

École doctorale : Sciences et Ingénierie des Systèmes, Mathématiques,
Informatique (SISMI)

THÈSE

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Poitiers

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)
(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

Secteur de Recherche : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par

Marion Chommaux

le 22 octobre 2019

Représentations distinguées et conjecture de Prasad et Takloo-Bighash

Directeur de thèse : **Nadir Matringe**
Co-directeur de thèse : **Paul Broussous**

Jury

A. Aubert	Directrice de Recherches CNRS, IMJ-PRG	Examineur
A. Bouaziz	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
P. Broussous	MCF Habilité, Université de Poitiers	Directeur de thèse
P. Harinck	Chargée de Recherche CNRS, Centre de math. Laurent-Schwartz	Examineur
D. Prasad	Professeur, Indian Institute of Technology Bombay	Rapporteur
A. Sarti	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
V. Sécherre	Professeur, Université de Versailles Saint-Quentin	Rapporteur

Remerciements

Cette thèse, à la fois très enrichissante et éprouvante, n'aurait jamais pu voir le jour sans l'aide et le soutien précieux de tous ceux qui m'ont accompagnée durant ces trois ans.

Je tiens d'abord à remercier les membres de mon jury : Anne-Marie Aubert, Abderrazak Bouaziz, Pascale Harinck, Dipendra Prasad, Alessandra Sarti et Vincent Sécherre, qui me font l'honneur d'examiner mon travail de thèse. J'adresse des remerciements tout particuliers à mes deux rapporteurs. Merci Dipendra pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail, pour nos échanges, pour votre bienveillance et pour le soutien que vous m'avez toujours donné. Merci Vincent pour votre relecture attentive et précieuse de mon manuscrit, qui a permis notamment de relever une erreur qui change un peu la tournure finale de certains résultats. Merci aussi pour votre sympathie lors de nos rencontres.

Les remerciements qui suivent sont certainement les plus importants et s'adressent à mes directeurs de thèse. Ces mots ne suffiront pas pour exprimer tout ce que je vous dois.

Merci Nadir d'avoir accepté de me prendre en thèse malgré mon manque de connaissances dans certains domaines. Vous m'avez toujours encouragée, rassurée, avez toujours été disponible pour mes incompréhensions et questions. Vous m'avez aussi poussée à dépasser ma réserve naturelle en m'encourageant à faire certaines conférences ou exposés et j'en ai toujours ressorti quelque chose de positif ! Grâce à vous, j'ai pu découvrir le monde de la recherche, en faire partie très modestement, et j'ai beaucoup apprécié de travailler avec vous.

Merci Paul pour votre disponibilité, votre soutien et votre bienveillance. Je me souviens être ressortie de nos échanges en ayant toujours l'esprit un peu plus clair et en ayant aussi la sensation d'un univers toujours plus vaste et plus intéressant à découvrir. Merci aussi pour toutes vos relectures et pour les subtilités d'anglais que vous m'avez apprises.

Je dois évidemment remercier toutes les personnes qui m'ont permis de travailler sur cette thèse dans de très bonnes conditions. Merci Nathalie (de la bibliothèque), Jocelyne et Myriam pour votre aide à la BU, pour votre flexibilité pour les livres que j'ai rendus en retard... Merci Benoît et Philippe pour le confort informatique dans lequel j'ai pu travailler. Merci Nathalie pour ton aide pour préparer les ordres de mission. Merci Brigitte pour toutes les petites aides du quotidien. Merci Alicia pour la clarté de tes explications lors des démarches administratives.

Je me serais certainement sentie bien seule durant ces trois ans sans les doctorants qui “habitent” ce labo. Je voudrais d’abord remercier mes co-équipières de bureau : Camille, Shuiran et Grâce. Nos petites pauses m’ont permis de me vider la tête, de m’encourager, me rassurer. Sans vous, notre bureau aurait été bien froid, dans tous les sens du terme !

Je n’oublierai pas les moments partagés avec les autres doctorants (il n’y a pas de classement dans les noms qui suivent !) : Carlos, Pietro, Paolo, Meghdad, Angélique, Wafa, Antoine, Paul, Wassim, Abir, Simone, Alice (qui n’est pas doctorante mais tu m’as apporté le même soutien)... Vous savez les projets et les parenthèses que nous avons partagés ; ils ont beaucoup compté pour moi, merci !

J’ai également un petit mot pour les étudiants de L1 que j’ai eus : j’ai apprécié les TD avec vous, ils ont été une coupure bénéfique dans mon travail de thèse.

Mes derniers mots s’adressent à mes amis “de l’extérieur”, ma famille, mes parents, mes deux frères et mon compagnon. Cette thèse s’est déroulée dans des circonstances spéciales et vous m’avez donné le courage d’aller au bout. Je sais que vous êtes à mes côtés, chacun à votre façon.

Table des matières

Introduction	1
1 Le cas de la représentation de Steinberg	7
1.1 Notations	7
1.2 Résultats généraux	8
1.3 μ -distinction de la représentation de Steinberg	9
1.3.1 Le cas d pair	9
1.3.2 Le cas d impair et n pair	17
1.4 Calculs du côté galoisien et vérification de la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash pour la représentation de Steinberg	22
2 Le cas des cuspidales de niveau 0	27
2.1 μ_E -distinction des cuspidales de niveau 0 de $GL(2m, F)$	27
2.1.1 Notations / définitions	27
2.1.2 Quelques rappels sur l'immeuble de $GL(n, F)$	29
2.1.3 Étude de la distinction	33
2.2 Propriétés du paramètre de Langlands et vérification de la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash	41
2.2.1 Caractérisation de la μ -symplecticité	41
2.2.2 Vérification de la conjecture sous hypothèses supplémentaires	42
Bibliographie	49

Introduction

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2, E/F une extension quadratique et D une F -algèbre à division centrale de dimension d^2 . Soit n un entier strictement positif tel que nd soit pair et fixons un F -plongement de E dans $\mathcal{M}_n(D)$. On peut ainsi considérer le centralisateur de E dans $\mathcal{M}_n(D)$, noté $C_{\mathcal{M}_n(D)}(E)$, qui est une E -algèbre centrale simple. On note Nrd_F la norme réduite de $\mathcal{M}_n(D)$ et Nrd_E celle de $C_{\mathcal{M}_n(D)}(E)$.

Posons $G = GL(n, D)$ et le sous-groupe $H = (C_{\mathcal{M}_n(D)}(E))^\times$. Soit δ un élément de $E \setminus F$ tel que δ^2 soit dans F , de sorte que $E = F[\delta]$ et H est le sous-groupe des points fixes de G sous la conjugaison par δ . Ainsi, G/H un espace réductif symétrique. On a une action naturelle de G sur l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(G/H)$ des fonctions complexes lisses sur G/H donnée par :

$$g \cdot f(x) = f(g^{-1}x) \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}^\infty(G/H), \quad g \in G, \quad x \in G/H.$$

Soit π une représentation lisse irréductible de G . On peut se demander si π est équivalente à une sous-représentation de $\mathcal{C}^\infty(G/H)$. Comme $\mathcal{C}^\infty(G/H)$ n'est autre que la représentation induite $\text{Ind}_H^G(1)$, une réciprocity de Frobenius donne

$$\text{Hom}_G(\pi, \mathcal{C}^\infty(G/H)) \simeq \text{Hom}_H(\pi, 1)$$

comme \mathbb{C} -espaces vectoriels, d'où π est équivalente à une sous-représentation de $\mathcal{C}^\infty(G/H)$ si et seulement si $\text{Hom}_H(\pi, 1) \neq \{0\}$; on dit alors que π est H -distinguée. Plus généralement, on pose la définition suivante.

Définition 0.1. Soient (π, V) une représentation lisse irréductible de G et μ un caractère de H . La représentation π est dite μ -**distinguée** par H s'il existe une forme linéaire non nulle L sur V telle que $L(\pi(h).v) = \mu(h)L(v)$ pour tout $h \in H$ et tout $v \in V$, autrement dit, si l'espace des morphismes de H -modules $\text{Hom}_H(\pi, \mu)$ est non trivial. On dira que π est H -distinguée si $\mu = 1$ (ou encore distinguée s'il n'y a pas de confusion possible).

On se propose d'étudier la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash, qui relie la distinction de certaines représentations de $GL(n, D)$ à des propriétés de son paramètre de Langlands. On note W_F (resp. W_E) le groupe de Weil de F (resp. E). Pour μ un caractère de E^* , on pose $\mu_E := \mu \circ \text{Nrd}_E$, qui est un caractère de H . L'énoncé est le suivant :

Conjecture 0.1 ([PTB11], Conjecture 1). *Soit π une représentation irréductible admissible de $G = GL(n, D)$ telle que son image par la correspondance de Jacquet-Langlands soit une représentation générique de $GL(nd, F)$ de caractère central ω_π . Soit μ un caractère de E^\times tel que $\mu^{\frac{nd}{2}}|_{F^\times} = \omega_\pi$. Si la représentation π est μ_E -distinguée par H , alors :*

1. *le paramètre de Langlands de π est à valeurs dans $GS_{nd}(\mathbb{C})$, de facteur de similitude $\mu|_{F^\times}$;*
2. *le facteur epsilon satisfait la relation*

$$\epsilon\left(\frac{1}{2}, \pi \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1})\right) = (-1)^n \omega_{E/F}(-1)^{\frac{nd}{2}} \mu(-1)^{\frac{nd}{2}}$$

où $\omega_{E/F}$ est le caractère quadratique de F^\times de noyau les normes de E^\times .

Si π est membre de la série discrète de G , alors l'implication devient une équivalence.

Remarques 0.1. • *La condition de compatibilité entre μ et ω_π est une condition nécessaire à la distinction de π : on trouve cette relation lorsqu'on regarde la propriété de distinction du caractère central de π .*

- *On a omis le troisième paramètre du facteur epsilon (un caractère additif non trivial de F) car sous les hypothèses de la conjecture, ϵ ne dépend pas du caractère additif considéré.*

Cette conjecture est une généralisation d'un résultat de Tunnell qui est énoncé dans [Tun83] (théorème p. 1277) pour $n = 2$ et $d = 1$ c'est-à-dire pour $G = GL(2, F)$ et $H = E^*$ avec F supposé de caractéristique résiduelle différente de 2. Ce même résultat est prouvé à nouveau par Saito, en incluant la caractéristique résiduelle égale à 2 mais pour F de caractéristique nulle (voir [Sai93], théorème p. 99).

Une version antérieure de la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash a été énoncée dans la section 8 de [Pra99] où $n = 2$ en particulier et où certains cas particuliers sont prouvés. Dans [PTB11], les auteurs prouvent la conjecture actuelle pour $n = 2$ et $D = \mathbb{H}$ la F -algèbre à division des quaternions.

Remarquons que lorsque le caractère μ de E^* est trivial, la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash peut être reformulée de façon plus attrayante et c'est la version de la conjecture qui est considérée dans [FMW18]. Dans cette dernière référence, les auteurs prouvent partiellement la conjecture pour les représentations cuspidales de $GL(n, \mathbb{H})$ sur des corps p -adiques et obtiennent également la première implication pour les représentations cuspidales de $GL(2n)$ sur des corps p -adiques.

Enfin, Xue a vérifié dans [XBP18] la première implication pour les représentations membres de la série discrète sous certaines hypothèses supplémentaires et pour $\mu = 1$.

On se propose de vérifier cette conjecture pour certaines représentations. On commencera par la vérifier pour les représentations de Steinberg.

On s'intéressera ensuite au cas des représentations cuspidales de niveau 0 et on vérifiera à nouveau la conjecture mais dans un cadre plus simple : on se

placera dans le cas où $d=1$ c'est-à-dire que les cuspidales de niveau 0 considérées sont des représentations de $GL(2m, F)$ et le sous-groupe H considéré est simplement $GL(m, E)$, pour m un entier positif non nul. De plus, on se placera en caractéristique résiduelle différente de 2 et on supposera que $\mu(1 + \mathcal{P}_E) = 1$ (où \mathcal{P}_E est l'idéal maximal de l'anneau des entiers de E). Dans ce cadre, la conjecture est vérifiée lorsqu'on ajoute la condition que μ se factorise par la norme de E/F .

Nous allons à présent décrire le contenu de chaque chapitre.

Chapitre 1

Dans ce chapitre, on considère la conjecture pour la représentation de Steinberg dont on rappelle la définition.

Pour χ un caractère de F^* , la représentation de Steinberg $St(n, \chi)$ de $GL(n, D)$ (notée $St(\chi)$ si le contexte est clair) est donnée par

$$St(n, \chi) := Ind_{P_\emptyset}^G(\chi \circ \text{Nrd}_F) / \sum_P Ind_P^G(\chi \circ \text{Nrd}_F)$$

où P_\emptyset désigne le sous-groupe parabolique minimal standard de G , où la somme est indexée par les sous-groupes paraboliques standards P correspondant à une partition de n dont les éléments valent tous 1 sauf un qui vaut 2 et où Ind désigne l'induction parabolique non normalisée.

Les deux résultats principaux de ce chapitre sont les suivants :

Théorème 0.1. *Soit $St(1) = St(n, 1)$ la représentation de Steinberg de G et soit μ un caractère de E^* .*

- *Si d est pair, alors $H = (C_{\mathcal{M}_n(D)}(E))^\times = GL(n, C_D(E))$, où $C_D(E)$ désigne le centralisateur de E dans D , et $St(1)$ est μ_E -distinguée par H si et seulement si*
 - $\mu|_{F^*} = 1$ et $\mu \neq 1$ si n est pair ;
 - $\mu = 1$ si n est impair.
- *Si d est impair et n est pair, $H = (C_{\mathcal{M}_n(D)}(E))^\times = GL(\frac{n}{2}, D \otimes_F E)$ et $St(1)$ est μ_E -distinguée par H si et seulement si $\mu|_{F^*} = 1$ et $\mu \neq 1$.*

Connaître les conditions de distinction permet alors de vérifier la conjecture 0.1.

Théorème 0.2. *(conjecture de Prasad et Takloo-Bighash, cas de la représentation de Steinberg) Considérons la représentation de Steinberg $St(n, 1)$, notée π , qui est une représentation admissible irréductible de $G = GL(n, D)$. Rappelons que π correspond à $St(nd, 1)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands (une représentation de $GL(nd, F)$) dont le caractère central est $\omega_\pi = 1$. Soit μ un caractère de E^\times tel que $\mu^{\frac{nd}{2}}|_{F^\times} = \omega_\pi = 1$. Alors, le caractère μ_E de $H = (C_{\mathcal{M}_n(D)}(E))^\times$ apparaît comme un quotient de π restreint à H si et seulement si :*

1. le paramètre de Langlands de π est à valeurs dans $GSp_{nd}(\mathbb{C})$, de facteur de similitude $\mu|_{F^\times}$;
2. le facteur epsilon satisfait $\epsilon(\frac{1}{2}, \pi \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1})) = (-1)^n \omega_{E/F}(-1)^{\frac{nd}{2}}$.

Bien que ces résultats soient établis pour $St(1)$, on les transpose facilement à $St(\chi)$ pour tout caractère χ de F^* . La conjecture concerne les représentations membres de la série discrète, ce qu'est $St(\chi)$ si et seulement si χ est unitaire. Néanmoins, l'équivalence est vérifiée sans restriction sur χ .

Donnons un aperçu de la démarche utilisée et du contenu du chapitre. Après avoir donné le cadre du problème, on rappelle quelques résultats classiques qui seront particulièrement utiles pour étudier la distinction, notamment une réciprocity de Frobenius et la théorie de Mackey.

Dans la section 1.3, on étudie la distinction de la représentation de Steinberg en différenciant l'étude selon la parité de d . On suit la méthode utilisée par Matringe dans [Mat17], qu'on rappelle maintenant, les principales différences étant d'ordre technique. On commence par déterminer un ensemble de représentants des doubles classes $P \backslash G / H$ pour P un sous-groupe parabolique standard de G . Ces représentants permettent d'utiliser la théorie de Mackey, qui est, avec la réciprocity de Frobenius et le calcul de certains caractères modulaires, un outil essentiel pour établir une condition nécessaire à la distinction de la représentation de Steinberg.

Tout d'abord, on montre que $\text{Hom}_H(\text{Ind}_{P_0}^G(1), \mu_E)$ est de dimension au plus 1 donc il en est de même de $\text{Hom}_H(St(1), \mu_E)$ (ce résultat est déjà connu pour les représentations de G avec le premier théorème de [Guo97] dans le cas déployé avec $\mu = 1$ et pour certaines représentations de $GL(2)$ dans la section 8 de [Pra99]). De plus, cela implique que $\text{Hom}_H(St(1), \mu_E)$ est de dimension 1 si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle μ_E -équivariante sur $\text{Ind}_{P_0}^G(1)$ qui s'annule en chacun des termes de $\sum_{P \text{ de type } (1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)} \text{Ind}_P^G(1)$. En particulier, la condition nécessaire sur μ à la distinction de $St(1)$ vient du fait que $\text{Ind}_{P_0}^G(1)$ doit aussi être μ_E -distinguée dans ce cas. D'autre part, si $\text{Ind}_{P_0}^G(1)$ est μ_E -distinguée, on a une forme linéaire non nulle μ_E -équivariante sur l'espace de la représentation qui est donnée explicitement par une intégrale. Pour obtenir la condition suffisante, on montrera que lorsque μ n'est pas de la bonne forme, cette forme linéaire ne s'annule pas sur $\text{Ind}_P^G(1)$ pour un sous-groupe parabolique standard P de type $(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)$ bien choisi.

Dans la dernière section, on explique comment reformuler la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash pour la représentation de Steinberg (notamment pour obtenir la version de [FMW18] lorsque μ se factorise par la norme $N_{E/F}$) et on effectue les calculs du facteur ϵ afin de la prouver.

Les résultats de ce chapitre font l'objet de l'article [Cho19].

Chapitre 2

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la μ_E -distinction des représentations cuspidales de niveau 0 de $G = GL(n, F)$ par $H = GL(m, E)$ avec $n = 2m$ (cas particulier de la conjecture, ici $\mu_E = \mu \circ \det_{GL(m, E)}$). On désigne par \mathcal{O}_F (resp. \mathcal{O}_E) et \mathcal{P}_F (resp. \mathcal{P}_E) l'anneau des entiers de F (resp. de E) et son idéal maximal. Comme les représentations considérées sont de niveau 0, il est naturel de supposer également que $\mu(1 + \mathcal{P}_E) = 1$. Cette hypothèse supplémentaire permet surtout d'utiliser un lemme de Hakim-Murnaghan rappelé dans le lemme 2.3.

On montre ensuite que ces représentations vérifient la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash sous l'hypothèse additionnelle " μ se factorise par la norme $N_{E/F}$ ".

Donnons un aperçu plus précis du travail effectué dans ce chapitre. On commence par donner le cadre d'étude, on rappelle la définition d'une représentation cuspidale de niveau 0 (de $GL(n, F)$) et on montre comment on peut les construire et les paramétrer à l'aide de paires modérées admissibles (L, χ) où L est une extension non ramifiée de dimension n de F et χ un caractère modéré admissible de L^* . Une représentation ainsi paramétrée par une telle paire (L, χ) sera notée $\pi(\chi)$. Plus précisément, si on note $\mathcal{K} = F^*GL(n, \mathcal{O}_F)$, $\pi(\chi)$ est l'induite compacte d'une certaine représentation λ_χ de \mathcal{K} .

Dans une seconde partie, on fait des rappels généraux sur l'immeuble de Bruhat-Tits de $GL(n, F)$ puisqu'il sera très utile pour l'étude de la distinction d'une représentation $\pi(\chi)$. On s'intéresse également à la réalisation géométrique de cet immeuble par les fonctions-réseaux. C'est cette réalisation géométrique qui est utilisée dans le théorème de Broussous et Lemaire (2.3), permettant d'injecter la réalisation de l'immeuble de $GL(m, E)$ dans celle de l'immeuble de $GL(n, F)$.

Dans la section 2.1.3, on étudie la μ_E -distinction de $\pi(\chi)$. La démarche consiste à réduire le problème au niveau résiduel afin d'étudier la distinction d'une représentation de groupe fini. Tout d'abord, par la formule de restriction de Mackey et une réciprocity de Frobenius, $\pi(\chi)$ est μ_E -distinguée si et seulement si le \mathbb{C} -espace vectoriel $\text{Hom}_{H \cap g\mathcal{K}g^{-1}}({}^g\lambda_\chi, \mu_E)$ est non trivial pour un $g \in H \backslash G / \mathcal{K}$ (${}^g\lambda_\chi = \lambda_\chi(g^{-1} \cdot g)$). On peut identifier G/\mathcal{K} aux sommets de l'immeuble de $GL(n, F)$. Ainsi, par un lemme de Hakim et Murnaghan (voir le lemme 2.3) et un lemme de Broussous et Schneider (lemme 2.1), pour que $\pi(\chi)$ soit μ_E -distinguée, il faut que l'immeuble de $GL(n, F)$ ait des sommets fixes sous l'action de E^* . Ensuite, un théorème de Broussous et Lemaire (théorème 2.3) permet d'exprimer cet ensemble en tant que sommets de l'image de la réalisation géométrique de l'immeuble de $GL(m, E)$. On voit rapidement que cet ensemble est vide lorsque E/F est ramifiée, donc il n'y a pas de distinction dans ce cas.

Dans le cas E/F non ramifiée, on montre qu'on peut se ramener à étudier un problème de distinction d'une représentation de $GL(n, k_F)$ par $GL(m, k_E)$ où k_F (resp. k_E) est le corps résiduel de F (resp. E). On conclut l'étude en utilisant un résultat de Lusztig (rappelé dans le théorème 2.4). Afin de pouvoir l'utiliser, on se restreindra au cas où μ se factorise par la norme $N_{E/F}$.

On obtient le théorème suivant.

Théorème 0.3. *Soit $\pi(\chi)$ une représentation cuspidale de niveau 0 de $GL(n, F)$ paramétrée par une paire modérée admissible (L, χ) . Soit L_0 l'unique extension non ramifiée de F de degré m incluse dans L . Pour μ un caractère de E^* vérifiant $\mu|_{1+\mathcal{P}_E} = 1$ et tel qu'il existe ρ un caractère de F^* tel que $\mu = \rho \circ N_{E/F}$, la représentation $\pi(\chi)$ est $\mu \circ \text{Nrd}_E$ -distinguée par H si et seulement si E/F est non ramifiée et $\chi|_{L_0^*} = \mu \circ N_{L/E}|_{L_0^*}$.*

A nouveau, les résultats de distinction permettent de vérifier la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash mais dans le cadre restreint où “ μ se factorise par la norme $N_{E/F}$ ”. Dans ce cas, la μ_E -distinction est équivalente à la μ -symplecticité et on trouve la “bonne valeur” du facteur ϵ sous l'une de ces deux hypothèses équivalentes.

Le théorème principal de la section 2.2 est le suivant :

Théorème 0.4 (conjecture de P-TB, cas des cuspidales de niveau 0 de $GL(2m, F)$, hypothèses supplémentaires sur μ). *Soit $\pi(\chi)$ une représentation cuspidale de niveau 0 de $GL(2m, F)$, soit μ un caractère de E^* qui vérifie les hypothèses supplémentaires $\mu(1 + \mathcal{P}_E) = 1$ et il existe ρ un caractère de F^* tel que $\mu = \rho \circ N_{E/F}$. Alors $\pi(\chi)$ est μ_E -distinguée par $H = GL(m, E)$ si et seulement si*

1. $\pi(\chi)$ est $\mu|_{F^*}$ -symplectique ;
2. $\epsilon(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1})) = \omega_{E/F}(-1)^m \mu(-1)^m$.

Bilan et perspectives

On peut faire une première remarque sur le cadre utilisé pour l'étude de la distinction et de la conjecture dans le cas des représentations cuspidales de niveau 0 de $GL(2m, F)$. Ce cadre n'est pas complètement satisfaisant dans la mesure où on ne contrôle pas ce qu'il se passe pour la μ -distinction si on enlève la condition “ $\mu(1 + \mathcal{P}_E) = 1$ ”, cette hypothèse ayant été ajoutée pour pouvoir utiliser le lemme de Hakim et Murnaghan 2.3.

De plus, on a vérifié la conjecture dans ce cas seulement lorsque μ se factorise par la norme $N_{E/F}$ et il serait intéressant de savoir si le résultat peut s'étendre au cas où μ est quelconque.

D'autre part, il est naturel de se demander si on ne peut pas étendre les résultats du deuxième chapitre aux représentations cuspidales de niveau 0 de $GL(n, D)$ pour D une F -algèbre à division centrale de dimension d^2 avec nd pair. Lorsque les représentations cuspidales de niveau 0 considérées sont l'image d'une représentation cuspidale de niveau 0 de $GL(nd, F)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands, on pourra utiliser la paramétrisation donnée par Silberger et Zink dans [SZ05] et on pourrait retrouver des situations analogues à celles traitées par Coniglio-Guilloton dans [CG14].

Chapitre 1

Le cas de la représentation de Steinberg

Sommaire

1.1	Notations	7
1.2	Résultats généraux	8
1.3	μ -distinction de la représentation de Steinberg	9
1.3.1	Le cas d pair	9
1.3.2	Le cas d impair et n pair	17
1.4	Calculs du côté galoisien et vérification de la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash pour la représentation de Steinberg	22

1.1 Notations

On rappelle que F désigne un corps local non archimédien qu'on suppose de caractéristique différente de 2, E est une extension quadratique et $N_{E/F}$ désigne la norme de E^* vers F^* . Soit D une F -algèbre à division centrale de dimension d^2 . Pour n un entier strictement positif, $\mathcal{M}_n(D)$ est une F -algèbre simple centrale de dimension n^2d^2 . Comme E/F est quadratique, E peut être vue comme une sous- F -algèbre de $\mathcal{M}_n(D)$ si et seulement si nd est pair, ce que nous supposons. On fixe un plongement $E \subset \mathcal{M}_n(D)$, deux tels plongements étant conjugués dans $GL(n, D)$ par le théorème de Skolem-Noether. On considère alors la E -algèbre centrale simple $\mathcal{C}_{\mathcal{M}_n(D)}(E)$ (le centralisateur de E dans $\mathcal{M}_n(D)$). On pose $G = GL(n, D)$ et $H = \left(\mathcal{C}_{\mathcal{M}_n(D)}(E)\right)^\times$. On note Nrd_F (resp. Nrd_E) la norme réduite de $\mathcal{M}_n(D)$ (resp. $\mathcal{C}_{\mathcal{M}_n(D)}(E)$).

Rappelons la définition de la représentation de Steinberg. Pour χ un caractère de F^* , la représentation de Steinberg $St(n, \chi)$ de $GL(n, D)$ (notée simplement $St(\chi)$ si le contexte est clair) est le quotient :

$$St(n, \chi) := \text{Ind}_{P_0}^G(\chi \circ \text{Nrd}_F) / \sum_P \text{Ind}_P^G(\chi \circ \text{Nrd}_F)$$

où P_\emptyset est le sous-groupe parabolique standard minimal et la somme se fait sur les sous-groupes paraboliques standards P correspondant à une partition de n où chaque élément vaut 1 sauf un qui vaut 2.

Remarque 1.1. *Tout caractère de $GL(n, D)$ peut s'écrire sous la forme $\chi \circ \text{Nrd}_F$ où χ est un caractère de F^* .*

Donnons quelques notations supplémentaires. Si P_\emptyset désigne le sous-groupe parabolique standard minimal (des matrices triangulaires supérieures), M_\emptyset est son sous-groupe de Levi standard et N_\emptyset son radical unipotent. Notons P_\emptyset^- le sous-groupe de G des matrices triangulaires inférieures. On note Φ les racines du centre $Z(M_\emptyset)$ de M_\emptyset opérant sur l'algèbre de Lie, $Lie(G)$; Φ^+ désigne celles correspondant à la restriction de cette action sur $Lie(N_\emptyset)$ et Φ^- celles correspondant à la restriction de cette action sur $Lie(N_\emptyset^-)$. En particulier, $Lie(N_\emptyset^-) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} Lie(N_\alpha)$ où $Lie(N_\alpha)$ est engendrée par la matrice canonique dont tous les coefficients sont nuls excepté celui en position $\{i, j\}$ qui vaut 1 (où on note $\alpha = e_i - e_j$ avec $i \neq j$). Si P est un sous-groupe parabolique de G qui contient P_\emptyset , de facteur de Levi M , on note Φ_M les racines de $Z(M_\emptyset)$ opérant sur $Lie(M)$. On définit Φ_M^+ et Φ_M^- de manière similaire à Φ^+ et Φ^- .

Pour χ un caractère d'un sous-groupe parabolique P , $Ind_P^G(\chi)$ désigne l'induction parabolique non normalisée. On note Δ_X le caractère modulaire d'un groupe topologique localement compact totalement discontinu X i.e. il vérifie $\lambda(xg) = \Delta_X(g)\lambda(x) \forall x, g \in X$, pour λ une mesure de Haar à gauche sur X . On pose enfin $\delta_X := \Delta_X^{-1}$.

Afin de vérifier la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash pour la représentation de Steinberg (conjecture 0.1), on donne dans un premier temps les conditions de distinction en fonction de la parité de d puis on effectue les calculs du côté galoisien dans un second temps. Avant cette étude, on rappelle plusieurs résultats qui seront très utiles par la suite.

1.2 Résultats généraux

On rassemble ici certains résultats généraux utiles pour trouver une condition nécessaire à la distinction de la représentation de Steinberg.

Le premier d'entre eux est la théorie de Mackey, c'est une conséquence du théorème 5.2 de [BZ77]. On le rappelle tel qu'il est formulé dans [Mat17].

Soit X un espace localement compact totalement discontinu et L un groupe localement compact totalement discontinu opérant continûment et proprement sur X . Si χ est un caractère de L , on note $\mathcal{C}_c^\infty(L \backslash X, \chi)$ l'espace des fonctions localement constantes sur X , à support compact mod L et qui se transforment par χ sous la translation à gauche par les éléments de L .

Proposition 1.1. *Soient P un sous-groupe parabolique de G et ρ un caractère de P . Prenons un système de représentants (u_1, \dots, u_r) de $P \backslash G / H$, ordonné de telle façon*

que $X_i = \coprod_{k=1}^i Pu_k H$ soit ouvert dans G pour tout i . Alors, $\text{Ind}_P^G(\rho)$ est filtrée par les sous- H -modules $\mathcal{C}_c^\infty(P \setminus X_i, \rho)$ et

$$\mathcal{C}_c^\infty(P \setminus X_i, \rho) / \mathcal{C}_c^\infty(P \setminus X_{i-1}, \rho) \simeq \mathcal{C}_c^\infty(P \setminus Pu_i H, \rho),$$

comme H -modules.

On aura également besoin d'une réciprocity de Frobenius, c'est une conséquence de la proposition 2.29 de [BZ76].

Proposition 1.2. *Soient K un groupe topologique localement compact totalement discontinu, L un sous-groupe fermé de K , ν un caractère de K et χ un caractère de L . Alors, on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels suivant :*

$$\text{Hom}_K(\text{Ind}_L^K(\chi), \nu) \simeq \text{Hom}_L((\Delta_L / \Delta_K)\chi, \nu).$$

Finalement, on utilisera la proposition 13.4 de [HW93].

Proposition 1.3. *Soient θ une involution F -rationnelle de G et P un sous-groupe parabolique minimal de G . Alors PH est ouvert dans G si et seulement si P est contenu dans un sous-groupe parabolique θ -scindé minimal P' de G (i.e. $\theta(P')$ et P' sont des sous-groupes paraboliques opposés).*

1.3 μ -distinction de la représentation de Steinberg

Soit μ un caractère de E^* . On sépare naturellement l'étude de la $\mu \circ \text{Nrd}_E$ -distinction de la représentation de Steinberg $St(n, 1)$ en deux cas selon la parité de d .

Remarque 1.2. *Il est suffisant d'étudier la $\mu \circ \text{Nrd}_E$ -distinction de $St(n, 1)$ pour connaître les résultats de distinction de $St(n, \chi)$ où χ est un caractère de F^* . En effet, puisque $St(\chi) = \chi \circ \text{Nrd}_F \otimes St(1)$ et $(\text{Nrd}_F)|_H = N_{E/F} \circ \text{Nrd}_E$, $St(\chi)$ est $\mu \circ \text{Nrd}_E$ -distinguée si et seulement si $St(1)$ est $((\chi^{-1} \circ N_{E/F}) \mu) \circ \text{Nrd}_E$ -distinguée.*

1.3.1 Le cas d pair

Préliminaires

Ici, D est une F -algèbre à division centrale de dimension d^2 avec $d = 2d'$ un entier pair strictement positif. Puisque d^2 est pair, E peut être vu comme un sous-corps de D . De plus, comme $\text{car}(F) \neq 2$, il existe δ dans E avec $\delta^2 \in F \setminus F^2$ tel que $E = F[\delta]$.

Puisque E est un sous-corps de D , on peut considérer le centralisateur de E dans D , $C_D(E)$. On vérifie facilement que $C_D(E)$ est une E -algèbre à division. La propriété du double centralisateur dit que $[E : F][C_D(E) : F] = [D : F] = d^2$ et $E = C_D(C_D(E))$ donc $[C_D(E) : F] = d^2/2$ et le centre de $C_D(E)$ est E . En résumé, $D' := C_D(E)$ est une E -algèbre à division centrale de dimension $d^2/4 = d'^2$.

On voit facilement que $C_D(E)$ est l'ensemble des points fixes D^θ de D sous l'involution $\theta = \text{int}(\delta)$. Comme θ est une involution différente de l'identité, -1 est

une valeur propre de θ donc on peut choisir $\iota \in D$ (qui n'est donc pas dans D') tel que $\theta(\iota) = -\iota$, de sorte que $D = D' \oplus \iota D'$. On peut voir facilement que $C_{\mathcal{M}_n(D)}(E) = \mathcal{M}_n(C_D(E)) = \mathcal{M}_n(D')$.

Si on note encore θ l'involution de $GL(n, D)$ donnée par $\text{int}(\delta)$ (où l'on confond δ et δI_n), alors $H = GL(n, D')$ est l'ensemble des points fixes de $G = GL(n, D)$ sous θ : $H = G^\theta$.

Système de représentants de $P \backslash G / H$

Soit P un sous-groupe parabolique standard de $G = GL(n, D)$, correspondant à une partition $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$ de n . On note $I(\bar{n})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients entiers positifs telles que la somme des coefficients de la i -ème ligne soit égale à n_i pour tout i dans $\{1, \dots, r\}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de D^n . Pour $s = (n_{i,j})_{1 \leq i, j \leq r} \in I(\bar{n})$, on pose

$$\mathcal{B}_{i,j} = (e_{(n_1 + \dots + n_{i-1} + n_{i,1} + \dots + n_{i,j-1} + 1)}, \dots, e_{(n_1 + \dots + n_{i-1} + n_{i,1} + \dots + n_{i,j-1} + n_{i,j})}).$$

Soit $u_s \in GL(n, D)$ la matrice dans la base \mathcal{B} de l'endomorphisme de D^n qui envoie le D -espace vectoriel à droite $\text{Vect}(\mathcal{B}_{i,i})_D$ sur lui-même et le D -espace vectoriel à droite $\text{Vect}(\mathcal{B}_{i,j} \cup \mathcal{B}_{j,i})_D$ sur lui-même et telle que u_s restreint à $\text{Vect}(\mathcal{B}_{i,i})_D$ soit $I_{n_{i,i}}$ et u_s restreint à $\text{Vect}(\mathcal{B}_{i,j} \cup \mathcal{B}_{j,i})_D$ soit $\begin{pmatrix} I_{n_{i,j}} & -\iota I_{n_{i,j}} \\ I_{n_{i,j}} & \iota I_{n_{i,j}} \end{pmatrix}$.

Proposition 1.4. *L'ensemble des éléments u_s pour s dans $I(\bar{n})$, comme décrit ci-dessus, est un système de représentants des doubles classes $P \backslash G / H$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du cas impair de [Mat17] et on trouvera plus de détails dans [Mat11] donc on ne donnera qu'une idée générale. En fait, on montre que $\{u_s^{-1}, s \in I(\bar{n})\}$ est un système de représentants de $H \backslash G / P$. On commence par identifier G/P avec les drapeaux $\{0\} \subset V_1 \subset \dots \subset V_r = D^n$ avec $\dim(V_i)_D = n_1 + \dots + n_i$ et on étudie l'action de H sur G/P . Pour $\mathcal{F} = \{0\} \subset V_1 \subset \dots \subset V_r$ un tel drapeau, on pose $S_{i,j}$ un complémentaire de $V_i \cap \theta(V_{j-1}) + V_{i-1} \cap \theta(V_j)$ dans $V_i \cap \theta(V_j)$ pour $i \leq j$, on choisit $S_{i,i}$ θ -stable et on pose $S_{j,i} := \theta(S_{i,j})$. Si on note $n_{i,j} = \dim(S_{i,j})$, on montre qu'une H -orbite est caractérisée par la matrice correspondante $(n_{i,j})_{1 \leq i, j \leq r}$ qui est dans $I(\bar{n})$. Finalement, on peut vérifier que $\{u_s^{-1}, s \in I(\bar{n})\}$ est effectivement un système de représentants de $H \backslash G / P$. \square

Remarque 1.3. *Si on note \mathbb{H} la F -algèbre à division des quaternions (i.e. de dimension 4 sur F), alors E se plonge dans \mathbb{H} , de telle sorte que $C_{\mathbb{H}}(E) = E$. De plus, si on note ι' un élément de $\mathbb{H} \setminus E$ tel que $\mathbb{H} = E \oplus \iota' E$ et $\theta(\iota') = -\iota'$, et u'_s la matrice u_s où ι a été remplacé par ι' , alors l'application $u_s \mapsto u'_s$ pour $s \in I(\bar{n})$ induit une bijection entre $P(D) \backslash GL(n, D) / GL(n, D')$ et $P(\mathbb{H}) \backslash GL(n, \mathbb{H}) / GL(n, E)$.*

Maintenant, pour s dans $I(\bar{n})$, on pose $w_s = u_s \theta(u_s^{-1})$. On peut écrire $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ comme la réunion disjointe ordonnée

$$I = I_{1,1} \cup I_{1,2} \cup \dots \cup I_{1,r} \cup I_{2,1} \cup \dots \cup I_{r,1} \cup \dots \cup I_{r,r-1} \cup I_{r,r},$$

avec $I_{i,j}$ de cardinal $n_{i,j}$. On peut vérifier que w_s est la matrice de permutation de n envoyant $I_{i,i}$ sur lui-même identiquement et $I_{i,j}$ sur $I_{j,i}$ quand $i \neq j$ tel que $w_s(n_{1,1} + \dots + n_{i,j-1} + k) = n_{1,1} + \dots + n_{j,i-1} + k$ pour $k \in \{1, \dots, n_{i,j}\}$.

On pose aussi

$$\begin{aligned} \theta_s : G = GL(n, D) &\rightarrow GL(n, D) \\ x &\mapsto w_s \theta(x) w_s^{-1} \end{aligned}$$

Alors, $u_s H u_s^{-1}$ est le groupe des points fixes de G sous l'involution $\theta_s : u_s H u_s^{-1} =: G^{\theta_s}$.

Maintenant, pour $s \in I(\bar{n})$, on peut considérer le sous-groupe parabolique standard de G correspondant à s et sa décomposition standard notée : $P_s = M_s N_s$. On remarque que s peut être vu comme une sous-partition de (n_1, \dots, n_r) (correspondant au sous-groupe parabolique standard P), ainsi P_s est inclus dans P . On a alors besoin d'étudier $P_s \cap u_s H u_s^{-1}$ et en particulier sa décomposition.

La même démonstration que dans le lemme 3.2 et la proposition 3.2 de [Mat17] montre la proposition suivante :

Proposition 1.5. *Pour $s \in I(\bar{n})$, on a $w_s(\Phi_M^-) \subset \Phi^-$, $w_s(\Phi_M^+) \subset \Phi^+$. De plus, $P \cap u_s H u_s^{-1} = P_s \cap u_s H u_s^{-1}$ et $P_s \cap u_s H u_s^{-1}$ est le produit semi-direct de $M_s \cap u_s H u_s^{-1}$ et $N_s \cap u_s H u_s^{-1}$.*

Explicitons le sous-groupe $M_s^{\theta_s} = M_s \cap u_s H u_s^{-1}$:

$$M_s^{\theta_s} = \{diag(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,r}, a_{2,1}, \dots, a_{r,r}) ; a_{j,i} = \theta(a_{i,j}) \in GL(n_{i,j}, D)\}.$$

Finalement, on a l'égalité de caractères suivante :

Proposition 1.6. $(\delta_{P_s^{\theta_s}})_{|M_s^{\theta_s}} = (\delta_{P_s}^{1/2})_{|M_s^{\theta_s}}$

Démonstration. Comme dit dans la proposition 4.4 de [Mat11], grâce au lemme 1.10 de [KT08], puisque θ_s est défini sur E , il suffit de vérifier l'égalité sur la composante E -scindée $Z_s^{\theta_s}$ (le tore maximal E -scindé dans le centre de M_s) de $M_s^{\theta_s}$. Ici,

$$Z_s^{\theta_s} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \lambda_{1,1} I_{n_{1,1}} & & & \\ & \lambda_{1,2} I_{n_{1,2}} & & (0) \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_{r,r} I_{n_{r,r}} \end{array} \right) ; \lambda_{i,j} = \lambda_{j,i} \in E^* \right\}.$$

Pour $t \in Z_s^{\theta_s}$, $\delta_{P_s}(t) = |\mathrm{Nrd}_F(\mathrm{Ad}(t)|_{\mathrm{Lie}(N_s)})|_F^d = \prod_{\alpha \in \Phi^+ - \Phi_s^+} |\mathrm{Nrd}_F(\alpha(t))|_F^d$.

Maintenant, pour $\alpha \in \Phi$, soit $\mathcal{N}_{\alpha, w_s(\alpha)} = \{x \in \mathrm{Lie}(N_\alpha) + \mathrm{Lie}(N_{w_s(\alpha)}); \theta_s(x) = x\}$; c'est un D' -espace vectoriel à droite de dimension $|\alpha, w_s(\alpha)|$. Alors, pour $t \in Z_s^{\theta_s}$, on a :

$$\begin{aligned} \delta_{P_s^{\theta_s}}(t) &= \prod_{\{\alpha, w_s(\alpha)\} \subset \Phi^+ - \Phi_s^+} |\mathrm{Nrd}_E(\mathrm{Ad}(t)|_{\mathcal{N}_{\alpha, w_s(\alpha)}})|_E^{d/2} \\ &= \prod_{\{\alpha \in \Phi^+ - \Phi_s^+; w_s(\alpha) \in \Phi^+ - \Phi_s^+\}} |\mathrm{Nrd}_E(\alpha(t))|_E^{d/2} \end{aligned}$$

On a de plus (voir la proposition 4.4 de [Mat11]) :

$$\begin{aligned} \prod_{\{\alpha \in \Phi^+ - \Phi_s^+; w_s(\alpha) \notin \Phi^+ - \Phi_s^+\}} |\mathrm{Nrd}_E(\alpha(t))|_E^{d/2} &= \prod_{\{\alpha \in \Phi^+ - \Phi_s^+; w_s(\alpha) \in \Phi^- - \Phi_s^-\}} |\mathrm{Nrd}_E(\alpha(t))|_E^{d/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \delta_{P_s^{\theta_s}}(t) = \prod_{\{\alpha \in \Phi^+ - \Phi_s^+\}} |\mathrm{Nrd}_E(\alpha(t))|_E^{d/2}.$$

Finalement, comme $\alpha(t) \in D'$, on a

$$|\mathrm{Nrd}_F(\alpha(t))|_F^d = |N_{E/F} \circ \mathrm{Nrd}_E(\alpha(t))|_F^d = |\mathrm{Nrd}_E(\alpha(t))|_E^d$$

ce qui donne l'égalité de caractères annoncée. \square

Remarque 1.4. Dans la preuve de la proposition 2.3 de [Cho19] sur lequel s'appuie ce chapitre, les indices des algèbres à division D et D' ont été oubliés dans le calcul, induisant une erreur de puissances sur l'égalité des caractères modulaires mais n'ayant aucune incidence sur la suite de l'étude. On a fait le même oubli dans la preuve de la proposition 3.3 de [Cho19] mais l'égalité annoncée reste correcte.

Etude de la distinction

On rappelle que μ désigne un caractère de E^* . On pose $\mu_E = \mu \circ \mathrm{Nrd}_E$. Dans cette partie, on va étudier si $St(1)$ est μ_E -distinguée par H selon le caractère μ de E^* . On rappelle que $St(1)$ désigne la représentation de Steinberg $\mathrm{Ind}_{P_\emptyset}^G(1) / \sum_P \mathrm{Ind}_P^G(1)$ où P décrit les sous-groupes paraboliques standards de G correspondant à une partition de n de type $(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)$.

On commence par supposer que $St(1)$ est μ_E -distinguée par H et on trouve une condition nécessaire sur μ dans la proposition suivante.

Proposition 1.7. *Supposons que $St(1)$ est μ_E -distinguée par H . Alors, $\mu|_{F^*} = 1$ si n est pair et $\mu = 1$ si n est impair. De plus, seule l'orbite ouverte*

$P_\emptyset u_s H$ où $s = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \cdot & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ supporte une forme linéaire μ_E -équivariante et

$$\dim(\mathrm{Hom}_H(St(1), \mu_E)) = 1.$$

Démonstration. Supposons que $St(1)$ est μ_E -distinguée, alors $\mathrm{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)$ est aussi μ_E -distinguée (une forme linéaire non nulle H -équivariante sur $St(1)$ composée avec la projection donne une forme linéaire non nulle H -équivariante sur $\mathrm{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)$). Soit L une telle forme linéaire; comme le caractère central de $\mathrm{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)$ est le caractère trivial, L vérifie pour $f \in \mathrm{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)$ telle que $L(f) \neq 0$:

$$L(f) = \mu^{d/2}(\lambda)L(f) \quad \forall \lambda \in F^*,$$

ce qui implique que $\mu|_{F^*}$ est unitaire.

Maintenant, $\text{Ind}_{P_0}^G(1)$ est μ_E -distinguée par H si et seulement si $\text{Hom}_H(\text{Ind}_{P_0}^G(1), \mu_E) \neq \{0\}$. Cela implique

$$\begin{aligned} & \exists s \in I(\bar{n}) \text{ tel que } \text{Hom}_{u_s H u_s^{-1}}(\text{Ind}_{P_0^{\theta_s}}^{G^{\theta_s}}(1), \mu_{E,s}) \neq \{0\} \text{ (par la proposition 1.1)} \\ \Leftrightarrow & \exists s \in I(\bar{n}) \text{ tel que } \text{Hom}_{P_0^{\theta_s}} \left(\frac{\Delta_{P_0^{\theta_s}}}{\Delta_{G^{\theta_s}}} \mu_{E,s}^{-1}, 1 \right) \neq \{0\} \text{ (par la proposition 1.2)} \end{aligned}$$

où $\mu_{E,s}(x) = \mu_E(u_s^{-1} x u_s)$ pour x dans $u_s H u_s^{-1}$.

Rappelons que G^{θ_s} est unimodulaire, que $P_0^{\theta_s} = P_{\theta,s}^{\theta_s}$ par la proposition 1.5 et que $(\delta_{P_{\theta,s}^{\theta_s}})_{|M_{\theta,s}^{\theta_s}} = (\delta_{P_{\theta,s}}^{1/2})_{|M_{\theta,s}^{\theta_s}}$ grâce à la proposition 1.6. Ainsi, si $\text{Ind}_{P_0}^G(1)$ est μ_E -distinguée, alors il existe $s \in I(\bar{n})$ tel que $(\delta_{P_{\theta,s}}^{1/2})_{|M_{\theta,s}^{\theta_s}} = (\mu_{E,s}^{-1})_{|M_{\theta,s}^{\theta_s}}$ (notons que $P_{\theta,s} = P_0$).

Supposons maintenant que w_s ait au moins un point fixe, alors si on considère $M = \text{diag}(1, \dots, 1, a, 1, \dots, 1)$ avec $a \in F^*$ sur la i -ème ligne, l'égalité précédente de caractères et le fait que $\mu_E|_{F^*}$ soit unitaire impliquent que $i = \frac{n+1}{2}$ donc que n est impair et que w_s a un seul point fixe.

Ainsi, si n est pair, w_s n'a pas de point fixe. Soit $A \in M_s^{\theta_s}$, A est de la forme $A = \text{diag}(a_{1,w_s(1)}, a_{2,w_s(2)}, \dots, a_{n,w_s(n)})$ avec $a_{w_s(i),i} = \theta(a_{i,w_s(i)})$ dans D^* où w_s est une permutation de n d'ordre 2 sans point fixe. On obtient :

$$\prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mu_{E,s}^{-1}(a_{i,w_s(i)}) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\text{Nrd}_F(a_{i,w_s(i)})|_F^{\frac{(n-2i+1)d}{2}}.$$

Soit i_0 dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Prenons tous les $a_{i,w_s(i)}$ égaux à 1 sauf pour i_0 (donc aussi pour $w_s(i_0)$) et choisissons $a_{i_0,w_s(i_0)}$ tel que $|\text{Nrd}_F(a_{i_0,w_s(i_0)})|_F \neq 1$ (donc $|\text{Nrd}_F(a_{w_s(i_0),i_0})|_F$ est différent de 1 aussi). Si on pose $j_0 = w_s(i_0)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mu_{E,s}^{-1}(a_{i_0,j_0} \theta(a_{i_0,j_0})) &= |\text{Nrd}_F(a_{i_0,j_0})|_F^{\frac{((n-2i_0+1)+(n-2j_0+1))d}{2}} \\ & \text{(car } \text{Nrd}_F(a) = \text{Nrd}_F(\theta(a)) \text{ pour tout } a \in D) \end{aligned}$$

ce qui implique $1 = |\mu_{E,s}^{-1}(a_{i_0,j_0} \theta(a_{i_0,j_0}))| = |\text{Nrd}_F(a_{i_0,j_0})|_F^{\frac{((n-2i_0+1)+(n-2j_0+1))d}{2}}$. Cette

égalité est possible si et seulement si $j_0 = w_s(i_0) = n + 1 - i_0$ i.e. $s = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$,

ce qui implique $\mu_E(u_s^{-1} M_0^{\theta_s} u_s) = 1$.

Prouvons maintenant que $\text{Nrd}_E(u_s^{-1} M_0^{\theta_s} u_s) = F^*$. On montre d'abord que D peut s'injecter dans $\mathcal{M}_2(D')$. $\mathcal{M}_2(D')$ s'identifie à $\text{End}(D)_{D'}$, le D' -espace vectoriel à droite des endomorphismes de D , via la base $(1, \iota)$ du D' -espace vectoriel à droite D . On a de plus

$$\begin{aligned} D \otimes_F E &\xrightarrow{\sim} \text{End}(D)_{D'} \\ a \otimes e &\mapsto (d \mapsto ade) \end{aligned}$$

donc D peut s'injecter dans $\mathcal{M}_2(D')$ via

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathcal{M}_2(D') \\ a &\mapsto a \otimes 1 \in D \otimes_F E \simeq \mathcal{M}_2(D') \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Nrd}_E(f(D^*)) = \text{Nrd}_F(D^*) = F^*$ (un corps de déploiement L pour D est aussi un corps de déploiement pour $D \otimes_F E$ et $(D \otimes_F E) \otimes_E L = D \otimes_F L$). On termine en remarquant que $\text{Nrd}_E(u_s^{-1}M_\emptyset^{\theta_s}u_s) = \text{Nrd}_E(f(D^*))$ (lorsque $n = 2$, $u_s^{-1}M_\emptyset^{\theta_s}u_s = f(D^*)$). Ainsi, $\text{Nrd}_E(u_s^{-1}M_\emptyset^{\theta_s}u_s) = F^*$ et on obtient $\mu_{|F^*} = 1$.

Si n est impair, on obtient $s = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot \cdot & \\ 1 & & \end{pmatrix}$, $\mu_{|F^*} = 1$ et, comme w_s a un point fixe,

on a la condition supplémentaire $\mu_E(D'^*) = 1$. Comme $\text{Nrd}_E(D'^*) = E^*$, on obtient $\mu = 1$.

Pour finir, comme $\theta(u_s^{-1}P_\emptyset u_s) = u_s^{-1}P_\emptyset^- u_s$, alors $u_s^{-1}P_\emptyset u_s H$ est ouvert dans G (grâce à la proposition 1.3) donc $P_\emptyset u_s H$ est aussi ouvert dans G . \square

Remarque 1.5. *Explicitons la dernière phrase de la proposition 1.7. On a une filtration de H -modules :*

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{r-1} \subset V_r = \text{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)$$

avec $V_s = \mathcal{C}_c^\infty(P_\emptyset \backslash \bigsqcup_{i=1}^s P_\emptyset u_i H, 1)$ telle que $\text{Hom}_H(V_{i+1}/V_i, \mathbb{C}) = \{0\}$ pour $i \geq 1$ et $\dim(\text{Hom}_H(V_1, \mathbb{C})) = 1$.

On va maintenant exhiber une forme linéaire non nulle μ_E -équivariante sur $\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)$. Pour ce faire, on suivra la stratégie mise en oeuvre dans les sections 4.2 et 4.3 de [Mat17].

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note δ_z le caractère $(\delta_{P_\emptyset})^z$. Pour $f \in \text{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)$, on note f_z l'unique élément de $\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(\delta_z)$ tel que $f_z|_K = f|_K$ où $K = GL(n, \mathcal{O}_D)$. L'application

$$\begin{aligned} \phi : \text{Ind}_{P_\emptyset}^G(1) &\rightarrow \text{Ind}_{P_\emptyset}^G(\delta_z) \\ f &\mapsto f_z \end{aligned}$$

est un K -isomorphisme. On pose également $s_0 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot \cdot & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in I(\bar{n})$, $u_0 = u_{s_0}$ et

$$\theta_0 = \theta_{s_0}.$$

Proposition 1.8. *Supposons que $\mu_{|F^*} = 1$ si n est pair et $\mu = 1$ si n est impair. Pour f dans $\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)$, l'intégrale $I_{n,z}(f_z) = \int_{u_0^{-1}P_\emptyset u_0 \cap H \backslash H} \mu_E^{-1}(h) f_z(u_0 h) dh$ converge pour $\text{Re}(z)$ suffisamment grand et il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(q_F^{-z}) I_{n,z}(f_z)$ appartienne à $\mathbb{C}[q_F^{\pm z}]$ pour tout f dans $\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)$ (où q_F est le cardinal du corps résiduel de F). De plus, pour z' dans \mathbb{C} , il existe $l_{z'}$ dans \mathbb{N} tel que*

$$L_{z'} = \lim_{z \rightarrow z'} (1 - q_F^{z'-z})^{l_{z'}} I_{n,z}$$

appartienne à $\text{Hom}_H(\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(\delta_{z'}), \mu_E) \setminus \{0\}$.

Démonstration. Cela est dû au principe de Bernstein pour le prolongement méromorphe des formes linéaires équivariantes (voir corollaire 2.12 dans [Mat15] qui est énoncé pour $GL(n, F)$ mais est également valable pour $GL(n, D)$). Tout d'abord, remarquons que

$$P_\emptyset^{\theta_0} = P_\emptyset \cap u_0 H u_0^{-1} = \{diag(a_1, \dots, a_{n/2}, \theta(a_{n/2}), \dots, \theta(a_1)); a_i \in D^*\} \text{ si } n \text{ est pair et}$$

$$P_\emptyset^{\theta_0} = \{diag(a_1, \dots, a_{\frac{n-1}{2}}, b, \theta(a_{\frac{n-1}{2}}), \dots, \theta(a_1)); a_i \in D^*, b \in D'^*\} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Ainsi, comme $\text{Nrd}_F(a) = \text{Nrd}_F(\theta(a))$ pour $a \in D^*$, alors $\delta_z(u_0^{-1} P_\emptyset u_0 \cap H) = 1$ et $\mu_E(u_0^{-1} P_\emptyset u_0 \cap H) = 1$ donc $I_{n,z}(\mathcal{C}_c^\infty(P_\emptyset \backslash P_\emptyset u_0 H, \delta_z))$ est non nul et bien défini pour tout z dans \mathbb{C} . Comme $\mathcal{C}_c^\infty(P_\emptyset \backslash P_\emptyset u_0 H, \delta_z) \subset \text{Ind}_{P_\emptyset}^G(\delta_z)$ (car $P_\emptyset u_0 H$ est ouvert dans G), cela signifie que pour tout z dans \mathbb{C} , il existe \tilde{f}_z dans $\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(\delta_z)$ tel que $I_{n,z}(\tilde{f}_z) \neq 0$.

Pour voir que $I_{n,z}(f_z)$ est absolument convergente pour $Re(z)$ suffisamment grand, on commence par remarquer que $|\mu_E^{-1}| = |\mu^{-1}| \circ \text{Nrd}_E$ peut s'écrire $|\mu_E^{-1}| = |\cdot|_E^\alpha \circ \text{Nrd}_E$ pour un certain nombre complexe α . Comme $|\cdot|_E = |\cdot|_F \circ N_{E/F}$ et puisque $(\text{Nrd}_F)|_H = N_{E/F} \circ N_{rd,E|H}$, alors $|\mu_E^{-1}| = |\cdot|_F^\alpha \circ (\text{Nrd}_F)|_H$ donc $|\mu_E^{-1}|$ peut s'étendre en un caractère de G que l'on note χ . On doit maintenant prouver que $\int_{u_0^{-1} P_\emptyset u_0 \cap H \backslash H} \chi(h) f_z(u_0 h) dh$ est absolument convergente. On peut voir $f_z \mapsto \int_{u_0^{-1} P_\emptyset u_0 \cap H \backslash H} \chi(h) f_z(u_0 h) dh$ comme une fonction de f_z qui appartient à $\chi \otimes \text{Ind}_{P_\emptyset}^G(\delta_z)$. Alors, la convergence absolue vient des théorèmes 2.8 et 2.16 de [BD08].

Finalement, on peut utiliser le principe de Bernstein pour le prolongement méromorphe des formes linéaires équivariantes car l'espace $\text{Hom}_H(\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(\delta_z), \mu_E)$ est de dimension ≤ 1 pour tout q^{-s} . En effet, on le montre de la même manière que le début de la preuve de la proposition 1.7. On suppose que $\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(\delta_z)$ est μ_E -distinguée par H . Cela implique que $\mu_{E|F^*}$ est unitaire (en considérant le caractère central). On applique alors la théorie de Mackey et la réciprocity de Frobenius et on obtient qu'il existe un unique s (c'est s_0) tel que $\text{Hom}_{P_\emptyset^{\theta_s}}(\Delta_{P_\emptyset^{\theta_s}} \delta_z, \mu_{E,s})$ est non trivial. Ainsi, on obtient que $\text{Hom}_{P_\emptyset^{\theta_s}}(\Delta_{P_\emptyset^{\theta_s}} \delta_z, \mu_{E,s})$ est de dimension 1 donc $\text{Hom}_H(\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(\delta_z), \mu_E)$ est aussi de dimension 1. \square

Donnons maintenant les résultats de distinction selon la parité de n :

Théorème 1.1. *St(1) est μ_E -distinguée par H si et seulement si $\mu = 1$ si n est impair, $\mu_{|F^*} = 1$ et $\mu \neq 1$ si n est pair.*

Démonstration. Grâce à la proposition 2.4, il reste à montrer la condition suffisante sur μ . Il y a deux cas à considérer :

- **cas de distinction :** On donne seulement l'idée de la preuve (voir la proposition 3.6 de [Mat17] pour plus de détails). Si n est impair et si $\mu = 1$, alors en prenant $z' = 0$ on obtient que L_0 est une forme linéaire μ_E -équivariante non nulle sur $\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)$ qui est ainsi μ_E -distinguée (*i.e.* H -distinguée ici). Soit L une forme linéaire H -invariante non nulle sur $\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)$. Si $L|_{\text{Ind}_{P_\emptyset}^G(1)} = 0$

pour chaque sous-groupe parabolique standard P correspondant à une partition $\bar{n} = (n_1, \dots, n_t)$ de n où chaque n_i vaut 1 sauf un qui vaut 2, alors $St(1)$ est H -distinguée. Supposons que cette condition n'est pas vérifiée pour un P correspondant à une partition $\bar{n} = (n_1, \dots, n_t)$, alors cela implique que $Ind_P^G(1)$ est H -distinguée, donc il existe $s \in I(\bar{n})$ tel que $(\delta_{P_s}^{1/2})|_{M_s^{\theta_s}} = 1$ (voir la preuve de la proposition 1.7). Il y a seulement deux cas : $P_s = P$ ou $P_s = P_\emptyset$ et on trouve une contradiction dans chaque cas.

Si n est pair, $\mu|_{F^*} = 1$ et $\mu \neq 1$, la démonstration est similaire.

- **cas de non-distinction** : On a d'abord besoin de deux lemmes sur $I_{n,z}$.
On note Φ la fonction constante égale à 1 dans $Ind_{P_\emptyset}^G(1)$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout f dans $Ind_{P_\emptyset}^G(1)$, $f_z = f\Phi_z$. Si $n = 2$, on note Φ_2 à la place de Φ .

Lemme 1.1. *Supposons que $n = 2$, alors à une unité près dans $\mathbb{C}[q^{\pm z}]$:*

$$I_{2,z}(\Phi_{2,z}) = L(2d'z - d', 1_{E^*})L(2d'z, 1_{E^*})/L(2dz, 1_{F^*}),$$

où L est le facteur L de Tate usuel. En particulier, $I_{2,0}(\Phi_2) \neq 0$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 4.5 de [Mat17] avec $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & -\iota \\ 1 & \iota \end{pmatrix}$. On donne uniquement le début et la fin de la preuve. Notons $\nu_F := |\mathrm{Nrd}_F(\cdot)|_F$. Pour $Re(z)$ suffisamment grand, on a :

$$\Phi_{2,z}(g) = \nu_F(g)^{dz} \int_{D^*} \Phi((0, t)g) \nu_F(t)^{2dz} dt / L(2dz, 1_{F^*}).$$

Posons $\epsilon = (\nu_F(h_\iota^{-1})\nu_F(u_0))^{dz}$, notons Φ_0 la fonction caractéristique de $\mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{D'})$ où $\mathcal{O}_{D'}$ désigne l'anneau des entiers de D' , et rappelons que $d' = \frac{d}{2}$ est l'indice de D' sur E . On obtient :

$$\begin{aligned} I_{2,z}(\Phi_{2,z}) &= \epsilon \int_H \Phi_0(h) \nu_F(h)^{dz} dh / L(2dz, 1_{F^*}) \\ &= \epsilon \int_H \Phi_0(h) \nu_E(h)^{2d'z} dh / L(2dz, 1_{F^*}) \\ &= \epsilon L(2d'z - \frac{1}{2}(2d' - 1), 1_H) / L(2dz, 1_{F^*}) \\ &\quad \text{par définition des fonctions } Z \text{ et } L \\ &= \epsilon L(2d'z - \frac{1}{2}(3d' - 1), 1_{D'^*}) L(2d'z - \frac{1}{2}(d' - 1), 1_{D'^*}) / L(2dz, 1_{F^*}) \\ &\quad \text{par la relation d'induction du facteur } L \text{ de Godement-Jacquet} \\ &= \epsilon L(2d'z - d', 1_{E^*}) L(2d'z, 1_{E^*}) / L(2dz, 1_{F^*}) \end{aligned}$$

Si $z = 0$, $L(2d'z, 1_{E^*})$ et $L(2dz, 1_{F^*})$ ont un pôle simple et $L(2d'z - d', 1_{E^*})$ n'a pas de pôle donc $I_{2,0}(\Phi_2) \neq 0$. \square

On rappelle la proposition 4.6 de [Mat17] :

Lemme 1.2. *Supposons que $\mu = 1$. Pour $n = 2m$, soit P le sous-groupe parabolique standard de G correspondant à la partition $\bar{n} = (1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)$ avec $n_m = 2$. Alors, il existe f dans $Ind_P^G(1)$ tel que $I_{n,z}(f\Phi_z) = I_{2,z}(\Phi_{2,z})$. En particulier, si on prend $z = 0$, on obtient $I_{n,0}(f) = I_{2,0}(\Phi_2) \neq 0$.*

Démonstration. La démonstration est exactement la même que dans la proposition 4.6 de [Mat17] avec D à la place de D_E , $C_D(E)$ à la place de D et $H = GL(n, C_D(E))$. \square

On peut alors terminer la démonstration :

Fin de la démonstration (cas de non-distinction) : Supposons que $\mu = 1$ et $St(1)$ est μ_E -distinguée (*i.e.* H -distinguée). Alors $Ind_{P_0}^G(1)$ est H -distinguée, donc il existe une forme linéaire non nulle H -invariante L sur $Ind_{P_0}^G(1)$. Comme $\dim(\text{Hom}_H(Ind_{P_0}^G(1), 1)) = 1$ (grâce à la proposition 1.7), alors L est égale à L_0 à un scalaire non nul près. Comme $St(1)$ est distinguée, $L|_{Ind_P^G(1)}$ doit être nulle pour tout sous-groupe parabolique standard P de type $(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)$. De plus, comme dit dans la proposition 1.7, L_0 restreint à $\mathcal{C}_c^\infty(P_\emptyset \backslash P_\emptyset u_0 H, 1) \subset Ind_{P_\emptyset}^G(1)$ est non nul. Comme $I_{n,0}(\mathcal{C}_c^\infty(P_\emptyset \backslash P_\emptyset u_0 H, 1))$ est non nul (et bien défini), on déduit que $L_0 = I_{n,0}$. Considérons maintenant f et P comme dans le lemme 1.2. On obtient alors $L_0(f) = I_{n,0}(f) \neq 0$, ce qui contredit la distinction de $St(1)$. \square

1.3.2 Le cas d impair et n pair

Préliminaires

On pose $n = 2m$ et on suppose que d (l'indice de D sur son centre F) est impair. Considérons $D \otimes_F E$: c'est une E -algèbre à division centrale de dimension d^2 (on peut le voir grâce au théorème de structure de Wedderburn et en utilisant l'invariant de Hasse). On plonge D dans $D \otimes_F E$ par $d \mapsto d \otimes 1$; on peut choisir $\delta \in (D \otimes_F E) \setminus D$ tel que $\Delta := \delta^2 \in F$ (par exemple, $\delta = 1 \otimes x$ avec x dans $E \setminus F$ tel que x^2 soit dans F). $D \otimes_F E$ est de dimension 2 sur D donc on peut écrire $D \otimes_F E$ comme $D \oplus \delta D$ et $D \otimes_F E$ s'identifie à un D -espace vectoriel à droite de dimension 2.

Si (e_1, \dots, e_m) désigne la base canonique de $(D \otimes_F E)^m$, alors $(D \otimes_F E)^m$ s'identifie à D^{2m} en tant que D -espaces vectoriels à droite via la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m, \delta e_m, \dots, \delta e_1)$ de D^{2m} donc $\text{End}((D \otimes_F E)^m)_D \simeq \text{End}(D^{2m})_D$. De plus, si $u \in \text{End}((D \otimes_F E)^m)_D$, on vérifie facilement que u est $D \otimes_F E$ -linéaire à droite si et seulement si u commute avec la multiplication par δ (notée μ_δ). Dans la base \mathcal{B} , la matrice de l'endomorphisme μ_δ est donnée par

$$\begin{pmatrix} & & & & \Delta \\ & & & \ddots & \\ & & \Delta & & \\ & & 1 & & \\ \ddots & & & & \\ 1 & \ddots & & & \end{pmatrix} =: U_{\Delta_{2m}}$$

et ainsi, $\mathcal{M}_m(D \otimes_F E)$ peut être vu comme les points fixes de l'involution $int_{U_{\Delta_{2m}}}$ de $\mathcal{M}_{2m}(D)$ (où $int_{U_{\Delta_{2m}}}(x) = U_{\Delta_{2m}} x U_{\Delta_{2m}}^{-1}$).

Enfin, E s'injecte dans $\mathcal{M}_{2m}(D)$ via

$$x \in E \mapsto \begin{pmatrix} 1 \otimes x & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \otimes x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(D \otimes_F E) \subset \mathcal{M}_{2m}(D)$$

et on voit facilement que $g \in C_{\mathcal{M}_{2m}(D)}(E)$ si et seulement si g commute avec $U_{\Delta_{2m}}$ i.e. si et seulement si $g \in \mathcal{M}_m(D \otimes_F E)$. Ainsi, $C_{\mathcal{M}_{2m}(D)}(E) = \mathcal{M}_m(D \otimes_F E)$ et on a $G = GL(2m, D)$, $H = GL(m, D \otimes_F E) = G^\theta$ avec $\theta = \text{int}_{U_{\Delta_{2m}}}$. Rappelons que Nrd_F désigne la norme réduite sur $\mathcal{M}_n(D)$ et que Nrd_E désigne la norme réduite sur $\mathcal{M}_m(D \otimes_F E)$.

Système de représentants de $P \backslash G / H$

Soit P un sous-groupe parabolique standard de $G = GL(2m, D)$ correspondant à une partition $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$ de $n = 2m$. On note $I(\bar{n})$ l'ensemble des matrices symétriques $s = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{N})$ à coefficients entiers positifs, pairs sur la diagonale, et tels que la somme des coefficients de la i -ème ligne est égale à n_i pour tout i dans $\{1, \dots, r\}$.

Puisque chaque $n_{i,i}$ est pair pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on peut poser $n_{i,i} = 2m_{i,i}$ et on peut écrire n comme une somme ordonnée d'entiers de deux manières :

$$\begin{aligned} n = & m_{1,1} + n_{1,2} + \dots + n_{1,r} + m_{2,2} + n_{2,3} + \dots + n_{2,r} + m_{3,3} + \dots + m_{r-1,r-1} + n_{r-1,r} + m_{r,r} \\ & + m_{r,r} + n_{r,r-1} + m_{r-1,r-1} + \dots + m_{3,3} + n_{r,2} + \dots + n_{3,2} + m_{2,2} + n_{r,1} + \dots + n_{2,1} + m_{1,1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

(1^{er} ordre)

$$n = n_{1,1} + \dots + n_{1,r} + n_{2,1} + \dots + n_{2,r} + \dots + n_{r,1} + \dots + n_{r,r} \quad (1.2)$$

(2^{ème} ordre correspondant à l'ordre lexicographique)

On note w_s la matrice de la permutation (encore notée w_s) définie de la manière suivante.

Si $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, alors pour $k \in \llbracket 1, m_{i,i} \rrbracket$, on pose

$$w_s(m_{1,1} + \dots + m_{i-1,i-1} + n_{i-1,i} + \dots + n_{i-1,r} + k) = n_{1,1} + \dots + n_{i-1,1} + \dots + n_{i,i-1} + k,$$

et

$$w_s(m_{1,1} + \dots + m_{i+1,i+1} + n_{r,i} + \dots + n_{i+1,i} + k) = n_{1,1} + \dots + n_{i-1,1} + \dots + n_{i,i-1} + k + m_{i,i}.$$

Si $i < j$, pour $k \in \llbracket 1, n_{i,j} \rrbracket$, on pose

$$\begin{aligned} & w_s(m_{1,1} + \dots + m_{i,i} + n_{i,i+1} + \dots + n_{i,j-1} + k) \\ & = n_{1,1} + \dots + n_{1,r} + \dots + n_{i,1} + \dots + \dots + n_{i,j-1} + k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & w_s(m_{1,1} + \cdots + m_{i+1,i+1} + n_{r,i} + \cdots + n_{j+1,i} + k) \\ &= n_{1,1} + \cdots + n_{1,r} + \cdots + n_{j,1} + \cdots + \cdots + n_{j,i-1} + k \quad . \end{aligned}$$

Autrement dit, w_s envoie un entier à la place k dans le 1^{er} ordre sur l'entier à la place k correspondant au 2^{ème} ordre.

Proposition 1.9. *Soient \bar{n} une partition de n et P le sous-groupe parabolique standard de G correspondant à cette partition, alors $G = \bigsqcup_{s \in I(\bar{n})} Pw_sH$.*

Démonstration. La méthode utilisée est assez similaire à la démonstration de la proposition 1.4. Pour plus de détails, voir la proposition 3.1 de [Mat17] avec D au lieu de Δ , $D \otimes_F E$ au lieu de D et δ à la place de ϵ . \square

Remarque 1.6. *On a une bijection entre $P_n(D) \backslash GL(n, D) / GL(m, D \otimes_F E)$ et $P_n(F) \backslash GL(n, F) / GL(m, E)$ via l'application identité de $\{w_s | s \in I(\bar{n})\}$.*

Maintenant, pour $s \in I(\bar{n})$, on pose $t_s = w_s U_{\Delta_{2m}} w_s^{-1}$. C'est une matrice monomiale (donc elle est dans $N_G(M_\emptyset)$) et si on note τ_s l'image de t_s dans le groupe de Weyl de G , $N_G(M_\emptyset)/M_\emptyset$, alors τ_s est une matrice de permutation d'ordre 2, donnée par la formule

$$\tau_s = w_s w w_s^{-1}, \quad \text{où } w = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot \cdot & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

On peut alors voir que $w_s H w_s^{-1}$ est le groupe des points fixes de l'involution de G :

$$\theta_s : x \mapsto t_s x t_s^{-1}.$$

On a besoin de savoir précisément comment opère la permutation τ_s . On vérifie que τ_s est l'involution de $[[1, n]] = I = I_{1,1} \cup I_{1,2} \cup \cdots \cup I_{1,r} \cup \cdots \cup I_{r,1} \cup \cdots \cup I_{r,r-1} \cup I_{r,r}$ (où $I_{i,j}$ est de longueur $n_{i,j}$), qui stabilise chaque $I_{i,i}$ en opérant par symétrie centrale, et qui stabilise $I_{i,j} \cup I_{j,i}$ (pour $i < j$) et opère sur cette union d'intervalles par symétrie de centre le milieu de l'intervalle joignant l'extrémité gauche de $I_{i,j}$ et l'extrémité droite de $I_{j,i}$.

Pour $s \in I(\bar{n})$, on note P_s le sous-groupe parabolique standard de G correspondant à la sous-partition s de \bar{n} . Comme d'habitude, on note $P = MN$ et $P_s = M_s N_s$ la décomposition de Levi standard de P et P_s respectivement. Alors, de la même manière que pour le cas pair, on a la proposition suivante :

Proposition 1.10. *Pour $s \in I(\bar{n})$, on a $\tau_s(\Phi_M^-) \subset \Phi^-$, $\tau_s(\Phi_M^+) \subset \Phi^+$. De plus, $P \cap w_s H w_s^{-1} = P_s \cap w_s H w_s^{-1}$, et $P_s \cap w_s H w_s^{-1}$ est le produit semi-direct de $M_s \cap w_s H w_s^{-1}$ et $N_s \cap w_s H w_s^{-1}$.*

On note alors $P_s^{\theta_s} := P_s \cap w_s H w_s^{-1}$ et $M_s^{\theta_s} := M_s \cap w_s H w_s^{-1}$. On peut décrire explicitement le groupe $M_s^{\theta_s}$: un élément $a \in M_s^{\theta_s}$ est de la forme

$$a = \text{diag}(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,r}, a_{2,1}, \dots, a_{r,r-1}, a_{r,r})$$

où $a_{i,i} \in GL(n_{i,i}, D)$ satisfait la relation $a_{i,i} = U_{\Delta} a_{i,i} U_{\Delta}^{-1}$ ($U_{\Delta} := U_{\Delta_{n_{i,i}}}$) i.e. $a_{i,i} \in GL(m_{i,i}, D \otimes_F E)$ et $a_{i,j} \in GL(n_{i,j}, D)$ vérifie $a_{i,j} = w a_{j,i} w^{-1}$ si $i \neq j$ ($w = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$) pour tous i, j dans $\{1, \dots, r\}$.

Proposition 1.11. *On a l'égalité de caractères suivante :*

$$(\delta_{P_s^{\theta_s}})_{|M_s^{\theta_s}} = (\delta_{P_s}^{1/2})_{|M_s^{\theta_s}}.$$

Démonstration. À nouveau, la méthode est la même que dans la proposition 4.4 de [Mat11]. Grâce au lemme 1.10 de [KT08], il suffit de vérifier l'égalité sur la composante F -scindée $Z_s^{\theta_s}$ (le tore F -scindé maximal dans le centre de M_s) de $M_s^{\theta_s}$ car θ_s est défini sur F . Ainsi, on va considérer chaque caractère sur $Z_s^{\theta_s}$, c'est-à-dire, le sous-groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} I_{n_{1,1}} & & & \\ & \lambda_{1,2} I_{n_{1,2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{r,r} I_{n_{r,r}} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i} \in F^*$ et $n_{i,i}$ pair.

Pour $\alpha \in \Phi$, on pose $\mathcal{N}_{\alpha, \tau_s(\alpha)} = \{x \in Lie(N_{\alpha}) + Lie(N_{\tau_s(\alpha)}) ; \theta_s(x) = x\}$. C'est un D -espace vectoriel de dimension 1.

Pour $t \in Z_s^{\theta_s}$, on a :

$$\delta_{P_s^{\theta_s}}(t) = \prod_{\{\alpha, \tau_s(\alpha)\} \subset \Phi^+ - \Phi_s^+} |\mathrm{Nrd}_F(Ad(t)|_{\mathcal{N}_{\alpha, \tau_s(\alpha)}})|_F^d \quad (1.3)$$

$$= \prod_{\{\alpha \in \Phi^+ - \Phi_s^+ ; \tau_s(\alpha) \in \Phi^+ - \Phi_s^+\}} |\mathrm{Nrd}_F(\alpha(t))|_F^{d/2} \quad (1.4)$$

L'égalité (1.4) vient du fait que si $\{\alpha_0, \tau_s(\alpha_0)\} \subset \Phi^+ - \Phi_s^+$, alors $|\mathrm{Nrd}_F(Ad(t)|_{\mathcal{N}_{\alpha_0, \tau_s(\alpha_0)}})|_F = |\mathrm{Nrd}_F(\alpha_0(t))|_F$ et la puissance $1/2$ vient du fait que τ_s n'a pas de point fixe alors que $\mathcal{N}_{\alpha, \tau_s(\alpha)}$ est de dimension 1.

Comme dans le cas pair, $\prod_{\{\alpha \in \Phi^+ - \Phi_s^+ ; \tau_s(\alpha) \notin \Phi^+ - \Phi_s^+\}} |\mathrm{Nrd}_F(\alpha(t))|_F^d = 1$. On en déduit que

$$\delta_{P_s^{\theta_s}}(t) = \prod_{\{\alpha \in \Phi^+ - \Phi_s^+\}} |\mathrm{Nrd}_F(\alpha(t))|_F^{d/2}$$

Finalement, par définition, on a :

$$\delta_{P_s}(t) = |\mathrm{Nrd}_F(Ad(t)|_{Lie(N_s)})|_F^d = \prod_{\{\alpha \in \Phi^+ - \Phi_s^+\}} |\mathrm{Nrd}_F(\alpha(t))|_F^d.$$

et on obtient l'égalité de caractères annoncée. □

Etude de la distinction

Dans cette partie, on regarde quand la représentation de Steinberg est $\mu \circ \text{Nrd}_E$ -distinguée par H en fonction du caractère μ de E^* considéré. Pour μ un caractère de E^* , on pose $\mu_E := \mu \circ \text{Nrd}_E$. On rappelle que $St(1)$ est la représentation de Steinberg $Ind_{P_0}^G(1) / \sum_P Ind_P^G(1)$ où les sous-groupes paraboliques standards P dans la somme correspondent à la partition \bar{n} de n où tous les n_i valent 1 sauf un qui est égal à 2.

On commence par donner une condition nécessaire sur μ pour la μ_E -distinction de $St(1)$.

Proposition 1.12. *Si $St(1)$ est μ_E -distinguée par H , alors $\mu|_{F^*} = 1$. De plus, seule l'orbite ouverte P_0H supporte une forme linéaire μ_E -équivariante et $\dim(Hom_H(St(1), \mu_E)) = 1$.*

Démonstration. Comme la méthode est la même que dans la proposition 1.7, on souligne uniquement les points les plus importants.

Tout d'abord, on rappelle que $\mu_E|_{F^*}$ est unitaire. Alors, la μ_E -distinction de $St(1)$ implique, par la réciprocity de Frobenius, la théorie de Mackey et la proposition 1.6, qu'il existe s dans $I(\bar{n})$ tel que $(\delta_{P_0}^{1/2})|_{M_0^{\theta_s}} = \mu_{E,s}^{-1}|_{M_0^{\theta_s}}$ où $\mu_{E,s}(x) = \mu_E(w_s^{-1}xw_s)$ pour x dans $w_sHw_s^{-1}$.

$$\text{Ainsi, on obtient } s = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \dots & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \text{ et } \mu \circ \text{Nrd}_E \left(\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & a_m & \\ & & & a_m & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & a_1 \end{pmatrix} \right) = 1$$

$$\text{pour tout } (a_1, \dots, a_m) \text{ dans } (D^*)^m. \text{ Comme } \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & a_m & \\ & & & a_m & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & a_1 \end{pmatrix} \text{ est l'image}$$

$$\text{de } \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & & \\ & & & a_m \end{pmatrix} \text{ par l'inclusion de } \mathcal{M}_m(D \otimes_F E) \text{ dans } \mathcal{M}_{2m}(D), \text{ cela implique que } \mu \circ \text{Nrd}_E(D^*) = 1.$$

Montrons maintenant que $\text{Nrd}_E(D^*) = F^*$. Il existe L/F une extension de dimension d telle que $D \otimes_F L \simeq \mathcal{M}_d(L)$. Comme d est impair, $L \otimes_F E$ est un corps et c'est une extension de E de dimension d . Ainsi, on a naturellement le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} D \otimes_F E & \longrightarrow & \mathcal{M}_d(L \otimes_F E) \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ D & \longrightarrow & \mathcal{M}_d(L) \end{array}$$

Théorème 1.3. *Soit n un entier positif et soit μ un caractère de E^* . On suppose que nd est pair. On pose $G = GL(n, D)$ et $H = (C_{\mathcal{M}_n(D)}(E))^\times$. La représentation de Steinberg $St(n, 1)$ de G est $\mu \circ \text{Nrd}_E$ -distinguée par H si et seulement si*

- $\mu|_{F^*} = 1$ et $\mu \neq 1$ si n est pair
- $\mu = 1$ si n est impair.

Afin d'établir plus précisément les résultats de cette partie, on rappelle la correspondance de Jacquet-Langlands (JL), établie par Rogawski et Deligne-Kazhdan-Vignéras, et la correspondance locale de Langlands (CLL) pour $GL(n, F)$, démontrée par Harris-Taylor et Henniart.

Correspondance de Jacquet-Langlands. Pour D une F -algèbre à division centrale de dimension d^2 , on a une bijection :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'équivalence de} \\ \text{représentations de carré} \\ \text{intégrable de } GL(n, D) \end{array} \right\} \xrightarrow{JL} \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'équivalence de} \\ \text{représentations de carré} \\ \text{intégrable de } GL(nd, F) \end{array} \right\}$$

Correspondance locale de Langlands. On a une bijection :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'équivalence de} \\ \text{représentations irréductibles} \\ \text{de } GL(n, F) \end{array} \right\} \xrightarrow{CLL} \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'équivalence de représentations} \\ \text{semi-simples de dimension } n \\ \text{du groupe de Weil-Deligne de } F : \\ W'_F = W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \end{array} \right\}$$

L'image d'une représentation lisse irréductible π de $GL(n, F)$ est appelée le **paramètre de Langlands** de π .

À présent, écrivons et prouvons la conjecture 1 de [PTB11] pour la représentation de Steinberg $St(n, 1)$ (qui est une représentation membre de la série discrète). Soit W_F (resp. W_E) le groupe de Weil de F (resp. E).

Théorème 1.4. *(Conjecture de Prasad et Takloo-Bighash, cas de la représentation de Steinberg) Soit $\pi = St(n, 1)$ qui est une représentation admissible irréductible de $G = GL(n, D)$. Rappelons que π correspond à $St(nd, 1)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands (une représentation de $GL(nd, F)$) dont le caractère central est $\omega_\pi = 1$. Soit μ un caractère de E^\times tel que $\mu^{\frac{nd}{2}}|_{F^\times} = \omega_\pi = 1$. Alors, le caractère $\mu \circ \text{Nrd}_E$ de $H = (C_{\mathcal{M}_n(D)}(E))^\times$ apparaît comme un quotient de π restreint à H si et seulement si :*

1. le paramètre de Langlands de $JL(\pi)$ est à valeurs dans $GS_{nd}(\mathbb{C})$, de facteur de similitude $\mu|_{F^\times}$.
2. le facteur epsilon satisfait $\epsilon(\frac{1}{2}, \pi \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1})) = (-1)^n \omega_{E/F}(-1)^{\frac{nd}{2}}$ (où $\omega_{E/F}$ est le caractère quadratique de F^\times de noyau les normes de E^\times).

Remarque 1.7. La valeur du facteur ϵ ne dépend pas du caractère additif non trivial de F considéré en troisième paramètre, c'est pourquoi on l'omet dans le théorème. En effet, on rappelle que pour $\psi \neq 1$ un caractère additif de F non trivial, l'application $a \mapsto a\psi$ (où $a\psi(x) = \psi(ax)$ pour $x \in F$) est un isomorphisme entre F et le groupe des caractères additifs de F . Soit $\psi \neq 1$ un caractère additif non trivial de F , soit $a \in F^*$,

$$\begin{aligned} & \epsilon\left(\frac{1}{2}, \pi \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1}), a\psi\right) \\ &= \det(\pi \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1}))(a) |a|_F^{2 \times \frac{1}{2} - 1} \epsilon\left(\frac{1}{2}, \pi \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1}), \psi\right) \\ &= \omega_\pi^2(a) \mu^{-nd}(a) \epsilon\left(\frac{1}{2}, \pi \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1}), \psi\right) \\ &= \epsilon\left(\frac{1}{2}, \pi \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1}), \psi\right) \end{aligned}$$

Remarque 1.8. Comme $(\text{Nrd}_F)|_H = N_{E/F} \circ \text{Nrd}_E$, si μ est un caractère de E^* , alors $\mu \circ \text{Nrd}_E$ peut s'étendre à un caractère de G si et seulement si il existe χ un caractère de F^* tel que $\mu = \chi \circ N_{E/F}$.

Reformulons le théorème 1.4 dans ce cas. Soient π et μ comme dans la conjecture et supposons qu'il existe χ un caractère de F^* tel que $\mu = \chi \circ N_{E/F}$. On désigne par BC_E le changement de base vers E .

- Comme $\mu = \chi \circ N_{E/F}$, l'affirmation " $\mu \circ \text{Nrd}_E$ apparaît comme un quotient de π restreint à H " est équivalente à dire que $St(n, 1)$ est $\chi \circ \text{Nrd}_F$ -distinguée par H . C'est encore équivalent à $(\chi \circ \text{Nrd}_F)^{-1} \otimes St(n, 1) = St(n, \chi^{-1})$ est H -distinguée.
- Considérons maintenant le 1^{er} point de la conjecture. Le paramètre de Langlands de $JL(\pi) = St(nd, 1)$ est $Sp(nd) =: \Phi$ (où $Sp(nd)$ désigne l'unique représentation irréductible de $SL(2, \mathbb{C})$ de dimension nd). La 1^{re} assertion dans la conjecture signifie :

il existe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur $\mathbb{C}^{nd} =: V$ telle que $\forall w \in W_F, \forall v, v' \in V$,
 $\langle \Phi(w).v, \Phi(w).v' \rangle = \mu|_{F^\times}(w) \langle v, v' \rangle = \chi^2(w) \langle v, v' \rangle$.

Comme le paramètre de Langlands de $St(n, \chi^{-1})$ est $Sp(nd) \otimes \chi^{-1} =: \Psi$, l'affirmation (1.5) est équivalente à :

il existe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur V telle que
 $\forall w \in W_F, \forall v, v' \in V, \langle \Psi(w).v, \Psi(w).v' \rangle = \langle v, v' \rangle$

ce qui revient à dire que $St(n, \chi^{-1})$ est symplectique.

- Finalement ; on considère le 2^e point de la conjecture et on formule la condition sur le facteur epsilon d'une autre façon. Soit ψ un caractère additif non trivial de F ; on note $Tr_{E/F}$ la trace de E/F et $\psi_E := \psi \circ Tr_{E/F}$. Enfin, $\lambda_{E/F}(\psi)$ désigne la constante de Langlands de E/F , définie par la relation 30.4.1 de

[BH06]. On calcule :

$$\begin{aligned}
 \epsilon\left(\frac{1}{2}, \pi \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1}), \psi\right) &= \epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Sp}(nd) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1}), \psi\right) \\
 &= \epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\text{Sp}(nd) \otimes \mu^{-1}), \psi\right) \\
 &= \lambda_{E/F}(\psi)^{nd} \epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Sp}(nd) \otimes \mu^{-1}, \psi_E\right) \\
 &\quad \text{en utilisant la relation 30.4.2 de [BH06]} \\
 &= \omega_{E/F}(-1)^{\frac{nd}{2}} \epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{St}(nd, \mu^{-1}), \psi_E\right)
 \end{aligned}$$

donc le 2^e point de la conjecture est équivalent à :

$$\epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{St}(nd, \mu^{-1}), \psi_E\right) = (-1)^n. \tag{1.5}$$

De plus, comme $\mu = \chi \circ N_{E/F}$, $\text{St}(nd, \mu^{-1}) = \text{St}(nd, \chi^{-1} \circ N_{E/F})$ qui est le changement de base de la représentation de Steinberg $\text{St}(nd, \chi^{-1})$ de $GL(nd, F)$. Ainsi, dans ce cas, le 2^e point de la conjecture est équivalent à : $\epsilon\left(\frac{1}{2}, BC_E(JL(\text{St}(n, \chi^{-1}))), \psi_E\right) = (-1)^n$.

Pour résumer, sous l'hypothèse supplémentaire que $\mu \circ \text{Nrd}_E$ de H peut s'étendre à un caractère de G , le théorème 1.4 est équivalent au théorème suivant, qui est une reformulation similaire à la conjecture 1.4 de [FMW18].

Théorème 1.5. *Soit $\text{St}(n, \chi)$ la représentation de Steinberg de $G = GL(n, D)$. La représentation $\text{St}(n, \chi)$ est H -distinguée si et seulement si elle est symplectique et $\epsilon\left(\frac{1}{2}, BC_E(JL(\text{St}(n, \chi)))\right) = (-1)^n$.*

Démonstration du théorème 1.4. On utilise les facteurs ϵ , γ et L usuels comme définis dans Godement-Jacquet (voir [GJ72]); on omet le troisième paramètre dans ϵ et γ qui est un caractère additif de E de la forme $\psi \circ \text{Tr}_{E/F}$ pour ψ un caractère additif non trivial de F .

D'après le travail effectué dans la précédente reformulation (les trois points au-dessus), comme la représentation $\text{St}(nd, 1)$ de $GL(nd, F)$ est symplectique, on doit démontrer que $\text{St}(n, 1)$ est μ_E -distinguée si et seulement si $\mu|_{F^*} = 1$ et $\epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{St}(nd, \mu^{-1})\right) = (-1)^n$ (d'après la relation (1.5)) où $\text{St}(nd, \mu^{-1})$ est la représentation de Steinberg de $GL(nd, E)$ paramétrée par μ^{-1} .

Si $\mu|_{F^*} = 1$, alors $\mu^\sigma = \check{\mu}$ (où μ^σ désigne le caractère μ tordu par l'involution de Galois σ de E/F et $\check{\mu}$ désigne la contragrédiente de μ) donc $\text{St}(nd, \mu^{-1})^\sigma = \text{St}(nd, \mu^{-1})$, ce qui implique $L(s, \text{St}(nd, \mu^{-1})) = L(s, \text{St}(nd, \mu^{-1})^\sigma)$ pour tout s dans \mathbb{C} . Ainsi, pour $s \in \mathbb{C}$, on a par définition du facteur ϵ en fonction de γ et L :

$$\gamma(s, \text{St}(nd, \mu^{-1})) = \epsilon(s, \text{St}(nd, \mu^{-1})) \frac{L(1-s, \text{St}(nd, \mu^{-1}))}{L(s, \text{St}(nd, \mu^{-1}))}.$$

D'autre part,

$$\gamma(s, \text{St}(nd, \mu^{-1})) = \gamma\left(s + \frac{1-nd}{2}, \mu^{-1}\right) \times \gamma\left(s + \frac{1-nd}{2} + 1, \mu^{-1}\right) \times \cdots \times \gamma\left(s + \frac{nd-1}{2}, \mu^{-1}\right),$$

en utilisant les formules de la section 26 de [BH06].

Finalement, si $\mu|_{F^*} = 1$, alors $\mu^\sigma = \check{\mu}$ d'où

$$L(s, \mu^{-1}) = L(s, \check{\mu}^{-1}) \quad \text{et} \quad \epsilon(s, \mu^{-1})\epsilon(1-s, \mu^{-1}) = 1 \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, si $\mu|_{F^*} = 1$, $\gamma(s, \mu^{-1}) = \epsilon(s, \mu^{-1}) \frac{L(1-s, \mu^{-1})}{L(s, \mu^{-1})}$ pour tout s dans \mathbb{C} , donc $\gamma(s, St(nd, \mu^{-1}))$ est égal à

$$\begin{aligned} & \epsilon\left(s + \frac{1-nd}{2}, \mu^{-1}\right) \times \cdots \times \epsilon\left(s + \frac{nd-1}{2}, \mu^{-1}\right) \times \frac{L(1-s + \frac{nd-1}{2}, \mu^{-1}) \times \cdots \times L(1-s + \frac{1-nd}{2}, \mu^{-1})}{L(s + \frac{1-nd}{2}, \mu^{-1}) \times \cdots \times L(s + \frac{nd-1}{2}, \mu^{-1})} \\ &= \frac{L(\frac{1}{2} + \frac{nd-1}{2}, \mu^{-1}) \times \cdots \times L(\frac{1}{2} + \frac{1-nd}{2}, \mu^{-1})}{L(\frac{1}{2} + \frac{1-nd}{2}, \mu^{-1}) \times \cdots \times L(\frac{1}{2} + \frac{nd-1}{2}, \mu^{-1})}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour μ un caractère de E^* tel que $\mu|_{F^*} = 1$ et s un réel, on a besoin de savoir quand $L(s, \mu^{-1})$ a un pôle. Soient ϖ_E une uniformisante de E , \mathcal{O}_E son anneau des entiers et q_E le cardinal du corps résiduel de E .

Si μ est non ramifié, *i.e.* si μ est trivial sur \mathcal{O}_E^\times , alors $L(s, \mu^{-1}) = \frac{1}{1 - \mu^{-1}(\varpi_E)q_E^{-s}}$ (par la formule 23.4 de [BH06]) et $L(s, \check{\mu}^{-1}) = L(s, \mu^{-1}) = \frac{1}{1 - \mu(\varpi_E)q_E^{-s}}$ donc $L(s, \mu^{-1})$ a un pôle si et seulement si :

$$\mu^{-1}(\varpi_E) = q_E^s = \mu(\varpi_E) \Leftrightarrow s = 0 \text{ et } \mu(\varpi_E) = 1 \text{ i.e. } \mu = 1$$

car μ est non ramifié.

Si μ est ramifié, $L(s, \mu^{-1}) = 1$ donc $L(s, \mu^{-1})$ n'a pas de pôle.

Pour conclure, $L(s, \mu^{-1})$ a un pôle si et seulement si $s = 0$ et $\mu = 1$.

Finalement, si $\mu|_{F^*} = 1$, $\gamma(\frac{1}{2}, St(nd, \mu^{-1})) = \epsilon(\frac{1}{2}, St(nd, \mu^{-1}))$ et on a aussi $\gamma(\frac{1}{2}, St(nd, \mu^{-1})) = \frac{L(\frac{nd}{2}, \mu^{-1}) \times \cdots \times L(1 - \frac{nd}{2}, \mu^{-1})}{L(1 - \frac{nd}{2}, \mu^{-1}) \times \cdots \times L(\frac{nd}{2}, \mu^{-1})}$ donc on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon\left(\frac{1}{2}, St(nd, \mu^{-1})\right) &= \frac{L(\frac{nd}{2}, \mu^{-1}) \times \cdots \times L(1 - \frac{nd}{2}, \mu^{-1})}{L(1 - \frac{nd}{2}, \mu^{-1}) \times \cdots \times L(\frac{nd}{2}, \mu^{-1})} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \mu \neq 1 \\ \lim_{s \rightarrow \frac{nd}{2}} \frac{L(\frac{nd}{2} - s, \mu^{-1})}{L(s - \frac{nd}{2}, \mu^{-1})} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - q_E^{-s}}{1 - q_E^s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-1}{q_E^s} = -1 & \text{si } \mu = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour conclure, on a les équivalences suivantes :

- $(\mu|_{F^*} = 1 \text{ et } \mu \neq 1)$ est équivalent à $(\epsilon(\frac{1}{2}, St(nd, \mu^{-1})) = 1 \text{ et } \mu|_{F^*} = 1)$.
- $(\mu = 1)$ est équivalent à $(\epsilon(\frac{1}{2}, St(nd, \mu^{-1})) = -1 \text{ et } \mu|_{F^*} = 1)$.

En observant les résultats de distinction selon la parité, c'est équivalent à $St(n, 1)$ est μ_E -distinguée si et seulement si $\mu|_{F^*} = 1$ et $\epsilon(\frac{1}{2}, St(nd, \mu^{-1})) = (-1)^n$. □

Chapitre 2

Le cas des cuspidales de niveau 0

Sommaire

2.1	μ_E-distinction des cuspidales de niveau 0 de $GL(2m, F)$	27
2.1.1	Notations / définitions	27
2.1.2	Quelques rappels sur l'immeuble de $GL(n, F)$	29
2.1.3	Étude de la distinction	33
2.2	Propriétés du paramètre de Langlands et vérification de la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash	41
2.2.1	Caractérisation de la μ -symplecticité	41
2.2.2	Vérification de la conjecture sous hypothèses supplémentaires	42

2.1 μ_E -distinction des cuspidales de niveau 0 de $GL(2m, F)$

2.1.1 Notations / définitions

Comme précédemment, F désigne un corps local non archimédien de caractéristique différente de 2 et on ajoute l'hypothèse de caractéristique résiduelle impaire. Soit E une extension quadratique de F (on écrit $E = F[\delta]$ pour un certain δ dans $E \setminus F$ tel que $\delta^2 \in F$ et on pose $\Delta = \delta^2$). On note, dans l'ordre, \mathcal{O}_F (resp. \mathcal{O}_E), \mathcal{P}_F (resp. \mathcal{P}_E), ϖ_F (resp. ϖ_E), k_F (resp. k_E) et q_F (resp. q_E) l'anneau des entiers, son idéal maximal, une uniformisante fixée, le corps résiduel de F (resp. de E) et son cardinal où q_F est une certaine puissance d'un nombre premier p (la caractéristique de k_F). On note enfin $e(E/F)$ l'indice de ramification de E/F . Lorsque E/F est ramifiée, on choisit ϖ_E et ϖ_F tels que $\varpi_E^2 = \varpi_F$; lorsque E/F est non ramifiée, on choisit $\varpi_E = \varpi_F$. Posons $n = 2m$, on considère le groupe $G = GL(n, F)$ et le sous-groupe $H = GL(m, E)$. Soit (e_1, \dots, e_m) la base canonique de E^m . Alors E^m s'identifie en tant que F -espace vectoriel à F^n via la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m, \delta e_m, \dots, \delta e_1)$. Ainsi, on

rappelle que H est l'ensemble des points fixes de G sous l'involution

$$\theta : G \longrightarrow G \quad \text{où } U = \begin{pmatrix} & & & \Delta \\ & & \ddots & \\ & & \Delta & \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$g \mapsto UgU^{-1}$$

Il s'agit du cas particulier $d = 1$ de la situation détaillée dans la partie 1.3.2.

On considère la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash dans ce cadre pour les représentations cuspidales de niveau 0 de G . Rappelons leur définition.

Définition 2.1. Soit (π, V) une représentation irréductible de G de contragrédiente notée $(\check{\pi}, \check{V})$.

- Un **coefficient matriciel** de π est une fonction de la forme :

$$f_{v, \check{v}} : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \langle \check{v}, \pi(g) \cdot v \rangle$$

pour $v \in V, \check{v} \in \check{V}$.

- π est dite **cuspidale** si ses coefficients matriciels sont à support compact modulo le centre.
- π est dite **de niveau 0** s'il existe $v \in V$ non nul tel que $\pi(1 + \varpi_F \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_F)) \cdot v = v$.

On peut paramétrer les cuspidales de niveau 0 par des paires modérées admissibles. Rappelons leur construction (on pourra par exemple se référer à la partie 5 de [BH11]).

Paramétrisation / construction des cuspidales de niveau 0

- Soit L/F une extension non ramifiée de degré n (elle est unique dans une clôture algébrique \bar{F} de F fixée), d'anneau des entiers \mathcal{O}_L , lui-même d'idéal maximal \mathcal{P}_L et de corps résiduel k_L . Soit χ un caractère de L^* qui vérifie :
 - $\chi|_{1+\mathcal{P}_L} = 1$; on dit que χ est modéré,
 - $\chi \circ \gamma = \chi \Rightarrow \gamma = id_L$, pour tout γ dans $\text{Gal}_F(L)$; χ est dit admissible.

Une telle paire (L, χ) est dite **modérée admissible**.

- χ étant trivial sur $1 + \mathcal{P}_L$, (L, χ) induit une paire dite régulière $(k_L, \bar{\chi})$, où $\bar{\chi}$ est un caractère de k_L^* qui vérifie $\bar{\chi} \circ \bar{\gamma} = \bar{\chi} \Rightarrow \bar{\gamma} = id_{k_L}$, pour tout $\bar{\gamma}$ dans $\text{Gal}_{k_F}(k_L)$ ($\bar{\chi}$ est dit régulier).
- À une telle paire régulière $(k_L, \bar{\chi})$, on peut associer par la paramétrisation de Green ([Gre55]) une représentation irréductible cuspidale $(\bar{\pi}_{\bar{\chi}}, \mathcal{V})$ de $GL(n, k_F)$ i.e. une représentation irréductible de $GL(n, k_F)$ telle que pour tout sous-groupe parabolique propre P de décomposition de Levi $P = MN$, le sous-espace vectoriel des points fixes de \mathcal{V} par N soit trivial.

Mieux, si on définit une relation d'équivalence \sim sur les caractères réguliers de k_L^* par

$$\bar{\chi}_1 \sim \bar{\chi}_2 \text{ si et seulement si } \exists \bar{\gamma} \in \text{Gal}_{k_F}(k_L) \text{ tel que } \bar{\chi}_2 = \bar{\chi}_1 \circ \bar{\gamma},$$

on a une bijection :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'équivalence pour } \sim \\ \text{des caractères réguliers de } k_L^* \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'équivalence des} \\ \text{représentations irréductibles} \\ \text{cuspidales de } GL(n, k_F) \end{array} \right\}$$

$$\bar{\chi} \longmapsto \bar{\pi}_{\bar{\chi}}$$

- Puisque $GL(n, k_F) \simeq GL(n, \mathcal{O}_F)/(1 + \varpi_F \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_F))$, $\bar{\pi}_{\bar{\chi}}$ peut être vue comme une représentation de $GL(n, \mathcal{O}_F)$ triviale sur $1 + \varpi_F \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_F)$. On définit alors une représentation de $F^*GL(n, \mathcal{O}_F)$, $\lambda_{\bar{\chi}}$, de la manière suivante :

$$\lambda_{\bar{\chi}}(xk) = \chi_{|F^*}(x)\bar{\pi}_{\bar{\chi}}(k) \text{ pour tous } x \in F^*, k \in GL(n, \mathcal{O}_F).$$

- Finalement, on pose $\pi(\chi) := \text{c-Ind}_{F^*GL(n, \mathcal{O}_F)}^{GL(n, F)}(\lambda_{\bar{\chi}})$ (c-Ind désigne l'induite compacte) ; c'est une représentation cuspidale de niveau 0 de G . Si on note à nouveau \sim la relation d'équivalence entre les paires modérées admissibles de degré n par

$$\chi_1 \sim \chi_2 \text{ si et seulement si } \exists \gamma \in \text{Gal}_F(L) \text{ tel que } \chi_2 = \chi_1 \circ \gamma,$$

alors on a une bijection :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'équivalence pour } \sim \\ \text{des paires modérées} \\ \text{admissibles de degré } n \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'équivalence des} \\ \text{représentations cuspidales de} \\ \text{niveau 0 de } GL(n, F) \end{array} \right\}$$

$$(L, \chi) \longmapsto \pi(\chi)$$

Rappelons que le caractère central de $\pi(\chi)$ est $\chi_{|F^*}$ et que sa contragrédiente est $\pi(\chi)^{\vee} = \pi(\chi^{-1})$.

2.1.2 Quelques rappels sur l'immeuble de $GL(n, F)$

Pour cette section, on se réfère à la section 1 de [BF85] pour la description des sous-groupes compacts modulo le centre maximaux de $GL(n, D)$ (pour D une F -algèbre à division centrale) via les chaînes de réseaux ; pour plus de détails sur l'immeuble de Bruhat-Tits de $GL(n, F)$, on peut regarder par exemple le chapitre 19 de [Gar97].

Rappelons comment on peut décrire l'immeuble de Bruhat-Tits de $GL(n, F)$ à l'aide des chaînes de réseaux (cette construction est aussi valable pour n impair). Considérons le groupe des automorphismes F -linéaires de F^n qui est isomorphe à $GL(n, F)$ en faisant le choix d'une base de F^n (ici, on choisit la base \mathcal{B}).

Définition 2.2. • Un \mathcal{O}_F -réseau dans F^n (ou réseau si le contexte est clair) est un sous- \mathcal{O}_F -module de F^n de type fini qui engendre F^n comme F -espace vectoriel. De façon équivalente, un sous- \mathcal{O}_F -module L de F^n est un \mathcal{O}_F -réseau dans F^n si et seulement si il existe une base (u_1, \dots, u_n) de F^n sur F telle que $L = \sum_{i=1}^n \mathcal{O}_F u_i$.

• Une **chaîne de \mathcal{O}_F -réseaux** dans F^n est une suite strictement décroissante (pour l'inclusion) $\mathcal{L} = (L_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de réseaux telle qu'il existe un entier strictement positif T vérifiant : pour toute uniformisante ϖ_F , $\varpi_F L_k = L_{k+T}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. L'entier T (ou $T(\mathcal{L})$) est appelé la période de \mathcal{L} .

Soit $\mathcal{L} = (L_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une chaîne de réseaux de période T de F^n . On peut considérer les quotients $\overline{V}_i := L_i / \varpi_F L_0$ pour i dans $\{0, \dots, T\}$. On a alors l'inclusion stricte de sous- k_F -espaces vectoriels de \overline{V}_0 suivante :

$$\overline{V}_T = \{0\} \subsetneq \overline{V}_{T-1} \subsetneq \dots \subsetneq \overline{V}_2 \subsetneq \overline{V}_1 \subsetneq \overline{V}_0$$

où \overline{V}_0 est de dimension n sur k_F . Puisqu'il s'agit d'une inclusion stricte de $T-1$ sous- k_F -espaces vectoriels non triviaux de \overline{V}_0 , on en déduit que $T \leq n$. Pour $k = 0, \dots, T-1$, on pose $d_k = \dim_{k_F} (\overline{V}_k / \overline{V}_{k+1})$ et on obtient ainsi une partition de n , (d_0, \dots, d_{T-1}) , que l'on note $\mathcal{P}(\mathcal{L})$. Si les d_k sont égaux pour tout $k \in \{0, \dots, T-1\}$ (ce qui implique que T divise n), on dit que la chaîne de réseaux est **uniforme**.

Pour une période T et une partition de n (d_0, \dots, d_{T-1}) fixées, on pose $d_{-1} := 0$ et on définit la **chaîne de réseaux standard** associée $\mathcal{M}^0 = (M_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$ en la décrivant dans la base canonique $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ par :

$$M_i^0 = \sum_{k=1}^{d_0 + \dots + d_{i-1}} \mathcal{P}_F u_k + \sum_{k=d_0 + \dots + d_{i-1} + 1}^n \mathcal{O}_F u_k$$

pour $i \in \{0, \dots, T-1\}$.

Puisque $GL(n, F)$ opère sur l'ensemble des \mathcal{O}_F -réseaux de F^n , $GL(n, F)$ opère naturellement sur l'ensemble des chaînes de réseaux $(L_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ par $g \cdot (L_k)_k = (g \cdot L_k)_k$ pour $g \in GL(n, F)$. Pour $\lambda \in F^*$, il existe un unique entier j et un unique $u \in \mathcal{O}_F^\times$ tels que $\lambda = \varpi_F^j u$. Ainsi, pour $(L_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une chaîne de réseaux de période T , $\lambda \cdot L_k = L_{k+jT} = L_{k+\text{val}(\lambda)T}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Les ensembles $\{L_k, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\lambda \cdot L_k, k \in \mathbb{Z}\}$ sont donc égaux et il est naturel de considérer la relation d'équivalence suivante : deux chaînes de réseaux $(L_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont équivalentes s'il existe un entier k_0 tel que $L_k = M_{k+k_0}$ pour tout entier k . Ainsi, si on note Z le centre de $GL(n, F)$, $GL(n, F)/Z$ opère naturellement sur les classes d'équivalence des chaînes de réseaux de F^n . Plus précisément, on a :

Théorème 2.1. • Soient $\mathcal{L} = (L_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\mathcal{M} = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ deux chaînes de réseaux dans F^n . Alors, il existe $g \in GL(n, F)$ tel que \mathcal{M} et $g \cdot \mathcal{L}$ soient dans la même classe d'équivalence si et seulement si $T(\mathcal{L}) = T(\mathcal{M})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{L}) = \mathcal{P}(\mathcal{M})$ modulo permutation circulaire.

• Soit \mathcal{L} une chaîne de réseaux, alors il existe $g \in GL(n, F)$ tel que $g \cdot \mathcal{L}$ soit dans la classe d'équivalence de la chaîne de réseaux standard $\mathcal{M}^0 = (M_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$ de même période et vérifiant $\mathcal{P}(\mathcal{M}^0) = \mathcal{P}(\mathcal{L})$.

On s'intéresse alors aux sous-groupes compacts maximaux de $GL(n, F)/Z$ i.e. aux sous-groupes compacts modulo le centre maximaux de $GL(n, F)$. On peut tous les décrire comme les stabilisateurs de chaînes de réseaux standards uniformes.

Théorème 2.2. *Pour T un entier divisant n , on note \mathcal{K}_T le stabilisateur dans $GL(n, F)$ de la chaîne standard uniforme de période T .*

- \mathcal{K}_T est un sous-groupe compact modulo le centre maximal.
- Tout sous-groupe compact modulo le centre maximal est conjugué à un \mathcal{K}_T pour un certain T divisant n .
- Si $T_1 \neq T_2$, \mathcal{K}_{T_1} et \mathcal{K}_{T_2} ne sont pas conjugués.

On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des réseaux de F^n : deux réseaux L_1 et L_2 de F^n sont dans la même classe d'équivalence (classe d'homothétie) s'il existe λ dans F^* tel que $L_2 = \lambda L_1$. Pour L un réseau de F^n , on note $[L]$ la classe d'homothétie de L .

Définition 2.3. *En tant que complexe simplicial, l'immeuble de Bruhat-Tits de $GL(n, F)$, X_G , est défini de la manière suivante.*

- Les sommets de X_G sont l'ensemble des classes d'homothétie de réseaux de F^n .
- Les simplexes de X_G sont l'ensemble des chaînes de réseaux à translation des indices près. Plus précisément, T sommets $[L_0], [L_1], \dots, [L_{T-1}]$ forment un simplexe de dimension $T - 1$ si, quitte à changer l'ordre et quitte à changer les représentants des classes, on a $L_0 \supseteq L_1 \supseteq \dots \supseteq L_{T-1} \supseteq \varpi_F L_0$. Autrement dit, l'ensemble $\{[L_0], [L_1], \dots, [L_{T-1}]\}$ est un simplexe de dimension $T - 1$ si et seulement si $[L_0] \cup [L_1] \cup \dots \cup [L_{T-1}]$ est l'ensemble des réseaux d'une chaîne de réseaux de période T dans F^n .

Plusieurs propriétés peuvent être déduites de cette définition. Tout d'abord, $GL(n, F)$ opère sur les sommets de X_G en respectant la structure simpliciale de X_G i.e. si $\{[L_0], [L_1], \dots, [L_{T-1}]\}$ est un simplexe de dimension $T - 1$, alors $\{[g \cdot L_0], [g \cdot L_1], \dots, [g \cdot L_{T-1}]\}$ est encore un simplexe de dimension $T - 1$ pour tout g dans $GL(n, F)$.

Soit \mathcal{K} le sous-groupe compact modulo le centre maximal $F^*GL(n, \mathcal{O}_F)$ et soit s_0 le sommet de X_G de stabilisateur \mathcal{K} i.e. le sommet défini par la chaîne de réseaux standard de période 1 ; le sommet s_0 est appelé le **sommet standard** de X_G . On rappelle l'isomorphisme de G -ensembles suivant :

$$\begin{aligned} X_G^\circ = \{ \text{sommets de } X_G \} & \xrightarrow{\sim} G/\mathcal{K} \\ g \cdot s_0 & \longmapsto g\mathcal{K} \end{aligned} \quad \text{pour } g \in G. \quad (2.1)$$

D'autre part, comme la période maximale possible pour un \mathcal{O}_F -réseau de F^n est n , on en déduit que les simplexes de X_G sont de dimension maximale $n - 1$ ($n - 1$ étant atteint). Ainsi, l'immeuble X_G de $GL(n, F)$ est de dimension $n - 1$.

Définition 2.4. *Un simplexe de X_G de dimension $n - 1$ est appelé une **chambre**.*

On aura besoin de la réalisation géométrique de X_G , notée $|X_G|$. Il s'agit de plonger chaque simplexe de X_G de dimension $T - 1$ dans \mathbb{R}^{T-1} : si on considère un

simplexe de dimension $T - 1$, les points de sa réalisation géométrique dans $|X_G|$ sont donnés par l'ensemble des barycentres de ses sommets. On utilisera la réalisation géométrique de l'immeuble X_G donnée par les fonctions-réseaux. La définition est issue de la section I.2 de [BL02].

Définition 2.5. Une *fonction-réseau* de F^n est une application $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \{\text{réseaux de } F^n\}$ vérifiant :

- $\varpi_F \Lambda(r) = \Lambda(r + 1)$;
- Λ est décroissante : pour tout $r \geq s$, $\Lambda(r) \subseteq \Lambda(s)$;
- Λ est continue à gauche pour la topologie discrète sur les réseaux.

Expliquons plus en détail comment l'ensemble des fonctions-réseaux permet de réaliser géométriquement l'immeuble de $GL(n, F)$. Soit Λ une fonction-réseau de F^n , alors son image est une chaîne de réseaux $\mathcal{L} = (L_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de période T . Si on note λ_k la longueur de l'intervalle défini par $\{r \in \mathbb{R}, \Lambda(r) = L_k\}$, alors le point x_Λ de $|X_G|$ correspondant à Λ est le barycentre des points pondérés $([L_0], \lambda_0), ([L_1], \lambda_1), \dots, ([L_{T-1}], \lambda_{T-1})$.

Deux fonctions-réseaux Λ_1 et Λ_2 sont dites équivalentes s'il existe un réel r_0 tel que $\Lambda_1(r) = \Lambda_2(r + r_0)$ pour tout réel r , auquel cas elles réalisent le même point de l'immeuble. On note $\bar{\Lambda}$ la classe d'une fonction-réseau Λ .

De plus, le groupe $GL(n, F)$ opère naturellement sur l'ensemble des fonctions-réseaux par : $(g \cdot \Lambda)(r) = g \cdot (\Lambda(r))$ pour toute fonction-réseau Λ , tout $g \in GL(n, F)$ et tout réel r . On a ainsi l'isomorphisme de G -ensembles suivant :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{classes d'équivalence de fonctions-réseaux de } F^n\} & \xrightarrow{\sim} & |X_G| \\ \bar{\Lambda} & \mapsto & x_\Lambda \end{array}$$

Pour préciser les idées, si Λ_1 et Λ_2 sont deux fonctions-réseaux, les points associés x_{Λ_1} et x_{Λ_2} appartiennent au même simplexe de dimension minimale si et seulement si l'image de Λ_1 et l'image de Λ_2 sont dans la même classe d'équivalence de chaînes de réseaux.

Bien sûr, tous ces rappels sont valables pour la construction de l'immeuble de $GL(m, E)$, X_H .

On termine en donnant deux résultats permettant de faire le lien entre $|X_G|$ et $|X_H|$. Le premier est le lemme XII.4.2 de Broussous et Schneider [BS17]. Avant de le citer, rappelons la définition d'un élément minimal.

Définition 2.6. Soit $u \in G$ tel que $F_1 := F[u]$ soit un corps ; notons v_{F_1} la valuation normalisée de F_1 et $e(F_1/F)$ l'indice de ramification de F_1/F . On dit que u est minimal sur F si :

1. $\text{pgcd}(v_{F_1}(u), e(F_1/F)) = 1$,
2. $\varpi_F^{-v_{F_1}(u)} u^{e(F_1/F)} + \mathcal{P}_{F_1}$ engendre l'extension de corps résiduel k_{F_1}/k_F .

Rappelons que $E = F[\delta]$ et montrons que δ peut être choisi minimal. On peut expliciter δ en fonction de l'indice de ramification $e(E/F)$ de E/F .

- Si E/F est ramifiée (*i.e.* $e(E/F) = 2$), on rappelle que $\varpi_F := \varpi_E^2$. Si on choisit $\delta = \varpi_E$, alors on a bien $E = F[\varpi_E]$ et δ est minimal. En effet, $v_E(\varpi_E) = 1$ donc $\text{pgcd}(v_E(\varpi_E), e(E/F)) = 1$ et de plus $\varpi_F^{-1}\varpi_E^2 + \mathcal{P}_E = 1 + \mathcal{P}_E$ qui engendre bien k_E/k_F (puisque $k_E = k_F$ dans le cas ramifié).
- Si E/F est non ramifiée (*i.e.* $e(E/F) = 1$), dans ce cas k_E est une extension de k_F de cardinal q_F^2 et il existe $\xi \in E^*$ une racine primitive $(q_F^2 - 1)^{\text{ème}}$ de l'unité qui engendre E sur F . Posons $\delta := \xi^{\frac{q_F+1}{2}}$. Comme δ est d'ordre $2(q_F - 1)$, alors $\delta \notin F$ mais $\delta^2 \in F$, de sorte qu'on a $E = F[\delta]$ avec $\delta^2 \in F$. De plus, δ est un élément minimal car $v_E(\delta) = 0$ d'où $\text{pgcd}(v_E(\delta), e(E/F)) = 1$ et de plus, $\varpi_F^0\delta^1 + \mathcal{P}_E = \delta + \mathcal{P}_E$ engendre bien k_E/k_F (voir le théorème 7 et le corollaire 3 du chapitre 1, §4 de Weil [Wei74]).

A partir de maintenant, on choisit $\delta = \varpi_E$ si E/F est ramifiée et $\delta = \xi^{\frac{q_F+1}{2}}$ (pour ξ une racine primitive $(q_F^2 - 1)^{\text{ème}}$ de l'unité) si E/F est non ramifiée, ainsi δ est minimal.

Lemme 2.1 ([BS17]). *On a $|X_G|^\theta = |X_G|^{E^*}$.*

Le second est le théorème de Broussous et Lemaire (théorème 1.1 de [BL02]). Il permettra notamment de dire rapidement qu'il n'y a pas de distinction pour les représentations cuspidales de niveau 0 de G lorsque E/F est ramifiée. On l'énonce dans notre cadre. Avant cela, rappelons qu'un \mathcal{O}_E -réseau de E^m peut toujours se voir comme \mathcal{O}_F -réseau de F^{2m} car \mathcal{O}_E est un \mathcal{O}_F -réseau dans F^2 .

Théorème 2.3 ([BL02]).

1. *Il existe une unique application $j : |X_H| \longrightarrow |X_G|$ qui soit H -équivariante et affine.*
2. *Elle est injective et $j(|X_H|) = |X_G|^{E^*}$ l'ensemble des points fixes par E^* .*
3. *Si $x \in |X_H|$ vaut la classe de la fonction-réseau $r \mapsto \Lambda(r)$, alors $j(x)$ vaut la classe de la fonction-réseau $r \mapsto \Lambda(e(E/F)r)$.*

2.1.3 Étude de la distinction

On fixe L une extension non ramifiée de degré n de F et χ un caractère modéré admissible de L^* . Lorsque E/F est non ramifiée, on supposera que L est aussi une extension (non ramifiée) de E . Soit μ un caractère de E^* , on pose $\mu_E = \mu \circ \text{Nrd}_E = \mu \circ \det_{GL(m,E)}$ qui est un caractère de $H = GL(m, E)$. Nous allons alors étudier la μ_E -distinction de $\pi(\chi)$, la représentation cuspidale de niveau 0 de $G = GL(n, F)$ paramétrée par (L, χ) . On se place dans le cadre où μ vérifie : $\mu(1 + \mathcal{P}_E) = 1$.

Afin de simplifier l'étude, on va progressivement se ramener à un problème de distinction sur des groupes finis.

Réduction du problème à un problème de distinction au niveau résiduel

Dorénavant, on note $K = GL(n, \mathcal{O}_F)$ et $\mathcal{K} = F^*GL(n, \mathcal{O}_F)$; X_G (resp. X_H) désigne l'immeuble (de Bruhat-Tits) de $GL(n, F)$ (resp. $GL(m, E)$) et si X est un

immeuble, alors X° désigne l'ensemble des sommets de X . Enfin, on note s_0 le sommet standard de X_G i.e. le sommet de X_G stabilisé par \mathcal{K} .

Naturellement, on considère l'espace vectoriel $\text{Hom}_H(\pi(\chi), \mu_E)$. On aura besoin d'un résultat issu d'une proposition de Hakim-Murnaghan (proposition 5.20 de [HM]).

Lemme 2.2 ([HM]). *Soit $x \in X_G^\circ$ un sommet tel que $\theta(x) \neq x$. Soient \mathcal{K}_x le stabilisateur de x dans G , K_x le sous-groupe compact maximal de \mathcal{K}_x et $K_x^1 \subseteq K_x$ son radical pro-unipotent. Soit $\bar{\sigma}$ une représentation cuspidale de K_x/K_x^1 , soit σ l'inflation de $\bar{\sigma}$ à K_x . Notons $\rho := \mu_E = \mu \circ \det_{GL(m,E)}$ et rappelons que $\mu(1 + \mathcal{P}_E) = 1$. Alors $\text{Hom}_{K_x \cap H}(\sigma, \rho) = \{0\}$.*

Démonstration. Le cas ρ quadratique est traité dans la preuve de la proposition 5.20 de [HM]. La preuve procède par l'absurde (on montre que si $\text{Hom}_{K_x \cap H}(\sigma, \rho) \neq \{0\}$, alors $\bar{\sigma}$ n'est pas cuspidale) avec l'argument suivant : si U est un sous-groupe, $K_x^1 \subset U \subset K_x$, tel que $\bar{U} := U \bmod K_x^1 \subset K_x/K_x^1$ est un sous-groupe unipotent, alors $\rho|_{U \cap H} = 1$.

On adapte la partie de la démonstration où l'hypothèse " ρ quadratique " joue un rôle comme suit. Puisque $U \cap H$ est compact, on a $\det(U \cap H) \subseteq \mathcal{O}_E^\times$. Par l'absurde, supposons que $\text{Hom}_{K_x \cap H}(\sigma, \rho) \neq \{0\}$, ce qui implique que $\text{Hom}_{K_x^1 \cap H}(\sigma|_{K_x^1}, \rho) \neq \{0\}$ donc $\rho|_{K_x^1 \cap H} = 1$. De plus, \bar{U} est un p -groupe donc $U \cap H/K_x^1 \cap H$ est un p -groupe. On veut montrer que $\rho|_{U \cap H} = 1$.

Soit $h \in U \cap H$; il existe $\alpha \geq 0$ tel que $h^{p^\alpha} \in K_x^1 \cap H$, ce qui implique que $\rho(h^{p^\alpha}) = 1$. Ainsi, $\mu(\det(h))^{p^\alpha} = 1$ avec $\det(h) \in \mathcal{O}_E^\times$. Or, $\mu(1 + \mathcal{P}_E) = 1$ donc le caractère $\mu|_{\mathcal{O}_E^\times}$ se factorise par $\mathcal{O}_E^\times/(1 + \mathcal{P}_E) \rightarrow \mathbb{C}^*$. Ainsi, l'image de μ est incluse dans l'ensemble des racines de l'unité d'ordre premier à p donc $\mu(\det(h)) = 1$ i.e. $\rho(h) = 1$ donc $\rho|_{U \cap H} = 1$. La démonstration de [HM] montre que $\bar{U} = \bar{U} \cap \bar{H}$ et on vient ainsi d'obtenir une contradiction à la cuspidalité de $\bar{\sigma}$. \square

Autrement dit, puisque chaque x dans X_G° s'écrit sous la forme $g \cdot s_0$ pour un certain g dans G et que son stabilisateur est $g\mathcal{K}g^{-1}$, cela revient au lemme suivant.

Lemme 2.3. *Si $g \in H \backslash G / \mathcal{K}$ vérifie $\text{Hom}_{H \cap g\mathcal{K}g^{-1}}({}^g\lambda_\chi, \mu_E) \neq \{0\}$ (où ${}^g\lambda_\chi(x) = \lambda_\chi(g^{-1}xg)$ pour tout x dans $g\mathcal{K}g^{-1}$), alors $g\mathcal{K}g^{-1}$ est stable par θ .*

Lemme 2.4. *On a un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels :*

$$\text{Hom}_H(\pi(\chi), \mu_E) \simeq \prod_{g \cdot s_0 \in H \backslash (X_G^\circ)^\theta} \text{Hom}_{H \cap g\mathcal{K}g^{-1}}({}^g\lambda_\chi, \mu_E).$$

Démonstration. Ecrivons successivement :

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_H(\pi(\chi), \mu_E) &= \mathrm{Hom}_H(\mathrm{c}\text{-Ind}_{\mathcal{K}}^G(\lambda_\chi), \mu_E) \\
 &\simeq \mathrm{Hom}_H\left(\bigoplus_{g \in H/G \backslash \mathcal{K}} \mathrm{c}\text{-Ind}_{H \cap g\mathcal{K}g^{-1}}^{\mathcal{K}}({}^g\lambda_\chi), \mu_E\right) \\
 &\quad \text{par la formule de restriction de Mackey} \\
 &\simeq \prod_{g \in H \backslash G / \mathcal{K}} \mathrm{Hom}_{H \cap g\mathcal{K}g^{-1}}({}^g\lambda_\chi, \mu_E) \\
 &\quad \text{par réciprocity de Frobenius à gauche pour l'induite compacte} \\
 &\quad \text{à partir d'un sous-groupe ouvert compact modulo le centre} \\
 &\simeq \prod_{g \cdot s_0 \in H \backslash X_G^\circ} \mathrm{Hom}_{H \cap g\mathcal{K}g^{-1}}({}^g\lambda_\chi, \mu_E) \text{ par l'isomorphisme (2.1)} \\
 &\simeq \prod_{g \cdot s_0 \in H \backslash (X_G^\circ)^\theta} \mathrm{Hom}_{H \cap g\mathcal{K}g^{-1}}({}^g\lambda_\chi, \mu_E) \text{ grâce au lemme 2.3}
 \end{aligned}$$

□

Grâce au lemme 2.1 et au théorème 2.3, on obtient :

Lemme 2.5.

$$\mathrm{Hom}_H(\pi(\chi), \mu_E) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } E/F \text{ est ramifiée} \\ \mathrm{Hom}_{H \cap \mathcal{K}}(\lambda_\chi, \mu_E) & \text{si } E/F \text{ est non ramifiée} \end{cases}$$

Démonstration. Puisque $\mathrm{Hom}_H(\pi(\chi), \mu_E) = \prod_{g \cdot s_0 \in H \backslash (X_G^\circ)^\theta} \mathrm{Hom}_{H \cap g\mathcal{K}g^{-1}}({}^g\lambda_\chi, \mu_E)$, on cherche les sommets de X_G θ -stables, modulo H . Par le lemme 2.1 et le 2ème point du théorème 2.3, on a $(X_G)^\theta = j(X_H)$ donc cela revient à chercher les sommets de X_G qui sont sous la forme $j(x)$ pour $x \in X_H$, modulo H .

Regardons maintenant chacun des cas :

- **E/F ramifiée.**

Dans ce cas, $e(E/F) = 2$ et le 3ème point du lemme 2.3 implique que l'image d'une fonction-réseau à valeurs dans une chaîne d' \mathcal{O}_E -réseaux de période T est une fonction-réseau à valeurs dans une chaîne d' \mathcal{O}_F -réseaux de période $2T$ (on rappelle qu'un \mathcal{O}_E -réseau de E^m peut être vu comme un \mathcal{O}_F -réseau de F^{2m}), voir les schémas ci-dessous pour mieux visualiser cette propriété.

Ainsi, tout point x de X_H est envoyé par j sur un point intérieur d'un simplexe de dimension supérieure ou égale à 1 (en fait de dimension impaire) donc $j(X_H) \cap X_G^\circ$ est vide, d'où $\mathrm{Hom}_H(\pi(\chi), \mu_E) = \{0\}$ dans ce cas.

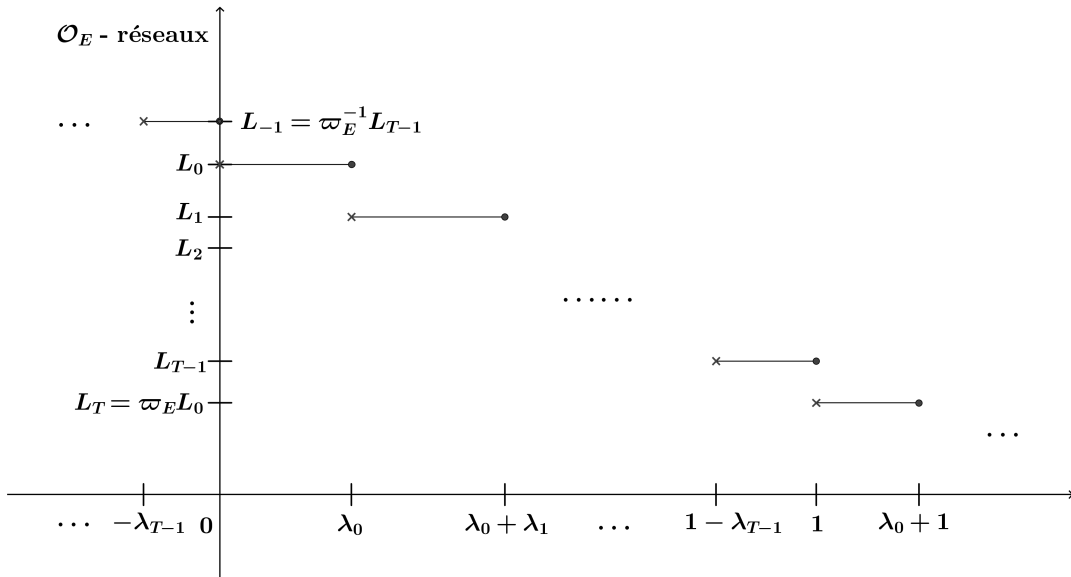


FIGURE 2.1 – Λ , fonction-réseau de E

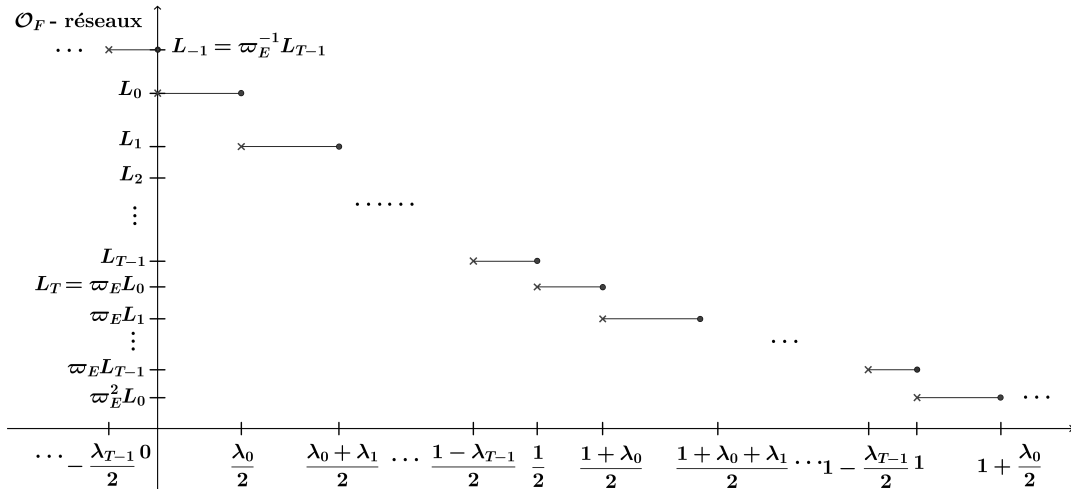


FIGURE 2.2 – Fonction-réseau de F image de Λ par j (cas ramifié)

• E/F non ramifiée.

Dans ce cas, l'application j est simplement l'identité sur les fonctions-réseaux, elle est simpliciale (elle envoie un simplexe sur un simplexe). Ainsi, $(X_G^\circ)^\theta = j(X_H^\circ)$ d'où $H \backslash (X_G^\circ)^\theta = H \backslash j(X_H^\circ) = j(H \backslash X_H^\circ)$. Puisque H opère transitivement sur les sommets de X_H , on peut choisir \tilde{s}_0 , le sommet standard de X_H , comme représentant de $H \backslash X_H^\circ$.

Calculons $j(\tilde{s}_0)$. On sait que

$$\tilde{s}_0 = E^* \underbrace{(\mathcal{O}_E \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_E)}_{m \text{ fois}}$$

et que $j(\tilde{s}_0) = \tilde{s}_0$ vu comme \mathcal{O}_F -réseau. Explicitons cette écriture : puisque $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_F \oplus \delta\mathcal{O}_F$ et $E = F \oplus \delta F$, alors

$$\tilde{s}_0 = F^* \left(\underbrace{\mathcal{O}_F \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_F}_{m \text{ fois}} \oplus \underbrace{\delta\mathcal{O}_F \oplus \cdots \oplus \delta\mathcal{O}_F}_{m \text{ fois}} \right) = s_0$$

dans la base \mathcal{B} fixée du F -espace vectoriel F^{2m} (on rappelle que $\delta \in \mathcal{O}_E^\times$, par conséquent $\delta^2 \in \mathcal{O}_F^\times$).

Ainsi, la seule classe de G/\mathcal{K} qui contribue à l'entrelacement de π et μ_E est celle de 1 et

$$\mathrm{Hom}_H(\pi, \mu_E) = \mathrm{Hom}_{H \cap \mathcal{K}}(\lambda_\chi, \mu_E).$$

□

Étude du problème au niveau résiduel pour E/F non ramifiée

L'étude de la distinction est donc terminée pour le cas E/F ramifiée. Pour le cas E/F non ramifiée (ce qu'on suppose à présent), on peut se ramener à un problème sur des corps finis en réduisant l'étude au niveau résiduel.

Lemme 2.6. *La représentation $\pi(\chi)$ est μ_E -distinguée par H si et seulement si $\chi|_{F^*} = \mu|_{F^*}^m$ et $\mathrm{Hom}_{GL(m, k_E)}(\overline{\pi_\chi}, \overline{\mu_E}) \neq \{0\}$ (et E/F est non ramifiée), où $\overline{\mu_E}$ désigne μ_E vu comme caractère de $GL(m, k_E)$.*

Démonstration. D'après le précédent lemme, $\pi(\chi)$ est μ_E -distinguée si et seulement si E/F est non ramifiée et $\mathrm{Hom}_{H \cap \mathcal{K}}(\lambda_\chi, \mu_E) \neq \{0\}$.

Comme $H \cap \mathcal{K} = H \cap F^*GL(2m, \mathcal{O}_F) = F^*GL(m, \mathcal{O}_E)$, alors $\pi(\chi)$ est μ_E -distinguée si et seulement si

$$\mathrm{Hom}_{F^*GL(m, \mathcal{O}_E)}(\lambda_\chi, \mu_E) \neq \{0\}.$$

Puisque $\lambda_\chi|_{F^*} = \chi|_{F^*}$, $\pi(\chi)$ est μ_E -distinguée si et seulement si

$$\mathrm{Hom}_{GL(m, \mathcal{O}_E)}(\lambda_\chi, \mu_E) \neq \{0\} \text{ et } \chi|_{F^*} = (\mu \circ \det_E)|_{F^*} = \mu|_{F^*}^m$$

(en identifiant F^* à F^*I_n).

Finalement, $\lambda_\chi(1 + \varpi_F \mathcal{M}_m(\mathcal{O}_E)) = 1$ par construction (car $1 + \varpi_F \mathcal{M}_m(\mathcal{O}_E) \subset 1 + \varpi_F \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_F)$) et $\mu_E(1 + \varpi_F \mathcal{M}_m(\mathcal{O}_E)) = 1$ (en remarquant que $\det_E(1 + \varpi_F \mathcal{M}_m(\mathcal{O}_E)) = 1 + \mathcal{P}_E$) de sorte que $\lambda_\chi(1 + \varpi_F \mathcal{M}_m(\mathcal{O}_E)) = \mu_E(1 + \varpi_F \mathcal{M}_m(\mathcal{O}_E))$. Comme $GL(m, k_E) \simeq GL(m, \mathcal{O}_E)/(1 + \varpi_F \mathcal{M}_m(\mathcal{O}_E))$, on obtient que $\pi(\chi)$ est μ_E -distinguée si et seulement si

$$\mathrm{Hom}_{GL(m, k_E)}(\overline{\pi_\chi}, \overline{\mu_E}) \neq \{0\} \text{ et } \chi|_{F^*} = \mu|_{F^*}^m.$$

□

Nous nous sommes ramenés à une étude de distinction de représentations de groupes finis. Nous restreignons alors le cadre de notre étude en regardant uniquement le cas $\mu = 1$ afin de pouvoir utiliser une formule de Lusztig (théorème 3.3 dans [Lus90]). Rappelons ce résultat ici.

Théorème 2.4 (Lusztig). Notons $\mathcal{G} := GL(n, k_F)$ le groupe linéaire défini sur k_F et \mathbf{T} le tore maximal de \mathcal{G} donné par l'image de k_L^* dans $GL(m, k_E) \subset GL(n, k_F)$. On pose $R_{\mathbf{T}}^{\bar{\chi}} := -\bar{\pi}_{\bar{\chi}}$ la représentation virtuelle de \mathcal{G} définie par Deligne-Lusztig dans [DL76] et $R_{\mathbf{T}, \bar{\chi}}$ son caractère virtuel.

On rappelle qu'on a écrit $E = F[\delta]$ avec δ un élément minimal. Notons $\bar{\delta}$ l'image de δ dans $k_E = \mathcal{O}_E/(1 + \mathcal{P}_E)$ de sorte que $k_E = k_F[\bar{\delta}]$, notons $\bar{\Delta} := \bar{\delta}^2$,

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} & & & & \bar{\Delta} \\ & & & \ddots & \\ & & \bar{\Delta} & & \\ & & 1 & & \\ & \ddots & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \in GL(n, k_F)$$

et posons

$$\begin{aligned} \bar{\theta} : GL(n, k_F) &\longrightarrow GL(n, k_F) \\ g &\longmapsto \bar{U}g\bar{U}^{-1} \end{aligned}$$

afin que le sous-groupe $\mathcal{H} := GL(m, k_E)$ soit l'ensemble des points fixes de $GL(n, k_F)$ par $\bar{\theta} : \mathcal{H} = \mathcal{G}^{\bar{\theta}}$.

Pour \mathbf{S} un tore maximal dans \mathcal{G} défini sur k_F et pour $s \in \mathbf{S}$, on note Z_s la composante connexe de l'identité du centralisateur de s dans \mathcal{G} et on définit $\epsilon_{\mathbf{S}} : \mathbf{S} \cap \mathcal{G}^{\bar{\theta}} \longrightarrow \{\pm 1\}$ par

$$\epsilon_{\mathbf{S}}(s) = \sigma(Z_{\mathcal{G}}((\mathbf{S} \cap \mathcal{G}^{\bar{\theta}})^{\circ}))\sigma(Z_{Z_s}((\mathbf{S} \cap \mathcal{G}^{\bar{\theta}})^{\circ}))$$

où la notation \circ en exposant désigne la composante de l'identité et où $\sigma(\mathcal{X}) = (-1)^{k_F \cdot \text{rang de } \mathcal{X}}$ pour \mathcal{X} un k_F -groupe.

On pose

$$\Xi_{\mathbf{T}, \bar{\chi}} = \left\{ g \in \mathcal{G} \left| \begin{array}{l} (1) \bar{\theta}(g^{-1}\mathbf{T}g) = g^{-1}\mathbf{T}g \\ (2) \bar{\chi}(t) = \epsilon_{g^{-1}\mathbf{T}g}(g^{-1}tg) \text{ pour tout } t \in \mathbf{T} \cap g\mathcal{G}^{\bar{\theta}}g^{-1} \end{array} \right. \right\}.$$

Alors, la dimension de l'espace $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(R_{\mathbf{T}}^{\bar{\chi}}, 1)$ est donnée (au signe près) par

$$\frac{1}{|\mathcal{G}^{\bar{\theta}}|} \sum_{h \in \mathcal{G}^{\bar{\theta}}} R_{\mathbf{T}, \bar{\chi}}(h) = \sigma(\mathbf{T}) \sum_{g \in \mathbf{T} \setminus \Xi_{\mathbf{T}, \bar{\chi}} / \mathcal{G}^{\bar{\theta}}} \sigma(Z_{\mathcal{G}}((g^{-1}\mathbf{T}g \cap \mathcal{G}^{\bar{\theta}})^{\circ})), \quad (2.2)$$

À l'aide de ce théorème, nous allons pouvoir donner une condition nécessaire et suffisante à la distinction de $\pi(\chi)$.

Proposition 2.1. Soit L_0 l'unique extension non ramifiée de F de degré m incluse dans L , dont on note le corps résiduel k_{L_0} (c'est une extension de degré m de k_F). La représentation $\pi(\chi)$ est distinguée par H si et seulement si E/F est non ramifiée, $\chi|_{F^*} = 1$ et $\bar{\chi}|_{k_{L_0}^*} = 1$. De plus, lorsqu'il y a distinction, la multiplicité du caractère trivial dans $\pi(\chi)$ vaut 1.

Démonstration. Commençons par utiliser le théorème 2.4 pour déterminer quand $\bar{\pi}_{\bar{\chi}}$ est distinguée. On doit pour cela déterminer l'ensemble $\Xi_{\mathbf{T}, \bar{\chi}}$.

On cherche d'abord l'ensemble des éléments $g \in \mathcal{G}$ qui vérifient la première condition *i.e.* $\bar{\theta}(g^{-1}\mathbf{T}g) = g^{-1}\mathbf{T}g$. Charlène Coniglio-Guilloton a fait un travail similaire dans sa thèse, on utilisera donc ses résultats en donnant seulement une idée de la démarche (voir la démonstration du lemme 1.4.3.12 dans [CG14]).

Comme $\bar{\theta}$ fixe les points de $GL(m, k_E)$, l'ensemble $\Xi_{\mathbf{T}, \bar{\chi}, \bar{\mu}_E}$ est donc une partie de $\mathbf{T} \backslash GL(n, k_F) / GL(m, k_E)$. De plus, comme \bar{U} appartient à \mathbf{T} , on a que pour g dans $GL(n, k_F)$, g appartient à $\Xi_{\mathbf{T}, \bar{\chi}, \bar{\mu}_E}$ si et seulement si $g\bar{U}g^{-1}$ appartient au normalisateur de \mathbf{T} dans $GL(n, k_F)$, noté $N_{GL(n, k_F)}(\mathbf{T})$. De plus, par le théorème de Skolem-Noether, on sait qu'il existe $g_0 \in GL(n, k_F)$ tel que $\text{Frob}_{k_L/k_F}(t) = g_0 t g_0^{-1} \forall t \in \mathbf{T}$, ce qui permet d'écrire que $N_{GL(n, k_F)}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot \langle g_0 \rangle$ c'est-à-dire que pour tout g dans $\Xi_{\mathbf{T}, \bar{\chi}, \bar{\mu}_E}$, $g\bar{U}g^{-1} = t g_0^k$ pour un certain $t \in \mathbf{T}$ et un certain $k \in \mathbb{Z}$. Après calculs élémentaires, on trouve qu'on peut supposer $k = 0$ ou $k = m$.

Dans le cas $k = 0$, on trouve deux éléments (dans $\mathbf{T} \backslash GL(n, k_F) / GL(m, k_E)$) : $g = I_n$

$$\text{et } g = \Lambda_0 = \begin{pmatrix} I_m & (0) \\ (0) & -I_m \end{pmatrix}.$$

Dans le cas $k = m$, on fixe t_0 dans \mathbf{T} tel que $N_{k_L/k_{L_0}}(t_0) = \bar{U}^2 g_0^{-2m}$ (g_0^{2m} appartient à k_F^* et on rappelle que la norme est surjective sur les corps finis). On trouve alors dans ce cas un seul élément à considérer (dans $\mathbf{T} \backslash GL(n, k_F) / GL(m, k_E)$), il s'agit de $g = x_0$ qui vérifie $x_0 \bar{U} x_0^{-1} = t_0 g_0^m$. Voir le lemme 1.4.3.12 pages 42 et 43 de [CG14] pour les détails de la preuve.

Regardons maintenant si ces trois éléments appartiennent à l'ensemble $\Xi_{\mathbf{T}, \bar{\chi}}$ *i.e.* s'ils vérifient la condition (2).

- $g = I_n$. Calculons la fonction $\epsilon_{\mathbf{T}}$. Tout d'abord,

$$(\mathbf{T} \cap \mathcal{G}^{\bar{\theta}})^{\circ} = (\mathbf{T} \cap GL(m, k_E))^{\circ} = \mathbf{T}^{\circ} = \mathbf{T} \text{ (}\mathbf{T} \text{ est un tore donc connexe)}.$$

De plus, \mathbf{T} est un tore maximal donc $Z_{\mathcal{G}}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$. D'autre part, pour $s \in \mathbf{T}$, $Z_{Z_s}(\mathbf{T}) = Z_{\mathcal{G}}(\{s\} \cup \mathbf{T}) = Z_{\mathcal{G}}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$. Ainsi, $\epsilon_{\mathbf{T}}(s) = (\sigma(\mathbf{T}))^2 = 1$ pour tout s dans \mathbf{T} .

La condition (2) est donc vérifiée si et seulement si

$$\bar{\chi} = 1.$$

Cette dernière condition contredit la régularité de $\bar{\chi}$. L'élément $g = I_n$ ne contribue donc pas à la distinction de $\bar{\pi}_{\bar{\chi}}$.

- $g = \Lambda_0$. À nouveau la fonction $\epsilon_{\Lambda_0^{-1}\mathbf{T}\Lambda_0}$ vaut 1. En effet, Λ_0 normalise $\mathcal{H} = GL(m, k_E)$ donc $\mathbf{T} \cap \Lambda_0 \mathcal{G}^{\bar{\theta}} \Lambda_0^{-1} = \mathbf{T}$. Alors,

$$\Lambda_0^{-1}\mathbf{T}\Lambda_0 \cap \mathcal{H} = \Lambda_0^{-1}(\mathbf{T} \cap \Lambda_0 \mathcal{H} \Lambda_0^{-1})\Lambda_0 = \Lambda_0^{-1}\mathbf{T}\Lambda_0$$

qui est un tore maximal donc qui vérifie

$$Z_{\mathcal{G}}(\Lambda_0 \mathbf{T} \Lambda_0^{-1}) = \Lambda_0 \mathbf{T} \Lambda_0^{-1} = Z_{Z_s}(\Lambda_0 \mathbf{T} \Lambda_0^{-1}) \text{ pour tout } s \text{ dans } \Lambda_0 \mathbf{T} \Lambda_0^{-1}.$$

Ainsi, la condition (2) est vérifiée si et seulement si $\bar{\chi} = 1$. A nouveau, cela contredit la régularité de $\bar{\chi}$, ainsi $g = \Lambda_0$ ne contribue pas à la distinction de $\bar{\pi}_{\bar{\chi}}$.

- $g = x_0$. Déterminons $\mathbf{T} \cap x_0 \mathcal{H} x_0^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 \text{pour } t \in \mathbf{T}, t \in \mathbf{T} \cap x_0 \mathcal{H} x_0^{-1} &\Leftrightarrow x_0^{-1} t x_0 \in x_0^{-1} \mathbf{T} x_0 \cap \mathcal{H} \\
 &\Leftrightarrow \bar{U} x_0^{-1} t x_0 \bar{U}^{-1} = x_0^{-1} t x_0 \\
 &\Leftrightarrow (x_0 \bar{U} x_0^{-1}) t = t (x_0 \bar{U} x_0^{-1}) \\
 &\Leftrightarrow t_0 g_0^m t = t t_0 g_0^m \\
 &\Leftrightarrow t_0 \text{Frob}_{k_L/k_{L_0}}(t) = t t_0 = t_0 t \\
 &\quad \text{car } t_0 \in \mathbf{T} \text{ qui est commutatif} \\
 &\Leftrightarrow t \in k_{L_0}^*
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{T} \cap x_0 \mathcal{H} x_0^{-1} = k_{L_0}^*$. On calcule ensuite la fonction $\epsilon_{x_0^{-1} \mathbf{T} x_0}$. Tout d'abord, $x_0^{-1} \mathbf{T} x_0 \cap \mathcal{H} = x_0^{-1} k_{L_0}^* x_0$, c'est un tore donc connexe, d'où $(x_0^{-1} k_{L_0}^* x_0)^\circ = x_0^{-1} k_{L_0}^* x_0$ et finalement, $Z_{Z_s}(x_0^{-1} k_{L_0}^* x_0) = Z_{\mathcal{G}}(x_0^{-1} k_{L_0}^* x_0)$ pour tout s dans $x_0^{-1} k_{L_0}^* x_0$. On obtient alors que la fonction $\epsilon_{x_0^{-1} \mathbf{T} x_0}$ vaut 1. On en conclut que l'élément $g = x_0$ appartient à $\Xi_{\mathbf{T}, \bar{\chi}}$ si et seulement si $\bar{\chi}|_{k_{L_0}^*} = 1$.

On en déduit que $\bar{\pi}_{\bar{\chi}}$ est distinguée si et seulement si $\bar{\chi}|_{k_{L_0}^*} = 1$. Calculons dans ce cas la dimension de $\text{Hom}_H(\bar{\pi}_{\bar{\chi}}, 1)$. Pour cela, on utilise la formule de dimension (2.2). Le tore k_F^* étant le plus grand tore k_F -déployé de \mathbf{T} , le k_F -rang de \mathbf{T} vaut donc 1 *i.e.* $\sigma(\mathbf{T}) = -1$. De plus, k_L étant de dimension 2 sur k_{L_0} , le k_F -rang de $Z_{\mathcal{G}}(x_0^{-1} k_{L_0}^* x_0)$ vaut 2 donc $\dim(\text{Hom}_{\mathcal{H}}(R_{\mathbf{T}}^{\bar{\chi}}, 1)) = -1$ *i.e.* la multiplicité du caractère trivial dans $\bar{\pi}_{\bar{\chi}}$ est 1 (car $R_{\mathbf{T}}^{\bar{\chi}} = -\bar{\pi}_{\bar{\chi}}$). □

On peut alors remonter cette dernière condition au niveau des corps initiaux et conclure sur le problème de distinction lorsque μ se factorise par la norme $N_{E/F}$.

Théorème 2.5. *Pour $n = 2m$, on rappelle que $G = GL(n, F)$ et $H = GL(m, E)$. Soit L_0 l'unique extension non ramifiée de F de degré m incluse dans L . Pour μ un caractère de E^* vérifiant $\mu|_{1+\mathcal{P}_E} = 1$ et tel qu'il existe ρ un caractère de F^* tel que $\mu = \rho \circ N_{E/F}$, la représentation $\pi(\chi)$ est $\mu \circ \text{Nrd}_E$ -distinguée par H si et seulement si E/F est non ramifiée et $\chi|_{L_0^*} = \mu \circ N_{L/E}|_{L_0^*}$.*

Démonstration. C'est évident en utilisant le fait que L_0^* est le produit direct $\langle \varpi_F \rangle \times \mathcal{F}_{L_0} \times (1 + \mathcal{P}_{L_0})$ où \mathcal{F}_{L_0} est le sous-groupe de L_0^* tel que $\mathcal{F}_{L_0} \cup \{0\}$ soit un système de représentants de \mathcal{O}_{L_0} modulo \mathcal{P}_{L_0} (\mathcal{O}_{L_0} et \mathcal{P}_{L_0} désignant respectivement l'anneau des entiers de L_0 et son idéal maximal). Cela prouve que $\pi(\chi)$ est distinguée par H si et seulement si E/F est non ramifiée et $\chi|_{L_0^*} = 1$.

On conclut en montrant que dans le cas où μ se factorise par la norme ($\mu = \rho \circ N_{E/F}$), la μ_E -distinction de $\pi(\chi)$ est équivalente à la distinction de $\pi(\chi \rho^{-1} \circ N_{L/F})$. En effet, puisque E/F est une extension cyclique modérément ramifiée, $N_{E/F}(1 + \mathcal{P}_E) = 1 + \mathcal{P}_F$ donc comme $\mu(1 + \mathcal{P}_E) = 1$, alors $\rho(1 + \mathcal{P}_F) = 1$,

d'où $(\rho \circ \det_{GL(n,F)}) \otimes \pi(\chi) = \pi(\chi\rho \circ N_{L/F})$.

De plus,

$$\mu \circ \det_{GL(m,E)} = \rho \circ N_{E/F} \circ \det_{GL(m,E)} = \rho \circ \det_{GL(n,F)|_{GL(m,E)}}$$

donc considérer la μ_E -distinction de $\pi(\chi)$ revient à considérer la distinction de $\pi(\chi\rho^{-1} \circ N_{L/F})$ et on obtient le résultat annoncé. \square

2.2 Propriétés du paramètre de Langlands et vérification de la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash

Nous allons vérifier la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash (ref.0.1) pour les représentations cuspidales de niveau 0 de $GL(n, F)$ (pour n pair) en supposant que $\mu(1 + \mathcal{P}_E) = 1$ et que μ se factorise par la norme (*i.e.* il existe ρ un caractère de F^* tel que $\mu = \rho \circ N_{E/F}$).

On commencera par caractériser la μ -symplecticité, puis on vérifiera la conjecture sous les hypothèses supplémentaires énoncées ci-dessus.

Pour trouver ces résultats, on doit connaître le paramètre de Langlands de $\pi(\chi)$ et on lit dans le théorème 2 de [BH11] que celui-ci est donné par : $Ind_{W_L}^{W_F}(\eta\chi)$ où η est le caractère quadratique non ramifié de L^* et W_L est le groupe de Weil de L . Rappelons que L_0 est l'unique extension non ramifiée de degré m de F incluse dans L .

2.2.1 Caractérisation de la μ -symplecticité

Rappelons que $\pi(\chi)$ est μ -symplectique s'il existe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur \mathbb{C}^n qui est préservée par son paramètre de Langlands $\phi := Ind_{W_L}^{W_F}(\eta\chi)$ avec facteur de similitude $\mu|_{F^*}$:

$$\langle \phi(w)v, \phi(w)v' \rangle = \mu(w) \langle v, v' \rangle \quad \text{pour tous } w \in W_F, v, v' \in \mathbb{C}^n.$$

Donnons une caractérisation de la μ -symplecticité de $\pi(\chi)$.

Proposition 2.2. $\pi(\chi)$ est μ -symplectique si et seulement si $\chi|_{L_0^*} = \mu \circ N_{L_0/F}$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\pi(\chi)$ est μ -symplectique. Fixons une base de \mathbb{C}^n telle que la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans cette base soit $J = \begin{pmatrix} (0) & I_m \\ -I_m & (0) \end{pmatrix}$ et notons $M(w)$ la matrice de $\phi(w)$ dans cette même base. La μ -symplecticité se voit alors matriciellement : ${}^tM(w)JM(w) = \mu|_{F^*}(w)J$ pour tout w dans W_F . En utilisant les propriétés du Pfaffien (Pf), on trouve

$$\det(M(w))\text{Pf}(J) = \text{Pf}({}^tM(w)JM(w)) = \text{Pf}(\mu|_{F^*}(w)J) = \mu|_{F^*}^m(w)\text{Pf}(J) \quad \forall w \in W_F$$

et comme $\text{Pf}(J) \neq 0$, on en déduit que $\det(\phi) = \mu|_{F^*}^m$.

D'autre part, par la propriété universelle du produit tensoriel, la forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fournit une forme linéaire non nulle $\mu|_{F^*}$ -équivariante sur $\phi \otimes \phi$. La μ -symplecticité de $\pi(\chi)$ implique donc que $\check{\phi} \simeq \mu|_{F^*}^{-1} \otimes \phi$. Or,

$$\begin{aligned}
 \check{\phi} \simeq \mu|_{F^*}^{-1} \otimes \phi &\Leftrightarrow \pi(\chi^{-1}) \simeq \pi(\chi\mu^{-1} \circ N_{L/F}) \quad \text{car } \mu(1 + \mathcal{P}_F) = 1 \\
 &\Leftrightarrow \exists \gamma \in \text{Gal}_F(L) \setminus \{id_L\} \text{ tel que } \chi^{-1} = (\chi\mu^{-1} \circ N_{L/F}) \circ \gamma \\
 &\Leftrightarrow \exists \gamma \in \text{Gal}_F(L) \setminus \{id_L\} \text{ tel que } (\chi \circ \gamma)\chi = \mu \circ N_{L/F} \\
 &\Rightarrow \exists \gamma \in \text{Gal}_F(L) \setminus \{id_L\} \text{ tel que } \chi = \chi \circ \gamma^2 \\
 &\hspace{10em} \text{en réinjectant } \chi \text{ dans } \chi \circ \gamma \text{ puis en simplifiant} \\
 &\Rightarrow \gamma^2 = id_L \text{ i.e. } \gamma \in \text{Gal}_{L_0}(L) \text{ car } \chi \text{ est admissible.}
 \end{aligned}$$

De plus, $\gamma \neq id_L$, sinon on aurait $\chi^2 = \mu \circ N_{L/F}$. Dans ce cas, on aurait $\chi \circ \text{Frob}_{L/F}^m = (\chi^{-1} \circ \text{Frob}_{L/F}^m)(\mu \circ N_{L/F})$ ce qui implique $\mu \circ N_{L/F} = 1$ (car $\chi^{-1} \circ \text{Frob}_{L/F}^m = \chi \circ \text{Frob}_{L/F}^m$). On en déduit alors que χ est quadratique. Alors $\chi(\varpi_F \text{Frob}_{L/F}^{-1}(\varpi_F)) = 1$; pour $x \in \mathcal{F}_L$, $\chi(x \text{Frob}_{L/F}^{-1}(x)) = \chi(x^{1-q_F}) = 1$ car $1 - q_F$ est pair; pour $x' \in 1 + \mathcal{P}_L$, $\chi(x' \text{Frob}_{L/F}^{-1}(x')) = 1$ car χ est modéré. Ainsi, par le théorème 90 de Hilbert, on en déduit que χ se factorise par $N_{L/F}$ et χ est donc invariant sous $\text{Gal}_F(L)$, ce qui contredit l'admissibilité de χ .

Réciproquement, supposons $\det(\phi) = \mu|_{F^*}^m$ et $\chi^{-1} = \chi^{\gamma_0} \mu^{-1} \circ N_{L/F}$, où γ_0 engendre $\text{Gal}_{L_0}(L)$. Cela implique $\check{\phi} \simeq \mu|_{F^*}^{-1} \otimes \phi$ i.e. $\rho^{-1} \otimes \phi$ auto-dual (car $\mu|_{F^*} = \rho^2$). On peut alors utiliser le paragraphe 6.1 de [BHS17] et déduire que $\rho^{-1} \otimes \phi$ est symplectique, c'est-à-dire ϕ est $\mu|_{F^*}$ -symplectique. En effet, le paragraphe 6.1 de [BHS17] affirme que si $\phi' := \rho^{-1} \otimes \phi$ était orthogonal, alors $v\phi'$ serait symplectique où v est un caractère non ramifié d'ordre $2n$ de W_F . Cela impliquerait $\det(v\phi') = 1$ donc $\det(\phi) = v^n \mu|_{F^*}^m$, ce qui contredit l'hypothèse.

On conclut en remarquant que $\det(\phi) = \chi|_{F^*}$ et que $\chi^{-1} = \chi^{\gamma_0} \mu^{-1} \circ N_{L/F}$ est équivalent à $\chi \circ N_{L/L_0} = \mu \circ N_{L/F}$. Ainsi, $\det(\phi) = \mu|_{F^*}^m$ et $\chi^{-1} = \chi^{\gamma_0} \mu^{-1} \circ N_{L/F}$ est équivalent à $\chi|_{L_0^*} = \mu \circ N_{L_0/F}$ et on obtient la condition annoncée. □

2.2.2 Vérification de la conjecture sous hypothèses supplémentaires

On suppose que μ se factorise par la norme i.e. il existe ρ un caractère de F^* tel que $\mu = \rho \circ N_{E/F}$ (et on a toujours $\mu(1 + \mathcal{P}_E) = 1$).

Pour simplifier les calculs, on peut supposer $\mu = 1$. En effet, on a déjà vu dans la preuve du théorème 2.1.3 que l'étude de la μ_E -distinction de $\pi(\chi)$ était équivalente à l'étude de la distinction de $\pi(\chi\rho^{-1} \circ N_{L/F})$. De plus, $\mu|_{F^*} = \rho^2$ donc il est clair que $\pi(\chi)$ est μ -symplectique si et seulement si $\pi(\chi\rho^{-1} \circ N_{L/F})$ est symplectique. Enfin, pour le calcul du facteur ϵ , lorsque E/F est non ramifiée, on a :

$$\begin{aligned}
& \pi(\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\rho^{-1} \circ N_{E/F}) \\
= & \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\rho^{-1} \circ N_{E/F}) \\
= & \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\rho^{-1} \circ N_{E/F} \otimes \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi)|_{W_E}) \\
= & \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\rho^{-1} \circ N_{E/F} \otimes (\text{Ind}_{W_L}^{W_E}(\eta\chi) \oplus \text{Ind}_{W_L}^{W_E}((\eta\chi)^\gamma))) \\
& \text{par la formule de restriction de Mackey avec } \gamma \in W_F \text{ tel que } \langle \gamma|_L \rangle = \text{Gal}_F(L) \\
= & \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\text{Ind}_{W_L}^{W_E}(\eta\chi\rho^{-1} \circ N_{L/F}) \oplus \text{Ind}_{W_L}^{W_E}((\eta\chi\rho^{-1} \circ N_{L/F})^\gamma)) \text{ car } N_{L/F} \circ \gamma = N_{L/F} \\
= & \pi(\chi\rho^{-1} \circ N_{L/F}) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(1).
\end{aligned}$$

Lorsque E/F est ramifiée, on calcule :

$$\begin{aligned}
& \pi(\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\rho^{-1} \circ N_{E/F}) \\
= & \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\rho^{-1} \circ N_{E/F} \otimes \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi)|_{W_E}) \\
= & \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\rho^{-1} \circ N_{E/F} \otimes \text{Ind}_{W_M}^{W_E}((\eta\chi) \circ N_{M/L})) \\
& \text{par la formule de restriction de Mackey avec } M = \langle L, E \rangle \\
= & \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\text{Ind}_{W_M}^{W_E}(((\eta\chi) \circ N_{M/L})(\rho^{-1} \circ N_{L/F} \circ N_{M/L}))) \\
= & \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi\rho^{-1} \circ N_{L/F}) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(1).
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut simplifier les calculs en considérant uniquement $\mu = 1$.

Maintenant qu'on peut supposer $\mu = 1$, la condition de distinction s'écrit : la représentation $\pi(\chi)$ est H -distinguée si et seulement si E/F est non ramifiée et $\chi|_{L_0^*} = 1$; la condition de symplecticité s'écrit : la représentation $\pi(\chi)$ est symplectique si et seulement si $\chi|_{L_0^*} = 1$ donc distinction et symplecticité sont équivalentes dans le cas non ramifié.

Afin de vérifier la conjecture de Prasad et Takloo-Bighash pour les cuspidales de niveau 0 de $GL(2m, F)$ (sous l'hypothèse $\mu = 1$), il suffit de retrouver la valeur annoncée dans le calcul du facteur ϵ sous l'hypothèse $\chi|_{L_0^*} = 1$ pour E/F non ramifiée. Pour E/F ramifiée, il suffit de supposer que $\pi(\chi)$ est symplectique (*i.e.* $\chi|_{L_0^*} = 1$) et de trouver un facteur ϵ différent de celui annoncé dans la conjecture.

Pour K_1/K une extension finie de corps locaux non archimédiens, on note \mathcal{O}_K l'anneau des entiers, \mathcal{P}_K son idéal principal et \mathcal{F}_K le sous-groupe de K^* tel que $\mathcal{F}_K \cup \{0\}$ soit un système de représentants de \mathcal{O}_K modulo \mathcal{P}_K . Soit ψ un caractère additif non trivial de K . La fonction $\lambda_{K_1/K}(\psi)$ désigne la constante de Langlands, $\omega_{K_1/K}$ désigne $\det(\text{Ind}_{W_{K_1}}^{W_K}(1_{K_1}))$ et on a la relation $\lambda_{K_1/K}^2(\psi) = \omega_{K_1/K}(-1)$. On rappelle la relation 2.5.3 de [Moy86] : si K_1/K est non ramifiée et $[K_1/K] = n$, alors

$$\lambda_{K_1/K}(\psi) = (-1)^{n-1}. \quad (2.3)$$

Pour ψ un caractère additif de K , on note $\psi_{K_1} = \psi \circ \text{Tr}_{K_1/K}$. Rappelons que ψ est de conducteur \mathcal{P}_K^α si α est le plus petit entier $k \geq 0$ vérifiant $\psi(\mathcal{P}_K^k) = 1$. Si ψ est de

conducteur \mathcal{P}_K^1 et si K_1/K est modérément ramifiée, alors ψ_{K_1} est de conducteur $\mathcal{P}_{K_1}^1$ (la formule se trouve par exemple dans le corollaire 3, chapitre VIII, §1 de [Wei74]). On rappelle également la propriété suivante (voir par exemple l'exercice 8 (c) du chapitre 7 - Tate's Thesis and Applications - de [RV99]) : pour ψ un caractère additif de K de conducteur \mathcal{P}_K^α , pour ρ un caractère de K^* de conducteur \mathcal{P}_K^β (i.e. β est le plus petit entier $k \geq 0$ tel que $\rho(1 + \mathcal{P}_K^k) = 1$) et ν un caractère non ramifié de K^* ,

$$\epsilon(s, \nu\rho, \psi) = \nu(\varpi_K^{\alpha+\beta})\epsilon(s, \rho, \psi) \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

Théorème 2.6. *Supposons $\chi|_{L_0^*} = 1$. Soit ψ un caractère additif de F de conducteur \mathcal{P}_F^1 , i.e. $\psi(\varpi_F \mathcal{O}_F) = 1$ et $\psi(\mathcal{O}_F) \neq 1$ (en particulier ψ est non trivial).*

- Si E/F est non ramifiée, alors $\epsilon(\frac{1}{2}, \pi(\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(1), \psi) = \omega_{E/F}(-1)^m$.
- Si E/F est ramifiée, alors $\epsilon(\frac{1}{2}, \pi(\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(1), \psi) = -\omega_{E/F}(-1)^m$.

Démonstration. Les calculs sont un peu différents dans les cas ramifié et non ramifié. Distinguons les cas.

- **cas E/F non ramifiée.** On rappelle la situation : E est inclus dans L et éventuellement dans L_0 selon la parité de m .

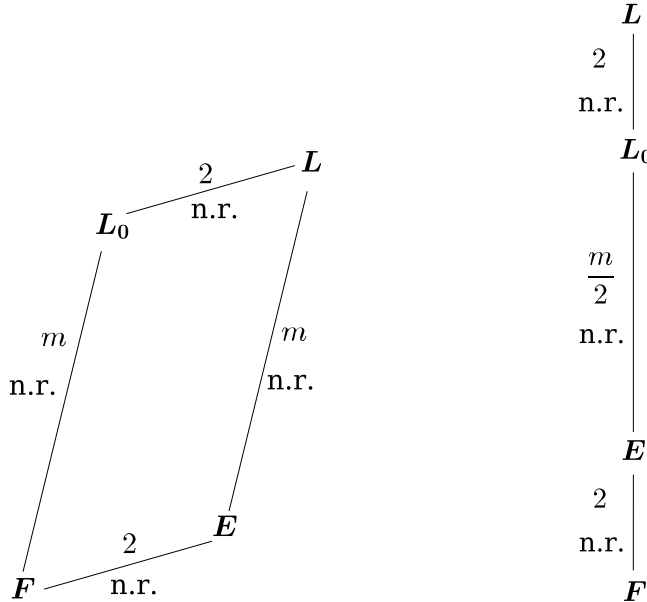


FIGURE 2.3 – Schéma des extensions mises en jeu - cas E/F non ramifiée - m impair (à gauche) et m pair (à droite)

On calcule $\epsilon(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(1), \psi)$

$$\begin{aligned}
 &= \epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi)|_{W_E}), \psi\right) \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi)\epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi)|_{W_E}, \psi_E\right) \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi)\epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_E}(\eta\chi) \oplus \text{Ind}_{W_L}^{W_E}((\eta\chi)^\gamma), \psi_E\right) \\
 &\quad \text{par la formule de restriction de Mackey avec } \gamma \in W_F \text{ tel que} \\
 &\quad \gamma|_L = \text{Frob}_{L/F} \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi)\epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_E}(\eta\chi), \psi_E\right)\epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_E}((\eta\chi)^\gamma), \psi_E\right) \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi)\lambda_{L/E}^2(\psi_E)\epsilon\left(\frac{1}{2}, \eta\chi, \psi_L\right)\epsilon\left(\frac{1}{2}, \eta\chi^\gamma, \psi_L\right) \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi)\lambda_{L/E}^2(\psi_E)\eta^2(\varpi_L^{1+1})\epsilon\left(\frac{1}{2}, \chi, \psi_L\right)\epsilon\left(\frac{1}{2}, \chi^\gamma, \psi_L\right) \text{ par la relation (2.4)} \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi)\lambda_{L/E}^2(\psi_E)\epsilon\left(\frac{1}{2}, \chi, \psi_L\right)\epsilon\left(\frac{1}{2}, \chi^\gamma, \psi_L\right) \text{ car } \eta \text{ est quadratique}
 \end{aligned}$$

On termine le calcul en utilisant un résultat de Fröhlich et Queyrut (théorème 3 dans [FQ73]) : puisque L/L_0 est quadratique et $\chi|_{L_0^*} = 1$, étant donné $v \in L \setminus L_0$ tel que $v^2 \in L_0$ de sorte que $L = L_0[v]$, on obtient $\epsilon(\frac{1}{2}, \chi, \psi_L) = \chi(v)$ (de même $\epsilon(\frac{1}{2}, \chi^\gamma, \psi_L) = \chi^\gamma(v)$).

Choisissons un tel v : comme L/F est non ramifiée de dimension $2m$, on peut fixer $\xi \in L^*$ une racine de l'unité d'ordre $q^{2m} - 1$ (où $q := q_F$). Ainsi, $L = F[\xi]$. De plus, $\xi^{q^{m+1}}$ est d'ordre $q^m - 1$ donc $\xi^{q^{m+1}}$ appartient à L_0 , contrairement à $\xi^{\frac{q^{m+1}}{2}}$. On pose alors $v = \xi^{\frac{q^{m+1}}{2}}$ qui vérifie $L = L_0[v]$. De plus, on sait que $\text{Frob}_{L/F}(\xi) = \xi^q$ donc

$$v\text{Frob}_{L/F}(v) = \xi^{\frac{q^{m+1}}{2}} \xi^{\frac{q^{m+1}+q}{2}} = \xi^{\frac{(q^{m+1})(q+1)}{2}} \in L_0^* \text{ car } \frac{q+1}{2} \text{ est un entier.}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(1), \psi\right) &= \lambda_{E/F}^n(\psi)\lambda_{L/E}^2(\psi_E)\chi(v\text{Frob}_{L/F}(v)) \\
 &= \omega_{E/F}^m(-1)\omega_{L/E}(-1) \text{ car } \chi|_{L_0^*} = 1
 \end{aligned}$$

Finalement, comme L/E est non ramifiée, $\lambda_{L/E}$ vaut une certaine puissance de -1 , en particulier $\omega_{L/E}(-1) = 1$ d'où $\epsilon(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(1), \psi) = \omega_{E/F}^m(-1)$ ce qui prouve la conjecture dans ce cas.

- **cas E/F ramifiée.** Dans ce cas, E n'est pas inclus dans L . Posons M l'extension de L engendrée par L et E , M est donc non ramifiée sur E , de dimension n . On pose également $L_1 = \langle E, L_0 \rangle$ de sorte que M est une extension quadratique non ramifiée de L_1 . On est dans la situation suivante :

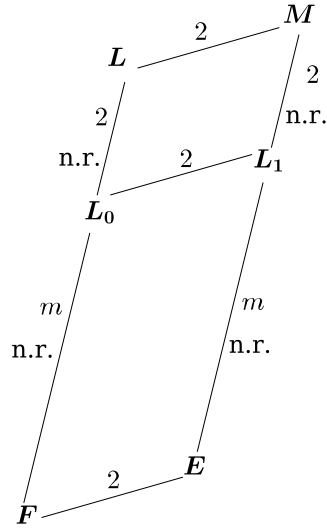


FIGURE 2.4 – Schéma des extensions mises en jeu - cas E/F ramifiée

On calcule $\epsilon(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(1), \psi)$

$$\begin{aligned}
 &= \epsilon(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi)|_{W_E}), \psi) \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi) \epsilon(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi)|_{W_E}, \psi_E) \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi) \epsilon(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_M}^{W_E}((\eta\chi) \circ N_{M/L}), \psi_E) \\
 &\quad \text{par la formule de restriction de Mackey} \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi) \lambda_{M/E}(\psi_E) \epsilon(\frac{1}{2}, (\eta\chi) \circ N_{M/L}, \psi_M) \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi) \lambda_{M/E}(\psi_E) (\eta^{1+1} \circ N_{M/L})(\varpi_E) \epsilon(\frac{1}{2}, \chi \circ N_{M/L}, \psi_M) \\
 &\quad \text{par la relation (2.4)} \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi) \lambda_{M/E}(\psi_E) \epsilon(\frac{1}{2}, \chi \circ N_{M/L}, \psi_M) \text{ car } \eta \text{ est quadratique}
 \end{aligned}$$

À nouveau, on va utiliser le résultat de Fröhlich-Queyruet. L'extension M/L_1 est quadratique et $N_{M/L}$ restreinte à L_1 est N_{L_1/L_0} , ainsi $\chi \circ N_{M/L}$ est trivial sur L_1 . De plus, il existe $u \in L \setminus L_0$ avec $u^2 \in L_0$ tel que $L = L_0[u]$. Alors,

$M = L_1[u]$ et on peut appliquer le théorème 3 de [FQ73] :

$$\begin{aligned}
 & \epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(1), \psi\right) \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi)\lambda_{M/E}(\psi_E)\chi \circ N_{M/L}(u) \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi)\lambda_{M/E}(\psi_E)\chi(u^2) \\
 &= \lambda_{E/F}^n(\psi)\lambda_{M/E}(\psi_E) \text{ car } u^2 \in L_0^* \text{ et } \chi|_{L_0^*} = 1 \\
 &= -\omega_{E/F}^m(-1) \text{ en utilisant la relation (2.3) car } M/E \text{ est non ramifiée}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(1), \psi\right) \neq \omega_{E/F}^m(-1)$ ce qui prouve la conjecture dans ce cas car il n'y a pas de distinction pour E/F ramifiée.

□

Pour résumer, on a obtenu le théorème suivant.

Théorème 2.7 (conjecture de P-TB, cas des cuspidales de niveau 0 de $GL(2m, F)$, hypothèses supplémentaires sur μ). *Soit $\pi(\chi)$ une représentation cuspidale de niveau 0 de $GL(2m, F)$, soit μ un caractère de E^* qui vérifie les hypothèses supplémentaires $\mu(1 + \mathcal{P}_E) = 1$ et il existe ρ un caractère de F^* tel que $\mu = \rho \circ N_{E/F}$. Alors $\pi(\chi)$ est $\mu \circ \det_{GL(m, E)}$ -distinguée par $H = GL(m, E)$ si et seulement si*

1. $\pi(\chi)$ est $\mu|_{F^*}$ -symplectique ;
2. $\epsilon\left(\frac{1}{2}, \text{Ind}_{W_L}^{W_F}(\eta\chi) \otimes \text{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu^{-1})\right) = \omega_{E/F}(-1)^m \mu(-1)^m$.

Bibliographie

- [BD08] P. Blanc and P. Delorme. Vecteurs distributions H-invariants de représentations induites, pour un espace symétrique réductif p -adique G/H . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58 :1, 2008. 15, 22
- [BF85] C. J. Bushnell and A. Fröhlich. Nonabelian congruence Gauss sums and p -adic simple algebras. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 50(2) :207–264, 1985. 29
- [BH06] Colin J. Bushnell and Guy Henniart. *The local Langlands conjecture for $GL(2)$* , volume 335 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 25, 26
- [BH11] Colin J. Bushnell and Guy Henniart. Explicit functorial correspondences for level zero representations of p -adic linear groups. *J. Number Theory*, 131(2) :309–331, 2011. 28, 41
- [BHS17] Corinne Blondel, Guy Henniart, and Shaun Stevens. Jordan blocks of cuspidal representations of symplectic groups. *Algebra & Number Theory*, 12, 04 2017. 42
- [BL02] P. Broussous and B. Lemaire. Building of $GL(m, D)$ and centralizers. *Transform. Groups*, 7(1) :15–50, 2002. 32, 33
- [BS17] Paul Broussous and Peter Schneider. Type theory and coefficient systems on the building. *Bull. Soc. Math. France*, 145(1) :97–159, 2017. 32, 33
- [BZ76] J. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky. Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field. *Uspekhi Mat. Nauk*, 31 :3, 1976. 9
- [BZ77] J. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p -adic groups. *Ann. Sc. E.N.S.*, 1977. 8
- [CG14] Charlène Coniglio-Guillot. *Correspondance de Jacquet-Langlands et distinction*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2014. 6, 39
- [Cho19] Marion Chommaux. Distinction of the steinberg representation and a conjecture of prasad and takloo-bighash. *Journal of Number Theory*, 202 :200 – 219, 2019. 4, 12
- [DL76] P. Deligne and G. Lusztig. Representations of reductive groups over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 103(1) :103–161, 1976. 38
- [FMW18] Brooke Feigon, Kimball Martin, and David Whitehouse. Periods and non-vanishing of central L -values for $GL(2n)$. *Israel J. Math.*, 225(1) :223–266, 2018. 2, 4, 25

- [FQ73] A. Fröhlich and J. Queyrut. On the functional equation of the Artin L -function for characters of real representations. *Invent. Math.*, 20 :125–138, 1973. 45, 47
- [Gar97] Paul Garrett. *Buildings and classical groups*. Chapman & Hall, London, 1997. 29
- [GJ72] R. Godement and H. Jacquet. Zeta functions of simple algebras. *Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York*, 260, 1972. 25
- [Gre55] J. A. Green. The characters of the finite general linear groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 :402–447, 1955. 28
- [Guo97] Jiandong Guo. Uniqueness of generalized Waldspurger model for $GL(2n)$. *Pacific J. Math.*, 180(2) :273–289, 1997. 4
- [HM] Jeffrey Hakim and Fiona Murnaghan. Distinguished tame supercuspidal representations. *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, (2) :Art. ID rpn005, 166. 34
- [HW93] A. Helminck and S. Wang. On rationality properties of involutions of reductive groups. *Adv. Math.*, 99 :1, 1993. 9
- [KT08] S. Kato and K. Takano. Subrepresentation theorem for p -adic symmetric spaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2008 :11, 2008. 11, 20
- [Lus90] George Lusztig. Symmetric spaces over a finite field. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, volume 88 of *Progr. Math.*, pages 57–81. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990. 37
- [Mat11] Nadir Matringe. Distinguished generic representations of $GL(n)$ over p -adic fields. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2011 :1, 2011. 10, 11, 12, 20
- [Mat15] Nadir Matringe. On the local Bump-Friedberg L -function. *J. Reine Angew. Math.*, 709 :119–170, 2015. 15
- [Mat17] Nadir Matringe. Distinction of the Steinberg representation for inner forms of $GL(n)$. *Math. Z.*, 287(3-4) :881–895, 2017. 4, 8, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 19, 22
- [Moy86] Allen Moy. Local constants and the tame Langlands correspondence. *Amer. J. Math.*, 108(4) :863–930, 1986. 43
- [Pra99] Dipendra Prasad. Some remarks on representations of a division algebra and of the Galois group of a local field. *J. Number Theory*, 74(1) :73–97, 1999. 2, 4
- [PTB11] Dipendra Prasad and Ramin Takloo-Bighash. Bessel models for $GSp(4)$. *J. Reine Angew. Math.*, 655 :189–243, 2011. 2, 23
- [RV99] Dinakar Ramakrishnan and Robert J. Valenza. *Fourier analysis on number fields*, volume 186 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999. 44
- [Sai93] Hiroshi Saito. On Tunnell’s formula for characters of $GL(2)$. *Compositio Math.*, 85(1) :99–108, 1993. 2
- [SZ05] Allan J. Silberger and Ernst-Wilhelm Zink. An explicit matching theorem for level zero discrete series of unit groups of p -adic simple algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 585 :173–235, 2005. 6

- [Tun83] Jerrold B. Tunnell. Local ϵ -factors and characters of $GL(2)$. *Amer. J. Math.*, 105(6) :1277–1307, 1983. 2
- [Wei74] André Weil. *Basic number theory*. Springer-Verlag, New York-Berlin, third edition, 1974. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 144. 33, 44
- [XBP18] Hang Xue and Raphaël Beuzart-Plessis. Relating invariant linear forms to root numbers via character expansion : epsilon dichotomy for linear models. *Preprint*, 2018. 2

Représentations distinguées et conjecture de Prasad et Takloo-Bighash

Résumé

Soient E/F une extension quadratique de corps locaux non archimédiens de caractéristique différente de 2, μ un caractère de E^* et D une F -algèbre à division centrale. On considère l'espace réductif symétrique $GL(n, D)/(C_{\mathcal{M}_n(D)}(E))^\times$ où $C_{\mathcal{M}_n(D)}(E)$ désigne le centralisateur de E dans $\mathcal{M}_n(D)$. On s'intéresse à une conjecture de Prasad et Takloo-Bighash qui relie la μ -distinction par $(C_{\mathcal{M}_n(D)}(E))^\times$ des représentations membres de la série discrète de $GL(n, D)$ à certains paramètres galoisiens. En déterminant complètement les conditions de distinction, on vérifie cette conjecture pour la représentation de Steinberg de $GL(n, D)$ et pour les représentations cuspidales de niveau 0 de $GL(2m, F)$ sous certaines hypothèses supplémentaires.

Mots clés : distinction, symplecticité, facteur ϵ , immeuble de Bruhat-Tits.

Distinguished representations and conjecture of Prasad and Takloo-Bighash

Abstract

Let E/F be a quadratic extension of non-archimedean local fields of characteristic not 2, let μ be a character of E^* and D a central division F -algebra. Let us consider the reductive symmetric space $GL(n, D)/(C_{\mathcal{M}_n(D)}(E))^\times$ where $C_{\mathcal{M}_n(D)}(E)$ denotes the centralizer of E in $\mathcal{M}_n(D)$. We focus on a conjecture of Prasad and Takloo-Bighash which links μ -distinction by $(C_{\mathcal{M}_n(D)}(E))^\times$ of discrete series representations of $GL(n, D)$ to some Galois parameters. By completely determining the distinction conditions, we verify this conjecture for the Steinberg representation of $GL(n, D)$ and for depth 0 cuspidal representations of $GL(2m, F)$, under some additional hypotheses.

Key words : distinction, symplecticity, ϵ factor, Bruhat-Tits building.