



**HAL**  
open science

# Théorèmes ergodiques, actions de groupes et représentations unitaires

Antoine Pinochet Lobos

► **To cite this version:**

Antoine Pinochet Lobos. Théorèmes ergodiques, actions de groupes et représentations unitaires. Mathématiques [math]. Aix-Marseille Université (AMU), 2019. Français. NNT: . tel-02530349

**HAL Id: tel-02530349**

**<https://theses.hal.science/tel-02530349v1>**

Submitted on 2 Apr 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE DE MARSEILLE -  
ED184

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE - I2M - UMR 7373

## THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

Présentée par

**Antoine Pinochet Lobos**

Pour obtenir le grade universitaire de

**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ d'AIX-MARSEILLE**

---

### **Théorèmes ergodiques, actions de groupes et représentations unitaires**

---

Soutenue publiquement le vendredi 21 juin devant le jury composé de :

Pierre-Emmanuel CAPRACE	Université Catholique de Louvain	Rapporteur
Indira CHATTERJI	Université de Nice	Examinatrice
Pierre MATHIEU	Aix-Marseille Université	Examinateur
Christophe PITTET	Aix-Marseille Université	Directeur
Jean-François QUINT	Université de Bordeaux	Examinateur

et sur avis de :

Emmanuel BREUILLARD	University of Cambridge	Rapporteur
---------------------	-------------------------	------------



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Quelques conventions d'écriture</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé en français</b>	<b>v</b>
0.1 Discrépance . . . . .	v
0.2 Un théorème ergodique sur le groupe libre . . . . .	viii
0.3 Propriété de Howe-Moore relative . . . . .	xi
0.4 Décroissance rapide . . . . .	xiii
<b>1 Koopman, Howe-Moore et Harish-Chandra</b>	<b>1</b>
1.1 Actions de groupes sur des espaces mesurés . . . . .	1
1.1.1 Invariance, quasi-invariance . . . . .	1
1.1.2 Mesures de Haar . . . . .	4
1.1.3 Mesures sur des espaces homogènes . . . . .	5
1.1.4 Bord des espaces CAT(-1) et mesures . . . . .	6
1.1.4.1 Espaces CAT(-1) . . . . .	6
1.1.4.2 Bord à l'infini, fonctions de Busemann et produit de Gromov . . . . .	7
1.1.4.3 Distances et mesures sur le bord . . . . .	9
1.1.4.4 Quasi-invariance des mesures au bord sous l'action des isométries . . . . .	10
1.1.4.5 Un exemple d'espace CAT(-1) et son bord : les arbres réguliers . . . . .	11
1.1.4.6 Estimations pour la fonction de Harish-Chandra . . . . .	13
1.2 Dynamique mesurée et représentations unitaires . . . . .	15
1.2.1 Ergodicité, mélange . . . . .	15
1.2.2 Représentations . . . . .	17
1.2.2.1 Représentations unitaires . . . . .	17
1.2.2.2 Représentation de Koopman . . . . .	18
1.2.3 Théorèmes ergodiques $L^2$ . . . . .	20
1.2.3.1 Pour des actions de groupes moyennables . . . . .	20
1.2.3.2 Pour des actions mélangeantes . . . . .	21
1.3 Des exemples de mélange . . . . .	23
1.3.1 Une généralisation de la propriété de Howe-Moore . . . . .	23
1.3.1.1 Décompositions de Cartan et propriété de Mautner . . . . .	23
1.3.1.2 Démonstration du théorème . . . . .	27
1.3.2 Autres exemples . . . . .	28
1.3.2.1 Shifts . . . . .	28
1.3.2.2 L'exemple du flot géodésique sur les tores hyperbo- liques . . . . .	29

1.4	Géométrie, estimations de volumes et comptage . . . . .	31
1.4.1	Estimations élémentaires de volumes et filets . . . . .	31
1.4.2	Fonctions de longueur . . . . .	33
1.4.2.1	Définitions et exemples . . . . .	33
1.4.2.2	Géométrie bornée . . . . .	35
1.4.3	Isopérimétrie . . . . .	37
1.4.4	Comptage dans les boules et les couronnes . . . . .	39
1.4.4.1	Le problème du cercle de Gauss . . . . .	39
1.4.4.2	Des cas faciles de comptage . . . . .	39
1.4.4.3	L'approche de Gorodnik-Nevo, heuristique . . . . .	40
1.4.4.4	L'approche de Gorodnik-Nevo, de manière formelle . . . . .	42
1.4.4.5	Conséquences . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Un théorème ergodique sur le groupe libre</b>	<b>47</b>
2.1	Introduction . . . . .	47
2.1.1	Travaux reliés . . . . .	47
2.1.2	Enoncé des théorèmes . . . . .	47
2.1.2.1	Rappel du contexte géométrique . . . . .	47
2.1.2.2	Enoncé du théorème . . . . .	49
2.1.3	Remarques bibliographiques . . . . .	50
2.2	Démonstrations . . . . .	50
2.2.1	Démonstration du théorème d'équidistribution . . . . .	50
2.2.2	Démonstration du théorème ergodique . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Estimations de discrépances</b>	<b>57</b>
3.1	Cas discret . . . . .	57
3.1.1	Une minoration générale . . . . .	58
3.1.2	Taux de convergence de théorèmes ergodiques sur la sphère . . . . .	61
3.1.2.1	Le travail de Lubotzky-Phillips-Sarnak sur les quaternions de Lipschitz . . . . .	61
3.1.2.2	Détermination précise du taux de convergence . . . . .	62
3.1.3	Taux de convergence pour des actions par automorphismes sur des groupes abéliens . . . . .	64
3.1.3.1	Taux de convergence sur le tore de dimension 2 . . . . .	64
3.1.3.2	Un théorème général . . . . .	64
3.1.3.3	Taux de convergence pour le shift de Bernoulli . . . . .	66
3.1.4	Monte-Carlo . . . . .	67
3.1.4.1	Elargissement du cadre . . . . .	67
3.1.4.2	Introduction et énoncé des résultats . . . . .	68
3.1.4.3	Démonstrations . . . . .	69
3.1.4.4	Retour à la discrépance . . . . .	72
3.1.5	Remarques bibliographiques . . . . .	72
3.2	Un théorème pour le cas localement compact . . . . .	73
3.2.1	Contre-exemples à une minoration générale . . . . .	73
3.2.2	Un théorème de minoration de la discrépance . . . . .	75
3.2.2.1	Un théorème général . . . . .	75
3.2.2.2	Vérifier l'hypothèse de croissance modérée . . . . .	77
3.2.2.3	Conséquences . . . . .	79

<b>4</b>	<b>Décroissance rapide</b>	<b>81</b>
4.1	Généralités sur la décroissance rapide . . . . .	81
4.1.1	Remarques historiques et bibliographiques . . . . .	81
4.1.2	Généralités sur la décroissance rapide . . . . .	82
4.1.2.1	Définitions . . . . .	82
4.1.2.2	Décroissance rapide le long des sphères ou des boules . . . . .	83
4.1.3	L'exemple de $\mathbb{Z}$ . . . . .	84
4.2	Le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[X, X^{-1}])$ . . . . .	89
4.2.1	Définition de la fonction de longueur, énoncés des théorèmes . . . . .	89
4.2.1.1	Préliminaires algébriques . . . . .	89
4.2.1.2	L'arbre de Bruhat-Tits . . . . .	90
4.2.2	Démonstration : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[X, X^{-1}])$ n'a pas RD . . . . .	91
4.2.3	Démonstration : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[X, X^{-1}])$ a RRD . . . . .	92
4.2.3.1	RRD et mesures quasi-invariantes . . . . .	93
4.2.3.2	Harish-Chandra et croissance : estimations . . . . .	94
4.2.3.3	Borne uniforme pour la famille des moyennes pondérées . . . . .	97
4.2.3.4	Conclusion . . . . .	99
4.3	Décroissance rapide radiale et réseaux . . . . .	99
4.3.1	Énoncé du théorème . . . . .	100
4.3.2	Remarques sur les hypothèses . . . . .	100
4.3.3	Démonstration du théorème . . . . .	101
4.3.3.1	Domaines fondamentaux . . . . .	101
4.3.3.2	Utilisation de l'induction . . . . .	103
<b>A</b>	<b>Appendice</b>	<b>107</b>
A.1	Espaces $\delta$ -géodésiques . . . . .	107
A.2	Quelques outils de topologie et d'analyse fonctionnelle . . . . .	110
A.3	Boréliens d'un produit et produits de boréliens . . . . .	111
A.4	Mesures de Hausdorff . . . . .	113
A.4.1	Mesures de Hausdorff, applications continûment conformes . . . . .	113
A.4.2	Un théorème de changement de variables . . . . .	114



# Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, mon directeur Christophe Pittet, pour avoir encadré mon travail de thèse de la meilleure des manières, en étant toujours disponible, à Marseille comme à Genève, à l'écoute, à la fois critique et pédagogue ; depuis la carte qu'il m'a tracée pour trouver la FRUMAM sur le campus de Saint-Charles, il a guidé mon travail avec ses explications limpides. J'ai énormément appris, grâce à chacune des discussions, toujours enrichissantes, que j'ai pu avoir avec lui, et je suis très heureux que les mathématiques soient étudiées par quelqu'un comme lui.

Je remercie Emmanuel Breuillard et Pierre-Emmanuel Caprace, qui ont accepté de rapporter ce manuscrit. Pierre-Emmanuel m'a suggéré une myriade de corrections, qui améliorent grandement, à mes yeux, la qualité de ce manuscrit ; nous avons eu une discussion que j'ai trouvée très fructueuse. Il fait partie de mon jury, aux côtés d'Indira Chatterji (qui est à l'origine de mon travail autour de la décroissance rapide radiale), de Pierre Mathieu (avec qui j'ai le plaisir de discuter souvent), et de Jean-François Quint. C'est un honneur que de présenter mon travail devant de tels esprits.

Pascal Hubert et Arnaldo Nogueira ont gentiment accepté de me consacrer du temps, en faisant partie de mon comité de suivi de thèse. Les échanges avec eux ont été très précieux.

Je remercie aussi Adrien Boyer, mon "grand frère de thèse", pour notre collaboration, nos discussions et nos parties d'échecs au CIRM.

I would like to address many thanks to Daniel Rudolf, who spontaneously offered me very useful comments about the Monte-Carlo method and provided me with a lot of bibliographical resources.

Je souhaite enfin remercier Bachir Bekka et Pierre de La Harpe, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.





# Quelques conventions d'écriture

- $\mathcal{P}_f(E)$   
Si  $E$  est un ensemble, on note  $\mathcal{P}_f(E)$  l'ensemble de ses parties finies.

- $\asymp$   
On note  $f \asymp g$  pour dire

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad \frac{1}{C}|g(n)| \leq |f(n)| \leq C|g(n)|.$$

- $\infty$   
Quand la notation  $\infty$  est utilisée, elle désigne systématiquement le point à l'infini du compactifié d'Alexandrov de l'espace considéré. De manière formelle, quand nous écrivons  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ , nous voulons dire "pour tout voisinage  $V$  de  $\alpha$ , il existe un compact  $K$  tel que pour tout  $x$  hors de  $K$ ,  $f(x) \in V$ "; et si  $\alpha$  est lui-même  $\infty$ , l'expression "voisinage de  $\alpha$ " désigne le complémentaire d'un certain compact. Cela implique que si, par exemple,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  est une application où  $K$  est compact, alors pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ .



# Résumé en français

Cette thèse traite de différents problèmes qui s'inscrivent dans le cadre de la théorie des groupes et des systèmes dynamiques, mais s'articulent tous autour des représentations unitaires.

Si  $G$  est un groupe, il est souvent possible de l'étudier à travers ses *représentations*, c'est-à-dire ses morphismes vers  $GL(E)$  où  $E$  est un espace vectoriel. Si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, la situation est particulièrement commode; cependant, pour beaucoup de groupes d'intérêt, il n'y a pas assez de telles représentations. Par contre, la classe des *représentations unitaires* de  $G$  (c'est-à-dire, les morphismes de  $G$  dans le sous-groupe des unitaires d'un espace de Hilbert, vérifiant une certaine condition de continuité) est beaucoup plus riche. Pour commencer, tout groupe localement compact possède une représentation unitaire fidèle, appelée la *représentation régulière*,  $\lambda_G$ , qui reviendra souvent dans ce texte.

On la construit de cette façon : si  $G$  est un groupe localement compact, il possède alors une (unique à multiplication par une constante près) mesure de Haar, c'est-à-dire une borélienne régulière  $\mu_G$  invariante à gauche non nulle, et il est alors possible d'associer à  $G$  l'espace des (classes de) fonctions à valeurs complexes de carré intégrable sur  $G$ , l'espace de Hilbert  $L^2(G, \mu_G)$ . Chaque élément de  $G$  agit alors sur cet espace par précomposition, et cette transformation est unitaire, car  $\mu_G$  est invariante. Cette représentation est fidèle, et renferme de précieuses informations sur  $G$ ; par exemple, pour les groupes compactement engendrés, sa connaissance permet de décider de la *moyennabilité* de  $G$ , propriété dont une des nombreuses définitions équivalentes (voir [Pie]) est que pour une (ou toute) mesure de probabilité symétrique sur  $G$  à support compact engendrant  $G$ , la norme d'opérateur  $\|\lambda_G(\mu)\|_{2 \rightarrow 2}$  est égale à 1. Il est en général très difficile de calculer ou d'estimer, pour une mesure  $\mu$  sur  $G$ , la norme (subordonnée)  $\|\lambda_G(\mu)\|_{2 \rightarrow 2}$ , car il existe des groupes de type fini (munis de la topologie discrète) présentés de manière tout à fait explicite dont on ne sait pas s'ils sont moyennables - le plus connu étant probablement le groupe  $F$  de Thompson. Dans cette thèse, nous estimons, parfois calculons explicitement ces normes  $\|\lambda_G(\mu)\|_{2 \rightarrow 2}$  et relierons ces estimations à des questions de dynamique et de probabilités (dans la section qui concerne la discrétion), et à des questions d'analyse fonctionnelle (dans la section sur la décroissance rapide).

## 0.1 Discrétion

Le problème central de la théorie ergodique est celui de savoir, dans le cadre de l'évolution de l'espace des phases d'un système dynamique, si la moyenne d'une quantité le long d'une orbite peut être utilisée pour estimer la moyenne de cette quantité sur tout l'espace des phases.

Ce problème a été formalisé de différentes manières, qui ont donné lieu aux définitions d'*ergodicité*, de *mélange*, ainsi qu'à leurs multiples variantes. D'un autre

côté, la *discrédance* est une information quantitative : elle mesure à quelle vitesse les moyennes temporelles convergent vers la moyenne spatiale.

Précisément, si l'espace  $X$  est muni d'une tribu et d'une mesure de probabilité  $\nu$ , et que la dynamique est encodée dans une action  $G \curvearrowright X$  d'un groupe  $G$ , représentant le temps, mesurable et préservant la mesure, on conçoit la situation suivante :

- on se donne une mesure  $\mu$  sur  $G$ , qui servira à former des moyennes temporelles ;
- on choisit  $x \in X$  ;
- on estime  $\int_X f d\nu$  (la moyenne *spatiale*) par  $\int_G f(g^{-1}x) d\mu(g)$  (la moyenne *temporelle*), où  $f$  est une fonction mesurable sur  $X$  ;
- enfin, on mesure la qualité de cette estimation.

Le choix retenu est celui de considérer la moyenne quadratique, pour les  $x$  variant dans  $X$ , de la différence des moyennes spatiale et temporelle, puis de prendre le sup sur toutes les fonctions  $L^2$  sur  $(X, \nu)$ . C'est ce nombre qui s'appelle la *discrédance* de  $\mu$ . Précisément :

**Définition** (Discrédance). *Soit  $(X, \mathcal{T}, \nu)$  un espace de probabilité, et considérons une action  $G \curvearrowright X$  qui préserve  $\nu$ . Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $G$ . On appelle **discrédance** de  $\mu$  le nombre*

$$\sup_{\substack{f \in L^2(X, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \left\| x \mapsto \int_G f(g^{-1}x) d\mu - \int_X f d\nu \right\|_2.$$

Dans [LPS86] et [LPS], Lubotzky, Phillips et Sarnak considèrent la dynamique engendrée par certaines rotations d'axes et d'angles bien choisis, sur la sphère de dimension deux. S'appuyant sur les travaux de Deligne sur les conjectures de Weil, ils parviennent à calculer précisément la discrédance de la mesure uniforme sur l'ensemble fini des rotations élémentaires qu'ils considèrent et leurs inverses, puis majorent la discrédance de la mesure uniforme sur l'ensemble des produits d'au plus (ou d'exactly)  $n$  telles rotations élémentaires ou de leurs inverses :

**Théorème** (Lubotzky-Phillips-Sarnak, [LPS86, Theorem 1.3, Theorem 1.5]). *Le sous-groupe  $\Gamma$  de  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  engendré par  $\Sigma_{p+1}$  (qui est symétrique) est libre de rang  $\frac{p+1}{2}$  et*

$$\sup_{\|f\|_2=1} \left\| x \mapsto \left( \frac{1}{|\Sigma_{p+1}|} \sum_{\gamma \in \Sigma_{p+1}} f(\gamma x) - \int_{\mathbb{S}^2} f(y) d\nu(y) \right) \right\|_2 = \frac{2\sqrt{p}}{p+1}.$$

*De plus, soit  $E_n$  la boule ou la sphère de centre  $e$  dans  $\Gamma$  par rapport à la longueur des mots définie par  $\Sigma_{p+1}$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout entier  $n$ ,*

$$\sup_{\|f\|_2=1} \left\| x \mapsto \left( \frac{1}{|E_n|} \sum_{\gamma \in E_n} f(\gamma x) - \int_{\mathbb{S}^2} f(y) d\nu(y) \right) \right\|_2 \leq Cnp^{-n/2}.$$

Nous trouvons l'asymptotique exacte de la discrédance pour les boules et les sphères :

**Théorème** (PL-Pittet, Théorème 3.1.9, p. 61, [PLP18, Theorem 1.2, p. 2]). *Soit  $\Gamma$  le sous-groupe libre de rang  $\frac{p+1}{2}$  de  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  engendré par la partie symétrique  $\Sigma_{p+1}$ . Soient, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  et  $B_n$ , les sphères et boules dans  $\Gamma$  de centre  $e$  de rayon  $n$  par rapport à la longueur des mots définie par  $\Sigma_{p+1}$ . Alors*

$$\sup_{\|f\|_2=1} \left\| \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} f(\gamma x) - \int_{\mathbb{S}^2} f(y) d\nu(y) \right\|_2 = \left(1 + \frac{p-1}{p+1}n\right) p^{-n/2},$$

$$\sup_{\|f\|_2=1} \left\| \frac{1}{|B_n|} \sum_{\gamma \in B_n} f(\gamma x) - \int_{\mathbb{S}^2} f(y) d\nu(y) \right\|_2 = c(p, n) \left(1 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right)n\right) p^{-n/2},$$

$$\text{où } c(p, n) = \frac{p-1}{p+1-\frac{2}{p^n}}.$$

Pour ce faire, nous utilisons le théorème suivant (et en donnons une démonstration courte et élémentaire), déjà connu de Shalom, car il est conséquence immédiate de [Sha, Theorem 4.14, p. 303], énoncé sans démonstration dans cette référence, et démontré en 2017 par Dudko et Grigorchuk [DG, Proposition 7] :

**Théorème** (Minoration générale de la discrédance, 3.1.1, p. 58). *On suppose que  $G$  est discret, et que  $(X, \nu)$  est un espace de probabilité sans atome.*

*Soit  $\mu$  une mesure finie, à support fini sur  $G$ . Notons  $G_\mu$  le sous-groupe de  $G$  engendré par le support de  $\mu$ . Alors la discrédance de  $\mu$  est supérieure ou égale à  $\|\lambda_{G_\mu}(\mu)\|$ .*

Comme remarqué par Shalom dans l'article précité, cette minoration générale permet de constater que toute action d'un sous-groupe libre finiment engendré de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sur le tore de dimension deux a une discrédance minimale, pour la mesure uniforme sur les générateurs. En outre, la quantité  $\|\lambda_{G_\mu}(\mu)\|$  est minimale, parmi les  $\mu$  symétriques dont le support est de cardinal  $n$  fixé, quand  $G_\mu$  est libre de rang  $n$ , et vaut  $\frac{2\sqrt{n}}{n+1}$  qui est de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Ceci montre donc qu'au sens de la discrédance, les rotations de Lubotzky-Phillips-Sarnak sont celles "qui mélangent le plus vite".

On remarque également que si  $G$  est un groupe moyennable, alors la discrédance de toute mesure de probabilité sur  $G$  est 1, ce qui fait des groupes moyennables les groupes "qui mélangent le moins vite".

Nous remarquons ensuite que la discrédance a une formulation statistique qui ne met plus en jeu de dynamique : si  $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$  est un  $n$ -uplet de points aléatoires d'un espace de probabilité  $(X, \nu)$  tel que pour tout  $i$ ,  $Z_i$  est de loi  $\nu$ , la discrédance de  $Z$  est, par définition, le nombre

$$\sup_{\substack{f \in L^2(X, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \mathrm{Var} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i) - \int_X f d\nu \right),$$

et porte alors le nom d'*erreur quadratique moyenne dans le pire des cas*.

On retrouve immédiatement la discrédance dynamique considérée jusqu'ici, en choisissant un point aléatoire  $Z_0$  de loi  $\nu$  et en posant, pour tout  $i$ ,  $Z_i := \gamma_i Z_0$  où les  $\gamma_i$  sont des éléments de  $\Gamma$  : la discrédance de  $Z$  est alors exactement la discrédance de la mesure uniforme sur l'ensemble des  $\gamma_i$ .

Si  $Z$  est un  $n$ -uplet de points indépendants, cette situation porte le nom de *méthode de Monte-Carlo* ; tandis que dans le cadre dynamique, les  $Z_i$  ne sont pas, *a priori*, indépendants (puisqu'ils dépendent tous de  $Z_0$  !).

Il est bien connu que dans le cadre de la méthode de Monte-Carlo, la discrédance est  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , de l'ordre de l'asymptotique de la discrédance des rotations de Lubotzky-Phillips-Sarnak. Nous montrons que dans ce cadre statistique, l'erreur quadratique moyenne dans le pire des cas est toujours supérieure ou égale à celle de la méthode de Monte-Carlo, si l'espace est sans atome. Précisément :

**Théorème** (PL, Corollaire 3.1.17, p. 68, [PL19b, Corollary]). *Soit  $(X, \mu)$  un espace de probabilité sans atome,  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$  un  $n$ -uplet de points aléatoires sur  $X$  tel que pour tout  $i$ ,  $Z_i$  est de loi  $\mu$  que nous ne supposons pas indépendants.*

On a

$$\sup_{\substack{f \in L^2(X, \mu) \\ \|f\|_2=1}} \text{Var} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i) - \int_X f d\mu \right) \geq \frac{1}{n}.$$

La question de savoir si le théorème de minoration générale de la discrédance reste vrai, dans le cadre où le groupe agissant n'est plus forcément discret mais seulement supposé localement compact, est naturelle. Cependant, si l'on considère l'action naturelle  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , alors la discrédance de  $\mu := \mathbf{1}_{[0,1]}$  est 0, ce qui montre qu'une généralisation du théorème de minoration générale de la discrédance aux actions de groupes localement compacts nécessite forcément des hypothèses supplémentaires.

Il est en fait naturel de supposer, en plus du fait que  $X$  soit sans atome, qu'il existe  $x_0$ , dans le support de  $\nu$ , tel que pour toute partie compacte  $K$  de  $G$ ,  $Kx_0$  soit de  $\nu$ -mesure nulle. En effet, si  $G$  est discret, ses parties compactes sont finies, et l'ensemble fini  $Kx_0$  est donc de  $\nu$ -mesure nulle dans  $X$ , puisque  $\nu$  n'a pas d'atome. De plus, cette hypothèse permet d'exclure le contre-exemple précédent.

Nous démontrons alors le résultat suivant.

**Théorème** (PL, Pittet). *Soit  $G$  un groupe topologique localement compact,  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ ,  $\lambda_G$  la représentation régulière de  $G$ . Soit  $X$  un espace topologique,  $\nu$  une mesure de probabilité, borélienne régulière sur  $X$  sans atomes,  $G \curvearrowright X$  une action continue qui préserve  $\nu$ .*

*On suppose en outre qu'il existe  $x$  dans le support de  $\nu$  tel que pour tout compact  $K$  de  $G$ ,  $\nu(Kx) = 0$  et que  $\text{Stab}(x)$  est compact.*

*Alors, pour toute mesure de probabilité  $\mu$  sur  $G$ , la discrédance de  $\mu$  est supérieure ou égale à  $\|\lambda_G(\mu)\|$ .*

A titre d'exemple concret, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire.** *Soit  $S$  une surface hyperbolique de volume fini, soit  $g_t : T^1S \rightarrow T^1S$  le flot géodésique, et soit  $\nu$  la mesure de Liouville sur  $T^1S$ . Alors pour tout  $T \in \mathbb{R}_+^*$ ,*

$$\sup_{\substack{f \in L^2(T^1S, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \left\| \left( x \rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T f(g_t x) dt - \int_{T^1S} f d\nu \right) \right\|_2 = 1.$$

## 0.2 Un théorème ergodique sur le groupe libre

Les phénomènes de convergence de moyennes temporelles vers la moyenne spatiale évoqués dans la section précédente l'ont été dans le cadre d'actions où la mesure

de probabilité est préservée. Ils ne sauraient être généralisés sans subtilités au cas où la mesure est seulement quasi-invariante, pour la raison heuristique suivante : si  $Z$  est un point aléatoire sur  $X$  de loi  $\nu$  et si  $G \curvearrowright X$  est une action où  $\nu$  n'est supposée que quasi-invariante, et si  $g \in G$ , alors  $gZ$  n'est pas, en général, de loi  $\nu$  (puisque'il est de loi  $g_*\nu$ !).

Pour remédier à ce problème, au lieu de faire agir  $g \in G$  sur les fonctions  $L^2$  sur  $X$  par

$$h \mapsto (x \mapsto h(g^{-1}x))$$

qui n'est pas un opérateur unitaire, on le fait agir par

$$h \mapsto \left( x \mapsto c(g^{-1}, x)^{\frac{1}{2}} h(g^{-1}x) \right),$$

où, pour tout  $g \in G$  et  $x \in X$ , on note

$$c(g, x) := \frac{dg^{-1}\nu}{d\nu}(x).$$

Cet opérateur, noté  $\pi(g)$  est alors unitaire, et l'application  $g \mapsto \pi(g)$  ainsi définie est une représentation unitaire, appelée *représentation de Koopman* associée à l'action.

La solution à ce problème en fait apparaît un autre : si  $g \in G$ , alors il n'y a plus de raison que  $\pi(g)$  envoie  $\mathbf{1}_X$  sur elle-même ; par suite, il n'est pas clair qu'une combinaison convexe d'opérateurs de la forme  $\pi(g)$  (pour  $g \in G$ ) reste de norme 1 (alors que c'est le cas quand la mesure est invariante), ce qui est inquiétant si l'on espère démontrer une convergence vers le projecteur sur les fonctions constantes, qui lui, est de norme 1.

Ce problème-ci ne se résout pas, et pour cause : comme nous allons le voir, il existe une action très explicite de  $\mathbb{F}_p$  sur un espace de probabilité  $(X, \nu)$  où  $\nu$  est quasi-invariante, et où les moyennes

$$\frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \pi(\gamma)$$

convergent, en norme, vers 0 (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  désigne l'ensemble des éléments de  $\mathbb{F}_p$  qui correspondent à des mots réduits de longueur  $n$ ).

Dans [BM11], Bader et Muchnik contournent ce problème, dans une situation très spécifique, en remplaçant les moyennes traditionnelles par des moyennes renormalisées à l'aide de la fonction de Harish-Chandra, notée  $\Xi$ . Précisément, si  $\partial\tilde{M}$  est le bord de Gromov du revêtement universel d'une variété  $M$ , compacte, sans bord, à courbure sectionnelle strictement négative, qu'il est muni de la mesure naturelle au bord, si  $\Gamma$  est le groupe fondamental de  $M$ , que l'action de  $\Gamma$  sur  $\partial\tilde{M}$  est déduite de l'action par isométries sur le revêtement universel  $\tilde{M}$  de  $M$ , et si on pose, pour  $x_0 \in \tilde{M}$  fixé, et  $\gamma \in \Gamma$ ,  $L(\gamma) := d_{\tilde{M}}(x_0, \gamma x_0)$ , on a la convergence en topologie faible des opérateurs (alors que les théorèmes ergodiques en mesure invariante affirment des convergences en topologie forte des opérateurs) suivante :

$$\frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \rightarrow P_{\mathbf{1}_{\partial\tilde{M}}},$$

où  $S_n$  désigne la sphère de rayon  $n$  centrée en  $e \in \Gamma$ . On a même la convergence des moyennes pondérées suivante (toujours en topologie faible) :

$$\frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} f(\gamma x_0) \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \rightarrow M(f) P_{\mathbf{1}_{\partial\tilde{M}}}$$



où  $f$  est une fonction continue sur le compactifié  $\tilde{M} \cup \partial\tilde{M}$  et  $M(f)$  est l'opérateur de multiplication par  $f_{\partial\tilde{M}}$  sur  $L^2(\partial\tilde{M})$ .

Comme Bader et Muchnik le reconnaissent, le cas qu'ils considéraient est très particulier, et demandait à être généralisé, ce qui fut fait par Boyer dans [Boy16], qui a remplacé  $\tilde{M}$  par un espace  $X$ , CAT(-1) (généralisation purement métrique de la courbure négative), et a considéré les actions d'un groupe  $\Gamma$  agissant proprement discontinûment, de manière cocompacte par isométries sur  $X$ . Un tel espace a un bord  $B$  qui le compactifie et hérite d'une mesure quasi-invariante par l'action mesurable induite par  $\Gamma$  sur  $B$ . Boyer arrive aux mêmes conclusions que Bader et Muchnik, mais fait appel à un théorème de Roblin valable pour les espaces CAT(-1), à l'endroit où ceux-ci font appel à un théorème de Margulis, qui concerne uniquement les variétés. Cependant, le théorème de Roblin a une hypothèse supplémentaire : le spectre des longueurs du quotient  $X/\Gamma$  ne doit pas être arithmétique (ce qui veut dire que le sous-groupe engendré par les longueurs des géodésiques fermées doit être dense dans  $\mathbb{R}$ ), ce qui équivaut, d'après les travaux de Dal'bo [Dal99], au mélange du flot géodésique sur  $X/\Gamma$ ; cette hypothèse étant précisément toujours vraie dans le cas des variétés compactes à courbure sectionnelle négative (Anosov). C'est pourquoi le théorème de Boyer, aussi général qu'il soit, laissait de côté un exemple particulièrement simple, qui fait l'objet de l'article [BPL17], et que nous décrivons maintenant.

Soit  $\mathbb{F}_p$  le groupe libre de rang  $p$  engendré par  $S := \{a_1, \dots, a_p\}$ , et soit  $X$  son graphe de Cayley pour le système de générateurs  $S$ . C'est un arbre  $2p$ -régulier, et nous le munissons de la distance qui donne longueur 1 à chaque arête. C'est un espace CAT(-1), et  $\mathbb{F}_p$  agit dessus par isométries, de manière proprement discontinue, et le quotient est un bouquet de deux cercles de longueur 1, dont le spectre est, très justement, arithmétique. Le bord  $B$  de  $X$  peut-être identifié à l'ensemble des mots réduits infinis à droite sur l'alphabet  $S \cup S^{-1}$ . Le théorème de Roblin ne s'appliquant pas dans ce cas, nous démontrons le théorème suivant, qui en est l'équivalent.

**Théorème** (Boyer-PL, Théorème 2.1.1, p. 49, [BPL17, Theorem I]). *On a, dans  $C(\bar{X} \times \bar{X})^*$ , la convergence faible-\* suivante :*

$$\frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} D_{\gamma x_0} \otimes D_{\gamma^{-1} x_0} \rightharpoonup \mu_{x_0} \otimes \mu_{x_0},$$

où  $D_x$  désigne la mesure de Dirac en un point  $x \in X$  et où  $\bar{X}$  désigne le compactifié  $X \cup B$  de  $X$ .

Nous utilisons ce théorème pour obtenir la convergence faible des moyennes pondérées.

**Théorème** (Boyer-PL, Théorème 2.1.2, p. 49, [BPL17, Theorem II]). *On a, pour toute  $f$  dans  $C(\bar{X})$ , la convergence en topologie faible des opérateurs suivante :*

$$\frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} f(\gamma x_0) \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M(f) P_{\mathbf{1}_{\partial\tilde{M}}},$$

On en déduit le corollaire suivant, déjà connu de Figá-Talamanca et Picardello, [FTP83, Theorem 5].

**Corollaire.** *La représentation de Koopman associée à l'action de  $\mathbb{F}_p$  sur le bord de son arbre de Cayley est irréductible.*

### 0.3 Propriété de Howe-Moore relative

Dans l'article [HM79], Howe et Moore ont mis en évidence un phénomène très intéressant : dès qu'un groupe de Lie simple, non compact, connexe, de centre fini, agit de manière ergodique sur un espace de probabilité, l'action est automatiquement mélangeante. Cette propriété se formule en fait en termes de décroissance de coefficients matriciels de certaines représentations unitaires, *via* la construction de Koopman que nous détaillons dans la Section 1.2.2.2.

Le beau travail de Ciobotaru, [Cio17], fournit une démonstration unifiée de la propriété de Howe-Moore pour tous les exemples connus au moment de la publication de son article, en mettant en évidence que d'une part, tous les groupes en question vérifient deux propriétés : ils possèdent ce que nous avons appelé une *décomposition de Cartan* et vérifient une propriété que nous avons appelée *propriété de Mautner* ; et que d'autre part, ces deux propriétés suffisent à conférer au groupe la propriété de Howe-Moore.

Que se passe-t-il pour les produits ? Comme nous le verrons dans la suite, les produits de groupes possédant la propriété de Howe-Moore ne la vérifient que très rarement.

Cependant, le théorème [BM00, Theorem 1.1, p. 81] montre que certains produits de groupes de Lie simples vérifient tout de même une propriété plus faible que la propriété de Howe-Moore.

Dans cette section, qui reprend le contenu de l'article [PL19a], nous affaiblissons la propriété de Mautner afin qu'elle permette un passage aux produits, et que, jointe à l'existence de décompositions de Cartan, elle implique une version affaiblie de la propriété de Howe-Moore. Nous généralisons ainsi [BM00, Theorem 1.1, p. 81] en le retrouvant comme un cas particulier.

Les définitions précises des notions de *décomposition de Cartan* et *propriété de Mautner* se trouvent dans la Section 1.3.1.

Dans [Cio17], Ciobotaru démontre que les groupes suivants possèdent des décompositions de Cartan  $(K_1, A^+, K_2)$  telles que  $(G, A^+)$  possède la propriété de Mautner :

- les groupes algébriques simples isotropes sur un corps non archimédien ;
- les sous-groupes du groupe des automorphismes d'un arbre semi-régulier<sup>1</sup> dont tous les sommets ont une valence strictement supérieure à 2, qui sont topologiquement simples et qui agissent 2-transitivement sur le bord de l'arbre ;
- les groupes de Lie connexes, simples, non-compacts, de centre fini.

Nous démontrons le théorème suivant.

**Théorème** (PL, Théorème 1.3.11, p. 25, [PL19a, Theorem]). *Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de sous-groupes de  $G$ . Si  $G$  a une décomposition de Cartan  $(K_1, A^+, K_2)$  telle que  $(G, A^+)$  possède la propriété de Mautner relative à  $\mathcal{F}$ , alors il a la propriété de Howe-Moore, relativement à  $\mathcal{F}$ .*

C'est le corollaire suivant qui permet de traiter le cas des produits et généralise [BM00, Theorem 1.1, p. 81].

**Corollaire** (PL, Théorème 1.3.14, p. 26, [PL19a, Corollary 1]). *Soient  $G_1, \dots, G_N$  des groupes possédant des décompositions de Cartan*

$$(K_{1,1}, A_1^+, K_{1,2}), \dots, (K_{n,1}, A_n^+, K_{n,2})$$

---

1. C'est-à-dire, les arbres dont tous les sommets qui sont à distance paire ont même valence.

telles que pour tout  $i$ ,  $(G_i, A_i^+)$  possède la propriété de Mautner. Alors  $G$  a la propriété de Howe-Moore, relativement à  $\{G_1, \dots, G_N\}$ .

On peut alors en tirer les conséquences classiques suivantes, en utilisant la construction de la représentation de Koopman.

**Corollaire** (PL, Corollaire 1.3.12, p. 25, [PL19a, Corollary 2]). *Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de sous-groupes de  $G$ . Supposons que  $G$  a la propriété de Howe-Moore relativement à  $\mathcal{F}$ .*

*Alors pour toute action de  $G$  préservant la mesure sur un espace de probabilité, si elle est telle que pour tout  $F \in \mathcal{F}$ , la restriction à  $F$  est ergodique, alors elle est mélangeante.*

**Corollaire** (PL, Corollaire 1.3.16, p. 26, [PL19a, Corollary 3]). *Soient  $G_1, \dots, G_N$  des groupes possédant des décompositions de Cartan*

$$(K_{1,1}, A_1^+, K_{1,2}), \dots, (K_{n,1}, A_n^+, K_{n,2})$$

*telles que pour tout  $i$ ,  $(G_i, A_i^+)$  possède la propriété de Mautner. Soit  $G := G_1 \times \dots \times G_N$ , et soit  $G \curvearrowright (X, \mu)$  une action sur un espace de probabilité telle que la restriction de l'action à chacun des  $G_i$  est ergodique. Alors l'action  $G \curvearrowright (X, \mu)$  est mélangeante.*

Dans la Section 1.4.4, on utilise ces résultats pour démontrer le Théorème 1.4.42, qui donne des résultats de comptage pour les réseaux irréductibles dans les produits de certains groupes. Ce théorème s'appuie sur les techniques développées dans [GN10]. On note  $f(n) \asymp g(n)$  pour dire

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad \frac{1}{C}|g(n)| \leq |f(n)| \leq C|g(n)|.$$

**Théorème** (PL, Théorème 1.4.42, p. 45). *Soit  $G := G_1 \times \dots \times G_n$ , où, pour tout  $i$ ,  $G_i$  est un groupe de la liste de Ciobotaru ci-dessus, et soit  $\Gamma$  un réseau irréductible (que nous ne supposons pas cocompact) dans  $G$ . Soit  $L$  une fonction de longueur géométrique sur  $G$ , et soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n$  la boule de rayon  $n$  centrée en  $e$ .*

*Il existe  $d \in \mathbb{N}^*$  tel que*

$$\mu_G(B_{dn}) \asymp |\Gamma \cap B_{dn}|.$$

*Si, de plus,  $G$  n'est pas moyennable, il existe  $d \in \mathbb{N}^*$  tel que*

$$\mu_G(C_{d,n}) \asymp |\Gamma \cap C_{d,n}|,$$

*où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_{d,n} := \{g \in G \mid d(n-1) < L(g) \leq dn\}$ .*

Grâce à ce théorème, on retrouve, par exemple, le théorème suivant contenu dans [GN10] (la notation  $\asymp$  signifie que chacune des quantités est un grand  $O$  de l'autre).

**Théorème.** *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple, connexe, non compact, de centre fini,  $\Gamma$  est un réseau irréductible de  $G$ , et soit  $L$  la fonction de longueur sur  $G$  induite par la métrique riemannienne invariante à gauche sur  $G$ . Soit  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$  telle que la mesure associée sur  $G/\Gamma$  soit de probabilité. Alors on a*

$$\mu_G(B_n) \asymp |\Gamma \cap B_n|$$

*et*

$$\mu_G(C_{5,n}) \asymp |\Gamma \cap C_{5,n}|,$$

*où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n := \{g \in G \mid L(g) \leq n\}$ ,  $C_{5,n} := \{g \in G \mid 5(n-1) < L(g) \leq 5n\}$ .*

## 0.4 Décroissance rapide

Une autre propriété portant sur la norme de la représentation régulière est la propriété de *décroissance rapide*, appelée RD (pour *rapid decay*). Le cas de  $\mathbb{Z}$  (explicité dans la Section 4.1.3) est très éclairant pour saisir les enjeux de cette propriété : la théorie élémentaire des séries de Fourier établit une correspondance biunivoque entre l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions de carré intégrable sur le cercle (c'est le côté *géométrique*) et les suites indexées par les entiers relatifs de carré sommable (le côté *spectral*), *via* les *coefficients de Fourier*. Cette correspondance identifie également les polynômes trigonométriques avec les suites à support fini ; de manière beaucoup plus intéressante, les fonctions lisses avec les suites à décroissance rapide. Enfin, les fonctions continues correspondent à la fermeture de l'espace des suites à support fini pour la norme des opérateurs de convolution (plus précisément, les  $\lambda_{\mathbb{Z}}(n)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ ). Autrement dit, les trois propriétés du côté géométrique, *lissité-continuité- $L^2$* , ont un équivalent spectral. Si l'on remplace  $\mathbb{Z}$  par un groupe  $G$ , disons, discret, l'algèbre de  $G$ ,  $\mathbb{C}[G]$ , qui joue le rôle des polynômes trigonométriques sur le cercle, n'est plus commutative, en général. Par conséquent, elle ne s'identifie à aucune algèbre de fonctions sur un espace topologique qui jouerait le rôle du cercle (puisque'une telle algèbre est toujours commutative!), et il n'y a donc, pour ainsi dire, aucun côté géométrique dans cette situation. Qu'à cela ne tienne, il suffit de suivre la philosophie non-commutative d'Alain Connes et de jouer la partie uniquement du côté spectral, à la façon d'un vampire qui, comme on le sait, n'a pas de reflet dans un miroir, mais le créerait par la force de son imagination. La question géométrique dépourvue de sens "est-ce que, sur cet espace topologique qui n'existe pas, l'espace des fonctions lisses se plonge naturellement dans l'espace des fonctions continues?" trouve alors un sens spectral : "est-ce que l'espace des suites à décroissance rapide sur  $G$  se plonge naturellement dans la complétion de l'algèbre de  $G$ , pour la norme des opérateurs de convolution?".

L'étude de la propriété RD a commencé avec l'article de Haagerup [Haa79], et a été poursuivie de manière systématique par Jolissaint dans [Jol90]. Elle a des applications à la théorie des marches aléatoires sur les groupes infinis [Val97], [CPSC07], à la théorie des représentations et des systèmes dynamiques [BM17]. C'est enfin Laforgue, dans [Laf00], qui en fait un usage fructueux dans le cadre de la conjecture de Baum-Connes, devenue centrale en  $K$ -théorie.

Si la situation est bien connue pour les groupes de Lie (un groupe de Lie connexe a RD si et seulement si son revêtement universel est produit d'un groupe de Lie semi-simple avec un groupe à croissance polynomiale, voir [CPSC07]), elle l'est beaucoup moins pour les réseaux cocompacts de tels groupes ; le problème de savoir si la propriété RD est héritée par les réseaux cocompacts en rang supérieur ou égal à 2 (la situation est connue en rang 1, où tous les réseaux ont RD) constitue la conjecture de Valette (voir [Val02]), encore ouverte à ce jour. En rang supérieur ou égal à 2, il est connu que les réseaux non cocompacts n'ont pas RD, car ils contiennent tous des sous-groupes moyennables à croissance exponentielle - un des seuls obstacles à RD actuellement identifiés. Afin de progresser vers la résolution de cette conjecture, Valette a proposé une propriété de décroissance rapide en apparence plus faible, la propriété de *décroissance rapide radiale* (RRD), qui entraîne encore certaines conséquences de la propriété RD. Notons qu'une étape de la démonstration de [CPSC07] pour les groupes de Lie connexes, non compacts, semi-simples et de centre fini, est de se ramener à des fonctions radiales. Perrone, dans [Per09], parvint à démontrer que les réseaux cocompacts de tels groupes ont toujours RRD pour

certaines fonctions de longueur, mais le problème de savoir s'ils avaient RD resta ouvert. Chatterji demanda alors, dans [Cha17], s'il existe des groupes ayant RD, mais pas RRD.

Dans ce contexte, nous démontrons deux théorèmes nouveaux, dont les énoncés précis seront bientôt prépubliés.

Le premier est une réponse positive à la question de Chatterji.

**Théorème** (Boyer-PL-Pittet, 4.2.3, p. 91). *Soit  $q$  est une puissance d'un nombre premier. On pose  $A := \mathbb{F}_q[X, X^{-1}]$  l'anneau des polynômes de Laurent. Alors  $\mathrm{SL}_2(A)$ , muni d'une fonction de longueur naturelle quasi-isométrique à une longueur des mots, a RRD, mais pas RD.*

Le deuxième est un renforcement du théorème de Perrone.

**Théorème** (Boyer-PL-Pittet, 4.3.4, p. 100). *Soit  $\Gamma$  un réseau de  $G$ , groupe localement compact, et  $L$  est une fonction de longueur qui vérifie des hypothèses de comptage, d'isopérimétrie, et de géométrie bornée.*

*Si  $G$  a RRD pour  $L$ , alors  $\Gamma$  l'a aussi, pour la restriction de  $L$ .*

*En particulier, si  $G$  est un groupe de Lie semi-simple, connexe, non-compact, de centre fini et de rang supérieur ou égal à 2, alors tout réseau  $\Gamma$  de  $G$  (cocompact ou non) a RRD, pour une certaine fonction de longueur quasi-isométrique à la restriction de la métrique riemannienne.*

Ce théorème ne règle pas exactement la question de savoir si de tels réseaux ont RRD pour la restriction de la métrique riemannienne ou pour une longueur des mots, car la propriété RRD n'est pas préservée par modification de la fonction de longueur ; cependant, il semble mettre en évidence que la difficulté de résoudre la conjecture de Valette reste entière, et réduit de beaucoup l'espoir d'appriivoiser la propriété RD par les fonctions radiales.

# Chapitre 1

## Koopman, Howe-Moore et Harish-Chandra

**Résumé.** Dans ce chapitre, nous définissons d'abord beaucoup de notions très générales et classiques de la théorie des actions de groupes sur des espaces mesurés (invariance, quasi-invariance, fonction de Harish-Chandra), de la théorie des représentations unitaires (représentation de Koopman) et de théorie ergodique (ergodicité, mélange), et nous mentionnons les liens entre ces notions. Nous développons des exemples de mélange, et proposons une section sur la propriété de Howe-Moore, qui reprend les résultats contenus dans [PL19a], où nous généralisons cette propriété pour pouvoir traiter le cas de produits. Nous discutons des questions de croissance et de comptage, car le traitement que nous en faisons s'appuie sur la théorie ergodique. Nous finissons par établir des estimations de la fonction de Harish-Chandra pour certaines actions et faire le lien avec la norme de certains opérateurs de la représentation régulière qui seront étudiés dans les différents chapitres qui suivent.

### 1.1 Actions de groupes sur des espaces mesurés

Les actions de groupes sur des espaces mesurés sont un des principaux objets d'étude de cette thèse. Les actions considérées ont toutes la propriété de préserver, d'une certaine façon, une mesure. Nous définissons différentes notions d'invariance qui apparaîtront dans ce travail, puis donnons les exemples importants des mesures de Haar et des mesures sur les espaces homogènes.

#### 1.1.1 Invariance, quasi-invariance

**Notation 1.1.1** (Mesure image). Soient  $(X, \mathcal{T}_X)$  et  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  deux espaces mesurés, soit  $\mu$  une mesure sur  $(X, \mathcal{T})$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application mesurable. Alors la formule

$$A \in \mathcal{T}_Y \longmapsto \mu(f^{-1}(A))$$

définit une mesure sur  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  que l'on note  $f_*\mu$  et que l'on appelle la **mesure image** de  $\mu$  par  $f$ . On a la formule, valable pour toute  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable,

$$\int_Y h \, d f_*\mu = \int_X h \circ f \, d\mu.$$

**Notation 1.1.2** (Mesures à densité). Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable,  $\mu, \nu$  deux mesures sur  $(X, \mathcal{T})$  et  $h : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable. On note

$$\mu = h\nu \text{ ou } d\mu = h d\nu \text{ ou } \frac{d\mu}{d\nu} = h$$

pour dire

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \mu(A) = \int_A h d\nu.$$

On dit alors que  $h$  est la **densité** de  $\mu$  par rapport à  $\nu$ , ou que  $h$  est la **dérivée de Radon-Nikodym** de  $\mu$  par rapport à  $\nu$ . Nous mettons en garde contre la confusion possible entre les notations pour les mesures à densité et les mesures images qui ne se distinguent que par une étoile.

**Définition 1.1.3** (Absolue continuité des mesures, équivalence). Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable,  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures sur  $(X, \mathcal{T})$ . On dit que  $\mu$  est **absolument continue** par rapport à  $\nu$  si

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0,$$

et on note alors  $\mu \ll \nu$ .

Les mesures  $\mu$  et  $\nu$  sont dites **équivalentes** si  $\mu \ll \nu$  et  $\nu \ll \mu$ . On note alors  $\mu \sim \nu$ .

**Théorème 1.1.4** (Radon-Nikodym). Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable,  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures  $\sigma$ -finies sur  $(X, \mathcal{T})$ . Si  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $\nu$ , il existe une unique (à  $\nu$ -mesure nulle près) fonction mesurable  $h : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$d\mu = h d\nu.$$

**Remarque 1.1.5.** Si  $\mu$  et  $\nu$  sont équivalentes, alors  $\frac{d\mu}{d\nu}$  est presque partout non nulle et

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \left( \frac{d\mu}{d\nu} \right)^{-1}.$$

Soit  $G$  un groupe topologique.

**Définition 1.1.6** (Action mesurable, action continue). On dit qu'une action  $G \curvearrowright X$  est **mesurable** si l'application

$$G \times X \rightarrow X$$

qui la définit est mesurable (on munit  $G$  de la tribu de ses boréliens, et  $G \times X$  de la tribu produit).

Soit  $X$  un espace topologique. Une action  $G \curvearrowright X$  est dite **continue** si l'application

$$G \times X \rightarrow X$$

qui la définit est continue.

Toutes les actions considérées dans ce texte sont supposées mesurables.

**Remarque 1.1.7.** Si  $X$  et  $G$  sont à base dénombrable, alors toute action  $G \curvearrowright X$  qui est continue est aussi mesurable, si on munit  $X$  de la tribu de ses boréliens. En effet, l'application

$$G \times X \rightarrow X$$

est alors mesurable pour la tribu des boréliens de  $G \times X$ , qui est également la tribu produit des tribus boréliennes de  $G$  et de  $X$  (voir Théorème A.3.4).

**Définition 1.1.8** (Mesure invariante, multiplicativement invariante, quasi-invariante). Soit  $(X, \mathcal{T}, \nu)$  un espace mesuré, et soit  $G \curvearrowright X$  une action mesurable.

On dit que l'action **préserve la mesure** si

$$\forall g \in G, \quad g_*\nu = \nu.$$

On dit aussi que  $\nu$  est **invariante** par l'action.

S'il existe  $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telle que

$$\forall g \in G, \quad g_*\nu = \Delta(g)\nu,$$

on dit que  $\nu$  est **multiplicativement invariante**.

Si

$$\forall g \in G, \quad g_*\nu \sim \nu,$$

on dit que  $\nu$  est **quasi-invariante**.

**Remarque 1.1.9.** Si une mesure est invariante, elle est multiplicativement invariante. Si une mesure est multiplicativement invariante, elle est quasi-invariante.

**Remarque 1.1.10.** Si une mesure est multiplicativement invariante, la fonction  $\Delta$  est unique et est un morphisme de groupes.

**Notation 1.1.11.** Sous les conditions d'applications du théorème de Radon-Nikodym, on note

$$c_\mu(g, \cdot) := \frac{dg_*^{-1}\mu}{d\mu},$$

sans faire référence à l'action qui est sous-entendue par le contexte. Cette fonction s'appelle le **cocycle de Radon-Nikodym** et son nom est justifié par la remarque suivante.

**Remarque 1.1.12.** La fonction  $c$  vérifie la **relation de cocycle** :

$$\forall g, h \in G, \quad \forall x \in X, \quad c(gh, x) = c(g, hx)c(h, x).$$

**Exemple 1.1.13.** Soit  $M$  une variété orientable, soit  $\text{Vol}$  une forme volume, et soit  $\mu$  la mesure associée à  $\text{Vol}$ . On considère un groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $M$  qui préservent l'orientation, c'est-à-dire une famille  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  de difféomorphismes de  $M$  qui préservent l'orientation tels que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad \phi(s+t) = \phi(s) \circ \phi(t).$$

Alors, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in M, \quad \det(T_x\phi_t) \text{Vol} = \phi_t^* \text{Vol}$$

et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in M, \quad \det(T_x\phi_t) = \frac{d(\phi_t^{-1})_*\mu}{d\mu}(x),$$

et  $\mu$  est quasi-invariante. La relation de cocycle

$$\det(T_x\phi_{t+s}) = \det(T_{\phi_s(x)}\phi_t) \det(T_x\phi_s)$$

se retrouve avec la règle de dérivation en chaîne

$$T_x\phi_{t+s} = T_{\phi_s(x)}\phi_t \circ T_x\phi_s$$

et la multiplicativité du déterminant.



Dans la suite, nous serons amenés à estimer la fonction suivante.

**Définition 1.1.14** (Fonction de Harish-Chandra associée à une action). *Soit  $G \curvearrowright (X, \nu)$  une action où  $\nu$  est quasi-invariante. On définit, pour tout  $g \in G$ ,*

$$\Xi(g) := \int_X c(g^{-1}, \cdot)^{\frac{1}{2}} d\mu.$$

La fin de ce chapitre est dédiée à l'étude d'une action avec une mesure quasi-invariante, et on y calcule explicitement la fonction de Harish-Chandra.

## 1.1.2 Mesures de Haar

Soit  $G$  un groupe localement compact.

**Définition 1.1.15** (Mesure de Haar). *Une mesure  $\mu$  de Borel régulière sur  $(G, \mathcal{B}(G))$  est dite **mesure de Haar** à gauche si*

$$\forall g \in G, \forall A \in \mathcal{B}(G), \quad \mu(gA) = \mu(A).$$

*On définit similairement les mesures de Haar à droite en remplaçant  $gA$  par  $Ag$ .*

**Exemple 1.1.16.** *Sur  $\mathbb{R}^n$ , la mesure de Lebesgue est une mesure de Haar à gauche et à droite.*

**Exemple 1.1.17.** *Si  $G$  est discret, la mesure de comptage est une mesure de Haar à gauche et à droite.*

**Remarque 1.1.18.** *Soit  $i : G \rightarrow G$  l'application inverse. Alors si  $\mu$  est une mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur  $G$ , alors  $i_*\mu$  est une mesure de Haar à droite (resp. à gauche).*

**Remarque 1.1.19.** *Soit  $\mu$  une mesure de Haar à gauche sur  $G$ , et soit  $g \in G$ . Posons, pour tout  $A$  borélien de  $G$ ,  $\nu(A) := \mu(Ag)$ . Alors  $\nu$  est une mesure de Haar à gauche.*

**Théorème 1.1.20.** *Il existe une mesure de Haar à gauche sur  $G$ . Deux mesures de Haar à gauche sur  $G$  sont égales à une constante multiplicative près.*

**Corollaire 1.1.21.** *Pour tout  $g \in G$ , il existe un unique  $\Delta_G(g) \in \mathbb{R}_+^*$  tel que pour tout borélien  $A$  de  $G$ ,  $\mu(Ag) = \Delta_G(g)\mu(A)$ . La fonction  $g \mapsto \Delta_G(g)$  est appelée **fonction modulaire** de  $G$ . C'est un morphisme continu.*

**Définition 1.1.22** (Groupe unimodulaire). *Le groupe localement compact  $G$  est dit **unimodulaire** si  $\Delta_G = 1$ , ou, de manière équivalente, si toute mesure de Haar à gauche est une mesure de Haar à droite.*

**Exemple 1.1.23.** *Les groupes localement compacts abéliens, les groupes compacts, les groupes discrets sont unimodulaires.*

### 1.1.3 Mesures sur des espaces homogènes

Soit  $G$  un groupe localement compact, soit  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ , et soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ . Alors  $H$  est localement compact aussi. Soit  $\mu_H$  une mesure de Haar sur  $H$ . L'espace  $G/H$  est alors (séparé) localement compact et on dit que c'est un **espace homogène**. On s'intéresse à ses mesures boréliennes régulières, et le but de cette section est de démontrer qu'il y a beaucoup de mesures quasi-invariantes pour l'action  $G \curvearrowright G/H$ , et de les classifier.

**Définition 1.1.24** (Rho-fonction). *Une fonction continue  $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est dite **rho-fonction** pour le couple  $(G, H)$  si*

$$\forall g \in G, \forall h \in H, \quad \rho(gh) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \rho(g).$$

On note  $C_\rho(G, H)$  l'ensemble des rho-fonctions pour le couple  $(G, H)$ .

Le théorème suivant est la réunion de [BdLHV08, Lemma B.1.2, p. 325] et [BdLHV08, Lemma B.1.3, p. 325].

**Théorème 1.1.25.** *Soit  $\rho$  une rho-fonction pour le couple  $(G, H)$ . Posons*

$$\begin{aligned} T_H : C_c(G) &\rightarrow C_c(G/H) \\ f &\mapsto \left( xH \mapsto \int_H f(xh) d\mu_H(h) \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_\rho : C_c(G) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_G f(g) \rho(g) d\mu_G(g). \end{aligned}$$

On a que  $T_H$  est surjective, et il existe une unique application  $I : C_c(G/H) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccc} C_c(G) & & \\ T_H \downarrow & \searrow I_\rho & \\ C_c(G/H) & \xrightarrow{I} & \mathbb{R} \end{array}$$

Une telle application  $I$  est alors nécessairement une forme linéaire positive sur  $C_c(G/H)$ . Soit  $\mu_\rho$  la mesure borélienne régulière sur  $G/H$  associée. Alors  $\mu_\rho$  est quasi-invariante et les dérivées de Radon-Nikodym vérifient

$$\forall g \in G, \forall x \in G, \quad \frac{dg_* \mu_\rho}{d\mu_\rho}(xH) = \frac{\rho(gx)}{\rho(x)}.$$

Le théorème suivant est [BdLHV08, Theorem B.1.4, p. 328].

**Théorème 1.1.26** (Classification des mesures quasi-invariantes sur  $G/H$ ).

1.  $C_\rho(G, H)$  n'est jamais vide.
2. L'application

$$\begin{aligned} C_\rho(G, H) &\rightarrow \{ \mu \mid \mu \text{ mesure borélienne régulière quasi-invariante sur } G/H \} \\ \rho &\mapsto \mu_\rho \end{aligned}$$

est surjective.

3. Si  $\rho_1, \rho_2 \in C_\rho(G, H)$ , alors  $\mu_{\rho_1}$  et  $\mu_{\rho_2}$  sont équivalentes, et on a

$$\frac{d\mu_{\rho_1}}{d\mu_{\rho_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

**Corollaire 1.1.27.** *Si  $H$  est un sous-groupe discret de  $G$  et que  $G/H$  a une mesure invariante  $\mu$  qui est finie, alors  $G$  est unimodulaire,  $1$  est une rho-fonction pour le couple  $(G, H)$  et*

$$\mu = \mu(G/H)\mu_1.$$

La situation considérée dans le corollaire précédent est suffisamment intéressante pour qu'on lui donne un nom.

**Définition 1.1.28** (Réseau). *Un sous-groupe discret  $H$  de  $G$  est appelé **réseau** si  $G/H$  a une mesure invariante finie.*

**Exemple 1.1.29.** 1.  $\mathbb{Z}$  est un réseau de  $\mathbb{R}$ , et, plus généralement, tout sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^n$  de rang  $n$  (en tant que groupe abélien libre) est un réseau.

2. Un célèbre théorème de Siegel, Borel et Harish-Chandra affirme que si  $G$  sous-groupe fermé de  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ , connexe, et qui est la composante neutre de l'ensemble des zéros d'une famille de polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , alors  $G_{\mathbb{Z}} := G \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$  est un réseau de  $G$ . Le premier exemple de la situation précédente est celui où  $G := \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$  est un réseau de  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ . A ce sujet, voir [WM15, Major Theorem 5.1.11, p. 85].

3. Le théorème d'arithmécité de Margulis est une sorte de réciproque à ce théorème.

## 1.1.4 Bord des espaces CAT(-1) et mesures

Dans cette thèse, mes principaux exemples d'actions avec une mesure quasi-invariante, mais pas invariante, proviennent de la théorie des bords des espaces CAT(-1). Nous rappelons comment ces mesures sont construites.

### 1.1.4.1 Espaces CAT(-1)

Cette section reprend des passages de [PL15]. Nous ne donnons pas les démonstrations ; se référer à l'ouvrage de référence [BH99]. Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

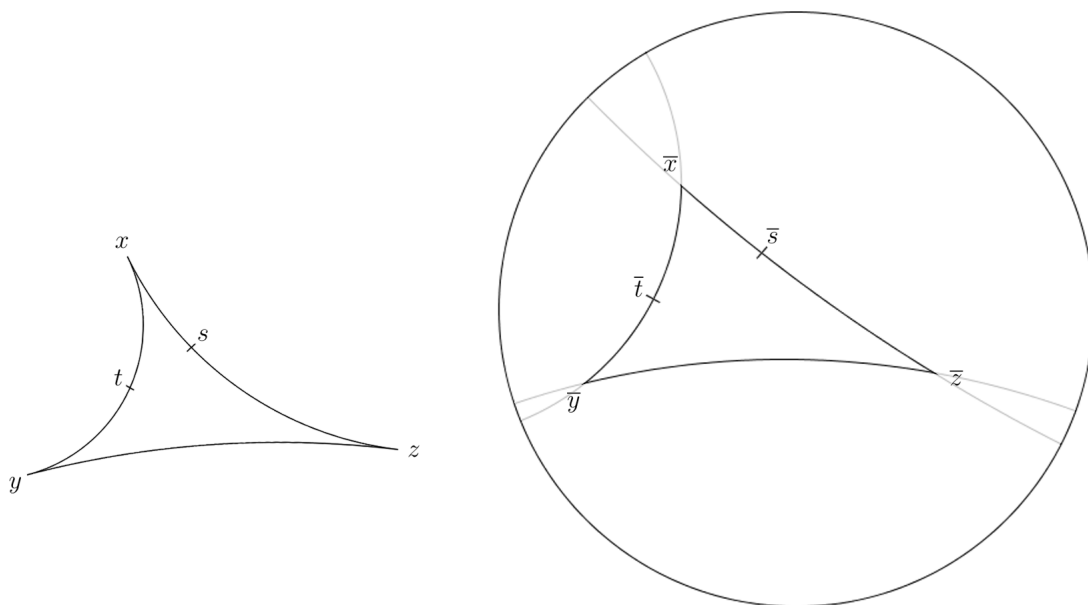
**Définition 1.1.30.** *On appelle **segment** (resp. **rayon**, **arc**) **géodésique** toute courbe  $c : I \rightarrow X$  ( $I = [0, T]$  (resp.  $[0, +\infty[$ ,  $]-\infty, +\infty[$ ) qui est une isométrie.*

*On appelle **espace géodésique** un espace métrique dans lequel chaque paire de points peut être reliée par un segment géodésique (pas forcément unique).*

**Définition 1.1.31.** *On appelle **triangle géodésique** la donnée de trois points  $x, y, z$  et de trois segments géodésiques  $[x, y], [y, z], [z, x]$ .*

Soit  $\mathbb{H}$  l'espace hyperbolique réel de dimension deux, sous la forme du demi-plan de Poincaré.

**Théorème-Définition 1.1.32.** *Soit  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  un triangle géodésique dans  $X$ . Il existe un unique (à isométrie près) triangle géodésique  $\bar{\Delta} = [\bar{x}, \bar{y}] \cup [\bar{y}, \bar{z}] \cup [\bar{z}, \bar{x}]$  dans  $\mathbb{H}$ , tel que  $d(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $d(y, z) = d_{\mathbb{H}}(\bar{y}, \bar{z})$  et  $d(z, x) = d_{\mathbb{H}}(\bar{z}, \bar{x})$ . On note  $\bar{\cdot} : \Delta \rightarrow \bar{\Delta}$  qui, restreinte à chaque côté du triangle, est l'isométrie naturelle. Ce triangle  $\bar{\Delta}$  est appelé **triangle de comparaison** de  $\Delta$ .*

FIGURE 1.1 – Un triangle et son triangle de comparaison dans  $\mathbb{H}$ 

**Définition 1.1.33** (Espaces CAT(-1)). Soit  $X$  un espace métrique géodésique, et  $\Delta$  un triangle géodésique de  $X$ . Alors on dit que  $\Delta$  satisfait à la condition CAT(-1) si pour tous  $s, t \in \Delta$ ,  $d(s, t) \leq d_{\mathbb{H}}(\bar{s}, \bar{t})$ .

Si tout triangle géodésique satisfait CAT(-1), on dit que  $X$  est un espace métrique CAT(-1). Si tout point de  $X$  possède un voisinage CAT(-1), on dit que  $X$  est à courbure inférieure ou égale à  $-1$ .

**Théorème 1.1.34.** Si  $X$  est géodésique, simplement connexe, et à courbure inférieure ou égale à  $-1$ , alors  $X$  est CAT(-1).

**Proposition 1.1.35.** Un espace métrique CAT(-1) est **uniquement géodésique**, ce qui veut dire qu'entre deux points, il n'existe qu'un unique segment géodésique.

**Proposition 1.1.36.** L'espace hyperbolique  $\mathbb{H}$  lui-même, les variétés riemanniennes simplement connexes à courbure sectionnelle  $\leq -1$  et les arbres sont des espaces métriques CAT(-1).

#### 1.1.4.2 Bord à l'infini, fonctions de Busemann et produit de Gromov

Pour cette section, on se réfère à [BH99] et [Bou95]. Soit  $X$  un espace métrique CAT(-1), et supposons-le propre. Nous allons le compactifier. On pose

$$\mathcal{R} := \{c : [0, +\infty[ \rightarrow X \mid c \text{ est un rayon géodésique}\}.$$

**Définition 1.1.37** (Rayons asymptotes). On définit, sur  $\mathcal{R}$ , la relation suivante :  $c \sim c'$  s'il existe  $K > 0$  tel que  $d(c(t), c'(t)) \leq K$  pour tout  $t \in [0, +\infty[$ . On dit alors que  $c$  et  $c'$  sont **asymptotes**.

**Remarque 1.1.38.** C'est bien sûr une relation d'équivalence. On note  $c(+\infty)$  la classe d'équivalence d'un rayon géodésique  $c$ .

**Exemple 1.1.39.** Deux rayons géodésique du plan hyperbolique, dans le modèle du disque, sont deux arcs de cercles coupant perpendiculairement le cercle "à l'infini" en un même point.

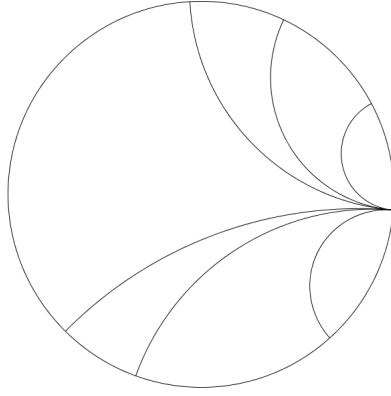


FIGURE 1.2 – Sept géodésiques asymptotes

**Définition 1.1.40** (Bord d'un espace CAT(-1)). On appelle **bord** de  $X$ , et on note  $\partial X$ , le quotient  $\mathcal{R}/\sim$ .

On pose  $\overline{X} := X \cup \partial X$ .

**Remarque 1.1.41.** On peut aussi définir la relation analogue pour les rayons géodésiques  $c : ]-\infty, 0] \rightarrow X$  et considérer dans ce cas  $c(-\infty)$  le point du bord correspondant.

Si  $c : [0, T] \rightarrow X$  est un segment géodésique, on le prolonge à  $[0, +\infty[$  par  $c(T+s) = c(T)$  pour tout  $s \geq 0$ .

Pour tout  $x \in X$ , on note  $\mathcal{R}(x)$  l'ensemble de tous les tels prolongements de segments géodésiques  $c$  tels que  $c(0) = x$ . On pose  $c(+\infty) := c(T)$ . On note également

$$\partial\mathcal{R}(x) := \{c \in \mathcal{R} \mid c(0) = x\}.$$

Ce sont tous deux des sous-espaces de  $C([0, +\infty[, X)$ , que l'on munit de la topologie compacte-ouverte. On note leur réunion  $\overline{\mathcal{R}(x)}$ .

**Théorème 1.1.42.** Pour tout  $x \in X$ , l'application

$$\begin{aligned} \phi_x : \overline{\mathcal{R}(x)} &\rightarrow \overline{X} \\ c &\mapsto c(+\infty) \end{aligned}$$

est une bijection (qui envoie  $\mathcal{R}(x)$  sur  $X$  et  $\partial\mathcal{R}(x)$  sur  $\partial X$ ).

Soit  $x \in X$ . Munissons  $\overline{X}$  de la topologie qui fait de  $\phi_x$  un homéomorphisme.

**Théorème 1.1.43.** Cette topologie ne dépend pas du point  $x$ , fait de  $\overline{X}$  un espace compact (séparé), et pour cette topologie,  $X$  est un ouvert dense.

**Remarque 1.1.44.** On peut donc dire que  $\overline{X}$  est une compactification de  $X$ .

Si  $g$  est une isométrie, et si  $c$  est un rayon géodésique dans  $X$ , alors  $g \circ c$  en est un aussi. La correspondance  $c \mapsto g \circ c$  définit donc une application de  $\mathcal{R}$  dans lui-même. De plus, les images de deux rayons asymptotes le sont encore. Autrement dit, cette application passe au quotient et définit une application de  $\overline{X}$  dans lui-même, qui prolonge  $g$ .

**Théorème 1.1.45.** Si  $g : X \rightarrow X$  est une isométrie, alors  $g : \overline{X} \rightarrow \overline{X}$  est un homéomorphisme.

**Théorème 1.1.46.** Si  $x \in X$  et  $\xi \in \partial X$ , il existe un unique rayon géodésique dans  $X$   $c$  tel que  $c(0) = x$  et  $c(+\infty) = \xi$  (on le note  $[x\xi[$ ).

Si  $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$ , il existe un unique arc géodésique  $c$  tel que  $c(-\infty) = \xi_1$  et  $c(+\infty) = \xi_2$  (on le note  $]\xi_1\xi_2[$ ).

### 1.1.4.3 Distances et mesures sur le bord

Nous définissons les cocycles de Busemann, puis les produits de Gromov, afin de définir des distances sur le bord. Enfin, à partir de celles-ci, on définit une famille de mesures intéressante. Nous ferons référence à la section de l'annexe qui concerne les mesures de Hausdorff.

**Théorème-Définition 1.1.47** (Cocycle de Busemann). *Soit  $\xi \in \partial X$ ,  $c \in \overline{\mathcal{R}}(x)$  tel que  $c(+\infty) = \xi$ , et soient  $x, y \in X$ .*

*Alors la quantité*

$$d(x, c(t)) - d(y, c(t))$$

*converge, pour  $t \rightarrow +\infty$ . La limite ne dépend que de  $\xi$ , et est notée  $B_\xi(x, y)$ . On l'appelle le **cocycle de Busemann**, ou encore **distance horosphérique** de  $x$  à  $y$  par rapport à  $\xi$ .*

**Remarque 1.1.48.** *De façon intuitive, si  $\xi \in \partial X$  et  $x, y \in X$ ,  $B_\xi(x, y)$  est l'écart algébrique l'on voit entre  $x$  et  $y$  quand on se place depuis  $\xi$ .*

**Proposition 1.1.49.** *On a, pour tous  $x, y \in X$  et  $\xi \in \partial X$ ,*

$$B_\xi(x, y) = -B_\xi(y, x)$$

*et*

$$B_\xi(x, y) + B_\xi(y, z) = B_\xi(x, z).$$

**Théorème-Définition 1.1.50** (Produit de Gromov de deux points du bord). *Soient  $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$ ,  $x \in X$  et  $p \in ]\xi_1, \xi_2[$ . Alors la quantité*

$$\frac{1}{2} (B_{\xi_1}(x, p) + B_{\xi_2}(x, p))$$

*ne dépend pas du point  $p$ . On l'appelle **produit de Gromov** de  $\xi_1$  et  $\xi_2$  relativement à  $x$ , et on le note  $(\xi_1|\xi_2)_x$ .*

**Proposition 1.1.51.** *Si  $x \in X$ ,  $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$  et  $g$  est une isométrie de  $X$ , alors on a*

$$(g\xi_1|g\xi_2)_{g(x)} = (\xi_1|\xi_2)_x.$$

On définit la distance à partir du produit de Gromov.

**Théorème-Définition 1.1.52** (Distance au bord vue d'un point). *Soient  $x \in X$ . Pour tous  $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$ , posons*

$$d_x(\xi_1, \xi_2) := \begin{cases} e^{-(\xi_1|\xi_2)_x} & \text{si } \xi_1 \neq \xi_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Alors  $d_x$  est une distance sur  $\partial X$ , qui induit sa topologie. On l'appelle la **distance vue de  $x$** .*

*Démonstration.* [Bou95, Thm 2.5.1, p. 85]. □

**Théorème 1.1.53.** *On a, pour tous  $x, y \in X$ ,  $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$ , que*

$$d_y(\xi_1, \xi_2) = d_x(\xi_1, \xi_2) e^{\frac{1}{2}(B_{\xi_1}(x, y) + B_{\xi_2}(x, y))}.$$

*En particulier,  $\text{Id}_{\partial X} : (X, d_x) \rightarrow (X, d_y)$  est continûment conforme<sup>1</sup> de facteur conforme*

$$\xi \mapsto e^{B_\xi(x, y)}.$$

---

1. Voir A.4.5.

**Définition 1.1.54** (Mesures au bord). Soit  $x \in X$ . On note  $\delta_x$  la dimension de Hausdorff de  $(\partial X, d_x)$ , et on note  $\mu_x$  la mesure de Hausdorff  $\delta_x$ -dimensionnelle.

En fait, toutes ces mesures se ressemblent beaucoup, comme le montre ce théorème.

**Théorème 1.1.55.** On suppose que  $\partial X$  n'a pas de points isolés. Soient  $x, y \in X$ . Alors  $\delta_x = \delta_y$ ,  $\mu_x$  et  $\mu_y$  sont équivalentes, et la dérivée de Radon-Nikodym vérifie

$$\forall \xi \in \partial X, \quad \frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = e^{\delta B_\xi(x,y)}.$$

*Démonstration.* On fixe  $x \in X$  et on suppose que  $\mu_x(\partial X) \in \mathbb{R}_+^*$ . D'après le Corollaire A.4.11,  $x \mapsto \delta_x$  est constante ; on note  $\delta$  cette valeur. De plus, soient  $x, y \in X$ . Toujours d'après le Corollaire A.4.11, on a

$$\forall \xi \in \partial X, \quad \frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = e^{\delta B_\xi(x,y)}.$$

□

#### 1.1.4.4 Quasi-invariance des mesures au bord sous l'action des isométries

**Proposition 1.1.56.** Soit  $G$  le groupe des isométries de  $X$ . Alors la famille  $(\mu_x)_{x \in X}$  de mesures est  $G$ -équivariante, c'est-à-dire que

$$\forall g \in G, \forall x \in X, \quad g_*\mu_x = \mu_{g(x)}.$$

*Démonstration.* Soit  $g$  une isométrie de  $X$ , et  $x \in X$ . Comme

$$g : (X, d_x) \rightarrow (X, d_{g(x)})$$

est une isométrie et que les isométries envoient mesures de Hausdorff sur mesures de Hausdorff, on a  $g_*\mu_x = \mu_{g(x)}$ . □

Le théorème suivant montre que pour l'action du groupe des isométries d'un espace CAT(-1) sur son bord, chacune des mesures  $\mu_x$  est quasi-invariante, et on peut identifier le cocycle de Radon-Nikodym en termes des objets géométriques que l'on a défini dans cette section.

**Théorème 1.1.57.** Soit  $G$  le groupe des isométries de  $X$ , et considérons l'action (mesurable, car continue) que l'on en déduit de  $G$  sur  $\partial X$ . Soit  $x \in X$ , et considérons la mesure  $\mu_x$  sur  $\partial X$ . Alors  $\mu_x$  est quasi-invariante, et le cocycle de Radon-Nikodym vérifie, pour tout  $g \in G$ ,

$$\forall \xi \in \partial X, \quad c_\mu(g, \xi) = e^{\delta B_\xi(x, g^{-1}(x))}.$$

*Démonstration.* Soit  $g \in G$ , et  $x \in X$ . D'après la Proposition 1.1.56, on a  $g_*\mu_x = \mu_{g(x)}$ , et d'après le Théorème 1.1.55, on a

$$\forall \xi \in \partial X, \quad \frac{d\mu_{g(x)}}{d\mu_x}(\xi) = e^{\delta B_\xi(x, g(x))},$$

et on en déduit la formule

$$\forall \xi, \quad \frac{dg_*\mu_x}{d\mu_x}(\xi) = e^{\delta B_\xi(x, g(x))}.$$

Autrement dit, si on considère l'action du groupe des isométries de  $X$  sur  $\partial X$ , alors, pour tout  $x \in X$ ,  $\mu_x$  est quasi-invariante pour l'action, et le cocycle de Radon-Nikodym vérifie, pour toute isométrie  $g$  de  $X$ ,

$$\forall \xi \in \partial X, \quad c_\mu(g, \xi) = e^{\delta B_\xi(x, g^{-1}(x))}.$$

□

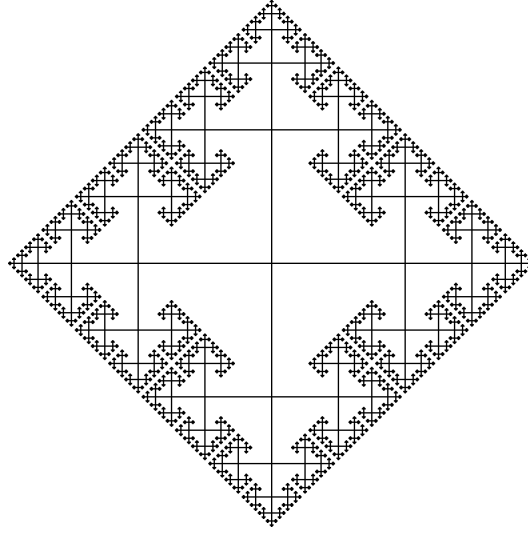


FIGURE 1.3 – Une vue d'artiste de l'arbre 4-régulier.

#### 1.1.4.5 Un exemple d'espace CAT(-1) et son bord : les arbres réguliers

Soit  $\mathbb{T}$  un arbre  $d$ -régulier, avec  $d \geq 3$ . On munit sa réalisation géométrique de la distance  $d_{\mathbb{T}}$  qui donne longueur 1 à chaque arête. C'est un espace CAT(-1), dans lequel deux rayons géodésiques  $c_1, c_2$  sont asymptotes si et seulement si

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad c_1(t_1 + t) = c_2(t_2 + t).$$

Fixons un sommet  $x_0 \in \mathbb{T}$ , et soient  $c_1, c_2$  deux rayons géodésiques différents partant de  $x_0$ , et soient  $\xi_1, \xi_2 \in \partial\mathbb{T}$  les points du bord correspondants. Alors

$$(\xi_1 | \xi_2)_{x_0} = \max\{n \in \mathbb{N} \mid c_1(n) = c_2(n)\}.$$

Autrement dit, les deux rayons se confondent pendant un moment, puis s'écartent pour partir à l'infini; le produit de Gromov est le temps qu'ils passent ensemble. On en déduit que  $d_{x_0}$  est un espace ultramétrique, ce qui implique en particulier la propriété insolite que tout point de toute boule en est un centre.

Si  $y \in \mathbb{T} \setminus \{x_0\}$ , on note  $\partial C_y$  l'ensemble

$$\{\xi \in \partial\mathbb{T} \mid y \in [x_0, \xi]\}.$$

Alors  $(\partial C_y)_{y \in \mathbb{T} \setminus \{x_0\}}$  forme une base d'ouverts fermés de  $\partial\mathbb{T}$  qui est donc un compact totalement discontinu (il est en fait homéomorphe à l'espace de Cantor). De plus, toute boule de rayon  $e^{-n}$  dans  $\partial\mathbb{T}$  est de la forme  $\partial C_y$  pour un certain  $y \in \mathbb{T}$  tel que  $d_{\mathbb{T}}(x_0, y) = n$ ; il y a, en outre,  $d(d-1)^{n-1}$  tels  $y$ .

Nous identifions maintenant la dimension de Hausdorff de  $(\partial\mathbb{T}, d_{x_0})$  et la mesure de Hausdorff associée.

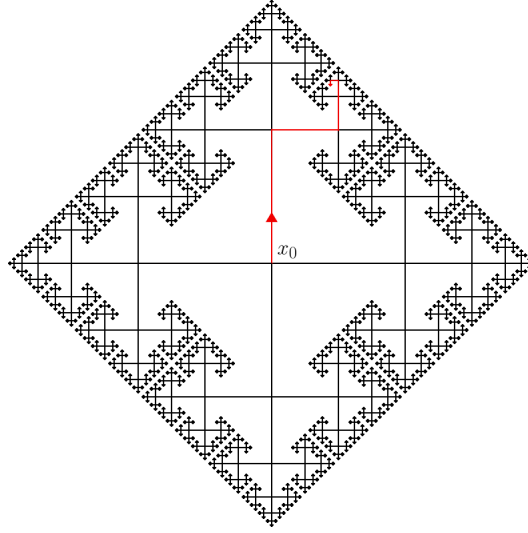
**Théorème 1.1.58.** *La dimension de Hausdorff de  $(\partial\mathbb{T}, d_{x_0})$  est  $\ln(d-1)$ . La mesure  $\mu_{x_0}$  vérifie, pour tout  $y \in \mathbb{T} \setminus \{x_0\}$ ,*

$$\mu_{x_0}(\partial C_y) = \frac{1}{3^{d(x_0, y)}}$$

et

$$\mu_{x_0}(\partial\mathbb{T}) = \frac{d}{d-1}.$$



FIGURE 1.4 – En rouge, un rayon géodésique partant de  $x_0$ .

*Démonstration.* Démontrons seulement que la dimension de Hausdorff de  $\partial\mathbb{T}$  est  $\ln(d-1)$ . Notons  $\mu_\epsilon^\delta$  à la place de  $H_\epsilon^{d_{x_0}, \delta}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\bigcup_{d_{\mathbb{T}}(x_0, y) = n} \partial C_y = \partial T,$$

ceci étant un  $\epsilon$ -recouvrement de  $\partial\mathbb{T}$  si  $e^{-n} < \epsilon$ .

Soit  $\epsilon > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $e^{-n} < \epsilon$ . On voit que

$$\begin{aligned} \mu_\epsilon^{\ln(d-1)} &\leq \sum_{\substack{y \in \mathbb{T} \\ d_{\mathbb{T}}(x_0, y) = n}} (e^{-n})^{\ln(d-1)} \\ &= \sum_{\substack{y \in \mathbb{T} \\ d_{\mathbb{T}}(x_0, y) = n}} \frac{1}{(d-1)^n} \\ &= d(d-1)^{n-1} \frac{1}{(d-1)^n} \\ &= \frac{d}{d-1}. \end{aligned}$$

Ceci démontre que  $\mu_\epsilon^{\ln(d-1)}(\partial X)$  est finie et bornée par  $\frac{d}{d-1}$ , donc que  $\mu^{\ln(d-1)}(\partial X)$  est finie, et donc que la dimension de Hausdorff de  $\partial X$  est inférieure ou égale à  $\ln(d-1)$ .

Soit maintenant  $\delta < d-1$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Notons  $n := \lceil -\ln \epsilon \rceil$ . On a

$$\begin{aligned} \mu_\epsilon^{\ln \delta}(\partial\mathbb{T}) &= \sum_{\substack{y \in \mathbb{T} \\ d_{\mathbb{T}}(x_0, y) = n}} (\text{diam } \partial C_y)^{\ln \delta} \\ &= \sum_{\substack{y \in \mathbb{T} \\ d_{\mathbb{T}}(x_0, y) = n}} (e^{-n})^{\ln \delta} \\ &= d(d-1)^{n-1} \frac{1}{\delta^n} \\ &= \frac{d}{d-1} \left( \frac{d-1}{\delta} \right)^{\lceil -\ln \epsilon \rceil}. \end{aligned}$$

Ainsi  $\mu_\varepsilon^\delta(\partial X) \rightarrow \infty$  et donc  $\mu^\delta(\partial X) = \infty$ , ce qui assure que la dimension de Hausdorff de  $\partial X$  est supérieure à  $\ln \delta$ .

Et donc, la dimension de Hausdorff de  $\partial \mathbb{T}$  est  $\ln(d-1)$ .  $\square$

#### 1.1.4.6 Estimations pour la fonction de Harish-Chandra

Normalisons  $\mu_{x_0}$  de sorte qu'elle donne mesure 1 à  $\partial T$ , et notons encore  $\mu_{x_0}$  cette mesure.

Nous allons calculer précisément le cocycle de Radon-Nikodym et la fonction de Harish-Chandra pour cette action. Pour rappel, pour une isométrie  $g$ , et  $\xi \in \partial \mathbb{T}$ , on note  $c(g, \xi) := (d-1)^{B_\xi(x_0, g^{-1}(x_0))}$  et  $\Xi(g) := \int_{\partial \mathbb{T}} c(g, \xi)^{\frac{1}{2}} d\mu_{x_0}$ . Nous utiliserons, temporairement, la notation suivante.

**Notation 1.1.59.** Soit  $y \in \mathbb{T} \setminus \{x_0\}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On pose

$$S_{n,y} := \{z \in T_d \mid d_{\mathbb{T}}(x_0, z) = n, \quad \text{diam}_{\mathbb{T}}([x_0, z] \cap [x_0, y]) = \text{diam}_{\mathbb{T}}([x_0, z]) - 1\}.$$

Le lemme suivant met en évidence une partition de  $\partial \mathbb{T}$  qui va rendre les calculs faciles.

**Lemme 1.1.60.** Soit  $y \in \mathbb{T} \setminus \{x_0\}$ . Posons  $n := d_{\mathbb{T}}(x_0, y)$ . On a

$$\partial \mathbb{T} = \partial C_y \sqcup \bigsqcup_{i=1}^n \left( \bigsqcup_{z \in S_{i,y}} \partial C_z \right).$$

De plus, on a

$$|S_{1,y}| = d-1$$

et, pour tout  $i \in \{2, \dots, n\}$ ,

$$|S_{i,y}| = d-2.$$

*Démonstration.* Démontrons que la partition annoncée en est bien une. Les ensembles en question sont clairement disjoints; il ne reste qu'à démontrer que leur union est  $\partial T$ . Soit  $\xi \in \partial T$ , et  $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow T$  le rayon géodésique joignant  $x_0$  à  $\xi$ . Soit

$$j := \max\{j \in \mathbb{R}_+ \mid c(j) \in [x_0, y]\}.$$

Alors  $z := c(j+1) \in S_{j+1,y}$  et  $\xi \in \partial C_z$ .

Ensuite, parmi les voisins de  $x_0$ , il n'y en a qu'un seul qui n'est pas dans  $S_{1,y}$  (c'est celui qui est entre  $x_0$  et  $y$ ). Ceci démontre que  $|S_{1,y}| = d-1$ .

Enfin, si on note  $u$  le point de  $[x_0, y]$  qui est à distance  $i-1$  de  $x_0$ , alors parmi ses  $d$  voisins, tous sont dans  $S_{i,y}$ , sauf ses deux voisins qui sont, eux aussi, sur  $[x_0, y]$ .  $\square$

**Lemme 1.1.61** (Calcul du cocycle de Busemann). Soit  $y \in \mathbb{T} \setminus \{x_0\}$ . Posons  $n := d_{\mathbb{T}}(x_0, y)$ . On a les propriétés suivantes.

1. On a, pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , pour tout  $z$  dans  $S_{i,y}$ ,

$$\forall \xi \in \partial C_z, \quad B_\xi(x_0, y) = 2(i-1) - n.$$

2. On a

$$\forall \xi \in \partial C_y, \quad B_\xi(x_0, y) = n.$$

*Démonstration.* 1. Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $z \in S_{i,y}$  et  $\xi \in \partial C_z$ . Soit  $u$  le point de  $[x_0, y]$  qui est à distance 1 de  $z$ . Alors on a

$$\begin{aligned} B_\xi(x_0, y) &= d_{\mathbb{T}}(x_0, u) - d_{\mathbb{T}}(y, u) \\ &= i - 1 - (d_{\mathbb{T}}(x_0, y) - d_{\mathbb{T}}(x_0, u)) \\ &= 2(i - 1) - n. \end{aligned}$$

2. Soit  $\xi \in \partial C_y$ . Alors

$$B_\xi(x_0, y) = d(x_0, y) = n.$$

□

Ce lemme permet de calculer immédiatement le cocycle de Radon-Nikodym.

**Proposition 1.1.62** (Calcul du cocycle de Radon-Nikodym). *Soit  $g$  une isométrie de  $X$ . Posons  $n := d_{\mathbb{T}}(x_0, g^{-1}(x_0))$ . On a les propriétés suivantes.*

1. On a, pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , pour tout  $z$  dans  $S_{i,g^{-1}(x_0)}$ ,

$$\forall \xi \in C_z, \quad c(g, \xi) = (d - 1)^{2(i-1)-n}.$$

2. On a

$$\forall \xi \in C_{g^{-1}(x_0)}, \quad c(g, \xi) = (d - 1)^n.$$

Nous pouvons conclure avec le calcul de la fonction de Harish-Chandra.

**Corollaire 1.1.63** (Calcul de la fonction de Harish-Chandra). *Soit  $g$  une isométrie de  $\mathbb{T}$ , et soit  $n := d(x_0, g^{-1}(x_0))$ . Posons  $q = d - 1$ . On a*

$$\int_{\partial \mathbb{T}} c(g, b)^{\frac{1}{2}} d\mu(b) = \left(1 + \frac{q - 1}{q + 1} n\right) q^{-\frac{n}{2}}.$$

*Démonstration.* Notons, pour alléger l'écriture,  $v := g^{-1}(x_0)$ . En utilisant les lemmes précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathbb{T}} c(g, \xi)^{\frac{1}{2}} d\mu_{x_0}(\xi) &= \int_{C_v} c(g, \xi)^{\frac{1}{2}} d\mu_{x_0}(\xi) + \sum_{i=1}^n \sum_{y \in S_{i,v}} \int_{C_y} c(g, \xi)^{\frac{1}{2}} d\mu_{x_0}(\xi) \\ &= \mu_{x_0}(C_v) (d - 1)^{\frac{n}{2}} + \sum_{i=1}^n \sum_{y \in S_{i,v}} \mu_{x_0}(C_y) (d - 1)^{i-1-\frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{d(d-1)^{n-1}} (d - 1)^{\frac{n}{2}} + \sum_{i=1}^n \sum_{y \in S_{i,v}} \frac{1}{d(d-1)^{i-1}} (d - 1)^{i-1-\frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{d} \left[ (d - 1)^{-\frac{n}{2}+1} + \sum_{i=1}^n \sum_{y \in S_{i,v}} (d - 1)^{-\frac{n}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{d} (d - 1)^{-\frac{n}{2}} \left[ d - 1 + \sum_{i=1}^n |S_{i,v}| \right] \\ &= \frac{1}{d} (d - 1)^{-\frac{n}{2}} [d - 1 + d - 1 + (n - 1)(d - 2)] \\ &= \left(1 + \frac{d - 2}{d} n\right) (d - 1)^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

□

## 1.2 Dynamique mesurée et représentations unitaires

### 1.2.1 Ergodicité, mélange

Soit  $G$  un groupe,  $(X, \mathcal{T}, \nu)$  un espace de probabilité, et une action  $G \curvearrowright X$  qui préserve la mesure.

**Définition 1.2.1** (Action ergodique). *On dit que l'action est **ergodique** si pour tout  $A \in \mathcal{T}$ ,*

$$(\forall g \in G, \nu(gA\Delta A) = 0) \Rightarrow \nu(A) \in \{0, 1\}.$$

Autrement dit, une action est dite ergodique si, les parties invariantes **à mesure nulle près** sont le vide ou la partie pleine, **à mesure nulle près**.

**Remarques 1.2.2.** — *L'ergodicité peut être envisagée comme une forme d'irréductibilité : si  $A$  est tel que pour tout  $g \in G$ ,  $gA\Delta A = \emptyset$ , alors c'est que l'action  $G \curvearrowright X$  est la réunion disjointe des deux sous-actions  $G \curvearrowright A$  et  $G \curvearrowright A^c$ , réunion que l'on considère non triviale dès que  $\nu(A) \notin \{0, 1\}$ .*

— *Si  $G$  est un groupe dénombrable (muni de la tribu discrète), alors une action est ergodique si et seulement si pour toute partie mesurable  $A$ ,*

$$\forall g \in G, \quad gA\Delta A = \emptyset \Rightarrow \nu(A) \in \{0, 1\},$$

*et c'est souvent sous cette forme que l'ergodicité est formulée, dans le cas d'actions de  $\mathbb{Z}$ , par exemple. Pour le voir, il suffit de constater la chose suivante, qui nous permet, à partir d'une partie invariante à mesure nulle près, de construire une partie invariante (tout court !) : si une partie mesurable  $A$  est telle que pour tout  $g$ , on a  $\nu(gA\Delta A) = 0$ , alors la partie*

$$A_\infty := \bigcup_{g \in G} gA$$

*est mesurable, et vérifie que  $\nu(A_\infty\Delta A) = 0$  et pour tout  $g \in G$ ,  $gA_\infty = A_\infty$ .*

— *Si  $G$  n'est pas dénombrable, l'équivalence ci-dessus n'est plus vraie. En effet, considérons le groupe  $G$  des permutations à support fini<sup>2</sup> de l'intervalle  $[0, 1]$ , muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue. On constate alors que toute partie est invariante à mesure nulle près (puisque pour toute partie  $A$  de  $[0, 1]$ , pour tout  $g$  dans  $G$ ,  $gA\Delta A$  est fini ; par contre, aucune partie n'est invariante, car l'action est transitive. C'est pour éviter ce genre de situations que la définition d'ergodicité est formulée ainsi, dans le cadre général où on n'impose pas de condition de dénombrabilité sur le groupe.*

Nous verrons, dans la suite, de nombreux exemples d'actions ergodiques. Supposons maintenant que  $G$  est un groupe topologique.

**Définition 1.2.3** (Action mélangeante). *L'action est dite **mélangeante** si pour tous  $A, B \in \mathcal{T}$ ,*

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \nu(A \cap g^{-1}B) = \nu(A)\nu(B).$$

---

2. C'est-à-dire, qui fixe tous les points sauf un nombre fini d'entre eux.

**Remarque 1.2.4.** *La propriété de mélange est bien connue des personnes qui pétrissent de la pâte : en incorporant le beurre à un endroit  $B$  et en pétrissant longtemps, on s'attend à ce que le beurre soit réparti de manière homogène, c'est-à-dire qu'il est présent en proportion constante dans tout morceau de pâte.*

**Remarque 1.2.5.** *Selon cette définition, toute action de tout groupe compact est mélangeante.*

**Lemme 1.2.6.** *Supposons que  $G$  est séparé, et n'est pas compact. Si l'action est mélangeante, alors elle est ergodique.*

*Démonstration.* Soit  $A \subset X$  mesurable tel que pour tout  $g \in G$ ,  $\nu(A \Delta g^{-1}A) = 0$ . Alors pour tout  $g \in G$ ,  $\nu(A \cap g^{-1}A) = \nu(A)$ . Par hypothèse, on a

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \nu(A) = \nu(A)^2,$$

et donc  $\nu(A) \in \{0, 1\}$ . □

Nous donnons un certain nombre d'exemples dans la Section 1.3.

Les idées qui sous-tendent les définitions qui suivent sont dûes à Boltzmann, qui les a énoncées en 1871 dans [Bol71]. L'idée, appelée *hypothèse ergodique*, énonce que pour calculer la vitesse moyenne des particules d'un gaz (la *moyenne spatiale*), il suffit de choisir une seule particule, la suivre pendant longtemps, et faire la moyenne de ses vitesses, calculée à différents instants (la *moyenne temporelle*) ; à la limite, la moyenne temporelle est égale à la moyenne spatiale.

C'est autour de cette idée que s'est construite la branche des systèmes dynamiques appelée *théorie ergodique*, et, de manière informelle, on peut appeler *théorème ergodique* tout théorème qui énonce une convergence comme celle ci-dessus.

Le cadre retenu pour modéliser la situation envisagée par Boltzmann est celui où un groupe  $G$  (le *temps*) agit sur un espace de probabilité  $(X, \nu)$  (l'*espace*) en préservant la mesure (qui peut être envisagée comme une abstraction du concept physique de *masse*).

**Définition 1.2.7** (Théorème ergodique  $L^2$ , en probabilité). *Soit  $(X, \mathcal{T}, \nu)$  un espace de probabilité, et considérons une action  $G \curvearrowright X$  qui préserve la mesure. Soit  $\mu := (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de mesures de probabilité sur  $G$ . On dit que **le théorème ergodique  $L^2$**  vaut  $\mu$  si*

$$\forall f \in L^2(X, \mathcal{T}, \nu), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x \mapsto \int_G f(g^{-1}x) d\mu_n \right) = \int_X f d\nu,$$

la convergence ayant lieu dans  $L^2$ . On dit que **le théorème ergodique en probabilité** vaut pour  $\mu$  si

$$\forall f \in L^2(X, \mathcal{T}, \nu), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x \mapsto \int_G f(g^{-1}x) d\mu_n \right) = \int_X f d\nu,$$

la convergence ayant lieu en probabilité, c'est-à-dire si

$$\forall \phi \in L^2(X, \nu), \forall \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left( \left\{ x \in X \mid \varepsilon \leq \left| \left( x \mapsto \int_G f(g^{-1}x) d\mu_n \right) - \int_X \phi d\nu \right| \right\} \right) = 0.$$

**Remarque 1.2.8.** *On peut aussi formuler des théorèmes ergodiques  $L^p$  avec  $p \in [1, \infty]$ , et des théorèmes ergodiques presque partout, mais nous n'en ferons pas usage dans ce travail.*

Comme en théorie des probabilités, une des convergences implique l'autre : c'est ce qu'énonce le théorème suivant.

**Théorème 1.2.9.** *Si le théorème ergodique  $L^2$  vaut pour  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , le théorème ergodique en probabilité vaut pour  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .*

*Démonstration.* Notons momentanément, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi(\mu_n)$  l'application

$$f \mapsto \left( x \mapsto \int_G f(g^{-1}x) d\mu_n(x) \right).$$

Cette proposition est une application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\nu \left( \left\{ x \in X \mid \varepsilon \leq \left| \pi(\mu_n)\phi(x) - \int_X \phi d\nu \right| \right\} \right) \leq \frac{\|\pi(\mu_n)\phi - \int_X \phi d\nu\|_2^2}{\varepsilon^2},$$

ce qui implique le théorème. □

L'ergodicité de l'action est une condition nécessaire pour avoir un théorème ergodique.

**Proposition 1.2.10.** *S'il existe une suite de mesures de probabilités  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur laquelle on a un théorème ergodique en probabilité, alors l'action  $G \curvearrowright (X, \nu)$  est ergodique.*

*Démonstration.* Notons momentanément, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi(\mu_n)$  l'application

$$f \mapsto \left( x \mapsto \int_G f(g^{-1}x) d\mu_n(x) \right).$$

Soit  $A$  une partie mesurable de  $X$ , que l'on suppose  $G$ -invariante. Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi(\mu_n)\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A$ . Supposons que  $\nu(A) \notin \{0, 1\}$ . D'après l'hypothèse, il existe  $n$  tel que  $\nu(\{x \in X \mid |\mathbf{1}_A(x) - \nu(A)| > \min\{1 - \nu(A), \nu(A)\}\}) \leq \frac{1}{2}$ , ce qui est absurde. □

## 1.2.2 Représentations

### 1.2.2.1 Représentations unitaires

Les représentations unitaires peuvent être envisagées comme une généralisation *unitaire* de la dynamique mesurée, notamment *via* la représentation de Koopman que nous définissons plus loin.

Soit  $G$  un groupe topologique, et  $(X, \nu)$  un espace mesuré  $\sigma$ -fini.

**Définition 1.2.11** (Représentation unitaire). *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. On appelle **représentation unitaire** de  $G$  un morphisme  $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$  continu pour la topologie forte des opérateurs, où  $U(\mathcal{H})$  désigne le groupe des opérateurs unitaires sur  $\mathcal{H}$ .*

**Définition 1.2.12.** Si  $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$  est une représentation unitaire, et si  $u, v \in \mathcal{H}$ , on dit que

$$g \mapsto \langle \pi(g)u, v \rangle$$

est un coefficient matriciel de  $\pi$ .

Soit  $M^{\mathbb{C}}(G)$  l'ensemble des mesures boréliennes complexes (supposées bornées par définition) sur  $G$ .

**Proposition 1.2.13.** Si  $\mu \in M^{\mathbb{C}}(G)$ , et  $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$  est une représentation unitaire, alors il existe un unique opérateur borné  $\pi(\mu)$  sur  $\mathcal{H}$  tel que

$$\forall u, v \in \mathcal{H}, \quad \langle \pi(\mu)u, v \rangle = \int_G \langle \pi(g)u, v \rangle d\mu(g).$$

### 1.2.2.2 Représentation de Koopman

La construction suivante permet un transfert de technologie très important des représentations unitaires vers les systèmes dynamiques.

**Définition 1.2.14** (Représentation de Koopman). Soit  $G \curvearrowright X$  une action mesurable, et soit  $\nu$  une mesure quasi-invariante sur  $X$ . Posons, pour tout  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} \pi(g) : L^2(X, \nu) &\rightarrow L^2(X, \nu) \\ h &\mapsto \left( x \mapsto h(g^{-1}x)c(g^{-1}, x)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

On appelle  $\pi$  la **représentation de Koopman** associée à l'action.

Soit  $G$  un groupe topologique,  $G \curvearrowright X$  une action mesurable, et soit  $\nu$  une mesure quasi-invariante.

**Proposition 1.2.15.** Pour tout  $g \in G$ , pour toute  $h \in L^2(X, \nu)$ , on a

$$\|\pi(g)h\|_2 = \|h\|_2.$$

Autrement dit, pour tout  $g \in G$ ,  $\pi(g)$  est unitaire.

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \|\pi(g)h\|_2^2 &= \int_X |h(g^{-1}x)|^2 c(g^{-1}, x) d\nu(x) \\ &= \int_X |h \circ g^{-1}|^2 \frac{dg_*\nu}{d\nu}(x) d\nu(x) \\ &= \int_X |h|^2 d\nu(x) \\ &= \|h\|_2^2. \end{aligned}$$

□

Bien souvent, on se restreindra au cas où la mesure est invariante. Dans ce cas, le cocycle de Radon-Nikodym est constant égal à 1, et  $\pi(g)$ , pour  $g \in G$ , est simplement l'opérateur de précomposition par  $g^{-1}$ .

D'autre part, dans les cas que nous rencontrerons,  $\pi$  est une représentation unitaire, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 1.2.16** ([BdLHV08, Proposition A.6.1, p. 309]). *Si  $G$  est localement compact,  $\sigma$ -compact, et si  $(X, \nu)$  est un espace  $\sigma$ -fini tel que  $L^2(X, \nu)$  est séparable. Alors  $\pi$  est continu, pour la topologie forte des opérateurs.*

**Exemple 1.2.17.** *Soit  $G$  un groupe localement compact, soit  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ . Alors la représentation de Koopman associée à l'action de  $G$  sur lui-même par multiplication à gauche s'appelle la **représentation régulière** de  $G$ . On la note  $\lambda_G$ . Elle vérifie que  $\forall g \in G$ , et tout  $h \in L^2(G, \mu_G)$ ,*

$$\lambda_G(g)h := h \circ g^{-1},$$

*et que pour toute  $f \in C_c(G)$ , pour toute  $h \in L^2(G, \mu_G)$ ,*

$$\lambda_G(f)h = f * h,$$

*où  $*$  désigne le produit de convolution.*

La représentation de Koopman est très utile, car elle permet de caractériser, en termes de représentations unitaires, les actions ergodiques et mélangeantes.

**Théorème 1.2.18** (Caractérisation de l'ergodicité par la représentation de Koopman). *Soit  $(X, \nu)$  un espace de probabilité.*

*Soit  $G \curvearrowright (X, \nu)$  une action qui préserve la mesure, et soit  $\pi$  la représentation de Koopman associée. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *l'action est ergodique ;*
2. *les seuls éléments  $h$  de  $L^2(X, \nu)$  qui sont invariants, c'est-à-dire tels que  $\forall g \in G, \pi(g)h = h$  sont les fonctions constantes presque partout.*

**Théorème 1.2.19** (Caractérisation du mélange par la représentation de Koopman). *Soit  $(X, \nu)$  un espace de probabilité.*

*Soit  $G \curvearrowright (X, \nu)$  une action qui préserve la mesure, et soit  $\pi$  la représentation de Koopman associée. Le sous-espace  $L_0^2(X, \nu)$  des fonctions d'intégrale nulle est une sous-représentation de  $\pi$ , que l'on note  $\pi_0$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *l'action est mélangeante ;*
2. *tous les coefficients matriciels de  $\pi_0$  tendent vers 0 à l'infini.*

Elle permet aussi d'exprimer de manière concise les théorèmes ergodiques.

**Théorème 1.2.20** (Caractérisation des théorèmes ergodiques). *Soit  $(X, \nu)$  un espace de probabilité.*

*Soit  $G \curvearrowright (X, \nu)$  une action qui préserve la mesure, et soit  $\pi$  la représentation de Koopman associée. Notons  $P_1$  le projecteur orthogonal sur le sous-espace des constantes. Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de mesures boréliennes de probabilité sur  $G$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *le théorème ergodique  $L^2$  vaut pour  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ;*
2. *on a la convergence, en topologie forte des opérateurs,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(\mu_n) = P_1.$$



### 1.2.3 Théorèmes ergodiques $L^2$

#### 1.2.3.1 Pour des actions de groupes moyennables

Voici le célèbre théorème de von Neumann, qui est un théorème ergodique  $L^2$  pour des actions préservant la mesure, de groupes moyennables.

**Théorème 1.2.21** (Théorème ergodique de von Neumann). *Soit  $G$  un groupe localement compact, soit  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ ,  $(X, \nu)$  un espace de probabilité, soit  $G \curvearrowright X$  une action ergodique qui préserve la mesure.*

*On suppose qu'il existe une suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de parties boréliennes de  $G$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_G(F_n) \in \mathbb{R}_+^*$ , et telles que pour tout  $g \in G$ , et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,*

$$\frac{\mu_G(F_n g \Delta F_n)}{\mu_G(F_n)} < \varepsilon.$$

*Posons, pour tout  $n$ ,*

$$\mu_n := \frac{\mathbf{1}_{F_n}}{\mu_G(F_n)} \mu_G.$$

*Alors le théorème ergodique  $L^2$  vaut pour  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\pi$  la représentation de Koopman associée à l'action. Soit

$$E := \left\{ u \in L^2(X, \nu) \mid \pi(\mu_n)u \rightarrow \int_X u d\nu \right\},$$

où il est entendu que la convergence a lieu en norme  $L^2$ . Le sous-espace  $E$  est fermé : cela découle facilement du fait que les  $\pi(\mu_n)$  sont de norme au plus 1. Soient également

$$H^G := \{ u \in L^2 \mid \forall g \in G, \pi(g)u = u \}$$

et

$$W := \text{vect}\{ \pi(g)w - w \mid w \in L^2, g \in G \}.$$

$H^G$  ne contient que les constantes, car l'action est ergodique, et donc  $H^G \subset E$ .

De plus, on a clairement  $W \subset L^2_0$ . Montrons que  $W \subset E$  : soit  $w \in L^2$  et  $g \in G$ . Alors on a

$$\pi(\mu_n)(\pi(g)w - w) = \pi(\mu_n g - \mu_n)(w).$$

Or  $\mu_n g - \mu_n = \frac{1}{\mu_G(F_n)} (\mathbf{1}_{F_n g} - \mathbf{1}_{F_n})$ , et donc  $\|\pi(\mu_n g - \mu_n)\| \leq \frac{\mu_G(F_n g \Delta F_n)}{\mu_G(F_n)} < \varepsilon$ . Ainsi, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(\mu_n)(\pi(g)w - w) = 0.$$

On a donc  $W \subset E$ , et, comme  $E$  est fermé,  $\overline{W} \subset E$ , et donc  $H^G + \overline{W} \subset E$ .

Montrons maintenant que  $W^\perp \subset H^G$ , ce qui implique  $W^\perp = H^G$  (car  $H^G \subset W^\perp$ ) et donc  $(H^G)^\perp = \overline{W}$ , et enfin  $E \supset H^G + \overline{W} = L^2$ . Soit  $v \in W^\perp$ . Soit  $g \in G$ . On a

$$\begin{aligned} \|\pi(g)v - v\|^2 &= \langle \pi(g)v - v, \pi(g)v - v \rangle \\ &= \langle \pi(g)v, \pi(g)v \rangle - \langle \pi(g)v, v \rangle - \langle v, \pi(g)v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \langle \pi(g)v, v \rangle - \langle v, \pi(g)v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \langle v - \pi(g)v, v \rangle + \langle v, v - \pi(g)v \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

**Remarque 1.2.22.** Toute suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  comme ci-dessus est appelée **suite de Følner**. L'existence de suites de Følner caractérise la moyennabilité, dont nous reparlerons dans la Section 1.4.3.

**Exemple 1.2.23.** Si  $G := \mathbb{Z}$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n := \{0, \dots, n-1\}$ , le théorème ergodique de von Neumann s'exprime sous la convergence  $L^2$  suivante :

$$\forall f \in L^2(X, \nu), \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k f \rightarrow \int_X f \, d\nu,$$

où  $U := f \mapsto (x \mapsto f(T^{-1}x))$ , avec  $T := x \mapsto 1 * x$ .

### 1.2.3.2 Pour des actions mélangeantes

Le théorème de von Neumann utilise de manière cruciale l'hypothèse de moyennabilité du groupe qui agit. Dans cette sous-section, nous étudions une condition suffisante sur l'action et sur la famille  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour un théorème ergodique dans un cadre général où on ne suppose plus que le groupe est moyennable. C'est l'objet du Théorème 1.2.30.

Soit, une fois pour toute, une action  $G \curvearrowright (X, \nu)$  sur un espace de probabilité qui préserve la mesure. Soit  $\pi : G \rightarrow U(L^2(X, \nu))$  la représentation unitaire de Koopman associée à cette action ([BdLHV08, Prop A.6.1]). Soit  $\pi_0$  la sous-représentation sur  $L^2_0(X, \nu)$ . Notons  $P_{1_X}$  le projecteur de  $L^2(X, \nu)$  sur le sous-espace des fonctions constantes.

**Définition 1.2.24.** Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de mesures boréliennes de probabilités sur un espace localement compact  $G$ . On dit qu'elle est **évanescence** si elle converge vaguement vers la mesure nulle, c'est-à-dire que

$$\forall f \in C_c(G) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G f \, d\mu_n = 0$$

ou, de manière équivalente, si pour toute partie compacte  $K$  de  $G$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(K) = 0.$$

**Proposition 1.2.25.** Si  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de mesures évanescence sur  $G$  et si  $G \curvearrowright (X, \mu)$  est mélangeante, alors  $(\pi(\mu_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge (pour la topologie faible des opérateurs) vers  $P_{1_X}$ .

*Démonstration.* Soient  $\phi, \psi \in L^2(X, \mu)$ . Soit  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\forall g \in G$ ,

$$F(g) := \langle \pi(g)(\phi - P_{1_X}(\phi)), (\psi - P_{1_X}(\psi)) \rangle.$$

Comme  $\pi$  est une représentation unitaire,  $F$  est continue. On a, de plus,

$$\begin{aligned} F(g) &= \langle \pi(g)(\phi - P_{1_X}(\phi)), (\psi - P_{1_X}(\psi)) \rangle \\ &= \langle \pi(g)\phi, \psi \rangle - \langle \pi(g)P_{1_X}(\phi), \psi \rangle - \langle \pi(g)\phi, P_{1_X}\psi \rangle + \langle \pi(g)P_{1_X}(\phi), \pi(g)P_{1_X}(\psi) \rangle \\ &= \langle \pi(g)\phi, \psi \rangle - \langle P_{1_X}\phi, \psi \rangle - \langle \phi, P_{1_X}\psi \rangle + \langle P_{1_X}(\phi), P_{1_X}(\psi) \rangle \\ &= \langle \pi(g)\phi, \psi \rangle - \int_X \phi \, d\mu \int_X \psi \, d\mu \end{aligned}$$

ce qui assure que  $\lim_{g \rightarrow \infty} F(g) = 0$ . Le lemme suivant assure que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G F \, d\mu_n = 0$ , ce qui veut dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi(\mu_n)\phi, \psi \rangle = \int_X \phi \, d\mu \int_X \psi \, d\mu.$$

□

**Lemme 1.2.26.** Soit  $G$  un espace localement compact et soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de mesures boréliennes de probabilité évanescente, et soit  $F \in C_0(G)$  (c'est-à-dire,  $F$  est continue et  $\lim_{g \rightarrow \infty} F(g) = 0$ ).

Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G F d\mu_n = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $K \subset G$  une partie compacte telle que  $\forall g \notin K$ ,  $|F(g)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n > n_0$ ,  $\mu_n(K) \|F\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Soit  $n > n_0$ . On a

$$\begin{aligned} \left| \int_G F d\mu_n \right| &\leq \int_G |F| d\mu_n \\ &= \int_K |F| d\mu_n + \int_{G \setminus K} |F| d\mu_n \\ &\leq \mu_n(K) \cdot \|F\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Proposition 1.2.27.** Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de parties non négligeables de  $G$  telles que  $(\mu_G(E_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini. Soit, pour tout  $n$ ,

$$\mu_n := \frac{\mathbf{1}_{E_n}}{\mu_G(E_n)} \mu_G.$$

Supposons de plus que  $G$  est unimodulaire, ou que les parties  $E_n$  sont symétriques.

Alors  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mu_n^* * \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont évanescentes.

*Démonstration.* Cela découle directement du lemme suivant. □

**Lemme 1.2.28.** Soit  $E$  une partie mesurable de  $G$  de mesure finie, strictement positive. Soit  $\mu$  la mesure de densité  $\frac{\mathbf{1}_E}{\mu_G(E)}$  par rapport à  $\mu_G$ . Alors pour toute partie compacte  $K \subset G$ ,

$$(\mu^* * \mu)(K) \leq \frac{\mu_G(K) \mu_G(E^{-1})}{\mu_G(E)^2}$$

et en particulier, si  $E$  est symétrique, ou si  $G$  est unimodulaire,

$$(\mu^* * \mu)(K) \leq \frac{\mu_G(K)}{\mu_G(E)}.$$

*Démonstration.* La mesure  $\mu^* * \mu$  est aussi à densité par rapport à  $\mu_G$ , de densité

$$x \mapsto \frac{1}{\mu(E)^2} \int_G \mathbf{1}_{E^{-1}}(g) \mathbf{1}_E(g^{-1}x) d\mu_G(g).$$

Soit  $K \subset G$  une partie compacte. Alors on a

$$\begin{aligned} \mu_G(E)^2 (\mu^* * \mu)(K) &= \int_K \int_G \mathbf{1}_{E^{-1}}(g) \mathbf{1}_E(g^{-1}x) d\mu_G(g) d\mu_G(x) \\ &= \int_K \int_{E^{-1}} \mathbf{1}_E(g^{-1}x) d\mu_G(g) d\mu_G(x) \\ &= \int_{E^{-1}} \int_K \mathbf{1}_{gE}(x) d\mu_G(x) d\mu_G(g) \\ &= \int_{E^{-1}} \mu_G(K \cap gE) d\mu_G(g) \\ &\leq \int_{E^{-1}} \mu_G(K) d\mu_G(g) \\ &= \mu_G(K) \mu(E^{-1}) \end{aligned}$$

□

**Lemme 1.2.29.** *Soit  $P$  un projecteur de  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille d'opérateurs bornés. Alors si  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(T_n^* T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent (pour la topologie faible des opérateurs) vers  $P$ ,  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge (pour la topologie forte des opérateurs) vers  $P$ .*

*Démonstration.* Soit  $\phi \in \mathcal{H}$ .

$$\begin{aligned}
\|T_n \phi - P\phi\|^2 &= \langle T_n \phi - P\phi, T_n \phi - P\phi \rangle \\
&= \langle T_n \phi, T_n \phi \rangle - \langle T_n \phi, P\phi \rangle - \langle P\phi, T_n \phi \rangle + \langle P\phi, P\phi \rangle \\
&= \langle T_n^* T_n \phi, \phi \rangle - \langle T_n \phi, P\phi \rangle - \langle P\phi, T_n \phi \rangle + \langle P\phi, P\phi \rangle \\
&\rightarrow \langle P\phi, \phi \rangle - \langle P\phi, P\phi \rangle - \langle P\phi, P\phi \rangle + \langle P\phi, P\phi \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Nous pouvons enfin énoncer un théorème ergodique.

**Théorème 1.2.30.** *Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de parties non négligeables de  $G$  telles que  $(\mu_G(E_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini. Soit, pour tout  $n$ ,*

$$\mu_n := \frac{\mathbf{1}_{E_n}}{\mu_G(E_n)} \mu_G.$$

*Supposons de plus que  $G$  est unimodulaire, ou que les parties  $E_n$  sont symétriques. Alors si  $G \curvearrowright (X, \mu)$  est mélangeante, le théorème ergodique  $L^2$  sur  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vaut pour  $\pi$ .*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que  $(\pi(\mu_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge, pour la topologie forte des opérateurs, vers  $P_{\mathbf{1}_X}$ . Posons, pour tout  $n$ ,  $T_n := \pi(\mu_n)$ . D'après le lemme 1.2.27,  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mu_n^* * \mu_n)_n$  sont évanescentes, et vérifient donc les hypothèses de la proposition 1.2.25, ce qui assure que  $(T_n)_n$  et  $(T_n^* T_n)_n$  convergent faiblement vers  $P_{\mathbf{1}_X}$ . Le lemme 1.2.29 permet enfin de conclure que  $(T_n)_n$  converge fortement vers  $P_{\mathbf{1}_X}$ . □

## 1.3 Des exemples de mélange

### 1.3.1 Une généralisation de la propriété de Howe-Moore

#### 1.3.1.1 Décompositions de Cartan et propriété de Mautner

Dans l'article [HM79], Howe et Moore ont mis en évidence un phénomène très intéressant : dès qu'un groupe de Lie simple, non compact, connexe, de centre fini, agit de manière ergodique sur un espace de probabilité, l'action est automatiquement mélangeante. Cette propriété se formule en fait en termes de décroissance de coefficients matriciels de certaines représentations unitaires, *via* la construction de Koopman vue dans la section précédente.

Le beau travail de Ciobotaru, [Cio17], fournit une démonstration unifiée de la propriété de Howe-Moore pour tous les exemples connus au moment de la publication de son article, en mettant en évidence que d'une part, tous les groupes en question vérifient deux propriétés : ils possèdent ce que nous avons appelé une *décomposition de Cartan* et vérifient une propriété que nous avons appelée *propriété de Mautner* ; et que d'autre part, ces deux propriétés suffisent à conférer au groupe la propriété de Howe-Moore.

Que se passe-t-il pour les produits? Comme nous le verrons dans la suite, les produits de groupes possédant la propriété de Howe-Moore ne la vérifient que très rarement.

Cependant, le théorème [BM00, Theorem 1.1, p. 81] montre que certains produits de groupes de Lie simples vérifient tout de même une propriété plus faible que la propriété de Howe-Moore.

Dans cette section, qui reprend le contenu de l'article [PL19a], nous affaiblissons la propriété de Mautner afin qu'elle permette un passage aux produits, et que, jointe à l'existence de décompositions de Cartan, elle implique une version affaiblie de la propriété de Howe-Moore. Nous généralisons ainsi [BM00, Theorem 1.1, p. 81] en le retrouvant comme un cas particulier.

**Remarque 1.3.1.** Dans [BG17], Bader et Gelfander suivent une approche parallèle et considèrent une classe de groupes (la classe des groupes "quasi-semi-simples") un peu différente.

Nous énonçons les définitions suivantes, propres à cette section, puis énonçons le théorème et mettons en évidences des corollaires importants. Nous donnons enfin l'exemple concret du mélange du flot géodésique sur un tore de genre supérieur ou égal à deux muni d'une structure hyperbolique.

**Définition 1.3.2. (Décomposition de Cartan)**

On dit qu'un triplet  $(K_1, A^+, K_2)$  est une **décomposition de Cartan** de  $G$  si les conditions suivantes sont vérifiées :

1.  $K_1$  et  $K_2$  sont des parties compactes de  $G$ ,
2.  $A^+$  est un sous-semi-groupe commutatif de  $G$ , c'est-à-dire que  $\forall a_1, a_2 \in A^+$ ,  $a_1 a_2 = a_2 a_1 \in A^+$  et
3.  $G = K_1 A^+ K_2$ .

**Notation 1.3.3.** Si  $a \in G^{\mathbb{N}}$ , on pose

$$U_a^+ := \{g \in G \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} g a_n = e\} \text{ et}$$

$$U_a^- := \{g \in G \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n g a_n^{-1} = e\}.$$

On les appelle **sous-groupes contractants positif et négatif** associés à  $a$ .

**Lemme 1.3.4.** Si  $a = (a^1, \dots, a^N) \in (G_1 \times \dots \times G_N)^{\mathbb{N}}$ , alors  $U_a^+ = U_{a^1}^+ \times \dots \times U_{a^N}^+$  (et de même pour  $U^-$ ).

**Définition 1.3.5. (Propriété de Mautner)**

Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de sous-groupes de  $G$ , et  $A$  une partie de  $G$ . On dit que  $(G, A)$  a la **propriété de Mautner** relativement<sup>3</sup> à  $\mathcal{F}$  si

$$\forall a \in A^{\mathbb{N}} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \right) \implies \left( \exists F \in \mathcal{F} \exists b \text{ sous-suite de } a, \quad F \subseteq \overline{\langle U_b^+, U_b^- \rangle} \right)$$

**Remarque 1.3.6.** Dans [Cio17], il est démontré que les groupes suivants possèdent des décompositions de Cartan  $(K_1, A^+, K_2)$  telles que  $(G, A^+)$  possède la propriété de Mautner :

1. les groupes algébriques simples isotropes sur un corps non archimédien ;

---

3. Si  $\mathcal{F} = \{G\}$ , on ne précise pas "relative(ment) à  $\mathcal{F}$ ".

2. les sous-groupes du groupe des automorphismes d'un arbre semi-régulier<sup>4</sup> dont tous les sommets ont une valence strictement supérieure à 2, qui sont topologiquement simples et qui agissent 2-transitivement sur le bord de l'arbre ;
3. les groupes de Lie connexes, simples, non-compacts, de centre fini.

**Notation 1.3.7.** Si  $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$  une représentation unitaire et  $F$  un sous-groupe de  $G$ . On note<sup>5</sup>

$$\text{Fix}(\pi, F) := \{\phi \in \mathcal{H} \mid \forall g \in F, \pi(g)\phi = \phi\}.$$

**Définition 1.3.8. (Propriété de Howe-Moore)**

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de sous-groupes de  $G$ . On dit que  $G$  a la **propriété de Howe-Moore** relativement<sup>2</sup> à  $\mathcal{F}$  si

$$\begin{aligned} \forall \pi : G \rightarrow U(\mathcal{H}), \quad (\forall F \in \mathcal{F}, \quad \text{Fix}(\pi, F) = \{0\}) \\ \implies \left( \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}, \quad \lim_{g \rightarrow \infty} \langle \pi(g)\phi, \psi \rangle = 0 \right). \end{aligned}$$

**Remarque 1.3.9.** Dans [CdCL<sup>+</sup>11], une propriété possède le nom de propriété de Howe-Moore relative, mais ce n'est pas la même que celle considérée ici.

**Remarque 1.3.10** (Howe-Moore n'est pas stable par produit). Soient  $G$  et  $H$  deux groupes topologiques possédant la propriété de Howe-Moore. On suppose que  $G$  possède au moins une représentation unitaire sans vecteur fixe non nul, sur un espace de Hilbert de dimension au moins 1. Alors  $G \times H$  ne vérifie pas la propriété de Howe-Moore. En effet, posons, pour  $(g, h) \in G \times H$ ,  $\tilde{\pi}(g, h) := \pi(g)$ . Alors  $\tilde{\pi}$  n'a pas de vecteur fixe non nul. Cependant, si  $\phi$  est un vecteur non nul, la fonction  $h \mapsto \langle \tilde{\pi}(e, h)\phi, \phi \rangle$  est constante de valeur  $\|\phi\|^2$ , et donc ne tend pas vers 0 quand  $h$  tend vers l'infini dans  $H$ .

Le théorème d'intérêt est alors le suivant.

**Théorème 1.3.11.** Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de sous-groupes de  $G$ . Si  $G$  a une décomposition de Cartan  $(K_1, A^+, K_2)$  telle que  $(G, A^+)$  possède la propriété de Mautner relative à  $\mathcal{F}$ , alors il a la propriété de Howe-Moore, relativement à  $\mathcal{F}$ .

Le corollaire suivant est l'application classique de la propriété de Howe-Moore dans le cadre des actions préservant une mesure de probabilité.

**Corollaire 1.3.12.** Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de sous-groupes de  $G$ . Supposons que  $G$  a la propriété de Howe-Moore relativement à  $\mathcal{F}$ .

Alors pour toute action de  $G$  préservant la mesure sur un espace de probabilité, si elle est telle que pour tout  $F \in \mathcal{F}$ , la restriction à  $F$  est ergodique, alors elle est mélangeante.

**Exemple 1.3.13.** Si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , l'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{S}^1$  engendrée par la rotation d'angle  $2\pi\alpha$  est ergodique, mais pas mélangeante, et donc  $\mathbb{Z}$  n'a pas la propriété de Howe-Moore.

4. C'est-à-dire, les arbres dont tous les sommets qui sont à distance paire ont même valence.

5. Souvent, on note cela  $\mathcal{H}^F$  mais il y aurait ambiguïté avec l'ensemble des applications de  $F$  dans  $\mathcal{H}$ .

2. Si  $\mathcal{F} = \{G\}$ , on ne précise pas "relative(ment) à  $\mathcal{F}$ ".

Ce sont les corollaires suivants qui permettent de considérer le cas des produits.

**Corollaire 1.3.14.** *Soient  $G_1, \dots, G_N$  des groupes  $\sigma$ -compacts possédant des décompositions de Cartan*

$$(K_{1,1}, A_1^+, K_{1,2}), \dots, (K_{n,1}, A_n^+, K_{n,2})$$

*telles que pour tout  $i$ ,  $(G_i, A_i^+)$  possède la propriété de Mautner. Alors  $G$  a la propriété de Howe-Moore, relativement à  $\{G_1, \dots, G_N\}$ .*

Pour démontrer ce corollaire, le lemme suivant suffit.

**Lemme 1.3.15.** *Soient  $G_1, \dots, G_N$  des groupes  $\sigma$ -compacts qui ont des décompositions de Cartan  $(K_{1,1}, A_1^+, K_{1,2}), \dots, (K_{n,1}, A_n^+, K_{n,2})$  telles que pour tout  $i$ ,  $(G_i, A_i^+)$  possède la propriété de Mautner. Alors*

$$(K_{1,1} \times \dots \times K_{n,1}, A_1^+ \times \dots \times A_n^+, K_{1,2} \times \dots \times K_{n,2})$$

*est une décomposition de Cartan de  $G := G_1 \times \dots \times G_N$  telle que  $(G, A_1^+ \times \dots \times A_n^+)$  possède la propriété de Mautner, relative à  $\{G_1, \dots, G_N\}$ .*

*Démonstration.* Il est clair que le triplet annoncé est une décomposition de Cartan de  $G$ . Il ne reste qu'à vérifier que  $(G, A_1^+ \times \dots \times A_n^+)$  vérifie bien la propriété de Mautner, relativement à  $\{G_1, \dots, G_N\}$ . Posons  $A^+ := A_1^+ \times \dots \times A_n^+$ . Soit  $a = (a^1, \dots, a^N) \in (A^+)^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ . L'ensemble  $\{i \in \{1, \dots, N\} \mid (a_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est non bornée}\}$  n'est pas vide, sans quoi  $a$  elle-même serait bornée, ce qui est exclu, par hypothèse. Soit  $j$  tel que  $(a_n^j)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée. Alors, d'après l'hypothèse de  $\sigma$ -compacité, il existe  $h_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(a_{h_1(n)}^j)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini dans  $G_j$ . Par hypothèse sur  $G_j$ , il existe  $h_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que si on note  $b^j := (a_{h_1(h_2(n))}^j)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\langle U_{b^j}^+, U_{b^j}^- \rangle = G_j$ . On a alors, d'après le lemme 1.3.4

$$\overline{\langle U_b^+, U_b^- \rangle} \supseteq \{1\} \times \dots \times \{1\} \times G_j \times \{1\} \times \dots \times \{1\}.$$

□

**Corollaire 1.3.16.** *Soient  $G_1, \dots, G_N$  des groupes  $\sigma$ -compacts possédant des décompositions de Cartan*

$$(K_{1,1}, A_1^+, K_{1,2}), \dots, (K_{n,1}, A_n^+, K_{n,2})$$

*telles que pour tout  $i$ ,  $(G_i, A_i^+)$  possède la propriété de Mautner. Soit  $G := G_1 \times \dots \times G_N$ , et soit  $G \curvearrowright (X, \mu)$  une action sur un espace de probabilité telle que la restriction de l'action à chacun des  $G_i$  est ergodique. Alors l'action  $G \curvearrowright (X, \mu)$  est mélangeante.*

Le dernier corollaire donne des conditions suffisantes pour que les actions par multiplication à gauche d'un groupe sur ses quotients à droite par certains réseaux sont mélangeantes.

**Définition 1.3.17** (Réseau irréductible). *Soient  $G_1, \dots, G_n$  des groupes topologiques. On considère le groupe produit  $G$  des  $G_i$ . Un réseau de  $G$  est dit **irréductible** (sous-entendu : par rapport à sa structure de produit des  $G_i$ ) si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la projection de  $\Gamma$  dans  $G_1 \times \dots \times \widehat{G}_i \times \dots \times G_n$  est dense.*

3. Bien entendu, on identifie les  $G_i$  à  $\{e\} \times \dots \times \{e\} \times G_i \times \{e\} \times \dots \times \{e\}$ .

- Remarques 1.3.18.** 1. Par  $G_1 \times \cdots \times \widehat{G_i} \times \cdots \times G_N$ , on entend le produit de tous les  $G_j$  sauf  $G_i$ .
2. Différentes définitions de l'irréductibilité sont envisagées dans [CLB18, Section 1.5]; la nôtre est une des plus fortes.

**Corollaire 1.3.19.** Soient  $G_1, \dots, G_N$  des groupes possédant des décompositions de Cartan

$$(K_{1,1}, A_1^+, K_{1,2}), \dots, (K_{n,1}, A_n^+, K_{n,2})$$

telles que pour tout  $i$ ,  $(G_i, A_i^+)$  possède la propriété de Mautner. Soit  $G := G_1 \times \cdots \times G_N$ , et soit  $\Gamma$  un réseau irréductible de  $G$ . Alors l'action  $G \curvearrowright G/\Gamma$  est mélangeante.

*Démonstration.* D'après le corollaire précédent, il suffit de vérifier que pour tout  $i$ ,  $G_i \curvearrowright G/\Gamma$  est ergodique. D'après [Zim84, Corollary 2.2.3, p. 18],  $G_i \curvearrowright G/\Gamma$  est ergodique si et seulement si  $\Gamma \curvearrowright G/G_i$  est ergodique. Or cette dernière action est ergodique si et seulement si l'image de  $\Gamma$  dans  $G_1 \times \cdots \times \widehat{G_i} \times \cdots \times G_N$  est dense (d'après [Zim84, Lemma 2.2.13, p. 20]), et ceci est le cas si  $\Gamma$  est irréductible.  $\square$

**Remarque 1.3.20.** Supposons qu'aucun des  $G_i$  n'est compact et soit  $\Gamma$  est un réseau dans  $G$ . Si l'action  $G \curvearrowright G/\Gamma$  est mélangeante, alors  $\Gamma$  est irréductible (et donc, la condition d'irréductibilité dans le corollaire précédent est nécessaire). En effet, comme la restriction de toute action mélangeante est mélangeante, cela implique que l'action de chacun des  $G_i$  sur  $G/\Gamma$  est mélangeante, et donc ergodique, car chacun des  $G_i$  est non compact. Ceci implique, d'après [Zim84, Lemma 2.2.13, p. 20], que la projection de  $\Gamma$  dans  $G/G_i \simeq G_1 \times \cdots \times \widehat{G_i} \times \cdots \times G_n$  est dense, c'est-à-dire que  $\Gamma$  est irréductible.

### 1.3.1.2 Démonstration du théorème

Soit  $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$  une représentation unitaire.

**Lemme 1.3.21.** [Cio17, Lemma 2.9] Soit  $(K_1, A^+, K_2)$  une décomposition de Cartan de  $G$ . Alors

$$\begin{aligned} \exists \phi, \psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \exists g \in G^{\mathbb{N}}, \quad (\langle \pi(g_n)\phi, \psi \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } 0 \\ \Downarrow \\ \exists \phi, \psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \exists a \in (A^+)^{\mathbb{N}}, \quad (\langle \pi(a_n)\phi, \psi \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } 0. \end{aligned}$$

**Lemme 1.3.22.** [Cio17, Lemma 2.8] Soit  $g \in G^{\mathbb{N}}$ . Alors

$$\begin{aligned} \exists \phi, \psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \quad (\langle \pi(g_n)\phi, \psi \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } 0 \\ \Downarrow \\ \exists \phi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, \quad (\langle \pi(g_n)\phi, \phi \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } 0. \end{aligned}$$

On extrait le lemme suivant de [Cio17, Lemma 3.1] pour la clarté de l'exposé.

**Lemme 1.3.23.** Soit  $g \in G^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n, m \in \mathbb{N}, g_n g_m = g_m g_n$ . Soit  $\phi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  tel que  $(\langle \pi(g_n)\phi, \phi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0. Alors il existe  $\phi_0 \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ , fixé par  $U_g^+$  et par  $U_g^-$ .

*Démonstration.* Quitte à extraire, on peut supposer que  $(\pi(g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge, pour la topologie faible des opérateurs, vers un opérateur normal  $E$  qui commute aux  $\pi(g_n)$ , d'après le lemme A.2.3.

Par convergence faible des opérateurs, on a que  $\langle E\phi, \phi \rangle \neq 0$ , ce qui implique que  $E\phi \neq 0$ . Démontrons que  $E\phi$  est fixé par  $U_g^\pm$ .



Soit  $u \in U_g^+$ , et  $\psi \in \mathcal{H}$ . On a

$$\begin{aligned}
|\langle \pi(u)E\phi - E\phi, \psi \rangle| &= |\langle E\pi(u)\phi - E\phi, \psi \rangle| \\
&= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi(g_n)\pi(u)\phi - \pi(g_n)\phi, \psi \rangle \right| \\
&= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi(g_n u g_n^{-1})\pi(g_n)\phi - \pi(g_n)\phi, \psi \rangle \right| \\
&= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (\pi(g_n u g_n^{-1}) - \text{Id}) \pi(g_n)\phi, \psi \rangle \right| \\
&= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi(g_n)\phi, (\pi(g_n u g_n^{-1}) - \text{Id})^* \psi \rangle \right| \\
&= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi(g_n)\phi, (\pi(g_n^{-1} u^{-1} g_n) - \text{Id}) \psi \rangle \right| \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\pi(g_n)\phi\| \cdot \|(\pi(g_n^{-1} u^{-1} g_n) - \text{Id}) \psi\| \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\phi\| \cdot \|(\pi(g_n^{-1} u^{-1} g_n) - \text{Id}) \psi\| \\
(u^{-1} \in U) &= 0
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $\psi$ , c'est donc que  $\pi(u)E\phi = E\phi$ . On procède de même pour démontrer que c'est vrai pour  $u \in U_g^-$ .  $\square$

**Lemme 1.3.24.** *Si  $\phi \in \mathcal{H}$ , l'ensemble  $\{g \in G \mid \pi(g)\phi = \phi\}$  est un sous-groupe fermé.*

*Démonstration.* C'est un sous-groupe car  $\pi$  est un morphisme, et c'est fermé car  $\pi$  est fortement continue.  $\square$

*Démonstration du théorème 1.3.11.* Raisonnons par l'absurde. On va démontrer que s'il existe  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  tels que l'on n'a pas  $\lim_{g \rightarrow \infty} \langle \pi(g)\phi, \psi \rangle = 0$ , alors il existe  $F \in \mathcal{F}$  et un vecteur  $\phi_0 \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  fixé par  $\pi(F)$ .

Soient donc  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  ainsi. Il existe une suite  $g \in G^{\mathbb{N}}$  tendant vers l'infini telle que  $(\langle \pi(g_n)\phi, \psi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0. D'après le Lemme 1.3.21, on peut supposer que  $g \in (A^+)^{\mathbb{N}}$ , et d'après le Lemme 1.3.22, que  $(\langle \pi(g_n)\phi, \phi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0. Quitte à remplacer  $g$  par une sous-suite, on peut supposer qu'il existe  $F \in \mathcal{F}$  tel que  $F \subseteq \overline{U_g^+, U_g^-}$ . D'après le lemme 1.3.23, il existe  $\phi_0 \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  qui est fixé par  $U_g^\pm$ . D'après le lemme 1.3.24,  $\phi_0$  est en fait fixé par  $\overline{U_g^+, U_g^-}$ , et donc par  $F$ .  $\square$

## 1.3.2 Autres exemples

### 1.3.2.1 Shifts

**Définition 1.3.25** (Shift de Bernoulli). *Soit  $G$  un groupe dénombrable muni de la topologie discrète. On pose  $X := \{0, 1\}^G$  et on le munit de la mesure produit des  $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ , que l'on note  $\nu$ . Si  $g \in G$ ,  $\omega \in X$ , on pose*

$$g * \omega := (h \mapsto \omega(g^{-1}h)).$$

*Cela définit une action  $G \curvearrowright X$  qui préserve la mesure et que l'on appelle **shift de Bernoulli**.*

Le théorème suivant est énoncé dans le livre de Walters (voir [Wal, Theorem 1.30, p. 51]) dans le cas du shift sur  $\mathbb{Z}$ , mais sa démonstration est valable pour le cas général.

**Théorème 1.3.26.** *Le shift de Bernoulli est mélangeant.*

*Esquisse de démonstration.* D'après [Wal, Theorem 1.17, p. 41], pour établir le mélange d'une action mesurable d'un groupe  $G$  sur un espace de probabilité  $(X, \mathcal{T}, \nu)$ , il suffit de vérifier la propriété caractéristique

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \nu(A \cap g^{-1}B) = \nu(A)\nu(B)$$

pour des  $A, B$  variant dans n'importe quelle *semi-algèbre* qui engendre la tribu  $\mathcal{T}$ . Ainsi, dans le cas du shift de Bernoulli, il suffit donc de vérifier la propriété suivante pour des *cylindres*  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire pour des  $A$  et  $B$  de la forme

$$\begin{aligned} A &:= \{\omega \in X \mid \omega(a_1) = \epsilon_1, \dots, \omega(a_n) = \epsilon_n\} \\ B &:= \{\omega \in X \mid \omega(b_1) = \delta_1, \dots, \omega(b_m) = \delta_m\} \end{aligned}$$

pour certains  $n, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in G$ ,  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \delta_1, \dots, \delta_m \in \{0, 1\}$ . Remarquons que si  $g \in G$ , et si  $B$  est comme ci-dessus, alors

$$g^{-1}B = \{\omega \in X \mid \omega(gb_1) = \delta_1, \dots, \omega(gb_m) = \delta_m\}.$$

Prenons de tels  $A, B$ , supposons que les  $a_i$  sont deux à deux distincts, et de même pour les  $b_j$ . Notons  $a := \{a_1, \dots, a_n\}$  et  $b := \{b_1, \dots, b_m\}$ , et notons  $F$  le sous-ensemble fini de  $G$  des éléments  $g$  tels que  $a \cap gb \neq \emptyset$ . Soit  $g \in G \setminus F$ . On a donc

$$\begin{aligned} \nu(A \cap g^{-1}B) &= \nu(\{\omega \in X \mid \forall i, \omega(a_i) = \epsilon_i, \text{ et } \forall j, \omega(gb_j) = \delta_j\}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} \\ &= \nu(A)\nu(B) \end{aligned}$$

□

### 1.3.2.2 L'exemple du flot géodésique sur les tores hyperboliques

Soit  $\mathbb{H}$  le demi-plan de Poincaré, muni de la métrique hyperbolique. Soit  $g \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Soit  $\mathbb{T}_g$  un tore à  $g$  trous. On peut le munir (notamment grâce à la technique des *pantalons hyperboliques* que nous nous contentons d'illustrer par la figure 1.3.2.2) d'une structure hyperbolique, c'est-à-dire d'un atlas composé de cartes définies sur des ouverts de  $\mathbb{H}$  tel que tous les changements de cartes sont des isométries hyperboliques. On peut alors transporter la métrique de  $\mathbb{H}$  sur  $\mathbb{T}_g$  et en faire une variété riemannienne, et on appelle **métrique hyperbolique** toute métrique riemannienne sur  $\mathbb{T}_g$  obtenue de cette façon.

Notons  $T^1\mathbb{T}_g$  le **fibré tangent unitaire**, c'est-à-dire les vecteurs de  $T\mathbb{T}_g$  de norme 1. Le transport parallèle fournit alors une action de  $\mathbb{R}$  sur  $T^1\mathbb{T}_g$  appelée **flot géodésique**.

**Théorème 1.3.27.** *Le flot géodésique sur  $T^1\mathbb{T}_g$  muni d'une métrique hyperbolique est mélangeant.*

La démonstration de ce théorème repose sur de multiples identifications, résumées dans les diagrammes commutatifs suivants, où  $\Gamma$  est l'image isomorphe de  $\pi_1(\mathbb{T}_g)$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ , et où  $\tilde{\phi}$  est l'application  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -équivariante qui envoie la matrice identité sur le point-vecteur  $(i, i) \in T^1\mathbb{H}$ ,  $\phi$  est l'application déduite de  $\tilde{\phi}$  par passage au quotient par  $\Gamma$ ,  $g_t$  est le flot géodésique sur  $T^1\mathbb{T}_g$  et  $a_t$  est la multiplication à gauche par la classe de

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}.$$

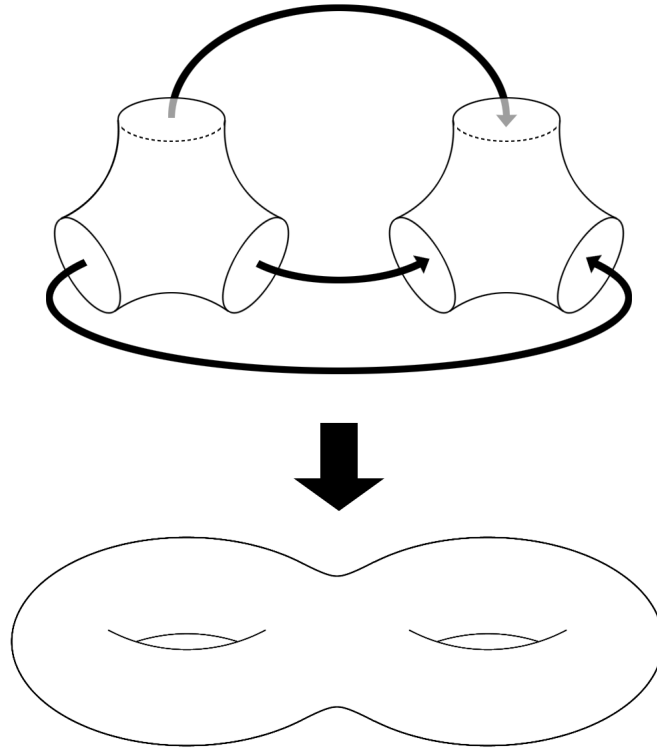
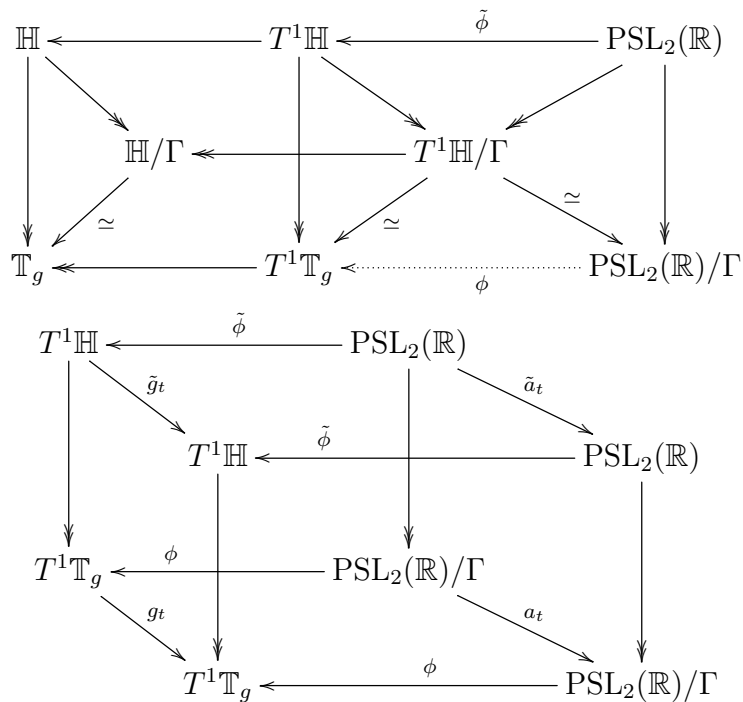


FIGURE 1.5 – Les pantalons hyperboliques



Ainsi, le flot géodésique sur  $T^1\mathbb{T}_g$  est conjugué, *via*  $\phi$ , à l'action de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$  par multiplication à gauche par la classe de la matrice

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix},$$

action mélangeante car c'est la restriction de l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$  par multiplication à gauche est ergodique (car transitive), et donc mélangeante d'après

la propriété de Howe-Moore pour  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ .

## 1.4 Géométrie, estimations de volumes et comptage

### 1.4.1 Estimations élémentaires de volumes et filets

Le but de cette partie est de démontrer une batterie de lemmes qui permettent des estimations de volumes.

L'idée est que dans un groupe topologique muni d'une mesure de Haar, le volume d'une partie est (proportionnellement) proche du nombre maximal de points régulièrement espacés que l'on peut placer dedans. Ceci est formalisé par la notion de *filet*.

**Lemme 1.4.1** (Théorème de Steinhaus-Weil). *Si  $G$  est un groupe localement compact,  $\mu_G$  est une mesure de Haar, alors pour toute partie mesurable  $A \subset G$  telle que  $\mu_G(A) > 0$ , alors  $AA^{-1}$  est un voisinage de l'identité.*

*Démonstration.* Voir [Str72]. □

**Lemme 1.4.2.** *Soit  $G$  un groupe topologique,  $A$  et  $B$  deux parties compactes, avec  $B$  voisinage de  $e$ . Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $S \subset G$  finie telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a*

$$B^{n+k-1}A \subset B^n S.$$

*Démonstration.* Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $U$  un ouvert de  $G$  contenant  $e$  et inclus dans  $B$ . Alors  $B^k A$ , qui est compacte, est recouverte par les ouverts  $Uh$  pour  $h \in B^k A$ . Il existe donc une partie finie  $S$  de  $B^k A$  telle que  $B^k A \subset US$ . Comme  $US \subset BS$ , on a donc  $B^k A \subset BS$ , et donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B^{k+n-1}A \subset B^n S$ . □

**Lemme 1.4.3.** *Soit  $G$  un groupe topologique localement compact unimodulaire, soit  $\mu_G$  une mesure de Haar, et soient  $A, B$  deux parties compactes de  $G$ , avec  $B$  voisinage de  $e$ . Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $c$  telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mu_G(B^{n+k-1}A) \leq c\mu_G(B^n).$$

*Démonstration.* Cela découle directement du Lemme 1.4.2 : il suffit de prendre  $c := |S|$  où  $S$  est une partie finie donnée par le Lemme 1.4.2. □

On va avoir besoin de la notion de filets, et de lemmes pour les manipuler. Soit  $G$  un groupe.

**Définition 1.4.4** (Filet). *Soient  $A, B, N \subset G$ . On dit que  $N$  est un  $A$ -filet de  $B$  si*

1.  $N$  est fini ;
2.  $N \subset B$  ;
3.  $\forall n_1, n_2 \in N, \quad n_1 A \cap n_2 A \neq \emptyset \Rightarrow n_1 = n_2$ .

*On note  $N(A, B)$  l'ensemble des  $A$ -filets de  $B$ . On ordonne  $N(A, B)$  pour l'inclusion et on note  $N_{\max}(A, B)$  l'ensemble des éléments maximaux de cet ensemble.*

**Lemme 1.4.5.** *Soit  $G$  un groupe, soient  $A, B \subset G$ . On a*

$$\forall N \in N_{\max}(A, B), \quad B \subset NAA^{-1}.$$

*Démonstration.* Soit  $N \in N_{max}(A, B)$ . Montrons que l'on a  $B \subset NAA^{-1}$ . Soit, par l'absurde,  $b \in B \setminus NAA^{-1}$ . Montrons que  $N \cup \{b\}$  est un  $A$ -filet de  $B$ . Il suffit de vérifier que pour tout  $n \in N$ ,  $nA \cap bA = \emptyset$ . Soit  $n \in N$ . Si  $nA \cap bA \neq \emptyset$ , il existe  $a_1, a_2 \in A$  tel que  $na_1 = ba_2$ . Soient  $a_1, a_2$  ainsi. Alors  $b = na_1a_2^{-1} \in NAA^{-1}$ , ce qui est absurde. Donc  $nA \cap bA = \emptyset$ . Donc  $N \cup \{b\}$  est un  $A$ -filet de  $B$ , ce qui est absurde car contredit la maximalité de  $N$ . Donc  $B \subset NAA^{-1}$ .  $\square$

**Lemme 1.4.6.** *Soit  $G$  localement compact et  $\mu_G$  une mesure de Haar à gauche sur  $G$ . Soient  $A, B \subset G$  avec  $A$  un voisinage de  $e$  dans  $G$ , et on suppose que  $B$  et  $BA$  sont mesurables. Alors on a*

$$\forall N \in N(A, B), \quad |N| \leq \frac{\mu_G(BA)}{\mu_G(A)},$$

et

$$\forall N \in N_{max}(A, B), \quad \frac{\mu_G(B)}{\mu_G(AA^{-1})} \leq |N|.$$

*Démonstration.* Démontrons le premier point. D'après la définition de filet,  $NA$  est la réunion disjointe des  $nA$  pour  $n$  variant dans  $N$ , et donc  $\mu_G(NA) = |N|\mu_G(A)$ . Mais comme  $N \subset B$ ,  $NA \subset BA$ , donc on obtient l'inégalité annoncée.

Démontrons le deuxième point. On a, d'après le Lemme 1.4.5,  $B \subset NAA^{-1}$ . Et donc on a  $\mu_G(B) \leq \mu_G(NAA^{-1}) \leq \mu_G(AA^{-1})|N|$ .  $\square$

**Lemme 1.4.7.** *Soit  $G$  un groupe localement compact unimodulaire,  $A_1, A_2, B$  des parties compactes de  $G$  qui sont voisinages de  $e$ . Alors il existe des constantes  $c_1, c_2 > 0$  telles que*

$$\forall n \geq 3, \forall N_n \in N_{max}(A_1, B^n), \forall N_{-2,n} \in N_{max}(A_2, B^{n-2}), \quad c_1 \leq \frac{|N_{-2,n}|}{|N_n|} \leq c_2.$$

*Démonstration.* Soit  $k_2 > 0$  tel que pour tout  $n \geq 3$ ,  $\mu_G(B^{n-2}A_2) \leq k_2\mu_G(B^{n-2})$ . On a donc, pour tout  $n \geq 3$ ,  $\mu_G(B^{n-2}A_2) \leq k_2\mu_G(B^n)$ .

Soit  $k_1 > 0$ , tel que pour tout  $n \geq 3$ ,  $\mu_G(B^nA_1) \leq k_1\mu_G(B^n)$ .

Enfin, soit  $k_3 > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_G(B^{n+2}) \leq k_3\mu_G(B^n)$ . C'est le Lemme 1.4.3 qui affirme que de tels  $k_1, k_2, k_3$  existent bel et bien.

Soient  $n \geq 3$ ,  $N_n \in N_{max}(A_1, B^n)$ ,  $N_{-2,n} \in N_{max}(A_2, B^{n-2})$ . On a, d'après le Lemme 1.4.6,  $|N_{-2,n}| \leq \frac{\mu_G(B^{n-2}A_2)}{\mu_G(A_2)}$ , et donc  $|N_{-2,n}| \leq \frac{k_2}{\mu_G(A_2)}\mu_G(B^n)$ . De plus,  $\mu_G(B^{n-2})\frac{1}{\mu_G(A_2A_2^{-1})} \leq |N_{-2,n}|$ . Donc on a

$$\frac{1}{k_3\mu_G(A_2A_2^{-1})}\mu_G(B^n) \leq \mu_G(B^{n-2})\frac{1}{\mu_G(A_2A_2^{-1})} \leq |N_{-2,n}| \leq \frac{k_2}{\mu_G(A_2)}\mu_G(B^n).$$

D'autre part, on a  $|N_n| \leq \frac{\mu_G(B^nA_1)}{\mu_G(A_1)}$ , et donc  $|N_n| \leq \frac{k_1}{\mu_G(A_1)}\mu_G(B^n)$ . De plus,

$$\mu_G(B^n)\frac{1}{\mu_G(A_1A_1^{-1})} \leq |N_n|.$$

Donc on a

$$\mu_G(B^n)\frac{1}{\mu_G(A_1A_1^{-1})} \leq |N_n| \leq \frac{k_1}{\mu_G(A_1)}\mu_G(B^n).$$

On obtient donc

$$\frac{\mu_G(A_1)}{k_3k_1\mu_G(A_2A_2^{-1})} \leq \frac{|N_{-2,n}|}{|N_n|} \leq \frac{k_2\mu_G(A_1A_1^{-1})}{\mu_G(A_2)}.$$

$\square$

**Lemme 1.4.8.** *Soit  $G$  un groupe localement compact, et  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ . Soit  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de parties de  $G$  telle qu'il existe  $C_1, C_2$  deux ouverts relativement compacts de  $G$  tels que*

1.  $C_1 \subset C_2$  ;
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n C_1 \subset B_{n+1}$  ;
3.  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} \subset B_n C_2$ .

Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mu_G(B_{n+1}) \leq \frac{\mu_G(C_2 C_2^{(-1)} C_2^2)}{\mu_G(C_1)} \mu_G(B_n).$$

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $N$  un  $C_2$ -filet maximal de  $B_{n-1}$ , c'est-à-dire une partie finie de  $B_{n-1}$  maximale pour la propriété

$$\forall a_1, a_2 \in N, \quad a_1 C_2 \cap a_2 C_2 \neq \emptyset \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Il est facile de voir (c'écrit dans la thèse) que  $B_{n-1} \subset N C_2 C_2^{-1}$ . Ainsi, on a également  $B_{n+1} \subset N C_2 C_2^{(-1)} C_2^2$ , et donc

$$\mu_G(B_{n+1}) \leq |N| \mu_G(C_2 C_2^{(-1)} C_2^2).$$

D'autre part, comme les translatés à gauche de  $C_2$  par les éléments de  $N$  sont disjoints, c'est également le cas des translatés à gauche de  $C_1$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} |N| \mu_G(C_1) &= \mu_G(N C_1) \\ &\leq \mu_G(B_{n-1} C_1) \\ &\leq \mu_G(B_n). \end{aligned}$$

En mettant tout ensemble, on obtient

$$\mu_G(B_{n+1}) \leq \frac{\mu_G(C_2 C_2^{(-1)} C_2^2)}{\mu_G(C_1)} \mu_G(B_n).$$

□

## 1.4.2 Fonctions de longueur

### 1.4.2.1 Définitions et exemples

Le but de cette section est de définir la notion de *fonction de longueur* qui est une sorte de semi-norme sur un groupe. Dans tout ce document, nous nous intéresserons tout particulièrement aux familles des boules ou des sphères associées à certaines fonctions de longueur.

Soit  $G$  un groupe topologique.

**Définition 1.4.9** (Fonction de longueur). *On appelle **fonction de longueur** sur  $G$  une fonction  $L$  telle que*

1.  $L(e) = 0$  ;
2.  $\forall g \in G, \quad L(g^{-1}) = L(g)$  ;
3.  $\forall g, h \in G, \quad L(gh) \leq L(g) + L(h)$ .

Si  $L$  est une fonction de longueur, on note, pour  $g, h \in G$ ,  $d_L(g, h) := L(g^{-1}h)$ . C'est une pseudo-distance invariante à gauche sur  $G$ . On dit que  $L$  est propre si l'espace pseudo-métrique  $(G, d_L)$  est propre.

Nous rappelons la définition suivante.

**Définition 1.4.10** (Espace propre). On dit qu'un espace pseudo-métrique est **propre** si toutes ses boules fermées sont compactes.

**Notation 1.4.11.** Si  $L$  est une fonction de longueur sur  $G$ , on pose, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} B_t &:= \{g \in G \mid L(g) \leq t\} \\ S_t &:= \{g \in G \mid L(g) = t\} \\ C_t &:= \{g \in G \mid L(g) \in ]t, t + 1]\}. \end{aligned}$$

Ces ensembles sont appelés **boules**, **sphères** et **couronnes**. Si le besoin se fait ressentir, on ajoute la référence à la fonction de longueur en indice et la référence au groupe en exposant. Par exemple, la  $t$ -ème couronne pour la fonction de longueur  $L$  sera notée  $C_{L,t}$  au lieu de  $C_t$  si une ambiguïté est possible ; de même pour la  $t$ -ème sphère dans  $G$ , qui sera alors notée  $S_t^G$ .

**Exemple 1.4.12.** Si  $K$  est une partie génératrice de  $G$ , et si  $g \in G$ , notons  $L_K(g) := \inf\{k \in \mathbb{N} \mid g \in K^k \cup (K^{-1})^k\}$ . C'est une fonction de longueur, appelée **longueur des mots** pour le système de générateurs  $K$ . Si  $K$  est compacte, alors  $L_K$  est propre.

**Proposition 1.4.13.** Si  $(X, d)$  est un espace métrique,  $x_0 \in X$ , on associe à toute action continue de  $G$  sur  $X$  la fonction  $L : g \mapsto d(x_0, gx_0)$ . Si l'action est par isométries, alors  $L$  est une fonction de longueur, et elle est propre si l'action est proprement discontinue et si  $(X, d)$  est propre.

Réciproquement, si  $L$  est une fonction de longueur sur  $G$ , il existe un espace métrique  $(X, d)$  et une action  $G \curvearrowright X$  par isométries tels que  $L$  est la fonction de longueur associée à cette action. Plus précisément, posons  $G_0 := \{g \in G \mid L(g) = 0\}$ . Alors la pseudo-distance  $d_L$  passe au quotient sur  $G/G_0$ , devient une distance ; l'action de  $G$  sur  $G/G_0$  est alors une action par isométries et la fonction de longueur associée à cette action est justement  $L$ .

Sur un groupe localement compact  $G$ , la suite des intérieurs des boules pour une fonction de longueur propre est un recouvrement de  $G$ .

**Lemme 1.4.14.** Soit  $G$  un groupe localement compact, et  $L$  une fonction de longueur propre sur  $G$ . Alors

1. il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $B_n$  est d'intérieur non vide ;
2. la famille des intérieurs des  $B_n$  recouvre  $G$  ;
3. pour tout compact  $K$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $K \subset B_n$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ . Comme  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = G$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mu_G(B_n) > 0$ . D'après le théorème de Steinhaus-Weil (Lemme 1.4.1),  $B_{2n}$  contient un voisinage de  $e$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $B_n$  est d'intérieur non vide. Alors pour tout  $k$ ,  $B_{kn}$  est inclus dans l'intérieur de  $B_{(k+1)n}$ , puisque si  $U$  est un voisinage ouvert de  $e$  contenu dans  $B_n$ , on a  $B_{kn} \subset UB_{kn} \subset \overset{\circ}{B}_{(k+1)n}$ . Ainsi, la famille des intérieurs des  $B_n$  recouvre  $G$ .

3. Evident d'après le point précédent.  $\square$

**Remarque 1.4.15.** *On peut en fait remplacer l'hypothèse de compacité locale par l'hypothèse que la topologie de  $G$  en fait un espace de Baire ; il suffit alors de remplacer le théorème de Steinhaus-Weil par le théorème de Baire pour démontrer qu'il existe  $n$  tel que  $B_n$  est d'intérieur non vide, car dans ce cas,  $B_{2n}$  est un voisinage de  $e$ .*

**Corollaire 1.4.16.** *Si  $G$  est un groupe localement compact, et si  $F$  est une partie génératrice symétrique compacte de  $G$  qui contient  $e$ , alors pour tout compact  $K \subset G$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $K \subset F^n$ .*

*Démonstration.* C'est immédiat en appliquant le lemme précédent à la longueur des mots associée à  $F$ .  $\square$

### 1.4.2.2 Géométrie bornée

Comme nous allons nous intéresser au comportement de la suite des volumes des  $B_n$ , nous supposons que  $G$  est localement compact et que  $\mu_G$  est une mesure de Haar sur  $G$ .

Nous désirons écarter des situations telles que celle décrite dans l'exemple ci-dessous.

**Exemple 1.4.17.** *Sur  $\mathbb{Z}$ , posons  $|\cdot|_{\log\log} := n \mapsto \ln(1 + \ln(1 + |n|))$ . C'est une fonction de longueur : en effet, si  $n, m \in \mathbb{Z}$ , on a*

$$\begin{aligned} |n + m|_{\log\log} &= \ln(1 + \ln(1 + |n + m|)) \\ &\leq \ln(1 + \ln(1 + |n|) + \ln(1 + |m|)) \\ &\leq \ln(1 + \ln(1 + |n|)) + \ln(1 + \ln(1 + |m|)) \\ &= |n|_{\log\log} + |m|_{\log\log}. \end{aligned}$$

On a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \leq e^{e^n - 1} - 1\}$ , et donc on a  $\frac{|B_{n+1}|}{|B_n|} \rightarrow \infty$ .

Nous formulons donc la définition suivante.

**Définition 1.4.18** (Fonction de longueur géométriquement bornée). *Une fonction de longueur propre  $L$  sur  $G$  est dite géométriquement bornée si*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_G(B_{n+1})}{\mu_G(B_n)} < \infty.$$

**Remarque 1.4.19.** *Cette définition est similaire à la condition (3.6) de la définition de admissible familles définie dans [GN10, Définition 3.10, 1., p. 22].*

**Lemme 1.4.20.** *Soit  $L$  une fonction de longueur géométriquement bornée sur  $G$ . Alors  $\lceil L \rceil$  est géométriquement bornée.*

*Démonstration.* C'est évident si on remarque que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_{L,n} = B_{\lceil L \rceil, n}$  et que la condition de géométrie bornée ne parle que des boules de rayon entier.  $\square$

Nous recherchons donc des conditions suffisantes pour qu'une fonction de longueur soit géométriquement bornée. Comme on va le voir ci-dessus, il y a une condition géométrique suffisante.



**Définition 1.4.21** (Action proprement discontinue). *Soit une action de  $G$  sur un espace topologique  $X$ . On dit que l'action est **proprement discontinue** si pour tout compact  $K$  de  $X$ , l'ensemble  $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$  est relativement compact.*

**Définition 1.4.22** (Action cocompacte). *Soit une action de  $G$  sur un espace topologique  $X$ . On dit que l'action est cocompacte s'il existe un compact  $K$  de  $X$  tel que  $GK = X$ .*

**Définition 1.4.23** (Fonction de longueur géométrique). *Une fonction de longueur sur  $G$  est dite **géométrique** si elle provient d'une action continue par isométries de  $G$  sur un espace métrique  $(X, d)$  et que*

1.  $(X, d)$  est propre et 1-géodésique ;
2. l'action  $G \curvearrowright X$  est proprement discontinue et cocompacte.

La notion d'espace 1-géodésique est développée en annexe.

**Exemple 1.4.24.** *Si  $K$  est une partie génératrice compacte de  $G$ , alors la longueur des mots  $L_K$  est une fonction de longueur géométrique.*

**Exemple 1.4.25.** *On considère l'action naturelle de  $\mathbb{Z}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ , et on munit  $\mathbb{R}^n$  de la distance euclidienne. Alors la fonction de longueur associée à cette action, qui n'est autre que la fonction  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ , est une fonction de longueur géométrique.*

**Lemme 1.4.26.** *Soit  $L$  une fonction de longueur propre sur  $G$ . Supposons que  $B_1$  est un voisinage de  $e$  et qu'il existe un réel  $m$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$B_{n+1} \subset B_n B_m.$$

*Alors  $L$  est géométriquement bornée.*

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $m$  par un entier plus grand, on peut supposer, d'après le Lemme 1.4.14, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_{n+1} \subset B_n \overset{\circ}{B}_m$ . Il suffit d'appliquer le Lemme 1.4.8 à la famille des boules pour  $L$  et de prendre pour  $C_1$  l'intérieur de  $B_1$  et pour  $C_2$  l'intérieur de  $B_m$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer un critère utile pour démontrer que la plupart des fonctions de longueur que nous étudions sont géométriquement bornées.

**Théorème 1.4.27.** *Soit  $L$  une fonction de longueur propre, telle que  $B_1$  est un voisinage de  $e$ . Alors si  $L$  est géométrique, elle est géométriquement bornée.*

*Démonstration.* Soit  $(X, d), x_0$  tels que  $(X, d)$  est un espace métrique propre, 1-géodésique,  $x_0 \in X$  et soit une action continue par isométries  $G \curvearrowright X$  proprement discontinue et cocompacte telle que pour tout  $g \in G$ ,  $L(g) = d(x_0, g(x_0))$ . Comme l'action est cocompacte, il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que pour tout point  $y \in X$ , il existe  $h \in G$  et tel que  $d(y, h(x_0)) \leq c$ . Montrons que pour tout entier  $n$  assez grand,  $B_{n+1} \subset B_n B_{2c+3}$ , ce qui suffit par le lemme 1.4.26.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  strictement plus grand que  $c + 1$ , et  $g \in B_{n+1}$ . Si  $g \in B_n$ , c'est gagné. Sinon, comme  $n+1 > c+2$ , il existe  $z \in X$  tel que  $d(x_0, z) + d(z, g(x_0)) = d(x_0, g(x_0))$  et  $c + 3 > d(z, g(x_0)) > c + 1$ . En effet, il suffit de choisir une géodésique partielle  $c$  définie sur  $I \subset [0, d(x_0, g(x_0))]$  reliant  $x$  à  $g(x_0)$  telle que  $I$  est  $c$ -coborné dans  $[0, d(x_0, g(x_0))]$ , et de prendre l'image d'un point à l'intérieur de  $[d(x_0, g(x_0)) - (c +$

3),  $d(x_0, g(x_0)) - (c + 1)$ ] (il y en a au moins un car cet intervalle est de longueur strictement plus grande que 1).

Par hypothèse, il existe  $h \in G$  tel que  $d(z, h(x_0)) \leq c$ . Soit un tel  $h$ . Alors

$$\begin{aligned} L(h) &= d(x_0, h(x_0)) \\ &\leq d(x_0, z) + d(z, h(x_0)) \\ &\leq d(x_0, g(x_0)) - d(z, g(x_0)) + c \\ &\leq L(g) - (c + 1) + c \\ &= L(g) - 1, \end{aligned}$$

et donc  $h \in B_n$ . Mais maintenant,

$$\begin{aligned} L(h^{-1}g) &= d(x_0, h^{-1}g(x_0)) \\ &= d(h(x_0), g(x_0)) \\ &\leq d(h(x_0), z) + d(z, g(x_0)) \\ &\leq c + c + 3 \\ &= 2c + 3, \end{aligned}$$

et donc  $h^{-1}g \in B_{2c+3}$ . Et donc  $g = hh^{-1}g \in B_n B_{2c+3}$ .  $\square$

### 1.4.3 Isopérimétrie

Commençons par donner les définitions des conditions de Følner. On rappelle que  $\mathcal{B}(G)$  désigne la tribu borélienne d'un groupe topologique  $G$ .

**Définition 1.4.28** (Conditions de Følner). *Soit  $G$  un groupe topologique localement compact, soit  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ , et soit  $F$  une partie compacte de  $G$ . On note*

$$\begin{aligned} F\phi(F) &:= \left( \forall \varepsilon > 0, \exists U \in \mathcal{B}(G), \right. \\ &\quad \left. \left( \mu_G(U) \in \mathbb{R}^*, \forall f \in F, \frac{\mu_G(fU\Delta U)}{\mu_G(U)} < \varepsilon \right) \right) \\ SF\phi(F) &:= \left( \forall \varepsilon > 0, \exists U \in \mathcal{B}(G) \right. \\ &\quad \left. \left( FU \in \mathcal{B}(G), \mu_G(U) \in \mathbb{R}^*, \frac{\mu_G(FU\Delta U)}{\mu_G(U)} < \varepsilon \right) \right) \end{aligned}$$

*On dit que  $G$  vérifie la condition de Følner si  $\forall F \subset G$  compacte,  $F\phi(F)$ . On dit que  $G$  est moyennable s'il vérifie la condition de Følner.*

Le but de cette section est notamment de remarquer que le fait d'avoir  $F\phi(F)$  pour une partie compacte  $F$  vérifiant certaines conditions garantit qu'en fait, toute partie compacte vérifie  $F\phi$ .

**Lemme 1.4.29** (Extrait de [Pie, p.62]). *Pour toutes parties  $A, B$  de  $G$  telles que  $A, B, AB$  sont mesurables, alors on a*

$$\mu_G(AB\Delta B) \leq 2\mu_G(AB \setminus B) \leq 2\mu_G(AB\Delta B).$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \mu_G(AB\Delta B) &= \mu_G(AB \setminus B) + \mu_G(B \setminus AB) \\ &= \mu_G(AB \setminus B) + \mu_G(B \setminus AB) + \mu_G(AB \cap B) - \mu_G(AB \cap B) \\ &= \mu_G(AB \setminus B) + \mu_G(B) - \mu_G(AB \cap B) \\ &\leq \mu_G(AB \setminus B) + \mu_G(AB) - \mu_G(AB \cap B) \\ &= \mu_G(AB \setminus B) + \mu_G(AB \setminus B) \\ &= 2\mu_G(AB \setminus B) \\ &\leq 2\mu_G(AB \setminus B) + 2\mu_G(B \setminus AB) \\ &= 2\mu_G(AB\Delta B). \end{aligned}$$

□

**Lemme 1.4.30.** *On a, pour toute partie  $F$  compacte,  $SF\emptyset(F) \Rightarrow F\emptyset(F)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après  $SF\emptyset(F)$ , il existe  $U \subset G$  telle que  $U$  est mesurable de mesure  $\mu_G(U) \in \mathbb{R}^*$ ,  $FU$  est mesurable et  $\mu_G(FU\Delta U) < \frac{\varepsilon}{2}\mu_G(U)$ . Soit  $f \in F$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \mu_G(fU\Delta U) &\leq 2\mu_G(fU \setminus U) \\ &\leq 2\mu_G(FU \setminus U) \\ &\leq 2\mu_G(FU\Delta U) \\ &< 2\frac{\varepsilon}{2}\mu_G(U) \\ &= \varepsilon\mu_G(U). \end{aligned}$$

□

**Lemme 1.4.31.** *L'ensemble  $E := \{F \subset G \mid F \text{ est compacte, } F\emptyset(F)\}$  vérifie*

1.  $\forall F_1, F_2 \subset G$  compactes,  $(F_2 \in E \text{ et } F_1 \subset F_2) \Rightarrow F_1 \in E$ .
2.  $\forall F \subset G$  compactes,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F \in E \Rightarrow F^n \in E$ .

*Démonstration.* 1. Evident.

2. Soient  $F$  une partie compacte de  $G$  et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $U$  partie mesurable de  $G$ , de mesure  $\mu_G(U) \in \mathbb{R}^*$  telle que  $\forall f \in F$ ,  $\mu_G(fU\Delta U) < \frac{\varepsilon}{n}\mu_G(U)$ . Soient maintenant  $f_1, \dots, f_n \in F$ . On a

$$f_1 \cdots f_n U \Delta U = (f_1 \cdots f_n U \Delta f_1 \cdots f_{n-1} U) \Delta \cdots \Delta (f_1 f_2 U \Delta f_1 U) \Delta (f_1 U \Delta U).$$

De plus, pour tout  $j \in \{2, \dots, n\}$ ,  $\mu_G(f_1 \cdots f_j U \Delta f_1 \cdots f_{j-1} U) = \mu_G(f_j U \Delta U)$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mu_G(f_1 \cdots f_n U \Delta U) &= \mu_G(f_1 U \Delta U) + \sum_{j=2}^n \mu_G(f_1 \cdots f_j U \Delta f_1 \cdots f_{j-1} U) \\ &= \mu_G(f_1 U \Delta U) + \sum_{j=2}^n \mu_G(f_j U \Delta U) \\ &< \frac{\varepsilon}{n} + \sum_{j=2}^n \frac{\varepsilon}{n} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

et donc on a  $F\emptyset(F^n)$ .

□

**Proposition 1.4.32.** *Soit  $G$  un groupe localement compact,  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ .*

*On a*

$$\begin{aligned} \exists F \subset G \text{ compacte, symétrique, génératrice et voisinage de } e, \quad F\emptyset(F) \\ \downarrow \\ \forall F \subset G \text{ compacte,} \quad F\emptyset(F). \end{aligned}$$

*En particulier, si  $G$  n'est pas moyennable, alors pour toute partie génératrice compacte symétrique  $F$  contenant  $e$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $U \subset G$  mesurable tel que  $U, FU$  sont mesurables et  $\mu_G(U) \in \mathbb{R}^*$ , alors*

$$\mu_G(FU\Delta U) \geq \varepsilon\mu_G(U).$$

*Démonstration.* Soit  $K$  une partie compacte de  $G$ . Montrons  $F\emptyset(K)$ . D'après le lemme 1.4.16, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $K \subset F^n$ . Mais alors, d'après le lemme 1.4.31, de  $F\emptyset(F)$ , on tire  $F\emptyset(F^n)$ , d'où on tire  $F\emptyset(K)$ . □

**Remarque 1.4.33.** *La réciproque est vraie et évidente si  $G$  est compactement engendré.*

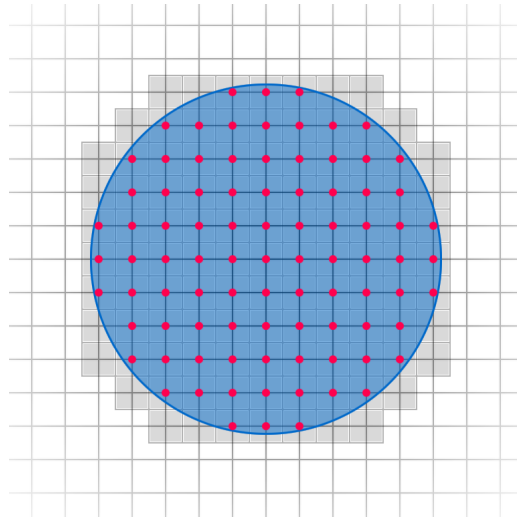


FIGURE 1.6 – Le problème du cercle de Gauss : l’aire du polygone gris, le nombre de points rouges et l’aire du disque bleu sont asymptotiquement égaux.

#### 1.4.4 Comptage dans les boules et les couronnes

Dans cette section, on étudie le problème général d’estimer le nombre de points de  $\Gamma$  dans une partie  $B$  de  $G$ , où  $\Gamma$  est un réseau de  $G$ .

##### 1.4.4.1 Le problème du cercle de Gauss

Le plus ancien exemple d’un tel problème est le *problème du cercle de Gauss*, qui consiste à estimer, pour  $r \in \mathbb{R}_+$ , le nombre  $\#(D(0, r) \cap \mathbb{Z}^2) = \#\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + b^2 \leq r^2\}$ .

Heuristiquement, ce nombre doit être proche de  $\text{Aire}(D(0, r)) = \pi r^2$ . En effet, considérons  $C_0 := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$  et appelons *carré élémentaire* tout translaté de  $C_0$  par une translation à coordonnées entières. Soit  $D^+(0, r)$  la réunion des carrés élémentaires qui intersectent  $D(0, r)$ . Alors l’aire de  $D^+(0, r)$  à la fois proche de celle de  $D(0, r)$  et de  $\#(D(0, r) \cap \mathbb{Z}^2)$ , l’erreur étant, dans chaque cas, intuitivement, au plus de l’ordre du périmètre de  $D(0, r)$ .

On peut démontrer, par exemple, que

$$\#\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + b^2 \leq r^2\} \sim \pi r^2$$

mais la recherche d’estimations plus précises est un sujet de recherche à part entière [Ber09, p. 662-665].

##### 1.4.4.2 Des cas faciles de comptage

En fait, si les parties “de plus en plus épaisses”, une inégalité est toujours vraie, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 1.4.34.** *Soit  $G$  un groupe localement compact,  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ ,  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$ , et  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de parties mesurables de  $G$  telles que*

1.  $\exists c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \mu_G(E_{n+1}) \leq c \mu_G(E_n)$  et
2. *il existe un ouvert  $U$  et un entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n$ ,  $E_n U \subset E_{n+m}$ .*

Alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $n$ ,

$$|\Gamma \cap E_n| \leq C\mu_G(E_n).$$

*Démonstration.* Quitte à rétrécir  $U$ , on peut supposer que les translatés à gauche de  $U$  par les éléments de  $\Gamma$  sont disjoints. Dans ce cas, si  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} |\Gamma \cap E_n| &= \frac{1}{\mu_G(U)} \mu_G((\Gamma \cap E_n)U) \\ &\leq \frac{1}{\mu_G(U)} \mu_G(E_{n+m}) \\ &\leq \frac{1}{c^m \mu_G(U)} \mu_G(E_n). \end{aligned}$$

□

De plus, si on a affaire à la famille des boules pour une fonction de longueur géométriquement bornée, et que le réseau est cocompact, l'autre inégalité est vraie.

**Lemme 1.4.35.** *Soit  $G$  un groupe localement compact muni d'une fonction de longueur propre géométriquement bornée  $L$ ,  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ ,  $\Gamma$  un réseau cocompact, alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $n$  assez grand, on a*

$$\mu_G(B_n) \leq C|\Gamma \cap B_n|.$$

*Démonstration.* Comme l'application de passage au quotient  $G \rightarrow G/\Gamma$  est ouverte, la famille des projections des intérieurs des  $B_n$  est un recouvrement de  $G/\Gamma$ , d'après le Lemme 1.4.14. Comme  $G/\Gamma$  est compact, il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que la projection de  $B_m$  est  $G/\Gamma$  tout entier, et donc  $G = B_m\Gamma$ . Dans ce cas, montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n \subset B_m(\Gamma \cap B_{n+m})$ . En effet, si  $b \in B_n$ , d'après ce qui précède, il existe  $b'$  et  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $b = b'\gamma$ . Mais alors  $\gamma = bb'^{-1} \in B_n B_m \subset B_{n+m}$ . Ainsi, si  $c \in \mathbb{R}^*$  est tel que pour tout  $n$  assez grand,  $\mu_G(B_{n+1}) \leq c\mu_G(B_n)$ , on a

$$\begin{aligned} \mu_G(B_{n+m}) &\leq c^m \mu_G(B_n) \\ &\leq c^m \mu_G(B_m) |\Gamma \cap B_{n+m}|. \end{aligned}$$

□

**Remarques 1.4.36.** — *Par contre, si  $\Gamma$  n'est pas cocompact, il n'existe bien sûr pas d'entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $B_n\Gamma = G$ , et on ne peut pas faire fonctionner de cette manière la démonstration précédente.*

— *Dans le Lemme 1.4.34, les hypothèses sur la suite  $(E_n)_n$  sont vérifiées si ce sont les boules pour une fonction de longueur géométriquement bornée. Ainsi, tout réseau cocompact vérifie  $|\Gamma \cap B_n| \asymp \mu_G(B_n)$  pour la suite des boules de toute fonction de longueur admissible.*

### 1.4.4.3 L'approche de Gorodnik-Nevo, heuristique

Le problème est donc de trouver des hypothèses naturelles sur  $G$ ,  $\Gamma$  et  $B$  pour que  $|\Gamma \cap B|$  soit asymptotiquement proche de  $\mu_G(B)$ . Nous donnons d'abord une heuristique aux théorèmes de cette section.

Commençons par remarquer le fait (à la fois évident et important) suivant.

**Fait 1.4.37.** Soient  $(X, \mathcal{A})$ ,  $(Y, \mathcal{B})$  des espaces mesurables,  $G \curvearrowright X$  et  $G \curvearrowright Y$  des actions mesurables,  $p : X \rightarrow Y$  une application surjective  $G$ -équivariante. On suppose que pour toute application mesurable bornée  $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$  constante sur les fibres de  $p$ , l'application induite  $p_*\phi : Y \rightarrow \mathbb{C}$  est mesurable.

Soit  $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$  mesurable, bornée, et constante sur les fibres de  $p$ . Alors pour toute mesure  $\mu$  sur  $G$ , on a

$$\forall x \in X, \quad \int_G \phi(g^{-1}x) d\mu(g) = \int_G (p_*\phi)(g^{-1}p(x)) d\mu(g).$$

*Démonstration.* Soit  $x \in X$ . Alors  $\phi(g^{-1}x) = p_*\phi(g^{-1}p(x))$ .  $\square$

En des termes probabilistes, ce fait a l'interprétation concrète suivante : soit  $Z$  une variable aléatoire à valeurs dans  $G$ , de loi  $\mu$ . Soit  $x \in X$ , et  $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable, bornée, et constante sur les fibres de  $p$ . Alors

$$\mathbb{E}[\phi(Z^{-1}x)] = \mathbb{E}[p_*\phi(Z^{-1}p(x))],$$

et, dans le cas particulier où  $\phi$  est l'indicatrice d'un borélien  $B$  tel que  $B = p^{-1}(p(B))$ , on a

$$\mathbb{P}[Z^{-1}x \in B] = \mathbb{P}[Z^{-1}p(x) \in p(B)].$$

On considère alors le cas très particulier où :

- $X = G$ , et l'action de  $G$  sur  $G$  est celle de multiplication à gauche ;
- $Y := G/\Gamma$  où le quotient correspond à l'espace des orbites sous l'action de  $\Gamma$  sur  $G$  à droite ;
- $p$  est la surjection canonique ;
- $\phi$  est l'indicatrice de  $U\Gamma$  pour un voisinage ouvert  $U$  de  $e$  dans  $G$ , tel que les translatés à droite de  $U$  par les éléments de  $\Gamma$  sont disjoints ;
- $\mu$  est la mesure sur  $G$  de densité  $\frac{1_B}{\mu_G(B)}$  par rapport à  $\mu_G$ , pour une partie mesurable non négligeable  $B$  de  $G$ .

On a alors, si  $Z$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $G$  de loi  $\mu$ , pour tout  $x \in G$ ,

$$\mathbb{P}[Z^{-1}x \in U\Gamma] = \mathbb{P}[Z^{-1}p(x) \in p(U)].$$

Il suffit alors d'imposer des conditions géométriques pour que le nombre

$$\mathbb{P}[Z^{-1}x \in U\Gamma] \quad \left( = \frac{\mu_G(B \cap U\Gamma x)}{\mu_G(B)} \right)$$

soit proche de

$$\frac{\mu_G(U)|\Gamma \cap B|}{\mu_G(B)}$$

pour des  $x$  suffisamment proches de  $e$ , et d'imposer des conditions ergodiques pour que

$$\mathbb{P}[Z^{-1}p(x) \in p(U)]$$

soit proche de

$$\mu_{G/\Gamma}(p(U)) = \mu_G(U)$$

afin d'obtenir l'estimation désirée, à savoir

$$|\Gamma \cap B| \approx \mu_G(B).$$

#### 1.4.4.4 L'approche de Gorodnik-Nevo, de manière formelle

Les deux lemmes suivants sont une adaptation de Gorodnik-Nevo [GN10, Lemma 6.7, p. 79].

**Lemme 1.4.38.** *Soit  $G$  un groupe localement compact,  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . Soit  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$  telle que la mesure  $\mu_{G/\Gamma}$  qui lui est associée sur le quotient soit une mesure de probabilité. Soit  $E_n$  une suite de parties mesurables de  $G$  et soit  $U$  un ouvert symétrique de  $G$ , voisinage de  $e$ , dont les translatés à droite par  $\Gamma$  sont disjoints.*

*On considère l'action de  $G$  sur  $G/\Gamma$  et on suppose que le théorème ergodique en probabilité vaut pour la suite de mesures  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \nu_n := \frac{\mathbf{1}_{E_n}}{\mu(E_n)}.$$

*Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,*

$$(1 - \varepsilon)\mu(E_n) \leq |\Gamma \cap UE_nU|.$$

*Démonstration.* Notons  $\pi_{G/\Gamma}$  la représentation de Koopman associée à l'action  $G \curvearrowright G/\Gamma$ . Soit  $U$  un ouvert symétrique de  $G$  dont les translatés à droite par  $\Gamma$  sont disjoints. Posons  $\chi_U := \frac{\mathbf{1}_U}{\mu(U)}$ . Posons également

$$\tilde{\phi}_U := g \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_U(g\gamma)$$

de sorte que  $\tilde{\phi}_U$  est invariante à droite par  $\Gamma$ , et passe au quotient en une  $\phi_U$ . On a alors

$$\int_G \chi_U d\mu_G = 1 = \int_{G/\Gamma} \phi_U d\mu_{G/\Gamma}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , et soit  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,

$$\mu_{G/\Gamma}(\{x \in G/\Gamma \mid \varepsilon \geq |\pi_{G/\Gamma}(\nu_n)(\phi_U)(x) - 1|\}) > 1 - \mu_G(U).$$

Soit  $n \geq N$ . Il existe donc  $h \in U$  tel que

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1}{\mu_G(E_n)} \int_{E_n} \phi_U(g^{-1}h\Gamma) d\mu_G(g).$$

Soit un tel  $h$ . On va démontrer que  $\int_{E_n} \phi_U(g^{-1}h\Gamma) d\mu_G \leq |\Gamma \cap UE_nU|$ , ce qui permettra de conclure.

On a, si  $\gamma \in \Gamma$  et  $g \in E_n$  sont tels que  $\chi(g^{-1}h\gamma) \neq 0$ , alors  $g^{-1}h\gamma \in U$ , et donc  $\gamma \in h^{-1}E_nU \subset UE_nU$ . Ainsi, le support de  $\gamma \mapsto \chi_U(g^{-1}h\gamma)$ , si  $g \in E_n$ , est inclus dans  $\Gamma \cap UE_nU$ . On a donc

$$\begin{aligned} \int_{E_n} \phi_U(g^{-1}h\Gamma) d\mu_G(g) &= \int_{E_n} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_U(g^{-1}h\gamma) d\mu_G(g) \\ &= \int_{E_n} \sum_{\gamma \in \Gamma \cap UE_nU} \chi_U(g^{-1}h\gamma) d\mu_G(g) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma \cap UE_nU} \int_{E_n} \chi_U(g^{-1}h\gamma) d\mu_G(g) \\ &\leq \sum_{\gamma \in \Gamma \cap UE_nU} \int_G \chi_U(g^{-1}h\gamma) d\mu_G(g) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma \cap UE_nU} 1 \\ &= |\Gamma \cap UE_nU|, \end{aligned}$$

ce qui nous donne l'inégalité.  $\square$

**Lemme 1.4.39.** *Soit  $G$  un groupe localement compact,  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . Soit  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$  telle que la mesure  $\mu_{G/\Gamma}$  qui lui est associée sur le quotient soit une mesure de probabilité. Soit  $E_n$  une suite de parties mesurables de  $G$  et soit  $U$  un ouvert symétrique de  $G$ , voisinage de  $e$ , dont les translatés à droite par  $\Gamma$  sont disjoints.*

*On considère l'action de  $G$  sur  $G/\Gamma$  et on suppose que le théorème ergodique en probabilité vaut pour la suite de mesures  $(\tilde{\nu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \nu_n := \frac{\mathbf{1}_{UE_nU}}{\mu(UE_nU)} \mu_G.$$

*Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,*

$$|\Gamma \cap E_n| \leq (1 + \varepsilon) \mu_G(UE_nU).$$

*Démonstration.* Notons  $\pi_{G/\Gamma}$  la représentation de Koopman associée à l'action  $G \curvearrowright G/\Gamma$ . Soit  $U$  un ouvert symétrique de  $G$  dont les translatés à droite par  $\Gamma$  sont disjoints. Posons  $\chi_U := \frac{\mathbf{1}_U}{\mu(U)}$ . Posons également

$$\tilde{\phi}_U := g \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_U(g\gamma)$$

de sorte que  $\tilde{\phi}_U$  est invariante à droite par  $\Gamma$ , et passe au quotient en une  $\phi_U$ . On a alors

$$\int_G \chi_U d\mu_G = 1 = \int_{G/\Gamma} \phi_U d\mu_{G/\Gamma}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , et soit  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,

$$\mu_{G/\Gamma}(\{x \in G/\Gamma \mid \varepsilon \geq |\pi_{G/\Gamma}(\nu_n)(\phi_U)(x) - 1|\}) > 1 - \mu_G(U).$$

Soit  $n \geq N$ . Il existe donc  $h \in U$  tel que

$$(1 + \varepsilon) \geq \frac{1}{\mu_G(UE_nU)} \int_{UE_nU} \phi_U(g^{-1}h\Gamma) d\mu_G(g).$$

Soit un tel  $h$ . On va démontrer que  $\int_{UE_nU} \phi_U(g^{-1}h\Gamma) d\mu_G \geq |\Gamma \cap E_n|$ , ce qui permettra de conclure.

On a donc, si  $\gamma \in \Gamma \cap E_n$ ,  $g \in G$ , et si  $\chi_U(g^{-1}h\gamma) \neq 0$ , alors  $g^{-1}h\gamma \in U$ , et donc  $g \in U(\Gamma \cap E_n)U \subset UE_nU$ . Ainsi, si  $\gamma \in \Gamma \cap E_n$ , le support de  $g \mapsto \chi_U(g^{-1}h\gamma)$  est inclus dans  $UE_nU$ . On a donc

$$\begin{aligned} \int_{UE_nU} \phi_U(g^{-1}h\gamma) d\mu_G(g) &= \int_{UE_nU} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_U(g^{-1}h\gamma) d\mu_G(g) \\ &\geq \int_{UE_nU} \sum_{\gamma \in \Gamma \cap E_n} \chi_U(g^{-1}h\gamma) d\mu_G(g) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma \cap E_n} \int_{UE_nU} \chi_U(g^{-1}h\gamma) d\mu_G(g) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma \cap E_n} \int_G \chi_U(g^{-1}h\gamma) d\mu_G(g) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma \cap E_n} 1 \\ &= |\Gamma \cap E_n|, \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité.  $\square$



### 1.4.4.5 Conséquences

On note  $f(n) \asymp g(n)$  pour dire

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad \frac{1}{C}|g(n)| \leq |f(n)| \leq C|g(n)|.$$

En utilisant ces deux lemmes, on peut démontrer les théorèmes de comptage suivants.

**Théorème 1.4.40** (Comptage dans le cas totalement discontinu). *Si  $G$  est un groupe localement compact,  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . Soit  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$  telle que la mesure  $\mu_{G/\Gamma}$  qui lui est associée sur le quotient soit une mesure de probabilité. On suppose que l'action de  $G$  sur  $G/\Gamma$  est mélangeante.*

*Soit  $L$  une fonction de longueur propre sur  $G$  à valeurs entières, et on suppose que  $B_0$  est un voisinage de  $e$  et que la croissance de  $G$ , par rapport à  $L$ , n'est pas linéaire. Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des boules (ou des couronnes). Alors on a*

$$|\Gamma \cap E_n| \sim \mu_G(E_n).$$

*Démonstration.* Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $e$  dans  $G$  dont les translatés à droite par  $\Gamma$  sont disjoints, et inclus dans  $B_0$ . Alors, pour un tel  $U$ , pour tout  $n$ ,  $UE_nU \subset E_n$ .

De plus,  $\mu_G(E_n)$  tend vers l'infini (c'est évident pour les boules, et pour les couronnes, on utilise le fait que la croissance n'est pas linéaire. Ainsi, d'après un théorème ci-dessus, le théorème ergodique  $L^2$  vaut pour  $\frac{\mathbf{1}_{E_n}}{\mu_G(E_n)}$ ). Les hypothèses des deux lemmes sont vérifiées; on a donc l'équivalence en mettant bout à bout les inégalités et en utilisant le fait que  $UE_nU \subset E_n$ .  $\square$

**Théorème 1.4.41** (Comptage dans le cas général). *Si  $G$  est un groupe localement compact,  $\Gamma$  un réseau de  $G$ . Soit  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$  telle que la mesure  $\mu_{G/\Gamma}$  qui lui est associée sur le quotient soit une mesure de probabilité. On suppose que l'action de  $G$  sur  $G/\Gamma$  est mélangeante.*

1. *Soit  $L$  une fonction de longueur géométriquement bornée à valeurs entières telle que  $B_1$  soit un voisinage de  $e$  dans  $G$ . Soit  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des boules. On a*

$$|\Gamma \cap B_n| \asymp \mu_G(B_n).$$

2. *On suppose que  $G$  est non-moyennable. Soit  $L$  une fonction de longueur géométriquement bornée à valeurs entières telle que  $B_1$  soit un voisinage compact de  $e$  dans  $G$  qui engendre  $G$ . Posons  $L_5 := \lceil \frac{L}{5} \rceil$ , et soit  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des couronnes pour  $L_5$ . Alors on a*

$$|\Gamma \cap C_n| \asymp \mu_G(C_n).$$

*Démonstration.* 1. Il suffit d'appliquer les deux lemmes pour un  $U$  inclus dans  $B_1$  pour obtenir que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(1 - \varepsilon)\mu_G(B_n) \leq |\Gamma \cap B_{n+2}| \leq (1 + \varepsilon)\mu_G(B_{n+4}).$$

2. Il suffit d'appliquer le premier lemme à  $L$  pour obtenir que pour tout  $n$  assez grand,

$$(1 - \varepsilon)\mu_G(C_{L,n}) \leq \left| \Gamma \cap \bigcup_{i=-2}^2 C_{L,n+i} \right|.$$

Si  $n = 5m + 2$ , alors  $C_{L_5, m} = \bigcup_{i=-2}^2 C_{L, 5m+i}$ . Il suffit ensuite d'appliquer le deuxième lemme à  $L_5$  pour obtenir que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$|\Gamma \cap C_{L_5, m}| \leq (1 + \varepsilon) \mu_G \left( \bigcup_{i=-4}^4 C_{L, 5m+i} \right).$$

Soient  $c, c'$  tel que pour tout  $n$  assez grand,

$$\begin{aligned} \mu_G(B_{n+1}) &\leq c \mu_G(B_n) && \text{(géométrie bornée)} \\ \mu_G(B_n) &\leq c' \mu_G(C_n) && \text{(non-moyennabilité)}. \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\mu_G(C_{L_5, m}) \leq \mu_G(B_{L, 5m+2}) \leq c' \mu_G(C_{L, 5m+2}),$$

d'une part, et

$$\begin{aligned} \mu_G(\bigcup_{i=-4}^4 C_{L, 5m+i}) &\leq \mu_G(B_{5m+4}) \\ &\leq c^2 \mu_G(B_{5m+2}) \\ &\leq c^2 c' \mu_G(C_{L, 5m+2}) \\ &\leq c^2 c' \mu_G(C_{L_5, m}) \end{aligned}$$

de l'autre, ce qui permet de conclure. □

En réunissant les phénomènes liés à la propriété de Howe-Moore, les théorèmes ergodiques et les théorèmes de comptage démontrés précédemment, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 1.4.42.** *Soient  $G_1, \dots, G_n$  des groupes topologiques, et, pour tout  $i$ , soit  $L_i$  une fonction de longueur sur  $G_i$ . On suppose que chaque  $(G_i, L_i)$  est d'une des formes suivantes :*

1.  $(G, L)$  où  $G$  est un groupe algébrique simple isotrope sur un corps non archimédien, et où  $L$  est la fonction de longueur associée à l'action par isométries de  $G$  sur le 1-squelette de son immeuble de Bruhat-Tits muni de la distance combinatoire, pour un sommet particulier de l'immeuble ;
2.  $(G, L)$  où  $G$  est un sous-groupe du groupe des automorphismes d'un arbre semi-régulier<sup>6</sup> dont tous les sommets ont une valence strictement supérieure à 2, topologiquement simple et qui agit 2-transitivement sur le bord de l'arbre, et où  $L$  est la fonction de longueur associée à l'action sur l'arbre, pour un sommet particulier de l'arbre ;
3.  $(G, L)$  où  $G$  est un groupe de Lie connexe, simple, non compact, de centre fini, et où  $L$  est la fonction de longueur associée à l'action par isométries de  $G$  sur son espace symétrique, muni de la distance Riemannienne.

Soit  $G := G_1 \times \dots \times G_n$ , et, pour  $g = (g_1, \dots, g_n) \in G$ , posons

$$L(g) := \sum_{i=1}^n L_i(g_i).$$

Soit  $\Gamma$  un réseau irréductible de  $G$ .

---

6. C'est-à-dire, les arbres dont tous les sommets qui sont à distance paire ont même valence.

— Si tous les  $G_i$  apparaissent aux items 1. et 2. ci-dessus, soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des boules ou des couronnes pour  $L$ . On a

$$|\Gamma \cap E_n| \sim \mu_G(E_n).$$

— Dans le cas général, on a, pour les boules

$$|\Gamma \cap B_n| \asymp \mu_G(B_n),$$

et,

$$\mu_G(C_{d,n}) \asymp |\Gamma \cap C_{d,n}|,$$

où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_{d,n} := \{g \in G \mid d(n-1) < L(g) \leq dn\}$ .

*Démonstration.* D'après le Corollaire 1.3.19, l'action de  $G$  sur  $G/\Gamma$  est mélangeante. On peut donc appliquer, selon le cas, les Théorèmes 1.4.40 et 1.4.41.  $\square$

# Chapitre 2

## Un théorème ergodique sur le groupe libre

**Résumé.** *Ce chapitre reprend le contenu de l'article [BPL17], où nous démontrons un théorème ergodique pour l'action (où la mesure n'est que quasi-invariante) d'un groupe libre de type fini sur son bord.*

*Ce travail a été réalisé en collaboration avec Adrien Boyer.*

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Travaux reliés

Nous considérons l'action du groupe libre à  $r$  générateurs  $\mathbb{F}_r$  sur l'espace de probabilité,  $\partial\mathbb{T}$ , qui est le bord de l'arbre de Cayley de  $\mathbb{F}_r$  pour le système canonique de générateurs. Il est connu que cette action est ergodique (voir, par exemple, [FTP82] et [FTP83], et notamment [FTP83, Lemma 4, Item (i)]), mais comme la mesure n'est pas préservée, il n'est pas évident de démontrer, ni même de formuler un théorème ergodique pour cette action. C'est ce que nous faisons ici ; c'est l'objet du Théorème 2.1.2. Notre théorème s'inspire de l'article [BM11], généralisé par [Boy16]. Dans [BM11], il est fait usage d'un théorème d'équidistribution double de Margulis, valable dans le cas des variétés ; dans [Boy16], il est remplacé par le plus général [Rob03, Theorem 4.1.1], vrai sous une hypothèse qui n'est pas vérifiée dans notre cadre. Nous démontrons donc un analogue de ce théorème ; c'est le Théorème 2.1.1.

#### 2.1.2 Énoncé des théorèmes

##### 2.1.2.1 Rappel du contexte géométrique

Nous notons  $\mathbb{F}_r = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$  le groupe libre à  $r$  générateurs, pour  $r \geq 2$ . Pour un élément  $\gamma \in \mathbb{F}_r$ , il existe un unique mot réduit sur l'alphabet  $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_r^{\pm 1}\}$  qui le représente. Ce mot est noté  $\gamma_1 \cdots \gamma_k$  pour un certain entier  $k$  que l'on appelle la *longueur* de  $\gamma$  et que l'on note  $|\gamma|$ . L'ensemble des éléments de longueur exactement  $n$  est noté  $S_n$  et est appelé *sphère de rayon  $n$* . Si  $u \in \mathbb{F}_r$  et  $k \geq |u|$ , notons

$$Pr_u(k) := \{\gamma \in \mathbb{F}_r \mid |\gamma| = k, u \text{ est un préfixe de } \gamma\}.$$

Soit  $\mathbb{T}$  la réalisation géométrique du graphe de Cayley de  $\mathbb{F}_r$  par rapport au système de générateurs  $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_r^{\pm 1}\}$ , qui est un arbre  $2r$ -régulier. Nous le munissons de la

distance  $d$  donnant longueur 1 à chaque arête ; pour cette distance, l'action canonique de  $\mathbb{F}_r$  sur  $\mathbb{T}$  est isométrique, et librement transitive sur l'ensemble des sommets. En tant qu'espace métrique,  $\mathbb{T}$  est CAT(-1). En particulier, il est uniquement géodésique, les géodésiques étant des suites d'arêtes successives. Nous notons  $[x, y]$  l'unique segment géodésique joignant  $x$  à  $y$ .

Fixons, une fois pour toutes, un sommet  $x_0$  de  $\mathbb{T}$ . Pour  $x \in \mathbb{T}$ , le sommet de  $\mathbb{T}$  qui est le plus proche de  $x$  dans  $[x_0, x]$  est noté  $[x]$  ; comme l'action est libre, on peut identifier  $[x]$  à l'élément  $\gamma$  qui envoie  $x_0$  dessus, et cette identification est une isométrie.

La description du bord  $\partial\mathbb{T}$  de  $\mathbb{T}$  a déjà été faite dans la Section 1.1.4. Nous pouvons légèrement la préciser à l'aide du fait que  $\mathbb{T}$  est le graphe de Cayley de  $\mathbb{F}_r$  : identifions  $\partial\mathbb{T}$  à l'ensemble des mots réduits infinis à droite sur l'alphabet  $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_r^{\pm 1}\}$ . Nous aurons à considérer l'ensemble  $\overline{\mathbb{T}} := \mathbb{T} \cup \partial\mathbb{T}$ .

Pour  $u = u_1 \cdots u_l \in \mathbb{F}_r \setminus \{e\}$ , définissons les ensembles

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_u &:= \{x \in \mathbb{T} \mid u \text{ est un préfixe de } [x]\} \\ \partial C_u &:= \{\xi \in \partial\mathbb{T} \mid u \text{ est un préfixe de } \xi\} \\ C_u &:= \mathbb{T}_u \cup \partial C_u \end{aligned}$$

On peut à présent définir une topologie sur  $\overline{\mathbb{T}}$  en choisissant des bases de voisinages de la façon suivante :

1. pour  $x \in \mathbb{T}$ , on prend l'ensemble des voisinages de  $x$  dans  $\mathbb{T}$
2. pour  $\xi \in \partial\mathbb{T}$ , on choisit l'ensemble  $\{C_u \mid u \text{ est un préfixe de } \xi\}$ .

On rappelle que pour cette topologie,  $\overline{\mathbb{T}}$  est compact, et  $\mathbb{T}$  en est un ouvert dense, que la topologie induite sur  $\mathbb{T}$  est la topologie de départ et que toute isométrie de  $\mathbb{T}$  se prolonge continûment à  $\overline{\mathbb{T}}$ .

Pour  $\xi_1$  et  $\xi_2$  dans  $\partial\mathbb{T}$ , rappelons que leur **produit de Gromov** par rapport à  $x_0$  est donné par

$$(\xi_1 | \xi_2)_{x_0} := \sup \{k \in \mathbb{N} \mid \xi_1 \text{ et } \xi_2 \text{ ont un préfixe commun de longueur } k\}$$

et la distance au bord que l'on en déduit est

$$d_{x_0}(\xi_1, \xi_2) := e^{-(\xi_1 | \xi_2)_{x_0}}.$$

La distance  $d_{x_0}$  sur  $\partial\mathbb{T}$  est ultramétrique, et induit la topologie de  $\partial\mathbb{T}$ . Précisément, si  $\xi = u_1 u_2 u_3 \cdots$ , alors la boule centrée en  $\xi$  de rayon  $e^{-k}$  est  $\partial C_{u_1 \dots u_k}$ .

Notons  $\mu_{x_0}$  la mesure de Hausdorff  $\ln(2d - 1)$ -dimensionnelle associée à  $d_{x_0}$  normalisée pour donner mesure 1 à  $\partial\mathbb{T}$ .

Notons, pour  $\xi \in \partial\mathbb{T}$  et  $\gamma \in \mathbb{F}_r$ ,

$$c(\gamma, \xi) := (2r - 1)^{\beta_\xi(x_0, \gamma^{-1}x_0)}.$$

La mesure  $\mu_{x_0}$  est quasi-invariante sous l'action de  $\mathbb{F}_r$ , et la dérivée de Radon-Nikodym vérifie, pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et pour presque tout  $\xi \in \partial\mathbb{T}$ ,

$$\frac{d\gamma_* \mu_{x_0}}{d\mu_{x_0}}(\xi) = c(\gamma^{-1}, \xi).$$

### 2.1.2.2 Énoncé du théorème

Notons  $\pi$  la représentation de Koopman associée à l'action de  $\mathbb{F}_r$  sur le bord de  $\mathbb{T}$ ,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{F}_r &\rightarrow \mathcal{U}(L^2(\partial\mathbb{T})) \\ \gamma &\mapsto \pi(\gamma), \end{aligned}$$

dont on rappelle qu'elle est définie par

$$(\pi(\gamma)h)(\xi) := c(\gamma^{-1}, \xi)^{\frac{1}{2}} h(\gamma^{-1}\xi)$$

pour tout  $\gamma \in \mathbb{F}_r$  et toute  $h \in L^2(\partial\mathbb{T})$ . La fonction de Harish-Chandra est donnée par

$$\Xi(\gamma) := \langle \pi(\gamma)\mathbf{1}_{\mathbf{B}}, \mathbf{1}_{\mathbf{B}} \rangle = \int_{\partial\mathbb{T}} c(\gamma^{-1}, \xi)^{\frac{1}{2}} d\mu_{x_0}(\xi),$$

où  $\mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}$  est la fonction caractéristique du bord.

Pour  $f \in C(\overline{\mathbb{T}})$ , on définit les opérateurs

$$M_n(f) : g \in L^2(\partial\mathbb{T}) \mapsto \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} f(\gamma x_0) \frac{\pi(\gamma)g}{\Xi(\gamma)} \in L^2(\partial\mathbb{T}).$$

Définissons également les opérateurs

$$M(f) := m(f|_{\partial\mathbb{T}})P_{\mathbf{1}_{\mathbf{B}}}$$

où  $m(f|_{\partial\mathbb{T}})$  désigne l'opérateur de multiplication par  $f|_{\partial\mathbb{T}}$  sur  $L^2(\partial\mathbb{T})$ , et  $P_{\mathbf{1}_{\mathbf{B}}}$  est le projecteur orthogonal sur le sous-espace des fonctions constantes. Ainsi, pour  $g \in L^2(\partial\mathbb{T})$ , on a

$$M(f)g := \langle g, \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}} \rangle f|_{\partial\mathbb{T}}.$$

On a le théorème d'équidistribution double suivant.

**Théorème 2.1.1.** *On a, dans  $C(\overline{\mathbb{T}} \times \overline{\mathbb{T}})^*$ , la convergence faible-\* suivante :*

$$\frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} D_{\gamma x_0} \otimes D_{\gamma^{-1}x_0} \rightharpoonup \mu_{x_0} \otimes \mu_{x_0},$$

où  $D_x$  la mesure de Dirac en un point  $x$  de  $\mathbb{T}$ .

On en déduit le théorème ergodique suivant.

**Théorème 2.1.2.** *On a, pour toute  $f$  continue sur  $\overline{\mathbb{T}}$ , la convergence en topologie faible des opérateurs*

$$M_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M(f).$$

*En d'autres termes, on a, pour toute  $f$  continue sur  $\overline{\mathbb{T}}$  et pour toutes  $g, h$  dans  $L^2(\partial\mathbb{T})$ , la convergence*

$$\frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} f(\gamma x_0) \frac{\langle \pi(\gamma)g, h \rangle}{\Xi(\gamma)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle M(f)g, h \rangle.$$

On en déduit une nouvelle démonstration de l'irréductibilité de  $\pi$  (déjà démontrée dans [FTP82, Theorem 5]).

**Corollaire 2.1.3.** *La représentation  $\pi$  est irréductible.*

*Démonstration.* Du Théorème 2.1.2 à  $f = \mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}}$ , on déduit que le projecteur orthogonal sur les fonctions constantes est dans l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi$ . On applique ensuite le théorème 2.1.2 à  $g = \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}$  pour voir que le vecteur  $\mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}$  est cyclique. Soit  $F \leq L^2(\partial\mathbb{T})$  un sous-espace fermé invariant non nul. Supposons que  $\forall h \in F$ ,  $\langle h, \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}} \rangle = 0$ . Alors si  $h \in F$ , par hypothèse, pour tout  $\gamma \in \mathbb{F}_r$ ,  $0 = \langle \pi(\gamma)h, \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}} \rangle = \langle h, \pi(\gamma^{-1})\mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}} \rangle$ , et donc, comme  $\mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}$  est cyclique,  $h = 0$ . Il existe donc  $h \in F$  tel que  $P_{\mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}}(h) = \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}\langle h, \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}} \rangle \neq 0$ . Mais comme  $P_{\mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}}$  est dans l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi$ , on a  $\langle h, \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}} \rangle \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}} = P_{\mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}}(h) \in F$ . Ainsi,  $F$  contient le vecteur cyclique  $\langle h, \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}} \rangle \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}$ , et donc  $F = L^2(\partial\mathbb{T})$ .  $\square$

### 2.1.3 Remarques bibliographiques

**Remarque 2.1.4.** *Il aurait été possible de définir d'autres fonctions de longueur sur  $\mathbb{T}$ , par exemple, donnant longueur  $\alpha$  aux arêtes étiquetées par  $a_1^\pm$ , pour un  $\alpha$  réel positif quelconque. Notons  $\mathbb{T}_\alpha$  l'espace métrique obtenu. Le quotient a un spectre des longueurs non arithmétique si et seulement si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . D'après [Gar14], dès que  $\alpha_1 \neq \alpha_2^{pm}$ , les mesures de Hausdorff sur  $\mathbb{T}_{\alpha_1}$  sur  $\mathbb{T}_{\alpha_2}$  ne sont pas équivalentes, et les représentations unitaires associées non plus. Il serait intéressant, dans ce contexte, de démontrer des analogues aux théorèmes 2.1.1 and 2.1.2, pour  $\alpha \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$ .*

## 2.2 Démonstrations

### 2.2.1 Démonstration du théorème d'équidistribution

Pour la démonstration du Théorème 2.1.1, notons

$$E := \left\{ f : C(\overline{\mathbb{T}} \times \overline{\mathbb{T}}) \mid \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} f(\gamma x_0, \gamma^{-1} x_0) \rightarrow \int_{\overline{\mathbb{T}} \times \overline{\mathbb{T}}} f d(\mu_{x_0} \otimes \mu_{x_0}) \right\}.$$

L'ensemble  $E$  est visiblement un sous-espace fermé de  $C(\overline{\mathbb{T}} \times \overline{\mathbb{T}})$ ; il suffit de démontrer qu'il est dense dans  $C(\overline{\mathbb{T}} \times \overline{\mathbb{T}})$ .

Définissons des régularisations des fonctions indicatrices : pour  $u \in \mathbb{F}_r$ , définissons

$$\chi_u(x) := \begin{cases} \max\{1 - d_{\mathbb{T}}(x, C_u), 0\} & \text{si } x \in \mathbb{T}, \\ 0 & \text{si } x \in \partial\mathbb{T} \setminus \partial C_u, \\ 1 & \text{si } x \in \partial C_u. \end{cases}$$

Il est facile de voir que les fonctions  $\chi_u$  sont continues, et qu'elles coïncident avec  $\chi_{C_u}$  sur  $\mathbb{F}_r x_0$  et sur  $\partial\mathbb{T}$ .

La démonstration du lemme suivant est évidente.

**Lemme 2.2.1.** *Soient  $u \in \mathbb{F}_r$  et  $k \geq |u|$ . Alors  $\chi_u - \sum_{\gamma \in Pr_u(k)} \chi_\gamma$  est à support compact dans  $\mathbb{T}$ .*

**Proposition 2.2.2.** *L'ensemble  $\chi := \{\chi_u \mid u \in \mathbb{F}_r \setminus \{e\}\}$  sépare les points de  $\partial\mathbb{T}$ , et le produit de deux éléments de  $\chi$  est soit dans  $\chi$ , soit est la somme de deux éléments de  $\chi$ , soit la somme d'un élément de  $\chi$  et d'une fonction à support compact contenu dans  $\mathbb{T}$ , soit la fonction nulle.*

*Démonstration.* Il est clair que  $\chi$  sépare les points. D'après le Lemme 2.2.1 que  $\chi_u \chi_v = \chi_v$  si  $u$  est un préfixe strict de  $v$ , que  $\chi_u^2 - \chi_u$  est à support compact dans  $\mathbb{T}$ , et que  $\chi_u \chi_v = 0$  si ni  $u$ , ni  $v$ , n'est un préfixe strict de l'autre.  $\square$

**Proposition 2.2.3.** *Le sous-espace  $E$  contient toutes les fonctions de la forme  $\chi_u \otimes \chi_v$ .*

*Démonstration.* Soit  $n \geq |u| + |v|$ . Nous observons que

$$\frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} (\chi_u \otimes \chi_v)(\gamma x_0, \gamma^{-1} x_0) = \frac{|S_n^{u,v}|}{|S_n|},$$

où  $S_n^{u,v}$  est l'ensemble des mots réduits de longueur  $n$  admettant  $u$  comme préfixe, et  $v^{-1}$  comme suffixe. On voit facilement que cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des mots réduits de longueur  $n - (|u| + |v|)$  qui ne commencent pas par l'inverse de la dernière lettre de  $u$ , et qui ne terminent pas par l'inverse de la première lettre  $v^{-1}$ . Calculons, pour  $s, t \in \{a_1^{\pm 1}, \dots, a_r^{\pm 1}\}$  et  $m \in \mathbb{N}$ , le cardinal de l'ensemble  $S_m(s, t)$  des mots réduits  $m$  qui ne commencent pas par  $s$  et qui ne se terminent pas par  $t$ .

On a

$$S_m = S_m(s, t) \cup \{x \mid |x| = m, \text{ commence par } s\} \cup \{x \mid |x| = m \text{ et termine par } t\}.$$

Notons que l'intersection des deux derniers ensemble est l'ensemble des mots réduits qui commencent par  $s$  et terminent par  $t$ , qui est en bijection avec  $S_{m-2}(s^{-1}, t^{-1})$ .

On a donc la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} |S_m(s, t)| &= 2r(2r-1)^{m-1} - 2(2r-1)^{m-1} + |S_{m-2}(s^{-1}, t^{-1})| \\ &= 2(r-1)(2r-1)^{m-1} + 2(r-1)(2r-1)^{m-3} + |S_{m-4}(s, t)| \\ &= (2r-1)^m \frac{2(r-1)((2r-1)^2 + 1)}{(2r-1)^3} + |S_{m-4}(s, t)| \end{aligned}$$

Posons  $C := \frac{2(r-1)((2r-1)^2 + 1)}{(2r-1)^3}$ ,  $n = 4k + j$ , pour  $0 \leq j \leq 3$  et effectuons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} |S_{4k+j}^{s,t}| &= C(2r-1)^{4k+j} + |S_{4(k-1)+j}^{s,t}| \\ &= C(2r-1)^{4k+j} + C(2r-1)^{4(k-1)+j} + |S_{4(k-2)+j}^{s,t}| \\ &= C \sum_{i=1}^k (2r-1)^{4i+j} + |S_j^{s,t}| \\ &= C(2r-1)^{4+j} \frac{(2r-1)^{4k} - 1}{(2r-1)^4 - 1} + |S_j(s, t)| \\ &= (2r-1)^{1+j} \frac{(2r-1)^{4k} - 1}{2r} + |S_j(s, t)|. \end{aligned}$$

On peut ensuite faire le calcul suivant :



$$\begin{aligned}
\frac{|S_{4k+j}^{u,v}|}{|S_{4k+j}|} &= \frac{|S_{4k+j-(|u|+|v|)}(u_{|u|}, v_{|v|}^{-1})|}{|S_{4k+j}|} \\
&= \frac{(2r-1)^{1+j} \frac{(2r-1)^{4k-(|u|+|v|)} - 1}{2r} + |S_j(u_{|u|}, v_{|v|}^{-1})|}{2r(2r-1)^{4k+j-1}} \\
&= \frac{1}{2r(2r-1)^{|u|-1}} \frac{1}{2r(2r-1)^{|v|-1}} + o(1) \\
&= \mu_{x_0}(\partial C_u) \mu_{x_0}(\partial C_v) + o(1),
\end{aligned}$$

et faire tendre  $k$  vers l'infini.  $\square$

**Corollaire 2.2.4.** *Le sous-espace  $E$  est dense dans  $C(\overline{\mathbb{T}} \times \overline{\mathbb{T}})$ .*

*Démonstration.* Considérons  $E'$ , le sous-espace engendré par les fonctions constantes, les fonctions qui s'écrivent  $f \otimes g$  pour  $f, g$  continues sur  $\overline{\mathbb{T}}$ , l'une d'elle étant à support compact sur  $\mathbb{T}$ , et les fonctions de la forme  $\chi_u \otimes \chi_v$ . D'après la Proposition 2.2.2, c'est une sous-algèbre de  $C(\overline{\mathbb{T}} \times \overline{\mathbb{T}})$  qui contient les constantes et sépare les points. Et donc, par le théorème de Stone-Weierstraß,  $E'$  est dense dans  $C(\overline{\mathbb{T}} \times \overline{\mathbb{T}})$ . Maintenant, d'après Proposition 2.2.3, on a que  $E' \subseteq E$ , donc  $E$  est dense, lui aussi.  $\square$

## 2.2.2 Démonstration du théorème ergodique

La démonstration du Théorème 2.1.2 se déroule en deux étapes :

**Step 1 :** Démontrer que la suite des  $M_n$  est bornée dans  $\mathcal{L}(C(\overline{\mathbb{T}}), \mathcal{B}(L^2(\partial\mathbb{T})))$ .

**Step 2 :** Démontrer que la convergence annoncée a lieu sur un sous-ensemble dense.

Dans la suite, on note  $\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}}$  la fonction constante égale à 1 sur  $\overline{\mathbb{T}}$ . Posons

$$F_n := [M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})] \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}.$$

Notons  $\Xi(n)$  la valeur commune de  $\Xi$  sur les éléments de longueur  $h$ .

**Proposition 2.2.5.** *La fonction  $\xi \mapsto \sum_{\gamma \in S_n} (P(\gamma, \xi))^{\frac{1}{2}}$  est constante, égale à  $|S_n| \times \Xi(n)$ .*

*Démonstration.* Cette fonction est constante sur les orbites de l'action du groupe des automorphismes de  $\mathbb{T}$  qui fixent  $x_0$ . Comme cette action est transitive sur  $\partial\mathbb{T}$ , cette fonction est constante. Démontrons que cette constante est bien  $|S_n| \Xi(n)$  :

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma \in S_n} (P(\gamma, \xi))^{\frac{1}{2}} &= \int_{\partial\mathbb{T}} \sum_{\gamma \in S_n} (P(\gamma, \xi))^{\frac{1}{2}} d\mu_{x_0}(\xi) \\
&= \sum_{\gamma \in S_n} \int_{\partial\mathbb{T}} (P(\gamma, \xi))^{\frac{1}{2}} d\mu_{x_0}(\xi) \\
&= \sum_{\gamma \in S_n} \Xi(n) \\
&= |S_n| \Xi(n).
\end{aligned}$$

$\square$

**Lemme 2.2.6.** *La fonction  $F_n$  est constante, égale à  $\mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}$ .*

*Démonstration.* Comme  $\Xi$  ne dépend que de la longueur, on a que

$$\begin{aligned} F_n(\xi) &:= \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \frac{(P(\gamma, \xi))^{\frac{1}{2}}}{\Xi(\gamma)} \\ &= \frac{1}{|S_n| \Xi(n)} \sum_{\gamma \in S_n} (P(\gamma, \xi))^{\frac{1}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Il est facile de voir que  $M_n(f)$  induit des opérateurs bornés sur  $L^1$  et sur  $L^\infty$ , que nous notons aussi  $M_n(f)$ .

**Proposition 2.2.7.** *L'opérateur  $M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})$ , en tant qu'opérateur sur  $\mathcal{L}(L^\infty, L^\infty)$ , est de norme 1 ; en tant qu'opérateur sur  $(L^2(\partial\mathbb{T}), L^2(\partial\mathbb{T}))$ , il est auto-adjoint.*

*Démonstration.* Soit  $h \in L^\infty(\partial\mathbb{T})$ . Comme  $M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})$  est positif, on a que

$$\begin{aligned} \|[M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})] h\|_\infty &\leq \|[M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})] \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}\|_\infty \|h\|_\infty \\ &= \|F_n\|_\infty \|h\|_\infty \\ &= \|h\|_\infty, \end{aligned}$$

et donc  $\|M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})\|_{\mathcal{L}(L^\infty, L^\infty)} \leq 1$ .

Le caractère autoadjoint de  $M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})$  provient du fait que  $\pi(\gamma)^* = \pi(\gamma^{-1})$  et que l'ensemble de sommation est symétrique. □

En utilisant le corollaire du théorème de Riesz-Thorin A.2.1, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 2.2.8.** *L'opérateur  $M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})$  est de norme 1, en tant qu'opérateur borné sur  $L^2(\partial\mathbb{T})$ .*

**Proposition 2.2.9.** *La suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\mathcal{L}(C(\overline{\mathbb{T}}), \mathcal{B}(L^2(\partial\mathbb{T})))$ .*

*Démonstration.* Si  $f$  est à valeurs réelles, on a, pour toute fonction positive  $g \in L^2(\partial\mathbb{T})$ , l'inégalité suivante, valable presque partout :

$$- \|f\|_\infty [M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})]g \leq [M_n(f)]g \leq \|f\|_\infty [M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})]g,$$

de laquelle on déduit, pour tout  $g \in L^2(\partial\mathbb{T})$ ,

$$\begin{aligned} \|[M_n(f)]g\|_{L^2} &\leq \|f\|_\infty \|[M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})]g\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_\infty \|M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})\|_{\mathcal{B}(L^2)} \|g\|_{L^2}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\|M_n(f)\|_{\mathcal{B}(L^2)} \leq \|M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})\|_{\mathcal{B}(L^2)} \|f\|_\infty.$$

Ceci prouve que

$$\|M_n\|_{\mathcal{L}(C(\overline{\mathbb{T}}), \mathcal{B}(L^2))} \leq \|M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}})\|_{\mathcal{B}(L^2)}.$$

Enfin, il découle du Corollaire 2.2.8 que la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée par 1 dans  $\mathcal{L}(C(\overline{\mathbb{T}}), \mathcal{B}(L^2))$ . □

Nous allons faire usage des formules pour la fonction de Harish-Chandra démontrées dans le premier chapitre (et qui apparaissent aussi dans [FTP82, Theorem 2, Item (iii)]). Nous ajoutons les détails qui nous manquent, et calculons notamment

$$\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_u} \rangle = \int_{\partial C_u} c(\gamma^{-1}, \xi)^{\frac{1}{2}} d\mu_{x_0}(\xi).$$

**Lemme 2.2.10.** *Soit  $\gamma = s_1 \cdots s_n \in \mathbb{F}_r$ . Soit  $l \in \{1, \dots, |\gamma|\}$ , et soit un mot réduit  $u = s_1 \cdots s_{l-1} t_l t_{l+1} \cdots t_{l+k}^1$ , avec  $t_l \neq s_l$  et  $k \geq 0$ . On a alors*

$$\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_u} \rangle = \frac{1}{2r(2r-1)^{\frac{|\gamma|}{2}+k}},$$

et

$$\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_\gamma} \rangle = \frac{2r-1}{2r(2r-1)^{\frac{|\gamma|}{2}}}.$$

*Démonstration.* La fonction  $\xi \mapsto B_\xi(x_0, \gamma x_0)$  est constante sur  $\partial C_u$  et vaut  $2(l-1) - |\gamma|$  dessus.

Donc,  $\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_u} \rangle$  est l'intégrale d'une fonction constante :

$$\begin{aligned} \int_{\partial C_u} P(\gamma, \xi)^{\frac{1}{2}} d\mu_{x_0}(\xi) &= \mu_{x_0}(\partial C_u) (2r-1)^{((l-1)-\frac{|\gamma|}{2})} \\ &= \frac{1}{2r(2r-1)^{\frac{|\gamma|}{2}+k}} \cdot \end{aligned}$$

La valeur de  $\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_\gamma} \rangle$  se calcule de la même façon. □

On rappelle le calcul de la fonction de Harish-Chandra.

**Lemme 2.2.11** (Calcul de la fonction de Harish-Chandra). *Soit  $\gamma = s_1 \cdots s_n$  un élément de  $S_n$  écrit comme un mot réduit. On a*

$$\Xi(\gamma) = \left(1 + \frac{r-1}{r} |\gamma|\right) (2r-1)^{-\frac{|\gamma|}{2}}.$$

La démonstration du lemme suivante est alors immédiate.

**Lemme 2.2.12.** *Si  $\gamma, w \in \mathbb{F}_r$  sont tels que  $w$  n'est pas un préfixe de  $\gamma$ , alors il existe une constante  $c_w$ , qui ne dépend pas de  $\gamma$  telle que*

$$\frac{\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle}{\Xi(\gamma)} \leq \frac{c_w}{|\gamma|}.$$

Le but de cette section est de calculer la limite de coefficients matriciels suivants :

$$\langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle.$$

**Lemme 2.2.13.** *Soient  $u, w \in \mathbb{F}_r$  sont tels qu'aucun deux n'est un préfixe de l'autre (i.e.  $\partial C_u \cap \partial C_w = \emptyset$ ). Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle = 0.$$

---

1. Pour  $l = 1$ ,  $s_1 \cdots s_{l-1}$  signifie  $e$ , par convention.

*Démonstration.* En utilisant le Lemme 2.2.12, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle &= \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \chi_u(\gamma x_0) \frac{\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle}{\Xi(\gamma)} \\
&= \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in C_u \cap S_n} \frac{\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle}{\Xi(\gamma)} \\
(\text{Lemma 2.2.12}) &\leq \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in C_u \cap S_n} \frac{c_w}{|\gamma|} \\
&= O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

□

**Lemme 2.2.14.** Soient  $u, v \in \mathbb{F}_r$ . Alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}} \rangle \leq \mu_{x_0}(\partial C_u) \mu_{x_0}(\partial C_v).$$

*Démonstration.* Il s'agit du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}} \rangle &= \langle M_n(\chi_u)^* \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_v} \rangle \\
&= \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \chi_u(\gamma^{-1} x_0) \frac{\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_v} \rangle}{\Xi(\gamma)} \\
&\leq \frac{1}{|S_n|} \sum_{\substack{\gamma \in S_n \\ \gamma \in C_v}} \chi_u(\gamma^{-1} x_0) \frac{\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_v} \rangle}{\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}} \rangle} + \frac{1}{|S_n|} \sum_{\substack{\gamma \in S_n \\ \gamma \notin C_v}} \chi_u(\gamma^{-1} x_0) \frac{\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_v} \rangle}{\Xi(\gamma)} \\
&\leq \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \chi_u(\gamma^{-1} x_0) \chi_v(\gamma x_0) + \frac{1}{|S_n|} \sum_{\substack{\gamma \in S_n \\ \gamma \notin C_v}} \chi_u(\gamma^{-1} x_0) \frac{\langle \pi(\gamma) \mathbf{1}_{\partial\mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial C_v} \rangle}{\Xi(\gamma)} \\
(\text{Lemma 2.2.12}) &\leq \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \chi_u(\gamma^{-1} x_0) \chi_v(\gamma x_0) + \frac{1}{|S_n|} \sum_{\substack{\gamma \in S_n \\ \gamma \notin C_v}} \chi_u(\gamma^{-1} x_0) \frac{c_w}{|\gamma|} \\
&= \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \chi_u(\gamma^{-1} x_0) \chi_v(\gamma x_0) + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la lim sup et en utilisant le Théorème 2.1.1, on obtient l'inégalité désirée. □

**Proposition 2.2.15.** Pour tous  $u, v, w \in \mathbb{F}_r$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle = \mu_{x_0}(\partial C_u \cap \partial C_w) \mu_{x_0}(\partial C_v).$$

*Démonstration.* Démontrons d'abord l'inégalité

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle \leq \mu_{x_0}(\partial C_u \cap \partial C_w) \mu_{x_0}(\partial C_v).$$

Si ni  $u$ , ni  $w$  n'est un préfixe de l'autre, il n'y a rien à faire, d'après le Lemme 2.2.13. Supposons que  $u$  est un préfixe de  $w$  (l'autre cas se traite de manière analogue). D'après le Lemme 2.2.1,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle \leq \sum_{\gamma \in Pr_u(|w|)} \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_\gamma) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle,$$

et d'après le Lemme 2.2.13, pour tout  $\gamma \in Pr_u(|w|) \setminus \{w\}$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_\gamma) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle = 0.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \mu_{x_0}(\partial C_w) \mu_{x_0}(\partial C_v) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_w) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial \mathbb{T}} \rangle \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_w) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_w) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle \\ &\quad + \sum_{\gamma \in Pr_u(|w|) \setminus \{w\}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_\gamma) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle. \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la limite. Définissons

$$S_{u,v,w} := \{(u', v', w') \in \mathbb{F}_r \mid |u| = |u'|, |v| = |v'|, |w| = |w'|\}$$

de manière à ce que

$$\langle M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}}) \mathbf{1}_{\partial \mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial \mathbb{T}} \rangle = \sum_{(u', v', w') \in S_{u,v,w}} \langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle.$$

Pour simplifier les calculs, notons

$$\begin{aligned} A &:= \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle \\ B &:= \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_u) \mathbf{1}_{\partial C_v}, \mathbf{1}_{\partial C_w} \rangle \\ C &:= \mu_{x_0}(\partial C_u \cap \partial C_w) \mu_{x_0}(\partial C_v) \\ D &:= \sum_{(u', v', w') \in S_{u,v,w} \setminus \{u,v,w\}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle M_n(\chi_{u'}) \mathbf{1}_{\partial C_{v'}}, \mathbf{1}_{\partial C_{w'}} \rangle \\ E &:= \sum_{(u', v', w') \in S_{u,v,w} \setminus \{u,v,w\}} \mu_{x_0}(\partial C_{u'} \cap \partial C_{w'}) \mu_{x_0}(\partial C_{v'}). \end{aligned}$$

Il est évident que  $A \leq B$ ;  $B \leq C$  et  $D \leq E$  découle de l'inégalité que nous venons de démontrer. On a également  $C + E = 1$  (c'est la somme des mesures de membres d'une partition), et, finalement, on a que

$$1 = \liminf \langle M_n(\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{T}}}) \mathbf{1}_{\partial \mathbb{T}}, \mathbf{1}_{\partial \mathbb{T}} \rangle \leq A + D,$$

parce que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

pour toutes suites réelles bornées  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$ .

En conclusion, on a que  $1 \leq A + D \leq C + E \leq 1$ ,  $A \leq B \leq C$  et  $D \leq E$ , d'où on déduit que  $A = B = C$ .  $\square$

*Démonstration du Théorème 2.1.2.* Comme la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée (cela fait l'objet de la Proposition 2.2.9, il suffit de démontrer la convergence sur les  $(f, h_1, h_2)$  dans un sous-ensemble dense de  $C(\overline{\mathbb{T}}) \times L^2 \times L^2$ , et c'est précisément ce que la Proposition 2.2.15 affirme.  $\square$

# Chapitre 3

## Estimations de discrédances

**Résumé.** Dans ce chapitre, qui reprend le contenu des articles [PLP18] (en collaboration avec Christophe Pittet) et [PL19b], nous étudions en détail la discrédance, (voir Définition 3.0.1).

Dans un premier temps, nous nous intéressons au cas où  $G$  est discret, établissons une minoration générale, puis étudions différentes situations où la discrédance est minimale. En outre, nous procédons à une comparaison de cette situation avec la méthode de Monte-Carlo (ce passage fait référence à l'article [PL19b]).

Nous nous intéressons ensuite au cas où  $G$  est localement compact.

**Définition 3.0.1** (Discrédance). Soit  $(X, \mathcal{T}, \nu)$  un espace de probabilité, et considérons une action mesurable  $G \curvearrowright X$  qui préserve  $\nu$ . Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $G$ . On appelle **discrédance** de  $\mu$  le nombre

$$\sup_{\substack{f \in L^2(X, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \left\| x \mapsto \int_G f(g^{-1}x) d\mu - \int_X f d\nu \right\|_2.$$

**Remarques 3.0.2.** — Dans le langage des statistiques, on dirait plutôt que la discrédance de  $\mu$  est l'écart-type de l'estimateur qui consiste à faire la moyenne sur  $g$ , pondérée par  $\mu$ , des valeurs de  $f$  sur les  $g^{-1}x$ , où  $x$  est un point aléatoire de  $X$  de loi  $\nu$ .

— Si  $\pi : G \rightarrow U(L^2(X, \nu))$  est la représentation de Koopman associée à cette action, et si  $\pi_0$  est la sous-représentation sur le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle, alors la discrédance de  $\mu$  est égale à la norme de l'opérateur  $\pi_0(\mu)$ , c'est-à-dire :

$$\sup_{\substack{f \in L^2(X, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \left\| x \mapsto \int_G f(g^{-1}x) d\mu - \int_X f d\nu \right\|_2 = \|\pi_0(\mu)\|_{L^2_0(X, \nu)}.$$

### 3.1 Cas discret

Dans toute cette section,  $G$  est un groupe discret,  $(X, \nu)$  est un espace de probabilité sans atome et on considère une action  $G \curvearrowright X$  mesurable qui préserve la mesure. On note  $\pi : G \rightarrow U(L^2(X, \nu))$  la représentation de Koopman associée, et on note  $\pi_0$  la sous-représentation sur le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle.

### 3.1.1 Une minoration générale

Dans cette section, nous allons démontrer le théorème suivant.

**Théorème 3.1.1** (Minoration générale de la discrédance). *Soit  $\mu$  une mesure finie, à support fini sur  $G$ . Notons  $G_\mu$  l'adhérence du sous-groupe de  $G$  engendré par le support de  $\mu$ . Alors on a*

$$\|\lambda_{G_\mu}(\mu)\| \leq \|\pi_0(\mu)\|.$$

**Remarque 3.1.2.** *Le théorème peut tomber en défaut si  $\nu$  a des atomes. En effet, soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} =: X$ , et soit  $\mu = \nu$  la mesure de probabilité uniforme (sur  $G$  et sur  $X$ ). Alors la discrédance de  $\mu$  est 0, tandis que  $\|\lambda_G(\mu)\| = 1$ , puisque  $G$  est moyennable.*

Nous donnons une démonstration courte et élémentaire de ce théorème.

*Démonstration.* Si  $\mu = 0$ , l'inégalité est triviale. Si  $\mu \neq 0$ , on multiplie  $\mu$  par  $\|\mu\|_1^{-1}$ , et on peut supposer que  $\mu$  est une mesure de probabilité. Comme on a, pour tout opérateur borné  $T$  sur un espace de Hilbert, l'égalité  $\|T\|^2 = \|TT^*\|$ , on peut supposer que  $\mu$  est symétrique, c'est-à-dire qu'on a  $\mu = \mu^*$ .

Soit  $e \in G$  l'élément neutre. Nous affirmons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|\pi_0(\mu^n)\| \geq \mu^{(n)}(e)$ , où  $\mu^{(n)}$  est la convolée de  $n$  copies de  $\mu$ .

Pour démontrer cette affirmation, notons  $F$  le support de  $\mu^{(n)}$ . Choisissons un sous-ensemble mesurable  $B_+$  de  $X$  tel que

$$0 < \nu(B_+) < \frac{1}{2|F|}.$$

Un tel sous-ensemble existe nécessairement car  $\nu$  est finie et sans atome. Comme l'action préserve la mesure, on a que

$$\nu(FB_+) \leq |F|\nu(B_+) < 1/2.$$

Grâce au théorème de Sierpiński (Théorème A.2.4), il existe un sous-ensemble mesurable  $B_-$  de  $X \setminus FB_+$  qui satisfait  $\nu(B_+) = \nu(B_-)$ . Soit

$$\varphi = \frac{1_{B_+} - 1_{B_-}}{\|1_{B_+} - 1_{B_-}\|_2} \in L_0^2(X, \nu).$$

Il ne reste plus qu'à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la symétrie de  $F$  :

$$\begin{aligned} \|\pi_0(\mu^n)\| &\geq \langle \pi_0(\mu^n)\varphi, \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{\nu(B_+) + \nu(B_-)} \sum_{g \in G} [\nu(gB_+ \cap B_+) + \nu(gB_- \cap B_-)] \mu^{(n)}(g) \\ &\geq \frac{1}{\nu(B_+) + \nu(B_-)} \sum_{g \in G} [\nu(gB_+ \cap B_+) + \nu(gB_- \cap B_-)] \delta_{e,g} \mu^{(n)}(g) \\ &= m^{(n)}(e). \end{aligned}$$

Ainsi s'achève la démonstration de l'affirmation.

Maintenant, d'après l'affirmation, on obtient

$$\begin{aligned} \|\pi_0(\mu)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\pi_0(\mu)^n\|^{1/n} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu^{(n)}(e)^{1/n} \\ &= \|\lambda_{G_\mu}(\mu)\|. \end{aligned}$$

La dernière égalité remonte à l'article de Kesten [Kesb, Lemma 2.2].  $\square$

On peut aussi démontrer ce théorème en combinant [DG, Proposition 7] et [Sha00, Lemma 2.3].

*Démonstration.* D'après [Sha, Theorem 4.14] ou [DG, Proposition 7], il existe un sous-groupe  $H$  de  $G$  tel que la représentation quasi-régulière  $\lambda_{G/H}$  sur  $l^2(G/H)$  est faiblement contenue dans la sous-représentation de Koopman  $\pi_0$  sur le sous-espace  $L_0^2(X, \nu)$  des fonctions d'intégrale nulle. La représentation quasi-régulière  $\lambda_{G/H}$  contient des *vecteurs positifs*, et on peut donc appliquer [Sha00, Lemma 2.3], et la définition de la faible contenance [BdLHV08, Definition F.1.1].  $\square$

La proposition suivante explicite le calcul de la norme de la représentation régulière.

**Proposition 3.1.3.** *Soit  $r \in \mathbb{N}$ . Soit  $\Gamma$  le groupe libre de rang  $r$ . Soit  $a_1, \dots, a_r$  une base de  $\Gamma$ . Notons  $S := \{a_1^{\pm 1}, \dots, a_r^{\pm 1}\}$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ , soit  $S_n$  (resp.  $B_n$ ), la sphère (resp. la boule) centrée en  $e$  et de rayon  $n$  par rapport à la longueur des mots associée à  $S$ . Soit  $\mu_{S_n} := \frac{1}{|S_n|} \mathbf{1}_{S_n}$ , et définissons  $\mu_{B_n}$  de la même façon. Posons  $q = 2r - 1$ . On a alors*

$$\|\lambda_\Gamma(\mu_{S_n})\| = \left(1 + \frac{q-1}{q+1}n\right) q^{-n/2},$$

$$\|\lambda_\Gamma(\mu_{B_n})\| = c(q, n) \left(1 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right)n\right) q^{-n/2},$$

$$\text{où } c(q, n) = \left(1 + 2q^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} q^k\right)^{-1}.$$

*Démonstration.* Soit  $\pi$  la représentation de Koopman associée à l'action de  $\Gamma$  sur le bord  $\partial\mathbb{T}$  de son arbre de Cayley, considérée dans le Chapitre 2. Soit  $m \in \mathbb{C}[\Gamma]$  un élément positif. Alors on a

$$\|\lambda_\Gamma(m)\| = \|\pi(m)\|.$$

L'inégalité  $\|\lambda_\Gamma(m)\| \leq \|\pi(m)\|$  découle de [Sha00, Lemma 2.3] car  $1_{\partial\mathbb{T}}$  est un vecteur positif  $\lambda_\nu$ . L'inégalité  $\|\lambda_\Gamma(m)\| \geq \|\pi(m)\|$  est vraie pour tout élément  $m \in \mathbb{C}[\Gamma]$ , car l'action de  $\Gamma$  sur  $\partial\mathbb{T}$  est moyennable (voir [Kuh] et [dLH, Theorem 7]). Pour démontrer la proposition, il suffit alors d'appliquer cette égalité à

$$m := \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \mathbf{1}_\gamma.$$

En effet, on a alors, utilisant le Corollaire 2.2.8 :

$$\begin{aligned} \|\lambda_\Gamma(m)\| &= \left\| \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \lambda_\Gamma(\gamma) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \pi(\gamma) \right\| \\ &= \Xi(n) \left\| \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(n)} \right\| \\ &= \Xi(n). \end{aligned}$$



Le cas de la boule  $B_n$  demande un peu plus de calculs. Si  $q = 1$ , la formule est évidente. Sinon, si  $q > 1$ , on a

$$\begin{aligned} \|\lambda_\Gamma(\mu_{B_n})\| &= \frac{1}{|B_n|} \sum_{k=0}^n \Xi(k) |S_k| \\ &= \frac{1}{|B_n|} \left(1 + \frac{q + q^{1/2}}{q} n\right) q^{n/2} \\ &= \left(\frac{q+1}{q-1} q^n - \frac{2}{q-1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{q + q^{1/2}}{q} n\right) q^{n/2} \\ &= c(q, n) \left(1 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) n\right) q^{-n/2}, \end{aligned}$$

où  $c(q, n) = \left(1 + 2q^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} q^k\right)^{-1}$ . □

On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 3.1.4.** *Supposons que  $\Gamma$  est un groupe libre de rang  $r \geq 1$ , agissant en préservant la mesure d'un espace de probabilité sans atome  $(X, \nu)$ . Soit  $\{a_1, \dots, a_r\}$  un ensemble qui engendre librement  $\Gamma$ . Soit  $S := \{a_i^{\pm 1} \mid 1 \leq i \leq r\}$ , et posons  $q := 2r - 1$ .*

*Soient  $S_n$  et  $B_n$  les sphères et boules de rayon  $n$  et de centre  $e$  dans  $\Gamma$  pour la longueur des mots définie par  $S$ . Alors*

$$\begin{aligned} \sup_{\|f\|_2=1} \left\| \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} f(\gamma x) - \int_X f(y) d\nu(y) \right\|_2 &\geq \left(1 + \frac{q-1}{q+1} n\right) q^{-n/2}, \\ \sup_{\|f\|_2=1} \left\| \frac{1}{|B_n|} \sum_{\gamma \in B_n} f(\gamma x) - \int_X f(y) d\nu(y) \right\|_2 &\geq c(q, n) \left(1 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) n\right) q^{-n/2}, \end{aligned}$$

où  $c(q, n) = \left(1 + 2q^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} q^k\right)^{-1}$ .

**Remarque 3.1.5.** *On remarque que si  $q = 1$ , la borne est 1 et les inégalités sont des égalités. Si  $q > 1$ , alors  $c(q, n) = \frac{q-1}{q+1 - \frac{2}{q^n}}$ .*

**Corollaire 3.1.6** (Discrépance pour les actions de groupes moyennables). *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité à support fini sur  $G$ . Supposons que  $G$  est moyennable. Alors on a*

$$\|\pi_0(\mu)\| = 1.$$

*Démonstration.* Sans aucune hypothèse sur  $G$ , on a toujours

$$\|\pi_0(\mu)\| \leq \mu(G) = 1.$$

D'après le Théorème 3.1.1,

$$\|\pi_0(\mu)\| \geq \|\lambda_{G_\mu}(\mu)\|.$$

Comme  $G$  est moyennable,  $G_\mu$  l'est aussi. D'après [Kesa], si  $G$  est moyennable, on a

$$\|\lambda_G(\mu)\| = 1. \quad \square$$

**Remarque 3.1.7.** *Nous remercions Jean-François Quint qui nous a fait remarquer que ce corollaire peut aussi se démontrer à l'aide d'une version du lemme de Rokhlin pour les groupes discrets moyennables.*

### 3.1.2 Taux de convergence de théorèmes ergodiques sur la sphère

#### 3.1.2.1 Le travail de Lubotzky-Phillips-Sarnak sur les quaternions de Lipschitz

Dans [LPS86] et [LPS], Lubotzky, Phillips et Sarnak utilisent la théorie des formes automorphes et la théorie des représentations unitaires pour calculer la discrédance des points dans l'orbite des quaternions de Lipschitz sur la sphère de dimension 2. Plus précisément, pour tout quaternion  $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ , on définit sa norme par  $N(q) := x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ . Soit  $p$  un nombre premier congru à 1 modulo 4. Soit  $\Sigma_{p+1} \subset \text{SO}_3(\mathbb{R})$  l'image par la représentation adjointe de l'ensemble

$$\{q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \mid \forall i, x_i \in \mathbb{Z}, N(q) = p, x_0 > 0, x_0 \equiv 0 [2]\}$$

dont les éléments sont appelés **quaternions de Lipschitz**. Notons  $\nu$  la mesure uniforme sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

Ils démontrent le théorème suivant.

**Théorème 3.1.8.** (*Lubotzky-Phillips-Sarnak [LPS86, Theorem 1.3, Theorem 1.5].*)  
*Le sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  engendré par  $\Sigma_{p+1}$  (qui est symétrique) est libre de rang  $\frac{p+1}{2}$  et*

$$\sup_{\|f\|_2=1} \left\| x \mapsto \left( \frac{1}{|\Sigma_{p+1}|} \sum_{\gamma \in \Sigma_{p+1}} f(\gamma x) - \int_{\mathbb{S}^2} f(y) d\nu(y) \right) \right\|_2 = \frac{2\sqrt{p}}{p+1}.$$

De plus, soit  $E_n$  la boule ou la sphère de centre  $e$  dans  $\Gamma$  par rapport à la longueur des mots définie par  $\Sigma_{p+1}$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout entier  $n$ ,

$$\sup_{\|f\|_2=1} \left\| x \mapsto \left( \frac{1}{|E_n|} \sum_{\gamma \in E_n} f(\gamma x) - \int_{\mathbb{S}^2} f(y) d\nu(y) \right) \right\|_2 \leq Cnp^{-n/2}.$$

Dans la suite, on allège les notations et on omet le  $x \mapsto$ .

Le théorème suivant précise le précédent. Il généralise [LPS86, Theorem 1.3] et renforce [LPS86, Theorem 1.5].

**Théorème 3.1.9.** *Soit  $\Gamma$  le sous-groupe libre de rang  $\frac{p+1}{2}$  de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  engendré par la partie symétrique  $\Sigma_{p+1}$ . Soient, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  et  $B_n$ , les sphères et boules dans  $\Gamma$  de centre  $e$  de rayon  $n$  par rapport à la longueur des mots définie par  $\Sigma_{p+1}$ . Alors*

$$\sup_{\|f\|_2=1} \left\| \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} f(\gamma x) - \int_{\mathbb{S}^2} f(y) d\nu(y) \right\|_2 = \left( 1 + \frac{p-1}{p+1} n \right) p^{-n/2},$$

$$\sup_{\|f\|_2=1} \left\| \frac{1}{|B_n|} \sum_{\gamma \in B_n} f(\gamma x) - \int_{\mathbb{S}^2} f(y) d\nu(y) \right\|_2 = c(p, n) \left( 1 + \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{p}} \right) n \right) p^{-n/2},$$

$$\text{où } c(p, n) = \frac{p-1}{p+1-\frac{2}{p^n}}.$$

La majoration repose sur trois ingrédients. Le premier ingrédient, dont la formulation précise est la Formule 3.1, est l'inclusion du spectre de l'opérateur de Hecke dans le spectre de l'opérateur correspondant pour la représentation régulière. Pour autant que nous le sachions, la seule démonstration connue de ce fait se trouve dans [LPS86, S153-S158] et [LPS, Theorem 4.1], et utilise la théorie des formes auto-morphes et les travaux de Deligne sur les conjectures de Weil. Le deuxième ingrédient est une application du théorème spectral, et le dernier est l'égalité entre la norme de l'opérateur de la représentation régulière et la fonction de Harish-Chandra sur le groupe libre, énoncée en 3.1.3.

### 3.1.2.2 Détermination précise du taux de convergence

Dans ce paragraphe, nous démontrons le Théorème 3.1.9. Nous commençons par rappeler la construction, dans [LPS], de certains groupes libres d'isométries de la sphère. Soit  $\mathbb{H} = \{q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$  le corps des quaternions. On note

$$\tau(q) = \overline{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$$

le conjugué d'un quaternion  $q$ . Notons  $N(q) := q\bar{q}$  la **norme** de  $q$  et soit  $|q| := \sqrt{N(q)}$  son module. Le groupe multiplicatif  $\mathbb{H}^*$  agit sur  $\mathbb{H}$  par conjugaison, et si  $q \in \mathbb{H}^*$  et  $v \in \mathbb{H}$ , alors  $|qvq^{-1}| = |v|$ . Comme cette action préserve le sous-espace  $\text{Im } \mathbb{H} = \{x_1i + x_2j + x_3k : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ , il définit une action

$$\text{Ad} : \mathbb{H}^* \rightarrow \text{SO}(3, \mathbb{R}), \quad q \mapsto (v \mapsto qvq^{-1})$$

par isométries préservant l'orientation de la sphère  $\mathbb{S}^2$ . L'anneau

$$\mathbb{H}(\mathbb{Z}) = \{q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$$

des quaternions de Lipschitz a 8 unités :

$$\mathbb{H}(\mathbb{Z})^\times = \{\pm 1, \pm i, \pm j \pm k\}.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après Jacobi (voir, par exemple, [BvdGHZ, p. 27] ou [DSV, Theorem 2.4.1] pour des entiers impairs), le cardinal de l'ensemble des quaternions de Lipschitz de norme  $n$  est

$$|N^{-1}(n) \cap \mathbb{H}(\mathbb{Z})| = 8 \sum_{4d|n} d.$$

Et donc, si  $n = p$  est premier, l'ensemble  $N^{-1}(p) \cap \mathbb{H}(\mathbb{Z})$  se décompose comme la réunion disjointes de  $p + 1$  orbites pour l'action de  $\mathbb{H}(\mathbb{Z})^\times$ . Dans le cas  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , il est facile de voir que chaque orbite contient un unique quaternion  $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$  avec  $x_0 > 0$ ,  $x_0 \equiv 1 \pmod{2}$  et tel que l'ensemble

$$\{q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}, N(q) = p, x_0 > 0, x_0 \equiv 1 \pmod{2}\}$$

se décompose comme la réunion disjointe de  $\frac{p+1}{2}$  orbites de l'involution  $\tau$ , chacune contenant deux éléments. Soit  $\Sigma_{p+1} \subset \text{SO}(3, \mathbb{R})$  l'image de cet ensemble par l'application  $\text{Ad}$ .

Nous pouvons démontrer le Théorème 3.1.9.

*Démonstration.* Il découle de [LPS86, S153-S158] et [LPS, Theorem 4.1], que le spectre de  $\pi_0$  vérifie

$$\sigma(\pi_0(\mathbf{1}_{\Sigma_{p+1}})) \subset [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]. \quad (3.1)$$

(en fait, il est démontré dans [LPS86, S153-S158] que  $\sigma(\pi_0(\mathbf{1}_{\Sigma_{p+1}})) = [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$ . Nous utilisons *seulement* l'inclusion  $\sigma(\pi_0(\mathbf{1}_{\Sigma_{p+1}})) \subset [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$  mais c'est de loin la plus difficile à démontrer ; l'ingrédient principal de la démonstration est l'inégalité [LPS, Theorem 4.1] qui découle notamment de [Del].) En appliquant l'Inclusion 3.1 et le Théorème 3.1.1, et obtenons les inégalités suivantes

$$2\sqrt{p} \geq \|\pi_0(\mathbf{1}_{\Sigma_{p+1}})\| \geq \|\rho_\Gamma(\mathbf{1}_{\Sigma_{p+1}})\|.$$

Il découle ensuite de la caractérisation spectrale des groupes libres par Kesten (voir [LPS86, S157] et [Kesb]) que  $\Gamma$  est libre de rang  $r = \frac{p+1}{2}$  (et librement engendré par tout sous-ensemble  $A$  de  $\Sigma_{p+1}$  contenant  $\frac{p+1}{2}$  et vérifiant  $A \cap A^{-1} = \emptyset$ ). Sur  $\Gamma$  considérons la longueur des mots par rapport à  $\Sigma_{p+1}$ , et, pour tout  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , considérons l'élément de Hecke

$$T_n = \sum_{|\gamma|=n} \gamma \in \mathbb{C}[\Gamma].$$

On a que  $T_0 = e$ ,

$$T_1 = \sum_{\gamma \in \Sigma_{p+1}} \gamma = \mathbf{1}_{\Sigma_{p+1}},$$

et

$$T_1 T_1 = T_2 + 2r T_0.$$

Si  $n \geq 2$ , on a

$$T_n T_1 = T_{n+1} + p T_{n-1}.$$

Il existe un unique morphisme d'anneaux unitaires de  $\mathbb{Z}[X]$  vers  $\mathbb{C}[\Gamma]$ , envoyant  $X$  sur  $T_1$ . Les relations de récurrence ci-dessus démontrent que  $T_n$  est dans l'image de ce morphisme, pour tout  $n \geq 0$ . En d'autres termes, pour tout  $n \geq 0$ , il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $T_n = P_n(T_1)$ .

Nous démontrons d'abord le théorème dans le cas de la sphère  $S_n \subset \Gamma$ . La borne inférieure découle du Corollaire 3.1.4. Pour la borne supérieure, il suffit d'appliquer le théorème spectral pour les opérateurs bornés autoadjoints, l'Inclusion 3.1, et le calcul par Kesten [Kesb] du spectre de la représentation régulière

$$\sigma(\lambda_\Gamma(T_1)) = [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}],$$

et nous en déduisons

$$\begin{aligned} \|\pi_0(T_n)\| &= \|\pi_0(P_n(T_1))\| \\ &= \|P_n(\pi_0(T_1))\| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(\pi_0(T_1))} |P_n(\lambda)| \\ &\leq \sup_{\lambda \in [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]} |P_n(\lambda)| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(\lambda_\Gamma(T_1))} |P_n(\lambda)| \\ &= \|\lambda_\Gamma(T_n)\|. \end{aligned}$$

Il suffit d'appliquer la Proposition 3.1.3, pour conclure que

$$\sup_{\|f\|_2=1} \left\| \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} f(\gamma x) - \int_{\mathbb{S}^2} f(y) d\nu(y) \right\|_2 \leq \left( 1 + \frac{p-1}{p+1} n \right) p^{-n/2}.$$

La démonstration, dans le cas des boules  $B_n$ , est analogue.  $\square$

### 3.1.3 Taux de convergence pour des actions par automorphismes sur des groupes abéliens

#### 3.1.3.1 Taux de convergence sur le tore de dimension 2

Il découle de [LPS86, Theorem 1.4] qu'un sous-groupe libre de rang fini générique de  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  ne réalise pas la borne inférieure du Corollaire 3.1.4. Il se passe tout le contraire dans le cas du tore de dimension 2. En effet, si  $\mathbb{T}^2$  désigne le tore de dimension 2,  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , tout sous-groupe libre  $\Gamma$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  tel que la restriction de l'action naturelle de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{T}^2$  à  $\Gamma$  est ergodique réalise la borne inférieure. C'est l'objet du théorème suivant, qui découle facilement de [Sha, Theorem 4.17] ou de [dLH, 20], ou d'idées que l'on peut trouver dans [Fin], ou dans [GG].

**Théorème 3.1.10.** *Soit  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  le tore de dimension 2 et soit  $\nu$  la mesure de Haar sur  $\mathbb{T}^2$  (normalisée pour être une mesure de probabilité) et soit  $GL(2, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^2) = G$  le groupe des automorphismes de  $\mathbb{T}^2$ . Supposons que  $\Gamma < G$  soit un groupe libre de rang  $r \geq 1$  librement engendré par  $\{a_1, \dots, a_r\} \subset G$ . Soit  $S = \{a_1^{\pm 1}, \dots, a_r^{\pm 1}\}$  et soit  $q = 2r - 1$ . Soient  $S_n$  et  $B_n$  les sphères et boules de rayon  $n$  et de centre  $e$  dans  $\Gamma$  pour la longueur des mots définie par  $S$ . Alors*

$$\sup_{\|f\|_2=1} \left\| \frac{1}{|S_n|} \sum_{\gamma \in S_n} f(\gamma x) - \int_{\mathbb{T}^2} f(y) d\nu(y) \right\|_2 = \left( 1 + \frac{q-1}{q+1} n \right) q^{-n/2},$$

$$\sup_{\|f\|_2=1} \left\| \frac{1}{|B_n|} \sum_{\gamma \in B_n} f(\gamma x) - \int_{\mathbb{T}^2} f(y) d\nu(y) \right\|_2 = c(q, n) \left( 1 + \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{q}} \right) n \right) q^{-n/2},$$

$$\text{où } c(q, n) = \left( 1 + 2q^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} q^k \right)^{-1}.$$

Ce théorème est conséquence du théorème général suivant, comme nous allons le voir.

#### 3.1.3.2 Un théorème général

On rappelle que si  $K$  est un groupe topologique,  $K^*$  désigne l'ensemble des morphismes continus de  $K$  dans  $\mathbb{C}^*$ . C'est un groupe abélien, et on le munit de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. De plus, si  $g$  est un automorphisme (continu) de  $K$ , et si  $\chi \in K^*$ , on note  $g * \chi$  l'application  $k \mapsto \chi(g^{-1}k)$ . Cela définit une action du groupe des automorphismes de  $K$  sur  $K^*$ .

**Théorème 3.1.11.** *Soit  $\Gamma$  un groupe topologique,  $K$  un groupe topologique compact, soit  $\mu_K$  la mesure de Haar sur  $K$  donnant mesure 1 à  $K$ , et soit  $\Gamma \curvearrowright K$  une action par automorphismes (elle préserve alors automatiquement  $\mu_K$ ). On suppose que pour tout  $\chi \in K^* \setminus \{\mathbf{1}\}$ ,  $\mathrm{Stab}_\Gamma(\chi)$  est moyennable. Notons  $\pi_0$  la sous-représentation de Koopman pour l'action  $\Gamma \curvearrowright K$ .*

Soit  $\mu$  une mesure finie à support fini sur  $\Gamma$ . Alors on a

$$\|\pi_0(\mu)\| = \|\lambda_\Gamma(\mu)\|.$$

En particulier, dans cette situation, la discr eance est minimale.

*D emonstration.* L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : C(K, \mathbb{C}) &\rightarrow C(K^*, \mathbb{C}) \\ f &\mapsto \left( \chi \mapsto \int_G f(k) \overline{\chi(k)} d\mu_K(k) \right) \end{aligned}$$

est une isom etrie lin eaire pour les normes 2, et donc se prolonge à un isomorphisme que l'on note également  $\mathcal{F}$  entre  $L^2(K)$  et  $l^2(K^*)$ .

L'action  $\Gamma \curvearrowright K^*$  préserve automatiquement la mesure de comptage. Notons alors  $\pi^*$  la représentation de Koopman associée. Alors, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , pour toute  $\phi \in L^2(K)$ , on a

$$\mathcal{F}(\pi(\gamma)\phi) = \pi^*(\gamma)\mathcal{F}(\phi).$$

De plus, le sous-espace  $L_0^2(K)$  de  $L^2(K)$  constitué des fonctions d'intégrale 0 correspond, *via*  $\mathcal{F}$ , au sous-espace des fonctions de  $l^2(K^*)$  formé des fonctions qui s'annulent en  $\mathbf{1}$ , que nous notons  $l_0^2(K^*)$ . Ce sous-espace est donc une sous-représentation de  $\pi^*$  que l'on note  $\pi_0^*$ , et, compte-tenu de cette discussion, on a

$$\|\pi_0(\mu)\| = \|\pi_0^*(\mu)\|.$$

On remarque que  $\pi_0^*$  est aussi la représentation de Koopman associée à l'action de  $\Gamma$  sur l'espace discret  $K^* \setminus \{1\}$  qui préserve la mesure de comptage. Soit  $T \subset K^* \setminus \{1\}$  ( $\mathbf{1}$  désigne le *caractère unité*, c'est-à-dire le morphisme constant  $K \rightarrow \{1\}$  qui est aussi le neutre du groupe abélien  $K^*$ ) une partie qui rencontre chaque orbite de l'action  $\Gamma \curvearrowright K^* \setminus \{1\}$  en exactement un point. On a alors

$$l_0^2(K^*) \simeq \bigoplus_{\chi \in T} l^2(\Gamma\chi) \simeq \bigoplus_{\chi \in T} l^2(\Gamma/\text{Stab}_\Gamma(\chi)),$$

chacun des sous-modules de la première décomposition étant une sous-représentation de  $\pi_0^*$ . Pour  $\chi \in T$ , la sous-représentation  $\pi_\chi^*$  sur le sous-espace  $l^2(\Gamma\chi)$  est isomorphe à la représentation  $\lambda_{\Gamma/\text{Stab}_\Gamma(\chi)}$ . On a donc, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$\|\pi_0^*(\mu)\| = \sup_{\chi \in T} \|\lambda_{\Gamma/\text{Stab}_\Gamma(\chi)}(\mu)\|.$$

Mais, d'après [Kesb], on a

$$\|\lambda_{\Gamma/\text{Stab}_\Gamma(\chi)}(\mu)\| = \|\lambda_\Gamma(\mu)\|$$

car pour tout  $\chi \in T$ ,  $\text{Stab}_\Gamma(\chi)$  est moyennable. Ainsi, on a bien

$$\|\pi_0(\mu)\| = \|\lambda_\Gamma(\mu)\|.$$

□

On peut alors en déduire le Théorème 3.1.10, en appliquant le théorème précédent à  $\Gamma \leq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , et au tore de dimension 2,  $K := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ .

*Démonstration du Théorème 3.1.10.* On note, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} := x + \mathbb{Z}$ . On considère l'action naturelle

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \overline{ax + by} \\ \overline{cx + dy} \end{pmatrix}$$

par automorphismes. Le dual du tore est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ , via

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 &\rightarrow ((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2)^* \\ (n, m) &\mapsto ((\bar{x}, \bar{y}) \mapsto e^{i2\pi(nx+my)}) \end{aligned}$$

et l'action  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{Z}^2$  qu'on en déduit est

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \right)^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si  $\chi \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , alors le stabilisateur  $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\chi)$  est abélien, et donc pour tout sous-groupe  $\Gamma \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ,  $\mathrm{Stab}_\Gamma(\chi)$  est abélien, donc moyennable.  $\square$

### 3.1.3.3 Taux de convergence pour le shift de Bernoulli

Nous remercions Damien Gaboriau pour nous avoir suggéré de considérer la situation suivante.

On peut également déduire du théorème 3.1.11 le théorème suivant. Soit  $\Gamma$  un groupe dénombrable discret. On munit le groupe  $K := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\Gamma$  de la topologie produit qui en fait un groupe topologique compact métrisable. La tribu borélienne de  $K$  est la tribu engendrée par les cylindres et l'unique mesure de Haar sur  $X$  qui donne masse 1 à  $K$  est la mesure  $\nu_K$ , produit des mesures uniformes  $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$  sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On considère l'action (par automorphismes!) donnée par

$$\begin{aligned} \Gamma \times K &\rightarrow K \\ (\gamma, \psi) &\mapsto (a \mapsto \psi(\gamma^{-1}a)) \end{aligned}$$

qui préserve  $\nu_K$ . Notons que cette action préserve le sous-espace  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(\Gamma)}$  des fonctions nulles sauf éventuellement sur un ensemble fini. On note  $\pi_\Gamma$  la sous-représentation de la représentation de Koopman associée à cette action, sur le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle.

**Théorème 3.1.12.** *Pour toute fonction  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$  à support fini, on a*

$$\|\lambda_\Gamma(f)\| = \|\pi_\Gamma(f)\|.$$

*En particulier, pour tout groupe dénombrable discret  $\Gamma$ , le shift de Bernoulli de  $\Gamma$  a une discrétance minimale.*

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons les lemmes suivants.

**Lemme 3.1.13.** *L'application*

$$\begin{aligned} \theta : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(\Gamma)} &\rightarrow ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\Gamma)^* \\ \phi &\mapsto \left( \psi \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma)\psi(\gamma) \right) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme de groupes,  $\Gamma$ -équivariant.*

*Démonstration.* Il est évident que  $\theta$  est bien définie et injective. Démontrons que  $\theta$  est surjective.

Soit  $\alpha \in ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\Gamma)^*$ , c'est-à-dire, soit  $\alpha : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$  un morphisme de groupes continu. Tout d'abord, comme  $\alpha$  est continu et que  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(\Gamma)}$  est dense dans  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\Gamma$ ,  $\alpha$  est entièrement déterminé par sa restriction  $\tilde{\alpha}$  à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(\Gamma)}$ .

Soit, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\delta_\gamma$  l'application qui vaut 1 sur  $\gamma$  et 0 partout ailleurs. La famille  $(\delta_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  est une  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -base de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(\Gamma)}$ , ainsi,  $\tilde{\alpha}$  est entièrement déterminée par la famille de nombres complexes  $(\alpha(\delta_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ .

Comme tout élément de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\Gamma$  est d'ordre au plus 2,  $\alpha$  prend en fait ses valeurs dans l'espace discret  $\{\pm 1\}$ . De plus, dans le groupe topologique  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\Gamma$ , la suite  $(\delta_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  tend vers l'application nulle quand  $\gamma$  tend vers l'infini. Comme  $\alpha$  est continue, il existe une partie finie  $F \subset \Gamma$  telle que

$$\forall \gamma \in \Gamma \setminus F, \quad \alpha(\delta_\gamma) = 0,$$

et donc  $\phi := (\gamma \mapsto \tilde{\alpha}(\delta_\gamma))$  est un élément de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(\Gamma)}$ . Il est alors facile de voir que la restriction de  $\theta(\phi)$  à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(\Gamma)}$  est égale à  $\tilde{\alpha}$ , et donc  $\theta(\phi) = \alpha$ .  $\square$

Si  $E$  est un ensemble, on note  $\mathcal{P}_f(E)$  l'ensemble des parties finies de  $E$ .

**Lemme 3.1.14.** *Munissons  $\mathcal{P}_f(\Gamma)$  de la loi de composition donnée par la différence symétrique, qui en fait un groupe abélien. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{P}_f(\Gamma) &\rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(\Gamma)} \\ F &\mapsto \mathbf{1}_F \end{aligned}$$

*est un isomorphisme de groupes. De plus, si nous munissons  $\mathcal{P}_f(\Gamma)$  de l'action de  $\Gamma$  définie par, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , toute  $F \in \mathcal{P}_f(\Gamma)$ ,  $\gamma * F := \gamma F$ , alors  $\Theta$  est  $\Gamma$ -équivariant.*

*Démonstration.* C'est évident.  $\square$

**Lemme 3.1.15.** *Si  $F$  est une partie finie non vide de  $\Gamma$ , alors son stabilisateur, pour l'action définie dans le lemme ci-dessus, est contenu dans  $FF^{-1}$ , et en particulier, il est fini.*

*Démonstration.* Soit  $x \in F$ . Soit  $\gamma \in \text{Stab}_\Gamma(F)$ . Alors, par hypothèse,  $\gamma x \in F$ , et donc il existe  $y \in F$  tel que  $\gamma x = y$ , et donc  $\gamma = yx^{-1} \in FF^{-1}$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 3.1.12.* Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 3.1.11. Il suffit donc de vérifier que pour tout  $\chi \in K^* \setminus \{\mathbf{1}\}$ ,  $\text{Stab}_\Gamma(\chi)$  est moyennable.

Soit donc  $\chi \in K^* \setminus \{\mathbf{1}\}$ . Via  $\theta^{-1}$  puis  $\Theta^{-1}$ ,  $\chi$  s'identifie à une partie finie non vide  $F$  de  $\Gamma$ , et comme  $\theta$  et  $\Theta$  sont équivariantes (d'après les lemmes 3.1.13 et 3.1.14),  $\text{Stab}_\Gamma(\chi) = \text{Stab}_\Gamma(F)$ . Or, d'après le lemme 3.1.15, ce groupe est fini, donc moyennable.  $\square$

## 3.1.4 Monte-Carlo

### 3.1.4.1 Elargissement du cadre

Soit  $\Gamma$  est un groupe discret,  $(X, \nu)$  un espace de probabilité, et  $\Gamma \curvearrowright X$  une action mesurable, préservant la mesure. Soit  $E \subset \Gamma$  une partie finie, symétrique, et  $\mu_E$  la mesure uniforme sur  $E$ . Nous utilisons désormais un langage probabiliste. Soit  $Z$  un point aléatoire sur  $X$ , de loi  $\nu$ , et pour  $\gamma \in E$ , posons  $Z_\gamma := \gamma(Z)$ . Alors



$(Z_\gamma)_{\gamma \in E}$  est un  $|E|$ -uplet de points aléatoires, chacun de loi  $\nu$ . La discrédance de  $\mu_E$  est alors égale à

$$\sup_{\substack{f \in L^2(X, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \sigma \left( \frac{1}{|E|} \sum_{\gamma \in E} f(Z_\gamma) - \int_X f \, d\nu \right),$$

où  $\sigma$  désigne l'écart-type d'une variable aléatoire réelle ou complexe, c'est-à-dire la racine carrée de sa variance. Ainsi, tout ce qui reste de l'action est la définition de  $Z_\gamma$ . Dans cette section, on s'intéresse au problème général suivant : si  $Z_1, \dots, Z_n$  sont des points aléatoires sur  $X$  de loi  $\nu$ , que dire de

$$\sup_{\substack{f \in L^2(X, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \sigma \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i) - \int_X f \, d\nu \right)?$$

### 3.1.4.2 Introduction et énoncé des résultats

Soit  $(X, \nu)$  un espace de probabilité. On s'intéresse à la question générale suivante : si  $f$  est une fonction à valeurs réelles ou complexes sur  $X$ , comment estimer efficacement l'intégrale  $\int_X f \, d\nu$  ? La fameuse *méthode de Monte-Carlo* est une solution à ce problème : elle consiste à choisir un  $n$  assez grand, tirer  $Z_1, \dots, Z_n$  des variables aléatoires indépendantes à valeur dans  $X$  (des points aléatoires) de loi  $\nu$ , et de former la moyenne  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i)$ , appelée *estimateur de Monte-Carlo*.

On mesure la qualité de cette méthode en calculant ce que l'on appelle l'*erreur quadratique moyenne* : on a l'égalité bien connue, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in L^2(X, \nu)$ ,

$$\text{Var} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i) - \int_X f \, d\nu \right) = \frac{1}{n} \left\| f - \int_X f \, d\nu \right\|_{L^2(X, \nu)}^2$$

et on obtient l'égalité suivante, concernant l'*erreur quadratique moyenne dans le pire des cas* :

$$\sup_{\substack{f \in L^2(X, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \text{Var} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i) - \int_X f \, d\nu \right) = \frac{1}{n}.$$

Dans cet article, nous étudions la question de mesurer l'erreur quadratique moyenne dans le pire des cas, dans la situation générale où les points  $Z_i$  ne sont plus supposés indépendants, et démontrons le théorème suivant et son corollaire.

**Théorème 3.1.16.** *Soit  $(X, \nu)$  un espace de probabilité, soit  $N, n \in \mathbb{N}^*$ , et  $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$  un  $n$ -uplet de points aléatoires sur  $X$  tel que pour tout  $i$ ,  $Z_i$  est de loi  $\nu$  que nous ne supposons pas indépendants. On suppose que  $X$  peut être partitionné en  $N$  parties mesurables de même mesure.*

On a

$$\sup_{\substack{f \in L^2(X, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \text{Var} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i) - \int_X f \, d\nu \right) \geq \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{n-1}{N-1} \right).$$

**Corollaire 3.1.17.** *Soit  $(X, \nu)$  un espace de probabilité sans atome,  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$  un  $n$ -uplet de points aléatoires sur  $X$  tel que pour tout  $i$ ,  $Z_i$  est de loi  $\nu$  que nous ne supposons pas indépendants.*

On a

$$\sup_{\substack{f \in L^2(X, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \text{Var} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i) - \int_X f \, d\nu \right) \geq \frac{1}{n}.$$

**Remarques 3.1.18.** Comme nous le verrons dans la suite, dans le cas où  $X := \{1, \dots, N\}$  et  $\nu$  est la mesure uniforme sur  $X$ , l'inégalité du théorème est une égalité dans le cas où la loi de  $Z$  est la mesure uniforme sur l'ensemble des  $n$ -uplets de points de  $X$  deux à deux distincts. Ce  $n$ -uplet est alors meilleur, au sens de l'erreur quadratique moyenne dans le pire des cas, qu'un  $n$ -uplet de points indépendants.

Comme nous l'avons vu, l'inégalité du corollaire est une égalité si les  $Z_i$  sont indépendants. Nous ne savons pas si cette condition est nécessaire.

### 3.1.4.3 Démonstrations

Pour alléger l'exposé, on considère les notations suivantes : on considère les nombres (MSE pour *mean squared error*)

$$\text{MSE}_Z(f) := \text{Var} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i) - \int_X f \, d\nu \right)$$

et

$$\text{MSE}(Z) := \sup_{\substack{f \in L^2(X, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \text{MSE}_Z(f).$$

Tout d'abord, si  $f \in L^2(X, \nu)$ , on constate que  $\text{MSE}_Z(f) = \text{MSE}(Z) (f - \int_X f \, d\nu)$ . Par conséquent,  $\text{MSE}(Z)$  est aussi le sup des  $\text{MSE}_Z(f)$  pour les  $f$  de norme 1 et d'intégrale nulle.

Soit donc  $f \in L^2(X, \nu)$ , de norme 1 et d'intégrale nulle. Le calcul donne

$$\begin{aligned} \text{MSE}_Z(f) &= \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n f(Z_i)^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} f(Z_i) f(Z_j) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[f(Z_i)^2] + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[f(Z_i) f(Z_j)] \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[f(Z_i) f(Z_j)] \end{aligned}$$

où on retrouve le fait rappelé ci-dessus que si les  $Z_i$  sont deux à deux indépendantes, et si  $f$  est de norme 1 et d'intégrale nulle,  $\text{MSE}_Z(f) = \frac{1}{n}$ .

Démontrons le théorème.

*Démonstration du théorème 3.1.16.* Soient  $X_1, \dots, X_N$  des parties partitionnant  $X$  et toutes de mesure  $\frac{1}{N}$ , avec  $N \geq 2$ . Notons, pour tout  $p \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\nu_p := \nu(X_p)$ . Posons, pour tout  $(p, q) \in \{1, \dots, N\}^2$ ,

$$f_{p,q} := \sqrt{\frac{N}{2}} \mathbf{1}_{X_p} - \sqrt{\frac{N}{2}} \mathbf{1}_{X_q}.$$

De plus, on notera, si  $k \in \{1, \dots, N\}$ ,  $f_{p,q}(X_k)$  pour la valeur que  $f_{p,q}$  prend sur  $X_k$  - cet abus de notation est inoffensif car  $f_{p,q}$  est constante sur les  $X_i$ .

$f_{p,q}$  est visiblement d'intégrale nulle, et si  $p \neq q$ , sa norme est 1.

Nous allons démontrer qu'il existe  $p, q \in \{1, \dots, N\}$  différents tels que  $\text{MSE}_Z(f_{p,q}) \geq \frac{1}{n} \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$ .

Soient  $p, q \in \{1, \dots, N\}$  pour l'instant quelconques. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \text{MSE}_Z(f_{p,q}) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[f_{p,q}(Z_i)f_{p,q}(Z_j)] \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \left( \sum_k \mathbb{P}(Z_i \in X_k \text{ et } Z_j \in X_k) f_{p,q}(X_k)^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l \neq m} \mathbb{P}(Z_i \in X_l \text{ et } Z_j \in X_m) f_{p,q}(X_l) f_{p,q}(X_m) \right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{N}{2} \sum_{i \neq j} (\mathbb{P}(Z_i \in X_p \text{ et } Z_j \in X_p) \\ &\quad + \mathbb{P}(Z_i \in X_q \text{ et } Z_j \in X_q) \\ &\quad - \mathbb{P}(Z_i \in X_p \text{ et } Z_j \in X_q) \\ &\quad - \mathbb{P}(Z_i \in X_q \text{ et } Z_j \in X_p)). \end{aligned}$$

et on en déduit l'inégalité

$$\text{MSE}_Z(f_{p,q}) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \frac{N}{2} \left( \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(Z_i \in X_p \text{ et } Z_j \in X_q) + \mathbb{P}(Z_i \in X_q \text{ et } Z_j \in X_p) \right).$$

Notons

$$\theta_{p,q} := \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(Z_i \in X_p \text{ et } Z_j \in X_q) + \mathbb{P}(Z_i \in X_q \text{ et } Z_j \in X_p).$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{p \neq q} \theta_{p,q} &= 2 \sum_{p \neq q} \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(Z_i \in X_p \text{ et } Z_j \in X_q) \\ &= 2 \sum_{i \neq j} \sum_{p \neq q} \mathbb{P}(Z_i \in X_p \text{ et } Z_j \in X_q) \\ &= 2 \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(Z_i \text{ et } Z_j \text{ ne sont pas dans le même morceau de la partition}) \\ &\leq 2n(n-1). \end{aligned}$$

Et donc, comme cette somme de  $N(N-1)$  nombres est inférieure à  $2n(n-1)$ , il y a forcément un des termes qui est inférieur à  $2 \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$ . Pour un couple  $(p, q)$  tel que  $\theta_{p,q} \leq 2 \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$ , on a alors

$$\begin{aligned} \text{MSE}_Z(f_{p,q}) &\geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \frac{N}{2} \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n(N-1)} \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right). \end{aligned}$$

□

Voici un exemple où l'inégalité est une égalité.

**Proposition 3.1.19.** *Si  $X := \{1, \dots, N\}$ , si  $\nu$  est la probabilité uniforme sur  $X$ , si  $n \leq N$ , et si la loi de  $Z$  est la mesure uniforme sur les  $n$ -uplets de points de  $X$  deux à deux distincts, alors l'inégalité dans le théorème est une égalité, c'est-à-dire,*

$$\text{MSE}_Z = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{n-1}{N-1} \right).$$

*Démonstration.* Posons  $\pi$  la mesure sur  $X^n$  définie par

$$\pi := \frac{(N-n)!}{N!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \in X \\ \forall j \neq k, \\ i_j \neq i_k}} \delta_{(i_1, \dots, i_n)}.$$

Autrement dit,  $\pi$  la mesure uniforme sur l'ensemble des  $n$ -uplets formés de points de  $X$  deux à deux distincts. Soit  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$  un  $n$ -uplet aléatoire de loi  $\pi$  (pour tout  $i$ ,  $Z_i$  est alors uniforme sur  $X$ ).

Alors soit  $f \in L^2(X, \nu)$ , de norme 1, et telle que  $\int f d\nu = 0$ . Calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{l \neq m} \mathbb{E}[f(Z_l)f(Z_m)] &= \sum_{l \neq m} \mathbb{E} \left[ \sum_{\substack{A \subset X \\ |A|=n}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \in A \\ \forall j \neq k \\ i_j \neq i_k}} \mathbf{1}_{\{Z_1=i_1, \dots, Z_n=i_n\}} f(Z_l)f(Z_m) \right] \\ &= \sum_{l \neq m} \sum_{\substack{A \subset X \\ |A|=n}} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \in A \\ \forall j \neq k \\ i_j \neq i_k}} \mathbb{P}[Z_1 = i_1, \dots, Z_n = i_n] f(i_l)f(i_m) \\ &= \binom{N}{n}^{-1} \sum_{\substack{A \subset X \\ |A|=n}} \sum_{\substack{p, q \in A \\ p \neq q}} f(p)f(q) \\ &= \binom{N-2}{n-2} \binom{N}{n}^{-1} \sum_{\substack{p, q \in X \\ p \neq q}} f(p)f(q) \\ &= \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{p \in X} f(p) \sum_{\substack{q \in X \\ q \neq p}} f(q) \\ &= \frac{n(n-1)}{N-1} \|f\|_2^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{N-1}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\text{MSE}_Z(f) = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{n-1}{N-1} \right).$$

□

Démontrons le corollaire.

*Démonstration du corollaire 3.1.17.* On va démontrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , on a  $\text{MSE}(Z) \geq \frac{1}{n} - \epsilon$ , ce qui suffit. D'après un théorème de Sierpiński [Sie22], tout espace de probabilité sans atome est tel que pour tout  $a \in [0, 1]$ , il existe une partie mesurable de mesure  $a$ . De là, il est facile de fabriquer des partitions de  $X$

en un nombre  $N$  arbitrairement grand de parties mesurables de même mesure. Si on choisit  $N$  tel que  $\frac{1}{n} \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) \geq \frac{1}{n} - \epsilon$ , ce qui est évidemment possible, alors d'après le théorème, on peut trouver une  $f$  de norme 1, d'intégrale nulle, telle que  $\text{MSE}_Z(f) \geq \frac{1}{n} - \epsilon$ .  $\square$

#### 3.1.4.4 Retour à la discrédance

Nous avons vu que dans le cas de groupes  $G$  discrets engendrés par une partie  $E$  symétrique, finie de cardinal  $p + 1$ , pour toute action  $G \curvearrowright (X, \nu)$  préservant la mesure de probabilité, la discrédance minimale que l'on peut obtenir est (par exemple pour la construction de Lubotzky-Phillips-Sarnak)

$$\frac{2\sqrt{p}}{p+1},$$

et 1 si le groupe est moyennable.

Le Corollaire 3.1.17 nous permet de mettre en perspective ce nombre : dans le cadre élargi de la méthode de Monte-Carlo où les  $p + 1$  points d'échantillonnage sont tous choisis aléatoirement, on ne peut pas faire moins que  $\frac{1}{\sqrt{p+1}}$ , soit asymptotiquement autant que la moitié de la discrédance pour Lubotzky-Phillips-Sarnak.

On pourrait ainsi dire, en des termes très vagues, que l'orbite (sous une action fixée) d'un point choisi aléatoirement ne se comporte pas tout à fait comme un ensemble de points aléatoires indépendants, mais que parfois, elle y ressemble assez.

### 3.1.5 Remarques bibliographiques

Citons d'abord un certain nombre de travaux liés aux articles [LPS86] et [LPS]. Une des premières références à propos de l'étude de groupes libres de rotations de la sphère est l'article de cinq pages [AK]. Le livre de Lubotzky [Lub] (et, tout particulièrement, le chapitre 9) est une référence générale sur le sujet et sur ses nombreuses ramifications. Colin de Verdière a donné un séminaire Bourbaki [CdV] sur [LPS86], [LPS]. Le survol de Shalom, [Sha], présente des estimations sur la discrédance de points aléatoires. Dans une série d'articles, Bourgain et Gamburd (voir [BG] et ses références) construisent des ensembles symétriques finis dans  $\text{SU}_d(\mathbb{C})$  dont la norme de l'opérateur de Koopman associé est strictement plus petite que 1 et développent les liens avec l'arithmétique. Clozel [Clo] a obtenu des bornes optimales (à des constantes multiplicatives près) pour la discrédance de certains sous-ensembles de  $\text{SO}_{2n}(\mathbb{R})$ . Dans [COU], Clozel, Oh, et Ullmo formulent des taux de convergence pour des théorèmes ergodiques sur des espaces symétriques, en termes de fonctions de Harish-Chandra. Le survol [GN] contient beaucoup d'estimations de taux de convergence.

Il y a en fait un domaine de recherche à part entière à propos de l'optimalité des méthodes de type Monte-Carlo. On peut consulter, par exemple, [TW] ou [Nov]. A propos de l'optimalité de la méthode de Monte-Carlo dans le sens qui nous intéresse, un théorème est particulièrement pertinent : il s'agit du théorème de Mathé [Mat95], que nous citons sous une forme un peu différente, et plus proche de notre contexte.

**Théorème 3.1.20** (Mathé, 1995). *Soit  $(X, \nu)$  un espace de probabilité sans atome. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Z_1, \dots, Z_n$  des variables aléatoires à valeurs dans  $X$ , et des variables*

aléatoires réelles  $a_1, \dots, a_n$ . Alors on a

$$\sup_{\substack{f \in L^2(X, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^n a_i f(Z_i) - \int_X f \, d\nu \right|^2 \right] \geq \frac{1}{(1 + \sqrt{n})^2},$$

l'inégalité étant une égalité si

$$\forall i, \quad a_i = \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

et si les  $Z_i$  sont indépendantes de loi  $\nu$ .

Ainsi, dans un cadre bien plus général que le nôtre (pour nous, les  $a_i$  sont constants, égaux à  $\frac{1}{n}$  et les  $Z_i$  sont tous supposés de loi  $\nu$ ), Mathé obtient une bonne inférieure juste un tout petit peu en-dessous de la nôtre; il semble donc régler entièrement la question de la recherche d'une méthode de Monte-Carlo optimale. On peut remarquer le fait bien connu des statisticiens que les estimateurs sans biais ne sont pas forcément les meilleurs (dans le cas d'égalité, l'estimateur n'est pas d'espérance nulle, car la somme des  $a_i$  ne vaut pas 1).

Pour autant, notre théorème est élémentaire, et ne nous apparaît pas comme une conséquence immédiate du théorème de Mathé.

## 3.2 Un théorème pour le cas localement compact

Dans cette section, nous généralisons le cadre d'étude. Soit donc  $G$  un groupe topologique localement compact, soit  $\mu_G$  une mesure de Haar à gauche sur  $G$ , soit  $(X, \nu)$  un espace de probabilité, et soit  $G \curvearrowright X$  une action qui préserve la mesure. On note  $\pi : G \rightarrow U(L^2(X, \nu))$  la représentation de Koopman associée, et soit  $\pi_0$  la représentation sur le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle. On considère alors des mesures  $\mu$  sur  $G$ , à support compact, on note  $G_\mu$  le sous-groupe fermé de  $G$  engendré par le support de  $\mu$  et on se demande si la minoration générale (établie dans le cas discret) reste vraie, c'est-à-dire, a-t-on

$$\|\lambda_{G_\mu}(\mu)\| \leq \|\pi_0(\mu)\| \quad ?$$

C'est le problème de démontrer une minoration de ce type qui va nous intéresser dans cette section.

Comme le montrent les exemples suivants, une telle minoration n'est pas vraie, en général.

### 3.2.1 Contre-exemples à une minoration générale

**Remarque 3.2.1.** *Considérons l'action par translation à gauche de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Soit, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\pi_0(t)$  l'opérateur qui à  $\phi \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \text{Leb})$  d'intégrale nulle associe  $s \mapsto \phi(s - t)$ . Soit  $\mu$  la mesure uniforme sur  $[0, 1]$ . On peut alors remarquer que  $\pi_0(\mu)$  est l'opérateur nul, tandis que  $\lambda_{\mathbb{R}}$  ne l'est pas.*

En fait, on a le théorème général suivant, qui découle de la discussion aux pages 107 – 112 du livre [Mar91].

**Théorème 3.2.2** (Margulis). *Soit  $G$  un groupe localement compact,  $\sigma$ -compact, et  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  qui est cocompact. On considère l'action par multiplication à gauche  $G \curvearrowright G/H$  et on suppose qu'il existe une mesure de probabilité  $G$ -invariante  $\nu$  sur  $G/H$ . Notons  $\pi$  la représentation de Koopman associée, et  $\pi_0$  la sous-représentation sur le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle. Alors il existe une fonction  $f$  sur  $G$ , continue, positive, à support compact, d'intégrale 1, telle que*

$$\|\pi_0(f)\| < 1.$$

*Esquisse de démonstration.* Supposons, par l'absurde, que pour toute fonction  $f$  sur  $G$ , continue, positive, à support compact, d'intégrale 1, on a

$$\|\pi_0(f)\| = 1.$$

D'après [Mar91, (1.3) Proposition, p. 109], comme  $G$  est  $\sigma$ -compact, cela équivaut au fait qu'il existe une suite  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui est *asymptotiquement  $\pi_0$ -invariante*, c'est-à-dire qu'elle est composée d'éléments de  $L_0^2(G/H)$ , de norme 1, et est telle que pour tout compact  $K$  de  $G$ ,

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \|\pi_0(g)p_i - p_i\|_2 = 0.$$

Soit  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une telle suite. Tout d'abord, on a que

$$\begin{aligned} \limsup_{i \rightarrow \infty} \|\pi_0(f)p_i - p_i\|_2 &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \sup_{g \in \text{supp}(f)} \|\pi_0(g)p_i - p_i\|_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soit  $K$  un compact de  $G$ . D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \limsup_{i \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} \|\pi_0(g)\pi_0(f)p_i - \pi_0(f)p_i\|_2 &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} (\|\pi_0(g)\pi_0(f)p_i - \pi_0(g)p_i\|_2 \\ &\quad + \|\pi_0(g)p_i - p_i\|_2 + \|p_i - \pi_0(f)p_i\|_2) \\ &= \limsup_{i \rightarrow \infty} \sup_{g \in K} (2\|\pi_0(f)p_i - p_i\|_2 \\ &\quad + \|\pi_0(g)p_i - p_i\|_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc la suite

$$\left( \frac{\pi_0(f)p_i}{\|\pi_0(f)p_i\|_2} \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

est, elle aussi, asymptotiquement  $\pi_0$ -invariante. Notons, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $q_i$  la composée de

$$\frac{\pi_0(f)p_i}{\|\pi_0(f)p_i\|_2}$$

avec la surjection canonique  $G \rightarrow G/H$ . Alors, d'après [Mar91, (1.7) Lemma, p. 110], la suite  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est équicontinue et uniformément bornée sur tout compact de  $G$ . D'après le théorème d'Ascoli, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elle converge uniformément sur tout compact de  $G$  vers une fonction continue,  $H$ -invariante à droite (car tous les termes de la suite le sont). Cette limite passe au quotient en une fonction continue sur  $G/H$ , que l'on note  $p$ . Comme  $G/H$  est compact, on a la convergence uniforme

$$\frac{\pi_0(f)p_i}{\|\pi_0(f)p_i\|_2} \rightarrow p.$$

On en déduit

- que  $p$  est d'intégrale nulle (en tant que limite uniforme de fonctions d'intégrale nulle) ;
- que  $p$  est de  $L^2$ -norme 1 (en tant que limite uniforme de fonctions uniformément bornées, de  $L^2$ -norme 1) ;
- que  $p$  est  $\pi_0$ -invariante (en tant que limite uniforme d'une suite asymptotiquement  $\pi_0$ -invariante) et donc constante.

Ainsi,  $p$  est constante et égale à 0, mais pourtant de  $L^2$ -norme 1. C'est absurde.  $\square$

Dans tous les cas où  $G, H$  sont comme dans les hypothèses du théorème ci-dessus et où  $G$  est, en plus, moyennable, l'inégalité  $\|\lambda_G(f)\| \leq \|\pi_0(f)\|$  tombe en défaut.

### 3.2.2 Un théorème de minoration de la discrédance

Il s'agit de trouver des hypothèses supplémentaires sur l'action  $G \curvearrowright X$  pour pouvoir démontrer une minoration. Nous en formulons une, la condition technique dite de *croissance modérée*, pour démontrer un théorème général, puis nous donnons des conditions suffisantes pour qu'elle soit vérifiée dans différents cas concrets.

#### 3.2.2.1 Un théorème général

**Définition 3.2.3** (Action à croissance modérée). *Soit  $G$  un groupe,  $(X, \mathcal{B}, \nu)$  un espace de probabilité sans atome, et  $G \curvearrowright X$  une action qui préserve la mesure. Soit  $F \subset G$ .*

*On dit qu'une suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{B}$  est à  $F$ -**croissance modérée** si*

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, \nu(B_n) > 0$
2.  $\inf\{\nu(B) \mid B \in \mathcal{B}, F^n B_n \subset B\} < \frac{1}{2}$
3.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{g \in F} \frac{\nu(gB_n \cap B_n)}{\nu(B_n)} \right)^{\frac{1}{n}} \geq 1.$

**Exemple 3.2.4.** *Considérons l'action de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{T}^2 := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$  par translations de direction une droite  $d$  de pente irrationnelle, c'est-à-dire que l'on choisit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{T}^2$ , on associe  $(a + t, b + \alpha t)$ . Soit  $F := [0, 1]$ .*

*Si  $p, q \in \mathbb{R}_+$ , soit  $R_{p,q}$  le rectangle centré en l'origine de  $\mathbb{R}^2$ , parallèle à la droite  $d$ , dont la longueur dans la direction  $d$  est  $p$ , et dont la longueur dans la direction  $d^\perp$  est  $q$ ; et si  $R$  est un tel rectangle, notons  $\bar{R}$  sa projection dans  $\mathbb{T}^2$ .*

*Observons la figure 3.2.2.1. On fait la constatation heuristique suivante : si on effectue de légères translations de la partie rouge dans la direction de la droite  $d$ , on va balayer beaucoup d'espace ; alors que comme la partie bleue est très allongée dans la direction de  $d$ , ses translatés ne balayeront que très peu d'espace.*

Nous démontrons alors le théorème suivant.

**Théorème 3.2.5.** *Soit  $G$  un groupe topologique localement compact unimodulaire,  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ ,  $\lambda_G$  la représentation régulière de  $G$ . Soit  $(X, \mathcal{B}, \nu)$  un espace mesuré sans atomes,  $G \curvearrowright X$  une action mesurable qui préserve  $\nu$ .*

*Supposons que pour tout  $F$  voisinage compact symétrique de l'identité, il existe une suite à  $F$ -croissance modérée.*

*Alors on a, pour toute  $f$  continue sur  $G$ , positive, à support compact,*

$$\|\lambda_G(f)\| \leq \|\pi_0(f)\|.$$



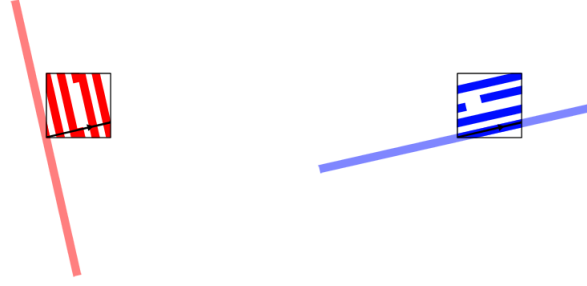


FIGURE 3.1 – En transparence, les rectangles  $R_{p,q}$  et en plein, leur projection dans le tore. En noir, un segment de la droite  $d$ .

*Démonstration.* Pour toute  $h : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  mesurable, notons  $\mu_h$  la mesure sur  $G$  de densité  $h$  par rapport à  $\mu$  (au lieu de  $h\mu$ , pour plus de lisibilité), c'est-à-dire que  $\forall A \in \mathcal{B}(G)$ ,  $\mu_h(A) = \int_A h(g) d\mu_G(g)$ .

Soit  $f$  une fonction continue sur  $G$  à valeurs positives et à support compact.

Si  $f$  est nulle, le résultat est évident. Supposons que  $f$  n'est pas nulle. Comme, pour toute représentation unitaire  $\rho$ , le prolongement de  $\rho$  à  $C_c(G)$  est un morphisme d'algèbres involutives, on a  $\|\rho(f * f^*)\| = \|\rho(f)\|^2$ . Nous n'allons donc considérer que des  $f$  de la forme  $h * h^*$  pour des  $h : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  continues à support compact.

Soit  $F := \text{supp } f$ . C'est un voisinage compact symétrique de  $e$  dans  $G$ . Soit  $(B_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à  $F$ -croissance modérée. Comme  $\nu$  n'a pas d'atomes, d'après le théorème de Sierpinski, soit  $B_n^-$  une partie de même mesure que  $B_n^+$  telle que  $F^n B_n^+ \cap B_n^- = \emptyset$ . On pose  $\phi := \frac{\mathbf{1}_{B_n^+} - \mathbf{1}_{B_n^-}}{\|\mathbf{1}_{B_n^+} - \mathbf{1}_{B_n^-}\|_2}$ . On a bien que  $\phi \in L_0^2(X, \nu)$ .

On a alors

$$\begin{aligned}
\|\pi_0(f^{(n)})\| &\geq \langle \pi_0(f^{(n)})\phi, \phi \rangle \\
&\geq \frac{1}{\nu(B_n^+) + \nu(B_n^-)} \int_G [\nu(gB_n^+ \cap B_n^+) + \nu(gB_n^- \cap B_n^-)] d\mu_{f^{(n)}}(g) \\
&\quad - \frac{1}{\nu(B_n^+) + \nu(B_n^-)} \int_G [\nu(gB_n^+ \cap B_n^-) + \nu(gB_n^- \cap B_n^+)] d\mu_{f^{(n)}}(g) \\
&= \frac{1}{\nu(B_n^+) + \nu(B_n^-)} \int_G [\nu(gB_n^+ \cap B_n^+) + \nu(gB_n^- \cap B_n^-)] d\mu_{f^{(n)}}(g) \\
&\geq \frac{1}{\nu(B_n^+) + \nu(B_n^-)} \int_F [\nu(gB_n^+ \cap B_n^+) + \nu(gB_n^- \cap B_n^-)] d\mu_{f^{(n)}}(g) \\
&\geq \frac{1}{\nu(B_n^+) + \nu(B_n^-)} \inf_{g \in F} \nu(gB_n^+ \cap B_n^+) \int_F d\mu_{f^{(n)}}(g) \\
&= \frac{1}{2} \mu_{f^{(n)}}(F) \inf_{g \in F} \frac{\nu(gB_n^+ \cap B_n^+)}{\nu(B_n^+)}
\end{aligned}$$

Or

$$\|\pi_0(f)\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\pi_0(f)^n\|^{\frac{1}{n}}$$

et, d'après [BC74]

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mu_{f^{(n)}}(F))^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{f^{(n)}}(F))^{\frac{1}{n}} = \|\lambda_G(f)\|.$$

On peut alors finir le calcul :

$$\begin{aligned}
\|\pi_0(f)\| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\pi_0(f)^n\|^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}^{\frac{1}{n}} \mu_{f(n)}(F)^{\frac{1}{n}} \left( \inf_{g \in F} \frac{\nu(gB_n^+ \cap B_n^+)}{\nu(B_n^+)} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \|\lambda_G(f)\| \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{g \in F} \frac{\nu(gB_n^+ \cap B_n^+)}{\nu(B_n^+)} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \|\lambda_G(f)\|
\end{aligned}$$

□

### 3.2.2.2 Vérifier l'hypothèse de croissance modérée

La proposition suivante donne des conditions suffisantes pour qu'il y ait croissance modérée.

**Proposition 3.2.6.** *Soit  $G$  un groupe localement compact unimodulaire,  $X$  un espace séparé,  $\nu$  une mesure de probabilité borélienne régulière sur  $X$ , sans atome. On considère une action continue  $G \curvearrowright X$ . Soit  $x_0$  dans le support de  $\nu$  tel que*

- $\text{Stab}_G(x_0)$  est compact;
- pour tout  $K \subset G$  compact,  $\nu(Kx_0) = 0$ .

*Soit  $F$  un voisinage compact symétrique de  $e$ . Il existe une suite  $(B_n^+)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}}$  de voisinages de  $x$  à  $F$ -croissance modérée.*

**Remarque 3.2.7.** *Si  $G$  est  $\sigma$ -compact, alors  $\nu(Kx) = 0$  pour tout compact  $K$  si et seulement si l'orbite de  $x_0$  est négligeable.*

Nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.2.8.** *Soit  $G$  un groupe topologique,  $X$  un espace séparé. Soit  $G \curvearrowright X$  une action continue (c'est-à-dire que l'application  $G \times X \rightarrow X$  qui la définit est continue).*

*Soit  $x_0 \in X$  tel que  $\text{Stab}_G(x_0)$  est compact. Soit  $K$  un compact, et  $U$  un voisinage de  $e$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $X$  tel que*

$$\forall g \in K \setminus \text{Stab}_G(x_0)U, \quad gV \cap V = \emptyset.$$

*Démonstration.* Soit  $E$  l'ensemble des triplets  $(g, W, V)$  tels que

- $g \in K \setminus \text{Stab}_G(x_0)U$ ;
- $W$  est un voisinage ouvert de  $g$  dans  $G$ ;
- $V$  est un voisinage ouvert de  $x_0$  dans  $X$ ;
- $\forall w \in W, \quad wV \cap V = \emptyset$ .

Pour tout  $g \in K \setminus \text{Stab}_G(x_0)U$ , il existe  $W, V$  tels que  $(g, W, V) \in E$ . En effet,  $g \notin \text{Stab}_G(x_0)$ , donc  $gx_0 \neq x_0$ . Soit  $Y$  un voisinage fermé de  $x_0$  qui ne contient pas  $gx_0$ . Par continuité, l'ensemble des  $(h, x)$  tels que  $hx \notin Y$  est un ouvert de  $G \times X$ ; il contient  $(g, x_0)$ , donc il existe  $W, Z$  des voisinages de  $g$  et de  $x_0$  tels que  $WZ \subset Y^c$ . Posons  $V := Z \cap Y$ . Alors  $WV \subset Y^c \subset V^c$ , et donc  $WV \cap V = \emptyset$ .

Donc l'ensemble des deuxièmes coordonnées d'éléments de  $E$  recouvre l'ensemble  $K \setminus \text{Stab}_G(x_0)U$  qui est compact, donc il existe  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $g_1, \dots, g_n, W_1, \dots, W_n, V_1, \dots, V_n$  tels que  $K \setminus \text{Stab}_G(x_0)U \subset \bigcup_i W_i$ . On pose alors  $V := \bigcap_i V_i$ . Ce  $V$  est tel qu'on le recherchait : c'est bien un voisinage de  $x_0$ , et si  $g \in K \setminus \text{Stab}_G(x_0)U$ , alors il existe  $i$  tel que  $g \in W_i$ . On a alors  $gV_i \cap V_i = \emptyset$ , et donc  $gV \cap V = \emptyset$ . □

*Démonstration de la proposition 3.2.6.* Soit  $n \geq 3$ . On va construire  $B_n^+$ . Tout d'abord, comme  $\nu(F^{2n}x_0) = 0$ , et comme  $\nu$  est régulière, il existe un ouvert  $U$  contenant  $F^{2n}x_0$ , de mesure strictement inférieure à  $\frac{1}{2}$ . Par compacité de  $F$ , il existe un voisinage  $W_n$  de  $x$  tel que  $F^{2n}W_n \subset U$ . En effet, par continuité de l'action, pour tout  $g \in F^{2n}$ , il existe  $D_g$  voisinage de  $g$  et  $E_g$  voisinage de  $x$  tels que  $D_g E_g \subset U$ . Par compacité de  $F^{2n}$ , il existe un sous-ensemble fini  $I$  de  $F^{2n}$  tel que  $F^{2n} \subset \bigcup_{i \in I} D_i$ . On pose alors  $W_n := \bigcap_{i \in I} E_i$ . On a bien

$$F^{2n}W_n \subset \bigcup_{i \in I} D_i W_n \subset \bigcup_{i \in I} D_i E_i \subset U.$$

Ensuite, d'après le Lemme 3.2.8, il existe un voisinage  $V_n$  de  $x_0$  tel que pour tout  $g \in F^{2n-2} \setminus \text{Stab}_G(x_0)F$ ,  $gV_n \cap V_n = \emptyset$ , et, quitte à rapetisser  $V_n$ , on peut supposer qu'il est inclus dans  $W_n$ .

Soit  $N_{-2,n} \in N_{\max}(F \text{Stab}_G(x_0)F^2, F^{n-2})$ . On a  $N_{-2,n}F \subset F^{n-1}$ , donc

$$\nu(N_{-2,n}FV_n) \leq \nu(F^{n-1}V_n).$$

De plus, on a

$$N_{-2,n}FV_n = \bigsqcup_{g \in N_{-2,n}} gFV_n.$$

En effet, soient  $g_1, g_2 \in N_{-2,n}$ ,  $f_1, f_2 \in F$ ,  $v_1, v_2 \in V_n$  tels que  $g_1 f_1 v_1 = g_2 f_2 v_2$ . On a alors  $f_2^{-1} g_2^{-1} g_1 f_1 v_1 = v_2$ . D'autre part,  $f_2^{-1} g_2^{-1} g_1 f_1 \in F^{2n-2}$ , et donc, par hypothèse sur  $V_n$ , on a  $f_2^{-1} g_2^{-1} g_1 f_1 \in \text{Stab}_G(x_0)F$ . Mais alors  $g_1 \in g_2 F \text{Stab}_G(x_0)F^2$ , ce qui n'est possible que si  $g_1 = g_2$ .

On en déduit donc que

$$\nu(N_{-2,n}FV_n) = |N_{-2,n}| \nu(FV_n),$$

et donc

$$|N_{-2,n}| \nu(FV_n) \leq \nu(F^{n-1}V_n).$$

Posons alors  $B_n^+ := F^n V_n$ . Vérifions que les trois conditions de  $F$ -croissance modérée sont satisfaites. Comme  $V_n$  est un voisinage de  $x_0$  et que  $x_0$  est dans le support de  $\nu$ ,  $\nu(B_n^+) > 0$ , et donc la première condition est vérifiée. Par construction,  $F^n B_n^+ = F^{2n} V_n \subset U$ , donc la deuxième propriété est vérifiée.

Enfin, estimons, pour  $g \in F$ ,

$$\frac{\nu(gB_n^+ \cap B_n^+)}{\nu(B_n^+)}.$$

On a  $F^{n-1}V_n \subset gF^n V_n \cap F^n V_n = gB_n^+ \cap B_n^+$ , et donc

$$\nu(gB_n^+ \cap B_n^+) \geq |N_{-2,n}| \nu(FV_n).$$

Enfin, soit  $C$  un voisinage compact de  $e$  dans  $G$  tel que  $CC^{-1} \subset F$ . Soit  $N_n \in N_{\max}(C, F^n)$ . Alors  $B_n^+ = F^n V_n \subset N_n C C^{-1} V_n$  (d'après le Lemme 1.4.5) et donc

$$\nu(B_n^+) \leq |N_n| \nu(FV_n).$$

Ainsi, on a, pour tout  $n \geq 3$ ,

$$\frac{\nu(gB_n^+ \cap B_n^+)}{\nu(B_n^+)} \geq \frac{|N_{-2,n}|}{|N_n|},$$

et donc

$$\left( \frac{\nu(gB_n^+ \cap B_n^+)}{\nu(B_n^+)} \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left( \frac{|N_{-2,n}|}{|N_n|} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Le résultat découle alors directement du Lemme 1.4.7.  $\square$

### 3.2.2.3 Conséquences

On déduit de la proposition 3.2.6 le corollaire suivant, et deux de ses conséquences immédiates.

**Corollaire 3.2.9.** *Soit  $G$  un groupe topologique localement compact unimodulaire,  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ ,  $\lambda_G$  la représentation régulière de  $G$ . Soit  $X$  un espace topologique séparé,  $\nu$  une mesure de probabilité borélienne régulière sur  $X$  sans atomes,  $G \curvearrowright X$  une action continue qui préserve  $\nu$ .*

*On suppose en outre qu'il existe  $x$  dans le support de  $\nu$  tel que pour tout compact  $K$  de  $G$ ,  $\nu(Kx) = 0$  et que  $\text{Stab}_G(x)$  est compact.*

*Alors on a, pour toute  $f$  continue sur  $G$ , positive, à support compact,*

$$\|\lambda_G(f)\| \leq \|\pi_0(f)\|.$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la proposition 3.2.6 et le théorème 3.2.5.  $\square$

**Corollaire 3.2.10.** *Soit  $H$  un groupe localement compact unimodulaire,  $G$  un sous-groupe fermé de  $H$  tel que  $\mu_H(G) = 0$ ,  $\Gamma$  un réseau de  $H$ , tels que  $G \cap \Gamma = \{e\}$ . On considère l'action  $G \curvearrowright H/\Gamma$  (qui préserve la mesure de probabilité  $\nu := \mu_{H/\Gamma}$ ).*

*Alors on a, pour toute  $f$  continue sur  $G$ , positive, à support compact,*

$$\|\lambda_G(f)\| \leq \|\pi_0(f)\|.$$

*Démonstration.* Il est immédiat de constater que les hypothèses du corollaire ci-dessus sont vérifiées dans ce cas.  $\square$

A titre d'exemple, on a le corollaire concret suivant.

**Corollaire 3.2.11.** *Si  $S$  est une surface hyperbolique compacte, soit  $g_t : T^1S \rightarrow T^1S$  le flot géodésique, et soit  $\nu$  la mesure de Liouville sur  $T^1S$ . Alors pour tout  $T \in \mathbb{R}_+^*$ ,*

$$\sup_{\substack{f \in L^2(T^1S, \nu) \\ \|f\|_2=1}} \left\| \left( x \longrightarrow \frac{1}{T} \int_0^T f(g_t x) dt - \int_{T^1S} f d\nu \right) \right\|_2 = 1.$$

*Démonstration.* Cela découle immédiatement du corollaire précédent, puisque, d'après la discussion du paragraphe 1.3.2.2, ce système dynamique est conjugué à l'action à gauche par  $\mathbb{R}$  sur  $\text{SL}_2(\mathbb{R})/\Gamma$  où  $\Gamma$  est le réseau cocompact image de  $\pi_1(S)$  via l'action de celui-ci sur le  $\mathbb{H}_2$ , le revêtement universel de  $S$ .  $\square$



# Chapitre 4

## Décroissance rapide

**Résumé.** Dans ce chapitre, nous traitons de la propriété de décroissance rapide, et tout particulièrement de la propriété de décroissance rapide radiale. Précisément, nous développons l'exemple de  $\mathbb{Z}$ , et reprenons le contenu des articles [BPLP19b] et [BPLP19a], où nous donnons, dans un premier temps, un exemple concret d'un couple qui a la propriété de décroissance rapide radiale, mais pas la propriété de décroissance rapide ; enfin, nous démontrons que la propriété de décroissance rapide radiale se transmet d'un groupe à un réseau sous des hypothèses générales.

*Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec Adrien Boyer et Christophe Pittet.*

### 4.1 Généralités sur la décroissance rapide

Nous commençons par une courte introduction historique à la propriété RD. Pour une introduction plus poussée, voir les survols de [Cha17] et [Gar16].

Nous énonçons ensuite les définitions de base concernant la propriété RD et son affaiblissement, la propriété RRD, et concluons cette section par l'exemple de  $\mathbb{Z}$ .

#### 4.1.1 Remarques historiques et bibliographiques

La propriété de décroissance rapide (RD), qui formule une inégalité concernant deux normes sur l'algèbre d'un groupe, a été introduite par Haagerup dans [Haa79] et a été développée par Jolissaint dans [Jol90]. Son origine remonte au travail de C. S. Herz [Her70]. Elle a des applications aux marches aléatoires sur les groupes infinis [Val97], [CPSC07, Corollary 7.3], à la théorie des représentations et aux systèmes dynamiques [BM17] et a été un outil très important dans le travail de Lafforgue concernant la conjecture de Baum-Connes [Laf00].

On sait qu'un groupe de Lie connexe a RD (par rapport à la métrique des mots associée à une partie compacte symétrique) si et seulement si son revêtement universel est le produit d'un groupe de Lie semi-simple avec un groupe à croissance polynomiale (voir [CPSC07]). Mais le problème de décider si un groupe localement compact donné a la propriété RD par rapport à une fonction de longueur donnée est un problème très difficile. Il a été résolu pour un certain nombre de groupes (voir [Cha17] mais le problème de savoir si les réseaux cocompacts dans les groupes de Lie semi-simples de rang supérieur est ouvert (il porte le nom de *conjecture de Valette* - voir [Val02]). Il est bien connu que les réseaux non cocompacts n'ont pas RD (cela découle de l'existence d' $U$ -éléments dans de tels groupes - voir [LMR00]).

La propriété de décroissance rapide radiale (RRD) est un affaiblissement de RD, étudiée pour la première fois dans [Val97], et consiste à restreindre l'inégalité de décroissance rapide aux fonctions radiales. Il est intéressant de remarquer que la stratégie de démonstration dans [CPSC07], pour les groupes de Lie, utilise une idée de *radialisation*, et que Perrone a démontré, dans [Per09], que les réseaux cocompacts avaient RRD.

Dans ce contexte, Chatterji pose la question de savoir s'il existe un groupe ayant la propriété RRD, mais pas la propriété RD [Cha17, p. 57]. Nous donnons, dans la section 4.2, un exemple d'un tel groupe.

Ensuite, dans la section 4.3, nous démontrons que l'argument utilisant l'induction utilisé dans [Per09] se généralise au cas des réseaux non nécessairement cocompacts. Ceci indique qu'une hypothétique version discrète du *principe de majoration* de Herz pour les réseaux dans les groupes de Lie semi-simples ne peut exister que pour les réseaux cocompacts.

## 4.1.2 Généralités sur la décroissance rapide

### 4.1.2.1 Définitions

Commençons par donner les premières définitions. Dans ce paragraphe,  $G$  est un groupe localement compact,  $\mu_G$  est une mesure de Haar sur  $G$ , et  $L$  est une fonction de longueur propre sur  $G$ .

Si  $f \in C_c(G)$ , soit  $L(f)$  le nombre  $\max\{L(g) \mid g \in \text{supp}(f)\}$ .

**Notation 4.1.1** (Deux normes sur  $C_c(G)$ ). *Soit  $f \in C_c(G)$  et  $k \in \mathbb{N}$ . On pose*

$$\|f\|_{H_k} := \int_G |f(g)|^2 (1 + L(g))^{2k} d\mu_G(g).$$

*On rappelle que  $\|f\|_{op}$  désigne la norme de  $\lambda_G(f)$ , qui est l'opérateur de convolution à gauche par  $f$  sur  $L^2(G, \mu_G)$ .*

**Proposition 4.1.2.** *Soit  $E$  une partie de  $C_c(G)$ . On a équivalence entre les deux propositions suivantes :*

1.  $\exists C \in \mathbb{R}_+, \exists k \in \mathbb{N}, \forall f \in E, \quad \|f\|_{op} \leq C \|f\|_{H_k} ;$
2.  $\exists P \in \mathbb{R}[X], \forall f \in E, \quad \|f\|_{op} \leq P(L(f)) \|f\|_2.$

*Démonstration.* Voir [Gar16, Proposition 2.3, p. 4]. □

**Définition 4.1.3** (Décroissance rapide). *Soit  $E$  une partie de  $C_c(G)$ . On dit qu'on a **décroissance rapide** sur  $E$  si on a une des propriétés équivalentes ci-dessus.*

*On dit que le couple  $(G, L)$  a la propriété de décroissance rapide (RD) si on a décroissance rapide sur  $C_c(G)$  tout entier.*

**Remarques 4.1.4.** — *En pratique, nous considérons plutôt la deuxième formulation, dans la proposition ci-dessus.*

— *La propriété 1. ci-dessus est équivalente à la continuité de*

$$\text{Id}_{C_c(G)} : (C_c(G), \|\cdot\|_{H_k} \rightarrow (C_c(G), \|\cdot\|_{op})$$

*pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ .*

- Si on note  $H_k(G, L)$  la complétion de  $C_c(G)$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_{H_k}$ <sup>1</sup>, et  $C_{red}^*(G)$  la complétion de  $C_c(G)$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_{op}$ , alors on résume la propriété 1. en disant que  $H_k(G, L)$  s'injecte naturellement dans  $C_{red}^*(G)$ , pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ .
- Si  $n \leq m$ , l'identité sur  $C_c(G)$  se prolonge en un morphisme contractant d'espaces de Banach  $j_{n,m} : H_m(G, L) \rightarrow H_n(G, L)$ . Tout ceci forme un système projectif d'espaces de Banach et de morphismes contractants. Si on note  $H_\infty(G, L)$  l'espace de Fréchet qui est la limite projective de ce système<sup>2</sup>, alors la propriété 1. est équivalente au fait que  $H_\infty(G, L)$  se plonge dans  $C_{red}^*(G)$ .

**Définition 4.1.5** (Fonctions radiales). Soit  $f \in C_c(G)$ . On dit qu'elle est **radiale** si  $\forall g_1, g_2 \in G, L(g_1) = L(g_2) \Rightarrow f(g_1) = f(g_2)$ . On note  $C_c^{rad}(G)$  l'ensemble des fonctions radiales sur  $G$  (si  $G$  est un groupe discret, on le note plutôt  $\mathbb{C}[G]^{rad}$ ).

**Définition 4.1.6** (Décroissance rapide radiale). On dit que le couple  $(G, L)$  a la propriété de décroissance rapide radiale (RRD) si on a décroissance rapide sur l'ensemble des fonctions radiales  $C_c^{rad}(G)$ .

#### 4.1.2.2 Décroissance rapide le long des sphères ou des boules

Les outils suivants sont utiles pour démontrer qu'un couple  $(G, L)$  a RRD et seront utilisés dans les sections suivantes. Dans ce paragraphe, on se concentre sur des couples  $(\Gamma, L)$  où  $\Gamma$  est un groupe discret et  $L$  est une fonction de longueur propre, à valeurs entières.

Définissons les indicatrices des sphères par

$$\forall \gamma \in \Gamma, \mathbf{1}_n(\gamma) := \begin{cases} 1 & \text{if } L(\gamma) = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

La proposition suivante exprime qu'il suffit d'avoir une décroissance rapide sur l'ensemble des indicatrices des sphères pour avoir RRD.

**Proposition 4.1.7.** *Si*

$$\exists P \in \mathbb{R}[X], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{1}_n\|_{op} \leq P(n) \|\mathbf{1}_n\|_2,$$

alors le couple  $(\Gamma, L)$  a RRD.

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  comme dans l'hypothèse, et soit  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que la fonction polynomiale associée sur  $\mathbb{R}_+$  est croissante et positive, et telle que  $(1+t)^2(P(t))^2 \leq Q(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Nous allons démontrer que  $Q$  témoigne de la décroissance rapide radiale.

Soit  $f \in \mathbb{C}[\Gamma]^{rad}$ . On a  $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_n$ , où  $a_n$  est la valeur constante prise par  $f$  sur la sphère de rayon  $n$  autour de  $e$ . Bien sûr, on a, pour tous  $n$  sauf éventuellement, un nombre fini d'entre eux,  $a_n = 0$ .

---

1. En des termes plus élémentaires,  $H_k(G, L) = \{f \in L^2(G) \mid \|f\|_{H_k} < \infty\}$ .  
2. En des termes plus élémentaires,  $H_\infty(G, L) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} H_k(G, L)$ .



On a alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{op} &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n \mathbf{1}_n\|_{op} \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(n) \|a_n \mathbf{1}_n\|_2 \\
(\text{Cauchy-Schwarz}) &\leq \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} (1+n)^2 (P(n))^2 \|a_n \mathbf{1}_n\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} (1+n)^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \cdot \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} Q(n) \|a_n \mathbf{1}_n\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \cdot \sup(\{Q(n) \mid a_n \neq 0\}) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n \mathbf{1}_n\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \cdot Q(L(f)) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n \mathbf{1}_n\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \cdot Q(L(f)) \|f\|_2
\end{aligned}$$

et donc  $(\Gamma, L)$  a RRD.  $\square$

On en déduit qu'en présence d'une inégalité isopérimétrique forte sur les boules, la décroissance rapide sur les indicatrices des boules suffit pour avoir RRD.

**Proposition 4.1.8.** *Supposons qu'il existe  $c_\Gamma$  tel que pour tout  $n$  assez grand,*

$$|\Gamma_n| \leq c_\Gamma |\Gamma_n \setminus \Gamma_{n-1}|.$$

Si

$$\exists P \in \mathbb{R}[X], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{1}_{\Gamma_n}\|_{op} \leq P(n) \sqrt{|\Gamma_n|},$$

alors  $(\Gamma, L)$  a RRD.

*Démonstration.* On peut supposer, sans perte de généralité, que la fonction polynomiale associée à  $P$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors on a

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{1}_n\|_{op} &= \|\mathbf{1}_{\Gamma_n} - \mathbf{1}_{\Gamma_{n-1}}\|_{op} \\
&\leq \|\mathbf{1}_{\Gamma_n}\|_{op} + \|\mathbf{1}_{\Gamma_{n-1}}\|_{op} \\
&\leq P(n) \|\mathbf{1}_{\Gamma_n}\|_2 + P(n-1) \|\mathbf{1}_{\Gamma_{n-1}}\|_2 \\
&\leq P(n) \sqrt{|\Gamma_n|} + P(n-1) \sqrt{|\Gamma_{n-1}|} \\
&\leq 2P(n) \sqrt{|\Gamma_n|} \\
&\leq 2\sqrt{c_\Gamma} P(n) \sqrt{|\Gamma_n \setminus \Gamma_{n-1}|} \\
&= 2\sqrt{c_\Gamma} P(n) \|\mathbf{1}_n\|_2
\end{aligned}$$

et donc, on peut appliquer la Proposition 4.1.7 pour en déduire que  $(\Gamma, L)$  a RRD.  $\square$

### 4.1.3 L'exemple de $\mathbb{Z}$

La valeur absolue est une fonction de longueur propre sur  $\mathbb{Z}$ . On va démontrer que  $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$  a RD.

Notons  $\mathcal{L}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  l'ensemble des polynômes trigonométriques sur  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . C'est un  $\mathbb{C}$ -algèbre pour l'addition, la multiplication et la multiplication scalaire ponctuelle, et c'est un espace préhilbertien pour le produit scalaire  $L^2$  sur  $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mu)$  ( $\mu$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  qui donne masse 1 à la partie pleine). Soit, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , soit  $e_n$  l'élément de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  défini par  $t \mapsto e^{int}$ .

Soit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} : \mathbb{C}[\mathbb{Z}] &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \\
(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n.
\end{aligned}$$

C'est un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres, et une isométrie d'espaces préhilbertiens. Ainsi,  $\mathcal{F}$  se prolonge de deux manières :

1.  $\mathcal{F}$  se prolonge en un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert de  $l^2(\mathbb{Z})$  (complétion de  $\mathbb{C}[\mathbb{Z}]$ ) à  $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  (complétion de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ).
2. à partir de l'isomorphisme isométrique d'espaces de Hilbert, on fabrique un isomorphisme de  $C^*$ -algèbres  $\mathcal{F}_* : \mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$  défini de la façon suivante : si  $T \in \mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z}))$ , pose  $\mathcal{F}_*T := \phi \mapsto \mathcal{F}(T(\mathcal{F}^{-1}\phi))$ .

Si  $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , on note  $\Lambda(f)$  l'opérateur par multiplication par  $f$  sur  $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ . On a le lemme suivant.

**Lemme 4.1.9.** *L'application*

$$\Lambda : C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$$

*est un plongement isométrique de  $C^*$ -algèbres.*

*Démonstration.* Il est évident que  $\Lambda$  est un morphisme d'algèbres involutives. Il est aussi évident que si  $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  et  $\xi \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , alors  $\|f\xi\|_2 \leq \|f\|_\infty \|\xi\|_2$ . Pour voir que  $\|f\|_\infty = \|\Lambda(f)\|_{2 \rightarrow 2}$ , il suffit d'appliquer  $\Lambda(f)$  à une suite de fonctions bosses se concentrant autour d'un  $x$  tel que  $|f(x)| = \|f\|_\infty$ .  $\square$

On en déduit que l'inclusion  $\mathcal{L}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \hookrightarrow C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  est le plongement de complétion de la  $\mathbb{C}$ -algèbre normée  $\mathcal{F}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  par rapport à la norme  $f \mapsto \|\Lambda(f)\|_{2 \rightarrow 2}$ , et on en déduit que le morphisme d'algèbres involutives normées  $\mathcal{F} : (\mathbb{C}[\mathbb{Z}], \|\cdot\|_{op}) \rightarrow (\mathcal{L}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$  se prolonge à un isomorphisme de  $C^*$ -algèbres :  $C_{red}^*(\mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ .

**Lemme 4.1.10.** *Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a  $\mathcal{F}(H_k(\mathbb{Z}, |\cdot|)) \subset C^{k-1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* Si  $c := (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est telle que  $\|c\|_{H_k} < \infty$ , alors on a, pour  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n|^j |c_n| &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|} |n|^{j+1} |c_n| \\ &\leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n|^{2j+2} |c_n|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|^2}} \cdot \|c\|_{H_{j+1}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ , les séries  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} i^j n^j c_n e_n$  convergent normalement, et donc  $\mathcal{F}(c)$  est une fonction  $(k-1)$ -fois continûment dérivable.  $\square$

**Lemme 4.1.11.** *Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $f \in C^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ . Alors  $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in H^k(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ .*

*Démonstration.* Soit  $f \in C^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ . On a, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $c_n(f^{(k)}) = i^k n^k c_n(f)$ . Comme  $f$  et  $f^{(k)}$  sont dans  $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , on a  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 < \infty$  et  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2k} |c_n(f)|^2 < \infty$ , et donc  $\|c.(f)\|_{H_k} < \infty$ .  $\square$

Munissons  $C^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$  de la norme (dite de *Sobolev*) donnée par

$$f \mapsto \|f\|_{H^k} := \|f\|_2 + \|f^{(k)}\|_2.$$

Le lemme suivant démontre que les normes  $\|\cdot\|_{H_k}$  et  $\|\cdot\|_{H^k}$  sont équivalentes.

**Lemme 4.1.12.** *Si  $f \in C_k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , alors on a*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_{H^k} \leq \|c.(f)\|_{H_k} \leq \|f\|_{H^k}.$$

*Démonstration.* Soit  $f \in C_k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ . Posons  $c := n \mapsto c_n(f)$ . On a

$$\begin{aligned} \|c\|_{H_k}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 (1 + |n|)^{2k} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 |n|^{2k} \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |i^k n^k c_n|^2 \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f^{(k)})|^2 \\ &= \|f\|_2^2 + \|f^{(k)}\|_2^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|c\|_{H_k} &= \sqrt{\|f\|_2^2 + \|f^{(k)}\|_2^2} \\ &\leq \|f\|_2 + \|f^{(k)}\|_2 \\ &= \|f\|_{H^k} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{\|f\|_2^2 + \|f^{(k)}\|_2^2} \\ &= \sqrt{2} \|c\|_{H_k}. \end{aligned}$$

□

Si  $k \in \mathbb{N}^*$ , notons  $C_k := \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|n|)^{2k}}}$ .

**Proposition 4.1.13** (RD pour  $\mathbb{Z}$ ). *On a les deux assertions suivantes.*

1. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $C$  un nombre réel. Si  $\forall f \in C^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ,  $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_{H^k}$ , alors  $\forall c \in H_{k+1}(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ ,  $\|c\|_{op} \leq \sqrt{2} C \|c\|_{H_k}$ .
2. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $C$  un nombre réel. Si  $\forall c \in H_k(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ ,  $\|c\|_{op} \leq C \|c\|_{H_k}$ , alors  $\forall f \in C^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ,  $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_{H^k}$ .

De plus, on a, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\forall c \in H_k(\mathbb{Z}, |\cdot|), \quad \|c\|_{op} \leq C_k \|c\|_{H_k}.$$

En particulier, le couple  $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$  a RD.

*Démonstration.* 1. et 2. découlent de la discussion précédente.

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , et  $c \in H_k(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \|c\|_{op} &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| \frac{(1+|n|)^k}{(1+|n|)^k} \\ &\leq C_k \|c\|_{H_k} \end{aligned}$$

□

**Remarque 4.1.14.** *Tout ceci est résumé dans le diagramme commutatif de la figure 4.1.3. Nous pouvons maintenant discuter le slogan “RD est l’analogie non-commutatif du fait que les fonctions lisses sont continues”. Rappelons de manière très grossière la philosophie non-commutative : à un espace topologique compact  $X$ , on peut associer  $A := C(X, \mathbb{C})$ , qui, en tant que  $C^*$ -algèbre commutative unitaire, contient toute l’information topologique de  $X$ , d’après le théorème de Gelfand-Kolmogorov. Il est alors très intéressant d’essayer de traduire des propriétés topologiques de  $X$  en propriétés analytico-algébriques de  $A$  (par exemple, les points de  $X$  correspondent aux caractères de  $A$ ;  $X$  est connexe si et seulement si  $A$  n’a pas d’élément idempotent non trivial...). De plus, d’après le théorème de Gelfand, toute  $C^*$ -algèbre unitaire est isomorphe à l’espace des fonctions continues sur un espace compact que l’on appelle son **spectre de Gelfand**. Autrement dit, dans un sens que l’on peut rendre précis (en termes de catégories), les espaces compacts et les  $C^*$ -algèbres commutatives unitaires, c’est “la même chose”.*

Rien ne nous empêche, pour une  $C^*$ -algèbre  $B$  non-commutative, de chercher à savoir si elle a des idempotents non triviaux ; on dirait alors - mais c'est une astuce linguistique - que l'on cherche à savoir si le "spectre" de  $B$  est connexe, alors que, bien entendu,  $B$  n'a pas de spectre à proprement parler, puisqu'en tant qu'algèbre non-commutative, elle n'est isomorphe à aucune algèbre de fonctions continues sur un espace. A titre d'exemple amusant, remarquons que si  $n \geq 2$ , il n'y a aucun morphisme d'algèbres  $M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  ; cela se traduirait par la phrase "pour  $n \geq 2$ , le spectre de  $M_n(\mathbb{C})$  n'a pas de points".

Revenons à la propriété  $RD$ . Il s'agit de découper mentalement verticalement en deux le diagramme commutatif : la partie droite doit être conçue comme la partie "spectrale", qui concerne  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , et la partie gauche doit être conçue comme étant la partie "algébrique", qui concerne  $\mathbb{Z}$ . Le travail accompli dans la discussion ci-dessus revenait en fait à traduire l'assertion spectrale "sur le cercle, l'espace des fonctions lisses se plonge dans l'espace des fonctions continues" par une assertion analytico-algébrique, la propriété  $RD$ . Ainsi, selon la philosophie non-commutative, la propriété  $RD$  pour  $(\mathbb{Z}, L)$  revient à se demander si, sur le "spectre", les fonctions lisses se plongent dans les fonctions continues.



## 4.2 Le cas de $SL_2(\mathbb{F}_q[X, X^{-1}])$

Le but de cette section est de construire un exemple de groupe répondant à la question de Chatterji, c'est-à-dire, un groupe  $\Gamma$  muni d'une fonction de longueur  $L$  tel que  $(\Gamma, L)$  ait RRD, mais pas RD. C'est en fait très facile, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 4.2.1.** *Sur  $\mathbb{Z}$ , posons  $|\cdot|_{\log} := n \mapsto \ln(1 + |n|)$ . C'est une fonction de longueur propre sur  $\mathbb{Z}$ . Il suffit pour cela de vérifier que pour tous  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $1 + |n + m| \leq (1 + |n|)(1 + |m|)$ . Alors  $(\mathbb{Z}, |\cdot|_{\log})$  est à croissance exponentielle, et comme  $\mathbb{Z}$  est moyennable (car abélien), il ne peut pas avoir RD d'après le point 3. du lemme 4.2.5 ci-après. Par contre, si, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $\mathbf{1}_n$  l'indicatrice de la sphère  $\{\pm n\}$ , alors on a, pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$ ,  $\|\mathbf{1}_n\| \leq 2$  et  $\|\mathbf{1}_n\|_2 = \sqrt{2}$ . Le polynôme constant égal à  $\sqrt{2}$  témoigne donc du fait que l'hypothèse du lemme 4.1.7 est vérifiée, et donc  $(\mathbb{Z}, |\cdot|_{\log})$ .*

Bien entendu,  $|\cdot|_{\log}$  n'est pas quasi-isométrique à une longueur des mots sur  $\mathbb{Z}$ .

Nous allons construire un exemple  $(\Gamma, L)$  qui a RRD mais pas RD, où  $\Gamma$  est de type fini et où  $L$  est quasi-isométrique à une (et donc toute) longueur des mots.

### 4.2.1 Définition de la fonction de longueur, énoncés des théorèmes

#### 4.2.1.1 Préliminaires algébriques

Soit  $q$  une puissance d'un nombre premier et soit  $A := \mathbb{F}_q[X, X^{-1}]$  l'anneau des polynômes de Laurent en la variable  $X$ , à coefficients dans  $\mathbb{F}_q$ , le corps à  $q$  éléments.

**Lemme 4.2.2.** *Le groupe  $SL_2(A)$  est de type fini : l'ensemble*

$$\begin{aligned} T := & \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ & \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \pm X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm X & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ & \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^* \right\} \end{aligned}$$

*en est une partie génératrice finie.*

*Démonstration.* Tout d'abord, si  $P \in \mathbb{F}_q[X, X^{-1}]$  est non nul, notons  $\deg_-(P)$  le plus petit entier  $m$  tel que  $PX^{-m} \in \mathbb{F}_q[X]$  (c'est aussi le degré du plus petit coefficient non nul de  $P$ ). Posons alors  $v(P) := \deg(P) - \deg_-(P)$ . Alors, pour tous  $P, Q \in \mathbb{F}_q[X, X^{-1}]$  non nuls,  $v(PQ) = v(P) + v(Q)$ . On remarque que  $v$  est un stathme euclidien : en effet, si  $P_1, P_2 \in \mathbb{F}_q[X, X^{-1}]$ , alors par division euclidienne dans  $\mathbb{F}_q[X]$ , il existe  $Q, R \in \mathbb{F}_q[X]$  tels que  $v(R) \leq \deg(R) < v(P_2)$  tels que  $P_1X^{-\deg_-(P_1)} = QP_2X^{-\deg_-(P_2)} + R$ . Ainsi,  $P_1 = (QX^{\deg_-(P_1)-\deg_-(P_2)}P_2 + RX^{\deg_-(P_1)})$  est une division euclidienne de  $P_1$  par  $P_2$  dans  $\mathbb{F}_q[X, X^{-1}]$  pour  $v$ .

On en déduit facilement que les inversibles de  $A$  sont les éléments  $P$  tels que  $v(P) = 0$ , c'est-à-dire ceux de la forme  $aX^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $a \in \mathbb{F}_q^*$ .

Des formules valables pour tout  $(P, Q, n) \in \mathbb{F}_q[X, X^{-1}]^2 \times \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & P+Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} X^n & 0 \\ 0 & X^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{-n} & 0 \\ 0 & X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & PX^{2n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on déduit que toute matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour  $P \in \mathbb{F}_q[X, X^{-1}]$  est produit d'éléments de  $T$ .

Soit  $M \in \mathrm{SL}_2(A)$  une matrice triangulaire supérieure, et soient  $d_1, d_2$  ses coefficients diagonaux. Comme  $1 = \det(M) = d_1 d_2$ , on en déduit que  $d_1$  et  $d_2$  sont inversibles, donc de la forme  $aX^n$  et  $a^{-1}X^{-n}$  pour certains  $n \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{F}_q^*$ . Ainsi, toute matrice triangulaire supérieure est produit d'éléments de  $T$ .

Enfin, si  $M$  est une matrice dans  $\mathrm{SL}_2(A)$ , il suffit de ramener  $M$ , *via* multiplication par des éléments de  $T$ , à une matrice ayant un coefficient nul dans la première colonne pour pouvoir se ramener à une matrice triangulaire. Pour ce faire, on utilise l'algorithme d'Euclide (puisque  $A$  est euclidien) pour les éléments de la première colonne et des opérations sur les lignes.  $\square$

L'anneau  $A$  est le sous-anneau de l'anneau  $\mathbb{K} := \mathbb{F}_q(X)$  des fractions rationnelles à coefficients dans  $\mathbb{F}_q$  engendré par  $X$  et  $X^{-1}$ . C'est un  $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel, et  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  en est une base.

Définissons sur  $\mathbb{K}$  deux valuations : si  $F \in \mathbb{K}$ , il existe un unique  $n$ , tel qu'il existe  $P, Q \in \mathbb{F}_q[X]$  tels que  $F = X^n P/Q$ ,  $X \nmid P$  et  $X \nmid Q$ . Cet entier  $n$  est noté  $|F|_0$  (on dit que c'est la valuation de  $F$  à la *place* 0). Si  $F = P/Q \in \mathbb{K}$ , on note  $|F|_\infty$  le nombre  $\deg P - \deg Q$  qui ne dépend que de  $F$  (on dit que c'est la valuation de  $F$  à *l'infini*). On note  $\mathbb{K}_0$  et  $\mathbb{K}_\infty$  les complétions correspondantes. On dit que  $A$  est l'anneau des éléments  $\{0, \infty\}$ -entiers de  $\mathbb{K}$ . Considérons le plongement diagonal  $\Delta : \mathrm{SL}_2(A) \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_0) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_\infty)$ . D'après [Mar91, p. 1], l'image de  $\Delta$ , notée  $\Gamma$ , est un réseau de  $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_0) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_\infty)$ .

#### 4.2.1.2 L'arbre de Bruhat-Tits

Rappelons, sans trop rentrer dans les détails, la construction de l'arbre de  $\mathrm{SL}_2(K)$  pour un corps  $K$  muni d'une valuation discrète, de l'anneau local  $\mathcal{O}$  de ses entiers d'idéal maximal  $\mathfrak{p}$ , engendré par une uniformisante  $\pi$ , le tout tel que  $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$  est supposé fini, de cardinal  $q$ . Pour plus de détails, voir [Ser08, p. 69] ou le texte [Cas14]<sup>3</sup>.

On considère un  $K$ -espace vectoriel  $V$  de dimension 2. Soit  $\mathrm{Lat}(V)$  l'ensemble des sous  $\mathcal{O}$ -modules de type fini qui engendrent  $V$  en tant que  $K$ -espace vectoriel. Ses éléments sont automatiquement  $\mathcal{O}$ -libres de rang 2 et sont appelés **réseaux** de  $V$ . Les homothéties de  $K^*$  agissent sur  $\mathrm{Lat}(V)$ , et on note  $\mathrm{CLat}(V)$  les orbites de cette action ; ce sont les classes de similitude de réseaux. Si  $L$  est un réseau, on note  $\langle\langle L \rangle\rangle$  sa classe. D'après un fait d'algèbre linéaire, si  $L$  et  $L'$  sont des éléments de  $\mathrm{Lat}(V)$ , et si  $(e, f)$  est une base de  $L$ , alors il existe  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $(e\pi^a, f\pi^b)$  est une base de  $L'$ . Le nombre  $|a - b|$  ne dépend en fait que du couple  $(\langle\langle L \rangle\rangle, \langle\langle L' \rangle\rangle)$  et définit donc une application  $d : \mathrm{CLat}(V)^2 \rightarrow \mathbb{N}$ . On a, pour tous  $\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{CLat}(V)$ ,  $d(\Lambda, \Lambda') = 0$  si et seulement si  $\Lambda = \Lambda'$ . De plus, si on définit sur  $\mathrm{CLat}(V)$  une structure de graphe simple et non orienté telle que  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont joints par une arête si  $d(\Lambda, \Lambda') = 1$ , alors on obtient un arbre  $(q+1)$ -régulier, et  $d$  est en fait la distance combinatoire dans cet

3. Disponible en ligne à l'adresse

<https://pdfs.semanticscholar.org/3cc6/b53850a03003204f1225c780cf29ab625a6c.pdf>

arbre. D'autre part,  $\mathrm{GL}(V)$  agit sur  $\mathrm{Lat}(V)$  en posant  $gL := \{gv \mid v \in L\}$ . L'action passe au quotient en une action sur  $\mathrm{CLat}(V)$  qui préserve la structure d'arbre.

Ainsi,  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_0)$  et  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_\infty)$  agissent chacun proprement et de manière simpliciale sur leurs arbres de Bruhat-Tits  $T_0$  et  $T_\infty$  ; ainsi, le groupe  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_0) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{K}_\infty)$  (et donc,  $\Gamma$ !) agit cellulièrement sur  $\mathbb{I} := T_0 \times T_\infty$ . Notons  $V(T_0)$  et  $V(T_\infty)$  l'ensemble des sommets de ces arbres. Notons  $d_0$  et  $d_\infty$  les distances combinatoires dans ces arbres, c'est-à-dire, les distances qui donnent longueur 1 aux arêtes. Définissons, sur  $\mathbb{I} := T_0 \times T_\infty$ , la distance dite  $L^1$ , par

$$\forall x, y \in T_0, \quad \forall x', y' \in T_\infty, \quad d_{\mathbb{I}}((x, y), (x', y')) := d_0(x, y) + d_\infty(x', y').$$

Pour cette distance, le groupe  $G$  (et, en particulier,  $\Gamma$ ) agit par isométries sur  $\mathbb{I}$  (et donc sur  $V(T_0) \times V(T_\infty)$ ).

Soit  $(v_0, v_\infty) \in V(T_0) \times V(T_\infty)$ . Considérons la fonction de longueur sur  $G$  associée à cette action, c'est-à-dire, pour tout  $g \in G$ , posons

$$L(g) := d_{\mathbb{I}}((v_0, v_\infty), g(v_0, v_\infty)).$$

D'après [LMR00], la restriction de  $L$  à  $\Gamma$  est quasi-isométrique à n'importe quelle longueur des mots sur  $\Gamma$ .

Notre résultat est le suivant.

**Théorème 4.2.3.** *Le couple  $(\mathrm{SL}_2(A), L)$  a RRD mais n'a pas RD.*

Nous démontrons, dans la Section 4.2.2, que  $(\Gamma, L)$  n'a pas RD, et dans la Section 4.2.3, on démontre qu'il a RRD.

## 4.2.2 Démonstration : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[X, X^{-1}])$ n'a pas RD

Démontrons que pour  $\Gamma$  et  $L$  définis ci-dessus,

**Proposition 4.2.4.**  *$(\Gamma, L)$  n'a pas RD.*

Rappelons trois lemmes faciles, démontrés dans [Gar16], qui sont vrais pour tout groupe de type fini  $\Gamma$  :

- Lemme 4.2.5.**
1. *Si un groupe de type fini  $\Gamma$  a RD par rapport à une fonction de longueur, alors il a RD pour toute longueur des mots.*
  2. *Si un groupe discret  $\Gamma$  a RD par rapport à une fonction de longueur  $L$ , alors tout sous-groupe  $H$  de  $\Gamma$  a RD par rapport à la fonction de longueur donnée par la restriction de  $L$  à  $H$ .*
  3. *Si un groupe de type fini, moyennable, a RD par rapport à une fonction de longueur  $L$ , alors il est à croissance polynomiale par rapport à  $L$ .*

Combinons ces trois lemmes en le critère suivant, utile pour démontrer que des groupes de type fini n'ont pas RD.

**Proposition 4.2.6.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret, et  $H$  un sous-groupe moyennable finiment engendré de  $\Gamma$ . Alors si  $H$  est à croissance exponentielle pour l'une de ses longueurs des mots, alors  $\Gamma$  n'a pas RD pour aucune fonction de longueur.*

La proposition suivante est classique.



**Proposition 4.2.7.** *Le sous-groupe*

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} X^n & P \\ 0 & X^{-n} \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}, P \in A \right\}$$

de  $\mathrm{SL}_2(A)$  est moyennable, et est à croissance exponentielle par rapport à la partie génératrice finie

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \pm X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

*Démonstration.* Si  $P \in \mathbb{F}_q[X, X^{-1}]$ , posons

$$\gamma(P) := \begin{pmatrix} 1 & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

ainsi  $\gamma : \mathbb{F}_q[X, X^{-1}] \rightarrow H$  est un morphisme. Définissons aussi

$$\psi \left( \begin{pmatrix} X^n & P \\ 0 & X^{-n} \end{pmatrix} \right) := n;$$

ainsi  $\psi : H \rightarrow \mathbb{Z}$  est un morphisme. Alors

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_q[X, X^{-1}] \xrightarrow{\gamma} H \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte, et donc  $H$  est résoluble, donc moyennable.

Démontrons que  $H$  est à croissance exponentielle par rapport à la longueur des mots associée à  $S$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et  $P := \sum_{i=0}^n a_i X^{2i}$ , où les  $a_i$  sont des éléments de  $\{0, 1\} \subset \mathbb{F}_q$ . Il y a  $2^{n+1}$  tels polynômes, et nous allons démontrer que chacun d'entre eux peut s'écrire comme le produit au plus  $3n + 1$  éléments de  $S$ .

Pour ce faire, posons

$$A_0 := \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A_{j+1} := \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{pmatrix} A_j \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{n-(j+1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que  $A_n = \gamma(P)$ , et donc, par définition,  $A_n$  est le produit d'au plus  $3n + 1$  éléments de  $S$ .  $\square$

**Remarque 4.2.8.** *On dit que  $H$  est un groupe d'allumeur de réverbères.*

Nous pouvons démontrer la Proposition 4.2.4.

*Démonstration de la Proposition 4.2.4.* La Proposition 4.2.6 démontre que si  $(\Gamma, L)$  a RD, alors il ne peut contenir aucun sous-groupe moyennable à croissance exponentielle; or la Proposition 4.2.7 en fournit un.  $\square$

### 4.2.3 Démonstration : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[X, X^{-1}])$ a RRD

Nous démontrons, pour  $\Gamma$  et  $L$  définis ci-dessus, le théorème suivant.

**Théorème 4.2.9.** *Le couple  $(\Gamma, L)$  a RRD.*

La stratégie est la suivante : tout d'abord, en vertu du Lemme 4.1.7 il suffit de démontrer RRD pour les indicatrices de sphères. Ensuite, nous remarquons que nous pouvons utiliser deux estimations (une de nature géométrique, l'autre de nature dynamique) pour une certaine action, afin de démontrer RRD pour les indicatrices de sphères. Enfin, nous démontrons ces estimations.

### 4.2.3.1 RRD et mesures quasi-invariantes

Soit  $\Gamma$  un groupe discret muni d'une fonction de longueur  $L$ ,  $(X, \nu)$  un espace de probabilité, et  $\Gamma \curvearrowright (X, \nu)$  une action mesurable telle que  $\mu$  est quasi-invariante.

**Proposition 4.2.10.** *Soit  $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(L^2(X, \nu))$  la représentation de Koopman associée à cette action, et soit  $\Xi$  la fonction de Harish-Chandra correspondante. Pour rappel, pour  $\gamma \in \Gamma$ ,*

$$\Xi(\gamma) = \langle \pi(\gamma)\mathbf{1}_X, \mathbf{1}_X \rangle = \int_X c(\gamma, b)^{\frac{1}{2}} d\nu(b).$$

Alors on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\| \frac{1}{|C_n|} \sum_{\gamma \in C_n} \lambda_\Gamma(\gamma) \right\| \leq 4 \sup_{\gamma \in C_n} \Xi(\gamma) \left\| \frac{1}{|C_n|} \sum_{\gamma \in C_n} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \right\|.$$

*Démonstration.* Nous utilisons un lemme de Shalom (voir [Sha00, Lemma 2.3]) - que nous pouvons appliquer, car  $\mathbf{1}_B$  est un vecteur *positif* évident - et nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\lambda_\Gamma(\mathbf{1}_{C_n})\| \leq \|\pi(\mathbf{1}_{C_n})\|.$$

Si  $\Xi$  est constante sur chacune des  $C_n$ , alors on obtient immédiatement le deuxième résultat.

Sinon, nous prétendons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\| \frac{1}{|C_n|} \sum_{\gamma \in C_n} \pi(\gamma) \right\| \leq 4 \sup_{\gamma \in C_n} \Xi(\gamma) \left\| \frac{1}{|C_n|} \sum_{\gamma \in C_n} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \right\|.$$

Si  $h \in L^2(X)$ , notons  $h_r$  et  $h_i$  ses parties réelle et imaginaire et notons,  $\forall a \in \{r, i\}$ ,  $h_a^+ := \max(h_a, 0)$  et  $h_a^- := h_a^+ - h_a$ . Alors  $h_r^\pm$  et  $h_i^\pm$  sont des fonctions positives et dans  $L^2$ , et

$$\max\{\|h_r^+\|_2, \|h_r^-\|_2, \|h_i^+\|_2, \|h_i^-\|_2\} \leq \|h\|_2.$$

Notons, pour le temps de cette démonstration,

$$M_n := \frac{1}{|C_n|} \sum_{\gamma \in C_n} \pi(\gamma)$$

et

$$M_n^\Xi := \sup_{\gamma \in C_n} \Xi(\gamma) \frac{1}{|C_n|} \sum_{\gamma \in C_n} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \|M_n(h)\|_2 &\leq \sum_{(\epsilon, a) \in \{+, -\} \times \{r, i\}} \|M_n(h_a^\epsilon)\|_2 \\ &\leq \sum_{(\epsilon, a) \in \{+, -\} \times \{r, i\}} \|M_n^\Xi(h_a^\epsilon)\|_2 \\ &\leq \sum_{(\epsilon, a) \in \{+, -\} \times \{r, i\}} \|M_n^\Xi\| \|h_a^\epsilon\|_2 \\ &\leq 4 \|M_n^\Xi\| \|h\|_2 \end{aligned}$$

ce qui démontre l'énoncé.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition générale suivante, qui sera très utile pour démontrer que  $\Gamma$  a RRD.

**Proposition 4.2.11.** *Soit  $\Gamma$  un groupe discret muni d'une fonction de longueur  $L$ . Soit  $(X, \nu)$  un espace de probabilité, et soit  $\Gamma \curvearrowright X$  une action mesurable, telle que  $\nu$  est quasi-invariante. Soit  $\pi : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(L^2(X, \nu))$  la représentation de Koopman associée à cette action, et soit  $\Xi$  la fonction de Harish-Chandra correspondante.*

*Supposons qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  et une fonction polynomiale  $P$ , tels que*

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{\gamma \in C_n} \Xi(\gamma) \leq \frac{P(n)}{\sqrt{|C_n|}}$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, \left\| \frac{1}{|C_n|} \sum_{\gamma \in C_n} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \right\| \leq M$ .

*Alors  $(\Gamma, L)$  a RRD.*

*Démonstration.* Remarquons d'abord que  $\|\mathbf{1}_{C_n}\|_2 = \sqrt{|C_n|}$ . D'après la Proposition 4.1.7, il suffit de démontrer que

$$\exists P \in \mathbb{R}[X], \forall n \in \mathbb{N}, \|\lambda_\Gamma(\mathbf{1}_{C_n})\| \leq P(n)\sqrt{|C_n|}.$$

Nous avons déjà démontré, dans la Proposition 4.2.10, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\lambda_\Gamma(\mathbf{1}_{C_n})\| \leq 4 \sup_{\gamma \in C_n} \Xi(\gamma) \left\| \sum_{\gamma \in C_n} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \right\|.$$

Ainsi, on a bien, en utilisant 1. et 2., que

$$\begin{aligned} \|\lambda_\Gamma(\mathbf{1}_{C_n})\| &\leq 4 \sup_{\gamma \in C_n} \Xi(\gamma) \left\| \sum_{\gamma \in C_n} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \right\| \\ &= 4 \sup_{\gamma \in C_n} \Xi(\gamma) |C_n| \left\| \frac{1}{|C_n|} \sum_{\gamma \in C_n} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \right\| \\ &\leq 4 \frac{P(n)}{\sqrt{|C_n|}} |C_n| M \\ &= 4MP(n)\sqrt{|C_n|}. \end{aligned}$$

□

Il nous suffit donc d'obtenir des estimations sur la croissance et sur la fonction de Harish-Chandra d'une part, et de l'autre, borner uniformément la famille des moyennes pondérées, afin de démontrer le théorème.

#### 4.2.3.2 Harish-Chandra et croissance : estimations

Le but est d'appliquer la Proposition 4.2.11 à une action intéressante. Le groupe  $G$  (et donc,  $\Gamma$  aussi) agit sur le produit  $T_0 \times T_\infty$  coordonnée par coordonnée, c'est-à-dire que  $(g_0, g_\infty)$  agit sur  $(x_0, x_\infty)$  par  $(g_0(x_0), g_\infty(x_\infty))$ . Fixons deux sommets  $v_0$  et  $v_\infty$  dans  $T_0$  et  $T_\infty$  et considérons l'action de  $G$  sur le produit des bords,  $G \curvearrowright (\partial T_0 \times \partial T_\infty, \mu_{v_0} \otimes \mu_{v_\infty})$ . Pour cette action, la mesure produit  $\mu_{v_0} \otimes \mu_{v_\infty}$  est quasi-invariante. Notons  $\pi$  la représentation de Koopman représentation associée à cette action, et notons  $\Xi$  la fonction de Harish-Chandra associée à cette action. Le lemme suivant permet de se ramener aux fonctions de Harish-Chandra des actions des facteurs sur le bord de l'arbre correspondant.

**Lemme 4.2.12.** *La fonction de Harish-Chandra d'une action produit est le produit des fonctions de Harish-Chandra. En particulier,*

$$\forall (g_0, g_\infty) \in G, \quad \Xi(g_0, g_\infty) = \int_{\partial T_0} c_{T_0}(g_0, b)^{\frac{1}{2}} d\mu_{v_0} \int_{\partial T_\infty} c_{T_\infty}(g_\infty, b)^{\frac{1}{2}} d\mu_{v_\infty}.$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini.  $\square$

On en déduit l'estimation suivante.

**Lemme 4.2.13** (Estimation de la fonction de Harish-Chandra). *La fonction de Harish-Chandra  $\Xi$ , associée à l'action  $\Gamma \curvearrowright \partial T_0 \times \partial T_\infty$ , avec  $\mu_{x_0} \otimes \mu_{x_\infty}$  quasi-invariante, vérifie, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,*

$$\Xi(g) \leq \left( 1 + \frac{d-2}{d} L(\gamma) + \left( \frac{d-2}{d} \right)^2 L(g)^2 \right) (d-1)^{-\frac{L(\gamma)}{2}}.$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser le Corollaire 1.1.63 et le Lemme 4.2.12 : soit  $\gamma \in \Gamma$ . On a

$$\begin{aligned} \Xi(\gamma) &= \left( 1 + \frac{q-1}{q+1} L_0(\gamma) \right) q^{-\frac{L_0(\gamma)}{2}} \left( 1 + \frac{q-1}{q+1} L_\infty(\gamma) \right) q^{-\frac{L_\infty(\gamma)}{2}} \\ &= \left( 1 + \frac{q-1}{q+1} (L_0(\gamma) + L_\infty(\gamma)) + \left( \frac{q-1}{q+1} \right)^2 L_0(\gamma) L_\infty(\gamma) \right) q^{-\frac{L_0(\gamma) + L_\infty(\gamma)}{2}} \\ &\leq \left( 1 + \frac{d-2}{d} L(\gamma) + \left( \frac{d-2}{d} \right)^2 L(\gamma)^2 \right) (d-1)^{-\frac{L(\gamma)}{2}}. \end{aligned}$$

$\square$

Maintenant que nous avons une estimation pour la fonction de Harish-Chandra, cherchons une estimation pour la croissance, afin de vérifier les hypothèse de la Proposition 4.2.11. Nous cherchons donc à estimer  $|C_n|$ . A cette fin, calculons le cardinal des boules dans un produit de deux arbres.

Précisément, calculons

$$B_n := \{(x, y) \in V(T_0) \times V(T_\infty) \mid d((v_0, v_\infty), (x, y)) \leq n\}.$$

Si  $a \in \{0, \infty\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $x \in T_a$ , notons

$$S_a(x, i) := \{y \in T_a \mid d_a(x, y) = i\}$$

et

$$B_a(x, i) := \cup_{j=0, \dots, i} S_a(x, j).$$

**Lemme 4.2.14** (Comptage des boules). *Il existe des constantes  $A, B, C \in \mathbb{R}$  telles que  $A \neq 0$  et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |B_n| = (An + B)(d-1)^n + C.$$

*Démonstration.* Afin de rendre les calculs plus lisibles, posons  $D := \frac{d}{d-2}$ . Observons que

$$B_n = \bigsqcup_{i=0}^n \bigsqcup_{x \in S_0(v_0, i)} \{x\} \times B_\infty(v_\infty, n-i);$$

ainsi  $|B_n| = \sum_{i=0}^n s_i b_{n-i}$  où nous avons noté, pour  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $s_i := |S_0(v_0, i)|$  et  $b_j := |B_\infty(v_\infty, j)|$ .

On a alors  $\forall i, j \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad s_i = \begin{cases} d(d-1)^{i-1} & \text{if } i \geq 1 \\ 1 & \text{if } i = 0 \end{cases}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad b_j = \sum_{i=0}^j s_i = 1 + D((d-1)^j - 1)$$

$$\forall i \geq 1, \quad s_i b_{n-i} = D(d(d-1)^{n-1} - 2(d-1)^{i-1})$$

et on obtient,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} |B_n| &= \sum_{i=0}^n s_i b_{n-i} = b_n + \sum_{i=1}^n s_i b_{n-i} \\ &= 1 + D((d-1)^n - 1) + \sum_{i=1}^n D[d(d-1)^{n-1} - 2(d-1)^{i-1}] \\ &= 1 - D + D(d-1)^n + Ddn(d-1)^{n-1} - 2D \sum_{i=1}^n (d-1)^{i-1} \\ &= 1 - D + D(d-1)^n + Ddn(d-1)^{n-1} - \frac{2D}{d-2}(d-1)^n + \frac{2D}{d-2} \\ &= (d-1)^n \left[ n \frac{Dd}{d-1} + D - \frac{2D}{d-2} \right] + 1 - D + \frac{2D}{d-2}. \end{aligned}$$

Il suffit de poser

$$\begin{aligned} A &:= \frac{Dd}{d-1} = \frac{d^2}{(d-2)(d-1)} \\ B &:= D - \frac{2D}{d-2} = \frac{d(d-4)}{(d-2)^2}. \\ C &:= 1 - D + \frac{2D}{d-2} = 1 - B \end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.2.15.** *Il existe  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que  $A \neq 0$  et*

$$\mu(G_n) = (An + B)(d-1)^n[1 + o(n)].$$

*Démonstration.* Cela découle du fait que  $G$  agit cocompactement, par isométries, sur  $V(T_0) \times V(T_\infty)$  et que les stabilisateurs sont compacts. Il suffit alors d'appliquer le Lemme 4.2.14. □

D'après les théorèmes de comptage du Chapitre 1, on en déduit l'estimation suivante :

**Corollaire 4.2.16** (Estimation de comptage). *On a*

$$|C_n^\Gamma| \asymp n(d-1)^n.$$

Nous pouvons maintenant démontrer la condition (1) de la Proposition 4.2.11 pour le groupe  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[X, X^{-1}])$  et son action sur  $\partial T_0 \times \partial T_\infty$ .

**Proposition 4.2.17.** *On a*

$$\sup_{\gamma \in C_n^\Gamma} \Xi(\gamma) \sqrt{|C_n^\Gamma|} = O(n^{5/2}).$$

*Démonstration.* D'un côté, appliquons le Lemme 4.2.13 et obtenons :

$$\sup_{\gamma \in C_n} \Xi(\gamma) \leq \left( 1 + \frac{d-2}{d} L(\gamma) + \frac{1}{2} \left( \frac{d-2}{d} \right)^2 L(\gamma)^2 \right) (d-1)^{-\frac{L(\gamma)}{2}}.$$

On a donc

$$\sup_{\gamma \in C_n} \Xi(\gamma) = O\left(n^2(d-1)^{-\frac{n}{2}}\right).$$

D'un autre côté, le Corollaire 4.2.16 nous donne (pour rappel,  $q = d - 1$ ) :

$$\sqrt{|C_n^\Gamma|} = O(\sqrt{n(d-1)^n}),$$

Et donc on a

$$\sup_{\gamma \in C_n} \Xi(\gamma) \sqrt{|C_n^\Gamma|} = O(n^{5/2}).$$

□

#### 4.2.3.3 Borne uniforme pour la famille des moyennes pondérées

A partir de maintenant, nous notons  $X := \partial T_0 \times \partial T_\infty$  et  $\mu := \mu_{v_0} \otimes \mu_{v_\infty}$ .

**Théorème 4.2.18** (Borne uniforme sur les moyennes pondérées). *Il existe  $M$  tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\| \frac{1}{|C_n|} \sum_{\gamma \in C_n} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \right\| \leq M.$$

Nous avons besoin de plusieurs lemmes. Définissons les moyennes sur  $\Gamma$  et  $G$  :

$$M_n^G := \frac{1}{\mu(C_n^G)} \int_{C_n^G} \frac{\pi(g)}{\Xi(g)} d\mu_G(g) \in \mathcal{B}(L^2(X))$$

et

$$M_n^\Gamma := \frac{1}{|C_n^\Gamma|} \sum_{\gamma \in C_n^\Gamma} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \in \mathcal{B}(L^2(X)).$$

L'idée est de changer de norme.

**Lemme 4.2.19.** *Les opérateurs  $M_n^\Gamma$  étant auto-adjoints, il suffit, pour démontrer le théorème, de démontrer qu'il existe  $M$  tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|M_n^\Gamma\|_{\infty \rightarrow \infty} \leq M.$$

*Démonstration.* On utilise le corollaire du théorème de Riesz-Thorin rappelé en annexe (Lemme A.2.1). □

**Lemme 4.2.20.** *On a  $\|M_n^\Gamma\|_{\infty \rightarrow \infty} = \|M_n^\Gamma \mathbf{1}_X\|_\infty$ .*

*Démonstration.* Soit  $h \in L^\infty(X)$ . Partant de l'inégalité ponctuelle valable presque partout

$$-\|h\|_\infty \mathbf{1}_X \leq h \leq \|h\|_\infty \mathbf{1}_X$$

on obtient la suivante :

$$-\|h\|_\infty M_n^\Gamma \mathbf{1}_X \leq M_n^\Gamma h \leq \|h\|_\infty M_n^\Gamma \mathbf{1}_X.$$

On a alors

$$\|M_n^\Gamma h\|_\infty \leq \|h\|_\infty \|M_n^\Gamma \mathbf{1}_X\|_\infty,$$

et donc

$$\|M_n^\Gamma\|_{\infty \rightarrow \infty} \leq \|M_n^\Gamma \mathbf{1}_X\|_\infty.$$

□

Il reste maintenant à majorer uniformément  $\|M_n^\Gamma \mathbf{1}_X\|_\infty$ . Pour ce faire, on va se ramener à  $G$ , où la situation est plus simple.

**Lemme 4.2.21.** *Il existe un voisinage  $U$  de  $e$  dans  $G$  et des constantes non nulles  $C_1, C_2$  telles que*

1.  $\forall u \in U, \forall g \in G, \forall b \in B, C_1(\pi(g)\mathbf{1}_X(b))^2 = C_1 c(g^{-1}, b) \leq c((gu)^{-1}, b) = (\pi(gu)\mathbf{1}_X(b))^2$  ;
2.  $\forall u \in U, \forall g \in G, \Xi(gu) \geq C_2 \Xi(g)$  ;
3.  $\Gamma \cap U = \{e\}$ .

*Démonstration.* Soit  $V$  un voisinage compact, symétrique, de  $e$  dans  $G$ . Comme  $c$  est continue, elle atteint son minimum  $C_1$  et son maximum  $C_2$  sur le compact  $V \times X$ . Choisissons un voisinage symétrique  $W$  de  $e$  qui intersecte  $\Gamma$  trivialement, et posons  $U := V \cap W$ . L'identité de cocycle

$$\forall b \in X, v \in V, 1 = c(v^{-1}v, b) = c(v^{-1}, vb)c(v, b)$$

et la symétrie de  $V$  nous permettent de déduire que  $C_1 C_2 = 1$ . Comme

$$\forall g \in G, \forall b \in X, \forall v \in V, C_1 c(g, b) \leq c(vg, b) \leq C_2 c(g, b),$$

l'inégalité de gauche nous donne (1) et l'inégalité de droite, utilisée dans le calcul suivant,

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \forall g \in G, \Xi(gv) &= \Xi(v^{-1}g^{-1}) = \int_X c(v^{-1}g^{-1}, b)^{\frac{1}{2}} d\mu(b) \\ &\leq \int_X C_2 c(g^{-1}, b)^{\frac{1}{2}} d\mu(b) = C_2 \Xi(g^{-1}) = C_2 \Xi(g), \end{aligned}$$

nous permet de démontrer (2). □

C'est la proposition suivante qui va nous permettre de passer du discret au continu.

**Proposition 4.2.22.** *Il existe un voisinage compact  $U$  de  $e$  dans  $G$  et une constante  $C$  telle que pour tout sous-ensemble fini  $\Lambda \subset \Gamma$ , on a*

$$\sum_{\gamma \in \Lambda} \frac{\pi(\gamma)\mathbf{1}_X}{\Xi(\gamma)} \leq C \int_{\Lambda U} \frac{\pi(g)}{\Xi(g)} \mathbf{1}_X d\mu_G(g).$$

*Démonstration.* Soit  $U$  un voisinage de  $e$  dans  $G$  comme dans le Lemme 4.2.21.

Soit  $\gamma \in \Gamma$  et  $b \in X$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \mathbf{1}_X(b) &= \frac{1}{\mu(U)} \int_U \frac{\pi(\gamma)}{\Xi(\gamma)} \mathbf{1}_X(b) d\mu_G(u) \\ &\leq \frac{1}{\mu(U)} \int_U C_1 \frac{\pi(\gamma u)}{\Xi(\gamma)} \mathbf{1}_X(b) d\mu_G(u) \\ &\leq \frac{C_1}{\mu(U)} \int_U \frac{\pi(\gamma u)}{\Xi(\gamma u)} \mathbf{1}_X(b) d\mu_G(u) \\ &\leq \frac{C_1 C_2}{\mu(U)} \int_{\gamma U} \frac{\pi(u)}{\Xi(u)} \mathbf{1}_X(b) d\mu_G(u). \end{aligned}$$

Il suffit à présent de sommer sur les  $\gamma$  qui sont dans  $\Lambda$ . □

**Corollaire 4.2.23.** *Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$0 \leq M_n^\Gamma \mathbf{1}_X(b) \leq C M_n^G \mathbf{1}_X(b).$$

*En particulier, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|M_n^\Gamma \mathbf{1}_X\|_\infty \leq C \|M_n^G \mathbf{1}_X\|_\infty.$$

*Démonstration.* Soit  $U$  un voisinage de  $e$  dans  $G$  et  $C$  donnés par la Proposition 4.2.22. Nous pouvons supposer que  $\forall g \in U, L(g) = 0$ . On a  $C_n^\Gamma U \subseteq C_n^G$ , et donc, d'après la Proposition 4.2.22, on a, pour tout  $n$ ,

$$\sum_{\gamma \in C_n^\Gamma} \frac{\pi(\gamma) \mathbf{1}_X}{\Xi(\gamma)} \leq C \int_{C_n^G} \frac{\pi(g)}{\Xi(g)} \mathbf{1}_X d\mu_G(g)$$

et d'après l'hypothèse qui affirme que  $\mu_G(C_n^G) = O(|C_n^\Gamma|)$ , il existe  $m > 0$  tel que pour tout  $n$ ,

$$\frac{1}{|C_n^\Gamma|} \sum_{\gamma \in C_n^\Gamma} \frac{\pi(\gamma) \mathbf{1}_X}{\Xi(\gamma)} \leq \frac{C}{m \mu(C_n^G)} \int_{C_n^G} \frac{\pi(g)}{\Xi(g)} \mathbf{1}_X d\mu_G(g).$$

□

**Lemme 4.2.24.** *La fonction  $M_n^G \mathbf{1}_X$  est constante, égale à 1. En particulier,  $\|M_n^G \mathbf{1}_X\|_\infty$  est uniformément borné en  $n$ .*

*Démonstration.* Soit  $K$  le stabilisateur de  $(x_0, x_\infty) \in T_0 \times T_\infty$ . Il est facile de voir que  $\forall k \in K, \forall b \in B, M_n^G \mathbf{1}_B(b) = M_n^G \mathbf{1}_B(kb)$ . De plus, l'action de  $K$  sur  $X$  est transitive, et donc la fonction  $M_n^G \mathbf{1}_X$  est constante, de valeur  $const \in \mathbb{R}$ .

Intégrons et utilisons le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} const &= \int_X M_n^G \mathbf{1}_X \\ &= \frac{1}{\mu(C_n^G)} \int_X \int_{C_n^G} \frac{c(g^{-1}, b)^{\frac{1}{2}}}{\Xi(g)} \mathbf{1}_X d\mu_G(g) d\mu(b) \\ &= \frac{1}{\mu(C_n^G)} \int_{C_n^G} \int_X \frac{c(g^{-1}, b)^{\frac{1}{2}}}{\Xi(g)} d\mu(b) d\mu_G(g) \\ &= \frac{1}{\mu(C_n^G)} \int_{C_n^G} \frac{\Xi(g^{-1})}{\Xi(g)} d\mu_G(g) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

#### 4.2.3.4 Conclusion

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème.

*Démonstration du Théorème 4.2.9.* Grâce aux Propositions 4.2.17 et 4.2.18 les hypothèses de la Proposition 4.2.11 sont satisfaites ; ainsi,  $(\Gamma, L)$  a RRD. □

## 4.3 Décroissance rapide radiale et réseaux

Nous allons démontrer que la propriété RRD se transmet aux réseaux.



### 4.3.1 Enoncé du théorème

Formulons d'abord deux définitions. Soit  $G$  un groupe localement compact,  $\mu_G$  une mesure de Haar sur  $G$ , et  $L$  une fonction de longueur propre sur  $G$ .

**Définition 4.3.1** (Inégalité isopérimétrique forte pour les boules). *On dit que le couple  $(G, L)$  vérifie une **inégalité isopérimétrique forte pour les boules** s'il existe  $c$  tel que pour tout  $n$ ,*

$$\mu_G(B_{n+1}) \leq c\mu_G(C_{n+1}).$$

**Définition 4.3.2** (Condition de comptage). *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$ . On dit que le triplet  $(G, \Gamma, L)$  satisfait la **condition faible de comptage** s'il existe  $c$  tel que pour tout  $n$  assez grand,*

$$\mu_G(B_n^G) \leq c|B_n^\Gamma|.$$

**Définition 4.3.3** (Conditions de bonne croissance). *On dit que le triplet  $(G, \Gamma, L)$  satisfait les **conditions de bonne croissance** si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1.  $L$  est géométriquement bornée ;
2.  $(\Gamma, L|_\Gamma)$  satisfait une inégalité isopérimétrique forte pour les boules ;
3. le triplet  $(G, \Gamma, L)$  satisfait la condition faible de comptage.

On a alors le théorème suivant, que nous démontrons dans la section suivante.

**Théorème 4.3.4.** *Si  $(G, \Gamma, L)$  satisfait les conditions de bonne croissance, et si  $G$  a RRD par rapport à  $L$ , alors  $\Gamma$  a RRD par rapport à  $L|_\Gamma$ .*

Le corollaire suivant résume la situation pour les groupes de Lie semi-simples.

**Corollaire 4.3.5.** *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple, et soit  $\Gamma$  un réseau irréductible dans  $G$ . Soit  $\mathcal{L}$  la fonction de longueur associée à l'action de  $G$  sur son espace symétrique..*

- Si  $\text{rank}_{\mathbb{R}} G = 1$ , tout réseau  $\Gamma$  a RD (et donc RRD) par rapport à  $\mathcal{L}|_\Gamma$ , et pour toute fonction de longueur ;
- si  $\text{rank}_{\mathbb{R}} G \geq 2$ ,
  - et si  $\Gamma$  est cocompact, alors il existe une fonction de longueur  $L$  sur  $\Gamma$ , quasi-isométrique à  $\mathcal{L}|_\Gamma$  et à toute longueur des mots sur  $\Gamma$ , telle que  $\Gamma$  a RRD ;
  - et si  $\Gamma$  n'est pas cocompact, il existe une fonction de longueur  $L$  sur  $\Gamma$ , quasi-isométrique à  $\mathcal{L}|_\Gamma$  et à toute longueur des mots sur  $\Gamma$ , telle que  $\Gamma$  a RRD mais pas RD.

Ce corollaire est démontré dans le paragraphe suivant.

### 4.3.2 Remarques sur les hypothèses

Dans certains cas, il n'est pas difficile de vérifier si le triplet  $(G, \Gamma, L)$  vérifie les conditions de bonne croissance, comme le montrent les remarques suivantes. Si  $\alpha > 0$ , notons  $L_\alpha$  la fonction de longueur définie sur  $G$  par

$$\forall g \in G \quad L_\alpha(g) := \left\lceil \frac{L(g)}{\alpha} \right\rceil.$$

C'est aussi une fonction de longueur propre sur  $G$ , et est quasi-isométrique à  $L$ .

- Remarque 4.3.6.** 1. Pour  $G$  non moyennable, si  $L$  une fonction de longueur propre telle que  $B_1^G$  engendre  $G$ , alors  $(G, L)$  vérifie une inégalité isopérimétrique forte sur les boules.
2. Si  $L$  est géométriquement bornée, il en va de même de  $L_\alpha$ , pour tout  $\alpha > 0$ . De plus, on rappelle que d'après le Théorème 1.4.27, toute fonction de longueur  $L$  géométrique est géométriquement bornée.
3. Voir [GN10, Theorem 6.4.2] pour une discussion générale à propos du comptage. Le fait suivant est vrai : si  $G$  est un groupe de Lie semi-simple, sans facteur compact, connexe, de centre fini, si  $\Gamma$  est un réseau irréductible de  $G$ , et si  $L$  est une fonction de longueur géométriquement bornée sur  $G$  telle que  $G_1$  est un voisinage de  $e$  dans  $G$ , alors la condition faible de comptage est vérifiée (voir la Section 1.4.4).

**Proposition 4.3.7.** Si  $G$  est un groupe de Lie semi-simple, connexe, sans facteur compact, de centre fini, si  $\Gamma$  est un réseau irréductible, et si  $\mathcal{L}$  est la fonction de longueur associée à l'action de  $G$  sur son espace symétrique, alors il existe  $\alpha > 0$  tel que  $(G, \Gamma, \mathcal{L}_\alpha)$  vérifie les conditions de bonne croissance.

*Démonstration.* Il suffit de prendre  $\alpha > 0$  tel que  $B_\alpha^G \cap \Gamma$  engendre  $\Gamma$ .

D'après les remarques ci-dessus,  $(G, \Gamma, \mathcal{L}_\alpha)$  vérifie les conditions de bonne croissance.  $\square$

**Remarque 4.3.8.** D'après [LMR00], sous les hypothèses de la Proposition 4.3.7, et sous l'hypothèse additionnelle que  $\text{rank}_{\mathbb{R}} G \geq 2$ , alors la restriction à  $\Gamma$  de  $\mathcal{L}_\alpha$  est quasi-isométrique à toute longueur des mots sur  $\Gamma$ .

*Démonstration du Corollaire 4.3.5.* Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple, connexe, sans facteur compact, de centre fini, et soit  $\mathcal{L}$  la fonction de longueur associée à l'action de  $G$  sur son espace symétrique. Alors, d'après [CPSC07, Theorem 6.1],  $G$  a RD par rapport à  $\mathcal{L}$ . Et donc, il a RRD, par rapport à  $\mathcal{L}$ .

Si  $\text{rank}_{\mathbb{R}} G = 1$ , l'assertion est démontrée dans [CK05, Corollary 0.2 (a)].

Si  $\text{rank}_{\mathbb{R}} G \geq 2$ , alors  $\mathcal{L}|_\Gamma$  est quasi-isométrique à toute longueur des mots. Utilisons la Proposition 4.3.7 pour obtenir  $\alpha > 0$  tel que  $(G, \Gamma, \mathcal{L}_\alpha)$  vérifie les conditions de bonne croissance. D'après le Théorème 4.3.4,  $\Gamma$  a RRD par rapport à  $\mathcal{L}_\alpha$ . De plus, si  $\Gamma$  n'est pas cocompact, il a un sous-groupe moyennable à croissance exponentielle, et donc  $\Gamma$  n'a RD pour aucune fonction de longueur quasi-isométrique à une fonction de longueur.  $\square$

### 4.3.3 Démonstration du théorème

Dans cette section, nous démontrons le Théorème 4.3.4, en suivant les idées de [Per09], et en faisant les modifications nécessaires.

Nous considérons  $G$ ,  $L$ , et  $\Gamma$  comme dans le théorème.

#### 4.3.3.1 Domaines fondamentaux

Notons  $X$  le quotient  $G/\Gamma$  et  $\pi$  la surjection canonique  $G \rightarrow X$ . Soit  $\mu_X$  la mesure de probabilité  $G$ -invariante sur  $X$ . Soit  $\tilde{D}$  un domaine fondamental borélien, d'intérieur non vide (cela existe toujours, d'après [BdLHV08, Prop B.2.4]). Quitte à traduire, on peut supposer que  $\tilde{D}$  est un voisinage de  $e$ . Soit  $s : X \rightarrow \tilde{D}$  une section borélienne, c'est-à-dire, une injection borélienne telle que  $\pi \circ s = \text{Id}_X$ .

Le sous-ensemble  $\tilde{D}$  n'est pas forcément compact (on peut justement en choisir un compact si et seulement si  $\Gamma$  est cocompact). Nous pouvons tout de même suivre l'argument de [Per09] en remplaçant  $\tilde{D}$  par un sous-ensemble relativement compact  $D$  inclus dans  $\tilde{D}$ , comme dans la proposition suivante.

**Proposition 4.3.9.** *Il existe  $k \in \mathbb{N}$ ,  $D \subseteq B_k^G$  tels que :*

1.  $D$  est ouvert et relativement compact ;
2.  $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, D\gamma_1 \cap D\gamma_2 \neq \emptyset \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ .

*Démonstration.* D'après le théorème de Baire, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $B_k^G$  est d'intérieur non vide. Il suffit de choisir n'importe quel  $D$  ouvert dans  $B_k^G \cap \tilde{D}$ .  $\square$

Fixons un tel  $D$ .

Définissons

$$\begin{aligned} \phi : \Gamma \times G &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\gamma, g) &\mapsto \mu(gD \cap D\gamma). \end{aligned}$$

**Proposition 4.3.10** (Propriétés de  $\phi$ ). *La fonction  $\phi$  vérifie*

1.  $\forall g \in G, \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma, g) \leq \mu(D)$  et
2.  $\forall \gamma \in \Gamma, \int_G \phi(\gamma, g) d\mu(g) = \mu(D)^2$ .

*Démonstration.* 1. Let  $g \in G$ . Effectuons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma, g) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(gD \cap D\gamma) \\ &= \mu(gD \cap \cup_{\gamma \in \Gamma} D\gamma) \\ &\leq \mu(gD) \\ &= \mu(D) \end{aligned}$$

Remarquons que nous avons utilisé le fait que les  $D\gamma$  sont disjoints, pour des  $\gamma$  différents.

2. Remarquons que  $G$  est unimodulaire, puisqu'il contient un réseau. Soit  $\gamma \in \Gamma$ . On a

$$\begin{aligned} \int_G \phi(\gamma, g) d\mu(g) &= \int_G \int_G \mathbf{1}_{gD \cap D\gamma}(h) d\mu(h) d\mu(g) \\ \text{(Fubini)} &= \int_G \int_G \mathbf{1}_{gD \cap D\gamma}(h) d\mu(g) d\mu(h) \\ &= \int_G \int_G \mathbf{1}_{gD}(h) \mathbf{1}_{D\gamma}(h) d\mu(g) d\mu(h) \\ &= \int_G \mathbf{1}_{D\gamma}(h) \int_G \mathbf{1}_{gD}(h) d\mu(g) d\mu(h) \\ &= \int_G \mathbf{1}_{D\gamma}(h) \int_G \mathbf{1}_{Dh^{-1}(g^{-1})} d\mu(g) d\mu(h) \\ (k := g^{-1}) &= \int_G \mathbf{1}_{D\gamma}(h) \int_G \mathbf{1}_{Dh^{-1}(k)} d\mu(k) d\mu(h) \\ &= \int_G \mathbf{1}_{D\gamma}(h) \mu(Dh^{-1}) d\mu(h) \\ &= \int_G \mathbf{1}_{D\gamma}(h) \mu(D) d\mu(h) \\ &= \mu(D\gamma) \mu(D) \\ &= \mu(D)^2 \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 4.3.11.** *Let  $F \in C_c(G)$ . Alors, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , la fonction  $g \mapsto F(g)\phi(\gamma, g)$  est intégrable.*

*Démonstration.* Cela découle immédiatement du fait que  $\forall g, \gamma, |\phi(\gamma, g)| \leq \mu(D)$ .  $\square$

Pour  $F \in C_c(G)$ , définissons,

$$\begin{aligned}\psi_F : \Gamma &\rightarrow \mathbb{C} \\ \gamma &\mapsto \int_G F(g)\phi(\gamma, g) \, d\mu(g).\end{aligned}$$

**Proposition 4.3.12.** *Si  $F \in C_c(G)$ , alors  $\psi_F$  est à support fini (c'est-à-dire,  $\psi_F \in \mathbb{C}[\Gamma]$ ).*

*Démonstration.* L'ensemble  $K := \{g \in G \mid (\text{supp } F)D \cap Dg \neq \emptyset\}$  est relativement compact. Donc  $\Gamma \cap K$  est fini. Mais alors, si  $\gamma \notin \Gamma \cap K$ , on a

$$\psi_F(\gamma) = \int_{\text{supp } F} F(g)\phi(\gamma, g) \, d\mu_G(g) = 0,$$

et donc le support de  $\psi_F$  est fini.  $\square$

**Proposition 4.3.13.** *Soit  $D \subset B_k^G$  comme dans la Proposition 4.3.9. On a que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{1}_{B_n^\Gamma} \leq \frac{1}{\mu(D)^2} \psi_{\mathbf{1}_{B_{n+2k}^G}}.$$

*Démonstration.* Comme la fonction  $\mathbf{1}_{B_n^\Gamma}$  est nulle en dehors de  $B_n^\Gamma$  et  $\psi_{\mathbf{1}_{B_{n+2k}^G}}$  est positive, il suffit de vérifier l'assertion sur  $B_n^\Gamma$ .

Comme  $D \subseteq B_k^G = \{g \in G \mid L(g) \leq k\}$ , on a  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad DB_n^G D^{-1} \subseteq B_{n+2k}^G$ .

Let  $\gamma \in B_n^\Gamma$ . If  $g \notin B_{n+2k}^G$ ,  $gD \cap D\gamma = \emptyset$ , so  $\phi(\gamma, g) = 0$ . Hence,

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbf{1}_{B_{n+2k}^G}}(\gamma) &= \int_{B_{n+2k}^G} \phi(\gamma, g) \, d\mu(g) \\ &= \int_G \phi(\gamma, g) \, d\mu(g) \\ &= \mu(D)^2\end{aligned}$$

d'après la propriété 2) de la Proposition 4.3.10.  $\square$

#### 4.3.3.2 Utilisation de l'induction

Définissons  $\alpha : G \times X \rightarrow \Gamma$  de la façon suivante :

$$\alpha(g, x) := s(x)^{-1}gs(g^{-1}x)$$

où  $s$  est la section  $X \rightarrow \tilde{D}$ . Vérifions que  $\alpha$  est bien à valeurs dans  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned}\pi(gs(g^{-1}x)) &= g\pi(s(g^{-1}x)) \\ &= gg^{-1}x \\ &= x \\ &= \pi(s(x))\end{aligned}$$

et donc  $s(x)$  et  $gs(g^{-1}x)$  sont dans la même classe à droite selon  $\Gamma$ , et donc sont égaux, à multiplication à droite près par un (unique) élément de  $\Gamma$ .

Soit  $\lambda_\Gamma : \Gamma \rightarrow U(l^2(\Gamma))$  la représentation régulière de  $\Gamma$ . Soit  $g \in G$ . Définissons l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned}\text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma(g) : L^2(X, l^2(\Gamma)) &\longrightarrow L^2(X, l^2(\Gamma)) \\ V &\longmapsto (x \mapsto \lambda_\Gamma(\alpha(g, x))V(g^{-1}x)).\end{aligned}$$

Le fait suivant est bien connu, et découle de l'*identité de cocycle*

$$\forall g, h \in G, \quad x \in X, \quad \alpha(gh, x) = \alpha(g, x)\alpha(h, g^{-1}x).$$

**Fait 4.3.14.** *L'application  $\text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(X, l^2(\Gamma)))$  est une représentation unitaire, unitairement équivalente à la représentation régulière  $\lambda_G$  de  $G$ .*

Rappelons que pour construire l'équivalence, il suffit de combiner l'application qui préserve la mesure suivante

$$\begin{aligned} X \times \Gamma &\rightarrow G \\ (x, \gamma) &\mapsto s(x)\gamma \end{aligned}$$

avec l'identification  $L^2(X \times \Gamma) \simeq L^2(X, l^2(\Gamma))$ .

Pour  $\xi \in l^2(\Gamma)$ , notons  $V_\xi$  l'application constante sur  $X$  de valeur  $\xi$  (et donc,  $V_\xi \in L^2(X, l^2(\Gamma))$ ).

**Lemme 4.3.15.** *Si  $\xi, \eta \in l^2(\Gamma)$  sont positives, alors*

$$\langle \text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma(g)V_\xi, V_\eta \rangle \geq \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma, g) \langle \lambda_\Gamma(\gamma)\xi, \eta \rangle.$$

*Démonstration.* Calculons :

$$\begin{aligned} \langle \text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma(g)V_\xi, V_\eta \rangle &= \int_X \langle \lambda_\Gamma(\alpha(g, x))V_\xi(g^{-1}x), V_\eta(x) \rangle_{l^2(\Gamma)} d\mu_X(x) \\ &= \int_X \langle \lambda_\Gamma(\alpha(g, x))\xi, \eta \rangle_{l^2(\Gamma)} d\mu_X(x) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\{x \in X \mid \alpha(g, x) = \gamma\}} \langle \lambda_\Gamma(\gamma)\xi, \eta \rangle_{l^2(\Gamma)} d\mu_X(x) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu_X(\{x \in X \mid \alpha(g, x) = \gamma\}) \langle \lambda_\Gamma(\gamma)\xi, \eta \rangle_{l^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

et donc il suffit de démontrer que  $\mu_X(\{x \in X \mid \alpha(g, x) = \gamma\}) \geq \phi(\gamma, g)$ .

On a

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid \alpha(g, x) = \gamma\} &= \{x \in X \mid g^{-1}s(x) \in \tilde{D}\gamma^{-1}\} \\ &= \pi(\{y \in \tilde{D} \mid g^{-1}y \in \tilde{D}\gamma^{-1}\}) \\ &= \pi(\tilde{D} \cap g\tilde{D}\gamma^{-1}) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mu_X(\{x \in X \mid \alpha(g, x) = \gamma\}) &= \mu_X(\pi(\tilde{D} \cap g\tilde{D}\gamma^{-1})) \\ &= \mu(\tilde{D} \cap g\tilde{D}\gamma^{-1}) \\ &= \mu(g\tilde{D} \cap \tilde{D}\gamma) \\ &\geq \mu(gD \cap D\gamma) \\ &= \phi(\gamma, g). \end{aligned}$$

□

Notons  $L_+^2(X) \subset L^2(X)$  le cône des fonctions positives.

**Lemme 4.3.16.** *Il existe  $C > 0$  tel que pour toute  $F \in C_c(G)$  positive,*

$$\|\lambda_\Gamma(\psi_F)\| \leq C \|\text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma(F)\|.$$

*Démonstration.* Soient  $\xi, \eta \in l^2(\Gamma)$  deux fonctions positives. Effectuons le calcul suivant, en appliquant le Lemme 4.3.15 :

$$\begin{aligned}
\langle \text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma(F) V_\xi, V_\eta \rangle &= \int_G F(g) \langle \text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma(g) V_\xi, V_\eta \rangle d\mu(g) \\
&\geq \int_G F(g) \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma, g) \langle \lambda_\Gamma(\gamma) \xi, \eta \rangle d\mu(g) \\
&= \int_G \sum_{\gamma \in \Gamma} \phi(\gamma, g) F(g) \langle \lambda_\Gamma(\gamma) \xi, \eta \rangle d\mu(g) \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_G \phi(\gamma, g) F(g) \langle \lambda_\Gamma(\gamma) \xi, \eta \rangle d\mu(g) \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle \lambda_\Gamma(\gamma) \xi, \eta \rangle \int_G \phi(\gamma, g) F(g) d\mu(g) \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle \lambda_\Gamma(\gamma) \xi, \eta \rangle \psi_F(\gamma) \\
&= \langle \lambda_\Gamma(\psi_F) \xi, \eta \rangle
\end{aligned}$$

et, comme tout est positif, nous obtenons, pour les valeurs absolues

$$\begin{aligned}
|\langle \lambda_\Gamma(\psi_F) \xi, \eta \rangle| &\leq |\langle \text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma(F) V_\xi, V_\eta \rangle| \\
&\leq \| \text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma(F) \| \| V_\xi \| \| V_\eta \| \\
&= \| \text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma(F) \| \| \xi \| \| \eta \|
\end{aligned}$$

et, d'après le Lemme A.2.2, cela suffit.  $\square$

**Proposition 4.3.17.** *Nous l'avons l'inégalité suivante :*

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \| \lambda_\Gamma(\mathbf{1}_{B_n^\Gamma}) \| \leq \frac{C}{\mu(D)^2} \| \lambda_G(\mathbf{1}_{B_{n+2k}^G}) \|.$$

*Démonstration.* D'après la Proposition 4.3.13, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{1}_{B_n^\Gamma} \leq \frac{1}{\mu(D)^2} \psi_{\mathbf{1}_{B_{n+2k}^G}}.$$

Comme  $\lambda_\Gamma$  préserve les fonctions positives, on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \| \lambda_\Gamma(\mathbf{1}_{B_n^\Gamma}) \| \leq \frac{1}{\mu(D)^2} \left\| \lambda_\Gamma \left( \psi_{\mathbf{1}_{B_{n+2k}^G}} \right) \right\|.$$

Utilisons alors le Lemme 4.3.16, pour obtenir  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\| \lambda_\Gamma \left( \psi_{\mathbf{1}_{B_{n+2k}^G}} \right) \right\| \leq C \left\| \text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma \left( \mathbf{1}_{B_{n+2k}^G} \right) \right\|.$$

Enfin, comme  $\text{Ind}_\Gamma^G \lambda_\Gamma \simeq \lambda_G$  on obtient l'inégalité annoncée.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème.

*Démonstration.* D'après la Proposition 4.1.8, il suffit de démontrer qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\| \lambda_\Gamma(\mathbf{1}_{B_n^\Gamma}) \| \leq P(n) \sqrt{|B_n^\Gamma|}$ .

En utilisant la Proposition 4.3.17, et le fait que  $G$  a RRD par rapport à  $L$ , il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\| \lambda_\Gamma(\mathbf{1}_{B_n^\Gamma}) \| \leq P(n+2k) \sqrt{\mu(B_{n+2k}^G)}$ . Mais

$$\sqrt{\mu(B_{n+2k}^G)} \leq c \sqrt{|B_n^\Gamma|}$$

pour une certaine constante  $c$  - cela découle de la condition faible de comptage et du fait que  $L$  est géométriquement bornée. Il suffit donc de choisir  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $Q(n) \geq cP(n+2k)$  pour tout  $n$ .  $\square$



# Annexe A

## Appendice

### A.1 Espaces $\delta$ -géodésiques

**Notation A.1.1.** Soit  $\delta \geq 0$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $J \subset I$ . On dit que  $J$  est  $\delta$ -coborné dans  $I$  si tout intervalle ouvert  $]a, b[$  contenu dans  $I \setminus J$  est de longueur inférieure à  $\delta$ .

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

**Définition A.1.2** (Segment). Si  $x, y \in X$ , on note

$$[x, y] := \{z \in X \mid d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}.$$

On appelle cet ensemble le **segment** entre  $x$  et  $y$ . On note  $]x, y[$  à la place de  $[x, y] \setminus \{x, y\}$ .

**Définition A.1.3** (Géodésiques partielles). Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une **géodésique partielle** est une application isométrique  $c : J \rightarrow X$  avec  $I$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

**Remarque A.1.4.** Dans [CDH10], on considère des suites géodésiques, à savoir des suites finies de points  $(x_1, \dots, x_n)$  telles que  $d(x_1, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$ . Si  $J = \{j_1 < \dots < j_n\}$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}$ , alors on peut voir que  $c : J \rightarrow X$  est une géodésique partielle si et seulement si  $(c(x_1), \dots, c(x_n))$  est une suite géodésique, et toute suite géodésique est de cette forme.

Le lemme suivant nous donne une façon de prolonger des géodésiques partielles.

**Lemme A.1.5.** Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ , et  $J \subseteq [0, a]$ ,  $s, t \in J$ , tels que  $s < t$  et

$$]s, t[ \cap J = \emptyset.$$

Alors, si  $c : J \rightarrow X$  est une géodésique partielle, et si  $z \in X$  est tel que  $z \in ]c(s), c(t)[$ , alors le prolongement  $\bar{c} : J \cup \{s + d(c(s), z)\} \rightarrow X$  défini par  $\bar{c}(s + d(c(s), z)) := z$  est encore une géodésique partielle.

*Démonstration.* Notons  $u := s + d(c(s), z)$ , et  $\bar{J} := J \cup \{u\}$ . Pour démontrer que  $\bar{c}$  est une application isométrique, il faut démontrer

$$\forall s, t \in \bar{J}, d(\bar{c}(s), \bar{c}(t)) = |t - s|.$$

Décomposons en plusieurs cas : il faut démontrer



1.  $\forall s', t' \in J, (s' < t' \text{ et } u \notin \{s', t'\}) \Rightarrow d(\bar{c}(s'), \bar{c}(t')) = t' - s'$ ;
2.  $d(\bar{c}(s), \bar{c}(u)) = u - s$  et  $d(\bar{c}(u), \bar{c}(t)) = t - u$ ;
3.  $\forall s' \in J, s' < s \Rightarrow d(\bar{c}(s'), \bar{c}(u)) = u - s'$ ;
4.  $\forall t' \in J, t < t' \Rightarrow d(\bar{c}(u), \bar{c}(t')) = t' - u$ .

On avait déjà 1., car  $c$  est une géodésique partielle. On a 2. par définition de  $\bar{c}$ .  
Démontrons 3. (4. se démontre de la même manière) : soit  $s' < s$ . Alors

$$\begin{aligned} d(\bar{c}(s'), \bar{c}(u)) &\leq d(\bar{c}(s'), \bar{c}(s)) + d(\bar{c}(s), \bar{c}(u)) \\ &= s - s' + (u - s) \\ &= u - s' \end{aligned}$$

d'une part, et de l'autre

$$\begin{aligned} t - s' = d(\bar{c}(s'), \bar{c}(t)) &\leq d(\bar{c}(s'), \bar{c}(u)) + d(\bar{c}(u), \bar{c}(t)) \\ &= d(\bar{c}(s'), \bar{c}(u)) + t - u \end{aligned}$$

d'où on tire l'égalité annoncée. □

**Théorème A.1.6.** *Soit  $\delta > 0$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout couple  $(x, y) \in X$  tel que  $d(x, y) > \delta$ ,*

$$]x, y[ \neq \emptyset.$$

2. *Pour tout couple  $(x, y) \in X$ , il existe une géodésique partielle définie sur un sous-ensemble fini  $J \subset [0, d(x, y)]$  contenant 0 et  $d(x, y)$ ,  $\delta$ -coborné dans  $[0, d(x, y)]$ , telle que  $c(0) = x$  et  $c(d(x, y)) = y$ .*

*Démonstration.* Il est facile de voir que 2.  $\Rightarrow$  1. : soit  $(x, y) \in X$  sont tels que  $d(x, y) > \delta$ . Par hypothèse, il existe un  $J$ ,  $\delta$ -coborné dans  $[0, d(x, y)]$  contenant 0 et  $d(x, y)$  et une géodésique partielle  $c$  définie sur  $J$  telle que  $c(0) = x$  et  $c(d(x, y)) = y$ . L'intervalle ouvert  $]0, d(x, y)[$  est de longueur strictement plus grande que  $\delta$ , donc il intersecte  $J$  en au moins un point, disons  $t$ . Alors  $c(t) \in ]x, y[$ .

Réciproquement, on considère l'ensemble  $E$  des géodésiques partielles  $c$  définies sur un sous-ensemble fini  $J$  de  $[0, d(x, y)]$  contenant 0 et  $d(x, y)$ , telles que  $c(0) = x$  et  $c(d(x, y)) = y$ . L'ensemble  $E$  est non vide, car il contient la géodésique partielle définie sur  $\{0, d(x, y)\}$  et envoyant 0 sur  $x$  et  $d(x, y)$  sur  $y$ .

Partons d'un élément quelconque  $c$  de  $E$ . On applique l'algorithme suivant :

- si le domaine de définition de  $c$  est  $\delta$ -coborné dans  $[0, d(x, y)]$ , on s'arrête ;
- si le domaine de définition  $J$  de  $c$  n'est pas  $\delta$ -coborné dans  $[0, d(x, y)]$ , choisir  $s, t \in [0, d(x, y)]$  tels que  $s < t$ ,  $]s, t[ \cap J = \emptyset$  et  $t - s > \delta$ , et appliquer le Lemme A.1.5 à un  $z \in ]c(s), c(t)[$  (dont l'existence est donnée par l'hypothèse) pour prolonger  $c$  et revenir au début de l'algorithme.

Cet algorithme s'arrête : considérons l'ensemble fini des intervalles  $I$  inclus dans  $[0, d(x, y)] \setminus J$  et soit  $n$  le nombre de ceux qui sont de longueur maximale, et soit  $\alpha$  cette longueur maximale. Si  $\alpha > \delta$ , après une boucle,  $(n, \alpha)$  devient  $(n - 1, \alpha)$  si  $n \geq 2$ , et  $(m, \alpha - \delta)$  si  $n = 1$ , pour un certain entier  $m$  qui est au plus  $\frac{d(x, y)}{\delta}$  (il ne peut pas y avoir plus de  $\frac{d(x, y)}{\delta}$  intervalles disjoints, de longueur plus grande que  $\delta$ , dans  $[0, d(x, y)]$ ).

Cette algorithme fabrique donc une géodésique partielle dont le domaine de définition est  $\delta$ -coborné dans  $[0, d(x, y)]$ . □

**Lemme A.1.7.** *Supposons que  $(X, d)$  est complet. Soit  $J \subset \mathbb{R}$ , et soit  $c : J \rightarrow X$  une géodésique partielle qui n'a aucun prolongement strict. Alors  $J$  est fermé.*

*Démonstration.* D'après le théorème de prolongement des applications continues,  $c$  se prolonge en une application uniformément continue  $\bar{c} : \bar{J} \rightarrow X$ . Comme  $J \times J$  est dense dans  $\bar{J} \times \bar{J}$ ,  $\bar{c}$  est encore isométrique, et donc  $\bar{c}$  est une géodésique partielle qui prolonge  $c$ . Par hypothèse,  $\bar{c} = c$ , et donc  $J = \bar{J}$ .  $\square$

**Théorème A.1.8.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Pour tout couple  $(x, y) \in X$  tel que  $x \neq y$ ,

$$]x, y[ \neq \emptyset.$$

2. Pour tout couple  $(x, y) \in X$ , il existe une géodésique  $c$ , définie sur  $[0, d(x, y)]$  telle que  $c(0) = x$  et  $c(d(x, y)) = y$  (*c'est-à-dire,  $(X, d)$  est géodésique*).

*Démonstration.* L'implication 2.  $\Rightarrow$  1. est évidente.

Pour la réciproque, soient  $(x, y) \in X$  tels que  $x \neq y$ . l'ensemble  $E$  des géodésiques partielles  $c$  définies sur un sous-ensemble  $J$  de  $[0, d(x, y)]$  contenant 0 et  $d(x, y)$ , telles que  $c(0) = x$  et  $c(d(x, y)) = y$  et ordonnons-le par la relation de prolongement. L'ensemble  $E$  est non vide, car il contient la géodésique partielle définie sur  $\{0, d(x, y)\}$  et envoyant 0 sur  $x$  et  $d(x, y)$  sur  $y$ . Il est clairement inductif. D'après le lemme de Zorn,  $E$  a un élément maximal,  $c$ . On peut supposer que  $c$  est définie sur un fermé  $J$  de  $[0, d(x, y)]$ . Si  $J \neq [0, d(x, y)]$ , comme il est fermé, il existe  $s, t$  tels que  $s < t$  et  $]s, t[ \subset [0, d(x, y)] \setminus J$ . D'après le Lemme A.1.5,  $c$  se prolonge, ce qui est absurde. Donc  $J = [0, d(x, y)]$ .  $\square$

**Définition A.1.9** (Espace  $\delta$ -géodésique). *Soit  $\delta > 0$ . Un espace métrique  $(X, d)$  est dit  $\delta$ -géodésique s'il vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème A.1.6.*

**Remarque A.1.10.** *Dans [CDH10], on appelle suite  $\delta$ -géodésique dans  $(X, d)$  une suite finie  $(x_1, \dots, x_n)$  telle que  $d(x_1, x_n) + \delta \geq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$ . La terminologie d'espace  $\delta$ -géodésique que nous introduisons ne doit pas porter à confusion : elle ne veut pas dire que tout couple de points peut être relié par une suite  $\delta$ -géodésique (au sens de [CDH10]).*

**Proposition A.1.11.** *Soit  $\delta > 0$ , et soit  $(X, d)$  un espace métrique  $\delta$ -géodésique. Soient  $x, y \in X$ , et  $I$  un intervalle ouvert de longueur strictement supérieure à  $\delta$  inclus dans  $[0, d(x, y)]$ . Alors*

$$]x, y[ \cap \{z \in X \mid d(x, z) \in I\} \neq \emptyset.$$

*Démonstration.* On se sert de la deuxième caractérisation dans le Théorème A.1.6 : il existe une géodésique partielle  $c : J \rightarrow X$  définie sur un  $J$  fini, avec  $0, d(x, y) \in J$ , telle que  $c(0) = x$  et  $c(d(x, y)) = y$ , et telle que  $J$  est  $\delta$ -coborné dans  $[0, d(x, y)]$ . Alors  $I \cap J \neq \emptyset$  par hypothèse. Soit  $t$  dans cette intersection. Alors  $c(t) \in \{z \in X \mid d(x, z) \in I\}$ .  $\square$

Nous retrouvons, dans certains cas, des notions familières.

**Proposition A.1.12.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique où  $d$  est à valeurs entières. Munissons de la structure de graphe simple, non orienté, où  $x$  et  $y$  sont reliés par une arête si et seulement si  $d(x, y) = 1$ . Alors  $(X, d)$  est 1-géodésique si et seulement si  $d$  est la distance combinatoire sur le graphe.*

*Démonstration.* Remarquons que dans un espace métrique où la distance est entière, une géodésique partielle est forcément définie sur une partie de  $\mathbb{Z}$ . Et donc, si  $c : J \rightarrow X$  est une géodésique partielle avec  $J$  contenu et 1-coborné dans un segment  $[0, n]$  et tel que  $\{0, n\} \subset J$ , alors  $J = \{0, \dots, n\}$ . Ainsi, pour tout  $n$ , tout couple de points  $(x, y)$  tel que  $d(x, y) = n$  est relié par une géodésique combinatoire dans le graphe si et seulement s'il est relié par une géodésique partielle  $\{0, \dots, n\} \rightarrow X$ .  $\square$

**Proposition A.1.13.** *Un espace métrique complet est géodésique si et seulement s'il est  $\delta$ -géodésique pour tout  $\delta > 0$ .*

*Démonstration.* Un espace complet  $(X, d)$  est  $\delta$ -géodésique pour tout  $\delta > 0$  si et seulement si pour tout couple  $(x, y) \in X$  tel que  $x \neq y$ ,  $]x, y[ \neq \emptyset$ , et d'après le Théorème A.1.8, si et seulement s'il est géodésique.  $\square$

La proposition suivante démontre qu'un produit d'espaces  $\delta$ -géodésiques est  $\delta$ -géodésique pour la distance  $L^1$ .

**Proposition A.1.14.** *Soit  $\delta > 0$ , et soient  $(X_1, d_1)$  et  $(X_2, d_2)$  deux espaces métriques  $\delta$ -géodésiques. Alors l'espace  $X_1 \times X_2$ , muni de la distance*

$$d := ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

*est  $\delta$ -géodésique aussi.*

*Démonstration.* On se sert de la première caractérisation dans le Théorème A.1.6. Soient  $x := (x_1, x_2), y := (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$  tels que  $d(x, y) > \delta$ , et cherchons  $z \in ]x, y[$ .

Si  $x_1 = x_2$ , alors on a  $d_2(y_1, y_2) > \delta$ , et donc par hypothèse, il existe  $z_2 \in ]y_1, y_2[$ . On pose alors  $z := (x_1, z_2)$  et c'est gagné.

Sinon, posons  $z := (x_2, y_1)$ . Alors on a  $d(x, z) = d_1(x_1, x_2)$  et  $d(z, y) = d_2(y_1, y_2)$ , et alors par hypothèse,  $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$ , et donc  $z \in ]x, y[$ .  $\square$

## A.2 Quelques outils de topologie et d'analyse fonctionnelle

Le lemme suivant est un corollaire du théorème de Riesz-Thorin.

**Lemme A.2.1.** *Soit  $(X, m)$  un espace de probabilité. Soit  $(T_i)_{i \in I}$  une famille d'opérateurs continus  $L^1(X, m) \rightarrow L^1(X, m)$  tels que pour tout  $i \in I$ , la restriction de  $T_i$  à  $L^2(X, m)$  (resp.  $L^\infty(X, m)$ ) induit un opérateur borné auto-adjoint sur  $L^2(X, m)$  (resp. un opérateur continu sur  $L^\infty(X, m)$ ). Supposons que  $\forall i \in I, \|T_i\|_{\infty \rightarrow \infty} \leq M$ . Alors*

$$\forall i \in I, \|T_i\|_{2 \rightarrow 2} \leq M.$$

*Démonstration.* Considérons l'opérateur transposé  $T^*$  de  $(L^1)^* = L^\infty$  dans lui-même. On a donc

$$\|T^*\|_{\infty \rightarrow \infty} = \|T\|_{1 \rightarrow 1}.$$

Mais  $T_2$  est auto-adjoint, et il est facile de voir qu'alors  $T^* = T_\infty$ . Ceci implique que

$$1 \geq \|T^*\|_{\infty \rightarrow \infty} = \|T\|_{1 \rightarrow 1}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Riesz-Thorin, et d'obtenir la borne souhaitée.  $\square$

Le lemme suivant est évident, en se ramenant aux parties réelles et imaginaires, puis aux parties positives et négatives.

**Lemme A.2.2.** *Soit  $(X, \mu)$  un espace de probabilité. Il existe  $C$  tel que*

$$\forall T \in \mathcal{B}(L^2(X)), \quad \forall M, \quad \forall \xi, \eta \in L^2_+(X), \quad |\langle T\xi, \eta \rangle| \leq M\|\xi\|\|\eta\| \Rightarrow \|T\| \leq CM.$$

**Lemme A.2.3.** *Soit  $T = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite uniformément bornée d'opérateurs tels que  $\forall n, m \in \mathbb{N}, T_n T_m = T_m T_n$ . Alors  $T$  a une sous-suite qui converge, pour la topologie faible des opérateurs, vers un opérateur normal, qui commute avec les  $T_n$ .*

**Théorème A.2.4** (Sierpiński). *Si  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  est un espace de probabilité sans atome, alors pour tout  $A \subset X$  mesurable, il existe  $\phi : [0, \mu(A)] \rightarrow \mathcal{B}$  croissante, telle que  $\forall t \in [0, \mu(A)],$   
 $\mu(\phi(t)) = t$ .*

*Démonstration.* L'hypothèse que  $X$  est sans atome veut dire que pour toute partie  $B \subset X$  mesurable telle que  $\mu(B) > 0$ , il existe  $C \subset B$  mesurable telle que  $0 < \mu(C) < \mu(B)$ .

Soit  $A \subset X$  mesurable, telle que  $\mu(A) > 0$  (si  $\mu(A) = 0$ , il suffit de poser  $\phi(0) := A$ ). En appliquant le lemme de Zorn, on obtient une  $\phi : I \rightarrow \mathcal{B}$  où  $I$  est une partie de  $[0, \mu(A)]$ ,  $\phi$  est croissante et  $\forall i \in I, \mu(\phi(i)) = i$ , et qui n'admet pas de prolongement vérifiant également ces propriétés. Montrons que  $I$  est  $[0, \mu(A)]$ , ce qui conclut.

Tout d'abord,  $I$  est fermé. En effet, soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $I$  qui converge vers  $x$ . Montrons que  $x \in I$ . On peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que  $(x_n)_n$  est monotone. Si  $x \notin I$ , définissons  $\tilde{\phi} := I \cup \{x\} \rightarrow \mathcal{B}$  prolongeant  $\phi$ , et en posant  $\tilde{\phi}(x) := \bigcap_n \phi(x_n)$  si  $(x_n)_n$  est décroissante, et  $\phi(x) := \bigcup_n \phi(x_n)$  si  $(x_n)_n$  est croissante. D'après les propriétés de continuité de  $\mu$ ,  $\mu(\phi(x)) = \lim_n x_n = x$ , et d'après les propriétés de monotonie de  $\mu$ ,  $\tilde{\phi}$  est croissante.  $\tilde{\phi}$  est donc un prolongement de  $\phi$  qui vérifie les mêmes propriétés, c'est absurde. Donc  $x \in I$ , et donc  $I$  est fermé.

De plus,  $I$  vérifie  $\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow (\exists c \in I, a < c < b)$  (on dit que l'ordre de  $I$  est dense). En effet, s'il existe  $a, b \in I$  tels que  $a < b$  et  $]a, b[ \cap I = \emptyset$ , alors utilisons l'hypothèse que  $X$  n'a pas d'atome, ce qui fournit une partie  $C \subset \phi(b) \setminus \phi(a)$  de mesure  $0 < \mu(C) < b - a$ . Définissons alors  $\tilde{\phi} : I \cup \{a + \mu(C)\} \rightarrow \mathcal{B}$  prolongeant  $\phi$  et en posant  $\tilde{\phi}(a + \mu(C)) := \phi(a) \cup C$ . Alors  $\mu(\tilde{\phi}(a + \mu(C))) = \mu(\phi(a) \cup C) = a + \mu(C)$ . De plus, d'après les propriétés de monotonie de  $\mu$ ,  $\tilde{\phi}$  est croissante.  $\tilde{\phi}$  est un prolongement de  $\phi$  qui vérifie les mêmes propriétés, c'est absurde. Donc l'ordre de  $I$  est dense.

Donc  $I$  est fermé et son ordre est dense. On a donc  $I = [0, \mu(A)]$ .  $\square$

## A.3 Boréliens d'un produit et produits de boréliens

Dans cette section,  $X$  et  $Y$  sont des espaces topologiques, et  $\mathcal{B}(X)$  et  $\mathcal{B}(Y)$  désignent les tribus des boréliens de  $X$  et de  $Y$ .

**Théorème A.3.1.** *On a l'inclusion de tribus*

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}(X \times Y).$$

*Démonstration.* Pour démontrer cette inclusion, il suffit de démontrer que si  $A$  est un borélien de  $X$ , et si  $B$  en est un de  $Y$ , alors  $A \times B$  en est un de  $X \times Y$ .

Soit  $U$  une partie de  $X$ , et posons

$$Y_U := \{P \subseteq Y \mid U \times P \text{ est un borélien de } X \times Y\}$$

dont on va démontrer que c'est une tribu.

1. Clairement,  $\emptyset \in Y_U$ .
2. Si  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $Y_U$ , on doit démontrer que  $U \times \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$  est un borélien de  $X \times Y$ . Mais ceci est clair puisque  $U \times \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U \times P_n$  qui est une réunion dénombrable de boréliens de  $X \times Y$ .
3. De même, si  $P$  est un élément de  $Y_U$ , il faut démontrer que  $U \times P^c$  est un borélien de  $X \times Y$ , ce qui est clair car  $U \times P^c = (U \times P)^c$ .

En particulier, si  $U$  est un ouvert de  $X$ ,  $Y_U$  contient tous les ouverts de  $Y$  puisque les produits d'ouverts sont des boréliens du produit. Mais comme  $Y_U$  est une tribu sur  $Y$ , et qu'elle contient ses ouverts, elle contient  $\mathcal{B}(Y)$ , de sorte que pour tout ouvert  $U$  de  $X$  et tout borélien  $B$  de  $Y$ ,  $U \times B$  est un borélien de  $X \times Y$ .

Maintenant, on peut définir, par symétrie,  $X_U$  pour une partie  $U$  de  $Y$ . D'après ce que l'on vient de démontrer, si  $B$  est un borélien de  $Y$ , alors  $X_B$  contient tous les ouverts de  $X$ . Comme c'est aussi une tribu sur  $X$ , elle contient tous les boréliens de  $X$ .

Autrement dit, on a démontré que pour tout borélien  $A$  de  $X$  et pour tout borélien  $B$  de  $Y$ ,  $A \times B$  est un borélien de  $X \times Y$ .  $\square$

Il y a un cas important où les deux tribus sont égales.

**Proposition A.3.2.** *Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base d'ouverts de  $X$ . Alors*

$$\sigma(\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{B}(X).$$

*Démonstration.* Tout ouvert  $U$  de  $X$  s'écrit comme la réunion de certains  $U_n$ . Cette réunion étant dénombrable, tout  $U$  est dans la tribu  $\sigma(\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ , ce qui démontre la proposition.  $\square$

**Lemme A.3.3.** *Si  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base dénombrable d'ouverts de  $X$  et si  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en est une de  $Y$ , alors  $(U_n \times V_m)_{n, m \in \mathbb{N}}$  en est une de  $X \times Y$ .*

*Démonstration.* Soit  $O$  un ouvert de  $X \times Y$ , et  $(x, y)$  un point de  $O$ . Il existe  $U$  et  $V$  contenant  $x$  et  $y$  tels que  $U \times V \subseteq O$ . Il existe alors  $n$  et  $m$  tels que  $x \in U_n \subseteq U$  et  $y \in V_m \subseteq V$ , de sorte que  $(x, y) \in U_n \times V_m \subseteq U \times V \subseteq O$ .  $\square$

**Théorème A.3.4.** *Si  $X$  et  $Y$  sont tous deux à base dénombrable, alors*

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y).$$

*Démonstration.* Si  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sont des bases de  $X$  et de  $Y$ , alors en combinant le lemme A.3.3 et la proposition A.3.2, on a que  $\sigma(\{U_n \times V_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{B}(X \times Y)$ . Bien sûr, comme  $\sigma(\{U_n \times V_m \mid n, m \in \mathbb{N}\}) \subseteq \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ , le théorème est démontré.  $\square$

## A.4 Mesures de Hausdorff

### A.4.1 Mesures de Hausdorff, applications continûment conformes

**Définition A.4.1.** Si  $S \subseteq X$ , on note  $\text{diam}(S)$  et on appelle **diamètre** de  $S$  la quantité  $\sup\{d(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in S\}$ .

**Définition A.4.2.** Soit  $\varepsilon > 0$  et  $S \subseteq X$ . On appelle  $\varepsilon$ -**recouvrement** de  $S$  une famille  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de parties de  $X$  telle que

1. pour tout  $i$ ,  $\text{diam}(A_i) \leq \varepsilon$ ,
2. on a  $S \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ .

On note  $\mathcal{R}_\varepsilon^d(S)$  l'ensemble des  $\varepsilon$ -recouvrements de  $S$ .

**Théorème-Définition A.4.3.** On pose, pour  $\varepsilon > 0$  et  $S \subseteq X$ ,

$$H_\varepsilon^{d,\alpha}(S) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_i))^\alpha \mid (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\varepsilon^d(S) \right\}.$$

On pose alors

$$H^{d,\alpha}(S) := \sup_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon^{d,\alpha}(S)$$

et on appelle ce nombre (éventuellement  $+\infty$ ) la **mesure de Hausdorff  $\alpha$ -dimensionnelle** de  $S$ .

Pour tout  $S \subseteq X$ , on a les propriétés suivantes :

1. Si  $\alpha < \alpha'$ , et si  $H^{d,\alpha}(S) < \infty$ , alors  $H^{d,\alpha'}(S) = 0$ .
2. Si  $\alpha < \alpha'$ , et si  $H^{d,\alpha'}(S) > 0$ , alors  $H^{d,\alpha}(S) = +\infty$ .

En particulier, on a

$$\sup\{\alpha \mid H^{d,\alpha}(S) = +\infty\} = \inf\{\alpha \mid H^{d,\alpha}(S) = 0\}$$

et ce nombre, qui est alors l'éventuel seul  $\alpha$  tel que  $H^{d,\alpha}(S)$  soit fini non nul, est appelé **dimension de Hausdorff** de  $S$  et est noté  $\dim_d S$ .

Pour tout  $\alpha$ ,  $H^{d,\alpha}$  est une **mesure** sur la tribu des boréliens de  $X$ .

La mesure de Hausdorff  $\dim_d X$  dimensionnelle est appelée **mesure de Hausdorff** sur  $X$ .

Le lemme suivant est évident si on remarque que dans un espace ultramétrique, le diamètre d'une boule fermée est son rayon.

**Lemme A.4.4.** Si  $X$  est ultramétrique, alors pour tout  $S \subset X$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha > 0$ , on a

$$H_\varepsilon^{d,\alpha}(S) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_i))^\alpha \mid (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\varepsilon^d(S) \text{ et } \forall i, A_i \text{ est une boule fermée} \right\}.$$

Dans cette section, on suppose que  $(X, d)$  est un espace métrique compact, sans points isolés.

**Définition A.4.5** (Application continûment conforme). Soient  $(X, d)$  et  $(Y, d')$  deux espaces métriques. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. Posons maintenant

$$\begin{aligned} Df : X \times X \setminus \{(x, x) \mid x \in X\} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \frac{d'(f(x_1), f(x_2))}{d(x_1, x_2)}. \end{aligned}$$

Comme  $(X, d)$  n'a pas de points isolés,  $X \times X \setminus \{(x, x) \mid x \in X\}$  est dense dans  $X \times X$ , et donc  $Df$  a au plus un prolongement par continuité à  $X \times X$ .

Si  $Df$  se prolonge par continuité à  $X \times X$ , on dit que  $f$  est **continûment conforme**, on appelle  $Df(x, x)$  le **facteur conforme** de  $f$  en  $x$  et on le note  $|f'(x)|$ .

La propriété suivante décrit le comportement du facteur conforme par composition.

**Proposition A.4.6.** *Soient  $(X, d)$ ,  $(Y, d')$  des espaces métriques compacts sans points isolés.*

1. *Si  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  et  $g : (Y, d') \rightarrow (Z, d'')$  sont continûment conformes, alors  $g \circ f$  est continûment conforme, de facteur conforme  $|(g \circ f)'(x)| = |g'(f(x))||f'(x)|$ .*
2. *Si  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  est continûment conforme, alors  $f^{-1}$  est continûment conforme, de facteur conforme  $|(f^{-1})'(y)| = |f'(f^{-1}(y))|$ .*

## A.4.2 Un théorème de changement de variables

Si  $f : X \rightarrow Y$  est continûment conforme, que dire des images des mesures de Hausdorff par  $f$ ? C'est l'objet de cette section. Nous commençons par nous restreindre à des applications lipschitziennes.

**Proposition A.4.7.** *Soit  $\lambda > 0$  et soit  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  une application  $\lambda$ -lipschitzienne.*

*Alors pour tout  $\epsilon > 0$  et toute partie  $S \subseteq X$ , on a*

$$\mathcal{R}_\epsilon^d(S) \subseteq f^{-1}\left(\mathcal{R}_{\lambda\epsilon}^{d'}(f(S))\right)$$

*et pour tout  $\alpha$ ,*

$$H_{\lambda\epsilon}^{d', \alpha}(f(S)) \leq \lambda^\alpha H_\epsilon^{d, \alpha}(S).$$

*Démonstration.* Si  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\epsilon^d(S)$ , alors il est clair que  $(f(A_i))_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_{\lambda\epsilon}^{d'}(f(S))$ . Ceci démontre que  $\mathcal{R}_\epsilon^d(S) \subseteq f^{-1}(\mathcal{R}_{\lambda\epsilon}^{d'}(f(S)))$ . De plus, si  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\epsilon^d$ , alors on a

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(f(A_i)))^\alpha \leq \lambda^\alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_i))^\alpha,$$

et donc

$$H_{\lambda\epsilon}^{d', \alpha}(f(S)) \leq \lambda^\alpha H_\epsilon^{d, \alpha}(S).$$

□

**Proposition A.4.8.** *Soit  $\lambda > 0$  et  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  une application  $\lambda$ -lipschitzienne surjective. Alors, pour tout  $\alpha$ , on a*

$$H^{d', \alpha} \leq \lambda^\alpha f_* H^{d, \alpha}.$$

*Démonstration.* Soit  $S' \subset Y$  et  $S := f^{-1}(S')$ . Alors  $f(S) = S'$ . Soit  $\epsilon > 0$ . D'après la proposition précédente,

$$\begin{aligned} H_{\lambda\epsilon}^{d', \alpha}(S') &= H_{\lambda\epsilon}^{d', \alpha}(f(S)) \\ &\leq \lambda^\alpha H_\epsilon^{d, \alpha}(S) \\ &= \lambda^\alpha H_\epsilon^{d, \alpha}(f^{-1}(S')) \\ &= \lambda^\alpha f_* H_\epsilon^{d, \alpha}(S'). \end{aligned}$$

Il suffit alors de faire tendre  $\epsilon$  vers 0.

□

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant.

**Théorème A.4.9** (Changement de variables pour les applications continûment conformes et bijectives). *Soit  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  une application continûment conforme bijective. Pour tout  $\alpha$ , si  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable, on a*

$$\int_X (g \circ f)(x) |f'(x)|^\alpha dH^{d, \alpha}(x) = \int_Y g(y) dH^{d', \alpha}(y).$$

**Lemme A.4.10.** *Soit  $\epsilon \in ]0, \inf_X |f'|[$ . Il existe une partition finie  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $X$  telle que*

1. *pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\sup_{X_i} |f'| - \inf_{X_i} |f'| \leq \epsilon$ ;*
2. *pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , pour tous  $x_1, x_2 \in X_i$ ,*

$$0 < \inf_{X_i} |f'| - \epsilon \leq \frac{d'(f(x_1), f(x_2))}{d(x_1, x_2)} \leq \sup_{X_i} |f'| + \epsilon.$$

*Démonstration.* L'application  $Df : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est continue, et donc uniformément continue car  $X \times X$  est compact. Soit donc  $\epsilon$ . Il existe  $\delta$  tel que pour tous  $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in X$ , si  $d(x_1, x'_1) < \delta$  et  $d(x_2, x'_2) < \delta$ , alors  $|Df(x_1, x_2) - Df(x'_1, x'_2)| < \epsilon$ .

Donc pour tous  $x_1, x_2$  tels que  $d(x_1, x_2) < \delta$ , on a  $|Df(x_1, x_1) - Df(x_2, x_2)| = ||f'(x_1)| - |f'(x_2)|| < \epsilon$ .

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  un  $\delta$ -recouvrement ouvert de  $X$ . Quitte à extraire, on peut supposer que  $I = \{1, \dots, n\}$  pour un certain  $n$ , et quitte à passer à la partition engendrée, on peut supposer que  $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  est une partition de  $X$ .

Pour cette partition, la condition 1) du lemme est vérifiée. Démontrons la deuxième : si  $x_1, x_2 \in X_i$ , alors d'après la définition de  $\delta$ , on a  $|Df(x_1, x_2) - |f'(x_1)|| \leq \epsilon$ , d'où  $Df(x_1, x_2) \leq |f'(x_1)| + \epsilon \leq \sup_{X_i} |f'| + \epsilon$ . L'autre côté se démontre de la même manière.  $\square$

*Démonstration du théorème.* On va traiter le cas où  $g$  est l'indicatrice de  $S \subseteq Y$ , puisqu'il entraîne le théorème.

Soit  $\epsilon$ , et soit  $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  une partition comme dans le lemme. Posons  $Y_i = f(X_i)$ ,  $f_i = f|_{X_i}$ ,  $d_i = d|_{X_i}$ ,  $d'_i = d'|_{Y_i}$  pour tout  $i$ .

Comme  $f_i : (X_i, d_i) \rightarrow (Y_i, d'_i)$  est une application  $(\sup_{X_i} |f'| + \epsilon)$ -lipschitzienne, on a

$$H^{d'_i, \alpha} \leq (\sup_{X_i} |f'| + \epsilon)^\alpha f_{i*} H^{d_i, \alpha}.$$

Comme  $(f_i)^{-1}$  est  $(\inf_{X_i} |f'| - \epsilon)^{-1}$ -lipschitzienne, on a

$$(\inf_{X_i} |f'| - \epsilon)^\alpha H^{d_i, \alpha} \leq (f_i)_*^{-1} H^{d'_i, \alpha}$$

et donc

$$(\inf_{X_i} |f'| - \epsilon)^\alpha f_{i*} H^{d_i, \alpha} \leq H^{d'_i, \alpha}$$

Posons  $S_i = S \cap Y_i$ . On a donc

$$\begin{aligned} H^{d'_i, \alpha}(S_i) &\geq (\inf_{X_i} |f'| - \epsilon)^\alpha f_{i*} H^{d_i, \alpha}(S_i) \\ &= \int_{Y_i} (\inf_{X_i} |f'| - \epsilon)^\alpha df_{i*} H^{d_i, \alpha}(y) \\ &\geq \int_{Y_i} (|f'(f^{-1}(y))| - 2\epsilon)^\alpha df_{i*} H^{d_i, \alpha}(y) \end{aligned}$$



et en raisonnant de manière symétrique, on obtient

$$H^{d_i, \alpha}(S_i) \leq \int_{Y_i} (|f'(f^{-1}(y))| + 2\epsilon)^\alpha \, df_{i*} H^{d_i, \alpha}(y).$$

En sommant sur  $i$  et en mettant ensemble les deux inégalités que l'on vient d'obtenir, on obtient

$$\int_S (|f'(f^{-1}(y))| - 2\epsilon)^\alpha \, df_* H^{d, \alpha}(y) \leq H^{d', \alpha}(S) \leq \int_S (|f'(f^{-1}(y))| + 2\epsilon)^\alpha \, df_* H^{d, \alpha}(y)$$

Par convergence dominée, on obtient, en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0,

$$\int_S |f'(f^{-1}(y))|^\alpha \, df_* H^{d, \alpha}(y) = H^{d', \alpha}(S)$$

ou encore

$$\int_{f^{-1}(S)} |f'(x)|^\alpha \, dH^{d, \alpha}(x) = H^{d', \alpha}(S).$$

Ainsi, comme  $g = \mathbf{1}_S$ , on a bien

$$\begin{aligned} \int_X (g \circ f)(x) |f'(x)| \, dH^{d, \alpha}(x) &= \int_X (\mathbf{1}_S \circ f)(x) |f'(x)| \, dH^{d, \alpha}(x) \\ &= \int_X \mathbf{1}_{f^{-1}(S)}(x) |f'(x)| \, dH^{d, \alpha}(x) \\ &= \int_{f^{-1}(S)} |f'(x)| \, dH^{d, \alpha}(x) \\ &= H^{d', \alpha}(S) \\ &= \int_Y g(y) \, dH^{d', \alpha}(y). \end{aligned}$$

□

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire A.4.11.** *Soient  $d, d'$  deux distances sur  $X$  et supposons que*

$$\text{Id}_X : (X, d) \rightarrow (X, d')$$

*est continûment conforme, de facteur conforme  $c : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ . Alors, pour tout  $\alpha$ , si  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable, on a*

$$\int_X g(x) c(x)^\alpha \, dH^{d, \alpha}(x) = \int_X g(x) \, dH^{d', \alpha}(x),$$

*ou, en d'autres termes,*

$$\forall x \in X, \quad \frac{dH^{d', \alpha}}{dH^{d, \alpha}}(x) = c(x)^\alpha.$$

*En particulier,  $d$  et  $d'$  ont même dimension de Hausdorff.*

# Bibliographie

- [AK] V. I. Arnol'd and A. L. Krylov. Uniform distribution of points on a sphere and certain ergodic properties of solutions of linear ordinary differential equations in a complex domain. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 148 :9–12.
- [BC74] C. Berg and J. P. R. Christensen. Sur la norme des opérateurs de convolution. *Inventiones math*, 23 :173–178, 1974.
- [BdLHV08] Bachir Bekka, Pierre de La Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan's Property (T)*, volume 11 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, 2008.
- [Ber09] Marcel Berger. *Géométrie vivante, ou l'échelle de Jacob*. 2009.
- [BG] J. Bourgain and A. Gamburd. A spectral gap theorem in  $su(d)$ . *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(5) :1455–1511.
- [BG17] U. Bader and T. Gelander. Equicontinuous actions of semisimple groups. *Groups Geom. Dyn.*, 2017.
- [BH99] M. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer, 1999.
- [BM00] B. Bekka and M. Mayer. *Ergodic Theory and Topological Dynamics of Group Actions of Homogeneous Spaces.*, volume Lecture Notes Series 269. Cambridge University Press, 2000.
- [BM11] Uri Bader and Roman Muchnik. Boundary unitary representations - Irreducibility and rigidity. *Journal of Modern Dynamics*, 5(1) :49–69, 2011.
- [BM17] Adrien Boyer and Dustin Mayeda. Equidistribution, ergodicity and irreducibility associated with Gibbs measures. *Comentarii Mathematici Helvetici*, 92 :349–387, 2017.
- [Bol71] Ludwig Boltzmann. *K. Akademie der Wissenschaften (Wien)*, 679, 1871.
- [Bou95] Marc Bourdon. Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace. *Enseign. Math*, 2(2) :63–102, 1995.
- [Boy16] A. Boyer. Equidistribution, ergodicity and irreducibility in CAT(-1) spaces. *Geometry, Groups, Dynamics, to appear*, 2016.
- [BPL17] Adrien Boyer and Antoine Pinochet Lobos. An ergodic theorem for the quasi-regular representation of the free group. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, 24 :243–255, 2017.
- [BPLP19a] A. Boyer, A. Pinochet Lobos, and C. Pittet. All lattices inherit the radial rapid decay property. *bientot sur arXiv*, 2019.
- [BPLP19b] A. Boyer, A. Pinochet Lobos, and C. Pittet. Radial rapid decay does not imply rapid decay. *bientot sur arXiv*, 2019.

- [BvdGHZ] Jan Hendrik Bruinier, Gerard van der Geer, Günter Harder, and Don Zagier. The 1-2-3 of modular forms. pages x+266. Lectures from the Summer School on Modular Forms and their Applications held in Nordfjordeid, June 2004; Edited by Kristian Ranestad.
- [Cas14] Bill Casselman. The Bruhat-Tits tree of  $SL(2)$ . 2014.
- [CdCL<sup>+</sup>11] R. Cluckers, Y. de Cornulier, N. Louvet, R. Tessler, and A. Valette. The Howe-Moore property for real and p-adic groups. *Math. Scand.*, 109(2) :201–224, 2011.
- [CDH10] Indira Chatterji, Cornelia Drutu, and Frédéric Haglund. Kazhdan and haagerup properties from the median viewpoint. *Adv. of Math.*, 225 :882–921, 2010.
- [CdV] Yves Colin de Verdière. Distribution de points sur une sphère (d’après lubotzky, phillips et sarnak). *Astérisque*, (177-178) :Exp. No. 703, 83–93. Séminaire Bourbaki, Vol. 1988/89.
- [Cha17] Indira Chatterji. Introduction to the Rapid Decay property. *Contemporary Mathematics*, 671 :55–72, 2017.
- [Cio17] Corina Ciobotaru. A unified proof of the Howe-Moore property. *Journal of Lie Theory*, 2017.
- [CK05] Indira Chatterji and Ruane. K. Some geometric groups with Rapid Decay. *GAF*, 15(2) :311–339, 2005.
- [CLB18] P.E. Caprace and A. Le Boudec. Bounding the covolume of lattices in products. <https://arxiv.org/pdf/1805.04469.pdf>, 2018.
- [Clo] L. Clozel. Automorphic forms and the distribution of points on odd-dimensional spheres. *Israel J. Math.*, 132 :175–187.
- [COU] Laurent Clozel, Hee Oh, and Emmanuel Ullmo. Hecke operators and equidistribution of hecke points. *Invent. Math.*, 144(2) :327–351.
- [CPSC07] Indira Chatterji, Christophe Pittet, and Laurent Saloff-Coste. Connected Lie groups and property RD. *Duke Mathematical Journal*, 137 :511–536, 2007.
- [Dal99] F. Dal’bo. Remarques sur le spectre des longueurs d’une surface et comptages. *Bol. Soc. Bras. Math.*, 30(2) :199–221, 1999.
- [Del] Pierre Deligne. La conjecture de weil. i. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (43) :273–307.
- [DG] Artem Dudko and Rostislav Grigorchuk. On spectra of koopman, groupoid and quasi-regular representations. *J. Mod. Dyn.*, 11 :99–123.
- [dLH] Pierre de La Harpe. On simplicity of reduced  $C^*$ -algebras of groups. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 39(1) :1–26.
- [DSV] Giuliana Davidoff, Peter Sarnak, and Alain Valette. *Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs*, volume 55 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Fin] Vladimir Finkelshtein. Diophantine properties of groups of toral automorphisms. *arXiv :1607.06019*.
- [FTP82] A. Figà-Talamanca and M. A. Picardello. Spherical functions and harmonic analysis on free groups. *J. Functional Anal.*, 47 :281–304, 1982.

- [FTP83] A. Figà-Talamanca and M. A. Picardello. Harmonic analysis on free groups. *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 87, 1983.
- [Gar14] Ł. Garncarek. Boundary representations of hyperbolic groups. *arXiv :1404.0903*, 2014.
- [Gar16] Ł. Garncarek. Mini-course : Property of Rapid Decay. *arXiv :1603.06730*, 2016.
- [GG] Ofer Gabber and Zvi Galil. Explicit constructions of linear-sized super-concentrators. *J. Comput. System Sci.*, 22(3) :407–420. Special issued dedicated to Michael Machtey.
- [GN] Alexander Gorodnik and Amos Nevo. Quantitative ergodic theorems and their number-theoretic applications. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 52(1) :65–113.
- [GN10] Alexander Gorodnik and Amos Nevo. *The ergodic theory of lattice subgroups*. Princeton University Press, 2010.
- [Haa79] Uffe Haagerup. An example of a nonnuclear  $C^*$ -algebra which has the metric approximation property. *Invent. Math.*, 50 :273–293, 1979.
- [Her70] C. Herz. Sur le phénomène de Kunze-Stein. *C.R. Acad. Sci. Paris Séri. A-B*, 271 :A491–A493, 1970.
- [HM79] Roger E. Howe and Calvin C. Moore. Asymptotic properties of unitary representations. *Journal of Functional Analysis*, 32 :72–96, 1979.
- [Jol90] P. Jolissaint. Rapidly decreasing functions in reduced  $C^*$ -algebras of groups. *Trans. Amer. Math. Soci.*, 317 :167–196, 1990.
- [Kesa] Harry Kesten. Full banach mean values on countable groups. *Math. Scand.*, 7 :146–156.
- [Kesb] Harry Kesten. Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92 :336–354.
- [Kuh] M. Gabriella Kuhn. Amenable actions and weak containment of certain representations of discrete groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(3) :751–757.
- [Laf00] Vincent Lafforgue. A proof of property (RD) for discrete cocompact subgroups of  $SL_3(\mathbb{R})$  and  $SL_3(\mathbb{C})$ . *Journal of Lie Theory*, 10 :255–267, 2000.
- [LMR00] Alexander Lubotzky, Shahar Mozes, and M.S. Raghunathan. The word and Riemannian metrics on lattices of semisimple groups. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Scientifiques*, 91 :5–53, 2000.
- [LPS] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak. Hecke operators and distributing points on  $\mathbb{S}^2$ . ii. *Comm. Pure Appl. Math.*, 40(4) :401–420.
- [LPS86] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak. Hecke operators and distributing points on the sphere. I. *Comm. Pure Applied Math.*, 39 :S149–S186, 1986.
- [Lub] Alexander Lubotzky. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel. With an appendix by Jonathan D. Rogawski ; Reprint of the 1994 edition.
- [Mar91] G. A. Margulis. *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*. Springer-Verlag, 1991.

- [Mat95] Peter Mathé. The optimal error of monte carlo integration. *Journal of Complexity*, 11 :394–415, 1995.
- [Nov] E. Novak. *Deterministic and Stochastic Error Bounds in Numerical Analysis*, volume 1349 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- [Per09] M. Perrone. Radial rapid decay property for cocompact lattices. *Journal of Functional Analysis*, 256 :3471–3489, 2009.
- [Pie] J.P. Pier. *Amenable Locally Compact Groups*.
- [PL15] A. Pinochet Lobos. Ergodicité en courbure négative. *Mémoire de M2*, 2015.
- [PL19a] Antoine Pinochet Lobos. On a generalization of the Howe-Moore property. *arXiv :1904.00953*, 2019.
- [PL19b] Antoine Pinochet Lobos. On the optimality of the Monte-Carlo estimator. *arXiv :1903.06006*, 2019.
- [PLP18] Antoine Pinochet Lobos and Christophe Pittet. The exact convergence rate in the ergodic theorem of Lubotzky-Phillips-Sarnak. *arXiv :1805.05261*, 2018.
- [Rob03] T. Roblin. *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*. Mémoires de la SMF 95, 2003.
- [Ser08] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Cambridge University Press, 2008.
- [Sha] Yehuda Shalom. Random ergodic theorems, invariant means and unitary representation. pages 273–314.
- [Sha00] Y. Shalom. Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group. *Annals of Mathematics. Second Series*, 152(1) :113–182, 2000.
- [Sie22] W. Sierpiński. Sur les fonctions d'ensemble additives et continues. *Fundamenta Mathematicae*, 3 :240–246, 1922.
- [Str72] K. Stromberg. An elementary proof of Steinhaus's theorem. *Proceedings of The American Mathematical Society*, 36 :308, 1972.
- [TW] J.F. Traub and H. Woźniakowski. *A General Theory of Optimal Algorithms*. Academic Press, New York.
- [Val97] A. Valette. On the Haagerup inequality and groups acting on  $\tilde{A}_n$ -buildings. *Annales de l'institut Fourier*, 47(4) :1195–1208, 1997.
- [Val02] Alain Valette. *An introduction to the Baum-Connes conjecture. From notes taken by Indira Chatterji, with an appendix by Guido Mislin*. Lecture notes in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, 2002.
- [Wal] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, New York.
- [WM15] David Witte Morris. *Introduction to arithmetic groups*. <https://arxiv.org/src/math/0106063/anc/>, 2015.
- [Zim84] R. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*. Birkhäuser, 1984.