Les auteurs de TIMSS précisent que les items doivent être appréhendés selon deux dimensions complémentaires : une dimension cognitive et une dimension de contenu (Mullis & Martin, 2016b, p. 12). La tâche proposée par chaque item est donc susceptible d'être analysée en fonction de la catégorie cognitive qu'elle met en jeu (§ 1). Il s'agit pour les auteurs, à travers cette classification, de caractériser les ressources nécessaires pour la réalisation de la tâche en dehors des connaissances mathématiques attendues. À travers cette étude, nous pourrons observer si les élèves sont capables de réaliser des transferts pour des items mettant en jeu une même catégorie cognitive. La tâche peut également être analysée en fonction du type de tâche auquel elle appartient (§ 2). Dans ce cas, l'attention est davantage portée sur le savoir (au sens large) acquis par l'élève. Grâce à cette analyse, nous pourrons mesurer la capacité de transfert des élèves en fonction de la proximité des tâches mises en jeu.

§ 1. La capacité de transfert selon les catégories cognitives

Lorsque nous aurons défini les « catégories cognitives » (A) retenues pour notre étude, nous établirons des liens entre les résultats obtenus par les élèves pour chacune d'entre elles (B). Notre objectif est de déterminer comment sont réussis des items appartenant à des catégories identiques, afin de mieux cerner la capacité des élèves à réaliser des transferts pour des items de niveau de difficulté similaire. Il est également envisagé de déterminer, pour un même type de tâche, l'incidence d'un changement de catégorie cognitive sur les scores obtenus par les élèves.

A. Définition des catégories cognitives

D'après les auteurs TIMSS, maitriser le contenu mathématique ne suffit pas pour réussir les items (*ibid.*, p. 24). Ces derniers nécessitent de mettre en œuvre des compétences cognitives transversales de natures variées. Afin de créer des items suffisamment divers sur ce point, ils ont défini des catégories identiques en quatrième et huitième année, et relié chacun des items à l'une d'entre elles. En outre, les auteurs des évaluations TIMSS ont, dès les premières évaluations, tenté d'interpréter les résultats des élèves en dehors de toute relation avec les savoirs mathématiques. Cette analyse a pris deux formes : une analyse *a priori* des items, mettant au jour les compétences cognitives nécessaires pour réussir l'exercice, et une analyse *a*

posteriori, destinée à expliquer les différences de résultats entre les élèves les plus performants et ceux qui obtenaient les moins bons résultats, en lien avec les processus cognitifs en jeu.

Précisons également que la définition des catégories cognitives par les auteurs de TIMSS a fluctué. Toutefois, à partir de 2007, celle-ci se stabilise : les items sont classés selon trois catégories seulement : *Connaitre*, *Appliquer* et *Raisonner*. La première catégorie « couvre les faits, les concepts et les procédures les élèves doivent connaitre, tandis que la seconde se concentre sur la capacité des élèves à appliquer leurs connaissances et leur compréhension des concepts pour résoudre des problèmes ou répondre à des questions » (Assessment Frameworks, 2007, p. 33). C'est-à-dire que les items appartenant à l'ancienne catégorie *Utiliser des concepts* ont été répartis dans les catégories *Connaitre* (s'il agit d'évaluer la connaissance des concepts) et *Apppliquer* (s'il s'agit d'évaluer l'application des concepts). Dans la troisième catégorie, on trouve des tâches « qui vont au-delà de la résolution de problèmes de routine pour englober des situations inconnues, des contextes complexes et problèmes à plusieurs étapes » (*ibid.*), ce qui laisse penser que les items que l'on y range présente un niveau de complexité élevé. Bien qu'il n'y ait pas selon les concepteurs de TIMSS de relation directe entre la catégorie cognitive et le niveau de difficulté, on peut supposer que, dans les faits, les items appartenant à la catégorie *Connaitre* sont plus simples, et donc mieux réussis, que ceux de la catégorie *Raisonner*. Ce n'est pas tout à fait ce que montrent les auteurs dans leur analyse *a posteriori* des items.

Les rédacteurs des évaluations TIMSS définissent *a posteriori* quatre niveaux de réussite pour les élèves : bas, intermédiaire, haut, avancé. Il s'agit d'une échelle destinée à mesurer ce que les élèves connaissent et savent faire en mathématiques. Les élèves ayant un niveau bas ont atteint le score de 400, ceux ayant le niveau intermédiaire sont ceux ayant atteint le score de 475, ceux ayant le niveau haut ont atteint un score de 550, tandis que ceux ayant un niveau avancé ont atteint le score de 625. Les auteurs ont cherché à déterminer pour chacun des paliers, une correspondance entre le score obtenu et les capacités cognitives des élèves. Dans le domaine des fractions[1], cela se traduit de la façon suivante : pour la quatrième année, les

1. Ces informations sont disponibles sous la forme de documents à télécharger sur le site des évaluations TIMSS 2015, à l'adresse suivante (consultée le 2 septembre 2018) : http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/download-center/. Ceux-ci sont classés sous l'onglet *Performance at International Benchmarks*, et s'intitulent « *Description of the TIMSS 2015 International Benchmark of Mathematics Achievement* ».

élèves de niveau bas ont « une certaine connaissance des fractions simples », tandis qu'au niveau intermédiaire, ils démontrent « une certaine compréhension des fractions et des décimaux ». Au niveau élevé, ils « peuvent résoudre des problèmes impliquant des opérations avec des fractions simples ». Au niveau avancé, ils « montrent une compréhension croissante des fractions et des décimaux ». Il est vrai que ces descriptions restent peu précises, mais les auteurs fournissent également un tableau de classification de chacun des items, qui est plus riche d'enseignements[1]. La définition de la tâche est fournie par les auteurs.

Catégorie	Identifiant et type de tâche	Réussite
Items réussis au score indiquant un niveau bas (400)		
Connaitre	M0701. Identifier la représentation rectangulaire d'une fraction unitaire.	89,6 %
Items réussis au score indiquant un niveau intermédiaire (475)		
Connaitre	M1302. Identifier la représentation d'une fraction non-unitaire.	86,7 %
Items réussis au score indiquant un niveau haut (550)		
Connaitre	M0704. Identifier une fraction qui représente un sous-ensemble d'une collection d'objets.	78,1 %
Connaitre	M0705. Identifier la fraction la plus grande parmi un ensemble de fractions unitaires.	67,9 %
Appliquer	M1004. Résoudre un problème impliquant des fractions non-unitaires.	63,5 %
Appliquer	M1104. Identifier une collection d'objets à l'aide d'une fraction donnée.	63,8 %
Appliquer	M1304A. Résoudre un problème impliquant des représentations rectangulaires de fractions.	69,1 %
Appliquer	M1304B. Résoudre un problème impliquant des représentations rectangulaires de fractions.	68,4 %
Items réussis au score indiquant un niveau avancé (625)		
Connaitre	M0504A. Identifier la représentation circulaire d'une fraction non-unitaire.	59,2 %
Raisonner	M0504B. Expliquer pourquoi la représentation circulaire choisie montre une fraction non-unitaire donnée.	33,1 %
Appliquer	M0804. Résoudre un problème pour identifier une fraction qui représente la partie grisée de la figure.	56,2 %
Connaitre	M0905. Identifier une fraction équivalente à une fraction donnée.	55,6 %
Connaitre	M1102. Identifier une fraction équivalente à un nombre décimal à une décimale.	64,3 %
Items réussis au score indiquant un niveau au-delà d'avancé (625)		
Appliquer	M0906. Résoudre un problème à plusieurs étapes impliquant des fractions.	39,7 %

Figure 121. Types de tâches supposées être réussies dans le domaine des fractions selon le niveau de performance des élèves, en quatrième année (TIMSS 2015)

1. Ces informations sont disponibles sous la forme d'un document à télécharger sur le site des évaluations TIMSS 2015, à l'adresse suivante : http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/download-center/. Celui-ci est classé sous l'onglet *Achievement in Content and Cognitive Domains*, et s'intitule « *Achievement in Mathematics Cognitive Domains* ».

Nous constatons que les catégories cognitives ne correspondent pas nécessairement à un niveau de difficulté spécifique (dans le tableau, la colonne « Réussite » indique le taux de réussite moyen, dans notre corpus, à l'item correspondant). Comme l'indiquent les auteurs, « pour presque toutes les compétences cognitives énumérées, il est possible de créer des items relativement faciles ainsi que des items très difficiles » (Mullis, Martin *et al.*, 2003, p. 25). Pour autant, peut-on faire un lien entre les résultats obtenus par les élèves et ces catégories ?

B. Relation entre les catégories cognitives et les performances des élèves

Les données fournies par TIMSS pour l'ensemble du test en mathématiques montrent que les écarts inter-pays les plus conséquents concernent la catégorie « Connaitre ». Ainsi, en quatrième année, si l'on considérait uniquement cette catégorie, la Corée du Sud obtiendrait 19 points de plus, Hong Kong SAR 4 points de plus, Singapour 13 points de plus, le Taipei chinois 24 points de plus, au regard de la moyenne internationale. À l'inverse, la France obtiendrait 4 points de moins et l'Ontario 8 points de moins, montrant ainsi que les écarts se creuseraient. En ce qui concerne la catégorie « Appliquer », la tendance est plus contrastée, et on ne perçoit pas de lien entre les performances globales des élèves et les performances dans ce domaine cognitif. Ainsi, Hong Kong SAR et Singapour gagneraient respectivement 6 et 2 points si l'on tenait compte de cette seule catégorie, tandis que la Corée du Sud et le Taipei chinois perdraient respectivement 13 et 3 points. En ce qui concerne la catégorie « Raisonner », les écarts inter-pays sont plus restreints. En considérant cet aspect du test uniquement, les résultats des pays les plus performants de notre corpus sont moins élevés, et ceux des pays les moins performants sont plus élevés. Ainsi, Singapour et Hong Kong SAR perdent chacun 15 points, tandis que le Taipei chinois en perd 21, tout comme l'Irlande du Nord. En revanche, la France et l'Ontario gagnent respectivement 3 et 12 points. La Corée du Sud semble faire exception dans la mesure où elle aurait 11 points de plus si l'on tenait compte uniquement des items impliquant un raisonnement, quel que soit leur thème, alors que son score à TIMSS est déjà très élevé. Il ressort donc de ces données que ce qui semble manquer aux élèves des pays les moins performants, c'est davantage des « connaissances » que la capacité à « raisonner ».

Par ailleurs, les corrélations inter-items ont été analysées : « pour chacun des 91 couplages possibles d'items[1], nous avons déterminé le coefficient de corrélation linéaire R^2

1. Le nombre d'items évalués est de 14, cela conduit à l'examen de (14 x 13) / 2 = 91 couplages.

entre les réussites des pays à ces deux items (tableau 31). Ce coefficient est toujours positif, ce qui signifie que plus la réussite d'un pays est forte à l'un des items, plus elle l'est aussi à l'autre. Ce coefficient est élevé ($R^2 > 0,75$) dans 76 % des cas, moyen ($0,5 \leq R^2 \leq 0,75$) dans 22 % des cas et faible ($R^2 < 0,5$) dans les 2 % des cas restants. Le fait que la corrélation inter-items soit globalement forte, avec toutefois une certaine variabilité, invite à approfondir l'analyse des items pour tenter de faire le lien entre les catégories cognitives et les performances des élèves. Les cas de faible corrélation sont attribuables à des caractères particuliers des items, c'est le cas par exemple de l'item M0504B qui est le seul à exiger des élèves une justification de leur choix » (Martinez et Roditi, *op. cit.*, p. 28). Puisque dans la catégorie « Raisonner », cet item était isolé, nous l'avons exclu de notre analyse. Par ailleurs, dans notre tableau, nous avons indiqué en gras les items se rapportant à la catégorie « Connaitre », en italique ceux se rapportant à la catégorie « Appliquer » et sans mise en forme particulière celui se rapportant à la catégorie « Raisonner ».

Item	M0504A	M0504B	M0701	M0704	M0705	M0804	M0905	M0906	M1004	M1102	M1104	M1302	M1304A	M1304B
M0504A	1,00	0,85	0,88	0,94	0,79	0,97	0,75	0,79	0,91	0,90	0,95	0,97	0,95	0,94
M0504B	0,85	1,00	0,83	0,75	0,45	0,78	0,51	0,60	0,73	0,70	0,76	0,80	0,69	0,71
M0701	0,88	0,83	1,00	0,89	0,65	0,81	0,67	0,69	0,78	0,72	0,88	0,91	0,81	0,85
M0704	0,94	0,75	0,89	1,00	0,77	0,94	0,75	0,81	0,95	0,90	0,93	0,90	0,95	0,95
M0705	0,79	0,45	0,65	0,77	1,00	0,76	0,87	0,82	0,71	0,88	0,86	0,83	0,87	0,82
M0804	0,97	0,78	0,81	0,94	0,76	1,00	0,77	0,82	0,95	0,91	0,94	0,92	0,97	0,95
M0905	0,75	0,51	0,67	0,75	0,87	0,77	1,00	0,94	0,76	0,85	0,89	0,80	0,82	0,76
M0906	0,79	0,60	0,69	0,81	0,82	0,82	0,94	1,00	0,86	0,88	0,88	0,80	0,85	0,82
M1004	0,91	0,73	0,78	0,95	0,71	0,95	0,76	0,86	1,00	0,92	0,90	0,82	0,91	0,89
M1102	0,90	0,70	0,72	0,90	0,88	0,91	0,85	0,88	0,92	1,00	0,92	0,86	0,92	0,87
M1104	0,95	0,76	0,88	0,93	0,86	0,94	0,89	0,88	0,90	0,92	1,00	0,95	0,96	0,94
M1302	0,97	0,80	0,91	0,90	0,83	0,92	0,80	0,80	0,82	0,86	0,95	1,00	0,93	0,93
M1304A	0,95	0,69	0,81	0,95	0,87	0,97	0,82	0,85	0,91	0,92	0,96	0,93	1,00	0,98
M1304B	0,94	0,71	0,85	0,95	0,82	0,95	0,76	0,82	0,89	0,87	0,94	0,93	0,98	1,00

Figure 122. Corrélation linéaire entre deux items aux évaluations de quatrième année (TIMSS 2015)

Les coefficients de corrélation linéaire des vingt-et-un couplages d'items visant à associer deux items portant sur la composante cognitive « Connaitre » sont en moyenne élevés ($R^2 = 0,83$), de même que ceux portant sur les quinze couplages d'items visant à associer deux items portant sur la composante « Appliquer » ($R^2 = 0,91$). Néanmoins, lorsqu'on établit la

corrélation moyenne entre, d'une part, les items correspondant à la catégorie « Connaitre », et d'autre part, ceux correspondant à la catégorie « Appliquer », on obtient $R^2 = 0,87$, ce qui supérieur à la corrélation moyenne que nous avons calculée au sein de la catégorie « Connaitre ». De plus, 23,8 % des corrélations établies pour la catégorie « Connaitre » peuvent être qualifiées de moyennes, c'est-à-dire que le R^2 est compris entre 0,5 et 0,75, contre aucune au sein de la catégorie « Appliquer ». Lorqu'on se penche sur ces corrélations moyenne, on voit qu'elles se rapportent à des types de tâches différentes : on a $R^2 < 0,7$ quand on met en relation un item dans lequel il fallait associer une fraction à un dessin (M0701) et un item impliquant une tâche de comparaison (M0705), et quand on met en relation cet item dans lequel il fallait associer une fraction à un dessin (M0701) et un item consistant à identifier des fractions équivalentes (M0905). La seule question des catégories cognitives parait donc insuffisante pour mener l'analyse à son terme. C'est pourquoi nous allons étudier la capacité des élèves à réaliser des transferts en fonction des types de tâches.

§ 2. La capacité de transfert selon les types de tâches

En raison du nombre assez faible d'items portant sur un même type de tâches, nous avons dû, pour réaliser des comparaisons, faire des regroupements. C'est pourquoi nous commencerons par expliquer comment des derniers ont été réalisés (A). Ensuite, des liens seront recherchés entre les résultats obtenus par les élèves aux items impliquant des types de tâches similaires, afin de vérifier l'homogénéité des résultats. Cette étude nous permettra de comprendre si les élèves sont capables de réaliser des transferts, pour réussir une tâche d'une autre catégorie, mais mettant en jeu les mêmes fractions (ou des fractions de même nature, par exemple des fractions unitaires). D'une façon générale, nous rechercherons une relation entre, d'une part, les performances des élèves, et d'autre part, les types de tâches ou les variables que les items mettent en jeu (B).

A. Définition des genres de tâches

Pour analyser les tâches incluses dans les évaluations TIMSS, nous avons utilisé une autre classification des items que celle issue de la liste des types de tâches élaborée dans la première partie de notre recherche. En effet, selon ce prisme, la diversité des tâches mises en jeu depuis 1995 était telle que nous n'aurions pu réaliser qu'un nombre très restreint de rapprochements entre les items. En regroupant des types de tâches, nous avons pu comparer davantage de résultats obtenus, notamment pour des tests réalisés au cours d'années différentes.

Nous avons également envisagé d'utiliser la classification des tâches proposée par les auteurs de TIMSS. Toutefois, les intitulés fournissaient des indications insuffisamment précises sur le type de tâches en jeu. Par exemple, à la lecture de la présentation de l'item M0906 (« Résoudre un problème à plusieurs étapes impliquant des fractions »), nous ne connaissons pas les opérations effectuées par les élèves pour parvenir au résultat. En outre, les catégories utilisées par les auteurs de TIMSS empêchaient de faire systématiquement des liens avec les programmes d'enseignement. Par exemple, dans aucune des instructions officielles que nous avons consultées, nous n'avons trouvé une formulation telle que « expliquer pourquoi la représentation circulaire choisie montre une fraction non-unitaire donnée ». Afin de pouvoir réaliser un nombre suffisant de comparaisons, nous avons donc regroupé des types de tâches, présents dans notre liste initiale et présentant des caractéristiques similaires, en genres de tâches (qui correspondent à « différents types de tâches dont le contenu est étroitement spécifié » [Chevallard, 1998, p. 2]). Nous présentons ci-contre une comparaison entre les descriptions des items utilisées par les auteurs de TIMSS et les nôtres. À partir des regroupements effectués, nous obtenons, pour notre analyse six genres de tâches différents :

- associer une fraction à un dessin ;
- comparer des fractions ;
- trouver une fraction équivalente ;
- additionner deux fractions ;
- trouver le complément à l'unité ;
- convertir un décimal en une fraction.

Certes, dans TIMSS 2015, la plupart d'entre elles n'apparaissent qu'une fois, nous empêchant de réaliser de façon systématique une comparaison de la variabilité des résultats pour un même genre de tâches et pour des genres de tâches différents. Néanmoins, cette étude sera au moins possible pour le genre de tâche « associer une fraction et un dessin », présent neuf fois dans les évaluations TIMSS. De plus, certains genres de tâches mettent en jeu les mêmes fractions. La recherche d'une relation avec les résultats obtenus nous permettra donc de mieux comprendre le lien qui unit les différents genres de tâches.

Item	Tâche décrite par les auteurs de TIMSS	Type de tâches établi d'après la liste élaborée dans la première partie de la thèse	Genre de tâches auquel nous faisons référence dans les paragraphes ultérieurs
M0504A	Identifier la représentation circulaire d'une fraction non-unitaire.	Identifier la fraction d'une figure géométrique.	Associer une fraction et un dessin.
M0504B	Expliquer pourquoi la représentation circulaire choisie montre une fraction non-unitaire donnée.	Identifier la fraction d'une figure géométrique.	Associer une fraction et un dessin.
M0701	Identifier la représentation rectangulaire d'une fraction unitaire.	Identifier la fraction d'une figure géométrique.	Associer une fraction et un dessin.
M0704	Identifier une fraction qui représente un sous-ensemble d'une collection d'objets.	Identifier la fraction d'une collection.	Associer une fraction et un dessin.
M0705	Identifier la fraction la plus grande parmi un ensemble de fractions unitaires.	Comparer ou ordonner des fractions unitaires.	Comparer des fractions.
M0804	Résoudre un problème pour identifier une fraction représentant la partie grisée de la figure.	Identifier la fraction d'une figure géométrique.	Associer une fraction et un dessin.
M0905	Identifier une fraction équivalente à une fraction donnée.	Identifier des fractions équivalentes.	Trouver une fraction équivalente.
M0906	Résoudre un problème à plusieurs étapes impliquant des fractions.	Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents.	Additionner deux fractions.
M1004	Résoudre un problème impliquant des fractions non-unitaires.	Trouver le complément à l'unité.	Trouver le complément à l'unité.
M1102	Identifier une fraction équivalente à un nombre décimal à une décimale.	Passer des écritures décimales aux fractions décimales.	Convertir une notation décimale en une fraction.
M1104	Identifier une collection d'objets à l'aide d'une fraction donnée.	Identifier la fraction d'une collection.	Associer une fraction et un dessin.
M1302	Identifier la représentation d'une fraction non-unitaire.	Identifier la fraction d'une figure géométrique.	Associer une fraction et un dessin.
M1304A	Résoudre un problème impliquant des représentations rectangulaires de fractions.	Identifier la fraction d'une figure géométrique.	Associer une fraction et un dessin.
M1304B	Résoudre un problème impliquant des représentations rectangulaires de fractions.	Identifier la fraction d'une figure géométrique.	Associer une fraction et un dessin.

Figure 123. Comparaison entre la formulation des auteurs TIMSS et celle que nous avons utilisée pour décrire les tâches réalisées par les élèves en quatrième année (TIMSS 2015)

B. Relation entre les genres de tâches et les performances des élèves

Dans chacun des pays, les tâches qui mettent en jeu le même genre de tâches et la même conception sont-elles réussies de façon comparable ? Compte tenu de la composition du questionnaire TIMSS, seul le genre de tâches « associer une fraction et un dessin » peut être étudié pour les conceptions « partie-tout » et « partition ». L'item M0504B est très différent des autres par sa demande de justification de la réponse, il est aussi le plus mal réussi de l'enquête et le moins corrélé aux autres ; c'est pourquoi, comme dans l'analyse des catégories cognitives, il n'a pas été pris en compte pour le traitement de cette question. Les coefficients de corrélation linéaire des quinze couplages d'items visant à associer une fraction « partie-tout » et un dessin sont très forts : on a $0,80 < R^2 < 0,98$ avec une moyenne de 0,92. Il en est de même pour les deux items demandant d'associer une fraction « partition » et un dessin ($R^2 = 0,95$). La corrélation moyenne pour ces deux types de tâches est plus forte que celle que nous avions calculée pour les catégories cognitives « Connaitre » ($R^2 = 0,83$) et « Appliquer » ($R^2 = 0,91$). Elle est aussi plus forte que celle qui apparait lorsqu'on met en relation les items correspondant au genre de tâches « Associer une fraction à un dessin » (dans le cadre de la conception partie-tout ou partition) avec des items correspondant à d'autres genres de tâches : la moyenne des coefficients linéaires pour les dix-neuf couplages est de 0,81, avec $0,65 < R^2 < 0,95$. Dans ce cadre, les corrélations les plus fortes se manifestent pour la relation entre « Associer une fraction et un dessin » et « Trouver le complément à l'unité ». Or, ce dernier type de tâches se rapproche beaucoup du premier : si l'on peut identifier quelle fraction représente la partie coloriée d'un dessin, on doit pouvoir identifier la fraction représentée par la partie non coloriée.

Nous voyons donc que, statistiquement, les tâches semblables sont réussies de manière similaire. Pour illustrer la difficulté des élèves à réaliser des transferts entre des types de tâches différents, nous avons utilisé l'item M0705, qui avait trait à la comparaison de fractions. Il s'agissait de trouver la fraction la plus grande parmi quatre fractions unitaires. On peut supposer qu'avec une bonne maitrise de la représentation des fractions, les élèves auraient pu identifier 1/2 comme étant la fraction la plus grande, par exemple en se représentant mentalement un demi-cercle comme étant plus grand qu'un quart ou qu'un tiers de ce cercle. D'ailleurs, l'item M0701, dans lequel on demandait aux élèves d'identifier parmi quatre possibilités, le rectangle dont 1/4 de la surface avait été grisée, nous permettait d'avoir une estimation de la qualité de cette représentation mentale. Parmi les distracteurs étaient notamment représentés un rectangle dont 1/3 de la surface avait été grisé, et un autre dont 1/5 de la surface avait été grisé, ce qui

suggère qu'un élève qui réussit cet item a une bonne compréhension des fractions unitaires. Or, la relation linéaire unissant les résultats aux deux items est moyenne ($R^2 = 0,65$). Par exemple, nous constatons qu'en France, 72,5 % des élèves sont capables de reconnaitre 1/4 à partir d'un dessin, mais seuls 21,1 % d'entre eux peuvent identifier la fraction 1/2 comme étant supérieure à trois autres fractions unitaires. En outre, on peut distinguer les résultats de l'Ontario où le taux de réussite passe de 82,1 % pour l'item M0701 à 38,8 % pour l'item M0705, et les résultats de l'Irlande du Nord, où le taux de réussite passe de 88,8 % pour le premier à 81,5 % pour le second, ce qui induit une faible capacité des élèves à réaliser des transferts, et la nécessité d'un enseignement pour obtenir un score élevé. L'item M0704, dans lequel les élèves devaient trouver la fraction représentée par une collection, c'est-à-dire 4/10 montre bien, également, cette difficulté à réaliser des transferts à partir de connaissances conceptuelles. La tâche relevait genre de tâches « associer une fraction et un dessin », dans le cadre de la conception « partition » de la fraction. Comme l'item M0905 mettait également en jeu la fraction 4/10, à relier à son équivalent 2/5, on aurait pu penser qu'une bonne représentation de cette fraction en particulier aurait été susceptible d'amener les élèves à reconnaitre plus facilement l'équivalence. Or, les résultats de la Corée du Sud indiquent une excellente capacité à associer une fraction à un dessin dans le cadre de l'utilisation de quantités discrètes (avec 91,9 % de réussite à l'item M0704), mais une faible capacité à identifier des fractions équivalentes (avec 40,4 % de réussite à l'item M0905).

À l'inverse, les résultats des élèves ne semblent pas affectés par le fait que l'exercice est inséré dans un contexte tiré de la vie quotidienne. Prenons l'exemple, en 2011, des items M0202 et M0605 destinés aux élèves de quatrième année, qui avaient trait à un même type de tâches (« identifier des fractions équivalentes »). Dans le premier, il fallait identifier la fraction qui n'était pas égale aux autres, toutes étant égales à 1/2 sauf une (la tâche était décontextualisée) ; dans le second, il fallait identifier la phrase équivalente à « Jacques a mangé 2/4 de pizza », en l'occurrence « Jacques a mangé 1/2 pizza » (la tâche était contextualisée). Or, les résultats des élèves sont très proches (70,1 % en moyenne au sein du corpus pour l'item M0202, contre 74,2 % pour l'item M0605), de même que les écart-types inter-pays (9,2 points de pourcentage pour l'item M0202 contre 10,9 points de pourcentage pour l'item M0605). Par ailleurs, entre les deux séries de données, on obtient $R^2 = 0,88$ alors même que les deux consignes étaient assez différentes. Pour mesurer plus précisément l'incidence des variables de la tâche, nous avons également comparé les résultats obtenus à l'item M0701 (identifier le rectangle dont 1/4 de la surface a été grisée) et ceux obtenus à l'item M1302 (identifier le rectangle dont 3/4 de la

surface ont été grisés), dans les tests TIMSS 2015. Le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est très élevé ($R^2 = 0,97$). De plus, les taux de réussite moyen sont très proches pour les deux items : 89,6 % pour le premier et 86,7 % pour le second. Certes, des fractions unitaires sont utilisées dans un cas, des fractions non-unitaires dans l'autre cas. Toutefois, les techniques qui peuvent être mises en œuvre dans les deux exercices sont similaires, ce qui peut expliquer la proximité des performances à ces deux items. On trouve une relation analogue entre les résultats à l'item dans lequel les élèves devaient identifier la fraction de la figure alors que les parts égales n'étaient pas matérialisées (M0504A) et ceux à l'item dans lequel les élèves devaient matérialiser les parts pour identifier la fraction du carré entier qui avait été grisée (M0804) : on a $R^2 = 0,97$ et des taux de réussite moyen très proches (59,2 % pour le premier et 56,2 % pour le second). Pourtant, les fractions mises en jeu étaient différentes dans les deux cas (1/10 pour l'item M0804 et 3/8 pour l'item M0504A).

Si ces quatre items ont trait au même type tâche (associer une fraction à un dessin), nous observons que la variable de la tâche qui touche à la matérialisation (ou non) de l'ensemble des parts égales modifie profondément le taux de réussite moyen : de 88,2 % pour les items M0701 et M1302 (dans lesquels les parts sont toutes matérialisées), il passe à 57,7 % pour les items M0504B et M0804 (dans lesquels les parts ne sont pas toutes matérialisées). Toutefois, contrairement à ce que nous avons observé à propos des items ayant trait à des types de tâches différents, la corrélation est assez forte entre les résultats (avec $R^2 = 0,79$ en moyenne pour les quatre couples possibles : M0701 et M0504A, M0701 et M0804, M1302 et M0504A, M1302 et M0804). Comme on peut l'observer à propos du couple M1302 et M0504A, il y a bien une partie des élèves qui ne parvient pas à transférer sa capacité à identifier 3/4 lorsque les parts sont matérialisées pour reconnaitre 3/8 lorsque les parts ne sont pas matérialisées (avec une baisse du taux de réussite de 27,5 points de pourcentage entre les deux).

	M1302	M0504A
Angleterre	83,6 %	48,9 %
Corée du Sud	94,3 %	76,9 %
Floride	90,5 %	64,0 %
France	68,3 %	34,7 %
Hong Kong SAR	97,3 %	75,7 %
Irlande du Nord	89,6 %	60,1 %
Ontario	78,3 %	44,4 %
Québec	85,6 %	54,4 %
République d'Irlande	83,1 %	57,0 %
Singapour	95,8 %	72,7 %
Taipei chinois	86,8 %	62,1 %

Figure 124. Pourcentages de réussite des élèves de quatrième année aux items M1302 et M0504A (TIMSS 2015)

Précisons par ailleurs que ces deux items sont classés dans la catégorie « Connaitre » par les auteurs de TIMSS (et les moyennes sont assez éloignées), alors que les items M0504A et M0804 appartiennent à des catégories cognitives différentes, respectivement « Connaitre » et « Appliquer » (et les moyennes sont similaires). Les auteurs ont considéré que ces items devaient être classés séparément parce que la consigne de l'item M0804 est formulée sous la forme d'un problème, tandis que ce n'est pas le cas pour l'item M0504A. Or, l'insertion de la tâche dans un problème simple ne semble pas poser difficulté pour les élèves. Ce qui fait le lien entre les résultats, c'est la technique à mettre en œuvre. Nous faisons l'hypothèse que si les scores sont si différents entre, d'une part, les items M0701 et M1302, et d'autre part, les items M0504A et M0804, c'est parce que la procédure consistant à compter le nombre de parts dans l'unité, puis à compter les parts grisées, ne fonctionne pas en l'absence de matérialisation de toutes les parts égales. L'élève doit reconstruire l'ensemble des parts, ce qu'il peut faire en reportant la fraction unitaire dans l'unité autant de fois que nécessaire, ou en partageant l'unité en un certain nombre de parts.

Conclusion de la sous-section

Un raisonnement de nature praxéologique semble mieux expliquer les résultats des élèves qu'un raisonnement portant sur les catégories cognitives mises en jeu dans les tâches. Ainsi, nous avons montré que les corrélations sont plus fortes entre les items portant sur un même type de tâche qu'entre les items portant sur un même domaine cognitif. Nous avons également mis en évidence que deux tâches appartenant à un même type de tâches mais à des catégories cognitives différentes pouvaient présenter une distribution des scores tout à fait similaire : les catégories cognitives ne permettent donc pas de mettre en évidence une gradation du niveau de difficulté des items. Le fait que la tâche soit contextualisée ou non, ou bien que les fractions en jeu soient différentes, ne parait pas non plus influer sur la réussite des élèves. En revanche, les élèves transposent assez mal leurs connaissances lorsque le type de tâches change, ou même lorsque les variables didactiques de la tâche évoluent, de sorte que des techniques qui pouvaient potentiellement être utilisées auparavant ne le sont plus.

Ces observations confirment l'existence de « catégories de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques » (Roditi et Salles, 2015, p. 241, d'après Robert, 1998), avec une différence nette entre les tâches de premier niveau (telles que celles en jeu dans les items M0701 et M1302), où « l'élève […] obtient directement le résultat attendu par la mise en œuvre d'une procédure, souvent unique, qui est indiquée ou suggérée par l'énoncé, et dont les programmes

scolaires permettent de penser qu'elle est automatisée pour les élèves » [*ibid.*, p. 240]), et les tâches de deuxième niveau (telles que celles en jeu dans les items M0504A et M0804), pour lesquelles « l'élève adapte ou transforme l'énoncé – les données ou la question posée – avant d'appliquer ses connaissances » (*ibid.*). Pour les premières, les moyennes se situent autour de 90 % de réussite, tandis que pour les secondes, elles se situent autour de 60 %. Plus largement, il semble exister une gradation des taux de réussite qui dépend tout à la fois du type de tâche, des techniques qui peuvent être mises en œuvre par les éléèves et des savoirs qui sont en jeu. Par exemple, grâce à l'item M0701, on sait que 12,5 % des élèves français ne maitrisent pas l'élément technologique « Dans une fraction, le dénominateur indique un nombre de parts *égales* dans l'unité », puisqu'au lieu de la réponse D, ils choisissent la réponse C dans laquelle les quatre parts ne sont pas égales. Grâce à l'item M0804, on sait que 69 % des élèves français ne maitrisent pas l'élément technologique « Dans un dessin représentant une fraction, les parts n'ont pas besoin d'être toutes matérialisées » que l'on peut relier la conception « fraction-mesure » et à la technique consistant à reporter dans la fraction unitaire autant de fois que nécessaire dans l'unité. Caractériser le niveau de difficulté d'une tâche suppose donc d'avoir une idée précise du degré de maitrise, par les élèves d'un pays (pour des évaluations nationales) ou de plusieurs pays (pour des évaluations internationales), des différentes praxéologies que l'on peut élaborer à propos d'un même concept.

Conclusion de la section consacrée aux caractéristiques des résultats des élèves aux évaluations TIMSS

À travers la comparaison des résultats des élèves aux évaluations TIMSS 2015, nous avons pu mettre au jour des relations diverses entre les performances des élèves, que nous avons synthétisé dans le tableau ci-contre.

	Corrélation linéaire faible entre les résultats aux deux items	Corrélation linéaire forte entre les résultats aux deux items
Taux de réussite proches entre les deux items	Items divers, sans que l'on puisse faire un lien quelconque entre eux du point de vue de la tâche.	Items mettant en jeu des types de tâches identiques, avec des modalités de tâches distinctes sans que cela ait une incidence sur les techniques ou les technologies évaluées.
Taux de réussite différents entre les deux items	Items mettant en jeu des types de tâches distincts, que les modalités de la tâches (fractions, contexte, etc.) soient différentes ou identiques.	Items mettant en jeu des types de tâches identiques, avec des modalités de tâches distinctes ayant une incidence sur les techniques ou les technologies évaluées.

Figure 125. Comparaison des taux de réussite et des corrélations entre les résultats obtenus à deux items en fonction de leurs caractéristiques (type de tâches, variable de la tâche en jeu) aux évaluations TIMSS 2015

Nous concédons que le fait ne pas travailler avec des variables constantes affaiblit la portée de nos conclusions : de nouveaux développements s'appuyant des questionnaires spécifiques semblent nécessaire pour déterminer le poids du type de tâches ou de la variable en jeu dans la réussite des élèves. Toutefois, il ne fait pas de doute qu'un certain pourcentage d'élèves ne transfère pas ce qui a été acquis, en termes de techniques et de savoirs, pour réussir des items relevant d'autres types de tâches, mais qui pourraient être réussis avec les mêmes techniques et les mêmes savoirs. Ainsi, pour beaucoup d'entre eux, la seule capacité à associer une fraction et un dessin ne suffit pas pour réaliser des tâches de comparaison ou d'addition pourtant simples. En outre, les changements de variables semblent affecter les résultats des élèves de façon similaire au sein de notre corpus, tandis que les changements de types de tâches ne paraissent pas avoir le même impact partout. Sans doute faut-il relier cette observation au fait que les instructions officielles imposent principalement des types de tâches, et rarement des techniques. Précisons également qu'il arrive ponctuellement que les élèves de certains pays occidentaux soient plus performants que les élèves des pays asiatiques. Par exemple, dans les évaluations de 2015, les élèves d'Irlande du Nord sont plus performants à la tâche de comparaison de fractions (89,8 % de réussite en moyenne à l'item M0705) que les élèves de Singapour (85,3 %). Cette variabilité des différences inter-pays montre que, au-delà des spécificités des systèmes éducatifs qui influent sans aucun doute les résultats des élèves, une analyse didactique est possible, et même souhaitable, afin d'expliquer pourquoi les participants réussissent mieux certaines tâches que d'autres, notamment en s'appuyant sur les programmes d'enseignement.

Section II. Le lien entre les programmes et les résultats des élèves

La présence ou l'absence de tel ou tel type de tâches dans les curriculums est à l'évidence susceptible d'influer sur les performances des élèves. Toutefois, ce facteur n'est pas le seul auquel nous nous intéressons : l'incidence de la précision des intitulés et de la richesse des tâches couvertes sera étudiée dans une première sous-section. Pour autant, la nature des praxéologies scolaires élaborées par les législateurs ne sont pas les seuls éléments qui contraignent les professeurs. La progression des enseignements, la répétition et les révisions de notions déjà étudiées au cours de la scolarité, l'âge auquel on commence à enseigner telle ou telle notion, sont autant de caractéristiques des programmes scolaires qui peuvent avoir une influence sur la réussite des élèves aux évaluations TIMSS. Nous indiquerons, dans une seconde sous-section, comment l'organisation temporelle des enseignements est en relation avec les performances des élèves.

Sous-section I. Topogénèse du concept de fraction et performance des élèves aux évaluations TIMSS

Quand on évoque la couverture des types de tâches en jeu dans les items par les programmes d'enseignement, il est possible de distinguer deux aspects. L'un concerne l'adéquation des programmes aux tests (§ 1) : parce qu'elle permet à l'élève de travailler sur des tâches proches de celles auxquelles il est confronté dans les tests, une bonne adéquation pourrait être nécessaire à la réalisation de scores élevés. L'autre concerne la diversité des types de tâches rencontrée dans les programmes (§ 2) : parce qu'elle conduit l'élève à rencontrer une grande variété de tâches et donc à enrichir sa maitrise du concept de fraction, une forte diversité dans les tâches étudiées serait susceptible de lui donner plus de chances d'être performant.

§ 1. L'adéquation des programmes aux tests

Dans un premier temps, notre analyse sera globale, pour rechercher une éventuelle corrélation entre l'adéquation des instructions officielles aux évaluations TIMSS et les performances des élèves (A). Dans un second temps, nous mènerons une étude portant sur certains types de tâches spécifiques qui n'apparaissent pas dans tous les programmes, afin de déterminer de façon plus fine l'incidence de la présence (ou de l'absence) de l'un d'entre eux sur les résultats des élèves (B).

A. Adéquation des programmes aux tests et performances des élèves

Les auteurs de TIMSS prévoient une analyse de la relation entre les programmes d'enseignement et les résultats des élèves appelée *TCMA* (pour *Test-Curriculum Matching Analysis*). Nous avons déjà présenté ce document, indiqué les conditions de son élaboration et les différences avec notre analyse des curriculums[1]. Ces données ont été utilisées, par exemple, pour comparer les performances des pays participants en ne tenant compte que des items correspondant à un apprentissage prévu par les instructions officielles. Pour notre part, nous avons calculé, dans le domaine des fractions (c'est-à-dire pour les quatorze items que nous avons retenus), l'adéquation des programmes d'enseignement au test, pour les comparer à la performance moyenne réalisée par les élèves à ces mêmes items.

Pays ou province	Adéquation des programmes au test	Performance moyenne
Angleterre	100 %	55 %
Corée du Sud	79 %	73 %
Floride	93 %	69 %
France	71 %	37 %
Hong Kong SAR	93 %	83 %
Irlande du Nord	100 %	65 %
Ontario	79 %	45 %
Québec	50 %	57 %
République d'Irlande	93 %	65 %
Singapour	100 %	83 %
Taipei chinois	100 %	72 %

Figure 126. Dans le domaine des fractions, adéquation des programmes au test selon les autorités et performance moyenne des élèves de quatrième année (TIMSS 2015)

En moyenne, l'adéquation des programmes au test est forte (87 % des items sont couverts). Quatre pays considèrent même que leurs instructions officielles couvrent l'ensemble des items. Cependant, ces participants réalisent des performances diverses, puisque l'Angleterre obtient un taux de réussite moyen inférieur à la moyenne, tandis que les élèves de Singapour atteignent le score moyen le plus élevé, juste derrière Hong Kong SAR. Malgré une pente ascendante, la corrélation linéaire entre l'adéquation des programmes au test et les performances aux élèves est faible, ce qui est confirmé par un coefficient de détermination de

1. Voir p. 319.

Bravais-Pearson de 0,24. On voit ainsi que la Corée du Sud et l'Ontario ont un pourcentage d'adéquation des programmes au test identique, mais que leurs résultats dans le domaine des fractions sont nettement à l'avantage de la première. En ne retenant que le cas où le type de tâches est inscrit explicitement dans les programmes d'enseignement, nous avons créé un tableau comparatif entre l'adéquation des instructions officielles au test telle qu'elle ressort des déclarations des autorités, et telles qu'elle ressort de notre analyse des textes et des items[1].

Participant	M0504A	M0504B	M0701	M0704	M0705	M0804	M0905	M0906	M1004	M1102	M1104	M1302	M1304A	M1304B	**TOTAL**
Angleterre	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ○	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	14/12
Corée du Sud	● / ○	● / ○	● / ●	● / ●	○ / ●	● / ○	○ / ○	○ / ○	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	11/8
Floride	● / ○	● / ○	● / ●	● / ○	● / ●	● / ○	● / ●	○ / ○	● / ○	● / ●	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	13/7
France	● / ○	● / ○	● / ●	● / ○	● / ○	○ / ○	○ / ○	○ / ○	● / ○	○ / ●	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	10/5
Hong Kong SAR	● / ○	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ○	● / ●	○ / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	13/10
Irlande du Nord	● / ○	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ○	● / ●	● / ●	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	14/10
Ontario	● / ○	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	○ / ○	○ / ○	○ / ○	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	11/8
Québec	○ / ○	○ / ○	● / ●	● / ●	○ / ●	○ / ○	○ / ●	○ / ○	○ / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	7/9
République d'Irlande	● / ○	● / ○	● / ●	● / ○	● / ●	● / ○	● / ●	○ / ○	● / ○	● / ●	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	13/7
Singapour	● / ○	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ○	● / ●	● / ●	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	14/10
Taipei chinois	● / ○	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ○	● / ●	● / ○	● / ○	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	● / ●	14/9

Figure 127. Comparaison entre l'adéquation au test telle qu'elle ressort des déclarations des autorités et telle qu'elle ressort de notre analyse des textes et des items (TIMSS 2015, quatrième année)

Le coefficient de détermination de Bravais-Pearson n'est pas plus élevé lorsqu'on utilise les données issues de notre analyse, au contraire (R^2 = 0,18). Statistiquement, cette faible corrélation linéaire s'explique par les taux de réussite extrêmement divers des participants, y compris pour des types de tâches dont l'enseignement est imposé dans tous les pays de notre

1. Un point noir signifie que l'item est couvert par les programmes d'enseignement. Un point blanc signifie que l'item n'est pas couvert par les programmes d'enseignement. Pour chaque item, le point de gauche est issu des déclarations des autorités fournies à l'I.E.A. Le point de droite est issu de notre analyse des textes et des items.

corpus. Pour mettre au jour les bénéfices d'une mention dans les programmes scolaires, nous allons, d'une part, nous pencher sur des types de tâches bien précis, et d'autre part, examiner les performances relatives des élèves.

B. Incidence de la présence (ou de l'absence) de certains types de tâches dans les programmes

L'examen, dans chaque pays, du niveau d'acquisition d'un type de tâches particulier en fonction de son enseignement nécessite d'isoler la performance du pays pour ce type de tâches de sa performance globale à l'ensemble des items. À cette fin, au lieu de prendre pour référence la performance d'un pays à un item, nous avons considéré sa performance relative (normalisée), c'est-à-dire l'écart entre la performance du pays à cet item et sa performance moyenne à l'ensemble des items, cet écart étant rapporté à l'écart-type[1]. Le tableau des résultats obtenus figure en annexe 312. Nous ne nous pencherons pas sur les neuf items évaluant le genre de tâches « associer une fraction et un dessin » : nous avons déjà constaté que les performances des pays à ces items sont corrélées, la variabilité des réussites à ces questions évaluant le même genre de tâches tient donc à d'autres caractéristiques des items. En revanche, parmi les cinq autres items, l'examen du tableau des performances relatives permet d'en repérer pour lesquels une analyse approfondie du lien entre l'enseignement du type de tâches et la performance pourrait se révéler particulièrement fructueuse, en raison d'écarts de résultats variés selon les participants.

L'item M0906 « Fraction of the cake left » est assez éclairant à ce sujet. Il porte sur l'addition de fractions à l'intérieur d'une même unité. Précisons que pour ajouter un quart de gâteau à un demi de ce gâteau, il n'est pas indispensable de procéder à un calcul formel : il est possible de parvenir au résultat en réalisant un dessin ou en se représentant mentalement les quantités représentées par chacune des parts. C'est pourquoi nous cherchons à savoir si une solide compréhension de la notion de fraction est suffisante pour conduire à la réussite à cet

1. Illustrons le calcul de la performance relative par un exemple. Pour l'item M0705 qui porte sur la comparaison de fractions, la performance de l'Angleterre est 69,50 %. La performance moyenne de l'Angleterre à l'ensemble des items portant sur les fractions est de 55,21 % avec un écart-type de 18,16 points de pourcentage. La performance relative de l'Angleterre à l'item M0705 a été calculée ainsi : (69,50 – 55,21) / 18,16 = 0,787. Pour faciliter la lecture, cette performance est exprimée en pourcentage d'écart-type plutôt qu'en nombre d'écarts-types soit 78,7 % plutôt que 0,787. Enfin la valeur est arrondie à l'unité dans le tableau présenté : 79 %.

item, ou s'il est au contraire indispensable que les programmes d'enseignement aient prescrit de façon précise l'étude de l'addition et la soustraction de fractions. À cet égard, Singapour et Hong Kong SAR sont particulièrement intéressants. D'une part, parmi les onze pays ou provinces étudiés ici, ce sont les plus performants avec une réussite globale de 83 %. D'autre part, leurs programmes scolaires sont très différents quant à l'addition et la soustraction des fractions : ceux de Singapour indiquent, en troisième année, que les élèves doivent apprendre à « additionner et soustraire deux fractions d'un même entier, le dénominateur de l'une étant un multiple du dénominateur de l'autre » (ce qui correspond à la tâche en jeu dans l'item) alors que ces opérations ne figurent pas dans ceux de Hong Kong SAR avant le deuxième semestre de la quatrième année, et seulement pour des fractions de même dénominateur (ce qui ne suffit pas pour l'item en question). Les performances sont très sensiblement différentes : celle de Hong Kong SAR est de 60 % alors que celle de Singapour est de 82,2 %. L'acquisition de la notion de fraction par les élèves est pourtant de très haut niveau dans les deux pays. En outre, les performances normalisées de Singapour et de l'Irlande du Nord sont les deux meilleures du corpus, avec des scores respectifs de – 7,4 % et – 97,7 % d'écart-type, pour une moyenne établie à – 141,3 % d'écart-type. Or, ce sont les deux seuls participants qui prévoient l'addition de fractions de dénominateurs liés dans leurs programmes scolaires au plus tard en quatrième année. Imaginons que l'Irlande du Nord et Singapour n'aient pas inscrit cette notion dans leur curriculum, et retirons leurs scores relatifs de la moyenne (qui s'établit alors à – 161 % d'écart-type). Estimons ensuite les taux de réussite qu'auraient pu obtenir ces deux deux pays pour le cas où, comme les autres pays du corpus, l'enseignement de l'addition de fraction de dénominateurs différents n'aurait pas été imposé par le législateur. En retirant l'item M0906 de l'analyse, les taux de réussite moyens de l'Irlande du Nord et de Singapour seraient respectivement de 66,3 % et 83 %, tandis que les écart-types seraient respectivement de 17,6 et 10,4 points de pourcentage, d'où $66{,}3 - 17{,}6 \times 1{,}61 = 37{,}964$ et $83 - 10{,}4 \times 1{,}61 = 66{,}256$ (nous avons retiré du score le nombre de points qui correspond à 161 % d'écart-type). Une estimation de ce taux de réussite pourrait donc être 38 % pour l'Irlande du Nord et 66,3 % pour Singapour, soit un gain en ayant inscrit cette notion dans les programmes de 9,7 points pour le premier participant et de 15,9 points pour le second.

L'importance de la mention des les programmes scolaires du type de tâches « identifier des fractions équivalentes » apparait également assez clairement. Nous avons déjà indiqué les élèves sud-coréens manifestaient une excellente capacité à identifier la fraction 4/10 à partir d'un dessin (avec 91,9 % de réussite à l'item M0704), mais une faible capacité à identifier 4/10

comme étant une fraction équivalente à 2/5 (avec 40,4 % de réussite à l'item M0905). Or, la Corée du Sud est le seul pays de notre corpus dans lequel la notion de fractions équivalentes n'est pas imposée par le législateur, quel que soit le niveau de la scolarité. Par exemple, les élèves singapouriens présentent un taux de réussite presque identique pour l'item M0704 (91 % de réussite), mais ils parviennent très bien à associer les fractions équivalentes 4/10 et 2/5 (84,3 % de réussite), ce que l'on peut relier au fait qu'un enseignement relatif aux fractions équivalentes est prévu en troisième année. D'ailleurs, la Corée du Sud obtient le score relatif le plus faible de tous les pays que nous étudions, soit – 184,7 % d'écart-type (alors que dans le corpus, la moyenne s'établit à – 46,1 % d'écart-type), ce qui montre combien l'absence d'un élément dans les programmes d'enseignement peut influencer les résultats d'élèves qui ont pourtant une bonne maitrise générale du concept de fraction. Si l'on retire les résultats de la Corée du Sud de l'analyse, les résultats des autres pays se situent en moyenne à 32,2 % d'écart-type en dessous de leur taux de réussite moyen. On peut donc considérer que, potentiellement, si la Corée du Sud avait intégré cette notion dans ses programmes, une estimation de son score aurait pu être 70,9 %[1], soit un gain de 30,5 points de pourcentage par rapport au taux de réussite effectivement obtenu. Un raisonnement similaire peut être mené à propos de la France, qui est le seul pays de notre corpus qui ne prévoit pas l'enseignement de la comparaison de fractions au plus tard en quatrième année. Les élèves français obtiennent un score très faible à l'item M0705, non seulement si l'on envisage la réussite brute (21,1 % contre 67,9 % en moyenne au sein du corpus), mais également si l'on tient compte de la réussite relative (– 87,2 % d'écart-type, contre + 25,3 % en moyenne au sein du corpus). En retirant les résultats de la France à cet item, les scores relatifs moyens seraient de + 36,6 % d'écart-type. Là encore, il est possible de donner une estimation du score que la France aurait pu obtenir si cette notion avait été présente dans ses programmes scolaires au moment du test[2] : 44,5 %, soit 23,4 points de pourcentage supplémentaire par rapport au taux de réussite effectivement obtenu.

La mention dans les programmes d'enseignement de notions telles que l'addition, l'équivalence ou la comparaison de fractions a donc un effet sur les résultats des élèves. Néanmoins, cet effet n'est pas observé pour l'ensemble des notions évaluées dans TIMSS.

1. En retirant l'item M0905, la Corée du Sud aurait un taux de réussite moyen de 76 % et un écart-type de 15,9 points de pourcentage, ce qui donne : $76 - 15{,}9 \times 0{,}322 = 70{,}8802$.

2. En retirant l'item M0705, la France aurait un taux de réussite moyen de 37,9 % et un écart-type de 18 points de pourcentage, ce qui donne : $37{,}9 + 18 \times 0{,}366 = 44{,}488$.

Ainsi, Hong Kong SAR est le seul territoire du corpus dans lequel les instructions officielles prévoient l'étude de la relation entre les fractions et l'unité, ce que nous interprétons comme l'obligation de travailler sur les compléments à l'unité. Or, les élèves hongkongais ne tirent pas bénéfice de cette injonction pour se montrer particulièrement performants à l'item M1004, dans lequel il fallait identifier le complément à l'unité de 3/8. Certes, le score relatif obtenu par les élèves de ce territoire est positif (+ 6,8 % d'écart-type), mais d'autres valeurs sont plus élevées, comme celles du Taipei chinois (+ 69,9 % d'écart-type), de la France (+ 40 % d'écart-type), de la Corée du Sud (+ 34,5 % d'écart-type) ou même de Singapour (+ 15,6 % d'écart-type). De même, les élèves anglais ne tirent pas avantage du fait qu'ils sont les seuls à bénéficier d'une référence explicite, dans leurs instructions officielles, à des activités d'estimation de quantités. Par « estimation de quantités », nous entendons l'association d'une fraction et d'un dessin dans lequel les parts égales ne sont pas matérialisées. Cette mention apparait en troisième année de scolarité obligatoire, sous l'intitulé « Identifier et estimer des fractions de formes ». Deux items mettaient en jeu un tel type de tâches dans les évaluations TIMSS 2015 : les items M0504A et M0804. Or, dans les deux cas, les résultats de l'Angleterre, exprimés en valeurs relatives, sont légèrement inférieurs à la moyenne du corpus. Pour l'item M0504A, le taux de réussite relatif de l'Angleterre est de – 34,7 % d'écart-type contre – 31,9 % pour l'ensemble du corpus. Pour l'item M0804, le taux de réussite relatif est de – 54 % d'écart-type contre – 51,5 % pour l'ensemble du corpus. Par ailleurs, parmi les pays qui n'imposent pas explicitement l'enseignement de ce type de tâches, on trouve des différences notables. Par exemple, Singapour obtient le résultat relatif le plus faible du corpus à ces deux items, avec – 102,3 % d'écart-type pour les deux items. À l'inverse, le seul pays qui obtient un score relatif positif (que l'on envisage l'un ou l'autre des deux items) est la Corée du Sud, avec + 19,4 % d'écart-type pour l'item M0504A et + 11 % d'écart-type pour l'item M0804, ce qui confirme qu'il existe un lien fort entre les réussites à ces deux tâches. Pour finir, nous avons identifié trois participants dont les instructions officielles ne prévoyaient pas explicitement l'utilisation de quantités discrètes pour des tâches relatives aux fractions : la Floride, la France et la République d'Irlande. Or, leurs scores relatifs se situent autour de la moyenne pour les deux items qui ont trait à ce type de tâches (M0704 et M1104). On ne constate pas un décifit qui résulterait de l'absence de cette mention dans les programmes d'enseignement. Ainsi, pour l'item M0704, ce sont les élèves de l'Ontario qui réalisent le score relatif le plus faible (+ 54,1 % d'écart-type), alors même que ce type de tâches fait partie des instructions officielles. Pour l'item M1104, les différences de résultats normalisés entre les pays sont très faibles, avec un écart-type de 16 points de pourcentage (soit l'écart-type le plus faible des quatorze items que nous avons analysés). Par

ailleurs, cet item est aussi celui pour lequel le score relatif moyen est le plus proche de zéro. Ces deux données (un écart-type faible et une moyenne autour de zéro) nous permettent de conclure que la performance des élèves à cet item représente le plus fidèlement le niveau moyen des élèves dans le domaine des fractions.

§ 2. L'incidence de la diversité des types de tâches prescrites par le législateur

Parler de couverture large des genres de tâches susceptibles d'être mis en jeu dans les items évoque, d'une part, le nombre de types de tâches que l'on peut trouver dans les instructions officielles (A), et d'autre part, la richesse des tâches qu'un même type de tâches des programmes peut recouvrir (B). Dans le premier cas, la variété des situations rencontrées conduirait l'élève à développer sa capacité à faire face à des tâches inédites (notamment par le biais de l'acquisition de nouvelles techniques), et lui permettrait d'enrichir sa compréhension du concept de fraction en l'utilisant dans des contextes différents. Dans le second cas, la richesse de la tâche telle qu'elle apparait potentiellement dans les instructions officielles inciterait l'enseignant à augmenter son niveau d'exigence, et à améliorer la capacité des élèves à réaliser des tâches proches avec des variables différentes (c'est-à-dire, là encore, augmenter le nombre de techniques acquises). Étudier successivement ces deux facteurs contribuera donc à une meilleure compréhension de l'incidence de la rédaction des programmes scolaires sur les performances des élèves.

A. L'incidence du nombre de types de tâches traités dans les programmes d'enseignement

Le nombre de tâches envisageables mettant en jeu des fractions est suffisamment large pour que, même avec une couverture large du concept de fraction par les programmes, les élèves soient confrontés à des tâches qui leur semblent inédites dans les évaluations TIMSS. Néanmoins, l'analyse de la relation entre l'étendue des types de tâches abordés et les résultats des élèves pourra conforter, éventuellement, l'idée que les transferts entre les types de tâches s'opèrent difficilement. Pour ce faire, nous avons déterminé le nombre total de types de tâches différents qui apparaissaient dans les programmes scolaires jusqu'en quatrième année. Par exemple, si le type de tâches « identifier la fraction d'une figure géométrique » apparait en deuxième, troisième et quatrième années, nous ne l'avons comptabilisé qu'une seule fois. En quatrième année, le Taipei chinois et Singapour, dont les élèves obtiennent tous deux d'excellents résultats, constituent respectivement le premier et le deuxième pays dont les

instructions officielles prévoient le plus de types de tâches différents à enseigner (respectivement 27 et 23). À l'inverse, la France et l'Ontario sont, dans cet ordre, les deux pays qui ont inscrit dans leurs programmes le moins de types de tâches différents (respectivement 8 et 9) : ce sont également les participants qui obtiennent les résultats les plus bas dans le domaine des fractions. Par ailleurs, la Floride et l'Irlande du Nord préconisent l'étude d'un nombre élevé de types de tâches jusqu'en quatrième année (20 pour ces deux participants) et réalisent les scores les plus élevés des pays occidentaux (avec 69,2 % de réussite pour la première et 64,9 % pour la seconde). Il est donc tentant de conclure que les pays prévoyant un travail moins dense obtiennent en conséquence de moins bons résultats aux items impliquant des fractions. Néanmoins, des contre-exemples viennent tempérer cette affirmation : la Corée du Sud et Hong Kong SAR obtiennent de très bons résultats avec un nombre peu important de types de tâches prescrits dans les instructions officielles (respectivement 13 et 15).

En huitième année, nous obtenons des résultats plus contrastés : Singapour et l'Angleterre sont deux participants dont les programmes scolaires comportent un nombre particulièrement important de types de tâches différents se rapportant aux fractions (36 chacun). Or, leurs élèves obtiennent des résultats très différents (85,9 % de réussite en moyenne aux items impliquant des fractions pour le premier, contre 52,6 % pour la seconde). De plus, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson entre le nombre de types de tâches et les performances des élèves est proche de zéro. Cela confirme ce que nous avions suggéré en analysant les éléments de quatrième année, mais de façon beaucoup plus nette : il n'y a pas de corrélation linéaire entre le nombre de types de tâches différents inscrits dans les instructions officielles et les performances des élèves. Toutefois, une couverture trop faible du concept de fraction, en particulier à l'école primaire, est sans doute un facteur contributif des faibles scores que nous avons observés à propos de la France et de l'Ontario.

En outre, à l'école élémentaire, les programmes scolaires qui mettent l'accent sur des apprentissages fondamentaux obtiennent des scores plus faibles que les autres. Pour le montrer, nous avons, dans les programmes scolaires, comptabilisé séparément l'ensemble des types de tâches se rapportant à l'étude du concept de fraction pour les tâches les plus simples (T_1 à T_{16}) et ceux ayant trait à des tâches plus complexes (en lien avec l'ordinalité ou impliquant des opérations). Nous avons éliminé de l'analyse ceux qui se rapportaient au lien entre les fractions et les écritures décimales ou les pourcentages. Nous avons ensuite confronté ces données aux performances des élèves aux items impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS. En

quatrième année, un lien apparait, puisque le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est égal à 0,83. La pente indique que plus la part des instructions officielles consacrée aux apprentissages fondamentaux est importante, plus les résultats sont bas. Par ailleurs, nous constatons que le lien est similaire lorsqu'on confronte la part des instructions officielles consacrée aux genres de tâches les plus simples et les résultats des élèves à un item évaluant la capacité des élèves à associer une fraction à un dessin (M1302). Pour réussir cet item, les élèves devaient associer la fraction 3/4 au dessin correspondant (un carré dont les trois quarts avaient été grisés). On aurait donc pu penser que des pays consacrant une partie importante des programmes scolaires à des tâches de ce genre seraient susceptibles de mieux réussir que les autres à cet item. Or, les écarts subsistent en faveur de ceux qui y consacrent une part plus faible, avec $R^2 = 0,78$. Cela confirme qu'une couverture suffisamment large par les instructions officielles des types de tâches relatifs à la comparaison et aux opérations impliquant des fractions semble nécessaire pour réaliser des scores élevés.

B. L'incidence d'un enseignement riche et exigeant

Nous avons choisi de faire porter l'analyse sur l'item M0705 des évaluations TIMSS 2015, pour lequel les performances relatives des onze pays prennent à la fois des valeurs positives (réussite à l'item supérieure à la moyenne du pays) et des valeurs négatives (réussite à l'item inférieure à la moyenne du pays) et sont également très dispersées (l'écart-type des performances relatives à cet item est de 67 points de pourcentage alors que la moyenne des écarts-types pour l'ensemble des items est de 39,7 points de pourcentage avec un écart-type de 17,6 points de pourcentage). L'item M0705 porte sur la comparaison de fractions, qui est un type de tâches difficile à acquérir compte tenu de la diversité des situations qu'il permet de traiter. Si l'on considère en effet des fractions correspondant à des parts d'une tarte mangées par un élève, on pourra dire que plus il y a de parts, plus l'élève aura mangé de tarte. Si l'on considère en revanche une tarte que l'on découpe en plusieurs parts, on pourra dire que plus il y a de parts, plus chacune d'elles est petite et moins celui qui mange une part aura mangé de tarte. La réussite à l'item M0705 dépend-elle d'un apprentissage spécifique de la comparaison de fractions ? Un examen des programmes scolaires des différents pays et de la performance de leurs élèves à l'item M0705 pourrait conduire à apporter des éléments de réponse à cette question. Deux types de tâches relatifs à la comparaison des fractions sont généralement indiqués dans les programmes scolaires : comparer des fractions et ordonner des fractions. Dans le premier cas, l'élève doit comparer deux fractions ou bien déterminer la plus grande ou la plus

petite parmi plusieurs fractions ; dans le second cas, la tâche est plus complexe, il doit les comparer toutes pour les mettre dans l'ordre. Nous avons regardé si les genres de tâches « comparer des fractions » et « ordonner des fractions » apparaissent dans les programmes de l'enseignement élémentaire, au plus tard en quatrième année. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant où, par exemple, la valeur « oui ; non » de la Corée du Sud indique que, dans ce pays, le genre de tâches « comparer » y figure mais pas le genre de tâches « ordonner ».

Participant	Comparer ; ordonner des fractions	Performance relative (item M0705)
Angleterre	oui ; oui	79 %
Corée du Sud	oui ; non	– 35 %
Floride	oui ; oui	80 %
France	non ; non	– 87 %
Hong Kong SAR	oui ; non	68 %
Irlande du Nord	oui ; oui	94 %
Ontario	oui ; oui	– 31 %
Québec	oui ; oui	– 14 %
République d'Irlande	oui ; oui	136 %
Singapour	oui ; oui	24 %
Taipei chinois	oui ; non	– 34 %

Figure 128. Enseignement de la comparaison des fractions et performance à un item de comparaison des élèves de quatrième année (TIMSS 2015)

L'examen du tableau montre que, à l'exception de l'Ontario et du Québec, les pays ou provinces dans lesquels comparer et ordonner des fractions sont deux genres de tâches enseignés ont un score relatif positif. Cela signifie que les élèves y sont plus performants à l'item M0705 qu'ils ne le sont en moyenne sur l'ensemble des items relatifs aux fractions : Angleterre (79 %), Floride (80 %), Irlande du Nord (94 %), République d'Irlande (136 %) et Singapour (24 %). Quelques informations supplémentaires relatives aux programmes scolaires viennent enrichir ce bilan. Ceux du Québec précisent que les dénominateurs des fractions à ordonner doivent être identiques et qu'il n'y a pas d'exigence d'autonomie de l'élève dans ces activités de comparaison : « avec l'intervention de l'enseignant, comparer une fraction à 0, à 1/2 ou à 1 » ; « avec l'intervention de l'enseignant, ordonner des fractions ayant un même dénominateur » (*op. cit.*, 2009a, p. 7). Ce manque d'autonomie exigée par les programmes explique peut-être la difficulté rencontrée par les élèves. Le cas de l'Ontario est différent : l'enquête TIMSS révèle que 67 % des enseignants de cette province estiment que l'addition, la soustraction et la comparaison de fractions sont des genres de tâches qui sont à enseigner après

la quatrième année d'enseignement élémentaire. Sans doute, pour ces deux pays, le codage « oui ; oui » réalisé à partir des programmes seuls est-il à modérer. Remarquons enfin qu'en République d'Irlande, où la performance relative des élèves à cet item est très élevée, les programmes scolaires sont particulièrement exigeants puisque les élèves doivent savoir « comparer, ordonner des fractions de dénominateurs bien choisis et les placer sur la droite numérique ».

Les pays dans lesquels les programmes prescrivent seulement de comparer des fractions ont des résultats contrastés : négatifs pour la Corée du Sud (– 35 %) et le Taipei chinois (– 34 %), mais positifs pour Hong Kong SAR (+ 68 %). Ici encore, une information complémentaire éclaire les résultats différemment : les programmes de Hong Kong sont particulièrement peu détaillés, il est possible alors que la seule mention de la comparaison suffise aux enseignants pour aussi proposer à leurs élèves des tâches exigeant d'ordonner des fractions. Il ne semble pas impossible ainsi de penser que ces tâches, plus exigeantes que de simples comparaisons, correspondent à des programmes scolaires où le niveau d'exigence est élevé. Ces tâches ne sont pas proposées aux élèves de la Corée du Sud et du Taipei chinois, et les performances des élèves de ces deux pays sont plus faibles à la tâche de comparaison qu'elles ne le sont à l'ensemble du questionnaire TIMSS. Concernant la France, dont les performances des élèves sont très faibles, on peut constater que ses programmes scolaires sont les seuls des onze pays étudiés qui ne font travailler aucun des deux genres de tâches « comparer » et « ordonner » des fractions.

L'apprentissage de la comparaison des fractions en quatrième année d'enseignement élémentaire apparait donc nettement favorisé lorsque les programmes scolaires prescrivent un enseignement suffisamment riche (qui demande aux élèves, de façon autonome, de comparer, mais aussi d'ordonner des fractions). Cette conclusion étant tirée de l'analyse des performances relatives, il faut rappeler que l'enseignement des types de tâches ne constitue pas le seul facteur explicatif des performances aux items qui les mettent en jeu. Ainsi, par exemple, l'Angleterre et Taipei chinois ont des performances relatives différentes quant à la comparaison des fractions (respectivement + 79 % et – 34 %) ; pourtant, les pourcentages de réussite des deux pays à l'item M0705 sont très proches (respectivement 70 % et 67 %), mais les élèves d'Angleterre sont globalement bien moins performants sur les fractions que ceux du Taipei chinois (respectivement 55 % et 72 %).

En ce qui concerne la richesse des techniques imposées par le législateur, nos observations sont tirées des évaluations de huitième année, de façon à pouvoir prendre en compte toutes celles qui sont prescrites dans l'enseignement secondaire. Pour notre analyse, nous nous sommes appuyé sur l'item M0504 du test TIMSS 2015, dans lequel les collégiens étaient invités à indiquer quelle fraction était la plus grande entre 7/12 et 2/3, et à justifier leur réponse. Nous indiquons ci-dessous les techniques prévues dans chacun des pays de notre corpus, à l'exception de la France et de l'Irlande du Nord, ces pays n'ayant pas participé aux évaluations de huitième année. Nous n'avons pas pris en compte la technique consistant à utiliser une fraction repère, car dans les programmes il s'agit toujours de la fraction 1/2, qui n'est d'aucune utilité pour la résolution de la tâche que nous venons de décrire.

Participant	Supports visuels	Droite numérique	Recherche d'un dénominateur commun	Conversion en écriture décimale	Aucune	Performance relative (item M0504)
Angleterre	✓		✓			– 85,2 %
Corée du Sud					✓	13,3 %
Floride					✓	– 82,6 %
Hong Kong SAR				✓		– 62,5 %
Ontario	✓	✓				– 1,9 %
Québec					✓	32,2 %
République d'Irlande	✓	✓				– 87,5 %
Singapour					✓	– 133,6 %
Taipei chinois			✓			34,3 %

Figure 129. Choix des techniques par le législateur et performance à un item de comparaison des élèves de quatrième année (TIMSS 2015).

Lorsque tout liberté est laissé aux enseignants dans le choix des techniques que doivent utiliser les élèves, les résultats sont contrastés. Pour deux participants, le score relatif est positif (en Corée du Sud, avec 13,3 %, et au Québec, avec 32,2 %), tandis que pour les deux autres, il est négatif (en Floride, avec – 82,6 %, et à Singapour, avec – 133,6 %). Il ne semble pas plus avantageux pour le législateur de citer, dans les programmes, un nombre bien déterminé de techniques, puisque sur les cinq participants qui ont fait ce choix, un seulement obtient un score relatif positif à l'item M0504 (le Taipei chinois, avec 34,3 %), les quatre autres réalisant des scores négatifs (l'Angleterre, avec – 85,2 %, Hong Kong SAR, avec – 62,5 %, l'Ontario, avec – 1,9 % et la République d'Irlande avec – 87,5 %). Sans doute peut-on relier ces résultats au

fait que, dans le Taipei chinois, les auteurs imposent de réaliser des comparaisons, non seulement pour le cas où le dénominateur de l'une des fractions est un multiple de l'autre, mais également pour le cas où l'identification d'un dénominateur commun autre que l'un des deux proposés est nécessaire, ce qui suggère une plus grande complexité des tâches abordées. Nous notons également que dans l'Ontario, territoire où le score négatif est le plus proche de zéro, la liste des techniques fournie par les auteurs n'est pas limitative, ce qui peut conduire les professeurs à enseigner des techniques à la fois plus diverses et plus complexes que ne le laissent penser l'utilisation des seules techniques imposées de façon explicite dans les instructions officielles (supports visuels et droite graduée). À l'inverse, dans les curriculums de l'Angleterre, de Hong Kong SAR et de la République d'Irlande, aucune indication ne vient appuyer l'idée d'une exigence particulière des auteurs à propos de la richesse des tâches de comparaison. Par ailleurs, nous notons que Singapour, qui est le pays qui présente le score relatif le plus faible, est aussi celui dans lequel l'enseignement des comparaisons est le plus ancien (les intitulés relatifs à la comparaison sont placés en troisième année). De plus, à l'exception de l'Ontario, tous les participants qui obtiennent un score relatif positif à l'item de comparaison en quatrième année, réalisent un score relatif négatif en huitième année (et inversement). On peut donc envisager que l'organisation temporelle des enseignements a une grande influence sur ces résultats.

Néanmoins, un exemple tiré des évaluations TIMSS 2011 de quatrième année montre bien le faible bénéfice, au sein de notre corpus, à préciser dans les programmes les techniques que doivent utiliser les élèves. Dans l'item M0701 des évaluations TIMSS de 2011, les élèves devaient identifier, parmi quatre propositions, la fraction supérieure à 1/2. Il se trouve que deux participants dans notre corpus avaient spécifiquement imposé l'enseignement la comparaison d'une fraction à 1/2 : le Québec en troisième et quatrième années (« Comparer une fraction à 0, à 1/2 ou à 1 » [*ibid.*]) et Singapour en troisième année (« Comparer des fractions à la moitié » [*op. cit.*, 2006, p. 18]). Or, leurs scores relatifs ne mettent pas en évidence un quelconque gain tiré de la présence dans les instructions officielles d'une technique qui correspond parfaitement à celle à mettre en œuvre pour réussir l'item. Au contraire, Singapour réalise le score relatif le plus bas du corpus avec – 92,5 % d'écart-type. Le Québec obtient un score proche de sa moyenne, puisque son score relatif (– 3,3 % d'écart-type) est proche de zéro. Toutefois, celui-ci est inférieur à celui de l'Ontario (+ 18,9 %), avec des valeurs absolues comparables (49,2 % de réussite pour le Québec et 48 % pour l'Ontario). Pourtant, dans cette dernière province, le législateur n'impose qu'une seule technique (l'utilisation de supports visuels) et les modalités

de la tâche dans l'item TIMSS ne correspondent pas à ce qui est supposé être enseigné : les fractions ne sont ni de même numérateur, ni de même dénominateur (« Comparer et ordonner des fractions ayant un même numérateur à l'aide de matériel concret ou illustré [p. ex., réglettes, bandes de carton, cercles de fraction, jetons] » et « Comparer et ordonner des fractions ayant un dénominateur commun à l'aide de matériel concret ou illustré » [*op. cit.*, 2005, p. 51]). Deux hypothèses peuvent être formulées à partir de ces résultats. En ce qui concerne l'adéquation entre la technique évoquée par le législateur et les variables de l'item, il est possible que la richesse des intitulés en Ontario focalise davantage l'attention du système éducatif que l'intitulé court et isolé que nous avons relevé au Québec, d'où un travail plus important sur les questions de comparaison dans la première province que dans la seconde et des performances relatives supérieures. En ce qui concerne, plus largement, l'incidence de la mention des techniques à utiliser par les élèves dans les programmes, il semble que cela soit davantage un facteur limitant leurs performances qu'un élément susceptible de favoriser des scores élevés, ce qui pourrait s'expliquer par la moindre possibilité pour les élèves de travailler avec des techniques diverses, et de discuter de l'opportunité des unes et des autres en fonction des variables de la tâche. On peut penser également que les programmes imposent des techniques précisément parce qu'elles sont assez peu utilisées en pratique : il faudrait alors considérer que les objectifs définis par le législateur québécois ne sont pas atteints, puisque dix ans après la mise en place des instructions officielles québécoises de 2001, la comparaison de fractions à 1/2 constitue plutôt un point faible des connaissances des élèves à propos des fractions.

Conclusion de la sous-section

Des programmes en adéquation avec le contenu des évaluations TIMSS ne suffisent pas pour obtenir de bons résultats. Bien évidemment, d'autres paramètres que les instructions officielles influent sur le taux de réussite des élèves. Cependant, « une compétence qui n'est pas prescrite est sans doute bien moins enseignée dans les classes que si elle l'avait été, et l'acquisition de compétences connexes ne semble pas suffire pour compenser le manque de travail spécifique sur celle qui n'a pas été enseignée directement » (Martinez et Roditi, op. cit., p. 34), en particulier pour les tâches que nous avons identifiées comme visant l'étude de l'ordinalité (fractions équivalentes, comparaison) et pour les opérations. Pour les tâches que nous avons identifiées comme visant l'étude de la cardinalité, nous n'avons pas mis au jour d'incidence de la présence des intitulés correspondant dans les curriculums. Il est possible que les professeurs intègrent plus facilement dans leurs enseignements ces tâches présentant des

caractéristiques communes (notamment en raison de la proximité des techniques pouvant être utilisées pour les résoudre), ou que les élèves parviennent plus facilement à faire des transferts entre ces types de tâches, en l'absence d'un enseignement spécifique.

Nous remarquons également que les informations fournies par les autorités ne correspondent pas toujours à ce que nous avons observé en étudiant les injonctions ministérielles en vigueur. Cela pose la question de l'interprétation du contenu des instructions officielles. Nécessairement, les enseignants seront confrontés à ce travail d'interprétation, et des intitulés exigeants, proposant une riche palette d'activités, semblent favorables à la réussite des élèves. En revanche, le fait d'imposer une technique spécifique ne semble pas permettre aux élèves d'obtenir de meilleurs résultats, possiblement parce que cela aurait pour effet de réduire la variété des praxéologies susceptibles d'être enseignées et de limiter le travail portant sur le cadrage de la tâche. Précisons enfin que, s'il est possible qu'un travail plus dense dans le domaine de l'ordinalité conduise à une meilleure compréhension globale du concept de fraction, cette question ne peut être abordée qu'en relation avec la durée des apprentissages effectués dans ce domaine. À vouloir diversifier les types de tâches travaillés dans les classes avec une même durée des apprentissages, ne risquerait-on pas de produire un effet contraire à celui souhaité ? Sur ce point, l'organisation temporelle des enseignements semble jouer un rôle important qu'il nous faut définir plus avant.

Sous-section II. Chronogénèse du concept de fraction et réussite des élèves aux évaluations TIMSS

La progression des apprentissages est constituée d'un point de départ situé dans le temps, ainsi que d'un agencement spécifique des éléments des programmes, à la fois en ce qui concerne l'ordre et la durée. Une fréquentation précoce de la notion de fraction peut potentiellement avoir une influence positive sur les performances des élèves (notamment en permettant aux élèves de bénéficier de plus de temps pour comprendre la notion), mais l'effet inverse est envisageable également (en particulier si l'élève ne dispose pas de la maturité suffisante pour acquérir les concepts qui sont enseignés). Nous proposons donc de rechercher un lien la précocité de l'apprentissage et les résultats des élèves (§ 1). Pour autant, la diversité des choix des législateurs à propos de l'organisation des enseignements est telle qu'il semble que, plus qu'au moment auquel débute l'apprentissage, il faudrait s'intéresser à la redondance des éléments dans les instructions officielles : contribue-t-elle à améliorer les performances des

élèves ? Autrement dit, nous chercherons à établir un lien entre la durée des enseignements et les performances des élèves (§ 2).

§ 1. La précocité de l'enseignement

Un apprentissage suffisamment précoce peut, éventuellement, être nécessaire à l'obtention de bons résultats aux évaluations TIMSS. Le cas échéant, nous indiquerons quelle année constitue le point de départ des enseignements, dans le domaine des fractions, chez les participants les plus performants (A). Quand bien même les élèves d'un pays étudieraient les fractions très tardivement, nous envisageons la possibilité qu'ils rattrapent leur retard pour parvenir à niveau de connaissances égal à celui des élèves ayant bénéficié d'un apprentissage plus précoce. C'est pourquoi nous allons déterminer comment évolue la réussite des élèves à un même item entre la quatrième année et la huitième année (B).

A. Le lien entre la précocité des apprentissages et les performances des élèves

Commençons par une approche globale de cette question en croisant les deux variables que représentent, pour chaque pays, l'année scolaire à laquelle débute l'enseignement des fractions, d'une part, et la réussite moyenne aux items concernant cette notion, d'autre part. Précisons dès l'abord de cette question qu'il est parfois difficile de déterminer un point de départ de l'enseignement des fractions. D'une part, les activités préparatoires dont nous avons déjà fait mention, et pour lesquels les élèves utilisent les mots « demi », « tiers » et « quarts » sans pour autant manipuler des écritures fractionnaires, introduisent un doute à ce sujet. D'autre part, des ambigüités peuvent naitre de l'utilisation de sources différentes. Nous pensons en particulier au cas du Québec : les instructions officielles mentionnent l'étude de « fractions en lien avec le quotidien de l'élève » au cycle 1, c'est-à-dire dans les deux premières classes de l'enseignement obligatoire (*op. cit.*, 2001, p. 134), tandis que les progressions associées indiquent, certes l'utilisation du mot « fraction » dès la première année, mais l'emploi des notations fractionnaires seulement en troisième année (*op. cit.*, 2009a, p. 7). Pour définir le point de départ des enseignements, nous tiendrons compte, comme nous l'avons fait dans le chapitre consacré à la chronogénèse du concept de fraction, de l'introduction des écritures fractionnaires, c'est-à-dire, dans notre exemple, des indications fournies par les progressions québécoises. En raison de la passation des tests TIMSS en cinquième année en Angleterre, et en sixième année en Irlande du Nord, nous avons, dans notre tableau, avancé le début des enseignements respectivement d'une et deux années, de sorte que la durée d'utilisation des

fractions au moment des évaluations soit estimée équitablement. Par exemple, en Angleterre, les notations fractionnaires sont introduites en troisième année, soit deux ans avant les tests. Nous avons donc indiqué dans notre tableau un point de départ en deuxième année, deux ans avant la quatrième année, qui est le moment habituel des tests TIMSS.

Participant	Début de l'enseignement	Performance moyenne
Angleterre	2e année	55 %
Corée du Sud	2e année	73 %
Floride	3e année	69 %
France	4e année	37 %
Hong Kong SAR	3e année	83 %
Irlande du Nord	1re année	65 %
Ontario	4e année	45 %
Québec	3e année	57 %
République d'Irlande	3e année	65 %
Singapour	2e année	83 %
Taipei chinois	2e année	72 %

Figure 130. Précocité de l'enseignement des fractions et performance au test des élèves de quatrième année (TIMSS 2015)

L'examen des deux colonnes ne laisse pas apparaître de corrélation positive entre les deux variables, ce que confirme un faible coefficient de détermination de Bravais-Pearson ($R^2 = 0{,}31$). Les deux pays qui réussissent le mieux aux items concernant les fractions avec 83 % de réussite ne font pas débuter l'enseignement des fractions la même année, Singapour le fait débuter en deuxième année, alors que Hong Kong n'a inscrit cette notion qu'au programme de la troisième année. L'Irlande du Nord, qui commence le plus tôt (dès la première année) réalise des performances moins bonnes que celles de la Floride, dont les élèves comment à manipuler les notations fractionnaires seulement deux ans plus tard (avec un taux de réussite de 65 % pour la première contre 69 % pour la seconde). On peut toutefois remarquer que les participants qui commencent le plus tardivement cet enseignement (en quatrième année : la France et l'Ontario) obtiennent les deux scores les plus faibles parmi les onze pays étudiés, avec respectivement 37 % et 45 % de réussite. L'hypothèse selon laquelle plus une notion est étudiée depuis longtemps au moment de l'évaluation, plus les performances sont élevées se trouve ici réfutée. Toutefois, les résultats obtenus par la France et l'Ontario laissent à penser qu'un début trop tardif est de nature à nuire à l'obtention de bons résultats. Il faut dire que les évaluations TIMSS 2015 ont été passées entre le 13 avril et le 7 mai 2015 en classe de C.M.1. Pour peu qu'une partie des professeurs place cette notion en fin d'année, il est possible qu'une partie des élèves n'aient pas encore abordé les notations fractionnaires dans ces deux territoires. Des

recherches complémentaires seraient donc nécessaires pour mieux connaître le délai minimum à partir duquel il est intéressant d'évaluer des apprentissages dans une enquête internationale comme celle de TIMSS. En outre, l'enseignement précoce d'une notion ne signifie pas que les élèves ont consacré une partie importante de leur scolarité à son étude : on peut enseigner précocément un concept pour ne plus y revenir ensuite, ou bien continuer à l'approfondir au cours des années ultérieures. Cette observation pose la question de la durée des enseignements dans les programmes d'enseignement, que nous traiterons un peu plus loin dans cette recherche, ainsi que celle de la capacité des élèves à acquérir postérieurement aux tests les savoirs considérés, notamment dans le cas d'un enseignement tardif.

B. La possibilité d'un rapprochement des acquis postérieurement aux tests de quatrième année

On peut envisager que des pays qui débutent tardivement l'apprentissage des fractions en général, et de certains types de tâches en particulier, rattrapent leur retard au cours des années ultérieures, et qu'en fin de scolarité, leurs élèves parviennent au même degré de maitrise des connaissances que dans des pays proposant des enseignements plus précoces. Pour vérifier cette hypothèse, nous avons observé les résultats des écoliers aux tests de l'année *n*, puis nous avons comparé leurs performances à des items portant sur le même type de tâches, aux évaluations destinées aux collégiens de l'année $n + 4$. En effet, la génération d'élèves ayant passé le test de quatrième année à un moment donné se trouve être la même que celle ayant complété les évaluations de huitième année quatre ans plus tard. Nous concédons que ce ne seront pas les mêmes élèves qui passeront les deux tests, mais les performances de ces derniers étant considérées comme représentatives des acquis d'une génération dans un pays donné, il nous a semblé que les comparaisons que nous pourrions réaliser entre les performances de quatrième et de huitième années étaient pertinentes. Les liens que nous avons pu tisser concernent principalement les tests de 2003 (pour la quatrième année) et 2007 (pour la huitième année).

Tout d'abord, il a fallu prendre en compte la possibilité qu'il existe une relation entre les résultats de quatrième et de huitième années dans leur globalité, c'est-à-dire pas seulement pour des items correspondant à des types de tâches similaires. Les pays ayant participé aux tests de 2003 et 2007 ont donc été isolés : parmi ceux de notre corpus, nous en avons identifié six (Angleterre, Hong Kong SAR, Ontario, Québec, Singapour, Taipei chinois). La moyenne à l'ensemble des items impliquant des fractions a été établie pour chacun de ces deux tests. Le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est bas ($R^2 = 0,3$), ce qui induit que les résultats

de quatrième année n'expliquent que pour une faible part les résultats obtenus par les élèves en huitième année dans le domaine des fractions. De plus, deux pays obtiennent des scores en baisse avec l'augmentation de l'âge des élèves (Angleterre et Ontario), tandis que les quatre autres (Hong Kong, Québec, Singapour et le Taipei chinois) réalisent des performances plus élevées en huitième année. Pour quatre pays, l'écart de performance est inférieur à 6 % (Hong Kong SAR, Ontario, Québec et Singapour), tandis que pour l'Angleterre et le Taipei chinois, il est supérieur à 14 %, ce qui montre des trajectoires diverses dans les progressions réalisées par les élèves et autorise la recherche d'une corrélation plus forte pour des items impliquant les mêmes types de tâches.

Ensuite, nous avons isolé les items portant sur des genres de tâches identiques. Par exemple, les items M0403 pour la quatrième année (2003) et M0903 pour la huitième année (2007) mettaient en jeu le même type de tâches (« prendre la fraction d'une quantité »). Dans le premier, on demandait aux élèves de résoudre le problème suivant : « Il y a 600 balles dans une boite. 1/3 des balles sont rouges. Combien de balles rouges y a-t-il dans la boite ? » Dans le second, l'énoncé était ainsi rédigé : « Ann et Jenny se partagent 560 zeds. Si Jenny obtient 3/8 de l'argent, combien de zeds Ann obtiendra-t-elle ? » Certes, les modalités de la tâche proposée aux élèves ont évolué : pour les élèves les plus jeunes, la fraction est unitaire, tandis que ce n'est pas le cas pour les élèves les plus âgés. La technique en jeu change légèrement : le premier problème pourra être résolu à l'aide d'une seule opération ($600 \div 3$), alors que, pour résoudre le deuxième, au moins deux opérations sont nécessaires ($560 \div 8 \times 5$). De plus, le problème le plus complexe impliquait de calculer une quantité, non à partir de la fraction fournie dans l'énoncé (3/8), mais à partir de son complément à l'unité : il ne fallait pas trouver l'argent revenant à Jenny, mais le montant qu'obtiendrait Ann. Or, la corrélation linéaire est presque parfaite entre les deux séries de données (les résultats obtenus à l'item M0403 et ceux obtenus à l'item M0903), avec $R^2 = 0,97$. Si l'on réalise une comparaison des résultats de l'Angleterre et de Singapour, on s'aperçoit que les taux de réussite sont très proches. Ainsi, les élèves anglais sont 40,6 % à réussir le premier et 34,8 % à réussir le second, tandis que les élèves singapouriens sont 83,8 % à réussir le premier et 78 % à réussir le second, ce que l'on peut expliquer par le fait que dans les deux pays, l'enseignement de ce type de tâches a lieu au plus tard en quatrième année.

L'analyse de deux items relatifs à la soustraction de fractions conduit à des conclusions similaires. En 2003, on demandait aux élèves de quatrième année de trouver une différence

portant sur des fractions de même dénominateur (4/5 – 1/5 dans l'item M0801). En 2007, les élèves de huitième année devaient identifier une procédure correcte pour trouver la différence entre 1/5 et 1/3 (item M0702). Malgré les différences importantes entre les deux tâches, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est très élevé ($R^2 = 0,87$), ce qui indique que la capacité des élèves à traiter une soustraction complexe dans l'enseignement secondaire est très dépendante de la capacité des élèves à résoudre des soustractions simples dans l'enseignement primaire. Contrairement à ce que nous avons observé à propos du type de tâches « prendre la fraction d'une quantité », il y a ici une forte chute du taux de réussite entre la quatrième et la huitième année, qui passe en Angleterre de 59,9 % à 17 %, et à Singapour de 96,9 % à 69,8 %. L'impression que les écarts se creusent entre les performances des deux pays peut éventuellement être expliqué par le fait qu'en Angleterre, cet enseignement est beaucoup plus tardif qu'à Singapour. Les additions de fractions de même dénominateur et de dénominateurs différents étaient respectivement enseignées en septième et huitième années en Angleterre, en quatrième et cinquième années à Singapour.

Enfin, en ce qui concerne l'association d'une fraction et d'un dessin, nous avons pu comparer les résultats obtenus par des élèves d'âge différent à deux exercices identiques. La consigne de l'exercice C3 soumis aux écoliers en 1995 était ainsi formulée : « dans quelle figure 2/3 du carré sont grisés ? » Cet item a été également proposé aux collégiens en 1999, sous l'identifiant H08. Le coefficient de corrélation linéaire est moyen ($R^2 = 0,61$) pour les pays que nous avons pu analyser (ceux de notre corpus qui ont participé aux évaluations TIMSS en 1995 et 1999 sont au nombre de cinq : Angleterre, Canada [sans distinction entre les provinces], Corée du Sud, Hong Kong SAR, Singapour). La mesure de l'écart-type entre les performances des élèves montre surtout un resserrement des différences de performance : celui-ci passe de 16,2 points de pourcentage en quatrième année à 5,2 en huitième année, tandis que la moyenne passe de 73,7 % de réussite pour les écoliers à 90 % de réussite pour les collégiens. Le pays le plus performant, Singapour, gagne 6,2 points de pourcentage (en passant de 90,1 % de réussite à 96,3 %), alors que le pays le moins performant, l'Angleterre, gagne 34,4 points de pourcentage (en passant de 47,1 % de réussite à 81,5 %). Or, entre la cinquième et la huitième année, les programmes n'imposaient pas un travail particulier sur ce type de tâches. Il semble donc que les élèves continuent à parfaire leur capacité à identifier des fractions, par exemple par le biais d'autres tâches qui impliquent la manipulation de ce concept, comme la comparaison, l'addition et la soustraction, ou la notion d'équivalence ou par le biais de révisions proposées par les professeurs, ce qui permet aux élèves des pays ayant les moins bons résultats

à l'école élémentaire de combler une grande partie de leur retard, tandis que ceux présentant précocément des scores très élevés continuent de progresser.

Nous avons déjà indiqué que les écarts de performances semblaient se maintenir, globalement, entre la quatrième et la huitième année[1]. Les données analysées dans ce paragaphe nous permettent de préciser cette tendance. Pour un même type de tâches, lorsque les variables évoluent de façon à modifier les techniques que les élèves peuvent potentiellement utiliser, la distribution des résultats est assez similaire et dépend de l'organisation temporelle des enseignements. En revanche, lorsque les variables de la tâche n'évoluent pas, les écarts se resserrent entre les participants, parce que les moins performants progressent davantage que les plus performants. L'augmentation des résultats des élèves à propos de la tâche « associer une fraction à un dessin » tend à montrer que l'abord de tâches plus complexes permet possiblement de mieux réussir les tâches les plus simples. Néanmoins, l'impossibilité de mener des comparaisons à variables constantes affaiblit nos conclusions et rend nécessaire la réalisation d'études complémentaires pour mieux comprendre comment évolue l'acquisition des types de tâches par les élèves au fil des années et comment l'acquisition de types de tâches complexes influent sur leur maitrise des types de tâches les plus simples.

§ 2. La durée de l'enseignement

Dans les curriculums, la durée des enseignements peut être mesurée à travers le nombre de fois où les auteurs imposent l'enseignement d'un même type de tâche au cours d'années différentes. Nous allons donc rechercher une corrélation entre cette répétition et les performances des élèves (A). Toutefois, l'étalement de l'enseignement d'une notion sur plusieurs années pose difficulté pour l'analyse quand, au moment de la passation des tests (en l'occurrence en quatrième année), cet enseignement n'est pas achevé. C'est pourquoi nous étudierons également l'incidence sur les résultats d'une tâche enseignée de façon partielle, c'est-à-dire avec des variables qui ne correspondent à celles en jeu dans les tests, ou lorsqu'une autonomie complète n'est pas encore attendue de l'élève dans la réalisation de la tâche (B).

1. Voir p. 469-470.

A. La répétition de la tâche

Nous avons évoqué jusqu'à présent la possibilité qu'un item soit couvert par les programmes scolaires, avec une approche qualitative de cette problématique, sans envisager que le législateur ait pu mettre l'accent sur une notion en particulier en prévoyant son apprentissage au cours de plusieurs années scolaires. Pour effectuer ce travail de comparaison, il nous a fallu identifier un type de tâches répété dans certains pays, mais pas dans d'autres. Nous avons donc fait porter notre étude sur le type de tâches « identifier des fractions équivalentes », qui est présent au plus tard en quatrième année dans les instructions officielles de la plupart des participants de notre corpus, mais ni en France, ni en Ontario, ni en Corée du Sud. En outre, elle fait l'objet d'un enseignement d'un à trois ans consécutifs dans ces pays, ce qui constitue une amplitude suffisante pour créer des distinctions potentiellement importantes en termes de résultats. Dans le tableau ci-dessous, nous avons indiqué le nombre d'années au cours desquelles ce type de tâches est étudié au sein de notre corpus.

Pays ou province	Nombre d'années au cours desquelles l'équivalence entre fractions est enseignée	Performance moyenne à l'item M0905
Angleterre	3	50,0 %
Corée du Sud	0	40,4 %
Floride	2	66,4 %
France	0	25,8 %
Hong Kong SAR	1	84,9 %
Irlande du Nord	1	63,7 %
Ontario	0	35,3 %
Québec	2	41,3 %
République d'Irlande	3	57,1 %
Singapour	1	84,3 %
Taipei chinois	2	62,2 %

Figure 131. Corrélation entre le nombre d'années d'apprentissage de l'équivalence entre fractions selon les instructions officielles et les résultats des élèves de quatrième année à un item mettant en jeu ce type de tâches (TIMSS 2015)

La première observation que l'on peut réaliser est que les trois territoires dans lesquels l'étude de l'équivalence entre fractions n'est au pas programme de l'école élémentaire correspondent aux trois participants dont les résultats sont les plus faibles à l'item M0905 (celui pour lequel il fallait identifier 2/5 comme une fraction équivalente à 4/10). Cela renforce l'idée qu'une couverture par les instructions officielles de certaines notions comme l'identification de fractions équivalentes contribue assez largement à la performance des élèves. Quand on ne s'intéresse qu'aux pays qui prévoient cet enseignement, on s'aperçoit que la République

d'Irlande est celui qui dans lequel cette durée est la plus longue (trois années). L'apprentissage est très progressif, avec dès la deuxième année, une discussion de « la relation entre une moitié et un quart ». En troisième année, on demande aux élèves d'identifier des fractions équivalentes de dénominateurs 2, 4, 8 et 10, puis en quatrième année, un travail similaire est effectué avec des dénominateurs plus variés (2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 12). Il est à noter que ces dénominateurs correspondent à la tâche soumise aux élèves dans le test. Toutefois, le score brut de ce pays (57,1 %) est tout juste supérieur à la moyenne du corpus (55,6 %), tandis que son score relatif est situé à 42,1 % d'écart-type en dessous de sa propre moyenne. Que l'on considère le score brut ou le score relatif, de nombreux participants font mieux, y compris avec une seule année d'enseignement de la notion, comme Hong Kong SAR (84,9 % de réussite et 13,1 % d'écart-type au-dessus de sa moyenne), l'Irlande du Nord (63,7 % de réussite et 7 % d'écart-type en dessous de sa moyenne) ou Singapour (84,3 % de réussite et 13,6 % d'écart-type au-dessus de sa moyenne). Il faut dire que ces trois pays envisagent des activités, en plus de l'identification de fractions équivalentes, que l'on retrouve rarement dans les autres pays : « Lister les huit premières fractions équivalentes à une fraction donnée » et « Écrire la fraction équivalente à une fraction donnée en connaissant le dénominateur ou le numérateur » (à Singapour, en troisième année) ; « Étendre la compréhension de l'équivalence des fractions, par exemple 1/5 = 2/? = 4/? » (en Irlande du Nord, en deuxième année) ; « Réduire la réponse à sa plus simple expression » (à Hong Kong SAR, en quatrième année). Ces observations renforcent l'hypothèse selon laquelle la richesse des tâches envisagées par les législateurs a une incidence sur les performances des élèves, hypothèse que nous avons déjà corroborée en nous appuyant sur l'analyse des programmes à propos de la comparaison de fractions. En outre, quand on compare les pays dans lesquels l'apprentissage des fractions équivalentes a lieu pendant deux ans au moins, une grande variété de résultats apparait. Ainsi, le taux de réussite de la Floride (66,4 %) est très au-dessus de la moyenne du corpus, tandis que ceux de l'Angleterre (50 %) et surtout du Québec (41,3 %) sont très en dessous de cette moyenne. Là encore, des différences importantes se font jour quant à la richesse des programmes scolaires. Ainsi, en Floride, la quatrième année est l'occasion pour les élèves « d'expliquer pourquoi une fraction a/b est équivalente à une fraction $(n \times a)/(n \times b)$ en utilisant des modèles de fractions visuels, avec une attention à la façon dont le nombre et la taille des parts diffèrent, même si les deux fractions sont elles-mêmes de la même taille » (*op. cit.*, 2014, p. 3). Ils doivent ensuite « utiliser ce principe pour reconnaître et générer des fractions équivalentes » (*ibid.*). En outre, ces dernières sont utilisées pour des activités de comparaison portant sur des fractions de dénominateurs différents. Jusqu'en 2007, les écoliers étaient également tenus de simplifier des fractions. En

Angleterre, les élèves de troisième année utilisent seulement « des diagrammes pour […] établir des équivalents » et, un an plus tard, doivent pouvoir « reconnaître et montrer, en utilisant des diagrammes, des familles communes de fractions équivalentes ». Aucun lien n'est fait entre les supports visuels et les méthodes numériques d'identification des fractions équivalentes. Les connaissances des élèves ne sont pas non plus réinvesties dans des activités de comparaison. En ce qui concerne le Québec, aucune précision n'est donnée à propos des techniques à utiliser. En revanche, l'autonomie de l'élève dans la réalisation de la tâche n'est pas attendue en fin de quatrième année, ce qui contribue probablement à expliquer en partie pourquoi les résultats des élèves québécois sont si bas. De plus, l'intitulé des programmes est simplement rédigé : il ne traduit donc pas une grande richesse relativement aux techniques qui doivent être apprises dans les classes (en troisième et en quatrième année : « Avec l'intervention de l'enseignant, vérifier l'équivalence de deux fractions et construire un ensemble de fractions équivalentes »). La répétition d'une tâche dans sa globalité semble donc avoir moins d'importance que la richesse des activités réalisées autour d'une même notion. D'ailleurs, les pays les plus performants (notamment Hong Kong SAR et Singapour) passent rarement plus d'une année sur une même notion. Rappelons toutefois que ce sont deux territoires dans lesquels le temps de travail en dehors du temps scolaire est très élevée, et qu'en l'Irlande du Nord, cette durée hebdomadaire (77,8 minutes en moyenne) est la plus longue en ce qui concerne les pays occidentaux derrière la Floride (78,4 minutes), ce qui atténue la possibilité d'un transfert de cette organisation des enseignements dans d'autres pays.

B. L'incidence d'un type de tâches enseigné de façon partielle

Quand bien même l'enseignement d'un type de tâches est prévu par les programmes scolaires, il se peut que les modalités de la tâche définies par le législateur ne correspondent pas à celles qui sont soumises aux élèves dans les tests. Par exemple, les programmes peuvent prescrire l'étude de l'addition de fractions de même dénominateur, et la résolution d'un exercice de TIMSS peut nécessiter une addition de fractions avec des dénominateurs différents. Cet enseignement a-t-il une incidence sur les performances des élèves ? Ces derniers obtiennent-ils des résultats similaires à ceux dont les instructions officielles ne prévoient pas du tout l'enseignement de l'addition de fractions ? Pour obtenir des éléments de réponse à ces questions, nous nous sommes appuyé sur les résultats des élèves à l'item M0906, traitant précisément de l'addition de fractions de dénominateurs différents en quatrième année. Au sein de notre corpus, la formulation des programmes ne correspond pas toujours à la tâche mise en

jeu dans l'item : certains n'envisagent que l'addition de fractions de même dénominateur (par exemple, ceux du Taipei chinois), d'autres prévoient l'utilisation de dénominateurs différents, mais seulement avec des fractions décimales, ce qui n'est pas le cas des fractions en jeu dans l'item (par exemple, les programmes de Floride). D'autres encore n'incluent pas l'enseignement des additions de fractions à ce stade de la scolarité, quelles que soient les variables utilisées (comme l'Ontario, qui intègre cette notion dans le curriculum de sixième année). Nous avons donc considéré d'une part, la présence d'un élément relatif à l'addition de fractions dans les programmes scolaires (en traitant séparément les éléments selon qu'ils correspondaient ou non aux variables utilisées dans l'exercice), et d'autre part, les performances relatives des élèves à cet item.

Participant	Enseignement correspondant aux variables de l'item ; ne correspondant pas aux variables de l'item	Performance relative à l'item M0906
Angleterre	non ; oui	– 155,3 %
Corée du Sud	non ; oui	– 225,5 %
Floride	non ; oui	– 176,9 %
France	non ; non	– 141,9 %
Hong Kong SAR	non ; oui	– 161,6 %
Irlande du Nord	oui ; non	– 97,7 %
Ontario	non ; non	– 176,0 %
Québec	non ; non	– 160,3 %
République d'Irlande	non ; non	– 126,5 %
Singapour	oui ; non	– 7,4 %
Taipei chinois	non ; Oui	– 124,8 %

Figure 132. Adéquation entre les instructions officielles relatives à l'addition de fractions et les performances des élèves à un item de quatrième année mettant en jeu ce type de tâches (TIMSS 2015)

Tout d'abord, nous remarquons que l'Irlande du Nord et Singapour, qui obtiennent les scores relatifs les plus élevés (respectivement – 97,7 % et – 7,4 % d'écart-type par rapport à leur moyenne), sont également les deux participants de notre corpus qui ont des programmes scolaires en adéquation avec les besoins de la tâche. Ensuite, nous distinguons les pays prévoyant un enseignement de l'addition de fractions ne correspondant pas aux variables de la tâche (Angleterre, Corée du Sud, Floride, Hong Kong SAR, Taipei chinois) et ceux ne prévoyant pas l'enseignement de l'addition de fractions (France, Ontario, Québec, République d'Irlande). Il s'avère que la moyenne des scores relatifs obtenus par les premiers (– 168,8 %) est légèrement inférieure à celle obtenue par les seconds (– 151,2 %). En conséquence, on ne peut pas dire qu'un enseignement partiel est de nature à favoriser les performances des élèves

à un item dont les variables ne correspondent pas à celles prévues par les programmes d'enseignement, à tout le moins pour l'addition de fractions. Un certain cloisonnement entre l'acquisition de l'addition de fractions de même dénominateur et celle concernant l'addition de fractions de dénominateurs différents se fait jour, les élèves ne semblant pas pouvoir opérer un transfert de l'un à l'autre, et les enseignants ne paraissant pas s'engager sur la voie d'un enseignement non imposé.

Par ailleurs, il se trouve parfois que les variables de la tâche imposées par le législateur correspondent à celles en jeu dans les tests, mais qu'une réalisation de la tâche en pleine autonomie ne soit pas encore exigée à ce moment-là. Ainsi, au Québec, les auteurs font bien la différence entre les types de tâches « Comparer une fraction à 0, 1/2 ou à 1 » (*op. cit.*, 2009a, p. 7), pour lequel l'élève doit pouvoir travailler seul à la fin de la quatrième année, et « Vérifier l'équivalence de deux fractions » (*ibid.*), pour lequel l'élève peut encore bénéficier de l'aide de son enseignant en fin de quatrième année. Ces deux enseignements débutent au même moment, en troisième année, mais la durée d'étude n'est pas la même (deux ans pour le premier type de tâches, quatre ans pour le second). Or, le taux de réussite des élèves québécois à l'item M0705 (qui correspond à une tâche de comparaison) est plus élevé que celui qu'ils obtiennent à l'item M0905 (qui correspond à une tâche d'identification de fractions équivalentes), avec respectivement 54,1 % et 41,3 %. Il est vrai que cette différence apparait dans d'autres pays où ces deux enseignements sont imposés. Toutefois, le score relatif du Québec à propos de l'équivalence entre fractions est le plus faible du corpus, après celui de la Corée du Sud, pays dans lequel cet enseignement n'est pas imposé. Il semble donc que la moindre autonomie attendue des élèves au moment des tests pour les tâches d'identification de fractions équivalentes puisse conduire à une maitrise plus faible de cette notion au moment des tests, mais l'hypothèse que nous proposons devra être corroborée par des études portant sur un plus grand nombre de données, ce qui n'est pas possible actuellement à travers la seule analyse des résultats des élèves québécois aux évaluations TIMSS.

Conclusion de la sous-section

La recherche d'un lien entre la précocité de l'enseignement des fractions et les performances des élèves a montré l'importance de ne pas débuter trop tardivement cet enseignement, mais n'a pas permis de mettre au jour un bénéfice pour les participants qui plaçaient celui-ci particulièrement tôt dans la scolarité. En ce qui concerne la durée des apprentissages, une redondance des types de tâches dans les programmes scolaires ne semble

pas conduire à l'obtention de meilleurs résultats. Au contraire, les participants les plus performants organisent l'apprentissage d'un type de tâches en un an. En revanche, ceux-ci proposent au cours de la scolarité l'étude d'une succession de tâches proches (par exemple, identification de fractions équivalentes, réalisation de listes de fractions équivalentes). De plus, les connaissances des élèves sont assez rapidement réinvesties pour résoudre d'autres types de tâches. Par exemple, les fractions équivalentes sont étudiées pour ensuite être utilisées dans le cadre de la comparaison ou de l'addition de fractions de dénominateurs différents. En d'autres termes, la richesse des enseignements semble davantage corrélée à la réussite que leur durée. Nous en déduisons également qu'il existe un bénéfice à tisser des liens entre des techniques pouvant servir à résoudre plusieurs types de tâches, ou à montrer aux élèves qu'il existe plusieurs techniques pour résoudre un même type de tâches. Par ailleurs, peut-on penser que si la durée d'un enseignement est inférieure ou égale à un an, le professeur cette année-là se sent davantage investi de la transmission du savoir que si cette durée est supérieure ? Des études plus approfondies seraient nécessaires pour le déterminer. Néanmoins, ces observations soulèvent la question de la pertinence des cycles d'enseignement : n'y aurait-il pas pour la progression du temps didactique un intérêt plus grand à proposer trois tâches relativement proches au cours de trois années différentes, plutôt que trois tâches identiques ? C'est probablement ce qui se passe en pratique dans un certain nombre d'établissements, dans la mesure où les professeurs se répartissent des types de tâches à acquérir. Toutefois, d'autres types de progression sont envisageables dans ce cadre, notamment une progression fondée sur la nature et le niveau de complexité des fractions mises en jeu dans les exercices, avec le risque de l'acquisition de praxéologies moins diverses, puisque la modification des variables de la tâche ne conduit pas toujours à faire évoluer les techniques utilisées par les élèves.

Notre recherche a également permis de mettre en évidence l'importance des apprentissages effectués à l'école élémentaire, puisque la distribution des résultats est similaire en quatrième et huitième années, pour des tâches se rapportant à un même type, comme le fait de calculer la fraction d'une quantité ou des soustractions avec des fractions. Toutefois, la capacité des élèves à associer une fraction à un dessin progresse systématiquement entre les deux tests, certes dans des proportions différentes selon les pays, mais y compris pour des participants déjà très performants à l'école élémentaire et alors même que les programmes n'imposent plus cet enseignement. Cela nous conduit à penser que l'apprentissage de notions nouvelles, parce qu'il permet de porter un nouveau regard sur le concept de fraction, entraine un renforcement de la réussite aux exercices les plus simples, tels que l'association d'une

fraction et d'un dessin. Nous sommes donc tenté de conclure que les élèves opèrent effectivement des transferts, mais qu'ils ne s'effectuent pas du plus simple vers le plus complexe, mais du plus complexe vers le plus simple (sans doute parce que les apprentissages les plus simples constituent les connaissances nécessaires sur lesquels s'appuient les apprentissages les plus complexes, ce qui rend incertaine la pertinence de l'utilisation du terme « transfert » pour désigner l'amélioration des performances des élèves aux items les plus simples). Une explication serait de dire que les professeurs utilisent des éléments déjà connus des élèves pour expliquer des notions complexes, conduisant les élèves à manipuler à nouveau des concepts simples, ou qu'ils prévoient explicitement des révisions. Par ailleurs, il est possible qu'une grande variété de tâches abordées par les élèves stimule leurs capacités à réaliser ces transferts, tandis que le fait de travailler trop longtemps ou trop souvent sur un nombre réduit de tâches les conduisent à percevoir avec moins d'acuité les liens qui les unissent. Toujours est-il que nous avons pu montrer qu'un type de tâches enseigné, mais ne correspondant pas aux variables de l'item, ne permettait pas d'améliorer le score des élèves par rapport au cas où l'étude de la notion ne serait pas présente dans les programmes scolaires. Cela montre montre non seulement la difficulté des élèves à passer du simple au complexe, mais également l'importance que les enseignants accordent à la définition des variables de la tâche dans les programmes scolaires.

Conclusion de la section consacrée au lien entre les programmes et les résultats des élèves

La seule présence ou absence dans les programmes d'enseignement d'un type de tâches est susceptible de faire varier le taux de réussite des élèves aux items correspondants, dans une proportion que nous avons pu évaluer, au maximum, à 30,5 points de pourcentage (pour la Corée du Sud, à propos de l'identification de fractions équivalentes). D'autres caractéristiques des instructions officielles influencent favorablement les résultats des élèves, notamment la richesse des intitulés et l'introduction des écritures fractionnaires suffisamment tôt dans la scolarité (c'est-à-dire avant la quatrième année). À l'inverse, certains facteurs semblent limiter la performance des élèves : le fait d'imposer une technique particulière pour la résolution d'un type de tâches, la limitation des variables didactiques ou de l'autonomie de l'élève. Autrement dit, les éléments des programmes qui favoriseraient la variété des praxéologies scolaires seraient propices aux apprentissages, tandis que ceux qui constitueraient un frein à cette variété poseraient des limites à l'apprentissage dont on pourrait observer l'incidence sur les scores des

élèves (ce qui ne veut pas dire qu'il n'est pas nécessaire de limiter certains apprentissages à un moment de la scolarité). Toutefois, nous faisons une distinction entre des types de tâches qui paraissent ne pas présenter tout à fait les mêmes caractéristiques. Par exemple, nous avons observé que des transferts semblaient s'opérer plus facilement entre les types de tâches « identifier une fraction d'une forme géométrique », « identifier une fraction d'une collection » et « trouver le complément à l'unité » qu'entre les types de tâches « trouver une fraction équivalente » et « comparer des fractions unitaires ». De plus, pour quelle raison l'incidence de la richesse des programmes apparait-elle pour les seconds, mais pas pour les premiers (nous avons vu que l'indication de l'utilisation de quantités discrètes pour la reconnaissance des fractions était sans effet sur les résultats des élèves, alors que l'indication des tâches de rangement en plus des tâches de comparaison semblait être liée à leurs performances) ? Nous faisons l'hypothèse que certains types de tâches sont plus solidement ancrées dans les habitudes des professeurs, notamment dans le premier degré. Dès lors, les auteurs de programmes n'auraient pas besoin de fournir des indications très détaillées pour qu'il existe, dans les classes, une grande richesse de l'enseignement sur ce point. En revanche, d'autres (notamment ceux visant l'étude de l'ordinalité ou des opérations) seraient moins présents dans les pratiques des enseignants. Des mentions suffisamment larges dans les programmes seraient alors nécessaires pour conduire les professeurs à proposer un travail dense dans ce domaine, travail d'autant plus important que les transferts des types de tâches visant l'étude de la cardinalité vers les autres (ordinalité, opérations) se réalisent très difficilement. Cela montrerait alors que dans l'écologie des praxéologies relatives au concept de fraction, le travail du législateur devrait, dans un souci d'efficacité, s'appuyer sur une connaissance fine du travail des enseignants, et pas seulement sur une connaissance approfondie des concepts.

Conclusion du chapitre consacré à l'existence d'un lien entre les programmes d'enseignement et l'acquisition du concept de fraction par les élèves

Malgré la rédaction de praxéologies incomplètes, centrées principalement sur des types de tâches, nous observons que le législateur joue un rôle non négligeable dans l'acquisition du concept de fraction par les élèves. Nous avons mis au jour un lien entre les programmes d'enseignement et les apprentissages effectués dans les classes, mais celui-ci n'est pas uniforme : il dépend notamment du type de tâches considéré, sans doute (entre autres facteurs) parce que l'incidence des instructions officielles ne peut être caractérisée sans considérer l'action des enseignants. Si ces derniers manifestent une capacité à produire des praxéologies

variées à partir de l'indication d'un type de tâches assez large, alors il n'y a pas d'utilité pour les auteurs des programmes à fournir des indications précises. Si les organisations mathématiques élaborées au sein des systèmes didactiques sont insuffisamment denses, alors des intructions détaillées sont susceptibles d'avoir un effet sur les pratiques enseignantes. La relation entre les programmes et les scores obtenus par les élèves s'inscrit également dans le contexte d'un système éducatif qui la façonne en partie. Ainsi, la quantité de travail fournie par les écoliers dans les pays asiatiques explique peut-être la faible répétition des tâches au fil des années dans les curriculums. Pour envisager des transferts inter-pays de certains éléments ou caractéristiques des programmes scolaires, la prise en compte du contexte d'élaboration des programmes semble donc indispensable.

Au regard des taux de réussite que nous avons constatés, et qui ne correspondent pas toujours aux attentes formulées dans les programmes scolaires, nous constatons que les élèves réalisent des apprentissages en dehors du cadre fixé par les autorités. Par exemple, l'enseignement du type de tâches « identifier des fractions équivalentes » n'est imposé à aucun stade de la scolarité en Corée du Sud. Pourtant, il se trouve tout de même 40,4 % des élèves pour reconnaitre l'équivalence entre 4/10 et 2/5. Évidemment, il est toujours possible de réaliser des apprentissages en dehors du temps scolaire, en particulier dans les pays où les cours complémentaires occupent une place importante. Une partie des élèves peut également utiliser des connaissances acquises préalablement pour résoudre une tâche n'ayant pas fait l'objet d'un enseignement direct. Néanmoins, cette conclusion soulève une autre question, celle de l'enseignement effectif dans les classes des notions et types de tâches qui figurent au programme. S'il n'est pas possible de le connaître à partir des données de TIMSS, il est envisageable toutefois d'effectuer quelques inférences à partir des réponses des enseignants sur le point de savoir si certains types de tâches ont été enseignés avant l'année scolaire en cours, pendant cette année ou ne le seront que plus tardivement. Après avoir établi une relation entre les instructions officielles et les performances des élèves, nous allons donc chercher à comprendre comment les enseignants portent, modifient ou neutralisent ce lien.

CHAPITRE II. LES LIMITES DU LIEN ENTRE LES PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT ET L'ACQUISITION DU CONCEPT DE FRACTION PAR LES ÉLÈVES

La relation entre les types de tâches inscrits dans les programmes d'enseignement et leur acquisition telle qu'elle se manifeste dans les évaluations TIMSS est façonnée par de nombreux facteurs interdépendants. Nous en avons mis au jour plusieurs, certains d'entre eux ayant trait au travail de transposition didactique externe (organisation temporelle des enseignements, richesse des intitulés, variété des types de tâches imposés), et d'autres concernant les caractéristiques des systèmes éducatifs (comme la durée et les conditions dans lesquelles les élèves étudient les mathématiques en dehors des établissements scolaires). Nous avons également indiqué que ces éléments n'expliquaient pas toutes les variations des performances des élèves, puisque dans des systèmes éducatifs comparables et avec des programmes assez similaires, ceux-ci obtiennent parfois des résultats assez différents. À travers l'analyse des questionnaires TIMSS destinés aux enseignants, nous allons chercher à mieux comprendre comment le travail fourni par les enseignants à l'occasion de la transposition didactique interne peut avoir une influence sur le lien entre le curriculum et les acquis des élèves, en anticipant, transformant ou retardant l'enseignement des organisations mathématiques esquissées par le législateur. À l'évidence, l'origine des choix effectués par les enseignants échappera largement à notre analyse. On peut penser par exemple qu'une notion est peu enseignée dans les classes parce qu'elle n'est pas appréhendée par les auteurs de manuels scolaires, ou bien parce que la formation des enseignants ne met pas l'accent sur le thème qui la porte. Néanmoins, en comparant les réponses qu'ils donnent à propos des contenus qui doivent être enseignés, du moment auquel cet apprentissage doit être mené, nous pourrons déterminer si la manière dont sont rédigées les instructions officielles a une incidence sur l'activité des enseignants. C'est ainsi que nous envisagerons, dans la première section, le rôle des enseignants dans la construction du lien entre les programmes et les acquis des élèves selon une perspective synchronique. Toutefois, les habitudes professionnelles des enseignants, leur culture didactique (notamment celle qu'ils acquièrent en formation initiale), jouent possiblement un rôle plus important que les injonctions ministérielles dans l'élaboration des praxéologies scolaires. Pour vérifier cette hypothèse, nous allons comparer les évolutions respectives des curriculums, des déclarations des professeurs et des résultats des élèves. Nous tenterons ainsi de définir, dans la

deuxième section, le rôle des enseignants dans la construction du lien entre les programmes et les acquis des élèves selon une perspective diachronique.

Section I. Le rôle des enseignants établi selon une perspective synchronique

En raison du caractère général et sommaire des instructions officielles, une marge de liberté existe dans la mise en œuvre des programmes d'enseignement, liée à l'interprétation que font les enseignants des injonctions qui leur sont faites, et à leur vision de ce que doivent maitriser les élèves à chaque étape de la scolarité. Néanmoins, le geste professionnel premier des professeurs consiste à s'approprier le texte fourni par le ministère pour définir des tâches à proposer aux élèves. Notre étude va donc consister à mesurer l'écart entre, d'une part, ce que prescrivent les curriculums, et d'autre part, les déclarations des enseignants relatives au moment où les notions concernant les fractions doivent être abordées avec les élèves (sous-section I). Cela nous permettra, éventuellement, de mettre au jour des phénomènes d'anticipation par rapport aux injonctions officielles, ou des phénomènes visant au contraire à retarder l'enseignement de notions pour lesquelles les élèves ne semblent pas encore prêts. Pour autant, les déclarations des enseignants reflètent-elles davantage les acquis des élèves que le contenu des programmes scolaires ? Pour répondre à cette question, nous allons mettre au jour le lien qui unit les propos des enseignants au sujet de ce qui est effectivement enseigné et le taux de réussite des élèves aux items correspondants. Ainsi, nous pourrons comparer les facteurs d'influence respectifs que sont les curriculums et cet aspect de l'activité des professeurs sur les acquis des élèves dans le domaine des fractions (sous-section II).

Sous-section I. La relation entre le contenu des programmes et les déclarations des enseignants

Nous posons l'hypothèse que l'adéquation est forte entre les éléments des curriculums tels que nous les avons décrits et les déclarations des professeurs à propos des savoirs enseignés. Toutefois, il se trouve probablement des enseignants pour ne pas être d'accord avec les choix du législateur pour l'enseignement de telle ou telle notion à un stade précis de la scolarité, ou d'autres ayant eu la volonté de proposer l'abord d'une notion sans avoir pu mettre en œuvre cet enseignement de façon effective. Inversement, nous envisageons la possibilité que des professeurs proposent à leurs élèves des thèmes prévus ultérieurement dans la scolarité, soit parce que ceux-ci sont suffisamment performants pour prendre de l'avance sur le programme, soit dans un souci de les préparer aux apprentissages à venir. C'est pourquoi, après avoir

caractérisé l'adhésion des enseignants aux programmes scolaires (§ 1), nous évoquerons de façon plus détaillée les décalages qui existent entre les savoirs enseignés tels qu'ils sont décrits par les professeurs et les savoirs à enseigner tirés des instructions officielles (§ 2).

§ 1. La nature du lien qui unit les programmes et les déclarations des enseignants

Nous avons déjà mis au jour des divergences[1] entre les préconisations officielles telles qu'elles apparaissent dans les textes, et les déclarations des autorités locales à l'occasion du questionnaire TCMA (*Test-Curriculum Matching Analysis*). Grâce aux questionnaires TIMSS, nous allons réaliser ce travail de comparaison avec les déclarations des professeurs relatives aux savoirs à enseigner. Toutefois, le niveau de précision des questions (qui portent sur l'enseignement du « concept de fraction », de « l'addition, la soustraction, la comparaison et le rangement de fractions » ou encore « le lien entre les fractions et les écritures décimales ») et des réponses attendues (« principalement enseigné avant cette année », « principalement enseigné cette année » ou « pas encore enseigné ou juste introduit ») limiteront la portée des observations que nous pourrons réaliser. Nous étudierons successivement l'incidence du point de départ des enseignements prescrits (A) et de leur durée (B) sur les déclarations des professeurs.

A. L'incidence du point de départ des enseignements sur les déclarations des professeurs

Dans tous les pays du corpus, les apprentissages premiers impliquant des écritures fractionnaires portent sur l'association d'une fraction à un dessin et se déroulent au plus tard en quatrième année. Pour autant, cette introduction des fractions coïncide-t-elle avec un travail important réalisé dans le domaine des fractions, ou l'enseignement de ce concept est-il plus progressif que ne le laissent penser les instructions officielles ? Pour le savoir, nous avons analysé les réponses des professeurs du premier degré à l'item TQM06Ad du questionnaire TIMSS 2015, dans lequel ils étaient interrogés sur le moment où le concept de fraction avait été principalement étudié par leurs élèves. Les auteurs précisaient ce qu'ils entendaient par « concept de fraction » : il s'agissait d'étudier les fractions « comme partie d'un tout ou d'une collection, et comme un point sur une droite numérique ». Il est vrai que la question est assez difficile à interpréter, car ces trois enseignements ne sont pas toujours inscrits dans les

1. Voir p. 491 et suivantes.

programmes scolaires la même année. D'ailleurs, l'utilisation de la droite graduée n'apparait pas dans les instructions officielles de plusieurs participants au sein de notre corpus (Angleterre, Corée du Sud, Hong Kong SAR, Irlande du Nord, Singapour). Lorsqu'un élément fait l'objet d'un enseignement en quatrième année et pas un autre, quelle doit être la réponse apportée par les professeurs ? Dans le tableau ci-dessous, nous avons reproduit la répartition des réponses des enseignants (la somme des pourcentages peut être légèrement supérieure ou inférieure à 100 en raison des arrondis). De plus, nous avons avancé l'année de l'introduction des écritures fractionnaires dans les programmes d'un an en Angleterre et de deux ans en Irlande du Nord, puisque les élèves de ces territoires passent les tests TIMSS respectivement en cinquième et sixième années.

Participant	Introduction des écritures fractionnaires	Concept principalement enseigné avant la quatrième année	Concept principalement enseigné en quatrième année	Concept pas encore enseigné ou juste introduit
Angleterre	2e année	31,1 %	67,5 %	1,5 %
Corée du Sud	2e année	35,6 %	60,5 %	4,0 %
Floride	3e année	54,8 %	35,6 %	9,5 %
France	4e année	40,8 %	58,3 %	0,9 %
Hong Kong SAR	3e année	42,7 %	52,0 %	5,2 %
Irlande du Nord	1re année	51,6 %	45,3 %	3,1 %
Ontario	4e année	41,9 %	52,9 %	5,2 %
Québec	3e année	52,5 %	43,7 %	3,9 %
République d'Irlande	3e année	44,0 %	39,5 %	16,5 %
Singapour	2e année	26,8 %	59,2 %	13,9 %
Taipei chinois	2e année	21,5 %	73,2 %	5,2 %
Moyenne	**3e année**	**40,3 %**	**53,4 %**	**6,3 %**

Figure 133. Relation entre l'année d'introduction des écritures fractionnaires selon les instructions officielles et les déclarations des enseignants sur le moment principal de l'enseignement du concept de fraction (TIMSS 2015)

Dans tous les pays de notre corpus, la plupart des élèves ont reçu en un enseignement à propos du concept de fraction au moment des évaluations TIMSS de quatrième année (93,4 % en moyenne). En République d'Irlande et à Singapour, le pourcentage d'élèves pour lesquels cette notion a été « juste introduite » ou ne l'a pas encore été est plus élevé qu'ailleurs[1].

1. C'est-à-dire que ce pourcentage est plus d'un écart-type au-dessus de la moyenne, l'écart-type étant de 4,8 points de pourcentage.

Cependant, il reste faible (avec respectivement 16,5 % et 13,9 %) et l'inclusion de la droite graduée, qui n'apparait pas dans les tests, est susceptible de conduire les enseignants à indiquer un apprentissage tardif, alors que d'autres types de tâches qui sont évalués par TIMSS (notamment le fait d'associer une fraction à un dessin) auraient fait l'objet d'un enseignement. De plus, cette caractéristique n'empêche pas les élèves de ces pays de réaliser des scores élevés comparativement aux autres territoires de la même région (respectivement l'Europe de l'Ouest et l'Asie du Sud-Est). Nous avons indiqué la possibilité qu'une introduction trop tardive des notations fractionnaires puisse expliquer les faibles résultats obtenus par la France et l'Ontario. Pourtant, il semble que l'enseignement de ce concept soit plus précoce que nous l'avions supposé à la lecture des instructions officielles. En effet, 40,8 % des professeurs français et 41,9 % des professeurs ontariens indiquent un enseignement principalement mené avant la quatrième année. En France, cela tend à montrer que les progressions officielles du ministère ne sont pas suivies (elles n'ont pas un caractère obligatoire) : l'organisation en cycles d'enseignement rend effet possible un apprentissage des fractions en troisième année. En Ontario, il semble que les activités que nous avions considérées comme préparatoires à l'introduction des notations fractionnaires puissent être plus denses que nous ne l'avions imaginé (en troisième année : « Représenter les tiers en tant que partie d'un élément et d'un ensemble d'éléments à l'aide de matériel concret [p. ex., il y a 18 pommes, si nous en prenons chacun le tiers, nous aurons 6 pommes chacun] » [*op. cit.*, p. 43]). Nous envisageons également plus simplement la possibilité d'une faible adhésion des enseignants aux instructions officielles, ce que suggèrent les données recueillies à propos des autres types de tâches relatifs aux fractions (et qui seront analysées plus loin dans cette recherche). Signalons également que la France est le pays de notre corpus dans lequel le pourcentage d'enseignants qui estiment que le concept de fraction est principalement enseigné après la quatrième année est le plus faible (0,9 %). Pourtant, c'est aussi le pays dans lequel, non seulement les résutlats aux items impliquant des fractions sont les plus bas (36,7 % en moyenne, contre 63,9 % dans le corpus), mais les scores obtenus aux items les plus simples, mettant en jeu l'association d'une fraction à un dessin, sont également très inférieurs à la moyenne (72,5 % à l'item M0701, contre 89,6 % dans le corpus, et 68,3 % à l'item M1302, contre 86,7 % dans le corpus). À l'inverse, ce pourcentage est élevé en République d'Irlande (16,5 %), à Singapour (13,9 %) et dans une moindre mesure en Floride (9,5 %). En prenant l'exemple de cet État, nous constatons que les élèves sont seulement 4,5 % à échouer à l'item M0701, ce qui montre peut-être qu'une simple introduction de la notion permet dans certains territoires d'être capable d'associer une fraction à un dessin, ou plus problement que l'estimation du moment où est principalement enseigné le concept de fraction

est subjective. Il est plus instructif d'observer que Singapour et le Taipei chinois ont un taux d'enseignants indiquant un enseignement principalement mené avant la quatrième année particulièrement faible (avec respectivement 26,8 % et 21,5 %). Or, dans ces deux pays, c'est précisément en quatrième année que sont introduites les fractions supérieures à un, ce qui peut être l'occasion de fournir un travail beaucoup plus dense sur le concept de fraction, à la fois en manipulant d'autres techniques et en élargissant le champ des conceptions abordées, d'où des déclarations des enseignants assez homogènes. Par ailleurs, dans ces deux territoires, les notations fractionnaires sont supposées être introduites précocément dans la scolarité (en deuxième année), ce qui suggère une grande progressivité des enseignements. On retrouve cette caractéristique en Angleterre et en Corée du Sud, mais pas à Hong Kong SAR, participant dont les élèves sont pourtant très performants dans le domaine des fractions et où un pourcentage élevé d'enseignants indique un enseignement principalement mené avant la quatrième année (42,7 %).

L'addition de fractions et la comparaison ont fait l'objet d'une question commune (TQM06Ae : « À quel moment les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos de l'addition et la soustraction de fractions, de la comparaison et du rangement de fractions ? »). En outre, les auteurs de TIMSS n'ont introduit aucune différence entre les tâches impliquant un dénominateur commun et celles impliquant des dénominateurs différents. Au regard des pourcentages élevés de professeurs mentionnant un enseignement au plus tard en quatrième année, il nous a semblé qu'ils avaient pris en compte les apprentissages les plus simples relatifs à ces notions. En conséquence, dans le tableau ci-contre, nous avons choisi de présenter à quel moment apparaissait ce thème dans les programmes, qu'il s'agisse d'additions et de comparaisons envisagées avec des dénominateurs identiques ou avec des dénominateurs différents.

Participant	Début de l'enseignement des additions de fractions	Début de l'enseignement des comparaisons de fractions	Notions principalement enseignées avant la quatrième année	Notions principalement enseignées en quatrième année	Notions pas encore enseignées ou juste introduites
Angleterre	4e année	2e année	6,7 %	75,8 %	17,5 %
Corée du Sud	4e année	3e année	17,9 %	74,8 %	7,3 %
Floride	4e année	3e année	2,8 %	96,0 %	1,3 %
France	5e année	8e année	2,7 %	48,8 %	48,5 %
Hong Kong SAR	4e année	3e année	16,0 %	83,3 %	0,7 %
Irlande du Nord	2e année	2e année	5,2 %	80,7 %	14,1 %
Ontario	6e année	4e année	4,6 %	28,0 %	67,5 %
Québec	5e année	3e année	3,3 %	43,7 %	52,9 %
République d'Irlande	5e année	3e année	6,0 %	56,9 %	37,1 %
Singapour	2e année	2e année	33,3 %	66,7 %	0,0 %
Taipei chinois	3e année	2e année	24,3 %	71,7 %	4,0 %
Moyenne	**4e année**	**3e année**	**11,2 %**	**66,0 %**	**22,8 %**

Figure 134. Relation entre l'année d'introduction des additions et comparaisons de fractions selon les instructions officielles et les déclarations des enseignants sur le moment principal de ces enseignements (TIMSS 2015)

Lorsque les programmes scolaires prévoient les deux enseignements au plus tard en quatrième année, le pourcentage d'enseignants indiquant un enseignement postérieur est en règle générale très faible (le taux le plus élevé concerne l'Angleterre, avec 17,5 % et le taux le plus faible concerne Singapour, avec 0 %). Lorsque le thème de l'addition n'est pas imposé par les instructions officielles, ce taux est toujours supérieur, le plus souvent autour de la moyenne (le pourcentage le plus faible est identifié en République d'Irlande avec 37,1 % et le plus élevé en Ontario, avec 67,5 %). Ces données suggèrent un lien assez étroit entre le contenu des instructions officielles et les déclarations des enseignants. Toutefois, si l'on prend l'exemple de la France, qui est le seul pays de notre corpus dans lequel aucune des deux notions n'est présente au plus tard en quatrième année, on s'aperçoit qu'il se trouve tout de même plus de la moitié des professeurs pour dire que les additions et soustractions portant sur des fractions, ainsi que les comparaisons et rangements de fractions, ont été principalement étudiés l'année du test ou avant. Ce pourcentage est supérieur à celui de l'Ontario et du Québec, alors que ces provinces ont inscrit la comparaison dans leurs programmes scolaires en quatrième année. Rappelons que les seules injonctions présentes dans le paragraphe consacré aux fractions, dans programmes de 2008 pour le CM1, sont les suivantes : « Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième » et « Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs » (*op. cit.*, 2008a, p. 38). Nous

concédons que le terme « utiliser » ouvre la voix des activités diverses. Néanmoins, les données suggèrent davantage une faible adhésion des professeurs français à ces progressions, puisque les auteurs de TIMSS précisent bien que, si un thème n'apparait pas dans le curriculum, les professeurs doivent sélectionner la réponse « Pas encore enseigné ou juste introduit ».

En ce qui concerne la notion de nombre décimal, celle-ci a fait l'objet de la question TQM06Af (« À quel moment les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos du concept de nombre décimal, y compris la valeur de position, le rangement, l'addition et la soustraction avec des nombres décimaux ? »). Nous concédons que la formulation de l'intitulé évoque davantage les notations décimales que le concept de nombre décimal au sens strict, en raison de la mention de la valeur des chiffres. Néanmoins, comme la relation entre les écritures décimales et fractionnaires est évoquée dans tous les pays de notre corpus au moment de l'introduction des notations décimales, le lien entre les fractions et les décimaux était inclus tacitement dans l'énoncé, comme permettant la compréhension de la valeur des décimales. De plus, les progressions qui traitent des écritures décimales sont bien souvent organisées de telle sorte que les mêmes types de tâches sont enseignés année après année, avec des nombres différents (les dixièmes sont d'abord étudiés, puis les centièmes, les millièmes, etc.). L'enseignement de la notation décimale des dixièmes est donc bien souvent concomitant à une première approche des conversions, du placement sur une droite graduée, des comparaisons et additions avec des écritures décimales.

Participant	Début de l'enseignement des notations décimales	Principalement enseigné avant la quatrième année	Principalement enseigné en quatrième année	Pas encore enseigné ou juste introduit
Angleterre	3e année	13,2 %	81,7 %	5,0 %
Corée du Sud	3e année	8,4 %	89,8 %	1,7 %
Floride	4e année	2,8 %	78,6 %	18,6 %
France	4e année	2,1 %	61,7 %	36,2 %
Hong Kong SAR	4e année	9,1 %	74,5 %	16,4 %
Irlande du Nord	2e année	9,3 %	90,4 %	0,3 %
Ontario	4e année	4,7 %	44,1 %	51,2 %
Québec	3e année	6,5 %	77,1 %	16,4 %
République d'Irlande	3e année	6,7 %	88,1 %	5,2 %
Singapour	4e année	6,7 %	92,2 %	1,2 %
Taipei chinois	3e année	26,2 %	67,8 %	6,1 %
Moyenne	**3e année**	**8,7 %**	**76,9 %**	**14,4 %**

Figure 135. Année marquant le début de l'enseignement des écritures décimales dans les programmes scolaires et déclarations des enseignants à propos de cet enseignement (TIMSS 2015)

Dans les programmes scolaires, l'année qui marque le point de départ théorique de l'apprentissage des nombres décimaux est assez homogène au sein du corpus. Il s'agit le plus souvent de la troisième ou de la quatrième année, c'est-à-dire l'année précédent le test ou l'année du test. Les réponses des enseignants indiquent quant à elles un enseignement principalement mené en quatrième année (76,9 % en moyenne), et le fait pour le législateur de prévoir un point de départ théorique plus précoce ne semble pas pouvoir être mis en correspondance avec les déclarations des professeurs. Ainsi, le début de l'enseignement des notations décimales est prévu en deuxième année en Irlande du Nord et en quatrième année à Hong Kong SAR ; pourtant, le taux de professeurs indiquant un enseignement antérieur à la quatrième année est proche dans ces territoires, avec 9,1 % pour le premier et 9,3 % pour le second). Toutefois, au sein de notre corpus, les deux territoires dans lesquels l'enseignement des écritures décimales a lieu, selon les professeurs, le plus fréquemment avant la quatrième année sont deux participants dont les instructions officielles fixent cet enseignement en troisième année : l'Angleterre et le Taipei chinois, avec respectivement 13,2 % et 26,2 % d'enseignants qui évoquent un enseignement antérieur aux tests. À l'inverse, deux pays se démarquent par des taux particulièrement élevés de professeurs indiquant un enseignement postérieur aux tests : la France (avec 36,2 %) et surtout l'Ontario (avec 51,2 %). Or, les instructions officielles de ces deux participants prévoyaient un enseignement des notations décimales en quatrième année. Ces observations suggèrent que le fait d'imposer l'étude d'une notion l'année du test soulève une difficulté quant au point de savoir si celle-ci fera effectivement l'objet d'un enseignement. Pourtant, en France, les programmes de 2008 indiquent, dans les progressions fournies en annexes, que la classe de CM1 sera l'occasion d'apprendre à « connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au centième), […] comparer et ranger [les nombres décimaux] », ainsi qu'à maitriser « l'addition et la soustraction de nombres décimaux » (*ibid.*). Tous les éléments présents dans la proposition faite par les auteurs des questionnaires TIMSS se trouvaient donc dans les programmes scolaires français en quatrième année. Certes, les progressions ne constituent que des repères à destination des enseignants, l'acquisition des types de tâches par les élèves n'étant requise qu'en fin de cycle (c'est-à-dire en fin de cinquième année). Toutefois, l'enseignement est supposé être mené dans cette classe, quand bien même la réussite de l'élève pourrait être ultérieure. En Ontario, les élèves doivent « explorer la relation entre les fractions et les nombres décimaux (par exemple, 1/10 = 0,1) », « comparer et ordonner des nombres décimaux jusqu'aux dixièmes » et « estimer et calculer la somme et la différence de nombres décimaux, à l'aide de matériel concret ou semi-concret ». Là encore, tous les éléments

permettant de considérer que l'enseignement des nombres décimaux a principalement lieu en quatrième année apparaissent dans les programmes scolaires ontariens. Chez certains participants se pose donc, pour des types de tâches spécifiques, la question de l'adhésion des enseignants aux instructions officielles. Il est possible que ceux-ci considèrent que leur application est irréalisable, faute de temps pour mener à bien les apprentissages (la France et l'Ontario sont les deux territoires dans lesquels les professeurs évoquent le plus fréquemment le fait qu'ils ont trop d'éléments du programme à couvrir : 97,3 % des enseignants français et 86,7 % des professeurs ontariens sont assez d'accord ou tout à fait d'accord avec cette affirmation, contre 81,8 % en moyenne dans le corpus) ou bien faute de la présence des prérequis nécessaires à cet enseignement chez leurs élèves. Mais il est possible également que la progression choisie en France et en Ontario, parce qu'elle s'étalerait davantage dans le temps par exemple, inciterait les professeurs à évoquer un apprentissage ultérieur. Autrement dit, la durée des enseignements est-elle un facteur susceptible d'infléchir les programmations des professeurs ?

B. L'incidence de la durée des enseignements sur les déclarations des professeurs

Si, comme nous l'avons montré, l'année à laquelle les programmes scolaires imposent un enseignement pour la première fois n'a qu'une relation distendue avec les réponses des enseignants, peut-être est-ce parce que la redondance de la notion dans les instructions officielles (pour certains pays de notre corpus) conduit les professeurs à rechercher une autre référence que le point de départ de l'apprentissage. Dans ce cas, une première présence dans les programmes d'enseignement serait le signe que la notion doit simplement être abordée, et la présence d'un même élément dans les années ultérieures serait le signe d'un travail approfondi, marquant ainsi l'année durant laquelle le concept de fraction doit être principalement enseigné. Pour vérifier si la nature de la progression (avec ou sans répétition des éléments au fil des années) avait une incidence sur les déclarations des enseignants, nous avons calculé la part des années au cours desquels les programmes incluaient un ou plusieurs éléments relatifs à chaque type de tâches inscrit après la quatrième année, et nous l'avons comparé au pourcentage d'enseignants indiquant un enseignement postérieur aux tests (afin de pouvoir, par la suite, expliquer les résultats obtenus par chaque pays dans les différents domaines étudiés). Par exemple, en Corée du Sud, les comparaisons de fractions sont au programme des troisième, quatrième et cinquième années. Nous pouvons donc donner une estimation du travail fourni sur ce thème au moment des évaluations TIMSS de quatrième année, en disant que 1/3 de la notion

supposée faire l'objet d'un apprentissage reste à acquérir. Certes, cette estimation ne reflète que très imparfaitement le travail effectué par les élèves, car tous les intitulés ne présentent pas le même niveau de complexité, et ne requièrent pas le même investissement de la part des professeurs et des élèves. Toutefois, il nous permet de d'indiquer si les enseignements relatifs à une notion viennent de débuter au moment des tests, ou s'ils sont déjà achevés. Par ailleurs, nous avons dû exclure de l'analyse les données de l'Irlande du Nord, en raison de l'impossibilité de traiter les instructions officielles pour l'enseignement secondaire.

Pour l'analyse relative à l'enseignement du « concept de fraction » (l'association d'une fraction à un dessin, et l'utilisation de la droite graduée), nous avons dû utiliser une méthode légèrement différente : les types de tâches afférents sont en effet généralement enseignés en une année, ce qui ne permet pas réaliser des comparaisons pertientes. Nous avons donc mis en correspondance les déclarations des professeurs avec la part des enseignements qui concernent les fractions après la quatrième année, tous types de tâches confondus (c'est-à-dire que nous avons comparé les progressions ayant trait au concept de fraction pris dans un sens large). Pour ce faire, nous avons utilisé le comptage des items relatifs aux fractions exposé dans un paragraphe précédent (consacré à une analyse des programmes fondée sur le nombre d'items impliquant des fractions par rapport à l'ensemble)[1]. Nous avons compté le nombre d'intitulés qui se rapportent aux fractions entre les cinquième et huitième années, et calculé le pourcentage de cette somme par rapport à l'ensemble des intitulés ayant trait aux fractions.

1. Voir p. 414 et suivantes.

Participant	Part des enseignements relatifs aux fractions inscrits après la quatrième année	Part des enseignants indiquant une notion « pas encore enseignée ou juste introduite »
Angleterre	42,0 %	1,5 %
Corée du Sud	59,1 %	4,0 %
Floride	50,0 %	9,5 %
France	81,0 %	0,9 %
Hong Kong SAR	71,0 %	5,2 %
Ontario	80,0 %	5,2 %
Québec	69,2 %	3,9 %
République d'Irlande	57,5 %	16,5 %
Singapour	59,2 %	13,9 %
Taipei chinois	68,6 %	5,2 %
Moyenne	**63,8 %**	**6,6 %**

Figure 136. Relation entre l'année d'introduction des écritures fractionnaires selon les instructions officielles et les déclarations des enseignants sur le moment principal de l'enseignement du concept de fraction (TIMSS 2015)

Entre les deux séries de données, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est presque nul ($R^2 = 0{,}08$), ce qui indique qu'aucune corrélation linéaire n'apparait entre la répartition générale des enseignements relatifs aux fractions dans les instructions officielles, et les déclarations des professeurs en ce qui concerne le moment de l'apprentissage initial du concept de fraction. Toutefois, on peut percevoir qu'en France et en Ontario, une grande partie des enseignements relatifs aux fractions est supposée se dérouler après les tests. À l'inverse, en Angleterre et dans une moindre mesure en Floride, les enseignements semblent devoir être menés plus précocément.

Participant	Part des enseignements relatifs à l'addition de fractions inscrits après la quatrième année	Part des enseignements relatifs à la comparaison de fractions inscrits après la quatrième année	Part des enseignants indiquant des notions « pas encore enseignées ou juste introduites »
Angleterre	50 %	67 %	17,5 %
Corée du Sud	50 %	33 %	7,3 %
Floride	50 %	33 %	1,3 %
France	100 %	100 %	48,5 %
Hong Kong SAR	50 %	50 %	0,7 %
Ontario	100 %	67 %	67,5 %
Québec	100 %	0 %	52,9 %
République d'Irlande	100 %	50 %	37,1 %
Singapour	25 %	0 %	0,0 %
Taipei chinois	50 %	67 %	4,0 %
Moyenne	**67,5 %**	**46,7 %**	**23,7 %**

Figure 137. Relation entre la part des intitulés relatifs à l'additions et la comparaison de fractions inscrits dans les instructions officielles après la quatrième année et les déclarations des enseignants sur le moment principal de ces enseignements (TIMSS 2015)

Nous avons identifié une corrélation linéaire entre la part des enseignants qui indiquent que les additions et les comparaisons de fractions ont été juste introduites ou le seront

ultérieurement, et la part des enseignements postérieurs à la quatrième année, dans les programmes, en ce qui concerne les additions de fractions ($R^2 = 0,86$), mais pas en ce qui concerne les comparaisons de fractions ($R^2 = 0,07$). D'ailleurs, plutôt qu'une corrélation linéaire, trois groupes apparaissent. Dans les pays pour lesquels 100 % des enseignements sont prévus postérieurs aux tests, on trouve en moyenne 51,5 % des professeurs pour dire que les additions de fractions feront l'objet d'un enseignement au-delà de la quatrième année. Dans les pays pour lesquels 50 % des enseignements sont prévus postérieurs aux tests, on trouve en moyenne 6,2 % des professeurs pour dire que les additions de fractions feront l'objet d'un enseignement au-delà de la quatrième année. Dans le pays pour lequel 25 % des enseignements sont prévus postérieurs aux tests, on ne trouve aucun professeur pour dire que les additions de fractions feront l'objet d'un enseignement au-delà de la quatrième année. Cela suggère que les enseignants, pour répondre à cette question, s'appuient sur l'organisation des enseignements relatifs aux fractions plus que sur celle des additions, c'est-à-dire sur les apprentissages les plus complexes et les plus tardifs. De plus, le coefficient de Bravais-Pearson est plus élevé quand on utilise la durée de l'enseignement, plutôt que son point de départ : le R^2 le plus élevé que nous ayons pu calculer à partir de cette donnée est égal à 0,61 (avec le pourcentage de professeurs indiquant un enseignement postérieur au test). Nous en déduisons que, pour répondre, les enseignants s'appuient davantage sur l'organisation temporelle globale des enseignements que sur leur point de départ.

Participant	Part des enseignements relatifs aux conversions entre notations fractionnaires et décimales inscrits après la quatrième année	Part des enseignants indiquant une notion « pas encore enseignée ou juste introduite »
Angleterre	33 %	5,0 %
Corée du Sud	33 %	1,7 %
Floride	50 %	18,6 %
France	50 %	36,2 %
Hong Kong SAR	50 %	16,4 %
Ontario	80 %	51,2 %
Québec	50 %	16,4 %
République d'Irlande	50 %	5,2 %
Singapour	50 %	1,2 %
Taipei chinois	50 %	6,1 %
Moyenne	**49,6 %**	**15,8 %**

Figure 138. Année marquant le début de l'enseignement des écritures décimales dans les programmes scolaires et déclarations des enseignants à propos de cet enseignement (TIMSS 2015)

En ce qui concerne le lien entre les fractions et les nombres décimaux, un raisonnement similaire peut être tenu. Dans le groupe des pays dans lesquels 33 % des enseignements sont

placés après la quatrième année, 3,4 % des professeurs en moyenne évoquent une notion pas encore enseignée ou juste introduite. Dans le groupe des pays dans lesquels 50 % des enseignements sont placés après la quatrième année, le plus dense, 14,3 % des professeurs en moyenne évoquent une notion pas encore enseignée ou juste introduite. Dans le pays dans lequel 80 % des enseignements sont placés après la quatrième année, 3,4 % des professeurs évoquent une notion pas encore enseignée ou juste introduite. De plus, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson qui unit les deux séries de données ($R^2 = 0,62$) est plus élevé que le plus fort que nous ayons pu calculer à partir du point de départ des enseignements ($R^2 = 0,36$ avec le pourcentage de professeurs indiquant un enseignement postérieur au test), ce qui indique potentiellement une prise en compte des enseignements qui seront réalisés ultérieurement.

§ 2. La possibilité d'un décalage dans le temps des apprentissages

Nous avons établi que le contenu des programmes et les déclarations des enseignants relative au moment où les notions sont enseignées ne coïncidaient pas toujours. Parfois, les professeurs évoquent l'enseignement de types de tâches qui ne sont pas présents dans les instructions officielles. Nous pensons notamment à la question des additions, soustractions, comparaisons et rangements en France. Parfois, ils repoussent aux années ultérieures des types de tâches qui sont pourtant présentes dans les programmes scolaires, en quatrième année ou avant. Nous pensons en particulier, dans ce même pays, à l'enseignement initial des nombres décimaux. Nous allons donc étudier successivement les phénomènes d'anticipation des enseignements (A) et ceux consistant en leur report (B).

A. Les phénomènes d'anticipation des enseignements

Les phénomènes d'anticipation au sens strict concernent les cas où les professeurs déclarent qu'un enseignement a été réalisé alors même que les instructions officielles ne prévoient pas encore cet enseignement. En ce qui concerne le thème « concept de fraction », c'est-à-dire l'association d'une fraction et d'un dessin ainsi que le placement de fractions sur une droite numérique, nous considérons qu'ils ne peuvent concerner que la France et l'Ontario, puisque les notations sont fractionnaires sont introduites dans ces deux pays, selon les curriculums, en quatrième année, alors qu'elles le sont plus tôt ailleurs. En France, 40,8 % des enseignants français évoquent un enseignement antérieur, tout comme 41,9 % des professeurs ontariens. Il est fort possible que dans ces territoires, en raison d'un enseignement officiel prévu

très tardivement, les systèmes didactiques anticipent sur l'enseignement de cette notion. Toutefois, les professeurs n'indiquent pas eux-mêmes réaliser cette anticipation, si bien que l'on peut s'interroger, peut-être pas sur la réalité de celle-ci, mais sur la proportion, qui semble très importante. En nous intéressant à la question des additions et des comparaisons, nous pouvons pourtant observer que les pourcentages sont similaires lorsque les professeurs français évoquent leur propre capacité à anticiper sur les enseignements officiels. Alors que les progressions officielles de 2008 ne font mention ni de l'addition, ni de la comparaison, 48,8 % des enseignants français indiquent un enseignement des additions et des comparaisons de fractions ayant principalement lieu dans leur classe (et 2,7 % dans une classe précédant la leur). En ce qui concerne l'Ontario, comme la comparaison de fraction est au programme de la quatrième année (et l'addition au programme de la sixième année), on ne peut parler d'anticipation que pour les professeurs qui précisent que cet enseignement a lieu en troisième année ou avant, ce qui ne concerne que 4,6 % d'entre eux. Enfin, cinq participants prévoient un enseignement des notations décimales (et des conversions entre notations fractionnaires et décimales) en quatrième année : la Floride, la France, Hong Kong SAR, l'Ontario et Singapour. Parmi ceux-ci, les déclarations qui induisent une anticipation de la part des enseignants sont peu fréquentes, en particulier en Floride (2,8 %), en France (2,1 %) et en Ontario (4,7 %). Elles le sont un peu plus à Singapour (6,7 %) et surtout à Hong Kong SAR (9,1 %).

Pour appréhender ces phénomènes d'anticipation dans un sens plus large, une autre méthode est possible. Ainsi, nous avons déterminé les pays dans lesquels les professeurs évoquaient un enseignement précoce[1], puis nous avons comparé ces réponses avec celles relevées dans des pays où les progressions officielles sont similaires, mais où les déclarations des professeurs sont différentes. Par exemple, le pourcentage d'enseignants qui évoquent un apprentissage des notations décimales antérieur à l'année du test est particulièrement élevé dans le Taipei chinois, avec 26,2 % (soit 2,8 écarts-types au-dessus de la moyenne du corpus). Pourtant, il semble bien que, dans ce pays, l'apprentissage se fasse principalement, selon les programmes scolaires, en quatrième année. En troisième année, il est en effet simplement prescrit de « présenter le nouveau chiffre des dixièmes, en expliquant que ce nom est dû à l'égalité 1/10 = 0,1 ». Le terme de « présentation » suggère davantage une introduction de la notion qui sera systématisée ultérieurement, plutôt que l'exigence que chaque élève soit capable

1. C'est-à-dire supérieur à la moyenne du corpus, plus un écart-type, soit 15 %.

de passer des fractions aux nombres décimaux, et vice versa. D'autant plus qu'en quatrième année, le programme est beaucoup plus dense : il impose que « les élèves utilisent leur connaissance des fractions équivalentes pour comparer des fractions de dénominateurs différents et passer des fractions simples à une écriture décimale et inversement », qu'ils « étendent leurs connaissances relatives aux notations décimales aux centièmes et aux millièmes, et apprennent que les noms des chiffres proviennent des relations 1/100 = 0,01 et 1/1 000 = 0,001 » et qu'ils « apprennent à utiliser la division de nombres entiers pour présenter des fractions sous forme de notations décimales ». En Corée du Sud, la progression prévue par législateur est sensiblement la même, puisqu'il faut, en troisième année, « par le biais des fractions propres dont le dénominateur est 10, comprendre le concept de nombre décimal ». Il est vrai que l'égalité entre fractions et décimaux n'est pas explicitement visée, mais il nous semble que le terme « comprendre », au même titre que celui de « présenter » dans les programmes du Taipei chinois, évoque une simple approche de la notion. Or, les professeurs coréens sont beaucoup moins nombreux à considérer que cela constitue le cœur de l'apprentissage (8,4 %). Avec des progressions initiales concernant les notations décimales très proche, les enseignants de deux participants peuvent proposer des interprétations sensiblement différentes (puisque seuls 8,4 % des enseignants estiment que cet enseignement se déroule principalement avant la quatrième année). De la même façon, nous observons que les enseignements relatifs à l'addition et à la comparaison de fractions sont précoces dans tous les pays asiatiques de notre corpus[1], en particulier à Singapour et dans le Taipei chinois[2]. Certes, ces deux participants ont une progression qui place ces enseignements nettement plus tôt qu'ailleurs dans la scolarité. Toutefois, la Corée du Sud et Hong Kong SAR ont des curriculums très similaires à ceux de l'Angleterre et de la Floride sur ce point. Pourtant les déclarations des professeurs diffèrent : le pourcentage de professeurs indiquant un enseignement antérieur à la quatrième est respectivement de 17,9 % et 16 % dans les deux premiers, de 6,8 % et 2,8 % dans les deux derniers.

1. Dans le sens où le pourcentage de professeurs indiquant un enseignement antérieur à l'année du test est supérieur à la moyenne du corpus dans les quatre pays asiatiques, alors qu'il est inférieur à cette moyenne dans tous les pays occidentaux.

2. Avec un pourcentage de professeurs indiquant un enseignement antérieur à l'année du test supérieur à la moyenne plus un écart-type.

B. Les phénomènes de report des enseignements

En raison de la durée de la plupart des enseignements évoqués par les auteurs TIMSS et de leur étalement sur plusieurs années, il est difficile de mettre au jour des phénomènes de report au sens strict. Lorsque les professeurs évoquent des enseignements postérieurs aux tests, est-ce parce que celui-ci n'a pas été réalisé du tout, ou parce que la notion sera approfondie dans les classes suivantes, conformément aux instructions officielles ? Pour l'analyse des résultats obtenus par les élèves, ces deux hypothèses sont très différentes. Afin de mettre évidence des différences dans l'interprétation des programmes par les enseignants, il est nécessaire, comme nous l'avons fait à propos des phénomènes d'anticipation, d'adopter une conception relative de la notion de report (c'est-à-dire opérer des comparaisons entre des pays ayant des progressions similaires).

Pour l'addition et la comparaison de fractions, nous identifions trois participants ayant des professeurs qui choisissent plus fréquemment qu'ailleurs la réponse « Pas encore enseigné ou juste introduit »[1] : la France (48,5 %), l'Ontario (67,5 %) et le Québec (52,9 %). Les différences entre les taux constatés dans ces trois territoires s'expliquent assez bien à partir des programmes d'enseignement, puisque l'Ontario est le territoire dans lequel l'enseignement de l'addition de fractions est le plus tardif (en sixième année, soit un an plus tard qu'en France et au Québec). Or, nous avons vu précédemment que les professeurs s'appuyaient probablement sur cet élément pour produire leur réponse, plutôt que sur les comparaisons de fractions évoquées dans la même question. Il est possible également de mettre en regard les pourcentages assez proches de la France et de l'Ontario à celui, plus faible, de la République d'Irlande (37,1 %) : à propos des additions de fractions, les progressions des premiers sont plus longues (elles s'étalent entre la cinquième et la huitième année) que celles de la République d'Irlande, où cet enseignement est réparti entre la cinquième et la sixième année. Sans doute la richesse des intitulés joue-t-elle également, car les instructions officielles sont beaucoup plus riches sur ce thème en République d'Irlande (par exemple, en cinquième année : « Additionner et soustraire des fractions simples et des nombres mixtes simples. Utiliser des fractions équivalentes pour simplifier les calculs » [*op. cit.*, p. 89]) qu'en France (« Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur » [*op. cit.*, p. 38]) ou au

1. Au sein du corpus, la moyenne étant établie à 22,8 % et l'écart-type à 23,2 points de pourcentage, le seuil au-delà duquel nous considèrerons que le poucentage est élevé a été fixé à 46 %.

Québec (« Additionner et soustraire des fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre » [*op. cit.*, 2009a, p. 12]).

À propos du concept de nombre décimal, nous avons identifié deux pays présentant un fort taux d'enseignants (c'est-à-dire un taux supérieur à un écart-type de la moyenne[1]) indiquant un apprentissage ultérieur à la quatrième année : la France (36,2 %) et l'Ontario (51,2 %). Pourtant, en quatrième année, on demande déjà aux élèves ontariens « d'explorer la relation entre les fractions et les nombres décimaux (par exemple, 1/10 = 0,1) ». Certes, la formule « explorer » est assez vague, et suggère davantage une première approche de la notion qu'une attente forte en ce qui concerne la capacité des élèves à convertir des nombres décimaux en fractions et vice versa. De plus, l'année suivante permettra aux élèves de parfaire leur maitrise de la relation entre fractions et décimaux, puisqu'on leur demande « d'établir et expliquer la relation entre un nombre décimal et une fraction dont le dénominateur est 10 ou 100, et vice versa ». Cette injonction est plus précise et plus dense que la précédente. Il est donc justifiable de penser que l'apprentissage des décimaux se fait principalement, non pas en quatrième année, mais plutôt après, en cinquième année. En France, les progressions de 2008 prévoient que les élèves de quatrième année puissent « passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement ». Puis le travail sur les nombres décimaux se poursuit, d'abord en cinquième année, où le concept de nombre décimal n'est pas lié aux fractions, puis en sixième année, où on demande à l'élève « d'associer diverses désignations d'un nombre décimal : écriture à virgule, fractions décimales ». Là encore, on peut penser que l'apprentissage des nombres décimaux, s'il débute en quatrième année, peut être principalement réalisé après la quatrième année. À Singapour, le point de départ de l'apprentissage est fixé par les programmes d'enseignement en quatrième année. Néanmoins, la progression est légèrement différente, puisque les injonctions pour la quatrième année sont clairement plus denses que celles fournies pour la cinquième année. Ainsi, les élèves les plus jeunes sont invités à « convertir une notation décimale en fraction » et « convertir une fraction dont le dénominateur est un facteur de 10 ou 100 en notation décimale ». Les élèves les plus âgés sont invités à « convertir les notations décimales en fractions et vice versa », ce qui résonne davantage comme une activité de révision, que comme une injonction à proposer des apprentissages nouveaux. D'ailleurs, les professeurs

1. Cette dernière étant établie à 14,4 % et l'écart-type à 15,5 points de pourcentage, le seuil au-delà duquel nous considèrerons que le poucentage est élevé s'élève à 29,9 %.

singapouriens répondent de façon très homogène : seuls 1,2 % indiquent un enseignement mené au-delà de la quatrième année (contre 92,2 % pour un enseignement principalement réalisé cette année-là).

Conclusion de la sous-section

Notre étude indique que les professeurs tiennent compte, pour évoquer le moment où un enseignement a été réalisé, de la durée globale des enseignements au long de la scolarité, plutôt que de son point de départ. Il semble également que la richesse des intitulés influence les déclarations des professeurs, possiblement parce qu'elle leur donne des indices pour déterminer si les activités qu'ils doivent donner aux élèves relèvent de la simple découverte, avec des enseignements plus approfondis au cours des années ultérieures, ou s'il est nécessaire de fournir immédiatement un travail dense sur la notion, en sachant que des tâches de révision seront effectuées plus tard dans la scolarité. Ces observations tendent à confirmer les résultats que nous avons obtenus à partir de l'étude du lien entre les programmes et les performances des élèves, à savoir que des intitulés portant sur une durée courte, avec une rédaction qui suggère une plus grande richesse des activités proposées, sont favorables à l'effectivité de l'enseignement et de l'apprentissage. À l'inverse, il ressort des questionnaires que lorsque les enseignements sont plus étalés dans le temps, ou lorsque la richesse des intitulés est insuffisante, les enseigants considèrent plus facilement que l'apprentissage en jeu relève d'une classe ultérieure. En d'autres termes, il semble que ce type de rédaction conduise à atténuer la responsabilité d'une partie des enseignants quant à la nécessité pour les élèves de réaliser les apprentissages prévus par le législateur. Nous écrivons « une partie des enseignants » car les différences entre les pays de notre corpus sont finalement assez réduites, comparé aux écarts constatés relativement à la rédaction des programmes scolaires. Ainsi, pour le concept de fraction, 53,4 % des enseignants considèrent que cet enseignement est principalement mené en quatrième année (alors que dans 9 pays sur 11, les notations fractionnaires sont introduites au cours des années précédentes), pour l'addition et la comparaison, c'est 66 % (alors que nous avons vu que l'enseignement de ces deux genres de tâches étaient extrêmement divers) et 76,9 % pour les notations décimales (alors que dans 6 pays sur 11, les notations décimales sont introduites au cours des années précédentes). Les écarts les plus importants concernent la France et l'Ontario, où de nombreux professeurs indiquent qu'ils enseignent l'addition et la comparaison de fractions (ce qui n'est pas prévu par les textes) et pas le concept de nombre décimal (alors que les textes imposent cet enseignement). Il existe sans aucun doute des biais

liés à la construction du questionnaire, qui ne propose que trois choix de réponses, et qui mélange des types de tâches différents. C'est pourquoi il aurait été fructueux pour l'analyse que les professeurs donnent leur point de vue sur chacun des items, plutôt que sur des types de tâches. Néanmoins, ces résultats invitent à tenter de savoir si les déclarations des enseignants sont liées aux performances des élèves.

Sous-section II. La corrélation entre les déclarations des enseignants et les résultats des élèves

Les déclarations des enseignants sont-elles davantage corrélées aux résultats des élèves que le contenu des programmes ? Pour le déterminer, nous allons mettre au jour le lien éventuel entre les déclarations des professeurs quant au moment de l'apprentissage des trois genres de tâches analysés précédemment (la compréhension du concept de fractions, les additions, soustractions, comparaisons et rangement de fractions, ainsi que le lien avec les notations décimales) et les résultats des élèves aux items correspondants (§ 1). Cela nous permettra ensuite de comparer ces données à celles que nous avons établies à propos de la relation entre la nature des types de tâches présents dans les programmes et les résultats des élèves. Toutefois, la manière dont les instructions officielles sont rédigées ne semblent pas être le seul facteur qui influence les déclarations des professeurs. Les conditions d'enseignement et l'investissement des élèves, que nous avons déjà évoqués, ont probablement une incidence sur la tranposition interne réalisée par les enseignants dans le domaine des fractions. Parmi ces facteurs, nous avions également envisagé la formation des enseignants d'une façon générale. Or, les questionnaires TIMSS ont tenté d'appréhender le degré de préparation des enseignants pour l'enseignement des différents types de tâches relatifs aux fractions (les mêmes que dans les questions portant sur le moment de l'enseignement), ce qui n'est sans doute pas sans lien avec leur formation. En effet, il est possible que des enseignants mieux formés soient également plus confiants dans la qualité de leur préparation. À l'inverse, nous envisageons aussi que des professeurs ayant moins de connaissances didactiques dans ce domaine se déclarent plus confiants que les autres, du fait d'une vision moins large des organisations mathématiques qui sont susceptibles d'être élaborées. C'est pourquoi nous avons cherché à mettre au jour l'influence du niveau de préparation exprimé par les professeurs à propos de l'enseignement des fractions sur les résultats obtenus par leurs élèves aux items correspondants (§ 2).

§ 1. L'influence du moment de l'enseignement

Nous avons présenté dans la sous-section précédente les questions posées aux professeurs à propos du moment auquel plusieurs types de tâches relatifs aux fractions avaient été enseignés aux élèves de leur classe. La première avait trait à la notion de fraction (partie d'un tout ou d'une collection, nombre de la droite graduée). La deuxième concernait l'addition, la soustraction et la comparaison de fractions (comparer et ordonner). La troisième impliquait le concept de notation décimale (notion, valeur des décimales en fonction de leur rang, addition, soustraction et comparaison de décimaux)[1]. Pour qu'un lien soit établi entre les programmes scolaires et les performances des élèves, un enseignement effectif apparait à la fois nécessaire et suffisant (A). Toutefois, pour que les élèves obtiennent un score élevé, une certaine richesse de l'enseignement semble indispensable (B), c'est-à-dire une certaine variété des organisations mathématiques étudiées, qui échappe partiellement à la mise en correspondance avec les curriculums.

A. La nécessité d'un enseignement effectif

En ce qui concerne la capacité des élèves à faire le lien entre les fractions et les notations décimales, nous avons analysé les résultats des élèves à l'item M1102 des évaluations TIMSS 2015, dans lequel il était demandé d'identifier la fraction équivalente à 0,4 parmi quatre propositions. Si les performances des élèves des onze pays considérés dans notre étude sont très variables, il en est de même de leurs performances relatives. Ces dernières varient en effet de – 99 % pour l'Ontario à + 98 % pour Singapour avec une moyenne de 10 % et un écart-type de 66 points de pourcentage. Pourtant, dans les onze pays, le lien entre fractions et décimaux est enseigné en troisième ou quatrième année. En outre, cette variabilité n'est pas atténuée si l'on sépare les pays suivant l'année d'enseignement. Dans les cinq pays où le lien entre fractions et décimaux est enseigné en troisième année, les performances relatives varient de – 94 % à + 59 % avec une moyenne de 5 % et un écart-type de 57 points de pourcentage. Dans les six pays où le lien entre fractions et décimaux est enseigné en quatrième année, les performances relatives varient de – 99 % à + 98 % avec une moyenne de 15 % et un écart-type de 73 points de pourcentage. Il est envisageable que cette variabilité des performances relatives dépende de l'enseignement effectif du lien fractions-décimaux dans les classes. Nous avons donc cherché

1. Il s'agit respectivement des questions TQM-06Ad, TQM-06Ae et TQM-06Af.

un lien de linéarité entre les déclarations des enseignants (enseignement concomitant ou antérieur à la quatrième année) et les résultats des élèves à l'item M1102. Le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est moyen ($R^2 = 0,49$). Néanmoins, la lecture du graphique ci-dessous nous permet de suggérer l'existence d'un seuil minimal en-deçà duquel l'obtention d'un fort taux de réussite des élèves est peu probable.

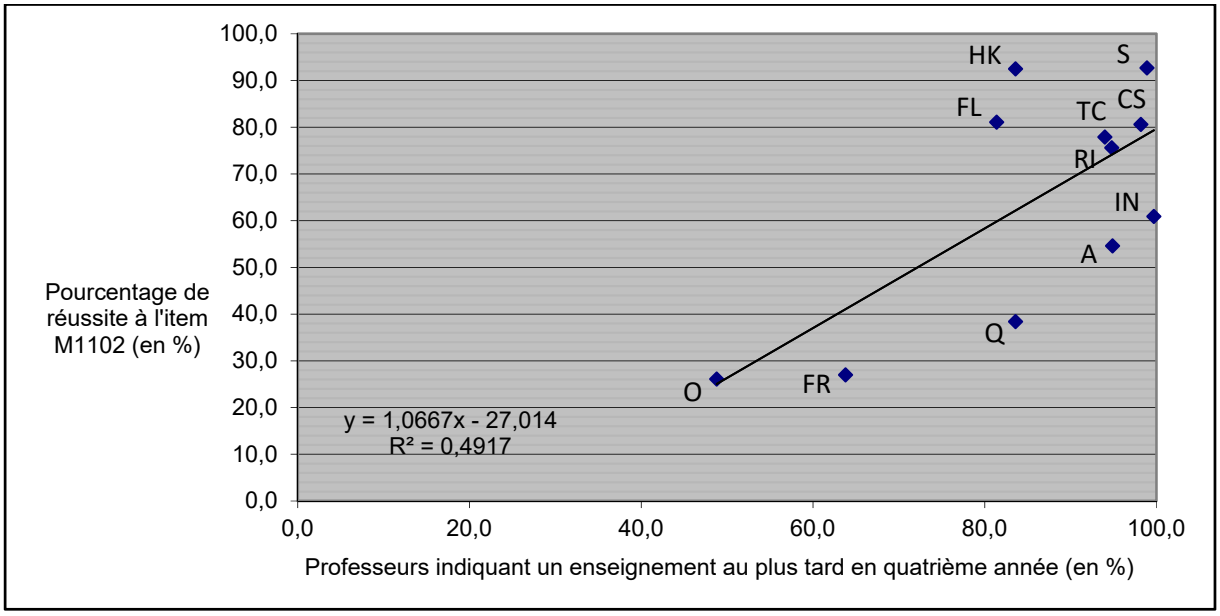


Figure 139. Corrélation entre la part des enseignants indiquant un apprentissage des nombres décimaux au plus tard en quatrième année et le pourcentage de réussite des élèves à l'item M1102 (TIMSS 2015)

Rappelons que notre étude des programmes scolaires montre que, dans tous les pays, c'est bien durant l'année de passation du test au plus tard que cet enseignement est programmé. Pourtant, des enseignants – en nombre variable suivant les pays – déclarent que la notion de nombre décimal ne sera étudiée qu'après la quatrième année. Il est probable que ces enseignants n'ont pas préparé leurs élèves à répondre à l'item M1102 du questionnaire TIMSS, dans lequel il était demandé d'identifier la fraction équivalente à 0,4 parmi quatre propositions. Le fait qu'ils soient en nombre important dans un pays conduit alors sans doute à une certaine disparité de la mise en oeuvre des programmes scolaires dans ce pays. Cela témoigne en outre « d'une difficulté d'interprétation ou de compréhension des programmes scolaires, ou d'une forme de manque d'adhésion des enseignants aux prescriptions » (Martinez et Roditi, *op. cit.*, p. 35). Or, pour deux des onze pays étudiés ici, le pourcentage d'enseignants qui déclarent que la notion de nombre décimal ne sera étudiée qu'après l'année de passation du test est particulièrement fort : la France (36 %) et l'Ontario (51 %). Et ces deux pays ont des performances relatives particulièrement faibles à l'item M1102 : – 54 % pour la France et – 99 % pour l'Ontario. À l'inverse, au-delà d'un seuil que nous situons autour de 80 %, les résultats sont très variables.

On s'aperçoit notamment que Hong Kong SAR et la Floride obtiennent d'excellents scores avec un taux de réponses indiquant un apprentissage au plus tard l'année du test très légèrement supérieur à 80 % : plus surprenant, le taux de réussite des élèves y est supérieur au taux de réponses indiquant un enseignement au plus tard en quatrième année. Autrement dit, des élèves sont susceptibles de réussir un item pour lequel leur professeur indique que le type de tâches en jeu a été à peine abordé ou le sera ultérieurement. Ainsi, à Hong Kong SAR, 83,6 % des professeurs précisent que le concept de nombre décimal a été enseigné aux élèves, soit dans leur classe, soit dans une classe précédente, mais 92,5 % des élèves réussissent à identifier la fraction égale à 0,4. S'il semble donc qu'un enseignement effectif d'une notion soit indispensable à la réussite des élèves, celle-ci n'apparait pas toujours clairement, peut-être en raison des ambigüités qui entourent la formulation des réponses proposées aux enseignants.

En ce qui concerne l'addition et la comparaison de fractions, deux items des évaluations TIMSS 2015 ont pu faire l'objet d'une analyse. Dans l'item M0906, on demandait aux élèves de calculer la fraction de gâteau restante, après avoir indiqué les fractions du gâteau mangées successivement par deux personnes. Les élèves étaient invités à fournir librement une réponse, sans être aiguillés par la présence de quatre possibilités, la tâche principale consistant à additionner des fractions de dénominateurs différents. Dans l'item M0705, les élèves devaient identifier la fraction unitaire la plus grande parmi quatre propositions. Nous étudierons donc le lien entre les déclarations des enseignants sur le moment de l'apprentissage de la comparaison et de l'addition de fractions et les performances des élèves à l'item M0906, puis le lien entre ces déclarations et les résultats obtenus à l'item M0705.

Les instructions officielles relatives à l'addition de fractions et les réponses fournies par les enseignants sont beaucoup plus variées par rapport à ce que nous avons établi à propos des notations décimales. Pour avoir une idée plus précise de l'incidence de l'organisation temporelle des enseignements et réaliser des comparaisons, nous avons construit un indicateur synthétique permettant de fournir une approximation de l'antériorité de l'apprentissage des fractions[1]. De cette façon, le lien entre, d'une part, le moment de l'apprentissage déterminé par

1. Nous avons construit cet indicateur M à partir de la répartition des réponses des enseignants pour les trois choix possibles : « principalement enseigné avant cette année » (dont la fréquence a été notée R_1),

les enseignants, et d'autre part, les performances des élèves, apparait assez nettement, avec un coefficient de détermination de Bravais-Pearson plutôt élevé ($R^2 = 0,72$) et une pente qui suggère que plus l'apprentissage a lieu tôt, plus la réussite des élèves est forte. En outre, le gain potentiel de cet enseignement effectif parait élevé, dans la mesure où l'écart entre le pays le plus performant (Singapour, avec 82,2 % de réussite) et le moins performant (la France, avec 11,3 % de réussite) est important.

« principalement enseigné cette année » (dont la fréquence a été notée R_2) et « pas encore enseigné ou juste introduit » (dont la fréquence a été notée R_3). Nous avons calculé la somme de l'opposé de R_1 et de R_3 :

$M = -R_1 + R_3$

Ainsi, nous avons mis en evidence, dans chacun des pays de notre corpus, un enseignement de chaque type de tâches considéré comme antérieur ou postérieur à la quatrième année, selon que l'indicateur est inférieur ou supérieur à zéro. Une valeur minimale de -100 indique que tous les professeurs considèrent que cet enseignement est antérieur à la quatrième année, et une valeur maximale de + 100 indique que tous les professeurs considèrent que cet enseignement est postérieur à la quatrième année. Il est vrai que cet indicateur sera égal à 0 dans le cas où la moitié des enseignants indiquent un enseignement antérieur et l'autre moité un enseignement postérieur, et dans le cas où tous déclarent un enseignement en quatrième année. Néanmoins, il s'agit d'un outil complémentaire à une analyse plus détaillée des réponses des professeurs. Pour construire l'indicateur M_F relatif à la France, nous avons pris en compte le fait que 40,8 % des enseignants répondent « principalement enseigné avant cette année », 58,3 % choisissent « principalement enseigné cette année » et 0,9 % ont coché « pas encore enseigné ou juste introduit », puis nous avons réalisé les calculs suivants :

$M_F = -40,8 + 0,9$

$M_F = -39,9$

Ce nombre signifie que les professeurs français sont plutôt enclins à déclarer que le concept de fraction est enseigné avant la quatrième année.

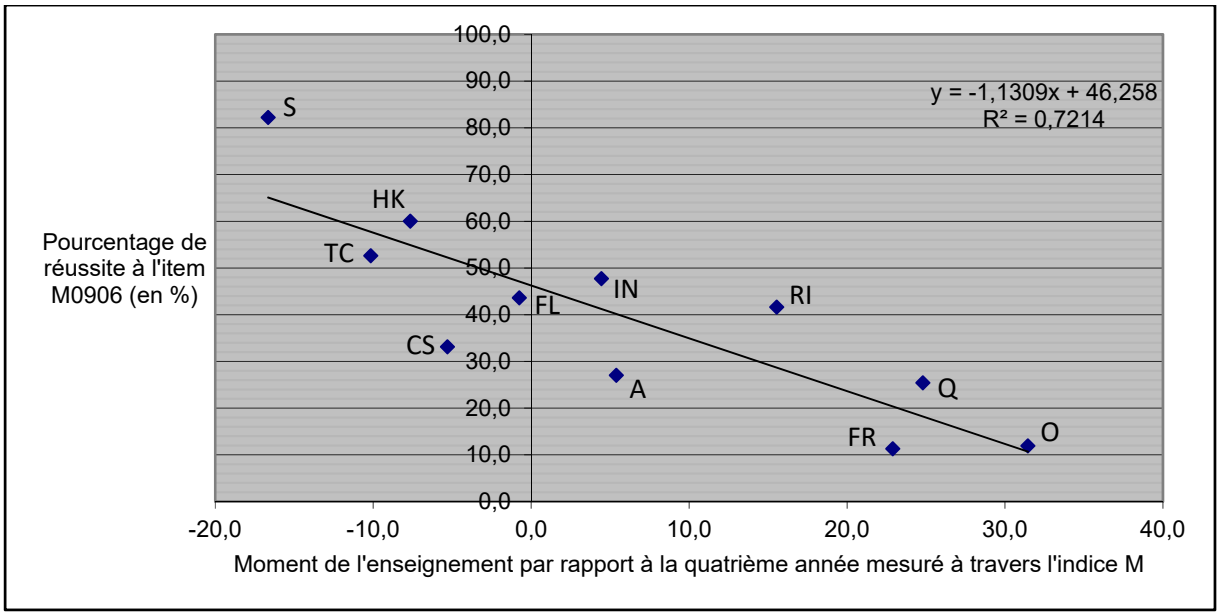


Figure 140. Corrélation entre la réussite à M0906 et les déclarations des enseignants sur le moment de l'apprentissage (TIMSS 2015)

Ces données confirment qu'un enseignement spécifique de l'addition de fractions est indispensable à la réussite des élèves et que ces derniers ont la plus grande difficulté à transférer des connaissances afin de résoudre des tâches sur lesquelles ils n'ont jamais travaillé. Elles confirment également que les déclarations des enseignants relatives au moment de l'enseignement d'une notion entretiennent une relation assez forte avec les performances des élèves. Toutefois, un enseignement effectif ne semble pas suffire aux élèves pour réaliser des scores élevés. Que l'on songe aux résultats de la Floride : 98,8 % des enseignants indiquent un apprentissage des additions (et des comparaisons) de fractions au plus tard en quatrième année ; pourtant, seuls 43,6 % des élèves parviennent à résoudre le problème que nous avons présenté. Il est vrai que dans le questionnaire, les auteurs ne faisaient pas la différence entre les additions de fractions de même dénominateur, et les additions de fractions de dénominateurs différents. Nous posons l'hypothèse que, avec des informations plus détaillées sur la nature des additions ayant fait l'objet d'un enseignement, le lien aurait été encore plus fort, avec un coefficient de détermination de Bravais-Pearson encore plus élevé. Avant de montrer qu'un degré de précision plus important est nécessaire pour mettre au jour une relation plus forte entre les savoirs enseignés et les savoirs acquis, indiquons que la relation entre l'item M0705 et les réponses des professeurs est beaucoup plus lâche ($R^2 = 0,46$ avec des points très dispersés autour de la droite de régression linéaire). Il semble donc bien que les professeurs se soient appuyés principalement sur le thème des additions de fractions pour donner leur réponse, plutôt que sur le thème des comparaisons.

B. La nécessité d'une prise en compte des difficultés potentielles des élèves

En ce qui concerne la partie d'un tout ou d'une collection et l'utilisation de la droite graduée, il n'y a pas de lien que nous puissions mettre en avant entre les réponses des professeurs et les résultats des élèves, tout comme nous n'avions pas repéré de relation entre les instructions officielles et les réponses des enseignants. Malgré une tendance plus marquée de leurs enseignants à considérer que le concept de fraction est principalement enseigné postérieurement au test, les élèves singapouriens obtiennent des résultats très élevés, tandis que les élèves irlandais réalisent des performances légèrement supérieures à la moyenne du corpus (et bien supérieures à la moyenne des pays occidentaux du corpus). À l'inverse, les enseignants français sont presque unanimes pour dire que l'apprentissage de cette notion est déjà bien engagé au moment du test. Pourtant, les scores de la France à cet item sont les plus bas du corpus. Sans doute est-il nécessaire qu'une grande majorité des professeurs pense que cet apprentissage a été effectué (ce qui est le cas dans l'ensemble des pays qui font l'objet de notre étude). Néanmoins, ce n'est pas le gage de performances élevées. Nous avons également utilisé l'indice M, construit tel que nous l'avons décrit précédemment, pour réaliser des comparaisons. Néanmoins, lorsqu'on confronte les items mettant en jeu le concept de fraction[1] (c'est-à-dire le genre de tâches « associer une fraction et un dessin », dans le cadre de la fraction partie d'un tout ou dans le cadre de la partition, avec ou sans la matérialisation du partage en parts égales) et le moment déclaré de l'enseignement déterminé selon cette méthode, on obtient, non seulement des coefficients de détermination de Bravais-Pearson faibles (inférieurs à 0,25), mais également des pentes positives, qui signifieraient que plus le concept de fraction serait enseigné tardivement, meilleurs seraient les résultats. Ces observations ne vont pas sans soulever une question relative à la définition du concept de fractions chez les enseignants au sein de notre corpus : quels types de tâches les élèves doivent-ils acquérir pour que les professeurs de chaque pays indiquent que la notion a été principalement étudiée cette année-là ? Certes, le fait que les auteurs de TIMSS évoquent la droite graduée (qui est une notion dont l'enseignement est réalisé à des moments divers au sein de notre corpus) ne permet pas d'apporter de conclusion claire sur ce point. Néanmoins, nous constatons que les enseignants français sont 99,1 % à déclarer

1. Il s'agit des items M0504A, M0701, M0704, M0804, M1104, M1302, M1304A et M1304B des évaluations TIMSS 2015. Nous n'avons pas tenu compte de l'item M0504B, dans lequel l'élève est amené, non à effectuer une tâche nouvelle portant sur des fractions, mais à justifier le choix qu'il a effectué à l'item M0504A.

que le concept de fraction a été étudié en quatrième année ou avant (l'indice M_F indique l'enseignement le plus précoce du corpus), mais les apprentissages tels qu'ils sont mesurés par TIMSS montrent une compréhension assez faible de cette notion. Pour le montrer, nous avons indiqué les praxéologies évaluées par les auteurs de TIMSS (l'analyse est de notre fait) et les pourcentages de réussite correspondants (nous n'avons pas indiqué les techniques possibles, car elles sont plurielles pour chaque item).

Item	Type de tâche	Technologie	Réussite
M0701	Associer une fraction et un dessin (partie-tout).	Le dénominateur indique le nombre de parts *égales* dans l'unité.	72,5 %
M1302	Associer une fraction et un dessin (partie-tout).	Le dénominateur indique le nombre de parts *égales* dans l'unité.	68,3 %
M0504A	Associer une fraction et un dessin (partie-tout).	Quand on représente une fraction, toutes les parts n'ont pas besoin d'être matérialisées.	34,7 %
M0804	Associer une fraction et un dessin (partie-tout).	Quand on représente une fraction, toutes les parts n'ont pas besoin d'être matérialisées.	31 %
M1304A	Associer une fraction et un dessin (partie-tout).	Quand on représente une fraction, il peut y avoir des tracés superflus.	41 %
M1304B	Associer une fraction et un dessin (partie-tout).	Quand on représente une fraction, il peut y avoir des tracés superflus.	39,7 %
M0704	Associer une fraction et un dessin (partition).	Une fraction peut être réprésentée avec des quantités discrètes.	52,4 %
M1104	Associer une fraction et un dessin (partition).	Une reconfiguration des unités discrètes est parfois nécessaire pour identifier une fraction.	36,2 %

Figure 141. Pourcentage de réussite des élèves français aux items correspondant au genre de tâche « Associer une fraction et un dessin » (TIMSS 2015)

On a donc, pour des items mettant en jeu le même genre de tâches (« associer une fraction à un dessin »), des résultats très divers : assez élevés lorsque les variables de la tâche induisent une certaine simplicité de l'exercice, bas lorsque ces variables induisent une certaine complexité de l'exercice. Pourtant, toutes les difficultés, présentées dans les items TIMSS, qui résultent de l'évaluation d'une technologie particulière ont été bien identifiées dans des ouvrages[1]. En outre, aucune instruction officielle n'est rédigée de façon suffisamment précise, au sein de notre corpus, pour imposer l'enseignement de tâches avec telle ou telle variable. L'hypothèse selon laquelle l'enseignement du concept de fraction débuterait plus tardivement

1. Voir p. 38 et suivantes.

qu'ailleurs se trouve réfutée par les déclarations des enseignants : il serait plutôt plus précoce. L'explication semble donc devoir être trouvée au sein des systèmes didactiques. Puisque l'enseignement des fractions est supposé avoir été menée à titre principal en CM1 ou dans les classes précédentes, on peut s'interroger sur la variété des praxéologies que les professeurs envisagent pour considérer cet enseignement comme déjà mené. D'ailleurs, pour les trois couples d'items mettant en jeu la même technologie, l'écart-type est, en France et en moyenne, de 1,5 point de pourcentage, ce qui tend à confirmer l'existence d'une grande stabilité des performances des élèves aux items susceptibles de mettre au jeu une même organisation mathématique.

§ 2. L'influence du niveau de préparation des enseignants

Les questionnaires TIMSS permettent notamment de rechercher un lien entre la formation reçue par les enseignants et le niveau de préparation qu'ils déclarent pour l'enseignement des fractions, ce que nous ferons dans un premier paragraphe (A). Ensuite, nous étudierons l'incidence éventuelle de ce niveau de préparation sur le moment de l'enseignement et sur les performances des élèves (B) à propos des trois genres de tâches que nous avons déjà évoqués (maitrise du concept de fraction ; addition, soustraction, comparaison et rangement ; concept de nombre décimal).

A. L'incidence de la formation des enseignants sur le niveau de préparation déclaré

D'une façon générale, la question posée aux professeurs de quatrième année était ainsi formulée (annexes 313 à 323) : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner les thèmes mathématiques suivants ? » Trois réponses étaient possibles (« très bien préparé », « moyennement préparé » et « pas bien préparé »), ce qui nous a conduit à déterminer un indice P destiné à estimer, à travers un indicateur unique, le niveau de préparation des enseignants[1].

---

1. À la réponse « très bien préparé » (dont la fréquence est notée R_1), nous attribué la valeur 1, à la réponse « moyennement préparé » (dont la fréquence est notée R_2), nous avons attribué la valeur 0,5 et à la réponse « pas bien préparé » (dont la fréquence est notée R_3), nous avons attribué la valeur 0. Nous avons ensuite additionné ces valeurs, après les avoir pondérées par la fréquence à laquelle les niveaux de préparation correspondants étaient cités, ce qui fournit un indice synthétique du niveau de préparation déclaré par les enseignants situé entre 0 et 100.

Pour chacun des thèmes que nous avons définis, et pour chaque pays de notre corpus, les indices obtenus ont été reproduits dans le tableau ci-contre. Nous constatons que, quel que soit le thème analysé, l'écart-type entre les pays est faible : 5,5 points d'indice pour le concept de fraction, 6,2 points d'indice pour l'addition et la comparaison et 4,9 points d'indice pour les notations décimales. De plus, le niveau de préparation indiqué par les enseignants est dans l'ensemble très élevé ($\bar{x} = 91{,}2$). *A priori*, il sera donc difficile de mettre au jour une corrélation avec la formation des enseignants, ou une quelconque incidence sur les performances des élèves. Il faut dire également que les écart-types entre les différentes questions pour un même participant sont très faibles ($\bar{x} = 1{,}6$). Cela justifie de ne pas mener une analyse genre de tâche par genre de tâche, mais plutôt une étude globale à partir des déclarations des professeurs à propos de leur niveau de préparation pour l'enseignement du concept de fraction : c'est ainsi que l'on perçoit le mieux l'absence de relation entre la formation des enseignants et le niveau de confiance déclaré, qui transparait de l'ensemble des données.

Un indice de 100 indique que tous les professeurs s'estiment « très bien préparés ». Un indice de 0 indique que tous les professeurs estiment n'être « pas bien préparés ». Nous avons donc :

$P = 1 \times R_1 + 0{,}5 \times R_2 + 0 \times R_3$

Ainsi, pour la France, l'indice mesurant le niveau de préparation déclaré par les professeurs à propos de l'enseignement du concept de fraction (TQM-11Ad) a été calculé de la façon suivante :

$P_F = 1 \times 59 + 0{,}5 \times 34{,}8 + 0 \times 6{,}2$

$P_F = 76{,}4$

Ce nombre exprime l'idée que les enseignants français se sentent plutôt bien préparés pour enseigner le concept de fraction (entre « moyennement préparé » et « très bien préparés »).

	Concept de fraction	Additions soustractions, comparaisons et rangements de fractions	Concept de nombre décimal
Angleterre	92,5	92,1	95,6
Corée du Sud	89,9	92,2	94,5
Floride	91,6	90,0	92,8
France	76,4	72,2	79,7
Hong Kong SAR	88,6	88,8	86,8
Irlande du Nord	98,3	93,0	97,4
Ontario	93,2	89,6	91,3
Québec	89,9	86,3	94,5
République d'Irlande	93,0	90,3	93,2
Singapour	95,0	94,7	94,9
Taipei chinois	96,5	97,2	96,5
Moyenne	**91,4**	**89,7**	**92,5**

Figure 142. Indice P estimant le niveau de préparation des professeurs relatif à l'enseignement de trois thèmes ayant trait aux fractions (TIMSS 2015).

Les territoires dans lesquels le niveau de préparation relatif à l'enseignement du concept de fraction parait plus faible (P < 90) sont très différents culturellement : deux d'entre eux sont asiatiques (Corée du Sud, Hong Kong SAR), les deux autres sont occidentaux (France, Québec). En outre, le niveau de formation des enseignants de Hong Kong SAR en mathématiques est très élevé (59,2 % des professeurs indiquent avoir fait leur formation initiale dans ce domaine, contre 20,6 % en moyenne dans le corpus) et la polyvalence des enseignants du premier degré y est moins forte qu'ailleurs. Toutefois, il s'agit du participant asiatique dans lequel les professeurs semblent les moins satisfaits des conditions d'exercices de leur métier. À l'inverse, les professeurs sud-coréens ont très rarement effectué une formation universitaire en mathématiques (4,9 %) et sont presque toujours polyvalents. En revanche, ils manifestent une grande confiance en leurs qualités pédagogiques, et plus particulièrement en leurs capacités à « inspirer leurs élèves ». Les professeurs québécois sont ceux qui déclarent le plus fréquemment, après ceux de Corée du Sud, avoir une suivi une formation dans le domaine de l'éducation (92,2 %), mais leur niveau de formation universitaire en mathématiques semble assez faible (10,7 %). En France, le pourcentage d'enseignants indiquant une formation initiale dans le domaine de l'éducation (28,2 %) ou des mathématiques (19,7 %) est faible dans les deux cas, ce qui peut expliquer, combiné à une formation continue qui est la moins dense de tout le corpus, un niveau de préparation ressenti très en retrait (P = 76,4). Nous concédons qu'il existe sans doute des biais culturels (en raison de la subjectivité de la notion de « préparation ») ou liés à la question (en raison de la pluralité des genres de tâches intégrés dans chaque proposition) à notre analyse : ils expliquent possiblement les légères différences que nous avons constatées. Le niveau de préparation déclaré par les enseignants peut également être influencé

par le niveau d'exigence (ou de précision) des programmes scolaires : plus les auteurs seraient exigeants (ou imprécis), plus la confiance des professeurs pourrait chuter. Toutefois, nous n'avons pas pu mettre en relation ces éléments avec les déclarations des enseignants : les instructions officielles françaises ne sont ni plus denses, ni rédigées de façon moins précise qu'ailleurs. Nous en concluons donc que dans la plupart des pays, les formations réalisées dans le domaine de l'éducation ou des mathématiques semblent parvenir à faire naitre chez les enseignants un sentiment de confiance relatif à leur degré de préparation pour l'enseignement des fractions assez élevé. Néanmoins, lorsque le niveau de formation des professeurs est bas dans ces domaines, et que la formation continue ne compense pas cette faiblesse, les enseignants se montreraient beaucoup moins confiants. Pour confirmer cette hypothèse, des études complémentaires prenant en compte la nature et la durée des formations professionnelles seraient nécessaires : cet aspect de la formation enseignante n'est en effet pas suffisamment détaillé pour mener une analyse plus approfondie sur ce thème.

B. L'incidence du niveau de préparation déclaré par les enseignants

Nous avons évoqué le faible écart-type entre les réponses des enseignants, que l'on compare cet écart en fonction des pays, ou selon les types de tâches sur lesquels les professeurs étaient interrogés. Autrement dit, il se dégage des données l'impression que les enseignants ont répondu de façon similaire aux trois questions que nous avons sélectionnées, sans peut-être faire de distinction entre les trois genres de tâches en jeu. Plutôt que de réaliser une analyse détaillée mais redondante de la relation entre le niveau de préparation déclaré par les enseignants et les résultats des élèves pour chaque type de tâches, nous avons préféré mettre en correspondance le niveau moyen de cette préparation avec les performances moyennes réalisées par les élèves dans le domaine des fractions. Nous n'avons pas trouvé de corrélation linéaire forte entre les deux séries de données. Certes, la France est le pays qui obtient, avec la préparation ressentie la plus faible (P = 88,1), les résultats les plus bas (avec 36,7 % de réussite). Toutefois, le participant dont le taux de réussite est le plus élevé (Hong Kong SAR, avec 83 % de réussite) est aussi celui dans lequel le niveau de préparation déclaré est le plus faible après la France (avec P = 88,1). Le pays dans lequel les professeurs expriment la confiance la plus forte au sujet de leur préparation (le Taipei chinois, avec P = 96,7) est aussi le participant asiatique obtenant le taux de réussite le plus faible de notre corpus (71,6 %). En outre, le coefficient de Bravais-Pearson ($R^2 = 0,32$) est faible, tout comme celui que nous avons pu établir entre, d'une part, le niveau de préparation déclaré des professeurs à propos de

l'enseignement des additions et comparaisons de fractions, et d'autre part, les résultats aux items M0906 (addition de fractions, $R^2 = 0,36$) et M0705 (comparaison de fractions, $R^2 = 0,36$), ou entre le niveau de préparation déclaré à propos de l'enseignement des notations décimales et les résultats à l'item M1102 (conversion d'une notation décimale en fraction, $R^2 = 0,12$).

Précisons également que le niveau de préparation exprimé par les professeurs ne semble pas avoir d'incidence sur le moment de l'enseignement. Ainsi, en France, l'indicateur P est semblable à propos du concept de fraction (76,6) et du concept de notation décimale (79,7). Pourtant, nous avons vu que les professeurs français paraissaient enseigner le premier plus précocément que ne le suggèrent les instructions officielles, et le second plus tardivement que celles-ci ne le prescrivent. On ne peut pas non plus affirmer qu'un niveau de préparation déclaré plus faible conduit à une interprétation moins stricte des programmes scolaires. En Ontario, où les professeurs déclarent enseigner plus tardivement les notations décimales qu'il est indiqué dans le curriculum, la confiance exprimée par les enseignants en leur niveau de préparation est dans la moyenne du corpus, et nettement plus élevée qu'en France (avec P = 91,3). Il semble donc que la raison de ces écarts relatifs au moment de l'enseignement par rapport aux indications du curriculums ne soit pas à rechercher dans le ressenti des enseignants quant à leur niveau de préparation pour l'enseignement du concept de fraction. Par ailleurs, nous notons que dans l'Ontario, 83 % des professeurs s'estiment « très bien préparés » à enseigner le concept de nombre décimal (c'est-à-dire très légèrement en dessous de la moyenne du corpus fixée à 86 %), alors que 51,2 % indiquent que cette notion relève principalement des années postérieures au test. De même, 59 % des professeurs français s'estiment « très bien préparés » pour enseigner l'addition, la soustraction, la comparaison et le rangement de nombres décimaux, alors que 48,8 % seulement estiment que ces notions sont principalement enseignées dans leur classe et qu'elles n'apparaissent même pas dans les programmes scolaires pour ce niveau de classe. Est-ce à dire que l'on peut être « très bien préparé » à mettre en œuvre un enseignement que, de façon effective, on ne propose pas dans sa classe ? À l'inverse, dans certains pays (en particulier dans ceux dont les élèves réalisent des performances très élevées), les professeurs semblent sous-estimer leur capacité à élaborer des séquences d'enseignement efficaces dans le domaine des fractions. Nous en concluons que le niveau de préparation exprimé reflète assez peu la qualité du travail réalisé auprès des élèves et que le ressenti des professeurs à propos de leur capacité à enseigner une notion est une donnée très subjective.

Conclusion de la sous-section

Dans cette sous-section, nous avons étudié la relation entre les performances des élèves et les déclarations des professeurs quant au moment de l'enseignement effectif des notions se rapportant aux fractions, puis à propos de leur niveau de préparation ressenti pour la mise en œuvre de ces enseignements. Dans le chapitre précédent, nous avions fait l'hypothèse qu'un taux suffisant de professeurs déclarant avoir mené ces enseignements de façon effective était nécessaire pour l'obtention de résultats élevés aux évaluations TIMSS. Or, si les données semblent confirmer cette hypothèse, elles montrent aussi qu'un enseignement effectif du type de tâches en jeu dans les items n'est pas suffisant pour assurer la réussite des élèves. En effet, le concept de fraction fait l'objet d'un enseignement qui est presque toujours mené, selon les professeurs, au plus tard l'année des tests. Pourtant, les scores obtenus par les participants sont très divers et paraissent fortement liés aux variables de la tâche. Ce qui ressort des données, c'est donc la nécessité d'un enseignement effectif des praxéologies mises en jeu dans les tests, avec un degré de précision des organisations mathématiques beaucoup plus fin que celui que l'on peut trouver dans les programmes scolaires. En outre, le lien entre ces derniers et les résultats des élèves est affecté parfois assez nettement par les déclarations des professeurs sur le moment de l'enseignement, sans que l'on puisse appréhender, à travers les questionnaires TIMSS, la raison de ces décalages. Le niveau de préparation des professeurs pour l'enseignement des notions ne semble pas en jeu, puisque sa mesure est très similaire dans l'ensemble des pays qui forment notre corpus (sauf en France, où nous supposons qu'une formation des professeurs trop faiblement développée pourrait être à l'origine d'un niveau de préparation ressenti assez dégradé). Pour expliquer ces variations, nous posons l'hypothèse de l'existence d'une culture didactique qui imprègnerait les systèmes éducatifs, et qui conduirait une partie des professeurs à réaliser des enseignements ayant une relation lointaine avec les instructions officielles. Afin de l'étayer, nous allons, dans la section suivante, nous appuyer sur une étude longitudinale portant tout à la fois sur l'évolution des curriculums, celle des déclarations des enseignants et celle des résultats des élèves.

Conclusion de la section

Après avoir mesuré, dans le domaine des fractions, des corrélations, d'une part, entre les performances des élèves et le contenu des injonctions ministérielles, et d'autre part, entre ces performances et les déclarations des professeurs, nous avons constaté que les secondes étaient plus fortes que les premières. Ce n'est pas surprenant : dans l'organisation de la

transposition didactique, la proximité est plus grande entre les élèves et les professeurs qu'entre les élèves et les programmes scolaires. Néanmoins, notre étude aura permis de montrer que, pour certains genres de tâches comme les conversions entre les notations fractionnaires et décimales, l'utilisation des déclarations des enseignants est indispensable pour expliquer les résultats des élèves. Par exemple, les instructions officielles laissaient présager une grande homogénéité des progressions relatives à l'enseignement des nombres décimaux au sein de notre corpus. Il a fallu analyser déclarations des professeurs pour comprendre que les faibles résultats obtenus par les élèves français et ontariens étaient probablement dûs à un déficit de l'enseignement effectif de cette notion. Par ailleurs, nous trouvons des pays où les professeurs indiquent un enseignement effectif et une forte confiance pour sa réalisation, et où les résultats obtenus par les élèves sont pourtant très faibles. Par exemple, en Corée du Sud, 92,7 % des enseignants précisent que les additions et comparaisons de fractions sont principalement étudiées en quatrième année ou avant, et 79,5 % s'estiment très bien préparés dans ce domaine. Toutefois, seuls 33,1 % des élèves réussissent l'item M0906, dans lequel il fallait additionner 1/2 et 3/10. Il existe donc probablement des variations, au sein de notre corpus, sur le point de savoir ce que recouvre chaque concept, en termes de types de tâches, de variables de la tâche, de techniques et de savoirs au sens strict. Cette variété des praxéologies attendues n'est sans doute pas la même partout, au-delà des programmes scolaires. Cela nous conduit à évoquer une nouvelle fois l'hypothèse d'une culture didactique qui les transcenderaient, et dont nous allons chercher à mettre au jour la nature et la portée.

Section II. Le rôle des enseignants établi selon une perspective diachronique

Nous avons supposé jusqu'ici que la transposition didactique s'opérait entre les programmes d'enseignement *en vigueur* et les types de tâches acquis par les élèves. Néanmoins, les sources des savoirs transposés par les enseignants sont plurielles et ne correspondent pas nécessairement au curriculum qui devrait être appliqué : les manuels scolaires utilisés dans les classes ne sont pas toujours actualisés, des enseignants utilisent probablement des ressources électroniques populaires mais non conformes aux injonctions ministérielles, ou s'appuient sur les mêmes supports pendant de nombreuses années sans se soucier des évolutions règlementaires, etc. En d'autres termes, nous faisons l'hypothèse qu'il existe une certaine

stabilité des pratiques enseignantes[1], dont l'ensemble constituerait la culture didactique d'un territoire donné et qui ne serait pas sans influence sur la relation que l'on a pu établir entre le contenu des instructions officielles et les résultats des élèves. Nous allons donc d'abord chercher à mettre au jour une certaine stabilité des déclarations des enseignants (sous-section I). Ensuite, pour caractériser l'obstacle constitué par le manque d'adhésion des professeurs à l'évolution des organisations mathématiques partielles établies par les programmes en amont de leur travail, nous allons comparer les évolutions respectives des injonctions ministérielles et des performances des élèves (sous-section II).

Sous-section I. L'évolution des déclarations des enseignants

Nous allons chercher à montrer qu'il existe une certaine stabilité des déclarations des professeurs indépendamment de l'évolution des programmes d'enseignement. Cela nous conduirait à mettre en évidence l'existence des pratiques enseignantes assez stables sur une période de douze ans (entre 2003 et 2015), et donc d'une culture professionnelle sur laquelle les instructions officielles auraient une influence restreinte. Par ailleurs, si cette hypothèse était étayée, nous pourrions observer une corrélation entre l'évolution de ces déclarations et celle des performances des élèves. Dans cette sous-section, nous étudierons donc successivement l'incidence des changements apportés aux programmes d'enseignement sur les déclarations des enseignants (§ 1), et l'incidence de ces dernières sur les résultats des élèves (§ 2).

§ 1. L'incidence des changements apportés aux programmes d'enseignement sur les déclarations des enseignants

Les déclarations des professeurs évoluent-elles lorsque le moment où sont principalement enseignées les notions se rapportant aux fractions change dans les programmes ? Pour apporter quelques éléments de réponse à cette question, nous avons mis en relation l'évolution des instructions officielles et l'évolution des réponses relatives au moment de l'apprentissage fournies par les enseignants dans le questionnaire TIMSS qui leur était destiné. Toutefois, les comparaisons sont rendues difficiles par le fait que les questions posées aux professeurs ne sont pas toujours les mêmes d'un test à l'autre. Nous allons donc d'abord définir

1. Sur la question de la stabilité des pratiques enseignantes, voir notamment les travaux de Roditi (2003) et Robert (2007).

comment nous avons mesuré l'évolution des déclarations des professeurs et mettre en évidence les tendances qui se dégagent de ces données (A), avant de confronter celles-ci aux changements apportés aux curriculums au fil des années (B).

A. Le recueil des déclarations des enseignants à propos du moment de l'enseignement effectif du concept de fraction par les auteurs de TIMSS

Pour illustrer les difficultés méthodologiques que recouvre la mise au jour de l'évolution des déclarations des enseignants à ce propos, nous prendrons pour exemple la question TIMSS relative au moment de l'enseignement du concept de fraction posée aux professeurs (annexes 324 à 327). En 2003, 2007 et 2015, celle-ci incluait les « fractions comme part d'un tout ou d'une collection » et le « placement sur une droite numérique ». En 2011, les auteurs ont inclus la comparaison et le rangement dans cet item du questionnaire, en plus des tâches que nous venons d'évoquer, ce qui implique que les professeurs devaient se prononcer en même temps sur le moment de l'enseignement du concept de fraction et sur celui de la comparaison de fractions[1]. Cette modification de la question TIMSS se ressent diversement sur les déclarations des professeurs dans les territoires sélectionnés pour notre étude longitudinale (l'Angleterre, Hong Kong SAR, l'Ontario, le Québec, Singapour et le Taipei chinois, c'est-à-dire les seuls au sein de notre corpus ayant participé à toutes les évaluations TIMSS depuis 2003). En Angleterre et à Hong Kong SAR, elles ne paraissent pas affectées par cette modification substantielle de la question : entre 2003 et 2015, le moment de l'enseignement du concept de fraction reste stable en Angleterre, tandis qu'il est progressivement plus précoce à Hong Kong SAR. En revanche, les déclarations des professeurs québecois, ontariens, singapouriens et du Taipei chinois semblent subir l'influence de ce changement de la question. Au Québec, on a l'impression que cette modification a tendance à retarder légèrement le moment de l'apprentissage du concept de fraction, qui pourtant a l'air de devenir plus précoce au fil des années. À Singapour et dans le Taipei chinois, c'est l'inverse : on dirait que le fait d'intégrer les comparaisons de fractions dans la question relative au moment de l'enseignement du

1. La question M07AC était ainsi rédigée : « à quel moment les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos du concept de fraction (fractions comme part d'un tout ou d'une collection, placement sur une droite numérique, comparaison et rangement de fractions) ». On peut la comparer, par exemple, à celle proposée en 2015 (M06AD) : « à quel moment les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos du concept de fraction (fractions comme part d'un tout ou d'une collection, placement sur une droite numérique) ».

concept de fraction conduit les professeurs à placer cet enseignement plus tôt en 2011. Malgré ces difficultés méthodologiques, il semble que, dans les six pays que nous avons sélectionnés, il existe des tendances différentes sur le point de savoir comment évoluent les déclarations des professeurs à propos du moment où le concept de fraction est principalement enseigné : cette évolution va dans le sens d'une plus grande précocité des enseignements au Québec, dans l'Ontario, et dans une moindre mesure à Hong Kong SAR (où l'enseignement est en moyenne antérieur à la quatrième année), dans le sens d'une certaine stabilité en Angleterre, à Singapour et dans le Taipei chinois (si l'on tient compte du fait que la baisse entre 2007 et 2011 et la hausse entre 2011 et 2015 sont dues, au moins en partie, à une modification substantielle de la question).

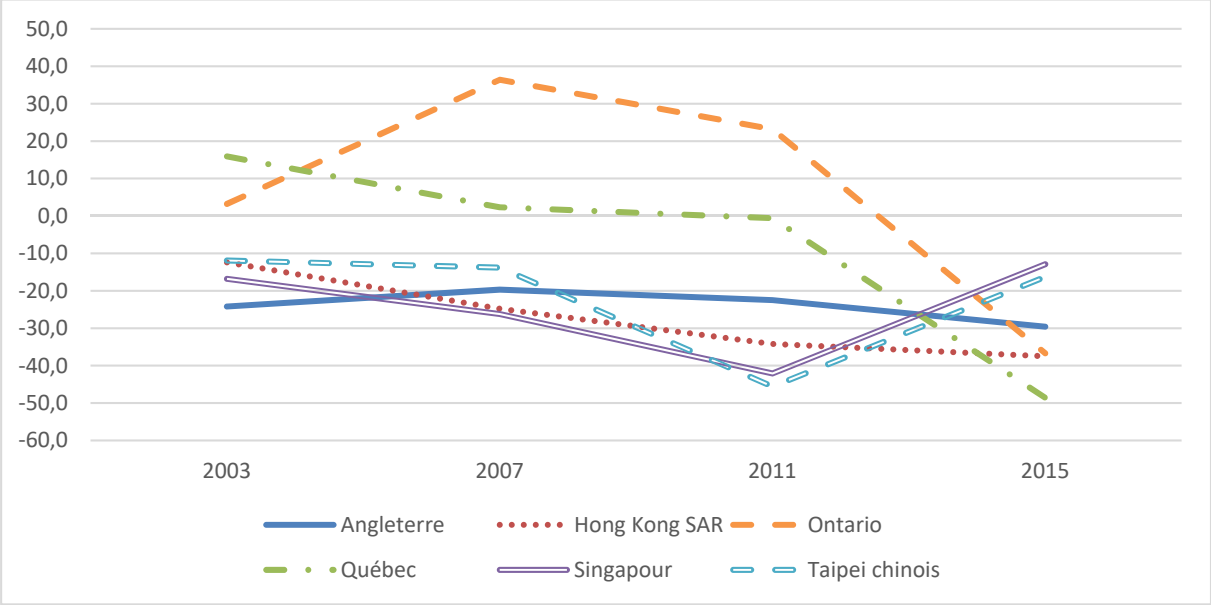


Figure 143. Évolution des déclarations des enseignants de quatrième année relative au moment de l'enseignement du concept de fraction (mesurée à travers l'indice M) entre 2003 et 2015

La question qui traite de l'addition et de la soustraction de fractions a quant à elle subi des modifications constantes depuis 2003 (annexes 328 à 331). Cette année-là, les professeurs devaient se prononcer sur le moment de l'enseignement des genres de tâches suivants : « addition et soustraction de fractions avec le même dénominateur ». En 2007, l'exigence d'identité des dénominateurs est supprimée, il s'agit alors d'effectuer ces opérations avec des « fractions simples ». En 2011, les restrictions relatives à la nature des fractions sont levées. Il s'agit alors d'additionner et de soustraire « avec des fractions ». En 2015, l'addition et la soustraction de fractions sont couplées avec la comparaison et le rangement dans une question unique. Or, les réponses des enseignants sont plutôt stables, comme le montre le graphique ci-contre. La variation de l'indice est faible chez les quatre participants, avec un écart-type entre

les données aux différents tests qui varie de 1,4 point d'indice pour Singapour à 7,6 points d'indice pour l'Angleterre. De plus, les variations les plus fortes sont enregistrées entre 2011 et 2015, pour l'Angleterre et le Québec. Or, il est possible d'attribuer cette baisse à la réunion dans la question de deux genres de tâches très différents (l'addition de fractions et la comparaison de fractions). En effet, les comparaisons sont prévues beaucoup plus tôt que les additions dans les programmes scolaires de ces deux participants, ce qui peut expliquer l'existence d'un indice plus bas, synonyme d'apprentissage plus précoce. Par ailleurs, on distingue bien dans le graphique les territoires occidentaux, dans lesquels l'apprentissage des fractions est plutôt postérieur à la quatrième année, et les territoires asiatiques, dans lesquels l'apprentissage des fractions est plutôt antérieur à la quatrième année. Enfin, entre 2003 et 2011, la formulation de la question relative aux additions de fractions a évolué dans le sens d'une plus grande imprécision, en passant des « fractions de même dénominateur » aux « fractions simples » puis aux « fractions ». Pourtant, cela ne semble pas influer sur les réponses données par les professeurs, ce qui nous interroge, dans la mesure où nous savons qu'il existe des différences entre les curriculums quant à la place de l'enseignement des additions de fractions de même dénominateur et de celui des additions de fractions de dénominateurs différents : les enseignants auraient-ils systématiquement répondu en se référant au type de tâches le plus simple ?

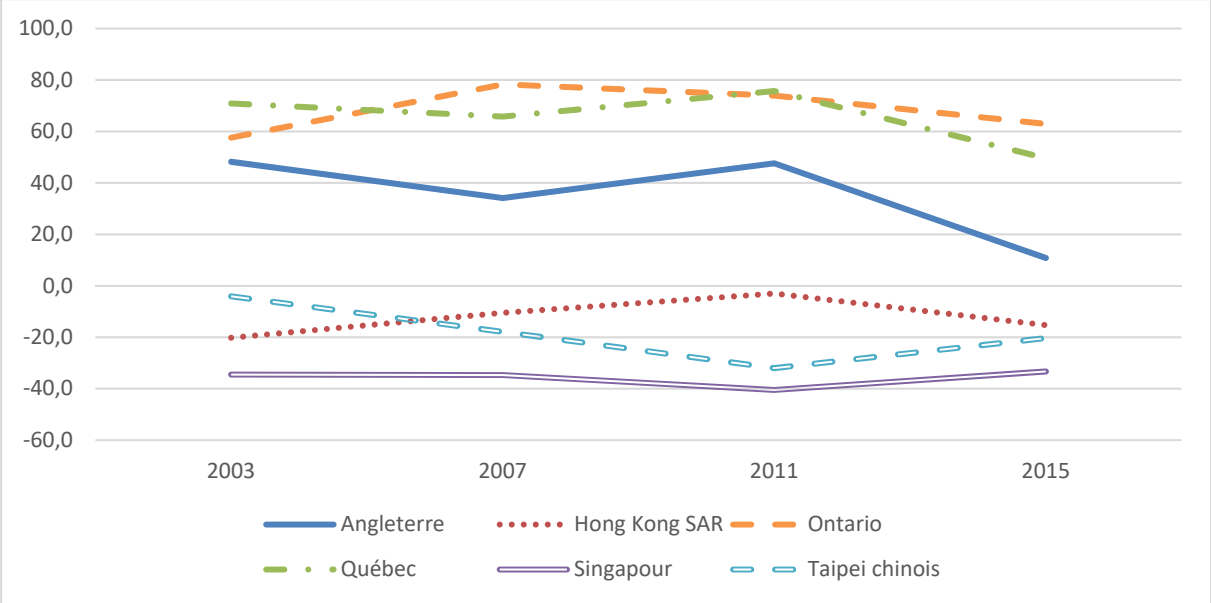


Figure 144. Évolution des déclarations des enseignants de quatrième année relative au moment de l'enseignement des additions de fractions (mesurée à travers l'indice M) entre 2003 et 2015

De la même façon, les questions relatives à l'enseignement des notations décimales ont plusieurs fois été modifiées (annexes 332 à 335). En 2003, elles apparaissaient dans une même

question avec les notations fractionnaires (« fractions ou décimaux représentés par des mots, nombres ou modèles »). En 2007, les deux thèmes font l'objet de questions séparées, et les modèles ne sont plus cités avec les mots et les nombres, pour la représentation des décimaux à l'aide d'écritures décimales (« valeur des décimales, y compris l'écriture des décimaux en utilisant des mots et des nombres » et « fractions représentées par des mots, nombres ou modèles »). En 2011, les activités de rangement sont adjointes à l'enseignement des notations décimales (« concept de nombre décimal, y compris la valeur des décimales et le rangement »). Enfin, en 2015, les auteurs y ont ajouté les tâches d'addition et de soustraction (« concept de nombre décimal, y compris la valeur des décimales, le rangement ainsi que l'addition et la soustraction avec des nombres décimaux »). Malgré les différences entre les questions, les déclarations des professeurs sont très stables en Angleterre et à Singapour, où il semble bien établi que les notations décimales sont principalement étudiées en quatrième année. En effet, quelle que soit l'année, le taux de professeurs singapouriens indiquant un enseignement principalement mené l'année du test est supérieur ou égal à 90 % (70 % en Angleterre, avec pour le reste une répartition équilibrée entre ceux qui pensent que cet enseignement se déroule au cours des années antérieures au test, et ceux qui estiment qu'il se déroule au cours des années postérieures au test). Avec des écarts un peu plus importants entre les tests, la tendance est similaire à Hong Kong SAR. En revanche, cet enseignement est de plus en plus précoce au Québec, pour arriver en 2015 à une large majorité d'enseignants estimant que l'apprentissage des nombres décimaux relève de la quatrième année (77,1 %, contre seulement 33 % en 2003). Pour autant, les programmes scolaires n'ont pas changé au Québec, ce qui nous conduit à formuler la question suivante : dans quelle mesure les modifications des instructions officielles expliquent-elles l'évolution des réponses des enseignants ?

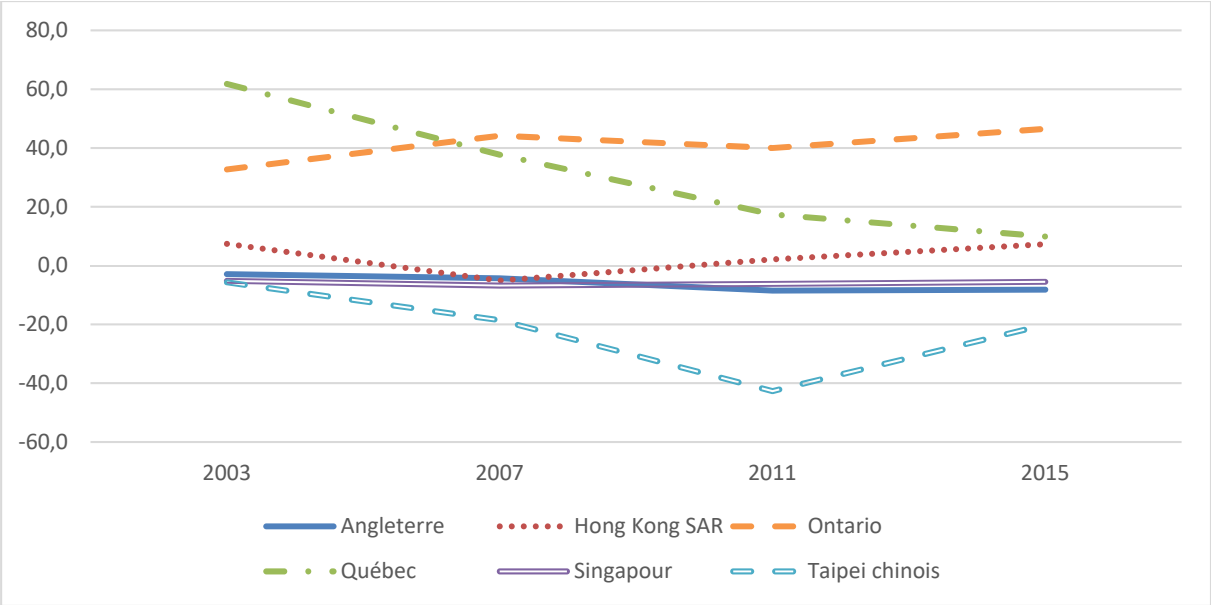


Figure 145. Évolution des déclarations des enseignants de quatrième année relative au moment de l'enseignement du concept de nombre décimal (mesurée à travers l'indice M) entre 2003 et 2015

B. L'incidence des modifications des instructions officielles sur cette évolution

Pour cette analyse, nous avons conservé uniquement les quatre participants pour lesquels nous disposons des instructions officielles en vigueur depuis 2003. La comparaison de l'évolution des prescriptions des programmes et de l'évolution des déclarations des enseignants quant au moment de l'enseignement des types de tâches ne se fera pas dans l'ordre alphabétique, mais selon un ordre qui nous permettra de faire apparaitre des contrastes entre les territoires (Québec, Angleterre, Singapour et Hong Kong SAR).

Le Québec est le participant dont les réponses des professeurs varient le plus d'une année sur l'autre, en ce qui concerne le moment de l'enseignement du concept de fraction (avec un écart-type de 12,2 points d'indice, alors qu'il est de 6,1 points d'indice en moyenne pour les quatre participants qui nous occupent) et celui de nombre décimal (avec un écart-type de 10 points d'indice, alors qu'il est de 3,5 points d'indice en moyenne). Pourtant, les programmes scolaires n'ont pas changé depuis 2001 : des progressions officielles ont été introduites en 2009, mais elles ne constituent qu'une interprétation d'un texte qui donne déjà des indications temporelles assez précises. D'ailleurs, leur introduction ne semble pas, sur le graphique, avoir eu une incidence sur les déclarations des enseignants, qui vont dans le sens d'une plus grande précocité depuis 2003. Il existe par exemple une répartition claire, établie par les programmes, à propos des nombres décimaux, depuis 2001. Au cours du deuxième cycle (troisième et quatrième année), les élèves doivent apprendre les « nombres décimaux jusqu'à l'ordre des

centièmes (dixième, centième) : lecture, écriture, représentations variées, ordre, expressions équivalentes, décomposition ». Au cours du troisième cycle (cinquième et sixième année), les élèves réalisent des types de tâches identiques avec les « nombres décimaux jusqu'à l'ordre des millièmes (dixième, centième, millième) » (*op. cit.*, 2001, p. 134), les progressions officielles reprenant cette formulation à l'identique. Or, en 2003, seuls 33 % des professeurs place principalement l'enseignement du concept de nombre décimal en quatrième année, tandis que 64,4 % pensent qu'il relève davantage des années postérieures. En 2015, 77,1 % des enseignants placent le concept de nombre décimal en quatrième année, contre seulement 16,4 % au cours des années postérieures.

En Angleterre, les tendances observées quant à l'évolution des réponses fournies par les enseignants sont très différentes de celles observées au Québec. Ainsi, il existe une grande stabilité de leurs déclarations sur le point de savoir à quel moment l'enseignement du concept de fraction a principalement lieu (avec un écart-type de 1,8 point d'indice, soit le plus faible du corpus), de même à propos de l'enseignement du concept de nombre décimal (avec un écart-type de 1,2 point d'indice, en dessous de la moyenne fixée à 3,5 points d'indice). Il est vrai que les programmes ont changé en 2006 puis en 2014, mais l'année au cours de laquelle débute l'apprentissage de ces notions n'a pas été modifiée. Pour prendre l'exemple des nombres décimaux, cet enseignement est toujours prévu en quatrième année, quand bien même la formulation des intitulés a légèrement évolué, avec la reconnaissance de l'équivalence entre les formes décimales et fractionnaires des centièmes dès leur enseignement initial à partir de 2006 (alors qu'auparavant ce type de tâches n'était requis qu'avec des dixièmes). Certes, la part des enseignants qui estiment que cette notion n'a pas encore été enseignée ou a été à peine introduite baisse entre 2003 et 2007, passant de 11,4 % à 6,1 %. Cependant, il est difficile de faire le lien avec l'évolution de l'élément des programmes que nous venons d'évoquer : le concept de nombre décimal comprend d'autres types de tâches que le passage des fractions aux écritures décimales, et ceux-ci ne rentrent pas dans le champ de notre étude. La question de l'évolution des déclarations des professeurs à propos de l'addition de fractions est plus riche d'enseignement. En effet, c'est le thème pour lequel les réponses apportées par les professeurs ont le plus varié (avec un écart-type de 7,6 points d'indice, soit le plus élevé parmi les quatre participants que nous étudions dans ce paragraphe). Ainsi, en 1999, l'addition de fractions n'apparait dans les programmes qu'en septième année. En 2006, l'étude de l'addition de fractions de dénominateurs différents continue d'être étudié dans l'enseignement secondaire. À partir de 2014, l'apprentissage de ces types de tâches se fait beaucoup plus progressivement :

les troisième et quatrième années sont l'occasion d'apprendre à additionner des fractions de même dénominateur, tandis que l'addition de fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre apparait dans les programmes de cinquième année. Enfin, l'étude des additions de fractions de dénominateurs différents, sans restriction liées aux dénominateurs, est avancée en sixième année. D'après le curriculum, ce thème fait donc l'objet, très récemment, d'un enseignement plus précoce (les nouveaux programmes étaient en vigueur depuis moins d'un an au moment des évaluations TIMSS). Or, la part des enseignants indiquant un apprentissage au cours des années postérieures à celle du test a fortement diminué entre 2011 et 2015, passant de 50,8 % à 17,5 %. Toutefois, comme les auteurs intègrent, dans les dernières évaluations, les notions de rangement et de comparaison dans la question relative à l'addition de fractions, on ne peut pas savoir si cette transformation de la structure des réponses des professeurs est due à la modification des progressions curriculaires, ou à la modification de la question TIMSS.

À Singapour, le type de tâches consistant à « additionner et soustraire des fractions de même dénominateur et des fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre » est présente dans les instructions officielles de 2001 comme dans celles de 2006. Toutefois, ces derniers comportent deux nouveautés relatives à l'addition de fractions : dès la deuxième année, il est prévu d'apprendre à « additionner et soustraire des fractions de même dénominateur à l'intérieur d'un entier » ; en troisième année, il est prévu d'apprendre à « additionner et soustraire deux fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre à l'intérieur de l'entier ». En d'autres termes, ce qui est vu en quatrième année fait l'objet d'un apprentissage initial portant sur les fractions inférieures à 1 au cours des deux années précédant celle du test, et l'on déduit de l'absence de restriction relative à la nature des fractions utilisées que les élèves vont travailler avec des fractions supérieures à un l'année du test. Or, la part des enseignants qui pensent que ce thème est principalement enseigné avant la quatrième année évolue peu, passant de 34,5 % en 2003, à 34,7 % en 2007, à 40,5 % en 2011 puis à 33,3 % en 2015 (alors que les additions de fractions font l'objet d'une question unique avec les comparaisons et le rangement). La modification des programmes d'enseignement n'a semble-t-il pas eu pour effet de transformer profondément l'idée que se font les professeurs du moment où l'étude de cette notion est proposée aux élèves. Peut-être que le législateur, en proposant un apprentissage plus progressif, n'a fait qu'intégrer dans les programmes une pratique ayant déjà cours auparavant, d'où cette relative stabilité de leurs déclarations. Toutefois, il faut tenir compte également de la possibilité que les professeurs

n'aient pas pris acte des modifications apportées aux programmes d'enseignement en 2006, et continuent d'utiliser les progressions qui avaient cours précédemment.

Les réponses fournies par les professeurs de Hong Kong SAR constituent un point de comparaison intéressant, puisqu'à programmes constants à propos de l'addition de fractions, la variabilité est plus forte dans ce territoire qu'à Singapour (avec un écart-type de 3,2 points d'indice pour le premier, contre 1,4 pour le second). D'ailleurs, si l'on traite uniquement la période entre 2003 et 2011 (la question posée en 2015 mélangeant deux genres de tâches fort différents), on perçoit une diminution progressive de la part occupée par les professeurs indiquant un enseignement principalement mené au cours des années antérieures au test, passant de 23,3 % en 2003, à 12,8 % en 2007 puis à 9,4 % en 2011. Les enseignants indiquent donc plus fréquemment que les additions de fractions sont étudiées au plus tard l'année du test. De même, en ce qui concerne la construction du concept de fraction, l'enseignement est mené progressivement plus précocément. En effet, la part occupée par les professeurs indiquant un enseignement principalement mené au cours des années antérieures au test augmente depuis 2003, passant de 17,5 % cette année-là à 26,5 % en 2007, puis à 34,9 % en 2011 pour atteindre 42,7 % en 2015. Si l'évolution des réponses des enseignants est moins brutale qu'au Québec, elle posséde toutefois des caractéristiques semblables : on retrouve une constance dans les tendances au fil des années, dans le sens d'une plus grande précocité des apprentissages. Comme les instructions officielles n'ont pas changé dans ces deux territoires, la question de l'origine de ces évolutions se pose.

Une possibilité que nous envisageons est l'intégration très lente de la progression prévue par les instructions officielles dans les pratiques enseignantes. Le temps que les personnels soient formés, que les manuels changent et que la mise en œuvre des nouvelles directives atteigne progressivement tous les étages de la scolarité, ce peut être très long, et sans nul doute dépasser une décennie. Cela expliquerait pourquoi l'incidence des modifications de programmes est si faible en Angleterre et à Singapour. Néanmoins, l'évolution des déclarations des enseignants constatée au Québec et Hong Kong SAR ne traduit pas, progressivement, une plus grande adhésion des professeurs aux instructions officielles (l'enseignement des différents types de tâches s'étalant sur plusieurs années, toutes les réponses des professeurs pouvaient être considérées comme conformes aux programmes). De plus, dans les quatre pays étudiés, la variation des déclarations des enseignants est plus forte chez les participants ayant des programmes constants, que chez ceux ayant imposé des modifications de leur curriculum.

§ 2. L'incidence de l'évolution des déclarations des enseignants sur les résultats des élèves

Les déclarations des enseignants à propos du moment de l'enseignement des notions relatives aux fractions sont assez stables au sein du corpus, mais dans certains pays et pour certains types de tâches, elles sont susceptibles d'évoluer assez notablement, souvent dans le sens d'un enseignement plus précoce, sans que nous ayons pu identifier un lien avec un changement dans les programmes scolaires. Pour autant, cette évolution est-elle corrélée à celle des performances des élèves ? Par ailleurs, nous avons déjà vu que le niveau de préparation déclaré des enseignants n'était pas lié, d'une façon générale, aux scores des élèves : c'est compréhensible, dans la mesure où la notion de préparation a un caractère subjectif et que les participants que nous étudions sont très éloignés géographiquement et culturellement. Toutefois, lorsque la confiance des enseignants sur ce point augmente au sein d'un même territoire, les élèves se montrent-ils plus performants ? Nous étudierons donc successivement la relation entre l'évolution des déclarations des enseignants à propos du moment de l'enseignement des fractions et celle des résultats des élèves (A), et la relation entre l'évolution des déclarations des enseignants à propos du niveau de préparation qu'ils expriment pour l'enseignement des fractions et celle des résultats des élèves (B).

A. À propos du moment de l'enseignement des fractions

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, le concept de fraction est enseigné de plus en plus précocément au Québec. Les résultats des élèves dans le domaine des fractions sont-ils meilleurs pour autant ? Pour réaliser une analyse qui soit la plus précise possible, nous avons éliminé les données provenant des évaluations TIMSS 2011 (cette année-là, le concept de fraction et les tâches de comparaison ont fait l'objet d'une seule et même question). Nous constatons, notamment, que les données relevées au Québec suggèrent l'existence d'un lien entre le fait d'abaisser l'âge auquel le concept de fraction est enseigné et les performances des élèves dans le domaine des fractions. Entre 2007 et 2015, la part des professeurs estimant que cette notion est principalement enseignée avant l'année du test est passée de 8,4 % à 52,5 %. Dans le même temps, le taux de réussite des élèves aux items impliquant des fractions a augmenté de 10,5 points de pourcentage, passant de 46,3 % à 56,8 %. À Hong Kong SAR, l'abaissement de l'âge moyen est presque parfaitement corrélé

linéairement à l'augmentation des résultats (avec $R^2 \approx 1$). L'indice M[1] indiquant le moment où le concept est principalement enseigné par rapport à la quatrième année est ainsi passé de − 6,2 en 2003, à − 12,4 en 2007 puis à − 18,8 en 2015, montrant un apprentissage de plus en plus précoce. Parallèlement, le taux de réussite des élèves dans le domaine des fractions est passé de 67,5 % en 2003, à 75,9 % en 2007 puis à 83 % en 2015.

Toutefois, l'abaissement de l'âge auquel le concept de fraction est enseigné n'est pas indéfectiblement lié à un meilleur taux de réussite. Comme au Québec, ce moment est devenu progressivement et nettement plus précoce en Ontario. L'indice M le mesurant est passé de 18,2 (indiquant un apprentissage plutôt postérieur à la quatrième année) en 2007 à − 18,4 (indiquant un apprentissage plutôt antérieur à la quatrième année) en 2015. Pourtant, les performances des élèves ontariens dans le domaine des fractions sont restées à la fois basses et assez stables, avec un taux de réussite de 44,6 % en 2015 contre 42,8 % en 2007. À l'inverse, dans le Taipei chinois, l'augmentation du score obtenu par les élèves dans le domaine des fractions a été très importante, passant de 57,3 % de réussite en 2003, à 60,7 % en 2007 puis à 71,6 % en 2015. Là encore, la corrélation avec l'abaissement de l'âge auquel est enseignée la notion est très forte ($R^2 = 0,95$). Pourtant, cet abaissement a été très limité, passant de − 6 en 2003, à − 6,9 en 2007 puis à − 8,2 en 2015. On constate donc qu'il est possible de progresser très peu en avançant très nettement le moment de l'enseignement, et de progresser très fortement en avançant très peu le moment de l'enseignement. Il est vrai qu'avancer ce moment n'implique pas un apprentissage de types de tâches divers. Or, la variété des tâches abordées semble nécessaire pour réaliser des performances élevées. Si le pourcentage de réussite dans le domaine des fractions n'augmente pas ou augmente peu, les élèves progressent-ils au moins sur des types de tâches fondamentaux, comme celle consistant à se montrer capable d'associer une fraction et un dessin ?

Nous avons comparé l'évolution du moment de l'enseignement à l'évolution des résultats pour un item mettant en jeu ce genre de tâches. La tâche permettant cette comparaison et soumise aux élèves en 2003 et 2015 était la suivante[2] : ils devaient identifier, parmi plusieurs figures, celle qui représentait une fraction propre non-unitaire. Certes, les deux exercices présentaient quelques différences : dans un cas, il fallait identifier la fraction 2/3 et les choix possibles étaient au nombre de cinq, tandis que dans l'autre, il fallait identifier la fraction 3/4

1. La méthode de calcul de cet indice synthétique est exposée p. 543-544.

2. Il s'agissait des items M0103 en 2003 et M1302 en 2015.

et les choix possibles étaient au nombre de quatre. Cependant, ils présentaient les points communs, outre le fait de se rapporter au même type de tâches, de mettre en jeu des figures limitées au carré, et de proposer des distracteurs similaires (notamment une figure avec des parts non égales, et une figure dans laquelle le rapport des parts coloriées et des parts non coloriées est égal au rapport du numérateur et du dénominateur). La corrélation entre l'évolution des résultats et celle des déclarations des professeurs est moyenne, avec $R^2 = 0,43$. Certes, le Québec est à la fois le participant dont les performances se sont le plus améliorées en valeur absolue (avec 18,2 points de pourcentage supplémentaires en 2015 par rapport à 2003) et le participant chez lequel l'âge d'enseignement du concept de fraction s'est le plus abaissé (avec un indice mesurant le moment de l'apprentissage par rapport à la quatrième année de 32,3 points inférieur en 2015 par rapport à 2003). Toutefois, l'évolution des résultats est très similaire en Angleterre : dans ce pays, le taux de réussite en 2003 était de 67,5 % (contre 68,5 % au Québec) et de 83,6 % en 2015 (contre 85,6 % au Québec). Pourtant, dans ce pays, l'âge auquel le concept de fraction est enseigné n'a pas beaucoup changé à douze ans d'intervalle, puisque l'indice le mesurant est passé de − 12,1 à − 14,8, soit une baisse de seulement 2,7 points d'indice. Cette constatation nous parait cohérente avec l'idée que nous avons mise en avant précédemment selon laquelle les résultats obtenus dans ce domaine ne dépendent pas seulement d'un enseignement effectif de la notion, mais également d'autres facteurs, par exemple la diversité des variables didactiques et des techniques appréhendées par les élèves.

Pour mesurer l'évolution des résultats à propos des additions et soustractions de fractions, nous sommes appuyés sur un exercice dans lequel il était demandé aux élèves de calculer la différence entre 4/5 et 1/5, puis d'identifier la bonne réponse parmi quatre suggestions. Cette tâche a été proposée dans des termes identiques dans les évaluations TIMSS 2003 et TIMSS 2007[1]. L'évolution des taux de réussite comme des déclarations des professeurs est plus faible que celle mesurée pour le concept de fraction. Néanmoins, des tendances assez nettes se font jour. Ainsi, Hong Kong SAR et l'Ontario sont à la fois les deux seuls participants dans lesquels l'âge d'enseignement de la notion a été relevé, et les deux seuls participants dans lesquels les performances des élèves ont diminué. C'est particulièrement marquant dans l'Ontario, où, en quatre ans, l'indice M mesurant le moment de l'enseignement des additions et soutractions a augmenté de 10,4 points, tandis que le taux de réussite des élèves a baissé 10,9

1. Il s'agissait des items M0801 en 2003 et M0701 en 2007.

points de pourcentage. Dans tous les autres pays de notre corpus, le moment de cet enseignement a été avancé, et les résultats sont soit stables, soit en hausse. Lorsqu'on cherche une corrélation entre les deux séries de données, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est élevé. Toutefois, il l'est moins lorsqu'on utilise l'évolution du moment de l'enseignement mesuré de façon synthétique ($R^2 = 0,62$), que lorsqu'on utilise l'évolution de la part des professeurs qui indiquent un apprentissage de la notion au plus tard en quatrième année ($R^2 = 0,83$). Or, cette remarque n'est pas valable pour le concept de fraction, ce qui montre que pour des types de tâches simples, l'effectivité de l'enseignement reste le critère principal de la réussite.

En ce qui concerne l'enseignement de la relation entre les fractions et les écritures décimales, nous nous sommes appuyé sur les items M0108 de 2003 (pour lequel il fallait trouver, parmi quatre possibilités, le nombre décimal correspondant à 7/10) et M1102 de 2015 (pour lequel il fallait trouver, parmi quatre possibilités, la fraction correspondant à 0,4). Nous avons comparé l'évolution des résultats à ces items à l'évolution des déclarations des professeurs sur le moment de l'apprentissage initial des nombres décimaux. Nous avons indiqué précédemment dans cette thèse[1] que la France et l'Ontario étaient, dans les évaluations TIMSS 2015, à la fois les participants qui obtenaient les scores les plus faibles à l'item M1102, et ceux dans lesquels la part des professeurs indiquant un enseignement des nombres décimaux postérieur à la quatrième année était la plus élevée. Une diminution de cette part, conduisant à une augmentation du nombre d'élèves ayant reçu un enseignement effectif au sujet des nombres décimaux au moment du test, est-elle de nature à améliorer les performances des élèves ? L'exemple du Québec est éclairant sur ce point, puique la part des professeurs indiquant un enseignement des nombres décimaux postérieur à la quatrième année est passée de 64,4 % en 2003 à 16,4 % en 2015. Dans le même temps, la part des professeurs indiquant un enseignement des nombres décimaux l'année du test est passée de 33 % à 77,1 %. Pourtant, si les résultats des élèves québécois dans ce domaine se sont améliorés, ce n'est que dans une faible proportion, passant de 25,6 % de réussite en 2003 à 38,4 % en 2015. À l'inverse, les élèves de Hong Kong SAR ont beaucoup amélioré des scores déjà élevés, passant de 77,7 % de réussite en 2003 à 92,5 % en 2015, avec une part d'enseignants indiquant un apprentissage postérieur à la quatrième année assez stable (ce taux est passé de 18,3 % à 16,4 %, c'est-à-dire exactement le

1. Voir p. 542.

même qu'au Québec). Quant aux élèves de l'Ontario, leurs résultats ont baissé, passant de 46,8 % de réussite en 2003 à 26,1 % en 2015. Cela est sans doute à mettre en relation avec le fait que la part des professeurs indiquant un enseignement des nombres décimaux postérieur à la quatrième année a assez largement augmenté, passant de 38,8 % à 51,2 %. Ces constatations montrent que l'effectivité de l'enseignement des notations décimales est sans doute à la fois nécessaire et insuffisante pour que les élèves obtiennent des scores plus élevés aux items correspondants dans les évaluations TIMSS, cette notion étant complexe et mettant en jeu des organisations mathématiques très variées.

B. À propos de leur niveau de préparation déclaré pour l'enseignement des fractions

Le niveau de préparation exprimé par les professeurs est un facteur que nous avons déjà étudié selon une perspective synchronique. En mesurant son évolution, nous n'allons pas réaliser de comparaison inter-pays, mais plutôt observer si une hausse ou une baisse de la confiance dans le temps est corrélée à l'évolution des résultats de chacun des participants, ce qui permettra de limiter l'incidence des aspects culturels sur les observations qui pourront être réalisées. Depuis 2003, les professeurs sont interrogés sur leur niveau de préparation pour l'enseignement du concept de fraction dans des termes qui sont assez similaires (en Angleterre, les données ne sont disponibles qu'à partir de 2007). À partir de l'indice P, estimant globalement la confiance exprimée par les enseignants pour une notion en particulier et calculé tel que nous l'avons décrit précédemment[1], nous avons construit un graphique montrant son évolution jusqu'en 2015.

1. Voir p. 548-549.

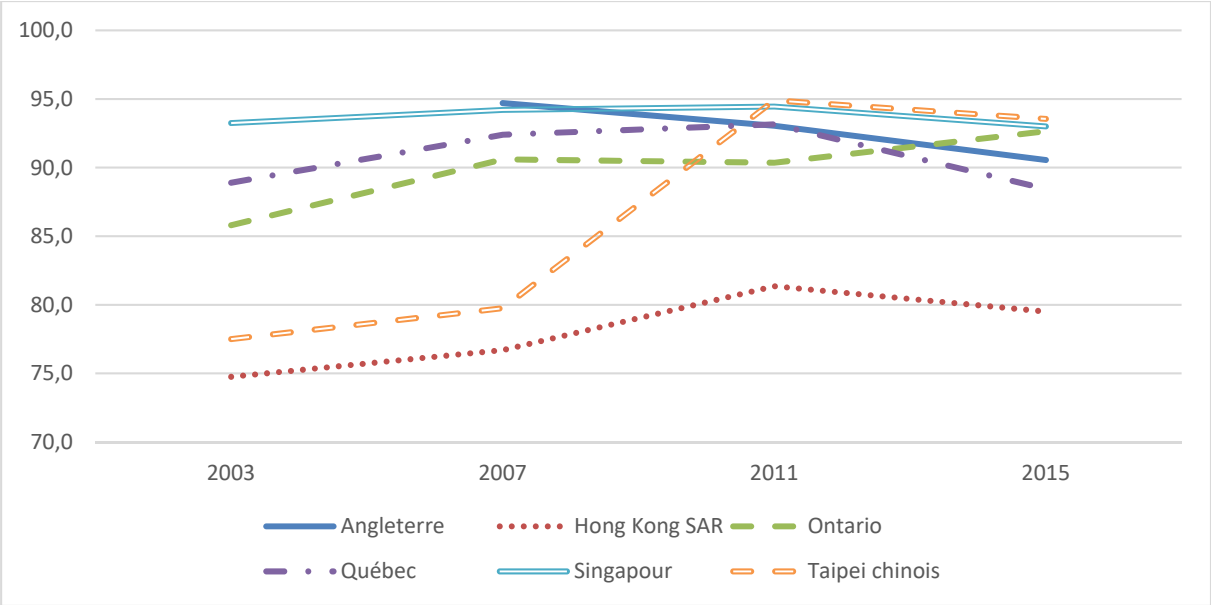


Figure 146. Évolution, entre 2003 et 2015, du niveau de préparation exprimé par les enseignants de quatrième année pour enseigner le concept de fractions (d'après l'indice P).

Cela permet d'observer que cette confiance est assez stable dans la plupart des pays. Toutefois, dans deux territoires (Hong Kong SAR et le Taipei chinois), la confiance des professeurs pour l'enseignement du concept de fraction a beaucoup augmenté entre 2007 et 2011. À Hong Kong SAR, la part des professeurs qui s'estiment très bien préparés est passée au cours de la période de 54,6 % à 72,7 % (elle reste en retrait par rapport à la moyenne du corpus), tandis que dans le Taipei chinois, elle est passée de 59,5 % à 90,5 % (pour être en 2015 très supérieure à cette moyenne). Pour autant, les performances des élèves dans ce domaine sont-elles meilleures ? Pour le Taipei chinois, la réponse est positive. Le taux de réussite moyen des élèves est supérieur de 7,1 points de pourcentage en 2011 par rapport à 2007, soit une augmentation plus de deux fois supérieure à celle mesurée en moyenne entre 2003 et 2007, et près de deux fois supérieure à celle mesurée en moyenne entre 2011 et 2015. Lorsqu'on cherche une corrélation entre les deux séries de données pour ce participant, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est très élevé ($R^2 = 0,93$) et la pente est positive, ce qui tend à montrer que plus la confiance augmente, plus les résultats sont bons. À l'inverse, le taux de réussite moyen des élèves hongkongais dans le domaine des fractions a baissé entre 2007 et 2011, malgré un niveau de préparation déclaré plus grand des enseignants. Par ailleurs, l'augmentation la plus forte de ce taux de réussite moyen a lieu entre 2011 et 2015 (11,3 points de pourcentage en plus), alors même que dans les dernières évaluations, le niveau de préparation déclaré a baissé. En outre, si la pente est positive, le coefficient de détermination de Bravais-Pearson est assez faible ($R^2 = 0,25$). Chez certains participants, cette pente est même négative, par exemple au Québec : les résultats des élèves baissent malgré une confiance accrue des

professeurs quant à leur niveau de préparation pour l'enseignement des fractions. Dans l'Ontario, le moment de l'enseignement a été nettement avancé et cette confiance a également augmenté. Pourtant, les performances des élèves sont moindres en 2015 par rapport à 2003. Il y a donc sans doute, dans le Taipei chinois, d'autres facteurs qui expliquent l'amélioration des performances des élèves, et qui ne semblent pas tenir au moment de l'enseignement, qui est plutôt stable entre 2003 et 2015. D'une façon générale, nous n'avons donc pas pu identifier de relation entre le niveau de préparation exprimé par les enseignants et les performances des élèves.

Certes, les questionnaires sont différents, mais même lorsqu'on s'intéresse à l'évolution des résultats pour un item en particulier, les conclusions sont assez similaires : le niveau de préparation déclaré va parfois de pair avec les performances, mais ce n'est pas systématique. Pour le montrer, nous avons réalisé une analyse en nous appuyant sur deux items comparables soumis aux élèves en 2003 et 2015 et portant sur la compréhension du concept de fraction. Il s'agit respectivement des items M0103 et M1302 que nous avons analysés précédemment. Le coefficient de corrélation linéaire est sans commune mesure quand on tient compte du niveau de préparation déclaré des professeurs plutôt que d'utiliser le moment de l'apprentissage effectif pour les relier aux résultats des élèves ($R^2 = 0,08$ pour le niveau de préparation, contre $R^2 = 0,91$ pour le moment de l'apprentissage, si l'on ne tient pas compte des données relatives à l'Angleterre, indisponibles pour la mesure du niveau de préparation). Ainsi, les élèves de l'Ontario et du Québec réalisaient des performances similaires en 2003 (avec un taux de réussite de 68,5 % pour les premiers, contre 67,4 % pour les seconds). En 2015, ce sont les élèves du Québec qui obtiennent le score le plus élevé par rapport à l'Ontario (avec 85,6 % de réussite, contre 78,3 % pour ces derniers). Or, la confiance des professeurs quant à leur niveau de préparation pour l'enseignement du concept de fraction a davantage augmenté en Ontario (7,4 points d'indice) qu'au Québec (1 point d'indice). De même, les résultats des élèves de Hong Kong SAR ont augmenté plus fortement (11,3 points de pourcentage) que les résultats des élèves du Taipei chinois (6,1 points de pourcentage). Pourtant, l'augmentation du niveau de préparation déclaré a été moindre à Hong Kong SAR (13,9 points) que dans le Taipei chinois (19 points). La question de l'enseignement effectif de la notion de fraction semble donc avoir une incidence bien plus forte sur les performances que celle de la confiance des professeurs dans leurs capacités à transmettre des savoirs relatifs au concept de fraction.

En outre, les déclarations des enseignants à propos de leur niveau de préparation sont plus stables que celles relatives au moment où une notion est effectivement enseignée. Nous avons calculé, pour chaque pays, l'écart-type entre les indices obtenus en 2003, 2007 et 2015 pour les premières et pour les secondes (le test de 2011 n'a pas été pris en compte dans cette analyse, car cette année-là, les mesures relatives au concept de fraction ont été mélangées avec les mesures relatives à la comparaison et au rangement). Nous avons ensuite comparé ces écarts-types, pour savoir ces derniers étaient plus forts lorsqu'on prenait en compte le niveau de préparation, ou lorsqu'on prenait en compte le moment de l'enseignement. Pour donner un exemple, au Québec, l'indice de confiance P (compris entre entre 0 et 100) était de 38,9 en 2003, de 43,2 en 2007 et de 39,3 en 2015, soit un écart-type de 1,9 point d'indice. En ce qui concerne le moment principal de l'enseignement, l'indice M (lui aussi compris entre entre 0 et 100) le mesurant par rapport à la quatrième année était de 8 en 2003, de 1,2 en 2007 et de – 24,3 en 2015, soit un écart-type de 13,9 points d'indice. Les déclarations des professeurs québécois concernant leur niveau de préparation sont donc plus stables que celles concernant le moment de l'enseignement. Si cela est vrai pour le Québec, d'une façon générale nous constatons que la moyenne des écarts-types des six participants de notre corpus est plus élevée à propos du moment de l'enseignement (avec une moyenne des écarts-types de 6,6 points d'indice) qu'à propos du niveau de préparation (avec une moyenne des écarts-types de 3,2 points d'indice). D'ailleurs, cet écart est principalement dû au Québec et à l'Ontario, chez qui le moment de l'enseignement a énormément varié. En ce qui concerne le niveau de préparation des enseignants, l'écart-type est assez fort dans le Taipei chinois (avec un écart-type de 7,8 points d'indice) et, dans une moindre mesure, à Hong Kong SAR (avec un écart-type de 4,3 points d'indice). Pour le reste, les valeurs sont plutôt basses et assez comparables, qu'il s'agisse de l'évolution du moment effectif de l'apprentissage ou de l'évolution du niveau de préparation déclaré des professeurs. Ainsi, par exemple, à Singapour, l'écart-type pour les données mesurant le niveau de préparation est de 0,5 point d'indice, tandis que celui mesuré à propos du moment de l'enseignement est de 2,8 points d'indice. Dans l'ensemble, les déclarations des enseignants sont donc assez stables d'une année sur l'autre, même s'il peut y avoir dans des cas isolés des évolutions fortes, en particulier en ce qui concerne le moment de l'enseignement du concept de fraction par rapport à la quatrième année. En outre, les raisons de ces variations ne semblent pas dues, dans la plupart des cas, à des changements de programmes d'enseignement.

Conclusion de la sous-section

Il n'est pas vraiment surprenant que l'évolution de la confiance exprimée par les enseignants à propos de leur niveau de préparation pour l'enseignement du concept de fraction ne soit pas corrélée aux performances des élèves : son augmentation peut être le signe d'une amélioration de l'efficacité des enseignants comme d'une baisse des exigences conduisant à remplir plus facilement les objectifs relatifs aux apprentissages des élèves. C'est sans doute l'une des raisons pour lesquelles les résultats que nous avons mis au jour sont si contrastés (avec une forte corrélation entre les résultats et le niveau de préparation exprimé par les professeurs en Corée du Sud, et une relation qui semble inverse en Ontario). Surtout, l'analyse de ces données est détachée de tout rapport avec la variété des praxéologies scolaires étudiées par les élèves, qui forment, selon notre hypothèse, la condition des scores élevés relevés dans les pays les plus performants. Cela expliquerait notamment que l'évolution des déclarations relatives au moment de l'enseignement soit davantage corrélée aux résultats des élèves. Toutefois, nous avons montré qu'un enseignement effectif plus important était certes nécessaire pour que les scores soient plus élevés, mais insuffisant : nous pensons en particulier au Québec, puisque dans cette province, le pourcentage de professeurs indiquant un enseignement au plus tard en quatrième année du concept de nombre décimal a fortement augmenté entre 2003 et 2015 (+ 48 points de pourcentage), tandis que la hausse du taux de réussite des élèves à un item similaire et portant sur la relation entre les notations fractionnaires et décimales a été modeste (+ 12,8 points de pourcentage). Par ailleurs, l'évolution des déclarations des professeurs parait assez détachée, globalement, de l'évolution des programmes d'enseignement (par exemple, l'évolution que nous venons de décrire au Québec a eu lieu dans le cadre d'un curriculum inchangé depuis 2001). Ces observations portent sur des genres de tâches qui sont rédigés de façon très imprécise par les auteurs de TIMSS, avec des formulations qui changent au fil des années, ce qui nous incite à étudier de façon directe l'influence que peuvent avoir les instructions officielles sur les acquis des élèves : de nouvelles indications du législateur modifiant un fragment praxéologique (type de tâches ou technique) entrainent-elles une modification du taux de réussite des élèves ?

Sous-section II. L'incidence des changements de curriculum

Les programmes d'enseignement sont modifiés ponctuellement ou régulièrement (selon les pays) par le législateur, par exemple dans le but d'adapter leur contenu aux évolutions de la société, ou dans l'objectif d'améliorer l'efficacité de l'enseignement sur un ou plusieurs points

précis. Une telle ambition nécessite que les professeurs s'approprient le nouveau texte et mettent en œuvre ces changements. Or, cette concrétisation des évolutions règlementaires ne va pas de soi : peut-être certains enseignants n'adhèrent-ils pas aux changements imposés, tandis que d'autres ne prendraient pas la mesure des modifications à apporter à leur pratique, soit en raison d'une connaissance insuffisamment approfondie du nouveau curriculum, soit parce qu'ils ne disposent pas des moyens qui permettraient leur mise en œuvre. Nous allons donc, dans un premier temps, chercher à estimer l'incidence des changements curriculaires sur les performances des élèves (§ 1) Nous évoquerons, dans un second temps, l'évolution contemporaine des instructions officielles au sein de notre corpus, afin de comprendre, à l'aune des conclusions que nous aurons mises en lumière, l'influence qu'elles pourront avoir sur les résultats futurs des élèves aux évaluations TIMSS (§ 2).

§ 1. L'incidence des modifications des programmes sur les résultats des élèves

Dans ce paragraphe, nous avons comparé les évolutions des instructions officielles et des résultats de quatre participants (ceux pour lesquels nous disposons d'instructions officielles anciennes, remontant au début des années 2000) : Angleterre, Hong Kong SAR, Québec et Singapour. Deux comparaisons inter-pays pourront s'avérer particulièrement fructueuses. D'une part, les élèves de Singapour et de Hong Kong SAR ont une maitrise des fractions similaire (82,9 % de réussite pour les premiers, contre 83 % pour les seconds aux évaluations TIMSS 2015), alors que les programmes scolaires de Singapour ont été modifiés au cours de la période, et que ceux de Hong Kong SAR sont restés stables. D'autre part, les élèves anglais et québécois ont une maitrise des fractions similaire (55,2 % de réussite pour les premiers, contre 56,8 % pour les seconds), alors que les programmes scolaires de l'Angleterre ont changé deux fois au cours de la période, et que ceux du Québec sont restés stables. Nous allons chercher à savoir si les changements apportés au curriculum ont pu entrainer une modification des performances des élèves (A), puis nous allons comparer l'évolution de ces résultats à celle des participants pour lesquels les instructions officielles n'ont pas été modifiées (B).

A. La relation entre les changements curriculaires et l'évolution des performances

Les observations que nous avons proposées jusqu'ici tendent à montrer que le contenu des programmes scolaires est important pour que les élèves obtiennent des scores élevés aux évaluations TIMSS, puisque nous avons établi que la présence ou non d'un type de tâches dans le curriculum était susceptible de faire une différence notable en termes de résultats, comme

nous l'avons vu en comparant les instructions officielles et les taux de réussite de Singapour et de Hong Kong à propos de l'addition de fractions. Toutefois, s'agit-il spécifiquement d'un effet des programmes d'enseignement, ou plus largement d'une appréhension d'un certain nombre de types de tâches par le système éducatif ? Nous allons aborder cette question selon deux approches complémentaires : d'une part, en recherchant l'incidence qu'ont pu avoir des changements importants dans le curriculum au sujet de l'enseignement des fractions, et d'autre part, en observant l'évolution des scores lorsque des éléments très précis des programmes ont été modifiés (des types de tâches ou des techniques en particulier).

Le score des élèves anglais aux évaluations TIMSS dans le domaine des fractions s'est nettement amélioré entre 1995 et 2011, le taux de réussite passant de 47,9 % à 60,5 %. En 2015, ce pourcentage est un peu moins élevé (55,2 %). Néanmoins, l'évolution la plus importante en ce qui concerne les performances des élèves a lieu entre 1995 et 2003 : le taux de réussite passe de 47,9 % à 59,3 %, soit un gain de 11,4 points de pourcentage, tandis que ce taux est stable ou en baisse chez les autres participants. Ensuite, il se stabilise : entre 2003 et 2007, la perte est de 0,2 point de pourcentage, tandis qu'entre 2007 et 2011, le gain n'est que de 1,4 point de pourcentage. Or, en 1995, les types de tâches prescrits étaient peu variés, et assez imprécisément rédigés. En quatrième année, les auteurs demandaient aux élèves de « reconnaitre et comprendre des fractions simples dans le contexte d'une utilisation quotidienne » (Department of Education of Science, 1989, p. 7), ce que nous comprenons par l'identification ou la représentation de fractions d'une figure géométrique. Toutefois, les exemples fournis à la suite de ce paragraphe indiquaient plutôt qu'il s'agissait pour les élèves d'utiliser les fractions comme des opérateurs (« Par exemple, estimer un tiers de pinte de lait ou 3/4 de la longueur d'une pièce de bois ; trouver 3/10 de 1£, 7£ 10£ » [*ibid.*]). Il était également demandé aux élèves de « reconnaitre des régularités dans les fractions équivalentes » (*ibid.*) et de décrire la probabilité qu'un évènement survienne à l'aide des fractions. De plus, différentes écritures des nombres décimaux (écritures fractionnaires, décimales et pourcentages) étaient manipulées dès ce stade de la scolarité, alors que dans la plupart des programmes que nous avons rencontrés, les écritures décimales apparaissent postérieurement, et les pourcentages encore plus tard. Les élèves travaillaient aussi sur l'équivalence entre fractions. En revanche, en cinquième année (celle au cours de laquelle se déroulent les tests TIMSS), les injonctions étaient moins riches. En effet, il s'agissait simplement de prendre la fraction d'une quantité (« Calculer des fractions et des pourcentages de quantités en utilisant une calculatrice si nécessaire. Trouver des fractions et pourcentages de quantités. Par exemple, calculer 1/10 de 2 m, 3/5 de 170 m, 15 % de 320£ »

[*ibid.*, p. 54]). En 1999, les types de tâches prescrits étaient plus nombreux et rédigés de façon plus détaillée. L'enseignement était aussi plus précoce, puisque dès la deuxième année, les élèves doivent être capables de « reconnaitre des fractions unitaires telles que 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10… et les utiliser pour trouver des fractions de formes et de nombres » (Department of Education, 1999, p. 14). On retrouve ici les types de tâches correspondant à l'identification de fractions d'une figure plane et le fait de prendre la fraction d'une quantité, qui existaient déjà en 1995 pour la quatrième année (toutefois, ce dernier type de tâches a été limité à l'étude des fractions unitaires). Par ailleurs, des activités d'estimation de fractions simples (ce que nous interprétons comme le fait d'associer une fraction à un dessin alors que les parts égales ne sont pas matérialisées) avaient été ajoutées. La reconnaissance des fractions équivalentes fut également avancée en troisième année, avec une focalisation sur le résultat, et non plus sur la procédure comme en 1995. En outre, les élèves apprenaient à « comparer des fractions familières : par exemple, savoir que sur la droite numérique un demi se situe entre un quart et trois quarts » (*ibid.*), ce qui pouvait être utile aux élèves pour réussir les items des tests, les transferts vers ce type de tâches semblant se réaliser très difficilement. En quatrième année année, la reconnaissance des fractions a été étendue aux nombres mixtes, et la recherche des compléments à l'unité apparut. On demandait à nouveau aux élèves d'identifier des fractions équivalentes (en deuxième année, le législateur indiquait que les élèves « commençaient » à étudier cette notion). Les tâches de comparaison deviennent plus complexes, puisque les élèves vont devoir « ordonner des fractions simples » (*ibid.*, p. 18). L'utilisation du demi comme point de repère pour la comparaison était mentionnée. Les auteurs insistaient toujours sur le fait que les élèves soient capables de prendre la fraction d'une quantité, et l'étude des différentes écritures des rationnels. À ce stade, il s'agissait seulement de « reconnaître l'équivalence entre les formes décimales et fractionnaires d'un demi, d'un quart, et des dixièmes tels que 0,3 » (*ibid.*). En cinquième année, les types envisagés étaient assez similaires (prendre la fraction d'une quantité, ranger des fractions avec l'aide de la droite numérique, identifier des fractions équivalentes), mais les nombres mixtes et les fractions supérieures ou égales à 1 furent introduits. En particulier, les élèves ont appris à passer de l'un à l'autre. Le lien entre les fractions et les décimaux fut étendu aux centièmes, et à la fraction trois quarts. En outre, les élèves devaient être capables « d'exprimer la moitié, le quart, les trois quarts, les dixièmes et les centièmes en pourcentage (par exemple, savoir que 3/4 = 75 %) » (*ibid.*, p. 22). On a donc une augmentation importante à la fois de la variété des types de tâches et du travail global imposé dans le domaine des fractions, dont on peut penser qu'elle n'est pas sans lien avec la hausse du taux de réussite des élèves sur cette période (11,4 points de pourcentage). En ce qui

concerne l'association d'une fraction et d'un dessin, nous avons comparé les performances des élèves aux items C3 aux tests de 1995 et M0103 aux tests de 2003 (là encore, les deux items étaient identiques : on demandait aux élèves de sélectionner, parmi cinq possibilités, le carré dont deux tiers avaient été grisés). Le taux de réussite est en nette amélioration, puisqu'il passe de 47,1 % en 1995 à 67,5 % en 2003, soit une augmentation de 20,4 points de pourcentage. Dans le même temps, la moyenne de l'ensemble des pays participants (+ 5,1 points de pourcentage) n'a pas augmenté dans les mêmes proportions. En ce qui concerne le lien entre les fractions et les décimaux, nous avons comparé les performances des élèves aux items E4 des tests de 1995 et M0108 des tests de 2003 (les deux items étaient identiques : on demandait aux élèves de sélectionner, parmi quatre possibilités, le nombre décimal correspondant à 7/10). Le taux de réussite est passé de 25,4 % en 1995 à 46,1 % en 2003. La progression des élèves en ce qui concerne cette tâche est donc relativement importante, avec un gain de 20,7 points de pourcentage. Dans le même temps, la moyenne de l'ensemble des pays participants a très peu augmenté (+ 1,4 points de pourcentage). Il semble donc que les élèves anglais ont mieux réussi, non seulement aux items correspondant aux types de tâches nouvellement intégrées dans les programmes, mais également, de façon globale, dans le domaine des fractions.

Certes, comme nous venons de l'indiquer, une augmentation importante des types de tâches relatifs aux fractions au sein du curriculum peut conduire les élèves à se montrer plus performants dans ce domaine aux évaluations TIMSS. Néanmoins, la modification d'un type de tâches des programmes en particulier (c'est-à-dire un changement très ciblé) est-elle susceptible d'avoir une influence sur les acquis des élèves ? L'étude de l'évolution des scores des élèves singapouriens pourrait apporter un élément de réponse. Le contenu des programmes de Singapour à propos de la comparaison de fractions ayant légèrement évolué entre 2001 et 2006, nous allons pouvoir estimer l'incidence de cette modification sur les performances des élèves à trois items identiques portant sur ce genre de tâches (M1201 en 2003, M1101 en 2007 et M0701 en 2011). En 2001, les élèves de troisième année devaient « comparer et ordonner des fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre et des fractions de dénominateur différent, avec des dénominateurs jusqu'à 12 » (Ministry of Education, 2001, p. 26), tandis qu'en 2006, ils avaient à « comparer des fractions à la moitié » et « comparer et ordonner des fractions de dénominateurs différents » (*op. cit.*, 2006, p. 18). Nous constatons donc une augmentation du niveau d'exigence du législateur dans le domaine de la comparaison de fractions : d'abord, on ne demandait plus seulement aux élèves, en 2006, de comparer des fractions de dénominateurs liés, le dénominateur de l'une pouvait ne pas être

un multiple du dénominateur de l'autre. Ensuite, un nouveau type de tâche est apparu : l'utilisation du demi comme fraction de référence pour la comparaison. Enfin, dans l'item que nous venons d'évoquer, c'est exactement ce qui était attendu des participants : il fallait trouver la fraction supérieure à 1/2, et dans les quatre propositions soumises aux élèves, l'une d'entre elles comportait un dénominateur qui n'était pas un multiple de deux. Or, l'augmentation du taux de réussite des élèves singapouriens est très faible, et elle a eu lieu davantage entre 2003 et 2007 (+ 1,9 points de pourcentage), qu'entre 2007 et 2011 (+ 0,7 point de pourcentage). En outre, leur marge de progression était forte, puisque ce taux de réussite n'était que de 64,3 % en 2003 (contre 66,9 en 2011), pour une moyenne dans le domaine des fractions établie à 73,7 % en 2003 (contre 77,5 % en 2011). Nous constatons également que les résultats de l'ensemble des participants sont certes en baisse entre 2003 et 2011, mais l'écart est tellement faible entre les deux (– 1,7 points de pourcentage pour l'ensemble, contre + 2,6 points de pourcentage pour Singapour) que l'on ne peut pas déduire l'influence des programmes sur la progression des élèves singapouriens. D'ailleurs, dans le même temps, les scores des élèves de Hong Kong SAR, dont les instructions officielles sont restées inchangées, sont passés de 66,3 % de réussite en moyenne à 73,7 %, soit un gain de 7,4 points de pourcentage, près de trois fois supérieur que celui que nous avons pu observer à Singapour. Cela nous amène à comparer les variations des scores dans les pays où les programmes scolaires sont modifiés et ceux dans lesquels ils ne le sont pas : celles-ci sont-elles moindres lorsque le curriculum ne change pas ?

B. Comparaison avec les participants dont les programmes sont constants

En ce qui concerne les performances dans le domaine des fractions en général, l'écart-type entre les pourcentages de réussite obtenus aux évaluations qui se sont succédé est plus grand pour Hong Kong SAR et pour le Québec, qui ont conservé les mêmes instructions officielles entre 2003 et 2015 (avec respectivement 5,7 et 4 points de pourcentage), que pour l'Angleterre et Singapour, qui ont changé d'instructions officielles au cours de la période (avec respectivement 2 et 3,4 points de pourcentage). Cela tend à montrer que l'acquisition des praxéologies scolaires change assez largement en dehors des évolutions des programmes (possiblement à travers les transformations qui touchent la formation, les manuels scolaires, les indications pédagogiques ou didactiques fournies par les ministères, etc.). Par exemple, à Hong Kong SAR, les instructions officielles sont en vigueur depuis 2000 ; pourtant, l'évolution du taux de réussite de ce participant est à la fois forte et irrégulière, comme le montre le graphique ci-contre.

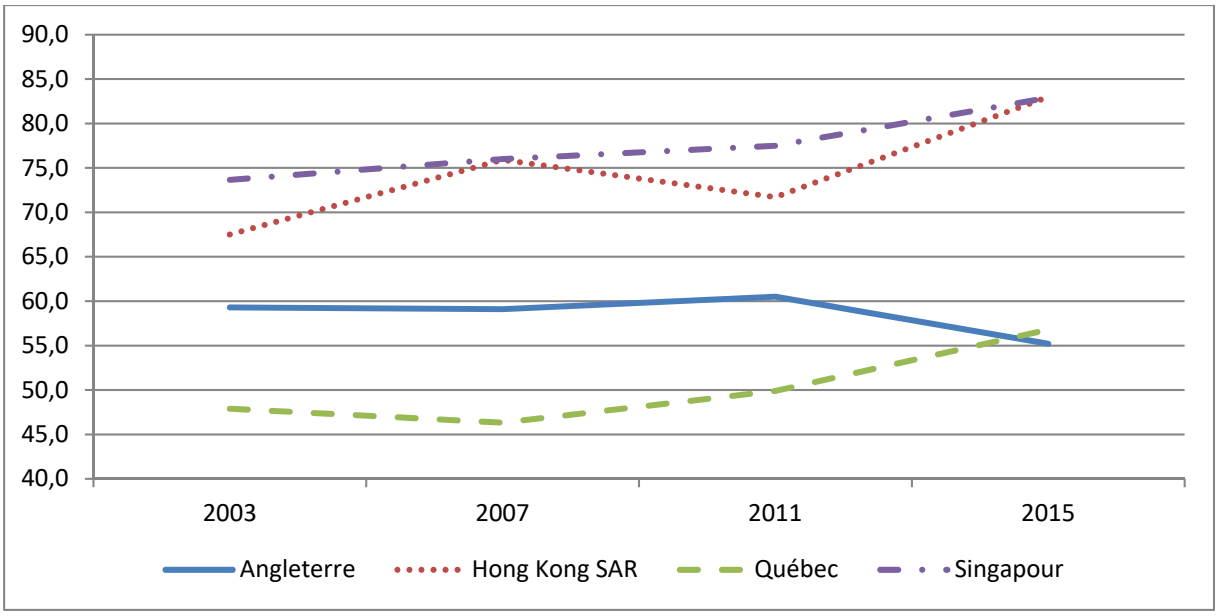


Figure 147. Évolution du pourcentage de réussite des élèves de quatrième année aux évaluations TIMSS entre 2003 et 2015, dans le domaine des fractions

Afin de compléter l'analyse, nous avons effectué une étude portant plus précisément sur un type de tâches en particulier, non pas à partir de l'évolution des programmes (nous avons déjà dit que les modifications des instructions officielles peuvent conduire des évolutions diverses), mais en prenant pour point de départ l'évolution des résultats. Lorsque les scores changent notablement et selon des trajectoires différentes au sein du corpus pour des items mettant en jeu le même type de tâches, l'évolution des programmes peut-elle expliquer, au moins partiellement, ces variations ? Par exemple, à propos de l'addition et la soustraction de fractions, nous avons constaté une grande diversité des résultats à trois items[1], comme l'indique le graphique ci-contre.

1. Il s'agit des items M0207 en 2003, M0306 en 2011 et M0906 en 2015.

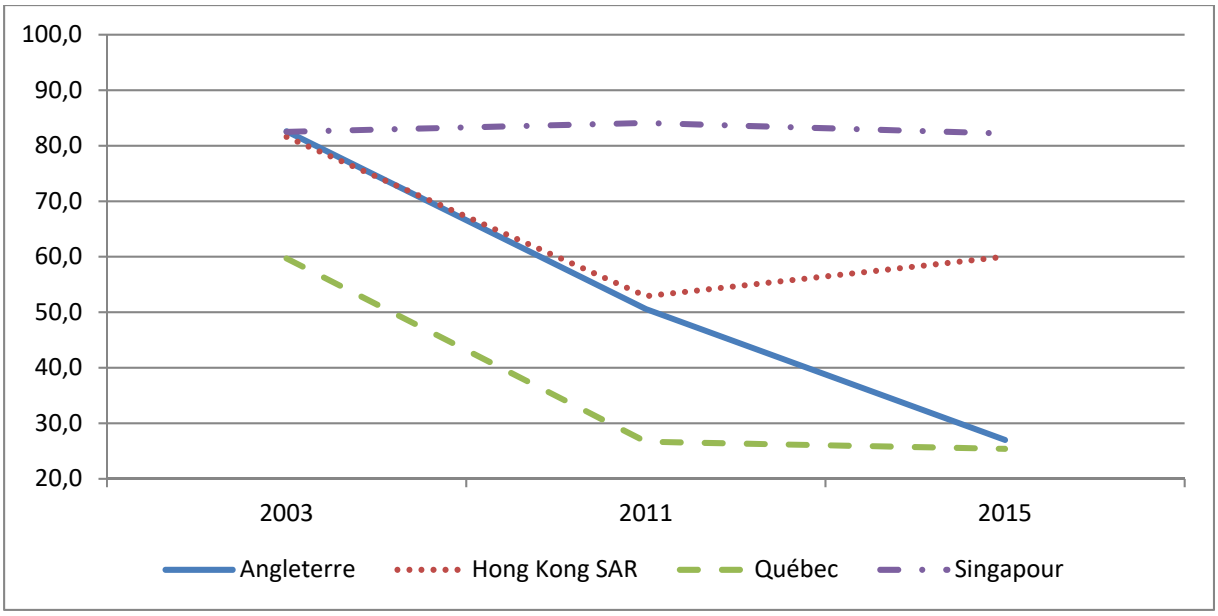
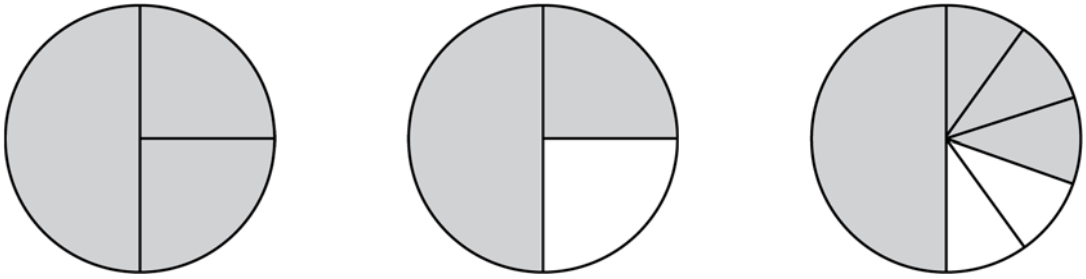


Figure 148. Évolution des résultats des élèves quatrième année aux items impliquant d'additionner des fractions entre 2003 et 2011.

Les trois items mettant en jeu l'addition de fractions de dénominateurs liés, on peut dire que les performances des élèves ont été réalisées à programmes constants (sauf à Singapour, où ce type de tâches a été avancé en troisième année en 2006 : toutefois, quel que soit le curriculum de ce pays considéré, il doit toujours être enseigné au plus tard en quatrième année ; en Angleterre, à Hong Kong SAR et au Québec, ce type de tâches n'est à aucun moment inscrit dans les instructions officielles). La diversité des évolutions se manifeste donc même dans le cas où une grande stabilité des curriculums est mise au jour.

Pour comprendre ces évolutions, une analyse praxéologique est utile. Le premier item (en 2003) était ainsi formulé : « Janis, Maija et leur mère ont mangé un gâteau. Janis a mangé 1/2 du gâteau. Maija a mangé 1/4 du gâteau. Leur mère a mangé 1/4 du gâteau. Quelle quantité du gâteau reste-t-il ? » L'intitulé du deuxième était le suivant (en 2011) : « Tom a mangé 1/2 d'un gâteau, et Jeanne a mangé 1/4 du gâteau. Quelle quantité de gâteau ont-ils mangé à eux deux ? » En 2015, il s'agissait d'additionner une fraction unitaire et une fraction non unitaire pour ensuite trouver la fraction de gâteau restante. Deux différences majeures séparent le premier item des autres : d'une part, quatre possibilités de réponse étaient offertes aux élèves, contrairement aux derniers où la réponse devait être librement formulée ; d'autre part, la réponse attendue n'était pas une fraction (il fallait répondre « Rien »), tandis qu'une réponse sous la forme d'une notation fractionnaire était requise pour les deux derniers items (respectivement « 3/4 » et « 2/10 »). Puisque les résultats étaient élevés et homogènes pour le premier item (notamment en Angleterre, à Hong Kong SAR et à Singapour avec un taux de

réussite moyen de 82,2 % et $\sigma = 0{,}4$), on en déduit que les élèves étaient capables de se représenter (ou de représenter sur une feuille) la situation en jeu, ainsi que les demis et les deux quarts, pour conclure qu'il ne restait rien du gâteau. En revanche, cette technique ne permet pas systématiquement de résoudre le second problème, en raison de la difficulté que nous avons déjà évoqué à identifier des fractions lorsque toutes les parts ne sont pas matérialisées (ou à mobiliser la connaissance de l'équivalence entre 1/2 et 2/4). C'est une explication possible à la chute des scores constatée dans trois pays de ce corpus : seuls les élèves de Singapour parviennent à maintenir un niveau de performance égal. En ce qui concerne l'évolution des résultats des élèves entre 2011 et 2015, nous distinguons les territoires dans lesquels les résultats sont stables ou en légère hausse (à Hong Kong SAR, au Québec et à Singapour), et celui dans lequel le score moyen des élèves est en forte baisse (en Angleterre).



Item M0207 (2003). Il ne reste rien.

Item M0306 (2011). 3/4 du gâteau ont été mangés.

Item M0906 (2015). Il reste 2/10.

Figure 149. Représentation schématique des situations issues des items TIMSS se rapportant à l'addition de fractions de dénominateurs différents et réponses attendues des élèves

Sur ce point apparait notamment une différence entre les acquis des élèves anglais et hongkongais, dont les résultats suivent jusqu'en 2011 une trajectoire semblable. Ensuite, ils se distinguent nettement. Peut-être que l'augmentation du dénominateur rend plus difficile l'utilisation d'une technique passant par le dessin, et rend nécessaire le recours à un dénominateur commun (l'étude de l'identification de fractions équivalentes est imposée antérieurement aux évaluations TIMSS chez ces deux participants) : les élèves de Hong Kong SAR aurait alors une capacité plus grande à mobiliser cette connaissance pour résoudre la tâche. Ces tendances peuvent également être expliquées par la capacité beaucoup plus forte des élèves hongkongais à identifier un complément à l'unité par rapport aux élèves anglais : d'abord, cette notion apparait dans les programmes hongkongais, mais pas dans les programmes anglais ; ensuite, leurs élèves se montrent meilleurs à l'item correspondant des évaluations TIMSS 2015 (l'item M1004, dans lequel les élèves devaient trouver le complément à l'unité de 3/8), avec 84 % de réussite pour les élèves hongkongais et seulement 44,3 % pour les élèves anglais. Les

élèves québécois se sont également montrés plus performants à la tâche de recherche du complément à l'unité, avec 55 % de réussite, de même que les élèves singapouriens, avec 84,5 % de réussite à l'item M1004 des évaluations TIMSS 2015. La baisse de 55,6 points de pourcentage entre 2003 et 2015 du taux de réussite des élèves anglais pour deux items se rapportant à un même type de tâches n'est donc pas due à un changement dans les programmes d'enseignement, mais à une modification des variables de la tâche et des techniques que les élèves sont susceptibles d'utiliser. Nous en déduisons que les différences qui touchent à l'évolution des scores s'expliquent davantage par le choix des variables didactiques et, dans le contexte des évaluations TIMSS, par la capacité des élèves à résoudre des types de tâches inédits ou comportant des variables nouvelles, que par les changements apportés aux instructions officielles.

§ 2. L'évolution contemporaine des programmes d'enseignement

Plusieurs pays de notre corpus ont récemment changé leurs instructions officielles : Singapour (à partir de 2012, avec une mise en place progressive), l'Angleterre et la Floride (en 2014) et la France (en 2015). Nous allons d'abord décrire les modifications récentes des instructions officielles que nous venons de citer (A), pour ensuite évoquer l'incidence potentielle de ces modifications sur les résultats à venir des élèves (B), d'après les connaissances que nous avons acquise tout au long de notre recherche.

A. Les modifications récentes des programmes d'enseignement

À Singapour, les programmes mis en place progressivement à partir de la rentrée 2012 sont beaucoup plus denses que les précédents : des indications méthodologiques ont été ajoutées aux seuls types de tâches à travailler avec les élèves présents dans les instructions officielles précédentes. Ce peut être l'emploi de matériel concret ou l'utilisatoin d'applications et jeux numériques. Au-delà de la forme, des changements substantiels sont intervenus. D'abord, sur le vocabulaire utilisé par les élèves, puisque dès la deuxième année, on demande aux élèves d'utiliser l'expression « deux sur trois » (*op. cit.*, 2012, p. 38) pour décrire la fraction 2/3. Toutes les activités déjà envisagées en 2006 (reconnaissance, addition et soustraction, comparaison) ne doivent pas seulement être effectuées correctement : l'élève doit désormais se montrer capable de justifier sa réponse en expliquant son raisonnement. Il est même invité à généraliser ce qu'il perçoit, par exemple en exprimant l'idée que « plus le numérateur est grand, plus la fraction est grande » (*ibid.*, p. 39). Dès ce stade de la scolarité, on exige des élèves qu'ils

puissent écrire des histoires impliquant des additions ou des soustractions de fractions, ce qui constitue une première approche des problèmes, qui n'étaient pas du tout abordés auparavant dans les instructions officielles. En troisième année, on retrouve cette insistance sur les capacités métacognitives et argumentatives (« discuter », « expliquer pourquoi », « expliquer les stratégies utilisées », « écrire des histoires d'addition et de soustraction impliquant des fractions »). Il semble que le législateur a voulu instaurer un équilibre entre le fait de systématiser la réalisation de certains types de tâches simples, grâce à l'utilisation de cartes, de matériel concret et de l'informatique, et la réalisation de tâches complexes, nécessitant des initiatives de la part des élèves, une certaine organisation et la mise en lien de plusieurs compétences (rédactionnelles, mathématiques, etc.). La fraction-mesure est étudiée cette-là, avec le placement de fractions sur la droite numérique, alors qu'auparavant cet apprentissage était beaucoup plus tardif. Pour comparer des fractions, le législateur évoque l'élaboration d'un schéma, la comparaison à la moitié ainsi que l'utilisation d'un dénominateur commun. Il n'y a donc pas de modification ici quant aux types de tâches travaillés, mais une explicitation des méthodes à employer pour parvenir au résultat. Cette remarque est valable également pour l'addition et la soustraction de fractions. Pour être précis, il faut noter le report du genre de tâches « ordonner des fractions », qui est repoussé en quatrième année. Au cours de celle-ci, le lien entre les enseignements dans le domaine du calcul et des fractions est explicité : il s'agit de « faire des liens entre le concept de facteurs communs et la simplification de fractions, et entre le concept de multiple commun et la recherche d'un dénominateur commun à deux fractions » (*ibid.*, p. 47). Un travail sur les comparaisons est également requis, ce qui n'était pas le cas dans les instructions officielles de 2006, avec progressivement l'élimination des supports concrets pour s'appuyer uniquement sur le calcul ou la droite numérique. De façon systématique, les nouvelles notions (par exemple, les fractions supérieures à un ou l'identification de la fraction d'une collection) sont abordées en s'appuyant sur des supports concrets. Par ailleurs, certains intitulés expriment moins clairement les types de tâches prescrits. Par exemple, le législateur n'exige plus des élèves qu'ils puissent « exprimer des fractions supérieures à 1 sous la forme d'un entier et d'une fraction, et vice versa » (*op. cit.*, 2006, p. 21), mais seulement qu'ils utilisent « des fractions de disque ou une droite graduée pour représenter et interpréter des nombres rationnels supérieurs à 1 sous la forme de fractions supérieures à 1 ou de nombres mixtes » (*op. cit.*, 2012, p. 48). La résolution de problèmes est développée, en lien avec l'invention d'énoncés, pour parfaire leurs connaissances sur l'addition et la soustraction de fractions. La simplification de fractions disparait, de même que le fait de trouver l'entier, la partie fractionnaire étant donnée. En revanche, en géométrie, l'étude des fractions

de tour est renforcée, et cela correspond à un rapprochement avec les tâches que l'on retrouve fréquemment dans les évaluations TIMSS (« observer les différentes orientations d'un rectangle (ou d'un carré) quand il subit une rotation » [*ibid.*, p. 52]). En cinquième année, le passage des fractions aux écritures décimales est amputé de sa réciproque, puisque la mention « et vice-versa » disparait des programmes. De même, la capacité des élèves à passer des fractions aux pourcentages et inversement n'est plus explicitement requise. Il est simplement demandé aux professeurs de « montrer la relation entre les pourcentages et les fractions, par exemple 30 % = 3/10 » (*ibid.*, p. 55) et de les faire « jouer à des jeux de cartes ou à des jeux numériques impliquant des fractions, des décimaux et des pourcentages équivalents, par exemple, 20 % sont équivalents à 1/5 ou 0,2 » (*ibid.*). En ce qui concerne les opérations, la division est désormais enseignée en sixième année. En revanche, les nombres mixtes sont inclus dans les calculs, alors que les instructions officielles n'y faisaient pas référence précédemment. De plus, le lien doit désormais être fait entre les rapports exprimés sous la forme *a*:*b* et les fractions, ce qui suppose dans les nouveaux programmes l'utilisation du concept de « fraction-ratio ». Ce type de tâches est également au programme de la sixième année. Enfin, une partie des types de tâches abordés à l'école élémentaire continuent d'être travaillés dans l'enseignement secondaire, en septième et huitième années, ce qui n'était pas le cas auparavant. Par exemple, la relation entre les fractions et les pourcentages est systématisée en septième année, de même que le lien entre les fractions et les ratios exprimés sous la forme *a*:*b*.

En Angleterre, les nouveaux programmes datent de 2014. Par rapport aux instructions officielles de 2006, nous constatons une plus grande richesse des programmes, qui ne porte pas principalement sur la méthode, comme à Singapour, mais plutôt sur les types de tâches relatifs aux fractions. Ainsi, dès la deuxième année, le législateur impose l'étude de l'équivalence entre 2/4 et 1/2. La variété des activités envisagées augmente, puisque l'on évoque tout à la fois l'identification et la représentation de fractions simples, alors que la première était seule au programme en 2006. Les tiers sont désormais utilisés, à la fois dans les tâches d'identification et de représentation, et dans celles consistant à prendre la fraction d'une quantité. En troisième année, les tâches de rangement viennent enrichir les activités de comparaison et d'identification de fractions équivalentes, même si le législateur précise que celles-ci n'ont lieu qu'avec des petits dénominateurs. En revanche, au contraire de ce que nous avons observé à Singapour, le législateur ne prévoit qu'une seule méthode au soutien de l'identification de fractions équivalentes (l'utilisation de diagrammes, ce qui était déjà le cas en 2006). De même, le niveau de difficulté augmente en ce qui concerne la capacité des élèves à prendre la fraction d'une

quantité : les fractions utilisées ne sont plus nécessairement unitaires. Les additions et soustractions de fractions de même dénominateur font leur apparition à ce stade de la scolarité, y compris dans le cadre de la résolution de problèmes. Les tâches simples d'identification de fractions à partir d'un dessin sont supprimées des programmes au profit d'activités que nous considérons comme préparatoires à l'étude des notations décimales (« compter dans l'ordre croissant et décroissant en dixièmes », « reconnaitre que les dixièmes découlent de la division d'un objet en dix parts égales et en divisant des nombres à un chiffre par dix » et « reconnaitre et utiliser les fractions comme des nombres : fractions unitaires et fractions non-unitaires avec des petits dénominateurs » [*op. cit.*, 2014, p. 125]). Cela correspond également à l'introduction de la fraction-mesure. Ces activités de comptage se retrouvent en quatrième année avec les centièmes, et c'est à ce moment que le passage des fractions aux écritures décimales est attendu des élèves de façon plus exigeante qu'en 2006, puisqu'il ne suffit plus de reconnaitre cette équivalence, il faut « reconnaitre et écrire les décimaux équivalents de tout nombre de dixièmes ou centièmes » (*ibid.*, p. 131). La référence à la droite numérique et les tâches d'estimation (« environ un quart des pommes dans la boite sont vertes » [*op. cit.*, 2006, p. 78]) disparaissent au profit des problèmes de mesures ou d'argent impliquant de fractions. Ceux-ci deviennent progressivement de plus en plus complexes, notamment en mettant en jeu des fractions non unitaires (cependant, la réponse attendue est un entier). L'addition et la soustraction de fractions de même dénominateur sont inscrites au programme de la quatrième année, ce qui n'était pas le cas en 2006. L'année suivante, le lien entre les fractions et les pourcentages est renforcé, avec un panel de fractions proposées beaucoup plus large. Les activités de comparaison et de rangement se poursuivent, ce qui n'était pas prévu dans les instructions officielles précédentes. Elles sont même étendues aux fractions de dénominateurs liés. Des activités d'addition et de soustraction (cette fois, potentiellement avec des fractions ayant des dénominateurs liés) ainsi que la multiplication de fractions propres et de nombres mixtes par un entier sont ajoutées. La conversion des nombres mixtes en fractions supérieures ou égales à 1 et vice versa fait également son apparition dans les instructions officielles. En sixième année, le lien entre les connaissances des élèves en calcul et l'utilisation d'un dénominateur commun est explicité (« utiliser des multiples courants pour exprimer des fractions sous le même dénominateur » [*op. cit.*, 2014, p. 145]). Cependant, ici encore, une seule stratégie est envisagée pour la comparaison et le rangement : le remplacement des fractions par d'autres équivalentes possédant le même dénominateur. L'addition et la soustraction sont étendues au cas où les fractions sont de dénominateurs différents et non liés, tandis que la multiplication de fractions entre elles et la division d'une fraction par un entier est une nouveauté à ce stade de la scolarité. La fraction est

associée à une division, permettant ainsi de convertir des fractions telles que 3/8 en nombres décimaux.

En Floride, en 2014, les programmes d'enseignement ont beaucoup changé, du fait de l'intégration des normes fédérales appelées *Common Core Standards* dans les instructions officielles de l'État. Celles-ci sont nettement plus détaillées que ne l'étaient les précédents programmes de la Floride, qui dataient de 2007. Des indications de méthode sont apparues, mais les types de tâches proposés à chaque étape de la scolarité ne s'en sont pas trouvés profondément modifiés, contrairement à ce qu'on aurait pu penser en raison de l'intégration de normes externes. En effet, le point de départ de l'utilisation de l'écriture fractionnaire est toujours placé en troisième année d'enseignement obligatoire. À ce stade, le placement de fractions sur la droite numérique est explicitement cité dans les nouveaux programmes, mais précédemment, on évoquait déjà des « modèles de mesure », supposant l'utilisation, sinon de la droite graduée, du moins de la fraction-mesure avec une unité arbitraire. Les tâches de comparaison et d'identification de fractions équivalentes sont toujours évoquées, mais les nouveaux programmes ont précisé la méthodologie utilisée : il s'agit de raisonner sur leur taille, soit en utilisant la droite numérique, soit en utilisant un modèle visuel. De plus, les élèves seront invités à justifier leurs réponses. Auparavant, on évoquait plus vaguement l'utilisation de « modèles et de stratégies » (*op. cit.*, 2007, p. 6). En quatrième année, la comparaison de fractions, en utilisant un dénominateur commun ou en utilisant une fraction de référence telle que le demi, est un ajout des programmes de 2014. Néanmoins, la nouveauté la plus marquante est l'introduction de l'addition et de la soustraction de fractions à ce stade la scolarité, y compris dans le cadre de la résolution de problèmes et en lien avec la mesure (à travers l'utilisation de la droite graduée). Cette tâche est prévue avec des fractions de même dénominateur ou avec des fractions décimales de dénominateurs différents. Dans le même temps, ces connaissances sont utilisées pour parvenir à la multiplication d'une fraction par un entier, par le biais de l'addition réitérée. De plus, les exemples fournis montrent que l'encadrement de fractions entre deux entiers est une attente du législateur. En revanche, l'étude des nombres décimaux, et notamment de la relation entre les notations décimales et fractionnaires, est limitée aux centièmes, alors qu'auparavant, les millièmes étaient utilisés. De même, la simplification de fractions est un type de tâches qui a disparu des programmes d'enseignement. En cinquième année, les élèves seront désormais invités à « interpréter une fraction comme la division du numérateur par le dénominateur » (*op. cit.*, 2014, p. 3). En outre, la multiplication d'une fraction par une autre fraction apparait, et la multiplication d'une fraction par un entier est interrogée quant à l'effet

produit sur l'entier : c'est l'introduction de la fraction-opérateur. Les élèves doivent également être capables de diviser une fraction unitaire par un entier, et un entier par une fraction unitaire, ce qui n'était pas le cas auparavant. Il leur faudra par ailleurs résoudre des problèmes impliquant de telles opérations, notamment en s'appuyant sur la droite graduée. Dans les programmes de 2014, la fraction en tant qu'expression d'un rapport est introduite en sixième année. En revanche, il n'est plus question cette année-là de « comparer et ordonner des fractions, des notations décimales et des pourcentages » (*op. cit.*, 2007, p. 13), ni d'utiliser la correspondance entre les fractions et les nombres décimaux pour résoudre des problèmes. En septième année, si les programmes les plus récents sont aussi les plus précis, on ne note pas d'évolution majeure : les éléments centraux sont toujours la maitrise et l'utilisation des quatre opérations avec des fractions, le lien avec les nombres décimaux et les pourcentages et l'intégration des fractions dans le cadre de l'algèbre. Seul le paragraphe sur les probabilités donne à utiliser les fractions dans un cadre inédit : elles permettent de quantifier la probabilité qu'un évènement survienne.

En France, malgré une modification des cycles d'enseignement (le cycle 3 ne concerne plus le CE2, le CM1 et le CM2, mais le CM1, le CM2 et la 6e), seuls quelques infléchissements concernent l'enseignement des fractions, qui s'étale toujours principalement entre la quatrième et la sixième année (d'après les éléments de progression qui accompagnent les programmes, en 2008 comme en 2015). La résolution de problèmes est placée en tête de paragraphe, ce qui peut contribuer à renforcer leur importance dans les tâches proposées pour l'enseignement des fractions, tandis que l'addition de fractions de même dénominateur, couplée à la multiplication d'une fraction par un entier (entendue comme une addition réitérée), viennent enrichir le programme de quatrième année (auparavant, cet enseignement était prévu plus tardivement). L'identification de fractions simples équivalentes (notamment l'équivalence entre une fraction et un entier) est avancée à ce stade de la scolarité. Il n'y a cependant plus trace de la règle selon laquelle « un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre », ce qui ouvre la voie à des méthodes variées pour parvenir à la reconnaissance des fractions équivalentes. En ce qui concerne les autres types de tâches, il est difficile de les placer précisément au sein du parcours scolaire des élèves, en raison de la liberté laissée aux enseignants de déterminer l'année d'enseignement d'une notion à l'intérieur des trois années constituant le cycle 3. Nous considérons donc que tout type de tâches déjà présent dans les instructions officielles précédentes l'est au même niveau de la scolarité dans les programmes de 2015.

B. L'impact potentiel de ces modifications sur les résultats des élèves

Les évolutions que nous venons de décrire sont fort différentes. Toutefois, l'un de leurs points communs est un renforcement de la place des opérations impliquant des fractions, en particulier l'addition et la soustraction. L'enseignement est limité, en France, à l'addition de fractions de même dénominateur ou de fractions décimales en classe de CM1 ; en revanche, dans les autres pays, une progression plus complète est mise en place et permet aux élèves de se présenter aux tests de quatrième année en ayant reçu un enseignement de l'addition de fractions de dénominateurs liés (lorsque le dénominateur de l'une des fractions est un multiple du dénominateur de l'autre). Si cette progression existait déjà à Singapour, elle apparait en Angleterre et en Floride. Or, nous avons vu que de telles tâches étaient systématiquement présentes dans les évaluations TIMSS, et que sans un enseignement spécifique, les élèves parvenaient très difficilement à transférer leurs connaissances acquises relativement au concept de fraction pour les réaliser. En conséquence, un tel enseignement est susceptible d'améliorer le taux de réussite de ces deux derniers participants. En revanche, nous n'avons pas vu, dans les tests, d'exercices se rapportant à l'addition de fractions de mêmes dénominateurs. La capacité à résoudre ce type de tâches ne permettant pas d'obtenir des scores élevés lorsque les dénominateurs sont différents, nous doutons que la modification des programmes scolaires français entraine de meilleures performances aux évaluations TIMSS de quatrième année sur ce point.

La deuxième évolution commune aux instructions officielles de ces quatre participants est la densification des activités liées à la comparaison, au rangement ainsi qu'à l'identification de fractions égales. Nous nuancerons notre propos en ce qui concerne Singapour, puisque l'enseignement du genre de tâches « ordonner des fractions » est repoussé d'un an. Or, nous avons vu que la richesse des activités de comparaison était une donnée importante pour l'obtention d'un score élevé. Néanmoins, puisque cet apprentissage se réalise en quatrième année, soit l'année du test, et que le test a lieu en fin d'année (entre le mois d'avril et le mois de mai), l'incidence de cette modification devrait être limitée. De plus, les auteurs des instructions officielles ont ajouté, pour les différents types de tâches se rapportant à la comparaison, la nécessité de justifier ses réponses et de généraliser les résultats obtenus. En cela, il y a bien à Singapour une densification des programmes d'enseignement. En Floride, on attend désormais des élèves un discours sur les tâches de comparaison qu'ils opèrent, et les techniques présentes dans le curriculum sont beaucoup plus variées qu'elles ne l'étaient

(comparaison au demi, utilisation d'un dénominateur commun). Or, nous avons vu que la multiplicité des techniques maitrisées par les élèves pouvait leur permettre de faire face à des exercices qui évoluent au fil des évaluations TIMSS et d'obtenir des scores à la fois élevés et constants. En Angleterre, la richesse des tâches envisagées autour de cette notion a été développée, avec l'ajout du rangement en plus de la comparaison dès la troisième année, et la poursuite de ces activités l'année du test. Comme les exercices impliquant des comparaisons sont récurrents dans les tests TIMSS, le nouveau curriculum est susceptible d'entrainer une amélioration des performances des élèves anglais. En ce qui concerne la France, l'introduction au cycle 3 de l'identification de fractions égales pourra permettre aux élèves d'obtenir de meilleurs scores aux exercices mettant en jeu ce type de tâches. Les auteurs évoquent également l'enseignement d'une « première extension de la relation d'ordre » par le biais d'activités visant à « repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée » (*op. cit.*, 2015, p. 201). Pour autant, s'agit-il véritablement d'activités de comparaison ? Un doute subsiste sur la mise en œuvre de cette injonction. En outre, il appartient aux enseignants de déterminer ce qui revient à chaque classe au sein du cycle. Il est donc tout à fait possible que l'équivalence entre fractions continue d'être étudiée en sixième année, comme c'était le cas d'après les instructions officielles précédentes. La probabilité que le nouveau curriculum ait une incidence dans ce domaine nous parait donc limitée.

Le troisième point commun que nous avons relevé concerne la place à accorder à la fraction-mesure. En Angleterre, même si la référence à la droite graduée disparait, celle-ci est renforcée par l'apparition d'activités visant à compter avec des fractions, et par l'introduction de problèmes de mesures ou d'argent impliquant des fractions. À Singapour, la droite numérique est évoquée pour la première fois, tant pour comprendre les fractions supérieures ou égales à 1 et faire le lien avec les nombres décimaux, que pour servir de support à des activités de comparaison. En Floride, des références sont faites de façon récurrente et plus précoce à la droite graduée et au comptage avec des fractions, deux thèmes qui n'apparaissaient nullement dans les instructions officielles précédentes. En France, en revanche, le codage de mesures de grandeurs à l'aide de fractions était déjà prévu en 2008 : les nouveaux programmes n'apportent donc pas de changement sur ce point. Il est intéressant de noter que c'est pourtant un type de tâches qui n'est jamais mis en jeu dans les évaluations TIMSS (en quatrième année, nous n'avons relevé aucun exercice impliquant l'utilisation de la droite numérique), ce qui montre que les pays que nous venons de citer ne semblent pas rédiger leurs instructions officielles dans le but d'obtenir une correspondance maximale avec les tâches auxquelles seront confrontés les

élèves dans ces tests. Si l'Angleterre, la Floride ou Singapour doivent tirer bénéfice du renforcement dans les textes du poids accordé à la fraction-mesure, ce sera donc de façon indirecte, à travers une meilleure représentation des fractions et le développement de nouvelles techniques pour associer une fraction à un dessin, ou comparer et ordonner des fractions. Toujours est-il que cette tendance nous parait faire partie, plus généralement, d'un renforcement des exigences formulées à propos de la maitrise des fractions à l'école élémentaire.

La quatrième et dernière observation transversale que nous ferons a trait à la forme des instructions officielles. Les programmes d'enseignement sont dans l'ensemble plus longs, plus détaillés, avec de nombreuses indications méthodologiques. C'est particulièrement vrai à Singapour, en Floride et en France où les changements formels sont tout aussi profonds, voire plus profonds, que les changements portant sur le fond. Les dispositions règlementaires floridiennes comportent des explications extrêmement précises sur ce que doivent être capables de faire les élèves, avec des exemples et des justifications technologiques que l'on trouve nulle part ailleurs au sein du corpus. Les textes curriculaires français et singapouriens sont organisés de façon similaire, avec d'un côté les types de tâches rédigés de façon très générale, et de l'autre des idées plus précises d'activités et des précisions sur le niveau de maitrise de la notion attendu des élèves. Néanmoins, nous avons vu avec l'exemple de l'Ontario qu'un participant pouvait avoir des programmes d'enseignement très précis et donnant aux enseignants de nombreuses idées d'activités à mettre en place dans leur classe, et pour autant obtenir des résultats très faibles. En outre, ces indications pratiques, qui viennent s'ajouter aux types de tâches rédigés de façon générale, correspondent-elles à des pratiques enseignantes déjà établies, ou imposent-elles des façons de faire entièrement nouvelles ?

Il existe également des spécificités dans l'évolution récente des programmes d'enseignement au sein de notre corpus. Par exemple, les nouveaux programmes singapouriens visent à renforcer la capacité des élèves à justifier leurs réponses et à développer une argumentation. Sans doute cette évolution n'est-elle pas sans lien avec le fait que les scores des élèves aux items impliquant d'expliquer le cheminement leur ayant permis de parvenir au résultat sont très bas. Ainsi, aux évaluations TIMSS 2015, seuls 57,2 % des élèves sont capables d'expliquer pourquoi un dessin représente la fraction 3/8, en l'absence de matérialisation de toutes les parts égales. De plus, les auteurs mettent l'accent sur l'utilisation de supports visuels, tout au long de la scolarité, pour l'enseignement de l'addition de fractions, qu'il s'agisse de fractions de même dénominateur (en deuxième année : « utiliser des disques pour illustrer

l'addition et la soustraction de fractions de même dénominateur à l'intérieur d'un entier » [*op. cit.*, 2012, p. 39]) ou de dénominateurs différents (en quatrième année : « Utiliser des fractions de disque pour illustrer l'addition et la soustraction de fractions avec une réponse supérieure à un entier, et exprimer la réponse sous la forme d'un nombre mixte ou d'une fraction impropre » [*ibid.*, p. 49]). Cela est d'autant plus surprenant que l'utilisation de supports visuels est une pratique qui est instaurée en tant que routine par l'utilisation de la méthode appelé « Concrete-Pictorial-Abstract Approach » et inscrite dans l'introduction des instructions officielles (*ibid.*, p. 33). Certes, le fait de restreindre la richesse d'un type de tâches, en limitant les techniques utilisées par les élèves, pourrait avoir une influence négative sur les performances des élèves aux items impliquant ce type de tâches (notamment en induisant la nécessité d'un cadrage de la tâche de la part de l'élève). Toutefois, nous avons constaté, avec la comparaison de fractions, qu'apporter de modestes modifications à un intitulé existant n'avait qu'une faible incidence sur les performances des élèves. Il sera donc particulièrement intéressant de voir comment évoluent les scores de Singapour à de tels items dans les prochains tests.

En Angleterre, le législateur a fait des choix qui sont parfois opposés à ceux réalisés à Singapour. Ainsi, la capacité des élèves à faire le lien entre les différentes formes d'écriture des rationnels occupe une place plus importante que dans les programmes antérieurs : auparavant, il s'agissait seulement de « reconnaitre [cette] équivalence » (*op. cit.*, 2006, p. 78) en quatrième année, et de « rapporter des fractions à leur représentation décimale » (*ibid.*, p. 80) en cinquième année. Désormais, outre les activités de comptage impliquant des dixièmes et des centièmes, les conversions s'effectuent à partir de fractions décimales ou non (1/4, 1/2 et 3/4). Notre étude ayant permis de mettre au jour un lien entre la richesse des programmes d'enseignement dans ce domaine et les résultats des élèves. Nous pensons donc qu'un tel intitulé, parce qu'il est plus explicite, est susceptible de permettre aux élèves anglais d'améliorer leur score aux items nécessitant de savoir passer des fractions aux nombres décimaux et inversement. Toutefois, si un item a mis en jeu ce type de tâches en 2015, c'est plutôt rare : le dernier que nous avons relevé avant les dernières évaluations TIMSS datait de 2003. En outre, comme nous l'avons déjà indiqué, ces évolutions règlementaires restent modestes, il est donc douteux qu'elles aient une incidence sur les résultats des élèves. Par ailleurs, le législateur ne prévoit qu'une seule méthode au soutien de l'identification de fractions équivalentes (l'utilisation de diagrammes, comme en 2006). Or, nous avons vu avec les items impliquant des additions de fractions que les résultats des élèves anglais étaient très dépendants des variables utilisées dans les exercices. Il semble que cela soit dû au faible nombre de techniques maitrisées par les élèves pour traiter

de problèmes portant sur un même type de tâches. En n'élargissant pas le champ des techniques à enseigner, le législateur se prive semble-t-il d'un moyen potentiel d'améliorer le score des élèves anglais sur ce point.

En France, si le contenu des programmes a assez peu évolué, l'organisation des cycles d'enseignement a profondément changé. Le cycle d'enseignement qui inclut l'enseignement initial des fractions (le cycle 3) comprenait la troisième année. Or, il est composé maintenant des quatrième, cinquième et sixième années. C'est dire, d'abord, combien les nouveaux programmes ont fermé la porte à un apprentissage des fractions en troisième année. C'est dire, ensuite, que des types de tâches qui devaient être enseignés au plus tard en cinquième année peuvent désormais l'être en sixième année. Les indications de progression qui accompagnent les instructions officielles laissent à penser que les changements devraient être minimes dans la pratique. Néanmoins, tout dépend de l'interprétation que feront les enseignants des contenus et des progressions curriculaires qu'ils mettront effectivement en place dans leurs établissements. Quoi qu'il en soit, le nombre de types de tâches relatifs aux fractions dans les instructions officielles reste extrêmement restreint comparé à celui observé dans les autres pays de notre corpus. Il est donc peu probable que, en raison de la mise en œuvre des nouveaux programmes, les performances des élèves dans le domaine des fractions aux évaluations TIMSS de quatrième année puissent augmenter de façon notable.

Enfin, en Floride, la progression que doivent suivre les enseignants est beaucoup plus précise. Il y a moins de redondances dans les programmes (en particulier en ce qui concerne les comparaisons). Or, nous avons vu que le fait de placer une même notion dans le curriculum de plusieurs années scolaires n'avait pas pour effet d'améliorer les résultats des élèves. En prévoyant, par exemple, l'apprentissage des comparaisons de fractions entre la troisième et la quatrième année (avec l'étude, dans un premier temps, du cas où les dénominateurs sont identiques, et, dans un second temps, du cas où les dénominateurs sont différents) plutôt qu'entre la troisième et la sixième année, il semble que les autorités floridiennes aient effectué une modification susceptible d'améliorer les performances des élèves. De plus, le nombre de techniques apparaissant dans les programmes et destinées à comparer des fractions a augmenté : le législateur permet donc potentiellement aux élèves de faire face à des exercices plus variés. Selon les dernières instructions officielles, les opérations impliquant des fractions font l'objet d'une étude beaucoup plus approfondie, et nous avons vu qu'une telle étude était nécessaire pour obtenir de bons résultats. En ce qui concerne le lien entre les fractions et les nombres

décimaux, les millièmes ont disparu des programmes. Or, l'acquisition des millièmes n'a jamais fait l'objet, à notre connaissance, d'un item des évaluations TIMSS en quatrième année. Les nouveaux programmes apportent donc de nombreux éléments permettant peut-être aux élèves d'obtenir de meilleurs résultats lors des prochains tests. Toutefois, toutes les observations que nous venons de faire se heurtent à plusieurs limites qu'il ne s'agirait pas de négliger. D'abord, pour que ces évolutions soient mises en œuvre, il est nécessaire qu'elles suscitent une certaine adhésion chez les enseignants. Or, l'introduction dans la législation des États des *Common Core State Standards For Mathematics*, établis à un niveau fédéral, a rencontré de nombreuses résistances de la part du corps professoral[1]. Ensuite, nous avons vu que, si le fait d'avancer l'âge de l'enseignement de notions relatives aux fractions pouvait être lié à une hausse des résultats, c'était parfois dans une proportion très faible, y compris lorsque les enseignants adhèrent à ces changements et les mettent en œuvre, comme nous l'avons vu au Québec à propos du lien entre les fractions et les nombres décimaux. Au-delà de la question de l'adhésion des professeurs aux changements qui leur sont imposés, se pose donc aussi d'autres questions plus larges : celles des moyens alloués à la mise en place des nouvelles normes, comme aux formations qui sont offertes aux professeurs, de la célérité des éditeurs dans la mise à jour des manuels, de la pertinence didactique des supports qui sont mis à disposition des enseignants pour l'étude des notions, de la perméabilité des systèmes didactiques aux changements, et de bien d'autres encore que nous omettons de citer ici tant ces facteurs sont nombreux.

Conclusion de la sous-section

Le fait de changer des éléments du curriculum ne conduit pas systématiquement à une modification des résultats des élèves. Certes, une transformation profonde du paragraphe relatif aux fractions peut permettre d'améliorer notablement leurs performances, comme le montre l'évolution des scores des élèves anglais entre 1995 et 2003. Toutefois, les changements opérés

1. Dans son étude annuelle pour l'année 2017 relative à l'opinion américaine en matière d'éducation, la revue *Education Next* (sous l'égide de la Harvard Graduate School Of Education) a estimé que 51,1 % des professeurs étaient favorables ou très favorables à l'utilisation des *Common Core Standards* dans leur État, tandis que 48,9 % y étaient opposés ou très opposés. Le nombre d'enseignants qui se sont prononcés est faible (90), néanmoins il donne une idée de la division de l'opinion à propos des *Common Core Standards*, y compris au sein du corps professoral. Précisons que les motivations pour rejeter ce texte tiennent parfois à leur contenu, mais aussi parfois à des considérations politiques liées au principe de liberté de choix des programmes d'enseignement pour chaque État.

à Singapour, à propos de la comparaison ou de l'addition de fractions, n'ont pas entrainé une évolution des résultats des élèves suffisante pour que nous ayons pu la mesurer. Est-ce parce que les changements profonds du curriculum anglais dans le domaine des fractions ont été accompagnés de dispositifs de formation que ses effets ont pu être remarqués ? Des études complémentaires seraient nécessaires pour le déterminer, mais nous constatons que des modifications mineures des instructions officielles paraissent avoir été sans effet sur les praxéologies acquises par les élèves telles qu'elles ont été mises au jour par les tests TIMSS. Nous avons par ailleurs indiqué que cela pouvait tout aussi bien être dû au fait que les pratiques antérieures correspondaient déjà aux nouvelles prescriptions, que parce que ces modifications sont passées inaperçues et n'ont pas entrainé de changement dans les pratiques enseignantes. Ces observations nous conduisent à penser que les modifications récentes des instructions officielles de certains participants devraient avoir une incidence limitée sur les performances des élèves aux prochaines évaluations TIMSS. Toutefois, nous avons observé des tendances qui pourraient avoir une influence favorable sur les scores obtenus aux tests, comme le renforcement de la place accordée aux additions et aux soustractions, ainsi qu'à la comparaison et au rangement de fractions ; pour d'autres, l'intérêt en vue de l'amélioration des performances des élèves aux évaluations TIMSS est plus incertain, comme le poids accru de la fraction-mesure dans les textes, ou l'ajout de suggestions d'activités, annexées aux compétences à acquérir par les élèves, dès lors qu'elles ne conduisent pas à l'enseignement de techniques plus variées leur permettant de faire face à des situations plus diverses. En outre, il faut opérer une distinction entre les modifications effectuées en Angleterre, en Floride et à Singapour, qui ont porté sur de nombreuses compétences et ont été quantitativement importantes, et celles effectuées en France, qui sont restées modestes.

Conclusion de la section consacrée au rôle des enseignants établi selon une perspective diachronique

Pour nuancer la relation que nous avons pu établir entre, d'une part, le contenu et les progressions des curriculums, et d'autre part, les performances des élèves, nous avons analysé les déclarations des enseignants à propos du moment de l'enseignement effectif et de leur niveau de préparation déclaré pour l'enseignement de trois notions (concept de fraction, addition de fractions et écritures décimales). Nous avons montré que le législateur ne parvenait pas toujours à infléchir les déclarations des professeurs à propos du moment de l'enseignement effectif. Ainsi, à Singapour, le moment principal de l'enseignement des additions de fractions

par rapport à la quatrième année est stable, alors qu'en 2006, l'enseignement de cette notion a été avancé de deux ans. À l'inverse, au Québec, alors même que les programmes sont inchangés depuis 2001, l'année au cours de laquelle les professeurs déclarent enseigner les écritures décimales a fortement évolué. En 2003, ils n'étaient que 35,6 % à penser que cette notion relevait principalement de la quatrième année ou des années antérieures, contre 83,6 % en 2015. Pour autant, ces changements dans les déclarations des enseignants sont-ils de nature à entrainer des transformations des résultats obtenus par les élèves ? En Ontario, un enseignement du concept de fraction plus fréquemment postérieur à la quatrième année pourrait expliquer une chute des résultats relatifs aux conversions entre notations fractionnaires et décimales entre 2003 et 2015. À l'inverse, les scores des élèves québécois se sont améliorés concomitamment à un enseignement moins fréquemment postérieur à l'année du test. Néanmoins, ils n'ont augmenté que dans une proportion très limitée, et les résultats des élèves ontariens dans le domaine des fractions ont baissé entre 2003 et 2015, alors même que l'enseignement du concept est devenu plus précoce et que le niveau de préparation exprimé par les professeurs pour l'enseignement de ce concept s'est accru. Nous en déduisons que l'enseignement effectif d'une notion ne permet d'améliorer les résultats des élèves que si les praxéologies qui sont enseignées correspondent à celles qui sont en jeu dans les tests, et que l'indication d'un type de tâches par le curriculum ne suffit pas à caractériser ces praxéologies.

En outre, même si ces deux facteurs peuvent subir ponctuellement de fortes transformations, le moment de l'enseignement effectif et le niveau de préparation des professeurs sont, selon leurs déclarations, assez stables. Les variations de ces déclarations, ainsi que celles concernant les scores obtenus par les élèves, sont bien souvent supérieures chez les participants ayant des curriculums inchangés, plutôt que chez ceux dont les instructions officielles ont été modifiées. Par exemple, les élèves hongkongais ont davantage progressé entre 2003 et 2011 dans leur capacité à comparer des fractions à 1/2 que les élèves singapouriens (+ 7,4 points de pourcentage pour les premiers contre + 2,6 pour les seconds). Pourtant, ce type de tâches a été intégré dans le curriculum de Singapour en 2006. Nous avons expliqué ce qui semble être un paradoxe en indiquant que les changements affectant les variables didactiques pour un type de tâches donné pouvaient avoir une influence beaucoup plus importante sur le taux de réussite des élèves que la modification des programmes d'enseignement. Ainsi, à propos de l'addition de fractions de dénominateurs différents, 82,6 % des élèves anglais sont parvenus, en 2003, à trouver ce qu'il restait du gâteau après avoir additionné 1/2, 1/4 et 1/4, tandis que seulement 27 % des élèves anglais sont parvenus, en 2015, à trouver le complément à l'unité

après avoir additionné 1/2 et 3/10. Sans doute quelques années supplémentaires seraient nécessaires pour avoir une idée précise de l'évolution des déclarations des professeurs pour chacun des pays participants, et il est certain que davantage de stabilité dans la rédaction des questions posées par les auteurs de TIMSS aiderait également à dégager des tendances claires. Néanmoins, ces constatations nous ont amené à conclure que la diversité et la nature des techniques enseignées aux élèves étaient un facteur décisif de leur réussite, et que les programmes d'enseignement constituaient un élément parmi d'autres susceptible de conduire à l'acquisistion de ces techniques, mais qu'ils se révélaient parfois insuffisants en raison d'une rédaction principalement centrée sur le type de tâches.

Conclusion du chapitre consacré aux limites du lien entre les programmes d'enseignement et l'acquisition du concept de fraction par les élèves

Ce chapitre a été scindé en deux parties complémentaires. En étudiant le rôle des enseignants dans la transposition didactique selon une perspective synchronique, nous avons montré que l'étude des déclarations des enseignants quant au moment de l'apprentissage était inspensable pour expliquer certains résultats. Par exemple, si les performances de la France et de l'Ontario à propos du lien entre les fractions et les nombres décimaux sont si faibles, c'est sans doute parce qu'on trouve, dans ces territoires, la plus grande proportion de professeurs déclarant que le concept de nombre décimal n'avait pas encore été étudié au moment du test, et cela alors même que ce type de tâches faisait partie du curriculum de quatrième année. Cette analyse a trouvé des limites, en particulier dans le fait que presque tous les professeurs déclarent que le concept de fraction a été enseigné aux élèves passant le test, alors que les résultats dans ce domaine sont très divers. Ces limites trouvent notamment une origine dans la méthodologie utilisée, qui consistait à s'appuyer des questionnaires TIMSS formulés de manière insuffisamment précise pour distinguer, à l'intérieur du concept de fraction, quels types de tâches, quelles variables de la tâche, techniques et technologies faisaient l'objet d'un enseignement. Outre les questions de formation qui pourraient être approfondies, il existe bien d'autres facteurs affectant le lien entre les programmes scolaires et l'acquisition du concept de fraction par les élèves. Nous pensons en particulier aux manuels d'enseignement. En effet, en raison du caractère partiel des organisations mathématiques élaborées par le législateur, ils pourraient constituer un facteur important de la variété des praxéologies abordées par les élèves. Or, il existe une grande diversité des usages au sein de notre corpus sur ce point. Par exemple, leur utilisation est libre dans certains territoires (Angleterre, France, Irlande du Nord,

République d'Irlande), tandis qu'ils sont soumis à l'approbation des autorités dans d'autres (Corée du Sud, Hong Kong SAR, Floride, Ontario, Québec, Singapour, Taipei chinois), et notamment chez tous les participants asiatiques de notre corpus[1]. Dès lors, il serait intéressant de déterminer plus précisément quels sont les critères qui permettent d'approuver un manuel, et s'il existe des différences entre le contenu des manuels dont l'utilisation est soumise à autorisation et celui des ouvrages dont l'utilisation est libre.

1. Ces informations sont issues d'un document intitulé *TIMSS 2015 Fourth Grade Curriculum Questionnaire Data* et disponible sur le site officiel des évaluations TIMSS 2015, à l'adresse suivante (consultée le 2 septembre 2018) : https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-database/.

CONCLUSION DU TITRE CONSACRÉ AUX RÉSULTATS DE L'ÉTUDE COMPARATIVE DES PERFORMANCES DES ÉLÈVES AUX ÉVALUATIONS TIMSS

Les écarts de performances dans le domaine des fractions sont très importants au sein de notre corpus : l'écart-type est de 14 points de pourcentage pour le taux de réussite global de chaque pays. Les variations inter-items sont fortes également, en particulier dans les pays où le score global est bas, ce qui nous a conduit à rechercher et mettre au jour « un lien entre les programmes scolaires et les performances des élèves qui tient à la programmation, à la durée et à la richesse de l'enseignement prescrit » (Martinez et Roditi, *op. cit.*, p. 35). D'abord, un enseignement trop tardif des fractions semble nuire aux résultats obtenus, commme nous l'avons vu avec le cas de la France et de l'Ontario. Nous faisons l'hypothèse que la faible durée qui s'écoule avant la passation des tests ne permet pas aux professeurs d'aborder avec les élèves des tâches suffisamment diverses pour qu'ils puissent atteindre des scores élevés. Ensuite, nous avons mis en évidence l'impact favorable d'un curriculum prévoyant des activités à la fois variées et complexes pour un même type de tâches, en particulier pour l'addition et la comparaison de fractions. Enfin, nous avons observé que les pays dans lesquels les instructions officielles sont celles où les notions reviennent sous une forme identique plusieurs années durant n'étaient pas ceux qui obtenaient des taux de réussite élevés aux items correspondants. Chez les participants qui atteignent les scores les plus élevés, il existe une répartition clairement établie, définissant ce qui revient à chaque niveau de classe. Si une redondance apparait, les variables de la tâche changent suffisamment pour pouvoir déduire que de nouvelles techniques doivent être enseignées. Par ailleurs, notre étude montre que « la part de variabilité de ces performances qui subsiste apparait tenir, pour partie, à l'adhésion des enseignants à ces programmes scolaires » (*ibid.*). Les conditions de cette adhésion restent encore très largement à définir. Dans notre étude, nous avons évoqué trois pistes à ce propos. La première tient au temps dévolu pour l'enseignement des mathématiques et au nombre de thèmes à traiter : des programmes trop denses pourraient conduire les professeurs à reporter l'étude de certaines notions avec les élèves. La deuxième tient aux acquis des élèves sur lesquels se fonde l'apprentissage de la nouvelle notion : si ceux-ci sont trop faibles, les professeurs pourraient être amenés à différer cet enseignement, de façon à consolider les connaissances qui semblent indispensables à cette étude. La troisième tient à des considérations de nature idéologique. Par exemple, en Floride, les nouveaux programmes sont contestés par certains enseignants en raison d'une atteinte à la liberté pour les États de définir leur propre politique éducative.

CONCLUSION DE LA PARTIE CONSACRÉE AUX RÉSULTATS DES ÉLÈVES AUX ÉVALUATIONS TIMSS DANS LE DOMAINE DES FRACTIONS

Les performances des élèves constituent le produit de facteurs extrêmement divers, et la recherche d'une analyse exhaustive visant à en identifier les causes dépasse amplement le cadre d'une thèse. Toutefois, à partir des résultats produits par les enquêtes TIMSS, nous avons pu mettre en évidence des phénomènes d'interdépendance au sein des systèmes éducatifs : par exemple, la quantité du travail fournie en dehors du temps scolaire par les élèves asiatiques de notre corpus explique sans doute en partie l'organisation des curriculums dans ces territoires, dans lesquels la succession des types de tâches à enseigner semble plus rapide qu'ailleurs. De même, la polyvalence moins affirmée des enseignants à Hong Kong SAR, à Singapour et dans le Taipei chinois pourrait avoir un lien avec la plus grande variété des techniques maitrisées par leurs élèves (qui ressort de l'incidence moins forte des changements de variables didactiques sur leurs performances), tandis qu'en Corée du Sud, cette variété pourrait trouver son origine dans le recours très fréquent par les élèves à des cours complémentaires. À l'inverse, nous avons mis au jour une formation en mathématiques des professeurs des écoles français qui semble beaucoup plus faible qu'ailleurs, qu'il s'agisse de la formation initiale ou de la formation continue, et que l'on peut mettre en relation avec le moindre niveau de préparation qu'ils déclarent pour l'enseignement de divers types de tâches se rapportant aux fractions. Ces caractéristiques des systèmes éducatifs affaiblissent la possibilité de transferts inter-pays d'éléments curriculaires sans réflexion préalable sur les conditions et conséquences de ces transferts.

En outre, nous avons pu avancer des hypothèses sur l'origine des écarts de performances qui transcendent les systèmes éducatifs, et qui touchent à l'enseignement en général. Par exemple, nous avons montré que, pour l'analyse des scores obtenus par les élèves aux évaluations TIMSS 2015, une approche praxéologique expliquait mieux les différences qu'une analyse fondée sur des catégories cognitives. Par ailleurs, nous avons indiqué que les capacités de transfert étaient assez faibles chez les élèves : même avec de solides connaissances conceptuelles, ils parviennent difficilement à réussir des types de tâches pour lesquelles celles-ci suffiraient, mais à propos desquelles ils ne semblent pas avoir reçu d'enseignement. Nous

pensons en particulier aux élèves français, qui sont 72,5 % à identifier la fraction 1/4 à partir d'un dessin, mais qui ne sont que 21,1 % à reconnaitre 1/2 comme étant une fraction plus grande que trois autres fractions unitaires. De plus, les résultats sont proches lorsque, pour des types de tâches différents, les procédures à utiliser sont similaires (par exemple, pour associer une fraction à un dessin et pour identifier le complément à l'unité). Ces observations ouvrent des perspectives de recherche portant sur la progression du temps didactique, dans les instructions officielles et dans les classes : y aurait-il un avantage à regrouper l'enseignement de types de tâches mettant en jeu des techniques proches la même année ? Au contraire, serait-il plus efficace pour la construction du concept de fraction de proposer l'étude de différentes techniques pour la résolution d'un même type de tâches au cours d'une année unique ? Comment organiser dans le temps les enseignements qui concernent la capacité des élèves à opérer un cadrage de la tâche, et à choisir la technique la plus adaptée pour sa réalisation ?

CONCLUSION GÉNÉRALE

Notre thèse vise à mieux comprendre comment les performances des élèves de quatrième et de huitième année aux évaluations TIMSS sont corrélées à la transposition didactique externe du concept de fraction, entendue dans ses composantes topogénétiques et chronogénétiques. Pour ce faire, nous avons inscrit notre analyse dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, en combinant une réflexion fondée sur le concept de transposition didactique et sur le concept d'organisation praxéologique. Dans cette conclusion, nous allons présenter une synthèse du travail effectué, puis nous présenterons ses apports, ses limites et les perspectives de recherches qu'il dessine.

Synthèse

Dans le premier chapitre, nous avons défini les aspects anthropologique de notre étude (au sens commun du terme), en expliquant comment le concept de fraction s'était construit au cours de l'Histoire, et en montrant qu'il présentait aujourd'hui un caractère d'universalité suffisant pour que des comparaisons inter-pays soient menées à son endroit, bien que des différences apparaissent selon les régions (par exemple, en raison des systèmes de mesures qui se sont succédé, les fractions sont plus utilisées dans les territoires de culture anglo-saxonne que dans les pays de culture latine comme la France). Nous avons montré que les difficultés concernant les fractions étaient assez bien établies, non pas seulement en France, mais à travers des travaux d'horizons divers, et que ces difficultés apparaissaient dans les évaluations internationales comme dans les tests nationaux (tels que les évaluations à l'entrée en sixième réalisées en France au début des années 2000). Le choix des onze participants aux évaluations TIMSS ayant fait l'objet de notre étude comparative (Angleterre, Corée du Sud, Floride, France, Hong Kong SAR, Irlande du Nord, Ontario, Québec, République d'Irlande, Singapour, Taipei chinois) a été justifié par des considérations pratiques (accessibilité et langue des programmes) et liées à notre recherche (performance des élèves aux évaluations TIMSS, appartenance à des zones géographiques déterminées). Les instructions officielles sur lesquelles nous nous sommes appuyé pour cette recherche ont été présentées. Une revue des objectifs fixés par les auteurs des programmes a permis de mettre au jour des différences portant sur les processus pédagogiques

qui doivent être mis en œuvre dans chaque pays, ainsi que sur les buts assignés à l'enseignement des fractions.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté de manière plus détaillée notre cadre théorique, en décrivant l'organisation praxéologique théorisée par Chevallard (2002a). Celle-ci se compose d'un bloc pratico-technique permettant de décrire les types de tâches qui sont étudiées, ainsi que les techniques qui permettent de les réaliser, et d'un bloc technologico-théorique permettant de décrire les savoirs au sens strict qui sont mis en jeu dans la tâche. Nous avons défini de façon pragmatique l'ensemble des types de tâches qui figuraient dans les programmes formant notre corpus, et nous les avons classés en trois grandes catégories : ceux dont nous avons estimé qu'ils visaient l'étude de la cardinalité, ceux dont nous avons estimé qu'ils visaient l'étude de l'ordinalité et ceux qui concernaient les opérations impliquant des fractions. Nous avons également décrit les techniques qui pouvaient être utilisées par les élèves, lorsque plusieurs étaient envisageables, en particulier pour l'identification de fractions à partir d'un dessin et pour la comparaison de fractions. En ce qui concerne les savoirs au sens strict, nous n'avons abordé de façon approfondie que les aspects technologiques. À ce sujet, nous avons retenu cinq grandes conceptions de la fraction, à partir d'une revue de la littérature, et mis au jour des éléments théoriques pour appréhender la relation entre les connaissances conceptuelles des élèves (c'est-à-dire celles qui se rapportent aux savoirs au sens strict) et leurs connaissances procédurales (c'est-à-dire celles qui se rapportent aux techniques), d'après les travaux de Carette et al. (2009). En ce qui concerne les aspects transpositifs, nous avons distingué les savoirs à enseigner des savoirs enseignés et des savoirs appris et retenus, suivant en cela la classification de Chevallard (1985), ce qui nous a permis de considérer les caractéristiques du savoir transposé par les législateurs (désyncrétisation, dépersonnalisation, programmabilité, publicité et contrôle social des apprentissages) comme étant susceptibles d'affecter le contenu des praxéologies élaborées. Cette analyse a été doublée d'une approche écologique, pour laquelle nous avons décrit le contexte et les processus d'élaboration des programmes dans chacun des pays de notre corpus, confirmant la validité des comparaisons inter-pays envisagées.

Dans le troisième chapitre, consacré à la topogénèse du concept de fraction, nous avons comparé les programmes d'enseignement des onze participants retenus relativement aux types de tâches, variables didactiques, techniques et significations du concept prescrits. Ainsi, nous avons pu mettre au jour une certaine homogénéité des instructions officielles, puisque les genres

de tâches sur lesquels les auteurs insistent sont assez similaires (six ont été définis : associer une fraction à un dessin, convertir des notations fractionnaires et décimales, identifier des fractions équivalentes, comparer des fractions, additionner des fractions et multiplier une fraction par un entier). De la même façon, l'apprentissage des significations « partie d'un tout » (avec des quantités continues ou discrètes) et « mesure » constituent l'essentiel du travail réalisé par les élèves entre la première et la huitième année d'enseignement obligatoire. Les techniques sont en règle générale très peu abordées par les auteurs des programmes, qui prescrivent principalement des types de tâches. Les précisions concernant les ostensifs à privilégier ne sont pas contributives à l'analyse praxéologique que nous avons réalisée : d'abord, elles sont assez rares et réparties de façon hétérogène dans les textes ; ensuite, elles ne sont pas rédigées dans des termes suffisamment précis pour que l'on puisse déduire une quelconque variété des supports utilisés ; enfin, elles ne permettent pas de mettre au jour des différences entre les pays à propos de la nécessité pour les élèves d'opérer un cadrage de la tâche ou de justifier leurs réponses (il est vrai que ces aspects sont transversaux : ils ne concernent pas spécifiquement les fractions, et peuvent être intégrés dans le préambule des programmes ou ancrés dans les pratiques enseignantes). Par ailleurs, ces développements ont mis au jour une certaine correspondance entre les types de tâches identifiés dans les curriculums et ceux présents dans les tests TIMSS, ce qui constituait l'une des conditions de validité des comparaisons portant sur les performances des élèves.

Dans le quatrième chapitre, consacré à la chronogénèse du concept de fraction, des différences plus nettes apparaissent entre les instructions officielles des pays étudiés. Pour les mettre en évidence, nous avons analysé de façon détaillée les progressions en vigueur au moment des évaluations TIMSS 2015 pour les six genres de tâches les plus présents dans les programmes scolaires (ceux que nous avons identifiés dans le troisième chapitre). Les autres types de tâches étant prescrits de façon éparse au sein de notre corpus, nous avons comparé les progressions à leur endroit uniquement dans le cas où un item TIMSS mettait en jeu ce type de tâches, et seulement à l'occasion de l'analyse de cet item. Les écarts constatés concernent aussi bien le moment qui marque le début de l'enseignement, que la durée de ce dernier ou l'agencement des différents types de tâches qui présentent une certaine proximité au cours de la scolarité. Par exemple, l'introduction des écritures fractionnaires s'étale entre la deuxième et la quatrième année d'enseignement obligatoire, avec des activités préparatoires portant sur la capacité à réaliser des partages en parts égales assez rares, ce qui ouvre la possibilité pour les élèves de plusieurs pays de manipuler des symboles sans avoir construit les fondements du

concept de fraction (ce que Adjiage nomme le « stade des partitions » [*op. cit.*, 1999, p. 39]). Certains participants (dont la France) imposent l'utilisation de trois écritures des décimaux (fractions, notations décimales et pourcentages) au tout début de l'étude de cette notion. D'autres prévoient un enseignement plus progressif (notamment à Singapour, où ces trois écritures sont introduites au cours de trois années différentes). L'étude des progressions concernant les comparaisons, l'identification de fractions équivalentes et les opérations ont permis de distinguer quatre formes d'avancée du temps didactique : première possibilité, des types de tâches sont répétés sans modification dans les instructions officielles ; deuxième possibilité, des types de tâches sont répétés avec une modification des variables de la tâche, mais ce changement n'affecte pas les techniques susceptibles d'être utilisées par les élèves ; troisième possibilité, des types de tâches sont répétés avec une modification des variables de la tâche, et ce changement affecte les techniques susceptibles d'être utilisées par les élèves ; quatrième possibilité, des types de tâches sont répétés avec une modification des techniques que doivent utiliser les élèves, celles-ci étant explicitées par les auteurs des programmes. Les territoires dans lesquels les élèves sont les plus performants utilisent très rarement les deux premières formes de progression. Cependant, ce sont aussi ceux dans lesquels la durée des apprentissages semble la plus longue, ce qui soulève un doute quant à la capacité de transférer cette caractéristique chez d'autres participants. De plus, une progression rapide (avec une ou deux années passées sur un même types de tâches) n'a pu être corrélée à des résultats élevés qu'à la condition qu'elle soit associée à une certaine richesse des curriculums, c'est-à-dire à des types de tâches nécessitant la mise en œuvre de techniques similaires se succédant au fil des années (par exemple « identifier des fractions équivalentes » et « simplifier des fractions »). Par ailleurs, nous avons mis en lumière que les intitulés des programmes étaient le plus souvent rédigés dans des termes qui supposaient une univocité des organisations mathématiques. Or, différentes praxéologies peuvent être élaborées à partir d'un même type de tâches. Par exemple, lorsque le législateur sud-coréen écrit que les élèves doivent « comprendre le sens et le principe de calcul de la multiplication entre des nombres entiers et des fractions » (*op. cit.*, p. 26), il ouvre la voie à des interprétations divergentes sur les savoirs, les techniques et les situations que recouvre cet intitulé : celui-ci peut correspondre aussi bien à l'introduction de la fraction-mesure qu'à celle de la fraction-opérateur.

Dans le cinquième chapitre, avant de comparer les résultats des élèves, nous avons cherché à définir la portée de notre étude. En effet, les écarts de performances des élèves aux évaluations TIMSS ne tiennent pas seulement aux différences inter-curriculaires : le contexte

du système scolaire et de la société les explique en partie. Pour déterminer les caractéristiques des systèmes éducatifs étudiés, nous nous sommes appuyé sur les réponses des élèves et des enseignants aux questionnaires TIMSS (en quatrième année, nous avons pu également nous appuyer sur les réponses données par les familles). Les données recueillies, en raison de leur quantité et du point de vue qu'elles apportent sur l'enseignement des mathématiques en général, et des fractions en particulier, apportent des éléments qui peuvent expliquer des différences portant sur les taux de réussite moyens. Par exemple, l'accompagnement dont les élèves bénéficient dans les pays occidentaux et dans les pays asiatiques est très différent. Dans les premiers, les élèves sont essentiellement suivis par leurs parents pour la réalisation des devoirs. Dans les seconds, les parents paraissent moins s'impliquer de façon directe ; en revanche, le recours à des cours complémentaires est beaucoup plus important. Par ailleurs, nous avons noté que les élèves asiatiques semblaient moins apprécier les cours de mathématiques que les élèves européens et nord-américains de notre corpus, notamment parce qu'ils sont assez peu encouragés par leurs enseignants et ont une confiance moindre en leurs capacités. En outre, leur ambition scolaire est forte, mais ils n'expriment pas un intérêt particulier pour les mathématiques. Les déclarations des professeurs suggèrent des pratiques pédagogiques assez proches (même si, en France, l'explication frontale est légèrement moins utilisée qu'ailleurs). Toutefois, la formation des enseignants est très diverse. À Hong Kong SAR, à Singapour et dans le Taipei chinois, ceux-ci indiquent plus fréquemment avoir suivi une formation initiale dans le domaine des mathématiques, et ils paraissent, dans le premier degré, moins polyvalents qu'ailleurs. Dans la plupart des pays, un pourcentage important de professeurs précise avoir effectué une formation initiale en mathématiques ou dans le domaine de l'éducation ; en France, ce pourcentage est bas et la durée de la formation continue est la plus faible du corpus. Enfin, les conditions d'enseignement ne semblent pas particulièrement favorables dans les pays où les élèves sont les plus performants. Par exemple, le nombre d'élèves par classe est beaucoup plus élevé à Singapour (35,4 élèves par classe en moyenne) qu'en Floride (21,5 élèves par classe en moyenne). Toutefois, en France, les professeurs évoquent fréquemment le fait que les élèves ne semblent pas prêts pour l'apprentissage, en raison de connaissances insuffisantes, et que les programmes sont trop denses. Ces données de contexte apportent un éclairage sur l'activité des professeurs et des élèves dans le processus de transposition didactique ; sans elles, la relation entre le contenu des programmes et les résultats des élèves serait difficile à caractériser.

Dans le sixième chapitre, ce travail de contextualisation de la transposition didactique a été poursuivi. À partir des déclarations des chefs d'établissement, des professeurs et des élèves,

nous avons estimé le temps que ces derniers passaient à étudier les mathématiques, au sein de leur établissement et en dehors. Nous observons que le nombre d'heures de cours mathématiques est assez semblable au sein de notre corpus. En revanche, les écarts sont très importants lorsqu'on inclut le temps de travail personnel des élèves. La durée des apprentissages mathématiques en dehors du temps scolaire des écoliers hongkongais est, selon les réponses des élèves aux questionnaires, plus de huit fois supérieure à celle des écoliers français ! Après comptage de l'ensemble des items dans les programmes et des items se rapportant aux fractions, nous avons constaté que ceux-ci n'étaient pas présents dans une proportion plus importante au sein instructions officielles des participants les plus performants. Néanmoins, la répartition des items entre la première et la huitième année d'enseignement obligatoire y est plus concentrée sur les cinquième et sixième années, tandis que dans les pays occidentaux, la répartition est plus homogène, ou bien montre des proportions importantes d'items ayant trait aux fractions plus précocément dans la scolarité. Chez les participants dans lesquels les élèves obtiennent les scores les plus élevés, les auteurs ne semblent donc pas mettre spécifiquement l'accent sur ce thème. Toutefois, en raison d'une durée des apprentissages supérieure chez ces participants, nous avons établi la nécessité de réaliser des comparaisons inter-pays, non sur des scores bruts, mais sur des taux de réussite relatifs. Par ailleurs, la réussite dans le domaine des fractions et la réussite à l'ensemble du test sont très fortement corrélées (avec un coefficient de détermination de Bravais-Pearson de 0,76 en quatrième année et 0,9 en huitième année), ce qui confirme l'analyse de Siegler *et al.* (2012) selon laquelle les fractions sont un bon prédicteur des performances des élèves en mathématiques. Le contenu des tests présente des similitudes avec le contenu des instructions officielles, dans le sens où l'accent est mis sur les mêmes types de tâches, et où les significations du concept évaluées sont principalement la fraction partie-tout et la fraction mesure dans les deux cas. Toutefois, certains items mettent en jeu des types de tâches qui ne sont pas prévus par certains législateurs, ce qui a permis, dans les chapitres ultérieurs, de réaliser des comparaisons entre les performances des élèves dans les pays où cet enseignement est imposé, et où il ne l'est pas, afin de déterminer si cette absence avait une incidence négative importante sur les résultats des élèves. Nous avons également vérifié que les participants ne s'entrainaient pas pour réussir des items proposés dans des tests précédents, et susceptibles d'être proposés à nouveau : nous n'avons pas constaté d'augmentation des résultats suggérant une telle préparation, ce qui ne préjuge pas d'un entrainement pour réussir les évaluations TIMSS (par exemple, en travaillant sur des questionnaires à choix multiples).

Dans le septième chapitre, nous avons d'abord analysé les résultats des élèves, d'une part pour mesurer les écarts inter-pays et observer, en comparant les taux de réussite en quatrième année et en huitième année, l'influence éventuelle de facteurs tels que la durée des apprentissages ; d'autre part, pour mesurer les écarts inter-items, et définir l'hétérogénéité de leurs performances. Ainsi, nous avons pu relier la faiblesse des résultats des collégiens floridiens, par rapport aux écoliers de cet État, aux déclarations des enseignants qui indiquent que les premiers se montrent peu préparés pour l'apprentissage et manquent des connaissances nécessaires pour construire les notions au programme. Nous avons également montré que les écarts creusés à l'école élémentaire semblaient se maintenir au collège, le resserrement des écarts en termes de travail personnel fourni par les élèves ne paraissant pas suffisant pour permettre aux élèves des pays occidentaux d'obtenir des scores similaires à ceux des pays asiatiques. Par ailleurs, l'écart-type entre les taux de réussite moyens aux items impliquant des fractions est élevé (avec un écart-type de 15 points de pourcentage, en 2015, pour les pays étudiés), et les scores obtenus par les élèves sont très hétérogènes lorsqu'un enseignement ne figure pas dans les programmes de tous les participants du corpus. Nous avons ensuite cherché à mettre au jour un lien entre les programmes scolaires et les performances des élèves, et indiqué qu'il n'existait pas de corrélation linaire entre l'adéquation des instructions officielles aux tests et les résultats obtenus. Toutefois, l'absence d'un type de tâches dans le curriculum semble bien avoir une incidence négative sur la réussite aux items correspondants, à hauteur de 30 points de pourcentage au maximum, selon les estimations que nous avons pu produire à partir des données TIMSS 2015. En calculant les coefficients de détermination pour tous les couples d'items, nous avons observé que les exercices mettant en jeu les mêmes types de tâches étaient réussis de façon similaire, tandis que les transferts entre types de tâches différents paraissent s'opérer difficilement chez les élèves. La modification des variables didactiques pour un même type de tâches ne semble avoir une influence sur le taux de réussite moyen que dans la mesure où elles font évoluer les techniques que peuvent utiliser les élèves. Cependant, même si le taux de réussite moyen change, la distribution des résultats est assez stable, ce qui suggère que les difficultés engendrées par une modification d'une variable touchent une proportion semblable d'élèves dans chaque pays. En outre, les catégories cognitives utilisées par les auteurs de TIMSS pour caractériser les items (« connaitre », « appliquer » et « raisonner ») expliquent moins bien les écarts de performance qu'une analyse didactique : la corrélation moyenne entre les items impliquant une même catégorie cognitive est moins élevée que celle entre les items impliquant un même type de tâches. Elles ne font pas non plus apparaitre une gradation du niveau de difficulté des items. Cette analyse confirme les résultats de Roditi et Salles (2015),

qui proposent de classer les items selon des « catégories de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques » : les typologies énoncées pouvant éventuellement être affinées, dans le domaine des fractions, en fonction des connaissances que les auteurs des tests ont de la maitrise par les élèves des différentes praxéologies susceptibles d'être mises en jeu. Par ailleurs, le nombre d'années au cours desquelles est enseignée une notion ne semble pas avoir d'incidence sur le taux de réussite aux items correspondants. En revanche, nous avons pu faire des liens entre la richesse des intitulés des instructions officielles et le taux de réussite moyen des élèves aux items correspondants, notamment à propos des comparaisons de fractions. Enfin, en étudiant les réponses des professeurs à propos des savoirs enseignés, nous avons indiqué qu'un manque d'adhésion de leur part au curriculum était lié à des résultats faibles. À l'inverse, un enseignement effectif n'est pas systématiquement lié à des scores élevés. Nous en avons déduit que celui-ci était nécessaire, mais insuffisant pour entrainer une forte réussite des élèves : un enseignement effectif de l'organisation mathématique en jeu dans l'item pourrait y contribuer, mais des études complémentaires, réalisées à variables constantes, seraient nécessaires pour valider cette hypothèse. Pour autant, un changement dans le curriculum entraine-t-il une évolution des pratiques enseignantes ? Celles-ci présentent en effet un caractère de stabilité (Roditi, 2003 et Robert, 2007) et ne peuvent évoluer qu'à certaines conditions (Houdement, 2014).

Dans le huitième chapitre, une étude longitudinale a permis d'enrichir l'analyse menée seulement à partir des programmes en vigueur au moment des tests TIMSS 2015, et d'apporter des éléments de réponse à cette question. Notre regard s'est porté sur l'évolution des curriculums, qui ont été confrontés à celle des déclarations des professeurs relatives au moment de l'enseignement du concept de fraction et à leur ressenti à propos de leur capacité à enseigner cette notion. En ce qui concerne la première, l'exemple des transformations opérées sur les programmes scolaires anglais entre 1989 et 1999 tend à montrer qu'une augmentation importante de la quantité et de la variété des types de tâches ayant trait aux fractions était susceptible de conduire à une amélioration sensible des performances des élèves dans ce domaine. L'exemple des changements apportés aux programmes de Singapour, à propos de la comparaison et de l'addition de fractions, suggère à l'inverse que de modestes évolutions dans l'organisation temporelle des enseignements ou dans la formulation des intitulés n'entrainent pas de modification notable des taux de réussite aux items correspondants. Toutefois, les questionnaires TIMSS ne permettent pas de déterminer les facteurs expliquant cette faible évolution : des conditions manquaient-elles pour une prise en compte des nouvelles directives

par les enseignants (formation, publicitié, etc.) ou les changements attendus correspondaient-ils à des pratiques déjà établies chez les professeurs ? Le ressenti de ces derniers quant à leur capacité à enseigner le concept de fraction n'a pas pu être relié à une quelconque transformation des scores obtenus par les élèves. À l'inverse, l'évolution du moment effectif de l'enseignement indiqué par les professeurs entretient une relation assez nette avec celle des taux de réussite des élèves. Le gain lié à plus grande précocité peut être faible, comme le montre le cas du Québec, ce qui suggère, encore une fois, l'insuffisance d'un enseignement effectif des genres de tâches en jeu dans les tests. Nous avons peu d'exemples d'un enseignement qui, d'après les professeurs, serait plus tardif au fil des années : néanmoins, en Ontario, pour l'addition de fractions : entre 2003 et 2007, et les résultats ont baissé en même temps que reculait l'âge auquel cette notion était enseignée, laissant à penser que l'effectivité de l'enseignement reste une condition de la performance. Une analyse plus précise de la relation entre les enseignements réalisés dans les classes et les acquis des élèves tels qu'ils ressortent des évaluations TIMSS serait nécessaire pour déterminer dans quelle mesure un enseignement effectif des praxéologies en jeu dans les tests permet d'obtenir des scores élevés, et dans quelle mesure la façon d'enseigner ces praxéologies influe sur les performances des élèves. Toutefois, ces données suggèrent une incidence variable de l'évolution des programmes scolaires sur les performances des élèves : l'examen des conditions de cette relation pourra être approfondi. Pour cette analyse, la prise en compte des caractéristiques des systèmes éducatifs semble indispensable ; c'est l'un des apports de cette thèse.

Apports

Il y a quelques années, Antoine Bodin affirmait que « peu de recherches en didactique des mathématiques prennent en compte l'existence des faits d'évaluation, de même que peu de recherches sur l'évaluation prennent en compte la spécificité des savoirs en jeu. » (Bodin, 1997, p. 50). C'est cette dernière approche que nous avons retenue pour cette étude : identifier les savoirs mis en jeu dans les items impliquant des fractions aux évaluations TIMSS, et réaliser des comparaisons inter-pays portant sur les taux de réussite des élèves. Les résultats mis en évidence dans notre recherche montrent précisément l'importance de l'analyse didactique pour la compréhension des scores obtenus par les élèves. Une telle analyse permet en effet de proposer une classification plus pertinente des items qu'une classification fondée sur les aspects cognitifs (c'est-à-dire telle qu'elle est organisée jusqu'à présent par les auteurs de TIMSS). Les écarts de performances, au fil des années, entre des items portant sur le même type de tâches,

ne peuvent s'expliquer par la catégorisation cognitive des items (celle-ci est stable) ; notre étude montre que les changements de programmes scolaires expliquent moins bien ces évolutions que les changements de variables didactiques. En ce sens, elle met en lumière l'importance d'une compréhension fine des savoirs en jeu et contribue à « placer l'évaluation dans le domaine mathématique sous le contrôle du didactique » (*ibid.*, p. 53). Elle tend à montrer également que l'évaluation est avant tout un phénomène praxéologique, pour la compréhension duquel la contribution des programmes scolaires est notable, mais insuffisante.

Notre thèse montre que les organisations mathématiques acquises par les élèves évoluent même en l'absence de changement dans les curriculums. Par ailleurs, il existe parfois une grande stabilité des déclarations des enseignants relatives à leurs pratiques, alors même que les instructions officielles ont été modifiées par le législateur. Sur ce point, les résultats que nous avons obtenus suggèrent une grande variété au sein de notre corpus : par exemple, à Hong Kong SAR, les déclarations des enseignants sont assez stables ; au Québec, elles ont fortement évolué. Pourtant dans ces deux territoires, les instructions officielles sont les mêmes depuis respectivement 2000 et 2001. D'autres recherches seraient donc nécessaires pour comprendre à quelles conditions et dans quelles mesures ces changements s'opèrent. Nous déduisons simplement que la transposition didactique interne n'est pas un phénomène qui s'effectue exclusivement à partir des programmes scolaires, mais un processus beaucoup plus complexe que ne le suggère la prise en compte du schéma classique : savoirs savants → savoirs à enseigner → savoirs enseignés → savoirs appris. Certes, le poids des instructions officielles sur les organisations mathématiques élaborées par les enseignants n'est pas négligeable, et les résultats des élèves aux types de tâches qui n'ont pas l'objet d'une inscription dans le curriculum sont sans doute moins élevés que ceux pour lequels il existe une prescription correspondant à la tâche en jeu. Toutefois, le choix des techniques et technologies étudiées par les élèves sont presque exclusivement le fait des enseignants. Les instructions officielles offrent une très grande liberté sur ce point, et ouvrent la voie à l'élaboration d'organisations mathématiques très diverses. En cela, les caractéristiques des programmes participent sans doute au fait que le « caractère incident des savoirs parait être à l'origine de nombreux dysfonctionnements dans l'enseignement à l'école primaire (caractère implicite des connaissances en jeu, statut ambigu d'épisodes didactiques, etc.), susceptibles de produire de la différenciation dans les apprentissages scolaires » (Coulange, 2011, p. 44). Effectivement, les taux de réussite aux items impliquant un même type de tâches avec des variables différentes indiquent de grandes disparités quant à la nature des praxéologies acquises par les élèves. Ces

observations peuvent être mise en correspondance avec celles réalisées par Bosch et Gascón, qui indiquent que « les techniques […] ne sont pas nécessairement organisées à l'avance à partir d'un discours technologico-théorique établi et systématisé, qui réponde à des justifications et de validation empirique » (*op. cit.*, p. 24). Ce type d'organisation des programmes d'enseignement peut donc être source d'inégalités, non seulement inter-pays (quand on voit les différences de formation en mathématiques des enseignants dans les différents pays), mais aussi intra-pays (on sait qu'en France les professeurs les moins expérimentés sont souvent nommés dans les zones les plus défavorisées, et que le système français est, d'après les données recueillies dans TIMSS ou PISA, très inégalitaire).

Nos résultats montrent également une faible prise en compte des travaux didactiques dans les programmes scolaires. Les difficultés usuellement rencontrées par les élèves ne sont jamais mentionnées dans les programmes, et les variables ou ostensifs prescrits ne sont pas décrits de façon suffisamment précise pour que les tâches suggérées induisent une réflexion, en classe, sur ces difficultés potentielles. De même, les activités préparatoires à l'étude des nombres rationnels (le « partitionnement » évoqué par Adjiage) ne sont que rarement évoquées. Dès lors, la prise en compte de ces difficultés ou de ces connaissances préalables est laissée à la discrétion des systèmes éducatifs. À Singapour, les élèves qui choisissent une conception erronée pour reconnaitre 1/4 sont moins nombreux qu'en France par exemple, alors que les élèves de ces deux pays sont censés avoir reçu un enseignement à propos de l'association d'une fraction à un dessin, ce qui suggère, là encore des inégalités inter-pays dans la prise en compte des difficultés des élèves. Nous avons évoqué quelques facteurs qui pourraient expliquer ces écarts (par exemple, une meilleure formation des professeurs en mathématiques ou la qualité des manuels). Précisons néanmoins que les résultats des élèves ne disent rien, par eux-même, des caractéristiques d'un système éducatif. Deux pays peuvent obtenir des scores globaux assez proches, mais présenter des caractéristiques très différentes. Nous pensons par exemple à Singapour et à la Corée du Sud, qui présentent tous deux d'excellents résultats. Pourtant, les parents sud-coréens semblent moins satisfaits, en moyenne, des établissements scolaires fréquentés par leurs enfants. Le travail demandé en dehors du temps scolaire est très faible par rapport aux autres participants asiatiques, et comparé à la plupart des pays occidentaux de notre corpus. En revanche, le fait de suivre des cours complémentaires y est extrêmement fréquent, ce qui laisse à penser que la réussite des élèves est, au moins partiellement, liée à cet investissement fort des familles en dehors du temps scolaire. À Singapour, le travail personnel attendu par les enseignants est beaucoup plus important, et les cours complémentaires sont un

peu moins développés (même s'ils le sont bien davantage qu'en Occident), ce qui suggère une moindre dépendance du système éducatif vis-à-vis des efforts fournis par les familles en dehors de l'institution. De plus, les élèves se montrent davantage satisfaits des cours de mathématiques. Les spécificités locales, et notamment la quantité de travail fournie par les élèves, ont sans doute une influence sur la manière dont sont organisées les progressions curriculaires. Le fait de s'intéresser plus précisément, dans un système éducatif donné, à la durée nécessaire pour acquérir ces différentes praxéologiques, et donc à la variété des organisations mathématiques susceptibles d'être prescrites selon la durée des apprentissages, pourrait permettre une meilleure articulation de ces progressions. De plus, une rationnalisation de ces dernières semble possible, soit par un regroupement de l'enseignement des tâches qui peuvent être résolues à partir d'une même technique, soit par un regroupement de l'enseignement des techniques qui permettent de résoudre un même type de tâches. De nouvelles recherches sur ce point permettraient de formuler des pistes pour réduire les contraintes temporelles évoquées plus souvent qu'ailleurs par les professeurs français (le programme étant considéré comme trop dense par rapport au temps d'enseignement).

Notre étude met également en évidence les difficultés des élèves à réutiliser leurs connaissances pour réussir des types de tâches pour lesquelles un enseignement n'est pas prévu par les programmes. De ce fait, elle tend à montrer qu'on ne peut pas attendre, de la part des élèves, de transferts d'une organisation mathématique à une autre et qu'un apprentissage de l'organisation mathématique en jeu est nécessaire pour la réussite aux items. Ces résultats confortent l'idée que des connaissances conceptuelles ne sont pas suffisantes pour réussir des exercices pour lesquels, pourtant, elles pourraient suffire, hypothèse déjà étayée par Byrnes et Wasik (1991) ainsi que par Carette *et al.* (2009). Certes, pour certains types de tâches, des rapprochements peuvent être opérés par les élèves, sans doute en raison de la proximité des techniques permettant leur résolution. Les premiers citent « en exemple la comparaison de fractions de même numérateur, ainsi que l'addition et la soustraction de fractions de même dénominateur », indiquant que « dans ce cas, vraisemblablement, la construction de représentations mentales de la magnitude des fractions permet donc bien de répondre à certaines questions classées "procédurales" » (*ibid.*). Pour notre part, nous avons constaté une forte corrélation linéaire entre la capacité des élèves à associer une fraction à un dessin et celle consistant à trouver le complément à l'unité, ce que nous avons interprété comme la manifestation du fait que les élèves identifiaient le complément à l'unité par le biais d'une procédure similaire à celle utilisée pour associer une fraction à un dessin (et non par le biais

d'une soustraction). De plus, nous constatons comme eux que « lorsqu'une procédure est nécessaire, par exemple pour additionner deux fractions de dénominateurs différents, l'enseignement des principes sous-jacents ne peut pas se substituer à une présentation explicite de cette procédure de résolution » (*ibid.*). En revanche, les données analysées à propos de la comparaison de fractions de même numérateur (en particulier le taux de réussite des élèves français) montrent une difficulté des élèves à utiliser leurs connaissances des fractions unitaires pour ordonner de telles fractions en l'absence des prescriptions correspondantes dans les instructions officielles.

Ce n'est pas pour autant que l'intégration dans les instructions officielles des techniques et savoirs à enseigner pourrait permettre, de façon systématique, de diminuer ces inégalités. D'abord, nous avons vu que la prescription de ces techniques était susceptible de diminuer la variété des praxéologies acquises par les élèves (cela semble être le cas en Ontario par exemple). Ensuite, Tempier a montré dans sa thèse que « lorsque des textes sont inclus dans une ressource, ils ne sont pas repris, même partiellement, par les enseignants » (Allard, 2015, p. 289). Cette dernière obtient des résultats similaires, et avance « plusieurs explications à cela, d'une part [elle a] montré que les enseignants croisaient plusieurs ressources, empruntant à l'une ou à l'autre essentiellement pour les activités introductives ou les exercices. D'autre part, penser et écrire des textes de savoir ne semble pas constitutif des pratiques » et « élaborer seul un texte écrit alors que la notion abordée est en germe, relève de la tâche impossible pour un enseignant polyvalent non expert dans la discipline » (*ibid.*). Peut-être le caractère obligatoire des programmes pourrait-il conduire les professeurs à utiliser plus fréquemment une éventuelle proposition de formulation, mais cette assertion n'est, à notre connaissance, pas démontrée. Enfin, la présence d'éléments technologiques dans les programmes au sein de notre corpus est si faible que nous n'avons pu formuler que des hypothèses sur ce point. En revanche, nous avons mis en évidence qu'une bonne connaissance des pratiques enseignantes et des savoirs acquis par les élèves pouvait se révéler utile pour orienter les instructions officielles. En effet, l'ajout de techniques, à Singapour, en 2006, pour la comparaison de fractions, semble avoir été sans effet sur les résultats des élèves aux items correspondants, possiblement parce que ces techniques faisaient déjà l'objet d'un enseignement ; un tel changement pourrait même avoir des effets contre-productifs, en restreignant les techniques susceptibles d'être utilisées par les élèves. Les évaluations nationales et internationales pourraient contribuer à mieux cerner les organisations mathématiques acquises par les élèves, et orienter les choix des législateurs, et notre travail aura permis de faire une synthèse partielle des acquis des élèves de plusieurs pays,

dont la France, dans le domaine des fractions. Les tendances que nous avons dégagées relèvent simplement de grands principes qui pourraient éventuellement guider le législateur pour le cas où de meilleurs résultats aux tests TIMSS seraient recherchés, ce qui n'a évidemment aucun caractère obligatoire, chaque société étant libre de déterminer ce qu'elle entend faire acquérir par ses élèves.

Les apports de cette thèse concernent également l'analyse des réponses des acteurs aux questionnaires TIMSS. La richesse des données fournies peut donner l'illusion de permettre la réalisation immédiate de comparaisons éloquentes. Or, les questions posées soulèvent fréquemment des interrogations d'ordre méthodologique, susceptibles de remettre en cause l'interprétation des résultats. Par exemple, les niveaux de diplômes des enseignants sont comparés à partir d'une classification internationale. Néanmoins, la difficulté pour obtenir un diplôme de même niveau n'est peut-être pas la même partout, ne serait-ce parce que certains pays prévoient une sélection à l'entrée à l'université, et d'autres non. Autre exemple, les auteurs de TIMSS cherchent déterminer le nombre d'élèves dans la classe, mais ils ne s'intéressent pas au nombre d'adultes dans la classe, ce qui limite les inférences qu'il est possible de faitre à propos de l'incidence de ce nombre. Par ailleurs, il est assez souvent impossible d'analyser les réponses à une question sans prendre en compte d'autres aspects du système éducatif. Par exemple, la quantité de travail fournie par les élèves sud-coréens est faible relativement aux autres pays du corpus, mais les cours complémentaires y sont très développés, ce qui compense la faible quantité de travail donnée par les enseignants. Cette nécessité de porter un regard global sur les données TIMSS suggère la réalisation, non seulement d'études secondaires spécifiques à un thème particulier, comme nous l'avons fait dans cette thèse à propos des fractions, mais également de recherches complémentaires avec des données qui ne sont pas issues de TIMSS.

Limites

Dans les instructions officielles, les intitulés sont parfois suffisamment larges pour permettre l'étude d'une grande variété de notions. Ainsi, les programmes du Taipei chinois, parce qu'ils contiennent des commentaires détaillés et des exemples précis d'activités susceptibles d'être mises en œuvre pour l'application du curriculum, sont éclairants sur ce point. Par exemple, lorsque les auteurs demandent aux élèves de « distinguer les fractions propres, supérieures ou égales à 1 et les nombres mixtes » (*op. cit.*, p. 141), ils proposent une situation

dans laquelle le quotient « $21 \div 3$ » est interprété comme équivalent à la fraction « $\frac{21}{3}$ » (*ibid.*, p. 143). Or, l'utilisation de la fraction-quotient n'est pas évoquée dans la liste des types de tâches à acquérir par les élèves. Il est donc permis de penser que, dans des pays comprenant des programmes succints (comme en Corée du Sud ou à Hong Kong SAR), les tâches proposées aux élèves sont bien plus riches que ce que ne le laissent penser les curriculums. Parfois, les auteurs fournissent même des injonctions si vastes qu'il est difficile d'avoir une vision des exercices que les professeurs peuvent proposer à leurs élèves. C'est le cas, par exemple, dans la progression québécoise des enseignements, où il est demandé aux élèves de pouvoir « reconnaître différents sens de la fraction (partage, division, rapport) » (*op. cit.*, 2009 p. 6 et *op. cit.*, 2009b, p. 7) entre la troisième et la huitième année, sans autres précisions. Enfin, nous savons que l'algèbre est l'occasion pour les élèves de pouvoir développer ou perfectionner leur maitrise des quatre opérations avec des fractions. Néanmoins, ces dernières ne sont pas toujours évoquées dans la partie du curriculum consacrée à l'algèbre. Quand elles le sont, les auteurs précisent rarement la nature des tâches qui doivent être effectuées dans les classes. Par exemple, les nouveaux programmes anglais indiquent que les élèves doivent pouvoir « simplifier et manipuler des expressions algébriques (y compris celles impliquant des nombres irrationnels {et des fractions algébriques}) » (*op. cit.*, 2014, p. 163), mais ni l'objectif de ces activités par rapport à la construction du concept de fraction, ni les supports de cet enseignement, ne sont précisés. La relation entre le contenu des programmes scolaires et les tâches effectuées dans les classes par les élèves est donc assez distendue, et les déclarations des professeurs relatives à l'effectivité de l'enseignement de différentes notions se rapportant aux fractions ne portaient que sur des genres de tâches assez imprécisément décrits.

En outre, les comparaisons que nous avons effectuées entre les résultats obtenus par les élèves de différents pays n'ont pas été réalisées à variables constantes. C'est ce qui nous a conduit à faire de longs développements sur le contexte d'enseignement dans chacun des pays de notre corpus, afin de mettre les résultats bruts en perspective. C'est aussi pourquoi les hypothèses que nous avons formulées, en comparant les résultats des élèves d'un même pays à différents items, pourraient être utilement complétées par des recherches visant à observer les effets, par exemple, des changements de variable didactique dans des conditions plus expérimentales. En outre, la méthodologie que nous avons retenue pour l'analyse des programmes oriente, au moins partiellement, les résultats obtenus. Or, celle-ci est susceptible, bien souvent, d'être discutée. Par exemple, pour déterminer le point de départ de l'apprentissage des fractions, différents critères peuvent être employés. Les auteurs de TIMSS se sont servis

des déclarations des autorités pour savoir si chaque item était couvert par les programmes en vigueur, et nous avons vu que les réponses ne correspondaient pas toujours au contenu des programmes scolaires. Dans notre article (Martinez et Roditi, *op. cit.*), nous avions proposé de nous appuyer sur l'analyse des textes, nous aidant pour cela des titres de chapitre inclus dans les curriculums (lorsqu'un chapitre prévoyait l'étude des fractions pour une année donnée, nous considérions que cet apprentissage avant débuté), ce qui nous a conduit, pour le Québec, à considérer un apprentissage des fractions dès la première année. Pour cette thèse, nous avons recherché une analyse plus fine, en confrontant ces titres au contenu des programmes, afin de déterminer à quel moment les écritures fractionnaires devaient faire l'objet d'un enseignement (ainsi, en nous appuyant sur les progressions officielles, nous avons considéré que le chapitre « Fractions » identifié dans les instructions officielles du Québec ne recouvrait, en première et deuxième années, que des activités préparatoires, et donc que l'apprentissage des notations fractionnaires débutait en troisième année). Il existe donc plusieurs critères pour fixer le point de départ officiel de l'enseignement des fractions, chacun présentant des avantages et des inconvénients. Une autre limite à notre travail est donc constituée par la nécessité d'interpréter des instructions officielles. Sans doute existe-t-il des textes complémentaires, susceptibles par exemple de proposer des activités à propos des fractions (comme des documents d'accompagnement ou des brochures pédagogiques) que nous n'avons pas analysés et qui orientent cette interprétation. Par ailleurs, la question n'est pas seulement de savoir comment doivent être interprétés les curriculums, mais aussi de savoir comment ils le sont par les enseignants. Ainsi, nous avons indiqué que les programmes français ne prévoyaient pas de manière isolée l'étude des comparaisons de fractions, contrairement à ce que nous avons constaté dans les autres pays, avant la huitième année. En revanche, les élèves doivent savoir, dès la sixième année, à propos des nombres décimaux, « les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, les comparer, les ranger, produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000… et 0,1 ; 0,01 ; 0,001 » (*op. cit.*, 2008a, p. 38). Certaines fractions étant des nombres décimaux, la question se pose de savoir quelle interprétation font les enseignants de ces dispositions ? Cette formulation est d'autant plus ambigüe que les écritures à virgule sont mentionnées dans ce même paragraphe, alors que les prescriptions qui concernent spécifiquement les fractions sont incluses dans un autre paragraphe, plus loin dans les programmes. Des enquêtes internationales sur les pratiques enseignantes qui tiennent compte du didactique pourraient donc être utiles pour la compréhension des résultats des élèves aux évaluations TIMSS.

Perspectives

Les questions soulevées par l'analyse comparée des curriculums et des résultats des élèves mériteraient d'être approfondies par des études réalisées dans les classes. Certes, les organisations mathématiques enseignées semblent avoir une incidence sur les acquis des élèves, mais la manière dont celles-ci sont enseignées joue sans doute également sur leurs performances. En d'autres termes, ce que l'on enseigne et la façon dont on l'enseigne constituent deux facteurs des acquis des élèves. Or, dans notre thèse, nous n'avons étudié que le premier de ces deux éléments. Pour mieux cerner l'incidence de l'utilisation des fractions en dehors du contexte scolaire sur les résultats des élèves, pour mieux comprendre l'incidence des objectifs généraux du législateur sur l'acquisition du concept, il serait nécessaire d'enquêter sur l'activité des professeurs et des élèves. Nous pensons en particulier à la mise en œuvre des séquences d'enseignement à Singapour, assez bien décrite dans le préambule des programmes (sous l'appellation de *Concrete-Pictorial-Abstract Approach*). Dans quelle mesure ce dispositif contribue-t-il aux performances des élèves singapouriens ? Permet-il une plus grande variété des praxéologies enseignées ? Enfin, nous avons vu que l'adhésion des enseignants aux programmes étaient une condition de la réussite des élèves aux évaluations TIMSS : une meilleure connaissance des contraintes qui pèsent sur les professeurs, notamment à travers une double approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002) serait susceptible de mettre au jour des causes de cette absence d'adhésion, en particulier chez les élèves français. De la même façon, la contribution d'autres disciplines (sociologie, psychologie, etc.) pourrait éclairer l'origine de cet écart entre le prescrit et le réalisé[1]. Notre deuxième interrogation portant sur les pratiques enseignantes concerne la progression du temps didactique. Le modèle fondé sur quatre progressions possibles pour un même type de tâches (répétition sans modification ; répétition avec une modification des variables de la tâche qui n'affecte pas les techniques susceptibles d'être utilisées par les élèves ; répétition avec une modification des variables de la tâche qui affecte les techniques susceptibles d'être utilisées par les élèves ; répétition avec avec une modification des techniques enseignées), élaboré à partir des programmes d'enseignement, apparait-il également dans les classes ? Comment les professeurs gèrent-ils la pluralité des techniques qui peuvent être mises en œuvre pour la résolution d'un même type de tâches ? Imposent-ils une réflexion portant sur leur opportunité en fonction des variables de la tâche ?

1. Voir à ce sujet Dorier *et al.* (2018).

Des liens sont-ils faits entre les différents types de tâches que permet de résoudre une même technique ? L'organisation en cycles d'enseignement a-t-elle une influence sur la progression des enseignements relatifs aux fractions ?

Une meilleure connaissance des pratiques d'enseignement de contenus mathématiques bien définis (comme celui des fractions) semble indispensable pour comprendre les résultats obtenus par les élèves : comment naissent ces praxéologies qui ont été qualifiées par Bosch et Gascón de « spontanées » (*op. cit.*) ? Quels sont les facteurs qui déterminent la variété des techniques utilisées par les élèves ? Est-ce que des programmes qui insistent sur cette variété pourraient permettre une diversification des techniques et des savoirs enseignés ? Est-ce qu'une meilleure connaissance des difficultés que rencontrent les élèves serait susceptible de conduire les professeurs à élargir les techniques et les savoirs qu'ils tentent de transmettre à leurs élèves ? Est-ce qu'une analyse didactique portant sur la variété des praxéologies susceptibles d'être étudiées ne serait pas plus fructueuse pour l'élaboration des programmes que la mise au jour des difficultés usuellement rencontrées par les élèves, ces dernières étant rarement prise en compte par les législateurs ? Les questions soulevées dans cette thèse et relatives à la progression des enseignements dans le domaine des fractions n'épuisent pas l'ensemble des interrogations envisageables. En effet, celles-ci sont nées de l'analyse des programmes scolaires de onze participants aux évaluations TIMSS. Or, d'autres choix que ceux réalisés par ces participants pourraient être étudiés, ou le sont déjà. Par exemple, Tian et Siegler (2018, p. 34-35) précisent que, « étant donné que les résultats existants suggèrent que les enfants comprennent mal les écritures décimales, les fractions et les pourcentages, l'enseignement de ces trois formes d'écriture des nombres rationnels dans un ordre différent de celui traditionnellement observé dans les programmes pourrait être bénéfique. En particulier, les acquis supérieurs des élèves dans ce domaine, obtenus à partir du programme élaboré par Moss et ses collègues (Kalchman *et al.*, 2001 ; Moss, 1997 ; Moss & Case, 1999), sont cohérents avec l'hypothèse selon laquelle l'enseignement des pourcentages d'abord, des notations décimales ensuite et des fractions en dernier, donne de meilleurs résultats que la séquence traditionnelle ». À travers la confrontation de la vision portée par les législateurs de onze participants aux évaluations TIMSS, nous espérons avoir contribué à une meilleure connaissance des possibilités qui s'ouvrent pour l'enseignement des fractions. Néanmoins, ce dernier exemple montre que le paysage didactique qui fonde l'apprentissage de ce concept est encore loin d'être parfaitement net, et que la prise en compte de nombreuses autres études sera nécessaire pour en ajuster la compréhension.

SOURCES

PROGRAMMES SCOLAIRES

Angleterre (1989) : Department of Education and Science and the Welsh Office, 1989, *Mathematics in the national curriculum*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : http://www.school-maths.info/downloads/Maths_National_ Curriculum_1989.pdf.

Angleterre (1995) : Department for Education, 1995, *Key Stages 1 and 2 of the National Curriculum*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : https://www.stem.org.uk/system/files/elibrary-resources/legacy_files_migrated/8749-Mathematics%20in%20the%20National%20Curriculum%201995.pdf.

Angleterre (1999) : Department for Education and Employment, 1999, *The National Numeracy Strategy. Framework for teaching mathematics from Reception to Year 6*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : http://www.counton.org/resources/ numeracy/pdfs/plan_gd.pdf.

Angleterre (2001) : Department for Education and Employment, 2001, *Key stage 3 National Strategy. Framework for teaching mathematics: years 7, 8 and 9*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : http://www.counton.org/resources/ ks3framework/pdfs/yearly_teaching.pdf.

Angleterre (2006) : Department for education and skills, 2006, *Primary Framework for literacy and mathematics. Primary National Strategy*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : www.educationengland. org.uk/documents/pdfs/2006-primary-nationalstrategy.pdf.

Angleterre (2007) : Qualifications and Curriculum Authority, 2007, *Mathematics. Programme of study for key stage 3 and attainment targets*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : http://www.teachfind.com/qcda/national-curriculum-statutory-requirements-key-stages-3-and-4-september-2008-pdf.

Angleterre (2014a) : Department for Education, 2013, *Mathematics programmes of study: key stages 1 and 2. National curriculum in England*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/335158/PRIMARY_national_curriculum_-_Mathematics_220714.pdf.

Angleterre (2014b) : Department for Education, 2013, *Mathematics programmes of study: key stage 3. National curriculum in England*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/239058/SECONDARY_national_curriculum_-_Mathematics.pdf.

Corée du Sud (2007) : Ministry of Education and Human Resources Development, 2007, *Mathematics Curriculum, 2007-79 [separate volume 8]*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : ncic.kice.re.kr/english.kri.org.inventoryList.do#.

États-Unis (2010) : Council of Chief State School Officers, 2010, *Common Core State Standards for Mathematics*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf.

Floride (2007) : Florida Department of Education, 2007, *Mathematics Next Generation Sunshine State Standards*. Document consulté le 2 juin 2017 à l'adresse suivante : www.fldoe.org/core/fileparse.php/5423/urlt/2007-NGSSSMathematics-WithoutAccess Points.pdf.

Floride (2014) : Florida Department of Education, 2014, *Grade 4 – Mathematics Florida Standards (MAFS)*. Document consulté le 2 juin 2017 à l'adresse suivante : www.fldoe.org/core/fileparse. php/12087/urlt/G4_Mathematics_Florida_ Standards.pdf.

France (2008a) : MEN-MENESR, 2008, *Bulletin officiel du ministère de l'Éducation nationale et du ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche*, « Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire », n° 3, 19 juin 2008. Consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : www.education. gouv.fr/bo/2008/hs3/default.htm.

France (2008b) : MEN-MENESR, 2008, *Bulletin officiel spécial*, « Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques », n° 6, 28 août 2008. Consulté le 2

septembre 2018 à l'adresse suivante : http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf.

France (2015) : MEN-MENESR, 2015, *Bulletin officiel du ministère de l'Éducation nationale et du ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche*, « Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4) », n° 11, 26 novembre 2015. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/35/1/BO_SPE_11_26-11-2015_504351.pdf.

Hong Kong SAR (2000) : The Education Department, 2000, *Mathematics Education Key Learning Area, Mathematics Curriculum Guide (P1 – P6)*, The Curriculum Development Council. Document consulté le 2 juin 2017 à l'adresse suivante : www.edb.gov.hk/en/curriculum-development/kla/ma/curr/primath-2000.html.

Irlande du Nord (2006) : Council for Curriculum, Examinations and Assessment, 2006, *Curriculum. Key Stage 1 & 2. Mathematics and Numeracy. Downloads*. Documents consultés le 2 juin 2017 à l'adresse suivante : http://ccea.org.uk/curriculum/key_stage_1_2/areas_learning/mathematics_and_numeracy.

Ontario (2005) : Ministère de l'Éducation, 2005, *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année. Mathématiques*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/math18curr.pdf.

Québec (2001) : Gouvernement du Québec. Ministère de l'Éducation, 2001, *Programme de formation de l'école québécoise*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/dpse/formation_jeunes/prform2001.pdf.

Québec (2009a) : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009, *Progression des apprentissages au primaire*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PDA_PFEQ_mathematique-primaire_2009.pdf.

Québec (2009b) : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009, *Progression des apprentissages au secondaire. Mathématiques*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PDA_PFEQ_mathematique-secondaire_2016.pdf.

République d'Irlande (1999) : Department of Education and Science & National Council for Curriculum and Assessment, 1999, *Primary School Curriculum. Mathematics*. Dublin, Stationery Office. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : https://www.curriculumonline.ie/getmedia/9df5f3c5-257b-471e-8d0f-f2cf059af941/PSEC02_Mathematics_Curriculum.pdf.

République d'Irlande (2011) : National Council for Curriculum and Assessment, 2011, *Mathematics Syllabus. Foundation, Ordinary & Higher Level*. Document consulté le 2 juin 2017 à l'adresse suivante : https://www.curriculumonline.ie/getmedia/4f6cba68-ac41-485c-85a0-32ae6c3559a7/JCSEC18_Maths_Examination-in-2014.pdf.

Singapour (2001) : Ministry of Education, Singapore, 2001, *Primary Mathematics syllabus*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : https://fr.scribd.com/document/8530405/Singapore-Math-Government-Elementary-Curriculum-2001.

Singapour (2006a) : Ministry of Education, Singapore, 2006, *Mathematics syllabus primary*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/2007-mathematics-%28primary%29-syllabus.pdf.

Singapour (2006b) : Ministry of Education, Singapore, 2006, *Secondary Mathematics Syllabuses*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : http://www.globaledresources.com/resources/assets/maths-secondary.pdf.

Singapour (2012a) : Ministry of Education, Singapore, 2012, *Mathematics Syllabus. Primary One to Six*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf.

Singapour (2012b) : Ministry of Education, Singapore, 2012, *Mathematics Syllabus. Secondary One to Four*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/mathematics-syllabus-sec-1-to-4-express-n(a)-course.pdf.

Taipei chinois (2004) : Ministry of Education, Chinese Taipei, 2004, *Grade 1-9 Curriculum*. Document consulté le 2 septembre 2018 à l'adresse suivante : www.yumpu.com/en/document/view/37133094/ grades-1-9.

ÉVALUATIONS TIMSS

Gonzalez, E. J., Miles, J. A. (1999). *TIMSS 1999. International student achievement in Mathematics.* TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Gonzalez, E. J., Miles, J. A. (2001a). *TIMSS 1999. User Guide International Data Base*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Gonzalez, E. J., Miles, J. A. (2001b). *TIMSS 1999. Supplement One. International Versions of the Background Questionnaires*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Martin, M. O., Kelly, D. L. (1995a). *TIMSS 1995. International Student Achievement in Mathematics.* TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Martin, M. O., Kelly, D. L. (1995b). *TIMSS 1995. Supplement One. International Versions of the Background Questionnaires, Population 1*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Martin, M. O., Kelly, D. L. (1995c). *TIMSS 1995. Supplement Two. International Versions of the Background Questionnaires, Population 2*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Martin, M. O., Kelly, D. L. (1995d). *TIMSS 1995. Supplement One. International Versions of the Background Questionnaires, Population 3*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Martin, M. O., Kelly, D. L. (1995e). *TIMSS 1995. Supplement Two. International Versions of the Background Questionnaires, Population 3*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Martin, M. O., Kelly, D. L. (1996). *TIMSS Technical Report 1995 (Volume I)*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Martin, M. O., Kelly, D. L. (1997). *TIMSS Technical Report 1995 (Volume II)*. TIMSS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Martin, M. O., Kelly, D. L. (1998). *TIMSS Technical Report 1995 (Volume III)*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. (2016a). *About TIMSS 2015*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. (2016b). *TIMSS 2015. Assessment Frameworks*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. (2016c). *TIMSS 2015. International Results in Mathematics*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. (2016d). *Methods and Procedures in TIMSS 2015*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. (2016e). *Supplement One. International Versions of the TIMSS 2015 Context Questionnaires*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Smith, T. A., Garden, R. A., Gregory, K. D., Gonzalez, E. J., Chrostwski, S. J., O'Connor, K. M. (2005a). *TIMSS 2003. Assessment Frameworks and Specifications, 2nd edition*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Smith, T. A., Garden, R. A., Gregory, K. D., Gonzalez, E. J., Chrostwski, S. J., O'Connor, K. M. (2005b). *TIMSS 2003. International Student Achievement in Mathematics.* TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Smith, T. A., Garden, R. A., Gregory, K. D., Gonzalez, E. J., Chrostwski, S. J., O'Connor, K. M. (2005c). *TIMSS 2003. Supplement One. International Versions of the TIMSS 2003 Background Questionnaires*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arura, A., Erberber, E. (2005). *TIMSS 2007. Assessment Frameworks 2007*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arura, A., Erberber, E. (2007a). *TIMSS 2007. International Student Achievement in Mathematics.* TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arura, A., Erberber, E. (2007b). *TIMSS 2007. Mathematics Curriculum Questionnaire (Grade 8)*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arura, A., Erberber, E. (2007c). *TIMSS 2007. Teacher Questionnaire (Grade 4)*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011. Assessment Frameworks*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, Preuschoff, C. (2011). *TIMSS 2011. International Student Achievement in Mathematics.* TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, Preuschoff, C. (2013). *TIMSS 2011. Supplement One. International Versions of the TIMSS 2011 Background and Curriculum Questionnaires*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

BIBLIOGRAPHIE

Adjiage, R. (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université de Strasbourg.

Adjiage, R. (2007). Rationnels et proportionnalité : complexité et enseignement au début du collège. *Petit x*, 74, 5-33.

Alahmadati, A. A. (2016). *Autour du concept de fraction à l'école primaire en France : Étude exploratoire des significations de la fraction au travers des manuels scolaires, des représentations et des connaissances des élèves de cycle III*. Thèse de doctorat en sciences de l'éducation, Université Lyon II.

Allard, A. (1992). Les premiers textes latins influencés par l'arithmétique arabe. Dans Benoit, P., Chemla, K., Ritter, J. (dir.). *Histoire de fractions, fractions d'histoire*. Birkhauser Verlag AG, Science Networks, Historical Studies, p. 291-301.

Allard, C. (2011). Apprends ta leçon : oui mais quelle leçon ? *Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants*, Actes du 38e colloque COPIRELEM, Dijon.

Allard, C. (2015). *Etude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de doctorat, université de Paris VII.

Artaud, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Dans les *Actes de la IXe école d'été de didactique des mathématiques*, p. 101-139.

Artigue, M. (2009). Rapports et articulations entre cadres théoriques : le cas de la théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 29(3), 305-334.

Audigier, F. (1988). Savoirs enseignés - savoirs savants. Autour de la problématique du colloque. *Troisième rencontre nationale sur la didactique de l'histoire, de la géographie et des sciences économiques et sociales. Actes du colloque. Savoirs enseignés - savoirs savants*, Paris : INRP, 13-15.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational numbers concepts. Dans Leshand, R., & Landau, M. (dir.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York : Academic Press, 91-125.

Benoit, P., Chemla, K., Ritter, J. (1992). *Histoire de fractions, fractions d'histoire*. Birkhauser Verlag AG, Science Networks, Historical Studies.

Bessot, A. & Comiti, C. (2013), Apport des études comparatives internationales aux recherches en didactique des mathématiques. Le cas de la France et du Viêt-Nam. *Recherches en didactique des mathématiques*, 33(1), 45-77.

Bodin, A. (1997). L'évaluation du savoir mathématique. Questions et méthodes. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17 (1), 49-97.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.

Bosch, M. & Gascón, J. (2002). Organiser l'étude. Théories & Empiries. *Actes de la onzième école d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 23-39.

Bourdon, P. (2012). Mise au travail des élèves, enrôlement et différenciation dans l'activité cognitive. Dans Hersant, M. et Morin, C. (dir.). *Pratiques enseignantes en mathématiques : expérience, savoirs et normes*, Presses universitaires de Bordeaux, 57-73.

Brinker, L. (1998). Using Recipes and Ratio Tables to Build on Students' Understanding of Fractions. *Teaching Children Mathematics*, 5(4), 218-224.

Brissiaud, R. (1998). *Actes du XXV^e colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*, IREM de Brest, 147-171. Disponible à l'adresse suivante (consultée le 30/08/18) : http://missionmaths76.spip.ac-rouen.fr/IMG/DOCS/Doc_fractions_et_decimaux_Brissiaud.pdf

Brissiaud R. (1999). Les fractions et les décimaux au CM1 : une nouvelle approche. Dans *Actes du 15e colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres. Loctudy du 11 au 13 mai 1998*. IREM de Brest.

Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherche en didactique des mathématiques*, 1, 11-58.

Brousseau, G. (1986). *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse pour le doctorat ès sciences, Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2009). *Cours 2010-2011*. IREM de Bordeaux. Disponible en ligne, sur le site de Guy Brousseau : http://guy-brousseau.com/1982/cours-2010-2011-ingenierie-didactique-des-curriculums-2-rationnels-et-decimaux-au-cm2/ (consulté le 01/07/2018).

Bruner, J.S. & Kenney, H. (1966). On relational concepts. Dans Bruner, J.S., Olver, R. R., Greenfield, P. M. (dir.). *Studies in cognitive growth*. New York: Wiley.

Byrnes, J. P., Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, 27(5), 777-786.

Cajori, F. (1929). *History of mathematicals notations, Volume 1*. New York : Cosimo, réédition de 2007.

Carette, V., Content, A., Rey, B., Coché, F., Gabriel, F. (2009). *Étude de l'apprentissage des nombres rationnels et des fractions dans une approche par compétences à l'école primaire*. Recherche financée par la Communauté française n° 126/07, Université libre de Bruxelles.

Carette, V. (2009). Et si on évaluait des compétences en classe ? A la recherche du « cadrage instruit ». Dans Mottier Lopez, L. & Crahay, M. (dir.). *Évaluations en tension*. Bruxelles : De Boeck.

Carraher, D. W. (1996). Learning about fractions. Dans Steffe, L., Nesher, P., Cobb, P., Goldin G. A., Greer B. (dir.). *Theories Of Mathematical Learning*. Lawrence Erlbaum Associates Inc, 241-266.

Charalambous, C. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students'understandings of fractions. *Educ. Stud. Math.*, 64, 293-316.

Charnay, R. (2014). *Mathématiques au cycle 3. Quelques pistes de réflexion*. CSP : contribution. Disponible en ligne : http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/35/3/Charnay_Roland_-_Professeur_honoraire_-_CSP_Contribution_363353.pdf (consulté le 01/07/2018).

Chevallard, Y. (1982). Pourquoi la transposition didactique ? Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble. Paru dans les Actes de l'année 1981-1982, 167-194. Disponible à l'adresse suivante (consultée le 30/08/18) : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Pourquoi_la_transposition_didactique.pdf.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage, deuxième édition augmentée, 1991.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. Intervention au Séminaire de l'Associazione Mathesis (Turin, 3 février 1994). *Actes du Séminaire pour l'année 1993-1994*, 190-200. Disponible à l'adresse suivante (consultée le 27/08/2018) : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensifs.pdf.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Cours donné à la IX^{e} école d'été de didactique des mathématiques (La Rochelle, 4-11 juillet 1998). Paru dans les actes correspondants, IREM de Clermont-Ferrand, 91-120.

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'étude : 1. Structures & fonctions. Cours donné à la XI^{e} école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001). Paru dans les actes correspondants, La Pensée Sauvage, Grenoble, 3-32.

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude : 3. Écologie & régulation. Cours donné à la XI[e] école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001). Paru dans les actes correspondants, La Pensée Sauvage : Grenoble, 41-56.

Chevallard, Y. (2005). *La didactique dans la cité avec les autres sciences*. Contribution au symposium de didactique comparée tenu à Montpellier les 15 et 16 septembre 2005 sur le thème « Généricité et spécificité didactiques » dans le cadre des journées du REF (Réseau Éducation Formation).

Chevallard, Y. (2006). La calculatrice, ce bon objet. *Les dossiers de l'ingénierie éducative*, 54, 20-25. Disponible en ligne : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_calculatrice_ce_bon_objet.pdf (consulté le 30/08/2018).

Chevallard, Y. (2007). Texte de la conférence plénière donnée à Baeza (Espagne) en octobre 2005 dans le cadre du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique. Dans Ruiz-Higueras, L., Estepa, A., Javier García, F. (dir.). *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico*. Universidad de Jaén, 705-746.

Chevallard, Y. (2010). La didactique, dites-vous ? *Éducation & didactique*, 4(1), 139-148.

Chrisomalis, S. (2010). *Numerical Notation. A Comparative History*. London: Brown University Press.

Collins, A. & Dacey, L. (2010). *Zeroing in on number and operations: Key ideas and common misconceptions, Grades 5-6*. Portland, ME. Stenhouse.

Coquin-Viennot, D. & Camos, V. (2006). Décimaux et fractions. Dans Barrouillet, P., Camos, V. (dir.). *La cognition mathématique chez l'enfant*, Marseille : Solal, 145-154.

Coulange, L. (2011). Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent incidents. Étude des pratiques d'enseignement des mathématiques d'une enseignante de CM. Dans Rochex, J-Y et Crinon, J. (dir). *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*, Presses Universitaires de Rennes, 33-44.

Cramer, K. A., Post, T. R., del Mas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects

of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111–144.

Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R. (2009). *Rational Number Project: Initial Fraction Ideas*. Publié à l'origine sous Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R. (1997). *Rational Number Project: Fraction Lessons for the Middle Grades - Level 1*. Kendall/Hunt Publishing Co., Dubuque Iowa.

Dahan-Dalmedico, A. & Peiffer, J. (1986). *Histoire des Mathématiques. Routes et dédales*. Éditions du Seuil.

Davydov, V. V., Tsvetkovich, Z. H. (1991). The object sources of the concept of fraction. Dans Davydov, V. V., Steffe, L. P. (dir.). *Soviet studies in mathematics education: Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 86-147.

Demeuse, M. (2012). Introduction. Les évaluations internationales et l'éducation comparée. *Éducation comparée. Revue de recherche internationale et comparative en éducation*, 7, 7-15.

Develay, M. (1992). *De l'apprentissage à l'enseignement*. Paris, ESF, 1992.

Dogan, M. & Pelassy, D. (1982). *Sociologie politique comparative : problèmes et perspectives*. Paris : Economica.

Dorier, J.-L., Gueudet, G., Peltier, M.-L., Robert, A. et Roditi, É. (2018). *Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux de l'apprentissage*, Paris : Belin éducation.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.

Douady, R., Perrin-Glorian, M.-J. (1986), *Liaison école-collège. Nombres décimaux*. Brochure n° 62, IREM de Paris VII.

Dubet, F., Duru-Bellat, M., Vérétout, A. (2010). *Les sociétés et leur école*. Éditions du Seuil.

Duval, R. (1995). *Semiosys et pensée humaine*, Peter Lang.

Emprin, F. (2014). *Éléments pour la réflexion sur les programmes de mathématiques de l'école*. CSP : contribution. Disponible en ligne : http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/21/9/EMPRIN_Fabien_-_MCF_-_CSP_Contribution_374219.pdf (consulté le 01/07/2018).

Empson, S. B. (1999). Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and Instruction*, 17, 283–342.

Goldstein, C. (1992). Et naguère. Dans Benoit, P., Chemla, K., Ritter, J. (dir.). *Histoire de fractions, fractions d'histoire*. Birkhauser Verlag AG, Science Networks, Historical Studies, p. 339-388.

Goldstein, C. (2010). *Les fractions décimales : un art d'ingénieur ?* <hal-00734932v2>

Grégoire, J. & Meert, G. (2005). L'apprentissage des nombres rationnels et ses obstacles. Dans Noël, M.-P. (dir.). *Les Troubles Du Calcul*, Marseille : Solal, 223-251.

Grégoire, J. (2008). *Aux sources des difficultés de l'apprentissage des fractions*. Séminaire présenté au LAPSE, ULB, 14 février 2008.

Grek, S. (2009). Governing by Numbers: The PISA "Effect" in Europe. *Journal of Education Policy*, 24(1), 23-37. Disponible à l'addresse suivante (consultée le 28/08/18) : https://www.research.ed.ac.uk/portal/files/14608705/Governing_by_Numbers.pdf.

Grugeon, B. & Coppé, S. (2014). *Contribution à propos du numérique et de l'algébrique au cycle 4*. CSP : contribution. Disponible en ligne : http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/22/6/GRUGEON_Brigitte_-_PU_-_COPPE_Sylvie_-_MCF_-_CSP_Contribution_374226.pdf (consulté le 01/07/2018).

Houdement, C. (2014). *Contribution au travail sur les programmes de mathématiques des cycles 2 et 3*. CSP : contribution. Disponible en ligne : http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/22/8/HOUDEMENT_Brigitte_-_MCF_-_CSP_Contribution_374228.pdf (consulté le 01/07/2018).

Kalchman, M., Moss, J. et Case, R. (2001). Psychological models for the development of mathematical understanding: Rational numbers and functions. Dans Carver, S. et Klahr,

D. (dir.). *Cognition and instruction: Twenty-five years of progress*, Mahwah : Erlbaum, 1-38.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors*. Windsor : NFER-Nelson.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical cognitive, and instructional foundations of rational number. Dans Lesh, R. A. (dir.). *Number and measurement. Papers from a research workshop*. Columbus, 101-144.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. Dans Kieren T. E. (dir.). *Recent research on number learning*, Columbus, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, 125-149.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. Dans Hiebert J. A. & Behr M. J. (dir.). *Number concepts and operations in the middle grades*, Reston : Erlbaum, 162-181.

Kieren, T. E. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient fields to Recursive understanding. Dans Carpenter, T. P., Fennema, E., Romberg, T. A. (dir.). *Rational Numbers: An Integration of Research*, Hillsdale : Erlbaum, 49–84.

Kieren, T. E. (1995). Creating spaces for learning fractions. Dans Sowder J. T. & Schappelle B. P. (dir.). *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades*, Albany : State , 31-65.

Join-Lambert, O., Kahmann, M., Lochard Y. (2012). Enjeux et usages de la comparaison internationale dans les publications de l'IRES. *La Revue de l'Ires*, 2(73), 13-43.

Jucquois, G. & Swiggers, P. (1991). *Le comparatisme devant le miroir*. Bibliothèque des cahiers de l'institut linguistique de Louvain, Peeters, Louvain-la-Neuve.

Jucquois, G. & Vielle, C. (2000). *Le comparatisme dans les sciences de l'homme. Approches pluridisciplinaires*, Bruxelles : De Boeck Université.

Lallement, M. (2003). Raison ou trahison ? Éléments de réflexion sur les usages de la comparaison en sociologie. Dans Lallement, M. et Spurk, J. (dir.). *Stratégies de la comparaison internationale*, CNRS Éditions, 107-120.

Lamboley, J.-L. (1995). *Lexique d'histoire et de civilisation romaine*. Paris : Ellipses.

Lécluse, F. (1839). *Lexique français-grec avec l'explication latine, à l'usage des classes de grammaire et d'humanités*. Paris : Delalain, 3e édition.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. Dans Kilpatrick, J., Gary Martin, W., Schifter, D. (dir.). *A research companion to principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, 179-192.

Le Pellec, J. & Marcos Alvarez, V. (1991). *Enseigner l'histoire : un métier qui s'apprend*. Paris : Hachette éducation.

Lê Thai Bao, T. T. (2007). *Étude didactique des relations entre enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice »*. Thèse en cotutelle, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Lê Thai Bao, T. T. (2012). Notion de limite et décimalisation des nombres réels. Le cas de l'enseignement secondaire au Viêt Nam. *Petit x*, 89, IREM de Grenoble, 33-50.

Lê Van, T. (2001). *Étude didactique des liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt Nam*. Thèse en cotutelle, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Levasseur, J. (1996). L'évaluation nationale des acquis des élèves. Finalités et exploitations. *Revue internationale d'éducation de Sèvres*, 11, 101-114.

Ligozat, F. & Leutenegger, F. (2008). Construction de la référence et milieux différentiels dans l'action conjointe du professeur et des élèves. Le cas d'un problème d'agrandissement de distances. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28(3), 319-378.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: the case of informal knowledge. Dans Carpenter, T. P., Fennema, E., et Romberg, T. A. (dir.). *Rational numbers*, 85-106.

Matheron, Y. (2000). Analyser les praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x*, 54, 51-78.

Martinand, J.-L. (1985). *Connaître et transformer la matière*. Bern, Peter Lang Verlag.

Mamede, E. (2009). Early Years Mathematics – The Case of Fractions. *Actes du CERME 6*, Lyon : INRP, 2607-2616.

Martinez, S. & Roditi, É. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire. Quelques enseignements tirés de TIMSS 2015. *Éducation & formations*, 94, 23-40.

Mercier, A. (1985). *Le temps des systèmes didactiques*. <hal-01397032>

Mercier, A. (2002). La transposition des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques. *Revue française de pédagogie*, 141, 135-171.

Mercier, A., Schubauer-Leoni, M. L. et Sensevy, G. (2002). Vers une didactique comparée. *Revue Française de Pédagogie*, 141, 5-16.

Mitchell, A. (2012). *The Four-Three-Four Model: Drawing on Partitioning, Equivalence, and Unit-Forming in a Quotient Sub-Construct Fraction Task*. Paper presented at the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA), (35th, Singapore, July 2-6, 2012), 513-520.

Miura, I. T., Okamoto, Y., Vlahovic-Stetic, V., Kim, C. C., Han, J. H. (1999). Language Supports for Children's Understanding of Numerical Fractions: Cross-National Comparisons. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 356–365.

Moss, J. (1997). *Developing children's rational number sense: A new approach and an experimental program*. University of Toronto.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: a new model and an experimental curriculum. *J. Res. Math. Educ.*, 30, 122-147.

Neagoy, M. (2017). *Unpacking fractions, Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding*. ASCD/National Council of Teachers of Mathematics.

Nguyen, A. Q. (2006). *Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Viêt Nam et en France*. Thèse en cotutelle, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford, UK : Blackwell.

Olsen, V. R. & Lie, S. (2006). Les évaluations internationales et la recherche en éducation : principaux objectifs et perspectives. *Revue française de pédagogie*, 157, 11-26.

Ozga, J. (2012). Assessing PISA. *European Educational Research Journal*, 11(2), 166-171.

Paun, E. (2006). Transposition didactique : un processus de construction du savoir scolaire. *Carrefours de l'éducation*, 22(2), 3-13.

Perrenoud, P. (1998). La transposition didactique à partir de pratiques : des savoirs aux compétences. *Revue des sciences de l'éducation (Montréal)*, 24(3), 487-514.

Perrin-Glorian, M.-J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux : questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6e*. Thèse de doctorat d'État, Université Paris VII.

Perrin-Glorian, M.-J. (2014). *Réflexions dans la perspective de nouveaux programmes pour les cycles 2 (CP-CE2) et 3 (CM1-6ème)*. CSP : contribution. Disponible en ligne : http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/11/5/Perrin-Glorian_Marie-Jeanne-_PU_-_CSP_Contributionm_376115.pdf (consulté le 01/07/2018).

Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996). A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 5-38.

Poisard, C. et Barton, B. (2007). *L'enseignement des fractions en France et en Nouvelle-Zélande*. Aug 2007, Sainte Livrade, France, <hal-01086478>. Disponible à l'adresse suivante : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01086478/document (consulté le 15/07/2018).

Ravel, L. (2003). *Des programmes à la classe : Etude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique*. Grenoble : Université Joseph-Fourier, 2003.

Reuter, Y., Cohen-Azria, C., Daunay, B., Delcambre, I., Lahanier-Reuter, D. (dir.) (2007). Topogenèse. Dans *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*. Louvain-la-Neuve, Belgique : De Boeck Supérieur, 217-219.

Rey, O. (2008). De la transmission des savoirs à l'approche par compétences. *Dossier d'actualité de la VST*, 34, Lyon : Institut national de recherche pédagogique (INRP).

Rey, O (2012). Le défi de l'évaluation des compétences. *Dossier d'actualité veille et analyses*, 76, Lyon : Institut français de l'éducation.

Rittle-Johnson, B. & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91, 175-189.

Robert, A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), La Pensée Sauvage, 139-190.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505–528.

Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(3), 271-312.

Roditi, É. (2003). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 183-216.

Roditi, É. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 12, 55-81.

Roditi, É. (2011). *Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques : apports d'une intégration de diverses approches et perspectives*. Note de synthèse présentée pour l'habilitation à diriger des recherches. Paris : université Paris V René Descartes.

Roditi, É. et Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. Un autre regard sur les résultats. *Éducation & formations*, 86-87, 235-257.

Roegiers, X. (2004). *Une pédagogie de l'intégration : compétences et intégration des acquis dans l'enseignement*. Bruxelles : De Boeck.

Rouche, N. (1998). *L'esprit des sciences. Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : Ellipses.

Saidan, A. S. (1997). Numération et arithmétique. Dans Allard, A., Chabrier, J.-C., Debarnot, M.-T., Lindberg, D.C., Rashed, R., Rosenfeld, B.A., Rozhanskaya, M. M., Russell, G.A., Saidan, A.S., Youschkevitch, A.P. (dir.). *Histoire des sciences arabes. Tome 2. Mathématiques et physique*, Paris : Seuil, 11-29.

Schubauer-Leoni, M. L. & Leutenegger, F. (2005). Une relecture des phénomènes transpositifs à la lumière de la didactique comparée. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, 27(3), 407-429.

Seguin, R. (1989). *L'élaboration des manuels scolaires : guide méthodologique*. Paris : Unesco.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., … Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691-697.

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics. Volume II*. New York : Dover Publications.

Sophian, C., Garyantes, D., Chang, C. (1997). When three is less than two: Early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology*, 33, 731-744.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Boston: Kluwer.

Tian, J., Siegler, R. S. (2018). Which Type of Rational Numbers Should Students Learn First? *Educational Psychology Review*, 30(2), 351-372.

Tran Luong, C. K. (2006). *La notion d'intégrale dans l'enseignement mathématique au lycée : une étude comparative entre la France et le Viêt Nam*. Thèse en cotutelle, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Tverdota, G. (1995). *Écrire le voyage*. Éditions Presses Sorbonne Nouvelle.

Van Hout, A. (2005). L'apprentissage des nombres rationnels. Dans Noël, M.-P. (dir.). *Les Troubles Du Calcul*, Marseille : Solal, 41-52.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. Dans Lesh, R., Landau, M. (dir.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Academic Press, 127-174.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. Dans Hiebert, J. & Behr, M. (dir.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Reston: NCTM, 141-161.

West, A. (2003). Comparer les systèmes éducatifs. Dans Lallement, M. et Spurk, J. (dir.). *Stratégies de la comparaison internationale*. CNRS Éditions, 199-214.

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1. Synthèse écrite susceptible d'être proposée aux élèves à propos des fractions (Houdement, 2014, p. 4) 7

Figure 2. Liens entre l'environnement, la noosphère et le système d'enseignement *stricto sensu* composé de systèmes didactiques locaux (Chevallard, 1991, p. 24) 10

Figure 3. Échelle de codétermination d'Yves Chevallard (2005, p. 22) 14

Figure 4. Relations d'inclusion entre les différents ensembles de nombres auxquels peuvent appartenir les fractions 33

Figure 5. Relations d'inclusion entre les différents ensembles de nombres auxquels peuvent appartenir les écritures fractionnaires 33

Figure 6. Exemple de distracteur envisageable pour vérifier la prise en compte de la nécessité d'un partage en parts égales 40

Figure 7. Exemple de figure envisageable pour vérifier la prise en compte des parts qui restent masquées 40

Figure 8. Exemple de distracteur envisageable pour vérifier la bonne compréhension du sens du dénominateur 41

Figure 9. Exemple de figure envisageable pour vérifier la capacité des élèves à prendre en compte des parts non contigües 41

Figure 10. Exemple de figure envisageable pour vérifier la capacité des élèves à recomposer mentalement une figure et à éluder les partages superflus 42

Figure 11. Exemple de figure envisageable pour vérifier que les élèves prennent en compte l'idée que des parts de formes différentes peuvent avoir la même aire 43

Figure 12. Exemple de figures représentant l'égalité entre 1/5 et 3/15 avec des quantités continues (Neagoy, *ibid.*, p. 119) 44

Figure 13. Exemple d'utilisation de quantités discrètes pour représenter l'égalité entre 1/5 et 3/15 (Neagoy, *ibid.*, p. 118) 44

Figure 14. Conceptions additives et multiplicatives des relations numériques qui s'instaurent entre deux fractions égales 45

Figure 15. Représentation de la fraction 2/5 dans le cadre de l'étude de la fraction-quotient (Neagoy, 2017, p. 99) 48

Figure 16. Évaluations nationales de 5^{e} (2002), items 9 et 10 51

Figure 17. Evolution du PIB anuuel par habitant (en $ US courants) selon la banque mondiale entre 1995 et 2015 62

Figure 18. Évolution des dépenses publiques en éducation (en % du PIB) selon la banque mondiale entre 1995 et 2015 63

Figure 19. Statut des participants de notre corpus au sein du Bureau international des poids et mesures 67

Figure 20. Panneaux indicateurs de l'échangeur *Route 10* à Providence County, Rhode Island, le 5 aout 2017 (auteur : JJBers Public) 68

Figure 21. Exemple de recette impliquant des fractions et des unités de mesure anglo-saxonnes (Brinker, 1998, p. 219) 69

Figure 22. Exemple d'écriture sous la forme d'un nombre mixte dans les programmes d'enseignement anglais (2014, p. 139) 70

Figure 23. Cadre théorique des enseignements de mathématiques à Singapour (Mathematics Syllabus Primary, 2006, p. 6) 80

Figure 24. Processus d'enseignement de la résolution de problèmes à Singapour (Mathematics Syllabus, 2012, p. 16) 81

Figure 25. Exemple de représentation de la fraction 1/4 par le biais d'un partage en parts égales 103

Figure 26. Exemple de représentation de la fraction 1/4 par itération 103

Figure 27. Exemple d'identification de la fraction 1/4 par itération 103

Figure 28. Exemple d'identification de la fraction 1/4 par comptage 104

Figure 29. Liens entre sous-constructions et tâches (Kieren, 1980, p. 137) 111

Figure 30. Relations entre les sous-constructions selon Behr *et al.* (1983, p. 100) 112

Figure 31. Liens entre les sous-constructions et les concepts complémentaires (Kieren, 1993, d'après Mitchell, 2012) 112

Figure 32. Schéma général du processus d'apprentissage d'après les auteurs du Rational Number Project (2009, p. 16) 140

Figure 33. Modèle de transposition didactique établie par les auteurs des évaluations TIMSS (2016, p. 5). ... 142

Figure 34. Nombre de programmes scolaires dans lesquels ont été identifié les différentes significations du concept de fraction, sur les onze qui composent notre corpus 156

Figure 35. Enseignement des différentes significations du concept de fraction au sein de notre corpus..... 157

Figure 36. Nombre de programmes scolaires dans lesquels ont été identifiés les différents domaines pour l'enseignement des fractions, sur les onze qui composent notre corpus 161

Figure 37. Domaines des mathématiques dans lesquels sont enseignées les fractions au sein de notre corpus 161

Figure 38. Synthèse des types de tâches relatifs aux fractions présents dans les programmes d'enseignement, entre la première et la huitième année de scolarité obligatoire, au moment des évaluations TIMSS 2015 164

Figure 39. Utilisation des connaissances conceptuelles et procédurales, dans les pays de notre corpus, pour la réalisation d'additions impliquant des fractions, en 2015 193

Figure 40. Exemple de référence à une situation de la vie quotidienne dans les programmes scolaires du Taipei chinois (Curriculum, 2005, p. 128)..... 198

Figure 41. Extrait de la progression officielle des enseignements au Québec (*op. cit.*, 2009a, p. 5)..... 216

Figure 42. Combinaison des modèles de transposition didactique et d'organisation mathématique 221

Figure 43. Exemple de transposition didactique externe possible à propos de la comparaison de fractions.... 222

Figure 44. Fragments praxélogiques fournis par les auteurs des programmes d'enseignement à propos de la comparaison de fractions de dénominateurs différents 223

Figure 45. Tranposition didactique des fragments praxéologiques du savoir savant au savoir acquis par les élèves. 224

Figure 46. Chronogénèse du concept de fraction dans les instructions officielles de notre corpus (2015) 243

Figure 47. Début de l'enseignement des écritures décimales et des pourcentages pour les élèves ayant participé aux évaluations TIMSS 2015 259

Figure 48. Chronogénèse des liens entre, d'une part, les fractions, et d'autre part, les écritures décimales et les pourcentages dans les instructions officielles de notre corpus (2015) 261

Figure 49. Support visant à faire comprendre aux élèves l'égalité entre 2/4 et 1/2 dans les instructions officielles de troisième année du Taipei chinois (*ibid.*, p. 129)..... 268

Figure 50. Support visant à faire comprendre aux élèves l'égalité entre 2/4 et 1/2 dans les instructions officielles de quatrième année du Taipei chinois (*ibid.*) 268

Figure 51. Indication relative aux types de tâches « Comparaisons » et « Rangements » dans les instructions officielles de notre corpus, au moment des évaluations TIMSS 2015..... 281

Figure 52. Chronogénèse de la reconnaissance et de la production de fractions équivalentes, ainsi que de la comparaison et du rangement de fractions dans les instructions officielles de notre corpus (2015) 282

Figure 53. Type de progression retenue pour la comparaison de fractions de dénominateurs différents par les auteurs des programmes, au moment des évaluations TIMSS 2015 284

Figure 54. Chronogénèse des compétences relatives aux opérations impliquant des fractions dans les instructions officielles de notre corpus (2015)..... 303

Figure 55. Exemple de relations qui s'instaurent entre les types de tâches, techniques et technologies autour du type de tâches « Comparer des fractions de dénominateurs différents »..... 309

Figure 56. Corrélation entre le score TIMSS 2015 et l'indice mesurant l'adhésion des élèves à la proposition « Je réussis habituellement en mathématiques »..... 339

Figure 57. Niveau de diplôme moyen des enseignants de quatrième année..... 354

Figure 58. Estimation du nombre d'heures de formation continue suivies par les enseignants de quatrième année au cours des deux années précédent le test TIMSS 2015..... 357

Figure 59. Estimation du nombre d'heures de formation continue suivies par les enseignants de huitième année au cours des deux années précédent le test TIMSS 2015..... 358

Figure 60. Nombre moyen d'élèves par classe en quatrième année (TIMSS 2015)..... 362

Figure 61. Nombre moyen d'élèves par classe en huitième année (TIMSS 2015)..... 363

Figure 62. Corrélation entre la fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année demandent aux élèves d'expliquer leurs réponses et le score obtenu par les élèves aux évaluations TIMSS 2015..... 371

Figure 63. Corrélation entre la fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année relient le savoir nouveau aux connaissances préalables des élèves et le score obtenu par les élèves aux évaluations TIMSS 2015 372

Figure 64. Corrélation entre la fréquence à laquelle les enseignants de huitième année encouragent les élèves à exprimer leurs idées en classe et le score obtenu par les élèves aux évaluations TIMSS 2015..... 373

Figure 65. Durée hebdomadaire des enseignements de mathématiques au sein de l'établissement en quatrième année, selon les enseignants (TIMSS 2015)..... 383

Figure 66. Durée hebdomadaire des enseignements de mathématiques au sein de l'établissement en huitième année, selon les enseignants (TIMSS 2015)..... 384

Figure 67. Estimation de la durée annuelle des enseignements de mathématiques à partir des déclarations des acteurs de quatrième année (TIMSS 2015)..... 386

Figure 68. Estimation de la durée annuelle des enseignements de mathématiques à partir des déclarations des acteurs de huitième année (TIMSS 2015)..... 387

Figure 69. Fréquence hebdomadaire à laquelle les enseignants de quatrième année donnent des devoirs à leurs élèves (TIMSS 2015)..... 389

Figure 70. Fréquence hebdomadaire à laquelle les enseignants de huitième année donnent des devoirs à leurs élèves (TIMSS 2015)..... 390

Figure 71. Estimation, en minutes, du temps passé par les élèves de quatrième année sur chaque devoir (TIMSS 2015)..... 392

Figure 72. Estimation du temps passé par les élèves de huitième année sur chaque devoir en minutes (TIMSS 2015)..... 393

Figure 73. Estimation de la quantité de travail hebdomaire fournie en mathématiques, en dehors du temps scolaire, par les élèves de quatrième année, selon les enseignants 394

Figure 74. Corrélation entre la quantité hebdomadaire de devoirs donnée par les enseignants de quatrième année en mathématiques et le score obtenu par les élèves aux évaluations TIMSS 2015 395

Figure 75. Estimation de la quantité de travail hebdomaire fournie en mathématiques, en dehors du temps scolaire, par les élèves de huitième année, selon les enseignants..... 395

Figure 76. Relation entre la durée annuelle des apprentissages mathématiques (incluant les heures de cours et le temps passé sur les devoirs en quatrième année) et les performances des élèves (TIMSS 2015)..... 397

Figure 77. Durée des apprentissages mathématiques incluant les heures de cours et le temps passé sur les devoirs en huitième année (TIMSS 2015) 398

Figure 78. Comparaison entre les déclarations des enseignants et des élèves de huitième année à propos de la durée hebdomadaire des devoirs en mathématiques (TIMSS 2015) 400

Figure 79. Extrait des instructions officielles anglaises pour l'école élémentaire (*op. cit.*, 2006, p. 76) 403

Figure 80. Extrait des instructions officielles anglaises pour l'enseignement secondaire (*op. cit.*, 2007, p. 148) 403

Figure 81. Extrait des nouvelles instructions officielles anglaises pour l'école élémentaire (*op. cit.*, 2014, p. 131) 404

Figure 82. Extrait des instructions officielles sud-coréennes (*op. cit.*, p. 13)..... 405

Figure 83. Extrait des instructions officielles floridiennes (*op. cit.*, 2007, p. 6) 405

Figure 84. Extrait des nouvelles instructions officielles floridiennes pour la quatrième année (*op. cit.*, 2014, p. 4) 406

Figure 85. Extrait des instructions officielles française pour l'école élémentaire (*op. cit.*, 2008a, p. 38)..... 407

Figure 86. Extrait des instructions officielles françaises pour l'enseignement secondaire (*op. cit.*, 2008b, p. 15) 407

Figure 87. Extrait des instructions officielles de Hong Kong SAR (*op. cit.*, p. 36)..... 408

Figure 88. Extrait des progressions officielles de l'Irlande du Nord (*op. cit.*, onglet « Nombres »)..... 408

Figure 89. Extrait des instructions officielles de l'Ontario (*op. cit.*, p. 43) 409

Figure 90. Extrait des instructions officielles québécoises (*op. cit.*, 2001, p. 134)..... 410

Figure 91. Extrait de la progression préconisée au Québec depuis 2009 pour l'école élémentaire (*op. cit.*, 2009a, p. 6)..... 410

Figure 92. Extrait des instructions officielles irlandaises pour l'école élémentaire (*op. cit.*, 1999, p. 68)..... 411

Figure 93. Extrait des instructions officielles pour l'enseignement secondaire (*op. cit.*, 2014, p. 16)..... 412

Figure 94. Extrait des instructions officielles singapouriennes (*op. cit.*, 2006, p. 18)..... 413

Figure 95. Extrait des instructions officielles du Taipei chinois (*op. cit.*, p. 143)..... 413

Figure 96. Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015..... 415

Figure 97. Évolution de la part des items mettant en jeu des fractions dans les programmes scolaires asiatiques entre la première et la huitième année de scolarité obligatoire au moment des évaluations TIMSS 2015..... 416

Figure 98. Évolution de la part des items mettant en jeu des fractions dans les programmes scolaires occidentaux entre la première et la huitième année de scolarité obligatoire au moment des évaluations TIMSS 2015..... 416

Figure 99. Nombre d'items identifiés comme impliquant des fractions dans les tests de quatrième et huitième année depuis 1995..... 426

Figure 100. Part des items identifiés comme impliquant des fractions dans les tests de quatrième et huitième année depuis 1995..... 427

Figure 101. Corrélation entre la réussite aux fractions et la réussite totale en mathématiques depuis 1995 (quatrième année)..... 430

Figure 102. Corrélation entre la réussite aux fractions et la réussite totale en mathématiques depuis 1995 (huitième année)..... 431

Figure 103. Coefficients de détermination de Bravais-Pearson indiquant le lien entre les résultats en mathématiques et les performances dans le domaine des fractions depuis 1995 (huitième année)..... 432

Figure 104. Part des différentes conceptions de la fraction dans les évaluations TIMSS de quatrième année depuis 1995..... 438

Figure 105. Types de tâches relatifs aux fractions évaluées dans les items TIMSS de quatrième année depuis 1995..... 439

Figure 106. Part des différentes conceptions de la fraction dans les évaluations TIMSS de huitième année depuis 1995..... 441

Figure 107. Types de tâches relatifs aux fractions évaluées dans les items TIMSS de huitième année depuis 1995 442

Figure 108. Évolution des scores obtenus aux évaluations TIMSS à l'item "Recipe for 3 people" entre 2003 et 2011 449

Figure 109. Évolution des taux de réussite des élèves de huitième année aux items TIMSS rendus publics en 1995 et 2007 450

Figure 110. Scores obtenus par les participants de notre corpus aux évaluations TIMSS de quatrième année 461

Figure 111. Scores obtenus par les participants de notre corpus aux évaluations TIMSS de huitième année... 462

Figure 112. Pourcentage de réussite moyen aux items relatifs aux fractions obtenu par les participants de notre corpus aux évaluations TIMSS de quatrième année 463

Figure 113. Pourcentage de réussite moyen aux items relatifs aux fractions obtenu par les participants de notre corpus aux évaluations TIMSS de huitième année 464

Figure 114. Pourcentage de réussite moyen à chaque item, en quatrième année, au sein de notre corpus (TIMSS 2015) 465

Figure 115. Écart-type, en points de pourcentage, au sein de notre corpus, pour chaque item, en quatrième année (TIMSS 2015) 466

Figure 116. Différence entre le taux de réussite, dans le domaine des fractions, des élèves de huitième année et celui des élèves de quatrième année, aux évaluations TIMSS, depuis 1995 (en points de pourcentage) 468

Figure 117. Corrélation entre l'écart-type et la performance aux items portant sur les fractions, dans les évaluations TIMSS, depuis 1995 (huitième année) 471

Figure 118. Coefficients de détermination de Bravais-Pearson indiquant le lien entre l'écart-type et les performances moyennes dans le domaine des fractions depuis 1995 (huitième année) 471

Figure 119. Corrélation entre l'écart-type portant sur l'ensemble des items de huitième année et la performance à l'item H8 (TIMSS 1995) 473

Figure 120. Corrélation entre l'écart-type et la performance aux items portant sur les fractions aux évaluations TIMSS 2015 de quatrième année 474

Figure 121. Types de tâches supposées être réussies dans le domaine des fractions selon le niveau de performance des élèves, en quatrième année (TIMSS 2015) 478

Figure 122. Corrélation linéaire entre deux items aux évaluations de quatrième année (TIMSS 2015) 480

Figure 123. Comparaison entre la formulation des auteurs TIMSS et celle que nous avons utilisée pour décrire les tâches réalisées par les élèves en quatrième année (TIMSS 2015) 483

Figure 124. Pourcentages de réussite des élèves de quatrième année aux items M1302 et M0504A (TIMSS 2015) 486

Figure 125. Comparaison des taux de réussite et des corrélations entre les résultats obtenus à deux items en fonction de leurs caractéristiques (type de tâches, variable de la tâche en jeu) aux évaluations TIMSS 2015 489

Figure 126. Dans le domaine des fractions, adéquation des programmes au test selon les autorités et performance moyenne des élèves de quatrième année (TIMSS 2015) 491

Figure 127. Comparaison entre l'adéquation au test telle qu'elle ressort des déclarations des autorités et telle qu'elle ressort de notre analyse des textes et des items (TIMSS 2015, quatrième année) 492

Figure 128. Enseignement de la comparaison des fractions et performance à un item de comparaison des élèves de quatrième année (TIMSS 2015) 500

Figure 129. Choix des techniques par le législateur et performance à un item de comparaison des élèves de quatrième année (TIMSS 2015). 502

Figure 130. Précocité de l'enseignement des fractions et performance au test des élèves de quatrième année (TIMSS 2015) 507

Figure 131. Corrélation entre le nombre d'années d'apprentissage de l'équivalence entre fractions selon les instructions officielles et les résultats des élèves de quatrième année à un item mettant en jeu ce type de tâches (TIMSS 2015) 512

Figure 132. Adéquation entre les instructions officielles relatives à l'addition de fractions et les performances des élèves à un item de quatrième année mettant en jeu ce type de tâches (TIMSS 2015) 515

Figure 133. Relation entre l'année d'introduction des écritures fractionnaires selon les instructions officielles et les déclarations des enseignants sur le moment principal de l'enseignement du concept de fraction (TIMSS 2015) 524

Figure 134. Relation entre l'année d'introduction des additions et comparaisons de fractions selon les instructions officielles et les déclarations des enseignants sur le moment principal de ces enseignements (TIMSS 2015) 527

Figure 135. Année marquant le début de l'enseignement des écritures décimales dans les programmes scolaires et déclarations des enseignants à propos de cet enseignement (TIMSS 2015) 528

Figure 136. Relation entre l'année d'introduction des écritures fractionnaires selon les instructions officielles et les déclarations des enseignants sur le moment principal de l'enseignement du concept de fraction (TIMSS 2015) 532

Figure 137. Relation entre la part des intitulés relatifs à l'additions et la comparaison de fractions inscrits dans les instructions officielles après la quatrième année et les déclarations des enseignants sur le moment principal de ces enseignements (TIMSS 2015) 532

Figure 138. Année marquant le début de l'enseignement des écritures décimales dans les programmes scolaires et déclarations des enseignants à propos de cet enseignement (TIMSS 2015) 533

Figure 139. Corrélation entre la part des enseignants indiquant un apprentissage des nombres décimaux au plus tard en quatrième année et le pourcentage de réussite des élèves à l'item M1102 (TIMSS 2015)..... 542

Figure 140. Corrélation entre la réussite à M0906 et les déclarations des enseignants sur le moment de l'apprentissage (TIMSS 2015) 545

Figure 141. Pourcentage de réussite des élèves français aux items correspondant au genre de tâche « Associer une fraction et un dessin » (TIMSS 2015)..... 547

Figure 142. Indice P estimant le niveau de préparation des professeurs relatif à l'enseignement de trois thèmes ayant trait aux fractions (TIMSS 2015). 550

Figure 143. Évolution des déclarations des enseignants de quatrième année relative au moment de l'enseignement du concept de fraction (mesurée à travers l'indice M) entre 2003 et 2015..... 557

Figure 144. Évolution des déclarations des enseignants de quatrième année relative au moment de l'enseignement des additions de fractions (mesurée à travers l'indice M) entre 2003 et 2015..... 558

Figure 145. Évolution des déclarations des enseignants de quatrième année relative au moment de l'enseignement du concept de nombre décimal (mesurée à travers l'indice M) entre 2003 et 2015 560

Figure 146. Évolution, entre 2003 et 2015, du niveau de préparation exprimé par les enseignants de quatrième année pour enseigner le concept de fractions (d'après l'indice P). 569

Figure 147. Évolution du pourcentage de réussite des élèves de quatrième année aux évaluations TIMSS entre 2003 et 2015, dans le domaine des fractions..... 578

Figure 148. Évolution des résultats des élèves quatrième année aux items impliquant d'additionner des fractions entre 2003 et 2011. 579

Figure 149. Représentation schématique des situations issues des items TIMSS se rapportant à l'addition de fractions de dénominateurs différents et réponses attendues des élèves 580

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ **1**
REMERCIEMENTS **3**
AVERTISSEMENTS **5**
SOMMAIRE **7**
INTRODUCTION **1**
PARTIE I. LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT DE FRACTION **19**
TITRE I. CADRES THÉORIQUES DE L'ÉTUDE 21
Chapitre I. Une approche anthropologique *23*
Section I. Points de convergence 25
Sous-section I. Universalité du concept de fraction 25
§ 1. Aspects historiques 25
A. Naissance des écritures fractionnaires 26
B. Dispersion des écritures fractionnaires 29
§ 2. Aspects contemporains 32
A. La place des fractions dans le champ numérique 32
B. La place des fractions dans l'enseignement des mathématiques 34
Conclusion de la sous-section 36
Sous-section II. Universalité des difficultés des élèves à propos des fractions 37
§ 1. Obstacles les plus fréquemment rencontrés 37
A. Les obstacles épistémologiques 38
B. Les obstacles didactiques 46
§ 2. Matérialité statistique de la difficulté propre aux fractions 50
A. Dans les évaluations nationales 50
B. Dans les évaluations internationales 51
Conclusion de la sous-section 54
Conclusion de la section consacrée aux points de convergence entre les territoires relativement au concept de fraction 56
Section II. Discontinuités 56
Sous-section I. Des spécificités locales dans l'utilisation sociale des fractions 57
§ 1. Le choix des zones étudiées 57
A. Les critères de sélection 58
B. Présentation de la sélection 61
§ 2. Les spécificités locales dans les zones étudiées 66
A. Les spécificités liées à leur système de mesure 66
B. Les spécificités liées aux formes d'écriture 69
Conclusion de la sous-section 71
Sous-section II. Des spécificités locales dans l'enseignement des fractions 71

§ 1. Présentation des programmes d'enseignement 72
A. Les programmes d'enseignement 72
B. Les textes complémentaires 76
§ 2. Les objectifs des programmes d'enseignement 77
A. En général 77
B. À propos des fractions 82
Conclusion de la sous-section 83
Conclusion de la section consacrée aux discontinuités entre les territoires relativement au concept de fraction 84
Conclusion du chapitre consacré à l'approche anthropologique du concept de fraction 85
Chapitre II. Une approche didactique 87
Section I. Un phénomène praxéologique 87
Sous-section I. Le bloc pratico-technique [T_i/τ_i] 88
§ 1. Types de tâches T_i 89
A. Présentation des types de tâches 89
B. Présentation des modalités de la tâche 99
§ 2. Techniques τ_i 102
A. Les techniques permettant d'identifier ou représenter des fractions 102
B. Les techniques permettant de comparer ou d'additionner des fractions 104
Conclusion de la sous-section 107
Sous-section II. Le bloc technologico-théorique [θ/Θ] 107
§ 1. Les limites apportées par le bloc technologico-théorique aux types de tâches 108
A. Les significations du concept de fraction 109
B. Les domaines mathématiques incluant le concept de fraction 115
§ 2. Les limites apportées aux techniques par le bloc technologico-théorique 117
A. Le champ d'application des techniques propres aux fractions 117
B. La relation entre les connaissances conceptuelles et procédurales 118
Conclusion de la sous-section 120
Conclusion de la section consacrée à la présentation des aspects praxéologiques de notre recherche 121
Section II. Un phénomène transpositif 122
Sous-section I. Les caractéristiques convergentes de la transposition didactique externe 122
§ 1. Une transposition effective 123
A. Le régime didactique interne des savoirs 123
B. Le régime didactique externe des savoirs 124
§ 2. Une transposition incomplète 126
A. Savoir enseigné 126
B. Le savoir appris et retenu 127
Conclusion de la sous-section 128
Sous-section II. L'écologie de la transposition didactique externe 128
§ 1. Le processus de rédaction des programmes d'enseignement 129
A. Les procédures d'adoption des programmes 130
B. Les intentions des auteurs des programmes 135

§ 2. Le contexte scientifique entourant l'adoption des programmes d'enseignement 136
A. Les thèmes de recherche des didacticiens ayant contribué aux instructions officielles..... 136
B. Les principales propositions des didacticiens pour l'enseignement des fractions 138
Conclusion de la sous-section 141
Conclusion de la section consacrée à la présentation des aspects transpositifs de notre recherche 142
Conclusion du chapitre consacré à l'approche didactique du concept de fraction 143
Conclusion du titre consacré aux cadres théoriques de l'étude 145
TITRE II. RÉSULTATS DE L'ÉTUDE COMPARATIVE DES PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT 147
Chapitre I. Topogénèse du concept de fraction 149
Section I. Non-ostensifs 150
Sous-section I. Les types de tâches 151
§ 1. La définition du contexte 151
A. Significations privilégiées 151
B. Domaines privilégiés 158
§ 2. La définition de la tâche 162
A. Types de tâches privilégiés 163
B. Modalités de la tâche privilégiées 168
Conclusion de la sous-section 178
Sous-section II. Les techniques 179
§ 1. Leur présence dans les programmes d'enseignement 179
A. Les types de tâches concernés 180
B. La formulation des techniques 185
§ 2. Les techniques privilégiées par les rédacteurs 187
A. Pour les tâches de comparaison 188
B. Pour les tâches d'addition 191
Conclusion de la sous-section 194
Conclusion de la section consacrée aux non-ostensifs 195
Section II. Ostensifs 196
Sous-section I. Ostensifs discursifs 196
§ 1. Le discours relatif à l'utilité du concept de fraction 197
A. Le lien avec la vie quotidienne 198
B. La contextualisation dans des problèmes 200
§ 2. Le discours relatif à la compréhension du concept de fraction 204
A. La justification par les élèves des techniques utilisées 204
B. Le discours portant sur des éléments technologiques 206
Conclusion de la sous-section 208
Sous-section II. Ostensifs graphiques et scripturaux 208
§ 1. Le choix des ostensifs 209
A. Les ostensifs graphiques 209
B. Les ostensifs scripturaux 214
§ 2. La manipulation des ostensifs 214
A. Le degré d'autonomie des élèves 215

B. Le degré d'exigence des programmes 217
Conclusion de la sous-section 219
Conclusion de la section consacrée aux ostensifs 219
Conclusion du chapitre consacré à la topogénèse du concept de fraction 220
Chapitre II. Chronogénèse du concept de fraction 227
Section I. L'acquisition du concept de nombre rationnel 228
Sous-section I. Les fractions 229
§ 1. Le concept de partage 230
A. Types de tâches à rattacher au concept de fraction 231
B. Type de tâche à rattacher au concept de division 233
§ 2. L'introduction des écritures fractionnaires 237
A. Avec des quantités continues 237
B. Avec des quantités discrètes 240
Conclusion de la sous-section 241
Sous-section II. Le lien avec les autres formes d'écriture des rationnels 245
§ 1. L'instauration d'un lien entre les fractions et les écritures décimales 246
A. Les types de tâches de conversion entre fractions et écritures décimales 246
B. L'objectif des auteurs concernant les conversions entre fractions et écritures décimales 250
§ 2. L'instauration d'un lien entre les fractions et les pourcentages 252
A. Les types de tâches de conversion entre fractions et pourcentages 253
B. L'objectif des auteurs concernant les conversions entre fractions et pourcentages 256
Conclusion de la sous-section 258
Conclusion de la section consacrée à l'acquisition du concept de nombre rationnel 262
Section II. L'acquisition des techniques propres aux fractions 264
Sous-section I. Comparaison de fractions 264
§ 1. Notion d'équivalence 265
A. Dans des activités de reconnaissance 265
B. Dans des activités de production 269
§ 2. Comparaison et rangement 273
A. Les tâches de comparaison 273
B. Les tâches de rangement 278
Conclusion de la sous-section 280
Sous-section II. Opérations avec des fractions 285
§ 1. Addition et soustraction de fractions 285
A. Fractions de même dénominateur 285
B. Fractions de dénominateurs différents 289
§ 2. Multiplication et division de fractions 293
A. Par un entier 294
B. Par une autre fraction 298
Conclusion de la sous-section 302
Conclusion de la section consacrée à l'acquisition des techniques propres aux fractions 305
Conclusion du chapitre consacré à la chronogénèse du concept de fraction 305

Conclusion du titre consacré à l'étude comparative des programmes d'enseignement 309

CONCLUSION DE LA PARTIE CONSACRÉE À LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE EXTERNE DU CONCEPT DE FRACTION 313

PARTIE II. LES RÉSULTATS DES ÉLÈVES AUX ÉVALUATIONS TIMSS DANS LE DOMAINE DES FRACTIONS 317

TITRE I. PORTÉE DE L'ÉTUDE 321

Chapitre I. Les aspects qualitatifs de la transposition interne 323

Section I. Limites liées à l'apprentissage 323

Sous-section I. Limites liées à des considérations d'ordre général relatives aux élèves 324

§ 1. Les caractéristiques des élèves ayant participé aux évaluations TIMSS 2015 324

A. Leurs caractéristiques propres 324

B. Les caractéristiques du milieu familial 326

§ 2. Les conditions de leur apprentissage 329

A. Au domicile de l'élève 329

B. Dans l'établissement scolaire 333

Conclusion de la sous-section 335

Sous-section II. Limites liées à des considérations spécifiques aux mathématiques 336

§ 1. Le rapport des élèves aux savoirs mathématiques 337

A. La compréhension des mathématiques 337

B. L'intérêt porté à la matière 340

§ 2. Le rapport des élèves à l'apprentissage des mathématiques 342

A. Les acquis en mathématiques à l'entrée dans la scolarité obligatoire 342

B. La perception par les élèves des séances de mathématiques 343

Conclusion de la sous-section 345

Conclusion de la section consacrée aux limites à la portée de notre étude liées à l'apprentissage 346

Section II. Limites liées à l'enseignement 347

Sous-section I. Limites liées aux caractéristiques des enseignants 347

§ 1. Les caractéristiques générales des enseignants 348

A. La carrière des enseignants 348

B. L'implication des enseignants 350

§ 2. La formation des enseignants 353

A. La formation initiale 353

B. La formation continue 357

Conclusion de la sous-section 359

Sous-section II. Limites liées à la pédagogie mise en œuvre 360

§ 1. Les conditions de cette mise en œuvre 360

A. Les conditions d'enseignement 360

B. L'implication des parents et des élèves 365

§ 2. Les habitudes pédagogiques 368

A. Selon les enseignants 368

B. Selon les élèves 373

Conclusion de la sous-section 375

Conclusion de la section consacrée aux limites à la portée de notre étude liées à l'enseignement 376

Conclusion du chapitre consacré aux limites à la portée de notre étude liées aux aspects qualitatifs de la transposition interne 377
Chapitre II. Les aspects quantitatifs du travail de transposition 379
Section I. La durée des enseignements et des apprentissages en mathématiques 379
Sous-section I. La durée des apprentissages en mathématiques 380
§ 1. Dans les établissements scolaires 380
A. Selon les programmes 380
B. Selon les acteurs 382
§ 2. En dehors du temps scolaire 388
A. Selon les enseignants 388
B. Selon les élèves 398
Conclusion de la sous-section 400
Sous-section II. La durée des enseignements relatifs aux fractions 402
§ 1. En comptabilisant les items relatifs aux fractions dans les programmes d'enseignement 402
A. Méthode de comptage des items 402
B. Comparaison inter-pays 414
§ 2. En utilisant d'autres sources permettant d'estimer le temps passé à étudier les fractions 417
A. La pondération par le législateur du temps passé sur chaque item 417
B. Le temps passé à l'étude des nombres d'après les enseignants 418
Conclusion de la sous-section 419
Conclusion de la section consacrée à la durée des enseignements et des apprentissages en mathématiques 420
Section II. Les fractions dans les évaluations TIMSS 421
Sous-section I. La place des fractions au sein des évaluations TIMSS 422
§ 1. L'importance des fractions dans les évaluations 423
A. Le nombre d'items impliquant des fractions 423
B. La part des fractions dans les évaluations 426
§ 2. Le lien entre les résultats relatifs aux fractions et les performances en mathématiques 429
A. Un lien fort entre le taux de réussite aux items impliquant des fractions et les performances globales 429
B. La possibilité d'un lien distendu entre le score aux items impliquant des fractions et le score global 433
Conclusion de la sous-section 435
Sous-section II. La nature des fractions dans les évaluations TIMSS 436
§ 1. Le contenu des évaluations 437
A. En quatrième année 437
B. En huitième année 440
§ 2. La fiabilité des évaluations 443
A. L'évolution des attentes 443
B. L'évolution des résultats des élèves aux items redondants 446
Conclusion de la sous-section 450
Conclusion de la section consacrée aux fractions dans les évaluations TIMSS 452

Conclusion du chapitre consacré aux limites à la portée de notre étude liées aux aspects quantitatifs de la transposition interne 453
Conclusion du titre consacré à la portée de notre étude 455
TITRE II. RÉSULTATS DE L'ÉTUDE COMPARATIVE DES PERFORMANCES DES ÉLÈVES AUX ÉVALUATIONS TIMSS 457
Chapitre I. L'existence d'un lien entre les programmes d'enseignement et l'acquisition du concept de fraction par les élèves 459
Section I. Les caractéristiques des résultats des élèves aux évaluations TIMSS 459
Sous-section I. Les résultats des élèves aux tests 459
§ 1. L'analyse inter-pays 460
A. Les résultats de chaque pays 460
B. Les résultats pour chaque item 464
§ 2. L'analyse intra-pays 467
A. L'hétérogénéité des résultats en fonction de l'âge des élèves 467
B. L'hétérogénéité des résultats en fonction des tâches proposées 470
Conclusion de la sous-section 475
Sous-section II. Les résultats des élèves en fonction des tâches 476
§ 1. La capacité de transfert selon les catégories cognitives 476
A. Définition des catégories cognitives 476
B. Relation entre les catégories cognitives et les performances des élèves 479
§ 2. La capacité de transfert selon les types de tâches 481
A. Définition des genres de tâches 481
B. Relation entre les genres de tâches et les performances des élèves 484
Conclusion de la sous-section 487
Conclusion de la section consacrée aux caractéristiques des résultats des élèves aux évaluations TIMSS 488
Section II. Le lien entre les programmes et les résultats des élèves 490
Sous-section I. Topogénèse du concept de fraction et performance des élèves aux évaluations TIMSS 490
§ 1. L'adéquation des programmes aux tests 490
A. Adéquation des programmes aux tests et performances des élèves 491
B. Incidence de la présence (ou de l'absence) de certains types de tâches dans les programmes 493
§ 2. L'incidence de la diversité des types de tâches prescrites par le législateur 497
A. L'incidence du nombre de types de tâches traités dans les programmes d'enseignement 497
B. L'incidence d'un enseignement riche et exigeant 499
Conclusion de la sous-section 504
Sous-section II. Chronogénèse du concept de fraction et réussite des élèves aux évaluations TIMSS 505
§ 1. La précocité de l'enseignement 506
A. Le lien entre la précocité des apprentissages et les performances des élèves 506
B. La possibilité d'un rapprochement des acquis postérieurement aux tests de quatrième année 508
§ 2. La durée de l'enseignement 511
A. La répétition de la tâche 512
B. L'incidence d'un type de tâches enseigné de façon partielle 514
Conclusion de la sous-section 516
Conclusion de la section consacrée au lien entre les programmes et les résultats des élèves 518

Conclusion du chapitre consacré à l'existence d'un lien entre les programmes d'enseignement et l'acquisition du concept de fraction par les élèves 519
Chapitre II. Les limites du lien entre les programmes d'enseignement et l'acquisition du concept de fraction par les élèves 521
Section I. Le rôle des enseignants établi selon une perspective synchronique 522
Sous-section I. La relation entre le contenu des programmes et les déclarations des enseignants 522
§ 1. La nature du lien qui unit les programmes et les déclarations des enseignants 523
A. L'incidence du point de départ des enseignements sur les déclarations des professeurs 523
B. L'incidence de la durée des enseignements sur les déclarations des professeurs 530
§ 2. La possibilité d'un décalage dans le temps des apprentissages 534
A. Les phénomènes d'anticipation des enseignements 534
B. Les phénomènes de report des enseignements 537
Conclusion de la sous-section 539
Sous-section II. La corrélation entre les déclarations des enseignants et les résultats des élèves 540
§ 1. L'influence du moment de l'enseignement 541
A. La nécessité d'un enseignement effectif 541
B. La nécessité d'une prise en compte des difficultés potentielles des élèves 546
§ 2. L'influence du niveau de préparation des enseignants 548
A. L'incidence de la formation des enseignants sur le niveau de préparation déclaré 548
B. L'incidence du niveau de préparation déclaré par les enseignants 551
Conclusion de la sous-section 553
Conclusion de la section 553
Section II. Le rôle des enseignants établi selon une perspective diachronique 554
Sous-section I. L'évolution des déclarations des enseignants 555
§ 1. L'incidence des changements apportés aux programmes d'enseignement sur les déclarations des enseignants 555
A. Le recueil des déclarations des enseignants à propos du moment de l'enseignement effectif du concept de fraction par les auteurs de TIMSS 556
B. L'incidence des modifications des instructions officielles sur cette évolution 560
§ 2. L'incidence de l'évolution des déclarations des enseignants sur les résultats des élèves 564
A. À propos du moment de l'enseignement des fractions 564
B. À propos de leur niveau de préparation déclaré pour l'enseignement des fractions 568
Conclusion de la sous-section 572
Sous-section II. L'incidence des changements de curriculum 572
§ 1. L'incidence des modifications des programmes sur les résultats des élèves 573
A. La relation entre les changements curriculaires et l'évolution des performances 573
B. Comparaison avec les participants dont les programmes sont constants 577
§ 2. L'évolution contemporaine des programmes d'enseignement 581
A. Les modifications récentes des programmes d'enseignement 581
B. L'impact potentiel de ces modifications sur les résultats des élèves 587
Conclusion de la sous-section 592
Conclusion de la section consacrée au rôle des enseignants établi selon une perspective diachronique 593

Conclusion du chapitre consacré aux limites du lien entre les programmes d'enseignement et l'acquisition du concept de fraction par les élèves 595

Conclusion du titre consacré aux résultats de l'étude comparative des performances des élèves aux évaluations TIMSS 597

CONCLUSION DE LA PARTIE CONSACRÉE AUX RÉSULTATS DES ÉLÈVES AUX ÉVALUATIONS TIMSS DANS LE DOMAINE DES FRACTIONS 599

CONCLUSION GÉNÉRALE 601

SOURCES 619

PROGRAMMES SCOLAIRES 619

ÉVALUATIONS TIMSS 623

BIBLIOGRAPHIE 627

TABLE DES ILLUSTRATIONS 641

TABLE DES MATIÈRES 651

ANNEXES 661

ANNEXES CITÉES DANS LA THÈSE 661

PROGRAMMES SCOLAIRES 791

ÉVALUATIONS TIMSS 849

Université Paris Descartes

Membre de l'Université Paris Sorbonne Cité

École doctorale « Sciences humaines et sociales : cultures, individus, sociétés » (ED 180)

Laboratoire « Education, discours, apprentissages » (EA 4071)

THÈSE DE DOCTORAT

pour l'obtention du grade de

docteur en sciences de l'éducation de l'Université Paris Descartes

Spécialité : didactique des mathématiques

Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS

ANNEXES

Présentée et soutenue publiquement par

Sylvain MARTINEZ-IBANEZ

Le 30 novembre 2018

Sous la direction d'Éric RODITI

TABLE DES ANNEXES

ANNEXES CITÉES DANS LA THÈSE

Caractéristiques des élèves participant aux évaluations TIMSS 2015 (annexes 1 à 22) ……. 661

Rapport au travail scolaire des élèves participant aux évaluations TIMSS 2015 (annexes 23 à 86) ……..... 670

Caractéristiques des enseignants des classes participant aux évaluations TIMSS 2015 (annexes 87 à 142) ….. 693

Conditions d'enseignement dans les classes ayant participé aux évaluations TIMSS 2015 (annexes 143 à 215) ……...… 717

Pratiques pédagogiques des enseignants dans les classes ayant participé aux évaluations TIMSS 2015 (annexes 216 à 246) ……. 741

Durée des apprentissages en mathématiques des élèves ayant participé aux évaluations TIMSS 2015 (annexes 247 à 271) …… 754

Corrélation entre le taux de réussite aux items impliquant des fractions et les performances globales aux évaluations TIMSS (annexes 272 à 282) ……. 762

Conceptions et types de tâches évalués par TIMSS à propos des fractions (annexes 283 à 293) ……. 766

Types de tâches dont l'acquisition est attendue par les auteurs de TIMSS dans le domaine des fractions (annexes 294 à 301) ……. 775

Évolution des résultats des élèves de quatrième année aux items redondants (annexes 302 à 311) ……..……..…...…... 779

Pourcentage d'écart-type entre la performance d'un pays à un item et sa performance moyenne aux items de quatrième année dans le domaine des fractions (annexe 312) ……..…… 782

Le niveau de préparation indiqué par les professeurs de quatrième année pour l'enseignement du concept de fraction (annexes 313 à 323) ……..……... 783

Le moment effectif de l'enseignement du concept de fraction indiqué par les professeurs de quatrième année (annexes 324 à 335) ……..... 787

PROGRAMMES SCOLAIRES

Les programmes scolaires de l'Angleterre (annexes 336 à 340) ……..……. 791

Les programmes scolaires de Corée du Sud (annexe 341) ……..…… 803

Les programmes scolaires de Floride (annexes 342 et 343) ……..……..... 805

Les programmes scolaires de la France (annexes 344 et 345) ……..…… 813

Les programmes scolaires de Hong-Kong SAR (annexe 346) ……..……..... 817

Les programmes scolaires d'Irlande du Nord (annexe 347) ……..……..…. 818

Les programmes scolaires de l'Ontario (annexe 348) ……..……..... 821

Les programmes scolaires du Québec (annexe 349) ……...……..……..... 825

Les programmes scolaires de la République d'Irlande (annexe 350) ……..……...……..…. 830

Les programmes scolaires de Singapour (annexes 351 à 353) ……...……..……. 835

Les programmes scolaires du Taipei chinois (annexes 354) ……..……. 846

ÉVALUATIONS TIMSS

Taux de réussite moyen aux items impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 1995 (annexes 355 et 356) ……...……...……. 849

Taux de réussite moyen aux items impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 1999 (annexe 357) ……...……...……. 853

Taux de réussite moyen aux items impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 2003 (annexes 358 et 359) ……...……...……. 857

Taux de réussite moyen aux items impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 2007 (annexes 360 et 361) ……...……...……. 861

Taux de réussite moyen aux items impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 2011 (annexes 362 et 363) ……...……...……. 864

Taux de réussite moyen aux items impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 2015 (annexes 364 et 365) ……...……...……. 867

Items publics impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 1995 (annexes 366 à 402) ……...……...……. 869

Items publics impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 1999 (annexes 403 à 420) ……...……...……. 918

Items publics impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 2003 (annexes 421 à 450) ……...……...……. 936

Items publics impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 2007 (annexes 451 à 467) ……...……...……. 975

Items publics impliquant des fractions dans les évaluations TIMSS 2011 (annexes 468 à 491) ……...……...……. 998

ANNEXES

ANNEXES CITÉES DANS LA THÈSE

Annexe 1. Âge moyen des élèves passant les évaluations (TIMSS 2015, à partir des résultats à la question SQG-02)

	4e année			8e année		
Pays	Âge	Score (total)	Score (fractions)	Âge	Score (total)	Score (fractions)
Angleterre	10,1	546,0	55,2 %	14,1	518,0	52,6 %
Corée du Sud	10,5	608,0	73,4 %	14,4	606,0	81,8 %
Floride	10,4	546,0	69,2 %	14,4	493,0	50,3 %
France	9,9	488,0	36,7 %			
Hong Kong SAR	10,1	615,0	83,0 %	14,2	594,0	78,7 %
Irlande du Nord	10,4	570,0	64,9 %			
Ontario	9,8	512,0	44,6 %	13,8	522,0	55,8 %
Québec	10,1	536,0	56,8 %	14,3	543,0	66,0 %
République d'Irlande	10,4	547,0	64,8 %	14,4	523,0	66,5 %
Singapour	10,4	618,0	82,9 %	14,4	621,0	85,9 %
Taipei chinois	10,2	597,0	71,6 %	14,3	599,0	73,7 %
Moyenne	**10,2**	**562,1**	**63,9 %**	**14,3**	**557,7**	**67,9 %**

Annexe 2. Sexe des élèves passant les évaluations (TIMSS 2015, SQG-01)

	4e année			8e année		
Pays	Pourcentage de garçons	Score (total)	Score (fractions)	Pourcentage de garçons	Score (total)	Score (fractions)
Angleterre	49	546,0	55,2 %	49,3	518,0	52,6 %
Corée du Sud	51,7	608,0	73,4 %	52,6	606,0	81,8 %
Floride	51,4	546,0	69,2 %	51,8	493,0	50,3 %
France	51,1	488,0	36,7 %			
Hong Kong SAR	54,2	615,0	83,0 %	52,5	594,0	78,7 %
Irlande du Nord	50,5	570,0	64,9 %			
Ontario	51,3	512,0	44,6 %	50,2	522,0	55,8 %
Québec	50,5	536,0	56,8 %	47,1	543,0	66,0 %
République d'Irlande	52,7	547,0	64,8 %	49,7	523,0	66,5 %
Singapour	51,6	618,0	82,9 %	51,5	621,0	85,9 %
Tapei chinois	51,4	597,0	71,6 %	51,3	599,0	73,7 %
Moyenne	**51,4**	**562,1**	**63,9 %**	**50,7**	**557,7**	**67,9 %**

Annexe 3. Fréquence à laquelle les élèves parlent le langage du test à leur domicile (TIMSS 2015, SQG-03)

	4e année				8e année			
Pays	Toujours	Presque toujours	Parfois	Jamais	Toujours	Presque toujours	Parfois	Jamais
Angleterre	71,8	10,9	15,6	1,7	85,3	9,5	4,3	1
Corée du Sud	79,9	11,9	8,2	0,1	88,7	10,9	0,3	0,1
Floride	61,1	11	25,6	2,3	62	21,6	14,1	2,3
France	71,3	12,1	15,7	0,8				
Hong Kong SAR	58	12,6	28,2	1,2	75	9	13,3	2,6
Irlande du Nord	83,7	8,1	6,9	1,3				
Ontario	54,7	19,3	23,9	2,1	66,9	20,1	10,9	2,1
Québec	59,8	17,8	19,6	2,8	61,5	24,2	10	4,3
République d'Irlande	83,7	8,1	6,9	1,3	82,4	7,1	6,7	3,8
Singapour	28,2	20,4	47,7	3,7	33,3	31,9	30,7	4,1
Tapei chinois	42,6	16,7	39,7	1	57,1	33,9	8,7	0,3
Moyenne	**63,2**	**13,5**	**21,6**	**1,7**	**68,0**	**18,7**	**11,0**	**2,3**

Annexe 4. Plus haut niveau de diplôme obtenu par les mères des élèves de quatrième année selon leurs propres déclarations (TIMSS 2015, HQ-20B)

Pays	Ne sont pas allées à l'école	Primaire ou Enseignement secondaire (premier cycle) Niveau 1 ou 2	Enseignement secondaire (premier cycle) Niveau 2	Enseignement secondaire (deuxième cycle) Niveau 3	Enseignement post-secondaire non-supérieur Niveau 4	Enseignement supérieur de cycle court Niveau 5	Baccalauréat universitaire ou équivalent Niveau 6	Maîtrise universitaire ou Doctorat et équivalent Niveau 7 et 8	Réponses non comptabilisées
Corée du Sud	0,1	0,3	1,3	35,4	0	26,3	30,3	5,7	0,5
France	1	2,3	7,4	40,4	1,2	19,3	10,5	16,5	1,5
Hong Kong SAR	0,4	11,1	15	32	6,4	9,8	17,1	7,4	0,6
Irlande du Nord	0,4	5,6	6,6	35,6	5,5	9,9	25,1	9,4	1,8
Ontario	0,2	0,9	1,5	17	17,5	16,6	29	13,8	3,4
Québec	0,2	0,5	2,7	13,6	26,4	7,8	29,5	15,4	3,8
République d'Irlande	0,3	3,9	9,6	15,5	10,1	28,7	17,6	13,6	0,6
Singapour	0,5	6,6	5,3	21,3	14,5	13,9	28,9	7,8	1,1
Taipei chinois	0,3	3,9	10,3	40,3	21	0	18,9	4,8	0,5
Moyenne (corpus)	**0,4**	**3,9**	**6,6**	**27,9**	**11,4**	**14,7**	**23,0**	**10,5**	**1,5**

Annexe 5. Plus haut niveau de diplôme obtenu par les pères des élèves de quatrième année selon leurs déclarations (TIMSS 2015, HQ-20A)

Pays	Ne sont pas allées à l'école	Primaire ou Enseignement secondaire (premier cycle) Niveau 1 ou 2	Enseignement secondaire (premier cycle) Niveau 2	Enseignement secondaire (deuxième cycle) Niveau 3	Enseignement post-secondaire non-supérieur Niveau 4	Enseignement supérieur de cycle court Niveau 5	Baccalauréat universitaire ou équivalent Niveau 6	Maîtrise universitaire ou Doctorat et équivalent Niveau 7 et 8	Réponses non comptabilisées
Corée du Sud	0,2	0,3	1	30,1	0	21,1	35,9	10,9	0,5
France	0,9	4,2	9,1	47,2	1,2	15,2	5	15,4	1,8
Hong Kong SAR	0,5	11,8	15,7	29,4	5,7	7	18,4	10,7	0,8
Irlande du Nord	0,2	13,9	11,6	32,1	2,4	9,1	17,5	10,1	3,1
Ontario	0,4	1,3	3,1	21,5	20,3	11,3	23	15,4	3,9
Québec	0	1,9	4,9	19,1	26,6	6,7	22,3	14,3	4,1
République d'Irlande	0,2	7,3	14,8	16,3	12,7	20,6	16,3	10,5	1,4
Singapour	0,5	7,8	4,8	15	15,6	15,1	26,4	13,7	1,1
Taipei chinois	0,1	2,3	12	39,6	19,1	0	18,1	8,5	0,3
Moyenne (corpus)	**0,3**	**5,6**	**8,6**	**27,8**	**11,5**	**11,8**	**20,3**	**12,2**	**1,9**

Annexe 6. Les attentes des parents de quatrième année quant au niveau de diplôme à obtenir par leur enfant (TIMSS 2015, HQ-21)

Pays	Enseignement secondaire (premier cycle) Niveau 2	Enseignement secondaire (deuxième cycle) Niveau 3	Enseignement post-secondaire non-supérieur Niveau 4	Enseignement supérieur de cycle court Niveau 5	Baccalauréat universitaire ou équivalent Niveau 6	Maîtrise universitaire ou Doctorat et équivalent Niveau 7 et 8
Corée du Sud	0,2	1,1	0	6,2	58,2	34,3
France	1,3	23,2	3,4	22	10,6	39,5
Hong Kong SAR	1,1	3,3	2,3	3,1	62,3	27,9
Irlande du Nord	4,6	23,1	6	8,7	37,4	20,2
Ontario	0,3	3,5	13,1	12,3	34,5	36,2
Québec	0,4	5,2	21,6	9,8	41,7	21,3
République d'Irlande	0,3	4,8	3,2	11,7	46,3	33,7
Singapour	0,7	0,8	2,1	14,5	55,5	26,5
Taipei chinois	0,4	3,8	3,5	0	58,1	34,1
Moyenne (corpus)	**1,0**	**7,6**	**6,1**	**9,8**	**45,0**	**30,4**

Annexe 7. Les attentes des élèves de huitième année quant à leur propre scolarité (TIMSS 2015, HQ-08)

Pays	Enseignement secondaire (premier cycle) Niveau 2	Enseignement secondaire (deuxième cycle) Niveau 3	Enseignement post-secondaire non-supérieur Niveau 4	Enseignement supérieur de cycle court Niveau 5	Baccalauréat universitaire ou équivalent Niveau 6	Maîtrise universitaire ou Doctorat et équivalent Niveau 7 et 8
Angleterre	1,7	8,5	11,9	13,4	47,7	16,9
Corée du Sud	0,6	7,5	0	17,7	62,2	12
Floride	1,5	7	0	9,2	33,1	49,2
Hong Kong SAR	1,3	8	8,1	7,3	48,7	26,6
Ontario	1,4	5,2	13,7	18,9	22,3	38,5
Québec	0,3	5,9	17,7	18,1	23,9	34,1
République d'Irlande	1,8	12,3	3,4	16	39,6	26,9
Singapour	0,7	0,7	4,4	22,9	45,5	25,8
Taipei chinois	1,2	13,2	4,1	0	58,1	23,3
Moyenne (corpus)	**1,2**	**7,6**	**7,0**	**13,7**	**42,3**	**28,1**

Annexe 8. Nombre de livres pour enfants possédés au sein du foyer selon les parents des élèves de quatrième année (TIMSS 2015, HQ-14)

Pays	0 - 10	11 - 25	26 - 50	51 - 100	Plus de 100
Angleterre					
Corée du Sud	4,1	4,2	9,4	17,2	65,2
Floride					
France	9,1	17,8	29,3	26,6	17,1
Hong Kong SAR	19,5	20,3	22,7	18,4	19,2
Irlande du Nord	5,7	13,2	23,7	28,7	28,7
Ontario	5,4	13	24	29,2	28,4
Québec	7,6	18,3	30,6	24,6	18,9
République d'Irlande	6,8	13,9	26,2	26,3	26,8
Singapour	11,8	19,2	27,9	21,5	19,6
Taipei chinois	23,9	20,7	22	16	17,4
Moyenne (corpus)	**10,4**	**15,6**	**24,0**	**23,2**	**26,8**

Annexe 9. Nombre de livres au sein du foyer selon les élèves de huitième année (TIMSS 2015, SQG-04)

Pays	0 - 10	11 - 25	26 - 100	101 - 200	Plus de 200
Angleterre	16,9	22,8	28,2	16,7	15,4
Corée du Sud	6,8	7,5	21,8	25,2	38,7
Floride	25,9	26,2	26	12,3	9,5
Hong Kong SAR	17,8	25,5	31,5	12,7	12,5
Ontario	9,3	19,7	30,6	20	20,4
Québec	16,7	25,3	31,4	15,1	11,5
République d'Irlande	15,2	22	28,7	18,8	15,2
Singapour	17,6	26,8	30,7	14,2	10,6
Taipei chinois	20,4	23,2	27,4	13,1	16
Moyenne (corpus)	**16,3**	**22,1**	**28,5**	**16,5**	**16,6**

Annexe 10. Pourcentage d'élèves de huitième année possédant une console de jeux vidéo (TIMSS 2015, SQG-06G)

Pays	Oui	Non
Angleterre	91,5	8,5
Corée du Sud	54,7	45,3
Floride	89,0	11,0
Hong Kong SAR	49,0	51,0
Ontario	89,1	10,9
Québec	87,3	12,7
République d'Irlande	89,5	10,5
Singapour	51,0	49,0
Taipei chinois	48,4	51,6
Moyenne (corpus)	**72,2**	**27,8**

Annexe 11. Pourcentage d'élèves de huitième année possédant un ordinateur ou une tablette personnels (TIMSS 2015, SQG-06A)

Pays	Oui	Non
Angleterre	89,0	11,0
Corée du Sud	36,9	63,1
Floride	84,6	15,4
Hong Kong SAR	64,5	35,5
Ontario	77,9	22,1
Québec	80,7	19,3
République d'Irlande	78,6	21,4
Singapour	65,7	34,3
Taipei chinois	55,2	44,8
Moyenne (corpus)	**70,3**	**29,7**

Annexe 12. Pourcentage d'élèves de huitième année possédant un ordinateur ou une tablette partagés avec le reste de la famille (TIMSS 2015, SQG-06B)

Pays	Oui	Non
Angleterre	76,5	23,5
Corée du Sud	91,2	8,8
Floride	74,1	25,9
Hong Kong SAR	78,2	21,8
Ontario	82,5	17,5
Québec	79,8	20,2
République d'Irlande	76,1	23,9
Singapour	82,5	17,5
Taipei chinois	82,9	17,1
Moyenne (corpus)	**80,4**	**19,6**

Annexe 13. Pourcentage d'élèves de huitième année possédant un bureau personnel à leur domicile (TIMSS 2015, SQG-06C)

Pays	Oui	Non
Angleterre	78,4	21,6
Corée du Sud	93,9	6,1
Floride	75,2	24,8
Hong Kong SAR	75,0	25,0
Ontario	85,0	15,0
Québec	93,0	7,0
République d'Irlande	81,7	18,3
Singapour	85,3	14,7
Taipei chinois	85,5	14,5
Moyenne (corpus)	**83,7**	**16,3**

Annexe 14. Pourcentage d'élèves de huitième année ayant leur propre chambre (TIMSS 2015, SQG-06D)

Pays	Oui	Non
Angleterre	85,8	14,2
Corée du Sud	73,6	26,4
Floride	78,9	21,1
Hong Kong SAR	60,5	39,5
Ontario	85,5	14,5
Québec	86,2	13,8
République d'Irlande	84,0	16,0
Singapour	52,5	47,5
Taipei chinois	63,0	37,0
Moyenne (corpus)	**74,4**	**25,6**

Annexe 15. Pourcentage d'élèves ayant accès au réseau Internet à leur domicile (TIMSS 2015, SQG-06E)

Pays	Oui	Non
Angleterre	98,9	1,1
Corée du Sud	97,2	2,8
Floride	95,7	4,3
Hong Kong SAR	95,9	4,1
Ontario	98,1	1,9
Québec	98,7	1,3
République d'Irlande	98,3	1,7
Singapour	97,5	2,5
Taipei chinois	90,4	9,6
Moyenne (corpus)	96,7	3,3

Annexe 16. Fréquence à laquelle les élèves de huitième année utilisent un ordinateur ou une tablette pour le travail scolaire à la maison (TIMSS 2015, HQ-13A)

Pays	Chaque jour ou presque tous les jours	Une fois ou deux fois par semaine	Une fois ou deux fois par mois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	60	29,1	6,9	4
Corée du Sud	25,8	30,9	25,5	17,8
Floride	58,6	22,1	11	8,2
Hong Kong SAR	41	25,8	19,6	13,6
Ontario	61,9	24,1	8,7	5,4
Québec	58,8	21,5	12	7,7
République d'Irlande	46	28,6	15,7	9,7
Singapour	41,7	27,6	21,2	9,5
Taipei chinois	23,4	26,4	29,3	20,9
Moyenne (corpus)	**46,4**	**26,2**	**16,7**	**10,8**

Annexe 17. Fréquence à laquelle les élèves de huitième année utilisent un ordinateur ou une tablette pour le travail scolaire à l'école (TIMSS 2015, HQ-13B)

Pays	Chaque jour ou presque tous les jours	Une fois ou deux fois par semaine	Une fois ou deux fois par mois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	18	51,9	20,3	9,8
Corée du Sud	8,9	14,2	18,7	58,2
Floride	28	34,8	20,9	16,3
Hong Kong SAR	9,3	30,1	29	31,6
Ontario	33,1	44,5	15,1	7,4
Québec	24,2	20,7	24,8	30,3
République d'Irlande	12,3	21,8	21,9	44
Singapour	13,1	26,3	38,8	21,9
Taipei chinois	4,9	29,6	18,2	47,3
Moyenne (corpus)	**16,9**	**30,4**	**23,1**	**29,6**

Annexe 18. Pourcentage d'élèves de huitième année utilisant Internet pour accéder à des manuels ou autres supports de cours (TIMSS 2015, SQG-14A)

Pays	Oui	Non
Angleterre	54,1	45,9
Corée du Sud	50,8	49,2
Floride	63,2	36,8
Hong Kong SAR	51,0	49,0
Ontario	47,7	52,3
Québec	42,5	57,5
République d'Irlande	34,5	65,5
Singapour	56,7	43,3
Taipei chinois	73,7	26,3
Moyenne (corpus)	**52,7**	**47,3**

Annexe 19. Pourcentage d'élèves de huitième année utilisant Internet pour accéder à des devoirs postés en ligne par leur enseignant (TIMSS 2015, SQG-14B)

Pays	Oui	Non
Angleterre	71,2	28,8
Corée du Sud	43,4	56,6
Floride	70,7	29,3
Hong Kong SAR	63,5	36,5
Ontario	60,4	39,6
Québec	58,2	41,8
République d'Irlande	35,0	65,0
Singapour	90,1	9,9
Taipei chinois	49,8	50,2
Moyenne (corpus)	**60,3**	**39,7**

Annexe 20. Pourcentage d'élèves de huitième année utilisant Internet pour collaborer avec des camarades de classe sur des devoirs à ou des projets (TIMSS 2015, SQG-14C)

Pays	Oui	Non
Angleterre	52,9	47,1
Corée du Sud	68,6	31,4
Floride	56,2	43,8
Hong Kong SAR	76,4	23,6
Ontario	77,4	22,6
Québec	77,4	22,6
République d'Irlande	50,1	49,9
Singapour	84,4	15,6
Taipei chinois	71,7	28,3
Moyenne (corpus)	**68,3**	**31,7**

Annexe 21. Pourcentage d'élèves de huitième année utilisant Internet pour communiquer avec leur enseignant (TIMSS 2015, SQG-14D)

Pays	Oui	Non
Angleterre	33,0	67,0
Corée du Sud	12,8	87,2
Floride	42,3	57,7
Hong Kong SAR	32,8	67,2
Ontario	34,8	65,2
Québec	28,4	71,6
République d'Irlande	12,2	87,8
Singapour	49,4	50,6
Taipei chinois	28,3	71,7
Moyenne (corpus)	**30,4**	**69,6**

Annexe 22. Pourcentage d'élèves de huitième année utilisant Internet pour trouver des informations, des articles, des tutoriels pour aider à la compréhension des mathématiques (TIMSS 2015, SQG-14E)

Pays	Oui	Non
Angleterre	65,7	34,3
Corée du Sud	45,2	54,8
Floride	67,8	32,2
Hong Kong SAR	61,2	38,8
Ontario	58,6	41,4
Québec	52,2	47,8
République d'Irlande	44,1	55,9
Singapour	61,4	38,6
Taipei chinois	38,4	61,6
Moyenne (corpus)	**55,0**	**45,0**

Annexe 23. Fréquence à laquelle les élèves de quatrième année font leurs devoirs selon leurs parents (TIMSS 2015, HQ-09BA)

Pays	Pas de devoirs	Tous les jours	3 ou 4 fois par semaine	1 ou 2 fois par semaine	Moins d'une fois par semaine
Angleterre					
Corée du Sud	2,4	41,2	30,8	22	3,5
Floride					
France	1,8	64,1	26,3	6,7	1,1
Hong Kong SAR	3,4	79,1	9,3	6,1	2,1
Irlande du Nord	0,3	66,1	32,9	0,7	0
Ontario	8,8	23,4	26,4	29	12,4
Québec	3,2	39,5	41,5	14,6	1,1
République d'Irlande	0,2	52,5	47	0,2	0,1
Singapour	2,6	39	38,5	17,6	2,4
Taipei chinois	5	77,5	8	7	2,4
Moyenne (corpus)	**3,1**	**53,6**	**29,0**	**11,5**	**2,8**

Annexe 24. Fréquence à laquelle un adulte demande à l'élève de quatrième année s'il a fait ses devoirs (TIMSS 2015, HQ-09BA)

Pays	Tous les jours	3 ou 4 fois par semaine	1 ou 2 fois par semaine	Moins d'une fois par semaine	Jamais ou presque jamais
Angleterre					
Corée du Sud	63,8	20,9	9,1	2,4	1,4
Floride					
France	89,7	5,3	1,8	0,4	0,9
Hong Kong SAR	81,8	9,2	3,4	1,3	0,9
Irlande du Nord	85,4	13,1	0,5	0,4	0,5
Ontario	71,9	10,3	5,7	2,1	1,2
Québec	64,1	23	6,6	1,1	1,9
République d'Irlande	80,4	18,2	0,6	0,2	0,5
Singapour	78,2	12,4	4,8	1,2	0,8
Taipei chinois	76,6	8,5	5	2,2	2,8
Moyenne (corpus)	**76,9**	**13,4**	**4,2**	**1,3**	**1,2**

Annexe 25. Fréquence à laquelle un adulte vérifie les devoirs de l'élève de quatrième année pour s'assurer que les réponses sont correctes (TIMSS 2015, HQ-09BC)

Pays	Tous les jours	3 ou 4 fois par semaine	1 ou 2 fois par semaine	Moins d'une fois par semaine	Jamais ou presque jamais
Angleterre					
Corée du Sud	24,2	22,2	24	15,5	11,6
Floride					
France	67,5	15,4	9,4	3,3	2,7
Hong Kong SAR	44,6	18,4	14,2	9,2	10,4
Irlande du Nord	67,5	23	5,9	1,7	1,6
Ontario	34,7	18,5	21	11,5	5,6
Québec	35,8	29,9	21,9	5,2	4
République d'Irlande	58,2	25,8	9,5	3,7	2,7
Singapour	30,8	25,8	22	10,6	8,2
Taipei chinois	56,7	15,1	11,1	5,7	6,4
Moyenne (corpus)	**46,7**	**21,6**	**15,4**	**7,4**	**5,9**

Annexe 26. Fréquence à laquelle un adulte aide l'élève de quatrième année à faire ses devoirs (TIMSS 2015, HQ-09BB)

Pays	Tous les jours	3 ou 4 fois par semaine	1 ou 2 fois par semaine	Moins d'une fois par semaine	Jamais ou presque jamais
Angleterre					
Corée du Sud	14	20,7	28	18,4	16,4
Floride					
France	56,2	17,3	15,2	5,2	4,3
Hong Kong SAR	38,6	19,1	18,4	11,2	9,4
Irlande du Nord	60,5	20,5	11,6	4,2	2,8
Ontario	31	18,4	23,3	13,7	4,8
Québec	32,6	30,9	23,5	5,5	4,3
République d'Irlande	51,9	23,4	14,3	6,4	3,8
Singapour	32,6	28,9	23,1	8	4,8
Taipei chinois	45,7	16,3	15,9	9	8
Moyenne (corpus)	**40,3**	**21,7**	**19,3**	**9,1**	**6,5**

Annexe 27. Pourcentage d'élèves de quatrième année ayant suivi des cours supplémentaires en dehors de l'école (TIMSS 2015, HQ-10AA)

Pays	Oui, pour exceller en classe	Oui, pour se maintenir au niveau attendu	Non
Corée du Sud	28,4	38,0	33,6
France	4,6	15,4	80,0
Hong Kong SAR	15,1	28,9	56,0
Irlande du Nord	14,5	10,3	75,3
Ontario	9,1	7,1	83,8
Québec	5,1	5,7	89,2
République d'Irlande	2,9	5,0	92,1
Singapour	25,9	31,8	42,3
Taipei chinois	13,9	24,2	61,8
Moyenne (corpus)	**13,3**	**18,5**	**68,2**

Annexe 28. Temps depuis lequel les élèves de quatrième année suivent des cours supplémentaires en dehors de l'école (TIMSS 2015, HQ-10AB)

Pays	Je n'en ai pas suivi	Moins de 4 mois	Entre 4 et 8 mois	Plus de 8 mois
Corée du Sud	33,9	8,4	11	46,7
France	73,7	17,5	5,5	3,3
Hong Kong SAR	56,7	10,1	9,1	24,2
Irlande du Nord	71,7	14,7	7,9	5,7
Ontario	82,9	5,5	4,6	7,1
Québec	89	4,9	3,1	3,1
République d'Irlande	90,3	2,8	3,1	3,8
Singapour	37,6	9,5	12,6	40,2
Taipei chinois	59,3	4,5	5,5	30,7
Moyenne (corpus)	**66,1**	**8,7**	**6,9**	**18,3**

Annexe 29. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « J'aime être à l'école » (TIMSS 2015, SQG-11a)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	49,9	36,6	7,7	5,8
Corée du Sud	43,9	47	7,2	1,9
Floride	48,5	33,9	8,8	8,9
France	45	42,2	6,5	6,3
Hong Kong SAR	34,4	44,9	10,8	9,9
Irlande du Nord	38,8	40,7	10,6	9,9
Ontario	47	35,8	10,3	6,9
Québec	41,1	43,6	9,3	6,1
République d'Irlande	37,2	41,8	11,4	9,6
Singapour	50,1	39,8	6,6	3,5
Taipei chinois	35,8	44,1	12,5	7,5
Moyenne (corpus)	**42,9**	**40,9**	**9,2**	**6,9**

Annexe 30. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « J'aime être à l'école » (TIMSS 2015, SQG-11a)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	20,7	55,6	15,9	7,8
Corée du Sud	25,6	60,8	11,4	2,2
Floride	21,1	48,5	18,8	11,6
Hong Kong SAR	27,1	56,6	10,4	5,8
Ontario	33,7	47,3	12,8	6,2
Québec	21,3	61,6	13,1	4
République d'Irlande	23,6	48,9	17,4	10,1
Singapour	33	54	9,2	3,7
Taipei chinois	18,3	56,5	18,9	6,3
Moyenne (corpus)	**24,9**	**54,4**	**14,2**	**6,4**

Annexe 31. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « Les enseignants de mon école sont justes avec moi » (TIMSS 2015, SQG-11e)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	70	23,9	4,2	1,9
Corée du Sud	55,4	36,6	5,5	2,5
Floride	74,3	18	4,9	2,8
France	41,8	29,8	15,7	12,8
Hong Kong SAR	54,5	29,1	10	6,4
Irlande du Nord	72,5	21	4,4	2,1
Ontario	71,9	20,8	4,8	2,6
Québec	69,9	24	4,6	1,5
République d'Irlande	76	18,3	4	1,6
Singapour	53,4	33,7	9,2	3,7
Taipei chinois	56,5	27,2	9,6	6,6
Moyenne (corpus)	**63,3**	**25,7**	**7,0**	**4,0**

Annexe 32. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Les enseignants de mon école sont justes avec moi » (TIMSS 2015, SQG-11e)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	29,6	47	18	5,4
Corée du Sud	29,3	57,5	10,7	2,6
Floride	30,3	39,9	20,3	9,5
Hong Kong SAR	36,8	44,7	12,6	5,9
Ontario	50,6	34,9	10,7	3,8
Québec	42,9	46,3	8,1	2,7
République d'Irlande	39,5	42,9	13,9	3,7
Singapour	35,3	49,3	12,4	3,1
Taipei chinois	35,8	45	14,8	4,4
Moyenne (corpus)	**36,7**	**45,3**	**13,5**	**4,6**

Annexe 33. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « J'apprends beaucoup à l'école » (TIMSS 2015, SQG-11g)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	81,8	14,7	2,5	1
Corée du Sud	62,1	34,9	2,3	0,6
Floride	85,8	11,1	2,1	1,1
France	80	17,7	1,6	0,7
Hong Kong SAR	68,1	25,7	4,2	2,1
Irlande du Nord	86	11,7	1,9	0,4
Ontario	78,8	16,6	3,1	1,5
Québec	78,6	19	1,6	0,7
République d'Irlande	86,6	11	1,6	0,7
Singapour	70,2	25,1	3,6	1,1
Taipei chinois	75,3	20,5	2,9	1,4
Moyenne (corpus)	**77,6**	**18,9**	**2,5**	**1,0**

Annexe 34. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « J'apprends beaucoup à l'école » (TIMSS 2015, SQG-11g)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	47,7	41,9	8,5	1,9
Corée du Sud	27,2	62,9	8,5	1,4
Floride	43,4	40,1	11,7	4,9
Hong Kong SAR	44,3	45,1	7,9	2,7
Ontario	54,3	36,1	7	2,5
Québec	46,2	47,8	4,7	1,3
République d'Irlande	52,7	37	7,9	2,3
Singapour	51,8	42	5,1	1,2
Taipei chinois	46,5	45,7	6,2	1,6
Moyenne (corpus)	**46,0**	**44,3**	**7,5**	**2,2**

Annexe 35. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « L'école de mon enfant effectue un bon travail pour m'associer à son éducation » (TIMSS 2015, HQ-11a)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Corée du Sud	16,1	59,2	22,6	2,2
France	35,6	53,9	8,9	1,5
Hong Kong SAR	57,6	37	4,7	0,7
Irlande du Nord	76	19,5	3,5	1
Ontario	56,5	33,9	7,1	2,4
Québec	48,1	46,4	4,6	0,9
République d'Irlande	72,1	22,6	3,7	1,6
Singapour	52,1	41,6	5	1,3
Taipei chinois	53,1	42,5	4,1	0,3
Moyenne (corpus)	**51,9**	**39,6**	**7,1**	**1,3**

Annexe 36. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « L'école de mon enfant lui procure un environnement sûr » (TIMSS 2015, HQ-11b)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Corée du Sud	26,8	69,2	3,7	0,3
France	41,7	50,8	6,5	1,1
Hong Kong SAR	83,3	14,9	1,5	0,2
Irlande du Nord	92,9	6,2	0,7	0,2
Ontario	79	17,3	3	0,7
Québec	61,5	36,4	1,9	0,2
République d'Irlande	89,5	8,6	1,3	0,6
Singapour	75,9	22	1,8	0,4
Taipei chinois	62,6	34,6	2,5	0,2
Moyenne (corpus)	**68,1**	**28,9**	**2,5**	**0,4**

Annexe 37. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « L'école de mon enfant prête attention à sa progression » (TIMSS 2015, HQ-11c)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Corée du Sud	23,6	67,8	8,1	0,5
France	44,2	50	5	0,8
Hong Kong SAR	60,3	34	5	0,6
Irlande du Nord	85,2	12,5	1,7	0,6
Ontario	66,8	27,5	4,2	1,5
Québec	54,6	41,7	3,4	0,3
République d'Irlande	84,4	13,5	1,9	0,3
Singapour	62,8	32	4,4	0,8
Taipei chinois	52,1	41	6,2	0,7
Moyenne (corpus)	**59,3**	**35,6**	**4,4**	**0,7**

Annexe 38. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « L'école de mon enfant effectue un bon travail pour m'informer de ses progrès » (TIMSS 2015, HQ-11d)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Corée du Sud	18,8	55,5	23,9	1,8
France	39,8	47,8	11,1	1,3
Hong Kong SAR	49,1	41,1	8,5	1,3
Irlande du Nord	73	20,6	4,7	1,7
Ontario	57,7	32,1	7,6	2,6
Québec	48,2	42,1	9,2	0,5
République d'Irlande	69,4	24,1	5,2	1,3
Singapour	51,4	38,4	8,1	2,1
Taipei chinois	48,3	40,9	9,6	1,1
Moyenne (corpus)	**50,6**	**38,1**	**9,8**	**1,5**

Annexe 39. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « L'école de mon enfant promeut un haut niveau d'exigences académiques » (TIMSS 2015, HQ-11e)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Corée du Sud	15,9	59,4	23,8	0,9
France	22,2	50,9	23,8	3,1
Hong Kong SAR	53,4	37,9	7,6	1,2
Irlande du Nord	75,3	21,1	2,8	0,8
Ontario	49,6	37,8	9,8	2,8
Québec	34,1	51,6	13,6	0,8
République d'Irlande	68,9	26,2	4,1	0,9
Singapour	52,3	40,1	6,5	1,1
Taipei chinois	30,4	47,7	19,2	2,7
Moyenne (corpus)	**44,7**	**41,4**	**12,4**	**1,6**

Annexe 40. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « L'école de mon enfant effectue un bon travail pour l'aider à progresser en lecture » (TIMSS 2015, HQ-11f)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Corée du Sud	19,7	63,7	15,8	0,8
France	37,3	54,6	6,9	1,2
Hong Kong SAR	49,5	39,9	9,2	1,5
Irlande du Nord	81,6	14,3	3,2	0,8
Ontario	59,7	31,3	6,7	2,4
Québec	49,5	45,1	4,8	0,6
République d'Irlande	82,3	15,2	2,1	0,5
Singapour	51,9	37,6	8,8	1,7
Taipei chinois	53,3	39,6	6,4	0,6
Moyenne (corpus)	**53,9**	**37,9**	**7,1**	**1,1**

Annexe 41. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « L'école de mon enfant effectue un bon travail pour l'aider à progresser en mathématiques » (TIMSS 2015, HQ-11g)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Corée du Sud	18,4	62,7	17,9	0,9
France	36,8	56,5	5,8	0,9
Hong Kong SAR	44,9	42,3	11	1,8
Irlande du Nord	77,6	18	3,5	1
Ontario	54,2	34	8,8	2,9
Québec	45,1	49,4	4,7	0,8
République d'Irlande	77	19,1	3,2	0,7
Singapour	50,1	39,3	8,9	1,7
Taipei chinois	40,7	46,2	12	1,1
Moyenne (corpus)	**49,4**	**40,8**	**8,4**	**1,3**

Annexe 42. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « L'école de mon enfant effectue un bon travail pour l'aider à progresser en sciences » (TIMSS 2015, HQ-11h)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Corée du Sud	16,4	63	19,6	1
France	28,7	58	11,1	2,2
Hong Kong SAR	34,4	45,7	15,7	4,1
Irlande du Nord	52,8	31,3	10,6	5,3
Ontario	49,5	39,7	8	2,8
Québec	37,2	53,1	9	0,6
République d'Irlande	54	33,6	9	3,5
Singapour	45,7	42,3	9,8	2,2
Taipei chinois	39	48,5	11,1	1,3
Moyenne (corpus)	**39,7**	**46,1**	**11,5**	**2,6**

Annexe 43. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « Je réussis habituellement en mathématiques » (TIMSS 2015, SQMS-03a)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	53,4	36,1	6,8	3,8
Corée du Sud	19,2	49,8	24,9	6,1
Floride	57	31,3	7,3	4,5
France	48,6	39,3	8,7	3,4
Hong Kong SAR	34,2	43,6	14,9	7,3
Irlande du Nord	45,4	41,4	8,8	4,4
Ontario	49,9	37,2	8,7	4,2
Québec	54	36,7	6,8	2,6
République d'Irlande	53,8	36,8	6,6	2,8
Singapour	32,4	42,4	17,5	7,6
Taipei chinois	26,8	43,8	19,2	10,2
Moyenne (corpus)	**43,2**	**39,9**	**11,8**	**5,2**

Annexe 44. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Je réussis habituellement en mathématiques » (TIMSS 2015, SQG-19A)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	31,6	50,5	13,9	4
Corée du Sud	12,3	36,1	39,2	12,4
Floride	34,7	38,8	17,1	9,4
Hong Kong SAR	20,1	40,7	25,7	13,5
Ontario	49,3	34,7	11,1	4,9
Québec	34,2	40,2	19,3	6,3
République d'Irlande	29	45,1	18,2	7,7
Singapour	24,8	39,4	22,3	13,5
Taipei chinois	15,1	34,6	33,2	17,1
Moyenne (corpus)	**27,9**	**40,0**	**22,2**	**9,9**

Annexe 45. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « Les mathématiques sont plus difficiles pour moi que pour beaucoup de mes camarades » (TIMSS 2015, SQMS-03b)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	14,8	21,8	25,5	38
Corée du Sud	3,8	18,5	42,9	34,8
Floride	16,4	20,3	17	46,3
France	12,5	16	28,1	43,4
Hong Kong SAR	15,8	30,4	25,2	28,6
Irlande du Nord	14,8	20,8	25,6	38,8
Ontario	15,7	21,8	24,5	37,9
Québec	13,8	18,3	23,9	44
République d'Irlande	11,7	21	26,6	40,7
Singapour	16,3	28,2	27,4	28,1
Taipei chinois	18,3	28	28,2	25,5
Moyenne (corpus)	**14,0**	**22,3**	**26,8**	**36,9**

Annexe 46. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Les mathématiques sont plus difficiles pour moi que pour beaucoup de mes camarades » (TIMSS 2015, SQG-19B)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	12,1	27,5	38,7	21,7
Corée du Sud	6,2	28	44,7	21,1
Floride	18,5	25,7	31,4	24,4
Hong Kong SAR	18,1	29,9	33,5	18,5
Ontario	11,2	20,3	30,1	38,4
Québec	16,9	21,7	34,8	26,5
République d'Irlande	15,4	24,4	33,7	26,5
Singapour	12,6	28,2	40,4	18,8
Taipei chinois	20,5	29,1	31,2	19,2
Moyenne (corpus)	**14,6**	**26,1**	**35,4**	**23,9**

Annexe 47. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « Je ne suis simplement pas bon en mathématiques » (TIMSS 2015, SQMS-03c)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	10,1	12,4	22,7	54,8
Corée du Sud	7,5	40,1	36,7	15,7
Floride	11,3	13,6	15,4	59,7
France	11,8	14,4	27,3	46,6
Hong Kong SAR	17	23,2	24,6	35,2
Irlande du Nord	10,9	13,6	25,6	49,8
Ontario	11,9	14,8	21,3	52,1
Québec	8,7	10,3	24,4	56,5
République d'Irlande	8,3	13,8	23,4	54,5
Singapour	15,9	22,6	24,9	36,6
Taipei chinois	23,6	20,2	27,5	38,8
Moyenne (corpus)	**12,5**	**18,1**	**24,9**	**45,5**

Annexe 48. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Les mathématiques ne sont pas l'un de mes points forts » (TIMSS 2015, SQG-19C)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	23,2	25,5	28,8	22,5
Corée du Sud	14,8	38,2	31,9	15,1
Floride	28,3	23,5	24,4	23,7
Hong Kong SAR	27,8	29,9	25	17,2
Ontario	18,5	19,3	25,1	37,1
Québec	23	24,6	27,6	24,8
République d'Irlande	28,2	24,2	26,4	21,1
Singapour	23,1	25,1	28,5	23,3
Taipei chinois	32,5	27,3	23,6	16,6
Moyenne (corpus)	**24,4**	**26,4**	**26,8**	**22,4**

Annexe 49. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « J'apprends les choses rapidement en mathématiques » (TIMSS 2015, SQMS-03d)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	44,6	35	12,8	7,7
Corée du Sud	23	43,6	27,8	5,6
Floride	48	31,8	12,7	7,4
France	45,9	34,6	13,2	6,3
Hong Kong SAR	32,7	36,2	20,9	10,2
Irlande du Nord	40,7	37,3	13	9
Ontario	41,6	35,1	14,6	8,7
Québec	51,3	32,6	10,8	5,3
République d'Irlande	44,3	37,1	12,2	6,5
Singapour	34	36,2	21	8,8
Taipei chinois	24,6	33,1	27,9	14,4
Moyenne (corpus)	**39,2**	**35,7**	**17,0**	**8,2**

Annexe 50. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « J'apprends les choses rapidement en mathématiques » (TIMSS 2015, SQG-19D)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	20,5	42,6	28	8,9
Corée du Sud	10,6	40,6	39,5	9,3
Floride	25,5	34	26,4	14,2
Hong Kong SAR	15,7	36,3	34,1	13,9
Ontario	35,5	36,1	20,2	8,2
Québec	26,7	37,5	26,4	9,4
République d'Irlande	22,7	35,1	29,4	12,8
Singapour	20,8	40,9	28,5	9,7
Taipei chinois	11,1	27,4	42,4	19
Moyenne (corpus)	**21,0**	**36,7**	**30,5**	**11,7**

Annexe 51. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « Les mathématiques me rendent nerveux » (TIMSS 2015, SQMS-03e)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	10,4	17,7	18,8	53
Corée du Sud	10,8	27,9	37,5	23,8
Floride	12,9	19,3	16,8	51
France	11,6	12,4	25,1	51
Hong Kong SAR	15,8	24,8	25,4	34
Irlande du Nord	11,8	16,7	19,3	52,2
Ontario	14,9	20,4	21,1	43,6
Québec	14,6	17,9	24,1	43,4
République d'Irlande	8,7	17,4	18	55,9
Singapour	19,9	27,6	22,5	29,9
Taipei chinois	22,5	29,5	24,6	23,4
Moyenne (corpus)	**14,0**	**21,1**	**23,0**	**41,9**

Annexe 52. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Les mathématiques me rendent nerveux » (TIMSS 2015, SQG-19E)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	8,3	20,8	33,7	37,2
Corée du Sud	13,6	45,5	31	10
Floride	16,8	24,4	29,6	29,2
Hong Kong SAR	16,3	31,1	35,8	16,8
Ontario	10	24,1	30,5	35,4
Québec	17,9	27,5	32,9	21,8
République d'Irlande	11,2	23,8	30,7	34,2
Singapour	18,6	33,4	31,3	16,8
Taipei chinois	16,3	32,1	33,9	17,8
Moyenne (corpus)	**14,3**	**29,2**	**32,2**	**24,4**

Annexe 53. Adhésion des de élèves quatrième année à la proposition « Je suis bon pour résoudre des problèmes mathématiques difficiles » (TIMSS 2015, SQMS-03f)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	34,6	34,8	17	13,6
Corée du Sud	13,8	38,2	38	10
Floride	39,8	31,8	17	11,5
France	25,8	35,5	23,1	15,6
Hong Kong SAR	24,2	34,2	26,8	14,8
Irlande du Nord	28	37,2	20	14,8
Ontario	34,1	35	18,4	12,6
Québec	34,3	37,4	17,6	10,6
République d'Irlande	32,7	37,7	17,9	11,7
Singapour	19,9	35,6	25,9	18,6
Taipei chinois	18,5	30,9	32,4	18,2
Moyenne (corpus)	**27,8**	**35,3**	**23,1**	**13,8**

Annexe 54. Adhésion des de élèves huitième année à la proposition « Je suis bon pour résoudre des problèmes mathématiques difficiles » (TIMSS 2015, SQG-19F)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	13,9	43,2	28,9	14
Corée du Sud	7,2	29	48,6	15,2
Floride	18,9	31,2	27,8	22,2
Hong Kong SAR	10,4	30,8	38,9	19,9
Ontario	24,2	38,8	25,3	11,8
Québec	16,6	37	30,9	15,4
République d'Irlande	14,6	33,2	31,1	21,1
Singapour	11,2	35,8	35	17,9
Taipei chinois	6,9	23,2	44,7	25,3
Moyenne (corpus)	**13,8**	**33,6**	**34,6**	**18,1**

Annexe 55. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « Mon enseignant me dit que je suis bon en mathématiques » (TIMSS 2015, SQMS-03g)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	48,4	36,5	10,3	4,8
Corée du Sud	8,8	33,1	45,9	12,2
Floride	50,8	29	12,1	8,2
France	31,7	43,8	17,1	7,4
Hong Kong SAR	16,5	30,9	30,1	22,5
Irlande du Nord	42,8	38,1	12,9	6,1
Ontario	39,7	36,4	14,6	9,3
Québec	39,7	40,1	13	7,2
République d'Irlande	46	35,7	11,6	6,6
Singapour	17,5	36,1	28,3	18,1
Taipei chinois	14,9	33,5	31,8	19,9
Moyenne (corpus)	**32,4**	**35,7**	**20,7**	**11,1**

Annexe 56. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Mon enseignant me dit que je suis bon en mathématiques » (TIMSS 2015, SQG-19G)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	18,3	42,1	26,5	13,1
Corée du Sud	7,5	28,5	49,6	14,4
Floride	22,8	32,3	24,4	20,5
Hong Kong SAR	7,5	23,8	39,9	28,9
Ontario	25,5	40,6	22,2	11,6
Québec	16,3	39	31,6	13,1
République d'Irlande	18,7	38,5	26,7	16,2
Singapour	9,9	33	37,7	19,3
Taipei chinois	7,4	25,5	41,3	25,8
Moyenne (corpus)	**14,9**	**33,7**	**33,3**	**18,1**

Annexe 57. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « Les mathématiques sont plus difficiles pour moi que toute autre matière » (TIMSS 2015, SQMS-03h)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	14,1	14,2	17,8	53,9
Corée du Sud	10,9	23,2	34,5	31,5
Floride	16,5	13,5	14,6	55,4
France	12,9	10,9	21,6	54,5
Hong Kong SAR	17,3	21,8	23,8	37,2
Irlande du Nord	18	14,6	16,7	50,6
Ontario	15,6	16,5	19,9	48
Québec	10,8	11,6	20,1	57,5
République d'Irlande	13,3	14,7	17,4	54,7
Singapour	18,8	20,1	23,9	37,2
Taipei chinois	28,8	23,9	20,5	26,8
Moyenne (corpus)	**16,1**	**16,8**	**21,0**	**46,1**

Annexe 58. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Les mathématiques sont plus difficiles pour moi que toute autre matière » (TIMSS 2015, SQG-19H)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	13,8	18,8	31,6	35,7
Corée du Sud	15,6	32,3	35,6	16,4
Floride	25,7	19,5	24,2	30,6
Hong Kong SAR	21,3	26,7	30,4	21,6
Ontario	13,4	15,7	24,2	46,7
Québec	17	16,4	31,7	34,9
République d'Irlande	18,9	19,8	27,1	34,2
Singapour	16	19,6	34	30,3
Taipei chinois	31,5	27,3	24,8	16,3
Moyenne (corpus)	**19,2**	**21,8**	**29,3**	**29,6**

Annexe 59. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « Les mathématiques me mettent dans l'embarras » (TIMSS 2015, SQMS-03i)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	13,6	19,5	19,3	47,7
Corée du Sud	11,9	28,7	33,4	26
Floride	14,1	20,4	18,6	47
France	12,5	16,1	26,6	44,8
Hong Kong SAR	13,4	20,7	25,8	40
Irlande du Nord	15,6	19	22,1	43,3
Ontario	15,7	22,3	21,9	40,1
Québec	9,8	16,8	24,8	48,5
République d'Irlande	11,6	20,1	21,2	47,2
Singapour	19,5	26,3	22	32,2
Taipei chinois	24,6	23,1	23,1	29,2
Moyenne (corpus)	**14,8**	**21,2**	**23,5**	**40,5**

Annexe 60. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Les mathématiques me mettent dans l'embarras » (TIMSS 2015, SQG-19I)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	16,2	28,8	31,8	23,3
Corée du Sud	16,5	48	24,8	10,7
Floride	25,3	28,4	23,8	22,6
Hong Kong SAR	18,8	28	30,7	22,6
Ontario	14,5	25,4	28,9	31,2
Québec	17,1	25,2	34,3	23,4
République d'Irlande	20,7	31,5	26,3	21,6
Singapour	17,6	32,5	29,6	20,3
Taipei chinois	25,5	29	27,9	17,7
Moyenne (corpus)	**19,1**	**30,8**	**28,7**	**21,5**

Annexe 61. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « Les mathématiques sont ennuyeuses » (TIMSS 2015, SQMS-01c)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	7,3	15,5	19,9	57,3
Corée du Sud	6,4	21,1	41,5	31
Floride	11,3	15,9	16	56,8
France	7,3	9,6	24,5	58,6
Hong Kong SAR	10,5	22,2	22,9	44,4
Irlande du Nord	14,4	20,4	23,1	42,1
Ontario	14,1	18,1	21,4	46,4
Québec	7,7	14	24,3	54
République d'Irlande	12	21,5	22,7	43,8
Singapour	8	19,4	24,3	48,3
Taipei chinois	14,2	20,8	26,8	38,2
Moyenne (corpus)	**10,3**	**18,0**	**24,3**	**47,4**

Annexe 62. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Les mathématiques sont ennuyeuses » (TIMSS 2015, SQG-17C)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	19,6	36,2	28,2	16,1
Corée du Sud	13,5	34,7	40	11,7
Floride	25,7	29,8	25	19,5
Hong Kong SAR	19,3	32,7	30,3	17,7
Ontario	15,7	30	31	23,3
Québec	17	29,8	37,9	15,3
République d'Irlande	23,6	33,7	27,1	15,6
Singapour	10,4	28,3	35,3	25,9
Taipei chinois	15,2	30,6	35,1	19,1
Moyenne (corpus)	**17,8**	**31,8**	**32,2**	**18,2**

Annexe 63. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « J'aime les mathématiques » (TIMSS 2015, SQMS-01e)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	60,9	23,9	7,5	7,7
Corée du Sud	26,1	39,5	23,7	10,8
Floride	57,1	24,7	9,6	8,6
France	62,2	24,7	6,3	6,8
Hong Kong SAR	45,9	30,1	13,7	10,4
Irlande du Nord	48,8	27,8	11,1	12,3
Ontario	49,5	27,4	11	12,2
Québec	59,1	26,6	7,7	6,5
République d'Irlande	50,5	29,2	9,2	11,1
Singapour	49,2	30,3	12	8,6
Taipei chinois	31,2	31,8	20,6	16,4
Moyenne (corpus)	**49,1**	**28,7**	**12,0**	**10,1**

Annexe 64. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « J'aime les mathématiques » (TIMSS 2015, SQG-17E)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	22,9	40,3	21,7	15,1
Corée du Sud	13,1	32,7	37,2	17,1
Floride	25,9	30,5	20,6	23
Hong Kong SAR	23,2	36,7	23,7	16,3
Ontario	36,2	36,1	14,6	13
Québec	20,2	40,2	25	14,6
République d'Irlande	24,8	36,5	19,2	19,4
Singapour	34,5	39,2	16,8	9,5
Taipei chinois	15,2	31,7	33,7	19,4
Moyenne (corpus)	**24,0**	**36,0**	**23,6**	**16,4**

Annexe 65. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « J'aime tous les travaux scolaires qui impliquent des nombres » (TIMSS 2015, SQMS-01f)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	38,3	33,9	19,2	8,6
Corée du Sud	20,3	36,6	32,6	10,6
Floride	42,8	25,6	18,2	13,3
France	47,8	35,9	10,5	5,8
Hong Kong SAR	31,3	32,7	23,6	12,4
Irlande du Nord	34,5	34,7	20,3	10,5
Ontario	36,1	32,1	20	11,9
Québec	46	37,5	11,2	5,3
République d'Irlande	33,7	36,2	19,5	10,5
Singapour	30,9	37	22,5	9,6
Taipei chinois	24,3	31,9	27,8	15,9
Moyenne (corpus)	**35,1**	**34,0**	**20,5**	**10,4**

Annexe 66. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « J'aime tous les travaux scolaires qui impliquent des nombres » (TIMSS 2015, SQG-17F)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	10,5	30,5	39,6	19,5
Corée du Sud	8,1	21,8	50	20,1
Floride	13,8	22,6	33,9	29,7
Hong Kong SAR	12,7	29,2	38,4	19,8
Ontario	19	35,8	30,9	14,3
Québec	12,4	41,8	32,6	13,1
République d'Irlande	14,8	28,4	34,4	22,4
Singapour	16	35,7	35,5	12,8
Taipei chinois	8	23,4	46,3	22,2
Moyenne (corpus)	**12,8**	**29,9**	**38,0**	**19,3**

Annexe 67. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « J'aime résoudre des problèmes mathématiques » (TIMSS 2015, SQMS-01g)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	49,4	28,2	13,6	8,8
Corée du Sud	23,6	35,7	30	10,7
Floride	55	24,6	11,1	9,3
France	41,5	29,9	15,7	12,9
Hong Kong SAR	34,3	30,2	21,9	13,6
Irlande du Nord	37,8	29,2	18	15
Ontario	41,8	28,4	16,7	13,1
Québec	40,7	33,7	16	9,6
République d'Irlande	43	29,5	14,4	13,1
Singapour	34	31,4	21,1	13,5
Taipei chinois	27,6	29,8	26,6	16
Moyenne (corpus)	**39,0**	**30,1**	**18,6**	**12,3**

Annexe 68. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « J'aime résoudre des problèmes mathématiques » (TIMSS 2015, SQG-17G)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	17	34	30	19
Corée du Sud	13,9	35,5	34,1	16,5
Floride	18,9	28,3	25,3	27,5
Hong Kong SAR	19,4	33,1	28,1	19,4
Ontario	27,3	34	23,1	15,6
Québec	17	36,1	30,3	16,6
République d'Irlande	18,5	27,7	26,2	27,7
Singapour	25,6	37,1	24,9	12,4
Taipei chinois	15,8	29,5	34,5	20,2
Moyenne (corpus)	**19,3**	**32,8**	**28,5**	**19,4**

Annexe 69. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Mes parents pensent que c'est important que je travaille bien en mathématiques » (TIMSS 2015, SQG-20H)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	71,9	24	2,9	1,2
Corée du Sud	30,9	47	17,1	5,1
Floride	65,5	25,2	6,4	3
Hong Kong SAR	31	41,3	20,9	6,7
Ontario	78,4	18,4	2,5	0,7
Québec	70,4	27,3	2	0,4
République d'Irlande	73,8	21,6	3,5	1,1
Singapour	59,5	34,7	4,8	1
Taipei chinois	28,1	42,5	21,1	8,3
Moyenne (corpus)	**56,6**	**31,3**	**9,0**	**3,1**

Annexe 70. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « Mon enfant a besoin des mathématiques pour aller de l'avant dans le monde » (TIMSS 2015, HQ-16D)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Corée du Sud	32,2	51,9	15,2	0,8
France	64,7	33	2,1	0,2
Hong Kong SAR	34,7	47,9	13,5	4
Irlande du Nord	78,9	18,8	2	0,3
Ontario	74,8	21,9	3	0,3
Québec	64,9	32,2	2,6	0,4
République d'Irlande	73,8	22,9	2,5	0,8
Singapour	66,2	28,6	4,3	0,8
Taipei chinois	28,5	43,7	24,1	3,7
Moyenne (corpus)	**57,6**	**33,4**	**7,7**	**1,3**

Annexe 71. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « Les mathématiques sont applicables dans la vie réelle » (TIMSS 2015, HQ-16G)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Corée du Sud	28,2	58,1	13	0,7
France	60	37,3	2,5	0,2
Hong Kong SAR	73	24,4	2,2	0,3
Irlande du Nord	78,6	18,6	2	0,8
Ontario	78	19,2	2,6	0,2
Québec	60,9	35,6	3,3	0,1
République d'Irlande	72,6	22,2	4,2	1
Singapour	77,9	19,6	2,1	0,4
Taipei chinois	57,4	37,8	4,6	0,2
Moyenne (corpus)	**65,2**	**30,3**	**4,1**	**0,4**

Annexe 72. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à propos de la phrase « Votre enfant pouvait-il faire les choses suivantes avant sa première année de scolarité obligatoire ? Compter par lui-même » (TIMSS 2015, HQ-08A)

Pays	Pas du tout	Jusqu'à 10	Jusqu'à 20	Jusqu'à 100 ou plus
Corée du Sud	10,4	6,7	17,1	65,8
France	2,7	23,4	48,6	25,3
Hong Kong SAR	6,1	7,6	18,1	68,2
Ontario	4,1	15,6	36,3	44
Québec	2,6	21,7	41,9	33,9
République d'Irlande	5,3	10,5	30,7	53,5
Singapour	3,2	11,6	33,5	51,8
Taipei chinois	6,1	5,2	12,9	75,9
Moyenne (corpus)	**5,1**	**12,8**	**29,9**	**52,3**

Annexe 73. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « Votre enfant pouvait-il faire les choses suivantes avant sa première année de scolarité obligatoire ? Reconnaitre les nombres écrits » (TIMSS 2015, HQ-08B)

Pays	Pas du tout	Jusqu'à 10	Jusqu'à 20	Jusqu'à 100 ou plus
Corée du Sud	10,4	5,8	16,4	67,3
France	7,8	38,3	38,7	15,1
Hong Kong SAR	6,4	8,4	19,5	65,6
Ontario	5,2	21,9	36,8	36,1
Québec	4,3	33,4	36,8	25,5
République d'Irlande	6	12,8	33,4	47,8
Singapour	3,3	12,4	33,3	51
Taipei chinois	6	6,8	14,9	72,3
Moyenne (corpus)	**6,2**	**17,5**	**28,7**	**47,6**

Annexe 74. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « Votre enfant pouvait-il faire les choses suivantes avant sa première année de scolarité obligatoire ? Écrire les nombres » (TIMSS 2015, HQ-08C)

Pays	Pas du tout	Jusqu'à 10	Jusqu'à 20	Jusqu'à 100 ou plus
Corée du Sud	10,6	6,9	19,1	63,4
France	10	42,6	34,2	13,2
Hong Kong SAR	5,8	8,2	19	67
Ontario	7,2	26,6	35	31,2
Québec	8,2	36,8	34	21,1
République d'Irlande	6,6	15	33,9	44,5
Singapour	3,4	12,3	33,6	50,6
Taipei chinois	6,1	7	14,5	72,4
Moyenne (corpus)	**7,2**	**19,4**	**27,9**	**45,4**

Annexe 75. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « Votre enfant pouvait-il faire les choses suivantes avant sa première année de scolarité obligatoire ? Effectuer des additions simples » (TIMSS 2015, HQ-08D)

Pays	Oui	Non
Corée du Sud	95,0	5,0
France	59,1	40,9
Hong Kong SAR	95,2	4,8
Ontario	79,2	20,8
Québec	61,9	38,1
République d'Irlande	91,9	8,1
Singapour	95,4	4,6
Taipei chinois	94,2	5,8
Moyenne (corpus)	**84,0**	**16,0**

Annexe 76. Adhésion des parents des élèves de quatrième année à la proposition « Votre enfant pouvait-il faire les choses suivantes avant sa première année de scolarité obligatoire ? Effectuer des soustractions simples » (TIMSS 2015, HQ-08E)

Pays	Oui	Non
Corée du Sud	89,6	10,4
France	28,1	71,9
Hong Kong SAR	87,0	13,0
Ontario	60,9	39,1
Québec	45,1	54,9
République d'Irlande	78,5	21,5
Singapour	90,0	10,0
Taipei chinois	87,9	12,1
Moyenne (corpus)	**70,9**	**29,1**

Annexe 77. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « J'aime apprendre les mathématiques » (TIMSS 2015, SQMS-01a)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	57,8	29,9	7,8	4,5
Corée du Sud	27	47,6	18,6	6,8
Floride	60	26	7	7,1
France	59,8	29,4	5,6	5,2
Hong Kong SAR	45,7	35,3	10,8	8,3
Irlande du Nord	45	34,6	11,7	8,8
Ontario	46,8	32	10,8	10,3
Québec	58,1	32,3	5,7	3,8
République d'Irlande	47,7	35,1	9,6	7,5
Singapour	50,2	34,4	9,9	5,6
Taipei chinois	29,6	36,7	19,8	13,8
Moyenne (corpus)	**48,0**	**33,9**	**10,7**	**7,4**

Annexe 78. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « J'aime apprendre les mathématiques » (TIMSS 2015, SQG-17A)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	23,6	45,7	19,5	11,3
Corée du Sud	13,6	39,2	34,1	13,1
Floride	26,3	35,3	19,5	18,9
Hong Kong SAR	25,6	40,2	20,3	13,9
Ontario	37,9	37,7	14,3	10,1
Québec	22,7	48,7	20,7	7,9
République d'Irlande	23,2	40	20,7	16,1
Singapour	38	41,3	13,2	7,5
Taipei chinois	16,5	36	31,7	15,8
Moyenne (corpus)	**25,3**	**40,5**	**21,6**	**12,7**

Annexe 79. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « Je souhaiterais ne pas avoir à étudier les mathématiques » (TIMSS 2015, SQMS-01b)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	7,4	12,9	20,3	59,3
Corée du Sud	6,7	17,5	40,2	35,5
Floride	16,7	15,6	17,8	49,9
France	9,2	7,8	20,9	62
Hong Kong SAR	9,8	16,4	21,9	51,8
Irlande du Nord	17	19,7	23,8	39,5
Ontario	17,6	20,4	22,1	39,9
Québec	17,5	15,3	23,3	43,9
République d'Irlande	12,3	18,6	23,9	45,1
Singapour	11,4	16,1	21,4	51,1
Taipei chinois	16,2	17,4	25,2	41,3
Moyenne (corpus)	**12,9**	**16,2**	**23,7**	**47,2**

Annexe 80. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Je souhaiterais ne pas avoir à étudier les mathématiques » (TIMSS 2015, SQG-17B)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	13,1	22,6	28,7	35,5
Corée du Sud	21,4	36,3	31,9	10,5
Floride	27,4	24,6	24,8	23,3
Hong Kong SAR	20	26,5	29,8	23,7
Ontario	13,4	21,9	27,4	37,3
Québec	24,5	25,8	30,4	19,3
République d'Irlande	22,2	24,6	25,2	27,9
Singapour	16,4	22,3	29,7	31,6
Taipei chinois	18,2	28,9	32,5	20,4
Moyenne (corpus)	**19,6**	**25,9**	**28,9**	**25,5**

Annexe 81. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « J'apprends beaucoup de choses intéressantes en mathématiques » (TIMSS 2015, SQMS-01d)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	63,6	26,3	7,1	2,9
Corée du Sud	31,3	46,6	17,6	4,4
Floride	69	19,9	6,4	4,7
France	67	26,3	4	2,7
Hong Kong SAR	49,8	31	12,2	7
Irlande du Nord	62,6	24,8	8,2	4,4
Ontario	59,7	25,1	9,3	5,9
Québec	65,4	26,2	5,7	2,7
République d'Irlande	61,5	26,1	7,7	4,7
Singapour	56	31,2	9	3,8
Taipei chinois	44,9	32,9	13,6	8,6
Moyenne (corpus)	**57,3**	**28,8**	**9,2**	**4,7**

Annexe 82. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « J'apprends beaucoup de choses intéressantes en mathématiques » (TIMSS 2015, SQG-17D)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	22,3	43,9	25,9	7,9
Corée du Sud	14,2	44,9	30,9	10
Floride	28,5	37,5	20,1	13,9
Hong Kong SAR	20,5	41,5	26	12
Ontario	35	40,5	17,6	6,9
Québec	22	50,4	22,5	5
République d'Irlande	23,1	39,8	24,4	12,7
Singapour	33	46,5	15,9	4,6
Taipei chinois	17,2	42,2	29,3	11,4
Moyenne (corpus)	**24,0**	**43,0**	**23,6**	**9,4**

Annexe 83. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « J'attends avec impatience le cours de mathématiques » (TIMSS 2015, SQMS-01h)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	48,1	28,5	14,5	8,9
Corée du Sud	10,8	26,8	45	17,3
Floride	48,6	25,1	14,5	11,8
France	45,1	32	12,9	10,1
Hong Kong SAR	30,8	31,3	22,9	15
Irlande du Nord	34,2	29,6	19,5	16,8
Ontario	36,6	29,6	18,6	15,2
Québec	41,1	34	15,2	9,6
République d'Irlande	34,7	29,8	20,2	15,3
Singapour	37,1	34,5	18,9	9,5
Taipei chinois	17,7	30	30,9	21,3
Moyenne (corpus)	**35,0**	**30,1**	**21,2**	**13,7**

Annexe 84. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « J'attends avec impatience le cours de mathématiques » (TIMSS 2015, SQG-17H)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	10,7	31,4	36,3	21,7
Corée du Sud	4,6	14,5	52,7	28,3
Floride	17,4	25,9	29	27,8
Hong Kong SAR	14,5	29,7	34,6	21,2
Ontario	20,2	31,5	29,2	19
Québec	7,3	26,2	43,3	23,2
République d'Irlande	11,8	26,3	32,9	28,9
Singapour	19,9	37,2	29,6	13,2
Taipei chinois	8,3	24,9	42,8	24
Moyenne (corpus)	**12,7**	**27,5**	**36,7**	**23,0**

Annexe 85. Adhésion des élèves de quatrième année à la proposition « Les mathématiques sont une de mes matières favorites » (TIMSS 2015, SQMS-01i)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	52,1	18,9	12,5	16,5
Corée du Sud	21,2	24,1	34	20,7
Floride	57,2	16,7	10	16
France	55,6	17,9	12,9	13,6
Hong Kong SAR	38,9	23,5	20	17,6
Irlande du Nord	46	18,9	13,5	21,6
Ontario	42	20,5	16,2	21,2
Québec	51,2	21,6	14	13,1
République d'Irlande	43,6	21,6	14,6	20,2
Singapour	43,2	23,8	17,4	15,6
Taipei chinois	0,3	24	29,1	26,6
Moyenne (corpus)	**41,0**	**21,0**	**17,7**	**18,4**

Annexe 86. Adhésion des élèves de huitième année à la proposition « Les mathématiques sont une de mes matières favorites » (TIMSS 2015, SQG-17I)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	15,1	21	27,6	36,3
Corée du Sud	13,3	23,2	37,9	25,6
Floride	24,3	20,8	18,2	36,8
Hong Kong SAR	21,1	24,8	28,2	25,8
Ontario	31,6	23,9	19	25,6
Québec	15,7	23,5	31,1	29,6
République d'Irlande	17,8	20,3	23	39
Singapour	32,8	27	21,8	18,4
Taipei chinois	12,4	19,1	38,5	29,9
Moyenne (corpus)	**20,5**	**22,6**	**27,3**	**29,7**

Annexe 87. Expérience des enseignants en années au moment des évaluations (TIMSS 2015, à partir des résultats à la question TQG-01)

	4e année			8e année		
Pays	Moyenne	Médiane	Score des élèves	Moyenne	Médiane	Score des élèves
Angleterre	10,6	8	546,0	10,5	7	518,0
Corée du Sud	15,5	15	608,0	14,2	12	606,0
Floride	13,3	11	546,0	10,3	9	493,0
France	14,9	13	488,0			
Hong Kong SAR	14,8	15	615,0	14,1	11	594,0
Irlande du Nord	15	15	570,0			
Ontario	15	15	512,0	14	14	522,0
Québec	15,3	15	536,0	17	17	543,0
République d'Irlande	13,4	10	547,0	14,5	12	523,0
Singapour	10,6	8	618,0	8,8	6	621,0
Taipei chinois	16,7	17	597,0	13,5	13	599,0
Moyenne	**14,1**	**12,9**	**562,1**	**13,0**	**11,2**	**557,7**

Annexe 88. Âge des enseignants de quatrième année au moment des évaluations, en années (TIMSS 2015, TQG-02)

Pays	Moins de 25	25-29	30-39	40-49	50-59	60 ou plus
Angleterre	9,4	21,8	31,5	24,3	12,9	0
Corée du Sud	6,1	15,4	29,9	29,7	17,4	1,6
Floride	3,3	8,5	28,5	38,2	17,2	4,3
France	1,2	7,1	38,8	32,4	19,2	1,4
Hong Kong SAR	1,5	12,3	39,8	33,7	11,5	1,2
Irlande du Nord	3,8	18,5	26,3	33	15,5	2,9
Ontario	0,7	7,5	32,2	31,1	26,2	2,3
Québec	1,3	10	38,6	28,1	20	2
République d'Irlande	8,6	15,2	46,1	17	10,7	2,4
Singapour	3,5	19,2	44,3	22,7	7,4	2,9
Taipei chinois	0	8,9	26,9	44,4	18,8	1
Moyenne	**3,6**	**13,1**	**34,8**	**30,4**	**16,1**	**2,0**

Annexe 89. Âge des enseignants de huitième année au moment des évaluations, en années (TIMSS 2015, TQG-02)

Pays	Moins de 25	25-29	30-39	40-49	50-59	60 ou plus
Angleterre	10,4	16	31	28,6	11,9	2,1
Corée du Sud	1,2	15,1	30,9	32,5	19,6	0,6
Floride	5,7	15,5	24,8	34	19,5	0,5
Hong Kong SAR	3,3	17,8	34,4	30,5	12	2
Ontario	1,8	6,3	33,5	43,6	13,5	1,3
Québec	0,6	7,7	34,8	23,5	31,9	1,4
République d'Irlande	4,1	17,9	38,4	23,8	14,1	1,8
Singapour	3,5	34	37,8	15,1	6,6	2,9
Taipei chinois	1,3	9,3	44,7	32,8	11	0,8
Moyenne	**3,5**	**15,5**	**34,5**	**29,4**	**15,6**	**1,5**

Annexe 90. Répartition des enseignants selon le sexe, en pourcentages (TIMSS 2015, SQG-01)

	4e année			8e année		
Pays	Femme	Homme	Score des élèves	Femme	Homme	Score des élèves
Angleterre	70,7	29,3	546,0	50,8	49,2	518,0
Corée du Sud	80	20	608,0	71	29	606,0
Floride	86,7	13,3	546,0	64,7	35,3	493,0
France	84,1	15,9	488,0			
Hong Kong SAR	53,5	46,5	615,0	37,2	62,8	594,0
Irlande du Nord	70,6	29,4	570,0			
Ontario	80,5	19,5	512,0	58,9	41,1	522,0
Québec	91	9	536,0	69,7	30,3	543,0
République d'Irlande	83,8	16,2	547,0	62,3	37,7	523,0
Singapour	73	27	618,0	62,4	37,6	621,0
Tapei chinois	82,5	17,5	597,0	44,2	55,8	599,0
Moyenne	**77,9**	**22,1**	**562,1**	**57,9**	**42,1**	**557,7**

Annexe 91. Adhésion des enseignants de quatrième année, en pourcentages, à la proposition « Je suis content de ma profession d'enseignant » (TIMSS 2015, TQG-10a)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	36,3	42,8	20,1	0,7
Corée du Sud	52,4	39,1	8,5	0
Floride	41,4	42,4	12,8	3,4
France	27,2	53,4	18,3	1,1
Hong Kong SAR	38,8	51,8	7,3	2,1
Irlande du Nord	53,5	38,4	8,1	0
Ontario	53,3	34,9	11,4	0,4
Québec	45,8	45,1	9,1	0
République d'Irlande	57,3	33,8	8,9	0
Singapour	35,9	51	12,6	0,5
Taipei chinois	50,4	42,9	6	0,7
Moyenne (corpus)	**44,8**	**43,2**	**11,2**	**0,8**

Annexe 92. Adhésion des enseignants de huitième année, en pourcentages, à la proposition « Je suis content de ma profession d'enseignant » (TIMSS 2015, TQG-10a)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	24,4	51,4	21,2	3
Corée du Sud	34	46,3	18,3	1,4
Floride	37	35,1	25,2	2,7
Hong Kong SAR	36,7	53	9,7	0,5
Ontario	60,5	29,5	9,5	0,5
Québec	47,3	49,5	2,1	1,1
République d'Irlande	60,5	31,2	7,9	0,4
Singapour	32,9	53,1	13,8	0,2
Taipei chinois	53,5	37,4	9,2	0
Moyenne (corpus)	**43,0**	**42,9**	**13,0**	**1,1**

Annexe 93. Adhésion des enseignants de quatrième année, en pourcentages, à la proposition « Je suis satisfait d'être professeur dans cette école » (TIMSS 2015, TQG-10b)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	44,4	39,7	14,7	1,2
Corée du Sud	48,3	33,7	13,9	4,1
Floride	45,6	32,2	19,7	2,5
France	44,1	43,8	11,5	0,7
Hong Kong SAR	27,7	52,1	18	2,3
Irlande du Nord	61,3	28,1	10,6	0
Ontario	53,8	36,2	9,6	0,4
Québec	45,8	49,4	4,8	0
République d'Irlande	67,9	23	7,4	1,7
Singapour	32,9	47,5	18,5	1,2
Taipei chinois	41,8	43,8	13,1	1,3
Moyenne (corpus)	**46,7**	**39,0**	**12,9**	**1,4**

Annexe 94. Adhésion des enseignants de huitième année, en pourcentages, à la proposition « Je suis satisfait d'être professeur dans cette école » (TIMSS 2015, TQG-10b)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	30,6	51	16,7	1,7
Corée du Sud	27,2	46,9	24,4	1,5
Floride	39,4	37,4	19,4	3,8
Hong Kong SAR	28,4	51,2	18,8	1,6
Ontario	57,3	32,5	9,3	0,9
Québec	46,6	49	4,3	0,1
République d'Irlande	64,2	26,5	8,6	0,7
Singapour	27,2	48,6	22,3	1,9
Taipei chinois	44,3	43,9	10,9	0,9
Moyenne (corpus)	**40,6**	**43,0**	**15,0**	**1,5**

Annexe 95. Adhésion des enseignants de quatrième année, en pourcentages, à la proposition « Je trouve du sens à mon travail » (TIMSS 2015, TQG-10c)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	47,5	37,9	14	0,6
Corée du Sud	53,7	36,9	9,4	0
Floride	52,2	31,2	15,3	1,3
France	39,9	49,6	10,6	0
Hong Kong SAR	33,5	54,9	10,2	1,4
Irlande du Nord	61,3	34,1	4,7	0
Ontario	61,4	29,7	8,8	0,2
Québec	72,4	23,5	4,1	0
République d'Irlande	58,4	30,3	11,4	0
Singapour	40,6	45,9	13,2	0,3
Taipei chinois	51,8	40,8	7,3	0
Moyenne (corpus)	**52,1**	**37,7**	**9,9**	**0,3**

Annexe 96. Adhésion des enseignants de huitième année, en pourcentages, à la proposition « Je trouve du sens à mon travail » (TIMSS 2015, TQG-10c)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	36	46,2	17,5	0,3
Corée du Sud	35,6	48,6	15,4	0,4
Floride	42	39,6	18,4	0
Hong Kong SAR	38	53,8	7,7	0,6
Ontario	57,4	33,1	9,5	0
Québec	73,6	22,8	3,7	0
République d'Irlande	51,1	36,8	11,5	0,6
Singapour	36,1	51,4	12,3	0,2
Taipei chinois	46,8	43,8	9,4	0
Moyenne (corpus)	**46,3**	**41,8**	**11,7**	**0,2**

Annexe 97. Adhésion des enseignants de quatrième année, en pourcentages, à la proposition « Je suis enthousiaste à propos de mon travail » (TIMSS 2015, TQG-10d)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	47,5	40	12,4	0
Corée du Sud	52,8	40	7,2	0
Floride	57,3	31,8	9,9	1,1
France	28,8	49,4	19,7	2,1
Hong Kong SAR	31,3	63,2	4,7	0,7
Irlande du Nord	62,6	29,9	7,5	0
Ontario	56,1	37,9	6	0
Québec	48,9	41,6	9,5	0
République d'Irlande	65	32,5	2,5	0
Singapour	36,4	51,9	11,1	0,6
Taipei chinois	45,3	43,6	11,1	0
Moyenne (corpus)	**48,4**	**42,0**	**9,2**	**0,4**

Annexe 98. Adhésion des enseignants de huitième année, en pourcentages, à la proposition « Je suis enthousiaste à propos de mon travail » (TIMSS 2015, TQG-10d)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	40,3	45,4	12,7	1,7
Corée du Sud	41,2	51,9	6,7	0,2
Floride	42,5	42,4	13,6	1,6
Hong Kong SAR	42,7	51,5	5,4	0,5
Ontario	55,5	36,7	7	0,8
Québec	48,5	43,5	6,9	1,1
République d'Irlande	63,7	30,4	5,6	0,4
Singapour	33,6	48,1	18,1	0,2
Taipei chinois	43,6	45	11,4	0
Moyenne (corpus)	**45,7**	**43,9**	**9,7**	**0,7**

Annexe 99. Adhésion des enseignants de quatrième année, en pourcentages, à la proposition « Mon travail m'inspire » (TIMSS 2015, TQG-10e)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	45,1	38	17	0
Corée du Sud	53,1	38,4	8,5	0
Floride	51,8	29,2	17,8	1,3
France	34,6	49,3	14,2	2
Hong Kong SAR	25,1	53,8	21,1	0
Irlande du Nord	53,9	32	14,1	0
Ontario	49,7	37,9	12,3	0,2
Québec	51,3	40,9	7,7	0
République d'Irlande	55,9	33,1	9,6	1,5
Singapour	35	48,6	15,4	1
Taipei chinois	41	44,5	13,1	1,4
Moyenne (corpus)	**43,9**	**43,4**	**11,6**	**1,1**

Annexe 100. Adhésion des enseignants de huitième année, en pourcentages, à la proposition « Mon travail m'inspire » (TIMSS 2015, TQG-10e)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	30,6	43,8	24,4	1,2
Corée du Sud	40,6	49	9,5	0,9
Floride	35,7	40,7	20,9	2,7
Hong Kong SAR	24,8	51	24,2	0
Ontario	51,1	36,8	10,5	1,7
Québec	48,9	38,8	11,2	1,1
République d'Irlande	47,7	37	12,9	2,3
Singapour	29,5	46,6	23,8	0,2
Taipei chinois	35,4	47,2	17	0,3
Moyenne (corpus)	**38,3**	**43,4**	**17,2**	**1,2**

Annexe 101. Adhésion des enseignants de quatrième année, en pourcentages, à la proposition « Je suis fier du travail que je fais » (TIMSS 2015, TQG-10f)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	56,7	36,3	6,9	0
Corée du Sud	60,1	31,5	8,4	0
Floride	75,6	18,8	4,1	1,5
France	30,8	44,1	23,8	1,3
Hong Kong SAR	28,3	45,9	23,6	2,1
Irlande du Nord	66,5	29,1	4,4	0
Ontario	59,5	36,8	3,7	0
Québec	51,6	38,9	9,5	0
République d'Irlande	63,9	30,5	5,6	0
Singapour	39,4	50,4	9,6	0,6
Taipei chinois	47,6	41,2	10,4	0,7
Moyenne (corpus)	**52,7**	**36,7**	**10,0**	**0,6**

Annexe 102. Adhésion des enseignants de huitième année, en pourcentages, à la proposition « Je suis fier du travail que je fais » (TIMSS 2015, TQG-10f)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	44,2	46,5	8,5	0,8
Corée du Sud	42,4	46,5	10,5	0,6
Floride	55,4	29,6	15	0
Hong Kong SAR	25,2	50,3	23,4	1
Ontario	70,4	28,2	1,4	0
Québec	53,7	38,4	6,8	1,1
République d'Irlande	66,1	29	4,6	0,4
Singapour	35,5	47,4	16	1,1
Taipei chinois	44,6	43,8	11,6	0
Moyenne (corpus)	**48,6**	**40,0**	**10,9**	**0,6**

Annexe 103. Adhésion des enseignants de quatrième année, en pourcentages, à la proposition « Je vais continuer à enseigner aussi longtemps que je le peux » (TIMSS 2015, TQG-10G)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	35,4	34,5	20,9	9,3
Corée du Sud	59,5	33,6	6	0,8
Floride	50,9	30,4	14,9	3,8
France	34,6	37,4	16,5	11,5
Hong Kong SAR	38,8	51,3	7,8	2,1
Irlande du Nord	54,1	34,6	10,7	0,5
Ontario	59,9	26	11,1	2,9
Québec	55,4	32,5	9,9	2,2
République d'Irlande	56,3	26,9	15,2	1,6
Singapour	37,3	46,2	14,3	2,1
Taipei chinois	47,8	39,4	12	0,7
Moyenne (corpus)	**48,2**	**35,7**	**12,7**	**3,4**

Annexe 104. Adhésion des enseignants de huitième année, en pourcentages, à la proposition « Je vais continuer à enseigner aussi longtemps que je le peux » (TIMSS 2015, TQG-10g)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	28,5	38	25,6	8
Corée du Sud	44	44	9,8	2,2
Floride	30,4	43,7	17,5	8,4
Hong Kong SAR	46	43,9	10	0,1
Ontario	67	24,6	7,8	0,5
Québec	58,8	29	10,7	1,5
République d'Irlande	59	26,5	11,1	3,4
Singapour	33,2	45,2	20,1	1,4
Taipei chinois	48,6	37,6	13,2	0,6
Moyenne (corpus)	**46,2**	**36,9**	**14,0**	**2,9**

Annexe 105. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « discuter comment enseigner un sujet particulier », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09a)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	43,3	37,2	18,9	0,7
Corée du Sud	28,7	39,5	28,4	3,4
Floride	45,3	30,6	21,3	2,8
France	23,9	34,9	36,8	4,4
Hong Kong SAR	20,3	54,4	25,3	0
Irlande du Nord	30,8	38,2	25,6	5,4
Ontario	25,7	37,5	32,1	4,7
Québec	37	34,5	26,6	1,9
République d'Irlande	26,3	25	43,9	4,8
Singapour	21	49,4	27,9	1,7
Taipei chinois	12,4	47,4	39,6	0,6
Moyenne (corpus)	**28,6**	**39,0**	**29,7**	**2,8**

Annexe 106. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « discuter comment enseigner un sujet particulier », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09a)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	21,9	36,8	38,2	3
Corée du Sud	13,8	38,6	46,4	1,2
Floride	40,3	35	22,6	2
Hong Kong SAR	10,5	43	46,2	0,2
Ontario	23,4	30,4	39,4	6,8
Québec	23,1	30,9	43,4	2,5
République d'Irlande	22,2	34,1	35,8	8
Singapour	16,7	47,6	32,9	2,9
Taipei chinois	7,3	33,9	53,9	4,8
Moyenne (corpus)	**19,9**	**36,7**	**39,9**	**3,5**

Annexe 107. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « collaborer pour planifier l'enseignement et préparer le matériel », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09b)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	45	35,5	16,1	3,4
Corée du Sud	35	44	18,5	2,4
Floride	50,9	26,4	21	1,8
France	15,2	29,4	44,1	11,3
Hong Kong SAR	17,4	51,9	29,3	1,4
Irlande du Nord	48,7	23,9	21,6	5,9
Ontario	15,6	34,9	40	9,5
Québec	41,5	31,6	22,1	4,8
République d'Irlande	24,7	31,1	31,3	13
Singapour	16,6	41,4	38,9	3,2
Taipei chinois	5,5	33,7	53,9	6,9
Moyenne (corpus)	**28,7**	**34,9**	**30,6**	**5,8**

Annexe 108. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « collaborer pour planifier l'enseignement et préparer le matériel », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09b)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	14,4	32,6	44,1	8,9
Corée du Sud	16,7	45,9	37	0,4
Floride	46,9	29,3	16,2	7,6
Hong Kong SAR	6,3	29,5	54,1	10,1
Ontario	18,9	29,9	37,6	13,7
Québec	34,3	34,9	23,5	7,4
République d'Irlande	21,8	29,1	38,4	10,7
Singapour	16,9	42,8	37,4	2,9
Taipei chinois	2,1	20,2	55,1	22,6
Moyenne (corpus)	**19,8**	**32,7**	**38,2**	**9,4**

Annexe 109. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « partager ce qu'ils ont appris de leur expérience d'enseignant », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09c)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	36,1	33,7	29,5	0,7
Corée du Sud	38,1	40,1	20,5	1,3
Floride	40,1	33,3	25,2	1,5
France	16,2	34,4	44,5	4,9
Hong Kong SAR	14,1	46,1	39,8	0
Irlande du Nord	31,6	36,6	24,3	7,4
Ontario	15,6	44,5	35,8	4,1
Québec	27,7	31	37,6	3,7
République d'Irlande	21,6	31,3	41,1	5,9
Singapour	15,8	45,7	36,1	2,4
Taipei chinois	16,6	52,9	29,1	1,4
Moyenne (corpus)	**24,9**	**39,1**	**33,0**	**3,0**

Annexe 110. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « partager ce qu'ils ont appris de leur expérience d'enseignant », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09c)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	18,4	37,1	40,5	4
Corée du Sud	16,8	45,5	35,5	2,3
Floride	31,5	35	27,1	6,4
Hong Kong SAR	7,1	39,5	47,9	5,5
Ontario	19,3	33,5	40,1	7,1
Québec	14,1	31,9	43,4	10,6
République d'Irlande	17,5	36,3	34,3	11,9
Singapour	14,6	39,4	43,1	2,8
Taipei chinois	9,4	38,6	49,1	3
Moyenne (corpus)	**16,5**	**37,4**	**40,1**	**6,0**

Annexe 111. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « visiter une autre classe pour améliorer leur capacité à enseigner », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09d)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	9,9	26,2	50,5	13,3
Corée du Sud	20,1	27,5	51	1,5
Floride	8,4	17,9	35,9	37,8
France	2,2	2,6	15	80,2
Hong Kong SAR	5,6	28,8	63,4	2,2
Irlande du Nord	8,8	15,3	50,3	25,6
Ontario	3,3	9,4	48,1	39,2
Québec	6,3	7,7	43,4	42,6
République d'Irlande	1,8	9,2	23	65,9
Singapour	5,7	18	62,2	14,1
Taipei chinois	2,3	21,5	67	9,2
Moyenne (corpus)	**6,8**	**16,7**	**46,3**	**30,1**

Annexe 112. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « visiter une autre classe pour améliorer leur capacité à enseigner », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09d)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	7,9	17,5	54,7	20
Corée du Sud	11,6	28,3	55,9	4,1
Floride	5,1	10	44,3	40,7
Hong Kong SAR	2	18,4	64,6	14,9
Ontario	2,8	8,1	43,2	45,9
Québec	2,9	1,2	19,8	76,1
République d'Irlande	1,8	3,2	22,8	72,1
Singapour	4,7	15,6	56,4	23,3
Taipei chinois	1,9	27,3	58,6	12,2
Moyenne (corpus)	**4,5**	**14,4**	**46,7**	**34,4**

Annexe 113. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « travailler ensemble pour trouver de nouvelles idées », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09e)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	24,2	38,5	30,1	7,2
Corée du Sud	36,5	36,1	25,4	2,1
Floride	27,8	29,7	33,5	9,1
France	9,6	25,6	49,7	15,1
Hong Kong SAR	6,8	40,9	48,3	4
Irlande du Nord	23,4	36,6	32,5	7,4
Ontario	10,6	32,3	47,4	9,7
Québec	29,4	26,5	41,6	2,6
République d'Irlande	12,1	26,1	46,3	15,4
Singapour	10	40,6	45,1	4,2
Taipei chinois	4,7	27,1	62,1	6,2
Moyenne (corpus)	**17,7**	**32,7**	**42,0**	**7,5**

Annexe 114. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « travailler ensemble pour trouver de nouvelles idées », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09e)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	9	27,5	50	13,6
Corée du Sud	12,1	38,5	47,9	1,5
Floride	27,2	30,3	36,7	5,7
Hong Kong SAR	5,2	20,3	57,1	17,3
Ontario	15,2	26,9	42,6	15,3
Québec	14,2	26,7	46,4	12,7
République d'Irlande	8,6	18,9	50,5	22
Singapour	8,2	36,1	49,9	5,8
Taipei chinois	2,3	23,4	60,5	13,8
Moyenne (corpus)	**11,3**	**27,6**	**49,1**	**12,0**

Annexe 115. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « travailler en groupe pour la mise en place des programmes d'enseignement », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09f)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	38,3	38,4	21,1	2,3
Corée du Sud	41,6	41,4	16,2	0,7
Floride	32,7	34,8	25,1	7,4
France	15,5	41,2	38	5,3
Hong Kong SAR	9,7	50,2	35	5,2
Irlande du Nord	42,2	34,8	19,3	3,7
Ontario	9,6	30,3	44,5	15,7
Québec	24,5	31,5	29,5	14,6
République d'Irlande	20,2	46,6	26,5	6,7
Singapour	14,4	48,6	32,6	4,4
Taipei chinois	5,1	23,9	57,6	13,5
Moyenne (corpus)	**23,1**	**38,3**	**31,4**	**7,2**

Annexe 116. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « travailler en groupe pour la mise en place des programmes d'enseignement », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09f)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	18,3	38,3	35,9	7,6
Corée du Sud	16,5	55,3	27,4	0,7
Floride	28,8	33,1	33,7	4,4
Hong Kong SAR	4,3	37,5	45,9	12,4
Ontario	20,4	23,1	41	15,4
Québec	21	19,1	42	17,9
République d'Irlande	23,6	39,4	30,8	6,2
Singapour	13,6	50,7	31,5	4,3
Taipei chinois	5,3	16,1	55,9	22,6
Moyenne (corpus)	**16,9**	**34,7**	**38,2**	**10,2**

Annexe 117. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « travailler avec des professeurs de niveaux différents pour assurer la continuité de l'apprentissage », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09g)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	19,5	34	36,4	10,1
Corée du Sud	21,1	22,8	39,9	16,3
Floride	9,5	17,5	46,1	26,9
France	13,9	43,1	36,7	6,4
Hong Kong SAR	8	35,6	48,7	7,7
Irlande du Nord	23,7	27,8	35,2	13,3
Ontario	4,5	20,3	48,7	26,4
Québec	10,8	25,9	54,1	9,2
République d'Irlande	8,6	35,6	37,2	18,6
Singapour	6,1	24,5	47	22,4
Taipei chinois	2,7	22,5	52,1	22,7
Moyenne (corpus)	**11,7**	**28,1**	**43,8**	**16,4**

Annexe 118. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « travailler avec des professeurs de niveaux différents pour assurer la continuité de l'apprentissage », en pourcentages (TIMSS 2015, TQG-09g)

Pays	Très souvent	Souvent	Parfois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	10,4	33,3	36,1	20,2
Corée du Sud	13,3	32,4	46,2	8
Floride	19	18,8	35,1	27,1
Hong Kong SAR	6,1	34,2	40,8	18,9
Ontario	6,2	20	43,9	29,9
Québec	10,9	26,6	41,9	20,6
République d'Irlande	14,8	28	40,4	16,9
Singapour	7,9	30,2	47,7	14,2
Taipei chinois	4	20,6	51,1	24,3
Moyenne (corpus)	**10,3**	**27,1**	**42,6**	**20,0**

Annexe 119. Opinion des enseignants de quatrième année sur « la compréhension par les enseignants des objectifs programmatiques de l'école » (TIMSS 2015, TQG-06a)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	36,7	54	9,3	0	0
Corée du Sud	57,4	35,4	5,9	1,3	0
Floride	34,5	49,2	15	1,3	0
France	24,7	60,8	13,7	0,4	0,4
Hong Kong SAR	18,4	67,7	13,9	0	0
Irlande du Nord	71	28,8	0,2	0	0
Ontario	40,1	50,4	9,5	0	0
Québec	65,8	30,5	2,8	0,6	0,2
République d'Irlande	57	38,1	4,2	0,8	0
Singapour	12,8	70,3	17	0	0
Taipei chinois	21,8	70,7	7,6	0	0
Moyenne (corpus)	**40,0**	**50,5**	**9,0**	**0,4**	**0,1**

Annexe 120. Opinion des enseignants de huitième année sur « la compréhension par les enseignants des objectifs programmatiques de l'école » (TIMSS 2015, TQG-06a)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	36,5	51,8	8,7	2,9	0
Corée du Sud	36,5	56,1	7,4	0	0
Floride	42,6	41,2	12,9	3,3	0
Hong Kong SAR	27,3	62,9	8,6	0,8	0,4
Ontario	39,4	48,2	12	0,4	0
Québec	49,1	41,4	9,1	0,4	0
République d'Irlande	51,6	40	7,7	0,6	0
Singapour	18,3	67,7	13,2	0,8	0
Taipei chinois	29,4	64,4	5,6	0,6	0
Moyenne (corpus)	**36,7**	**52,6**	**9,5**	**1,1**	**0,0**

Annexe 121. Opinion des enseignants de quatrième année sur « le degré de succès des enseignants dans la mise en œuvre des programmes de l'école » (TIMSS 2015, TQG-06b)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	30,3	55,4	14,3	0	0
Corée du Sud	54,7	40,7	4	0,6	0
Floride	25,9	55,4	16,2	2,4	0
France	14,5	52,8	29,8	2,7	0,2
Hong Kong SAR	9,8	71,5	18,6	0	0
Irlande du Nord	53,1	45,2	1,7	0	0
Ontario	25	59,4	15,6	0	0
Québec	46,9	48,8	3,4	0,6	0,2
République d'Irlande	53,1	45,2	1,7	0	0
Singapour	10	65,9	23,8	0,3	0
Taipei chinois	31,7	63,6	4,7	0	0
Moyenne (corpus)	**32,3**	**54,9**	**12,2**	**0,6**	**0,0**

Annexe 122. Opinion des enseignants de huitième année sur « le degré de succès des enseignants dans la mise en œuvre des programmes de l'école » (TIMSS 2015, TQG-06b)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	28,8	54,8	15,6	0,8	0
Corée du Sud	34,6	54,2	11,2	0	0
Floride	23,6	52,8	21,6	1,9	0
Hong Kong SAR	9,2	66,1	22,8	1,5	0,4
Ontario	23,1	58,3	17,7	0,9	0
Québec	37,2	52,7	9,3	0,7	0
République d'Irlande	41,4	47,7	10,7	0,2	0
Singapour	10,1	64,7	24,3	0,9	0
Taipei chinois	41,3	53,6	5,1	0	0
Moyenne (corpus)	**27,7**	**56,1**	**15,4**	**0,8**	**0,0**

Annexe 123. Opinion des enseignants de quatrième année à propos « des attentes des professeurs quant à la réussite des élèves » (TIMSS 2015, TQG-06c)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	52,9	41,6	4,5	1,1	0
Corée du Sud	48,6	39	9,9	1,7	0,7
Floride	46,3	43,1	10,5	0	0
France	33,7	61,3	5	0	0
Hong Kong SAR	15,4	72,3	11,3	0	1
Irlande du Nord	62,4	37,6	0	0	0
Ontario	34,3	54,1	11,6	0	0
Québec	50,9	42,5	6,1	0,4	0
République d'Irlande	47,2	45,4	6,4	0,3	0,8
Singapour	12,6	65,9	20,7	0,8	0
Taipei chinois	18	65,3	16,8	0	0
Moyenne (corpus)	**38,4**	**51,6**	**9,3**	**0,4**	**0,2**

Annexe 124. Opinion des enseignants de huitième année à propos « des attentes des professeurs quant à la réussite des élèves » (TIMSS 2015, TQG-06c)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	40,2	48,1	11,7	0	0
Corée du Sud	28,3	53,6	15	2,7	0,3
Floride	40,2	33,5	21,6	2,8	1,9
Hong Kong SAR	9,4	54,4	32,4	3,8	0
Ontario	34,7	48,5	15,1	1,7	0
Québec	57,7	34,3	5,9	2,2	0
République d'Irlande	38,8	44,9	15,3	1	0
Singapour	18,7	61	19,2	1,1	0
Taipei chinois	15,6	61,3	21,6	1,5	0
Moyenne (corpus)	**31,5**	**48,8**	**17,5**	**1,9**	**0,2**

Annexe 125. Opinion des enseignants de quatrième année à propos « des professeurs travaillant ensemble pour améliorer la réussite des élèves » (TIMSS 2015, TQG-06d)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	46,4	43,5	9,4	0,7	0
Corée du Sud	57,1	33,4	8,4	1	0
Floride	37,4	40,4	17,8	4,4	0
France	26,5	43,3	22,6	7,1	0,4
Hong Kong SAR	14	72,7	10,3	2,4	0,5
Irlande du Nord	65,8	26,9	7,2	0	0
Ontario	29,1	46,9	21,8	1,9	0,3
Québec	61,1	34,6	3,2	0,6	0,4
République d'Irlande	55	33,5	10,2	1,3	0
Singapour	16,9	64,2	18,5	0,4	0,1
Taipei chinois	14,5	63	21,6	0,3	0,6
Moyenne (corpus)	**38,5**	**45,7**	**13,7**	**1,8**	**0,2**

Annexe 126. Opinion des enseignants de huitième année à propos « des professeurs travaillant ensemble pour améliorer la réussite des élèves » (TIMSS 2015, TQG-06d)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	33,5	47	15,5	2,5	1,5
Corée du Sud	37,5	47,7	14,6	0,2	0
Floride	32,4	40,4	23,1	4,1	0
Hong Kong SAR	11,3	59	25	4,2	0,4
Ontario	30,3	40,9	25,3	3,5	0
Québec	63	26,8	8,4	1,2	0,5
République d'Irlande	32,6	44	18,2	5,1	0,2
Singapour	16,8	61,5	21,4	0,3	0
Taipei chinois	11,5	50,4	30,3	7,1	0,6
Moyenne (corpus)	**29,9**	**46,4**	**20,2**	**3,1**	**0,4**

Annexe 127. Opinion des enseignants de quatrième année sur « l'aptitude des enseignants à inspirer les élèves » (TIMSS 2015, TQG-06e)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	42,1	50,1	7,8	0	0
Corée du Sud	62,1	31,4	6,5	0	0
Floride	27,7	54,4	15,1	1,6	1,2
France	24,5	56,9	17,9	0,8	0
Hong Kong SAR	5,7	77,2	14,1	3	0
Irlande du Nord	52,1	45,8	2,1	0	0
Ontario	25,6	56,8	15,1	2,5	0
Québec	54,6	38,6	6,6	0,2	0
République d'Irlande	39,4	49,4	10,9	0,2	0
Singapour	9,7	62,6	26,7	0,9	0,1
Taipei chinois	9,5	68,6	21,3	0,6	0
Moyenne (corpus)	**32,1**	**53,8**	**13,1**	**0,9**	**0,1**

Annexe 128. Opinion des enseignants de huitième année sur « l'aptitude des enseignants à inspirer les élèves » (TIMSS 2015, TQG-06e)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	15	60,8	21,9	2,3	0
Corée du Sud	37,6	56,1	6,3	0	0
Floride	15	50,9	30,5	3,6	0
Hong Kong SAR	7,1	57,2	32,9	2,8	0
Ontario	19,6	57,3	22,1	1,1	0
Québec	44,1	41,6	12,1	2,2	0
République d'Irlande	26	56,7	17,2	0,2	0
Singapour	8,8	58,5	31,9	0,7	0
Taipei chinois	11,3	60,5	27,9	0,3	0
Moyenne (corpus)	**20,5**	**55,5**	**22,5**	**1,5**	**0,0**

Annexe 129. Plus haut niveau de formation scolaire atteint par les enseignants de quatrième année (TIMSS 2015, TQG-04)

Pays	Enseignement secondaire (deuxième cycle) Niveau 2 et 3	Enseignement post-secondaire non-supérieur Niveau 4	Enseignement supérieur de cycle court Niveau 5	Baccalauréat universitaire ou équivalent Niveau 6	Maîtrise universitaire ou équivalent Niveau 7	Doctorat ou équivalent Niveau 8
Angleterre	0	0	0,7	86	13,2	0
Corée du Sud	0	0	6,3	72,3	21,4	0
Floride	0	0	0	53,2	43,6	3,3
France	3,3	0,1	9,3	47,7	38,4	1,3
Hong Kong SAR	0	0	4	66,4	28,5	1,2
Irlande du Nord	1,6	0	0	82,6	15,8	0
Ontario	0	0	0	83,1	16,6	0,3
Québec	0	0	0	93,3	6,7	0
République d'Irlande	0,9	0	2,5	83,9	12,7	0
Singapour	1,4	6,6	13,8	68,5	9,7	0
Taipei chinois	0	0,3	0	61	38,7	0
Moyenne (corpus)	**0,7**	**0,6**	**3,3**	**72,5**	**22,3**	**0,6**

Annexe 130. Plus haut niveau de formation scolaire atteint par les enseignants de huitième année (TIMSS 2015, TQG-04)

Pays	Enseignement secondaire (deuxième cycle) Niveau 2 et 3	Enseignement post-secondaire non-supérieur Niveau 4	Enseignement supérieur de cycle court Niveau 5	Baccalauréat universitaire ou équivalent Niveau 6	Maîtrise universitaire ou équivalent Niveau 7	Doctorat ou équivalent Niveau 8
Angleterre	0,7	0,4	0	82,1	15,6	1,3
Corée du Sud	0	0	0	65,7	34,3	0
Floride	0	0	0	65,2	34,8	0
Hong Kong SAR	0	0	2,8	53,4	42,7	0,2
Ontario	0	0	1,1	80,5	18,4	0
Québec	0	0	0	84,9	9,2	5,9
République d'Irlande	0,7	0	0,4	66,4	32,3	0,2
Singapour	0	1,9	0,3	87	10,7	0
Taipei chinois	0	0	0	49,3	50,7	0
Moyenne (corpus)	**0,2**	**0,3**	**0,5**	**70,5**	**27,6**	**0,8**

Annexe 131. Les enseignants de quatrième année ont-ils fait leur formation initiale, lors de leurs études postsecondaires, dans le domaine des sciences de l'éducation (primaire) ? (TIMSS 2015, TQG-05Aa)

Pays	Oui	Non
Angleterre	65,8	34,2
Corée du Sud	98,2	1,8
Floride	80	20
France	28,2	68,8
Hong Kong SAR	86,5	13,5
Irlande du Nord	79,4	19
Ontario	75,6	24,4
Québec	92,2	7,8
République d'Irlande	86,6	12,6
Singapour	72,4	26,2
Taipei chinois	77,2	22,8
Moyenne (corpus)	**76,6**	**22,8**

Annexe 132. Les enseignants de quatrième année ont-ils fait leur formation initiale, lors de leurs études postsecondaires, dans le domaine des sciences de l'éducation (secondaire) ? (TIMSS 2015, TQG-05Ab)

Pays	Oui	Non
Angleterre	5,5	94,5
Corée du Sud	5,4	94,6
Floride	5,4	94,6
France	7,1	89,6
Hong Kong SAR	16,7	83,3
Irlande du Nord	12	86,4
Ontario	11,4	88,6
Québec	10,5	89,5
République d'Irlande	3,9	95,2
Singapour	11,7	86,9
Taipei chinois	0,7	99,3
Moyenne (corpus)	**8,2**	**91,1**

Annexe 133. Les enseignants de quatrième année ont-ils fait leur formation initiale, lors de leurs études postsecondaires, dans le domaine des mathématiques ? (TIMSS 2015, TQG-05Ac)

Pays	Oui	Non
Angleterre	12,7	87,3
Corée du Sud	4,9	95,1
Floride	12,1	87,9
France	19,7	77,1
Hong Kong SAR	59,2	40,8
Irlande du Nord	17,1	81,3
Ontario	3,9	96,1
Québec	10,7	89,3
République d'Irlande	10,2	89
Singapour	62,4	36,2
Taipei chinois	14	86
Moyenne (corpus)	**20,6**	**78,7**

Annexe 134. Les enseignants de huitième année ont-ils fait leur formation initiale, lors de leurs études postsecondaires, dans le domaine des mathématiques ? (TIMSS 2015, TQG-05Aa)

Pays	Oui	Non
Angleterre	80,4	18,9
Corée du Sud	48,3	51,7
Floride	50,7	49,3
Hong Kong SAR	67,4	31,8
Ontario	9,1	90,9
Québec	59,1	40,9
République d'Irlande	69,5	29,8
Singapour	84,2	15,8
Taipei chinois	81,1	18,9
Moyenne (corpus)	**61,1**	**38,7**

Annexe 135. Les enseignants de huitième année ont-ils suivi des études postsecondaires dans le domaine des mathématiques ? (TIMSS 2015, TQG-05Ab)

Pays	Oui	Non
Angleterre	48	51,3
Corée du Sud	67,4	32,6
Floride	40,9	59,1
Hong Kong SAR	51,5	47,7
Ontario	13,1	86,9
Québec	69,4	30,6
République d'Irlande	41,4	57,8
Singapour	59,4	40,6
Taipei chinois	34,4	65,6
Moyenne (corpus)	**47,3**	**52,5**

Annexe 136. Les enseignants de quatrième année ont-ils fait leur formation initiale lors de leurs études postsecondaires dans le domaine des sciences ? (TIMSS 2015, TQG-05Ad)

Pays	Oui	Non
Angleterre	21,5	78,5
Corée du Sud	3,6	6,4
Floride	5,5	94,5
France	28,7	68,2
Hong Kong SAR	20,3	79,7
Irlande du Nord	11,8	86,6
Ontario	13,2	86,8
Québec	7,7	92,3
République d'Irlande	6,8	92,3
Singapour	49,9	48,7
Taipei chinois	12,7	87,3
Moyenne (corpus)	**16,5**	**74,7**

Annexe 137. Les enseignants de quatrième année dont la formation initiale était les sciences de l'éducation ont-ils suivi une spécialisation dans le domaine des mathématiques ? (TIMSS 2015, TQG-05Ba)

Pays	Oui	Non
Angleterre	8,2	87
Corée du Sud	11,7	88,3
Floride	9,2	89
France	4,1	60,3
Hong Kong SAR	68	32
Irlande du Nord	13,5	82,9
Ontario	4,1	88,5
Québec	4,5	95,3
République d'Irlande	10	83
Singapour	49,7	48,1
Taipei chinois	37,5	56,9
Moyenne (corpus)	**20,0**	**73,8**

Annexe 138. Les enseignants de quatrième année dont la formation initiale était les sciences de l'éducation ont-ils suivi une spécialisation dans le domaine des sciences ? (TIMSS 2015, TQG-05Bb)

Pays	Oui	Non
Angleterre	8,6	86,5
Corée du Sud	19,1	80,9
Floride	6	92,2
France	8,3	56,1
Hong Kong SAR	21,7	78,3
Irlande du Nord	7	89,3
Ontario	7,5	85,2
Québec	1,5	98,3
République d'Irlande	2,3	90,7
Singapour	34,3	63,6
Taipei chinois	25,9	68,6
Moyenne (corpus)	**12,9**	**80,9**

Annexe 139. Réponses des enseignants de quatrième année à la question « Dans cette classe, enseignez-vous la langue dans laquelle les évaluations ont été passées ? » (TIMSS 2011, TQG-14A)

Pays	Oui	Non
Angleterre	86,1	13,9
Corée du Sud	95,1	4,9
Floride	65,2	34,8
Hong Kong SAR	5,4	94,6
Irlande du Nord	98,9	1,1
Ontario	96,1	3,9
Québec	97,6	2,4
République d'Irlande	100,0	0,0
Singapour	56,4	43,6
Taipei chinois	100,0	0,0
Moyenne (corpus)	**80,1**	**19,9**

Annexe 140. Réponses des enseignants de quatrième année à la question « Dans cette classe, enseignez-vous les sciences ? » (TIMSS 2011, TQG-14C)

Pays	Oui	Non
Angleterre	80,1	19,9
Corée du Sud	88,8	11,2
Floride	82,8	17,2
Hong Kong SAR	12,8	87,2
Irlande du Nord	95,5	4,5
Ontario	84,4	15,6
Québec	73,8	26,2
République d'Irlande	99,2	0,8
Singapour	57,3	42,7
Taipei chinois	4,0	96,0
Moyenne (corpus)	**67,9**	**32,1**

Annexe 141. Nombre d'heures de formation continue en mathématiques des enseignants de quatrième année lors des deux années précédant les évaluations (TIMSS 2015, TQM-10)

Pays	Aucune	Moins de 6 heures	Entre 6 et15 heures	Entre 16 et 35 heures	Plus de 35 heures
Angleterre	10,9	30,3	39,6	12,1	7,2
Corée du Sud	36,7	32,1	11,3	15	4,8
Floride	5,8	22,1	28,2	25,6	18,4
France	52,8	30,6	11,7	2	2,9
Hong Kong SAR	2,5	25,1	34,8	15,2	22,4
Irlande du Nord	22,2	40,7	28	7,7	1,4
Ontario	5,9	22,9	26,3	24,9	19,9
Québec	18,3	27,7	30,2	19,4	4,3
République d'Irlande	28,3	30,4	26,3	11,4	3,6
Singapour	6,4	17,2	38,8	21,5	16,1
Taipei chinois	20,4	43,3	26,9	7,9	1,5
Moyenne (corpus)	**19,1**	**29,3**	**27,5**	**14,8**	**9,3**

Annexe 142. Nombre d'heures de formation continue en mathématiques des enseignants de huitième année lors des deux années précédant les évaluations (TIMSS 2015, TQM-25)

Pays	Aucune	Moins de 6 heures	Entre 6 et15 heures	Entre 16 et 35 heures	Plus de 35 heures
Angleterre	9,5	23,3	30,9	23,7	12,6
Corée du Sud	16,4	31,9	11,8	19,1	20,8
Floride	6,4	11,1	15,4	28,2	39
Hong Kong SAR	6,6	28,4	35,2	14,5	15,3
Ontario	3,4	21	28,5	28,6	18,5
Québec	12,1	24,9	34,5	20,7	7,8
République d'Irlande	2,7	10,8	34,6	34,9	17,1
Singapour	3	14,1	34,1	25,4	23,3
Taipei chinois	3,5	19,7	38	25,2	13,7
Moyenne (corpus)	**7,1**	**20,6**	**29,2**	**24,5**	**18,7**

Annexe 143. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « l'immeuble a besoin de réparations significatives » (TIMSS 2015, TQG-08A)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	59,4	29,8	9,4	1,3
Corée du Sud	27,2	52,9	15,1	4,8
Floride	40,2	37,9	14,4	7,5
France	30	36,2	23,4	10,3
Hong Kong SAR	27,2	52,9	15,1	4,8
Irlande du Nord	52,5	24,3	17,1	6,1
Ontario	48,6	33,8	15,6	1,9
Québec	39,5	39,5	16,7	4,3
République d'Irlande	59,3	24,6	8,1	7,9
Singapour	50,5	39,5	8	1,9
Taipei chinois	30,4	45	18,9	5,8
Moyenne (corpus)	**42,3**	**37,9**	**14,7**	**5,1**

Annexe 144. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « l'immeuble a besoin de réparations significatives » (TIMSS 2015, TQG-08A)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	46,4	34,8	13,6	5,3
Corée du Sud	37,6	38,3	20	4,1
Floride	50,3	31,9	13	4,9
Hong Kong SAR	35	45,5	17,1	2,4
Ontario	47,4	41,9	7	3,7
Québec	38,5	39,4	18,6	3,6
République d'Irlande	45,7	31,9	12,5	9,9
Singapour	51,3	37,3	9,3	2,1
Taipei chinois	34	41,4	16,1	8,5
Moyenne (corpus)	**42,9**	**38,0**	**14,1**	**4,9**

Annexe 145. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « les enseignants ne disposent pas d'un espace de travail convenable (par exemple, pour la préparation, la collaboration ou les rencontres avec les élèves) » (TIMSS 2015, TQG-08B)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	38,3	44,9	12,4	4,3
Corée du Sud	55	25,9	15,3	3,9
Floride	66,5	24,4	6,7	2,3
France	49,2	25,9	15,7	9,3
Hong Kong SAR	53,5	30,7	11,8	4
Irlande du Nord	48,5	27,3	17,9	6,4
Ontario	49,7	31,9	15,6	2,8
Québec	52,4	20,5	18,8	8,4
République d'Irlande	57,1	25,5	9,1	8,3
Singapour	52,9	33,9	9,9	3,3
Taipei chinois	40,3	31,9	19,9	7,9
Moyenne (corpus)	**51,2**	**29,3**	**13,9**	**5,5**

Annexe 146. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « les enseignants ne disposent pas d'un espace de travail convenable (par exemple, pour la préparation, la collaboration ou les rencontres avec les élèves) » (TIMSS 2015, TQG-08B)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	47,8	33,3	14,7	4,2
Corée du Sud	33,3	36,4	22	8,3
Floride	62,9	33	0,6	3,5
Hong Kong SAR	49,8	36,2	11,9	2,1
Ontario	53,4	33,5	10,6	2,6
Québec	65,3	23,1	7,3	4,4
République d'Irlande	38,7	30,9	20,7	9,8
Singapour	48	39,5	8,5	3,9
Taipei chinois	37,3	35,2	23,6	3,9
Moyenne (corpus)	**48,5**	**33,5**	**13,3**	**4,7**

Annexe 147. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition les enseignants n'ont pas les fournitures ni le matériel d'enseignement adéquat » (TIMSS 2015, TQG-08C)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	57,4	29,2	10,6	2,8
Corée du Sud	59,5	30,1	9	1,4
Floride	42,5	36,6	12,7	8,3
France	35,4	37,1	20,7	6,8
Hong Kong SAR	52,7	39,2	6,2	1,8
Irlande du Nord	60,4	28,6	9,9	1,1
Ontario	38,1	42	15,7	4,2
Québec	45,4	36,5	16,2	1,9
République d'Irlande	49,3	28,5	17,7	4,5
Singapour	58,1	34,2	7,3	0,4
Taipei chinois	38,5	47	13,1	1,4
Moyenne (corpus)	**48,8**	**35,4**	**12,6**	**3,1**

Annexe 148. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « les enseignants n'ont pas les fournitures ni le matériel d'enseignement adéquat » (TIMSS 2015, TQG-08C)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	50,8	33,2	14,5	1,4
Corée du Sud	38,1	40,1	19,6	2,1
Floride	42,5	42,9	9,8	4,7
Hong Kong SAR	56,4	35,6	7,1	0,9
Ontario	38	41,3	17,6	3,1
Québec	66,3	24,6	7,3	1,7
République d'Irlande	53,6	32,6	11,1	2,7
Singapour	60,1	32,2	7	0,6
Taipei chinois	53,2	36,5	7,7	2,7
Moyenne (corpus)	**51,0**	**35,4**	**11,3**	**2,2**

Annexe 149. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « la salle de classe n'est pas nettoyée assez souvent » (TIMSS 2015, TQG-08D)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	81,7	11,5	6	0,8
Corée du Sud	82,8	15,8	1,1	0,3
Floride	51	31,7	11,6	5,6
France	62,1	24,8	9,1	4,1
Hong Kong SAR	71,7	23,6	4,7	0
Irlande du Nord	82,8	11,9	5,3	0
Ontario	61,3	28,1	5,6	5,1
Québec	39	38,8	15,2	7
République d'Irlande	72,2	15,9	8,2	3,8
Singapour	59,6	29,4	8,1	2,9
Taipei chinois	54,5	39,9	5,6	0
Moyenne (corpus)	**65,3**	**24,7**	**7,3**	**2,7**

Annexe 150. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « la salle de classe n'est pas nettoyée assez souvent » (TIMSS 2015, TQG-08D)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	81	13,6	5,1	0,3
Corée du Sud	71,9	23,3	4,4	0,4
Floride	52,4	32,1	12	3,5
Hong Kong SAR	72	25,6	1,5	0,9
Ontario	67,3	20,1	8	4,7
Québec	68,5	20	8,8	2,7
République d'Irlande	68,1	17,6	10,8	3,5
Singapour	56,7	34,5	7,1	1,7
Taipei chinois	52,7	42,7	4,3	0,3
Moyenne (corpus)	**65,6**	**25,5**	**6,9**	**2,0**

Annexe 151. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « la salle de classe a besoin de travaux de maintenance » (TIMSS 2015, TQG-08E)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	65,7	28,2	4,7	1,3
Corée du Sud	54,1	33	10,1	2,9
Floride	50,9	28,4	13,6	7
France	39,2	31,1	21,9	7,8
Hong Kong SAR	31,1	53,8	13	2,2
Irlande du Nord	62,8	24	12	1,2
Ontario	59,6	30,5	6,9	3
Québec	44,8	29,8	18,7	6,7
République d'Irlande	59,3	26,3	8,3	6,1
Singapour	54,7	36,2	6,9	2,2
Taipei chinois	40,9	47,7	10,1	1,3
Moyenne (corpus)	**51,2**	**33,5**	**11,5**	**3,8**

Annexe 152. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « la salle de classe a besoin de travaux de maintenance » (TIMSS 2015, TQG-08E)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	50,1	36,8	8,4	4,6
Corée du Sud	38,2	41,1	18,3	2,4
Floride	56,7	30,5	9,1	3,7
Hong Kong SAR	30,5	57,8	11	0,8
Ontario	53,3	36,4	7	3,3
Québec	45,6	38,2	13,3	2,9
République d'Irlande	52,3	30,5	13,2	4
Singapour	48,5	42,7	7,4	1,5
Taipei chinois	40,3	52,5	6,8	0,3
Moyenne (corpus)	**46,2**	**40,7**	**10,5**	**2,6**

Annexe 153. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « les enseignants n'ont pas les ressources technologiques adéquates » (TIMSS 2015, TQG-08F)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	50,9	30,9	14,2	3,9
Corée du Sud	54,8	34,2	8,1	2,8
Floride	43,8	19,9	21,7	14,6
France	21,4	22,8	27	28,7
Hong Kong SAR	39,9	47	9,3	3,9
Irlande du Nord	60,2	30,1	5,9	3,8
Ontario	34,2	35,9	22	7,8
Québec	51,4	28,3	17,2	3
République d'Irlande	47,2	30,2	16,8	5,8
Singapour	56,3	35,5	7,4	0,7
Taipei chinois	46,8	39,5	10,3	3,5
Moyenne (corpus)	**46,1**	**32,2**	**14,5**	**7,1**

Annexe 154. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « les enseignants n'ont pas les ressources technologiques adéquates » (TIMSS 2015, TQG-08F)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	54,8	30,6	11,8	2,8
Corée du Sud	36,7	42,6	18,3	2,5
Floride	44,8	27,1	15,3	12,8
Hong Kong SAR	47,9	37,7	11,2	3,2
Ontario	32,4	42,4	18,3	6,9
Québec	53,6	39,1	6,3	1
République d'Irlande	55,7	30	11	3,3
Singapour	55,1	33,9	9,3	1,7
Taipei chinois	44	37,8	16,2	2
Moyenne (corpus)	**47,2**	**35,7**	**13,1**	**4,0**

Annexe 155. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « les enseignants n'ont pas le support adéquat pour l'utilisation de la technologie » (TIMSS 2015, TQG-08G)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	48,2	32,1	16,8	3
Corée du Sud	53,6	33,4	10,1	2,8
Floride	39,3	33	14,9	12,9
France	17,2	20,1	30,2	32,5
Hong Kong SAR	50,5	39,6	8,3	1,5
Irlande du Nord	53,8	23,6	20,6	2
Ontario	32,9	33,7	24,1	9,3
Québec	35,3	39,5	18,6	6,6
République d'Irlande	39,3	31,5	17,4	11,8
Singapour	56	35,4	7,7	0,9
Taipei chinois	45	42,7	9,5	2,8
Moyenne (corpus)	**42,8**	**33,1**	**16,2**	**7,8**

Annexe 156. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « les enseignants n'ont pas les ressources technologiques adéquates » (TIMSS 2015, TQG-08G)

Pays	Pas un problème	Problème mineur	Problème modéré	Serieux problème
Angleterre	54,2	29,8	14	2,1
Corée du Sud	37,8	41,4	18,2	2,7
Floride	54,9	29,3	7,3	8,5
Hong Kong SAR	46,4	38,6	13,4	1,6
Ontario	34,2	41,1	20,7	3,9
Québec	47,7	37,7	8,9	5,7
République d'Irlande	48,3	32,4	16,9	2,4
Singapour	53,7	34,5	10,5	1,3
Taipei chinois	40,9	41,8	15,1	2,3
Moyenne (corpus)	**46,5**	**36,3**	**13,9**	**3,4**

Annexe 157. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « cette école est située dans un quartier sûr » (TIMSS 2015, TQG-07A)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	65,2	23	9,5	2,4
Corée du Sud	57,3	35,9	6,5	0,3
Floride	60,8	23,4	10,2	5,5
France	54,4	31,9	9,6	4
Hong Kong SAR	82,9	15,9	1,1	0
Irlande du Nord	74,3	15,9	8,4	1,3
Ontario	72,5	21,8	5,2	0,6
Québec	64,6	28,9	6,4	0,1
République d'Irlande	76,6	14,2	7	2,2
Singapour	82,1	16,7	0,9	0,3
Taipei chinois	43	50,3	6,7	0
Moyenne (corpus)	**66,7**	**25,3**	**6,5**	**1,5**

Annexe 158. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « cette école est située dans un quartier sûr » (TIMSS 2015, TQG-07A)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	65,7	24,9	8,3	1,1
Corée du Sud	41,6	54,1	4,1	0,2
Floride	59,9	19,8	17,1	3,2
Hong Kong SAR	78,7	17,7	3,6	0
Ontario	70,3	21,7	5,7	2,3
Québec	66,4	29,9	3,8	0
République d'Irlande	80,7	10,7	7,4	1,2
Singapour	79,7	17,5	2,8	0
Taipei chinois	44,7	49,8	5,4	0
Moyenne (corpus)	**65,3**	**27,3**	**6,5**	**0,9**

Annexe 159. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « je me sens en sécurité dans cette école » (TIMSS 2015, TQG-07B)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	85,8	12,1	2,1	0
Corée du Sud	62,2	34,6	3,2	0
Floride	78	15,5	6,1	0,3
France	63,7	30,9	4,1	1,3
Hong Kong SAR	85,8	12,6	1,1	0,5
Irlande du Nord	94,2	4,8	0,9	0
Ontario	85,7	10,8	3,5	0
Québec	81,4	18,6	0	0
République d'Irlande	89,6	8	2	0,4
Singapour	84,2	15	0,8	0
Taipei chinois	53,2	42,7	3,4	0,6
Moyenne (corpus)	**78,5**	**18,7**	**2,5**	**0,3**

Annexe 160. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « je me sens en sécurité dans cette école » (TIMSS 2015, TQG-07B)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	87,4	11,5	0,8	0,3
Corée du Sud	41,1	56,5	2,2	0,2
Floride	71,9	24,9	1,9	1,3
Hong Kong SAR	85,3	12,9	1,6	0,2
Ontario	84,8	14,1	1,1	0
Québec	78,5	20	1,5	0
République d'Irlande	87,8	9,2	2,8	0,2
Singapour	80,2	17,6	1,8	0,3
Taipei chinois	59,5	38,6	1,6	0,3
Moyenne (corpus)	**75,2**	**22,8**	**1,7**	**0,3**

Annexe 161. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « les politiques et pratiques de cette école dans le domaine de la sécurité sont suffisantes » (TIMSS 2015, TQG-07C)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	81,2	18,2	0,7	0
Corée du Sud	53,2	44,8	2	0
Floride	60,7	20,5	18,6	0,3
France	43,2	43,3	11,8	1,7
Hong Kong SAR	64,6	33,1	1,8	0,1
Irlande du Nord	80,2	15,6	4,2	0
Ontario	74,9	20,5	2,8	1,8
Québec	66,2	32,3	1,5	0
République d'Irlande	77,8	14,6	6,3	1,4
Singapour	74,1	24,5	1,4	0
Taipei chinois	47,1	48,9	3,4	0,7
Moyenne (corpus)	**65,7**	**28,8**	**5,0**	**0,5**

Annexe 162. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « les politiques et pratiques de cette école dans le domaine de la sécurité sont suffisantes » (TIMSS 2015, TQG-07C)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	70,6	25,5	2,4	1,5
Corée du Sud	37,5	55,7	6,5	0,2
Floride	46,6	42,5	5,5	5,4
Hong Kong SAR	67,6	30,9	1,3	0,2
Ontario	66,2	29,8	4	0
Québec	56,4	35,9	7,7	0
République d'Irlande	66,5	22,7	9	1,8
Singapour	72	26,4	1,6	0
Taipei chinois	43,4	51,7	4,8	0
Moyenne (corpus)	**58,5**	**35,7**	**4,8**	**1,0**

Annexe 163. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « les élèves se comportent de façon disciplinée » (TIMSS 2015, TQG-07D)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	63,6	29,7	6,7	0
Corée du Sud	32,4	53,6	13,3	0,7
Floride	47,8	27,4	15	9,8
France	15,4	61,5	19,4	3,8
Hong Kong SAR	35,2	53,3	9,2	2,3
Irlande du Nord	74,5	20,2	5,2	0
Ontario	41,9	43,5	12,6	2
Québec	24,9	61,4	13,5	0,1
République d'Irlande	75,9	18,9	3,2	2
Singapour	35,5	52,3	10,5	1,6
Taipei chinois	17,7	63,2	16,7	2,4
Moyenne (corpus)	**42,3**	**44,1**	**11,4**	**2,2**

Annexe 164. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « les élèves se comportent de façon disciplinée » (TIMSS 2015, TQG-07D)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	38,5	47,4	10,8	3,3
Corée du Sud	21,3	57,6	20,2	0,8
Floride	27,6	38,9	23,4	10,1
Hong Kong SAR	37,8	50,6	11,4	0,2
Ontario	43,9	37,3	16,3	2,5
Québec	29,6	59,6	10,4	0,3
République d'Irlande	66,8	23,5	7,2	2,5
Singapour	45,1	43,7	10	1,3
Taipei chinois	20,1	64,7	13,3	2
Moyenne (corpus)	**36,7**	**47,0**	**13,7**	**2,6**

Annexe 165. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « les élèves sont respectueux envers les professeurs » (TIMSS 2015, TQG-07E)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	62,2	33,4	4	0,4
Corée du Sud	35,5	59,4	4,3	0,7
Floride	46	32,7	13,8	7,6
France	28,5	64	6,4	1,1
Hong Kong SAR	43,2	50,3	6,5	0
Irlande du Nord	76,8	22,2	0,9	0
Ontario	43,1	43,9	11,5	1,5
Québec	30,9	65,3	3,7	0
République d'Irlande	75,4	19,4	3,5	1,7
Singapour	42,7	49,5	7,7	0,1
Taipei chinois	20,6	70	8,1	1,3
Moyenne (corpus)	**45,9**	**46,4**	**6,4**	**1,3**

Annexe 166. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « les élèves sont respectueux envers les professeurs » (TIMSS 2015, TQG-07E)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	35,4	48,3	13,6	2,7
Corée du Sud	18,1	67,6	13,8	0,5
Floride	24,1	39,6	24,7	11,6
Hong Kong SAR	36,8	55,9	7,1	0,2
Ontario	47,5	37,1	14,4	1,1
Québec	35,3	58,1	6,4	0,2
République d'Irlande	62,1	28	7,8	2,2
Singapour	44,2	43,1	11,4	1,3
Taipei chinois	20,8	65,2	12,6	1,4
Moyenne (corpus)	**36,0**	**49,2**	**12,4**	**2,4**

Annexe 167. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « les élèves sont respectueux du matériel de l'école » (TIMSS 2015, TQG-07F)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	56,4	31,7	9,9	2,1
Corée du Sud	26,5	54,3	18	1,3
Floride	39,8	35	18,4	6,8
France	19,5	68,2	10,6	1,6
Hong Kong SAR	36,2	53,5	9,5	0,9
Irlande du Nord	74,1	23,7	2,2	0
Ontario	34,8	49,6	14,3	1,3
Québec	27,6	61,9	10,5	0
République d'Irlande	73,1	22,9	3,6	0,4
Singapour	41,1	49,1	9,7	0,1
Taipei chinois	11,1	65,7	21,1	2,1
Moyenne (corpus)	**40,0**	**46,9**	**11,6**	**1,5**

Annexe 168. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « les élèves sont respectueux du matériel de l'école » (TIMSS 2015, TQG-07F)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	25,9	46,5	21,4	6,2
Corée du Sud	9,4	54	34,4	2,1
Floride	20,3	27,8	36,7	15,3
Hong Kong SAR	19,8	56,9	21,6	1,7
Ontario	30,2	45,1	22,9	1,8
Québec	25,1	59,1	15,2	0,6
République d'Irlande	46,1	34,4	17	2,5
Singapour	37,8	45,6	13,9	2,7
Taipei chinois	14,9	62,6	19,5	3
Moyenne (corpus)	**25,5**	**48,0**	**22,5**	**4,0**

Annexe 169. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « cette école a des règles claires régissant la conduite des élèves » (TIMSS 2015, TQG-07G)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	81,7	15,3	2,9	0
Corée du Sud	46,2	49,2	4	0,6
Floride	58,6	26,8	12,3	2,3
France	46,1	48,4	5,1	0,4
Hong Kong SAR	60,3	34,5	4	1,2
Irlande du Nord	92,1	7,6	0,2	0
Ontario	53,5	33,4	12	1,1
Québec	56,5	34,2	9,3	0
République d'Irlande	82,5	14,4	3,1	0
Singapour	65,4	29,7	3,7	1,2
Taipei chinois	49	46,4	4,6	0
Moyenne (corpus)	**62,9**	**30,9**	**5,6**	**0,6**

Annexe 170. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « cette école a des règles claires régissant la conduite des élèves » (TIMSS 2015, TQG-07G)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	58,7	29	8,2	4,1
Corée du Sud	32,5	60,9	6,6	0
Floride	45,5	38,2	9,5	6,8
Hong Kong SAR	62,6	33,3	3,9	0,2
Ontario	52,8	34,4	10,7	2,1
Québec	46	46,7	6,4	0,8
République d'Irlande	75,5	20	4	0,6
Singapour	62,7	30,7	5,7	0,9
Taipei chinois	51,1	45,6	3,3	0
Moyenne (corpus)	**54,2**	**37,6**	**6,5**	**1,7**

Annexe 171. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « les règles de cette école sont appliquées de manière équitable et cohérente » (TIMSS 2015, TQG-07H)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	74,2	21,6	4,2	0
Corée du Sud	53,9	42,6	3,5	0
Floride	43,2	33,9	18,9	4
France	46,1	46	7,9	0
Hong Kong SAR	59,2	38	0,6	2,3
Irlande du Nord	88,3	10,2	1,5	0
Ontario	44,8	39,8	12,5	2,9
Québec	28,1	54,5	17,4	0
République d'Irlande	79,4	14,1	5,8	0,8
Singapour	59,3	34,2	5,1	1,4
Taipei chinois	44	48,9	7,1	0
Moyenne (corpus)	**56,4**	**34,9**	**7,7**	**1,0**

Annexe 172. Adhésion des ensignants de huitième année à la proposition « les règles de cette école sont appliquées de manière équitable et cohérente » (TIMSS 2015, TQG-07H)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	40,7	38	18,6	2,6
Corée du Sud	33,1	61	5,7	0,2
Floride	28,7	26,8	28,2	16,4
Hong Kong SAR	53,8	41,3	4,6	0,2
Ontario	38	39,5	17,3	5,2
Québec	25,5	53,5	17,2	3,8
République d'Irlande	61,2	27,4	9,3	2
Singapour	50,6	40,1	7,4	1,9
Taipei chinois	45,1	44,9	8,2	1,8
Moyenne (corpus)	**41,9**	**41,4**	**12,9**	**3,8**

Annexe 173. Nombre d'élèves par classe en quatrième année (TIMSS 2015, TQG-12A)

Pays	Nombre moyen d'élèves par classe	Nombre médian d'élèves par classe
Angleterre	26,9	29
Corée du Sud	25,5	26
Floride	21,5	21
France	24,4	25
Hong Kong SAR	27,3	27
Irlande du Nord	25,7	26
Ontario	24,5	24
Québec	22,5	23
République d'Irlande	25,8	26
Singapour	35,4	38
Taipei chinois	25	26
Moyenne (corpus)	**25,9**	**26,5**

Annexe 174. Nombre d'élèves de quatrième année par classe (TIMSS 2015, TQG-12B)

Pays	Nombre moyen d'élèves de 4e année par classe	Nombre médian d'élèves de 4e année par classe
Angleterre	25,1	28
Corée du Sud	25,4	26
Floride	21,2	21
France	19,8	22
Hong Kong SAR	27,4	27
Irlande du Nord	23,5	26
Ontario	20,7	22
Québec	21,1	23
République d'Irlande	22,3	24
Singapour	35,4	38
Taipei chinois	25	26
Moyenne (corpus)	**24,3**	**25,7**

Annexe 175. Nombre d'élèves par classe en huitième année (TIMSS 2015, TQG-12A)

Pays	Nombre moyen d'élèves par classe	Nombre médian d'élèves par classe
Angleterre	26,2	28
Corée du Sud	31,6	33
Floride	25,1	23
Hong Kong SAR	30,5	32
Ontario	26,1	27
Québec	27,9	28
République d'Irlande	24,3	26
Singapour	35,8	39
Taipei chinois	30,8	30
Moyenne (corpus)	**28,7**	**29,6**

Annexe 176. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « il y a trop d'élèves dans les classes » (TIMSS 2015, TQG-11A)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	12,6	47,1	19,6	20,6
Corée du Sud	17,6	33,7	40,4	8,3
Floride	11	44	20,9	24
France	51,6	35,6	11,5	1,3
Hong Kong SAR	15,2	40,1	34,6	10,1
Irlande du Nord	21,7	42,4	16,2	19,6
Ontario	34,1	36,2	17	12,6
Québec	51,7	26,5	18,8	3,1
République d'Irlande	54,3	25,3	11,4	8,9
Taipei chinois	16,4	44,4	29,8	9,5
Moyenne (corpus)	**28,6**	**37,5**	**22,0**	**11,8**

Annexe 177. Adhésion des ensignants de huitième année à la proposition « il y a trop d'élèves dans les classes » (TIMSS 2015, TQG-11A)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	19,8	47,1	20,5	12,6
Corée du Sud	33,1	45,3	20	1,5
Floride	30	28,8	31,2	10
Hong Kong SAR	18,9	49,2	23,6	8,4
Ontario	33,6	47	12,9	6,5
Québec	24,7	52,9	18,9	3,5
République d'Irlande	21,7	42	21,9	14,4
Taipei chinois	18	46,7	27,3	8
Moyenne (corpus)	**25,0**	**44,9**	**22,0**	**8,1**

Annexe 178. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « j'ai trop d'éléments à couvrir en classe » (TIMSS 2015, TQG-11B)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	32,3	42,3	18,3	7,1
Corée du Sud	29,9	47,4	20,4	2,3
Floride	45,9	40,8	9,8	3,5
France	62	35,3	2,7	0
Hong Kong SAR	17,1	52,6	27,8	2,5
Irlande du Nord	36,4	49,7	9,3	4,6
Ontario	50	36,7	10,5	2,8
Québec	39,8	34,3	25,3	0,6
République d'Irlande	49,1	39,9	7,6	3,4
Taipei chinois	20,7	55,9	20,9	2,4
Moyenne (corpus)	**38,3**	**43,5**	**15,3**	**2,9**

Annexe 179. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « j'ai trop d'éléments à couvrir en classe » (TIMSS 2015, TQG-11B)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	16,4	41	35,7	7
Corée du Sud	16,1	43,4	38,8	1,8
Floride	57,2	36,8	5,9	0,1
Hong Kong SAR	22,7	56	20,4	0,9
Ontario	39,8	42	15,8	2,5
Québec	24,2	30,4	36,9	8,5
République d'Irlande	36	48,9	10,6	4,5
Taipei chinois	11,9	51,4	29,8	6,9
Moyenne (corpus)	**28,0**	**43,7**	**24,2**	**4,0**

Annexe 180. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « j'ai trop d'heures d'enseignement » (TIMSS 2015, TQG-11C)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	18,8	34,2	32,5	14,6
Corée du Sud	25,1	45,7	27,1	2,2
Floride	6,6	21,4	36,6	35,5
France	9,5	27,7	50,7	12
Hong Kong SAR	6,9	23,7	41	28,5
Irlande du Nord	11,5	28,8	39,9	19,7
Ontario	3,5	18,5	42,6	35,4
Québec	11,6	15	54,4	19
République d'Irlande	1,9	20,4	44,6	33,2
Taipei chinois	4,3	31	51,3	13,4
Moyenne (corpus)	**10,0**	**26,6**	**42,1**	**21,4**

Annexe 181. Adhésion des enseignants de huitième année à la proposition « j'ai trop d'heures d'enseignement » (TIMSS 2015, TQG-11C)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	23,6	43,2	20,8	12,4
Corée du Sud	24,5	44,7	26,8	4
Floride	13,2	33,5	40,1	13,2
Hong Kong SAR	6,5	23,5	42,1	27,8
Ontario	4,9	16,9	49,2	29
Québec	11	20,2	49,2	19,6
République d'Irlande	13,2	31,6	34,9	20,3
Taipei chinois	8,8	27,5	50,3	13,5
Moyenne (corpus)	**13,2**	**30,1**	**39,2**	**17,5**

Annexe 182. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « j'ai besoin de plus de temps pour préparer ma classe » (TIMSS 2015, TQG-11D)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	36,7	47,3	13,1	2,9
Corée du Sud	26,8	56,9	14,5	1,8
Floride	51	36,4	7,4	5,2
France	35,3	52,8	10,1	1,8
Hong Kong SAR	36	48,1	13,2	2,7
Irlande du Nord	52,4	34,4	11,5	1,8
Ontario	26,3	46,5	20,5	6,6
Québec	48	40,8	8,8	2,4
République d'Irlande	32,5	42,7	18,6	6,2
Taipei chinois	13,3	56,1	24,9	5,7
Moyenne (corpus)	**35,8**	**46,2**	**14,3**	**3,7**

Annexe 183. Adhésion des ensignants de huitième année à la proposition « j'ai besoin de plus de temps pour préparer ma classe » (TIMSS 2015, TQG-11D)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	32,3	47,9	15,1	4,7
Corée du Sud	22,7	59,1	17,7	0,4
Floride	37,7	44,2	16,2	1,9
Hong Kong SAR	31	55	13,1	0,9
Ontario	27,3	43,1	22,6	7
Québec	21,7	51,1	21,4	5,8
République d'Irlande	33,9	42,7	15,7	7,7
Taipei chinois	12,5	45,4	37	5,1
Moyenne (corpus)	**27,4**	**48,6**	**19,9**	**4,2**

Annexe 184. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition j'ai besoin de plus de temps pour aider individuellement les élèves » (TIMSS 2015, TQG-11E)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	50,1	43,4	3,4	3
Corée du Sud	44,6	48,8	5,5	1,1
Floride	62,7	32,1	2,6	2,6
France	67	29,8	3,2	0
Hong Kong SAR	57,4	34,8	7,3	0,4
Irlande du Nord	64,2	32	2,5	1,3
Ontario	74,3	22,6	3,1	0
Québec	78,9	15,9	3,5	1,7
République d'Irlande	71,1	25,3	2,6	1
Taipei chinois	59,6	33,7	6	0,6
Moyenne (corpus)	**63,0**	**31,8**	**4,0**	**1,2**

Annexe 185. Adhésion des ensignants de huitième année à la proposition « j'ai besoin de plus de temps pour aider individuellement les élèves » (TIMSS 2015, TQG-11E)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	42,3	47,3	9,2	1,2
Corée du Sud	40,4	53,8	5,2	0,7
Floride	65,2	33,1	1,6	0
Hong Kong SAR	55,3	40,3	4,2	0,2
Ontario	60,1	38	1,9	0
Québec	59	37	4,1	0
République d'Irlande	56,5	38,9	4,1	0,5
Taipei chinois	39,7	55,6	3,3	1,3
Moyenne (corpus)	**52,3**	**43,0**	**4,2**	**0,5**

Annexe 186. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « je ressens trop de pression de la part des parents » (TIMSS 2015, TQG-11F)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	5,3	37,9	32,8	24,1
Corée du Sud	9,1	33,6	47,2	10,1
Floride	5,9	24,7	38,8	30,6
France	6,6	29,2	53,4	10,7
Hong Kong SAR	13,5	50,8	28,4	7,3
Irlande du Nord	6	40,2	30,3	23,6
Ontario	4,2	31,6	42,6	21,6
Québec	9,1	37,2	49,6	4
République d'Irlande	6,4	27,9	35	30,7
Taipei chinois	10,3	39,7	42,5	7,5
Moyenne (corpus)	**7,6**	**35,3**	**40,1**	**17,0**

Annexe 187. Adhésion des ensignants de huitième année à la proposition « je ressens trop de pression de la part des parents » (TIMSS 2015, TQG-11F)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	5,1	25	46,6	23,3
Corée du Sud	3,5	30,1	54,7	11,7
Floride	2,2	31,8	39,2	26,8
Hong Kong SAR	5,6	31,4	44	19,1
Ontario	5	28,9	41,2	24,9
Québec	4,5	24,6	58,1	12,7
République d'Irlande	5,6	28,3	45,7	20,3
Taipei chinois	4,2	24,9	55	15,9
Moyenne (corpus)	**4,5**	**28,1**	**48,1**	**19,3**

Annexe 188. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « j'ai des difficultés à suivre avec tous les changements apportés aux programmes » (TIMSS 2015, TQG-11G)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	22,8	40,9	27,4	8,9
Corée du Sud	8,8	30,7	50,8	9,7
Floride	30,7	35,2	24,2	9,9
France	13,8	48	35,6	2,6
Hong Kong SAR	4,8	38	42,8	14,3
Irlande du Nord	17	38,8	28,2	16
Ontario	14,9	41,3	30,3	13,5
Québec	12,2	21,4	49,2	17,2
République d'Irlande	8,5	41,6	30,3	19,6
Taipei chinois	0,6	15,7	56,1	27,7
Moyenne (corpus)	**13,4**	**35,2**	**37,5**	**13,9**

Annexe 189. Adhésion des ensignants de huitième année à la proposition « j'ai des difficultés à suivre avec tous les changements apportés aux programmes » (TIMSS 2015, TQG-11G)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	16,6	43,4	24,3	15,6
Corée du Sud	6,2	34,7	51	8,2
Floride	30,2	44,2	16,4	9,3
Hong Kong SAR	1,4	26	44,1	28,5
Ontario	6,2	28,9	46,3	18,6
Québec	3,1	8,7	55,4	32,8
République d'Irlande	7,7	41,7	33	17,6
Taipei chinois	1,5	11,4	53,3	33,7
Moyenne (corpus)	**9,1**	**29,9**	**40,5**	**20,5**

Annexe 190. Adhésion des enseignants de quatrième année à la proposition « j'ai trop de tâches administratives » (TIMSS 2015, TQG-11H)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	55,9	31,7	9,3	3,1
Corée du Sud	32	40	25,2	2,8
Floride	35	26	28,1	11
France	44,1	36,6	17	2,3
Hong Kong SAR	29,1	40	25,8	5,1
Irlande du Nord	56,8	33,2	7	3
Ontario	17,6	44,1	21,9	16,4
Québec	28,5	35,3	26,1	10,2
République d'Irlande	36,1	38	15,7	10,2
Taipei chinois	5,6	29	37,2	28,2
Moyenne (corpus)	**34,1**	**35,4**	**21,3**	**9,2**

Annexe 191. Adhésion des ensignants de huitième année à la proposition « j'ai trop de tâches administratives » (TIMSS 2015, TQG-11H)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord
Angleterre	40,6	45,8	9,2	4,4
Corée du Sud	36,6	44,6	17,7	1,1
Floride	22,2	26	42,1	9,7
Hong Kong SAR	27,7	37,5	28,6	6,2
Ontario	24,2	26,4	33,3	16,2
Québec	17,9	36,9	36,3	8,9
République d'Irlande	23,3	38,3	25	13,5
Taipei chinois	7,7	21,8	37,1	33,5
Moyenne (corpus)	**25,0**	**34,7**	**28,7**	**11,7**

Annexe 192. Estimation par les enseignants de quatrième année de « l'implication des parents dans les activités de l'école » (TIMSS 2015, TQG-06F)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	9,1	33,1	37,1	15,9	4,8
Corée du Sud	23,7	36,9	30,7	7,7	1,1
Floride	18,2	20,8	23,2	28	9,8
France	2,2	24,8	46,9	21,5	4,5
Hong Kong SAR	8,4	33	49,2	8,4	1
Irlande du Nord	16,7	39	35,1	4,3	4,8
Ontario	15,7	27,1	35,1	16	6,1
Québec	23,6	37,4	29,8	8	1,2
République d'Irlande	14,7	34,6	34,9	13,9	1,9
Singapour	7	34,2	45,1	12,6	1,1
Taipei chinois	8	33,1	45	13,3	0,5
Moyenne (corpus)	**13,4**	**32,2**	**37,5**	**13,6**	**3,3**

Annexe 193. Estimation par les enseignants de huitième année de « l'implication des parents dans les activités de l'école » (TIMSS 2015, TQG-06F)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	5	32,1	41,7	20,9	1,3
Corée du Sud	16,1	37,9	34,3	9,5	2,2
Floride	5,8	24	25,6	26,9	17,8
Hong Kong SAR	1	31,5	35,7	27,8	4
Ontario	8,8	19,5	47	15,5	9,2
Québec	13,6	30,5	29,9	17,4	8,7
République d'Irlande	6,5	22,5	46,4	20,8	3,7
Singapour	5,4	26,6	46,5	19,1	2,4
Taipei chinois	6,6	24,2	47,2	16,5	5,4
Moyenne (corpus)	**7,6**	**27,6**	**39,4**	**19,4**	**6,1**

Annexe 194. Estimation par les enseignants de quatrième année de « l'engagement des parents pour s'assurer que les élèves sont prêts à apprendre » (TIMSS 2015, TQG-06G)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	8,3	34	37,1	15	5,5
Corée du Sud	20,9	33,8	33,6	10,2	1,6
Floride	13,3	17,9	25,1	32,4	11,4
France	2,8	20,9	52,4	19,7	4,2
Hong Kong SAR	4,9	29,9	49,2	13,8	2,2
Irlande du Nord	16,2	40,2	30,9	12,7	0
Ontario	8,4	33,1	38,9	17,6	2,1
Québec	36,3	38,7	18,2	5,4	1,3
République d'Irlande	12,7	43	36,7	5,9	1,8
Singapour	7	31,5	47	13,5	1,1
Taipei chinois	2,8	22,4	50,4	21,9	2,6
Moyenne (corpus)	**12,1**	**31,4**	**38,1**	**15,3**	**3,1**

Annexe 195. Estimation par les enseignants de huitième année de « l'engagement des parents pour s'assurer que les élèves sont prêts à apprendre » (TIMSS 2015, TQG-06G)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	7,6	27,2	49	14,3	1,9
Corée du Sud	11	28,3	44,3	13,5	3
Floride	3,6	21,7	29,4	25,2	20,1
Hong Kong SAR	0,4	20,1	48,3	28,2	3,1
Ontario	5	21	51,2	16,6	6,2
Québec	20,9	33,5	30,6	14	0,9
République d'Irlande	7,7	34,7	41,6	13,8	2,3
Singapour	3,9	29,6	48,8	15,1	2,5
Taipei chinois	1,5	22	41,5	26,2	8,7
Moyenne (corpus)	**6,8**	**26,5**	**42,7**	**18,5**	**5,4**

Annexe 196. Estimation par les enseignants de quatrième année « des attentes des parents quant à la réussite des élèves » (TIMSS 2015, TQG-06H)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	18,4	39,7	27,3	13,3	1,3
Corée du Sud	45,1	38,8	15,5	0,6	0
Floride	17,5	26,4	31,6	18,3	6,2
France	20,1	45,5	29,6	4,1	0,8
Hong Kong SAR	15,9	55,9	24,8	3,5	0
Irlande du Nord	26,9	44,6	23,3	5,2	0
Ontario	17,7	34,2	39,2	7,9	1,1
Québec	32,4	47	19,4	1,1	0,1
République d'Irlande	23,2	47,6	24,9	4,3	0
Singapour	13,9	45,6	36,2	3,7	0,5
Taipei chinois	6,3	61,3	29,4	2,4	0,6
Moyenne (corpus)	**21,6**	**44,2**	**27,4**	**5,9**	**1,0**

Annexe 197. Estimation par les enseignants de huitième année « des attentes des parents quant à la réussite des élèves » (TIMSS 2015, TQG-06H)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	18,7	33,1	40,8	6	1,3
Corée du Sud	32	41,2	21	5,7	0,1
Floride	5,8	24,7	34	21,2	14,3
Hong Kong SAR	6,8	39,6	44,9	8,4	0,2
Ontario	12,3	31,3	43,8	8,5	4
Québec	44,8	32,8	17,2	4,9	0,4
République d'Irlande	24,4	43,1	24,7	7,6	0,1
Singapour	12,3	48,6	33,5	5,1	0,5
Taipei chinois	13,5	33,1	38,5	12,8	2,1
Moyenne (corpus)	**19,0**	**36,4**	**33,2**	**8,9**	**2,6**

Annexe 198. Estimation par les enseignants de quatrième année « du support des parents pour la réussite des élèves » (TIMSS 2015, TQG-06I)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	9,5	27,8	44,5	15,6	2,5
Corée du Sud	24,5	36	32,5	6,6	0,4
Floride	11,9	18,1	34,3	26,8	8,9
France	3,9	28,4	54,9	9,5	3,3
Hong Kong SAR	5,1	33,8	40,2	17,9	3
Irlande du Nord	16,4	43,3	30,1	10,2	0
Ontario	9,5	28,4	42,8	17,5	1,8
Québec	33	34,4	27,5	4,4	0,6
République d'Irlande	15,2	43,8	35,9	5,1	0
Singapour	6,8	36,3	43,7	12	1,2
Taipei chinois	3,6	49,4	39,2	6,7	1,1
Moyenne (corpus)	**12,7**	**34,5**	**38,7**	**12,0**	**2,1**

Annexe 199. Estimation par les enseignants de huitième année « du support des parents pour la réussite des élèves » (TIMSS 2015, TQG-06I)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	8,5	35,9	46,4	8,3	0,8
Corée du Sud	17	35,9	38,4	7,2	1,5
Floride	4,1	20,2	31,9	27,2	16,7
Hong Kong SAR	1,9	24,6	42,5	27,1	3,9
Ontario	7,3	25	51	10,6	6,1
Québec	31,6	33,4	21,9	12,1	1
République d'Irlande	9,2	44,6	37,1	9,1	0
Singapour	3,5	36,9	46,1	12,7	0,8
Taipei chinois	7,4	32,4	44,1	13,6	2,5
Moyenne (corpus)	**10,1**	**32,1**	**39,9**	**14,2**	**3,7**

Annexe 200. Estimation par les enseignants de quatrième année à propos de « la pression des parents pour que l'école maintienne un haut niveau d'exigences académiques » (TIMSS 2015, TQG-06J)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	19	36,8	29,2	12,1	2,8
Corée du Sud	17,2	31,2	43,2	8,1	0,3
Floride	16,8	26,6	31,4	22,3	2,9
France	8,2	27,3	40,3	20	4,3
Hong Kong SAR	7,3	36,1	53,9	1,6	1,1
Irlande du Nord	23,1	41,6	29,6	5,6	0
Ontario	13,1	35,7	30,7	17,5	3
Québec	16,5	30,2	46,8	6,1	0,3
République d'Irlande	12,8	40,3	37,6	7,2	2
Singapour	9,6	44,9	37,9	6,9	0,7
Taipei chinois	3,9	28,6	55,1	11,8	0,6
Moyenne (corpus)	**13,4**	**34,5**	**39,6**	**10,8**	**1,6**

Annexe 201. Estimation par les enseignants de huitième année à propos de « la pression des parents pour que l'école maintienne un haut niveau d'exigences académiques » (TIMSS 2015, TQG-06J)

Pays	Très haute	Haute	Moyenne	Basse	Très basse
Angleterre	17,7	35,4	33,6	11,3	2
Corée du Sud	11,8	27,2	49,2	10	1,7
Floride	9,6	22,9	34,6	19,3	13,5
Hong Kong SAR	3,6	22,8	54,3	16,3	3,1
Ontario	16,8	19,9	45	10,4	7,9
Québec	24,1	38,1	23,6	9,6	4,6
République d'Irlande	20,2	43	26,5	8,8	1,5
Singapour	7,8	44	39,2	7,3	1,6
Taipei chinois	4,8	26,4	49,9	14,3	4,7
Moyenne (corpus)	**12,9**	**31,1**	**39,5**	**11,9**	**4,5**

Annexe 202. Incidence, selon les professeurs de quatrième année, du « manque de capacités ou de connaissances des élèves » sur leur enseignement (TIMSS 2015, TQG-015A)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	19,6	58,3	22,1
Corée du Sud	33,3	60,6	6,1
Floride	8,5	58,1	33,4
France	7	54,1	38,9
Hong Kong SAR	20,9	73,4	5,7
Irlande du Nord	21,2	66,9	11,9
Ontario	15,7	62,8	21,4
Québec	20,3	60,9	18,8
République d'Irlande	25,3	64,6	10
Singapour	20,7	64,6	14,7
Taipei chinois	11,1	70	18,9
Moyenne (corpus)	**18,5**	**63,1**	**18,4**

Annexe 203. Incidence, selon les enseignants de huitième année, du « manque de capacités ou de connaissances des élèves » sur leur enseignement (TIMSS 2015, TQG-15A)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	15,1	67,3	17,6
Corée du Sud	27,2	63,8	9
Floride	4,7	22,8	72,5
Hong Kong SAR	9,4	68,7	22
Ontario	7,1	68,5	24,4
Québec	22,1	56,7	21,2
République d'Irlande	9,1	62,3	28,6
Singapour	11,6	71,2	17,1
Taipei chinois	9,9	54,3	35,8
Moyenne (corpus)	**12,9**	**59,5**	**27,6**

Annexe 204. Incidence, selon les enseignants de quatrième année, des « élèves souffrant de malnutrition » (TIMSS 2015, TQG-015B)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	63,3	34,9	1,8
Corée du Sud	78,4	20,9	0,7
Floride	60,6	33,9	5,5
France	85,7	12,7	1,6
Hong Kong SAR	86,5	12,3	1,2
Irlande du Nord	74,6	23,9	1,5
Ontario	62,4	34,3	3,2
Québec	66,4	31,6	2
République d'Irlande	74,6	23,9	1,5
Singapour	77,9	21,4	0,8
Taipei chinois	64,7	29,7	5,6
Moyenne (corpus)	**72,3**	**25,4**	**2,3**

Annexe 205. Incidence, selon les enseignants de huitième année, des « élèves souffrant de malnutrition » (TIMSS 2015, TQG-15B)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	73,9	25,9	0,2
Corée du Sud	67,8	27,6	4,6
Floride	49,7	44,2	6,1
Hong Kong SAR	76,7	20,3	3,1
Ontario	64,1	33,8	2,1
Québec	62,6	34,7	2,7
République d'Irlande	79	17,2	3,8
Singapour	86,8	11,8	1,3
Taipei chinois	62,7	30	7,3
Moyenne (corpus)	**69,3**	**27,3**	**3,5**

Annexe 206. Incidence, selon les enseignants de quatrième année, des « élèves souffrant d'un manque de sommeil » (TIMSS 2015, TQG-015C)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	32,1	57,8	10,1
Corée du Sud	59,1	37,3	3,6
Floride	18,3	66,1	15,6
France	16,1	61,1	22,8
Hong Kong SAR	45,8	52,8	1,3
Irlande du Nord	31,6	60,4	8
Ontario	30,1	60	9,9
Québec	35,3	50,3	14,4
République d'Irlande	37,8	58,8	3,4
Singapour	50,4	46,4	3,3
Taipei chinois	36,3	50,1	13,6
Moyenne (corpus)	**35,7**	**54,6**	**9,6**

Annexe 207. Incidence, selon les enseignants de huitième année, des « élèves souffrant d'un manque de sommeil » (TIMSS 2015, TQG-15C)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	39,5	51,7	8,8
Corée du Sud	30,6	53	16,5
Floride	20,7	64,2	15,1
Hong Kong SAR	14,9	69,1	16
Ontario	22,9	62,2	14,9
Québec	34,9	47,6	17,5
République d'Irlande	34,3	58,8	6,9
Singapour	31,1	60,4	8,5
Taipei chinois	25	59	16
Moyenne (corpus)	**28,2**	**58,4**	**13,4**

Annexe 208. Incidence, selon les enseignants de quatrième année, des « élèves perturbateurs » (TIMSS 2015, TQG-015D)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	42,2	47,9	9,9
Corée du Sud	11,8	54,3	33,8
Floride	18,9	60,9	20,2
France	21,6	44,4	34
Hong Kong SAR	29,1	65	5,9
Irlande du Nord	44	47,4	8,6
Ontario	11	66,9	22,1
Québec	16,5	58,9	24,6
République d'Irlande	41,2	52	6,8
Singapour	22,1	62,8	15,1
Taipei chinois	21,7	51,1	27,2
Moyenne (corpus)	**25,5**	**55,6**	**18,9**

Annexe 209. Incidence, selon les enseignants de huitième année, des « élèves perturbateurs » (TIMSS 2015, TQG-15D)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	31,4	50,8	17,8
Corée du Sud	9,2	51,4	39,4
Floride	20,3	50,9	28,8
Hong Kong SAR	40,2	54,3	5,6
Ontario	26,8	58,8	14,4
Québec	41,8	42,5	15,7
République d'Irlande	53,8	34,3	11,8
Singapour	31,5	58,4	10,1
Taipei chinois	31,9	47,3	20,8
Moyenne (corpus)	**31,9**	**49,9**	**18,3**

Annexe 210. Incidence, selon les enseignants de quatrième année, des « élèves non intéressés » (TIMSS 2015, TQG-015E)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	42,4	51,4	6,1
Corée du Sud	20,6	59,2	20,2
Floride	15,7	61,4	22,9
France	14,2	60	25,8
Hong Kong SAR	29,8	65,1	5,2
Irlande du Nord	26,3	67,5	6,2
Ontario	18,6	71,2	10,3
Québec	25,1	64,1	10,8
République d'Irlande	32,1	64	3,9
Singapour	21,3	67,4	11,3
Taipei chinois	11,2	66,3	22,4
Moyenne (corpus)	**23,4**	**63,4**	**13,2**

Annexe 211. Incidence, selon les enseignants de huitième année, des « élèves non intéressés » (TIMSS 2015, TQG-15E)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	28,2	57,9	13,9
Corée du Sud	12,7	62,1	25,2
Floride	10,2	40,8	49,1
Hong Kong SAR	11,8	71,6	16,6
Ontario	15,1	68,1	16,8
Québec	16,9	64,7	18,4
République d'Irlande	22,1	64,3	13,6
Singapour	16,2	74,4	9,4
Taipei chinois	7,5	45,7	46,8
Moyenne (corpus)	**15,6**	**61,1**	**23,3**

Annexe 212. Incidence, selon les enseignants de quatrième année, des « élèves avec un handicap physique » (TIMSS 2015, TQG-015F)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	86,7	12,3	1
Corée du Sud	76,6	21,2	2,2
Floride	86,1	13,9	0
France	94,3	5,7	0
Hong Kong SAR	97,8	2,2	0
Irlande du Nord	93,8	6,2	0
Ontario	85,8	14	0,2
Québec	80,8	17,9	1,3
République d'Irlande	86,8	12,9	0,3
Singapour	88,5	10,9	0,7
Taipei chinois	88,4	11	0,7
Moyenne (corpus)	**87,8**	**11,7**	**0,6**

Annexe 213. Incidence, selon les enseignants de huitième année, des « élèves avec un handicap physique » (TIMSS 2015, TQG-15F)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	97,1	2,8	0,1
Corée du Sud	80,5	18,4	1,1
Floride	79,1	20,9	0
Hong Kong SAR	91,5	6,9	1,5
Ontario	93,5	6,5	0
Québec	92,9	7,1	0
République d'Irlande	92,8	6,7	0,5
Singapour	89	10,7	0,3
Taipei chinois	94,4	5,1	0,5
Moyenne (corpus)	**90,1**	**9,5**	**0,4**

Annexe 214. Incidence, selon les enseignants de quatrième année, des « élèves avec un handicap mental, émotionnel ou psychologique » (TIMSS 2015, TQG-015G)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	39,6	55,3	5,2
Corée du Sud	37,7	45,1	17,2
Floride	37	58,5	4,4
France	51,4	38,9	9,7
Hong Kong SAR	50,7	48,1	1,3
Irlande du Nord	55,8	39,1	5,1
Ontario	27,7	63,2	9,1
Québec	29	61,4	9,6
République d'Irlande	51,7	42,2	6,1
Singapour	52,6	43,3	4,1
Taipei chinois	26,2	52	21,8
Moyenne (corpus)	**41,8**	**49,7**	**8,5**

Annexe 215. Incidence, selon les enseignants de huitième année, des « élèves avec un handicap mental, émotionnel ou psychologique » (TIMSS 2015, TQG-15G)

Pays	Pas du tout	En partie	Beaucoup
Angleterre	56,4	38,3	5,3
Corée du Sud	30	62,5	7,4
Floride	37,9	53,5	8,7
Hong Kong SAR	61,2	36,4	2,4
Ontario	38,1	54,5	7,4
Québec	54,4	42,9	2,7
République d'Irlande	53,3	43,1	3,6
Singapour	59,1	39,6	1,3
Taipei chinois	50,7	43,7	5,5
Moyenne (corpus)	**49,0**	**46,1**	**4,9**

Annexe 216. En quatrième année « les élèves sont-ils autorisés à utiliser une calculatrice pendant les cours de mathématiques ?» (TIMSS 2015, TQM-04)

Pays	Oui, sans restriction	Oui, mais de manière restreinte	Non
Angleterre	2,1	73,2	24,7
Corée du Sud	0,3	43,2	56,5
Floride	0	18,9	81,1
France	2,3	81,2	16,5
Hong Kong SAR	0,6	20,7	78,7
Irlande du Nord	3,8	83,9	12,3
Ontario	2	84,8	13,2
Québec	0	55,2	44,8
République d'Irlande	1,6	70,7	27,7
Singapour	0,4	3	96,6
Taipei chinois	0,8	15,6	83,6
Moyenne (corpus)	**1,3**	**50,0**	**48,7**

Annexe 217. En huitième année « les élèves sont-ils autorisés à utiliser une calculatrice pendant les cours de mathématiques ?» (TIMSS 2015, TQM-19)

Pays	Oui, sans restriction	Oui, mais de manière restreinte	Non
Angleterre	10	89,5	0,6
Corée du Sud	3	35,1	61,8
Floride	35,9	64,1	0
Hong Kong SAR	80,2	19,8	0
Ontario	49,8	49,3	0,8
Québec	81,5	18,1	0,3
République d'Irlande	72	26,7	1,3
Singapour	89,6	10,4	0
Taipei chinois	8,8	30,8	60,3
Moyenne (corpus)	**47,9**	**38,2**	**13,9**

Annexe 218. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent demander aux élèves de « les écouter expliquer un contenu mathématique nouveau » (TIMSS 2015, TQM-03A)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	55,2	35,8	8,7	0,3
Corée du Sud	59,7	28,8	11,5	0
Floride	58,9	23,6	11,8	5,7
France	32,9	43,8	19,4	3,9
Hong Kong SAR	47,8	36,2	16	0
Irlande du Nord	66,2	28	4,9	0,9
Ontario	39,5	34,5	24,9	1,2
Québec	59,8	29,7	10,5	0
République d'Irlande	72,9	20,1	6,6	0,4
Singapour	34,5	52,2	12,4	0,9
Taipei chinois	39,8	50	10,1	0
Moyenne (corpus)	**51,6**	**34,8**	**12,4**	**1,2**

Annexe 219. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent demander aux élèves de « les écouter expliquer un contenu mathématique nouveau » (TIMSS 2015, TQM-18A)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	66	23	10,4	0,6
Corée du Sud	62,8	28,4	8,1	0,7
Floride	58,2	26	15,8	0
Hong Kong SAR	47,9	34,5	16,8	0,8
Ontario	43,7	31	25,3	0
Québec	70,7	26,3	3	0
République d'Irlande	61,6	29,4	9	0
Singapour	52,3	33,6	14,1	0
Taipei chinois	50	39,7	10,3	0
Moyenne (corpus)	**57,0**	**30,2**	**12,5**	**0,2**

Annexe 220. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent demander aux élèves de « les écouter expliquer comment résoudre un problème mathématique » (TIMSS 2015, TQM-04)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	45,1	37,7	16,1	1,1
Corée du Sud	64,1	28,5	7,5	0
Floride	56,4	23,1	14,8	5,7
France	18,5	36,5	40,5	4,5
Hong Kong SAR	33,2	43,1	23,7	0
Irlande du Nord	52,1	32,6	14,5	0,9
Ontario	32,2	27,5	37,4	2,9
Québec	50,2	32,5	17,2	0,1
République d'Irlande	56,6	26,5	16,5	0,4
Singapour	32	49,8	17,9	0,3
Taipei chinois	36,4	51,5	12,1	0
Moyenne (corpus)	**43,3**	**35,4**	**19,8**	**1,4**

Annexe 221. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent demander aux élèves de « les écouter expliquer comment résoudre un problème mathématique » (TIMSS 2015, TQM-18A)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	57,8	25,3	16,3	0,6
Corée du Sud	67,9	27,7	4	0,4
Floride	58,7	26,3	15	0
Hong Kong SAR	41,3	36	21,9	0,8
Ontario	30,8	34,5	33,1	1,6
Québec	62,7	25,7	11,7	0
République d'Irlande	52,9	28,8	17,8	0,4
Singapour	45,2	38,4	16,3	0
Taipei chinois	45	45,2	9,7	0
Moyenne (corpus)	**51,4**	**32,0**	**16,2**	**0,4**

Annexe 222. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « relier la leçon à la vie quotidienne des élèves » (TIMSS 2015, TQM-14A)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	39,4	42,6	18	0
Corée du Sud	58,6	35,2	6,2	0
Floride	69,6	22,5	7,9	0
France	29,5	34,8	35,3	0,4
Hong Kong SAR	21	32,8	46,1	0
Irlande du Nord	40,9	46,8	12,2	0
Ontario	50,7	39,7	9,6	0
Québec	42,9	38	19,1	0
République d'Irlande	54	33,2	12,8	0
Singapour	36,1	35,5	28,4	0,1
Taipei chinois	45,3	35,4	19,3	0
Moyenne (corpus)	**44,4**	**36,0**	**19,5**	**0,0**

Annexe 223. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « relier la leçon à la vie quotidienne des élèves » (TIMSS 2015, TQM-14A)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	14	36,6	48,1	1,4
Corée du Sud	12,6	37,9	47	2,5
Floride	41,6	21,2	36,3	0,9
Hong Kong SAR	6,3	23	70,1	0,6
Ontario	51,3	30,9	17,9	0
Québec	26,5	27,7	43,7	2,1
République d'Irlande	27,9	32,3	39,8	0,1
Singapour	20,9	33,2	45,6	0,3
Taipei chinois	14,3	30,7	54,7	0,4
Moyenne (corpus)	**23,9**	**30,4**	**44,8**	**0,9**

Annexe 224. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « demander aux élèves d'expliquer leurs réponses » (TIMSS 2015, TQM-14B)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	88,4	10,5	1,1	0
Corée du Sud	49,5	31,5	19,1	0
Floride	87	11,9	1,1	0
France	81,1	15,5	3,5	0
Hong Kong SAR	48,1	32,9	19	0
Irlande du Nord	83,7	13,7	2,6	0
Ontario	81,3	15,9	2,8	0
Québec	71,1	22,7	6,2	0
République d'Irlande	66,4	27,7	5,8	0
Singapour	48,2	37,3	14,5	0
Taipei chinois	24	42,7	33,3	0
Moyenne (corpus)	**66,3**	**23,8**	**9,9**	**0,0**

Annexe 225. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « demander aux élèves d'expliquer leurs réponses » (TIMSS 2015, TQM-14B)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	84,6	13,7	1,7	0
Corée du Sud	30	33,8	35,8	0,4
Floride	70	25,7	4,3	0
Hong Kong SAR	22	40,4	37,6	0
Ontario	74,9	22,6	2,5	0
Québec	66,1	23,1	10,8	0
République d'Irlande	60,4	26,1	13,6	0
Singapour	34,9	38,1	27	0
Taipei chinois	26,1	29,3	44,2	0,4
Moyenne (corpus)	**52,1**	**28,1**	**19,7**	**0,1**

Annexe 226. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « apporter du matériel intéressant en classe » (TIMSS 2015, TQM-14C)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	21,4	52,2	25,1	1,4
Corée du Sud	32,2	52,7	15,2	0
Floride	31,5	49,6	18,9	0
France	7,2	25	66	1,8
Hong Kong SAR	13,1	40,6	46,3	0
Irlande du Nord	15,6	37,9	46,5	0
Ontario	13,3	52,9	33,5	0,2
Québec	17,1	38,6	44,4	0
République d'Irlande	14	47,3	38,7	0
Singapour	8,3	43,7	47,8	0,3
Taipei chinois	24,8	32,8	42,5	0
Moyenne (corpus)	**18,0**	**43,0**	**38,6**	**0,3**

Annexe 227. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « demander aux élèves de travailler sur des exercices difficiles qui les obligent à aller au-delà du programme » (TIMSS 2015, TQM-14D)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	50,3	40,3	9,4	0
Corée du Sud	13,3	36,5	48,1	2,1
Floride	45,1	39,9	15	0
France	4,3	21,4	64,6	9,7
Hong Kong SAR	10,1	28,3	61,7	0
Irlande du Nord	21,2	32,1	44,5	2,3
Ontario	17	48,3	34,2	0,6
Québec	11,1	25,5	57,2	6,1
République d'Irlande	17,6	46,4	35,1	0,8
Singapour	14,9	36,2	45,3	3,6
Taipei chinois	6,8	11,3	74,2	7,7
Moyenne (corpus)	**19,2**	**33,3**	**44,5**	**3,0**

Annexe 228. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « demander aux élèves de travailler sur des exercices difficiles qui les obligent à aller au-delà du programme » (TIMSS 2015, TQM-14C)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	43,1	27,4	28,1	1,3
Corée du Sud	12,5	38,8	44,6	4
Floride	29,8	43,8	26,4	0
Hong Kong SAR	5,4	24,3	65,7	4,6
Ontario	34,2	49,8	15,9	0
Québec	10	22,1	64,2	3,7
République d'Irlande	17,7	43,4	35,4	3,5
Singapour	14,9	31,7	51,3	2,1
Taipei chinois	2,5	13	74	10,5
Moyenne (corpus)	**18,9**	**32,7**	**45,1**	**3,3**

Annexe 229. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « encourager les discussions entre les élèves au sein de la classe » (TIMSS 2015, TQM-14E)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	87,4	9,9	2,7	0
Corée du Sud	16,5	43	36,9	3,6
Floride	82,3	15,2	2,5	0
France	35,5	32,8	31,5	0,3
Hong Kong SAR	18,3	39,1	41,5	1
Irlande du Nord	58,5	37,5	4,1	0
Ontario	64,4	30,5	5	0,2
Québec	33	44,9	22,2	0
République d'Irlande	58	32,4	9,3	0,2
Singapour	27,2	42,5	29,9	0,4
Taipei chinois	27,6	36,4	35,2	0,7
Moyenne (corpus)	**46,2**	**33,1**	**20,1**	**0,6**

Annexe 230. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « encourager les discussions entre les élèves au sein de la classe » (TIMSS 2015, TQM-14D)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	44,9	29,7	23,1	2,3
Corée du Sud	11,9	22,6	57,9	7,5
Floride	52,5	30,6	16	0,8
Hong Kong SAR	13,8	32,9	47,4	5,9
Ontario	71,2	17,4	11,4	0
Québec	11,5	24,1	49,6	14,8
République d'Irlande	26,4	29,3	39,4	4,9
Singapour	21	36,6	41	1,4
Taipei chinois	20,2	27,9	50,1	1,8
Moyenne (corpus)	**30,4**	**27,9**	**37,3**	**4,4**

Annexe 231. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « relier un nouveau contenu aux connaissances préalables des élèves » (TIMSS 2015, TQM-14F)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	83,8	15,3	0,9	0
Corée du Sud	43	40,1	16,8	0,1
Floride	88,3	10,7	1,1	0
France	70,6	22,8	6,6	0
Hong Kong SAR	40,1	36,6	23,3	0
Irlande du Nord	86	12,9	1,2	0
Ontario	71,5	26,4	2,1	0
Québec	71,2	24,1	4,7	0
République d'Irlande	76,7	18,9	4,4	0
Singapour	50,8	36,7	12,5	0
Taipei chinois	48,4	38,1	13,4	0
Moyenne (corpus)	**66,4**	**25,7**	**7,9**	**0,0**

Annexe 232. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « relier un nouveau contenu aux connaissances préalables des élèves » (TIMSS 2015, TQM-14E)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	79	17	3,9	0
Corée du Sud	32,3	30,6	33,1	4,1
Floride	76,4	21,1	2,5	0
Hong Kong SAR	34,9	44,6	19,9	0,6
Ontario	77,4	20,9	1,7	0
Québec	64,1	27,4	8,5	0
République d'Irlande	69,8	24,5	5,8	0
Singapour	59,5	32,7	7,6	0,2
Taipei chinois	40,8	40,2	19	0
Moyenne (corpus)	**59,4**	**28,8**	**11,3**	**0,5**

Annexe 233. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « demander aux élèves de décider de leurs propres procédures de résolution de problèmes » (TIMSS 2015, TQM-14G)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	38,7	40,4	21	0
Corée du Sud	29,5	40,5	27,5	2,5
Floride	55,6	34,6	9,7	0
France	43,5	34,2	22,1	0,2
Hong Kong SAR	24,2	47,9	27,5	0,5
Irlande du Nord	36,5	47,8	15,7	0
Ontario	40,7	45,4	13,9	0
Québec	35	37,1	23,2	4,6
République d'Irlande	24,6	40,2	34,6	0,7
Singapour	18,2	39,6	40	2,2
Taipei chinois	19,6	47,3	31,1	2,1
Moyenne (corpus)	**33,3**	**41,4**	**24,2**	**1,2**

Annexe 234. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « demander aux élèves de décider de leurs propres procédures de résolution de problèmes » (TIMSS 2015, TQM-14F)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	21,2	34,5	42,1	2,2
Corée du Sud	25	43,3	29,9	1,7
Floride	32,1	40,7	25,7	1,6
Hong Kong SAR	12,8	42,2	42,2	2,7
Ontario	45,2	38,4	14,8	1,7
Québec	23,9	37,6	32,7	5,7
République d'Irlande	15,7	35,8	41,6	6,9
Singapour	12,8	29,1	50,8	7,3
Taipei chinois	16,8	40,2	40,5	2,5
Moyenne (corpus)	**22,8**	**38,0**	**35,6**	**3,6**

Annexe 235. Fréquence à laquelle les enseignants de quatrième année déclarent « encourager les élèves à exprimer leurs idées en classe » (TIMSS 2015, TQM-14H)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	88,3	10,3	1,3	0
Corée du Sud	75	21	3,9	0
Floride	82,6	14,8	2,5	0
France	70,7	21,2	8,2	0
Hong Kong SAR	40,6	39,3	20,1	0
Irlande du Nord	81	18,4	0,7	0
Ontario	85,6	13,8	0,6	0
Québec	70,2	25,8	4	0
République d'Irlande	66,7	25,9	7,3	0
Singapour	40,4	42,7	16,7	0,2
Taipei chinois	65,8	26,4	7,8	0
Moyenne (corpus)	**69,7**	**23,6**	**6,6**	**0,0**

Annexe 236. Fréquence à laquelle les enseignants de huitième année déclarent « encourager les élèves à exprimer leurs idées en classe » (TIMSS 2015, TQM-14G)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	68,4	18,1	13,2	0,4
Corée du Sud	35,1	36,4	27,3	1,2
Floride	57	24,8	18,1	0,1
Hong Kong SAR	30,2	36,5	32,5	0,8
Ontario	85,1	10,9	4,1	0
Québec	58,2	21,2	20,6	0,1
République d'Irlande	51,4	27,4	19,6	1,5
Singapour	33,2	35,4	30,4	1
Taipei chinois	36,5	39,9	23,6	0
Moyenne (corpus)	**50,6**	**27,8**	**21,0**	**0,6**

Annexe 237. Adhésion des élèves à la proposition « je sais ce que mon professeur attend de moi » (TIMSS 2015, SQMS-02A)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt en désaccord	Pas du tout d'accord
Angleterre	69	25,9	3,5	1,6
Corée du Sud	9,9	38,6	37,4	14
Floride	80,3	15,3	2,8	1,6
France	56,2	33,3	6,7	3,8
Hong Kong SAR	50,6	38,2	7,5	3,7
Irlande du Nord	70,6	24,9	3,3	1,2
Ontario	68,1	26,3	4,1	1,6
Québec	61	32,8	4,6	1,6
République d'Irlande	65,6	28,2	4,7	1,5
Singapour	55,9	36,2	5,7	2,2
Taipei chinois	57,5	34	5,8	2,7
Moyenne (corpus)	**58,6**	**30,3**	**7,8**	**3,2**

Annexe 238. Adhésion des élèves à la proposition « mon professeur est facile à comprendre » (TIMSS 2015, SQMS-02B)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt en désaccord	Pas du tout d'accord
Angleterre	66	26,3	6	1,7
Corée du Sud	44,6	46,1	6,9	2,4
Floride	69,2	22,5	5,2	3
France	54,8	36,7	5,9	2,7
Hong Kong SAR	48,1	35,6	11,8	4,5
Irlande du Nord	67,5	25,7	5,3	1,5
Ontario	67,5	25,3	5,3	1,9
Québec	60,8	33,1	4,7	1,4
République d'Irlande	72,9	21,4	4,3	1,4
Singapour	53,5	35,1	8,4	3
Taipei chinois	50,6	34,7	11,1	3,5
Moyenne (corpus)	**59,6**	**31,1**	**6,8**	**2,5**

Annexe 239. Adhésion des élèves à la proposition « je suis intéressé par ce que mon professeur dit » (TIMSS 2015, SQMS-02C)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt en désaccord	Pas du tout d'accord
Angleterre	60,3	29,4	7,7	2,5
Corée du Sud	33,7	44,1	18,1	4,1
Floride	65,5	25,1	6	3,4
France	58,7	34,8	4	2,4
Hong Kong SAR	42,9	36,6	13,5	7
Irlande du Nord	59,2	30,4	7,7	2,7
Ontario	58	30,9	8	3
Québec	60,5	31,8	5,7	2,1
République d'Irlande	62,4	28,6	6,6	2,4
Singapour	46,6	38,7	11,2	3,5
Taipei chinois	44,4	33,8	14,9	6,8
Moyenne (corpus)	**53,8**	**33,1**	**9,4**	**3,6**

Annexe 240. Adhésion des élèves à la proposition « mon professeur me donne des choses intéressantes à faire » (TIMSS 2015, SQMS-02D)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt en désaccord	Pas du tout d'accord
Angleterre	63,4	26,7	7,2	2,7
Corée du Sud	20,4	44	28,6	7
Floride	70	20,6	6,4	3
France	58	34,3	4,6	3
Hong Kong SAR	43	35,8	14,6	6,6
Irlande du Nord	59,4	29,3	8,4	2,9
Ontario	61,1	27,4	8,1	3,4
Québec	55,1	36	6,9	2,1
République d'Irlande	60,2	27,5	8,2	4,2
Singapour	47,3	35,3	12,7	4,7
Taipei chinois	39,5	35	17,7	7,9
Moyenne (corpus)	**52,5**	**32,0**	**11,2**	**4,3**

Annexe 241. Adhésion des élèves à la proposition « mon professeur répond de façon claire à mes questions » (TIMSS 2015, SQMS-02E)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt en désaccord	Pas du tout d'accord
Angleterre	68,9	24,4	5,2	1,5
Corée du Sud	37,9	47,9	11	3,1
Floride	68,4	22,6	5,7	3,2
France	60	32,1	5,4	2,4
Hong Kong SAR	52,4	33,9	9,8	3,9
Irlande du Nord	70,9	21,6	6,2	1,3
Ontario	65,4	26,4	6,1	2,1
Québec	64,2	29,9	4,5	1,4
République d'Irlande	71,1	21,6	5,4	1,8
Singapour	58,7	31,3	7,3	2,7
Taipei chinois	52,2	31,8	11,5	4,4
Moyenne (corpus)	**60,9**	**29,4**	**7,1**	**2,5**

Annexe 242. Adhésion des élèves à la proposition « mon professeur explique bien les mathématiques » (TIMSS 2015, SQMS-02F)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt en désaccord	Pas du tout d'accord
Angleterre	78	17	3,7	1,3
Corée du Sud	52,7	41,8	4,2	1,3
Floride	82,7	12,3	3,5	1,4
France	69,2	26,4	3	1,3
Hong Kong SAR	62,4	27	7,3	3,2
Irlande du Nord	80,3	15,4	3,2	1
Ontario	77,6	17	3,8	1,6
Québec	76,3	20,3	2,5	0,9
République d'Irlande	80,4	15,8	2,3	1,5
Singapour	67,3	25,6	5,2	1,8
Taipei chinois	58,8	29,7	7,4	4,1
Moyenne (corpus)	**71,4**	**22,6**	**4,2**	**1,8**

Annexe 243. Adhésion des élèves à la proposition « mon professeur me permet de mesurer ce que j'ai appris » (TIMSS 2015, SQMS-02G)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt en désaccord	Pas du tout d'accord
Angleterre	49	34	10,9	6,2
Corée du Sud	20,1	42,7	28,8	8,4
Floride	67,2	21,6	7,9	3,3
France	57,2	34,9	5,5	2,4
Hong Kong SAR	43,4	37,1	14,1	5,4
Irlande du Nord	53,6	31,9	9,8	4,7
Ontario	56	29,5	10,1	4,4
Québec	60,2	31,1	6,5	2,3
République d'Irlande	52,4	31,1	10,6	5,9
Singapour	40,2	39,2	14,3	6,4
Taipei chinois	44,2	35,5	14,1	6,2
Moyenne (corpus)	**49,4**	**33,5**	**12,1**	**5,1**

Annexe 244. Adhésion des élèves à la proposition « mon professeur met en place des choses variées pour nous aider à apprendre » (TIMSS 2015, SQMS-02H)

Pays	A tous les cours ou presque	Environ à la moitié des cours	A quelques leçons	Jamais
Angleterre	80,7	15,2	3	1,1
Corée du Sud	39,8	46,3	11	2,9
Floride	86,2	10,4	2,2	1,2
France	71,1	24,1	3,3	1,6
Hong Kong SAR	59,3	29,4	7,8	3,4
Irlande du Nord	82,1	13,8	3,1	1
Ontario	78	17,3	3,4	1,3
Québec	77,2	18,9	2,7	1,2
République d'Irlande	78,9	16,5	3,3	1,3
Singapour	62,4	28,3	6,8	2,5
Taipei chinois	62,9	26,9	6,6	3,6
Moyenne (corpus)	**70,8**	**22,5**	**4,8**	**1,9**

Annexe 245. Adhésion des élèves à la proposition « mon professeur me dit comment faire mieux quand je fais une erreur » (TIMSS 2015, SQMS-02I)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt en désaccord	Pas du tout d'accord
Angleterre	79,1	16,6	3,2	1,2
Corée du Sud	36,1	45,4	14,1	4,5
Floride	81,5	13,4	3,3	1,7
France	64,2	28,2	5,1	2,5
Hong Kong SAR	55,2	31	9,5	4,3
Irlande du Nord	80,9	15	2,9	1,1
Ontario	73,6	20,1	4,6	1,7
Québec	67,9	25,8	4,5	1,8
République d'Irlande	79,4	16	3,2	1,5
Singapour	62,9	27,7	6,8	2,7
Taipei chinois	65,2	24,8	6,1	4
Moyenne (corpus)	**67,8**	**24,0**	**5,8**	**2,5**

Annexe 246. Adhésion des élèves à la proposition « mon professeur écoute ce que j'ai à dire » (TIMSS 2015, SQMS-02J)

Pays	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt en désaccord	Pas du tout d'accord
Angleterre	76,8	16,7	4,8	1,7
Corée du Sud	36,9	48,4	11,1	3,7
Floride	74,9	16,7	5,3	3,1
France	67,1	27,3	3,7	1,9
Hong Kong SAR	54,5	31,2	9,2	5,1
Irlande du Nord	76,6	16,6	5	1,8
Ontario	75,2	17,7	4,9	2,2
Québec	73,1	22	3,9	1,1
République d'Irlande	76,2	17,6	4,1	2,1
Singapour	54,3	30,8	9,7	5,3
Taipei chinois	51,8	30,5	10,4	7,4
Moyenne (corpus)	**65,2**	**25,0**	**6,6**	**3,2**

Annexe 247. Nombre de jours par an pendant lesquels l'école est ouverte en quatrième année pour l'enseignement (TIMSS 2015, ACBG-08A)

Pays	Nombre de jours par an pendant lesquels l'école est ouverte pour l'enseignement
Angleterre	190,6
Corée du Sud	193,6
Floride	180,1
France	166,4
Hong Kong SAR	189,0
Irlande du Nord	189,0
Ontario	191,2
Québec	181,1
République d'Irlande	183,0
Singapour	184,0
Taipei chinois	199,9
Moyenne (corpus)	**186,2**

Annexe 248. Nombre de jours par an pendant lesquels l'école est ouverte en huitième année pour l'enseignement (TIMSS 2015, BCBG-07A)

Pays	Nombre de jours par an pendant lesquels l'école est ouverte pour l'enseignement
Angleterre	192,6
Corée du Sud	192,8
Floride	186,0
Hong Kong SAR	179,7
Ontario	191,7
Québec	180,8
République d'Irlande	167,0
Singapour	185,0
Taipei chinois	202,7
Moyenne (corpus)	**186,5**

Annexe 249. Nombre de jours, dans une semaine ordinaire, pendant lesquels l'école en quatrième année est ouverte pour l'enseignement (TIMSS 2015, ACBG-08C)

Pays	6 jours	5,5 jours	5 jours	4,5 jours	4 jours
Angleterre	1,6	2	95,6	0,8	0
Corée du Sud	0	0,7	99,3	0	0
Floride	0	0	100	0	0
France	0	0,6	6	80,5	11,1
Hong Kong SAR	0	1,2	96,7	0,6	0,8
Irlande du Nord	0	0,6	99,4	0	0
Ontario	0	1	99	0	0
Québec	0	0	100	0	0
République d'Irlande	0	0	100	0	0
Singapour	0	0	100	0	0
Taipei chinois	0	0	48	12,9	37,8
Moyenne (corpus)	**0,1**	**0,6**	**85,8**	**8,6**	**4,5**

Annexe 250. Nombre de jours, dans une semaine ordinaire, pendant lesquels l'école en huitième année est ouverte pour l'enseignement (TIMSS 2015, BCBG-07C)

Pays	6 jours	5,5 jours	5 jours	4,5 jours	4 jours
Angleterre	0,7	5,5	92,7	1,1	0
Corée du Sud	0	0	100	0	0
Floride	0	0	100	0	0
Hong Kong SAR	1,2	0	98,8	0	0
Ontario	0	0,8	99,2	0	0
Québec	0	0	100	0	0
République d'Irlande	0	0	85,3	14,7	0
Singapour	0	0	100	0	0
Taipei chinois	0	3,2	96,1	0	0
Moyenne (corpus)	**0,2**	**1,1**	**96,9**	**1,8**	**0,0**

Annexe 251. Fréquence des devoirs de mathématiques donnés aux élèves de quatrième année (TIMSS 2015, TQM-07A)

Pays	Pas de devoirs	Moins de une fois par semaine	Une ou deux fois par semaine	Trois ou quatre fois par semaine	Tous les jours
Angleterre	4,5	10,9	82,7	0,8	1,1
Corée du Sud	16,8	26,4	42	14,5	0,3
Floride	1	1,1	8,6	42,3	47
France	33,3	12,1	31,2	14,2	9,1
Hong Kong SAR	0	0	3,9	4,4	91,8
Irlande du Nord	0	0	45,2	30,1	24,7
Ontario	15,6	16,1	36,9	20,8	10,6
Québec	9,7	8,7	66	6,6	9,1
République d'Irlande	0,4	0	3,5	42,2	54
Singapour	0,3	4	19,8	50,6	25,3
Taipei chinois	0	0	0,9	26,4	72,7
Moyenne (corpus)	**7,4**	**7,2**	**31,0**	**23,0**	**31,4**

Annexe 252. Fréquence des devoirs de mathématiques donnés aux élèves de huitième année (TIMSS 2015, TQM-22A)

Pays	Pas de devoirs	Moins de une fois par semaine	Une ou deux fois par semaine	Trois ou quatre fois par semaine	Tous les jours
Angleterre	2,2	16,9	79,7	1,2	0
Corée du Sud	8,8	41,4	40,1	4,8	4,9
Floride	4	1,8	11,4	65,4	17,3
Hong Kong SAR	0	4,4	43,9	23,9	27,8
Ontario	7,3	6,2	27,3	41,5	17,7
Québec	3,1	0,5	21,1	51,5	23,7
République d'Irlande	0,2	0,3	1,9	17,7	80
Singapour	0,6	1,7	45,8	43,8	8,1
Taipei chinois	0,5	2	31,8	28,8	36,8
Moyenne (corpus)	**3,0**	**8,4**	**33,7**	**31,0**	**24,0**

Annexe 253. Temps, estimé par les enseignants, consacré aux devoirs de mathématiques par les élèves de quatrième année à la maison (TIMSS 2015, TQM-07B)

Pays	15 minutes ou moins	Entre16 et 30 minutes	Entre 31 et 60 minutes	Plus de 60 minutes
Angleterre	5,9	64,8	23,3	1,4
Corée du Sud	37,5	41,4	4,3	0
Floride	32,9	61,6	3,2	1,3
France	55,1	11,6	0,2	0
Hong Kong SAR	2,1	58,8	37,7	1,4
Irlande du Nord	10,8	69,6	17,4	2,2
Ontario	35,6	45,1	3,3	0,2
Québec	35,9	50,3	4,1	0
République d'Irlande	76	23,7	0	0
Singapour	3,1	65,9	30	0,7
Taipei chinois	10	73,3	16	0,7
Moyenne (corpus)	**27,7**	**51,5**	**12,7**	**0,7**

Annexe 254. Temps, estimé par les enseignants, consacré aux devoirs de mathématiques par les élèves de huitième année à la maison (TIMSS 2015, TQM-22B)

Pays	15 minutes ou moins	Entre16 et 30 minutes	Entre 31 et 60 minutes	Entre 61 et 90 minutes	Plus de 90 minutes
Angleterre	3,7	54,5	37,3	1,9	0,4
Corée du Sud	15,4	53,5	20,7	1,5	0,1
Floride	22,8	50	21,3	1,9	0
Hong Kong SAR	6	59,1	33,1	1,7	0
Ontario	15,7	63,4	13	0,7	0
Québec	6,6	60,9	29,3	0	0
République d'Irlande	29,2	67,8	2,8	0	0
Singapour	3,1	41,2	50,7	4	0,5
Taipei chinois	7,5	51,1	37,9	2,6	0,3
Moyenne (corpus)	**12,2**	**55,7**	**27,3**	**1,6**	**0,1**

Annexe 255. Selon les élèves, fréquence des devoirs de mathématiques à la maison qui leur sont donnés en huitième année (TIMSS 2015, SQSS-38Aa)

Pays	Chaque jour	3 or 4 fois par semaine	1 ou 2 fois par semaine	Moins d'1 fois par semaine	Jamais
Angleterre	2,3	11,6	61,3	21,1	3,7
Corée du Sud	5,2	12,7	27,3	34,8	20
Floride	37	33,9	18,2	6,7	4,1
Hong Kong SAR	37,6	35,4	19	6,5	1,5
Ontario	31,7	38,2	16,1	8,9	5,1
Québec	51,1	30,8	12,5	4,3	1,4
République d'Irlande	74,7	21	2,9	0,8	0,6
Singapour	21,9	51,5	21,6	4,1	0,9
Taipei chinois	33,5	36,2	22,9	4,4	2,9
Moyenne (corpus)	**32,8**	**30,1**	**22,4**	**10,2**	**4,5**

Annexe 256. Selon les élèves, temps consacré aux devoirs de mathématiques à la maison qui leur sont donnés en huitième année (TIMSS 2015, SQSS-38Ba)

Pays	15 minutes ou moins	Entre16 et 30 minutes	Entre 31 et 60 minutes	Entre 61 et 90 minutes	Plus de 90 minutes
Angleterre	27,1	42,8	22,2	2	1
Corée du Sud	32,2	26,9	14,2	3,3	2,1
Floride	30,2	34,3	21,3	5	3,4
Hong Kong SAR	19,6	35,8	30,8	7,3	4
Ontario	23,2	35,8	25,5	6,6	2,4
Québec	19,2	37,1	31	7,2	3,6
République d'Irlande	29,8	47,6	18,3	2,5	0,8
Singapour	11,6	31,3	38,5	11,4	5,6
Taipei chinois	26,1	36,3	25	5	3,3
Moyenne (corpus)	**24,3**	**36,4**	**25,2**	**5,6**	**2,9**

Annexe 257. Angleterre - Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015.

Année	Nombre total d'items	Nombre d'items consacrés aux fractions	%
1	24	1	4%
2	27	1	4%
3	27	5	19%
4	42	7	17%
5	32	4	13%
6	30	4	13%
7	34	3	9%
8	19	2	11%
Total	**235**	**27**	**11%**

Annexe 258. Corée du Sud - Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015.

Année	Nombre total d'items	Nombre d'items consacrés aux fractions	%
1	26	0	0%
2	30	1	3%
3	39	4	10%
4	35	4	11%
5	32	10	31%
6	35	2	6%
7	45	0	0%
8	34	1	3%
Total	**276**	**22**	**8%**

Annexe 259. Floride - Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015.

Année	Nombre total d'items	Nombre d'items consacrés aux fractions	%
1	14	0	0%
2	21	1	5%
3	17	5	29%
4	30	7	23%
5	23	4	17%
6	19	6	32%
7	22	3	14%
8	28	0	0%
Total	**174**	**26**	**15%**

Annexe 260. France - Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015.

Année	Nombre total d'items	Nombre d'items consacrés aux fractions	%
1	21	0	0%
2	25	0	0%
3	33	0	0%
4	33	4	12%
5	37	3	8%
6	73	6	8%
7	67	4	6%
8	48	4	8%
Total	**337**	**21**	**6%**

Annexe 261. Hong Kong SAR - Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015.

Année	Nombre total d'items	Nombre d'items consacrés aux fractions	%
1	54	0	0%
2	65	0	0%
3	54	3	6%
4	53	6	11%
5	44	9	20%
6	45	9	20%
7	59	2	3%
8	59	2	3%
Total	**433**	**31**	**7%**

Annexe 262. Irlande du Nord - Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015.

Année	Nombre total d'items	Nombre d'items consacrés aux fractions	%
1	87	0	0%
2	129	3	2%
3	133	12	9%
4	130	11	8%
5	76	4	5%
Total	**555**	**30**	**5%**

Annexe 263. Ontario - Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015.

Année	Nombre total d'items	Nombre d'items consacrés aux fractions	%
1	70	1	1%
2	72	2	3%
3	73	1	1%
4	87	6	7%
5	79	10	13%
6	88	10	11%
7	75	8	11%
8	74	12	16%
Total	**618**	**50**	**8%**

Annexe 263. Quebec - Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015.

Année	Nombre total d'items	Nombre d'items consacrés aux fractions	%
1	82	3	4%
2	84	3	4%
3	144	10	7%
4	150	12	8%
5	201	16	8%
6	201	18	9%
7	206	19	9%
8	176	10	6%
Total	**1244**	**91**	**7%**

Annexe 264. République d'Irlande - Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015.

Année	Nombre total d'items	Nombre d'items consacrés aux fractions	%
1	55	0	0%
2	60	1	2%
3	72	7	10%
4	84	9	11%
5	60	8	13%
6	74	13	18%
7	44	1	2%
8	44	1	2%
Total	**493**	**40**	**8%**

Annexe 265. Singapour - Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015.

Année	Nombre total d'items	Nombre d'items consacrés aux fractions	%
1	38	0	0%
2	44	4	9%
3	52	7	13%
4	75	9	12%
5	59	14	24%
6	36	9	25%
7	53	4	8%
8	33	2	6%
Total	**390**	**49**	**13%**

Annexe 266. Tapei chinois - Part des items consacrés aux fractions dans les programmes scolaires au moment des évaluations TIMSS 2015.

Année	Nombre total d'items	Nombre d'items consacrés aux fractions	%
1	20	0	0%
2	27	1	4%
3	28	4	14%
4	32	6	19%
5	35	9	26%
6	24	9	38%
7	37	6	16%
8	61	0	0%
Total	**264**	**35**	**13%**

Annexe 267. Hong Kong SAR – Répartition temporelle des enseignements au sein des programmes scolaires TIMSS 2015.

Année	Unités totales de temps	Unités de temps consacrées aux fractions	% des unités de temps consacrées aux fractions	% des items consacrés aux fractions
1	138	0	0%	0%
2	140	0	0%	0%
3	126	10	8%	6%
4	137	19	14%	11%
5	137	40	29%	20%
6	142	44	31%	20%
7	138	9	7%	3%
8	138	9	7%	3%
Total	**1096**	**132**	**12%**	**7%**

Annexe 268. Quel pourcentage approximatif de temps d'enseignement avez-vous consacré en quatrième année à la connaissance des nombres, à la géométrie, aux données, graphiques ou à d'autres enseignements ? (TIMSS 2015, TQM-08A)

Pays	Connaissance des nombres	Géométrie	Données, graphiques	Autres
Angleterre	57,3	18,6	15,0	9,1
Corée du Sud	37,9	26,8	22,9	12,5
Floride	55,8	21,9	12,9	10,0
Hong Kong SAR	54,5	27,7	11,8	5,8
Irlande du Nord	50,7	22,6	17,5	9,2
Ontario	49,4	20,5	14,8	15,3
Québec	54,8	22,9	14,5	7,7
République d'Irlande	56,4	21,5	11,8	10,2
Singapour	54,6	19,7	12,2	13,5
Taipei chinois	50,6	25,6	13,9	9,9
Moyenne (corpus)	**52,2**	**22,8**	**14,7**	**10,3**

Annexe 269. Quel pourcentage approximatif de temps d'enseignement avez-vous consacré en huitième année à la connaissance des nombres, à l'algèbre, à la géométrie et aux données et probabilités ? (TIMSS 2015, TQM-24A)

Pays	Connaissance des nombres	Algèbre	Géométrie	Données et probabilités
Angleterre	28,1	26,4	20,9	20,8
Corée du Sud	16,4	26,9	31,2	15,4
Floride	16,4	50,7	19,3	8,8
Hong Kong SAR	17,4	33,0	29,2	10,8
Ontario	32,4	22,6	20,1	15,5
Québec	21,5	35,0	23,1	12,7
Singapour	10,1	40,9	20,3	12,7
Taipei chinois	14,1	39,2	40,9	1,8
Moyenne (corpus)	**19,6**	**34,3**	**25,6**	**12,3**

Annexe 270. Taux d'absentéisme selon les élèves de quatrième année (TIMSS 2015, SQG-11)

Pays	Une fois par semaine ou plus	Une fois toutes les 2 semaines	Une fois par mois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	6,5	2,9	15,7	75
Corée du Sud	1,4	0,7	5	92,9
Floride	11,2	5,7	15,3	67,8
France	5,4	2,4	9,3	82,9
Hong Kong SAR	3,5	2,2	13,8	80,5
Irlande du Nord	7,2	3,4	16,4	72,9
Ontario	8,9	6,2	19,6	65,3
Québec	5,4	4	14,6	76
République d'Irlande	6	3,8	20,5	69,7
Singapour	7,6	2,6	13,5	76,3
Taipei chinois	4,9	1,3	10,9	83
Moyenne (corpus)	**6,2**	**3,2**	**14,1**	**76,6**

Annexe 271. Taux d'absentéisme selon les élèves de huitième année (TIMSS 2015, SQG-08)

Pays	Une fois par semaine ou plus	Une fois toutes les 2 semaines	Une fois par mois	Jamais ou presque jamais
Angleterre	2,7	5,1	23,7	68,6
Corée du Sud	0,5	0,7	2,5	96,4
Floride	7	11,6	28,3	53
Hong Kong SAR	1,7	2,4	9,3	86,7
Ontario	4,4	11,2	29,4	54,9
Québec	2,3	5,5	21,2	71
République d'Irlande	2,8	7,4	27	62,8
Singapour	3	2,7	11,9	82,3
Taipei chinois	1,6	1,3	7,8	89,3
Moyenne (corpus)	**2,9**	**5,3**	**17,9**	**73,9**

Annexe 272. Corrélation entre le taux de réussite en quatrième année aux items impliquant des fractions et les performances globales (1995)

Participants	Réussite aux items impliquant des fractions (en pourcentages)	Score TIMSS (en points)	Prévisions fondées sur la réussite relative aux fractions (en points)	Différence entre le score TIMSS et les prévisions (en points)
Angleterre	45,6	513,0	512,9	0,1
Corée du Sud	62,8	611,0	563,0	48,0
Hong Kong SAR	67,8	587,0	577,6	9,4
République d'Irlande	58,0	550,0	548,9	1,1
Singapour	74,4	625,0	596,8	28,2

Annexe 273. Corrélation entre le taux de réussite en quatrième année aux items impliquant des fractions et les performances globales (2003)

Participants	Réussite aux items impliquant des fractions (en pourcentages)	Score TIMSS (en points)	Prévisions fondées sur la réussite relative aux fractions (en points)	Différence entre le score TIMSS et les prévisions (en points)
Angleterre	56,8	531,0	545,4	– 14,4
Hong Kong SAR	64,8	575,0	568,9	6,1
Ontario	52,4	511,0	532,7	– 21,7
Québec	46,3	506,0	514,9	– 8,9
Singapour	70,4	594,0	585,2	8,8
Taipei chinois	55,4	564,0	541,4	22,6

Annexe 274. Corrélation entre le taux de réussite en quatrième année aux items impliquant des fractions et les performances globales (2007)

Participants	Réussite aux items impliquant des fractions (en pourcentages)	Score TIMSS (en points)	Prévisions fondées sur la réussite relative aux fractions (en points)	Différence entre le score TIMSS et les prévisions (en points)
Angleterre	56,0	541,0	543,3	– 2,3
Hong Kong SAR	72,1	607,0	590,1	16,9
Ontario	41,0	512,0	499,5	12,5
Québec	44,4	519,0	509,3	9,7
Singapour	72,0	599,0	589,8	9,2
Taipei chinois	60,7	576,0	556,9	19,1

Annexe 275. Corrélation entre le taux de réussite en quatrième année aux items impliquant des fractions et les performances globales (2011)

Participants	Réussite aux items impliquant des fractions (en pourcentages)	Score TIMSS (en points)	Prévisions fondées sur la réussite relative aux fractions (en points)	Différence entre le score TIMSS et les prévisions (en points)
Angleterre	56,7	542,0	545,2	– 3,2
Corée du Sud	58,8	605,0	551,3	53,7
Floride	57,5	545,0	547,4	– 2,4
Hong Kong SAR	67,3	602,0	576,0	26,0
Irlande du Nord	35,3	562,0	482,9	79,1
Ontario	42,4	518,0	503,5	14,5
Québec	47,4	533,0	518,1	14,9
République d'Irlande	62,9	527,0	563,3	– 36,3
Singapour	72,0	606,0	589,7	16,3
Taipei chinois	63,6	591,0	565,3	25,7

Annexe 276. Corrélation entre le taux de réussite en quatrième année aux items impliquant des fractions et les performances globales (2015)

Participants	Réussite aux items impliquant des fractions (en pourcentages)	Score TIMSS (en points)	Prévisions fondées sur la réussite relative aux fractions (en points)	Différence entre le score TIMSS et les prévisions (en points)
Angleterre	55,2	546,0	540,9	5,1
Corée du Sud	73,4	608,0	593,9	14,1
Floride	69,2	546,0	581,6	– 35,6
France	36,7	488,0	487,1	0,9
Hong Kong SAR	83,0	615,0	621,9	– 6,9
Irlande du Nord	64,9	570,0	569,2	0,8
Ontario	44,6	512,0	509,9	2,1
Québec	56,8	536,0	545,6	– 9,6
République d'Irlande	64,8	547,0	568,9	– 21,9
Singapour	82,9	618,0	621,6	– 3,6
Taipei chinois	71,6	597,0	588,7	8,3

Annexe 277. Corrélation entre le taux de réussite en huitième année aux items impliquant des fractions et les performances globales (1995)

Participants	Réussite aux items impliquant des fractions (en pourcentages)	Score TIMSS (en points)	Prévisions fondées sur la réussite relative aux fractions (en points)	Différence entre le score TIMSS et les prévisions (en points)
Angleterre	45,4	506,0	495,6	10,4
Corée du Sud	69,5	607,0	574,5	32,5
France	55,5	538,0	528,5	9,5
Hong Kong SAR	68,2	588,0	570,3	17,7
République d'Irlande	57,7	527,0	535,8	– 8,8
Singapour	80,7	643,0	611,0	32,0

Annexe 278. Corrélation entre le taux de réussite en huitième année aux items impliquant des fractions et les performances globales (1999)

Participants	Réussite aux items impliquant des fractions (en pourcentages)	Score TIMSS (en points)	Prévisions fondées sur la réussite relative aux fractions (en points)	Différence entre le score TIMSS et les prévisions (en points)
Angleterre	47,9	496,0	503,7	– 7,7
Corée du Sud	73,9	587,0	588,8	– 1,8
Hong Kong SAR	76,2	582,0	596,3	– 14,3
Singapour	80,7	604,0	610,9	– 6,9
Taipei chinois	73,9	585,0	588,9	– 3,9

Annexe 279. Corrélation entre le taux de réussite en huitième année aux items impliquant des fractions et les performances globales (2003)

Participants	Réussite aux items impliquant des fractions (en pourcentages)	Score TIMSS (en points)	Prévisions fondées sur la réussite relative aux fractions (en points)	Différence entre le score TIMSS et les prévisions (en points)
Angleterre	46,6	498,0	499,3	– 1,3
Corée du Sud	73,0	589,0	586,0	3,0
Hong Kong SAR	73,0	586,0	585,9	0,1
Ontario	52,3	521,0	518,2	2,8
Québec	60,0	543,0	543,4	– 0,4
Singapour	77,3	605,0	599,9	5,1
Taipei chinois	70,3	585,0	577,1	7,9

Annexe 280. Corrélation entre le taux de réussite en huitième année aux items impliquant des fractions et les performances globales (2007)

Participants	Réussite aux items impliquant des fractions (en pourcentages)	Score TIMSS (en points)	Prévisions fondées sur la réussite relative aux fractions (en points)	Différence entre le score TIMSS et les prévisions (en points)
Angleterre	44,6	513,0	492,9	20,1
Corée du Sud	70,4	597,0	577,4	19,6
Hong Kong SAR	64,4	572,0	557,6	14,4
Ontario	49,8	517,0	509,7	7,3
Québec	53,0	528,0	520,3	7,7
Singapour	69,1	593,0	573,0	20,0
Taipei chinois	68,5	598,0	571,0	27,0

Annexe 281. Corrélation entre le taux de réussite en huitième année aux items impliquant des fractions et les performances globales (2011)

Participants	Réussite aux items impliquant des fractions (en pourcentages)	Score TIMSS (en points)	Prévisions fondées sur la réussite relative aux fractions (en points)	Différence entre le score TIMSS et les prévisions (en points)
Angleterre	24,7	507,0	427,7	79,3
Corée du Sud	40,0	613,0	477,7	135,3
Floride	26,1	513,0	432,3	80,7
Hong Kong SAR	36,8	586,0	467,3	118,7
Ontario	26,9	512,0	435,0	77,0
Québec	30,2	532,0	445,7	86,3
Singapour	39,3	611,0	475,4	135,6
Taipei chinois	37,1	609,0	468,4	140,6

Annexe 282. Corrélation entre le taux de réussite en huitième année aux items impliquant des fractions et les performances globales (2015)

Participants	Réussite aux items impliquant des fractions (en pourcentages)	Score TIMSS (en points)	Prévisions fondées sur la réussite relative aux fractions (en points)	Différence entre le score TIMSS et les prévisions (en points)
Angleterre	47,9	518,0	503,8	14,2
Corée du Sud	73,7	606,0	588,2	17,8
Floride	50,3	493,0	511,5	– 18,5
Hong Kong SAR	70,2	594,0	576,6	17,4
Ontario	51,6	522,0	515,6	6,4
Québec	60,5	543,0	544,9	– 1,9
République d'Irlande	66,5	523,0	564,6	– 41,6
Singapour	76,8	621,0	598,2	22,8
Taipei chinois	67,1	599,0	566,6	32,4

Annexe 283. Les conceptions et types de tâches évalués par TIMSS en quatrième année (1995)

Item	Description par TIMSS	Conception	Type de tâches
A1	*In which figure are one-half of the dots black?*	Partition	Associer une fraction et un dessin.
C3	*Which figure shows 2/3 of the square shaded?*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
E4	*Which of the following numbers means 7/10?*	Conversion	Convertir une fraction en un décimal.
F6	*Janis ate 1/2 cake, Maija ate 1/4, mother ate 1/4, how much remains?*	Partie-tout ou mesure	Additionner deux fractions.
I5	*If five tomatoes make 1/2 liter of sauce, how much sauce do 15 tomatoes make?*	Partie-tout ou mesure	Multiplier une fraction par un entier.
I8	*Shown four diagrams with various fractions shaded, which two represent the same fraction?*	Partie-tout ou mesure	Trouver une fraction équivalente.
J7	*Shown a square divided into 9 squares, 5 of which are shaded, what fraction of the figure is shaded?*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
T4b	*10 girls and 20 boys mean half of all students are girls? Explain.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction à un rapport entre deux nombres.
U2	*Write a fraction that is larger than 2/7.*	Partie-tout ou mesure	Comparer des fractions.
V1	*Is 1/3 less than 1/4? Shade appropriate parts of a circle to demonstrate.*	Partie-tout ou mesure	Comparer des fractions.

Annexe 284. Les conceptions et types de tâches évalués par TIMSS en quatrième année (2003)

Item	Description par TIMSS	Conception	Type de tâches
M0103	*Figure showing fraction of shaded square.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0108	*Fraction to decimal.*	Conversion	Convertir une fraction en un décimal.
M0207	*Fraction of cake left.*	Partie-tout ou mesure	Additionner deux fractions.
M0304	*Which figure has one-half black dots?*	Partition	Associer une fraction et un dessin.
M0403	*1/3 of 600 balls in a box.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
M0801	*4/5 minus 1/5.*	Partie-tout ou mesure	Soustraire deux fractions.
M0903	*What fraction of cake John ate?*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction à une situation décrite.
M0905C	*Geometry Tiles_Fraction shaded.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0906A	*Geometry Tiles_1/2 black.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0906B	*Geometry Tiles_5/8 black.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M1103	*Recipe for 3 people.*	Partie-tout ou mesure	Diviser une fraction par un entier.
M1111	*Rotate the shape 1/4 clockwise.*	Partie-tout ou mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.
M1201	*Select a fraction larger than 1/2.*	Partie-tout ou mesure	Comparer des fractions.
M1407	*Position of the shape after a half turn.*	Partie-tout ou mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.

Annexe 285. Les conceptions et types de tâches évalués par TIMSS en quatrième année (2007)

Item	Description par TIMSS	Conception	Type de tâches
M0204	*Fraction of the rectangle shaded.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0402	*Draw a circle around the cookies.*	Partition	Associer une fraction et un dessin.
M0403	*Fraction equal to 2/3.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0404	*Fraction of money Joe spent.*	Partie-tout ou mesure	Additionner deux fractions.
M0413	*How many more girls in class A?*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
M0603	*Shade 1/2 of the larger triangle.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0606	*Fraction of the cake eaten.*	Partie-tout ou mesure	Additionner deux fractions.
M0701	*4/5 minus 1/5.*	Partie-tout ou mesure	Soustraire deux fractions.
M0903	*Recipe for 3 people.*	Partie-tout ou mesure	Diviser une fraction par un entier.
M0911	*Rotate the shape 1/4 clockwise.*	Partie-tout ou mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.
M1005	*Equivalent fractions.*	Partie-tout ou mesure	Trouver une fraction équivalente.
M1101	*Select a fraction larger than 1/2.*	Partie-tout ou mesure	Comparer des fractions.
M1205	*Which is the largest fraction?*	Partie-tout ou mesure	Comparer des fractions.
M1307	*Position of the shape after a half turn.*	Partie-tout ou mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.

Annexe 286. Les conceptions et types de tâches évalués par TIMSS en quatrième année (2011)

Item	Description par TIMSS	Conception	Type de tâches
M0107	*Position of the shape after a half turn.*	Partie-tout ou mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.
M0202	*Find the inequivalent fraction.*	Partie-tout ou mesure	Comparer des fractions.
M0303	*Shade 1/2 of the larger triangle.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0306	*Fraction of the cake eaten.*	Partie-tout ou mesure	Additionner deux fractions.
M0503	*Recipe for 3 people.*	Partie-tout ou mesure	Diviser une fraction par un entier.
M0511	*Rotate the shape 1/4 clockwise.*	Partie-tout ou mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.
M0605	*Equivalent fractions.*	Partie-tout ou mesure	Trouver une fraction équivalente.
M0701	*Select a fraction larger than 1/2.*	Partie-tout ou mesure	Comparer des fractions.
M0806	*Fraction of the cake left.*	Partie-tout ou mesure	Additionner deux fractions.
M1105	*Which is the largest fraction?*	Partie-tout ou mesure	Comparer des fractions.

Annexe 287. Les conceptions et types de tâches évalués par TIMSS en quatrième année (2015)

Item	Description par TIMSS	Conception	Type de tâches
M0504A	*Circle with 3/8 of the area shaded.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0504B	*Give reason for your selection.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0701	*Which rectangle is 1/4 shaded?*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0704	*Fraction of circles that are black.*	Partition	Associer une fraction et un dessin.
M0705	*Which is the largest fraction?*	Partie-tout ou mesure	Comparer des fractions.
M0804	*Shaded fraction of a square.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0905	*Fraction equivalent to 4/10.*	Partie-tout ou mesure	Trouver une fraction équivalente.
M0906	*Fraction of the cake left.*	Partie-tout ou mesure	Additionner deux fractions.
M1004	*Fraction Anna has left to cycle.*	Partie-tout ou mesure	Trouver le complément à l'unité.
M1102	*Fraction equal to 0.4.*	Conversion	Convertir un décimal en une fraction.
M1104	*Pattern with 2/3 shapes shaded.*	Partition	Associer une fraction et un dessin.
M1302	*Figure with three quarters shaded.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M1304A	*Fraction watered on Monday.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.
M1304B	*Fraction watered on Tuesday.*	Partie-tout ou mesure	Associer une fraction et un dessin.

Annexe 288. Les conceptions et types de tâches évalués par TIMSS en huitième année (1995)

Item	Description par TIMSS	Conception	Type de tâches
E3	*Find fraction of hour between two time points.*	Partie-tout et mesure	Associer une fraction et un dessin.
H8	*Identify figure showing 2/3 shaded.*	Partie-tout et mesure	Associer une fraction et un dessin.
I2	*Solve multi-step word problem: common fractions.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
I6	*Write a fraction that is larger than 2/7.*	Partie-tout et mesure	Comparer deux fractions.
I9	*Predict most likely color of random card based on fraction of colors.*	Partie-tout et mesure	Comparer deux fractions.
J12	*Divide fractions.*	Opérateur	Diviser une fraction par une fraction.
K1	*Circle with same shaded fraction.*	Partie-tout et mesure	Trouver une fraction équivalente.
K7	*Determine the number of blue pens given probability of selection.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
K9	*Compute sum of three fractions.*	Partie-tout et mesure	Additionner plusieurs fractions.

L17	*Subtract three fractions.*	Partie-tout et mesure	Soustraire plusieurs fractions.
M4	*Identify the largest fraction.*	Partie-tout et mesure	Comparer deux fractions.
M5	*Shape after 90 degree rotation.*	Partie-tout et mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.
N14	*Identify list of equivalent fractions.*	Partie-tout et mesure	Trouver plusieurs fractions équivalentes.
N16	*Solve algebra word problem with fractions.*	Partition	Déterminer l'entier en connaissant la partie et la fraction.
N18	*Find probability of drawing an even number from 1 to 9.*	Partition	Associer une fraction et un dessin.
N19	*Shade a given fraction of the squares in a grid.*	Partie-tout et mesure	Associer une fraction et un dessin.
O5	*Calculate number of cube faces from probability of toss.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
O9	*Solve division word problem: common fractions.*	Partie-tout et mesure	Diviser un entier par une fraction.
P8	*Know relationship between side and perimeter for square.*	Ratio	Déterminer un rapport entre deux nombres.
P14	*Solve subtraction word problem: common fractions.*	Partie-tout et mesure	Additionner plusieurs fractions.
P16	*Reduce decimal to fraction in lowest terms.*	Conversion	Convertir un décimal en une fraction puis réduire la fraction à sa plus simple expression.
Q2	*Subtract fractional expressions of x.*	Partie-tout et mesure	Soustraire des fractions.
Q5	*Solve word problem involving ratios.*	Partition	Associer une situation à une fraction.
Q8	*Identify fractions and decimals ranked smallest to largest.*	Conversion	Ordonner une fraction et des nombres décimaux.
Q9	*Perform multiple operations of common fractions.*	Opérateur	Multiplier deux fractions et additionner deux fractions.
R13	*Determine how much money left after spending 7/9.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
T2b	*Solve multi-step word problem computing fractions.*	Partition	Associer une fraction et un dessin.
U2b	*New rectangle from old/ratio of area.*	Ratio	Déterminer un rapport entre deux nombres.
V3	*Determine ratio of red paint in a mixture.*	Partie-tout et mesure	Déterminer un rapport entre deux nombres.

Annexe 289. Les conceptions et types de tâches évalués par TIMSS en huitième année (1999)

Item	Description par TIMSS	Conception	Type de tâches
A01	*Number of squares in shaded fraction.*	Partie-tout et mesure	Associer une fraction et un dessin.
B09	*Which picture shows that 2/5 is equivalent to 4/10?*	Partie-tout et mesure	Trouver une fraction équivalente.
C04	*Pair of numbers bracketing 2.25.*	Conversion	Convertir une fraction en un décimal.
D09	*Which of these fractions is smallest?*	Partie-tout et mesure	Comparer des fractions.
E3	*Fraction of hour between two time points.*	Partie-tout et mesure	Associer une fraction et un dessin.
F11	*If 4 times a number is 48, what is one third of the number?*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.

F12	*What fraction of the circle is shaded?*	Partie-tout et mesure	Associer une fraction et un dessin.
G04	*Find n from proportionality equation.*	Partie-tout et mesure	Trouver une fraction équivalente.
G05	*Fraction birthdays in first half of year.*	Partie-tout et mesure	Déterminer un rapport entre deux nombres.
H08	*Which shows 2/3 of the square shaded?*	Partie-tout et mesure	Associer une fraction et un dessin.
I02	*4/5 of books more than 2/3.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
I06	*Fraction less than 4/9.*	Partie-tout et mesure	Comparer deux fractions.
I09	*Most likely sector on spinner.*	Partie-tout et mesure	Comparer des fractions.
J12	*Divide: 6/55 ÷ 3/25.*	Opérateur	Diviser une fraction par une fraction.
K01	*Circle with same shaded fraction.*	Partie-tout et mesure	Trouver une fraction équivalente.
K07	*Probability of drawing blue bead.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité
K09	*Addition of three fractions.*	Partie-tout et mesure	Additionner plusieurs fractions.
L18	*What is the value of 4/5 - 1/3 - 1/15?*	Partie-tout et mesure	Soustraire plusieurs fractions.
M04	*Which fraction is smallest?*	Partie-tout et mesure	Comparer deux fractions.
N14	*In which list of fractions are all of the fractions equivalent?*	Partie-tout et mesure	Identifier des fractions équivalentes.
N16	*How many marbles were in the bag to start with?*	Partition	Déterminer l'entier en connaissant la partie et la fraction.
N18	*What is the probability that Chelsea draws a chip with a number that is a multiple of three?*	Partition	Associer une fraction et un dessin.
N19	*Shade in 3/8 of the unit squares in the grid.*	Partie-tout et mesure	Associer une fraction et un dessin.
O05	*Number of students from probability.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
O09	*Scoops of flour needed to fill bag.*	Partie-tout et mesure	Diviser un entier par une fraction.
P08	*What is the ratio of the width of the rectangle to its perimeter?*	Ratio	Déterminer un rapport entre deux nombres.
P15	*What fraction of the cherries remained in the basket?*	Partition	Additionner deux fractions et trouver le complément à l'unité.
P17	*Write 0.48 as a fraction reduced to its lowest terms.*	Conversion	Convertir un décimal en une fraction puis réduire la fraction à sa plus simple expression.
Q02	*Subtract fractions involving x.*	Partie-tout et mesure	Soustraire des fractions.
Q05	*Number of men/women at meeting.*	Partition	Associer une fraction à une situation.
Q07	*True expression for values of L, K, M.*	Quotient	Déterminer un quotient sous la forme d'un nombre entier.
Q09	*Addition/multiplication with fractions.*	Opérateur	Multiplier deux fractions et additionner deux fractions.
R14	*How much money did she have left?*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
T02B	*Fraction of books in smaller boxes.*	Partie-tout et mesure	Déterminer un rapport entre deux nombres.
V03	*What is the ratio of nitrate to the total amount of fertilizer?*	Partie-tout et mesure	Déterminer un rapport entre deux nombres.

Annexe 290. Les conceptions et types de tâches évalués par TIMSS en huitième année (2003)

Item	Description par TIMSS	Conception	Type de tâches
M0101	*Number of squares in shaded fraction.*	Partie-tout et mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0110	*Find n from proportionality equation.*	Partie-tout et mesure	Trouver une fraction équivalente.
M0111	*Fraction birthdays in first half of year.*	Partie-tout et mesure	Déterminer un rapport entre deux nombres.
M0113	*3/25 of the people in the audience was children.*	Partition	Trouver un pourcentage équivalent.
M0204	*Pair of numbers bracketing 2.25.*	Conversion	Convertir une fraction en un décimal.
M0207	*Subtract fractions involving x.*	Partie-tout et mesure	Soustraire des fractions.
M0210	*Number of men/women at meeting.*	Partition	Associer une fraction à une situation.
M0212	*True expression for values of L, K, M.*	Quotient	Déterminer un quotient sous la forme d'un nombre entier.
M0214	*Addition/multiplication with fractions.*	Opérateur	Multiplier deux fractions et additionner deux fractions.
M0303	*Fraction of hour between two time points.*	Partie-tout et mesure	Associer une fraction et un dessin.
M0311	*Number of students from probability.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
M0315	*Scoops of flour needed to fill bag.*	Partie-tout et mesure	Diviser un entier par une fraction.
M0402	*4/5 of books more than 2/3.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
M0406	*Fraction less than 4/9.*	Partie-tout et mesure	Comparer deux fractions.
M0409	*Most likely sector on spinner.*	Partie-tout et mesure	Comparer des fractions.
M0501	*Circle with same shaded fraction.*	Partie-tout et mesure	Trouver une fraction équivalente.
M0507	*Probability of drawing blue bead.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité
M0509	*Addition of three fractions.*	Partie-tout et mesure	Additionner plusieurs fractions.
M0511B	*New rectangle from old/ratio of area.*	Ratio	Déterminer un rapport entre deux nombres.
M0603	*Which fraction is smallest?*	Partie-tout et mesure	Comparer deux fractions.
M0609	*Tickets cost either 10 zeds, 15 zeds, or 30 zeds.*	Partition	Additionner deux fractions et trouver le complément à l'unité.
M0610	*Cups of sugar for 1 1/2 times original recipe.*	Partie-tout et mesure	Multiplier une fraction par un nombre mixte.
M0802	*A correct procedure for finding 1/5 minus 1/3.*	Partie-tout et mesure	Soustraire des fractions.
M1101	*4/100 plus 3/1000.*	Partie-tout et mesure	Additionner des fractions.
M1102	*P and Q are 2 numbers on the number line.*	Partie-tout et mesure	Multiplier deux fractions.
M1103	*Ann and Jenny divide 560 zeds between them.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
M1112	*Figure 1 transformed to 2 and 3.*	Partie-tout et mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.
M1202	*Write 3 5/6 in decimal form.*	Conversion	Convertir une fraction en un décimal.
M1203	*Simplify 3x/8 plus x/4 plus x/2.*	Partie-tout et mesure	Additionner plusieurs fractions.

Annexe 291. Les conceptions et types de tâches évalués par TIMSS en huitième année (2007)

Item	Description par TIMSS	Conception	Type de tâches
M0101	*Circle with same shaded fraction.*	Partie-tout et mesure	Trouver une fraction équivalente.
M0107	*Probability of drawing blue bead.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité
M0109	*Addition of three fractions.*	Partie-tout et mesure	Additionner plusieurs fractions.
M0111	*New rectangle from old/ratio of area.*	Ratio	Déterminer un rapport entre deux nombres.
M0303	*Which fraction is smallest?*	Partie-tout et mesure	Comparer deux fractions.
M0304	*Triangle rotated about point P.*	Partie-tout et mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.
M0309	*Fraction of tickets sold for 10 zeds.*	Partition	Additionner deux fractions et trouver le complément à l'unité.
M0310	*Cups of sugar for 1 1/2 times recipe.*	Partie-tout et mesure	Multiplier une fraction par un nombre mixte.
M0506	*Class Trip. Calculations from two ads.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité
M0601	*Write equivalent fraction for 0.125.*	Conversion	Convertir un décimal en une fraction.
M0602	*Equivalent expression.*	Partie-tout et mesure	Trouver une fraction équivalente.
M0615	*Chance of getting a button.*	Partition	Associer une fraction à une situation.
M0702	*Correct procedure for 1/5 minus 1/3.*	Partie-tout et mesure	Soustraire des fractions.
M0901	*4/100 plus 3/1000.*	Partie-tout et mesure	Additionner des fractions.
M0902	*Location of N on number line.*	Partie-tout et mesure	Multiplier deux fractions.
M0903	*Ann and Jenny divide 560 zeds.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
M0912	*Figure 1 transformed to 2 and 3.*	Partie-tout et mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.
M1001	*Length of the original pipe.*	Partie-tout et mesure	Diviser un entier par une fraction.
M1102	*Write 3 5/6 in decimal form.*	Conversion	Convertir une fraction en un décimal.
M1103	*Simplify 3x/8 plus x/4 plus x/2.*	Partie-tout et mesure	Additionner plusieurs fractions.

Annexe 292. Les conceptions et types de tâches évalués par TIMSS en huitième année (2011)

Item	Description par TIMSS	Conception	Type de tâches
M0201	*Select the decimal equal to 3/5.*	Conversion	Convertir une fraction en un décimal.
M0204	*Method for subtracting fractions.*	Partie-tout et mesure	Soustraire des fractions.
M0205	*Which number sentence is true?*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
M0213	*Probability that the marble is red.*	Partition	Associer une fraction à une situation.
M0301	*Equivalent fraction for 0.125.*	Conversion	Convertir un décimal en une fraction.
M0302	*Equivalent expression.*	Partie-tout et mesure	Trouver une fraction équivalente.
M0313	*Half-turn around point O.*	Partie-tout et mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.
M0315	*Chance of getting a button.*	Partition	Associer une fraction à une situation.
M0501	*4/100 plus 3/1000.*	Partie-tout et mesure	Additionner des fractions.
M0502	*Location of N on number line.*	Partie-tout et mesure	Multiplier deux fractions.
M0503	*Ann and Jenny divide 560 zeds.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
M0512	*Figure 1 transformed to 2 and 3.*	Partie-tout et mesure	Effectuer une rotation d'une fraction de tour.
M0601	*Length of the original pipe.*	Partie-tout et mesure	Diviser un entier par une fraction.
M0702	*Write 3 5/6 in decimal form.*	Conversion	Convertir une fraction en un décimal.
M0703	*Simplify 3x/8 plus x/4 plus x/2.*	Partie-tout et mesure	Additionner plusieurs fractions.

Annexe 293. Les conceptions et types de tâches évalués par TIMSS en huitième année (2015)

Item	Description par TIMSS	Conception	Type de tâches
M0102	*Write as decimal number.*	Conversion	Convertir une fraction en un nombre décimal.
M0105	*Expression for one-fifth of x.*	Opérateur	Prendre la fraction d'une quantité.
M0213	*Chance Clara picks a blue marble.*	Partition	Associer une fraction à une situation.
M0301	*Decimal closest in size to 3/4.*	Conversion	Convertir une fraction en un nombre décimal.
M0502	*Fraction by which price reduced by.*	Partition	Trouver une fraction équivalente.
M0504	*Which is larger 7/12 or 2/3.*	Partie-tout et mesure	Comparer deux fractions.
M1104	*Fraction of diagram shaded.*	Partie-tout et mesure	Associer une fraction et un dessin.
M1304	*Convert decimal to a fraction.*	Conversion	Convertir un décimal en une fraction.

Annexe 294. Types de tâches supposés être évalués dans les tests TIMSS de quatrième année (2003)

Mathematics Frameworks, 2003, p. 13
1. Reconnaitre les fractions comme des parts d'unités entières, des parts de collections, des emplacements sur la droite numérique, des divisions de nombres entiers. 2. Identifier des fractions équivalentes. 3. Comparer et ordonner des fractions. 4. Montrer une compréhension des nombres décimaux. 5. Représenter des fractions ou des nombres décimaux en utilisant des mots, des nombres ou des modèles. 6. Ajouter et soustraire des fractions avec le même dénominateur. 7. Ajouter et soustraire avec des nombres décimaux. **Notes** : Les fractions pour les items du grade 4 impliqueront les dénominateurs 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 ou 12. Les nombres décimaux pour les items du grade 4 impliqueront des décimaux avec des dixièmes et/ou des centièmes.

Annexe 295. Types de tâches supposés être évalués dans les tests TIMSS de quatrième année (2007)

Assessment Frameworks, 2007, p. 18
1. Reconnaître les fractions comme des parts d'unités entières, des parts d'une collection, des nombres sur la droite numérique, et des divisions de nombres entiers. 2. Représenter les fractions en utilisant des mots, des nombres ou des modèles. 3. Identifier des fractions équivalentes ; comparer et ordonner des fractions. 4. Ajouter et soustraire des fractions simples. 5. Montrer une compréhension de la valeur des décimales, en reconnaissant et en écrivant des nombres décimaux en utilisant des mots et des nombres. 6. Ajouter et soustraire des nombres décimaux. 7. Résoudre des problèmes comportant des fractions simples ou des nombres décimaux. **Note** : les questions sur les fractions en quatrième année impliqueront les dénominateurs 2, 3, 4, 5, 8 ou 10. Les questions sur les nombres décimaux en quatrième année impliqueront des dixièmes et/ou des centièmes.

Annexe 296. Types de tâches supposés être évalués dans les tests TIMSS de quatrième année (2011)

Mathematics Framework, 2011, p. 25
1. Montrer une compréhension des fractions en reconnaissant les fractions comme des parts d'unités entières, des parts d'une collection, des nombres sur la droite numérique, et en représentant les fractions par des mots, des nombres ou des modèles. 2. Identifier des fractions équivalentes simples ; comparer et ordonner des fractions simples. 3. Ajouter et soustraire des fractions simples. 4. Montrer une compréhension de la valeur des décimales, y compris en représentant les nombres décimaux à l'aide de mots, de nombres, ou de modèles. 5. Ajouter et soustraire des nombres décimaux. 6. Résoudre des problèmes comportant des fractions simples ou des nombres décimaux. **Notes :** les questions sur les fractions en quatrième année impliqueront les dénominateurs 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, ou 100. Les questions sur les nombres décimaux en quatrième année impliqueront des dixièmes et/ou des centièmes.

Annexe 297. Types de tâches supposés être évalués dans les tests TIMSS de quatrième année (2015)

Mathematics Framework, 2015, p. 15
1. Reconnaitre des fractions comme des parts d'entiers, des parts de collections ou des emplacements sur la droite numérique, et représenter des fractions avec des mots, des nombres et des modèles. 2. Identifier des fractions simples équivalentes ; comparer et ordonner des fractions simples ; additionner et soustraire des fractions simples, y compris dans le cadre de situations problèmes. 3. Démontrer une connaissance de la valeur des décimales, y compris en représentant des nombres décimaux en utilisant des mots, des nombres et des modèles ; comparer, ordonner et arrondir des nombres décimaux ; additionner et soustraire des nombres décimaux, y compris dans le cadre de situations problèmes. **Notes** : les fractions pour les items du grade 4 impliqueront les dénominateurs 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 ou 100. Les nombres décimaux pour les items du grade 4 impliqueront des notations décimales jusqu'à une et/ou deux décimales.

Annexe 298. Types de tâches supposés être évalués dans les tests TIMSS de huitième année (2003)

Mathematics Frameworks, 2003, p. 13
1. Comparer et ordonner des fractions. 2. Comparer et ordonner des nombres décimaux. 3. Démontrer une connaissance de la valeur des décimales. 4. Représenter des nombres décimaux et des fractions en utilisant des mots, des nombres ou des modèles (incluant des droites numériques). 5. Reconnaitre et écrire des fractions équivalentes. 6. Convertir des fractions en écritures décimales et vice versa. 7. Relier des opérations avec des fractions et des nombres décimaux aux situations et modèles. 8. Calculer avec des fractions et des nombres décimaux, y compris en utilisant la commutativité, l'associativité et la distributivité. 9. Calculer des valeurs approchées décimales pour estimer des calculs. 10. Résoudre des problèmes impliquant des fractions. 11. Résoudre des problèmes impliquant des nombres décimaux.

Annexe 299. Types de tâches supposés être évalués dans les tests TIMSS de huitième année (2007)

Assessment Frameworks, 2007, p. 25
1. Comparer et ordonner des fractions et des nombres décimaux. 2. Démontrer une connaissance de la valeur des décimales. 3. Représenter des nombres décimaux, des fractions et des opérations avec des nombres décimaux et des fractions en utilisant des modèles (par exemple, la droite numérique) ; identifier et utiliser ces représentations. 4. Reconnaître et écrire des fractions équivalentes. 5. Convertir les fractions en écritures décimales et vice versa. 6. Calculer avec des fractions et des nombres décimaux. 7. Résoudre des problèmes par des calculs, des estimations, et des approximations.

Annexe 300. Types de tâches supposés être évalués dans les tests TIMSS de huitième année (2011)

Mathematics Framework, 2011, p. 31
1. Comparer et ordonner des fractions ; reconnaître et écrire des fractions équivalentes. 2. Démontrer une compréhension de la valeur des décimales pour les nombres décimaux finis (par exemple, en les comparant ou en les ordonnant). 3. Représenter des fractions, des nombres décimaux et des opérations avec les fractions et les nombres décimaux en utilisant des modèles (par exemple, la droite numérique) ; identifier et utiliser ces représentations. 4. Convertir les fractions en écritures décimales et vice versa. 5. Calculer avec des fractions et des nombres décimaux, et résoudre les problèmes les impliquant.

Annexe 301. Types de tâches supposés être évalués dans les tests TIMSS de huitième année (2015)

Mathematics Framework, 2015, p. 20
1. Identifier, comparer et ordonner des nombres rationnels (fractions, nombres décimaux et entiers) en utilisant des modèles et représentations variés (par exemple, la droite numérique) ; et savoir qu'il y a des nombres qui ne sont pas rationnels. 2. Calculer avec des nombres rationnels (fractions, nombres décimaux et entiers), y compris dans le cadre de situations problèmes. 3. Identifier et trouver des rapports équivalents ; et modéliser une situation donnée en utilisant un rapport et en divisant une quantité selon un rapport donné. 4. Convertir des pourcentages, des proportions et des fractions. 5. Résoudre des problèmes impliquant des pourcentages et des proportions.

Annexe 302. Évolution des résultats des élèves de quatrième année relatifs à l'item « *4/5 minus 1/5* » proposé lors des évaluations TIMSS 2003 et 2007

Participants	2003	2007
Angleterre	59,9	61,0
Hong Kong SAR	97,0	96,9
Ontario	61,7	50,8
Québec	48,1	51,7
Singapour	96,9	96,9
Tapei chinois	95,9	96,6

Annexe 303. Évolution des résultats des élèves de quatrième année relatifs à l'item « *Recipe for 3 people* » proposé lors des évaluations TIMSS 2003, 2007 et 2011

Participants	2003	2007	2011
Angleterre	68,8	60,3	55,3
Hong Kong SAR	33,9	31,3	34,5
Ontario	36,5	24,8	21,7
Québec	25,8	19,2	22,2
Singapour	56,9	47,6	49,8
Tapei chinois	15,3	18,9	31,1

Annexe 304. Évolution des résultats des élèves de quatrième année relatifs à l'item « *Rotate the shape 1/4 clockwise* » proposé lors des évaluations TIMSS 2003, 2007 et 2011

Participants	2003	2007	2011
Angleterre	74,7	78,5	76,3
Hong Kong SAR	81,9	86,7	87,2
Ontario	77,7	74,3	74,1
Québec	56,6	61,7	66,1
Singapour	79,4	83,4	85,2
Tapei chinois	83,7	88,7	89,4

Annexe 305. Évolution des résultats des élèves de quatrième année relatifs à l'item « *Select a fraction larger than ½* » proposé lors des évaluations TIMSS 2003, 2007 et 2011

Participants	2003	2007	2011
Angleterre	53,1	59,5	49,7
Hong Kong SAR	66,3	72,2	73,7
Ontario	55,8	46,2	48,0
Québec	44,2	40,2	49,2
Singapour	64,3	66,2	66,9
Tapei chinois	54,4	61,4	67,4

Annexe 306. Évolution des résultats des élèves de quatrième année relatifs à l'item « *Position of the shape after a half turn* » proposé lors des évaluations TIMSS 2003, 2007 et 2011

Participants	2003	2007	2011
Angleterre	62,2	60,0	63,6
Hong Kong SAR	54,2	67,8	64,2
Ontario	44,2	45,8	47,4
Québec	31,6	41,1	46,8
Singapour	61,0	65,9	69,7
Tapei chinois	51,9	53,3	47,4

Annexe 307. Évolution des résultats des élèves de quatrième année relatifs à l'item « *Shade 1/2 of the larger triangle* » proposé lors des évaluations TIMSS 2007 et 2011

Participants	2007	2011
Angleterre	66,8	82,6
Hong Kong SAR	78,7	90,2
Ontario	50,8	69,0
Québec	68,4	85,0
Singapour	71,3	87,5
Tapei chinois	57,1	78,3

Annexe 308. Évolution des résultats des élèves de quatrième année relatifs à l'item « *Fraction of the cake eaten* » proposé lors des évaluations TIMSS 2007 et 2011

Participants	2007	2011
Angleterre	54,7	50,6
Hong Kong SAR	58,5	52,9
Ontario	29,1	28,4
Québec	26,6	26,7
Singapour	84,9	84,1
Tapei chinois	36,7	53,7

Annexe 309. Évolution des résultats des élèves de quatrième année relatifs à l'item « *Fraction of the cake left* » proposé lors des évaluations TIMSS 2003, 2011 et 2015

Participants	2003	2011	2015
Angleterre	82,6	25,2	27,0
Hong Kong SAR	81,6	54,1	60,0
Ontario	66,2	15,1	11,9
Québec	59,7	22,2	25,4
Singapour	82,5	79,3	82,2
Tapei chinois	50,8	58,2	52,6

Annexe 310. Évolution des résultats des élèves de quatrième année relatifs à l'item « *Equivalent fractions* » proposé lors des évaluations TIMSS 2007 et 2011

Participants	2007	2011
Angleterre	74,4	68,3
Hong Kong SAR	89,2	87,6
Ontario	51,0	53,1
Québec	63,0	66,4
Singapour	86,3	88,6
Tapei chinois	64,5	82,3

Annexe 311. Évolution des résultats des élèves de quatrième année relatifs à l'item « *Which is the largest fraction?* » proposé lors des évaluations TIMSS 2007, 2011 et 2015

Participants	2007	2011	2015
Angleterre	69,6	64,1	69,5
Hong Kong SAR	86,0	91,1	92,7
Ontario	38,0	38,6	38,8
Québec	53,2	51,5	54,1
Singapour	81	82,6	85,3
Tapei chinois	77,5	79,1	66,5

Annexe 312. Pourcentage d'écart-type entre la performance d'un pays à un item et sa performance moyenne aux items de quatrième pour les fractions (TIMSS 2015)

Participants	M05O4A	M0504B	M0701	M0704	M0705	M0804	M0905	M0906	M1004	M1102	M1104	M1302	M1304A	M1304B
	Circle with 3/8 of the area shaded.	*Give reason for your selection*	*Which rectangle is 1/4 shaded?*	*Fraction of circles that are black.*	*Which is the largest fraction?*	*Shaded fraction of a square.*	*Fraction equivalent to 4/10.*	*Fraction of the cake left.*	*Fraction Anna has left to cycle.*	*Fraction equal to 0.4.*	*Pattern with 2/3 shapes shaded.*	*Figure with three quarters shaded.*	*Fraction watered on Monday.*	*Fraction watered on Tuesday.*
Angleterre	– 34,7	– 208,7	151,4	78,1	78,7	– 54,0	–28,7	– 155,3	– 60,1	– 3,3	– 9,4	156,3	46,8	42,9
Corée du Sud	19,4	– 77,9	124,5	103,3	– 35,4	11,0	– 184,7	– 225,5	34,5	40,1	– 18,6	116,7	42,9	49,6
Floride	– 35,8	– 140,3	182,2	74,2	80,5	– 99,4	– 19,2	– 176,9	– 38,5	82,5	4,3	147,6	– 17,1	– 44,1
France	– 11,3	– 153,1	199,6	87,5	– 87,2	– 32,0	– 61,0	– 141,9	40,0	– 54,3	– 2,9	176,2	23,8	16,6
Hong Kong SAR	– 51,4	– 269,0	102,3	81,2	67,9	– 26,2	13,1	– 161,6	6,8	66,5	16,6	100,2	35,6	18,0
Irlande du Nord	– 27,4	– 272,3	135,3	62,1	93,9	– 47,2	– 7,0	– 97,7	– 16,6	– 22,9	– 1,9	139,8	36,1	25,9
Ontario	– 0,9	– 108,6	202,2	54,1	– 31,1	– 29,4	– 49,9	– 176,0	– 48,3	– 99,5	26,0	181,7	42,2	37,4
Québec	– 12,4	– 128,2	199,8	113,0	– 14,0	– 60,9	– 79,2	– 160,3	– 9,4	– 94,0	11,5	146,7	28,9	58,5
République d'Irlande	– 42,7	– 256,6	105,4	70,0	135,9	– 62,3	– 42,1	– 126,5	– 6,7	58,6	– 6,7	99,4	42,3	31,9
Singapour	– 102,3	– 257,3	133,6	80,6	23,6	– 102,3	13,6	– 7,4	15,6	97,6	– 36,3	128,6	1,6	10,6
Taipei chinois	– 62,5	– 231,7	149,8	140,6	– 33,7	– 37,0	– 61,9	– 124,8	69,9	41,0	– 7,5	99,3	35,8	22,7
Moyenne (corpus)	**– 31,9**	**– 206,3**	**171,7**	**94,9**	**26,7**	**– 51,5**	**– 55,9**	**– 162,2**	**– 3,0**	**2,5**	**– 1,1**	**151,9**	**34,2**	**29,9**

Annexe 313. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner le concept de fraction ? » (TIMSS 2003, TQM-12AB)

Pays	Très bien préparé	Moyennement préparé	Pas bien préparé
Hong Kong SAR	49,5	50,5	0,0
Ontario	72,7	26,2	1,1
Québec	80,8	16,2	3,0
Singapour	86,8	12,9	0,2
Taipei chinois	55	45,0	0,0
Moyenne (corpus)	**69,0**	**30,2**	**0,9**

Annexe 314. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner le concept de fraction ? » (TIMSS 2007, TQM-11AC)

Pays	Très bien préparé	Moyennement préparé	Pas bien préparé
Angleterre	89,4	10,6	0,0
Hong Kong SAR	54,6	44,2	1,2
Ontario	82,9	15,4	0,6
Québec	86,6	11,6	0,2
Singapour	89,1	10,2	0,0
Taipei chinois	59,5	40,5	0,0
Moyenne (corpus)	**77,0**	**22,1**	**0,3**

Annexe 315. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner le concept de fraction ? » (TIMSS 2011, TQM-12AC)

Pays	Très bien préparé	Moyennement préparé	Pas bien préparé
Angleterre	87,1	11,9	0,0
Hong Kong SAR	72,7	17,3	0,8
Ontario	82,1	16,5	0,6
Québec	86,5	13,3	0,1
Singapour	90,6	7,7	0,3
Taipei chinois	90,5	8,8	0,7
Moyenne (corpus)	**84,9**	**12,6**	**0,4**

Annexe 316. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner le concept de fraction ? » (TIMSS 2015, TQM-11AD)

Pays	Très bien préparé	Moyennement préparé	Pas bien préparé
Angleterre	83,7	13,7	0,5
Corée du Sud	72,7	14,1	1,9
Floride	81,9	11,4	2,3
France	58,5	34,5	6,1
Hong Kong SAR	69,3	20,4	0,0
Irlande du Nord	96,6	3,4	0,0
Ontario	85,9	13,5	0,0
Québec	78,5	19,9	0,0
République d'Irlande	86,0	11,3	1,3
Singapour	88,1	9,8	0,0
Taipei chinois	90,5	6,1	0,3
Moyenne (corpus)	**81,1**	**14,4**	**1,1**

Annexe 317. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner les additions et soustractions de fractions ? » (TIMSS 2007, TQM-11AF)

Pays	Très bien préparé	Moyennement préparé	Pas bien préparé
Angleterre	75,2	22,2	2,0
Hong Kong SAR	58,4	41,3	0,4
Ontario	73,1	22,0	0,7
Québec	71,1	14,3	1,4
Singapour	90,5	8,8	0,0
Taipei chinois	68,9	31,1	0,0
Moyenne (corpus)	**72,9**	**23,3**	**0,8**

Annexe 318. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner les additions et soustractions de fractions ? » (TIMSS 2011, TQM-12AD)

Pays	Très bien préparé	Moyennement préparé	Pas bien préparé
Angleterre	73,9	18,4	0,8
Hong Kong SAR	76,4	17,7	0,8
Ontario	64,5	18,2	1,0
Québec	57,2	18,1	0,1
Singapour	91,8	6,5	0,3
Taipei chinois	89,2	10,8	0,0
Moyenne (corpus)	**75,5**	**15,0**	**0,5**

Annexe 319. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner les additions et soustractions de fractions ? » (TIMSS 2015, TQM-11AE)

Pays	Très bien préparé	Moyennement préparé	Pas bien préparé
Angleterre	83,3	14,6	0,5
Corée du Sud	79,5	12,4	1,1
Floride	78,7	14,7	2,2
France	49,5	33,5	8,7
Hong Kong SAR	76,3	21,9	0,0
Irlande du Nord	85,4	11,8	1,0
Ontario	68,9	17,5	0,3
Québec	57,6	21,1	0,3
République d'Irlande	72,2	12,8	2,0
Singapour	82,2	9,7	0,0
Taipei chinois	93,4	5,0	0,3
Moyenne (corpus)	**75,2**	**15,9**	**1,5**

Annexe 320. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner les notations décimales ? » (TIMSS 2003, TQ1-12AC)

Pays	Très bien préparé	Moyennement préparé	Pas bien préparé
Hong Kong SAR	42,9	55,3	1,7
Ontario	70,7	28,5	0,7
Québec	65	31,6	3,4
Singapour	83,1	16,9	0,0
Taipei chinois	52	48,0	0,0
Moyenne (corpus)	**62,7**	**36,1**	**1,2**

Annexe 321. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner les notations décimales ? » (TIMSS 2007, TQ1-11AD)

Pays	Très bien préparé	Moyennement préparé	Pas bien préparé
Angleterre	86,5	13,2	0,2
Hong Kong SAR	52,2	44,2	2,2
Ontario	84,4	13,9	0,7
Québec	88,4	9,8	0,2
Singapour	89,2	10,0	0,1
Taipei chinois	55,3	44,7	0,0
Moyenne (corpus)	**76,0**	**22,6**	**0,6**

Annexe 322. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner les notations décimales ? » (TIMSS 2011, TQM-12AE)

Pays	Très bien préparé	Moyennement préparé	Pas bien préparé
Angleterre	92,5	7,5	0,0
Hong Kong SAR	71,0	21,0	0,6
Ontario	82,4	13,9	1,5
Québec	87,0	11,3	0,2
Singapour	92,3	7,1	0,3
Taipei chinois	90,5	8,9	0,0
Moyenne (corpus)	**86,0**	**11,6**	**0,4**

Annexe 323. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Comment vous sentez-vous préparé pour enseigner les notations décimales ? » (TIMSS 2015, TQM-11AF)

Pays	Très bien préparé	Moyennement préparé	Pas bien préparé
Angleterre	89,8	8,7	0,0
Corée du Sud	89,3	8,7	1,1
Floride	79,4	10,9	1,1
France	64,2	29,2	5,5
Hong Kong SAR	66,1	22,1	0,7
Irlande du Nord	94,8	5,2	0,0
Ontario	81,6	16,3	0,4
Québec	87,6	10,8	0,0
République d'Irlande	87,6	10,3	1,6
Singapour	89,2	10,2	0,0
Taipei chinois	91,7	6,9	0,0
Moyenne (corpus)	**83,8**	**12,7**	**0,9**

Annexe 324. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos du concept de fraction ? » (TIMSS 2003, TQ1-26AF)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	24,6	75,0	0,4
Hong Kong SAR	17,5	77,5	5,1
Ontario	19,3	58,2	22,5
Québec	3,5	77,0	19,4
Singapour	16,8	83,2	0,0
Taipei chinois	13,6	84,8	1,7
Moyenne (corpus)	**15,9**	**76,0**	**8,2**

Annexe 325. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos du concept de fraction ? » (TIMSS 2007, TQ1-22AG)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	20,5	78,7	0,8
Hong Kong SAR	26,5	71,8	1,7
Ontario	15,6	32,4	52,0
Québec	8,4	81,0	10,7
Singapour	26,8	72,6	0,6
Taipei chinois	20,6	72,6	6,8
Moyenne (corpus)	**19,7**	**68,2**	**12,1**

Annexe 326. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos du concept de fraction ? » (TIMSS 2011, TQM-07AC)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	25,3	71,9	2,8
Hong Kong SAR	34,9	64,4	0,7
Ontario	13,4	50,0	36,6
Québec	8	84,6	7,4
Singapour	42,1	57,9	0,0
Taipei chinois	47	51,6	1,4
Moyenne (corpus)	**28,5**	**63,4**	**8,2**

Annexe 327. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos du concept de fraction ? » (TIMSS 2015, TQM-06AD)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	31,1	67,5	1,5
Hong Kong SAR	42,7	52,0	5,2
Ontario	41,9	52,9	5,2
Québec	52,5	43,7	3,9
Singapour	26,8	59,2	13,9
Taipei chinois	21,5	73,2	5,2
Moyenne (corpus)	**36,1**	**58,1**	**5,8**

Annexe 328. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos des additions et soustractions de fractions ? » (TIMSS 2003, TQ1-26AJ)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	3,3	45,2	51,5
Hong Kong SAR	23,3	73,6	3,1
Ontario	4,6	33,2	62,2
Québec	1,4	26,3	72,3
Singapour	34,5	65,5	0,0
Taipei chinois	7,5	89,1	3,4
Moyenne (corpus)	**12,4**	**55,5**	**32,1**

Annexe 329. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos des additions et soustractions de fractions ? » (TIMSS 2007, TQ1-22AK)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	6,7	52,5	40,8
Hong Kong SAR	12,8	84,9	2,3
Ontario	2,7	16,3	81,0
Québec	3,5	27,2	69,3
Singapour	34,7	65,3	0,0
Taipei chinois	20,5	76,9	2,6
Moyenne (corpus)	**13,5**	**53,9**	**32,7**

Annexe 330. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos des additions et soustractions de fractions ? » (TIMSS 2011, TQM-07AD)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	3,2	45,9	50,8
Hong Kong SAR	9,4	84,2	6,4
Ontario	2,7	20,6	76,6
Québec	1,9	20,5	77,6
Singapour	40,5	59,5	0,0
Taipei chinois	36,1	59,8	4,1
Moyenne (corpus)	**15,6**	**48,4**	**35,9**

Annexe 331. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos des additions et soustractions de fractions ? » (TIMSS 2015, TQM-06AE)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	6,7	75,8	17,5
Hong Kong SAR	16,0	83,3	0,7
Ontario	4,6	28,0	67,5
Québec	3,3	43,7	52,9
Singapour	33,3	66,7	0,0
Taipei chinois	24,3	71,7	4,0
Moyenne (corpus)	**14,7**	**61,5**	**23,8**

Annexe 332. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos des notations décimales ? » (TIMSS 2003, TQM-24AI)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	14,3	74,3	11,4
Hong Kong SAR	10,9	70,7	18,3
Ontario	6,1	55,0	38,8
Québec	2,6	33,0	64,4
Singapour	7,6	90,0	2,4
Taipei chinois	9,1	87,5	3,4
Moyenne (corpus)	**8,4**	**68,4**	**23,1**

Annexe 333. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos des notations décimales ? » (TIMSS 2007, TQ1-22AL)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	10,4	83,5	6,1
Hong Kong SAR	11,5	82,1	6,4
Ontario	7,7	40,4	51,9
Québec	3,3	55,8	41,0
Singapour	7,9	91,0	1,1
Taipei chinois	21,3	76,0	2,7
Moyenne (corpus)	**10,4**	**71,5**	**18,2**

Annexe 334. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos des notations décimales ? » (TIMSS 2011, TQM-07AE)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	11,2	86,1	2,7
Hong Kong SAR	8,7	80,6	10,8
Ontario	6,0	48,0	46,0
Québec	1,1	80,5	18,5
Singapour	7,6	91,0	1,4
Taipei chinois	44,0	54,6	1,3
Moyenne (corpus)	**13,1**	**73,5**	**13,5**

Annexe 335. Réponse des professeurs de quatrième année à la question : « Quand les élèves de cette classe ont-ils reçu un enseignement à propos des notations décimales ? » (TIMSS 2015, TQM-06AF)

Pays	Enseigné principalement avant cette année	Enseigné principalement cette année	Juste introduit ou pas encore enseigné
Angleterre	13,2	81,7	5,0
Hong Kong SAR	9,1	74,5	16,4
Ontario	4,7	44,1	51,2
Québec	6,5	77,1	16,4
Singapour	6,7	92,2	1,2
Taipei chinois	26,2	67,8	6,1
Moyenne (corpus)	**11,1**	**72,9**	**16,1**

PROGRAMMES SCOLAIRES

ANNEXE 336. LES PROGRAMMES DE L'ANGLETERRE (1989)

Dans les programmes, les exemples d'activités sont écrits en italique. Nous avons conservé cette présentation.

Deuxième année (*Department of Education and Science and the Welsh Office*, 1989)
1. « Comprendre la signification de "une moitié" et "un quart". *Identifier des moitiés et des quarts. Par exemple, trouver un quart de la longueur d'une ficelle ; savoir que la moitié de huit est quatre* » (p. 7).
Quatrième année (*Department of Education and Science and the Welsh Office*, 1989)
1. « Reconnaitre et comprendre des fractions simples dans le contexte d'une utilisation quotidienne. *Par exemple, estimer un tiers de pinte de lait ou 3/4 de la longueur d'une pièce de bois* » (p. 7). 2. « Appliquer des stratégies telles que "doubler" ou "prendre la moitié" pour explorer les propriétés des nombres, y compris l'équivalence des fractions. *Reconnaitre que 23 x 8 = 46 x 4 = 92 x 2 = 164 x 1 et que 2/3 = 4/6 = 6/9 = 8/12 = …* » (p. 15). 3. « Donner et justifier des estimations subjectives de probabilités pour une variété d'évènements. *Reconnaitre que quand on lance une pièce de monnaie, la probabilité de tomber sur « face » est de 1 sur 2 ou ½* » (p. 43).
Cinquième année (*Department of Education and Science and the Welsh Office*, 1989)
1. « Calculer des "fractions" et des "pourcentages" de quantités en utilisant une calculatrice si nécessaire. *Trouver des fractions et pourcentages de quantités. Par exemple, calculer 15 % de 320£ ; 3/5 de 170 m ; 37 % de 234£ ; 1/10 de 2 m.* » (p. 10). 2. « Savoir que si chacun des n évènements est supposé être également probable, la probabilité qu'un évènement survienne est de 1/n. *Savoir que si les noms de cinq constructeurs automobiles sont placés dans un sac, la probabilité de tirer le nom d'un constructeur automobile est de 1/5* » (p. 44).
Sixième année (*Department of Education and Science and the Welsh Office*, 1989)
1. « Comprendre et utiliser l'équivalence des fractions et des rapports, les relier aux notations décimales et aux pourcentages. *Savoir que 2/5 = 4/10 = 0,4 = 40 %* » *(p. 8).* 2. « Réaliser des transformations en fraction ou en pourcentage et effectuer les calculs qui s'y rapportent » (p. 10).

Septième année (*Department of Education and Science and the Welsh Office*, 1989)
1. « Comprendre la signification de l'inverse et explorer ces relations. *Utiliser le fait que 1/2 est l'inverse de 2, et que a/b est l'inverse de b/a* » (p. 16). 2. « Agrandir une forme par un facteur scalaire fractionnaire » (p. 30). 3. « Comprendre et utiliser la fréquence relative en tant qu'estimation d'une probabilité. *Reconnaitre que quand on lance un dé non pipé plusieurs fois, chaque nombre apparaitra approximativement 1/6 du nombre total de lancers, et s'attendre à ce que la proportion s'approche de 1/6 quand le nombre de lancers augmente* » (p. 44).
Huitième année (*Department of Education and Science and the Welsh Office*, 1989)
1. « Calculer avec des fractions. *Évaluer des formules incluant des fractions et des nombres négatifs. Par exemple, trouver la solution de* $s = ut + 1/2at^2$ *quand t, u et a peuvent être des nombres négatifs* » (p. 10).

ANNEXE 337. LES PROGRAMMES DE L'ANGLETERRE (1995)

Première et deuxième années (*Department for Education*, 1995)
1. « Reconnaitre et utiliser dans un contexte simple des fractions, y compris des moitiés et des quarts » (p. 3). 2. « Comprendre un angle comme la mesure d'une portion de tour et reconnaitre des quarts de tour et des demi-tours, par exemple en donnant des instructions pour faire tourner un jouet programmable » (p. 5).
Troisième, quatrième, cinquième et sixième années (*Department for Education*, 1995)
1. « Comprendre et utiliser, en contextes, des fractions et des pourcentages, pour estimer, décrire et comparer des proportions à l'intérieur de l'unité » (p. 7). 2. « Étendre les méthodes de calcul pour inclure l'addition et la soustraction de nombres négatifs, les quatre opérations avec les décimaux, et calculer des fractions et des pourcentages de quantités, en utilisant une calculatrice si nécessaire » (p. 8). 3. « Utiliser les angles droits, les fractions d'un tour et, plus tard, les degrés, pour mesurer une rotation, et utiliser le langage associé » (p. 9).
Septième, huitième et neuvième années (*Department for Education*, 1995)
1. « Comprendre et utiliser des décimaux, des rapports, des fractions et des pourcentages, et les relations entre eux » (p. 13).

2. « Calculer avec des nombres négatifs, des décimaux, des fractions, des pourcentages et des rapports, en comprenant les effets des opérations, par exemple mettre au carré, multiplier et diviser par un nombre compris entre 0 et 1, et sélectionner une méthode appropriée, avec ou sans la calculatrice » (*ibid.*). 3. « Comprendre quand et comment utiliser les fractions et les pourcentages pour réaliser des comparaisons en proportionnalité » (*ibid.*). 4. « Sélectionner les séquences d'opérations et les méthodes de calcul qui conviennent, y compris les méthodes par essai et amélioration, pour résoudre des problèmes impliquant des entiers, des décimaux, des fractions, des rapports et des pourcentages, par exemple en utilisant un tableur pour considérer des ensembles de nombres ayant une somme donnée, et trouver l'ensemble qui a le produit le plus grand » (p. 14).

ANNEXE 338. LES PROGRAMMES DE L'ANGLETERRE (1999/2001)

Les objectifs que les auteurs considèrent comme clés (« *key objectives* ») dans les programmes sont écrits en gras. Les instructions officielles concernant les deux premiers cycles d'enseignement ont été modifiés en 1999, et celles du troisième cycle ont été modifiées en 2001.

Deuxième année (Department for Education and Employment, 1999)
1. « Commencer à reconnaître et à trouver la moitié et le quart de formes et de petites quantités d'objets » (p. 10). 2. « Commencer à reconnaître que deux moitiés ou quatre quarts font un entier et que deux quarts et une moitié sont équivalents » (*ibid.*).
Troisième année (Department for Education and Employment, 1999)
1. « Reconnaître les fractions unitaires telles que 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10… et les utiliser pour trouver des fractions de formes et de nombres » (p. 14). 2. « Commencer à reconnaître les fractions simples qui sont plusieurs parties d'un entier, comme 3/4, 2/3 ou 3/10 » (*ibid.*). 3. « Estimer une fraction simple » (*ibid.*). 4. « Commencer à reconnaître les fractions équivalentes simples : par exemple, cinq dixièmes et un demi, cinq cinquièmes et un entier » (*ibid.*). 5. « Comparer des fractions familières : par exemple, savoir que sur la droite numérique un demi se situe entre un quart et trois quarts » (*ibid.*).

Quatrième année (Department for Education and Employment, 1999)
1. « Utiliser la notation en fraction. Reconnaître des fractions simples qui sont plusieurs parties d'un tout, comme 2/3 ou 5/8, et des nombres mixtes, tels que 5+3/4 ; reconnaître l'équivalence des fractions simples (par exemple des fractions équivalentes à 1/2, 1/4 ou 3/4). Identifier deux fractions simples avec un total de 1 (par exemple 3/10 et 7/10) » (p. 18). 2. « Ordonner des fractions simples : par exemple, décider si des fractions telles que 3/8 ou 7/10 représentent plus ou moins de la moitié » (*ibid.*). 3. « Commencer à relier les fractions à la division et à trouver des fractions simples comme 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10… de nombres ou de quantités. Trouver des fractions comme 2/3, 3/4, 3/5, 7/10… de formes » (*ibid.*). 4. « Comprendre la notation décimale et la position des dixièmes et des centièmes, et l'utiliser dans un contexte. Par exemple : ordonner des montants d'argent ; convertir une somme d'argent tels que 13,25 £ en pence, ou une longueur telle que 125 cm en mètres ; arrondir une somme d'argent à la livre la plus proche » (*ibid.*). 5. « Reconnaître l'équivalence entre les formes décimales et fractionnaires d'un demi, d'un quart, et des dixièmes tels que 0,3 » (*ibid.*).
Cinquième année (Department for Education and Employment, 1999)
1. « Utiliser la notation en fraction, y compris pour les nombres mixtes, et le vocabulaire numérateur et dénominateur. Convertir une fraction supérieure ou égale à 1 à un nombre mixte (par exemple, transformer 13/10 en 1+3/10). Reconnaître lorsque deux fractions simples sont équivalentes, y compris les liens entre les centièmes et les dixièmes (par exemple 70/100 = 7/10) » (p. 22). 2. « Ordonner un ensemble de fractions tel que 2, 2 + 3/4, 1 + 3/4, 2 + 1/2, 1 + 1/2, et les placer sur la droite numérique » (*ibid.*). 3. « Relier les fractions à la division, et utiliser la division pour trouver des fractions simples, y compris des dixièmes et des centièmes, de nombres et de quantités (par exemple, 3/4 de 12, 1/10 de 50, 1/100 de 3 £) » (*ibid.*). 4. « Relier les fractions à leurs représentations décimales, c'est-à-dire reconnaître l'équivalence entre les formes décimales et fractionnaires d'un demi, un quart, trois quarts… et des dixièmes et centièmes (par exemple, 7/10 = 0,7 ; 27/100 = 0,27) » (*ibid.*). 5. « Commencer à comprendre le pourcentage comme le nombre de parts dans chaque centaine, et à trouver des pourcentages simples de petites quantités exprimées sous la forme de nombres entiers (par exemple 25 % de 8 £). Exprimer la moitié, le quart, les trois quarts, les dixièmes et les centièmes en pourcentage (par exemple, savoir que 3/4 = 75 %) » (*ibid.*).

Sixième année (Department for Education and Employment, 1999)
1. « Convertir une fraction comme 33/8 en un nombre mixte équivalent 4 + 1/8, et vice versa. Reconnaître les relations entre les fractions, par exemple que 1/10 est dix fois 1/100, et que 1/16 est la moitié de 1/8. Réduire une fraction à sa plus simple expression en annulant les facteurs communs dans le numérateur et le dénominateur » (p. 26).
2. « Ordonner des fractions telles que 2/3, 3/4 et 5/6 en les convertissant avec un dénominateur commun, et les placer sur la droite numérique » (*ibid.*).
3. « Utiliser une fraction comme un « opérateur » pour trouver des fractions, y compris des dixièmes et des centièmes, de nombres ou de quantités (par exemple 5/8 de 32, 7/10 de 40, 9/100 de 400 centimètres) » (*ibid.*).
4. « Reconnaître l'équivalence entre les formes décimales et fractionnaires d'un demi, un quart, trois quarts, un huitième ... des dixièmes, des centièmes et des millièmes (par exemple 700/1000 = 70/100 = 7/10 = 0,7). Commencer à convertir une fraction en une notation décimale au moyen de la division » (*ibid.*).
5. « Comprendre le pourcentage comme le nombre de parts dans chaque centaine. Exprimer des fractions simples telles que la moitié, le quart, les trois quarts, un tiers, deux tiers… et les dixièmes et les centièmes, en pourcentages (par exemple, savoir que 1/3 = 33+1/3 %). Trouver des pourcentages simples de petites quantités exprimées sous la forme de nombres entiers (par exemple, trouver 10 % de 500 £, puis 20 %, 40 % et 80 % en doublant) » (*ibid.*).
Septième année (Department for Education and Employment, 2001)
1. « Utiliser l'écriture fractionnaire pour décrire des parts de formes et pour exprimer un nombre entier plus petit comme la fraction d'un nombre plus grand. Simplifier des fractions en annulant tous les facteurs communs et identifier des fractions équivalentes ; convertir des notations décimales qui se terminent en fractions, par exemple 0,23 = 23/100 ; utiliser un diagramme pour comparer deux (ou plus) fractions simples » (p. 6).
2. « Commencer à additionner et soustraire des fractions simples et celles avec des dénominateurs communs. Calculer des fractions simples de quantités et de mesure (la réponse est un nombre entier), multiplier une fraction par un entier » (*ibid.*).
3. « Comprendre un pourcentage comme "le nombre de parts pour 100" ; reconnaitre l'équivalence des pourcentages, fractions et décimaux ; calculer des pourcentages simples et utiliser les pourcentages pour comparer des proportions simples » (*ibid.*).
4. « Comprendre la relation entre un ratio et une proportion, utiliser la proportionnalité directe en contexte ; utiliser la notation sous forme de rapport, réduire un rapport à sa plus simple expression et

diviser une quantité en deux parties selon un rapport donné ; résoudre des problèmes simples au sujet des rapports et de la proportionnalité en utilisant des stratégies informelles » (*ibid.*). 5. « Consolider et étendre les méthodes de calcul mental pour inclure des décimaux, des fractions et des pourcentages accompagnées par une prise de notes adaptée ; résoudre des problèmes simples mentalement » (*ibid.*). 6. « Réaliser et justifier des estimations par le calcul mental » (*ibid.*). 7. « Vérifier un résultat en considérant si les ordres de grandeur et en travaillant le problème à l'envers » (*ibid.*).
Huitième année (Department for Education and Employment, 2001)
1. « Savoir qu'un nombre écrit sous une forme décimale et qui comprend une période peut s'écrire sous la forme d'une fraction ; utiliser la division pour convertir une fraction en écriture décimale ; ordonner des fractions en les écrivant avec un dénominateur commun ou en les convertissant en écritures décimales » (p. 8). 2. « Additionner et soustraire des fractions en les écrivant avec un dénominateur commun ; calculer des fractions de quantités (réponses sous forme fractionnaire) ; multiplier et diviser un entier par une fraction » (*ibid.*). 3. « Interpréter un pourcentage comme l'opérateur qui détermine "le nombre de centième de" et exprimer un nombre donné comme le pourcentage d'un autre ; utiliser l'équivalence entre les fractions, les décimaux et les pourcentages pour comparer des proportions ; calculer des pourcentages et trouver le résultat dans le cas d'un pourcentage d'augmentation et de réduction » (*ibid.*). 4. « Consolider la compréhension de la relation entre un ratio et une proportion ; réduire un rapport à sa plus simple expression, y compris quand le rapport est exprimé sous différentes formes, en reconnaissant les liens avec la notation en fraction ; diviser une quantité en deux parts ou plus selon un rapport un donné ; utiliser la méthode unitaire pour résoudre des problèmes simples impliquant rapports et proportion directe » (*ibid.*). 5. « Comprendre l'addition et la soustraction de fractions et d'entiers, et la multiplication et la division d'entiers ; utiliser les lois de l'arithmétique et les opérations inverses » (*ibid.*). 6. « En calcul mental, se rappeler des faits connus, y compris les conversions des fractions vers les écritures décimales ; utiliser les faits connus pour déduire des faits inconnus, y compris des produits incluant des nombres tels que 0,7 et 6, et 0,03 et 8 » (*ibid.*). 7. « Consolider et étendre les méthodes de calcul mental en travaillant avec des décimaux, des fractions, des pourcentages, des carrés et des racines carrées, des cubes et des racines cubiques ; résoudre des problèmes mentalement » (*ibid.*).

8. « Réaliser et justifier des estimations par le calcul mental » (*ibid.*).
9. « Réaliser des calculs plus difficiles de façon efficace en utilisant les touches fonctions pour les changements de signe, les puissances, les racines et les fractions ; utiliser les parenthèses et la mémoire » (*ibid.*).
10. « Entrer des nombres et interpréter l'affichage dans différents contextes (nombres négatifs, fractions, décimaux, pourcentages, argent, mesures métriques, durées) » (*ibid.*).
11. « Vérifier un résultat en considérant si les ordres de grandeur et en travaillant le problème à l'envers » (*ibid.*).

ANNEXE 339. LES PROGRAMMES DE L'ANGLETERRE (2006/2007)

Les rédacteurs mettent en évidence les éléments du programme qui leur paraissent importants en utilisant une police en gras, que nous avons conservé dans notre présentation.

École maternelle (Department for education and skills, 2006)
1. « Partager des objets en groupes égaux et compter combien il y a d'objets dans chaque groupe » (p. 70).
Première année (Department for education and skills, 2006)
1. « Utiliser le vocabulaire des demis et des quarts en contexte » (p. 72).
2. « Résoudre des problèmes qui impliquent de combiner des groups de 2, 5 ou 10, ou de partager en parts égales » (*ibid.*).
Deuxième année (Department for education and skills, 2006)
1. « Trouver la moitié, le quart et les trois quarts de formes et de collections d'objets » (p. 74).
2. « Représenter le partage et la soustraction répétée (groupement) comme une division ; utiliser des méthodes écrites pratiques et informelles et les relier au vocabulaire correspondant pour effectuer une multiplication ou une division, y compris les calculs avec des restes. Utiliser les symboles +, –, ×, ÷ et = pour noter et interpréter des équations impliquant les quatre opérations ; calculer la valeur d'une inconnue dans une équations (par exemple, □ ÷ 2 = 6, 30 – □ = 24) » (*ibid.*).
3. « Comprendre que la moitié et l'inverse du double, et déduire et mémoriser les doubles et les moitiés de tous les nombres jusqu'à 20 » (*ibid.*).

Troisième année (Department for education and skills, 2006)
1. « Lire et écrire des fractions propres (par exemple, 3/7, 9/10) » (p. 76). 2. « Interpréter le dénominateur comme le nombre de parts dans un entier et le numérateur comme le nombre de parts » (*ibid.*). 3. « Identifier et estimer des fractions de formes » (*ibid.*). 4. « Trouver des fractions unitaires de nombres et de quantités (par exemple, 1/2, 1/3, 1/4 et 1/6 de 12 litres) » (*ibid.*). 5. « Utiliser des diagrammes pour comparer les fractions et établir des équivalents » (*ibid.*). 6. « Utiliser des méthodes écrites informelles et pratiques pour multiplier et diviser des nombres à deux chiffres (par exemple, 13 × 3 ou 50 ÷ 4) ; arrondir les quotients à l'unité inférieure ou supérieure, en fonction du contexte » (*ibid.*).
Quatrième année (Department for education and skills, 2006)
1. « Utiliser la notation décimale pour les dixièmes et les centièmes et décomposer des décimaux ; relier cette notation à l'argent et à la mesure ; placer des décimaux à une ou deux décimales sur la droite numérique » (p. 78). 2. « Reconnaître l'équivalence entre les formes décimales et fractionnaires d'un demi, des quarts, des dixièmes et des centièmes » (*ibid.*). 3. « Utiliser des diagrammes pour identifier les fractions équivalentes (par exemple, 6/8 et 3/4, ou 70/100 et 7/10) ; interpréter des nombres mixtes et les positionner sur une droite numérique (par exemple 3+1/2) » (*ibid.*). 4. « Utiliser le vocabulaire du rapport et de la proportion pour décrire la relation entre deux quantités (par exemple, « il y a deux perles rouges pour 3 perles bleues », ou « deux perles toutes les cinq perles sont rouges ») ; estimer une proportion (par exemple, « environ un quart des pommes dans la boîte sont vertes ») » (*ibid.*). 5. « Trouver des fractions de nombres, de quantités ou de formes (par exemple, 1/5 de 30 prunes, 3/8 d'un rectangle de 6 par 4) » (*ibid.*).
Cinquième année (Department for education and skills, 2006)
1. « Exprimer un nombre entier plus petit comme une fraction d'un nombre plus grand (par exemple, reconnaitre que 5 sur 8 est 5/8) ; trouver des fractions équivalentes (par exemple 7/10 = 14/20 ou 19/10 = 1+9/10) » (p. 80). 2. « Rapporter des fractions à leur représentation décimale » (*ibid.*).

3. « Comprendre le pourcentage comme le nombre de parts pour chaque centaine et exprimer les dixièmes et les centièmes sous forme de pourcentages » (*ibid.*). 4. « Trouver des fractions en utilisant la division (par exemple, 1/100 de 5 kg), et des pourcentages de nombres et de quantités (par exemple 10 %, 5 % et 15 % de 80 £) » (*ibid.*).
Sixième année (Department for education and skills, 2006)
1. « Exprimer un nombre entier plus grand comme une fraction d'un nombre entier plus petit (par exemple, reconnaitre que huit tranches de pizzas pour une pizza de cinq tranches représentent 8/5 ou 1+3/5 de pizzas) » (p. 82). 2. « Simplifier des fractions en annulant des facteurs communs ; ordonner un ensemble de fractions en les convertissant avec un dénominateur commun » (*ibid.*). 3. « Exprimer une quantité en pourcentage d'une autre (par exemple, exprimer 400 £ en pourcentage de 1000 £) ; trouver des équivalences entre pourcentages, écritures décimales et fractions » (*ibid.*). 4. « Relier les fractions à la multiplication et à la division (par exemple, 6 ÷ 2 = 1/2 de 6 = 6 × 1/2) ; exprimer un quotient comme une fraction ou une notation décimale (par exemple, 67 ÷ 5 = 13,4 ou 13+2/5) ; trouver des fractions et des pourcentages de quantités exprimées sous la forme de nombres entiers (par exemple, 5/8 de 96, 65 % de 260 £) » (*ibid.*).
Septième, huitième et neuvième années (Qualifications and Curriculum Authority, 2007)
1. « Ils reconnaissent approximativement les proportions à l'intérieur de l'unité et utilisent des fractions simples et des pourcentages pour les décrire » (p. 150). 2. « Ils calculent des fractions et des pourcentages de quantités et de mesures, en utilisant la calculatrice de façon appropriée » (*ibid.*). 3. « Ils évaluent un nombre comme une fraction ou un pourcentage d'un autre. Ils comprennent et utilisent les équivalences entre fractions, notations décimales et pourcentages, et calculent en utilisant des rapports dans des situations appropriées. Ils additionnent et soustraient des fractions en les écrivant avec un dénominateur commun » (p. 151). 4. « Ils agrandissent des figures en utilisant un facteur scalaire fractionnaire » (*ibid.*). 5. « Ils choisissent d'utiliser les fractions ou les pourcentages pour résoudre des problèmes impliquant des transformations proportionnelles répétées ou pour calculer la quantité originelle étant donné le résultat de la transformation proportionnelle » (p. 152). 6. « Ils évaluent une formule algébrique ou calculent une variable, les autres étant données, en substituant des fractions, des écritures décimales ou des nombres négatifs » (*ibid.*).

ANNEXE 340. LES PROGRAMMES DE L'ANGLETERRE (2014)

Première année (Department for Education, 2014a)
1. « Reconnaitre, trouver et nommer une moitié comme une part parmi deux parts égales d'un objet, une forme ou une quantité » (p. 8). 2. « Reconnaitre, trouver et nommer un quart comme une part parmi quatre parts égales d'un objet, une forme ou une quantité » (*ibid.*).
Deuxième année (Department for Education, 2014a)
1. « Reconnaitre, trouver, nommer et écrire les fractions 1/3, 1/4, 2/4 et 3/4 d'une longueur, une forme, une collection d'objets ou une quantité » (p. 13). 2. « Écrire des fractions simples, par exemple 1/2 de 6 = 3, et reconnaitre l'équivalence entre 2/4 et ½ » (*ibid.*).
Troisième année (Department for Education, 2014a)
1. « Compter dans l'ordre croissant et décroissant en dixièmes ; reconnaitre que les dixièmes découlent de la division d'un objet en dix parts égales et en divisant des nombres à un chiffre par dix » (p. 20). 2. « Reconnaitre, trouver et écrire des fractions d'une collection discrète d'objets : fractions unitaires et fractions non-unitaires avec des petits dénominateurs » (*ibid.*). 3. « Reconnaitre et utiliser les fractions comme des nombres : fractions unitaires et fractions non-unitaires avec des petits dénominateurs » (*ibid.*). 4. « Reconnaitre et montrer, en utilisant des diagrammes, des fractions équivalentes avec des petits dénominateurs » (*ibid.*). 5. « Comparer et ordonner des fractions unitaires et des fractions avec le même dénominateur (*ibid.*). 6. Additionner et soustraire des fractions avec le même dénominateur à l'intérieur d'un entier (par exemple, 5/7 + 1/7 = 6/7) » (*ibid.*). 7. « Résoudre des problèmes impliquant les éléments ci-dessus » (*ibid.*).
Quatrième année (Department for Education, 2014a)
1. « Reconnaître et montrer, en utilisant des diagrammes, des familles communes de fractions équivalentes » (p. 26). 2. « Compter dans l'ordre croissant et décroissant en centièmes ; reconnaitre que les centièmes découlent de la division d'un objet par cent et de la division des dixièmes par dix » (*ibid.*).

3. « Résoudre des problèmes incluant des fractions de plus en plus complexes pour calculer des quantités et des fractions pour diviser des quantités, y compris des fractions non-unitaires où la réponse est un nombre entier » (*ibid.*). 4. « Ajouter et soustraire des fractions avec le même dénominateur » (*ibid.*). 5. « Reconnaître et écrire les écritures décimales équivalents de tout nombre de dixièmes ou centièmes (*ibid.*). 6. Reconnaître et écrire les écritures décimales équivalents à 1/4, 1/2, ¾ » (*ibid.*). 7. « Résoudre des problèmes simples de mesures et d'argent impliquant des fractions et des notations décimales à deux décimales » (*ibid.*).
Cinquième année (Department for Education, 2014a)
1. « Comparer et ordonner des fractions dont les dénominateurs sont tous des multiples du même nombre » (p. 34). 2. « Identifier, nommer et écrire des fractions équivalentes d'une fraction donnée, représentée visuellement, y compris les dixièmes et centièmes » (*ibid.*). 3. « Reconnaître des nombres mixtes et des fractions supérieures ou égales à 1 et les convertir d'une forme à l'autre, et écrire des sommes et des différences supérieures à un sous la forme d'un nombre mixte (par exemple, 2/5 + 4/5 = 6/5 = 1+1/5) » (*ibid.*). 4. « Ajouter et soustraire des fractions avec le même dénominateur et des dénominateurs qui sont des multiples du même nombre » (*ibid.*). 5. « Multiplier des fractions propres et des nombres mixtes par des nombres entiers, soutenus par du matériel et des diagrammes » (*ibid.*). 6. « Lire et écrire des notations décimales en fractions (par exemple, 0,71 = 71/100) » (*ibid.*). 7. « Reconnaître et utiliser des millièmes et les relier aux dixièmes, aux centièmes et aux notations décimales équivalentes » (*ibid.*). 8. « Reconnaître le symbole pourcent (%) et comprendre que les pourcentages concernent le nombre de parties par centaine, et écrire des pourcentages comme une fraction de dénominateur 100, et comme une notation décimale » (*ibid.*). 9. « Résoudre des problèmes qui nécessitent de connaitre les pourcentages et les écritures décimales équivalents à 1/2, 1/4, 1/5, 2/5, 4/5 et les fractions ayant un dénominateur multiple de 10 ou 25 » (*ibid.*).

Sixième année (Department for Education, 2014a)
1. « Utiliser des facteurs communs pour simplifier les fractions ; utiliser des multiples courants pour exprimer des fractions sous le même dénominateur » (p. 40). 2. « Comparer et ordonner des fractions, y compris les fractions supérieures à un » (*ibid.*). 3. « Ajouter et soustraire des fractions avec des dénominateurs différents et des nombres mixtes, en utilisant le concept de fractions équivalentes » (*ibid.*). 4. « Multiplier des paires simples de fractions propres, en écrivant la réponse dans sa forme la plus simple (par exemple, 1/4 × 1/2 = 1/8) » (*ibid.*). 5. « Diviser des fractions appropriées par des nombres entiers (par exemple, 1/3 ÷ 2 = 1/6) » (*ibid.*). 6. « Associer une fraction à une division et calculer la notation décimale équivalente (par exemple, 0,375) pour une fraction simple (par exemple, 3/8) » (*ibid.*). 7. « Rappeler et utiliser des équivalences entre des fractions simples, des décimaux et des pourcentages, y compris dans des contextes différents » (p. 41).
Septième, huitième et neuvième années (Department for Education, 2014b)
1. « Consolider les capacités numériques et mathématiques des élèves acquises au cycle 2 et étendre la compréhension du système de numération et de la valeur de position pour y inclure les écritures décimales, les fractions, les puissances et les racines » (p. 4). 2. « Convertir aisément entre différentes représentations numériques, algébriques, graphiques et schématiques (par exemple, fractions équivalentes, fractions et notations décimales, équations et graphiques) » (*ibid.*). 3. « Ordonner des entiers, notations décimales et fractions positifs et négatifs ; utiliser la droite numérique comme modèle pour ordonner les nombres réels » (p. 5). 4. « Utiliser les quatre opérations, y compris avec des méthodes écrites formelles, appliquées aux nombres entiers, aux notations décimales, aux fractions inférieures ou supérieures à 1, et aux nombres mixtes, tous positifs ou négatifs » (*ibid.*). 5. « Travailler de manière interchangeable avec des écritures décimales finies et les fractions correspondantes (telles que 3,5 et 7/2 ou 0,375 et 3/8) » (*ibid.*). 6. « Définir le pourcentage comme le “nombre de parties par centaine”, interpréter les pourcentages et les variations en pourcentage sous forme de fractions ou d’écritures décimales, les interpréter de manière multiplicative, exprimer une quantité en pourcentage, comparer deux quantités avec des pourcentages et travailler avec des pourcentages supérieurs à 100 % » (*ibid.*). 7. « Interpréter les fractions et les pourcentages comme des opérateurs » (*ibid.*).

8. « Utiliser et interpréter les notations algébriques, y compris avec des coefficients écrits sous forme de fractions plutôt que sous forme de notations décimales » (p. 6). 9. « Exprimer une quantité comme une fraction d'une autre, où la fraction est inférieure ou supérieure à 1 » (p. 7). 10. « Comprendre qu'une relation multiplicative entre deux quantités peut être exprimée sous la forme d'un rapport ou d'une fraction » (*ibid.*). 11. « Relier le langage des rapports et les calculs associés à l'arithmétique des fractions et aux fonctions linéaires » (*ibid.*).

ANNEXE 341. LES PROGRAMMES DE CORÉE DU SUD (2007)

Deuxième année (Ministry of Education and Human Resources Development, 2007)
1. « En divisant en parts égales des quantités continues, comprendre les fractions, et savoir comment les lire et les écrire » (p. 13).
Troisième année (Ministry of Education and Human Resources Development, 2007)
1. « Comprendre les situations dans lesquelles une division doit être réalisée, et comprendre le sens de la division » (p. 17). 2. « Comprendre la relation entre la multiplication et la division » (*ibid.*). 3. « Calculer « nombre à deux chiffres ÷ nombre à un chiffre », et comprendre la signification du quotient et du reste » (*ibid.*). 4. « En utilisant la division, résoudre des problèmes de la vie quotidienne » (*ibid.*). 5. « Comprendre les fractions comme la division en parts égales d'une quantité discrète » (*ibid.*). 6. « Comprendre le sens des fractions unitaires et des fractions propres, et leur relation » (p. 18). 7. « Savoir comment comparer la taille des fractions propres de même dénominateur et de fractions unitaires simples » (*ibid.*). 8. « Par le biais des fractions propres dont le dénominateur est 10, comprendre le concept de nombre décimal » (*ibid.*). 9. « Trouver des situations de la vie quotidienne où les fractions et les notations décimales sont utilisées » (*ibid.*). 10. « Reconnaitre l'utilité des fractions et des notations décimales dans des situations-problèmes » (*ibid.*).

Quatrième année (Ministry of Education and Human Resources Development, 2007)
1. « Comprendre les concepts de fraction inférieure, supérieure ou égale à 1, de nombre mixte, et leur relation » (p. 21). 2. « Comparer la taille de fractions de même dénominateur » (*ibid.*). 3. « Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur » (*ibid.*). 4. « Relier les écritures décimales aux fractions » (p. 22).
Cinquième année (Ministry of Education and Human Resources Development, 2007)
1. « Créer des fractions équivalentes en utilisant les propriétés des fractions » (p. 26). 2. « Savoir comment simplifier et réduire des fractions » (*ibid.*). 3. « Comparer des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*). 4. « Comprendre la relation entre les notations décimales et les fractions, et savoir comment exprimer les fractions en écritures décimales, et les écritures décimales en fractions » (*ibid.*). 5. « Comparer les tailles de nombres décimaux et de fractions » (*ibid.*). 6. « Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*). 7. « Comprendre le sens et le principe de calcul de la multiplication entre des nombres entiers et des fractions, et entre fractions » (*ibid.*). 8. « Savoir exprimer la division de nombres entiers sous forme de fractions » (*ibid.*). 9. « Comprendre le principe de calcul de la division d'une fraction par un nombre entier et calculer » (*ibid.*). 10. « Comparer la taille de deux quantités, et les exprimer sous la forme d'une fraction » (p. 29). 11. « En comparant deux quantités, discuter la relation entre une part et un entier, entre une part et une part dans des situations variées » (*ibid.*). 12. « Comprendre le sens d'un rapport et d'un taux entre deux quantités. Exprimer un taux de plusieurs façons » (*ibid.*).
Sixième année (Ministry of Education and Human Resources Development, 2007)
1. « Comprendre le sens et le principe de calcul de la division pour le cas où le diviseur est une fraction, et savoir comment la calculer » (p. 30). 2. « Résoudre des calculs simples mélangeant des fractions et des écritures décimales » (*ibid.*).
Huitième année (Ministry of Education and Human Resources Development, 2007)
1. « Comprendre la signification d'une décimale récurrente » (p. 40). 2. « Comprendre la relation entre les nombres rationnels et les décimales récurrentes » (*ibid.*).

ANNEXE 342. LES PROGRAMMES DE LA FLORIDE (2007)

École maternelle (Florida Department of Education, 2007)
1. « Utiliser des formes basiques, le raisonnement spatial et des manipulations pour modeler des objets dans l'environnement et construire des formes plus complexes » (p. 1).
Première année (Florida Department of Education, 2007)
1. « Modéliser des situations d'addition et de soustraction en utilisant les concepts de "partie-tout", "additionner à", "retirer de", "comparer" et "ce qu'il manque pour arriver à" » (p. 2). 2. « Composer et décomposer des figures planes et des solides, y compris en faisant des prédictions, afin de construire une compréhension des relations partie-tout et des propriétés des formes » (p. 3)
Deuxième année (Florida Department of Education, 2007)
1. « Utiliser des modèles géométriques pour démontrer les relations entre les entiers et leurs parties comme fondement pour les fractions » (p. 5).
Troisième année (Florida Department of Education, 2007)
1. « Modéliser la multiplication et la division, y compris avec des problèmes présentés en contexte : addition répétée, comparaisons multiplicatives, tableaux, rechercher le nombre de combinaisons, mesures et partages » (P. 5). 2. « Développer une compréhension des fractions et de l'équivalence entre fractions » (p. 6). a. « Représenter des fractions, y compris des fractions supérieures à un, en utilisant les aires, les collections, et les modèles de mesures » (*ibid.*). b. « Décrire comment la taille de la partie fractionnaire est en relation avec le nombre de morceaux de taille égale dans l'entier » (*ibid.*). c. « Comparer et ordonner des fractions, y compris des fractions supérieures à un, en utilisant des modèles et des stratégies » (*ibid.*). d. « Utiliser des modèles pour représenter des fractions équivalentes, y compris des fractions supérieures à un, et identifier des représentations d'équivalence » (*ibid.*). 3. « Mesurer des objets en utilisant des fractions d'unités de mesures telles que 1/2, 1/4, et 1/10 » (p. 7).
Quatrième année (Florida Department of Education, 2007)
1. « Développer une compréhension des nombres décimaux, y compris de la relation entre les fractions et les notations décimales » (p. 8).

a. « Utiliser les nombres décimaux jusqu'aux millièmes pour nommer les nombres entre les entiers » (*ibid.*). b. « Décrire les nombres décimaux comme une extension du système numérique en base dix » (*ibid.*). c. « Relier les fractions et les nombres décimaux équivalents avec et sans modèle, y compris le placement sur la droite numérique » (*ibid.*). d. « Comparer et ordonner des nombres décimaux, et estimer des quantités fractionnaires et décimales dans des problèmes du monde réel » (*ibid.*). 2. « Générer des fractions équivalentes et simplifier des fractions » (p. 9). 3. « Relier moitiés, quarts, dixièmes et centièmes, aux nombres décimaux et aux pourcentages » (*ibid.*).
Cinquième année (Florida Department of Education, 2007)
1. « Développer une compréhension et une pratique courante de l'addition et de la soustraction de fractions et de nombres décimaux » (p. 10). a. « Représenter l'addition et la soustraction de nombres décimaux et de fractions ayant des dénominateurs communs ou différents, en utilisant des modèles, la valeur des chiffres ou des propriétés » (*ibid.*). b. « Ajouter et soustraire des fractions et des nombres décimaux couramment, et vérifier la vraisemblance des résultats, y compris dans des situations de problèmes » (*ibid.*). c. « Réaliser des estimations raisonnables de sommes et de différences de fractions et de nombres décimaux, et utiliser des techniques d'arrondissement » (*ibid.*). 2. « Identifier et relier des nombres premiers et composites, des facteurs et des multiples dans le contexte de fractions » (p. 11).
Sixième année (Florida Department of Education, 2007)
1. « Développer une compréhension et une pratique courante de la multiplication et de la division de fractions et de nombres décimaux » (p. 12). a. « Expliquer et justifier des procédures pour multiplier et diviser des fractions et des nombres décimaux » (*ibid.*). b. « Multiplier et diviser des fractions et des nombres décimaux efficacement » (*ibid.*). c. « Résoudre des problèmes du monde réel portant sur la multiplication et la division de fractions et de nombres décimaux » (*ibid.*). 2. « Utiliser des formes équivalentes de fractions, d'écritures décimales et de pourcentages pour résoudre des problèmes » (p. 13).

3. « Comparer et ordonner des fractions, des écritures décimales et des pourcentages, y compris en trouvant leur emplacement approximatif sur la droite numérique » (*ibid.*). 4. « Estimer les résultats de calculs avec des fractions, des écritures décimales et des pourcentages, et juger de la vraisemblance des résultats » (*ibid.*).
Septième année (Florida Department of Education, 2007)
1. « Développer une compréhension des opérations sur tous les nombres rationnels et résoudre des équations linéaires » (p. 14). a. « Additionner, soustraire, multiplier et diviser des entiers, des fractions et des décimaux et réaliser des opérations exponentielles avec des bases rationnelles et des nombres entiers, y compris en résolvant des problèmes de la vie quotidienne » (*ibid.*). b. « Formuler et utiliser différentes stratégies pour résoudre des équations linéaires à une ou deux étapes, y compris des équations avec des coefficients rationnels » (*ibid.*). 2. « Exprimer des nombres sous une forme décimale finie ou infinie » (p. 15).
Huitième année (Florida Department of Education, 2007)
1. « Réaliser des opérations sur des nombres réels (incluant des entiers exposants, radicaux, pourcentages, notation scientifique, valeurs absolues, nombres rationnels et irrationnels) à travers des problèmes à plusieurs étapes et des problèmes du monde réel » (p. 17).

ANNEXE 343. LES PROGRAMMES DE LA FLORIDE (2014)

Première année (Florida Department of Education, 2014, *Grade 1*)
1. « Partager des cercles et des rectangles en deux et en quatre parts égales, décrire les partages en utilisant les mots “moitiés”, “quarts”, et “quartiers”, et utiliser les expressions “moitié de”, “quart de”, et “quartier de”. Décrire l’entier comme deux ou quatre de ces parts. Comprendre par ces exemples que la décomposition en plus de parts crée des parts plus petites » (p. 5).
Deuxième année (Florida Department of Education, 2014, *Grade 2*)
1. « Partager des cercles et des rectangles en deux, trois, ou quatre parts égales, décrire les actions en utilisant les mots “moitiés”, “tiers”, “moitié de”, “tiers de”, etc., et décrire l’entier comme deux demis, trois tiers ou quatre quarts. Reconnaître que les parts égales d’entiers identiques n’ont pas besoin d’avoir la même forme » (p. 5).

Troisième année (Florida Department of Education, 2014, *Grade 3*)
1. « Comprendre la fraction 1/*b* comme la quantité formée par une part lorsque l'entier est divisé en *b* parts égales ; comprendre la fraction *a*/*b* comme la quantité formée par *a* parts de taille 1/*b* » (p. 3) 2. « Comprendre une fraction comme un nombre sur la droite numérique ; représenter des fractions sur une droite numérique » (*ibid.*). a. « Représenter une fraction 1/b sur une droite numérique en définissant l'intervalle de 0 à 1 comme l'entier et le partager en b parts égales. Reconnaître que chaque partie a la taille 1/b et que le point final de la partie qui commence à 0 localise le nombre 1/*b* sur la droite numérique » (p. 4) b. « Représenter une fraction *a/b* sur une droite graduée en marquant des intervalles de longueur 1/*b* à partir de 0. Reconnaître que l'intervalle résultant a une taille *a/b* et que son extrémité localise le nombre *a/b* sur la droite graduée » (*ibid.*). 3. « Expliquer l'équivalence des fractions dans des cas particuliers, et comparer des fractions en raisonnant sur leur taille » (*ibid.*). a. « Comprendre deux fractions comme équivalentes (égales) si elles sont de la même taille, ou si elles sont sur le même point de la droite graduée » (*ibid.*). b. « Reconnaitre et générer des fractions équivalentes simples, par exemple, 1/2 = 2/4, 4/6 = 2/3. Expliquer pourquoi les fractions sont équivalentes, par exemple, en utilisant un modèle de fraction visuel » (*ibid.*). c. « Exprimer des nombres entiers sous forme de fractions, et reconnaitre les fractions qui sont équivalentes à des nombres entiers. *Exemples : Exprimer 3 sous la forme 3 = 3/1 ; reconnaitre que 6/1 = 6 ; localiser 4/4 et 1 au même point sur la droite numérique* » *(ibid.).* d. « Comparer deux fractions avec le même numérateur ou le même dénominateur en raisonnant sur leur taille. Reconnaitre que les comparaisons ne sont valables que lorsque les deux fractions se réfèrent au même entier. Noter les résultats des comparaisons avec les symboles >, =, ou <, et justifier les conclusions, par exemple, en utilisant un modèle de fraction visuel » (*ibid.*). 4. « Générer des données en mesurant des longueurs avec des règles marquant les moitiés et les quarts de pouce. Afficher les données en faisant un tracé linéaire, où l'échelle horizontale est marquée avec une unité appropriée ― entiers, demis ou quarts » (p. 5). 5. « Partager des formes en aires de surfaces égales. Exprimer l'aire de chaque partie comme une fraction de l'entier. *Par exemple, partager une forme en quatre parts de surfaces égales, et décrire l'aire de chaque partie comme étant 1/4 de l'aire de la forme* » (p. 7).
Quatrième année (Florida Department of Education, 2014, *Grade 4*)
1. « Trouver des quotients entiers et des restes, avec des dividendes constitués de quatre chiffres au plus et des diviseurs constitués d'un chiffre au plus, en utilisant des stratégies fondées sur la place des

chiffres, les propriétés des opérations, et/ou sur la relation entre la multiplication et la division. Illustrer et expliquer les calculs en utilisant des équations, des tableaux rectangulaires, et/ou des modèles d'aires » (p. 3).

2. « Expliquer pourquoi une fraction a/b est équivalente à une fraction $(n \times a)/(n \times b)$ en utilisant des modèles de fractions visuels, avec une attention à la façon dont le nombre et la taille des parts diffèrent, même si les deux fractions sont elles-mêmes de la même taille. Utiliser ce principe pour reconnaître et générer des fractions équivalentes » (*ibid.*).

3. « Comparer deux fractions avec des numérateurs et des dénominateurs différents, par exemple en créant des dénominateurs ou des numérateurs communs, ou en les comparant à une fraction de référence telle que 1/2. Reconnaître que les comparaisons ne sont valables que lorsque les deux fractions se réfèrent au même entier. Noter les résultats des comparaisons avec les symboles >, =, ou <, et justifier les conclusions, par exemple en utilisant un modèle de fraction visuel » (p. 4).

4. « Comprendre une fraction a/b avec $a > 1$ comme une somme de fractions $1/b$ » (*ibid.*).

a. « Comprendre l'addition et la soustraction de fractions comme l'assemblage et la séparation de parts se rapportant à un même entier » (*ibid.*).

b. « Décomposer une fraction en une somme de fractions avec le même dénominateur de plus d'une façon, notant chaque décomposition sous la forme d'une équation. Justifier les décompositions, par exemple en utilisant un modèle de fraction visuel. *Exemples : 3/8 = 1/8 + 1/8 + 1/8 ; 3/8 = 1/8 + 2/8 ; 2 + 1/8 = 1 + 1 + 1/8 = 8/8 + 8/8 + 1/8* » (*ibid.*).

c. « Ajouter et soustraire des nombres mixtes ayant le même dénominateur, par exemple en remplaçant chaque nombre mixte par une fraction équivalente, et/ou en utilisant les propriétés des opérations et la relation entre l'addition et la soustraction » (*ibid.*).

d. « Résoudre des problèmes comportant des additions et des soustractions de fractions se référant au même entier et ayant le même dénominateur, par exemple en utilisant des modèles de fractions visuels et des équations pour représenter le problème » (*ibid.*).

5. « Appliquer et étendre la compréhension antérieure de la multiplication pour multiplier une fraction par un nombre entier » (*ibid.*).

a. « Comprendre une fraction a/b comme un multiple de $1/b$. *Par exemple, utiliser un modèle de fraction visuel pour représenter 5/4 comme le produit 5 × 1/4, en notant la conclusion par l'équation 5/4 = 5 × ¼* » (*ibid.*).

b. « Comprendre un multiple de a/b comme un multiple de $1/b$, et utiliser cette compréhension pour multiplier une fraction par un nombre entier. *Par exemple, utiliser un modèle de fraction visuel pour exprimer 3 × 2/5 sous la forme 6 × 1/5, en reconnaissant ce produit comme étant 6/5. (En général, $n \times (a / b) = (n \times a) / b$)* » (*ibid.*).

c. « Résoudre des problèmes comportant la multiplication d'une fraction par un nombre entier, par exemple en utilisant des modèles de fractions visuels et des équations pour représenter le problème. *Par exemple, si chaque personne à une fête mange 3/8 de livre de rôti de bœuf, et qu'il y aura 5 personnes à la fête, combien de livres de rôti de bœuf seront nécessaires ? Entre quels deux nombres entiers votre réponse se situera ?* » (*ibid.*).

6. « Exprimer une fraction de dénominateur 10 sous la forme d'une fraction équivalente de dénominateur 100, et utiliser cette technique pour ajouter deux fractions avec pour dénominateurs respectifs 10 et 100. *Par exemple, exprimer 3/10 sous la forme 30/100, et ajouter 3/10 + 4 / 100 = 34/100* » (p. 5).

7. « Utiliser la notation décimale pour des fractions de dénominateurs 10 ou 100. *Par exemple, réécrire 0,62 comme 62/100 ; décrire une longueur de 0,62 mètre ; localiser 0,62 sur une droite numérique* » (*ibid.*).

8. « Réaliser une droite graduée pour afficher un ensemble de mesures en fractions d'une unité (1/2, 1/4, 1/8). Résoudre des problèmes d'addition et de soustraction de fractions en utilisant l'information présentée sur la droite graduée. *Par exemple, à partir d'un tracé linéaire, trouver et interpréter la différence de longueur entre les spécimens les plus longs et les plus courts dans une collection d'insectes* » (p. 6).

Cinquième année (Florida Department of Education, 2014, *Grade 5*)

1. « Ajouter et soustraire des fractions avec des dénominateurs différents (y compris des nombres mixtes) par le remplacement de fractions par des fractions équivalentes de manière à produire une somme ou une différence équivalente avec des fractions ayant des dénominateurs communs. *Par exemple, 2/3 + 5/4 = 8/12 + 15/12 = 23/12. (En général, a / b + c / d = (ad + bc) / bd.)* » (p. 3).

2. « Résoudre des problèmes comportant des additions et des soustractions de fractions se référant au même entier, y compris dans le cas de dénominateurs différents, par exemple en utilisant des modèles de fractions visuels ou des équations pour représenter le problème. Utiliser des fractions de référence et le sens du nombre de la fraction pour estimer mentalement et évaluer le caractère raisonnable des réponses. *Par exemple, reconnaître un résultat incorrect 2/5 + 1/2 = 3/7, en observant que 3/7 < 1/2* » (*ibid.*).

3. « Interpréter une fraction comme la division du numérateur par le dénominateur (a / b = a ÷ b). Résoudre des problèmes comportant la division de nombres entiers conduisant à des réponses sous forme de fractions ou de nombres mixtes, par exemple en utilisant des modèles de fractions visuels ou des équations pour représenter le problème. *Par exemple, interpréter 3/4 comme le résultat de la division de 3 par 4, notant que 3/4 multiplié par 4 est égal à 3, et que, lorsque trois ensembles sont partagés en parts égales entre 4 personnes, chaque personne a une part de taille 3/4. Si 9 personnes*

veulent partager équitablement un sac de 50 livres de riz, combien de livres de riz devrait obtenir chaque personne ? Entre quels deux nombres entiers votre réponse se situera ? » (*ibid.*).

4. « Appliquer et étendre la compréhension antérieure de la multiplication pour multiplier une fraction ou un nombre entier par une fraction » (p. 4).
a. « Interpréter le produit $(a / b) \times q$ comme a parts d'un partage de q en b parts égales ; de manière équivalente, comme le résultat de la séquence d'opérations $a \times q \div b$. *Par exemple, utiliser un modèle de fraction visuel pour montrer* $(2/3) \times 4 = 8/3$, *et créer une histoire pour mettre cette équation en contexte. Faire de même avec* $(2/3) \times (4/5) = 8/15$. *(En général,* $(a / b) \times (c / d) = ac / bd$*)* (*ibid.*).
b. Calculer l'aire d'un rectangle ayant des longueurs exprimées sous forme de fractions, en réalisant un pavage d'aire appropriée, et en montrant que la région est la même que celle trouvée en multipliant la longueur des côtés. Multiplier des longueurs exprimées sous forme de fractions pour calculer l'aire de rectangles, et représenter le produit des fractions sous forme d'aires rectangulaires » (*ibid.*).

5. Interpréter la multiplication comme un changement d'échelle (redimensionnement) (*ibid.*) :
a. « en comparant la taille d'un produit à la taille d'un facteur sur la base de la taille d'un autre facteur, sans effectuer la multiplication indiquée » (*ibid.*) ;
b. « en expliquant pourquoi la multiplication d'un nombre donné par une fraction supérieure à 1 donne un produit supérieur au nombre donné (reconnaissant la multiplication par des nombres entiers supérieurs à un comme un cas bien connu) ; en expliquant pourquoi la multiplication d'un nombre donné par une fraction inférieure à 1 se traduit par un produit plus petit que le nombre donné ; et en reliant le principe de l'équivalence des fractions $a / b = (n \times a) / (n \times b)$ à l'effet de la multiplication de a / b par 1 » (*ibid.*).

6. « Résoudre des problèmes du monde réel impliquant la multiplication de fractions et de nombres mixtes, par exemple en utilisant des modèles de fractions visuels ou des équations pour représenter le problème » (*ibid.*).

7. « Appliquer et étendre la compréhension antérieure de la division pour diviser des fractions unitaires par des nombres entiers et des nombres entiers par des fractions unitaires » (*ibid.*).
a. « Interpréter la division d'une fraction unitaire par un nombre entier non nul, et calculer de tels quotients. *Par exemple, créer une histoire pour mettre la division* $(1/3) \div 4$ *en contexte, et utiliser un modèle de fraction visuel pour montrer le quotient. Utiliser le lien entre la multiplication et la division pour expliquer que* $(1/3) \div 4 = 1/12$ *parce que* $(1/12) \times 4 = 1/3$ » (*ibid.*).
b. « Interpréter la division d'un nombre entier par une fraction unitaire, et calculer de tels quotients. *Par exemple, créer une histoire pour mettre la division* $4 \div (1/5)$ *en contexte, et utiliser un modèle de fraction visuel pour montrer le quotient. Utiliser le lien entre la multiplication et la division pour expliquer que* $4 \div (1/5) = 20$ *parce que* $20 \times (1/5) = 4$ » (*ibid.*).

c. « Résoudre des problèmes du monde réel impliquant la division de fractions unitaires par un nombre entier différent de zéro et la division de nombres entiers par des fractions unitaires, par exemple en utilisant des modèles de fractions visuels et des équations pour représenter le problème. *Par exemple, combien de chocolat chaque personne obtiendra si 3 personnes partagent équitablement 1/2 livre de chocolat ? Combien de portions de tiers de tasse sont contenues dans 2 tasses de raisins secs ?* » (p. 5). 8. « Réaliser une droite graduée pour afficher un ensemble de mesures en fractions d'une unité (1/2, 1/4, 1/8). Utiliser les opérations sur les fractions étudiées cette année pour résoudre des problèmes concernant des informations présentées sur une droite graduée. *Par exemple, étant donné différentes mesures de liquide dans des gobelets identiques, trouver la quantité de liquide que chaque gobelet contiendrait si la quantité totale dans tous les gobelets était équitablement redistribuée* » (*ibid.*).
Sixième année (Florida Department of Education, 2014, *Grade 6*)
1. « Comprendre le concept d'un taux unitaire a / b associé à un rapport $a:b$ avec $b \neq 0$, et utiliser le vocabulaire correspondant dans le cadre d'une relation de proportionnalité. *Par exemple, cette recette a une proportion de 3 tasses de farine pour 4 tasses de sucre, donc il y a 3/4 de tasse de farine pour chaque tasse de sucre ; nous avons payé 75 $ pour 15 hamburgers, ce qui est un taux de 5 $ par hamburger*" » (p. 1). 2. « Trouver un pourcentage d'une quantité comme un taux pour 100 (par exemple, 30 % d'une quantité signifie 30/100 de fois la quantité) ; résoudre des problèmes impliquant de trouver l'entier, étant donnés la part et le pourcentage » (*ibid.*). 3. « Interpréter et calculer des quotients de fractions, et résoudre des problèmes comportant une division de fraction par une fraction, par exemple en utilisant des modèles de fractions visuels et des équations pour représenter le problème. *Par exemple, créer une histoire pour mettre la division (2/3) ÷ (3/4) en contexte et utiliser un modèle de fraction visuel pour montrer le quotient ; utiliser la relation entre la multiplication et la division pour expliquer que (2/3) ÷ (3/4) = 8/9 parce que 3/4 de 8/9 égalent 2/3. (En général, (a / b) ÷ (c / d) = ad / bc.) ; quelle quantité de chocolat obtiendra chaque personne si 3 personnes partagent équitablement 1/2 livre de chocolat ? Combien de portions de 3 / 4 de tasse sont contenues dans 2/3 d'un pot yaourt ? Quelle est la largeur d'une bande de terre rectangulaire avec une longueur de 3/4 m et une aire de 1/2 m^2 ?* » (p. 2).
Septième année (Florida Department of Education, 2014, *Grade 7*)
1. « Calculer des taux unitaires associés avec des ratios de fractions, y compris des ratios de longueurs, aires et autres quantités mesurées en unités identiques ou différentes. Par exemple, si une personne marche 1/2 mile tous les 1/4 d'heure, calcule le taux unitaire comme une fraction complexe (1/2)/(1/4) miles par heure, c'est-à-dire 2 miles par heure » (p. 1).

2. « Utiliser les relations de proportionnalité pour résoudre des problèmes de ratios et de pourcentages. Par exemple, des taux d'intérêt, taxes, augmentations et réductions, gratuités et commissions, frais, pourcentages d'augmentation et de réduction, pourcentages d'erreur » (*ibid.*).

3. « Appliquer les propriétés des opérations comme des stratégies pour multiplier et diviser des nombres rationnels » (p. 2).

4. « Convertir une fraction rationnelle en écriture décimale en utilisant la division ; savoir que la forme décimale d'un nombre rationnel se termine par 0 ou éventuellement se répète » (*ibid.*).

5. « Résoudre des problèmes du monde réel et des problèmes mathématiques incluant les quatre opérations avec des nombres rationnels » (*ibid.*).

6. « Appliquer des propriétés des opérations comme stratégies pour additionner, soustraire, factoriser et développer des expressions linéaires avec des coefficients rationnels » (p. 3).

7. « Résoudre des problèmes de la vie réelle et des problèmes mathématiques à plusieurs étapes avec des nombres rationnels positifs et négatifs quelle que soit leur forme (nombres entiers, fractions et notations décimales) en utilisant des outils de façon stratégique. Appliquer les propriétés des opérations pour calculer avec des nombres quelle que soit leur forme, convertir entre les différentes formes lorsque c'est approprié et vérifier le caractère raisonnable des réponses en utilisant des stratégies de calcul mental et d'estimation. Par exemple, si une femme payée 25$ de l'heure obtient une augmentation de 10%, elle gagnera 1/10 de son salaire horaire en plus, soit 2,50$, pour un nouveau salaire de 27,50$. Si vous voulez placer un sèche-serviette de 9 3/4 pouces de long au milieu d'une porte qui mesure 27 1/2 pouces de large, vous devrez placer le sèche-serviette à environ 9 pouces de chaque bord ; cette estimation peut être utilisée comme vérification du calcul exact » (*ibid.*).

8. « Comprendre qu'une probabilité est un nombre entre 0 et 1 qui exprime la chance qu'a un évènement de survenir. Un nombre plus grand exprime une probabilité plus forte. Un nombre proche de 0 indique un évènement peu probable, un nombre autour de 1/2 indique un évènement qui n'est ni probable, ni improbable, et un nombre proche de 1 indique une forte probabilité » (p. 6).

ANNEXE 344. LES PROGRAMMES DE LA FRANCE (2008)

Deuxième année (MEN-MENESR, 2008a)
1. « Connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant » (p. 33). 2. « Diviser par 2 ou 5 des nombres inférieurs à 100 (quotient exact entier) » (*ibid.*) 3. « Approcher la division de deux nombres entiers à partir d'un problème de partage ou de groupements » (*ibid.*).

Troisième année (MEN-MENESR, 2008a)
1. « Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier » (p. 38). 2. « Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre » (*ibid.*).
Quatrième année (MEN-MENESR, 2008a)
1. « Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième » (p. 38). 2. « Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs » (*ibid.*). 3. « Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème) » (*ibid.*). 4. « Savoir : les repérer, les placer sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement » (*ibid.*). 5. « Division euclidienne de deux entiers » (*ibid.*). 6. « Division décimale de deux entiers » (*ibid.*).
Cinquième année (MEN-MENESR, 2008a)
1. « Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs » (p. 38). 2. « Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 » (*ibid.*). 3. « Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur » (*ibid.*). 4. « Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au1/10 000ème) » (*ibid.*). 5. « Savoir : les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, les comparer, les ranger, produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000… et 0,1 ; 0,01 ; 0,001… » (*ibid.*). 6. « Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près » (*ibid.*). 7. « Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la "règle de trois") » (p. 39).
Sixième année (MEN-MENESR, 2008b)
Nous avons conservé la mise en page des auteurs : « les points du programme (connaissances, capacités et exemples) qui ne sont pas exigibles pour le socle sont écrits en italiques. Si la phrase en

italiques est précédée d'un astérisque l'item sera exigible pour le socle dans une année ultérieure » (p. 13).

1. « Appliquer un taux de pourcentage. Les élèves doivent connaître le sens de l'expression "… % de" et savoir l'utiliser dans des cas simples où aucune technique n'est nécessaire » (p. 13).
2. « Lire et compléter une graduation sur une demi-droite graduée, à l'aide d'entiers naturels, de décimaux, de fractions simples 1/2, 1/10, 1/4, 1/5 * ou de quotients (placement exact ou approché) » (p. 14).
3. « Connaître et utiliser la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un entier ou d'un décimal » (*ibid.*).
4. « Associer diverses désignations d'un nombre décimal : écriture à virgule, fractions décimales (*ibid.*). L'objectif est d'assurer une bonne compréhension de la valeur des chiffres en fonction du rang qu'ils occupent dans l'écriture à virgule, sans refaire tout le travail réalisé à l'école élémentaire. La bonne compréhension s'appuie sur le sens et non sur des procédures » (*ibid.*).
5. « Comparer deux nombres entiers ou décimaux, ranger une liste de nombres » (*ibid.*).
6. « Encadrer un nombre, intercaler un nombre entre deux autres » (*ibid.*).
7. « Placer un nombre sur une demi-droite graduée » (*ibid.*).
8. « Lire l'abscisse d'un point ou en donner un encadrement » (*ibid.*).

« Les procédures utilisées pour comparer, encadrer, intercaler des nombres sont justifiées en s'appuyant sur la signification des écritures décimales ou le placement des points sur une demi-droite graduée » (*ibid.*).

* « Donner une valeur approchée décimale (par excès ou par défaut) d'un décimal à l'unité, au dixième, au centième près » (p. 15).

« Quotient ».

* Interpréter a/b comme quotient de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire comme le nombre qui multiplié par b donne a » (*ibid.*).
* « Placer le quotient de deux entiers sur une demi-droite graduée dans des cas simples » (*ibid.*).

« À l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire est introduite en référence au partage d'une unité. Par exemple 7/3 est 7 fois un tiers. Le vocabulaire relatif aux écritures fractionnaires est utilisé : numérateur, dénominateur » (*ibid.*).

* « Le programme de la classe de 6^{e} a pour objectif d'interpréter aussi 7/3 comme le tiers de 7 ; le nombre qui multiplié par 3 donne 7 ; un nombre dont une valeur approchée est 2,33 » (*ibid.*).

« L'utilisation de quotients, sous forme fractionnaire, permet de gérer plus facilement les raisonnements et de repousser la recherche d'une valeur approchée décimale à la fin de la résolution » (*ibid.*).

9. « Prendre une fraction d'une quantité » (*ibid.*).

* « Il s'agit de faire comprendre la modélisation de ce type de problème par une multiplication » (*ibid.*). * « Un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre » (*ibid.*). * « Reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre » (*ibid.*).
Septième année (MEN-MENESR, 2008b)
1. « Utiliser l'écriture fractionnaire comme expression d'une proportion, d'une fréquence » (p. 22). 2. « Utiliser sur des exemples numériques des égalités du type $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$. » (*ibid.*). 3. « Additionner et soustraire deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes *et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre » (*ibid.*). 4. * « Effectuer le produit de deux nombres écrits sous forme fractionnaire ou décimale, le cas d'entiers étant inclus » (*ibid.*).
Huitième année (MEN-MENESR, 2008b)
1. « Multiplier, additionner et soustraire des nombres relatifs en écriture fractionnaire » (p. 28) 2. « Diviser des nombres relatifs en écriture fractionnaire » (*ibid.*). 3. « Connaître et utiliser l'égalité : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$» (*ibid.*). 4. « Comparer deux nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire, en particulier connaître et utiliser : l'équivalence entre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et ad = bc (b et d étant non nuls) » (p. 29).

ANNEXE 345. LES PROGRAMMES DE LA FRANCE (2015)

Dans les programmes, les exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève sont distincts des connaissances et compétences associées. Nous les présentons en italique.

Quatrième, cinquième et sixième année (MEN-MENESR, 2015)
1. « Comprendre et utiliser la notion de fractions simples. Écritures fractionnaires. Diverses désignations des fractions (orales, écrites et décompositions). *Utiliser des fractions pour rendre compte de partage de grandeurs ou de mesure de grandeurs dans des cas simples, pour exprimer un quotient. Situation permettant de relier les formulations la moitié, le tiers, le quart et 1/2 de, 1/3 de, 1/4 de, etc. (fractions vues comme opérateurs)* » (p. 201).

2. « Repérer et placer des fractions sur une demi-droite graduée adaptée. Une première extension de la relation d'ordre. » (*ibid.*).

3. « Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs » (*ibid.*).

4. « Établir des égalités entre des fractions simples. *Par exemple, en utilisant une demi-droite graduée, les élèves établissent que 5/10 = 1/2, que 10/100 = 1/10, etc. Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1* » (*ibid.*).

5. « Associer diverses désignations d'un nombre décimal (fractions décimales, écritures à virgule et décompositions) » (*ibid.*).

6. « Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul. *Situations permettant une rencontre avec des échelles, des vitesses constantes, des taux de pourcentage, en lien avec l'étude des fractions décimales* » (p. 203).

7. « Mesurer des périmètres en reportant des unités et des fractions d'unités, ou en utilisant une formule » (p. 206).

ANNEXE 346. LES PROGRAMMES DE HONG-KONG (2000)

Deuxième année (The Education Department, 2000)
1. « Développer le concept de division : partager et faire des groupements » (p. 28). 2. « Calculer des quotients par la division, y compris avec des restes » (*ibid.*).
Troisième année (The Education Department, 2000)
1. « Développer le concept de fraction vue comme la part d'un entier et comme la part d'une collection d'objets » (p. 32). 2. « Reconnaitre la relation entre les fractions et 1 » (*ibid.*). 3. « Comparer des fractions de même dénominateur ou numérateur » (*ibid.*).
Quatrième année (The Education Department, 2000)
1. « Développer le concept de fraction inférieure à 1, supérieure à 1 et de nombre mixte » (p. 36). 2. « Développer le concept de fractions équivalentes » (*ibid.*). 3. « Explorer les méthodes pour convertir des fractions équivalentes » (*ibid.*). 4. « Ajouter et soustraire des fractions avec le même dénominateur et réduire la réponse à sa plus simple expression » (*ibid.*). 5. « Reconnaitre les écritures décimales comme une autre façon de noter les fractions » (*ibid.*). 6. « Développer le concept de numération de position pour les nombres décimaux » (*ibid.*).

Cinquième année (The Education Department, 2000)
1. « Réaliser l'addition et la soustraction de fractions simples avec différents dénominateurs, pour des sommes impliquant au plus deux facteurs » (p. 38). 2. « Résoudre des problèmes impliquant l'addition et la soustraction de fractions simples » (*ibid.*). 3. « Réaliser une estimation des résultats » (*ibid.*). 4. « Réaliser des multiplications de fractions, pour des produits impliquant au plus deux facteurs » (*ibid.*). 5. « Résoudre des problèmes simples » (*ibid.*). 6. « Réaliser une estimation des résultats » (*ibid.*). 7. « Réaliser des divisions de fractions pour des quotients impliquant au plus deux facteurs » (p. 40). 8. « Résoudre des problèmes simples, à l'exclusion des problèmes consistant à chercher le nombre de départ » (*ibid.*). 9. « Réaliser une estimation des résultats » (*ibid.*).
Sixième année (The Education Department, 2000)
1. « Convertir des écritures décimales en fractions » (p. 42). 2. « Convertir des fractions en écritures décimales, en arrondissant les résultats au dixième ou au centième le plus proche » (*ibid.*). 3. « Comparer des fractions en les convertissant en écritures décimales » (*ibid.*). 4. « Réaliser une estimation des résultats » (*ibid.*). 5. « Reconnaitre des pourcentages à travers des exemples de la vie quotidienne » (*ibid.*). 6. « Développer une compréhension des pourcentages » (*ibid.*). 7. « Convertir les pourcentages en écritures décimales et and vice versa » (*ibid.*). 8. « Convertir les pourcentages en fractions et and vice versa » (*ibid.*). 9. « Résoudre des problèmes simples de pourcentages, incluant le fait de trouver des pourcentages, exprimer la valeur d'un pourcentage d'une quantité, une réduction. Réaliser une estimation des résultats » (p. 44).

ANNEXE 347. LES PROGRAMMES DE L'IRLANDE DU NORD (2006)

Deuxième année (*Council for Curriculum, Examinations and Assessment, 2006*)
1. « Explorer le concept de demis, quarts en utilisant des formes entières et des collections d'objets » (onglet « Nombres »). 2. « Parler des choses qui tournent. Reconnaitre les mouvements de rotation, par exemple, à gauche, à droite, demi-tour et tour complet » (onglet « Formes et espace »).

3. « Dire l'heure en utilisant les demi-heures » (onglet « Mesures »).
Troisième année (*Council for Curriculum, Examinations and Assessment, 2006*)
1. « Étendre le concept de fraction à une large série de fractions en utilisant des formes entières et des collections d'objets » (onglet « Nombres »). 2. « Être sensibilisé à la notation de ces fractions, par exemple 1/5, 3/4, 2/3 » (*ibid.*). 3. « Explorer le lien avec la division » (*ibid.*). 4. « Compter oralement en avançant et en reculant en demis et puis en quarts » (*ibid.*). 5. « Développer la conscience des diagrammes circulaires (avec au maximum quatre secteurs, en utilisant la discrimination visuelle et les fractions simples, par exemple les demis et les quarts) » (onglet « Manipulation de données »). 6. « Explorer le concept de division à l'intérieur de 25 à travers des activités de partage et de regroupement. *En commençant à utiliser le symbole de la division* » (onglet « Multiplications et divisions »). 7. « Explorer la soustraction répétée comme une approche de la division. *Considérer les restes dans des contexts pratiques* » (*ibid.*). 8. « Reconnaitre des nombres entiers qui sont exactement divisibles par 2, 5 et 10 » (*ibid.*). 9. « Explorer le lien entre la multiplication et la division, par exemple "trouver la moitié est l'inverse de trouver le double" » (*ibid.*). 10. « Explorer les quarts de tour, les demi-tours et les tours complets pour établir une relation avec les angles droits, par exemple en utilisant Roamer ou Pixie » (onglet « Formes et espace »). 11. « Estimer et comparer des longueurs exprimées en mètres. Introduire des longueurs plus courtes, telles que le demi-mètre, le quart de mètre, le décimètre et le centimètre. Utiliser une règle pour tracer et mesurer des segments au demi-centimètre près » (onglet « Mesures »). 12. « Estimer et comparer des masses exprimées en kilogrammes. Introduire des masses plus petites, telles que le demi-kilogramme et le quart de kilogramme » (*ibid.*). 13. « Estimer et comparer des contenances exprimées en litres, par exemple "Un seau contient-il plus ou moins de 2 litres ?" Introduire des capacités plus petites, telles que le demi-litre et le quart de litre » (*ibid.*). 14. « Trouver l'aire de figures en comptant le nombre de carreaux, avec une réponse exprimée sous la forme d'un nombre exact de carreaux ; d'un nombre entier de carreaux et d'un demi-carreau ; d'un nombre entier de carreaux et d'un morceau de carreau » (*ibid.*).

15. « Dire l'heure en minutes après l'heure pile (5, 10, 15, 20, 25, 30). Relier cette notion à "une demi-heure" et "un quart d'heure". Dire l'heure en minutes avant l'heure pile sur une horloge analogique. Relier cette notion à "un quart d'heure avant" » (*ibid.*). 16. « Relier les heures et les demi-heures sur une horloge analogique et sur une horloge digitale » (*ibid.*).
Quatrième année (*Council for Curriculum, Examinations and Assessment, 2006*)
1. « Explorer et ordonner les fractions avec le même dénominateur (1/6, 2/6, 5/6) et où le numérateur est un (1/3, 1/5, 1/8) » (onglet « Nombres »). 2. « Être sensibilisé à la notation décimale en relation avec les concepts de dixième et de centième à travers l'utilisation de matériel » (*ibid.*). 3. « Relier les fractions aux notations décimales, par exemple 1/2 est égal à 0,5 » (*ibid.*). 4. « Explorer le concept de pourcentage simple, et le relier aux fractions, par exemple en utilisant un carré de cent cases » (*ibid.*). 5. « Explorer les pourcentages : sur cent ; reconnaitre que 1 % de 100 est 1 » (*ibid.*). 6. « Étudier l'équivalence des fractions, et regrouper des fractions équivalentes dans des "familles de fractions" » (*ibid.*). 7. « Étendre la compréhension de l'équivalence des fractions, par exemple 1/5 = 2/? = 4/? » (*ibid.*). 8. « Ajouter des fractions de même dénominateur » (onglet « Additions et soustractions »). 9. « En utilisant les connaissances relatives aux fractions équivalentes, ajouter et soustraire des fractions simples, par exemple 1/2 + 1/4 + 1/8 = 4/8 + 2/8 + 1/8 ; 5/6 – 1/3 » (*ibid.*) 10. « Calculer avec des fractions : 1/3 de, 1/4 de, 2/3 de, 3/5 de, mentalement, à l'écrit, à l'aide de la calculatrice » (onglet « Multiplications et divisions »). 11. « Étendre le concept de division à l'intérieur de 100 à travers des activités de partage et de regroupement. *En utilisant le symbole de la division* » (*ibid.*). 12. « Étendre la division à n'importe quel nombre entier à deux ou trois chiffres divisé par un nombre à un chiffre en utilisant différentes méthodes écrites » (*ibid.*) 13. « Utiliser les connaissances sur la multiplication des nombres entiers par 10 et 100 pour explorer la division par 10 et 100. Reconnaitre les nombres qui sont exactement divisibles par 10, 100 » (*ibid.*). 14. « Décrire des rotations dans les sens horaire et anti-horaire, en termes de nombre d'angles droits ou demi-angles droits ; de fractions d'un tour complet ; de degrés (en relation avec les angles droits ou demi-angles droits) » (onglet « Formes et espace »).

Cinquième année (*Council for Curriculum, Examinations and Assessment, 2006*)
1. « Être sensibilisé aux relations entre les fractions simples, les notations décimales et les pourcentages » (onglet « Nombres »). 4. « Ordonner des fractions avec des numérateurs et des dénominateurs différents, par exemple 1/3, 3/4, 5/8 » (*ibid.*). 3. « Appliquer des connaissances relatives au calcul de pourcentages pour résoudre des problèmes d'argent, par exemple 25 % de réduction pour une vente, 10 % supplémentaires pour le même prix » (*ibid.*). 5. « Partager des collections d'objets pour développer la compréhension du sens de la fraction d'une quantité, avec pour résultats des nombres mixtes, par exemple 1/3 de 10 est égal à 3 + 1/3 » (onglet « Multiplications et divisions »). 2. « Utiliser des stratégies de calcul mental pour calculer un pourcentage d'une quantité, par exemple 5 % de 240 représente la moitié de 10 % de 240. Calculer d'autres pourcentages de quantités, par exemple 75 % de 880 ; 90 % de 50 » (*ibid.*). 6. « Choisir une façon appropriée d'exprimer un reste dans une division : une fraction, une écriture décimale ou un nombre entier » (*ibid.*).

ANNEXE 348. LES PROGRAMMES DE L'ONTARIO (2005)

Première année (Ministère de l'Éducation, 2005)
1. « Déterminer, à l'aide de matériel concret, le double des nombres naturels jusqu'à 10 et la moitié des nombres naturels inférieurs à 20 (p. ex., la moitié de 10 est 5) » (p. 27). 2. « Représenter les moitiés en tant que parties d'un élément et parties d'un ensemble d'éléments, à l'aide de matériel concret ou illustré (p. ex., en découpant une pomme, en utilisant un tangram ou des réglettes, en coloriant 2 fleurs d'un ensemble de 4) » (*ibid.*).
Deuxième année (Ministère de l'Éducation, 2005)
1. « Partager un nombre d'objets selon une régularité de correspondance multivoque (p. ex., partager 12 carottes entre 4 personnes signifie que chaque personne en obtiendra 3) » (p. 35). 2. « Représenter les demis et les quarts en tant que parties d'un élément et d'un ensemble d'éléments à l'aide de matériel concret (p. ex., horloge) » (*ibid.*). 3. « Déterminer les résultats possibles d'une expérience de probabilité simple (p. ex., lancer une pièce de monnaie, obtenir la couleur jaune sur une roulette colorée à moitié en jaune, à un quart en bleu et à l'autre quart en rouge) » (p. 40).

Troisième année (Ministère de l'Éducation, 2005)
1. « Représenter les tiers en tant que partie d'un élément et d'un ensemble d'éléments à l'aide de matériel concret (p. ex., il y a 18 pommes, si nous en prenons chacun le tiers, nous aurons 6 pommes chacun) » (p. 43). 2. « Représenter des énoncés de multiplication et de division à l'aide de matériel concret et semi-concret (p. ex., regroupement, tableau) » (p. 44). 3. « Identifier des nombres divisibles par 2, par 5 ou par 10 en fonction des régularités observées de ces nombres (p. ex., dans une grille de 100) » (*ibid.*).
Quatrième année (Ministère de l'Éducation, 2005)
1. « Comparer et ordonner des fractions ayant un même numérateur à l'aide de matériel concret ou illustré (p. ex., réglettes, bandes de carton, cercles de fraction, jetons) » (p. 51). 2. « Comparer et ordonner des fractions ayant un dénominateur commun à l'aide de matériel concret ou illustré » (*ibid.*). 3. « Explorer la relation entre les fractions et les nombres décimaux (p. ex., 1/10 = 0,1) » (*ibid.*). 4. « Lire et écrire en lettres et en chiffres des fractions simples (p. ex., 2/3, deux cinquièmes) » (p. 52). 5. « Utiliser une variété d'objets et d'illustrations pour représenter des fractions simples en tant que parties d'un tout et parties d'un ensemble dans divers contextes (p. ex., six enfants s'amusent dans la cour de l'école. Deux tiers jouent au ballon. Combien d'enfants jouent au ballon ?) » (*ibid.*). 6. « Estimer et vérifier le quotient d'un nombre naturel à trois chiffres par un nombre naturel à un chiffre » (*ibid.*). 7. « Identifier, effectuer et décrire des rotations d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour, à l'aide de matériel concret ou de calquage sur papier quadrillé ou à points, en utilisant un des sommets de la figure comme centre de rotation » (p. 55).
Cinquième année (Ministère de l'Éducation, 2005)
1. « Explorer les fractions équivalentes à l'aide de matériel concret (p. ex., réglettes) » (p. 61). 2. « Explorer l'équivalence entre une fraction supérieure ou égale à 1 et un nombre fractionnaire à l'aide de matériel concret ou illustré (p. ex., 8/3 = 2 + 2/3) » (*ibid.*). 3. « Comparer deux fractions en utilisant une fraction repère telle que 1/4, 1/2, 3/4 et 1 (p. ex., 8/14 est plus grand que 7/16, car 8/14 est plus grand que 1/2 et 7/16 ne l'est pas) » (*ibid.*). 4. « Comparer et ordonner des fractions propres et supérieures ou égales à 1 et des nombres décimaux jusqu'aux centièmes (p. ex., sur une droite numérique) » (*ibid.*).

5. « Établir et expliquer la relation entre un nombre décimal et une fraction dont le dénominateur est 10 ou 100, et vice versa » (*ibid.*). 6. « Lire et écrire en lettres et en chiffres des fractions supérieures ou égales à 1 et des nombres fractionnaires » (*ibid.*). 7. « Utiliser une variété d'objets et d'illustrations pour représenter des fractions supérieures ou égales à 1 et des nombres fractionnaires (p. ex., papier pliage, géoplan, mosaïque géométrique) » (*ibid.*). 8. « Identifier, effectuer et décrire des rotations d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour, à l'aide de calquages sur du papier quadrillé ou à points, lorsque le centre de rotation se situe à l'intérieur ou sur le contour d'une figure » (p. 65). 9. « Prédire et décrire, à l'aide de fractions ou d'un diagramme en arbre, la probabilité qu'un évènement ou que certains évènements se produisent (p. ex., si une roulette est divisée en quatre sections dont une seule est de la couleur rouge, la probabilité que l'aiguille de la roulette arrive sur le rouge est d'un quart) » (p. 67). 10. « Réaliser une expérience simple de probabilité (p. ex., obtenir les couleurs bleue et jaune en tournant deux roulettes) et comparer, à l'aide de fractions, les résultats obtenus à la liste des résultats prévus » (*ibid.*).
Sixième année (Ministère de l'Éducation, 2005)
1. « Déterminer des fractions équivalentes à l'aide de différentes stratégies (p. ex., matériel de manipulation, dessin, tableau) » (p. 70). 2. « Comparer et ordonner des nombres fractionnaires et des fractions en utilisant une variété de stratégies (p. ex., matériel concret, dessin, droite numérique, fraction repère) » (*ibid.*). 3. « Établir et expliquer les relations entre les fractions, les nombres décimaux et les pourcentages » (*ibid.*). 4. « Convertir en pourcentage un nombre décimal ou une fraction dont le dénominateur est un diviseur de 100, et vice versa (p. ex., 2/5 = 40/100 = 40 %, 0,18 = 18/100 = 18 %) » (*ibid.*). 5. « Utiliser une variété d'objets et d'illustrations pour représenter des nombres fractionnaires et des fractions (p. ex., papier quadrillé ou à points, bloc de base dix) » (*ibid.*). 6. « Additionner et soustraire des fractions ayant des dénominateurs communs à l'aide de matériel concret ou illustré et de symboles (p. ex., contenants d'œufs, réglettes) » (p. 71). 7. « Multiplier et diviser une fraction par un nombre naturel à l'aide de diverses stratégies (p. ex., matériel concret, dessins, tableau, droite numérique) » (*ibid.*). 8. « Expliquer les stratégies utilisées ainsi que la démarche effectuée pour résoudre divers problèmes comportant des nombres naturels, des nombres décimaux ou des fractions » (*ibid.*). 9. « Prédire et tracer l'image d'une figure obtenue suite à deux transformations successives (p. ex., effectuer une rotation d'un quart de tour vers la droite suivie d'une translation). Tracer l'image d'une

figure obtenue par rotation d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour sur du papier quadrillé ou à points lorsque le centre de rotation se trouve à l'extérieur de la figure. Utiliser la rotation (un quart de tour, un demi-tour et trois quarts de tour) pour générer un dallage ayant un motif » (p. 73). 10. « Décrire la probabilité d'un évènement à l'aide de fractions et de pourcentages » (p. 75).
Septième année (Ministère de l'Éducation, 2005)
1. « Établir et expliquer à l'aide de matériel concret, la relation entre les fractions, les nombres décimaux, les pourcentages et les rapports » (p. 78). 2. « Représenter et décrire une relation proportionnelle à l'aide d'un rapport ou d'un taux » (*ibid.*). 3. « Reconnaître des rapports et des taux équivalents » (*ibid.*). 4. « Représenter la même valeur sous forme de fraction, sous forme décimale et sous forme de pourcentage (par exemple, 1/2 = 0,5 = 50 %) » (p. 79). 5. « Additionner et soustraire dans divers contextes des fractions positives en utilisant une variété de stratégies (par exemple, matériel concret, dessins, tableau) » (*ibid.*). 6. « Élaborer et expliquer diverses stratégies pour résoudre divers problèmes comportant des nombres entiers, des fractions et des nombres décimaux à l'aide de matériel concret, semi-concret ou d'une calculatrice » (*ibid.*). 7. « Utiliser les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition et de la multiplication et la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition pour faciliter le calcul d'opérations liées aux nombres naturels, aux fractions et aux nombres décimaux (par exemple, $5 \times 3\frac{1}{5} = 5 \times (3 + \frac{1}{5}) = (5 \times 3) + (5 \times \frac{1}{5}) = 15 + 1 = 16$) » (*ibid.*). 8. « Examiner la vraisemblance des résultats obtenus en tenant compte du contexte et en ayant recours au calcul mental et à l'estimation » (*ibid.*).
Huitième année (Ministère de l'Éducation, 2005)
1. « Identifier des rapports et des taux équivalents » (p. 86). 2. « Évaluer des puissances ayant un nombre entier ou une fraction comme base et un nombre naturel comme exposant » (*ibid.*). 3. « représenter la même valeur sous forme de fraction, sous forme décimale et sous forme de pourcentage (par exemple, 9/16 = 0,56 = 56,25 %) » (*ibid.*). 4. « Comparer, ordonner et représenter des fractions et des nombres décimaux » (*ibid.*). 5. « Identifier la période d'un nombre rationnel écrit en notation décimale (par exemple, 1/11 = 0,090 909 = $0,\overline{09}$) » (*ibid.*). 6. « Identifier la relation entre deux rapports équivalents à l'aide de diverses stratégies » (*ibid.*). 7. « Multiplier et diviser des fractions positives, à l'aide ou non de matériel concret ou semi-concret dans divers contextes » (*ibid.*).

8. « Formuler et résoudre des problèmes portant sur des situations complexes avec des nombres provenant de différents ensembles (par exemple, nombres naturels, entiers et fractionnaires) » (p. 87). 9. « Expliquer, à l'aide de matériel concret, de l'ordinateur ou d'une calculatrice, une stratégie pour résoudre divers problèmes comportant des nombres entiers, des fractions et des nombres décimaux » (*ibid.*). 10. « Examiner la vraisemblance des résultats obtenus en tenant compte du contexte et en ayant recours au calcul mental et à l'estimation » (*ibid.*). 11. « Évaluer des expressions algébriques et des équations simples en substituant des nombres entiers, des fractions positives et des nombres décimaux » (p. 90). 12. « Utiliser un nombre décimal, un pourcentage ou une fraction pour exprimer une probabilité » (p. 91).

ANNEXE 349. LES PROGRAMMES DU QUÉBEC (2001)

Les indications issues des progressions officielles publiées en août et octobre 2009 et accompagnant le document de référence sont écrites en italique.

Première année (Gouvernement du Québec. Ministère de l'Éducation, 2001. *Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009a*)
1. « Fractions en lien avec le quotidien de l'élève » (p. 134). *« Avec l'intervention de l'enseignant, reconnaître des fractions se rapportant à des éléments du quotidien (représentations concrètes ou imagées) » (p. 6). « Avec l'intervention de l'enseignant, représenter une fraction de différentes façons à partir d'un tout ou d'une collection. Avec l'intervention de l'enseignant, utiliser le vocabulaire (fraction, demi, tiers, quart) » (p. 7).*
Deuxième année (Gouvernement du Québec. Ministère de l'Éducation, 2001. *Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009a*)
1. « Fractions en lien avec le quotidien de l'élève » (p. 134). *« Reconnaître des fractions se rapportant à des éléments du quotidien (représentations concrètes ou imagées) » (p. 6).* « *Avec l'intervention de l'enseignant, représenter une fraction de différentes façons à partir d'un tout ou d'une collection » (p. 9). « Utiliser le vocabulaire (fraction, demi, tiers, quart) » (p. 7).*
Troisième année (Gouvernement du Québec. Ministère de l'Éducation, 2001. *Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009a*)
1. « Fractions à partir d'un tout ou d'une collection d'objets : lecture, écriture, numérateur, dénominateur, représentations variées (concrètes ou imagées), parties équivalentes, comparaison à 0, à 1/2 et à 1 » (p. 134). *« Avec l'intervention de l'enseignant, représenter une fraction de différentes*

façons à partir d'un tout ou d'une collection » (p. 6). « Avec l'intervention de l'enseignant, associer une fraction à une partie d'un tout (parties isométriques ou parties équivalentes) ou d'un groupe d'objets et vice versa » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, reconnaître différents sens de la fraction (partage, division, rapport) » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, distinguer le rôle du numérateur de celui du dénominateur » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, lire et écrire une fraction » » (p. 7). « Avec l'intervention de l'enseignant, comparer une fraction à 0, à 1/2 ou à 1 » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, vérifier l'équivalence de deux fractions » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, utiliser le vocabulaire des fractions (numérateur, dénominateur, entier, partie équivalente, fraction équivalente) et les symboles (notation fractionnaire) » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, construire un ensemble de fractions équivalentes » (ibid.). 2. « Nombres décimaux jusqu'à l'ordre des centièmes (dixième, centième) : lecture, écriture, représentations variées, ordre, expressions équivalentes, décomposition » (p. 134). *« Avec l'intervention de l'enseignant, associer une fraction à un nombre décimal » (p. 7).* 3. *« Avec l'intervention de l'enseignant, à l'aide de processus personnels, déterminer le produit ou le quotient de deux nombres naturels » (p. 11).* 4. *« Avec l'intervention de l'enseignant, à l'aide de processus personnels, en utilisant du matériel ou des dessins, déterminer le produit ou le quotient d'un nombre naturel à 3 chiffres par un nombre naturel à 1 chiffre, exprimer le reste de la division sous forme de fraction, selon le contexte » (p. 12).*
Quatrième année (Gouvernement du Québec. Ministère de l'Éducation, 2001. *Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009a*)
1. « Fractions à partir d'un tout ou d'une collection d'objets : lecture, écriture, numérateur, dénominateur, représentations variées (concrètes ou imagées), parties équivalentes, comparaison à 0, à 1/2 et à 1 » (p. 134). *« Avec l'intervention de l'enseignant, représenter une fraction de différentes façons à partir d'un tout ou d'une collection » (p. 6). « Associer une fraction à une partie d'un tout (parties isométriques ou parties équivalentes) ou d'un groupe d'objets et vice versa » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, reconnaître différents sens de la fraction (partage, division, rapport) » (ibid.). « Distinguer le rôle du numérateur de celui du dénominateur » (ibid.). Lire et écrire une fraction (p. 7). « Comparer une fraction à 0, à 1/2 ou à 1 » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, vérifier l'équivalence de deux fractions » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, ordonner des fractions ayant un même dénominateur » (ibid.). « Utiliser le vocabulaire des fractions (numérateur, dénominateur, entier, partie équivalente, fraction équivalente) et les symboles (notation fractionnaire) » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, construire un ensemble de fractions équivalentes » (p. 12).*

2. « Nombres décimaux jusqu'à l'ordre des centièmes (dixième, centième) : lecture, écriture, représentations variées, ordre, expressions équivalentes, décomposition » (p. 134). *« Associer une fraction à un nombre décimal. Avec l'intervention de l'enseignant, associer un nombre décimal ou un pourcentage à une fraction » (p. 7).*

3. *« Avec l'intervention de l'enseignant, à l'aide de processus personnels, déterminer le produit ou le quotient de deux nombres naturels » (p. 11).*

4. *« À l'aide de processus personnels, en utilisant du matériel ou des dessins, déterminer le produit ou le quotient d'un nombre naturel à 3 chiffres par un nombre naturel à 1 chiffre, exprimer le reste de la division sous forme de fraction, selon le contexte » (p. 12).*

Cinquième année (Gouvernement du Québec. Ministère de l'Éducation, 2001. *Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009a*)

1. « Fractions : lecture, écriture, numérateur, dénominateur, représentations variées, ordre, comparaison, expressions équivalentes, fractions équivalentes » (p. 134). *« Avec l'intervention de l'enseignant, représenter une fraction de différentes façons à partir d'un tout ou d'une collection » (p. 6). « Avec l'intervention de l'enseignant, reconnaitre différents sens de la fraction (partage, division, rapport) » (ibid.). « Ordonner des fractions ayant un même dénominateur » (p. 7). « Avec l'intervention de l'enseignant, ordonner des fractions ayant un même numérateur » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, situer des fractions sur un axe de nombres (droite numérique) » (ibid.).*

2. « Pourcentage » (p. 134). *« Avec l'intervention de l'enseignant, utiliser le mot "pourcentage" et le symbole "%" » (p. 13).*

3. « Passage d'une forme d'écriture à une autre : notation fractionnaire, notation décimale, pourcentage » (p. 134). *« Avec l'intervention de l'enseignant, exprimer en notation fractionnaire un nombre exprimé en notation décimale et vice versa » (p. 13). « Avec l'intervention de l'enseignant, exprimer par un pourcentage un nombre exprimé en notation décimale et vice versa » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, exprimer par un pourcentage un nombre exprimé en notation fractionnaire et vice versa » (ibid.).*

4. « Choix d'une forme d'écriture selon le contexte » (p. 134). *« Avec l'intervention de l'enseignant, choisir une forme d'écriture appropriée selon le contexte » (p. 13).*

5. « Établissement de fractions équivalentes » (p. 136). *« Avec l'intervention de l'enseignant, vérifier l'équivalence de deux fractions » (p. 7). « Avec l'intervention de l'enseignant, construire un ensemble de fractions équivalentes » (p. 12).*

6. « Réduction de fractions, fraction irréductible » (p. 136). *« Avec l'intervention de l'enseignant, réduire une fraction à sa plus simple expression » (p. 12). « Avec l'intervention de l'enseignant, utiliser l'expression "fraction irréductible" » (ibid.).*

7. « Sens des opérations (à l'aide d'un matériel concret et de schémas) : addition, soustraction et multiplication par un nombre naturel » (p. 135). *« Avec l'intervention de l'enseignant, à l'aide d'un matériel concret et de schémas, addition et soustractions de fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre » (p. 12). « Avec l'intervention de l'enseignant, à l'aide d'un matériel concret et de schémas, multiplication d'un nombre naturel par une fraction » (ibid.). « Avec l'intervention de l'enseignant, traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou par une opération et vice versa (exploitation des différents sens de l'addition, de la soustraction et de la multiplication par un nombre naturel) » (p. 10).* 8. « *Avec l'intervention de l'enseignant, à l'aide de processus personnels, déterminer le produit ou le quotient de deux nombres naturels » (ibid.).* *9. « Avec l'intervention de l'enseignant, utiliser la notation fractionnaire, la notation décimale ou le pourcentage pour quantifier une probabilité » (p. 21).*
Sixième année (Gouvernement du Québec. Ministère de l'Éducation, 2001. *Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009a*)
1. « Fractions : lecture, écriture, numérateur, dénominateur, représentations variées, ordre, comparaison, expressions équivalentes, fractions équivalentes » (p. 134). *« Représenter une fraction de différentes façons à partir d'un tout ou d'une collection » (p. 6). « Avec l'intervention de l'enseignant, reconnaître différents sens de la fraction (partage, division, rapport) » (ibid.). « Associer un nombre décimal ou un pourcentage à une fraction » (p. 7). « Ordonner des fractions, le dénominateur de l'une étant un multiple de l'autre (ou des autres) » (ibid.). « Ordonner des fractions ayant un même numérateur » (ibid.). « Situer des fractions sur un axe de nombres (droite numérique) » (ibid.).* 2. « Pourcentage » (p. 134). « *Utiliser le mot "pourcentage" et le symbole "%" » (p. 13).* 3. « Passage d'une forme d'écriture à une autre : notation fractionnaire, notation décimale, pourcentage » (p. 134.). *« Associer une fraction ou un pourcentage à un nombre décimal. Exprimer en notation fractionnaire un nombre exprimé en notation décimale et vice versa. Exprimer par un pourcentage un nombre exprimé en notation décimale et vice versa. Exprimer par un pourcentage un nombre exprimé en notation fractionnaire et vice versa » (p. 13).* 4. « Choix d'une forme d'écriture selon le contexte » (p. 134). *« Choisir une forme d'écriture appropriée selon le contexte » (ibid.).* 5. « Établissement de fractions équivalentes » (p. 136). *« Vérifier l'équivalence de deux fractions » (p. 7). « Construire un ensemble de fractions équivalentes » (p. 12).* 6. « Réduction de fractions, fraction irréductible » (p. 136). *« Réduire une fraction à sa plus simple expression » (p. 12). « Utiliser l'expression "fraction irréductible" » (ibid.).*

7. « Sens des opérations (à l'aide d'un matériel concret et de schémas) : addition, soustraction et multiplication par un nombre naturel » (p. 135). *« À l'aide d'un matériel concret et de schémas, addition et soustraction de fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre. À l'aide d'un matériel concret et de schémas, multiplication d'un nombre naturel par une fraction » (p. 12). « Traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou par une opération et vice versa (exploitation des différents sens de l'addition, de la soustraction et de la multiplication par un nombre naturel) » (p. 10).* 8. « *À l'aide de processus personnels, déterminer le produit ou le quotient de deux nombres naturels » (ibid.).* *9. « Utiliser la notation fractionnaire, la notation décimale ou le pourcentage pour quantifier une probabilité » (p. 21).*
Septième année (*Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009b*)
1. « *Représenter une fraction de différentes façons (concrètes ou imagées) (réutilisation de la connaissance). Avec l'intervention de l'enseignant, reconnaître différents sens de la fraction : partie d'un tout, division, rapport, opérateur, mesure. Vérifier l'équivalence de deux fractions (réutilisation de la connaissance). Comparer une fraction à 0, à ½ ou à 1 (réutilisation de la connaissance). Ordonner des fractions ayant un même dénominateur ou le dénominateur de l'une étant un multiple de l'autre ou ayant un même numérateur (réutilisation de la connaissance). Exprimer des nombres sous différentes formes (fractionnaire, décimale, pourcentage) (réutilisation de la connaissance). Comparer et ordonner des nombres écrits en notation fractionnaire ou en notation décimale » (p. 7). Représenter, lire et écrire des nombres écrits en notation fractionnaire ou en notation décimale. Avec l'intervention de l'enseignant, comparer et ordonner des nombres exprimés sous différentes formes (fractionnaire, décimale, exponentielle [exposant entier], pourcentage, racine carrée) » (p. 8).* 2. « *Traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou par une opération et vice versa (exploitation des différents sens de l'addition, de la soustraction et de la multiplication par un nombre naturel) [réutilisation de la connaissance]. Représenter une situation par une opération (exploitation des différents sens des opérations). Choisir une forme d'écriture des nombres appropriée au contexte (réutilisation de la connaissance). Rechercher des expressions équivalentes : décomposition (additive, multiplicative, etc.), fractions équivalentes, simplification et réduction, mise en évidence simple, etc. » (p. 9).* 3. « *Construire un ensemble de fractions équivalentes (réutilisation de la connaissance). Réduire une fraction à sa plus simple expression (réutilisation de la connaissance). Additionner et soustraire des fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre (réutilisation de la connaissance). Multiplier un nombre naturel par une fraction et une fraction par un nombre naturel (réutilisation de la connaissance) » (p. 10). « Avec l'intervention de l'enseignant, effectuer par écrit les quatre*

opérations avec des nombres facilement manipulables (y compris de grands nombres) en recourant à des écritures équivalentes et en s'appuyant sur les propriétés des opérations (nombres positifs écrits en notation fractionnaire avec ou sans l'aide de matériel concret ou de schémas). Passer, au besoin, d'une forme d'écriture à une autre : notation fractionnaire à pourcentage, notation décimale à notation fractionnaire, notation décimale à pourcentage et inversement (réutilisation de la connaissance) » (p. 11).
Huitième année (*Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2009b*)
1. « *Reconnaître différents sens de la fraction : partie d'un tout, division, rapport, opérateur, mesure. Vérifier l'équivalence de deux fractions (réutilisation de la connaissance). Comparer une fraction à 0, à ½ ou à 1 (réutilisation de la connaissance). Ordonner des fractions ayant un même dénominateur ou le dénominateur de l'une étant un multiple de l'autre ou ayant un même numérateur (réutilisation de la connaissance). Exprimer des nombres sous différentes formes (fractionnaire, décimale, pourcentage) (réutilisation de la connaissance) » (p. 7). « Représenter, lire et écrire des nombres écrits en notation fractionnaire ou en notation décimale (réutilisation de la connaissance). Comparer et ordonner des nombres exprimés sous différentes formes (fractionnaire, décimale, exponentielle [exposant entier], pourcentage, racine carrée) » (p. 8).* 2. « *Choisir une forme d'écriture des nombres appropriée au contexte (réutilisation de la connaissance). Rechercher des expressions équivalentes : décomposition (additive, multiplicative, etc.), fractions équivalentes, simplification et réduction, mise en évidence simple, etc. (réutilisation de la connaissance) » (p. 9).* 3. « *Effectuer par écrit les quatre opérations avec des nombres facilement manipulables (y compris de grands nombres) en recourant à des écritures équivalentes et en s'appuyant sur les propriétés des opérations (nombres positifs écrits en notation fractionnaire avec ou sans l'aide de matériel concret ou de schémas) » (p. 11).*

ANNEXE 350. LES PROGRAMMES DE LA RÉPUBLIQUE D'IRLANDE (1999/2011)

Première année (Department of Education and Science & National Council for Curriculum and Assessment, 1999)
1. « Établir et identifier la moitié de collections jusqu'à 20 objets. *Partager également des collections d'objets entre deux personnes* » (p. 45). 2. « Identifier des moitiés de formes en 2-D. *Plier des formes en papier en deux, et couper pour former de nouvelles formes* » (*ibid.*). 3. « Lire l'heure pile et les demi-heures sur une horloge analogique comportant 12 heures » (p. 56).

Deuxième année (Department of Education and Science & National Council for Curriculum and Assessment, 1999)
1. « Établir et identifier les moitiés et les quarts de collections jusqu'à 20 objets. *Discuter la relation entre une moitié et un quart* » (p.45). 2. « Identifier des moitiés et des quarts de formes. *Discuter la relation entre les moitiés et les quarts* » (p. 49). 3. *« Plier des formes en deux, peindre un côté de la feuille et la plier »* (p. 49). 4. *« Explorer les choses qui tournent : les poignées de porte, les roues qui font un tour complet, un demi-tour ou un quart de tour, dans la cour ou dans la classe. […] Discuter la relation entre l'angle droit et le quart de tour »* (p. 51). 5. « Estimer, mesurer et noter des capacités en utilisant des bouteilles d'un litre, un demi-litre et un quart de litre, et résoudre des problèmes simples. *Comparer les capacités d'un litre,* $\frac{1}{2}$ *litre et* $\frac{1}{4}$ *de litre* » (p. 55). 6. « Lire l'heure pile, les demi-heures et les quarts d'heure sur une horloge analogique comportant 12 heures » (p. 56). 7. « Lire l'heure pile et les demi-heures sur une horloge digitale » (*ibid.*).
Troisième année (Department of Education and Science & National Council for Curriculum and Assessment, 1999)
1. « Développer une comprehension de la division en tant que partage et en tant que soustraction répétée, avec et sans reste » (p. 67). 2. « Développer et/ou rappeler des des faits numériques concernant la division, à l'intérieur de la centaine. *Utiliser les moitiés. 9 est la moitié de 18 (*$2 \times 9 = 18$ » (*ibid.*). 3. « Diviser un nombre à un chiffre ou à deux chiffres par un nombre à un chiffre, avec et sans reste » (*ibid.*). 4. « Identifier des fractions et leurs formes équivalentes de dénominateur 2, 4, 8 ou 10. *Couper et construire des fractions simples de formes géométriques régulières, les noter sous forme de diagrammes ou de schémas* » (p. 68). 5. « Comparer, ordonner des fractions de dénominateurs bien choisis et les placer sur la droite numérique » (*ibid.*). 6. « Calculer la fraction d'une collection en utilisant du matériel concret » (*ibid.*). 7. « Développer et comprendre la relation entre les fractions et la division. 1/4 de 32 = 8 ; 32/4 = 8 » (*ibid.*).

8. « Calculer une fraction unitaire d'un nombre et calculer un nombre, étant donnée la fraction unitaire du nombre. *Combien fait 1/4 de 12 ? 1/8 du nombre = 6, trouve le nombre* » (*ibid.*).

9. « Résoudre des tâches et des problèmes impliquant des fractions ». *Quelle fraction du graphique est coloriée en jaune / n'est pas verte ?* » (p. 69).

10. « Identifier les dixièmes et les exprimer sous une forme décimale. *Exprimer 1/10 sous la forme 0,1. Découper un dixième et/ou 0,1 de formes régulières. Noter en utilisant des diagrammes ou des schémas* » (*ibid.*).

11. « Relier la symétrie aux fractions » (p. 74).

Quatrième année (Department of Education and Science & National Council for Curriculum and Assessment, 1999)

1. « Identifier des fractions et leur forme équivalente de dénominateur 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 12. *Couper et construire des fractions simples de formes géométriques régulières, les noter sous forme de diagrammes ou de schémas* » (p. 68).

2. « Comparer, ordonner des fractions de dénominateurs bien choisis et les placer sur la droite numérique » (*ibid.*).

3. « Calculer la fraction d'une collection en utilisant du matériel concret » (*ibid.*).

4. « Calculer un nombre, étant donnée la fraction dont le dénominateur est un diviseur du nombre. *3/10 du nombre = 45, trouve le nombre* » (*ibid.*).

5. « Exprimer un nombre comme une fraction d'un autre nombre. *3 = 1/2 de 6* » (*ibid.*).

6. « Résoudre des tâches et des problèmes impliquant des fractions. *Trouver combien font ¾ d'un mètre de ficelle. Trouver 1/5 de 2 500 mètres* » (p. 69).

7. « Exprimer les dixièmes et les centièmes sous la forme de fractions et de notations décimales » (*ibid.*).

8. « Relier la symétrie aux fractions » (p. 74).

9. « Renommer des unités de longueur en utilisant des formes décimales ou fractionnaires. 25 cm = 0,25 m = $\frac{1}{4}$ m » (p. 76).

10. « Se familiariser avec les marques majeures et mineures sur les balances (par exemple, 100 g, 1/2 kg, 1/4 kg) » (p. 77).

11. « Renommer des unités de masse en utilisant des formes décimales ou fractionnaires. *250 g = 0.25 kg = 1/4 kg. Se limiter aux exemples requérant seulement deux décimales* » (*ibid.*).

12. « Se familiariser avec les marques majeures et mineures sur les contenants (par exemple, 100 ml, 1/2 l, 1/4 l) » (p. 78).

13. « Renommer des unités de capacités en utilisant des formes décimales ou fractionnaires. *250 ml = 0.25 l = 1/4 l* » (*ibid.*).

14. « Lire et interpréter des diagrammes en bâtons et circulaires simples. *Impliquant 1/2, 1/3, 1/4* » (p. 82).

Cinquième année (Department of Education and Science & National Council for Curriculum and Assessment, 1999)

1. « Comparer et ordonner des fractions et identifier des fractions équivalentes avec des dénominateurs de 2 à 12. *Explorer, comparer et noter des équivalences simples à l'aide de matériel concret, pliages en papier, et graphiques* » (p. 89).

2. « Exprimer des fractions supérieures ou égales à 1 sous forme de nombres mixtes et vice versa, et les placer sur la droite numérique. *Établir des équivalences en utilisant du matériel concret. Explorer, comparer et noter des fractions supérieures ou égales à 1 ou sous forme de nombres mixtes schématiquement, numériquement et sur la droite numérique* » (*ibid.*).

3. « Additionner et soustraire des fractions simples et des nombres mixtes simples. *Utiliser des fractions équivalentes pour simplifier les calculs* » (*ibid.*).

4. « Multiplier une fraction par un nombre entier. *Développer le concept avec du matériel concret, des pliages de papier et des diagrammes. Quatre fois 3/4 d'une pizza, cela fait combien de pizzas ?* » (p. 90).

5. « Exprimer des dixièmes, des centièmes et des millièmes à la fois sous forme fractionnaire et décimale. *Explorer et comparer à l'aide de matériel concret. Exprimer des rationnels sous forme de fractions et de nombres décimaux* » (*ibid.*).

6. « Développer une compréhension des pourcentages simples et les relier aux fractions décimales. *Exprimer des pourcentages en fractions et en écritures décimales, et vice-versa. Calculer des pourcentages simples, par exemple 50%, 25%, 10%* » (p. 91).

7. « Comparer et ordonner des fractions et des nombres décimaux. *Explorer, comparer et noter à l'aide de matériel concret et d'argent. Ordonner à l'aide de diagrammes ou sur la droite numérique* » (*ibid.*).

8. « Résoudre des problèmes impliquant des opérations avec des nombres entiers, des fractions, des notations décimales et des pourcentages simples. *Utiliser des diagrammes. Estimer et calculer des réponses avec une calculatrice. Inclure des réductions et des augmentations simples, par exemple 10% sur tous les jeans, 20% supplémentaires gratuits* » (*ibid.*).

9. « Relier les graphiques aux fractions » (p. 108).

Sixième année (Department of Education and Science & National Council for Curriculum and Assessment, 1999)
1. « Comparer et ordonner des fractions et identifier des fractions équivalentes. *Ordonner des fractions équivalentes sur la droite numérique et sur des diagramme* » (p. 89). 2. « Exprimer des fractions supérieures ou égales à 1 sous forme de nombres mixtes et vice versa, et les placer sur la droite numérique » (*ibid.*). 3. « Ajouter et soustraire des fractions simples et nombres mixtes simples. *Le dénominateur commun devra être trouvé en énumérant les multiples* » (*ibid.*). 4. « Multiplier une fraction par une fraction. *Explorer et développer le concept en utilisant du matériel concret et la droite numérique, et en dessinant des diagrammes pour illustrer des exemples, ce qui conduit à l'élaboration d'un algorithme* » (p. 90). 5. « Exprimer des dixièmes, des centièmes et des millièmes à la fois sous forme fractionnaire et décimale » (*ibid.*). 6. « Diviser un nombre entier par une fraction unitaire. *Combien de quarts dans 2 ? 2 : 1/4 ; 15 : 1/5* » (*ibid.*). 7. « Comprendre et utiliser des rapports simples. *Explorer et noter la relation entre les nombres naturels et leurs multiples* » (*ibid.*). 8. « Utiliser des pourcentages et les relier à des fractions et des notations décimales. *Exprimer des quantités sous forme de pourcentages »* (p. 91). 9. « Comparer et ordonner des pourcentages de nombres » (*ibid.*). 10. « Résoudre des problèmes relatifs aux pertes et profits, aux réductions, à la T.V.A., aux intérêts, aux augmentations, aux diminutions » (*ibid.*). 11. « Renommer des unités de mesures (longueurs, masses, capacités). *Renommer les mesures dans l'unité métrique appropriée. Exprimer les résultats comme des fractions et fractions décimales de l'unité appropriée du système métrique. 233 m = 233/1000 km = 0,233 km. 1 m 11 cm = 1+11/100 m = 1,11 m. 750 g = 3/4 kg = 0.75 kg. 4 kg 45 g = 4* $\frac{45}{1000}$ *kg = 4.045 kg. 625 ml = 5/8 l = 0.625 l. 8 l 253 ml = 8* $\frac{253}{1000}$ *l = 8.253 l* » (p. 102, 104 et 105). 12. « Relier les graphiques aux fractions » (p. 108). 13. « Estimer la probabilité d'occurrence d'évènements ; les ordonner sur une échelle de 0 à 100 %, de 0 à 1. *Lorsqu'on lance une pièce de monnaie, une face a 1 chance sur 2 d'apparaitre ; ainsi la probabilité d'une face est de 1 sur 2, ou 1/2 ou 50 %. Quand on lance un dé, chaque résultat a une 1 chance sur 6 de sortir. Donc, la probabilité est 1/6. Lorsqu'on tire un cube d'un sac contenant 3*

cubes rouges et 6 cubes bleus, un cube bleu a 6 chances de sortir sur 9 et a une probabilité de 6/9 ou 2/3. Ainsi, la probabilité de tirer un cube rouge est 3/9 ou 1/3. Et si le sac contient 5 cubes rouges, 5 bleus et 5 verts ? ou 3 rouges, 6 bleus et 6 verts ? » (p. 110).

14. « Construire des tableaux et graphiques de fréquence (*ibid.*). *Enregistrer des résultats pour construire et utiliser des tableaux et graphiques de fréquence. Par exemple, en lançant deux pieces, le tableau pourrait ressembler à cela :*

Résultat	***Fréquence***
2 faces	*20*
2 piles	*28*
1 face, 1 pile	*52*

Nous estimons les chances d'obtenir deux faces à 20/100, celles d'avoir deux piles à 28/100 et celles d'avoir une face et un pile à 52/100. Est-ce ce que nous attendions ? » (p. 110-111).

Premier cycle secondaire (National Council for Curriculum and Assessment, 2011)

1. « [Les élèves] voient un ensemble de données comme un entier et sont ainsi capables d'utiliser les fractions, quartiles et médianes pour décrire ces données » (p. 16).

2. « Des algorithmes sont utilisés pour résoudre des problèmes impliquant des quantités » fractionnaires » (p. 22).

3. « Utiliser les équivalences entre fractions, décimaux et pourcentages pour comparer des proportions » (*ibid.*).

ANNEXE 351. LES PROGRAMMES DE SINGAPOUR (2001)

Deuxième année (Ministry of Education, Singapore, 2001)

Parts égales d'un entier

1. « Reconnaitre et nommer une fraction jusqu'à 1/12 » (p. 21).

À l'exclusion d'une collection d'objets.

Y compris l'utilisation de symboles tels que 1/2, 1/3, 1/4 … 1/12.

Concept de fraction simple.

2. « Reconnaitre et nommer une fraction d'un entier » (*ibid.*).

À l'exclusion d'énoncés mathématiques tels que 1 – 1/4 = 3/4.

Comparer et ordonner des fractions

3. Comparer et ordonner des fractions dont le numérateur est 1 et des fractions dont le dénominateur est identique (*ibid.*).

Troisième année (Ministry of Education, Singapore, 2001)

Fractions équivalentes

1. « Reconnaitre et nommer des fractions équivalentes » (p. 26). Y compris les termes numérateurs et dénominateurs. 2. « Lister les huit premières fractions équivalentes à une fraction donnée, le dénominateur le plus grand n'excédant pas 12 » (*ibid.*). 3. « Écrire la fraction équivalente à une fraction donnée en connaissant le dénominateur ou le numérateur » (*ibid.*). 4. « Exprimer une fraction sous sa forme la plus simple » (*ibid.*). Comparer et ordonner 5. « Comparer et ordonner des fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre et des fractions de dénominateur différent, avec des dénominateurs jusqu'à 12 » (*ibid.*). Y compris dans l'ordre croissant et décroissant. Le nombre de fractions impliquées n'excèdera pas 3.
Quatrième année (Ministry of Education, Singapore, 2001)
Additionner et soustraire 1. « Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur et des fractions liées » (p. 29). Les dénominateurs des fractions données n'excèderont pas 12. À l'exclusion des sommes impliquant plus de deux dénominateurs différents. Produit d'une fraction inférieure à un et d'un nombre entier 2. « Reconnaitre et nommer des fractions comme par d'une collection d'objets » (*ibid.*). 3. « Calculer le produit d'une fraction propre et d'un nombre entier » (*ibid.*). Nombres mixtes et fractions supérieures à un 4. « Exprimer des fractions supérieures à 1 sous la forme d'un entier et d'une fraction, et vice versa » (*ibid.*). Y compris en exprimant une fraction supérieure à un/un nombre mixte sous sa forme la plus simple. Problèmes 5. « Résoudre des problèmes à deux étapes impliquant des fractions » (*ibid.*). Y compris en utilisant la méthode unitaire pour trouver l'entier, étant donnée une partie fractionnaire. À l'exclusion d'une question telle que « exprimez le nombre de filles comme une fraction du nombre de garçons. » qui sera traité sous l'intitulé « rapport ». Notation des nombres et valeur des décimales 6. « Lire et interpréter les notations décimales jusqu'à trois décimales » (p. 30). Y compris des sommes telles que 0,125 = 1/10 + 2/100 + *x*/1000 ; 0,125 = 125/*x* ; 21,203 = 21 + *x*/1000. À l'exclusion de : 0,125 = 1/10 + 1/50 + *x*/200.

Conversion entre les notations décimales et les fractions 7. « Exprimer une notation décimale comme une fraction et vice versa » (*ibid.*). 8. « Associer un quart de tour à l'angle droit et à 90°, un demi-tour à 180°, trois quarts de tour à 270° » (p. 31).
Cinquième année (Ministry of Education, Singapore, 2001)
Addition et soustraction 1. « Additionner et soustraire des nombres mixtes et des fractions de dénominateurs différents » (p. 34). Y compris en faisant la liste des fractions équivalentes pour identifier des fractions avec un dénominateur commun. Les dénominateurs des fractions données ne devront pas excéder 12. Produit de fractions 2. « Calculer le produit de deux fractions » (*ibid.*). À l'exclusion de nombres mixtes. Concept de fraction en tant que division 3. « Associer une fraction à une division » (*ibid.*). À l'exclusion de conversions entre fractions et notations décimales. Division d'une fraction par un nombre entier 4. « Diviser une fraction par un nombre entier » (*ibid.*). Problèmes 5. « Résoudre des problèmes impliquant des fractions » (*ibid.*). Concept de pourcentage 6. « Convertir des fractions et des notations décimales en pourcentages et vice versa » (p. 36).
Sixième année (Ministry of Education, Singapore, 2001)
Rapport et proportionnalité directe 1. « Exprimer une valeur comme la fraction d'une autre, étant donné leur rapport, et vice versa » (p. 39-40). Expressions algébriques à une variable Utiliser une lettre pour représenter un nombre inconnu et écrire une expression algébrique à une variable pour une situation donnée (*ibid.*). À l'exclusion d'expressions impliquant une variable dans le dénominateur telle que $1/x$. Simplifier des expressions algébriques (*ibid.*). À l'exclusion d'expressions impliquant des coefficients fractionnaires.

ANNEXE 352. LES PROGRAMMES DE SINGAPOUR (2006)

Première année (Ministry of Education, Singapore, 2006a)
1. « Division d'une quantité (inférieure ou égale à 20) en collections égales : - étant donné le nombre d'objets dans chaque collection ; - étant donné le nombre de collections » (p. 13). *L'utilisation du symbole de la division est exclu (÷).* 2. « Dire et écrire l'heure pile et les demi-heures » (*ibid.*).
Deuxième année (Ministry of Education, Singapore, 2006a)
1. « Utiliser le symbole de la division (÷) pour écrire une phrase mathématique à propos d'une situation donnée » (p. 15) *Les divisions avec un reste sont exclues.* 2. « Interpréter une fraction comme la part d'un entier » (*ibid.*). 3. « Lire et écrire les fractions » (*ibid.*). 4. « Comparer et ordonner des fractions dont le numérateur est 1 ou dont le dénominateur est identique » (*ibid.*). 5. « Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur à l'intérieur d'un entier » (p. 16). 6. « Identifier, nommer, décrire, former différentes figures en 2-D à partir de […] demi-cercles et quarts de cercle » (p. 17).
Troisième année (Ministry of Education, Singapore, 2006a)
1. « Utiliser les termes "produit", "quotient" et "reste" » (p. 18). 2. « Division avec reste » (*ibid.*). 3. « Multiplication et division de nombres jusqu'à trois chiffres par des nombres à un chiffre » (*ibid.*). 4. « Reconnaitre et nommer des fractions équivalentes » (*ibid.*). 5. « Lister les huit premières fractions équivalentes à une fraction donnée » (*ibid.*). 6. « Écrire la fraction équivalente à une fraction donnée en connaissant le dénominateur ou le numérateur » (*ibid.*). 7. « Exprimer une fraction sous sa forme la plus simple » (*ibid.*). 8. « Comparer des fractions à la moitié » (*ibid.*). 9. « Comparer et ordonner des fractions de dénominateurs différents » (*ibid.*). 10. « Additionner et soustraire deux fractions liées à l'intérieur de l'entier » (p. 19).
Quatrième année (Ministry of Education, Singapore, 2006a)
1. « Exprimer des fractions supérieures à 1 sous la forme d'un entier et d'une fraction, et vice versa » (p. 21).

2. « Exprimer une fraction supérieure à 1 ou un entier et une fraction sous sa forme la plus simple » (*ibid.*). 3. « Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur et des fractions liées » (p. 22). 4. « Interpréter la fraction comme la part d'un ensemble d'objets » (*ibid.*). 5. « Multiplier une fraction propre ou supérieure ou égale à 1 avec un nombre entier » (*ibid.*). 6. « En passant par le calcul de la fraction unitaire, trouver l'entier, la partie fractionnaire étant donnée » (*ibid.*). 7. « Convertir une notation décimale en une fraction » (*ibid.*). 8. « Convertir une fraction dont le dénominateur est un facteur de 10 ou 100 en notation décimale » (*ibid.*). 9. « Associer un quart de tour à l'angle droit et à 90°, un demi-tour à 180°, trois quarts de tour à 270° et un tour complet à 360° » (p. 24).
Cinquième année (Ministry of Education, Singapore, 2006a)
1. « Associer la fraction à la division » (p. 26). 2. « Convertir les notations décimales en fractions et vice versa » (*ibid.*). 3. « Additionner et soustraire des fractions inférieures à 1 sans l'aide de la calculatrice » (*ibid.*). 4. « Additionner et soustraire des entiers et des fractions » (*ibid.*). 5. « Multiplier une fraction inférieure à 1 avec une fraction inférieure ou supérieure à 1 sans l'aide de la calculatrice » (*ibid.*). 6. « Multiplier des fractions supérieures à 1 » (*ibid.*). 7. « Multiplier un nombre mixte avec un nombre entier » (*ibid.*). 8. « Diviser une fraction inférieure à 1 par un nombre entier sans l'aide de la calculatrice » (*ibid.*). 9. « Résoudre des problèmes incluant les quatre opérations » (*ibid.*). 10. « Exprimer une partie d'un ensemble sous forme de pourcentage » (p. 27). 11. « Utiliser le symbole pourcentage (%) » (*ibid.*). 12. « Écrire les fractions et les notations décimales en pourcentages, et vice versa » (*ibid.*). 13. « Trouver le pourcentage d'un entier » (*ibid.*). 14. « Résoudre des problèmes à deux étapes impliquant un pourcentage (réductions, taxes et intérêts annuels) » (*ibid.*).
Sixième année (Ministry of Education, Singapore, 2006a)
1. « Diviser un nombre entier ou une fraction inférieure à 1 par une fraction inférieure à 1 sans l'aide de la calculatrice » (p. 30). 3. « Trouver l'entier étant donnés la part et le pourcentage » (*ibid.*). 4. « Trouver le pourcentage d'augmentation ou de diminution » (*ibid.*). 5. « Résoudre des problèmes impliquant un pourcentage » (*ibid.*).

6. « Trouver l'aire et la circonférence de demi-cercles et de quarts de cercles » (p. 31). 7. « Trouver l'aire et le périmètre d'une figure composée des éléments suivants : carré, rectangle, triangle, demi-cercle et quart de cercle » (*ibid.*). 8. « Utiliser des expressions algébriques telles que : $y \pm 2$; $6 \pm y$; $y + y$; $3y$; $y/2$; $(3 \pm y)/5$ » (p. 32). 9. « Interpréter $3y$ comme $y + y + y$ ou comme $3 \times y$; $y/2$ comme $y \div 2$ or $1/2 \times y$; $(3 \pm y)/5$ comme $(3 \pm y) \div 5$ or $1/5 \times (3 \pm y)$ » (*ibid.*).
Septième année (Ministry of Education, Singapore, 2006b)
1. « Écrire un rapport dans sa forme la plus simple » (p. 6). 2. « Interpréter des notations : $a/b = a \div b$; $\frac{3 \pm y}{5} = (3 \pm y) \div 5 = \frac{1}{5} \times (3 \pm y)$ » (p. 7). 3. « Simplification d'expressions algébriques linéaires, par exemple : $\frac{2x}{3} - \frac{3(x-5)}{2}$ » (*ibid.*). 4. « Résoudre des équations simples impliquant des fractions qui peuvent être réduites à des équations linéaires, par exemple : $\frac{x}{3} + \frac{x-2}{4} = 3$; $\frac{3}{x-2} = 6$ » (*ibid.*).
Huitième année (Ministry of Education, Singapore, 2006b)
1. « Multiplication et division de fractions algébriques simples, par exemple : $\left(\frac{3a}{4b^2}\right)\left(\frac{5ab}{3}\right)$; $\frac{3a}{4} \div \frac{9a^2}{10}$ » (p. 9). 2. « Addition et soustraction de fractions algébriques avec un dénominateur linéaire ou quadratique, par exemple : $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3}$; $\frac{1}{x^2-9} + \frac{2}{x-3}$; $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2}$ » (*ibid.*).

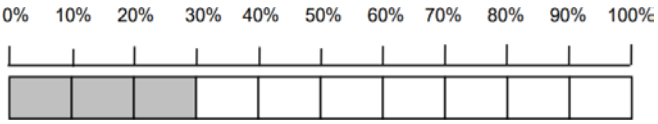
ANNEXE 353. LES PROGRAMMES DE SINGAPOUR (2012)

Première année (Ministry of Education, Singapore, 2012a)
1. « Diviser un ensemble d'objets concrets en groupes égaux, et discuter le regroupement et le partage comme concepts de la division » (p. 35).
Deuxième année (Ministry of Education, Singapore, 2012a)

1. « Donner des exemples de fractions dans des situations de la vie quotidienne et utiliser des expressions comme « deux sur trois » pour décrire des fractions » (p. 38). 2. « Utiliser des objets concrets, des disques et des représentations picturales pour représenter et interpréter les fractions en termes de fractions unitaires. Par exemple, 3/5 est trois unités de 1/5, 1/5 + 1/5 + 1/5, ou 3 cinquièmes, et comparer la taille de fractions faisant référence à un même entier » (*ibid.*). 3. « Utiliser des disques pour représenter et comparer deux fractions unitaires et expliquer pourquoi plus le dénominateur est grand, plus la fraction unitaire est petite, par exemple, 1/6 est plus petit que 1/3 » (p. 39). 4. « Utiliser des disques pour représenter et comparer deux fractions de même dénominateur, et expliquer pourquoi plus le numérateur est grand, plus la fraction est grande. Par exemple, 6/7 est plus grand que 4/7 » (*ibid.*). 5. « Parvenir à une maîtrise de la reconnaissance des fractions et de la comparaison en jouant avec des cartes de fractions (images et symboles), y compris des applications et des jeux numériques » (*ibid.*). 6. « Travailler en groupes pour écrire des histoires d'addition et de soustraction impliquant des fractions » (*ibid.*). 7. « Utiliser des disques pour illustrer l'addition et la soustraction de fractions de même dénominateur à l'intérieur d'un entier. Par exemple, 3/5 + 1/5 = 4/5 (1 cinquième + 3 cinquièmes = 4 cinquièmes) » (*ibid.*).
Troisième année (Ministry of Education, Singapore, 2012a)
1. « Donner des exemples de fractions dans des situations de la vie quotidienne » (p. 43). 2. « Représenter des fractions comme des nombres sur la droite numérique » (*ibid.*). 3. « Utiliser des disques ou le modèle de partie-tout pour représenter deux fractions équivalentes, et expliquer pourquoi elles sont égales et comment l'une peut être obtenue à partir de l'autre. Par exemple, 2/3 = 4/6 » (*ibid.*). 4. « Faire une liste des huit premières fractions équivalentes d'une fraction donnée et utiliser cette méthode pour comparer deux fractions de dénominateur différent » (*ibid.*). 5. « Travailler en groupes pour comparer des fractions en utilisant différentes stratégies telles que l'élaboration d'un schéma, la comparaison par rapport à la moitié, et expliquer les stratégies utilisées » (*ibid.*). 6. « Identifier les fractions qui ne sont pas dans leur forme la plus simple et réduire des fractions à leur forme la plus simple » (p. 44). 7. « Parvenir à la maîtrise des fractions équivalentes et des comparaisons de fractions en jouant avec des cartes de fractions (images et symboles), y compris des jeux numériques » (*ibid.*).

8. « Utiliser des disques pour représenter deux fractions ayant des dénominateurs liés, et expliquer comment les deux fractions sont liées » (*ibid.*). 9. « Utiliser des disques pour illustrer l'addition et la soustraction de fractions aux dénominateurs liées à l'intérieur d'un entier. Par exemple, 3/4 + 1/8 = 6/8 + 1/8 = 7/8 » (*ibid.*). 10. « Travailler en groupes pour écrire des histoires d'addition et de soustraction impliquant des fractions et des fractions liées » (*ibid.*).
Quatrième année (Ministry of Education, Singapore, 2012a)
1. « Faire des liens entre le concept de facteurs communs et la simplification de fractions, et entre le concept de multiple commun et la recherche d'un dénominateur commun à deux fractions » (p. 47). 2. « Donner des exemples de fractions dans des situations de la vie quotidienne, y compris dans des situations de mesure. Par exemple : 1/2 kg ; 1 1/4 litre ; 1/2 m ; etc. » (p. 48). 3. « Utiliser des fractions de disque ou une droite graduée pour représenter et interpréter des fractions supérieures à un, comme des fractions supérieures ou égales à 1 ou des nombres mixtes » (*ibid.*). 4. « Comparer des fractions en utilisant des fractions de disque, puis sans utiliser des fractions de disque en utilisant des dénominateurs communs » (*ibid.*). 5. « Comparer et ordonner des nombres entiers et des fractions sur une droite graduée » (*ibid.*). 6. « Parvenir à la maitrise des conversions entre nombres mixtes et fractions supérieures ou égales à 1 en jouant avec des cartes de fractions (images et symboles), y compris des jeux numériques » (*ibid.*). 7. « Diviser une collection d'objets concrets donnée en parts égales » (*ibid.*) et utiliser cela pour : a. « illustrer le concept de fraction d'une collection (par exemple, quand une collection d'objets est divisée en trois parts égales, 2/3 de la collection correspond à deux parts sur trois) ». b. « trouver une fraction d'une collection en additionnant les objets dans les parts (par exemple, quand une collection de 24 objets est divisée en 4 parts égales, 3/4 de la collection représentent 6 + 6 + 6 = 3 x 6 = 18 objets) ». 8. « Utiliser un modèle graphique pour illustrer le concept de fraction d'une quantité » (*ibid.*). 9. « Utiliser des fractions de disque pour illustrer l'addition et la soustraction de fractions avec une réponse supérieure à un entier, et exprimer la réponse sous la forme d'un nombre mixte ou d'une fraction supérieure ou égale à 1 » (p. 49). 10. « Travailler en groupes pour créer des problèmes à deux étapes impliquant l'addition et la soustraction de fractions pour les faire résoudre par d'autres groupes » (*ibid.*). 11. « Reconnaitre qu'une écriture décimale est formée d'une partie entière et d'une partie fractionnaire, représenter un décimal sur une droite graduée, et faire des liens entre les notations décimales, les fractions et les mesures » (*ibid.*). 12. « Associer la rotation, dans le sens horaire ou anti-horaire, avec un angle mesuré en degrés (1/4 de tour égale 90° ; 1/2 tour égale 180° ; 3/4 de tour égalent 270° ; un tour complet égale 360°) (p. 51) ».

13. « Observer les différentes orientations d'un rectangle (ou d'un carré) quand il subit une rotation de 90° (un quart de tour), 180° (un demi-tour), 270° (trois quarts de tour) et 360° (un tour complet), dans le sens horaire ou anti-horaire » (*ibid.*).
Cinquième année (Ministry of Education, Singapore, 2012a)
1. « Diviser un nombre entier par un nombre entier avec un quotient exprimé sous la forme d'une fraction » (p. 53) : a. « Diviser un nombre entier par un nombre entier à un chiffre, et écrire la réponse sous la forme d'une fraction, à la place d'un quotient et d'un reste, ou d'une écriture décimale ». b. « Expliquer comment les fractions et les divisions sont liées, 3/5 est 3 divisé par 5 ; quand trois tartes sont partagées équitablement entre 5 enfants, chaque enfant obtient 3/5 d'une tarte ». c. « Utiliser le modèle partie-tout pour illustrer les concepts de fraction et de division, et leur relation, par exemple pour dessiner un modèle pour montrer 12 ÷ 3 comme un entier divisé en trois parts égales, ce qui est également 1/3 de 12 ». 2. « Convertir des fractions en notations décimales » (*ibid.*). 3. « Additionner et soustraire des nombres mixtes » (p. 54) : a. « Utiliser des disques de fractions pour illustrer l'addition et la soustraction de nombres mixtes qui impliquent l'addition et la soustraction des parties entières, puis l'addition et la soustraction des parts fractionnaires ». 4. « Multiplier une fraction propre/supérieure ou égale à 1 et un nombre entier sans utiliser la calculatrice » (*ibid.*). a. « Relier la multiplication de nombres entiers aux fractions pour trouver le nombre d'objets dans une fraction d'une collection, par exemple 3/4 x 60 = 3/4 de 60 ». 5. « Multiplier une fraction propre et une fraction propre/supérieure ou égale à 1 sans utiliser la calculatrice. Multiplier deux fractions supérieures ou égales à 1. Multiplier un nombre mixte et un nombre entier » (*ibid.*). a. « Discuter des avantages de la simplification de fractions avant leur multiplication ». 6. « Résoudre des problèmes impliquant l'addition, la soustraction et la multiplication de fractions » (*ibid.*). a. « Résoudre des problèmes en utilisant des modèles représentant la relation partie-tout et de comparaison ». b. « Travailler en groupes pour résoudre des problèmes à plusieurs étapes ». 7. « Utiliser une échelle avec des pourcentages pour illustrer la relation partie-tout exprimée par les pourcentages, et pour montrer la relation entre les pourcentages et les fractions, par exemple 30 % = 1/3 » (p. 55).



8. « Jouer à des jeux de cartes ou des jeux numériques impliquant des fractions, des écritures décimales et des pourcentages équivalents, par exemple, 20 % sont équivalents à 1/5 ou 0,2 (*ibid.*) (p. 56).

9. « Tisser des liens entre la simplification de fractions et les rapports en divisant les éléments de la fraction/du rapport par un facteur commun » (*ibid.*).

Sixième année (Ministry of Education, Singapore, 2012a)

1. « Utiliser des fractions de disque ou des outils informatiques pour illustrer le principe et l'algorithme de calcul pour la division d'une fraction inférieure à 1 par un nombre entier, d'un nombre entier par une fraction inférieure à 1 et d'une fraction inférieure à 1 par une fraction inférieure à 1 » (p. 59).

2. « Utiliser la calculatrice pour effectuer les quatre opérations avec des fractions (y compris avec des nombres mixtes) » (*ibid.*).

3. « Résoudre des problèmes en utilisant des modèles partie-tout ou de comparaison » (*ibid.*).

4. « Travailler en groupes pour résoudre des problèmes à plusieurs étapes et des problèmes originaux » (*ibid.*).

5. « Établir des relations entre les concepts de "pourcentage d'un pourcentage" et de "fraction d'une fraction", par exemple Jean a dépensé 20 % de son argent pour acheter un maillot de football et 30 % de l'argent restant pour une casquette. Quel pourcentage de son argent a-t-il dépensé pour la casquette ? » (*ibid.*).

6. « Utiliser des objets ou dessiner des modèles pour démontrer une compréhension de phrases telles que "A est 2/3 de B", "B est 3/2 de A", et réécrire ces phrases en utilisant une écriture sous la forme d'un ratio » (p. 60).

7. « Trouver un rapport de proportion entre deux quantités et l'utiliser pour résoudre des problèmes de proportion, par exemple trouver la quantité de chaque ingrédient requise pour cuisiner dix douzaines de gâteaux en utilisant la recette suivante permettant de cuisiner trois douzaines de gâteaux » (*ibid.*).

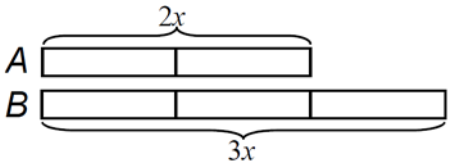
1 tasse de farine	1/3 de tasse de sucre	1 tasse de copeaux de chocolat
1/2 cuillère à café de levure	1 œuf	
1/2 tasse de beurre	1 cuillère à café de vanille	

8. « Notation, représentations et interprétation d'expressions algébriques simples telles que $a \pm 3$; $a \times 3$ ou $3a$; $a \div 3$ ou $\frac{a}{3}$ » (p. 61).

9. « Trouver l'aire et le périmètre de demi-cercles, de quarts de cercle » (p. 62).
10. « Trouver l'aire et le périmètre de figures composées de carrés, de rectangles, de triangles, de demi-cercles et de quarts de cercle » (*ibid.*).
11. « Utiliser le concept de proportionnalité pour interpréter des données présentées sous forme de graphiques circulaires en termes de pourcentages ou de fractions » (p. 65).

Septième année (Ministry of Education, Singapore, 2012b)

1. « Écrire un rapport dans sa forme la plus simple. Faire des liens entre les rapports et les fractions, utiliser le langage mathématique approprié pour décrire cette relation, et utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes, par exemple : "le rapport de A à B est 2 : 3" et peut être représenté comme suit :



Le rapport 2 : 3 signifie "deux unités pour trois unités", "A est $\frac{2}{3}$ de B", ou "B est $\frac{3}{2}$ de A" » (p. 34).
2. « Faire des liens entre les pourcentages et les fractions/notations décimales, par exemple "25 % d'une quantité, c'est $\frac{1}{4}$ de la quantité", "20 % de *x*, c'est 0,2*x*" » (p. 35).
3. « Interpréter des notations : *a*/*b* comme $a \div b$ ou $a \times \frac{1}{b}$; $\frac{3+y}{5}$ comme $(3 + y) \div 5$ ou $\frac{1}{5} \times (3 + y)$ » (*ibid.*).
3. « Simplification d'expressions linéaires telles que $\frac{2x}{3} - \frac{3(x-5)}{2}$ » (p. 36).
4. « Résoudre des équations simples impliquant des fractions qui peuvent être réduites à des équations linéaires telles que $\frac{x}{3} + \frac{x-2}{4} = 3$; $\frac{3}{x-2} = 6$ » (p. 37).

Huitième année (Ministry of Education, Singapore, 2012b)

1. « Multiplication et division de fractions algébriques simples, telles que $\left(\frac{3a}{4b^2}\right)\left(\frac{5ab}{3}\right)$; $\frac{3a}{4} \div \frac{9a^2}{10}$ » (p. 40).
2. « Addition et soustraction de fractions algébriques avec un dénominateur linéaire ou quadratique, telles que $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3}$; $\frac{1}{x^2-9} + \frac{2}{x-3}$; $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2}$ » (*ibid.*).

ANNEXE 354. LES PROGRAMMES DU TAIPEI CHINOIS (2005)

Première année (Ministry of Education, Chinese Taipei, 2004)
1. « Les élèves peuvent reconnaitre l'aiguille des heures et l'aiguille des minutes sur une horloge, et lire l'heure. *En première année, les élèves ne lisent que les heures entières et les demi-heures, telles qu'une heure pile ou trois heures et demie* » (p. 103).
Deuxième année (Ministry of Education, Chinese Taipei, 2004)
1. « Les élèves peuvent réaliser des activités de division dans des conditions concrètes. *La notation à l'aide du symbole de la division ne doit pas être enseignée et les élèves ne doivent rencontrer que des situations dans lesquelles il n'y a pas de reste* » (p. 112). 2. « Les élèves peuvent reconnaître la fraction unitaire dont le dénominateur est inférieur à 12 et comparer la taille des différentes fractions unitaires dans des conditions concrètes » (p. 113).
Troisième année (Ministry of Education, Chinese Taipei, 2004)
1. « Les élèves peuvent comprendre le sens de la division, utiliser / et = pour compléter des calculs en ligne (y compris en présence d'un reste) et résoudre des problèmes correspondants de la vie quotidienne » (p. 123). 2. « Les élèves utilisent des astuces pour le calcul de plus grands nombres. Par exemple : pour diviser 36 par trois, les élèves peuvent diviser 30 par trois pour obtenir dix et puis diviser six par trois pour obtenir deux. Ainsi, ils peuvent obtenir la somme de 12. Telle est la première expérience pour les élèves de la division posée et de la division fraction (par exemple : $10 \div 3 = 3 + 1/3$) » (p. 125). 3. « Les élèves maitrisent la division de nombres à trois chiffres par des nombres à un chiffre » (*ibid.*). 4. « Les élèves reconnaissent et comparent des fractions ; ils exploitent l'addition et la soustraction de fractions de même dénominateur dans des conditions concrètes » (p. 128). 5. « Présenter le nouveau chiffre des "dixièmes", en expliquant que ce nom est dû à l'égalité $1/10 = 0{,}1$ » (p. 132). 6. « Pratiquer une division simple de figures planes, par exemple diviser un rectangle en deux triangles, et les composer pour former un parallélogramme » (p. 136).
Quatrième année (Ministry of Education, Chinese Taipei, 2004)
1. « Les élèves comprennent le sens de l'équivalence entre la division de nombres entiers et les fractions » (p. 140). 2. « Les élèves peuvent distinguer les fractions inférieures, supérieures ou égales à 1 et les nombres mixtes. Ils maîtrisent les conversions des fractions supérieures ou égales à 1 en nombres mixtes, comparent des fractions de même dénominateur, multiplient des fractions par un entier, calculent des

additions et des soustractions de fractions de même dénominateur (mais pas de nombres mixtes) » (p. 141). 3. « Les élèves peuvent utiliser les fractions équivalentes pour comparer des fractions de dénominateurs différents et passer des fractions simples à une écriture décimale et inversement » (p. 143). 4. « Les élèves étendent leurs connaissances relatives aux nombres décimaux aux centièmes et aux millièmes, et apprennent que les noms des chiffres proviennent des relations 1/100 = 0,01 et 1/1 000 = 0,001 » (p. 144). 5. « Les élèves apprennent à utiliser la division de nombres entiers pour présenter des fractions sous forme de notations décimales » (p. 145). 6. « Dans l'exemple de la division du cercle en parties égales, deux partages successifs en deux produisent un quart ; les élèves reconnaissent que le quart est le résultat naturel de la perpendiculaire » (p. 150).
Cinquième année (Ministry of Education, Chinese Taipei, 2004)
1. « Les élèves peuvent produire des fractions équivalentes en réduisant et en multipliant les dénominateurs » (p. 158). 2. « Les élèves trouvent un multiple commun aux dénominateurs originaux et utilisent ce principe pour comparer, additionner, soustraire des fractions de dénominateurs différents » (ibid). 3. « Les élèves comprennent le fonctionnement de la division à travers des situations de mesures » (p. 159). 4. « Les élèves peuvent comprendre le sens et utiliser la multiplication comportant des fractions pour résoudre des problèmes de la vie quotidienne » (p. 162). 5. « Le calcul de pourcentages est généralement réalisé en arrondissant » (p. 163). 6. « Les élèves peuvent reconnaître des rapports (y compris des pourcentages et des réductions) et leur application dans la vie quotidienne » (*ibid.*). 7. « Les élèves peuvent placer des fractions et des nombres décimaux sur la droite numérique » (*ibid.*). 8. « Les élèves reconnaissent les unités de poids et d'aires, et utilisent les relations entre ces unités pour résoudre des problèmes » (p. 165). 9. « La distributivité sera utilisée lorsque les enseignants devront expliquer la multiplication comportant des nombres mixtes et des nombres entiers » (p. 169).
Sixième année (Ministry of Education, Chinese Taipei, 2004)
1. « Comprendre le sens du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple. Trouver le plus grand commun diviseur (PGCD) et le plus petit commun multiple (PPCM), et appliquer ces connaissances pour réduire une fraction à sa plus simple expression » (p. 174).

2. « Comprendre le sens et le principe de calcul, et calculer dans le cas où le diviseur est une fraction, et appliquer ce concept pour résoudre des problèmes » (p. 175). 3. « Calculer des divisions avec des écritures décimales en transformant ces dernières en fractions » (p. 177). 4. « Réaliser des calculs arithmétiques à deux étapes impliquant des fractions » (p. 178). 5. « Connaitre le sens des proportions et des taux, et les appliquer dans des problèmes tirés de situations du monde réel » (*ibid.*). 6. « Comprendre le concept de vitesse et ses applications. Connaitre les unités usuelles de vitesse, réaliser des conversions et résoudre des problèmes » (p. 179). 7. « Comprendre les formules d'aire et de périmètre d'un cercle, et appliquer ces connaissances pour trouver l'aire de secteurs circulaires » (p. 181). 8. « Reconnaître l'influence de l'agrandissement et de la réduction des longueurs, des angles, des superficies et des échelles » (p. 183). 9. « Utiliser des variables pour mettre en équation un problème mathématique à deux étapes et examiner le caractère vraisemblable des réponses dans des conditions concrètes » (p. 184).
Septième année (Ministry of Education, Chinese Taipei, 2004)
1. « Maitriser les calculs impliquant de multiplier et réduire une fraction autant que possible en utilisant le plus grand diviseur commun, et le plus petit multiple commun » (p. 192). 2. « La place du signe négatif ne changera pas la valeur numérique de la fraction Exemple : $-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}$ $=\frac{1}{-2}=(-1)\times\frac{1}{2}$ » (p. 193). 3. « Maitriser les opérations impliquant des fractions mixtes. Par exemple, $100\times(-22\ \frac{1}{5})=100\times(-\frac{111}{5})$ » (*ibid.*). 4. « Maitriser la conversion des fractions en écritures décimales et vice versa. Par exemple, $120\times(-0{,}125)=120\times(-\frac{1}{8})$ » (*ibid.*). 5. « Connaitre la réciproque de nombres négatifs. Par exemple, $(-\frac{1}{5})\times ?=1$ » (*ibid.*). 6. « Comprendre les calculs impliquant des fractions comme nombres de base et des exposants non négatifs. Par exemple, $(\frac{1}{2})^4\times(\frac{4}{3})^2=\frac{4^2}{2^4\,3^2}$; $1\div(\frac{1}{2})^4=2^4=((\frac{1}{2})^4)^3=(\frac{1}{2})^{12}=\frac{1}{2^{12}}$ » (*ibid.*).

ÉVALUATIONS TIMSS

Annexe 355. Taux de réussite moyen des élèves aux évaluations TIMSS 1995 de quatrième année

Participants	A1	C3	E4	F6	I5	I8	J7	T4b	U2	V1
	In which figure are one-half of the dots black?	*Which figure shows 2/3 of the square shaded?*	*Which of the following numbers means 7/10?*	*Janis ate 1/2 cake, Maija ate 1/4, mother ate 1/4, how much remains?*	*If five tomatoes make 1/2 liter of sauce, how much sauce do 15 tomatoes make?*	*Shown four diagrams with various fractions shaded, which two represent the same fraction?*	*Shown a square divided into 9 squares, 5 of which are shaded, what fraction of the figure is shaded?*	*10 girls and 20 boys mean half of all students are girls? Explain.*	*Write a fraction that is larger than 2/7.*	*Is 1/3 less than 1/4? Shade appropriate parts of a circle to demonstrate.*
Angleterre	81,3	47,1	25,4	74,2	51,4	56,9	48,1	19,6	55,0	20,2
Corée du Sud	44,5	84,1	81,1	38,5	67,1	56,6	92,3	32,0	90,1	41,2
Hong Kong SAR	91,5	84,2	85,3	77,3	73,3	67,1	95,6	13,4	83,9	47,1
République d'Irlande	89,4	68,8	57,0	82,0	56,2	51,5	79,2	25,2	74,4	30,2
Singapour	87,4	90,1	92,2	78,2	59,9	71,5	94,0	36,6	76,2	58,3
Moyenne (corpus)	**78,8**	**74,9**	**68,2**	**70,0**	**61,6**	**60,7**	**81,8**	**25,4**	**75,9**	**39,4**

Annexe 356. Taux de réussite moyen des élèves aux évaluations TIMSS 1995 de huitième année

Participants	E3	H8	I2	I6	I9	J12	K1	K7	K9	L17
	Find fraction of hour between two time points.	*Identify figure showing 2/3 shaded.*	*Solve multi-step word problem: common fractions.*	*Write a fraction that is larger than 2/7.*	*Predict most likely color of random card based on fraction of colors.*	*Divide fractions.*	*Circle with same shaded fraction.*	*Determine the number of blue pens given probability of selection.*	*Compute sum of three fractions.*	*Subtract three fractions.*
Angleterre	66,5	79,2	63,6	79,3	71,0	8,4	78,5	50,4	12,4	24,6
Corée du Sud	71,3	85,9	79,3	83,9	63,3	77,9	84,3	80,6	81,4	78,1
France	47,2	82,1	53,8	75,4	72,0	53,1	74,1	55,2	60,8	67,2
Hong Kong SAR	78,6	89,2	76,2	84,9	87,4	70,2	72,4	75,5	79,3	78,1
République d'Irlande	74,0	84,7	74,4	82,1	84,5	43,2	73,1	72,8	47,0	52,1
Singapour	87,2	95,9	94,1	87,9	91,8	86,8	80,1	92,5	90,5	92,9
Moyenne (corpus)	**70,8**	**86,2**	**73,6**	**82,3**	**78,3**	**56,6**	**77,1**	**71,2**	**61,9**	**65,5**

Participants	M4	M5	N14	N16	N18	N19	O5	O9	P8	P14
	Identify the largest fraction.	*Shape after 90 degree rotation.*	*Identify list of equivalent fractions.*	*Solve algebra word problem with fractions.*	*Find probability of drawing an even number from 1 to 9.*	*Shade a given fraction of the squares in a grid.*	*Calculate number of cube faces from probability of toss.*	*Solve division word problem: common fractions.*	*Know relationship between side and perimeter for square.*	*Solve subtraction word problem: common fractions.*
Angleterre	36,1	56,5	52,3	44,9	75,3	43,1	39,1	52,5	52,2	87,7
Corée du Sud	68,9	60,9	89,9	62,4	90,3	81,0	67,6	56,8	78,2	74,4
France	50,3	65,9	78,6	37,8	68,2	61,0	54,4	50,6	69,3	80,2
Hong Kong SAR	59,5	73,3	80,7	54,7	56,5	85,8	72,4	69,9	70,7	83,0
République d'Irlande	48,3	38,5	74,1	48,4	62,8	66,8	64,1	70,2	53,6	90,0
Singapour	76,1	62,0	90,5	66,5	66,6	92,1	88,5	84,0	80,5	91,7
Moyenne (corpus)	**56,5**	**59,5**	**77,7**	**52,5**	**70,0**	**71,6**	**64,4**	**64,0**	**67,4**	**84,5**

Participants	M4	M5	N14	N16	N18	N19	O5	O9	P8	P14
	Identify the largest fraction.	*Shape after 90 degree rotation.*	*Identify list of equivalent fractions.*	*Solve algebra word problem with fractions.*	*Find probability of drawing an even number from 1 to 9.*	*Shade a given fraction of the squares in a grid.*	*Calculate number of cube faces from probability of toss.*	*Solve division word problem: common fractions.*	*Know relationship between side and perimeter for square.*	*Solve subtraction word problem: common fractions.*
Angleterre	36,1	56,5	52,3	44,9	75,3	43,1	39,1	52,5	52,2	87,7
Corée du Sud	68,9	60,9	89,9	62,4	90,3	81,0	67,6	56,8	78,2	74,4
France	50,3	65,9	78,6	37,8	68,2	61,0	54,4	50,6	69,3	80,2
Hong Kong SAR	59,5	73,3	80,7	54,7	56,5	85,8	72,4	69,9	70,7	83,0
République d'Irlande	48,3	38,5	74,1	48,4	62,8	66,8	64,1	70,2	53,6	90,0
Singapour	76,1	62,0	90,5	66,5	66,6	92,1	88,5	84,0	80,5	91,7
Moyenne (corpus)	**56,5**	**59,5**	**77,7**	**52,5**	**70,0**	**71,6**	**64,4**	**64,0**	**67,4**	**84,5**

Annexe 357. Taux de réussite moyen des élèves aux évaluations TIMSS 1999 de huitième année

Participants	A01	B09	C04	D09	E3	F11	F12	G04	G05
	Number of squares in shaded fraction.	*Which picture shows that 2/5 is equivalent to 4/10?*	*Pair of numbers bracketing 2.25.*	*Which of these fractions is smallest?*	*Fraction of hour between two time points.*	*If 4 times a number is 48, what is one third of the number?*	*What fraction of the circle is shaded?*	*Find n from proportionality equation.*	*Fraction birthdays in first half of year.*
Angleterre	58,7	59,9	50,0	72,6	65,8	40,0	72,2	64,9	74,7
Corée du Sud	80,4	81,4	74,8	82,6	72,6	85,1	49,7	88,0	89,8
Hong Kong SAR	86,3	82,4	59,2	92,5	81,1	89,1	71,5	88,6	85,5
Singapour	87,5	83,4	73,7	90,4	86,2	81,9	71,5	94,1	90,8
Taipei chinois	78,4	80,2	63,5	84,8	79,5	83,1	61,3	85,1	79,2
Moyenne (corpus)	**78,3**	**77,5**	**64,2**	**84,6**	**77,0**	**75,8**	**65,2**	**84,1**	**84,0**

Participants	H08	I02	I06	I09	J12	K01	K07	K09	L18
	Which shows 2/3 of the square shaded?	*4/5 of books more than 2/3.*	*Fraction less than 4/9.*	*Most likely sector on spinner.*	*Divide: 6/55 ÷ 3/25.*	*Circle with same shaded fraction.*	*Probability of drawing blue bead.*	*Addition of three fractions.*	*What is the value of 4/5 - 1/3 - 1/15?*
Angleterre	81,5	54,7	67,9	64,8	4,3	76,1	39,0	10,6	33,8
Corée du Sud	87,3	72,9	83,5	79,8	80,3	88,1	76,5	83,6	80,9
Hong Kong SAR	93,7	79,1	83,9	81,9	80,6	82,7	83,6	86,7	76,5
Singapour	96,3	84,2	83,2	71,9	83,9	86,8	88,3	92,1	86,6
Taipei chinois	87,8	76,8	79,3	83,7	83,3	80,1	81,7	82,7	81,3
Moyenne (corpus)	**89,3**	**73,5**	**79,6**	**76,4**	**66,5**	**82,8**	**73,8**	**71,1**	**71,8**

Participants	M04	N14	N16	N18	N19	O05	O09	P08	P15
	Which fraction is smallest?	*In which list of fractions are all of the fractions equivalent?*	*How many marbles were in the bag to start with?*	*What is the probability that Chelsea draws a chip with a number that is a multiple of three?*	*Shade in 3/8 of the unit squares in the grid.*	*Number of students from probability.*	*Scoops of flour needed to fill bag.*	*What is the ratio of the width of the rectangle to its perimeter?*	*What fraction of the cherries remained in the basket?*
Angleterre	68,6	50,7	45,8	73,1	52,5	54,0	42,9	13,0	42,2
Corée du Sud	79,3	85,8	64,4	92,3	81,3	87,8	69,5	29,7	54,9
Hong Kong SAR	87,3	84,5	59,8	65,3	87,2	86,5	76,3	45,3	75,1
Singapour	90,5	84,3	81,3	63,9	89,4	90,9	81,4	56,0	85,1
Taipei chinois	84,3	85,2	60,0	70,6	80,5	85,8	80,6	52,6	67,9
Moyenne (corpus)	**82,0**	**78,1**	**62,3**	**73,0**	**78,2**	**81,0**	**70,1**	**39,3**	**65,0**

Participants	P17	Q02	Q05	Q07	Q09	R14	T02B	V03
	Write 0.48 as a fraction reduced to its lowest terms.	*Subtract fractions involving x.*	*Number of men/women at meeting.*	*True expression for values of L, K, M.*	*Addition, multiplication with fractions.*	*How much money did she have left?*	*Fraction of books in smaller boxes.*	*What is the ratio of nitrate to the total amount of fertilizer?*
Angleterre	17,8	36,2	70,4	46,6	22,9	23,8	9,4	41,6
Corée du Sud	77,8	74,3	85,9	81,9	77,2	49,7	30,1	84,3
Hong Kong SAR	73,9	85,1	74,9	83,2	77,9	65,6	42,8	73,8
Singapour	86,5	83,5	83,8	89,0	79,8	77,9	48,1	87,3
Taipei chinois	70,8	74,3	82,2	75,7	79,9	49,4	42,6	74,3
Moyenne (corpus)	**65,4**	**70,7**	**79,4**	**75,3**	**67,5**	**53,3**	**34,6**	**72,3**

Annexe 358. Taux de réussite moyen des élèves aux évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

Participants	M0103	M0108	M0207	M0304	M0403	M0801	M0903	M0905C	M0906A	M0906B	M1103	M1111	M1201	M1407
	Figure showing fraction of shaded square.	*Fraction to decimal.*	*Fraction of cake left.*	*Which figure has one-half black dots?*	*1/3 of 600 balls in a box.*	*4/5 minus 1/5.*	*What fraction of cake John ate?*	*Geometry Tiles Fraction shaded.*	*Geometry Tiles_1/2 black.*	*Geometry Tiles_5/8 black.*	*Recipe for 3 people.*	*Rotate the shape 1/4 clockwise.*	*Select a fraction larger than 1/2.*	*Position of the shape after a half turn.*
Angleterre	67,5	46,1	82,6	84,3	40,6	59,9	79,6	49,4	48,8	12,6	68,8	74,7	53,1	62,2
Hong Kong SAR	86,0	77,7	81,6	90,0	63,6	97,0	93,4	69,7	43,1	6,7	33,9	81,9	66,3	54,2
Ontario	68,5	46,8	66,2	85,3	32,6	61,7	82,7	50,7	45,3	9,3	36,5	77,7	55,8	44,2
Québec	67,4	25,6	59,7	93,0	36,5	48,1	84,5	44,1	46,8	6,1	25,8	56,6	44,2	31,6
Singapour	93,0	95,2	82,5	89,1	83,8	96,9	89,1	72,9	56,1	11,0	56,9	79,4	64,3	61,0
Taipei chinois	80,7	74,2	50,8	42,1	55,1	95,9	97,5	60,9	31,7	8,1	15,3	83,7	54,4	51,9
Moyenne (corpus)	**77,2**	**60,9**	**70,6**	**80,6**	**52,0**	**76,6**	**87,8**	**58,0**	**45,3**	**9,0**	**39,5**	**75,7**	**56,4**	**50,9**

Annexe 359. Taux de réussite moyen des élèves aux évaluations TIMSS 2003 de huitième année

Participants	M0101	M0110	M0111	M0113	M0204	M0207	M0210	M0212	M0214	M0303
	Number of squares in shaded fraction.	*Find n from proportionality equation.*	*Fraction birthdays in first half of year.*	*3/25 of the people in the audience was children.*	*Pair of numbers bracketing 2.25.*	*Subtract fractions involving x.*	*Number of men/women at meeting.*	*True expression for values of L, K, M.*	*Addition, multiplication with fractions.*	*Fraction of hour between two time points.*
Angleterre	61,7	74,0	75,1	70,9	49,6	36,1	67,0	54,3	27,8	68,0
Corée du Sud	81,8	89,2	89,7	76,1	76,9	86,4	88,5	85,7	80,2	77,2
Hong Kong SAR	87,2	87,9	86,0	90,0	60,8	82,7	73,3	84,5	69,1	80,4
Ontario	71,1	86,2	76,2	79,5	55,1	36,1	61,3	65,0	36,6	62,1
Québec	83,4	88,0	79,2	92,2	62,5	61,5	76,8	70,2	41,9	68,4
Singapour	87,7	93,2	89,6	96,0	70,8	81,0	80,7	87,7	71,6	85,0
Taipei chinois	78,1	83,0	78,7	76,9	60,2	75,6	77,2	82,5	82,3	77,0
Moyenne (corpus)	**78,7**	**85,9**	**82,1**	**83,1**	**62,3**	**65,6**	**75,0**	**75,7**	**58,5**	**74,0**

Participants	M0311	M0315	M0402	M0406	M0409	M0501	M0507	M0509	M0511B	M0603
	Number of students from probability.	*Scoops of flour needed to fill bag.*	*4/5 of books more than 2/3.*	*Fraction less than 4/9.*	*Most likely sector on spinner.*	*Circle with same shaded fraction.*	*Probability of drawing blue bead.*	*Addition of three fractions.*	*New rectangle from old/ratio of area.*	*Which fraction is smallest?*
Angleterre	62,8	50,0	57,2	67,9	79,3	77,3	49,3	20,8	13,5	79,0
Corée du Sud	89,2	68,3	80,0	81,3	78,7	88,5	78,4	84,9	49,8	77,9
Hong Kong SAR	83,6	75,6	77,6	78,7	86,7	81,6	83,6	85,0	42,4	90,4
Ontario	66,9	52,8	50,8	66,3	80,0	77,6	56,3	47,7	23,3	81,8
Québec	79,0	61,5	56,4	70,1	86,7	79,3	19,3	67,5	25,7	87,0
Singapour	86,8	79,1	84,5	83,5	79,3	84,6	88,5	90,2	66,7	90,2
Taipei chinois	85,8	75,0	77,5	77,0	85,4	74,6	80,2	83,1	54,2	83,3
Moyenne (corpus)	**79,2**	**66,0**	**69,1**	**75,0**	**82,3**	**80,5**	**65,1**	**68,5**	**39,4**	**84,2**

Participants	M0609	M0610	M0802	M1101	M1102	M1103	M1112	M1202	M1203
	Tickets cost either 10 zeds, 15 zeds, or 30 zeds.	*Cups of sugar for 1 1/2 times original recipe.*	*A correct procedure for finding 1/5 minus 1/3.*	*4/100 plus 3/1000.*	*P and Q are 2 numbers on the number line.*	*Ann and Jenny divide 560 zeds between them.*	*Figure 1 transformed to 2 and 3.*	*Write 3 5/6 in decimal form.*	*Simplify 3x/8 plus x/4 plus x/2.*
Angleterre	18,4	23,6	10,6	43,0	20,0	33,4	62,4	14,4	5,5
Corée du Sud	49,9	59,0	79,2	87,4	40,6	55,4	72,5	51,5	71,2
Hong Kong SAR	58,8	57,4	65,6	82,8	39,3	76,3	82,9	74,4	49,6
Ontario	29,9	29,4	26,9	60,4	26,3	34,8	67,0	31,3	9,7
Québec	50,0	31,1	31,7	75,3	33,7	49,4	83,5	30,0	37,0
Singapour	73,2	67,7	73,3	90,7	35,4	78,4	71,5	67,8	69,5
Taipei chinois	58,0	65,7	73,5	74,8	40,2	55,4	63,2	61,9	55,9
Moyenne (corpus)	**48,3**	**47,7**	**51,5**	**73,5**	**33,6**	**54,7**	**71,9**	**47,3**	**42,6**

Annexe 360. Taux de réussite moyen des élèves aux évaluations TIMSS 2007 de quatrième année

Participants	M0204	M0402	M0403	M0404	M0413	M0603	M0606	M0701	M0903	M0911	M1005	M1101	M1205	M1307
	Fraction of the rectangle shaded.	*Draw a circle around the cookies.*	*Fraction equal to 2/3.*	*Fraction of money Joe spent.*	*How many more girls in class A?*	*Shade 1/2 of the larger triangle.*	*Fraction of the cake eaten.*	*4/5 minus 1/5.*	*Recipe for 3 people.*	*Rotate the shape 1/4 clockwise.*	*Equivalent fractions.*	*Select a fraction larger than 1/2.*	*Which is the largest fraction?*	*Position of the shape after a half turn.*
Angleterre	55,2	47,3	46,6	53,1	40,3	66,8	54,7	61,0	60,3	78,5	74,4	59,5	69,6	60,0
Hong Kong SAR	81,8	85,0	76,6	88,3	63,1	78,7	58,5	96,9	31,3	86,7	89,2	72,2	86,0	67,8
Ontario	50,9	31,3	15,4	51,6	38,9	50,8	29,1	50,8	24,8	74,3	51,0	46,2	38,0	45,8
Québec	63,2	56,9	29,8	43,3	30,2	68,4	26,6	51,7	19,2	61,7	63,0	40,2	53,2	41,1
Singapour	76,3	74,8	84,2	82,0	63,3	71,3	84,9	96,9	47,6	83,4	86,3	66,2	81,0	65,9
Taipei chinois	51,4	58,0	46,5	92,0	46,8	57,1	36,7	96,6	18,9	88,7	64,5	61,4	77,5	53,3
Moyenne (corpus)	**63,1**	**58,9**	**49,9**	**68,4**	**47,1**	**65,5**	**48,4**	**75,7**	**33,7**	**78,9**	**71,4**	**57,6**	**67,6**	**55,7**

Annexe 361. Taux de réussite moyen des élèves aux évaluations TIMSS 2007 de huitième année

Participants	M0101	M0107	M0109	M0111	M0303	M0304	M0309	M0310	M0506	M0601
	Circle with same shaded fraction.	*Probability of drawing blue bead.*	*Addition of three fractions.*	*New rectangle from old/ratio of area.*	*Which fraction is smallest?*	*Triangle rotated about point P.*	*Fraction of tickets sold for 10 zeds.*	*Cups of sugar for 1 1/2 times recipe.*	*Class Trip. Calculations from two ads.*	*Write equivalent fraction for 0.125.*
Angleterre	77,0	54,8	34,0	14,9	79,1	63,5	27,1	29,8	20,0	54,9
Corée du Sud	89,3	81,0	85,3	49,0	81,4	65,0	58,2	66,2	23,3	96,7
Hong Kong SAR	81,6	83,3	83,1	36,1	85,8	74,5	50,7	66,4	22,7	81,2
Ontario	75,0	55,0	51,2	28,3	81,5	59,6	38,7	30,8	19,5	74,5
Québec	78,8	69,3	56,3	16,8	81,1	62,4	42,6	30,4	23,5	76,4
Singapour	80,9	86,0	86,3	57,2	89,5	45,4	70,1	64,2	39,6	93,3
Taipei chinois	81,3	83,0	88,4	60,7	84,0	73,5	63,8	70,3	29,7	90,4
Moyenne (corpus)	**80,6**	**73,2**	**69,2**	**37,6**	**83,2**	**63,4**	**50,2**	**51,2**	**25,5**	**81,1**

Participants	M0602	M0615	M0702	M0901	M0902	M0903	M0912	M1001	M1102	M1103
	Equivalent expression.	*Chance of getting a button.*	*Correct procedure for 1/5 minus 1/3.*	*4/100 plus 3/1000.*	*Location of N on number line.*	*Ann and Jenny divide 560 zeds.*	*Figure 1 transformed to 2 and 3.*	*Length of the original pipe.*	*Write 3 5/6 in decimal form.*	*Simplify 3x/8 plus x/4 plus x/2.*
Angleterre	42,7	74,5	17,0	50,3	26,7	34,8	62,1	78,7	20,2	10,3
Corée du Sud	81,4	90,0	78,8	90,7	44,4	63,3	83,5	93,8	66,3	59,4
Hong Kong SAR	70,4	49,8	66,1	78,5	45,4	58,4	80,4	86,6	70,8	51,6
Ontario	50,7	78,2	28,9	64,8	27,1	29,7	76,5	83,6	36,4	5,9
Québec	70,7	72,1	29,3	62,8	27,1	39,0	64,1	81,7	28,7	31,2
Singapour	75,3	74,4	69,8	90,2	39,7	78,0	61,4	94,0	63,7	72,4
Taipei chinois	79,7	67,9	78,8	81,0	49,4	56,2	68,3	90,0	58,1	65,8
Moyenne (corpus)	**67,3**	**72,4**	**52,7**	**74,0**	**37,1**	**51,3**	**70,9**	**86,9**	**49,2**	**42,4**

Annexe 362. Taux de réussite moyen des élèves aux évaluations TIMSS 2011 de quatrième année

Participants	M0107	M0202	M0303	M0306	M0503	M0511	M0605	M0701	M0806	M1105
	Position of the shape after a half turn.	*Find the inequivalent fraction.*	*Shade 1/2 of the larger triangle.*	*Fraction of the cake eaten.*	*Recipe for 3 people.*	*Rotate the shape 1/4 clockwise.*	*Equivalent fractions.*	*Select a fraction larger than 1/2.*	*Fraction of the cake left.*	*Which is the largest fraction?*
Angleterre	63,6	68,9	82,6	50,6	55,3	76,3	68,3	49,7	25,2	64,1
Corée du Sud	79,7	67,5	66,8	36,3	27,7	93,3	62,8	60,2	28,1	65,5
Floride	74,8	69,2	77,1	32,4	30,7	82,0	82,1	55,9	31,8	72,3
Hong Kong SAR	64,2	81,6	90,2	52,9	34,5	87,2	87,6	73,7	54,1	91,1
Irlande du Nord	62,8	72,6	90,5	68,0	63,2	80,0	77,0	63,3	35,6	80,0
Ontario	47,4	50,3	69,0	28,4	21,7	74,1	53,1	48,0	15,1	38,6
Québec	46,8	62,5	85,0	26,7	22,2	66,1	66,4	49,2	22,2	51,5
République d'Irlande	41,9	66,8	85,8	53,2	53,5	79,2	73,5	61,8	31,2	81,8
Singapour	69,7	81,2	87,5	84,1	49,8	85,2	88,6	66,9	79,3	82,6
Taipei chinois	58,4	80,5	78,3	53,7	31,1	89,4	82,3	67,4	58,2	79,1
Moyenne (corpus)	**60,9**	**70,1**	**81,3**	**48,6**	**39,0**	**81,3**	**74,2**	**59,6**	**38,1**	**70,7**

Annexe 363. Taux de réussite moyen des élèves aux évaluations TIMSS 2011 de huitième année

Participants	M0201	M0204	M0205	M0213	M0301	M0302	M0313	M0315
	Select the decimal equal to 3/5.	*Method for subtracting fractions.*	*Which number sentence is true?*	*Probability that the marble is red.*	*Equivalent fraction for 0.125.*	*Equivalent expression.*	*Half-turn around point O.*	*Chance of getting a button.*
Angleterre	59,4	28,2	32,9	71,8	62,1	43,3	55,6	76,5
Corée du Sud	95,7	86,0	67,9	75,7	97,2	87,8	78,9	92,0
Floride	90,5	28,8	40,2	60,3	75,7	59,2	38,2	78,0
Hong Kong SAR	89,1	77,0	63,2	63,8	86,7	77,8	70,9	65,1
Ontario	72,8	32,5	29,4	73,0	73,0	53,6	54,6	79,3
Québec	86,7	33,0	38,9	72,4	82,5	74,3	60,7	77,6
Singapour	96,1	83,1	66,5	78,1	93,3	82,6	61,7	85,0
Taipei chinois	88,6	82,0	73,9	69,7	90,7	82,0	64,4	68,4
Moyenne (corpus)	**84,9**	**56,3**	**51,6**	**70,6**	**82,7**	**70,1**	**60,6**	**77,7**

Participants	M0501	M0502	M0503	M0512	M0601	M0702	M0703
	4/100 plus 3/1000.	*Location of N on number line.*	*Ann and Jenny divide 560 zeds.*	*Figure 1 transformed to 2 and 3.*	*Length of the original pipe.*	*Write 3 5/6 in decimal form.*	*Simplify 3x/8 plus x/4 plus x/2.*
Angleterre	57,0	28,8	34,4	60,5	79,0	24,3	8,5
Corée du Sud	89,4	43,8	67,4	82,9	95,5	64,6	60,8
Floride	64,4	19,7	22,9	65,4	69,1	34,6	14,7
Hong Kong SAR	85,9	47,4	61,3	83,9	89,5	77,7	53,2
Ontario	65,1	26,7	30,8	75,8	79,9	31,4	9,1
Québec	70,5	28,8	45,1	62,9	87,8	36,8	28,9
Singapour	92,0	44,6	76,5	66,7	91,6	73,2	74,5
Taipei chinois	85,2	53,1	59,8	69,1	91,8	60,7	63,3
Moyenne (corpus)	**76,2**	**36,6**	**49,8**	**70,9**	**85,5**	**50,4**	**39,1**

Annexe 364. Taux de réussite moyen des élèves aux évaluations TIMSS 2015 de quatrième année

Participants	M0504A	M0504B	M0701	M0704	M0705	M0804	M0905	M0906	M1004	M1102	M1104	M1302	M1304A	M1304B
	Circle with 3/8 of the area shaded.	*Give reason for your selection*	*Which rectangle is 1/4 shaded?*	*Fraction of circles that are black.*	*Which is the largest fraction?*	*Shaded fraction of a square.*	*Fraction equivalent to 4/10.*	*Fraction of the cake left.*	*Fraction Anna has left to cycle.*	*Fraction equal to 0.4.*	*Pattern with 2/3 shapes shaded.*	*Figure with three quarters shaded.*	*Fraction watered on Monday.*	*Fraction watered on Tuesday.*
Angleterre	48,9	17,3	82,7	69,4	69,5	45,4	50,0	27,0	44,3	54,6	53,5	83,6	63,7	63,0
Corée du Sud	76,9	59,5	95,7	91,9	67,1	75,4	40,4	33,1	79,6	80,6	70,1	94,3	81,1	82,3
Floride	64,0	48,9	95,5	79,9	80,8	54,8	66,4	43,6	63,6	81,1	69,8	90,5	66,7	62,8
France	34,7	9,3	72,5	52,4	21,1	31,0	25,8	11,3	43,9	27,0	36,2	68,3	41,0	39,7
Hong Kong SAR	75,7	44,7	97,6	94,6	92,7	79,3	84,9	60,0	84,0	92,5	85,4	97,3	88,1	85,6
Irlande du Nord	60,1	16,9	88,8	75,9	81,5	56,6	63,7	47,7	62,0	60,9	64,6	89,6	71,3	69,5
Ontario	44,4	24,4	82,1	54,6	38,8	39,1	35,3	11,9	35,6	26,1	49,4	78,3	52,4	51,5
Québec	54,4	31,7	96,0	79,0	54,1	44,9	41,3	25,4	55,0	38,4	59,1	85,6	62,5	68,3
République d'Irlande	57,0	17,7	84,2	77,7	89,8	53,4	57,1	41,6	63,6	75,6	63,6	83,1	72,6	70,7
Singapour	72,7	57,2	96,3	91,0	85,3	72,7	84,3	82,2	84,5	92,7	79,3	95,8	83,1	84,0
Taipei chinois	62,1	36,3	94,5	93,1	66,5	66,0	62,2	52,6	82,3	77,9	70,5	86,8	77,1	75,1
Moyenne (corpus)	**59,2**	**33,1**	**89,6**	**78,1**	**67,9**	**56,2**	**55,6**	**39,7**	**63,5**	**64,3**	**63,8**	**86,7**	**69,1**	**68,4**

Annexe 365. Taux de réussite moyen des élèves aux évaluations TIMSS 2015 de huitième année

Participants	M0102	M0105	M0213	M0301	M0502	M0504	M0604	M0904	M1104	M1304
	Write as decimal number.	*Expression for one-fifth of x.*	*Chance Clara picks a blue marble.*	*Decimal closest in size to 3/4.*	*Fraction by which price reduced by.*	*Which is larger 7/12 or 2/3.*	*Complete the fraction sequence.*	*Fraction wanting to go on a trip.*	*Fraction of diagram shaded.*	*Convert decimal to a fraction.*
Angleterre	42,1	53,0	47,2	76,4	70,6	40,6	37,7	54,0	69,1	35,1
Corée du Sud	61,3	78,7	81,9	87,6	83,5	83,0	81,7	74,9	92,6	93,2
Floride	43,6	45,1	43,5	84,9	62,3	38,2	37,9	47,3	63,3	36,4
Hong Kong SAR	68,9	77,0	72,6	90,6	82,8	74,9	76,6	77,5	86,4	80,0
Ontario	38,3	47,0	47,2	76,7	69,4	55,5	52,7	59,1	77,0	34,8
Québec	35,7	62,2	58,0	87,4	80,1	70,8	64,9	70,1	81,6	49,2
République d'Irlande	65,1	60,6	58,7	86,2	85,3	56,1	47,1	63,2	74,9	67,5
Singapour	85,7	78,3	78,9	95,0	89,9	78,1	82,8	88,4	89,2	93,0
Taipei chinois	54,0	77,2	70,2	80,0	74,3	76,2	80,8	69,6	76,0	78,2
Moyenne (corpus)	**55,0**	**64,3**	**62,0**	**85,0**	**77,6**	**63,7**	**62,5**	**67,1**	**78,9**	**63,0**

Annexe 366. Item I5 des évaluations TIMSS 1995 de quatrième année

I-5

I5. Mario uses 5 tomatoes to make half a liter of tomato sauce. How much sauce can he make from 15 tomatoes?

A. A liter and a half

B. Two liters

C. Two liters and a half

D. Three liters

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

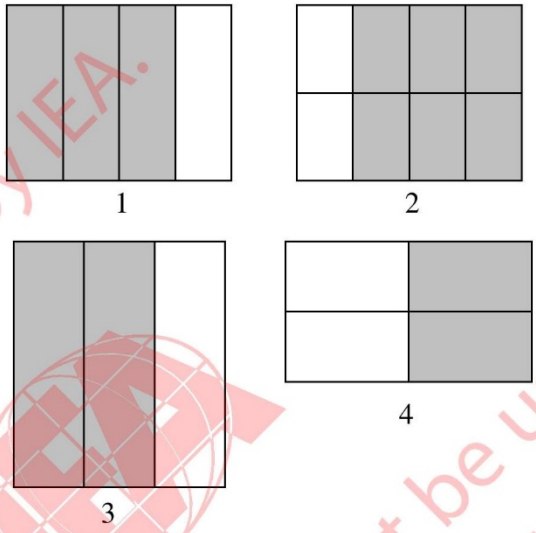
Reproduced from TIMSS Population 1 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	A	Fractions and Proportionality	Using Complex Procedures	53%	42%	582

Annexe 367. Item I8 des évaluations TIMSS 1995 de quatrième année

I-8

I8. Each figure represents a fraction.



Which two figures represent the same fraction?

A. 1 and 2

B. 1 and 4

C. 2 and 3

D. 3 and 4

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

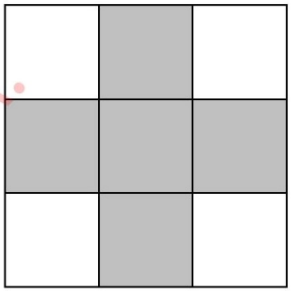
Reproduced from TIMSS Population 1 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	A	Fractions and Proportionality	Using Complex Procedures	54%	46%	568

Annexe 368. Item J7 des évaluations TIMSS 1995 de quatrième année

J7

J7. Part of the figure is shaded.



What fraction of the figure is shaded?

A. $\frac{5}{4}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{6}{9}$

D. $\frac{5}{9}$

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

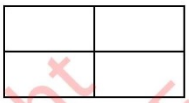
Reproduced from TIMSS Population 1 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

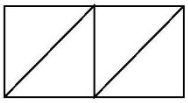
Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	D	Fractions and Proportionality	Solving Problems	61%	42%	547

Annexe 369. Item K8 des évaluations TIMSS 1995 de quatrième année

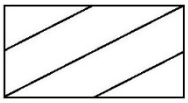
K-8

K8. Which rectangle is NOT divided into 4 equal parts?

A. 

B. 

C.

D. 

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 1 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	D	Geometry	Knowing	73%	60%	477

Annexe 370. Item K9 des évaluations TIMSS 1995 de quatrième année

K-9

K9. There are 54 marbles, and they are put into 6 bags, so that the same number of marbles is in each bag. How many marbles would 2 bags contain?

A. 108 marbles

B. 18 marbles

C. 15 marbles

D. 12 marbles

E. 9 marbles

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 1 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	B	Fractions and Proportionality	Using Complex Procedures	37%	27%	638

Annexe 371. Item S4 des évaluations TIMSS 1995 de quatrième année

S4. A teacher marks 10 of her pupils' tests every half hour. It takes her one and one-half hours to mark all her pupils' tests. How many pupils are in her class?

Answer: _____

S-4

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 1 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	Next Page	Fractions and Proportionality	Solving Problems	46%	30%	583

S-4 Coding Guide

S4. A teacher marks 10 of her pupils' tests every half hour. It takes her one and one-half hours to mark all her pupils' tests. How many pupils are in her class?

Answer: _____

Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Code	Response
Correct Response	
10	30
Incorrect Response	
70	10
71	15
72	20
73	21
74	25
75	40
79	Other incorrect.
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible or impossible to interpret.
99	BLANK

Annexe 372. Item T4b des évaluations TIMSS 1995 de quatrième année

T4. There are 10 girls and 20 boys in Juanita's class. Juanita said that there is one girl for every two boys. Her friend Amanda said that means $\frac{1}{2}$ of all the students in the class are girls.

How many students are there in Juanita's class. Answer: _____

Is Juanita right? Answer: _____
Use words or pictures to explain why.

T-4b

Is Amanda right? Answer: _____
Use words and pictures to explain why.

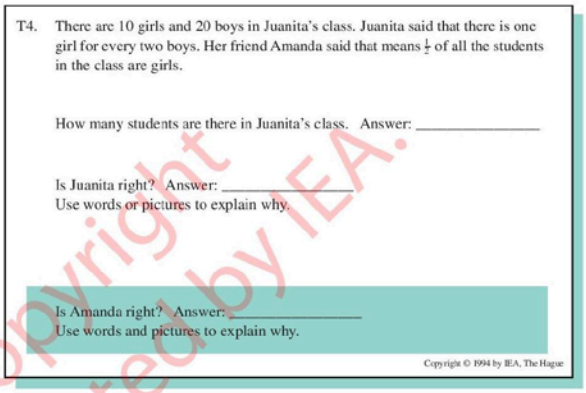
Copyright protected by IEA
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 1 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Part b

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	Next Page	Fractions and Proportionality	Solving Problems	15%	6%	796

T-4b Coding Guide



T4. There are 10 girls and 20 boys in Juanita's class. Juanita said that there is one girl for every two boys. Her friend Amanda said that means $\frac{1}{2}$ of all the students in the class are girls.

How many students are there in Juanita's class. Answer: _____

Is Juanita right? Answer: _____
Use words or pictures to explain why.

Is Amanda right? Answer: _____
Use words and pictures to explain why.

Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Codes for Part b

Code	Response
Correct Response	
10	NO. The response expresses verbally, symbolically or pictorially that 10 is not half of 30.
19	Other correct. (Includes satisfactory explanations when neither a "yes" or "no" answer is given).
Incorrect Response	
70	YES. An explanation is given but it is not satisfactory.
71	YES. No explanation is given.
72	NO. An explanation is given but it is not satisfactory.
73	NO. No explanation is given.
79	Other incorrect.
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible or impossible to interpret.
99	BLANK

Annexe 373. Item U2 des évaluations TIMSS 1995 de quatrième année

U2. Write a fraction that is larger than $\frac{2}{7}$.

Answer: _____

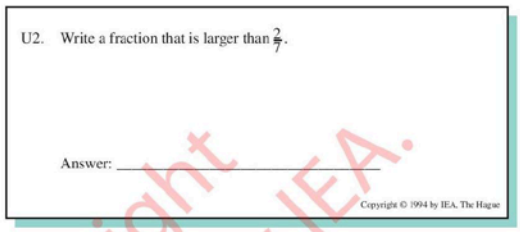
Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

U-2

Reproduced from TIMSS Population 1 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	Next Page	Fractions and Proportionality	Knowing	57%	41%	564

U-2 Coding Guide



Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

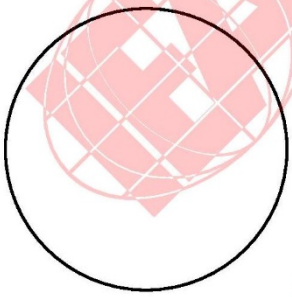
Code	Response
Correct Response	
10	A fraction with numerator greater than 2 and denominator equal to 7
11	A fraction with numerator equal to 2 and denominator less than 7
12	3/8
13	1/2. (Other fractions with numeric value equal 1/2 should be coded 19.)
19	Other correct fraction.
Incorrect Response	
70	1/7
71	4/14
72	2/8
79	Other incorrect
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible or impossible to interpret.
99	BLANK

Annexe 374. Item V1 des évaluations TIMSS 1995 de quatrième année

V1. Sam said that $\frac{1}{3}$ of a pie is less than $\frac{1}{4}$ of the same pie.

Is Sam correct? _____

Use the circles below to show why this is so.



Shade in $\frac{1}{3}$ of this circle

Shade in $\frac{1}{4}$ of this circle

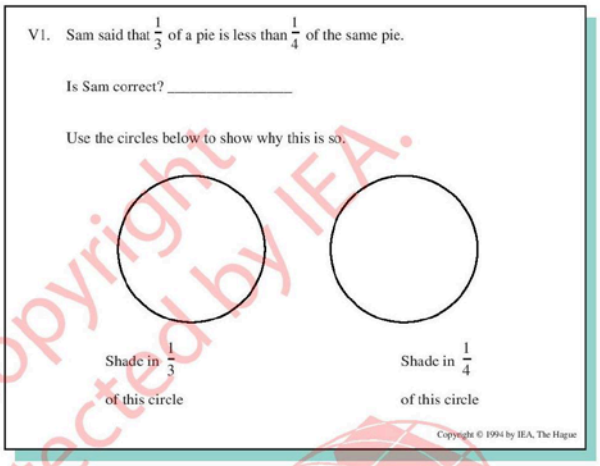
Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

V-1

Reproduced from TIMSS Population 1 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	Next Page	Fractions and Proportionality	Solving Problems	26%	13%	686

V-1 Coding Guide



Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Note: The partition of circles has priority over shading. This is reflected in the codes below.

Code	Response
Correct Response	
20	NO. Both circles are correctly partitioned.
Partial Response	
10	NO. No partitioning is shown.
11	NO. Only one of the circles correctly partitioned.
12	NO. Other incorrect ways of partitioning.
13	YES, or there is no conclusion stated. Both circles are correctly partitioned.
19	Other partial.
Incorrect Response	
70	YES. No partitioning is shown.
71	YES. The part representing 1/3 is made consistently smaller than the part representing 1/4.
72	YES. Other responses where one or both of the circles partitioned into 3 and/or 4 parts.
79	Other incorrect.
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible or impossible to interpret.
99	BLANK

Annexe 375. Item I2 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

I-2

I2. Two groups of tourists each have 60 people. If $\frac{3}{4}$ of the first group and $\frac{2}{3}$ of the second group board buses to travel to a museum, how many more people in the first group board buses than in the second group?

A. 2

B. 4

C. 5

D. 40

E. 45

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	C	Fractions and Number Sense	Solving Problems	58%	52%	530

Annexe 376. Item I6 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

I-6

I6. Write a fraction that is larger than $\frac{2}{7}$.

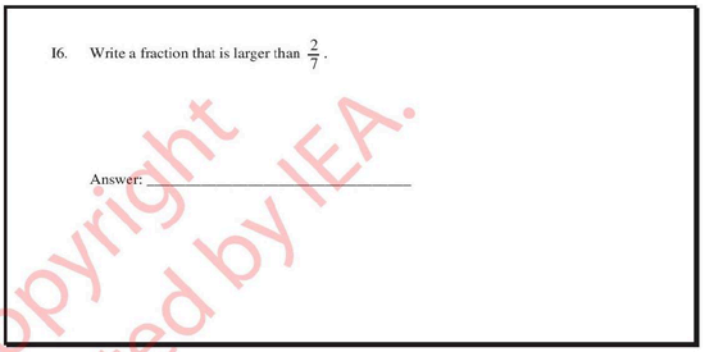
Answer: _____

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	next page	Fractions and Number Sense	Knowing	75%	74%	427

I-6 Coding Guide



Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Code	Response
Correct Response	
10	A fraction with numerator greater than 2 and denominator equal to 7
11	A fraction with numerator equal to 2 and denominator less than 7
12	3/8
13	1/2. (Other fractions with numeric value equal 1/2 should be coded 19.)
19	Other correct fraction.
Incorrect Response	
70	1/7
71	4/14
72	2/8
79	Other incorrect.
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible, or impossible to interpret.
99	BLANK

Annexe 377. Item I9 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

I-9

I9. In a bag of cards $\frac{1}{6}$ are green, $\frac{1}{12}$ are yellow, $\frac{1}{2}$ are white and $\frac{1}{4}$ are blue. If someone takes a card from the bag without looking, which color is it most likely to be?

A. White

B. Blue

C. Green

D. Yellow

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	A	Data Representation, Analysis & Probability	Using Complex Procedures	67%	60%	490

Annexe 378. Item J12 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

J12. Divide: $\frac{8}{35} \div \frac{4}{15} =$

J-12

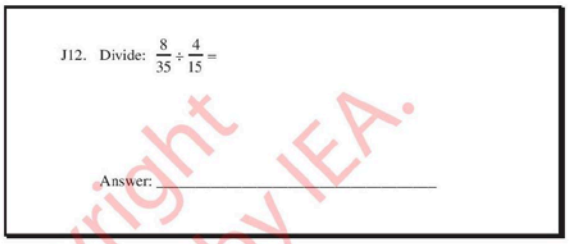
Answer: _____

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	next page	Fractions and Number Sense	Performing Routine Procedures	43%	36%	593

J-12 Coding Guide



Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

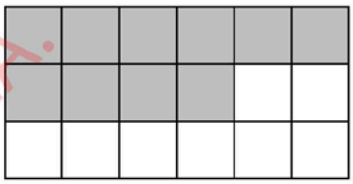
Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Code	Response
Correct Response	
10	33761
19	Other fractions or decimals equivalent to 6/7
Incorrect Response	
70	Any fraction with 2 as numerator.
71	A response (other than 90/105) indicates working out the common denominator, 105.
72	7/6 or equivalent
79	Other incorrect
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible, or impossible to interpret.
99	BLANK

Annexe 379. Item K1 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

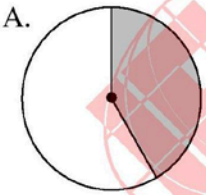
K-1

K1.

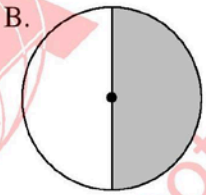


Which circle has approximately the same fraction shaded as that of the rectangle above?

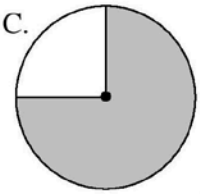
A.



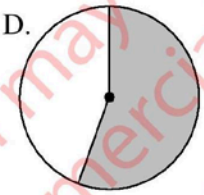
B.



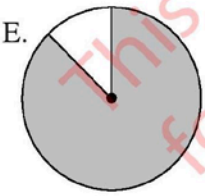
C.



D.



E.



Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	D	Fractions and Number Sense	Using Complex Procedures	70%	65%	464

Annexe 380. Item K4 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

K-4

K4. $\frac{x}{2} < 7$ is equivalent to

A. $x < \frac{7}{2}$

B. $x < 5$

C. $x < 14$

D. $x > 5$

E. $x > 14$

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	C	Algebra	Performing Routine Procedures	44%	36%	606

Annexe 381. Item K7 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

K-7

K7. A drawer contains 28 pens; some white, some blue, some red, and some gray. If the probability of selecting a blue pen is $\frac{2}{7}$, how many blue pens are in the drawer?

A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

E. 20

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	C	Data Representation, Analysis & Probability	Solving Problems	53%	48%	550

Annexe 382. Item K9 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

K9. $\frac{3}{4}+\frac{8}{3}+\frac{11}{8}=$

A. $\frac{22}{15}$

B. $\frac{43}{24}$

C. $\frac{91}{24}$

D. $\frac{115}{24}$

K-9

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	D	Fractions and Number Sense	Performing Routine Procedures	49%	42%	563

Annexe 383. Item L17 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

L17. What is the value of $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$?

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{5}{12}$

E. $\frac{1}{2}$

L-17

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	B	Fractions and Number Sense	Performing Routine Procedures	50%	42%	571

Annexe 384. Item M4 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

M4. Which number is largest?

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{7}{10}$

M-4

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

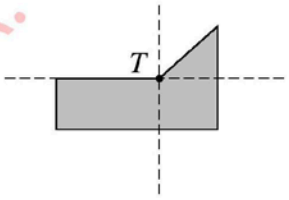
Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	A	Fractions and Number Sense	Using Complex Procedures	39%	34%	615

Annexe 385. Item M5 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

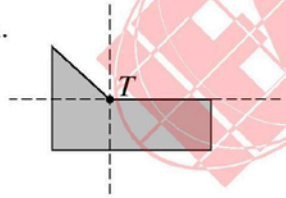
M-5

M5. A half-turn about point T in the plane is applied to the shaded figure.

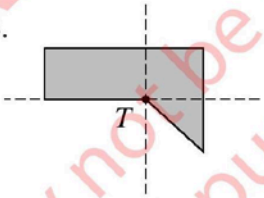


Which of these shows the result of the half-turn?

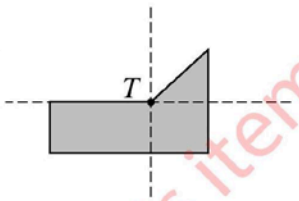
A.



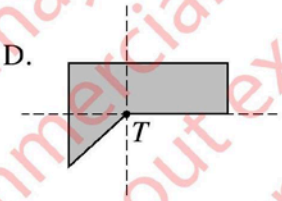
B.



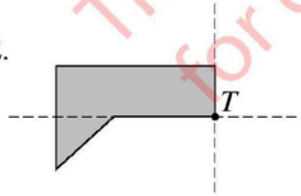
C.



D.



E.



Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	D	Geometry	Performing Routine Procedures	52%	43%	565

Annexe 386. Item N14 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

N14. In which list of fractions are all of the fractions equivalent?

A. $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{12}{14}$

B. $\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{9}{15}$

C. $\frac{3}{8}, \frac{6}{16}, \frac{12}{32}$

D. $\frac{5}{10}, \frac{10}{15}, \frac{1}{2}$

N-14

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	C	Fractions and Number Sense	Knowing	67%	62%	483

Annexe 387. Item N16 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

N16. Jan had a bag of marbles. She gave half of them to James and then a third of the marbles still in the bag to Pat. She then had 6 marbles left. How many marbles were in the bag to start with?

A. 18

B. 24

C. 30

D. 36

N-16

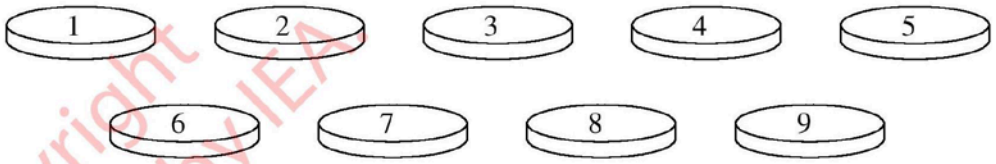
Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	A	Fractions and Number Sense	Solving Problems	47%	43%	580

Annexe 388. Item N18 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

N18. The nine chips shown are placed in a jar and mixed.



Madeleine draws one chip from the jar. What is the probability that Madeleine draws a chip with an even number?

N-18

A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{4}{9}$

D. $\frac{1}{2}$

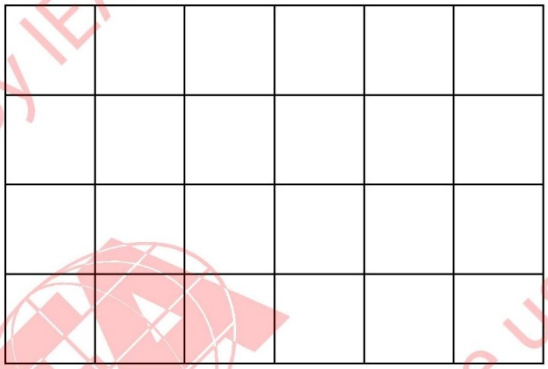
Copyright protected by IEA
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	C	Data Representation, Analysis & Probability	Solving Problems	56%	48%	541

Annexe 389. Item N19 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

N19. Shade in $\frac{5}{8}$ of the unit squares in the grid.



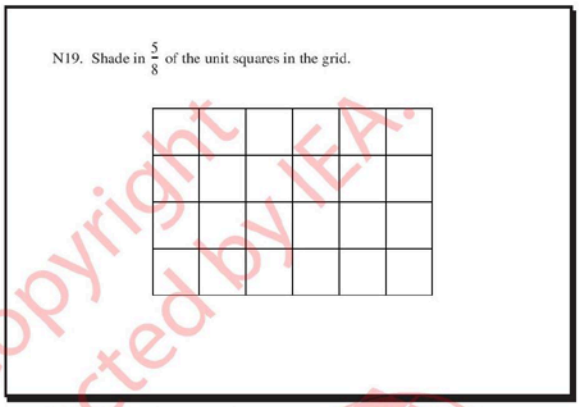
N-19

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	next page	Fractions and Number Sense	Knowing	52%	46%	559

N-19 Coding Guide



Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Code	Response
Correct Response	
10	15 squares are shaded (regardless of which squares).
Incorrect Response	
70	5 squares shaded
71	8 squares shaded
72	14 or 16 squares shaded.
73	Five (5) squares shaded AND 3 more squares (a total of 8) marked on the grid.
79	Other incorrect
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible, or impossible to interpret.
99	BLANK

Annexe 390. Item O5 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

O5. Each of the six faces of a certain cube is painted either red or blue. When the cube is tossed, the probability of the cube landing with a red face up is $\frac{2}{3}$. How many faces are red?

A. One

B. Two

C. Three

D. Four

E. Five

O-5

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	D	Data Representation, Analysis & Probability	Solving Problems	47%	41%	587

Annexe 391. Item O9 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

O9. Luis exercises by running 5 km each day. The course he runs is $\frac{1}{4}$ km long. How many times through the course does he run each day?

Answer: _____

O-9

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	next page	Fractions and Number Sense	Solving Problems	50%	42%	571

O-9 Coding Guide

O9. Luis exercises by running 5 km each day. The course he runs is $\frac{1}{4}$ km long. How many times through the course does he run each day?

Answer:_____

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Code	Response
Correct Response	
10	20
Incorrect Response	
70	20 km
71	5/4
72	2
73	3
74	4
75	5
79	Other incorrect
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible, or impossible to interpret.
99	BLANK

Annexe 392. Item P8 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

P8. What is the ratio of the length of a side of a square to its perimeter?

A. $\frac{1}{1}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

P-8

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	D	Geometry	Solving Problems	56%	50%	536

Annexe 393. Item P14 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

P14. Janis, Maija, and their mother were eating a cake. Janis ate $\frac{1}{2}$ of the cake. Maija ate $\frac{1}{4}$ of the cake. Their mother ate $\frac{1}{4}$ of the cake. How much of the cake is left?

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. None

P-14

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	D	Fractions and Number Sense	Solving Problems	76%	72%	422

Annexe 394. Item P16 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

P16. Write 0.28 as a fraction reduced to its lowest terms.

Answer:_____

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

P-16

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	next page	Fractions and Number Sense	Performing Routine Procedures	33%	30%	637

P-16 Coding Guide

P16. Write 0.28 as a fraction reduced to its lowest terms.

Answer:_____

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Code	Response
Correct Response	
10	7/25
Incorrect Response	
70	28/100 OR 14/50
71	Any fractions other than 28/100 with 28 as numerator.
72	Any fractions with 28 as denominator.
73	2/8 OR 1/4
74	Any expression which mixes decimal notation into the fraction *Example: 0,28/10 or 0.28/10*
79	Other incorrect
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible, or impossible to interpret.
99	BLANK

Annexe 395. Item Q2 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

Q2. Subtract: $\frac{2x}{9} - \frac{x}{9} =$

A. $\frac{1}{9}$

B. 2

C. x

D. $\frac{x}{9}$

E. $\frac{x}{81}$

Q-2

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	D	Algebra	Performing Routine Procedures	51%	40%	568

Annexe 396. Item Q5 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

Q5. Three-fifths of the students in a class are girls. If 5 girls and 5 boys are added to the class, which statement is true of the class?

A. There are more girls than boys.

B. There are the same number of girls as there are boys.

C. There are more boys than girls.

D. You cannot tell whether there are more girls or boys from the information given.

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Q-5

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	A	Proportionality	Solving Problems	65%	62%	487

Annexe 397. Item Q8 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

Q8. Which list shows the numbers from smallest to largest?

A. $0.345,\ 0.19,\ 0.8,\ \frac{1}{5}$

B. $0.19,\ \frac{1}{5},\ 0.345,\ 0.8$

C. $0.8,\ 0.19,\ \frac{1}{5},\ 0.345$

D. $\frac{1}{5},\ 0.8,\ 0.345,\ 0.19$

Q-8

Copyright protected by IEA
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	B	Fractions and Number Sense	Using Complex Procedures	44%	38%	587

Annexe 398. Item Q9 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

Q9. $\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\right)=$

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{5}{16}$

C. $\frac{17}{48}$

D. $\frac{5}{6}$

E. $\frac{11}{12}$

Q-9

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	E	Fractions and Number Sense	Performing Routine Procedures	51%	46%	558

Annexe 399. Item R13 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

R13. Mr. Lewis had \$360. He spent $\frac{7}{9}$ of it. How much money did he have left?

Answer:_____

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

R-13

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	next page	Fractions and Number Sense	Solving Problems	32%	27%	642

R-13 Coding Guide

R13. Mr. Lewis had $360. He spent $\frac{7}{9}$ of it. How much money did he have left?

Answer:_____

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Code	Response
Correct Response	
10	80
Incorrect Response	
70	2/9
71	40
72	120
73	180
75	300
79	Other incorrect
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible, or impossible to interpret.
99	BLANK

Annexe 400. Item T2b des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

T2. Two boxes of square-shaped cardboard pieces are available to make a larger pattern. There are 4 small squares in each piece.

All pieces in Box 1 look like

All pieces in Box 2 look like

In the required pattern, for every piece from Box 2 there are 2 pieces from Box 1.

a) If 60 pieces from Box 2 are used in the required pattern, how many pieces will be needed altogether?

Answer: _____

b) What fraction of the small squares in the required pattern will be black?

Answer: _____

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

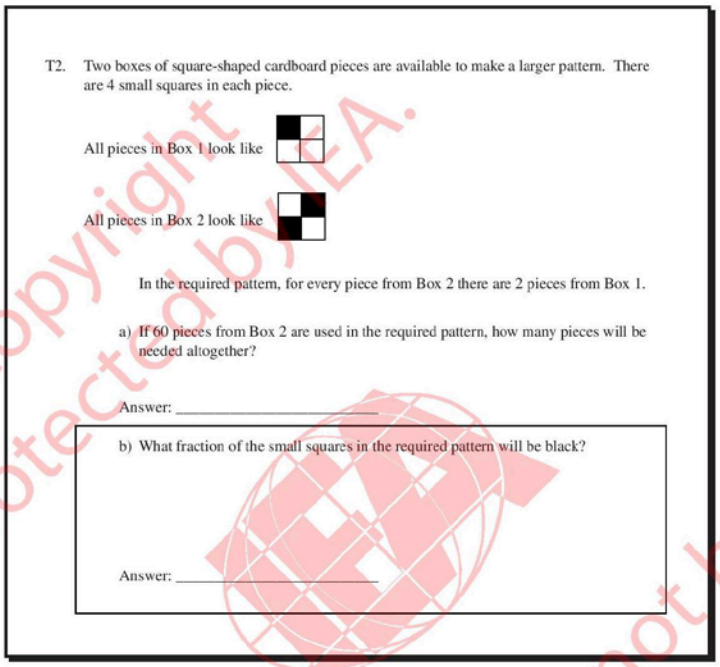
Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

T-2b

Part B

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	next page	Proportionality	Solving Problems	8%	6%	815

T-2b Coding Guide



T2. Two boxes of square-shaped cardboard pieces are available to make a larger pattern. There are 4 small squares in each piece.

All pieces in Box 1 look like

All pieces in Box 2 look like

In the required pattern, for every piece from Box 2 there are 2 pieces from Box 1.

a) If 60 pieces from Box 2 are used in the required pattern, how many pieces will be needed altogether?

Answer: _____

b) What fraction of the small squares in the required pattern will be black?

Answer: _____

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

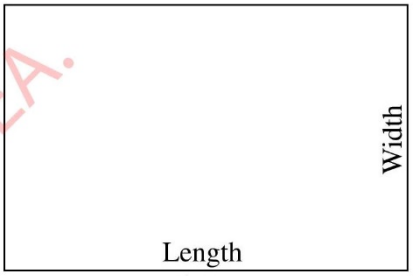
B: Codes for fractions of the squares black

Note: The term "equivalent" in the codes below includes percentages and decimals.

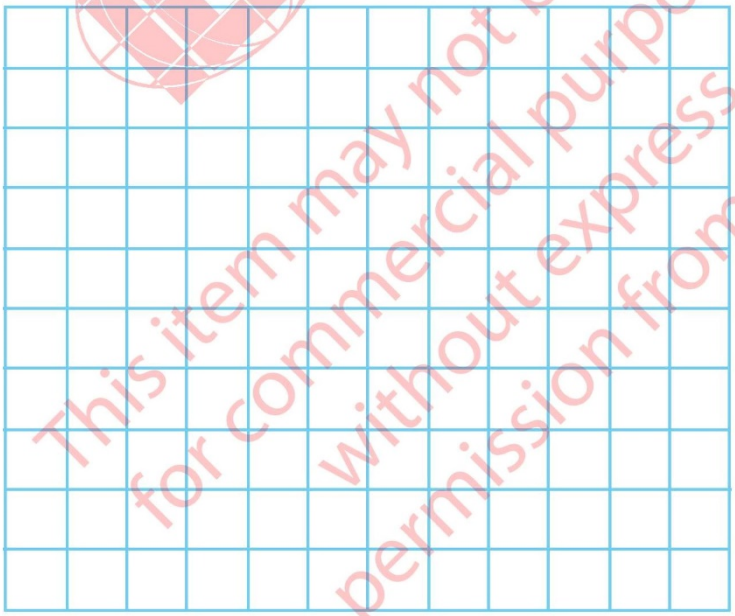
Code	Response
Correct Response	
10	1/3
19	A fraction or percent equivalent to 1/3. *Examples: 60/180 or 33%*
Incorrect Response	
70	1/4 OR both 1/4 and 1/2
71	3/8 or equivalent
72	1/2 or equivalent
73	3/4 or equivalent
74	Any INTEGER
79	Other incorrect.
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible, or impossible to interpret.
99	BLANK

Annexe 401. Item U2b des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

U2.



a. In the space below, draw a new rectangle whose length is one and one half times the length of the rectangle above, and whose width is half the width of the rectangle above. Show the length and width of the new rectangle in centimeters on the figure.



b. What is the ratio of the area of the new rectangle to the area of the first one?

Show your work.

Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

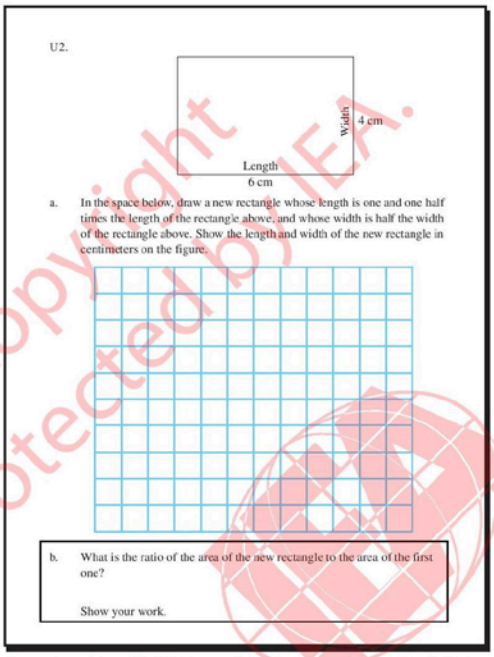
Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

U-2b

Part B

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	next page	Measurement	Solving Problems	10%	6%	737

U-2b Coding Guide



Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

B: Codes for ratio and areas

Code	Response
Correct Response	
20	3:4, 3/4 or equivalent. The areas are 18 cm ^{2} and 24 cm ^{2}. (No work needs to be shown. Also, areas do not need to be mentioned if the ratio is consistent with the areas of the given rectangle and the rectangle the student has drawn in U-2a)
21	The ratio is NOT 3:4 but areas and ratio of part (b) are consistent with response in part (a).
Partial Response	
10	4:3 or equivalent. (Ratio is reversed.) The areas are 18 cm ^{2} and 24 cm ^{2}.
11	An incorrect ratio or no ratio is given. The areas are 18 cm ^{2} and 24 cm ^{2}.
12	The difference between the areas, 6, is given instead of the ratio. The areas are 18 cm ^{2} and 24 cm ^{2}.
13	Areas are NOT 18 cm ^{2} and 24 cm ^{2} but are consistent with response in part a) and an incorrect ratio or no ratio is given.
14	Areas are NOT 24 cm ^{2} and 18 cm ^{2} but are consistent with response in part a) and a difference consistent with those areas is given instead of the ratio.
Incorrect Response	
70	Focuses exclusively on the ratios of lengths and widths between the given rectangle and the new rectangle. No areas are shown.
79	Other incorrect.
Nonresponse	
90	Crossed out/erased, illegible, or impossible to interpret.
99	BLANK

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without the express permission from IEA.

Annexe 402. Item V3 des évaluations TIMSS 1995 de huitième année

V3. To mix a certain color of paint, Alana combines 5 liters of red paint, 2 liters of blue paint, and 2 liters of yellow paint. What is the ratio of red paint to the total amount of paint?

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{5}{9}$

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

V-3

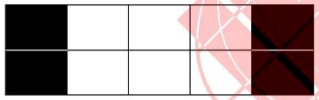
Reproduced from TIMSS Population 2 Item Pool. Copyright © 1994 by IEA, The Hague

Subject	Item Key	Content Category	Performance Expectation	International Average Percent of Students Responding Correctly		International Difficulty Index
				Upper Grade	Lower Grade	
Mathematics	D	Proportionality	Performing Routine Procedures	42%	37%	603

Figure showing equivalent fractions					B09
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Fractions and Number Sense	Using Complex Procedures	A	1	58	Y

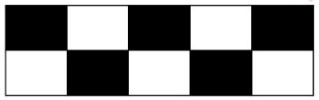
Which picture shows that $\frac{2}{5}$ is equivalent to $\frac{4}{10}$?

A.

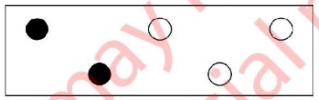


B.

C.



D.



Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Smallest simple fraction					D09
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Fractions and Number Sense	Using Complex Procedures	A	1	62	Y

Which of these fractions is smallest?

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

Copyright protected by IEA
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Likely result of fifth coin toss					F08
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Data Representation, Analysis and Probability	Knowing	C	1	57	Y

If a fair coin is tossed, the probability that it will land heads up is $\frac{1}{2}$. In four successive tosses, a fair coin lands heads up each time. What is likely to happen when the coin is tossed a fifth time?

A. It is more likely to land tails up than heads up.

B. It is more likely to land heads up than tails up.

C. It is equally likely to land heads up or tails up.

D. More information is needed to answer the question.

Copyright protected by IEA
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Find 1/3 of number from relationship					F11
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Algebra	Investigating and Solving Problems	A	1	47	Y

If 4 times a number is 48, what is $\frac{1}{3}$ of the number?

A. 4

B. 8

C. 12

D. 16

Copyright protected by IEA
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Fraction of circle shaded					F12
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Fractions and Number Sense	Knowing	C	1	50	Y

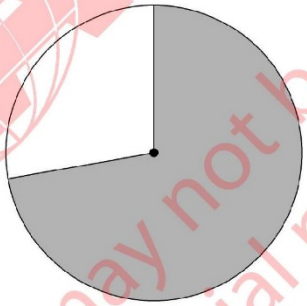
What fraction of the circle is shaded?

A. Between 0 and $\frac{1}{4}$

B. Between $\frac{1}{4}$ and $\frac{1}{2}$

C. Between $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{4}$

D. Between $\frac{3}{4}$ and 1



Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Figure showing fraction of shaded square					H08
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Fractions and Number Sense	Knowing	E	1	68	Y

Which shows $\frac{2}{3}$ of the square shaded?

A. B. C. D. E.

Copyright protected by IEA
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Division of fractions — J12

Content Category	Performance Expectation	Item Key	Score Points	International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly	Used in 1995
Fractions and Number Sense	Using Routine Procedures	Rubric	1	45	N

Divide: $\frac{6}{55} \div \frac{3}{25} =$

Answer: _____

Code	Response	Item: M022026
	Correct Response	
10	10/11	
19	Other fractions or decimals equivalent to 10/11 *(e.g., 30/33, 150/165, .909, .91, etc.)*	
	Incorrect Response	
70	Any fraction with 2 as a numerator [Divides 6 by 3]	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	BLANK	

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Subtraction with three fractions					L18
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Fractions and Number Sense	Using Routine Procedures	B	1	52	N

What is the value of $\frac{4}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{15}$?

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{7}{15}$

D. $\frac{3}{4}$

E. $\frac{4}{5}$

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

List of equivalent fractions — N14

Content Category	Performance Expectation	Item Key	Score Points	International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly	Used in 1995
Fractions and Number Sense	Knowing	B	1	61	N

In which list of fractions are all of the fractions equivalent?

A. $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{6}$

B. $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}$

C. $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{8}{50}$

D. $\frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{6}{8}$

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Number of marbles in bag					N16
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Fractions and Number Sense	Investigating and Solving Problems	B	1	44	N

Penny had a bag of marbles. She gave one-third of them to Rebecca, and then one-fourth of the remaining marbles to John. Penny then had 24 marbles left in the bag. How many marbles were in the bag to start with?

A. 36

B. 48

C. 60

D. 96

Copyright protected by IEA
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Probability of drawing chip					N18
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Data Representation, Analysis and Probability	Investigating and Solving Problems	C	1	48	N

The eleven chips shown below are placed in a bag and mixed.

Chelsea draws one chip from the bag without looking. What is the probability that Chelsea draws a chip with a number that is a multiple of three?

A. $\frac{1}{11}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{4}{11}$

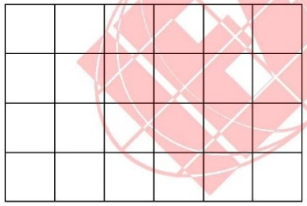
D. $\frac{4}{7}$

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Shade in 3/8 of squares in grid — N19

Content Category	Performance Expectation	Item Key	Score Points	International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly	Used in 1995
Fractions and Number Sense	Knowing	Rubric	1	49	N

Shade in $\frac{3}{8}$ of the unit squares in the grid.



Code	Response — Item: M022132
	Correct Response
10	9 squares are shaded (regardless of which squares)
19	Other correct (e.g., 6 full squares and 6 half squares shaded or other equivalent of nine squares)
	Incorrect Response
70	3 squares shaded
71	8 squares shaded
72	11 or 13 squares shaded
73	3 squares shaded and 8 more squares shaded (areas are shaded separately)
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)
	Nonresponse
99	BLANK

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Ratio of width/perimeter in rectangle					P08
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Measurement	Investigating and Solving Problems	D	1	22	N

The rectangle below is twice as long as it is wide.

What is the ratio of the width of the rectangle to its perimeter?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{6}$

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Fraction of cherries in basket — P15

Content Category	Performance Expectation	Item Key	Score Points	International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly	Used in 1995
Fractions and Number Sense	Investigating and Solving Problems	A	1	45	N

Robin and Jim took cherries from a basket. Robin took $\frac{1}{3}$ of the cherries and Jim took $\frac{1}{6}$ of the cherries. What fraction of the cherries remained in the basket?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{18}$

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Write decimal as fraction

P17

Content Category	Performance Expectation	Item Key	Score Points	International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly	Used in 1995
Fractions and Number Sense	Using Routine Procedures	Rubric	1	36	N

Write 0.48 as a fraction reduced to its lowest terms.

Answer: _____

Code	Response	Item: M022178
	Correct Response	
10	12/25	
	Incorrect Response	
70	48/100 OR 24/50	
71	Any fraction other than 48/100 with 48 as numerator	
72	Any fraction with 48 as denominator	
73	4/8 OR 2/4 OR 1/2	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	BLANK	

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

How much money left if spent 5/8					R14
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Fractions and Number Sense	Investigating and Solving Problems	Rubric	1	30	N

Laura had \$240. She spent $\frac{5}{8}$ of it. How much money did she have left?

Answer: _____

Note: *There is no distinction made between responses with or without units.*

Code	Response	Item: M022219
	Correct Response	
10	90	
	Incorrect Response	
70	150 [money spent]	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	BLANK	

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Number/fraction of 2 types of boxes — T02B

Content Category	Performance Expectation	Item Key	Score Points	International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly	Used in 1995
Fractions and Number Sense	Investigating and Solving Problems	Rubric	1	12	N

A book publisher sent 140 copies of a certain book to a bookstore. The publisher packed the books in two types of boxes. One type of box held 8 copies of the book, and the other type of box held 12 copies of the book. The boxes were all full, and there were equal numbers of both types of boxes.

a) How many boxes holding 12 books were sent to the bookstore?

Answer: _____

b) What fraction of the books sent to the bookstore were packed in the smaller boxes?

Answer: _____

B: Codes for Fraction of Books in Smaller Boxes

Note: The term "equivalent" in the codes below includes decimal fractions and percentages.

Code	Response	Item: M022231b
	Correct Response	
10	2/5	
11	Another fraction or percent equivalent to 2/5 *(e.g., 8/20, 14/35, 28/70, etc.)*	
19	Other correct	
	Incorrect Response	
70	1/2	
71	2/3 OR 8/12 OR 56/84 [fraction of boxes]	
72	Any integer	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	BLANK	

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without explicit permission from IEA.

Ratio of nitrate to total fertilizer					V03
Content Category	**Performance Expectation**	**Item Key**	**Score Points**	**International Average Percentage of 8th Grade Students Responding Correctly**	**Used in 1995**
Fractions and Number Sense	Investigating and Solving Problems	D	1	45	N

In making a garden fertilizer, a gardener mixes 2 kg of a nitrate, 3 kg of a phosphate, and 6 kg of potash. What is the ratio of nitrate to the total amount of fertilizer?

A. $\frac{11}{9}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{9}$

D. $\frac{2}{11}$

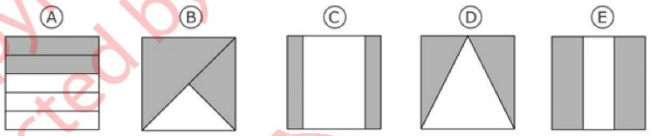
Copyright protected by IEA
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 421. Item M0103 des évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

UniqueID **M012044**	Subject **M**	Grade **4**	MSBlock **M01**	MSBlockSeq **03**

TIMSS 2003

Which shows $\frac{2}{3}$ of the square shaded?



M012044

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Using Concepts

Key
E

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.
Copyright © 2007 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

Annexe 422. Item M0205 des évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

UniqueID **M011016**	Subject **M** Grade **4**	MSBlock **M02**	MSBlockSeq **05**

TIMSS 2003

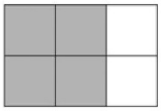
Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Using Concepts

Key
C

In this diagram, 2 out of every 3 squares are shaded.



Which diagram has 3 out of every 4 squares shaded?

Ⓐ

Ⓑ

Ⓒ

Ⓓ

M011016

Copyright © 2007 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 423. Item M0108 des évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

UniqueID **M011020**	Subject **M** Grade **4**	MSBlock **M01**	MSBlockSeq **08**

TIMSS 2003

Which of these means $\frac{7}{10}$?

(A) 70
(B) 7
(C) 0.7
(D) 0.07

M011020

Content Domain: **Number**

Main Topic: **Fractions and decimals**

Cognitive Domain: **Knowing Facts and Procedures**

Key: **C**

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Copyright © 2007 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

Annexe 424. Item M0207 des évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

UniqueID **M012119**	Subject **M**	Grade **4**	MSBlock **M02**	MSBlockSeq **07**

TIMSS 2003

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Solving Routine Problems

Key
D

Janis, Maija, and their mother were eating a cake. Janis ate $\frac{1}{2}$ of the cake. Maija ate $\frac{1}{4}$ of the cake. Their mother ate $\frac{1}{4}$ of the cake.
How much of the cake is left?

Ⓐ $\frac{3}{4}$

Ⓑ $\frac{1}{2}$

Ⓒ $\frac{1}{4}$

Ⓓ None

M012119

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

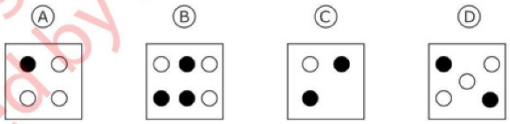
Copyright © 2007 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

Annexe 425. Item M0304 des évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

UniqueID **M011001**	Subject **M** Grade **4**	MSBlock **M03**	MSBlockSeq **04**

TIMSS 2003

In which figure are one-half of the dots black?



M011001

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Using Concepts

Key
B

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.
Copyright © 2007 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

Annexe 426. Item M0403 des évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

UniqueID **M031065**	Subject **M**	Grade **4**	MSBlock **M04**	MSBlockSeq **03**

TIMSS 2003

There are 600 balls in a box, and $\frac{1}{3}$ of the balls are red.

How many red balls are in the box?

Answer: _____ red balls

M031065

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Solving Routine Problems

Key
See scoring guide

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Copyright © 2007 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

UniqueID **M031065**	Subject **M**	Grade **4**	MSBlock **M04**	MSBlockSeq **03**

Code	Response	Item: M031065
	Correct Response	
10	200	
	Incorrect Response	
79	Incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 427. Item M0903 des évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

UniqueID **M031216**	Subject **M** Grade **4**	MSBlock **M09**	MSBlockSeq **03**

TIMSS 2003

A cake was cut into 8 pieces of equal size. John ate 3 pieces of the cake. What fraction of the cake did John eat?

Ⓐ $\frac{1}{8}$

Ⓑ $\frac{3}{8}$

Ⓒ $\frac{3}{5}$

Ⓓ $\frac{8}{3}$

M031216

Content Domain: **Number**

Main Topic: **Fractions and decimals**

Cognitive Domain: **Solving Routine Problems**

Key: **B**

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.
Copyright © 2007 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

Annexe 428. Item M095C des évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

UniqueID **MP31347**	Subject **M** Grade **4**	MSBlock **M09**

Geometry Tiles
Instructions: The next two questions are about geometry tiles.

TIMSS 2003

For this item, you have been given a piece of cardboard with 10 tiles like the ones shown below. Take the piece of cardboard and punch out the 10 tiles.

If you do not have the piece of cardboard raise your hand.

MP31347

Questions for Geometry Tiles begin on the next page.

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

UniqueID **M031347C**	Subject **M** Grade **4**	MSBlock **M09**	MSBlockSeq **05 C**

TIMSS 2003

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Knowing Facts and Procedures

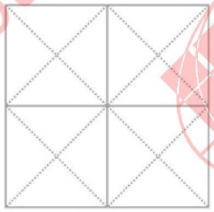
Key
See scoring guide

A. Use 2 of the triangle tiles to make one large black triangle. Then show what you did with your tiles by shading in your triangle below.

Shade in Your Triangle Here

B. Use all 4 triangle tiles to make a black square. Then show what you did with your tiles by shading in your square below.

Shade in Your Square Here



C. What fraction of the figure is shaded in part B above?

Answer: _____

M031347

Questions for Geometry Tiles continue.

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Copyright © 2007 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

UniqueID **M031347C**	Subject **M**	Grade **4**	MSBlock **M09**	MSBlockSeq **05C**

C: Codes for Fraction of Pattern Shaded

Code	Response	Item: M031347C
	Correct Response	
10	$\frac{1}{2}$ or equivalent	
11	Correct fraction based on incorrect figure in part B	
	Incorrect Response	
70	$\frac{1}{4}$	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 429. Item M0906A des évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

UniqueID **M031348A**	Subject **M**	Grade **4**	MSBlock **M09**	MSBlockSeq **06 A**

TIMSS 2003

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Knowing Facts and Procedures

Key
See scoring guide

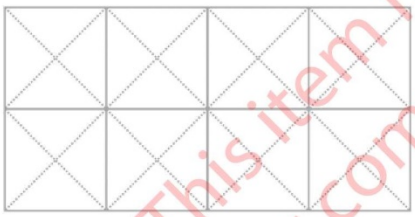
Making Fractions

A. WITHOUT using any triangle tiles, place 4 tiles so that $\frac{1}{2}$ of a square shape is black. Then shade in the square below to show what you did with your tiles.

Shade in Here

B. Place 8 tiles so that $\frac{5}{8}$ of the rectangle shape is black. Then shade in the rectangle below to show what you did with your tiles.

Shade in Here



End of Geometry Tiles section.

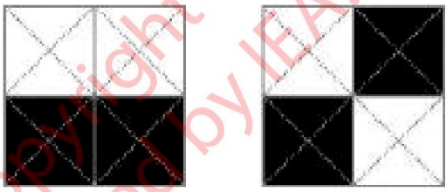
M031348_1

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Copyright © 2007 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

UniqueID **M031348A**	Subject **M**	Grade **4**	MSBlock **M09**	MSBlockSeq **06A**

A: Codes for 4-Tile Pattern without Triangles

Code	Response	Item: M031348A
	Correct Response	
10	Draws a pattern made up of 2 black tiles and two white tiles. See examples below. 	
	Incorrect Response	
70	Shaded $\frac{1}{2}$ of the figure but used triangle tiles	
71	Shaded $\frac{1}{4}$ of the figure	
72	Shaded $\frac{3}{4}$ of the figure	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 430. Item M0906B des évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

UniqueID **M031348B**	Subject **M**	Grade **4**	MSBlock **M09**	MSBlockSeq **06 B**

TIMSS 2003

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Reasoning

Key
See scoring guide

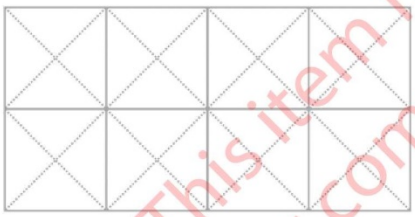
Making Fractions

A. WITHOUT using any triangle tiles, place 4 tiles so that $\frac{1}{2}$ of a square shape is black. Then shade in the square below to show what you did with your tiles.

Shade in Here

B. Place 8 tiles so that $\frac{5}{8}$ of the rectangle shape is black. Then shade in the rectangle below to show what you did with your tiles.

Shade in Here



End of Geometry Tiles section.

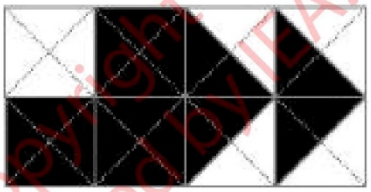
M031348_1

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Copyright © 2007 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

UniqueID **M031348B**	Subject **M**	Grade **4**	MSBlock **M09**	MSBlockSeq **06B**

B: Codes for 8-Tile Pattern

Code	Response	Item: M031348B
	Correct Response	
20	Any figure using 3 black, 1 white, and 4 triangle tiles: 	
	Partially Correct Response	
10	$\frac{5}{8}$ of the figure shaded without using correct tiles	
	Incorrect Response	
70	$\frac{1}{2}$ of the figure shaded	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 431. Item M1006 des évaluations TIMSS 2003 de quatrième année

UniqueID **M031008**	Subject **M**	Grade **4**	MSBlock **M10**	MSBlockSeq **06**

TIMSS 2003

Content Domain
Measurement

Main Topic
Attributes and units

Cognitive Domain
Solving Routine Problems

Key
B

M031008

Simon wants to watch a film that is between $1\frac{1}{2}$ and 2 hours long.

Which of the following films should he choose?

Ⓐ a 59-minute film
Ⓑ a 102-minute film
Ⓒ a 121-minute film
Ⓓ a 150-minute film

Copyright protected by IEA
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.
Copyright © 2007 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

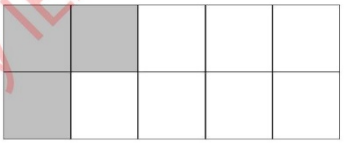
Annexe 432. Item M0101 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M012001**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M01**	MSBlockSeq **01**

TIMSS 2003

In the figure, how many MORE small squares need to be shaded so that $\frac{4}{5}$ of the small squares are shaded?

Ⓐ 5
Ⓑ 4
Ⓒ 3
Ⓓ 2
Ⓔ 1



M012001

Content Domain: **Number**

Main Topic: **Fractions and decimals**

Cognitive Domain: **Using Concepts**

Key: **A**

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 433. Item M0110 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M012040**	Subject **M**	Grade **8**	MSBlock **M01**	MSBlockSeq **10**

TIMSS 2003

If $\frac{12}{n} = \frac{36}{21}$, then n equals

(A) 3
(B) 7
(C) 36
(D) 63

M012040

Content Domain
Algebra

Main Topic
Equations and formulas

Cognitive Domain
Knowing Facts and Procedures

Key
B

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 434. Item M0111 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M012041**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M01**	MSBlockSeq **11**

TIMSS 2003

In a group of children, 16 have birthdays during the first half of the year, and 14 have birthdays during the second half of the year. What fraction of the group have birthdays during the first half of the year?

Ⓐ $\frac{14}{30}$

Ⓑ $\frac{14}{16}$

Ⓒ $\frac{16}{14}$

Ⓓ $\frac{16}{30}$

Ⓔ $\frac{30}{16}$

M012041

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Solving Routine Problems

Key
D

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 435. Item M0113 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M032570**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M01**	MSBlockSeq **13**

TIMSS 2003

At a play, $\frac{3}{25}$ of the people in the audience were children.

What percent of the audience was this?

(A) 12%
(B) 3%
(C) 0.3%
(D) 0.12%

M032570

Content Domain
Number

Main Topic
Ratio, proportions, and percent

Cognitive Domain
Using Concepts

Key
A

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 436. Item M0202 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M012014**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M02**	MSBlockSeq **02**

TIMSS 2003

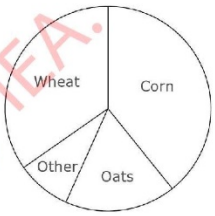
Content Domain
Data

Main Topic
Data interpretation

Cognitive Domain
Using Concepts

Key
D

The graph shows the distribution of crops grown in a certain country.



According to the information in the graph, which of these statements is true?

Ⓐ More oats are grown than wheat.
Ⓑ Corn is more than one-half of the country's crop.
Ⓒ Oats are more than one-third of the country's crop.
Ⓓ The total crop of oats and wheat is greater than the corn crop.

M012014

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 437. Item M0204 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M012016**	Subject **M**	Grade **8**	MSBlock **M02**	MSBlockSeq **04**

TIMSS 2003

In which of these pairs of numbers is 2.25 larger than the first number but smaller than the second number?

(A) 1 and 2

(B) 2 and $\frac{5}{2}$

(C) $\frac{5}{2}$ and $\frac{11}{4}$

(D) $\frac{11}{4}$ and 3

M012016

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Knowing Facts and Procedures

Key
B

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 438. Item M0207 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M022185**	Subject **M**	Grade **8**	MSBlock **M02**	MSBlockSeq **07**

TIMSS 2003

Content Domain
Algebra

Main Topic
Algebraic expressions

Cognitive Domain
Knowing Facts and Procedures

Key
E

Subtract: $\frac{3x}{7} - \frac{x}{7} =$

(A) $\frac{2}{7}$

(B) 3

(C) $2x$

(D) $\frac{x}{7}$

(E) $\frac{2x}{7}$

M022185

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 439. Item M0210 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M022191**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M02**	MSBlockSeq **10**

TIMSS 2003

Two-thirds of the people present at the beginning of a meeting are men. Nobody leaves but 10 more men and 10 more women arrive at the meeting. Which of the following statements is true?

(A) There would then be more men than women at the meeting.

(B) There would then be the same number of men as there are women at the meeting.

(C) There would then be more women than men at the meeting.

(D) From the information given, you cannot tell whether there would be more women or men.

M022191

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Reasoning

Key
A

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 440. Item M0212 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M022196**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M02**	MSBlockSeq **12**

TIMSS 2003

If $L = 4$ when $K = 6$ and $M = 24$, which of the following is true?

Ⓐ $L = \frac{M}{K}$

Ⓑ $L = \frac{K}{M}$

Ⓒ $L = KM$

Ⓓ $L = K + M$

Ⓔ $L = M - K$

M022196

Content Domain
Algebra

Main Topic
Equations and formulas

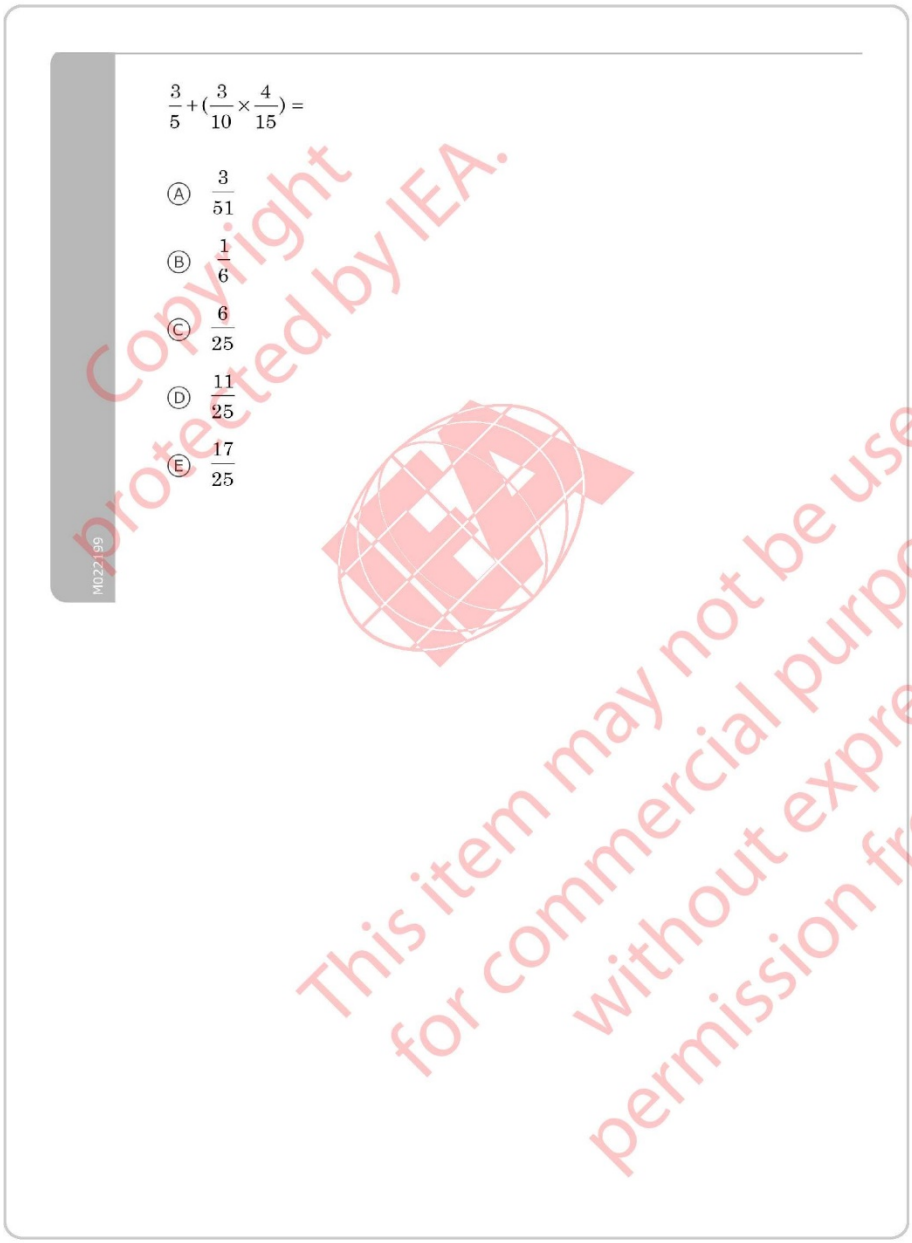
Cognitive Domain
Knowing Facts and Procedures

Key
A

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 441. Item M0214 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M022199**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M02**	MSBlockSeq **14**



TIMSS 2003

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Knowing Facts and Procedures

Key
E

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 442. Item M0303 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M012027**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M03**	MSBlockSeq **03**

TIMSS 2003

What fraction of an hour has passed between 1:10 a.m. and 1:30 a.m.?

Ⓐ $\frac{1}{5}$

Ⓑ $\frac{1}{3}$

Ⓒ $\frac{1}{2}$

Ⓓ $\frac{2}{3}$

Ⓔ $\frac{3}{4}$

M012027

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Solving Routine Problems

Key
B

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 443. Item M0311 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M022146**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M03**	MSBlockSeq **11**

TIMSS 2003

In an eighth-grade class of 30 students, the probability that a student chosen at random will be less than 13 years old is $\frac{1}{5}$. How many students in the class are less than 13 years old?

Ⓐ Two
Ⓑ Three
Ⓒ Four
Ⓓ Five
Ⓔ Six

M022146

Content Domain
Data

Main Topic
Uncertainty and probability

Cognitive Domain
Solving Routine Problems

Key
E

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 444. Item M0312 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M022148**	Subject **M**	Grade **8**	MSBlock **M03**	MSBlockSeq **12**

TIMSS 2003

Kris begins her homework at 6:40. If it takes Kris three-quarters of an hour to do her homework, at what time will she finish?

Answer: _____

M022148

Content Domain
Measurement

Main Topic
Tools, techniques, and formulas

Cognitive Domain
Solving Routine Problems

Key
See scoring guide

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

UniqueID **M022148**	Subject **M**	Grade **8**	MSBlock **M03**	MSBlockSeq **12**

Code	Response	Item: M022148
	Correct Response	
10	7:25	
19	Other response equivalent to 7:25	
	Incorrect Response	
70	7:20	
71	7:30	
72	6:25	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 445. Item M0315 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M022156**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M03**	MSBlockSeq **15**

TIMSS 2003

A scoop holds $\frac{1}{5}$ kg of flour. How many scoops of flour are needed to fill a bag with 6 kg of flour?

Answer: _____

M022156

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Knowing Facts and Procedures

Key
See scoring guide

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

UniqueID **M022156**	Subject **M**	Grade **8**	MSBlock **M03**	MSBlockSeq **15**

Code	Response		Item: M022156
	Correct Response		
10	30		
	Incorrect Response		
70	30 kg	[incorrect unit]	
71	6/5	[6 x 1/5]	
72	4	[4/5 more needed to complete 1 kg]	
73	5	[5 scoops = 1 kg flour]	
74	6	[from stem]	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)		
	Nonresponse		
99	Blank		

Annexe 446. Item M0402 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M022004**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M04**	MSBlockSeq **02**

TIMSS 2003

A teacher and a doctor each have 45 books. If $\frac{4}{5}$ of the teacher's books and $\frac{2}{3}$ of the doctor's books are novels, how many more novels does the teacher have than the doctor?

(A) 2
(B) 3
(C) 6
(D) 30
(E) 36

M022004

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Solving Routine Problems

Key
C

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 447. Item M0406 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M022012**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M04**	MSBlockSeq **06**

TIMSS 2003

Write a fraction that is less than $\frac{4}{9}$.

Answer: _____

M022012

Content Domain
Number

Main Topic
Fractions and decimals

Cognitive Domain
Using Concepts

Key
See scoring guide

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

UniqueID **M022012**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M04** MSBlockSeq **06**

Code	Response	Item: M022012
	Correct Response	
10	A fraction with numerator smaller than 4 and denominator equal to 9, includes 3/9 = 1/3 OR 1/3	
11	A fraction with numerator equal to 4 and denominator greater than 9, includes 4/10 = 2/5 OR 2/5	
12	3/8	
19	Other correct fraction	
	Incorrect Response	
70	5/9	
71	2/3	
72	Any fraction equivalent to 4/9	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 448. Item M0409 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M022252**	Subject **M**	Grade **8**	MSBlock **M04**	MSBlockSeq **09**

TIMSS 2003

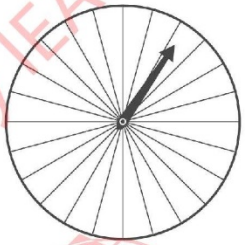
Content Domain: **Data**

Main Topic: **Uncertainty and probability**

Cognitive Domain: **Reasoning**

Key: **B**

The figure below shows a spinner with 24 sectors. When someone spins the arrow, it is equally likely to stop on any sector.



$\frac{1}{8}$ of the sectors are blue, $\frac{1}{24}$ are purple, $\frac{1}{2}$ are orange, and $\frac{1}{3}$ are red. If a person spins the arrow, on which color sector is the spinner LEAST likely to stop?

(A) blue
(B) purple
(C) orange
(D) red

M022252

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 449. Item M0904 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M032044**	Subject **M**	Grade **8**	MSBlock **M09**	MSBlockSeq **04**

TIMSS 2003

Carla paid x zeds for 3 cartons of juice. What is the price in zeds of 1 carton of juice?

Ⓐ $\frac{x}{3}$

Ⓑ $\frac{3}{x}$

Ⓒ $3 + x$

Ⓓ $3x$

M032044

Content Domain
Algebra

Main Topic
Algebraic expressions

Cognitive Domain
Using Concepts

Key
A

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 450. Item M1005 des évaluations TIMSS 2003 de huitième année

UniqueID **M032210**	Subject **M** Grade **8**	MSBlock **M10**	MSBlockSeq **05**

TIMSS 2003

If $\frac{a}{b} = 70$, then $\frac{a}{2b} =$

Ⓐ 35
Ⓑ 68
Ⓒ 72
Ⓓ 140

M032210

Content Domain: **Algebra**

Main Topic: **Equations and formulas**

Cognitive Domain: **Solving Routine Problems**

Key: **A**

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Annexe 451. Item M0204 des évaluations TIMSS 2007 de quatrième année

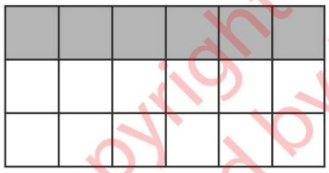
Item ID	M041006	Subject	M	Grade	4	Block	M02	Block Seq	04

TIMSS2007

Mathematics

Fourth Grade

What fraction of this rectangle is shaded?



(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{6}{12}$

(D) $\frac{2}{3}$

M041006

Content Domain
Number

Cognitive Domain
Knowing

Maximum Points
1

Key
B

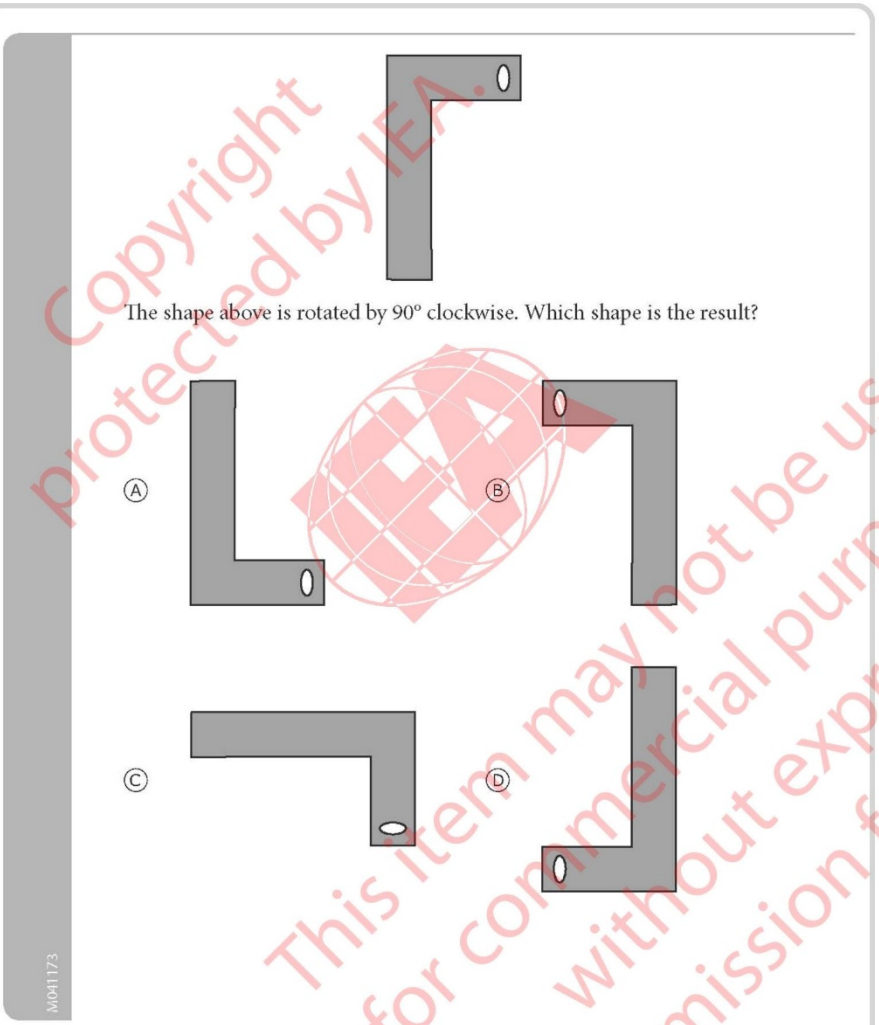
Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Annexe 452. Item M0209 des évaluations TIMSS 2007 de quatrième année

Item ID	M041173	Subject	M	Grade	4	Block	M02	Block Seq	09



Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

TIMSS2007

Mathematics

Fourth Grade

Content Domain
Geometric Shapes and Measures

Cognitive Domain
Knowing

Maximum Points
1

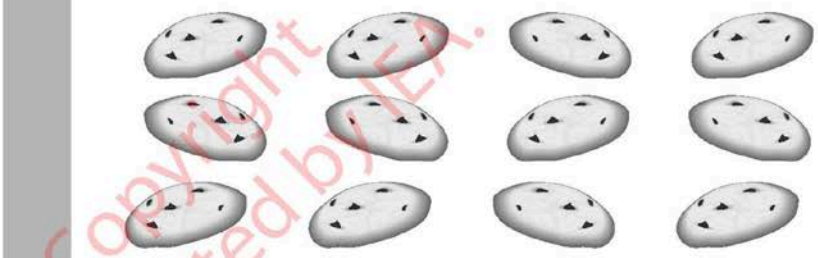
Key
C

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Annexe 453. Item M0402 des évaluations TIMSS 2007 de quatrième année

Item ID	M041056	Subject	M	Grade	4	Block	M04	Block Seq	02



There are 12 cookies. Draw a circle around $\frac{1}{3}$ of the cookies.

M041056

TIMSS2007

Mathematics

Fourth Grade

Content Domain
Number

Cognitive Domain
Knowing

Maximum Points
1

Key
See scoring guide

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

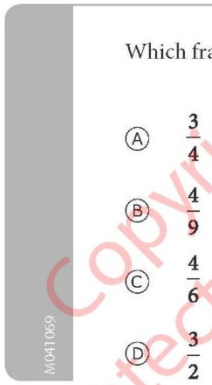
978

Item ID	M041056	Subject	M	Grade	4	Block	M04	Block Seq	02

Code	Response	Item: M041056
	Correct Response	
10	Draws a circle around any 4 cookies or draws separate circles around 4 cookies or draws 3 circles, each circle enclosing 4 cookies	
	Incorrect Response	
70	Draws a circle around 3 cookies	
79	Other incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 454. Item M0403 des évaluations TIMSS 2007 de quatrième année

Item ID	M041069	Subject	M	Grade	4	Block	M04	Block Seq	03



Which fraction is equal to $\frac{2}{3}$?

Ⓐ $\frac{3}{4}$

Ⓑ $\frac{4}{9}$

Ⓒ $\frac{4}{6}$

Ⓓ $\frac{3}{2}$

M041069

TIMSS2007

Mathematics

Fourth Grade

Content Domain

Number

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

C

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Annexe 455. Item M0404 des évaluations TIMSS 2007 de quatrième année

Item ID	M041076	Subject	M	Grade	4	Block	M04	Block Seq	04

Joe spent $\frac{3}{10}$ of his money on a pen and $\frac{5}{10}$ of it on a book.

What fraction of his money did he spend?

Answer: _____

M041076

Copyright protected by IEA

This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA

TIMSS2007

Mathematics

Fourth Grade

Content Domain
Number

Cognitive Domain
Knowing

Maximum Points
1

Key
See scoring guide

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Item ID	M041076	Subject	M	Grade	4	Block	M04	Block Seq	04

Code	Response	Item: M041076
	Correct Response	
10	$\frac{8}{10}$ or equivalent	
	Incorrect Response	
70	$\frac{8}{20}$	
79	Other incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 456. Item M0413 des évaluations TIMSS 2007 de quatrième année

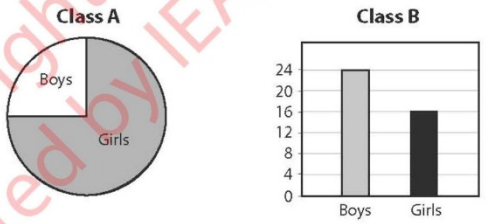
Item ID	M041336	Subject	M	Grade	4	Block	M04	Block Seq	13

TIMSS2007

Mathematics

Fourth Grade

Class A and B each have 40 students.



There are more girls in Class A than in Class B. How many more?

Ⓐ 14
Ⓑ 16
Ⓒ 24
Ⓓ 30

M041336

Content Domain
Data Display

Cognitive Domain
Reasoning

Maximum Points
1

Key
A

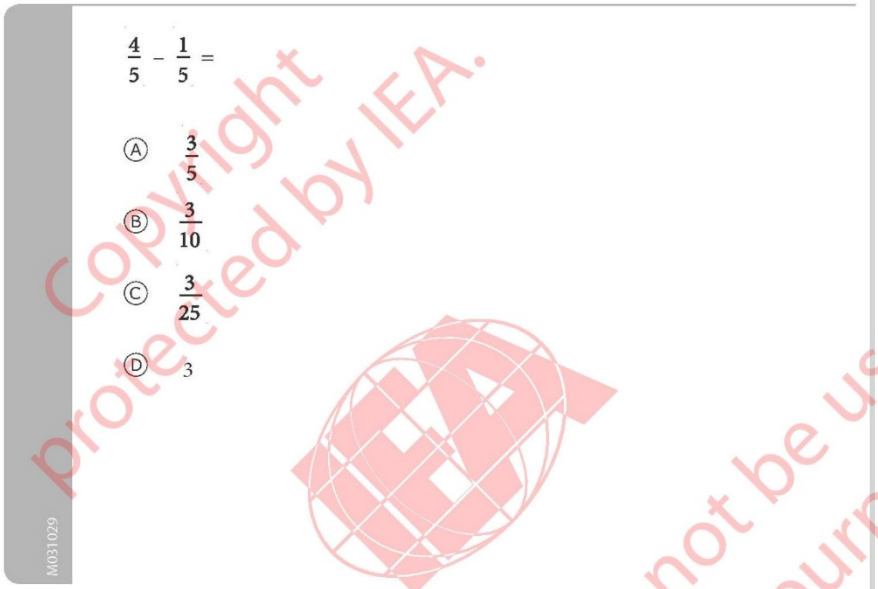
Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Annexe 457. Item M0701 des évaluations TIMSS 2007 de quatrième année

Item ID	M031029	Subject	M	Grade	4	Block	M07	Block Seq	01



TIMSS2007

Mathematics

Fourth Grade

Content Domain
Number

Cognitive Domain
Knowing

Maximum Points
1

Key
A

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

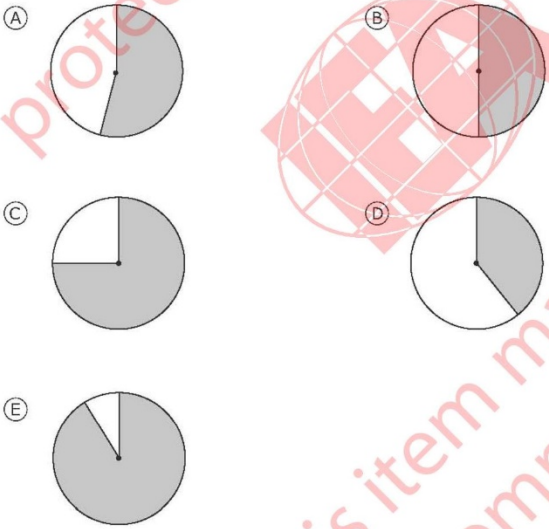
Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Annexe 458. Item M0101 des évaluations TIMSS 2007 de huitième année

Item ID	M022043	Subject	M	Grade	8	Block	M01	Block Seq	01

Which circle has approximately the same fraction of its area shaded as the rectangle above?



M022043

TIMSS2007

Mathematics

Eighth Grade

Content Domain
Number

Cognitive Domain
Knowing

Maximum Points
1

Key
D

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Annexe 459. Item M0107 des évaluations TIMSS 2007 de huitième année

Item ID	M022257	Subject	M	Grade	8	Block	M01	Block Seq	07

TIMSS2007

Mathematics

Eighth Grade

A bowl contains 36 colored beads all of the same size: some blue, some green, some red, and the rest yellow. A bead is drawn from the bowl without looking. The probability that it is blue is $\frac{4}{9}$. How many blue beads are in the bowl?

(A) 4
(B) 8
(C) 16
(D) 18
(E) 20

M022257

Content Domain
Data and Chance

Cognitive Domain
Applying

Maximum Points
1

Key
C

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Annexe 460. Item M0109 des évaluations TIMSS 2007 de huitième année

Item ID	M022066	Subject	M	Grade	8	Block	M01	Block Seq	09

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} =$$

(A) $\frac{16}{17}$

(B) $\frac{41}{40}$

(C) $\frac{81}{40}$

(D) $\frac{111}{40}$

M022066

TIMSS2007

Mathematics

Eighth Grade

Content Domain
Number

Cognitive Domain
Knowing

Maximum Points
1

Key
D

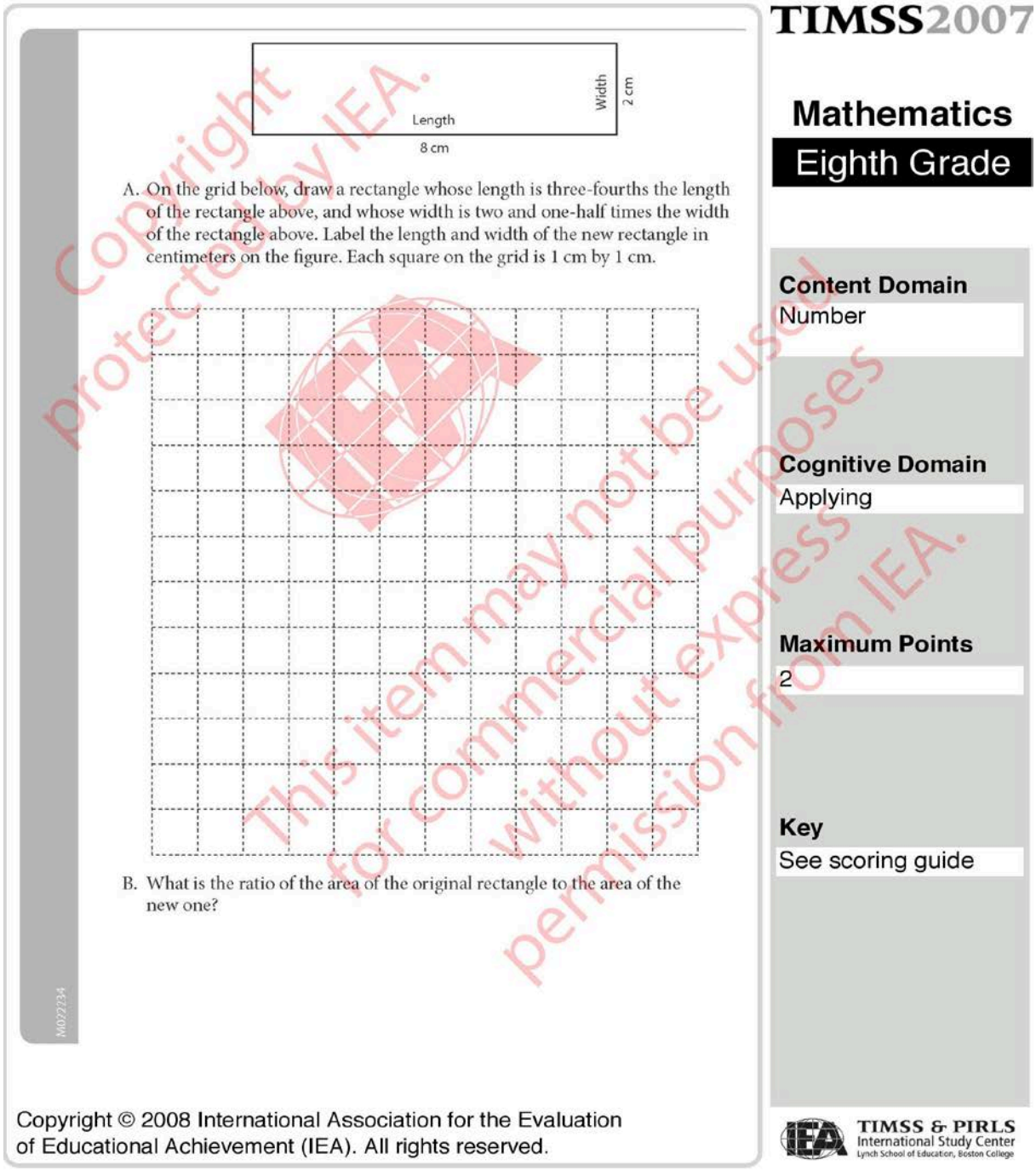
Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Annexe 461. Item M0111 des évaluations TIMSS 2007 de huitième année

Item ID	M022234B	Subject	M	Grade	8	Block	M01	Block Seq	11



Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Item ID	M022234B	Subject	M	Grade	8	Block	M01	Block Seq	11

Note: There is no distinction made between responses with or without units.

Code	Response	Item: M022234B
	Correct Response	
20	8:15, $\frac{8}{15}$ or equivalent (e.g., $\frac{16}{30}$).	
21	The ratio is not 8:15 but the ratio of part b is consistent with response in part a.	
	Partial Response	
10	15:8 or equivalent [ratio of new to original].	
11	Gives ratio of new rectangle to original rectangle. The ratio is not 15:8 but the ratio of part b is consistent.	
19	Other partially correct including correct ratio given but incorrectly reduced (e.g., $\frac{16}{30} = \frac{3}{10}$).	
	Incorrect Response	
70	Focuses exclusively on the ratios of lengths and/or widths between or within the rectangles.	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task). Also includes multiplication of ratio of lengths and widths.	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 462. Item M0303 des évaluations TIMSS 2007 de huitième année

Item ID	M022104	Subject	M	Grade	8	Block	M03	Block Seq	03

TIMSS2007

Mathematics

Eighth Grade

Which of the following numbers is SMALLEST?

Ⓐ $\frac{1}{2}$

Ⓑ $\frac{5}{8}$

Ⓒ $\frac{5}{6}$

Ⓓ $\frac{5}{12}$

M022104

Content Domain

Number

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

D

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Annexe 463. Item M0304 des évaluations TIMSS 2007 de huitième année

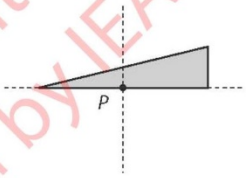
Item ID	M022105	Subject	M	Grade	8	Block	M03	Block Seq	04

TIMSS2007

Mathematics

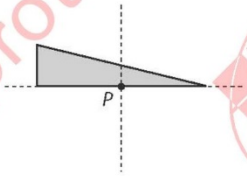
Eighth Grade

A half-turn about point P in the plane is applied to the shaded figure.

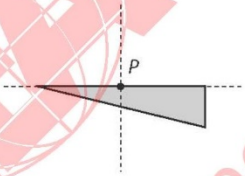


Which of the following shows the results of the half-turn?

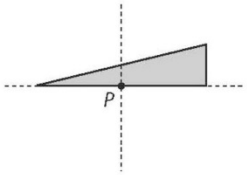
Ⓐ



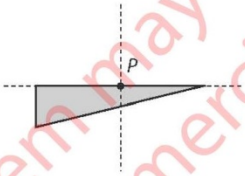
Ⓑ



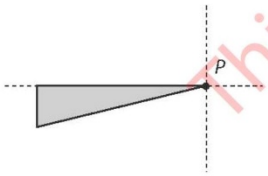
Ⓒ



Ⓓ



Ⓔ



M022105

Content Domain
Geometry

Cognitive Domain
Knowing

Maximum Points
1

Key
D

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA

Annexe 464. Item M0309 des évaluations TIMSS 2007 de huitième année

Item ID	M032307	Subject	M	Grade	8	Block	M03	Block Seq	09

Tickets for a concert cost either 10 zeds, 15 zeds, or 30 zeds.

Of the 900 tickets sold, $\frac{1}{5}$ cost 30 zeds each and $\frac{2}{3}$ cost 15 zeds each.

What FRACTION of the tickets sold for 10 zeds each?

Answer: _____

M032307

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS2007

Mathematics

Eighth Grade

Content Domain
Number

Cognitive Domain
Applying

Maximum Points
1

Key
See scoring guide

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

992

Item ID	M032307	Subject	M	Grade	8	Block	M03	Block Seq	09

Code	Response	Item: M032307
	Correct Response	
10	$\frac{2}{15}$ or equivalent	
	Incorrect Response	
79	Incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 465. Item M0310 des évaluations TIMSS 2007 de huitième année

Item ID	M032523	Subject	M	Grade	8	Block	M03	Block Seq	10

TIMSS2007

Mathematics

Eighth Grade

Dana makes a large batch of cranberry bread that is one and a half times the original recipe. If the original recipe requires $\frac{3}{4}$ cup of sugar, how many cups of sugar are required for the bread Dana is making?

Ⓐ $\frac{3}{8}$

Ⓑ $1\frac{1}{8}$

Ⓒ $1\frac{1}{4}$

Ⓓ $1\frac{3}{8}$

M032523

Content Domain
Number

Cognitive Domain
Applying

Maximum Points
1

Key
B

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Annexe 466. Item M0506 des évaluations TIMSS 2007 de huitième année

Item ID	M032755	Subject	M	Grade	8	Block	M05	Block Seq	06

The total cost of the journey for all the students must be 500 zeds or less.
There are 30 students in the class.

Here are the costs for visiting each town:

Visiting Acton or Camford Student Rate	Visiting Burley or Darley Student Rate
Round-trip ticket: 25 zeds $\frac{1}{3}$ off for groups of 25 or more students	Round-trip ticket: 20 zeds 10% off for groups of 15 or more students

Which towns can they afford to visit? Show your work.

M032755

Questions for Class Trip continue.

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

TIMSS2007

Mathematics

Eighth Grade

Content Domain
Number

Cognitive Domain
Reasoning

Maximum Points
2

Key
See scoring guide

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

Item ID	M032755	Subject	M	Grade	8	Block	M05	Block Seq	06

Code	Response	Item: M032755
	Correct Response	
20	Show costs of 500 zeds for Acton and Camford; 540 zeds for Burley and Darley; Indicates Acton and Camford	
	Partially Correct Response	
10	Shows 500 zeds for Acton and Camford; 540 zeds for Burley and Darley; does not indicate Acton and Camford	
11	Finds correct cost for visiting Acton and Camford (500 zeds) or Burley and Darley (540 zeds) but not both	
	Incorrect Response	
70	Indicates Acton and Camford but no calculations or incorrect calculations shown	
79	Other incorrect (including crossed out/erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 467. Item M0702 des évaluations TIMSS 2007 de huitième année

Item ID	M032416	Subject	M	Grade	8	Block	M07	Block Seq	02

TIMSS2007

Mathematics

Eighth Grade

Which shows a correct procedure for finding $\frac{1}{5} - \frac{1}{3}$?

Ⓐ $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1-1}{5-3}$

Ⓑ $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{5-3}$

Ⓒ $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{5-3}{5\times3}$

Ⓓ $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3-5}{5\times3}$

M032416

Content Domain
Number

Cognitive Domain
Knowing

Maximum Points
1

Key
D

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA

Copyright © 2008 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). All rights reserved.

TIMSS & PIRLS International Study Center
Lynch School of Education, Boston College

1

Annexe 468. Item M0107 des évaluations TIMSS 2011 de quatrième année

ID: M031071	Mathematics Grade 4	Block_Seq: M01_07

Which of the following shows the position of the shape above after a half turn or 180° rotation?

M031071

Content Domain

Geometric Shapes and Measures

Topic Area

Two- and Three-dimensional Shapes

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

B

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 469. Item M0202 des évaluations TIMSS 2011 de quatrième année

ID: M051091	Mathematics Grade 4	Block_Seq: M02_02

M051091

Which fraction is **not** equal to the others?

Ⓐ $\frac{1}{2}$

Ⓑ $\frac{4}{8}$

Ⓒ $\frac{2}{4}$

Ⓓ $\frac{2}{8}$

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

D

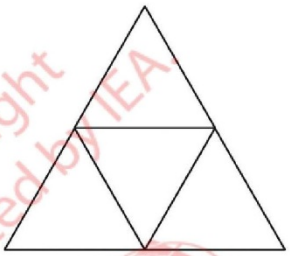
SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 470. Item M0303 des évaluations TIMSS 2011 de quatrième année

ID: M041064	Mathematics Grade 4	Block_Seq: M03_03

M041064

Shade $\frac{1}{2}$ of the large triangle.



Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Applying

Maximum Points

1

Key

See scoring guide

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Code	Response	Item: M041064
	Correct Response	
10	Any 2 small triangles shaded	
11	Half of the triangle shaded in a way other than code 10	
	Incorrect Response	
70	1 triangle shaded	
79	Other incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 471. Item M0306 des évaluations TIMSS 2011 de quatrième année

ID: M041299	Mathematics Grade 4	Block_Seq: M03_06

M041299

Tom ate $\frac{1}{2}$ of a cake, and Jane ate $\frac{1}{4}$ of the cake. How much of the cake did they eat altogether?

Answer: _____

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

See scoring guide

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

ID: M041299	Mathematics Grade 4	Block_Seq: M03_06

M041299

Tom ate $\frac{1}{2}$ of a cake, and Jane ate $\frac{1}{4}$ of the cake. How much of the cake did they eat altogether?

Answer: _____

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

See scoring guide

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 472. Item M0503 des évaluations TIMSS 2011 de quatrième année

Ingredients	
Eggs	4
Flour	8 cups
Milk	$\frac{1}{2}$ cup

The above ingredients are used to make a recipe for 6 people. Sam wants to make this recipe for only 3 people.

Complete the table below to show what Sam needs to make the recipe for 3 people. The number of eggs he needs is shown.

Ingredients	
Eggs	2
Flour	___ cups
Milk	___ cups

M031183

Content Domain

Number

Topic Area

Whole Numbers

Cognitive Domain

Applying

Maximum Points

2

Key

See scoring guide

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Code	Response	Item: M031183
	Correct Response	
20	4 cups of flour and $\frac{1}{4}$ cup of milk	
	Partially Correct Response	
10	Flour correct, milk incorrect	
11	Flour correct, milk omitted	
12	Milk correct, flour incorrect or omitted	
	Incorrect Response	
79	Incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 473. Item M0511 des évaluations TIMSS 2011 de quatrième année

ID: M031159 | Mathematics Grade 4 | Block_Seq: M05_11

A pattern rule says "Rotate the shape $\frac{1}{4}$ turn clockwise each time."

What will the pattern look like?

Ⓐ

Ⓑ

Ⓒ

Ⓓ

M031159

Content Domain

Geometric Shapes and Measures

Topic Area

Two- and Three-dimensional Shapes

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

A

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 474. Item M0605 des évaluations TIMSS 2011 de quatrième année

ID: M041320	Mathematics Grade 4	Block_Seq: M06_05

M041320

Which sentence means Jack ate $\frac{2}{4}$ of a pizza?

Ⓐ Jack ate $\frac{1}{5}$ of the pizza

Ⓑ Jack ate $\frac{1}{4}$ of the pizza

Ⓒ Jack ate $\frac{1}{3}$ of the pizza

Ⓓ Jack ate $\frac{1}{2}$ of the pizza

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

D

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 475. Item M0701 des évaluations TIMSS 2011 de quatrième année

ID: M031210	Mathematics Grade 4	Block_Seq: M07_01

M031210

Which of these fractions is larger than $\frac{1}{2}$?

Ⓐ $\frac{3}{5}$

Ⓑ $\frac{3}{6}$

Ⓒ $\frac{3}{8}$

Ⓓ $\frac{3}{10}$

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

A

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 476. Item M0201 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M052216	Mathematics Grade 8	Block_Seq: M02_01

M052216

Which number is equal to $\frac{3}{5}$?

(A) 0.8
(B) 0.6
(C) 0.53
(D) 0.35

Content Domain
Number

Topic Area
Fractions and Decimals

Cognitive Domain
Knowing

Maximum Points
1

Key
B

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 477. Item M0204 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M052228	Mathematics Grade 8	Block_Seq: M02_04

Which shows a correct method for finding $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$?

Ⓐ $\frac{1-1}{4-3}$

Ⓑ $\frac{1}{4-3}$

Ⓒ $\frac{3-4}{3\times 4}$

Ⓓ $\frac{4-3}{3\times 4}$

M052228

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Applying

Maximum Points

1

Key

D

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 478. Item M0205 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M052214 | Mathematics Grade 8 | Block_Seq: M02_05

M052214

Which of these number sentences is true?

Ⓐ $\frac{3}{10}$ of 50 = 50% of 3

Ⓑ 3% of 50 = 6% of 100

Ⓒ $50 \div 30 = 30 \div 50$

Ⓓ $\frac{3}{10} \times 50 = \frac{5}{10} \times 30$

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

D

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 479. Item M0213 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M052429	Mathematics Grade 8	Block_Seq: M02_13

There are 10 marbles in a bag: 5 red, and 5 blue.

Sue draws a marble from the bag at random. The marble is red.

She puts the marble back into the bag.

What is the probability that the next marble she draws at random is red?

Ⓐ $\frac{1}{2}$

Ⓑ $\frac{4}{10}$

Ⓒ $\frac{1}{5}$

Ⓓ $\frac{1}{10}$

M052429

Content Domain

Data and Chance

Topic Area

Chance

Cognitive Domain

Reasoning

Maximum Points

1

Key

A

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 480. Item M0301 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M042032	Mathematics Grade 8	Block_Seq: M03_01

M042032

Which fraction is equivalent to 0.125?

Ⓐ $\frac{125}{100}$

Ⓑ $\frac{125}{1,000}$

Ⓒ $\frac{125}{10,000}$

Ⓓ $\frac{125}{100,000}$

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

B

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 481. Item M0302 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M042031	Mathematics Grade 8	Block_Seq: M03_02

M042031

The fractions $\frac{4}{14}$ and $\frac{\square}{21}$ are equivalent.

What is the value of $\square$?

Ⓐ 6
Ⓑ 7
Ⓒ 11
Ⓓ 14

Content Domain
Number

Topic Area
Fractions and Decimals

Cognitive Domain
Applying

Maximum Points
1

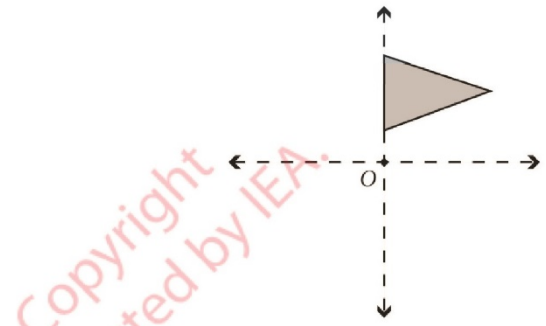
Key
A

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

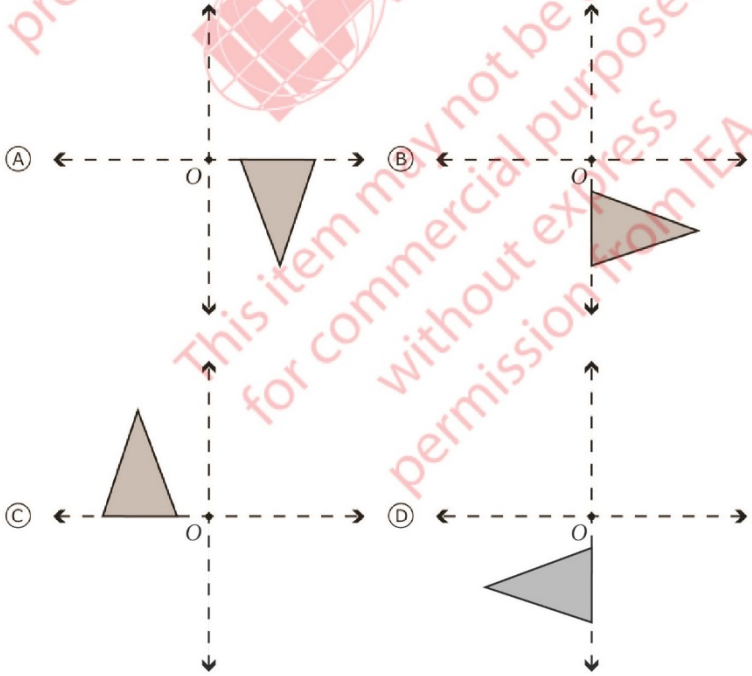
SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 482. Item M0313 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M042152 | Mathematics Grade 8 | Block_Seq: M03_13



Which of these shows the result of a half-turn clockwise around point *O*?



Content Domain

Geometry

Topic Area

Location and Movement

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

D

M042152

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 483. Item M0315 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M042179	Mathematics Grade 8	Block_Seq: M03_15

There are 10 red, 8 blue, and 4 white buttons in a bag. What is the chance of taking out either a blue button or a white button?

Ⓐ $\frac{4}{22}$

Ⓑ $\frac{8}{22}$

Ⓒ $\frac{10}{22}$

Ⓓ $\frac{12}{22}$

M042179

Content Domain

Data and Chance

Topic Area

Chance

Cognitive Domain

Applying

Maximum Points

1

Key

D

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 484. Item M0501 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M032094	Mathematics Grade 8	Block_Seq: M05_01

M032094

$$\frac{4}{100} + \frac{3}{1000} =$$

Ⓐ 0.043
Ⓑ 0.1043
Ⓒ 0.403
Ⓓ 0.43

Content Domain
Number

Topic Area
Fractions and Decimals

Cognitive Domain
Knowing

Maximum Points
1

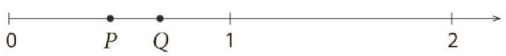
Key
A

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 485. Item M0502 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

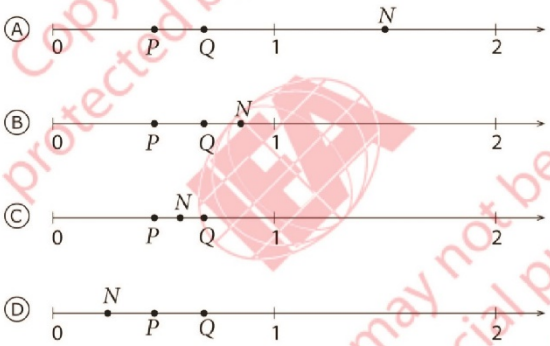
ID: M032662 | Mathematics Grade 8 | Block_Seq: M05_02



P and Q represent two fractions on the number line above.

$P \times Q = N$.

Which of these shows the location of N on the number line?



M032662

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Reasoning

Maximum Points

1

Key

D

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 486. Item M0503 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

1020

ID: M032064	Mathematics Grade 8	Block_Seq: M05_03

M032064

Ann and Jenny divide 560 zeds between them. If Jenny gets $\frac{3}{8}$ of the money, how many zeds will Ann get?

Answer: _____

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Applying

Maximum Points

1

Key

See scoring guide

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Code	Response	Item: M032064
	Correct Response	
10	350	
	Incorrect Response	
70	210	
71	$\frac{5}{8}$	
79	Other incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 487. Item M0512 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M032397 | Mathematics Grade 8 | Block_Seq: M05_12

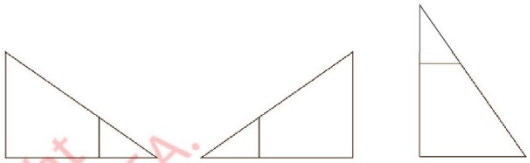


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Which of these transformations, taken in order, can be used so that Figure 1 above becomes Figure 2 and then Figure 3?

Ⓐ reflection and then translation

Ⓑ reflection and then $\frac{1}{4}$ turn rotation clockwise

Ⓒ $\frac{1}{2}$ turn rotation and then translation

Ⓓ $\frac{1}{4}$ turn rotation counterclockwise and then reflection

M032397

Content Domain

Geometry

Topic Area

Location and Movement

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

B

Copyright protected by IEA. This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 488. Item M0601 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M042041 | Mathematics Grade 8 | Block_Seq: M06_01

M042041

A workman cut off $\frac{1}{5}$ of a pipe. The piece he cut off was 3 meters long.

How many meters long was the original pipe?

Ⓐ 8 m
Ⓑ 12 m
Ⓒ 15 m
Ⓓ 18 m

Content Domain
Number

Topic Area
Fractions and Decimals

Cognitive Domain
Applying

Maximum Points
1

Key
C

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Annexe 489. Item M0605 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M042198A	Mathematics Grade 8	Block_Seq: M06_05

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$$

A. What is the next term in this pattern?

Answer: _____

B. What would term number 100 be?

Answer: _____

C. What would term number n be?

Answer: _____

M042198

Content Domain

Algebra

Topic Area

Patterns

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

See scoring guide

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Code	Response	Item: M042198A
	Correct Response	
10	$\frac{6}{7}$	
	Incorrect Response	
79	Incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 490. Item M0702 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

ID: M032725	Mathematics Grade 8	Block_Seq: M07_02

M032725

Write $3\frac{5}{6}$ in decimal form, rounded to 2 decimal places.

Answer: _____

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Content Domain

Number

Topic Area

Fractions and Decimals

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

1

Key

See scoring guide

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Code	Response	Item: M032725
	Correct Response	
10	3.83	
	Incorrect Response	
70	3.56	
79	Other incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	

Annexe 491. Item M0703 des évaluations TIMSS 2011 de huitième année

1028

ID: M032683	Mathematics Grade 8	Block_Seq: M07_03

M032683

Simplify the expression $\frac{3x}{8} + \frac{x}{4} + \frac{x}{2}$. Show your work.

Answer: _____

Copyright protected by IEA.
This item may not be used for commercial purposes without express permission from IEA.

Content Domain

Algebra

Topic Area

Algebraic Expressions

Cognitive Domain

Knowing

Maximum Points

2

Key

See scoring guide

SOURCE: TIMSS 2011 Assessment. Copyright © 2013 International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Publisher: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Code	Response	Item: M032683
	Correct Response	
20	$\frac{9}{8}x$ or $1\frac{1}{8}x$ with work shown	
	Partially Correct Response	
10	$\frac{9}{8}x$ or $1\frac{1}{8}x$ with no work shown	
11	Any two terms combined correctly or three terms with a common denominator	
	Incorrect Response	
70	$\frac{5}{14}x$	
71	Any other expression involving $5x$ or 14	
79	Other incorrect (including crossed out, erased, stray marks, illegible, or off task)	
	Nonresponse	
99	Blank	