



Estimation et validation de modèles GARCH asymétriques en puissance multivariés à corrélations conditionnelles.

Othman Kadmiri

► To cite this version:

Othman Kadmiri. Estimation et validation de modèles GARCH asymétriques en puissance multivariés à corrélations conditionnelles.. Statistiques [math.ST]. Université Bourgogne Franche-Comté, 2018. Français. NNT : 2018UBFCD076 . tel-02550853

HAL Id: tel-02550853

<https://theses.hal.science/tel-02550853>

Submitted on 22 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat

présentée par

Othman KADMIRI

pour obtenir le grade de
Docteur en Mathématiques appliquées et Applications des mathématiques
de l'Université de Bourgogne Franche-Comté
Besançon

Estimation et validation de modèles GARCH asymétriques en puissance multivariés à corrélations conditionnelles

Thèse soutenue le 06 Novembre 2018, devant le jury composé de :

Directeurs :	Yacouba BOUBACAR MAINASSARA	Université Bourgogne Franche-Comté
	Bruno SAUSSEREAU	Université Bourgogne Franche-Comté
Rapporteurs :	Jeroen V.K. ROMBOUTS	ESSEC Business School, Cergy-Pontoise
	Lionel TRUQUET	ENSAI, Bruz
Examineurs :	Sébastien LAURENT	IAE Aix-en-provence
	Baba THIAM	Université de Lille
	Jean-Michel ZAKOIAN	CREST, Palaiseau
Président de jury :	Clément DOMBRY	Université Bourgogne Franche-Comté

À ma maman, ma famille...

Remerciements

Il m'est offert ici, par ces quelques lignes, l'opportunité de remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réussite de ce projet. Je pense naturellement à mes deux directeurs de thèse Yacouba Boubacar Maïnassara et Bruno Saussereau, sans qui, cette belle aventure n'aurait pas été ce qu'elle fut. Je les remercie pour leurs précieux conseils, pour leur aide, et leur disponibilité. Je remercie Jereon V.K. Rombouts et Lionel Truquet, mes rapporteurs, d'avoir accepté d'examiner et juger mes travaux. Mes remerciements vont aussi à Clément Dombry, Sébastien Laurent, Baba Thiam et Jean-Michel Zakoïan pour avoir été membres de mon jury. C'était pour moi un grand plaisir et un immense honneur.

Je tiens également à remercier l'ensemble du Laboratoire de Mathématiques de Besançon pour leur accueil. Merci à toutes les personnes chargées des aspects techniques et administratifs pour leur patience en répondant toujours à mes mêmes questions et en y apportant à chaque fois une solution.

Je tenais aussi à remercier les habitués de la salle de convivialité, pour leur humour et l'ambiance qu'ils créaient, pour ces moments de grandes conversations pas toujours très constructives, pour leurs nouvelles blagues pas toujours très drôles, mais toujours fort sympathiques.

Merci à toute la dream team des Doctorants et Jeunes Docteurs, qui animent le laboratoire et pour la bonne ambiance qu'ils y apportent. J'ai une pensée particulière pour tous les co-bureaux du 328B qui sont passés par là, plus ou moins longtemps, et qui ont dû subir tous les débordements essentiellement causés par notre Roux officiel, protégé par l'Ange Oliver... Je pense aux victimes tels qu' Aline, Basad, TianXiang, ... et Jojo qui ont prouvé qu'ils avaient les nerfs solides, ou presque... Je me rappellerai les défis basket, l'apprentissage du jongle, les tirs de précisions sur des cibles parfois mobiles, les parties de "ping-pong" revisitées souvent orchestrées par la visite de Colin. Je me souviendrai également pendant très longtemps de toutes ces parties de Worms et des attaques à la Sainte-Grenade, avec leurs joies et parfois leurs déceptions.

Je pense aussi naturellement à tous les amis, qui m'ont permis de penser à autre chose que ma thèse, à certains moments, Lucas, Djé, Mr. RAS, Nath, les Joly, Marinoux, Barninou, Manu, ... pour n'en citer que quelques uns...

Mes dernières pensées vont à ma famille qui a toujours été présente et qui m'accompagne toujours dans tous mes projets.

Merci à vous tous pour votre soutien, vos encouragements, votre confiance ! Merci au petit sélectionneur de 8 ans qui a bien compris le souci de parité en composant les équipes de foot : "Les filles contre les garçons et on vous donne Christian".

Bien-sûr tout cela n'aurait pu exister sans ma mère, ni mon père qui m'ont accueilli ce Jeudi 25 Octobre, jour de ma naissance, au milieu de mon frère et ma soeur. Je n'ai jamais eu besoin de m'expliquer pour qu'ils devinent ce que je pense, ce qui a énormément facilité les choses. Je les remercie pour tout.

Une mention spéciale pour la Ptite Blonde, qui illumine mes journées et qui a toujours su trouver les mots pour m'encourager et me motiver.

Merci.

Table des matières

Introduction	1
1 Séries financières	1
2 Etat de l'art	5
2.1 Les premières modélisations	5
2.2 Classe de modèles ARCH univariés	6
2.3 Classe de modèles multivariés	10
3 Contribution à la modélisation des séries financières	11
3.1 Objectif	11
3.2 Organisation des Chapitres	11
1 Modèles univariés	17
Introduction	17
1 Présentation des modèles	18
1.1 Modèles de type GARCH	18
1.2 Modèles de type GARCH asymétrique	21
2 Modèle GARCH asymétrique en puissance	22
2.1 Condition de stationnarité	22
2.2 Estimation et propriétés asymptotiques	23
2.2.1 Cas de la puissance connue	23
2.2.2 Cas de la puissance inconnue	25
2.3 Validation du modèle GARCH asymétrique en puissance	26
3 Test Portmanteau pour le modèle APGARCH avec la puissance inconnue	27
3.1 Procédure de validation	27
3.2 Illustrations par simulations	28
Preuve	30
2 Le modèle CCC-APGARCH	31
Introduction	31
1 Le modèle CCC-APGARCH	33
1.1 Présentation du modèle	33
1.2 Stationnarité du modèle	33
1.3 Identifiabilité du modèle	35
2 Estimation et propriétés asymptotiques	36
2.1 Puissance connue	36
2.1.1 Estimation du modèle	36
2.1.2 Propriétés asymptotiques	37
2.2 Puissance inconnue	38
2.2.1 Estimation du modèle	38
2.2.2 Propriétés asymptotiques	39
3 Illustrations par simulations	39
Preuves	43

3	Validation du modèle CCC-APGARCH	45
	Introduction	45
1	Test sur les coefficients	46
1.1	Test de Wald	46
1.2	Application numérique	46
2	Test portmanteau	48
2.1	Rappels sur le modèle CCC-APGARCH	48
2.2	Puissance connue	49
2.3	Puissance inconnue	51
	Preuves	52
4	Simulations et applications aux données réelles	55
	Introduction	55
1	Estimation et validation du modèle APGARCH	56
1.1	Estimation du modèle dans le cas où la puissance est inconnue	56
1.2	Validation du modèle, par le test portmanteau	60
2	Estimation du modèle CCC-APGARCH	64
2.1	Cas où les puissances sont connues	64
2.2	Cas où les puissances sont inconnues	68
3	Applications aux données réelles	72
3.1	Présentation des données	72
3.2	Etude univariée	75
3.2.1	Estimation	75
3.2.2	Validation	81
3.3	Etude multivariée	88
3.3.1	Estimation	88
5	Conclusion et perspectives	97
1	Conclusion	97
2	Perspectives	98
2.1	Procédures d'estimations	98
2.2	Le modèle DACC-APGARCH	100
2.2.1	Présentation du modèle	101
2.2.2	Estimation des coefficients du modèle	102
2.2.3	Illustrations par simulations	104
3	Estimation de données réelles	107
A	Preuve du test portmanteau univarié	113
A.1	Rappels	113
A.2	Preuve	114
B	Preuve de la consistance	123
B.1	Rappels	123
B.2	Puissance connue	124
B.3	Puissance inconnue	130
C	Preuve de la normalité asymptotique	133
C.1	Rappels	133
C.2	Puissance connue	134
C.3	Puissance inconnue	154

D Preuve du test Portmanteau multivarié	177
D.1 Rappels	177
D.2 Puissance connue	178
D.3 Puissance inconnue	188
Notations	193
Bibliographie	195

Introduction

Les séries décrivant les marchés financiers, taux de change, actions et autres, possèdent des caractéristiques qui les rendent difficiles à modéliser. Cette difficulté ne repose pas sur la fréquence d'observation des données ou encore le type des données mais sur un ensemble de propriétés qui caractérisent les séries financières. Jusqu'au début des années 1980, aucun modèle mathématique n'était en mesure de reproduire ces séries en tenant compte de leurs propriétés. C'est en 1982 que Robert Engle (Engle (1982)), prix Nobel d'économie en 2003, développe le premier modèle Auto-Regressif Conditionnellement Hétéroscédastique (ARCH) qui permet de reproduire artificiellement le comportement de ces séries. Ce modèle, qui présente une avancée majeure dans la modélisation des séries financières présente rapidement des faiblesses et il est vite généralisé afin de pallier les lacunes mises en évidence. Depuis, cette classe de modèles qui permet de modéliser le cours d'un actif financier est devenue incontournable.

1 Séries financières

Le cours d'un actif financier à la date t , noté p_t , peut représenter un prix, un point d'indice ou encore une valeur de taux. Le modèle ARCH ne permet pas de modéliser le cours de l'actif mais son rendement ou sa volatilité. Nous définissons le rendement d'un actif comme étant le rapport des valeurs d'un actif à deux dates consécutives. Afin d'atténuer la variabilité, nous affectons au rendement le logarithme ce qui permet d'obtenir une nouvelle définition du rendement, appelé également rendement $\varepsilon_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1})$. Un des avantages à travailler avec le rendement est que nous obtenons des séries qui sont sans unité, ce qui facilite les comparaisons entre plusieurs titres. Nous appelons volatilité d'un actif, l'amplitude générée par les variations du rendement. Par cette notion, nous avons un quantificateur du risque de rendement et lorsque la volatilité est grande, les gains possibles sont importants mais les pertes également.

Généralement, la trajectoire du cours d'un actif financier est proche d'une marche aléatoire, contrairement à la trajectoire du rendement. Pour s'en persuader il suffit de tracer les trajectoires d'un actif financier.

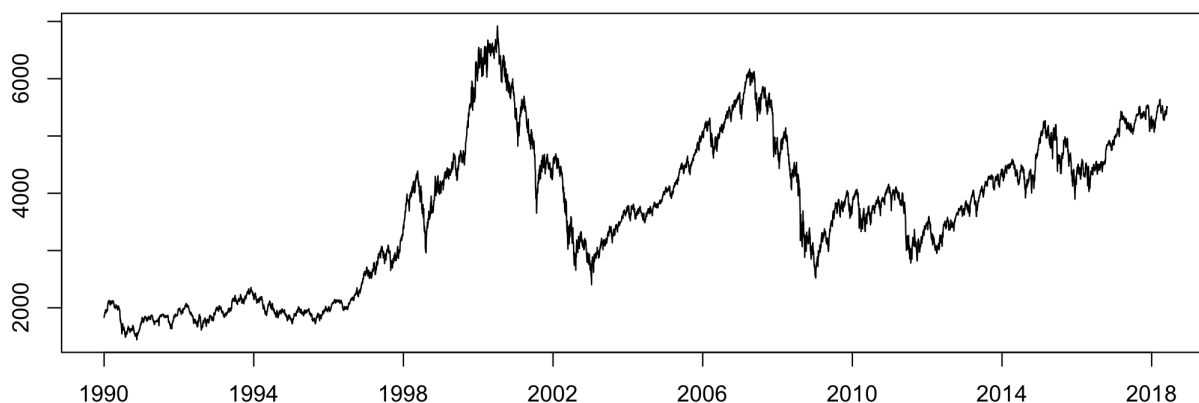


FIGURE 1 – Indice du cac 40 sur la période du 01/03/1990 au 31/07/2018

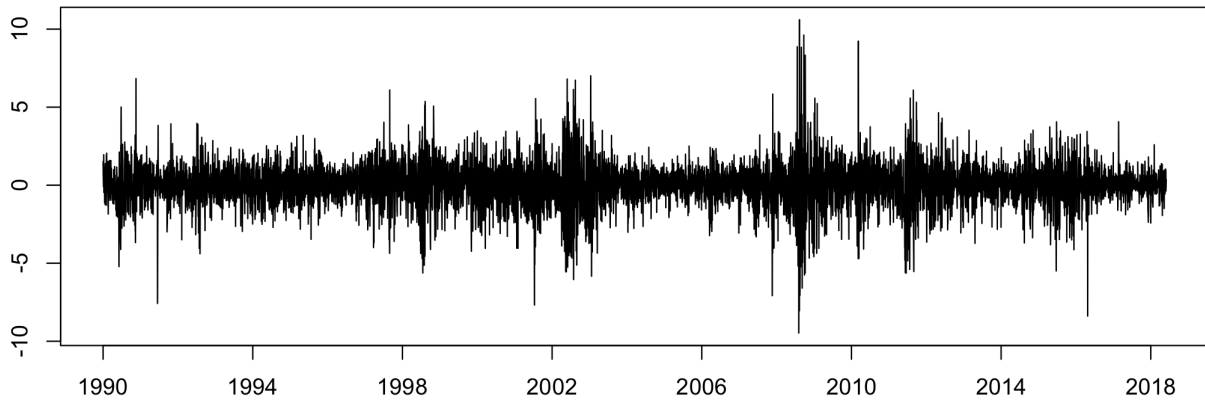


FIGURE 2 – Rendements de l'indice du CAC 40 sur la période du 01/03/1990 au 31/07/2018

Les Figures 1 et 2 représentent respectivement l'indice du CAC 40 et le rendement du CAC 40, sur des données journalières allant du 01 mars 1990 au 31 juillet 2018. Le CAC 40 est le principal indice boursier de la place de Paris. Il a été créé à la fin de l'année 1987 (le 31 décembre) par la Compagnie des Agents de Change devenue la Société des Bourses Françaises en 1988. Le CAC 40 est déterminé à partir des 40 entreprises parmi 100, générant le plus gros volume sur Euronext Paris. La liste des entreprises cotées au CAC 40 est revue régulièrement afin de conserver une certaine représentativité des différentes branches d'activités. Lorsque qu'une société n'est plus cotée, elle se voit être remplacée par une valeur du CAC Next 20 qui répond aux exigences du CAC 40. CAC signifiait donc au départ Compagnie des Agents de Changes, mais aujourd'hui l'acronyme signifie Cotation Assistée en Continu. L'indice évoque une idée précise de l'évolution du marché Français. En revanche, il faut être prudent à ne pas confondre l'évolution du CAC 40 depuis sa création à celle des valeurs cotées au CAC 40. Effectivement les mouvements liés aux entrées et sorties ne permettent pas d'établir un lien sur le long terme. Les valeurs ne satisfaisant plus les conditions pour être au CAC 40 sont remplacées par de nouvelles qui n'ont pas nécessairement influencé le point d'indice des années ultérieures.

Ces deux graphiques représentant les valeurs du CAC 40 sous différentes formes, traduisent deux propriétés liées aux séries financières. La Figure 1 montre très clairement que les valeurs varient aléatoirement à la hausse ou à la baisse avec une tendance générale haussière. La Figure 2 présente des oscillations qui se font autour de zéro, avec différentes amplitudes qui sont parfois grandes, mais qui restent toujours de module moyen constant sur des périodes de temps suffisamment longues. Ces deux premières observations vont constituer le début d'ensemble de propriétés appelées faits stylisés qui ont été complétés et vérifiés au cours du temps. Parmi ces faits stylisés nous retrouvons :

(i) **La non stationnarité du cours d'un actif financier**

Ce fait stylisé fait intervenir une notion importante qui est la stationnarité. Nous donnerons une définition de cette notion dans la partie 1.1, mais d'une manière simplifiée, le problème de stationnarité se traduit par le fait de savoir si toutes les propriétés statistiques et probabilistes des séries étudiées sont inchangées au cours de temps. Grâce à cela, nous pouvons supposer que toutes les informations contenues dans une réalisation à la date t seront transmises à la date $t+h$. Comme nous avons déjà pu le remarquer sur les Figures 1 et 2, nous constatons généralement que les trajectoires des valeurs d'un actif financier sont proches de celles d'une marche aléatoire. En revanche celles du rendement semblent satisfaire la notion de stationnarité.

(ii) **L'absence d'autocorrélation des variations d'un actif financier**

D'une manière générale, le rendement d'une série financière est faiblement autocorrélé, ce qui le rend proche d'un bruit blanc. Nous définissons par bruit blanc tout processus centré, de variance finie et dont la covariance à deux dates données est nulle. Pour la série du CAC 40, nous pouvons calculer les autocorrélations du rendement pour différents retards h . Les résultats sont résumés dans

la Table 1 et l'on constate que les autocorrélations sont proches de 0. Statistiquement nous posons l'hypothèse nulle $\mathbb{H}_0 : \rho = 0$, contre $\mathbb{H}_1 : \rho \neq 0$, dont la statistique de test est

$$t = \frac{\rho\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim \mathcal{T}_{n-2},$$

où $\mathcal{T}_{n-2}$ est la loi de Student à $n - 2$ degrés de liberté. La zone de décision est donnée par $W =] - \infty, -t_{n-2, \frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-2, \frac{\alpha}{2}}, +\infty[$, soit $W =] - \infty, -1.96] \cup [1.96, +\infty[$ pour notre cas. Si $t \in W$ alors nous rejetterons l'hypothèse nulle, dans le cas contraire nous ne rejetterons pas l'hypothèse et nous concluons que les autocorrélations sont statistiquement nulles.

h	1	2	3	4	5	10	15	20
$\hat{\rho}_\varepsilon(h)$	-0.0079	-0.0311	-0.0473	0.0173	-0.0559	-0.0022	0.0095	0.0068
t	-0.6705	-2.6406	-4.0186	1.4684	-4.7514	-0.1867	-0.8063	-0.5771

TABLE 1 – Autocorrélations empiriques du rendement de la série du CAC 40 du 01/03/1990 au 31/07/2018

(iii) L'autocorrélation du carré des variations d'un actif financier

Contrairement au rendement, le carré du rendement est généralement fortement autocorrélé. Cette remarque est également observée sur le rendement en valeur absolue. Le fait que le rendement ne soit pas autocorrélé alors que le carré l'est, nous donne l'information que le bruit blanc n'est pas indépendant. Sur la série du CAC 40, nous constatons que les autocorrélations du carré et de la valeur absolue du rendement sont autocorrélées quel que soit le retard h fixé. Nous résumons les résultats dans la Table 2.

h	1	2	3	4	5	10	15	20
$\hat{\rho}_{ \varepsilon }(h)$	0.1519	0.1911	0.1924	0.1765	0.1846	0.1732	0.1498	0.1415
$\hat{\rho}_{\varepsilon^2}(h)$	0.1576	0.1873	0.1874	0.1722	0.2063	0.1739	0.1385	0.1057

TABLE 2 – Autocorrélations empiriques du carré et de la valeur absolue du rendement de la série du CAC 40 du 01/03/1990 au 31/07/2018

(iv) L'effet de levier

Cette propriété fait intervenir un point important des séries financières. Les valeurs négatives du rendement, qui se traduisent par la baisse du cours, augmentent plus fortement la volatilité que ne le font les valeurs positives. Pour une même amplitude, la hausse ou la baisse du cours n'ont pas la même influence sur la volatilité. La corrélation entre les rendements négatifs que nous définissons comme étant $\varepsilon_t^- = \min(0, \varepsilon_t)$, et le rendement en valeurs absolues est plus forte que la corrélation entre les rendements positifs, définis par $\varepsilon_t^+ = \max(0, \varepsilon_t)$, et le rendement en valeurs absolues. Cela se traduit par une corrélation plus forte entre $\varepsilon_t^- = \min(\varepsilon_t, 0)$ et $|\varepsilon_{t+h}|$ qu'entre $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$ et $|\varepsilon_{t+h}|$. Ce phénomène appelé effet de levier introduit la propriété d'asymétrie.

Sur la série du CAC 40, Nous observons ce phénomène d'asymétrie et la corrélation entre le rendement négatif et le rendement en valeurs absolues est effectivement plus importante que la corrélation entre le rendement positif et le rendement en valeurs absolues. Nous résumons les résultats dans la Table 3.

h	1	2	3	4	5	10	15	20
$\hat{\rho}(\varepsilon_{t-h}^+, \varepsilon_t)$	0.0367	0.0992	0.0841	0.0953	0.1185	0.1188	0.1024	0.0940
$\hat{\rho}(-\varepsilon_{t-h}^-, \varepsilon_t)$	0.2347	0.2595	0.2706	0.2383	0.2364	0.2170	0.1885	0.1805

TABLE 3 – Autocorrélations empiriques des rendements positifs et négatifs de la série du CAC 40 du 01/03/1990 au 31/07/2018

(v) Le regroupement des valeurs extrêmes

Le regroupement des valeurs extrêmes se traduit par des paquets de volatilité. En réalité, les grandes valeurs du rendement tendent à être suivies par des grandes valeurs et nous observons ce même phénomène en ce qui concerne les petites valeurs du rendement, qui sont suivies par des petites valeurs. Nous remarquons des sous périodes de forte volatilité traduisant un marché volatil où il y a une forte agitation du cours et des sous périodes de faible volatilité qui traduisent un marché plus calme. Ce phénomène peut s'expliquer par l'arrivée de plusieurs informations pertinentes simultanément. Ces fortes périodes d'agitations sont très souvent étroitement liées aux crises que l'on peut rencontrer et qui perturbent les marchés financiers. Ces sous périodes sont visibles à l'oeil et nous pouvons mettre en évidence quelques unes. En rouge nous retrouvons une zone de forte volatilité et en bleu une zone de faible volatilité.

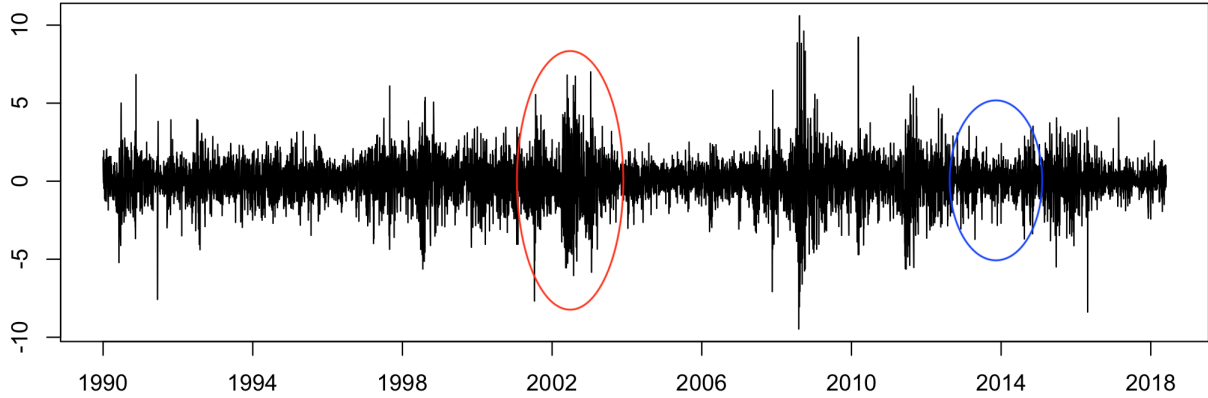


FIGURE 3 – Mise en évidence du regroupement des valeurs extrêmes de l'indice du CAC 40 sur la période du 01/03/1990 au 31/07/2018

(vi) Queues de distribution épaisses

Pour ce genre de processus, nous nous apercevons que dans la plupart des cas, voire dans tous les cas, la distribution de probabilité empirique des séries du rendement n'est pas gaussienne. Tous les tests de normalité rejettent l'hypothèse nulle de normalité. Ces distributions de probabilités ont la caractéristique d'avoir des queues plus épaisses que celles d'une distribution normale. Nous pouvons notamment mesurer cet effet à partir du coefficient de kurtosis qui est défini par

$$\kappa = \mathbb{E} \left[\left(\frac{X - m}{\sigma} \right)^4 \right],$$

qui représente le moment centré d'ordre 4 par rapport au carré de la variance empirique.

Dans l'étude des séries financières, la loi normale est donnée comme référence et son coefficient d'aplatissement est asymptotiquement égal à 3. Dans le cas de la série du CAC 40, le kurtosis peut être calculé et vaut 7.65 ce qui est bien supérieur à celui de la loi normale et qui signifie donc que la distribution du CAC 40 est à queue épaisse.

(vii) Saisonnalités

Lorsque les marchés sont fermés (week-ends, jour fériés), la volatilité tend à augmenter, reflétant ainsi l'information accumulée pendant cette fermeture. Pourtant, Nous constatons souvent que cette hausse est moins forte que si l'information s'accumulait à vitesse constante. Notons enfin que l'effet saisonnier est également très présent pour les séries intra-journalières.

Avec cet ensemble de propriétés, la modélisation des séries est complexe puisque pour reproduire au mieux ces séries, il faut un modèle mathématique qui tient compte de ces propriétés.

2 Etat de l'art

2.1 Les premières modélisations

Une première approche a été de modéliser le cours d'un actif financier par un mouvement brownien avec tendance. Le mouvement brownien est au coeur de la théorie des processus aléatoires. Il décrit des mouvements chaotiques dont l'évolution est quasi-imprévisible au cours du temps et ce, même dans un intervalle de temps très court. Historiquement, le mouvement brownien a été décrit par Robert Brown en 1827 (Brown (1928)), qui au cours de ses études en botanique avait observé au microscope le mouvement des particules d'un grain de pollen en suspension dans un fluide. Les prix des actions à la Bourse pouvant rappeler ce type de mouvement, Bachelier introduisit en 1900 (Bachelier (1900)) le mouvement brownien afin de modéliser le cours des actifs financiers. Le problème majeur qui survient avec la modélisation qu'il propose est que le processus peut prendre des valeurs négatives, ce qui ne reflète pas la réalité. Samuelson propose 60 ans plus tard (Samuelson (1935)) d'adapter le modèle de Bachelier en travaillant avec les rendements des actifs financiers. Ces deux modèles ne permettent pas de reproduire un grand nombre de faits stylisés. Ils reproduisent l'absence d'autocorrélation des variations d'un actif financier, en revanche, ils ne reproduisent ni l'effet de levier, ni les queues épaisses, ni le regroupement des valeurs extrêmes.

Mandelbrot qui est à l'origine de la découverte que les actifs financiers ne présentent pas des distributions normales (Mandelbrot (1963)), propose de modéliser le cours d'un actif financier par des processus de Lévy. Les distributions de Lévy α -stable, sembleraient se rapprocher de la loi des variations des actifs financiers. Le modèle proposé pour la modélisation est sur la base de celui proposé par Samuelson. Ce modèle consiste à remplacer le mouvement brownien par un processus de Lévy. Mandelbrot a donc proposé un modèle pour le prix du coton, mais celui-ci a engendré des critiques puisqu'il est basé sur un processus α -stable à variance infinie et que les moments d'ordre deux de ce processus n'existent pas. Un tel processus permet de reproduire quelques faits stylisés comme l'absence d'autocorrélation de la variation du cours d'un actif financier, ainsi que les queues épaisses de la distribution. En revanche, l'effet de levier et le regroupement de valeurs extrêmes ne sont toujours pas reproduits.

Les travaux de Samuelson, ont servi de départ à Samuelson, Black et Scholes, qui développent un processus permettant de modéliser les rendements s'ils vérifient

$$\varepsilon_t = \mu + \sigma \eta_t.$$

Dans ce modèle, μ et σ sont constants et η_t sont indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi normale. Si l'on suppose que σ n'est plus constant mais devient un processus stochastique, alors le modèle est dit à volatilité stochastique. Cette représentation est similaire à celle du modèle ARCH, qui historiquement a été développé plus tôt. La principale différence entre ces deux processus est dans l'écriture de la volatilité. Pour le modèle de Samuelson, Black et Scholes, le plus souvent la volatilité s'écrit

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 \exp\{h_t\},$$

où le processus h_t est défini dans les cas les plus simples par une écriture autorégressive

$$h_t = \alpha h_{t-1} + \lambda \nu_t.$$

Afin d'assurer la stationnarité, nous imposons le fait que $\alpha \in [0, 1[$ et ν_t est un bruit. Par rapport au modèle ARCH, celui-ci est constitué de deux bruits, ce qui complique la procédure d'estimation. Dans la pratique, il est donc préférable d'utiliser le modèle ARCH.

Malgré la difficulté de l'estimation, ce modèle présente de nombreux avantages dans la modélisation puisqu'il reproduit un grand nombre de faits stylisés. Comme les processus précédents, il reproduit l'absence d'autocorrélation de la variation d'un actif financier. Il reproduit également les queues de distribution épaisses, ainsi que le regroupement des valeurs extrêmes et il permet d'introduire l'asymétrie, donc l'effet de levier.

Dans notre étude nous ne développerons pas les premiers processus présentés. Nous nous consacrerons à la classe de modèle ARCH univarié et multivarié ainsi que ses extensions. Ce processus qui fait partie des processus conditionnellement hétéroscédastiques présente de nombreux avantages. Le premier est sa simplicité de mise en œuvre, mais aussi d'étude. Comme nous l'avons mentionné, le modèle Sumelson, Black et Schloes qui est ressemblant au modèle ARCH est beaucoup moins pratique du fait de sa construction. L'autre avantage est que le modèle ARCH peut potentiellement reproduire tous les faits stylisés mentionnés.

2.2 Classe de modèles ARCH univariés

Le modèle ARCH est un processus stationnaire sous certaines conditions, ce qui n'est pas le cas du cours des prix d'un actif financier. En revanche les variations de l'actif financier semblent s'apparenter aux trajectoires compatibles avec la notion de stationnarité. La modélisation par le modèle va donc porter sur le rendement de l'actif. Nous définissons ε_t comme étant un processus ARCH(q) s'il vérifie

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_{0i} \varepsilon_{t-i}^2, \end{cases} \quad (1)$$

où ω_0 est une constante strictement positive, α_{0i} sont des constantes positives et q représente l'ordre du modèle. De cette façon σ_t^2 est strictement positive et définit la variance conditionnelle du processus. Les variables η_t sont indépendantes et identiquement distribuées de loi η_t . La plupart du temps nous considérons que η_t suit la loi normale centrée réduite.

Le modèle ARCH trouve son succès par sa capacité à reproduire des stylisés importants. Si l'on simule un processus ARCH(1) avec les paramètres ω et α choisis de telle sorte que la condition de stationnarité soit vérifiée, nous pouvons s'assurer qu'il reproduit un certain nombre de propriétés. Dans notre cas nous choisirons les valeurs $\omega_0 = 1$ et $\alpha_0 = 0.3$ pour simuler les trajectoires. Les propriétés d'absence d'autocorrélation du rendement, d'autocorrélation du carré et la valeur absolue du rendement, points (ii) et (iii) peuvent être résumées dans la Table 4.

h	1	2	3	4	5	10	15	20
$\hat{\rho}_\varepsilon(h)$	0.0382	0.0208	-0.0122	-0.0220	-0.0248	-0.0207	0.0009	-0.0158
$\hat{\rho}_{ \varepsilon }(h)$	0.3182	0.1952	0.1128	0.0558	0.0082	0.0059	-0.0189	0.0184
$\hat{\rho}_{\varepsilon^2}(h)$	0.3333	0.2148	0.1364	0.0765	0.0229	-0.0029	-0.0033	0.0093
$\hat{\rho}(\varepsilon_{t-h}^+, \varepsilon_t)$	0.3411	0.2148	0.1673	0.1021	0.0540	0.0128	-0.0050	0.0162
$\hat{\rho}(-\varepsilon_{t-h}^-, \varepsilon_t)$	0.2903	0.1717	0.0418	-0.0028	-0.0492	-0.0021	-0.0350	0.0209

TABLE 4 – Autocorrélations empiriques d'une trajectoire simulée par le modèle ARCH(1)

Ce tableau montre que le rendement de la série est très peu autocorrélé (ligne 2) alors que le carré ou la valeur absolue du rendement le sont (lignes 3 et 4). En revanche, nous pouvons aussi remarquer

que le rendement positif et négatif ont la même influence sur la volatilité à la date courante. Une valeur passée négative, aura donc le même impact sur la volatilité qu'une valeur passée positive de même amplitude. Les trajectoires simulées par le modèle ARCH ne reproduisent pas le phénomène appelé effet de levier. L'effet de levier sera un point important dans la suite de ces travaux.

Le modèle ARCH reproduit le regroupement des valeurs extrêmes avec des paquets de fortes volatilités et de faibles volatilités. En traçant la trajectoire simulée nous pouvons nous rendre compte qu'il y a des paquets de volatilités. Les zones en bleu représentent des périodes de forte volatilité, où les grandes amplitudes sont suivies par des grandes amplitudes. La zone en rouge représente, à l'inverse, une période de faible volatilité.

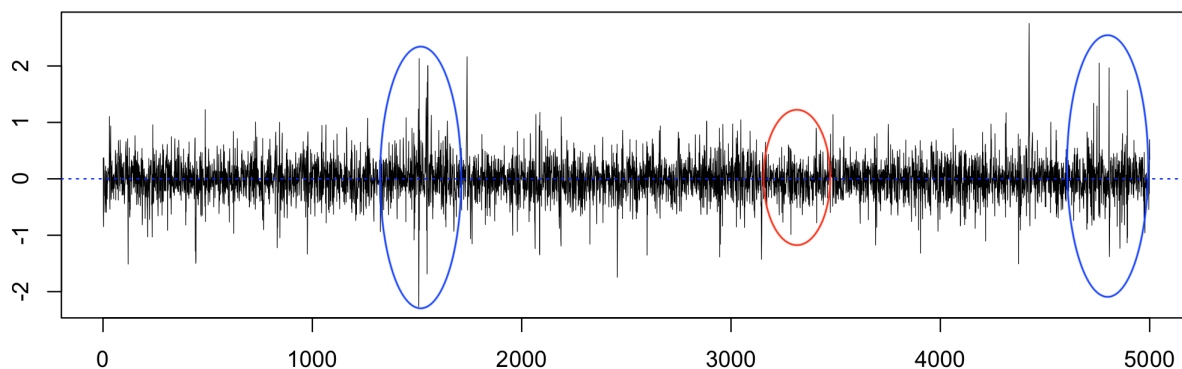


FIGURE 4 – Mise en évidence du regroupement des valeurs extrêmes d'une trajectoire simulée par le modèle ARCH(1)

Un constat que l'on peut faire est que la distribution du rendement des cours d'un actif n'est pas gaussienne. Les tests statistiques rejettent l'hypothèse de normalité, car les distributions sont à queues lourdes. Plutôt que de réaliser un test statistique afin de vérifier la normalité de la trajectoire simulée, nous pouvons utiliser un outil visuel pour conclure sur la normalité. En traçant la droite de Henry, nous avons une idée sur la distribution de notre série.

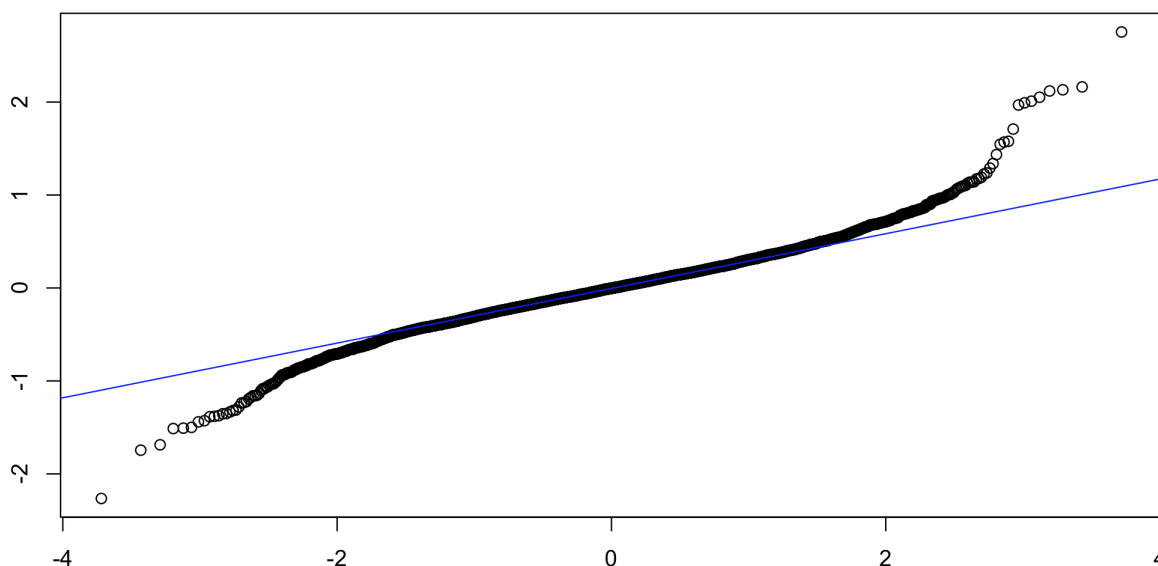


FIGURE 5 – Droite de Henry d'une trajectoire simulée par le modèle ARCH(1)

Si l'on calcule le kurtosis de la trajectoire simulée, nous constatons que le coefficient d'aplatissement qui vaut 6.98 est supérieur à 3 qui est celui de référence. Le modèle ARCH reproduit donc des trajectoires à queues épaisses.

Malgré le fait que le modèle ARCH prenne en compte un grand nombre de faits stylisés, il n'est pas capable de différencier les rendements positifs des rendements négatifs comme le montre la Table 4. En revanche le modèle ARCH peut être adapté relativement facilement et peut se doter de l'asymétrie. Une autre lacune que connaît le modèle ARCH, est sa non prise en compte de la variance conditionnelle passée dans la modélisation. En effet, si l'on retourne à l'équation (1), la volatilité n'est modélisée uniquement que par les rendements passés. Une manière de contourner le problème serait d'augmenter l'ordre q , mais dans ce cas un nouveau problème d'ordre statistique pourrait être créé. En augmentant l'ordre q , nous augmentons nécessairement le nombre de paramètres à estimer et cela pourrait s'avérer être pénalisant pour l'estimation.

En 1986, Bollerslev (Bollerslev (1986)) généralise le modèle ARCH (Generalized ARCH) en ajoutant le terme de la variance conditionnelle passée dans la modélisation de la volatilité. La première équation du modèle ARCH reste inchangée, en revanche la deuxième équation devient

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_{0i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{0j} \sigma_{t-j}^2.$$

Comme le modèle ARCH, le paramètre ω_0 est strictement positif et les paramètres α_{0i} et β_{0j} sont positifs ou nuls. Nous constatons également que le modèle GARCH reprend l'ordre q du modèle ARCH mais inclut également un ordre p . Le modèle GARCH reproduit les mêmes caractéristiques que le modèle ARCH et aura tendance à accentuer le regroupement des extrêmes, comme nous pouvons le voir sur la Figure 6. Les paramètres utilisés pour simuler la trajectoire reproduite à la Figure 6 sont $\omega_0 = 1$, $\alpha_0 = 0.3$ et $\beta_0 = 0.65$. En rouge, nous observons une période de forte volatilité et en bleu une zone de faible volatilité.

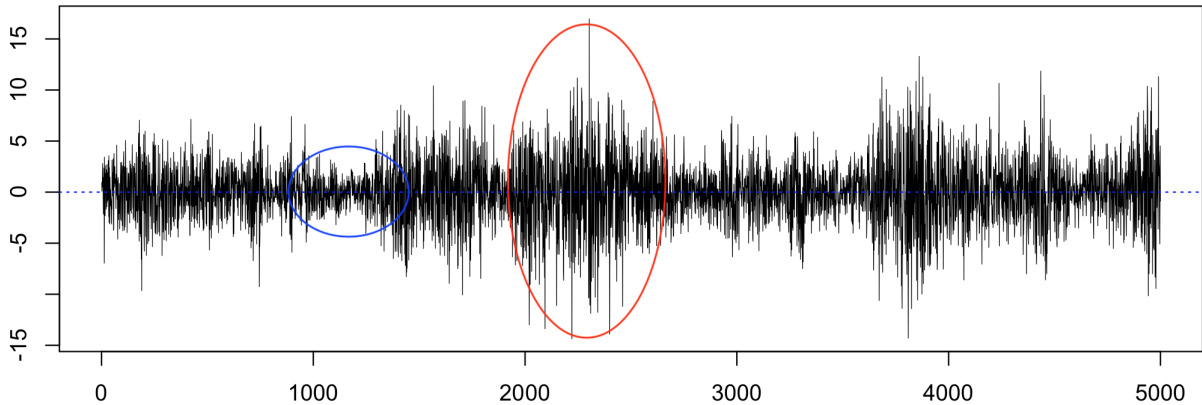


FIGURE 6 – Mise en évidence du regroupement des valeurs extrêmes d'une trajectoire simulée par le modèle GARCH(1,1)

Ce modèle, tout comme le modèle ARCH, présente l'avantage d'avoir une interprétation simple et intuitive. Le paramètre ω_0 peut s'interpréter comme étant la volatilité plancher, c'est à dire que toute l'information qui n'a pu être directement transmise, suite à la clôture des marchés, aux jours fériés et autres, se voit traduite par ce terme. Les paramètres α_{0i} traduiront l'impact des chocs passés et enfin les paramètres β_{0j} , décriront la persistance des chocs passés. Autrement dit, nous pouvons interpréter les paramètres β_{0j} comme étant la vitesse pour revenir à la volatilité minimum ω_0 . Bien que le modèle GARCH soit plus performant que le modèle ARCH, il reste tout de même insensible à l'asymétrie (autrement dit, à l'effet de levier). Le modèle GARCH n'est pas capable de réagir selon l'asymétrie des chocs passés sur la volatilité, or ce phénomène connu depuis les années 1970 semble devenir incontournable dans la modélisation.

Il existe plusieurs modèles asymétriques, comme le modèle Exponentiel-GARCH (EGARCH) et le modèle log-GARCH, pour lesquels Francq *et al.* (2013) étudient les propriétés asymptotiques de l'estimateur du modèle EGARCH(1,1). L'extension la plus directe du modèle GARCH est le modèle

Asymétrique GARCH ou Threshold GARCH, noté dans la suite AGARCH. Ce modèle s'exprime de la même façon que le modèle GARCH mais l'on décompose le terme ε_{t-i}^2 en deux termes. L'un correspond aux rendements passés positifs, notés ε_{t-i}^+ et l'autre aux rendements passés négatifs, notés ε_{t-i}^- . Nous définissons ε_{t-i}^+ par $\varepsilon_{t-i}^+ = \max(0, \varepsilon_{t-i})$ et ε_{t-i}^- par $\varepsilon_{t-i}^- = \min(0, \varepsilon_{t-i})$. Le modèle AGARCH a été introduit par Rabemananjara et Zakoïan (1993) et présente l'avantage d'être simple d'interprétation mais surtout de tenir compte de l'effet de levier.

Jusqu'à présent les modèles étaient soit basés sur le concept de variance conditionnelle, comme pour le modèle ARCH et GARCH, ou alors sur l'écart-type conditionnel, comme pour le modèle AGARCH. Engle (1982) met en évidence que la modélisation ne doit pas nécessairement être faite par l'un de ces deux concepts, mais que l'on peut modéliser la volatilité par n'importe quelle puissance de la variance. Il propose également le modèle EGARCH et ne modélise plus la volatilité par la variance mais en utilisant l'exponentielle afin d'illustrer ce concept. Des généralisations des modèles classiques sont faites pour ces raisons et Higgins et Bera (1992) introduisent le modèle ARCH en puissance, qui est une transformation du modèle ARCH en appliquant une puissance δ quelconque à la variance. Hwang et Kim (2004) reprennent ce modèle en y ajoutant l'asymétrie et Pan *et al.* (2008) généralisent ce modèle et s'intéressent donc au modèle AGARCH en effectuant une transformation de la puissance (APGARCH). L'écriture du modèle reste semblable et devient

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t^{1/\delta} \eta_t \\ \sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{\delta} + \alpha_i^- (-\varepsilon_{t-i}^-)^{\delta} + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^{\delta}. \end{cases} \quad (2)$$

Les conditions de stationnarité du modèle sont proposées par Pan *et al.* (2008), ainsi que la procédure d'estimation dans le cas où la puissance δ est connue et inconnue. Les propriétés asymptotiques de l'estimateur ont été établies par Hamadeh et Zakoïan (2011) dans les deux cas. Lorsque l'on considère la puissance connue et fixée $\delta = 1$, le modèle devient celui introduit par Rabemananjara et Zakoïan (1993) c'est-à-dire le modèle AGARCH.

Ce modèle peut être utilisé dans deux cas, le premier en considérant la puissance connue ce qui est équivalent à se ramener à une écriture du type AGARCH avec une puissance de l'écart-type ou de la variance connue et fixée. Ce modèle plus général, permet de considérer des modèles tels que le modèle AGARCH ou alors le modèle GJR de Glosten *et al.* (1993) en considérant $\delta = 2$. Il est également possible de considérer la puissance inconnue et dans ce cas, nous pouvons supposer que le modèle s'adaptera tout seul aux données à étudier. Cependant, cette considération nécessite et impose l'estimation du paramètre δ ce qui peut dans certains cas s'avérer difficile. Hamadeh et Zakoïan (2011) mettent en évidence dans une expérience que parfois le modèle est difficile à identifier dans la pratique et notamment à cause du paramètre δ . Pour cette raison, et malgré les résultats théoriques connus sur le cas où la puissance est inconnue, le modèle dans le cas de la puissance inconnue semble être délaissé au profit du cas où la puissance est connue.

Il existe plusieurs procédures de validation, basées sur différentes méthodologies, mais les tests portmanteau sont souvent utilisés dans l'analyse des séries financières. Nous retrouvons ces tests en particulier pour tester l'adéquation des modèles Autoregressifs à Moyenne Mobile (Autoregressive Moving Average, en anglais), ARMA(p, q) estimés. Les travaux à l'origine de cet outil d'analyse sont dus à Box et Pierce (1970), Ljung et Box (1978), McLeod (1978) et à Li (2004) pour un ouvrage sur les tests portmanteau.

Ces tests sont basés sur l'intuition que si un modèle de série financière avec un bruit η_t iid est adapté aux données, alors les autocorrélations des résidus $\hat{\eta}_t$ devraient être toutes nulles. Les tests portmanteau sont alors initialement basés sur les autocovariances des résidus. Mais à la différence des modèles ARMA, les modèles GARCH présentent des autocovariances nulles. Ces tests sont donc inefficaces pour ce type de modèles et doivent être adaptés. Pour cela, le test portmanteau se base désormais sur les autocovariances des carrés des résidus, comme le montrent les travaux de Li et Mak (1994) et Ling et Li (1997). Ces tests qui permettent de valider le modèle, peuvent également conduire au choix des ordres p et q du modèle. Berkes *et al.* (2003) développent la théorie asymptotique du test portmanteau pour le modèle GARCH standard et Carbon et Francq (2011)

donnent une procédure de validation du modèle APGARCH via les tests portmanteau, lorsque la puissance est connue. Ce test n'a pas été développé pour le modèle APGARCH avec δ inconnu et ne peut donc être utilisé pour le modèle plus général. En revanche, cette procédure peut être utilisée pour les modèles AGARCH et GJR en fixant les valeurs de δ correspondant au modèle souhaité. Récemment, Leucht *et al.* (2015) ont proposé un test pour le modèle GARCH(1, 1), basé sur le test statistique de Cramér-Von Mises. Francq *et al.* (2016) ont récemment travaillé sur le test portmanteau pour le modèle Log-GARCH et EGARCH.

Les modèles ARCH et les modèles univariés de manière générale, ont présenté une grande évolution dans la modélisation des séries financières. Si les modèles asymétriques et en puissance constituent une avancée majeure dans la modélisation, l'analyse de la volatilité reste limitée dans le cas d'un seul actif financier. L'étude univariée d'un marché ou d'un actif, ne permet pas d'utiliser l'information d'un actif financier pour en modéliser un autre. Or, le constat réalisé lors des crises, est que la contagion se fait sur l'ensemble des marchés financiers. Par conséquent, la dynamique d'un marché se transmet aux autres et donc les informations nécessaires à la modélisation d'un actif peuvent être contenues dans un autre actif. Les modèles univariés présentent leur limite.

2.3 Classe de modèles multivariés

L'extension des modèles univariés n'étant pas directe dans le cas GARCH, il existe une multitude de modèles multivariés, développés par Nelson (1991), Engle et Kroner (1995a), Engle (2002), McAleer *et al.* (2008) pour n'en citer que quelques uns. Bauwens *et al.* (2006) établissent une revue de la littérature, qui liste l'ensemble des modèles GARCH multivariés. L'avantage de ce type de modèle est que la volatilité d'un marché est à la fois fonction de sa propre volatilité passée mais également de la volatilité passée d'autres marchés ou actifs. Désormais, la moindre information contenue dans un actif n'est plus seulement pertinente pour ce seul actif, mais également pour tous les autres actifs contenus dans le modèle. Cette classe de modèles pallie la lacune des modèles univariés et permet d'affiner les modélisations.

Bollerslev *et al.* (1988) donnent les bases de travail pour les modèles GARCH multivariés, en proposant pour la première fois un modèle multivarié, qui étend la représentation GARCH univariée. Cette représentation du modèle est très générale mais implique un grand nombre de paramètres qui nécessitent des restrictions et des simplifications dans la pratique. Suite à cela, Bollerslev (1990) propose une extension du modèle GARCH en introduisant dans la formulation du modèle, une matrice de corrélation conditionnelle, généralement notée R , que l'on considère constante au cours du temps. Ce travail a été étendu par Jeantheau (1998) au modèle nommé CCC-GARCH (pour Conditional constant correlation - GARCH). Ce modèle présente l'avantage d'avoir une interprétation simple et similaire aux modèles GARCH univariés. Nous définissons ε_t comme étant un processus multivarié CCC-GARCH(p, q) de dimension d s'il vérifie

$$\begin{cases} \varepsilon_t = H_t^{1/2} \eta_t \\ H_t = D_t R D_t, \quad D_t = \text{diag}(h_{1,t}^{1/2}, \dots, h_{d,t}^{1/2}) \\ h_t = \omega_0 + \sum_{i=1}^q A_{0i} \varepsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^p B_{0j} h_{t-j}, \end{cases} \quad (3)$$

où h_t est un vecteur de dimension $d \times 1$ où chaque composante représente l'écart-type conditionnel de chaque série et H_t est la matrice de variance conditionnelle associée au modèle. Le paramètre ω_0 est un vecteur de dimension $d \times 1$ composé de coefficients strictement positifs et les paramètres A_{0i} et B_{0j} sont des matrices de dimension $d \times d$ composées de coefficients positifs ou nuls. Ce modèle ne différencie pas les rendements positifs des rendements négatifs. Le cas univarié considère de nombreux modèles asymétriques, alors que le cas multivarié ne compte pas beaucoup de modèles développés. Pour les modèles multivariés asymétriques, nous retrouvons McAleer *et al.* (2009) qui étendent le modèle GJR de Glosten *et al.* (1993). Une autre extension multivariée est proposée par McAleer *et al.* (2008) en développant le modèle AutoRegressif Généralisé à Corrélation

Conditionnelle (GARCC). Récemment, Francq et Zakoïan (2012) développent l'extension asymétrique du modèle CCC-GARCH de Bollerslev (1990). Seule la troisième équation diffère du modèle CCC-GARCH et devient

$$\underline{h}_t = \underline{\omega}_0 + \sum_{i=1}^q A_{0i}^+ \underline{\varepsilon}_{t-i}^+ + A_{0i}^- (-\underline{\varepsilon}_{t-i}^-) + \sum_{j=1}^p B_{0j} \underline{h}_{t-j},$$

où les paramètres A_{0i}^+ et A_{0i}^- sont des matrices de dimension $d \times d$ composées de coefficients positifs ou nuls. Avec $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \min(0, x)$, nous définissons $\underline{\varepsilon}_t^+ = (\{\varepsilon_{1,t}^+\}^2, \dots, \{\varepsilon_{d,t}^+\}^2)'$ et $\underline{\varepsilon}_t^- = (\{\varepsilon_{1,t}^-\}^2, \dots, \{\varepsilon_{d,t}^-\}^2)'$. Francq et Zakoïan (2012) développent et établissent la condition de stationnarité du modèle, ainsi que la procédure d'estimation avec les propriétés asymptotiques de l'estimateur. La méthode est basée sur le quasi-maximum de vraisemblance qui est une procédure simple à mettre en œuvre dans la pratique. L'interprétation des coefficients du modèle est très proche de celle du modèle GARCH standard et rend son utilisation simplifiée.

3 Contribution à la modélisation des séries financières

3.1 Objectif

Cette thèse présente quelques contributions à la modélisation des séries financières, notamment dans le développement d'extensions de modèles ainsi que le développement d'outils utiles à la validation de ceux-ci. L'objectif principal est d'étendre les modèles multivariés à des cas plus généraux, afin de considérer un maximum de faits stylisés et d'avancées dans la modélisation des séries financières. Comme l'ensemble de la réflexion est basé sur la classe de modèle GARCH standard avec ses extensions directes, comme le modèle APGARCH, il semblait naturel de se tourner vers les modèles multivariés à corrélations conditionnelles. Ces modèles reprennent le fondement et la structure des modèles univariés classiques. Tous les résultats sont illustrés par des données simulées et mis en œuvre sur des données réelles. L'ensemble des résultats est basé sur la procédure d'estimation du Quasi-Maximum de Vraisemblance (QMV).

3.2 Organisation des Chapitres

Chapitre 1

Le premier résultat, développé dans le Chapitre 1, paragraphe 3, porte sur la validation du modèle univarié GARCH asymétrique en puissance. Il fait l'objet d'un article ayant pour titre **"Portmanteau test for the asymmetric power GARCH model when the power is unknown"**, réalisé en collaboration avec Yacouba BOUBACAR MAÏNASSARA et Bruno SAUSSEREAU.

La procédure de validation développée par Carbon et Francq (2011) permet de valider les modèles APGARCH lorsque la puissance est connue. En revanche ce résultat ne permet pas de valider le modèle plus général en considérant la puissance inconnue. Nous avons développé ici une procédure de validation, basée également sur les tests portmanteau, capable de valider les modèles APGARCH dans le cas où la puissance est inconnue. L'avantage majeur est que la modélisation de la volatilité n'est pas nécessairement optimale en utilisant l'écart-type ou la variance conditionnelle, mais une puissance quelconque de cette dernière, ce qui n'est pas possible en utilisant le modèle APGARCH dans le cas de la puissance connue. Bien que Carbon et Francq (2011) montrent que numériquement le test réagit bien aux variations de la puissance, nous ne pouvons pas déterminer par avance la valeur de cette puissance. L'intérêt d'estimer la puissance est que l'on est certain d'obtenir la puissance optimale pour le modèle choisi. Il est donc primordial que la procédure de validation tienne compte du cas où la puissance est inconnue. Un second avantage est que ce test est basé sur le modèle qui englobe un grand nombre de modèles déjà étudiés dans la littérature. Cette procédure de validation peut alors s'appliquer aux modèles de la même classe et donc valider les modèles de la classe GARCH.

Le test portmanteau est basé classiquement sur les corrélations des résidus, mais comme dans le cas des modèles GARCH celles-ci sont nulles, il a fallu adapter ce test et se baser sur les corrélations des carrés des résidus. Le résultat théorique nécessite un certain nombre d'hypothèses (détaillées dans le Chapitre 1), dont la plupart sont utiles pour les propriétés asymptotiques de l'estimateur. Ces hypothèses techniques font référence aux conditions de stationnarité et d'identifiabilité, ainsi que sur la distribution du bruit et l'ensemble des paramètres et espace des paramètres. Ces résultats sur les propriétés asymptotiques sont réutilisés afin de construire le test portmanteau. L'hypothèse nulle est définie par

$\mathbb{H}_0$: le processus (ε_t) satisfait le modèle (1.3).

Par le résultat suivant,

Théorème.

Sous certaines hypothèses et l'hypothèse nulle $\mathbb{H}_0$, la matrice $\hat{D} = (\hat{\kappa}_\eta - 1)^2 I_d - (\hat{\kappa}_\eta - 1) \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{C}_m$ converge en probabilité vers la matrice définie positive D (donnée dans la preuve du Théorème 3.1 en Annexe A) et nous avons

$$n \hat{\mathbf{r}}'_m \hat{D}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_m \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_m^2,$$

nous obtenons la condition de rejet pour $\mathbb{H}_0$ au niveau asymptotique α lorsque

$$n \hat{\mathbf{r}}'_m \hat{D}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_m > \chi_m^2(1 - \alpha),$$

où $\chi_m^2(1 - \alpha)$ représente le quantile d'ordre $(1 - \alpha)$ de la loi du Khi-deux avec m degrés de liberté.

Dans le théorème, les hypothèses ainsi que les matrices C_m et J sont définies au paragraphe 3.1 du Chapitre 1 et κ_η représente le kurtosis de la loi de η . Le vecteur $\hat{\mathbf{r}}_m$ définit les m premières autocorrélations des résidus.

Chapitre 2

Le second résultat développé tout au long du Chapitre 2, concerne l'extension multivariée du modèle CCC-AGARCH proposé par Francq et Zakoïan (2012). Ce Chapitre constitue un article nommé **"Estimation of multivariate asymmetric power GARCH models"**, réalisé en collaboration avec Yacouba BOUBACAR MAÏNASSARA et Bruno SAUSSEREAU.

Le modèle développé par Francq et Zakoïan (2012) présente déjà de nombreux avantages. Sa structure est semblable à celle des modèles GARCH univariés standard et par conséquent son interprétation est simplifiée. Il modélise également la corrélation entre les différents marchés, mais celle-ci est considérée constante au cours du temps. Un autre avantage est que ce modèle prend en compte l'effet de levier. En revanche, le modèle est basé sur le concept d'écart-type et de variance conditionnels, ce qui peut contraindre la modélisation. L'extension que nous proposons améliore ce dernier point. En nous basant sur le modèle APGARCH univarié, nous avons développé le modèle CCC-APGARCH en y ajoutant une puissance quelconque sur la variance conditionnelle de chaque dimension. Une modélisation possible aurait été de considérer une seule et même puissance δ pour chacune des dimensions, mais ce modèle, plus simple, se serait valu trop restrictif surtout qu'une étude empirique des séries financières via le modèle APGARCH montre que la puissance varie selon l'actif étudié (détails en introduction du Chapitre 2). C'est la raison pour laquelle nous avons considéré une puissance pour chaque dimension, ce qui nous conduit à introduire la notation $\underline{u}^u = u_1^{u_1}, \dots, u_d^{u_d}$ où $\underline{u}$ est un vecteur de dimension $d \times 1$. Nous définissons $\underline{\varepsilon}_t$ comme étant un processus multivarié CCC-APGARCH(p, q) de dimension d s'il vérifie

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}_t = H_t^{1/2} \eta_t, \\ H_t = D_t R_0 D_t, \quad D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{1t}}, \dots, \sqrt{h_{dt}}), \\ \underline{h}_t^{\delta/2} = \underline{\omega}_0 + \sum_{i=1}^q \left\{ A_{0i}^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + A_{0i}^- (\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\delta/2} \right\} + \sum_{j=1}^p B_{0j} \underline{h}_{t-j}^{\delta/2}, \end{cases}$$

où $\underline{h}_t = (h_{1,t}, \dots, h_{d,t})'$ et avec $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \min(0, x)$,

$$\underline{\varepsilon}_t^+ = \left(\{\varepsilon_{1,t}^+\}^2, \dots, \{\varepsilon_{d,t}^+\}^2 \right)', \quad \underline{\varepsilon}_t^- = \left(\{-\varepsilon_{1,t}^-\}^2, \dots, \{-\varepsilon_{d,t}^-\}^2 \right)',$$

$\underline{\omega}_0$ et $\underline{\delta}$ sont des vecteurs de dimension $d \times 1$ composés de coefficients strictement positifs, A_{0i}^+, A_{0i}^- et B_{0j} sont des matrices de dimension $d \times d$ composées de coefficients positifs et R_0 est la matrice de corrélation.

Le Chapitre 2 détaille les conditions de stationnarité et d'identifiabilité. Nous avons développé la procédure d'estimation via le quasi-maximum de vraisemblance pour le modèle dans les cas où la puissance est connue et inconnue. Dans le cas inconnu le vecteur des paramètres devient $\vartheta = (\theta', \tau')'$ et H_t devient $\mathcal{H}_t$. Ainsi, pour définir l'estimateur de ϑ par le quasi-maximum de vraisemblance, nous avons récursivement pour $t \geq 1$

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}_t = \tilde{D}_t R \tilde{D}_t, & \tilde{D}_t = \text{diag} \left(\sqrt{\tilde{h}_{1,t}}, \dots, \sqrt{\tilde{h}_{d,t}} \right) \\ \tilde{\underline{h}}_t := \tilde{\underline{h}}_t(\vartheta) = \left(\underline{\omega} + \sum_{i=1}^q A_i^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\tau/2} + A_i^- (\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\tau/2} + \sum_{j=1}^p B_j \tilde{\underline{h}}_{t-j}^{\tau/2} \right)^{2/\tau}. \end{cases}$$

et nous obtenons l'estimateur $\hat{\vartheta}_n$ de ϑ défini comme toute solution mesurable de

$$\hat{\vartheta}_n = \arg \min_{\vartheta \in \Delta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\vartheta),$$

où

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(\vartheta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t, \quad \tilde{l}_t = \tilde{l}_t(\vartheta) = \underline{\varepsilon}_t' \tilde{\mathcal{H}}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log |\tilde{\mathcal{H}}_t|.$$

Nous avons également établi les propriétés asymptotiques de l'estimateur. Pour cela il est nécessaire de définir quelques hypothèses techniques, détaillées au Chapitre 2. Des hypothèses sur la distribution du bruit et l'espace des paramètres sont nécessaires. Une hypothèse sur la condition de stationnarité est nécessaire pour la consistance et la normalité asymptotique, ainsi qu'une hypothèse sur la condition d'identifiabilité. Dans le cas de la puissance inconnue, nous pouvons énoncer le résultat de la consistance de l'estimateur.

Théorème.

Soit $(\hat{\vartheta}_n)$ une suite d'estimateurs du QMV satisfaisant (5.2). Alors sous certaines hypothèses

$$\hat{\vartheta}_n \longrightarrow \vartheta_0, \quad \text{presque sûrement lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Le résultat de la normalité asymptotique est donné par le théorème suivant.

Théorème.

Sous certaines hypothèses, nous obtenons

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, J^{-1} I J^{-1}),$$

où J est une matrice définie positive et I est une matrice semi-définie positive, définies par

$$I := I(\vartheta_0) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta'} \right], \quad J := J(\vartheta_0) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta \partial \vartheta'} \right].$$

Le chapitre se conclut sur des illustrations numériques mettant en évidence la procédure d'estimation dans les deux cas, ainsi que ses propriétés asymptotiques.

Chapitre 3

Le troisième résultat présenté dans le Chapitre 3 porte sur la validation du modèle développé lors du Chapitre 2. Ce résultat constitue un article intitulé **"Portmanteau test for a class of multivariate asymmetric power GARCH model"**, réalisé en collaboration avec Yacouba BOUBACAR MAÏNASSARA et Bruno SAUSSEREAU.

La procédure de validation est basée sur les tests portmanteau. Elle est développée dans le cas où la puissance est connue, ainsi que dans le cas où la puissance est inconnue. Dans le cas de la puissance connue, lorsque l'on fixe $\underline{\delta} = 2$, c'est à dire que toutes les composantes du vecteur de la puissance sont égales à 2, alors le test permet de valider le modèle introduit par Francq et Zakoïan (2012). Nous avons également développé le test dans le cas inconnu, pour les mêmes raisons que dans le cas univarié. Comme pour la cas univarié, il a fallu adapter le test en se basant sur les autocovariances des carrés des résidus. Les résultats théoriques nécessitent plusieurs hypothèses qui sont détaillées dans le Chapitre 3. Les résultats du Chapitre 2 sur les propriétés asymptotiques de l'estimateur sont utilisées pour construire le test portmanteau. L'hypothèse nulle est définie par

$$\mathbb{H}_0 : \text{le processus } (\underline{\varepsilon}_t) \text{ satisfait le modèle (3.1).}$$

Par le résultat suivant

Théorème.

Sous certaines hypothèses et $\mathbb{H}_0$, la matrice $\hat{D} = \hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m} + \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{I} \hat{J}^{-1} \hat{C}_m' + \hat{C}_m \hat{\Sigma}_{\hat{\vartheta}_n, \mathbf{r}_m} + \hat{\Sigma}_{\hat{\vartheta}_n, \mathbf{r}_m}' \hat{C}_m'$ converge en probabilité vers une matrice définie positive D (définie dans la preuve du Théorème 2.1 en Annexe D) et nous avons

$$n \hat{\mathbf{r}}_m' \hat{D}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_m \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_{md^4}^2,$$

nous obtenons la condition de rejet pour $\mathbb{H}_0$, dans le cas inconnu, au niveau asymptotique α lorsque

$$n \hat{\mathbf{r}}_m' \hat{D}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_m > \chi_{md^4}^2(1 - \alpha),$$

où $\chi_{md^4}^2(1 - \alpha)$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi de Khi-deux, avec md^4 degrés de liberté.

Dans le théorème, les hypothèses, ainsi que la matrice C_m sont définies au paragraphe 2.3 du Chapitre 3. Le vecteur $\hat{\mathbf{r}}_m$ définit les m premières autocorrélations des résidus.

Chapitre 4

Le Chapitre 4 présente des simulations numériques, ainsi qu'une étude sur des données réelles. Les simulations sont en complément des illustrations numériques proposées dans chaque Chapitre. Ce travail numérique est réalisé en utilisant le logiciel R ou RStudio avec le langage interprété R ou Rcpp.

Le travail univarié concernant le Chapitre 1 reprend la procédure d'estimation du modèle AP-GARCH lorsque la puissance δ est inconnue et estimée simultanément aux autres paramètres du modèle. Différents jeux de paramètres sont utilisés, ainsi que différentes tailles de séries, afin de confirmer les résultats de Hamadeh et Zakoïan (2011), qui sont nécessaires dans la pratique pour les tests portmanteau. Ensuite, les simulations mettent en évidence le test portmanteau et viennent confirmer le résultat théorique du Chapitre 1. Les simulations montrent que le test portmanteau fait correctement la différence entre les différents modèles et montre également que la puissance n'apporte aucune difficulté dans l'élaboration du test.

Le travail multivarié concernant le Chapitre 2 met en pratique les procédures d'estimation dans le cas où la puissance d'une part est connue et dans le cas où la puissance d'autre part est inconnue. Les simulations sont réalisées sur un vaste panel de paramètres, en faisant varier la taille des séries. Les simulations montrent que l'erreur commise lors de l'estimation diminue au fur et à mesure que la taille de la série augmente. De plus lorsque la taille de la série est égale à 5000, ce qui représente une taille raisonnable pour les séries financières, l'erreur commise lors de l'estimation est faible.

Le paragraphe 3 est consacré aux données réelles. Dans ce paragraphe nous appliquons l'ensemble des résultats théoriques et pratiques sur la série du CAC 40 (uniquement en étude univariée) et sur les séries des taux de change. Les taux de change utilisés sont le dollar américain, le dollar canadien, le yen et la livre sterling, tous contre l'euro. Dans le cadre multivarié, nous avons travaillé uniquement avec des modèles en dimension 2.

Chapitre 5

Le Chapitre 5 fait la conclusion du travail établi et donne quelques perspectives et réflexions d'amélioration et de poursuite. Le nombre important de paramètres dans les modèles multivariés peuvent engendrer des problèmes dans la pratique, vu la complexité algorithmique. Pour cela, une possibilité serait de réduire le nombre de paramètres dans les modèles au moment de la procédure d'estimation ou de considérer une autre méthode d'estimation.

La méthode d'estimation Equation-par-Equation semblerait pouvoir permettre d'améliorer la procédure d'estimation des modèles multivariés. Cette procédure développée par Francq et Zakoïan (2016) permet de se ramener à plusieurs écritures univariées du modèle multivarié étudié.

La méthode de la variance targeting a été utilisée par Francq *et al.* (2014) pour réduire le nombre de paramètres du modèle à estimer. Cette méthode consiste à réécrire le modèle afin de pouvoir exprimer le paramètre ω_0 en fonction des autres paramètres.

Une autre perspective serait d'apporter des améliorations au modèle CCC-APGARCH, développé au Chapitre 2, en développant une extension de ce modèle qui prendrait en compte la dynamique de la matrice de corrélation. Nous proposons le modèle DACC-APGARCH qui reprend les caractéristiques du modèle CCC-APGARCH et qui modélise la corrélation au cours du temps. Des simulations sont effectuées afin d'illustrer la procédure d'estimation liée au modèle.

Pour conclure le Chapitre 5, nous avons appliqué le modèle DACC-APGARCH sur les données réelles utilisées lors du Chapitre 4. En revanche, n'ayant pas les propriétés asymptotiques de l'estimateur, le test portmanteau ne peut pas être développé pour ce modèle et par conséquent nous ne pouvons pas les valider.

Chapitre 1

Modèles univariés

Résumé

Ce chapitre a pour but de faire un état des principaux modèles existants et de se focaliser sur le modèle APGARCH lorsque la puissance δ est inconnue. L'estimation et les propriétés asymptotiques de l'estimateur seront rappelées et un test pour la validation du modèle sera proposé dans le cas où la puissance est inconnue.

Sommaire

Introduction	17
1 Présentation des modèles	18
1.1 Modèles de type GARCH	18
1.2 Modèles de type GARCH asymétrique	21
2 Modèle GARCH asymétrique en puissance	22
2.1 Condition de stationnarité	22
2.2 Estimation et propriétés asymptotiques	23
2.2.1 Cas de la puissance connue	23
2.2.2 Cas de la puissance inconnue	25
2.3 Validation du modèle GARCH asymétrique en puissance	26
3 Test Portmanteau pour le modèle APGARCH avec la puissance inconnue	27
3.1 Procédure de validation	27
3.2 Illustrations par simulations	28
Preuve	30

Introduction

Le modèle Auto Regressif Conditionnellement Hétéroscédastique (ARCH) introduit et développé par Engle (1982), a été largement utilisé dans la modélisation des séries financières. Bollerslev (1986) généralise ces modèles (Generalized ARCH) et apporte une plus grande polyvalence et efficacité dans la modélisation due à la prise en compte de la variance conditionnelle passée. Leur caractérisation est basée sur la notion de variance conditionnelle passée. Le modèle GARCH est caractérisé par la volatilité spécifiée comme une fonction linéaire des carrés des innovations passées. Par sa construction, la variance conditionnelle dépend uniquement du module des rendements passés et a donc par conséquent le même effet sur la volatilité. Un grand nombre d'extensions ont été faites à la suite de ce modèle, et notamment des extensions asymétriques, étant donné que ce modèle était en contradiction avec un grand nombre d'études qui montrent que les séries financières présentent un effet de levier, comme le montre Black (1976).

Parmi ces extensions, nous retrouvons le modèle GARCH asymétrique (AGARCH ou TGARCH) introduit par Rabemananjara et Zakoïan (1993). A la suite de cela, Pan *et al.* (2008) proposent le

modèle TGARCH en puissance (APGARCH) qui regroupe un grand nombre de modèles de type GARCH.

Après la condition d'identifiabilité et de stationnarité, l'étape cruciale est l'estimation des coefficients inconnus du modèle. A la suite, une procédure de validation est nécessaire afin de valider le choix des ordres p et q du modèle.

Dans ce chapitre, une première partie servira d'introduction générale sur les modèles GARCH standard en présentant les conditions de stationnarité, la procédure d'estimation, ainsi que les propriétés asymptotiques de l'estimateur. Une seconde partie sera consacrée au modèle GARCH asymétrique en puissance. Cette partie sera composée de la stationnarité du modèle, la procédure d'estimation avec ses propriétés asymptotiques, dans les cas connu et inconnu, ainsi qu'une procédure de validation du modèle dans le cas connu. Une troisième partie portera sur la procédure de validation dans le cas inconnu.

1 Présentation des modèles

1.1 Modèles de type GARCH

Introduction du modèle

Nous pouvons retrouver plusieurs définitions liées au modèle GARCH standard, à savoir une définition générale et des définitions plus spécifiques selon le type de bruit utilisé. Nous nous focaliserons sur la définition du GARCH dit fort, qui est la définition la plus courante.

On dit que ε_t est un processus GARCH(p, q) au sens fort (relativement à la suite (η_t)) s'il vérifie

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_{0i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{0j} \sigma_{t-j}^2, \end{cases} \quad (1.1)$$

où (η_t) est une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi η_t . Les constantes α_{0i} et β_{0j} sont positives et ω_0 est une constante strictement positive. Souvent dans la modélisation des séries, nous fixons les ordres p et q à 1.

Stationnarité

L'étude de la stationnarité est une étape importante avant celle de l'estimation. Le but est de chercher sous quelles conditions le processus étudié est stationnaire. On distingue deux notions de stationnarité, on parle de stationnarité stricte et de stationnarité au second ordre. Nous pouvons donner les définitions de ces deux propriétés.

Définition 1.1. (Stationnarité stricte)

Soit (ε_t) un processus temporel à valeurs réelles et en temps discret $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t$.

Ce processus est dit stationnaire (au sens strict) si toutes les fonctions f mesurables

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t) = f(\varepsilon_{1+k}, \varepsilon_{2+k}, \dots, \varepsilon_{t+k})$$

ont la même loi jointe, pour tout $t \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

La définition de la stationnarité faible, ou au second ordre, pourra sembler moins exigeante puisqu'elle n'impose des contraintes qu'aux deux premiers moments de ε_t , mais en revanche, ces moments doivent exister, ce qui n'est pas le cas pour la définition de la stationnarité forte ou stricte.

Définition 1.2. (Stationnarité au second ordre)

Soit (ε_t) un processus temporel à valeurs réelles et en temps discret $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t$.

Ce processus est dit stationnaire au second ordre si

- * $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = \mu \quad \forall i = 1, \dots, t$
- * $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 < \infty \quad \forall i = 1, \dots, t$

$$* \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-k}) = \gamma_\varepsilon(k) \quad \forall i = 1, \dots, t \quad \forall k = 1, \dots, t$$

La fonction $\gamma_\varepsilon(\cdot)$ (resp. $\rho_\varepsilon(\cdot) := \gamma_\varepsilon(\cdot)/\gamma_\varepsilon(0)$) est appelée fonction d'autocovariance (respectivement d'autocorrélation) de (ε_t) .

L'intérêt est surtout porté aux solutions non anticipatives et ergodiques du modèle, c'est à dire aux processus (ε_t) de sorte que ε_t soit une fonction mesurable du passé de η_t , $(\eta_{t-s}, s \geq 0)$. Dans ce cas la variance conditionnelle est indépendante de la tribu engendrée par $\{\eta_{t+h}, h \geq 0\}$ et ε_t est indépendante de la tribu engendrée par $\{\eta_{t+h}, h > 0\}$.

Pour déterminer les conditions de stationnarité du modèle GARCH(p, q), il sera pratique de passer à une écriture vectorielle du modèle. Pour cela nous définissons l'écriture vectorielle suivante

$$\underline{z}_t = \underline{b}_t + A_t \underline{z}_{t-1},$$

où

$$\underline{b}_t = \underline{b}_t(\eta_t) = \begin{pmatrix} \omega \eta_t^2 \\ 0 \\ \vdots \\ \omega \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q}, \quad \underline{z}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t^2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-q+1}^2 \\ \sigma_t^2 \\ \vdots \\ \sigma_{t-p+1}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q},$$

et

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 \eta_t^2 & \dots & \alpha_q \eta_t^2 & \beta_1 \eta_t^2 & \dots & \beta_p \eta_t^2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_q & \beta_1 & \dots & \beta_p \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimension $(p+q) \times (p+q)$. En itérant cette expression nous obtenons

$$\underline{z}_t = \underline{b}_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_t A_{t-1} \dots A_{t-k+1} \underline{b}_{t-k}.$$

Il est important de trouver la condition pour que cette série existe. Une condition pour que le membre de droite soit strictement positif presque sûrement, dans le sens où toutes les composantes soient strictement positives est

$$\omega > 0, \quad \alpha_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, q, \quad \beta_j \geq 0 \text{ pour } j = 1, \dots, p.$$

Cette condition n'est pas toujours nécessaire. Le principal outil dans la détermination de conditions de stationnarité est le concept de plus grand exposant de Lyapunov. En utilisant la notion de rayon spectral et en définissant une norme quelconque sur l'espace des matrices $(p+q) \times (p+q)$, nous avons le résultat d'algèbre suivant

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|A^t\| = \log \rho(A).$$

La condition de stationnarité stricte est donnée par les deux résultats suivants.

Proposition 1.1. *Franco et Zakoïan (2011)*

Soit $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ une suite de matrices aléatoires, strictement stationnaire et ergodique, telle que $\mathbb{E}[\log^+ \|A_t\|]$ est finie. Nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}[\log \|A_t A_{t-1} \dots A_1\|] = \gamma = \inf_{t \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \mathbb{E}[\log \|A_t A_{t-1} \dots A_1\|]$$

et γ s'appelle plus grand exposant de Lyapunov de la suite de matrices $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$. De plus

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|A_t A_{t-1} \dots A_1\|, \quad p.s.$$

Le lemme suivant donne la condition telle qu'elle est le plus souvent annoncé.

Lemme 1.1. *Franco et Zakoïan (2011)*

Soit $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$ une suite ergodique et strictement stationnaire de matrices aléatoires telles que $\mathbb{E}[\log^+ \|A_t\|]$ est finie et de plus grand exposant de Lyapunov γ . Alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|A_0 \dots A_{-t}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma < 0, \quad p.s.$$

La condition de stationnarité au second ordre est donnée par le résultat suivant.

Proposition 1.2. *Franco et Zakoïan (2011)*

Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un processus GARCH(p, q) strictement stationnaire, solution du modèle (1.1) avec $\omega > 0$ est que

$$\gamma < 0$$

où γ est le plus grand exposant de Lyapunov de la suite $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Lorsque cette solution strictement stationnaire existe, elle est unique, non anticipative et ergodique.

Estimation des coefficients du modèle

La méthode la plus utilisée pour l'estimation des coefficients du modèle est celle du quasi-maximum de vraisemblance. Nous supposons que les observations $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ constituent une réalisation de taille n du processus GARCH(p, q) qui est une solution strictement stationnaire non anticipative et l'on considère que (η_t) est une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées (iid) suivant la loi normale centrée réduite, $\mathcal{N}(0, 1)$.

Nous notons le vecteur des paramètres à estimer $\theta = (\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)'$ et θ_0 signifie la vraie valeur du paramètre. L'espace du paramètre θ est $\Theta \subset]0, +\infty[\times]0, +\infty[^{p+q}$. La vraisemblance gaussienne du processus conditionnellement à certaines valeurs initiales que l'on précisera s'écrit

$$L_n(\theta) = L_n(\theta; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_t^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\tilde{\sigma}_t^2} \right\},$$

où les $\tilde{\sigma}_t^2$ sont définis récursivement, pour $t \geq 1$, par

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \tilde{\sigma}_t^2(\theta) = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \tilde{\sigma}_{t-j}^2.$$

Plusieurs choix sont possibles d'autant plus que les valeurs initiales n'ont aucune influence sur le résultat de l'estimation des paramètres. Il est donc possible de prendre $\varepsilon_0^2 = \dots = \varepsilon_{1-q}^2 = \sigma_0^2 = \dots = \sigma_{1-p}^2 = \omega$, ou encore ε_1^2 . Un choix qui semblerait adapté au modèle GARCH serait pour une valeur de θ donnée sous l'hypothèse de stationnarité au second ordre, $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$, de choisir la variance non conditionnelle

$$\varepsilon_0^2 = \dots = \varepsilon_{1-q}^2 = \sigma_0^2 = \dots = \sigma_{1-p}^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}.$$

En revanche, ce choix n'est pas adapté au modèle GARCH intégré (IGARCH) qui impose que la somme des coefficients α_i et β_j doit être égale à 1.

L'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de θ conditionnellement aux valeurs initiales, est défini comme toute solution mesurable $\hat{\theta}_n$ de

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta) = \arg \min_{\theta \in \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta), \quad (1.2)$$

où

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t, \quad \tilde{l}_t = \tilde{l}_t(\theta) = \log(\tilde{\sigma}_t^2) + \frac{\varepsilon_t^2}{\tilde{\sigma}_t^2}.$$

Propriétés asymptotiques

Pour pouvoir énoncer les propriétés asymptotiques de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance, il est nécessaire de faire les hypothèses suivantes :

H1 : $\theta_0 \in \Theta$ et Θ est un compact.

H2 : $\gamma(A_0) < 0$ et $\forall \theta \in \Theta, \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$.

H3 : η_t^2 est de loi non dégénérée et $\mathbb{E}[\eta_t^2] = 1$.

H4 : si $p > 0$, $\mathcal{A}_{\theta_0}(z) = \sum_{i=1}^q \alpha_i z^i$ et $\mathcal{B}_{\theta_0}(z) = 1 - \sum_{j=1}^p \beta_j z^j$ n'ont pas de racine commune, $\mathcal{A}_{\theta_0}(1) \neq 0$ et $\alpha_{0q} + \beta_{0p} \neq 0$.

H5 : $\theta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$, $\overset{\circ}{\Theta}$ est l'intérieur de Θ .

H6 : $\kappa_\eta = \mathbb{E}[\eta_t^4] < \infty$.

La convergence forte de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Francq et Zakoïan (2004)*

Soit $(\hat{\theta}_n)$ une suite d'estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance satisfaisant (1.2), avec les valeurs initiales précédentes. Sous les hypothèses **H1** – **H4**, nous avons presque sûrement

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \theta_0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

La loi limite de l'estimateur est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.2. *Francq et Zakoïan (2004)*

Sous les hypothèses **H1** – **H6**,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (\kappa_\eta - 1)J^{-1}),$$

où J est une matrice définie positive définie par

$$J := \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] = \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\frac{1}{\sigma_t^4(\theta_0)} \frac{\partial \sigma_t^2(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^2(\theta_0)}{\partial \theta'} \right].$$

Nous définissons par l_t la vraisemblance telle que $l_t = l_t(\theta) = \log(\sigma_t^2) + \varepsilon_t^2/\sigma_t^2$.

1.2 Modèles de type GARCH asymétrique

Black (1976) a montré que les rendements positifs ont moins d'impact sur la volatilité que les rendements négatifs. Depuis, les modèles asymétriques se sont imposés à la modélisation des séries financières. Une extension du modèle GARCH(p, q) est le modèle AGARCH(p, q) développé par Rabemananjara et Zakoïan (1993).

Comme pour le modèle GARCH présenté dans la partie précédente, le modèle AGARCH présente des conditions de stationnarité stricte et au second ordre, ainsi qu'une condition d'identifiabilité et une procédure d'estimation. Celles-ci sont toutes similaires au cas du modèle GARCH.

2 Modèle GARCH asymétrique en puissance

Le modèle GARCH asymétrique en puissance (APGARCH) est une extension du modèle AGARCH et par conséquent une extension du modèle GARCH standard. Ce modèle développé par Hwang et Kim (2004) modélise la volatilité par une puissance quelconque de l'écart-type. Engle (1982) a montré par le biais du modèle Exponentiel GARCH (E-GARCH), qu'il n'était pas nécessaire de modéliser la volatilité par l'écart-type ou la variance, mais que l'on peut modéliser la volatilité par n'importe quelle puissance de la variance.

Ce modèle a la particularité d'avoir une interprétation aussi intuitive que le modèle GARCH ou alors AGARCH. De plus, il généralise l'ensemble de ces modèles car si l'on considère que la puissance est fixée $\delta = 2$ et que les coefficients $\alpha_i^+ = \alpha_i^-$ pour $i = 1, \dots, q$, alors nous obtenons le modèle GARCH standard. Si l'on fixe la puissance à 1, $\delta = 1$, alors nous avons le modèle TGARCH et enfin si l'on fixe la puissance à 2, $\delta = 2$, alors nous obtenons le modèle GJR de Glosten *et al.* (1993).

Les conditions de stationnarité ont été développées par Pan *et al.* (2008), ainsi que la condition d'identifiabilité et la procédure d'estimation. Les propriétés asymptotiques de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance ont été établies par Hamadeh et Zakoïan (2011) dans le cas où la puissance est connue et inconnue.

Le processus ε_t est appelé APGARCH(p, q) s'il vérifie

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t^{1/\delta} \eta_t \\ \sigma_t = \omega_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_{0i}^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{\delta} + \alpha_{0i}^- (-\varepsilon_{t-i}^-)^{\delta} + \sum_{j=1}^p \beta_{0j} \sigma_{t-j}, \end{cases} \quad (1.3)$$

où les constantes $\alpha_{0i}^+, \alpha_{0i}^-$ et β_{0j} sont positives et ω_0 est une constante strictement positive. La suite (η_t) est une suite de variables iid de loi η_t .

2.1 Condition de stationnarité

La condition de stationnarité est une étape importante avant la procédure d'estimation. Celle-ci est donnée par Pan *et al.* (2008). Pour ce faire, il est nécessaire de choisir une norme $\|\cdot\|$ dans $\mathbb{R}^{\kappa}$ telle que $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_{\kappa}|$, pour tout $x \in \mathbb{R}^{\kappa}$. Alors pour toutes matrices A de dimension $\kappa \times \kappa$, l'opérateur de norme correspondant est

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Nous définissons la suite de matrices (C_{0t}) par

$$C_{0t} = \begin{pmatrix} \kappa(\eta_t) & \beta_{0p} & \alpha_{[2;q-1]} & \alpha_{[q;q]} \\ I_{p-1} & 0_{(p-1) \times 1} & 0_{(p-1) \times 2(q-2)} & 0_{(p-1) \times 2} \\ \underline{\eta}_t & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 2(q-2)} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2(q-2) \times (p-1)} & 0_{2(q-2) \times 1} & I_{2(q-2)} & 0_{2(q-2) \times 2} \end{pmatrix}_{\kappa \times \kappa}, \quad (1.4)$$

où I_k représente la matrice identité de taille k et, pour $i \leq j$,

$$\begin{aligned} \kappa(\eta_t) &= (\beta_{01} + \alpha_{01}^+ (\eta_t^+)^{\delta} + \alpha_{01}^- (-\eta_t^-)^{\delta}, \beta_{02}, \dots, \beta_{0p-1}), \\ \alpha_{[i;j]} &= (\alpha_{0i}^+, \alpha_{0i}^-, \dots, \alpha_{0j}^+, \alpha_{0j}^-), \quad \underline{\eta}_t = \begin{pmatrix} (\eta_t^+)^{\delta} & 0_{1 \times (p-1)} \\ (-\eta_t^-)^{\delta} & 0_{1 \times (p-2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le coefficient de Lyapunov associé à cette suite de matrices, est défini par

$$\gamma(C_{0t}) = \inf \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{t+1} \log \|C_0 C_{-1} \dots C_{-t}\| \right], t \in \mathbb{N} \right\}.$$

Par ailleurs, sous l'hypothèse **H0'** suivante

H0' : η_t est de loi non dégénérée et symétriquement distribuée. De plus, $\mathbb{E}[\eta_t]^{r_0} < +\infty$ pour tout $r_0 > 0$, et

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\mu} \mathbb{P}\{\eta_t^2 \leq t\} = 0, \text{ pour tout } \mu > 0, \quad (1.5)$$

nous avons que

$$\gamma(C_{0t}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|C_0 C_{-1} \dots C_{-t}\|.$$

Il en suit le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Franco et Zakoïan (2011)*

*Sous l'hypothèse **H0'**, il en vient les assertions suivantes*

- (i) *Il existe une unique solution strictement stationnaire du modèle (1.3), si et seulement si le plus grand coefficient de Lyapunov $\gamma(C_{0t})$ donné par (1.5) est strictement négatif. De plus, cette solution stationnaire est ergodique.*
- (ii) *Si il y a une solution strictement stationnaire du modèle (1.3), alors $\sum_{j=1}^p \beta_{0j} < 1$.*

2.2 Estimation et propriétés asymptotiques

2.2.1 Cas de la puissance connue

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'estimation et aux propriétés asymptotiques de l'estimateur lorsque la puissance est connue. La procédure d'estimation est donnée par Pan *et al.* (2008) et les propriétés asymptotiques ont été établies par Hamadeh et Zakoïan (2011).

Estimation

Dans ce paragraphe nous prévoyons des résultats similaires à ceux énoncés dans la partie consacrée au modèle GARCH. Aucune hypothèse de moment n'est faite sur le processus (ε_t) et seule la condition de stationnarité stricte est nécessaire.

Le vecteur de paramètres $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{p+2q+1})' := (\omega, \alpha_1^+, \alpha_1^-, \dots, \alpha_q^+, \alpha_q^-, \beta_1, \dots, \beta_p)'$ est supposé appartenir à l'espace des paramètres $\Theta \subset]0, +\infty[\times]0, +\infty[^{p+2q}$. Le vecteur des vraies valeurs des paramètres est $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_{01}^+, \alpha_{01}^-, \dots, \alpha_{0q}^+, \alpha_{0q}^-, \beta_{01}, \dots, \beta_{0p})'$.

Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t)$ une réalisation de taille n du processus APGARCH(p, q), qui est une solution strictement stationnaire non anticipative. Conditionnellement aux valeurs initiales $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{1-q} \geq 0$ et $\tilde{\sigma}_0, \dots, \tilde{\sigma}_{1-p} \geq 0$, le quasi-maximum de vraisemblance gaussien est donné par

$$L_n(\theta) = L_n(\theta; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_t^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\tilde{\sigma}_t^2}\right),$$

où les $\tilde{\sigma}_t$ sont définis récursivement, pour $t \geq 1$, par

$$\tilde{\sigma}_t^\delta = \tilde{\sigma}_t^\delta(\theta) = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{\delta} + \alpha_i^- (-\varepsilon_{t-i}^-)^{\delta} + \sum_{j=1}^p \beta_j \tilde{\sigma}_{t-j}^\delta.$$

L'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de θ est défini comme toutes solutions mesurables $\hat{\theta}_n$ de

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta) = \arg \min_{\theta \in \Theta} \tilde{l}_n(\theta), \quad (1.6)$$

où

$$\tilde{l}_n(\theta) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t \quad \text{et} \quad \tilde{l}_t = \frac{\varepsilon_t^2}{\tilde{\sigma}_t^2} + \ln(\tilde{\sigma}_t^2).$$

Propriétés asymptotiques

Soient $\mathcal{A}_\theta^+(z) = \sum_{i=1}^q \alpha_i^+ z^i$, $\mathcal{A}_\theta^-(z) = \sum_{i=1}^q \alpha_i^- z^i$ et $\mathcal{B}_\theta(z) = 1 - \sum_{j=1}^p \beta_j z^j$. Par convention $\mathcal{A}_\theta^+(z) = \mathcal{A}_\theta^-(z) = 0$ si $q = 0$ et $\mathcal{B}_\theta(z) = 1$ si $p = 0$. Avant d'énoncer la consistance forte de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance, les hypothèses suivantes sont faites (ces hypothèses remplacent celles faites dans le paragraphe 1.1).

H1' : $\theta_0 \in \Theta$ et Θ est un compact.

H2' : $\mathbb{E}[\eta_t^2] = 1$ et $\mathbb{P}(\eta_t > 0) \in]0, 1[$. De plus, si $\mathbb{P}(\eta_t \in \Gamma) = 1$ pour un ensemble Γ , alors Γ a un cardinal $|\Gamma| > 2$.

H3' : $\gamma(C_0) < 0$ et $\forall \theta \in \Theta$, $\sum_{j=1}^p \beta_j < 1$.

H4' : si $p > 0$, $\mathcal{B}_{\theta_0}(z)$ n'a pas de racine commune avec $\mathcal{A}_{\theta_0}^+(z)$ et $\mathcal{A}_{\theta_0}^-(z)$. De plus, $\mathcal{A}_{\theta_0}^+(1) + \mathcal{A}_{\theta_0}^-(1) \neq 0$ et $\alpha_{0q}^+ + \alpha_{0q}^- + \beta_{0p} \neq 0$.

Notons que l'on n'a pas besoin de faire l'hypothèse que $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$. L'hypothèse **H2'** est faite pour des raisons d'identifiabilité. En particulier, $\mathbb{P}(\eta_t > 0) \in]0, 1[$ assure que le processus (ε_t) prend des valeurs positives et négatives avec une probabilité strictement positive. L'hypothèse **H3'** implique que pour les vraies valeurs θ_0 , le modèle admet une solution strictement stationnaire, mais c'est moins restrictif sur les autres valeurs de θ appartenant à l'espace des paramètres. La seconde partie de l'hypothèse implique que les racines de $\mathcal{B}_\theta(z)$ sont à l'extérieur du disque unité. L'hypothèse **H4'** est une hypothèse standard d'identifiabilité.

Nous pouvons maintenant énoncer le consistance forte.

Théorème 2.2. *Hamadeh et Zakoïan (2011)*

Soit $(\hat{\theta}_n)$ une suite d'estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance satisfaisant (1.6). Alors sous les hypothèses **H1'**–**H4'**

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \theta_0, \quad p.s.$$

lorsque n tend vers l'infini.

Il serait pratique d'approximer la suite $(\tilde{l}_t(\theta))$ par une suite stationnaire ergodique. Donc nous décrivons par $(\sigma_t^\delta)_t = \{\sigma_t^\delta(\theta)\}_t$ la solution non anticipative, ergodique et strictement stationnaire de

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{\delta} + \alpha_i^- (\varepsilon_{t-i}^-)^{\delta} + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Soit

$$\mathbf{l}_n(\theta) = \mathbf{l}_n(\theta; \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \dots) = n^{-1} \sum_{t=1}^n l_t, \quad l_t = l_t(\theta) = \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} + \ln(\sigma_t^2).$$

Pour la normalité asymptotique, il faut établir davantage d'hypothèses.

H5' : $\theta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$, $\overset{\circ}{\Theta}$ est l'intérieur de Θ .

H6' : $\kappa_\eta = \mathbb{E}[\eta_t^4] < \infty$.

L'hypothèse **H5'** empêche que certaines composantes de θ_0 soient égales à 0.

Théorème 2.3. *Hamadeh et Zakoïan (2011)*

Sous les hypothèses **H0'**–**H6'**

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \longrightarrow \mathcal{N}(0, (\kappa_\eta - 1)J^{-1}),$$

où

$$J = \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] = \frac{4}{\delta^2} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\frac{1}{\sigma_t^{2\delta}(\theta_0)} \frac{\partial \sigma_t^\delta(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial \sigma_t^\delta(\theta_0)}{\partial \theta'} \right].$$

2.2.2 Cas de la puissance inconnue

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'estimation et aux propriétés asymptotiques de l'estimateur lorsque la puissance est inconnue. Dans cette partie la notation de la puissance, ainsi que du vecteur des paramètres et de la deuxième équation du modèle changent pour différencier le cas connu du cas inconnu.

Estimation

La puissance inconnue δ est conjointement estimée avec le paramètre θ_0 . La difficulté d'estimer la puissance est l'identifiabilité. Pour que ce coefficient soit toujours identifiable, il faut effectuer une hypothèse plus forte sur le bruit, que celle faite dans le paragraphe 2.2.1. Cette hypothèse est la suivante

H7 : $\mathbb{E}[\eta_t^2] = 1$ et η_t a une densité strictement positive en un voisinage de 0.

Nous réécrivons le vecteur des paramètres comme $\vartheta := (\theta, \tau)$ que l'on considère appartenir à l'espace des paramètres $\Delta \subset]0, +\infty[\times]0, +\infty[^{p+2q} \times]0, +\infty[$. La vraie valeur du paramètre ϑ est décrite par $\vartheta_0 = (\theta_0, \delta)$.

Afin d'énoncer l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de ϑ , nous définissons récursivement $\tilde{\zeta}_t$, pour $t \geq 1$, par

$$\tilde{\zeta}_t = \tilde{\zeta}_t(\vartheta) = \left(\omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{\tau} + \alpha_i^- (-\varepsilon_{t-i}^-)^{\tau} + \sum_{j=1}^p \beta_j \tilde{\zeta}_{t-j}^{\tau} \right)^{1/\tau}.$$

L'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de ϑ est défini comme toutes solutions mesurables $\hat{\vartheta}_n$ de

$$\hat{\vartheta}_n = \arg \min_{\vartheta \in \Delta} \tilde{\mathbf{I}}_n(\vartheta) \quad (1.7)$$

où

$$\tilde{\mathbf{I}}_n(\vartheta) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t \quad \text{et} \quad \tilde{l}_t = \frac{\varepsilon_t^2}{\tilde{\zeta}_t^2} + \ln(\tilde{\zeta}_t^2).$$

Propriétés asymptotiques

Les propriétés asymptotiques de l'estimateur défini précédemment nécessitent des hypothèses comme pour le cas connu. Ces hypothèses sont semblables à celles déjà énoncées dans le cas où la puissance est connue. Il suffit de remplacer dans les hypothèses θ par ϑ et Θ par Δ .

H1'' : $\vartheta_0 \in \Delta$ et Δ est un compact.

H2'' : $\mathbb{E}[\eta_t^2] = 1$ et $\mathbb{P}(\eta_t > 0) \in]0, 1[$. De plus, si $\mathbb{P}(\eta_t \in \Gamma) = 1$ pour un ensemble Γ , alors Γ a un cardinal $|\Gamma| > 2$.

H3'' : $\gamma(C_0) < 0$ et $\forall \vartheta \in \Delta, \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$.

H4'' : si $p > 0$, $\mathcal{B}_{\vartheta_0}(z)$ n'a pas de racine commune avec $\mathcal{A}_{\vartheta_0}^+(z)$ et $\mathcal{A}_{\vartheta_0}^-(z)$. De plus, $\mathcal{A}_{\vartheta_0}^+(1) + \mathcal{A}_{\vartheta_0}^-(1) \neq 0$ et $\alpha_{0q}^+ + \alpha_{0q}^- + \beta_{0p} \neq 0$.

Avec ces hypothèses faites, nous pouvons énoncer la consistance forte de l'estimateur de ϑ .

Théorème 2.4. *Hamadeh et Zakoïan (2011)*

*Soit $(\hat{\vartheta}_n)$ une suite d'estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance satisfaisant (1.7). Alors sous les hypothèses **H1''**–**H4''***

$$\hat{\vartheta}_n \longrightarrow \vartheta_0, \quad p.s.$$

lorsque n tend vers l'infini.

Pour établir la normalité asymptotique, nous donnons les deux hypothèses supplémentaires

H5'' : $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Delta}$, $\overset{\circ}{\Delta}$ est l'intérieur de Δ .

H6'' : $\kappa_\eta = \mathbb{E}[\eta_t^4] < \infty$.

Nous définissons également pour tout t ,

$$\zeta_t = \zeta_t(\vartheta) = \left(\omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{\tau} + \alpha_i^- (-\varepsilon_{t-i}^-)^{\tau} + \sum_{j=1}^p \beta_j \zeta_{t-j}^{\tau} \right)^{1/\tau},$$

et

$$\mathbf{l}_n(\vartheta) = \mathbf{l}_n(\vartheta; \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \dots) = n^{-1} \sum_{t=1}^n l_t, \quad l_t = l_t(\vartheta) = \frac{\varepsilon_t^2}{\zeta_t^2} + \ln(\zeta_t^2).$$

Théorème 2.5. *Hamadeh et Zakoïan (2011)*

*Sous les hypothèses **H0'**, **H1''**–**H6''** et **H7***

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \longrightarrow \mathcal{N}(0, (\kappa_\eta - 1)J^{-1}),$$

où

$$J = \mathbb{E}_{\vartheta_0} \left[\frac{\partial^2 l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta \partial \vartheta'} \right] = \mathbb{E}_{\vartheta_0} \left[\frac{\partial \log(\zeta_t^2)(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \frac{\partial \log(\zeta_t^2)(\vartheta_0)}{\partial \vartheta'} \right].$$

Hamadeh et Zakoïan (2011) font deux remarques concernant le travail de Pan *et al.* (2008). La première remarque est que contrairement à eux, ils n'imposent pas une distribution symétrique pour (η_t) . De plus dans Pan *et al.* (2008) les conditions de stationnarité sont établies sur l'espace des paramètres complets, ce qui est très restrictif. Par ailleurs, il est supposé que θ_0 appartient à l'intérieur de Θ et que $\mathbb{E}[\eta_t^4] < +\infty$, ce qui n'est pas requis pour la consistance.

Une autre différence que Hamadeh et Zakoïan (2011) fait avec Pan *et al.* (2008), est sur la condition d'identifiabilité. Ils considèrent qu'il n'est pas suffisant de supposer que η_t est non dégénéré et symétriquement distribué, parce que si η_t prend seulement 2 valeurs, c'est à dire $\eta_t^+ = \eta_t^- = c$, presque sûrement, le processus σ_t est déterministe et les paramètres ne peuvent pas être identifiés.

2.3 Validation du modèle GARCH asymétrique en puissance

Une procédure de validation du modèle a été proposée dans le cas où la puissance est connue par Carbon et Francq (2011). Cet outil est basé sur les travaux réalisés par Hamadeh et Zakoïan (2011), puisqu'il est nécessaire d'établir les propriétés asymptotiques de l'estimateur pour établir le test portmanteau. Ce test est basé sur la corrélation des carrés des résidus.

Les autocovariances des carrés des résidus sont définis par

$$\hat{r}_h = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n (\hat{\eta}_t^2 - 1)(\hat{\eta}_{t-|h|}^2 - 1), \quad \hat{\eta}_t^2 = \frac{\varepsilon_t^2}{\hat{\sigma}_t^2},$$

où $|h| < n$ et $\hat{\sigma}_t = \tilde{\sigma}_t(\hat{\theta}_n)$. Pour un entier m fixé, $1 \leq m < n$, nous considérons le vecteur des $m \geq 1$ premières autocovariances résiduelles $\hat{\mathbf{r}}_m = (\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_m)'$. Soit $\hat{\kappa}_\eta$ et $\hat{J}$ les estimateurs de κ_η et J issues des propriétés asymptotiques de l'estimateur. Nous pouvons définir ces estimateurs empiriquement par

$$\hat{\kappa}_\eta = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\varepsilon_t^4}{\tilde{\sigma}_t^4(\hat{\theta}_n)}, \quad \hat{J} = \frac{4}{\delta^4} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\tilde{\sigma}_t^2(\hat{\theta}_n)} \frac{\partial \tilde{\sigma}_t^\delta(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{\sigma}_t^\delta(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta'}.$$

Les dérivées dans l'expression précédente peuvent être calculées de manière récursive pour $t > 0$ par

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_t^\delta(\theta)}{\partial \theta} = \underline{c}_t(\theta) + \sum_{j=1}^p \beta_j \frac{\partial \tilde{\sigma}_{t-j}^\delta(\theta)}{\partial \theta},$$

avec les valeurs initiales $\partial \tilde{\sigma}_t^2 / \partial \theta = 0$ pour $t = 0, \dots, 1 - p$ et

$$\underline{c}_t(\theta) = (1, (\varepsilon_{t-1}^+)^{\delta}, \dots, (\varepsilon_{t-q}^+)^{\delta}, (-\varepsilon_{t-1}^-)^{\delta}, \dots, (-\varepsilon_{t-q}^-)^{\delta}, \sigma_{t-1}^{\delta}, \dots, \sigma_{t-p}^{\delta})'.$$

Nous définissons aussi une matrice $\hat{C}_m$ de dimension $m \times (2q + p + 1)$ où l'élément (h, k) , pour $1 \leq h \leq m$ et $1 \leq k \leq 2q + p + 1$ est donné par

$$\hat{C}_m(h, k) = -\frac{2}{\delta} \frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^n (\hat{\eta}_{t-h}^2 - 1) \frac{1}{\tilde{\sigma}_t^{\delta}(\hat{\theta}_n)} \frac{\partial \tilde{\sigma}_t^{\delta}(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta_k}.$$

Pour énoncer le test portmanteau, il est nécessaire de faire les hypothèses **H1'**–**H6'** et également de renforcer l'hypothèse sur la loi de η_t pour des raisons techniques.

H8 : η_t prend au moins 3 valeurs positives et au moins 3 valeurs négatives.

L'hypothèse nulle du test est

$$\mathbb{H}_0 : \text{le processus } (\varepsilon_t) \text{ satisfait le modèle (1.3).}$$

Nous rejettons $\mathbb{H}_0$ au niveau asymptotique α lorsque

$$n \hat{\mathbf{r}}_m' \hat{D}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_m > \chi_m^2(1 - \alpha),$$

où $\chi_m^2(1 - \alpha)$ représente le quantile d'ordre $(1 - \alpha)$ de la loi du Khi-deux avec m degrés de liberté.

Théorème 2.6. *Carbon et Francq (2011)*

*Sous les hypothèses **H1'**–**H6'**, **H7**–**H8** et $\mathbb{H}_0$,*

$$n \hat{\mathbf{r}}_m' \hat{D}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_m \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_m^2,$$

avec $\hat{D} = (\hat{\kappa}_{\eta} - 1)^2 I_m - (\hat{\kappa}_{\eta} - 1) \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{C}_m'$.

3 Test Portmanteau pour le modèle APGARCH avec la puissance inconnue

Dans ce paragraphe nous développons l'outil qui permettra de valider le modèle APGARCH dans le cas où la puissance est inconnue. Pour cela nous nous basons sur le test portmanteau développé dans le paragraphe précédent.

3.1 Procédure de validation

Le test portmanteau est basé sur les autocovariances des carrés des résidus. L'hypothèse du test et les autocovariances des carrés des résidus sont définies comme dans le cas connu.

Maintenant, nous avons besoin des estimateurs de κ_{η} et J issus de la normalité asymptotique de $\hat{\vartheta}_n$, que l'on définit empiriquement par

$$\hat{\kappa}_{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\varepsilon_t^4}{\tilde{\zeta}_t^4} \quad \text{et} \quad \hat{J} = \frac{4}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{\tilde{\zeta}_t^2(\hat{\vartheta}_n)} \frac{\partial \tilde{\zeta}_t(\hat{\vartheta}_n)}{\partial \vartheta} \frac{\partial \tilde{\zeta}_t(\hat{\vartheta}_n)}{\partial \vartheta'}.$$

Pour tout $\vartheta \in \Delta$, les dérivées dans l'expression de $\hat{J}$ peuvent être calculées récursivement pour $t > 0$ par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\zeta}_t^{\tau}(\vartheta)}{\partial \theta} &= \tilde{c}_t(\vartheta) + \sum_{j=1}^p \beta_j \frac{\partial \tilde{\zeta}_{t-j}^{\tau}(\vartheta)}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \tilde{\zeta}_t(\vartheta)}{\partial \tau} &= \left\{ -\frac{1}{\tau^2} \log(\tilde{\zeta}_t^{\tau}(\vartheta)) + \frac{1}{\tau} \frac{1}{\tilde{\zeta}_t^{\tau}(\vartheta)} \left[\sum_{i=1}^q \alpha_i^+ \log(\varepsilon_{t-i}^+) (\varepsilon_{t-i}^+)^{\tau} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_i^- \log(-\varepsilon_{t-i}^-) (-\varepsilon_{t-i}^-)^{\tau} + \sum_{j=1}^p \beta_j \frac{\partial \tilde{\zeta}_{t-j}^{\tau}(\vartheta)}{\partial \tau} \right] \right\} \tilde{\zeta}_t(\vartheta), \end{aligned}$$

Nous initialisons les dérivées $\partial \tilde{\zeta}_t(\vartheta)/\partial \vartheta$ par 0, pour tout $t = 0, \dots, 1 - p$ et

$$\tilde{\zeta}_t(\vartheta) = (1, (\varepsilon_{t-1}^+)^{\tau}, \dots, (\varepsilon_{t-q}^+)^{\tau}, (-\varepsilon_{t-1}^-)^{\tau}, \dots, (-\varepsilon_{t-q}^-)^{\tau}, \tilde{\zeta}_{t-1}^{\tau}, \dots, \tilde{\zeta}_{t-p}^{\tau})'. \quad (1.8)$$

Par convention, $\log(\varepsilon_t^+) = 0$ si $\varepsilon_t \leq 0$ et respectivement $\log(-\varepsilon_t^-) = 0$ si $\varepsilon_t \geq 0$.

Nous définissons la matrice $\hat{C}_m$ de dimension $m \times (2q + p + 2)$, où l'élément (h, k) pour $1 \leq h \leq m$ et $1 \leq k \leq 2q + p + 2$ est donné par

$$\hat{C}_m(h, k) = -\frac{2}{n} \sum_{t=h+1}^n (\hat{\eta}_{t-h}^2 - 1) \frac{1}{\tilde{\zeta}_t(\hat{\vartheta}_n)} \frac{\partial \tilde{\zeta}_t(\hat{\vartheta}_n)}{\partial \vartheta_k}. \quad (1.9)$$

Le résultat suivant est établi dans le cas où la puissance est estimée en même temps que les autres paramètres. Avant de pouvoir l'énoncer, il est nécessaire de faire les hypothèses **H1''**–**H6''** et également de renforcer l'hypothèse sur la loi de η_t .

H9 : η_t prend au moins 11 valeurs positives et au moins 11 valeurs négatives.

Théorème 3.1.

Sous les hypothèses **H1''**–**H6''**, **H9** et $\mathbb{H}_0$, la matrice $\hat{D} = (\hat{\kappa}_{\eta} - 1)^2 I_d - (\hat{\kappa}_{\eta} - 1) \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{C}_m'$ converge en probabilité vers la matrice définie positive D (donnée dans la preuve du Théorème 3.1 en Annexe A) et nous avons

$$n \hat{\mathbf{r}}_m' \hat{D}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_m \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_m^2.$$

L'hypothèse nulle associée au modèle APGARCH(p, q) défini en (1.3) est alors rejetée au niveau asymptotique α lorsque

$$n \hat{\mathbf{r}}_m' \hat{D}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_m > \chi_m^2(1 - \alpha), \quad (1.10)$$

où $\chi_m^2(1 - \alpha)$ représente le quantile d'ordre $(1 - \alpha)$ de la loi du Khi-deux avec m degrés de liberté.

Les grandes lignes de la preuve seront données à la fin de ce Chapitre, et la preuve détaillée sera donnée en Annexe A.

3.2 Illustrations par simulations

Par des simulations de Monte-Carlo, nous illustrons les propriétés du test introduit précédemment. Les simulations sont réalisées avec le logiciel RStudio (<https://www.rstudio.com>) dans le langage de programmation Rcpp. Nous simulons $N = 1000$ répliques indépendantes pour le modèle APGARCH(p, q) défini en (1.3) avec les ordres $(p, q) \in \{0, 1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$. La loi de η_t est une loi de Student avec 9 degrés de liberté, standardisée pour obtenir une variance égale à 1. Le vecteur des paramètres utilisé pour simuler le modèle APGARCH(1, 1) est $\vartheta_{0,11} := (0.04, 0.02, 0.13, 0.85, 1)'$. Pour les autres modèles, le vecteur des paramètres $\vartheta_{0,pq}$ est proche de $\vartheta_{0,11}$ de telle sorte que l'existence du moment d'ordre 4 soit satisfaite. La taille des observations est $n = 5000$, ce qui correspond dans la pratique à la taille d'une série financière journalière.

Pour chacune de ces N répliques et pour chaque modèle APGARCH(p, q) considéré, nous utilisons la méthode du quasi-maximum de vraisemblance pour estimer les coefficients correspondants $\vartheta_{0,pq}$ et nous y appliquons le test portmanteau aux carrés des résidus pour différentes valeurs de m , où m est le nombre d'autocorrélations utilisées dans la statistique du test portmanteau. Au risque de première espèce $\alpha = 5\%$, l'intervalle de confiance du risque α est $[3.6\%, 6.4\%]$ avec probabilité 95% et $[3.2\%, 6.8\%]$ avec probabilité 99%.

Le tableau de gauche dans la Table 1.1, représente le nombre de rejets en pourcentage des ordres p et q pour les modèles APGARCH(p, q) correspondants. Le test est réalisé au niveau $\alpha = 5\%$. Comme nous pouvions nous y attendre, le pourcentage de rejet appartient à l'intervalle de confiance avec

une probabilité de 95% et 99%, sauf pour quelques rares valeurs. Par conséquent, le test proposé contrôle bien le risque de première espèce.

La tableau de droite dans la Table 1.1 rassemble les fréquences relatives de rejet (également en pourcentage) des N répliquions indépendantes dans le cas où l'hypothèse nulle est le modèle APGARCH(2, 2), avec le paramètre $\vartheta_{0,22} = (0.05, 0.05, 0.1, 0.1, 0.2, 0.1, 0.4, 1)'$. Dans ce cas la puissance δ est égale à 1 et est estimée en même temps que les autres paramètres. Dans Carbon et Francq (2011) ils simulent le modèle APGARCH(1, 1) avec $\delta = 2$ et ils appliquent le test pour différentes valeurs de δ . Lorsque δ est supérieur à 2, le test ne rejette pas l'hypothèse nulle. Contrairement à eux, nous estimons la puissance δ et par conséquent nous ne pouvons pas comparer nos simulations.

risque	(p, q)	m						m					
		2	4	6	8	10	12	2	4	6	8	10	12
$\alpha = 5\%$	(0, 1)	4.5	4.7	4.2	5.9	6.3	5.5	99.2	99.1	98.6	98.7	99.0	98.3
	(1, 1)	4.7	4.6	3.8	6.9	7.4	6.0	83.4	82.7	75.9	71.6	63.8	62.2
	(1, 2)	4.3	4.1	5.3	5.5	5.9	5.2	9.1	22.2	21.8	19.8	19.2	18.3
	(1, 3)	5.5	6.5	6.2	6.3	6.2	8.0	19.4	49.8	48.1	44.9	40.2	40.5
	(2, 1)	4.7	6.2	4.7	6.3	6.1	6.5	93.5	93.5	91.2	88.2	83.8	85.5
	(2, 2)	5.0	4.0	4.6	6.1	7.4	7.4	5.0	4.0	4.6	6.1	7.4	7.4

TABLE 1.1 – Partie gauche : Fréquence relative (en %) de rejet pour différents modèles APGARCH(p, q) avec la puissance estimée
Partie droite : Fréquence relative (en %) de rejet lorsque le modèle est un APGARCH(2, 2)

La table 1.2 présente les fréquences de rejet en pourcentage pour le modèle APGARCH(1, 1) lorsque la puissance $\delta \in [0.5, 3]$ est estimée. Le paramètre θ_0 utilisé pour simuler les différentes trajectoires est $\theta_0 = (0.04, 0.02, 0.13, 0.85)'$. Nous arrivons aux mêmes conclusions que pour la Table 1, et le test contrôle bien le risque de première espèce.

risque	(δ)	m						risque	(δ)	m					
		2	4	6	8	10	12			2	4	6	8	10	12
$\alpha = 1\%$	0.5	1.0	1.2	1.1	1.2	2.3	2.4	$\alpha = 5\%$	0.5	4.7	5.6	4.8	6.0	6.0	6.4
	1	1.3	1.3	1.4	1.7	1.3	1.7		1	3.2	4.4	5.8	5.4	5.4	5.1
	1.5	1.4	1.2	1.0	1.7	1.3	1.7		1.5	4.4	4.2	5.5	6.0	4.6	5.1
	2	1.8	1.4	1.0	1.4	1.8	1.7		2	5.2	4.7	5.5	5.1	5.7	7.4
	2.5	1.1	1.1	0.9	1.8	1.8	1.1		2.5	3.7	4.9	4.9	4.3	5.0	5.3
	3	1.3	1.9	1.2	1.7	1.7	1.6		3	3.8	3.4	4.8	5.4	4.9	6.6

TABLE 1.2 – Fréquences relatives (en %) de rejet pour le modèle APGARCH(1, 1) avec les différentes valeurs simulées de la puissance
Partie gauche : Le risque est fixé à $\alpha = 1\%$; Partie droite : Le risque est fixé à $\alpha = 5\%$

Preuve

Dans cette partie nous donnons les grandes lignes de la preuve du théorème 3.1. Cette preuve sera détaillée en annexe (voir annexe A).

Pour tout $\vartheta \in \Delta$, soit $\tilde{\zeta}_t(\vartheta)$ une solution strictement stationnaire et non anticipative de

$$\zeta_t(\vartheta) = \left(\omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{\tau} + \alpha_i^- (-\varepsilon_{t-i}^-)^{\tau} + \sum_{j=1}^p \beta_j \zeta_{t-j}^{\tau}(\vartheta) \right)^{1/\tau}.$$

La matrice J peut être réécrite comme

$$J = \mathbb{E}_{\vartheta_0} \left[\frac{1}{\zeta_t^4(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta'} \right].$$

Démonstration du théorème 3.1

La preuve du test portmanteau peut se décomposer en 4 étapes majeures.

Nous introduisons le vecteur des premières m autocovariances $\mathbf{r}_m = (r_1, \dots, r_m)'$ où le h -ième élément est défini comme

$$r_h = \frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^n s_t s_{t-h}, \quad \text{avec } s_t = \eta_t^2 - 1 \text{ et } 0 < h < m.$$

Soit $s_t(\vartheta) = \eta_t^2(\vartheta) - 1$ avec $\eta_t(\vartheta) = \varepsilon_t / \zeta_t(\vartheta)$ et $\tilde{s}_t(\vartheta) = \tilde{\eta}_t^2(\vartheta) - 1$ avec $\tilde{\eta}_t(\vartheta) = \varepsilon_t / \tilde{\zeta}_t(\vartheta)$. Soit $r_h(\vartheta)$ obtenu en remplaçant η_t par $\eta_t(\vartheta)$ dans r_h et $\tilde{r}_h(\vartheta)$ en remplaçant η_t en $\tilde{\eta}_t(\vartheta)$ dans r_h . Les vecteurs $\mathbf{r}_m(\vartheta) = (r_1(\vartheta), \dots, r_m(\vartheta))'$ et $\tilde{\mathbf{r}}_m(\vartheta) = (\tilde{r}_1(\vartheta), \dots, \tilde{r}_m(\vartheta))'$ sont tels que $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m(\theta_0)$ et $\hat{\mathbf{r}}_m = \tilde{\mathbf{r}}_m(\hat{\vartheta}_n)$.

Les 4 étapes pour aboutir au résultat sont :

- (i) Impact asymptotique des valeurs initiales inconnues sur la statistique $\hat{\mathbf{r}}_m$.

$$\sqrt{n} \|\mathbf{r}_m - \tilde{\mathbf{r}}_m\| = o_{\mathbb{P}}(1), \quad \sup_{\vartheta \in \Delta} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_m}{\partial \vartheta} \right\| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Les valeurs initiales inconnues n'ont pas d'impact asymptotique sur la statistique $\hat{\mathbf{r}}_m$.

- (ii) Loi asymptotique de $\sqrt{n} \hat{\mathbf{r}}_m$.

La loi limite de $\sqrt{n} \hat{\mathbf{r}}_m$ est donnée par $\sqrt{n} \hat{\mathbf{r}}_m \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, D)$ où D est une matrice définie comme suit $D = (\kappa_{\eta} - 1)^2 I_m - (\kappa_{\eta} - 1) C_m J^{-1} C_m'$.

- (iii) Inversibilité de la matrice D .
- (iv) Convergence de la matrice D .

Chapitre 2

Le modèle CCC-APGARCH

Résumé

Dans ce chapitre nous présenterons une extension du modèle CCC-AGARCH. Cette extension consiste à ajouter la puissance afin de modéliser par une puissance quelconque de l'écart-type. Les conditions d'identifiabilité et de stationnarité sont établies, ainsi que l'estimation et les propriétés asymptotiques liées à cet estimateur.

Sommaire

Introduction	31
1 Le modèle CCC-APGARCH	33
1.1 Présentation du modèle	33
1.2 Stationnarité du modèle	33
1.3 Identifiabilité du modèle	35
2 Estimation et propriétés asymptotiques	36
2.1 Puissance connue	36
2.1.1 Estimation du modèle	36
2.1.2 Propriétés asymptotiques	37
2.2 Puissance inconnue	38
2.2.1 Estimation du modèle	38
2.2.2 Propriétés asymptotiques	39
3 Illustrations par simulations	39
Preuves	43

Introduction

Bien que la modélisation de la volatilité des séries univariées est importante et largement étudiée, en économétrie, l'application des modèles univariés est très restrictive. Aujourd'hui, il semble incontestable de considérer que de l'information est perdue si l'on se restreint à ce cas. Lorsque plusieurs séries sont disponibles sur la même période de temps, il est utile de les étudier simultanément en les considérant comme une composante d'un vecteur et donc avoir un processus multivarié. Il n'y a pas d'extension de modèle univarié direct. C'est la raison pour laquelle il existe une multitude de modèles multivariés dans le cas GARCH, formulée par Nelson (1991), Engle et Kroner (1995a), Engle (2002) et McAleer *et al.* (2008), pour n'en citer que quelques uns. Bauwens *et al.* (2006) ont récemment fait une revue de la littérature sur les modèles GARCH multivariés afin d'en faire une liste exhaustive. Parmi tous ces modèles multivariés, celui qui paraît être le plus populaire est le modèle GARCH multivarié à Corrélation Conditionnelle Constante (CCC). Ce modèle a été introduit par Bollerslev (1990) mais a été étendu par Jeantheau (1998).

Avec la modélisation moderne des séries financières, le modèle CCC-GARCH présente quelques faiblesses puisqu'il n'est pas doté de l'effet de levier. Il est maintenant largement montré et adopté le

fait que généralement, le rendement des séries financières n'est pas symétrique et que les rendements négatifs ont un effet plus grand sur la volatilité que les rendements positifs. Cette extension est réalisée par Francq et Zakoïan (2012) qui inclut le modèle CCC-GARCH de Bollerslev (1990) et sa généralisation par Jeantheau (1998). Maintenant une des extensions possibles, serait de ne plus modéliser par la volatilité par la matrice de variance conditionnelle, mais par une puissance quelconque de l'écart-type, comme c'est le cas pour le modèle univarié APGARCH.

Dans la pratique, l'estimation de données réelles par le modèle APGARCH donne des résultats intéressants sur la puissance. En effet, comme nous pouvons le constater sur la Table 2.1, la puissance n'est pas nécessairement égale à 1 ou 2, ni même identique pour toutes les séries financières. Pour cela, nous considérons les marchés boursiers journaliers français (CAC 40), américain (S&P 500), britannique (FTSE 100) et allemand (DAX). Les observations couvrent la période allant de janvier 1990 à mai 2018, ce qui correspond à environ 7000 observations. Les dates peuvent sensiblement varier selon les marchés boursiers.

Marchés financiers	$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}^+$	$\hat{\alpha}^-$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$
CAC 40	0.02548	0.01227	0.12013	0.92893	1.05414
S&P 500	0.02417	0.00524	0.15504	0.91499	1.07584
FTSE 100	0.00211	0.00000	0.12814	0.94145	1.62971
DAX	0.02916	0.01390	0.12016	0.92586	1.19024

TABLE 2.1 – Estimation des séries financières avec le modèle APGARCH(1, 1)

Dans le cas univarié, seule une puissance est nécessaire à la construction du modèle, mais ceci n'est pas nécessairement vrai pour le cas multivarié. Il n'est pas impossible de considérer une puissance pour l'ensemble des dimensions, mais d'après la Table 2.1, nous nous rendons compte que pour les 4 séries utilisées ici, la puissance δ estimée est différente. Considérer une seule puissance serait donc inefficace dans la modélisation.

L'extension du modèle proposé est le modèle GARCH asymétrique en puissance à corrélations conditionnelles constantes, noté CCC-APGARCH ou encore $\underline{\delta} - CCC - AGARCH$, où $\underline{\delta}$ est un vecteur de puissance de dimension d , ce qui correspond au nombre de séries utilisées dans la modélisation. Ce modèle regroupe à la fois le modèle de Bollerslev (1990) ainsi que ces différentes généralisations et extensions telles que le modèle développé par Francq et Zakoïan (2012). Le plus grand avantage de ce modèle est sa simplicité dans l'interprétation des coefficients qui est l'une des plus classiques tel le modèle GARCH univarié. Sa variance conditionnelle possède une écriture simple et explicite, tout comme sa condition de stationnarité stricte.

Le principal résultat de ce modèle est de proposer une extension du modèle avec une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution strictement stationnaire. Le second résultat est de donner une procédure d'estimation avec ses propriétés asymptotiques. L'estimation est basée sur la méthode la plus commune pour ces modèles qui est celle du quasi-maximum de vraisemblance. Plusieurs théories sur les propriétés asymptotiques des modèles GARCH multivariés sont établies. Nous pouvons noter que Jeantheau (1998) a donné une condition générale pour la consistance forte de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance pour des modèles GARCH multivariés. Comte et Lieberman (2003) montrent la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance pour le modèle BEKK (Baba-Engle-Kraft-Kroner). Les résultats asymptotiques sont établis par Ling et McAleer (2003) pour la formulation CCC d'un ARMA-GARCH. Il y a également, Bardet et Wintenberger (2009) qui ont étudié les propriétés asymptotiques de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance pour une classe générale de processus multidimensionnel. Plus récemment, Francq et Zakoïan (2016) ont établi l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance pour un modèle GARCH multivarié avec une corrélation stochastique sous l'hypothèse que le modèle soit estimable équation-par-équation. Cette procédure d'estimation a l'avantage

pratique d'être beaucoup plus performante en temps. En revanche, elle n'est pas applicable pour l'ensemble des modèles.

Une première partie est consacrée à la présentation du modèle CCC-APGARCH, ainsi qu'au résultat sur sa condition de stationnarité et d'identifiabilité. Une seconde partie est réservée à l'estimation et à l'étude des propriétés asymptotiques de l'estimateur obtenu. Enfin, une troisième partie présentera quelques simulations.

Dans tout ce chapitre nous adopterons la notation suivante $\underline{u}^{\underline{d}} := (u_1^{d_1}, \dots, u_{\kappa}^{d_{\kappa}})'$ pour $\underline{u}, \underline{d} \in \mathbb{R}^{\kappa}$.

1 Le modèle CCC-APGARCH

1.1 Présentation du modèle

Soit (η_t) une suite de variables iid de loi η . On dit que ε_t est un processus CCC-APGARCH s'il vérifie

$$\begin{cases} \varepsilon_t = H_t^{1/2} \eta_t, \\ H_t = D_t R_0 D_t, \quad D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{1t}}, \dots, \sqrt{h_{dt}}), \\ \underline{h}_t^{\delta/2} = \underline{\omega}_0 + \sum_{i=1}^q \left\{ A_{0i}^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{\delta/2} + A_{0i}^- (\varepsilon_{t-i}^-)^{\delta/2} \right\} + \sum_{j=1}^p B_{0j} \underline{h}_{t-j}^{\delta/2}, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\underline{h}_t = (h_{1t}, \dots, h_{dt})'$ et avec $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \min(0, x)$,

$$\varepsilon_t^+ = \left(\{\varepsilon_{1,t}^+\}^2, \dots, \{\varepsilon_{d,t}^+\}^2 \right)', \quad \varepsilon_t^- = \left(\{-\varepsilon_{1,t}^-\}^2, \dots, \{-\varepsilon_{d,t}^-\}^2 \right)',$$

$\underline{\omega}_0$ et $\underline{\delta}$ sont des vecteurs de dimension $d \times 1$ composés de coefficients strictement positifs, A_{0i}^+, A_{0i}^- et B_{0j} sont des matrices de dimension $d \times d$ composées de coefficients positifs et R_0 est la matrice de corrélation.

H0 : (η_t) est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{E}|\eta_t|^r < +\infty$ pour $r > 0$.

Les coefficients qui composent ce modèle sont ceux des vecteurs $\underline{\omega}_0$ et $\underline{\delta}$, ainsi que les matrices A_{0i}^+, A_{0i}^- et B_{0j} et les coefficients du triangle inférieur de la matrice de corrélation exceptée la diagonale. Le nombre de coefficients inconnus du modèle (2.1) est noté :

$$s_0 = 2d + d^2(2q + p) + \frac{d(d-1)}{2}.$$

Ce modèle a l'avantage de généraliser un bon nombre de processus déjà connus. Si l'on considère que les matrices A_{0i}^+ et A_{0i}^- sont égales, le modèle devient le modèle introduit par Higgins et Bera (1992) qui est le modèle CCC-PARCH, pour Power-Transformed ARCH. Si en plus nous fixons la puissance égale à 2, $\underline{\delta} = (2, \dots, 2)'$, nous obtenons le modèle CCC-AGARCH proposé par Jeantheau (1998). En revanche, si l'on ne considère plus l'égalité des matrices A_{0i}^+ et A_{0i}^- , le modèle deviendrait celui de Francq et Zakoïan (2012). Maintenant si l'on se restreint au cas univarié et que l'on fixe $d = 1$, le modèle devient celui introduit par Pan *et al.* (2008), à savoir le modèle APGARCH.

L'interprétation des coefficients du modèle est naturelle, à l'exception de la puissance. La matrice H_t s'interprète comme étant la variance conditionnelle de ε_t . Le vecteur $\underline{\omega}_0$ s'interprète comme étant la volatilité plancher, les matrices A_{0i}^+ et A_{0i}^- comme les poids des rendements positifs et négatifs passés et enfin la matrice B_{0j} comme la persistance des chocs.

1.2 Stationnarité du modèle

Une condition suffisante pour la stationnarité stricte du modèle CCC-AGARCH(p, q) est donnée par Francq et Zakoïan (2012). Pour le modèle (2.1) la condition de stationnarité stricte est établie

de la même façon. Pour ce faire, nous réécrivons la première équation du modèle (2.1) comme

$$\varepsilon_t = D_t \tilde{\eta}_t, \quad \text{où } \tilde{\eta}_t = (\tilde{\eta}_{1,t}, \dots, \tilde{\eta}_{d,t}) = R_0^{1/2} \eta_t. \quad (2.2)$$

En utilisant la troisième équation du modèle (2.1), nous écrivons

$$(\varepsilon_t^\pm)^{\delta/2} = (\Upsilon_t^{\pm,(\delta)}) \underline{h}_t^{\delta/2}, \quad \text{où } \Upsilon_t^{\pm,(\delta)} = \text{diag} \left((\tilde{\eta}_{1,t}^\pm)^{\delta_1}, \dots, (\tilde{\eta}_{d,t}^\pm)^{\delta_d} \right), \quad (2.3)$$

où $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)'$. Pour l'étude de la condition de stationnarité stricte, nous introduisons l'écriture matricielle pour le modèle (2.1)

$$\underline{z}_t = \underline{b}_t + C_t \underline{z}_{t-1},$$

où

$$\underline{z}_t = \left(\left\{ (\varepsilon_t^+)^{\delta/2} \right\}', \dots, \left\{ (\varepsilon_{t-q+1}^+)^{\delta/2} \right\}', \left\{ (\varepsilon_t^-)^{\delta/2} \right\}', \dots, \left\{ (\varepsilon_{t-q+1}^-)^{\delta/2} \right\}', \left\{ \underline{h}_t^{\delta/2} \right\}', \dots, \left\{ \underline{h}_{t-p+1}^{\delta/2} \right\}' \right)',$$

$$\underline{b}_t = \left(\left\{ (\Upsilon_t^{+,(\delta)}) \underline{\omega}_0 \right\}', 0'_{d(q-1)}, \left\{ (\Upsilon_t^{-,(\delta)}) \underline{\omega}_0 \right\}', 0'_{d(q-1)}, \{\underline{\omega}_0\}', 0'_{d(p-1)} \right)'$$

et

$$C_t = \begin{pmatrix} \Upsilon_t^{+,(\delta)} A_{01;q}^+ & \Upsilon_t^{+,(\delta)} A_{01;q}^- & \Upsilon_t^{+,(\delta)} B_{01;p} \\ I_{d(q-1)} & 0_{d(q-1) \times d(p+q+1)} & \\ \Upsilon_t^{-,(\delta)} A_{01;q}^+ & \Upsilon_t^{-,(\delta)} A_{01;q}^- & \Upsilon_t^{-,(\delta)} B_{01;p} \\ 0_{d(q-1) \times dq} & I_{d(q-1)} & 0_{d(q-1) \times d(p-1)} \\ A_{01;q}^+ & A_{01;q}^- & B_{01;p} \\ 0_{d(p+q+1) \times d(q-1)} & & I_{d(p-1)} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Nous décrivons par $A_{01;q}^+ = (A_{01}^+ \dots A_{0q}^+)$, $A_{01;q}^- = (A_{01}^- \dots A_{0q}^-)$ et $B_{01;p} = (B_{01} \dots B_{0p})$ des matrices de dimension $d \times pd$. La matrice C_t est de dimension $(p+2q)d \times (p+2q)d$.

Soit $\gamma(\mathbf{C}_0)$, le plus grand exposant de Lyapunov de la suite $\mathbf{C}_0 = \{C_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Ceci est défini par

$$\gamma(\mathbf{C}_0) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} [\log \|C_t C_{t-1} \dots C_1\|] = \inf_{t \geq 1} \frac{1}{t} \mathbb{E} [\log \|C_t C_{t-1} \dots C_1\|].$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant comme condition de stationnarité explicite. Ce théorème, ainsi que sa preuve sont les mêmes que dans Francq et Zakoïan (2012).

Théorème 1.1. (*Stationnarité stricte*)

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution non anticipative et strictement stationnaire du modèle (2.1) et $\gamma(\mathbf{C}_0) < 0$. Cette solution stationnaire est non anticipative, lorsque $\gamma(\mathbf{C}_0) < 0$, et est unique et ergodique.

Les deux corollaires suivants sont des conséquences de la condition nécessaire pour la stationnarité stricte. Soit A une matrice carré et $\rho(A)$ le rayon spectral de la matrice A , qui est le plus grand module des ses valeurs propres.

Corollaire 1.

Soit $\mathcal{B}_0$ une matrice de polynômes définie par $\mathcal{B}_0(z) = I_d - zB_{01} - \dots - z^p B_{0p}$ pour $z \in \mathbb{C}$ et nous définissons

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} B_{01;p} \\ I_{(p-1)d} & 0_{(p-1)d \times 1} \end{pmatrix}.$$

Alors, si $\gamma(\mathbf{C}_0) < 0$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Les racines de $\det(\mathcal{B}_0(z))$ sont à l'extérieur du disque unité,
- (ii) $\rho(\mathbf{B}_0) < 1$.

Corollaire 2.

Nous supposons que $\gamma(\mathbf{C}_0) < 0$. Soit ε_t , une solution non anticipative et strictement stationnaire du modèle (2.1). Il existe $s > 0$ tel que $\mathbb{E} \|\underline{h}_t^{\delta/2}\|^s < \infty$ et $\mathbb{E} \|\underline{\varepsilon}_t^{\delta/2}\|^s < \infty$.

1.3 Identifiabilité du modèle

Dans cette partie, nous nous intéressons à la condition d'identifiabilité du modèle (2.1) qui assure l'unicité des paramètres pour la représentation du modèle CCC-APGARCH. Cette étape est cruciale avant celle de l'estimation puisqu'elle assurera que la procédure d'estimation retournera les vraies valeurs des paramètres inconnus à estimer.

Le paramètre ϑ est défini par

$$\vartheta := (\underline{\omega}', \alpha_1^{+'}, \dots, \alpha_q^{+'}, \alpha_1^{-'}, \dots, \alpha_q^{-'}, \beta_1', \dots, \beta_p', \underline{\tau}', \rho')',$$

où α_i^+ et α_i^- sont définis par $\alpha_i^\pm = \text{vec}(A_i^\pm)$ pour $i = 1, \dots, q$, $\beta_j = \text{vec}(B_j)$ pour $j = 1, \dots, p$ et $\rho = (\rho_{21}, \dots, \rho_{d1}, \rho_{32}, \dots, \rho_{d2}, \dots, \rho_{dd-1})'$ tels que les ρ_{ij} sont les éléments de la matrice R . Le paramètre ϑ appartient à l'espace des paramètres

$$\Delta \subset]0, +\infty[^d \times [0, \infty[^{d^2(2q+p)} \times]0, +\infty[^d \times]-1, 1[^{d(d-1)/2}.$$

Les valeurs inconnues du paramètre sont notées par

$$\vartheta_0 := (\underline{\omega}'_0, \alpha_{01}^{+'}, \dots, \alpha_{0p}^{+'}, \alpha_{01}^{-'}, \dots, \alpha_{0p}^{-'}, \beta_{01}', \dots, \beta_{0q}', \underline{\delta}', \rho'_0)'.$$

Pour la suite, nous adopterons la notation suivante. Pour une matrice A , nous écrirons A_0 lorsque les coefficients de la matrice sont évalués en la vraie valeur et $\vartheta = \vartheta_0$.

Soit $\mathcal{A}^+(L) = \sum_{i=1}^q A_i^+ L^i$, $\mathcal{A}^-(L) = \sum_{i=1}^q A_i^- L^i$ et $\mathcal{B}(L) = I_d - \sum_{j=1}^p B_j L^j$ où L est l'opérateur de retard. Par convention $\mathcal{A}^\pm = 0$ si $q = 0$ et $\mathcal{B}(L) = I_d$ si $p = 0$.

Si les racines de $\det(\mathcal{B}_0(L)) = 0$ sont à l'extérieur du disque unité de la forme compacte $\mathcal{B}_0(L) \underline{h}_t^{\delta/2} = \underline{\omega}_0 + \mathcal{A}_0^+(L)(\underline{\varepsilon}_t^+)^{\delta/2} + \mathcal{A}_0^-(L)(\underline{\varepsilon}_t^-)^{\delta/2}$, nous avons :

$$\underline{h}_t^{\delta/2} = \mathcal{B}_0(1)^{-1} \underline{\omega}_0 + \mathcal{B}_0(L)^{-1} \mathcal{A}_0^+(L)(\underline{\varepsilon}_t^+)^{\delta/2} + \mathcal{B}_0(L)^{-1} \mathcal{A}_0^-(L)(\underline{\varepsilon}_t^-)^{\delta/2}. \quad (2.5)$$

Le paramètre ϑ_0 est dit identifiable si (2.5) ne reste pas vrai lorsque ϑ_0 est remplacé par $\vartheta \neq \vartheta_0$ appartenant à Δ .

Supposons que les polynômes $\mathcal{A}_0^+$, $\mathcal{A}_0^-$ et $\mathcal{B}_0$ n'ont pas de racine commune. Dans le cas multivarié, cela ne suffit pas à garantir l'identifiabilité du paramètre, car il pourrait exister un autre triplet $(\mathcal{A}_0^+, \mathcal{A}_0^-, \mathcal{B}_0)$ tel que

$$\mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}^+ = \mathcal{B}_0^{-1} \mathcal{A}_0^+ \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}^- = \mathcal{B}_0^{-1} \mathcal{A}_0^-. \quad (2.6)$$

Cette condition est équivalente à l'existence d'un opérateur $U(L)$ tel que

$$\mathcal{A}^+(L) = U(L) \mathcal{A}_0^+(L), \quad \mathcal{A}^-(L) = U(L) \mathcal{A}_0^-(L) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(L) = U(L) \mathcal{B}_0(L).$$

La matrice $U(L)$ est unimodulaire si $\det(U(L))$ est une constante différente de zéro. Si le seul facteur commun aux polynômes $P(L)$ et $Q(L)$ est unimodulaire, c'est-à-dire si :

$$P(L) = U(L)P_1(L), \quad Q(L) = U(L)Q_1(L) \Rightarrow \det(U(L)) = c,$$

alors les polynômes $P(L)$ et $Q(L)$ sont coprimés à gauche et la constante c est différente de 0.

Mais dans le cas vectoriel, supposer que $\mathcal{A}_0^+$, $\mathcal{A}_0^-$ et $\mathcal{B}_0$ sont coprimés à gauche n'est pas suffisant pour considérer que (2.6) n'a pas de solution pour $\vartheta \neq \vartheta_0$ (voir Francq et Zakoïan (2012)).

Pour obtenir une condition moins restrictive, nous définissons pour chaque colonne i des opérateurs matriciels $\mathcal{A}_0^+$, $\mathcal{A}_0^-$ et $\mathcal{B}_0$, leurs degrés maximaux respectifs $q_i^+(\vartheta)$, $q_i^-(\vartheta)$, et $p_i(\vartheta)$. Nous supposons que les valeurs maximales de ces ordres soient imposées, c'est-à-dire :

$$\forall \vartheta \in \Delta, \forall i = 1, \dots, d, \quad q_i^+(\vartheta) \leq q_i^+, \quad q_i^-(\vartheta) \leq q_i^- \quad \text{et} \quad p_i(\vartheta) \leq p_i \quad (2.7)$$

où $q_i^+ \leq q$, $q_i^- \leq q$ et $p_i \leq p$ sont des entiers fixés.

Nous décrivons $a_{q_i^+}^+(i)$ le vecteur colonne des coefficients $L^{q_i^+}$, $a_{q_i^-}^-(i)$ le vecteur colonne des coefficients $L^{q_i^-}$ dans la colonne i de $\mathcal{A}_0^+$, respectivement de $\mathcal{A}_0^-$ et $b_{p_i}(i)$ le vecteur colonne des coefficients L^{p_i} dans la colonne i de $\mathcal{B}_0$.

Proposition 1.1. (*Condition d'identifiabilité*)

Si les matrices polynomiales $\mathcal{A}_0^+(L), \mathcal{A}_0^-(L)$ et $\mathcal{B}_0(L)$ sont coprimales à gauche, $\mathcal{A}_0^+(1) + \mathcal{A}_0^-(1) \neq 0$ et si la matrice

$$M(\mathcal{A}_0^+(L), \mathcal{A}_0^-(L), \mathcal{B}_0(L)) = \begin{bmatrix} a_{q_1^+}^+(1) \dots a_{q_d^+}^+(d) a_{q_1^-}^-(1) \dots a_{q_d^-}^-(d) b_{p_1}(1) \dots b_{p_d}(d) \end{bmatrix}$$

est de plein rang d , sous les contraintes (2.7) avec $q_i^+ = q_i^+(\vartheta_0), q_i^- = q_i^-(\vartheta_0)$ et $p_i = p_i(\vartheta_0)$ pour toute valeur de i , alors

$$\begin{cases} \mathcal{B}(L)^{-1} \mathcal{A}^+(L) = \mathcal{B}_0(L)^{-1} \mathcal{A}_0^+(L) \\ \mathcal{B}(L)^{-1} \mathcal{A}^-(L) = \mathcal{B}_0(L)^{-1} \mathcal{A}_0^-(L) \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{A}^+, \mathcal{A}^-, \mathcal{B}) = (\mathcal{A}_0^+, \mathcal{A}_0^-, \mathcal{B}_0).$$

2 Estimation et propriétés asymptotiques

Dans cette partie nous précisons la procédure d'estimation, dans un premier temps lorsque nous considérons la puissance $\underline{\delta}$ connue, puis dans le cas où la puissance $\underline{\delta}$ est inconnue. Par la suite nous établirons les propriétés asymptotiques de ces estimateurs pour le modèle (2.1).

2.1 Puissance connue

2.1.1 Estimation du modèle

Pour l'estimation, nous considérons le cas où la puissance $\underline{\delta}$ est connue. Si tous les paramètres de $\underline{\delta}$ sont égales à 2, nous obtenons le modèle CCC-AGARCH introduit par Francq et Zakoïan (2012). Pour ce cas, la procédure d'estimation et les propriétés asymptotiques sont les mêmes que pour le modèle CCC-AGARCH.

Les paramètres sont les coefficients du vecteur $\underline{\omega}_0$, des matrices A_{0i}^+, A_{0i}^- et B_{0j} , et les coefficients du triangle inférieur sans la diagonale de la matrice de corrélation R_0 . Le nombre de paramètres est alors

$$s_0 = d + d^2(p + 2q) + \frac{d(d-1)}{2}.$$

Le but est d'estimer les s_0 coefficients du modèle (2.1). Dans cette partie, nous notons le vecteur de paramètres

$$\theta := (\underline{\omega}', \alpha_1^{+'}, \dots, \alpha_m^{+'}, \alpha_1^{-'}, \dots, \alpha_m^{-'}, \beta_1', \dots, \beta_m', \rho')',$$

où α_i^+ et α_i^- sont définis par $\alpha_i^\pm = \text{vec}(A_i^\pm)$ pour $i = 1, \dots, q$, les coefficients $\beta_j = \text{vec}(B_j)$ pour $j = 1, \dots, p$ et $\rho = (\rho_{21}, \dots, \rho_{d1}, \rho_{32}, \dots, \rho_{d2}, \dots, \rho_{dd-1})'$.

Le paramètre θ appartient à l'espace des paramètres

$$\Theta \subset]0, +\infty[^d \times [0, \infty[^{d^2(2q+p)} \times]-1, 1]^{d(d-1)/2}.$$

La vraie valeur des paramètres est décrite par

$$\theta_0 := (\underline{\omega}_0', \alpha_{01}^{+'}, \dots, \alpha_{0q}^{+'}, \alpha_{01}^{-'}, \dots, \alpha_{0q}^{-'}, \beta_{01}', \dots, \beta_{0p}', \rho_0')'.$$

Notons par $\det(A)$ ou $|A|$, le déterminant d'une matrice carrée A .

Soit $\underline{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{t1}, \dots, \varepsilon_{tn})$ une réalisation de taille n de la solution strictement stationnaire non anticipative et unique ($\underline{\varepsilon}_t$) du modèle (2.1). Conditionnellement à certaines valeurs initiales $\underline{\varepsilon}_0, \dots, \underline{\varepsilon}_{1-q}, \underline{\tilde{h}}_0, \dots, \underline{\tilde{h}}_{1-p}$, la quasi-vraisemblance gaussienne s'écrit

$$L_n(\theta) = L_n(\theta; \underline{\varepsilon}_1, \dots, \underline{\varepsilon}_n) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\tilde{H}_t|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_t' \tilde{H}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \right),$$

où les $\tilde{H}_t$ sont définis récursivement, pour $t \geq 1$, par

$$\begin{cases} \tilde{H}_t = \tilde{D}_t R \tilde{D}_t, & \tilde{D}_t = \text{diag} \left(\sqrt{\tilde{h}_{1,t}}, \dots, \sqrt{\tilde{h}_{d,t}} \right) \\ \tilde{h}_t^{\delta/2} := \tilde{h}_t^{\delta/2}(\theta) = \underline{\omega} + \sum_{i=1}^q A_i^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + A_i^- (\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\delta/2} + \sum_{j=1}^p B_j \tilde{h}_{t-j}^{\delta/2}. \end{cases}$$

Dans la suite, nous montrons que les valeurs initiales sont asymptotiquement négligeables. Un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de θ est défini comme toute solution mesurable $\hat{\theta}_n$ de

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta) = \arg \min_{\theta \in \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta), \quad (2.8)$$

où

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t, \quad \tilde{l}_t = \tilde{l}_t(\theta) = \underline{\varepsilon}_t' \tilde{H}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log |\tilde{H}_t|.$$

2.1.2 Propriétés asymptotiques

L'estimateur dans le cas connu étant défini, nous nous intéressons à l'étude des ses propriétés asymptotiques, à savoir la consistance de l'estimateur et la normalité asymptotique.

Consistance de l'estimateur

Pour établir la consistance forte, nous avons besoin des hypothèses suivantes :

H1 : $\theta_0 \in \Theta$ et Θ est compact,

H2 : $\gamma(\mathbf{C}_0) < 0$ et $\forall \theta \in \Theta, \det(\mathcal{B}(z)) = 0 \Rightarrow |z| > 1$,

H3 : Pour $i = 1, \dots, d$ la loi de $\tilde{\eta}_{it}$ n'est pas concentrée en 2 points et $\mathbb{P}(\tilde{\eta}_{it} > 0) \in (0, 1)$.

H4 : si $p > 0, \mathcal{A}_0^+(1) + \mathcal{A}_0^-(1) \neq 0, \mathcal{A}_0^+(z), \mathcal{A}_0^-(z)$ et $\mathcal{B}_0(z)$ sont coprimés à gauche et la matrice $M(\mathcal{A}_0^+, \mathcal{A}_0^-, \mathcal{B}_0)$ est de plein rang d .

Si l'espace des paramètres Θ est contraint par (2.7), l'hypothèse **H4** peut être remplacée par une condition plus générale

H4' : **H4** avec $M(\mathcal{A}_0^+, \mathcal{A}_0^-, \mathcal{B}_0)$ remplacée par $[A_{0q}^+ A_{0q}^- B_{0p}]$.

H5 : R est une matrice de corrélation définie positive pour tout $\theta \in \Theta$.

Avec ces hypothèses, nous pouvons établir le résultat de la consistance.

Théorème 2.1.

Soit $(\hat{\theta}_n)$ une suite d'estimateurs du QMV satisfaisant (5.2). Alors, sous les hypothèses **H0–H5**,

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \theta_0, \quad \text{presque sûrement lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Normalité asymptotique de l'estimateur

L'hypothèse **H2** implique qu'il existe une solution strictement stationnaire non anticipative et ergodique $(h_t)_t = (h_t(\theta))_t$ de

$$h_t^{\delta/2} := h_t^{\delta/2}(\theta) = \underline{\omega} + \sum_{i=1}^q A_i^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + A_i^- (\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\delta/2} + \sum_{j=1}^p B_j h_{t-j}^{\delta/2}. \quad (2.9)$$

Nous décrivons $D_t = D_t(\theta) = \text{diag}(\sqrt{h_{1,t}}, \dots, \sqrt{h_{d,t}})$ et $H_t = H_t(\theta) = D_t(\theta) R D_t(\theta)$ et nous définissons

$$\mathcal{L}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t, \quad l_t = l_t(\theta) = \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log |H_t|.$$

Pour établir la normalité asymptotique, nous avons besoin des hypothèses additionnelles suivantes :

H6 : $\theta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$, où $\overset{\circ}{\Theta}$ est l'intérieur de Θ .

H7 : $\mathbb{E}\|\eta_t \eta_t'\|^2 < \infty$.

Théorème 2.2.

Sous les hypothèses **H0–H7**, nous avons

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, J^{-1} I J^{-1}),$$

où J est une matrice définie positive et I est une matrice semi-définie positive, définies par

$$I := I(\theta_0) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta'} \right], \quad J := J(\theta_0) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right].$$

Notons que dans le cas où la dimension d est égale à 1, la matrice I se résume à $(\mathbb{E}\eta_t^4 - 1)J$ avec

$$J = \frac{4}{\underline{\delta}^2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{h_t^{\underline{\delta}}(\theta_0)} \frac{\partial h_t^{\underline{\delta}/2}(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial h_t^{\underline{\delta}/2}(\theta_0)}{\partial \theta'} \right).$$

Ceci simplifie l'écriture de la matrice de variance asymptotique. Initialement nous avons $J^{-1} I J^{-1}$ pour obtenir $(\mathbb{E}\eta_t^4 - 1)J^{-1}$. Ainsi, nous retrouvons le résultat obtenu par Hamadeh et Zakoïan (2011).

2.2 Puissance inconnue

2.2.1 Estimation du modèle

Dans cette partie nous considérons le cas où la puissance est inconnue. Ce paramètre est estimé simultanément avec les autres paramètres. Dans la pratique, le coefficient $\underline{\delta}$ est difficile à identifier, comme cela a été remarqué dans Hamadeh et Zakoïan (2011) pour le modèle APGARCH. Pour s'assurer que ce coefficient soit identifiable, nous ajoutons l'hypothèse légèrement plus forte que celle du paragraphe 1.1.1 suivante :

H8 : η_t a une densité strictement positive au voisinage de zéro.

Pour définir l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de ϑ , nous remplaçons H_t par $\mathcal{H}_t$ dans l'expression du critère défini dans (5.2) et nous obtenons récursivement $\tilde{\mathcal{H}}_t$, pour $t \geq 1$,

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}_t = \tilde{D}_t R \tilde{D}_t, & \tilde{D}_t = \text{diag} \left(\sqrt{\tilde{h}_{1,t}}, \dots, \sqrt{\tilde{h}_{d,t}} \right) \\ \tilde{h}_t := \tilde{h}_t(\vartheta) = \left(\underline{\omega} + \sum_{i=1}^q A_i^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{\tau/2} + A_i^- (\varepsilon_{t-i}^-)^{\tau/2} + \sum_{j=1}^p B_j \tilde{h}_{t-j}^{\tau/2} \right)^{2/\tau}. \end{cases}$$

Un estimateur du quasi maximum de vraisemblance de ϑ est défini comme toute solution mesurable $\hat{\vartheta}_n$ de

$$\hat{\vartheta}_n = \arg \min_{\vartheta \in \Delta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\vartheta), \quad (2.10)$$

où

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(\vartheta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t, \quad \tilde{l}_t = \tilde{l}_t(\vartheta) = \varepsilon_t' \tilde{\mathcal{H}}_t^{-1} \varepsilon_t + \log |\tilde{\mathcal{H}}_t|.$$

2.2.2 Propriétés asymptotiques

Pour établir la consistance et la normalité asymptotique, nous avons besoin d'hypothèses similaires à celles faites lorsque l'on considèrerait la puissance connue. Pour les hypothèses **H1**–**H6**, le paramètre θ est remplacé par ϑ et l'espace des paramètres Θ est remplacé par Δ .

Consistance de l'estimateur

H1' : $\vartheta_0 \in \Delta$ et Δ est compact,

H2' : $\gamma(\mathbf{C}_0) < 0$ et $\forall \vartheta \in \Delta, \det(\mathcal{B}(z)) = 0 \Rightarrow |z| > 1$,

H3' : Pour $i = 1, \dots, d$ la loi de $\tilde{\eta}_{it}$ n'est pas concentrée en 2 points et $\mathbb{P}(\tilde{\eta}_{it} > 0) \in (0, 1)$.

H4 : si $p > 0$, $\mathcal{A}_0^+(1) + \mathcal{A}_0^-(1) \neq 0$, $\mathcal{A}_0^+(z)$, $\mathcal{A}_0^-(z)$ et $\mathcal{B}_0(z)$ sont coprimés à gauche et la matrice $M(\mathcal{A}_0^+, \mathcal{A}_0^-, \mathcal{B}_0)$ est de plein rang d .

Si l'espace des paramètres Δ est contraint par (2.7), l'hypothèse **H4** peut être remplacée par une condition plus générale

H4'' : **H4** avec $M(\mathcal{A}_0^+, \mathcal{A}_0^-, \mathcal{B}_0)$ remplacée par $[A_{0q}^+ A_{0q}^- B_{0p}]$.

H5' : R est une matrice de corrélation définie positive pour tout $\vartheta \in \Delta$.

Théorème 2.3.

Soit $(\hat{\vartheta}_n)$ une suite d'estimateurs du QMV satisfaisant (5.2). Alors sous les hypothèses **H1'**–**H5'**

$$\hat{\vartheta}_n \longrightarrow \vartheta_0, \quad \text{presque sûrement lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Normalité asymptotique

Nous reformulons les hypothèses faites dans le cas connu comme pour la consistance.

H6' : $\vartheta_0 \in \overset{\circ}{\Delta}$, où $\overset{\circ}{\Delta}$ est l'intérieur de Δ .

H7' : $\mathbb{E}\|\eta_t \eta_t'\|^2 < \infty$.

Théorème 2.4.

Sous les hypothèses **H1'**–**H7'** et **H8**, nous obtenons

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, J^{-1} I J^{-1}),$$

où J est une matrice définie positive et I est une matrice semi-définie positive, définies par

$$I := I(\vartheta_0) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta'} \right], \quad J := J(\vartheta_0) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta \partial \vartheta'} \right].$$

Notons également que pour $d = 1$, Nous obtenons comme pour le cas connu $I = (\mathbb{E}\eta_t^4 - 1)J$

$$J = \mathbb{E} \left(\frac{\partial \log \underline{h}_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \frac{\partial \log \underline{h}_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta'} \right).$$

Là aussi nous retrouvons le résultat de Hamadeh et Zakoïan (2011) (voir le Théorème 3.1).

3 Illustrations par simulations

Dans cette partie, nous réalisons des simulations de Monte-Carlo. Les simulations sont réalisées avec le logiciel RStudio (<https://www.rstudio.com>) dans le langage de programmation Rcpp. Le but

est de s'assurer que la procédure d'estimation est adaptée et réagit correctement lors des simulations. Pour minimiser la log-vraisemblance, nous utilisons la fonction implémentée de R, `nlimb()`.

Les simulations sont faites pour le modèle CCC-APGARCH, avec les ordres p et q fixés à $p = 0$ et $q = 1$. Nous calculons l'estimateur de $N = 100$ trajectoires simulées et indépendantes afin d'accroître les performances de l'estimateur. Nous distinguerons le cas où la puissance est connue et n'est donc pas estimée et le cas où la puissance est inconnue et est estimée simultanément avec les autres paramètres. Les trajectoires seront simulées en dimension 2 avec une taille de $n = 500$ et $n = 5000$ qui correspond à une taille standard pour les series financières. Pour toutes les simulations nous considérons que $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, I_2)$.

Estimation avec la puissance connue

Le modèle utilisé pour les simulations est le modèle CCC-APGARCH avec la puissance connue et fixée à $(2, 2)$. Comme nous pouvions nous y attendre, le biais de l'estimateur est petit et diminue en fonction que la taille n augmente. Le RMSE a le même comportement que le biais. La Figure 2.1 et le Figure 2.2 présentent les boîtes à moustaches des distributions de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de toutes les simulations. Evidemment, la précision de l'estimateur augmente lorsque la taille de l'échantillon augmente. Les paramètres utilisés sont reportés à la première ligne de la Table 2.2. Nous pouvons également écrire le modèle avec les paramètres utilisés.

$$\begin{cases} \varepsilon_t = H_t^{1/2} \eta_t, \\ H_t = D_t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot D_t, & D_t = \begin{pmatrix} \sqrt{h_{1t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{2t}} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} h_{1t} \\ h_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0.25 & 0.05 \\ 0.05 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\varepsilon_{1,t-1}^+)^2 \\ (\varepsilon_{2,t-1}^+)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\varepsilon_{1,t-1}^-)^2 \\ (\varepsilon_{2,t-1}^-)^2 \end{pmatrix} \right\}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Les résultats des N estimations sont résumés dans le tableau suivant.

Taille	Vraie val.	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		ρ_0
		1	0.25	0.05	0.5	0.5	0.5
$n = 500$	Biais	-0.00945	0.00350	-0.00436	0.00702	-0.00150	0.00024
		-0.01074	0.00233	-0.00350	0.00661	0.00214	
	RMSE	0.104	0.075	0.046	0.113	0.138	0.035
		0.122	0.046	0.083	0.122	0.133	
$n = 5000$	Biais	-0.00046	0.00148	-0.00068	-0.00052	0.00219	-0.00080
		0.00324	-0.00257	-0.00305	-0.00835	0.00217	
	RMSE	0.037	0.026	0.016	0.041	0.044	0.010
		0.038	0.014	0.026	0.045	0.043	

TABLE 2.2 – Distribution de l'estimateur du QMV de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(0,1) (2.11) avec $\underline{\delta} = (2, 2)'$

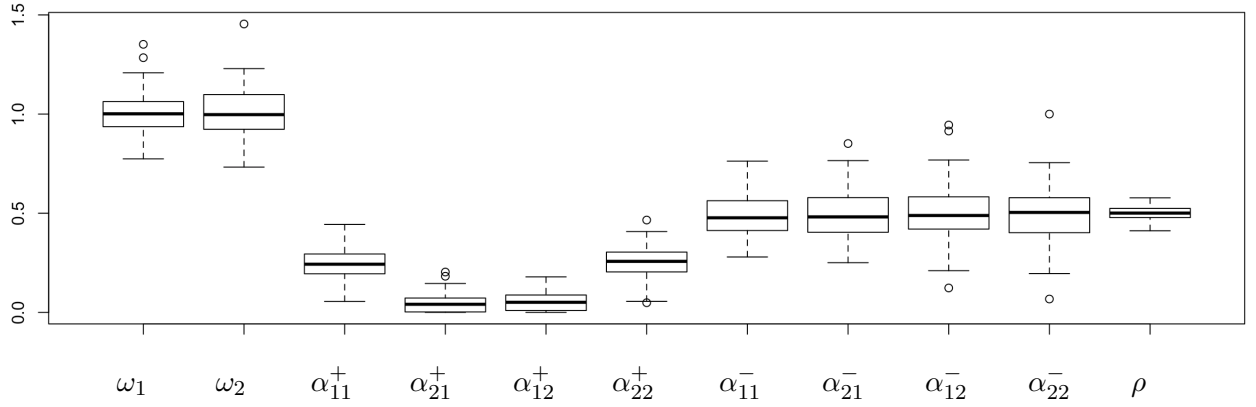


FIGURE 2.1 – Boite à moustaches de la distribution de l'estimateur QMV pour les simulations, avec $n = 500$

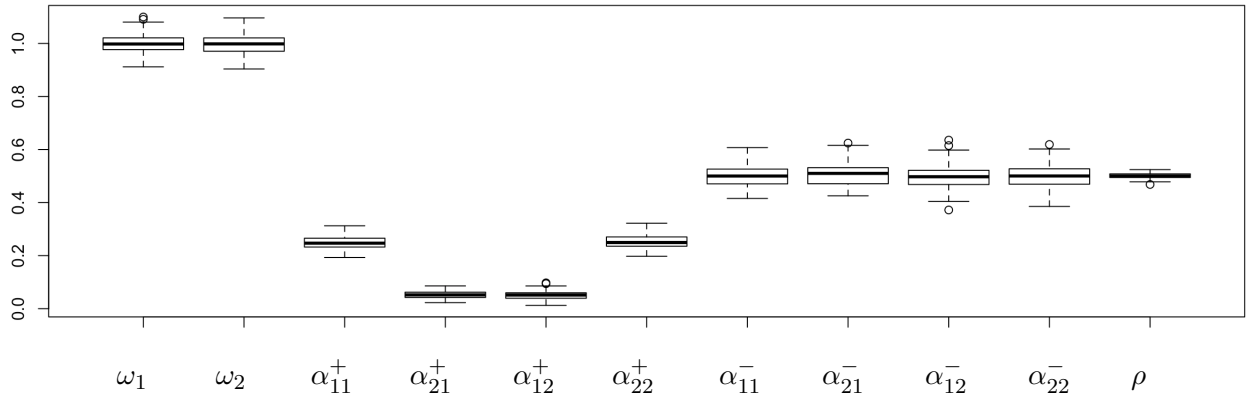


FIGURE 2.2 – Boite à moustaches de la distribution de l'estimateur QMV pour les simulations, avec $n = 5000$

Estimation avec la puissance inconnue

Le modèle utilisé pour les simulations est le modèle CCC-APGARCH avec la puissance inconnue et estimée simultanément avec les autres coefficients du modèle. Comme pour le cas où la puissance est connue, le biais de l'estimateur et le RMSE diminue à mesure que la taille n augmente. Un constat que l'on peut faire par rapport au cas connu est que la taille de l'échantillon semble être insuffisante pour avoir un estimateur aussi convenable que celui du cas connu. En effet, dans ce cas bivarié, le modèle comporte 2 coefficients de plus, qui sont les plus compliqués à estimer. La Figure 2.3 et la Figure 2.4 présentent les boîtes à moustaches des distributions de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de toutes les simulations. Comme nous pouvons le voir sur les boîtes à moustaches, la précision de l'estimateur augmente lorsque la taille de l'échantillon augmente et ce même pour la puissance τ inconnue. Les paramètres utilisés pour les simulations sont reportés à la première ligne de la Table 2.3. Nous pouvons également écrire le modèle avec les paramètres

utilisés.

$$\begin{cases} \varepsilon_t = H_t^{1/2} \eta_t, \\ H_t = D_t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot D_t, \quad D_t = \begin{pmatrix} \sqrt{h_{1t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{2t}} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} h_{1t}^{2/2} \\ h_{2t}^{2/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0.25 & 0.05 \\ 0.05 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\varepsilon_{1,t-1}^+)^{2/2} \\ (\varepsilon_{2,t-1}^+)^{2/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\varepsilon_{1,t-1}^-)^{2/2} \\ (\varepsilon_{2,t-1}^-)^{2/2} \end{pmatrix} \right\}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Les résultats des N estimations sont résumés dans le tableau suivant.

Taille	Vraie val.	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		$\underline{\delta}$	ρ_0
		1	0.25	0.05	0.5	0.5	2	
		1	0.05	0.25	0.5	0.5	2	0.5
$n = 500$	Biais	-0.00674 0.00055	0.00692 -0.00884	-0.01104 0.00132	0.02117 -0.04462	-0.01746 0.01224	0.00748 -0.02357	0.00008
	RMSE	0.154 0.157	0.074 0.076	0.080 0.086	0.120 0.278	0.263 0.137	0.577 0.616	0.035
$n = 5000$	Biais	0.00125 0.00430	0.00166 -0.00288	-0.00188 -0.00309	0.00061 -0.00619	-0.00221 0.00349	0.00219 0.00908	-0.00079
	RMSE	0.047 0.047	0.026 0.017	0.019 0.028	0.043 0.077	0.077 0.044	0.166 0.160	0.010

TABLE 2.3 – Distribution de l'estimateur du QMV de ϑ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(0,1) (2.12) avec $\underline{\delta}$ inconnu

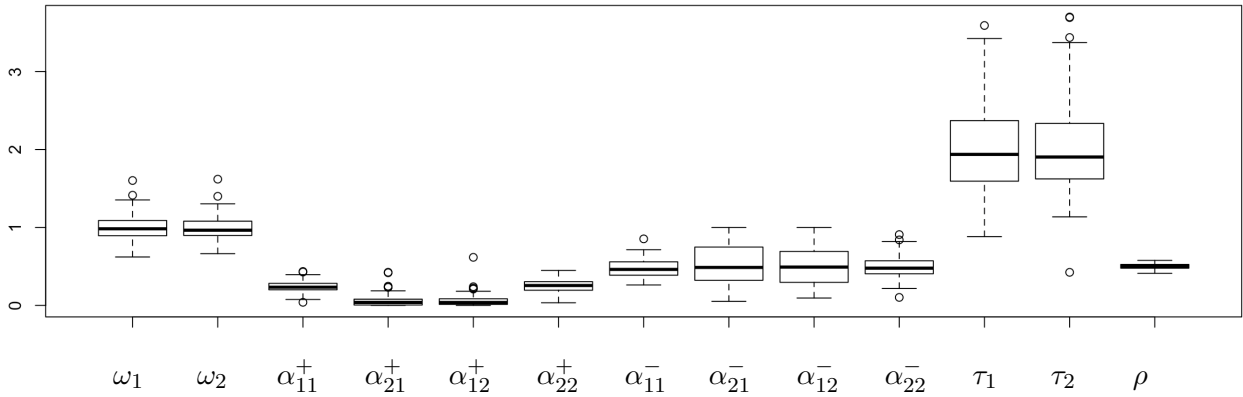


FIGURE 2.3 – Boite à moustaches de la distribution de l'estimateur QMV pour les simulations, avec $n = 500$. et $\underline{\delta}$ inconnu

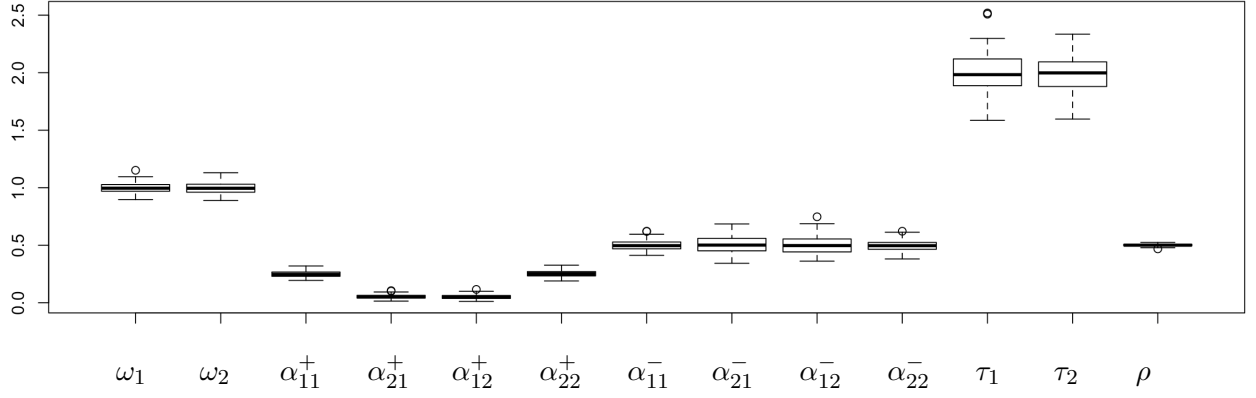


FIGURE 2.4 – Boite à moustaches de la distribution de l'estimateur QMV pour les simulations, avec $n = 5000$ et $\underline{\delta}$ inconnu

Preuves

Dans cette partie nous donnerons les grandes lignes des preuves des théorèmes de la consistance et de la normalité asymptotique. Les preuves dans le cas connu et inconnu étant similaires dans les grandes lignes, seules les preuves des théorèmes (2.1) et (2.2), qui correspondent au cas connu, seront données.

Le détail des 4 preuves est donné dans les annexes B pour la consistance et C pour la normalité asymptotique.

Démonstration

Pour démontrer le théorème 2.1, nous montrons les étapes suivantes :

(i) Oubli asymptotique des valeurs initiales.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\theta \in \Theta} |\mathcal{L}_n(\theta) - \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta)| = 0, \quad \text{presque sûrement}$$

(ii) Identifiabilité du paramètre.

Si il existe un $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\underline{h}_t^{\delta/2}(\theta) = \underline{h}_t^{\delta/2}(\theta_0)$ presque sûrement et $R = R_0$, alors $\theta = \theta_0$.

(iii) Minimisation de la log-vraisemblance en la vraie valeur.

$$\mathbb{E}_{\theta_0} |l_t(\theta_0)| < +\infty, \text{ et si } \theta \neq \theta_0, \quad \mathbb{E}_{\theta_0} [l_t(\theta)] > \mathbb{E}_{\theta_0} [l_t(\theta_0)].$$

(iv) Pour tout $\theta \neq \theta_0$ il existe un voisinage $V(\theta)$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V(\theta)} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) > \mathbb{E}_{\theta_0} [l_1(\theta_0)], \text{ presque sûrement.}$$

Démonstration

La preuve du théorème 2.2 repose sur le développement de Taylor

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = - \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{l}_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_{ij}^*) \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\partial \tilde{l}_t}{\partial \theta}(\theta_0) \right),$$

où les θ_{ij}^* sont entre $\hat{\theta}_n$ et θ_0 .

Il reste à montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{l}_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_{ij}^*) \longrightarrow J(i, j) \text{ en probabilité,}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\partial \tilde{l}_t}{\partial \theta}(\theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I).$$

Chapitre 3

Validation du modèle CCC-APGARCH

Résumé

Dans ce chapitre, nous utilisons un test permettant de mettre en évidence l'asymétrie d'un modèle, ou même de comparer la valeur d'un paramètre à une valeur théorique. Nous développons également un outil utile à la validation du modèle CCC-APGARCH, dans le cas où les puissances sont connues et inconnues.

Sommaire

Introduction	45
1 Test sur les coefficients	46
1.1 Test de Wald	46
1.2 Application numérique	46
2 Test portmanteau	48
2.1 Rappels sur le modèle CCC-APGARCH	48
2.2 Puissance connue	49
2.3 Puissance inconnue	51
Preuves	52

Introduction

Les modèles multivariés sont devenus incontournables dans la modélisation des séries financières. Les extensions multivariées n'étant pas directes, il existe un très grand nombre de modèles, avec plusieurs approches. Bauwens *et al.* (2006) réalisent une revue de la littérature mentionnant l'ensemble des modèles multivariés développés. Le modèle CCC-GARCH de Bollerslev (1990) semble s'imposer dans la modélisation des séries financières comme le modèle multivarié de référence. Une décennie plus tard, de nouvelles études sont réalisées sur le modèle CCC-GARCH par Francq et Zakoïan (2012) qui ajoutent au modèle l'effet de levier. Nous avons également repris cette étude ainsi que les études sur le modèle univarié APGARCH pour proposer une extension du modèle CCC-AGARCH, afin de modéliser la volatilité par une puissance quelconque de l'écart-type conditionnel. Alors que le développement des modèles évolue et que les modèles deviennent toujours plus performants, aucune procédure permettant de valider le modèle et ainsi de déterminer les ordres p et q optimaux, n'est établie. Cette procédure existe dans le cas univarié pour le modèle APGARCH, lorsque la puissance est considérée connue, développée par Carbon et Francq (2011) et lorsque la puissance est inconnue, développée dans le Chapitre 1 paragraphe 3. Cette procédure basée sur le test portmanteau peut être étendue au cas multivarié dans des conditions semblables au cas univarié. Le test est d'origine établie sur les autocorrélations des résidus, or dans le cas GARCH univarié ou multivarié, celles-ci sont nulles. Cela ne présenterait donc aucun intérêt à développer un sur les autocovariances des résidus. En revanche, comme pour le cas univarié, les autocovariances des carrés des résidus sont non nulles et présentent donc un intérêt statistique. La procédure de validation est alors basée sur le

test portmanteau multivarié modifié. L'intérêt de proposer un test permettant de valider le modèle CCC-APGARCH développé au Chapitre 2 est que celui-ci est le plus général des modèles à corrélations conditionnelles constantes. Le test est établi lorsque la puissance est inconnue et connue. Dans ce dernier cas, si l'on fixe la puissance égale à 2, le test permet également de valider le modèle de Francq et Zakoïan (2012). Nous pouvons aussi valider le modèle CCC-GARCH de Bollerslev (1990), étendu par la suite par Jeantheau (1998).

Afin de parfaire la procédure de validation, nous pouvons utiliser le test de Wald. Ce test ne sera pas utile dans la validation du modèle en tant que telle, ni dans la détermination des ordres p et q , mais ce test sera utile pour déterminer si certains paramètres du modèle sont égaux, égalité des puissances ou égalité des matrices A_i^+ et A_i^- , ou alors si certains paramètres sont significativement nuls. Dans le cas où l'on teste l'asymétrie d'un modèle, le test peut révéler s'il ne serait pas préférable dans certains cas d'utiliser un modèle symétrique, qui a l'avantage de réduire le nombre de paramètres à estimer. Nous pouvons également utiliser ce test pour des modèles à puissance dans le but de comparer la valeur de la puissance estimée à une valeur théorique, 1 ou 2 qui sont les puissances utilisées dans la modélisation, notamment pour le modèle GARCH standard ou alors le modèle GARCH asymétrique. Là encore le but serait de se ramener à un modèle moins complexe. Cependant comme nous avons pu le constater dans la Table 2.1 du Chapitre 2, ces puissances sont souvent différentes de 1 ou 2, donc sera plus utile pour tester l'égalité des puissances. C'est-à-dire tester si un $\delta_i = \delta_j$ pour $i \neq j$ et $i, j = 1, \dots, d$. Si sur un modèle de dimension d le test de Wald révèle que toutes les puissances sont statistiquement égales, alors nous pourrions passer à une modélisation moins complexe et considérer une puissance unique pour l'ensemble du modèle. Ceci permettra de réduire le nombre de paramètres de $d - 1$.

Ce chapitre est décomposé en trois parties. La première partie porte sur le test de Wald et son application, la deuxième partie sur le test portmanteau dans le cadre du modèle CCC-APGARCH avec puissance connue et inconnue et enfin la troisième partie qui illustrera ces résultats par des simulations.

1 Test sur les coefficients

1.1 Test de Wald

Le test de Wald est un test asymptotique paramétrique particulièrement approprié aux distributions à queues épaisses, utilisé pour tester la significativité des coefficients. Ce test requiert le résultat de la normalité asymptotique lié au modèle étudié pour tester des contraintes linéaires aux paramètres. Nous considérons l'hypothèse nulle

$$\mathbb{H}_0 : C\theta_0 = c,$$

où C est une matrice constante connue de taille $s \times s_0$ et c un vecteur constant connu de taille $s \times 1$. La constante s_0 représente le nombre de paramètres composant le modèle étudié et θ_0 est le vecteur des vraies valeurs des paramètres du modèle. La statistique de test est définie comme suit

$$W_n(s) = (C\hat{\theta}_n - c)'(C'\hat{\Sigma}C)^{-1}(C\hat{\theta}_n - c).$$

Nous rappelons que d'une manière générale, $\hat{\theta}_n$ représente l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de θ_0 et que par la normalité asymptotique nous obtenons $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma)$ où $\hat{\Sigma}$ est l'estimateur de Σ , qui peut prendre différentes expressions selon le modèle.

Nous rejetons l'hypothèse nulle pour de grandes valeurs de $W_n(s)$.

1.2 Application numérique

Dans cette partie nous mettrons en évidence le test de Wald sur le modèle APGARCH. Nous testerons dans un premier temps l'effet de levier, puis nous comparerons la valeur de la puissance à une valeur théorique.

Les simulations sont réalisées en considérant η_t de loi normale centrée et réduite et nous utilisons la procédure du quasi-maximum de vraisemblance pour estimer les coefficients du modèle. Nous fixons les ordres du modèle à $p = q = 1$ et nous supposons δ inconnue. Nous déterminons l'estimateur sur $N = 1000$ répliquions indépendantes pour augmenter la performance de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance. Les trajectoires ont une taille de $n = 500$ et $n = 4000$ ce qui correspond dans la pratique à la taille des séries financières. Bien-sûr la précision de l'estimateur augmente lorsque la taille des séries augmente. Les paramètres utilisés pour simuler les trajectoires sont $\vartheta_0 := (0.05, \alpha^+, \alpha^-, 0.5, 1)$. Dans la Table 3.1, nous testons l'asymétrie du modèle telle que $\mathbb{H}_0 : C\vartheta_0 = \hat{\alpha}^-$, où C est un vecteur de taille 1×5 tel que $C := (0, 1, 0, 0, 0)$. Le risque de première espèce fixé pour le test est $\alpha = 5\%$.

(α^+, α^-)	(0.20, 0.20)		(0.15, 0.25)		(0.10, 0.30)		(0.05, 0.35)	
Length n	500	4000	500	4000	500	4000	500	4000
$W_n(1)$	11.0	5.3	34.0	95.1	78.1	100	95.4	100

TABLE 3.1 – Test de Wald pour tester l'asymétrie du modèle

Par la table 3.1, nous constatons que le test de Wald permet de tester l'asymétrie d'une série. En effet, pour une taille de série suffisamment importante pour les séries financières, le test détecte correctement l'égalité des coefficients α^+ et α^- lorsque celle-ci est le cas. Cependant, pour une petite taille de série, $n = 500$, le test semble rencontrer des difficultés à mettre en évidence l'égalité des coefficients. Ce constat peut s'expliquer par une procédure d'estimation des coefficients délicate pour les séries de petite taille. Par conséquent, l'estimation de la matrice de variance asymptotique en est également affectée.

Nous pouvons également réaliser le test en comparant une valeur estimée à une valeur théorique. Nous souhaitons comparer la puissance du modèle à une valeur théorique afin de savoir si l'on ne pourrait pas considérer un modèle standard à puissance connue de façon à gagner en nombre de paramètres à estimer. Dans la Table 3.2, nous testons la puissance du modèle en la comparant à une valeur qu'on se fixe, tel que $\mathbb{H}_0 : C\vartheta_0 = c$, où C est un vecteur de taille 1×5 tel que $C := (0, 0, 0, 0, 1)$. Le risque α est toujours fixé à 5%. Les trajectoires utilisées pour le test sont simulées avec le vecteur $\vartheta_0 := (0.05, 0.02, 0.20, 0.75, 1)$. Par la table 3.2, nous pouvons constater

c	0.5		0.8		1.0		1.2	
Length n	500	4000	500	4000	500	4000	500	4000
$W_n(1)$	15.2	78.5	10.4	10.3	5.8	5.7	25.6	25.9
c	1.5		2.0		2.5		3.0	
Length n	500	4000	500	4000	500	4000	500	4000
$W_n(1)$	34.4	71.5	56.0	98.9	72.0	100	82.5	100

TABLE 3.2 – Test de Wald pour comparer la puissance du modèle à une valeur théorique

que le test détecte correctement l'égalité des puissances pour une taille de série raisonnable. En revanche, lorsque $n = 500$, ce qui représente une petite taille pour les séries financières, le test semble confondre la valeur de puissance $\delta = 1$ à une valeur théorique fixée à 0.5. Le test semble également rejeter l'hypothèse d'égalité des puissances lorsque l'on se place sous l'hypothèse nulle. Ce constat n'est valable que pour une petite taille de séries et peut s'expliquer par le fait que l'estimation des coefficients est plus délicate pour des séries de petite taille. De plus, le paramètre δ est le plus compliqué à estimer et identifier.

2 Test portmanteau

Dans ce paragraphe nous développons l'outil qui permettra de valider le modèle CCC-APGARCH présenté au Chapitre 2, dans le cas où la puissance est connue et inconnue. Cette procédure est basée sur le test portmanteau multivarié.

2.1 Rappels sur le modèle CCC-APGARCH

Avant d'énoncer le résultat théorique du test portmanteau pour le modèle rappelé ci-après, nous rappelons quelques notions détaillées au Chapitres 2 utiles à l'élaboration du test.

Le modèle CCC-APGARCH est défini par

$$\begin{cases} \varepsilon_t = H_t^{1/2} \eta_t, \\ H_t = D_t R_0 D_t, \quad D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{1,t}}, \dots, \sqrt{h_{d,t}}), \\ \underline{h}_t^{\delta/2} = \underline{\omega}_0 + \sum_{i=1}^q \left\{ A_{0i}^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + A_{0i}^- (\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\delta/2} \right\} + \sum_{j=1}^p B_{0j} \underline{h}_{t-j}^{\delta/2}, \end{cases} \quad (3.1)$$

où les paramètres ω_0 et δ sont des constantes strictement positives et $\alpha_{0i}^+ = \text{vec}(A_{0i}^+)$, $\alpha_{0i}^- = \text{vec}(A_{0i}^-)$ et $\beta_{0j} = \text{vec}(B_{0j})$ sont des constantes positives ou nulles. Le vecteur des observations $\underline{\varepsilon}_t$ est défini tel que $\underline{\varepsilon}_t^+ = (\{\varepsilon_{1t}^+\}^2, \dots, \{\varepsilon_{dt}^+\}^2)'$ et $\underline{\varepsilon}_t^- = (\{-\varepsilon_{1t}^-\}^2, \dots, \{-\varepsilon_{dt}^-\}^2)'$.

Pour la procédure d'estimation, nous distinguons 2 cas, selon que la puissance soit connue ou inconnue.

Puissance connue

Soit le vecteur des paramètres inconnus $\theta := (\underline{\omega}', \alpha_1^+, \dots, \alpha_q^+, \alpha_1^-, \dots, \alpha_q^-, \beta_1, \dots, \beta_p, \rho')'$ et l'espace des paramètres Θ défini comme $\Theta \subset]0, +\infty[^d \times [0, +\infty[^{d^2(2q+p)} \times]-1, 1[^{d(d-1)/2}$. Nous considérons que les observations $\underline{\varepsilon}_1, \dots, \underline{\varepsilon}_n$ constituent une réalisation de taille n du processus CCC-APGARH(p, q). Plus précisément, $(\underline{\varepsilon}_t)$ représente une solution stationnaire non anticipative du modèle. Nous définissons récursivement pour $t \geq 1$

$$\begin{cases} \tilde{H}_t = \tilde{D}_t R \tilde{D}_t, \quad \tilde{D}_t = \text{diag} \left(\sqrt{\tilde{h}_{1,t}}, \dots, \sqrt{\tilde{h}_{d,t}} \right) \\ \tilde{\underline{h}}_t^{\delta/2} := \tilde{\underline{h}}_t^{\delta/2}(\theta) = \underline{\omega} + \sum_{i=1}^q \left\{ A_i^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + A_i^- (\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\delta/2} \right\} + \sum_{j=1}^p B_j \tilde{\underline{h}}_{t-j}^{\delta/2}. \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\underline{\varepsilon}_0, \dots, \underline{\varepsilon}_{1-q}, \tilde{\underline{h}}_0 \geq 0, \dots, \tilde{\underline{h}}_{1-p} \geq 0$ et l'on définit l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de θ_0 de manière standard tel que l'estimateur soit défini comme toute solution mesurable $\hat{\theta}_n$ de

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t(\theta), \quad \tilde{l}_t(\theta) = \underline{\varepsilon}_t' \tilde{H}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log(\det(\tilde{H}_t)). \quad (3.2)$$

Puissance inconnue

Soit le vecteur des paramètres inconnus $\vartheta := (\underline{\omega}', \alpha_1^+, \dots, \alpha_q^+, \alpha_1^-, \dots, \alpha_q^-, \beta_1, \dots, \beta_p, \underline{\tau}', \rho')'$ et l'espace des paramètres Δ défini comme $\Delta \subset]0, +\infty[^d \times [0, +\infty[^{d^2(2q+p)} \times]0, +\infty[^d \times]-1, 1[^{d(d-1)/2}$. $\underline{\varepsilon}_1, \dots, \underline{\varepsilon}_n$ constituent une réalisation de taille n du processus CCC-APGARH(p, q). Plus précisément, $(\underline{\varepsilon}_t)$ représente une solution stationnaire non anticipative du modèle. Nous définissons récursivement pour $t \geq 1$

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}_t = \tilde{D}_t R \tilde{D}_t, \quad \tilde{D}_t = \text{diag} \left(\sqrt{\tilde{h}_{1,t}}, \dots, \sqrt{\tilde{h}_{d,t}} \right) \\ \tilde{\underline{h}}_t := \tilde{\underline{h}}_t(\vartheta) = \left(\underline{\omega} + \sum_{i=1}^q \left\{ A_i^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\tau/2} + A_i^- (\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\tau/2} \right\} + \sum_{j=1}^p B_j \tilde{\underline{h}}_{t-j}^{\delta/2} \right)^{2/\tau}. \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\underline{\varepsilon}_0, \dots, \underline{\varepsilon}_{1-q} \geq 0, \tilde{h}_0, \dots, \tilde{h}_{1-p} \geq 0$ et l'on définit l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de ϑ_0 de manière standard tel que l'estimateur soit défini comme toute solution mesurable $\hat{\vartheta}_n$ de

$$\hat{\vartheta}_n = \arg \min_{\vartheta \in \Delta} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t(\vartheta), \quad \tilde{l}_t(\vartheta) = \underline{\varepsilon}_t' \tilde{\mathcal{H}}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log(\det(\tilde{\mathcal{H}}_t)). \quad (3.3)$$

2.2 Puissance connue

Pour énoncer le test portmanteau, il est nécessaire d'obtenir les propriétés asymptotiques de l'estimateur. Ces propriétés doivent être établies dans le cas où la puissance est connue. Pour cela, nous devons faire les hypothèses suivantes, que l'on peut également retrouver dans le Chapitre 2

H1 : $\theta_0 \in \Theta$ et Θ est un compact,

H2 : $\gamma(\mathbf{C}_0) < 0$ et $\forall \theta \in \Theta, \det(\mathcal{B}(z)) = 0 \Rightarrow |z| > 1$,

H3 : Pour $i = 1, \dots, m$ la loi de $\tilde{\eta}_{it}$ n'est pas concentrée en 2 points et $\mathbb{P}(\tilde{\eta}_{it} > 0) \in (0, 1)$.

H4 : Si $p > 0, \mathcal{A}_0^+(1) + \mathcal{A}_0^-(1) \neq 0, \mathcal{A}_0^+(z), \mathcal{A}_0^-(z)$ et $\mathcal{B}_0(z)$ sont coprime à gauche et la matrice $M(\mathcal{A}_0^+, \mathcal{A}_0^-, \mathcal{B}_0)$ est de plein rang m .

Si l'espace Θ est contraint par (2.7), L'hypothèse **H4** peut être remplacée par une condition plus générale.

H4' : **H4** avec $M(\mathcal{A}_0^+, \mathcal{A}_0^-, \mathcal{B}_0)$ remplacée par $[A_{0q}^+ A_{0q}^- B_{0p}]$.

H5 : R est une matrice de corrélation définie positive pour tout $\theta \in \Theta$.

H6 : $\theta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$, où $\overset{\circ}{\Theta}$ est l'intérieur de Θ .

H7 : $\mathbb{E}\|\eta_t \eta_t'\|^2 < \infty$.

Ces hypothèses permettent d'énoncer dans une proposition le résultat de la consistance et de la normalité asymptotique que l'on peut retrouver au Chapitre 2.

Proposition 2.1.

Soit $\hat{\theta}_n$ une suite d'estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance satisfaisant (3.2). Sous les hypothèses ci-dessus, nous avons $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta_0$ p.s. lorsque $n \rightarrow +\infty$. De plus, il suit que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, J^{-1} I J^{-1}),$$

où J est une matrice définie positive et I est une matrice semi-définie positive, définies par

$$I := I(\theta_0) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta'} \right], \quad J := J(\theta_0) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right], \quad \text{avec } l_t(\theta) = \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log(\det(H_t)).$$

Pour pouvoir établir la loi asymptotique de la statistique du test portmanteau, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse technique sur la loi de η_t .

H8 : η_t prend plus de $3(d+1)$ valeurs positives et $3(d+1)$ valeurs négatives.

Remarque.

Pour le test portmanteau univarié, dans le cas où la puissance est connue, Carbon et Francq (2011) ont fait l'hypothèse que η_t avait plus de 3 valeurs positives et 3 valeurs négatives.

L'hypothèse nulle du test portmanteau est que le processus $(\underline{\varepsilon}_t)$ satisfasse le modèle CCC-APGARCH(p, q)

$\mathbb{H}_0$: le processus $(\underline{\varepsilon}_t)$ satisfait le modèle (3.1).

Le test portmanteau étant basé sur les autocovariances des carrés des résidus, nous les définissons de la manière suivante

$$\hat{\tau}_h = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n [\text{vec}(\hat{s}_t)][\text{vec}(\hat{s}_{t-h})] \quad \text{avec } \hat{s}_t = \hat{\eta}_t \hat{\eta}_t' - I_d$$

pour $|h| < n$ et $\hat{\eta}_t = \hat{H}_t^{-1/2} \underline{\varepsilon}_t := \tilde{H}_t^{-1/2}(\hat{\theta}_n) \underline{\varepsilon}_t$. Pour un entier m fixé, $m \geq 1$, nous définissons également le vecteur des premières autocorrélations

$$\hat{\mathbf{r}}_m = (\text{vec}(\hat{\mathbf{r}}_1)', \dots, \text{vec}(\hat{\mathbf{r}}_m)')', \text{ tel que } 1 \leq m \leq n.$$

Nous avons aussi besoin des estimateurs des matrices I et J introduites dans la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$. Nous pouvons estimer ces matrices de façon empirique

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial \tilde{l}_t(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \tilde{l}_t(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta_j} \quad \text{et} \quad \hat{J} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{l}_t(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.$$

Les dérivées dans l'expression de $\hat{I}$ peuvent être calculées récursivement pour tout $\theta \in \Theta$ et pour $t \geq 0$. Nous pouvons réécrire les matrices $\hat{I}$ et $\hat{J}$ telles que

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\hat{\mathbf{h}}'_t \hat{S}_t \hat{S}'_t \hat{\mathbf{h}}_t] \quad \text{et} \quad \hat{J} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\hat{\mathbf{h}}'_t \hat{\mathbf{h}}_t],$$

où $\hat{\mathbf{h}}_t = \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{d}}$ avec $\hat{\mathbf{H}} = (\hat{H}_t^{-1/2})' \otimes \hat{H}_t^{-1/2}$ et $\hat{\mathbf{d}}_i = \text{vec}(\partial \hat{H}_t / \partial \theta_i)$ pour $i = 1, \dots, s_0$ où s_0 représente le nombre de paramètres du modèle (2.1). La matrice $\hat{\mathbf{d}}$ est alors de dimension $d^2 \times s_0$ tel que $\hat{\mathbf{d}} = (\hat{\mathbf{d}}_1 | \dots | \hat{\mathbf{d}}_{s_0})$. Nous pouvons initialiser les dérivées de $\hat{H}_t$ par 0 pour tout $t = 0, \dots, 1 - p$.

Afin d'énoncer le test portmanteau il reste à définir 3 matrices utilisées dans la statistique de test. Nous définissons la matrice $\hat{C}_m$ de dimension $md^4 \times s_0$ donnée par

$$\hat{C}_m = -\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{S}_{t-1:t-m} \otimes (\hat{H}_t^{-1} \otimes I_d) \text{vec} \frac{\partial \hat{H}_t}{\partial \theta_i}, \quad (3.4)$$

où $\hat{S}_{t-1:t-m} = (\hat{S}'_{t-1}, \dots, \hat{S}'_{t-m})'$ et $\hat{S}_t = \text{vec}(\hat{s}_t)$.

Nous définissons également la matrice $\hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m}$ de dimension $md^4 \times md^4$, dont le (k, h) -ième bloc est donné par

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m}(k, h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{S}_{t-k} \hat{S}'_{t-h} \otimes \hat{S}_t \hat{S}'_t). \quad (3.5)$$

Et la matrice $\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m}$ de dimension $s_0 \times md^4$ donnée par

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{J}^{-1} l_{1:s_0, t} (\hat{S}_{t-1:t-m} \otimes \hat{S}_t)', \quad (3.6)$$

où $l_{i,t}(\theta)$ est défini pour $i = 1, \dots, s_0$ par $l_{i,t}(\theta) = -(\text{vec}(\hat{H}_t^{-1}))'(I_d \otimes \partial \hat{H}_t / \partial \theta_i) \hat{S}_t$ et $l_{1:s_0, t}$ comme un vecteur de taille $s_0 \times 1$ composé par les éléments $l_{i,t}(\theta)$.

Théorème 2.1.

Sous les hypothèses **H1–H8** et $\mathbb{H}_0$, la matrice $\hat{D} = \hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m} + \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{I} \hat{J}^{-1} \hat{C}'_m + \hat{C}_m \hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} + \hat{\Sigma}'_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} \hat{C}'_m$ converge en probabilité vers une matrice définie positive D (définie dans la preuve) et nous avons

$$n \hat{\mathbf{r}}'_m \hat{D}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_m \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_{md^4}^2.$$

L'adéquation avec le modèle CCC-APGARCH(p, q) est alors rejetée au niveau asymptotique α lorsque

$$n \hat{\mathbf{r}}'_m \hat{D}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_m > \chi_{md^4}^2(1 - \alpha), \quad (3.7)$$

où $\chi_{md^4}^2(1 - \alpha)$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi de Khi-deux, avec md^4 degrés de liberté.

2.3 Puissance inconnue

Pour énoncer le test portmanteau dans le cas de la puissance inconnue, il est nécessaire d'obtenir les propriétés asymptotiques de l'estimateur dans ce même cas. Comme pour le cas connu, il est nécessaire d'établir des hypothèses. Ces hypothèses sont sensiblement les mêmes que pour le cas connu. Il suffit de remplacer dans chacune d'entre elles, θ par ϑ et Θ par Δ . Avec ces hypothèses nous pouvons énoncer la proposition suivante qui rappelle les propriétés asymptotiques de l'estimateur dans le cas où la puissance est inconnue. Nous rappelons les résultats du Chapitre 2 sur les propriétés asymptotiques de l'estimateur.

Proposition 2.2.

Soit $\hat{\vartheta}_n$ une suite d'estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance satisfaisant (3.3). Sous les hypothèses ci-dessus, nous avons $\hat{\vartheta}_n \rightarrow \vartheta_0$ p.s. lorsque $n \rightarrow +\infty$. De plus, il suit que

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, J^{-1} I J^{-1}),$$

où J est une matrice définie positive et I est une matrice semi-définie positive, définies par

$$I := I(\vartheta_0) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta'} \right], \quad J := J(\vartheta_0) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta \partial \vartheta'} \right], \quad \text{avec } l_t(\vartheta) = \underline{\varepsilon}_t' \mathcal{H}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log(\det(\mathcal{H}_t)).$$

Comme pour le cas précédent, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse à la loi de η_t afin d'établir la loi asymptotique de la statistique du test portmanteau.

H8' : η_t prend plus de $11d + 1$ valeurs positives et $11d + 1$ valeurs négatives.

Remarque.

Dans le cas univarié, nous avons fait l'hypothèse que η_t prenait au moins 11 valeurs positives et 11 valeurs négatives.

Le cas de la puissance inconnue reprend la même démarche que le cas de la puissance connue. L'hypothèse nulle est

$\mathbb{H}_0$: le processus $(\underline{\varepsilon}_t)$ satisfait le modèle (3.1).

Nous les définissons de la manière suivante

$$\hat{\underline{r}}_h = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n [\text{vec}(\tilde{s}_t)][\text{vec}(\tilde{s}_{t-h})] \quad \text{avec } \tilde{s}_t := s_t(\hat{\theta}_n) = \hat{\eta}_t \hat{\eta}_t' - I_d$$

pour $|h| < n$ et $\hat{\eta}_t = \tilde{\mathcal{H}}_t^{-1/2}(\hat{\theta}_n) \underline{\varepsilon}_t$. Pour un entier m fixé, $m \geq 1$, nous définissons également le vecteur des premières autocorrélations

$$\hat{\mathbf{r}}_m = (\text{vec}(\hat{\underline{r}}_1)', \dots, \text{vec}(\hat{\underline{r}}_m)') , \text{ tel que } 1 \leq m \leq n.$$

Nous avons aussi besoin des estimateurs des matrices I et J introduites dans la normalité asymptotique de $\hat{\vartheta}_n$. Nous pouvons estimer ces matrices de façon empirique

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial \tilde{l}_t(\hat{\vartheta}_n)}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial \tilde{l}_t(\hat{\vartheta}_n)}{\partial \vartheta_j} \quad \text{et} \quad \hat{J} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{l}_t(\hat{\vartheta}_n)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}.$$

Les dérivées dans les expressions de $\hat{I}$ et $\hat{J}$ peuvent être réécrites et calculées de manière récursive comme dans le cas connu.

Afin d'énoncer le test portmanteau il reste à définir 3 matrices utilisées dans la statistique de test. Nous définissons la matrice $\hat{C}_m$ de dimension $md^4 \times s_0$ donnée par

$$\hat{C}_m = -\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\mathbf{S}}_{t-1:t-m} \otimes (\hat{\mathcal{H}}_t^{-1} \otimes I_d) \text{vec} \frac{\partial \hat{\mathcal{H}}_t}{\partial \vartheta_i}, \quad (3.8)$$

où $\hat{S}_{t-1:t-m} = (\hat{S}'_{t-1}, \dots, \hat{S}'_{t-m})'$ et $\hat{S}_t = \text{vec}(\hat{s}_t)$.

Nous définissons également la matrice $\hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m}$ de dimension $md^4 \times md^4$, dont le (k, h) -ième bloc est donné par

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m}(k, h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{S}_{t-k} \hat{S}'_{t-h} \otimes \hat{S}_t \hat{S}'_t). \quad (3.9)$$

Et la matrice $\hat{\Sigma}_{\hat{\vartheta}_n, \mathbf{r}_m}$ de dimension $s_0 \times md^4$ donnée par

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\vartheta}_n, \mathbf{r}_m} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{J}^{-1} \dot{l}_{1:s_0, t} (\hat{S}_{t-1:t-m} \otimes \hat{S}_t)', \quad (3.10)$$

où $\dot{l}_{i,t}(\vartheta)$ est défini pour $i = 1, \dots, s_0$ par $\dot{l}_{i,t}(\vartheta) = -(\text{vec}(\hat{\mathcal{H}}_t^{-1}))'(I_d \otimes \partial \hat{\mathcal{H}}_t / \partial \vartheta_i) \hat{S}_t$ et $\dot{l}_{1:s_0, t}$ comme un vecteur de taille $s_0 \times 1$ composé par les éléments $\dot{l}_{i,t}(\vartheta)$.

Théorème 2.2.

Sous les hypothèses **H1–H8**' et $\mathbb{H}_0$, la matrice $\hat{D} = \hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m} + \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{I} \hat{J}^{-1} \hat{C}'_m + \hat{C}_m \hat{\Sigma}_{\hat{\vartheta}_n, \mathbf{r}_m} + \hat{\Sigma}'_{\hat{\vartheta}_n, \mathbf{r}_m} \hat{C}'_m$ converge en probabilité vers une matrice définie positive D (définie dans la preuve) et nous avons

$$n \hat{\Sigma}'_{\mathbf{r}_m} \hat{D}^{-1} \hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m} \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_{md^4}^2.$$

L'adéquation avec le modèle CCC-APGARCH(p, q) est alors rejetée au niveau asymptotique α lorsque

$$n \hat{\Sigma}'_{\mathbf{r}_m} \hat{D}^{-1} \hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m} > \chi_{md^4}^2(1 - \alpha), \quad (3.11)$$

où $\chi_{md^4}^2(1 - \alpha)$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi de Khi-deux, avec md^4 degrés de liberté.

Preuves

Dans cette partie nous énoncerons les grandes lignes des preuves des théorèmes 2.1 et 2.2. Les preuves seront détaillées en annexe (voir Annexe D). Les preuves dans le cas connu et inconnu étant similaires, nous ne donnerons que les grandes lignes de la preuve dans le cas connu.

Démonstration du théorème 2.1

La preuve du test portmanteau peut se décomposer en 4 étapes majeures.

Nous introduisons le vecteur des premières m autocovariances $\mathbf{r}_m = (r_1, \dots, r_m)'$ où le h -ième élément est défini comme

$$r_h = \frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^n [\text{vec}(s_t)][\text{vec}(s_{t-h})]' , \quad \text{avec } s_t = \eta_t \eta'_t - I_d \text{ et } 0 < h < m.$$

Soit $s_t(\theta) = \eta_t(\theta) \eta'_t(\theta) - I_d$ avec $\eta_t(\theta) = H_t^{-1/2}(\theta) \varepsilon_t$ et $\tilde{s}_t(\theta) = \tilde{\eta}_t(\theta) \tilde{\eta}'_t(\theta) - I_d$ avec $\tilde{\eta}_t(\theta) = \tilde{H}_t^{-1/2}(\theta) \varepsilon_t$. Soit $r_h(\theta)$ obtenu en remplaçant η_t par $\eta_t(\theta)$ dans r_h et $\tilde{r}_h(\theta)$ en remplaçant η_t en $\tilde{\eta}_t(\theta)$ dans r_h . Nous introduisons le vecteur d'autocovariances h pour h fixé par

$$\mathbf{r}_h := \text{vec}(r_h) = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n S_{t-h} \otimes S_t,$$

avec $S_t(\theta) = \text{vec}(s_t(\theta))$. Finalement, nous introduisons le vecteur des m autocovariances $\mathbf{r}_m := (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m)'$ et $\tilde{\mathbf{r}}_m(\theta) = (\tilde{r}_1(\theta), \dots, \tilde{r}_m(\theta))'$ sont tels que $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m(\theta_0)$ et $\hat{\mathbf{r}}_m = \tilde{\mathbf{r}}_m(\hat{\theta}_n)$.

Les 4 étapes pour aboutir au résultat sont :

(i) Impact asymptotique des valeurs initiales inconnues sur la statistique $\hat{\mathbf{r}}_m$.

$$\sqrt{n}\|\mathbf{r}_m - \tilde{\mathbf{r}}_m\| = o_{\mathbb{P}}(1), \quad \sup_{\theta \in \Delta} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_m}{\partial \theta} \right\| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Les valeurs initiales inconnues n'ont pas d'impact asymptotique sur la statistique $\hat{\mathbf{r}}_m$.

(ii) Loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m$.

La loi limite de $\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m$ est donnée par $\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, D)$ où D est une matrice définie comme suit $D = \Sigma_{\mathbf{r}_m} + C_m J^{-1} I J^{-1} C'_m + C_m \Sigma_{\hat{\vartheta}_n, \mathbf{r}_m} + \Sigma'_{\hat{\vartheta}_n, \mathbf{r}_m} C'_m$.

(iii) Inversibilité de la matrice D .

(iv) Convergence de la matrice D .

Chapitre 4

Simulations et applications aux données réelles

Résumé

Ce chapitre est consacré aux simulations et à leurs applications aux données réelles. L'estimation du modèle univarié et le test portmanteau seront mis en évidence. Des simulations sur les modèles multivariés seront réalisées, ainsi que leur application à des données réelles. Le test portmanteau multivarié sera appliqué aux modèles CCC-APGARCH dans le cas où la puissance sera connue et inconnue.

Sommaire

Introduction	55
1 Estimation et validation du modèle APGARCH	56
1.1 Estimation du modèle dans le cas où la puissance est inconnue	56
1.2 Validation du modèle, par le test portmanteau	60
2 Estimation du modèle CCC-APGARCH	64
2.1 Cas où les puissances sont connues	64
2.2 Cas où les puissances sont inconnues	68
3 Applications aux données réelles	72
3.1 Présentation des données	72
3.2 Etude univariée	75
3.2.1 Estimation	75
3.2.2 Validation	81
3.3 Etude multivariée	88
3.3.1 Estimation	88

Introduction

Ce chapitre a pour but de mettre en évidence les propriétés et les caractéristiques des résultats présentés dans les précédents chapitres. Plusieurs simulations seront proposées afin de compléter les paragraphes liés aux illustrations par simulations. L'idée dans ce chapitre est de vérifier par des simulations que tous les modèles et les tests proposés réagissent correctement aux données et cela quels que soient les paramètres utilisés, notamment le ou les paramètres de puissance, vérifiant les différentes conditions des modèles. L'avantage de travailler avec des simulations est que l'on connaît toutes les caractéristiques de la trajectoire, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour des données réelles. Effectivement, les trajectoires sont simulées selon un modèle donné, avec un jeu de paramètres connus. Nous pourrions choisir dans ce cas de simuler une trajectoire avec le modèle univarié APGARCH(1,1), suivant les paramètres $\theta_0 = (0.05, 0.05, 0.15, 0.75, 1)$. Dans le cas du modèle APGARCH(1,1), nous pouvons choisir d'estimer ou non le paramètre de puissance

et par conséquent de se placer dans le cas connu ou inconnu. Cet ensemble d'information nous permettra de simuler différentes trajectoires, semblables à celles des séries financières, puis de les étudier comme si ces dernières étaient inconnues. Les résultats obtenus seront alors comparés avec les informations que nous possédions et nous serons en mesure de conclure sur l'efficacité des procédures d'estimation et/ou de validation dans notre cas. Les paramètres normalement inconnus sont, dans le cas des simulations, connus et permettent donc de quantifier l'erreur commise lors de la procédure d'estimation. Cette étape est incontournable pour étudier des données réelles, puisque sans elle, nous ne saurions pas si les résultats obtenus sont fiables ou pas.

L'étude des données réelles permet de traduire de l'information comprise dans les séries, à l'aide de différents modèles. Les données réelles peuvent être de différents types. Nous retrouvons les marchés financiers qui traduisent l'économie d'une place boursière, tel que le CAC 40 qui décrit le fonctionnement des 40 plus grandes entreprises françaises sur la place de Paris. Il y a également les actions boursières qui permettent d'investir dans des parts de capital d'une certaine entreprise, cotée ou non au CAC 40 pour le marché boursier français. Les données réelles peuvent aussi être des taux de change. Ces derniers ont un avantage par rapport à ceux mentionnés précédemment. Ils sont moins sensibles aux variations des clôtures des différentes places boursières. En effet, les différents marchés mondiaux ne fonctionnent pas tous en même temps à cause du placement géographique et certains restent fermés alors que d'autres sont ouverts à cause des différentes réglementations des pays, notamment à cause des jours fériés. Ce phénomène peut rendre l'étude multivariée des marchés financiers plus complexe, que celle des taux de change.

Dans cette partie, nous avons fait le choix de travailler avec la série du CAC 40 et des séries des taux change pour toute l'étude univariée, puis de conserver uniquement les séries des taux de change pour l'étude multivariée. Les quatre premiers paragraphes de ce chapitre sont consacrés à des simulations afin de mettre en pratique les résultats théoriques des Chapitres 1 à 2. Le dernier paragraphe traite les données réelles mentionnées précédemment et applique les différentes procédures d'estimation et de validation.

1 Estimation et validation du modèle APGARCH

Ce paragraphe est consacré à des simulations mettant en évidence la procédure d'estimation du modèle APGARCH, ainsi que sa procédure de validation développée au Chapitre 1, paragraphe 3. Nous nous focaliserons essentiellement sur le cas où la puissance est inconnue et nous réaliserons de nombreuses simulations en faisant varier la puissance, bien que de nombreuses simulations aient déjà été réalisées sur ce modèle dans la littérature. Pour l'application du test portmanteau, il est incontournable de s'assurer que la procédure d'estimation est fiable. Nous ferons également varier la taille des séries afin d'observer le comportement asymptotique du modèle, puisque là encore, le résultat théorique du test portmanteau repose sur les propriétés asymptotiques de l'estimateur des coefficients du modèle et celles des résidus.

Une fois l'étape de l'estimation accomplie, nous appliquerons le test portmanteau sur des simulations dont les trajectoires seront générées suivant plusieurs critères, comme la puissance δ ou encore l'ordre p et q du modèle. Le but est de s'assurer que le test n'est pas sensible aux différentes puissances et qu'il arrive à différencier les modèles les uns des autres.

1.1 Estimation du modèle dans le cas où la puissance est inconnue

Dans cette partie nous nous intéressons à la procédure d'estimation du modèle APGARCH(1, 1) lorsque la puissance est inconnue. Les trajectoires seront simulées suivant le vecteur des paramètres $\theta_0 = (0.04, 0.02, 0.13, 0.85, \delta)'$. Le but de cette étape est de s'assurer que la procédure renvoie des résultats corrects pour l'estimation des coefficients, quelle que soit la taille de la série et quelle que soit la puissance δ choisie pour simuler les trajectoires. Dans les simulations, nous faisons varier la puissance δ , avec une puissance réelle allant de 0.5 à 2.9. Afin d'obtenir des résultats plus précis, l'estimation est réalisée sur 200 réplifications, puis nous réalisons la moyenne des estimations. Il est

reconnu que le paramètre δ est le plus difficile à identifier. Il est par conséquent le paramètre le plus délicat à traiter. Pour cette raison, nous ne ferons varier que ce paramètre lors des simulations.

Les simulations sont réalisées à l'aide du logiciel RStudio, dans le langage de programmation Rcpp. Le bruit η_t est choisi comme étant une loi normale centrée réduite, $\mathcal{N}(0, 1)$. Les simulations sont faites pour quatre tailles de séries différentes, $n = 500, n = 1000, n = 5000$ et $n = 10000$. Les résultats obtenus pour l'estimation sont résumés dans les tableaux suivants.

Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	0.5	de $\hat{\delta}$ en %
Biais	$n = 500$	0.03987	0.01767	0.01077	0.07363	0.08502	17.00
	$n = 1000$	0.01904	0.01028	0.00448	0.03339	0.05679	11.36
	$n = 5000$	0.00321	0.00181	0.00076	0.00601	0.01035	2.07
	$n = 10000$	0.00088	0.00144	0.00180	0.00271	0.00110	0.22
Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	0.7	de $\hat{\delta}$ en %
Biais	$n = 500$	0.05809	0.01480	0.01111	0.10068	0.04998	7.14
	$n = 1000$	0.02284	0.00718	0.00849	0.04459	0.04002	5.72
	$n = 5000$	0.00310	0.00224	0.00069	0.00605	0.00961	1.37
	$n = 10000$	0.00206	0.00054	0.00002	0.00288	0.01185	1.69
Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	0.9	de $\hat{\delta}$ en %
Biais	$n = 500$	0.06536	0.01040	0.00361	0.11958	0.00121	0.13
	$n = 1000$	0.02446	0.01045	0.00314	0.04409	0.06642	7.38
	$n = 5000$	0.00328	0.00004	0.00230	0.00819	0.01077	1.20
	$n = 10000$	0.00223	0.00135	0.00200	0.00568	0.00528	0.59
Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	1.1	de $\hat{\delta}$ en %
Biais	$n = 500$	0.05778	0.01153	0.00962	0.11763	0.19104	17.37
	$n = 1000$	0.02122	0.00501	0.00129	0.04567	0.03957	3.6
	$n = 5000$	0.00210	0.00034	0.00125	0.00604	0.01642	1.49
	$n = 10000$	0.00154	0.00036	0.00102	0.00410	0.00266	0.24

TABLE 4.1 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle APGARCH(1,1) pour différentes valeurs de δ simulées

La table 4.1 présente les résultats des estimations sur des simulations du modèle APGARCH(1,1), pour différentes valeurs de δ . Cette table donne également l'erreur commise lors de l'estimation du paramètre δ . Le constat que nous pouvons faire est que l'estimation tend à être de plus en plus précise, au fur et à mesure que la taille de la série augmente. L'erreur en pourcentage de $\hat{\delta}$ semble décroître rapidement au delà d'une taille $n = 1000$ quelle que soit la valeur de puissance choisie pour la simulation.

Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	1.5	de $\hat{\delta}$ en %
Biais	$n = 500$	0.04110	0.01079	0.01162	0.12958	1.24129	82.75
	$n = 1000$	0.01988	0.00423	0.00488	0.04576	0.23052	15.37
	$n = 5000$	0.00417	0.00018	0.00165	0.00768	0.02101	1.40
	$n = 10000$	0.00052	0.00057	0.00063	0.00138	0.01162	0.77
Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	1.7	de $\hat{\delta}$ en %
Biais	$n = 500$	0.03440	0.00613	0.00581	0.10422	0.81082	47.70
	$n = 1000$	0.01806	0.00373	0.00202	0.04990	0.29029	17.08
	$n = 5000$	0.00096	0.00203	0.00101	0.00511	0.06606	3.89
	$n = 10000$	0.00117	0.00017	0.00113	0.00348	0.00807	0.47
Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	1.9	de $\hat{\delta}$ en %
Biais	$n = 500$	0.03333	0.00437	0.02360	0.09974	1.30882	68.89
	$n = 1000$	0.00702	0.00286	0.00989	0.04291	0.71085	37.41
	$n = 5000$	0.00175	0.00044	0.00127	0.00338	0.00224	0.12
	$n = 10000$	0.00201	0.00061	0.00114	0.00468	0.00828	0.44
Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	2.1	de $\hat{\delta}$ en %
Biais	$n = 500$	0.02492	0.00152	0.02279	0.10423	1.56231	74.40
	$n = 1000$	0.00857	0.00061	0.00524	0.03357	0.48759	23.22
	$n = 5000$	0.00064	0.00091	0.00288	0.00399	0.06742	3.21
	$n = 10000$	0.00126	0.00054	0.00204	0.00364	0.00152	0.07
Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	2.3	de $\hat{\delta}$ en %
Biais	$n = 500$	0.01883	0.00112	0.02397	0.08756	2.08272	90.55
	$n = 1000$	0.00540	0.00098	0.00615	0.04192	0.80064	34.81
	$n = 5000$	0.00010	0.00034	0.00237	0.00171	0.04663	2.03
	$n = 10000$	0.00148	0.00020	0.00035	0.00429	0.02123	0.92
Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	2.5	de $\hat{\delta}$ en %
Biais	$n = 500$	0.01672	0.00491	0.01529	0.08954	2.28181	91.27
	$n = 1000$	0.00375	0.00023	0.00916	0.02840	0.69610	27.84
	$n = 5000$	0.00185	0.00059	0.00120	0.00433	0.03778	1.51
	$n = 10000$	0.00015	0.00062	0.00199	0.00074	0.03414	1.37

TABLE 4.2 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle APGARCH(1,1) pour différentes valeurs de δ simulées

La table 4.2 présente les résultats des estimations sur des simulations du modèle APGARCH(1,1) pour différentes valeurs de δ . La table 4.2 présente les mêmes constats que la table 4.1. L'estimation semble être de plus en plus précise avec l'augmentation de la taille des simulations. L'erreur en pourcentage de $\hat{\delta}$ décroît rapidement au delà d'une taille $n = 1000$ et cela quelle que soit la valeur de la puissance utilisée pour la simulation.

Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	2.7	de $\hat{\delta}$ en %
Biais	$n = 500$	0.00704	0.00059	0.02171	0.07521	2.45380	90.88
	$n = 1000$	0.00517	0.00133	0.00617	0.02872	0.58023	21.49
	$n = 5000$	0.00112	0.00098	0.00236	0.00199	0.00052	0.02
	$n = 10000$	0.00061	0.00032	0.00097	0.00109	0.01864	0.69
Paramètres		ω	α^+	α^-	β	δ	Erreur relative
Vraie Valeur		0.04	0.02	0.13	0.85	2.9	relative en %
Biais	$n = 500$	0.00889	0.00020	0.01765	0.07592	2.71142	93.50
	$n = 1000$	0.00227	0.00110	0.01473	0.02468	0.81896	28.24
	$n = 5000$	0.00102	0.00047	0.00054	0.00283	0.02636	0.91
	$n = 10000$	0.00001	0.00079	0.00345	0.00013	0.04934	1.70

TABLE 4.3 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle APGARCH(1,1) pour différentes valeurs de δ simulées

La table 4.3 présente les résultats des estimations sur des simulations du modèle APGARCH(1,1) pour différentes valeurs de δ . Cette table montre qu’au fur et à mesure que la taille des simulations augmente, l’erreur liée à l’estimation diminue, quel que soit le paramètre. De plus, comme pour les deux précédentes tables, l’erreur en pourcentage de $\hat{\delta}$ diminue très rapidement une fois que la taille des simulations est supérieure à $n = 1000$.

D’une manière générale, le constat que nous pouvons faire sur les différentes tables liées à l’estimation, Table 4.1–4.2–4.3, est que quelle que soit la puissance δ utilisée pour simuler les trajectoires, l’erreur en valeur absolue tend à diminuer au fur et à mesure que la taille de la série augmente. Ceci reste vrai pour les autres paramètres du modèle. En revanche, plus le paramètre δ est grand et plus l’erreur commise pour une taille d’échantillon $n = 500$ est grande, mais cette erreur diminue rapidement. Pour une taille $n = 5000$, ce qui correspond à une taille de série financière classique, l’erreur commise pour l’estimation du paramètre δ est de l’ordre de 4% au maximum. Ce constat est fait pour la valeur 1.70 ce qui ne représente pas dans la pratique une valeur souvent observée pour la puissance. A partir de la valeur 1.5, nous pouvons remarquer que pour une taille $n = 1000$, l’erreur en pourcentage augmente considérablement. Nous constatons également que, pour des puissances au voisinage de 1.0, l’erreur lors de l’estimation du coefficient δ est très faible. Pour $\delta = 1$, le modèle APGARCH devient le modèle AGARCH ou TGARCH de Rabemananjara et Zakoïan (1993).

Pour obtenir un résultat visuel de la consistance de l’estimateur, nous pouvons tracer les courbes d’erreur de tous les paramètres en fonction de la taille de la série. Pour ne pas alourdir inutilement cette partie, nous donnerons les graphiques des simulations réalisées avec la puissance $\delta = 1$, qui revient à considérer le modèle TGARCH(1,1).

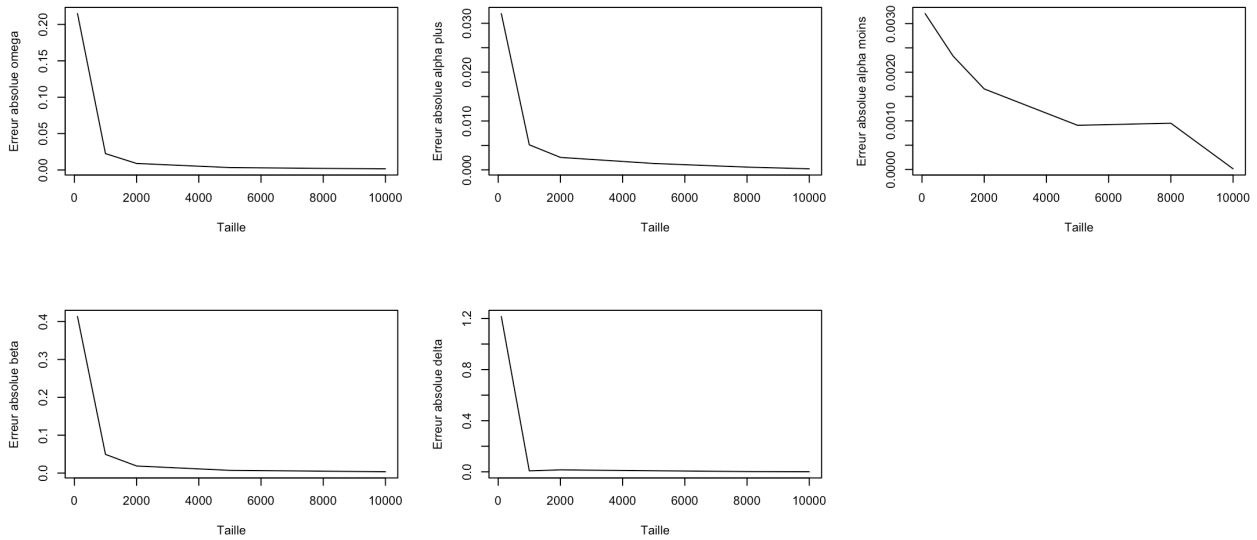


FIGURE 4.1 – Graphique des erreurs absolues des coefficients du modèle APGARCH(1,1)

Par ces graphiques, nous pouvons constater que l'erreur diminue au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente. Cette décroissance est clairement visible à partir d'une taille d'échantillon égale à 1000, ce qui est en accord avec les constats réalisés sur les tables 4.1–4.2–4.3. À partir d'une taille d'échantillon supérieure ou égale à 2000, l'erreur est de l'ordre de 10^{-3} quel que soit le paramètre.

1.2 Validation du modèle, par le test portmanteau

Dans cette partie, nous nous intéressons au test portmanteau univarié associé au modèle APGARCH lorsque la puissance est inconnue. Au paragraphe précédent, nous avons vérifié et constaté que la procédure d'estimation lorsque la puissance est inconnue donne des résultats satisfaisants, et ceci quelle que soit la valeur de la puissance choisie. Le but de cette partie est de vérifier que le test portmanteau développé dans le paragraphe 3 du Chapitre 1 réagit correctement aux différentes situations que nous pouvons rencontrer dans la pratique.

Pour cela, nous commencerons par vérifier que le test portmanteau détecte correctement les modèles et cela quelle que soit la puissance. Dans le cas où la puissance est connue, Carbon et Francq (2011) ont montré qu'à partir d'un certain rang, le test semblait confondre le vrai modèle avec des modèles dont les puissances étaient différentes. Il sera important de s'assurer aussi que le test arrive à différencier les modèles. Cela pourra s'avérer crucial pour valider et déterminer les ordres p et q du modèle.

Le test est réalisé à l'aide du logiciel RStudio, dans le langage de programmation Rcpp. Il est effectué pour des simulations de taille $n = 4000$, ce qui correspond généralement dans la pratique aux tailles des séries financières journalières. On effectue $N = 1000$ répliques indépendantes et on utilise la loi de Student à 9 degrés de libertés que l'on re-normalise de façon à obtenir une variance égale à 1.

Résultats pour différentes valeurs de δ simulées

Dans ce paragraphe, l'hypothèse nulle est le modèle APGARCH(1, 1). Le but est de vérifier que le test portmanteau détermine correctement le modèle et ce quelle que soit la valeur de la puissance δ utilisée pour simuler les trajectoires. Dans le cas où la puissance est connue et fixée à 2 pour simuler les trajectoires, lorsque nous utilisons un modèle avec une puissance supérieure ou égale à 2.5 le test semble confondre les modèles (voir Carbon et Francq (2011)). Pour effectuer le test, nous nous fixons un risque α à 1% et 5% et nous donnons les intervalles de confiance à 99% et 95% pour le risque de première espèce $\alpha = 1\%$, $[0.2\%, 1.8\%]$ et $[0.4\%, 1.6\%]$ respectivement. Pour le risque $\alpha = 5\%$, les intervalles sont $[3.2\%, 6.8\%]$ et $[3.6\%, 6.4\%]$ respectivement. Le paramètre $\vartheta_{0,11}$ utilisé est le même que celui utilisé pour l'estimation, $\vartheta_{0,11} = (0.04, 0.02, 0.13, 0.85, \delta)'$.

risque	(δ)	m					
		2	4	6	8	10	12
$\alpha = 1\%$	0.5	1.0	1.2	1.1	1.2	2.3	2.4
	1	1.3	1.3	1.4	1.7	1.3	1.7
	1.5	1.4	1.2	1.0	1.7	1.3	1.7
	2	1.8	1.4	1.0	1.4	1.8	1.7
	2.5	1.1	1.1	0.9	1.8	1.8	1.1
	3	1.3	1.9	1.2	1.7	1.7	1.6
risque	(δ)	m					
		2	4	6	8	10	12
$\alpha = 5\%$	0.5	4.7	5.6	4.8	6.0	6.0	6.4
	1	3.2	4.4	5.8	5.4	5.4	5.1
	1.5	4.4	4.2	5.5	6.0	4.6	5.1
	2	5.2	4.7	5.5	5.1	5.7	7.4
	2.5	3.7	4.9	4.9	4.3	5.0	5.3
	3	3.8	3.4	4.8	5.4	4.9	6.6

TABLE 4.4 – Fréquences relatives (en %) de rejet pour le modèle APGARCH(1, 1) avec les différentes valeurs simulées de la puissance

Partie gauche : Le risque est fixé à $\alpha = 1\%$; Partie droite : Le risque est fixé à $\alpha = 5\%$

Le test semble valider le modèle quelle que soit la valeur de la puissance utilisée pour la simulation. La remarque réalisée sur le test portmanteau lorsque la puissance est connue, ne peut pas se vérifier directement, puisque les conditions de l'expérience ne peuvent pas être reproduites, mais nous pouvons penser que le test distingue correctement les modèles avec les puissances inconnues.

Une autre étape importante est de vérifier que le test portmanteau détermine correctement le modèle qui a été utilisé pour générer les trajectoires. Les séries seront simulées selon un modèle APGARCH(p, q), dont on précisera à chaque fois les ordres p et q choisis et les paramètres utilisés pour la simulation de la trajectoire. La taille des simulations reste fixée à $n = 4000$ et la loi de η_t reste inchangée.

Résultats pour $p = 0$ et $q = 1$.

Pour cette expérience, nous considérons les ordres $p = 0$ et $q = 1$, ce qui correspond au modèle APGARCH(0, 1) ou encore au modèle APARCH(1). L'hypothèse nulle pour ce test est donc le modèle APGARCH(0, 1) et le test est réalisé pour un risque $\alpha = 5\%$.

Le modèle APGARCH(0, 1) est alors utilisé pour simuler les trajectoires et le paramètre utilisé pour les simulations est le vecteur $\vartheta_{0,01} = (1, 0.05, 0.15, 2)'$. Les résultats du test portmanteau sont résumés dans le tableau suivant.

risque	(p, q)	m					
		2	4	6	8	10	12
$\alpha = 5\%$	(0, 1)	5.4	6.0	4.1	5.4	6.4	5.4
	(1, 1)	10.9	11.2	10.4	10.8	9.1	8.2
	(1, 2)	24.2	28.4	25.8	24.9	23.1	23.6
	(1, 3)	28.6	47.9	42.0	40.8	36.9	38.6
	(2, 1)	11.9	17.5	13.8	15.4	12.3	11.6

TABLE 4.5 – Fréquence relative (en %) de rejet lorsque le modèle est un APGARCH(0, 1)

La Table 4.5 présente les fréquences relatives de rejets en pourcentage des N réplifications indépendantes dans le cas où l'hypothèse nulle est le modèle APGARCH(0, 1). Le test détecte sans problème le modèle APGARCH(0, 1) et rejette les autres modèles. Les lignes 2, 3, 4 et 5 de la table, montrent que la fréquence relative de rejet est en dehors de l'intervalle de confiance à 95%. Le test détecte correctement les modèles lorsque les trajectoires sont simulées avec le modèle APGARCH(0, 1).

Résultats pour $p = 1$ et $q = 1$.

Pour cette expérience, nous considérons les ordres $p = 1$ et $q = 1$, ce qui correspond au modèle APGARCH(1, 1). L'hypothèse nulle pour ce test est donc le modèle APGARCH(1, 1) et le test est réalisé pour un risque $\alpha = 5\%$.

Le modèle APGARCH(1, 1) est alors utilisé pour simuler les trajectoires et le paramètre utilisé pour les simulations est le vecteur $\vartheta_{0,11} = (0.04, 0.02, 0.13, 0.85, 1)'$. Les résultats du test portmanteau sont résumés dans le tableau suivant.

risque	(p, q)	m					
		2	4	6	8	10	12
$\alpha = 5\%$	(0, 1)	87.9	98.3	98.8	99.1	99.2	99.2
	(1, 1)	4.6	6.5	4.6	4.8	7.2	6.3
	(1, 2)	16.0	17.7	14.0	11.9	12.9	13.5
	(1, 3)	28.1	26.8	26.7	25.1	21.8	22.8
	(2, 1)	7.1	7.0	7.0	6.4	7.5	8.2

TABLE 4.6 – Fréquence relative (en %) de rejet lorsque le modèle est un APGARCH(1, 1)

La table 4.6 présente les fréquences relatives de rejets en pourcentage des N réplifications indépendantes dans le cas où l'hypothèse nulle est le modèle APGARCH(1, 1). Le test détecte sans aucune difficulté le modèle APGARCH(1, 1) qui représente l'hypothèse nulle. Pour le modèle APGARCH(2, 1) le test a tendance à le rejeter, mais le nombre de rejets est relativement proche de l'intervalle de confiance à 95%. Pour tous les autres modèles, le test rejette sans difficulté l'hypothèse nulle et il fait alors la différence entre les modèles.

Résultats pour $p = 1$ et $q = 2$.

Pour cette expérience, nous considérons les ordres $p = 1$ et $q = 2$, ce qui correspond au modèle APGARCH(1, 2). L'hypothèse nulle pour ce test est donc le modèle APGARCH(1, 2) et le test est réalisé pour un risque $\alpha = 5\%$.

Le modèle APGARCH(1, 2) est alors utilisé pour simuler les trajectoires et le paramètre utilisé pour les simulations est le vecteur $\vartheta_{0,12} = (0.04, 0.02, 0.13, 0.005, 0.05, 0.6, 1)'$. Les résultats du test portmanteau sont résumés dans le tableau suivant :

risque	(p, q)	m					
		2	4	6	8	10	12
$\alpha = 5\%$	(0, 1)	99.6	99.9	99.4	99.7	99.6	99.0
	(1, 1)	24.2	18.6	16.4	14.6	11.6	9.8
	(1, 2)	4.4	5.5	5.7	4.8	5.2	5.5
	(1, 3)	9.2	11.1	12.0	10.3	12.8	11.6
	(2, 1)	42.2	38.7	35.2	33.0	32.5	28.5

TABLE 4.7 – Fréquence relative (en %) de rejet lorsque le modèle est un APGARCH(1, 2)

La table 4.7 présente les fréquences relatives de rejets en pourcentage des N réplifications indépendantes dans le cas où l'hypothèse nulle est le modèle APGARCH(1, 2). Le test rejette sans problème l'hypothèse nulle lorsque nous modélisons les trajectoires par des modèles différents du modèle APGARCH(1, 2).

Résultats pour $p = 1$ et $q = 3$.

Pour cette expérience, nous considérons les ordres $p = 1$ et $q = 3$, ce qui correspond au modèle APGARCH(1, 3). L'hypothèse nulle pour ce test est donc le modèle APGARCH(1, 3) et le test est réalisé pour un risque $\alpha = 5\%$.

Le modèle APGARCH(1, 3) est alors utilisé pour simuler les trajectoires et le paramètre utilisé pour les simulations est le vecteur $\vartheta_{0,13} = (0.04, 0.1, 0.20, 0.05, 0.1, 0.02, 0.05, 0.45, 1)'$. Les résultats du test portmanteau sont résumés dans le tableau suivant :

risque	(p, q)	m					
		2	4	6	8	10	12
$\alpha = 5\%$	(0, 1)	98.8	99.4	99.7	99.7	99.6	99.9
	(1, 1)	23.9	23.2	19.3	15.6	16.8	14.7
	(1, 2)	7.5	10.9	8.6	7.2	9.2	7.2
	(1, 3)	4.1	6.5	6.4	7.5	6.5	7.5
	(2, 1)	43.2	45.1	38.8	34.6	36.0	32.5

TABLE 4.8 – Fréquence relative (en %) de rejet lorsque le modèle est un APGARCH(1, 3)

Pour cette expérience, nous pouvons faire les mêmes constats que précédemment. La table 4.8 présente les fréquences relatives de rejets en pourcentage des N réplifications indépendantes dans le cas où l'hypothèse nulle est le modèle APGARCH(1, 3). Le test rejette sans problème l'hypothèse nulle lorsque nous modélisons les trajectoires par des modèles différents du modèle APGARCH(1, 3).

Résultats pour $p = 2$ et $q = 1$.

Pour cette expérience, nous considérons les ordres $p = 2$ et $q = 1$, ce qui correspond au modèle APGARCH(2, 1). L'hypothèse nulle pour ce test est donc le modèle APGARCH(2, 1) et le test est réalisé pour un risque $\alpha = 5\%$.

Le modèle APGARCH(2, 1) est alors utilisé pour simuler les trajectoires et le paramètre utilisé pour les simulations est le vecteur $\vartheta_{0,21} = (0.04, 0.02, 0.13, 0.7, 0.1, 1)'$. Les résultats du test portmanteau sont résumés dans le tableau suivant :

Empirical Size							
risque	(p, q)	m					
		2	4	6	8	10	12
$\alpha = 5\%$	(0, 1)	63.5	88.0	91.5	90.6	93.3	90.9
	(1, 1)	4.4	4.0	5.0	5.5	7.5	6.5
	(1, 2)	19.3	16.4	15.2	16.0	12.3	14.1
	(1, 3)	24.4	25.1	25.7	23.7	23.6	23.9
	(2, 1)	6.5	6.3	6.7	6.7	8.4	7.5

TABLE 4.9 – Fréquence relative (en %) de rejet lorsque le modèle est un APGARCH(2, 1)

Pour cette expérience nous pouvons faire les mêmes constats que précédemment. La table 4.9 présente les fréquences relatives de rejets en pourcentage des N réplifications indépendantes dans le cas où l'hypothèse nulle est le modèle APGARCH(2, 1). Le test rejette sans problème l'hypothèse nulle lorsque nous modélisons les trajectoires par des modèles différents du modèle APGARCH(2, 1).

La procédure de validation liée au modèle APGARCH lorsque la puissance δ est inconnue renvoie des résultats satisfaisants pour les simulations effectuées. Lorsque la puissance δ varie, le test portmanteau réagit correctement, ce qui montre que l'estimation de la puissance dans la pratique n'influencera pas le résultat du test. Lorsque l'hypothèse nulle est un modèle APGARCH(p, q) avec p et q fixés, le test fait la différence entre tous les modèles, même si parfois, le test semble confondre quelques modèles. Dans la pratique cela ne posera aucun problème puisque par différents recoupelements, nous pouvons déterminer avec certitude le modèle adéquat, comme nous l'avons constaté dans la table 4.6.

2 Estimation du modèle CCC-APGARCH

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au modèle CCC-APGARCH dans le cas où la puissance $\underline{\delta}$ est connue et inconnue. Les simulations sont réalisées avec $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, I_2)$ nous utilisons les résultats obtenus au Chapitre 2 pour estimer les coefficients du modèle. Nous nous intéresserons uniquement au modèle bivarié. Les simulations sont réalisées à partir de plusieurs jeux de paramètres afin de couvrir un maximum de cas possibles et nous utilisons le logiciel RStudio avec le langage Rcpp. Les estimations sont basées sur $N = 100$ réplifications de trajectoires indépendantes, afin d'améliorer les performances de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance. Nous établissons les estimations sur trois tailles différentes de trajectoire. La vraie valeur des paramètres utilisée pour simuler les trajectoires est donnée dans la première ligne de chaque tableau. Pour minimiser la log-vraisemblance, nous utilisons la fonction `nlminb()`.

2.1 Cas où les puissances sont connues

Dans le cas où les puissances sont connues, le modèle peut être associé à des modèles connus, tel que le modèle CCC-AGARCH développé par Francq et Zakoïan (2012). Le but de ce paragraphe est de s'assurer que la procédure d'estimation est adaptée au modèle et cela dans plusieurs cas. Comme pour le cas où les composantes de $\underline{\delta}$ sont toutes égales à 2 nous obtenons le modèle de Francq et Zakoïan (2012), nous savons que la procédure d'estimation est adaptée. Nous nous assurons qu'elle l'est également pour d'autres valeurs de $\underline{\delta}$. Nous nous intéresserons au cas bivarié et nous simulerons des trajectoires avec $\delta_1 = \delta_2 \in [0.5, 3]$ et $\delta_1 \neq \delta_2 \in [0.5, 3]$.

Estimation avec les puissances δ_1 et δ_2 égales

On commence par considérer le cas où les puissances δ_1 et δ_2 sont égales. Nous résumons les résultats de l'estimation dans les tableaux suivants :

Taille	$\underline{\omega}_0$ 0.05 0.05	A_0^+ 0.07 0.02 0.02 0.07		A_0^- 0.15 0.05 0.05 0.15		B_0 0.75 0.05 0.05 0.75		ρ_0 0.55
$n = 500$	0.01380 0.00994	0.00365 0.00316	0.01051 0.00140	0.00686 0.00497	0.00353 0.00516	0.09598 0.02411	0.06111 0.04690	0.00513
$n = 5000$	0.00135 0.00098	0.00079 0.00168	0.00033 0.00246	0.00023 0.00185	0.00038 0.00220	0.00056 0.00021	0.00133 0.00508	0.00115
$n = 10000$	0.00017 0.00019	0.00054 0.00037	0.00002 0.00015	0.00019 0.00063	0.00025 0.00029	0.00662 0.00022	0.00714 0.00021	0.00070

TABLE 4.10 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle CCC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (0.5, 0.5)'$

Taille	$\underline{\omega}_0$ 0.05 0.05	A_0^+ 0.07 0.02 0.02 0.07		A_0^- 0.15 0.05 0.05 0.15		B_0 0.75 0.05 0.05 0.75		ρ_0 0.55
$n = 500$	0.01266 0.00554	0.00119 0.00432	0.01328 0.00636	0.00419 0.00525	0.00218 0.00200	0.10740 0.02035	0.08040 0.02824	0.00336
$n = 5000$	0.00128 0.00145	0.00124 0.00219	0.00030 0.00251	0.00077 0.00141	0.00156 0.00199	0.00739 0.00305	0.00604 0.00827	0.00103
$n = 10000$	0.00046 0.00022	0.00047 0.00014	0.00018 0.00008	0.00064 0.00137	0.00143 0.00069	0.01041 0.00137	0.01133 0.00164	0.00062

TABLE 4.11 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle CCC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (1.4, 1.4)'$

Taille	$\underline{\omega}_0$ 0.05 0.05	A_0^+ 0.07 0.02 0.02 0.07		A_0^- 0.15 0.05 0.05 0.15		B_0 0.75 0.05 0.05 0.75		ρ_0 0.55
$n = 500$	0.02583 0.01942	0.00129 0.00364	0.01054 0.00069	0.00818 0.00550	0.00217 0.00210	0.04059 0.00990	0.03365 0.01691	0.00075
$n = 5000$	0.00139 0.00281	0.00047 0.00226	0.00032 0.00183	0.00073 0.00201	0.00174 0.00108	0.00769 0.00075	0.00796 0.00333	0.00071
$n = 10000$	0.00067 0.00079	0.00008 0.00010	0.00011 0.00020	0.00039 0.00199	0.00078 0.00088	0.00573 0.00020	0.00583 0.00011	0.00044

TABLE 4.12 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle CCC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (2.8, 2.8)'$

Les tables 4.10, 4.11 et 4.12 montrent que, lorsque la puissance est connue, l'estimation du modèle CCC-APGARCH(1,1) en dimension $d = 2$ donne de bons résultats. Pour $n = 500$, les résultats sont très satisfaisants et nous constatons que l'erreur diminue lorsque la taille de la série augmente. Lorsque la taille est fixée à $n = 5000$, ce qui correspond à la taille des séries financières, l'estimation des coefficients pour ce modèle est fiable.

Estimation avec les puissances δ_1 et δ_2 différentes

Nous considérons des cas où les puissances δ_1 et δ_2 sont différentes. Ces puissances jouent un rôle symétrique et l'estimation du modèle CCC-APGARCH(1,1) avec $\delta_1 = a$ et $\delta_2 = b$ sera similaire à celle considérant $\delta_1 = b$ et $\delta_2 = a$. Pour cette raison, nous ne détaillerons pas tous les cas possibles. Nous résumons les résultats des estimations dans les tableaux suivants :

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	
$n = 500$	0.00933	0.00255	0.00162	0.00248	0.00352	0.08211	0.06374	0.00454
	0.00433	0.01511	0.00108	0.02193	0.00152	0.02149	0.04186	
$n = 5000$	0.00108	0.00104	0.00030	0.00007	0.00044	0.00291	0.00174	0.00109
	0.00115	0.00513	0.00264	0.00565	0.00219	0.00369	0.01157	
$n = 10000$	0.00024	0.00084	0.00007	0.00047	0.00042	0.00435	0.00448	0.00066
	0.00000	0.00122	0.00041	0.00175	0.00046	0.00104	0.00050	

TABLE 4.13 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle CCC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (0.5, 1.4)'$

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	
$n = 500$	0.00813	0.00045	0.00066	0.00189	0.00224	0.07583	0.06044	0.00357
	0.00435	0.01654	0.00124	0.02832	0.00264	0.01255	0.03201	
$n = 5000$	0.00084	0.00123	0.00017	0.00013	0.00041	0.00328	0.00263	0.00134
	0.00065	0.00875	0.00177	0.00843	0.00188	0.00459	0.01332	
$n = 10000$	0.00030	0.00105	0.00007	0.00071	0.00033	0.00304	0.00313	0.00060
	0.00047	0.00186	0.00024	0.00212	0.00017	0.00120	0.00132	

TABLE 4.14 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle CCC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (0.5, 2.1)'$

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	
$n = 500$	0.00719	0.02477	0.00034	0.02233	0.00140	0.12148	0.10482	0.03206
	0.00852	0.04298	0.00142	0.05257	0.00711	0.00400	0.03997	
$n = 5000$	0.00089	0.00490	0.00014	0.00665	0.00035	0.01004	0.00480	0.02358
	0.00100	0.00972	0.00017	0.00985	0.00108	0.00780	0.00118	
$n = 10000$	0.00074	0.00333	0.00008	0.00521	0.00041	0.00895	0.00471	0.00969
	0.00131	0.00237	0.00059	0.00124	0.00083	0.00330	0.00236	

TABLE 4.15 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle CCC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (0.5, 3)'$

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	
$n = 500$	0.00183 0.00790	0.00195 0.01475	0.00334 0.00453	0.00864 0.02046	0.00261 0.00159	0.05962 0.00517	0.05532 0.01301	0.00318
$n = 5000$	0.00117 0.00117	0.00179 0.00567	0.00025 0.00233	0.00003 0.00416	0.00090 0.00221	0.00569 0.00831	0.00470 0.01466	0.00098
$n = 10000$	0.00008 0.00018	0.00116 0.00092	0.00006 0.00013	0.00045 0.00176	0.00059 0.00032	0.00444 0.00120	0.00462 0.00110	0.00060

TABLE 4.16 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle CCC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (1.0, 2.1)'$

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	
$n = 500$	0.00037 0.01115	0.00095 0.02498	0.00192 0.00061	0.00872 0.03260	0.00122 0.00186	0.04280 0.00127	0.03983 0.02053	0.00084
$n = 5000$	0.00057 0.00162	0.00194 0.00955	0.00003 0.00163	0.00013 0.00735	0.00047 0.00146	0.00198 0.00123	0.00207 0.00709	0.00727
$n = 10000$	0.00014 0.00059	0.00081 0.00207	0.00004 0.00001	0.00066 0.00212	0.00044 0.00006	0.00369 0.00233	0.00312 0.00213	0.00024

TABLE 4.17 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle CCC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (1.0, 3.0)'$

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	
$n = 500$	0.00806 0.01552	0.00192 0.01079	0.00475 0.00180	0.01123 0.01181	0.00138 0.00166	0.04655 0.00290	0.04263 0.00810	0.00022
$n = 5000$	0.00129 0.00279	0.00131 0.00362	0.00023 0.00217	0.00029 0.00282	0.00119 0.00169	0.00608 0.00137	0.00574 0.00666	0.00069
$n = 10000$	0.00053 0.00035	0.00080 0.00033	0.00005 0.00014	0.00007 0.00248	0.00061 0.00064	0.00368 0.00091	0.00393 0.00060	0.00046

TABLE 4.18 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle CCC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (2.1, 3.0)'$

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	
$n = 500$	0.00811	0.00046	0.00788	0.00730	0.00132	0.08338	0.06726	0.00332
	0.00503	0.00736	0.00624	0.00863	0.00146	0.01124	0.01939	
$n = 5000$	0.00130	0.00136	0.00039	0.00071	0.00150	0.00747	0.00612	0.00102
	0.00159	0.00309	0.00247	0.00210	0.00205	0.00402	0.00985	
$n = 10000$	0.00016	0.00076	0.00013	0.00022	0.00107	0.00766	0.00807	0.00061
	0.00012	0.00032	0.00012	0.00165	0.00063	0.00084	0.00101	

TABLE 4.19 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle CCC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (1.3, 1.7)'$

Comme pour le cas où les puissances étaient connues et égales, les tables 4.13 à 4.19 montrent que la procédure d'estimation donne de bons résultats et ce, quelles que soient les valeurs de la puissance. L'erreur décroît rapidement avec l'augmentation de la taille des séries.

2.2 Cas où les puissances sont inconnues

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au cas où la puissance $\underline{\delta}$ est inconnue et doit être estimée en même temps que les autres paramètres. Dans le cas univarié, nous avons fait le constat que l'erreur commise lors de l'estimation de la puissance est plus importante pour des puissances supérieures à 1.5 et surtout pour des petites tailles de séries. Nous pourrions supposer que ce constat se retrouvera dans le cas multivarié, surtout que le nombre de paramètres à estimer est bien plus important que dans le cas univarié. On compte 17 paramètres pour un modèle bivarié avec les ordres $p = q = 1$, contre 5 pour le modèle univarié. Mais ce constat fait sur les valeurs supérieures à 1.5 ne devrait pas se retrouver ici, puisque pour $\underline{\delta} = (2, \dots, 2)'$, nous retrouvons le modèle développé par Francq et Zakoïan (2012). Comme pour le cas connu, on simulera des trajectoires bivariées avec $\delta_1 = \delta_2$ et également $\delta_1 \neq \delta_2$.

Estimation avec les puissances δ_1 et δ_2 égales

Bien que dans la pratique il est rare d'avoir sur différentes séries des puissances égales, il est incontournable de s'assurer que l'estimation est satisfaisante pour des puissances égales. Les résultats sont résumés dans les tableaux suivants :

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		$\underline{\delta}$	ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	0.5	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	0.5	
$n = 500$	0.0158	0.0074	0.0153	0.0134	0.0101	0.0519	0.0278	0.0536	0.0050
	0.0217	0.0109	0.0000	0.0004	0.0011	0.0419	0.0797	0.0489	
$n = 5000$	0.0031	0.0003	0.0018	0.0024	0.0000	0.0083	0.0085	0.0059	0.0002
	0.0048	0.0005	0.0001	0.0003	0.0019	0.0005	0.0045	0.0142	
$n = 10000$	0.0010	0.0002	0.0007	0.0016	0.0016	0.0035	0.0019	0.0065	0.0002
	0.0020	0.0001	0.0007	0.0005	0.0008	0.0012	0.0009	0.0039	

TABLE 4.20 – Erreur absolue de l'estimation de ϑ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1,1)

Taille	$\underline{\omega}_0$ 0.05 0.05	A_0^+ 0.07 0.02 0.02 0.07	A_0^- 0.15 0.05 0.05 0.15	B_0 0.75 0.05 0.05 0.75	$\underline{\delta}$ 1.0 1.0	ρ_0 0.55
$n = 500$	0.0149 0.0324	0.0108 0.0115 0.0095 0.0083	0.0276 0.0065 0.0040 0.0202	0.0457 0.0187 0.0505 0.1099	0.0433 0.0368	0.0056
$n = 5000$	0.0010 0.0002	0.0008 0.0021 0.0009 0.0005	0.0024 0.0011 0.0032 0.0002	0.0016 0.0002 0.0143 0.0148	0.0096 0.0105	0.0003
$n = 10000$	0.0008 0.0021	0.0002 0.0002 0.0000 0.0012	0.0011 0.0012 0.0004 0.0008	0.0043 0.0030 0.0011 0.0015	0.0129 0.0063	0.0001
Taille	$\underline{\omega}_0$ 0.05 0.05	A_0^+ 0.07 0.02 0.02 0.07	A_0^- 0.15 0.05 0.05 0.15	B_0 0.75 0.05 0.05 0.75	$\underline{\delta}$ 1.5 1.5	ρ_0 0.55
$n = 500$	0.0083 0.0298	0.0149 0.0090 0.0077 0.0166	0.0203 0.0061 0.0008 0.0287	0.1024 0.0839 0.0986 0.1531	0.3584 0.3850	0.0070
$n = 5000$	0.0012 0.0016	0.0011 0.0020 0.0010 0.0010	0.0034 0.0015 0.0030 0.0002	0.0015 0.0004 0.0181 0.0164	0.0127 0.0044	0.0003
$n = 10000$	0.0006 0.0013	0.0007 0.0001 0.0002 0.0012	0.0007 0.0006 0.0004 0.0005	0.0040 0.0033 0.0001 0.0022	0.0119 0.0023	0.0001
Taille	$\underline{\omega}_0$ 0.05 0.05	A_0^+ 0.07 0.02 0.02 0.07	A_0^- 0.15 0.05 0.05 0.15	B_0 0.75 0.05 0.05 0.75	$\underline{\delta}$ 2.0 2.0	ρ_0 0.55
$n = 500$	0.0254 0.0042	0.0116 0.0117 0.0150 0.0130	0.0241 0.0073 0.0135 0.0350	0.1226 0.0645 0.0514 0.0737	0.5569 0.4247	0.0028
$n = 5000$	0.0005 0.0017	0.0013 0.0023 0.0008 0.0010	0.0031 0.0012 0.0024 0.0008	0.0005 0.0001 0.0180 0.0157	0.0012 0.0179	0.0004
$n = 10000$	0.0006 0.0007	0.0010 0.0004 0.0002 0.0012	0.0007 0.0001 0.0008 0.0005	0.0031 0.0030 0.0012 0.0025	0.0113 0.0157	0.0001
Taille	$\underline{\omega}_0$ 0.05 0.05	A_0^+ 0.07 0.02 0.02 0.07	A_0^- 0.15 0.05 0.05 0.15	B_0 0.75 0.05 0.05 0.75	$\underline{\delta}$ 2.5 2.5	ρ_0 0.55
$n = 500$	0.0410 0.0201	0.0225 0.0105 0.0094 0.0152	0.0217 0.0127 0.0196 0.0238	0.1175 0.0768 0.0466 0.0950	1.0298 1.0565	0.0045
$n = 5000$	0.0001 0.0003	0.0017 0.0027 0.0008 0.0006	0.0030 0.0003 0.0027 0.0011	0.0019 0.0013 0.0159 0.0153	0.0307 0.0261	0.0006
$n = 10000$	0.0003 0.0008	0.0010 0.0006 0.0001 0.0012	0.0009 0.0005 0.0010 0.0007	0.0030 0.0026 0.0018 0.0025	0.0163 0.0279	0.0000
Taille	$\underline{\omega}_0$ 0.05 0.05	A_0^+ 0.07 0.02 0.02 0.07	A_0^- 0.15 0.05 0.05 0.15	B_0 0.75 0.05 0.05 0.75	$\underline{\delta}$ 3.0 3.0	ρ_0 0.55
$n = 500$	62.6919 11.8408	0.0143 0.0138 0.0052 0.0183	0.0325 0.0172 0.0103 0.0300	0.0895 0.0503 0.0214 0.0635	1.3324 1.0920	0.0053
$n = 5000$	0.0044 0.0008	0.0029 0.0029 0.0005 0.0030	0.0000 0.0036 0.0016 0.0077	0.0068 0.0059 0.0003 0.0010	0.0877 0.1012	0.0023
$n = 10000$	0.0010 0.0009	0.0002 0.0009 0.0011 0.0016	0.0001 0.0005 0.0002 0.0018	0.0080 0.0087 0.0005 0.0014	0.0025 0.0007	0.0005

TABLE 4.21 – Erreur absolue de l'estimation de ϑ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1,1)

Les tables 4.20 et 4.21 montrent des résultats satisfaisants pour l'estimation des coefficients du modèle lorsque les puissances sont inconnues. Malgré le fait qu'il y ait deux paramètres de plus que

dans le cas connu et surtout les deux puissances à estimer, les résultats sont aussi bons que ceux obtenus lorsque la puissance n'était pas estimée.

Nous constatons également dans la table 4.21 que lorsque les puissances excèdent 2.5, l'erreur commise lors de l'estimation augmente, comme nous avons pu le remarquer dans le cas univarié lorsque la puissance dépassait 1.5. Cependant lorsque la taille de la série augmente, l'erreur diminue fortement.

Estimation avec les puissances δ_1 et δ_2 différentes

Dans la pratique nous savons que les puissances sont souvent différentes selon les séries étudiées. Cette partie est donc la plus importante. En effet, si le modèle est sensible aux puissances inégales, l'estimation des séries réelles pourrait se révéler inefficace avec ce modèle. Nous nous assurons donc que la procédure d'estimation donne de bons résultats pour ce cas de figure. Les résultats sont résumés dans les tableaux suivants :

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		$\underline{\delta}$	ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	0.5	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	1.2	
$n = 500$	0.0342	0.0049	0.0015	0.0146	0.0070	0.0658	0.0332	0.0712	0.0033
	0.0131	0.0408	0.0070	0.0274	0.0012	0.0264	0.0804	0.0742	
$n = 5000$	0.0006	0.0011	0.0001	0.0000	0.0014	0.0067	0.0061	0.0006	0.0005
	0.0005	0.0015	0.0002	0.0011	0.0011	0.0097	0.0125	0.0028	
$n = 10000$	0.0022	0.0002	0.0005	0.0020	0.0006	0.0014	0.0001	0.0072	0.0005
	0.0021	0.0026	0.0008	0.0037	0.0001	0.0075	0.0030	0.0043	
Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		$\underline{\delta}$	ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	0.5	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	2.1	
$n = 500$	0.0133	0.0124	0.0033	0.0028	0.0060	0.1020	0.0880	0.0235	0.0002
	0.0018	0.0496	0.0060	0.0405	0.0107	0.0173	0.0559	0.0417	
$n = 5000$	0.0008	0.0018	0.0000	0.0007	0.0003	0.0058	0.0061	0.0117	0.0006
	0.0016	0.0031	0.0001	0.0031	0.0020	0.0052	0.0090	0.0136	
$n = 10000$	0.0008	0.0001	0.0003	0.0008	0.0002	0.0021	0.0013	0.0006	0.0006
	0.0006	0.0025	0.0006	0.0034	0.0010	0.0028	0.0010	0.0030	
Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		$\underline{\delta}$	ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	0.5	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	3.0	
$n = 500$	0.0055	0.0050	0.0015	0.0141	0.0010	0.1207	0.1049	0.0420	0.0432
	0.0072	0.0456	0.0043	0.0383	0.0161	0.0033	0.0297	0.1389	
$n = 5000$	0.0006	0.0004	0.0002	0.0039	0.0007	0.0126	0.0102	0.0168	0.0190
	0.0028	0.0046	0.0024	0.0064	0.0051	0.0036	0.0024	0.0673	
$n = 10000$	0.0004	0.0056	0.0006	0.0060	0.0006	0.0080	0.0035	0.0152	0.0125
	0.0004	0.0015	0.0025	0.0007	0.0046	0.0019	0.0019	0.0596	

TABLE 4.22 – Erreur absolue de l'estimation de ϑ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1,1)

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		$\underline{\delta}$	ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	1.2	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	2.1	
$n = 500$	0.0269 0.0047	0.0237 0.0357	0.0024 0.0132	0.0206 0.0228	0.0112 0.0067	0.0836 0.0376	0.0466 0.0854	0.1275 0.3313	0.0026
$n = 5000$	0.0017 0.0016	0.0020 0.0013	0.0004 0.0002	0.0011 0.0007	0.0006 0.0015	0.0100 0.0127	0.0100 0.0143	0.0378 0.0077	0.0007
$n = 10000$	0.0019 0.0017	0.0004 0.0024	0.0006 0.0007	0.0032 0.0032	0.0004 0.0007	0.0019 0.0058	0.0005 0.0013	0.0067 0.0084	0.0006
Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		$\underline{\delta}$	ρ_0
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	1.6	0.55
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	1.8	
$n = 500$	0.0074 0.0136	0.0183 0.0104	0.0101 0.0125	0.0322 0.0136	0.0100 0.0277	0.0864 0.0759	0.0558 0.1256	0.4926 0.5276	0.0048
$n = 5000$	0.0018 0.0018	0.0034 0.0006	0.0010 0.0002	0.0022 0.0041	0.0004 0.0018	0.0022 0.0153	0.0002 0.0137	0.0010 0.0099	0.0003
$n = 10000$	0.0018 0.0019	0.0007 0.0017	0.0009 0.0009	0.0039 0.0018	0.0002 0.0010	0.0015 0.0056	0.0002 0.0020	0.0097 0.0140	0.0006

TABLE 4.23 – Erreur absolue de l'estimation de ϑ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1)

Les tables 4.22 et 4.23 montrent que la procédure d'estimation ne semble pas être sensible aux puissances inégales. En revanche, selon les puissances utilisées pour la modélisation des trajectoires, les résultats sont plus ou moins bons. En effet, lorsque les puissances choisies pour simuler les trajectoires valent $\underline{\delta} = (0.5, 3.0)$, les biais de l'estimation pour les paramètres de puissances sont élevés, bien que le biais diminue lorsque la taille augmente. Cependant, pour un choix de paramètres moins "extrêmes", ce qui correspond davantage aux séries réelles, les résultats sont satisfaisants. D'une manière générale, lorsque $n = 500$, les biais des estimations sont relativement élevés, mais diminuent rapidement et deviennent corrects lorsque $n = 5000$, ce qui correspond en pratique à la taille des séries financières.

3 Applications aux données réelles

Ce paragraphe a pour but de traiter uniquement des données réelles et d'appliquer l'ensemble des résultats théoriques développés dans ces travaux à des données concrètes. La modélisation est réalisée avec le logiciel R ou RStudio dans le langage interprété R ou alors en Rcpp. Nous commencerons par présenter les séries étudiées, puis l'analyse des données commencera par une étude univariée puis multivariée.

3.1 Présentation des données

Nous appliquons les résultats développés aux données réelles concernant le CAC 40 et différents taux de change.

Le CAC 40 représente le marché boursier français et se base sur les 40 plus grandes entreprises françaises. Les données couvrent la période du 01 mars 1990 au 31 juillet 2018, ce qui représente 7204 observations. Cette série a déjà fait l'objet d'une présentation plus approfondie dans l'Introduction.

Pour les séries des taux de change, nous travaillerons avec l'Euro/Dollar (EUR/USD), l'Euro/Yen (EUR/JPY), l'Euro/Livre Sterling (EUR/GBP) et enfin l'Euro/Dollar canadien (EUR/CAD). L'avantage de travailler avec les taux de change est que nous n'avons pas les difficultés liées aux décalages comme nous aurions pu l'avoir si nous avions travaillé uniquement avec des marchés boursiers. Pour l'analyse univariée cela n'aurait posé aucun problème, mais pour l'approche multivariée il faut se soucier des décalages liés aux jours de fermeture des marchés. Les taux de change couvrent tous la période du 04 janvier 1999 au 31 juillet 2018, ce qui représente 5013 observations. Les séries des taux de change se présentent comme suit :



FIGURE 4.2 – Taux de l'euro contre le dollar (EUR/USD) sur la période du 04/01/1999 au 31/07/2018

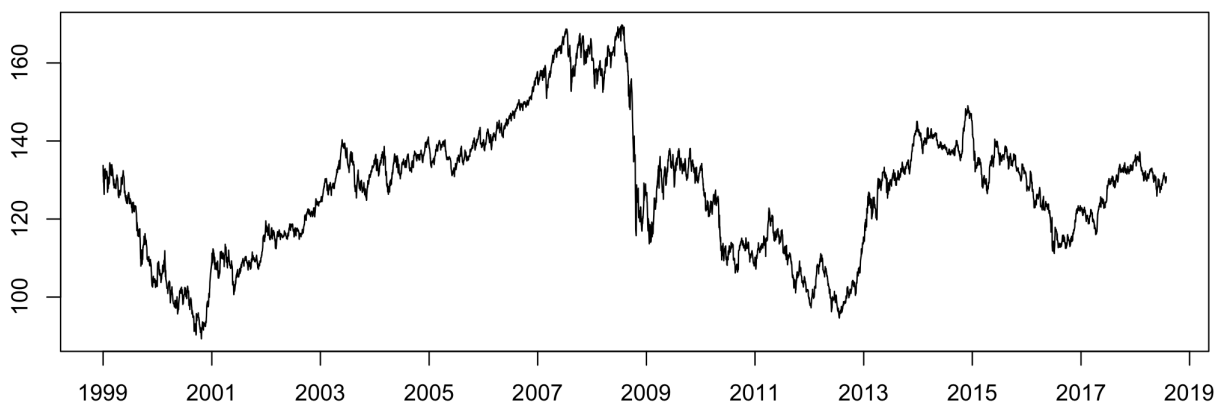


FIGURE 4.3 – Taux de l'euro contre le yen (EUR/JPY) sur la période du 04/01/1999 au 31/07/2018

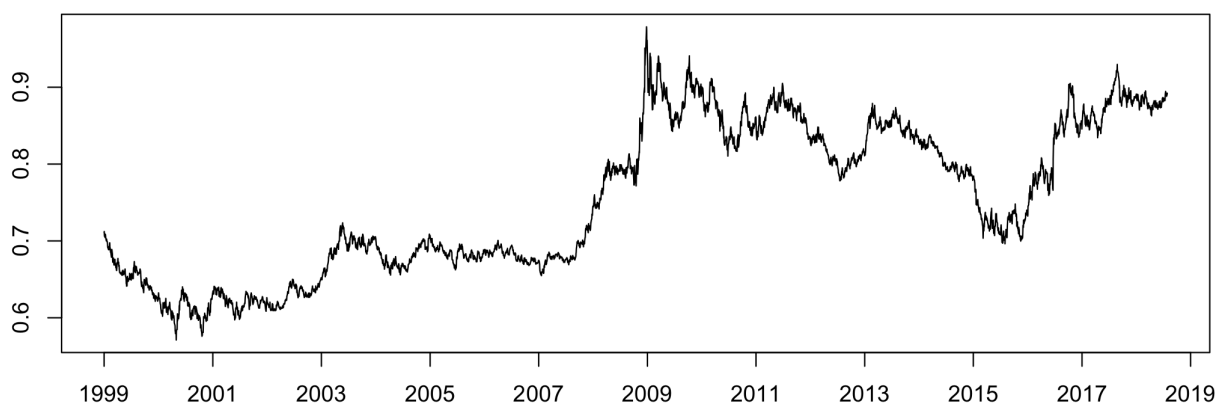


FIGURE 4.4 – Taux de l'euro contre la livre sterling (EUR/GBP) sur la période du 04/01/1999 au 31/07/2018

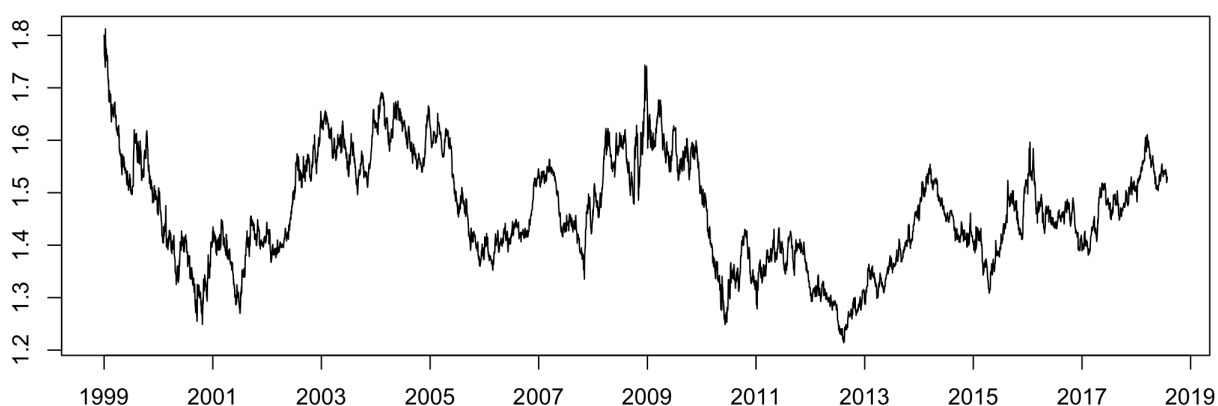


FIGURE 4.5 – Taux de l'euro contre le dollar canadien (EUR/CAD) sur la période du 04/01/1999 au 31/07/2018

Les figures 4.2 à 4.5 présentent des comportements proches les uns des autres, bien que sur la période allant de 1999 à 2007 le taux de change Euro/Dollar canadien a un comportement plus marqué. En traçant les rendements de ces séries, nous remarquons davantage les ressemblances entre ces différentes séries.

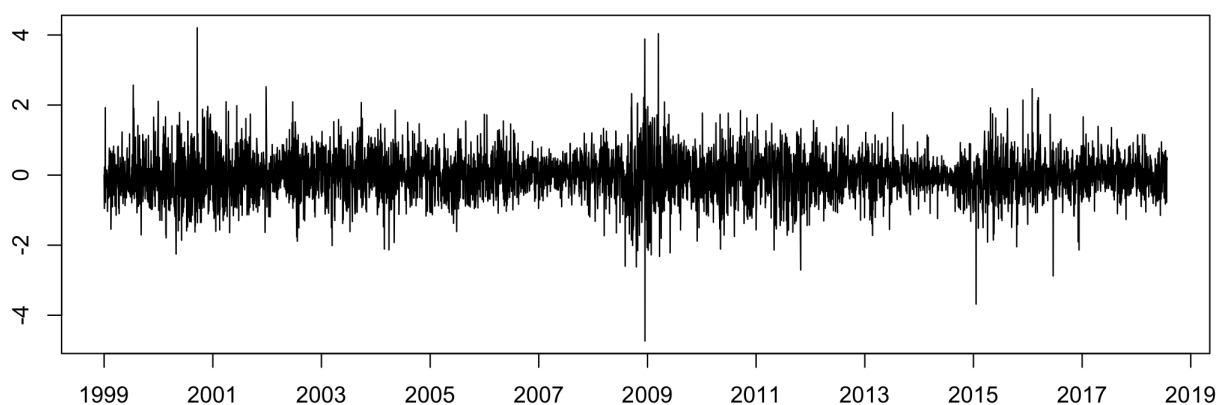


FIGURE 4.6 – Taux de l'euro contre le dollar (EUR/USD) sur la période du 04/01/1999 au 31/07/2018

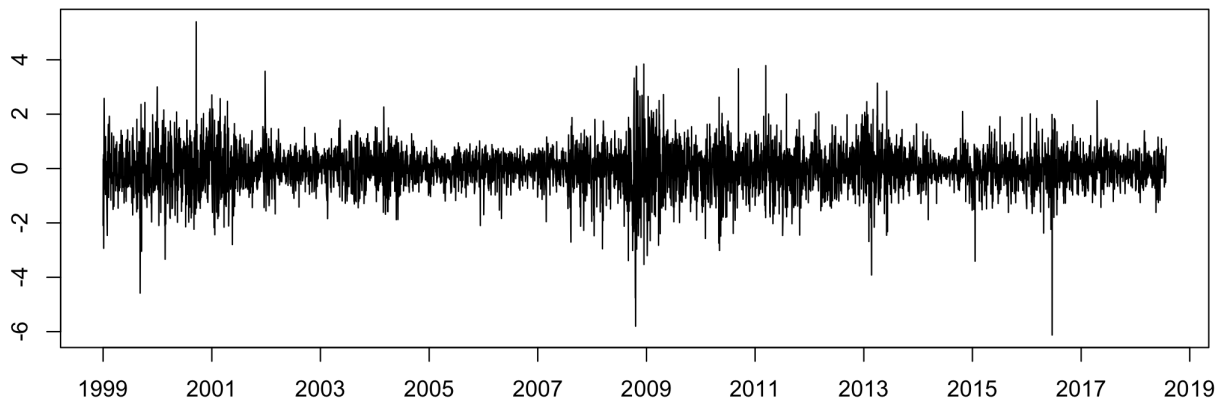


FIGURE 4.7 – Taux de l'euro contre le yen (EUR/JPY) sur la période du 04/01/1999 au 31/07/2018

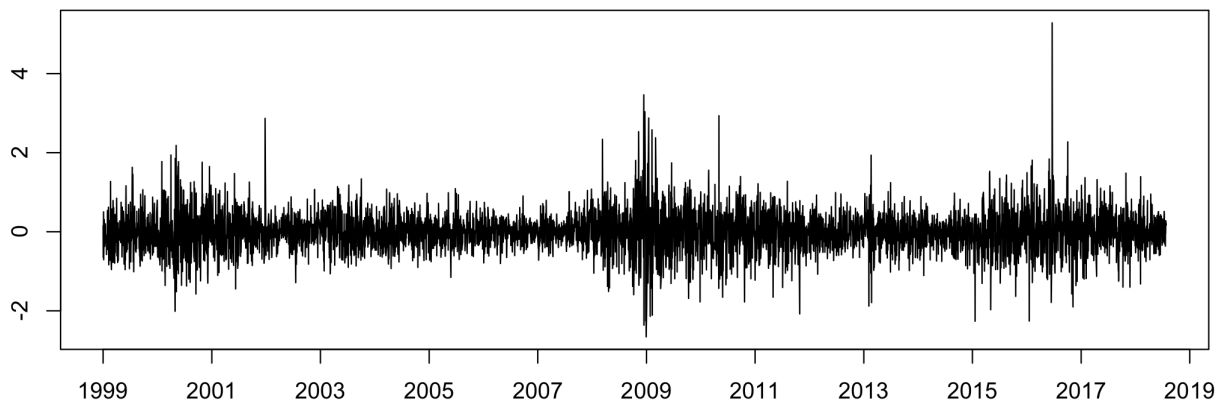


FIGURE 4.8 – Taux de l'euro contre la livre sterling (EUR/GBP) sur la période du 04/01/1999 au 31/07/2018

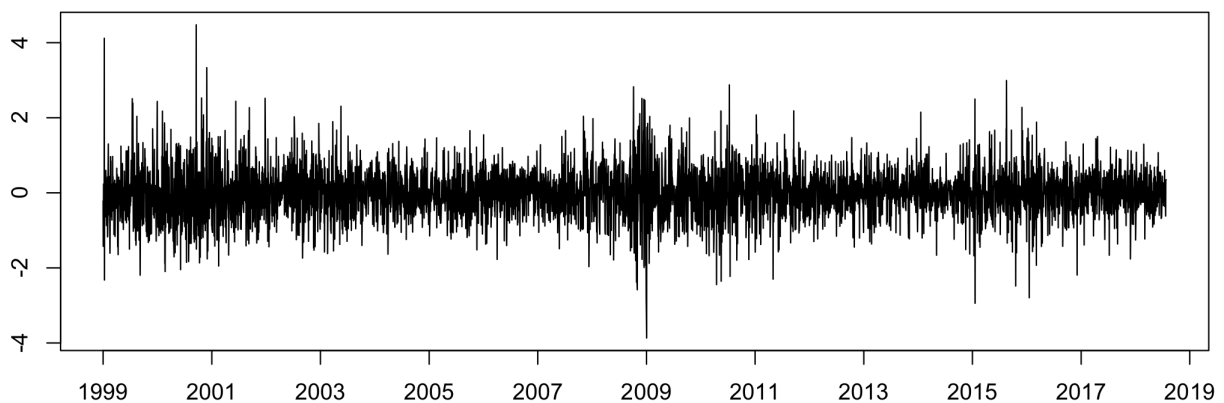


FIGURE 4.9 – Taux de l'euro contre le dollar canadien (EUR/CAD) sur la période du 04/01/1999 au 31/07/2018

Sur les figures 4.6 à 4.9, nous remarquons qu'elles présentent toutes des périodes de fortes volatilités sur les périodes de 1999 à 2003, aux alentours de 2009 et entre 2015 et 2017. Ces constats peuvent nous laisser penser que l'information d'une série est comprise dans une autre et qu'il serait alors intéressant d'utiliser des modèles multivariés pour analyser ces séries. Une dernière analyse descriptive serait d'étudier l'effet de levier de chacune des séries. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Changes	h	1	2	3	4	5	10	15	20
EUR/USD	$\hat{\rho}_\varepsilon(h)$	-0.005	-0.019	0.006	0.005	0.010	-0.030	0.024	0.007
	$\hat{\rho}_{\varepsilon^2}(h)$	0.151	0.080	0.057	0.094	0.092	0.084	0.048	0.055
	$\hat{\rho}(\varepsilon_{t-h}^+, \varepsilon_t)$	0.129	0.118	0.098	0.079	0.097	0.135	0.054	0.073
	$\hat{\rho}(-\varepsilon_{t-h}^-, \varepsilon_t)$	0.061	0.042	0.061	0.137	0.111	0.059	0.108	0.101
EUR/JPY	$\hat{\rho}_\varepsilon(h)$	-0.007	-0.007	0.002	0.008	-0.014	-0.019	0.021	0.007
	$\hat{\rho}_{\varepsilon^2}(h)$	0.153	0.181	0.115	0.136	0.120	0.106	0.059	0.089
	$\hat{\rho}(\varepsilon_{t-h}^+, \varepsilon_t)$	0.135	0.107	0.090	0.089	0.085	0.163	0.074	0.135
	$\hat{\rho}(-\varepsilon_{t-h}^-, \varepsilon_t)$	0.184	0.208	0.158	0.190	0.189	0.134	0.125	0.146
EUR/GBP	$\hat{\rho}_\varepsilon(h)$	0.031	-0.038	-0.007	-0.027	0.005	-0.014	0.028	0.037
	$\hat{\rho}_{\varepsilon^2}(h)$	0.210	0.105	0.071	0.129	0.137	0.115	0.081	0.088
	$\hat{\rho}(\varepsilon_{t-h}^+, \varepsilon_t)$	0.179	0.133	0.107	0.133	0.132	0.133	0.113	0.088
	$\hat{\rho}(-\varepsilon_{t-h}^-, \varepsilon_t)$	0.147	0.125	0.121	0.165	0.142	0.134	0.079	0.146
EUR/CAD	$\hat{\rho}_\varepsilon(h)$	-0.001	-0.031	0.004	-0.007	-0.026	-0.038	0.003	0.012
	$\hat{\rho}_{\varepsilon^2}(h)$	0.142	0.092	0.087	0.073	0.105	0.084	0.050	0.056
	$\hat{\rho}(\varepsilon_{t-h}^+, \varepsilon_t)$	0.157	0.127	0.105	0.097	0.121	0.091	0.031	0.092
	$\hat{\rho}(-\varepsilon_{t-h}^-, \varepsilon_t)$	0.074	0.047	0.077	0.073	0.115	0.070	0.100	0.064

TABLE 4.24 – Autocorrélations empiriques des séries des taux de change

La table 4.24 résume les différentes corrélations des différents taux de change. Nous constatons que quelle que soit la série, les autocorrélations du rendement sont toutes du même ordre de grandeur et toutes proches de zéro, nous pouvons constater que leurs carrés des rendements sont fortement corrélés.

En ce qui concerne l'effet de levier, nous remarquons que les rendements négatifs sont en général moins corrélés avec les rendements en valeur absolue, que les rendements positifs. Ceci est en contradiction avec la littérature.

3.2 Etude univariée

L'étude univariée est réalisée sur la série du CAC 40 et celles des taux de change entre l'euro/dollar américain, l'euro/dollar canadien, l'euro/yen et l'euro/livre sterling. Cette étude porte sur les résultats théorique du Chapitre 1.

Cette étude univariée consistera à comparer le modèle APGARCH avec la puissance connue et le modèle APGARCH avec la puissance inconnue.

3.2.1 Estimation

L'estimation des paramètres est réalisée par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance gaussien. Cette procédure est donnée au Chapitre 1 pour le modèle APGARCH. Nous estimerons les coefficients de différents modèles reproduisant les séries proposées. Nous commencerons par appliquer le modèle APGARCH lorsque la puissance est connue, pour différentes valeurs de δ fixées. Les ordres p et q varieront également.

Série du CAC 40

On commence par modéliser la série du CAC 40 par le modèle APGARCH(1, 1).

$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}^+$	$\hat{\alpha}^-$	$\hat{\beta}$	$\delta / \hat{\tau}$
Puissance connue				
0.02317592	0.02534878	0.08538843	0.93527003	0.5
0.02530023	0.01300165	0.11797495	0.92957315	1.0
0.027163079	0.009941529	0.129938747	0.922474863	1.5
0.02972216	0.01071791	0.12906405	0.91324589	2.0
0.03271525	0.01086790	0.12073087	0.90318205	2.5
0.035926119	0.009644712	0.108691996	0.892804687	3.0
Puissance inconnue				
0.02547735	0.01227070	0.12012668	0.92892713	1.05414228

TABLE 4.25 – Estimation par QMV de la série du CAC 40 par le modèle APGARCH(1, 1)

Le premier constat que nous pouvons établir sur la table 4.25 est que la modélisation par un modèle asymétrique semble être justifiée. Effectivement, le coefficient α^- est très nettement supérieur au coefficient α^+ , ce qui traduit un effet de levier.

Le second constat que nous pouvons faire, est que le coefficient traduisant la persistance des chocs, β , semble diminuer au fur et à mesure que la puissance augmente.

Si nous comparons le cas où la puissance est connue et vaut 1, au cas où la puissance est inconnue, nous pouvons constater que les paramètres ω , α^+ , α^- et β sont très proches, ce qui peut confirmer que l'estimation du modèle APGARCH lorsque δ est inconnue est efficace. De plus, dans la recherche de la performance, cela laisse supposer que nous commettons une erreur lors de l'estimation en utilisant le modèle avec la puissance connue, puisque la puissance optimale semble être égale à 1.0541.

Nous modélisons la série du CAC 40 par le modèle APGARCH(2, 1).

$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}^+$	$\hat{\alpha}^-$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\delta / \hat{\tau}$
Puissance connue					
0.02370	0.02593	0.08771	0.90158	0.03207	0.5
0.02578	0.01311	0.12065	0.90157	0.02655	1.0
0.02716	0.00994	0.12994	0.92247	0.00000	1.5
0.02972	0.01072	0.12906	0.91325	0.00000	2.0
0.03272	0.01087	0.12073	0.90318	0.00000	2.5
0.03593	0.00964	0.10869	0.89280	0.00000	3.0
Puissance inconnue					
0.02591	0.01236	0.12252	0.90387	0.02376	1.05303

TABLE 4.26 – Estimation par QMV de la série du CAC 40 par le modèle APGARCH(2, 1)

La table 4.26 donne les résultats de l'estimation des coefficients du modèle APGARCH(2, 1). Une fois encore le modèle asymétrique semble être justifié, en revanche le coefficient $\hat{\beta}_2$ est nul dès que la puissance est supérieure ou égale à 1.5.

Nous modélisons la série du CAC 40 par le modèle APGARCH(1, 2).

$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}_1^+$	$\hat{\alpha}_2^+$	$\hat{\alpha}_1^-$	$\hat{\alpha}_2^-$	$\hat{\beta}_1$	$\delta / \hat{\tau}$
Puissance connue						
0.02373	0.00000	0.07656	0.02752	0.01081	0.93308	0.5
0.02585	0.00000	0.12101	0.01796	0.00000	0.92600	1.0
0.02845	0.00000	0.13015	0.01690	0.00524	0.91639	1.5
0.03210	0.00000	0.12036	0.01854	0.01723	0.90397	2.0
0.03603	0.00000	0.10318	0.01830	0.02798	0.89115	2.5
0.03998	0.00000	0.08431	0.01603	0.03542	0.87853	3.0
Puissance inconnue						
0.02602	0.00000	0.12275	0.01761	0.00000	0.92537	1.03972

TABLE 4.27 – Estimation par QMV de la série du CAC 40 par le modèle APGARCH(1, 2)

La table 4.27 montre les résultats de l'estimation des coefficients du modèle APGARCH(1, 2). Le premier constat que nous pouvons faire est que quelle que soit la puissance utilisée et même dans le cas où elle est inconnue, le coefficient $\hat{\alpha}_1^+$ est nul.

Le second constat que nous pouvons faire est que le coefficient $\hat{\alpha}_2^+$ est nettement supérieur au coefficient $\hat{\alpha}_2^-$.

Nous modélisons la série du CAC 40 par le modèle APGARCH(2, 2).

$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}_1^+$	$\hat{\alpha}_2^+$	$\hat{\alpha}_1^-$	$\hat{\alpha}_2^-$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\delta / \hat{\tau}$
Puissance connue							
0.04479	0.01541	0.07656	0.03482	0.09005	0.00000	0.87375	0.5
0.04967	0.00000	0.11107	0.03303	0.12439	0.00000	0.85733	1.0
0.05359	0.00000	0.12763	0.03683	0.13605	0.00000	0.83710	1.5
0.05764	0.00000	0.12713	0.03826	0.13393	0.00000	0.81902	2.0
0.06185	0.00000	0.11772	0.03583	0.12395	0.00340	0.79838	2.5
0.06586	0.00000	0.10439	0.03143	0.11024	0.01427	0.77030	3.0
Puissance inconnue							
0.05038	0.00000	0.11568	0.03354	0.12775	0.00000	0.85355	1.08726

TABLE 4.28 – Estimation par QMV de la série du CAC 40 par le modèle APGARCH(2, 2)

Le dernier modèle utilisé est le modèle APGARCH(2, 2). Les résultats sont résumés dans la table 4.28 et nous pouvons constater que les coefficients $\hat{\alpha}_1^+$ et $\hat{\beta}_1$ sont quasiment tous nuls. Le modèle asymétrique semble dans ce cas approprié puisque le paramètre $\hat{\alpha}_1^-$ est supérieur au paramètre $\hat{\alpha}_1^+$ et le paramètre $\hat{\alpha}_2^-$ est supérieur au paramètre $\hat{\alpha}_2^+$.

Séries de taux de change

Nous commençons par modéliser les séries des taux de change par le modèle APGARCH(1,1).

Taux de change	$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}^+$	$\hat{\alpha}^-$	$\hat{\beta}$	$\delta / \hat{\tau}$
Puissance connue					
USD	0.00525	0.02743	0.03525	0.96837	0.5
JPY	0.00927	0.04957	0.06682	0.94290	
GBP	0.00434	0.05162	0.05017	0.95309	
CAD	0.00778	0.03613	0.03344	0.96246	
USD	0.00330	0.02904	0.04071	0.96790	1.0
JPY	0.00671	0.05065	0.08113	0.94047	
GBP	0.00339	0.06306	0.06370	0.94447	
CAD	0.00573	0.04345	0.03564	0.96052	
USD	0.00209	0.02736	0.03824	0.96834	1.5
JPY	0.00503	0.04741	0.08048	0.93897	
GBP	0.00252	0.06190	0.06719	0.93938	
CAD	0.00414	0.04186	0.03152	0.96093	
USD	0.00138	0.02345	0.03196	0.96892	2.0
JPY	0.00396	0.04193	0.07162	0.93694	
GBP	0.00181	0.05381	0.06431	0.93550	
CAD	0.00303	0.03488	0.02541	0.96205	
USD	0.00098	0.01841	0.02498	0.96930	2.5
JPY	0.00325	0.03539	0.06024	0.93379	
GBP	0.00130	0.04382	0.05857	0.93104	
CAD	0.00228	0.02638	0.01949	0.96304	
USD	0.00075	0.01352	0.01877	0.96924	3.0
JPY	0.00274	0.02885	0.04945	0.92905	
GBP	0.00094	0.03448	0.05189	0.92525	
CAD	0.00175	0.01869	0.01444	0.96359	
Puissance inconnue					
USD	0.00288	0.02882	0.04063	0.96799	1.14679
JPY	0.00596	0.04973	0.08230	0.93990	1.19502
GBP	0.00269	0.06288	0.06713	0.94022	1.40068
CAD	0.00384	0.04054	0.03014	0.96117	1.61796

TABLE 4.29 – Estimation par QMV des séries des taux de change par le modèle APGARCH(1,1)

D'après les résultats présentés dans la table 4.29, nous constatons que la persistance des chocs a tendance à baisser (paramètre β), au fur et à mesure que le paramètre de puissance augmente (paramètre δ). Pour le taux de change euros/dollar, nous constatons que le coefficient α^- est très légèrement supérieur au coefficient α^+ . Cela se traduit par un effet de levier quasi-nul et donc l'éventualité de modéliser le taux de change par un modèle symétrique de type GARCH. La livre sterling quant à elle, présente un coefficient α^+ supérieur au coefficient α^- . Cela signifie qu'un rendement positif aura plus d'influence sur la volatilité qu'un rendement négatif de même amplitude. Cela va à l'encontre des faits stylisés, néanmoins, le modèle asymétrique garde tout son sens. Les deux autres séries présentent l'effet de levier avec un coefficient α^- supérieur au coefficient α^+ .

Le constat général que nous pouvons faire sur la Table 4.29 est que la puissance estimée est différente pour chaque série et elle est éloignée des valeurs de puissances classiques ($\delta = 1$ ou $\delta = 2$).

Nous modélisons les séries des taux de change par le modèle APGARCH(2,1).

Taux de change	$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}^+$	$\hat{\alpha}^-$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\delta / \hat{\tau}$
Puissance connue						
USD	0.00760	0.03985	0.05107	0.47876	0.47537	0.5
JPY	0.01124	0.06156	0.08317	0.66180	0.26752	
GBP	0.00538	0.06482	0.06238	0.65144	0.28999	
CAD	0.00944	0.04402	0.04041	0.72585	0.22860	
USD	0.00471	0.04142	0.05804	0.50796	0.44626	1.0
JPY	0.00811	0.06314	0.10115	0.65512	0.27102	
GBP	0.00423	0.08008	0.07934	0.62075	0.30944	
CAD	0.00759	0.05793	0.04680	0.59562	0.35207	
USD	0.00290	0.03780	0.05299	0.55629	0.39988	1.5
JPY	0.00604	0.05894	0.09966	0.66035	0.26428	
GBP	0.00318	0.07976	0.08465	0.59272	0.33004	
CAD	0.00583	0.05919	0.04399	0.50112	0.44389	
USD	0.00189	0.03180	0.04350	0.58541	0.37233	2.0
JPY	0.00474	0.05188	0.08785	0.66771	0.25493	
GBP	0.00233	0.07054	0.08250	0.56193	0.35437	
CAD	0.00444	0.05135	0.03734	0.42828	0.51587	
USD	0.00134	0.02506	0.03409	0.58286	0.37526	2.5
JPY	0.00388	0.04354	0.07315	0.67477	0.24458	
GBP	0.00170	0.05824	0.07644	0.53386	0.37515	
CAD	0.00343	0.04004	0.02997	0.36491	0.57872	
USD	0.00104	0.01876	0.02608	0.55550	0.40173	3.0
JPY	0.00325	0.03523	0.05939	0.68296	0.23136	
GBP	0.00124	0.04620	0.06868	0.50969	0.39041	
CAD	0.00269	0.02904	0.02302	0.30763	0.63530	
Puissance inconnue						
USD	0.00410	0.04074	0.05747	0.52218	0.43255	1.14091
JPY	0.00724	0.06207	0.10240	0.65630	0.26927	1.17994
GBP	0.00336	0.08065	0.08438	0.59802	0.32590	1.41262
CAD	0.00531	0.05724	0.04195	0.47459	0.47002	1.67037

TABLE 4.30 – Estimation par QMV des séries des taux de change par le modèle APGARCH(2,1)

Par la table 4.30, nous constatons que l'effet de levier est très peu prononcé pour les taux de change Dollar, Yen et Livre sterling et que le coefficient $\hat{\alpha}^+$ est toujours supérieur au coefficient $\hat{\alpha}^-$ pour la série du taux de change correspondant au Dollar canadien. Nous constatons que mise à part les séries du Dollar et du Yen, les puissances, lorsqu'elles sont estimées, sont toutes différentes et éloignées des puissances "classiques", 1 ou 2.

Nous modélisons les séries des taux de change par le modèle APGARCH(1, 2).

Taux de change	$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}_1^+$	$\hat{\alpha}_2^+$	$\hat{\alpha}_1^-$	$\hat{\alpha}_2^-$	$\hat{\beta}_1$	$\delta / \hat{\tau}$
Puissance connue							
USD	0.00536	0.02550	0.01990	0.00241	0.01600	0.96778	0.5
JPY	0.00920	0.04176	0.06707	0.00829	0.00000	0.94268	
GBP	0.00434	0.05162	0.05017	0.00000	0.00000	0.95309	
CAD	0.00793	0.03640	0.01089	0.00000	0.02333	0.96185	
USD	0.00341	0.02976	0.01440	0.00000	0.02718	0.96712	1.0
JPY	0.00671	0.05044	0.08114	0.00022	0.00000	0.94046	
GBP	0.00340	0.06312	0.06267	0.00000	0.00120	0.94437	
CAD	0.00593	0.04423	0.00307	0.00000	0.03403	0.95933	
USD	0.00219	0.02833	0.00353	0.00000	0.03566	0.96734	1.5
JPY	0.00503	0.04741	0.08048	0.00000	0.00000	0.93897	
GBP	0.00252	0.06190	0.06719	0.00000	0.00000	0.93938	
CAD	0.00431	0.04278	0.00000	0.00000	0.03309	0.95956	
USD	0.00146	0.02440	0.00000	0.00000	0.03290	0.96780	2.0
JPY	0.00396	0.04193	0.07162	0.00000	0.00000	0.93694	
GBP	0.00181	0.05381	0.06431	0.00000	0.00000	0.93550	
CAD	0.00315	0.03567	0.00000	0.00000	0.02679	0.96069	
USD	0.00104	0.01920	0.00000	0.00000	0.02584	0.96810	2.5
JPY	0.00325	0.03539	0.06024	0.00000	0.00000	0.93379	
GBP	0.00130	0.04382	0.05857	0.00000	0.00000	0.93104	
CAD	0.00236	0.02700	0.00000	0.00000	0.02054	0.96174	
USD	0.00079	0.01412	0.00000	0.00000	0.01952	0.96796	3.0
JPY	0.00274	0.02885	0.04945	0.00000	0.00000	0.92905	
GBP	0.00094	0.03448	0.05189	0.00000	0.00000	0.92525	
CAD	0.00181	0.01917	0.00000	0.00000	0.01520	0.96233	
Puissance inconnue							
USD	0.00290	0.02957	0.01065	0.00000	0.03080	0.96714	1.17761
JPY	0.00596	0.04973	0.08230	0.00000	0.00000	0.93990	1.19502
GBP	0.00269	0.06290	0.06686	0.00000	0.00032	0.94019	1.40058
CAD	0.00409	0.04191	0.00000	0.00000	0.03216	0.95971	1.57931

TABLE 4.31 – Estimation par QMV des séries des taux de change par le modèle APGARCH(1, 2)

Le premier élément que nous pouvons remarquer sur la table 4.31, est le grand nombre de zéro. En effet, beaucoup de coefficients sont nuls. Nous pouvons noter que quasiment tous les coefficients $\hat{\alpha}_1^-$ sont nuls et de nombreux coefficients $\hat{\alpha}_2^-$ le sont également. Suite à cela nous constatons donc un effet de levier quasi-nul et lorsque la puissance connue est supérieure ou égale à 2, nous remarquons que si le coefficient $\hat{\alpha}_2^-$ est différent de zéro, alors $\hat{\alpha}_2^+$ est nul.

Lorsque les puissances sont estimées, nous constatons que leurs valeurs restent proches de celles obtenues avec les modèle APGARCH(1, 1) (table 4.29) et APGARCH(2, 1) (table 4.30).

Nous modélisons les séries des taux de change par le modèle APGARCH(2, 2).

Taux de change	$\hat{\omega}$	$\hat{\alpha}_1^+$	$\hat{\alpha}_2^+$	$\hat{\alpha}_1^-$	$\hat{\alpha}_2^-$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\delta / \hat{\tau}$
Puissance connue								
USD	0.01032	0.02772	0.03941	0.02594	0.02997	0.00000	0.93787	0.5
JPY	0.01839	0.04361	0.06147	0.05289	0.06932	0.00000	0.88813	
GBP	0.00575	0.06404	0.05914	0.00496	0.00763	0.57679	0.36070	
CAD	0.01554	0.03052	0.03153	0.04159	0.03538	0.00000	0.92500	
USD	0.00652	0.02959	0.04735	0.02756	0.03291	0.00000	0.93672	1.0
JPY	0.01333	0.04427	0.07500	0.05414	0.08359	0.00000	0.88354	
GBP	0.00448	0.08426	0.06942	0.00000	0.01590	0.55374	0.37207	
CAD	0.01134	0.03802	0.03705	0.04810	0.03320	0.00000	0.92192	
USD	0.00414	0.02847	0.04502	0.02553	0.03016	0.00000	0.93760	1.5
JPY	0.01004	0.04207	0.07415	0.05034	0.08334	0.00000	0.88034	
GBP	0.00484	0.06551	0.06233	0.05356	0.06898	0.00000	0.88260	
CAD	0.00549	0.05525	0.02766	0.00000	0.01379	0.62891	0.31950	
USD	0.00146	0.02440	0.00000	0.00000	0.03290	0.96780	0.00000	2.0
JPY	0.00796	0.03781	0.06559	0.04426	0.07487	0.00000	0.87603	
GBP	0.00252	0.07579	0.06846	0.00000	0.02283	0.46352	0.44530	
CAD	0.00444	0.05135	0.03734	0.00000	0.00000	0.42828	0.51587	
USD	0.00104	0.01920	0.00000	0.00000	0.02584	0.96810	0.00000	2.5
JPY	0.00654	0.03200	0.05485	0.03752	0.06358	0.00000	0.86959	
GBP	0.00184	0.06289	0.06227	0.00000	0.02260	0.42718	0.47331	
CAD	0.00343	0.04004	0.02997	0.00000	0.00000	0.36491	0.57872	
USD	0.00079	0.01413	0.00000	0.00000	0.01952	0.96796	0.00000	3.0
JPY	0.00551	0.02573	0.04484	0.03111	0.05259	0.00000	0.86019	
GBP	0.00135	0.05012	0.05485	0.00000	0.02153	0.39623	0.49421	
CAD	0.00281	0.02754	0.02429	0.00306	0.00000	0.22206	0.71794	
Puissance inconnue								
USD	0.00513	0.03624	0.04575	0.01455	0.02574	0.20036	0.74329	1.13489
JPY	0.01188	0.04366	0.07602	0.05309	0.08488	0.00000	0.88237	1.19118
GBP	0.00360	0.08594	0.07151	0.00000	0.02100	0.51236	0.40544	1.41518
CAD	0.00527	0.05642	0.03684	0.00000	0.00466	0.51448	0.43104	1.65644

TABLE 4.32 – Estimation par QMV des séries des taux de change par le modèle APGARCH(2, 2)

Sur la table 4.32, nous nous apercevons que de nombreux coefficients sont nuls. Pour la série du Dollar, nous nous apercevons qu'au moins un coefficient traduisant la persistance des chocs (β) est nul, sauf lorsque la puissance est estimée. Le même constat est fait pour la série du Yen. Pour les deux autres séries, nous constatons que souvent un des deux, ou les deux, coefficients α^- sont nuls. L'effet de levier n'est alors pas très marqué sur l'ensemble de ces séries. Les puissances estimées restent du même ordre de grandeur que celles estimées avec les autres modèles.

3.2.2 Validation

Dans cette partie nous mettons en application les résultats théoriques du Chapitre 1. Le but est d'appliquer le test portmanteau aux modèles proposés dans la section précédente, afin de déterminer les modèles qui sont valides. Nous comparons notre procédure de validation à celle de Carbon et Francq (2011) en appliquant le test aux modèles avec la puissance inconnue.

CAC 40

Dans cette partie on s'intéresse à la validité des modèles utilisés pour ajuster la série du CAC 40. On appliquera le test sur les m premières autocovariances que l'on fixera égale à 10. Les résultats du test portmanteau pour les différents modèles utilisés précédemment peuvent être reportés dans la table suivante :

		m										$\delta/\hat{\tau}$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(1, 1)												
δ connue		0.138	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.5
		0.945	0.013	0.027	0.055	0.099	0.130	0.193	0.229	0.308	0.218	1
		0.324	0.136	0.263	0.405	0.533	0.638	0.732	0.794	0.853	0.789	1.5
		0.116	0.163	0.279	0.404	0.489	0.615	0.659	0.744	0.782	0.754	2
		0.051	0.117	0.192	0.278	0.325	0.445	0.456	0.555	0.583	0.575	2.5
		0.029	0.082	0.134	0.197	0.224	0.324	0.324	0.412	0.436	0.430	3
δ inconnue		0.847	0.019	0.040	0.078	0.134	0.167	0.238	0.267	0.351	0.227	1.05
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(2, 1)												
δ connue		0.160	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.5
		0.874	0.010	0.020	0.042	0.076	0.097	0.146	0.169	0.233	0.148	1
		0.230	0.096	0.197	0.321	0.446	0.548	0.652	0.720	0.792	0.717	1.5
		0.046	0.066	0.135	0.223	0.308	0.419	0.482	0.572	0.631	0.596	2
		0.010	0.025	0.054	0.096	0.137	0.211	0.240	0.314	0.357	0.345	2.5
		0.003	0.011	0.024	0.044	0.065	0.109	0.124	0.171	0.201	0.192	3
δ inconnue		0.773	0.015	0.031	0.061	0.106	0.129	0.188	0.205	0.274	0.157	1.05
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(1, 2)												
δ connue		0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.5
		0.991	0.016	0.035	0.071	0.124	0.166	0.242	0.296	0.386	0.301	1
		0.182	0.099	0.200	0.320	0.433	0.545	0.637	0.720	0.781	0.734	1.5
		0.044	0.078	0.145	0.224	0.280	0.392	0.432	0.533	0.571	0.567	2
		0.021	0.057	0.097	0.143	0.161	0.243	0.249	0.334	0.354	0.368	2.5
		0.019	0.059	0.093	0.127	0.125	0.193	0.186	0.258	0.271	0.283	3
δ inconnue		0.878	0.021	0.046	0.089	0.153	0.196	0.279	0.326	0.419	0.305	1.04
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(2, 2)												
δ connue		0.033	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.5
		0.748	0.086	0.120	0.210	0.302	0.401	0.492	0.573	0.663	0.548	1
		0.344	0.372	0.575	0.658	0.774	0.866	0.913	0.953	0.970	0.955	1.5
		0.110	0.257	0.389	0.404	0.493	0.603	0.639	0.738	0.769	0.786	2
		0.051	0.148	0.226	0.216	0.275	0.352	0.370	0.472	0.505	0.549	2.5
		0.031	0.096	0.149	0.135	0.176	0.227	0.238	0.323	0.355	0.397	3
δ inconnue		0.976	0.145	0.216	0.343	0.466	0.576	0.675	0.742	0.817	0.688	1.08

TABLE 4.33 – Résultat du test portmanteau (p -valeurs) pour le rendement journalier du CAC 40, basé sur les carrés des résidus des m premières autocovariances.

La table 4.33 présente les résultats des tests portmanteau effectués sur les modèles APGARCH(p, q) lorsque p et q varient entre 1 et 2.

Lorsque la puissance est connue, la procédure de validation est basée sur le test portmanteau

développé dans Carbon et Francq (2011). Lorsque la puissance du modèle est considérée inconnue nous utilisons le résultat du Chapitre 1, paragraphe 3.

Lorsque la puissance est connue, et vaut 0.5, le test portmanteau rejette tous les modèles proposés. Ensuite, nous remarquons que les p -valeurs décroissent au fur et à mesure que la puissance augmente. Néanmoins, mis à part le modèle APGARCH(2, 1), tous les modèles avec les puissances connues semblent être validés. Le modèle APGARCH(2, 1), lorsque la puissance est égale à 3, présente une plus grande incertitude.

Lorsque la puissance est inconnue nous constatons que le modèle APGARCH(p, q) semble correspondre aux données et cela quelles que soient les valeurs de p et q . Les modèles étant tous validés, nous pourrions déterminer les ordres optimaux p et q via un critère de sélection tel que le critère AIC. Ce dernier critère pourrait permettre de déterminer quel serait le "meilleur" modèle parmi ceux présentés pour modéliser la série du CAC 40.

Taux de change

Dans cette partie nous nous intéressons à la validation des modèles utilisés dans la partie précédente pour modéliser les séries des taux de change. Pour ces séries, nous avons considéré le modèle APGARCH lorsque la puissance était connue, avec différents ordres p et q fixés et également le modèle APGARCH lorsque la puissance était inconnue, pour les mêmes ordres p et q .

Le but de cette partie est d'appliquer le test portmanteau développé dans le Chapitre 1, afin de valider les modèles utilisés précédemment pour modéliser les séries des taux de change. Les résultats sont présentés dans plusieurs tableaux. Dans chaque tableau, nous retrouverons un taux de change avec tous les modèles qui lui ont été appliqués.

											$\delta/\hat{\tau}$
m											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(1, 1)											
δ connue	0.617	0.590	0.761	0.227	0.282	0.364	0.436	0.505	0.581	0.638	0.5
	0.978	0.491	0.632	0.324	0.433	0.481	0.476	0.467	0.568	0.583	1.0
	0.871	0.428	0.557	0.368	0.496	0.527	0.458	0.398	0.496	0.495	1.5
	0.839	0.449	0.588	0.437	0.568	0.611	0.505	0.420	0.517	0.523	2.0
	0.890	0.547	0.704	0.535	0.652	0.721	0.612	0.526	0.626	0.657	2.5
	0.996	0.688	0.843	0.626	0.705	0.796	0.713	0.651	0.742	0.792	3.0
δ inconnue	0.961	0.460	0.591	0.337	0.454	0.493	0.462	0.426	0.526	0.524	1.15
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(2, 1)											
δ connue	0.958	0.822	0.878	0.246	0.305	0.395	0.473	0.541	0.611	0.675	0.5
	0.580	0.547	0.629	0.303	0.416	0.463	0.459	0.445	0.545	0.562	1.0
	0.483	0.430	0.526	0.330	0.457	0.489	0.430	0.372	0.468	0.474	1.5
	0.482	0.433	0.546	0.391	0.523	0.567	0.471	0.389	0.485	0.497	2.0
	0.535	0.531	0.666	0.488	0.610	0.682	0.579	0.493	0.594	0.628	2.5
	0.625	0.694	0.828	0.584	0.672	0.767	0.689	0.627	0.719	0.774	3.0
δ inconnue	0.534	0.491	0.570	0.309	0.427	0.465	0.436	0.395	0.493	0.492	1.14
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(1, 2)											
δ connue	0.290	0.368	0.546	0.167	0.214	0.280	0.343	0.399	0.481	0.539	0.5
	0.452	0.360	0.496	0.262	0.358	0.392	0.387	0.363	0.459	0.471	1.0
	0.155	0.151	0.229	0.173	0.257	0.280	0.231	0.175	0.237	0.236	1.5
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	2.0
	0.013	0.025	0.051	0.054	0.083	0.122	0.098	0.066	0.096	0.109	2.5
	0.068	0.132	0.243	0.211	0.279	0.376	0.328	0.272	0.358	0.413	3.0
δ inconnue	0.392	0.312	0.433	0.258	0.358	0.385	0.356	0.306	0.394	0.388	1.18
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(2, 2)											
δ connue	0.641	0.536	0.713	0.178	0.240	0.323	0.384	0.465	0.543	0.605	0.5
	0.946	0.445	0.573	0.263	0.379	0.452	0.419	0.455	0.556	0.586	1.0
	0.766	0.401	0.505	0.295	0.424	0.494	0.379	0.391	0.483	0.507	1.5
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	2.0
	0.012	0.019	0.040	0.043	0.067	0.100	0.081	0.055	0.082	0.095	2.5
	1.000	1.000	0.970	0.396	0.037	0.747	0.130	0.189	0.244	1.000	3.0
δ inconnue	0.644	0.478	0.580	0.239	0.357	0.434	0.325	0.342	0.427	0.445	1.13

TABLE 4.34 – Résultat du test portmanteau (p -valeurs) pour le rendement journalier de l'USD, basé sur les carrés des résidus des m premières autocovariances.

La table 4.34 présente les résultats des tests portmanteau pour la série du taux de change euros/dollar (EUR/USD). Lorsque la puissance est égale à 2, nous constatons que le test rejette l'hypothèse nulle pour les modèles APGARCH(1, 2) et APGARCH(2, 2). Pour ces mêmes modèles, lorsque la puissance est fixée à 2.5, les p -valeurs sont très proches de 5%, ce qui entraîne une incertitude sur leurs validations.

		m										$\delta/\hat{\tau}$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(1, 1)												
δ connue		0.017	0.043	0.097	0.143	0.227	0.025	0.043	0.070	0.082	0.022	0.5
		0.107	0.262	0.438	0.592	0.727	0.287	0.380	0.412	0.481	0.270	1.0
		0.244	0.506	0.689	0.829	0.898	0.592	0.679	0.566	0.653	0.468	1.5
		0.371	0.668	0.814	0.916	0.949	0.755	0.817	0.612	0.701	0.543	2.0
		0.475	0.769	0.880	0.953	0.971	0.836	0.885	0.650	0.735	0.582	2.5
		0.569	0.840	0.920	0.972	0.983	0.882	0.922	0.689	0.766	0.610	3.0
δ inconnue		0.156	0.360	0.551	0.708	0.819	0.400	0.504	0.495	0.570	0.337	1.20
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(2, 1)												
δ connue		0.037	0.023	0.032	0.002	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.5
		0.305	0.480	0.682	0.786	0.885	0.297	0.402	0.468	0.497	0.196	1.0
		0.564	0.804	0.904	0.961	0.981	0.699	0.783	0.674	0.747	0.548	1.5
		0.728	0.925	0.957	0.987	0.992	0.831	0.886	0.702	0.779	0.612	2.0
		0.825	0.969	0.975	0.993	0.995	0.884	0.927	0.723	0.795	0.636	2.5
		0.892	0.989	0.982	0.994	0.996	0.912	0.948	0.745	0.811	0.651	3.0
δ inconnue		0.405	0.622	0.797	0.886	0.947	0.454	0.571	0.589	0.638	0.313	1.18
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(1, 2)												
δ connue		0.001	0.003	0.008	0.016	0.033	0.003	0.007	0.012	0.017	0.006	0.5
		0.005	0.020	0.048	0.095	0.154	0.064	0.095	0.103	0.144	0.086	1.0
		0.009	0.033	0.070	0.133	0.197	0.133	0.178	0.122	0.176	0.133	1.5
		0.012	0.042	0.087	0.160	0.229	0.188	0.245	0.132	0.189	0.152	2.0
		0.024	0.079	0.149	0.255	0.346	0.303	0.381	0.202	0.276	0.218	2.5
		0.071	0.193	0.319	0.475	0.585	0.518	0.609	0.354	0.450	0.348	3.0
δ inconnue		0.005	0.020	0.047	0.093	0.152	0.068	0.104	0.104	0.146	0.083	1.20
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(2, 2)												
δ connue		0.006	0.022	0.049	0.094	0.143	0.019	0.033	0.055	0.060	0.021	0.5
		0.042	0.120	0.227	0.354	0.481	0.226	0.317	0.310	0.344	0.234	1.0
		0.116	0.251	0.422	0.558	0.698	0.522	0.635	0.426	0.477	0.406	1.5
		0.205	0.374	0.575	0.703	0.824	0.717	0.806	0.466	0.522	0.478	2.0
		0.291	0.473	0.681	0.799	0.895	0.822	0.889	0.506	0.559	0.521	2.5
		0.371	0.546	0.749	0.857	0.932	0.881	0.932	0.546	0.591	0.553	3.0
δ inconnue		0.065	0.168	0.301	0.438	0.574	0.325	0.433	0.370	0.406	0.287	1.19

TABLE 4.35 – Résultat du test portmanteau (p -valeurs) pour le rendement journalier du JPY, basé sur les carrés des résidus des m premières autocovariances.

La table 4.35 présente les résultats des tests portmanteau pour la série du taux de change euros/yen (EUR/JPY). Les p -valeurs obtenues pour l'ensemble des modèles, lorsque la puissance est fixée à 0.5 sont discutables. Mis à part le modèle APGARCH(1, 2) où toutes les p -valeurs sont inférieures à 5%, toutes les autres p -valeurs sont proches de 0.05. Le test portmanteau donne des résultats surprenant pour le modèle APGARCH(2, 1) puisque la p -valeur passe brusquement de 0.000 à 1.000. En définitive, nous pouvons considérer qu'aucun des modèles n'est validé lorsque la puissance vaut 0.5.

Pour les autres valeurs de la puissance, il semblerait que tous les modèles soient validés, mais nous remarquons que la p -valeur a tendance à augmenter lorsque la puissance augmente.

		m										$\delta/\hat{\tau}$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(1, 1)												
δ connue		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.5
		0.001	0.005	0.013	0.003	0.006	0.012	0.017	0.020	0.030	0.042	1.0
		0.040	0.077	0.162	0.083	0.142	0.216	0.201	0.172	0.239	0.251	1.5
		0.142	0.176	0.320	0.218	0.328	0.435	0.350	0.262	0.343	0.329	2.0
		0.256	0.242	0.405	0.305	0.421	0.528	0.417	0.304	0.383	0.367	2.5
		0.355	0.284	0.455	0.350	0.463	0.565	0.462	0.342	0.422	0.419	3.0
δ inconnue		0.025	0.056	0.122	0.052	0.091	0.148	0.154	0.141	0.199	0.217	1.40
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(2, 1)												
δ connue		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.5
		0.020	0.062	0.127	0.023	0.036	0.062	0.088	0.107	0.137	0.177	1.0
		0.241	0.390	0.597	0.270	0.391	0.516	0.484	0.434	0.532	0.540	1.5
		0.558	0.579	0.769	0.462	0.605	0.719	0.617	0.511	0.611	0.589	2.0
		0.790	0.628	0.792	0.524	0.653	0.756	0.639	0.514	0.610	0.589	2.5
		0.933	0.636	0.788	0.533	0.651	0.751	0.645	0.523	0.615	0.613	3.0
δ inconnue		0.184	0.333	0.531	0.209	0.310	0.427	0.428	0.398	0.492	0.507	1.41
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(1, 2)												
δ connue		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.5
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.0
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.002	0.001	0.002	0.002	1.5
		0.000	0.001	0.003	0.004	0.009	0.016	0.011	0.005	0.008	0.008	2.0
		0.003	0.007	0.017	0.020	0.038	0.060	0.040	0.019	0.028	0.025	2.5
		0.018	0.028	0.060	0.066	0.108	0.154	0.112	0.061	0.081	0.079	3.0
δ inconnue		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	1.40
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(2, 2)												
δ connue		1.000	1.000	1.000	0.284	0.381	0.487	0.585	0.669	0.486	0.571	0.5
		0.001	0.002	0.005	0.002	0.004	0.007	0.010	0.011	0.018	0.024	1.0
		0.037	0.060	0.127	0.088	0.147	0.217	0.216	0.162	0.225	0.208	1.5
		0.225	0.111	0.219	0.178	0.268	0.369	0.274	0.194	0.262	0.243	2.0
		0.478	0.187	0.340	0.278	0.369	0.484	0.343	0.251	0.320	0.305	2.5
		0.679	0.253	0.431	0.335	0.412	0.532	0.380	0.300	0.370	0.375	3.0
δ inconnue		0.005	0.008	0.016	0.006	0.010	0.020	0.027	0.029	0.046	0.057	1.42

TABLE 4.36 – Résultat du test portmanteau (p -valeurs) pour le rendement journalier du GBP, basé sur les carrés des résidus des m premières autocovariances.

La table 4.36 présente les résultats des tests portmanteau pour la série du taux de change euros/livre sterling (EUR/GBP). Pour cette série, nous remarquons qu'un grand nombre de modèles ne correspond pas. Lorsque la puissance est fixée à 0.5, seul le modèle APGARCH(2, 2) semble convenir à la série. Lorsque la puissance est fixée à 1, seul le modèle APGARCH(2, 1) est validé. Pour les puissances 1.5, 2.0, 2.5 et 3.0, les modèles APGARCH(1, 1), APGARCH(2, 1) et APGARCH(2, 2) correspondent aux données. Pour $\delta = 3.0$, le test pour le modèle APGARCH(1, 2) ne rejette pas l'hypothèse nulle, mais les p -valeurs sont très proches du seuil de 5%.

Lorsque la puissance est inconnue, le test portmanteau rejette l'hypothèse nulle pour les modèles APGARCH(1, 2) et APGARCH(2, 2).

		m										$\delta/\hat{\tau}$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(1, 1)												
δ connue		0.003	0.012	0.030	0.041	0.011	0.019	0.032	0.045	0.070	0.104	0.5
		0.018	0.059	0.129	0.203	0.095	0.151	0.197	0.200	0.258	0.322	1.0
		0.034	0.106	0.206	0.323	0.188	0.279	0.317	0.285	0.345	0.398	1.5
		0.037	0.114	0.218	0.341	0.200	0.295	0.327	0.301	0.366	0.416	2.0
		0.029	0.092	0.185	0.291	0.153	0.233	0.272	0.277	0.352	0.410	2.5
		0.019	0.061	0.132	0.209	0.090	0.145	0.187	0.216	0.291	0.358	3.0
δ inconnue		0.036	0.111	0.213	0.334	0.194	0.287	0.325	0.293	0.353	0.404	1.62
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(2, 1)												
δ connue		0.008	0.020	0.043	0.034	0.002	0.001	0.001	0.002	0.001	0.000	0.5
		0.090	0.217	0.382	0.474	0.193	0.277	0.360	0.377	0.464	0.549	1.0
		0.214	0.432	0.614	0.737	0.442	0.571	0.615	0.553	0.622	0.677	1.5
		0.259	0.468	0.636	0.754	0.475	0.604	0.637	0.581	0.653	0.701	2.0
		0.226	0.373	0.544	0.651	0.385	0.511	0.561	0.550	0.636	0.695	2.5
		0.162	0.236	0.393	0.468	0.246	0.349	0.418	0.456	0.553	0.631	3.0
δ inconnue		0.240	0.463	0.638	0.759	0.466	0.596	0.635	0.570	0.638	0.688	1.67
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(1, 2)												
δ connue		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.5
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.0
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.5
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.0
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2.5
		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	3.0
δ inconnue		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.58
Test Portmanteau pour le modèle APGARCH(2, 2)												
δ connue		0.001	0.003	0.008	0.016	0.002	0.003	0.007	0.008	0.014	0.022	0.5
		0.006	0.023	0.055	0.104	0.026	0.047	0.075	0.065	0.100	0.118	1.0
		0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.002	0.003	1.5
		0.005	0.004	0.012	0.016	0.027	0.034	0.015	0.023	0.024	0.035	2.0
		0.010	0.009	0.021	0.034	0.043	0.058	0.023	0.040	0.030	0.048	2.5
		0.034	0.101	0.203	0.266	0.173	0.254	0.264	0.343	0.401	0.494	3.0
δ inconnue		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.66

TABLE 4.37 – Résultat du test portmanteau (p -valeurs) pour le rendement journalier du CAD, basé sur les carrés des résidus des m premières autocovariances.

La table 4.37 présente les résultats des tests portmanteau pour la série du taux de change euros/dollar canadien (EUR/CAD). Pour cette série, un grand nombre de modèles ne semble pas convenir, puisque de nombreuses p -valeurs sont nulles. Le modèle APGARCH(1, 2) n'est pas validé et cela quelles que soient les conditions. Le modèle APGARCH(2, 2) est validé lorsque la puissance est égale à 3 et lorsqu'elle vaut 1, mais avec quelques incertitudes.

Les deux autres modèles sont validés sauf lorsque la puissance est fixée à 0.5.

3.3 Etude multivariée

L'étude multivariée est réalisée sur les taux de change mentionnés précédemment dans l'étude univariée. Le fait de travailler avec les taux de change, limite les erreurs pouvant provenir des jours fériés ou autres décalages possibles liés aux différentes places boursières.

L'étude univariée met en évidence l'effet de levier sur les séries utilisées, ainsi que l'importance du choix de la puissance pour la modélisation. Effectivement, nous remarquons très clairement que lorsque nous modélisons les séries par le modèle APGARCH dans le cas inconnu, la puissance n'est pas la même selon les taux. Les taux de change étant l'euro contre d'autres devises, il est naturel de penser que si un taux varie alors les autres taux seront également influencés. Par conséquent, chaque série contient de l'information utile pour modéliser d'autres séries. Ces constats justifient l'utilisation des modèles multivariés à corrélations conditionnelles constantes, asymétriques et en puissances.

3.3.1 Estimation

Nous estimons les séries de taux avec le modèle CCC-APGARCH pour des ordres p et q fixés. Les séries estimées sont celles représentant les taux de change utilisés lors de l'étude univariée. Pour la modélisation multivariée, nous considérons les modèles bivariés dans les cas où la puissance est connue et inconnue.

Puissance connue

On modélise les séries des taux de change par les modèles CCC-APGARCH lorsque nous considérons la puissance connue. Nous limiterons l'analyse à seulement quelques couples de puissances. Ces couples sont choisis en considérant les résultats des analyses univariées. Les puissances utilisées sont les puissances "classiques", 1.0 ou 2.0 et une puissance intermédiaire. Ces puissances semblent être les plus pertinentes pour l'analyse multivariée des séries des taux de change.

(i). Estimation avec les puissances $\underline{\delta} = (1.0, 1.0)$

Le premier modèle que nous utilisons est le modèle CCC-APGARCH(1, 1) lorsque les puissances sont égales et connues et valent 1.0.

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
USD/JPY	0.00632	0.03225	0.00000	0.02998	0.00223	0.96211	0.00205	0.55419
	0.01029	0.00326	0.04435	0.00000	0.07247	0.00000	0.93954	
USD/CAD	0.00348	0.02932	0.01135	0.03566	0.00662	0.96229	0.00000	0.58418
	0.00868	0.00829	0.04364	0.01132	0.03374	0.00000	0.94916	
USD/GBP	0.00403	0.02785	0.01615	0.03700	0.00964	0.96065	0.00000	0.49813
	0.00339	0.00000	0.06486	0.00286	0.06478	0.00000	0.94204	

TABLE 4.38 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 1.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
JPY/CAD	0.00092	0.04912	0.01095	0.08997	0.00304	0.92768	0.01552	0.31556
	0.00782	0.00000	0.04625	0.01333	0.02868	0.00000	0.95295	
JPY/GBP	0.00730	0.05349	0.00923	0.09277	0.01519	0.92291	0.00731	0.27843
	0.00322	0.00360	0.06668	0.01259	0.06070	0.00000	0.93541	

TABLE 4.39 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 1.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
CAD/GBP	0.00938	0.04335	0.01308	0.03795	0.00545	0.94823	0.00000	0.43986
	0.00336	0.01063	0.05833	0.00000	0.06700	0.00000	0.93971	

TABLE 4.40 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 1.0)$

Lorsque les puissances valent 1.0, les modèles semblent tous avoir la matrice $\hat{B}$ qui possède une structure diagonale. Dans le cas de la table 4.39, nous pourrions tester le coefficient β_{12} afin de savoir si il est statistiquement nul. Dans ce cas, nous pourrions affirmer que la volatilité passée d'un actif n'influence pas la volatilité des autres actifs.

(ii). Estimation avec les puissances $\underline{\delta} = (1.5, 1.5)$

Nous utilisons le modèle CCC-APGARCH(1, 1) lorsque les puissances sont égales et connues et valent 1.5.

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
USD/JPY	0.00410	0.03021	0.00000	0.02866	0.00087	0.96386	0.00164	0.55559
	0.00737	0.00531	0.03912	0.00000	0.07123	0.00000	0.93959	
USD/CAD	0.00217	0.02775	0.00697	0.03353	0.00657	0.96400	0.00000	0.58493
	0.00648	0.00615	0.04232	0.01206	0.02893	0.00256	0.94727	
USD/GBP	0.00282	0.03114	0.00963	0.03401	0.01578	0.95948	0.00000	0.50079
	0.00246	0.00000	0.06455	0.00488	0.06576	0.00000	0.93621	

TABLE 4.41 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.5, 1.5)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
JPY/CAD	0.00010	0.04592	0.00735	0.09088	0.00677	0.92462	0.01752	0.31556
	0.00555	0.00000	0.04494	0.01160	0.02424	0.00000	0.95370	
JPY/GBP	0.00545	0.04874	0.00958	0.09323	0.02175	0.92199	0.00605	0.28176
	0.00231	0.00240	0.06573	0.01100	0.06399	0.00000	0.92952	

TABLE 4.42 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.5, 1.5)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
CAD/GBP	0.00714	0.04399	0.00822	0.03357	0.00975	0.94784	0.00000	0.44050
	0.00233	0.00935	0.05576	0.00000	0.06969	0.00000	0.93547	

TABLE 4.43 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.5, 1.5)$

Lorsque les puissances valent 1.5, nous pouvons faire le même constat que pour les tables 4.38 à 4.40. La volatilité passée d'un actif ne semble pas influencer la volatilité des autres actifs.

(iii). Estimation avec les puissances $\underline{\delta} = (2.0, 2.0)$

Nous utilisons le modèle CCC-APGARCH(1, 1) lorsque les puissances sont égales et connues et valent 2.0.

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
USD/JPY	0.00270	0.02498	0.00000	0.02452	0.00000	0.96537	0.00158	0.55697
	0.00533	0.00682	0.03232	0.00000	0.06213	0.00000	0.93957	
USD/CAD	0.00136	0.02247	0.00325	0.02765	0.00683	0.96623	0.00000	0.58568
	0.00482	0.00429	0.03507	0.01107	0.02289	0.00417	0.94723	
USD/GBP	0.00198	0.02913	0.00112	0.02803	0.02007	0.96000	0.00000	0.50207
	0.00169	0.00000	0.05674	0.00622	0.05980	0.00000	0.93183	

TABLE 4.44 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
JPY/CAD	0.00001	0.04011	0.00480	0.08302	0.00846	0.92083	0.01922	0.31480
	0.00383	0.00000	0.03718	0.00785	0.01967	0.00000	0.95606	
JPY/GBP	0.00433	0.04217	0.00944	0.08435	0.02749	0.92041	0.00331	0.28384
	0.00160	0.00185	0.05732	0.00819	0.06127	0.00000	0.92485	

TABLE 4.45 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
CAD/GBP	0.00528	0.03807	0.00062	0.02691	0.01445	0.94938	0.00000	0.44041
	0.00137	0.00624	0.04772	0.00017	0.06563	0.00184	0.93082	

TABLE 4.46 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 2.0)$

Comme pour les deux précédents modèles, la matrice $\hat{B}$ semble avoir une structure diagonale. Certains coefficients doivent être testés statistiquement afin de pouvoir l'affirmer. Dans un tel cas, nous pourrions conclure que pour ces séries, la volatilité passée d'un actif n'influence pas celle des autres actifs. De plus, si les coefficients anti-diagonaux sont nuls, nous pourrions considérer le modèle avec la matrice B diagonale, ce qui permettra de réduire le nombre de paramètres.

Pour la suite, nous avons déjà pu remarquer et mentionner, que la puissance associée à une série financière varie et donc n'est pas nécessairement la même d'une série à l'autre. Les premiers

modèles, dont les résultats sont présentés aux tables 4.38–4.45, sont donc trop restrictifs.

(iv). Estimation avec les puissances $\underline{\delta} = (1.0, 1.5)$, ou $\underline{\delta} = (1.5, 1.0)$

Nous considérons le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec le couple de puissances $\underline{\delta} = (1.0, 1.5)$, ainsi que sa permutation.

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
USD/JPY	0.00708	0.03230	0.00000	0.03057	0.00036	0.96126	0.00254	0.55533
	0.00679	0.00795	0.03860	0.00000	0.07213	0.00000	0.93908	
USD/CAD	0.00472	0.03121	0.00635	0.03504	0.00617	0.96251	0.00000	0.58422
	0.00461	0.01063	0.04196	0.01088	0.03153	0.00125	0.94840	
USD/GBP	0.00583	0.03056	0.01060	0.03704	0.01342	0.95883	0.00000	0.50102
	0.00225	0.00000	0.06493	0.00457	0.06627	0.00000	0.93621	

TABLE 4.47 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 1.5)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
USD/JPY	0.00374	0.02984	0.00000	0.02813	0.00262	0.96465	0.00098	0.55456
	0.01039	0.00117	0.04475	0.00000	0.07157	0.00000	0.94034	
USD/CAD	0.00070	0.02572	0.01225	0.03406	0.00744	0.96379	0.00000	0.58505
	0.01062	0.00469	0.04322	0.01197	0.03143	0.00130	0.94800	
USD/GBP	0.00119	0.02866	0.01543	0.03396	0.01118	0.96119	0.00000	0.49804
	0.00357	0.00000	0.06443	0.00302	0.06436	0.00000	0.94211	

TABLE 4.48 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.5, 1.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
JPY/CAD	0.00544	0.05018	0.00566	0.08994	0.00302	0.92830	0.01187	0.31421
	0.00445	0.00000	0.04526	0.01426	0.02453	0.00000	0.95402	
JPY/GBP	0.00941	0.05251	0.01079	0.09078	0.01993	0.92621	0.00000	0.28023
	0.00085	0.00540	0.06730	0.01461	0.06547	0.00000	0.92689	

TABLE 4.49 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 1.5)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
JPY/CAD	0.00001	0.04274	0.01889	0.08706	0.01179	0.93172	0.00278	0.31679
	0.00926	0.00000	0.04640	0.01047	0.02914	0.00000	0.95176	
JPY/GBP	0.00191	0.04969	0.00587	0.09541	0.01531	0.91862	0.01544	0.28018
	0.00417	0.00091	0.06425	0.00921	0.05814	0.00000	0.93892	

TABLE 4.50 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.5, 1.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
CAD/GBP	0.01061	0.04555	0.00760	0.03765	0.00789	0.94748	0.00000	0.44181
	0.00126	0.01276	0.05505	0.00090	0.07090	0.00000	0.93468	

TABLE 4.51 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 1.5)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
CAD/GBP	0.00577	0.04154	0.01450	0.03414	0.00583	0.94898	0.00000	0.43869
	0.00417	0.00696	0.05920	0.00000	0.06552	0.00000	0.94047	

TABLE 4.52 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.5, 1.0)$

Le constat est identique aux modèles avec les puissances connues et égales.

(v). Estimation avec les puissances $\underline{\delta} = (1.5, 2.0)$, ou $\underline{\delta} = (2.0, 1.5)$

Nous utilisons le modèle CCC-APGARCH(1, 1) lorsque les puissances sont connues et différentes avec le couple $\underline{\delta} = (1.5, 2.0)$, ainsi que sa permutation.

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
USD/JPY	0.00440	0.03041	0.00000	0.02889	0.00000	0.96348	0.00186	0.55671
	0.00491	0.00941	0.03217	0.00000	0.06275	0.00000	0.93902	
USD/CAD	0.00273	0.02958	0.00226	0.03278	0.00706	0.96438	0.00000	0.58494
	0.00363	0.00872	0.03444	0.01095	0.02467	0.00297	0.94767	
USD/GBP	0.00353	0.03289	0.00292	0.03381	0.01987	0.95922	0.00000	0.50213
	0.00151	0.00000	0.05720	0.00620	0.06034	0.00000	0.93185	

TABLE 4.53 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.5, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
USD/JPY	0.00252	0.02459	0.00000	0.02405	0.00136	0.96600	0.00100	0.55583
	0.00758	0.00324	0.03934	0.00000	0.07077	0.00000	0.94008	
USD/CAD	0.00059	0.01989	0.00811	0.02779	0.00716	0.96640	0.00000	0.58580
	0.00789	0.00032	0.04421	0.01120	0.02763	0.00573	0.94506	
USD/GBP	0.00131	0.02732	0.00861	0.02823	0.01458	0.96047	0.00000	0.50082
	0.00264	0.00000	0.06398	0.00483	0.06510	0.00000	0.93635	

TABLE 4.54 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 1.5)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
JPY/CAD	0.00315	0.04638	0.00348	0.09087	0.00575	0.92574	0.01475	0.31424
	0.00346	0.00000	0.03779	0.01177	0.01893	0.00000	0.95496	
JPY/GBP	0.00665	0.04885	0.00705	0.09215	0.02602	0.92456	0.00000	0.28259
	0.00091	0.00347	0.05854	0.01167	0.06163	0.00000	0.92230	

TABLE 4.55 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.5, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
JPY/CAD	0.00001	0.03824	0.01247	0.07971	0.01296	0.92637	0.00652	0.31594
	0.00593	0.00000	0.04507	0.00744	0.02562	0.00000	0.95411	
JPY/GBP	0.00226	0.04294	0.00583	0.08725	0.01914	0.91512	0.01662	0.28306
	0.00279	0.00104	0.06382	0.00718	0.06248	0.00000	0.93290	

TABLE 4.56 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 1.5)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
CAD/GBP	0.00729	0.04524	0.00122	0.03303	0.01234	0.94919	0.00000	0.44145
	0.00055	0.00907	0.04684	0.00000	0.06658	0.00228	0.93023	

TABLE 4.57 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.5, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
CAD/GBP	0.00490	0.03668	0.00921	0.02738	0.01042	0.94820	0.00000	0.43965
	0.00288	0.00568	0.05706	0.00040	0.06861	0.00000	0.93579	

TABLE 4.58 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 1.5)$

Nous pouvons établir les mêmes constats que pour les points précédents.

(vi). Estimation avec les puissances $\underline{\delta} = (1.0, 2.0)$, ou $\underline{\delta} = (2.0, 1.0)$

Nous considérons le couple de puissances $\underline{\delta} = (1.0, 2.0)$, ainsi que sa permutation, pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) lorsque les puissances sont connues.

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
USD/JPY	0.00745	0.03206	0.00000	0.03040	0.00000	0.96151	0.00223	0.55650
	0.00411	0.01181	0.03187	0.00000	0.06353	0.00000	0.93862	
USD/CAD	0.00507	0.03265	0.00206	0.03419	0.00673	0.96311	0.00000	0.58437
	0.00180	0.01316	0.03390	0.00996	0.02693	0.00182	0.94867	
USD/GBP	0.00642	0.03245	0.00458	0.03699	0.01631	0.95864	0.00000	0.50241
	0.00109	0.00143	0.05685	0.00553	0.06190	0.00000	0.93147	

TABLE 4.59 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
USD/JPY	0.00227	0.02399	0.00139	0.02376	0.00284	0.96661	0.00000	0.55476
	0.01025	0.00025	0.04508	0.00000	0.07121	0.00000	0.94082	
USD/CAD	0.00001	0.02034	0.01045	0.02982	0.00550	0.96493	0.00000	0.58639
	0.01221	0.00211	0.04287	0.01086	0.03027	0.00245	0.94683	
USD/GBP	0.00001	0.02507	0.01402	0.02809	0.00911	0.96239	0.00000	0.49813
	0.00377	0.00000	0.06380	0.00332	0.06341	0.00000	0.94223	

TABLE 4.60 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 1.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
JPY/CAD	0.00734	0.05070	0.00223	0.08982	0.00292	0.92942	0.00957	0.31286
	0.00249	0.00031	0.03795	0.01348	0.01980	0.00000	0.95527	
JPY/GBP	0.01028	0.05322	0.00528	0.09136	0.02011	0.92629	0.00000	0.28160
	0.00001	0.00468	0.05982	0.01348	0.06242	0.00000	0.92046	

TABLE 4.61 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
JPY/CAD	0.00001	0.03692	0.01770	0.07887	0.01194	0.92989	0.00000	0.31661
	0.00920	0.00000	0.04560	0.00612	0.03056	0.00000	0.95318	
JPY/GBP	0.00001	0.04214	0.00659	0.08676	0.01663	0.91681	0.01336	0.28134
	0.00429	0.00000	0.06246	0.00587	0.05735	0.00000	0.94164	

TABLE 4.62 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 1.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
CAD/GBP	0.01059	0.04701	0.00203	0.03751	0.00942	0.94836	0.00000	0.44310
	0.00001	0.01238	0.04602	0.00163	0.06706	0.00011	0.93107	

TABLE 4.63 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$
CAD/GBP	0.00350	0.03435	0.01564	0.02789	0.00563	0.94978	0.00000	0.43793
	0.00451	0.00367	0.06018	0.00029	0.06454	0.00000	0.94106	

TABLE 4.64 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 1.0)$

Sur l'ensemble des modèles utilisés, nous constatons que la matrice $\hat{B}$ présente une structure diagonale, à l'exception de quelques modèles, pour lesquels les coefficients β_{12} et ou β_{21} sont non nuls mais proches de zéro. La significativité de ces coefficients peut être testée avec le test de Wald, afin de déterminer s'il serait plus judicieux de considérer un modèle dont la matrice B serait diagonale. Mais pour cela, il est nécessaire d'adapter le résultat de la normalité asymptotique, puisque dans ce cas, nous serions sur le bord de l'espace des paramètres et alors l'hypothèse de notre résultat sur la normalité asymptotique ne serait pas satisfaite. Cela permettrait de réduire le nombre de paramètres lors de l'estimation. Le constat que nous pouvons faire et que globalement, la persistance

des chocs n'est due qu'à la série elle même, puisque la volatilité passée d'une série n'influence pas la volatilité des autres séries.

Ce constat ne peut en général pas être reproduit sur les matrices $\hat{A}^+$ et $\hat{A}^-$. Cela signifie que le rendement d'un actif, qu'il soit positif ou négatif, influence le rendement des autres séries. Bien que ces coefficients soient petits, cela signifie que de l'information utile pour certains actifs est incluse dans d'autres actifs, ce qui nécessite une modélisation multivariée.

Cependant, les tables 4.38 à 4.64 ne montrent pas un effet de levier clairement marqué. Ceci n'est pas surprenant au regard du descriptif des séries réalisées au paragraphe 3.1. Nous avons constaté à partir de la table 4.24 que les rendements négatifs étaient autant corrélés avec les rendements en valeur absolue, que ne l'étaient les rendements positifs. Un test de Wald permettrait de déterminer si un modèle symétrique serait plus adapté dans cette situation.

Puissance inconnue

Nous modélisons les séries des taux de change avec le modèle CCC-APGARCH(1,1) bivarié lorsque les puissances sont inconnues et doivent être estimées simultanément aux autres paramètres. Contrairement au cas où la puissance est connue, cette procédure retournera les valeurs optimales des puissances. Les résultats des estimations sont présentés dans les tableaux suivants :

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		τ	$\hat{\rho}$
USD/JPY	0.0051	0.0317	0.0000	0.0299	0.0008	0.9628	0.0020	1.2842	0.5554
	0.0073	0.0062	0.0393	0.0000	0.0718	0.0000	0.9394	1.4751	
USD/CAD	0.0014	0.0255	0.0089	0.0326	0.0067	0.9644	0.0000	1.6217	0.5852
	0.0080	0.0045	0.0438	0.0122	0.0296	0.0027	0.9469	1.3425	
USD/GBP	0.0074	0.0303	0.0083	0.0368	0.0132	0.9586	0.0000	0.8553	0.5018
	0.0018	0.0004	0.0628	0.0048	0.0653	0.0000	0.9346	1.6727	

TABLE 4.65 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1,1)

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		τ	$\hat{\rho}$
JPY/CAD	0.0000	0.0469	0.0100	0.0917	0.0060	0.9264	0.0155	1.3264	0.3159
	0.0068	0.0000	0.0468	0.0125	0.0267	0.0000	0.9529	1.2482	
JPY/GBP	0.0080	0.0513	0.0089	0.0931	0.0230	0.9255	0.0000	1.2274	0.2815
	0.0008	0.0044	0.0633	0.0134	0.0640	0.0000	0.9243	1.7609	

TABLE 4.66 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1,1)

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		τ	$\hat{\rho}$
CAD/GBP	0.0098	0.0465	0.0056	0.0370	0.0092	0.9477	0.0000	1.1041	0.4420
	0.0010	0.0122	0.0526	0.0008	0.0701	0.0003	0.9336	1.6601	

TABLE 4.67 – Estimation de θ_0 pour le modèle CCC-APGARCH(1,1)

Comme dans le cas des modèles où les puissances sont connues, la matrice $\hat{B}$ semble avoir une structure diagonale, à l'exception du modèle JPY/CAD où le coefficient $\beta_{12} = 0.0155$. Ce coefficient paraît différent de zéro, mais un test de Wald permettrait de le confirmer.

Les matrices $\hat{A}^+$ et $\hat{A}^-$ ne portent pas le même constat que la matrice $\hat{B}$ ce qui signifie que de l'information utile est comprise dans les séries. Cependant, comme dans le cas où les puissances sont connues, l'effet de levier n'est pas marqué, mais cela s'explique avec la table 4.24. En effet, nous avons pu observer sur cette table que les rendements négatifs et les rendements positifs ont une corrélation avec les rendements en valeur absolue qui sont du même ordre de grandeur.

A priori toutes ces puissances paraissent différentes. Comme nous pouvons considérer que ces puissances sont optimales, cela signifie que tous les modèles utilisés précédemment pour modéliser les séries avec les puissances connues et égales donnent des résultats moins précis pour les estimations des coefficients. De plus, mis à part la table 4.67 les puissances obtenues ne correspondent pas à des couples de puissances utilisés lors des modélisations précédentes. Cela signifie qu'une fois encore, les résultats des estimations des paramètres sont moins précis.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Résumé

Ce Chapitre permet de faire une conclusion des travaux apportés et de donner quelques points de réflexions sur d'éventuelles pistes d'amélioration.

Sommaire

1	Conclusion	97
2	Perspectives	98
2.1	Procédures d'estimations	98
2.2	Le modèle DACC-APGARCH	100
2.2.1	Présentation du modèle	101
2.2.2	Estimation des coefficients du modèle	102
2.2.3	Illustrations par simulations	104
3	Estimation de données réelles	107

1 Conclusion

Ces travaux présentent des contributions à la modélisation de séries financières. Les deux principales thématiques de recherche étaient l'estimation des modèles développés et leur validation. Dans le cadre univarié, nous avons proposé l'extension du test portmanteau, développé initialement par Carbon et Francq (2011) dans le cas où la puissance est connue. Cette extension couvre le cas où la puissance est connue et d'avantage de modèles puisque le modèle APGARCH généralise de nombreux modèles de classe GARCH asymétriques et standards. Au delà de la théorie, nous avons illustré via des simulations, l'efficacité de ce test et son utilisation sur des données réelles.

Dans le cadre multivarié, le modèle CCC-APGARCH a été développé et une procédure de validation est proposée, via le test portmanteau multivarié. Cette extension généralise le modèle CCC-GARCH introduit par Bollerslev (1990) en considérant l'asymétrie (proposée par Francq et Zakoïan (2012)) et en modélisant la volatilité par une puissance quelconque de la variance. Ce modèle présente l'avantage d'avoir une interprétation simple et une modélisation de la corrélation intuitive.

Le test portmanteau multivarié que nous avons proposé, permet de valider le modèle CCC-APGARCH dans les cas où les puissances sont connues et inconnues. Comme ce modèle généralise l'ensemble des modèles du type GARCH à corrélations conditionnelles constantes, ce test portmanteau peut également valider les modèles CCC-GARCH de Jeantheau (1998) et CCC-AGARCH de Francq et Zakoïan (2012).

Les tests portmanteau peuvent être utilisés dans la détermination des ordres p et q des modèles, que ce soit dans le cadre univarié ou multivarié.

Les modèles multivariés ont l'inconvénient d'être constitués d'un grand nombre de paramètres. La conséquence est : une procédure d'estimation plus lente engendrant d'éventuels problèmes statistiques liés au nombre de paramètres. La procédure d'estimation la plus répandue dans l'estimation

des paramètres pour les modèles GARCH est celle du quasi-maximum de vraisemblance. D'autres procédures d'estimations ont été développées récemment et tendent à améliorer les capacités de l'estimation par le quasi-maximum de vraisemblance.

Les modèles développés au cours de ces travaux ont l'avantage d'être simples d'implémentation et d'interprétation, mais cette modélisation peut s'avérer être trop restrictive. Effectivement, considérer que la corrélation reste la même au cours du temps, peut porter un intérêt dans un cadre descriptif mais pas dans un cadre prédictif. Pour cette raison, nous avons réfléchi à une extension de ce modèle, en gardant toutes ses caractéristiques et en modifiant la modélisation de la corrélation, afin de considérer une corrélation qui évolue au cours du temps. Cette extension est décrite dans le paragraphe suivant. Le premier modèle avec ces caractéristiques est introduit simultanément par Engle (2002) et Tse et Tsui (2002).

2 Perspectives

Dans cette partie nous donnerons quelques idées et réflexions sur des points que nous pourrions améliorer ou considérer d'une manière différente. Dans les perspectives nous distinguerons deux grandes parties, à savoir, une partie concernant l'estimation des modèles et une partie concernant l'extension du modèle CCC-APGARCH.

2.1 Procédures d'estimations

La procédure d'estimation est une notion importante dans la modélisation de séries financières. Au delà de la notion de précision des résultats, une notion à prendre également en compte est la notion temps. Cette dernière notion n'a pas été du tout abordée lors de ces travaux, mais elle reste un facteur important à prendre en compte. Les modèles multivariés étudiés au Chapitre 2 présentent 17 paramètres pour le modèle CCC-APGARCH(1, 1) lorsque la dimension est fixée à $d = 2$ et nous considérons que les puissances sont inconnues. Ce même modèle compte 36 paramètres dès que nous augmentons la dimension et qu'elle passe à $d = 3$. Bien que les calculs restent faisables par ordinateur, ils deviennent de plus en plus lourds et prennent donc naturellement plus de temps. L'idée est alors de trouver des procédures d'estimation alternatives à celle du quasi-maximum de vraisemblance, dans le but de réduire le nombre de paramètres à estimer.

Variance targeting

Le but de la méthode de la variance targeting est de diminuer le nombre de paramètres que nous voulons estimer. L'idée pour le modèle GARCH(1, 1) est d'estimer les paramètres α et β et de déterminer par la suite le paramètre ω . Dans ce cas, à la place d'estimer trois paramètres, seuls deux paramètres sont estimés et le troisième peut être calculé. Cette méthode reste basée sur le quasi-maximum de vraisemblance, mais consiste à réécrire le modèle de sorte à diminuer le nombre de coefficients. Cette méthode a été appliquée par Francq *et al.* (2014) sur le modèle CCC-GARCH(p, q). Cette procédure nécessite de réécrire le modèle comme

$$\begin{cases} \varepsilon_t = H_t^{1/2} \eta_t, \\ H_t = D_t R_0 D_t, \quad D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{1t}}, \dots, \sqrt{h_{dt}}), \\ h_t - h_0 = \sum_{i=1}^q A_{0i}(\varepsilon_{t-i} - h_0) + \sum_{j=1}^p B_{0j}(h_{t-j} - h_0), \end{cases} \quad (5.1)$$

où h_0 est un vecteur de taille d tel que $\left\{ I_d - \sum_{i=1}^r (A_{0i} + B_{0i}) \right\} h_0$ a des coefficients strictement positifs et $r = \max\{p, q\}$. Le reste est identique au modèle (3).

Le vecteur des paramètres inconnus est $\vartheta = (\underline{h}', \theta')'$, avec

$$\theta = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_q, \beta'_1, \dots, \beta'_p, \rho')',$$

où $\rho' = (\rho_{2,1}, \dots, \rho_{d,1}, \rho_{3,2}, \dots, \rho_{d,2}, \dots, \rho_{d,d-1})'$, $\alpha_i = \text{vec}(A_i) \in \mathbb{R}^{d^2}$, $i = 1, \dots, q$ et $\beta_j = \text{vec}(B_j) \in \mathbb{R}^{d^2}$, $j = 1, \dots, p$. L'espace des paramètres pour θ est donné par

$$\Theta \subset [0, +\infty[^{d^2(p+q)} \times]-1, 1]^{d(d-1)/2}$$

et la vraie valeur des paramètres est donnée par $\vartheta_0 = (\underline{h}'_0, \theta'_0)'$.

Les observations $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ représentent une réalisation de taille n de la solution strictement stationnaire non anticipative et unique (ε_t) du modèle (5.1). Conditionnellement à certaines valeurs initiales $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{1-q}, \tilde{h}_0, \dots, \tilde{h}_{1-p}$, la quasi-vraisemblance gaussienne s'écrit

$$L_n(\vartheta) = L_n(\vartheta; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\tilde{H}_t|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \varepsilon'_t \tilde{H}_t^{-1} \varepsilon_t \right),$$

où les $\tilde{H}_t$ sont définis récursivement, pour $t \geq 1$, par

$$\begin{cases} \tilde{H}_t = \tilde{D}_t R \tilde{D}_t, & \tilde{D}_t = \text{diag} \left(\sqrt{\tilde{h}_{1,t}}, \dots, \sqrt{\tilde{h}_{d,t}} \right) \\ \tilde{h}_t := \tilde{h}_t(\theta) = \underline{h} + \sum_{i=1}^q A_i(\varepsilon_{t-i} - \underline{h}) + \sum_{j=1}^p B_j(\tilde{h}_{t-j} - \underline{h}). \end{cases}$$

La Log vraisemblance est donnée par

$$\log L_n(\vartheta) = \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t, \quad \text{où} \quad \tilde{l}_t = \tilde{l}_t(\underline{h}, \vartheta) = \varepsilon'_t \tilde{H}_t^{-1} \varepsilon_t + \log |\tilde{H}_t|.$$

L'estimateur de la variance targeting de $\underline{h}_0$ est défini par la moyenne empirique

$$\hat{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t.$$

L'estimateur de la variance targeting de θ_0 est alors donné par

$$\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta), \tag{5.2}$$

où

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_{t,n}, \quad \tilde{l}_{t,n} = \tilde{l}_t(\hat{h}_n, \theta).$$

Estimation équation par équation

Le principe de l'estimation équation par équation est de considérer un modèle multivarié, compliqué à estimer par son grand nombre de paramètres, comme un modèle "univarié". Le but est de considérer d équations de vraisemblance, où d représente le nombre de séries utilisées dans la modélisation. L'avantage est de se ramener à un modèle équivalent aux modèles univariés. Francq et Zakoïan (2016) développent cette méthode sur une large classe de modèles GARCH multivariés et utilisent le quasi-maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres. L'estimation du modèle CCC-GARCH, équation-par-équation se fait en deux étapes.

La première consiste à estimer les coefficients du modèle, équation-par-équation.

La deuxième étape consiste à estimer la matrice de corrélation. Pour la première étape, l'estimateur $\hat{\theta}_n^{(k)}$ équation-par-équation de $\theta_0^{(k)}$ s'écrit

$$\hat{\theta}_n^{(k)} = \arg \min_{\theta^{(k)} \in \Theta^{(k)}} \tilde{Q}_n^{(k)}(\theta^{(k)}), \quad \tilde{Q}_n^{(k)}(\theta^{(k)}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log \left(\tilde{\sigma}_{kt}^2(\theta^{(k)}) \right) + \frac{\varepsilon_{kt}^2}{\tilde{\sigma}_{kt}^2(\theta^{(k)})},$$

où $k = 1, \dots, d$ et $\theta^{(k)}$ représente le vecteur des paramètres inconnus correspondant à la dimension k . Cette méthode donne de très bons résultats pour l'estimation des coefficients, comme le montre Francq et Zakoïan (2016). L'erreur commise est du même ordre de grandeur que par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance, voire inférieure et le gain de temps lors de l'exécution est incontestable. De plus cette méthode n'est pas restreinte à l'application du quasi-maximum de vraisemblance et peut donc être applicable avec d'autres méthodes de minimisation.

En revanche, dans l'état actuel, cette méthode semble ne pas pouvoir s'appliquer directement au modèle CCC-APGARCH, puisque sur chaque composante, tous les paramètres de puissance y figurent. Une transformation du modèle, ou alors une adaptation de la méthode paraît incontournable.

2.2 Le modèle DACC-APGARCH

La classe de modèles multivariés s'impose dans la modélisation de séries financières. Les liens entre ces différentes séries (actions, taux de changes, ...) ne peuvent être modélisés avec les premiers modèles univariés tel que le modèle ARCH introduit par Engle (1982). Pourtant de nombreuses extensions sont réalisées et ces extensions ont conduit à l'élaboration de modèles toujours plus perfectionnés et précis dans la modélisation des séries financières en multivariés. L'extension multivariée des modèles n'étant pas immédiate, il existe de nombreuses formulations de modèles GARCH multivariés. Parmi ces modèles, nous retrouvons le BEKK introduit par Engle et Kroner (1995b), le modèle CCC-GARCH introduit par Bollerslev (1990) avec ces extensions au cas asymétrique Francq et Zakoïan (2012) et asymétrique en puissance présentée au Chapitre 2. Ce dernier modèle se veut être restrictif dans la modélisation de la corrélation et est moins précis lors des prévisions. Pour cette raison, il conduit à une extension qui fait évoluer la modélisation de la corrélation conditionnelle. Engle (2002) et Tse et Tsui (2002) proposent indépendamment, une formulation du modèle DCC-GARCH, pour Dynamic Conditional Correlation GARCH et permet de faire évoluer la matrice de corrélation au cours du temps. Cette extension mène à des prévisions beaucoup plus intuitives puisqu'il est évident que nous ne pouvons pas considérer que la corrélation entre deux ou plusieurs actifs financiers reste la même au cours du temps.

Le modèle DCC-GARCH est l'un des modèles les plus utilisés dans la modélisation des séries financières. Cela est dû à sa capacité à prendre en compte le lien entre les différents actifs et également de l'adapter au cours du temps. Il existe plusieurs formulations de ce modèle et notamment dans la façon de modéliser la corrélation. Tse et Tsui (2002) modélisent la corrélation conditionnelle en utilisant une équation du type AR(1) ou GARCH(1, 1). Engle (2002) utilise une modélisation plus complexe, qui mène à une estimation des paramètres en plusieurs étapes. Comme le modèle CCC-GARCH, le modèle DCC-GARCH ne propose pas l'effet de levier.

Des travaux récents présentent les modèles univariés et multivariés Log-GARCH-X avec des Corrélations Conditionnelles Dynamiques et qui dépendent de covariables X ajoutées à l'équation de la volatilité. Ces modèles sont proposés par Sucarrat *et al.* (2016). Francq et Sucarrat (2017) montrent les propriétés asymptotiques de l'estimateur des moindres carrés équation-par-équation pour le modèle Log-GARCH-X avec Corrélations Conditionnelles Dynamiques en utilisant la représentation VARMA-X.

Le modèle DCC-GARCH présente une avancée majeure dans la modélisation des séries financières, cependant très peu de théorie est établie sur ce modèle. Ce manque de connaissances théoriques sur le modèle, notamment sur les propriétés asymptotiques de l'estimateur, empêche le développement d'outils, tel que le test portmanteau pour valider le modèle. D'une manière générale,

très peu de procédure de validation est développée dans le cas multivarié pour les modèles de type GARCH, ce qui n'est pas le cas des modèles ARMA. Pour les modèles de type ARMA multivariés, les tests portmanteau sont plus courants dans les procédures de validation, comme le montrent les travaux de Francq et Raïssi (2007), Boubacar Mainassara (2010) et Boubacar Mainassara (2011), pour n'en citer que quelques uns.

L'extension du modèle DCC-GARCH que nous proposons est le modèle GARCH asymétrique en puissance à corrélations conditionnelles dynamiques, noté DACC-APGARCH ou encore $\underline{\delta}$ -DACC-APGARCH, pour reprendre la formulation donnée au Chapitre 2. Comme pour le modèle CCC-APGARCH, $\underline{\delta}$ est un vecteur de puissance de dimension d , ce qui correspond au nombre de séries utilisées dans la modélisation. Ce modèle utilise une nouvelle formulation de la corrélation et permet une estimation en une étape, ce qui minimise la perte d'informations liées aux coefficients. L'avantage de ce modèle est dans l'interprétation des coefficients. Sa partie variance conditionnelle possède une écriture simple et explicite et s'interprète comme celle du modèle CCC-APGARCH. Sa partie corrélation dynamique s'interprète comme la seconde équation du modèle GARCH(1,1) standard.

2.2.1 Présentation du modèle

Il existe plusieurs formulations du modèle DCC, notamment pour l'écriture de la matrice de corrélation. Tse et Tsui (2002) proposent la formulation suivante

$$R_t = \mu_1 R + \mu_2 \Psi_{t-1} + \mu_3 R_{t-1},$$

où les μ_i sont des poids positifs dont la somme est égale à 1, R est une matrice de corrélation empirique constante et Ψ_{t-1} est la matrice de corrélation empirique des observations $\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-M}$. Une autre manière est d'écrire la dynamique de R_t en posant

$$R_t = (\text{diag } \mathcal{Q}_t)^{-1/2} \mathcal{Q}_t (\text{diag } \mathcal{Q})^{-1/2},$$

où $\mathcal{Q}_t$ est une suite de matrices de variance mesurable par rapport à la tribu $(\varepsilon_u, u < t)$ et $\text{diag } \mathcal{Q}_t$ est la matrice diagonale composée des termes de $\mathcal{Q}_t$. Engle (2002) propose d'utiliser cette écriture et définit la matrice $\mathcal{Q}_t$ par

$$\mathcal{Q}_t = \mu_1 \mathcal{Q} + \mu_2 r_{t-1} r'_{t-1} + \mu_3 \mathcal{Q}_{t-1},$$

où $\mathcal{Q}$ est une matrice de variance et r_t sont les résidus standardisés par leur propre écart-type. Dans cette formulation aussi, les coefficients μ_i sont des poids positifs tels que la somme vaut 1.

Les deux formulations ont des approches différentes mais définissent dans les deux cas une matrice de corrélation. Dans la pratique, les matrices R et $\mathcal{Q}$ sont estimées par la matrice de corrélation empirique et de variance empirique des observations. Ces deux formulations font apparaître une équation de type GARCH(1,1) pour la modélisation de la corrélation conditionnelle dynamique.

Nous proposons une nouvelle façon de modéliser la corrélation du modèle, basée sur la deuxième formulation introduite par Engle (2002). On définit la matrice $\mathcal{Q}_t$ telle que

$$\mathcal{Q}_t = R_0 + \mu_1^+ (r_{t-1}^+) (r_{t-1}^{+'}) + \mu_1^- (r_{t-1}^-) (r_{t-1}^{-'}) + \mu_2 \mathcal{Q}_{t-1},$$

où R_0 est une matrice de corrélation contenant des paramètres $\rho_{0,i}$ à estimer, r_t^+ , représentent les résidus positifs standardisés et r_t^- , représentent les résidus négatifs standardisés. Les coefficients μ_1^+ , μ_1^- et μ_2 sont des poids positifs. Contrairement à la deuxième formulation, il n'est pas nécessaire d'imposer que la somme des coefficients fasse 1. Cette formulation est semblable à celle du modèle GARCH(1,1) et si les coefficients μ_1^+ , μ_1^- et μ_2 sont tous nuls, alors nous obtenons exactement le modèle CCC-APGARCH.

La formulation du DACC-APGARCH est basée sur cette dernière écriture de la corrélation. Soit (η_t) une suite de variables iid de loi η . On dit que ε_t est un processus DACC-APGARCH s'il vérifie

$$(i) \begin{cases} \varepsilon_t = H_t^{1/2} \eta_t, \\ H_t = D_t R_t D_t, \quad D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{1t}}, \dots, \sqrt{h_{dt}}), \\ \underline{h}_t^{\delta/2} = \underline{\omega}_0 + \sum_{i=1}^q \left\{ A_{0i}^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{\delta/2} + A_{0i}^- (\varepsilon_{t-i}^-)^{\delta/2} \right\} + \sum_{j=1}^p B_{0j} \underline{h}_{t-j}^{\delta/2}, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$(ii) \begin{cases} R_t = (\text{diag } \mathcal{Q}_t)^{-1/2} \mathcal{Q}_t (\text{diag } \mathcal{Q}_t)^{-1/2}, \\ \mathcal{Q}_t = R_0 + \mu_1^+ (r_{t-1}^+) (r_{t-1}^{+'}) + \mu_1^- (r_{t-1}^-) (r_{t-1}^{-'}) + \mu_2 \mathcal{Q}_{t-1}, \end{cases} \quad (5.4)$$

où $\underline{h}_t = (h_{1,t}, \dots, h_{d,t})'$ et avec $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \min(0, x)$,

$$\underline{\varepsilon}_t^+ = \left(\{\varepsilon_{1,t}^+\}^2, \dots, \{\varepsilon_{d,t}^+\}^2 \right)' \quad \underline{\varepsilon}_t^- = \left(\{-\varepsilon_{1,t}^-\}^2, \dots, \{-\varepsilon_{d,t}^-\}^2 \right)',$$

$\underline{\omega}_0$ et $\underline{\delta}$ sont des vecteurs de dimension $d \times 1$ composés de coefficients strictement positifs, A_{0i}^+ , A_{0i}^- et B_{0j} sont des matrices de dimension $d \times d$ composées de coefficients positifs et R_t est la matrice de corrélation dépendant du temps. La matrice R_0 représente la matrice de corrélation et les coefficients ϑ_i sont des poids positifs. Ce modèle ne présente que 3 paramètres supplémentaires par rapport au modèle CCC présenté dans le paragraphe 1 du Chapitre 2. L'interprétation des coefficients du sous modèle (i) est la même que pour le modèle CCC-APGARCH défini en (2.1) et celle du sous modèle (ii) est semblable à l'interprétation que nous pourrions réaliser pour le modèle univarié GARCH(1, 1).

Les coefficients qui composent ce modèle sont ceux des vecteurs $\underline{\omega}_0$ et $\underline{\delta}$ ainsi que les matrices A_{0i}^+ , A_{0i}^- et B_{0j} et les coefficients μ_1^+ , μ_1^- , μ_2 et ceux du triangle inférieur de la matrice de corrélation excepté la diagonale. Le nombre de coefficients inconnus constituant le modèle est

$$s_0 = 2d + d^2(2q + p) + \frac{d(d-1)}{2} + 3.$$

Ce modèle présente l'avantage de généraliser de nombreux processus déjà connus. Si $\mu_1^+ = \mu_1^- = \mu_2 = 0$, le modèle devient celui introduit au Chapitre 2, qui généralise lui même de nombreux modèles, comme mentionné au paragraphe 1 du Chapitre 2.

2.2.2 Estimation des coefficients du modèle

Le modèle standard à corrélations conditionnelles dynamiques, propose une procédure d'estimation en 2 étapes. La première étape consiste à estimer tous les paramètres liés à la modélisation de la variance conditionnelle puis la seconde étape consiste à estimer les paramètres liés à la corrélation. Cette procédure en deux étapes est nécessaire puisqu'il faut estimer les matrices R ou Q selon les formulations.

Le modèle à corrélations asymétriques conditionnelles dynamiques propose une procédure d'estimation en une étape. Il est possible d'estimer tous les paramètres du modèle simultanément. Pour réaliser l'estimation, nous nous basons sur la procédure classique en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

Cas où la puissance est connue

Dans ce paragraphe, nous traiterons le cas de l'estimation lorsque la puissance est connue. Dans ce cas, les paramètres à estimer sont le vecteur $\underline{\omega}$ et les matrices A_i^+ , A_i^- et B_j ainsi que les coefficients de la corrélation modélisant la matrice $\mathcal{Q}_t$ et ceux constituant le triangle inférieur de la matrice de corrélation R_0 , excepté la diagonale. Tous ces paramètres peuvent être estimés simultanément et le nombre de paramètres est

$$s_0 = d + d^2(p + 2q) + \frac{d(d-1)}{2} + 3.$$

Le but est d'estimer les s_0 coefficients du modèle DACC-APGARCH que nous notons comme

$$\theta := (\underline{\omega}', \alpha_1^{+'}, \dots, \alpha_q^{+'}, \alpha_1^{-'}, \dots, \alpha_q^{-'}, \beta_1', \dots, \beta_p', \mu_1^+, \mu_1^-, \mu_2, \rho')',$$

où α_i^+ et α_i^- sont définis par $\alpha_i^\pm = \text{vec}(A_i^\pm)$ pour $i = 1, \dots, q$, les coefficients β_j sont définis par $\beta_j = \text{vec}(B_j)$ pour $j = 1, \dots, p$ et $\rho = (\rho_{21}, \dots, \rho_{d1}, \rho_{32}, \dots, \rho_{d2}, \dots, \rho_{dd-1})'$. Le paramètre θ appartient à l'espace Θ défini comme

$$\Theta \subset]0, +\infty[^d \times [0, +\infty[^{d^2(2q+p)+3} \times]-1, 1[^{d(dd-1)/2}.$$

Les vraies valeurs sont indicées d'un 0 et nous pouvons écrire le vecteur des vraies valeurs inconnues comme

$$\theta_0 := (\underline{\omega}'_0, \alpha_{01}^{+'}, \dots, \alpha_{0q}^{+'}, \alpha_{01}^{-'}, \dots, \alpha_{0q}^{-'}, \beta_{01}', \dots, \beta_{0p}', \mu_{01}^+, \mu_{01}^-, \mu_{02}, \rho_0')',$$

Le déterminant de la matrice carrée A est noté $\det(A)$ ou alors $|A|$.

Soit $\underline{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{t1}, \dots, \varepsilon_{tn})$ une réalisation de longueur n d'une unique solution non anticipative et strictement stationnaire du modèle DACC-APGARCH. Conditionnellement à certaines valeurs initiales $\underline{\varepsilon}_0, \dots, \underline{\varepsilon}_{1-q}, \tilde{h}_0, \dots, \tilde{h}_{1-p}$ que nous préciserons, la quasi-vraisemblance gaussienne s'écrit

$$L_n(\theta) = L_n(\theta; \underline{\varepsilon}_1, \dots, \underline{\varepsilon}_n) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\tilde{H}_t|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \underline{\varepsilon}_t' \tilde{H}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \right),$$

où les $\tilde{H}_t$ sont définies récursivement pour $t \geq 1$ par

$$\begin{cases} \tilde{H}_t = \tilde{D}_t \tilde{R}_t \tilde{D}_t, & \tilde{D}_t = \text{diag} \left(\sqrt{\tilde{h}_{1,t}}, \dots, \sqrt{\tilde{h}_{d,t}} \right) \\ \tilde{h}_t^{\delta/2} := \tilde{h}_t^{\delta/2}(\theta) = \underline{\omega} + \sum_{i=1}^q A_i^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + A_i^- (\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\delta/2} + \sum_{j=1}^p B_j \tilde{h}_{t-j}^{\delta/2}, \end{cases}$$

et $\tilde{R}_t$ par

$$\begin{cases} \tilde{R}_t = (\text{diag} \tilde{Q}_t)^{-1/2} \tilde{Q}_t (\text{diag} \tilde{Q}_t)^{-1/2}, \\ \tilde{Q}_t = R_0 + \mu_1^+ (r_{t-1}^+) (r_{t-1}^+)' + \mu_1^- (r_{t-1}^-) (r_{t-1}^-)' + \mu_2 \tilde{Q}_{t-1}. \end{cases}$$

Les valeurs initiales peuvent être choisies comme suit $\underline{\varepsilon}_0, \dots, \underline{\varepsilon}_{1-q}, \tilde{h}_0, \dots, \tilde{h}_{1-p} = \underline{\omega}$. Un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de θ est défini comme toute solution mesurable $\hat{\theta}_n$ de

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta) = \arg \min_{\theta \in \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta), \quad (5.5)$$

où

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t, \quad \tilde{l}_t = \tilde{l}_t(\theta) = \underline{\varepsilon}_t' \tilde{H}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log |\tilde{H}_t|.$$

Cas où la puissance est inconnue

Dans ce paragraphe, nous traiterons le cas de l'estimation lorsque la puissance est inconnue. Les paramètres de la puissance sont estimés simultanément aux autres paramètres. Pour le modèle CCC-APGARCH défini au Chapitre 2, nous avons souligné que dans la pratique le coefficient $\underline{\delta}$ est difficile à identifier comme cela avait été remarqué dans Hamadeh et Zakoïan (2011) pour le modèle APGARCH. On ajoute l'hypothèse suivante

H8 : η_t a une densité positive au voisinage de zéro.

Pour définir l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de ϑ , on remplace H_t par $\mathcal{H}_t$ dans l'expression du critère défini en (5.3) et on obtient récursivement $\tilde{\mathcal{H}}_t$, pour $t \geq 1$,

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}_t = \tilde{D}_t \tilde{R}_t \tilde{D}_t, & \tilde{D}_t = \text{diag} \left(\sqrt{\tilde{h}_{1,t}}, \dots, \sqrt{\tilde{h}_{d,t}} \right) \\ \tilde{h}_t := \tilde{h}_t(\vartheta) = \left(\underline{\omega} + \sum_{i=1}^q A_i^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\tau/2} + A_i^- (\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\tau/2} + \sum_{j=1}^p B_j \tilde{h}_{t-j}^{\tau/2} \right)^{2/\tau}, \end{cases}$$

et $\tilde{R}_t$ par

$$\begin{cases} \tilde{R}_t = (\text{diag} \tilde{Q}_t)^{-1/2} \tilde{Q}_t (\text{diag} \tilde{Q}_t)^{-1/2}, \\ \tilde{Q}_t = R_0 + \mu_1^+ (r_{t-1}^+) (r_{t-1}^+)' + \mu_1^- (r_{t-1}^-) (r_{t-1}^-)' + \mu_2 \tilde{Q}_{t-1}. \end{cases}$$

Un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de ϑ est défini comme toute solution mesurable $\hat{\vartheta}_n$ de

$$\hat{\vartheta}_n = \arg \min_{\vartheta \in \Delta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\vartheta), \quad (5.6)$$

où

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(\vartheta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t, \quad \tilde{l}_t = \tilde{l}_t(\vartheta) = \underline{\varepsilon}_t' \tilde{\mathcal{H}}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log |\tilde{\mathcal{H}}_t|.$$

2.2.3 Illustrations par simulations

Dans cette partie nous réalisons des simulations avec les logiciel RStudio (<https://www.rstudio.com>) dans le langage de programmation Rcpp. Comme nous possédons très peu de résultats théoriques sur le modèle DACC-APGARCH, le but des simulations est de se convaincre que ce modèle possède toutes les qualités souhaitées. L'estimation est réalisée suivant la procédure développée au paragraphe précédent et nous utilisons la fonction implémentée de R, `nlminb()` pour minimiser la log-vraisemblance.

Les simulations sont faites pour le modèle complet DACC-APGARCH(1,1) dans le cas où la puissance est considérée connue et dans le cas où elle est considérée inconnue. L'estimateur est calculé sur $N = 100$ répliquions indépendantes de trajectoires simulées, afin d'accroître les performances de l'estimateur. Les simulations sont réalisées en dimension $d = 2$ et pour des tailles de séries $n = 500$, $n = 5000$ et enfin $n = 10000$. Pour toutes les simulations, nous considérons que $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, I_2)$.

Estimation avec la puissance connue

Nous utilisons le modèle DACC-APGARCH(1,1) bivarié avec les puissances connues pour simuler les trajectoires. Les paramètres utilisés pour les simulations sont reportés à la première ligne des tables 5.1 à 5.4. L'estimation est réalisée sur N répliquions indépendantes, et comme attendu, l'erreur tend à diminuer au fur et à mesure que la taille de la série augmente. Les résultats sont présentés dans les tables suivantes :

(i). Estimation avec les puissances δ_1 et δ_2 égales

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		ρ_0	μ_{01}^+
								μ_{01}^-	μ_{02}
	0.05 0.05	0.07 0.02	0.02 0.07	0.15 0.05	0.05 0.15	0.75 0.05	0.05 0.75	0.1 0.3	0.1 0.5
$n = 500$	0.0221	0.0056	0.0158	0.0017	0.0028	0.1118	0.0627	0.0076	0.0432
	0.0110	0.0045	0.0066	0.0055	0.0038	0.0261	0.0455	0.0060	0.0035
$n = 5000$	0.0011	0.0028	0.0013	0.0025	0.0020	0.0024	0.0035	0.0003	0.0416
	0.0007	0.0019	0.0015	0.0003	0.0001	0.0021	0.0045	0.0001	0.0001
$n = 10000$	0.0007	0.0013	0.0009	0.0015	0.0023	0.0066	0.0098	0.0000	0.0411
	0.0002	0.0003	0.0008	0.0004	0.0019	0.0030	0.0011	0.0000	0.0000

TABLE 5.1 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle DACC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (1.0, 1.0)'$

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		ρ_0	μ_{01}^+
								μ_{01}^-	μ_{02}
	0.05 0.05	0.07 0.02	0.02 0.07	0.15 0.05	0.05 0.15	0.75 0.05	0.05 0.75	0.1 0.3	0.1 0.5
$n = 500$	0.0114	0.0033	0.0160	0.0114	0.0007	0.0570	0.0390	0.0140	0.0431
	0.0083	0.0034	0.0090	0.0046	0.0071	0.0170	0.0192	0.0021	0.0124
$n = 5000$	0.0009	0.0022	0.0012	0.0020	0.0032	0.0057	0.0080	0.0001	0.0425
	0.0008	0.0020	0.0014	0.0001	0.0004	0.0025	0.0043	0.0003	0.0001
$n = 10000$	0.0004	0.0010	0.0007	0.0013	0.0022	0.0068	0.0090	0.0000	0.0419
	0.0000	0.0005	0.0006	0.0001	0.0023	0.0027	0.0006	0.0000	0.0000

TABLE 5.2 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle DACC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (2.0, 2.0)'$

(ii). Estimation avec les puissances δ_1 et δ_2 différentes

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		ρ_0	μ_{01}^+
								μ_{01}^-	μ_{02}
	0.05 0.05	0.07 0.02	0.02 0.07	0.15 0.05	0.05 0.15	0.75 0.05	0.05 0.75	0.1 0.3	0.1 0.5
$n = 500$	0.0059	0.0020	0.0050	0.0118	0.0028	0.0678	0.0583	0.0136	0.0427
	0.0102	0.0143	0.0057	0.0171	0.0029	0.0091	0.0108	0.0038	0.0032
$n = 5000$	0.0008	0.0030	0.0009	0.0027	0.0016	0.0032	0.0049	0.0000	0.0416
	0.0010	0.0044	0.0014	0.0014	0.0001	0.0028	0.0066	0.0000	0.0001
$n = 10000$	0.0001	0.0017	0.0005	0.0018	0.0012	0.0041	0.0057	0.0000	0.0410
	0.0005	0.0002	0.0006	0.0004	0.0019	0.0036	0.0010	0.0000	0.0000

TABLE 5.3 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle DACC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (1.0, 2.0)'$

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		ρ_0	μ_{01}^+
								μ_{01}^-	μ_{02}
	0.05 0.05	0.07 0.02	0.02 0.07	0.15 0.05	0.05 0.15	0.75 0.05	0.05 0.75	0.1 0.3	0.1 0.5
$n = 500$	0.0126	0.0014	0.0121	0.0093	0.0014	0.0759	0.0506	0.0047	0.0433
	0.0079	0.0070	0.0086	0.0080	0.0048	0.0147	0.0247	0.0014	0.0047
$n = 5000$	0.0009	0.0028	0.0013	0.0025	0.0025	0.0044	0.0063	0.0000	0.0422
	0.0008	0.0027	0.0015	0.0000	0.0002	0.0039	0.0063	0.0000	0.0000
$n = 10000$	0.0004	0.0014	0.0007	0.0017	0.0020	0.0058	0.0082	0.0000	0.0416
	0.0003	0.0004	0.0007	0.0004	0.0022	0.0034	0.0009	0.0000	0.0000

TABLE 5.4 – Erreur absolue des estimations des coefficients du modèle DACC-APGARCH(1,1) avec $\underline{\delta} = (1.3, 1.7)'$

Toutes les simulations reportées dans les tables 5.1 à 5.4 montrent que la procédure d'estimation fonctionne efficacement sur le modèle DACC-APGARCH.

De plus, le fait que l'erreur diminue lorsque la taille de la série augmente, montre que l'estimateur est consistant. Malgré le nombre important de paramètres et la complexité du modèle, l'erreur commise lors de l'estimation est du même ordre de grandeur que le modèle CCC-APGARCH pour des

tailles de séries similaires.

Afin de réduire le nombre de paramètres à estimer et augmenter la fiabilité de la procédure d'estimation, la méthode d'estimation peut être repensée en y incorporant des techniques comme celle de la variance targeting.

Estimation avec la puissance inconnue

Le modèle utilisé pour les simulations est le modèle DACC-APGARCH avec la puissance inconnue et estimée simultanément aux autres coefficients du modèle. Les paramètres utilisés pour les simulations sont reportés à la première ligne des tables 5.5 à 5.6. L'estimation est réalisée sur N répétitions indépendantes. Les résultats obtenus sont présentés dans les tables suivantes :

(i). Estimation avec les puissances δ_1 et δ_2 égales

Taille	ω_0	A_0^+		A_0^-		B_0		δ	ρ_0	μ_{01}^+
									μ_{01}^-	μ_{02}
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	1.0	0.1	0.1
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	1.0	0.3	0.5
$n = 500$	0.080	0.047	0.061	0.125	0.062	0.099	0.046	0.215	0.043	0.147
	0.050	0.025	0.033	0.047	0.114	0.008	0.020	0.111	0.049	0.068
$n = 5000$	0.038	0.056	0.014	0.136	0.040	0.003	0.011	0.023	0.042	0.006
	0.043	0.018	0.060	0.040	0.125	0.004	0.003	0.023	0.004	0.094
$n = 10000$	0.043	0.073	0.020	0.162	0.050	0.007	0.016	0.021	0.041	0.000
	0.052	0.020	0.070	0.052	0.150	0.003	0.000	0.005	0.000	0.128
Taille	ω_0	A_0^+		A_0^-		B_0		δ	ρ_0	μ_{01}^+
									μ_{01}^-	μ_{02}
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	1.5	0.1	0.1
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	1.5	0.3	0.5
$n = 500$	0.062	0.037	0.050	0.102	0.051	0.077	0.035	0.393	0.043	0.176
	0.056	0.025	0.036	0.064	0.112	0.004	0.019	0.492	0.062	0.108
$n = 5000$	0.037	0.055	0.015	0.134	0.042	0.006	0.015	0.047	0.042	0.002
	0.044	0.018	0.060	0.039	0.124	0.004	0.004	0.026	0.006	0.096
$n = 10000$	0.050	0.083	0.024	0.178	0.057	0.008	0.017	0.025	0.042	0.000
	0.059	0.023	0.080	0.060	0.169	0.003	0.001	0.005	0.000	0.040
Taille	ω_0	A_0^+		A_0^-		B_0		δ	ρ_0	μ_{01}^+
									μ_{01}^-	μ_{02}
	0.05	0.07	0.02	0.15	0.05	0.75	0.05	2.0	0.1	0.1
	0.05	0.02	0.07	0.05	0.15	0.05	0.75	2.0	0.3	0.5
$n = 500$	0.000	0.029	0.029	0.075	0.009	0.673	0.011	1.100	0.057	0.082
	0.019	0.004	0.045	0.006	0.075	0.043	0.718	0.901	0.252	0.260
$n = 5000$	0.029	0.044	0.013	0.108	0.037	0.007	0.015	0.066	0.043	0.017
	0.038	0.013	0.050	0.032	0.104	0.002	0.003	0.013	0.009	0.237
$n = 10000$	0.048	0.075	0.021	0.158	0.052	0.007	0.013	0.020	0.042	0.001
	0.054	0.021	0.074	0.057	0.153	0.003	0.000	0.002	0.000	0.191

TABLE 5.5 – Erreur absolue de l'estimation de ϑ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1,1)

Comme lorsque les puissances étaient connues, l'erreur diminue lorsque la taille de la série augmente.

(ii). Estimation avec les puissances δ_1 et δ_2 différentes

Dans la pratique on sait que les puissances sont souvent différentes selon les séries étudiées. Considérer des puissances différentes pour les simulations, semble plus adapté au cas pratique. Comme les paramètres jouent un rôle symétrique, l'estimation des coefficients du modèle avec $\underline{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ sera équivalente à celle du modèle avec $\underline{\tau} = (\tau_2, \tau_1)$.

Les résultats sont résumés dans les tableaux suivants :

Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		$\underline{\delta}$	ρ_0	μ_{01}^+
									μ_{01}^-	μ_{02}
	0.05 0.05	0.07 0.02	0.02 0.07	0.15 0.05	0.05 0.15	0.75 0.05	0.05 0.75	1.0 2.0	0.1 0.3	0.1 0.5
$n = 500$	0.051	0.005	0.006	0.033	0.010	0.080	0.022	0.189	0.042	0.209
	0.083	0.059	0.066	0.127	0.175	0.020	0.022	0.491	0.113	0.133
$n = 5000$	0.020	0.028	0.009	0.073	0.025	0.004	0.007	0.034	0.042	0.024
	0.072	0.041	0.098	0.073	0.211	0.030	0.006	0.009	0.006	0.100
$n = 10000$	0.024	0.036	0.011	0.082	0.027	0.004	0.008	0.017	0.041	0.000
	0.084	0.034	0.118	0.088	0.247	0.033	0.001	0.000	0.005	0.066
Taille	$\underline{\omega}_0$	A_0^+		A_0^-		B_0		$\underline{\delta}$	ρ_0	μ_{01}^+
									μ_{01}^-	μ_{02}
	0.05 0.05	0.07 0.02	0.02 0.07	0.15 0.05	0.05 0.15	0.75 0.05	0.05 0.75	1.3 1.7	0.1 0.3	0.1 0.5
$n = 500$	0.067	0.031	0.029	0.087	0.035	0.139	0.084	0.020	0.408	0.129
	0.115	0.026	0.050	0.087	0.139	0.011	0.022	0.555	0.088	0.110
$n = 5000$	0.029	0.045	0.013	0.113	0.037	0.005	0.005	0.047	0.042	0.002
	0.055	0.026	0.076	0.052	0.160	0.014	0.005	0.023	0.008	0.093
$n = 10000$	0.039	0.062	0.018	0.136	0.045	0.006	0.004	0.025	0.042	0.001
	0.071	0.028	0.097	0.072	0.204	0.014	0.001	0.004	0.000	0.048

TABLE 5.6 – Erreur absolue de l'estimation de ϑ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1)

Les résultats des tables 5.5 et 5.6 montrent que la procédure d'estimation est aussi efficace lorsque la puissance est inconnue. Les erreurs commises sont plus élevées que dans le cas où la puissance est connue, mais restent du même ordre de grandeur que le modèle CCC-APGARCH. De plus, les deux paramètres supplémentaires sont les plus délicats à estimer. Malgré cela, l'erreur diminue au fur et à mesure que la taille de série augmente, ce qui montre que l'estimateur reste consistant même lorsque la puissance doit être estimée.

Comme pour le cas où la puissance est connue, il pourrait être intéressant d'adapter la procédure d'estimation afin de réduire le nombre de paramètres à estimer.

3 Estimation de données réelles

Dans cette partie nous estimons les séries des taux de change (présentées au Chapitre 4) avec le modèle DACC-APGARCH(1, 1) bivarié. Les estimations seront réalisées avec le modèle lorsque les puissances sont connues et lorsqu'elles sont inconnues.

Estimation avec la puissance connue

Dans cette partie nous estimons les séries des taux de change avec le modèle DACC-APGARCH(1, 1) bivarié, lorsque les puissances sont connues. Nous utilisons plusieurs couples de puissances et les

résultats sont présentés dans les tableaux suivants :

(i). Estimation avec les puissances $\underline{\delta} = (1.0, 1.0)$

Taux	$\underline{\hat{\omega}}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
USD/JPY	0.0063	0.0323	0.0000	0.0300	0.0022	0.9621	0.0021	0.5542	0.8983
	0.0103	0.0033	0.0443	0.0000	0.0725	0.0000	0.9395	0.4098	1.0000
USD/GBP	0.0069	0.0477	0.0305	0.0702	0.0136	0.9651	0.0000	0.4971	0.8598
	0.0060	0.0000	0.1223	0.0054	0.1218	0.0000	0.9459	1.0000	0.2499
USD/CAD	0.0038	0.0346	0.0131	0.0430	0.0076	0.9638	0.0010	0.5839	0.8595
	0.0104	0.0094	0.0533	0.0134	0.0428	0.0000	0.9506	1.0000	0.6364

TABLE 5.7 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 1.0)$

Taux	$\underline{\hat{\omega}}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
JPY/GBP	0.0086	0.0640	0.0095	0.1113	0.0169	0.9220	0.0089	0.2782	0.7838
	0.0037	0.0040	0.0778	0.0146	0.0705	0.0000	0.9369	0.9864	0.7092
JPY/CAD	0.0009	0.0491	0.0109	0.0900	0.0030	0.9277	0.0155	0.3156	0.7838
	0.0078	0.0000	0.0462	0.0133	0.0287	0.0000	0.9530	0.9864	1.0000

TABLE 5.8 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 1.0)$

Taux	$\underline{\hat{\omega}}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
CAD/GBP	0.0096	0.0448	0.0135	0.0394	0.0055	0.9485	0.0000	0.4398	0.7257
	0.0035	0.0110	0.0603	0.0000	0.0693	0.0000	0.9400	0.4702	0.9271

TABLE 5.9 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 1.0)$

Les résultats obtenus lors de l'estimation des taux de change sont semblables aux résultats liés au modèle CCC-APGARCH.

(ii). Estimation avec les puissances $\underline{\delta} = (2.0, 2.0)$

Taux	$\underline{\hat{\omega}}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
USD/JPY	0.0030	0.0282	0.0000	0.0279	0.0000	0.9659	0.0016	0.5566	0.9096
	0.0061	0.0077	0.0372	0.0000	0.0718	0.0001	0.9394	0.4286	0.8697
USD/GBP	0.0062	0.0976	0.0015	0.0983	0.0673	0.9643	0.0000	0.5010	1.0000
	0.0057	0.0000	0.2003	0.0220	0.2122	0.0000	0.9361	1.0000	0.2655
USD/CAD	0.0020	0.0357	0.0046	0.0458	0.0122	0.9696	0.0000	0.5855	0.6972
	0.0083	0.0047	0.0621	0.0179	0.0426	0.0058	0.9474	1.0000	0.5556

TABLE 5.10 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
JPY/GBP	0.0070	0.0691	0.0130	0.1396	0.0426	0.9192	0.0058	0.2835	0.7165
	0.0025	0.0029	0.0909	0.0128	0.0973	0.0000	0.9270	0.9863	0.6144
JPY/CAD	0.0000	0.0401	0.0048	0.0830	0.0084	0.9208	0.0193	0.3148	0.8431
	0.0038	0.0000	0.0372	0.0078	0.0197	0.0000	0.9561	0.9330	1.0000

TABLE 5.11 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
CAD/GBP	0.0061	0.0443	0.0006	0.0317	0.0165	0.9504	0.0000	0.4401	0.9501
	0.0015	0.0071	0.0561	0.0000	0.0770	0.0023	0.9312	0.9287	0.8444

TABLE 5.12 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 2.0)$

Comme nous avons pu déjà le mentionner et le réaliser pour le modèle CCC-APGARCH, les séries n'ont pas nécessairement des puissances égales. Nous pouvons alors estimer les séries via le modèle DACC-APGARCH(1, 1) bivarié, avec les puissances connues, et supposées différentes.

(iii). Estimation avec les puissances $\underline{\delta} = (1.0, 2.0)$, ou $\underline{\delta} = (2.0, 1.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
USD/JPY	0.0075	0.0322	0.0000	0.0305	0.0000	0.9615	0.0022	0.5565	0.9706
	0.0041	0.0119	0.0321	0.0000	0.0640	0.0000	0.9386	0.9619	0.9924
USD/GBP	0.0111	0.0572	0.0079	0.0690	0.0287	0.9623	0.0000	0.5014	0.5091
	0.0039	0.0032	0.2052	0.0201	0.2224	0.0000	0.9360	0.9106	0.2607
USD/CAD	0.0060	0.0390	0.0022	0.0413	0.0087	0.9652	0.0000	0.5842	0.5061
	0.0026	0.0191	0.0534	0.0146	0.0440	0.0032	0.9497	0.9106	0.6199

TABLE 5.13 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
USD/JPY	0.0024	0.0259	0.0015	0.0258	0.0031	0.9670	0.0000	0.5545	0.5104
	0.0107	0.0002	0.0472	0.0000	0.0746	0.0000	0.9408	0.9065	0.9142
USD/GBP	0.0000	0.0818	0.0490	0.1000	0.0240	0.9673	0.0000	0.4971	0.8779
	0.0066	0.0000	0.1178	0.0060	0.1167	0.0000	0.9460	0.8708	0.2606
USD/CAD	0.0000	0.0313	0.0156	0.0479	0.0087	0.9681	0.0000	0.5863	0.2582
	0.0160	0.0015	0.0561	0.0133	0.0411	0.0028	0.9462	0.8537	0.5818

TABLE 5.14 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 1.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
JPY/GBP	0.0121	0.0631	0.0061	0.1086	0.0238	0.9261	0.0000	0.2813	0.1571
	0.0000	0.0063	0.0824	0.0185	0.0861	0.0000	0.9218	0.8798	0.7152
JPY/CAD	0.0073	0.0507	0.0022	0.0898	0.0029	0.9294	0.0096	0.3129	0.1573
	0.0025	0.0003	0.0380	0.0135	0.0198	0.0000	0.9553	0.8770	1.0000

TABLE 5.15 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
JPY/GBP	0.0000	0.0723	0.0092	0.1506	0.0264	0.9159	0.0191	0.2810	0.2409
	0.0053	0.0000	0.0791	0.0074	0.0721	0.0000	0.9439	0.9391	0.5853
JPY/CAD	0.0000	0.0369	0.0177	0.0788	0.0120	0.9299	0.0000	0.3166	0.1632
	0.0092	0.0000	0.0456	0.0061	0.0306	0.0000	0.9532	0.9878	1.0000

TABLE 5.16 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 1.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
CAD/GBP	0.0112	0.0500	0.0021	0.0402	0.0099	0.9489	0.0000	0.4429	0.1219
	0.0000	0.0141	0.0524	0.0018	0.0764	0.0001	0.9317	0.9718	0.8705

TABLE 5.17 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (1.0, 2.0)$

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
CAD/GBP	0.0039	0.0382	0.0173	0.0312	0.0060	0.9504	0.0000	0.4377	0.1219
	0.0047	0.0038	0.0634	0.0003	0.0679	0.0000	0.9415	0.9718	0.8903

TABLE 5.18 – Estimation de θ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1) avec $\underline{\delta}$ connue et $\underline{\delta} = (2.0, 1.0)$

Les coefficients estimés et présentés dans les tables 5.7 à 5.18 sont très proches de ceux obtenus lors de l'estimation des mêmes séries via le modèle CCC-APGARCH. Seuls les paramètres liés à la modélisation de la corrélation diffèrent. Les conclusions sont alors les mêmes que pour le modèle CCC-APGARCH.

Nous constatons sur les différentes tables que les coefficients $\hat{\mu}_1^+$ et $\hat{\mu}_1^-$ sont parfois égaux. Cela signifierait que l'asymétrie sur la corrélation n'apporte dans ces cas que très peu d'information supplémentaire. Dans ce cas, on pourrait considérer le modèle avec une équation du type GARCH(1, 1) pour modéliser la matrice R_t . Dans les autres cas, on constate que la corrélation négative apporte un poids plus important que la corrélation positive. Ceci pourrait être en accord avec l'effet de levier souvent mentionné dans la modélisation des séries financières.

Estimation avec la puissance inconnue

L'estimation par le modèle DACC-APGARCH(1, 1) bivarié des séries des taux change lorsque les puissances sont inconnues est présentée dans les tableaux suivant :

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\tau}$	$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
USD/JPY	0.005	0.032	0.000	0.030	0.001	0.963	0.002	1.286	0.555	0.205
	0.007	0.006	0.040	0.000	0.073	0.000	0.939	1.475	0.071	0.982
USD/GBP	0.010	0.046	0.013	0.059	0.019	0.963	0.000	0.885	0.501	0.998
	0.004	0.000	0.152	0.012	0.159	0.000	0.940	1.666	0.002	0.312
USD/CAD	0.001	0.034	0.013	0.047	0.011	0.968	0.000	1.739	0.585	0.914
	0.012	0.003	0.063	0.016	0.044	0.004	0.946	1.338	0.106	0.581

TABLE 5.19 – Estimation de ϑ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1)

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\tau}$	$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
JPY/GBP	0.010	0.064	0.011	0.117	0.029	0.925	0.000	1.237	0.281	0.740
	0.001	0.006	0.086	0.018	0.087	0.000	0.926	1.769	0.000	0.694
JPY/CAD	0.000	0.047	0.010	0.092	0.006	0.926	0.016	1.327	0.316	0.716
	0.007	0.000	0.047	0.012	0.027	0.000	0.953	1.248	0.137	1.000

TABLE 5.20 – Estimation de ϑ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1)

Taux	$\hat{\omega}$	$\hat{A}^+$		$\hat{A}^-$		$\hat{B}$		$\hat{\tau}$	$\hat{\rho}$ $\hat{\mu}_1^-$	$\hat{\mu}_1^+$ $\hat{\mu}_2$
CAD/GBP	0.010	0.049	0.006	0.039	0.010	0.948	0.000	1.108	0.442	0.638
	0.001	0.013	0.057	0.001	0.077	0.001	0.934	1.666	0.176	0.892

TABLE 5.21 – Estimation de ϑ_0 pour le modèle DACC-APGARCH(1, 1)

Les estimations décrites dans les tables 5.19 à 5.21 montrent que les coefficients $\hat{\mu}_1^+$ et $\hat{\mu}_1^-$ sont différents et $\hat{\mu}_1^+$ est largement supérieur à $\hat{\mu}_1^-$. Ce constat laisse supposer que l'asymétrie développée au niveau de la matrice de corrélation présente un réel intérêt dans la modélisation.

La matrice $\hat{B}$ semble présenter une structure diagonale comme nous avons déjà pu le remarquer en réalisant l'estimation des coefficients via le modèle CCC-APGARCH (tables 4.65 à 4.67).

Les puissances estimées avec le modèle DACC-APGARCH, sont égales aux puissances estimées avec le modèle CCC-APGARCH. L'ensemble des paramètres, hormis ceux correspondants à la corrélation sont identiques. Finalement, si l'on fixe $\mu_1^+ = \mu_1^- = \mu_2 = 0$ le modèle devient le modèle CCC-APGARCH.

Annexe A

Preuve du test portmanteau univarié

Résumé

Dans cette section, nous détaillerons les éléments de la preuve du test portmanteau univarié, énoncé au Chapitre 1, paragraphe 3, pour le modèle APGARCH. Ce test est développé pour le cas où la puissance δ du modèle est inconnue.

Sommaire

A.1 Rappels	113
A.2 Preuve	114

A.1 Rappels

Nous commençons par rappeler des notions et des résultats utiles pour l'élaboration de la preuve du test portmanteau. Pour tout $\vartheta \in \Delta$, soit (ε_t) une solution strictement stationnaire et non anticipative du modèle 1.3 et

$$\zeta_t(\vartheta) = \left(\omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{\tau} + \alpha_i^- (-\varepsilon_{t-i}^-)^{\tau} + \sum_{j=1}^p \beta_j \zeta_{t-j}^{\tau}(\vartheta) \right)^{1/\tau}.$$

La matrice J peut être réécrite comme

$$J = \mathbb{E}_{\vartheta_0} \left[\frac{1}{\zeta_t^4(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta'} \right].$$

Pour montrer le résultat, nous avons besoin d'outils provenant de l'article de Hamadeh et Zakoïan (2011) résumé dans le lemme suivant.

Lemme A.1.1. *On suppose $H0'$ - $H7''$. Pour un $s \in]0, 1[$, on a*

$$\mathbb{E}|\varepsilon_0|^{2s} < \infty, \quad \mathbb{E} \sup_{\vartheta \in \Delta} \|\zeta_{0t}^{2s}\| < \infty, \quad \mathbb{E} \sup_{\vartheta \in \Delta} \|\tilde{\zeta}_{0t}^{2s}\| < \infty. \quad (\text{A.1})$$

De plus, il existe un K et $0 < \rho < 1$

$$\sup_{\vartheta \in \Delta} \|\zeta_t^2(\vartheta) - \tilde{\zeta}_t^2(\vartheta)\| \leq K \rho^t \sup_{\vartheta \in \Delta} \max\{\zeta_t^2(\vartheta), \tilde{\zeta}_t^2(\vartheta)\}, \quad (\text{A.2})$$

et pour tout $d \geq 1$

$$\mathbb{E} \left\| \sup_{\vartheta \in \Delta} \frac{1}{\zeta_t^{\tau}(\vartheta)} \frac{\partial \zeta_t^{\tau}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right\|^d < \infty, \quad \mathbb{E} \left\| \sup_{\vartheta \in \Delta} \frac{1}{\zeta_t^{\tau}(\vartheta)} \frac{\partial^2 \zeta_t^{\tau}(\vartheta)}{\partial \vartheta \partial \vartheta'} \right\|^d < \infty. \quad (\text{A.3})$$

Il existe un voisinage $\mathcal{V}(\vartheta_0)$ de ϑ_0 tel que pour tout $\xi > 0$ et $a = 1 - (\delta/\tau)(1 - s) > 0$

$$\sup_{\vartheta \in \mathcal{V}(\vartheta_0)} \left(\frac{\zeta_t^2(\vartheta_0)}{\zeta_t^2(\vartheta)} \right) \leq \left(K + K \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \xi)^k \rho^{ak} |\varepsilon_{t-i-k}|^{2\tau} \right)^{2/\tau},$$

et il suit que

$$\mathbb{E} \left| \sup_{\vartheta \in \mathcal{V}(\vartheta_0)} \left(\frac{\zeta_t^2(\vartheta_0)}{\zeta_t^2(\vartheta)} \right) \right| < \infty. \quad (\text{A.4})$$

La matrice J est inversible et

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) = J^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (\eta_t^2 - 1) \frac{1}{\zeta_t^2} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} + o_{\mathbb{P}}(1). \quad (\text{A.5})$$

A.2 Preuve

Pour établir la preuve du test portmanteau associé au modèle univarié APGARCH dans le cas où la puissance est inconnue, nous utiliserons des résultats liés aux propriétés asymptotiques de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance donnés par Hamadeh et Zakoïan (2011), résumés dans le Lemme A.1.1.

On introduit le vecteur de m premières autocovariances $\mathbf{r}_m = (r_1, \dots, r_m)'$ où le h -ième élément est défini comme

$$r_h = \frac{1}{n} \sum_{t=h+1}^n s_t s_{t-h}, \quad \text{avec } s_t = \eta_t^2 - 1 \text{ et } 0 < h < n.$$

Soit $s_t(\vartheta) = \eta_t^2(\vartheta) - 1$ avec $\eta_t(\vartheta) = \varepsilon_t/\zeta_t(\vartheta)$ et $\tilde{s}_t(\vartheta) = \tilde{\eta}_t^2(\vartheta) - 1$ avec $\tilde{\eta}_t(\vartheta) = \varepsilon_t/\tilde{\zeta}_t(\vartheta)$. Soit $r_h(\vartheta)$ obtenu en remplaçant η_t par $\eta_t(\vartheta)$ dans r_h et $\tilde{r}_h(\vartheta)$ en remplaçant η_t en $\tilde{\eta}_t(\vartheta)$ dans r_h . Les vecteurs $\mathbf{r}_m(\vartheta) = (r_1(\vartheta), \dots, r_m(\vartheta))'$ et $\tilde{\mathbf{r}}_m(\vartheta) = (\tilde{r}_1(\vartheta), \dots, \tilde{r}_m(\vartheta))'$ sont tels que $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m(\theta_0)$ et $\hat{\mathbf{r}}_m = \tilde{\mathbf{r}}_m(\hat{\vartheta}_n)$.

Pour démontrer le théorème 3.1, nous décomposons la preuve en 4 étapes.

A.2.1 Impact asymptotique des valeurs initiales inconnues sur la statistique $\hat{\mathbf{r}}_m$.

A.2.2 Loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m$.

A.2.3 Inversibilité de la matrice D .

A.2.4 Convergence de la matrice D .

A.2.1 Impact asymptotique des valeurs initiales inconnues sur la statistique $\hat{\mathbf{r}}_m$

Pour étudier l'impact asymptotique des valeurs initiales inconnues sur la statistique $\hat{\mathbf{r}}_m$, nous examinons le comportement de $r_h(\vartheta) - \tilde{r}_h(\vartheta)$. Ceci revient à considérer $s_t(\vartheta)s_{t-h}(\vartheta) - \tilde{s}_t(\vartheta)\tilde{s}_{t-h}(\vartheta) = a_t + b_t$ avec $a_t = \{s_t(\vartheta) - \tilde{s}_t(\vartheta)\}s_{t-h}(\vartheta)$ et $b_t = \tilde{s}_t(\vartheta)\{s_{t-h}(\vartheta) - \tilde{s}_{t-h}(\vartheta)\}$.

En utilisant le résultat (A.2) et $\inf_{\vartheta \in \Delta} \tilde{\zeta}_t^2 \geq \inf_{\vartheta \in \Delta} \omega^{2/\tau} > 0$, on a

$$\begin{aligned}
a_t &= \left[\left(\frac{\varepsilon_t^2}{\tilde{\zeta}_t^2(\vartheta)} - 1 \right) - \left(\frac{\varepsilon_t^2}{\tilde{\zeta}_t^2(\vartheta)} - 1 \right) \right] \left(\frac{\varepsilon_{t-h}^2}{\tilde{\zeta}_{t-h}^2(\vartheta)} - 1 \right) \\
&= \varepsilon_t^2 \left(\frac{\tilde{\zeta}_t^2 - \zeta_t^2}{\tilde{\zeta}_t^2 \zeta_t^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_{t-h}^2}{\tilde{\zeta}_{t-h}^2(\vartheta)} - 1 \right) \\
|a_t| &\leq K \varepsilon_t^2 \left| \tilde{\zeta}_t^2 - \zeta_t^2 \right| \left| \frac{\varepsilon_{t-h}^2}{\tilde{\zeta}_{t-h}^2(\vartheta)} - 1 \right| \\
&\leq K \varepsilon_t^2 \left| \tilde{\zeta}_t^2 - \zeta_t^2 \right| \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-h}^2}{\tilde{\zeta}_{t-h}^2(\vartheta)} \right| + 1 \right) \\
&\leq K \varepsilon_t^2 (\varepsilon_{t-h}^2 + 1) |\tilde{\zeta}_t^2 - \zeta_t^2| \\
&\leq K \rho^t \varepsilon_t^2 (\varepsilon_{t-h}^2 + 1) \sup_{\vartheta \in \Delta} \max\{\tilde{\zeta}_t^2, \zeta_t^2\}
\end{aligned}$$

Nous obtenons les mêmes conclusions pour le terme b_t . Par conséquent,

$$|a_t| + |b_t| \leq K \rho^t \varepsilon_t^2 (\varepsilon_{t-h}^2 + 1) \sup_{\vartheta \in \Delta} \max\{\tilde{\zeta}_t^2, \zeta_t^2\}.$$

En utilisant l'inégalité $(a + b)^s \leq a^s + b^s$, pour $a, b \geq 0$ et $s \in]0, 1[$, le résultat (A.1) et l'inégalité de Hölder, on a pour un $s^* \in]0, 1[$ suffisamment petit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \sup_{\vartheta \in \Delta} |a_t| \right|^{s^*} &\leq \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \sup_{\vartheta \in \Delta} \left| K \rho^t \varepsilon_t^2 (\varepsilon_{t-h}^2 + 1) \sup_{\vartheta \in \Delta} \max\{\zeta_t^2, \tilde{\zeta}_t^2\} \right| \right|^{s^*} \\
&\leq K \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{s^*} \mathbb{E} \left| \sum_{t=1}^n \rho^t \varepsilon_t^2 (\varepsilon_{t-h}^2 + 1) \sup_{\vartheta \in \Delta} \max\{\zeta_t^2, \tilde{\zeta}_t^2\} \right|^{s^*} \\
&\leq K \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{s^*} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^n \rho^{ts^*} \right] \mathbb{E} [(\varepsilon_t^2 (\varepsilon_{t-h}^2 + 1))^{s^*}] \mathbb{E} \left[\sup_{\vartheta \in \Delta} \max\{\zeta_t^2, \tilde{\zeta}_t^2\}^{s^*} \right] \\
&\leq K \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{s^*} \sum_{t=1}^n \rho^{ts^*} \mathbb{E} [\varepsilon_t^{2s^*}] \mathbb{E} [(\varepsilon_{t-h}^2 + 1)^{s^*}] \\
&\leq K \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{s^*} \sum_{t=1}^n \rho^{ts^*} \mathbb{E} [\varepsilon_t^{2s^*}] \mathbb{E} [\varepsilon_{t-h}^{2s^*} + 1^{s^*}] \\
&\leq K \frac{1}{n^{s^*/2}} \sum_{t=1}^n \rho^{ts^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \sup_{\vartheta \in \Delta} |a_t| = o_{\mathbb{P}}(1)$. Nous obtenons la même convergence pour b_t , et pour les dérivées de a_t et b_t .

Par conséquent, nous obtenons que $\sqrt{n}(r_h(\vartheta) - \tilde{r}_h(\vartheta)) = o_{\mathbb{P}}(1)$ et donc

$$\sqrt{n} \|\mathbf{r}_m(\vartheta_0) - \tilde{\mathbf{r}}_m(\vartheta_0)\| = o_{\mathbb{P}}(1), \quad \sup_{\vartheta \in \Delta} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}_m(\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_m(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right\| = o_{\mathbb{P}}(1). \quad (\text{A.6})$$

Les valeurs initiales inconnues n'ont donc aucun impact asymptotique sur la statistique $\hat{\mathbf{r}}_m$.

A.2.2 Loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m$

La distribution asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m$ est issue de la loi jointe entre la loi asymptotique de $\sqrt{n}\mathbf{r}_m$ et de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance.

En utilisant (A.6) et un développement de Taylor de $\mathbf{r}_m(\cdot)$ autour de $\hat{\vartheta}_n$ et ϑ_0 , nous obtenons

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m &= \sqrt{n}\tilde{\mathbf{r}}_m(\vartheta_0) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}_m(\vartheta^*)}{\partial \vartheta} \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \\ &= \sqrt{n}\mathbf{r}_m + \frac{\partial \mathbf{r}_m(\vartheta^*)}{\partial \vartheta} \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) + o_{\mathbb{P}}(1).\end{aligned}$$

pour ϑ^* entre $\hat{\vartheta}_n$ et ϑ_0 .

En utilisant un second développement de Taylor, nous obtenons

$$\frac{\partial \mathbf{r}_m(\vartheta^*)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \mathbf{r}_m(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} + o_{\mathbb{P}}(1).$$

Pour un r_h donné, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_h(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} &= \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \frac{\partial s_t(\vartheta_0) s_{t-h}(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \left[\frac{\partial s_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} s_{t-h}(\vartheta_0) + s_t(\vartheta_0) \frac{\partial s_{t-h}(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \right] \\ &\rightarrow \mathbb{E} \left[s_{t-h}(\vartheta_0) \frac{\partial s_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \right] + \mathbb{E} \left[s_t(\vartheta_0) \frac{\partial s_{t-h}(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[s_{t-h}(\vartheta_0) \frac{\partial s_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \right]\end{aligned}$$

par le fait que $\mathbb{E}[s_t(\vartheta_0)\{\partial s_{t-h}(\vartheta_0)\}/\{\partial \vartheta\}] = 0$.

De plus,

$$\begin{aligned}c_h &:= \mathbb{E} \left[s_{t-h}(\vartheta_0) \frac{\partial s_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \right] = \mathbb{E} \left[s_{t-h}(\vartheta_0) \frac{\partial (\eta_t^2 - 1)}{\partial \vartheta} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[-s_{t-h} \varepsilon_t^2 \frac{1}{\zeta_t^4(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[-s_{t-h} \eta_t^2 \frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \right] \\ &= -\mathbb{E}[\eta_t^2] \mathbb{E} \left[s_{t-h}(\vartheta_0) \frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \right] \\ &= -\mathbb{E} \left[s_{t-h} \frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \right].\end{aligned}$$

Nous obtenons donc que

$$\frac{\partial \mathbf{r}_m(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \rightarrow C_m := \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_m \end{pmatrix}.$$

Il suit que

$$\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m = \sqrt{n}\mathbf{r}_m + C_m \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) + o_{\mathbb{P}}(1). \quad (\text{A.7})$$

Nous notons $\sqrt{n}\mathbf{r}_m = n^{-1} \sum_{t=1}^n s_t \mathbf{s}_{t-1:t-m}$, où $\mathbf{s}_{t-1:t-m} = (s_{t-1}, \dots, s_{t-m})'$. Nous pouvons maintenant obtenir la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0, \mathbf{r}_m)'$ en appliquant le théorème central limite aux différences de martingale

$$\left\{ \Upsilon_t = \left(s_t J^{-1} \frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta'}, s_t \mathbf{s}_{t-1:t-m}' \right)' ; \sigma(\eta_u, u \leq t) \right\}.$$

L'espérance de la loi est donnée par

$$\mathbb{E} [\Upsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}^\eta] = \begin{pmatrix} J^{-1} \frac{1}{\zeta_t^2} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta} \\ s_{t-1} \\ \vdots \\ s_{t-m} \end{pmatrix} \mathbb{E} [s_t | \mathcal{F}_{t-1}^\eta] = 0,$$

car $(s_{t-i})_{i \geq 1}$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{t-1}^\eta$ engendrée par $\{\eta_u, u \leq t\}$ et $\mathbb{E}[s_t] = 0$.
La variance est quant à elle donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\Upsilon_t \Upsilon_t'] &= \mathbb{E} \left[s_t^2 \begin{pmatrix} J^{-1} \frac{1}{\zeta_t^4} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta'} J^{-1} & J^{-1} \frac{1}{\zeta_t^2} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta} \mathbf{s}_{t-1:t-m}' \\ \mathbf{s}_{t-1:t-m} \frac{1}{\zeta_t^2} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta'} J^{-1} & \mathbf{s}_{t-1:t-m} \mathbf{s}_{t-1:t-m}' \end{pmatrix} \right] \\ &= \mathbb{E} [s_t^2] \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} J^{-1} \frac{1}{\zeta_t^4} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta'} J^{-1} & J^{-1} \frac{1}{\zeta_t^2} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta} \mathbf{s}_{t-1:t-m}' \\ \mathbf{s}_{t-1:t-m} \frac{1}{\zeta_t^2} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta'} J^{-1} & \mathbf{s}_{t-1:t-m} \mathbf{s}_{t-1:t-m}' \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [s_t^2] &= \kappa_\eta - 1, \\ \mathbb{E} \left[J^{-1} \frac{1}{\zeta_t^4} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta'} J^{-1} \right] &= J^{-1} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\zeta_t^4} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta'} \right] J^{-1} = J^{-1} J J^{-1} = J^{-1}, \\ \mathbb{E} \left[\mathbf{s}_{t-1:t-m} \frac{1}{\zeta_t^2} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta'} J^{-1} \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbf{s}_{t-1:t-m} \frac{1}{\zeta_t^2} \frac{\partial \zeta_t^2}{\partial \vartheta'} \right] J^{-1} = -C_m J^{-1}, \\ \mathbb{E} [\mathbf{s}_{t-1:t-m} \mathbf{s}_{t-1:t-m}'] &= \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} s_{t-1} \\ \vdots \\ s_{t-m} \end{pmatrix} (s_{t-1} \quad \dots \quad s_{t-m}) \right] = \mathbb{E} \begin{bmatrix} s_{t-1}^2 & s_{t-1}s_{t-2} & \dots & s_{t-1}s_{t-m} \\ & s_{t-2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_{t-m}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour $i, j \in \{1, \dots, m\}$ et $i \neq j$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [s_{t-i} s_{t-j}] &= \mathbb{E} [(\eta_{t-i}^2 - 1)(\eta_{t-j}^2 - 1)] \\ &= \mathbb{E} [\eta_{t-i}^2 \eta_{t-j}^2 - \eta_{t-i}^2 - \eta_{t-j}^2 + 1] = 0. \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$\mathbb{E} [s_{t-i}^2] = \mathbb{E} [s_t^2] = \kappa_\eta - 1.$$

En conclusion, la variance asymptotique de la loi se résume à

$$\mathbb{E} [\Upsilon_t \Upsilon_t'] = (\kappa_\eta - 1) \begin{pmatrix} J^{-1} & -J^{-1} C_m' \\ -C_m J^{-1} & (\kappa_\eta - 1) I_m \end{pmatrix},$$

ce qui conduit à

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \Upsilon_t \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbb{E}[\Upsilon_t \Upsilon_t']). \quad (\text{A.8})$$

En utilisant (A.6) et (A.8) nous obtenons la loi de $\sqrt{n} \hat{\mathbf{r}}_m$. On rappelle que $r_h = n^{-1} \sum_{t=|h|+1}^n s_t(\vartheta_0) s_{t-h}(\vartheta_0)$ et $\tilde{r}_h = n^{-1} \sum_{t=|h|+1}^n \tilde{s}_t(\vartheta_0) \tilde{s}_{t-h}(\vartheta_0)$. Par un développement limité de Taylor, nous obtenons l'expression

$$\begin{aligned} \hat{r}_h &:= \tilde{r}_h(\hat{\vartheta}_n) = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \tilde{s}_t(\hat{\vartheta}_n) \tilde{s}_{t-h}(\hat{\vartheta}_n) = \tilde{r}_h(\vartheta_0) + (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \left(\tilde{s}_{t-h}(\vartheta) \frac{\partial \tilde{s}_t(\vartheta)}{\partial \vartheta} + \tilde{s}_t(\vartheta) \frac{\partial \tilde{s}_{t-h}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=\vartheta^*} \\ &= r_h(\vartheta_0) + \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \left(\tilde{\mathbf{S}}_t(\vartheta) \right)_{\vartheta=\vartheta^*} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) + R_n. \end{aligned}$$

avec $R_n = \tilde{r}_h(\vartheta_0) - r_h(\vartheta_0) = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{n}\right)$. Par la suite on a

$$\begin{aligned}\hat{r}_h &= r_h + \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \left(\tilde{\mathbb{S}}_t(\vartheta^*) - \mathbb{S}_t(\vartheta^*) + \mathbb{S}_t(\vartheta^*) \right) (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) + \bar{R}_n \\ &= r_h + \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \mathbb{S}_t(\vartheta^*) + \bar{R}_n + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

avec $\bar{R}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \left(\tilde{\mathbb{S}}_t(\vartheta^*) - \mathbb{S}_t(\vartheta^*) \right) (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{n}\right)$. On a ensuite,

$$\begin{aligned}\hat{r}_h &= r_h + \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n (\mathbb{S}_t(\vartheta^*) - \mathbb{S}_t(\vartheta_0) + \mathbb{S}_t(\vartheta_0)) (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= r_h + \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \mathbb{S}_t(\vartheta_0) + \tilde{R}_n + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

avec $\tilde{R}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n (\mathbb{S}_t(\vartheta^*) - \mathbb{S}_t(\vartheta_0)) (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0)$. Par le théorème ergodique et comme $\|\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0\| = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, nous obtenons que $\tilde{R}_n = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Finalement,

$$\hat{r}_n = r_h + \mathbb{E}[\mathbb{S}_t(\vartheta_0)] (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) + \hat{R}_n,$$

avec $\hat{R}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n (\mathbb{S}_t(\vartheta_0) - \mathbb{E}[\mathbb{S}_t(\vartheta_0)]) (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0)$ et par les mêmes arguments que précédemment, $\hat{R}_n = O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, donc

$$\begin{aligned}\hat{r}_h &= r_h + \mathbb{E} \left[s_{t-h}(\vartheta_0) \frac{\partial s_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} + s_t(\vartheta) \frac{\partial s_{t-h}(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \right] (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= r_h + \mathbb{E} \left[s_{t-h}(\vartheta_0) \frac{\partial s_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \right] (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \\ \hat{\mathbf{r}}_m &= \mathbf{r}_m + C_m(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

En conclusion, nous arrivons à

$$\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m = \sqrt{n}\mathbf{r}_m + C_m\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) + o_{\mathbb{P}}(1).$$

Finalement, la loi $\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m$ est donnée par $\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, D)$ où D est définie comme suit

$$\begin{aligned}D &:= \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(\sqrt{n}\mathbf{r}_m) = \mathbb{E}[\mathbf{r}_m \mathbf{r}_m'] + C_m \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0)) \right) C_m' \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Cov}(\sqrt{n}\mathbf{r}_m, C_m\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0)) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Cov}(C_m\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0), \sqrt{n}\mathbf{r}_m) \\ &= (\kappa_\eta - 1)^2 I_m + (\kappa_\eta - 1) C_m J^{-1} C_m' - (\kappa_\eta - 1) C_m J^{-1} C_m' \\ &\quad - (\kappa_\eta - 1) C_m J^{-1} C_m \\ &= (\kappa_\eta - 1)^2 I_m - (\kappa_\eta - 1) C_m J^{-1} C_m' .\end{aligned}$$

A.2.3 Inversibilité de la matrice D

Sous l'hypothèse **H2''**, la loi de η_t^2 est non dégénérée, donc $\kappa_\eta > 1$. Etudier l'inversibilité de la matrice D revient à étudier l'inversibilité de $(\kappa_\eta - 1)I_m - C_m J^{-1} C'_m$.

On pose $V = \mathbf{s}_{t-1:t-m} + C_m J^{-1} \frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[VV'] &= \mathbb{E}[\mathbf{s}_{t-1:t-m} \mathbf{s}_{t-1:t-m}'] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \mathbf{s}_{t-1:t-m} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta}\right] J^{-1} C'_m \\ &\quad + C_m J^{-1} \mathbb{E}\left[\frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \mathbf{s}_{t-1:t-m}\right] + C_m J^{-1} \mathbb{E}\left[\frac{1}{\zeta_t^4(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta'}\right] J^{-1} C'_m \\ &= (\kappa_\eta - 1)I_m - C_m J^{-1} C'_m. \end{aligned}$$

Si la matrice n'est pas inversible, alors il existe un vecteur $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)'$ non nul tel que

$$\lambda'V = \lambda' \mathbf{s}_{t-1:t-m} + \mu' \frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} = 0, \quad p.s.,$$

ou encore

$$\lambda'V = \lambda' \mathbf{s}_{t-1:t-m} + \mu' \left(\frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \tau} \right) = 0, \quad p.s. \quad (\text{A.9})$$

En utilisant le fait que

$$\frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \theta} = \frac{2}{\tau} \frac{1}{\zeta_t^\tau(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^\tau(\vartheta_0)}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\zeta_t^2(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^2(\vartheta_0)}{\partial \tau} = -\frac{2}{\tau^2} \log(\zeta_t^\tau(\vartheta_0)) + \frac{2}{\tau} \frac{1}{\zeta_t^\tau(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^\tau(\vartheta_0)}{\partial \tau},$$

nous pouvons réécrire (A.9) telle que

$$\lambda'V = \lambda' \mathbf{s}_{t-1:t-m} + \mu' \frac{1}{\zeta_t^\tau(\vartheta_0)} \left(\tau \frac{\partial \zeta_t^\tau(\vartheta_0)}{\partial \theta} - \zeta_t^\tau(\vartheta_0) \log(\zeta_t^\tau(\vartheta_0)) + \tau \frac{\partial \zeta_t^\tau(\vartheta_0)}{\partial \tau} \right) = 0, \quad p.s. \quad (\text{A.10})$$

avec $\mu = (2/\tau)\lambda' C_m J^{-1}$. Nous remarquons que $\mu \neq 0$ sinon $\lambda' \mathbf{s}_{t-1:t-m} = 0$ presque sûrement, ce qui impliquerait qu'il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que s_{t-j} est mesurable par rapport à la tribu engendrée par s_r pour $t-1 \leq r \leq t-m$ avec $r \neq t-j$. Ce n'est pas possible parce que les s_t sont indépendants et non dégénérés.

Nous pouvons réécrire (A.10) de sorte à faire apparaître les dérivées de ζ_t par rapport au vecteur θ et par rapport à la puissance inconnue τ . On pose $\mu = (\nu'_1, \nu'_2)'$, où $\nu'_1 = (\mu_1, \dots, \mu_{2q+p+1})' \neq 0$ et $\nu'_2 = \mu_{2q+p+2} \neq 0$. Nous avons :

$$\lambda'V = \lambda' \mathbf{s}_{t-1:t-m} + \nu'_1 \tau \frac{1}{\zeta_t^\tau(\vartheta_0)} \frac{\partial \zeta_t^\tau(\vartheta_0)}{\partial \theta} + \nu'_2 \frac{1}{\zeta_t^\tau(\vartheta_0)} \left(-\zeta_t^\tau(\vartheta_0) \log(\zeta_t^\tau(\vartheta_0)) + \tau \frac{\partial \zeta_t^\tau(\vartheta_0)}{\partial \tau} \right) = 0, \quad p.s.$$

ou encore,

$$\lambda' \mathbf{s}_{t-1:t-m} \zeta_t^\tau(\vartheta_0) + \nu'_1 \tau \frac{\partial \zeta_t^\tau(\vartheta_0)}{\partial \theta} + \nu'_2 \left(-\zeta_t^\tau(\vartheta_0) \log(\zeta_t^\tau(\vartheta_0)) + \tau \frac{\partial \zeta_t^\tau(\vartheta_0)}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Les dérivées sont définies récursivement par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_t^\tau(\vartheta)}{\partial \theta} &= \underline{c}_t(\vartheta) + \sum_{j=1}^p \beta_j \frac{\partial \zeta_{t-j}^\tau(\vartheta)}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \zeta_t^\tau(\vartheta)}{\partial \tau} &= \sum_{i=1}^q \alpha_i^+ \log(\varepsilon_{t-i}^+) (\varepsilon_{t-i}^+)^{\tau} + \alpha_i^- \log(-\varepsilon_{t-i}^-) (-\varepsilon_{t-i}^-)^{\tau} + \sum_{j=1}^p \beta_j \frac{\partial \zeta_{t-j}^\tau(\vartheta)}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

où $\underline{c}_t(\vartheta)$ est défini en remplaçant $\tilde{\zeta}_t^\tau(\vartheta)$ par $\zeta_t^\tau(\vartheta)$ dans $\tilde{c}_t(\vartheta)$ (voir au Chapitre 1 l'équation (C.90)). On rappelle que $\varepsilon_t^+ = \zeta_t \eta_t^+$ et $\varepsilon_t^- = \zeta_t \eta_t^-$ et nous notons par R_t , une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu $\sigma\{\eta_u, u \leq t\}$. Nous décomposons (A.11) en quatre termes. Les deux premiers termes dans (A.11) peuvent être réécrits comme

$$\begin{aligned} \nu_1' \frac{\partial \zeta_t^\tau(\vartheta_0)}{\partial \theta} &= \nu_1' \tilde{c}_t(\vartheta) + \sum_{j=1}^p \beta_j \nu_1' \frac{\partial \zeta_{t-j}^\tau(\vartheta_0)}{\partial \theta} \\ &= \mu_2(\varepsilon_{t-1})^\tau + \mu_{q+2}(-\varepsilon_{t-1})^\tau + R_{t-2} \\ &= \mu_2 \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau + \mu_{q+2} \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau + R_{t-2}, \\ -\nu_2 \zeta_t^\tau(\vartheta_0) \log(\zeta_t^\tau(\vartheta_0)) &= -\nu_2 (\alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau + \alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau + R_{t-2}) \\ &\quad \times \log(\alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau + \alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau + R_{t-2}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \zeta_t^\tau &= \alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau + \alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau + R_{t-2}, \\ \lambda' s_{t-1:t-m} &= \lambda_1 \eta_{t-1}^2 + R_{t-2}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne pour le premier terme

$$\lambda' s_{t-1:t-m} \zeta_t^\tau = \lambda_1 \zeta_{t-1}^\tau [\alpha_1^+ (\eta_{t-1}^+)^\tau + \alpha_1^- (-\eta_{t-1}^-)^\tau] + \lambda_1 \eta_{t-1}^2 R_{t-2} + R_{t-2} + [(\eta_{t-1}^+)^\tau + (-\eta_{t-1}^-)^\tau] R_{t-2}.$$

Le dernier terme donne

$$\begin{aligned} \nu_2 \tau \frac{\partial \zeta_t(\vartheta_0)}{\partial \tau} &= \sum_{i=1}^q \nu_2 \tau \alpha_i^+ \log(\varepsilon_{t-i}^+) (\varepsilon_{t-i}^+)^\tau + \nu_2 \tau \alpha_i^- \log(-\varepsilon_{t-i}^-) (-\varepsilon_{t-i}^-)^\tau + \sum_{j=1}^p \nu_2 \tau \beta_j \frac{\partial \zeta_{t-j}^\tau(\vartheta)}{\partial \tau} \\ &= \nu_2 \tau \alpha_1^+ \log(\varepsilon_{t-1}^+) (\varepsilon_{t-1}^+)^\tau + \nu_2 \tau \alpha_1^- \log(-\varepsilon_{t-1}^-) (-\varepsilon_{t-1}^-)^\tau + R_{t-2} \\ &= \nu_2 \alpha_1^+ \log(\zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau) (\zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau) + \nu_2 \alpha_1^- \log(\zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau) (\zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau) + R_{t-2}. \end{aligned}$$

En combinant les expressions précédentes, (A.11) se résume à

$$\begin{aligned} \lambda' V &= \lambda_1 \zeta_{t-1}^\tau [\alpha_1^+ (\eta_{t-1}^+)^\tau + \alpha_1^- (-\eta_{t-1}^-)^\tau] + \eta_{t-1}^2 R_{t-2} + [R_{t-2} + \nu_2 \alpha_1^+ R_{t-2} \log(\zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau)] (\eta_{t-1}^+)^\tau \\ &\quad + [R_{t-2} + \nu_2 \alpha_1^- R_{t-2} \log(\zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau)] (-\eta_{t-1}^-)^\tau R_{t-2} + R_{t-2} \\ &\quad - \nu_2 (\alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau + \alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau + R_{t-2}) \log(\alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau + \alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau + R_{t-2}) = 0, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent aux deux équations suivantes

$$\begin{aligned} \lambda_1 \zeta_{t-1}^\tau \alpha_1^+ (\eta_{t-1}^+)^\tau - (\nu_2 \alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau + R_{t-2}) \log(\alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau + R_{t-2}) \\ + [R_{t-2} + \nu_2 \alpha_1^+ R_{t-2} \log(\zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau)] (\eta_{t-1}^+)^\tau + \eta_{t-1}^2 R_{t-2} + R_{t-2} = 0 \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \zeta_{t-1}^\tau \alpha_1^- (-\eta_{t-1}^-)^\tau - (\nu_2 \alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau + R_{t-2}) \log(\alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau + R_{t-2}) \\ + [R_{t-2} + \nu_2 \alpha_1^- R_{t-2} \log(\zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau)] (-\eta_{t-1}^-)^\tau + \eta_{t-1}^2 R_{t-2} + R_{t-2} = 0. \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Notons qu'une équation de la forme

$$a|x|^{\tau+2} + [b + c(|x|^\tau)] \log[b + c(|x|^\tau)] + [d + e \log(|x|)] |x|^\tau + f x^2 + g = 0$$

ne peut pas avoir plus de 11 racines positives ou plus de 11 racines négatives, sauf si $a = b = c = d = e = f = g = 0$. Par l'hypothèse **H9**, les équations (A.12) et (A.13) impliquent que $\lambda_1(\alpha_1^+ + \alpha_1^-) = 0$ et $\nu_2(\alpha_1^+ + \alpha_1^-) = 0$.

Si $\lambda_1 = 0$ et $\nu_2 = 0$ alors $\lambda' s_{t-1:t-m} := \lambda'_{2:m} s_{t-2:t-m}$. Nous pouvons donc réécrire que

$$\begin{aligned} \lambda' s_{t-1:t-m} \zeta_t^\tau &= [\alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau + \alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau + R_{t-2}] \lambda'_{2:m} s_{t-2:t-m} \\ &= [\alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^\tau + \alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^\tau] \lambda'_{2:m} s_{t-2:t-m} + R_{t-2}. \end{aligned}$$

Par (A.11) et l'équation précédente, on a

$$[\alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^{\tau} + \alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^{\tau}] \lambda'_{2:m} \mathbf{s}_{t-2:t-m} = -\mu_2 \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^{\tau} + \mu_{q+2} \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^{\tau} + R_{t-2},$$

ce qui entraine que

$$\alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^{\tau} \lambda'_{2:m} \mathbf{s}_{t-2:t-m} = -\mu_2 \zeta_{t-1}^\tau (\eta_{t-1}^+)^{\tau} + R_{t-2}$$

et

$$\alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^{\tau} \lambda'_{2:m} \mathbf{s}_{t-2:t-m} = -\mu_{q+2} \zeta_{t-1}^\tau (-\eta_{t-1}^-)^{\tau} + R_{t-2}.$$

En soustrayant par l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{t-2} = \sigma\{\eta_r^+, \eta_r^- ; r \leq t-2\}$

$$\begin{aligned} \alpha_1^+ \zeta_{t-1}^\tau \lambda'_{2:m} \mathbf{s}_{t-2:t-m} [(\eta_{t-1}^+)^{\tau} - \mathbb{E}[(\eta_{t-1}^+)^{\tau} | \mathcal{F}_{t-2}]] &= \mu_2 \zeta_{t-1}^\tau [\mathbb{E}[(\eta_{t-1}^+)^{\tau} | \mathcal{F}_{t-2}] - (\eta_{t-1}^+)^{\tau}] \\ \alpha_1^- \zeta_{t-1}^\tau \lambda'_{2:m} \mathbf{s}_{t-2:t-m} [(\eta_{t-1}^-)^{\tau} - \mathbb{E}[(\eta_{t-1}^-)^{\tau} | \mathcal{F}_{t-2}]] &= \mu_{q+2} \zeta_{t-1}^\tau [\mathbb{E}[(\eta_{t-1}^-)^{\tau} | \mathcal{F}_{t-2}] - (\eta_{t-1}^-)^{\tau}] \end{aligned}$$

La loi de η_t étant non dégénérée, nous obtenons forcément $\alpha_1^+ = \mu_2 = 0$ et de manière symétrique $\alpha_1^- = \mu_{q+2} = 0$. Mais pour ce modèle, il est impossible d'avoir $\alpha_1^+ = \alpha_1^- = 0$ par l'hypothèse **H3''**. Nous pouvons montrer par récurrence qu'il en est de même pour les autres coefficients et que (A.10) entraine nécessairement $\alpha_1^+ + \alpha_1^- = \dots = \alpha_q^+ + \alpha_q^- = 0$.

A.2.4 Convergence de la matrice D

Nous pouvons montrer la convergence presque sûre de $\hat{D}$. Pour ce faire nous utiliserons des résultats connus de la consistance de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance, les hypothèses faites sur la loi de η et sur la matrice C_m .

Nous écrivons la matrice D telle que

$$D = (\kappa_\eta - 1) [(\kappa_\eta - 1)I_d - C_m J^{-1} C'_m].$$

On pose $A = C_m J^{-1} C'_m$, respectivement $\hat{A} = \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{C}'_m$ et $B = (\kappa_\eta - 1)I_d - C_m J^{-1} C'_m$, respectivement $\hat{B} = (\hat{\kappa}_\eta - 1)I_d - \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{C}'_m$. On a alors

$$D = (\kappa_\eta - \hat{\kappa}_\eta)B + (\hat{\kappa}_\eta - 1)B.$$

En travaillant de même sur les matrices A et B nous obtenons

$$\begin{aligned} A &= (C_m - \hat{C}_m) J^{-1} C'_m + \hat{C}_m (J^{-1} - \hat{J}^{-1}) C'_m + \hat{C}_m \hat{J}^{-1} (C'_m - \hat{C}'_m) + \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{C}'_m, \\ &= (C_m - \hat{C}_m) J^{-1} C'_m + \hat{C}_m (J^{-1} - \hat{J}^{-1}) C'_m + \hat{C}_m \hat{J}^{-1} (C'_m - \hat{C}'_m) + \hat{A}; \\ B &= (\kappa_\eta - \hat{\kappa}_\eta)I_d + (\hat{\kappa}_\eta - 1)I_d + (A - \hat{A}) + \hat{A}, \\ &= (A - \hat{A}) + (\kappa_\eta - \hat{\kappa}_\eta)I_d + \hat{B}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} D - \hat{D} &= (\kappa_\eta - \hat{\kappa}_\eta)B + (\hat{\kappa}_\eta - 1) [(A - \hat{A}) + (\kappa_\eta - \hat{\kappa}_\eta)I_d] \\ \|D - \hat{D}\| &\leq |\kappa_\eta - \hat{\kappa}_\eta| \|B\| + |\hat{\kappa}_\eta - 1| [\|A - \hat{A}\| + |\kappa_\eta - \hat{\kappa}_\eta| d]. \end{aligned}$$

Nous savons que

$$\begin{aligned} \|A - \hat{A}\| &\leq \|C_m - \hat{C}_m\| \|J^{-1}\| \|C'_m\| + \|\hat{C}_m\| \|J^{-1} - \hat{J}^{-1}\| \|C'_m\| + \|C_m\| \|\hat{J}^{-1}\| \|C'_m - \hat{C}'_m\| \\ &\leq \|C_m - \hat{C}_m\| \|J^{-1}\| \|C'_m\| + \|\hat{C}_m\| \|J^{-1}\| \|\hat{J} - J\| \|\hat{J}^{-1}\| \|C'_m\| + \|C_m\| \|\hat{J}^{-1}\| \|C'_m - \hat{C}'_m\| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ p.s.} \end{aligned}$$

$|\kappa_\eta - 1| \leq K$ et que $|\kappa_\eta - \hat{\kappa}_\eta|$ tend presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il suit que $\|B\| \leq K$ et on conclut que $\hat{D} \rightarrow D$ presque sûrement lorsque $n \rightarrow +\infty$. $\square$

Annexe B

Preuve de la consistance

Résumé

Dans cette section, nous donnerons les éléments de la preuve de la consistance pour le modèle CCC-APGARCH. La preuve du théorème 2.1, correspondant au cas où la puissance $\underline{\delta}$ du modèle est connue, sera détaillée au paragraphe B.2. La preuve du théorème 2.3, correspondant au cas où la puissance est inconnue, reprend un certain nombre d'éléments du cas connu, et nous ne détaillerons que les éléments changeants.

Sommaire

B.1	Rappels	123
B.2	Puissance connue	124
B.3	Puissance inconnue	130

B.1 Rappels

Pour la preuve de la consistance, nous utiliserons une norme multiplicative définie comme

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \rho^{1/2}(A'A),$$

où A est une matrice réelle de dimension $d_1 \times d_2$ et où $\|x\|$ est la norme Euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^{d_2}$ et $\rho(\cdot)$ définit le rayon spectral. Nous rappelons que la norme satisfait

$$\|A\|^2 \leq \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \text{Tr}(A'A) \leq d_2 \|A\|^2, \quad |A'A| \leq \|A\|^{2d_2}.$$

De plus, nous avons la relation suivante

$$|\text{Tr}(AB)| \leq (d_1 d_2)^{1/2} \|A\| \|B\|$$

tant que le produit matriciel est bien défini. Pour cela il faut nécessairement que la matrice B soit de dimension $d_1 \times d_2$.

Pour établir la consistance forte de l'estimateur, il sera utile de réécrire le modèle (2.1) sous sa forme matricielle. Dans le cas où la puissance $\underline{\delta}$ est connue, le modèle s'écrit comme suit

$$\mathbb{H}_t(\theta) = \underline{c}_t(\theta) + \mathbb{B}(\theta) \mathbb{H}_{t-1}(\theta), \quad (\text{B.1})$$

avec

$$\mathbb{H}_t(\theta) = \begin{pmatrix} h_t^{\underline{\delta}/2}(\theta) \\ h_{t-1}^{\underline{\delta}/2}(\theta) \\ \vdots \\ h_{t-p+1}^{\underline{\delta}/2}(\theta) \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_t(\theta) = \begin{pmatrix} \underline{\omega} + \sum_{i=1}^q A_i^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\underline{\delta}/2} + A_i^- (\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\underline{\delta}/2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{B}(\theta) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_p \\ I_d & & & 0 \\ 0 & I_d & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & I_d & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où la puissance est inconnue et doit être estimée simultanément avec les autres paramètres, cette écriture matricielle reste semblable. Dans ce cas, nous remplacerons $\underline{\delta}$ par $\underline{\tau}$, ainsi que θ en ϑ . Pour être sûr de ne pas faire de confusion, il est nécessaire de remplacer $\mathbb{H}_t(\theta)$ par $\mathbb{H}_t^{(\tau)}(\vartheta)$ et $\underline{c}_t(\theta)$ par $\underline{c}_t^{(\tau)}(\vartheta)$. Pour simplifier les notations, nous écrirons $\mathbb{H}_t$ à la place de $\mathbb{H}_t(\theta)$, respectivement $\mathbb{H}_t^{(\tau)}$ à la place de $\mathbb{H}_t^{(\tau)}(\vartheta)$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible et de manière similaire pour $\underline{c}_t$, $\mathbb{B}$ et $\underline{c}_t^{(\tau)}$. En itérant cette expression, nous obtenons

$$\mathbb{H}_t = \underline{c}_t + \mathbb{B}\underline{c}_{t-1} + \mathbb{B}^2\underline{c}_{t-2} + \dots + \mathbb{B}^{t-1}\underline{c}_1 + \mathbb{B}^t\mathbb{H}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{B}^k \underline{c}_{t-k}.$$

B.2 Puissance connue

Pour démontrer le Théorème 2.1, nous décomposons la preuve en 4 étapes.

B.2.1 Oubli asymptotique des valeurs initiales : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\theta \in \Theta} |\mathcal{L}_n(\theta) - \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta)| = 0$, presque sûrement.

B.2.2 Identifiabilité : si il existe un $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\underline{h}_t^{\delta/2}(\theta) = \underline{h}_t^{\delta/2}(\theta_0)$ presque sûrement et $R = R_0$, alors $\theta = \theta_0$.

B.2.3 Minimisation de la log-vraisemblance en la vraie valeur : $\mathbb{E}_{\theta_0}[l_t(\theta_0)] < +\infty$, et si $\theta \neq \theta_0$, $\mathbb{E}_{\theta_0}[l_t(\theta)] > \mathbb{E}_{\theta_0}[l_t(\theta_0)]$.

B.2.4 Pour tout $\theta \neq \theta_0$ il existe un voisinage $V(\theta)$ tel que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V(\theta)} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) > \mathbb{E}_{\theta_0}[l_1(\theta_0)], \quad p.s. \quad (\text{B.2})$$

B.2.1 Oubli asymptotique des valeurs initiales

Nous définissons le vecteur $\tilde{\mathbb{H}}_t$ en remplaçant les variables $\underline{h}_{t-i}^{\delta/2}$, pour $i = 0, \dots, p-1$, dans $\mathbb{H}_t$ par $\tilde{\underline{h}}_{t-i}^{\delta/2}$ et nous avons

$$\tilde{\mathbb{H}}_t = \underline{c}_t + \mathbb{B}\underline{c}_{t-1} + \dots + \mathbb{B}^{t-q-1}\underline{c}_{q+1} + \mathbb{B}^{t-q}\tilde{\underline{c}}_q + \dots + \mathbb{B}^{t-1}\tilde{\underline{c}}_1 + \mathbb{B}^t\tilde{\mathbb{H}}_0. \quad (\text{B.3})$$

où le vecteur $\tilde{\underline{c}}_t$ est obtenu en remplaçant $\underline{\varepsilon}_0, \dots, \underline{\varepsilon}_{t-q}$ dans $\underline{c}_t$ par les valeurs initiales.

Par l'hypothèse **H2** et le corollaire 1, nous avons $\rho(\mathbb{B}) < 1$, et nous pouvons déduire de la compacité de l'espace Θ que l'on a $\sup_{\theta \in \Theta} \rho(\mathbb{B}) < 1$. En utilisant l'équation itérative (B.3), ainsi que la même avec $\tilde{\mathbb{H}}_t$, on obtient presque sûrement pour tout t

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} \|\mathbb{H}_t - \tilde{\mathbb{H}}_t\| &= \sup_{\theta \in \Theta} \left\| \sum_{k=1}^q \mathbb{B}^{t-k}(\underline{c}_k - \tilde{\underline{c}}_k) + \mathbb{B}^t(\mathbb{H}_0 - \tilde{\mathbb{H}}_0) \right\| \\ &\leq K\rho^t, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où K est une constante aléatoire qui dépend des valeurs passées de $\{\underline{\varepsilon}_t, t \leq 0\}$. Nous avons de manière équivalente

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left\| \underline{h}_t^{\delta/2}(\theta) - \tilde{\underline{h}}_t^{\delta/2}(\theta) \right\| \leq K\rho^t. \quad (\text{B.5})$$

Alors, pour $i_1 = 1, \dots, d$, comme $\min \left(h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta), \tilde{h}_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta) \right) \geq \omega = \inf_{1 \leq i \leq d} \underline{\omega}(i)$, le théorème des accroissements finis implique que

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} \left| h_{i_1,t}(\theta) - \tilde{h}_{i_1,t}(\theta) \right| &\leq \frac{2}{\delta_{i_1}} \sup_{\theta \in \Theta} \max \left(h_{i_1,t}^{1-\delta_{i_1}/2}(\theta), \tilde{h}_{i_1,t}^{1-\delta_{i_1}/2}(\theta) \right) \sup_{\theta \in \Theta} \left| h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta) - \tilde{h}_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta) \right| \\ &\leq \frac{2K}{\delta_{i_1}} \left(\sup_{\theta \in \Theta} \frac{1}{\omega} \right) \sup_{\theta \in \Theta} \max \left(h_{i_1,t}(\theta), \tilde{h}_{i_1,t}(\theta) \right) \rho^t \\ &\leq K \rho^t, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

et de façon semblable

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} \left| h_{i_1,t}^{1/2}(\theta) - \tilde{h}_{i_1,t}^{1/2}(\theta) \right| &\leq \frac{1}{\delta_{i_1}} \sup_{\theta \in \Theta} \max \left(h_{i_1,t}^{(1-\delta_{i_1})/2}(\theta), \tilde{h}_{i_1,t}^{(1-\delta_{i_1})/2}(\theta) \right) \sup_{\theta \in \Theta} \left| h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta) - \tilde{h}_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta) \right| \\ &\leq \frac{K}{\delta_{i_1}} \left(\sup_{\theta \in \Theta} \frac{1}{\omega} \right) \sup_{\theta \in \Theta} \max \left(h_{i_1,t}^{1/2}(\theta), \tilde{h}_{i_1,t}^{1/2}(\theta) \right) \rho^t \\ &\leq K \rho^t. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

De la majoration (B.6), nous pouvons en déduire que nous avons presque sûrement

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left\| H_t - \tilde{H}_t \right\| \leq K \rho^t, \quad \forall t. \quad (\text{B.8})$$

En utilisant le fait que $\|R^{-1}\|$ est l'inverse de la valeur propre du plus petit module de R et que $\|\tilde{D}_t^{-1}\| = [\min_i(h_{i,t}^{1/\delta_i})]^{-1}$, nous avons la majoration suivante

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} \|\tilde{H}_t^{-1}\| &\leq \sup_{\theta \in \Theta} \|\tilde{D}^{-1}\|^2 \|R^{-1}\| \\ &\leq \sup_{\theta \in \Theta} \left[\min_i (\underline{\omega}(i)^{1/\delta_i}) \right]^{-1} \|R^{-1}\| \\ &\leq K. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Par l'hypothèse **H5**, nous utilisons le fait que la matrice R est définie positive, la compacité de l'espace Θ et la positivité stricte de $\underline{\omega}$, nous avons la majoration similaire à (B.9)

$$\sup_{\theta \in \Theta} \|H_t^{-1}\| \leq K. \quad (\text{B.10})$$

Par ces inégalités, nous pouvons montrer le premier point B.2.1 de la preuve. En effet,

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} |\mathcal{L}_t(\theta) - \tilde{\mathcal{L}}_t(\theta)| &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} \left| \underline{\varepsilon}_t'(H_t^{-1} - \tilde{H}_t^{-1}) \underline{\varepsilon}_t + \log |H_t| - \log |\tilde{H}_t| \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} \left| \underline{\varepsilon}_t'(H_t^{-1} - \tilde{H}_t^{-1}) \underline{\varepsilon}_t \right| + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} \left| \log |H_t| - \log |\tilde{H}_t| \right| \\ &\leq S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire le premier terme de droite S_1 de l'inégalité ci-dessus comme

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} \left| \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1} (H_t - \tilde{H}_t) \tilde{H}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \right| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} \left| \text{Tr}(H_t^{-1} (H_t - \tilde{H}_t) \tilde{H}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t') \right| \\ &\leq K \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} \|H_t^{-1}\| \|H_t - \tilde{H}_t\| \|\tilde{H}_t^{-1}\| \|\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t'\| \\ &\leq K \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \rho^t \|\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t'\| \end{aligned}$$

par utilisation des majorations (B.8), (B.9) et (B.10). En utilisant le lemme de Borel-Cantelli et le corollaire 2, nous pouvons déduire que $\rho^t \|\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}'_t\| = \rho^t \underline{\varepsilon}'_t \underline{\varepsilon}_t$ tend vers 0 presque sûrement. Le lemme de Ces  ro implique que $n^{-1} \sum_{t=1}^n \rho^t \|\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}'_t\| \rightarrow 0$.

Pour le second terme S_2 de l'inégalité, nous utilisons deux inégalités $\log(1+x) \leq x$ pour $x > -1$ et $|\det(A)| \geq \rho(A)^d \geq \|A\|^d$ et on obtient pour le terme S_2

$$\begin{aligned} \log |H_t| - \log |\tilde{H}_t| &= \log |H_t \tilde{H}_t^{-1}| \\ &= \log |I_d + (H_t - \tilde{H}_t) \tilde{H}_t^{-1}| \\ &\leq d \log \|I_d + (H_t - \tilde{H}_t) \tilde{H}_t^{-1}\| \\ &\leq d \|H_t - \tilde{H}_t\| \|\tilde{H}_t^{-1}\|. \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient une majoration semblable pour

$$\log |\tilde{H}_t| - \log |H_t| \leq d \|H_t - \tilde{H}_t\| \|H_t^{-1}\|.$$

Il s'en suit par (B.8), (B.9) et (B.10) que

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} \left| \log |H_t| - \log |\tilde{H}_t| \right| \leq d \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} \|H_t - \tilde{H}_t\| \left(\|\tilde{H}_t^{-1}\| + \|H_t^{-1}\| \right) \leq K \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \rho^t.$$

Nous concluons que le terme S_2 converge vers 0.

Nous avons montré que $\sup_{\theta \in \Theta} |\mathcal{L}_t(\theta) - \tilde{\mathcal{L}}_t(\theta)| \rightarrow 0$ presque sûrement et le point B.2.1 est prouvé.

B.2.2 Identifiabilité

On suppose que pour $\theta \neq \theta_0$ on ait

$$\underline{h}_t(\theta) = \underline{h}_t(\theta_0), \mathbb{P}_{\theta_0} - p.s., \quad \text{et} \quad R(\theta) = R(\theta_0).$$

Donc pour $\rho = \rho_0$, nous rappelons par (2.5) nous avons

$$\underline{h}_t^{\delta/2}(\theta_0) = \mathcal{B}_0^{-1}(1) \underline{\omega} + \mathcal{B}_0^{-1}(L) \mathcal{A}_0^+(L) (\underline{\varepsilon}_t^+)^{\delta/2} + \mathcal{B}_0^{-1}(L) \mathcal{A}_0^-(L) (\underline{\varepsilon}_t^-)^{\delta/2}.$$

Nous avons une expression similaire avec le paramètre θ

$$\underline{h}_t^{\delta/2}(\theta) = \mathcal{B}^{-1}(1) \underline{\omega} + \mathcal{B}^{-1}(L) \mathcal{A}^+(L) (\underline{\varepsilon}_t^+)^{\delta/2} + \mathcal{B}^{-1}(L) \mathcal{A}^-(L) (\underline{\varepsilon}_t^-)^{\delta/2}$$

Par conséquent, en effectuant la différence, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{B}^{-1}(1) \underline{\omega} - \mathcal{B}_0^{-1}(1) \underline{\omega}_0 + \mathcal{B}^{-1}(L) \mathcal{A}^+(L) (\underline{\varepsilon}_t^+)^{\delta/2} - \mathcal{B}_0^{-1}(L) \mathcal{A}_0^+(L) (\underline{\varepsilon}_t^+)^{\delta/2} \\ &\quad + \mathcal{B}^{-1}(L) \mathcal{A}^-(L) (\underline{\varepsilon}_t^-)^{\delta/2} - \mathcal{B}_0^{-1}(L) \mathcal{A}_0^-(L) (\underline{\varepsilon}_t^-)^{\delta/2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{-1}(1) \underline{\omega} - \mathcal{B}_0^{-1}(1) \underline{\omega}_0 &= [\mathcal{B}^{-1}(L) \mathcal{A}^+(L) - \mathcal{B}_0^{-1}(L) \mathcal{A}_0^+(L)] (\underline{\varepsilon}_t^+)^{\delta/2} + [\mathcal{B}^{-1}(L) \mathcal{A}^-(L) - \mathcal{B}_0^{-1}(L) \mathcal{A}_0^-(L)] (\underline{\varepsilon}_t^-)^{\delta/2} \\ &= \mathcal{P}^+(L) (\underline{\varepsilon}_t^+)^{\delta/2} + \mathcal{P}^-(L) (\underline{\varepsilon}_t^-)^{\delta/2}, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{P}^\pm(L) = \mathcal{B}_0^{-1}(L) \mathcal{A}_0^\pm(L) - \mathcal{B}^{-1}(L) \mathcal{A}^\pm(L) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i^\pm L^i. \quad (\text{B.11})$$

Nous remarquons que $P_0^\pm = \mathcal{P}^\pm(0) = 0$ par les conditions d'identifiabilité. En utilisant (2.2) et (2.3) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^+(L) (\underline{\varepsilon}_t^+)^{\delta/2} + \mathcal{P}^-(L) (\underline{\varepsilon}_t^-)^{\delta/2} &= P_1^+ (\underline{\varepsilon}_{t-1}^+)^{\delta/2} + P_1^- (\underline{\varepsilon}_{t-1}^-)^{\delta/2} + Z_{t-2} \\ &= P_1^+ \Upsilon_{t-1}^{+,(\delta)} \underline{h}_{t-1}^{\delta/2} + P_1^- \Upsilon_{t-1}^{-,(\delta)} \underline{h}_{t-1}^{\delta/2} + Z_{t-2} \quad p.s., \end{aligned}$$

où Z_{t-2} est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{t-2}$ engendrée par $\{\eta_{t-2}, \eta_{t-3}, \dots\}$. Il vient que

$$P_1^+ \Upsilon_{t-1}^{+,(\delta)} \underline{h}_{t-1}^{\delta/2} + P_1^- \Upsilon_{t-1}^{-,(\delta)} \underline{h}_{t-1}^{\delta/2} = \mathcal{B}^{-1}(1) \underline{\omega} - \mathcal{B}_0^{-1}(1) \underline{\omega}_0 - Z_{t-2} = \tilde{Z}_{t-2}$$

où $\tilde{Z}_{t-2}$ est une matrice aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t-2}$. Comme $P_1^+ \Upsilon_{t-1}^{+,(\delta)} + P_1^- \Upsilon_{t-1}^{-,(\delta)}$ est indépendant de $(Z_{t-2}, \underline{h}_{t-1})$ et comme $\underline{h}_{t-1} > 0$, $P_1^+ \Upsilon_{t-1}^{+,(\delta)} + P_1^- \Upsilon_{t-1}^{-,(\delta)} = C$ pour une matrice constante C . Les matrices $-\Upsilon_{t-1}^{\pm,(\delta)}$ étant diagonales, l'élément (i, j) de la matrice C satisfait

$$C(i, j) = P_1^+(i, j)(\tilde{\eta}_{j,t-1}^+)^{\delta_j} + P_1^-(i, j)(\tilde{\eta}_{j,t-1}^-)^{\delta_j}.$$

Si $P_1^+(i, j)P_1^-(i, j) \neq 0$, alors $\tilde{\eta}_{j,t-1}$ prend au plus deux valeurs différentes, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse **H3**. Si $P_1^+(i, j) \neq 0$ et $P_1^-(i, j) = 0$, alors $P_1^+(i, j)(\tilde{\eta}_{j,t-1}^+)^{\delta_j} = C(i, j)$ ce qui entraîne que $C(i, j) = 0$, comme $\mathbb{P}(\tilde{\eta}_{j,t-1} > 0) \neq 0$ et donc $\tilde{\eta}_{j,t-1} = 0$, p.s., ce qui est aussi en contradiction avec l'hypothèse **H3**. Nous obtenons donc $P_1^+ = P_1^- = 0$. Pour $i \geq 2$, nous avons de même pour $P_i^\pm$ et par (B.11) nous obtenons que $\mathcal{P}^+(L) = \mathcal{P}^-(L) = 0$. Donc par l'égalité (B.11), nous pouvons appliquer la proposition 1.1 parce que nous faisons l'hypothèse **H4** (ou **H4'**). En conclusion, nous avons $\theta = \theta_0$.

B.2.3 Minimisation de la log-vraisemblance en la vraie valeur

Le critère n'est pas intégrable en tous les points. nous commencerons par montrer que $\mathbb{E}_{\theta_0}[l_t(\theta)]$ est bien définie sur $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pour tout θ . En effet, nous avons

$$\mathbb{E}_{\theta_0}[l_t^-(\theta)] \leq \mathbb{E}_{\theta_0}[\log^- |H_t|] = \mathbb{E}_{\theta_0}[\log^- |D_t R D_t|] \leq \max\{0, \log(|R| \min_i \underline{\omega}(i)^d)\} < \infty.$$

Il faut maintenant montrer que $\mathbb{E}_{\theta_0}[l_t(\theta_0)]$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Pour cela nous utilisons la relation $|\det(A)| \geq \rho(A)^d \geq \|A\|^d$ et l'inégalité de Jensen, ainsi que le corollaire 2

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0}[\log |H_t(\theta_0)|] &= \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\frac{d}{s} \log |H_t(\theta_0)|^{\frac{s}{d}} \right] \\ &\leq \frac{d}{s} \log \left(\mathbb{E}_{\theta_0} \|H_t(\theta_0)\|^{\frac{s}{d}} \right) \\ &\leq \frac{d}{s} \log (\mathbb{E}_{\theta_0} \|R\|^s \|D_{0t}\|^{2s}) \\ &\leq K + \frac{d}{s} \log (\mathbb{E}_{\theta_0} \|D_{0t}\|^{2s}) \\ &= K + \frac{d}{s} \log \left(\mathbb{E}_{\theta_0} \left[\max_i (h_{it}(\theta_0))^s \right] \right) \\ &\leq K + \frac{d}{s} \log (\mathbb{E}_{\theta_0} \|\underline{h}_t(\theta_0)\|^s) < \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent nous avons pour le critère en θ_0

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0}[l_t(\theta_0)] &= \mathbb{E}_{\theta_0} [\varepsilon_t' H_t^{-1}(\theta_0) \varepsilon_t + \log |H_t(\theta_0)|] \\ &= \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\eta_t' (H_t^{1/2})'(\theta_0) H_t^{-1}(\theta_0) H_t^{1/2}(\theta_0) \eta_t + \log |H_t(\theta_0)| \right] \\ &= \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\text{Tr}(\eta_t' (H_t^{1/2})'(\theta_0) H_t^{-1}(\theta_0) H_t^{1/2}(\theta_0) \eta_t) + \log |H_t(\theta_0)| \right] \\ &= \mathbb{E}_{\theta_0} [\text{Tr}(\eta_t' \eta_t) + \log |H_t(\theta_0)|] \\ &= d + \mathbb{E}_{\theta_0} [\log |H_t(\theta_0)|] < +\infty. \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}_{\theta_0}[l_t^-(\theta)] < +\infty$ pour tout θ , $\mathbb{E}_{\theta_0}[l_t^-(\theta_0)] < +\infty$ et nous en déduisons que $\mathbb{E}_{\theta_0}[l_t(\theta_0)]$ est bien défini sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, lorsque nous étudions la fonction $\theta \mapsto \mathbb{E}_\theta[l_t(\theta)]$, nous pouvons restreindre l'étude aux valeurs de θ telles que $\mathbb{E}_{\theta_0}[l_t(\theta)] < \infty$.

Nous notons par $\lambda_{i,t}$ la valeur propre positive de $H_t(\theta_0)H_t^{-1}(\theta)$. En effectuant la différence des espérances des critères en θ et θ_0 , nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_0} [l_t(\theta)] - \mathbb{E}_{\theta_0} [l_t(\theta_0)] &= \mathbb{E}_{\theta_0} [\varepsilon_t' H_t^{-1}(\theta) \varepsilon_t + \log |H_t(\theta)|] - \mathbb{E}_{\theta_0} [\varepsilon_t' H_t^{-1}(\theta_0) \varepsilon_t + \log |H_t(\theta_0)|] \\
&= \mathbb{E}_{\theta_0} [\varepsilon_t' H_t^{-1}(\theta) \varepsilon_t - \varepsilon_t' H_t^{-1}(\theta_0) \varepsilon_t] + \mathbb{E}_{\theta_0} [\log |H_t(\theta)| - \log |H_t(\theta_0)|] \\
&= \mathbb{E}_{\theta_0} [\varepsilon_t' \{H_t^{-1}(\theta) - H_t^{-1}(\theta_0)\} \varepsilon_t] + \mathbb{E}_{\theta_0} [\log |H_t(\theta) H_t^{-1}(\theta_0)|] \\
&= \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\eta_t' (H_t^{1/2})'(\theta_0) \{H_t^{-1}(\theta) - H_t^{-1}(\theta_0)\} H_t^{1/2}(\theta_0) \eta_t \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{\theta_0} [\log |H_t(\theta) H_t^{-1}(\theta_0)|] \\
&= \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\eta_t' \{ (H_t^{1/2})'(\theta_0) H_t^{-1}(\theta) H_t^{1/2}(\theta_0) - (H_t^{1/2})'(\theta_0) H_t^{-1}(\theta_0) H_t^{1/2}(\theta_0) \} \eta_t \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{\theta_0} [\log |H_t(\theta) H_t^{-1}(\theta_0)|] \\
&= \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\eta_t' \{ (H_t^{1/2})'(\theta_0) H_t^{-1}(\theta) H_t^{1/2}(\theta_0) - I_d \} \eta_t \right] + \mathbb{E}_{\theta_0} [\log |H_t(\theta) H_t^{-1}(\theta_0)|] \\
&= \text{Tr} \left\{ \mathbb{E}_{\theta_0} \left[(H_t^{1/2})'(\theta_0) H_t^{-1}(\theta) H_t^{1/2}(\theta_0) - I_d \right] \mathbb{E} [\eta_t \eta_t'] \right\} \\
&\quad + \mathbb{E}_{\theta_0} [\log |H_t(\theta) H_t^{-1}(\theta_0)|] \\
&= \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\text{Tr} \left((H_t^{1/2})'(\theta_0) H_t^{-1}(\theta) H_t^{1/2}(\theta_0) - I_d \right) \right] + \mathbb{E}_{\theta_0} [\log |H_t(\theta) H_t^{-1}(\theta_0)|] \\
&= \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\sum_{i=1}^d (\lambda_{i,t} - 1 - \log(\lambda_{i,t})) \right] \geq 0,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité $\log(x) \leq x - 1$, pour tout $x > 0$. Mais, si $x = 1$, $\log(x) = x - 1$ alors l'inégalité est stricte, sauf si pour tout i , $\lambda_{i,t} = 1 \mathbb{P}_{\theta_0}$ -p.s. Cette condition signifie que $H_t(\theta) = H_t(\theta_0) \mathbb{P}_{\theta_0}$ -p.s. Il est évident qu'il en suit que $\underline{h}_t(\theta) = \underline{h}_t(\theta_0) \mathbb{P}_{\theta_0}$ -p.s. et $R(\theta) = R(\theta_0)$.

Par l'identifiabilité prouvée au paragraphe B.2.2, on en déduit que $\theta = \theta_0$ et cette partie est prouvée.

B.2.4 Preuve de (B.17)

Nous rappelons l'écriture du critère de minimisation

$$\mathcal{L}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t, \quad l_t = l_t(\theta) = \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t + \log |H_t|.$$

Pour $\theta \in \Theta$ et un entier $k > 0$, on décrit par $V_k(\theta)$ la boule ouverte de rayon $1/k$ centrée en θ . Nous avons

$$\begin{aligned}
\inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) &= \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \left(\mathcal{L}_n(\theta^*) + \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) - \mathcal{L}_n(\theta^*) \right) \\
&\geq \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \mathcal{L}_n(\theta^*) + \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \left(\tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) - \mathcal{L}_n(\theta^*) \right) \\
&\geq \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \mathcal{L}_n(\theta^*) - \sup_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \left| \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) - \mathcal{L}_n(\theta^*) \right|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \mathcal{L}_n(\theta^*) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(- \sup_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \left| \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) - \mathcal{L}_n(\theta^*) \right| \right) \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \mathcal{L}_n(\theta^*) - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta) - \mathcal{L}_n(\theta) \right|,
\end{aligned}$$

et par le paragraphe B.2.1, on en déduit que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \mathcal{L}_n(\theta^*) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t(\theta^*) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} l_t(\theta^*). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Nous ne pouvons pas appliquer le théorème ergodique classique à $\{\inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} l_t(\theta^*)\}_t$ à cause de l'intégrabilité du critère mentionné au paragraphe B.2.3. Pour notre cas, nous utilisons une extension du théorème ergodique classique (Billingsley (1961) pages 284 et 495) et nous avons

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} l_t(\theta^*) \longrightarrow \mathbb{E} \left(\inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} l_1(\theta^*) \right)$$

Par le théorème de Beppo-Levi, nous avons pour k allant vers l'infini

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(\inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} l_1(\theta^*) \right) = \mathbb{E} \left(\liminf_{k \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} l_1(\theta^*) \right) \longrightarrow \mathbb{E} [l_1(\theta)].$$

Par conséquent (B.12) implique que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V_k(\theta) \cap \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) \geq \mathbb{E} [l_1(\theta)]$$

et il en suit le résultat (B.17).

B.2.5 Conclusion

Par le paragraphe B.2.1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_n(\theta_0)$ et par le théorème ergodique, nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_n(\theta_0) = \mathbb{E}_{\theta_0} [l_1(\theta_0)]$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_n(\theta_0)$ existe et est $\mathbb{E}_{\theta_0} [l_1(\theta_0)]$. Comme $\inf_{\theta^* \in V_k(\theta_0) \cap \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) \leq \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta_0)$, nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V_k(\theta_0) \cap \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_n(\theta_0) = \mathbb{E}_{\theta_0} [l_1(\theta_0)]$$

Alors pour un voisinage suffisamment petit $V(\theta_0)$ de θ_0

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V(\theta_0) \cap \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta_0) = \mathbb{E}_{\theta_0} [l_1(\theta_0)]. \quad (\text{B.13})$$

L'espace des paramètres Θ peut être recouvert comme

$$\Theta \subseteq V(\theta_0) + \bigcup_{\theta \in \Theta} V(\theta)$$

avec $V(\theta)$ qui est un voisinage de θ vérifiant B.2.4. Par la compacité de Θ , il existe un recouvrement fini de Θ

$$\Theta \subseteq V(\theta_0) \cup V(\theta_1) \cup \dots \cup V(\theta_k)$$

et alors

$$\inf_{\theta \in \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta) = \min_{i=0,1,\dots,k} \inf_{\theta \in \Theta \cap V(\theta_i)} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta). \quad (\text{B.14})$$

Supposons que pour tout N , il existe $n \geq N$ tel que $\hat{\theta}_n \in V(\theta_{i_0})$ avec $i_0 = 1, \dots, k$. Soit $\varepsilon > 0$, nous avons par (B.13) qu'il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$,

$$\inf_{\theta^* \in V(\theta_0)} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) < \left[\limsup_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in V(\theta_0)} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) \right] + \varepsilon \leq \mathbb{E}_{\theta_0} [l_1(\theta_0)] + \varepsilon,$$

et par (B.17), pour $i_0 \neq 0$, nous obtenons l'existence de N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$,

$$\inf_{\theta^* \in \mathcal{V}(\theta_{i_0})} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) > \left[\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in \mathcal{V}(\theta_{i_0})} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) \right] - \varepsilon.$$

Nous pouvons supposer que $N \geq N_1 \cup N_2$ et par les deux dernières relations et (B.14), nous avons pour $i_0 \neq 0$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in \mathcal{V}(\theta_{i_0})} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) - \varepsilon < \inf_{\theta \in \mathcal{V}(\theta_{i_0})} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta) = \inf_{\theta \in \Theta} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta) \leq \inf_{\theta \in \mathcal{V}(\theta_0)} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta) < \mathbb{E}_{\theta_0} [l_1(\theta_0)] + \varepsilon.$$

Alors on aura

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in \mathcal{V}(\theta_{i_0})} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) - \varepsilon < \mathbb{E}_{\theta_0} [l_1(\theta_0)] + \varepsilon,$$

alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in \mathcal{V}(\theta_{i_0})} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) \leq \mathbb{E}_{\theta_0} [l_1(\theta_0)]. \quad (\text{B.15})$$

Mais par (B.17) nous avons $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\theta^* \in \mathcal{V}(\theta_{i_0})} \tilde{\mathcal{L}}_n(\theta^*) > \mathbb{E}_{\theta_0} [l_1(\theta_0)]$ et ceci est en contradiction avec (B.15).

Pour n assez grand, nous concluons que $\hat{\theta}_n$ appartient à $\mathcal{V}(\theta_0)$.

B.3 Puissance inconnue

Nous rappelons que la représentation matricielle du processus lorsque la puissance δ est inconnue, s'écrit

$$\mathbb{H}_t^{(\tau)}(\vartheta) = \mathcal{C}_t^{(\tau)}(\vartheta) + \mathbb{B}(\vartheta) \mathbb{H}_{t-1}^{(\tau)}(\vartheta). \quad (\text{B.16})$$

Nous adaptons les matrices mentionnées dans le paragraphe B.1, en remplaçant θ par ϑ .

Pour prouver la consistance de l'estimateur lorsque δ est inconnue, nous décomposons la preuve en plusieurs points comme dans le cas où δ est connue.

B.3.1 Oubli asymptotique des valeurs initiales : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\vartheta \in \Delta} |\mathcal{L}_n(\vartheta) - \tilde{\mathcal{L}}_n(\vartheta)| = 0$, presque sûrement.

B.3.2 Identifiabilité : si il existe un $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\underline{h}_t(\vartheta) = \underline{h}_t(\vartheta_0)$ presque sûrement et $R = R_0$, alors $\vartheta = \vartheta_0$.

B.3.3 Minimisation de la log-vraisemblance en la vraie valeur : $\mathbb{E}_{\vartheta_0} |l_t(\vartheta_0)| < +\infty$, et si $\vartheta \neq \vartheta_0$, $\mathbb{E}_{\vartheta_0} [l_t(\vartheta)] > \mathbb{E}_{\vartheta_0} [l_t(\vartheta_0)]$.

B.3.4 Pour tout $\vartheta \neq \vartheta_0$ il existe un voisinage $V(\vartheta)$ tel que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\vartheta^* \in V(\vartheta)} \tilde{\mathcal{L}}_n(\vartheta^*) > \mathbb{E}_{\vartheta_0} [l_1(\vartheta_0)], \quad p.s. \quad (\text{B.17})$$

Plusieurs étapes dans la preuve sont similaires à celles du cas connu. Pour cela, seuls les points qui diffèrent seront développés.

B.3.1 Oubli asymptotique des valeurs initiales

La méthode pour montrer l'oubli asymptotique des valeurs initiales est la même que dans le cas connu, paragraphe B.2.1. Il suffit d'adapter le vecteur des paramètres avec l'espace des paramètres, ainsi que la représentation matricielle.

B.3.2 Identifiabilité

Pour le cas où δ est inconnue, il faut en plus des étapes du cas connu, prouver que si pour $i_1 = 1, \dots, d$, $\underline{h}_{i_1,t}(\vartheta)/\underline{h}_{i_1,t}(\vartheta_0) = 1$, presque sûrement, alors $\underline{\tau} = \underline{\delta}$. Le reste est identique au cas connu.

On décrit par $Q^\pm(L) = \mathcal{B}(L)^{-1} \mathcal{A}^\pm(L) = \sum_{i \geq 1} Q_i^\pm L^i$ et $Q_0^\pm(L) = \mathcal{B}_0(L)^{-1} \mathcal{A}_0^\pm(L) = \sum_{i \geq 1} Q_{0i}^\pm L^i$. Sous l'hypothèse **H4**, par la proposition 1.1, pour tout $i_2 = 1, \dots, d$, nous pouvons trouver un $i_0 \geq 1$ et un $i_1 \in \{1, \dots, d\}$ tel que $Q_{0i_0}^+ + Q_{0i_0}^- \neq 0$. Comme les coefficients de la matrice sont positifs, nous décrivons par (i_1, i_2) la position d'un élément non nul, pour $i_2 = 1, \dots, d$. Par (2.3) et (2.5), nous avons

$$\begin{aligned} \underline{h}_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\vartheta_0) &= \sum_{j_1=1}^d \mathcal{B}_0(1)^{-1}(i_1, j_1) \underline{\omega}_0(j_1) + \sum_{j_1=1}^d \sum_{l=1}^\infty Q_{0l}^+(i_1, j_1) (\varepsilon_{j_1,t-l}^+)^{\delta_{j_1}} + \sum_{j_1=1}^d \sum_{l=1}^\infty Q_{0l}^-(i_1, j_1) (-\varepsilon_{j_1,t-l}^-)^{\delta_{j_1}} \\ &= C_{i_1,t-i_0-1}(\vartheta_0) + \sum_{j_1=1}^d D_{0,t-i_0-1}^+(i_1, j_1) (\eta_{j_1,t-i_0}^+)^{\delta_{j_1}} + \sum_{j_1=1}^d D_{0,t-i_0-1}^-(i_1, j_1) (\eta_{j_1,t-i_0}^-)^{\delta_{j_1}} \end{aligned}$$

où les quantités indexées par $t-i_0-1$ sont mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{t-i_0-1}$ et $D_{0,t-i_0-1}^\pm(i_1, j_1) = Q_{0i_0}^\pm(i_1, j_1) h_{j_1,t-i_0}^{\delta_{j_1}}$. Nous pouvons faire de même pour $\underline{h}_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}$ en ϑ_0 , où

$$\begin{aligned} \underline{h}_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}(\vartheta) &= \sum_{j_1=1}^d \mathcal{B}(1)^{-1}(i_1, j_1) \underline{\omega}(j_1) + \sum_{j_1=1}^d \sum_{l=1}^\infty Q_l^+(i_1, j_1) (\varepsilon_{j_1,t-l}^+)^{\tau_{j_1}} + \sum_{j_1=1}^d \sum_{l=1}^\infty Q_l^-(i_1, j_1) (-\varepsilon_{j_1,t-l}^-)^{\tau_{j_1}} \\ &= C_{i_1,t-i_0-1}(\vartheta) + \sum_{j_1=1}^d D_{t-i_0-1}^+(i_1, j_1) (\eta_{j_1,t-i_0}^+)^{\tau_{j_1}} + \sum_{j_1=1}^d D_{t-i_0-1}^-(i_1, j_1) (\eta_{j_1,t-i_0}^-)^{\tau_{j_1}}. \end{aligned}$$

Comme $\underline{h}_{i_1,t}(\vartheta)/\underline{h}_{i_1,t}(\vartheta_0) = 1$, p.s., nous avons

$$\frac{\left\{ C_{i_1,t-i_0-1}(\vartheta) + \sum_{j_1=1}^d D_{t-i_0-1}^+(i_1, j_1) (\eta_{j_1,t-i_0}^+)^{\tau_{j_1}} + \sum_{j_1=1}^d D_{t-i_0-1}^-(i_1, j_1) (\eta_{j_1,t-i_0}^-)^{\tau_{j_1}} \right\}^{\delta_{i_1}/\tau_{i_1}}}{C_{i_1,t-i_0-1}(\vartheta_0) + \sum_{j_1=1}^d D_{0,t-i_0-1}^+(i_1, j_1) (\eta_{j_1,t-i_0}^+)^{\delta_{j_1}} + \sum_{j_1=1}^d D_{0,t-i_0-1}^-(i_1, j_1) (\eta_{j_1,t-i_0}^-)^{\delta_{j_1}}} = 1 \text{ p.s.} \quad (\text{B.18})$$

Nous notons par $r_{j_1} = \tau_{j_1}/\delta_{j_1}$ et nous introduisons la fonction

$$V(x_1, \dots, x_m) = \frac{\left\{ C_{i_1,t-i_0-1}(\vartheta) + \sum_{j_1=1}^d D_{t-i_0-1}^+(i_1, j_1) (x_{j_1}^+)^{r_{j_1} \delta_{j_1}} + \sum_{j_1=1}^d D_{t-i_0-1}^-(i_1, j_1) (x_{j_1}^-)^{r_{j_1} \delta_{j_1}} \right\}^{1/r_{i_1}}}{C_{i_1,t-i_0-1}(\vartheta_0) + \sum_{j_1=1}^d D_{0,t-i_0-1}^+(i_1, j_1) (x_{j_1}^+)^{\delta_{j_1}} + \sum_{j_1=1}^d D_{0,t-i_0-1}^-(i_1, j_1) (x_{j_1}^-)^{\delta_{j_1}}}.$$

Par (B.18), $V(\eta_{t-1}) = 1$ presque sûrement, par conséquent V est presque sûrement constant sur un voisinage de zéro (voir l'hypothèse **H8**). Donc pour tout $y = x_{i_2}^{\delta_{j_1}} \in [a, b] \subset [0, +\infty[$:

$$V(0, \dots, 0, y, 0, \dots, 0) = \frac{\left\{ C_{i_1,t-i_0-1}(\nu) + D_{t-i_0-1}^+(i_1, i_2) (y)^{r_{i_2}} \right\}^{1/r_{i_1}}}{C_{i_1,t-i_0-1}(\nu_0) + D_{0,t-i_0-1}^+(i_1, i_2) (y)} = 1, \text{ p.s.}$$

Comme les coefficients $C_{i_1,t-i_0-1}(\nu)$, $D_{t-i_0-1}^+(i_1, i_2)$, $C_{i_1,t-i_0-1}(\nu_0)$ et $D_{0,t-i_0-1}^+(i_1, i_2)$ sont positifs, nous en déduisons que $r_{i_2} = r_{i_1} := r$ en différentiant deux fois l'équation ci-dessus. En partant de

$$V(0, \dots, 0, y, 0, \dots, 0) = \frac{\left\{ C_{i_1,t-i_0-1}(\nu) + D_{t-i_0-1}^+(i_1, i_2) (y)^r \right\}^{1/r}}{C_{i_1,t-i_0-1}(\nu_0) + D_{0,t-i_0-1}^+(i_1, i_2) (y)} = 1,$$

nous pouvons en déduire en différentiant deux nouvelles fois, comme dans Hamadeh et Zakoïan (2011), que $r = r_{i_1} = 1$. Par conséquent, nous avons $\tau_{i_2} = \delta_{i_2}$. Ceci est fait pour tout $i_2 = 1, \dots, d$, donc le résultat est démontré.

B.3.3 Minimisation de la log-vraisemblance en la vraie valeur

La preuve de ce point est identique à celle du cas connu, en remplaçant θ_0 par ϑ_0 .

B.3.4 Preuve de (B.17)

Comme pour le paragraphe précédent, la démonstration est la même que dans le cas connu.

B.3.5 Conclusion

Pour conclure sur la démonstration de la consistance de l'estimateur dans le cas où la puissance est inconnue, nous utilisons les mêmes arguments que dans le cas où la puissance est connue, voir paragraphe B.2.5.

Annexe C

Preuve de la normalité asymptotique

Résumé

Dans cette section, nous donnerons les éléments de la preuve de la normalité asymptotique pour le modèle CCC-APGARCH. La preuve du théorème 2.2, correspondant au cas où la puissance $\underline{\delta}$ du modèle est connue, sera détaillée au paragraphe C.2. La preuve du théorème 2.3, correspondant au cas où la puissance est inconnue, reprend un certain nombre d'éléments du cas connu, et nous ne détaillerons que les éléments changeants.

Sommaire

C.1 Rappels	133
C.2 Puissance connue	134
C.3 Puissance inconnue	154

C.1 Rappels

Dans cette partie nous commençons par rappeler des notions déjà introduites précédemment, qui seront utiles pour la preuve de la normalité asymptotique. Pour cette preuve, nous avons besoin d'utiliser quelques règles de dérivation pour les matrices, que nous rappellerons et certaines notations. Dans la suite, nous utiliserons également une norme multiplicative définie comme

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \rho^{1/2}(A'A),$$

où A est une matrice de dimension $d_1 \times d_2$, avec $\|x\|$ est la norme Euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^{d_2}$ et $\rho(\cdot)$ définit le rayon spectral. Nous rappelons que la norme satisfait

$$\|A\|^2 \leq \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \text{Tr}(A'A) \leq d_2 \|A\|^2, \quad |A'A| \leq \|A\|^{2d_2}.$$

De plus nous avons la relation suivante

$$|\text{Tr}(AB)| \leq (d_1 d_2)^{1/2} \|A\| \|B\|$$

tant que le produit matriciel est bien défini. Pour cela il est nécessaire que la matrice B soit de dimension $d_1 \times d_2$.

Si nous considérons que $f(A)$ est une fonction scalaire d'une matrice A , où tous les composants a_{ij} sont considérés comme une fonction d'une variable réelle x , nous avons

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = \sum_{i,j} \frac{\partial f(A)}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} = \text{Tr} \left(\frac{\partial f(A)}{\partial A'} \frac{\partial A}{\partial x} \right). \quad (\text{C.1})$$

Pour une matrice A inversible, nous avons les relations suivantes

$$\frac{\partial c' A c}{\partial A'} = c c' \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial \text{Tr}(C A' B A')}{\partial A'} = C' A B' + B' A C' \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial \log |\det(A)|}{\partial A'} = A^{-1} \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial x} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x} A^{-1} \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial \text{Tr}(C A^{-1} B)}{\partial A'} = -A^{-1} B C A^{-1} \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial \text{Tr}(C A B)}{\partial A'} = B C \quad (\text{C.7})$$

C.2 Puissance connue

Pour établir la normalité asymptotique de l'estimateur, il sera utile de réécrire le modèle (2.1) sous sa forme matricielle, comme pour la consistance. Dans le cas où la puissance $\underline{\delta}$ est connue, le modèle s'écrit comme suit

$$\mathbb{H}_t(\theta) = \underline{c}_t(\theta) + \mathbb{B}(\theta) \mathbb{H}_{t-1}(\theta), \quad (\text{C.8})$$

avec

$$\mathbb{H}_t(\theta) = \begin{pmatrix} h_t^{\delta/2}(\theta) \\ h_{t-1}^{\delta/2}(\theta) \\ \vdots \\ h_{t-p+1}^{\delta/2}(\theta) \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_t(\theta) = \begin{pmatrix} \underline{\omega} + \sum_{i=1}^q A_i^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + A_i^- (\underline{\varepsilon}_{t-1}^-)^{\delta/2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{B}(\theta) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_p \\ I_d & & & 0 \\ 0 & I_d & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & I_d & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier les notations, nous écrirons $\mathbb{H}_t$ à la place de $\mathbb{H}_t(\theta)$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible et de manière similaire pour $\underline{c}_t$ et $\mathbb{B}$. En itérant cette expression, nous obtenons

$$\mathbb{H}_t = \underline{c}_t + \mathbb{B} \underline{c}_{t-1} + \mathbb{B}^2 \underline{c}_{t-2} + \dots + \mathbb{B}^{t-1} \underline{c}_1 + \mathbb{B}^t \mathbb{H}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{B}^k \underline{c}_{t-k}.$$

Pour démontrer le Théorème 2.2, nous décomposons la preuve en 6 étapes.

C.2.1 Les dérivées premières du quasi-log-vraisemblance.

C.2.2 Existence des moments de tout ordre du score.

C.2.3 Normalité asymptotique du vecteur du score.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I). \quad (\text{C.9})$$

C.2.4 Convergence de la matrice J .

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 l_t(\theta_{ij}^*)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \longrightarrow J(i, j) \text{ en probabilité.} \quad (\text{C.10})$$

C.2.5 Inversibilité de la matrice J .

C.2.6 Oubli des valeurs initiales.

Pour faciliter les notations, nous définissons par s_i pour $i = 0, \dots, 3$ le nombre de paramètres étudié dans le vecteur θ .

$$* s_0 = d + (p + 2q)d^2 + d(d - 1)/2,$$

$$* s_1 = d + (p + 2q)d^2,$$

$$* s_2 = d + 2qd^2,$$

$$* s_3 = d + qd^2.$$

Ici nous définissons par s_0 tous les paramètres du vecteur θ et par s_1 tous les paramètres à l'exception de la corrélation. La notation s_2 correspond aux paramètres $\underline{\omega}$, A_i^+ et A_i^- et enfin s_3 correspond aux paramètres $\underline{\omega}$ et A_i^+ .

C.2.1 Les dérivées premières du quasi-log-vraisemblance

Dans ce paragraphe nous établissons les dérivées premières du critère. Pour alléger les écritures, nous utilisons les notations suivantes

$$\begin{aligned} D_{0t} &= D_t(\theta_0), & R_0 &= R(\theta_0), \\ D_{0t}^{(i)} &= \frac{\partial D_t}{\partial \theta_i}(\theta_0), & R_0^{(i)} &= \frac{\partial R}{\partial \theta_i}(\theta_0), \\ D_{0t}^{(i,j)} &= \frac{\partial D_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_0), & R_0^{(i,j)} &= \frac{\partial R}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_0). \end{aligned}$$

Nous rappelons l'expression du critère

$$l_t(\theta) = \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log(\det(H_t)).$$

En utilisant l'expression de la matrice H_t , nous pouvons écrire le critère en fonction des matrices D_t et R . Cette écriture permet de calculer les dérivées en fonction des paramètres 1 à s_1 et de $s_1 + 1$ à s_0 .

$$\begin{aligned} l_t(\theta) &= \underline{\varepsilon}_t' (D_t R D_t)^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log(\det(D_t R D_t)) \\ &= \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log(\det(D_t) \det(R) \det(D_t)) \\ &= \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + 2 \log(\det(D_t)) + \log(\det(R)). \end{aligned}$$

Nous décrivons par $l_{1,t}(\theta)$ la quantité

$$l_{1,t}(\theta) = \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t,$$

et par $l_{2,t}(\theta)$ la quantité

$$l_{2,t}(\theta) = 2 \log(\det(D_t)) + \log(\det(R)).$$

Les dérivées premières s'expriment de deux façons. Nous exprimons les dérivées par rapport au paramètre θ_i . Nous utiliserons également la notation $\underline{\varepsilon}_t = D_t \tilde{\eta}_t$, avec $\tilde{\eta}_t = R^{1/2} \eta_t$.

(i) Pour $i = 1, \dots, s_1$, ce qui correspond au vecteur de paramètres $(\underline{\omega}', \alpha_1^{+'}, \dots, \alpha_q^{+'}, \alpha_1^{-'}, \dots, \alpha_q^{-'}, \beta_1', \dots, \beta_p')'$. Nous avons

$$\frac{\partial l_t(\theta)}{\partial \theta_i} = -Tr \left((\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} + R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t') D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \right) + 2Tr \left(D_t^{-1} D_t^{(i)} \right) \quad (C.11)$$

$$= Tr \left[(I_d - R^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') D_t^{(i)} D_t^{-1} + (I_d - \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t' R^{-1}) D_t^{-1} D_t^{(i)} \right]. \quad (C.12)$$

Nous obtenons ces expressions avec les deux relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{1,t}(\theta)}{\partial \theta_i} &= Tr \left(\frac{\partial \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t}{\partial D_t'} D_t^{(i)} \right) = Tr \left(\frac{\partial Tr(\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1})}{\partial D_t'} D_t^{(i)} \right) \\ &= -Tr \left((\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} + R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t') D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \right), \\ \frac{\partial l_{2,t}(\theta)}{\partial \theta_i} &= 2Tr \left(\frac{\partial \log(\det(D_t))}{\partial D_t'} D_t^{(i)} + \frac{\partial \log(\det(R))}{\partial D_t'} D_t^{(i)} \right) \\ &= 2Tr \left(D_t^{-1} D_t^{(i)} \right), \end{aligned}$$

effectivement, la dérivée de la matrice R par rapport à celle de D_t est nulle. En utilisant la propriété de la trace, $Tr(AB) = Tr(BA)$, nous obtenons (C.12).

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} &= -Tr \left((\underline{\varepsilon}_{0t} \underline{\varepsilon}_{0t}' D_{0t}^{-1} R_0^{-1} + R_0^{-1} D_{0t}^{-1} \underline{\varepsilon}_{0t} \underline{\varepsilon}_{0t}') D_{0t}^{-1} D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} - 2D_{0t}^{-1} D_{0t}^{(i)} \right) \\ &= Tr \left(-D_{0t} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t' R_0^{-1} D_{0t}^{-1} D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t' D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} + D_{0t}^{-1} D_{0t}^{(i)} + D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} \right) \\ &= Tr \left(-D_{0t}^{-1} D_{0t} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t' R_0^{-1} D_{0t}^{-1} D_{0t}^{(i)} + (I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} + D_{0t}^{-1} D_{0t}^{(i)} \right) \\ &= Tr \left((I_d - \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t' R_0^{-1}) D_{0t}^{-1} D_{0t}^{(i)} + (I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} \right), \end{aligned}$$

ce qui prouve (C.12).

(ii) Pour $i = s_1 + 1, \dots, s_0$, ce qui correspond aux paramètres ρ' . Nous avons

$$\frac{\partial l_t(\theta)}{\partial \theta_i} = -Tr \left(R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(i)} \right) + Tr \left(R^{-1} R^{(i)} \right) \quad (C.13)$$

$$= Tr \left[(I_d - R^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') R^{-1} R^{(i)} \right]. \quad (C.14)$$

Ces deux expressions sont obtenues avec les deux relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_{1,t}(\theta)}{\partial \theta_i} &= Tr \left(\frac{\partial \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t}{\partial R'} R^{(i)} \right) = Tr \left(\frac{\partial Tr(\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1})}{\partial R'} R^{(i)} \right) \\ &= -Tr \left(R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(i)} \right), \\ \frac{\partial l_{2,t}(\theta)}{\partial \theta_i} &= Tr \left(\frac{\partial 2 \log(\det(D_t))}{\partial R'} R^{(i)} + \frac{\partial \log(\det(R))}{\partial R'} R^{(i)} \right) \\ &= Tr \left(R^{-1} R^{(i)} \right), \end{aligned}$$

effectivement, la dérivée de la matrice D_t par rapport à celle de R est nulle. Comme pour le point (i), nous obtenons (C.14) par

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} &= -Tr \left(R_0^{-1} D_{0t}^{-1} \underline{\varepsilon}_{0t} \underline{\varepsilon}_{0t}' D_{0t}^{-1} R_0^{-1} R_0^{(i)} - R_0^{-1} R_0^{(i)} \right) \\ &= -Tr \left((-I_d + R_0^{-1} D_{0t}^{-1} \underline{\varepsilon}_{0t} \underline{\varepsilon}_{0t}' D_{0t}^{-1}) R_0^{-1} R_0^{(i)} \right) \\ &= Tr \left((I_d - R_0^{-1} D_{0t}^{-1} \underline{\varepsilon}_{0t} \underline{\varepsilon}_{0t}' D_{0t}^{-1}) R_0^{-1} R_0^{(i)} \right). \end{aligned}$$

Nous remarquons que $D_{0t}^{-1} \underline{\varepsilon}_{0t} \underline{\varepsilon}_{0t}' D_{0t}^{-1} = D_{0t}^{-1} D_{0t} R_0^{1/2} \eta_t \eta_t' R_0^{1/2} D_{0t} D_{0t}^{-1} = \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t'$ et alors (C.14).

C.2.2 Existence des moments de tout ordre du score

En utilisant les relations (C.12) et (C.14) du paragraphe C.2.1, nous allons montrer l'existence des moments du score pour tous les ordres.

(i) Pour $i = 1, \dots, s_1$ nous utilisons l'expression de la dérivée (C.12)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} \right| &= \left| \text{Tr} \left[(I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} + (I_d - \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t' R_0^{-1}) D_{0t}^{-1} D_{0t}^{(i)} \right] \right| \\ &\leq 2d \left\| (I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') \right\| \left\| D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} \right\| \\ &\leq K \left\| D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} \right\|. \end{aligned}$$

(ii) Pour $i = s_1 + 1, \dots, s_0$ nous utilisons l'expression de la dérivée (C.14)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} \right| &= \left| \text{Tr} \left[(I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') R_0^{-1} R_0^{(i)} \right] \right| \\ &\leq d \left\| (I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') \right\| \left\| R_0^{-1} R_0^{(i)} \right\| \\ &\leq K, \end{aligned}$$

effectivement, la dérivée de la matrice R est une matrice constante.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons trois majorations supplémentaires.

(iii) Pour $i, j = 1, \dots, s_1$, nous utilisons l'expression de la dérivée (C.12)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_j} \right| &= \mathbb{E} \left| \text{Tr} \left[(I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} + (I_d - \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t' R_0^{-1}) D_{0t}^{-1} D_{0t}^{(i)} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \text{Tr} \left[(I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') D_{0t}^{(j)} D_{0t}^{-1} + (I_d - \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t' R_0^{-1}) D_{0t}^{-1} D_{0t}^{(j)} \right] \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left[K_1 \left\| D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} \right\| \times K_2 \left\| D_{0t}^{(j)} D_{0t}^{-1} \right\| \right] \\ &\leq K \left(\mathbb{E} \left\| D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} \right\|^2 \mathbb{E} \left\| D_{0t}^{(j)} D_{0t}^{-1} \right\|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

(iv) Pour $i = 1, \dots, s_1$ et $j = s_1 + 1, \dots, s_0$, nous utilisons les deux expressions de la dérivée (C.12) et (C.14)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_j} \right| &= \mathbb{E} \left| \text{Tr} \left[(I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} + (I_d - \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t' R_0^{-1}) D_{0t}^{-1} D_{0t}^{(i)} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \text{Tr} \left[(I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') R_0^{-1} R_0^{(j)} \right] \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left[K_1 \left\| D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} \right\| \times K_2 \right] \\ &\leq K \mathbb{E} \left\| D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} \right\|. \end{aligned}$$

(v) Pour $i, j = s_1 + 1, \dots, s_0$, nous utilisons l'expression de la dérivée (C.14)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_j} \right| &= \mathbb{E} \left| \text{Tr} \left[(I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') R_0^{-1} R_0^{(i)} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \text{Tr} \left[(I_d - R_0^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') R_0^{-1} R_0^{(j)} \right] \right| \\ &\leq \mathbb{E} [K_1 \times K_2] \\ &\leq K. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'existence des moments des dérivées premières du critère de log-vraisemblance, il est nécessaire d'étudier les cas (i), (iii) et (iv). Pour avoir le résultat souhaité, il faut montrer que le terme $\|D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1}\|$ est fini. La matrice D_{0t} peut s'écrire

$$D_{0t} = \text{diag}(\underline{h}_t^{1/2}(\theta_0)) = \text{diag}\left((\underline{h}_t^{\delta/2}(\theta_0))^{1/\delta}\right),$$

et en faisant un travail composante par composante, nous avons pour $i_1 = 1, \dots, d$ et $i = 1, \dots, s_1$

$$\frac{\partial D_{0t}(i_1, i_1)}{\partial \theta_i} = \frac{1}{\delta_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \times \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i}(\theta_0). \quad (\text{C.15})$$

Pour contrôler le terme $\|D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1}\|$, il est équivalent de contrôler $\{1/h_{i_1, t}^{1/2}\} \times \{\partial h_{i_1, t}^{1/2}/\partial \theta_i\}$ en θ_0 . Pour cela, il est suffisant de montrer que pour tout $r_0 \geq 1$

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i}(\theta_0) \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.16})$$

Pour montrer (C.16), nous utilisons l'écriture matricielle (C.8). Nous distinguerons trois cas pour prouver (C.16), qui correspondent aux cas où θ_i désigne $\underline{\omega}$, puis $A_l^\pm$ et enfin B_j .

(a) Pour $i = 1, \dots, d$, ce qui correspond aux paramètres $\underline{\omega}$, nous avons

$$\frac{\partial \mathbb{H}_t}{\partial \theta_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{B}^k \frac{\partial \underline{c}_{t-k}}{\partial \theta_i}, \quad (\text{C.17})$$

avec $\partial \underline{c}_{t-k}(j_1)/\partial \theta_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)'$, un vecteur composé de 0 avec un 1 à l'emplacement j_1 pour $j_1 = 1, \dots, d$.

$$\theta_i \frac{\partial \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \theta_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \theta_i \frac{\partial \underline{c}_{t-k}(j_1)}{\partial \theta_i} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}(j_1) = \mathbb{H}_t(i_1),$$

où $\mathbb{H}_t(i_1)$ est la i_1 -composante de $\mathbb{H}_t$. Finalement, nous obtenons la majoration suivante

$$\frac{1}{\mathbb{H}_t(i_1)} \frac{\partial \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \theta_i} \leq \frac{1}{\theta_i}.$$

(b) Pour $i = d+1, \dots, s_2$, ce qui correspond aux paramètres $A_l^\pm$, nous avons

$$\frac{\partial \mathbb{H}_t}{\partial \theta_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{B}^k \frac{\partial \underline{c}_{t-k}}{\partial \theta_i}, \quad (\text{C.18})$$

avec

$$\frac{\partial \underline{c}_{t-k}(j_1)}{\partial \theta_i} = \sum_{l=1}^q \sum_{j_2=1}^d \frac{\partial A_l^\pm(j_1, j_2)}{\partial \theta_i} (\varepsilon_{j_2, t-l}^\pm)^{\delta_{j_2}},$$

où $\{\partial A_l^\pm(j_1, j_2)/\partial \theta_i\}$ est une matrice composée de 0 avec un 1 à l'emplacement de θ_i .

$$\theta_i \frac{\partial \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \theta_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \theta_i \frac{\partial \underline{c}_{t-k}(j_1)}{\partial \theta_i} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}(j_1) = \mathbb{H}_t(i_1),$$

et finalement nous obtenons la majoration suivante

$$\frac{1}{\mathbb{H}_t(i_1)} \frac{\partial \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \theta_i} \leq \frac{1}{\theta_i}.$$

(c) Pour $i = s_2 + 1, \dots, s_1$, ce qui correspond aux paramètres B_l , nous avons

$$\frac{\partial \mathbb{H}_t}{\partial \theta_i} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^k \mathbb{B}^{j-1} \mathbb{B}^{(i)} \mathbb{B}^{k-j} \right\} \underline{c}_{t-k}. \quad (\text{C.19})$$

La matrice $\mathbb{B}^{(i)} = \partial \mathbb{B} / \partial \theta_i$ est composée de 0 et un 1 à la position de θ_i . Comme $\theta_i \mathbb{B}^{(i)} \leq \mathbb{B}$, nous avons

$$\theta_i \frac{\partial \mathbb{H}_t}{\partial \theta_i} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^k \mathbb{B}^{j-1} \mathbb{B} \mathbb{B}^{k-j} \right\} \underline{c}_{t-k} = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{B}^k \underline{c}_{t-k}.$$

En faisant un raisonnement composante par composante, nous avons

$$\theta_i \frac{\mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \theta_i} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}(j_1).$$

Nous utilisons le fait que $\mathbb{H}_t(i_1) \geq \omega + \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}(j_1)$, avec $\omega = \inf_{1 \leq i \leq d} \omega(i)$ et la relation $x/(1+x) \leq x^s$ qui est valide pour tout $x \geq 0$ et $s \in [0, 1]$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\theta_i}{\mathbb{H}_t(i_1)} \frac{\partial \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \theta_i} &\leq \sum_{j_1=1}^d \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}(j_1)}{\omega + \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}(j_1)} \\ &\leq \sum_{j_1=1}^d \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}(j_1)}{\omega} \right)^{s/r_0} \\ &\leq K \sum_{j_1=1}^d \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{sk/r_0} \underline{c}_{t-k}^{s/r_0}(j_1) \\ &\leq K \sum_{j_1=1}^d \underline{c}_{t-k}^{s/r_0}(j_1), \end{aligned}$$

avec la constante ρ qui appartient à l'intervalle $[0, 1[$. Comme $\underline{c}_{t-k}(\theta_0)$ a des moments de tous les ordres, voir le corollaire 2, nous avons prouvé que

$$\frac{\theta_i}{\mathbb{H}_t(i_1)} \frac{\partial \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \theta_i} < K.$$

Finalement, nous avons montré que nous pouvions majorer les points (a), (b) et (c). Par conséquent, nous avons montré que

$$\mathbb{E} \left| \frac{\theta_i}{\mathbb{H}_t(i_1)} \frac{\partial \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \theta_i} \right|^{r_0} < \infty.$$

Par continuité des différentes fonctions, les inégalités précédentes sont uniformes sur un voisinage $V(\theta_0)$ de θ_0 . Pour tout $i_1 = 1, \dots, d$ et pour tout $i = 1, \dots, s_1$, nous avons

$$\mathbb{E} \sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left| \frac{1}{\underline{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial \underline{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i}(\theta) \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.20})$$

C.2.3 Normalité asymptotique du vecteur du score

Le processus $\{\partial l_t(\theta_0)/\partial \theta\}_t$ est stationnaire et $\partial l_t(\theta_0)/\partial \theta$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$ engendrée par $\{\eta_u, u \leq t\}$. Par les dérivées premières (C.12) et (C.14), il suit que $\mathbb{E}[\partial l_t(\theta_0)/\partial \theta | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ et nous avons une suite de différence de martingale.

La propriété (C.20) nous assure que la matrice $I := \mathbb{E}[\partial l_t(\theta_0)/\partial \theta \partial l_t(\theta_0)/\partial \theta']$ est bien définie. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{p+2q+2}$, la suite $\{\lambda' \frac{\partial}{\partial \theta} l_t(\theta_0), \mathcal{F}_t\}_t$ est ergodique, stationnaire et une différence de martingale de carrés intégrables. Le théorème central limite de Billingsley (1961) entraîne que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I). \quad (\text{C.21})$$

C.2.4 Convergence de la matrice J

Pour montrer la convergence de la matrice J , il est nécessaire d'avoir les expressions des dérivées du critère à l'ordre 2. En partant des expressions (C.11) et (C.13) du paragraphe C.2.1, nous obtenons trois expressions en fonction de θ_i .

(i) Pour $i, j = 1, \dots, s_1$, ce qui correspond aux paramètres $\underline{\omega}$, $A_l^\pm$ et B_k , nous avons

$$\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \text{Tr}(c_1 + c_2 + c_3) \quad (\text{C.22})$$

avec

$$\begin{aligned} c_1 &= D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} \\ &\quad - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i,j)} + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i)}, \\ c_2 &= D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} + D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} \\ &\quad - D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i,j)} + D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i)}, \\ c_3 &= -2D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} + 2D_t^{-1} D_t^{(i,j)}. \end{aligned}$$

Les coefficients c_1 , c_2 et c_3 sont obtenus en décomposant la dérivée première (C.11) en trois termes.

$$\begin{aligned} d_1 &= \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1}, \\ d_2 &= R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1}, \\ d_3 &= D_t^{-1} D_t^{(j)}. \end{aligned}$$

Si nous considérons la formule de dérivation $(u_1 u_2 u_3 u_4)' = u_1' u_2 u_3 u_4 + u_1 u_2' u_3 u_4 + u_1 u_2 u_3' u_4 + u_1 u_2 u_3 u_4'$, nous obtenons facilement le terme c_1 à partir de d_1 avec

$$\begin{aligned} u_1 &= \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1}, & u_1' &= -\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1}; & u_2 &= R^{-1} D_t^{-1}, & u_2' &= -R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1}, \\ u_3 &= D_t^{(i)}, & u_3' &= D_t^{(i,j)}; & u_4 &= D_t^{-1}, & u_4' &= -D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1}. \end{aligned}$$

Le terme c_2 est obtenu à partir de d_2 de la même façon que c_1 . Il suffit de permuter $\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t'$ avec R^{-1} . Avec le terme d_3 et les formules de dérivations de matrices, nous obtenons facilement l'expression de c_3 .

(ii) Pour $i = 1, \dots, s_1$, ce qui correspond aux paramètres $\underline{\omega}$, $A_l^\pm$ et B_k et $j = s_1 + 1, \dots, s_0$, ce qui correspond aux paramètres ρ , nous avons

$$\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \text{Tr}(c_4 + c_5) \quad (\text{C.23})$$

avec

$$\begin{aligned} c_4 &= R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(j)}, \\ c_5 &= R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} R^{(j)}. \end{aligned}$$

Pour obtenir les coefficients c_4 et c_6 , nous utilisons la même décomposition d_1 , d_2 et d_3 de la dérivée première (C.11). Le terme d_3 ne dépendant pas de la matrice R , la dérivée de celui-ci est nulle.

(iii) Pour $i, j = s_1 + 1, \dots, s_0$, ce qui correspond aux paramètres ρ , nous avons

$$\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \text{Tr}(c_6) \quad (\text{C.24})$$

avec

$$\begin{aligned} c_6 = & R^{-1} R^{(i)} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(j)} + R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(j)} \\ & - R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(i,j)} - R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(j)} + R^{-1} R^{(i,j)}. \end{aligned}$$

Le terme c_6 est obtenu en dérivant la dérivée première (C.13) par rapport aux paramètres ρ , ou encore par rapport à la matrice de corrélation R . Cette dérivée peut se décomposer en deux termes d_4 et d_5 avec

$$\begin{aligned} d_4 &= R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(j)}, \\ d_5 &= R^{-1} R^{(j)}. \end{aligned}$$

Le terme d_4 donnera les trois premiers termes de la somme dans c_6 et le terme d_5 donnera le dernier terme de c_6 . Avec notre paramétrisation, la dérivée seconde de la matrice R est nulle, $R^{(i,j)} = \{\partial^2 R\} / \{\partial \theta_i \partial \theta_j\} = 0$.

Pour montrer l'existence des moments à tous les ordres r_0 des dérivées secondes du critère du log-vraisemblance, il est nécessaire et suffisant de contrôler le terme $\|D_t^{-1} D_t^{(i,j)}\|$. Tous les autres termes présents dans les $c_1, \dots, c_6$ sont déjà contrôlés dans le paragraphe C.2.2 pour montrer l'existence des moments du vecteur du score. Contrôler le terme $\|D_t^{-1} D_t^{(i,j)}\|$ est équivalent à contrôler la dérivée seconde de la matrice D_t par rapport à un θ_i et θ_j . Cette expression est

$$\frac{\partial^2 D_t(i_1, i_1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{1}{\delta_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \left[\frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_j} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i} \left(\frac{1}{\delta_{i_1}} - 1 \right) + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]. \quad (\text{C.25})$$

Dans cette expression nous remarquons qu'elle fait intervenir la dérivée première de h_t , ainsi que sa dérivée seconde. La dérivée première étant déjà contrôlée, par conséquent, nous avons uniquement à prouver que

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_0) \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.26})$$

Par l'écriture matricielle (C.8) du modèle, nous pouvons en déduire l'expression composante par composante

$$\mathbb{H}_t(i_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}(j_1).$$

Nous pouvons remarquer que certaines dérivées croisées sont nulles comme

$$\frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \omega_i^2} = \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \omega_i \partial \omega_j} = \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \omega_i \partial \alpha_j^{\pm}} = \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \alpha_i^{\pm} \partial \alpha_j^{\pm}} = \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \beta_i^2} = 0.$$

Il reste donc trois cas à traiter pour prouver (C.26).

(a) Pour $i = 1, \dots, d$, ce qui correspond aux paramètres $\underline{\omega}$ et pour un j fixé, nous avons

$$\frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \omega_i \partial \beta_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \left\{ \sum_{h=1}^k \mathbb{B}^{h-1}(i_1, j_1) \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{k-h}(i_1, j_1) \right\} \frac{\partial \underline{c}_{t-k}(j_1)}{\partial \omega_i}. \quad (\text{C.27})$$

En procédant comme pour (C.17) nous obtenons

$$\begin{aligned}\omega_i \beta_j \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \omega_i \partial \beta_j} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \left\{ \sum_{h=1}^k \mathbb{B}^{j-1}(i_1, j_1) \beta_j \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{k-h}(i_1, j_1) \right\} \omega_i \frac{\partial \underline{c}_{t-k}(j_1)}{\partial \omega_i} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d k \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}(j_1),\end{aligned}$$

et nous concluons que

$$\mathbb{E} \left| \frac{\omega_i \beta_j}{\mathbb{H}_t(i_1)} \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \omega_i \partial \beta_j} \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.28})$$

(b) Pour $i = d+1, \dots, s_2$, ce qui correspond aux paramètres $A_l^\pm$ et pour un j fixé, nous avons

$$\frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \alpha_i^\pm \partial \beta_j} = \sum_{l=1}^q \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{j_2=1}^d \left\{ \sum_{h=1}^k \mathbb{B}^{h-1}(i_1, j_1) \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{k-h}(i_1, j_1) \right\} \frac{\partial A_l^\pm(j_1, j_2)}{\partial \alpha_i^\pm} (\pm \varepsilon_{j_2, t-l}^\pm)^{\delta_{j_2}}. \quad (\text{C.29})$$

Comme pour (C.18), nous obtenons

$$\begin{aligned}\alpha_i^\pm \beta_j \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \alpha_i^\pm \partial \beta_j} &= \sum_{l=1}^q \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{j_2=1}^d \left\{ \sum_{h=1}^k \mathbb{B}^{h-1}(i_1, j_1) \beta_j \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{k-h}(i_1, j_1) \right\} \alpha_i^\pm \frac{\partial A_l^\pm(j_1, j_2)}{\partial \alpha_i^\pm} (\pm \varepsilon_{j_2, t-l}^\pm)^{\delta_{j_2}} \\ &\leq \sum_{l=1}^q \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{j_2=1}^d k \mathbb{B}^k(i_1, j_1) A_l^\pm(j_1, j_2) (\pm \varepsilon_{j_2, t-l}^\pm)^{\delta_{j_2}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d k \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}(j_1),\end{aligned}$$

et nous concluons que

$$\mathbb{E} \left| \frac{\alpha_i^\pm \beta_j}{\mathbb{H}_t(i_1)} \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \alpha_i^\pm \partial \beta_j} \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.30})$$

(c) Pour $i = s_2 + 1, \dots, s_1$, ce qui correspond aux paramètres B_l et pour un j fixé, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbb{H}_t}{\partial \beta_i \partial \beta_j} &= \sum_{k=2}^{\infty} \left[\sum_{l=2}^k \left\{ \left(\sum_{r=1}^{l-1} \mathbb{B}^{r-1} \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{l-1-r} \right) \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \beta_i} \mathbb{B}^{k-l} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{k-1} \left\{ \mathbb{B}^{l-1} \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \beta_i} \left(\sum_{r=1}^{k-l} \mathbb{B}^{r-1} \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{k-l-r} \right) \right\} \right] \underline{c}_{t-k}. \quad (\text{C.31})\end{aligned}$$

Comme pour les autres points, nous avons

$$\begin{aligned}\beta_i \beta_j \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} &= \sum_{j_1=1}^d \sum_{k=2}^{\infty} \left[\sum_{l=2}^k \left\{ \left(\sum_{r=1}^{l-1} \mathbb{B}^{r-1}(i_1, j_1) \beta_j \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{l-1-r}(i_1, j_1) \right) \beta_i \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_i} \mathbb{B}^{k-l}(i_1, j_1) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{k-1} \left\{ \mathbb{B}^{l-1}(i_1, j_1) \beta_i \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_i} \left(\sum_{r=1}^{k-l} \mathbb{B}^{r-1}(i_1, j_1) \beta_j \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{k-l-r}(i_1, j_1) \right) \right\} \right] \underline{c}_{t-k}(i_1) \\ &\leq \sum_{j_1=1}^d \sum_{k=2}^{\infty} \left[\sum_{l=2}^k (l-1) \mathbb{B}^k(i_1, j_1) + \sum_{l=1}^{k-1} (k-l) \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \right] \underline{c}_{t-k}(j_1) \\ &\leq \sum_{j_1=1}^d \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}(j_1).\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, nous pouvons en déduire que

$$\mathbb{E} \left| \frac{\beta_i \beta_j}{\mathbb{H}_t(i_1)} \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.32})$$

Finalement, par les majorations (a), (b) et (c), nous déduisons l'existence des moments des dérivées secondes et par continuité, les inégalités sont uniformes sur un voisinage $V(\theta_0)$ de θ_0 . Pour tout $i_1 = 1, \dots, d$ et pour tout $i, j = 1, \dots, s_1$, nous avons

$$\mathbb{E} \sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left| \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta) \right|^{r_0} < \infty.$$

Il est maintenant nécessaire de montrer l'existence des moments d'ordre r_0 des dérivées troisièmes du critère du log-vraisemblance. Pour cela, nous commençons par donner les différentes expressions des dérivées. Comme pour les dérivées premières et secondes, les expressions seront les traces des sommes de termes c_i .

(iv) Pour $i, j, k = 1, \dots, s_1$, ce qui correspond aux paramètres $\underline{\omega}$, $A_l^\pm$ et $B_{l'}$, nous avons

$$\frac{\partial^3 l_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} = \text{Tr} \left(\sum_{p=1}^4 (c_{1p} + c_{2p}) + c_{31} + c_{32} \right), \quad (\text{C.33})$$

avec

$$\begin{aligned} c_{11} &= -D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(k)} - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(k)} \\ &\quad + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i, j)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(k)} - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(k)} \\ &\quad - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i, k)}, \\ c_{12} &= -D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} \\ &\quad - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i, j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} \\ &\quad - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i, k)}, \\ c_{13} &= D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j, k)} + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j, k)} \\ &\quad + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j, k)} - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i, j, k)}, \\ c_{14} &= -D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} \\ &\quad - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i, j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} \\ &\quad - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i, k)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{21} &= -D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(k)} - D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(k)} \\
&\quad + D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i,j)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(k)} - D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(k)} \\
&\quad - D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i,k)}, \\
c_{22} &= -D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} - D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} \\
&\quad - D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i,j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} \\
&\quad - D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i,k)}, \\
c_{23} &= D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j,k)} + D_t R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j,k)} \\
&\quad + D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j,k)} - D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i,j,k)}, \\
c_{24} &= -D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} - D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} \\
&\quad - D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i,j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} \\
&\quad - D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i,k)}, \\
c_{31} &= -2 \left(-D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} D_t^{(i,j)} D_t^{-1} D_t^{(k)} \right. \\
&\quad \left. - D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(k)} + D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(j,k)} \right), \\
c_{32} &= 2 \left(-D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j,k)} + D_t^{-1} D_t^{(i,j,k)} \right).
\end{aligned}$$

Pour obtenir cette expression, nous partons de la dérivée seconde de $l_t(\theta_0)$ définie en (C.22). Les méthodes de dérivations sont celles utilisées pour les précédentes dérivées. Ici, chaque terme c_1 , c_2 et c_3 de la dérivée (C.22) a été décomposé afin de faciliter le calcul de la dérivée.

(v) Pour $i, j, k = s_1 + 1, \dots, s_0$, ce qui correspond aux paramètres ρ , nous avons

$$\frac{\partial^3 l_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} = Tr(c_{61} + c_{62} + c_{63} + c_{64} + c_{65}) \quad (C.34)$$

avec

$$\begin{aligned}
c_{61} &= -R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(j)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(k)} + R^{-1} R^{(i,j)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(k)} \\
&\quad - R^{-1} R^{(j)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(k)} + R^{-1} R^{(j)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(i,k)}, \\
c_{62} &= -R^{-1} R^{(i)} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(j)} R^{-1} R^{(k)} - R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(j)} R^{-1} R^{(k)} \\
&\quad + R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(i,j)} R^{-1} R^{(k)} - R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(j)} R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(k)} \\
&\quad + R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(j)} R^{-1} R^{(i,k)}, \\
c_{63} &= R^{-1} R^{(i)} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' R^{-1} R^{(j,k)} + R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(j,k)} - R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' R^{-1} R^{(i,j,k)}, \\
c_{64} &= R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(j)} R^{-1} R^{(k)} - R^{-1} R^{(i,j)} R^{-1} R^{(k)} + R^{-1} R^{(j)} R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(k)} - R^{-1} R^{(j)} R^{-1} R^{(i,k)}, \\
c_{65} &= -R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(j,k)} + R^{-1} R^{(i,j,k)}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons cette dérivée à partir de la dérivée seconde (C.24). Chaque terme composant la somme c_6 à été décomposé de sorte à faciliter le calcul de la dérivée.

(vi) Pour $i, j = 1, \dots, s_1$, ce qui correspond aux paramètres $\underline{\omega}$, $A_l^\pm$ et $B_{l'}$ et pour $k = s_1 + 1, \dots, s_0$, ce qui correspond aux paramètres ρ , nous avons

$$\frac{\partial^3 l_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} = Tr(c_{41} + c_{51}) \quad (C.35)$$

avec

$$\begin{aligned}
c_{41} &= -R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} + R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i,j)}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} \\
&\quad - R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)}, \\
c_{51} &= -R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} \\
&\quad + R^{-1}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}D_t^{(i,j)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)}.
\end{aligned}$$

Cette dérivée s'obtient à partir de la dérivée seconde définie en (C.23). Les éléments composant cette dérivée donnent les termes c_{41} et c_{51} .

(vii) Pour $i = 1, \dots, s_1$, ce qui correspond aux paramètres $\underline{\omega}$, $A_l^\pm$ et $B_{l'}$ et pour $j, k = s_1 + 1, \dots, s_0$, ce qui correspond aux paramètres ρ , nous avons

$$\frac{\partial^3 l_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} = \text{Tr}(c_{61'} + c_{62'} + c_{63'}) \quad (\text{C.36})$$

avec

$$\begin{aligned}
c_{61'} &= -R^{-1}R^{(j)}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(k)}, \\
c_{62'} &= -R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(k)}, \\
c_{63'} &= R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(i,j)} + R^{-1}D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(i,j)}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir cette dérivée troisième du critère, nous partons de la dérivée définie en (C.24). Nous remarquons que les deux derniers termes de c_6 ne sont pas composés de la matrice D_t et que par conséquent la dérivée de ceux-ci est nulle.

Pour montrer l'existence des moments d'ordre r_0 de la dérivée troisième du critère de la log-vraisemblance, il est nécessaire d'étudier la norme du terme $D_t^{-1}D_{0t}$ que nous obtenons par le troisième terme du coefficient c_{11} , c'est à dire $c_{11}^{(3)} = D_t^{-1}\varepsilon_t\varepsilon_t'D_t^{-1}R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i,j)}D_t^{-1}D_t^{(k)}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left| \text{Tr} \left(c_{11}^{(3)} \right) \right| \right] &\leq K \mathbb{E} \|\tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t'\| \mathbb{E} \left[\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|D_t^{-1}D_{0t}\|^2 \|R^{-1}\| \|D_t^{-1}D_t^{(i,j)}\| \|D_t^{-1}D_t^{(k)}\| \right] \\
&\leq K \mathbb{E} \left[\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|D_t^{-1}D_{0t}\|^2 \|D_t^{-1}D_t^{(i,j)}\| \|D_t^{-1}D_t^{(k)}\| \right]. \quad (\text{C.37})
\end{aligned}$$

Il faut donc prouver que pour tout $r_0 \geq 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|D_t^{-1}D_{0t}\|^{r_0} \right] < \infty. \quad (\text{C.38})$$

Par l'écriture matricielle (C.8) la i_1 -ième composante de $\underline{h}_t^{\delta/2}(\theta_0)$ est égale à

$$\underline{h}_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta_0) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{j_2=1}^d \sum_{i=1}^q \mathbb{B}_0^k(i_1, j_1) \left\{ A_{0i}^+(j_1, j_2)(\varepsilon_{j_2,t-k-i}^+)^{\delta_{j_2}} + A_{0i}^-(j_1, j_2)(-\varepsilon_{j_2,t-k-i}^-)^{\delta_{j_2}} \right\}$$

où c_0 est une constante strictement positive. Pour un voisinage $V(\theta_0)$ de θ_0 suffisamment petit, nous avons

$$\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \frac{A_{0i}^+(j_1, j_2)}{A_i^+(j_1, j_2)} < K, \quad \sup_{\theta \in V(\theta_0)} \frac{A_{0i}^-(j_1, j_2)}{A_i^-(j_1, j_2)} < K, \quad \sup_{\theta \in V(\theta_0)} \frac{\mathbb{B}_0^k(i_1, j_1)}{\mathbb{B}^k(i_1, j_1)} \leq (1 + \xi)^k$$

pour tout $i_1, j_1, j_2 \in \{1, \dots, d\}$ et pour tout entier k et tout $\xi > 0$. De plus les coefficients $A_{0i}^+(j_1, j_2)$ et $A_{0i}^-(j_1, j_2)$ sont minorés par une constante strictement positive $c > 0$ uniformément sur un

voisinage $V(\theta_0)$ de θ_0 . Nous avons alors le quotient suivant

$$\begin{aligned} \frac{\underline{h}_{0t}^{\delta/2}(i_1)}{\underline{h}_t^{\delta/2}(i_1)} &\leq K + K \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{j_2=1}^d \sum_{i=1}^q \left\{ \frac{(1+\xi)^k \mathbb{B}^k(i_1, j_1) (\varepsilon_{j_2, t-k-i}^+)^{\delta_{j_2}}}{\omega + c \mathbb{B}^k(i_1, j_1) (\varepsilon_{j_2, t-k-i}^+)^{\delta_{j_2}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+\xi)^k \mathbb{B}^k(i_1, j_1) (-\varepsilon_{j_2, t-k-i}^-)^{\delta_{j_2}}}{\omega + c \mathbb{B}^k(i_1, j_1) (-\varepsilon_{j_2, t-k-i}^-)^{\delta_{j_2}}} \right\} \\ &\leq K + K \sum_{j_2=1}^d \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^{\infty} (1+\xi)^k \rho^{ks} \varepsilon_{j_2, t-k-i}^{\delta_{j_2}s}, \end{aligned}$$

pour $\rho \in [0, 1]$, pour tout $\xi > 0$ et pour tout $s \in [0, 1]$. Par le Corollaire 2, nous avons alors pour tout $r_0 > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left| \frac{\underline{h}_{0t}^{\delta/2}(i_1)}{\underline{h}_t^{\delta/2}(i_1)} \right|^{r_0} \right] < \infty. \quad (\text{C.39})$$

Par (C.82), il suit que $\mathbb{E}[\sup_{\theta \in V(\theta)} \|D_{0t} D_t^{-1}\|^{r_0}] < \infty$.

Il faut également contrôler le terme $\|D_t^{-1} D_t^{(i,j,k)}\|$, car les autres termes semblables sont déjà contrôlés pour les dérivées d'ordres inférieurs et le terme $R^{(i,j,k)}$ est nul puisque $R^{(i,j)}$ l'était.

La dérivée troisième de la matrice D_t par rapport aux paramètres θ_i , θ_j et θ_k s'exprime pour $i, j, k = 1, \dots, s_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 D_t(i_1, j_1)}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} &= \frac{1}{\delta_{i_1}^2} h_{i_1, t}^{1/2} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_k} \left[\frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_j} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i} \left(\frac{1}{\delta_{i_1}} - 1 \right) + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\delta_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \left[-\frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_k} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_j} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i} \left(\frac{1}{\delta_{i_1}} - 1 \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i} \left(\frac{1}{\delta_{i_1}} - 1 \right) + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_j} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_k} \left(\frac{1}{\delta_{i_1}} - 1 \right) \\ &\quad \left. - \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_k} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^3 h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \right]. \end{aligned}$$

Cette expression fait intervenir la dérivée première, seconde et troisième de $\underline{h}_t$. Les dérivées aux ordres 1 et 2 étant déjà contrôlées, il est suffisant de prouver que

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^3 h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}(\theta) \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.40})$$

En reprenant l'écriture matricielle composante par composante du modèle (C.8)

$$\mathbb{H}_t(i_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \mathcal{C}_{t-k}(j_1),$$

nous pouvons exprimer les dérivées selon les différents paramètres. Comme de nombreuses dérivées secondes étaient déjà nulles, il n'y a que les dérivées du type $\{\partial^3 \mathbb{H}_t(i_1)\} / \{\partial \theta_i \partial \beta_j \partial \beta_k\}$ à traiter, avec $\theta_i \neq \beta_j$ et $\theta_i \neq \beta_k$, les autres dérivées étant nulles.

(d) Pour $i = 1, \dots, d$, ce qui correspond aux paramètres $\underline{\omega}$ et pour un j et k fixés, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t}{\partial \omega_i \partial \beta_j \partial \beta_k} &= \sum_{k'=2}^{\infty} \left[\sum_{l=2}^{k'} \left\{ \left(\sum_{r=1}^{l-1} \mathbb{B}^{r-1} \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \beta_k} \mathbb{B}^{l-1-r} \right) \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{k'-l} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{k'-1} \left\{ \mathbb{B}^{l-1} \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \beta_j} \left(\sum_{r=1}^{k'-l} \mathbb{B}^{r-1} \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial \beta_k} \mathbb{B}^{k'-l-r} \right) \right\} \right] \frac{\partial \underline{c}_{t-k'}(j_1)}{\partial \omega_i}. \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

En procédant de la même façon que les dérivées secondes (C.27) et (C.31), nous obtenons

$$\begin{aligned} \omega_i \beta_j \beta_k \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \omega_i \partial \beta_j \partial \beta_k} &= \sum_{j_1=1}^d \sum_{k'=2}^{\infty} \left[\sum_{l=2}^{k'} \left\{ \left(\sum_{r=1}^{l-1} \mathbb{B}^{r-1}(i_1, j_1) \beta_k \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_k} \mathbb{B}^{l-1-r}(i_1, j_1) \right) \beta_j \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{k'-l}(i_1, j_1) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{k'-1} \left\{ \mathbb{B}^{l-1}(i_1, j_1) \beta_j \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \left(\sum_{r=1}^{k'-l} \mathbb{B}^{r-1}(i_1, j_1) \beta_k \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_k} \mathbb{B}^{k'-l-r}(i_1, j_1) \right) \right\} \right] \omega_i \frac{\partial \underline{c}_{t-k'}(j_1)}{\partial \omega_i}. \\ &\leq \sum_{j_1=1}^d \sum_{k'=2}^{\infty} \left[\sum_{l=2}^{k'} (l-1) \mathbb{B}^{k'}(i_1, j_1) + \sum_{l=1}^{k'-1} (k'-l) \mathbb{B}^{k'}(i_1, j_1) \right] \underline{c}_{t-k'}(j_1) \\ &\leq \sum_{j_1=1}^d \sum_{k'=2}^{\infty} k'(k'-1) \mathbb{B}^{k'}(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k'}(j_1). \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\mathbb{E} \left| \omega_i \beta_j \beta_k \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \omega_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.42})$$

(e) Pour $i = d+1, \dots, s_2$, ce qui correspond aux paramètres $A_{l'}^{\pm}$ et pour un j et k fixés, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \alpha_i^{\pm} \partial \beta_j \partial \beta_k} &= \sum_{l'=1}^q \sum_{k'=2}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{j_2=1}^d \left[\sum_{l=2}^{k'} \left\{ \left(\sum_{r=1}^{l-1} \mathbb{B}^{r-1}(i_1, j_1) \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_k} \mathbb{B}^{l-1-r}(i_1, j_1) \right) \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{k'-l}(i_1, j_1) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{k'-1} \left\{ \mathbb{B}^{l-1}(i_1, j_1) \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \left(\sum_{r=1}^{k'-l} \mathbb{B}^{r-1}(i_1, j_1) \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_k} \mathbb{B}^{k'-l-r}(i_1, j_1) \right) \right\} \right] \frac{\partial A_{l'}^{\pm}(j_1, j_2)}{\partial \alpha_i^{\pm}} (\pm \varepsilon_{j_2, t-l}^{\pm})^{\delta_{j_2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

En multipliant l'équation (C.43) par les paramètres, nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha_i^{\pm} \beta_j \beta_k \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \alpha_i^{\pm} \partial \beta_j \partial \beta_k} &= \sum_{l'=1}^q \sum_{k'=2}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{j_2=1}^d \left[\sum_{l=2}^{k'} \left\{ \left(\sum_{r=1}^{l-1} \mathbb{B}^{r-1}(i_1, j_1) \beta_k \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_k} \mathbb{B}^{l-1-r}(i_1, j_1) \right) \beta_j \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \mathbb{B}^{k'-l}(i_1, j_1) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{k'-1} \left\{ \mathbb{B}^{l-1}(i_1, j_1) \beta_j \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_j} \left(\sum_{r=1}^{k'-l} \mathbb{B}^{r-1}(i_1, j_1) \beta_k \frac{\partial \mathbb{B}(i_1, j_1)}{\partial \beta_k} \mathbb{B}^{k'-l-r}(i_1, j_1) \right) \right\} \right] \alpha_i^{\pm} \frac{\partial A_{l'}^{\pm}(j_1, j_2)}{\partial \alpha_i^{\pm}} (\pm \varepsilon_{j_2, t-l}^{\pm})^{\delta_{j_2}} \\ &\leq \sum_{l'=1}^q \sum_{k'=2}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{j_2=1}^d \left[\sum_{l=2}^{k'} (l-1) \mathbb{B}^{k'}(i_1, j_1) + \sum_{l=1}^{k'-1} (k'-l) \mathbb{B}^{k'}(i_1, j_1) \right] A_{l'}^{\pm}(j_1, j_2) (\pm \varepsilon_{j_2, t-l}^{\pm})^{\delta_{j_2}} \\ &\leq \sum_{j_1=1}^d \sum_{k'=2}^{\infty} k'(k'-1) \mathbb{B}^{k'}(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k'}(j_1), \end{aligned}$$

et nous concluons que

$$\mathbb{E} \left| \alpha_i^{\pm} \beta_j \beta_k \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \alpha_i^{\pm} \partial \beta_j \partial \beta_k} \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.44})$$

(f) Pour $i = s_2 + 1, \dots, s_1$, ce qui correspond aux paramètres $B_{i'}$ et pour un j et k fixés, tels que $\beta_i \neq \beta_j \neq \beta_k$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mathbb{H}_t}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} &= \sum_{k'=3}^{\infty} \left[\sum_{l=3}^{k'} \left[\sum_{r=2}^{l-1} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{r-1} \mathbb{B}^{a-1} \mathbb{B}^{(k)} \mathbb{B}^{r-1-a} \right) \mathbb{B}^{(j)} \mathbb{B}^{l-1-r} \right\} \mathbb{B}^{(i)} \mathbb{B}^{k'-l} \right. \right. \\
&\quad + \sum_{r=1}^{l-2} \left\{ \mathbb{B}^{r-1} \mathbb{B}^{(j)} \left(\sum_{a=1}^{l-1-r} \mathbb{B}^{a-1} \mathbb{B}^{(k)} \mathbb{B}^{l-1-r-a} \right) \right\} \mathbb{B}^{(i)} \mathbb{B}^{k'-l} \left. \right] \\
&\quad + \sum_{l=2}^{k'-1} \left\{ \left(\sum_{r=1}^{l-1} \mathbb{B}^{r-1} \mathbb{B}^{(j)} \mathbb{B}^{l-1-r} \right) \mathbb{B}^{(i)} \left(\sum_{a=1}^{k'-l} \mathbb{B}^{a-1} \mathbb{B}^{(k)} \mathbb{B}^{k'-l-a} \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{l=3}^{k'-1} \left[\sum_{r=2}^l \left\{ \left(\sum_{a=1}^{r-1} \mathbb{B}^{a-1} \mathbb{B}^{(k)} \mathbb{B}^{r-1-a} \right) \mathbb{B}^{(i)} \left(\sum_{m=1}^{k'-r} \mathbb{B}^{m-1} \mathbb{B}^{(j)} \mathbb{B}^{k'-r-m} \right) \right\} \right] \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k'-2} \left[\mathbb{B}^{l-1} \mathbb{B}^{(i)} \sum_{r=2}^{k'-l} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{r-1} \mathbb{B}^{a-1} \mathbb{B}^{(k)} \mathbb{B}^{r-1-a} \right) \mathbb{B}^{(j)} \mathbb{B}^{k'-l-r} \right\} \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbb{B}^{l-1} \mathbb{B}^{(i)} \sum_{r=1}^{k'-l-1} \left\{ \mathbb{B}^{r-1} \mathbb{B}^{(j)} \left(\sum_{a=1}^{k'-l-r} \mathbb{B}^{a-1} \mathbb{B}^{(k)} \mathbb{B}^{k'-l-r-a} \right) \right\} \right] \right] \mathcal{C}_{t-k}. \quad (\text{C.45})
\end{aligned}$$

Nous notons par $\mathbb{B}_{i_1, j_1}$ la composante (i_1, j_1) de la matrice $\mathbb{B}$. En multipliant par β_i , β_j et β_k nous obtenons la majoration suivante

$$\begin{aligned}
\beta_i \beta_j \beta_k \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} &= \sum_{j_1=1}^d \sum_{k'=3}^{\infty} \left[\sum_{l=3}^{k'} \left[\sum_{r=2}^{l-1} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{r-1} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{a-1} \beta_k \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(k)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{r-1-a} \right) \beta_j \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(j)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{l-1-r} \right\} \beta_i \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(i)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{k'-l} \right. \right. \\
&\quad + \sum_{r=1}^{l-2} \left\{ \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{r-1} \beta_j \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(j)} \left(\sum_{a=1}^{l-1-r} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{a-1} \beta_k \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(k)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{l-1-r-a} \right) \right\} \beta_i \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(i)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{k'-l} \left. \right] \\
&\quad + \sum_{l=2}^{k'-1} \left\{ \left(\sum_{r=1}^{l-1} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{r-1} \beta_j \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(j)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{l-1-r} \right) \beta_i \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(i)} \left(\sum_{a=1}^{k'-l} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{a-1} \beta_k \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(k)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{k'-l-a} \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{l=3}^{k'-1} \left[\sum_{r=2}^l \left\{ \left(\sum_{a=1}^{r-1} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{a-1} \beta_k \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(k)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{r-1-a} \right) \beta_i \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(i)} \left(\sum_{m=1}^{k'-r} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{m-1} \beta_j \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(j)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{k'-r-m} \right) \right\} \right] \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k'-2} \left[\mathbb{B}_{i_1, j_1}^{l-1} \beta_i \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(i)} \sum_{r=2}^{k'-l} \left\{ \left(\sum_{a=1}^{r-1} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{a-1} \beta_k \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(k)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{r-1-a} \right) \beta_j \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(j)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{k'-l-r} \right\} \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{l-1} \beta_i \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(i)} \sum_{r=1}^{k'-l-1} \left\{ \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{r-1} \beta_j \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(j)} \left(\sum_{a=1}^{k'-l-r} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{a-1} \beta_k \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{(k)} \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{k'-l-r-a} \right) \right\} \right] \right] \mathcal{C}_{t-k}(j_1) \\
&\leq \sum_{j_1=1}^d \sum_{k'=3}^{\infty} \left[\sum_{l=3}^{k'} (l-2) \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{k'} + \sum_{l=2}^{k'-1} (l-1)(k'-l) \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{k'} + \sum_{l=1}^{k'-2} (k'-l-1) \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{k'} \right] \mathcal{C}_{t-k}(j_1) \\
&\leq \sum_{j_1=1}^d \sum_{k'=3}^{\infty} k'(k'-1)(k'-2) \mathbb{B}_{i_1, j_1}^{k'} \mathcal{C}_{t-k}(j_1).
\end{aligned}$$

et nous concluons que

$$\mathbb{E} \left| \frac{\beta_i \beta_j \beta_k}{\mathbb{H}_t(i_1)} \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t(i_1)}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k} \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.46})$$

Les majorations (d), (e) et (f) prouvent l'existence des moments des dérivées troisièmes à tout ordre r_0 . Par continuité, les inégalités sont uniformes sur un voisinage $V(\theta_0)$ de θ_0 . Pour tout

$i_1 = 1, \dots, d$ et $i, j, k = 1, \dots, s_1$, nous avons

$$\mathbb{E} \sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left| \frac{1}{h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^3 h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}(\theta) \right|^{r_0} < \infty.$$

Ces majorations impliquent que tous les termes des dérivées d'ordre 3 du critère sont contrôlés. Par conséquent, nous avons montré que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left| \frac{\partial^3 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}(\theta) \right| \right] < \infty.$$

Si nous considérons le développement de Taylor des dérivées secondes du critère autour de θ_0 , pour tout i et j nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_{ij}^*) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_0) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta'} \left\{ \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\tilde{\theta}_{ij}) \right\} (\theta_{ij}^* - \theta_0), \quad (\text{C.47})$$

où les $\tilde{\theta}_{ij}$ sont entre θ_{ij}^* et θ_0 . Par la consistance, le théorème ergodique et (C.20), nous obtenons presque sûrement,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta'} \left\{ \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\tilde{\theta}_{ij}) \right\} \right\| &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left\| \frac{\partial}{\partial \theta'} \left\{ \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_{ij}) \right\} \right\| \\ &= \mathbb{E}_{\theta_0} \sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left\| \frac{\partial}{\partial \theta'} \left\{ \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_{ij}) \right\} \right\| < \infty. \end{aligned}$$

Comme $\|\theta_{ij}^* - \theta_0\| \rightarrow 0$ presque sûrement, le second terme à droite de l'équation (C.47) converge vers 0 avec probabilité 1. Et par une application du théorème ergodique et les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 2.2 de Francq et Zakoïan (2004), la convergence de la matrice J en découle et

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_{ij}^*) \longrightarrow J(i, j) \text{ en probabilité.} \quad (\text{C.48})$$

C.2.5 Inversibilité de la matrice J

Pour montrer l'inversibilité de la matrice J , il est plus facile d'utiliser l'écriture en fonction de H_t et non de D_t et R . Pour cela, nous calculons les dérivées du critère $\partial l_t / \partial \theta_i$ et $\partial^2 l_t / \{\partial \theta_i \partial \theta_j\}$ en fonction de la matrice H_t . Nous rappelons l'écriture du critère utilisé pour déterminer les dérivées premières et secondes

$$l_t(\theta) = \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log(\det(H_t)).$$

En utilisant les mêmes raisonnements de calcul, nous obtenons les dérivées premières et secondes suivantes

$$\frac{\partial l_t}{\partial \theta_i}(\theta) = \text{Tr} \left[(H_t^{-1} - H_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1}) H_t^{(i)} \right], \quad (\text{C.49})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta) &= \text{Tr} \left[-H_t^{-1} H_t^{(j)} H_t^{-1} H_t^{(i)} + H_t^{-1} H_t^{(i,j)} + H_t^{-1} H_t^{(j)} H_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1} H_t^{(i)} \right. \\ &\quad \left. + H_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1} H_t^{(j)} H_t^{-1} H_t^{(i)} - H_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1} H_t^{(i,j)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

La matrice J peut s'écrire via l'espérance conditionnelle

$$J = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_0) \right] = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_0) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \right).$$

Nous calculons l'espérance conditionnelle comme suit, avec la notation $H_{0t} = H_t(\theta_0)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_0) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] &= \mathbb{E} \left[-Tr \left(H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(j)} H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(i)} \right) - Tr \left(H_{0t}^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(i,j)} \right) \right. \\ &\quad + Tr \left(H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(j)} H_{0t}^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' H_{0t} H_{0t}^{(i)} \right) + Tr \left(H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(i,j)} \right) \\ &\quad \left. + Tr \left(H_{0t}^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(i)} H_{0t} H_{0t}^{(j)} \right) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= Tr \left(H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(i,j)} \right) - Tr \left(H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(j)} H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(i)} \right) \\ &\quad + Tr \left(H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(j)} H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(i)} \right) \mathbb{E} [\eta_t \eta_t' | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &\quad + Tr \left(H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(i)} H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(j)} \right) \mathbb{E} [\eta_t \eta_t' | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &\quad - Tr \left(H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(i,j)} \right) \mathbb{E} [\eta_t \eta_t' | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= Tr \left(H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(j)} H_{0t}^{-1} H_{0t}^{(i)} \right). \end{aligned}$$

Par la relation $Tr(A'B) = (\text{vec}A)' \text{vec}B$, nous avons

$$Tr \left(H_{0t} H_{0t}^{(i)} H_{0t} H_{0t}^{(j)} \right) = \mathbf{h}_i' \mathbf{h}_j,$$

où $\mathbf{h}_i = \text{vec}(H_{0t}^{-1/2} H_{0t}^{(i)} H_{0t}^{-1/2})$ et $\mathbf{h}_j = \text{vec}(H_{0t}^{-1/2} H_{0t}^{(j)} H_{0t}^{-1/2})$. Par la relation $\text{vec}(ABC) = (C' \otimes A) \text{vec}B$ nous avons $\mathbf{h}_i = ((H_{0t}^{-1/2})' \otimes H_{0t}^{-1/2}) \mathbf{d}_i$ avec $\mathbf{d}_i = \text{vec}(H_{0t}^{(i)})$. Nous définissons la matrice de dimension $d^2 \times s_0$, $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1 | \dots | \mathbf{h}_{s_0})$ et $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1 | \dots | \mathbf{d}_{s_0})$. Nous avons $\mathbf{h} = \mathbf{H} \mathbf{d}$ avec $\mathbf{H} = (H_{0t}^{-1/2})' \otimes H_{0t}^{-1/2}$.

En faisant un raisonnement par l'absurde, nous supposons que la matrice $J = \mathbb{E}[\mathbf{h} \mathbf{h}']$ est singulière. Il existe un vecteur non nul $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{s_0}$, tel que $\mathbf{c}' J \mathbf{c} = \mathbb{E}[\mathbf{c}' \mathbf{h}' \mathbf{h} \mathbf{c}] = 0$. Comme $\mathbf{c}' \mathbf{h}' \mathbf{h} \mathbf{c} \geq 0$ presque sûrement, cela signifie que $\mathbf{c}' \mathbf{h}' \mathbf{h} \mathbf{c} = \mathbf{c}' \mathbf{d}' \mathbf{H}^2 \mathbf{d} \mathbf{c} = 0$ presque sûrement. La matrice H_t étant définie positive, alors $H_t^{-1/2}$ l'est aussi et par conséquent $(H_t^{-1/2})' \otimes H_t^{-1/2}$ est définie positive. Ceci implique que $\mathbf{H}^2$ est une matrice définie positive avec probabilité 1 et par conséquent $\mathbf{d} \mathbf{c} = 0_{d^2}$ avec probabilité 1.

Nous décomposons le vecteur $\mathbf{c}$ comme $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1', \mathbf{c}_2')'$ avec $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^{s_1}$ et $\mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^{s_4}$ où $s_4 = s_0 - s_1 = d(d-1)/2$ ce qui représente uniquement les paramètres ρ . Les lignes $1, d+1, \dots, d^2$ des équations

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \mathbf{c} &= \sum_{i=1}^{s_0} c_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} \text{vec}(H_{0t}) \\ &= \sum_{i=1}^{s_0} c_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} \text{vec}(D_{0t} R_0 D_{0t}) \\ &= \sum_{i=1}^{s_0} c_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} [(D_{0t} \otimes D_{0t}) \text{vec}(R_0)] = 0_{d^2} \end{aligned} \tag{C.51}$$

donne

$$\sum_{i=1}^{s_1} c_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} h_t(\theta_0) = 0_d, \quad p.s. \tag{C.52}$$

En différenciant l'équation du modèle (2.1), nous aboutissons à

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{s_1} c_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} h_t^{\delta/2}(\theta_k) &= \sum_{k=1}^{s_1} c_k \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \theta_k} + \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^{s_1} c_k \frac{\partial A_i^+}{\partial \theta_k} (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^{s_1} c_k \frac{\partial A_i^-}{\partial \theta_k} (-\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\delta/2} \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{s_1} c_k \frac{\partial B_j}{\partial \theta_k} h_{t-j}^{\delta/2}(\theta_k) + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{s_1} c_k B_j \frac{\partial h_{t-j}}{\partial \theta_k}(\theta_k). \\ &= \underline{\omega}^* + \sum_{i=1}^q A_i^{+,*} (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + \sum_{i=1}^q A_i^{-,*} (-\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\delta/2} + \sum_{j=1}^p B_j^* h_{t-j}^{\delta/2} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{s_1} c_k B_j \frac{\partial h_{t-j}}{\partial \theta_k}(\theta_k). \end{aligned}$$

où

$$\underline{\omega}^* = \sum_{k=1}^{s_1} c_k \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \theta_k}, \quad A_i^{+,*} = \sum_{k=1}^{s_1} c_k \frac{\partial A_i^+}{\partial \theta_k}, \quad A_i^{-,*} = \sum_{k=1}^{s_1} c_k \frac{\partial A_i^-}{\partial \theta_k}, \quad B_i^* = \sum_{k=1}^{s_1} c_k \frac{\partial B_i}{\partial \theta_k}.$$

Par (C.52), nous avons pour tout t

$$\underline{\omega}_0^* + \sum_{i=1}^q A_{oi}^{+,*} (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + \sum_{i=1}^q A_{oi}^{-,*} (-\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\delta/2} + \sum_{j=1}^p B_j^* h_{t-j}^{\delta/2} = 0.$$

Il suit que

$$h_t^{\delta/2}(\theta_0) = (\underline{\omega}_0 - \underline{\omega}_0^*) + \sum_{i=1}^q (A_{oi}^+ - A_{oi}^{+,*}) (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + \sum_{i=1}^q (A_{oi}^- - A_{oi}^{-,*}) (-\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\delta/2} + \sum_{j=1}^p (B_{0j} - B_{0j}^*) h_{t-j}^{\delta/2}(\theta_0).$$

En introduisant le vecteur θ_1 où les s_1 premières composantes sont

$$\text{vec}(\underline{\omega}_0 - \underline{\omega}_0^* | A_{01}^+ - A_{01}^{+,*} | \dots | A_{01}^- - A_{01}^{-,*} | \dots | B_{01} - B_{01}^* | \dots),$$

nous obtenons $h_t^{\delta/2}(\theta_0) = h_t^{\delta/2}(\theta_1)$ en choisissant $\mathbf{c}_1$ suffisamment petit de telle sorte que $\theta_1 \in \Theta$. Si $\mathbf{c}_1$ n'est pas égal à zéro, alors $\theta_1 \neq \theta_0$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse d'identifiabilité, par conséquent $\mathbf{c}_1 = 0$ et l'équation (C.51) devient

$$(D_{0t} \otimes D_{0t}) \sum_{k=s_1+1}^{s_0} c_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} \text{vec} R_0 = 0_{d^2}, \quad p.s.$$

donc

$$\sum_{k=s_1+1}^{s_0} c_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} \text{vec} R_0 = 0_{d^2}.$$

Comme les vecteurs $\partial \text{vec} R_0 / \partial \theta_k$, $k = s_1 + 1, \dots, s_0$ sont linéairement indépendants, le vecteur $\mathbf{c}_2 = (\mathbf{c}_{s_1+1}, \dots, \mathbf{c}_{s_0})'$ est nul et alors $\mathbf{c} = 0$. Ceci est en contradiction avec $\mathbf{c}' \mathbf{h}' \mathbf{h} \mathbf{c} = \mathbf{c}' \mathbf{d}' \mathbf{H}^2 \mathbf{d} \mathbf{c} = 0$ presque sûrement et montre que l'hypothèse que la matrice J soit non inversible est absurde.

C.2.6 Oubli des valeurs initiales

Pour conclure la preuve, nous déduisons (C.9) et (C.10) de (C.21) et (C.48) et il reste à montrer que les valeurs initiales n'ont aucun effet sur les dérivées du critère. Ce que nous cherchons à prouver est

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left[\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{l}_t(\theta_0)}{\partial \theta'} \right] \right\| = o_{\mathbb{P}}(1) \quad (\text{C.53})$$

et, pour un certain voisinage $V(\theta_0)$ de θ_0

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left\| \frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} - \frac{\partial^2 \tilde{l}_t(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\| = o_{\mathbb{P}}(1). \quad (\text{C.54})$$

Par (C.11), nous obtenons que

$$\frac{\partial l_t(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \tilde{l}_t(\theta)}{\partial \theta_i} = \text{Tr}(d_1 + d_2 + d_3),$$

avec

$$\begin{aligned} d_1 &= -D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t (D_t^{-1} - \tilde{D}_t^{-1}) R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' \tilde{D}_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} (D_t^{(i)} - \tilde{D}_t^{(i)}) \\ &\quad - (D_t^{-1} - \tilde{D}_t^{-1}) \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' \tilde{D}_t^{-1} R^{-1} \tilde{D}_t^{-1} \tilde{D}_t^{(i)} - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' \tilde{D}_t^{-1} R^{-1} (D_t^{-1} - \tilde{D}_t^{-1}) \tilde{D}_t^{(i)}, \\ d_2 &= -D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t (D_t^{-1} - \tilde{D}_t^{-1}) \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} - D_t^{-1} R^{-1} \tilde{D}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} (D_t^{(i)} - \tilde{D}_t^{(i)}) \\ &\quad - (D_t^{-1} - \tilde{D}_t^{-1}) R^{-1} \tilde{D}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' \tilde{D}_t^{-1} \tilde{D}_t^{(i)} - D_t^{-1} R^{-1} \tilde{D}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' (D_t^{-1} - \tilde{D}_t^{-1}) \tilde{D}_t^{(i)}, \\ d_3 &= 2 \left[D_t^{-1} (D_t^{(i)} - \tilde{D}_t^{(i)}) + (D_t^{-1} - \tilde{D}_t^{-1}) \tilde{D}_t^{(i)} \right]. \end{aligned}$$

Pour prouver (C.53), il faut prouver que $\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t\| < \infty$, $\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|D_t(D_t^{-1} - \tilde{D}_t^{-1})\| < \infty$, $\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|D_t^{-1} D_t^{(i)}\| < \infty$ et $\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|D_t^{-1} (D_t^{(i)} - \tilde{D}_t^{(i)})\| < \infty$.

Par (B.7), (B.8), (B.9) et (B.10), nous pouvons déduire pour tout t

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} \|D_t - \tilde{D}_t\| &\leq K \rho^t, \quad \sup_{\theta \in \Theta} \|D_t^{-1}\| \leq K, \quad \sup_{\theta \in \Theta} \|\tilde{D}_t^{-1}\| \leq K, \\ \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{\tilde{h}_{i_1, t}^{1/2}}{h_{i_1, t}^{1/2}} \right| &\leq 1 + K \rho^t \quad \text{et} \quad \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{h_{i_1, t}^{1/2}}{\tilde{h}_{i_1, t}^{1/2}} \right| \leq 1 + K \rho^t, \quad \text{for } i_1 = 1, \dots, d. \end{aligned} \tag{C.55}$$

Par le fait que

$$D_t(D_t^{-1} - \tilde{D}_t^{-1}) = D_t D_t^{-1} - D_t \tilde{D}_t^{-1} = I_d - D_t \tilde{D}_t^{-1} = \tilde{D}_t \tilde{D}_t^{-1} - D_t \tilde{D}_t^{-1} = (\tilde{D}_t - D_t) \tilde{D}_t^{-1},$$

et les majorations précédentes, nous obtenons

$$\sup_{\theta \in \Theta} \|D_t(D_t^{-1} - \tilde{D}_t^{-1})\| = \sup_{\theta \in \Theta} \|(\tilde{D}_t - D_t) \tilde{D}_t^{-1}\| \leq K \rho^t. \tag{C.56}$$

A partir de l'écriture matricielle (C.8) nous avons

$$\mathbb{H}_t = \sum_{k=0}^{t-r-1} \mathbb{B}^k \underline{c}_{t-k} + \mathbb{B}^{t-r} \mathbb{H}_r, \quad \tilde{\mathbb{H}}_t = \sum_{k=0}^{t-r-1} \mathbb{B}^k \tilde{c}_{t-k} + \mathbb{B}^{t-r} \tilde{\mathbb{H}}_r$$

où r représente le maximum entre les ordres p et q , $r = \max\{p, q\}$. Le tilde signifie que les valeurs initiales sont prises en compte. Pour $i = 1, \dots, s_1$, et comme $\tilde{c}_t = c_t$ pour tout $t > r$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_t - \tilde{\mathbb{H}}_t &= \sum_{k=0}^{t-r-1} \mathbb{B}^k \underline{c}_{t-k} + \mathbb{B}^{t-r} \mathbb{H}_r - \sum_{k=0}^{t-r-1} \mathbb{B}^k \tilde{c}_{t-k} - \mathbb{B}^{t-r} \tilde{\mathbb{H}}_r \\ &= \sum_{k=0}^{t-r-1} \mathbb{B}^k \underline{c}_{t-k} + \mathbb{B}^{t-r} \mathbb{H}_r - \sum_{k=0}^{t-r-1} \mathbb{B}^k \underline{c}_{t-k} - \mathbb{B}^{t-r} \tilde{\mathbb{H}}_r \\ &= \mathbb{B}^{t-r} (\mathbb{H}_r - \tilde{\mathbb{H}}_r), \end{aligned}$$

et par conséquent la dérivée devient

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} (\mathbb{H}_t - \tilde{\mathbb{H}}_t) = \mathbb{B}^{t-r} \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\mathbb{H}_r - \tilde{\mathbb{H}}_r) + \sum_{k=1}^{t-r} \mathbb{B}^{k-1} \mathbb{B}^{(i)} \mathbb{B}^{t-r-k} (\mathbb{H}_r - \tilde{\mathbb{H}}_r).$$

Comme $\sup_{\theta \in \Theta} \rho(\mathbb{B}) < 1$ et (B.4) ou (B.5), il vient que

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left\| \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\mathbb{H}_t - \tilde{\mathbb{H}}_t) \right\| \leq K \rho^t,$$

et de manière équivalente

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left\| \frac{\partial}{\partial \theta_i} (h_t^{\delta/2}(\theta) - \tilde{h}_t^{\delta/2}(\theta)) \right\| \leq K \rho^t. \quad (\text{C.57})$$

Par (C.15), nous avons l'expression de la dérivée de la matrice D_t , ainsi que celle de $\tilde{D}_t$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} D_t(i_1, i_1) = \frac{1}{\delta_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \times \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta}}{\partial \theta_i}(\theta), \quad \frac{\partial}{\partial \theta_i} \tilde{D}_t(i_1, i_1) = \frac{1}{\delta_{i_1}} \tilde{h}_{i_1, t}^{1/2} \times \frac{1}{\tilde{h}_{i_1, t}^{\delta/2}} \frac{\partial \tilde{h}_{i_1, t}^{\delta}}{\partial \theta_i}(\theta),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} D_t^{-1}(i_1, i_1) \frac{\partial}{\partial \theta_i} (D_t - \tilde{D}_t)(i_1, i_1) &= \frac{1}{h_{i_1, t}^{1/2}} (h_{i_1, t}^{1/2} - \tilde{h}_{i_1, t}^{1/2}) \frac{1}{\delta_{i_1} h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i}(\theta) \\ &\quad + \frac{1}{h_{i_1, t}^{1/2}} (h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2} - \tilde{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}) \frac{\tilde{h}_{i_1, t}^{1/2}}{\delta_{i_1} h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2} \tilde{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i}(\theta) \\ &\quad + \frac{1}{h_{i_1, t}^{1/2}} \frac{\tilde{h}_{i_1, t}^{1/2}}{\delta_{i_1} \tilde{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \left(\frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i}(\theta) - \frac{\partial \tilde{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i}(\theta) \right). \end{aligned}$$

Par les majorations précédentes, nous obtenons

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left\| D_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta_i} (D_t - \tilde{D}_t) \right\| \leq K \rho^t u_t,$$

où u_t est une variable de carré intégrable. A partir de (C.39) et (C.56), on en déduit que

$$\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t\| = \sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|D_t^{-1} D_{0t} \tilde{\eta}_t\| \leq v_t \|\tilde{\eta}_t\|, \quad (\text{C.58})$$

$$\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|\tilde{D}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t\| = \sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|\tilde{D}_t^{-1} D_t\| \|D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t\| \leq (1 + K \rho^t) v_t \|\tilde{\eta}_t\|, \quad (\text{C.59})$$

où la variable aléatoire v_t admet des moments d'ordre 4. En appliquant les majorations précédentes, ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left| \frac{\partial l_t(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \tilde{l}_t(\theta)}{\partial \theta_i} \right| \leq K \rho^t w_t,$$

où w_t est une variable intégrable. Par l'inégalité de Markov, nous pouvons conclure que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \rho^t w_t = o_{\mathbb{P}}(1),$$

ce qui montre (C.53).

Par (C.22), nous obtenons que

$$\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \frac{\partial^2 \tilde{l}_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \text{Tr}(d_4 + d_5 + d_6 + d_7).$$

Les termes d_4 à d_7 sont des combinaisons maniées comme dans le cas des dérivées premières avec d_1, d_2 et d_3 .

$$\begin{aligned} d_4 &= D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t \left(D_t^{-1} - \tilde{D}_t^{-1} \right) R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)}, \\ d_5 &= \tilde{D}_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' \tilde{D}_t^{-1} \tilde{D}_t^{(i)} \tilde{D}_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \left(D_t^{(j)} - \tilde{D}_t^{(j)} \right), \\ d_6 &= -D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} \left(D_t^{(i,j)} - \tilde{D}_t^{(i,j)} \right). \end{aligned}$$

L'expression d_7 est une somme de termes qui sont obtenus comme d_4, d_5 et d_6 .

Pour prouver (C.54), il faut prouver que $\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \|D_t^{-1} (D_t^{(i,j)} - \tilde{D}_t^{(i,j)})\| < \infty$, les autres arguments étant les mêmes que pour (C.53). Par (C.25), nous avons l'expression de la dérivée de la matrice D_t ainsi que celle de $\tilde{D}_t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} D_t(i_1, i_1) &= \frac{1}{\delta_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_j} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i} \left(\frac{1}{\delta_{i_1}} - 1 \right) + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \tilde{D}_t(i_1, i_1) &= \frac{1}{\delta_{i_1}} \tilde{h}_{i_1, t}^{1/2} \frac{1}{\tilde{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial \tilde{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_j} \frac{1}{\tilde{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial \tilde{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i} \left(\frac{1}{\delta_{i_1}} - 1 \right) + \frac{1}{\tilde{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 \tilde{h}_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}. \end{aligned}$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned} D_t^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (D_t - \tilde{D}_t) &= \frac{1}{\underline{\delta}} D_t^{-1} (D_t - \tilde{D}_t) \text{diag} \left\{ \frac{1}{\underline{h}_t^{\delta/2}} \frac{\partial \underline{h}_t^{\delta/2}}{\partial \theta_j} \frac{1}{\underline{h}_t^{\delta/2}} \frac{\partial \underline{h}_t^{\delta/2}}{\partial \theta_i} \left(\frac{1}{\underline{\delta}} - 1 \right) + \frac{1}{\underline{h}_t^{\delta/2}} \frac{\partial^2 \underline{h}_t^{\delta/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\underline{\delta}} D_t^{-1} \tilde{D}_t \text{diag} \left\{ \left(\frac{1}{\underline{h}_t^{\delta/2}} \frac{\partial \underline{h}_t^{\delta/2}}{\partial \theta_j} \frac{1}{\underline{h}_t^{\delta/2}} \frac{\partial \underline{h}_t^{\delta/2}}{\partial \theta_i} - \frac{1}{\tilde{h}_t^{\delta/2}} \frac{\partial \tilde{h}_t^{\delta/2}}{\partial \theta_j} \frac{1}{\tilde{h}_t^{\delta/2}} \frac{\partial \tilde{h}_t^{\delta/2}}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{1}{\underline{\delta}} - 1 \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\underline{\delta}} D_t^{-1} \tilde{D}_t \text{diag} \left\{ \frac{1}{\underline{h}_t^{\delta/2}} \frac{\partial^2 \underline{h}_t^{\delta/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \frac{1}{\tilde{h}_t^{\delta/2}} \frac{\partial^2 \tilde{h}_t^{\delta/2}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\}. \end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que pour la dérivée première, nous obtenons

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left\| D_t^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} (D_t - \tilde{D}_t) \right\| \leq K \rho^t w_t^*,$$

où w_t^* est une variable aléatoire de carré intégrable. Finalement, nous avons

$$\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left| \frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \frac{\partial^2 \tilde{l}_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right| \leq K \rho^t w_t^*,$$

où w_t^* est une variable aléatoire intégrable. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli et l'inégalité de Markov, on en déduit que $\rho^t w_t^*$ tend vers 0 presque sûrement. Par conséquent, en appliquant le lemme de Cesàro, nous avons nécessairement que $n^{-1} \sum_{t=1}^n \rho^t w_t^*$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il suit en (C.54).

C.3 Puissance inconnue

Pour établir la normalité asymptotique de l'estimateur dans le cas où la puissance est inconnue, il sera utile de réécrire le modèle (2.1) sous sa forme matricielle, comme cela a été fait pour le cas où la puissance est connue.

$$\mathbb{H}_t^{(\tau)}(\vartheta) = \underline{c}_t^{(\tau)}(\vartheta) + \mathbb{B}(\vartheta) \mathbb{H}_{t-1}^{(\tau)}(\vartheta), \quad (\text{C.60})$$

avec

$$\mathbb{H}_t^{(\tau)}(\vartheta) = \begin{pmatrix} h_t^{\tau/2}(\vartheta) \\ h_{t-1}^{\tau/2}(\vartheta) \\ \vdots \\ h_{t-p+1}^{\tau/2}(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_t^{(\tau)}(\vartheta) = \begin{pmatrix} \underline{\omega} + \sum_{i=1}^q A_i^+(\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\tau/2} + A_i^-(\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\tau/2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{B}(\vartheta) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_p \\ I_d & & & 0 \\ 0 & I_d & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & I_d & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour simplifier les notations, nous écrirons $\mathbb{H}_t^{(\tau)}$ à la place de $\mathbb{H}_t^{(\tau)}(\vartheta)$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible et de manière similaire pour $\underline{c}_t^{(\tau)}$ et $\mathbb{B}$. En itérant cette expression, nous obtenons

$$\mathbb{H}_t^{(\tau)} = \underline{c}_t^{(\tau)} + \mathbb{B}\underline{c}_{t-1}^{(\tau)} + \mathbb{B}^2\underline{c}_{t-2}^{(\tau)} + \dots + \mathbb{B}^{t-1}\underline{c}_1^{(\tau)} + \mathbb{B}^t\mathbb{H}_0^{(\tau)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{B}^k \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}.$$

Pour démontrer le Théorème 2.4, nous décomposons la preuve en 6 étapes.

C.3.1 Les dérivées premières du quasi-log-vraisemblance.

C.3.2 Existence des moments de tout ordre du score.

C.3.3 Normalité asymptotique du vecteur du score.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I). \quad (\text{C.61})$$

C.3.4 Convergence de la matrice J .

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial^2 l_t(\vartheta_{ij}^*)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \longrightarrow J(i, j) \text{ en probabilité.} \quad (\text{C.62})$$

C.3.5 Inversibilité de la matrice J .

C.3.6 Oubli des valeurs initiales.

Pour faciliter les notations, nous reprenons les notations introduites dans le cas de la puissance connue, que nous redéfinissons par s_i pour $i = 0, \dots, 4$ qui correspond au nombre de paramètres étudiés dans le vecteur ϑ .

- * $s_0 = 2d + (p + 2q)d^2 + d(d - 1)/2$,
- * $s_1 = 2d + (p + 2q)d^2$,
- * $s_2 = d + (p + 2q)d^2$,
- * $s_3 = d + 2qd^2$,
- * $s_4 = d + qd^2$.

Ici nous définissons par s_0 l'ensemble des paramètres du vecteur ϑ et par s_1 tous les paramètres à l'exception de ceux modélisant la corrélation. Par s_2 nous tenons compte de tous les paramètres hormis ceux de la corrélation et de la puissance. La notation s_3 correspond aux paramètres $\underline{\omega}$, A_i^+ et A_i^- et enfin s_4 correspond aux paramètres $\underline{\omega}$ et A_i^+ .

C.3.1 Les dérivées premières du quasi-log-vraisemblance

Les résultats de ce paragraphe conduisent aux mêmes conclusions que ceux du paragraphe C.2.1. Il suffit de suivre la trame faite dans le cas connu et de considérer que s_1 correspond au vecteur de paramètres $(\underline{\omega}', \alpha_1^{+'}, \dots, \alpha_q^{+'}, \alpha_1^{-'}, \dots, \alpha_q^{-'}, \beta_1', \dots, \beta_p')$. Pour rappel, nous utilisons les notations

$$\begin{aligned} D_{0t} &= D_t(\vartheta_0), & R_0 &= R(\vartheta_0), \\ D_{0t}^{(i)} &= \frac{\partial D_t}{\partial \vartheta_i}(\vartheta_0), & R_0^{(i)} &= \frac{\partial R}{\partial \vartheta_i}(\vartheta_0), \\ D_{0t}^{(i,j)} &= \frac{\partial D_t}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}(\vartheta_0), & R_0^{(i,j)} &= \frac{\partial R}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}(\vartheta_0). \end{aligned}$$

et $\underline{\varepsilon}_t = D_t \tilde{\eta}_t$, avec $\tilde{\eta}_t = R^{1/2} \eta_t$.

Lorsque nous dérivons par rapport à ϑ_i for $i = 1, \dots, s_1$ nous obtenons :

$$\frac{\partial l_t(\vartheta)}{\partial \vartheta_i} 1 = -Tr \left((\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} + R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t') D_t^{-1} D_t^{(i)} \right) + 2Tr \left(D_t^{-1} D_t^{(i)} \right) \quad (C.63)$$

$$= Tr \left[(I_d - R^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') D_t^{(i)} D_t^{-1} + (I_d - \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t' R^{-1}) D_t^{-1} D_t^{(i)} \right]. \quad (C.64)$$

Nous dérivons par rapport à ϑ_i pour $i = s_1 + 1, \dots, s_0$ ce qui correspond aux paramètres ρ' . Nous avons

$$\frac{\partial l_t(\vartheta)}{\partial \vartheta_i} = -Tr \left(R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(i)} \right) + Tr \left(R^{-1} R^{(i)} \right) \quad (C.65)$$

$$= Tr \left[(I_d - R^{-1} \tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t') R^{-1} R^{(i)} \right]. \quad (C.66)$$

C.3.2 Existence des moments de tout ordre du score

Ce paragraphe présente des résultats additionnels par rapport au cas connu. Comme dans le cas connu, nous avons :

(i) pour $i = 1, \dots, s_1$

$$\left| \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta_i} \right| \leq K \left\| D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} \right\|,$$

(ii) pour $i = s_1 + 1, \dots, s_0$

$$\left| \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta_i} \right| \leq K,$$

(iii) pour $i, j = 1, \dots, s_1$

$$\mathbb{E} \left| \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta_j} \right| \leq K \left(\mathbb{E} \| D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} \|^2 \mathbb{E} \| D_{0t}^{(j)} D_{0t}^{-1} \|^2 \right)^{1/2},$$

(iv) pour $i = 1, \dots, s_1$ et $j = s_1 + 1, \dots, s_0$

$$\mathbb{E} \left| \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta_j} \right| \leq K \mathbb{E} \left\| D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1} \right\|,$$

(v) pour $i, j = s_1 + 1, \dots, s_0$, nous avons

$$\mathbb{E} \left| \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta_j} \right| \leq K.$$

Pour avoir l'existence des moments des dérivées premières du quasi-maximum de vraisemblance, cela revient à étudier les cas (i), (iii) et (iv) ci-dessus. Par conséquent il faut contrôler le terme $\|D_{0t}^{(i)} D_{0t}^{-1}\|$. La matrice D_{0t} peut s'écrire

$$D_{0t} = \text{Diag}(\underline{h}_t^{1/2}(\vartheta_0)) = \text{Diag}\left((\underline{h}_t^{\tau/2}(\vartheta_0))^{1/\tau}\right),$$

et nous pouvons faire un travail composante par composante.

Tous les résultats obtenus dans le paragraphe C.2.2 sont corrects, ce qui signifie que nous avons les mêmes estimations sur les dérivées obtenues par rapport à ϑ_i pour $i \in \{1, \dots, s_2\}$, c'est-à-dire tous les paramètres sauf la puissance. Donc pour $i_1 = 1, \dots, d$ et $i = 1, \dots, s_2$ nous avons

$$\frac{\partial D_t(i_1, i_1)}{\partial \vartheta_i} = \frac{1}{\tau_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \times \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_i} \quad (\text{C.67})$$

et les résultats restent inchangés.

En se focalisant sur le paramètre de puissance, la dérivée de la matrice D_t par rapport à τ est :

$$\frac{\partial D_t(i_1, i_1)}{\partial \tau_{i_1}} = h_{i_1, t}^{1/2} \left[-\delta_{j, i_1} \frac{1}{\tau_{i_1}^2} \log(h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}) + \frac{1}{\tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \right], \quad (\text{C.68})$$

où δ_{j, i_1} représente le symbole de Kronecker. En utilisant l'expression matricielle (C.60), nous calculons les dérivées $\partial \mathbb{H}_t^{(\tau)} / \partial \vartheta_i$ pour $i = s_2 + 1, \dots, s_1$ et pour $i_1 = 1, \dots, d$:

$$\frac{\partial \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \vartheta_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \frac{\partial \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)}{\partial \vartheta_i},$$

avec

$$\frac{\partial \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)}{\partial \vartheta_i} = \sum_{l=1}^q \sum_{j_2=1}^d \left\{ A_l^+(j_1, j_2) \frac{\partial (\varepsilon_{j_2, t-l}^+)^{\tau_{j_2}}}{\partial \vartheta_i} + A_l^-(j_1, j_2) \frac{\partial (-\varepsilon_{j_2, t-l}^-)^{\tau_{j_2}}}{\partial \vartheta_i} \right\}.$$

Ici dériver par rapport à ϑ_i revient à dériver par rapport à τ_{i_0} pour un indice $i_0 \in \{1, \dots, d\}$. Dans la suite des calculs, il est facile de travailler pour un ordre quelconque des dérivées, ce qui nous permet d'écrire les dérivées pour un ordre $\kappa \in \{1, 2, 3\}$,

$$\frac{\partial^\kappa (\varepsilon_{j_2, t-l}^\pm)^{\tau_{j_2}}}{\partial \vartheta_i^\kappa} = \frac{\partial^\kappa (\varepsilon_{j_2, t-l}^\pm)^{\tau_{j_2}}}{\partial \tau_{i_0}^\kappa} = \begin{cases} 0 & \text{si } j_2 \neq i_0 \\ \log^\kappa(\pm \varepsilon_{i_0, t-l}^\pm) (\pm \varepsilon_{i_0, t-l}^\pm)^{\tau_{i_0}} & \text{si } j_2 = i_0, \end{cases}$$

et nous avons

$$\frac{\partial^\kappa \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)}{\partial \tau_{i_0}^\kappa} = \sum_{l=1}^q A_l^+(j_1, i_0) \log^\kappa(\varepsilon_{i_0, t-l}^+) (\varepsilon_{i_0, t-l}^+)^{\tau_{i_0}} + A_l^-(j_1, i_0) \log^\kappa(-\varepsilon_{i_0, t-l}^-) (-\varepsilon_{i_0, t-l}^-)^{\tau_{i_0}}.$$

Par convention, nous considérons que $\log(x^+) = 0$ lorsque x est négatif et $\log(x^-) = 0$ lorsque x est positif.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\underline{c}_t^{(\tau)}(j_1)} \frac{\partial^\kappa \underline{c}_t^{(\tau)}(j_1)}{\partial \tau_{i_0}^\kappa} \right| &\leq \frac{\sum_{l=1}^q A_l^+(j_1, i_0) |\log(\varepsilon_{i_0, t-l}^+)|^\kappa (\varepsilon_{i_0, t-l}^+)^{\tau_{i_0}} + A_l^-(j_1, i_0) |\log(-\varepsilon_{i_0, t-l}^-)|^\kappa (-\varepsilon_{i_0, t-l}^-)^{\tau_{i_0}}}{\underline{\omega}(j_1) + \sum_{l=1}^q \sum_{j_2=1}^d \left\{ A_l^+(j_1, j_2) (\varepsilon_{j_2, t-l}^+)^{\tau_{j_2}} + A_l^-(j_1, j_2) (\varepsilon_{j_2, t-l}^-)^{\tau_{j_2}} \right\}} \\ &\leq \frac{\sum_{l=1}^q A_l^+(j_1, i_0) |\log(\varepsilon_{i_0, t-l}^+)|^\kappa (\varepsilon_{i_0, t-l}^+)^{\tau_{i_0}} + A_l^-(j_1, i_0) |\log(-\varepsilon_{i_0, t-l}^-)|^\kappa (-\varepsilon_{i_0, t-l}^-)^{\tau_{i_0}}}{\underline{\omega}(j_1) + \sum_{l=1}^q \left\{ A_l^+(j_1, i_0) (\varepsilon_{i_0, t-l}^+)^{\tau_{i_0}} + A_l^-(j_1, i_0) (-\varepsilon_{i_0, t-l}^-)^{\tau_{i_0}} \right\}} \\ &\leq \sum_{i=1}^q \left| \log(\varepsilon_{i_0, t-l}^+) \right|^\kappa + \left| \log(-\varepsilon_{i_0, t-l}^-) \right|^\kappa. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité

$$\mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1) \geq \omega + \sum_{k'=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^{k'}(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k'}^{(\tau)}(j_1) \geq \omega + \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)$$

qui est vraie pour n'importe quel $k \geq 0$ où $\omega = \inf_{1 \leq i \leq d} \underline{\omega}(i)$, et le fait que $x/(1+x) \leq x^s$ pour tout $x \geq 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sup_{\vartheta \in \Delta} \left| \frac{1}{\mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)} \frac{\partial^\kappa \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \vartheta_i^\kappa} \right| &\leq \sup_{\vartheta \in \Delta} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \frac{\mathbb{B}^k(i_1, j_1)}{\omega + \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)} \left| \frac{\partial^\kappa \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)}{\partial \vartheta_i^\kappa} \right| \\ &\leq \sup_{\vartheta \in \Delta} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \frac{\mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)}{\omega + \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)} \left| \frac{1}{\underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)} \frac{\partial^\kappa \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)}{\partial \vartheta_i^\kappa} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^\kappa} \sup_{\vartheta \in \Delta} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \frac{\mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)}{\omega + \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)} \left(\sum_{j=1}^q \left\{ \left| \log(\varepsilon_{j_1, t-k-j}^+) \right|^\kappa + \left| \log(-\varepsilon_{j_1, t-k-j}^-) \right|^\kappa \right\} \right) \\ &\leq \frac{1}{2^\kappa} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sup_{\vartheta \in \Delta} \left(\frac{\mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)}{\omega} \right)^s \left(\sum_{j=1}^q \left\{ \left| \log(\varepsilon_{j_1, t-k-j}^+) \right|^\kappa + \left| \log(-\varepsilon_{j_1, t-k-j}^-) \right|^\kappa \right\} \right) \\ &\leq K \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \rho^{sk} \sup_{\vartheta \in \Delta} \left(\underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1) \right)^s \left(\sum_{j=1}^q \left\{ \left| \log(\varepsilon_{j_1, t-k-j}^+) \right|^\kappa + \left| \log(-\varepsilon_{j_1, t-k-j}^-) \right|^\kappa \right\} \right). \end{aligned}$$

Nous avons $\mathbb{E}_{\vartheta_0}(\sup_{\vartheta \in \Delta} (\underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1))^{2s}) < \infty$, pour tout $s > 0$. Donc nous obtenons

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0} \left[\sup_{\vartheta \in \Delta} \left| \frac{1}{\mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)} \frac{\partial^\kappa \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \vartheta_i^\kappa} \right| \right] \leq K \sum_{j=1}^q (S_{i,j}^+ + S_{i,j}^-)$$

avec pour $j \geq 1$:

$$S_{i,j}^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{sk} \left(\mathbb{E}_{\vartheta_0} |\log(\pm \varepsilon_{i, t-k-j}^\pm)|^{2\kappa} \right)^{1/2}.$$

Par stationnarité, nous traitons seulement les termes $S_{i,1}^\pm$ et les calculs sont identiques lorsque nous remplacerons $\underline{\varepsilon}_t^+$ par $\underline{\varepsilon}_t^-$ donc nous traiterons seulement $S_{i,1}^+$. Nous avons pour n'importe quel $A > 0$

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0} |\log(\varepsilon_{j_1, t-k-j}^+)|^{2\kappa} \leq A + \mathbb{E}_{\vartheta_0} \left| \log(\varepsilon_{j_1, t-k-j}^+) \mathbb{1}_{\{|\log(\varepsilon_{j_1, t-k-j}^+)|^{2\kappa} \geq A\}} \right|^{2\kappa}.$$

$$\begin{aligned} S_{i,1}^+ &= A + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{sk} \left(\int_A^\infty \mathbb{P} \left(\left| \log(\varepsilon_{i, t-k-1}^+) \right|^{2\kappa} > x \right) dx \right)^{1/2} \\ &= A + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{sk} \left(\int_A^\infty \mathbb{P} \left(\left| \log(\varepsilon_{i, t-k-1}^+) \right| > x^{1/2\kappa} \right) dx \right)^{1/2} \\ &= A + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{sk} \left(\int_A^\infty 2\kappa x^{2\kappa-1} \mathbb{P} \left(\left| \log(\varepsilon_{i, t-k-1}^+) \right| > x \right) dx \right)^{1/2} \\ &= A + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{sk} \left(\int_A^\infty 2\kappa x^{2\kappa-1} \left[\mathbb{P} \left(\log(\varepsilon_{i, t-k-1}^+) > x \right) + \mathbb{P} \left(\log(\varepsilon_{i, t-k-1}^+) < -x \right) \right] dx \right)^{1/2} \\ &= A + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{sk} \left(\int_A^\infty 2\kappa x^{2\kappa-1} \left[\mathbb{P} \left(\varepsilon_{i, t-k-1}^+ \geq \exp\{x\} \right) + \mathbb{P} \left(\varepsilon_{i, t-k-1}^+ < \exp\{-x\} \right) \right] dx \right)^{1/2} \\ &= A + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{sk} (T_1^+ + T_2^+)^{1/2}. \end{aligned} \tag{C.69}$$

En utilisant l'inégalité de Markov, nous avons

$$T_1^+ = \int_A^\infty 2\kappa x^{2\kappa-1} \mathbb{P}(\varepsilon_{i,t-k-1}^+ \geq \exp\{x\}) dx \leq C. \quad (\text{C.70})$$

Le second terme T_2^+ est plus compliqué. Nous utilisons la propriété

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \mathbb{P}(\varepsilon_{i,t-k-1}^+ \leq y) = 0. \quad (\text{C.71})$$

C'est l'hypothèse A1 dans Pan *et al.* (2008) et dans notre cas c'est la conséquence du fait que η_t a une densité positive au voisinage de zéro (Hypothèse H8). Nous appliquons la propriété à $\mathbb{P}(\varepsilon_{i,t-k-1}^+ < \exp\{-x\})$. En effet nous pouvons trouver un $A > 0$ tel que $\exp\{-x\}$ est petit. Donc pour n'importe quel $x \geq A$:

$$\mathbb{P}(\varepsilon_{i,t-k-1}^+ < \exp\{-x\}) \leq c \exp\{-x\}. \quad (\text{C.72})$$

Par conséquent, le second terme T_2^+ satisfait

$$S_2^+ = \int_A^\infty 2\kappa x^{2\kappa-1} \mathbb{P}(\varepsilon_{i,t-k-1}^+ < \exp\{-x\}) dx \leq c \int_A^\infty 2\kappa x^{2\kappa-1} \exp\{-x\} dx \leq C < \infty. \quad (\text{C.73})$$

Nous utilisons (C.70) et (C.73) dans (C.69) et nous obtenons que

$$S_{i,1}^+ \leq A + C \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{sk} < \infty.$$

Il en découle

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0} \left[\sup_{\vartheta \in \Delta} \left| \frac{1}{\mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)} \frac{\partial^\kappa \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \vartheta_i^\kappa} \right| \right] < \infty,$$

ou encore pour tout $r_0 \geq 1$

$$\mathbb{E}_{\vartheta_0} \left[\sup_{\vartheta \in \Delta} \left| \frac{1}{\mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)} \frac{\partial^\kappa \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \vartheta_i^\kappa} \right|^{r_0} \right] < \infty,$$

Finalement nous avons montré pour tout $i_1 = 1, \dots, d$ que

$$\mathbb{E} \sup_{\vartheta \in V(\vartheta_0)} \left| \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_i}(\vartheta) \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.74})$$

C.3.3 Normalité asymptotique du vecteur du score

Les arguments sont les mêmes que ceux utilisés dans le cas connu. Nous remplacerons θ et θ_0 par ϑ et ϑ_0 .

C.3.4 Convergence de la matrice J

Pour établir la convergence de la matrice J , il est nécessaire d'avoir les expressions des dérivées du critère à l'ordre 2. En reprenant les dérivées (C.63) et (C.65) du paragraphe C.3.2, nous obtenons des expressions similaires au cas connu en fonction de ϑ_i .

(i) Pour $i, j = 1, \dots, s_1$

$$\frac{\partial^2 l_t(\vartheta)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \text{Tr}(c_1 + c_2 + c_3)$$

avec

$$\begin{aligned} c_1 &= D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} \\ &\quad - D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i,j)} + D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(j)} D_t^{-1} D_t^{(i)}, \\ c_3 &= -2D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} D_t^{(j)} + 2D_t^{-1} D_t^{(i,j)}. \end{aligned}$$

et c_2 est obtenu en remplaçant $\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t'$ par R^{-1} dans c_1 .

(ii) Pour $i = 1, \dots, s_1$ et $j = s_1 + 1, \dots, s_0$

$$\frac{\partial^2 l_t(\vartheta)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \text{Tr}(c_4 + c_5)$$

avec

$$\begin{aligned} c_4 &= R^{-1} D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(j)}, \\ c_5 &= R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} D_t^{(i)} D_t^{-1} R^{-1} R^{(j)}. \end{aligned}$$

(iii) Pour $i, j = s_1 + 1, \dots, s_0$

$$\frac{\partial^2 l_t(\vartheta)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \text{Tr}(c_6)$$

avec

$$\begin{aligned} c_6 &= R^{-1} R^{(i)} R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(j)} + R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(j)} \\ &\quad - R^{-1} D_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' D_t^{-1} R^{-1} R^{(i,j)} - R^{-1} R^{(i)} R^{-1} R^{(j)} + R^{-1} R^{(i,j)}. \end{aligned}$$

Pour montrer l'existence des moments à tous ordres r_0 des dérivées secondes du critère du log-vraisemblance, il ne faut contrôler que le terme $\|D_t^{-1} D_t^{(i,j)}\|$. Tous les autres termes présents dans les $c_1, \dots, c_6$ sont déjà contrôlés. Nous pouvons exprimer la dérivée seconde de la matrice D_t aux paramètres ϑ_i pour $i = 1, \dots, s_2$ et aux paramètres τ_j pour $j = s_2 + 1, \dots, s_1$.

(i) Pour $i, j = 1, \dots, s_2$

$$\frac{\partial^2 D_t(i_1, j_1)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \frac{1}{\tau_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \left[\frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_j} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{1}{\tau_{i_1}} - 1 \right) + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \right]$$

(ii) Pour un i_1 fixé avec $i_1 = 1, \dots, d$ et $j = 1, \dots, s_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D_t(i_1, j_1)}{\partial \tau_{i_1} \partial \vartheta_j} &= \frac{1}{\tau_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \left[-\frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_j} + \frac{1}{\tau_{i_1}} \left(\frac{1}{\tau_{i_1}} \log(h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}) + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \right) \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_i} + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1} \partial \vartheta_j} \right]. \end{aligned}$$

(iii) Pour $j = 1, \dots, s_2$ et pour un i_0 fixé tel que $i_0 = 1, \dots, d$ et $i_0 \neq i_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D_t(i_1, j_1)}{\partial \tau_{i_0} \partial \vartheta_j} &= \frac{1}{\tau_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \left[\frac{1}{\tau_{i_0}} \left(-\frac{1}{\tau_{i_0}} \log(h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}) + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_0}} \right) \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_0}} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_j} + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_0} \partial \vartheta_j} \right] \end{aligned}$$

(iv) Pour un i_1 fixé avec $i_1 = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D_t(i_1, j_1)}{\partial \tau_{i_1}^2} &= \frac{1}{\tau_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \left[-\frac{1}{\tau_{i_1}} \left(-\frac{1}{\tau_{i_1}} \log(h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}) + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\tau_{i_1}} \left(-\frac{1}{\tau_{i_1}} \log(h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}) + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \right)^2 + \frac{1}{\tau_{i_1}^2} \log(h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} - \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}^2} \right] \end{aligned}$$

(v) Pour i_1 fixé et i_0 fixé avec $i_1, i_0 = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D_t(i_1, j_1)}{\partial \tau_{i_1} \partial \tau_{i_0}} &= \frac{1}{\tau_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \left[\frac{1}{\tau_{i_0}} \left(-\frac{1}{\tau_{i_0}} \log(h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}) + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_0}} \right) \left(-\frac{1}{\tau_{i_1}} \log(h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}) + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_0}} + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_0}} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} + \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1} \partial \tau_{i_0}} \right] \end{aligned}$$

Ces expressions font intervenir la dérivée première de $\underline{h}_t$ ainsi que sa dérivée seconde. Comme la dérivée première est déjà contrôlée, pour la dérivée seconde du critère, il ne reste plus qu'à majorer

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}(\vartheta_0) \right|^{r_0} < \infty. \quad (\text{C.75})$$

Pour tout $i, j = 1, \dots, s_2$, cela revient à étudier le cas où la puissance est connue. Tous les résultats étant déjà démontrés dans le paragraphe C.2.4. Nous nous intéresserons donc qu'aux paramètres de puissance. Par l'écriture (C.60) du modèle, nous pouvons en déduire l'expression composante par composante

$$\mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1).$$

Nous pouvons noter que la dérivée croisée par rapport à ω et τ est nulle

$$\frac{\partial^2 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i \partial \omega_j} = 0.$$

Les dérivées premières de $\mathbb{H}_t^{(\tau)}$ par rapport à τ ne faisant intervenir qu'un seul τ_{i_1} , les dérivées croisées par rapport à un τ_{j_1} d'ordre supérieur sont nulles

$$\frac{\partial^2 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_{i_1} \partial \tau_{j_1}} = 0.$$

Il reste trois cas à traiter pour prouver (C.75).

(a) Pour $i = 1, \dots, d$, et pour un $\alpha_j^{\pm}$ fixé, nous avons

$$\frac{\partial^2 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i \partial \alpha_j^{\pm}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{l=1}^q \mathbb{B}^k \frac{\partial A_l^{\pm}(i_1, j_1)}{\partial \alpha_j^{\pm}} \log(\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm}) (\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm})^{\tau_{i_1}},$$

où $\{\partial A_l^\pm(i_1, j_1)/\partial \alpha_j^\pm\}$ est une matrice composée de 0 et de 1 à l'emplacement de $\alpha_j^\pm$. En multipliant par $\alpha_j^\pm$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha_j^\pm \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i \partial \alpha_j^\pm} &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{l=1}^q \mathbb{B}^k A_l^\pm \log(\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^\pm) (\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^\pm)^{\tau_{i_1}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \frac{\partial \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(j_1)}{\partial \tau_i}. \end{aligned}$$

En utilisant le même procédé que les dérivées premières du paragraphe C.3.2 et en fixant $\kappa = 1$, nous obtenons la majoration souhaitée. Finalement,

$$\mathbb{E} \left| \frac{\alpha_j^\pm}{\mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)} \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i \partial \alpha_j^\pm} \right|^{r_0} < \infty.$$

(b) Pour $i = 1, \dots, d$, et pour un β_j fixé, nous avons

$$\frac{\partial^2 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i \partial \beta_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \left\{ \sum_{l=1}^k \mathbb{B}^{l-1}(i_1, j_1) \mathbb{B}^{(j)}(i_1, j_1) \mathbb{B}^{k-l}(i_1, j_1) \right\} \frac{\partial \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i}.$$

En multipliant par β_j , nous obtenons

$$\beta_j \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i \partial \beta_j} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d k \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \frac{\partial \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i}.$$

Comme pour le point (a), nous procédons de la même façon que pour les dérivées premières. En fixant $\kappa = 1$, nous obtenons

$$\mathbb{E} \left| \frac{\beta_j}{\mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)} \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i \partial \beta_j} \right|^{r_0} < \infty.$$

(c) Pour $i = 1, \dots, d$, nous avons

$$\frac{\partial^2 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_{i_0}^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \frac{\partial^2 \underline{c}_{t-k}^{(\tau)}(i)}{\partial \tau_i^2}.$$

Pour conclure sur ce point, on fixe $\kappa = 2$ et nous utilisons le procédé développé pour les dérivées premières. Nous obtenons alors la majoration

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{\mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)} \frac{\partial^2 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i^2} \right|^{r_0} < \infty.$$

Par les majorations obtenues aux points (a), (b), (c) et (d), on en déduit l'existence des moments des dérivées secondes et par continuité les inégalités sont uniformes sur un voisinage $V(\vartheta_0)$ de ϑ_0 . Pour tout $i_1 = 1, \dots, d$ et pour tout $i, j = 1, \dots, s_1$, nous avons

$$\mathbb{E} \sup_{\vartheta \in V(\vartheta_0)} \left| \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}(\vartheta) \right|^{r_0} < \infty.$$

Pour conclure sur la convergence de la matrice J , il faut montrer l'existence des moments d'ordre r_0 des dérivées troisièmes du critère du log-vraisemblance. Comme pour les dérivées premières et

avec

$$\begin{aligned}
c_{61} &= -R^{-1}R^{(i)}R^{-1}R^{(j)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} + R^{-1}R^{(i,j)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} \\
&\quad - R^{-1}R^{(j)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(i)}R^{-1}R^{(k)} + R^{-1}R^{(j)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(i,k)}, \\
c_{62} &= -R^{-1}R^{(i)}R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(i)}R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(k)} \\
&\quad + R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(i,j)}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(i)}R^{-1}R^{(k)} \\
&\quad + R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(i,k)}, \\
c_{63} &= R^{-1}R^{(i)}R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'R^{-1}R^{(j,k)} + R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'R^{-1}R^{(i)}R^{-1}R^{(j,k)} - R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'R^{-1}R^{(i,j,k)}, \\
c_{64} &= R^{-1}R^{(i)}R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}R^{(i,j)}R^{-1}R^{(k)} + R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(i)}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(i,k)}, \\
c_{65} &= -R^{-1}R^{(i)}R^{-1}R^{(j,k)} + R^{-1}R^{(i,j,k)}.
\end{aligned}$$

(vi) Pour $i, j = 1, \dots, s_1$ et $k = s_1 + 1, \dots, s_0$,

$$\frac{\partial^3 l_t(\vartheta)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} = Tr(c_{41} + c_{51}), \quad (C.78)$$

avec

$$\begin{aligned}
c_{41} &= -R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} + R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i,j)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} \\
&\quad - R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)}, \\
c_{51} &= -R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} \\
&\quad + R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}D_t^{(i,j)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}D_t^{(j)}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)}.
\end{aligned}$$

(vii) Pour $i = 1, \dots, s_1$ et $j, k = s_1 + 1, \dots, s_0$,

$$\frac{\partial^3 l_t(\vartheta)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} = Tr(c_{61'} + c_{62'} + c_{63'}), \quad (C.79)$$

avec

$$\begin{aligned}
c_{61'} &= -R^{-1}R^{(j)}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(k)}, \\
c_{62'} &= -R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(k)} - R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(j)}R^{-1}R^{(k)}, \\
c_{63'} &= R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}R^{(i,j)} + R^{-1}D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}D_t^{(i)}D_t^{-1}R^{-1}R^{(i,j)}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir l'ensemble de ces dérivées troisièmes, le processus est identique à celui du cas connu.

Comme dans le cas connu, le terme qu'il faut contrôler pour montrer l'existence des moments d'ordre r_0 de la dérivée troisième du critère du log-vraisemblance est le terme $D_t^{-1}D_{0t}$. Les autres termes composant les c_{ij} se contrôlent de la même manière que lors des dérivées secondes ou premières. Si l'on s'intéresse au terme $c_{11}^{(3)} = D_t^{-1}\underline{\varepsilon}_t\underline{\varepsilon}_t'D_t^{-1}R^{-1}D_t^{-1}D_t^{(i,j)}D_t^{-1}D_t^{(k)}$ comme pour le cas connu, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sup_{\vartheta \in V(\vartheta_0)} \left| Tr \left(c_{11}^{(3)} \right) \right| \right] &\leq K \mathbb{E} \|\tilde{\eta}_t \tilde{\eta}_t'\| \mathbb{E} \left[\sup_{\vartheta \in V(\vartheta_0)} \|D_t^{-1}D_{0t}\|^2 \|R^{-1}\| \|D_t^{-1}D_t^{(i,j)}\| \|D_t^{-1}D_t^{(k)}\| \right] \\
&\leq K \mathbb{E} \left[\sup_{\vartheta \in V(\vartheta_0)} \|D_t^{-1}D_{0t}\|^2 \|D_t^{-1}D_t^{(i,j)}\| \|D_t^{-1}D_t^{(k)}\| \right]. \quad (C.80)
\end{aligned}$$

Il faut donc prouver que pour tout $r_0 \geq 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\vartheta \in V(\vartheta_0)} \|D_t^{-1}D_{0t}\|^{r_0} \right] < \infty. \quad (C.81)$$

Par l'écriture matricielle (C.8) la i_1 -ième composante de $\underline{h}_t^{\delta/2}(\vartheta_0)$ est égale à

$$\begin{aligned} \underline{h}_{0t}^{\delta_{i_1}/2}(\vartheta_0) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{j_2=1}^d \sum_{i=1}^q \mathbb{B}_0^k(i_1, j_1) \left\{ A_{0i}^+(j_1, j_2)(\varepsilon_{j_2, t-k-i}^+)^{\delta_{j_2}} \right. \\ \left. + A_{0i}^-(j_1, j_2)(-\varepsilon_{j_2, t-k-i}^-)^{\delta_{j_2}} \right\}, \end{aligned}$$

où c_0 est une constante strictement positive. Pour un voisinage $V(\vartheta_0)$ de ϑ_0 suffisamment petit, nous avons

$$\sup_{\vartheta \in V(\vartheta_0)} \frac{A_{0i}^+(j_1, j_2)}{A_i^+(j_1, j_2)} < K, \quad \sup_{\vartheta \in V(\vartheta_0)} \frac{A_{0i}^-(j_1, j_2)}{A_i^-(j_1, j_2)} < K, \quad \sup_{\vartheta \in V(\vartheta_0)} \frac{\mathbb{B}_0^k(i_1, j_1)}{\mathbb{B}^k(i_1, j_1)} \leq (1 + \xi)^k$$

pour tout $i_1, j_1, j_2 \in \{1, \dots, d\}$ et pour tout entier k et tout $\xi > 0$. De plus les coefficients $A_{0i}^+(j_1, j_2)$ et $A_{0i}^-(j_1, j_2)$ sont minorés par une constante strictement positive $c > 0$ uniformément sur un voisinage $V(\vartheta_0)$ de ϑ_0 . Nous avons alors le quotient suivant

$$\begin{aligned} \frac{\underline{h}_{0t}^{\delta/2}(i_1)}{\underline{h}_t^{\tau/2}(i_1)} &\leq K + K \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{j_2=1}^d \sum_{i=1}^q \left\{ \frac{(1 + \xi)^k \mathbb{B}^k(i_1, j_1)(\varepsilon_{j_2, t-k-i}^+)^{\delta_{j_2}}}{\omega + c \mathbb{B}^k(i_1, j_1)(\varepsilon_{j_2, t-k-i}^+)^{\tau_{j_2}}} + \frac{(1 + \xi)^k \mathbb{B}^k(i_1, j_1)(-\varepsilon_{j_2, t-k-i}^-)^{\delta_{j_2}}}{\omega + c \mathbb{B}^k(i_1, j_1)(-\varepsilon_{j_2, t-k-i}^-)^{\tau_{j_2}}} \right\} \\ &\leq K + K \sum_{j_2=1}^d \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \xi)^k \rho^{ks} \varepsilon_{j_2, t-k-i}^{\tau_{j_2}s}, \end{aligned}$$

pour $\rho \in [0, 1[$, pour tout $\xi > 0$ et pour tout $s \in [0, 1]$. Par le Corollaire 2, nous avons alors pour tout $r_0 > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\theta \in V(\theta_0)} \left| \frac{\underline{h}_{0t}^{\delta/2}(i_1)}{\underline{h}_t^{\tau/2}(i_1)} \right|^{r_0} \right] < \infty. \quad (\text{C.82})$$

Par (C.82), il suit que $\mathbb{E}[\sup_{\theta \in V(\theta)} \|D_{0t} D_t^{-1}\|^{r_0}] < \infty$.

Il reste à contrôler le terme $\|D_t^{-1} D_t^{(i, j, k)}\|$ pour conclure sur l'existence des moments de la dérivée troisième du critère. Comme pour la dérivée seconde, plusieurs dérivées troisièmes sont identiques au cas connu. Nous ne traiterons donc que celles qui sont différentes et qui font intervenir les paramètres τ_i . Les dérivées troisièmes de la matrice D_t s'expriment par

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_2}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_0}} - \frac{1}{\tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_2} \partial \tau_{i_0}} \\
& - \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_2}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_0}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} + \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_2} \partial \tau_{i_0}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \\
& - \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_0}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_2}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} + \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_0}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_2} \partial \tau_{i_1}} \\
& - \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_2}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1} \partial \tau_{i_0}} + \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^3 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_2} \partial \tau_{i_1} \partial \tau_{i_0}} \Bigg\}.
\end{aligned}$$

(vii) Pour i_1 fixé,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 D_t(i_1, j_1)}{\partial \tau_{i_1}^3} &= \frac{1}{\tau_{i_1}} h_{i_1,t}^{1/2} \left\{ -\frac{1}{\tau_{i_1}} \left(1 + \frac{1}{\tau_{i_1}} \log(h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}) - \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \right) \right. \\
& \left[-\frac{1}{\tau_{i_1}} \left(-\frac{1}{\tau_{i_1}} \log(h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}) + \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\tau_{i_1}} \left(-\frac{1}{\tau_{i_1}} \log(h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}) + \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \right)^2 + \frac{1}{\tau_{i_1}^2} \log(h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{\tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} - \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} + \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}^2} \right] \\
& + \frac{1}{\tau_{i_1}^2} \left(-\frac{1}{\tau_{i_1}} \log(h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}) + \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \right) \\
& - \frac{1}{\tau_{i_1}} \left(\frac{1}{\tau_{i_1}^2} \log(h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}) - \frac{1}{\tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \right. \\
& \left. - \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} + \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}^2} \right) \\
& - \frac{1}{\tau_{i_1}^2} \left(\frac{1}{\tau_{i_1}} \log(h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}) - \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \right) \\
& + \frac{1}{\tau_{i_1}^2} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} + \frac{1}{\tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} - \frac{1}{\tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}^2} \\
& + \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} - \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}^2} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \\
& + \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} - \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}^2} \\
& \left. - \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^2 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}^2} + \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^3 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_{i_1}^3} \right\}.
\end{aligned}$$

Ces expressions font intervenir les dérivées premières, secondes et troisièmes de $\underline{h}_t$. Comme nous avons déjà fait l'étude des dérivées premières et secondes, il ne reste plus qu'à majorer

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^3 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} (\vartheta_0) \right|^{r_0} < \infty, \quad (C.83)$$

pour contrôler le terme $\|D_t^{-1}D_t^{(i,j,k)}\|$.

Nous ne nous intéresserons qu'aux cas qui n'ont pas été traités dans le cas où la puissance est connue. En effet, pour $i, j = 1, \dots, s_2$ ces dérivées ont été étudiées dans le cas connu. Par l'écriture du modèle composante par composante

$$\mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^k(i_1, j_1) \mathcal{C}_{t-k}^{(\tau)}(j_1),$$

nous pouvons déterminer les dérivées à vérifier. Nous pouvons déjà noter que les dérivées croisées

$$\frac{\partial^3 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j \partial \omega_{i_1}} = 0, \quad \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \vartheta_i \partial \alpha_{i_0} \partial \alpha_{i_1}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_{i_1}^2} = 0,$$

et cela quel que soit le paramètre correspondant à ϑ_i et ϑ_j .

il reste alors les cinq cas suivants à traiter pour prouver (C.83).

(a) Pour $i = 1, \dots, d$ et pour $\alpha_j^{\pm}$ et β_k fixés, nous avons

$$\frac{\partial^3 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i \partial \alpha_j^{\pm} \partial \beta_k} = \sum_{k'=0}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{k'} \mathbb{B}^{r-1} \mathbb{B}^{(i)} \mathbb{B}^{k'-r} \right\} \sum_{j_1=1}^d \sum_{l=1}^q \frac{\partial A_l^{\pm}(i_1, j_1)}{\partial \alpha_j^{\pm}} \log(\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm}) (\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm})^{\tau_{i_1}},$$

En multipliant par $\alpha_j^{\pm}$ et β_k , nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha_j^{\pm} \beta_k \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i \partial \alpha_j^{\pm} \partial \beta_k} &= \sum_{k'=0}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{k'} \mathbb{B}^{r-1} \beta_j \mathbb{B}^{(i)} \mathbb{B}^{k'-r} \right\} \sum_{j_1=1}^d \sum_{l=1}^q \alpha_j^{\pm} \frac{\partial A_l^{\pm}(i_1, j_1)}{\partial \alpha_j^{\pm}} \log(\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm}) (\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm})^{\tau_{i_1}} \\ &\leq \sum_{k'=0}^{\infty} \mathbb{B}^{k'} A_l^{\pm}(i_1, j_1) \log(\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm}) (\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm})^{\tau_{i_1}} \\ &\leq \sum_{k'=0}^{\infty} \mathbb{B}^{k'} \frac{\partial \mathcal{C}_{t-k}(j_1)}{\partial \tau_i}. \end{aligned}$$

Pour conclure, nous procéderons comme pour les dérivées premières en fixant $\kappa = 1$ dans le paragraphe C.3.3.

(b) Pour $i = 1, \dots, d$ et pour β_j et β_k fixés avec $\beta_j \neq \beta_k$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i \partial \beta_j \partial \beta_k} &= \sum_{k'=2}^{\infty} \left[\sum_{l=2}^{k'} \left\{ \left(\sum_{r=1}^{l-1} \mathbb{B}^{r-1} \mathbb{B}^{(k')} \mathbb{B}^{l-1-r} \right) \mathbb{B}^{(j)} \mathbb{B}^{k'-l} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{k'-1} \left\{ \mathbb{B}^{l-1} \mathbb{B}^{(j)} \left(\sum_{r=1}^{k'-l} \mathbb{B}^{r-1} \mathbb{B}^{(k')} \mathbb{B}^{k'-l-r} \right) \right\} \right] \sum_{l=1}^q A_l^{\pm}(i_1, i) \log(\pm \varepsilon_{i, t-l}^{\pm}) (\pm \varepsilon_{i, t-l}^{\pm}). \end{aligned}$$

(c) Pour $i = 1, \dots, d$ et pour $\alpha_j^{\pm}$ fixé, nous avons

$$\frac{\partial^3 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i^2 \partial \alpha_j^{\pm}} = \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{l=1}^q \mathbb{B}^{k'} \frac{\partial A_l^{\pm}(i_1, j_1)}{\partial \alpha_j^{\pm}} \log^2(\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm}) (\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm})^{\tau_{i_1}}$$

En multipliant par $\alpha_j^{\pm}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha_j^{\pm} \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i^2 \partial \alpha_j^{\pm}} &= \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{l=1}^q \mathbb{B}^{k'} \alpha_j^{\pm} \frac{\partial A_l^{\pm}(i_1, j_1)}{\partial \alpha_j^{\pm}} \log^2(\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm}) (\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm})^{\tau_{i_1}} \\ &\leq \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \sum_{l=1}^q \mathbb{B}^{k'} A_l^{\pm}(i_1, j_1) \log^2(\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm}) (\pm \varepsilon_{i_1, t-l}^{\pm})^{\tau_{i_1}} \\ &\leq \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^{k'}(i_1, j_1) \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{t-k}(j_1)}{\partial \tau_i^2}. \end{aligned}$$

Le procédé utilisé pour les dérivées premières du paragraphe C.3.3 nous permettent de conclure en fixant $\kappa = 2$. Nous obtenons alors la majoration souhaitée.

(d) Pour $i = 1, \dots, d$ et pour β_j fixé, nous avons

$$\frac{\partial^3 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i^2 \partial \beta_j} = \sum_{k'=0}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{k'} \mathbb{B}^{r-1} \mathbb{B}^{(i)} \mathbb{B}^{k'-r} \right\} \sum_{l=1}^q A_i^{\pm}(i_1, i) \log^2(\pm \varepsilon_{i,t-l}^{\pm})(\pm \varepsilon_{i,t-l}^{\pm}).$$

En multipliant par β_j , nous obtenons

$$\begin{aligned} \beta_j \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i^2 \partial \beta_j} &= \sum_{k'=0}^{\infty} \left\{ \sum_{r=1}^{k'} \mathbb{B}^{r-1} \beta_j \mathbb{B}^{(i)} \mathbb{B}^{k'-r} \right\} \sum_{l=1}^q A_i^{\pm}(i_1, i) \log^2(\pm \varepsilon_{i,t-l}^{\pm})(\pm \varepsilon_{i,t-l}^{\pm}) \\ &\leq \frac{1}{2^2} \sum_{k'=0}^{\infty} k' \mathbb{B}^{k'} \sum_{l=1}^q A_i^{\pm}(i_1, i) \log^2(\pm \varepsilon_{i,t-l}^{\pm})(\pm \varepsilon_{i,t-l}^{\pm}) \\ &\leq \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^{k'}(i_1, j_1) \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{t-k}(j_1)}{\partial \tau_i^2}. \end{aligned}$$

Nous concluons en utilisant le même procédé que celui développé pour les dérivées premières en τ , au paragraphe C.3.3.

(e) Pour $i = 1, \dots, d$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathbb{H}_t^{(\tau)}(i_1)}{\partial \tau_i^3} &= \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^{k'}(i_1, j_1) \sum_{l=1}^q A_i^{\pm}(i_1, i) \log^3(\pm \varepsilon_{i,t-l}^{\pm})(\pm \varepsilon_{i,t-l}^{\pm}) \\ &= \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^d \mathbb{B}^{k'}(i_1, j_1) \frac{\partial^3 \mathcal{C}_{t-k}(j_1)}{\partial \tau_i^3}. \end{aligned}$$

Pour majorer cette quantité, nous procédons de la même façon que dans le paragraphe C.3.3 en considérant $\kappa = 3$.

Finalement, nous avons montré l'existence des moments des dérivées troisièmes de $h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}$ et par continuité, les inégalités sont uniformes sur un voisinage $V(\vartheta_0)$ de ϑ_0 . Pour tout $i_1 = 1, \dots, d$ et pour tout $i, j, k = 1, \dots, s_1$, nous avons

$$\mathbb{E} \sup_{\vartheta \in V(\vartheta_0)} \left| \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial^3 h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j \partial \vartheta_k}(\vartheta) \right|^{r_0} < \infty.$$

C.3.5 Inversibilité de la matrice J

En remplaçant θ par ϑ dans (C.51), les lignes $1, d+1, \dots, d^2$ de l'équation

$$\mathbf{dc} = \sum_{i=1}^{s_0} c_i \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} [(D_{0t} \otimes D_{0t}) \text{vec}(R_0)] = 0_{d^2} \quad (\text{C.84})$$

donne

$$\sum_{i=1}^{s_1} c_i \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} h_t(\vartheta_0) = 0_d, \quad \text{p.s.} \quad (\text{C.85})$$

$$(D_{0t} \otimes D_{0t}) \sum_{k=s_1+1}^{s_0} c_k \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} \text{vec} R_0 = 0_{d^2}, \quad \text{p.s.} \quad (\text{C.86})$$

Sous l'hypothèse **H8**, l'équation (C.86) est équivalente à

$$\sum_{k=s_1+1}^{s_0} c_k \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} \text{vec} R_0 = 0_{d^2}.$$

Comme les vecteurs $\partial \text{vec} R_0 / \partial \vartheta_k$, $k = s_1 + 1, \dots, s_0$ sont linéairement indépendants, le vecteur $\mathbf{c}_3 = (c_{s_1+1}, \dots, c_{s_0})'$ est nul. Par conséquent, l'équation (C.84) devient

$$\sum_{i=1}^{s_2} c_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} h_t(\vartheta_0) + \sum_{i=s_2+1}^{s_2+d} c_i \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} h_t(\vartheta_0) = 0_d, \quad \text{p.s.}$$

ou de manière équivalente

$$\sum_{i=1}^{s_2} c_{1,i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} h_t(\vartheta_0) + \sum_{i=1}^d c_{2,i} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} h_t(\vartheta_0) = 0_d, \quad \text{p.s.} \quad (\text{C.87})$$

Compte tenu de (2.1), la $i_1^{\text{ième}}$ composante de $\underline{h}_t^{\tau/2}(\vartheta_0)$ est

$$\begin{aligned} h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2} &= \underline{\omega}(i_1) + \sum_{i_2=1}^d \sum_{i=1}^q \left(A_{0i}^+(i_1, i_2) \left(\varepsilon_{i_2,t-i}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + A_{0i}^-(i_1, i_2) \left(\varepsilon_{i_2,t-i}^- \right)^{\tau_{i_2}} \right) \\ &+ \sum_{i_2=1}^d \sum_{i=1}^p B_{0i}(i_1, i_2) h_{i_2,t-i}^{\tau_{i_2}} \end{aligned} \quad (\text{C.88})$$

Pour $i_1 = 1, \dots, d$ et par (C.67) et (C.68), l'équation (C.87) devient

$$h_{i_1,t}^{1/2} \frac{1}{\tau_{i_1}^2} \frac{1}{h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}} \left[\sum_{i=1}^{s_2} c_{1,i} \tau_{i_1} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \theta_i}(\vartheta_0) + \sum_{i=1}^d c_{2,i} \tau_{i_1} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_i}(\vartheta_0) - c_{2,i_1} h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2} \log \left(h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2} \right) \right] = 0, \quad \text{p.s.} \quad (\text{C.89})$$

A partir de (C.88), nous définissons les dérivées récursivement par

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \theta}(\vartheta) &= \tilde{c}_t(\vartheta) + \sum_{i_2=1}^d \sum_{i=1}^p B_i(i_1, i_2) \frac{\partial h_{i_2,t-i}^{\tau_{i_2}/2}}{\partial \theta}(\vartheta), \\ \frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_j}(\vartheta) &= \sum_{i=1}^q \left(A_i^+(i_1, j) \log \left(\varepsilon_{j,t-i}^+ \right) \left(\varepsilon_{j,t-i}^+ \right)^{\tau_j} + A_i^-(i_1, j) \log \left(\varepsilon_{j,t-i}^- \right) \left(\varepsilon_{j,t-i}^- \right)^{\tau_j} \right) \\ &+ \sum_{i_2=1}^d \sum_{i=1}^p B_{0i}(i_1, i_2) \frac{\partial h_{i_2,t-i}^{\tau_{i_2}/2}}{\partial \tau_j}(\vartheta) \end{aligned}$$

pour $j = 1, \dots, d$, où $\tilde{c}_t(\vartheta)$ est défini par

$$\begin{aligned} \tilde{c}_t(\vartheta) &= \left(0, \dots, 1, 0, \dots, \left(\varepsilon_{i_1,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_1}}, 0, \dots, \left(\varepsilon_{i_d,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_d}}, 0, \dots, \left(\varepsilon_{i_1,t-q}^+ \right)^{\tau_{i_1}}, 0, \dots, \left(\varepsilon_{i_d,t-q}^+ \right)^{\tau_{i_d}}, \right. \\ &0, \dots, \left(-\varepsilon_{i_1,t-1}^- \right)^{\tau_{i_1}}, 0, \dots, \left(-\varepsilon_{i_d,t-1}^- \right)^{\tau_{i_d}}, 0, \dots, \left(-\varepsilon_{i_1,t-q}^- \right)^{\tau_{i_1}}, 0, \dots, \left(-\varepsilon_{i_d,t-q}^- \right)^{\tau_{i_d}}, \\ &\left. 0, \dots, h_{i_1,t-1}^{\tau_{i_1}/2}, 0, \dots, h_{i_d,t-1}^{\tau_{i_d}/2}, 0, \dots, h_{i_1,t-p}^{\tau_{i_1}/2}, 0, \dots, h_{i_d,t-p}^{\tau_{i_d}/2}, \dots, 0 \right)' \end{aligned} \quad (\text{C.90})$$

Pour la suite, nous nous restreignons au cas particulier correspondant au modèle CCC-APGARCH($p, 1$) (voir (2.1)), le cas général en découle avec les arguments suivants.

Soit R_t une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu engendrée par $\{\eta_u, u \leq t\}$. Nous avons

$$h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}(\vartheta) = \sum_{i_2=1}^d \left(A_1^+(i_1, i_2) \left(\varepsilon_{i_2,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + A_1^-(i_1, i_2) \left(-\varepsilon_{i_2,t-1}^- \right)^{\tau_{i_2}} \right) + R_{t-2},$$

$$\frac{\partial h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_j}(\vartheta) = A_1^+(i_1, j) \log \left(\varepsilon_{j,t-1}^+ \right) \left(\varepsilon_{j,t-1}^+ \right)^{\tau_j} + A_1^-(i_1, j) \log \left(-\varepsilon_{j,t-1}^- \right) \left(-\varepsilon_{j,t-1}^- \right)^{\tau_j} + R_{t-2}.$$

En combinant les expressions ci-dessus et (C.90), l'équation (C.89) devient

$$0 = \sum_{i_2=1}^d \tau_{i_1} \left(c_{1,i_1+i_2d} \left(\varepsilon_{i_2,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + c_{1,i_1+i_2d^2} \left(-\varepsilon_{i_2,t-1}^- \right)^{\tau_{i_2}} \right) + R_{t-2}^1$$

$$+ \sum_{i_2=1}^d c_{2,i_2} \tau_{i_1} \left(A_{01}^+(i_1, i_2) \log \left(\varepsilon_{i_2,t-1}^+ \right) \left(\varepsilon_{i_2,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + A_{01}^-(i_1, i_2) \log \left(-\varepsilon_{i_2,t-1}^- \right) \left(-\varepsilon_{i_2,t-1}^- \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2}^2 \right)$$

$$- c_{2,i_1} \left(\sum_{i_2=1}^d \left(A_{01}^+(i_1, i_2) \left(\varepsilon_{i_2,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + A_{01}^-(i_1, i_2) \left(-\varepsilon_{i_2,t-1}^- \right)^{\tau_{i_2}} \right) + R_{t-2}^3 \right)$$

$$\times \log \left[\sum_{i_2=1}^d \left(A_{01}^+(i_1, i_2) \left(\varepsilon_{i_2,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + A_{01}^-(i_1, i_2) \left(-\varepsilon_{i_2,t-1}^- \right)^{\tau_{i_2}} \right) + R_{t-2}^3 \right], \quad \text{p.s.}$$

ce qui est équivalent aux deux équations suivantes, presque sûrement

$$\sum_{i_2=1}^d \tau_{i_1} c_{1,i_1+i_2d} \left(\varepsilon_{i_2,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2}^1 + \sum_{i_2=1}^d c_{2,i_2} \tau_{i_1} \left(A_{01}^+(i_1, i_2) \log \left(\varepsilon_{i_2,t-1}^+ \right) \left(\varepsilon_{i_2,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2}^2 \right)$$

$$- c_{2,i_1} \left(\sum_{i_2=1}^d A_{01}^+(i_1, i_2) \left(\varepsilon_{i_2,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2}^3 \right) \log \left[\sum_{i_2=1}^d A_{01}^+(i_1, i_2) \left(\varepsilon_{i_2,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2}^3 \right] = 0$$

$$(C.91)$$

$$\sum_{i_2=1}^d \tau_{i_1} c_{1,i_1+i_2d^2} \left(-\varepsilon_{i_2,t-1}^- \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2}^1 + \sum_{i_2=1}^d c_{2,i_2} \tau_{i_1} \left(A_{01}^-(i_1, i_2) \log \left(-\varepsilon_{i_2,t-1}^- \right) \left(-\varepsilon_{i_2,t-1}^- \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2}^2 \right)$$

$$- c_{2,i_1} \left(\sum_{i_2=1}^d A_{01}^-(i_1, i_2) \left(-\varepsilon_{i_2,t-1}^- \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2}^3 \right) \log \left[\sum_{i_2=1}^d A_{01}^-(i_1, i_2) \left(-\varepsilon_{i_2,t-1}^- \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2}^3 \right] = 0.$$

$$(C.92)$$

Il suit à partir de **H8** que, pour $\prod_{i=1}^d [a_i, b_i] \subset [0, +\infty[^d$,

$$\sum_{i_2=1}^d \tau_{i_1} c_{1,i_1+i_2d} x_{i_2} + R_{t-2}^1 + \sum_{i_2=1}^d \frac{1}{2} c_{2,i_2} \left(A_{01}^+(i_1, i_2) x_{i_2} \log(x_{i_2}) + R_{t-2}^2 \right)$$

$$- c_{2,i_1} \left(\sum_{i_2=1}^d A_{01}^+(i_1, i_2) x_{i_2} + R_{t-2}^3 \right) \log \left[\sum_{i_2=1}^d A_{01}^+(i_1, i_2) x_{i_2} + R_{t-2}^3 \right] = 0, \quad \text{p.s.}$$

$$(C.93)$$

$$\sum_{i_2=1}^d \tau_{i_1} c_{1,i_1+i_2d^2} x_{i_2} + R_{t-2}^1 + \sum_{i_2=1}^d \frac{1}{2} c_{2,i_2} \left(A_{01}^-(i_1, i_2) x_{i_2} \log(x_{i_2}) + R_{t-2}^2 \right)$$

$$- c_{2,i_1} \left(\sum_{i_2=1}^d A_{01}^-(i_1, i_2) x_{i_2} + R_{t-2}^3 \right) \log \left[\sum_{i_2=1}^d A_{01}^-(i_1, i_2) x_{i_2} + R_{t-2}^3 \right] = 0, \quad \text{p.s.}$$

$$(C.94)$$

pour tout $(x_1, \dots, x_d) \in \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$. En dérivant trois fois les équations (C.93) et (C.94) par rapport à x_{i_2} , pour $i_2 = 1, \dots, d$, nous obtenons

$$\left(\frac{1}{2} c_{2,i_2} - c_{2,i_1} \right) \left[(A_{01}^+(i_1, i_2))^2 + (A_{01}^-(i_1, i_2))^2 \right] = 0.$$

Sous l'hypothèse **H4** : si $p > 0$, $\mathcal{A}_0^+(1) + \mathcal{A}_0^-(1) \neq 0$, il est impossible d'avoir $A_{01}^+(i_1, i) = A_{01}^-(i_1, i) = 0$, pour tout $i = 1, \dots, d$. Alors il existe un i_0 tel que $(A_{01}^+(i_1, i_0))^2 + (A_{01}^-(i_1, i_0))^2 \neq 0$ et nous avons alors $c_{2,i_0} - 2c_{2,i_1} = 0$. Les équations (C.93) et (C.94) deviennent

$$\begin{aligned} \sum_{i_2=1}^d \tau_{i_1} c_{1,i_1+i_2d} x_{i_2} + R_{t-2}^1 + \sum_{i_2=1}^d \frac{1}{2} c_{2,i_2} (A_{01}^+(i_1, i_2) x_{i_2} \log(x_{i_2}) + R_{t-2}^2) \\ - \frac{1}{2} c_{2,i_0} \left(\sum_{i_2=1}^d A_{01}^+(i_1, i_2) x_{i_2} + R_{t-2}^3 \right) \log \left[\sum_{i_2=1}^d A_{01}^+(i_1, i_2) x_{i_2} + R_{t-2}^3 \right] = 0, \quad \text{p.s.} \end{aligned} \quad (\text{C.95})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i_2=1}^d \tau_{i_1} c_{1,i_1+i_2d} x_{i_2} + R_{t-2}^1 + \sum_{i_2=1}^d \frac{1}{2} c_{2,i_2} (A_{01}^-(i_1, i_2) x_{i_2} \log(x_{i_2}) + R_{t-2}^2) \\ - \frac{1}{2} c_{2,i_0} \left(\sum_{i_2=1}^d A_{01}^-(i_1, i_2) x_{i_2} + R_{t-2}^3 \right) \log \left[\sum_{i_2=1}^d A_{01}^-(i_1, i_2) x_{i_2} + R_{t-2}^3 \right] = 0, \quad \text{p.s.} \end{aligned} \quad (\text{C.96})$$

En dérivant deux nouvelles fois, les équations (C.95) et (C.96) par rapport à x_{i_0} , nous trouvons que

$$c_{2,i_0} (A_{01}^+(i_1, i_0) + A_{01}^-(i_1, i_0)) \left[\sum_{\substack{i_2=1 \\ i_2 \neq i_0}}^d \left(A_{01}^+(i_1, i_2) (\varepsilon_{i_2,t-1}^+)^{\tau_{i_2}} + A_{01}^-(i_1, i_2) (-\varepsilon_{i_2,t-1}^-)^{\tau_{i_2}} \right) + R_{t-2}^3 \right] = 0.$$

Comme la loi de η_t est non dégénérée (voir l'hypothèse **H3**), on en déduit que

$$\sum_{\substack{i_2=1 \\ i_2 \neq i_0}}^d \left(A_{01}^+(i_1, i_2) (\varepsilon_{i_2,t-1}^+)^{\tau_{i_2}} + A_{01}^-(i_1, i_2) (-\varepsilon_{i_2,t-1}^-)^{\tau_{i_2}} \right) + R_{t-2}^3 \neq 0.$$

Donc $c_{2,i_0} = 2c_{2,i_1} = 0$. Comme i_1 est choisi arbitrairement, on en déduit que $c_{2,i} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, d$, ou de façon équivalente que $c_{1,i_1+i_0d} = c_{1,i_1+i_0d^2} = 0$. Ainsi le vecteur $\mathbf{c}_2 = (c_{2,1}, \dots, c_{2,d})' = (c_{s_2+1}, \dots, c_{s_1})'$ est nul. Nous rappelons que si $\mathbf{c}_3 = (c_{s_1+1}, \dots, c_{s_0})'$ est nul, alors l'inversibilité de la matrice J est montrée dans le cas du modèle CCC-APGARCH($p, 1$).

Dans le cas général, on montre que (C.87) entraîne nécessairement

$$A_{01}^+(i_1, i_0) + A_{01}^-(i_1, i_0) = \dots = A_{0q}^+(i_1, i_0) + A_{0q}^-(i_1, i_0) = 0, \quad \forall, i_0, i_1 = 1, \dots, d,$$

ce qui est impossible sous l'hypothèse **H4** et alors $\mathbf{c} = 0$.

Ceci est en contradiction avec $\mathbf{c}'\mathbf{h}'\mathbf{h}\mathbf{c} = \mathbf{c}'\mathbf{d}'\mathbf{H}^2\mathbf{d}\mathbf{c} = 0$ presque sûrement. Dans ce cas, l'hypothèse de non inversibilité de la matrice J est alors absurde.

C.3.6 Oubli des valeurs initiales

Pour conclure la preuve, il reste à montrer que les valeurs initiales n'ont aucun effet sur les dérivées du critère. Nous cherchons à prouver que

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \left[\frac{\partial l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta'} - \frac{\partial \tilde{l}_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta'} \right] \right\| = o_{\mathbb{P}}(1) \quad (\text{C.97})$$

et, pour un voisinage $V(\vartheta_0)$ de ϑ_0

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\vartheta \in V(\vartheta_0)} \left\| \frac{\partial^2 l_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta \partial \vartheta'} - \frac{\partial^2 \tilde{l}_t(\vartheta_0)}{\partial \vartheta \partial \vartheta'} \right\| = o_{\mathbb{P}}(1). \quad (\text{C.98})$$

Pour prouver ces deux derniers points, nous procédons comme dans le cas connu, en remplaçant θ_0 par ϑ_0 et δ par τ .

Annexe D

Preuve du test Portmanteau multivarié

Résumé

Dans cette section, nous détaillerons les éléments de la preuve du test portmanteau, énoncé au Chapitre 3, associé au modèle CCC-APGARCH développé au Chapitre 2. Ce test est développé dans le cas où la puissance $\underline{\delta}$ est connue mais également dans le cas où elle est inconnue.

Sommaire

D.1 Rappels	177
D.2 Puissance connue	178
D.3 Puissance inconnue	188

D.1 Rappels

Nous commençons par rappeler des notions et des résultats utiles pour l'élaboration de la preuve du test portmanteau multivarié pour le cas où la puissance est connue. Pour tout $\theta \in \Theta$, soit $\tilde{h}_t^{\delta/2}(\theta)$ une solution strictement stationnaire non anticipative du modèle (2.1) et

$$\begin{cases} H_t = D_t R D_t, & D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{1,t}}, \dots, \sqrt{h_{d,t}}) \\ \underline{h}_t^{\delta/2} = \underline{\omega} + \sum_{i=1}^q A_i^+ (\underline{\varepsilon}_{t-i}^+)^{\delta/2} + A_i^- (\underline{\varepsilon}_{t-i}^-)^{\delta/2} + \sum_{j=1}^p B_j \underline{h}_{t-j}^{\delta/2}. \end{cases}$$

La matrice de variance asymptotique peut être écrite comme

$$\Sigma = J^{-1} I J^{-1},$$

avec

$$I = \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta'} \right], \quad J = \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right].$$

Pour montrer les résultats des tests portmanteau, nous avons besoin d'outils provenant du Chapitre 2, résumés dans le lemme suivant.

Lemme D.1.1.

Nous supposons **H0** – **H7**, avec **H4** remplacée par **H4'**. Pour un $s \in]0, 1[$, on a

$$\mathbb{E} \|\underline{\varepsilon}_t^{\delta/2}\|^s < +\infty, \quad \mathbb{E} \sup_{\theta \in \Theta} \|\underline{h}_{0,t}^{\delta/2}\|^s < +\infty, \quad \mathbb{E} \sup_{\theta \in \Theta} \|\tilde{h}_{0,t}^{\delta/2}\|^s < +\infty. \quad (\text{D.1})$$

De plus, il existe un K et $0 < \rho < 1$ tel que

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} \|\underline{h}_t(\theta) - \tilde{h}_t(\theta)\| &\leq K_1 \rho^t \sup_{\theta \in \Theta} \max\{\underline{h}_t(\theta), \tilde{h}_t(\theta)\}, \\ &\leq K \rho^t, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

où K est une constante aléatoire qui dépend des valeurs passées de $\{\varepsilon_t, t \leq 0\}$. Nous pouvons également en déduire que nous avons presque sûrement

$$\sup_{\theta \in \Theta} \|H_t - \tilde{H}_t\| \leq K \rho^t, \quad \forall t. \quad (\text{D.3})$$

Comme $\|R^{-1}\|$ est l'inverse de la plus petite valeur propre de R en module, et $\|\tilde{D}_t^{-1}\| = [\min_i (h_{i,t})^{1/\delta_i}]^{-1}$, nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} \|\tilde{H}_t^{-1}\| &\leq \sup_{\theta \in \Theta} \|\tilde{D}_t^{-1}\|^2 \|R^{-1}\| \\ &\leq \sup_{\theta \in \Theta} \left[\min_i (\omega(i)^{1/\delta_i}) \right]^{-1} \|R^{-1}\| \\ &\leq K. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Comme la matrice R est définie positive, et par la compacité de l'espace Θ et la positivité stricte de $\underline{\omega}$, nous avons de façon similaire

$$\sup_{\theta \in \Theta} \|H_t^{-1}\| \leq K. \quad (\text{D.5})$$

Pour tout $r_0 \geq 1$ et une composante i_1 fixée,

$$\mathbb{E} \sup_{\theta \in \Theta} \left\| \frac{1}{h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta)} \frac{\partial h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta)}{\partial \theta_i} \right\|^{r_0} < +\infty, \quad \mathbb{E} \sup_{\theta \in \Theta} \left\| \frac{1}{h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta)} \frac{\partial^2 h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\|^{r_0} < +\infty. \quad (\text{D.6})$$

Il existe un voisinage $\mathcal{V}(\theta_0)$ de θ_0 tel que

$$\mathbb{E} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \left(\frac{h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta_0)}{h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta)} \right) \right| < +\infty. \quad (\text{D.7})$$

La matrice J est inversible et

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = -J^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} + o_{\mathbb{P}}(1). \quad (\text{D.8})$$

Dans le cas où la puissance est inconnue, le vecteur des paramètres devient ϑ et nous remplaçons H_t par $\mathcal{H}_t$ et $\underline{\delta}$ par $\underline{\tau}$. Les résultats énoncés doivent être adaptés en conséquence.

D.2 Puissance connue

La preuve du test portmanteau multivarié pour le modèle CCC-APGARCH présente des similitudes avec celle, du test univarié pour le modèle APGARCH. Nous pouvons décomposer la preuve en 4 étapes.

- D.1.1 Impact asymptotique des valeurs initiales inconnues sur la statistique $\hat{\mathbf{r}}_m$.
- D.1.2 La loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m$.
- D.1.3 Inversibilité de la matrice D .
- D.1.4 Convergence de la matrice D .

Nous introduisons la matrice d'autocovariances h pour un h fixé tel que $0 < h < m$

$$r_h = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n [\text{vec}(s_t)][\text{vec}(s_{t-h})]', \quad \text{avec } s_t = \eta_t \eta_t' - I_d.$$

Nous définissons $S_t(\theta) = \text{vec}(s_t(\theta))$ la variable aléatoire obtenue en remplaçant η_t par $\eta_t(\theta) = H_t^{-1/2}(\theta)\varepsilon_t$ et on a $r_h = n^{-1} \sum_{t=|h|+1}^n S_t S_{t-h}'$.
 Nous introduisons le vecteur d'autocovariances h pour un h fixé par

$$\mathbf{r}_h := \text{vec}(r_h) = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n S_{t-h} \otimes S_t.$$

Finalement, nous introduisons le vecteur des m autocovariances $\mathbf{r}_m := (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m)'$.
 Soit $\tilde{S}_t(\theta)$ la variable aléatoire obtenue en remplaçant $\tilde{\eta}_t$ par $\tilde{\eta}_t(\theta) = \tilde{H}_t^{-1/2}\varepsilon_t$ dans S_t . Soit $\mathbf{r}_h(\theta)$ obtenu en remplaçant η_t par $\eta_t(\theta)$ et $\tilde{\mathbf{r}}_h(\theta)$ en remplaçant $\tilde{\eta}_t$ par $\tilde{\eta}_t(\theta)$ dans $\mathbf{r}_h$. Les vecteurs $\mathbf{r}_m(\theta) = (\mathbf{r}_1(\theta), \dots, \mathbf{r}_m(\theta))'$ et $\tilde{\mathbf{r}}_m(\theta) = (\tilde{\mathbf{r}}_1(\theta), \dots, \tilde{\mathbf{r}}_m(\theta))'$ sont tels que $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m(\theta_0)$ et $\tilde{\mathbf{r}}_m = \tilde{\mathbf{r}}_m(\hat{\theta}_n)$.

D.1.1 Impact asymptotique des valeurs initiales inconnues sur la statistique $\hat{\mathbf{r}}_m$

Notons que, $S_{t-h}(\theta) \otimes S_t(\theta) - \tilde{S}_{t-h}(\theta) \otimes \tilde{S}_t(\theta) = a_t + b_t$ avec $a_t = \tilde{S}_{t-h}(\theta) \otimes (S_t(\theta) - \tilde{S}_t(\theta))$ et $b_t = (S_{t-h}(\theta) - \tilde{S}_{t-h}(\theta)) \otimes S_t(\theta)$.

En utilisant le fait que $\sup_{\theta \in \Theta} \|H_t(\theta) - \tilde{H}_t(\theta)\| \leq K\rho^t$ où K est une constante aléatoire et $\rho \in]0, 1[$, et que $\sup_{\theta \in \Theta} \|H_t^{-1}(\theta)\| \leq K$ ainsi que $\sup_{\theta \in \Theta} \|\tilde{H}_t^{-1}(\theta)\| \leq K$, nous avons

$$\begin{aligned} a_t &= S_{t-h}(\theta) \otimes (S_t(\theta) - \tilde{S}_t(\theta)) \\ &= \text{vec} \otimes (s_{t-h}) [\text{vec}(s_t) - \text{vec}(\tilde{s}_t)] \\ &= \text{vec}(\tilde{\eta}_t(\theta)\tilde{\eta}_t'(\theta) - I_d) \otimes [\text{vec}(\eta_t(\theta)\eta_t'(\theta) - I_d) - \text{vec}(\tilde{\eta}_t(\theta)\tilde{\eta}_t'(\theta) - I_d)] \\ &= \text{vec} \left(\tilde{H}_{t-h}^{-1/2}(\theta)\varepsilon_{t-h}\varepsilon_{t-h}'\tilde{H}_{t-h}^{-1/2}(\theta) - I_d \right) \otimes \text{vec} \left[H_t^{-1/2}(\theta)\varepsilon_t\varepsilon_t'H_t^{-1/2}(\theta) - \tilde{H}_t^{-1/2}(\theta)\varepsilon_t\varepsilon_t'\tilde{H}_t^{-1/2}(\theta) \right] \end{aligned}$$

En utilisant les résultats (D.2), (D.3), (D.4) et (D.5), nous aboutissons à la majoration suivante

$$\begin{aligned} \|a_t\| &\leq \left\| \text{vec} \left(\tilde{H}_{t-h}^{-1/2}(\theta)\varepsilon_{t-h}\varepsilon_{t-h}'\tilde{H}_{t-h}^{-1/2}(\theta) - I_d \right) \otimes \text{vec} \left[H_t^{-1/2}(\theta)\varepsilon_t\varepsilon_t'H_t^{-1/2}(\theta) - \tilde{H}_t^{-1/2}(\theta)\varepsilon_t\varepsilon_t'\tilde{H}_t^{-1/2}(\theta) \right] \right\| \\ &\leq \left| \text{Tr} \left(\tilde{H}_{t-h}^{-1}(\theta)\varepsilon_{t-h}\varepsilon_{t-h}' - I_d \right) \right| \times \left| \text{Tr} \left(H_t^{-1}(\theta)\varepsilon_t\varepsilon_t' - \tilde{H}_t^{-1}(\theta)\varepsilon_t\varepsilon_t' \right) \right| \\ &\leq \left(\left\| \tilde{H}_{t-h}^{-1}(\theta) \right\| \left\| \varepsilon_{t-h}\varepsilon_{t-h}' \right\| + \|I_d\| \right) \left(\left\| H_t^{-1}(\theta) - \tilde{H}_t^{-1}(\theta) \right\| \left\| \varepsilon_t\varepsilon_t' \right\| \right) \\ &\leq \left(\left\| \tilde{H}_{t-h}^{-1}(\theta) \right\| \left\| \varepsilon_{t-h}\varepsilon_{t-h}' \right\| + d \right) \left\| H_t^{-1}(\theta) \right\| \left\| \tilde{H}_t(\theta) - H_t(\theta) \right\| \left\| \tilde{H}_t^{-1}(\theta) \right\| \left\| \varepsilon_t\varepsilon_t' \right\| \\ &\leq (K \left\| \varepsilon_{t-h}\varepsilon_{t-h}' \right\| + d) K\rho^t \left\| \varepsilon_t\varepsilon_t' \right\| \\ &\leq K\rho^t \varepsilon_t' \varepsilon_t (\varepsilon_{t-h}' \varepsilon_{t-h} + 1). \end{aligned}$$

Nous concluons de même pour le terme b_t .

En utilisant les inégalités c_r , Hölder, $(a+b)^s \leq a^s + b^s$ pour $a, b \geq 0$ et $s \in]0, 1[$, ainsi que la consistance

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} \|a_t\| \right|^{s*} &\leq \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} \|K\rho^t(\varepsilon_{t-h}'\varepsilon_{t-h} + 1)\varepsilon_t'\varepsilon_t\| \right|^{s*} \\ &\leq K \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{s*} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[\rho^{ts*}] \mathbb{E}[\varepsilon_t'\varepsilon_t]^{s*} \mathbb{E}[\varepsilon_{t-h}'\varepsilon_{t-h} + 1]^{s*} \\ &\leq K \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{s*} \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[\rho^{ts*}] \mathbb{E}[\|\varepsilon_t\|]^{s*} \mathbb{E}[\|\varepsilon_{t-h}\| + 1]^{s*} \\ &\leq K \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{s*} \sum_{t=1}^n \rho^{ts*} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \sup_{\theta \in \Theta} \|a_t\| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Il est évident que l'on ait les mêmes convergences pour b_t ainsi que les dérivées de a_t et de b_t . Par conséquent, nous obtenons que

$$\sqrt{n} \|\underline{\mathbf{r}}_m - \tilde{\underline{\mathbf{r}}}_m(\theta_0)\| = o_{\mathbb{P}}(1), \quad \sup_{\theta \in \Theta} \left\| \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}(\theta)}{\partial \theta'} - \frac{\partial \tilde{\underline{\mathbf{r}}}(\theta)}{\partial \theta'} \right\| = o_{\mathbb{P}}(1). \quad (\text{D.9})$$

Les valeurs initiales inconnues n'ont donc aucun impact asymptotique sur la statistique $\hat{\underline{\mathbf{r}}}_m$.

D.1.2 La loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\underline{\mathbf{r}}}_m$

La loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\underline{\mathbf{r}}}_m$ est issue de la loi jointe entre la loi asymptotique de $\sqrt{n}\underline{\mathbf{r}}_m$ et de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance.

En utilisant (D.9) et un développement limité de Taylor de $\underline{\mathbf{r}}_m(\cdot)$ autour de $\hat{\theta}_n$ et θ_0 nous obtenons

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\hat{\underline{\mathbf{r}}}_m &= \sqrt{n}\tilde{\underline{\mathbf{r}}}_m(\theta_0) + \frac{\partial \tilde{\underline{\mathbf{r}}}_m(\theta^*)}{\partial \theta'} \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \\ &= \sqrt{n}\underline{\mathbf{r}}_m(\theta_0) + \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}_m(\theta^*)}{\partial \theta'} \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) + o_{\mathbb{P}}(1), \end{aligned}$$

pour θ^* entre $\hat{\theta}_n$ et θ_0 .

En utilisant un second développement de Taylor, nous obtenons

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{r}}_m(\theta^*)}{\partial \theta'} = \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}_m(\theta_0)}{\partial \theta'} + o_{\mathbb{P}}(1).$$

Pour un $\mathbf{r}_h$ donné, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_h(\theta_0)}{\partial \theta'} &= \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \frac{\partial S_{t-h} \otimes S_t}{\partial \theta'} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \left(\frac{\partial S_{t-h}}{\partial \theta} \otimes S_t + S_{t-h} \otimes \frac{\partial S_t}{\partial \theta'} \right) \\ &\rightarrow \mathbb{E} \left[S_{t-h} \otimes \frac{\partial S_t}{\partial \theta'} \right] + \mathbb{E} \left[S_t \otimes \frac{\partial S_{t-h}}{\partial \theta'} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[S_{t-h} \otimes \frac{\partial S_t}{\partial \theta'} \right] := c_h \end{aligned}$$

par le fait que $\mathbb{E} \left[S_t \otimes \frac{\partial S_{t-h}}{\partial \theta'} \right] = 0$.

De plus,

$$\begin{aligned} c_h &= \mathbb{E} \left[S_{t-h} \otimes \frac{\partial S_t}{\partial \theta'} \right] = \mathbb{E} \left[S_{t-h} \otimes \frac{\partial \text{vec}(s_t)}{\partial \theta'} \right] = \mathbb{E} \left[S_{t-h} \otimes \frac{\partial \text{vec}(\eta_t \eta_t' - I_d)}{\partial \theta'} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[S_{t-h} \otimes \frac{\partial \text{vec}(\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1} - I_d)}{\partial \theta'} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[S_{t-h} \otimes \text{vec} \left(-\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1} \frac{\partial H_t}{\partial \theta'} H_t^{-1} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[S_{t-h} \otimes (H_t^{-1} \otimes -\underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}_t' H_t^{-1}) \text{vec} \frac{\partial H_t}{\partial \theta'} \right] \\ &= -\mathbb{E} \left[S_{t-h} \otimes (H_t^{-1} \otimes I_d) \text{vec} \frac{\partial H_t}{\partial \theta'} \right] \end{aligned}$$

Nous obtenons que

$$\frac{\partial \mathbf{r}_m(\theta_0)}{\partial \theta'} \longrightarrow C_m := \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_m \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$\sqrt{n} \hat{\mathbf{r}}_m = \sqrt{n} \mathbf{r}_m + C_m \sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) + o_{\mathbb{P}}(1). \quad (\text{D.10})$$

Rappelons que,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = -J^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} \right),$$

avec $l_t(\theta) = \underline{\varepsilon}'_t(\theta) H_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t + \log(\det(H_t))$. Les dérivées sont calculées de façon récursive par rapport à H_t pour un i fixé

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} &= Tr \left[\left(H_t^{-1} - H_t^{-1} \underline{\varepsilon}_t \underline{\varepsilon}'_t H_t^{-1} \right) \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} \right] \\ &= Tr \left[\left(H_t^{-1} - H_t^{-1} H_t^{1/2} \eta_t \eta'_t H_t^{1/2} H_t^{-1} \right) \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} \right] \\ &= Tr \left[\left(H_t^{-1} - \eta_t \eta'_t H_t^{-1} \right) \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} \right] \\ &= Tr \left[\left(I_d - \eta_t \eta'_t \right) H_t^{-1} \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} \right] \\ &= -Tr \left(s_t H_t^{-1} \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} \right) \\ &= -Tr \left(H_t^{-1} \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} s_t \right) \\ &= -Tr \left(H_t^{-1/2} \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} H_t^{-1/2} s_t \right) \\ &= - \left[\text{vec} \left(H_t^{-1/2} \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} H_t^{-1/2} \right) \right]' \text{vec}(s_t) \\ &= -\mathbf{h}'_i S_t, \end{aligned}$$

avec $\mathbf{h}_i = \left[\text{vec} \left(H_t^{-1/2} \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} H_t^{-1/2} \right) \right]$. Nous pouvons également réécrire $\mathbf{h}_i$ comme suit, en utilisant $\text{vec}(ABC) = (C' \otimes A) \text{vec}(B)$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_i &= \left[\text{vec} \left(H_t^{-1/2} \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} H_t^{-1/2} \right) \right] \\ &= \left[\left(H_t^{-1/2} \right)' \otimes H_t^{-1/2} \right] \text{vec} \left(\frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} \right) \\ &= \mathbf{H} \mathbf{d}_i, \end{aligned}$$

où $\mathbf{H} = \left[\left(H_t^{-1/2} \right)' \otimes H_t^{-1/2} \right]$ et $\mathbf{d}_i = \text{vec} \left(\frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} \right)$. Finalement, on définit les matrices $d^2 \times s_0$, $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1 | \dots | \mathbf{h}_{s_0})$ et $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1 | \dots | \mathbf{d}_{s_0})$ telle que $\mathbf{h} = \mathbf{H} \mathbf{d}$. Nous définissons donc les dérivées récursives par

$$\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_{s_0}} \right)' = -(\mathbf{h}'_1 S_t, \dots, \mathbf{h}'_{s_0} S_t)' = -\mathbf{h}' S_t.$$

Nous notons que $\sqrt{n} \mathbf{r}_m = n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t$ où $\mathbb{S}_{t-1:t-m} = (S_{t-1}, \dots, S_{t-m})'$. Nous pouvons maintenant obtenir la loi asymptotique de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0, \mathbf{r}_m)'$ en appliquant un théorème central limite

aux différences de martingale multivariées

$$\left\{ \Upsilon_t = (J^{-1}\mathbb{H}_t S_t, \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t)' ; \mathcal{F}_{t-1}^\eta := \sigma(\eta_u, u \leq t) \right\},$$

$$\text{où } \mathbb{H}_t = -(\text{vec}(H_t^{-1}))' I_d \otimes \begin{pmatrix} \frac{\partial H_t}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H_t}{\partial \theta_{s_0}} \end{pmatrix}.$$

Nous notons le vecteur

$$\Upsilon_t = \begin{pmatrix} J^{-1}\mathbb{H}_t S_t \\ S_{t-1} \otimes S_t \\ \vdots \\ S_{t-m} \otimes S_t \end{pmatrix}.$$

L'espérance de la loi est donnée par

$$\mathbb{E} [\Upsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}^\eta] = \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} J^{-1}\mathbb{H}_t S_t \\ S_{t-1} \otimes S_t \\ \vdots \\ S_{t-m} \otimes S_t \end{pmatrix} \middle| \mathcal{F}_{t-1}^\eta \right] = \begin{pmatrix} J^{-1}\mathbb{H}_t \mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_{t-1}^\eta] \\ S_{t-1} \otimes \mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_{t-1}^\eta] \\ \vdots \\ S_{t-m} \otimes \mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_{t-1}^\eta] \end{pmatrix} = 0,$$

car $(S_{t-i})_{i \geq 1}$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{t-1}^\eta$ et $\mathbb{E}[S_t] = 0$.

La variance est quant à elle donnée par $\mathbb{E}[\Upsilon_t \Upsilon_t'] = \Xi$, où

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Sigma & \Sigma_{\hat{\theta}_n, \underline{\mathbf{r}}_m} \\ \Sigma'_{\hat{\theta}_n, \underline{\mathbf{r}}_m} & \Sigma_{\underline{\mathbf{r}}_m} \end{pmatrix}.$$

Nous calculons alors

$$(i) \quad \Sigma_{\underline{\mathbf{r}}_m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Cov}(\sqrt{n}\underline{\mathbf{r}}_k, \sqrt{n}\underline{\mathbf{r}}_h),$$

$$(ii) \quad \Sigma_{\hat{\theta}_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)),$$

$$(iii) \quad \Sigma_{\hat{\theta}_n, \underline{\mathbf{r}}_m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Cov}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} J^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_i}, \sqrt{n}\underline{\mathbf{r}}_h\right).$$

(i) Calcul de $\Sigma_{\underline{\mathbf{r}}_m}$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\sqrt{n}\underline{\mathbf{r}}_k, \sqrt{n}\underline{\mathbf{r}}_h) &= \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \sum_{t=|k|+1}^n \mathbb{E} \{ S_{t-k} \otimes S_t \} \{ S_{t-h} \otimes S_t \}' \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Sigma_{\underline{\mathbf{r}}_m}(k, h) := \mathbb{E} \{ S_{t-k} \otimes S_t \} \{ S_{t-h} \otimes S_t \}' \\ &\quad \mathbb{E} [S_{t-k} S'_{t-h} \otimes S_t S_t'], \end{aligned}$$

pour $1 \leq k, h \leq m$.

(ii) Calcul de Σ .

Par la normalité asymptotique nous savons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)) = J^{-1} I J^{-1}.$$

(iii) Calcul de $\Sigma_{\hat{\theta}_n, \underline{\mathbf{r}}_m}$.

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} J^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta_i}, \sqrt{n} \underline{\mathbf{r}}_h \right) &= -J^{-1} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} [S_{t-h} \otimes S_t] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Sigma_{\hat{\theta}_n, \underline{\mathbf{r}}_m}(k, h) := -J^{-1} \mathbb{E} \left[\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta} (S_{t-h} \otimes S_t)' \right], \end{aligned}$$

pour $1 \leq k, h \leq m$, d'où nous obtenons

$$\Sigma_{\hat{\theta}_n, \underline{\mathbf{r}}_m} = -J^{-1} \mathbb{E} \left[\left(\begin{pmatrix} \dot{l}_{1,t} \\ \vdots \\ \dot{l}_{s_0,t} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} S_{t-1} \\ \vdots \\ S_{t-m} \end{pmatrix} \otimes S_t \right)' \right) \right]$$

et donc $\Sigma_{\underline{\mathbf{r}}_m, \hat{\theta}_n} = \Sigma'_{\hat{\theta}_n, \underline{\mathbf{r}}_m}$.

En conclusion la variance asymptotique de la loi se résume à

$$\mathbb{E} [\Upsilon_t \Upsilon_t'] := \Xi = \begin{pmatrix} J^{-1} I J^{-1} & -J^{-1} \mathbb{E} [\dot{l}_{i,t} (\mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t)'] \\ -J^{-1} \mathbb{E} [(\mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t) \dot{l}_{i,t}] & \mathbb{E} [\mathbb{S}_{t-1:t-m} \mathbb{S}_{t-1:t-m}' \otimes S_t S_t'] \end{pmatrix}, \quad (\text{D.11})$$

ce qui conduit à

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \Upsilon_t \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Xi).$$

En utilisant (D.9) et (D.11), nous obtenons la loi de $\sqrt{n} \hat{\mathbf{r}}_m$. Nous rappelons que $r_h = n^{-1} \sum_{t=|h|+1}^n S_t S_{t-h}'$ et que $\tilde{r}_h = n^{-1} \sum_{t=|h|+1}^n \tilde{S}_t \tilde{S}_{t-h}'$. Par un développement de Taylor, nous obtenons l'expression,

$$\begin{aligned} \hat{r}_h &:= \tilde{r}_h(\hat{\theta}_n) = \tilde{r}_h(\theta_0) + \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \frac{\partial \tilde{r}_h(\theta^*)}{\partial \theta'} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \\ &= r_h(\theta_0) + \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n \frac{\partial \tilde{r}_h(\theta^*)}{\partial \theta'} (\hat{\theta}_n - \theta_0) + R_n, \end{aligned}$$

avec $R_n = \tilde{r}_h(\theta_0) - r_h(\theta_0) = \text{O}_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{n} \right)$.

Par la suite nous avons

$$\begin{aligned} \hat{r}_h &= r_h(\theta_0) + \mathbb{E} \left[S_{t-h} \otimes \frac{\partial S_t}{\partial \theta'} \right] (\hat{\theta}_n - \theta_0) + \text{O}_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{n} \right) \\ &= r_h + c_h (\hat{\theta}_n - \theta_0) + \text{O}_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\sqrt{n} \hat{\mathbf{r}}_m = \sqrt{n} \underline{\mathbf{r}}_m + C_m \sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) + \text{O}_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Finalement, la loi de $\sqrt{n} \hat{\mathbf{r}}_m$ est donnée par

$$\sqrt{n} \hat{\mathbf{r}}_m \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, D),$$

où D est une matrice définie comme suit

$$\begin{aligned} D &:= \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(\sqrt{n} \hat{\mathbf{r}}_m) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(\sqrt{n} \underline{\mathbf{r}}_m) + C_m \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0)) \right] C_m' \\ &\quad + C_m \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Cov}(\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0), \sqrt{n} \underline{\mathbf{r}}_m) \right] + \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Cov}(\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0), \sqrt{n} \underline{\mathbf{r}}_m) \right] C_m' \\ &= \Sigma_{\underline{\mathbf{r}}_m} + C_m J^{-1} I J^{-1} C_m' + C_m \Sigma_{\hat{\theta}_n, \underline{\mathbf{r}}_m} + \Sigma'_{\hat{\theta}_n, \underline{\mathbf{r}}_m} C_m'. \end{aligned}$$

D.1.3 Inversibilité de la matrice D

Afin d'étudier l'inversibilité de la matrice D , on pose $V = \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t - C_m J^{-1} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[VV'] &= \mathbb{E}[(\mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t)(\mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t)'] - \mathbb{E}\left[(\mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t) \frac{\partial l_t}{\partial \theta}\right] J^{-1} C'_m \\ &\quad - C_m J^{-1} \mathbb{E}\left[\frac{\partial l_t}{\partial \theta} (\mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t)'\right] + C_m J^{-1} \mathbb{E}\left[\frac{\partial l_t}{\partial \theta} \frac{\partial l_t}{\partial \theta'}\right] J^{-1} C'_m \\ &= \Sigma_{\mathbf{r}_m} + \Sigma'_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} C'_m + C_m \Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} + C_m J^{-1} I J^{-1} C_m. \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire la matrice V comme

$$V = \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t - C_m J^{-1} \mathbf{d}' \mathbf{H}' S_t.$$

Si la matrice n'est pas inversible, alors il existe un vecteur $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{md^4})'$ non nul tel que

$$\lambda' V = \lambda' \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t + \mu \mathbf{d}' \mathbf{H}' S_t = 0, \quad \text{p.s.}, \quad (\text{D.12})$$

avec $\mu = \lambda' C_m J^{-1}$. Comme nous avons pu le constater dans la preuve du théorème 3.1 à l'annexe A, $\mu \neq 0$ sinon $\lambda' \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes S_t = 0$ presque sûrement, ce qui impliquerait qu'il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que S_{t-j} soit mesurable par rapport à la tribu engendrée par S_r pour $t-1 \leq r \leq t-m$ avec $r \neq t-j$. Ceci est impossible puisque les S_t sont indépendants et non dégénérés.

Nous pouvons réécrire (D.12) de sorte à faire apparaître les dérivées de la matrice H_t par rapport au vecteur θ , or

$$\begin{aligned} \mu' \mathbf{d}' &= \sum_{i=1}^{s_0} \mu_i \mathbf{d}_i = \sum_{i=1}^{s_0} \mu_i \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i} = \sum_{i=1}^{s_0} \mu_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} [(D_t \otimes D_t) \text{vec}(R)] \\ &= \sum_{i=1}^{s_1} \mu_i \frac{\partial (D_t \otimes D_t)}{\partial \theta_i} \text{vec}(R) + \sum_{i=s_1+1}^{s_0} \mu_i (D_t \otimes D_t) \frac{\partial \text{vec}(R)}{\partial \theta_i}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Ce terme se résume à la première somme du membre de droite de l'équation puisque la dérivée de la matrice R est nulle. Nous avons alors

$$\mu' \mathbf{d}' = \sum_{i=1}^{s_1} \mu_i \frac{\partial \underline{h}_t}{\partial \theta_i}.$$

Si l'on travaille sur une composante, nous fixons i_1 ,

$$\frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta)}{\partial \theta} = c_t(\theta) + \sum_{i_2=1}^d \sum_{i=1}^p B_i(i_1, i_2) \frac{\partial h_{i_2, t-i}^{\delta_{i_2}/2}}{\partial \theta}.$$

Nous initialisons les dérivées $\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}(\theta)/\partial \theta$ par 0, pour tout $t = 0, \dots, 1-p$ et

$$\begin{aligned} c_t(\theta) &= \left(0, \dots, 1, 0, \dots, \left(\varepsilon_{i_1, t-1}^+ \right)^{\delta_{i_1}}, 0, \dots, \left(\varepsilon_{i_d, t-1}^+ \right)^{\delta_{i_d}}, 0, \dots, \left(\varepsilon_{i_1, t-q}^+ \right)^{\delta_{i_1}}, 0, \dots, \left(\varepsilon_{i_d, t-q}^+ \right)^{\delta_{i_d}}, \right. \\ &\quad 0, \dots, \left(-\varepsilon_{i_1, t-1}^- \right)^{\delta_{i_1}}, 0, \dots, \left(-\varepsilon_{i_d, t-1}^- \right)^{\delta_{i_d}}, 0, \dots, \left(-\varepsilon_{i_1, t-q}^- \right)^{\delta_{i_1}}, 0, \dots, \left(-\varepsilon_{i_d, t-q}^- \right)^{\delta_{i_d}}, \\ &\quad \left. 0, \dots, h_{i_1, t-1}^{\delta_{i_1}/2}, 0, \dots, h_{i_d, t-1}^{\delta_{i_d}/2}, 0, \dots, h_{i_1, t-p}^{\delta_{i_1}/2}, 0, \dots, h_{i_d, t-p}^{\delta_{i_d}/2}, \dots, 0 \right)'. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

La loi de η_t est non dégénérée alors (D.12) devient

$$\lambda' V = \lambda' \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes \mathbb{1} + \mu' \mathbf{d}' \mathbf{H}' \mathbb{1} = 0, \quad \text{p.s.}$$

Comme

$$\frac{\partial D_t}{\partial \theta_i}(i_1, i_1) = \frac{1}{\delta_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \frac{1}{h_{i_1, t}^{1/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{1/2}}{\partial \theta_i},$$

nous pouvons écrire

$$\lambda' V = (\lambda' \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes \mathbb{1}) h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2} + \sum_{i=1}^{s_1} \mu_i^* \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta_i} = 0, \quad \text{p.s.} \quad (\text{D.15})$$

où $\mathbb{1}$ représente un vecteur composé de 1 de dimension $d^2 \times 1$ et avec $\mu_i^* = \mu_i / \delta_{i_1}$.

Nous rappelons que $\underline{\varepsilon}_t^+ = H_t^{1/2} \eta_t^+$ et $\underline{\varepsilon}_t^- = H_t^{1/2} \eta_t^-$ et nous notons par R_t une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu $\sigma\{\eta_u, u \leq t\}$. On décompose (D.15) en deux termes. Le premier terme de (D.15) peut se réécrire

$$\begin{aligned} (\lambda' \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes \mathbb{1}) h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2} &= \left\{ \sum_{i_2=1}^d \left[A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1, t-1}^+ \right)^{\delta_{i_2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_1^-(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1, t-1}^-) \right)^{\delta_{i_2}} \right] \right\} R_{t-2} \\ &\quad + \left\{ \sum_{i_2=1}^d \left[A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1, t-1}^+ \right)^{\delta_{i_2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_1^-(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1, t-1}^-) \right)^{\delta_{i_2}} \right] \right\} \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^d \lambda_{1+id^2} \eta_{i, t-1}^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^d \lambda_{1+id^2} \eta_{i, t-1}^2 \right) R_{t-2} + R_{t-2}. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Par $\lambda' \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes \mathbb{1}$, pour les lignes $1, \dots, 1+d^2, \dots, md^4$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda' \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes \mathbb{1} &= \sum_{i=1}^{d^4} \lambda_i S_{i, t-1} + R_{t-2} = \lambda'_1 S_{t-1} \otimes \mathbb{1} + R_{t-2} \\ &= \sum_{i=1}^d \lambda_{1+id^2} \eta_{i, t-1}^2 + R_{t-2}, \end{aligned}$$

et par $h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}$ nous obtenons

$$h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2} = \sum_{i_2=1}^d \left[A_1^+(i_1, i_2) (\varepsilon_{i_2, t-1}^+)^{\delta_{i_2}} + A_1^-(i_1, i_2) (-\varepsilon_{i_2, t-1}^-)^{\delta_{i_2}} \right] + R_{t-2},$$

ce qui conduit à (D.16).

Le deuxième terme de (D.15) peut se réécrire

$$\begin{aligned} \mu' \frac{\partial h_{i_1, t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \theta} &= \sum_{i_2=1}^d \left[\mu_{i_1+i_2d} (\varepsilon_{i_2, t-1}^+)^{\delta_{i_2}} + \mu_{i_1+i_2d^2} (-\varepsilon_{i_2, t-1}^-)^{\delta_{i_2}} \right] + R_{t-2} \\ &= \sum_{i_2=1}^d \left[\mu_{i_1+i_2d} \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1, t-1}^+ \right)^{\delta_{i_2}} + \mu_{i_1+i_2d^2} \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1, t-1}^-) \right)^{\delta_{i_2}} \right] + R_{t-2}. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

En combinant les expressions (D.16) et (D.17), (D.12) se résume à

$$\begin{aligned} \lambda'V = & \left\{ \sum_{i_2=1}^d \left[A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1, t-1}^+ \right)^{\delta_{i_2}} + A_1^-(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1, t-1}^-) \right)^{\delta_{i_2}} \right] \right\} R_{t-2} \\ & + \left\{ \sum_{i_2=1}^d \left[A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1, t-1}^+ \right)^{\delta_{i_2}} + A_1^-(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1, t-1}^-) \right)^{\delta_{i_2}} \right] \right\} \\ & \times \left(\sum_{i_2=1}^d \lambda_{1+i_2 d^2} \eta_{i_2, t-1}^2 \right) + \left(\sum_{i_2=1}^d \lambda_{1+i_2 d^2} \eta_{i_2, t-1}^2 \right) R_{t-2} + R_{t-2} \\ & + \sum_{i_2=1}^d \left[\mu_{i_1+i_2 d} \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1, t-1}^+ \right)^{\delta_{i_2}} + \mu_{i_1+i_2 d^2} \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1, t-1}^-) \right)^{\delta_{i_2}} \right] + R_{t-2} = 0, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent aux deux équations suivantes

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i_2=1}^d A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1, t-1}^+ \right)^{\delta_{i_2}} \right] \left[\left(\sum_{i_2=1}^d \lambda_{1+i_2 d^2} \eta_{i_2, t-1}^2 \right) + R_{t-2} \right] \\ & + \sum_{i_2=1}^d \mu_{i_1+i_2 d} \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1, t-1}^+ \right)^{\delta_{i_2}} + \left(\sum_{i_2=1}^d \lambda_{1+i_2 d^2} \eta_{i_2, t-2}^2 \right) R_{t-2} + R_{t-2} = 0 \quad \text{p.s.} \quad (\text{D.18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i_2=1}^d A_1^-(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1, t-1}^-) \right)^{\delta_{i_2}} \right] \left[\left(\sum_{i_2=1}^d \lambda_{1+i_2 d^2} \eta_{i_2, t-1}^2 \right) + R_{t-2} \right] \\ & + \sum_{i_2=1}^d \mu_{i_1+i_2 d^2} \left(\sum_{j_1=1}^d H_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1, t-1}^-) \right)^{\delta_{i_2}} + \left(\sum_{i_2=1}^d \lambda_{1+i_2 d^2} \eta_{i_2, t-2}^2 \right) R_{t-2} + R_{t-2} = 0 \quad \text{p.s.} \quad (\text{D.19}) \end{aligned}$$

A partir de (D.18) et (D.19), pour une composante fixée nous obtenons une équation de la forme

$$\sum_{i=1}^d \alpha_i (D + E|x|)^{\delta_i} + \sum_{i=1}^d \beta_i (D + E|x|)^{\delta_i} x^2 + \gamma + \zeta x^2 = 0.$$

Une telle équation peut être reparamétrisée et réécrite avec le changement de variable $y = D + Ex$ de sorte à obtenir une équation de la forme

$$f(y) = \sum_{i=1}^d a_i |y|^{\delta_i+2} + \sum_{i=1}^d b_i |y|^{\delta_i+1} + \sum_{i=1}^d c_i |y|^{\delta_i} + ay^2 + b|y| + c = 0.$$

Notons qu'une équation de cette forme ne peut avoir plus de $3(d+1)$ racines positives ou plus de $3(d+1)$ racines négatives pour $d \geq 2$, sauf si $a_i = b_i = c_i = a = b = c = 0$. Par l'hypothèse **H8**, les équations (D.18) et (D.19) impliquent que $\lambda_{1+id^2} \left[\sum_{i_2=1}^d A_1^+(i_1, i_2) + A_1^-(i_1, i_2) \right] = 0$ pour tout $i = 1, \dots, d$. Or sous l'hypothèse **H4**, si $p > 0$, $\mathcal{A}_0(1)^+ + \mathcal{A}_0^- \neq 0$. Il est impossible d'avoir $A_{01}^+(i_1, i) = A_{01}^-(i_1, i) = 0$, pour tout $i = 1, \dots, d$. Alors il existe un i_0 tel que $A_1(i_1, i_0)^+ + A_1(i_1, i_0)^- \neq 0$ et nous avons alors $\lambda_{1+id^2} = 0$.

Dans le cas général, l'équation (D.13) entraîne nécessairement

$$A_1^+(i_1, i_0) + A_1^-(i_1, i_0) = \dots = A_q^+(i_1, i_0) + A_q^-(i_1, i_0) = 0, \quad \forall i_0, i_1 = 1, \dots, d,$$

ce qui est impossible sous l'hypothèse **H4** et alors $\lambda = 0$. Ceci est en contradiction avec $\lambda'V = 0$, presque sûrement, ce qui entraîne que l'hypothèse de non inversibilité de la matrice D est absurde.

D.1.4 Convergence de la matrice D

Pour montrer la convergence presque sûre de la matrice $\hat{D}$, nous utiliserons des résultats connus de la consistance de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance, les hypothèses faites, la loi de η et sur les matrices C_m , $\Sigma_{\mathbf{r}_m}$ et $\Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m}$. Nous rappelons l'écriture de la matrice $\hat{D}$

$$D = \Sigma_{\mathbf{r}_m} + C_m J^{-1} I J^{-1} C'_m + C_m \Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} + \Sigma'_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} C'_m.$$

Nous posons $A = C_m J^{-1} I J^{-1} C'_m$, respectivement $\hat{A} = \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{I} \hat{J}^{-1} \hat{C}'_m$ et $B = C_m \Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m}$, respectivement $\hat{B} = \hat{C}_m \hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m}$. La matrice D s'écrit alors

$$D = \Sigma_{\mathbf{r}_m} + A + B + B'.$$

En travaillant sur les matrices A et B nous obtenons

$$\begin{aligned} A &= (C_m - \hat{C}_m) J^{-1} I J^{-1} C'_m + \hat{C}_m (J^{-1} - \hat{J}^{-1}) I J^{-1} C'_m + \hat{C}_m \hat{J}^{-1} (I - \hat{I}) J^{-1} C'_m \\ &\quad + \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{I} (J^{-1} - \hat{J}^{-1}) C'_m + \hat{C}_m \hat{J}^{-1} \hat{I} \hat{J}^{-1} (C'_m - \hat{C}'_m) + \hat{A}; \\ B &= (C_m - \hat{C}_m) \Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} + \hat{C}_m (\Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} - \hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m}) + \hat{B}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} D - \hat{D} &= (\Sigma_{\mathbf{r}_m} - \hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m}) + (A - \hat{A}) + (B - \hat{B}) + (B' - \hat{B}') \\ \|D - \hat{D}\| &\leq \|\Sigma_{\mathbf{r}_m} - \hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m}\| + \|A - \hat{A}\| + \|B - \hat{B}\| + \|B' - \hat{B}'\|. \end{aligned}$$

Nous savons que

$$\begin{aligned} \|A - \hat{A}\| &\leq \|C_m - \hat{C}_m\| \|J^{-1}\| \|I\| \|J^{-1}\| \|C'_m\| + \|\hat{C}_m\| \|J^{-1} - \hat{J}^{-1}\| \|I\| \|J^{-1}\| \|C'_m\| \\ &\quad + \|\hat{C}_m\| \|\hat{J}^{-1}\| \|I - \hat{I}\| \|J^{-1}\| \|C'_m\| + \|\hat{C}_m\| \|\hat{J}^{-1}\| \|\hat{I}\| \|J^{-1} - \hat{J}^{-1}\| \|C'_m\| \\ &\quad + \|\hat{C}_m\| \|\hat{J}^{-1}\| \|\hat{I}\| \|\hat{J}^{-1}\| \|C_m - \hat{C}_m\| \\ &\leq \|C_m - \hat{C}_m\| \|J^{-1}\| \|I\| \|J^{-1}\| \|C'_m\| + \|\hat{C}_m\| \|J^{-1}\| \|\hat{J} - J\| \|\hat{J}\| \|I\| \|J^{-1}\| \|C'_m\| \\ &\quad + \|\hat{C}_m\| \|\hat{J}^{-1}\| \|I - \hat{I}\| \|J^{-1}\| \|C'_m\| + \|\hat{C}_m\| \|\hat{J}^{-1}\| \|\hat{I}\| \|J^{-1}\| \|\hat{J} - J\| \|\hat{J}\| \|C'_m\| \\ &\quad + \|\hat{C}_m\| \|\hat{J}^{-1}\| \|\hat{I}\| \|\hat{J}^{-1}\| \|C_m - \hat{C}_m\| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ p.s.} \\ \|B - \hat{B}\| &\leq \|C_m - \hat{C}_m\| \|\Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m}\| + \|\hat{C}_m\| \|\Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} - \hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m}\|. \end{aligned}$$

Pour achever la preuve de la convergence de la matrice D , il reste à montrer que $\|\Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} - \hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m}\|$ et $\|\Sigma_{\mathbf{r}_m} - \hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m}\|$ sont finies.

Nous rappelons que $\Sigma_{\mathbf{r}_m} = J^{-1} I J^{-1}$ et que $\Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} = J^{-1} \mathbb{E} \left[\frac{\partial l_t}{\partial \theta} (S_{t-h} \otimes S_t) \right]$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{r}_m} &= (J^{-1} - \hat{J}^{-1}) I J^{-1} + \hat{J}^{-1} (I - \hat{I}) J^{-1} + \hat{J}^{-1} \hat{I} (J^{-1} - \hat{J}^{-1}) + \hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m} \\ \|\Sigma_{\mathbf{r}_m} - \hat{\Sigma}_{\mathbf{r}_m}\| &\leq \|J^{-1} - \hat{J}^{-1}\| \|I\| \|J^{-1}\| + \|\hat{J}^{-1}\| \|I - \hat{I}\| \|J^{-1}\| + \|\hat{J}^{-1}\| \|\hat{I}\| \|J^{-1} - \hat{J}^{-1}\| \\ &\leq \|J^{-1}\| \|\hat{J} - J\| \|\hat{J}^{-1}\| \|I\| \|J^{-1}\| + \|\hat{J}^{-1}\| \|I - \hat{I}\| \|J^{-1}\| + \|\hat{J}^{-1}\| \|\hat{I}\| \|J^{-1}\| \|\hat{J} - J\| \|\hat{J}^{-1}\| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ p.s.} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} &= (J^{-1} - \hat{J}^{-1}) \mathbb{E} \left[\frac{\partial l_t}{\partial \theta} (S_{t-h} \otimes S_t)' \right] + \hat{J}^{-1} \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial l_t}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{l}_t}{\partial \theta} \right) (S_{t-h} \otimes S_t)' \right] \\
&\quad + \hat{J}^{-1} \mathbb{E} \left[\frac{\partial \hat{l}_t}{\partial \theta} (S_{t-h} \otimes S_t - \hat{S}_{t-h} \otimes \hat{S}_t)' \right] + \hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} \\
\|\Sigma_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m} - \hat{\Sigma}_{\hat{\theta}_n, \mathbf{r}_m}\| &\leq \|J^{-1} - \hat{J}^{-1}\| \mathbb{E} \left[\left\| \frac{\partial l_t}{\partial \theta} \right\| \|S_{t-h} \otimes S_t\| \right] + \|\hat{J}^{-1}\| \mathbb{E} \left[\left\| \frac{\partial l_t}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{l}_t}{\partial \theta} \right\| \|S_{t-h} \otimes S_t\| \right] \\
&\quad + \|\hat{J}^{-1}\| \mathbb{E} \left[\left\| \frac{\partial \hat{l}_t}{\partial \theta} \right\| \|S_{t-h} \otimes S_t - \hat{S}_{t-h} \otimes \hat{S}_t\| \right] \\
&\leq \|J^{-1}\| \|\hat{J} - J\| \|\hat{J}^{-1}\| \mathbb{E} \left[\left\| \frac{\partial l_t}{\partial \theta} \right\| \|S_{t-h} \otimes S_t\| \right] + \|\hat{J}^{-1}\| \mathbb{E} \left[\left\| \frac{\partial l_t}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{l}_t}{\partial \theta} \right\| \|S_{t-h} \otimes S_t\| \right] \\
&\quad + \|\hat{J}^{-1}\| \mathbb{E} \left[\left\| \frac{\partial \hat{l}_t}{\partial \theta} \right\| \|S_{t-h} \otimes S_t - \hat{S}_{t-h} \otimes \hat{S}_t\| \right] \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ p.s.}
\end{aligned}$$

Nous concluons que $\hat{D} \rightarrow D$ presque sûrement lorsque $n \rightarrow +\infty$. $\square$

D.3 Puissance inconnue

La preuve du test portmanteau multivarié pour le modèle CCC-APGARCH présente des similitudes avec celle, du test univarié pour le modèle APGARCH. Nous pouvons décomposer la preuve en 4 étapes.

D.2.1 Impact asymptotique des valeurs initiales inconnues sur la statistique $\hat{\mathbf{r}}_m$.

D.2.2 La loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_m$.

D.2.3 Inversibilité de la matrice D .

D.2.4 Convergence de la matrice D .

Nous introduisons la matrice d'autocovariances h pour un h fixé tel que $0 < h < m$

$$r_h = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n [\text{vec}(s_t)][\text{vec}(s_{t-h})]', \quad \text{avec } s_t = \eta_t \eta_t' - I_d.$$

Nous définissons $S_t(\vartheta) = \text{vec}(s_t(\vartheta))$ la variable aléatoire obtenue en remplaçant η_t par $\eta_t(\vartheta) = \mathcal{H}_t^{-1/2}(\vartheta)\varepsilon_t$ et on a $r_h = n^{-1} \sum_{t=|h|+1}^n S_t S_{t-h}'$.

Nous introduisons le vecteur d'autocovariances h pour un h fixé par

$$\mathbf{r}_h := \text{vec}(r_h) = \frac{1}{n} \sum_{t=|h|+1}^n S_{t-h} \otimes S_t.$$

Finalement, nous introduisons le vecteur des m autocovariances $\mathbf{r}_m := (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m)'$.

Soit $\tilde{S}_t(\vartheta)$ la variable aléatoire obtenue en remplaçant $\tilde{\eta}_t$ par $\tilde{\eta}_t(\vartheta) = \tilde{\mathcal{H}}_t^{-1/2}\varepsilon_t$ dans S_t . Soit $\mathbf{r}_h(\vartheta)$ obtenu en remplaçant η_t par $\eta_t(\vartheta)$ et $\tilde{\mathbf{r}}_h(\vartheta)$ en remplaçant $\tilde{\eta}_t$ par $\tilde{\eta}_t(\vartheta)$ dans $\mathbf{r}_h$. Les vecteurs $\mathbf{r}_m(\vartheta) = (\mathbf{r}_1(\vartheta), \dots, \mathbf{r}_m(\vartheta))'$ et $\tilde{\mathbf{r}}_m(\vartheta) = (\tilde{\mathbf{r}}_1(\vartheta), \dots, \tilde{\mathbf{r}}_m(\vartheta))'$ sont tels que $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m(\vartheta_0)$ et $\hat{\mathbf{r}}_m = \tilde{\mathbf{r}}_m(\hat{\vartheta}_n)$.

D.2.1 Impact asymptotique des valeurs initiales inconnues sur la statistique $\hat{\underline{\mathbf{r}}}_m$

La preuve de l'impact asymptotique sur la statistique $\hat{\underline{\mathbf{r}}}_m$, des valeurs initiales inconnues dans la cas où la puissance δ est inconnue, est semblable à celle du cas connu. Il suffit d'adapter ce point en remplaçant H_t par $\mathcal{H}_t$.

D.2.2 La loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\underline{\mathbf{r}}}_m$

La loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\underline{\mathbf{r}}}_m$ est semblable à celle du cas connu. Nous adaptons facilement ce point en remplaçant H_t par $\mathcal{H}_t$ et θ par ϑ .

D.2.3 Inversibilité de la matrice D

La preuve de l'inversibilité de la matrice D diffère de celle du cas connu. Il est nécessaire d'apporter des modifications pour pouvoir conclure. Le début de la preuve reste identique et il faut uniquement remplacer H_t par $\mathcal{H}_t$. Nous pouvons alors réécrire (D.12) de sorte à faire apparaître les dérivées de la matrice $\mathcal{H}_t$ par rapport au vecteur θ et $\underline{\tau}$, or

$$\begin{aligned}\mu' \mathbf{d}' &= \sum_{i=1}^{s_0} \mu_i \mathbf{d}_i = \sum_{i=1}^{s_0} \mu_i \frac{\partial H_t}{\partial \vartheta_i} = \sum_{i=1}^{s_0} \mu_i \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} [(D_t \otimes D_t) \text{vec}(R)] \\ &= \sum_{i=1}^{s_2} \mu_i \frac{\partial (D_t \otimes D_t)}{\partial \vartheta_i} \text{vec}(R) + \sum_{i=s_2+1}^{s_1} \mu_i \frac{\partial (D_t \otimes D_t)}{\partial \tau_i} \text{vec}(R) + \sum_{i=s_1+1}^{s_0} \mu_i (D_t \otimes D_t) \frac{\partial \text{vec}(R)}{\partial \vartheta_i}.\end{aligned}\tag{D.20}$$

En faisant un travail sur une composante i_1 , nous pouvons exprimer les dérivées récursives par

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_t(i_1, i_1)}{\partial \vartheta_i} &= \frac{1}{\tau_{i_1}} h_{i_1, t}^{1/2} \times \frac{1}{h_{i_1, t}} \frac{\tau_{i_1}^{1/2} \partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \vartheta_i} \\ \frac{\partial D_t(i_1, i_1)}{\partial \tau_j} &= h_{i_1, t}^{1/2} \left[-\delta_{j, i_1} \frac{1}{\tau_{i_1}^2} \log \left(h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2} \right) + \frac{1}{\tau_{i_1}} \frac{1}{h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}} \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_j} \right], \quad j = 1, \dots, d \\ \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_j}(\vartheta) &= \sum_{i=1}^q \left[A_i^+(i_1, j) \log(\varepsilon_{j, t-i}^+) (\varepsilon_{j, t-i}^+)^{\tau_j} + A_i^-(i_1, j) \log(-\varepsilon_{j, t-i}^-) (-\varepsilon_{j, t-i}^-)^{\tau_j} \right] \\ &\quad + \sum_{i_2=1}^d \sum_{i=1}^p B_i(i_1, i_2) \frac{\partial h_{i_2, t-i}^{\tau_{i_2}/2}}{\partial \tau_j}(\vartheta) \\ &= A_1^+(i_1, j) \log(\varepsilon_{j, t-1}^+) (\varepsilon_{j, t-1}^+)^{\tau_j} + A_1^-(i_1, j) \log(-\varepsilon_{j, t-1}^-) (-\varepsilon_{j, t-1}^-)^{\tau_j} + R_{t-2}.\end{aligned}$$

Les lignes $1, d+1, \dots, d^2$ de l'équation (D.20) se résument à

$$\mu' \mathbf{d}' = \sum_{i=1}^{s_2} \mu_i \frac{\partial h_t}{\partial \vartheta_i} + \sum_{i=s_2+1}^{s_1} \mu_i \frac{\partial h_t}{\partial \tau_i} = \sum_{i=1}^{s_2} \mu_i \frac{\partial h_t}{\partial \vartheta_i} + \sum_{i=1}^d \mu_i \frac{\partial h_t}{\partial \tau_i}.$$

Finalement nous pouvons écrire

$$\lambda' V = (\lambda' \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes \mathbb{1}) h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2} + \sum_{i=1}^{s_2} \mu_i^* \frac{\partial h_{i_1, t}}{\partial \vartheta_i} + \tau_{i_1} \sum_{i=1}^d \mu_{i+s_2}^* \frac{\partial h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2}}{\partial \tau_i}(\vartheta) - \mu_{i_1+s_2}^* h_{i_1, t} \log \left(h_{i_1, t}^{\tau_{i_1}/2} \right) = 0, \quad \text{p.s.}\tag{D.21}$$

où $\mathbf{1}$ représente un vecteur composé de 1 de dimension $d^2 \times 1$ et avec $\mu_i^* = \mu_i / \tau_{i_1}$ et $\mu_{i_1+s_2}^* = \mu_{i+s_2}^* / \tau_{i_1}^2$

Nous rappelons que $\varepsilon_t^+ = \mathcal{H}_t^{1/2} \eta_t^+$ et $\varepsilon_t^- = \mathcal{H}_t^{1/2} \eta_t^-$ et nous notons par R_t une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu $\sigma\{\eta_u, u \leq t\}$. On décompose (D.21) en quatre termes.

Pour les lignes $1, \dots, 1 + d^2, md^4$, nous obtenons $\lambda' \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes \mathbf{1}$ comme pour le cas connu,

$$\lambda' \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes \mathbf{1} = \sum_{i=1}^d \lambda_{1+id^2} \eta_{i,t-1}^2 + R_{t-2},$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} (\lambda' \mathbb{S}_{t-1:t-m} \otimes \mathbf{1}) h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2} &= \left\{ \sum_{i_2=1}^d \left[A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right)^{\delta_{i_2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_1^-(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right)^{\delta_{i_2}} \right] \right\} R_{t-2} \\ &\quad + \left\{ \sum_{i_2=1}^d \left[A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right)^{\delta_{i_2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_1^-(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right)^{\delta_{i_2}} \right] \right\} \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^d \lambda_{1+id^2} \eta_{i,t-1}^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^d \lambda_{1+id^2} \eta_{i,t-1}^2 \right) R_{t-2} + R_{t-2}. \end{aligned} \quad (D.22)$$

Le deuxième terme de (D.21) est semblable au cas connu. Il peut se réécrire

$$\begin{aligned} \mu' \frac{\partial h_{i_1,t}^{\delta_{i_1}/2}}{\partial \vartheta} &= \sum_{i_2=1}^d [\mu_{i_1+i_2d} (\varepsilon_{i_2,t-1}^+)^{\tau_{i_2}} + \mu_{i_1+i_2d^2} (-\varepsilon_{i_2,t-1}^-)^{\tau_{i_2}}] + R_{t-2} \\ &= \sum_{i_2=1}^d \left[\mu_{i_1+i_2d} \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + \mu_{i_1+i_2d^2} \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right)^{\tau_{i_2}} \right] + R_{t-2}. \end{aligned} \quad (D.23)$$

Le troisième terme de l'équation peut quant à lui se réécrire comme

$$\begin{aligned} \tau_{i_1} \sum_{i=1}^d \mu_{i+s_2}^* \frac{\partial h_{i_1,t}}{\partial \tau_i} &= \sum_{i_2=1}^d \tau_{i_1} \mu_{i_2+s_2}^* \left[A_1^+(i_1, i_2) \log \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_1, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_1, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} \right. \\ &\quad \left. + A_1^-(i_1, i_2) \log \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_1, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_1, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right)^{\tau_{i_2}} \right] + R_{t-2} \end{aligned} \quad (D.24)$$

Enfin, le dernier terme de (D.21) peut se réécrire comme

$$\begin{aligned}
\mu_{i_1+s_2}^* h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2} \log \left(h_{i_1,t}^{\tau_{i_1}/2} \right) &= \mu_{i_1+s_2} \left[\sum_{i_2=1}^d A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i_2=1}^d A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2} \right] \\
&\quad \times \log \left[R_{t-2} + \sum_{i_2=1}^d A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i_2=1}^d A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right)^{\tau_{i_2}} \right] \quad (D.25)
\end{aligned}$$

Comme pour le cas connu, en combinant les équations (D.22), (D.23), (D.24) et (D.25) et en séparant les termes positifs des termes négatifs, nous obtenons deux équations

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{i_2=1}^d A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} \right] \left[\left(\sum_{i_2=1}^d \lambda_{1+i_2 d^2} \eta_{i_2,t-1}^2 \right) + R_{t-2} \right] \\
&+ \left(\sum_{i_2=1}^d \lambda_{1+i_2 d^2} \eta_{i_2,t-1}^2 \right) R_{t-2} + R_{t-2} + \sum_{i_2=1}^d \mu_{i_1+i_2 d}^* \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} \\
&+ \sum_{i_2=1}^d \tau_{i_1} \mu_{i_2+s_2} A_1^+(i_1, i_2) \log \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} \\
&- \mu_{i_1+s_2} \left[\sum_{i_2=1}^d A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2} \right] \\
&\times \log \left[R_{t-2} + \sum_{i_2=1}^d A_1^+(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) \eta_{j_1,t-1}^+ \right)^{\tau_{i_2}} \right] = 0, \quad \text{p.s.} \quad (D.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{i_2=1}^d A_1^-(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right)^{\tau_{i_2}} \right] \left[\left(\sum_{i_2=1}^d \lambda_{1+i_2 d^2} \eta_{i_2,t-1}^2 \right) + R_{t-2} \right] \\
&+ \left(\sum_{i_2=1}^d \lambda_{1+i_2 d^2} \eta_{i_2,t-1}^2 \right) R_{t-2} + R_{t-2} + \sum_{i_2=1}^d \mu_{i_1+i_2 d^2}^* \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right)^{\tau_{i_2}} \\
&+ \sum_{i_2=1}^d \tau_{i_1} \mu_{i_2+s_2} A_1^-(i_1, i_2) \log \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right)^{\tau_{i_2}} \\
&- \mu_{i_1+s_2} \left[\sum_{i_2=1}^d A_1^-(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right)^{\tau_{i_2}} + R_{t-2} \right] \\
&\times \log \left[R_{t-2} + \sum_{i_2=1}^d A_1^-(i_1, i_2) \left(\sum_{j_1=1}^d \mathcal{H}_{t-1}^{1/2}(i_2, j_1) (-\eta_{j_1,t-1}^-) \right)^{\tau_{i_2}} \right] = 0, \quad \text{p.s.} \quad (D.27)
\end{aligned}$$

A partir de (D.26) et (D.27), pour une composante fixée nous obtenons une équation de la forme

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d \alpha_i (E + F|x|)^{\tau_i} + \sum_{i=1}^d \beta_i (E + F|x|)^{\tau_i} x^2 + \sum_{i=1}^d \gamma_i \log(E + F|x|) (E + F|x|)^{\tau_i} \\ & + \left[\delta + \sum_{i=1}^d \delta_i (E + F|x|)^{\tau_i} \right] \log \left(\zeta + \sum_{i=1}^d \zeta_i (E + F|x|)^{\tau_i} \right) + \kappa x^2 + \phi = 0. \end{aligned}$$

Cette équation peut être réécrite en utilisant le changement de variable $y = E + Fx$ et reparamétrée de façon à obtenir une équation de la forme

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^d a_i |y|^{\tau_i+2} + \sum_{i=1}^d b_i |y|^{\tau_i+1} + \sum_{i=1}^d c_i |y|^{\tau_i} + \sum_{i=1}^d d_i \log(|y|) |y|^{\tau_i} \\ & + \left(e + \sum_{i=1}^d e_i |y|^{\tau_i} \right) \log \left(f + \sum_{i=1}^d f_i |y|^{\tau_i} \right) + gy^2 + h|y| + k = 0. \end{aligned}$$

Notons qu'une équation de cette forme ne peut avoir plus de $11d + 1$ racines positives ou plus de $11d + 1$ racines négatives pour $d \geq 2$, sauf si $a_i = b_i = c_i = d_i = e_i = f_i = e = f = g = h = k = 0$.

Par l'hypothèse **H8'**, les équations (D.26) et (D.27) impliquent que

$\lambda_{1+id^2} \left[\sum_{i_2=1}^d A_1^+(i_1, i_2) + A_1^-(i_1, i_2) \right] = 0$ et $\mu_{i+s_2} \left[\sum_{i_2=1}^d A_1^+(i_1, i_2) + A_1^-(i_1, i_2) \right] = 0$ pour tout $i = 1, \dots, d$. Or sous l'hypothèse **H4**, si $p > 0$, $\mathcal{A}_0(1)^+ + \mathcal{A}_0^- \neq 0$. Il est impossible d'avoir $A_{01}^+(i_1, i) = A_{01}^-(i_1, i) = 0$, pour tout $i = 1, \dots, d$. Alors il existe un i_0 tel que $A_1(i_1, i_0)^+ + A_1(i_1, i_0)^- \neq 0$ et nous avons alors $\lambda_{1+i_0d^2} = 0$ et $\mu_{i_0+s_2} = 0$.

Dans le cas général, l'équation (D.20) entraîne nécessairement

$$A_1^+(i_1, i_0) + A_1^-(i_1, i_0) = \dots = A_q^+(i_1, i_0) + A_q^-(i_1, i_0) = 0, \quad \forall i_0, i_1 = 1, \dots, d,$$

ce qui est impossible sous l'hypothèse **H4** et alors $\lambda = 0$. Ceci est en contradiction avec $\lambda'V = 0$, presque sûrement, ce qui entraîne que l'hypothèse de non inversibilité de la matrice D est absurde.

D.2.4 Convergence de la matrice D

Pour montrer ce point, il suffit d'adapter la preuve du cas connu en remplaçant θ par ϑ .

□

Notations

Notations générales

$:=$	"est défini comme",
x^+, x^-	$\max\{x, 0\}, \min\{x, 0\}$,
$\underline{u}^{\underline{d}}$	vecteur à une puissance de vecteur, $(u_1^{d_1}, \dots, u_m^{d_m})'$ où $\underline{u}, \underline{d} \in \mathbb{R}^m$,

Matrices

I_d	matrice identité $d \times d$,
$D_t^{(i)}$	dérivée i – <i>ime</i> de la matrice D_t ,
$ H $	désigne le déterminant de la matrice H ,
$\rho(A)$	rayon spectral de la matrice A ,
$\mathbb{B}^{(i)}$	représente la dérivée de la matrice B par rapport au paramètre θ_i ou ϑ_i . Cette matrice est composée de 0 avec un 1 à l'emplacement de θ_i ou ϑ_i ,

Processus

iid	indépendant et identiquement distribué,
κ_η	coefficient de kurtosis de η_t ,

Probabilités

$\mathcal{N}(m, \Sigma)$	loi normale de moyenne m et de matrice de variance Σ ,
χ_m^2	loi du khi-deux à m degrés de liberté,
$\chi_m^2(\alpha)$	quantile d'ordre α de la loi χ_m^2 ,
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	convergence en loi,
$p.s.$	presque sûrement,

Estimation

θ_0, ϑ_0	vraie valeur du paramètre,
Θ, Δ	espace des paramètres,
θ, ϑ	élément de l'espace des paramètres,
$L_n(\cdot)$	fonction de vraisemblance,
$\mathcal{L}_n(\cdot)$	fonction de log-vraisemblance,

Paramétrisation

θ	représente le vecteur des paramètres dans le cas où la puissance connue,
ϑ	représente le vecteur des paramètres dans le cas où la puissance inconnue,

Abréviations

QMV	quasi-maximum de vraisemblance,
RMSE	root mean square error.

Bibliographie

- BACHELIER, L. (1900). Théorie de spéculation. *PhD thesis, Ecole Normale Supérieure*.
- BARDET, J.-M. et WINTENBERGER, O. (2009). Asymptotic normality of the quasi-maximum likelihood estimator for multidimensional causal processes. *Ann. Statist.*, 37(5B):2730–2759.
- BAUWENS, L., LAURENT, S. et ROMBOUTS, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models : a survey. *J. Appl. Econometrics*, 21(1):79–109.
- BERKES, I., HORVÁTH, L. et KOKOSZKA, P. (2003). Asymptotics for GARCH squared residual correlations. *Econometric Theory*, 19:515–540.
- BILLINGSLEY, P. (1961). The Lindeberg-Lévy theorem for martingales. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12:788–792.
- BLACK, F. (1976). Studies of stock price volatility changes. In proceedings from the ASA. *Business and Economic Statistics Section*, pages 177–181.
- BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327.
- BOLLERSLEV, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates : a multivariate generalized arch model. *The review of economics and statistics*, pages 498–505.
- BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. F. et WOOLDRIDGE, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of political Economy*, 96(1):116–131.
- BOUBACAR MAINASSARA, Y. (2010). Tests portmanteau multivariés d’adéquation de modèles VARMA faibles. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 348(15-16):927–929.
- BOUBACAR MAINASSARA, Y. (2011). Multivariate portmanteau test for structural VARMA models with uncorrelated but non-independent error terms. *J. Statist. Plann. Inference*, 141(8):2961–2975.
- BOX, G. E. et PIERCE, D. A. (1970). Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. *Journal of the American statistical Association*, 65:1509–1526.
- BROWN, R. (1928). A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august, 1827, on the particles contained in the pollen of plants ; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine*, 4:161–173.
- CARBON, M. et FRANCO, C. (2011). Portmanteau goodness-of-fit test for asymmetric power GARCH models. *Austrian Journal of Statistics*, 40:55–64.
- COMTE, F. et LIEBERMAN, O. (2003). Asymptotic theory for multivariate GARCH processes. *J. Multivariate Anal.*, 84(1):61–84.
- ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 987–1007.

- ENGLE, R. F. (2002). Dynamic conditional correlation : a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *J. Bus. Econom. Statist.*, 20(3):339–350.
- ENGLE, R. F. et KRONER, K. F. (1995a). Multivariate simultaneous generalized arch. *Econometric Theory*, 11(1):122–150.
- ENGLE, R. F. et KRONER, K. F. (1995b). Multivariate simultaneous generalized arch. *Econometric Theory*, 11(1):122–150.
- FRANCQ, C., HORVATH, L. et ZAKOÏAN, J.-M. (2014). Variance targeting estimation of multivariate garch models. *Journal of Financial Econometrics*, 14:353–382.
- FRANCQ, C. et RAÏSSI, H. (2007). Multivariate portmanteau test for autoregressive models with uncorrelated but nonindependent errors. *J. Time Ser. Anal.*, 28(3):454–470.
- FRANCQ, C. et SUCARRAT, G. (2017). An equation-by-equation estimator of a multivariate log-GARCH-X model of financial returns. *J. Multivariate Anal.*, 153:16–32.
- FRANCQ, C., WINTENBERGER, O. et ZAKOÏAN, J.-M. (2013). GARCH models without positivity constraints : exponential or log GARCH? *J. Econometrics*, 177(1):34–46.
- FRANCQ, C., WINTENBERGER, O. et ZAKOÏAN, J.-M. (2016). Goodness-of-fit tests for Log-GARCH and EGARCH models. *TEST*, pages 1–25.
- FRANCQ, C. et ZAKOÏAN, J.-M. (2004). Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. *Bernoulli*, 10(4):605–637.
- FRANCQ, C. et ZAKOÏAN, J.-M. (2011). *GARCH models : structure, statistical inference and financial applications*. John Wiley & Sons.
- FRANCQ, C. et ZAKOÏAN, J.-M. (2012). QML estimation of a class of multivariate asymmetric GARCH models. *Econometric Theory*, 28:179–206.
- FRANCQ, C. et ZAKOÏAN, J.-M. (2016). Estimating multivariate volatility models equation by equation. *J. R. Stat. Soc. Ser. B. Stat. Methodol.*, 78(3):613–635.
- GLOSTEN, L. R., JAGANNATHAN, R. et RUNKLE, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, 48:1779–1801.
- HAMADEH, T. et ZAKOÏAN, J.-M. (2011). Asymptotic properties of LS and QML estimators for a class of nonlinear GARCH processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141:488–507.
- HIGGINS, M. L. et BERA, A. K. (1992). A class of nonlinear ARCH models. *Internat. Econom. Rev.*, 33(1):137–158.
- HWANG, S. Y. et KIM, T. Y. (2004). Power transformation and threshold modeling for ARCH innovations with applications to tests for ARCH structure. *Stochastic Process. Appl.*, 110(2):295–314.
- JEANTHEAU, T. (1998). Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models. *Econometric Theory*, 14(1):70–86.
- LEUCHT, A., KREISS, J.-P. et NEUMANN, M. H. (2015). A model specification test for GARCH(1,1) processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, 42:1167–1193.
- LI, W. K. (2004). *Diagnostic checks in time series*. Boca Raton, Florida : Chapman and Hall.
- LI, W. K. et MAK, T. (1994). On the squared residual autocorrelations in non-linear time series with conditional heteroskedasticity. *Journal of Time Series Analysis*, 15:627–636.

- LING, S. et LI, W. K. (1997). On fractionally integrated autoregressive moving-average time series models with conditional heteroscedasticity. *Journal of the American Statistical Association*, 92: 1184–1194.
- LING, S. et MCALEER, M. (2003). Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model. *Econometric Theory*, 19(2):280–310.
- LJUNG, G. M. et BOX, G. E. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, pages 297–303.
- MANDELBROT, B. B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of business*, 36:394–419.
- MCALEER, M., CHAN, F., HOTI, S. et LIEBERMAN, O. (2008). Generalized autoregressive conditional correlation. *Econometric Theory*, 24(6):1554–1583.
- MCALEER, M., HOTI, S. et CHAN, F. (2009). Structure and asymptotic theory for multivariate asymmetric conditional volatility. *Econometric Rev.*, 28(5):422–440.
- MCLEOD, A. (1978). On the distribution of residual autocorrelations in Box-Jenkins models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 296–302.
- NELSON, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns : a new approach. *Econometrica*, 59(2):347–370.
- PAN, J., WANG, H. et TONG, H. (2008). Estimation and tests for power-transformed and threshold GARCH models. *J. Econometrics*, 142(1):352–378.
- RABEMANANJARA, R. et ZAKOÏAN, J.-M. (1993). Threshold ARCH models and asymmetries in volatility. *Journal of Applied Econometrics*, 8:31–49.
- SAMUELSON, P. (1935). Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6:13–32.
- SIN, C.-y. (2008). *A portmanteau test for multivariate GARCH when the conditional mean is an ECM : theory and empirical applications*, volume 20 de *Adv. Econom.* Emerald/JAI, Bingley.
- SUCARRAT, G., GRØNNEBERG, S. et ESCRIBANO, A. (2016). Estimation and inference in univariate and multivariate log-GARCH-X models when the conditional density is unknown. *Comput. Statist. Data Anal.*, 100:582–594.
- TSE, Y. K. et TSUI, A. K. C. (2002). A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. *J. Bus. Econom. Statist.*, 20(3):351–362.

Résumé

Cette thèse présente quelques contributions à la modélisation des séries financières, notamment dans le développement d'extensions de modèles ainsi que le développement d'outils utiles à la validation de ceux-ci. Tous les résultats sont illustrés par des données simulées et mis en œuvre sur des données réelles. L'ensemble des résultats est basé sur la procédure d'estimation du Quasi-Maximum de Vraisemblance et repose sur les tests Portmanteau en ce qui concerne la validation des modèles. Dans le cadre univarié, nous proposons une extension des tests Portmanteau pour le modèle GARCH asymétrique en puissance, dans le cas où la puissance est inconnue et doit être estimée simultanément aux autres paramètres. Une extension de ce modèle est réalisée dans le cas multivarié, en considérant la corrélation conditionnelle constante au cours du temps. Dans ce cadre, nous avons développé la procédure d'estimation du modèle CCC-APGARCH dans les cas où la puissance est connue et inconnue. Les propriétés asymptotiques de l'estimateur sont établies dans les deux cas et sont utilisées pour étendre le test Portmanteau à ce modèle.

Mots-clefs : GARCH ; GARCH Multivarié ; GARCH asymétrique ; GARCH en puissance ; Estimation ; Validation ; Corrélations conditionnelles

Abstract

This thesis presents some contributions to the financial series modelling, especially in the development of models extensions and in the development of tools useful for the models validation. All the results are illustrated by simulations and applications to real data. The results are based on the Quasi-Maximum Likelihood estimation and on the Portmanteau test for the validation of models. In the univariate case, we propose an extension of Portmanteau test for the GARCH model with threshold and power transformation, when the power is unknown and must be estimated simultaneously with other parameters. An extension of this model is done in the multivariate case, taking into account that the conditional correlation is constant in time.

We developed the estimation process of the CCC-APGARCH model in the cases where the power is known and unknown. The asymptotic properties of the Quasi-Maximum Likelihood estimator are established in the both cases and used to extend the Portmanteau test for this model.

Keywords : GARCH ; Multivariate GARCH ; Asymmetric GARCH ; Power GARCH ; Estimation ; Validation ; Conditional correlations

MSC 2010 : 60G10 ; 60G15 ; 62H10 ; 62H12 ; 62H15 ; 62P20 ; 91B70 ; 91B84