Impact sur le pont mouillé d'un navire SWATH pour la maintenance des éoliennes offshore

Antoine Morvan

▶ **To cite this version:**

Antoine Morvan. Impact sur le pont mouillé d'un navire SWATH pour la maintenance des éoliennes offshore. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. ENSTA Bretagne - École nationale supérieure de techniques avancées Bretagne, 2019. Français. NNT : 2019ENTA0003 . tel-02533649

HAL Id: tel-02533649

https://theses.hal.science/tel-02533649

Submitted on 6 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DE TECHNIQUES AVANCEES BRETAGNE
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 602
Sciences pour l'Ingénieur

Spécialité : Fluides, Structures et Interactions

Par :

Antoine Morvan

Impact sur le pont mouillé d'un navire *SWATH* pour la maintenance des éoliennes *offshore*

Thèse présentée et soutenue à Brest le 19 Février 2019
Unité de recherche : Institut de Recherche Dupuy de Lôme UMR CNRS 6027

Composition du Jury :

Président :	
Alexander KOROBKIN	Professeur, University of East Anglia, Norwich
Rapporteurs :	
Tatyana KHABAKHPASHEVA	Professeur, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk
M'hamed SOULI	Professeur, Université Lille 1, Lille
Examinateur :	
Nicolas JACQUES	Maître de Conférences HDR, ENSTA-Bretagne, IRDL, Brest
Directeur de thèse :	
Yves-Marie SCOLAN	Professeur de l'ENSTA-Bretagne HDR, IRDL, Brest

Thèse de Doctorat de l'ENSTA-Bretagne

sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

ÉCOLE DOCTORALE n°602 : Sciences Pour l'Ingénieur

Mention :

Sciences Pour l'Ingénieur

Spécialité :

Fluides, Structures et Interactions

Proposée par :

Antoine MORVAN

Impact sur le pont mouillé d'un navire SWATH pour la maintenance d'éoliennes *offshore*

Soutance prévue le 19 Février 2019 devant le jury composé de :

Mme Tatyana Khabakhpasheva	Lavrentyev Institute of Hydrodynamics	*Rapporteur*
M. M'hamed Souli	Université Lille 1	*Rapporteur*
M. Alexander Korobkin	University of East Anglia	*Examinateur*
M. Nicolas Jacques	ENSTA-Bretagne	*Examinateur*
M. Yves-Marie Scolan	ENSTA-Bretagne	*Directeur/Encadrant*

Institut de Recherche Dupuy de Lôme UMR CNRS 6027

ENSTA-Bretagne

2 Rue Francois Verny, 29806 Brest Cedex 9

Á ma famille

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Yves-Marie Scolan qui m'a permis d'aller jusqu'au bout de cette thèse de doctorat.

Je remercie tout particulièrement Nicolas Jacques pour son temps passé à m'initier au logiciel Abaqus et nos discussions sur l'aspect numérique de ce travail.

Je voudrais aussi témoigner toute ma reconnaissance à mes fantastiques collègues du laboratoire qui sans nul doute se reconnaîtront. Sans vous cela aurait été très compliqué pour moi d'arriver au bout de ces dures années.

De plus, je désire exprimer ma gratitude à l'ensemble de l'équipe Fluides, Structures et Interactions de l'ENSTA-Bretagne pour leur gentillesse. Notamment les enseignants-chercheurs pour leurs précieux conseils durant la préparation de ma soutenance.

Pour terminer, je remercie ma famille et mes amis pour leur patience et leur soutien durant cette difficile période de ma vie. Un grand merci à vous tous.

Table des matières

1 Introduction **15**
- 1.1 Contexte général . . . 16
- 1.2 État de l'art des modèles d'impact hydrodynamique . . . 18
  - 1.2.1 Le modèle de Wagner . . . 19
  - 1.2.2 Extension du modèle de Wagner . . . 33
  - 1.2.3 Approches Numériques . . . 39
  - 1.2.4 Impact hydrodynamique et vague . . . 40
- 1.3 Orientation du mémoire . . . 42

2 Approche analytique **43**
- 2.1 Paramétrage du problème avec houle d'Airy . . . 43
  - 2.1.1 Paramétrage géométrique . . . 43
  - 2.1.2 Problème aux limites mixte linéarisé correspondant . . . 45
- 2.2 Modèles asymptotiques d'impact sur houle d'Airy monochromatique . . . 47
  - 2.2.1 Modèles asymptotiques au voisinage de la crête et du creux . . . 48
  - 2.2.2 Modèles asymptotiques au voisinage du milieu de la pente de la vague 53
  - 2.2.3 Conclusion sur l'établissement des modèles asymptotiques . . . 61
- 2.3 Modèle non-asymptotique semi-analytique . . . 62
  - 2.3.1 Calcul des corrections mouillées . . . 62
  - 2.3.2 Potentiel des déplacements . . . 63
  - 2.3.3 Potentiel des vitesses . . . 64
  - 2.3.4 Conclusions sur l'établissement du modèle non-asymptotique . . . 65
- 2.4 Ajout d'une vitesse d'avance horizontale . . . 65
  - 2.4.1 Nouveau paramétrage géométrique pour la parabole . . . 66
  - 2.4.2 Nouvelle condition de Neumann . . . 67
  - 2.4.3 Modèles asymptotiques avec vitesse d'avance . . . 67
  - 2.4.4 Modèle non-asymptotique semi-analytique avec vitesse d'avance . . . 73
  - 2.4.5 Conclusion sur l'ajout d'une vitesse d'avance . . . 75
- 2.5 Pressions et efforts hydrodynamiques . . . 76
  - 2.5.1 Efforts de première approximation . . . 76
  - 2.5.2 Pression maximale aux points de contact . . . 76
  - 2.5.3 Formulations en pression . . . 77
  - 2.5.4 Étude des variations temporelles et spatiales de la pression . . . 80
  - 2.5.5 Intégration spatiale des champs de pression . . . 84

3 Étude des modèles analytiques **85**
- 3.1 Préambule . . . 85
  - 3.1.1 Définition des configurations d'impact hydrodynamiques . . . 86
  - 3.1.2 Choix de la vitesse verticale d'impact . . . 86

3.2 Comparaison des modèles asymptotiques au modèle non-asymptotique . . . 88
3.2.1 Asymptotiques contre Non-Asymptotique : sans vitesse d'avance . . 88
3.2.2 Asymptotiques contre Non-Asymptotique : avec vitesse d'avance . . 102
3.2.3 Conclusion sur la comparaison des modèles avec et sans vitesse d'avance . . . 109
3.3 Détermination des configurations dimensionnantes . . . 110
3.3.1 Configurations dimensionnantes sans vitesse d'avance . . . 110
3.3.2 Configurations dimensionnantes avec vitesse d'avance . . . 116
3.3.3 Conclusion sur la configuration d'impact engendrant les efforts hydrodynamique les plus intenses . . . 121
3.4 Effet de l'amplitude de la houle et de la vitesse de phase . . . 122
3.4.1 Sans vitesse d'avance . . . 122
3.4.2 Avec vitesse d'avance . . . 128
3.4.3 Influence de la vitesse d'avance sur l'effet de l'amplitude . . . 131
3.4.4 Conclusion sur l'effet de l'amplitude de la houle . . . 132
3.5 Variations temporelle et spatiale des champs de pression pour les modèles asymptotiques . . . 133
3.5.1 Variations temporelle et spatiale pour des impacts au niveau de la crête et du creux . . . 133
3.5.2 Variations temporelle et spatiale pour des impacts au niveau du milieu de la pente de la houle d'Airy . . . 137
3.5.3 Conclusion sur les variations temporelle et spatiale des champs de pression . . . 138
3.6 Pression composite pour les modèles asymptotiques . . . 140
3.6.1 Formulation composite pour des impacts avec et sans vitesse d'avance au niveau de la crête . . . 140
3.6.2 Formulation composite pour des impacts avec et sans vitesse d'avance au niveau du milieu . . . 142
3.6.3 Formulation composite pour des impacts avec et sans vitesse d'avance au niveau du creux . . . 144
3.6.4 Conclusion sur la formulation composite pour des configurations d'impact sur houle d'Airy . . . 146
3.7 Conclusion sur le chapitre 3 . . . 147

4 Approche numérique **149**
4.1 Présentation du modèle modèle numérique . . . 150
4.1.1 Dimensions du modèle numérique . . . 150
4.1.2 Modélisation de l'impact hydrodynamique . . . 150
4.2 Couplage Euler-Lagrange (CEL) . . . 151
4.2.1 Partie Lagrangienne : la parabole . . . 151
4.2.2 Partie Eulérienne : le fluide . . . 152
4.2.3 Intéraction entre les domaines Eulérien et Lagrangien . . . 154
4.3 Convergence en maillage et lissage des signaux des efforts hydrodynamiques 155
4.3.1 Convergence en maillage pour un impact sur une surface libre plane 155
4.3.2 Lissage et interpolation des signaux d'efforts hydrodynamiques . . . 157
4.3.3 Corrections de surface mouillée numériques . . . 159
4.4 Modélisation d'une houle d'Airy régulière sous Abaqus . . . 160
4.4.1 Pour un impact au niveau de la crête ou du creux . . . 160
4.4.2 Pour un impact au niveau du milieu . . . 161
4.4.3 Cinématique de la houle d'Airy . . . 162
4.5 Comparaison des efforts hydrodynamiques numérique et semi-analytique . 163

4.5.1 Simulations sans vitesse d'avance de la parabole 163
4.5.2 Simulations avec vitesse d'avance de la parabole 167
4.5.3 Comparaison qualitative des corrections des surface mouillée 170
4.5.4 Champs de pression obtenus au moyen du couplage CEL 172
4.6 Conclusion sur l'approche numérique 175

5 Perspectives **177**
5.1 Les perspectives en relation avec les modèles analytiques et semi-analytiques 177
5.2 Les perspectives en relation avec le modèle numérique 178
5.3 Les perspectives en relation avec une étude expérimentale 178

A Démonstrations mathématiques et variables **179**
A.1 Modèles d'impact au voisinage de la crête et du creux 179
A.1.1 Changements de variables pour le modèle d'impact au voisinage de la crête 179
A.1.2 Changements de variables pour le modèle d'impact au voisinage du creux 180
A.1.3 Dérivées temporelle et spatiale du potentiel des vitesses associé aux modèles d'impact près de la crête et du creux 180
A.2 Modèle d'impact au voisinage du milieu de la pente 181
A.2.1 Calcul des conditions de Wagner pour le modèle du 3^e ordre 181
A.2.2 Calcul du potentiel des déplacements 182
A.2.3 Vitesses d'expansion de surface mouillée pour le modèle d'impact hydrodynamique au voisinage du milieu de la pente pour le modèle du 3^e ordre 184
A.2.4 Accélération d'expansion de surface mouillée pour le modèle d'impact hydrodynamique au voisinage du milieu de la pente pour le modèle du 3^e ordre 186
A.2.5 Dérivées temporelle et spatiale du potentiel des vitesses associé aux modèles d'impact au voisinage du milieu de la pente 187
A.3 Modèle d'impact non-asymptotique 188
A.3.1 Calcul des corrections de surface mouillée 188
A.3.2 Calcul du potentiel des déplacements 189
A.3.3 Vitesses d'expansion de surface mouillée pour le modèle d'impact hydrodynamique non-asymptotique 192
A.3.4 Accélération d'expansion de surface mouillée pour le modèle d'impact hydrodynamique non-asymptotique 193
A.4 Résultats intégraux 194
A.4.1 Intégrale de Type Glauert 194
A.4.2 Transformation d'Hilbert 195
A.5 Démonstration pour la pression 195
A.5.1 Pression MLM avec vitesse d'avance 195
A.5.2 Raccordement asymptotique pour les modèles d'impact au voisinage de la crête, du creux et au voisinage du milieu de la pente au 1^{er} order 196
A.6 Configurations d'impact hydrodynamique de référence 198
A.6.1 Impact hydrodynamique d'une parabole sur une surface libre plane et au repos sans vitesse d'avance 198
A.6.2 Impact hydrodynamique d'une parabole sur une surface libre plane et au repos avec vitesse d'avance 200

B Annexes : Comparaisons des modèles analytiques et semi-analytiques 203
B.1 Critère de Michell . . . 203
B.1.1 Amplitude maximale à C fixée . . . 203
B.1.2 Amplitude maximale à T fixée . . . 203
B.2 Choix de la vitesse verticale d'impact . . . 204
B.3 Définition des écarts relatifs . . . 205
B.3.1 Écarts relatifs entre les modèles asymptotiques et le modèle non-asymptotique . . . 205
B.3.2 Écarts relatif par rapport à un modèle de référence . . . 206
B.4 Détermination des pressions maximales MLM . . . 206
B.5 Définition de la RMSE . . . 207
B.6 Figures comparaisons des modèles asymptotiques au modèle-non asymptotique avec vitesse d'avance . . . 208
B.6.1 Pour un impact au niveau de la crête avec vitesse d'avance . . . 208
B.6.2 Pour un impact au niveau du creux avec vitesse d'avance . . . 209
B.6.3 Pour un impact au niveau du milieu avec vitesse d'avance . . . 210
B.7 Influence de la vitesse d'avance sur les efforts hydrodynamiques . . . 211
B.8 Variations temporelle et spatiale des champs de pression pour les modèles asymptotiques . . . 212

C Annexes : Abaqus 215
C.1 Rafinement Adaptatif de maillage (AMR) . . . 215
C.2 Extraction des corrections de surface mouillée numériques . . . 216

D Nomenclatures 217
D.1 Nomenclature : Chapitre 1 . . . 217
D.2 Nomenclature : Chapitre 2 . . . 218
D.3 Nomenclature : Chapitre 3 . . . 222

Table des figures

1.1 Vue d'artiste du navire WindKeeper extraire de la brochure promotionnelle : [CNIM, 2015] . . . 15
1.2 Schéma représentant la modélisation bidimensionnelle du pont mouillée du SWATH - En rouge le pont mouillée a. Dièdre b. Un profil concave c. Parabole 17
1.3 Les modèles d'impacts hydrodynamiques : en bleu la surface libre, en pointillés noirs et bleus la surface mouillée, en noir la surface mouillée linéarisée 18
1.4 a) Etat initial de l'impact hydrodynamique selon le modèle de Wagner avec l'angle mort β b) Schéma de l'impact hydrodynamique du pont mouillée d'un navire SWATH pour une carène de type dièdre symétrique . . . 19
1.5 Schéma de paramétrage du modèle de Wagner non-linéarisé, le corps solide gris symbolise un pont mouillé de navire SWATH . . . 20
1.6 Schéma de paramétrage du modèle de Wagner linéarisé . . . 22
1.7 Schéma de paramétrage du modèle de Wagner dissymétrique non-linéarisé . 24
1.8 Schéma de paramétrage du modèle de Wagner dissymétrique linéarisé . . . 24
1.9 Schéma du modèle 3D Paraboloide elliptique : a. Domaine physique b. Domaine linéarisé de Wagner : SOURCE . . . 26
1.10 Schéma et paramétrage de $SM(t)$, projection orthogonale de la surface mouillée d'un paraboloïde elliptique . . . 27
1.11 Maquette avec instrumentation . . . 28
1.12 Coque utilisée pour la campagne expérimentale . . . 29
1.13 Image du dispositif à un instant t de l'impact . . . 29
1.14 Photo à un intant t de l'impact hydrodynamique . . . 29
1.15 Photo après traitement d'une image permettant de mesurer a et b . . . 29
1.16 Comparaison de mesures expérimentales et d'un modèle analytique en terme d'expansion de surface mouillée pour une coque de type paraboloïde elliptique . . . 29
1.17 Comparaison de mesures expérimentales et d'un modèle analytique en terme d'efforts hydrodynamiques pour une coque de type paraboloïde elliptique . . . 30
1.18 Schéma de paramétrage cylindrique du modèle de Wagner axisymétrique . 31
1.19 Schéma de principe pour le modèle de calcul de pression composite . . . 34
1.20 Schéma du domaine interne àprès transformation conforme pour obtenir δ et V_j . . . 35

2.1 Configuration initiale $t = 0\,s$, les échelles verticale et horizontale ne sont pas identiques . . . 44
2.2 Schéma représentant l'angle β pour l'impact symétrique d'un dièdre sur une surface libre plane. En rouge le point d'impact initial. En vert la parabole et en bleu la surface libre non-déformée à un instant t . . . 45

2.3 Schéma représentant les angles β_i, ici $i = 1, 2$ pour l'impact dissymétrique d'une parabole sur une surface libre non plane. En rouge le point d'impact initial. En vert la parabole et en bleu la surface libre non-déformée à un instant t 45
2.4 Schéma des configurations physique (a) et mathématiques (b). En tirets verts la parabole à l'état initial, en trait vert à un instant t. En tirets bleus la surface libre à état initial, en trait bleu la surface libre déformée à un instant t 46
2.5 Approximation polynomiale au 2^{nd} ordre du profil de houle d'Airy pour une configuration d'impact au voisinage de la crête 49
2.6 Approximation polynomiale au 2^{nd} ordre du profil de houle d'Airy pour une configuration d'impact au voisinage du creux 50
2.7 Approximation polynomiale au 1^{er} ordre du profil de houle d'Airy pour une configuration d'impact au voisinage du milieu de la pente 54
2.8 Approximation polynomiale au 3^{e} ordre du profil de houle d'Airy pour une configuration d'impact au voisinage de la crête 55
2.9 Récapitulatif des approximations polynomiales du profil de houle en fonction du point initial d'impact : a) modèle **nc** b) modèle **nt** c) modèle **m1** d) modèle **m3** 61
2.10 Schéma des configurations physique (a) et mathématiques (b) avec vitesse d'avance. En tirets verts le corps parabolique à l'état initial, en trait vert à un instant t. En tirets bleus la surface libre à état initial, en trait bleu la surface libre déformée à un instant t 66

3.1 Pour un impact au voisinage du creux avec la configuration n°6 des tableaux 3.1 et 3.2 : a) Efforts hydrodynamiques b) Efforts hydrodynamiques adimensionnés 87
3.2 Pour un impact au voisinage de la crête avec la configuration n°6 des tableaux 3.1 et 3.2 : a) Efforts hydrodynamiques b) Efforts hydrodynamiques adimensionnés 87
3.3 Configuration initiale non-linéarisée pour un impact au voisinage de la crête de la houle d'Airy monochromatique 88
3.4 Correction de surface mouillée (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a 90
3.5 Correction de surface mouillée (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a 90
3.6 Champs de pression (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ 90
3.7 Champs de pression (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ 90
3.8 Efforts hydrodynamiques (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a . 91
3.9 Efforts hydrodynamiques (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a . 91
3.10 $\bar{\mathbf{\Delta}} F_{mlm}$ en fonction de R_v. En ronds bleus les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage de la crête sans vitesse d'avance. En pointillés bleus une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des 5%. 91
3.11 Configuration initiale non-linéarisée pour un impact au voisinage du creux de la houle d'Airy monochromatique 92
3.12 Correction de surface mouillée (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a 93

3.13 Correction de surface mouillée (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a . . . 93
3.14 Champs de pression (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ . . . 93
3.15 Champs de pression (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ . . . 93
3.16 Efforts hydrodynamiques (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a . 94
3.17 Efforts hydrodynamiques (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a . 94
3.18 $\bar{\mathbf{\Delta}}F_{mlm}$ en fonction de R_v. En carrés rouges les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage du creux sans vitesse d'avance. En pointillés rouges une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des 5%. . . . 94
3.19 Configuration initiale non-linéarisée pour un impact au voisinage du milieu de la pente de la houle d'Airy monochromatique (1^{er} ordre) . . . 95
3.20 Configuration initiale non-linéarisée pour un impact au voisinage du milieu de la pente de la houle d'Airy monochromatique (3^{e} ordre) . . . 95
3.21 Correction de surface mouillée (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a . . . 96
3.22 Correction de surface mouillée (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a . . . 96
3.23 Champs de pression (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tiret $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ . . . 97
3.24 Champs de pression (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tiret $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ . . . 97
3.25 Efforts hydrodynamiques (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a . . . 97
3.26 Efforts hydrodynamiques (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a . . . 97
3.27 $\bar{\mathbf{\Delta}}F_{mlm}$ en fonction de R_v. En triangles violets les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage du milieu sans vitesse d'avance. En pointillés noirs la limite des 5%. . . . 98
3.28 $\bar{\mathbf{\Delta}}F_{mlm}$ en fonction de R_v. En ronds verts les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage du milieu sans vitesse d'avance. En pointillés vers une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des 5%. . . . 98
3.29 $\mathbf{\Delta}F_{mlm\,nc}$ en fonction du temps pour un impact au voisinage de la crête. En pointillés noirs la limite des 5%. . . . 100
3.30 $\mathbf{\Delta}F_{mlm\,nt}$ en fonction du temps pour un impact au voisinage du creux. En pointillés noirs la limite des 5%. . . . 100
3.31 $\mathbf{\Delta}F_{mlm\,m3}$ en fonction du temps pour un impact au voisinage du milieu de la pente. En pointillés noirs la limite des 5%. . . . 101
3.32 $\bar{\mathbf{\Delta}}F_{mlm}$ en fonction de R_v. En ronds bleus les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage de la crête avec vitesse d'avance. En pointillés bleus une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des 5%. . . . 103
3.33 $\bar{\mathbf{\Delta}}F_{mlm}$ en fonction de R_v. En carrés rouges les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage de la crête avec vitesse d'avance. En pointillés rouges une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des 5%. . . . 104

3.34 Efforts hydrodynamiques au voisinage du creux avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b 104
3.35 $\bar{\mathbf{\Delta}}F_{mlm}$ en fonction de R_v. En triangles violets les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage du milieu. En pointillés violets une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des 5%. 106
3.36 $\bar{\mathbf{\Delta}}F_{mlm}$ en fonction de R_v. En triangles verts les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage du milieu. En pointillés verts une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des 5%. 106
3.37 $\mathbf{\Delta}F_{mlm\,ncva}$ en fonction du temps pour un impact au voisinage de la crête. En pointillés noirs la limite des 5%. 107
3.38 $\mathbf{\Delta}F_{mlm\,ntva}$ en fonction du temps pour un impact au voisinage du creux. En pointillés noirs la limite des 5%. 108
3.39 $\mathbf{\Delta}F_{mlm\,m1va}$ en fonction du temps pour un impact au voisinage du milieu de la pente. En pointillés noirs la limite des 5%. 108
3.40 $\mathbf{\Delta}F_{mlm\,m3va}$ en fonction du temps pour un impact au voisinage du milieu de la pente. En pointillés noirs la limite des 5%. 109
3.41 Comparaison des corrections de surface mouillée réduites par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour $R_v = 30\,m$ 111
3.42 Comparaison des champs de pression adimensionnés pour $t = 2.0\,e^{-4}\,s$ par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour $R_v = 30\,m$ . . 112
3.43 Comparaison des efforts hydrodynamiques adimensionnés par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour $R_v = 30\,m$ 112
3.44 Comparaison des corrections de surface mouillée réduites par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour $R_v = 2\,m$ 114
3.45 Comparaison des champs de pression adimensionnés pour $t = 2.0\,e^{-4}\,s$ par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour $R_v = 2\,m$ . . 114
3.46 Comparaison des efforts hydrodynamiques adimensionnés par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour $R_v = 2\,m$ 115
3.47 Comparaison des corrections de surface mouillée réduites par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour $R_v = 30\,m$ 117
3.48 Comparaison des champs de pression adimensionnés pour $t = 2.0\,e^{-4}\,s$ par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour $R_v = 30\,m$ . . 117
3.49 Comparaison des efforts hydrodynamiques adimensionnés par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour $R_v = 30\,m$ 118
3.50 Comparaison des corrections de surface mouillée réduites par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour $R_v = 2\,m$ 119
3.51 Comparaison des champs de pression adimensionnés pour $t = 2.0\,e^{-4}\,s$ par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour $R_v = 2\,m$ . . 120
3.52 Comparaison des efforts hydrodynamiques adimensionnés par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour $R_v = 2\,m$ 120
3.53 Figure récapitulative des RMSE(s) calculées pour les efforts hydrodynamiques entre les configurations C (Tab. 3.1) et T (Tab. 3.2) sans vitesse d'avance de la parabole. 123
3.54 $C_p(y, t_i)$ crête cas test n°7.a (trait) et n°7.b (tirets) $R_v = 2\,m$ 124
3.55 $C_p(y, t_i)$ creux cas test n°7.a (trait) et n°7.b (tirets) $R_v = 2\,m$ 124
3.56 Correction de surface mouillée pour un impact au niveau de la crête cas test n°7.a et n°7.b ($R_v = 2\,m$) 124
3.57 Correction de surface mouillée pour un impact au niveau du creux cas test n°7.a et n°7.b ($R_v = 2\,m$) 124

3.58 $C_s(t)$ pour des impacts au niveau de la crête et du creux : cas test n°7.a (trait) et n°7.b (tirets) $R_v = 2\,m$ 125
3.59 $C_s(t)$ pour des impacts au niveau de la crête et du creux : cas test n°2.a et n°2.b ($R_v = 9\,m$) 125
3.60 $C_s(t)$ pour un impact au niveau du milieu : cas test n°7.a et n°7.b ($R_v = 2\,m$) 126
3.61 $C_s(t)$ pour un impact au niveau du milieu : cas test n°2.a et n°2.b ($R_v = 9\,m$) 126
3.62 Figure récapitulative des RMSE(s) calculées pour les efforts hydrodynamiques entre les configurations C (Tab. 3.1) et T (Tab. 3.2) avec vitesse d'avance $V = 5\,m.s^{-1}$. 129
3.63 Cs position crête avec vitesse d'avance - cas test n°2.a et n°2.b $R_v = 9\,m$. 129
3.64 Cs position crête avec vitesse d'avance - cas test n°7.a et n°7.b $R_v = 2\,m$. 129
3.65 Cs position creux avec vitesse d'avance - cas test n°2.a et n°2.b $R_v = 9\,m$. 130
3.66 Cs position creux avec vitesse d'avance - cas test n°2.a et n°2.b $R_v = 2\,m$. 130
3.67 Cs position milieu avec vitesse d'avance - cas test n°2.a et n°2.b $R_v = 9\,m$. 130
3.68 Cs position milieu avec vitesse d'avance - cas test n°2.a et n°2.b $R_v = 2\,m$. 130
3.69 Figure récapitulative des RMSE(s) calculées pour les efforts hydrodynamiques entre les configurations C (voir tableau 3.1) et T (voir tableau 3.2) pour plusieurs vitesses d'avance 132
3.70 Figure récapitulant les $\mathcal{Y}_0$ pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°7.b pour un impact au niveau de la crête. 134
3.71 Figure récapitulant les t_0 et t_f pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°7.b pour un impact au niveau de la crête. 135
3.72 Figure récapitulant les $\mathcal{Y}_0$ pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°6.b pour un impact au niveau du creux. 136
3.73 Figure récapitulant les t_0 et t_f pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°6.b pour un impact au niveau du creux. 136
3.74 Figure récapitulant les t_0 et t_f pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°7.b pour un impact au niveau du milieu avec le modèle au premier ordre. 137
3.75 Figure récapitulant les t_0 et $\mathcal{Y}_0$ pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°7.b pour un impact au niveau du milieu avec le modèle au troisième ordre. 138
3.76 Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau de la crête sans vitesse d'avance - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ et $t_4 = 0.015\,s$ 141
3.77 Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau de la crête avec vitesse d'avance - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ et $t_4 = 0.015\,s$ 141
3.78 Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner sans vitesse d'avance pour un impact au niveau de la crête 142
3.79 Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner avec vitesse d'avance pour un impact au niveau de la crête 142
3.80 Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau du milieu sans vitesse d'avance - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ et $t_4 = 0.015\,s$ 143
3.81 Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau du milieu avec vitesse d'avance - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ et $t_4 = 0.015\,s$ 143
3.82 Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner sans vitesse d'avance pour un impact au niveau du milieu 144
3.83 Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner avec vitesse d'avance pour un impact au niveau du milieu 144
3.84 Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau du milieu sans vitesse d'avance - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ et $t_4 = 0.015\,s$ 145
3.85 Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau du milieu avec vitesse d'avance - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ et $t_4 = 0.015\,s$ 145

3.86 Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner sans vitesse d'avance pour un impact au niveau du creux 146
3.87 Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner avec vitesse d'avance pour un impact au niveau du creux 146

4.1 Surface libre déformée pour un impact sur une surface libre plane. 149
4.2 Dimensions du modèle numérique Abaqus : en rouge le domaine solide et en bleu le domaine fluide 150
4.3 Visualisation des conditions aux limites sous Abaqus 150
4.4 Maillage Lagrangien de type R3D4 et son point de référence 151
4.5 Géométrie d'un élément R3D4 151
4.6 Illustration de la méthode Volume-of-Fluid pour un cas bidimensionnel simple 153
4.7 Illustration de la loi de comportement entre la pression P_c, la raideur k_{lin} et la distance dt 154
4.8 Illustration du calcul des P_c pour plusieurs éléments - Source [SIMULIA, 2008] 155
4.9 Évolution des efforts hydrodynamiques au cours de temps pour la convergence en maillage. 156
4.10 Suppression des données antécédentes à la valeur maximale de F_z d'Abaqus. 157
4.11 Extraction de l'enveloppe moyenne de F_z d'Abaqus. 157
4.12 Interpolation des données du pas de temps d'Abaqus pour comparer avec le pas de temps analytique. 158
4.13 Figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus/CAE avec et sans lissage aux effort hydrodynamique provenant d'un modèle analytique. . . . 158
4.14 Méthode de calcul des corrections de surface mouillée numériques 159
4.15 Comparaison des corrections de surface mouillée analytique et numérique pour un impact sur une surface libre plane 159
4.16 Illustration des transformations géométriques du maillage Eulérien pour simuler des impacts au voisinage de la crête et du creux. 160
4.17 Illustration de la transformation géométrique du maillage Eulérien et de la translation du maillage Lagrangien pour simuler des impacts au voisinage du milieu de la pente. 161
4.18 Cinématique de la parabole sous Abaqus pour un impact au niveau de la crête et pour un impact vertical 162
4.19 Cinématique de la parabole sous Abaqus pour un impact au niveau du creux et pour un impact vertical 162
4.20 Cinématique de la parabole sous Abaqus pour un impact oblique au niveau du milieu de la pente 162
4.21 Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$ 164
4.22 Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$ 164
4.23 Pour un impact au niveau du milieu de la pente : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$ 165
4.24 Pour un impact au niveau du milieu de la pente : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$ 165

4.25 Pour un impact au niveau du creux : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$ 166
4.26 Pour un impact au niveau du creux : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$ 166
4.27 Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$ 167
4.28 Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$ 167
4.29 Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$ 168
4.30 Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$ 168
4.31 Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$ 169
4.32 Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$ 169
4.33 Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée sans vitesse d'avance pour un impact au niveau de la crête - Cas test $7a$ $R_v = 2\,m$ . . . 170
4.34 Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée sans vitesse d'avance pour un impact au niveau du milieu - Cas test $7b$ $R_v = 2\,m$ 170
4.35 Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée sans vitesse d'avance pour un impact au niveau du creux - Cas test $2a$ $R_v = 9\,m$ 171
4.36 Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée avec vitesse d'avance pour un impact au niveau de la crête - Cas test $2a$ $R_v = 9\,m$ . . . 171
4.37 Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée avec vitesse d'avance pour un impact au niveau du milieu - Cas test $2a$ $R_v = 9\,m$ . . . 172
4.38 Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée avec vitesse d'avance pour un impact au niveau du creux - Cas test $7b$ $R_v = 2\,m$ 172
4.39 Champs de pression Abaqus et semi-analytique pour un impact au niveau de la crête sans vitesse d'avance : cas test n°7a $t_i = 4.0\,e^{-4}\,s$ 173
4.40 Champs de pression Abaqus et semi-analytique pour un impact au niveau du milieu sans vitesse d'avance : cas test n°7b $t_i = 1.0\,e^{-3}\,s$ 173
4.41 Champs de pression Abaqus et semi-analytique pour un impact au niveau du creux sans vitesse d'avance : cas test n°7b $t_i = 2.0\,e^{-4}\,s$ 173
4.42 Champs de pression ABAQUS/CAE et semi-analytique pour un impact au niveau du creux avec vitesse d'avance - Cas test n°7a, $t_i = 8.0\,e^{-4}\,s$ 174
4.43 Champs de pression Abaqus et semi-analytique pour un impact au niveau du milieu avec vitesse d'avance - Cas test n°7a, $t_i = 6.0\,e^{-4}\,s$ 174
4.44 Champs de pression Abaqus et semi-analytique pour un impact au niveau de la crête avec vitesse d'avance - Cas test n°7b, $t_i = 6.0\,e^{-4}\,s$ 174
4.45 Visualisation des fractions volumiques au voisinage de l'interface fluide/solide. En trait noir en gras la parabole, en couleurs les fractions volumiques. . . . 175

A.1 Schéma des configurations physique (a) et mathématique (b). En tirets noirs la parabole à l'instant initial, en tirets bleus la surface libre non déformée. En traits pleins noirs la parabole à un instant t, en traits bleus la surface libre déformée 199
A.2 Schéma des configurations physique (a) et mathématique (b) avec vitesse d'avance. En tirets noirs la parabole à l'instant initial, en tirets bleus la surface libre non déformée. En traits pleins noirs la parabole à un instant t, en traits bleus la surface libre déformée (NB : Dans ce schéma on s'est affranchit de l'indice **va** pour $\phi(y,t)$) 200

B.1 Pour un impact sur une surface libre plane : a) Efforts hydrodynamiques b) Efforts hydrodynamiques adimensionnés 204
B.2 Pour un impact au voisinage du milieu de la pente au 1^{er} ordre avec la configuration n°6 des tableaux 3.1 et 3.2 : a) Efforts hydrodynamiques b) Efforts hydrodynamiques adimensionnés 204
B.3 Pour un impact au voisinage du milieu de la pente au 3^{e} ordre avec la configuration n°6 des tableaux 3.1 et 3.2 : a) Efforts hydrodynamiques b) Efforts hydrodynamiques adimensionnés 205
B.4 Visualisation des pics de pression MLM pour un impact au voisinage de la crête. En ronds bleus les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle **nc**. En ronds noirs les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle **na** 206
B.5 Visualisation des pics de pression MLM pour un impact au voisinage du milieu de la pente. En ronds verts les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle **m3**. En ronds noirs les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle **na** 206
B.6 Visualisation des pics de pression MLM pour un impact au voisinage du creux. En ronds rouges les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle **nt**. En ronds noirs les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle **na** 207
B.7 Correction de surface mouillée (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°1.b 208
B.8 Correction de surface mouillée (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°7.b 208
B.9 Champs de pression (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°1.b Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ 208
B.10 Champs de pression (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°7.b Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ 208
B.11 Efforts hydrodynamiques (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°1.b 208
B.12 Efforts hydrodynamiques (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°7.b 208
B.13 Correction de surface mouillée (ntva et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b 209
B.14 Correction de surface mouillée (ntva et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b 209
B.15 Champs de pression nt avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ 209
B.16 Champs de pression nt avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ 209
B.17 Efforts hydrodynamiques nt avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b 209
B.18 Efforts hydrodynamiques nt avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b 209
B.19 Correction de surface mouillée (m3va et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b 210

B.20 Correction de surface mouillée (m3va et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b 210
B.21 Champs de pression (m3va et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ 210
B.22 Champs de pression (m3va et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$ 210
B.23 Efforts hydrodynamiques (m3va et nava) : Cas test n°1.b 210
B.24 Efforts hydrodynamiques (m3va et nava) : Cas test n°7.b 210
B.25 Coefficients de slamming à différentes vitesses d'avance V pour l'impact d'une parabole sur une surface libre plane. 211
B.26 Visualisation $\mathcal{Y}_0(t_0)$ pour un impact au niveau de la crête cas de test $n°1.b$ avec $V = 15.0\,m.s^{-1}$ 212
B.27 Visualisation sous forme de surface du champs de pression de Wagner cas de test $n°1.b$ avec $V = 15.0\,m.s^{-1}$ pour un impact au niveau du creux . . . 212
B.28 Visualisation $\mathcal{Y}_0(t_0)$ pour un impact au niveau du creux cas de test $n°4.b$ avec $V = 15.0\,m.s^{-1}$ 213
B.29 Visualisation sous forme de surface du champs de pression de Wagner cas de test $n°4.b$ avec $V = 15.0\,m.s^{-1}$ pour un impact au niveau de la crête . . 213
B.30 Visualisation $\mathcal{Y}_0(t_0)$ pour un impact au niveau du milieu avec le modèle au troisième ordre cas test $n°7.b$ avec $V = 12.5\,m.s^{-1}$ 214
B.31 Visualisation sous forme de surface du champs de pression de Wagner cas de test $n°7.b$ avec $V = 12.5\,m.s^{-1}$ pour un impact au milieu de la pente . . 214

C.1 Illustration du fonctionnement de l'AMR 215
C.2 Méthode de calcul des corrections de surface mouillée numériques sur houle d'Airy 216

Chapitre 1

Introduction

Ce premier chapitre constitue l'introduction générale de cette thèse de doctorat intitulé : *Impact sur le pont mouillé d'un navire de type SWATH*[1] *pour la maintenance des éoliennes offshore* (Fig. 1.1).

FIGURE *1.1 – Vue d'artiste du navire WindKeeper extraire de la brochure promotionnelle : [CNIM, 2015]*

Ce travail s'inscrit dans le cadre du projet WindKeeper qui a pour de but développer un navire innovant de type SWATH pour la maintenance des éoliennes *offshore*. Ce projet financé par l'ADEME[2] réunit un consortium d'entreprises constitué de la CNIM, la compagnie maritime Chambon, la société de construction navale Socarenam, l'école d'ingénieurs SeaTech et l'ENSTA-Bretagne. Le futur navire innovant baptisé WindKeeper sera construit dans le but d'être capable de naviguer par une houle d'hauteur significative de 3 mètres, 300 jours/an, 24h/24, 7j/7 et avec une autonomie d'un mois en mer. Pour plus d'informations sur les spécifications le lecteur peut consulter la brochure accessible en ligne [CNIM, 2015].

L'objectif général de ce travail consiste à développer des modèles d'impact hydrodynamique sur des corps solides bidimensionnels rigides représentant le pont mouillé d'un SWATH.

Ce premier chapitre se décompose en trois sections. La section 1.1 présente le contexte générale dans lequel s'incrit ces travaux. La section 1.2 constitue un état de l'art en relation avec le domaine de l'impact hydrodynamique et la section 1.3 justifie les études présentées dans cette thèse de doctorat.

1. Small Waterplane Area Twin Hull 2. Agence de l'Environnement et De la Maîtrise de l'Énergie

1.1 Contexte général

Depuis pratiquement un siècle, l'impact hydrodynamique est étudié intensément dans l'optique d'obtenir de manière plus précise les efforts engendrés par l'interaction d'un corps solide entrant en contact violemment avec un fluide.

Il existe une grande variété de champs d'applications nécessitant l'étude de ce phénomène, par exemple l'ingénierie côtière dans le cas du dimensionnement d'un ponton ou dans l'ingénierie pétrolière lors de la construction d'une plate-forme. Dans ces deux derniers cas, les structures demeurent fixes et sont donc soumises aux efforts engendrés par la houle incidente qui impacte le ponton ou la plate-forme. Néanmoins pour ces secteurs d'activités, il existe une grande série de normes bien documentées, créées par des organismes certifiants tels que le *Det Norske Veritas* (DNV) pour l'Europe ou l'*American Petroleum Institute* (API) pour les États-Unis. Aujourd'hui ces normes et recommandations permettent un dimensionnement quasi-optimal de ce type de structures soumises à des chargements hydrodynamiques complexes.

Un autre champ d'applications nécessite l'étude des phénomènes d'impact hydrodynamique. Il s'agit du secteur de la construction navale. La différence majeure avec les deux précédents secteurs d'activité est qu'en général un navire possède une vitesse d'avance qui a tendance à compliquer le bilan des forces hydrodynamiques engendrées sur la structure du bâtiment. Un navire, quel qu'il soit, demeure soumis aux efforts hydrodynamiques engendrés sur sa structure par l'écoulement du fluide, comme la portance et la traînée. Ces deux efforts sont bien connus des architectes navals qui les calculent au moyen de la théorie des similitudes de *Froude*, cela dès lors que le profil de carène est connu.

Néanmoins il existe une autre sollicitation souvent peu ou mal prise en compte dans les modèles de calcul de dimensionnement des carènes. Il s'agit de l'effort engendré par un mouvement de pilonnement du navire lorsque la coque vient impacter violemment la surface de la mer : *le tossage*. Ce dernier peut devenir prépondérant par rapport aux autres efforts hydrodynamiques, par exemple lorsque qu'un navire se déplaçant à une vitesse importante vient impacter une houle fortement cambrée. Comme le font remarquer [Faltinsen & Zhao, 1991], la coque peut donc être amenée à impacter le front de houle et donc subir un effort pouvant endommager la structure du navire. Dans ce dernier cas on parle souvent d'impact hydrodynamique ou encore de *slamming*.

Pour les navires de types SWATH, la zone située entre les deux coques constitue un endroit privilégié pouvant subir un impact hydrodynamique. Cette zone s'appelle le pont mouillé (Fig. 1.2). Il existe plusieurs recommandations et normes pour le dimensionnement de structures soumises à ce type d'effort d'impact hydrodynamique. Le DNV y fait référence dans son volet traitant des conditions et chargements environnementaux [DNV, 2012]. Dans le cas de l'impact d'un corps relativement plat (*in fine* le pont mouillé d'un SWATH), la norme permet uniquement de calculer la pression maximale d'impact selon diverses approximations réalisées sur les travaux de [Zhao & Faltinsen, 1993]. Cependant la formule semi-empirique utilisée demeure relativement insuffisante pour obtenir un dimensionnement optimal d'une coque de navire SWATH. Par ailleurs dans cette même recommandation du DNV, il est mentionné que le tossage n'est pas défini pour un corps sortant d'un fluide. Or, d'après les travaux de [Baarholm, 2001] la force maximale en termes d'intensité engendrée lors d'un impact hydrodynamique sur un corps solide peut avoir lieu lors de la phase de sortie d'eau de la carène immergée.

Enfin dans la norme *DNV* : *Rules for Classification of Ships, Hull Structural Design, Ships with Length Less than 100 Metres* [DNV, 2010], il nous est fourni une formule empirique permettant de calculer la pression d'impact p_{sl} en Pascals à ne pas excéder :

$$\boxed{p_{sl} = 240\sqrt{L}\left(1 - \frac{20\,d_b}{L}\right)}$$

Avec L la longueur du navire et d_b son tirant d'eau en mètres. Même s'il est, a priori, vrai que la longueur du navire et son tirant d'eau sont susceptibles d'entrer en jeu lors du calcul d'une pression d'impact hydrodynamique globale. Il est clair qu'il s'agit d'une formule empirique permettant uniquement un calcul approximatif.

Comme le souligne [Korobkin, 1996], beaucoup de navires innovants possèdent des structures élevées par rapport au niveau de la mer, comme le pont mouillé d'un navire de type SWATH. Du fait des mouvements relatifs de grandes amplitudes entre le pont mouillé du navire et la crête des vagues, l'occurrence d'un impact hydrodynamique influe inévitablement sur les performances du SWATH en termes de tenue à la mer.

Dans la suite, sont présentées les techniques de calculs permettant d'aboutir aux efforts hydrodynamiques sur le pont mouillé d'un SWATH. Pour cela, un état de l'art non-exhaustif des stratégies de calcul en relation avec l'impact hydrodynamique est détaillé (sec. 1.2). Nous choisissons de ne modéliser que le pont mouillée du SWATH en deux dimensions en omettant les flotteurs du navires (Fig. 1.2).

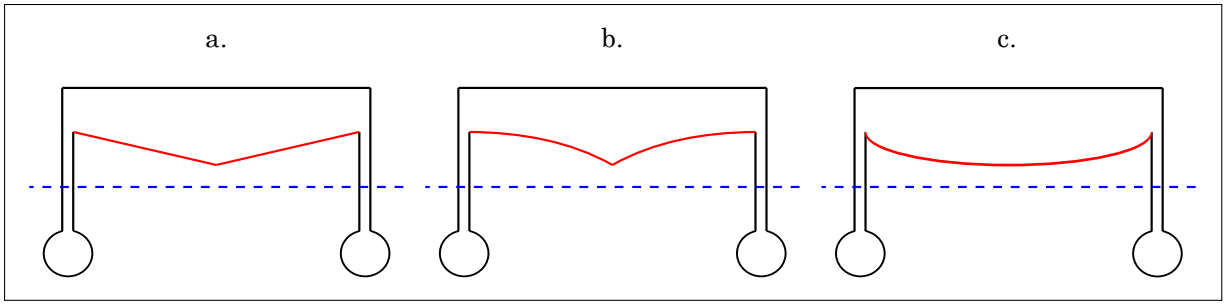

Figure *1.2 – Schéma représentant la modélisation bidimensionnelle du pont mouillée du SWATH - En rouge le pont mouillée a. Dièdre b. Un profil concave c. Parabole*

C'est-à-dire que nous modélisons uniquement la partie rouge des carènes de navire SWATH présentées à la figure 1.2. Nous ne tiendrons pas compte de l'influence des flotteurs du navire et de leurs interactions avec le profil de surface libre.

Au sein des développements présentés dans la suite de ces travaux, le profil géométrique bidimensionnel retenu pour modéliser le pont mouillé du navire SWATH est le profil parabolique (Fig. 1.2.c). En effet le cas du dièdre a largement été traité dans la littérature (sec. 1.2, part(s). 1.2.3 et 1.2.4). Néanmoins les techniques utilisées peuvent s'appliquer à n'importe quelle forme géométrique.

1.2 État de l'art des modèles d'impact hydrodynamique

L'impact hydrodynamique a réellement commencé à être étudié autour des années 1930 par Theodore von Karman [Von Karman, 1929] et Herbert Wagner [Wagner, 1932] dans le but de calculer la pression engendrée sur la carlingue d'un hydravion lors de son amerrissage.

Dans son modèle von Karman (VKM) néglige les effets de gravité ainsi que l'élévation locale de la surface libre lors du contact fluide-solide. Il suppose que les points de contact ($\pm a(t)$ pour une carène symétrique Fig. 1.3) entre les surfaces sèche et mouillée du corps solide lors de l'impact correspondent à l'intersection géométrique entre la surface sèche du corps et le fluide au repos (Fig. 1.3.a)). Il a été démontré qu'en procédant de cette manière les efforts produits pouvaient être largement sous-estimés [Tassin, 2010].

La formulation adéquate, et admise par la communauté scientifique semble donc être celle de Wagner (OWM) (Fig. 1.3.b), qui au moyen d'une condition limite supplémentaire prend en compte le fait que lors d'un impact hydrodynamique le fluide impacté a tendance à remonter sur la surface du corps solide. Ce phénomène est appelé « piled-up effect » [Korobkin, 2004]. De cette manière les intersections ($\pm a(t)$) entre les surfaces sèche et mouillée du cors solide, n'est plus simplement la délimitation entre la surface sèche du corps semi-immergé et le fluide au repos, mais tient compte de la remontée locale du fluide le long de la surface du corps solide (Fig. 1.3.b)). C'est ce qu'on appelle la correction de surface mouillée qui doit, *a priori*, être prise en compte durant un impact hydrodynamique sur le pont mouillé d'un SWATH.

Il existe d'autres formulations mathématiques de l'impact hydrodynamique comme celle proposée par [Zhao et al., 1997] sous le nom de *Generalized Wagner Model* (GWM). Cette méthode, comme son nom l'indique, s'inspire de la formulation de Wagner mais omet une des simplifications (*i.e* linéarisations) en ce qui concerne la géométrie de la surface du corps solide (Fig. 1.3.c)). On peut aussi citer brièvement le modèle de [Vorus, 1996] qui lui s'inspire aussi des travaux de Wagner. Ce modèle conserve certaines non-linéarités au niveau des conditions limites de surface libre en modélisant celles-ci au moyen de distributions de vortex.

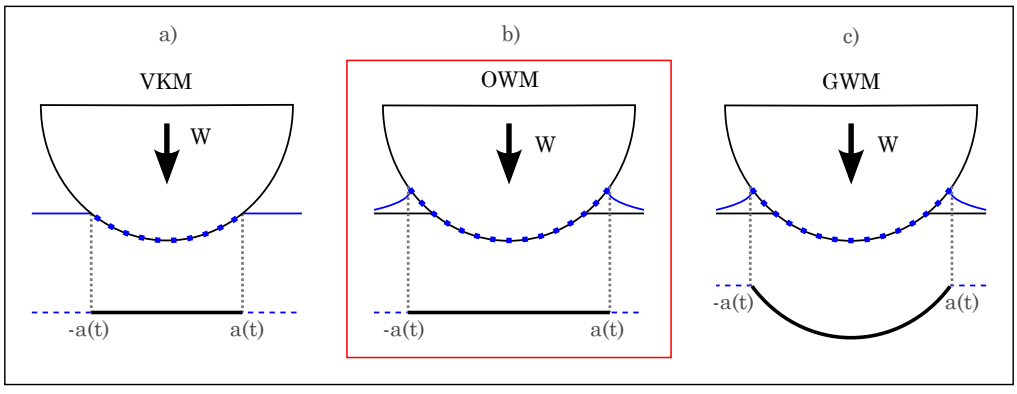

Figure *1.3 – Les modèles d'impacts hydrodynamiques : en bleu la surface libre, en pointillés noirs et bleus la surface mouillée, en noir la surface mouillée linéarisée*

Dans la suite, on se focalisera sur le modèle original de Wagner (OWM) qui de part sa formulation et sa résolution analytique permet d'obtenir des résultats pertinents en termes d'efforts hydrodynamiques dimensionnants par rapport à son très faible, et donc peu coûteux, temps de calcul.

1.2.1 Le modèle de Wagner

Les concepts et idées introduits par [Wagner, 1932] sont toujours utilisés aujourd'hui même si la formulation ne permet pas de décrire tous les phénomènes physiques impliqués lors d'un impact hydrodynamique.

Sous l'approximation du disque plat, le modèle de Wagner prend en compte la correction de surface mouillée lors des premiers instants de pénétration du solide dans le fluide au moyen d'une condition limite appelée condition de Wagner. Cette approximation est rendue possible au travers des linéarisations (ou applatissements des géométrie Fig(s). 1.5 et 1.6) de la forme du corps solide et de la surface mouillée. Dans le cadre du dièdre, cette théorie est donc valable uniquement pour des corps présentant un angle de relèvement faible ($\beta < 20°$ voir Fig. 1.4.a)) entre la surface du corps et celle du fluide. Si la limitation semble importante, elle est néanmoins bien adaptée aux carènes de type SWATH.

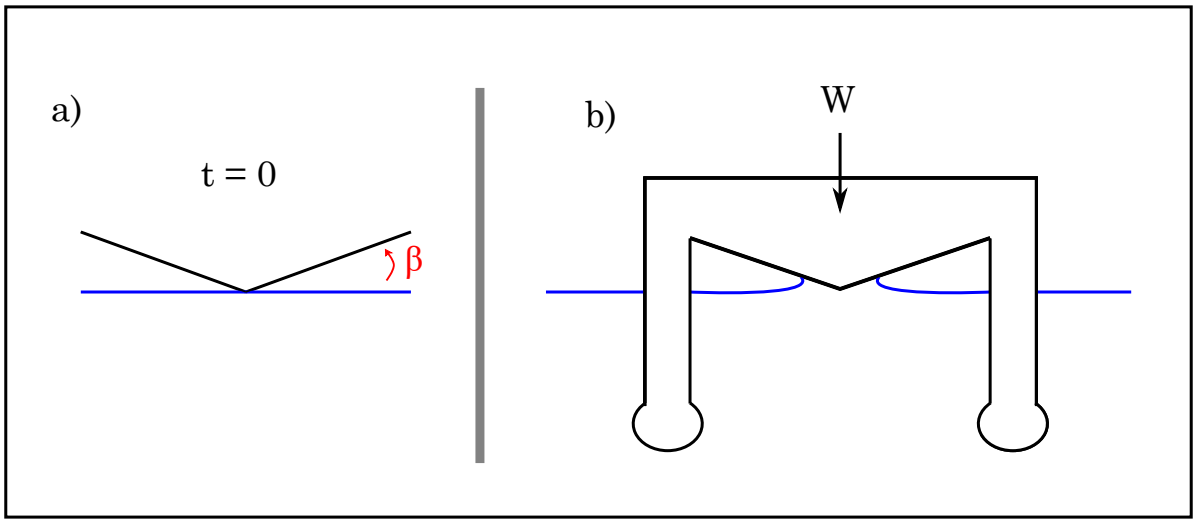

Figure *1.4 – a) Etat initial de l'impact hydrodynamique selon le modèle de Wagner avec l'angle mort β b) Schéma de l'impact hydrodynamique du pont mouillée d'un navire SWATH pour une carène de type dièdre symétrique*

Dans la suite de cette partie sur le modèle de Wagner, nous présentons les résultats fondamentaux admis par la communauté scientifique en rapport avec l'impact hydrodynamique. Ici ne sont traités que les modèles dits analytiques, c'est-à-dire qu'il n'est pas question de méthodes numériques de type *CFD*[3]. L'état de l'art des méthodes numériques liées à l'impact hydrodynamique est abordé dans la partie 1.2.2.

Tout d'abord, comme le modèle de Wagner repose sur des écoulements à potentiel des vitesses, nous présentons les méthodes permettant d'établir l'expression du potentiel des vitesses de l'écoulement. Nous commençons par la mise en équation générale du problème de Wagner pour des configurations bidimensionnelles (2D) (para. 1.2.1.1), cela pour des coques symétriques et dissymétriques. Puis nous étendons la présentation des résultats fondamentaux du problème 2D au cas tridimensionnel (3D) (para. 1.2.1.2) au travers de l'impact hydrodynamique de coques aux profils paraboloïdes elliptiques et axisymétriques.

Ensuite nous présentons les deux grandes méthodes de calcul des champs de pression engendrés sur carènes 2D et 3D lors de l'impact (sec. 1.2.2).

3. Computational Fluid Dynamics

1.2.1.1 Le modèle de Wagner bidimensionnel

La théorie de Wagner est donc basée sur l'approximation du disque plat, elle sous-entend donc que l'angle de relèvement β demeure, par rapport au plan décrit par la surface libre au repos, faible (Fig. 1.4). De plus, ce modèle n'est valable que lorsque les dimensions de la surface mouillée, dans la direction horizontale, sont plus importantes que la profondeur de pénétration du corps solide représentant une carène (Fig. 1.5).

Ce dernier point implique que le modèle de Wagner n'est valable que pour les 1^{ers} instants de pénétration, c'est-à-dire pour $h(t)/a(t) \ll 1$.

Le modèle bidimensionnel symétrique

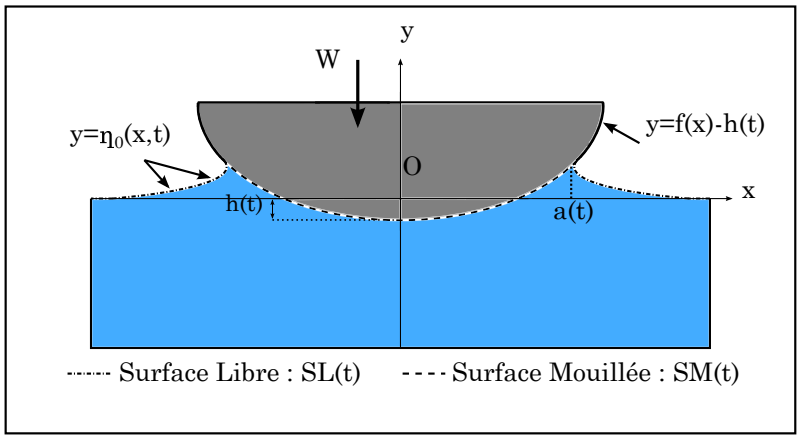

FIGURE *1.5 – Schéma de paramétrage du modèle de Wagner non-linéarisé, le corps solide gris symbolise un pont mouillé de navire SWATH*

En admettant que le corps solide impact une surface libre plane et au repos à une vitesse verticale W, nous pouvons modéliser le problème aux limites complet sous les hypothèses suivantes :

- Le liquide est considéré parfait et incompressible.
  → On considère le fluide non visqueux et à masse volumique constante.
- L'écoulement est supposé irrotationnel.
  → Il s'agit de l'hypothèse majeure des écoulements à potentiel des vitesses qui est couramment utilisée dans le domaine de l'hydrodynamique.
- On se place en profondeure infinie.
  → Pas de prise en compte du fond de la mer et le fluide supposé immobile à l'état initial.
- On néglige la tension superficielle et la gravité.
  → Nous supposons que l'accélération du fluide lors de l'impact est largement supérieur à l'accélération de la pensanteur g.

Dans le fluide, c'est-à-dire pour $y < 0$, le potentiel des vitesses de l'écoulement vérifie l'équation de *Laplace*. Mais aussi la condition dynamique *CDSL* de surface libre au sens de Bernoulli (*CDSL* pour $y = \eta_0(x,t)$), ainsi que les conditions cinématiques de surface libre (*CCSL* pour $y = \eta_0(x,t)$) et d'imperméabilité entre le corps solide et le fluide (*CI* pour $y = f(x) - h(t)$).

Condition Dynamique de Surface Libre

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\varphi|^2 = 0 \quad \text{pour} \quad p_{atm} = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\varphi_{,x}^2 + \varphi_{,y}^2\right) = 0 \quad \forall\, y = \eta_0(x,t),\, x \in SL(t) \tag{1.1}$$

Condition Cinématique de Surface Libre

$$\frac{D}{Dt}\left[y - \eta_0(x,t)\right] = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{D}{Dt} : \text{ la dérivée particulaire}\,^4$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \eta_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \forall\, y = \eta_0(x,t),\, x \in SL(t) \tag{1.2}$$

Condition d'Imperméabilité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{W}.\vec{n} \quad \forall\, y = f(x) - h(t),\, x \in SM(t) \tag{1.3}$$
$$\Longrightarrow \quad \text{Avec : } \vec{n} \text{ le vecteur normale à la } SM(t) \text{ et } \dot{h}(t) = W \tag{1.4}$$

La condition *CI* prescrite sur la surface mouillée traduit la condition d'imperméabilité (voir [Malleron, 2009]). Donc que le flux des particules fluides au travers du corps parabolique est nul.

En y ajoutant les conditions initiales sur la surface libre et sur le potentiel des vitesses ainsi qu'une condition de repos des particules fluides loin de la zone de l'écoulement dû à l'impact, le problème complet s'écrit comme suit :

$$\begin{cases}
\Delta\varphi = 0 & y < 0\,, & \text{(1.5a)}\\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] = 0 & y = \eta_0(x,t),\, x \in SL(t))\,, & \text{(1.5b)}\\
\dfrac{\partial \eta_0}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta_0}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 & y = \eta_0(x,t),\, x \in SL(t)\,, & \text{(1.5c)}\\
\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = W & y = f(x) - h(t),\, x \in SM(t)\,, & \text{(1.5d)}\\
\varphi \to 0 & (x^2 + y^2) \to \infty\,, & \text{(1.5e)}\\
\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \eta_0 = 0 & \forall\, t = 0\,. & \text{(1.5f)}
\end{cases}$$

Il s'agit donc du problème aux valeurs limites complet non-linéaire que l'on ne sait pas résoudre analytiquement aujourd'hui. En appliquant l'approximation du disque plat qui revient à linéariser au 1^{er} ordre la condition dynamique de surface libre et les conditions cinématiques de surface libre et d'imperméabilité présentées aux équations 1.5 (Fig. 1.6), on obtient le problème (1.6) :

4. $\dfrac{D\square}{Dt} = \dfrac{\partial \square}{\partial t} + \vec{U}.\vec{\nabla}\square$, avec $\vec{U}$ le vecteur vitesse des particules fluides

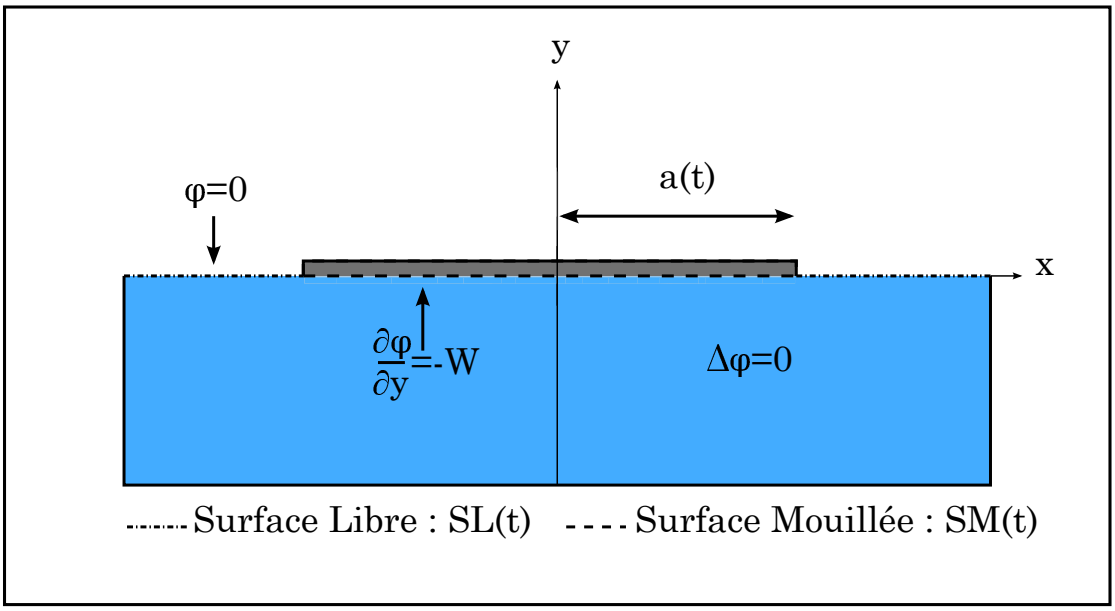

FIGURE *1.6 – Schéma de paramétrage du modèle de Wagner linéarisé*

Notons que la dimension du disque plat, qui se résume à sa longueur en deux dimensions, n'est pas connue par avance et est considérée comme une inconnue du problème.

Le problème linéarisé en termes de potentiel des vitesses s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & y < 0\,, \quad (1.6a) \\ \varphi = 0 & y = 0,\ x \in\ SL(t)\,, \quad (1.6b) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -W & y = 0,\ x \in\ SM(t)\,, \quad (1.6c) \\ \varphi \to 0 & (x^2 + y^2) \to \infty\,. \quad (1.6d) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales : $\varphi(x, 0, t = 0) = 0$ et $\eta_0(x, t = 0) = 0$.

On reconnaît un problème de surface portante, [Newman, 1977] propose une méthode de résolution basée sur une distribution de vortex permettant de trouver le potentiel des vitesses sur la surface mouillée. Mais depuis les travaux de [Korobkin & Puckhnachov, 1988], il est commun de formuler le problème en termes de potentiel des déplacements $\phi(x, y, t)$, qui correspond à l'intégration en temps du potentiel des vitesses.

$$\phi(x, z, t) = \int_0^t \varphi(x, z, \tau)d\tau\,. \quad (1.7)$$

Cela permet d'augmenter la régularité du problème en faisant apparaître la forme du corps $f(x)$ et sa cinématique de chute W au niveau de la condition de Neumann sur le potentiel des déplacements. Ceci-dit cela n'exclut en rien la formulation de Newman. En termes de potentiel des déplacements le problème (1.6) est identique sauf pour la condition de Neumann qui s'écrit donc de la façon suivante :

$$\phi_{,y}(x, 0, t) = -\int_0^t W(\tau)d\tau = -h(t) + C^{ste}(x)\,. \quad (1.8)$$

Un analyse limite lorsque x tend vers $\pm a(t)$, présentée dans [Tassin, 2010], permet d'établir l'expression de $C^{ste}(x)$ qui est en fait la fonction de forme du corps impactant $f(x)$.

Ainsi en termes de potentiel des déplacements, le problème de Wagner bidimensionnel symétrique s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & y < 0\,, \quad (1.9a) \\ \phi = 0 & y = 0,\ x \in SL(t)\,, \quad (1.9b) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -h(t) + f(x) & y = 0,\ x \in SM(t)\,, \quad (1.9c) \\ \phi \to 0 & (x^2 + y^2) \to \infty\,. \quad (1.9d) \end{cases}$$

En deux dimensions il est possible de formuler ce problème d'écoulement fluide au sens de Riemann-Hilbert (voir [Newman, 1977] et [Bolibrukh, 1990]). Il est donc possible de remonter au potentiel des déplacements ϕ pour n'importe quel corps bidimensionnel symétrique, au moyen des équations suivantes :

$$\phi(x, 0, t) = -\int_x^{a(t)} \gamma(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq x \leq a(t)\,. \tag{1.10}$$

Avec :

$$\gamma(\xi, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2(t) - \xi^2}} PV \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{\phi_{,y}(\zeta)\sqrt{a^2(t) - \zeta^2}}{\zeta - \xi} d\zeta\,. \tag{1.11}$$

PV signifie une intégration par valeur principale de Cauchy. Ce qui après calcul nous permet d'obtenir une forme générique du potentiel des déplacements de l'écoulement autour du corps solide de la forme :

$$\phi(x, t) = -K(t)\left[1 - \left(\frac{x}{a(t)}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}. \tag{1.12}$$

Avec $K(t)$, une fonction dépendant des paramètres géométriques du problème et de la variable $a(t)$. Pour obtenir cette fois une forme générique du potentiel des vitesses, il est nécessaire d'exploiter la condition de Wagner. Celle-ci stipule que les déplacements des particules fluides sont finis aux points de contact $\pm a(t)$. En s'appuyant sur l'équation 1.11, la condition de Wagner se traduit mathématiquement de la manière suivante :

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{\phi_{,y}(\zeta)\sqrt{a^2(t) - \zeta^2}}{\zeta \pm a(t)} d\zeta = 0\,. \tag{1.13}$$

Le développement de l'équation précédente permet d'aboutir à l'équation intégrale suivante reliant $a(t)$ et $h(t)$ qui constitue ce que l'on appelle la correction de surface mouillée 2D :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a(t)\sin\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} h(t)\,. \tag{1.14}$$

Pour des géométries de corps solide connues cela conduit aux corrections de surface mouillée suivante :

Géométrie	Correction de surface mouillée
Dièdre d'angle de relèvement β	$a(t) = \dfrac{\pi h(t)}{2\tan\beta}$
Parabole de rayon de courbure R	$a(t) = \sqrt{4Rh(t)}$

Table *1.1 – Correction de surface mouillée en fonction du type de géométrie pour des géométries symétriques*

Enfin, en dérivant par rapport au temps le potentiel des déplacements calculé à l'équation (1.12) et en appliquant la correction de surface mouillée. On obtient la forme générique du potentiel des vitesses de l'écoulement autour du corps solide 2D assimilé à une ligne plane (voir [Wagner, 1932] p20) :

$$\varphi(x,t) = -W\sqrt{a^2(t) - x^2}\,. \tag{1.15}$$

On reconnaît le potentiel des vitesses d'un écoulement autour d'une ligne plane (voir [Molin, 2002]).

Le modèle bidimensionnel dissymétrique

Il est aussi possible de déterminer le potentiel des vitesses pour un impact hydrodynamique de corps dissymétrique. C'est-à-dire lorsque la géométrie du corps n'admet pas de symétrie par rapport à la droite (Oy) (Fig. 1.7).

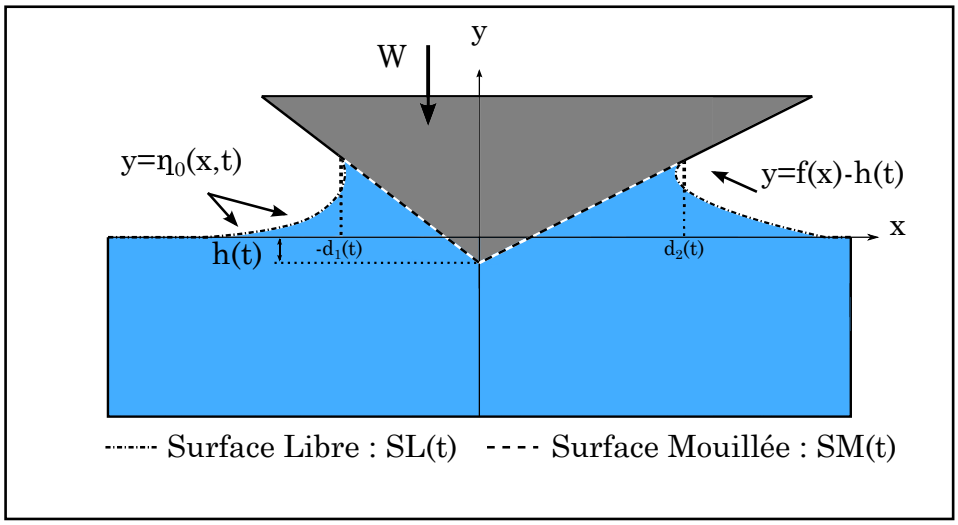

Figure 1.7 – *Schéma de paramétrage du modèle de Wagner dissymétrique non-linéarisé*

Pour cela le problème se formule de la même façon que pour les impacts de corps symétriques, c'est-à-dire avec les mêmes linéarisations aux niveaux des conditions limites (Fig. 1.8).

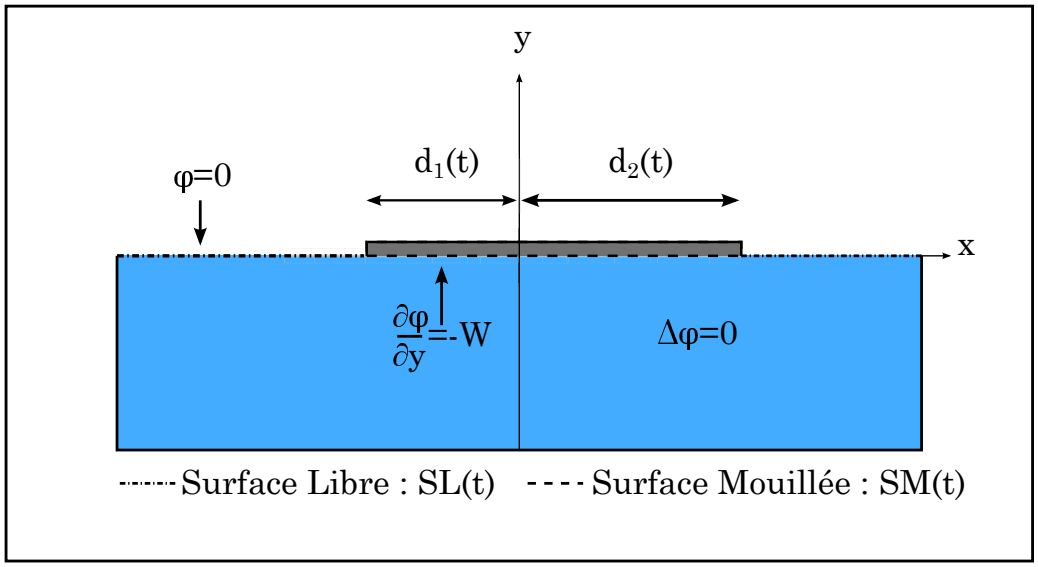

Figure 1.8 – *Schéma de paramétrage du modèle de Wagner dissymétrique linéarisé*

De façon analogue au problème de Wagner symétrique en termes de potentiel des déplacements 1.9, on peut formuler le problème de Wagner pour des solides dissymétriques :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & y < 0\,, \quad (1.16a) \\ \phi = 0 & y = 0,\ x \in\ SL(t)\,, \quad (1.16b) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -h(t) + f(x) & y = 0,\ x \in\ SM(t)\,, \quad (1.16c) \\ \phi \to 0 & (x^2 + y^2) \to \infty\,. \quad (1.16d) \end{cases}$$

En considérant la figure 1.8, le potentiel des déplacements associé se calcule de la façon suivante :

$$\gamma(\xi, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{(d_1(t) + \xi)(d_2(t) - \xi)}} PV \int_{-d_1(t)}^{d_2(t)} \phi_{,y}(\zeta) \frac{\sqrt{(d_1(t) + \zeta)(d_2(t) - \zeta)}}{\zeta - \xi} d\zeta\,. \quad (1.17)$$

Cela valable pour $x \in\ [-d_1(t),\, d_2(t)]$.

De plus pour une configuration bidimensionnelle dissymétrique il est nécessaire de vérifier deux conditions de Wagner qui traduisent toujours un déplacement fini aux extrémités de la surface mouillée pour $x = -d_1(t)$ et $x = d_2(t)$:

$$\int_{-d_1(t)}^{d_2(t)} \phi_{,y}(\zeta) \sqrt{\frac{d_2(t) - \zeta}{d_1(t) + \zeta}} d\zeta = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-d_1(t)}^{d_2(t)} \phi_{,y}(\zeta) \sqrt{\frac{d_1(t) + \zeta}{d_2(t) - \zeta}} d\zeta = 0\,. \quad (1.18)$$

Ce qui conduit donc à un système d'équations couplées :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-d_1(t)}^{d_2(t)} f(\zeta) \sqrt{\frac{d_2(t) - \zeta}{d_1(t) + \zeta}} d\zeta = h(t) \int_{-d_1(t)}^{d_2(t)} \sqrt{\frac{d_2(t) - \zeta}{d_1(t) + \zeta}} d\zeta\,, & (1.19a) \\ \displaystyle\int_{-d_1(t)}^{d_2(t)} f(\zeta) \sqrt{\frac{d_1(t) + \zeta}{d_2(t) - \zeta}} d\zeta = h(t) \int_{-d_1(t)}^{d_2(t)} \sqrt{\frac{d_1(t) + \zeta}{d_2(t) - \zeta}} d\zeta\,. & (1.19b) \end{cases}$$

Avec :

$$h(t) \int_{-d_1(t)}^{d_2(t)} \sqrt{\frac{d_2(t) - \zeta}{d_1(t) + \zeta}} d\zeta = h(t) \int_{-d_1(t)}^{d_2(t)} \sqrt{\frac{d_1(t) + \zeta}{d_2(t) - \zeta}} d\zeta = \frac{\pi}{2} \left[d_1(t) + d_2(t)\right] h(t)\,. \quad (1.20)$$

Le calcul complet du potentiel des vitesses n'est pas présenté ici, mais il est réalisé implicitement dans [Scolan et al., 1999]. On peut tout de même donner son expression :

$$\varphi(x, t) = -W\sqrt{(d_1(t) + x)\,(d_2(t) - x)}\,. \quad (1.21)$$

.

Pour plus d'informations sur le modèle d'impact hydrodynamique bidimensionnel pour des corps impactants dissymétriques et l'établissement des formules précédentes, le lecteur pourra consulter l'article de [Cointe et al., 2004].

1.2.1.2 Le modèle de Wagner tridimensionnel

Dans ce paragraphe, quelques résultats sur le modèle de Wagner tridimensionnel sont présentés. On traite les configurations d'impacts hydrodynamiques associées à des géométries de type paraboloïde elliptique et axisymétrique.

Le modèle tridimensionnel pour paraboloïde elliptique

Sous les même hypothèses que modèle bidimensionnel d'impact hydrodynamique et en procédant par analogie, le problème de Wagner pour le potentiel des déplacements ϕ se formule comme suit (Fig. 1.9) :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & z < 0\,, \quad (1.22a) \\ \phi = 0 & z = 0,\ (x,y) \in\ SL(t)\,, \quad (1.22b) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z} = -h(t) + f(x,y) & z = 0,\ (x,y) \in\ SM(t)\,, \quad (1.22c) \\ \phi \to 0 & (x^2+y^2+z^2) \to \infty\,. \quad (1.22d) \end{cases}$$

Pour une mise en équation complète du problème le lecteur pourra se référer aux travaux de [Tassin, 2010].

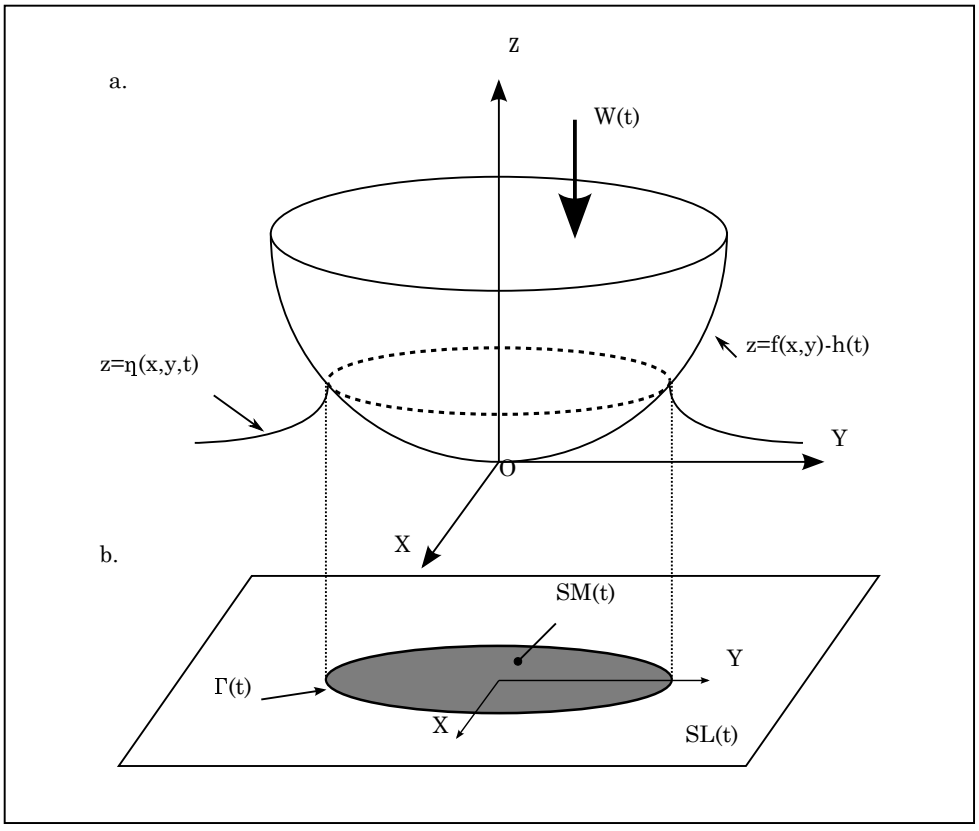

FIGURE *1.9 – Schéma du modèle 3D Paraboloide elliptique : a. Domaine physique b. Domaine linéarisé de Wagner : SOURCE*

Avec $SM(t)$ la projection de la surface mouillée en expansion lors de l'impact dans le plan $z = 0$ et $SL(t)$ la surface libre. Ces deux derniers domaines sont totalement distincts et délimités par la courbe fermée $\Gamma(t)$. A tout instant la forme du corps est donnée par la fonction $z = f(x, y)$ dans le repère attaché au plan $z = 0$. On notera la pénétration du corps $h(t)$ et on considérera sa cinématique purement verticale telle que : $\dot{h}(t) = W$.

Pour le moment il n'existe pas de solution générique pour des profils de corps solide 3D arbitraires. Mais il existe des solutions analytiques pour le potentiel des déplacements ou des vitesses pour des coques présentant une géométrie paraboloïde elliptique. De plus, la forme de ce type de corps solide dans son repère local s'écrit :

$$z = f(x,y) = \frac{x^2}{2r_x^2} + \frac{y^2}{2r_y^2}\,. \tag{1.23}$$

Avec r_x et r_y les rayons de courbures du paraboloïde elliptique.

Pour cette forme de corps solide au profil paraboloïde elliptique la solution analytique en termes de potentiel des déplacements s'écrit :

$$\phi(x,y,t) = -\frac{2h(t)a(t)}{3E(e)}\left(1 - \frac{x^2}{a^2(t)} - \frac{y^2}{b^2(t)}\right)^{\frac{3}{2}}\,. \tag{1.24}$$

Pour une démonstration détaillée du calcul de ce potentiel des déplacements le lecteur pourra se référer au travaux de [Scolan & Korobkin, 2008].

Enfin l'expression du potentiel des vitesses d'après Scolan [Scolan, 2012] :

$$\varphi(x,y,0,t) = -\frac{W\,a(t)}{E(e)}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2(t)} - \frac{y^2}{b^2(t)}} \tag{1.25}$$

Et les expressions de l'évolution au cours du temps des paramètres de la région de contact elliptiques (Fig. 1.10) :

$$\begin{cases} a(t) = \sqrt{2r_x h(t)\left(2 - k^2\dfrac{D(e)}{E(e)}\right)}\,, & \text{(1.26a)} \\ b(t) = \sqrt{2r_y h(t)\left(1 + k^2\dfrac{D(e)}{E(e)}\right)}\,. & \text{(1.26b)} \end{cases}$$

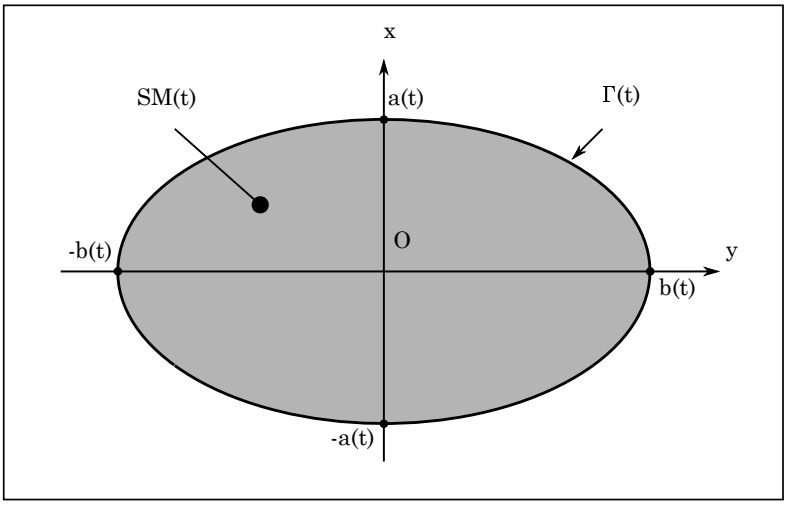

FIGURE *1.10 – Schéma et paramétrage de $SM(t)$, projection orthogonale de la surface mouillée d'un paraboloïde elliptique*

Avec :

- Le rapport d'aspect : $k = a/b$ de $\Gamma(t)$

- L'excentricité : $e = \sqrt{1 - k^2}$

- Les fonctions intégrales elliptiques de 1^{re} et 2^{e} espèce :

  - $E(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\theta} d\theta$ et $K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\theta}} d\theta$

  - $D = (K - E)/e^2$

Pour plus d'informations relative à l'impact hydrodynamique d'un paraboloïde elliptique on peut citer les travaux de [Scolan & Korobkin, 2001]. Dans cet article la solution analytique exacte du problème d'impact hydrodynamique d'un paraboloïde elliptique entrant à vitesse constante est obtenue en posant le problème inverse. C'est-à-dire que l'on considère $\Gamma(t)$ et $W(t)$ connue à chaque instant, de cette manière la forme du corps $f(x, y)$ est déterminée au moyen de la condition de Wagner, cela pour établir l'expression du potentiel des vitesses. De plus cet article démontre rigoureusement qu'un paraboloïde elliptique entrant à vitesse constante admet bien une zone de contact $SM(t)$ elliptique. Le problème direct, à savoir $W(t)$ et $f(x, y)$ considérés comme connus à chaque instant a aussi été traité analytiquement par [Korobkin & Scolan, 2006]

Les dernières avancées concernant l'application du problème de Wagner au paraboloïde elliptique, on permis a [Scolan & Korobkin, 2015] d'obtenir analytiquement une expression du potentiel des vitesses de l'écoulement lorsque le paraboloïde elliptique comprend 6 degrés de libertés. De plus, dans ces travaux la forme du paraboloïde elliptique peut changer au cours du temps

Validation du modèle par comparaison expérimentale

Durant l'année 2011, une campagne expérimentale d'impact hydrodynamique d'un paraboloïde elliptique a été réalisée au BGO First. Pour cela une maquette (Fig. 1.12) a été soumise à une multitude d'essais d'impact hydrodynamique qui ne sont pas présentés ici.

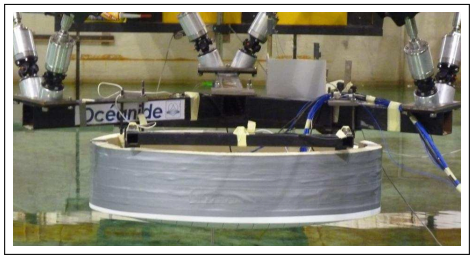

Figure *1.11 – Maquette avec instrumentation*

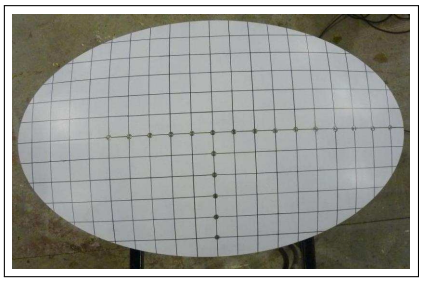

Figure *1.12 – Coque utilisée pour la campagne expérimentale*

Figure *1.13 – Image du dispositif à un instant t de l'impact*

Un essai spécifique a été analysé dans le but de comparer quelques résultats expérimentaux au modèle mathématique. Il s'agit d'un essai d'impact pur où la maquette du paraboloïde a été animée d'une vitesse de chute constante égale à $0.5\,m/s$ lors de l'impact sur la surface libre.

Par traitement d'images, (Fig(s). 1.14 et 1.15) aux différents instants de l'impact, l'expansion de la surface mouillée ($a(t)$ et $b(t)$) a été reconstituée :

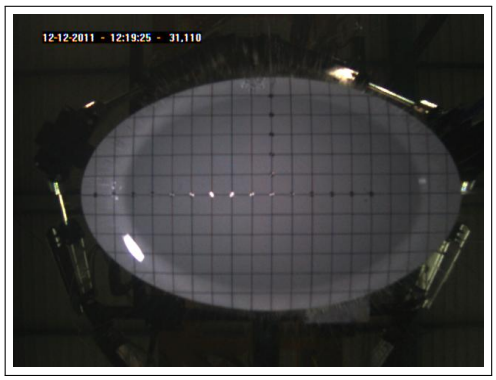

Figure *1.14 – Photo à un intant t de l'impact hydrodynamique*

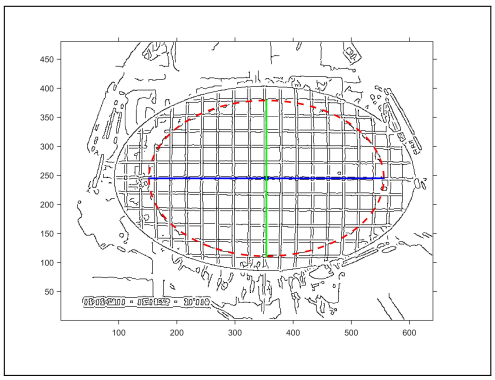

Figure *1.15 – Photo après traitement d'une image permettant de mesurer a et b*

La figure 1.16 confronte les mesures expérimentales obtenues par traitement d'image et les valeurs calculées par le modèle analytique selon les équations (1.26) :

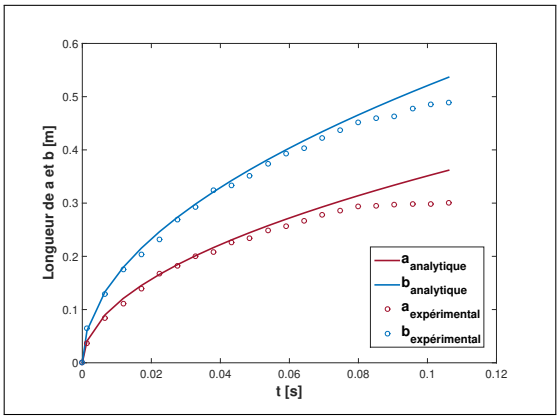

Figure *1.16 – Comparaison de mesures expérimentales et d'un modèle analytique en terme d'expansion de surface mouillée pour une coque de type paraboloïde elliptique*

De plus l'instrumentation installée sur le dispositif présenté à la figure 1.13 a permis d'enregistrer les efforts hydrodynamiques au cours du temps. Ces efforts expérimentaux ont été comparés aux efforts calculés analytiquement par [Scolan & Korobkin, 2012] :

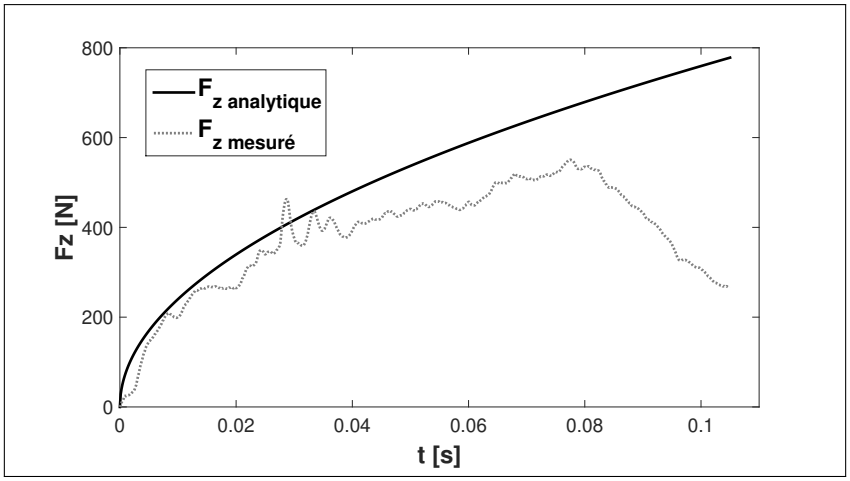

FIGURE *1.17 – Comparaison de mesures expérimentales et d'un modèle analytique en terme d'efforts hydrodynamiques pour une coque de type paraboloïde elliptique*

En s'appuyant sur les figures 1.16 et 1.17, on constate que pour les 1^{ers} instants de pénétration il y a une très bonne concordance des mesures expérimentales d'expansion de surface mouillée et des efforts hydrodynamiques.

1.2.1.3 Le modèle tridimensionnel axisymétrique

Les configurations d'impact hydrodynamique pour des géométries de corps axisymétriques ont tout d'abord été étudiées par [Zhao & Faltinsen, 1999]. La mise en équation du problème demeure similaire au cas 2D symétrique du fait de la symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) (Fig. 1.18). D'après [Scolan, 2004], pour cette approche il est commun d'utiliser les deux variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{y} = \dfrac{y}{d(t)} & \text{(1.27a)} \\ \rho = \dfrac{x}{d(t)} & \text{(1.27b)} \end{cases}$$

Avec $d(t)$, la correction de surface mouillée axisymétrique. En appliquant les changements de variables (1.27) au problème aux limites mixte linéarisé (1.16), le problème de Wagner pour les géométries axisymétriques s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \tilde{y} < 0 & \text{(1.28a)} \\ \phi = 0 & \tilde{y} = 0,\ \rho > 1 & \text{(1.28b)} \\ \phi_{,\tilde{y}} = d(t)\left[f(d(t)\rho) - h(t)\right] & \tilde{y} = 0,\ \rho < 1 & \text{(1.28c)} \\ \phi \to 0 & (\rho^2 + \tilde{y}^2) \to \infty & \text{(1.28d)} \end{cases}$$

Avec : $r^2 = x^2 + y^2$

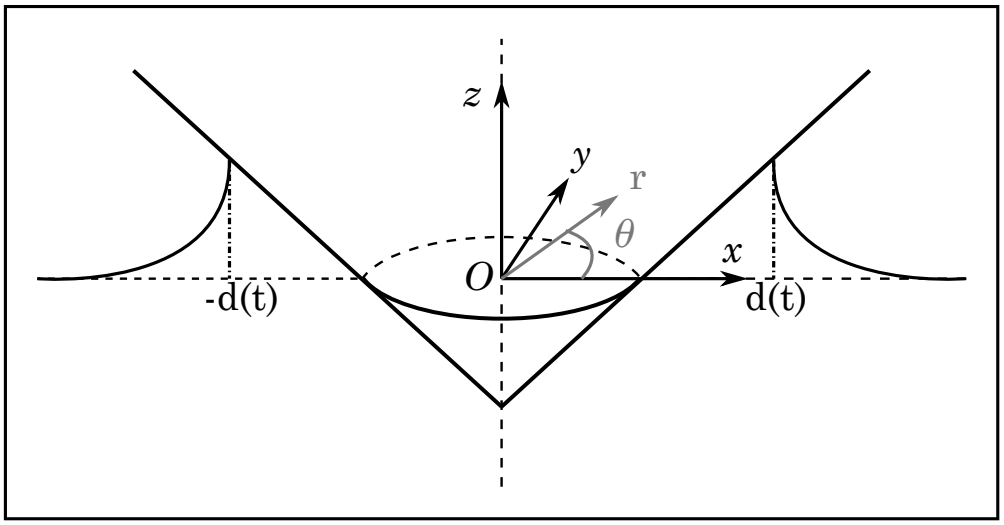

Figure *1.18 – Schéma de paramétrage cylindrique du modèle de Wagner axisymétrique*

Concrètement, la correction de surface mouillée axisymétrique peut-être calculée en appliquant une transformation de Hankel au potentiel des déplacements :

$$\phi(\rho, \tilde{y}, t) = \int_0^{+\infty} G(\lambda, t) e^{\lambda \tilde{y}} J_0(\lambda, \rho) d\lambda \tag{1.29}$$

Avec G la fonction à transformer au sens de Hankel et J_0 la fonction de Bessel de 1^{re} espèce d'ordre 0. Les développements théoriques, ici présentés, sont adaptés d'un cas plus général prenant en compte les déformations hydroélastiques pour le cas d'un cône qui a été traité par [Scolan, 2004].

Le calcul de cette intégrale est dépendant de la valeur de ρ qui indique si l'on se place sur la surface mouillée ou sur la surface libre, Pour $\tilde{y} = 0$, cela conduit à un système d'équations couplées en fonction de la valeur ρ :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} G(\lambda, t) J_0(\lambda, \rho) d\lambda = 0, & \rho > 0 \quad (1.30a) \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda G(\lambda, t) J_0(\lambda, \rho) d\lambda = d(t) \left[f(d(t)\rho) - h(t) \right], & \rho < 1 \quad (1.30b) \end{cases}$$

La fonction $G(\lambda, t)$ a été calculée par [Sneddon, 1966], telle que :

$$G(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \int_0^1 u^{3/2} J_{1/2}(u\lambda) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha \left[d(t) \left(-h(t) + f(d(t) u \sin\alpha) \right) \right] d\alpha \,, \tag{1.31}$$

L'expression de $G(\lambda, t)$ est introduite dans l'équation (1.29) et permet d'exprimer l'expression du potentiel des déplacements sur la surface mouillée. En appliquant l'identité 11.4.41 de [Abramowitz & Stegun, 1979] :

$$\phi(\rho, 0, t) = \int_1^{\frac{1}{\rho}} \frac{\chi(\rho\nu, t)}{\sqrt{\nu^2 - 1}} d\nu, \quad 0 < \rho < 1 \tag{1.32}$$

Avec :

$$\chi(\mu, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\mu} \frac{\sigma([d(t) \left(-h(t) + f(d(t)\sigma) \right)])}{\mu^2 - \sigma^2} d\sigma \tag{1.33}$$

La condition limite de Dirichlet :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho}(\rho, 0, t) = 0\,, \tag{1.34}$$

qui impose un déplacement vertical fini le long de la ligne de contact circulaire de rayon $d(t)$ est satisfaite si $\chi(1,t) = 0$. Ce qui revient à calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\sigma([d(t)\,(-h(t) + f(d(t)\sigma))])}{1-\sigma^2} d\sigma = 0 \tag{1.35}$$

Après calcul la condition de Wagner axisymétrique devient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\,(-h(t) + f(d(t)\sin\alpha))\,d\alpha \tag{1.36}$$

On peut donner l'expression de quelques corrections mouillées en fonction des géométries suivantes :

Géométrie	Correction de surface mouillée
Cône d'angle mort β	$d(t) = \dfrac{4h(t)}{\pi \tan\beta}$
Paraboloïde de révolution de rayon R	$d(t) = \sqrt{3Rh(t)}$

Table *1.2 – Correction de surface mouillée en fonction du type de géométrie pour des solides axisymétriques*

L'expression du potentiel des vitesses est obtenue en calculant la condition de Wagner (Eq. (1.36)) et la dérivée par rapport en temps du calcul du potentiel des déplacements (Eq. (1.32)) :

$$\varphi(r,t) = -\frac{2W}{\pi}\sqrt{d^2(t) - r^2} \tag{1.37}$$

Nous reconnaissons l'expression du potentiel des vitesses d'un écoulement autour d'un disque plat de rayon $d(t)$ à vitesse constante W.

1.2.1.4 Conclusion sur le modèle de Wagner

Dans la partie 1.2.1 plusieurs résultats fondamentaux sur le modèle de [Wagner, 1932] ont été présentés. L'établissement de l'expression des inconnues des problèmes aux limites mixte linéarisé 2D et 3D (Eq(s). (1.9), (1.22) et (1.28)), à savoir le potentiel des déplacements et les corrections des surface mouillée, ont été explicitées. Néamoins, le modèle de Wagner originel ne permet pas de déterminer une distribution de pression bornée sur la surface mouillée. Elle prédit uniquement les valeurs maximales des champs de pression aux points de contacts.

Dans la partie 1.2.2, nous présentons les extensions du modèles de Wagner qui permettent d'obtenir des distributions de pression bornées.

1.2.2 Extension du modèle de Wagner

Les modèles de [Wagner, 1932] énoncés précédemment ont une limitation majeure en termes de calcul de pression. En effet, ils reposent sur un calcul de pression basé sur la formule de Bernoulli linéarisée :

$$P_{wagner} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,, \tag{1.38}$$

Ainsi au regard des potentiels des vitesses qui sont présentés dans les paragraphes 1.2.1.1, 1.2.1.2 et 1.2.1.3 nous pouvons les formuler sous l'écriture générique suivante :

$$\varphi = G(t)\sqrt{F(x,y,t)} \tag{1.39}$$

On résume les expressions de G et F au moyen du tableau suivant :

Forme	$G(t)$	$F(x,y,t)$
Bidimensionnel Symétrique	$-W$	$a^2(t) - x^2$
Bidimensionnel Dissymétrique	$-W$	$(d_1(t) + x)\,(d_2(t) - x)$
Axisymétrique	$-\frac{2W}{\pi}$	$d^2(t) - r^2$
Paraboloïde Elliptique	$-\frac{Wa}{E(e)}$	$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

Table *1.3 – Résumé de la forme générale des potentiels des vitesses pour des géométries connues animées d'une vitesse verticale assumée constante W.*

Du fait de la dérivation temporelle dans l'équation de Bernoulli linéarisée (Eq. 1.38), la pression est non-définie aux bornes de F (Tab. 1.3). Ainsi, la pression calculée au sens de [Wagner, 1932], est singulière et tend vers l'infini aux points de contact entre la surface mouillée et le corps solide. D'un point de vue de modélisation, la pression n'est pas non plus définie au delà des points de contact car le jet n'est pas modélisé. Plusieurs formulations en pression ont donc été développées dans la littérature afin d'obtenir des distributions de pression bornées sur toute la surface mouillée du corps impactant.

Un premier type de formulation a été développée en se basant sur les méthodes d'expansion asymptotiques de [Van Dyke, 1964]. Cette méthode consiste à raccorder la pression singulière de Wagner, à une solution locale modélisant la racine d'un jet hydrodynamique. On peut citer les travaux de [Cointe & Armand, 1987] pour l'impact d'un cylindre, [Howison et al., 1991] ou encore [Oliver, 2002] pour divers profils bidimensionnels symétriques. C'est ce que l'on appelle aujourd'hui les modèles de pression dite composite.

Un second type de formulation a été mis en oeuvre en utilisant l'équation de Bernoulli non-linéarisée et en procédant à un développement limité du potentiel des vitesses au niveau de la surface mouillée. Ce type de formulation en pression repose sur les travaux de [Logvinovich, 1969]. Nous présentons un cas particulier appelée Modified Logvinovich Model (MLM) qui a été développée par [Korobkin & Malenica, 2005].

1.2.2.1 La formulation composite

La formulation composite de la pression a été introduite par [Wagner, 1932], celle-ci repose sur ce que l'on appelle les développements asymptotiques de [Van Dyke, 1964]. [Cointe & Armand, 1987] ont développé cette méthode pour un cylindre impactant une surface libre au repos et [Howison et al., 1991] pour un dièdre symétrique. Dans ces deux derniers cas la singularité en terme de pression a été contournée en divisant le domaine fluide en deux parties, selon le schéma (Fig. 1.19) :

— Le domaine extérieur (Wagner) (I)
— Le domaine intérieur (La racine du jet) (II)

Pour présenter la méthode, on s'appuiera sur les travaux de [Zhao & Faltinsen, 1993], ainsi que sur le schéma 1.19 :

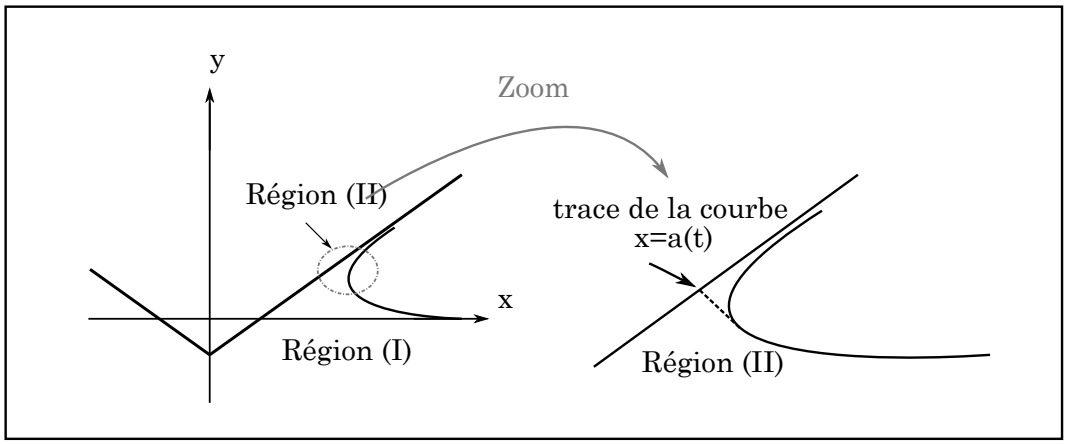

FIGURE *1.19 – Schéma de principe pour le modèle de calcul de pression composite*

Au sein du domaine extérieur (I), dans le cas d'un solide bidimensionnel symétrique, la pression de Bernoulli linéarisée (Eq. (1.38)) non-définie aux points de contact $x = \pm a(t)$ s'écrit comme suit :

$$p_{out} = \rho \frac{W a(t)\dot{a}(t)}{\sqrt{a^2(t) - x^2}}, \quad \text{pour } |x| < a(t) \tag{1.40}$$

Dans la région interne (II), au voisinage de $x = \pm a(t)$, d'après [Wagner, 1932] la pression P_{in} peut s'exprimer en fonction d'un paramètre τ :

$$P_{in} = 2\rho V_j^2 \frac{|\tau|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + |\tau|^{\frac{1}{2}}}} \tag{1.41}$$

Où le paramètre $|\tau|$ est lié à la variable x par transformation conforme du domaine interne d'après [Zhao & Faltinsen, 1993] :

$$x - a(t) = \frac{\delta}{\pi}(-\ln|\tau| - 4|\tau|^{\frac{1}{2}} - |\tau| + 5) \tag{1.42}$$

Le processus de transformation conforme qui ne sera pas présenté ici (voir les transformations de Schwarz-Christoffel [Nehari, 1952]). On peut tout de même expliciter le comportement de τ en fonction de sa localisation dans l'écoulement :

— Le paramètres $|\tau|$ varie de 0 à ∞.
— La valeur maximale de P_{in} est atteinte pour $|\tau| = 1$, c'est-à-dire $x = a(t)$
— Lorsque $|\tau| \to 0$, $y \to \infty$, c'est-à-dire le long du corps dans le sens du jet.
— Lorsque $|\tau| \to \infty$, $y \to -\infty$, c'est-à-dire le long du corps dans le sens du domaine extérieur.

Avec δ et la vitesse du fluide V_j (Fig. 1.20) l'épaisseur de l'écoulement dans la zone (II) qui est obtenue en raccordant asymptotiquement au voisinage de $x = \pm a(t)$ les expressions de P_{out} et P_{in}. D'après [Wilson, 1989] dans le cadre d'un corps bidimensionnel :

$$\delta = \frac{\pi}{8} \frac{W^2 a(t)}{\dot{a}^2(t)} \tag{1.43}$$

Et :

$$V_j = \dot{a}(t) \tag{1.44}$$

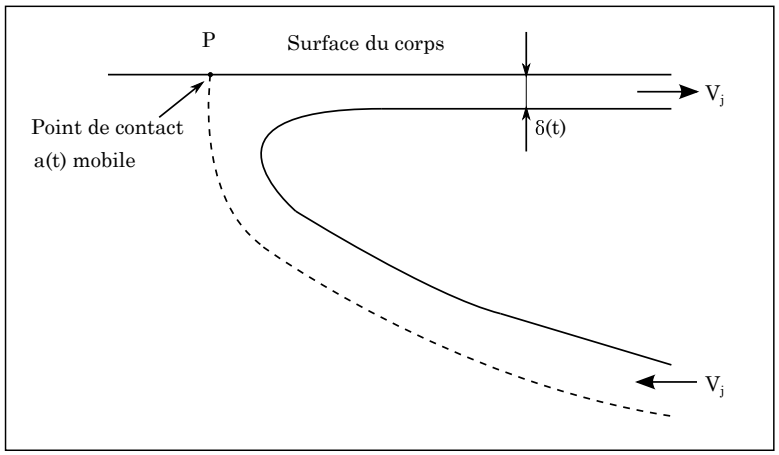

FIGURE *1.20 – Schéma du domaine interne àprès transformation conforme pour obtenir δ et V_j*

Avec l'expression de la pression asymptotique :

$$P_s \approx \frac{\rho W a(t) \dot{a}(t)}{\sqrt{2a(t)\,[a(t) - x]}} \tag{1.45}$$

Il s'agit donc de la partie principale commune aux deux expressions P_{out} et P_{in}. On peut enfin formuler une expression de la pression composite en soustrayant P_s à la somme de p_{out} et p_{in} :

$$P_{comp} = \rho \frac{W a(t) \dot{a}(t)}{\sqrt{a^2(t) - x^2}} + 2\rho \dot{a}^2(t) \frac{|\tau|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + |\tau|^{\frac{1}{2}}}} - \frac{\rho W a(t) \dot{a}(t)}{\sqrt{2a(t)\,[a(t) - x]}} \tag{1.46}$$

Cette solution n'est donc plus singulière pour $x = \pm a(t)$, notons que l'expression de la pression composite (Eq. (1.46)) est valable pour une géométrie bidimensionnel symétrique.

Cette méthode est donc une solution bidimensionnelle. Néanmoins il est tout à fait possible de l'appliquer à des problèmes d'impact tridimensionnel comme dans [Scolan & Korobkin, 2003] qui détaillent l'expression de l'épaisseur de l'écoulement et de sa vitesse pour le cas de l'impact d'un paraboloïde elliptique. On peut aussi citer les travaux de [Peseux et al., 2005] qui ont vérifié expérimentalement cette formulation pour un cône de révolution.

1.2.2.2 La formulation "Modified Logvinovich Model" (MLM)

La formulation MLM provient des travaux de [Logvinovich, 1969], ce dernier a travaillé sur l'approximation du disque plat à la suite des travaux de [Wagner, 1932]. Il se rendit compte que la formulation de Wagner ne pouvait pas fournir des résultats près de la ligne de contact fluide-solide ($\pm a(t)$ ou $\Gamma(t)$), où la pression tend vers l'infini. Il eut donc l'idée d'ajouter des termes dans le potentiel des vitesses dans le but de tenir compte, dans une certaine mesure, des caractéristiques particulières de l'écoulement et de la pression au voisinage de la ligne de contact. Pour cela, il justifia l'ajout des termes supplémentaires en évaluant que la vitesse de l'écoulement à un point de pression nul (par exemple à la sortie du jet) était deux fois plus importante qu'au niveau de la ligne de contact [Korobkin, 2004]. Malheureusement, ce dernier postulat n'a jamais pu être vérifié.

L'idée de la formulation MLM se rapproche de celle de Logvinovich, à savoir l'ajout de termes supplémentaires dans la pression afin d'éviter la singularité à la ligne de contact. Pour justifier cela, l'équation de Bernoulli non-linéarisée est utilisée :

$$p = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho\frac{1}{2}|\vec{\nabla}\varphi|^2 \tag{1.47}$$

Par la suite, les grandes étapes de calcul pour aboutir à l'expression de la pression selon la formulation MLM pour les cas bidimensionnels et tridimensionnels sont présentées. Les développements suivants s'appuient sur les travaux de [Korobkin, 2004] et de [Scolan & Korobkin, 2012].

Le cas bidimensionnel

Le point de départ de la formulation MLM est la condition d'imperméabilité :

$$\vec{\nabla}\varphi \,.\, \vec{n} = \vec{v}_b \,.\, \vec{n} \quad \text{avec} \quad \vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f^\star}{\|\vec{\nabla} f^\star\|} \quad \text{et} \quad \vec{v}_b = -W.\vec{y} \tag{1.48}$$

En posant : $f^\star(x, y, t) = f(x) - y - h(t)$, avec :

φ : Le potentiel des vitesses du fluide.
$\vec{v}_b$: Le vecteur vitesse associé au solide en mouvement.
$\vec{n}$: Le vecteur normal unitaire sur la surface mouillée du solide.

Il vient :

$$\vec{\nabla}\varphi \,.\, \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix}\varphi_{,x}\\ \varphi_{,y}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{,x}\\ -1\end{pmatrix}}{\sqrt{1+f_{,x}^2}} \quad \text{et} \quad \vec{v}_b \,.\, \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix}0\\ -W\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{,x}\\ -1\end{pmatrix}}{\sqrt{1+f_{,x}^2}} \tag{1.49}$$

On obtient donc :

$$\varphi_{,y} = \varphi_{,x} f_{,x} - W \,. \tag{1.50}$$

Avec :

$$\psi(x,t) \approx \varphi(x, f(x) - h(t), t)\,, \tag{1.51}$$

la restriction du potentiel φ sur la surface mouillée.

L'équation (1.51) est dérivée par rapport au temps en prenant bien en compte que h dépend du temps et $\dot{h}(t) = W$:

$$\psi_{,t} = \varphi_{,t} - W\,\varphi_{,y}\,. \tag{1.52}$$

Puis son gradient est exprimé dans la direction $\vec{x}$:

$$\psi_{,x} = \varphi_{,x} + \varphi_{,y} f_{,x}\,. \tag{1.53}$$

En multipliant la relation précédente par $f_{,x}$ il vient :

$$\varphi_{,y} = \frac{\psi_{,x} f_{,x} - W}{D} \quad \text{avec} \quad D = 1 + f_{,x}^2\,. \tag{1.54}$$

La relation de Bernoulli non-linéarisée est développée, en utilisant la restriction du champ de pression tel que :

$$P_{mlm}(x,t) \approx p(x, f(x) - h(t), t) \tag{1.55}$$

Ainsi :

$$-\frac{1}{\rho} P_{mlm}(x,t) = \varphi_{,t} + \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\varphi|^2\,. \tag{1.56}$$

En développant la norme du gradient l'équation précédente peut s'écrire de la façon suivante :

$$-\frac{1}{\rho} P_{mlm}(x,t) = \varphi_{,t} + \frac{1}{2}\left(\varphi_{,x}^2 + \varphi_{,y}^2\right)\,. \tag{1.57}$$

Après un peu d'algèbre et en procédant à un développement limité de ψ tel que :

$$\psi(x,t) = \varphi(x,0,t) - W\left[f(x) - h(t)\right]\,, \tag{1.58}$$

on obtient le résultat de [Korobkin, 2004] pour les corps symétriques :

$$P_{mlm}(x,t) = -\rho\left[\psi_{,t} + \frac{f_{,x}\dot{h}}{1 + f_{,x}^2}\psi_{,x} + \frac{1}{2}\frac{\psi_{,x}^2 - W^2}{1 + f_{,x}^2}\right]\,. \tag{1.59}$$

L'ajout des termes supplémentaires à l'expression de la pression de Bernoulli linéarisée rend cette pression MLM non-singulière et définie sur la quasi-totalité de la surface mouillée. En pratique la distribution en pression obtenue au moyen de la formulation MLM décroit très rapidement lorsque x tend vers les bornes frontières de la surface mouillée.

Certains développements de la formulation MLM ne sont pas totalement justifiés physiquement. Néanmoins cette formulation a mainte fois été validée au travers de campagne expérimental. Nous pouvons citer les travaux de [Russo et al., 2018] qui ont vérifié expérimentalement la formulation MLM pour l'impact d'un oblique d'un dièdre dissymétrique.

Le cas tridimensionnel

En ce qui concerne le cas tridimensionnel, le point de départ demeure le même, à savoir la condition d'imperméabilité et en posant :

$$f^{\star}(x,y,z,t) = f(x,y) - z - h(t)\,. \tag{1.60}$$

De la même manière que dans le cas bidimensionnel pour un impact purement vertical à vitesse constante W :

$$\vec{\nabla}\varphi\,.\,\vec{n} = \frac{\begin{pmatrix}\varphi_{,x}\\ \varphi_{,y}\\ \varphi_{,z}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}f_{,x}\\ f_{,y}\\ -1\end{pmatrix}}{\sqrt{1+|\vec{\nabla}f|^2}} \quad \text{et} \quad \vec{v}_b\,.\,\vec{n} = \frac{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -W\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}f_{,x}\\ f_{,y}\\ -1\end{pmatrix}}{\sqrt{1+|\vec{\nabla}f|^2}}\,. \tag{1.61}$$

On exprime le gradient du potentiel des vitesses dans la direction verticale :

$$\vec{\nabla}\varphi\,.\,\vec{n} = \vec{v}_b\,.\,\vec{n} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_{,z} = \vec{\nabla}_{(x,y)}\varphi\,.\,\vec{\nabla}f - W\,. \tag{1.62}$$

En étendant les mêmes opérations mathématiques au cas tridimensionnel et en considérant la restriction sur la surface mouillée du potentiel des vitesses et de la pression comme réalisé dans [Korobkin, 2005] :

$$\begin{cases} \psi(x,y,t) \approx \varphi(x,y,f(x,y)-h(t),t)\,, \\ P(x,y,t) \approx p(x,y,f(x,y)-h(t),t)\,. \end{cases} \tag{1.63}$$

Ainsi qu'en réalisant un développement limité de l'expression du potentiel réduit ψ :

$$\psi(x,y,z,t) = \varphi(x,y,0,t) + z\varphi_{,z}(x,y,0,t) + ... \tag{1.64}$$

L'expression de la pression MLM pour un solide tridimensionnel s'écrit comme suit :

$$-\frac{1}{\rho}P_{mlm}(x,y,t) = \varphi_{,t} - \dot{W}[f-h(t)] + \frac{1}{2}W^2 + \frac{1}{2}\vec{\nabla}^2\varphi - \frac{1}{2D}\left((\vec{\nabla}\varphi - W).\vec{\nabla}f\right)^2\,. \tag{1.65}$$

Pour plus d'informations sur les développements permettant d'aboutir à cette formulation de la pression MLM, on peut citer les travaux de Scolan et Korokbin [Scolan & Korobkin, 2012].

1.2.2.3 Conclusion sur les extensions du modèle de Wagner

Dans la partie 1.2.2, sont présentées les deux grandes extensions du modèle de Wagner qui permettent d'obtenir des champs de pressions bornées sur la surface mouillée. Jusqu'à présent, les méthodes présentées repose sur un formalisme analytique ou quasi-analytique.

La partie 1.2.3 constitue un état de l'art des méthodes numériques appliquées à l'impact hydrodynamique.

1.2.3 Approches Numériques

Cette partie constitue un état de l'art en relation avec les modèles numériques appliqués à l'impact hydrodynamique. En plus des modèles analytiques basés sur le modèle de [Wagner, 1932], une multitude de méthodes numériques ont été développées dans le but d'étudier les phénomènes d'impact hydrodynamique bidimensionnel et tridimensionnel.

Nous pouvons citer les travaux de [Zhao & Faltinsen, 1999], qui ont mis en œuvre une méthode basée sur les éléments frontières dans le but de résoudre le problème d'impact hydrodynamique complètement non-linéaire. Ils ont appliqué cette méthode à plusieurs types de corps solides axisymétriques en prenant en compte la séparation de l'écoulement au niveau des points de contact. Pour les d'efforts hydrodynamiques, leurs résultats numériques ont été validés au moyen de mesures expérimentales.

La méthode BEM (pour Boundary Element Method) a été utilisée par [Xu et al., 2008] pour modéliser l'impact oblique d'un dièdre dissymétrique à vitesse constante sur une surface libre plane. Ils utilisent la théorie des écoulements à potentiel des vitesses en négligeant la gravité. L'écoulement auto-similaire engendré par l'impact du dièdre est résolu par la méthode des éléments frontières couplée à une solution analytique dans le but de modéliser le jet hydrodynamique. Ils ont axé leur étude sur les effets de la vitesse horizontale et la dissymétrie du solide en caractérisant les variations des champs de pression au niveau de la pointe du dièdre. D'après leurs résultats, la vitesse horizontale augmente la pression en amont de l'écoulement. L'impact oblique bidimensionnel d'un dièdre avec séparation d'écoulement a aussi été étudié par [Bao et al., 2016] au moyen de la théorie des écoulements à potentiel des vitesses. Pour permettre la séparation de l'écoulement, ils ont implémenté une condition limite supplémentaire au niveau des points de contact. Une nouvelle méthode reposant sur l'équation d'Euler y est mise en œuvre afin de modéliser le jet. Nous pouvons aussi citer les travaux de [Bao et al., 2017] sur l'impact oblique d'un dièdre avec séparation d'écoulement. Dans cette publication, la théorie des écoulements à potentiel des vitesses est utilisée, mais ici le dièdre est en chute libre et possède 3 degrés de liberté. Le schéma numérique repose sur la méthode des éléments de frontière et le jet est traité au moyen de la conservation de la quantité de mouvement. Leurs résultats présentent les distributions d'accélérations, de vitesses, de pressions au sein de l'écoulement ainsi que les déformations de la surface libre. [Semenov & Iafrati, 2006] ont utilisé les propriétés d'auto-similarité du problème d'impact associé à un dièdre symétrique. Le fluide est considéré parfait, de plus la tension de surface et la gravité sont négligées. La solution est basée sur la méthode de *conformal mapping* du domaine bidimensionnel. De cette manière, le problème aux limites se résume à un système d'équations intégrale et intégro-différentielle. Ce système est résolu par un schéma numérique validé pour le cas de l'impact hydrodynamique d'un dièdre symétrique. Leur modèle numérique a été validé par les résultats de la littérature existante pour l'évolution de la surface libre et les efforts hydrodynamique obtenus en fonction de l'angle de relèvement. De plus dans cette étude, il propose un critère permettant de prédire la séparation de l'écoulement. Pour terminé sur l'impact d'un dièdre, on peut s'appuyer sur les travaux de [Gu et al., 2014]. Au moyen de l'équation de Navier-Stokes ainsi que d'une méthode type, *Level Set* ils ont montré une très bonne concordance en termes d'effort hydrodynamique et de champs de pression par rapport à des modèles numériques utilisant la théorie des écoulements à potentiel des vitesses.

Pour les configurations d'impact tridimensionnelle on peut citer les travaux de [Facci et al., 2016] qui ont étudié l'impact d'une carène de bateau. Leur modèle CFD utilise l'équation de Navier-Stokes incompressible discrétisée au moyen de la méthode des volumes finis. L'évolution de la surface libre est gérée par la méthode *Volume-of-Fluid* (VoF) au travers d'un écoulement biphasique entre l'air et l'eau. Pour valider leur modèle, ils ont utilisé des résultats expérimentaux obtenu par la méthode *Particle Image Velocimetry* afin de caractériser l'écoulement. Ils ont démontrés de très bonne correspondance entre leur modèle CFD et leurs mesures expérimentales pour les efforts induits, la remontée locale du fluide sur la carène, et les distributions de vitesses au sein de l'écoulement. [Iranmanesh & Passandideh, 2017] ont étudié l'impact hydrodynamique 3D d'un cylindre horizontal. Le modèle numérique utilisé repose sur l'équation de Navier-Stokes et la conservation de la masse pour de faible nombre de *Froude*. L'évolution de la surface libre est résolue au moyen de la méthode VoF couplée à un équation d'advection. Pour simuler la condition de non-glissement sur cylindre, ils ont implémenté une viscosité très élevée sur les parois du cylindre. Leurs résultats ont été corroborés par les résultats expérimentaux de [Wei & Hu, 2014]. Pour d'étudier l'impact de plusieurs formes tridimensionnelles connues, comme le paraboloïde elliptique, le cône ou encore la sphère, [Tassin, 2010] a développé un modèle numérique innovant formulé à l'aide du potentiel des déplacements. Pour calculer la ligne de contact fluide-solide, il a utilisé une nouvelle méthode basée sur les éléments frontières (BEM). Les distributions de pression sont obtenues par la méthode MLM. Il a aussi été en mesure de valider ces résultats numériques au moyen d'une campagne expérimentale réalisée avec une machine de choc hydraulique.

Dans les parties 1.2.2 et 1.2.3 nous présentons un état de l'art général de l'impact hydrodynamiques pour des formalismes analytiques et numériques pour l'impact de corps solides sur des surfaces libres planes.

La partie 1.2.4 constitue l'étape finale de cet état de l'art nécessaire à la preséntation des travaux de cette thèse de doctorat. À savoir la présentation des travaux existants sur l'impact hydrodynamique sur des surfaces libres mobiles ayant le profil d'une vague.

1.2.4 Impact hydrodynamique et vague

Dans cette partie, nous dressons un état de l'art en relation avec l'impact hydrodynamique de corps solide sur des surfaces libres présentant un profil de houle d'Airy. La littérature en relation avec l'impact hydrodynamique sur des surfaces libres planes et au repos est conséquente, ce qui n'est pas le cas lorsque la surface libre n'est plus plane et en mouvement.

D'un point de vue expérimental [Smith et al., 1998] ont étudié l'impact d'une plaque plane en chute libre sur une crête de vague. Leur objectif était de déterminer la valeur maximale de l'effort verticale engendré sur la plaque lors de l'impact. Au moyen d'une série de tests faisant intervenir la masse et la vitesse de l'impacteur ainsi que la pente de la vague, ils ont été en mesure de proposer une formule sans dimension prédisant le chargement hydrodynamique. [Scolan et al., 2006] ont mis en place un dispositif expérimental permettant d'enregistrer l'effort verticale engendré par l'impact d'une crête de vague stationnaire tridimensionnelle sur une plaque plane. Par le biais de plusieurs capteurs ils ont été capable de déterminer l'intensité des efforts hydrodynamiques engendrés sur la plaque plane. De plus, par une méthode reposant sur l'analyse d'image, ils ont pu déterminer l'aire de la surface mouillée.

Leur mesures ont permis de conclure que l'effort hydrodynamique est aussi intense lors d'une phase d'entrée d'eau (augmentation de la surface mouillée) que dans une phase de sortie d'eau (diminution de la surface mouillée).

En termes de développements analytiques tridimensionnels [Scolan, 2014a] a considéré l'impact d'un paraboloïde elliptic à vitesse constante sur une crête de vague en mouvement. Son résultat majeur est qu'il a démontré qu'il est possible de traiter des problèmes d'impact tridimensionnels sur des surfaces libres non planes et en mouvement, cela sans grande modification du problème en relation avec une surface libre plane et au repos. Ses développements ont d'ailleurs été validé par des mesures expérimentales pour les distributions de pression et des efforts.

L'impact hydrodynamique bidimensionnel de solides déformables sur des vagues a aussi été largement traité dans la littérature. Dans la suite des développements nous ne tiendrons pas compte des phénomènes hydroélastiques. Mais nous pouvons quand même évoquer ici cet aspect en présence de vagues. [Faltinsen et al., 1997] ont étudié l'impact hydrodynamique d'une vague sur le pont mouillé d'un navire en utilisant la théorie des poutres. Deux méthodes ont été utilisées. La première repose sur une méthode de détermination des modes normaux de vibration d'une poutre de type Euler-Bernoulli représentant le pont mouillé. La seconde méthode est numérique et repose sur les travaux de [Kvalsvold & Faltinsen, 1995] qui ont aussi utilisé la théorie des poutres mais de type Timoshenko. Les deux modèles numériques ont montré une bonne concordance avec des essais expérimentaux. Suite à ces travaux, [Korobkin & Khabakhpasheva, 2006] ont aussi étudié l'impact hydroélastique d'une plaque plane sur des vagues au moyen de la théorie potentielle. Leur analyse est basée sur la détermination des modes normaux de déformations de la plaque élastique de type Euler-Bernoulli. Ils se sont majoritairement intéressé aux contributions des énergies cinétique et potentielle dans l'établissement des contraintes de déformations maximales. Enfin [Khabakhpasheva & Korobkin, 2013], se sont intéressés au phénomène hydroélastique appliqué à l'impact symétrique d'un dièdre élastique une nouvelle fois au moyen de la théorie des écoulements à potentiel des vitesses et le modèle de [Wagner, 1932]. Les parois du dièdre sont modélisées avec des poutres de type Euler. Dans cette étude, ils ont été capables de caractériser analytiquement : l'écoulement du liquide, les déformations du dièdre et l'évolution de la surface mouillée dans le but de déterminer les contraintes de déformations maximales.

Sans tenir compte des phénomènes hydroélastiques, [Korobkin, 2013] à considérer l'impact bidimensionnel à vitesse constante d'une plaque plane sur une surface libre immobile mais au profil parabolique. Pour cela, il a utilisé la théorie de Wagner au second-ordre que l'on ne présentera pas ici. Pour plus d'informations sur la modèle de Wagner au second ordre, le lecteur pour se référer à [Oliver, 2007]. Après avoir déterminé une solution au second ordre pour l'écoulement au niveau de la surface mouillée, il a raccordé asymptotiquement cette solution à une solution au premier ordre caractérisant la racine du jet hydrodynamique. Au moyen de sa solution au second ordre, il a exprimé les efforts hydrodynamiques et les distributions de pression qui ont été validés au moyen de données expérimentales.

Pour terminer sur l'état de l'art concernant la présence de vague dans les modèles d'impact hydrodynamique, nous pouvons citer les travaux de [Cheng et al., 2018]. Au sein de leurs travaux, ils ont mis en oeuvre une méthode des éléments frontières à ordre élevé : *HOBEM* (pour High Order Boundary Element Method) dans le but de simuler la chute libre oblique d'un dièdre sur une surface libre représentée par une houle d'Airy régulière. En plus de la présence de vague un modèle de courant uniforme a été implémenté.

Pour déterminer les solutions du problème aux limites, ils ont décomposé le potentiel des vitesses de l'écoulement en trois contributions : une associée aux vagues, une associé au courant et enfin une associée à l'impact du dièdre comprenant 3 degrés de liberté. Leur modèle numérique a été validé au moyen d'un modèle aux éléments frontières au premier ordre : *FOBEM* (pour First Order Boundary Element Method) en l'absence de courant. Ils ont donc axé leurs simulations sur l'effet du courant en faisant varier plusieurs paramètres comme le sens du courant. Leurs résultats fournissent les élévations de surface libre, les distributions de pression ainsi que les accélérations et vitesses de l'écoulement.

1.3 Orientation du mémoire

Dans les sections 1.1 et 1.2 nous avons présenté respectivement le contexte et l'état de l'art en rapport avec ce travail de thèse de doctorat.

Ainsi au regard de ces deux sections, dans le but de modéliser l'impact hydrodynamiques sur le pont mouillée d'un SWATH nous avons choisi une géométrie bidimensionnelle parabolique. Le dièdre ayant été traité largement dans la littérature. Le formalisme utilisé demeure analytique ou quasi-analytique afin de limiter les temps de calcul. De cette manière la suite du manuscrit s'orientera comme suit.

Le chapitre 2 présente toute la théorie, basée sur le modèle de Wagner, permettant d'établir les efforts hydrodynamiques sur le corps parabolique symbolisant le point mouillé d'un SWATH. Les cinématiques implémentées de la parabole sont purement verticale et oblique. La surface libre considérée est non-plane et mobile. Il s'agit d'une houle d'Airy régulière. Nous proposons deux types de modèles. Un premier type approchant la forme de la houle d'Airy par un développement de Taylor en fonction du point d'impact initial. Et un second type qui considère la vrai forme de la houle d'Airy. Nous notons que les développements de ce chapitre sont analytiques ou quasi-analytiques. Ce chapitre est donc essentiellement théorique.

Le chapitre 3 étudie la physique et compare les deux types de modèles pour trois zones d'impact privilégiées. À savoir, une crête, un creux et le milieu de la pente de la houle d'Airy régulière. Les études de ce chapitre portent majoritairement sur les corrections de surface mouillée, l'étude des champs de pression et l'intensité des efforts hydrodynamiques.

Le chapitre 4, constitue une base de comparaisons pour les modèles d'impact sur houle d'Airy régulière développés au chapitre 2. Pour cela, un formalisme totalement numérique, ne reposant pas sur la théorie de Wagner, est utilisé. Au moyen du logiciel Abaqus, reposant sur la technique CEL (pour Coupled Eulerian-Lagrangian), les méthodes des éléments finis et VoF nous avons implémenté un modèle d'impact d'un corps parabolique. Cet avant-dernier chapitre repose majoritairement sur la comparaison des efforts hydrodynamiques obtenus entre le formalisme analytique et numérique.

Pour terminer, le chapitre 5 ouvre certaines perspectives en relation avec les travaux présentés au sein de cette thèse de doctorat.

Chapitre 2

Approche analytique

Ce chapitre présente différents modèles bidimensionnels d'impact hydrodynamique d'une parabole sur une surface libre non plane et en mouvement. Cette surface libre mobile est symbolisée par une houle d'Airy monochromatique. Les modèles d'impact hydrodynamique sont basés sur le modèle de [Wagner, 1932] linéarisé . Ils répondent à un problème aux limites mixte linéarisé. L'établissement de ce problème est décrit au moyen d'une analogie avec le cas d'une configuration d'impact hydrodynamique lorsque la surface libre est plane et au repos décrit dans [Oliver, 2002]. Plusieurs types de modèles sont présentés : des modèles simplifiés qualifiés d'asymptotiques et un modèle plus général qualifié de non-asymptotique. Les étapes de calcul qui permettent d'établir ces modèles sont détaillées pour une cinématique de chute de la parabole purement verticale puis en y ajoutant une vitesse d'avance horizontale. Les comportements des modèles simplifiés sont comparés au modèle général dans le chapitre suivant. Ce chapitre 2 est donc essentiellement théorique et s'inspire des travaux de [Scolan, 2014a] qui a traité le cas général d'impact d'un paraboloïde elliptique sur une crête de vague.

2.1 Paramétrage du problème avec houle d'Airy

Cette section présente le paramétrage géométrique permettant d'établir le problème aux limites mixtes linéarisé qui décrit l'impact d'une parabole sur une houle d'Airy de type monochromatique (voir [Marin, 2016]). Les développements présentés dans cette thèse de doctorat reposent sur la communication interne non publiée [Scolan, 2014b].

2.1.1 Paramétrage géométrique

Le corps est défini par une parabole de rayon de courbure R_p qui pénètre verticalement une surface libre ondulée à vitesse constante W orientée vers le bas. Cette surface libre est une houle d'Airy monochromatique définie par sa période T, son amplitude C, sa pulsation ω et une phase arbitraire θ_0. La houle se propage de la gauche vers la droite et son rayon de courbure est approximé par $R_v = \frac{1}{C\kappa^2}$. On considère la profondeur de l'eau infinie, ce qui nous permet de relier le nombre d'onde κ à la pulsation de la houle ω au moyen de la relation de dispersion : $\omega^2 = g\kappa$. Dans le référentiel galiléen $(0, Y, Z)$, la parabole est décrite par l'équation (2.1a) et la houle par l'équation (2.1b) :

$$\begin{cases} Z_p(Y) = \dfrac{Y^2}{2R_p} + H_0\,, & \text{(2.1a)} \\ Z_v(Y,t) = C\left[\cos\left(\kappa Y - \omega t + \theta_0\right) - 1\right]. & \text{(2.1b)} \end{cases}$$

À l'instant $t = 0\,s$ la parabole possède une altitude H_0 connue et entre en contact avec la houle en un unique point $O(Y_0, Z_0)$. On désire déterminer les paramètres (Y_0, Z_0, θ_0) du point de contact initial. Pour déterminer Y_0 on résout le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{Y_0^2}{2R_p} + H_0 = C\left(\cos\left(\kappa Y_0 + \theta_0\right) - 1\right), & \text{(2.2a)} \\ \dfrac{Y_0}{R_p} = -C\kappa \sin\left(\kappa Y_0 + \theta_0\right). & \text{(2.2b)} \end{cases}$$

Ce système traduit l'intersection de la parabole et de la houle au point $O(Y_0, Z_0)$ (Eq. (2.2a)), ainsi que l'égalité de leurs pentes (Eq. (2.2b)). En éliminant les fonctions trigonométriques on aboutit à une équation polynomiale du quatrième ordre admettant 4 racines, deux complexes et deux réelles. On choisit la racine physique qui engendre une configuration d'impact hydrodynamique lorsque la parabole se situe à droite d'une crête de vague (Fig. 2.1) :

$$Y_0 = -\sqrt{2H_0R_p - 2C(R_p + R_v) + 2\sqrt{C^2(R_p + R_v)^2 - 2H_0CR_pR_v}}\,. \tag{2.3}$$

La racine Y_0 déterminée on utilise l'équation (2.1a) pour Z_0 tel que

$$Z_p(Y_0) = Z_0 = \frac{Y_0^2}{2R_p} + H_0\,. \tag{2.4}$$

Et l'équation (2.2a) pour θ_0 :

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{Z_0}{C} + 1\right) - \kappa Y_0\,. \tag{2.5}$$

De cette manière, les conditions initiales du problème d'impact hydrodynamique sont totalement déterminées. On centre ensuite le problème au niveau du point d'impact initial dans un autre référentiel galiléen (O, y, z) au moyen du changement de repère suivant :

$$\begin{cases} Y = y + Y_0\,, & \text{(2.6a)} \\ Z = z + Z_0\,. & \text{(2.6b)} \end{cases}$$

Le paramétrage à l'instant initial est résumé sur la figure 2.1 :

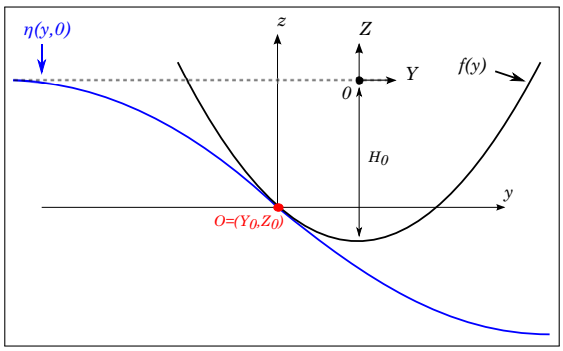

Figure *2.1 – Configuration initiale $t = 0\,s$, les échelles verticale et horizontale ne sont pas identiques*

Dans ce système de coordonnées la houle a pour expression :

$$Z_v(y,t) = \eta(y,t) = -Z_0 + C\left[\cos\left(\kappa\left(y + Y_0\right) - \omega t + \theta_0\right) - 1\right]. \tag{2.7}$$

La profondeur de pénétration de la parabole au travers de la houle est décrite par $h(t) = \int_0^t W(\tau)d\tau$ avec $h(0) = 0$. Dans le nouveau référentiel galiléen (O, y, z), l'équation de la parabole au cours du temps devient :

$$Z_p(y,t) = f(y) - h(t) \quad \text{avec} \quad f(y) = -\frac{Y_0^2}{2R_p} + \frac{(y+Y_0)^2}{2R_p}\,. \tag{2.8}$$

Contrairement au problème d'impact hydrodynamique d'une parabole sur une surface libre plane, le point d'impact inital ne correspond forcément pas au point le plus bas de la parabole.

2.1.2 Problème aux limites mixte linéarisé correspondant

Dans cette partie on formule le problème aux limites mixte en relation avec le paramétrage géométrique de la partie 2.1.1. Ce problème est décrit au moyen de la théorie des écoulements à potentiel des vitesses. Le fluide est considéré incompressible et l'écoulement irrotationnel. La tension de surface et la gravité sont négligées. La configuration physique est décrite au moyen de la figure 2.4. Le corps parabolique pénètre, à la vitesse W orientée vers le bas, une surface libre mobile décrite par l'équation 2.7. Le problème aux limites mixte est linéarisé au moyen de l'approximation de disque plat (ou ligne plane en $2D$). Cette approximation stipule que les angles de rélèvement entre la géométrie du corps impactant et la surface libre non déformée demeure faible. D'après [Korobkin, 2004], pour un dièdre symétrique l'angle β (Fig. 2.2) doit être compris entre 4° et 20°. Pour une parabole et dans le cas d'un impact dissymétrique les angles β_i doivent donc aussi demeurer entre 4° et 20° (Fig. 2.3).

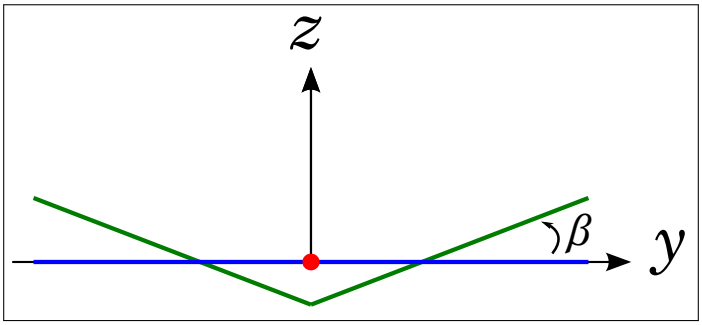

Figure *2.2 – Schéma représentant l'angle β pour l'impact symétrique d'un dièdre sur une surface libre plane. En rouge le point d'impact initial. En vert la parabole et en bleu la surface libre non-déformée à un instant t*

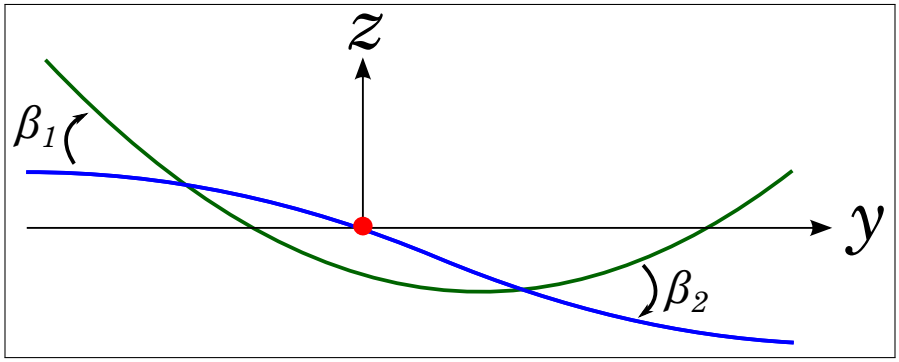

Figure *2.3 – Schéma représentant les angles β_i, ici $i = 1, 2$ pour l'impact dissymétrique d'une parabole sur une surface libre non plane. En rouge le point d'impact initial. En vert la parabole et en bleu la surface libre non-déformée à un instant t*

On résume les configurations physique et mathématique (ou linéarisée) du problème d'impact hydrodynamique d'une parabole sur une houle d'Airy monochromatique au moyen de la figure 2.4 :

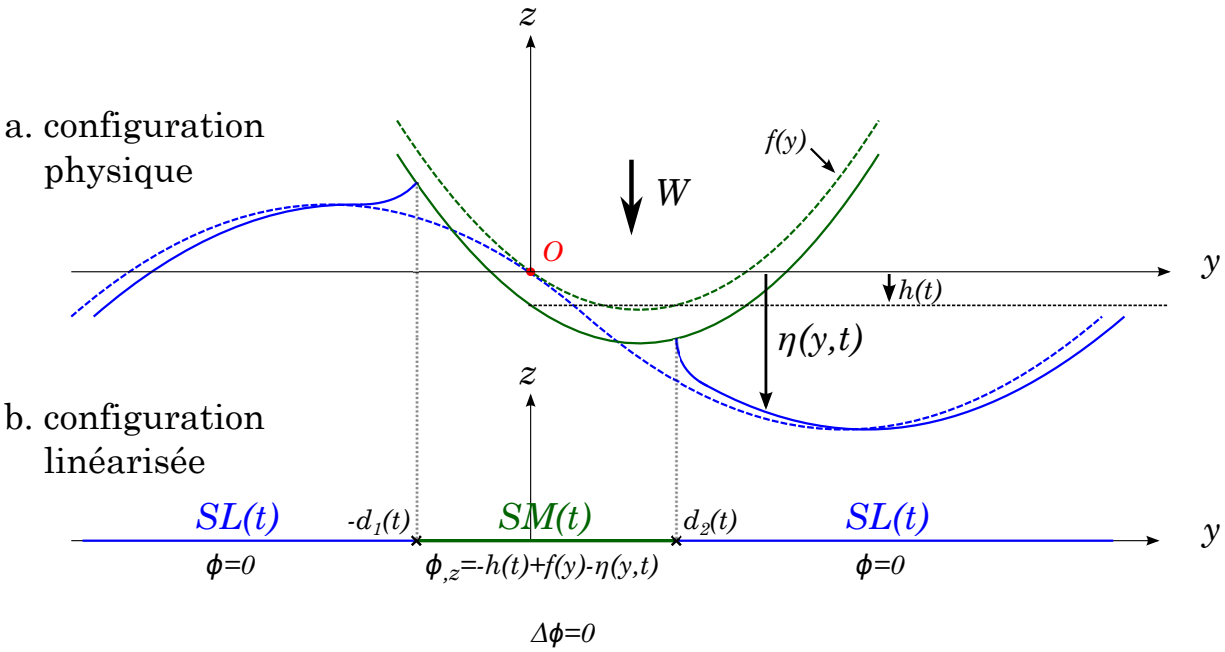

FIGURE 2.4 – *Schéma des configurations physique* (*a*) *et mathématiques* (*b*).
En tirets verts la parabole à l'état initial, en trait vert à un instant t. En tirets bleus la surface libre à état initial, en trait bleu la surface libre déformée à un instant t

De façon analogue à [Korobkin & Puckhnachov, 1988], le problème aux limites mixte linéarisé est formulé au moyen du potentiel des déplacements. Nous rappelons que la linéarisation du problème aux limites mixte revient à considérer $z = 0$. Le potentiel des déplacements correspond à l'intégrale par rapport au temps du potentiel des vitesses.

$$\phi(y,z,t) = \int_0^\tau \varphi(y,z,\tau)d\tau\,, \quad \forall y \in SM(t)\,. \tag{2.9}$$

Par analogie avec le problème d'impact hydrodynamique sur une surface libre plane, le problème aux limites mixte linéarisé correspondant se formule comme suit :

$$\begin{cases} \Delta\phi(y,z,t) = 0 & z < 0\,, \quad (2.10a)\\ \phi(y,0,t) = 0 & z = 0,\ y \in SL(t)\,, \quad (2.10b)\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + f(y) - \eta(y,t) & z = 0,\ y \in SM(t)\,, \quad (2.10c)\\ \phi(y,z,t) \to 0 & (y^2+z^2) \to \infty\,. \quad (2.10d) \end{cases}$$

Où $SL(t)$ la surface libre et $SM(t)$ la surface mouillée qui constituent deux parties déconnectées du plan $z = 0$. De cette manière, nous reconnaissons le problème aux limites mixte linéarisé formulé au moyen du potentiel des déplacements de [Scolan, 2014a]. mais cette fois-ci pour un impact bidimensionnel.

Description des équations du problèmes aux limites mixte linéarisé :

- L'équation (2.10a) impose d'après la théorie des écoulements à potentiel des vitesses que le potentiel des déplacements satisfait l'équation de Laplace dans le fluide.
- L'équation (2.10b) traduit l'intégration par rapport au temps de la condition dynamique de surface libre $SL(t)$.
- L'équation (2.10c) exprime la position relative au cours du temps d'une particule fluide en contact avec la surface mouillée $SM(t)$. Cette condition de Neumann traduit l'intégration par rapport au temps de la condition cinématique de surface libre.
- L'équation (2.10d) impose que l'impact hydrodynamique ne produit pas d'écoulement loin de la zone d'impact.

Le problème aux limites mixte linéarisé obtenu (Eq(s). (2.10)) est donc similaire au problème aux limites mixte linéarisé obtenu dans le cas d'une surface libre plane au repos (voir [Wilson, 1989] et A.6.1). Seule la condition de Neumann ((Eq. 2.10c)) diffère en prenant en compte le profil de houle d'Airy monochromatique $\eta(y,t)$.

Le système d'équation 2.10 constitue donc le problème général linéarisé d'impact hydrodynamique d'une parabole sur une houle d'Airy monochromatique.

Dans un premier temps, ce problème est simplifié et reformulé en privilégiant des zones d'impact spécifiques (sec. 2.2), par exemple lorsque l'impact se produit au niveau de la crête de la vague.

Dans un second temps, le problème général est résolu complètement (voir section 2.3) pour un impact à n'importe quel endroit prédéfini du profil de houle d'Airy monochromatique.

L'ajout d'une vitesse d'avance horizontale au sein de la cinématique de la parabole allant dans le sens contraire de la propagation de la houle d'Airy est traité au sein de la section 2.4.

Enfin dans la section 2.5, on rappelle deux formulations en pression permettant de calculer les efforts hydrodynamique engendrés sur la parabole lors de l'impact.

La méthode de résolution des problèmes aux limites mixte linéarisé est identique au cas où la surface libre est plane et au repos. Effectivement, on peut les reformuler en tant que problèmes de type Riemann-Hilbert (voir [Bolibrukh, 1990] et [Gahkov, 1990]).

2.2 Modèles asymptotiques d'impact sur houle d'Airy monochromatique

Cette section présente des modèles simplifiés d'impact d'une parabole sur une houle d'Airy monochromatique. Ces modèles sont qualifiés d'asymptotiques car ils reposent sur une simplification du profil de houle d'Airy monochromatique en fonction d'une zone d'impact préétablie. Concrètement, on approxime la houle d'Airy par polynôme au moyen de développements en séries de Taylor.

Dans le but de simplifier le problème aux limites mixte linéarisé précédent, trois configurations initiales d'impact sont retenues en fonction des paramètres κ, Y_0 et θ_0.

- Si l'impact se produit au voisinage de la crête de la vague alors : $\kappa Y_0 + \theta_0 \approx 0$.
- Si l'impact se produit au voisinage du creux de la vague alors : $\kappa Y_0 + \theta_0 \approx \pi$.
- Si l'impact se produit au voisinage du milieu de la vague alors : $\kappa Y_0 + \theta_0 \approx \frac{\pi}{2}$.

En considérant $\omega t \ll 1$, un petit paramètre ϵ est introduit. Pour les trois configurations d'impact précédentes, la nomenclature suivante est adoptée : **nc** pour **n**ear **c**rest, **nt** pour **n**ear **t**rough, et **m** pour **m**iddle. Ci-dessous l'expression des paramètres $\epsilon_{\mathbf{j}}(t)$ en fonction de la configuration initiale retenue, avec $\mathbf{j} = \mathbf{nc}, \mathbf{nt}$ ou $\mathbf{m}$:

- $\epsilon_{\mathbf{nc}}(t) = \kappa Y_0 - \omega t + \theta_0$: Pour un impact au voisinage de la crête de la vague.
- $\epsilon_{\mathbf{nt}}(t) = \kappa Y_0 - \omega t + \theta_0 - \pi$: Pour un impact au voisinage du creux de la vague.
- $\epsilon_{\mathbf{m}}(t) = \kappa Y_0 - \omega t + \theta_0 - \frac{\pi}{2}$: Pour un impact au voisinage du milieu de la vague.

On rappelle la condition de Neumann complète du problème aux limites mixte linéarisé (Eq. (2.10)) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(y,0,t) = -\,h(t) + \frac{y^2 + 2yY_0}{2R_p} + Z_0 - C\left\{\cos\left[\kappa(y+Y_0) - \omega t + \theta_0\right] - 1\right\} \tag{2.11}$$

Les paramètres $\epsilon_{\mathbf{j}}(t)$ sont injectés dans la condition de Neumann complète (Eq. (2.11)) du problème afin d'obtenir 3 nouveaux problèmes aux limites mixtes linéarisés asymptotiques. Il est important de noter que ces nouveaux problèmes aux limites sont valables uniquement au voisinage du point d'impact préétabli en fonction du paramètre $\epsilon_{\mathbf{j}}(t)$ retenu.

2.2.1 Modèles asymptotiques au voisinage de la crête et du creux

Cette partie décrit dans un premier temps comment sont formulés les problèmes aux limites mixtes linéarisés asymptotiques valables pour un impact au voisinage de la crête, du creux et du milieu de la pente de la vague. Pour cela, la partie trigonométrique de la condition de Neumann complète (Eq. (2.11)) est développée en séries de Taylor au voisinage d'un point initial préétabli. Dans un second temps les méthodes de résolution des problèmes aux limites mixtes linéarisés asymptotiques sont explicitées jusqu'à l'obtention des inconnues. À savoir : les corrections de surface mouillée et le potentiel des vitesses de l'écoulement. Les problèmes asymptotiques d'impact au voisinage de la crête et de creux sont symétrisés au moyen de changements de variables et sont résolus au moyen d'une analogie avec la configuration d'impact symétrique d'une parabole sur une surface libre plane (ann. A.6.1).

2.2.1.1 Au voisinage de la crête

Pour cette configuration d'impact au voisinage de la crête de la houle,

$$\epsilon_{\mathbf{nc}}(t) = \kappa Y_0 - \omega t + \theta_0\,. \tag{2.12}$$

On injecte l'expression d'$\epsilon_{\mathbf{nc}}$ dans la condition de Neumann complète (voir Eq. (2.11))

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_{\mathbf{nc}}}{\partial z}(y,0,t) = &-\,h(t) + \frac{y^2 + 2yY_0}{2R_p} + Z0 \\ &- C\left[\cos(\kappa y)\cos(\epsilon_{\mathbf{nc}}(t)) - \sin(\kappa y)\sin(\epsilon_{\mathbf{nc}}(t)) - 1\right]\,.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Avec κy et $\epsilon_{\mathbf{nc}}(t)$ petits on développe en série de Taylor l'équation (2.13) :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \phi_{\mathbf{nc}}}{\partial z}(y,0,t) \approx -h(t) + \frac{y^2 + 2yY_0}{2R_p} + Z_0 + C \\ &- C\left[(1 - \frac{\kappa^2 y^2}{2} + ...)(1 - \frac{\epsilon_{\mathbf{nc}}^2(t)}{2} + ...) - (\kappa y - \frac{\kappa^3 y^3}{6} + ...)(\epsilon_{\mathbf{nc}}(t) - \frac{\epsilon_{\mathbf{nc}}^3(t)}{6} + ...)\right]\end{aligned} \tag{2.14}$$

Seul le 2^e ordre est conservé pour κy et $\epsilon_{\mathbf{nc}}(t)$:

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{nc}}}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + \frac{y^2 + 2yY_0}{2R_p} + Z_0 + C\left(\kappa y \epsilon_{\mathbf{nc}}(t) + \frac{\kappa^2 y^2}{2} + \frac{\epsilon_{\mathbf{nc}}^2(t)}{2}\right). \tag{2.15}$$

Le profil local de houle d'Airy est approximé par un polynôme du 2^e ordre, c'est-à-dire une parabole (voir dernier membre de l'équation (2.15) et Fig. 2.5).

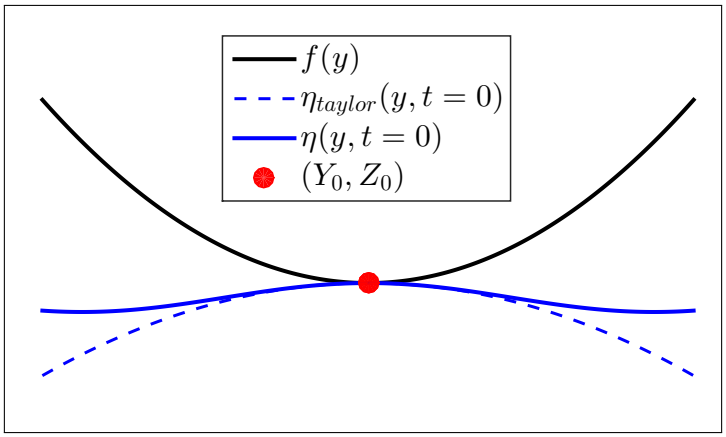

FIGURE 2.5 – *Approximation polynomiale au 2^{nd} ordre du profil de houle d'Airy pour une configuration d'impact au voisinage de la crête*

En considérant les changements de variables suivants :

$$\begin{cases} R_{\mathbf{nc}} = \dfrac{R_p R_v}{R_p + R_v}\,, & \text{(2.16a)} \\ c_{\mathbf{nc}}(t) = -C\kappa\epsilon_{\mathbf{nc}}(t) - \dfrac{Y_0}{R_p}\,, & \text{(2.16b)} \\ \tilde{y}_{\mathbf{nc}}(t) = y - R_{\mathbf{nc}} c_{\mathbf{nc}}(t)\,, & \text{(2.16c)} \\ \tilde{h}_{\mathbf{nc}}(t) = h(t) - Z_0 - \dfrac{C\epsilon_{\mathbf{nc}}^2(t)}{2} + \dfrac{R_{\mathbf{nc}} c_{\mathbf{nc}}^2(t)}{2}\,. & \text{(2.16d)} \end{cases}$$

La condition de Neumann asymptotique associée à une configuration d'impact au voisinage de la crête de la houle se résume à

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{nc}}}{\partial z}(\tilde{y}_{\mathbf{nc}}(t), 0, t) = -\tilde{h}_{\mathbf{nc}}(t) + \frac{\tilde{y}_{\mathbf{nc}}^2(t)}{2R_{\mathbf{nc}}}\,. \tag{2.17}$$

Le potentiel des déplacements (2.17) est une fonction paire de $\tilde{y}_{\mathbf{nc}}(t)$, ce qui engendre une configuration d'impact symétrique d'impact dans le repère $(O, \tilde{y}_{\mathbf{nc}}(t), z)$. Dans le repère d'origine (O, y, z) la configuration d'impact demeure dissymétrique.

L'avantage de se placer dans le repère mobile $(O, \tilde{y}_{\mathbf{nc}}(t), z)$ permet d'obtenir facilement les solutions du problème aux limites mixte linéarisé asymptotique.

2.2.1.2 Au voisinage du creux

Pour cette configuration d'impact au voisinage du creux de la houle,

$$\epsilon_{\mathbf{nt}}(t) = \kappa Y_0 - \omega t + \theta_0 - \pi\,. \tag{2.18}$$

On procède de la même manière que pour un impact au voisinage de la crête. La condition de Neumann pour cette configuration devient :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{nt}}}{\partial z}(y,0,t) \approx -h(t) + \frac{y^2 + 2yY_0}{2R_p} + Z_0 + C \\ - C\left[\cos(\kappa y)\cos(\epsilon_{\mathbf{nt}}(t)+\pi) - \sin(\kappa y)\sin(\epsilon_{\mathbf{nt}}(t)+\pi)\right] . \tag{2.19}$$

Une nouvelle fois, on conserve le 2^e ordre en termes de κy et $\epsilon_{\mathbf{nt}}(t)$ (Fig. 2.6).

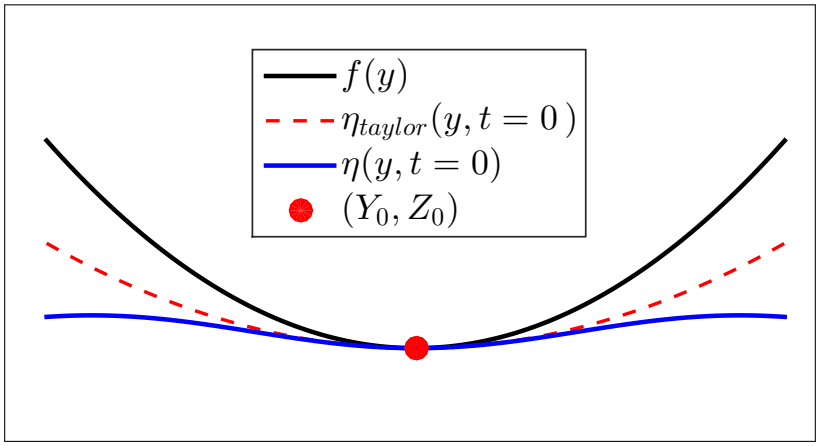

FIGURE *2.6 – Approximation polynomiale au 2^{nd} ordre du profil de houle d'Airy pour une configuration d'impact au voisinage du creux*

La condition de Neumann pour cette configuration d'impact se réduit cette fois-ci à

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{nt}}}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + \frac{y^2 + 2yY_0}{2R_p} + Z_0 + 2C - C\left(\kappa y \epsilon_{\mathbf{nt}}(t) + \frac{\kappa^2 y^2}{2} + \frac{\epsilon_{\mathbf{nt}}^2(t)}{2}\right) . \tag{2.20}$$

Avec les changements de variables suivants :

$$\begin{cases} R_{\mathbf{nt}} = \dfrac{R_v R_p}{R_v - R_p} , & \text{(2.21a)} \\ c_{\mathbf{nt}}(t) = C\kappa\epsilon_{\mathbf{nt}}(t) - \dfrac{Y_0}{R_p} , & \text{(2.21b)} \\ \tilde{y}_{\mathbf{nt}}(t) = y - R_{\mathbf{nt}} c_{\mathbf{nt}}(t) , & \text{(2.21c)} \\ \tilde{h}_{\mathbf{nt}}(t) = h(t) - Z_0 - 2C + \dfrac{C\epsilon_{\mathbf{nt}}^2(t)}{2} + \dfrac{R_{\mathbf{nt}} c_{\mathbf{nt}}^2(t)}{2} . & \text{(2.21d)} \end{cases}$$

L'expression de la condition de Neumann asymptotique est similaire à celle correspondant à une configuration d'impact au niveau d'une crête (Eq. (2.17)) :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{nt}}}{\partial z}(\tilde{y}_{\mathbf{nt}}(t),0,t) = -\tilde{h}_{\mathbf{nt}}(t) + \frac{\tilde{y}_{\mathbf{nt}}^2(t)}{2R_{\mathbf{nt}}} . \tag{2.22}$$

La condition de Neumann asymptotique (2.22) traduit une configuration d'impact hydrodynamique symétrique dans le repère $(O, \tilde{y}_{\mathbf{nt}}(t), z)$.

Les conditions de Neumann asymptotiques (Eq(s). (2.17) et (2.22)) pour des configurations d'impact hydrodynamique au voisinage de la crête et du creux de la houle sont semblables aux différents changements de variables près (Eq(s). (2.16) et (2.21)).

2.2.1.3 Points communs pour un impact au voisinage de la crête et du creux

Dans les parties 2.2.1.1 et 2.2.1.2, on constate que les conditions de Neumann développées asymptotiquement au voisinage de la crête (**nc**) ou du creux (**nt**) de la houle d'Airy monochromatique sont similaires (Eq(s). (2.17) et (2.22)). Une nomenclature commune à ces deux configurations d'impact asymptotiques est adoptée.
En posant $\mathbf{i} = \mathbf{nc}$ ou $\mathbf{nt}$, on établi le problème aux limites mixte linéarisé asymptotique en termes de potentiel des déplacements pour un impact au voisinage de la crête ou du creux du profil de houle dans les repères mobiles $(O, \tilde{y}_\mathbf{i}(t), z)$:

$$\begin{cases} \Delta\phi_\mathbf{i}(\tilde{y}_\mathbf{i}(t), z, t) = 0 & z < 0\,, \quad (2.23a) \\ \phi_\mathbf{i}(\tilde{y}_\mathbf{i}(t), 0, t) = 0 & z = 0,\ \tilde{y}_\mathbf{i}(t) \in SL(t)\,, \quad (2.23b) \\ \dfrac{\partial\phi_\mathbf{i}}{\partial z}(\tilde{y}_\mathbf{i}(t), 0, t) = -\tilde{h}_\mathbf{i}(t) + \dfrac{\tilde{y}_\mathbf{i}^2(t)}{2R_\mathbf{i}} & z = 0,\ \tilde{y}_\mathbf{i}(t) \in SM(t)\,, \quad (2.23c) \\ \phi_\mathbf{i}(\tilde{y}_\mathbf{i}(t), z, t) \to 0 & (\tilde{y}_\mathbf{i}(t)^2 + z^2) \to \infty\,. \quad (2.23d) \end{cases}$$

Par analogie avec le problème d'impact hydrodynamique d'une parabole sur une surface libre plane (ann. A.6.1), on obtient directement la correction de surface mouillée $a_\mathbf{i}(t)$ ainsi que le potentiel des déplacements associé pour $\tilde{y}_\mathbf{i}(t) \in SM(t)$:

$$\begin{cases} a_\mathbf{i}(t) = \sqrt{4R_\mathbf{i}\tilde{h}_\mathbf{i}(t)}\,, & (2.24a) \\ \phi_\mathbf{i}(\tilde{y}_\mathbf{i}(t), 0, t) = -\dfrac{1}{6R_\mathbf{i}}\left[a_\mathbf{i}^2(t) - \tilde{y}_\mathbf{i}^2(t)\right]^{3/2} \qquad \tilde{y}_\mathbf{i}(t) \in SM(t)\,. & (2.24b) \end{cases}$$

Comme le problème (2.23) est symétrique dans le repère mobile $(O, \tilde{y}_\mathbf{i}(t), t)$, il vient

$$\begin{cases} SM(t) : \tilde{y}_\mathbf{i} < |a_\mathbf{i}(t)|\,, & (2.25a) \\ SL(t) : \tilde{y}_\mathbf{i} > |a_\mathbf{i}(t)|\,. & (2.25b) \end{cases}$$

En se replaçant dans le repère fixe d'origine (O, y, z) le potentiel des déplacements a pour expression :

$$\phi_\mathbf{i}(y, 0, t) = -\frac{1}{6R_\mathbf{i}}\left[a_\mathbf{i}^2(t) - (y - R_\mathbf{i}c_\mathbf{i}(t))^2\right]^{3/2} \quad \forall y \in SM(t)\,. \qquad (2.26)$$

Dans le repère d'origine, la correction mouillée symétrique $a_\mathbf{i}(t)$ n'est plus valable. Au moyen des changements de variable (2.16c) et (2.21c), on introduit les corrections de surface mouillés dissymétriques en relation avec le potentiel des déplacements (2.26) :

$$\begin{cases} d_{1\,\mathbf{i}}(t) = a_\mathbf{i}(t) - R_\mathbf{i}c_\mathbf{i}(t)\,, & (2.27a) \\ d_{2\,\mathbf{i}}(t) = a_\mathbf{i}(t) + R_\mathbf{i}c_\mathbf{i}(t)\,. & (2.27b) \end{cases}$$

Donc dans le repère fixe (O, y, z) on a

$$\begin{cases} SM(t) : y \in \ ]-d_{1\,\mathbf{i}}(t), d_{2\,\mathbf{i}}(t)[\,, & (2.28a) \\ SL(t) : y \notin \ ]-d_{1\,\mathbf{i}}(t), d_{2\,\mathbf{i}}(t)[\,. & (2.28b) \end{cases}$$

On pourrait rester dans les repères mobiles $(O, \tilde{y}_{\mathbf{i}}(t), z)$ pour mener à bien la suite des développements. Mais pour procéder aux comparaisons du chapitre 3, il est plus judicieux de se placer dans le repère fixe d'origine (O, y, z).

Par la suite l'indice **i** correspond donc soit aux variables associées à une configuration d'impact au voisinage de la crête ou soit aux variables associées à une configuration au voisinage du creux de la houle.

2.2.1.4 Potentiel des vitesses pour les modèles asymptotiques au voisinage de la crête et du creux

Par définition, le potentiel des vitesses $\varphi_{\mathbf{i}}(y, 0, t)$ est la dérivée par rapport au temps du potentiel des déplacements $\phi_{\mathbf{i}}(y, 0, t)$. Avec la notation **i** indicielle commune aux configurations d'impact **nc** et **nt** on a :

$$\varphi_{\mathbf{i}}(y, 0, t) = \frac{\partial \phi_{\mathbf{i}}}{\partial t}(y, 0, t) \quad \forall\, y \in \ SM(t)\,. \tag{2.29}$$

Le potentiel des vitesses de l'écoulement sur la surface mouillée pour les modèles d'impact au voisinage de la crête et du creux a pour expression

$$\varphi_{\mathbf{i}}(y, 0, t) = -\frac{a_{\mathbf{i}}(t)\dot{a}_{\mathbf{i}}(t) + (y - R_{\mathbf{i}}c_{\mathbf{i}}(t))R_{\mathbf{i}}\dot{c}_{\mathbf{i}}}{2R_{\mathbf{i}}}\sqrt{a_{\mathbf{i}}^2(t) - (y - R_{\mathbf{i}}c_{\mathbf{i}}(t))^2} \quad \forall\, y \in SM(t)\,, \tag{2.30}$$

où $\dot{} = \frac{d}{dt}$ et avec l'identité suivante

$$a_{\mathbf{i}}(t)\dot{a}_{\mathbf{i}}(t) = 2R_{\mathbf{i}}\dot{h}_{\mathbf{i}}(t)\,. \tag{2.31}$$

On priviliégie l'expression suivante du potentiel des vitesses :

$$\varphi_{\mathbf{i}}(y, 0, t) = -\left[\dot{h}_{\mathbf{i}}(t) + \frac{\dot{c}_{\mathbf{i}}}{2}(y - R_{\mathbf{i}}c_{\mathbf{i}}(t))\right]\sqrt{a_{\mathbf{i}}^2(t) - (y - R_{\mathbf{i}}c_{\mathbf{i}}(t))^2}$$

$$\forall\, y \in \,]-d_{1\,\mathbf{i}}(t), d_{2\,\mathbf{i}}(t)[\,. \tag{2.32}$$

Pour l'expression des $\dot{c}_{\mathbf{i}}$, on peut se référer aux annexes A.1.1 et A.1.2. On vérifie qu'en l'absence de houle dans l'équation (2.32), nous retrouvons bien le potentiel des vitesses présenté à l'équation (A.137).

Conclusion sur la partie 2.2.1

Dans cette section les problèmes aux limites mixtes linéarisés asymptotiques (Eq. (2.23) sont formulés pour des configurations d'impact au voisinage de la crête **nc** et du creux **nt** de la houle. Ces problèmes sont résolus au moyen d'une analogie avec une configuration d'impact d'une parabole sur une surface libre plane et au repos (ann. A.6.1).

L'expression des inconnues du problème, à savoir les corrections de surface mouillée et le potentiel des déplacements sont présentées respectivement aux équations (2.27) et (2.26).

Pour identifier les limites de ces problèmes aux limites mixtes linéarisés asymptotiques on analyse le rapport R_v/R_p.

Pour un impact au voisinage de la crête, le rayon de courbure de la houle d'Airy monochromatique R_v peut être supérieur, égale ou inférieur au rayon de courbure de la parabole R_p.

Pour un impact au voisinage du creux, le rayon de courbure de la houle d'Airy monochromatique R_v est nécessairement inférieur au rayon de la parabole R_p. Si ce n'est pas le cas, on perd l'unicité du point de contact initial.

Par dérivation temporelle du potentiel des déplacements, le potentiel des vitesses pour des configurations d'impact au voisinage de la crête et du creux de la houle est établi (Eq. (2.32)). Dans la suite (sec. 2.5) ce potentiel des vitesses va nous permettre d'obtenir les efforts hydrodynamiques exercés sur la parabole pour ces deux configurations d'impact hydrodynamique.

2.2.2 Modèles asymptotiques au voisinage du milieu de la pente de la vague

Dans cette partie nous présentons deux modèles asymptotiques d'impact hydrodynamique lorsque l'impact se produit au niveau du milieu de la pente de la vague. Le premier modèle approxime le profil de houle $\eta(y,t)$ par une droite et un deuxième par un polynôme du troisième ordre en y. Les problèmes asymptotiques d'impact au voisinage du milieu de la pente sont résolus en remarquant qu'il s'agit de problème de type Riemann-Hilbert (voir [Gahkov, 1990]). Il est donc possible de réaliser une analogie avec un problème de portance selon [Newman, 1977].

Pour cette configuration initiale d'impact l'expression du paramètre $\epsilon_{\mathbf{m}}(t)$ est :

$$\epsilon_{\mathbf{m}}(t) = \kappa Y_0 - \omega t + \theta_0 - \frac{\pi}{2}\,. \tag{2.33}$$

On exprime la condition de Neumann (Eq. (2.11)) en fonction d'$\epsilon_{\mathbf{m}}(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_{\mathbf{m}}}{\partial z}(y,0,t) = &- h(t) + \frac{y^2 + 2yY_0}{2R_p} + Z_0 \\ &- C\left[-1 - \cos(\kappa y)\sin(\epsilon_{\mathbf{m}}(t)) - \sin(\kappa y)\cos(\epsilon_{\mathbf{m}}(t))\right]\,.\end{aligned} \tag{2.34}$$

De même que pour la partie 2.2.1 on réalise un développement de Taylor de la condition de Neumann complète en fonction d'$\epsilon_{\mathbf{m}}(t)$ et κy :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \phi_{\mathbf{m}}}{\partial z}(y,0,t) \approx -h(t) + \frac{y^2 + 2yY_0}{2R_p} + Z_0 + C \\ &+ C\left[(1 - \frac{\kappa^2 y^2}{2})(\epsilon_{\mathbf{m}}(t) - \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}^3(t)}{6} + ...) + (\kappa y - \frac{\kappa^3 y^3}{6} + ...)(1 - \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}^2(t)}{2} + ...)\right]\,.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Deux nouvelles conditions de Neumann asymptotiques sont formulées en conservant les termes jusqu'au 1^{er} ordre et jusqu'au 3^e pour $\epsilon_{\mathbf{m}}(t)$ et κy.

Les conditions de Neumann asymptotiques engendrées, respectivement au 1^{er} ordre et au 3^{e} ordre, portent les nomenclatures **m1** (Eq. (2.36)) et **m3** (Eq. (2.42)).

2.2.2.1 Problèmes aux limites mixtes linéarisés asymptotiques pour un impact au milieu de la pente

Dans ce paragraphe, les problèmes aux limites mixtes linéarisés asymptotiques sont formulés pour les développements au 1^{er} et au 3^{e} ordre de la condition de Neumann (2.35).

Modèle au 1^{re} ordre

Uniquement les termes du 1^{re} ordre de l'équation (2.35) sont retenus. Le profil de houle d'Airy monochromatique est approximé par une droite de pente $C\kappa$ (voir dernier membre de l'équation (2.36) et la figure 2.7)

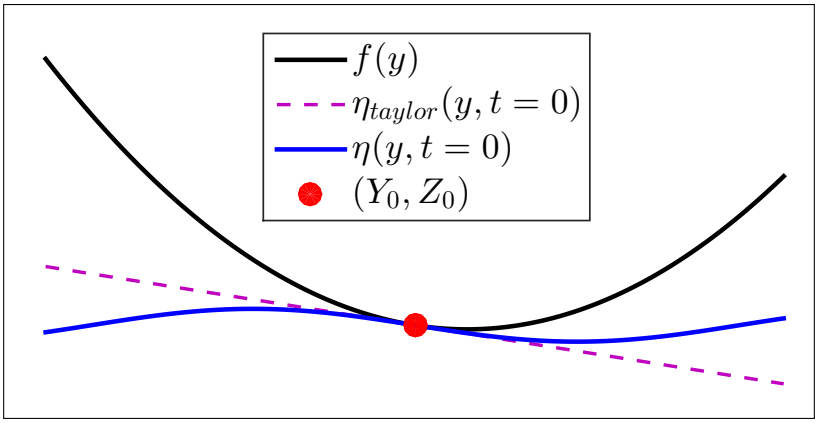

FIGURE *2.7 – Approximation polynomiale au 1^{er} ordre du profil de houle d'Airy pour une configuration d'impact au voisinage du milieu de la pente*

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{m1}}}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + \frac{y^2 + 2yY_0}{2R_p} + Z_0 + C\left(1 + \epsilon_{\mathbf{m}}(t) + \kappa y\right) . \tag{2.36}$$

Soit, en réarrangeant :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{m1}}}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + Z_0 + C(1 + \epsilon_{\mathbf{m}}(t)) + \left(\frac{Y_0}{R_p} + C\kappa\right) y + \frac{y^2}{2R_p} . \tag{2.37}$$

De la même manière que pour des configurations d'impact au voisinage de la crête et du creux de la vague, on symétrise la condition de Neumann asymptotique (2.37) avec les changements de variables suivants :

$$\begin{cases} c_{\mathbf{m1}} = -\dfrac{Y_0}{R_p} - C\kappa , & \text{(2.38a)} \\ \tilde{y}_{\mathbf{m1}} = y - R_p c_{\mathbf{m1}} . & \text{(2.38b)} \end{cases}$$

On obtient une condition de Neumann asymptotique symétrique dans le repère translaté $(O, y_{\mathbf{m1}}, z)$

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{m1}}}{\partial z}(y,0,t) = -\tilde{h}_{\mathbf{m1}}(t) + \frac{\tilde{y}^2_{\mathbf{m1}}}{2R_p} . \tag{2.39}$$

avec :

$$\tilde{h}_{\mathbf{m1}}(t) = h(t) - Z_0 - C(1 + \epsilon_{\mathbf{m}}(t)) + \frac{R_p c^2_{\mathbf{m1}}}{2} . \tag{2.40}$$

Le problème aux limites mixte linéarisé asymptotique au 1^{er} ordre pour une configuration d'impact au milieu de la pente de la houle se formule comme suit :

$$\begin{cases} \Delta\phi_{\mathbf{m1}}(\tilde{y}_{\mathbf{m1}}, z, t) = 0 & z < 0\,, \quad (2.41a) \\ \phi_{\mathbf{m1}}(\tilde{y}_{\mathbf{m1}}, 0, t) = 0 & z = 0,\ \tilde{y}_{\mathbf{m1}} \in SL(t)\,, \quad (2.41b) \\ \dfrac{\partial\phi_{\mathbf{m1}}}{\partial z}(\tilde{y}_{\mathbf{m1}}, 0, t) = -\tilde{h}_{\mathbf{m1}}(t) + \dfrac{\tilde{y}_{\mathbf{m1}}^2}{2R_p} & z = 0,\ \tilde{y}_{\mathbf{m1}} \in SM(t)\,, \quad (2.41c) \\ \phi_{\mathbf{m1}}(\tilde{y}_{\mathbf{m1}}, z, t) \to 0 & (\tilde{y}_{\mathbf{m1}}(t)^2 + z^2) \to \infty\,. \quad (2.41d) \end{cases}$$

Le problème (2.41) est symétrique dans le repère $(O, \tilde{y}_{\mathbf{m1}}, z)$. On procède par analogie avec une configuration d'impact sur une surface libre plane et au repos pour déterminer les corrections de surface mouillée et le potentiel des déplacements. La seule différence avec les modèles asymptotiques au voisinage de la crête et du creux est que pour déterminer les inconnues du problèmes on se place dans un repère translaté et non mobile.

Le modèle au 3^e ordre

On conserve les termes des développements de Taylor de l'équation (2.35) jusqu'au 3^e ordre. Cette fois-ci le profil de houle d'Airy est approximé par une polynôme d'ordre 3 en y (voir dernier membre Eq. (2.42) et la figure 2.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_{\mathbf{m3}}}{\partial z}(y, 0, t) &= -h(t) + \frac{y^2 + 2yY_0}{2R_p} + Z_0 \\ &- C\left[-1 - \epsilon_{\mathbf{m}}(t) - \kappa y + \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}(t)^3}{6} + \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}(t)^2\kappa y}{2} + \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}(t)\kappa^2 y^2}{2} + \frac{\kappa^3 y^3}{6}\right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Par commodité d'écriture, un rayon équivalent est introduit tel que :

$$R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t) = \frac{R_v\, R_p}{R_v - \epsilon_{\mathbf{m}}(t) R_p}\,. \quad (2.43)$$

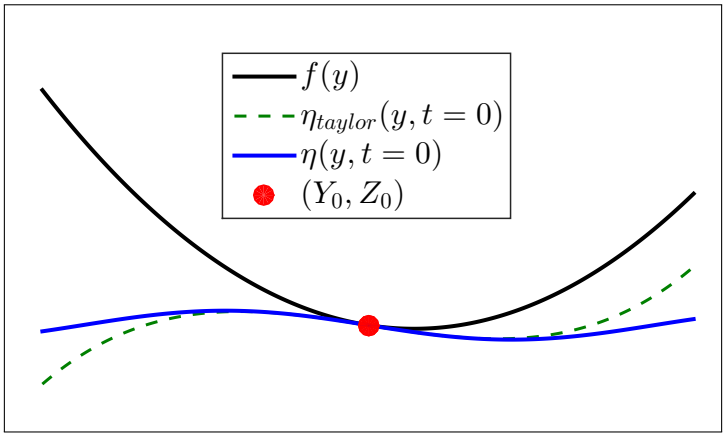

FIGURE 2.8 – *Approximation polynomiale au 3^e ordre du profil de houle d'Airy pour une configuration d'impact au voisinage de la crête*

En réarrangeant, la condition de Neuman asymptotique pour le modèle au 3^e ordre

peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{m3}}}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + Z_0 + C(1+\epsilon_{\mathbf{m}}(t)) - \frac{C\epsilon_{\mathbf{m}}(t)^3}{6} + \left(\frac{Y_0}{R_p} + C\kappa - \frac{C\kappa\epsilon_{\mathbf{m}}(t)^2}{2}\right) y + \frac{1}{2R_{\epsilon_{\mathbf{m}}(t)}} y^2 - \frac{C\kappa^3}{6} y^3 \tag{2.44}$$

Ou encore sous forme condensée :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{m3}}}{\partial z}(y,0,t) = \sum_{n=0}^{3} p_{n\,\mathbf{m3}}(t) y^n \,. \tag{2.45}$$

Avec les expressions des coefficients $p_{n\,\mathbf{m3}}(t)$:

$$\begin{cases} p_{0\,\mathbf{m3}}(t) = -h(t) + Z_0 + C(1+\epsilon_{\mathbf{m}}(t)) - \dfrac{C\epsilon_{\mathbf{m}}^3(t)}{6} \,, & \text{(2.46a)} \\ p_{1\,\mathbf{m3}}(t) = \dfrac{Y_0}{R_p} + C\kappa - \dfrac{C\kappa\epsilon_{\mathbf{m}}^2(t)}{2} \,, & \text{(2.46b)} \\ p_{2\,\mathbf{m3}}(t) = \dfrac{1}{2R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)} \,, & \text{(2.46c)} \\ p_{3\,\mathbf{m3}} = -\dfrac{C\kappa^3}{6} \,. & \text{(2.46d)} \end{cases}$$

On pose le problème aux limites mixte linéarisé asymptotique pour cette configuration d'impact hydrodynamique :

$$\begin{cases} \Delta\phi_{\mathbf{m3}}(y,z,t) = 0 & z < 0 \,, & \text{(2.47a)} \\ \phi_{\mathbf{m3}}(y,0,t) = 0 & z = 0,\ y \in SL(t) \,, & \text{(2.47b)} \\ \dfrac{\partial \phi_{\mathbf{m3}}}{\partial z}(y,0,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{3} p_{n\,\mathbf{m3}}(t) y^n & z = 0,\ y \in SM(t) \,, & \text{(2.47c)} \\ \phi_{\mathbf{m3}}(y,z,t) \to 0 & (y^2+z^2) \to \infty \,. & \text{(2.47d)} \end{cases}$$

La condition de Neumann asymptotique (Eq. (2.47c)) n'est pas symétrique dans le repère d'origine (O,y,z). Elle admet un terme cubique en y caractéristique d'un impact dissymétrique. Pour calculer les corrections de surface mouillée et le potentiel des déplacements on utilise le formalisme relatif à une configuration d'impact dissymétrique selon [Scolan et al., 1999].

Pour les modèles au 1^{re} et 3^{e} ordre

Deux problèmes aux limites mixtes linéarisés asymptotiques sont formulés pour deux approximations du profil de houle d'Airy monochromatique. Ces deux problèmes (Eq(s). (2.41) et (2.47)) comportent toujours comme inconnues les corrections mouillées et les expressions des potentiels des déplacements. L'établissement des corrections de surface mouillée est traité dans le paragraphe 2.2.2.2 et les potentiels des déplacements dans le paragraphe 2.2.2.3.

2.2.2.2 Corrections de surface mouillée

Dans ce paragraphe nous établissons les corrections de surface mouillée pour les configurations d'impact au voisinage du milieu de la pente au 1^{er} et 3^{e} ordre.

Modèle au 1^{re} ordre

De façon identique aux modèles d'impact hydrodynamique au voisinage de la crête et du creux de la vague on obtient l'expresssion des corrections de surface mouillée par analogie avec une configuration d'impact pour une surface libre plane et au repos.

Dans le repère $(O, \tilde{y}_{\mathbf{m1}}, z)$ les corrections de surface mouillée sont symétriques :

$$a_{\mathbf{m1}}(t) = \sqrt{4R_p \tilde{h}_{\mathbf{m1}}(t)}\,. \tag{2.48}$$

Dans le repère d'origine (O, y, z) les corrections de surface mouillée sont dissymétriques (Eq. (2.49)) et ont pour expressions :

$$\begin{cases} d_{1\,\mathbf{m1}}(t) = a_{\mathbf{m1}}(t) - R_p c_{\mathbf{m1}}\,, & \text{(2.49a)} \\ d_{2\,\mathbf{m1}}(t) = a_{\mathbf{m1}}(t) + R_p c_{\mathbf{m1}}\,. & \text{(2.49b)} \end{cases}$$

Modèle au 3^{e} ordre

Pour calculer les corrections de surface mouillée pour un problème d'impact hydrodynamique dissymétrique on utilise [Scolan et al., 1999] :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-d_{1\,\mathbf{m3}}(t)}^{d_{2\,\mathbf{m3}}(t)} \frac{\partial \phi_{\mathbf{m3}}}{\partial z}(\xi,t)\sqrt{\frac{d_{2\,\mathbf{m3}}(t)-\xi}{d_{1\,\mathbf{m3}}(t)+\xi}}d\xi = 0\,, & \text{(2.50a)} \\ \displaystyle\int_{-d_{1\,\mathbf{m3}}(t)}^{d_{2\,\mathbf{m3}}(t)} \frac{\partial \phi_{\mathbf{m3}}}{\partial z}(\xi,t)\sqrt{\frac{d_{1\,\mathbf{m3}}(t)+\xi}{d_{2\,\mathbf{m3}}(t)-\xi}}d\xi = 0\,. & \text{(2.50b)} \end{cases}$$

Les équations (2.50a) et (2.50b) imposent un déplacement fini des particules fluides respectivement aux points de contact $-d_{1\,\mathbf{m3}}(t)$ et $d_{2\,\mathbf{m3}}(t)$.

En utilisant le changement de variable $\xi = a_{\mathbf{m3}}(t)u + b_{\mathbf{m3}}(t)$ avec :

$$\begin{cases} a_{\mathbf{m3}}(t) = \dfrac{d_{2\,\mathbf{m3}}(t) + d_{1\,\mathbf{m3}}(t)}{2}\,, & \text{(2.51a)} \\ b_{\mathbf{m3}}(t) = \dfrac{d_{2\,\mathbf{m3}}(t) - d_{1\,\mathbf{m3}}(t)}{2}\,, & \text{(2.51b)} \end{cases}$$

nous obtenons deux équations couplées traduisant les corrections de surface mouillée :

$$\begin{cases} q_{1\,\mathbf{m3}}(t) + \dfrac{3}{4}q_{3\,\mathbf{m3}}(t) = 0\,, & \text{(2.52a)} \\ q_{0\,\mathbf{m3}}(t) + \dfrac{1}{2}q_{2\,\mathbf{m3}}(t) = 0\,. & \text{(2.52b)} \end{cases}$$

Avec l'expression des $q_{n,\mathbf{m3}}(t)$ pour $n = 0..3$:

$$\begin{cases} q_{0\,\mathbf{m3}}(t) = -h + Z_0 + C(1 + \epsilon_{\mathbf{m}}(t) + \kappa b_{\mathbf{m3}}(t)) + \dfrac{Y_0 b_{\mathbf{m3}}(t)}{R_p} \\ \qquad\qquad + \dfrac{b^2_{\mathbf{m3}}(t)}{2R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)} - \dfrac{C\kappa^3 b^3_{\mathbf{m3}}(t)}{6} - \dfrac{C\epsilon^3_{\mathbf{m}}(t)}{6} - \dfrac{C\kappa b_{\mathbf{m3}}(t)\epsilon^2_{\mathbf{m}}(t)}{2}\,, & (2.53a) \\ q_{1\,\mathbf{m3}}(t) = C\kappa a_{\mathbf{m3}}(t) + \dfrac{Y_0 a_{\mathbf{m3}}(t)}{R_p} + \dfrac{a_{\mathbf{m3}}(t) b_{\mathbf{m3}}(t)}{R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)} \\ \qquad\qquad - \dfrac{C\kappa a_{\mathbf{m3}}(t)\epsilon^2_{\mathbf{m}}(t)}{2} - \dfrac{C\kappa^3 a_{\mathbf{m3}}(t) b^2_{\mathbf{m3}}(t)}{2}\,, & (2.53b) \\ q_{2\,\mathbf{m3}}(t) = \dfrac{a^2_{\mathbf{m3}}(t)}{2R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)} - \dfrac{C\kappa^3 a^2_{\mathbf{m3}}(t) b_{\mathbf{m3}}(t)}{2}\,, & (2.53c) \\ q_{3\,\mathbf{m3}}(t) = -\dfrac{C\kappa^3 a^3_{\mathbf{m3}}(t)}{6}\,. & (2.53d) \end{cases}$$

Pour plus de détails sur le calcul des corrections de surface mouillée pour ce modèle asymptotique, on se réfère à l'annexe A.2.1

On calcule ensuite analytiquement les valeurs de $a_{\mathbf{m3}}(t)$ et $b_{\mathbf{m3}}(t)$ en fonction des expressions des $q_{n,\mathbf{m3}}(t)$:

L'équation (2.52a) permet directement d'isoler $a_{\mathbf{m3}}(t)$ tel que :

$$a^2_{\mathbf{m3}}(t) = -4b^2_{\mathbf{m3}}(t) + \left(\frac{8}{C\kappa^3 R_p} - \frac{8\epsilon_{\mathbf{m}}(t)}{\kappa}\right) b_{\mathbf{m3}}(t) - \frac{4\epsilon^2_{\mathbf{m}}(t)}{\kappa^2} + \frac{8Y_0}{C\kappa^3 R_p} + \frac{8}{\kappa^2} \qquad (2.54)$$

Avec l'équation (2.54), l'équation (2.52b) se résume à un polynôme en $b_{\mathbf{m3}}(t)$ tel que :

$$\frac{5C\kappa^3}{6} b^3_{\mathbf{m3}}(t) - \frac{5}{2R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)} b^2_{\mathbf{m3}}(t) + \left(-C\kappa - \frac{Y_0}{R_p} + \frac{C\kappa\epsilon_{\mathbf{m}}(t)}{2} + \frac{2}{C\kappa^3 R^2_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)}\right) b_{\mathbf{m3}}(t)$$

$$- \frac{\epsilon^2_{\mathbf{m}}(t)}{\kappa^2 R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)} - \frac{C\epsilon^3_{\mathbf{m}}(t)}{6} - h(t) + Z_0 + C(1 + \epsilon_{\mathbf{m}}(t)) + \frac{1}{R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)} \left(\frac{2Y_0}{C\kappa^3 R_p} + \frac{2}{\kappa^2}\right) = 0 \quad (2.55)$$

Pour avoir la valeurs de $b_{\mathbf{m3}}(t)$, on calcul analytiquement les racines de l'équation (2.55). Dans la pratique la seule solution retenue est l'unique racine réelle de cette équation polynomiale du 3^e ordre. Une fois $b_{\mathbf{m3}}(t)$ obtenue on calcul $a_{\mathbf{m3}}(t)$ avec l'équation (2.54), puis on en déduit $d_{1\,\mathbf{m3}}(t)$ et $d_{2\,\mathbf{m3}}(t)$ au moyen des équations (2.51a) et (2.51b).

Remarques sur le paragraphe 2.2.2.2

La détermination des corrections de surface mouillées des problèmes asymptotiques au 1^{er} ordre (2.41) et au 3^e ordre (2.47) est sensiblement différente lorsque l'impact se produit au voisinage de la crête ou du creux. Pour le modèle au 1^{er} ordre on utilise la même méthode, c'est-à-dire par analogie, mais cette fois-ci le repère n'est pas mobile mais translaté (Eq. (2.38)). Le modèle au 3^e ordre nécessite un peu plus d'algèbre. La mise sous forme canonique du problème n'étant, *a priori*, pas possible on doit donc résoudre deux équations couplées traduisant la remontée locale du fluide le long de la parabole (Eq(s). (2.50a) et (2.50b)). En introduisant des corrections de surface mouillée réduites il est possible de découpler les équations et de déterminer analytiquement la valeur des corrections mouillées $d_{1\,\mathbf{m3}}(t)$ et $d_{2\,\mathbf{m3}}(t)$.

2.2.2.3 Potentiel des déplacements

Dans ce paragraphe nous présentons les expressions des potentiels des déplacements pour les modèles au 1^{er} et 3^{e} ordre d'impact au voisinage du milieu de la pente.

Modèle au 1^{er} ordre

Par analogie avec le modèle d'impact d'une parabole sur une surface libre plane et au repos on obtient directement l'expression du potentiel des déplacements dans le repère translaté $(O, \tilde{y}_{\mathbf{m1}}, z)$:

$$\phi_{\mathbf{m1}}(\tilde{y}_{\mathbf{m1}}, 0, t) = -\frac{1}{6R_p}\left[a^2_{\mathbf{m1}}(t) - \tilde{y}^2_{\mathbf{m1}}\right]^{3/2} \quad \text{pour} \quad \tilde{y}_{\mathbf{m1}} \in]-a_{\mathbf{m1}}(t), a_{\mathbf{m1}}(t)[\,. \tag{2.56}$$

Dans le repère fixe d'origine (O, y, z), il vient :

$$\phi_{\mathbf{m1}}(y, 0, t) = -\frac{1}{6R_p}\left[a^2_{\mathbf{m1}}(t) - (y - R_p c_{\mathbf{m1}})^2\right]^{3/2}$$

$$\text{pour} \quad y \in]-a_{\mathbf{m1}}(t) + R_p c_{\mathbf{m1}}, a_{\mathbf{m1}}(t) + R_p c_{\mathbf{m1}}[\,. \tag{2.57}$$

On pose les corrections de surface mouillée dissymétriques pour le modèle au 1^{er} ordre :

$$\begin{cases} d_{1\,\mathbf{m1}}(t) = a_{\mathbf{m1}}(t) - R_p c_{\mathbf{m1}}\,, & \text{(2.58a)} \\ d_{2\,\mathbf{m1}}(t) = a_{\mathbf{m1}}(t) + R_p c_{\mathbf{m1}}\,. & \text{(2.58b)} \end{cases}$$

Modèle au 3^{e} ordre

Sur la surface mouillée le potentiel des déplacements se calcule en suivant [Scolan et al., 1999] :

$$\phi_{\mathbf{m3}}(y, 0, t) = -\int_y^{d_{2\,\mathbf{m3}}(t)} \gamma(x, t)dx\,, \tag{2.59}$$

avec :

$$\gamma(x,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{(d_{1\,\mathbf{m3}}(t) + x)(d_{2\,\mathbf{m3}}(t)) - x)}} \times$$

$$PV \int_{-d_{1\,\mathbf{m3}}(t)}^{d_{2\,\mathbf{m3}}(t)} \frac{\partial \phi_{\mathbf{m3}}}{\partial z}(\xi, t) \frac{\sqrt{(d_{1\,\mathbf{m3}}(t) + \xi)(d_{2\,\mathbf{m3}}(t) - \xi)}}{\xi - x} d\xi\,, \tag{2.60}$$

où PV désigne la valeur principale de l'intégrale. Après un peu d'algèbre on obtient l'expression du potentiel des déplacements :

$$\phi_{\mathbf{m3}}(y, 0, t) = -\frac{1}{a^2_{\mathbf{m3}}(t)}\left(\frac{q_{2\,\mathbf{m3}}(t)}{3} + \frac{q_{3\,\mathbf{m3}}(t)}{4}\left(\frac{y - b_{\mathbf{m3}}(t)}{a_{\mathbf{m3}}(t)}\right)\right)\left[a^2_{\mathbf{m3}}(t) - (y - b_{\mathbf{m3}}(t))^2\right]^{\frac{3}{2}}\,. \tag{2.61}$$

En utilisant les corrections de surface mouillée (2.52) et les expressions de $q_{2\,\mathbf{m3}}(t)$ et $q_{3\,\mathbf{m3}}(t)$ (Eq(s). (2.53)), on simplifie l'expression du potentiel des déplacements :

$$\phi_{\mathbf{m3}}(y, 0, t) = -\left(\frac{1}{6R_p} - \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}(t)}{6R_v} - \frac{\kappa b_{\mathbf{m3}}(t)}{8R_v} - \frac{\kappa}{24R_v}y\right)\left[a^2_{\mathbf{m3}}(t) - (y - b_{\mathbf{m3}}(t))^2\right]^{\frac{3}{2}}\,. \tag{2.62}$$

Pour plus d'informations pour le calcul du potentiel des déplacements on se réfère à l'annexe A.2.2.

Remarques sur le paragraphe 2.2.2.3

La méthode de calcul des potentiels des déplacements associés aux modèles au 1^{er} et 3^{e} ordre n'est pas la même. De façon similaire aux calculs des corrections de surface mouillée, il est trivial de déterminer par analogie le potentiel des déplacements pour le modèle au 1^{er} ordre (Eq. (2.57)). Pour le modèle au 3^{e} ordre quelques opérations mathématiques (voir [Scolan et al., 1999]) sont nécessaires. On constate que l'expression du potentiel des déplacements obtenus diffère de celle obtenues pour les modèles d'impact près de la crête, du creux et au 1^{er} ordre. Jusqu'a présent nous avions des potentiels des déplacements canoniques (ann.A.6.1) de la forme $\frac{1}{6R_{\mathbf{l}}}\left[H_{\mathbf{l}}(y,t)\right]^{\frac{3}{2}}$ avec $\mathbf{l} = \mathbf{nc}, \mathbf{nt}$ ou $\mathbf{m1}$ (Eq(s). (2.24b) et (2.57)). Pour le modèle au 3^{e} ordre l'expression est plus complexe et de la forme $G(y,t)\left[H_{\mathbf{m3}}(y,t)\right]^{\frac{3}{2}}$ ce qui engendrera inévitablement par dérivation temporelle un potentiel des vitesses plus compliqué.

2.2.2.4 Potentiel des vitesses

Le potentiel des vitesses est obtenu par dérivation temporelle des potentiels des déplacements présentés aux équations (2.62) et (2.57) :

Modèle au 1^{er} ordre

On dérive par rapport au temps le potentiel des déplacements $\phi_{\mathbf{m1}}$:

$$\varphi_{\mathbf{m1}}(y,0,t) = -\frac{a_{\mathbf{m1}}(t)\dot{a}_{\mathbf{m1}}(t)}{2R_p}\sqrt{a^2_{\mathbf{m1}}(t) - (y - R_p c_{\mathbf{m1}})^2}\,. \tag{2.63}$$

Avec l'identité

$$a_{\mathbf{m1}}(t)\dot{a}_{\mathbf{m1}}(t) = 2R_p\dot{\tilde{h}}_{\mathbf{m1}}(t)\,. \tag{2.64}$$

L'expression du potentiel des vitesses se réduit alors a :

$$\varphi_{\mathbf{m1}}(y,0,t) = -\dot{\tilde{h}}_{\mathbf{m1}}\sqrt{a^2_{\mathbf{m1}}(t) - (y - R_p c_{\mathbf{m1}})^2}\,, \tag{2.65}$$

où :

$$\dot{\tilde{h}}_{\mathbf{m1}} = W + C\omega\,. \tag{2.66}$$

Modèle au 3^{e} ordre

Le potentiel des vitesses est obtenu par dérivation temporelle du potentiel des déplacements (Eq. (2.62)) :

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{m3}}(y,0,t) = &\left(\frac{\dot{\epsilon}_{\mathbf{m}}}{6R_v} + \frac{\kappa\dot{b}_{\mathbf{m3}}(t)}{8R_v}\right)\left[a^2_{\mathbf{m3}}(t) - (y - b_{\mathbf{m3}}(t))^2\right]^{\frac{3}{2}} \\ &-\sqrt{a^2_{\mathbf{m3}}(t) - (y - b_{\mathbf{m3}}(t))^2}\left(\frac{1}{2R_p} - \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}(t)}{2R_v} - \frac{3\kappa b_{\mathbf{m3}}(t)}{8R_v} - \frac{\kappa}{8R_v}y\right)\times \\ &\left(a_{\mathbf{m3}}(t)\dot{a}_{\mathbf{m3}}(t) + (y - b_{\mathbf{m3}}(t))\dot{b}_{\mathbf{m3}}(t)\right)\,.\end{aligned} \tag{2.67}$$

Le potentiel des vitesses (2.67) fait intervenir les vitesses d'expansion de surface mouillée réduites $\dot{a}_{\mathbf{m3}}(t)$ et $\dot{b}_{\mathbf{m3}}(t)$. Pour les obtenir il est nécessaire de dériver par rapport au temps les équations (2.54) et (2.55), pour cela on se réfère à l'annexe A.2.3.

Remarques sur le paragraphe 2.2.2.4

De façon analogue à la partie 2.2.2.3 concernant le calcul du potentiel des déplacements, pour le modèle au 1^e on dispose d'une expression canonique comportant un seul terme (Eq. (2.65)). Le potentiel des vitesses du modèle au 3^e ordre n'est pas canonique et comporte deux termes (Eq. (2.67))

2.2.3 Conclusion sur l'établissement des modèles asymptotiques

Dans la section 2.2, quatre modèles d'impact hydrodynamique asymptotiques reposant sur des approximations polynomiales du profil de houle d'Airy monochromatiques sont explicités. Pour un impact au voisinage de la crête **nc** et du creux **nt**, le profil de houle est approximé par des paraboles (Fig(s). 2.9.a) et 2.9.b)). Pour un impact au milieu de la pente de la houle d'Airy, le modèle **m1** approxime le profil de houle par une droite (Fig. 2.9.c)) et le modèle **m3** par un polynôme d'ordre 3 (Fig. 2.9.d)). Les méthodes de résolution sont directement fonctions de l'ordre d'approximation du profil de houle.

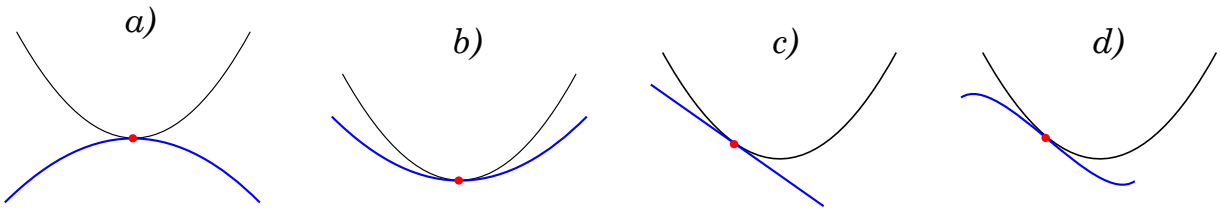

Figure *2.9 – Récapitulatif des approximations polynomiales du profil de houle en fonction du point initial d'impact : a) modèle* **nc** *b) modèle* **nt** *c) modèle* **m1** *d) modèle* **m3**

Pour les modèles d'impact **nc**, **nt** et **m1**, leurs conditions de Neumann asymptotiques sont mises sous formes canoniques au moyen de changements de variables (Eq(s). (2.17), (2.22) et (2.39)). La mise sous forme canonique (ann. A.6.1) implique de se placer dans des repères mobiles pour les modèles d'impact au voisinage de la crête et du creux et dans un repère translaté pour le modèle d'impact au milieu de la pente 1^e ordre. Pour déterminer les solutions des problèmes aux limites mixtes linéarisés associés à ces trois modèles, on procède par analogie avec la configuration d'impact symétrique d'une parabole sur une surface libre plane (ou configuration canonique).

Cette méthode semble être applicable uniquement lorsque le profil de houle d'Airy monochromatique est approximé au maximum par un polynôme du second ordre en y.

Pour le modèle d'impact **m3** la mise sous forme canonique n'est, *a priori*, pas possible du fait du terme cubique en y dans la condition de Neumann asymptotique (2.44). Pour déterminer les solutions du problème aux limites mixte linéarisé, on résout le problème de Riemann-Hilbert correspondant.

La section 2.2 montre qu'il est possible de développer des modèles d'impact hydrodynamique sur une houle d'Airy monochromatique valable uniquement au voisinage d'un point initial préétabli. L'étape suivante est de développer un modèle plus général capable de prendre en compte les configurations d'impact des modèles d'impact asymptotique.

2.3 Modèle non-asymptotique semi-analytique

Dans cette section, nous résolvons complètement le problème aux limites mixte linéarisé énoncé dans la partie 2.1.2. Pour cela, on conserve la condition de Neumann linéarisée (2.11) pour déterminer les corrections de surface mouillée ainsi que le potentiel des déplacements associé. Ce modèle non-asymptotique englobe donc les configurations d'impact décrites avec les modèles asymptotiques (part(s). 2.2.1 et 2.2.2) en utilisant les mêmes conditions initiales au travers du triplet (Y_0, Z_0, θ_0). Par la suite, ce modèle **n**on-**a**symptotique sera dénoté par l'indice **na**.

2.3.1 Calcul des corrections mouillées

On rappelle la condition de Neumann complète linéarisée :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{na}}}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + \frac{y^2 + 2yY_0}{2R_p} + Z_0 + C - C\left[\cos(\kappa y)\cos(\kappa Y_0 - \omega t + \theta_0) - \sin(\kappa y)\sin(\kappa Y_0 - \omega t + \theta_0)\right] . \quad (2.68)$$

Il s'agit d'une configuration d'impact hydrodynamique dissymétrique. Les corrections de surface mouillée sont calculées avec le formalisme d'impact dissymétrique de [Scolan et al., 1999] :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-d_{1\,\mathbf{na}}(t)}^{d_{2\,\mathbf{na}}(t)} \frac{\partial \phi_{\mathbf{na}}}{\partial z}(\xi,t)\sqrt{\frac{d_{2\,\mathbf{na}}(t)-\xi}{d_{1\,\mathbf{na}}(t)+\xi}}d\xi = 0\,, & (2.69a) \\ \displaystyle\int_{-d_{1\,\mathbf{na}}(t)}^{d_{2\,\mathbf{na}}(t)} \frac{\partial \phi_{\mathbf{na}}}{\partial z}(\xi,t)\sqrt{\frac{d_{1\,\mathbf{na}}(t)+\xi}{d_{2\,\mathbf{na}}(t)-\xi}}d\xi = 0\,. & (2.69b) \end{cases}$$

Il est judicieux d'introduire des corrections de surface mouillée réduites pour ce modèle non-asymptotique :

$$\begin{cases} a_{\mathbf{na}}(t) = \dfrac{d_{2\,\mathbf{na}}(t) + d_{1\,\mathbf{na}}(t)}{2}\,, & (2.70a) \\ b_{\mathbf{na}}(t) = \dfrac{d_{2\,\mathbf{na}}(t) - d_{1\,\mathbf{na}}(t)}{2}\,. & (2.70b) \end{cases}$$

Le système (2.69) peut s'écrire (ann. A.3.1) :

$$\begin{cases} p_{0\,\mathbf{na}}(t) - \dfrac{a_{\mathbf{na}}(t)}{2}p_{1\,\mathbf{na}}(t) + \dfrac{a_{\mathbf{na}}^2(t)}{2}p_{2\,\mathbf{na}} = C\left[A(t)\mathbf{J_0}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa) + B(t)\mathbf{J_1}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa)\right]\,, & (2.71a) \\ p_{0\,\mathbf{na}}(t) + \dfrac{a_{\mathbf{na}}(t)}{2}p_{1\,\mathbf{na}}(t) + \dfrac{a_{\mathbf{na}}^2(t)}{2}p_{2\,\mathbf{na}} = C\left[A(t)\mathbf{J_0}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa) - B(t)\mathbf{J_1}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa)\right]\,, & (2.71b) \end{cases}$$

où $\mathbf{J_0}$ et $\mathbf{J_1}$ sont respectivement les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre **0** et d'ordre **1**.

Les expressions des $p_{n\,\mathbf{na}}$ sont

$$\begin{cases} p_{0\,\mathbf{na}}(t) = -h(t) + Z_0 + C + \dfrac{Y_0 b_{\mathbf{na}}(t)}{R_p} + \dfrac{b_{\mathbf{na}}^2(t)}{2R_p}\,, & \text{(2.72a)} \\ p_{1\,\mathbf{na}}(t) = \dfrac{Y_0 + b_{\mathbf{na}}(t)}{R_p}\,, & \text{(2.72b)} \\ p_{2\,\mathbf{na}} = \dfrac{1}{2R_p}\,, & \text{(2.72c)} \end{cases}$$

où $n = 0..2$ et

$$\begin{cases} A(t) = \cos\left[\kappa(b_{\mathbf{na}}(t) + Y_0) - \omega t + \theta_0\right]\,, & \text{(2.73a)} \\ B(t) = \sin\left[\kappa(b_{\mathbf{na}}(t) + Y_0) - \omega t + \theta_0\right]\,. & \text{(2.73b)} \end{cases}$$

En utilisant des combinaisons des systèmes (2.71) et (2.72), nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} p_{0\,\mathbf{na}}(t) + \dfrac{a_{\mathbf{na}}^2(t)}{2} p_{2\,\mathbf{na}}(t) - CA(t)\mathbf{J_0}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa) = 0\,, & \text{(2.74a)} \\ \dfrac{a_{\mathbf{na}}(t)}{2} p_{1\,\mathbf{na}}(t) + CB(t)\mathbf{J_1}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa) = 0\,. & \text{(2.74b)} \end{cases}$$

Et en utilisant les expressions des $p_{n,\mathbf{na}}(t)$ pour $\forall n = [0..2]$:

$$\begin{cases} -h(t) + Z_0 + C + \dfrac{Y_0 b_{\mathbf{na}}(t)}{R_p} + \dfrac{b_{\mathbf{na}}^2(t)}{2R_p} + \dfrac{a_{\mathbf{na}}^2(t)}{4R_p} - CA(t)\mathbf{J_0}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa) = 0\,, & \text{(2.75a)} \\ \dfrac{a_{\mathbf{na}}(t)Y_0}{2R_p} + \dfrac{a_{\mathbf{na}}(t)b_{\mathbf{na}}(t)}{2R_p} + CB(t)\mathbf{J_1}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa) = 0\,. & \text{(2.75b)} \end{cases}$$

Du fait de la présence des fonctions de Bessel d'ordre 0 et d'ordre 1 au sein du système d'équations (2.75) il n'est, *a priori*, pas possible d'obtenir analytiquement les corrections de surface mouillée réduites. Les valeurs de $a_{\mathbf{na}}(t)$ et $b_{\mathbf{na}}(t)$ sont obtenues, à chaque instants, par une méthode de Newton pour les systèmes d'équations non-linéaires.

Le modèle non-asymptotique est qualifié de semi-analytique car il nécessite l'utilisation d'une méthode numérique pour obtenir les corrections de surface mouillée $d_{1\,\mathbf{na}}(t)$ et $d_{2\,\mathbf{na}}(t)$. La méthode retenue est une méthode de Newton optimisée pour la résolution des systèmes d'équation non-linéaire décrite dans [Coleman & Li, 1996] et [Coleman & Li, 1994].

2.3.2 Potentiel des déplacements

Pour calculer le potentiel des déplacements associé au modèle non-asymptotique, on utilise le formalisme d'impact dissymétrique [Scolan et al., 1999] :

$$\phi_{\mathbf{na}}(y, 0, t) = -\int_y^{d_{2\,\mathbf{na}}(t)} \gamma_{\mathbf{na}}(x, t) dx\,, \tag{2.76}$$

avec

$$\gamma_{\mathbf{na}}(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{(d_{1\,\mathbf{na}}(t) + x)(d_{2\,\mathbf{na}}(t)) - x)}} \times$$

$$PV \int_{-d_{1\,\mathbf{na}}(t)}^{d_{2\,\mathbf{na}}(t)} \frac{\partial \phi_{\mathbf{na}}}{\partial z}(\xi, t) \frac{\sqrt{(d_{1\,\mathbf{na}}(t) + \xi)(d_{2\,\mathbf{na}}(t) - \xi)}}{\xi - x} d\xi\,. \tag{2.77}$$

Après beaucoup d'algèbre, on obtient l'expression du potentiel des déplacements pour le modèle non-asymptotique :

$$\phi_{\mathbf{na}}(y,0,t) = -\frac{1}{6R_p}\left[a_{\mathbf{na}}^2(t) - (y - b_{\mathbf{na}}(t))^2\right]^{\frac{3}{2}} ,$$

$$- a_{\mathbf{na}}(t)C\left(A(t)\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{J_{2k}}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa)f_k(y,t) + B(t)\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{J_{2k+1}}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa)g_k(y,t)\right) \tag{2.78}$$

où :

$$\begin{cases} f_k(y,t) = \dfrac{\cos\left[(2k+1)\arcsin\left(\frac{y-b_{\mathbf{na}}(t)}{a_{\mathbf{na}}(t)}\right)\right]}{2k+1} + \dfrac{\cos\left[(2k-1)\arcsin\left(\frac{y-b_{\mathbf{na}}(t)}{a_{\mathbf{na}}(t)}\right)\right]}{2k-1} , & \text{(2.79a)} \\ g_k(y,t) = \dfrac{\sin\left[(2k+2)\arcsin\left(\frac{y-b_{\mathbf{na}}(t)}{a_{\mathbf{na}}(t)}\right)\right]}{2k+2} + \dfrac{\sin\left[2k\arcsin\left(\frac{y-b_{\mathbf{na}}(t)}{a_{\mathbf{na}}(t)}\right)\right]}{2k} . & \text{(2.79b)} \end{cases}$$

Pour tous les détails du calcul du potentiel des déplacements on peut réfèrer à l'annexe A.3.2. En pratique les séries de fonctions apparaissant dans le potentiel des déplacements (2.78) sont des séries dites alternées, elles convergent très rapidement. Le calcul de ces séries est géré numériquement en retenant les 5 premiers termes pour de la **k**-ième itérations.

Au sein du potentiel des déplacements (2.78) nous pouvons identifier deux contributions. Le premier membre en $\frac{1}{R_p}$ correspond au potentiel des déplacements en relation avec l'impact dissymétrique de la parabole. Le deuxième membre comprenant les séries de fonction de Bessel correspond aux contributions de la houle d'Airy monochromatique.

2.3.3 Potentiel des vitesses

Dans cette partie nous présentons l'expression analytique du potentiel des vitesses associé au modèle d'impact non-asymptotique. Par définition, on rappelle que le potentiel des vitesses est obtenu en dérivant par rapport au temps le potentiel des déplacements (Eq. (2.9)).

$$\varphi_{\mathbf{na}}(y,0,t) = -\frac{1}{2R_p}\sqrt{a_{\mathbf{na}}^2(t) - (y - b_{\mathbf{na}}(t))^2}\left[a_{\mathbf{na}}(t)\dot{a}_{\mathbf{na}}(t) + (y - b_{\mathbf{na}}(t))\dot{b}_{\mathbf{na}}(t)\right] ,$$

$$- \left(\dot{a}_{\mathbf{na}}(t)\alpha(t) + a_{\mathbf{na}}(t)\dot{\alpha}(t)\right)C\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{J_{2k}}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa)f_k(y,t) ,$$

$$- a_{\mathbf{na}}(t)\alpha(t)C\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2k\mathbf{J_{2k}}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa)}{a_{\mathbf{na}}(t)\kappa} - \mathbf{J_{2k+1}}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa)\right](\dot{a}_{\mathbf{na}}(t)\kappa f_k(y,t)) ,$$

$$- a_{\mathbf{na}}(t)\alpha(t)C\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathbf{J_{2k}}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa)\frac{\partial f_k(y,t)}{\partial t}\right] ,$$

$$- \left(\dot{a}_{\mathbf{na}}(t)\beta(t) + a_{\mathbf{na}}(t)\dot{\beta}(t)\right)C\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{J_{2k+1}}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa)g_k(y,t) ,$$

$$- a_{\mathbf{na}}(t)\beta(t)C\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathbf{J_{2k}}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa) - \frac{(2k+1)\mathbf{J_{2k+1}}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa)}{a_{\mathbf{na}}(t)\kappa})\right](\dot{a}_{\mathbf{na}}(t)\kappa g_k(y,t)) ,$$

$$- a_{\mathbf{na}}(t)\beta(t)C\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathbf{J_{2k+1}}(a_{\mathbf{na}}(t)\kappa)\frac{\partial g_k(y,t)}{\partial t}\right] . \tag{2.80}$$

avec :

$$\frac{\partial f_k(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \theta(y,t)}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2(y,t)}}\left(\sin\left[(2k+1)\arcsin\theta(y,t)\right] + \sin\left[(2k-1)\arcsin\theta(y,t)\right]\right),$$

$$\frac{\partial g_k(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial \theta(y,t)}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2(y,t)}}\left(\cos\left[(2k+2)\arcsin\theta(y,t)\right] + \cos\left[2k\arcsin\theta(y,t)\right]\right), \quad (2.81)$$

en posant :

$$\theta(y,t) = \frac{y - b_{\mathbf{na}}(t)}{a_{\mathbf{na}}(t)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta(y,t)}{\partial t} = -\frac{\dot{b}_{\mathbf{na}}(t)}{a_{\mathbf{na}}(t)} - (y - b_{\mathbf{na}}(t))\frac{\dot{a}_{\mathbf{na}}(t)}{a^2_{\mathbf{na}}(t)}. \quad (2.82)$$

2.3.4 Conclusions sur l'établissement du modèle non-asymptotique

Le développement du modèle d'impact hydrodynamique non-asymptotique sur houle d'Airy monochromatique, réalisée dans la section 2.3 est plus complexe que pour les modèles asymptotiques. La conservation de la forme exacte du profil de houle pour le calcul des corrections mouillées et du potentiel des déplacements nécessite de décomposer en séries de fonctions de Bessel (Eq(s). (A.63a) et (A.63b)) la partie trigonométrique de la condition de Neumann (2.11). Cette décomposition engendre des séries numériques infinies dans l'expression du potentiel des vitesses (2.80) qui ne peuvent être traitées que numériquement.

Néanmoins ce modèle semi-analytique peut reproduire les mêmes configurations d'impact que les modèles asymptotiques. Ainsi dans le chapitre 3, on comparera le comportement des deux types de modèles (asymptotique et non) pour plusieurs R_v afin de quantifier l'erreur commise au niveau des efforts hydrodynamiques lors des approximations polynomiales du profil de houle au sein des modèles asymptotiques.

Dans la section suivante, on réalise le même travail qu'au sein des sections 2.2 et 2.3 mais en enrichissant la cinématique de chute de la parabole.

2.4 Ajout d'une vitesse d'avance horizontale

Jusqu'à présent, on a considéré que la parabole est animée d'une cinématique purement verticale (sec(s). 2.2 et 2.3). Cependant lors d'un d'impact hydrodynamique sur le pont mouillée, rien ne nous dit que le navire est uniquement animé d'un mouvement de pilonnement. Ainsi dans le but d'accroître le nombre de cas de chargement sur le pont mouillé, on enrichit la cinématique de chute de la parabole en lui ajoutant une vitesse d'avance horizontale. Cette étude constitue un cas simplifié des travaux [Scolan & Korobkin, 2015] concernant le paraboloïde elliptique.

De façon analogue à [Howison et al., 2004] et [Moore et al., 2012], on modifie la condition de Neumann (Eq. (2.11)) afin d'ajouter un mouvement horizontale de la parabole lors de l'impact hydrodynamique (Fig. 2.10) :

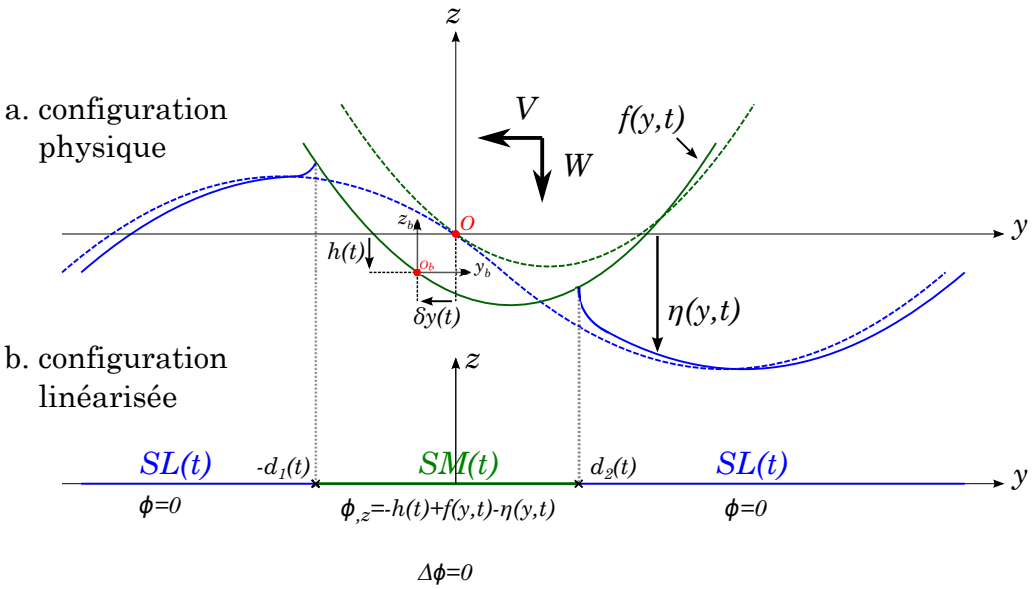

FIGURE *2.10 – Schéma des configurations physique (a) et mathématiques (b) avec vitesse d'avance. En tirets verts le corps parabolique à l'état initial, en trait vert à un instant t. En tirets bleus la surface libre à état initial, en trait bleu la surface libre déformée à un instant t*

2.4.1 Nouveau paramétrage géométrique pour la parabole

Le paramétrage de la parabole est enrichi de telle façon à ce qu'en plus de se déplacer à vitesse constante verticalement, la parabole se déplace aussi horizontalement dans le sens des y négatifs. Avec ce nouveau paramétrage la parabole se déplace de biais dans le sens opposé à la propagation de la houle d'Airy monochromatique : $\vec{U}_{parabole} = -V\vec{y} - W\vec{z}$ (Fig 2.10).

La parabole est donc désormais décrite par

$$Z_{p\,\mathbf{va}}(Y,t) = \frac{[Y+\delta y(t)]^2}{2R_p} + H_0 \quad \text{avec} \quad \delta y(t) = \int_0^t V(\tau)d\tau\,. \tag{2.83}$$

Le paramétrage de la houle d'Airy monochromatique est inchangé. Pour déterminer les coordonnées du premier point de contact entre la parabole et le profil de houle, on procède de façon analogue au cas où la cinématique de la parabole est purement verticale en se plaçant à $t = 0\,s$. On résout le système d'équations traduisant l'intersection de la parabole et du profil de houle ainsi que l'égalité de leurs pentes.

À $t = 0\,s$ on a $\delta y(t = 0\,s) = 0$, on retrouve le système d'équations (2.2) :

$$\begin{cases} \dfrac{Y_0^2}{2R_p} + H_0 = C\left(\cos\left(\kappa Y_0 + \theta_0\right) - 1\right), & \text{(2.84a)} \\ \dfrac{Y_0}{R_p} = -C\kappa\sin\left(\kappa Y_0 + \theta_0\right). & \text{(2.84b)} \end{cases}$$

La détermination des conditions initiales géométriques entre la parabole et la houle d'Airy au travers du triplet (Y_0, Z_0, θ_0) demeure identique avec ou sans vitesse d'avance horizontale. On procède exactement de la même manière que pour le cas d'une cinématique purement verticale. Après avoir centré le problème au niveau du premier point de contact, la fonction de forme de la parabole devient

$$f(y,t) = -\frac{Y_0^2}{2R} + \frac{(y + Y_0 + \delta y(t))^2}{2R_p} - h(t)\,. \tag{2.85}$$

2.4.2 Nouvelle condition de Neumann

L'ajout du terme relatif à la vitesse d'avance horizontale de la parabole implique une nouvelle condition de Neumann. L'indice **va** désigne donc **v**itesse d'**a**vance :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{va}}}{\partial z}(y,0,t) = f(y,t) - h(t) - \eta(y,t)\,, \tag{2.86}$$

soit

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_{\mathbf{va}}}{\partial z}(y,0,t) = &- \frac{Y_0^2}{2R_p} + \frac{(y+Y_0+\delta y(t))^2}{2R_p} - h(t) \\ &+ Z_0 - C\left[\cos(\kappa(y+Y_0) - \omega t + \theta_0) - 1\right]\,.\end{aligned} \tag{2.87}$$

Dans ce cas le problème aux limites mixte linéarisé est décrit par :

$$\begin{cases} \Delta\phi(y,z,t) = 0 & z < 0\,, \quad (2.88a) \\ \phi(y,0,t) = 0 & z = 0,\ y \in SL(t)\,, \quad (2.88b) \\ \dfrac{\partial \phi_{\mathbf{va}}}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + f(y,t) - \eta(y,t) & z = 0,\ y \in SM(t)\,, \quad (2.88c) \\ \phi(y,z,t) \to 0 & (y^2+z^2) \to \infty\,. \quad (2.88d) \end{cases}$$

Par rapport à la partie 2.1, seule la condition de Neumann est différente et prend en compte la translation horizontale de la parabole au cours du temps au travers de la fonction de forme $f(y,t)$. Pour déterminer le potentiel des déplacements et les corrections de surface mouillée on utilise exactement les mêmes méthodes que pour les cas d'une cinématique de parabole purement verticale.

2.4.3 Modèles asymptotiques avec vitesse d'avance

Comme il est expliqué dans la partie 2.4.2, le fait d'ajouter une vitesse d'avance dans le sens contraire de la propagation de la houle à la parabole, modifie uniquement la condition de Neumann (Eq. (2.87)). Dans cette partie on ne détaillera pas les différents calculs qui sont très similaires au cas sans vitesse d'avance. On se concentre sur les expressions des corrections de surface mouillées ainsi que sur les potentiels des déplacements associés.

2.4.3.1 Modèles asymptotiques au voisinage de la crête et du creux avec vitesse d'avance

Dans ce paragraphe, on présente les principales variables nécessaires à l'établissement des corrections de surface mouillée et des potentiels des vitesses associés pour les configurations d'impact au voisinage de la crête et du creux avec vitesse d'avance. En termes de nomenclature **ncva** désigne une configuration asymptotique au voisinage de la crête avec vitesse d'avance et **ntva** désigne une configuration asymptotique au voisinage de la crête avec vitesse d'avance.

La prise en compte de la cinématique horizontale de la parabole (Eq. (2.85)) modifie les conditions de Neumann des modèles asymptotiques d'impact au voisinage de la crête et du creux :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_{\mathbf{ncva}}}{\partial z}(y,0,t) = -\dfrac{Y_0^2}{2R_p} + \dfrac{(y+Y_0+\delta y(t))^2}{2R_p} - h(t) + Z_0 \\ \qquad\qquad + C\kappa\epsilon_{\mathbf{nc}}(t)y + C\dfrac{\epsilon_{\mathbf{nc}}^2(t)}{2} + \dfrac{y^2}{2R_v}\,, & (2.89a) \\ \dfrac{\partial \phi_{\mathbf{ntva}}}{\partial z}(y,0,t) = -\dfrac{Y_0^2}{2R_p} + \dfrac{(y+Y_0+\delta y(t))^2}{2R_p} - h(t) + Z_0 + 2C \\ \qquad\qquad - C\kappa\epsilon_{\mathbf{nt}}(t)y - C\dfrac{\epsilon_{\mathbf{nt}}^2(t)}{2} - \dfrac{y^2}{2R_v}\,, & (2.89b) \end{cases}$$

avec

$$\frac{(y+Y_0+\delta y(t))^2}{2R_p} = \frac{y^2}{2R_p} + \frac{Y_0+\delta y(t)}{R_p}y + \frac{Y_0\delta y(t)}{R_p} + \frac{\delta y^2(t)}{R_p} + \frac{Y_0^2}{2R_p}\,. \tag{2.90}$$

Les conditions de Neumann asymptotiques pour un impact au voisinage de la crête et du creux avec vitesse d'avance ont pour expressions :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_{\mathbf{ncva}}}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + Z_0 + \dfrac{\delta y^2(t)}{2R_p} + \dfrac{Y_0\delta y(t)}{R_p} + C\dfrac{\epsilon_{\mathbf{nc}}^2(t)}{2} \\ \qquad\qquad + \left(C\kappa\epsilon_{\mathbf{nc}}(t) + \dfrac{Y_0+\delta y(t)}{R_p}\right)y + \dfrac{y^2}{2R_{\mathbf{nc}}}\,, & (2.91a) \\ \dfrac{\partial \phi_{\mathbf{ntva}}}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + Z_0 + 2C + \dfrac{\delta y^2(t)}{2R_p} + \dfrac{Y_0\delta y(t)}{R_p} - C\dfrac{\epsilon_{\mathbf{nt}}^2(t)}{2} \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{Y_0+\delta y(t)}{R_p} - C\kappa\epsilon_{\mathbf{nt}}(t)\right)y + \dfrac{y^2}{2R_{\mathbf{nt}}}\,. & (2.91b) \end{cases}$$

de nouveaux changements de variables sont introduits :

$$\begin{cases} c_{\mathbf{ncva}}(t) = -\left(\dfrac{Y_0+\delta y(t)}{R_p} + C\kappa\epsilon_{\mathbf{nc}}(t)\right)\,, & (2.92a) \\ c_{\mathbf{ntva}}(t) = -\left(\dfrac{Y_0+\delta y(t)}{R_p} - C\kappa\epsilon_{\mathbf{nt}}(t)\right)\,. & (2.92b) \end{cases}$$

De façon analogue aux modèles asymptotiques aux voisinage de la crête et du creux sans vitesse d'avance, on se place dans les repères mobiles $(O_b, \tilde{y}_{\mathbf{ncva}}(t), z_b)$ et $(O_b, \tilde{y}_{\mathbf{ntva}}(t), z_b)$ (Fig. 2.10) avec :

$$\begin{cases} \tilde{y}_{\mathbf{ncva}}(t) = y - R_{\mathbf{nc}}c_{\mathbf{ncva}}(t)\,, & (2.93a) \\ \tilde{y}_{\mathbf{ntva}}(t) = y - R_{\mathbf{nt}}c_{\mathbf{ntva}}(t)\,. & (2.93b) \end{cases}$$

Dans ces repères mobiles, les conditions de Neumann asymptotiques relatives au modèles d'impact au voisinage de la crête et du creux de la houle sont symétriques et se réduisent à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_{\mathbf{ncva}}}{\partial z}(y,0,t) = -\tilde{h}_{\mathbf{ncva}}(t) + \dfrac{\tilde{y}_{\mathbf{ncva}}^2(t)}{2R_{\mathbf{nc}}}\,, & (2.94a) \\ \dfrac{\partial \phi_{\mathbf{ntva}}}{\partial z}(y,0,t) = -\tilde{h}_{\mathbf{ntva}}(t) + \dfrac{\tilde{y}_{\mathbf{ntva}}^2(t)}{2R_{\mathbf{nt}}}\,, & (2.94b) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \tilde{h}_{\mathbf{ncva}}(t) = h(t) - Z_0 - \dfrac{\delta y^2(t)}{2R_p} - \dfrac{Y_0 \delta y(t)}{R_p} - C\dfrac{\epsilon^2_{\mathbf{nc}}(t)}{2} + \dfrac{R_{\mathbf{nc}}}{2} c^2_{\mathbf{ncva}}(t)\,, & \text{(2.95a)} \\ \tilde{h}_{\mathbf{ntva}}(t) = h(t) - Z_0 - 2C - \dfrac{\delta y^2(t)}{2R_p} - \dfrac{Y_0 \delta y(t)}{R_p} + C\dfrac{\epsilon^2_{\mathbf{nt}}(t)}{2} + \dfrac{R_{\mathbf{nt}}}{2} c^2_{\mathbf{ntva}}(t)\,. & \text{(2.95b)} \end{cases}$$

On retrouve deux conditions de Neumann canoniques (Eq(s). (2.94a) et (2.94b) et ann. A.6.2). Comme pour les modèles sans vitesse d'avance (ici **i** désigne **nc** ou **nt**), on déduit les corrections de surface mouillée ainsi que les potentiels des déplacements dans leurs repères mobiles respectifs :

$$a_{\mathbf{iva}}(t) = \sqrt{4R_{\mathbf{i}} \tilde{h}_{\mathbf{iva}}(t)} \tag{2.96}$$

et

$$\phi_{\mathbf{iva}}(\tilde{y}_{\mathbf{iva}}(t), 0, t) = -\frac{1}{6R_{\mathbf{i}}} \left[a^2_{\mathbf{iva}}(t) - \tilde{y}^2_{\mathbf{iva}}(t) \right]^{\frac{3}{2}} \quad \forall \quad \tilde{y}^2_{\mathbf{iva}}(t) \in]-a_{\mathbf{iva}}(t); a_{\mathbf{iva}}(t)[\,. \tag{2.97}$$

De retour dans le repère fixe d'origine (O, y, z) on a :

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{iva}}(y, 0, t) &= -\frac{1}{6R_{\mathbf{i}}} \left[a^2_{\mathbf{iva}}(t) - (y - R_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{iva}}(t))^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ \forall \quad y \in]&-a_{\mathbf{iva}}(t) + R_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{iva}}(t), a_{\mathbf{iva}}(t) + R_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{iva}}(t)[\,. \end{aligned} \tag{2.98}$$

On pose les corrections de surface mouillée dissymétriques :

$$\begin{cases} d_{1\,\mathbf{iva}}(t) = a_{\mathbf{iva}}(t) - R_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{iva}}(t)\,, & \text{(2.99a)} \\ d_{2\,\mathbf{iva}}(t) = a_{\mathbf{iva}}(t) + R_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{iva}}(t)\,. & \text{(2.99b)} \end{cases}$$

Les potentiels des vitesses asymptotiques associés aux potentiels des déplacements asymptotiques (2.97) s'écrivent

$$\varphi_{\mathbf{iva}}(y, 0, t) = \left[\dot{\tilde{h}}_{\mathbf{iva}}(t) + \frac{\dot{\tilde{c}}_{\mathbf{iva}}(t)}{2} (y - R_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{iva}}(t)) \right] \sqrt{a^2_{\mathbf{iva}}(t) - (y - R_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{iva}}(t))^2} \tag{2.100}$$

On retrouve des potentiels des vitesses asymptotiques similaires à ceux correspondant à une configuration d'impact sans vitesse d'avance (Eq. (2.32)). Les différences résident uniquement dans les changements de variables (Eq(s). (2.92), (2.95) et (2.96)).

2.4.3.2 Modèle asymptotique au voisinage du milieu de la pente avec vitesse d'avance

Pour déterminer le potentiel des déplacements associé à cette configuration asymptotique d'impact au milieu de la pente on utilise la même méthode présentée dans la partie 2.2.2.

Modèle au 1^{er} ordre

On traite le cas du modèle au 1^{er} ordre pour un impact au voisinage du milieu de la pente avec vitesse d'avance.

Après la prise en compte de la vitesse d'avance et un développement en série de Taylor de la condition de Neumann (2.87), on obtient :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{m1va}}}{\partial z}(y,0,t) = -\frac{Y_0^2}{2R_p} + \frac{\left(y+\delta y(t)+Y_0\right)^2}{2R_p} - h(t) + Z_0 + C(1+\epsilon_{\mathbf{m}}(t)) + C\kappa y\,. \tag{2.101}$$

En réarrangeant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_{\mathbf{m1va}}}{\partial z}(y,0,t) = &- h(t) + Z_0 + C(1+\epsilon_{\mathbf{m}}(t)) + \frac{Y_0\delta y(t)}{R_p} + \frac{\delta y^2(t)}{2R_p} \\ &+ \left(\frac{Y_0+\delta y(t)}{R_p} + C\kappa\right) y + \frac{y^2}{2R_p}\,.\end{aligned} \tag{2.102}$$

On symétrise une nouvelle fois la condition de Neumann (2.102) au moyen des changements de variables

$$\begin{cases} c_{\mathbf{m1va}}(t) = -\dfrac{Y_0+\delta y(t)}{R_p} - C\kappa\,, & \text{(2.103a)} \\[2ex] \tilde{y}_{\mathbf{m1va}}(t) = y - R_p c_{\mathbf{m1va}}(t)\,. & \text{(2.103b)} \end{cases}$$

Une nouvelle condition de Neumann asymptotique symétrique dans le repère mobile $(O_b, y_{\mathbf{m1va}}(t), z_b)$ est obtenue

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{m1va}}}{\partial z}(y,0,t) = -\tilde{h}_{\mathbf{m1va}}(t) + \frac{\tilde{y}^2_{\mathbf{m1va}}(t)}{2R_p}\,, \tag{2.104}$$

avec

$$\tilde{h}_{\mathbf{m1va}}(t) = h(t) - Z_0 - C(1+\epsilon_{\mathbf{m}}(t)) + \frac{R_p c^2_{\mathbf{m1va}}(t)}{2} - \frac{Y_0\delta y(t)}{R_p} - \frac{\delta y^2(t)}{2R_p}\,. \tag{2.105}$$

On ne rapelle pas le problème aux limites mixte linéarisé asymptotique correspondant, qui demeure similaire au problème (2.41) en substituant l'indice **m1** à l'indice **m1va**.

Par analogie avec le cas d'une surface libre plane et au repos on obtient une nouvelle fois la correction de surface mouillée dans le repère mobile $(O_b, \tilde{y}_{\mathbf{m1va}}(t), z_b)$:

$$a_{\mathbf{m1va}}(t) = \sqrt{4R_p\tilde{h}_{\mathbf{m1va}}(t)}\,. \tag{2.106}$$

Dans le repère d'origine (O, y, z) les corrections de surface mouillée sont dissymétriques (Eq. (2.103b)) :

$$\begin{cases} d_{1\,\mathbf{m1va}}(t) = a_{\mathbf{m1va}}(t) - R_p c_{\mathbf{m1va}}(t)\,, & \text{(2.107a)} \\[2ex] d_{2\,\mathbf{m1va}}(t) = a_{\mathbf{m1va}}(t) + R_p c_{\mathbf{m1va}}(t)\,. & \text{(2.107b)} \end{cases}$$

Et l'expression du potentiel des déplacements est :

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{m1va}}(y,0,t) = &-\frac{1}{6R_p}\left[a^2_{\mathbf{m1va}}(t) - \left(y - R_p c_{\mathbf{m1va}}(t)\right)^2\right]^{3/2} \\ &\forall \quad y \in \left]-d_{1\,\mathbf{m1va}}(t),\, d_{2\,\mathbf{m1va}}(t)\right[\,.\end{aligned} \tag{2.108}$$

Le potentiel des vitesses dans le repère d'origine est obtenu par dérivation temporelle de l'équation (2.108) :

$$\varphi_{\mathbf{m1va}}(y,0,t) = \left[\dot{\tilde{h}}_{\mathbf{m1va}}(t) + \frac{\dot{c}_{\mathbf{m1va}}(t)}{2}\left(y - R_p c_{\mathbf{m1va}}(t)\right)\right] \times \sqrt{a^2_{\mathbf{m1va}}(t) - (y - R_p c_{\mathbf{m1va}}(t))^2}\,. \tag{2.109}$$

De la même manière que dans la partie 2.4.3.1, le potentiel des vitesses associé au modèle d'impact au milieu de la pente au 1^{er} ordre avec vitesse d'avance est analogue à celui calculé sans vitesse d'avance (Eq. (2.65)). Seuls les changements de variables sont distincts (Eq(s). (2.103a), (2.105) et (2.106)).

Modèle au 3^e ordre

Nous nous intéressons ici au modèle au 3^e ordre que l'on nommera **m3va**. Après prise en compte de la vitesse d'avance dans le paramétrage de la parabole et en développant en séries de Taylor au 3^e ordre, la condition de Neumann devient

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{m3va}}}{\partial z}(y,0,t) = \sum_{n=0}^{3} p_{n\,\mathbf{m3va}}(t) y^n \tag{2.110}$$

où :

$$\begin{cases} p_{0\,\mathbf{m3va}}(t) = -h(t) + Z_0 + C(1+\epsilon_{\mathbf{m}}(t)) - \dfrac{C\epsilon^3_{\mathbf{m}}(t)}{6} + \dfrac{Y_0\delta y}{R_p} + \dfrac{\delta^2 y}{2R_p}\,, & (2.111a) \\ p_{1\,\mathbf{m3va}}(t) = \dfrac{Y_0+\delta y}{R_p} + C\kappa - \dfrac{C\kappa\epsilon^2_{\mathbf{m}}(t)}{2}\,, & (2.111b) \\ p_{2\,\mathbf{m3va}}(t) = \dfrac{1}{2R_{\epsilon_{\mathbf{m}}(t)}}\,, & (2.111c) \\ p_{3\,\mathbf{m3va}} = -\dfrac{C\kappa^3}{6}\,. & (2.111d) \end{cases}$$

Le problème aux limites mixte linéarisé asymptotique est donc similaire au problème (2.47) en substituant les $p_{n\,\mathbf{m3}}$ aux $p_{n\,\mathbf{m3va}}$. Pour déterminer les inconnues du problème, on utilise les mêmes méthodes de résolution que celles présentées aux annexes A.2.1 et A.2.2.

Corrections de surface mouillée dissymétrique

On utilise les mêmes équations que dans l'annexe A.2.1 en considérant les expressions des $q_{n\,\mathbf{m3va}}(t)$.

Il vient :

$$\begin{cases} q_{0\,\mathbf{m3va}}(t) = -h + Z_0 + C(1+\epsilon_{\mathbf{m}}(t)+\kappa b_{\mathbf{m3va}}(t)) + \dfrac{Y_0 b_{\mathbf{m3va}}(t)}{R_p} + \dfrac{b^2_{\mathbf{m3va}}(t)}{2R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)} \\ \qquad - \dfrac{C\kappa^3 b^3_{\mathbf{m3va}}(t)}{6} - \dfrac{C\epsilon^3_{\mathbf{m}}(t)}{6} - \dfrac{C\kappa b_{\mathbf{m3va}}(t)\epsilon^2_{\mathbf{m}}(t)}{2} \\ \qquad - \dfrac{Y_0\delta y(t)}{R_p} - \dfrac{b_{\mathbf{m3va}}(t)\delta y(t)}{R_p} + \dfrac{\delta y^2(t)}{2R_p}\,, \qquad (2.112a) \\ q_{1\,\mathbf{m3va}}(t) = C\kappa a_{\mathbf{m3va}}(t) + \dfrac{Y_0 a_{\mathbf{m3va}}(t)}{R_p} + \dfrac{a_{\mathbf{m3va}}(t)b_{\mathbf{m3va}}(t)}{R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)} \\ \qquad - \dfrac{C\kappa a_{\mathbf{m3va}}(t)\epsilon^2_{\mathbf{m}}(t)}{2} - \dfrac{C\kappa^3 a_{\mathbf{m3va}}(t)b^2_{\mathbf{m3va}}(t)}{2} - \dfrac{a_{\mathbf{m3va}}(t)\delta y(t)}{R_p}\,, \qquad (2.112b) \\ q_{2\,\mathbf{m3va}}(t) = \dfrac{a^2_{\mathbf{m3va}}(t)}{2R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)} - \dfrac{C\kappa^3 a^2_{\mathbf{m3va}}(t)b_{\mathbf{m3va}}(t)}{2}\,, \qquad (2.112c) \\ q_{3\,\mathbf{m3va}}(t) = -\dfrac{C\kappa^3 a^3_{\mathbf{m3va}}(t)}{6}\,, \qquad (2.112d) \end{cases}$$

Les calculs des corrections de surface mouillée sont analogues au cas sans vitesse d'avance. On trouve donc le système (2.52) :

$$\begin{cases} q_{1\,\mathbf{m3va}}(t) + \dfrac{3}{4} q_{3\,\mathbf{m3va}}(t) = 0\,, \qquad (2.113a) \\ q_{0\,\mathbf{m3va}}(t) + \dfrac{1}{2} q_{2\,\mathbf{m3va}}(t) = 0\,, \qquad (2.113b) \end{cases}$$

La méthode de détermination des $a_{\mathbf{m3va}}(t)$ et $b_{\mathbf{m3va}}(t)$ est identique au cas sans vitesse d'avance (paragr. 2.2.2.2). Et les corrections de surface mouillée sont obtenues au moyen du système :

$$\begin{cases} a_{\mathbf{m3va}}(t) = \dfrac{d_{2\,\mathbf{m3va}}(t) + d_{1\,\mathbf{m3va}}(t)}{2}\,, \qquad (2.114a) \\ b_{\mathbf{m3va}}(t) = \dfrac{d_{2\,\mathbf{m3va}}(t) - d_{1\,\mathbf{m3va}}(t)}{2}\,. \qquad (2.114b) \end{cases}$$

Potentiel des déplacements

En utilisant la même méthode de détermination du potentiel des déplacements présentée à l'annexe A.2.2, on aboutit à une expression semblable au cas sans vitesse d'avance (Eq. (2.61))

$$\phi_{\mathbf{m3va}}(y,0,t) = -\frac{1}{a^2_{\mathbf{m3va}}(t)}\left(\frac{q_{2\,\mathbf{m3va}}(t)}{3} + \frac{q_{3\,\mathbf{m3va}}(t)}{4}\left(\frac{y - b_{\mathbf{m3va}}(t)}{a_{\mathbf{m3va}}(t)}\right)\right) \times$$

$$\left[a^2_{\mathbf{m3va}}(t) - (y - b_{\mathbf{m3va}}(t))^2\right]^{\frac{3}{2}} \;\forall\, y \in]-d_{1\,\mathbf{m3va}}(t),\, d_{2\,\mathbf{m3va}}(t)[\,. \qquad (2.115)$$

Étant donné que $q_{2\,\mathbf{m3va}}(t)$ est égal à $q_{2\,\mathbf{m3}}(t)$ et que $q_{3\,\mathbf{m3va}}(t)$ est égal $q_{3\,\mathbf{m3}}(t)$, on en déduit :

$$\phi_{\mathbf{m3va}}(y,0,t) = -\left(\frac{1}{6R_p} - \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}}{6R_v} - \frac{\kappa b_{\mathbf{m3va}}}{8R_v} - \frac{\kappa}{24R_v}y\right)\left[a^2_{\mathbf{m3va}} - (y - b_{\mathbf{m3va}})^2\right]^{\frac{3}{2}} . \quad (2.116)$$

Les expressions des potentiels des déplacements sans vitesse d'avance (Eq. (2.62)) ou avec vitesse d'avance (Eq. (2.116)) sont similaires. Les seules différences résident dans l'expression des corrections de surface mouillée réduites.

Potentiel des vitesses

On dérive par rapport au temps l'équation (2.116) pour obtient le potentiel des vitesses

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{m3va}}(y,0,t) = &\left(\frac{\dot{\epsilon}_{\mathbf{m}}(t)}{6R_v} + \frac{\kappa \dot{b}_{\mathbf{m3va}}(t)}{8R_v}\right)\left[a^2_{\mathbf{m3va}}(t) - (y - b_{\mathbf{m3va}}(t))^2\right]^{\frac{3}{2}} \\ &- \left(\frac{1}{2R_p} - \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}(t)}{2R_v} - \frac{3\kappa b_{\mathbf{m3va}}(t)}{8R_v} - \frac{\kappa}{8R_v}y\right)\sqrt{a^2_{\mathbf{m3va}}(t) - (y - b_{\mathbf{m3va}})^2(t)}\times \\ &\left(a_{\mathbf{m3va}}(t)\dot{a}_{\mathbf{m3va}}(t) + (y - b_{\mathbf{m3va}}(t))\dot{b}_{\mathbf{m3va}}(t)\right) . \end{aligned} \quad (2.117)$$

Le potentiel des vitesses du modèle asymptotique au 3^e ordre avec vitesse d'avance (Eq. (2.117)) est semblable au potentiel des vitesses du modèle asymptotique au 3^e ordre sans vitesse d'avance (Eq. (2.67)). La prise en compte de la vitesse d'avance pour ce modèle asymptotique d'impact est donc assurée au travers des corrections de surface mouillée et des vitesses d'expansions de surface mouillée. Pour les expressions des $\dot{a}_{\mathbf{m3va}}(t)$ et $\dot{b}_{\mathbf{m3va}}(t)$ on se réferera à l'annexe A.2.3.

2.4.4 Modèle non-asymptotique semi-analytique avec vitesse d'avance

Dans cette partie on présente les expressions des corrections de surface mouillée et le potentiel des déplacements associé pour le modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance. Sa nomenclature est définie par l'indice **nava**. De la même manière que les modèles asymptotiques avec vitesse d'avance, les déterminations des inconnues du problèmes sont tout à fait similaires à celles réalisées dans la section 2.3. On présente uniquement les différences avec le modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance.

On rappelle la condition de Neumann non-asymptotique avec vitesse d'avance :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_{\mathbf{nava}}}{\partial z}(y,0,t) = &-\frac{Y_0^2}{2R_p} + \frac{(y + Y_0 + \delta y(t))^2}{2R_p} - h(t) \\ &+ Z_0 - C\left[\cos(\kappa(y + Y_0) - \omega t + \theta_0) - 1\right] . \end{aligned} \quad (2.118)$$

On scinde la condition de Neuman non-asymptotique en une contribution polynomiale et trigonométrique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_{\mathbf{nava\,p}}}{\partial z}(y,0,t) = -\dfrac{Y_0^2}{2R_p} + \dfrac{(y + Y_0 + \delta y(t))^2}{2R_p} - h(t) + Z_0 + C\,, & (2.119a) \\ \dfrac{\partial \phi_{\mathbf{nava\,c}}}{\partial z}(y,0,t) = -C\left[\cos(\kappa(y + Y_0) - \omega t + \theta_0)\right] . & (2.119b) \end{cases}$$

La contribution trigonométrique est identique au cas sans vitesse d'avance. Les calculs relatifs à cette contribution sont donc strictement identiques. On exprime la contribution polynomiale sous la même forme que le cas sans vitesse d'avance (Eq(s). (2.72)) :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{nava\,p}}}{\partial z}(y,0,t) = \sum_{n=0}^{2} p_{n\,\mathbf{nava}}(t) y^n \,, \tag{2.120}$$

où

$$\begin{cases} p_{0\,\mathbf{nava}}(t) = -h(t) + Z_0 + C + \dfrac{Y_0 b_{\mathbf{nava}}(t)}{R_p} + \dfrac{b^2_{\mathbf{nava}}(t)}{2R_p} \\ \qquad\qquad + \dfrac{b_{\mathbf{nava}}(t)\delta y(t)}{R_p} + \dfrac{Y_0 \delta y(t)}{R_p} + \dfrac{\delta y^2(t)}{2R_p} \,, & \text{(2.121a)} \\ p_{1\,\mathbf{nava}}(t) = \dfrac{Y_0 + b_{\mathbf{nava}}(t) + \delta y(t)}{R_p} \,, & \text{(2.121b)} \\ p_{2\,\mathbf{nava}} = \dfrac{1}{2R_p} \,, & \text{(2.121c)} \end{cases}$$

et les corrections de surface mouillée réduites :

$$\begin{cases} a_{\mathbf{nava}}(t) = \dfrac{d_{2\,\mathbf{nava}}(t) + d_{1\,\mathbf{nava}}(t)}{2} \,, & \text{(2.122a)} \\ b_{\mathbf{nava}}(t) = \dfrac{d_{2\,\mathbf{nava}}(t) - d_{1\,\mathbf{nava}}(t)}{2} \,. & \text{(2.122b)} \end{cases}$$

De cette manière il est trivial d'obtenir les inconnues du problèmes aux limites mixte linéarisé (2.88). Il suffit de substituer les $p_{n\,\mathbf{na}}(t)$ du modèle non-asymptotique présenté dans la partie 2.3 au $p_{n\,\mathbf{nava}}(t)$ pour obtenir les corrections de surface mouillée et le potentiel des déplacements correspondant.

2.4.4.1 Calcul des corrections mouillées

En se référant au système d'équations (2.74) traduisant les corrections de surface mouillée du modèle non asymptotique sans vitesse d'avance il vient :

$$\begin{cases} p_{0\,\mathbf{nava}}(t) + \dfrac{a^2_{\mathbf{nava}}(t)}{2} p_{2\,\mathbf{nava}} - CA(t)\mathbf{J_0}(a_{\mathbf{nava}}(t)\kappa) = 0 \,, & \text{(2.123a)} \\ \dfrac{a_{\mathbf{nava}}(t)}{2} p_{1\,\mathbf{nava}}(t) + CB(t)\mathbf{J_1}(a_{\mathbf{nava}}(t)\kappa) = 0 \,, & \text{(2.123b)} \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} -h(t) + Z_0 + C + \dfrac{Y_0 b_{\mathbf{nava}}(t)}{R_p} + \dfrac{b^2_{\mathbf{nava}}(t)}{2R_p} + \dfrac{a^2_{\mathbf{nava}}(t)}{4R_p} - CA(t)\mathbf{J_0}(a_{\mathbf{nava}}(t)\kappa) \\ + \dfrac{b_{\mathbf{nava}}(t)\delta y(t)}{R_p} + \dfrac{Y_0 \delta y(t)}{R_p} + \dfrac{\delta y^2(t)}{2R_p} = 0 & \text{(2.124a)} \\ \dfrac{a_{\mathbf{nava}}(t) Y_0}{2R_p} + \dfrac{a_{\mathbf{nava}}(t) b_{\mathbf{na,va}}(t)}{2R_p} + CB(t)\mathbf{J_1}(a_{\mathbf{nava}}(t)\kappa) + \dfrac{a_{\mathbf{nava}}(t)\delta y(t)}{2R_p} = 0 & \text{(2.124b)} \end{cases}$$

On retrouve logiquement un système d'équation non-linéaires analogue au système (2.75). Pour déterminer les corrections de surface mouillée on utilise à nouveau une méthode de Newton pour les systèmes d'équations non-linéaires présentée dans [Coleman & Li, 1996] et [Coleman & Li, 1994]. Le calcul des différentes corrections de surface mouillée est donc **primordial**.

2.4.4.2 Potentiel des déplacements et des vitesses

En ré-utilisant les résultats de la partie 2.3.2 les potentiels des déplacements et des vitesses s'écrivent en substituant l'indice **na** à l'indice **nava** (Eq. (2.78)). Le potentiel des déplacements s'écrit

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{nava}}(y,0,t) = &-\frac{1}{6R_p}\left[a_{\mathbf{nava}}^2(t)-(y-b_{\mathbf{nava}}(t))^2\right]^{\frac{3}{2}}\\ &-a_{\mathbf{nava}}(t)CA(t)\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{J_{2k}}(a_{\mathbf{nava}}(t)\kappa)f_k(y,t)\\ &-a_{\mathbf{nava}}(t)CB(t)\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{J_{2k+1}}(a_{\mathbf{nava}}(t)\kappa)g_k(y,t)\end{aligned} \tag{2.125}$$

Pour l'expression du potentiel des vitesses du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance on se référera à la partie 2.3.3 en substituant l'indice **na** à l'indice **nava**.

2.4.5 Conclusion sur l'ajout d'une vitesse d'avance

Dans les parties 2.4.3 et 2.4.4, il est montré que l'ajout d'une vitesse d'avance horizontale à la cinématique de la parabole ne change en rien les méthodes de résolution des problèmes aux limites mixtes linéarisés correspondants. Pour les différents modèles avec vitesse d'avance développés dans la section 2.4, des changements de variables judicieux et une analogie avec les résultats de la partie sans vitesse d'avance permettent de déterminer aisément les corrections de surface mouillée et les potentiels des vitesses.

Les expressions des potentiels des vitesses avec vitesse d'avance ont des expressions similaires que ceux sans vitesse d'avance.

Pour les modèles d'impact **ncva**, **ntva** et **m1va**, la prise en compte de la vitesse d'avance dépend du couple de variables $(a_{\mathbf{jva}}(t), c_{\mathbf{jva}}(t))$ avec ici $\mathbf{j} = \mathbf{nc}$, **nt** ou **m1**.

Pour les modèles d'impact **m3va**, et **nava**, la prise en compte de la vitesse d'avance dépend du couple de variables $(a_{\mathbf{jva}}(t), b_{\mathbf{jva}}(t))$ avec ici $\mathbf{j} = \mathbf{m3}$ ou **na**.

On conclut donc que pour tous les modèles d'impact, la prise en compte de la vitesse d'avance dans les expressions des potentiels des vitesses se fait au travers des corrections de surface mouillée (Eq.(s) (2.99), (2.107), (2.114) et (2.122)).

2.5 Pressions et efforts hydrodynamiques

Dans les parties 2.2, 2.3 et 2.4 plusieurs problèmes aux limites mixtes linéarisé décrivant l'impact d'une parabole sur une houle d'Airy ont été résolus jusqu'à l'obtention des inconnus du problème. Les potentiels des vitesses et corrections de surface mouillée associés aux modèles d'impact hydrodynamiques permettent de déterminer les champs de pression exercés sur la parabole lors de l'impact. Les efforts hydrodynamiques d'impact sont obtenus par intégration spatiale des champs de pression.

Dans cette section, on commence par rappeler une méthode permettant de calculer une première approximation des efforts hydrodynamiques indépendante des champs de pression (part. 2.5.1). Puis une méthode capable de déterminer les valeurs maximales des champs pressions aux bornes de la surface mouillée (part. 2.5.2). Sont ensuite décrites les formulations Modified Logvinovich Model (MLM) et composite ($COMP$) (paragr(s). 2.5.3.1 et 2.5.3.2) qui permettent de déterminer des champs de pressions bornés. Dans la partie 2.5.3, on présente des méthodes pour déterminer les variations temporelles et spatiales de champs de pression calculés au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée. On termine par une discussion sur les supports d'intégration des champs de pression MLM et $COMP$ (part. 2.5.5).

2.5.1 Efforts de première approximation

Si on s'intéresse uniquement à la solution de Wagner, utilisant l'approximation du disque plat, les efforts hydrodynamiques sont évaluables analytiquement. Selon [Newman, 1977] les efforts hydrodynamiques de première approximation sont fonctions de la masse ajoutée du disque plat $m_a(t)$ tel que

$$\vec{F} = \rho \frac{d}{dt} \int\limits_{disque} \varphi \vec{n} dS = \frac{d}{dt} \left[m_a(t) W \right] \vec{z}. \tag{2.126}$$

Avec $d_1(t)$ et $d_2(t)$ les corrections de surface mouillée dissymétriques en géométrique bidimensionnelle et pour des configurations d'impact dissymétriques on a

$$m_a(t) = \frac{1}{2} \rho \pi \left[\frac{d_1(t) + d_2(t)}{2} \right]^2 . \tag{2.127}$$

Ainsi

$$F_{wagner} = \frac{\rho \pi}{4} W \left(d_1(t) + d_2(t) \right) \left(\dot{d}_1(t) + \dot{d}_2(t) \right). \tag{2.128}$$

L'équation (2.128) est donc valable pour n'importe quelle configuration asymptotique ou non et avec ou sans vitesse d'avance (sec(s). 2.2, 2.3 et 2.4).

2.5.2 Pression maximale aux points de contact

Les valeurs des champs de pression maximum au cours du temps sont données par les équations suivantes (voir [Scolan et al., 1999]) :

$$\begin{cases} P_{max\, d_1}(t) = \dfrac{1}{2} \rho \dot{d}_1^2(t) \quad \text{à gauche de la } SM(t) & \text{(2.129a)} \\ \\ P_{max\, d_2}(t) = \dfrac{1}{2} \rho \dot{d}_2^2(t) \quad \text{à droite de la } SM(t) & \text{(2.129b)} \end{cases}$$

Les équations (2.129a) et (2.129b) sont valables pour toutes les configurations et modèles d'impact.

2.5.3 Formulations en pression

Dans cette partie nous décrivons les formulations en pression permettant de calculer les efforts hydrodynamiques engendrés lors de l'impact de la parabole sur la houle d'Airy monochromatique. Le modèle de [Wagner, 1932] engendrant des champs de pressions singuliers aux points de contacts, on décrit ici les formulations MLM et $COMP$ qui permettent d'obtenir des champs de pressions bornés.

2.5.3.1 Modèle de Logvinovich modifié (MLM)

Pour établir les champs de pression au moyen de la formulation MLM, on utilise les travaux de [Korobkin, 2004] qui reposent sur ceux de [Logvinovich, 1969].

Cette formulation nécessite de se placer dans un référentiel galiléen. On exprime donc toutes grandeurs dans le système de coordonnées (O, y, z). On rappelle les équations principales régissant la formulation MLM. La position du corps parabolique est décrite par l'équation $z = f(y) - h(t)$. Pour évaluer la distribution de pression $P_{mlm}(y,t)$ sur la surface mouillée $SM(t)$, on suppose que le potentiel des vitesses peut s'écrire $\psi(y,t) = \varphi(y, f(y) - h(t), t)$ et que les corrections de surface mouillée sont connues. On rappelle ici quelques équations permettant d'établir l'expression de la pression MLM. La pression hydrodynamique $p(y,z,t)$ restreinte à la surface mouillée s'exprime via l'equation de Bernoulli non-linéarisée en négligeant la gravité :

$$p(y,z,t) = -\rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \tag{2.130}$$

En posant :

$$P(y,t) = p(y, f(y) - h(t), t)\,, \tag{2.131}$$

en s'aidant de la condition aux limites

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} f'(y) - W\,, \tag{2.132}$$

et en faisant un développement limité du potentiel des vitesses sur la surface mouillée

$$\psi(y,t) \approx \varphi(y,0,t) - W\left[f(y) - h(t)\right]\,, \tag{2.133}$$

Nous obtenons :

$$P_{mlm}(y,t) = -\rho \left[\psi_{,t} + \frac{f_{,y} W}{1 + f_{,y}^2} \psi_{,y} + \frac{1}{2} \frac{\psi_{,y}^2 - W^2}{1 + f_{,y}^2} \right]\,. \tag{2.134}$$

La prise en compte de la vitesse d'avance de la parabole change l'expression de la pression MLM (ann. A.5.1) :

$$P_{mlm\,\mathbf{va}}(y,t) = -\rho \left[\psi_{,t} + \frac{f_{,y} W}{1 + f_{,y}^2} \psi_{,y} + \frac{1}{2} \frac{\psi_{,y}^2 - W^2 + V^2 f_{,y}^2}{1 + f_{,y}^2} \right]\,. \tag{2.135}$$

Pour les dérivées temporelles et spatiales des potentiels des vitesses apparaissant dans les expressions de P_{mlm} et $P_{mlm\,\mathbf{va}}$ on peut se référer aux annexes A.1.3 et A.2.5. Pour alléger les notations, dans ce paragraphe on a posé : $\frac{\partial}{\partial t} =, t$ et $\frac{\partial}{\partial y} =, y$

2.5.3.2 Le modèle composite ($COMP$)

Pour des angles de relèvement faibles (Fig. 2.3), il est possible d'utiliser la méthode des raccordements asymptotiques pour calculer des champs de pression continus entre le jet et la surface mouillée $SM(t)$ (voir [Zhao & Faltinsen, 1993] et [Howison et al., 1991]). Cette méthode consiste à ajouter un champ de pression défini sur la surface mouillée $SM(t)$ à un champ de pression local dans le jet, puis de retrancher leur partie singulière commune. Le fluide est divisé en deux domaines, l'*outer domain* : sur la surface mouillée et l'*inner domain* dans la racine du jet. On applique cette formulation qu'aux modèles asymptotiques d'impact avec ou sans vitesse d'avance.

Le champ de pression défini sur la surface mouillée $SM(t)$ est le champ de pression calculé au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée

$$P_{out}(y,t) = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y,t)\,. \tag{2.136}$$

où φ désigne les potentiels des vitesses associés aux modèles asymptotiques. Les champs de pression $P_{out}(y,t)$ sont singuliers aux points de contacts $-d_1(t)$ et $d_2(t)$.

La solution locale du champ de pression dans le jet vient d'une transformation conforme du domaine (voir [Wagner, 1932] et [Cointe & Armand, 1987]). Les configurations d'impact ne sont pas symétriques, on doit donc calculer deux solutions locales dans le jet telles que :

$$P_{in\pm} = 2\rho V_{j\pm}^2 \frac{\sqrt{|\tau|}}{(1+\sqrt{|\tau|})^2}\,, \tag{2.137}$$

avec V_{j-} la vitesse du fluide à gauche de la surface mouillée et V_{j+} la vitesse du fluide à droite de la surface mouillée. Le paramètre τ est obtenu via

$$\begin{cases} y - d_{2\,\mathbf{i}}(t) = \dfrac{\delta_+}{\pi}\left(-\ln|\tau| - 4\sqrt{|\tau|} - \tau + 5\right)\,, & \text{(2.138a)} \\[2ex] y - d_{1\,\mathbf{i}}(t) = \dfrac{\delta_-}{\pi}\left(-\ln|\tau| - 4\sqrt{|\tau|} - \tau + 5\right)\,, & \text{(2.138b)} \end{cases}$$

où $\delta_\pm$ désigne l'épaisseur du jet respectivement à droite et à gauche de la surface mouillée.

Reste à retrancher les parties singulières $P_{s\pm}(y,t)$ communes à $P_{in\pm}(y,t)$ et $P_{out\pm}$ qui sont les parties principales de $P_{out}(y,t)$ telles que

$$\begin{cases} P_{s+}(y,t) = \lim\limits_{y \to d_{2\,\mathbf{i}}(t)} P_{out}(y,t)\,, & \text{(2.139a)} \\[2ex] P_{s-}(y,t) = \lim\limits_{y \to -d_{1\,\mathbf{i}}(t)} P_{out}(y,t)\,. & \text{(2.139b)} \end{cases}$$

Les expressions des vitesses $V_{j\pm}$ et des épaisseurs $\delta_\pm$ sont obtenues en résolvant les systèmes

$$\begin{cases} P_{s\pm}(y,t) = P_{in\pm}\,, & \text{(2.140a)} \\[2ex] \varphi_{s\pm}(y,t) = \varphi_{in\pm}\,, & \text{(2.140b)} \end{cases}$$

où $\varphi_{s\pm}(y,t)$ sont les parties principales des potentiels des vitesses $\varphi(y,t)$

$$\begin{cases} \varphi_{in\pm} = -4V_{j\pm}\sqrt{\dfrac{\pi|\sigma|}{\delta}}\,, & \text{(2.141a)} \\ P_{in\pm} = 2\rho V_{j\pm}^2\sqrt{\dfrac{\delta}{\pi|\sigma|}}\,, & \text{(2.141b)} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \text{côté positif :} \quad a_{\mathbf{i}}(t) - y + c_{\mathbf{i}}(t)R_{\mathbf{i}} = |\sigma|\,, & \text{(2.142a)} \\ \text{côté négatif :} \quad a_{\mathbf{i}}(t) + y - c_{\mathbf{i}}(t)R_{\mathbf{i}} = |\sigma|\,. & \text{(2.142b)} \end{cases}$$

Enfin l'expression de la pression composite s'écrit comme suit :

$$P_{comp\pm} = P_{out} - P_{s\pm} + P_{in\pm}\,. \tag{2.143}$$

Exemple d'application de la formulation composite

Dans ce paragraphe, nous présentons un exemple de calcul de pression composite pour les modèles asymptotiques d'impact au voisinage de la crête **nc** et de creux **nt**. On se concentre sur l'expression des parties singulières de P_{out} ainsi que l'épaisseur du jet et les vitesses du fluide dans le jet. L'expression de la pression composite pour les autres modèles asymptotiques, à savoir **m1** et **m3**, n'est pas présentée ici mais la méthode de calcul est identique.

On se place dans le repère galiléen (O,y,z), la pression dans l'*outer domain* est la pression singulière calculée au sens de Wagner (équation de Bernoulli non-linéarisée) :

$$\begin{aligned} P_{out\,\mathbf{i}}(y,t) =& \rho\frac{\left(a_{\mathbf{i}}(t)\dot{a}_{\mathbf{i}}(t) + (y - c_{\mathbf{i}}(t)R_{\mathbf{i}})\dot{c}_{\mathbf{i}}R_{\mathbf{i}}\right)^2}{2R_{\mathbf{i}}\sqrt{a_{\mathbf{i}}^2(t) - (y - c_{\mathbf{i}}(t)R_{\mathbf{i}})^2}} \\ & \rho\frac{\sqrt{a_{\mathbf{i}}^2(t) - (y - c_{\mathbf{i}}(t)R_{\mathbf{i}})^2}}{2R_{\mathbf{i}}}\left(\dot{a}_{\mathbf{i}}^2(t) + a_{\mathbf{i}}(t)\ddot{a}_{\mathbf{i}}(t) - \dot{c}_{\mathbf{i}}^2R_{\mathbf{i}}^2\right)\,. \end{aligned} \tag{2.144}$$

La pression locale dans le jet s'exprime au moyen des équations (2.137) et (2.138).

Dans le repère (O,y,z) le champ de pression $P_{out\,\mathbf{i}}(y,t)$ n'est pas symétrique. Il reste à déterminer la partie singulière de $P_{out\,\mathbf{i}}(y,t)$ (Eq. (2.144)) lorsque $y \to -a_{\mathbf{i}} + c_{\mathbf{i}}R_{\mathbf{i}}$ (à droite de la surface mouillée) et $y \to a_{\mathbf{i}} + c_{\mathbf{i}}R_{\mathbf{i}}$ (à gauche de la surface mouillée). Pour alléger l'écriture des équations, on s'affranchit de la notation indicielle **i** et des dépendances temporelles.

$$\begin{cases} P_{s+}(y,t) = \rho\dfrac{(a\dot{a} + (y - cR)\dot{c}R)^2}{2R\sqrt{2a(a + Rc - y)}}\,, & \text{(2.145a)} \\ P_{s-}(y,t) = \rho\dfrac{(a\dot{a} + (y - cR)\dot{c}R)^2}{2R\sqrt{2a(a - Rc + y)}}\,. & \text{(2.145b)} \end{cases}$$

Après raccordement (ann. A.5.2) à droite et à gauche de la $SM(t)$ on obtient l'épaisseur du jet δ et $V_{j\pm}$

$$\begin{cases} \delta_+ = \delta_- = \dfrac{a(t)^3\pi}{32R^2}\,, & \text{(2.146a)} \\ V_{j+} = \dot{a} + \dot{c}R \quad \text{et} \quad V_{j-} = \dot{a} - \dot{c}R\,. & \text{(2.146b)} \end{cases}$$

2.5.4 Étude des variations temporelles et spatiales de la pression

Pour les configurations et modèles d'impact avec vitesse d'avance horizontale (sec. 2.4), il est nécessaire d'étudier les variations temporelles et spatiales des champs de pression. [Moore et al., 2012] et [Howison et al., 2004] ont montré que lors de certaines configurations d'impact hydrodynamique avec vitesse d'avance, la pression calculée au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée peut être inférieur à la pression de référence $P_{ref} = 0$. Concrètement il s'agit de déterminer à quel instant la pression calculé au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée ($P_{wagner} = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$) s'annule et à quelles coordonnées spatiales.

2.5.4.1 Modèles asymptotiques sau voisinage de la crête, du creux et au milieu de la pente 1^{er} ordre

Pour cette étude on s'inspire d'une méthode présentée dans [Scolan, 2014a]. On se restreint aux modèles d'impact hydrodynamiques asymptotiques avec vitesse d'avance lorsque l'impact se produit au voisinage d'une crête, du creux et du milieu de la pente au 1^{er} ordre. Pour les développements on demeure dans les repères mobiles (ou translatés pour le modèle **m1**) $(O_b, \tilde{y}_{\mathbf{jva}}, z)$ (Fig. 2.10). Dans leurs repères respectifs (part(s). 2.4.3.1 et 2.4.3.2), ces trois modèles d'impact ont une expression commune de leur potentiels des vitesses (ici $\mathbf{j} = \mathbf{nc}$, **nt** ou **m1**)

$$\varphi_{\mathbf{jva}}(\tilde{y}_{\mathbf{jva}}(t), 0, t) = -\frac{[a_{\mathbf{jva}}(t)\dot{a}_{\mathbf{jva}}(t) + R_{\mathbf{j}}\dot{c}_{\mathbf{jva}}\tilde{y}_{\mathbf{jva}}(t)]}{2R_{\mathbf{j}}}\sqrt{a^2_{\mathbf{jva}}(t) - \tilde{y}^2_{\mathbf{jva}}(t)}$$

$$\forall\ \tilde{y}_{\mathbf{jva}}(t) \in\ ]-a_{\mathbf{jva}}(t), a_{\mathbf{jva}}(t)[\,. \tag{2.147}$$

Nous allégeons les notations en s'affranchissant des dépendances temporelles et des indices :

$$\varphi(\tilde{y}, 0, t) = -\frac{a\,[a\dot{a} + R\dot{c}\tilde{y}]}{2R}\sqrt{1 - \frac{\tilde{y}^2}{a^2}}\,, \tag{2.148}$$

et on introduit des nouvelles variables F et M telles que

$$\begin{cases} F = 1 - \dfrac{\tilde{y}^2}{a^2}\,, & \text{(2.149a)} \\ M = a\,[a\dot{a} + R\dot{c}\tilde{y}]\ . & \text{(2.149b)} \end{cases}$$

Le potentiel des vitesses se réduit alors à

$$\varphi(\tilde{y}, t) = -\frac{M\sqrt{F}}{2R}\,. \tag{2.150}$$

Puis on calcule la pression dans les repères mobiles correspondants, au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée

$$P_{wagner}(\tilde{y}, t) = \frac{\rho}{2R\sqrt{F}}\left(\dot{M}F + \frac{1}{2}M\dot{F}\right)\,, \tag{2.151}$$

avec

$$\begin{cases} \dot{F} = \dfrac{2R\dot{c}\tilde{y}}{a^2} + \dfrac{2\dot{a}\tilde{y}^2}{a^3}\,, & \text{(2.152a)} \\ \dot{M} = \dot{a}\,[a\dot{a} + R\dot{c}\tilde{y}] + a\left[\dot{a}^2 + a\ddot{a} - R^2\dot{c}^2\right]\ . & \text{(2.152b)} \end{cases}$$

On cherche à savoir si $P_{wagner}(\tilde{y},t) \leq 0$ à quel instant t_0 et à quelle coordonnée spatiale $\mathscr{Y}_0$. Ce qui revient à résoudre

$$P_{wagner}(\tilde{y},t) = 0 \Leftrightarrow \dot{M}F + \frac{1}{2}M\dot{F} = 0\,. \tag{2.153}$$

En posant $\mathscr{Y} = \frac{\tilde{y}}{a}$ et un peu d'algèbre cela revient à

$$\left(2\dot{a} + a\ddot{a} - R^2\dot{c}^2 + R\dot{c}\dot{a}\mathscr{Y}\right)(1-\mathscr{Y}^2) + \mathscr{Y}\left(\dot{a} + R\dot{c}\mathscr{Y}\right)\left(R\dot{c} + \dot{a}\mathscr{Y}\right) = 0\,. \tag{2.154}$$

L'expression précédente peut s'annuler sous certaines conditions pour $\mathscr{Y} = 1$ c'est-à-dire au point de contact à droite de la $SM(t)$:

Pour $\mathscr{Y} = 1$:

$$P_{wagner}(1,t) = 0 \Leftrightarrow R\dot{c} = \dot{a} \tag{2.155}$$

En utilisant les notations indicielles propres aux configurations d'impact au voisinage de la crête et du creux et du milieu de la pente au 1^{re} ordre :

$$-R_{\mathbf{jva}}\dot{c}_{\mathbf{jva}} = \dot{a}_{\mathbf{jva}}\,, \tag{2.156}$$

ou encore :

$$\begin{cases} -R_{\mathbf{nc}}\dot{c}_{\mathbf{ncva}}(t) = \dot{a}_{\mathbf{ncva}}(t)\,, & \text{(2.157a)} \\ -R_{\mathbf{nt}}\dot{c}_{\mathbf{ntva}}(t) = \dot{a}_{\mathbf{ntva}}(t)\,, & \text{(2.157b)} \\ -R_p\dot{c}_{\mathbf{m1va}}(t) = \dot{a}_{\mathbf{m1va}}(t)\,. & \text{(2.157c)} \end{cases}$$

Avec les expressions des variables $R_{\mathbf{i}}$, les expressions des variables $\dot{c}_{\mathbf{i,va}}$:

$$\begin{cases} \dfrac{R_vR_p}{R_v+R_p}\left(\dfrac{V}{R_p} + C\kappa\omega\right) = \dot{a}_{\mathbf{ncva}}(t)\,, & \text{(2.158a)} \\ \dfrac{R_vR_p}{R_v-R_p}\left(\dfrac{V}{R_p} - C\kappa\omega\right) = \dot{a}_{\mathbf{ntva}}(t)\,, & \text{(2.158b)} \\ V = \dot{a}_{\mathbf{m1va}}(t)\,, & \text{(2.158c)} \end{cases}$$

Pour trouver à quel instant la pression s'annule pour $\mathscr{Y} = 1$, on résout numériquement avec une méthode de Newton les équations (2.158a), (2.158b) et (2.158c)

Pour $\mathscr{Y} \neq 1$ mais $\mathscr{Y} \in SM(t)$:

On cherche toujours :

$$\left(2\dot{a} + a\ddot{a} - R^2\dot{c}^2 + R\dot{c}\dot{a}\mathscr{Y}\right)(1-\mathscr{Y}^2) + Y\left(\dot{a} + R\dot{c}\mathscr{Y}\right)\left(R\dot{c} + \dot{a}\mathscr{Y}\right) = 0\,. \tag{2.159}$$

Sous cette forme $P_{wagner}(\mathscr{Y},t)$ est un polynôme du 2^e degré en $\mathscr{Y}$. On peut donc l'exprimer sous la forme canonique :

$$P_{wagner}(\mathscr{Y},t) = \alpha(t)\mathscr{Y}^2 + \beta(t)\mathscr{Y} + \gamma(t)\,. \tag{2.160}$$

Les racines de ce polynôme sont :

$$\mathscr{Y}_{1,2}(t) = \frac{-\beta(t) \pm \sqrt{\Delta(t)}}{2\alpha(t)} \,. \tag{2.161}$$

Avec l'expression du discriminant :

$$\Delta(t) = \beta^2(t) - 4\alpha(t)\gamma(t) \,. \tag{2.162}$$

L'équation (2.159) admet une solution unique lorsque :

$$\Delta(t_0) = 0 \,. \tag{2.163}$$

On cherche itérativement t_0 lorsque :

$$\beta^2(t_0) = 4\alpha(t_0)\gamma(t_0) \,. \tag{2.164}$$

Une fois la valeur de t_0 déterminée, si elle existe, il reste à calculer la racine double telle que :

$$\mathscr{Y}_0(t_0) = -\frac{\beta(t_0)}{2\alpha(t_0)} \,. \tag{2.165}$$

De cette manière on accède à l'instant t_0 où l'a pression s'annule à la coordonnée $\mathscr{Y}_0(t_0)$. Pour les racines suivantes, il suffit de calculer :

$$\mathscr{Y}_{1,2}(t > t_0) = \frac{-\beta(t > t_0) \pm \sqrt{\Delta(t > t_0)}}{2\alpha(t > t_0)} \,. \tag{2.166}$$

2.5.4.2 Modèles asymptotiques au voisinage du milieu de la pente 3^e ordre

On rappelle l'expression du potentiel des déplacements associés au modèles asymptotique d'impact au 3^e ordre au voisinage du milieu de la pente de la houle d'Airy monochromatique :

$$\phi_{\mathbf{m3va}}(y,t) = -\left[\frac{1}{6R_p} - \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}(t)}{6R_v} - \frac{\kappa b_{\mathbf{m3va}}(t)}{8R_v} - \frac{\kappa}{24R_v}y\right]\left(a^2_{\mathbf{m3va}}(t) - (y - b_{\mathbf{m3va}}(t))^2\right)^{3/2} \,. \tag{2.167}$$

Que l'on peut ré-écrire

$$\phi_{\mathbf{m3va}}(y,t) = -\left[-\nu(t) + K\left(y - b_{\mathbf{m3va}}(t)\right)\right]\left(a^2_{\mathbf{m3va}}(t) - (y - b_{\mathbf{m3va}}(t))^2\right)^{\frac{3}{2}} \,, \tag{2.168}$$

avec

$$\begin{cases} \nu(t) = \dfrac{1}{6R_p} - \dfrac{\epsilon_{\mathbf{m}}(t)}{6R_v} - \dfrac{\kappa b_{\mathbf{m3va}}(t)}{6R_v} \,, & \text{(2.169a)} \\ K = -\dfrac{\kappa}{24R_v} \,. & \text{(2.169b)} \end{cases}$$

Le potentiel des vitesses s'obtient par dérivation temporelle. On s'affranchit de l'indice **m3va** et des dépendances temporelles :

$$\varphi_{\mathbf{m3va}}(y,t) = -\left(\dot{\nu} - K\dot{b}\right)\left(a^2 - (y-b)\right)^{\frac{3}{2}} \tag{2.170}$$

$$-\frac{3}{2}\left(-\nu + K(y-b)\right)\sqrt{a^2 - (y-b)^2}\left(2a\dot{a} + 2(y-b)\dot{b}\right) \,. \tag{2.171}$$

nous ré-écrivons le potentiel des vitesses de façon similaire à la partie 2.5.4.1 :

$$\varphi(y,t) = M\sqrt{F}\,, \tag{2.172}$$

avec :

$$F = 1 - \frac{(y-b)^2}{a^2}\,, \tag{2.173}$$

et

$$\begin{aligned} M =& -a^3\left(\dot{\nu} - K\dot{b}\right)\left[1 - \frac{(y-b)^2}{a^2}\right] \\ & - 3a\left(\nu + K(y-b)\right)\left(a\dot{a} + (y-b)\dot{b}\right)\,. \end{aligned} \tag{2.174}$$

Ainsi la pression singulière au sens de Wagner s'écrit :

$$P_{wagner}(y,t) = -\frac{\rho}{\sqrt{F}}\left(\dot{M}F + \frac{1}{2}M\dot{F}\right)\,. \tag{2.175}$$

Pour les variations temporelles et spatiales de la pression, on cherche $P_{wagner}(y,t) = 0$. Ce qui revient toujours à résoudre

$$\dot{M}F + \frac{1}{2}M\dot{F} = 0\,, \tag{2.176}$$

avec :

$$\dot{F} = \frac{2(y-b)\dot{b}}{a^2} + \frac{2(y-b)^2\dot{a}}{a^3}\,, \tag{2.177}$$

Et :

$$\dot{M} = -\dot{a}\left(\dot{\nu} - K\dot{b}\right)\left(a^2 - (y-b)^2\right) - a\left(\ddot{\nu} - K\ddot{b}\right)\left(a^2 - (y-b)^2\right) \tag{2.178}$$

$$- a\left(\dot{\nu} - K\dot{b}\right)\left(2a\dot{a} + 2(y-b)\dot{b}\right) - 3\dot{a}\left(\nu + K(y-b)\right)\left(a\dot{a} + (y-b)\dot{b}\right) \tag{2.179}$$

$$- 3a\left(\dot{\nu} + K\dot{b}\right)\left(a\dot{a} + (y-b)\dot{b}\right) \tag{2.180}$$

$$- 3a\left(\nu + K(y-b)\right)\left(\dot{a}^2 + a\ddot{a} - \dot{b}^2 + (y-b)\ddot{b}\right)\,. \tag{2.181}$$

En posant $\mathscr{Y} = \frac{y-b}{a}$, on développe l'équation (2.176) sous forme polynomiale :

$$\alpha(t)\mathscr{Y}^4 + \beta(t)\mathscr{Y}^3 + \gamma(t)\mathscr{Y}^2 + \delta(t)\mathscr{Y} + \epsilon(t) = 0\,. \tag{2.182}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha(t) = a^3\left(4K\ddot{b} - \ddot{\nu}\right) = 0\,, & \text{(2.183a)} \\ \beta(t) = 3a^2\left(Ka\ddot{a} - 4K\dot{b}^2 + K\dot{a}^2 + 2\dot{\nu}u\dot{b} + \nu\ddot{b}\right)\,, & \text{(2.183b)} \\ \gamma(t) = -a\left(5Ka^2\ddot{b} + 12\dot{a}Ka\dot{b} - 2\ddot{\nu}a^2 - 6a\dot{\nu}\dot{a} - 3a\nu\ddot{a} + 6\dot{b}^2\nu - 3\dot{a}^2\nu\right)\,, & \text{(2.183c)} \\ \delta(t) = -3a\left(Ka^2\ddot{a} - 3Ka\dot{b}^2 + 2\dot{a}^2Ka + 2a\dot{\nu}\dot{b} + a\nu\ddot{b} + 2\dot{a}\nu\dot{b}\right)\,, & \text{(2.183d)} \\ \epsilon(t) = a\left(Ka^2\ddot{b} + 6\dot{a}Ka\dot{b} - \ddot{\nu}a^2 - 6a\dot{\nu}\dot{a} - 3a\nu\ddot{a} + 3\dot{b}^2\nu - 6\dot{a}^2\nu\right)\,. & \text{(2.183e)} \end{cases}$$

et

$$\dot{\nu} = \frac{\omega}{6R_v} - \frac{\kappa\dot{b}}{6R_v} \quad \text{et} \quad \ddot{\nu} = -\frac{\kappa\ddot{b}}{6R_v}\,. \tag{2.184}$$

Avec la nullité de $\alpha(t)$, l'étude des variations temporelles et spatiales de la pression se résume à la détermination des racines d'une équation du 3^e degré en $\mathscr{Y}$:

$$P_{wagner}(\mathscr{Y}, t) = 0 \Leftrightarrow \beta(t)\mathscr{Y}^3 + \gamma(t)\mathscr{Y}^2 + \delta(t)\mathscr{Y} + \epsilon(t) = 0\,. \tag{2.185}$$

Pour déterminé l'instant t_0 et la coordonnées $\mathscr{Y}_0$ ou la pression $P_{wagner}(\mathscr{Y}, t)$ s'annule, on calcul numériquement à chaque instant t les racines de l'équation (2.185). Comme il s'agit d'une équation du 3^e degré en $\mathscr{Y}$, la valeur de $\mathscr{Y}_0$ s'obtient lorsque l'équation (2.185) admet une seule racine réelle et deux complexes à l'instant $t = t_0$.

2.5.5 Intégration spatiale des champs de pression

Les efforts hydrodynamiques d'impact sont obtenus par intégration spatiale des champs de pression MLM et $COMP$. Pour ces deux formulations en pression, les supports d'intégration ne sont pas les mêmes.

Support d'intégration de la pression MLM

Dans la pratique la formulation en pression MLM engendre des valeurs négatives lorsque y tend vers les points de contact $-d_1(t)$ et $d_2(t)$. Pour établir les efforts hydrodynamiques d'impact on intégre uniquement la pression MLM où elle demeure positive. Le support d'intégration de la pression MLM est inclus dans la surface mouillée tel que :

$$\underset{P_{mlm}>P_{ref}}{S_{mlm}(t)} \subset SM(t) \tag{2.186}$$

On peut donc exprimer les efforts hydrodynamiques par intégration spatiale de la pression MLM :

$$F_{hydro\,mlm}(t) = \int\limits_{P_{mlm}>P_{ref}} P_{mlm}(y,t)dS_{mlm} \tag{2.187}$$

Support d'intégration de la pression $COMP$

Dans la partie 2.5.3.2, il est expliqué que la formulation $COMP$ prend en compte une solution locale en pression dans le jet. Le support d'intégration de la pression $COMP$ est donc la somme de la surface mouillée $SM(t)$ et du domaine de définition du jet : $S_{jet}(t)$, tel que :

$$S_{comp}(t) = SM(t) + S_{jet}(t) \tag{2.188}$$

On formule donc les efforts hydrodynamiques par intégration spatiale de la pression composite :

$$F_{hydro\,comp}(t) = \int P_{comp}(y,\tau,t)dS_{comp} \tag{2.189}$$

En pratique que cela soit pour la formulation MLM ou $COMP$, l'intégration des champs de pression est obtenue par une méthode des trapèzes.

Chapitre 3

Étude des modèles analytiques

Dans ce chapitre 3, au travers de plusieurs études nous analysons le comportement des modèles asymptotiques et non-asymptotiques présentés au chapitre 2.

La section 3.1 justifie et présente les valeurs numériques nécessaires aux multiples configurations d'impact hydrodynamique sur houle d'Airy monochromatique traitées dans ce chapitre.

La section 3.2 compare le comportement des modèles asymptotiques aux modèles non-asymptotiques avec et sans vitesse d'avance pour une large gamme de rayon approché de la houle d'Airy monochromatique. Le but de cette section est de quantifier les écarts pour plusieurs grandeurs entre les modèles qui approximent la houle d'Airy par rapport au modèle exact.

La section 3.3 constitue une étude permettant de déterminer quelle est la configuration d'impact sur houle d'Airy qui engendre les chargements hydrodynamiques les plus importants. Nous déterminons la configuration dimensionnante en comparant des configurations d'impact à de multiples endroits de la houle d'Airy par rapport à des configurations d'impact sur une surface libre plane de référence.

La section 3.4 étudie l'effet de l'amplitude de la houle et de sa vitesse de propagation sur les distributions de pression calculées au moyen du formalisme MLM. Nous analysons aussi l'importance de l'amplitude et de la vitesse de propagation de la houle sur les efforts hydrodynamiques.

La section 3.5 présente une analyse des variations spatiale et temporelle de la pression calculée au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée. L'idée de cette section est de déterminer sous quelles conditions la pression devient négative et à quel instant.

La section 3.6 compare les distributions de pression calculées au moyen de la formulation COMP à celles de la formulation MLM. Nous analysons les différences entre les deux formulations et leurs impacts sur les efforts hydrodynamiques

La section 3.7 résume et compile les différents résultats de ce chapitre 3.

3.1 Préambule

Au sein de cette partie, nous définissons les paramétres physiques utilisés lors des simulations d'impact hydrodynamique de la parabole sur la houle d'Airy monochromatique.

Dans la partie 3.1.1, nous présentons les valeurs numériques des grandeurs caractéristiques de la houle pour les multiples cas tests d'impact hydrodynamique utilisés dans ce chapitre.

Dans la partie 3.1.2, nous justifions la valeur numérique de la vitesse de chute verticale, assumée constante, de la parabole au cours de l'impact.

3.1.1 Définition des configurations d'impact hydrodynamiques

Dans cette section nous justifions le choix des configurations d'impact en fonction du rayon approché de la vague R_v. D'après la relation $R_v = 1/C\kappa^2$, le rayon de la vague dépend de l'amplitude de la houle C et de sa période T au travers du nombre d'onde κ. Par la suite pour une large gamme de rayon R_v, plusieurs comparaisons sont effectuées entre les modèles d'impact hydrodynamique présentés au chapitre 2. Pour les comparaisons entre les modèles d'impact sans vitesse d'avance (part. 3.2.1), on choisit de fixer l'amplitude de la vague $C = 0.05\,m$ et de faire varier la période T. Dans ces cas tests la houle avance à une vitesse de phase $V_\varphi = \omega/\kappa$ variable, fonction de la période T et du rayon R_v. Les configurations retenues sont présentées dans le tableau 3.1.

Configurations C	n°1.a	n°2.a	n°3.a	n°4.a	n°5.a	n°6	n°7.a
$R_v\,[m]$	30	9	6	5	4	3	2
$T\,[s]$	2,220	1,645	1,485	1,425	1,345	1,250	1,125
$V_\varphi\,[m.s^{-1}]$	3,466	2,568	2,318	2,225	2,100	1,952	1,756
$C\,[m]$				0,050			

Table *3.1 – Tableau des cas tests d'impact sans vitesse d'avance*

Nous justifions ces cas tests en s'appuyant sur le critère de [Michell, 1893]. Ce critère permet de déterminer sous quelles conditions une houle est susceptible de déferler. Nous montrons que pour $C = 0.05\,m$ la période minimale qui traduit le fait que la vague ne va pas déferler est : $[T]_{min} \approx 0.672\,s$ (ann. B.1.1). La 3^e ligne du tableau 3.1 montre que nous nous situons bien dans les limites de non-déferlement.

Pour les comparaisons concernant les modèles d'impact avec vitesse d'avance horizontale de la parabole (part. 3.2.2), on choisit de fixer la période $T = 1.25\,s$ et de faire varier l'amplitude C. Dans ces cas tests la vitesse d'avance de la houle V_φ demeure constante et égale à $1.952\,m.s^{-1}$. Les configurations retenues sont présentées dans le tableau 3.2 :

Configurations T	n°1.b	n°2.b	n°3.b	n°4.b	n°5.b	n°6	n°7.b
$R_v\,[m]$	30	9	6	5	4	3	2
$C\,[m]$	0,005	0,0167	0,025	0,030	0,0375	0,050	0,075
$T\,[s]$				1,250			
$V_\varphi\,[m.s^{-1}]$				1,952			

Table *3.2 – Tableau des configurations d'impact avec vitesse d'avance*

En s'appuyant une nouvelle fois sur le critère de [Michell, 1893] (ann. B.1.2), on montre cette fois-ci que l'amplitude maximale avant déferlement : $[C]_{max} \approx 0.173\,m$. La 3^e ligne du tableau 3.2 montre que nous sommes bien dans les limites de non-déferlement.

3.1.2 Choix de la vitesse verticale d'impact

Dans cette partie, nous justifions le choix de la valeur de la vitesse verticale de la parabole W, imposée constante au cours de l'impact hydrodynamique. Nous utilisons

les modèles asymptotiques d'impact sans vitesse d'avance avec la configuration n°6 des tableaux 3.1 et 3.2. On s'intéresse à l'allure générale des efforts hydrodynamiques engendrés. Les efforts hydrodynamiques sont calculés par l'intégration spatiale des champs de pression obtenus par la formulation MLM.

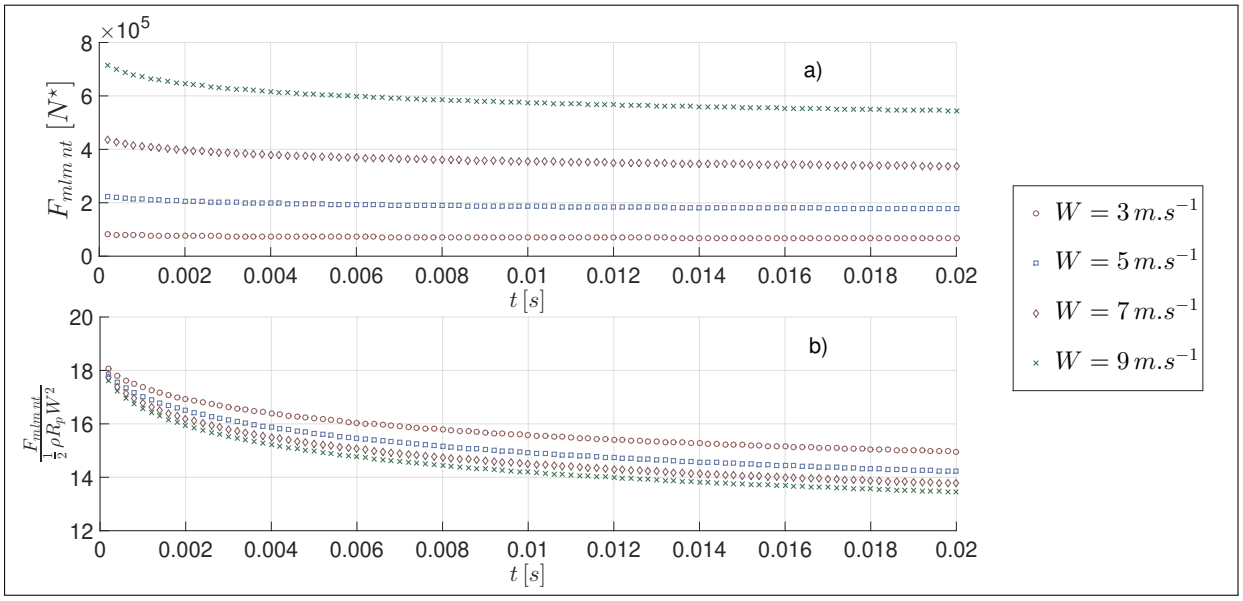

Figure *3.1 – Pour un impact au voisinage du creux avec la configuration n°6 des tableaux 3.1 et 3.2 : a) Efforts hydrodynamiques b) Efforts hydrodynamiques adimensionnés*

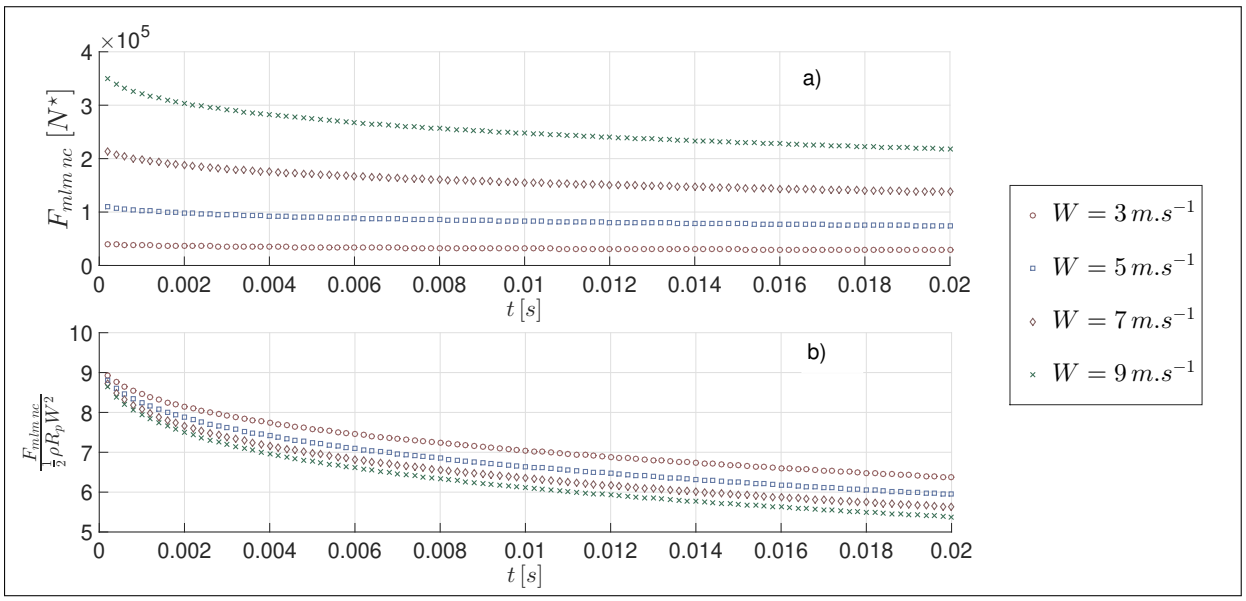

Figure *3.2 – Pour un impact au voisinage de la crête avec la configuration n°6 des tableaux 3.1 et 3.2 : a) Efforts hydrodynamiques b) Efforts hydrodynamiques adimensionnés*

Les figures 3.1 et 3.2 montrent que le comportement des efforts hydrodynamiques obtenus avec la formulation MLM est « quasi-autosimilaire » pour les valeurs de W testées. Les courbes des efforts hydrodynamiques en fonction du temps ont la même allure et les mêmes variations (Fig(s). 3.1.a) et 3.2.a)). Il semble qu'uniquement la valeur moyenne des efforts hydrodynamique change en fonction de W.

Après adimensionnalisation (Fig(s). 3.1.b) et 3.2.b)) par rapport à la vitesse de chute au carré, nous constatons que les courbes caractéristiques des efforts hydrodynamiques sont quasiment confondues. On fixe donc la vitesse de chute W égale à $5.0\,m.s^{-1}$.

Pour les configurations d'impact au voisinage de la crête et du milieu de la pente de la vague ainsi que pour une surface libre plane, on se réfère à l'annexe B.2.

3.2 Comparaison des modèles asymptotiques au modèle non-asymptotique

Dans cette section nous étudions le comportement des modèles asymptotiques et du modèle non-asymptotique pour des cinématiques de chute de la parabole sans vitesse d'avance (part. 3.2.1) et avec vitesse d'avance (part. 3.2.2).

Pour les cas tests présentés dans les tableaux 3.1 et 3.2, nous quantifions les écarts relatifs (ann. B.3.1) entre les deux types de modèles pour les corrections de surface mouillée, les pics de pression MLM (ann. B.4) et les efforts hydrodynamiques en fonction du rayon de la houle R_v. Nous désirons savoir à partir de quelle valeur de R_v, les modèles asymptotiques diffèrent du modèle non-asymptotique en admettant arbitrairement un écart relatif moyen maximal de 5% sur les efforts hydrodynamiques $F_{mlm}(t)$.

3.2.1 Asymptotiques contre Non-Asymptotique : sans vitesse d'avance

On confronte le comportement des modèles asymptotiques par rapport au modèle non-asymptotique en fonction de R_v au travers des cas tests du tableau 3.1. Les comparaisons portent sur les corrections de surface mouillée, les pics de pression MLM et les efforts hydrodynamiques. Pour comparer et quantifier les écarts entre les modèles, nous utilisons les formules des écarts relatifs définies en annexe B.3.1. Dans cette section on utilise les modèles d'impact présentés dans les sections 2.2 et 2.3.

3.2.1.1 Impact au voisinage de la crête sans vitesse d'avance

Ce paragraphe traite d'impact hydrodynamique au voisinage de la crête de la houle d'Airy monochromatique (Fig. 3.3).

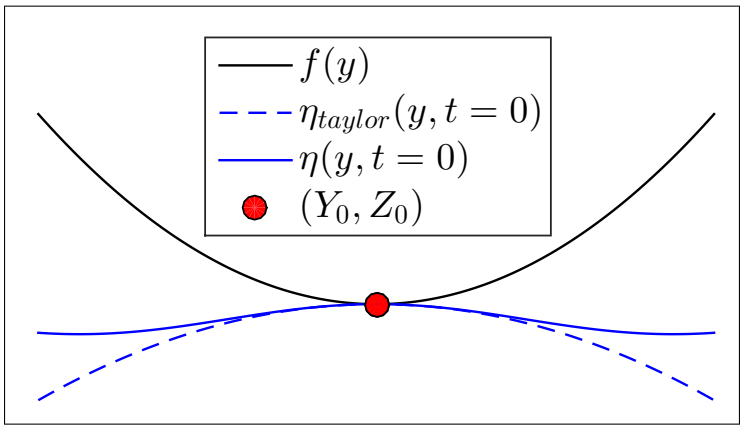

Figure *3.3 – Configuration initiale non-linéarisée pour un impact au voisinage de la crête de la houle d'Airy monochromatique*

Les modèles utilisés sont le modèle **nc** (paragr. 2.2.1.1) et le modèle **na** (sect. 2.3) pour une même configuration initiale d'impact au voisinage de la crête.

Les tableaux 3.3 à 3.5 résument les écarts relatifs entre les deux modèles pour les efforts hydrodynamiques, les pics de pression MLM et les corrections de surface mouillée.

$R_v = 30$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	0,07%	0,15%	0,05%	0,02%	0,01%
$\mathbf{\Delta}$ premier	<0,01%	0,08%	0,02%	0,04%	0,01%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	0,17%	0,33%	0,08%	0,04%	0,02%

TABLE *3.3 – Écarts relatifs asymptotique contre non-asymptotique (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*

$R_v = 6$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	1,34%	2,31%	1,09%	0,32%	0,21%
$\mathbf{\Delta}$ premier	0,02%	0,08%	0,20%	0,06%	0,12%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	2,82%	5,10%	1,94%	0,66%	0,38%

TABLE *3.4 – Écarts relatifs asymptotique contre non-asymptotique (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°3.a*

$R_v = 2$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	7,10%	11,23%	6,35%	1,67%	1,21%
$\mathbf{\Delta}$ premier	0,12%	0,16%	0,14%	0,04%	0,04%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	14,62%	23,62%	11,53%	3,42%	2,28%

TABLE *3.5 – Écarts relatifs asymptotique contre non-asymptotique (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*

Les tableaux 3.3 à 3.5 montrent que l'écart relatif moyen ainsi qu'au dernier pas temps diminue lorsque R_v augmente. Pour l'écart relatif au premier pas de temps, nous observons la même tendance. Pour les trois cas tests présentés, respectivement $R_v = 30\,m$, $6\,m$ et $2\,m$, les écarts relatifs au premier pas de temps sont tous inférieurs à 1%. On peut donc considérer que ces derniers écarts sont négligeables.

Les figures 3.4 à 3.9 présentent l'évolution des corrections de surface mouillée, des champs de pression à différents instants et des efforts hydrodynamiques au cours du temps pour les cas tests n°1.a et n°7.a. Les grandeurs en relation avec le modèle **nc** sont affichées en bleues et celles en relation avec le modèle **na** en noires.

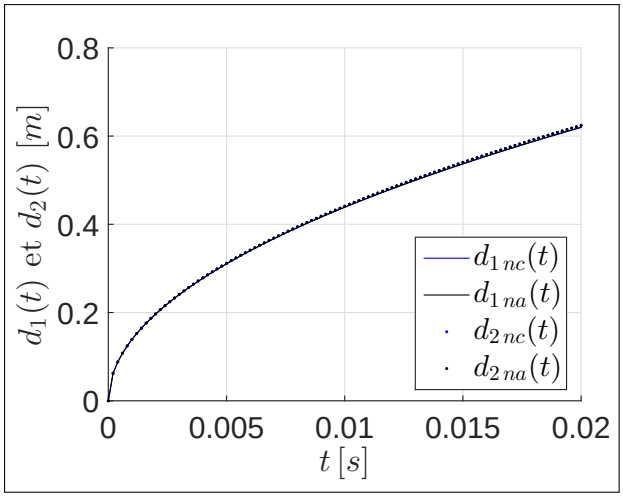

Figure 3.4 – *Correction de surface mouillée (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*

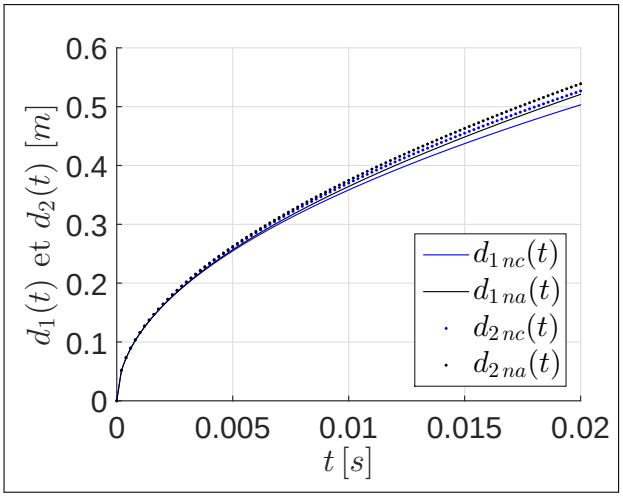

Figure 3.5 – *Correction de surface mouillée (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*

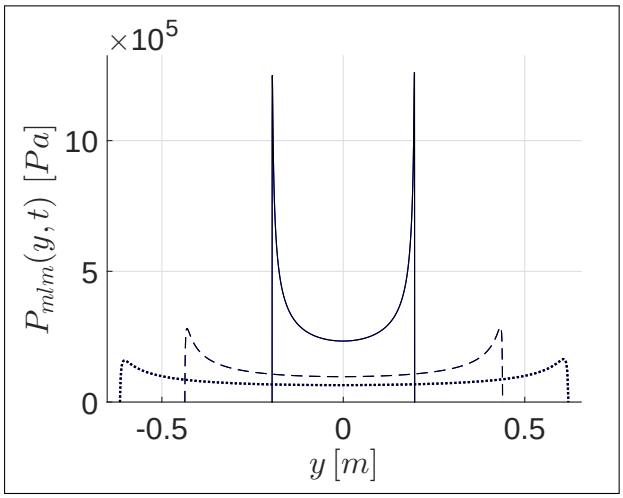

Figure 3.6 – *Champs de pression (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*
Traits pleins $t = 0.002\,s$. *Tirets* $t = 0.01\,s$. *Pointillés* $t = 0.02\,s$

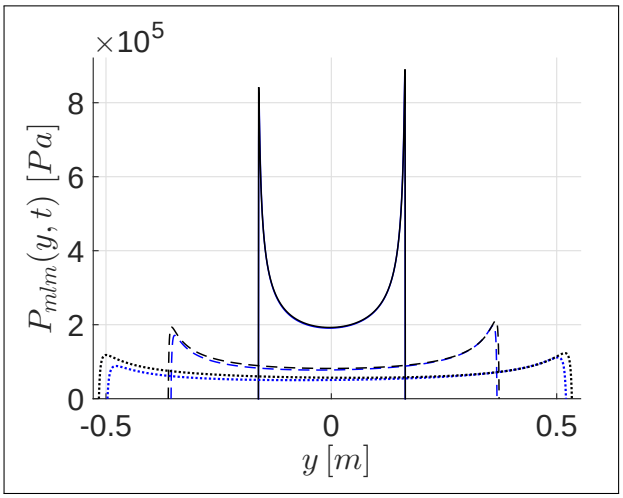

Figure 3.7 – *Champs de pression (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*
Traits pleins $t = 0.002\,s$. *Tirets* $t = 0.01\,s$. *Pointillés* $t = 0.02\,s$

Les figures 3.4 et 3.5 illustrent le fait que l'écart relatif moyen entre les corrections mouillées augmente lorsque le rayon R_v diminue. La figure 3.4 montre que les corrections de surface mouillée à gauche et à droite sont confondues entre les deux modèles. La figure 3.5 indique que les corrections de surface mouillée du modèle **nc** (en bleu) sous-estiment celles du modèle **na** (en noir). Ces observations sont corroborées par les figures en relation avec les champs de pression. Pour le cas test n°1.a, les champs de pression sont confondus (Fig. 3.6) tandis que pour le cas test n°7.a, les champs de pression du modèle **nc** sous-estiment ceux du modèle **na** (Fig. 3.7).

Les figures 3.8 et 3.9 présentent l'évolution des efforts hydrodynamiques d'impact au cours du temps pour $R_v = 30\,m$ et $R_v = 2\,m$.

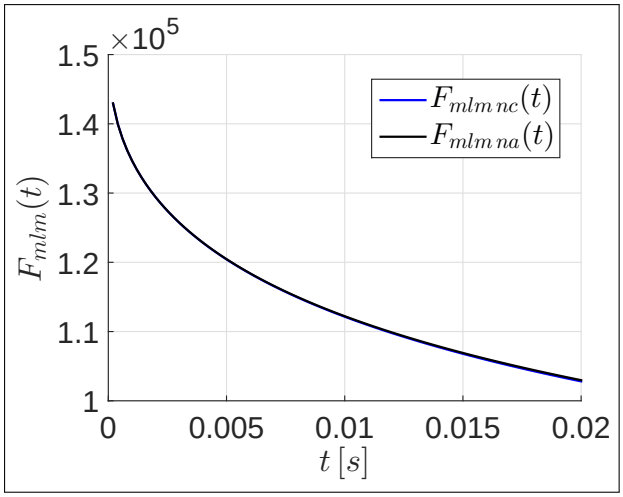

FIGURE 3.8 – *Efforts hydrodynamiques (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*

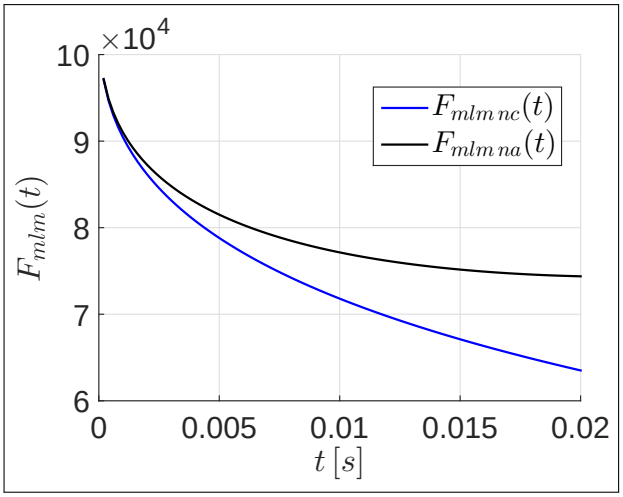

FIGURE 3.9 – *Efforts hydrodynamiques (nc et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*

La figure 3.8 montre que pour le cas test n°1.a ($R_v = 30\,m$) les efforts hydrodynamiques d'impact sont très proches au cours du temps. Pour ce cas test, le modèle asymptotique sous-estime en moyenne le modèle non-asymptotique de 0.07% (Tab. 3.3). La figure 3.9 illustre que pour le cas test n°7.a le modèle asymptotique sous-estime en moyenne le modèle non-asymptotique de 7.10% (Tab. 3.5)

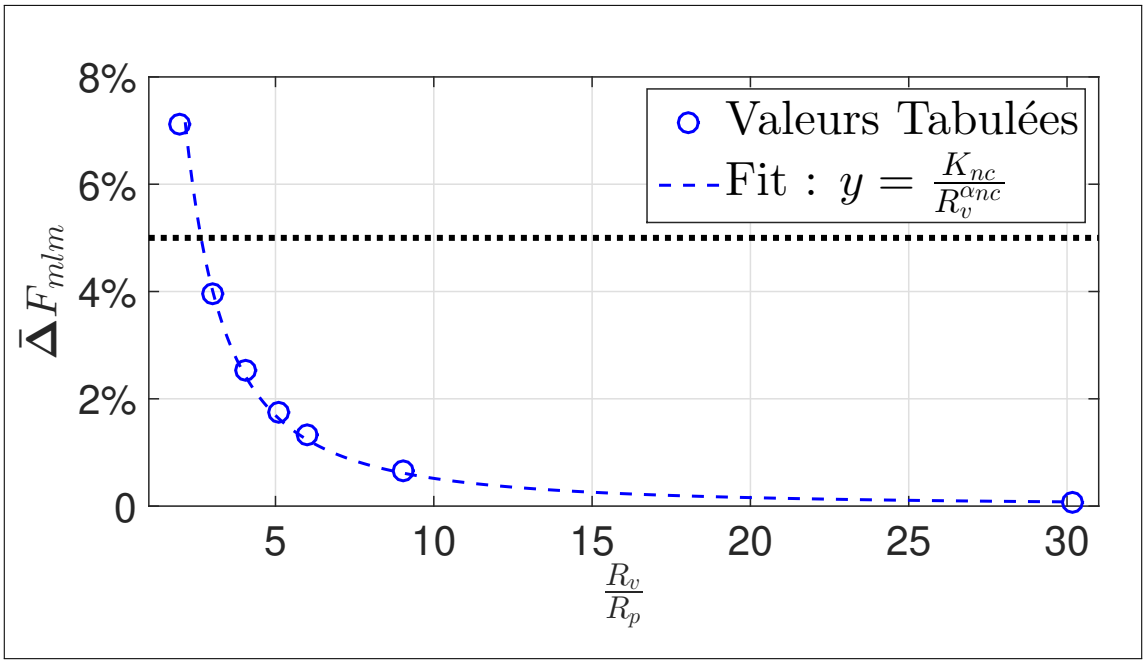

FIGURE 3.10 – $\bar{\Delta} F_{mlm}$ *en fonction de* R_v*. En ronds bleus les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage de la crête sans vitesse d'avance. En pointillés bleus une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des* 5%.

La figure 3.10 résume les écarts relatifs moyens entre les modèles **nc** et **na** en termes d'efforts hydrodynamiques pour les cas tests présentés au tableau 3.1. Avec l'écart relatif moyen admissible fixé à 5%, cette figure montre que le modèle asymptotique **nc** satisfait le modèle non-asymptotique **na** pour tous les cas tests du tableau 3.1 sauf pour $R_v = 2\,m$.

3.2.1.2 Impact au voisinage du creux sans vitesse d'avance

Ce paragraphe confronte les modèles d'impact asymptotique **nt** (paragr. 2.2.1.2) et non-asymptotique **na** (sect. 2.3) pour une même configuration initiale d'impact. On traite donc des configurations d'impact hydrodynamique au voisinage du creux de la houle d'Airy monochromatique (Fig. 3.11).

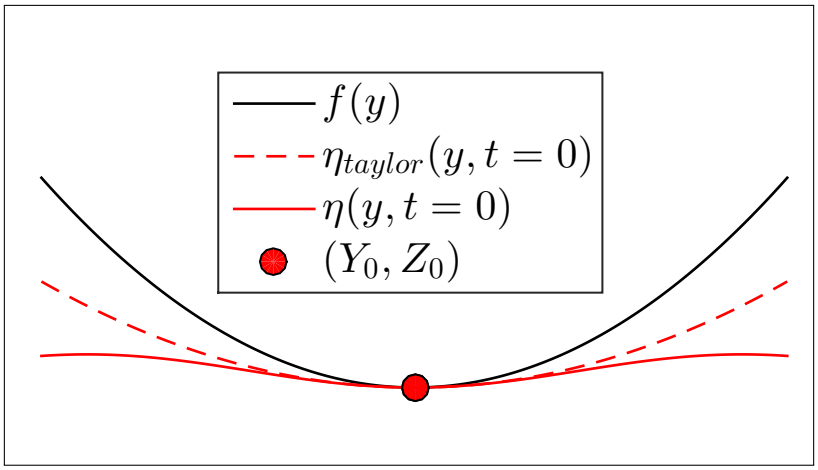

FIGURE *3.11 – Configuration initiale non-linéarisée pour un impact au voisinage du creux de la houle d'Airy monochromatique*

Comme dans le paragraphe précédent (paragr. 3.2.1.1), les tableaux 3.6 à 3.8 récapitulent les écarts relatifs entre les deux modèles pour les efforts hydrodynamiques, les pics de pression MLM et les corrections de surface mouillée.

$R_v = 30$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	0,08%	0,16%	0,05%	0,02%	0,01%
$\mathbf{\Delta}$ premier	0,03%	0,39%	0,21%	0,19%	0,10%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	0,17%	0,36%	0,07%	0,04%	<0,01%

TABLE *3.6 – Écarts relatifs asymptotique contre non-asymptotique (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*

$R_v = 6$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	2,40%	4,31%	2,04%	0,62%	0,39%
$\mathbf{\Delta}$ premier	0,07%	1,97%	1,48%	0,92%	0,68%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	5,03%	9,34%	3,63%	1,25%	0,70%

TABLE *3.7 – Écarts relatifs asymptotique contre non-asymptotique (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°3.a*

$R_v = 2\,[\mathrm{m}]$	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	44,45%	86,31%	47,02%	10,70%	7,56%
$\mathbf{\Delta}$ premier	1,06%	2,27%	2,01%	0,05%	0,01%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	81,21%	173,20%	79,10%	19,02%	12,48%

Table *3.8 – Écarts relatifs asymptotique contre non-asymptotique (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*

Au moyen des tableaux 3.6 à 3.8, on constate les mêmes tendances que dans le paragraphe 3.2.1.1. Les écarts relatifs augmentent entre les deux modèles lorsque le rayon de la parabole R_v diminue. On remarque que pour le cas test n°7.a ($R_v = 2\,m$), les écarts entre le modèle non-asymptotique **na** et les modèles asymptotiques **nc** et **nt** sont plus importants lorsque l'impact se produit au voisinage du creux (Tab(s). 3.8 et 3.5).

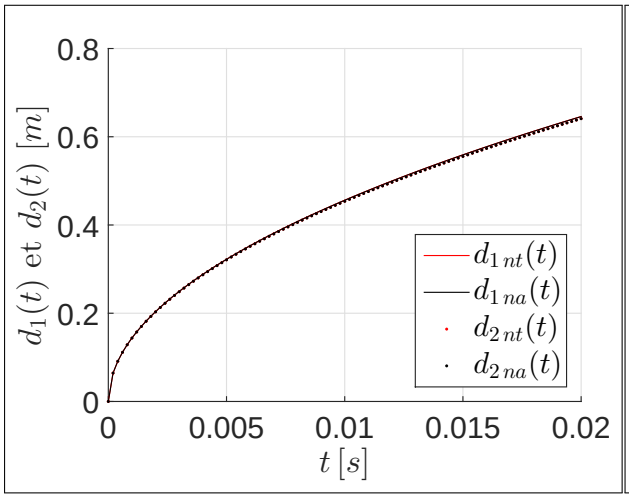

Figure *3.12 – Correction de surface mouillée (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*

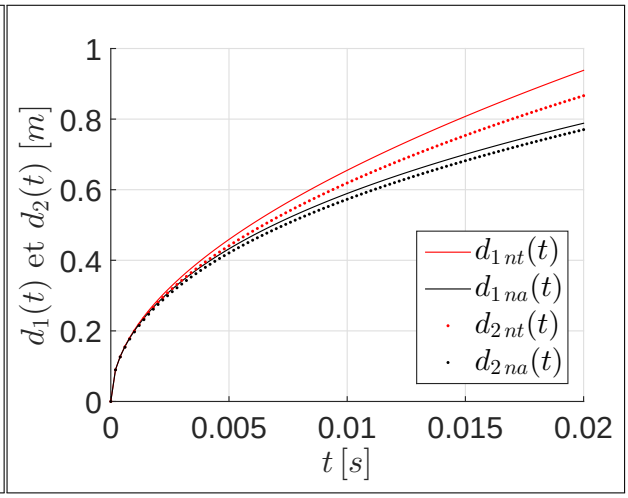

Figure *3.13 – Correction de surface mouillée (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*

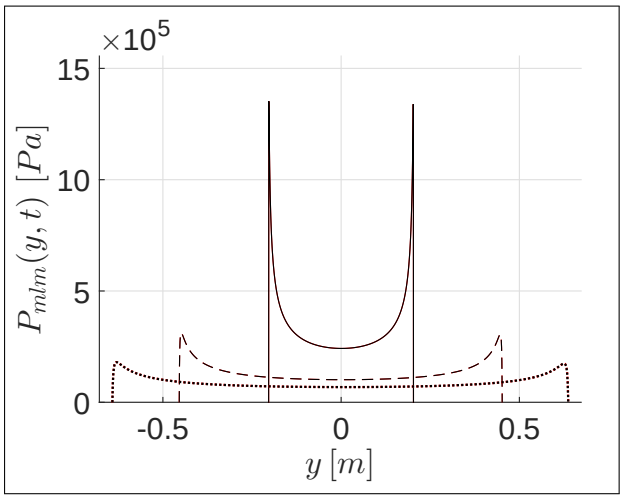

Figure *3.14 – Champs de pression (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*
Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$

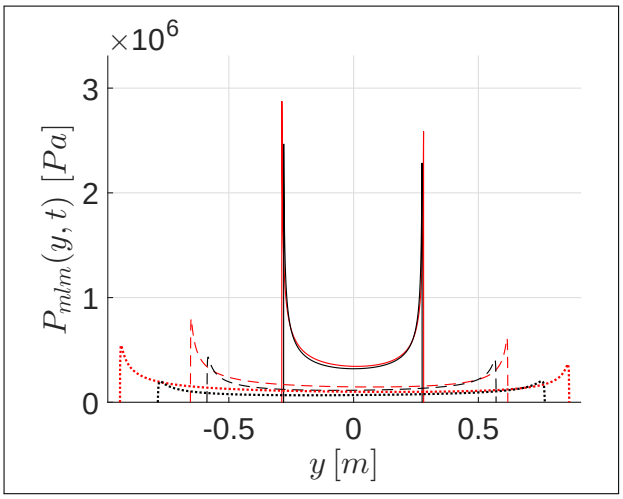

Figure *3.15 – Champs de pression (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*
Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$

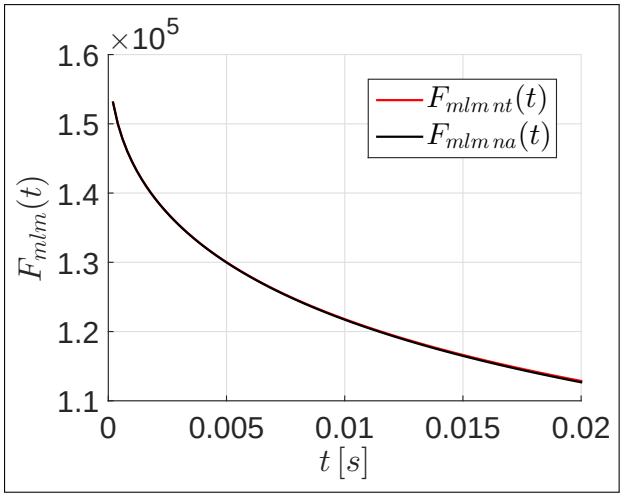

Figure 3.16 – *Efforts hydrodynamiques (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*

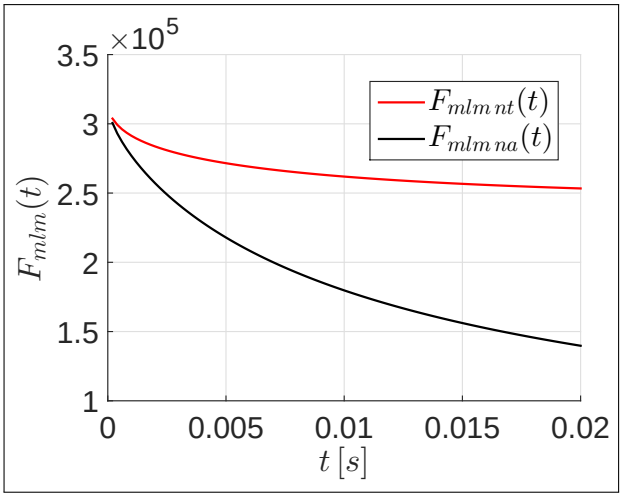

Figure 3.17 – *Efforts hydrodynamiques (nt et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*

Les observations réalisées au niveau des tableaux 3.6 à 3.8 sont validées par les figures 3.12 à 3.17. Les courbes traduisant les corrections de surface mouillée, les champs de pression et les efforts hydrodynamiques sont confondues pour le cas test n°1.a (Fig(s). 3.12, 3.14 et 3.16). Pour le cas test n°7.a, les écarts sont notables entre les deux modèles (Fig(s). 3.13, 3.15 et 3.17). Pour les efforts hydrodynamique le modèle **nt** surestime le modèle **na** de $44,45\%$.

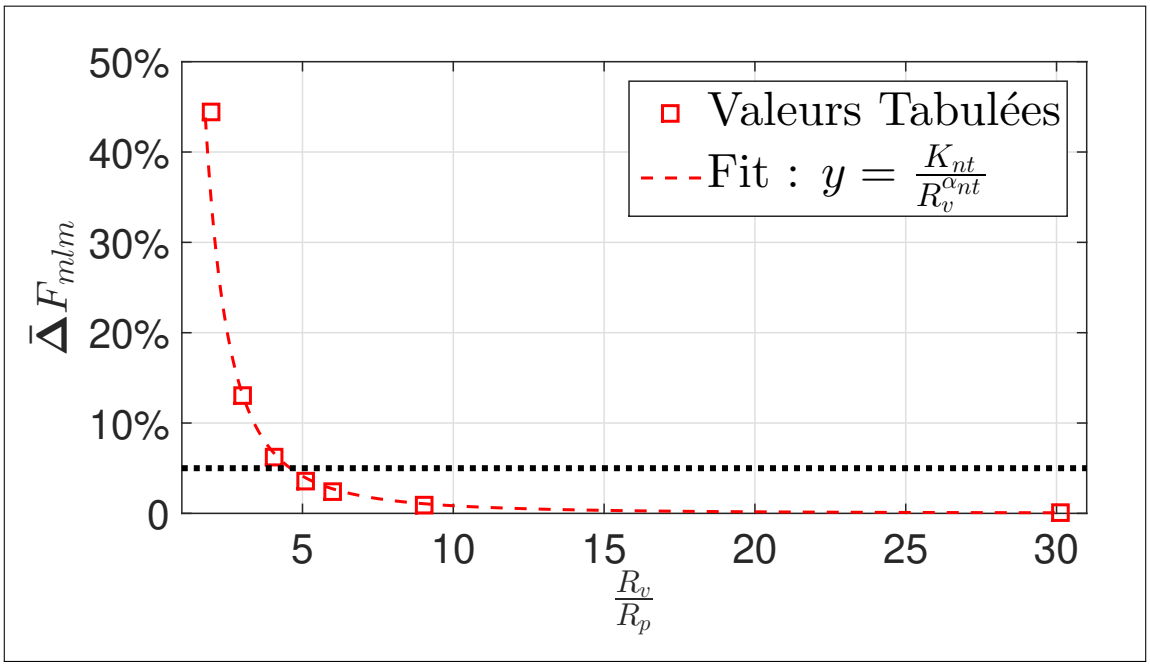

Figure 3.18 – $\bar{\Delta}F_{mlm}$ *en fonction de* R_v. *En carrés rouges les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage du creux sans vitesse d'avance. En pointillés rouges une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des* 5%.

La figure 3.18 récapitule les écarts relatifs moyens entre les deux modèles **nt** et **na** pour les efforts hydrodynamiques. On formule la même conclusion que pour des configurations d'impact au voisinage de la crête. L'écart relatif pour les efforts hydrodynamiques moyens augmente lorsque le rayon de la vague diminue R_v. Avec l'écart relatif moyen admissible fixé à 5%, La figure 3.18 montre que le modèle asymptotique **nt** satisfait le modèle non-asymptotique **na** uniquement pour les cas test n°1.a à n°4.a (Tab. 3.1).

3.2.1.3 Impact au voisinage du milieu de la pente sans vitesse d'avance

Dans ce paragraphe on considère des configurations d'impact au voisinage du milieu de la pente de la houle d'Airy monochromatique (Fig(s). 3.19 et 3.20).

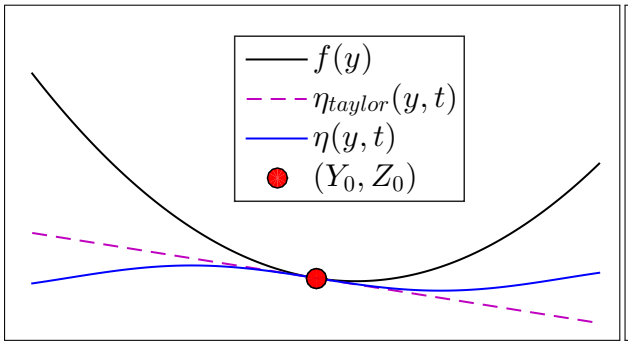

FIGURE *3.19 – Configuration initiale non-linéarisée pour un impact au voisinage du milieu de la pente de la houle d'Airy monochromatique (1^{er} ordre)*

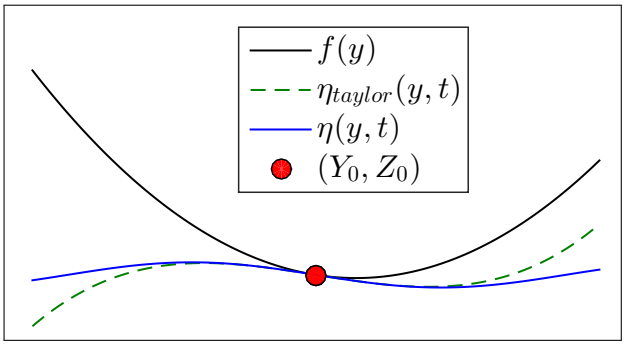

FIGURE *3.20 – Configuration initiale non-linéarisée pour un impact au voisinage du milieu de la pente de la houle d'Airy monochromatique (3^{e} ordre)*

On dispose ici de deux modèles asymptotiques **m1** et **m3** (part. 2.2.2). Les tableaux 3.9 et 3.10 récapitulent les écarts relatifs pour plusieurs R_v pour les modèles asymptotiques aux 1^{er} et 3^{e} ordre par rapport au modèle **na** (sect. 2.3).

$R_v = 2$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	6,25%	43,85%	30,69%	7,96%	8,02%
$\mathbf{\Delta}$ premier	0,31%	6,81%	5,60%	1,12%	1,52%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	5,23%	62,55%	37,34%	11,28%	10,96%
$R_v = 3$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	0,52%	24,39%	15,82%	4,71%	3,98%
$\mathbf{\Delta}$ premier	0,02%	3,32%	2,38%	0,50%	0,85%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	1,90%	38,28%	21,21%	6,93%	5,46%
$R_v = 30$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	0,33%	1,05%	0,39%	0,20%	0,11%
$\mathbf{\Delta}$ premier	0,01%	0,43%	0,23%	0,15%	0,11%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	0,69%	1,86%	0,51%	0,32%	0,13%

TABLE *3.9 – Tableau des écarts relatifs pour une configuration d'impact au voisinage du milieu de la pente sans vitesse d'avance : m1 - Cas test n°1.a, n°6.a et n°7.a*

$R_v = 2$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	3,33%	2,93%	9,94%	0,61%	1,56%
$\mathbf{\Delta}$ premier	0,29%	1,37%	0,51%	0,18%	0,22%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	3,44%	8,11%	36,58%	1,39%	4,20%
$R_v = 3$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	2,07%	1,32%	0,86%	0,29%	0,34%
$\mathbf{\Delta}$ premier	0,07%	0,41%	0,30%	0,20%	0,17%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	3,04%	4,45%	3,37%	0,70%	0,83%
$R_v = 30$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	0,01%	0,05%	0,04%	0,01%	<0,01%
$\mathbf{\Delta}$ premier	0,01%	0,34%	0,19%	0,17%	0,09%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	0,02%	0,08%	0,05%	0,01%	<0,01%

TABLE *3.10 – Tableau des écarts relatifs pour une configuration d'impact au voisinage du milieu de la pente sans vitesse d'avance : m3 - Cas test n°1.a, n°6.a et n°7.a*

Les tableaux 3.9 et 3.10 suivent, dans l'ensemble, les mêmes tendances que pour les configurations d'impact au voisinage de la crête et du creux de la houle (paragr(s). 3.2.1.2 et 3.2.1.1). Les écarts relatifs entre les modèles asymptotiques et le modèle non-asymptotique augmentent lorsque le rayon approché de la houle diminue.

Néanmoins, on constate que les écarts relatifs pour les pressions maximales $P_{max\,mlm\,d1}$ et $P_{max\,mlm\,d2}$ sont plus importants lorsque l'on confronte le modèle **m1** au modèle **na**. À titre d'exemple, pour $R_v = 3\,m$, l'écart relatif moyen du modèle **m1** par rapport au modèle **na** pour $P_{max\,mlm\,d1}$ est de l'ordre de 24.39% contre 1.32% pour le modèle **m3** (voir colonne $P_{max\,mlm\,d1}$ des tableaux 3.9 et 3.10).

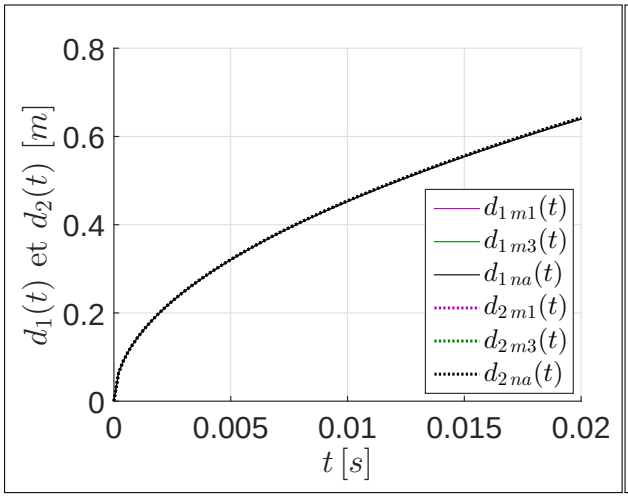

FIGURE *3.21 – Correction de surface mouillée (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*

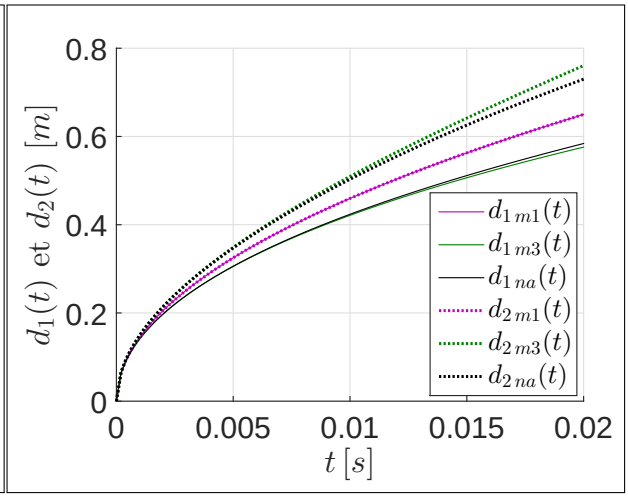

FIGURE *3.22 – Correction de surface mouillée (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*

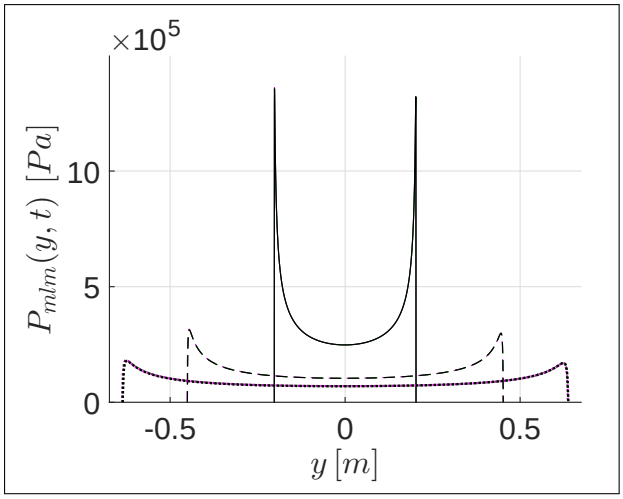

Figure 3.23 – *Champs de pression (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tiret $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$*

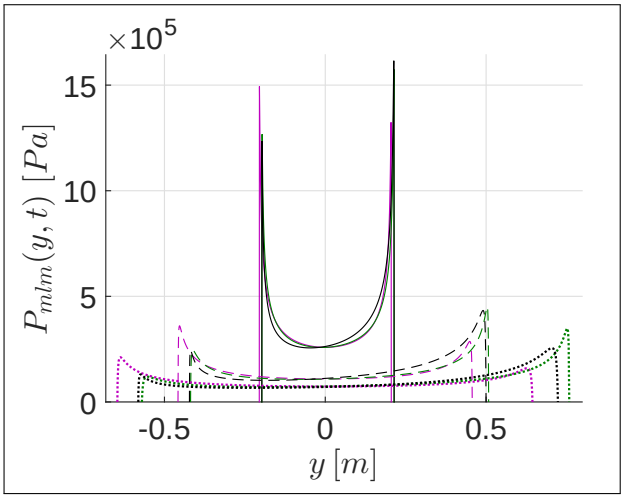

Figure 3.24 – *Champs de pression (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tiret $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$*

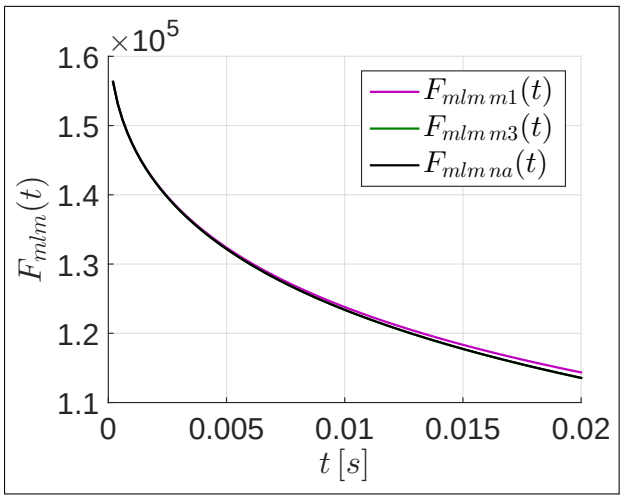

Figure 3.25 – *Efforts hydrodynamiques (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*

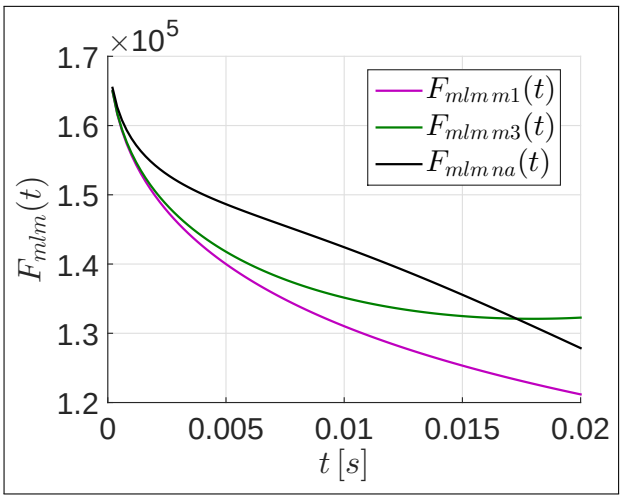

Figure 3.26 – *Efforts hydrodynamiques (m1, m3 et na) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*

Les figures 3.21, 3.23 et 3.25 montrent que les différences entre les deux modèles **m1** et **m3** par rapport au modèle **na** sont négligeables pour le cas test n°1.a. Les courbes qui concernent les corrections de surface mouillée ainsi que les champs de pression sont confondues pour $R_v = 30\,m$. En termes d'efforts hydrodynamiques le modèle **m1** surestime en moyenne de 0.33% le modèle **na** et le modèle **m3** sous-estime en moyenne d'environ 0.01% le modèle **na** (Tab(s). 3.9 et 3.10 pour $R_v = 30\,m$).

Pour $R_v = 2\,m$, plusieurs différences sont constatées entre les modèles asymptotiques et le modèle non-asymptotique. La figure 3.22 montre que les corrections mouillées du modèle **m3** diffèrent de celles du modèle **na**. Le modèle **m3** surestime et sous-estime de 1.56% et de 0.61% les corrections mouillée respectivement à droite (d_2) et à gauche (d_1) du modèle **na**. Le modèle **m1** admet des corrections de surface mouillée quasi-symétriques qui diffèrent d'environ 8% avec les corrections de surface mouillée du modèle **na**. La figure 3.24 montre que les champs de pression du modèle **m3** sous-estiment ceux du modèle **na**. Pour le modèle **m1** on constate que la dissymétrie des champs de pression est inversée par rapport au modèle **na** (Fig. 3.24). Cette dernière observation explique les écarts importants entre les pressions maximales (Tab(s). 3.9 colonnes $P_{max\,mlm\,d1}$ et $P_{max\,mlm\,d2}$).

Pour expliquer la dissymétrie des champs de pression du modèle **m1** par rapport aux modèles **m3** et **na**, il faut revenir aux approximations effectuées sur la houle d'Airy lors de l'établissement des modèles asymptotiques (part. 2.2.2). La différence entre ces deux modèles est que l'un approxime la houle par une droite et l'autre par un polynôme du troisième ordre (Fig(s). 3.19 et 3.20). Approximer le profil de houle d'Airy par une droite (Fig. 3.19) a pour effet d'inverser la dissymétrie des champs de pression par rapport aux cas où la houle est approximée par un polynôme du troisième ordre ou lorsqu'elle conserve sa forme exacte (Fig. 3.20). Nous concluons qu'une approximation polynomiale au premier ordre du profil de houle d'Airy n'est pas suffisante lorsque l'impact se produit au voisinage du milieu de la pente.

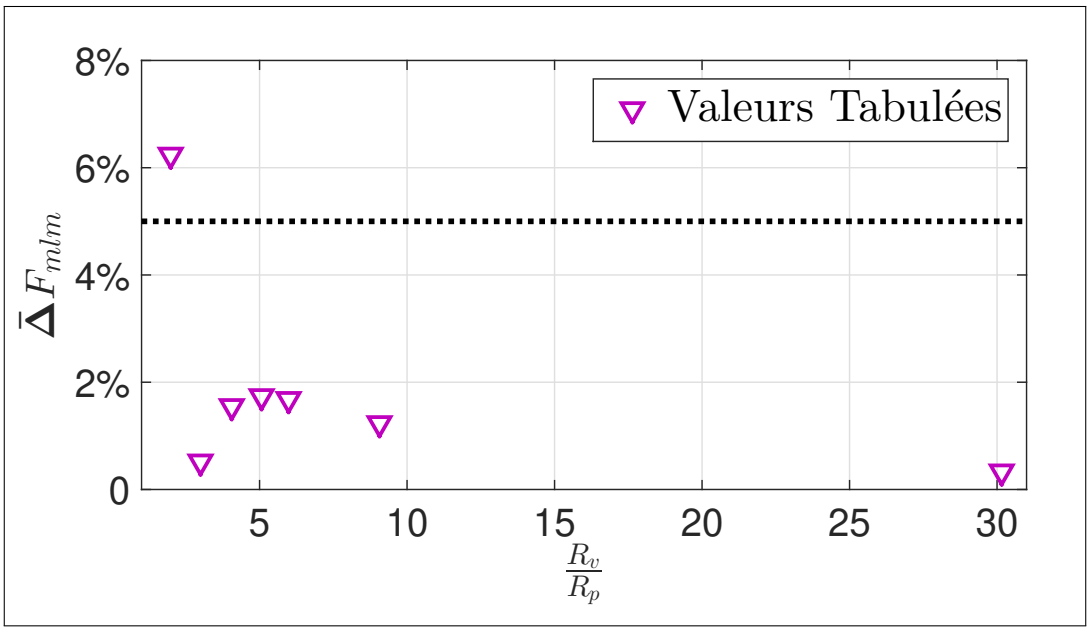

Figure *3.27* – $\bar{\Delta} F_{mlm}$ *en fonction de* R_v*. En triangles violets les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage du milieu sans vitesse d'avance. En pointillés noirs la limite des* 5%*.*

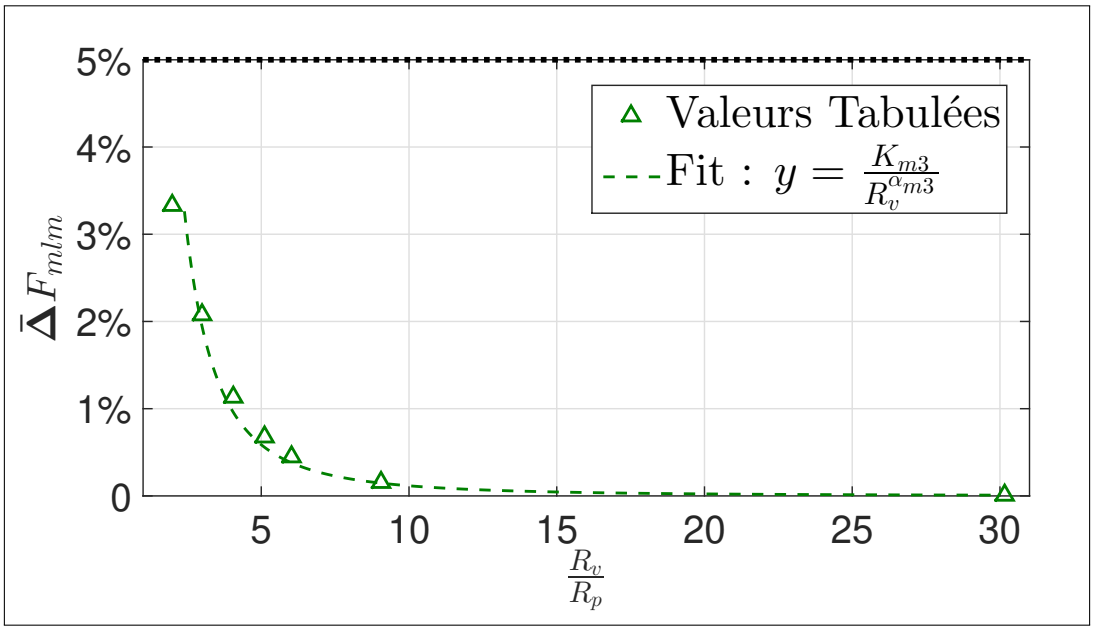

Figure *3.28* – $\bar{\Delta} F_{mlm}$ *en fonction de* R_v*. En ronds verts les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage du milieu sans vitesse d'avance. En pointillés vers une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des* 5%*.*

Les figures 3.27 et 3.28 récapitulent les écarts relatifs moyens en termes d'efforts hydrodynamiques entre les modèles asymptotiques **m1** et **m3** par rapport au modèle non-asymptotique **na**.

La figure 3.27 montre que l'évolution des écarts relatifs moyens entre les modèles **m1** et **na** pour les efforts hydrodynamiques n'est pas monotone décroissante lorsque R_v augmente. Ce phénomène est dû à la dissymétrie des champs de pressions MLM par rapport aux autres modèles d'impact au voisinage du milieu de la pente. Ainsi approximer la vague par une droite ne semble pas suffisant pour obtenir des résultats concordant avec les modèles **m3** et **na**.

La figure 3.28 indique que, de façon analogue aux modèles **nc** et **nt**, l'écart relatif moyen pour les efforts hydrodynamiques décroît bien entre les modèles **m3** et **na** lorsque R_v augmente. On note d'ailleurs que pour la gamme de R_v retenue l'écart relatif moyen demeure inférieur à la limite admissible de 5%.

3.2.1.4 Conclusion sur la comparaison des modèles sans vitesse d'avance

Dans la partie 3.2.2 nous avons comparé le comportement des modèles asymptotiques au modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance pour des impacts au voisinage de la crête, du creux et du milieu de la pente de la houle d'Airy monochromatique. Nous voulons savoir à partir de quelle valeur de R_v, les modèles asymptotiques concordent avec le modèle non-asymptotique en admettent un écart relatif moyen au maximum égal à 5%. Au-delà de cette limite on préconise d'utiliser le modèle qui prend en compte la forme complète de la houle d'Airy monochromatique : le modèle non-asymptotique **na**.

Au moyen des études menées dans les paragraphes 3.2.1.1, 3.2.1.2 et 3.2.1.3, nous pouvons formuler les conclusions suivantes :

- Pour un impact au voisinage de la crête, il est préconisé d'utiliser le modèle **na** lorsque R_v est inférieur à $3\,m$ (Fig. 3.10).
- Pour un impact au voisinage du creux, il est recommandé d'utiliser le modèle **na** lorsque R_v est inférieur à $5\,m$ (Fig. 3.18).
- Pour un impact au voisinage du milieu de la pente, on peut utiliser le modèle **m3** ou le modèle **na**. Il n'est pas judicieux d'utiliser le modèle **m1** même si les écarts relatifs moyen en termes d'effort hydrodynamique sont en dessous de la limite des 5%. En effet la dissymétrie des champs de pression du modèle **m1** est inversée par rapport à celles des modèles **m3** et **na** (Fig. 3.24).

Pour aller plus loin et s'affranchir de l'aspect « moyen » de la limite admissible des 5%, nous pouvons nous référer aux figures 3.29 à 3.31 qui présentent l'évolution des écarts relatifs au cours du temps en termes d'efforts hydrodynamiques pour la gamme de R_v présentée au tableau 3.1. À cause du problème de dissymétrie des champs de pression du modèle **m1**, on ne réalise pas cette étude pour ce modèle.

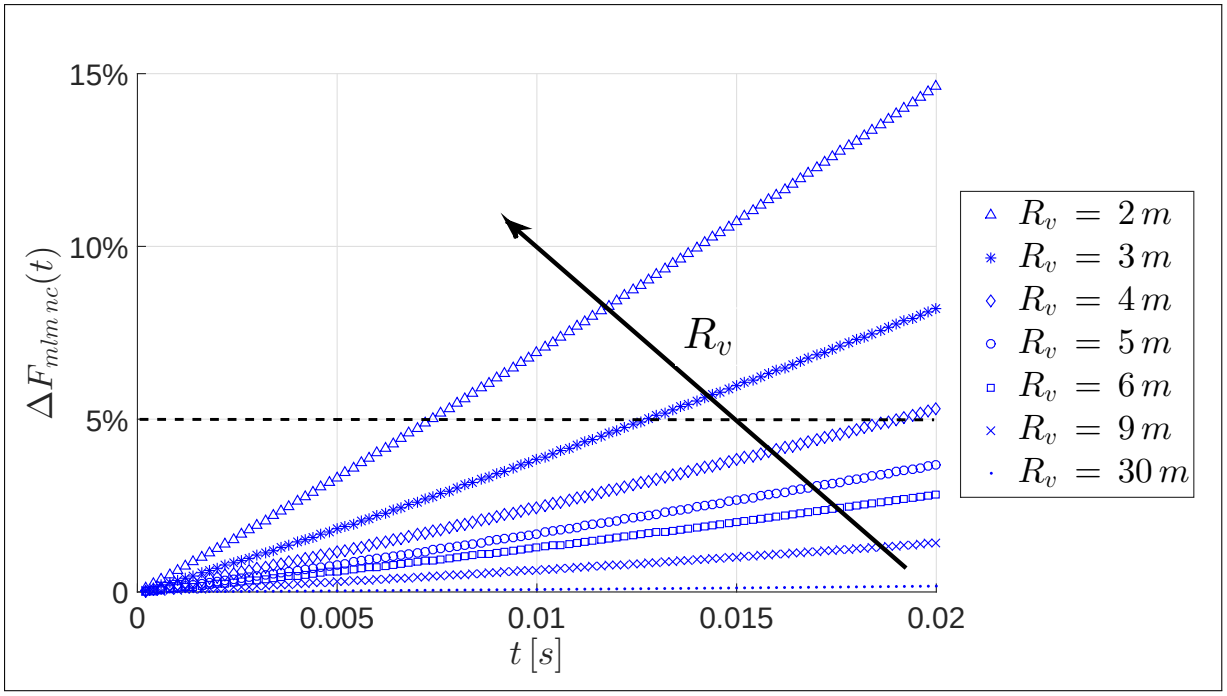

Figure *3.29* – $\mathbf{\Delta}F_{mlm\,nc}$ *en fonction du temps pour un impact au voisinage de la crête. En pointillés noirs la limite des* 5%.

La figure 3.29 indique que l'écart relatif entre le modèle **nc** et **na** demeure inférieur à 5% lorsque R_v est compris entre $5\,m$ et $30\,m$. Nous observons aussi que l'écart relatif pour les efforts hydrodynamiques évolue linéairement en fonction du temps pour tous les cas tests du tableau 3.1.

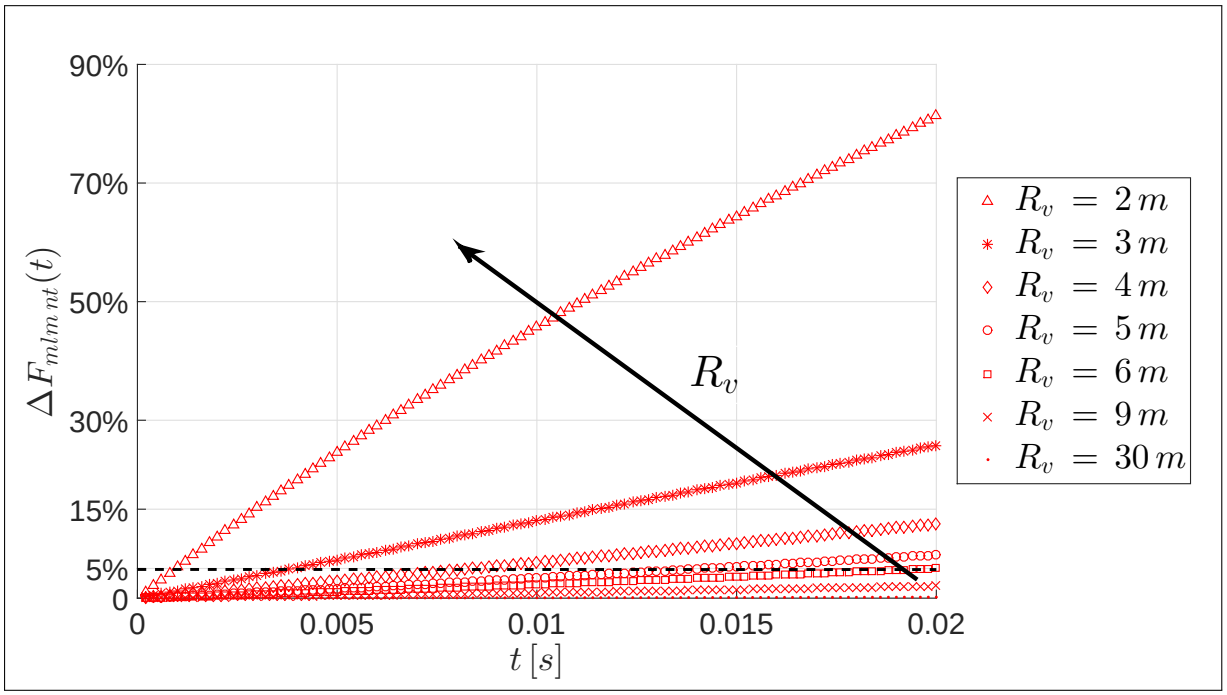

Figure *3.30* – $\mathbf{\Delta}F_{mlm\,nt}$ *en fonction du temps pour un impact au voisinage du creux. En pointillés noirs la limite des* 5%.

La figure 3.30 montre que l'écart relatif entre le modèle **nc** et **na** demeure inférieur à 5% uniquement lorsque R_v est égal à $9\,m$ ou $30\,m$. Nous notons que cet écart semble évoluer « quasi-linéairement » en fonction du temps, les courbes de la figure 3.30 sont légèrement concaves.

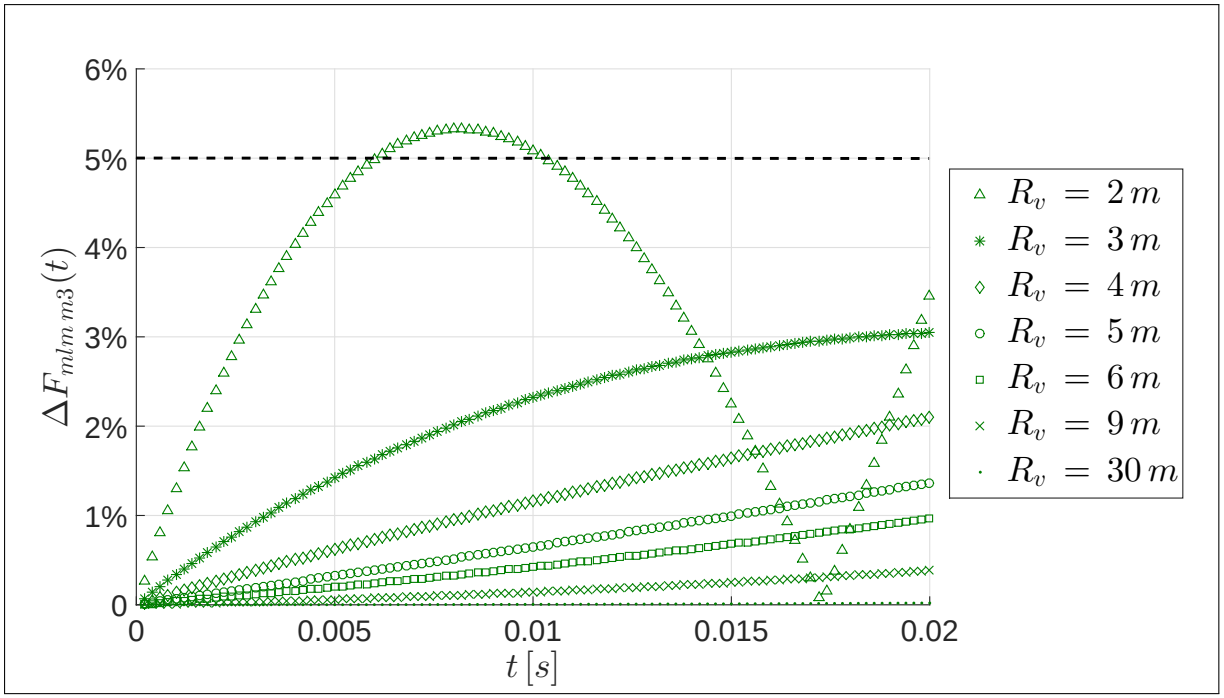

Figure *3.31* – $\mathbf{\Delta}F_{mlm\,m3}$ *en fonction du temps pour un impact au voisinage du milieu de la pente. En pointillés noirs la limite des* 5%.

La figure 3.31 montre que l'écart relatif entre le modèle **nc** et **na** demeure inférieur à 5% pour tous les cas tests du tableau 3.1 sauf pour $R_v = 2\,m$. L'écart relatif en termes d'efforts hydrodynamiques dépasse la limite des 5% entre $0.005\,s$ et $0.01\,s$, puis tombe à 0% à $0.0175\,s$. Cette observation est corroborée par la figure 3.26, la courbe verte vient intersecter la courbe noire à $t = 0.0175\,s$. L'évolution de cet écart relatif est donc fortement non-linéaire.

3.2.2 Asymptotiques contre Non-Asymptotique : avec vitesse d'avance

Dans cette partie, on confronte les modèles asymptotiques avec vitesse d'avance (part. 2.4.3) et le modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance (part. 2.4.4). La vitesse d'avance horizontale V de la parabole est fixée à $5.0\,m.s^{-1}$ et va dans le sens contraire de celui de la propagation de houle d'Airy monochromatique. Nous réalisons donc le même travail que dans la partie 3.2.2, mais cette fois-ci l'impact est donc purement oblique et nous utilisons les cas tests définis au sein du tableau 3.2. Nous voulons toujours savoir à partir de quelle valeur de R_v les modèles approchés ne correspondent plus avec les résultats du modèle non-asymptotique. Nous conservons la limite admissible égale à 5% pour les écarts relatifs moyens en termes d'efforts hydrodynamiques.

Étant donné que nous réalisons la même étude que dans la section 3.2.1. Nous nous se concentrons sur les tableaux des écarts relatifs ainsi que les figures qui rendent compte de l'évolution de l'écart relatif moyen pour les efforts hydrodynamiques en fonction de R_v/R_p. Les figures sont présentées en annexe B.6.

3.2.2.1 Impact au voisinage de la crête avec vitesse d'avance

Ce paragraphe s'intéresse à des configurations d'impact hydrodynamique avec vitesse d'avance au voisinage de la crête de houle d'Airy monochromatique. Nous utilisons les modèles asymptotiques **ncva** (paragr. 2.4.3.1) et **nava** (part. 2.4.4). Les tableaux 3.11 et 3.12 récapitulent les écarts relatifs lorsque $R_v = 30\,m$ et $R_v = 2\,m$.

$R_v = 30$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	1,51%	5,24%	3,94%	0,22%	0,08%
$\mathbf{\Delta}$ premier	<0,01%	0,21%	0,06%	0,13%	0,03%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	3,86%	11,53%	9,97%	0,47%	0,13%

Table *3.11 – Écarts relatifs asymptotique contre non-asymptotique (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°1.b*

$R_v = 2$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	8,71%	13,67%	3,87%	1,49%	0,57%
$\mathbf{\Delta}$ premier	0,08%	0,12%	0,06%	0,03%	0,03%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	22,25%	30,00%	13,05%	3,28%	1,01%

Table *3.12 – Écarts relatifs asymptotique contre non-asymptotique (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°7.b*

Les tableaux 3.11 et 3.12 montrent que les écarts relatifs moyens et au dernier pas de temps augmentent lorsque R_v diminue. Les écarts relatifs au premier pas de temps sont négligeables car inférieurs à 1%. Nous retrouvons les mêmes tendances que dans le paragraphe 3.2.1.1.

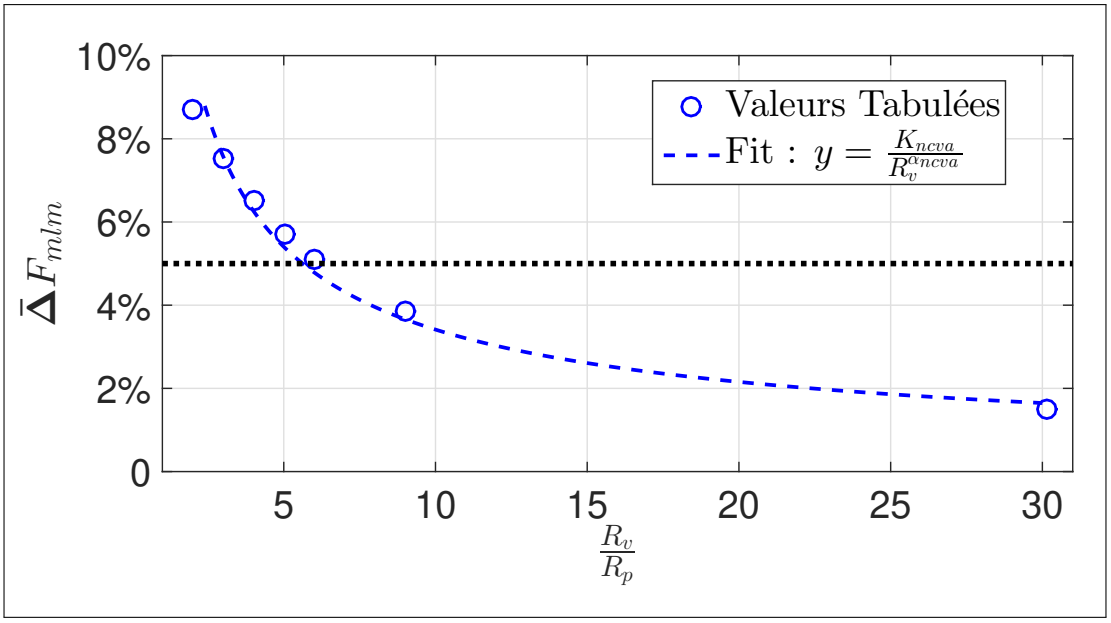

Figure 3.32 – $\bar{\Delta} F_{mlm}$ *en fonction de* R_v. *En ronds bleus les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage de la crête avec vitesse d'avance. En pointillés bleus une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des* 5%.

La figure 3.32 récapitule les écarts relatifs moyens entre les modèles **ncva** et **nava** pour les efforts hydrodynamiques. Comme dans le paragraphe 3.2.1.1, l'écart relatif moyen diminue lorsque le rayon approché de la houle d'Airy monochromatique R_v augmente. Avec l'écart relatif moyen admissible de 5%, la figure 3.32 montre que le modèle **ncva** corrobore les résultats du modèle **nava** lorsque le rayon de la houle est inférieur à $4.0\,m$.

3.2.2.2 Impact au voisinage du creux avec vitesse d'avance

Ce paragraphe confronte le modèle asymptotique **ntva** (paragr. 2.4.3.1) et le modèle non-asymptotique **nava** (part. 2.4.4) lorsque l'impact se produit dans le creux de la houle d'Airy.

$R_v = 30$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	1,17%	2,08%	4,15%	0,25%	0,09%
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	0,04%	0,67%	0,18%	0,33%	0,08%
$\boldsymbol{\Delta}$ dernier	2,77%	4,70%	9,91%	0,53%	0,15%

Table 3.13 – *Écarts relatifs asymptotique contre non-asymptotique (ntva et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b*

$R_v = 2$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	87,46%	115,85%	20,07%	12,48%	4,95%
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	4,54%	4,09%	2,99%	0,70%	0,91%
$\boldsymbol{\Delta}$ dernier	209,30%	259,92%	43,00%	23,68%	7,66%

Table 3.14 – *Écarts relatifs asymptotique contre non-asymptotique (ntva et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b*

Les tableaux 3.13 et 3.14 récapitulent les écarts relatifs et montrent qu'ils diminuent lorsque R_v augmente entre les modèles **ntva** et **nava**. De façon analogue à une configuration d'impact au niveau de le crête, nous retrouve la même tendance que lorsque la cinématique de la parabole est purement verticale (paragr. 3.2.1.2).

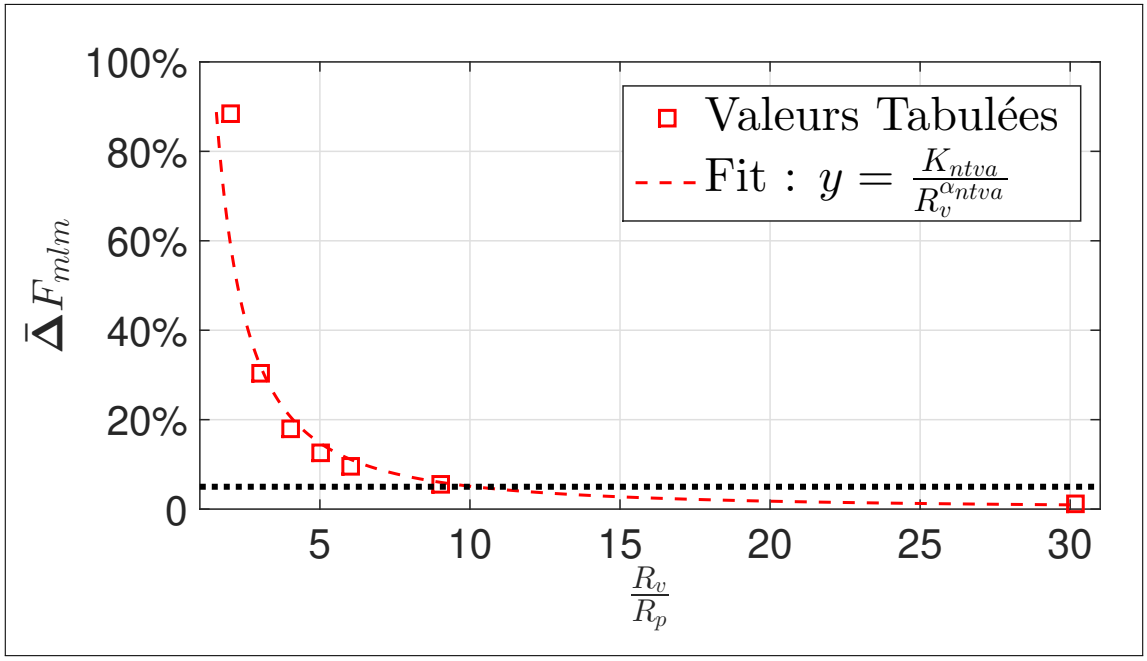

FIGURE *3.33* – $\bar{\mathbf{\Delta}} F_{mlm}$ *en fonction de* R_v. *En carrés rouges les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage de la crête avec vitesse d'avance. En pointillés rouges une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des* 5%.

En considérant la limite admissible de 5%, nous constatons que les résultats du modèle asymptotique **ntva** confirment ceux du modèle non-asymptotique **nava** uniquement pour $R_v = 30\,m$.

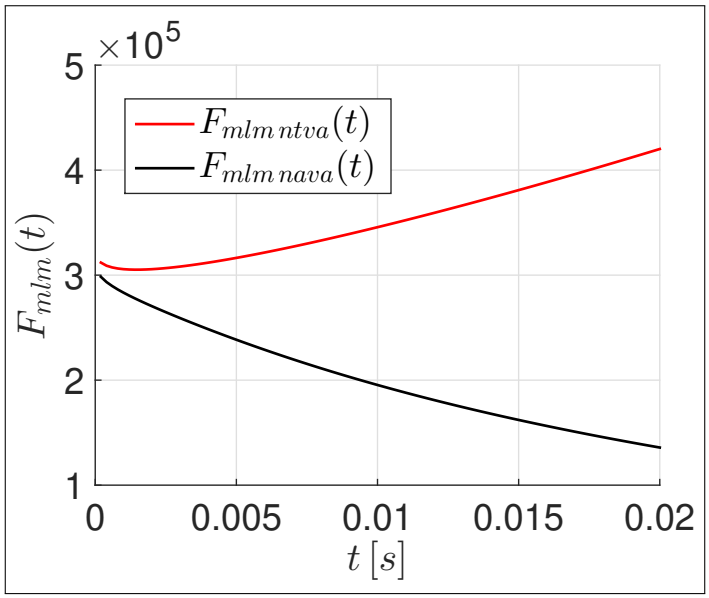

FIGURE *3.34* – *Efforts hydrodynamiques au voisinage du creux avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b*

Nous retiendrons que les efforts hydrodynamiques du modèle **ntva** pour $R_v = 2\,m$, ont un comportement au cours du temps différent de tous les cas qui ont été traités auparavant. En effet, ces efforts hydrodynamique sont globalement croissants au cours du temps et l'effort maximum n'est pas obtenu au début de la simulation.

3.2.2.3 Impact au voisinage du milieu de la pente avec vitesse d'avance

Ce paragraphe confronte les modèles asymptotiques **m1va** et **m3va** (paragr. 2.4.3.2) au modèle non-asymptotique **nava** (part. 2.4.4) lorsque l'impact se produit dans le milieu de la pente de la houle d'Airy.

$R_v = 2$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	29,94%	51,33%	21,44%	9,14%	4,74%
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	0,41%	6,86%	6,32%	1,17%	1,10%
$\boldsymbol{\Delta}$ dernier	66,68%	75,20%	15,61%	13,90%	5,52%
$R_v = 3$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	22,20%	31,07%	13,04%	6,24%	2,81%
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	0,40%	6,42%	3,15%	0,17%	1,21%
$\boldsymbol{\Delta}$ dernier	46,53%	44,17%	6,87%	9,62%	3,15%
$R_v = 30$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	2,28%	1,25%	2,47%	0,65%	0,23%
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	0,06%	0,96%	0,32%	0,19%	0,12%
$\boldsymbol{\Delta}$ dernier	4,14%	0,32%	7,95%	1,03%	0,23%

TABLE *3.15 – Tableau des écarts relatifs pour une configuration d'impact au voisinage du milieu de la pente avec vitesse d'avance : m1 - Cas test n°1.a, n°6.a et n°7.a*

$R_v = 2$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	1,57%	6,37%	7,69%	0,68%	0,39%
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	0,03%	1,82%	2,18%	0,01%	<0,01%
$\boldsymbol{\Delta}$ dernier	1,07%	18,31%	1,49%	1,67%	0,80%
$R_v = 3$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	1,29%	5,94%	5,60%	0,52%	0,18%
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	0,10%	3,14%	0,47%	0,94%	0,52%
$\boldsymbol{\Delta}$ dernier	0,34%	16,85%	1,65%	1,29%	0,33%
$R_v = 30$ [m]	F_{mlm}	$P_{max\,mlm\,d1}$	$P_{max\,mlm\,d2}$	d_1	d_2
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	0,25%	3,97%	2,57%	0,07%	0,01%
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	0,02%	0,66%	0,08%	0,27%	0,01%
$\boldsymbol{\Delta}$ dernier	0,94%	9,58%	7,69%	0,18%	0,05%

TABLE *3.16 – Tableau des écarts relatifs pour une configuration d'impact au voisinage du milieu de la pente avec vitesse d'avance : m3 - Cas test n°1.a, n°6.a et n°7.a*

Les tableaux 3.15 et 3.16 résument les écarts relatifs entre les modèles **m1va** et **m3va** par rapport au modèle **nava**. Les écarts relatifs au premier pas de temps sont négligeables car inférieurs à 1%. Les écarts relatifs moyens et au dernier pas de temps diminuent toujours lorsque R_v augmente. Une fois de plus nous retrouvons des tendances similaires que dans le paragraphe 3.2.1.3.

Nous notons que les écarts relatifs en relation avec le modèle **m1va** sont toujours plus importants que les écarts relatifs associés au modèle **m3va**. Par exemple, pour les efforts hydrodynamiques avec $R_v = 3\,m$, l'écart relatif moyen pour le modèle **m3va** est de l'ordre du pourcentage contre $22,20\%$ pour le modèle **m1va**.

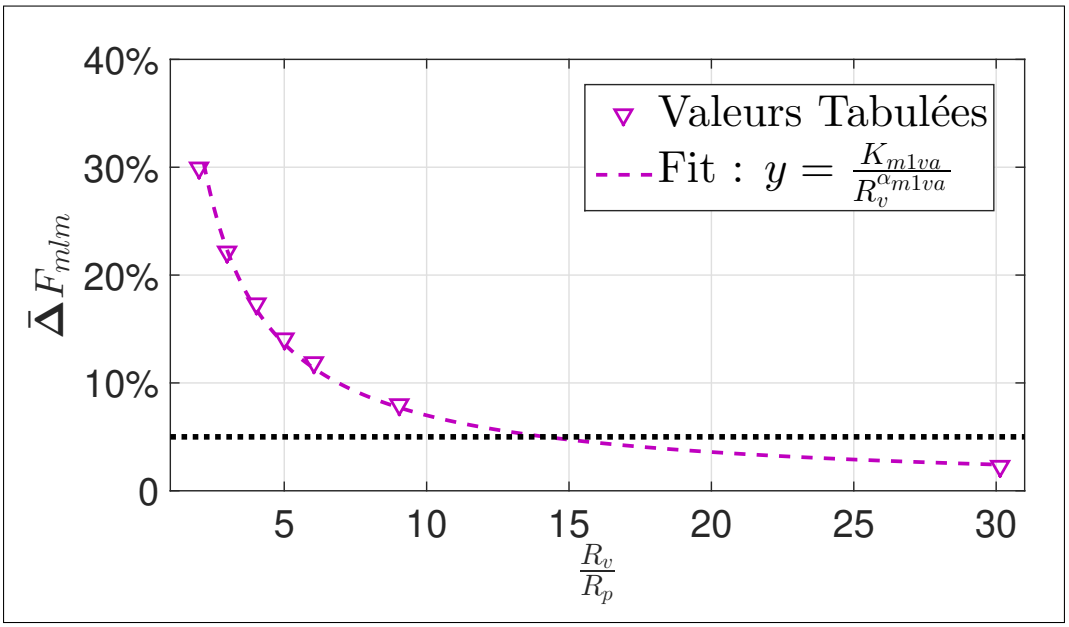

FIGURE *3.35* – $\bar{\Delta} F_{mlm}$ *en fonction de* R_v. *En triangles violets les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage du milieu. En pointillés violets une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des* 5%.

La figure 3.35 rend compte des écarts relatifs moyens pour les efforts hydrodynamiques entre les modèles **m1va** et **nava**. Ces écarts diminuent monotonement lorsque R_v augmente (Fig. 3.35) à contrario du cas sans vitesse d'avance (Fig. 3.27). Au moyen de la limite admissible des 5%, nous constatons que les résultats du modèle asymptotique **m1va** concordent avec ceux du modèle **nava** seulement pour $R_v = 30\,m$ (Fig. 3.35).

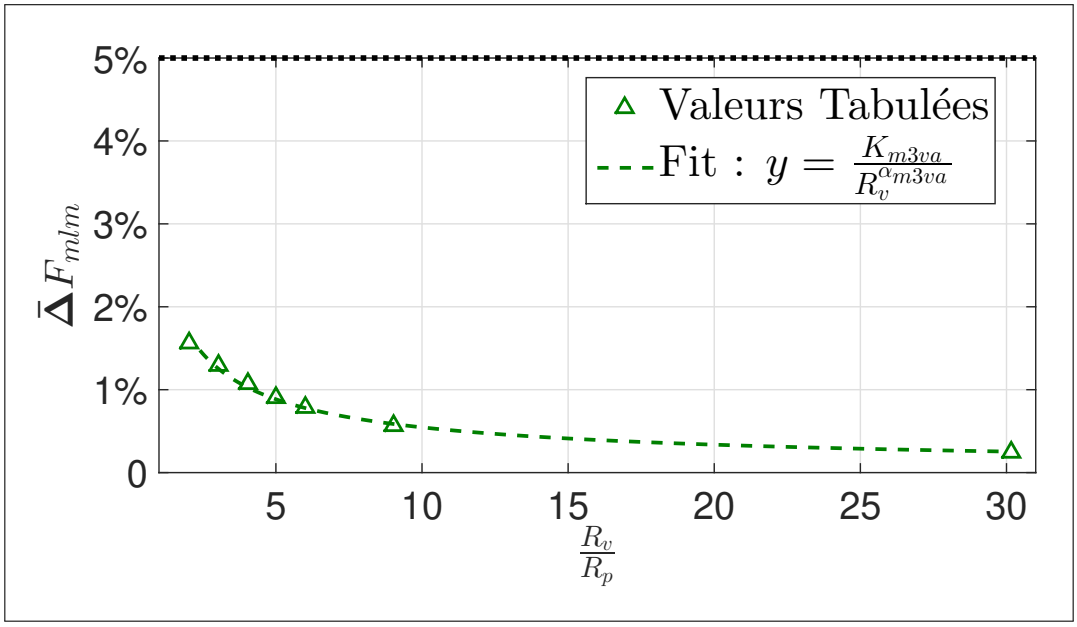

FIGURE *3.36* – $\bar{\Delta} F_{mlm}$ *en fonction de* R_v. *En triangles verts les écarts relatifs moyens entre le modèle asymptotique et le modèle non-asymtotique pour un impact au voisinage du milieu. En pointillés verts une courbe de tendance qualitative. En pointillés noirs la limite des* 5%.

La figure 3.36 récapitule les écarts relatifs moyens pour les efforts hydrodynamiques entre les modèles **m3va** et **nava**. Ces écarts diminuent lorsque R_v augmente et sont toujours inférieurs à 2% (Fig. 3.36) et sont donc en accord avec les résulats du modèle **nava**.

3.2.2.4 Conclusion sur la comparaison des modèles avec vitesse d'avance

De façon analogue à la partie 3.2.1, nous avons comparé le comportement des modèles asymptotiques au modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance pour des impacts à des endroits spécifiques et prédéfinis du profil de houle d'Airy monochromatique. En réutilisant l'écart admissible de 5% pour les efforts hydrodynamiques qui stipule qu'au delà de cette valeur il est préférable d'utiliser le modèle non-asymptotique **nava**. Nous pouvons formuler les conclusions suivantes :

- Pour un impact oblique au voisinage de la crête, si R_v est inférieur à $6\,m$ il est conseillé d'utiliser le modèle non-asymptotique **nava** (Fig. 3.32).
- Pour un impact oblique au voisinage du creux, si R_v est inférieur à $10\,m$ il est recommandé d'utiliser le modèle non-asymptotique **nava** (Fig. 3.33).
- Pour un impact oblique au voisinage du milieu de la pente, on peut utiliser le modèle asymptotique **m3va** ou le modèle non-asymptotique **nava** pour la gamme de R_v testée. (Fig. 3.36). Le modèle **m1va**, quant à lui, peut être utilisé lorsque R_v est inférieur à $15\,m$ (Fig. 3.35).

Les figures 3.37 à 3.40 récapitulent l'évolution des écarts relatifs au cours du temps pour les études menées aux paragraphes 3.2.2.1, 3.2.2.2 et 3.2.2.3

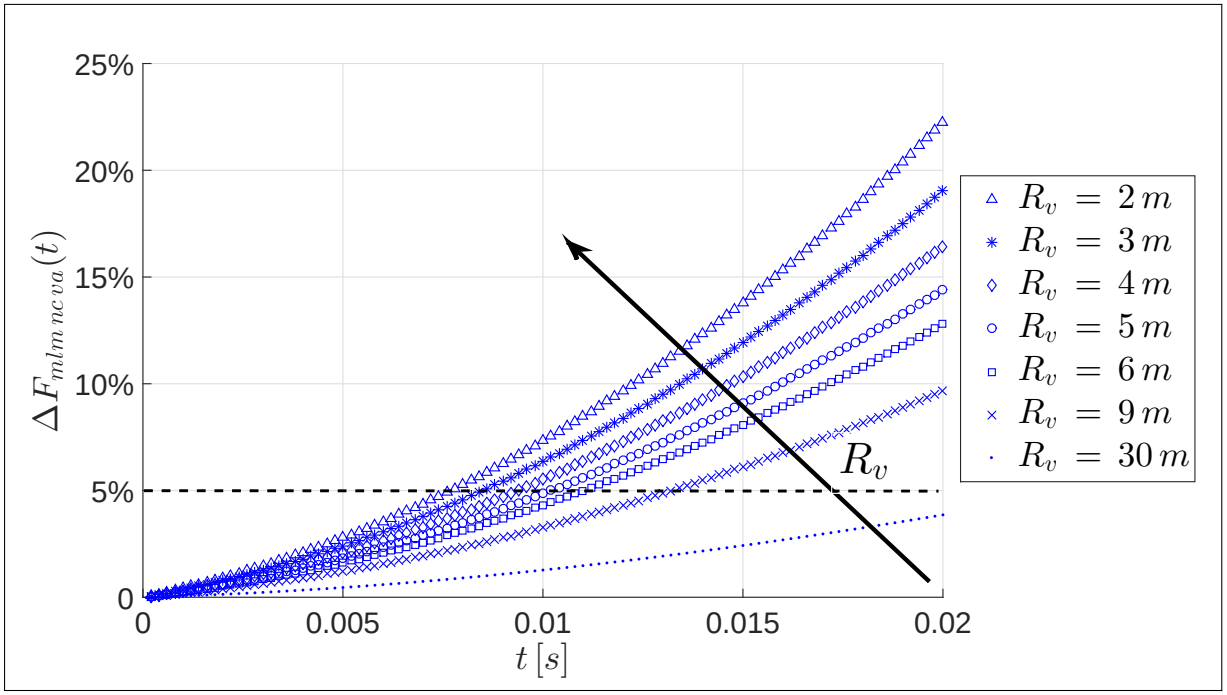

FIGURE *3.37* – $\boldsymbol{\Delta} F_{mlm\,ncva}$ *en fonction du temps pour un impact au voisinage de la crête. En pointillés noirs la limite des* 5%.

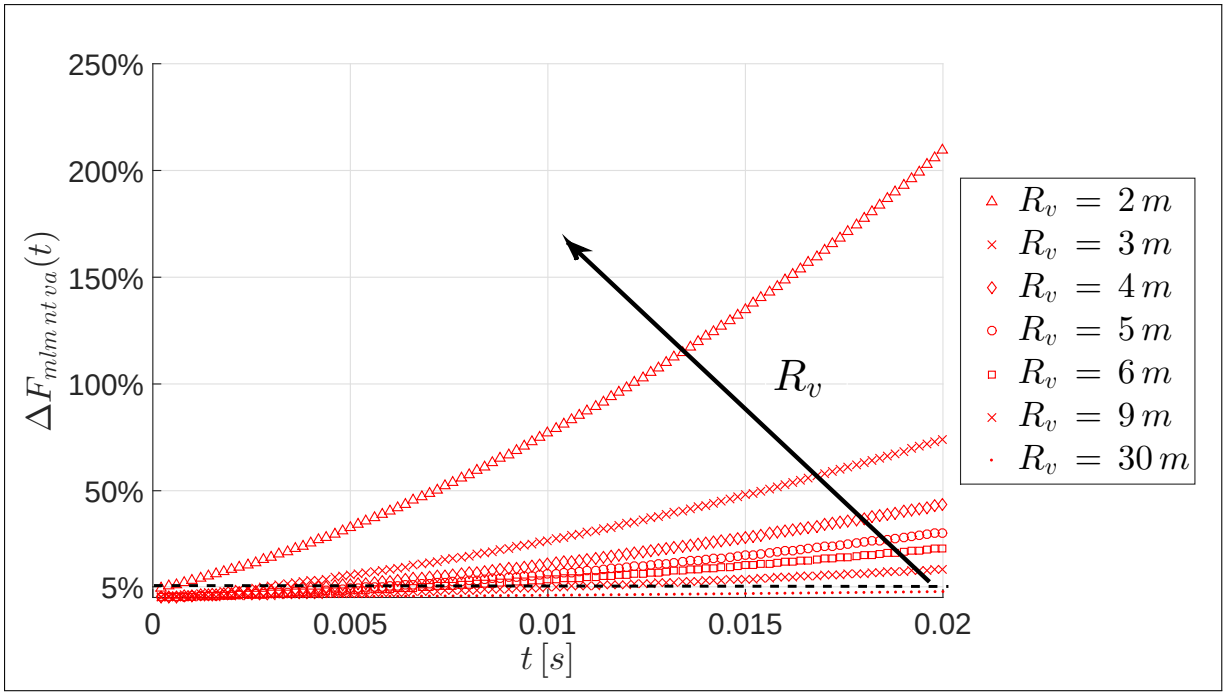

FIGURE *3.38* – $\boldsymbol{\Delta} F_{mlm\,ntva}$ *en fonction du temps pour un impact au voisinage du creux. En pointillés noirs la limite des* 5%.

Les figures 3.37 et 3.38 qui résument les écart relatifs en fonction du temps pour les efforts hydrodyamiques entre les modèles asymptotiques **ncva** et **ntva** montrent qu'uniquement le cas test pour $R_v = 30\,m$ demeure en dessous de la limite admissible des 5%. On constate par ailleurs que ces écarts n'évoluent pas linéairement au cours de temps, les différentes courbes des figures 3.37 et 3.38 sont convexes. Nous constatons aussi que les écarts relatifs du modèle **ntva** sont globalement dix fois plus importants que ceux du modèle **ncva**.

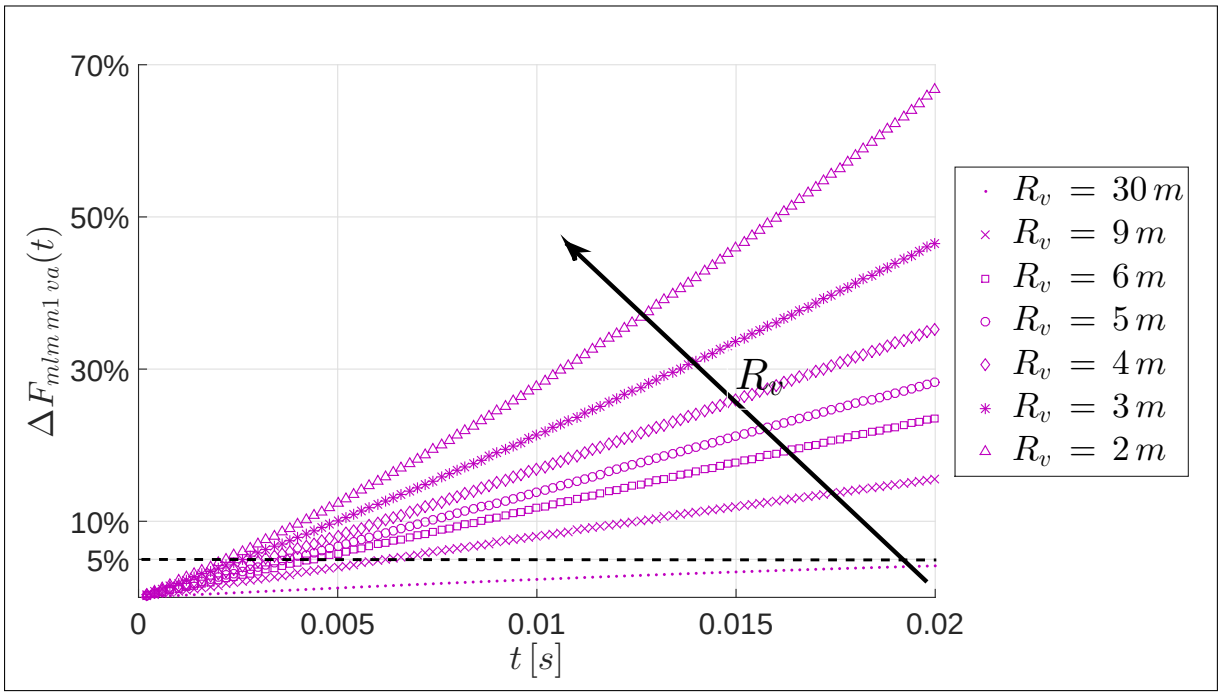

FIGURE *3.39* – $\boldsymbol{\Delta} F_{mlm\,m1va}$ *en fonction du temps pour un impact au voisinage du milieu de la pente. En pointillés noirs la limite des* 5%.

L'évolution au cours du temps des écarts relatifs en relation avec le modèle **m1va** (Fig 3.39) est similaire à celles des modèles **ncva** et **ntva**. Seulement le cas test pour $R_v = 30\,m$ demeure en desous de la limite des 5% sur toute durée de la simulation.

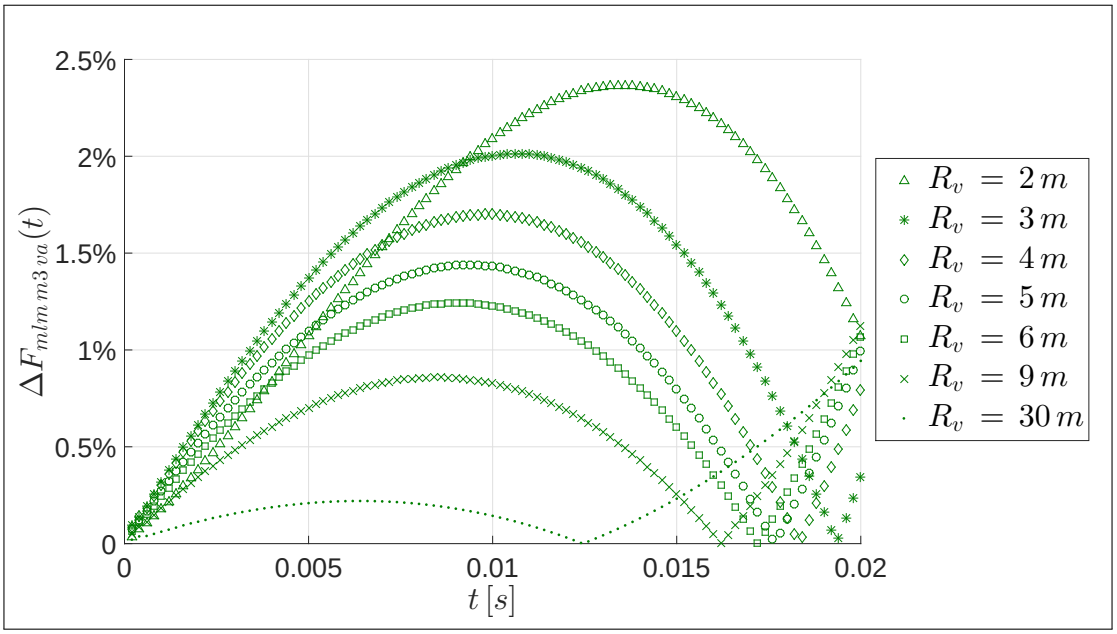

Figure *3.40* – $\boldsymbol{\Delta} F_{mlm\,m3va}$ *en fonction du temps pour un impact au voisinage du milieu de la pente. En pointillés noirs la limite des* 5%.

La figure 3.40 rend compte des écarts relatifs au cours du temps pour un impact au voisinage du milieu de la pente au moyen du modèle **m3va**. Il est constaté que ces écarts relatifs demeurent toujours inférieurs à la limite des 5%, ils n'atteignent pas 2.5%. On constate aussi que pour les valeurs de R_v testées, ces écarts admettent un extremum puis un minimum égal à zero. Ce phénomène vient du fait que pour ces configurations d'impact la courbe des efforts hydrodynamiques en relation avec le modèle **m3va** vient intersecter celle de modèle **nava** (Fig.(s) B.23 et B.24).

3.2.3 Conclusion sur la comparaison des modèles avec et sans vitesse d'avance

Dans les parties 3.2.1 et 3.2.2 nous avons étudié les modèles développés au sein du chapitre 2 au travers d'une large gamme de rayons approchés de la houle R_v (Tab(s). 3.1 et 3.2). Pour cela nous avons calculé les écarts relatifs pour les corrections de surface mouillée, les pics de pression MLM et les efforts hydrodynamiques entre les modèles asymptotiques et les modèles non-asymptotiques. En imposant un écart relatif moyen admissible égal à 5% sur les efforts hydrodynamiques, il a été montré que les écarts relatifs entre les modèles asymptotiques et non-asymptotiques demeurent tributaires de la valeur de R_v et de la zone d'impact. Pour plus d'informations on peut se référer aux paragraphes 3.2.2.4 et 3.2.1.4.

Néanmoins il n'a pas encore été question de la magnitude des efforts hydrodynamiques. Cette étude est réalisée dans la section suivante en comparant les modèles non-asymptotiques à deux configurations d'impact hydrodynamique de référence : les configurations d'impact d'une parabole sur surface libre plane et au repos avec et sans vitesse d'avance.

3.3 Détermination des configurations dimensionnantes

Dans cette section, nous comparons les modèles non-asymptotiques, pour des impacts verticaux et obliques, à des configurations d'impact hydrodynamique de référence. Les configurations de référence sont celles qui traduisent l'impact d'une parabole sur une surface libre plane avec et sans vitesse d'avance (ann(s). A.6.1 et A.6.2). Les comparaisons sont réalisées sur les grandeurs caractéristiques de l'impact hydrodynamique, à savoir les corrections de surface mouillée, les champs de pression MLM et les efforts hydrodynamiques.

Nous voulons quantifier les écarts entre les configurations de référence et le modèle non-asymptotique afin de déterminer quelle est la configuration qui engendre le chargement hydrodynamique le plus important. Pour cela, les modèles non-asymptotiques sont utilisés pour simuler des configurations d'impact au voisinage de la crête, du creux et du milieu de la pente de la houle d'Airy monochromatique. Comme nous voulons déterminer la configuration d'impact qui engendre les efforts hydrodynamiques les plus importants, nous utilisons les cas tests n°1 et n°7 (Tab(s). 3.2 et 3.1). Pour les comparaisons en termes de pics de pression MLM, on introduit une pression maximale réduite telle que :

$$P_{max\,mlm\,r} = \frac{P_{max\,mlm\,d_1} + P_{max\,mlm\,d_2}}{2} \tag{3.1}$$

Pour la cinématique de la parabole, on conserve les mêmes valeurs que dans les parties 3.2.1 et 3.2.2, c'est-à-dire $V = W = 5.0\,m.s^{-1}$. Pour les comparaisons on utilise les écarts relatifs définis en annexe B.3.2.

3.3.1 Configurations dimensionnantes sans vitesse d'avance

Dans cette partie, le cas de référence choisi est celui présenté en annexe A.6.1. Le modèle d'impact employé est le modèle asymptotique sans vitesse d'avance (**na**) pour des configurations d'impact au voisinage de la crête, du creux et du milieu de la pente de la houle d'Airy. Pour déterminer la configuration qui engendre les efforts hydrodynamiques les plus importants, deux cas tests sont retenus : le cas test n°1.a pour $R_v = 30\,m$ (paragr. 3.3.1.1) et le cas test n°7.a pour $R_v = 2\,m$ (paragr. 3.3.1.2).

3.3.1.1 Comparaisons par rapport à la configuration de référence sans vitesse d'avance pour $\mathbf{R_v = 30}$ m

Les tableaux 3.17, 3.18 et 3.19 résument les écarts relatifs entre le modèle non-asymptotique et la configuration de référence lorsque $R_v = 30\,m$.

$R_v = 30$ [m] Crête	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	1,63%	3,28%	3,90%
$\mathbf{\Delta}$ premier	1,60%	3,29%	3,33%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	1,64%	4,29%	4,34%

Table *3.17 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage de la crête (nc) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*

$R_v = 30$ [m] Creux	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	1,72%	4,09%	4,19%
$\mathbf{\Delta}$ premier	1,86%	3,16%	3,52%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	1,72%	4,65%	4,67%

Table *3.18 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage du creux (nt) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*

$R_v = 30$ [m] Milieu	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	1,36%	3,29%	5,63%
$\mathbf{\Delta}$ premier	1,54%	2,73%	5,71%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	1,31%	3,35%	5,50%

Table *3.19 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage du milieu (m) sans vitesse d'avance : Cas test n°1.a*

Les tableaux 3.17, 3.18 et 3.19 montrent que pour $R_v = 30\,m$ le configuration d'impact de référence engendre des résultats du même ordre de grandeur que le modèle non-asymptotique. Les écarts relatifs calculés pour les grandeurs réduites et les efforts hydrodynamiques n'excèdent pas 6% (Tab. 3.19).

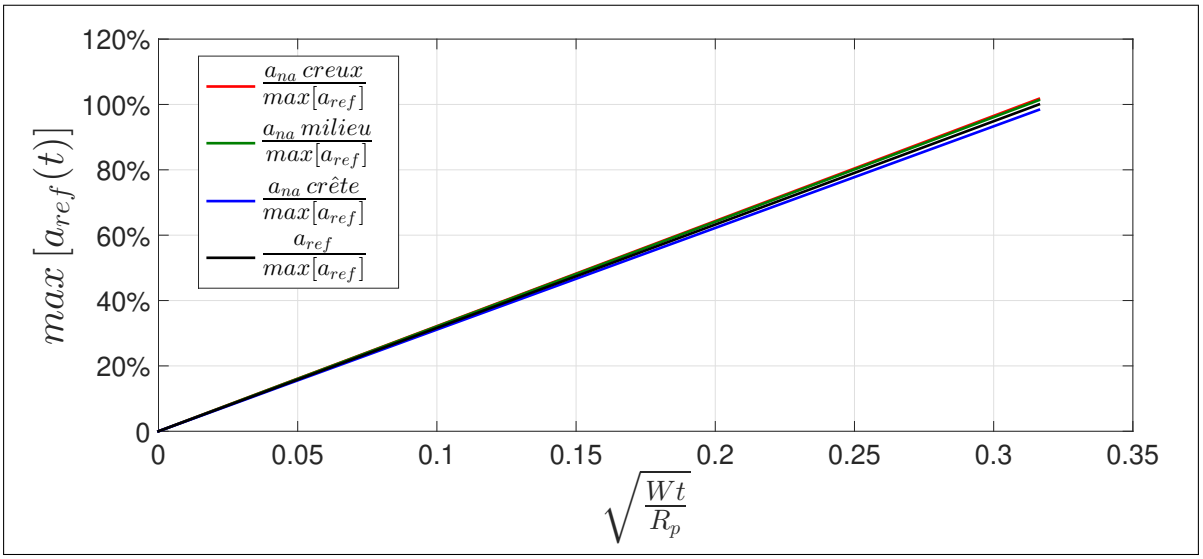

Figure *3.41 – Comparaison des corrections de surface mouillée réduites par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour $R_v = 30\,m$*

La figure 3.41 résume les corrections de surface mouillée réduites adimensionnées, pour des configurations d'impact au niveau des trois zones d'impact préétablies. Un mesure sans dimension du temps est utilisée. Nous remarquons que les corrections de mouillées réduites évoluent linéairement par rapport à la racine du temps. De plus les quatre droites sont très proches, ce qui indique que les corrections de surface mouillée obtenues avec le modèle non-asymptotique sont très proches de celles du cas de référence.

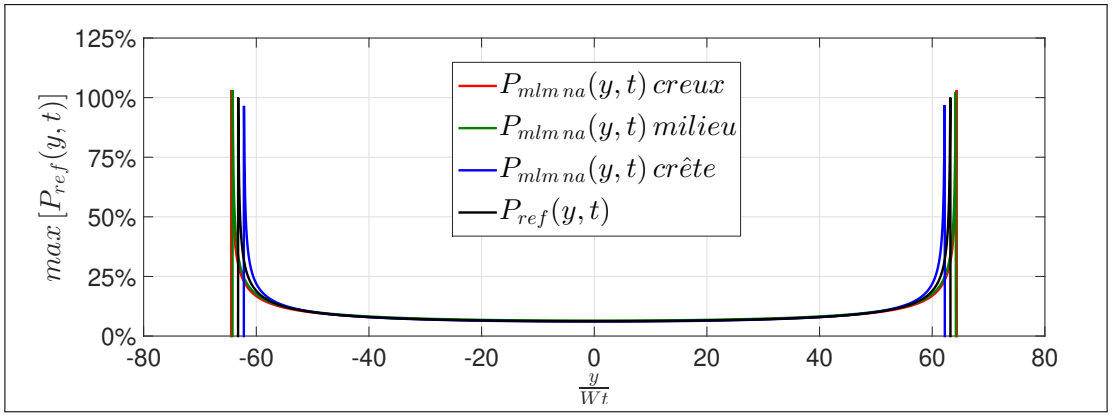

FIGURE *3.42 – Comparaison des champs de pression adimensionnés pour* $t = 2.0\,e^{-4}\,s$ *par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour* $R_v = 30\,m$

La figure 3.42 montre l'évolution des champs de pression MLM adimensionnés par rapport à la valeur maximale de la configuration de référence. Une mesure sans dimension de l'espace est utilisée. Nous constatons que les champs de pression pour les trois zones d'impact préétablies sont très proches des champs de pression de la configuration de référence.

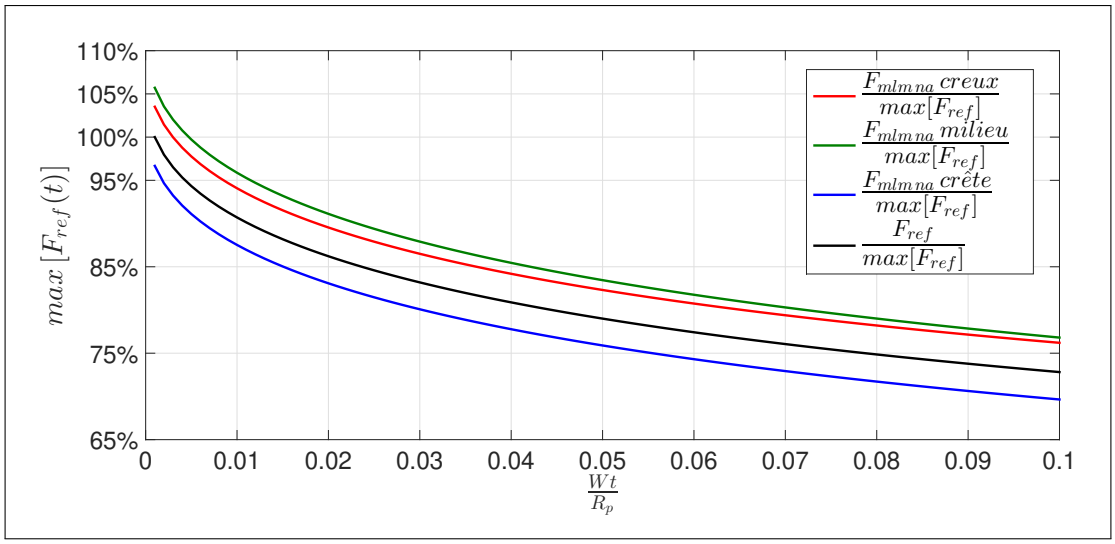

FIGURE *3.43 – Comparaison des efforts hydrodynamiques adimensionnés par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour* $R_v = 30\,m$

Les écarts relatifs présentées aux tableaux 3.17, 3.18 et 3.19 sont corroborées par les figures 3.41 et 3.42. Les courbes représentatives des corrections de surface mouillée et de champs de pression MLM sont pratiquement confondues. En ce qui concerne les efforts hydrodynamiques (Fig. 3.43), nous constatons que :

- Le modèle non-asymptotique pour un impact au milieu de la pente surestime d'environ 6% la configuration de référence.
- Le modèle non-asymptotique pour un impact au niveau du creux surestime d'environ 4% la configuration de référence.
- Le modèle non-asymptotique pour un impact au niveau de la crête sous-estime d'environ 4% la configuration de référence.

Pour $R_v = 30\,m$, la configuration qui engendre le chargement hydrodynamique le plus important est donc lorsque l'impact se produit au voisinage du milieu de la pente de la houle d'Airy monochromatique.

3.3.1.2 Comparaisons par rapport à une configuration de référence sans vitesse d'avance pour $\mathbf{R_v = 2}$ m

Les tableaux 3.20, 3.21 et 3.22 exposent les écarts relatifs entre le modèle non-asymptotique et la configuration de référence lorsque $R_v = 2\,m$.

$R_v = 2$ [m] Crête	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	17,35%	31,48%	33,57%
$\mathbf{\Delta}$ premier	18,47%	33,57%	34,26%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	16,20%	28,48%	30,90%

Table *3.20 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage de la crête (nc) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*

$R_v = 2$ [m] Creux	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	30,71%	47,09%	58,00%
$\mathbf{\Delta}$ premier	42,25%	98,79%	103,32%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	23,21%	18,77%	29,87%

Table *3.21 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage du creux (nt) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*

$R_v = 2$ [m] Milieu	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	3,51%	16,97%	19,70%
$\mathbf{\Delta}$ premier	2,98%	7,90%	11,92%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	3,87%	24,33%	18,78%

Table *3.22 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage du milieu de la pente (m) sans vitesse d'avance : Cas test n°7.a*

Nous constatons que ces écarts sont plus importants lorsque l'impact se produit au niveau du creux (Tab. 3.21) et moins importants (Tab. 3.22) lorsqu'il se produit au niveau du milieu de la pente de la houle d'Airy. En termes d'écart relatifs, la configuration d'impact au voisinage du creux (Tab. 3.20) est encadrée par la configuration d'impact au voisinage de la crête et celle au voisinage du milieu de la pente.

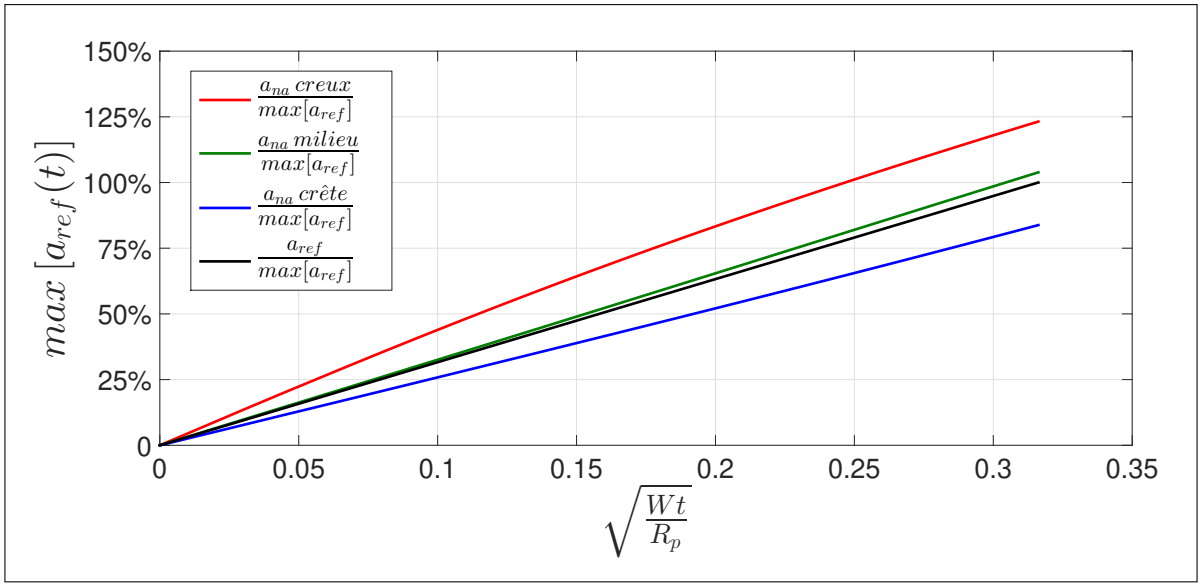

FIGURE *3.44 – Comparaison des corrections de surface mouillée réduites par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour* $R_v = 2\,m$

La figure 3.44 montre l'évolution des corrections mouillées réduites et adimensionnées par rapport à la valeur maximale de la correction de surface mouillée de référence en fonction de mesure sans dimension de la racine du temps. Ces corrections de surface mouillées réduites et adimensionnées corroborent les informations contenues dans les tableaux 3.20 à 3.22. Nous remarquons que ces corrections de surface mouillées réduites évolues linéairement par rapport à la racine du temps comme pour $R_v = 30\,m$ (paragr. 3.3.1.2).

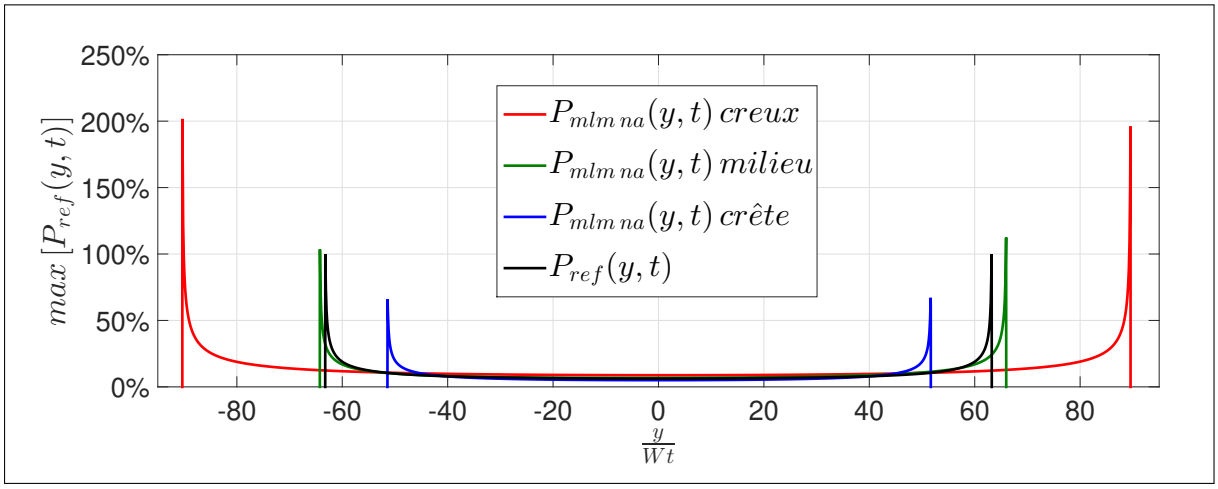

FIGURE *3.45 – Comparaison des champs de pression adimensionnés pour* $t = 2.0\,e^{-4}\,s$ *par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour* $R_v = 2\,m$

La figure 3.45 présente les champs de pression adimensionnés par rapport à la valeur maximale du champ de pression de référence. De façon analogue aux corrections de surface mouillée réduites (Fig. 3.44) cette figure est en accord avec les informations contenues dans les tableaux 3.20 à 3.22 pour les pressions MLM maximales. À titre d'exemple, il y a bien un écart d'environ 100% entre les pics de pression de la courbe rouge par rapport à ceux de la courbe noire.

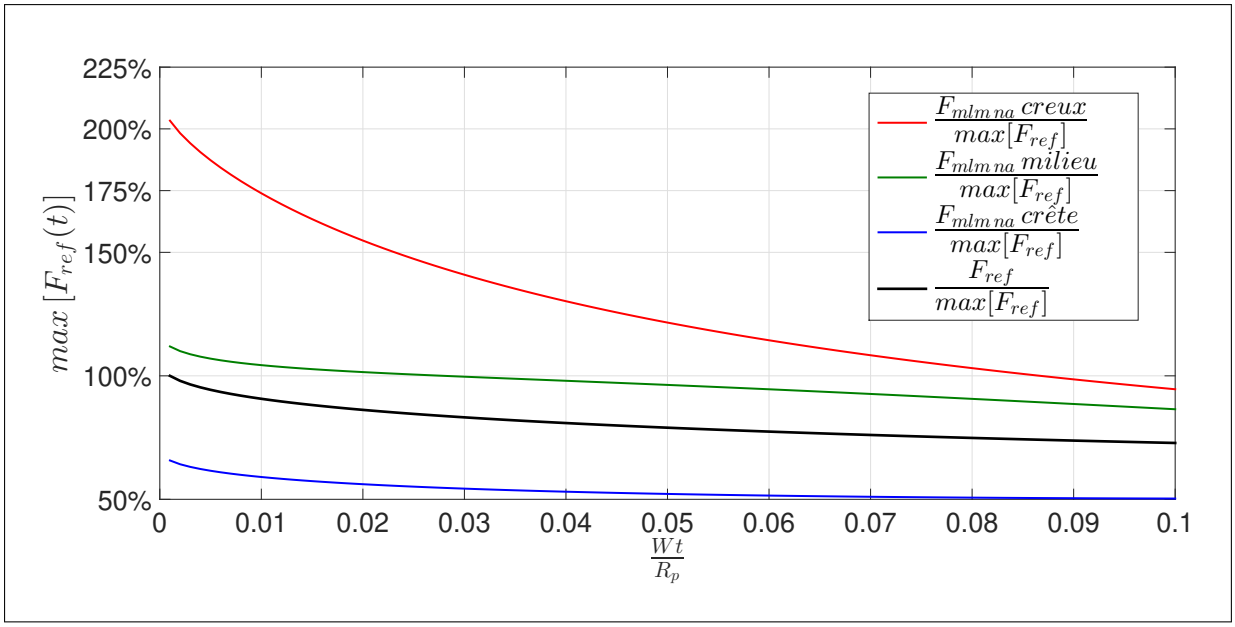

Figure *3.46 – Comparaison des efforts hydrodynamiques adimensionnés par rapport à un modèle de référence sans vitesse d'avance pour* $R_v = 2\,m$

La figure 3.46 résume l'évolution des efforts hydrodynamiques adimensionnés par rapport à la valeur maximale des efforts hydrodynamiques du modèle de référence. Nous réalisons les observations suivantes :

- Le modèle non-asymptotique pour un impact au niveau du creux surestime d'environ 100% la configuration de référence lors des premiers instants de la simulation.
- Le modèle non-asymptotique pour un impact au niveau du milieu surestime d'environ 20% la configuration de référence.
- Le modèle non-asymptotique pour un impact au niveau de la crête sous-estime d'environ 30% la configuration de référence.

Pour $R_v = 2\,m$, la configuration qui engendre le chargement hydrodynamique le plus important est donc lorsque l'impact se produit au voisinage du creux de la houle d'Airy monochromatique.

Conclusion intermédiaire

Au regard des commentaires énoncés à la fin des parties 3.3.1.1 et 3.3.1.2. On conclut que lorsque R_v est grand devant R_p la configuration qui engendre le chargement hydrodynamique le plus important est lorsque l'impact se produit au voisinage du milieu de la pente de la houle. Et lorsque le R_v tend vers R_p, c'est lorsque l'impact se produit au voisinage du creux de la houle que le chargement hydrodynamique est le plus intense.

On conclut aussi que plus R_v est « grand » par rapport à R_p plus les efforts hydrodynamiques d'impact sur la houle sont proches de ceux de la configuration d'impact hydrodynamique de référence, à savoir l'impact d'une parabole sur une surface libre plane et au repos.

3.3.2 Configurations dimensionnantes avec vitesse d'avance

Dans cette partie, nous réalisons la même étude que dans la partie 3.3.1. Cette fois-ci, la parabole est animée d'une cinématique de chute oblique allant dans le sens contraire de celui de la propagation de la houle. Le modèle utilisé est le modèle non-asymptotique d'impact avec vitesse d'avance (**nava**) au travers des cas tests n°1.b et n°7.b du tableau 3.2. La configuration de référence est celle qui traduit l'impact d'une parabole avec vitesse d'avance sur une surface libre plane (ann. A.6.2). Dans cette partie, on conserve les valeurs de V et W égale à $5\,m.s^{-1}$.

3.3.2.1 Comparaisons par rapport à une configuration de référence avec vitesse d'avance pour $\mathbf{R_v = 30}$ m

Les tableaux 3.23 à 3.25 récapitulent les écarts relatifs entre les modèles non-asymptotique **nava**, pour des configurations d'impact au voisinage des zones préétablies, et la configuration de référence.

$R_v = 30$ [m] Crête	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	1,54%	1,96%	3,27%
$\mathbf{\Delta}$ premier	1,54%	3,35%	3,30%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	1,45%	2,41%	2,37%

Table *3.23 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage de la crête avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b*

$R_v = 30$ [m] Creux	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	1,61%	5,85%	3,96%
$\mathbf{\Delta}$ premier	1,91%	3,04%	3,51%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	1,50%	9,39%	3,90%

Table *3.24 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage du creux avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b*

$R_v = 30$ [m] Milieu	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	0,63%	2,56%	0,79%
$\mathbf{\Delta}$ premier	1,05%	1,47%	3,55%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	0,39%	4,74%	0,04%

Table *3.25 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage du milieu de la pente avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b*

De façon similaire au paragraphe 3.3.1.1, les écarts relatifs pour les corrections des surface mouillée et pressions maximales réduites sont relativement faibles et n'excède pas 10% (Tab. 3.24). Les écarts relatifs sur les efforts hydrodynamiques ne dépassent pas 4%.

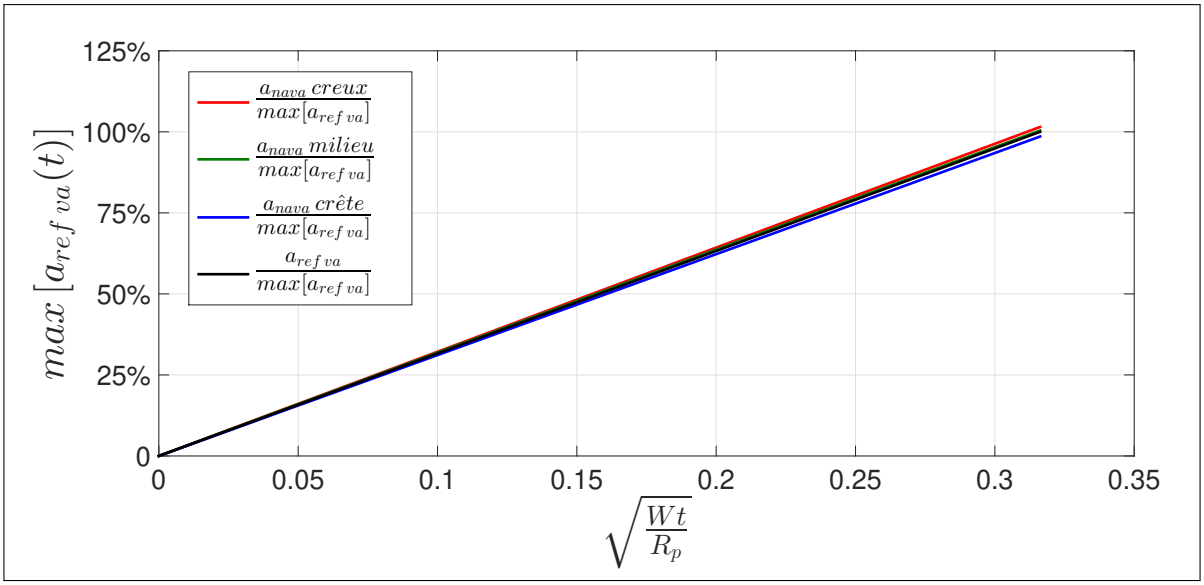

FIGURE *3.47 – Comparaison des corrections de surface mouillée réduites par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour* $R_v = 30\,m$

Pour les corrections de surface mouillée réduites, nous formulons la même observation que dans le paragraphe 3.3.1.1. Les corrections de surface mouillée réduites évoluent linéairement par rapport à la racine du temps et sont pratiquement confondues (Fig. 3.47).

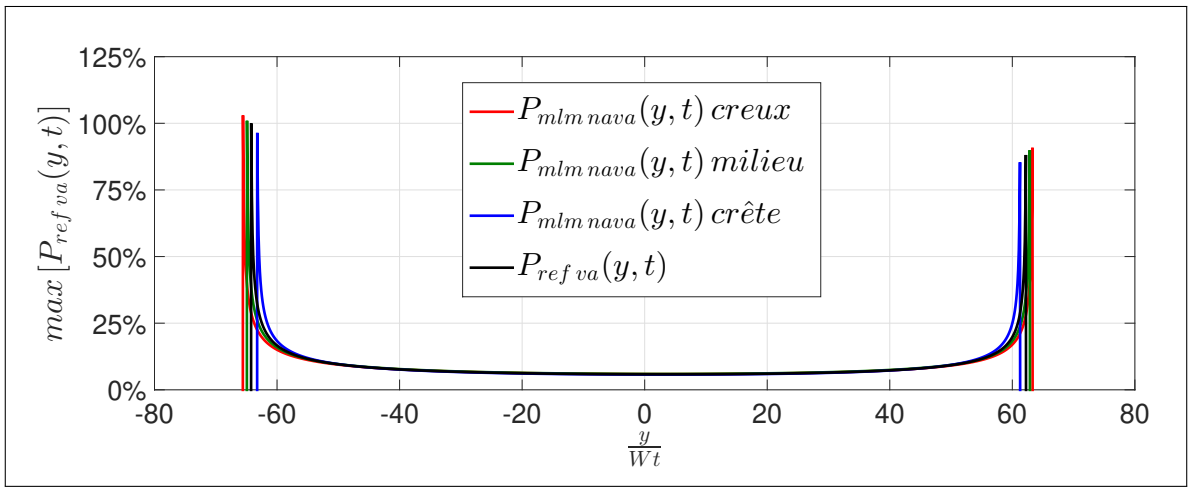

FIGURE *3.48 – Comparaison des champs de pression adimensionnés pour* $t = 2.0\,e^{-4}\,s$ *par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour* $R_v = 30\,m$

Pour les champs de pression adimensionnés par rapport à la pression de référence (Fig. 3.48), nous réitérons les mêmes observations que dans le paragraphe 3.3.1.1. Les champs de pression MLM obtenus au moyen du modèles asymptotiques pour des configurations d'impact au voisinage des trois positions préétablies sont quasiment confondus avec le champs de pression de référence. Ces dernières observations sont en accord avec les écarts relatifs des tableaux 3.23 à 3.25.

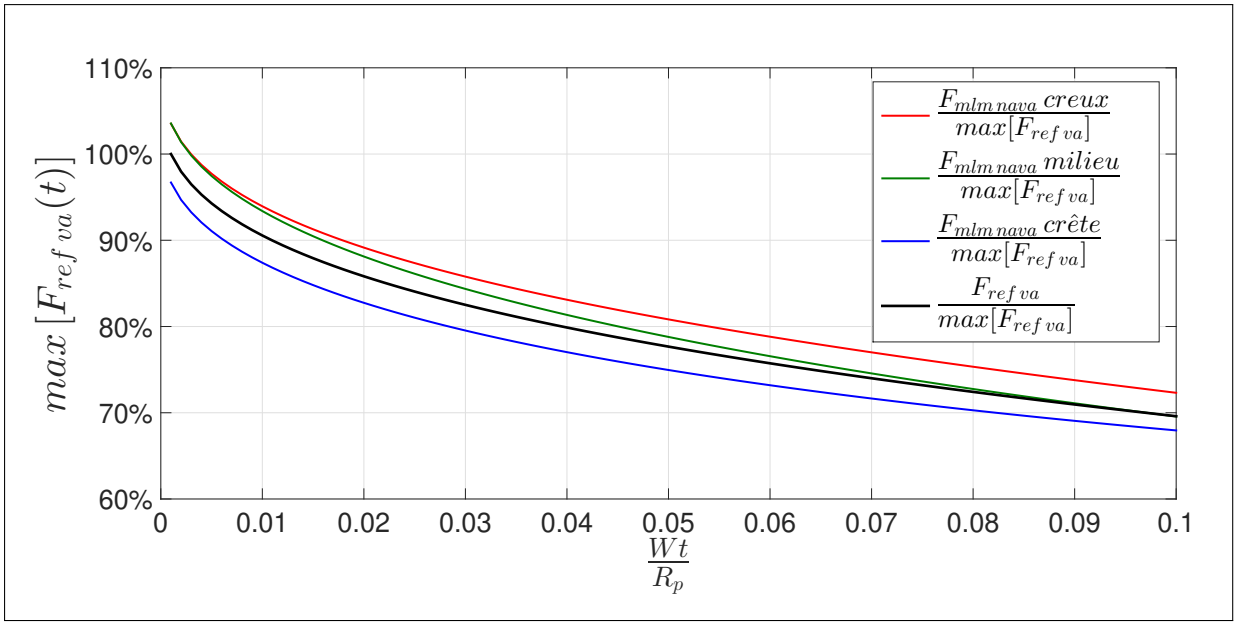

Figure *3.49 – Comparaison des efforts hydrodynamiques adimensionnés par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour* $R_v = 30\,m$

La figure 3.49 présente les évolutions des efforts hydrodynamiques, calculés au moyen du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance, adimensionnés par rapport à la valeur maximale des efforts de référence. Nous observons que :

- Le modèle non-asymptotique pour un impact au milieu de la pente surestime d'environ 4% la configuration de référence aux premiers instants de pénétration.
- Le modèle non-asymptotique pour un impact au niveau du creux surestime d'environ 4% la configuration de référence.
- Le modèle non-asymptotique pour un impact au niveau de la crête sous-estime d'environ 3% la configuration de référence.

Ces dernières observations sont donc similaires aux observations du paragraphe 3.3.1.1. La vitesse d'avance horizontale ne semble pas avoir d'influence sur la configuration qui engendre les efforts hydrodynamiques les plus importants lorsque $R_v = 30\,m$.

3.3.2.2 Comparaisons par rapport à une configuration de référence avec vitesse d'avance pour $\mathbf{R_v = 2}$ m

Les tableaux 3.26 à 3.28 récapitulent les écarts relatifs entre le modèle non-asymptotique par rapport au modèle de référence avec vitesse d'avance horizontale pour $R_v = 2\,m$.

$R_v = 2$ [m] Crête	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	18,06%	36,92%	39,40%
$\mathbf{\Delta}$ premier	18,27%	33,34%	34,05%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	17,73%	37,85%	41,07%

Table *3.26 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage de la crête avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b*

$R_v = 2$ [m] Creux	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	33,46%	70,32%	204,98%
$\mathbf{\Delta}$ premier	41,34%	97,47%	101,86%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	27,13%	42,85%	32,02%

Table *3.27 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage de la crête avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b*

$R_v = 2$ [m] Milieu	a_r	$P_{max\,mlm\,r}$	F_{mlm}
$\bar{\mathbf{\Delta}}$	10,00%	17,25%	29,69%
$\mathbf{\Delta}$ premier	12,59%	31,45%	60,22%
$\mathbf{\Delta}$ dernier	7,62%	2,41%	1,87%

Table *3.28 – Tableau des écarts relatifs par rapport au cas de référence pour une configuration d'impact au voisinage du milieu de la pente avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b*

De façon similaire au cas où la parabole est animée d'une cinématique de chute purement verticale, les écarts relatifs sont les moins importants lorsque l'impact se produit au milieu de la pente et les plus importants au niveau du creux.

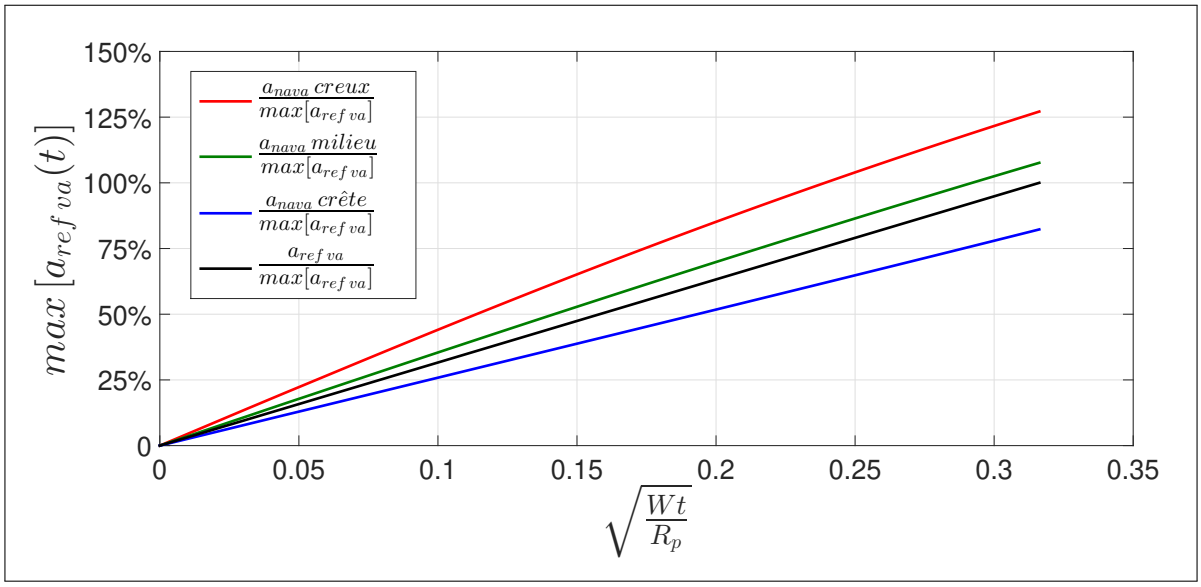

Figure *3.50 – Comparaison des corrections de surface mouillée réduites par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour $R_v = 2\,m$*

La figure 3.50 présente les corrections de surface mouillée adimensionnées par rapport à la valeur maximale du cas de référence pour un impact oblique lorsque $R_v = 2\,m$. Une fois de plus, ces corrections de surface mouillée réduites et adimensionnées évoluent linéairement pas rapport à la racine du temps et sont en accord avec les valeurs des écarts relatifs des tableaux 3.26 et 3.28.

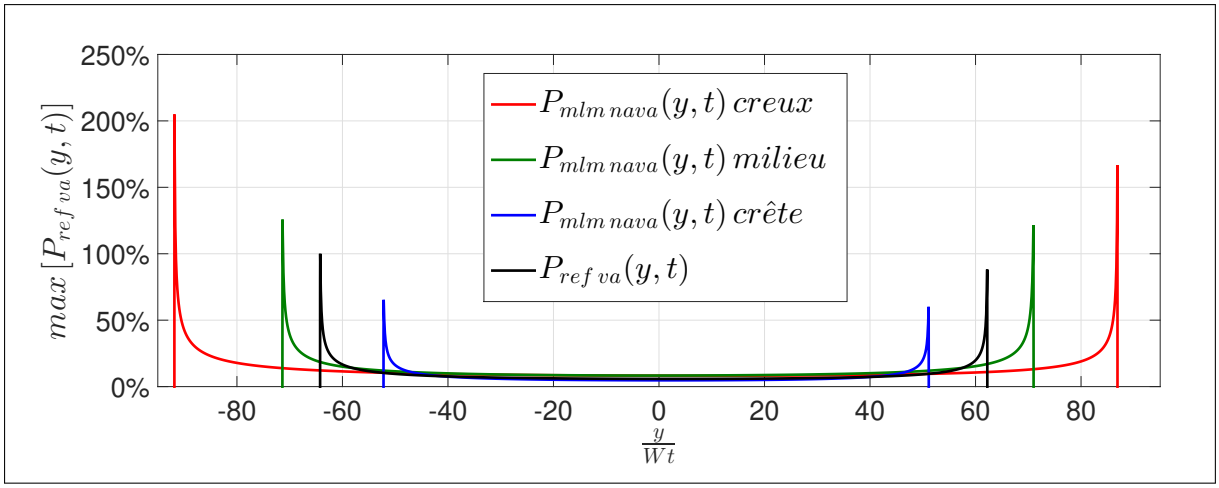

Figure *3.51 – Comparaison des champs de pression adimensionnés pour $t = 2.0\,e^{-4}\,s$ par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour $R_v = 2\,m$*

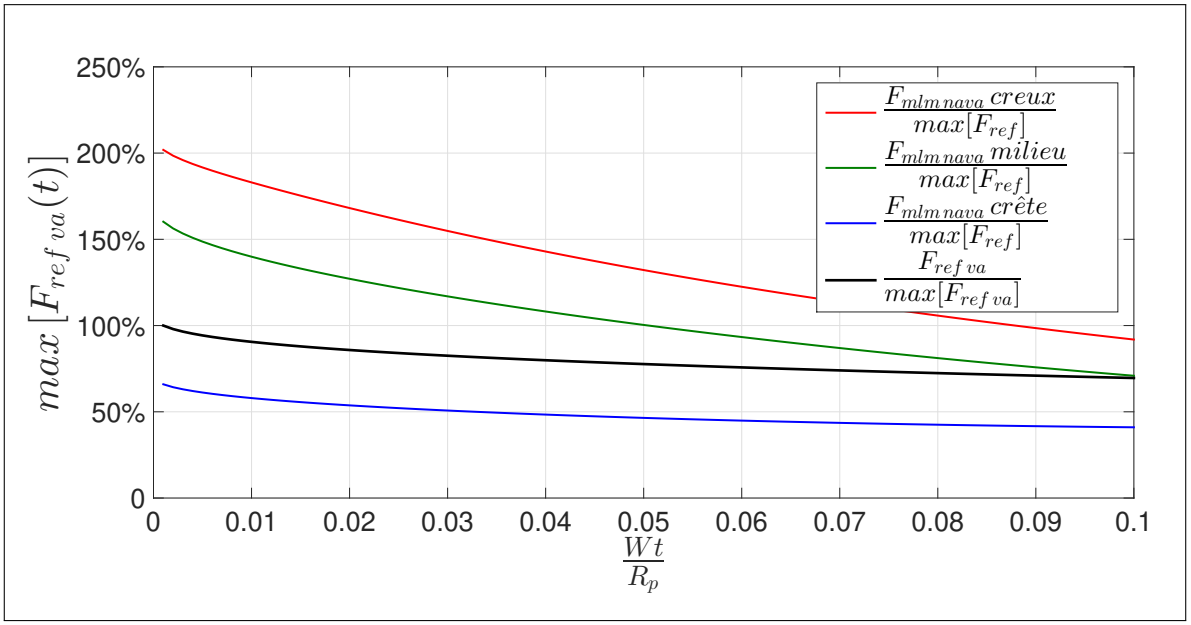

Figure *3.52 – Comparaison des efforts hydrodynamiques adimensionnés par rapport à un modèle de référence avec vitesse d'avance pour $R_v = 2\,m$*

Les figures 3.50, 3.51 et 3.52 retranscrivent visuellement les écarts relatifs contenus dans les tableaux 3.26 à 3.28 respectivement pour les corrections de surface mouillée, les champs de pression MLM et les efforts hydrodynamiques. En se concentrant sur les efforts hydrodynamiques, on réalise les observations suivantes :

- Le modèle non-asymptotique d'impact au voisinage de la crête sous-estime tout le long de la simulation le modèle de référence d'environ 40%.
- Le modèle non-asymptotique d'impact au voisinage du milieu de la pente surestime en moyenne le modèle de référence d'environ 30%.
- Le modèle non-asymptotique d'impact au voisinage du creux surestime tout au long de la simulation le modèle de référence de 70%.

Conclusion intermédiaire

En s'appuyant sur les observations faites aux parties 3.3.2.1 et 3.3.2.2 on formule les conclusions suivantes. Lorsque R_v est « grand » par rapport à R_p ou lorsque R_v tend vers R_p la configuration qui engendre les chargements hydrodynamiques les plus importants est lorsque l'impact se produit au voisinage du creux de la houle d'Airy monochromatique.

3.3.3 Conclusion sur la configuration d'impact engendrant les efforts hydrodynamique les plus intenses

Dans la partie 3.3.1, qui traite d'impact purement verticaux, nous avons montré que la configuration d'impact qui engendre les efforts hydrodynamiques les plus importants est dépendante du rayon approché de la houle R_v. Pour $R_v >> R_p$, la configuration dimensionnante est obtenue lorsque la parabole vient impacter la houle d'Airy au niveau du milieu de la pente. Sinon, lorsque $R_v \approx R_p$, la configuration dimensionnante est obtenue lorsque l'impact se produit dans le creux.

Dans la partie 3.3.2, qui traite d'impact oblique, nous avons montré que la configuration qui engendre les efforts les plus importants est obtenue lorsque l'impact se produit dans le creux. Notons que pour, $R_v >> R_p$, les efforts hydrodynamiques obtenus lors d'impacts au niveau du creux et du milieu de la pente sont pratiquement égaux.

En termes de configurations dimensionnantes globales, c'est-à-dire avec et sans vitesse d'avance de la parabole, les configurations d'impact qui surestiment largement les modèles de référence sont sans nul doute lorsque l'impact se produit au voisinage du creux et pour $R_v \approx R_p$.

Nous montrons qu'en s'appuyant sur les figures des corrections de surface mouillée adimensionnées (Fig(s). 3.41, 3.44, 3.47 et 3.50) que les configurations dimensionnantes sont toujours obtenues pour les configurations d'impact qui engendrent les corrections de surface mouillée les plus grandes. Nous concluons donc que le calcul des corrections de surface mouillée dans le cadre d'impact sur une houle d'Airy monochromatique est essentiel dans le but de déterminer les configurations d'impact dimensionnantes.

3.4 Effet de l'amplitude de la houle et de la vitesse de phase

D'après le modèle de Wagner linéarisé, sur lequel sont basés les modèles d'impact du chapitre 2, l'amplitude de la houle C est un paramètre qui intervient dans les inconnues du problème. On rappelle que les inconnues des problèmes aux limites mixtes linéarisés du chapitre 2 sont : les corrections de surface mouillée et le potentiel des déplacements. De ce fait, l'amplitude C est un paramètre qui intervient dans le calcul de la pression MLM et donc dans l'établissement des efforts hydrodynamiques. Dans cette section, nous caractérisons les effets de l'amplitude de la houle sur les efforts hydrodynamiques. Pour cela, nous confrontons les cas tests à amplitude C fixée aux cas tests à période T fixée. L'effet de la période T sur les efforts hydrodynamiques est déjà connu car cela revient à modifier la vitesse de propagation de la houle au travers de la vitesse de phase V_φ. Du fait de la linéarisation du problème de Wagner, changer la vitesse de phase revient à modifier la vitesse d'avance relative (V_{arp}) de la parabole. Á titre d'exemple, si la houle se propage à $2\,m.s^{-1}$ de la gauche vers la droite et que la parabole impact obliquement, de la droite vers la gauche, la houle avec une vitesse d'avance de $5\,m.s^{-1}$. Cela revient à traiter l'impact d'une parabole avec une vitesse d'avance relative allant de la droite vers la gauche égale à $3\,m.s^{-1}$ sur une surface libre au repos. Or nous savons que, *a priori*, l'augmentation de la vitesse d'avance de la houle sur une surface libre plane ne change pas la valeur initiale des efforts hydrodynamiques, mais les fait diminuer plus rapidement au cours de temps (ann. B.7).

Nous utilisons uniquement les modèles non-asymptotiques d'impact sur houle d'Airy monochromatique (sec. 2.3 et part. 2.4.4). Pour ce travail nous introduisons les coefficients $C_p(y,t)$ et $C_s(t)$ sans dimension et propres à l'impact hydrodynamique. Ils sont définis aux équations (3.2a) et (3.2b) :

$$\begin{cases} C_p(y,t_i) = \dfrac{P_{mlm}(y,t_i)}{\frac{1}{2}\rho W^2}\,, & \text{(3.2a)} \\ \\ C_s(t) = \dfrac{F_{mlm}(t)}{\frac{1}{2}\rho W^2 R_p}\,. & \text{(3.2b)} \end{cases}$$

Les $C_p(y,t_i)$ sont calculés pour $t = 0.01\,s$, c'est-à-dire pour une profondeur de pénétration de $0.05\,m$ et la vitesse verticale de la parabole est toujours égale $5\,m.s^{-1}$.

Pour comparer les efforts hydrodynamiques, nous utilisons la RMSE (*Root Mean Square Error* de l'anglais ou Erreur Quadratique Moyenne en français) un indicateur d'écart standard et rappelé en annexe B.5.

Dans cette section, on insiste sur le fait que contrairement aux sections 3.2 et 3.3 les cas tests d'impact des tableaux 3.1 et 3.2 sont utilisés avec et sans vitesse d'avance de la parabole. Ainsi la partie 3.4.1 porte sur l'effet de l'amplitude sans vitesse d'avance de la parabole et la partie 3.4.2 avec vitesse d'avance de la parabole.

3.4.1 Sans vitesse d'avance

Dans cette partie, nous comparons les cas tests à C fixée aux cas tests à T fixée pour toute la gamme des R_v présentée dans les tableaux 3.1 et 3.2. La parabole est uniquement animée d'une vitesse verticale de chute W assumée constante et égale à $5\,m.s^{-1}$. La vitesse d'avance relative de la parabole V_{arp} est donc égale à la vitesse de phase V_φ, mais allant de la droite vers la gauche. Le modèle utilisé est le modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance **na** (sec .2.3).

	RMSE $[N^\star]$		
$R_v\,[m]$	crête	creux	milieu
30	0,77%	0,91%	4,81%
9	1,30%	2,23%	4,30%
6	1,28%	2,80%	3,25%
5	0,96%	2,52%	2,52%
4	0,69%	2,21%	1,49%
2	1,59%	12,02%	1,65%

Table *3.29 – Tableau récapitulatif des RMSE(s) calculées pour les efforts hydrodynamiques entre les configurations C (Tab. 3.1) et T (Tab. 3.2) sans vitesse d'avance*

Le tableau 3.29 présente les RMSE(s) calculées pour les efforts hydrodynamiques obtenus par intégration des champs de pression MLM. Nous pouvons résumer ce tableau au moyen de la figure 3.53 :

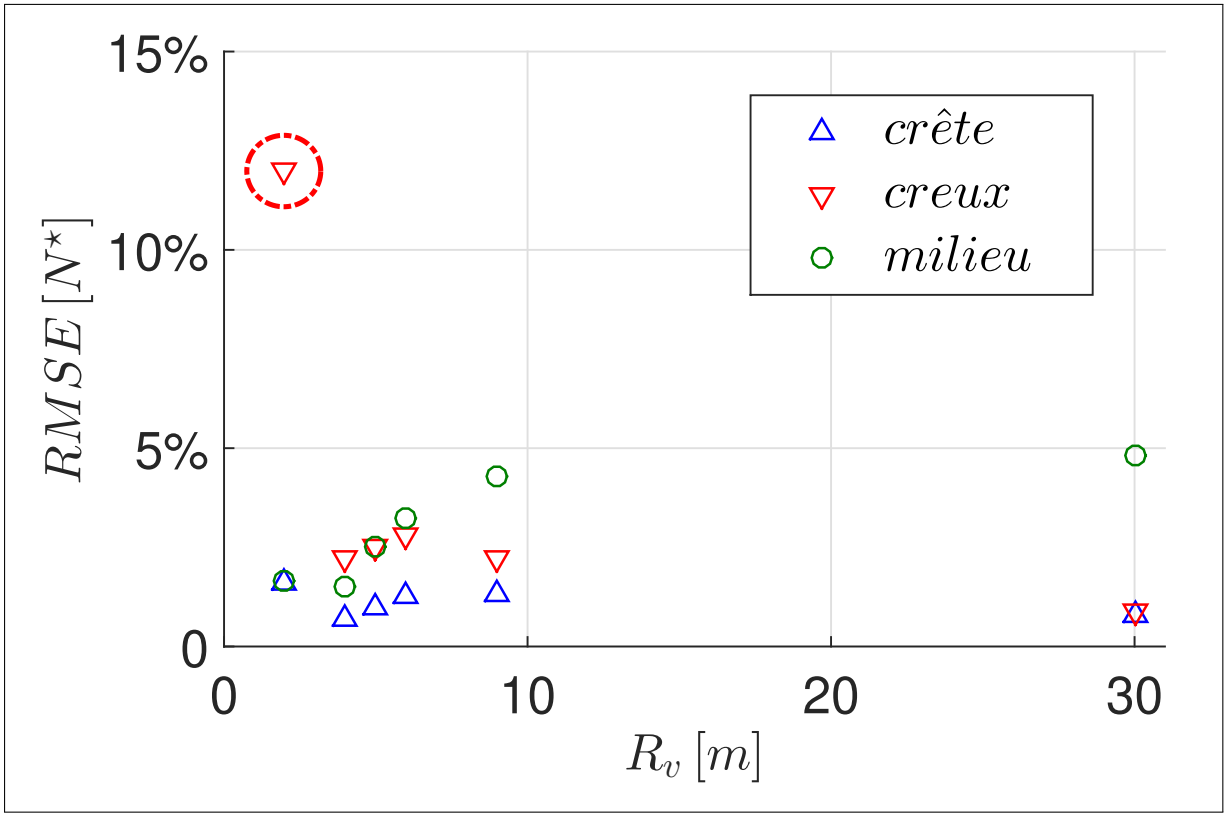

Figure *3.53 – Figure récapitulative des RMSE(s) calculées pour les efforts hydrodynamiques entre les configurations C (Tab. 3.1) et T (Tab. 3.2) sans vitesse d'avance de la parabole.*

Le tableau 3.29 et la figure 3.53 montrent que l'amplitude C ne semble pas être un paramètre significatif dans l'établissement des efforts hydrodynamiques MLM, sauf lorsque l'impact se produit dans le creux pour $R_v = 2\,m$. Pour cette configuration d'impact la RMSE est de l'ordre de 12%, alors que pour toutes les autres, les RMSE(s) sont inférieures à 5%.

Nous pouvons comparer les C_s et C_p pour des configurations d'impact au niveau de la crête et du creux pour $R_v = 2m$ (Fig(s). 3.54 et 3.55)

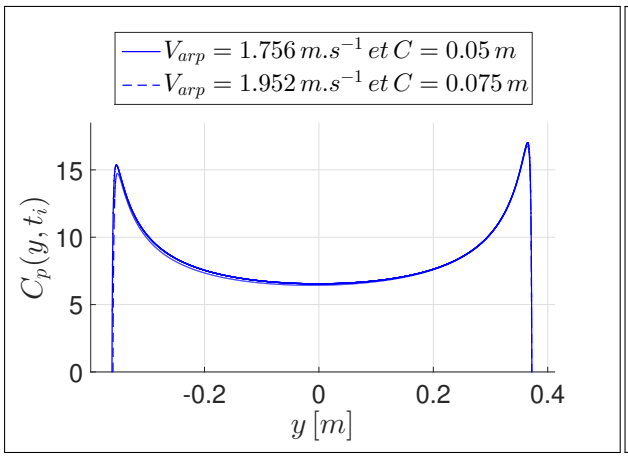

FIGURE 3.54 – $C_p(y,t_i)$ *crête cas test n°7.a (trait) et n°7.b (tirets)* $R_v = 2\,m$

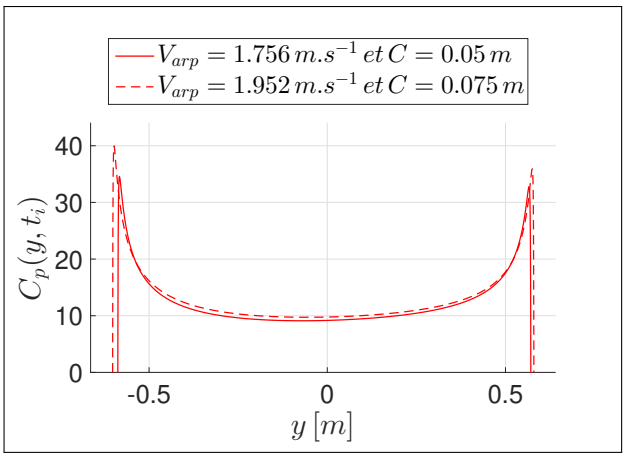

FIGURE 3.55 – $C_p(y,t_i)$ *creux cas test n°7.a (trait) et n°7.b (tirets)* $R_v = 2\,m$

La figure 3.55 montre que lorsque l'impact se produit dans le creux, les coefficients de pression du cas test n°7.b surestiment les coefficients de pression du cas test n°7.a. Pour le cas test n°7.a la valeur de l'amplitude est de 0.05 m contre 0.075 m pour le cas test n°7.b. La courbe en tirets rouges surestiment celle en trait plein (Fig. 3.55). Dans le cas d'un impact au niveau de la crête, la figure 3.54 montre que les coefficients de pression sont confondus.

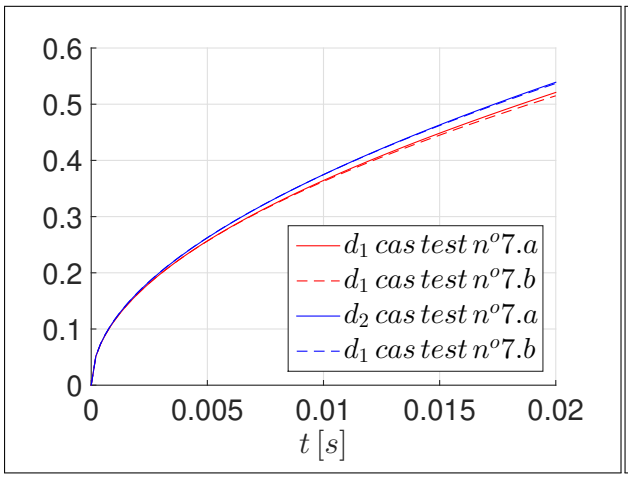

FIGURE 3.56 – *Correction de surface mouillée pour un impact au niveau de la crête cas test n°7.a et n°7.b* ($R_v = 2\,m$)

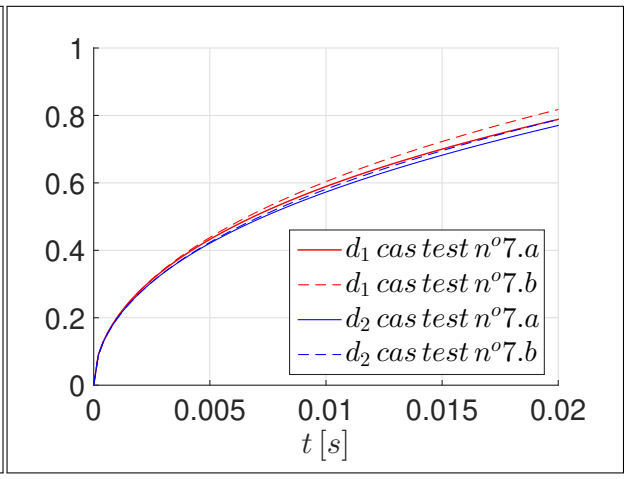

FIGURE 3.57 – *Correction de surface mouillée pour un impact au niveau du creux cas test n°7.a et n°7.b* ($R_v = 2\,m$)

Les figures 3.56 et 3.57 montrent que pour un impact au niveau du creux, les corrections de surface mouillée du cas test n°7.b surestiment celles du cas test n°7.a. De plus la vitesse de phase pour le cas test n°7.a est inférieure à celle du cas test n°7.b : $1.756\,m.s^{-1}$ (tirets) contre $1.952\,m.s^{-1}$ (trait plein). Or nous savons que pour l'impact d'une parabole sur une surface libre plane que plus la vitesse d'avance est importante plus elle fait diminuer l'intensité des efforts hydrodynamiques au cours du temps (ann. B.7). Donc les C_s du cas test n°7.b (tirets) sont censés être moins importants que ceux du cas test n°7.a (trait plein).

Examinons les C_s pour ces deux cas tests et pour des impacts aux niveaux de la crête et du creux pour $R_v = 2\,m$ (Fig. 3.58).

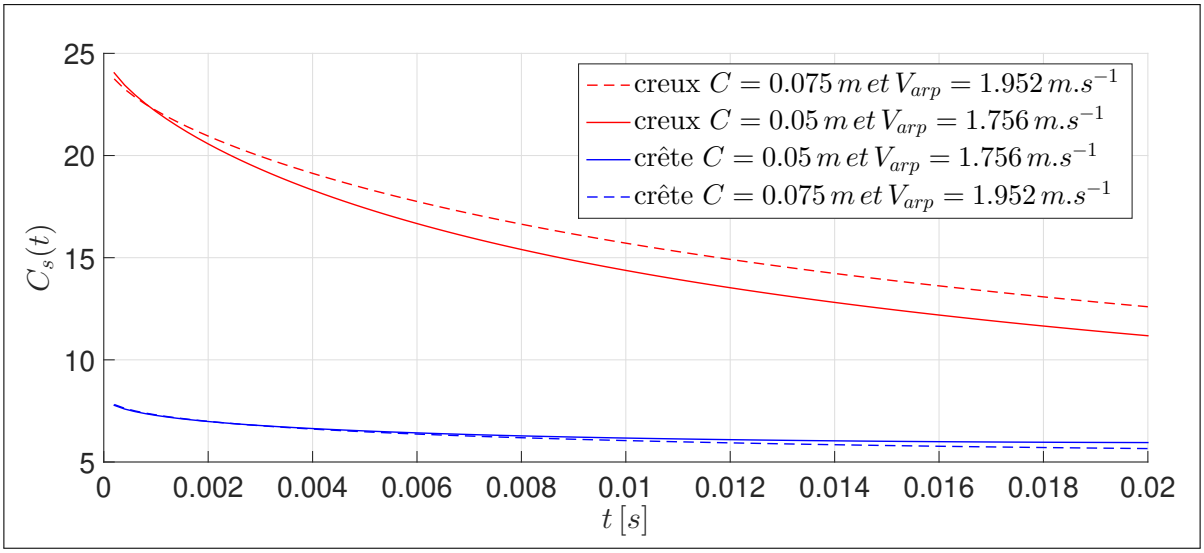

FIGURE *3.58 – $C_s(t)$ pour des impacts au niveau de la crête et du creux : cas test n°7.a (trait) et n°7.b (tirets) $R_v = 2\,m$*

La figure 3.58 montre que, pour un impact au niveau du creux, les C_s du cas test n°7.b surestiment ceux du cas test n°7.a même si la vitesse de phase du cas test n°7.b est plus importante que celle du n°7.a. On montre donc que pour un impact au niveau du creux, lorsque $R_v \approx R_p$, l'amplitude C est un paramètre significatif sur l'évolution des efforts hydrodynamiques. La figure 3.58 montre aussi que lorsque l'impact se produit au niveau de la crête, nous sommes en accord avec les effets de la vitesse d'avance sur l'évolution des efforts hydrodynamiques dans le cadre d'une surface libre plane.

Nous pouvons regarder les C_s pour les cas tests n°2.a et n°2.b même si les RMSE(s) pour ces cas tests sont inférieures à 5%. Cette fois-ci la vitesse de phase du cas test n°2.a est supérieure à celle du cas test n°2.b : $2.568\,m.s^{-1}$ (tirets) contre $1.952\,m.s^{-1}$ (trait plein).

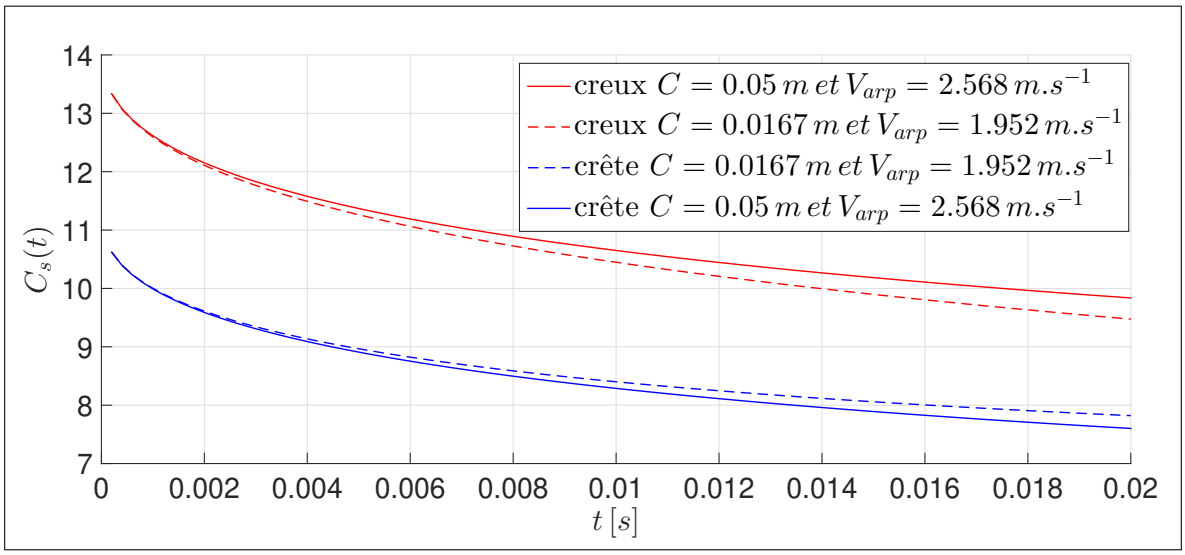

FIGURE *3.59 – $C_s(t)$ pour des impacts au niveau de la crête et du creux : cas test n°2.a et n°2.b ($R_v = 9\,m$)*

La figure 3.59 montre que pour les cas tests n°2.a et n°2.b, on retrouve les mêmes tendances que pour les cas tests n°7.a et n°7.b lorsque l'impact se produit au niveau de la crête ou du creux de la houle d'Airy.

Pour un impact au niveau de la crête, nous sommes en accord avec les effets de la vitesse d'avance dans le cadre d'une surface libre plane. Pour un impact au niveau du creux, c'est une nouvelle fois l'opposé. On met donc en évidence un effet de l'amplitude sur l'évolution des efforts hydrodynamiques pour un impact au niveau du creux lorsque $R_v = 9m$.

Intéressons nous maintenant aux configurations d'impact au niveau du milieu de la pente de la houle d'Airy.

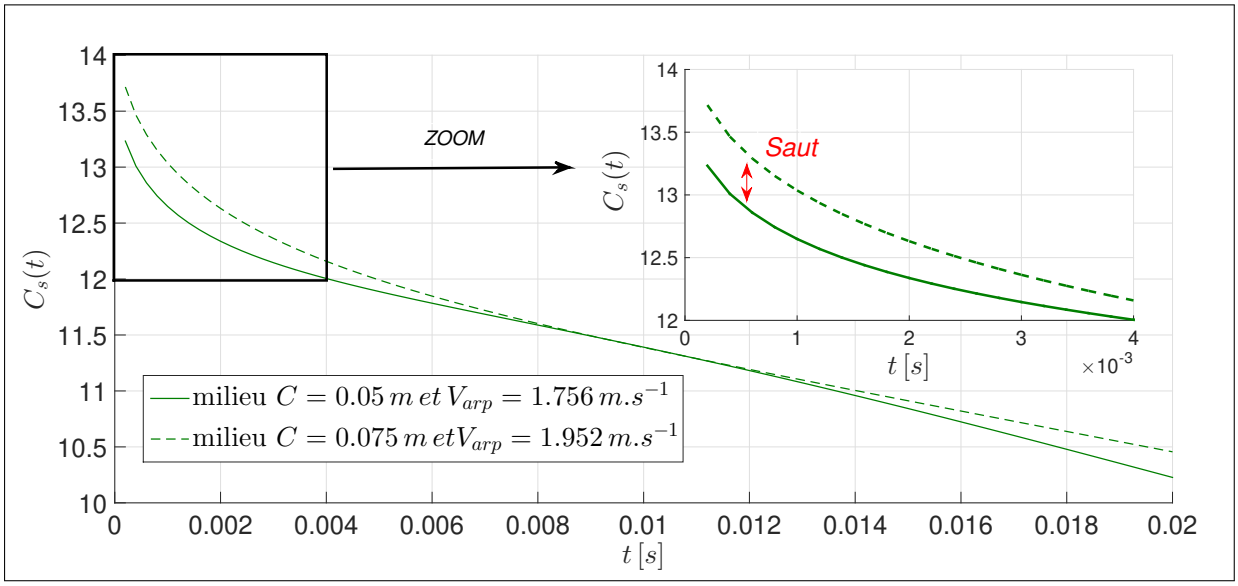

FIGURE *3.60 – $C_s(t)$ pour un impact au niveau du milieu : cas test n°7.a et n°7.b ($R_v = 2\,m$)*

La figure 3.60 montre que lors d'un impact au milieu de la pente, contrairement aux configurations d'impact aux niveaux de la crête et du creux, les efforts hydrodynamiques aux tous premiers instants ne sont pas égaux. De plus comme dans le cadre d'un impact au niveau du creux, la courbes des efforts hydrodynamiques admettant la V_{arp} la plus importante surestime celle admettant la V_{arp} la moins importante.

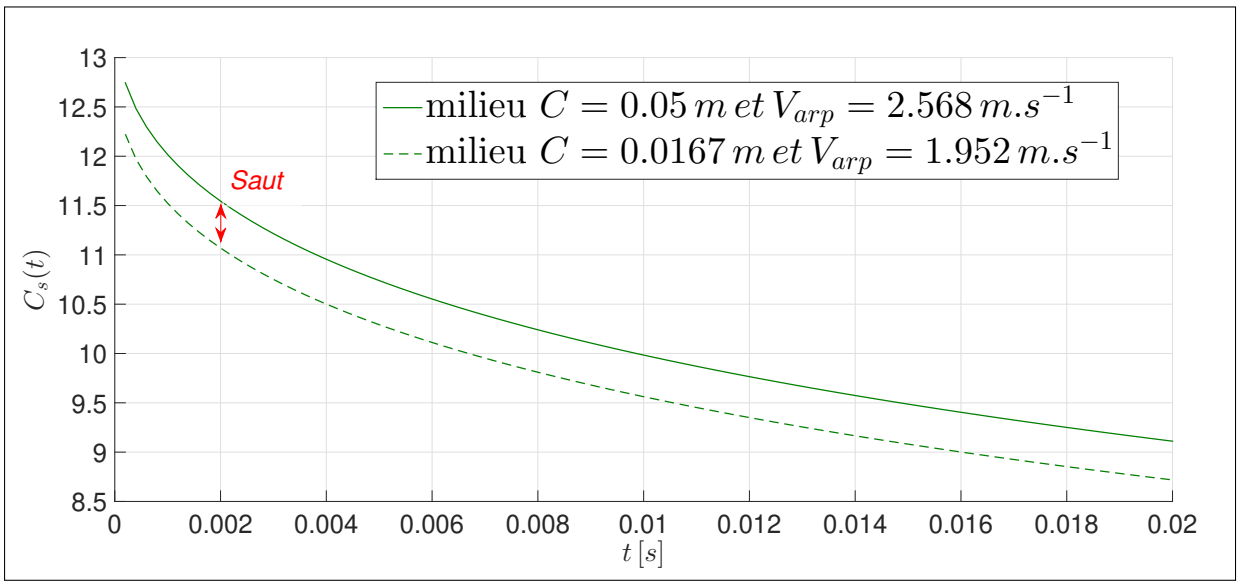

FIGURE *3.61 – $C_s(t)$ pour un impact au niveau du milieu : cas test n°2.a et n°2.b ($R_v = 9\,m$)*

La figure 3.61 montre que de façon analogue à $R_v = 2m$, les efforts hydrodynamiques ne sont pas égaux aux premiers instants de pénétration. Nous montrons aussi que cet écart se conserve tout le long de la simulation contrairement au cas où $R_v = 2m$ (Fig. 3.60). En termes de vitesse avance relative de la parabole, on retouve aussi les mêmes tendances que dans le cas d'un impact au niveau du creux. C'est-à-dire que la courbe d'efforts hydrodynamiques en relation avec le cas test qui admet une V_{arp} plus importante surestime le cas test qui admet une V_{arp} moins importante.

Observations sur l'effet de la vitesse de phase et de l'amplitude sur l'évolution des efforts hydrodynamiques sans vitesse d'avance de la parabole

Dans la partie 3.4.1 nous avons montré que l'amplitude de la houle C ne semble pas avoir d'effet significatif sur l'évolution des efforts hydrodynamiques (Fig. 3.53), sauf lorsque l'impact se produit au niveau du creux pour $R_v = 2\,m$. Nous rappelons que dans la partie 3.4.1 la vitesse d'avance relative de la parabole est égale à l'opposée de la vitesse de phase de la houle d'Airy. Néanmoins après avoir examinés les coefficients de slamming $C_s(t)$ pour les cas tests n°7.a, n°7.b, n°2.a et n°7.b nous avons montré que l'évolution des efforts hydrodynbamiques est gouvernée par deux paramètres, l'amplitude C et la vitesse de phase de la houle V_φ.

— Lorsque l'impact se produit au voisinage du creux, c'est les cas tests d'impact admettant une vitesse d'avance relative de la parabole la plus importante qui surestiment les cas tests admettant la vitesse d'avance relative la moins importante.

— Lorsque l'impact se produit au voisinage de la crête, c'est les cas tests d'impact admettant une vitesse d'avance relative de la parable la moins importante qui surestiment les cas tests admettant la vitesse d'avance relative la plus importante.

— Lorsque l'impact se produit au voisinage du milieu, c'est les cas tests d'impact admettant une vitesse d'avance relative de la parabole la plus important qui surestime les cas tests admettant la vitesse d'avance relative la moins importante.

Nous savons que dans le cadre de configurations d'impact sur une surface libre plane, que plus la vitesse d'avance de la parabole (ou ici la vitesse de phase de la houle) est importante, alors les efforts hydrodynamiques décroissent rapidement au cours du temps (ann. B.7). Nous concluons donc au moyen des observations précédentes, que dans certaines configurations d'impact sur houle l'amplitude de la houle C peut avoir un effet sur l'évolution des efforts hydrodynamiques en prenant le pas sur l'influence de la vitesse de phase de la houle. Pour plus d'informations sur l'effet de l'amplitude on peut se référer à la partie 3.4.4.

Les configurations où l'amplitude de la houle C est le paramètre significatif sur l'évolution des efforts hydrodynamiques au cours du temps sont lorsque l'impact se produit au niveau du creux ou du milieu de la pente de la houle d'Airy.

3.4.2 Avec vitesse d'avance

Dans cette partie, nous réalisons la même étude que la partie 3.4.1 mais cette fois-ci la parabole possède une vitesse d'avance allant dans le sens contraire au sens de propagation de la houle. Le modèle utilisé est le modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance **nava** (part. 2.4.4). Nous utilisons de nouveau les cas tests des tableaux 3.1 et 3.2 avec dans un premier temps une vitesse d'avance égale à $V = 5\,m.s^{-1}$. Cette fois la vitesse d'avance relative de la parabole, allant de la droite vers la gauche, est donc égale à : $V_{arp} = |V - V_\varphi|$.

Cas tests	$V_\varphi\,[m.s^{-1}]$	$V\,[m.s^{-1}]$	$V_{arp}\,[m.s^{-1}]$
n°7.a	1,756	5,00	3,244
n°7.b	1,952	5,00	3,048
n°2.a	2,568	5,00	2,432
n°2.b	1,952	5,00	3,048

Table *3.30 – Tableau récapitalif des vitesses d'avance relatives de la parabole, allant de la droite vers la gauche, avec une vitesse d'avance de* $V = 5\,m.s^{-1}$

Pour faciliter la compréhension des observations de cette partie, le tableau 3.30 résume les valeurs des vitesses d'avance relatives V_{arp} de la parabole pour les cas tests concernés.

	RMSE $[N^\star]$		
$R_v\,[m]$	crête	creux	milieu
30	1,65%	1,98%	11,73%
9	2,68%	4,72%	12,81%
6	2,53%	5,58%	10,61%
5	2,02%	5,18%	8,81%
4	1,40%	4,20%	5,70%
2	3,10%	16,14%	11,72%

Table *3.31 – Tableau récapitulatif des RMSE(s) calculées pour les efforts hydrodynamiques entre les configurations C (Tab. 3.1) et T (Tab. 3.2) avec vitesse d'avance* $V = 5\,m.s^{-1}$

Le tableau 3.29 présente les RMSE(s) calculées pour les efforts hydrodynamiques obtenus par intégration des champs de pression MLM lorsque la parabole possède une vitesse d'avance égale à $V = 5\,m.s^{-1}$. Pour les vitesses d'avance relatives V_{arp}, nous pouvons nous référer au tableau 3.30. On résume le tableau 3.31 au moyen de la figure 3.62 :

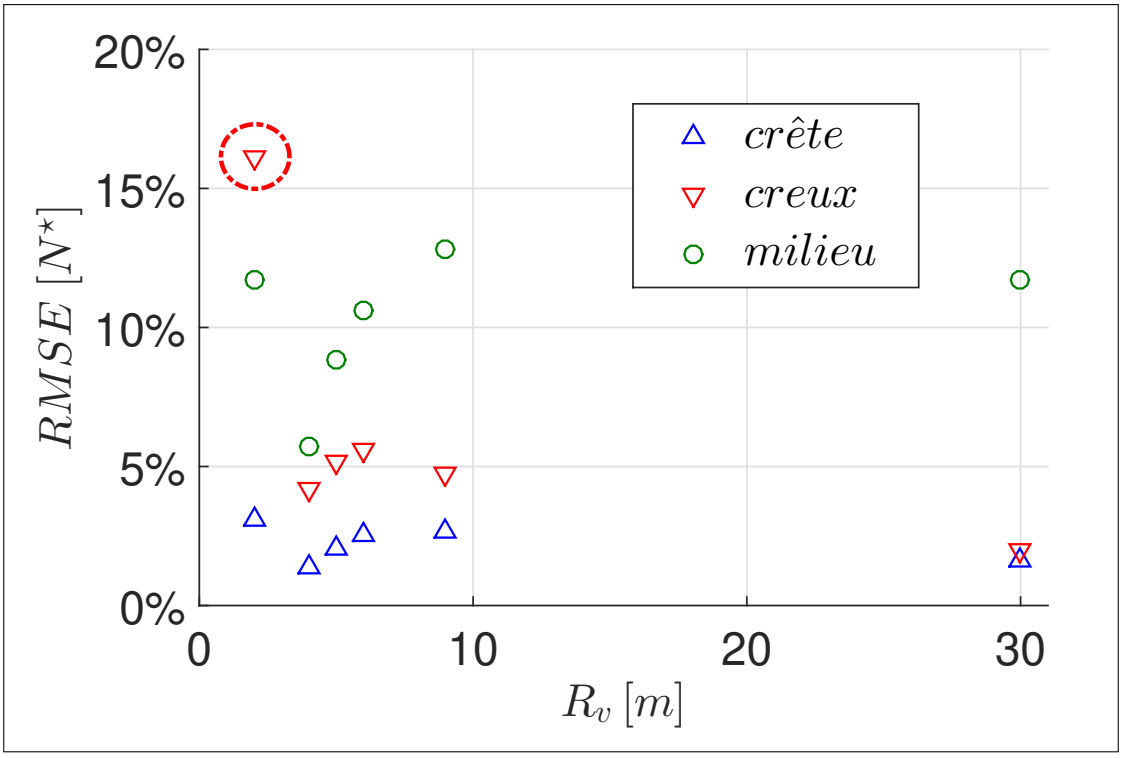

Figure 3.62 – *Figure récapitulative des RMSE(s) calculées pour les efforts hydrodynamiques entre les configurations C (Tab. 3.1) et T (Tab. 3.2) avec vitesse d'avance* $V = 5\,m.s^{-1}$.

Le tableau 3.31 ainsi que la figure 3.62, montre que l'ajout d'une vitesse d'avance à la cinématique de la parabole ne change pas les observations de la partie 3.4.1 lorsque l'impact se produit au niveau de la crête ou du creux. Nous retrouvons le cas particulier propre à la configuration d'impact au voisinage du creux lorsque $R_v = 2\,m$ qui engendre une RMSE de l'ordre de 16%. Lorsque l'impact se produit au niveau du milieu de la pente, les résultats ne sont pas en accord avec la partie 3.4.1. Nous constatons que pour la gamme des R_v testée les RMSE(s) propres à une configuration d'impact au milieu de la pente sont comprises entre 5% et 15%. Cette dernière observation démontre que l'ajout d'une vitesse d'avance à un effet significatif sur l'évolution des efforts hydrodynamiques calculés au moyen du formalisme MLM lorsque l'impact se produit au voisinage de milieu de la pente. Pour s'en convaincre visualisons les coefficients de slamming pour $R_v = 2\,m$ et $R_v = 9\,m$ et les trois positions d'impact :

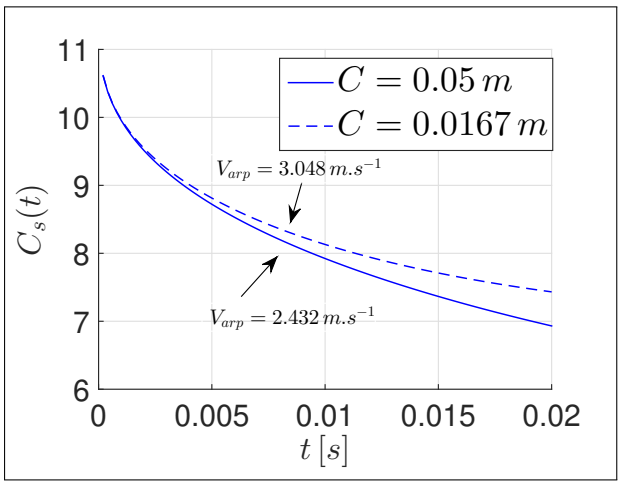

Figure 3.63 – *Cs position crête avec vitesse d'avance - cas test n°2.a et n°2.b* $R_v = 9\,m$

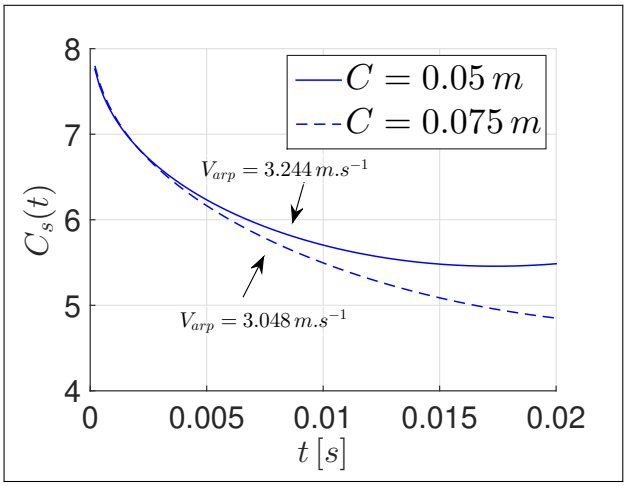

Figure 3.64 – *Cs position crête avec vitesse d'avance - cas test n°7.a et n°7.b* $R_v = 2\,m$

Les figures 3.63 et 3.64 montre que de façon opposée à la partie 3.4.1, lorsque l'impact se produit au niveau de la crête. L'amplitude de la houle a un effet sur le comportement des efforts hydrodynamiques. En termes de vitesse d'avance relative les tendances sont opposées à celles d'un impact d'une surface libre plane. Les courbes d'effort admettant les V_{arp} plus grandes surestiment les courbes d'effort admettant les V_{arp} les plus petites pour $R_v = 2\,m$ et $R_v = 9\,m$. De plus les courbes d'efforts admettant l'amplitude la plus importante sous-estiment celle admettant l'amplitude la moins importante. Nous mettons en évidence ici un phénomène de « skimming ».

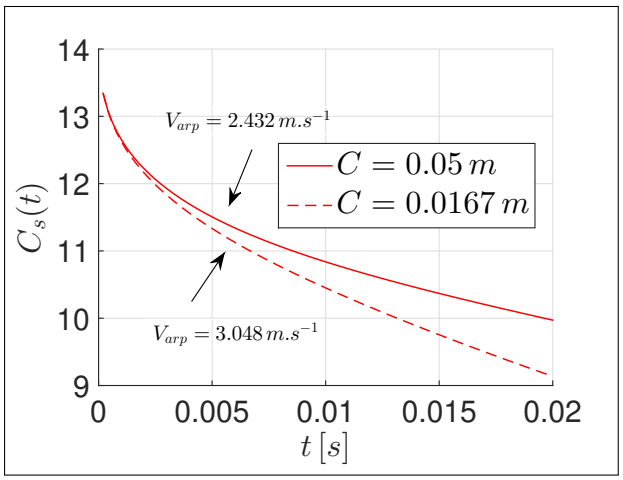

Figure *3.65 – Cs position creux avec vitesse d'avance - cas test n°2.a et n°2.b* $R_v = 9\,m$

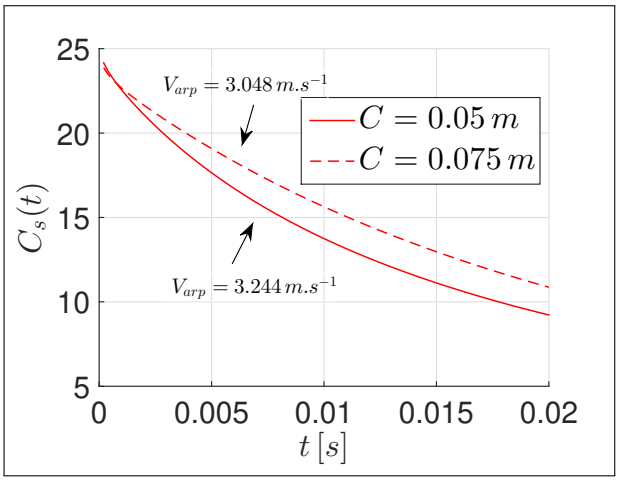

Figure *3.66 – Cs position creux avec vitesse d'avance - cas test n°2.a et n°2.b* $R_v = 2\,m$

Les figures 3.65 et 3.66 présentent des tendances opposées à la partie 3.4.1 pour l'évolution des efforts hydrodynamiques lorsque l'impact se produit au niveau du creux. Les courbes d'effort en relation avec les cas tests qui présentent les V_{arp} les plus importantes sous-estiment les courbes présentant des V_{arp} les moins importantes. Nous retrouvons donc les tendances propres à l'impact d'une parabole sur une surface libre plane. C'est la vitesse d'avance de la parabole qui guident l'évolution des efforts hydrodynamiques.

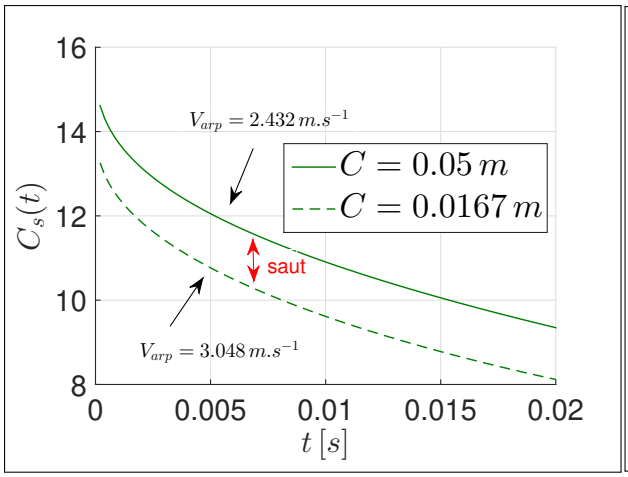

Figure *3.67 – Cs position milieu avec vitesse d'avance - cas test n°2.a et n°2.b* $R_v = 9\,m$

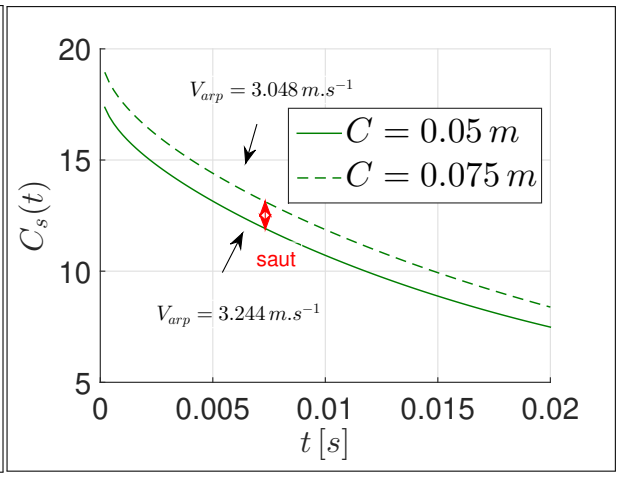

Figure *3.68 – Cs position milieu avec vitesse d'avance - cas test n°2.a et n°2.b* $R_v = 2\,m$

Les figures 3.67 et 3.68 confirment que nous avons exactement les mêmes tendances que lorsque l'impact se produit au voisinage du creux avec vitesse d'avance. On retrouve aussi l'effet de « saut » de la partie 3.4.1. On montre ici que c'est la vitesse d'avance de la parabole qui guident l'évolution des efforts hydrodynamiques lorsque l'impact se produit au niveau du milieu de la pente.

Observations sur l'effet de la vitesse de phase et de l'amplitude sur l'évolution des efforts hydrodynamiques avec vitesse d'avance de la parabole

Dans la partie 3.4.2, en examiant les RMSE(s) (Fig. 3.31), nous avons montré comme dans la partie 3.4.1 que l'amplitude de la houle C ne semble pas avoir d'effet significatif sur l'évolution des efforts hydrodynamiques. Sauf lorsque l'impact se produit au niveau du creux pour $R_v = 2\,m$. En analysant les $C_s(t)$ pour les cas tests d'impact n°7.a, n°7.b, n°2.a et n°7.b nous avons montré que l'évolution des efforts hydrodynamiques dans le cadre d'impact sur houle d'Airy monochromatique avec vitesse d'avance est guidée par deux paramètres : l'amplitude C et la vitesse d'avance relative de la parabole V_{arp}.

— Lorsque l'impact se produit au voisinage du creux avec vitesse d'avance, c'est les cas tests d'impact admettant une vitesse d'avance relative de la parabole la moins importante qui surestiment les cas tests admettant la vitesse d'avance relative la plus importante.

— Lorsque l'impact se produit au voisinage de la crête avec vitesse d'avance, c'est les cas tests d'impact admettant une vitesse d'avance relative de la parable la plus importante qui surestiment les cas tests admettant la vitesse d'avance relative la moins importante.

— Lorsque l'impact se produit au voisinage du milieu avec vitesse d'avance, c'est les cas tests d'impact admettant une vitesse d'avance relative de la parabole la moins important qui surestiment les cas tests admettant la vitesse d'avance relative la plus importante.

3.4.3 Influence de la vitesse d'avance sur l'effet de l'amplitude

Jusqu'à présent la vitesse d'avance de la parabole était fixée $5\,m.s^{-1}$. Le tableau 3.62 présente les RMSE(s) des configurations d'impact précédentes, mais cette fois-ci pour une gamme de vitesse d'avance de la parabole allant de $3\,m.s^{-1}$ à $8\,m.s^{-1}$.

$V\,[m.s^{-1}]$	3	4	5	6	7	8
RMSE milieu $R_v = 2\,m$	7,73%	9,78%	11,72%	13,48%	15,13%	16,64%
RMSE milieu $R_v = 9\,m$	9,39%	11,11%	12,81%	14,49%	16,13%	17,74%
RMSE crête $R_v = 2\,m$	2,27%	2,65%	3,10%	3,62%	4,19%	4,83%
RMSE crête $R_v = 9\,m$	1,95%	2,29%	2,68%	3,12%	3,62%	4,17%
RMSE creux $R_v = 2\,m$	13,99%	14,99%	16,14%	17,39%	18,73%	20,18%
RMSE creux $R_v = 9\,m$	3,40%	4,01%	4,72%	5,53%	6,45%	7,48%

Table *3.32 – Tableau récapitulant les RMSE(s) pour plusieurs vitesses d'avance - pour $R_v = 2\,m$ et $R_v = 9\,m$*

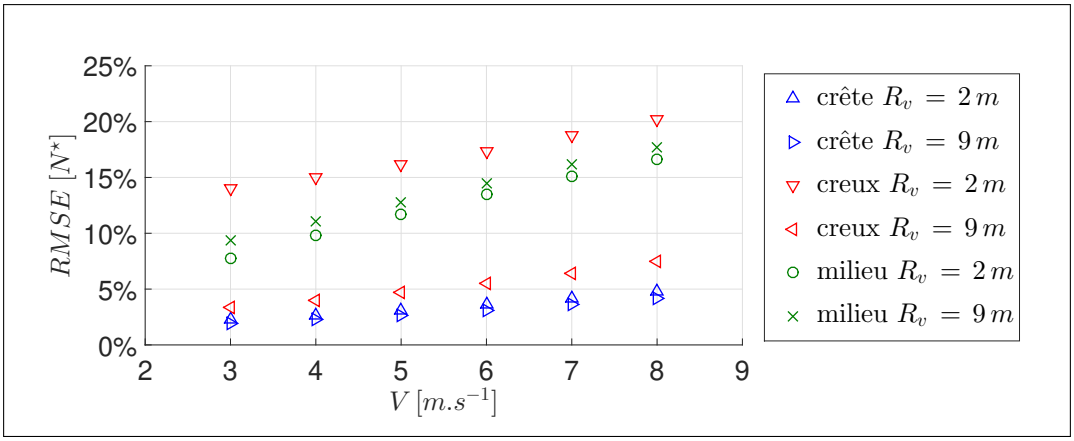

Figure *3.69 – Figure récapitulative des RMSE(s) calculées pour les efforts hydrodynamiques entre les configurations C (voir tableau 3.1) et T (voir tableau 3.2) pour plusieurs vitesses d'avance*

La figure 3.62 présente les RMSE(s) calculées entre les efforts hydrodynamiques pour les configurations C (cas tests n°2.a et n°7.a) et T (cas tests n°2.b et n°7.b) augmentent en fonction de la vitesse d'avance de la parabole. Cette augmentation semble être linéairement liée à la vitesse d'avance de la parabole. Nous constatons que les RMSE(s) les plus importantes sont obtenues pour les configurations d'impact suivantes :

- Impact dans le creux pour $R_v = 2\,m$.
- Impact au milieu de la pente pour $R_v = 9\,m$.
- Impact au milieu de la pente pour $R_v = 2\,m$.

Nous retrouvons donc les observations précédentes concernant les effets significatifs de la vitesse d'avance relatives de la parabole V_{arp} et de l'amplitude C sur les effort hydrodynamiques. En effet, ces $RMSE(s)$ augmentent bien en fonction de la vitesse d'avance de la parabole et sont les plus importantes lorsque l'impact se produit au voisinage du creux.

3.4.4 Conclusion sur l'effet de l'amplitude de la houle

Au sein des parties 3.4.1 et 3.4.2 nous avons montré que l'évolution des efforts hydrodynamiques dans le cadre d'impact sur houle d'Airy mononchromatique est gouvernée par deux paramètres : la vitesse d'avance relative de la parabole et son amplitude. Nous confirmons donc que :

- Lorsque l'impact se produit au niveau de la crête, on met en évidence un phénomène de « skimming », où la parabole vient en quelques sortes glisser sur la crête de la vague. Pour ces configurations d'impact c'est lorsque l'amplitude de la houle est la moins importantes que les efforts hydrodynamiques les plus intenses sont obtenus.
- Lorsque l'impact se produit au niveau du creux ou du milieu de la pente, c'est les configurations d'impact à forte amplitude qui produisent les efforts hydrodynamiques les plus importants. Dans ces configurations d'impact, la parabole pousse une masse d'eau plus importante et le paramètre prépondérant sur l'évolution des efforts hydrodynamiques est l'amplitude de la houle C.

Enfin, nous concluons donc qu'en plus de la vitesse d'avance relative de la parabole l'amplitude de la houle est un paramètre prépondérant sur l'évolution des efforts hydrodynamiques d'impact même si au moyen du modèle de [Wagner, 1932] la forme de la surface libre est linéarisée.

3.5 Variations temporelle et spatiale des champs de pression pour les modèles asymptotiques

Dans cette section nous étudions les variations temporelles et spatiales des champs de pression calculés au moyen du modèle de [Wagner, 1932] sans formalisme MLM ou COMP (sec. 2.5.5). Pour réaliser cette étude, on s'appuie sur les travaux de [Scolan & Korobkin, 2012]. Le modèle de [Wagner, 1932] admet une limitation majeure qui porte sur le signe de la pression calculée au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée. Comme expliqué dans [Scolan & Korobkin, 2012], si la pression devient négative, alors le modèle n'est plus valide. D'après les travaux de [Howison et al., 2004] et [Moore et al., 2012], ce phénomène peut se produire lors de configurations d'impact avec vitesse d'avance. En pratique, la pression peut devenir négative lorsque la vitesse d'avance V est significativement supérieure à la vitesse de chute W. Nous précisons que dans cette section nous travaillons dans le repère mobile $(O, \tilde{y}(t), z)$ attaché à la parabole (Fig. 2.10).

Pour mener à bien cette étude nous utilisons les résultats théoriques des paragraphes 2.5.4.1 et 2.5.4.2 au travers des modèles asymptotiques **ncva**, **ntva** **m1va** et **m3va**. La vitesse de chute de la parabole est toujours fixée à $5\,m.s^{-1}$.Trois vitesses d'avance sont implémentées pour les trois positions d'impact : $10.0\,m.s^{-1}$, $12.5\,m.s^{-1}$ et $15.0\,m.s^{-1}$.

Dans le cadre d'une surface libre plane et au repos, nous savons d'ors et déjà que la valeur de $\mathcal{Y}_0$ est indépendante de la vitesse d'avance de la parabole et égale à :

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{avec}\,, & \text{(3.3a)} \\ t_0 = \dfrac{R_p W}{2V^2} \quad \text{et} \quad t_0 = 2t_f\,. & \text{(3.3b)} \end{cases}$$

Le but de cette partie est donc déterminer la coordonnée $\mathcal{Y}_0$ et l'instant t_0 où la pression passe sous la pression de référence fixée zéro Pa pour une surface libre de type houle d'Airy. Nous déterminons aussi l'instant t_f où la pression calculée au moyen du modèle de Wagner est négative jusqu'à la borne droite de la surface mouillée.

$V\,[m.s^{-1}]$	10,0	12,5	15,0
$t_0\,[s]$	0,025	0,016	0,011
$t_f\,[s]$	0,050	0,032	0,022

Table *3.33 – Tableau des valeurs de t_0 et t_f de référence pour l'impact d'une parabole avec vitesse d'avance sur une surface libre plane $W = 5\,m.s^{-1}$*

Le tableau 3.33 rend compte des valeurs théoriques de t_0 et t_f pour l'impact d'une parabole sur une surface libre plane.

3.5.1 Variations temporelle et spatiale pour des impacts au niveau de la crête et du creux

Au sein de cette partie, nous traitons les variations temporelle et spatiale des champs de pression de Wagner uniquement pour des configurations d'impact au niveau de la crête et du creux. Les modèles utilisés sont les modèles **ncva** et **ntva** (paragr. 2.4.3.1).

$R_v\,[m]$	30			5			2		
$V\,[m.s^{-1}]$	10,0	12,5	15,0	10,0	12,5	15,0	10,0	12,5	15,0
$t_0\,[s]$	0,024	0,015	0,011	0,021	0,014	0,010	0,019	0,012	0,008
$\mathcal{Y}_0$	0,691	0,692	0,694	0,619	0,624	0,628	0,517	0,530	0,539
$\tilde{y}_0\,[m]$	0,470	0,377	0,315	0,358	0,291	0,245	0,244	0,203	0,173
$t_f\,[s]$	0,049	0,031	0,022	0,045	0,290	0,020	0,042	0,027	0,019
$\mathcal{Y}_f$	1								
$\tilde{y}_f\,[m]$	0,961	0,770	0,643	0,818	0,660	0,552	0,669	0,542	0,455

Table *3.34 – Tableau récapitulatif de l'étude des variations temporelles et spatiales de la pression au sens de Wagner pour le modèle ncva*

Le tableau 3.34 présente le couple de valeur $(\mathcal{Y}_0, t_0)$ à partir duquel le modèle de Wagner n'est plus valide, ainsi que la valeur t_f pour un impact au voisinage de la crête. Ce tableau peut-être récapitulé au moyen des figures 3.70 et 3.71.

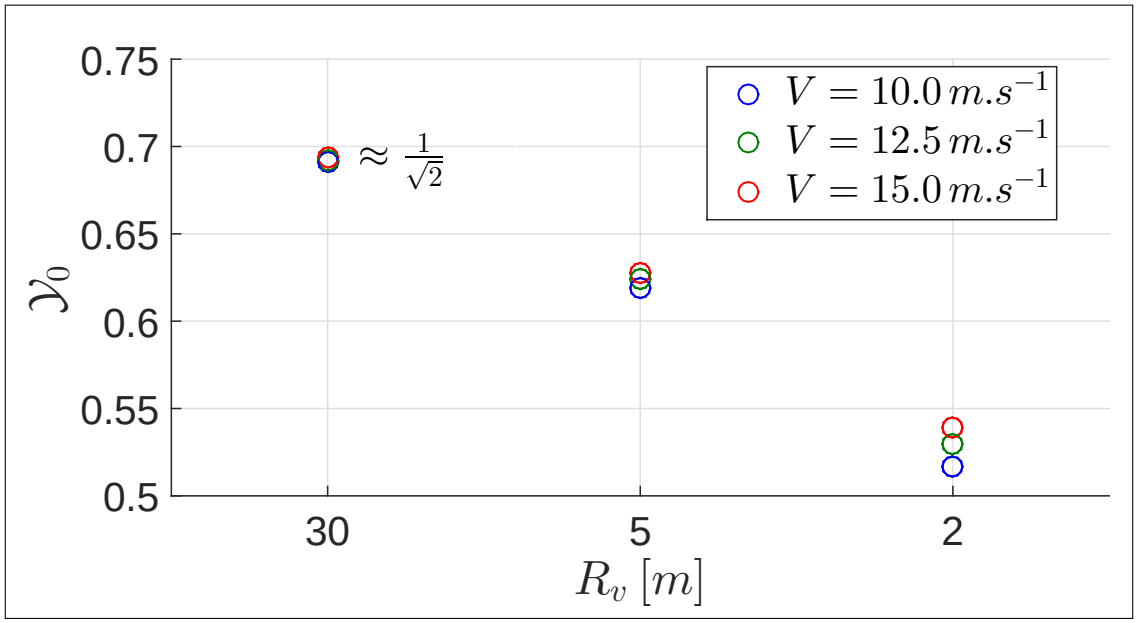

Figure *3.70 – Figure récapitulant les $\mathcal{Y}_0$ pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°7.b pour un impact au niveau de la crête.*

Lorsque l'impact se produit au niveau de la crête, la figure 3.70 montre que la coordonnée $\mathcal{Y}_0$ dépend de deux paramètres : la vitesse d'avance V et le rayon approché de la houle R_v. Nous constatons que plus le rayon de la houle et la vitesse d'avance sont faibles, alors plus $\mathcal{Y}_0$ est inférieur à la valeur de référence. Nous remarquons, que pour $R_v = 30\,m$ la valeur de $\mathcal{Y}_0$ tend vers la valeur de référence en relation avec l'impact d'une parabole sur une surface libre plane.

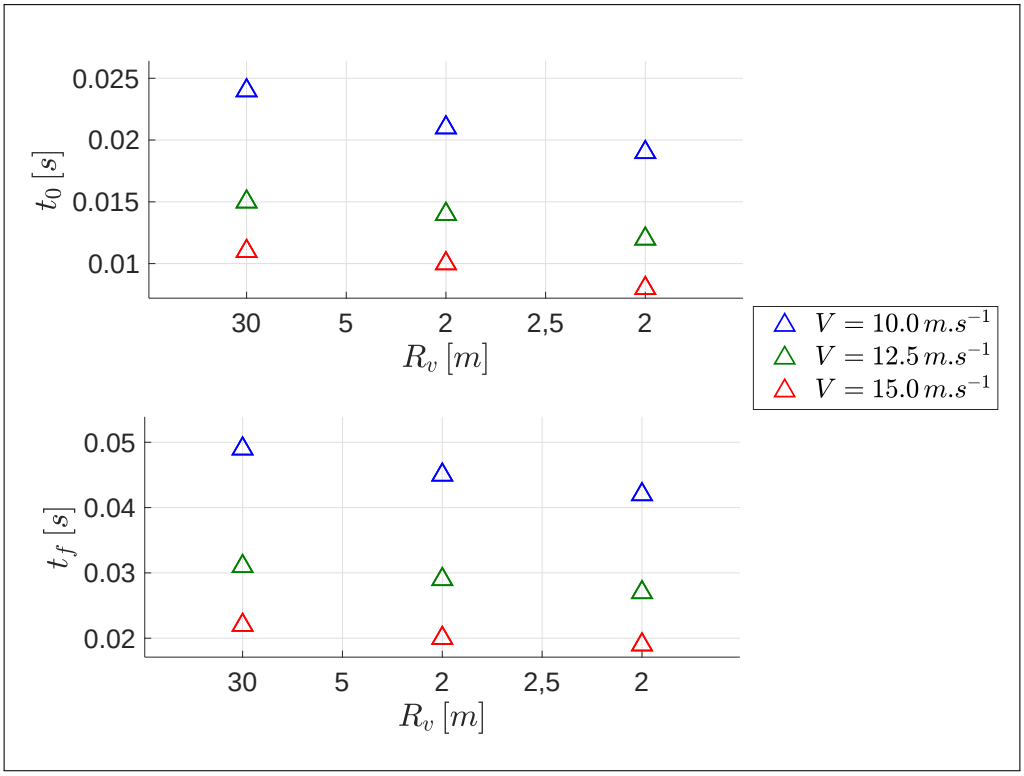

Figure 3.71 – *Figure récapitulant les t_0 et t_f pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°7.b pour un impact au niveau de la crête.*

Quand l'impact se produit au voisinage de la crête, la figure 3.71 montre que les instants t_0 et t_f dépendent aussi de deux paramètres. Plus la vitesse d'avance V de la parabole est importante et le rayon de la houle R_v proche du rayon de la parabole R_p alors, plus les valeurs de t_f et t_0 sont inférieures aux valeurs de référence (Tab. 3.33). Nous remarquons que pour $R_v = 30\,m$, les valeurs de t_0 et t_f sous-estiment légèrement les valeurs présentées dans le tableau 3.33. Nous pouvons nous référer à l'annexe B.8 pour visualier au moyen de figures la valeur de $\mathcal{Y}_0$ pour $V = 15\,m.s^{-1}$ et $R_v = 30\,m$ (Fig(s). B.26 et B.27).

Le tableau 3.35 résument le couple de valeurs $(\mathcal{Y}_0, t_0)$ ainsi que la valeur t_f pour un impact au voisinage du creux. Ce tableau est récapitulé au moyen des figures 3.73 et 3.72.

$R_v\,[m]$	30			5			3		
$V\,[m]$	10,0	12,5	15,0	10,0	12,5	15,0	10,0	12,5	15,0
$t_0\,[s]$	0,026	0,017	0,012	0,035	0,022	0,015	0,062	0,036	0,023
$\mathcal{Y}_0$	0,724	0,723	0,722	0,824	0,817	0,812	0,927	0,914	0,905
$\tilde{y}_0\,[m]$	0,535	0,426	0,354	0,815	0,634	0,519	1,519	1,103	0,869
$t_f\,[s]$	0,051	0,033	0,023	0,064	0,040	0,274	0,104	0,060	0,039
$\mathcal{Y}_f$	1								
$\tilde{y}_f\,[m]$	0,051	0,833	0,694	1,399	1,098	0,904	2,318	1,707	1,358

Table 3.35 – *Tableau récapitulatif de l'étude des variations temporelles et spatiales de la pression au sens de Wagner pour le modèle* ***ntva***

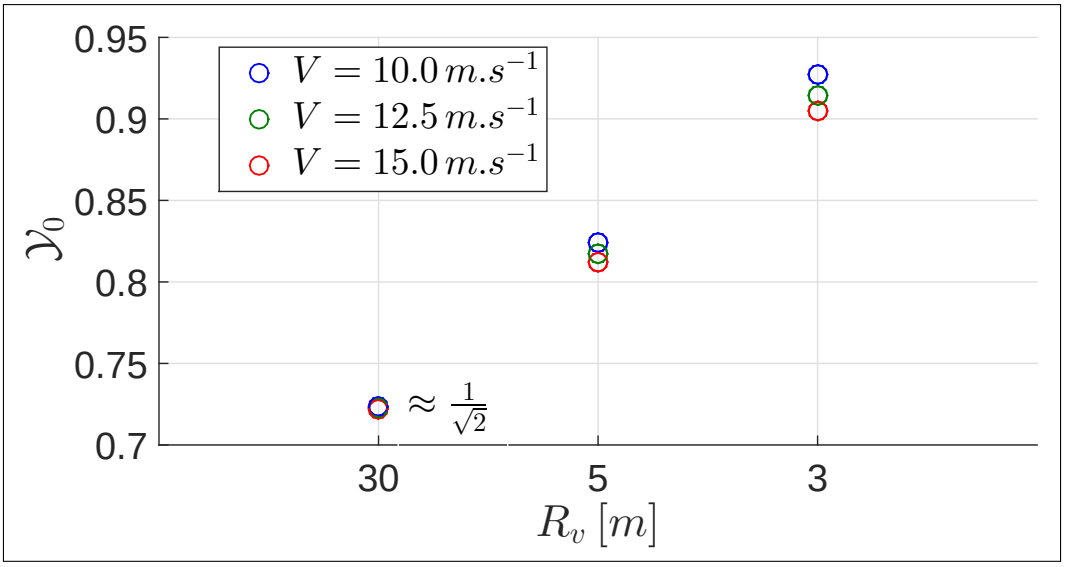

Figure *3.72 – Figure récapitulant les $\mathcal{Y}_0$ pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°6.b pour un impact au niveau du creux.*

De façon analogue à l'impact d'une parabole au niveau d'une crête, lorsque l'impact se produit au niveau d'un creux, $\mathcal{Y}_0$ dépend de V et de R_v. La figure 3.72 montre que plus R_v est grand et V petit, alors plus $\mathcal{Y}_0$ est supérieur à la valeur de référence. Nous confirmons aussi que pour $R_v = 30\,m$ $\mathcal{Y}_0$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

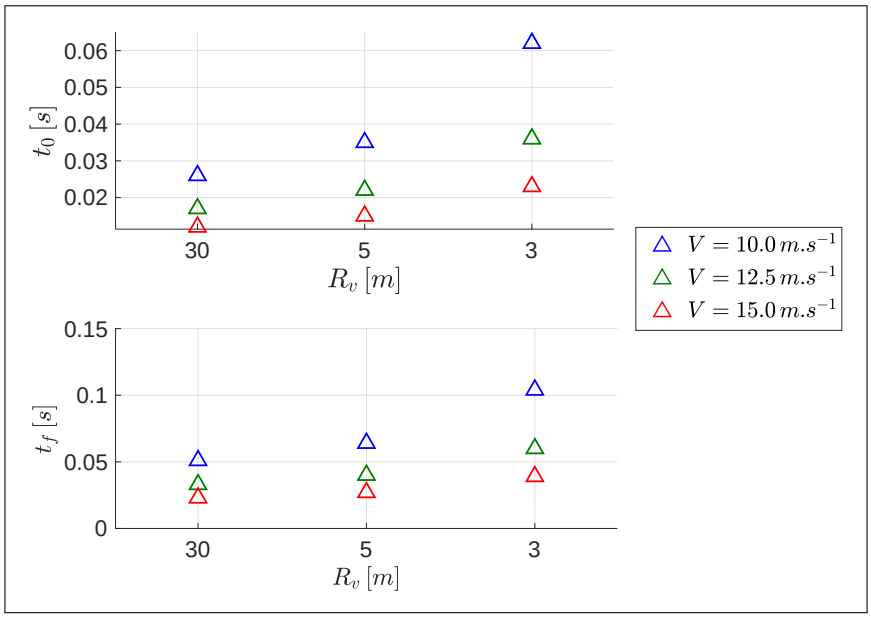

Figure *3.73 – Figure récapitulant les t_0 et t_f pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°6.b pour un impact au niveau du creux.*

La figure 3.73 montre que t_0 et t_f suivent exactement les mêmes tendances que $\mathcal{Y}_0$. Les valeurs de t_0 et t_f augmentent lorsque le rayon approché de la houle diminue et la vitesse d'avance de la parabole est faible. Nous pouvons nous référer à l'annexe B.8 pour visualier au moyen de figures la valeur de $\mathcal{Y}_0$ pour $V = 15\,m.s^{-1}$ et $R_v = 5\,m$ (Fig(s). B.28 et B.29)

Nous notons qu'il s'agisse de configuration d'impact au niveau de la crête ou du creux, la valeur de t_f est toujours égale à deux fois la valeur de t_0 (Tab(s). 3.34 et 3.35) comme dans le cas d'une surface libre plane et au repos.

3.5.2 Variations temporelle et spatiale pour des impacts au niveau du milieu de la pente de la houle d'Airy

Au sein de cette partie, nous étudions les variations temporelle et spatiale des champs de pression de Wagner pour des configurations d'impact au niveau du milieu de la pente de la houle. Les modèles utilisés sont les modèles asymptotiques d'impact **m1va** et **m3va**.

$R_v\,[m]$	30			5			2		
$V\,[m]$	10,0	12,5	15,0	10,0	12,5	15,0	10,0	12,5	15,0
$t_0\,[s]$	0,026	0,017	0,012	0,030	0,020	0,014	0,037	0,025	0,018
$\mathcal{Y}_0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$								
$\tilde{y}_0\,[m]$	0,515	0,415	0,348	0,593	0,489	0,421	0,731	0,623	0,557
$t_f\,[s]$	0,052	0,033	0,023	0,059	0,039	0,028	0,073	0,050	0,037
$\mathcal{Y}_f$	1								
$\tilde{y}_f\,[m]$	0,729	0,587	0,492	0,838	0,692	0,595	1,034	0,882	0,780

Table *3.36 – Tableau récapitulatif de l'étude des variations temporelles et spatiales de la pression au sens de Wagner pour le modèle* ***m1va***

Le tableau 3.36 résume le couple $(\mathcal{Y}_0, t_0)$ ainsi que t_f lorsque l'impact se produit au niveau du milieu de la pente de la houle avec le modèle asymptotique **m1va**. On rappelle que ce modèle asymptotique approxime le profil de houle au moyen d'une droite de pente $C\kappa$. Ce tableau montre que de même que pour l'impact d'une surface libre plane et au repos, la valeur de $\mathcal{Y}_0$ vaut toujours $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il montre également que t_f vaut 2 fois t_0.

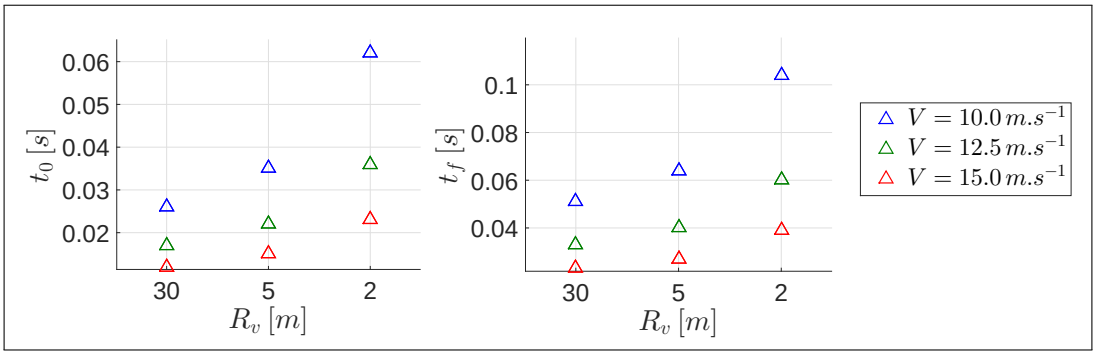

Figure *3.74 – Figure récapitulant les t_0 et t_f pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°7.b pour un impact au niveau du milieu avec le modèle au premier ordre.*

La figure 3.74 synthétise les valeurs de t_0 et t_f et montre qu'elles dépendent de R_v et V. Les tendances pour les instants t_0 et t_f sont identiques à celles d'une configuration d'impact au niveau du creux, à savoir que plus R_v tend vers R_p et que V est faible, plus t_0 et t_f sont grands.

Le tableau 3.37 rend compte du couple $(\mathcal{Y}_0, t_0)$ pour un impact au niveau du milieu de la pente au moyen du modèle **m3va** qui approxime la houle par un polynôme du troisième ordre. Pour cette configuration d'impact, contrairement au modèle qui approche la houle au moyen d'une droite, la valeur de $\mathcal{Y}_0$ n'est pas égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$R_v\,[m]$	30			5			2		
$V\,[m]$	10	12,5	15	10	12,5	15	10	12,5	15
$t_0\,[s]$	0,025	0,016	0,011	0,023	0,016	0,012	0,023	0,016	0,013
$\mathcal{Y}_0$	0,688	0,692	0,695	0,611	0,628	0,639	0,514	0,538	0,554
$\tilde{y}_0\,[m]$	0,246	0,200	0,169	0,238	0,205	0,180	0,248	0,222	0,203

Table *3.37 – Tableau récapitulatif de l'étude des variations temporelles et spatiales de la pression au sens de Wagner pour le modèle* ***m3va****.*

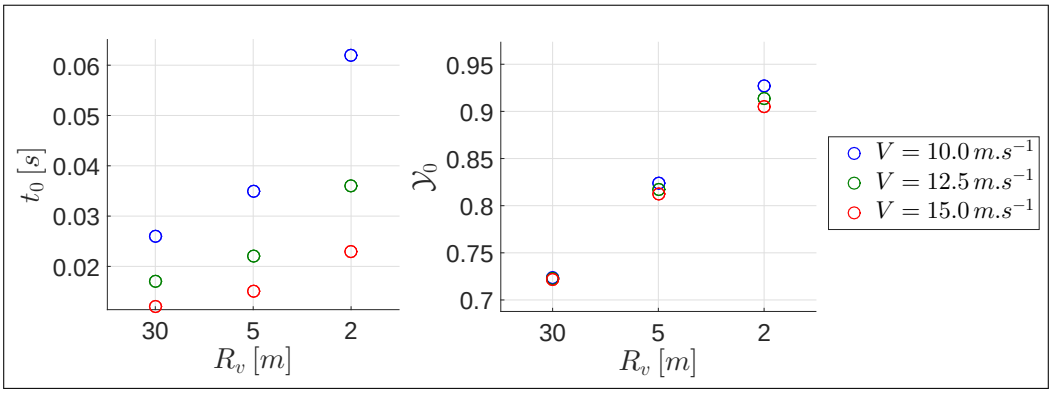

Figure *3.75 – Figure récapitulant les t_0 et $\mathcal{Y}_0$ pour les cas tests n°1.b, n°4.b et n°7.b pour un impact au niveau du milieu avec le modèle au troisième ordre.*

La figure 3.75 montre que le couple de valeurs $(\mathcal{Y}_0, t_0)$ suit les mêmes tendances que lorsque l'impact se produit au niveau du creux. On montre aussi que pour $R_v = 30\,m$, $\mathcal{Y}_0$ est à peu près égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nous pouvons nous référer à l'annexe B.8 pour visualiser au moyen de figures la valeur de $\mathcal{Y}_0$ pour $V = 12.5\,m.s^{-1}$ et $R_v = 2\,m$ (Fig(s). B.30 et B.31).

Étant donné la complexité du potentiel des déplacements associé au modèle **m3va**, la calcul de t_f n'a pas été mené. Néanmoins on peut penser que de façon identique aux autres modèles traités dans la section 3.4, la valeur de t_f est proche de deux fois la valeur de t_0.

3.5.3 Conclusion sur les variations temporelle et spatiale des champs de pression

Dans la section 3.4 nous avons montré qu'en général, la valeur de $\mathcal{Y}_0$ limitant la validité du modèle de Wagner, ne correspondent pas au cas de référence où la surface libre est plane est au repos.

- Pour le modèle **ncva** : Plus R_v est grand et V petit, plus $\mathcal{Y}_0$ est inférieur à la valeur de référence.
- Pour les modèles **ntva** et le modèle **m3va** : Plus R_v est grand et V petit, plus $\mathcal{Y}_0$ est supérieur à la valeur de référence.
- Pour le modèle **m1va**, la valeur de $\mathcal{Y}_0$ est indépendante du couple (R_v, V) et égale à la valeur de référence $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nous avons aussi montré que pour les modèles asymptotiques **ncva**, **ntva** et **m3va** lorsque R_v est très grand devant R_p la valeur de $\mathcal{Y}_0$ tend vers la valeur de référence (Eq. (3.3a)).

En ce qui concerne la valeur de t_0, nous avons aussi montré qu'en général elle est aussi dépendante du couple (R_v, V) :

- Pour le modèle **ncva**, plus R_v et V sont grands, alors plus les valeurs de t_0 sont inférieures au valeurs de référence du tableau 3.33.
- Pour les modèles **ntva**, **m3va** et **m1va**, plus R_v est grand et V petit, alors plus les valeurs de t_0 sont supérieures aux valeurs de référence du tableau 3.33.

Nous avons aussi montré que pour tous les modèles asymptotiques, lorsque R_v est très grand devant R_p, les valeurs de t_0 tendent vers les valeurs de référence du tableau 3.33.

Nous concluons donc que la détermination du couple $(\mathcal{Y}_0, t_0)$ attestant la validité du modèle de Wagner, quand on considère une surface libre de type houle d'Airy, ne reflète pas les résultats lorsque la surface libre est plane. Pour $\mathcal{Y}_0$, seul le modèle **m1va** est en accord avec la valeur obtenue pour une surface libre plane. Pour les autres modèles asymptotiques nous avons montré que $\mathcal{Y}_0$ dépend de R_v et V. De la même manière, mais cette fois-ci pour l'ensemble des modèles asymptotiques utilisés dans cette section, nous avons prouvé que t_0 et t_f, dépendent aussi de R_v et V.

3.6 Pression composite pour les modèles asymptotiques

Jusqu'à présent nous avons toujours utilisé la formulation MLM pour établir les distributions de pression. Le but de cette section est donc d'utiliser la formulation composite (COMP) pour l'impact de la parabole sur la houle d'Airy monochromatique. Nous utilisons uniquement les modèles asymptotiques d'impact au niveau de la crête, du creux et du milieu de la pente au 1^{er} ordre avec et sans vitesse d'avance. La théorie de la formulation COMP en relation avec l'impact sur une houle d'Airy, est présentée au paragraphe 2.5.3.2 et à l'annexe A.5.2.

Au sein de cette section nous comparons les valeurs maximales de champs de pression, calculées au moyen de la formulation COMP (part. 2.5.2) à ceux de la formulation MLM (ann. B.4). Nous comparons aussi les efforts hydrodynamiques obtenus par l'intégration spatiale des champs de pression COMP aux efforts de la formulation MLM. Nous parlons aussi brièvement des efforts de 1^{re} approximation (part. 2.5.1).

Pour mener à bien les études de cette section, nous utilisons le cas test n°3 des tableaux 3.1 et 3.2. Nous traitons de configurations d'impact purement verticale et oblique avec $V = W = 5.0\, m.s^{-1}$.

Dans les parties 3.6.1, 3.6.2 et 3.6.3, nous comparons les valeurs maximales des champs de pression et les efforts hydrodynamiques obtenus au moyen des formulations MLM et COMP pour les trois configurations d'impact préétablies. Pour les comparaisons nous utilisons les écarts relatifs définis en annexe B.3.1.

3.6.1 Formulation composite pour des impacts avec et sans vitesse d'avance au niveau de la crête

Dans cette section nous comparons les distributions de pression et les efforts hydrodynamiques calculés à l'aide des formulations MLM et COMP pour un impact au niveau de la crête avec $R_v = 3\, m$.

Crête	$V = 0\, m.s^{-1}$	$V = 5\, m.s^{-1}$
$\mathbf{\Delta} P_{max\, d_1}$ premier	0,28%	0,29%
$\bar{\mathbf{\Delta}} P_{max\, d_1}$	12,14%	12,63%
$\mathbf{\Delta} P_{max\, d_1}$ dernier	22,10%	22,55%
$\mathbf{\Delta} P_{max\, d_2}$ premier	0,28%	0,27%
$\bar{\mathbf{\Delta}} P_{max\, d_2}$	14,00%	5,05%
$\mathbf{\Delta} P_{max\, d_2}$ dernier	26,62%	0,82%
$\mathbf{\Delta} F_{hydro}$ premier	4,60%	4,61%
$\bar{\mathbf{\Delta}} F_{hydro}$	19,35%	22,24%
$\mathbf{\Delta} F_{hydro}$ dernier	26,53%	34,45%

Table *3.38 – Tableau récapitulant les écarts relatifs entre les formulations MLM et COMP pour un impact au niveau de la crête.*

La tableau 3.38 montre que les champs de pression MLM et COMP sont sensiblement différents. Á gauche de la surface mouillée, les pics de pression diffèrent en moyenne de 12% avec et sans vitesse d'avance. Á droite de la surface mouillée les champs de pression diffèrent d'environ 14% sans vitesse d'avance et 5% avec vitesse d'avance. Nous constatons aussi que les écarts pour les pics de pression augmentent tout au long de la simulation sauf à droite de la surface mouillée lorsque la parabole est animée d'une vitesse d'avance.

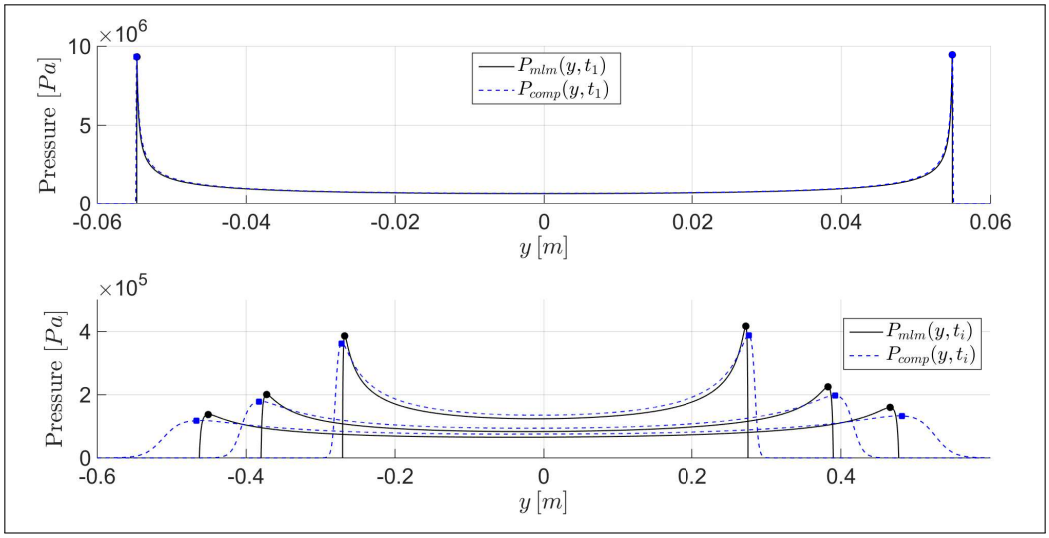

FIGURE *3.76 – Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau de la crête sans vitesse d'avance* - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ *et* $t_4 = 0.015\,s$

La figure montre 3.76 que sans vitesse d'avance, les champs de pression de la formulation COMP sous-estiment ceux de la formulation MLM. Nous montrons aussi que les écarts entre les pressions maximales augmentent tout au long de la simulation.

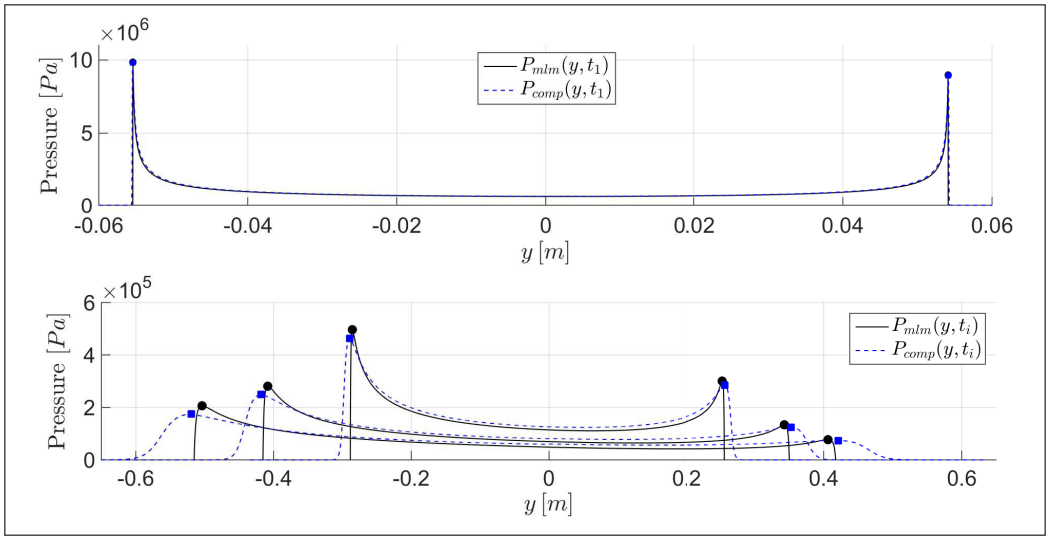

FIGURE *3.77 – Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau de la crête avec vitesse d'avance* - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ *et* $t_4 = 0.015\,s$

La figure 3.77 confirme que les pics de pression COMP sous-estiment les pics de pression MLM lorsque la parabole est animée d'une vitesse d'avance. Nous constatons d'ailleurs que la dissymétrie des champs de pression entre les deux formulations est respectée.

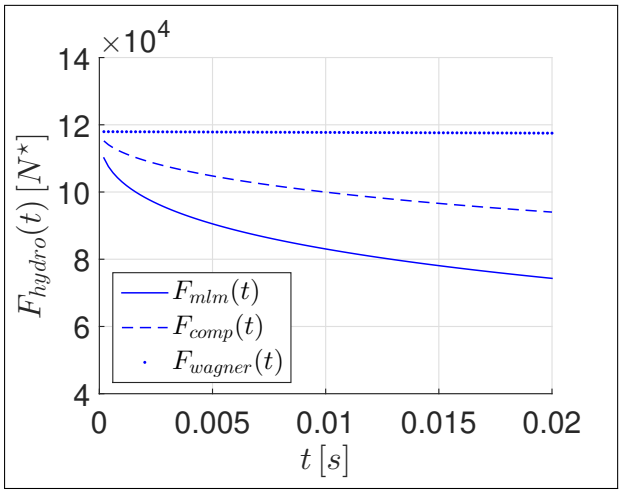

Figure 3.78 – *Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner sans vitesse d'avance pour un impact au niveau de la crête*

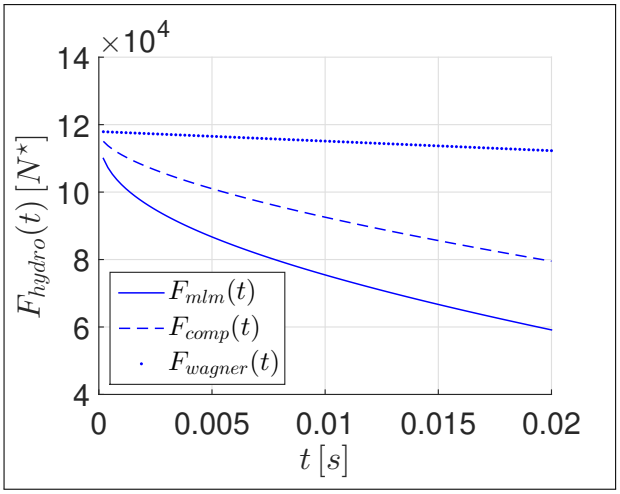

Figure 3.79 – *Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner avec vitesse d'avance pour un impact au niveau de la crête*

Les figures 3.78 et 3.79 rendent compte de l'évolution des efforts hydrodynamiques calculés avec les formulations $COMP$ et MLM ainsi que les efforts de 1^{re} approximation. Nous constatons qu'avec et sans vitesse d'avance les efforts hydrodynamiques COMP surestiment les efforts MLM d'environ 5% en moyenne (Tab. 3.38).

La figure 3.78 et 3.79 montrent aussi que les efforts de 1^{re} approximation surestiment les efforts MLM et COMP. Ces figures montrent aussi que les efforts de 1^{re} approximation avec vitesse d'avance ne sont pas constants au cours du temps mais décroissants.

3.6.2 Formulation composite pour des impacts avec et sans vitesse d'avance au niveau du milieu

Dans cette section nous comparons les formulations MLM et COMP pour un impact au niveau du milieu de la pente de la houle en utilisant le modèle au 1^{er} ordre.

Milieu	$V = 0\,m.s^{-1}$	$V = 5\,m.s^{-1}$
$\mathbf{\Delta} P_{max\,d_1}$ premier	3,75%	3,91%
$\bar{\mathbf{\Delta}} P_{max\,d_1}$	32,16%	37,18%
$\mathbf{\Delta} P_{max\,d_1}$ dernier	55,39%	64,98%
$\mathbf{\Delta} P_{max\,d_2}$ premier	0,42%	0,37%
$\bar{\mathbf{\Delta}} P_{max\,d_2}$	10,66%	6,78%
$\mathbf{\Delta} P_{max\,d_2}$ dernier	23,65%	10,53%
$\mathbf{\Delta} F_{hydro}$ premier	4,02%	3,98%
$\bar{\mathbf{\Delta}} F_{hydro}$	15,00%	13,80%
$\mathbf{\Delta} F_{hydro}$ dernier	19,13%	17,22%

Table 3.39 – *Tableau récapitulant les écarts relatifs entre les formulations MLM et COMP pour un impact au niveau du milieu.*

Le tableau 3.39 montre que les tendances pour les écarts relatifs sont similaires au cas où l'impact se produit au niveau de la crête. Les écarts relatifs pour les pressions maximales à gauche et à droite de la surface mouillée augmentent au cours du temps.

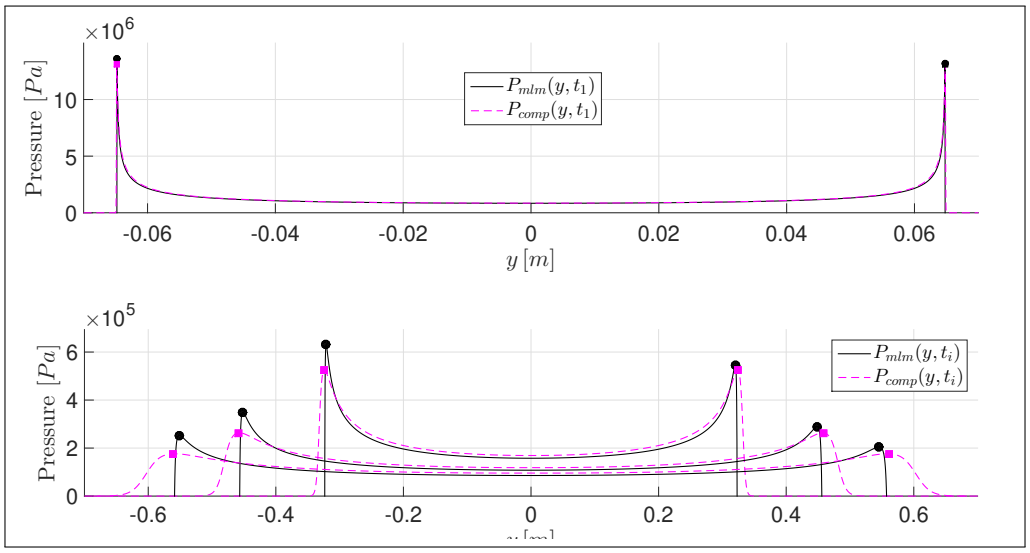

FIGURE *3.80 – Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau du milieu sans vitesse d'avance* - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ *et* $t_4 = 0.015\,s$

La figure 3.80 confirme que comme pour un impact au niveau de la crête sans vitesse d'avance les champs de pression COMP surestiment ceux de la formulation MLM. Nous notons que les champs de pression COMP sans vitesse d'avance sont symétriques alors que les champs MLM ne le sont pas. La symétrie des champs COMP vient du fait que la vitesse du fluide dans le jet V_j est identique à droite et à gauche de la surface mouillée, ce qui n'est pas le cas lorsque l'impact se produit au niveau d'une crête.

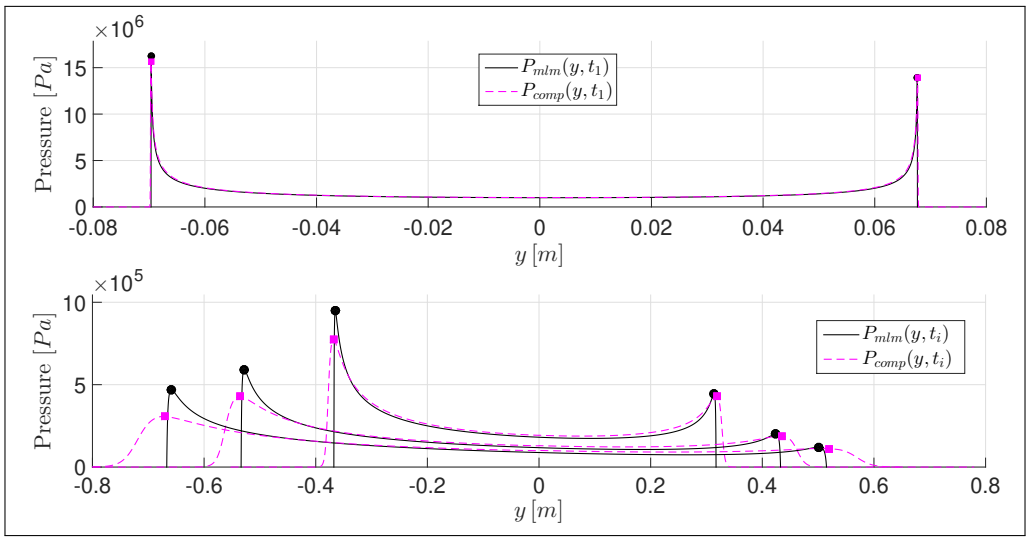

FIGURE *3.81 – Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau du milieu avec vitesse d'avance* - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ *et* $t_4 = 0.015\,s$

La figure 3.81 compare les champs de pression MLM et COMP avec vitesse d'avance pour un impact au niveau du milieu. Cette figure montre que cette fois-ci les champs de pression COMP sont dissymétriques tous comme ceux de la formulation MLM. Cette dissymétrie provient du fait qu'avec vitesse d'avance les vitesses du fluide dans le jet $V_{j\pm}$ ne sont pas identiques.

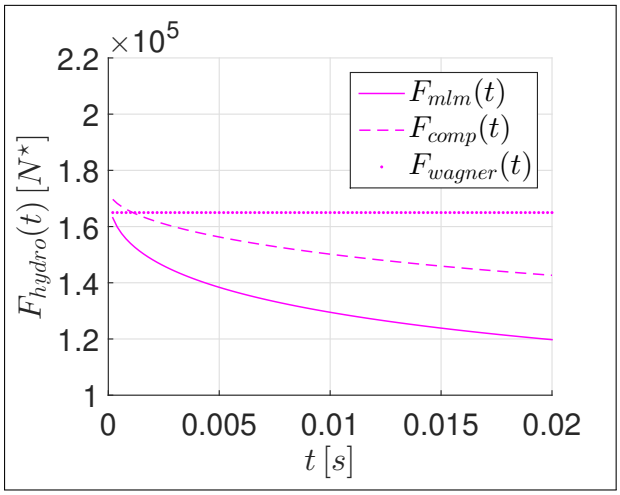

Figure 3.82 – *Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner sans vitesse d'avance pour un impact au niveau du milieu*

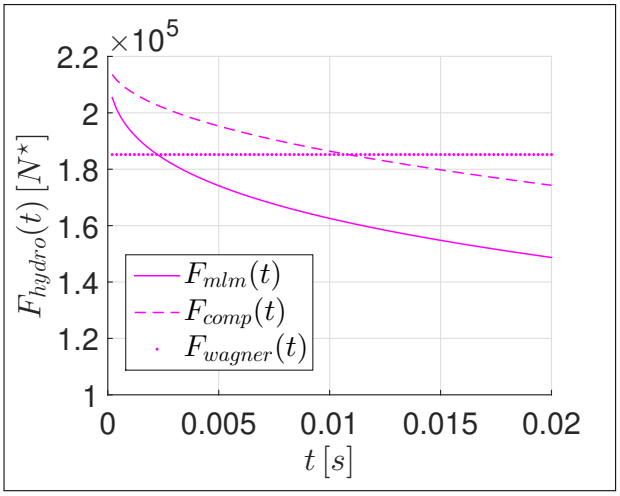

Figure 3.83 – *Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner avec vitesse d'avance pour un impact au niveau du milieu*

Les figures 3.82 et 3.83 montrent que de façon analogue à l'impact au niveau d'une crête, les efforts hydrodynamiques COMP surestiment ceux de la formulation MLM. Ces figures retranscrivent aussi l'effet de « saut » présenté dans les parties 3.4.1 et 3.4.2. Pour les efforts de 1^{re} approximation, les figures 3.82 et 3.83 montrent qu'ils demeurent constant au cours du temps. Cependant, la figure 3.82 indique aussi qu'aux tous premiers instants de pénétration, la formulation COMP surestime légèrement les efforts de 1^{re} approximation. Enfin en s'appuyant sur la figure 3.83 nous constatons que les efforts hydrodynamiques COMP et MLM surestiment largement les efforts de 1^{re} approximation.

3.6.3 Formulation composite pour des impacts avec et sans vitesse d'avance au niveau du creux

Pour être exhaustif dans les configurations dans les comparaisons entre les formulations MLM et COMP, dans cette section nous considérons un impact au niveau du creux.

Creux	$V = 0\,m.s^{-1}$	$V = 5\,m.s^{-1}$
$\boldsymbol{\Delta} P_{max\,d_1}$ premier	0,58%	0,59%
$\bar{\boldsymbol{\Delta}} P_{max\,d_1}$	30,30%	35,77%
$\boldsymbol{\Delta} P_{max\,d_1}$ dernier	59,93%	73,55%
$\boldsymbol{\Delta} P_{max\,d_2}$ premier	0,57%	0,55%
$\bar{\boldsymbol{\Delta}} P_{max\,d_2}$	27,20%	18,70%
$\boldsymbol{\Delta} P_{max\,d_2}$ dernier	52,32%	29,86%
$\boldsymbol{\Delta} F_{hydro}$ premier	3,51%	3,52%
$\bar{\boldsymbol{\Delta}} F_{hydro}$	12,02%	11,47%
$\boldsymbol{\Delta} F_{hydro}$ dernier	14,16%	12,39%

Table 3.40 – *Tableau récapitulant les écarts relatifs entre les formulations MLM et COMP pour un impact au niveau du creux.*

De façon identique aux parties 3.6.1 et 3.6.2 le tableau 3.40 retranscrit les écarts relatifs en les formulations COMP et MLM pour un impact au niveau du creux.

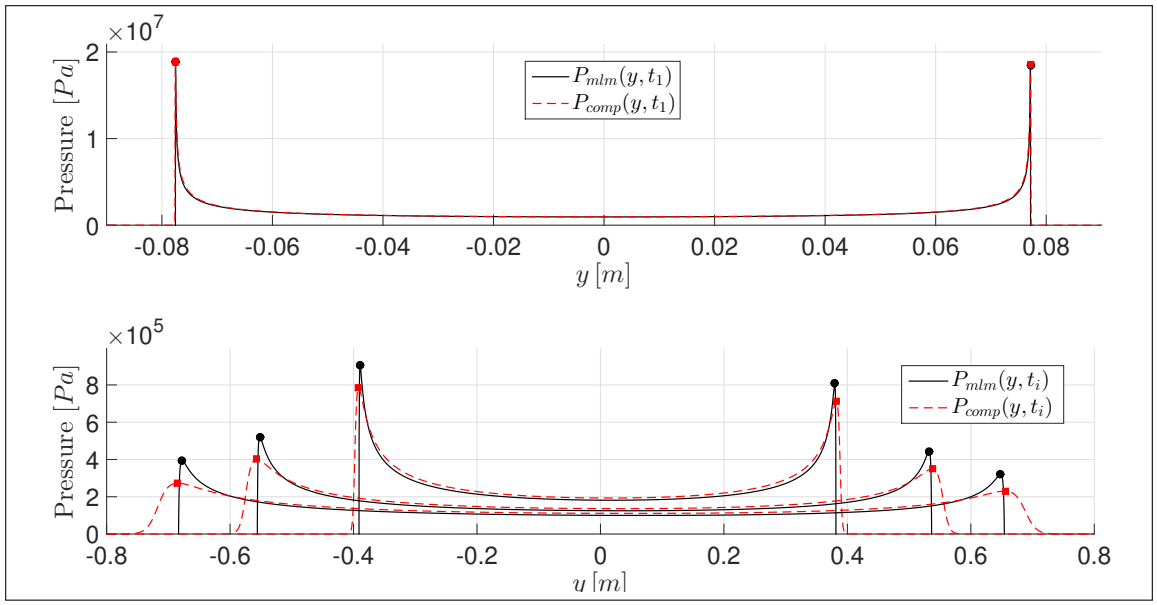

FIGURE *3.84 – Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau du milieu sans vitesse d'avance* - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ *et* $t_4 = 0.015\,s$

La figure 3.84 montre que pour un impact sans vitesse d'avance au niveau du creux, les pics des champs de pression MLM surestiment les pics des champs des pression COMP. Nous retrouvons donc des tendances identiques aux configurations d'impact au niveau de la crête.

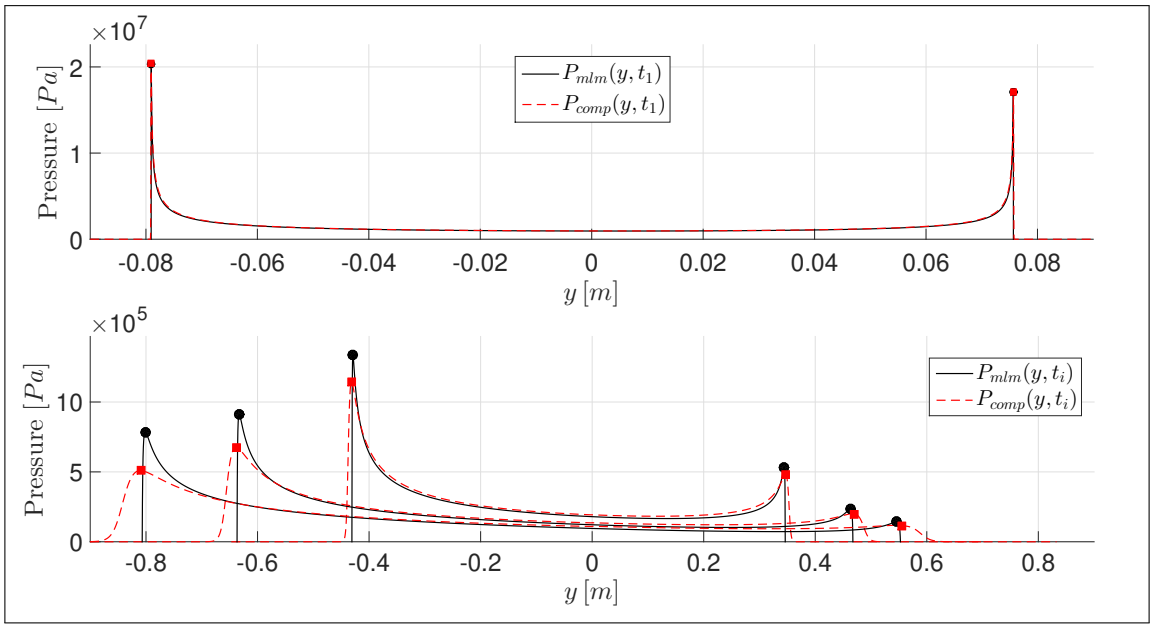

FIGURE *3.85 – Champs de pression MLM et COMP pour un impact au niveau du milieu avec vitesse d'avance* - $t_1 = 2.0\,e^{-4}\,s$, $t_2 = 0.005\,s$, $t_3 = 0.01\,s$ *et* $t_4 = 0.015\,s$

Avec vitesse d'avance, la figure 3.85 présente une nouvelle fois des tendances similaires aux configurations d'impact au voisinage de la crête et du milieu. Les pics de pression MLM sont toujours plus importants que ceux de la formulations COMP. Pour avoir une idée des écarts entre les deux formulations, nous pouvons nous référer au tableau 3.40.

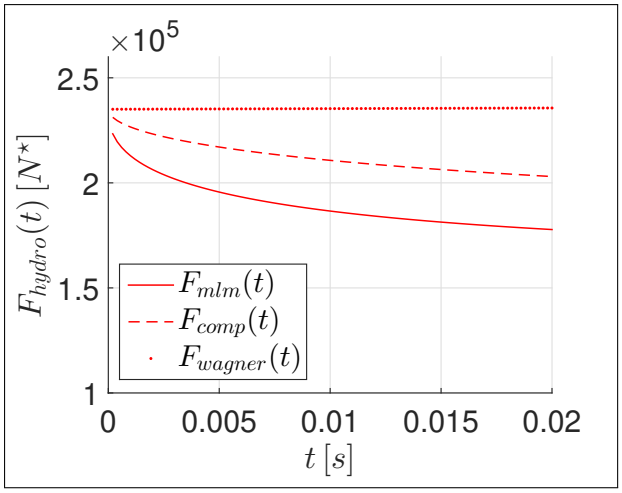

Figure *3.86 – Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner sans vitesse d'avance pour un impact au niveau du creux*

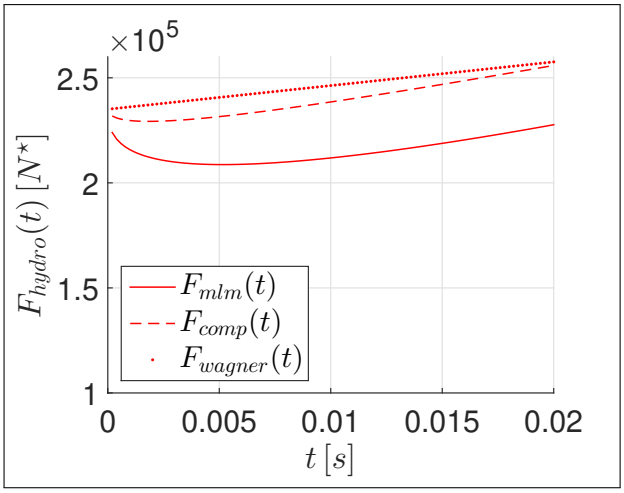

Figure *3.87 – Efforts hydrodynamiques MLM, COMP et Wagner avec vitesse d'avance pour un impact au niveau du creux*

La figure 3.86 montre que sans vitesse d'avance le comportement des efforts calculés au moyen des formulations des COMP, MLM et de 1^{re} approximation est semblable au cas où l'impact se produit au niveau d'une crête. L'intensité des efforts hydrodynamiques est juste plus importante par rapport à un impact au niveau d'une crête sans vitesse d'avance (Fig. 3.76). La figure 3.87 montre qu'une nouvelle fois les efforts hydrodynamiques obtenus par la formulation COMP sont plus importants que ceux de la formulation MLM. En matière d'efforts de 1^{re} approximation, la figure 3.86 met en évidence qu'ils sont constants au cours du temps et la figure 3.87 montre qu'ils sont croissants.

3.6.4 Conclusion sur la formulation composite pour des configurations d'impact sur houle d'Airy

Au sein des parties 3.6.1, 3.6.2 et 3.6.3 nous avons montré qu'il est possible d'utiliser le formulation composite pour calculer les distributions de pression avec les modèles asymtotiques d'impact au voisinage de la crête, du creux et du milieu de la pente. Pour les trois configurations d'impact préétablies, nous démontrons que les pics de pression COMP sous-estiment toujours les pics de pression MLM. Cependant, les efforts hydrodynamiques calculés au moyen de la formulation MLM sont toujours inférieurs à ceux de la formulation COMP. Sachant que le modèle COMP modélise la racine du jet hydrodynamique, nous concluons que les racines de jet à droite et à gauche de la surface mouillée contiennent une quantité non négligeable de pression. Cette quantité non négligeable engendre, après intégration spatiale des champs de pression, des efforts hydrodynamiques obtenus avec la formulation COMP supérieurs à ceux de la formulation MLM. Avec et sans vitesse d'avance, pour le cas test n°3 et pour les trois positions d'impact privilégiées, la formulation COMP surestime d'environ 4% la formulation MLM.

Dans cette section, nous avons aussi montré que les efforts hydrodynamiques de 1^{re} approximation n'ont pas le même comportement avec et sans vitesse d'avance. Lorsque la parabole est uniquement animée d'une vitesse verticale, les efforts de 1^{re} approximation sont toujours constants au cours du temps pour les trois modèles asymptotiques utilisées. Lorsque la parabole est aussi animée d'une vitesse d'avance, les efforts de 1^{re} approximation sont décroissants et croissants pour respectivement un impact au voisinage de le crête et du creux. Enfin lorsque l'impact se produit au niveau du milieu de la pente avec vitesse d'avance les efforts de 1^{re} approximation sont aussi constant au cours du temps.

L'expression des efforts de 1^{re} approximation est dépendante des corrections de surface mouillée et de leurs dérivées par rapport au temps. Nous concluons donc que dans le cadre d'impact sur houle d'Airy, les efforts de 1^{re} approximation évoluent comme les cas de référence pour l'impact sur une surface libre plane uniquement lorsqu'on modélise la houle par un simple droite comme dans le modèle asymptotique d'impact au 1^{re} ordre.

3.7 Conclusion sur le chapitre 3

Au sein du chapitre 3 nous avons réalisé plusieurs études en utilisant les modèles d'impact sur houle d'Airy monochromatique développés au chapitre 2.

Dans la section 3.1 nous avons présenté les différents cas tests d'impact utilisés dans ce chapitre en vérifiant qu'ils étaient physiquement acceptables en s'appuyant sur le critère de [Michell, 1893] qui permet de déterminer la validité physique d'une houle d'Airy en termes de déferlement.

Dans la section 3.2 nous avons comparé les modèles asymptotiques aux modèles non-asymptotiques avec et sans vitesse d'avance. Nous avons montré que les écarts relatifs sur les grandeurs caractéristiques de l'impact hydrodynamique entre les deux types de modèles sont directement fonction du rayon R_v de la houle d'Airy.

Dans la section 3.3 nous avons déterminé la configuration d'impact dimensionnante en comparant les efforts hydrodynamiques des modèles non-asymptotiques pour les trois positions d'impact préétablies aux efforts obtenus avec les configurations d'impact de référence. Nous avons trouvé que la configuration d'impact dimensionnante, c'est-à-dire qui admet les efforts hydrodynamiques les plus importants, est obtenue lorsque l'impact se produit au voisinage du creux avec et sans vitesse d'avance lorsque $R_v \approx R_p$.

Dans la section 3.4, nous avons analysé l'influence de l'amplitude de la houle C et de la vitesse d'avance relative de la parabole V_{arp} sur l'évolution des efforts hydrodynamiques en utilisant les modèles non-asymptotiques d'impact. Nous avons déterminé que l'amplitude C de la houle avait une rôle similaire à l'effet de la vitesse d'avance sur les efforts hydrodynamiques. Lorsque l'impact se produit au voisinage du milieu de la pente où du creux, c'est l'amplitude de la houle qui engendre les efforts hydrodynamiques les plus importants. Et quand l'impact se produit au niveau de la crête, c'est l'opposé.

Dans la section 3.5, au moyen des modèles asymptotiques d'impact, nous avons étudié les variations spatiale et temporelle des champs de pression attestants la validité du modèle de Wagner au niveau du signe de la pression. Nous avons prouvé que lorsque l'impact se produit au niveau du milieu de la pente les variations temporelle et spatiale de la pression calculée au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée présentent exactement les mêmes caractéritiques que pour le modèle d'impact de référence présenté en annexe A.6.1. D'un autre côté lorsque l'impact se produit au niveau de la crête ou du creux, nous avons déterminé que les variations temporelle et spatiale de la pression sont dépendantes du rayon de la vague R_v en plus des vitesses de chute de la parabole. Lorsque l'impact se produit au voisinage de la crête ou du creux la pression calculée au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée passe respectivement plus tôt et plus tard sous la valeur de la pression de référence que par rapport aux configurations d'impact de référence.

Dans la section 3.6 nous avons comparé les efforts hydrodynamiques calculés au moyen de la formulation COMP avec les modèles d'impact asymptotiques au niveau de la crête, du creux et du milieu de la pente au 1^{er} ordre. Nous avons mis en évidence que les efforts calculés au moyen du formalisme COMP surestiment les efforts calculés au moyen de la formulation MLM d'environ 4%. Nous avons aussi montré que lorsque l'impact se produit au niveau de la crête ou du creux avec vitesse d'avance, les efforts de 1^{re} approximation sont respectivement décroissants et croissants au cours du temps.

Pour les autres configurations d'impact, les efforts de 1^{re} approximation demeurent constants au cours du temps.

Dans le chapitre 4, nous allons utiliser un autre type de modèle d'impact totalement numérique reposant sur la méthode CEL du logiciel Abaqus dans le but d'avoir une base de comparaison sur l'évolution des efforts hydrodynamiques obtenus au moyen des modèles d'impact non-asymptotiques du chapitre 2.

Chapitre 4

Approche numérique

Ce chapitre 4 présente plusieurs modèles numériques d'impact d'un corps parabolique sur des surfaces libres ondulées. Les surfaces ondulées implémentées dans les modèles numériques présentent les caractéristiques géométriques de la houle d'Airy présentée au chapitre 2. Le but de ce chapitre est d'avoir une base de comparaison pour les efforts hydrodynamiques obtenus au moyen des modèles non-asymptotiques introduits dans le chapitre 2. Les modèles numériques sont réalisés à l'aide du logiciel Abaqus/Explicit et sont basés sur un couplage CEL (pour *Coupled Eulerian-Lagrangian*). Ce chapitre de validation des modèles non-asymptotiques au moyen de comparaisons avec des modèles numériques est divisé en 6 sections :

La section 4.1 présente les dimensions du domaine numérique ainsi que les conditions aux limites.

La section 4.2 expose la théorie sur laquelle le couplage CEL d'Abaqus est basée. Nous détaillons les intéractions entre les parties Eulérienne et Lagrangienne.

La section 4.3 résume le calibrage du modèle numérique au moyen d'une convergence en maillage sur les efforts hydrodynamiques. Nous expliquons aussi la méthode permettant de lisser les séries temporelles des efforts hydrodynamiques. Nous expliquons aussi une méthode permettant d'extraire les corrections de surface mouillée à partir des résultats des simulations.

La section 4.4 s'intéresse à la méthode qui permet de modéliser une houle d'Airy régulière sous Abaqus. Cette méthode est basée une transformation géométrique du maillage Eulérien.

La section 4.5 compare les efforts hydrodynamiques obtenus avec Abaqus aux efforts hydrodynamiques obtenus au moyen des modèles non-asymptotiques du chapitre 2. Une comparaison qualitave des corrections de surface mouillée est aussi présentée, ainsi qu'une discussion sur l'allure des champs de pression.

La section 4.6 récapitule les différents résultats de ce chapitre 4.

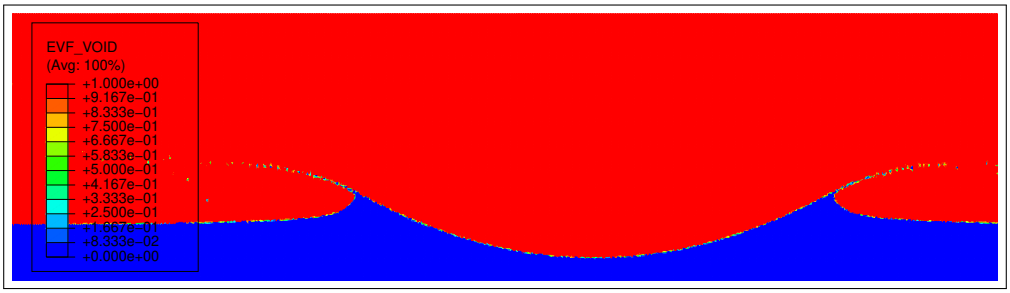

FIGURE *4.1 – Surface libre déformée pour un impact sur une surface libre plane.*

La variable représentée sur la figure 4.1 est la fraction volumique du vide.

4.1 Présentation du modèle modèle numérique

Dans cette section, nous présentons dans la partie 4.1.1 les dimensions du modèle numérique « de base » correspondant à l'impact du corps parabolique sur une surface libre plane. Dans la partie 4.1.2, nous résumons les conditions limites implémentées directement sous le logiciel Abaqus.

4.1.1 Dimensions du modèle numérique

Dans le but de modéliser l'impact hydrodynamique d'un corps parabolique sur une houle d'Airy régulière, nous avons dans un 1^{er} temps paramétré un modèle numérique d'impact sur une surface libre plane initialement au repos.

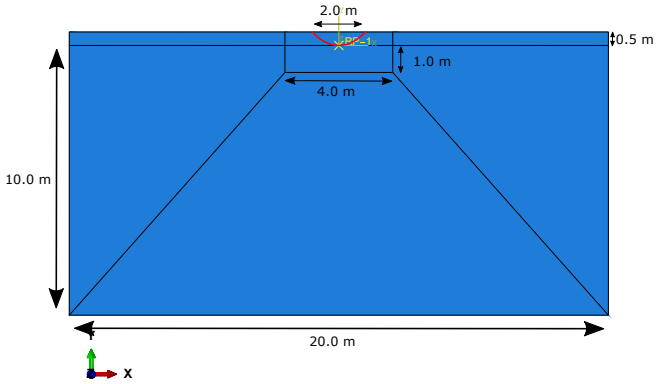

Figure *4.2 – Dimensions du modèle numérique Abaqus : en rouge le domaine solide et en bleu le domaine fluide*

La figure 4.2 présente les dimensions du domaine numérique en mètres. Nous noterons que le domaine de calcul présente une épaisseur de $0.01\,m$ (dans la direction z). En effet, le module CEL d'Abaqus fonctionne en trois dimensions uniquement. Le caractère bidimensionnel de l'écoulement est imposé via les conditions limites (part. 4.1.2). C'est ce modèle de base qui va servir dans la section 4.4 à modéliser une surface libre ondulée de type houle d'Airy régulière.

4.1.2 Modélisation de l'impact hydrodynamique

La figure 4.3 résume les conditions limites appliquées au modèle numérique d'impact au moyen du logiciel Abaqus.

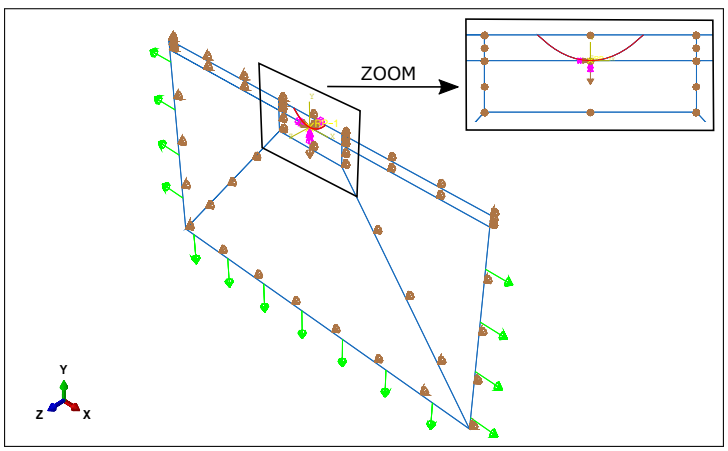

Figure *4.3 – Visualisation des conditions aux limites sous Abaqus*

- Le mouvement du solide (supposé rigide) est entièrement imposé. Cette condition limite est représentée par les flêches roses.
- Sur l'ensemble du domaine fluide, la vitesse dans la direction z est fixée à zéro dans le but d'imposer un écoulement 2D. Cette condition limite est représentée par les flêches oranges.
- Sur la frontière extérieure du domaine fluide des conditions de non-réflection des ondes accoustiques sont prescrites. Cette condition limite est représentée par les vertes.

4.2 Couplage Euler-Lagrange (CEL)

La théorie utilisée pour résoudre la dynamique du problème d'impact en relation avec le modèle numérique présenté en section 4.1 repose sur un couplage CEL. Le coupage CEL utilise sur un formalisme permettant de traiter dans un même problème des éléments Lagrangiens (solides) et Eulériens (fluides).

Dans cette section nous définissons les propriétés des domaines Lagrangien (part. 4.2.1) et Eulérien (part. 4.2.2) ainsi que les intéractions entre eux (part. 4.2.3). Nous y énonçons aussi les équations sur lesquelles repose le couplage CEL.

4.2.1 Partie Lagrangienne : la parabole

La partie Lagrangienne du modèle Abaqus/CAE représentant la parabole est modélisée en tant que solide rigide indéformable. Elle est donc maillée au moyen d'éléments rigides R3D4. Ces éléments tridimensionnels indéformables sont composés de 4. La cinématique de la partie Lagrangienne rigide est imposée à l'aide d'un point de référence RP (pour *Reference Point*). Ce point de référence est choisi de façon à ce qu'il représente le premier point de contact avec la partie Eulérienne du modèle numérique.

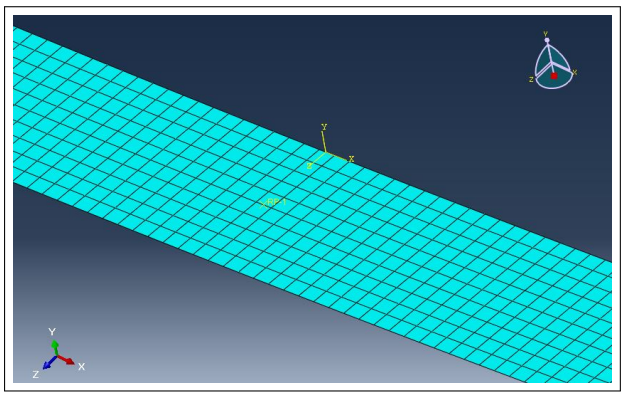

Figure 4.4 – *Maillage Lagrangien de type R3D4 et son point de référence*

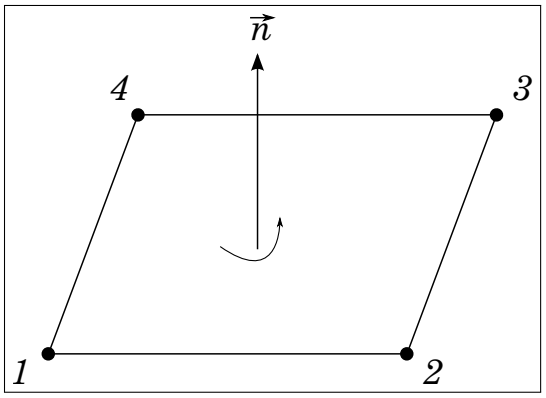

Figure 4.5 – *Géométrie d'un élément R3D4*

La figure 4.4 rend compte du maillage Lagrangien au moyen d'éléments de type R3D4 et la figure 4.5 présente les caractéristiques d'une élément rigide R3D4. De plus nous avons choisi de mettre 10 éléments R3D4 dans l'épaisseur de la parabole et de positionner le point de référence RP au milieu de la parabole (Fig. 4.4). Le maillage Lagrangien est donc régulier.

Étant donné que le modèle numérique Abaqus est un modèle tridimensionnel (part. 4.1.1). Pour comparer les efforts hydrodynamiques, nous multiplierons les efforts hydrodynamiques des modèles analytiques bidimensionnels du chapitre 2 par l'épaisseur du modèle numérique, c'est-à-dire $0.01\,m$.

4.2.2 Partie Eulérienne : le fluide

La partie Eulérienne constitue la partie fluide du modèle Abaqus. Cette partie est maillée au moyen des éléments Eulériens EC3D8R. Il s'agit d'éléments tridimensionnels réguliers à 8 noeuds possédant 3 degrés de libertés (3 translations) par noeuds. Pour plus d'informations sur les éléments Eulériens, nous pouvons nous reporter à la documentation Abaqus [Abaqus Analysis User's Guide 37.14.1, 2016] et [Abaqus Analysis User's Guide 32.14.2, 2016].

Dans les simulations réalisées, le fluide est considéré comme compressible et non-visqueux. Abaqus/Explicit ne permet pas de décrire des écoulements incompressible.

La dynamique du fluide, dans notre cas de l'eau, est régie par les trois équations suivantes :

- La conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla . \vec{v}\,, \qquad \forall \vec{x} \in \Omega_f \tag{4.1}$$

- La conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\nabla} . \bar{\bar{\sigma}} + \rho \vec{b}\,, \qquad \forall \vec{x} \in \Omega_f \tag{4.2}$$

- La conservation de l'énergie interne (en absence d'échanges thermiques) :

$$\frac{DE_m}{Dt} = \frac{1}{\rho} \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\nabla}} \vec{v}\,, \qquad \forall \vec{x} \in \Omega_f \tag{4.3}$$

Avec :

- $\rho(\vec{x}, t)$: La masse volumique du fluide.
- $\vec{v}(\vec{x}, t)$: Le vecteur vitesse du fluide.
- $\bar{\bar{\sigma}}(\vec{x}, t) = -p_f . \bar{\bar{I}}$: Le tenseur des contraintes dans le fluide.
- $\vec{b}(\vec{x}, t)$: Le vecteur des efforts volumiques.
- $E_m(\vec{x}, t)$: L'énergie interne par unité de masse.
- $\vec{x}$: Le vecteur des coordonnées Eulériennes.
- Ω_f : Le domaine Eulérien.
- $\frac{D\square}{Dt} = \frac{\partial \square}{\partial t} + \vec{v} . \vec{\nabla} \square$: L'opérateur dérivée particulaire

Les équations régissant la dynamique de la partie Eulérienne sont présentées en détail dans les travaux de [Benson, 1992].

L'intégration temporelle repose sur le schéma des différences finies centrées :

$$\begin{cases} \dot{u}^N_{i+1/2} = \dot{u}^N_{i-1/2} + \dfrac{\Delta t_{i+1} + \Delta t_i}{2} \ddot{u}^N_i & \text{(4.4a)} \\ \dot{u}^N_{i+1} = \dot{u}^N_i + \Delta t_{i+1} \dot{u}^N_{i+1/2} & \text{(4.4b)} \end{cases}$$

Avec u^N un degré de liberté du noeud N et i ses coordonnées spatiales. Le pas de temps est calculé, dans Abaqus, au moyen de l'équation suivante :

$$\Delta t \approx \frac{L_{min}}{c_0} \tag{4.5}$$

avec L_{min} la dimension minimale d'un élément et c_0 la vitesse du son dans le fluide fixée à $1450\, m.s^{-1}$.

Les équations 4.1, 4.2 et 4.3 sont discrétisées en espace moyen au de la méthode des éléments finis. Pour plus d'informations sur la procédure de calcul du couplage CEL, on peut se référer à [Souli & Sigrist, 2009] ou encore [Aquelet et al., 2006] notamment sur le transport en deux phases des grandeurs Eulériennes et Lagrangiennes.

Le suivi de la surface libre, est assurée par la méthode VoF (pour *Volume-of-Fluid*). Dans cette méthode, le maillage peut contenir différents fluides, dont la position est représentée par une variable appelée fraction volumique. Dans notre cas, un seul fluide (eau) est considéré. Les éléments peuvent donc être remplis d'eau, de vide et d'un mélange des deux. Chaque élément Eulérien se voit affecter une fraction volumique du fluide α_f. Si cette fraction volumique α_f est égale à 1, alors l'élément est totalement rempli d'eau. Si cette fraction volumique α_f est égale à 0, alors l'élément est vide. Dans les autres cas, c'est-à-dire si la fraction volumique α_f est comprise entre 0 et de 1, alors l'élément est remplie d'eau à la proportion égale à sa fraction volumique.

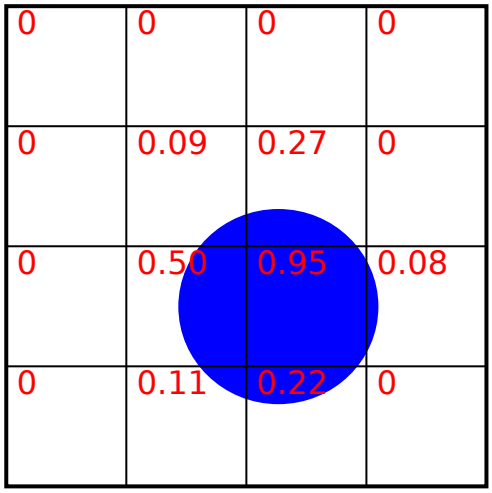

FIGURE *4.6 – Illustration de la méthode Volume-of-Fluid pour un cas bidimensionnel simple*

La figure 4.6 illustre le principe de la méthode VoF. Les éléments Eulériens sont ici de simples carrés. Le blanc représente le vide et le bleu le fluide. Les fractions volumiques correspondantes à chaque éléments Eulériens carrés sont notées en rouge.

Le transport de la fraction volumique α_f est assuré au moyen d'une équation d'advection :

$$\frac{\partial \alpha_f}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}\alpha_f = 0 \tag{4.6}$$

Pour plus d'informations sur cette méthode, nous pouvons nous référer aux travaux de [Hirt & Nichols, 1981].

Les variations de pression au sein du fluide sont gouvernées par l'équation d'état Us-Up. Cette équation repose sur l'équation de Mie-Gruneisen (voir [Mie, 1903]) qui relie la pression à la masse volumique du matériaux et à son énergie interne selon :

$$p_f(\vec{f}, t) = f[\rho(\vec{x}, t), E_m(\vec{x}, t)]\,. \tag{4.7}$$

Cette équation est couramment utilisée pour étudier les phénomène de choc à haute pression. Dans notre cas particulier, les effets de compressibilité ne sont pas important et une équation d'état linéaire est employée (Eq. (4.8)). Pour plus d'informations sur cette équation d'état on peut se référer à [Abaqus Analysis User's Guide 25.2.1, 2016].

$$p_f(\vec{x}, t) = \rho_0 c_0^2 \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho(\vec{x}, t)} \right] . \tag{4.8}$$

La cinématique du fluide est donc imposée par les mouvements du solide rigide Lagrangien qui va intéragir avec la phase fluide au travers de l'algorithme de contact Euler-Lagrange et décrit dans la partie suivante.

4.2.3 Intéraction entre les domaines Eulérien et Lagrangien

L'interaction entre les domaines Eulérien et Lagrangien est assurée par une loi de contact mécanique entre les domaines fluide et le solide. Pour la distribution des contraintes à l'interface des deux domaines, la loi de contact est décomposée en une partie tangentielle et une partie normale.

Contraintes tangentielles

Pour les contacts tangentiels, l'option *Frictionless* est utilisée. Cette option stipule que les deux surfaces en contact, ici le solide et le fluide, glissent l'une par rapport à l'autre sans frottement. Les contraintes tangentielles entre les deux domaines sont donc négligées (voir [Abaqus Analysis User's Guide 37.1.5, 2016]). Ceci est cohérent avec l'hypothèse de fluide non-visqueux.

Contraintes normales (pression)

Pour les contacts normaux à l'interface fluide-solide, l'option *« Hard-Contact »* est utilisée. Avec cette option, la pression de contact à l'interface fluide-solide peut-être uniquement positive (aucune contrainte de traction ne peut transiter). Cette pression de conctact apparaît lorsque la distance entre les surfaces du fluide et du solide devient nulle.

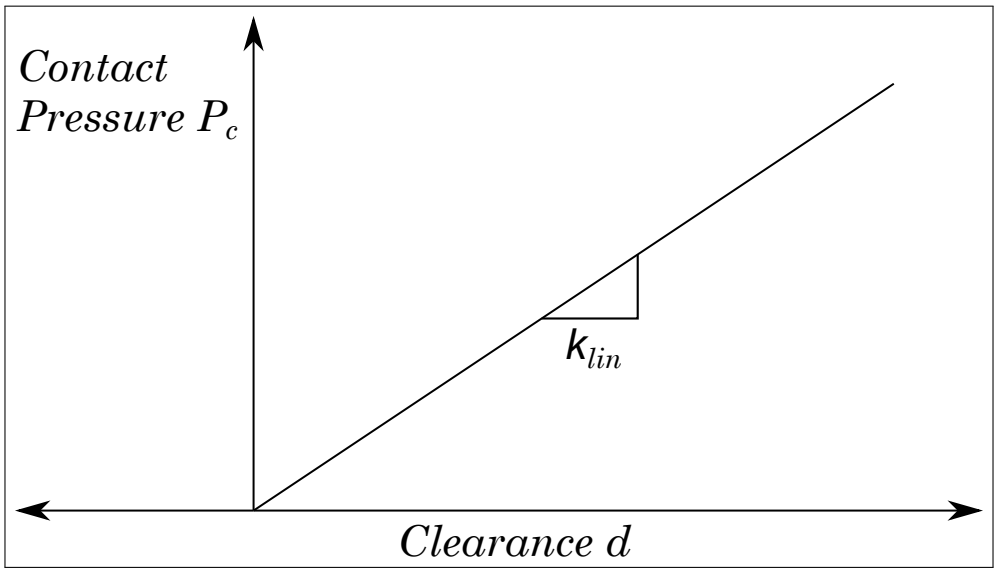

Figure *4.7 – Illustration de la loi de comportement entre la pression P_c, la raideur k_{lin} et la distance dt*

Dans Abaqus, le contact Euler-Lagrange est traité au moyen d'une méthode de pénalité linéaire (Fig. 4.7) régit par l'équation (4.9) :

$$P_c = \begin{cases} -k_{lin} d & \text{si} \quad d \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad d > 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

où P_c est la pression de contact et d la distance entre les surfaces fluide et solide. k_{lin} correspond à une raideur de contact. Malhreuseusement la documentation d'Abaqus ne fournit pas d'information sur la méthode de calcul de k_{lin}. D'après [Abaqus Analysis User's Guide 38.2.3, 2016], nous savons uniquement que ce calcul dépend des caractéristiques de l'élément où contact a lieu. Lors du calcul des pressions de contact P_c, il y aura autant de valeurs k_{lin} que d'éléments Eulériens en contact avec les élements Lagrangiens.

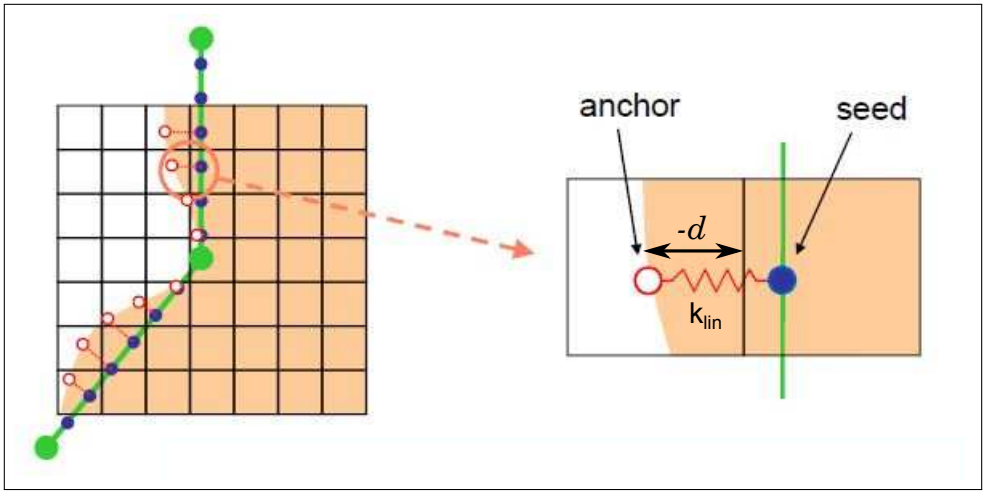

FIGURE *4.8 – Illustration du calcul des P_c pour plusieurs éléments - Source [SIMULIA, 2008]*

La figure 4.8 illustre le calcul des pressions P_c pour les deux domaines en contact. Dans notre cas la partie fluide serait en saumon et la surface solide en vert. De cette manière, Abaqus va automatiquement générer des « *seeds* » sur chaque éléments Lagrangiens et des « *anchors* » sur la surface fluide. Les distances d sont calculées entres les couples « *seed-anchor* ». En appliquant cette procédure pour chaque couple d'éléments en contact la distribution de pression totale P_c est reconstituée par morceaux.

4.3 Convergence en maillage et lissage des signaux des efforts hydrodynamiques

Dans cette partie, nous présentons une convergence en maillage réalisée sur les efforts hydrodynamiques engendrés sur le corps rigide lors de l'impact.

4.3.1 Convergence en maillage pour un impact sur une surface libre plane

Dans section, nous réalisons une convergence en maillage pour justifier le nombre d'éléments retenus. Cette étude de convergence en maillage est réalisée au moyen du modèle présenté en section 4.1, en simulant l'impact vertical d'une parabole sur une surface libre plane et au repos. La vitesse de la parabole est fixée à $5.0\,m.s^{-1}$ et son rayon est de $1\,m$.

La convergence est réalisée sur les efforts hydrodynamiques engendrés lors de l'impact sur la parabole. Plusieurs maillages sont testés avec un nombre plus ou moins important d'éléments (Tab 4.1). De plus, afin d'avoir à mailler finement l'ensemble du domaine fluide, nous avons utilisé l'option AMR (*Adaptative Mesh refinement*). Cette option permet de rafiner automatiquement le maillage à l'interface eau/solide. Pour plus d'informations sur cette méthode de rafinement, on peut se référer à l'annexe C.1 et à [Abaqus Analysis User's Guide 14.1.4, 2016].

Maillage	$m1$	$m1.25$	$m1.50$	$m1.75$
Nombre d'éléments Eulérien	195000	294725	438750	597187
Taille des éléments Eulérien direction $x\,[m]$	$8.00e^{-3}$	$6.40e^{-3}$	$5.33e^{-3}$	$4.57e^{-3}$
Taille des éléments Eulérien direction $y\,[m]$	$1.00e^{-2}$	$8.33e^{-3}$	$6.67e^{-3}$	$5.68e^{-3}$

Table *4.1 – Tableau du nombre d'éléments Eulérien et de leurs dimensions dans la zone d'impact pour les différents maillages et pour une durée de simulation de* $0.02\,s$

Le tableau 4.2 rend compte de la valeur maximale, de la moyenne et de l'écart type des efforts hydrodynamiques F_z pour les maillages du tableau 4.1 avec AMR de niveau un et deux.

Maillage	$m1amr1$	$m1amr2$	$m1.25amr1$	$m1.25amr2$	$m1.50amr1$	$m1.50amr2$	$m1.75amr1$	$m1.75amr2$
Max	1800	1604	1810	1601	1551	1520	1540	1520
Moyenne	1140	1152	1136	1144	1134	1144	1133	1143
Écart type	162	141	157	146	143	139	140	139

Table *4.2 – Tableau récapitulatif de l'étude de convergence en maillage sur les efforts hydrodynamiques*

Aux regards des résultats présentés dans le tableau 4.2, le maillage retenu pour la suite de cette étude est le maillage $m1.50$ avec l'option AMR de niveau 2, qui permet d'obtenir des résultats convergés concernant la valeur maximale, la moyenne et l'écart-type de l'effort.

La figure 4.9 rend compte des séries temporelles des efforts hydrodynamiques testées pour la convergence en maillage.

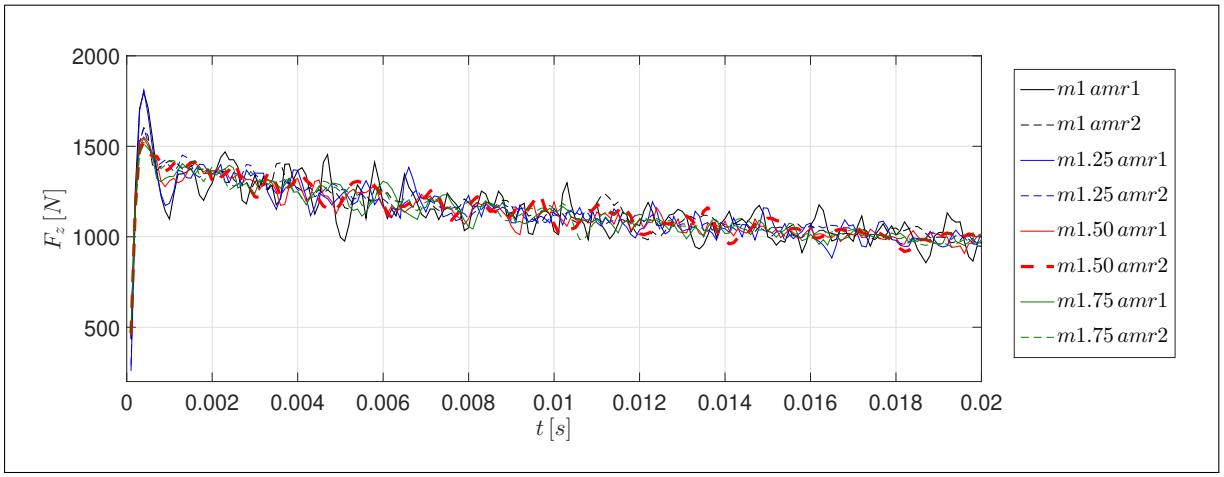

Figure *4.9 – Évolution des efforts hydrodynamiques au cours de temps pour la convergence en maillage.*

Dans la suite de l'étude, nous utiliserons le maillage $m1.50\,amr2$ pour modéliser l'impact du corps parabolique sur houle d'Airy régulière.

Du fait du formalisme CEL et de la méthode de contact par pénalisation, les signaux d'effort hydrodynamique sont relativement bruités même pour les maillages les plus fins. Dans le paragraphe suivant nous présentons une méthode permettant de lisser ces signaux.

4.3.2 Lissage et interpolation des signaux d'efforts hydrodynamiques

Dans cette partie, nous exposons une procédure qui permet de lisser les signaux d'efforts hydrodynamiques obtenus au moyen d'Abaqus. Cette méthode repose sur une détection des enveloppes supérieures et inférieures des signaux. Elle permet d'extraire l'enveloppe moyenne et donc d'éliminer les différents pics numériques. Nous notons qu'au moyen de cette méthode, on commet une légère erreur sur la valeur maximale des efforts mais nous conservons la valeur moyenne. Nous pouvons décomposer cette stratégie en plusieurs étapes :

• Élimination des données antécédentes à la valeur maximale de la série temporelle F_z calculée avec Abaqus (Fig. 4.10).

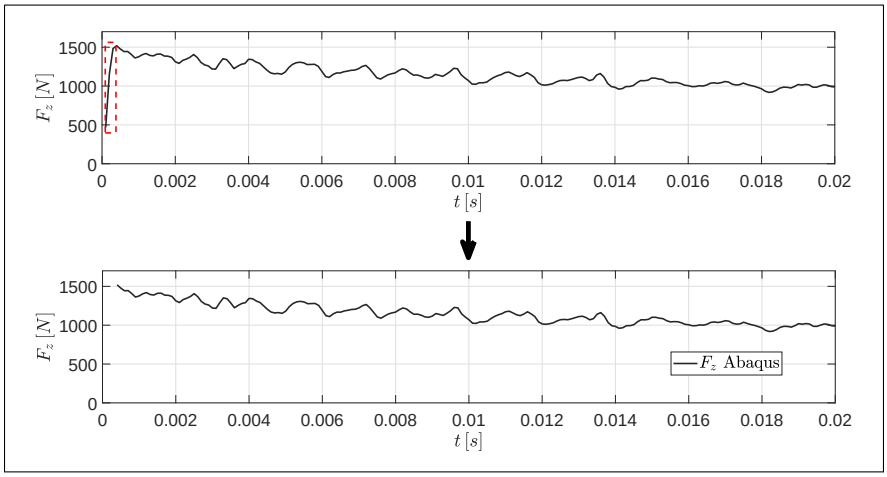

Figure *4.10 – Suppression des données antécédentes à la valeur maximale de F_z d'Abaqus.*

• Détection des enveloppes supérieure et inférieure du signal d'effort F_z puis extraction de l'enveloppe moyenne (Fig. 4.11).

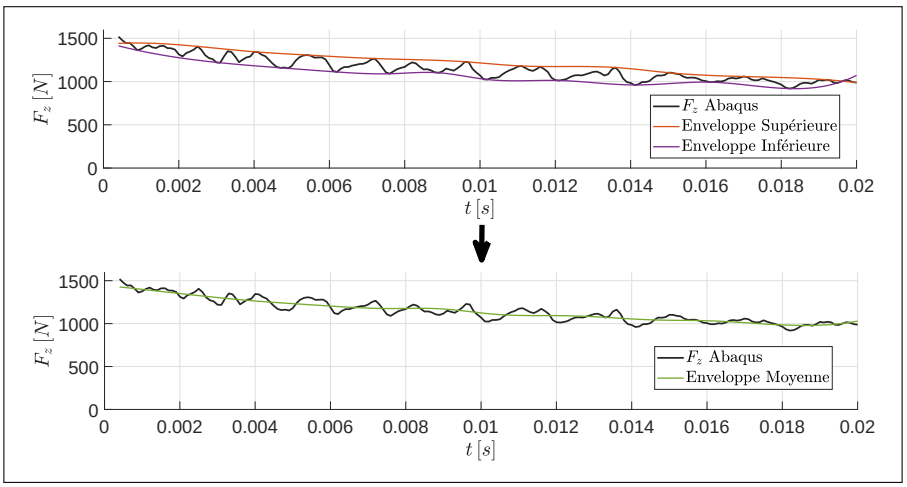

Figure *4.11 – Extraction de l'enveloppe moyenne de F_z d'Abaqus.*

• Interpolation des données de l'enveloppe moyenne pour coïncider avec le pas de temps du modèle analytique (Fig. 4.12).

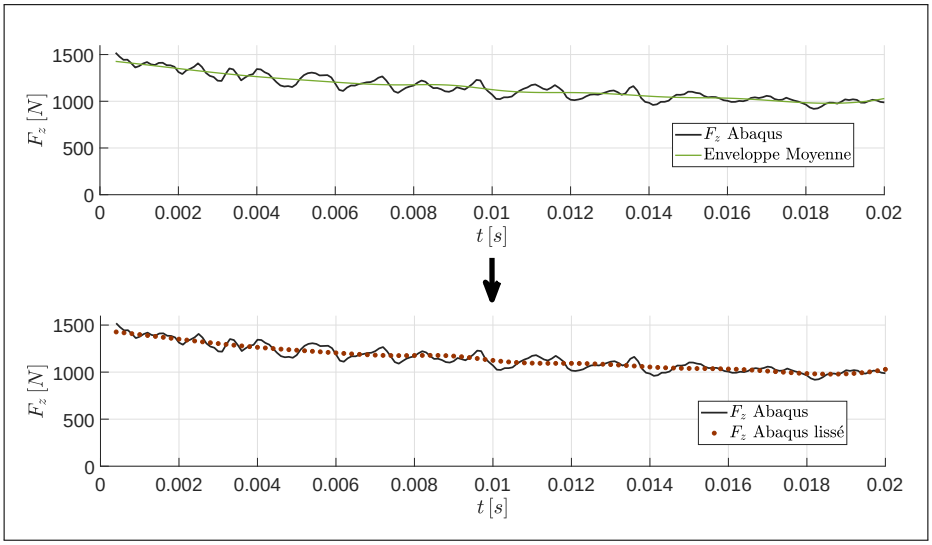

FIGURE *4.12 – Interpolation des données du pas de temps d'Abaqus pour comparer avec le pas de temps analytique.*

Une fois les données F_z d'Abaqus lissées, nous comparons aux efforts obtenus avec les modèles analytiques.

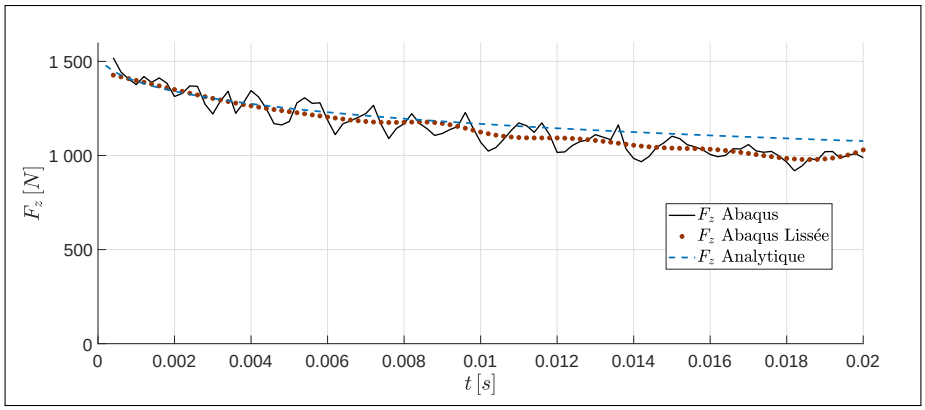

FIGURE *4.13 – Figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus/CAE avec et sans lissage aux effort hydrodynamique provenant d'un modèle analytique.*

La figure 4.13 compare les signaux d'effort hydrodynamique, bruts et lissés d'Abaqus, aux efforts hydrodynamiques obtenus avec un modèle analytique pour un impact verticale d'une parabole à $5.0\,m.s^{-1}$ sur une surface libre plane.

Comparaison F_z	Brut	Lissé
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	4,88%	1,49%
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	5,28%	4,00%

TABLE *4.3 – Tableau donnant les écarts relatifs moyen et au premier pas de temps entre les efforts hydrodynamiques d'Abaqus (brut et lissé) par rapport au modèle analytique.*

Le tableau 4.3 montre les écarts relatifs entre les signaux F_z d'Abaqus (brut et lissé) par rapport au modèle analytique d'impact.

Nous constatons que les écarts relatifs au premier pas de temps et moyen sont de même ordre de grandeur. Nous considérons donc que ces écart entre les données brutes et lissées sont acceptables. Dans la suite de cette étude, nous utiliserons uniquement les données lissées.

4.3.3 Corrections de surface mouillée numériques

Dans la section 4.5, des comparaisons entre les corrections de surface mouillée des modèles analytiques et numériques sont présentées. Cette section explique comment les corrections de surface mouillée numériques sont obtenues.

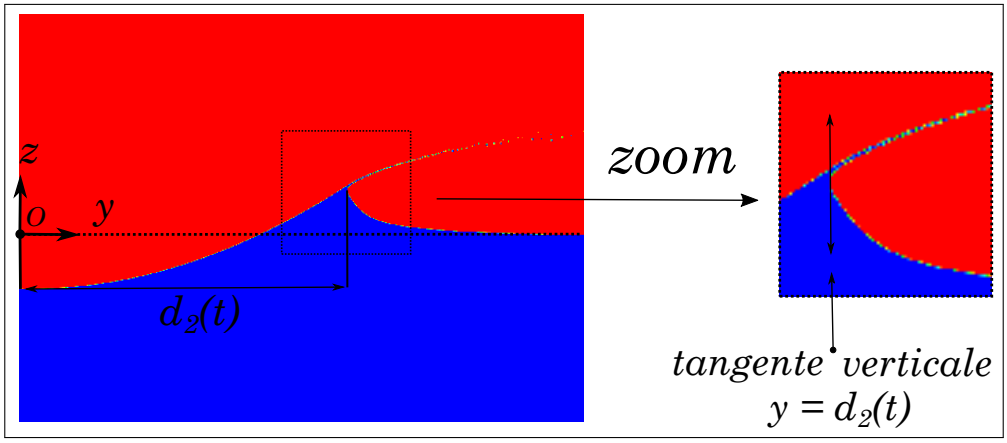

Figure *4.14 – Méthode de calcul des corrections de surface mouillée numériques*

La figure C.2 montre que les corrections de surface mouillée numériques sont choisies comme les distances entre le premier point d'impact O et les tangentes verticales respectivement à droite et à gauche de l'élévation de surface libre. La figure C.2 affiche uniquement la tangente verticale à droite de la surface mouillée. Pour visualiser les tangentes verticales à gauche et à droite de la surface mouillée on peut se référer à l'annexe C.2.

Il convient de noter que la géométrie de surface libre considérée dans les modèles analytiques est différente de celle obtenue dans les simulations numériques, du fait de la présence du jet. Néanmoins, en considérant les tangentes verticales à la surface libre, nous identifions le zone où le fluide est « pleinement » en contact avec le solide et où les pressions hydrodynamiques sont les plus importantes.

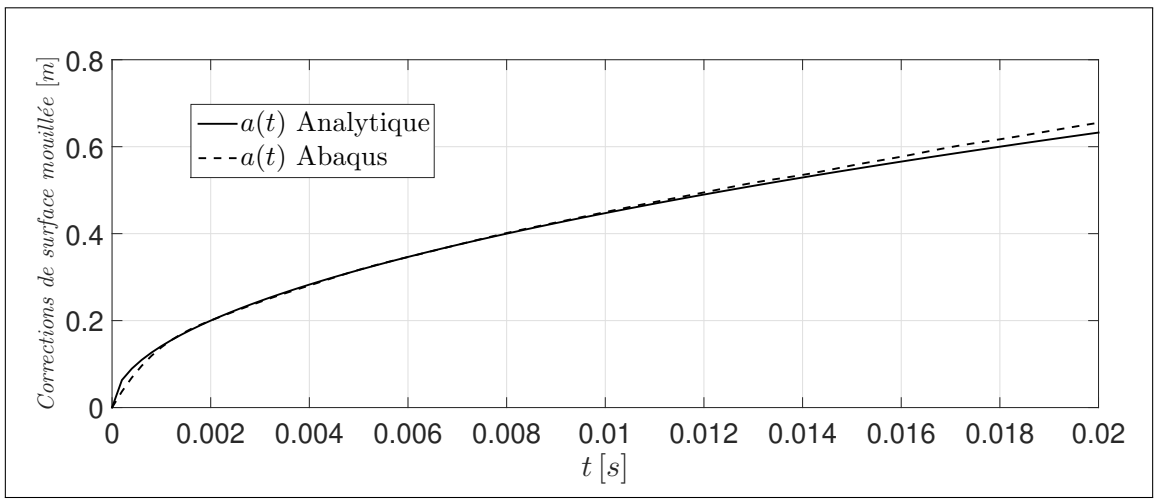

Figure *4.15 – Comparaison des corrections de surface mouillée analytique et numérique pour un impact sur une surface libre plane*

À titre d'exemple la figure 4.15 compare la correction de surface numérique à celle du modèle analytique d'impact pour une surface libre plane. Nous constatons que les deux corrections de surface mouillée sont très proches. Le modèle numérique sous-estime légèrement les résultats du modèle analytique en début de simulation. Le contraire est observé en fin de simulation.

4.4 Modélisation d'une houle d'Airy régulière sous Abaqus

Dans cette section nous expliquons comme nous procédons pour modéliser l'impact d'un corps solide parabolique sur une surface libre ondulée symbolisant une houle d'Airy régulière, au moyen de transformations géométriques. Cette méthode consiste à modifier les coordonnées du maillage Eulérien, correspondant au cas d'une surface plane, pour lui donner un forme de houle d'Airy régulière. Nous expliquons aussi comment nous modélisons la vitesse de propagation de la houle au sein du modèle numérique.

4.4.1 Pour un impact au niveau de la crête ou du creux

Pour simuler des configurations d'impact au voisinage de la crête et du creux au moyen d'Abaqus, nous appliquons les transformations géométriques (4.10a) et (4.10b) :

$$\begin{cases} z_{nc} = z_{flat} - C\left[1 - \cos\left(\kappa\, y_{flat}\right)\right] , & \text{(4.10a)} \\ z_{nt} = z_{flat} + C\left[1 - \cos\left(\kappa\, y_{flat}\right)\right] . & \text{(4.10b)} \end{cases}$$

Avec :

- z_{flat} et y_{flat} les coordonnées d'origine du maillage Eulérien selon les axes (Oz) et (Oy).
- z_{nc} et z_{nt} les nouvelles coordonnées selon l'axe (Oz) du maillage Eulérien pour des configurations d'impact au niveau de la crête et du creux.

Ces deux transformations géométriques du maillage Eulérien sont illustrées par la figure 4.16 :

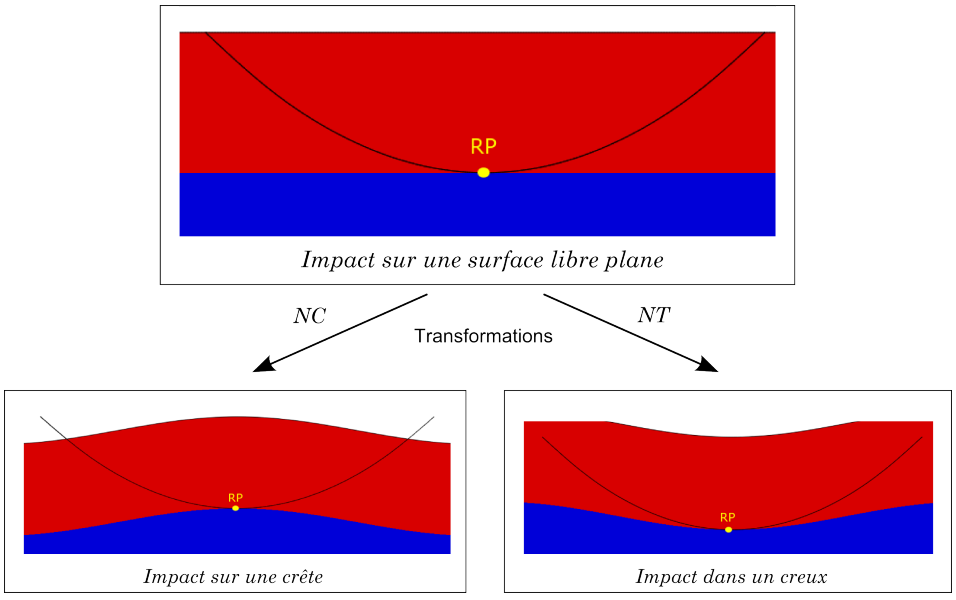

Figure *4.16 – Illustration des transformations géométriques du maillage Eulérien pour simuler des impacts au voisinage de la crête et du creux.*

Nous notons que pour simuler des impacts au voisinage de la crête et du creux au moyen d'Abaqus, il est uniquement nécessaire de transformer les coordonnées selon l'axe (Oz) du maillage Eulérien. Les valeurs de C et κ utilisées dans les équations (4.10a) et (4.10b) sont choisies dans les tableaux 3.1 et 3.2 du chapitre 2 afin de modéliser le cas test d'impact hydrodynamique voulu.

4.4.2 Pour un impact au niveau du milieu

Pour simuler un impact au voisinage du milieu de la pente de la houle d'Airy, nous procédons en trois étapes.

La première étape nécessite d'appliquer la transformation 4.11 au maillage Eulérien.

$$z_{m\,eul} = z_{flat} + C\left[1 - \cos\left(\kappa\, y_{flat} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{4.11}$$

Avec $z_{m\,eul}$ les nouvelles coordonnées du maillage Eulérien selon l'axe (Oz).

La seconde étape opère une translation selon les axes (Oy) et (Oz) de la parabole au moyen des coordonnées du maillage Lagrangien (Eq(s). 4.12a et 4.12b).

$$\begin{cases} y_{m\,lag} = y_{flat\,lag} - Y_0\,, & \text{(4.12a)} \\ z_{m\,lag} = z_{flat\,lag} + H_0\,. & \text{(4.12b)} \end{cases}$$

Avec $(y_{flat\,lag},\, z_{flat\,lag})$ le couple de coordonnées d'origine du maillage Lagrangien et $(y_{m\,lag},\, z_{m\,lag})$ le couple de nouvelles coordonnées du maillage Lagrangien. Les grandeurs Y_0 et H_0 sont les mêmes valeurs présentés au chapitre 2.

La troisième étape nécessite de redéfinir les coordonnées du point de référence de la parabole RP. Pour un impact au voisinage du milieu de la pente de la houle, le premier point d'impact ne correspond pas au point le plus bas de la parabole.

$$RP(0,\,0) \quad \longrightarrow \quad RP(Y_0,\,Z_0) \tag{4.13}$$

Nous illustrons cette transformation avec la figure 4.17 :

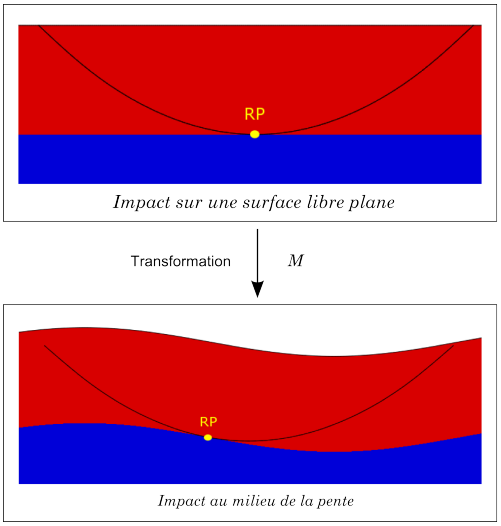

Figure *4.17 – Illustration de la transformation géométrique du maillage Eulérien et de la translation du maillage Lagrangien pour simuler des impacts au voisinage du milieu de la pente.*

4.4.3 Cinématique de la houle d'Airy

Il aurait été un peu compliqué d'imposer les champs de vitesse et de pression liés à la houle d'Airy comme conditions initiales dans Abaqus/Explicit. En effet, la houle d'Airy est une théorie linéarisée reposant sur une hypothèse d'écoulement incompressible. Il est donc fort probable que des perturbations seraient apparues dans les simulations numériques. Une façon plus simple de tenir compte de la propagation de la houle consiste à implémenter la vitesse de phase V_φ dans la cinématique de la parabole. Dans cette partie, nous conservons la vitesse de chute la parabole égale à $W = V = 5\,m.s^{-1}$.

Dans le cas d'une cinématique de la parabole purement verticale, nous rajoutons une vitesse d'avance horizontale égale à V_φ (Fig(s). 4.18 et 4.19).

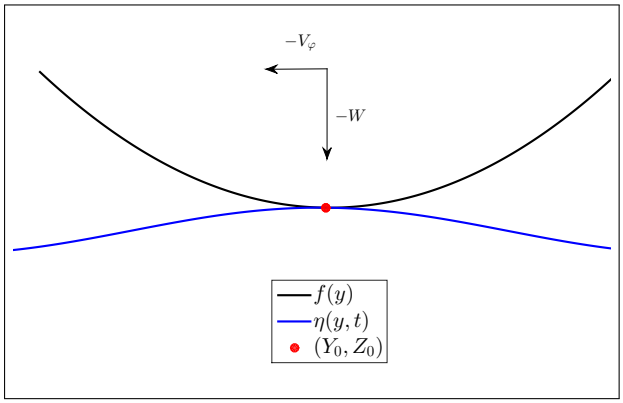

Figure *4.18 – Cinématique de la parabole sous Abaqus pour un impact au niveau de la crête et pour un impact vertical*

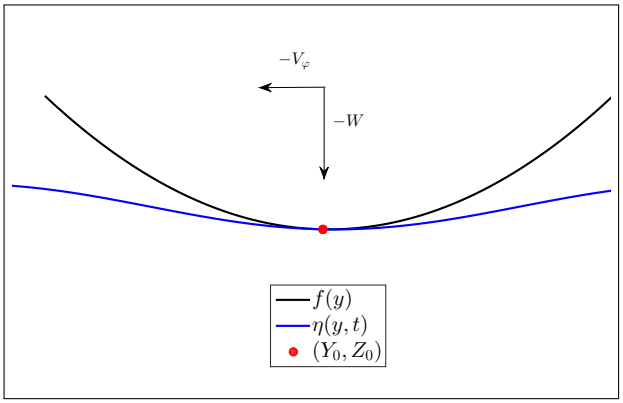

Figure *4.19 – Cinématique de la parabole sous Abaqus pour un impact au niveau du creux et pour un impact vertical*

Dans le cas d'une cinématique de chute oblique de la parabole, elle est aussi animée d'une vitesse d'avance horizontale allant de la droite vers la gauche et égale à :

$$-V_{num}.\vec{e}_x = -V.\vec{e}_x - V_\varphi.\vec{e}_x \tag{4.14}$$

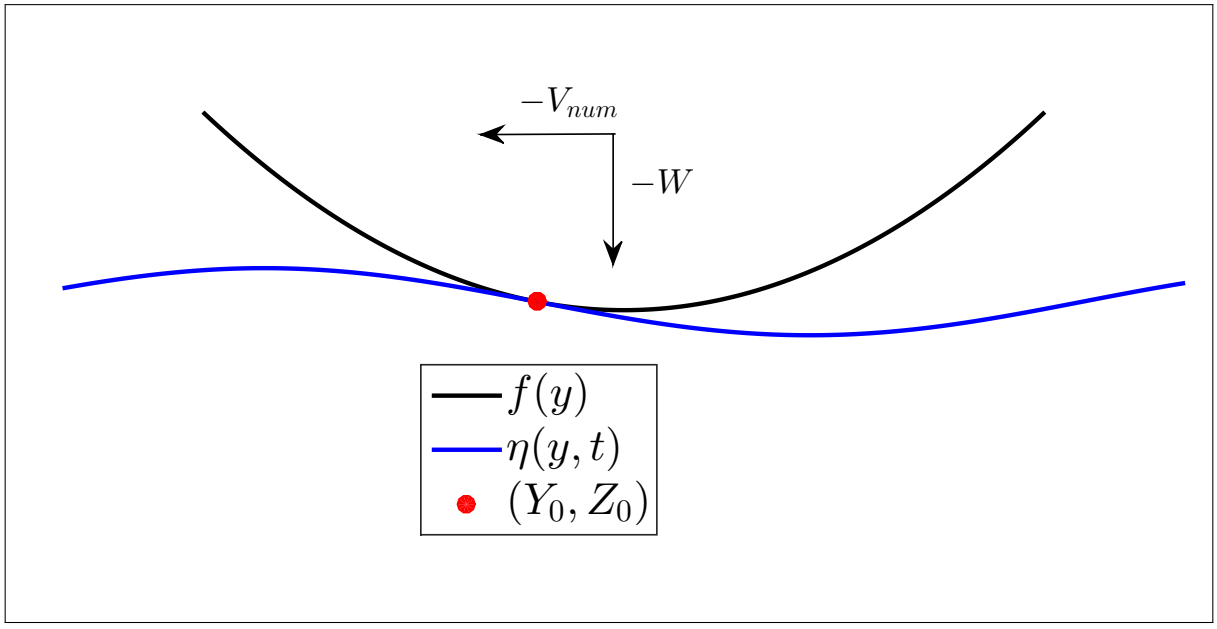

Figure *4.20 – Cinématique de la parabole sous Abaqus pour un impact oblique au niveau du milieu de la pente*

La figure 4.20 illustre, pour un impact au niveau du milieu de la pente, comment la vitesse de phase et la vitesse d'avance sont prises en compte dans les simulations numériques.

4.5 Comparaison des efforts hydrodynamiques numérique et semi-analytique

Dans cette section nous comparons les efforts hydrodynamiques obtenus avec la méthode CEL d'Abaqus aux efforts hydrodynamiques obtenus avec les modèles d'impact non-asymptotiques présentés au chapitre 2. Nous nous intéressons ici majoritairement à l'effort hydrodynamique vertical afin d'avoir une base de comparaison par rapport aux résultats du chapitre 3. De façon analogue au chapitre 3, nous discernons les résultats avec et sans vitesse d'avance horizontale de la parabole. Comme au sein du logiciel Abaqus les vraies géométries (non-linéarisées) sont conservées lors des simulations, nous choisissons de comparer les efforts hydrodynamiques pour les cas tests $2.a$, $2.b$, $7.a$ et $7.b$ présentés dans les tableaux du chapitre 2. C'est-à-dire pour $R_v = 9\,m$ et $R_v = 2\,m$. Nous traitons des configurations d'impact au voisinage de la crête, du creux et du milieu de la pente de la houle d'Airy.

Pour procéder aux comparaisons présentées dans les parties 4.5.1 et 4.5.2, nous utilisons les signaux d'efforts lissés conformément à la méthode présentée dans la partie 4.3.2. Afin de rendre compte des écarts entre les résultats d'Abaqus et des modèles non-asymptotiques, nous utilisons les écarts relatifs moyen et au premier pas de temps.

4.5.1 Simulations sans vitesse d'avance de la parabole

Dans cette partie, nous comparons les efforts hydrodynamiques obtenus au moyen du logiciel Abaqus par rapport à ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance (sec. 2.2). La vitesse verticale W est de $5\,m.s^{-1}$.

Crête	$R_v = 9$		$R_v = 2$	
Cas test	$2.a$	$2.b$	$7.a$	$7.b$
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	0,43%	2,52%	4,76%	2,07%
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	4,82%	4,48%	2,10%	2,52%

Table *4.4 – Pour un impact au niveau de la crête : tableau récapitulatif des écarts relatifs entre les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance*

Le tableau 4.4 présente les écarts relatifs moyen et au premier pas de temps entre le modèle Abaqus lissés et le modèle semi-analytique non-asymptotique sans vitesse d'avance pour un impact au niveau de la crête de la houle d'Airy.

Pour les cas tests considérés, nous constatons que les écarts relatifs et au premier pas de temps et moyen sont tous inférieurs à 5%. De plus, les écarts relatifs moyens sont environs deux fois moins importants lorsque $R_v = 2\,m$ que lorsque $R_v = 9\,m$.

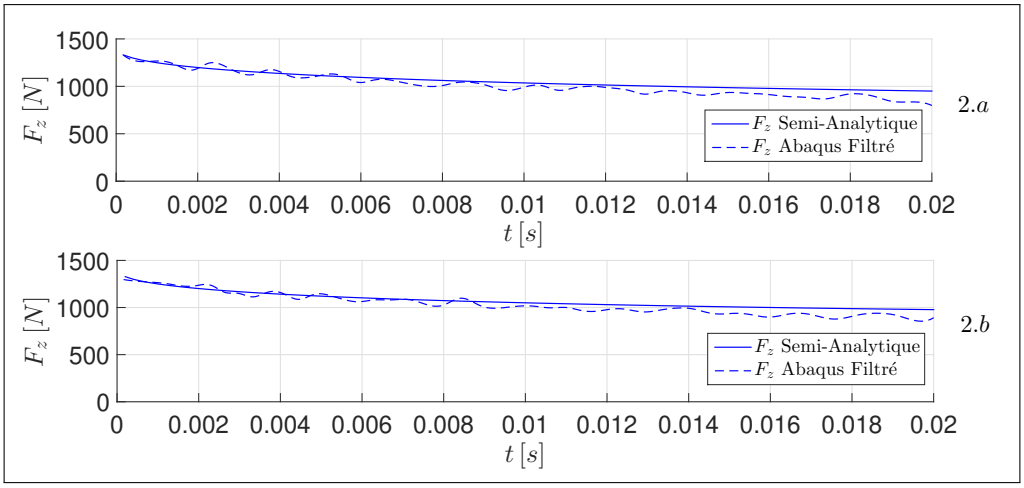

Figure *4.21 – Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$*

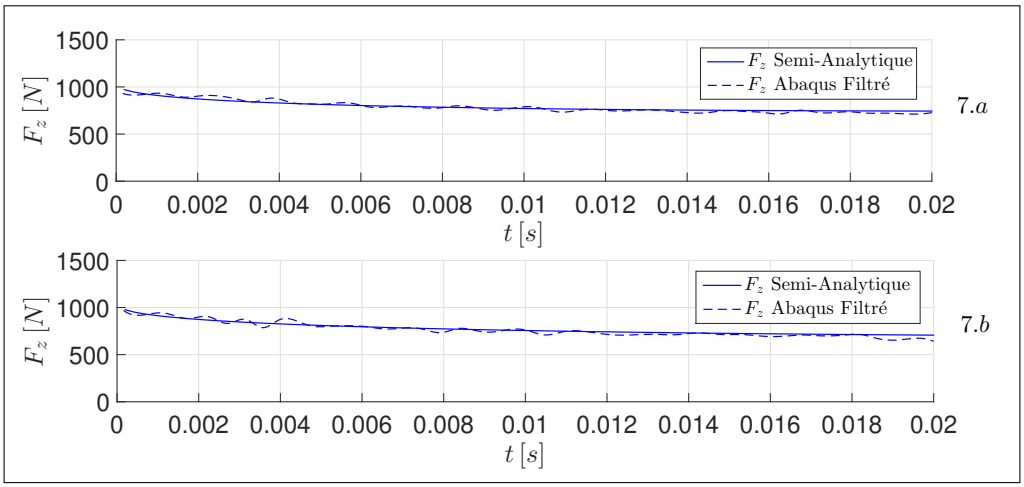

Figure *4.22 – Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$*

Les figures 4.21 et 4.22 illustrent les écarts relatifs du tableau 4.4. Les courbes d'efforts hydrodynamiques pour $R_v = 2\,m$ (Fig. 4.22) sont pratiquement confondues alors qu'un écart est bien visible avec les courbes d'efforts hydrodynamiques pour $R_v = 9\,m$ (Fig. 4.21).

Milieu	$R_v = 9$		$R_v = 2$	
Cas test	2.a	2.b	7.a	7.b
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	1,55%	4,51%	1,04%	4,50%
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	5,33%	5,08%	11,64%	11,15%

Table *4.5 – Pour un impact au niveau du milieu : tableau récapitulatif des écarts relatifs entre les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance*

Pour un impact au milieu de la pente, le tableau 4.5 montre que les écarts relatifs moyens sont plus importants lorsque $R_v = 2\,m$ que pour $R_v = 9\,m$. Pour $R_v = 2\,m$ il est d'environ 11% contre 5% pour $R_v = 9\,m$.

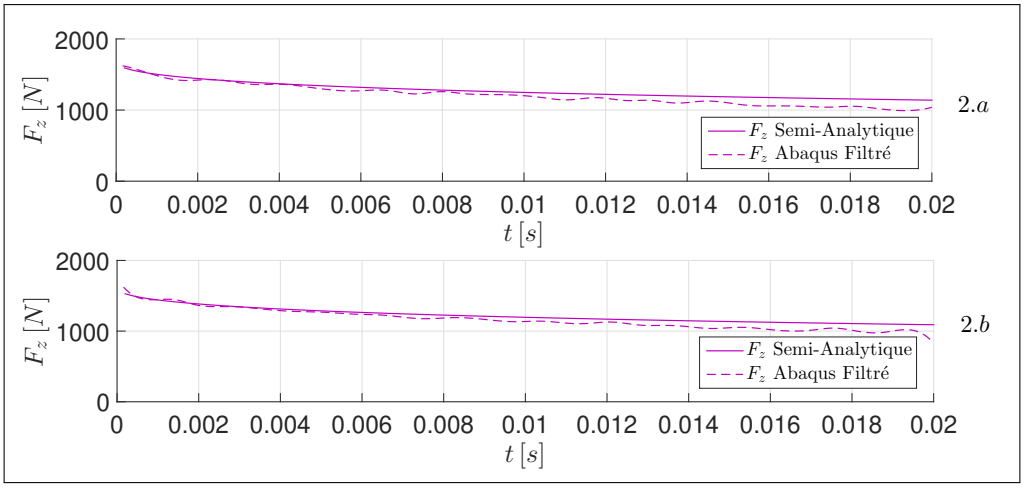

Figure *4.23 – Pour un impact au niveau du milieu de la pente : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$*

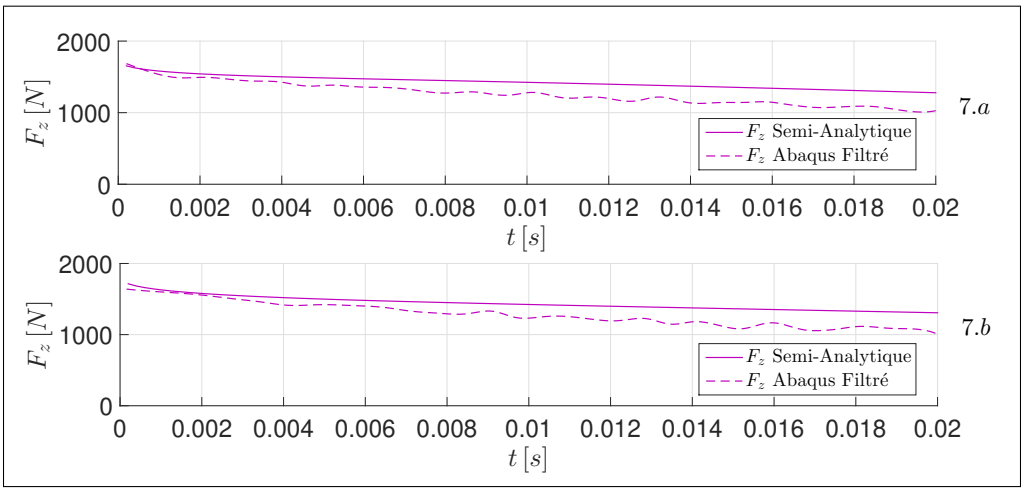

Figure *4.24 – Pour un impact au niveau du milieu de la pente : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$*

Les figures 4.23 et 4.24 illustrent les résultats du tableau 4.5.

Creux	$R_v = 9$		$R_v = 2$	
Cas test	2.a	2.b	7.a	7.b
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	3,54%	2,10%	2,73%	2,90%
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	4,16%	4,99%	9,14%	8,04%

Table *4.6 – Pour un impact au niveau du creux : tableau des comparaisons des efforts hydrodynamiques entre Abaqus et le modèle non-asymptotiques sans vitesse d'avance*

Le tableau 4.6 présente des écarts relatifs similaires au tableau 4.5. De façon analogue à une configuration d'impact au voisinage de la crête et du creux, lorsque l'impact se produit au milieu de la pente les écarts relatifs moyens sont aussi deux fois plus importants pour $R_v = 2\,m$.

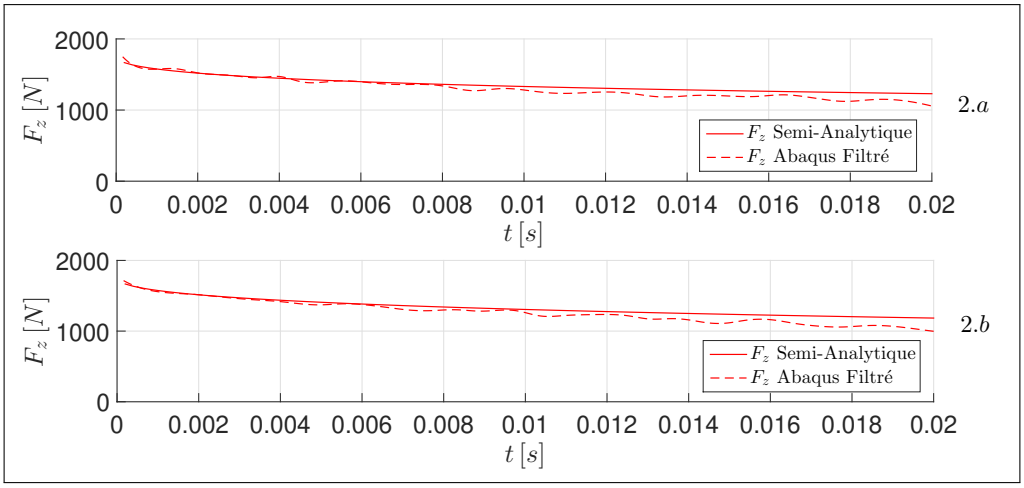

Figure *4.25 – Pour un impact au niveau du creux : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$*

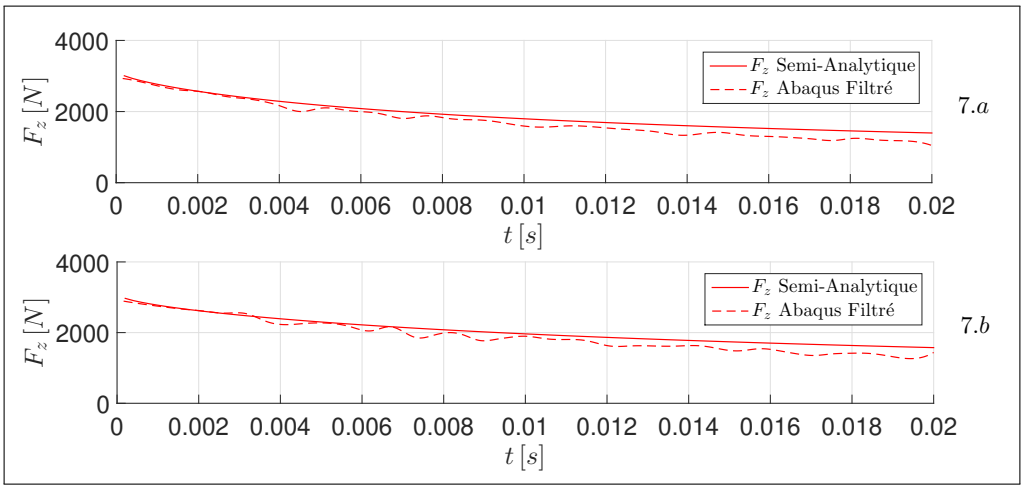

Figure *4.26 – Pour un impact au niveau du creux : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$*

Les figures 4.25 et 4.26 corroborent les résultats d'écarts relatifs présentés au tableau 4.6.

Observations pour les comparaisons entre Abaqus et le modèle semi-analytique sans vitesse d'avance

Les écarts relatifs calculés dans la partie 4.5.1 entre les courbes d'efforts hydrodynamiques du modèle Abaqus et du modèle non-asymptotique sont les plus faibles lorsque l'impact se produit au niveau de la crête. Les tendances sont identiques pour les écarts relatifs qui comparent des configurations d'impact au niveau du milieu de la pente et du creux de la houle d'Airy. Pour ces configurations d'impact l'écart relatif moyen est de l'ordre de 10% pour $R_v = 2\,m$ et de l'ordre de 5% pour $R_v = 9\,m$. Nous notons que pour chaque configuration d'impact traitée dans la partie 4.5.1, les écarts relatifs moyens sont environ deux fois plus importants lorsque $R_v = 2\,m$ que lorsque $R_v = 9\,m$. De plus, nous constatons que les écarts relatifs moyens sont pratiquement identiques lorsque l'on considère les cas tests de a (Tab. 3.1) ou b (Tab. 3.2) pour les différentes configurations d'impact. Cette dernière observation montre que la vitesse de phase et l'amplitude de la houle ne sont pas des paramètres qui modifient les écarts relatifs moyens entre les deux modèles pour un R_v donné.

4.5.2 Simulations avec vitesse d'avance de la parabole

Dans cette partie, nous comparons les efforts hydrodynamiques obtenus au moyen du logiciel Abaqus par rapport à ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance (part. 2.4.3). La cinématique de la parabole est définie par $W = 5\,m.s^{-1}$ et $V = 5\,m.s^{-1}$.

Crête	$R_v = 9$		$R_v = 2$	
Cas test	$2.a$	$2.b$	$7.a$	$7.b$
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	1,17%	3,74%	1,04%	0,60%
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	2,60%	3,55%	2,34%	1,78%

TABLE *4.7 – Pour un impact au niveau de la crête : tableau récapitulatif des écarts relatifs entre les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance*

Pour un impact oblique au niveau de la crête, le tableau 4.7 montre que les écarts relatifs pour $R_v = 2\,m$ sont inférieurs à 2.5%. Pour $R_v = 9\,m$, ils sont inférieurs à 4%.

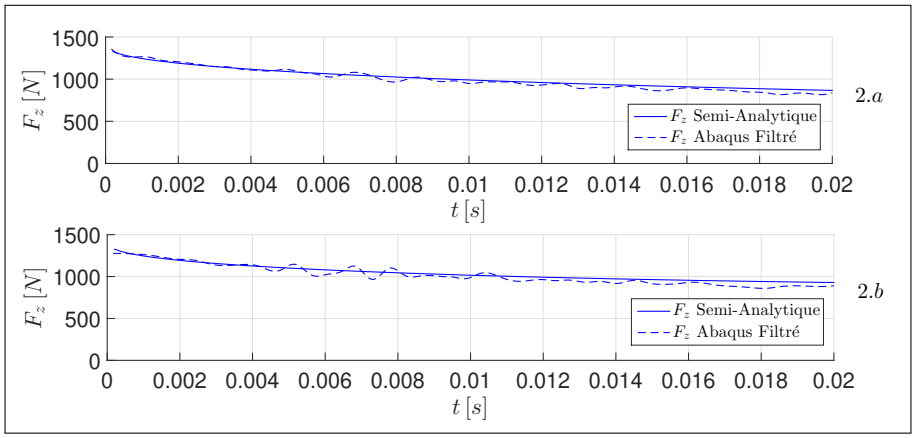

FIGURE *4.27 – Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$*

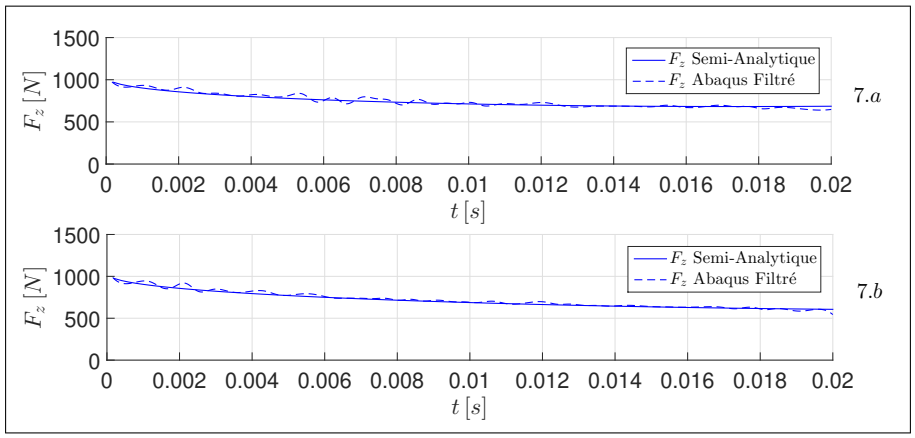

FIGURE *4.28 – Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$*

Les figures 4.27 et 4.28 présentent les comparaisons des efforts hydrodynamiques pour les cas tests considérés et corroborent les résultats en termes d'écarts relatifs du tableau 4.7.

Milieu	$R_v = 9$		$R_v = 2$	
Cas test	$2.a$	$2.b$	$7.a$	$7.b$
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	3,97%	1,53%	2,48%	7,23%
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	4,42%	3,39%	3,31%	8,87%

Table *4.8 – Pour un impact au niveau du milieu : tableau récapitulatif des écarts relatifs entre les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance*

Le tableau 4.8 récapitule les valeurs des écarts relatifs pour un impact oblique au niveau du milieu de la pente de la houle d'Airy. Ces écarts relatifs sont inférieurs à 9% lorsque $R_v = 9\,m$ et inférieurs à 5% pour $R_v = 2\,m$.

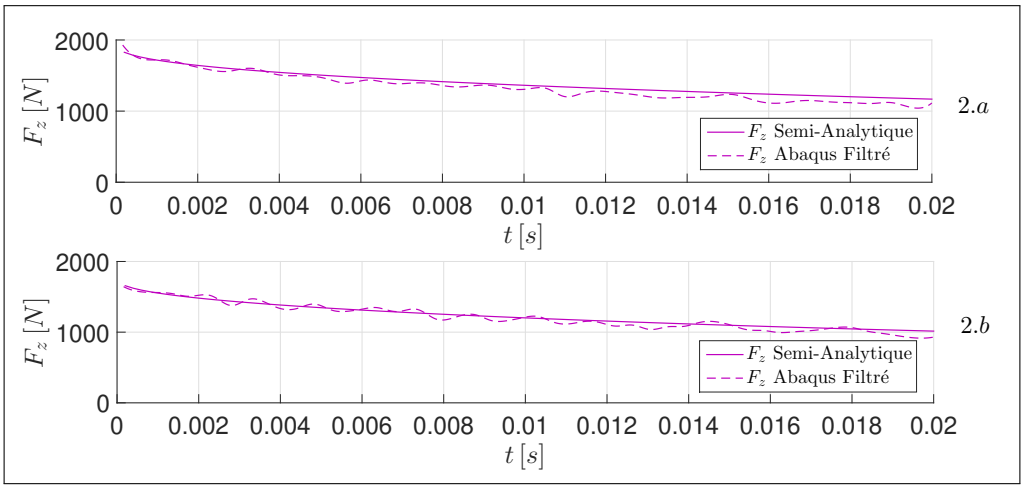

Figure *4.29 – Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$*

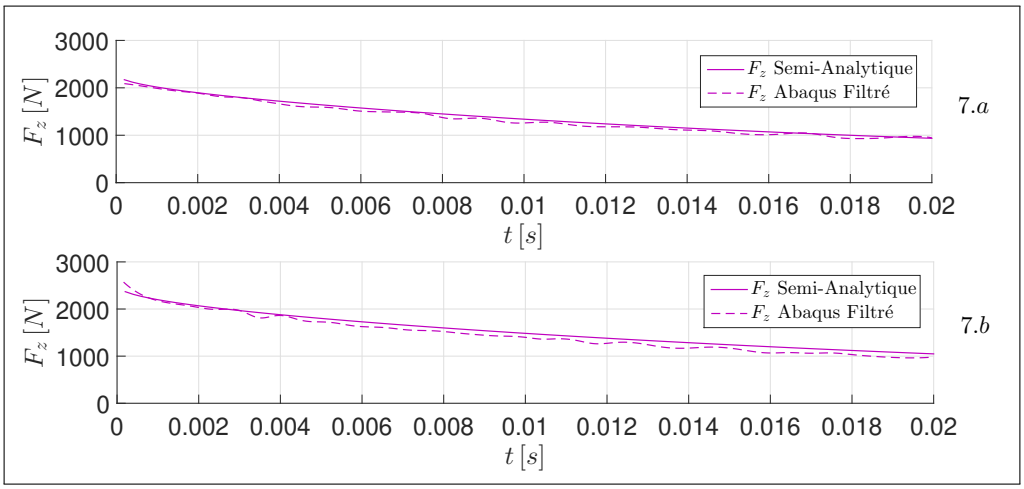

Figure *4.30 – Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$*

Les figures 4.29 et 4.30 montrent les comparaisons d'efforts hydrodynamiques entre le modèle numérique et le modèle semi-analytique. Ces deux figures corroborent bien les valeurs du tableau 4.8.

Creux	$R_v = 9$		$R_v = 2$	
Cas test	$2.a$	$2.b$	$7.a$	$7.b$
$\boldsymbol{\Delta}$ premier	1,23%	3,19%	3,17%	5,71%
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}$	3,22%	3,40%	3,02%	2,46%

TABLE *4.9 – Pour un impact au niveau du creux : tableau récapitulatif des écarts relatifs entre les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance*

Le tableau 4.9 retranscrit les écarts relatifs au premier pas de temps et moyen pour un impact au niveau du creux. Nous constatons que les écarts relatifs moyens sont autour de 3%.

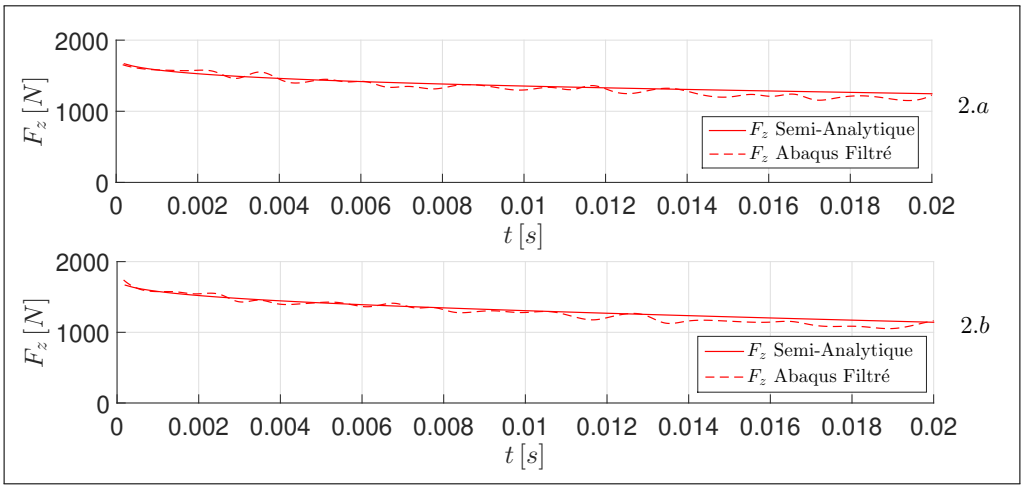

FIGURE *4.31 – Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 9\,m$*

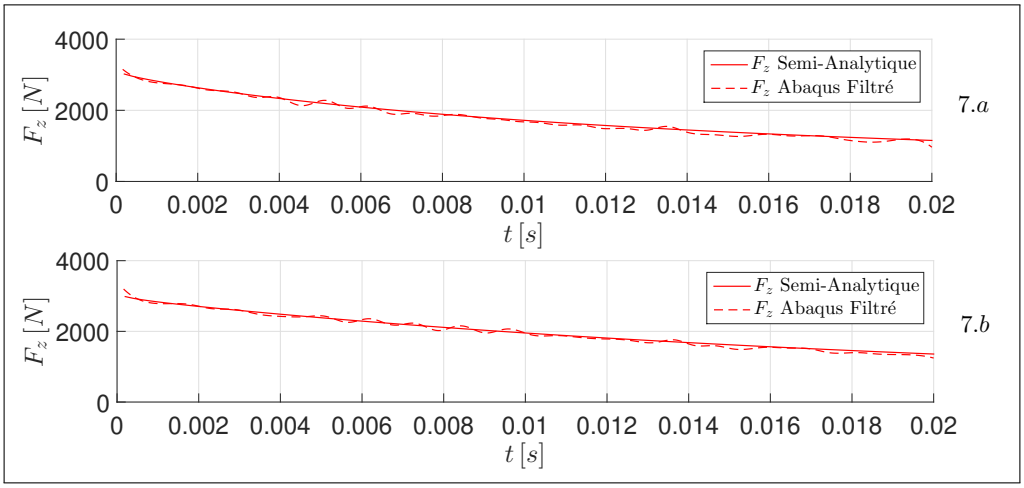

FIGURE *4.32 – Pour un impact au niveau de la crête : figure comparant les efforts hydrodynamiques d'Abaqus lissés et ceux du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance : $R_v = 2\,m$*

Les figures 4.31 et 4.32 montrent l'évolution des efforts hydrodynamiques obtenus au moyen des deux types de modèles.

Observations pour les comparaisons entre Abaqus et le modèle semi-analytique avec vitesse d'avance

Les tendances pour les écarts relatifs de la partie 4.5.2 sont analogues à la partie 4.5.1, les écarts relatifs moyen entre le modèle semi-analytique avec vitesse d'avance et le modèle numérique Abaqus sont faibles et en général autour de 5%.

4.5.3 Comparaison qualitative des corrections des surface mouillée

Au sein de cette partie, nous comparons qualitativement les corrections de surface mouillée numériques obtenues avec la méthode présentée en partie 4.3.3 aux corrections de surface mouillée obtenues au moyen des modèles développés au chapitre 2.

Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée sans vitesse d'avance

Ce paragraphe confronte qualitativement les corrections de surface mouillée numériques à celles du modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance.

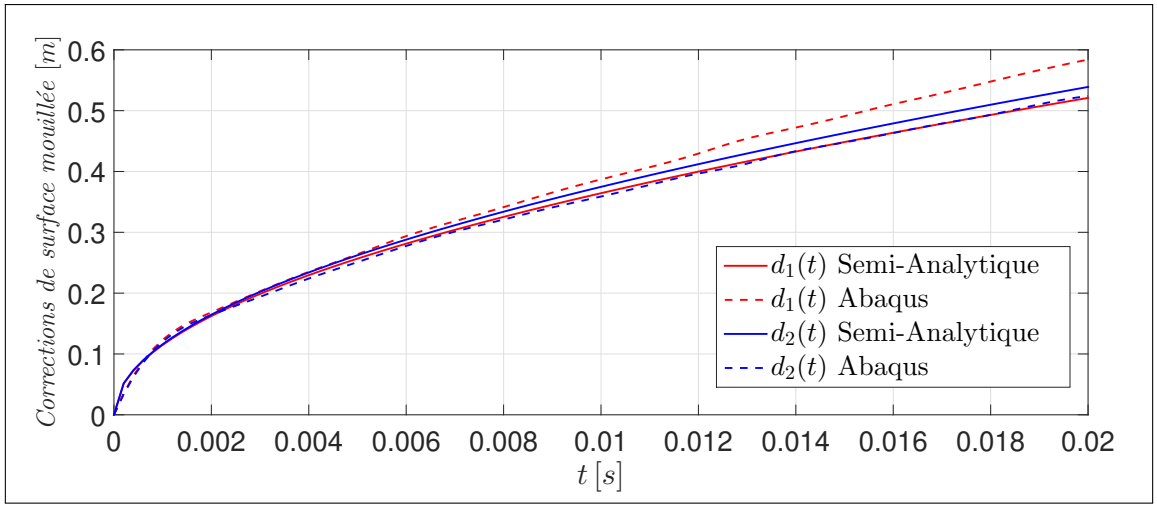

Figure *4.33 – Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée sans vitesse d'avance pour un impact au niveau de la crête - Cas test 7a* $R_v = 2\,m$

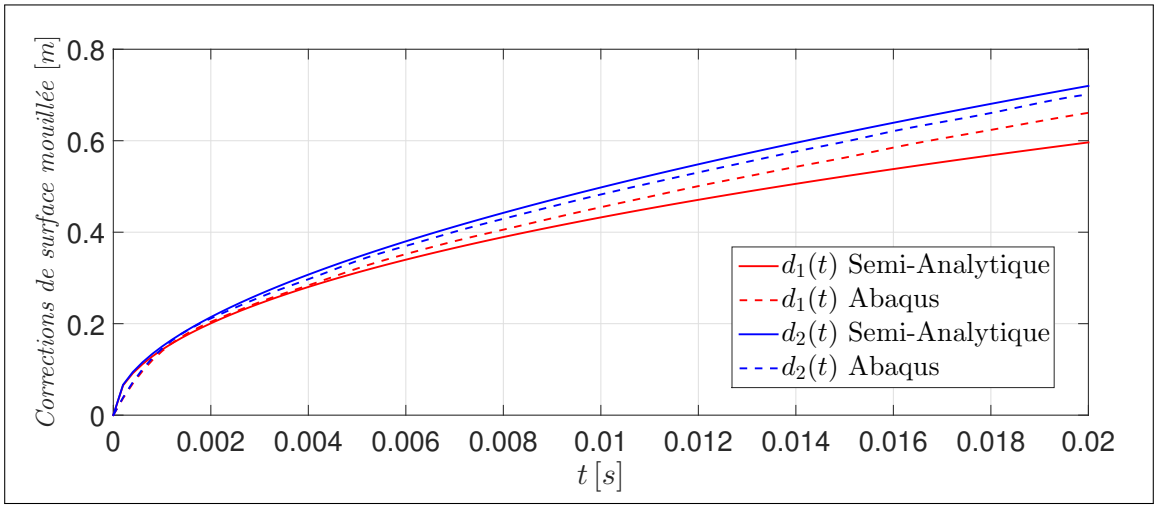

Figure *4.34 – Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée sans vitesse d'avance pour un impact au niveau du milieu - Cas test 7b* $R_v = 2\,m$

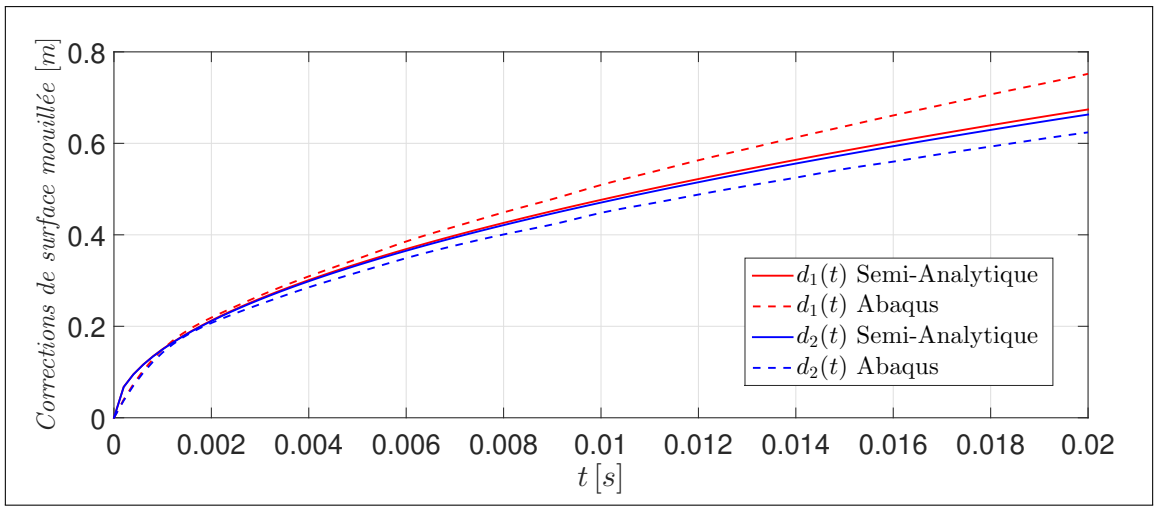

Figure *4.35 – Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée sans vitesse d'avance pour un impact au niveau du creux - Cas test* $2a$ $R_v = 9\,m$

Les figures 4.33 à 4.35 montre les comparaisons des corrections de surface mouillée dissymétriques entre le modèle numérique (part. 4.3.3) et le modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance (sec. 2.3). Dans cette partie nous considérons uniquement les cas tests $7a$, $7b$ et $2a$ pour respectivement des configurations d'impact sur houle d'Airy au voisinage de la crête, du milieu et du creux. Nous constatons que pour les trois configurations d'impact les corrections de surface mouillée numériques et semi-analytiques sont en assez bon accord. Á chaque fois, les corrections de surface mouillée du modèle numérique sous-estiment celles du modèle semi-analytique pour $d_1(t)$ et surestiment pour $d_2(t)$.

Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée avec vitesse d'avance

Ce paragraphe confronte qualitativement les corrections de surface mouillée numériques (part. 4.3.3) à celles du modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance (part. 2.4.4). Dans cette partie, nous utilisons les cas tests $2a$, $2a$ et $7b$ pour respectivement les trois configurations d'impact préétablies.

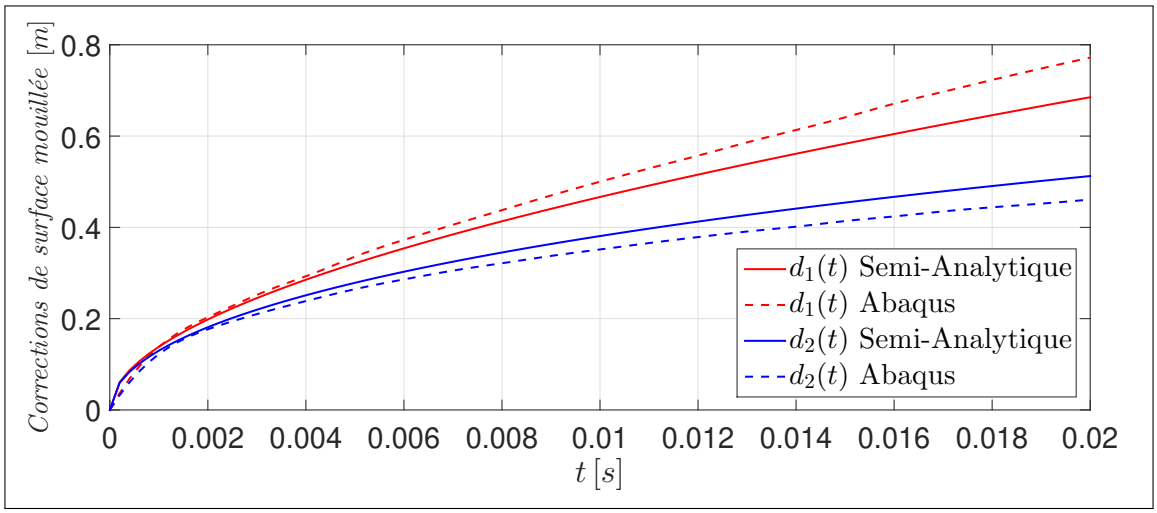

Figure *4.36 – Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée avec vitesse d'avance pour un impact au niveau de la crête - Cas test* $2a$ $R_v = 9\,m$

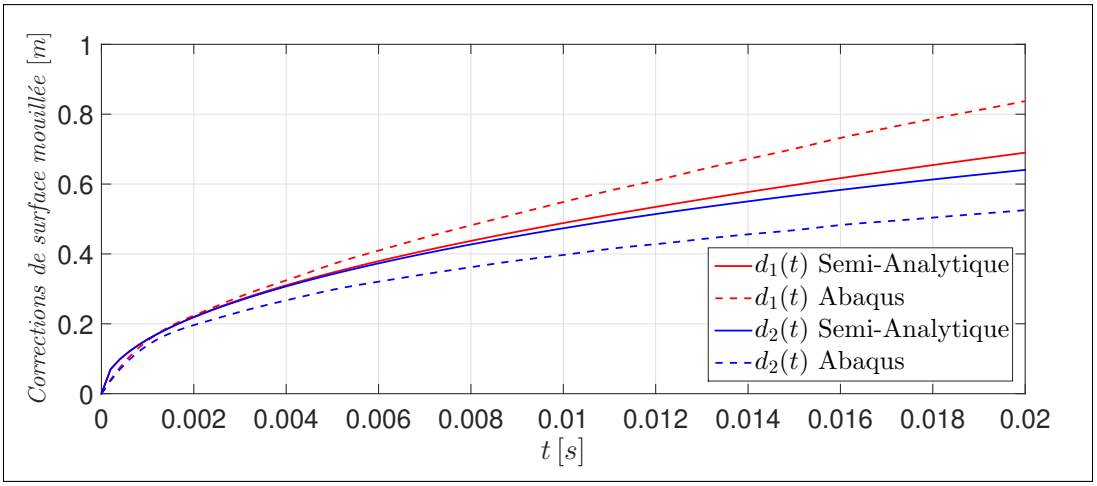

Figure *4.37 – Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée avec vitesse d'avance pour un impact au niveau du milieu - Cas test 2a* $R_v = 9\,m$

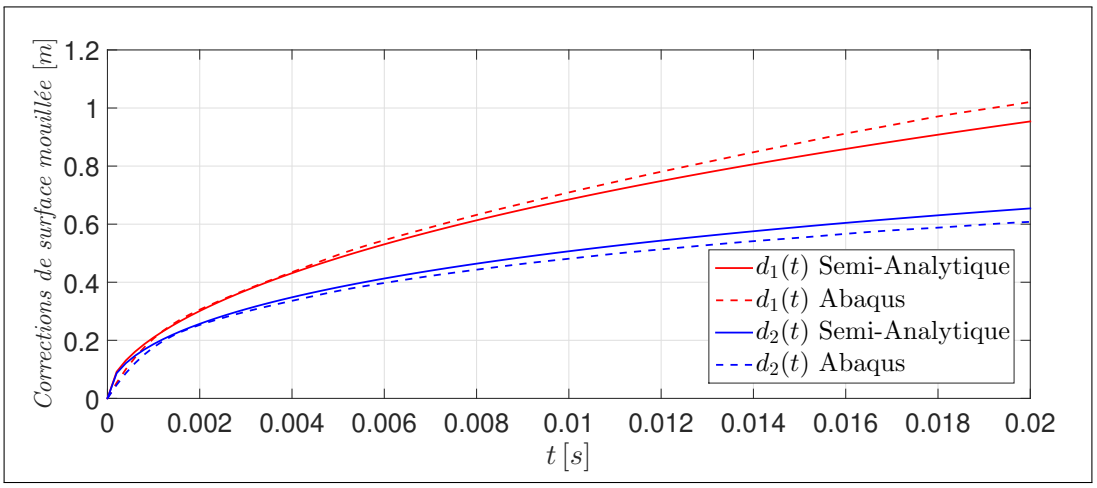

Figure *4.38 – Comparaison qualitative des corrections de surface mouillée avec vitesse d'avance pour un impact au niveau du creux - Cas test 7b* $R_v = 2\,m$

Les figures 4.36 à 4.38 permettent d'établir les mêmes constations que dans le cas sans vitesse d'avance. À savoir que les corrections de surface mouillé numérique et semi-analytique sont assez proches, mais le modèle numérique à tendance à sous-estimer $d_1(t)$ et surestimer $d_2(t)$ par rapport au modèle semi-analytique avec vitesse d'avance. Nous notons que ces différences semblent être plus importantes lorsque la parabole est animée d'une vitesse d'avance.

4.5.4 Champs de pression obtenus au moyen du couplage CEL

Dans cette partie, nous parlons de l'allure des champs de pression du couplage obtenu au moyen du couplage CEL d'Abaqus. Ces champs de pression sont calculés en utilisant la grandeur CPRESS (voir [Abaqus Analysis User's Guide 37.1.2, 2016]) qui représente les pression de contact P_c (part. 4.2.3) à l'interface fluide/solide. Nous considérons uniquement les cas tests pour $R_v = 2\,m$.

Champs de pression numérique sans vitesse d'avance

Dans ce paragraphe, nous confrontons quelques champs de pression provenant des simulations Abaqus aux champs de pression calculés avec le modèle non-asymptotique semi-analytique sans vitesse d'avance.

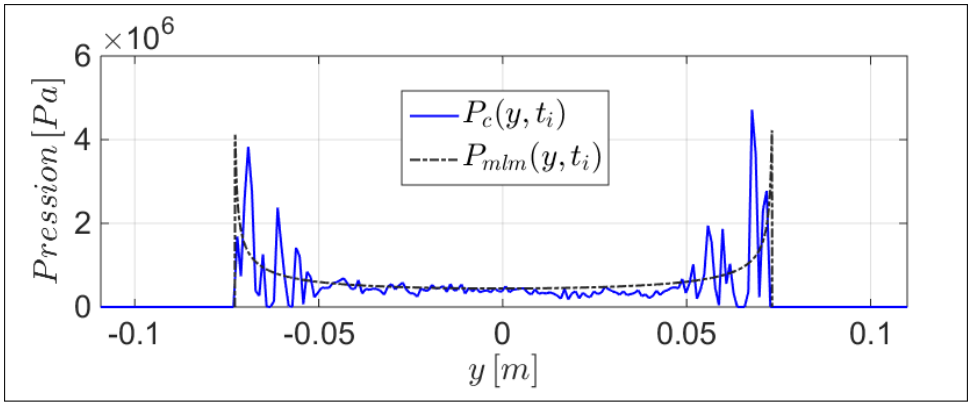

Figure 4.39 – *Champs de pression Abaqus et semi-analytique pour un impact au niveau de la crête sans vitesse d'avance : cas test n°7a* $t_i = 4.0\,e^{-4}\,s$

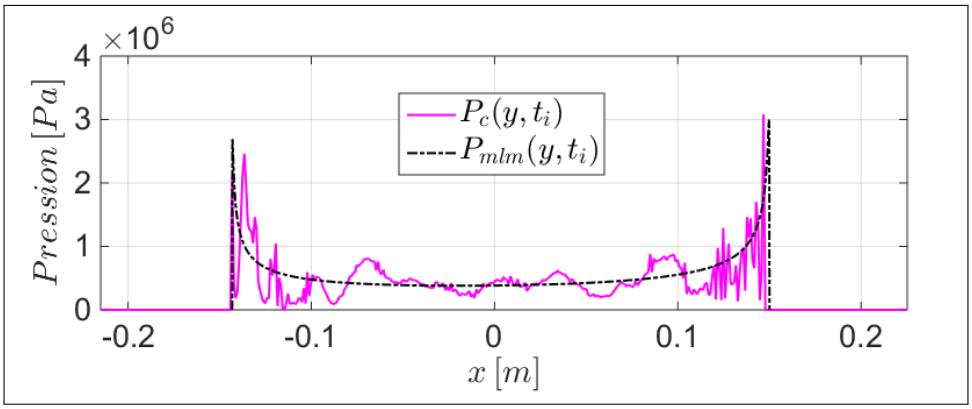

Figure 4.40 – *Champs de pression Abaqus et semi-analytique pour un impact au niveau du milieu sans vitesse d'avance : cas test n°7b* $t_i = 1.0\,e^{-3}\,s$

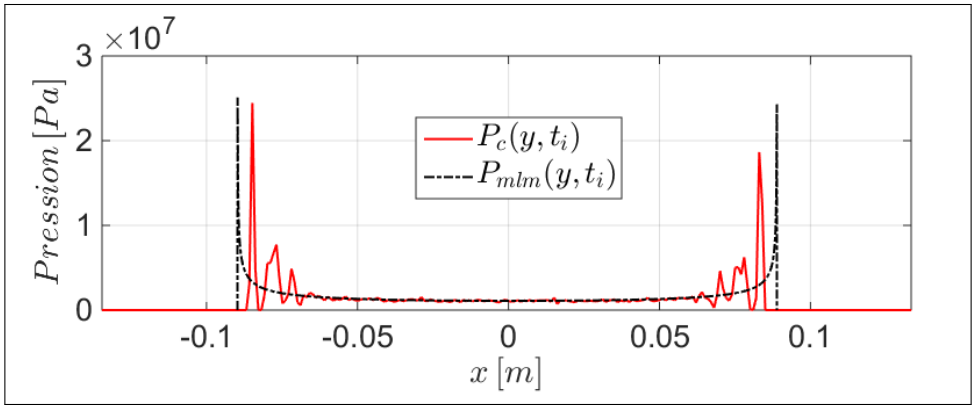

Figure 4.41 – *Champs de pression Abaqus et semi-analytique pour un impact au niveau du creux sans vitesse d'avance : cas test n°7b* $t_i = 2.0\,e^{-4}\,s$

Les figures 4.42 à 4.44 montrent que les champs de pression du modèle numérique sont fortement bruités par rapport à ceux du modèle semi-analytique. Néanmoins, nous constatons que pour les configurations d'impact et cas tests considérés les champs de pression numériques sont du même ordre de grandeur que ceux du modèle semi-analytique.

Champs de pression numérique avec vitesse d'avance

Cette fois-ci, nous confrontons des champs de pression provenant des simulations Abaqus aux champs de pression calculés avec le non-asymptotique modèle semi-analytique avec vitesse d'avance.

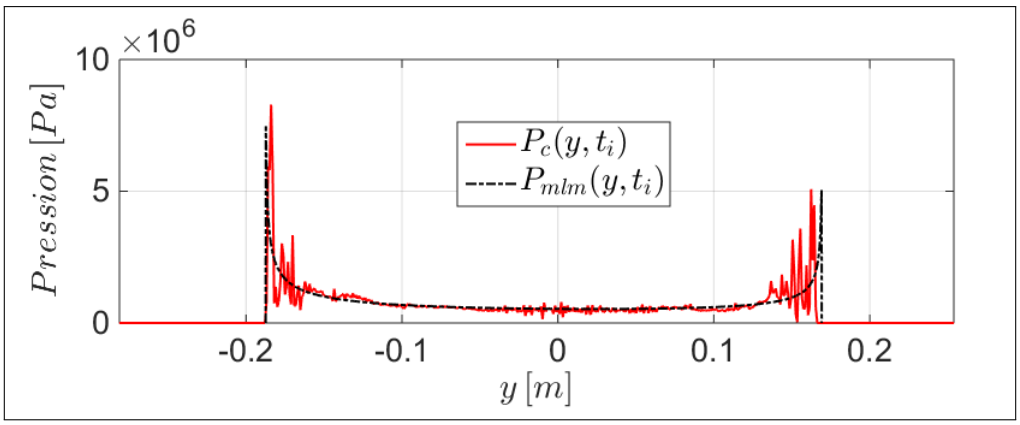

FIGURE 4.42 – *Champs de pression ABAQUS/CAE et semi-analytique pour un impact au niveau du creux avec vitesse d'avance - Cas test n°7a,* $t_i = 8.0\,e^{-4}\,s$

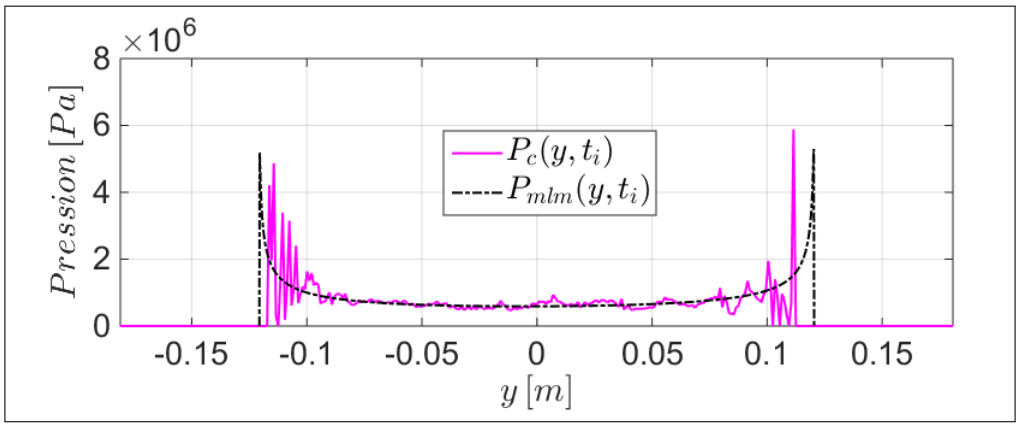

FIGURE 4.43 – *Champs de pression Abaqus et semi-analytique pour un impact au niveau du milieu avec vitesse d'avance - Cas test n°7a,* $t_i = 6.0\,e^{-4}\,s$

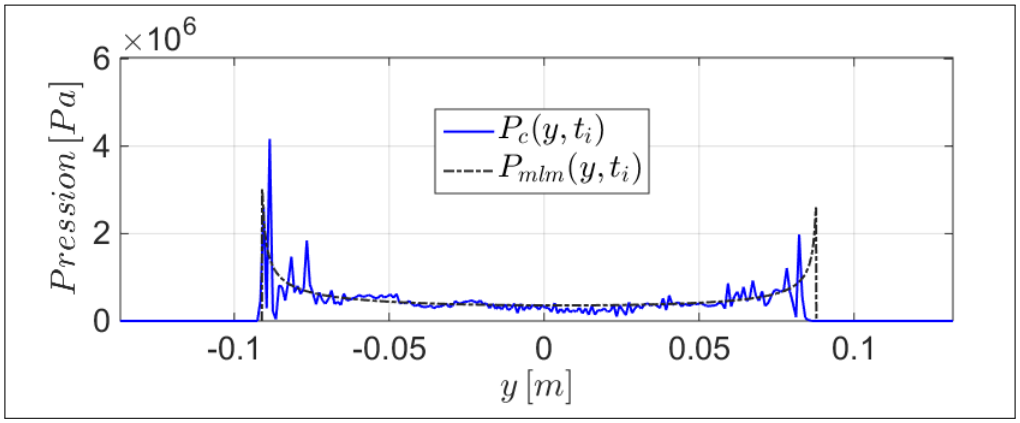

FIGURE 4.44 – *Champs de pression Abaqus et semi-analytique pour un impact au niveau de la crête avec vitesse d'avance - Cas test n°7b,* $t_i = 6.0\,e^{-4}\,s$

Les figures 4.42 à 4.44 permettent d'établir les mêmes conclusions que dans le cas sans vitesse d'avance. Les signaux de pression du modèle numérique d'Abaqus sont bruités mais du même ordre de grandeur. Nous observons aussi que la dissymétrie des champs de pression numériques est globalement respectée par rapport à ceux du modèle non-asymptotique.

Explication sur la présence du bruit dans les champs de pression numériques

Nous avons vu précédemment que les champs de pressions provenant des simulations d'Abaqus sont fortements bruités, surtout au voisinage des pics. Ce bruit provient de la formulation CEL. En s'appuyant sur la partie 4.2.3 qui présente la théorie du couplage CEL et les intéractions entre les domaines fluides et solides, nous avons vu que la grandeur P_c est fonction de deux paramètres : la raideur k_{lin} et la distance d. Le calcul de la raideur k_{lin} n'est pas explicité clairement au sein de la documentation Abaqus, nous savons juste qu'il est fonction des caractéristiques des éléments dont leurs dimensions. Nous pouvons donc pensé que les différentes raideurs k_{lin} calculées durant les simulations Abaqus sont globalement les mêmes car le maillage Eulérien utilisé est régulier. Pour les distances d, c'est totalement différents, car elles sont basées sur les fractions volumiques α_f des éléments Eulériens en contact avec les éléments Lagrangiens. La figure 4.45 montre que les fractions volumiques à l'interface fluide/solide ne sont pas régulières.

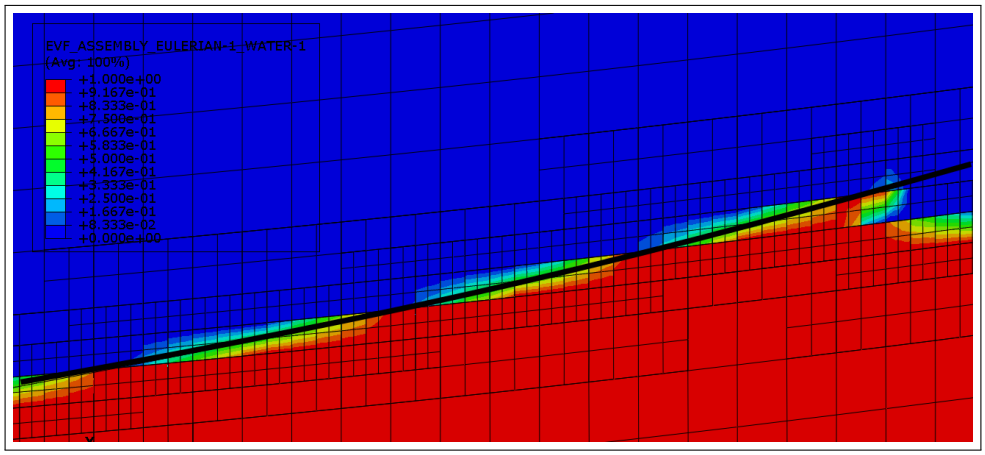

Figure *4.45 – Visualisation des fractions volumiques au voisinage de l'interface fluide/solide. En trait noir en gras la parabole, en couleurs les fractions volumiques.*

Cela peut expliquer l'irrégularité des champs de pression obtenus avec le modèle CEL d'Abaqus (Fig. 4.45). Nous notons que [Rajavaheinthan & Greenhow, 2015], ont été en mesure d'obtenir des champs de pression réguliers utilisant aussi un couplage Euler-Lagrange mais en y ajoutant un amortissement tout comme [Aquelet & Souli, 2018].

4.6 Conclusion sur l'approche numérique

Dans ce chapitre 4, nous avons mis en place un modèle numérique basé sur la méthode du couplage Euler-Lagrange du logiciel commercial Abaqus dans le but d'avoir une base de comparaison avec les modèles semi-analytiques d'impact hydrodynamique présentés au chapitre 2.

Dans la section 4.1, nous avons présenté le modèle numérique implémenté sous le logiciel Abaqus en termes de dimensions.

Au sein de la section 4.2, une revue de la théorie sur laquelle est basé le couplage CEL est décrite en insistant le couplage fluide-structure.

Dans la section 4.3, nous présentons une calibration du modèle numérique basée sur une convergence en maillage sur les efforts hydrodynamiques obtenus puis nous explicitons la méthode permettant de lisser ces signaux et la méthode permettant d'obtenir les corrections mouillée numériques.

Dans la section 4.4, nous exposons notre méthode permettant de simuler la vitesse de propagation et la houle et la vitesse d'avance avec le logiciel Abaqus.

Enfin dans la section 4.5, nous comparons les résultats du modèle numérique Abaqus aux modèles semi-analytiques du chapitre 2. Globalement, les résultats obtenus avec les modèle semi-analytiques sont en bon accord avec les résultats des simulations numériques.

En termes de temps de calcul, il est intéressant de signaler qu'une simulation d'impact hydrodynamique numérique Abaqus prend environ 8 heures sur le centre de calcul Badiane de l'ENSTA-bretagne. D'un autre côté les modèles semi-analytiques permettent d'obtenir des résultats similaires en moins de 5 minutes.

Chapitre 5

Perspectives

Dans dernier chapitre, nous exposons les perspectives que les travaux présentés au sein des chapitres 2, 3 et 4 de cette thèse de doctorat ont permis d'ouvrir. Nous choisissons de décomposer ces perspectives en trois sections. Les perspectives sur les modèles analytiques et semi-analytiques (sec. 5.1), celles sur le modèle numérique (sec. 5.2) et enfin quelques perspectives expérimentales (sec. 5.3).

5.1 Les perspectives en relation avec les modèles analytiques et semi-analytiques

Les chapitres 2 et 3 présentent respectivement la théorie et l'exploitation des modèles d'impact basés sur la théorie de [Wagner, 1932] permettant de modéliser l'impact hydrodynamique sur le pont mouillé d'un navire SWATH. Plusieurs résultats ont été présentés et sont résumés dans la section 3.7. Néanmoins il demeure quelques travaux à réaliser sur ce chapitre, essentiellement sur les modèles d'impact non-asymptotiques.

En effet, la formulation composite et l'étude des variations temporelle et spatiale de la pression pour les modèles non-asymptotiques n'ont pas été présentées. Ces deux études permettraient d'étoffer les résultats des sections 2.5.5 et 3.6. Ces travaux resposent tous deux sur le calcul de la pression P_{out} (Eq. (2.136)) obtenue au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée. Ce calcul nécessite de dériver par rapport au temps les potentiels des vitesses des modèles non-asymptotiques (Eq. (2.3.3)). Même si ce travail a été réalisé pour établir l'expression de la pression MLM (Eq(s). 2.134 et 2.135), il reste beaucoup de développements mathématiques pour obtenir la pression composite et l'étude des variations spatiale et temporelle. Pour la pression composite nous pouvons citer l'extraction de la pression singulière P_s qui repose sur un développement limité à l'odre 1 de la pression calculée au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée. Pour les variations temporelle et spatiale de la pression, il faudrait être en mesure d'exprimer la pression calculée au moyen de l'équation de Bernoulli sous forme de polynôme afin d'étudier le signe de ce dernier. Devant la difficulté des développements analytiques, il pourrait être judicieux d'envisager des méthodes numériques pour mener à bien ces études.

En termes de perspectives plus générales, nous pouvons enrichir encore la cinématique de la parabole tout en conservant l'aspect bidimensionnel de l'écoulement. C'est-à-dire, que l'on pourrait ajouter un mouvement de gîte. Ainsi en plus de se déplacer horizontalement et verticalement, la parabole tournerait autour d'un axe perpendiculaire au plan (y, z). Pour cela nous pourrions nous inspirer des travaux de [Scolan & Korobkin, 2015].

Toujours en termes de perspectives sur la cinématique de la parabole, il pourrait être intéressant de considérer des vitesses de chute de la parabole qui évoluent au cours du temps, par exemple en considérant des mouvements uniformément accélérés.

Pour terminer sur les perspectives propres aux modèles analytiques et semi-analytiques, les élévations de surfaces libres (Fig. 1.5 $\eta_0(y,t)$) dûe à l'impact hydrodynamique n'ont pas été présentées, mais cet aspect sera abordé lors de la soutenance.

5.2 Les perspectives en relation avec le modèle numérique

Le chapitre 4, a permis de valider les résultats des modèles non-asymptotiques en termes d'efforts hydrodynamiques (sec. 4.6). Cependant la partie 4.5.4 a montré que les champs de pression étaient fortement bruités du fait du couplage CEL. Plusieurs solutions s'offrent à nous dans le but d'obtenir des champs de pression plus « lisses ».

Premièrement, en concervant le Couplage Euler-Lagrange, nous pourrions augmenter la valeur des raideurs de contact par éléments k_{lin} en appliquant un facteur multiplicatif. En effet d'après [Tassin, 2010], l'ajout d'un facteur multiplicatif à tendance à limiter le bruit dans les signaux d'efforts hydrodynamiques. On peut donc penser que ce facteur multiplicatif réduira aussi le bruit au sein des champs de pression. Il pourrait être aussi judicieux d'utiliser une autre loi de contact mécanique, par exemple une loi exponentielle (voir [Abaqus Analysis User's Guide 37.1.2, 2016]), et ainsi analyser son influence sur l'allure des champs de pression.

Deuxièmement, nous pourrions utiliser les autres théories de couplages implémentées dans Abaqus. Nous pouvons citer le couplage ALE pour *Arbitray Lagrangian-Eulerian*, qui demeure proche du couplage CEL. La différence majeure de ce couplage est qu'il autorise le maillage Eulérien à se déplacer au cours du temps. Nous pouvons aussi citer la théorie SPH pour *Smoothed Particules Hydrodynamics* qui comme son nom l'indique utilise une approche particulaire pour le fluide. D'après les travaux de [Al-Dodoee, 2017], les champs de pression obtenus au moyen de ces deux couplages sont, en général, assez réguliers. Toutefois attention aux durées de calcul pour ces deux théories propres à l'intéraction fluide-structures qui peuvent être très conséquentes.

5.3 Les perspectives en relation avec une étude expérimentale

Pour terminer, il existe une dernière méthode permettant de vérifier les résultats présentés dans cette thèse de doctorat. Il s'agit de mettre en oeuvre une campagne expérimentale en utilisant une maquette parabolique symbolisant le pont mouillé du navire SWATH. Cette maquette devra être équipée de plusieurs capteurs. Un capteur d'effort pour enregister les efforts hydrodynamiques au cours de l'impact. Plusieurs capteurs de pression permettant d'obtenir les distributions de pression engendrées lors de l'impact. Enfin pour les corrections de surface mouillée, il serait judicieux de mettre en place un dispositif équipé de caméras rapides afin de réaliser un suivi de l'évolution de surface libre au cours du temps.

Étant donné que les phénomènes de *slamming* se produisent sur des temps très courts, la mise en place d'un tel dispositif n'est pas aisé et surtout coûteux. Toutefois, on pourrait s'inspirer des études expérimentales de [Smith et al., 1998] pour l'impact sur une crête de vague ou encore des travaux de [Scolan et al., 2006] pour le paraboloïde elliptique.

Annexe A

Démonstrations mathématiques et variables

A.1 Modèles d'impact au voisinage de la crête et du creux

A.1.1 Changements de variables pour le modèle d'impact au voisinage de la crête

Sans vitesse d'avance :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{\mathbf{nc}} = -\omega & \text{(A.1a)} \\ \dot{c}_{\mathbf{nc}} = C\kappa\omega & \text{(A.1b)} \\ \dot{y}_{\mathbf{nc}} = R_{\mathbf{nc}} C\kappa\omega & \text{(A.1c)} \\ \dot{h}_{\mathbf{nc}}(t) = \dot{h}(t) - C\dot{\epsilon}_{\mathbf{nc}}\epsilon_{\mathbf{nc}}(t) + R_{\mathbf{nc}}\dot{c}_{\mathbf{nc}}c_{\mathbf{nc}}(t) & \text{(A.1d)} \\ \ddot{h}_{\mathbf{nc}}(t) = \ddot{h}(t) - C\omega^2 + R_{\mathbf{nc}}C^2\kappa^2\omega^2 & \text{(A.1e)} \end{cases}$$

Avec vitesse d'avance :

$$\begin{cases} \dot{c}_{\mathbf{ncva}} = -\dfrac{\delta\dot{y}}{R_p} - C\kappa\dot{\epsilon}_{\mathbf{nc}} & \text{(A.2a)} \\ \dot{y}_{\mathbf{ncva}} = -R_{\mathbf{nc}}\dot{c}_{\mathbf{ncva}} & \text{(A.2b)} \\ \dot{h}_{\mathbf{ncva}}(t) = \dot{h}(t) - \dfrac{\delta y(t)\delta\dot{y}}{R_p} + \dfrac{Y_0\delta\dot{y}}{R_p} - C\dot{\epsilon}_{\mathbf{nc}}\epsilon_{\mathbf{nc}}(t) + R_{\mathbf{nc}}\dot{c}_{\mathbf{ncva}}c_{\mathbf{ncva}}(t) & \text{(A.2c)} \\ \dot{a}_{\mathbf{ncva}}(t) = \dfrac{R_{\mathbf{nc}}\dot{\tilde{h}}_{\mathbf{ncva}}(t)}{\sqrt{R_{\mathbf{nc}}\tilde{h}_{\mathbf{ncva}}(t)}} & \text{(A.2d)} \\ \ddot{h}_{\mathbf{ncva}}(t) = \ddot{h}(t) - \dfrac{\delta\dot{y}^2}{R_p} - C\dot{\epsilon}_{\mathbf{nc}}^2 + R_{\mathbf{nc}}\dot{c}_{\mathbf{ncva}}^2 & \text{(A.2e)} \\ \ddot{a}_{\mathbf{ncva}}(t) = -\dfrac{R_{\mathbf{nc}}^2\dot{\tilde{h}}_{\mathbf{ncva}}^2(t)}{\left[R_{\mathbf{ncva}}\tilde{h}_{\mathbf{ncva}}(t)\right]^{\frac{3}{2}}} & \text{(A.2f)} \end{cases}$$

A.1.2 Changements de variables pour le modèle d'impact au voisinage du creux

Sans vitesse d'avance :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{\mathbf{nt}} = -\omega & \text{(A.3a)} \\ \dot{c}_{\mathbf{nt}} = -C\kappa\omega & \text{(A.3b)} \\ \dot{y}_{\mathbf{nt}} = R_{\mathbf{nt}} C\kappa\omega & \text{(A.3c)} \\ \dot{h}_{\mathbf{nt}}(t) = \dot{h}(t) + C\dot{\epsilon}_{\mathbf{nt}}\epsilon_{\mathbf{nt}}(t) + R_{\mathbf{nt}}\dot{c}_{\mathbf{nt}}c_{\mathbf{nt}}(t) & \text{(A.3d)} \\ \ddot{h}_{\mathbf{nt}}(t) = \ddot{h}(t) + C\omega^2 + R_{\mathbf{nt}}C^2\kappa^2\omega^2 & \text{(A.3e)} \end{cases}$$

Avec vitesse d'avance :

$$\begin{cases} \dot{c}_{\mathbf{ntva}} = -\dfrac{\delta\dot{y}}{R_p} + C\kappa\dot{\epsilon}_{\mathbf{nt}} & \text{(A.4a)} \\ \dot{y}_{\mathbf{ntva}} = -R_{\mathbf{nt}}\dot{c}_{\mathbf{ntva}} & \text{(A.4b)} \\ \dot{h}_{\mathbf{ntva}}(t) = \dot{h}(t) - \dfrac{\delta y(t)\delta\dot{y}}{R_p} + \dfrac{Y_0\delta\dot{y}}{R_p} + C\dot{\epsilon}_{\mathbf{nt}}\epsilon_{\mathbf{nt}}(t) + R_{\mathbf{nt}}\dot{c}_{\mathbf{nt}}c_{\mathbf{nt}}(t) & \text{(A.4c)} \\ \dot{a}_{\mathbf{ntva}}(t) = \dfrac{R_{\mathbf{nt}}\dot{\tilde{h}}_{\mathbf{ntva}}(t)}{\sqrt{R_{\mathbf{nt}}\tilde{h}_{\mathbf{ntva}}(t)}} & \text{(A.4d)} \\ \ddot{h}_{\mathbf{ntva}}(t) = \ddot{h}(t) - \dfrac{\delta\dot{y}^2}{R_p} + C\dot{\epsilon}_{\mathbf{nt}}^2 + R_{\mathbf{nt}}\dot{c}_{\mathbf{nt}}^2 & \text{(A.4e)} \\ \ddot{a}_{\mathbf{ntva}}(t) = -\dfrac{R_{\mathbf{nt}}^2\dot{\tilde{h}}_{\mathbf{ntva}}^2(t)}{\left[R_{\mathbf{ntva}}\tilde{h}_{\mathbf{ntva}}(t)\right]^{\frac{3}{2}}} & \text{(A.4f)} \end{cases}$$

A.1.3 Dérivées temporelle et spatiale du potentiel des vitesses associé aux modèles d'impact près de la crête et du creux

On rappelle ici que $\mathbf{i} = \mathbf{nc}$ ou $\mathbf{nt}$:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{\mathbf{i}}(y,0,t)}{\partial t} =& -\left[a_{\mathbf{i}}(t)\dot{a}_{\mathbf{i}}(t) + (y - c_{\mathbf{i}}(t)R_{\mathbf{i}})\dot{c}_{\mathbf{i}}R_{\mathbf{i}}\right]^2 \times \frac{1}{2R_{\mathbf{i}}\sqrt{a_{\mathbf{i}}^2(t) - (y - R_{\mathbf{i}}c_{\mathbf{i}}(t))^2}} \\ & - \frac{(\dot{a}_{\mathbf{i}}^2 + a_{\mathbf{i}}\ddot{a}_{\mathbf{i}} - \dot{c}_{\mathbf{i}}^2R_{\mathbf{i}}^2)}{2R_{\mathbf{i}}}\sqrt{a_{\mathbf{i}}^2(t) - (y - R_{\mathbf{i}}c_{\mathbf{i}}(t))^2} \end{aligned} \quad \text{(A.5)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{\mathbf{i}}(y,0,t)}{\partial y} =& -\left[a_{\mathbf{i}}(t)\dot{a}_{\mathbf{i}}(t) + (y - c_{\mathbf{i}}(t)R_{\mathbf{i}})\dot{c}_{\mathbf{i}}R_{\mathbf{i}}\right] \times \frac{c_{\mathbf{i}}(t)R_{\mathbf{i}} - y}{2R_{\mathbf{i}}\sqrt{a_{\mathbf{i}}^2(t) - (y - R_{\mathbf{i}}c_{\mathbf{i}}(t))^2}} \\ & - \frac{\dot{c}_{\mathbf{i}}}{2}\sqrt{a_{\mathbf{i}}^2(t) - (y - R_{\mathbf{i}}c_{\mathbf{i}}(t))^2} \end{aligned} \quad \text{(A.6)}$$

A.2 Modèle d'impact au voisinage du milieu de la pente

Dans cet annexe, pour alléger les notations, on s'affranchit des indices **m3** et **m3va** ainsi que des dépendances temporelles.

A.2.1 Calcul des conditions de Wagner pour le modèle du 3^e ordre

On impose un déplacement fini des particules fluides aux points de contact $-d_1$ et d_2 :

$$\int_{-d_1}^{d_2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\sqrt{(d_1+x)(d_2-\xi)}}{\xi - x} d\xi = 0 \quad \text{pour} \quad x = -d_1 \quad \text{et} \quad x = d_2 \tag{A.7}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-d_1}^{d_2} \frac{\partial \phi}{\partial z}(\xi, t) \sqrt{\frac{d_2 - \xi}{d_1 + \xi}} d\xi = 0 \quad \text{pour} \quad x = -d_1 & \text{(A.8a)} \\ \displaystyle\int_{-d_1}^{d_2} \frac{\partial \phi}{\partial z}(\xi, t) \sqrt{\frac{d_1 + \xi}{d_2 - \xi}} d\xi = 0 \quad \text{pour} \quad x = d_2 & \text{(A.8b)} \end{cases}$$

Avec le changement de variable intégrale : $\xi = au + b$

$$\begin{cases} \text{Si } \xi = -d_1 \Leftrightarrow u = -1 & \text{(A.9a)} \\ \text{Si } \xi = d_2 \Leftrightarrow u = 1 & \text{(A.9b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 + \xi = a(1+u) & \text{(A.10a)} \\ d_2 - \xi = a(1-u) & \text{(A.10b)} \end{cases}$$

Le système précédent devient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\partial \phi}{\partial z}(u, t) \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} d\xi = 0 & \text{(A.11a)} \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\partial \phi}{\partial z}(u, t) \sqrt{\frac{1+u}{1+u}} d\xi = 0 & \text{(A.11b)} \end{cases}$$

Avec la condition de Neumann sous forme polynomiale :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(u, t) = \sum_{n=0}^{3} q_n(t) u^n \tag{A.12}$$

On réalise ensuite un nouveau changement de variable intégrale $u = \sin\theta$:

$$\begin{cases} \text{Si } u = 1 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2} & \text{(A.13a)} \\ \text{Si } u = -1 \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{2} & \text{(A.13b)} \end{cases}$$

De cette manière on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(\sin\theta, t) = \sum_{n=0}^{3} q_n(t) \sin^n \theta \tag{A.14}$$

Le système d'équations couplées traduisant les conditions de Wagner s'écrit désormais :

$$\begin{cases} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{3} q_n(t) \sin^n \theta \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} d\xi = 0 & \text{(A.15a)} \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{3} q_n(t) \sin^n \theta \sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} d\xi = 0 & \text{(A.15b)} \end{cases}$$

En utilisant les identités suivantes :

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} & \text{(A.16a)} \\ \sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} & \text{(A.16b)} \end{cases}$$

Ainsi en développant les sommes on obtient :

$$\begin{cases} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(q_3 \sin^3\theta + q_2 \sin^2\theta + q_1 \sin\theta + q_0\right)(1-\sin\theta)\, d\xi = 0 & \text{(A.17a)} \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(q_3 \sin^3\theta + q_2 \sin^2\theta + q_1 \sin\theta + q_0\right)(1+\sin\theta)\, d\xi = 0 & \text{(A.17b)} \end{cases}$$

Enfin après calcul il demeure :

$$\begin{cases} q_0 - \dfrac{q_1}{2} + \dfrac{q_2}{2} - \dfrac{3q_3}{8} = 0 & \text{(A.18a)} \\ q_0 + \dfrac{q_1}{2} + \dfrac{q_2}{2} + \dfrac{3q_3}{8} = 0 & \text{(A.18b)} \end{cases}$$

Ou encore par combinaisons linéaires :

$$\begin{cases} q_0 + \dfrac{1}{2} q_2 = 0 & \text{(A.19a)} \\ q_1 + \dfrac{3}{4} q_3 = 0 & \text{(A.19b)} \end{cases}$$

A.2.2 Calcul du potentiel des déplacements

Pour un impact hydrodynamique dissymétrique on a :

$$\phi(y,t) = -\int_y^{d_2} \frac{1}{\pi\sqrt{(d_1+x)(d_2-x)}} \int_{-d_1}^{d_2} \frac{\partial\phi}{\partial z}(\xi,t) \frac{\sqrt{(d_1+\xi)(d_2-\xi)}}{\xi - x} d\xi dx \qquad \text{(A.20)}$$

Avec le 1^{er} changement de variable intégrale : $\xi = au + b$

$$\begin{cases} \text{Si } \xi = -d_1 \Leftrightarrow u = -1 & \text{(A.21a)} \\ \text{Si } \xi = d_2 \Leftrightarrow u = 1 & \text{(A.21b)} \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} d_1 + \xi = a(1+u) & \text{(A.22a)} \\ d_2 - \xi = a(1-u) & \text{(A.22b)} \end{cases}$$

Il vient :

$$\phi(y,t) = -\int_y^{d_2} \frac{a^2}{\pi\sqrt{(d_1+x)(d_2-x)}} \int_{-1}^{1} \frac{\partial\phi}{\partial z}(u,t)\frac{\sqrt{1-u^2}}{au+b-x}dudx \tag{A.23}$$

Avec le 2^e changement de variable intégral : $\tilde{x} = x - b$:

$$\begin{cases} \text{Si } x = y \Leftrightarrow \tilde{x} = y - b & \text{(A.24a)} \\ \text{Si } x = d_2 \Leftrightarrow \tilde{x} = d_2 - b = a & \text{(A.24b)} \end{cases}$$

L'expression du potentiel des déplacements devient :

$$\phi(y,t) = -\int_{y-b}^{a} \frac{a^2}{\pi\sqrt{(d_1+b+\tilde{x})(d_2-b-\tilde{x})}} \int_{-1}^{1} \frac{\partial\phi}{\partial z}(u,t)\frac{\sqrt{1-u^2}}{au-\tilde{x}}dud\tilde{x} \tag{A.25}$$

En remarquant que :

$$\begin{cases} d_1 + b = a & \text{(A.26a)} \\ d_2 - b = a & \text{(A.26b)} \end{cases}$$

Le calcul du potentiel des déplacements est désormais :

$$\phi(y,t) = -\int_{y-b}^{a} \frac{a}{\pi\sqrt{a^2-\tilde{x}^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\partial\phi}{\partial z}(u,t)\frac{\sqrt{1-u^2}}{u-\frac{\tilde{x}}{a}}dud\tilde{x} \tag{A.27}$$

Ou encore :

$$\phi(y,t) = -\int_{y-b}^{a} \frac{a}{\pi\sqrt{a^2-\tilde{x}^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\partial\phi}{\partial z}(u,t)\frac{1-u^2}{(u-\frac{\tilde{x}}{a})\sqrt{1-u^2}}dud\tilde{x} \tag{A.28}$$

Avec l'expression polynomiale de la condition de Neumann :

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(u,t) = \sum_{n=0}^{3} q_n(t)u^n \tag{A.29}$$

On isole la 1^{re} intégrale en posant :

$$\tilde{\gamma}(\tilde{x},t) = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{3} q_n(t)u^n \frac{1-u^2}{(u-\frac{\tilde{x}}{a})\sqrt{1-u^2}}du \tag{A.30}$$

En développant selon la variable d'intégration u :

$$\sum_{n=0}^{3} q_n(t)u^n(1-u^2) = -q_3u^5 - q_2u^4 + (q_3-q_1)u^3 + (q_2-q_0)u^2 + q_1u + q_0 \tag{A.31}$$

Donc :

$$\tilde{\gamma}(\tilde{x},t) = \int_{-1}^{1} \frac{-q_3u^5 - q_2u^4 + (q_3-q_1)u^3 + (q_2-q_0)u^2 + q_1u + q_0}{(u-\frac{\tilde{x}}{a})\sqrt{1-u^2}}du \tag{A.32}$$

On reconnait les intégrales d'Hilbert (ann. A.4.2) :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\tilde{x},t) = &- q_3H_5\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right) - q_2H_4\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right) + (q_3-q_1)H_3\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right) \\ &+ (q_2-q_0)H_2\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right) + q_1H_1\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right) + q_0H_0\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right) \end{aligned} \tag{A.33}$$

En utilisant les expressions des $H_n\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right)$:

$$\tilde{\gamma}(\tilde{x},t) = -\pi\left[q_3\frac{\tilde{x}^4}{a^4} + q_2\frac{\tilde{x}^3}{a^3} + \left(q_1 - \frac{q_3}{2}\right)\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \left(q_0 - \frac{q_2}{2}\right)\frac{\tilde{x}}{a} - \frac{q_1}{2} - \frac{q_3}{8}\right] \tag{A.34}$$

Donc :

$$\phi(y,t) = \int_{y-b}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2-\tilde{x}^2}}\left(q_3\frac{\tilde{x}^4}{a^4} + q_2\frac{\tilde{x}^3}{a^3} + \left(q_1 - \frac{q_3}{2}\right)\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \left(q_0 - \frac{q_2}{2}\right)\frac{\tilde{x}}{a} - \frac{q_1}{2} - \frac{q_3}{8}\right)d\tilde{x} \tag{A.35}$$

Reste à appliquer un dernier changement de variable intégral : $\tilde{x} = a\sin\theta$

$$\begin{cases} \text{Si } \tilde{x} = a \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2} & \text{(A.36a)} \\ \text{Si } \tilde{x} = y - b \Leftrightarrow \theta = \arcsin\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{(A.36b)} \end{cases}$$

L'expresssion du potentiel des déplacements devient :

$$\phi(y,t) = a\int_{\arcsin\left(\frac{y-b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\left(q_3\sin^4\theta + q_2\sin^3\theta + \left(q_1 - \frac{q_3}{2}\right)\sin^2\theta + \left(q_0 - \frac{q_2}{2}\right)\sin\theta - \frac{q_1}{2} - \frac{q_3}{8}\right)d\theta \tag{A.37}$$

Après calcul on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\phi(y,0,t)}{a} =& q_0 + \frac{q_2}{6} + \left(\frac{q_1}{2} + \frac{q_3}{8}\right)\left(\frac{y-b}{a}\right) + \frac{q_2}{3}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{y-b}{a}\right)^2} \\ &+ \frac{q_3}{4}\left(\frac{y-b}{a}\right)^3\sqrt{1-\left(\frac{y-b}{a}\right)^2}\end{aligned} \tag{A.38}$$

En utilisant les résultats sur les corrections de surface mouillée (Eq(s). A.19a et A.19b), on obtient l'expression final du potentiel des déplacements pour ce modèle d'impact au voisinage du milieu de la pente :

$$\phi(y,t) = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{q_2}{3} + \frac{q_3}{4}\left(\frac{y-b}{a}\right)\right]\left(a^2-(y-b)^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{A.39}$$

A.2.3 Vitesses d'expansion de surface mouillée pour le modèle d'impact hydrodynamique au voisinage du milieu de la pente pour le modèle du 3^e ordre

L'équation permettant d'obtenir $b_{\mathbf{m3}}(t)$ ou $b_{\mathbf{m3va}}(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$c_3b^3 + c_2(t)b^2 + c_1(t)b + c_0(t) = 0 \tag{A.40}$$

Avec l'expression des $c_n(t)$ avec $n = 0..3$:

Sans vitesse d'avance :

$$\begin{cases} c_{0\,\mathbf{m3}}(t) = -h(t) + Z_0 + C(1-\epsilon) - \dfrac{2Y_0\epsilon}{\kappa R_p} + \dfrac{2Y_0}{C\kappa^3 R_p^2} + \dfrac{2}{\kappa^2 R_p} + \dfrac{5C\epsilon^3}{6} - \dfrac{\epsilon^2}{\kappa^2 R_p} & \text{(A.41a)} \\ c_{1\,\mathbf{m3}}(t) = -C\kappa - \dfrac{Y_0}{R_p} + \dfrac{5C\kappa\epsilon^2}{2} - \dfrac{4\epsilon}{\kappa R_p} + \dfrac{2}{C\kappa^3 R_p^2} & \text{(A.41b)} \\ c_{2\,\mathbf{m3}}(t) = -\dfrac{5}{2R_p} + \dfrac{5\epsilon}{2R_v} & \text{(A.41c)} \\ c_{3\,\mathbf{m3}} = \dfrac{5C\kappa^3}{6} & \text{(A.41d)} \end{cases}$$

Avec vitesse d'avance :

$$\begin{cases} c_{0\,\mathbf{m3va}}(t) = -h(t) + Z_0 + C(1-\epsilon) - \dfrac{2Y_0\epsilon}{\kappa R_p} + \dfrac{2Y_0}{C\kappa^3 R_p^2} + \dfrac{2}{\kappa^2 R_p} + \dfrac{5C\epsilon^3}{6} - \dfrac{\epsilon^2}{\kappa^2 R_p} \\ \qquad + \dfrac{2\delta y}{R_p^2 C\kappa^3} + \dfrac{\delta y Y_0}{R_p} + \dfrac{\delta y^2}{2R_p} - \dfrac{2\epsilon\delta y}{\kappa R_p} & \text{(A.42a)} \\ c_{1\,\mathbf{m3va}}(t) = -C\kappa - \dfrac{Y_0}{R_p} + \dfrac{5C\kappa\epsilon^2}{2} - \dfrac{4\epsilon}{\kappa R_p} + \dfrac{2}{C\kappa^3 R_p^2} - \dfrac{\delta y}{R_p} & \text{(A.42b)} \\ c_{2\,\mathbf{m3va}}(t) = -\dfrac{5}{2R_p} + \dfrac{5\epsilon}{2R_v} & \text{(A.42c)} \\ c_{3\,\mathbf{m3va}} = \dfrac{5C\kappa^3}{6} & \text{(A.42d)} \end{cases}$$

On dérive par rapport au temps l'équation A.40 :

$$\left[3c_3 b^2 + 2c_2 b + c_1\right]\dot{b} + \dot{c}_2 b^2 + \dot{c}_1 b + \dot{c}_0 = 0 \tag{A.43}$$

Avec l'expression des $\dot{c}_n(t)$ avec $n = 0..3$:

Sans vitesse d'avance :

$$\begin{cases} \dot{c}_0(t) = -W + C\omega + \dfrac{2\omega Y_0}{\kappa R_p} - \dfrac{5C\omega\epsilon^2}{2} - \dfrac{2\omega\epsilon}{\kappa^2 R_p} & \text{(A.44a)} \\ \dot{c}_1(t) = \dfrac{4\omega}{\kappa R_p} - 5C\kappa\omega\epsilon & \text{(A.44b)} \\ \dot{c}_2(t) = -\dfrac{5\omega}{2R_v} & \text{(A.44c)} \end{cases}$$

Avec vitesse d'avance :

$$\begin{cases} \dot{c}_0(t) = -W + C\omega + \dfrac{2\omega Y_0}{\kappa R_p} - \dfrac{5C\omega\epsilon^2}{2} - \dfrac{2\omega\epsilon}{\kappa^2 R_p} \\ \qquad\qquad + \dfrac{2V}{R_p^2 C\kappa^3} + \dfrac{VY_0}{R_p} + \dfrac{V\delta y}{R_p} - \dfrac{2\epsilon V}{\kappa R_p} + \dfrac{2\omega\delta y}{\kappa R_p} & \text{(A.45a)} \\ \dot{c}_1(t) = \dfrac{4\omega}{\kappa R_p} - 5C\kappa\omega\epsilon - \dfrac{V}{R_p} & \text{(A.45b)} \\ \dot{c}_2(t) = -\dfrac{5\omega}{2R_v} & \text{(A.45c)} \end{cases}$$

Reste à isoler $\dot{b}_{\mathbf{m3}}(t)$ ou $\dot{b}_{\mathbf{m3va}}(t)$:

$$\dot{b}_{\mathbf{m3}}(t) \quad \text{ou} \quad \dot{b}_{\mathbf{m3va}}(t) = -\frac{1}{3c_3b^2 + 2c_2b + c_1}\left(\dot{c}_2b^2 + \dot{c}_1b + \dot{c}_0\right) \tag{A.46}$$

Une fois $\dot{b}_{\mathbf{m3}}(t)$ obtenu, on dérive par rapport au temps l'équation 2.54 pour $\dot{a}_{\mathbf{m3}}(t)$:

$$\dot{a}_{\mathbf{m3}}(t) = \frac{4}{a}\left[-b\dot{b} + \frac{\omega b}{\kappa} + \left(\frac{1}{C\kappa^3 R_p} - \frac{\epsilon}{\kappa}\right)\dot{b} + \frac{\epsilon\omega}{\kappa^2}\right] \tag{A.47}$$

$$\dot{a}_{\mathbf{m3va}}(t) = \frac{4}{a}\left[-b\dot{b} + \frac{\omega b}{\kappa} + \left(\frac{1}{C\kappa^3 R_p} - \frac{\epsilon}{\kappa}\right)\dot{b} + \frac{\epsilon\omega}{\kappa^2} + \frac{V}{C\kappa^3 R_p}\right] \tag{A.48}$$

A.2.4 Accélération d'expansion de surface mouillée pour le modèle d'impact hydrodynamique au voisinage du milieu de la pente pour le modèle du 3^e ordre

Pour trouver les accélérations d'expansion de surface mouillée on dérive cette fois ci deux fois par rapport au temps l'équation A.40 :

$$6c_3b\dot{b}^2 + 3c_3b^2\ddot{b} + \ddot{c}_2b^2 + 4\dot{c}_2b\dot{b} + 2c_2\dot{b}^2 + 2c_2b\ddot{b} + \ddot{c}1b + 2\dot{c}1\dot{b} + c_1\ddot{b} + \ddot{c}0 = 0 \tag{A.49}$$

Sans vitesse d'avance :

$$\begin{cases} \ddot{c}_{0\,\mathbf{m3}}(t) = 5C\epsilon\omega^2 - \dfrac{2\omega^2}{\kappa^2 R_p} & \text{(A.50a)} \\ \ddot{c}_{1\,\mathbf{m3}}(t) = 5C\kappa\omega^2 & \text{(A.50b)} \end{cases}$$

Avec vitesse d'avance :

$$\begin{cases} \ddot{c}_{0\,\mathbf{m3va}}(t) = 5C\epsilon\omega^2 - \dfrac{2\omega^2}{\kappa^2 R_p} + \dfrac{4\omega V}{\kappa R_p} + \dfrac{V^2}{R_p} & \text{(A.51a)} \\ \ddot{c}_{1\,\mathbf{m3va}}(t) = 5C\kappa\omega^2 & \text{(A.51b)} \end{cases}$$

On isole $\ddot{b}_{\mathbf{m3}}(t)$ ou $\ddot{b}_{\mathbf{m3va}}(t)$:

$$\ddot{b}_{\mathbf{m3}}(t) \quad \text{ou} \quad \ddot{b}_{\mathbf{m3va}}(t) = -\frac{6c_3\dot{b}^2 + \ddot{c}_2b^2 + 4\dot{c}_2b\dot{b} + 2c_2\dot{b}^2 + \ddot{c}_1b + 2\dot{c}_1\dot{b} + \ddot{c}0}{3b^2c_3 + 2bc_2 + c1} \tag{A.52}$$

Et pour $\ddot{a}_{\mathbf{m3}}(t)$ on dérive deux fois par rapport au temps l'équation A.48 :

$$\ddot{a}_{\mathbf{m3}}(t) \quad \text{ou} \quad \ddot{a}_{\mathbf{m3va}}(t) = \frac{4}{a}\left[\left(\frac{1}{C\kappa^3 R_p} - \frac{\epsilon}{R_p} - b\right)\ddot{b} + \left(\frac{2\omega}{\kappa} - \dot{b}\right)\dot{b} - \frac{\omega^2}{\kappa^2}\right] - \frac{\dot{a}}{a} \tag{A.53}$$

A.2.5 Dérivées temporelle et spatiale du potentiel des vitesses associé aux modèles d'impact au voisinage du milieu de la pente

Pour le modèle au 1^{re} ordre

$$\frac{\partial \varphi_{\mathbf{m1}}}{\partial t}(y,0,t) = -\frac{\dot{\tilde{h}}_{\mathbf{m1}}(t) a_{\mathbf{m1}}(t) \dot{a}_{\mathbf{m1}}(t)}{\sqrt{a^2_{\mathbf{m1}}(t) - (y - R_p c_{\mathbf{m1}})^2}} \tag{A.54}$$

Ou encore :

$$\frac{\partial \varphi_{\mathbf{m1}}}{\partial t}(y,0,t) = -\frac{2R_p(W + C\omega)^2}{\sqrt{a^2_{\mathbf{m1}}(t) - (y - R_p c_{\mathbf{m1}})^2}} \tag{A.55}$$

Et :

$$\frac{\partial \varphi_{\mathbf{m1}}}{\partial y}(y,0,t) = -\frac{\dot{\tilde{h}}(R_p c_{\mathbf{m1}} - y)}{\sqrt{a^2_{\mathbf{m1}}(t) - (y - R_p c_{\mathbf{m1}})^2}} \tag{A.56}$$

On privilégiera :

$$\frac{\partial \varphi_{\mathbf{m1}}}{\partial y}(y,0,t) = -\frac{(W + C\omega)(R_p c_{\mathbf{m1}} - y)}{\sqrt{a^2_{\mathbf{m1}}(t) - (y - R_p c_{\mathbf{m1}})^2}} \tag{A.57}$$

Pour le modèle au 3^e ordre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{\mathbf{m3}}}{\partial t}(y,0,t) = {} & \frac{\kappa \ddot{b}}{8R_v}\left[a^2 - (y-b)^2\right]^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\dot{\epsilon}_{\mathbf{m}}}{R_v} + \frac{3\kappa \dot{b}}{4R_v}\right)\sqrt{a^2 - (y-b)^2}\left[a\dot{a} - (y-b)\dot{b}\right] \\
& - \left(\frac{1}{2R_p} - \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}}{2R_v} - \frac{3\kappa b}{8R_v} - \frac{\kappa}{8R_v}y\right)\frac{\left[a\dot{a} + (y-b)\dot{b}\right]^2}{\sqrt{a^2 - (y-b)^2}} \\
& - \left(\frac{1}{2R_p} - \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}}{2R_v} - \frac{3\kappa b}{8R_v} - \frac{\kappa}{8R_v}y\right)\sqrt{a^2 - (y-b)^2}\left(\dot{a}^2 + a\ddot{a} - \dot{b}^2 + (y-b)\ddot{b}\right)
\end{aligned}$$

Et :

$$\frac{\partial \varphi_{\mathbf{m3}}}{\partial y}(y,0,t) = \left(\frac{\dot{\epsilon}_{\mathbf{m}}}{2R_v} + \frac{3\kappa \dot{b}}{8R_v}\right)(b-y)\sqrt{a^2-(y-b)^2}$$

$$+ \frac{\kappa}{8R_v}\left(a\dot{a} + (y-b)\dot{b}\right)\sqrt{a^2-(y-b)^2}$$

$$- \left(\frac{1}{2R_p} - \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}}{2R_v} - \frac{3\kappa b}{8R_v} - \frac{\kappa}{8R_v}y\right)\left(a\dot{a} + (y-b)\dot{b}\right)\frac{b-y}{\sqrt{a^2-(y-b)^2}}$$

$$- \left(\frac{1}{2R_p} - \frac{\epsilon_{\mathbf{m}}}{2R_v} - \frac{3\kappa b}{8R_v} - \frac{\kappa}{8R_v}y\right)\dot{b}\sqrt{a^2-(y-b)^2}$$

A.3 Modèle d'impact non-asymptotique

A.3.1 Calcul des corrections de surface mouillée

Pour une configuration d'impact hydrodynamique dissymétrique on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-d_1}^{d_2} \frac{\partial \phi}{\partial z}(\xi,t)\sqrt{\frac{d_2-\xi}{d_1+\xi}}d\xi = 0 \quad \text{pour} \quad x = -d_1 & \text{(A.58a)} \\ \displaystyle\int_{-d_1}^{d_2} \frac{\partial \phi}{\partial z}(\xi,t)\sqrt{\frac{d_1+\xi}{d_2-\xi}}d\xi = 0 \quad \text{pour} \quad x = d_2 & \text{(A.58b)} \end{cases}$$

Premier changement de variable : $\xi = au + b$:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\partial \phi}{\partial z}(u,t)\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}du = 0 \quad \text{pour} \quad x = -d_1 & \text{(A.59a)} \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\partial \phi}{\partial z}(u,t)\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}du = 0 \quad \text{pour} \quad x = d_2 & \text{(A.59b)} \end{cases}$$

Avec une nouvelle expression de la condition de Neumann asymptotique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(u,t) = p_0 + ap_1 u + a^2 p_2 u^2 - C\left[A(t)\cos(a\kappa u) - B(t)\sin(a\kappa u)\right] \quad \text{(A.60)}$$

Second changement de variable : $u = \sin\theta$:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \phi}{\partial z}(\theta,t)\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}d\theta = 0 \quad \text{pour} \quad x = -d_1 & \text{(A.61a)} \\ \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \phi}{\partial z}(\theta,t)\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}d\theta = 0 \quad \text{pour} \quad x = d_2 & \text{(A.61b)} \end{cases}$$

La condition de Neuman non-asymptotique devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(\theta,t) = p_0 + ap_1\sin\theta + a^2 p_2 \sin^2\theta - C\left[A(t)\cos(a\kappa\sin\theta) - B(t)\sin(a\kappa\sin\theta)\right] \quad \text{(A.62)}$$

En utilisant les décompositions en séries de fonctions de Bessel suivantes :

$$\begin{cases} \cos(a\kappa\sin\theta) = \mathbf{J_0}(a\kappa) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{J_{2k}}(a\kappa)\cos(2k\theta) & \text{(A.63a)} \\ \sin(a\kappa\sin\theta) = 2\mathbf{J_1}(a\kappa)\sin\theta + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{J_{2k+1}}(a\kappa)\sin((2k+1)\theta) & \text{(A.63b)} \end{cases}$$

Après calcul il demeure :

$$\begin{cases} p_0 - \frac{a}{2}p_1 + \frac{a^2}{2}p_2 - C\left[A(t)\mathbf{J_0}(a\kappa) + B(t)\mathbf{J_1}(a\kappa)\right] = 0 & \text{(A.64a)} \\ p_0 + \frac{a}{2}p_1 + \frac{a^2}{2}p_2 - C\left[A(t)\mathbf{J_0}(a\kappa) - B(t)\mathbf{J_1}(a\kappa)\right] = 0 & \text{(A.64b)} \end{cases}$$

A.3.2 Calcul du potentiel des déplacements

Soit l'expression du potentiel des déplacements pour un impact dissymétrique :

$$\phi_{\mathbf{na}}(y,t) = -\int_y^{d_2}\frac{1}{\pi\sqrt{(d1+x)(d2-x)}}\int_{-d_1}^{d_2}\frac{\partial\phi_{\mathbf{na}}}{\partial z}(\xi,t)\frac{\sqrt{(d1+\xi)(d2-\xi)}}{\xi-x}dxd\xi \quad \text{(A.65)}$$

Avec la condition de Neumann complète :

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(\xi,t) = -h(t) + \frac{y^2+2yY_0}{2R_p} + Z_0 + C - C\cos(\kappa(y+Y_0) - \omega t + \theta_0) \quad \text{(A.66)}$$

Avec le 1^{er} changement de variable $\xi = u + b$ et en posant $\zeta = x - b$ le calcul de potentiel des déplacements devient :

$$\phi_{\mathbf{na}}(y,t) = -\int_{y-b}^{a}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-\zeta^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\partial\phi_{\mathbf{na}}}{\partial z}(u,t)\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u-\zeta}dud\zeta \quad \text{(A.67)}$$

On scinde le problème en deux en considérant une contribution polynomiale et une contribution trigonométrique :

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{na}}}{\partial z}(u,t) = \frac{\partial\phi_{\mathbf{p\,na}}}{\partial z}(u,t) + \frac{\partial\phi_{\mathbf{t\,na}}}{\partial z}(u,t) \quad \text{(A.68)}$$

Calcul de la contribution polynomiale

Soit la partie polynomiale de la condition de Neumann :

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{p\,na}}}{\partial z}(u,t) = p_0(t) + p_1(t)u + p_2u^2 \quad \text{(A.69)}$$

On calcul donc :

$$\phi_{\mathbf{p\,na}}(y,t) = -\int_{y-b}^{a}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-\zeta^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\partial\phi_{\mathbf{p\,na}}}{\partial z}(u,t)\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u-\zeta}dud\zeta \quad \text{(A.70)}$$

On pose :

$$\gamma_p(\zeta,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-\zeta^2}}I_p(\zeta,t) \quad \text{(A.71)}$$

Avec :

$$I_p(\zeta,t) = \int_{-a}^{a} \left(p_0 + p_1 u + p_2 u^2\right) \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u-\zeta} du$$

$$= \int_{-a}^{a} \left(p_0 + p_1 u + p_2 u^2\right) \frac{a^2-u^2}{(u-\zeta)\sqrt{a^2-u^2}} du \tag{A.72}$$

On utilise un nouveau changement de variable intégral : $u = av$

$$I_p(\zeta,t) = a\int_{-1}^{1} \left(p_0 + ap_1 v + (a^2p_2 - p_0)v^2 - ap_1 v^3 - a^2 p_2 v^4\right) \frac{1}{(v-\frac{\zeta}{a})\sqrt{1-v^2}} dv \tag{A.73}$$

En utilisant les résultats sur les intégrales d'Hilbert (ann. A.4.2) :

$$I_p(\zeta,t) = a\pi \left[\frac{a}{2}p_1 + \left(\frac{a^2}{2}p_2 - p_0\right)\frac{\zeta}{a} - ap_1\frac{\zeta^2}{a^2} - a^2 p_2 \frac{\zeta^3}{a^3}\right] \tag{A.74}$$

Donc :

$$\gamma_p(\zeta,t) = \frac{1}{\sqrt{a^2-\zeta^2}} \left[\frac{a^2}{2}p_1 + \left(\frac{a^2}{2}p_2 - p_0\right)\zeta - p_1\zeta^2 - p_2\zeta^3\right] \tag{A.75}$$

Et :

$$\phi_{\mathbf{p\,na}}(y,t) = -\int_{y-b}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2-\zeta^2}} \left[\frac{a^2}{2}p_1 + \left(\frac{a^2}{2}p_2 - p_0\right)\zeta - p_1\zeta^2 - p_2\zeta^3\right] d\zeta \tag{A.76}$$

Reste à appliquer un dernier changement de variable intégral tel que $\zeta = a\sin\theta$:

$$\phi_{\mathbf{p\,na}}(y,t) = -\int_{\arcsin(y-b)}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{a^2}{2}p_1 + \left(\frac{a^2}{2}p_2 - p_0\right) a\sin\theta - p_1 a^2\sin^2\theta - a^3 p_2 \sin\theta^3\right] d\theta \tag{A.77}$$

Après intégration on obtient la contribution polynomiale du potentiel des déplacements :

$$\phi_{\mathbf{p\,na}}(y,t) = \left[ap_0 + \frac{a^3}{6}p_2 + \frac{a^2}{2}p_1\left(\frac{y-b}{2}\right) + \frac{a^3}{2}p_2\left(\frac{y-b}{2}\right)^2\right]\sqrt{1-\left(\frac{y-b}{a}\right)^2} \tag{A.78}$$

Calcul de la contribution trigonométrique

Soit la contribution trigonométrique de la condition de Neumann :

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{t\,na}}}{\partial z}(u,t) = -C\left[A(t)\cos(\kappa u) - B(t)\sin(\kappa u)\right] \tag{A.79}$$

La contribution trigonométrique au sein du potentiel des déplacements se formule comme suit :

$$\phi_{\mathbf{t\,na}}(u,t) = \int_{a}^{y-b} \frac{C}{\pi\sqrt{a^2-\zeta^2}} \int_{-a}^{a} \left[A(t)\cos(\kappa u) - B(t)\sin(\kappa u)\right] \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u-\zeta} du d\zeta \tag{A.80}$$

Pour calculer cette dernière intégrale un double changement de variable intégrale est nécessaire :

$$\begin{cases} u = a\sin\theta \quad \text{et} \quad du = a\cos\theta d\theta & \text{(A.81a)} \\ si \quad u = -a \quad \text{alors} \quad \theta = -\dfrac{\pi}{2} & \text{(A.81b)} \\ si \quad u = a \quad \text{alors} \quad \theta = \dfrac{\pi}{2} & \text{(A.81c)} \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \zeta = a\sin\alpha \quad \text{et} \quad d\zeta = a\cos\alpha d\alpha & \text{(A.82a)} \\ si \quad \zeta = y - b \quad \text{alors} \quad \alpha = \arcsin\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & \text{(A.82b)} \\ si \quad \zeta = a \quad \text{alors} \quad \alpha = \dfrac{\pi}{2} & \text{(A.82c)} \end{cases}$$

L'expression de la contribution trigonométrique s'écrit comme suit :

$$\phi_{\mathbf{t\,na}}(y,t) = \int_{\arcsin\left(\frac{y-b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{aC}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[A(t)\cos(a\kappa\sin\theta) - B(t)\sin(a\kappa\sin\theta)\right] \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\alpha} d\theta d\alpha \tag{A.83}$$

On a donc deux intégrales doubles à calculer :

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{tc\,na}}(y,t) = \dfrac{aC}{\pi} \displaystyle\int_{\arcsin\left(\frac{y-b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A(t)\cos(a\kappa\sin\theta) \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\alpha} d\theta d\alpha & \text{(A.84a)} \\ \phi_{\mathbf{ts\,na}}(y,t) = -\dfrac{aC}{\pi} \displaystyle\int_{\arcsin\left(\frac{y-b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B(t)\sin(a\kappa\sin\theta) \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\alpha} d\theta d\alpha & \text{(A.84b)} \end{cases}$$

Calcul de l'intégrale $\phi_{\mathbf{tc,na}}(y,t)$:

On pose :

$$I_{tc}(y,t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\kappa\sin\theta) \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\alpha} d\theta \tag{A.85}$$

En utilisant l'identité A.63a

$$I_{tc}(y,t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\mathbf{J_0}(a\kappa) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{J_{2k}}(a\kappa)\cos(2k\theta)\right] \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\alpha} d\theta d\alpha \tag{A.86}$$

Avec les résultats intégraux A.101 et A.104 sur les intégrales de type Glauert :

$$I_{tc}(y,t) = -\pi\left(\mathbf{J_0}(a\kappa)\sin\alpha + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{J_{2k}}\sin(2k\alpha)\cos(\alpha)\right) \tag{A.87}$$

Reste à intégrer en α tel que :

$$\phi_{\mathbf{tc,na}}(y,t) = -aCA(t) \int_{\arcsin\left(\frac{y-b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathbf{J_0}(a\kappa)\sin\alpha + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{J_{2k}}\sin(2k\alpha)\cos(\alpha)\right) d\alpha \tag{A.88}$$

Après intégration on obtient :

$$\phi_{\mathbf{tc,na}}(y,t) = -aCA(t)\left[\mathbf{J_0}(a\kappa)\sqrt{1 - \left(\frac{y-b}{a}\right)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{J_{2k}}(a\kappa) f_k(y,t)\right] \tag{A.89}$$

Calcul de l'intégrale $\phi_{\mathbf{ts,na}}(y,t)$:

On pose :

$$I_{ts}(y,t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(a\kappa\sin\theta) \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\alpha} d\theta \tag{A.90}$$

En utilisant l'identité A.63b

$$I_{ts}(y,t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2\mathbf{J_1}(a\kappa)\sin\theta + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{J_{2k+1}}(a\kappa)\cos(2k\theta) \right] \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\alpha} d\theta d\alpha \tag{A.91}$$

Avec les résultats intégraux sur les intégrale de type Glauert A.102 et A.103 :

$$I_{ts}(y,t) = 2\pi \left[\mathbf{J_1}(a\kappa)\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{J_{2k+1}}(a\kappa)\cos((2k+1)\alpha)\cos\alpha \right] \tag{A.92}$$

Reste à intégrer en α tel que :

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{ts,na}}(y,t) = &- aCB(t) \int_{\arcsin\left(\frac{y-b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} 2\mathbf{J_1}(a\kappa)\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right) d\alpha \\ &+ aCB(t) \int_{\arcsin\left(\frac{y-b}{a}\right)}^{\frac{\pi}{2}} 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{J_{2k+1}}(a\kappa)\cos((2k+1)\alpha)\cos\alpha d\alpha \end{aligned} \tag{A.93}$$

Après intégration on obtient :

$$\phi_{\mathbf{ts,na}}(y,t) = aCB(t) \left[\mathbf{J_1}(a\kappa)\left(\frac{y-b}{a}\right)\sqrt{1-\left(\frac{y-b}{a}\right)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{J_{2k+1}}(a\kappa) g_k(y,t) \right] \tag{A.94}$$

Pour établir l'expression finale du potentiel des déplacements on regroupe toutes les contributions (Eq(s). A.78, A.89 et A.94) :

$$\phi_{\mathbf{na}}(y,t) = \phi_{\mathbf{p,na}}(y,t) + \phi_{\mathbf{tc,na}}(y,t) + \phi_{\mathbf{ts,na}}(y,t) \tag{A.95}$$

Reste à utiliser les corrections de surface mouillée (voir Eqs. A.64) :

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{na}}(y,0,t) = &- \frac{1}{6R_p}\left[a^2 - (y-b)^2\right]^{\frac{3}{2}} \\ &- aC\left(A(t)\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{J_{2k}}(a\kappa) f_k(y,t) + B(t)\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{J_{2k+1}}(a\kappa) g_k(y,t) \right) \end{aligned} \tag{A.96}$$

A.3.3 Vitesses d'expansion de surface mouillée pour le modèle d'impact hydrodynamique non-asymptotique

Pour obtenir les vitesses d'expansion de surface mouillée, on dérive par rapport au temps de système d'équations non-linéaires 2.75 :

Sans vitesse d'avance

$$\begin{cases} -W + \dfrac{\dot{b}b}{R_p} + \dfrac{\dot{b}Y_0}{R_p} + \dfrac{\dot{a}a}{2R_p} + C(\kappa\dot{b} - \omega)\sin(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\mathbf{J_0}(a\kappa) \\ + C\dot{a}\kappa\cos(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\mathbf{J_1}(a\kappa) = 0 \end{cases} \tag{A.97a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{a}b}{2R_p} + \dfrac{a\dot{b}}{2R_p} + \dfrac{\dot{a}Y_0}{2R_p} + C(\kappa\dot{b} - \omega)\cos(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\mathbf{J_1}(a\kappa) \\ + C\dot{a}\kappa\sin(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\mathbf{J_0}(a\kappa) - \dfrac{\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a\kappa}\right] = 0 \end{cases} \tag{A.97b}$$

Avec vitesse d'avance

$$\begin{cases} \quad -W + \dfrac{\dot{b}b}{R_p} + \dfrac{\dot{b}Y_0}{R_p} + \dfrac{\dot{a}a}{2R_p} + \dfrac{\dot{b}\delta y}{R_p} + \dfrac{bV}{R_p} + \dfrac{Y_0V}{R_p} + \dfrac{\delta yV}{R_p} \\ + C(\kappa\dot{b} - \omega)\sin(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\mathbf{J_0}(a\kappa) \\ + C\dot{a}\kappa\cos(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\mathbf{J_1}(a\kappa) = 0 \end{cases} \tag{A.98a}$$

$$\begin{cases} \quad \dfrac{\dot{a}b}{2R_p} + \dfrac{a\dot{b}}{2R_p} + \dfrac{\dot{a}Y_0}{2R_p} + \dfrac{\dot{a}\delta y}{2R_p} + \dfrac{aV}{2R_p} \\ + C(\kappa\dot{b} - \omega)\cos(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\mathbf{J_1}(a\kappa) \\ + C\dot{a}\kappa\sin(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\mathbf{J_0}(a\kappa) - \dfrac{\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a\kappa}\right] = 0 \end{cases} \tag{A.98b}$$

A.3.4 Accélération d'expansion de surface mouillée pour le modèle d'impact hydrodynamique non-asymptotique

Sans vitesse d'avance

Pour obtenir les accélérations d'expansion de surface mouillée, on dérive par rapport au temps de système d'équations non-linéaires A.118 :

$$\begin{cases} \quad \dfrac{\dot{b}^2}{R_p} + \dfrac{b\ddot{b}}{R_p} + \dfrac{Y_0\ddot{b}}{R_p} + \dfrac{\dot{a}^2}{2R_p} + \dfrac{a\ddot{a}}{2R_p} + C(\kappa\dot{b} - \omega)^2\cos(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\mathbf{J_0}(a\kappa) \\ + C\sin(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\kappa\ddot{b}\mathbf{J_0}(a\kappa) - 2(\kappa\dot{b} - \omega)\mathbf{J_1}(a\kappa)\dot{a}\kappa\right] \\ + C\cos(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\left(\mathbf{J_0}(a\kappa) - \dfrac{\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a\kappa}\right)\dot{a}^2\kappa^2 + \mathbf{J_1}(a\kappa)\ddot{a}\kappa\right] = 0 \end{cases} \tag{A.99a}$$

$$\begin{cases} \quad \dfrac{\ddot{a}b}{2R_p} + \dfrac{\dot{a}\dot{b}}{R_p} + \dfrac{a\ddot{b}}{2R_p} + \dfrac{\ddot{a}Y_0}{2R_p} - C(\kappa\dot{b} - \omega)^2\sin(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\mathbf{J_1}(a\kappa) \\ + C\cos(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\left(\kappa\ddot{b}\mathbf{J_1}(a\kappa) + 2\dot{a}\kappa(\kappa\dot{b} - \omega)\left[\mathbf{J_0}(a\kappa) - \dfrac{\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a\kappa}\right]\right) \\ - C\dot{a}\kappa\sin(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\mathbf{J_1}(a\kappa)\dot{a}\kappa + \dfrac{\dot{a}}{a}\left(\mathbf{J_0}(a\kappa) - \dfrac{\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a\kappa}\right)\right] \\ + C\dot{a}\kappa\sin(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\dfrac{\dot{a}\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a^2\kappa}\right] \\ + C\ddot{a}\kappa\sin(\kappa(b+Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\mathbf{J_0}(a\kappa) - \dfrac{\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a\kappa}\right] = 0 \end{cases} \tag{A.99b}$$

Avec vitesse d'avance

$$
\begin{cases}
\dfrac{\dot{b}^2}{R_p} + \dfrac{b\ddot{b}}{R_p} + \dfrac{Y_0\ddot{b}}{R_p} + \dfrac{\dot{a}^2}{2R_p} + \dfrac{a\ddot{a}}{2R_p} + \dfrac{\ddot{b}\delta y}{R_p} + \dfrac{2\dot{b}V}{R_p} + \dfrac{V^2}{R_p} \\
+ C(\kappa\dot{b} - \omega)^2 \cos(\kappa(b + Y_0) - \omega t + \theta_0)\mathbf{J_0}(a\kappa) \\
+ C\sin(\kappa(b + Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\kappa\ddot{b}\mathbf{J_0}(a\kappa) - 2(\kappa\dot{b} - \omega)\mathbf{J_1}(a\kappa)\dot{a}\kappa\right] \\
+ C\cos(\kappa(b + Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\left(\mathbf{J_0}(a\kappa) - \dfrac{\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a\kappa}\right)\dot{a}^2\kappa^2 + \mathbf{J_1}(a\kappa)\ddot{a}\kappa\right] = 0 \qquad \text{(A.100a)} \\
\dfrac{\ddot{a}b}{2R_p} + \dfrac{\dot{a}\dot{b}}{R_p} + \dfrac{a\ddot{b}}{2R_p} + \dfrac{\ddot{a}Y_0}{2R_p} + \dfrac{\ddot{a}\delta y}{2R_p} + \dfrac{\dot{a}V}{R_p} \\
- C(\kappa\dot{b} - \omega)^2 \sin(\kappa(b + Y_0) - \omega t + \theta_0)\mathbf{J_1}(a\kappa) \\
+ C\cos(\kappa(b + Y_0) - \omega t + \theta_0)\left(\kappa\ddot{b}\mathbf{J_1}(a\kappa) + 2\dot{a}\kappa(\kappa\dot{b} - \omega)\left[\mathbf{J_0}(a\kappa) - \dfrac{\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a\kappa}\right]\right) \\
- C\dot{a}\kappa\sin(\kappa(b + Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\mathbf{J_1}(a\kappa)\dot{a}\kappa + \dfrac{\dot{a}}{a}\left(\mathbf{J_0}(a\kappa) - \dfrac{\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a\kappa}\right)\right] \\
+ C\dot{a}\kappa\sin(\kappa(b + Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\dfrac{\dot{a}\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a^2\kappa}\right] \\
+ C\ddot{a}\kappa\sin(\kappa(b + Y_0) - \omega t + \theta_0)\left[\mathbf{J_0}(a\kappa) - \dfrac{\mathbf{J_1}(a\kappa)}{a\kappa}\right] = 0 \qquad \text{(A.100b)}
\end{cases}
$$

A.4 Résultats intégraux

A.4.1 Intégrale de Type Glauert

Ici PV : signifie Intégration par Valeur Principale

$$PV\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\alpha}d\theta = -\pi\sin\alpha \qquad \text{(A.101)}$$

$$PV\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\alpha}d\theta = \pi\cos^2\alpha - \frac{\pi}{2} \qquad \text{(A.102)}$$

$$PV\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2k+1)\theta)\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\alpha}d\theta = -\pi\cos((2k+1)\alpha)\cos\alpha \quad k \geq 1 \qquad \text{(A.103)}$$

$$PV\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2k\theta)\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\alpha}d\theta = -\pi\sin(2k\alpha)\cos\alpha \quad k \geq 1 \qquad \text{(A.104)}$$

A.4.2 Transformation d'Hilbert

Ces résultats intégraux sont tirés de l'ouvrage « Marine Hydrodynamics » de J.N. Newman [Newman, 1977]

$$H_n(x) = PV \int_{-1}^{1} \frac{\xi^n}{(\xi - x)\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \tag{A.105}$$

Avec la relation de récurrence :

$$H_n(x) = I_{n-1} + xH_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1 \tag{A.106}$$

Avec :

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos^n \theta d\theta \tag{A.107}$$

Et :

$$H_0(x) = 0 \tag{A.108}$$

A.5 Démonstration pour la pression

A.5.1 Pression MLM avec vitesse d'avance

Cette démonstration s'appuie sur les travaux de [Korobkin, 2004]. Dans cette partie désigne $, x = \frac{\partial}{\partial x}$. La position du solide est décrite par l'équation $y = f(y) - h(t)$, où $f(y)$ rend compte de la géométrie du corps et $h(t)$ la hauteur de pénétration du corps solide dans le fluide.

De plus on pose $f^\star(y, z, t) = f(y) - z - h(t)$

Le point de départ de la formulation MLM est la condition d'imperméabilité entre le fluide et le solide :

$$\vec{\nabla}\varphi \,.\, \vec{n} = \vec{v_b} \,.\, \vec{n} \quad \text{avec} \quad \vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f^\star}{\|\vec{\nabla} f^\star\|} \quad \text{et} \quad \vec{v_b} = -W.\vec{z} - V.\vec{y} \tag{A.109}$$

$$\vec{\nabla}\varphi \,.\, \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix} \varphi_{,x} \\ \varphi_{,y} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} f_{,x} \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + f_{,y}^2}} \quad \text{et} \quad \vec{v_b} \,.\, \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix} -V \\ -W \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} f_{,y} \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + f_{,y}^2}}$$

La condition d'imperméabilité nous donne :

$$\varphi_{,z} = (\varphi_{,y} + V) f_{,y} - W \tag{A.110}$$

On introduit ensuite la restriction du potentiel φ sur la surface mouillée :

$$\psi(y, t) = \varphi(y, f(y) - h(t), t) \tag{A.111}$$

On dérive relation A.111 par rapport au temps en prenant bien en compte que h dépend du temps et $\dot{h}(t) = W$:

$$\psi_{,t} = \varphi_{,t} - W\, \varphi_{,z} \tag{A.112}$$

On dérive relation A.111 par rapport à la coordonnée spatiale y :

$$\psi_{,y} = \varphi_{,y} + \varphi_{,z} f_{,y} \tag{A.113}$$

De plus en multipliant la relation précédente par $f_{,y}$, il vient :

$$\psi_{,y} f_{,y} = \varphi_{,y} f_{,y} + \varphi_{,z} f_{,y}^2 \tag{A.114}$$

En utilisant la condition d'imperméabilité A.110 :

$$\varphi_{,y} f_{,y} = \varphi_{,y} + W - V\varphi_{,z} f_{,y} \tag{A.115}$$

En combinant les équations A.114 etA.115 on exprimer $\varphi_{,z}$:

$$\varphi_{,z} = \frac{(\psi_{,y} + V) f_{,y} - W}{D} \quad \text{avec} \quad D = 1 + f_{,y}^2 \tag{A.116}$$

Soit la relation de Bernoulli non-linéarisée restreinte sur la surface mouillée avec vitesse d'avance :

$$-\frac{1}{\rho} P_{mlm\,va}(y,t) = \varphi_{,t} + \frac{1}{2}\left(\varphi_{,y}^2 + \varphi_{,z}^2\right) \tag{A.117}$$

En utilisant les relations A.112, A.113 et A.116 on a :

$$\begin{cases} \varphi_{,t} = \psi_{,t} + W\,\varphi_{,z} & \text{(A.118a)} \\ \varphi_{,y} = \psi_{,y} - \varphi_{,z} f_{,y} & \text{(A.118b)} \\ \varphi_{,z} = \dfrac{(\psi_{,y} + V) f_{,y} - W}{D} & \text{(A.118c)} \end{cases}$$

Ce qui permet d'exprimer complètement l'équation de Bernoulli non-linéarisée A.117, après un peu d'algèbre on obtient l'expression de la pression MLM avec vitesse d'avance :

$$P_{mlm\,va}(y,t) = -\rho\left[\psi_{,t} + \frac{f_{,y} W}{1 + f_{,y}^2}\psi_{,y} + \frac{1}{2}\frac{\psi_{,y}^2 - W^2 + V^2 f_{,y}^2}{1 + f_{,y}^2}\right] \tag{A.119}$$

A.5.2 Raccordement asymptotique pour les modèles d'impact au voisinage de la crête, du creux et au voisinage du milieu de la pente au 1^{er} order

On rappelle les expressions des potentiels des vitesses et de la pression linéarisée :

$$\varphi(y,0,t) = -\frac{(a\dot{a} - (y - Rc)R\dot{c})}{2R}\sqrt{a^2 - (y - Rc)^2} \tag{A.120}$$

$$\begin{aligned} P_{wagner}(y,t) =& \rho\frac{(a\dot{a} + (y - cR)\dot{c}R)^2}{2R\sqrt{a^2 - (y - cR)^2}} \\ & \rho\frac{\sqrt{a^2 - (y - cR)^2}}{2R}\left(\dot{a}^2 + a\ddot{a} - \dot{c}^2 R^2\right) \end{aligned} \tag{A.121}$$

Avec $P_s(y,t)$ la partie singulière de $P_{wagner}(y,t)$

Développement asymptotique de la fonction de forme : $S(y) = a^2 - (y - cR)^2$

- côté positif : $S(y) \underset{y \to a+cR}{\approx} -2a(y - Rc - a)$

$$\begin{cases} \varphi_+(y,t) = -\dfrac{(a\dot{a} + (y - cR)\dot{c}R)}{2R}\sqrt{2a(a + Rc - y)} & \text{(A.122a)} \\ P_{s+}(y,t)) = \rho\dfrac{(a\dot{a} + (y - cR)\dot{c}R)^2}{2R\sqrt{2a(a + Rc - y)}} & \text{(A.122b)} \end{cases}$$

- côté négatif : $S(y) \underset{y \to -a+cR}{\approx} 2a(y - Rc + a)$

$$\begin{cases} \varphi_-(y,t) = -\dfrac{(a\dot{a} + (y - cR)\dot{c}R)}{2R}\sqrt{2a(a - Rc + y)} & \text{(A.123a)} \\ P_{s-}(y,t)) = \rho\dfrac{(a\dot{a} + (y - cR)\dot{c}R)^2}{2R\sqrt{2a(a - Rc + y)}} & \text{(A.123b)} \end{cases}$$

Dans le jet :

$$\begin{cases} \varphi_{in} = -4V_{j\pm}\sqrt{\dfrac{\pi|\sigma|}{\delta}} & \text{(A.124a)} \\ P_{in} = 2\rho V_{j\pm}^2\sqrt{\dfrac{\delta}{\pi|\sigma|}} & \text{(A.124b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{côté positif :} \quad a - y + cR = |\sigma| & \text{(A.125a)} \\ \text{côté négatif :} \quad a + y - cR = |\sigma| & \text{(A.125b)} \end{cases}$$

Pour trouver l'épaisseur du jet σ ainsi que les vitesses du fluide dans le jet $V_{j\pm}$ (Eq(s). 2.146a et 2.146b), on résout le système d'équations suivant, respectivement à droite et à gauche de la surface mouillée.

Côté positif : $y \to a + Rc$

$$(1) : \begin{cases} 4V_{j+}\sqrt{\dfrac{\sigma}{\pi}} = \dfrac{a(\dot{a} + cR)}{2R}\sqrt{2a} & \text{(A.126a)} \\ 2\rho V_{j+}\sqrt{\dfrac{\sigma}{\pi}} = \rho\dfrac{[a(\dot{a} + cR)]^2}{2R\sqrt{2a}} & \text{(A.126b)} \end{cases}$$

Côté négatif : $y \to -a + Rc$

$$(2) : \begin{cases} 4V_{j-}\sqrt{\dfrac{\sigma}{\pi}} = \dfrac{a(\dot{a} - cR)}{2R}\sqrt{2a} & \text{(A.127a)} \\ 2\rho V_{j-}\sqrt{\dfrac{\sigma}{\pi}} = \rho\dfrac{[a(\dot{a} - cR)]^2}{2R\sqrt{2a}} & \text{(A.127b)} \end{cases}$$

A.6 Configurations d'impact hydrodynamique de référence

Dans cette annexe on présente les étapes qui permettent d'établir les modèles d'impact hydrodynamique de référence (que l'on appelle aussi canoniques). Le premier modèle de référence traite de l'impact hydrodynamique d'une parabole sur une surface libre plane et au repos sans vitesse d'avance (voir annexe A.6.1). Le second modèle de référence enrichit la cinématique de la parabole en ajoutant une vitesse d'avance horizontale (voir annexe A.6.2). Dans les deux cas les vitesses verticale et horizontale sont assumées constantes.

A.6.1 Impact hydrodynamique d'une parabole sur une surface libre plane et au repos sans vitesse d'avance

On traite le cas d'une parabole de rayon de courbure R_p animée d'une cinématique purement verticale à vitesse constante W, telle que $h(t) = Wt$. On se place dans le système de coordonées galiléen (O, y, z) et on considère une configuration d'impact symétrique par rapport à l'axe (Oz). À l'instant initial la parabole impact la surface libre en un unique point O (Fig. A.1). Au moyen de l'approximation du disque plat, qui stipule que l'angle de rélèvement $\beta(t)$ demeure faible au cours du temps (en pratique inférieur à 20°), on linéarise le problème aux limites mixte complet A.128.

$$\begin{cases} \Delta\varphi(y,z,t) = 0 & z < 0 \quad \text{(A.128a)} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(y,0,t) = 0 & z = 0,\ y \in SL(t) \quad \text{(A.128b)} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(y,0,t) = \dfrac{\partial\eta_0}{\partial t}(y,0,t) & z = 0,\ y \in SL(t) \quad \text{(A.128c)} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(y,0,t) = -W & z = 0,\ y \in SM(t) \quad \text{(A.128d)} \\ \varphi(y,z,t) \to 0 & \left(y^2 + z^2\right) \to \infty \quad \text{(A.128e)} \end{cases}$$

Par définition le potentiel des déplacements ϕ est l'intégrale par rapport au temps du potentiel des vitesses :

$$\phi(y,0,t) = \int_0^t \varphi(y,0,\tau)d\tau \quad \text{(A.129)}$$

Le problème aux limites mixte linéarisé formulé au moyen du potentiel des déplacements devient (voir [Korobkin, 2004]) :

$$\begin{cases} \Delta\phi(y,z,t) = 0 & z < 0 \quad \text{(A.130a)} \\ \phi(y,0,t) = 0 & z = 0,\ y \in SL(t) \quad \text{(A.130b)} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + f(y) & z = 0,\ y \in SM(t) \quad \text{(A.130c)} \\ \phi(y,z,t) \to 0 & \left(y^2 + z^2\right) \to \infty \quad \text{(A.130d)} \end{cases}$$

On résume le paramétrage ainsi que les configurations physique et mathématique du problème A.130 au moyen de la figure suivante :

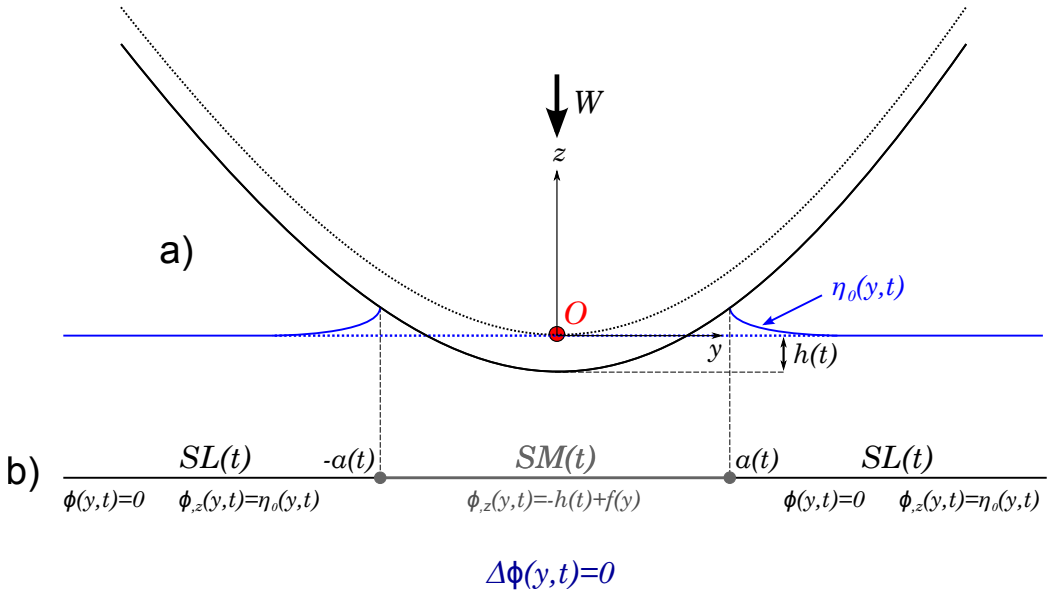

FIGURE A.1 – *Schéma des configurations physique (a) et mathématique (b). En tirets noirs la parabole à l'instant initial, en tirets bleus la surface libre non déformée. En traits pleins noirs la parabole à un instant t, en traits bleus la surface libre déformée*

La présence de la fonction de forme du corps $f(y)$, provient d'une analyse limite de la condition de Wagner :

$$\eta_0(y,t) = f(y) - h(t), \quad \forall\, y \to \pm a(t) \tag{A.131}$$

La condition A.131 assure la continuité entre l'élévation de la surface libre $\eta_0(y,t)$ et les bornes de la surface mouillée $SM(t)$ aux points de contacts $\pm a(t)$. Cette analyse limite est détaillée dans les travaux de [Tassin, 2010]. Le problème linéarisé A.130 admet deux inconnus : la correction de surface mouillée $a(t)$ et le potentiel des déplacements $\phi(y,t)$.

La linéarisation du problème revient à calculer l'écoulement autour d'une plaque plane de demi-rayon $a(t)$. Par analogie avec un problème de portance, on résout le problème de Riemann-Hilbert correspondant (voir [Newman, 1977] chap. *Lifting Surface*).

Sur la surface mouillée le potentiel des déplacements est donné par l'équation suivante :

$$\phi(y,t) = -\int_{y}^{a(t)} \gamma(x,t)dx \tag{A.132}$$

Dans l'équation A.132, $\gamma(x,t)$ est interprété en tant qu'une distribution de tourbillons :

$$\gamma(x,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2(t)-x^2}} PV \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{\partial\phi}{\partial z}(\xi,t)\frac{\sqrt{a^2(t)-\xi^2}}{\xi - x}d\xi \tag{A.133}$$

PV signifie intégration par Valeur Principale (au sens de Cauchy). La résolution de l'équation A.132 nous donne le potentiel des déplacements **canonique** :

$$\phi(y,t) = -\frac{1}{6R_p}\left[a^2(t)-y^2\right]^{\frac{3}{2}} \quad \forall y \in [-a(t),\, a(t)] \tag{A.134}$$

Pour calculer la correction de surface mouillée $a(t)$, d'après [Wagner, 1932], on impose un déplacement fini aux points de contacts $\pm a(t)$. Au moyen l'équation A.133 cela revient à calculer :

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{\partial\phi}{\partial z}(\xi,t)\frac{\sqrt{a^2(t)-\xi^2}}{\xi \pm a(t)}d\xi = 0 \tag{A.135}$$

La résolution de l'intégrale A.135, nous donne la correction de surface mouillée **canonique** :

$$a(t) = \sqrt{4R_p h(t)} \tag{A.136}$$

Le potentiel des vitesses **canonique** est obtenu par dérivation du potentiel des déplacements A.134 :

$$\varphi(y,t) = -W\sqrt{a^2(t) - y^2} \quad \forall y \in [-a(t),\, a(t)] \tag{A.137}$$

A.6.2 Impact hydrodynamique d'une parabole sur une surface libre plane et au repos avec vitesse d'avance

Dans le but d'enrichir la cinématique de la parabole afin de lui ajouter une vitesse d'avance horizontale, on modifie la fonction de forme de la parabole (voir [Moore et al., 2012]) :

$$f(y,t) = \frac{(y + \delta y(t))^2}{2R_p} \quad \text{avec} \quad \delta y(t) = Vt \tag{A.138}$$

La nouvelle fonction de forme de la parabole (Eq. A.138) lui permet, en plus de sa cinématique verticale, de se déplacer horizontalement à vitesse constante V dans le sens des y négatifs. Le vecteur vitesse de la parabole est donc $\vec{U} = -V\vec{y} - W\vec{z}$. Le problème aux limite mixte linéarisé correspondant devient :

$$\begin{cases} \Delta\phi_{\mathbf{va}}(y,z,t) = 0 & z < 0 & \text{(A.139a)} \\ \phi_{\mathbf{va}}(y,0,t) = 0 & z = 0,\ y \in SL(t) & \text{(A.139b)} \\ \dfrac{\partial\phi_{\mathbf{va}}}{\partial z}(y,0,t) = -h(t) + f(y,t) & z = 0,\ y \in SM(t) & \text{(A.139c)} \\ \phi_{\mathbf{va}}(y,z,t) \to 0 & \left(y^2 + z^2\right) \to \infty & \text{(A.139d)} \end{cases}$$

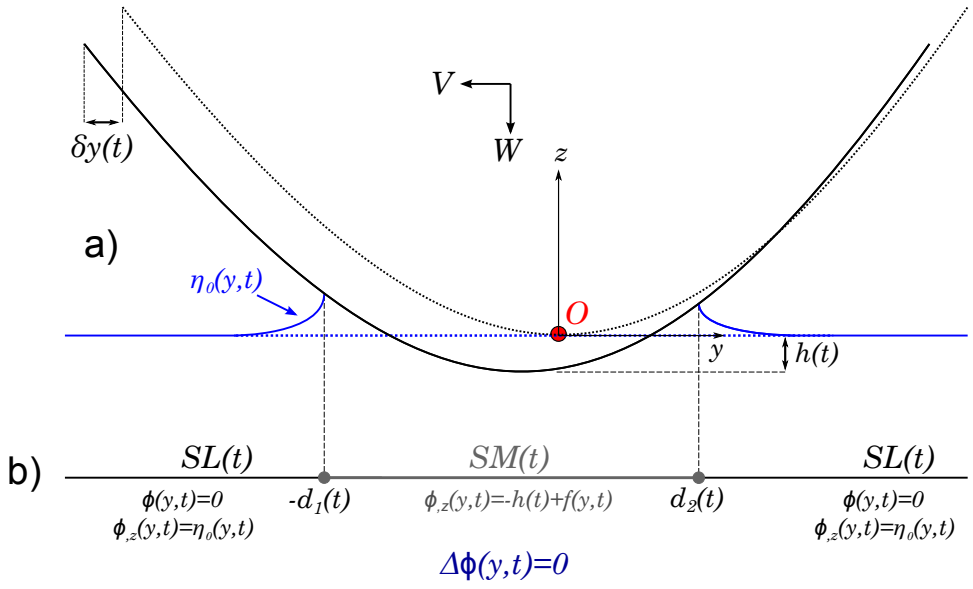

Figure A.2 – *Schéma des configurations physique (a) et mathématique (b) avec vitesse d'avance. En tirets noirs la parabole à l'instant initial, en tirets bleus la surface libre non déformée. En traits pleins noirs la parabole à un instant t, en traits bleus la surface libre déformée (NB : Dans ce schéma on s'est affranchit de l'indice* **va** *pour* $\phi(y,t)$*)*

La méthode résolution du problème A.139 est strictement la même que celui sans vitesse d'avance. La condition de Neumann avec vitesse d'avance est :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{va}}}{\partial z}(y,0,t) = \frac{(y+\delta y(t))^2}{2R_p} - h(t) \tag{A.140}$$

Pour se ramener à une configuration symétrique, on réalise le changement de variable $\tilde{y}(t) = y+\delta y(t)$. Dans le repère mobile $(O, \tilde{y}(t), z)$ le problème est symétrique, par analogie avec le problème A.130 on en déduit directement le potentiel des déplacements sous sa forme **canonique** :

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{va}}(y,t) = -\dfrac{1}{6R_p}\left[a^2(t) - \tilde{y}(t)^2\right]^{\frac{3}{2}} \quad \forall\, \tilde{y}(t) \in [-a(t),\, a(t)] & \text{(A.141a)} \\ a(t) = \sqrt{4R_p h(t)} & \text{(A.141b)} \end{cases}$$

Dans le repère d'origine (O, y, z), le problème n'est plus symétrique. La correction mouillée A.141b n'est plus valable. On introduit les corrections de surface mouillée dissymétriques $d_1(t)$ et $d_2(t)$:

$$\begin{cases} Si \quad \tilde{y}(t) = -a \quad \text{alors} \quad y = -d_1(t) \quad \text{donc} \quad d_1(t) = a(t) + \delta y(t) & \text{(A.142a)} \\ Si \quad \tilde{y}(t) = a \quad \text{alors} \quad y = d_2(t) \quad \text{donc} \quad d_2(t) = -a(t) + \delta y(t) & \text{(A.142b)} \end{cases}$$

Et l'expression du potentiel des déplacements dans le repère fixe (O, y, z), n'est plus **canonique** et devient :

$$\phi_{\mathbf{va}}(y,0,t) = -\frac{1}{6R_p}\left[a^2(t) - (y+\delta y(t))^2\right]^{\frac{3}{2}} \quad \forall y \in [-d_1(t),\, d_2(t)] \tag{A.143}$$

Le potentiel des vitesses s'obtient par dérivation temporelle :

$$\varphi_{\mathbf{va}}(y,0,t) = -\left[W - \frac{V}{2R_p}(y+\delta y(t))\right]\sqrt{a^2(t) - (y+\delta y(t))^2} \quad \forall y \in [-d_1(t),\, d_2(t)] \tag{A.144}$$

Annexe B

Annexes : Comparaisons des modèles analytiques et semi-analytiques

B.1 Critère de Michell

D'après [Michell, 1893], l'amplitude maximale d'une vague s'exprime en fonction de la longueur d'onde λ_0 et la hauteur crête à creux d'une vague H_0 :

$$\left[\frac{H_0}{\lambda_0}\right]_{max} \approx 0.142 \tag{B.1}$$

Avec :

- H_0 la hauteur crête à creux de la houle d'Airy monochromatique.
- λ_0 la longueur d'onde de la houle d'Airy monochromatique.

B.1.1 Amplitude maximale à C fixée

Avec la relation reliant la hauteur et l'amplitude de la houle d'Airy monochromatique : $H_0 = 2C$ et la relation liant nombre d'onde et longueur d'onde : $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

$$\left[\frac{C\kappa}{\pi}\right]_{max} \approx 0.142 \Leftrightarrow [\kappa]_{max} \approx \frac{0.446}{C} \tag{B.2}$$

La relation de disperson reliant la période et le nombre d'onde $\kappa = \frac{4\pi^2}{gT^2}$ donne :

$$\left[\frac{4\pi^2}{gT^2}\right]_{max} \approx \frac{0.446}{C} \Leftrightarrow \left[\frac{gT^2}{4\pi^2}\right]_{min} \approx \frac{C}{0.446} \tag{B.3}$$

Avec : $C = 0.05\,m$ et $g = 9.81\,m.s^{-2}$, il demeure :

$$[T]_{min} \approx 0.672\,s \tag{B.4}$$

B.1.2 Amplitude maximale à T fixée

On réutilise la relation B.2 et la relation reliant la periode et le nombre d'onde :

$$\left[\frac{4\pi^2 C}{gT^2}\right] \approx 0.446 \Leftrightarrow [C]_{max} \approx \frac{0.446 gT^2}{4\pi^2} \tag{B.5}$$

Avec $T = 1.25\,s$ et $g = 9.81\,m.s^2$ il demeure :

$$[C]_{max} \approx 0.173\,m \tag{B.6}$$

B.2 Choix de la vitesse verticale d'impact

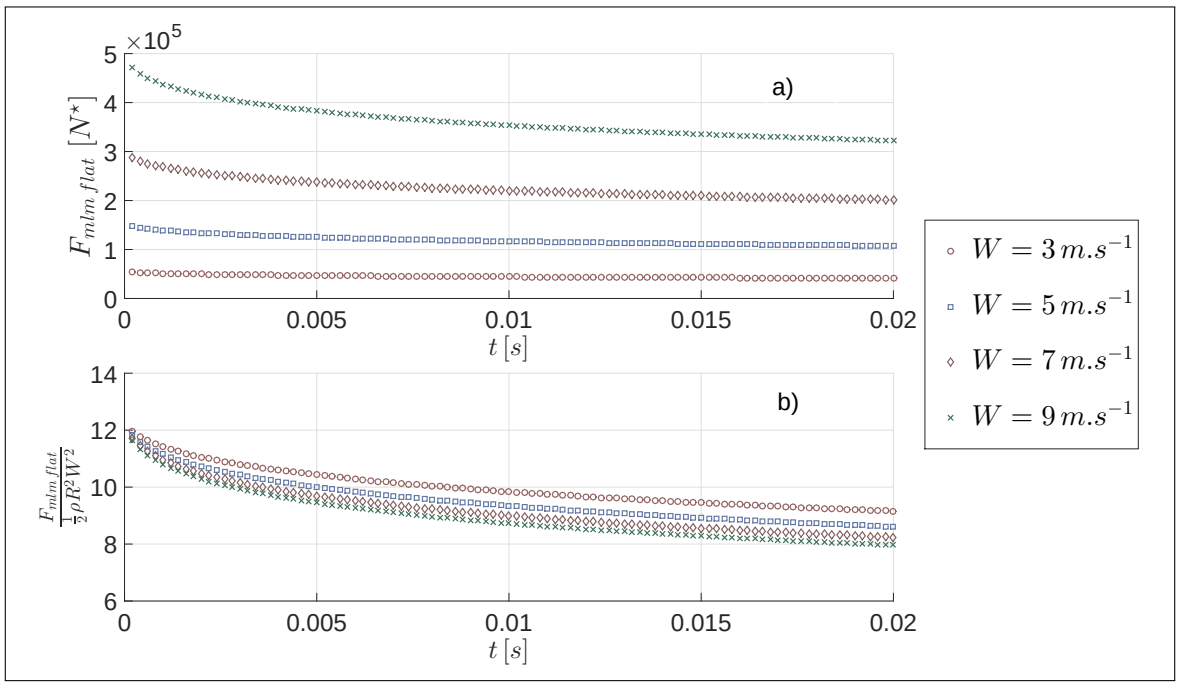

Figure *B.1 – Pour un impact sur une surface libre plane : a) Efforts hydrodynamiques b) Efforts hydrodynamiques adimensionnés*

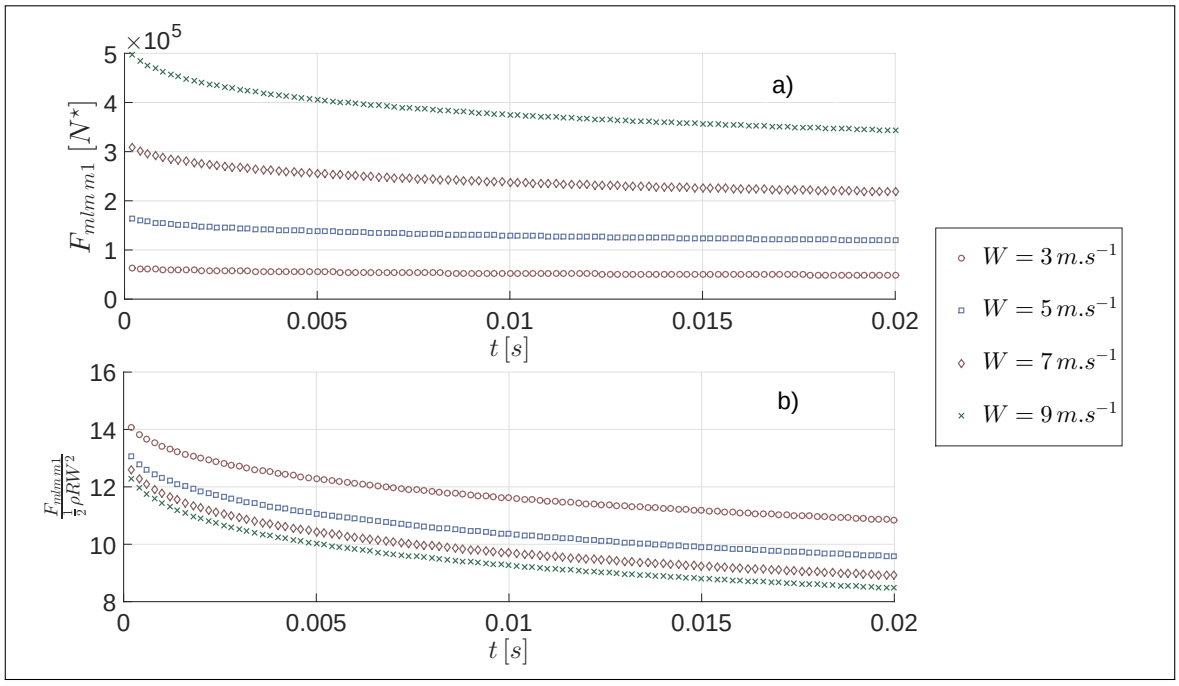

Figure *B.2 – Pour un impact au voisinage du milieu de la pente au 1^{er} ordre avec la configuration n°6 des tableaux 3.1 et 3.2 : a) Efforts hydrodynamiques b) Efforts hydrodynamiques adimensionnés*

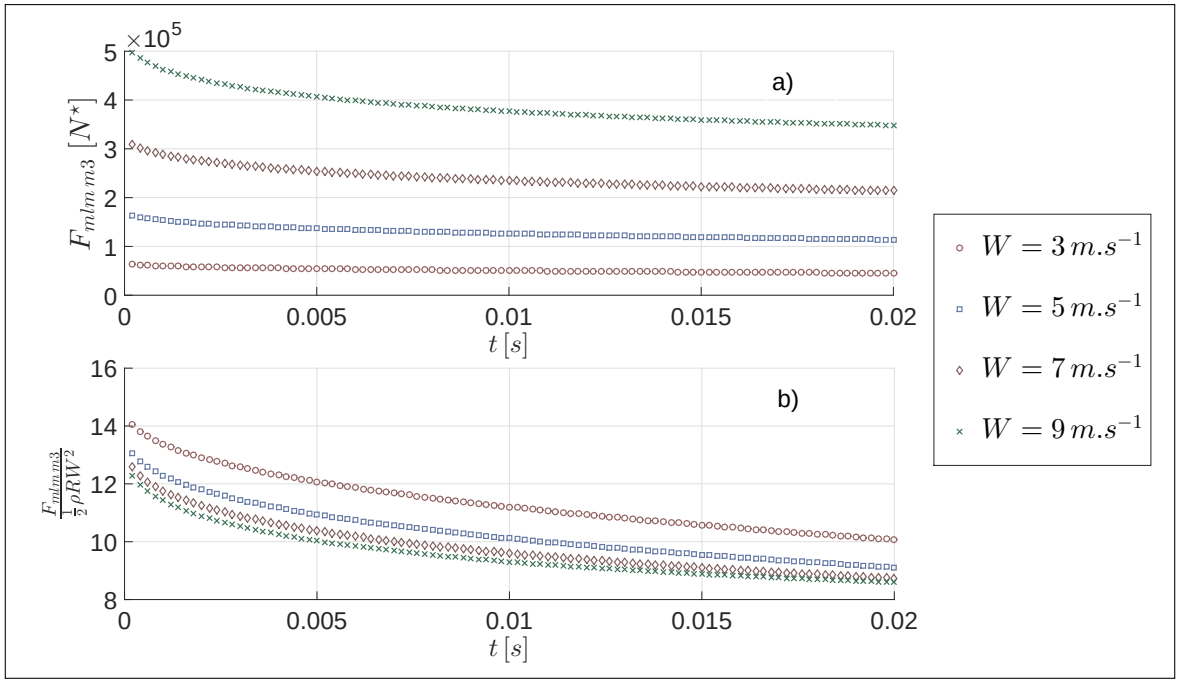

Figure *B.3 – Pour un impact au voisinage du milieu de la pente au 3^e ordre avec la configuration n°6 des tableaux 3.1 et 3.2 : a) Efforts hydrodynamiques b) Efforts hydrodynamiques adimensionnés*

B.3 Définition des écarts relatifs

Dans cette annexe rappelle les expressions des écarts relatifs moyens ainsi qu'à différents instants.

B.3.1 Écarts relatifs entre les modèles asymptotiques et le modèle non-asymptotique

On définit l'écart relatif comme suit :

$$\mathbf{\Delta} X(t) = 100 \times \frac{|X(t)_{non-asymptotique} - X(t)_{asymptotique}|}{X(t)_{non-asymptotique}} \tag{B.7}$$

Avec $X(t)$, la grandeur considérée, c'est-à-dire soit :

- Les corrections de surface mouillée : $d_1(t)$ et $d_2(t)$
- Les valeurs maximales des pressions MLM aux pics : $P_{max\,mlm\,d_1}(t)$ et $P_{max\,mlm\,d_2}(t)$
- Les efforts hydrodynamiques : $F_{mlm}(t)$

Ainsi :

- $\bar{\mathbf{\Delta}} X$ désigne l'écart relatif moyen au cours de la simulation de $0.02\,s$
- $\mathbf{\Delta} X$ premier désigne l'écart relatif au premier pas de temps ($t = 2.0\,e^{-4}\,s$).
- $\mathbf{\Delta} X$ dernier désigne l'écart relatif au dernier pas de temps ($t = 2.0\,e^{-2}\,s$).

B.3.2 Écarts relatif par rapport à un modèle de référence

Similairement à l'annexe B.3.1, on introduit les écarts relatifs par rapport au modèle de référence pour les modèles asymptotiques et le modèle non-asymptotique :

$$\mathbf{\Delta}X = 100 \times \frac{|X_{non-asymptotique} - X_{ref}|}{X_{ref}} \tag{B.8}$$

B.4 Détermination des pressions maximales MLM

Pour déterminer les valeurs maximales des pressions calculées au moyen du *Modified Logvinovich Model*, un algorithme de détection des extremums locaux est utilisé. Les valeurs des $P_{max\,mlm\,d_1}$ et $P_{max\,mlm\,d_2}$ sont obtenus en détectant les maximums locaux des champs de pression MLM à un instant donné (voir Fig(s). B.4, B.6 et B.5).

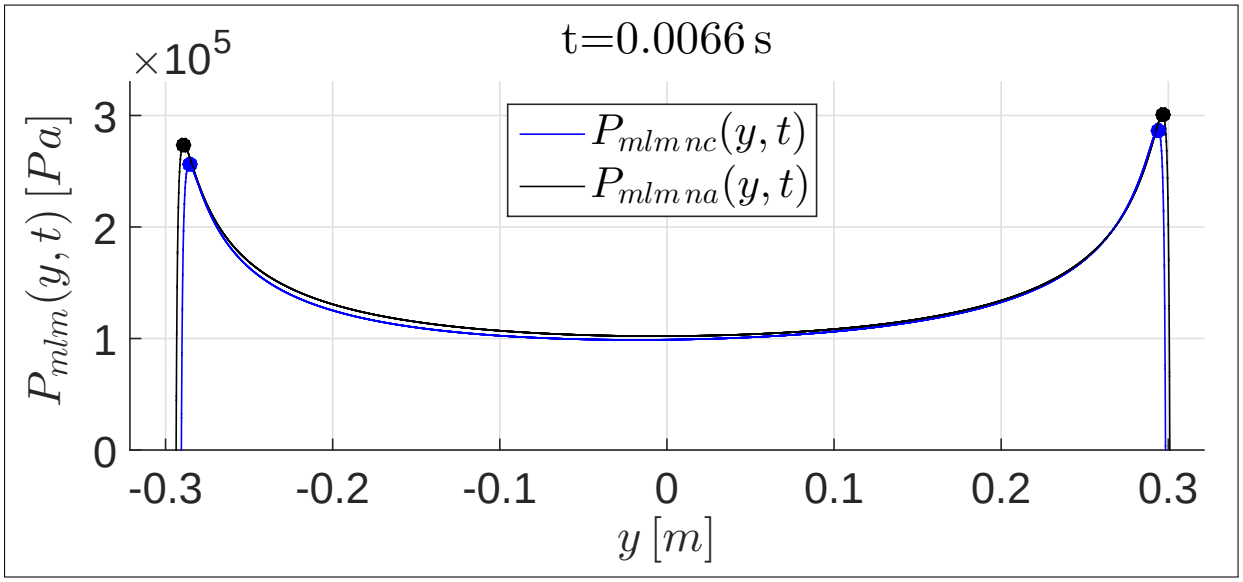

Figure *B.4 – Visualisation des pics de pression MLM pour un impact au voisinage de la crête. En ronds bleus les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle **nc**. En ronds noirs les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle **na***

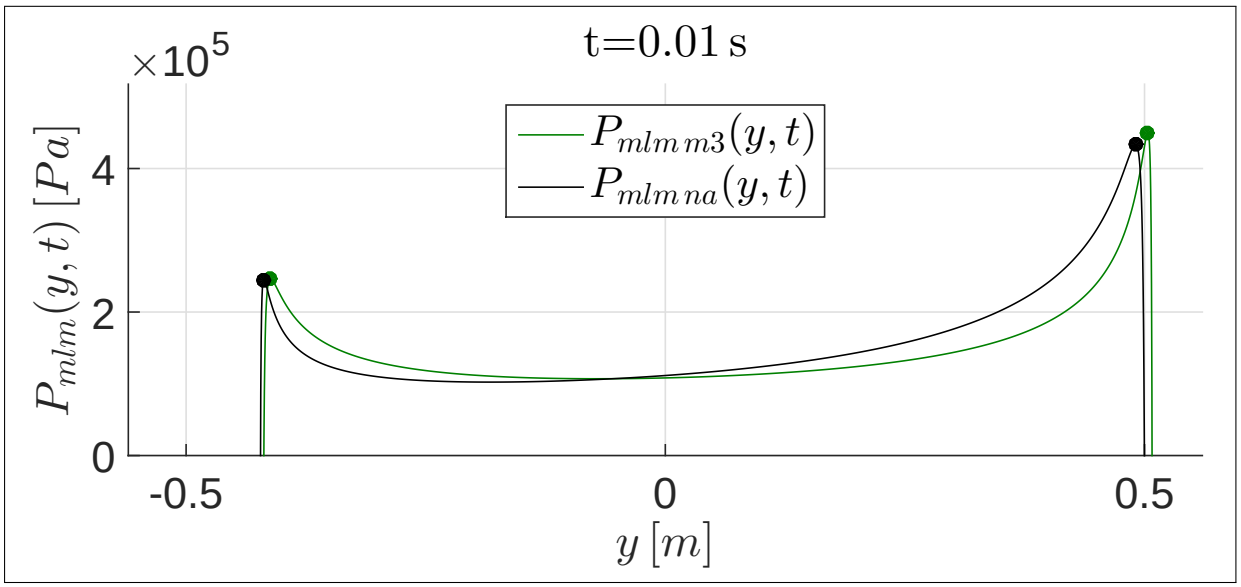

Figure *B.5 – Visualisation des pics de pression MLM pour un impact au voisinage du milieu de la pente. En ronds verts les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle **m3**. En ronds noirs les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle **na***

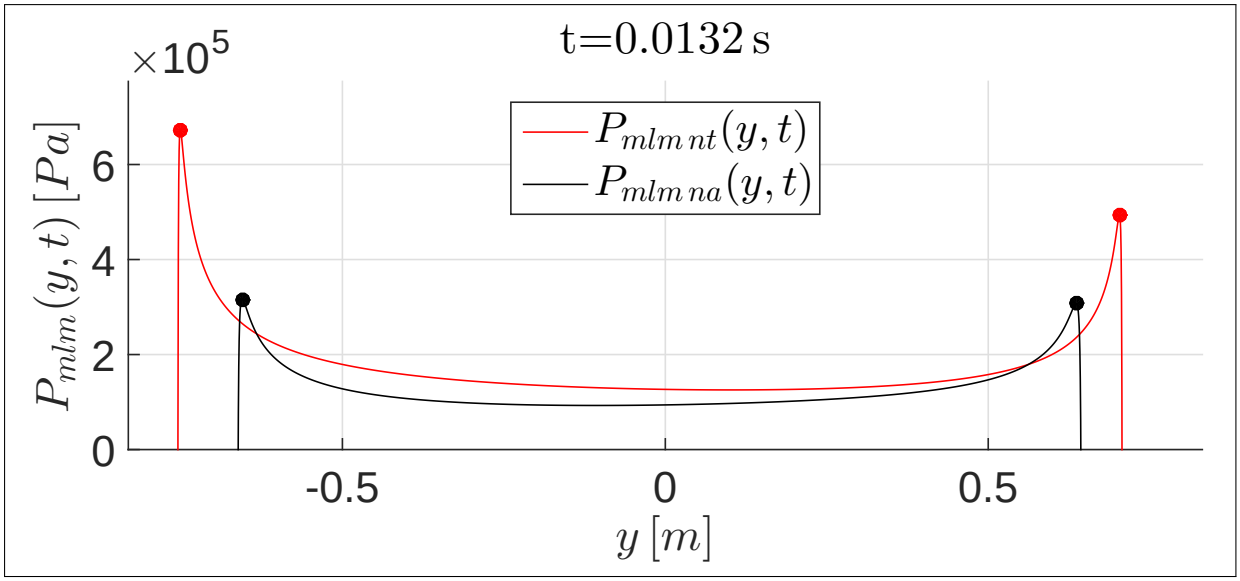

Figure B.6 – *Visualisation des pics de pression MLM pour un impact au voisinage du creux. En ronds rouges les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle* ***nt****. En ronds noirs les $P_{max\,mlm}$ pour le modèle* ***na***

B.5 Définition de la RMSE

La RMSE de l'anglais *Root Mean Square Error* (racine de l'erreur quadratique moyenne) est un outil permettant de quantifier l'écart entre deux jeux de données. Dans notre cas deux courbes d'effort hydrodynamique. Elle peut s'exprimer comme suit :

$$RMSE\,[X] = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(X - X_{ref})^2} \tag{B.9}$$

Avec :

- X : Le jeu de données dont on cherche la $rmse$. Dans notre cas les points d'une courbe d'effort hydrodynamique.
- X_{ref} : Le jeu de données de référence. Dans notre cas les points de la courbe d'effort hydrodynamique de référence.
- N : Le nombre d'échantillons. Dans notre cas le nombre de pas de temps.

On exprime la valeurs de la RMSE recherchée en pourcentage.

B.6 Figures comparaisons des modèles asymptotiques au modèle-non asymptotique avec vitesse d'avance

B.6.1 Pour un impact au niveau de la crête avec vitesse d'avance

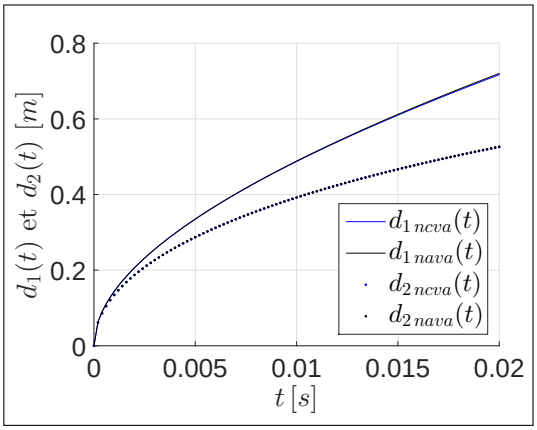

Figure B.7 – *Correction de surface mouillée (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°1.b*

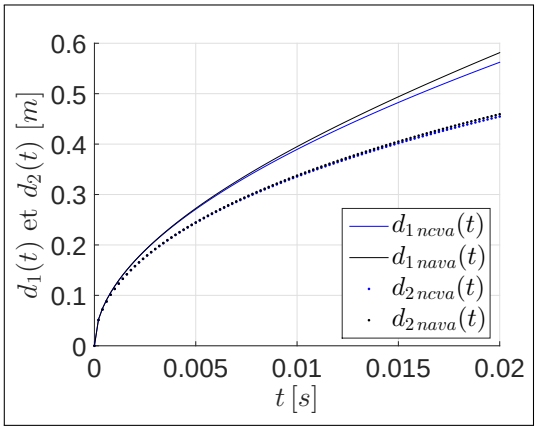

Figure B.8 – *Correction de surface mouillée (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°7.b*

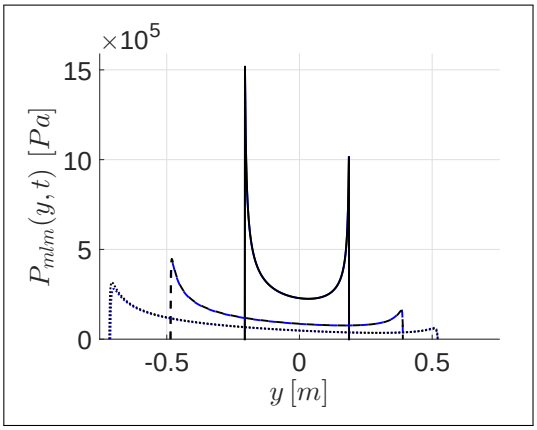

Figure B.9 – *Champs de pression (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°1.b Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$*

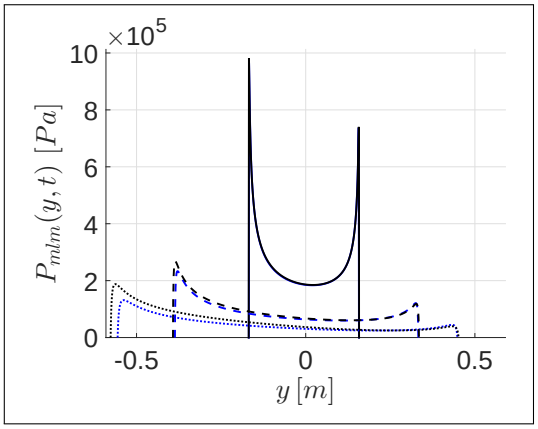

Figure B.10 – *Champs de pression (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°7.b Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$*

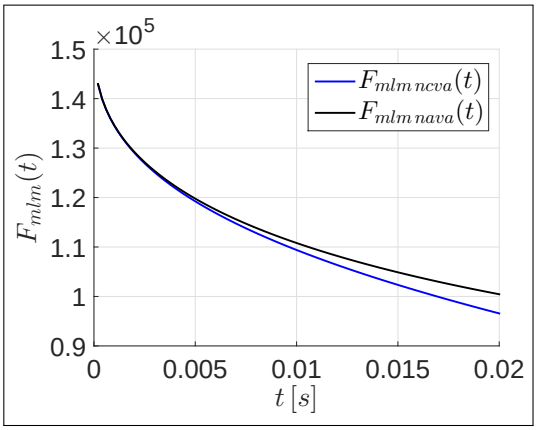

Figure B.11 – *Efforts hydrodynamiques (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°1.b*

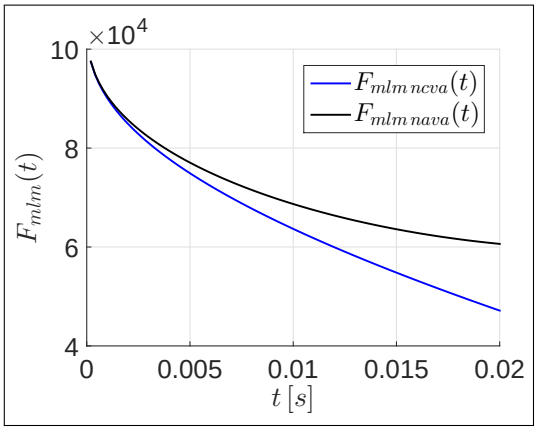

Figure B.12 – *Efforts hydrodynamiques (ncva et nava) avec vitesse d'avance : Cas Test n°7.b*

B.6.2 Pour un impact au niveau du creux avec vitesse d'avance

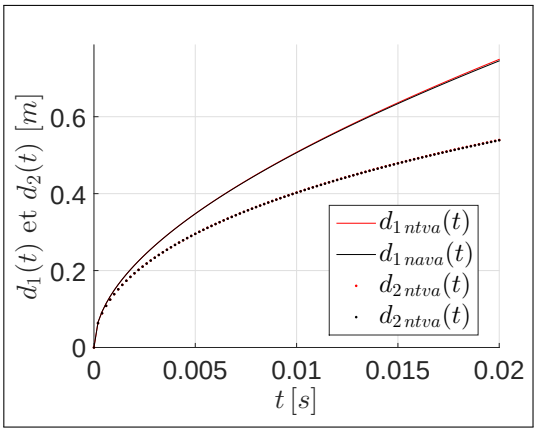

Figure B.13 – *Correction de surface mouillée (ntva et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b*

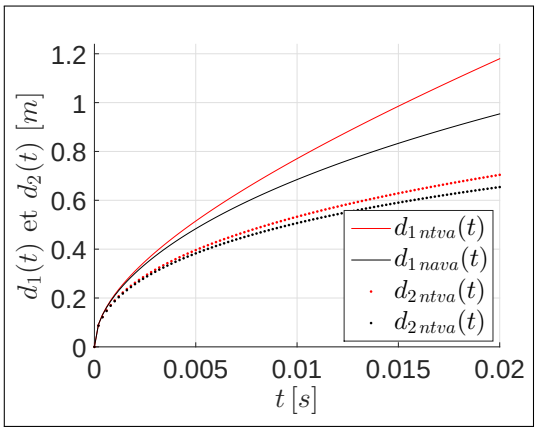

Figure B.14 – *Correction de surface mouillée (ntva et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b*

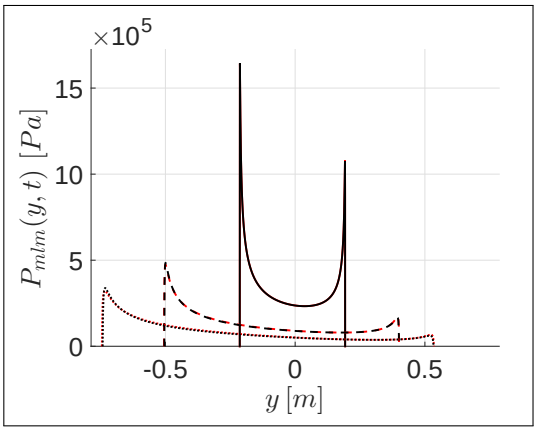

Figure B.15 – *Champs de pression nt avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b*
Traits pleins $t = 0.002\,s$. *Tirets* $t = 0.01\,s$. *Pointillés* $t = 0.02\,s$

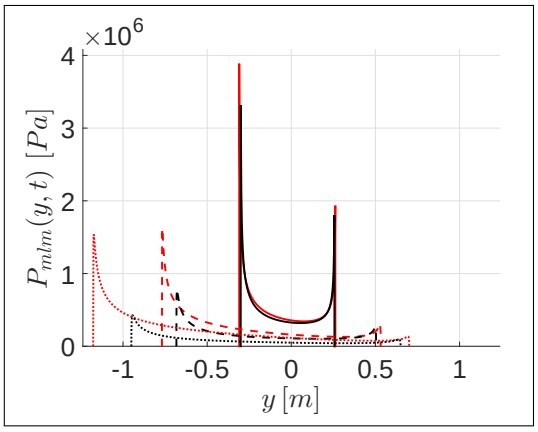

Figure B.16 – *Champs de pression nt avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b*
Traits pleins $t = 0.002\,s$. *Tirets* $t = 0.01\,s$. *Pointillés* $t = 0.02\,s$

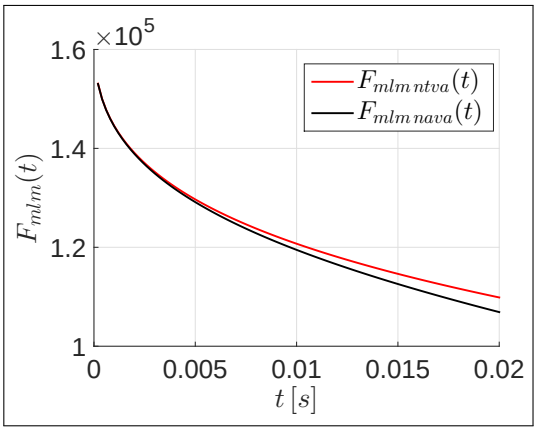

Figure B.17 – *Efforts hydrodynamiques nt avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b*

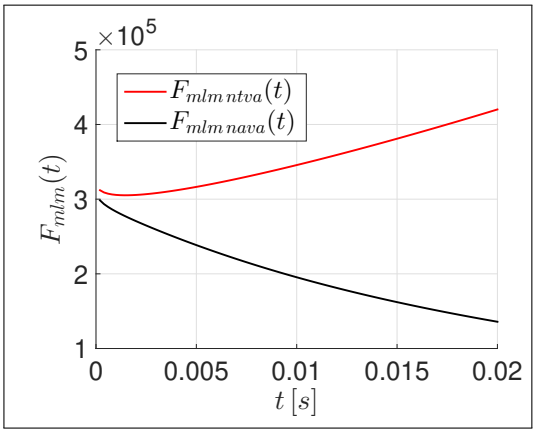

Figure B.18 – *Efforts hydrodynamiques nt avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b*

B.6.3 Pour un impact au niveau du milieu avec vitesse d'avance

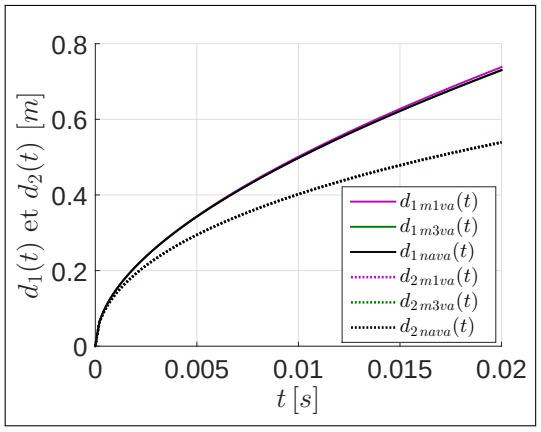

Figure B.19 – *Correction de surface mouillée (m3va et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b*

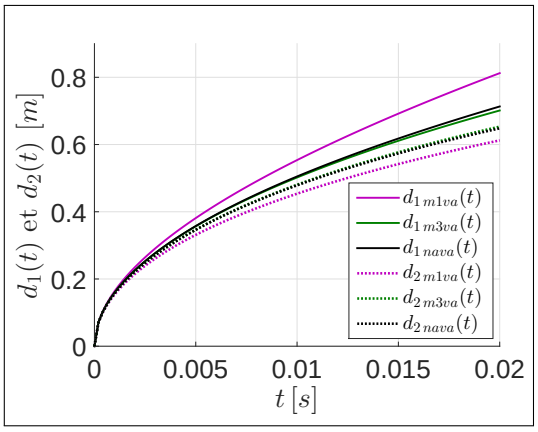

Figure B.20 – *Correction de surface mouillée (m3va et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b*

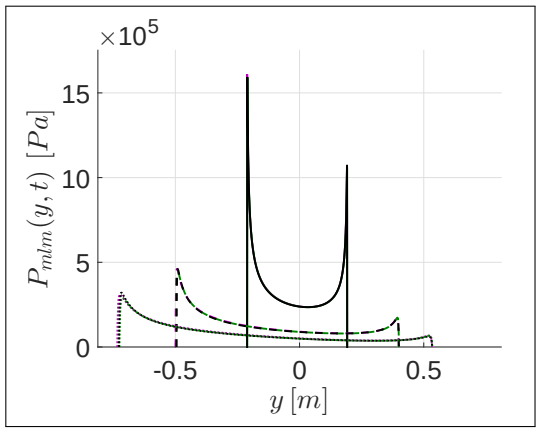

Figure B.21 – *Champs de pression (m3va et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°1.b Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$*

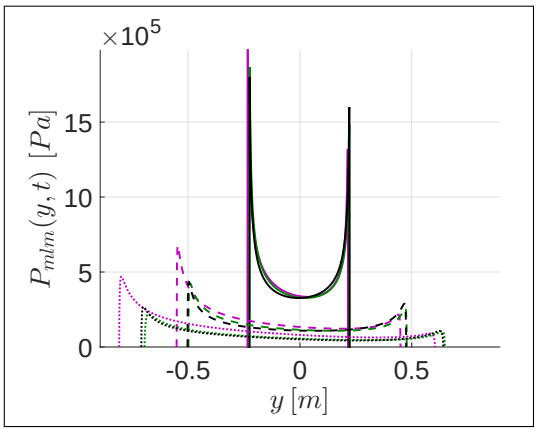

Figure B.22 – *Champs de pression (m3va et nava) avec vitesse d'avance : Cas test n°7.b Traits pleins $t = 0.002\,s$. Tirets $t = 0.01\,s$. Pointillés $t = 0.02\,s$*

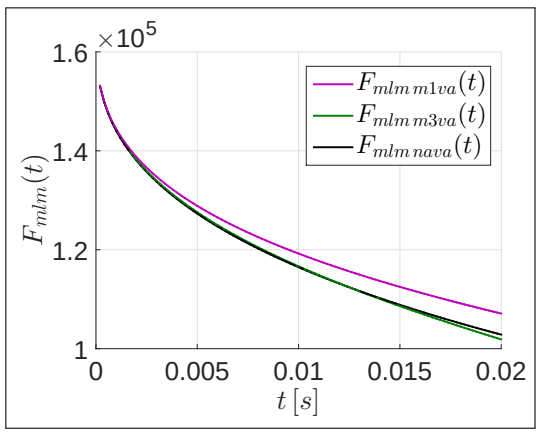

Figure B.23 – *Efforts hydrodynamiques (m3va et nava) : Cas test n°1.b*

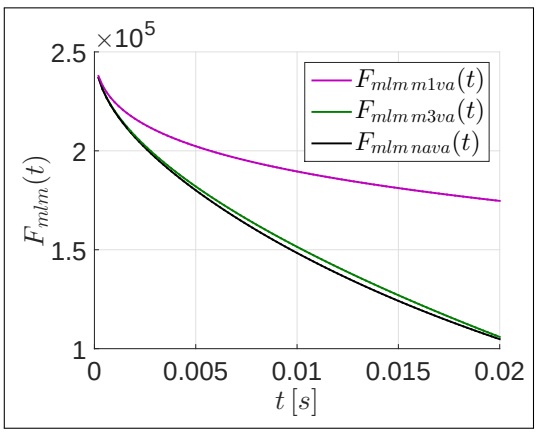

Figure B.24 – *Efforts hydrodynamiques (m3va et nava) : Cas test n°7.b*

B.7 Influence de la vitesse d'avance sur les efforts hydrodynamiques

Dans cette annexe nous présentons l'influence de la vitesse d'avance sur l'évolution des efforts hydrodynamiques calculés au moyen de formalisme MLM. Ici la vitesse de chute verticale W est assumée constante et égale à $5.0\,m.^{-1}\,s$

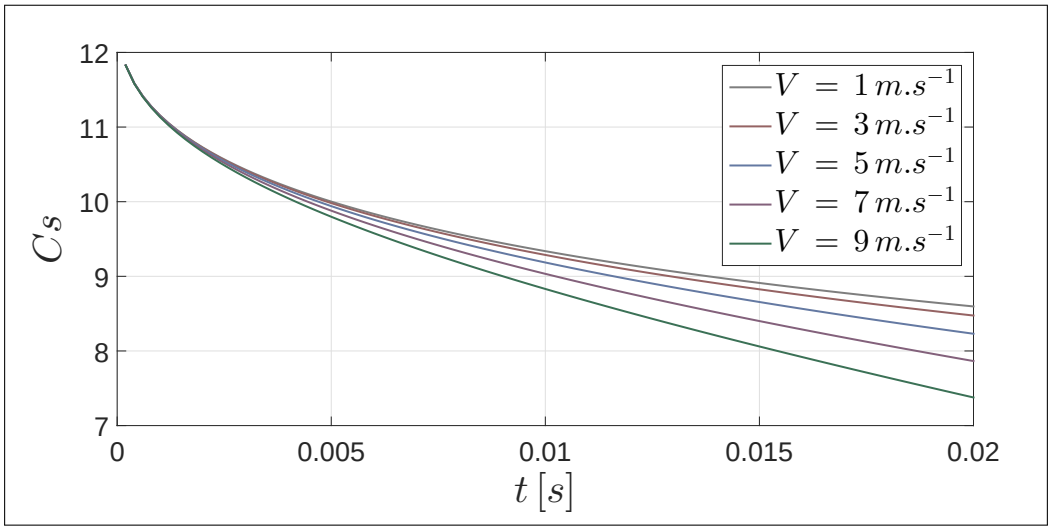

Figure *B.25 – Coefficients de slamming à différentes vitesses d'avance V pour l'impact d'une parabole sur une surface libre plane.*

B.8 Variations temporelle et spatiale des champs de pression pour les modèles asymptotiques

Pour un impact au niveau de la crête

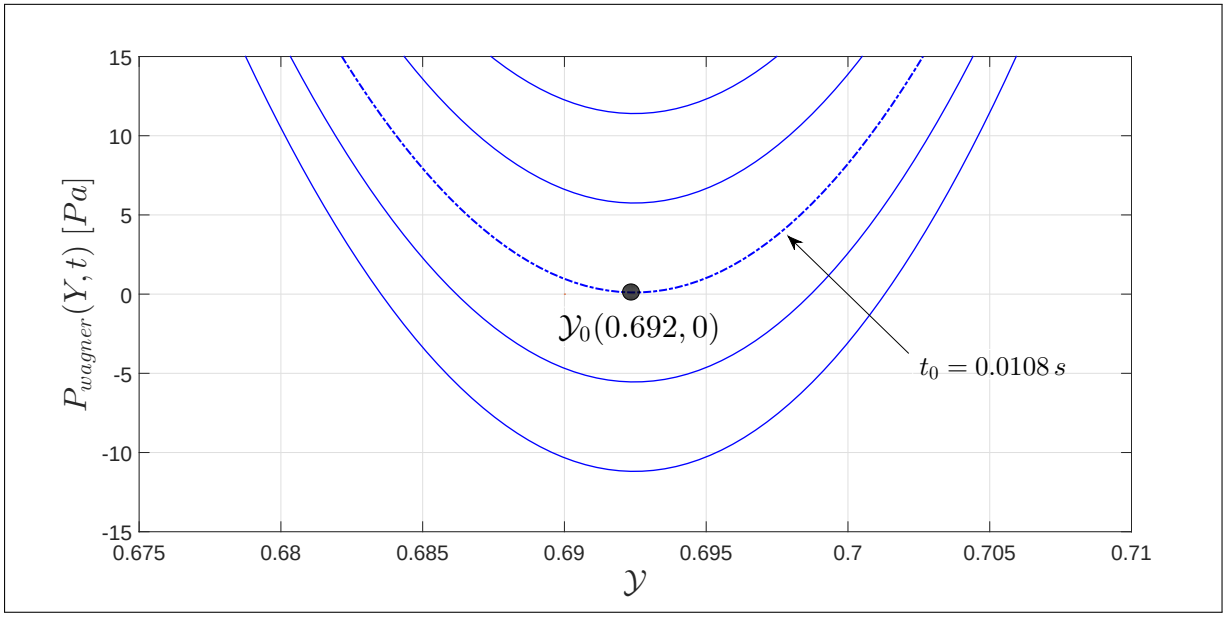

Figure *B.26 – Visualisation $\mathcal{Y}_0(t_0)$ pour un impact au niveau de la crête cas de test n°1.b avec $V = 15.0\,m.s^{-1}$*

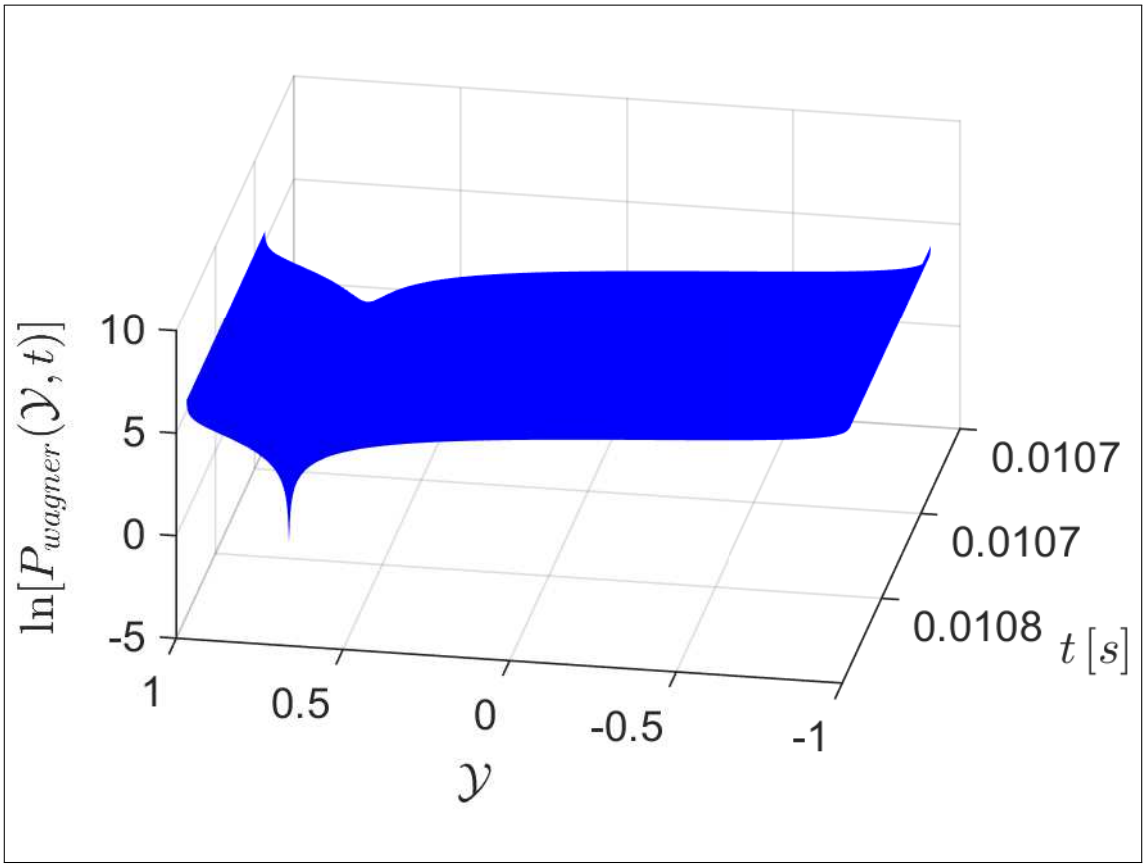

Figure *B.27 – Visualisation sous forme de surface du champs de pression de Wagner cas de test n°1.b avec $V = 15.0\,m.s^{-1}$ pour un impact au niveau du creux*

Pour un impact au niveau du creux

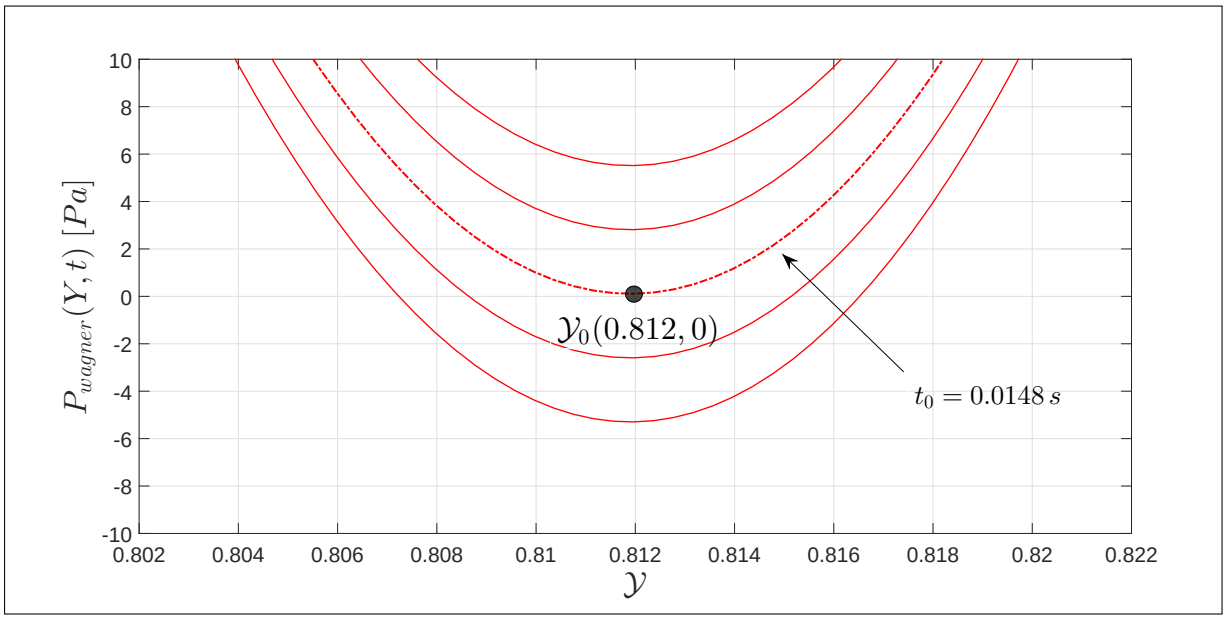

Figure *B.28 – Visualisation $\mathcal{Y}_0(t_0)$ pour un impact au niveau du creux cas de test n°4.b avec $V = 15.0\,m.s^{-1}$*

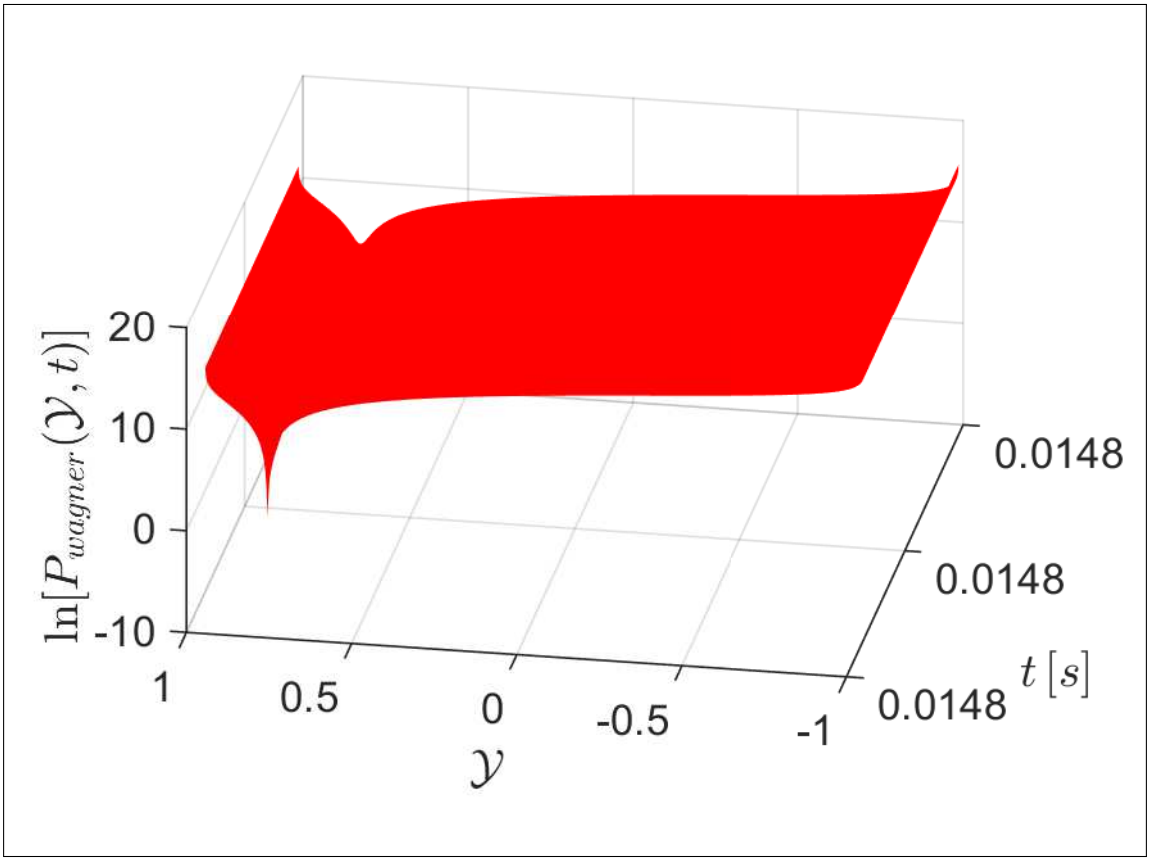

Figure *B.29 – Visualisation sous forme de surface du champs de pression de Wagner cas de test n°4.b avec $V = 15.0\,m.s^{-1}$ pour un impact au niveau de la crête*

Pour un impact au niveau de la pente

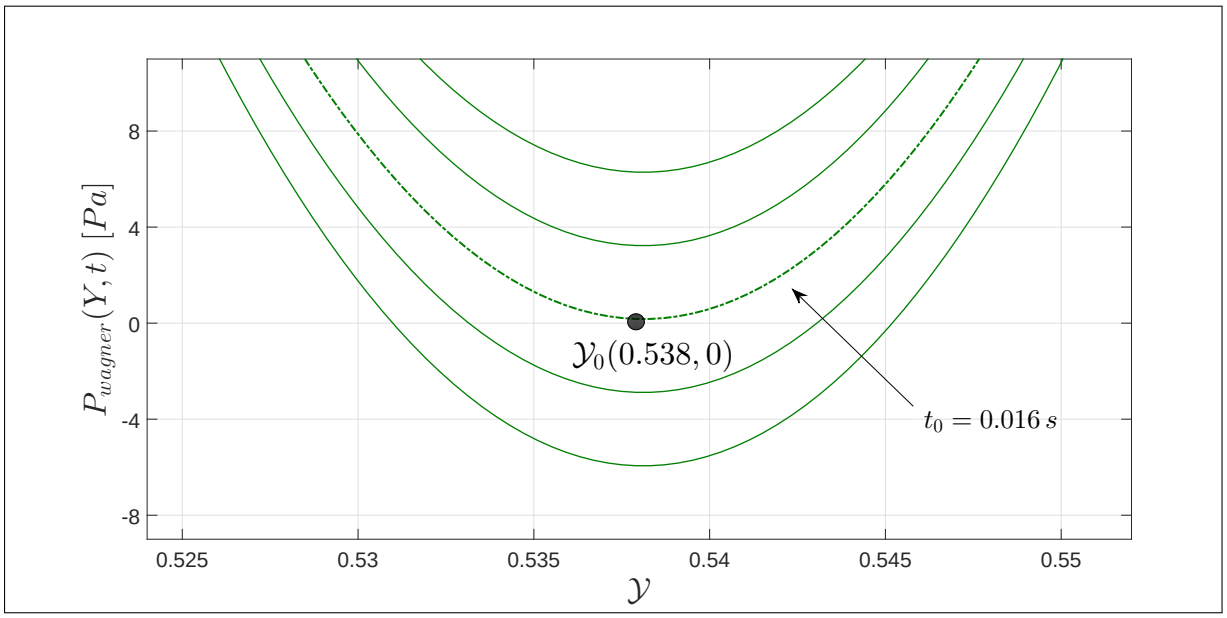

Figure *B.30 – Visualisation $\mathcal{Y}_0(t_0)$ pour un impact au niveau du milieu avec le modèle au troisième ordre cas test n°7.b avec $V = 12.5\,m.s^{-1}$*

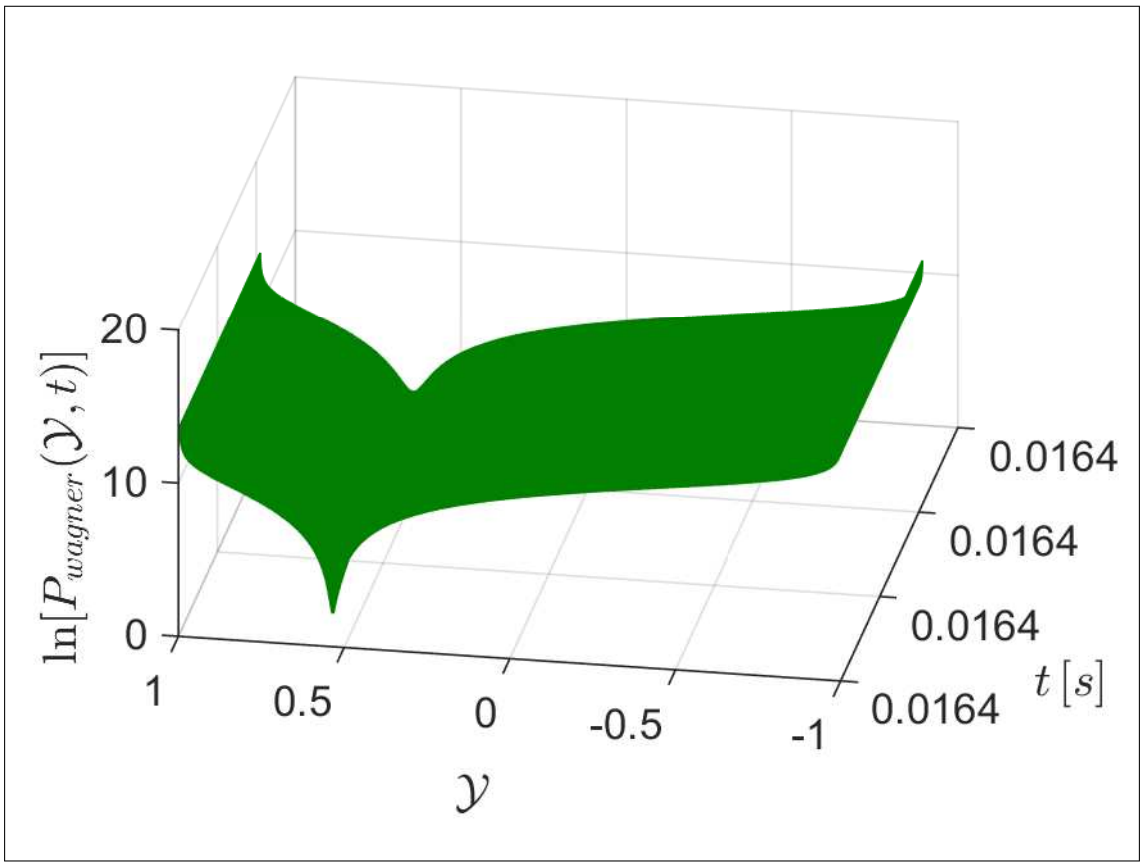

Figure *B.31 – Visualisation sous forme de surface du champs de pression de Wagner cas de test n°7.b avec $V = 12.5\,m.s^{-1}$ pour un impact au milieu de la pente*

Annexe C

Annexes : Abaqus

C.1 Rafinement Adaptatif de maillage (AMR)

Cette annexe rend compte du fonctionnement de l'option « Adaptative Mesh Refinement (AMR) » d'Abaqus. Pour illustrer cette option, nous l'appliquons à la grandeur fraction volumique. Cette méthode raffine automatiquement le maillage Eulérien en détectant une interface entre deux matériaux. Dans notre cas, l'interface représente l'interface eau/vide. De ce fait, les éléments disposant d'une fraction volumique différentes de 0 et 1 sont automatiquement raffinés.

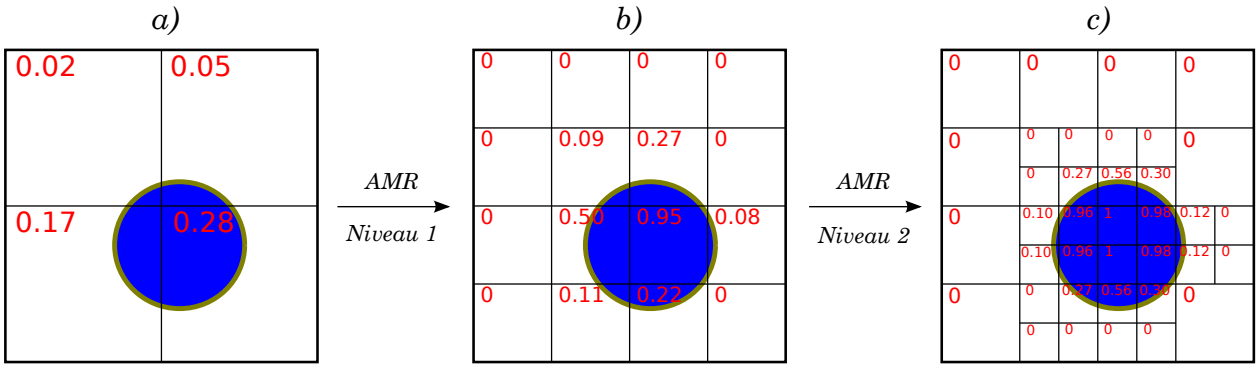

FIGURE *C.1 – Illustration du fonctionnement de l'AMR*

Les figurent C.1 *a*) *b*) et *c*) illustrent le fonctionnement de l'AMR pour la grandeur fraction volumique. La figure C.1 *a*) représente un maillage Eulérien à un instant t_i. À cet instant les éléments comportant une interface eau/vide sont détectés. Au pas de temps t_{i+1} (Fig. C.1 *b*)), les éléments Eulériens qui comportent une interface matériaux sont raffinés, ici en divisant les éléments carrés en 4. Toujours à cet même instant, une nouvelle détection d'interface eau/vide est réalisée. Ainsi au pas de temps t_{i+2} (Fig. C.1 *c*)), les éléments comportant une interface eau/vide sont une nouvelle fois subdivisés en 4 carrés.

L'AMR peut également « dé-raffiner » les éléments qui ne sont plus traversés par l'interface du fluide.

C.2 Extraction des corrections de surface mouillée numériques

La figure C.2 rend compte de procédé permettant d'extraire les corrections de surface mouillée numérique d'Abaqus. Ici pour une configuration d'impact au niveau du milieu de la pente de la houle d'Airy.

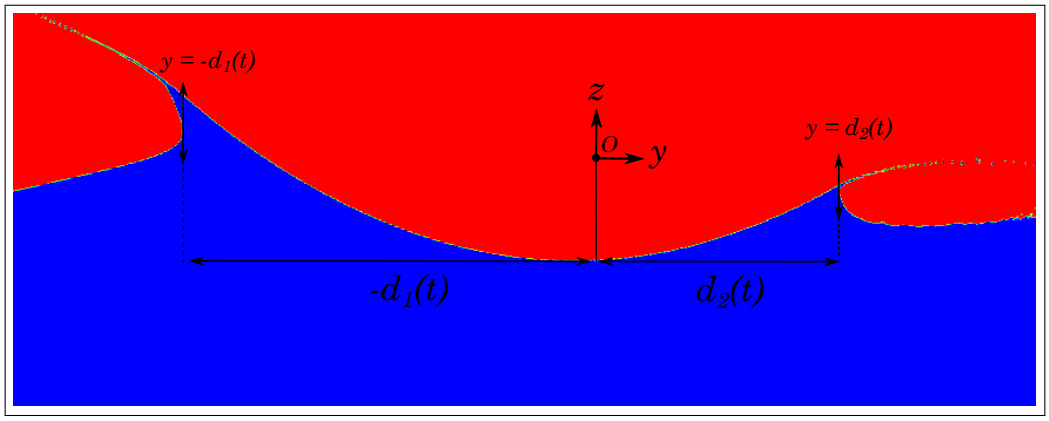

Figure *C.2 – Méthode de calcul des corrections de surface mouillée numériques sur houle d'Airy*

La figure C.2 montre les deux tangentes verticales d'équation $y = -d_1(t)$ et $y = -d_2(t)$ permettant d'obtenir les corrections de surface mouillée numériques en se basant sur l'élévation de surface libre et la position du premier point d'impact.

Annexe D

Nomenclatures

Dans cette annexe, sont présentées les nomenclatures des chapitres 1, 2 et 3.

D.1 Nomenclature : Chapitre 1

p_{sl} : pression d'impact de la norme DNV
β : angle de relèvement pour un dièdre symétrique
$h(t)$: profondeur de pénétration
$a(t)$: correction de surface mouillée pour un impact symétrique
$\eta_0(y,t)$: élévation de surface libre due
$f(y)$: équation de la parabole
$\phi(x,t)$: potentiel des déplacements
$\varphi(x,t)$: potentiel des vitesses
$\gamma(\xi,t)$: intégrande pour le calcul du potentiel des déplacements
$SM(t)$: surface mouillée
$SL(t)$: surface libre
W : vitesse verticale de la parabole
$d_1(t)$: correction de surface mouillée à gauche de la SM(t)
$d_2(t)$: correction de surface mouillée à droite de la SM(t)
$\Gamma(t)$: contour de la surface mouillée tridimensionnelle
$f(x,y)$: équation du paraboloïde elliptique
r_x : rayon de courbure du paraboloïde elliptique selon l'axe x
r_y : rayon de courbure du paraboloïde elliptique selon l'axe y
k : rapport d'aspect du contour de la surface mouillée elliptique
e : excentricité
E : intégrale elliptique de première espèce
K : intégrale elliptique de seconde espèce
D : fonction de E, K et e
$\tilde{y}$: coordonnée adimensionnée selon l'axe y pour un impact axisymétrique
ρ : coordonnée adimensionnée selon l'axe x pour un impact axisymétrique ou masse volumique
r : coordonnée radiale pour des impact axisymétriques
$d(t)$: correction de surface mouillée pour un impact axisymétrique
G : fonction nécessaire pour le calcul des corrections de surface mouillée et du potentiel des déplacements axisymétrique
χ : fonction nécessaire pour le calcul des corrections de surface mouillée et du potentiel des déplacements axisymétrique
J_0 : fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0
P_{wagner} : pression singulière calculée au moyen de l'équation de Bernoulli linéarisée

$G(t)$: fonction du temps générique pour l'expression du potentiel des vitesses calculé avec le modèle de Wagner
$F(x, y, t)$: fonction de forme générique pour l'expression du potentiel des vitesses calculé avec le modèle de Wagner
P_{out} : pression singulière sur la surface mouillée calculé au moyen du modèle de Wagner (égale à P_{wagner})
P_{in} : pression dans la racine du jet hydrodynamique
V_j : vitesse du fluide à la racine du jet
δ : épaisseur du jet
P_s : partie principale de la pression singulière
τ : paramètre provenant de la cartographie conforme du domaine fluide
P_{comp} : pression calculée au moyen du formalisme composite
$\vec{n}$: vecteur normal
$f^\star$: fonction de forme nécessaire à l'établissement du formalisme MLM
$\vec{v}_b$: vecteur cinématique de la parabole
ψ : restriction du potentiel des vitesses sur la SM(t)
P_{mlm} : pression calculée au moyen du formalisme composite

D.2 Nomenclature : Chapitre 2

t : temps
R_p : rayon de courbure de la parabole
T : période de la houle d'Airy
C : amplitude de la houle d'Airy
ω : pulsation de la houle d'Airy
R_v : rayon de courbure de la houle d'Airy
κ : nombre d'onde de la houle d'Airy
θ_0 : phase à l'origine de la houle d'Airy
g : accélération de la pesanteur
$R(O, Y, Z)$: référentiel galiléen général
$Z_p(Y)$: équation de la parabole immobile dans le repère (O, Y, Z)
H_0 : altitude de la parabole dans le repère (O, Y, Z)
Y_0 : abscisse du point d'impact initial dans le repère (O, Y, Z)
Z_0 : ordonnée du point d'impact initial dans le repère (O, Y, Z)
$Z_v(Y, t)$: équation de la houle d'Airy dans le repère (O, Y, Z)
$R(O, y, z)$: référentiel lié au point d'impact initial
$\eta(y, t)$: équation de la houle d'Airy dans le repère (O, y, z)
$f(y)$: équation de la parabole dans le repère (O, y, z)
$h(t)$: profondeur de pénétration de la parabole
$SM(t)$: surface mouillée linéarisée
$SL(t)$: surface libre linéarisée
β_1 : angles de relèvement à gauche de la $SM(t)$
β_2 : angles de relèvement à droite de la $SM(t)$
$d_1(t)$: correction de surface mouillée à gauche de la $SM(t)$
$d_2(t)$: correction de surface mouillée à droite de la $SM(t)$
$\phi(y, 0, t)$: potentiel des déplacements linéarisé
$\varphi(y, 0, t)$: potentiel des vitesses linéarisé
W : vitesse de chute de la parabole assumée constante
V : vitesse d'avance assumée constante
V_φ : vitesse de phase de la houle d'Airy
PV : intégration par valeur principale au sens de Cauchy

Modèles asymptotiques d'impact sans vitesse d'avance

nc : indice correspondant au modèle d'impact asymptotique au voisinage de la crête.
nt : indice correspondant au modèle d'impact asymptotique au voisinage du creux.
m : indice correspondant aux modèles d'impact asymptotique au voisinage du milieu de la pente.

$\epsilon_{\mathbf{j}}(t)$: petit paramètre $\mathbf{j} = \mathbf{nc}$, $\mathbf{nt}$ ou $\mathbf{m}$

Modèles asymptotiques d'impact au voisinage de la crête et du creux sans vitesse d'avance

$R_{\mathbf{i}}$: changement de variable de rayon équivalent $\mathbf{i} = \mathbf{nc}$, $\mathbf{nt}$
$\tilde{y}_{\mathbf{i}}(t)$: changement de variable spatial $\mathbf{i} = \mathbf{nc}$, $\mathbf{nt}$
$\tilde{h}_{\mathbf{i}}(t)$: changement de variable sur la profondeur de pénétration $\mathbf{i} = \mathbf{nc}$, $\mathbf{nt}$
$c_{\mathbf{i}}(t)$: changement de variable $\mathbf{i} = \mathbf{nc}$, $\mathbf{nt}$
$a_{\mathbf{i}}(t)$: correction de surface mouillée symétrique dans le repère $(O, \tilde{y}_{\mathbf{i}}(t), z)$ $\mathbf{i} = \mathbf{nc}$, $\mathbf{nt}$
$\phi_{\mathbf{i}}(\tilde{y}_{\mathbf{i}}(t), 0, t)$ potentiel des déplacements dans le repère $(O, \tilde{y}_{\mathbf{i}}(t), z)$
$\phi_{\mathbf{i}}(y, 0, t)$ potentiel des déplacements dans le repère (O, y, z)
$d_{1\,\mathbf{i}}(t)$: correction de surface mouillée à gauche de la $SM(t)$ dans le repère (O, y, z)
$d_{2\,\mathbf{i}}(t)$: correction de surface mouillée à droite de la $SM(t)$ dans le repère (O, y, z)
$\varphi_{\mathbf{i}}(y, 0, t)$ potentiel des déplacements dans le repère (O, y, z)

Modèles asymptotiques d'impact au voisinage du milieu de la pente sans vitesse d'avance

m1 : indice correspondant au modèle asymptotique d'impact au voisinage du milieu de la pente lorsque la houle est approximée par un polynôme du premier ordre.
m3 : indice correspondant au modèle asymptotique d'impact au voisinage du milieu de la pente lorsque la houle est approximée par un polynôme du troisème ordre.

$c_{\mathbf{m1}}$: changement de variable
$\tilde{y}_{\mathbf{m1}}$: changement de variable spatial
$\tilde{h}_{\mathbf{m1}}(t)$: changement de variable sur la profondeur de pénétration
$a_{\mathbf{m1}}(t)$: correction de surface mouillée symétrique dans le repère $(O, \tilde{y}_{\mathbf{m1}}, z)$
$d_{1\,\mathbf{m1}}(t)$: correction de surface mouillée à gauche de la $SM(t)$ dans le repère (O, y, z)
$d_{2\,\mathbf{m1}}(t)$: correction de surface mouillée à droite de la $SM(t)$ dans le repère (O, y, z)
$\phi_{\mathbf{m1}}(\tilde{y}_{\mathbf{m1}}, 0, t)$: potentiel des déplacements dans le repère $(O, \tilde{y}_{\mathbf{m1}}, z)$
$\phi_{\mathbf{m1}}(y, 0, t)$: potentiel des déplacements dans le repère (O, y, z)
$\varphi_{\mathbf{m1}}(y, 0, t)$: potentiel des vitesses dans le repère (O, y, z)
$R_{\epsilon_{\mathbf{m}}}(t)$: changement de variable de rayon équivalent
$p_{n\,\mathbf{m3}}$: coefficients polynomiaux de la condition de Neumann avec $n = 0..3$
$d_{1\,\mathbf{m3}}(t)$: correction de surface mouillée à gauche de la $SM(t)$ dans le repère (O, y, z)
$d_{2\,\mathbf{m3}}(t)$: correction de surface mouillée à droite de la $SM(t)$ dans le repère (O, y, z)
$q_{n\,\mathbf{m3}}(t)$: coefficients polynomiaux pour le calcul du potentiel des déplacements, $n = 0..3$
$a_{\mathbf{m3}}(t)$: correction de surface mouillée réduite
$b_{\mathbf{m3}}(t)$: changement de variable pour le calcul des corrections de surface mouillée
$\gamma_{\mathbf{m3}}(x, t)$: intégrande pour calcul du potentiel des déplacements
$\phi_{\mathbf{m3}}(y, 0, t)$: potentiel des déplacements dans le repère (O, y, z)
$\varphi_{\mathbf{m3}}(y, 0, t)$: potentiel des vitesses dans le repère (O, y, z)

$H_{\mathbf{l}}(y,t)$: fonction canonique du potentiel des déplacements pour les modèles d'impact au voisinage de la crête, du creux et du milieu de la pente au premier ordre, $\mathbf{l} = \mathbf{nc}$, $\mathbf{nt}$ ou $\mathbf{m1}$
$G(y,t)$: fonction pour la forme générale du potentiel des déplacements du modèle d'impact au niveau du milieu de la pente au troisième ordre
$H_{\mathbf{m3}}(y,t)$: fonction du potentiel des déplacements pour le modèle d'impact au voisinage du milieu de la pente au premier troisième ordre

Modèle non-asymptotique d'impact sans vitesse d'avance

na : indice correspondant au modèle d'impact non-asymptotique

$d_{1\,\mathbf{na}}(t)$: correction de surface mouillée à gauche de la $SM(t)$ dans le repère (O,y,z)
$d_{2\,\mathbf{na}}(t)$: correction de surface mouillée à droite de la $SM(t)$ dans le repère (O,y,z)
$a_{\mathbf{na}}(t)$: correction de surface mouillée réduite
$b_{\mathbf{na}}(t)$: changement de variable pour le calcul des corrections de surface mouillée
$A(t)$: changement de variable
$B(t)$: changement de variable
$\gamma_{\mathbf{na}}(x,t)$: intégrande pour calcul du potentiel des déplacements
$p_{n\,\mathbf{na}}$: coefficients polynomiaux de la condition de Neumann avec $n = 0..2$
$\phi_{\mathbf{na}}(y,0,t)$: potentiel des déplacements dans le repère (O,y,z)
$\varphi_{\mathbf{na}}(y,0,t)$: potentiel des vitesses dans le repère (O,y,z)
$\mathbf{J_n}$: fonction de Bessel d'ordre n de première espèce
$f_k(y,t)$: fonction d'ordre k pour le calcul du potentiel des déplacements
$g_k(y,t)$: fonction d'ordre k pour le calcul du potentiel des déplacements
$\theta(y,t)$: changement de variable pour l'expression du potentiel de vitesses

Modèles asymptotiques et non-asymptotique d'impact avec vitesse d'avance

Pour caractériser les grandeurs en relation avec les modèles d'impact asymptotiques et non-asymptotique nous ajoutons l'indice **va** aux indices sans vitesse d'avance ainsi :

ncva : indice correspondant au modèle d'impact asymptotique au voisinage de la crête avec vitesse d'avance.
ntva : indice correspondant au modèle d'impact asymptotique au voisinage du creux avec vitesse d'avance.
m1va : indice correspondant au modèle d'impact asymptotique au voisinage du milieu de la pente au premier ordre avec vitesse d'avance.
m3va : indice correspondant au modèle d'impact asymptotique au voisinage du milieu de la pente au troisème ordre avec vitesse d'avance.
nava : indice correspondant au modèle d'impact non-asymptotique avec vitesse d'avance

$\delta y(t)$: distance décrite par la parabole lors d'un impact avec vitesse d'avance
$f(y,t)$: équation de la parabole avec vitesse d'avance
$R(O_b,y_b,z_b)$: système de coordonnées mobile

Formulations en pression et efforts hydrodynamiques d'impact

$m_a(t)$: masse ajoutée
$F_{wagner}(t)$: efforts hydrodynamiques de première approximation
ρ : masse volumique
$\psi(y,t)$: développement limité du potentiel des vitesses sur la $SM(t)$
$P_{max\,d_1}(t)$: Pression maximale à gauche de la $SM(t)$
$P_{max\,d_2}(t)$: Pression maximale à droite de la $SM(t)$
$p(y,z,t)$: pression calculée au moyen de l'équation de Bernoulli non-linéarisée
$P(y,t)$: restriction de la pression $p(y,z,t)$ sur la $SM(t)$
$P_{mlm}(y,t)$: distribution de pression calculée au moyen du formalisme MLM sans vitesse d'avance
$P_{mlm,\mathbf{va}}(y,t)$: distribution de pression calculée avec le formalisme MLM avec vitesse d'avance
$P_{out}(y,t)$: pression hydrodynamique dans l'*outer* domaine (sur la $SM(t)$)
$P_{in\pm}(y,t)$: pression hydrodynamique dans l'*inner* domaine (à la racine du jet hydrodynamique à gauche et à droite de la $SM(t)$)
$P_{s\pm}(y,t)$: partie principale de pression hydrodynamique singulière à gauche et à droite de la $SM(t)$
$V_{j\pm}$: vitesse du fluide à la racine du jet hydrodynamique à gauche et à droite de la $SM(t)$
δ : épaisseur du jet.
τ : variable provenant de la cartographie conforme du domaine fluide à la racine du jet
σ : distance entre la SM(t) et les points de stagnation $d_1(t)$ et $d_2(t)$.
$P_{comp}(y,\tau,t)$: distribution de pression calculée au moyen du formalisme composite

Variations spatiale et temporelle de la pression

F : changement de variable pour l'étude des variations temporelle et spatiale de la pression singulière
M : changement de variable pour l'étude des variations temporelle et spatiale de la pression singulière
$\mathscr{Y}$: coordonnée sans dimension
$\mathscr{Y}_0$: racine sans dimension correspondant au point où la pression singulière s'annule
t_0 : instant t où la pression singulière s'annule
α : coefficient polynomial de la pression singulière
β : coefficient polynomial de la pression singulière
γ : coefficient polynomial de la pression singulière
ϵ : coefficient polynomial de la pression singulière
$\nu(t)$: changement de variable
K : changement de variable
P_{ref} : pression de référence
$S_{mlm}(t)$: support d'intégration spatial de la pression MLM
$S_{comp}(t)$: support d'intégration spatial de la pression composite
$S_{jet}(t)$: support d'intégration spatial de la pression dans la racine du jet
$F_{mlm}(t)$: effort hydrodynamique calculé au moyen du formalisme MLM
$F_{comp}(t)$: effort hydrodynamique calculé au moyen du formalisme composite

D.3 Nomenclature : Chapitre 3

$a_{na}(t)$: correction de surface mouillée réduite pour le modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance
$a_{nava}(t)$: correction de surface mouillée réduite pour le modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance
$F_{mlm\,nc}(t)$: Effort hydrodynamique calculé avec le formalisme MLM pour un impact au voisinage de la crête sans vitesse d'avance
$F_{mlm\,nt}(t)$: Effort hydrodynamique calculé avec le formalisme MLM pour un impact au voisinage du creux sans vitesse d'avance
$F_{mlm\,m1}(t)$: Effort hydrodynamique calculé avec le formalisme MLM pour un impact au voisinage du milieu de la pente avec le modèle au premier ordre sans vitesse d'avance
$F_{mlm\,m3}(t)$: Effort hydrodynamique calculé avec le formalisme MLM pour un impact au voisinage du milieu de la pente avec le modèle au troisième ordre sans vitesse d'avance
$F_{mlm\,na}(t)$: Effort hydrodynamique calculé avec le formalisme MLM pour un impact au voisinage du milieu de la pente avec le modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance
$F_{mlm\,ncva}(t)$: Effort hydrodynamique calculé avec le formalisme MLM pour un impact au voisinage de la crête avec vitesse d'avance
$F_{mlm\,ntva}(t)$: Effort hydrodynamique calculé avec le formalisme MLM pour un impact au voisinage du creux avec vitesse d'avance
$F_{mlm\,m1va}(t)$: Effort hydrodynamique calculé avec le formalisme MLM pour un impact au voisinage du milieu de la pente avec le modèle au premier ordre avec vitesse d'avance
$F_{mlm\,m3va}(t)$: Effort hydrodynamique calculé avec le formalisme MLM pour un impact au voisinage du milieu de la pente avec le modèle au troisième ordre avec vitesse d'avance
$F_{mlm\,nava}(t)$: Effort hydrodynamique calculé avec le formalisme MLM pour un impact au voisinage du milieu de la pente avec le modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance
$P_{mlm\,na}(y,t)$: champs de pression calculés avec le formalisme MLM pour le modèle non-asymptotique sans vitesse d'avance
$P_{mlm\,nava}(y,t)$: champs de pression calculés avec le formalisme MLM pour le modèle non-asymptotique avec vitesse d'avance
$P_{max\,mlm\,d_1}(y,t)$: pression maximale à gauche de la SM(t) calculée avec le formalisme MLM
$P_{max\,mlm\,d_2}(y,t)$: pression maximale à droite de la SM(t) calculée avec le formalisme MLM
$P_{max\,mlm\,r}(y,t)$: pression maximale réduite calculée avec le formalisme MLM pour le calcul des configurations hydrodynamiques dimensionnantes
$P_{ref}(y,t)$: pression de référence provenant du modèle d'impact canonique sans vitesse d'avance
$P_{ref\,va}(y,t)$: pression de référence provenant du modèle d'impact canonique avec vitesse d'avance
$a_{ref}(t)$: correction de surface mouillée de référence provenant du modèle d'impact canonique sans vitesse d'avance
$a_{ref\,va}(t)$: correction de surface mouillée de référence provenant du modèle d'impact canonique avec vitesse d'avance
$F_{ref}(t)$: effort hydrodynamique de référence provenant du modèle d'impact canonique sans vitesse d'avance
$F_{ref\,va}(t)$: effort hydrodynamique de référence provenant du modèle d'impact canonique avec vitesse d'avance
$C_p(y,t_i)$: coefficient de pression calculé à l'instant t_i pour le formalisme MLM
$C_s(t)$: coefficient de slamming pour le formalisme MLM
V_{arp} : vitesse d'avance relative de la parabole

t_f : instant t où la pression singulière est négative jusqu'à la borne droite de la surface mouillée
$\mathscr{Y}_f$: abscisse sans dimension où la pression singulière est négative jusqu'à la borne droite de la surface mouillée
$F_{hydro}(t)$: effort hydrodynamique en général
$[N^\star]$: $[N/m]$ car nous sommes en géométrie bidimensionnelle

Bibliographie

[Abaqus Analysis User's Guide 14.1.4, 2016] Abaqus Analysis User's Guide 14.1.4 (2016). *Abaqus Analysis User's Guide*. SIMULIA. 14.1.4 Defining adaptive mesh refinement in the Eulerian domain.

[Abaqus Analysis User's Guide 25.2.1, 2016] Abaqus Analysis User's Guide 25.2.1 (2016). *Abaqus Analysis User's Guide*. SIMULIA. 25.2.1 Equation of state.

[Abaqus Analysis User's Guide 32.14.2, 2016] Abaqus Analysis User's Guide 32.14.2 (2016). *Abaqus Analysis User's Guide*. SIMULIA. 32.14.2 Eulerian element library.

[Abaqus Analysis User's Guide 37.1.2, 2016] Abaqus Analysis User's Guide 37.1.2 (2016). *Abaqus Analysis User's Guide*. SIMULIA. 37.1.2 Contact pressure-overclosure relationships.

[Abaqus Analysis User's Guide 37.14.1, 2016] Abaqus Analysis User's Guide 37.14.1 (2016). *Abaqus Analysis User's Guide*. SIMULIA. 37.14.1 Eulerian Elements.

[Abaqus Analysis User's Guide 37.1.5, 2016] Abaqus Analysis User's Guide 37.1.5 (2016). *Abaqus Analysis User's Guide*. SIMULIA. 37.1.5 Frictional behavior.

[Abaqus Analysis User's Guide 38.2.3, 2016] Abaqus Analysis User's Guide 38.2.3 (2016). *Abaqus Analysis User's Guide*. SIMULIA. 38.2.3 Contact constraint enforcement methods in Abaqus/Explicit.

[Abramowitz & Stegun, 1979] Abramowitz, M. & Stegun, I. (1979). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications.

[Al-Dodoee, 2017] Al-Dodoee, O. (2017). *Conception et Optimisation des Materieux et Structures Composites pour des Applications Navales : Effet du slamming*. PhD thesis, Université Occidentale de Bretagne.

[Aquelet & Souli, 2018] Aquelet, N. & Souli, M. (2018). Interaction fluide-structure pour les problèmes de dynamique rapide. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01826996.

[Aquelet et al., 2006] Aquelet, N., Souli, M., & Olovsson, L. (2006). Euler-lagrange coupling with damping effects : Application to slamming problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp. 110–132.

[Baarholm, 2001] Baarholm, R. J. (2001). *Theoretical and Experimental Studies of Wave Impact Underneath Decks of Offshore Platforms*. PhD thesis, NTNU Trondheim, Institutt for marin hydrodynamikk.

[Bao et al., 2016] Bao, C., WU, G., & Xu, G. (2016). Simulation of water of a two-dimension finite with flow detachment. *Journal of Fluids and Structures*, (65), pp. 44–59.

[Bao et al., 2017] Bao, C., WU, G., & Xu, G. (2017). Simulation of freefall water entry of a finite wedge with flow detachment. *Applied Ocean Research*, (65), pp. 262–278.

[Benson, 1992] Benson, D. (1992). Computationnal methods in lagrangian and eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99, pp. 235–394.

[Bolibrukh, 1990] Bolibrukh, A. (1990). The riemann-hilbert problem. *Russian Mathematical Surveys*, 45(2).

[Cheng et al., 2018] Cheng, Y., Ji, C., Gaidai, O., & C., B. (2018). Wave-current entry of an asymmetric wedge in 3dof free motions. *Engineering Analysis with boundary elements*, (91), pp. 132–149.

[CNIM, 2015] CNIM (2015). Windkeeper - offshore wind farm support & maintenance vessel. Brochure : https ://cnim.com/activites/energies-renouvelables/windkeeper.

[Cointe & Armand, 1987] Cointe, R. & Armand, J. (1987). Hydrodynamic impact analysis of a cylinder. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 109, pp. 237–243.

[Cointe et al., 2004] Cointe, R., Fontaine, E., Molin, B., & Scolan, Y.-M. (2004). On energy arguments applied to the hydrodynamics impact force. *Journal of Engineering Mathematics*, 48, pp. 305–319.

[Coleman & Li, 1994] Coleman, T. & Li, Y. (1994). On the convergence of reflective newton methods for large-scale nonlinear minimization subject to bounds. *Mathematical Programming*, 67(2), pp. 189–224.

[Coleman & Li, 1996] Coleman, T. & Li, Y. (1996). An interior, trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on Optimization*, 6, pp. 418–445.

[DNV, 2010] DNV (2010). Recommended Practice DNV-RP-C205, Environmental Conditions And Environmental Loads. *Det Norkse Veritas,*, 17, pp. 82–83.

[DNV, 2012] DNV (2012). Rules For Classification of Ships, Hull Structural Design, Ships with Length Less than 100 metres. *Det Norkse Veritas,*, (Pt. 3 Ch. 2 Sec. 5), pp. 51.

[Facci et al., 2016] Facci, A., Porfiri, M., & Ubertini, S. (2016). Three-dimensional water entry of a solid : A computational study. *Journal of Fluids and Structures*, (66), pp. 36–53.

[Faltinsen et al., 1997] Faltinsen, O., Kvalsvold, J., & Aarnes, J. (1997). Wave impact on a horizontal elastic plate. *Journal of Marine Science and Technology*, (2), pp. 87–100.

[Faltinsen & Zhao, 1991] Faltinsen, O. & Zhao, R. (1991). Numerical predictions of ship motions at high forward speed. *Philosophical Transactions : Physical Sciences and Engineering*, 334(1634), pp. 593–612.

[Gahkov, 1990] Gahkov, F. (1990). *Boundary Value Problems*. Dover Publications Inc.

[Gu et al., 2014] Gu, H., Qian, L., Causon, D., Mingham, C., & Lin, P. (2014). Numerical simulation of water impact of solid bodies with vertical and oblique entries. *Ocean Engineering*, (75), pp. 128–137.

[Hirt & Nichols, 1981] Hirt, C. & Nichols, B. (1981). Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational*, 39, pp. 201–225.

[Howison et al., 2004] Howison, S., Ockendon, J., & Oliver, J. (2004). Oblique slamming, planning and skimming. *Journal of Engineering Mathematics*, 48, pp. 321–337.

[Howison et al., 1991] Howison, S., Ockendon, J., & Wilson, S. (1991). Incompressible water-entry problems at small deadrise angles. *Journal of Fluids Mechanics*, 222, pp. 215–230.

[Iranmanesh & Passandideh, 2017] Iranmanesh, A. & Passandideh, M. (2017). A three-dimensional approach on water entry of a horizontal circular cylinder using the volume of fluid technique. *Ocean Engineering*, (130), pp. 557–566.

[Khabakhpasheva & Korobkin, 2013] Khabakhpasheva, T. & Korobkin, A. (2013). Elastic wedge impact onto a liquid surface : Wagner's solution and approximation models. *Journal of Fluids and Structures*, (36), pp. 32–49.

[Korobkin, 1996] Korobkin, A. (1996). *Advances in Marine Hydrodynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton ,Boston.

[Korobkin, 2004] Korobkin, A. (2004). Analytical models of water impact. *Journal of Applied Mathematics*, 15, pp. 821–838.

[Korobkin, 2005] Korobkin, A. (2005). Three-dimensional nonlinear theory of water impact. In *18th International Congress of Mechanical Engineering*.

[Korobkin, 2013] Korobkin, A. (2013). Second-order wagner theory of wave impact. *journal of Engineering Mathematics*, (58), pp. 121–139.

[Korobkin & Khabakhpasheva, 2006] Korobkin, A. & Khabakhpasheva, T. (2006). Regular wave impact onto an elastic plate. *Journal of Engineering Mathematics*, (55), pp. 127–150.

[Korobkin & Malenica, 2005] Korobkin, A. & Malenica, v. (2005). Modified logvinovich model for hydrodynamic loads on asymmetric contours entering water. In *20th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*.

[Korobkin & Puckhnachov, 1988] Korobkin, A. & Puckhnachov, V. (1988). Initial stage of water impact. *Annual Review Of Fluid Mechanics*, 20, pp. 159–185.

[Korobkin & Scolan, 2006] Korobkin, A. & Scolan, Y.-M. (2006). Three-dimensional theory of water impact part 2. linearized wagner problem. *Journal of Fluid Mechanics*, 549, pp. 343–373.

[Kvalsvold & Faltinsen, 1995] Kvalsvold, J. & Faltinsen, O. (1995). Hydroelastic modelling of wetdeck slamming on multihull vessels. *Journal of Ship Research*, (39), pp. 225–239.

[Logvinovich, 1969] Logvinovich, G. V. (1969). *Hydrodynamics of Flows with Free Boundaries*. Naukova Dumka.

[Malleron, 2009] Malleron, N. (2009). *Contribution à l'étude des intéractions fluide-structure pour l'analyse de l'impact hydrodynamique d'un système de flottabilité d'hélicoptère*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille (II).

[Marin, 2016] Marin, F. (2016). *Hydrodynamique Marine - La Houle, Les Fonds Marins et le Littoral*. Ellipses Marketing.

[Michell, 1893] Michell, J. (1893). The highest waves in water. *Philosophical Magazine*, 36, pp. 430–437.

[Mie, 1903] Mie, G. (1903). Zur kinetischen theorie der einatomigen körper. *Annalen der Physik*, 8, pp. 657–697.

[Molin, 2002] Molin, B. (2002). *Hydrodynamique des Structures Offshore*. Edition TECHNIP.

[Moore et al., 2012] Moore, M., Howison, S., Ockendon, J., & Oliver, J. (2012). A note on oblique water entry. *Journal of Engineering Mathematics*, 81, pp. 67–74.

[Nehari, 1952] Nehari, Z. (1952). *Conformal mapping*. Dover Publications.

[Newman, 1977] Newman, J. N. (1977). *Marine Hydrodynamics*. The MIT Press Cambridge, Massachusetts and London, England.

[Oliver, 2002] Oliver, J. (2002). *Water entry and related problems*. PhD thesis, University of Oxford.

[Oliver, 2007] Oliver, J. (2007). Second-order wagner theory for two-dimensional water-entry problems at small deadrise angles. *Journal of Fluid Mechanics*, (572), pp. 59–85.

[Peseux et al., 2005] Peseux, B., Gornet, L., & Donguy, B. (2005). Hydrodynamic impact : Numerical and experimental investigations. *Journal of Fluids and Structures*, 21, pp. 277–303.

[Rajavaheinthan & Greenhow, 2015] Rajavaheinthan, R. & Greenhow, M. (2015). Constant acceleration exit of two-dimensional free-surface-piercing bodies. *Applied Ocean Research*, (92), pp. 30–49.

[Russo et al., 2018] Russo, S., Jalalisendi, M., Falcucci, G., & Porfiri, M. (2018). Experimental characterization of oblique and asymmetric water entry. *Experimental Thermal and Fluid Science*, (92), pp. 141–161.

[Scolan, 2004] Scolan, Y.-M. (2004). Hydroelastic behaviour of a conical shell impacting on a quiescent-free surface of an incompressible liquid. *Journal of Sound and Vibration*, 277, pp. 163–203.

[Scolan, 2012] Scolan, Y.-M. (2012). Chargement hydrodynamique lors de l'impact d'un corps tridimensionnel selon une cinématique de chute quelconque. In *13ième Journées de l'Hydrodynamique*.

[Scolan, 2014a] Scolan, Y.-M. (2014a). Hydrodynamics impact of an elliptic paraboloid on cylindrical waves. *Journal of fluids and Structures*, 48, pp. 470–486.

[Scolan, 2014b] Scolan, Y.-M. (2014b). Wagner problem applied to a 2d section penetrating a wave crest at any point.

[Scolan et al., 1999] Scolan, Y.-M., Coche, E., Coudray, T., & Fontaine, E. (1999). Etude analytique et numérique de l'impact hydrodynamiques sur des carènes dissymétriques. In *7ièmes Journées de l'Hydrodynamique*.

[Scolan & Korobkin, 2001] Scolan, Y.-M. & Korobkin, A. (2001). Three-dimensional theory of water impact part 1. inverse Wagner problem. *Journal of Fluid Mechanics*, 440, pp. 293–326.

[Scolan & Korobkin, 2003] Scolan, Y.-M. & Korobkin, A. (2003). Energy distribution from vertical impact of a three-dimensional solid body onto the flat free surface of an ideal fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 17, pp. 275–286.

[Scolan & Korobkin, 2008] Scolan, Y.-M. & Korobkin, A. (2008). Hydrodynamic impact (wagner) problem and galin's theorem.

[Scolan & Korobkin, 2012] Scolan, Y.-M. & Korobkin, A. (2012). Low pressure occurrence during hydrodynamic impact of an paraboloid entering with arbitrary kinematics.

[Scolan & Korobkin, 2015] Scolan, Y.-M. & Korobkin, A. (2015). Water entry of a body which moves in more than six free degrees of freedom. *Proceedings of the Royal Society A*, (471).

[Scolan et al., 2006] Scolan, Y.-M., Remy, F., & Thibault, B. (2006). Impact of three-dimensional standing waves on a flat horizontal plate. In *21th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*.

[Semenov & Iafrati, 2006] Semenov, Y. & Iafrati, A. (2006). On the nonlinear water entry problem of asymmetric wedges. *Journal Of Fluid Mechanics*, 547, pp. 231–256.

[SIMULIA, 2008] SIMULIA, D. (2008). Fluid-structure simulation with cel in abaqus/explicit. Abaqus Regional User's Meeting.

[Smith et al., 1998] Smith, N., Stansby, P., & Wright, J. (1998). The slam force on a flat plate in free flight due to impact on a wave crest. *Journal of Fluids and Structures*, 12, pp. 183–196.

[Sneddon, 1966] Sneddon, I. N. (1966). *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory*. J. Wiley.

[Souli & Sigrist, 2009] Souli, M. & Sigrist, J. (2009). *Interaction fluide-structure : modélisation et simulation numérique*. Hermes/Lavoisier.

[Tassin, 2010] Tassin, A. (2010). *Modélisation tridimensionnelle d'impacts hydrodynamiques pour l'étude du tossage des bulbes d'étrave*. PhD thesis, Université de Bretagne Occidentale.

[Van Dyke, 1964] Van Dyke, M. (1964). *Perturbation Methods In Fluids Mechanics*. The Parabolic Press, Stanford ,California.

[Von Karman, 1929] Von Karman, T. (1929). *The Impact On Sea Plan Floats During Landing*. Technical report, Aerodynamical Institute of Technical High School, Aachen. National Advisory Committee For Aeronautics, Technical Note No. 321.

[Vorus, 1996] Vorus, W. (1996). A flat cylinder theory for vessel impact and steady planing resistance. *Journal of Ship Research*, 40, pp. 89–106.

[Wagner, 1932] Wagner, H. (1932). Über Stoss- und Gleitvorgane an der Oberflache von Flussigkeiten. *Math. Mech. 12*, (pp. 193–215).

[Wei & Hu, 2014] Wei, Z. & Hu, C. (2014). An experimental study on water entry of horizontal cylinders. *Journal Of Marine Science and Technology*, 19, pp. 338–350.

[Wilson, 1989] Wilson, S. (1989). *The mathematics of ship slamming*. PhD thesis, University of Oxford.

[Xu et al., 2008] Xu, G., Duan, W., & Wu, G. (2008). Numerical simulation of oblique water entry of an asymmetrical wedge. *Ocean Engineering*, (35).

[Zhao & Faltinsen, 1999] Zhao, R. & Faltinsen (1999). Water entry of arbitrary axisymmetric bodies with and without flow separation. In *22th Symposium on Naval Hydrodynamics* (pp. 652–664).

[Zhao & Faltinsen, 1993] Zhao, R. & Faltinsen, O. (1993). Water entry of two-dimensional bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 246, pp. 593–612.

[Zhao et al., 1997] Zhao, R., Faltinsen, O., & Aarsnes, J. (1997). Water entry of arbitrary two-dimensional sections with and without flow separation. In *21th Symposium on Naval Hydrodynamics* (pp. 408–423).

Titre : Impact sur le pont mouillé d'un navire SWATH pour la maintenance des éoliennes *offshore*.

Mots clés : Impact hydrodynamique, Wagner, parabole, houle d'Airy monochromatique, vitesse d'avance, analytique, semi-analytique, modèle de Logvinovich modifié,méthode composite, couplage Euler-Lagrange.

Résumé : L'objectif de ces travaux de thèse de doctorat est de développer des modèles simplifiés d'impact hydrodynamique sur le point mouillé d'un *SWATH* pour la maintenance des éoliennes *offshore*. La connaissance des chargements hydrodynamiques auxquels est soumis le pont mouillé est une étape primordiale lors de la conception de l'étrave du navire. Pour réaliser cette étude nous avons choisi une géométrie bidimensionnelle parabolique symbolisant le pont mouillé et une houle d'Airy régulière pour la surface libre. Les modèles développés reposent sur le modèle de Wagner qui permet d'obtenir des résultats pertinents pour un faible temps de calcul. Deux types de modèles d'impact ont été développés. Des modèles dits asymptotiques car ils reposent sur un développement de Taylor du profil de houle et des modèles non-asymptotiques car ils conservent la forme complète de la houle. Les distributions de pression sur le profil parabolique sont majoritairement calculées au moyen du formalisme *Modified Logvinovich Model* (MLM). Les résultats en termes de corrections de surface mouillée, de champs de pression et d'efforts hydrodynamiques sont comparés entre les deux types de modèles en fonction du rayon de courbure de la houle. Nous déterminons aussi quel est la configuration d'impact qui engendre les chargements hydrodynamiques dimensionnants en se basant sur des configurations de référence. Pour les modèles non-asymptotiques, la contribution de l'amplitude et de la vitesse de phase de la houle au sein des efforts hydrodynamiques est analysée. Pour les modèles asymptotiques, nous avons réalisé l'étude des variations spatiales et temporelles des champs de pression calculés avec l'équation de Bernoulli linéarisée. Nous avons aussi comparée les résultats du formalisme *composite* (COMP) au formalisme MLM et leurs conséquences sur les efforts hydrodynamiques d'impact. Enfin, dans le but d'avoir une base de comparaison pour ces modèles d'impact sur houle d'Airy régulière, nous avons implémenté des modèles numériques d'impact au moyen du logiciel commercial ABAQUS/CAE. Ces modèles reposent sur un couplage CEL (*Coupled Eulerian-Lagrangian*) et ont montré une bonne correspondance avec les résultats des modèles non-asymptotiques en termes d'écarts relatifs. Au sein d'un bureau d'étude, l'intégralité de ces résultats peut constituer une aide au dimensionnement du pont mouillé d'un navire SWATH.

Title: Hydrodynamic loading on the wetdeck of a SWATH for the wind turbines maintenance.

Keywords: Slamming, Wagner, parabola, monochromatic Airy wave, forward speed, analytical, semi-analytical, modified logvinovich model, composite method, Eulerian-Lagrangian coupling.

Abstract: The aim of this PhD thesis is to develop simplified models about hydrodynamic impact (slamming) on the wet deck of a SWATH vessel for the maintenance of offshore wind turbines. The knowledge of the hydrodynamic loadings that the wet deck is subjected is an essential step in the design of the vessel's bow. To realise this study we chose a parabolic two-dimensional geometry which symbolises the wet deck and a regular Airy wave for the moving free surface. The models developed are based on the Wagner theory which provides relevant results for a low computational time. Two types of impact models have been developed. So-called asymptotic models, because they use a Taylor expansion of the wave profil and non-asymptotic models because they retain the whole shape of the wave. The pressure distributions on the parabolic shape are mainly calculated by the Modified Logvinovich Model (MLM). The results in terms of wetted corrections, pressure fields and hydrodynamic loadings are compared between the two types of models as a function of the wave radius of curvature We also determine the hydrodynamic impact arrangement which produces the highest hydrodynamic loadings by using reference configurations. For non-asymptotic models, the contribution of wave amplitude and phase velocity within hydrodynamic loadings is analysed in details. For non-asymptotic models, we made the study of the spatial and time variations of pressure fields computed with the linearized Bernoulli equation. We also compared the results of composite theory (COMP) to MLM theory and their consequences on hydrodynamic loadings. Finally, in order to get a basis of comparison for these regular Airy wave impact models, we implemented a numerical model using ABAQUS/CAE software. This model is based on a Coupled Eulerian-Lagrangian (CEL) coupling and show good matching with the results of non-asymptotic models in terms of relative errors. In a design office, all those results can be used to help design of the wet deck of a SWATH vessel.