



HAL
open science

Fluctuations dans la phase plate des membranes cristallines

Olivier Coquand

► **To cite this version:**

Olivier Coquand. Fluctuations dans la phase plate des membranes cristallines. Matière Condensée [cond-mat]. Sorbonne Université, 2018. Français. NNT : 2018SORUS096 . tel-02555243

HAL Id: tel-02555243

<https://theses.hal.science/tel-02555243v1>

Submitted on 27 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

École Doctorale Physique en Ile de France

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences de l'UPMC

Mention : PHYSIQUE

Présentée par

Olivier COQUAND

**Fluctuations dans la phase plate
des membranes cristallines**

Thèse dirigée par **Dominique MOUHANNA**

préparée au **Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée**

soutenue le 04 Juillet 2018

Jury :

Léonie CANET

Rapporteur

Nicolas DESTAINVILLE

Rapporteur

Benoît DOUÇOT

Examineur

Andrei FEDORENKO

Examineur

Kay WIESE

Examineur

Dominique MOUHANNA

Directeur de Thèse

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier Léonie Canet et Nicolas Destainville d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce long manuscrit. Je remercie aussi sincèrement les autres membres du jury : Benoît Douçot, Andrei Fedorenko et Kay Wiese pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je remercie Dominique Mouhanna de m'avoir donné la possibilité de travailler avec lui sur ce sujet qui m'a beaucoup intéressé, dans un esprit qui combine rigueur scientifique et ouverture, à la fois sur les approches alternatives, mais aussi sur les autres branches de la physique. Être capable de dépasser les particularités d'un domaine donné pour générer des connaissances transposables à des sujets variés est en effet, du moins à mon avis, un moteur important de la recherche en physique théorique. Un merci spécial à Bertrand Delamotte également, sans qui je n'aurais pas vécu cette formidable aventure.

Je souhaite également remercier nos collaborateurs : Jean-Philippe Kownacki, et particulièrement Karim Essafi pour l'expérience qu'il a accepté de partager avec moi. Un très grand merci également à Sofian Teber, d'abord pour sa gentillesse, mais aussi pour l'aide très précieuse qu'il nous a apportée sur le calcul des ordres supérieurs du développement en couplage faible, qui s'est révélé être bien plus ardu que prévu.

Je remercie aussi très chaleureusement Bruno Machet pour sa bonne humeur et son soutien inconditionnel, qui m'a énormément aidé dans mes moments de doute.

Le LPTMC a été pour moi une structure accueillante, qui m'a permis de réaliser ce travail dans de bonnes conditions. J'aimerais remercier spécialement les chercheurs qui ont gentiment accepté de m'accorder un peu de leur temps pour me faire partager leur savoir malgré leur emploi du temps souvent chargé : Nicolas Dupuis sur les systèmes quantiques, Gilles Tarjus et Matthieu Tissier sur les systèmes désordonnés, Bertrand Delamotte sur le groupe de renormalisation, et Claude Aslangul pour ses précieux conseils. Merci également au personnel du secrétariat qui m'a toujours aidé très efficacement : merci à Diane Domand, Liliane Cruzel, Sylvie Dalla Foglia et Patricia Antunes.

Mais la vie au laboratoire ce n'est pas seulement le travail. J'aimerais remercier les chercheurs qui ont accepté de partager leur repas avec moi : merci à Julien Vidal, Nicolas Dupuis, Jean-Noël Fuchs, Rémy Mosseri, Hélène Berthoumieux, Bernard Bernu, François Delyon, Pascal Viot, Laura Messio et Claude Aslangul. Merci également à tous ceux dont les sourires et la bonne humeur au quotidien m'ont aidé à garder le moral : merci à Bertrand Guillot, Mathieu Micoulaut, Annie Lemarchand, Marco Tarzia et Jean-Noël Fuchs.

Je voudrais remercier mes collègues doctorants et post-doctorants. Merci aux docteurs de l'équipe NPRG qui m'ont très bien accueilli dès mon arrivée en tant que stagiaire : merci à Frédéric Léonard, Thibault Debelhoir, Félix Rose et Charlie Duclut. Merci également à mes co-bureaux qui ont toujours su maintenir une ambiance de travail accueillante. Je remercie tout particulièrement Marie Chupeau pour son accueil chaleureux, son soutien inestimable dans les moments les plus difficiles de ces années de thèse, ainsi que pour ses relectures attentives de mon manuscrit. Merci également à Alexis Poncet et Maxim Dolgushev pour l'ambiance chaleureuse qu'ils ont su créer dans le bureau, chose d'autant plus appréciable pendant les longues journées de rédaction, ainsi qu'à Meric Kucukbas pour sa grande gentillesse. Merci également à Mathias Casiulis pour les nombreuses discussions intéressantes que nous avons eues.

Je tiens également à remercier tous ceux qui m'ont soutenu au quotidien, en particulier dans les moments les plus difficiles : merci à mes deux anciens colocataires (et futurs docteurs) Raphaël-David Lasserri et Thomas Epalle, merci à mon père et mes frères, et merci à Marie qui a transformé ma vie. J'ai également en écrivant ces lignes une pensée pour ceux qui ne sont plus sans qui je ne serais pas devenu ce que je suis...

Enfin, merci à tous les lecteurs courageux qui s'aventureront au-delà de cette page dans les profondeurs arides de ce manuscrit. J'espère qu'ils y trouveront de quoi les intéresser.

Table des matières

1	Groupe de renormalisation	5
1.1	Le groupe de renormalisation de Wilson	7
1.1.1	Approche naïve de la théorie pseudo-gaussienne	7
1.1.2	Organiser les fluctuations	8
1.1.3	Flot de renormalisation	10
1.2	Développement en dimension	12
1.2.1	Approche de la dimension critique supérieure	12
1.2.2	Autres développements perturbatifs	13
1.2.3	Régularisation dimensionnelle	15
1.3	Groupe de renormalisation et théorie des perturbations	16
1.3.1	Organisation de la série perturbative	16
1.3.2	Méthode des contretermes	18
1.3.3	Nature des divergences	20
1.3.4	Réarrangement infrarouge	22
1.4	Formalisme de l'action effective moyenne	23
1.4.1	Organiser les fluctuations	24
1.4.2	Équation de flot	26
1.4.3	Schémas d'approximation	28
1.4.3.1	Fonctions à n points	28
1.4.3.2	Développements dérivatifs	28
1.4.3.3	Développements en champ	30
1.4.4	Action effective moyenne en présence de désordre	30
1.4.4.1	Thermodynamique des systèmes désordonnés	30
1.4.4.2	Méthode des répliques	31
1.4.4.3	Développement en sommes de répliques libres	32
1.5	Conclusion	33
2	Cristaux bidimensionnels	35
2.1	Ordre à longue portée à deux dimensions	36
2.1.1	Cristal bidimensionnel idéal	36
2.1.1.1	Théorie de l'élasticité	36
2.1.1.2	Mesure de l'ordre positionnel	39
2.1.2	Membranes fluides	43
2.1.2.1	Surfaces fluctuantes	44
2.1.2.2	Ordre orientationnel	47
2.1.3	Membranes cristallines	49
2.2	Brisure spontanée de symétrie	51
2.2.1	Modes de Goldstone	52
2.2.2	Application aux membranes	54

2.3	Le théorème de Mermin et Wagner	58
2.3.1	Interaction effective entre flexurons	58
2.3.2	Structure de l'interaction effective	59
2.4	Conclusion	60
3	Fluctuations thermiques dans la phase plate	63
3.1	Approches perturbatives	64
3.1.1	Action de phase plate	64
3.1.2	Identité de Ward	68
3.1.3	Approximation de couplage faible au voisinage de D_c^s	71
3.1.4	Théorie de perturbation en deux dimensions	75
3.1.5	Régime de grande codimension $d_c \gg 1$	77
3.1.5.1	Transition plate-froissée	78
3.1.5.2	Phase plate	80
3.1.5.3	Corrections à une boucle	81
3.2	Perturbations au-delà du premier ordre	84
3.2.1	Nature des divergences	84
3.2.2	Théorie effective de flexurons en interaction	86
3.2.3	Corrections à deux boucles	90
3.2.3.1	Graphes à deux boucles	90
3.2.3.2	Contretermes	93
3.2.3.3	Flot de renormalisation	96
3.2.4	Lien avec la théorie à deux champs	99
3.3	Approches non-perturbatives	100
3.3.1	L'approximation d'écrantage auto-cohérent (SCSA)	100
3.3.1.1	Principes généraux	100
3.3.1.2	Énergie propre et potentiel écranté	102
3.3.1.3	Dimensions anormales	106
3.3.2	Action effective moyenne des membranes cristallines (NPRG)	107
3.3.2.1	Schéma de troncation	108
3.3.2.2	Flot de renormalisation	109
3.3.2.3	Fonction de coupure	112
3.3.2.4	Paramètre d'extension et minimisation de l'énergie libre	113
3.3.2.5	Phase plate	116
3.4	Conclusion	122
4	Thermodynamique dans la phase plate	125
4.1	Phase plate d'une membrane libre	126
4.1.1	Élasticité et courbure anormales - Critère de Ginzburg	126
4.1.2	Coefficient de Poisson	130
4.1.3	Coefficient d'expansion thermique	132
4.2	Membranes sous tension	135
4.2.1	Ensembles thermodynamiques	135
4.2.1.1	Évolution à volume fixé	136

4.2.1.2	Évolution à tension fixée	136
4.2.2	Diagramme des phases - Transition de flambage	137
4.2.3	Loi de Hooke anormale dans la phase plate	141
4.2.3.1	Évolution à tension fixée	142
4.2.3.2	Lien avec l'évolution à volume fixé	144
4.2.4	Régime sur-étiré	148
4.2.5	Coefficients thermoélastiques	151
4.2.6	Chaleurs spécifiques	153
4.3	Conclusion	155
5	Phase plate aux basses températures	161
5.1	Fluctuations quantiques	162
5.1.1	Quantification de l'action effective moyenne	162
5.1.2	Quantification du champ de position	165
5.2	Propriétés du flot de renormalisation	166
5.2.1	Équations de flot aux basses températures	166
5.2.2	Variables adimensionnées	168
5.2.3	Température adimensionnée	169
5.2.4	Fonction de coupure	171
5.2.5	Dimension anormale temporelle	172
5.3	Phase plate à température nulle	173
5.3.1	Fluctuations quantiques et ordre à longue portée	173
5.3.2	Flot de renormalisation à $T = 0$	174
5.3.3	Élasticité dans la phase plate quantique	176
5.4	Thermodynamique aux basses températures	178
5.4.1	Élasticité et évolution en température	179
5.4.2	Transitions de flambage à basse température	182
5.4.3	Coefficient d'expansion thermique et chaleurs spécifiques	190
5.5	Conclusion	193
6	Désordre dans la phase plate	195
6.1	Membranes et désordre	196
6.1.1	Types d'impuretés	196
6.1.2	Modèle	198
6.1.3	Résumé des résultats des approches précédentes	204
6.1.3.1	Membranes sans courbure spontanée aléatoire	204
6.1.3.2	Membranes avec courbure spontanée aléatoire	205
6.1.3.3	Approximation de l'écrantage auto-cohérent en présence de désordre	210
6.1.3.4	Conclusion	214
6.2	Méthode de l'action effective moyenne	214
6.2.1	Action effective moyenne en présence d'impuretés	214
6.2.1.1	Flot de l'action effective	214
6.2.1.2	Flot du paramètre d'extension ζ_k	217

6.2.1.3	Flot de renormalisation dans la phase plate	218
6.2.2	Membranes sans courbure spontanée aléatoire	220
6.2.3	Membranes réelles : $D = 2$, $d = 3$	222
6.2.4	Développement au voisinage de D_c^s , $D = 4 - \varepsilon$	226
6.2.4.1	Équations NPRG à l'ordre dominant	226
6.2.4.2	Développement à deux boucles	228
6.2.4.3	Au-delà de l'ordre sous-dominant	230
6.3	Thermodynamique dans la phase plate désordonnée	231
6.3.1	Élasticité et courbure	231
6.3.2	Caractéristiques thermodynamiques de la phase plate rugueuse	234
6.3.3	Loi de Hooke - Transition de flambage	237
6.4	Conclusion	239
A	Théorie effective	245
A.1	Séparation des modes	245
A.2	Vertex effectif	246
A.3	Vertex effectif dans l'espace direct	248
A.4	Transformée de Fourier des lois de puissance	250
B	Calcul d'intégrales en régularisation dimensionnelle	253
B.1	Intégrales sans masse	253
B.1.1	Intégrales à une boucle I	253
B.1.1.1	Intégrales scalaires	254
B.1.1.2	Intégrales vectorielles	256
B.1.1.3	Intégrales tensorielles d'ordre 2	257
B.1.1.4	Intégrales tensorielles d'ordre 3	257
B.1.1.5	Intégrales tensorielles d'ordre 4	258
B.1.1.6	Ordres supérieurs	260
B.1.1.7	Intégrales à deux boucles réductibles	261
B.1.2	Intégrales losange J	262
B.1.2.1	Intégration par parties	262
B.1.2.2	Relations de récurrence	264
B.1.2.3	Intégrales tensorielles	267
B.1.3	Intégrales triangle T	267
B.2	Intégrales massives	271
B.2.1	Tadpoles massifs	271
B.2.2	Transformée de Mellin-Barnes	274
C	Équation de Wetterich	275
C.1	Démonstration	275
C.2	Cas pseudo-massif	276

D	Théorie de perturbations - Annexe technique	279
D.1	Coefficients de renormalisation et fonctions β	279
D.1.1	Phase plate des membranes pures	279
D.1.2	Phase plate des membranes désordonnées	281
D.2	Théorie de large codimension	285
D.2.1	Flot du paramètre d'extension	285
D.2.2	Correction à une boucle en phase plate	285
D.2.2.1	Approche alternative du calcul de l'énergie propre	285
D.2.2.2	Dimensions anormales	287
D.3	Graphes à deux boucles pour les membranes avec impuretés	290
D.4	Graphes à trois boucles	293
E	NPRG - Annexe technique	303
E.1	Brisure de l'invariance par translation et coupure	303
E.2	Fonctions à n -points	304
E.3	Équations de flot	305
E.3.1	Flot de ζ_k - Preuve par les tangentes	305
E.3.2	Fonctions de seuil et règles de remplacement	310
E.3.3	Dimension anormale	314
E.3.4	Remarque sur la théorie de basse température	314
E.4	Membranes désordonnées	314
E.4.1	Vertex	314
E.4.2	Propagateur	318
E.4.3	Équations de flot	319
E.4.4	Expressions finales	322
F	Fonctions de seuil	329
F.1	Définitions	329
F.2	Identités remarquables	330
F.2.1	La famille k	330
F.2.2	Formules de réduction	330
F.3	Expressions générales	331
F.3.1	Coupure quelconque	331
F.3.2	Coupure de Litim	332
F.3.2.1	Fonctions massives	333
F.3.2.2	Fonctions sans masse	333
F.4	Fonctions de seuil à basse température	334
F.4.1	Ajustement spectral	334
F.4.2	Expressions générales	334
F.4.2.1	Coupure quelconque	334
F.4.2.2	Coupure de Litim	335
F.5	Fonctions de seuil avec désordre	337
	Bibliographie	339

Introduction

L'appellation « membrane cristalline » englobe l'ensemble des matériaux bidimensionnels dotés d'une structure interne périodique à l'échelle microscopique. L'exemple le plus connu est le graphène, matériau basé sur un réseau bidimensionnel hexagonal d'atomes de carbone, obtenu pour la première fois par K. Novoselov et ses collaborateurs [Novoselov 2004] par exfoliation mécanique à partir d'un échantillon de graphite (un autre allotrope du carbone qui est tridimensionnel). L'obtention d'un tel matériau d'une seule épaisseur d'atomes est rendue possible par la structure en feuillets du graphite dans laquelle chaque atome est relié à ses voisins dans un même feuillet par des liaisons covalentes fortes, alors que l'interaction entre feuillets, de type van der Waals, est d'amplitude beaucoup plus faible.

La réduction de la dimensionalité du matériau, de trois dimensions à deux dimensions, a des conséquences drastiques sur ses propriétés physico-chimiques, conférant au graphène un certain nombre de propriétés exotiques qui en font l'un des matériaux les plus étudiés aujourd'hui. Par exemple, le passage à deux dimensions augmente l'amplitude des fluctuations quantiques dans le système, ce qui permet au graphène d'être l'un des seuls matériaux dans lesquels l'effet Hall quantique peut être observé à température ambiante. Le graphène est en outre un matériau particulièrement rigide (son module d'Young est sept fois plus grand que celui de l'acier) et léger, qui peut subir des déformations relatives de l'ordre de 20% sans se fracturer, ce qui en fait un candidat intéressant pour de nombreuses applications. Grâce à ses propriétés chimiques, notamment sa perméabilité très sélective suivant les espèces, c'est un matériau de choix pour la fabrication de filtres, et de capteurs électrochimiques de précision. De plus, le graphène est un semi-métal, et ses électrons de conduction se comportent comme des particules relativistes sans masse, ce qui lui donne une conduction thermique et des propriétés de transport exceptionnelles.

L'absence de bande interdite dans le spectre de bande du graphène pose cependant problème pour certaines applications dans les domaines de l'électronique et de l'optoélectronique, où il est souhaitable de pouvoir utiliser alternativement des comportements conducteurs et isolants. Cela a motivé la recherche d'autres structures cristallines bidimensionnelles, dont quelques exemples sont présentés sur la Figure 1, qui ont des propriétés semi-conductrices. La diversification des types de cristaux bidimensionnels ayant chacun leurs spécificités physico-chimiques démultiplie les applications possibles pour cette famille de matériaux : par exemple, les propriétés d'adsorption du silicène et du stanène¹ en font des candidats particulièrement intéressants pour la conception de batteries au lithium plus performantes, les propriétés de conduction du MoS₂ lui confèrent des caractéristiques cruciales pour des applications en optoélectronique, et le phosphore noir² se distingue des autres matériaux bidimensionnels par son caractère fortement anisotrope.

Les membranes cristallines ne se restreignent cependant pas aux seuls matériaux dont l'épaisseur est proche de la taille d'un atome, elles regroupent également tous les matériaux très fins

1. Matériaux similaires au graphène construits à partir d'atomes de silicium et d'étain respectivement.

2. Le phosphore noir est un allotrope du phosphore qui, de même que le graphite, est doté d'une structure en feuillets qui peuvent être séparés les uns des autres. Nous nous référons ici à un feuillet individuel.

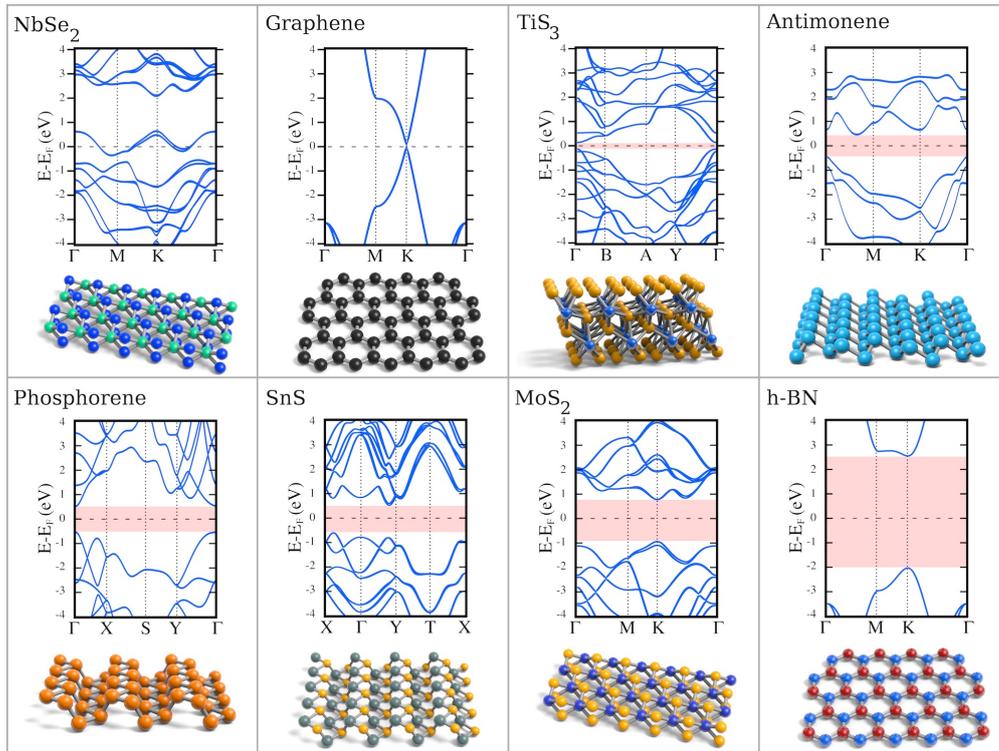


FIGURE 1 – Figure extraite de [Roldàn 2017] présentant différentes membranes cristallines aux propriétés de conduction électronique variées ainsi que leurs structures de bande : NbSe₂ est un métal, le graphène est un semi-métal, TiS₃, l’antimonène, le phosphorène, SnS et MoS₂ sont des semi-conducteurs, et h-BN est un isolant.

que l’on trouve notamment dans les systèmes biologiques présentant une organisation interne à l’échelle microscopique qui leur confère des propriétés élastiques semblables aux matériaux précédents, comme les capsides virales, les réseaux de spectrine qui rigidifient les parois de certains types cellulaires comme les globules rouges (érythrocytes), ou encore les bicouches lipidiques (constituants majeurs des membranes plasmiques) lorsqu’elles se trouvent à l’état de gel. Outre l’intérêt certain que revêt la compréhension du comportement de tels objets du point de vue de la biologie, l’étude de leurs propriétés physiques a aussi pour but certaines applications comme la stabilisation de liposomes pour effectuer de la médication ciblée.

Il n’est bien sûr pas possible de traiter la physique de ces objets dans toute sa diversité dans ce manuscrit. Le travail présenté est restreint à l’étude des propriétés mécaniques de ces matériaux. En effet, celles-ci jouent un rôle prépondérant dans un grand nombre d’applications mentionnées ci-dessus, ne serait-ce que parce que les degrés de liberté mécaniques sont couplés aux autres types de degrés de liberté, électroniques notamment. Par exemple, il est possible de modifier la taille de la bande interdite dans les membranes cristallines semi-conductrices en appliquant une contrainte sur le matériau. La présence de défauts au niveau de la matrice cristalline induit également de forts changements de comportement, ce qui a ouvert tout un champ de recherche lié à l’ajustement des propriétés de ces matériaux à des situations diverses par ajout contrôlé d’impuretés. De plus, la plupart des applications des matériaux comme le graphène

requièrent de les coupler à un substrat. Les propriétés d'adhésion et de friction de la membrane sur son substrat dépendent de son état de déformation mécanique. Les aspects mécaniques sont également impliqués dans certains processus biologiques. Par exemple, une transition de phase, observée dans des vésicules partiellement polymérisées, induit une déformation réversible des vésicules vers une configuration plus fortement froissée qui peut leur permettre d'expulser une partie de leur contenu. L'affaiblissement des propriétés élastiques des globules rouges peut également conduire à des déformations irréversibles de leur forme de discocyte habituelle en des formes d'échinocyte (voir Figure 2). Ce mécanisme est impliqué dans certaines maladies hématologiques.

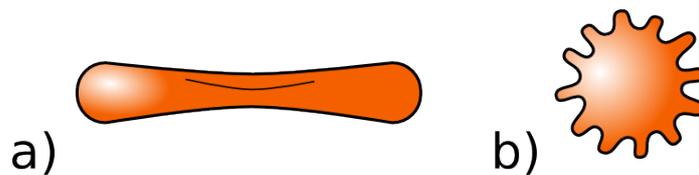


FIGURE 2 – Différentes formes possibles de l'érythrocyte. a) Discocyte. b) Echinocyte.

Une des propriétés mécaniques singulières les plus importantes des membranes cristallines est la possibilité qu'elles ont de se trouver à température ambiante dans une phase « plate » caractérisée par un ordre orientationnel à longue portée, c'est-à-dire l'existence d'une direction privilégiée pour les vecteurs normaux à la surface engendrée par la membrane. Suivant les caractéristiques des matériaux, les configurations associées peuvent avoir la forme d'un plan, comme c'est le cas pour la plupart des feuilles de graphène, d'une sphère pour des grains de pollen par exemple, voire des formes plus complexes comme les discocytes mentionnés précédemment. L'existence d'une telle phase ordonnée stable à longue distance est rare dans les systèmes bidimensionnels car elles sont généralement détruites par les fluctuations thermiques (ce résultat est connu sous le nom de théorème de Mermin et Wagner). Une description adaptée de la physique de ces systèmes doit donc intégrer une description adéquate de l'effet des fluctuations thermiques. L'approche choisie dans cette étude est basée sur les méthodes dites du « groupe de renormalisation » qui visent à établir des liens entre la physique des systèmes aux échelles microscopique et macroscopique en présence de fluctuations. Nous détaillerons en particulier une méthode issue du formalisme de « l'action effective moyenne » qui permet de construire une grande variété de schémas d'approximation adaptés à des situations variées.

Le manuscrit est organisé de la manière suivante :

- Tout d'abord, le premier chapitre constitue une présentation générale des méthodes du groupe de renormalisation utilisées dans ce travail. Ce chapitre, plutôt technique, vise à la fois à introduire le formalisme utilisé dans la suite et à mettre en valeur les différents aspects des méthodes utilisées qui sont importants pour la compréhension de l'exposé.
- Ensuite, le deuxième chapitre est une introduction à la physique des surfaces fluctuantes, et en particulier des membranes cristallines. En utilisant une présentation qualitative des modes de fluctuation contrôlant le comportement de ces systèmes, nous expliquerons les mécanismes à la base de la stabilisation de la phase plate.

L'essentiel du travail réalisé lors de cette thèse est concentré dans les chapitres suivants :

- Le chapitre 3 présente les différentes méthodes utilisées dans la littérature pour décrire le comportement à longue distance des membranes cristallines dans la phase plate : les développements en couplage faible, l'approximation d'écrantage auto-cohérent, et l'approximation du potentiel local améliorée, basée sur le formalisme de l'action effective moyenne. Afin de permettre une comparaison non-triviale entre les résultats obtenus par ces méthodes, nous avons poussé le développement en couplage faible au voisinage de la dimension critique supérieure au-delà de l'ordre le plus bas où l'accord avec les autres méthodes est direct par construction. Cela fournit également un test supplémentaire de la validité de l'approximation du potentiel local améliorée.
- Dans le chapitre 4, nous établissons les liens entre les équations de flot obtenues par le groupe de renormalisation dans l'approximation du potentiel local améliorée et les observables thermodynamiques qui décrivent la physique du système. Nous étudions l'ensemble des coefficients thermoélastiques, les modules d'élasticité, et les chaleurs spécifiques des membranes cristallines dans la phase plate. L'effet de l'introduction d'une contrainte appliquée par un opérateur extérieur est également détaillé, et particulièrement la loi de Hooke, qui a un comportement anormal dans ces systèmes.
- Dans le chapitre 5, nous examinons l'effet des fluctuations quantiques, qui deviennent dominantes à basse température, sur les propriétés thermodynamiques de la phase plate. En particulier, nous étudions leur impact sur la stabilité de cette phase aux grandes échelles de longueur, la modification des lois de l'élasticité aux basses températures, ainsi que la question de la définition d'une échelle appropriée de température caractérisant l'émergence de nouveaux effets dus aux fluctuations quantiques.
- Enfin, le chapitre 6 présente l'étude des conséquences sur la physique de la phase plate de l'introduction de différents types de défauts dans la membrane. Après une présentation de l'état actuel des connaissances théoriques et des études expérimentales qui ont motivé ces travaux, nous détaillons les prédictions de l'approximation du potentiel local améliorée sur l'émergence de nouveaux comportements liés à la présence de désordre gelé.

Groupe de renormalisation

Sommaire

1.1	Le groupe de renormalisation de Wilson	7
1.1.1	Approche naïve de la théorie pseudo-gaussienne	7
1.1.2	Organiser les fluctuations	8
1.1.3	Flot de renormalisation	10
1.2	Développement en dimension	12
1.2.1	Approche de la dimension critique supérieure	12
1.2.2	Autres développements perturbatifs	13
1.2.3	Régularisation dimensionnelle	15
1.3	Groupe de renormalisation et théorie des perturbations	16
1.3.1	Organisation de la série perturbative	16
1.3.2	Méthode des contretermes	18
1.3.3	Nature des divergences	20
1.3.4	Réarrangement infrarouge	22
1.4	Formalisme de l'action effective moyenne	23
1.4.1	Organiser les fluctuations	24
1.4.2	Équation de flot	26
1.4.3	Schémas d'approximation	28
1.4.3.1	Fonctions à n points	28
1.4.3.2	Développements dérivatifs	28
1.4.3.3	Développements en champ	30
1.4.4	Action effective moyenne en présence de désordre	30
1.4.4.1	Thermodynamique des systèmes désordonnés	30
1.4.4.2	Méthode des répliques	31
1.4.4.3	Développement en sommes de répliques libres	32
1.5	Conclusion	33

La plupart des systèmes étudiés en physique comportent un très grand nombre de degrés de liberté à l'échelle microscopique. Le rôle des modèles théoriques est de réduire ce grand nombre de degrés de liberté en un minimum de variables indépendantes, de façon à pouvoir donner des prédictions. Cela est possible notamment grâce au fait que les observations se font généralement

à des échelles macroscopiques, très grandes devant les échelles microscopiques, ce qui est essentiel pour la réduction des degrés de liberté. Par exemple le modèle des gaz parfaits réduit environ $\mathcal{N}_A \simeq 6 \times 10^{23}$ degrés de liberté microscopiques en 3 variables : P , V et T . Cette réduction est d'autant plus importante en théorie des champs où le nombre de degrés de liberté est infini (puisque les valeurs d'un champ donné en chaque point de l'espace constituent des degrés de liberté différents).

Continuons avec l'exemple des gaz : il semble évident que la loi des gaz parfaits n'est pas altérée suivant que l'on considère un volume de 10 L ou de 1 L, mais jusqu'où peut-on aller de cette façon-là ? Comment caractériser une bonne échelle macroscopique ? La plus petite échelle de longueur d'un système pouvant être considérée comme étant macroscopique est appelée longueur de corrélation ξ . Elle caractérise l'échelle jusqu'à laquelle deux éléments du système interagissent fortement entre eux.

Si ξ est petite devant l'échelle à laquelle le système est observé, celui-ci peut être décrit de manière satisfaisante par un grand ensemble de blocs de taille typique ξ décorrés les uns des autres ; les fluctuations thermiques aux échelles plus grandes que ξ sont donc gaussiennes en vertu du théorème central-limite. Dès lors que ξ est beaucoup plus grande que la longueur microscopique caractéristique du système, ses propriétés sont fortement altérées sur une grande gamme d'échelles de longueur, et son comportement macroscopique peut être qualitativement assez différent du microscopique à cause de l'émergence de phénomènes collectifs (voir Figure 1.1).

Considérons par exemple un matériau ferromagnétique décrit par le modèle d'Ising de hamiltonien \mathcal{H} dans un champ magnétique B :

$$\mathcal{H}(\{s_i\}; B) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - \sum_i B \cdot s_i . \quad (1.1)$$

\mathcal{H} donne une description du système à l'échelle du réseau, c'est-à-dire l'échelle *microscopique* du système. Ses propriétés *macroscopiques* sont elles décrites par son énergie libre W , définie à partir de la fonction de partition \mathcal{Z} par¹ :

$$W[B] = -\log(\mathcal{Z}[B]) = -\log\left(\sum_{\{s_i\}} e^{J \sum s_i \cdot s_j + \sum B \cdot s_i}\right) . \quad (1.2)$$

Afin de renforcer l'analogie avec \mathcal{H} , il peut être utile de travailler avec sa transformée de Legendre Γ , qui est le bon potentiel thermodynamique si nous travaillons à aimantation fixée plutôt qu'à champ magnétique fixé :

$$\begin{cases} \Gamma[\{S_i\}] = -W[B] - \sum_i B \cdot S_i = \log\left(\sum_{\{s_i\}} e^{J \sum s_i \cdot s_j + \sum B \cdot s_i}\right) - \sum_i B \cdot S_i \\ S_i = \langle s_i \rangle_B = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\{s_j\}} s_i e^{-\mathcal{H}(\{s_j\}; B)} \end{cases} . \quad (1.3)$$

À cause de la présence de la somme sur les configurations, s_i n'a pas de sens à l'échelle macroscopique. La bonne variable pour décrire la réaction du système à un champ magnétique à

1. Afin de simplifier les expressions, nous nous plaçons dans un système d'unités pour lesquelles $k_B T = 1$.

cette échelle est l'aimantation S_i qui inclut une somme sur toutes les combinaisons de valeurs possibles pour les spins microscopiques, qui sont des variables aléatoires.

De plus, dans l'approximation de champ moyen, Γ et \mathcal{H} ont la même forme [LeBellac 2012] :

$$\Gamma[\{S_i\}] = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i \cdot S_j - \sum_i B \cdot S_i . \quad (1.4)$$

En effet, étudier un spin plongé dans un champ magnétique moyen causé par ses voisins revient à considérer que le système est formé de sous-systèmes de la taille d'un spin évoluant plus ou moins indépendamment les uns des autres ; autrement dit cela suppose implicitement que la longueur de corrélation du système est peu différente de l'échelle microscopique. En revanche, à l'approche de la température de transition paramagnétique-ferromagnétique, ξ devient très grande et l'expression de Γ est très différente de (1.4) [LeBellac 2012].

Ainsi, les fluctuations des champs microscopiques, matérialisées par la somme sur les configurations, peuvent changer drastiquement les propriétés d'un système à l'échelle macroscopique.

Les méthodes du groupe de renormalisation ont pour but de relier les hamiltoniens microscopiques aux grandeurs macroscopiques. Elles définissent des procédures de construction de moyennes mésoscopiques à l'échelle de la longueur de corrélation afin d'expliquer comment les phénomènes collectifs émergent aux échelles intermédiaires [Wilson 1974].

Ce chapitre présente les différentes approches du groupe de renormalisation qui seront utilisées dans la suite de ce travail, à défaut d'être exhaustif. Dans un souci de clarté nous avons choisi d'utiliser pour nos exemples les modèles les plus simples même si ceux-ci n'apparaîtront pas dans les chapitres suivants.

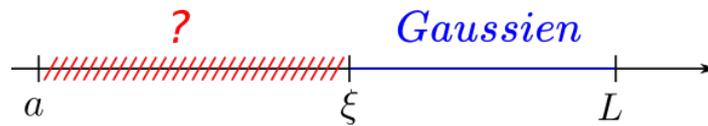


FIGURE 1.1 – Séparation des échelles de longueur : entre ξ et la longueur L à laquelle le système est observé, les fluctuations sont gaussiennes. Entre ξ et l'échelle microscopique a un grand nombre de degrés de liberté doivent être pris en compte.

1.1 Le groupe de renormalisation de Wilson

Le calcul des fluctuations est en général une entreprise très difficile. Cependant, nous avons exhibé un cas dans lequel les calculs sont simples : si $\xi \sim a$, la théorie est gaussienne. Une première tentative naturelle consiste donc à s'atteler au cas où le système se trouve dans un régime proche du régime gaussien, en supposant petites les corrections apportées par les fluctuations. Afin de simplifier les expressions, nous travaillerons dans un système d'unités tel que $\hbar = 1$, $c = 1$, $k_B T = 1$.

1.1.1 Approche naïve de la théorie pseudo-gaussienne

Considérons par exemple un champ scalaire $\varphi(x)$. Dans le langage de la théorie des champs, le régime gaussien correspond à la théorie libre, où l'action $S_G[\varphi]$ ne comporte que le terme cinétique et la masse. Rajoutons à cette action un terme d'interaction $S_I[\varphi]$, supposé petit. Notre

objectif ici est de comprendre comment un tel terme affecte les propriétés macroscopiques du système. Afin d'évaluer son impact sur les quantités thermodynamiques, nous pouvons développer le terme exponentiel dans la fonction de partition en série entière

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-S_G[\varphi] - S_I[\varphi]} \\ &= \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-S_G[\varphi]} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-S_I[\varphi])^n}{n!} \\ &\simeq \sum_{n=0}^{+\infty} \left\langle \frac{(-S_I[\varphi])^n}{n!} \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.5)$$

où les moyennes sont évaluées dans la théorie gaussienne. Si l'interaction est suffisamment faible, la somme dans (1.5) peut être tronquée, donnant une approximation du résultat. L'intérêt principal de cette formulation est que les valeurs moyennes de polynômes en φ sont *a priori* simples à évaluer dans la théorie gaussienne, malgré le caractère fonctionnel de l'intégrale sur φ , et que la somme est organisée en puissances du terme d'interaction, supposé petit, ce qui donne une hiérarchie naturelle entre les termes qui permet *a priori* d'évaluer la précision du résultat. Plus concrètement, supposons par exemple que $S_I[\varphi] = \int_x g \varphi^4(x)$. Le terme d'ordre n de la somme dans (1.5) s'écrit alors² :

$$\frac{(-g)^n}{n!} \left\langle \int_x (\varphi^4(x))^n \right\rangle. \quad (1.6)$$

Si g définit la petitesse de chaque terme, ce terme est d'ordre $O(g^n)$.

Cependant, en règle générale, la valeur moyenne $\langle (\varphi^4)^n \rangle$ est une intégrale divergente. En effet, à part dans quelques cas très particuliers, une fois la moyenne sur les champs effectuée, elle fait intervenir une intégrale spatiale (en orange) qui diverge aux courtes distances. C'est une conséquence de l'illégitimité de l'inversion de la somme et de l'intégrale dans (1.5). Une solution peut consister à appliquer une coupure microscopique en définissant a comme borne inférieure de l'intégrale, mais cela introduit une dépendance explicite des résultats dans les caractéristiques microscopiques du système, et reste problématique dans la limite où a est petit.

Ainsi, supposer g petit n'est pas suffisant pour assurer que les corrections à la théorie gaussienne le soient également.

1.1.2 Organiser les fluctuations

Nous avons vu que les fluctuations thermiques sont gaussiennes pour des longueurs $l \gg \xi$, mais généralement pas en-deçà ; leur comportement dépend donc dans une large mesure de l'échelle de longueur qui leur est associée. L'approche précédente, en traitant d'un seul coup les fluctuations à toutes les échelles introduit des divergences dans le calcul de \mathcal{Z} . Organiser l'intégration sur les fluctuations en fonction des échelles de longueur qui leur sont associées peut permettre de contourner ce problème. En vertu de ce qui précède, les systèmes dont la longueur de corrélation ξ est grande devant l'échelle microscopique a sont les plus difficiles à décrire.

2. La notation \int_x est un raccourci pour désigner l'intégrale à D dimensions $\int d^D x$.

Dans [Kadanoff 1966], Kadanoff fait l'observation suivante : considérons un système avec une grande longueur de corrélation. Si l'on effectue une moyenne locale sur le champ, en définissant un champ effectif à une échelle de longueur un peu plus grande, le système se comporte de manière effective de façon similaire au système initial, mais avec une longueur de corrélation réduite (voir Figure 1.2). Il est donc possible, au moins en principe, d'atteindre le régime $\xi \sim a$ par itération de cette procédure.

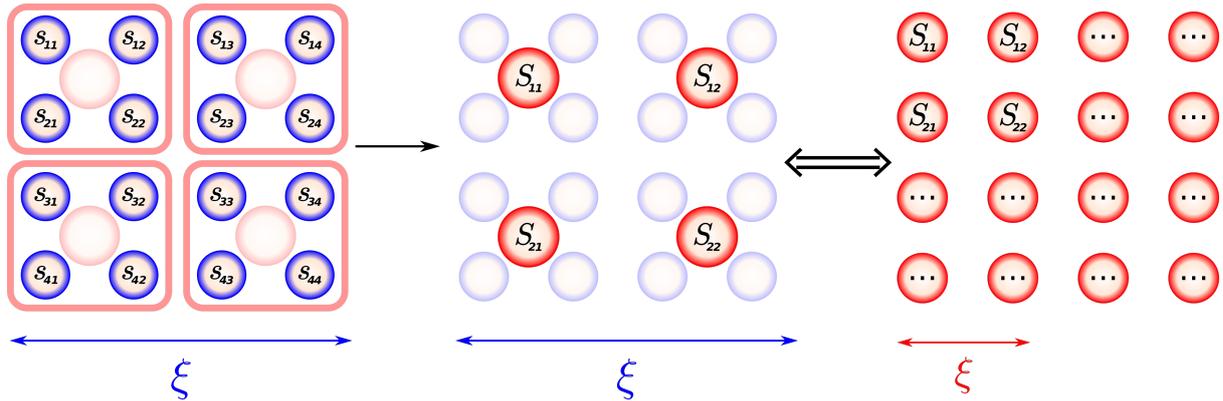


FIGURE 1.2 – **Blocs de spins de Kadanoff** : Un premier réseau (en bleu) permet de définir un ensemble de spins s_{ij} . Ces spins sont regroupés par quatre pour former les plaquettes rouges grâce à une moyenne locale. Chaque plaquette porte un spin effectif S_{ij} . Le nouveau réseau ainsi obtenu est équivalent à un réseau identique au réseau initial, mais avec une longueur de corrélation réduite de moitié dans la limite où la taille du système est infinie.

L'idée de Kadanoff a été reprise par Wilson [Wilson 1971a, Wilson 1971b] qui a forgé à partir des blocs de spins la notion de transformation du groupe de renormalisation. Celles-ci comportent deux éléments majeurs :

- Une procédure définissant des moyennes locales sur les champs à toutes les échelles de longueur. L'idée est un peu similaire à celle utilisée en hydrodynamique : pour décrire les propriétés macroscopiques des fluides, la notion de particule de fluide mésoscopique est plus pratique que la définition du fluide par l'ensemble de ses molécules.
- En parallèle, il faut définir à chaque échelle une action effective décrivant les nouvelles interactions entre les champs mésoscopiques, que l'on espère toujours locales. En effet, ces interactions n'ont aucune raison d'être les mêmes que celles du hamiltonien microscopique. Par exemple, l'application de la procédure de blocs de spins à un modèle d'Ising sur un réseau triangulaire génère des interactions second-voisins entre les plaquettes [Delamotte 2012].

En procédant de cette façon, il faut que la théorie effective soit bien définie de façon complètement cohérente à chaque échelle. Cela requiert généralement de définir des moyennes locales à des échelles les plus proches possibles de l'échelle courante (voir par exemple la section 1.4 de [Delamotte 2012]). Il est en effet plus facile de moyennner sur un nombre plus restreint de degrés de liberté à la fois.

Finalement, l'application successive de transformations du groupe de renormalisation à la théorie microscopique génère un ensemble d'actions effectives à toutes les échelles qui ont *les*

mêmes propriétés aux grandes longueurs (dans l'infrarouge). L'intégration successive des fluctuations aux différentes échelles gomme l'influence des propriétés microscopiques inessentiels pour ne singulariser que les quelques paramètres essentiels à la description du système à l'échelle macroscopique, que l'on peut espérer être peu nombreux. Ceci permet l'émergence de l'universalité : des systèmes qui ne diffèrent à l'échelle microscopique que par des caractéristiques inessentiels sont régis par les mêmes lois à l'échelle macroscopique.

1.1.3 Flot de renormalisation

La procédure de blocs de spins est rarement réalisable telle quelle en pratique, mais elle donne les éléments que toute procédure de renormalisation doit respecter. En particulier, il faut :

- Choisir un jeu d'interactions minimales. *A priori*, toute interaction compatible avec les symétries du système peut être générée par une moyenne mésoscopique, mais nous pouvons espérer que seules certaines d'entre elles auront une influence notable dans l'infrarouge. L'universalité permet souvent de réduire le problème à l'étude de quelques couplages seulement (mais cela n'est pas systématique).
- Construire à chaque échelle k une action effective courante $S_k[\varphi]$. Son expression n'est pas toujours facile à établir ; mais comme nous avons vu qu'il est préférable d'intégrer un minimum de fluctuations à la fois, il est souvent plus facile d'avoir accès à $\partial_k S_k$, appelé *flot de renormalisation*. Ainsi, avec un jeu de conditions initiales (données par la théorie microscopique), il est possible de construire l'action effective à une échelle donnée en intégrant le flot de renormalisation.

Il est important de noter qu'*a priori*, seule la limite thermodynamique (qui est la limite des grandes longueurs) nous intéresse pour décrire la physique à l'échelle macroscopique. La restriction aux seuls régimes asymptotiques simplifie considérablement l'étude en restreignant le nombre de résultats différents possibles selon les conditions initiales, et réduit les dépendances résiduelles éventuelles dans la procédure utilisée pour générer les moyennes mésoscopiques. Nous retrouvons donc ici la trace de l'universalité : certaines propriétés microscopiques donnant des conditions initiales différentes peuvent conduire au même régime asymptotique dans la limite des grandes longueurs. L'étude du flot de renormalisation se rapproche donc de la recherche des propriétés asymptotiques d'un système d'équations aux dérivées partielles couplées, avec des outils analogues aux systèmes dynamiques.

Comme pour les systèmes dynamiques, la zoologie des différents régimes asymptotiques est *a priori* complexe, mais dans la très grande majorité des cas, il s'agit simplement de points fixes dans le diagramme de flot³ correspondant aux solutions de $\partial_k S_k = 0$. Atteindre un tel point fixe requiert le plus souvent de travailler avec des variables adimensionnées. Par exemple, dans le cas des blocs de spins (Figure 1.2), pour pouvoir comparer le système initial et le réseau de spins de plaquettes et conclure que ξ était réduite, nous avons comparé deux systèmes qui ont la même taille de maille de réseau, ou autrement dit, nous avons divisé toutes les longueurs par l'échelle intrinsèque du réseau pour pouvoir les comparer entre elles.

3. C'est l'espace de toutes les théories intermédiaires accessibles au système. Si l'action effective est paramétrée par N couplages, l'espace dans lequel évolue le flot a N dimensions.

Si l'action effective atteint un point fixe, cela signifie qu'un couplage, ou une combinaison de ceux-ci, devient invariant d'échelle dans la limite thermodynamique, autrement dit, le comportement du système est régi par une loi d'échelle universelle. De même que dans la théorie des systèmes dynamiques, ces points fixes peuvent avoir plusieurs natures. Lorsque les points fixes sont entièrement attractifs, ils décrivent des comportements universels aux grandes échelles de longueur indépendants des caractéristiques microscopiques ; cela correspond le plus souvent aux différentes phases de la matière. Si un point fixe est répulsif dans une direction, il s'agit le plus souvent d'un marqueur d'une transition de phase du second ordre⁴, qui requiert l'ajustement fin d'une grandeur pour être atteint. C'est le cas par exemple du point critique de l'eau. Dans le cas où plus de paramètres doivent être ajustés, il s'agit de points multicritiques. Pour plus de détails, se reporter à la Figure 1.3.

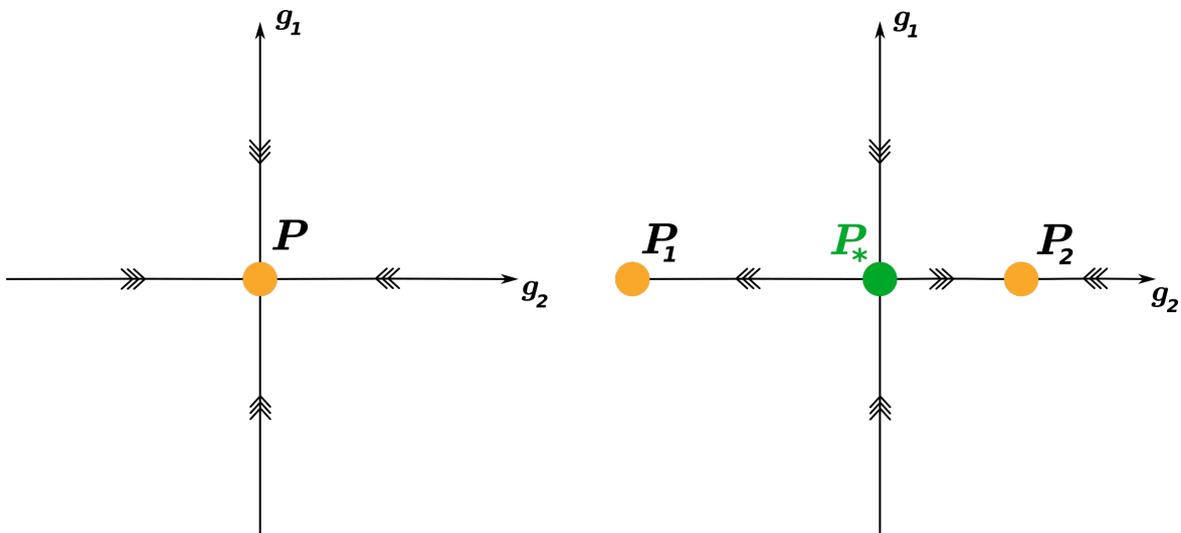


FIGURE 1.3 – Diagrammes de flot d'une théorie décrite par deux couplages g_1 et g_2 . À gauche, le point fixe est attractif. Quelle que soit la condition initiale, les lois d'échelle du système dans l'infrarouge sont données par P . Les couplages g_1 et g_2 sont dits *inessentiels*. À droite, le point fixe P_* est répulsif dans une direction : il ne peut être atteint que si g_2 est parfaitement ajusté à 0. Le signe de g_2 dans la condition initiale déterminera si la limite thermodynamique du système correspond à P_1 ou P_2 , même si celui-ci est très petit : g_2 est un couplage *essentiel* au voisinage de P_* (il est en revanche toujours inessentiel au voisinage de P_2). P_* décrit les lois d'échelle universelles à la transition de phase.

Maintenant que nous avons vu les propriétés générales des transformations du groupe de renormalisation, nous allons voir comment celles-ci peuvent être implémentées en pratique. En effet, malgré ce découpage intelligent des fluctuations en modes à chaque échelle de longueur, effectuer des calculs sans approximation supplémentaire est quasiment toujours impossible. L'approche de Wilson, par l'éclairage particulier qu'elle donne au problème, permet de construire plus facilement des schémas d'approximation cohérents.

4. Les transitions de phase du premier ordre présentent des comportements non universels, et ne sont donc pas décrites par des points fixes dans le diagramme de flot.

1.2 Développement en dimension

Approcher une théorie gaussienne dans un développement en un petit paramètre n'est pas toujours simple, comme nous l'avons vu dans la section 1.1.1. Nous nous intéressons ici à différentes manières d'y parvenir.

1.2.1 Approche de la dimension critique supérieure

Le comportement d'un système donné est fortement dépendant de sa dimension. Par exemple, en deçà de la *dimension critique inférieure* D_c^i , les fluctuations thermiques sont trop fortes et détruisent sa phase ordonnée. D'autre part, au-delà de sa *dimension critique supérieure* D_c^s , ses caractéristiques universelles peuvent être calculées dans la théorie gaussienne. Les problèmes les plus intéressants se trouvent généralement entre ces deux dimensions limites (dans la zone rouge de la Figure 1.4).

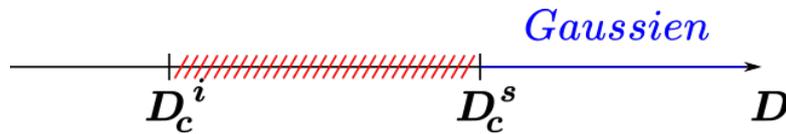


FIGURE 1.4 – Dépendance des fluctuations avec la dimension D du système. Si $D < D_c^i$, il n'y a plus de phase ordonnée, ni de transition de phase. Si $D > D_c^s$, les fluctuations sont gaussiennes. La description de l'effet de fluctuations non-triviales sur les propriétés d'une phase ordonnée ou d'une transition de phase se fait donc dans la zone rouge.

Malheureusement, D est un paramètre discret, et les théories aux différentes dimensions ne sont pas reliées continûment entre elles. Une façon possible d'approcher la théorie gaussienne est donc de généraliser la dimension du modèle à un paramètre D réel pour approcher sa dimension critique supérieure dans un développement en $\varepsilon = D_c^s - D$. Ce développement, bien que purement formel, a démontré son efficacité [Wilson 1972, Wilson 1973]. Notons que par continuité, au voisinage de la dimension critique supérieure où les fluctuations sont gaussiennes, les couplages peuvent généralement être supposés petits, ce qui justifie le caractère perturbatif de cette approche.

Comment se manifeste l'émergence de nouvelles lois d'échelle pour $D < D_c^s$? Un nouveau jeu de lois d'échelle correspond généralement à un nouveau point fixe. Lorsque D varie, les solutions de l'équation de point fixe $\partial_k S_k = 0$ changent, et les points fixes peuvent également changer de stabilité. Typiquement D_c^s marque le moment où le point fixe gaussien G cesse de gouverner le comportement du système dans l'infrarouge car un nouveau point fixe émerge lorsque D diminue (voir Figure 1.5 pour une illustration). La séparation de ce nouveau point fixe par rapport au gaussien doit être au plus d'ordre ε si le développement est cohérent. Les propriétés universelles telles que les exposants critiques sont calculées comme des séries en ε .

L'inconvénient majeur de ce type de développements est qu'il n'est valable que dans un proche voisinage de D_c^s . Obtenir des résultats aux dimensions physiquement intéressantes (autrement dit explorer la zone rouge de la Figure 1.4) requiert une extrapolation à des régimes où $\varepsilon \geq 1$ qui peut s'avérer dangereuse puisqu'elle sort du cadre dans lequel le développement effectué a un sens. Néanmoins, le point fixe gouvernant le comportement du système dans l'infrarouge

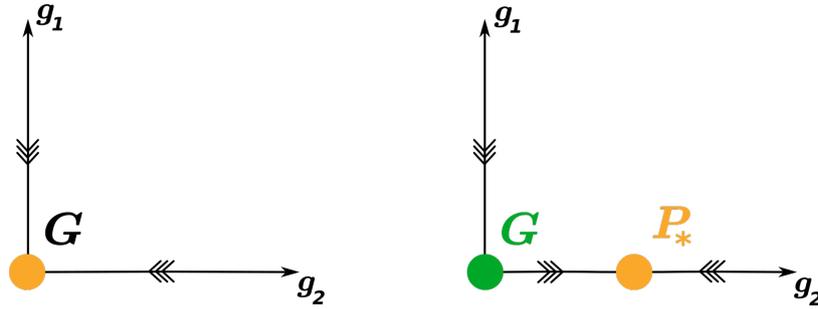


FIGURE 1.5 – À gauche : les fluctuations du système dans l'infrarouge sont gouvernées par le point fixe gaussien G . Cela peut être un système à sa dimension critique supérieure par exemple. À droite : la décroissance de la dimension a généré un nouveau point fixe P_* qui est maintenant le point fixe attractif dans l'infrarouge. Le comportement du système est gouverné par un autre jeu de lois d'échelle universelles.

aux dimensions considérées est souvent celui qui émerge du gaussien au voisinage de D_c^s ; le développement en $\varepsilon = D_c^s - D$ permet dans de nombreux cas de comprendre qualitativement le comportement de l'objet étudié aux basses dimensions.

1.2.2 Autres développements perturbatifs

Le développement en $\varepsilon = D_c^s - D$ n'est pas le seul qui permette de s'approcher d'un régime gaussien. Nous discutons dans la suite de deux exemples d'alternatives à ce développement.

- **Développement en $\varepsilon = D - D_c^i$: Le modèle σ non-linéaire.**

Considérons un modèle d'un champ scalaire avec la symétrie $O(N)$. Ce modèle présente une transition de phase du second ordre pour $2 < D$, autrement dit $D_c^i = 2$. Pour $D = D_c^i$, la phase ordonnée est détruite par les fluctuations thermiques à toute température, la transition de phase n'existe donc qu'à $T = 0$. Si le modèle est généralisé à une dimension $D \gtrsim 2$, nous pouvons alors espérer que la transition aura lieu pour une température petite mais non nulle, et effectuer un développement du résultat en basse température qui permet d'estimer le comportement du système bidimensionnel.

Nous paramétrons l'action en fonction de la valeur du champ dans la phase ordonnée $\vec{\varphi}_0$, et restaurons la dépendance en température cachée dans le facteur β dans la fonction de partition $\mathcal{Z} = \text{Tr}(e^{-\beta\mathcal{H}}) = \text{Tr}(e^{-S})$:

$$S[\vec{\varphi}] = \frac{1}{k_B T} \int_x \left[\frac{Z}{2} (\partial_i \vec{\varphi})^2 + \frac{g}{8} (\varphi^2 - \varphi_0^2)^2 \right]. \quad (1.7)$$

Le facteur $k_B T$ devant peut être absorbé dans le changement de variables $\vec{\varphi} \mapsto \sqrt{k_B T} \vec{\varphi}$, $\vec{\varphi}_0 \mapsto \sqrt{k_B T} \vec{\varphi}_0$, $g \mapsto g/T$. Lorsque $T \rightarrow 0$, le couplage g/T diverge, ce qui impose sur le modèle la contrainte dure $\varphi^2 = \varphi_0^2$, réduisant à $N - 1$ le nombre de degrés de liberté du champ. Il est alors d'usage d'utiliser la paramétrisation suivante :

$$\vec{\varphi} = \varphi_0 \begin{pmatrix} \sigma(x) \\ \vec{\pi}(x) \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

où le scalaire σ est un mode massif qui correspond à la direction dans laquelle est orienté l'état fondamental $\vec{\varphi}_0$. Les modes $\vec{\pi}$ correspondent aux fluctuations dans les directions transverses. Comme elles ne changent pas la norme du champ, celles-ci ne coûtent pas d'énergie (ce sont des modes de Goldstone⁵). Le mode σ peut être intégré pour définir une théorie sans contrainte :

$$\begin{aligned} S'[\vec{\pi}] &= \frac{1}{k_B T} \int_x \left[\frac{Z'}{2} (\partial_i \vec{\pi})^2 + \frac{g'}{8} \frac{(\vec{\pi}(x) \cdot \partial_i \vec{\pi}(x))^2}{1 - \pi^2(x)} \right] \\ &= \int_x \left[\frac{Z'}{2} (\partial_i \vec{\pi}'')^2 + \frac{g''}{8} \frac{(\vec{\pi}''(x) \cdot \partial_i \vec{\pi}''(x))^2}{1 - T \pi''^2(x)} \right], \end{aligned} \quad (1.9)$$

où à la deuxième ligne, la dépendance en température a été réabsorbée dans une redéfinition des champs et de la constante de couplage :

$$\vec{\pi}''(x) = \frac{\vec{\pi}(x)}{\sqrt{k_B T}} \quad , \quad g'' = g' k_B T . \quad (1.10)$$

À basse température, ce modèle est donc bien faiblement couplé. La théorie gaussienne peut être approchée dans un développement en $\varepsilon = D - 2$, qui est cette fois un développement autour de la dimension critique *inférieure*.

- **Champ à grand nombre de composantes : $O(N)$, $N \gg 1$.**

Considérons toujours le modèle $O(N)$. Si le champ a un grand nombre de composantes, il est raisonnable de supposer que les fluctuations de chacune de ces composantes prise individuellement sera d'autant plus faible. De plus, si ces composantes sont suffisamment décorrélées les unes des autres, leurs fluctuations deviennent gaussiennes d'après le théorème central-limite. Une analyse de la forme du couplage g^* au point fixe de Wilson-Fisher (celui où les fluctuations deviennent non-triviales) révèle en effet que sa dépendance en N est de la forme $g^* \sim N^{-1}$ [LeBellac 2012]. L'interaction renormalisée est donc d'autant plus faible que le champ a beaucoup de composantes; cette propriété peut être utilisée pour former une nouvelle théorie de perturbation.

Afin de rendre la dépendance en N plus explicite, nous définissons $\tilde{g} = N g$, et $\tilde{\varphi}_0 = \frac{\varphi_0}{N}$. L'action (1.7) s'écrit :

$$S[\varphi] = \int_x \left[\frac{Z}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{\tilde{g}}{8N} (\varphi^2 - N \tilde{\varphi}_0^2)^2 \right]. \quad (1.11)$$

Effectuons une transformation d'Hubbard-Stratonovitch :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-\int \left[\frac{Z}{2} (\partial \varphi)^2 + \frac{\tilde{g}}{8N} (\varphi^2 - N \tilde{\varphi}_0^2)^2 \right]} \\ &= \int \mathcal{D}[\varphi] \mathcal{D}[\chi] e^{-\int \left[\frac{Z}{2} (\partial \varphi)^2 - \frac{4N}{\tilde{g}} \chi^2 + \chi (\varphi^2 - N \tilde{\varphi}_0^2) \right]} \\ &= \int \mathcal{D}[\chi] e^{-\int \left[-\frac{4N}{\tilde{g}} \chi^2 + \frac{N-1}{2} \text{Tr} \log (Z \partial^2 + 2\chi) - N \chi \tilde{\varphi}_0 \right]} . \end{aligned} \quad (1.12)$$

5. Du moins tant que $D > 2$. En $D = 2$ l'interaction entre les champs est non-triviale, et l'action précédente n'est plus valable à des échelles de longueur arbitrairement grandes.

L'action du champ auxiliaire χ est quasiment proportionnelle à N . Il est donc possible de calculer \mathcal{Z} par la méthode du point col dans la limite où $N \gg 1$. Les fluctuations correspondent aux corrections d'ordre $O(N^{-n})$. Même s'il est en général compliqué d'effectuer de tels calculs aux grands ordres, ce type de développement est particulièrement intéressant car il ne suppose rien *a priori* sur la dimension D de l'espace dans lequel évolue le champ. Il offre donc une complémentarité intéressante avec les développements au voisinage de D_c^s et D_c^i .

En combinant toutes ces approches, la théorie des perturbations peut décrire le comportement d'un système de manière approchée dans une relativement vaste gamme de paramètres. La multiplicité de ces développements permet la construction d'interpolations entre ces différents régimes limites qui peuvent être utilisées pour corriger les erreurs introduites lorsque le système est étudié dans des régimes de paramètres où aucun de ces développements ne s'applique. Cependant, l'existence de tels développements pour des théories plus complexes que le modèle $O(N)$ n'est pas du tout garantie. Un exemple trivial est la théorie φ^4 (ou $O(N = 1)$) pour laquelle aucun de ces deux développements n'existe.

1.2.3 Régularisation dimensionnelle

Les développements en dimension nécessitent de généraliser les modèles au cas où D est un nombre réel (voire complexe) et non un simple entier. Ceci nécessite l'utilisation d'outils adaptés. La régularisation dimensionnelle est une des méthodes permettant d'effectuer des calculs dans un tel formalisme [t Hooft 1972]. Ses deux avantages principaux sont les suivants : elle se généralise facilement aux ordres élevés de la théorie des perturbations (contrairement à la plupart des autres méthodes), et elle préserve bien les symétries de la théorie⁶.

Rappelons-nous, dans (1.6), les corrections apportées dans l'approximation de couplage faible naïve divergent à cause d'une intégrale spatiale. Le caractère convergent ou divergent d'une telle intégrale dépend crucialement de la dimension D . Ces intégrales portant typiquement sur des produits de propagateurs, il est possible d'identifier des formes génériques. En particulier, dans le cas où de telles intégrales convergent, elles peuvent être exprimées en fonction de la fonction Γ d'Euler, avec un argument dépendant de D .

Une des propriétés remarquables de la fonction Γ est qu'elle ne diverge qu'en des pôles isolés⁷. Il est alors possible de définir un prolongement analytique des intégrales intervenant dans (1.6) sur l'ensemble du plan complexe, où les dimensions pour lesquelles les intégrales divergent correspondent à des pôles isolés. Ces pôles peuvent être approchés par un développement de Taylor, ce qui permet d'identifier les « parties régulières » et « parties singulières » des intégrales en question. Typiquement, à l'approche d'une singularité, le comportement de la fonction Γ est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(-n + \varepsilon) \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{(-1)^n}{n! \varepsilon} + O(\varepsilon^0). \quad (1.13)$$

Seul le premier terme diverge, le reste donne accès à la partie régulière du résultat. À l'ordre L de la théorie des perturbations, la divergence la plus sévère sera typiquement d'ordre $O(\varepsilon^{-L})$. Les méthodes de calcul des intégrales dans ce formalisme sont présentées dans l'Annexe B.

6. Elle fut originellement introduite pour renormaliser les théories de jauge.

7. Correspondant aux entiers négatifs.

Finalement, la régularisation dimensionnelle peut être utilisée comme une méthode de régularisation d'intégrales divergentes : dans le cas où une intégrale donnée diverge, la généralisation du modèle à une dimension D légèrement différente permet d'obtenir pour cette intégrale un résultat fini, dépendant de ε .

En conclusion, il est possible d'étudier les fluctuations au voisinage des théories gaussiennes par différents types de développements en un petit paramètre, généralement ε ou $1/N$, rendus possible notamment par la possibilité de définir des prolongements analytiques des théories étudiées dans des régimes de dimensions non entières grâce à la régularisation dimensionnelle. Cependant la construction d'une théorie de perturbation cohérente n'est pas aussi simple qu'un développement en un petit paramètre, comme nous l'avons observé dans (1.5). La section suivante présente les principes du groupe de renormalisation perturbatif.

1.3 Groupe de renormalisation et théorie des perturbations

1.3.1 Organisation de la série perturbative

L'objectif d'un calcul du groupe de renormalisation est, nous l'avons vu, de calculer les modifications des quantités macroscopiques induites par les fluctuations aux différentes échelles. Une façon de décrire le comportement du système à l'échelle macroscopique est de calculer les fonctions de corrélations des champs fluctuants qui peuvent être reliées à des observables physiques. Elles sont généralement construites à partir de fonctionnelles génératrices, comme la fonction de partition en présence de source externe, qui s'écrit typiquement :

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-S[\varphi] - J \cdot \varphi} . \quad (1.14)$$

Les dérivées fonctionnelles de \mathcal{Z} par rapport à J évaluées en $J = 0$ donnent accès à tous les moments du champ φ .

Reprenons le développement en couplage faible (1.5) présenté précédemment. Dans un premier temps, nous laissons de côté le problème des divergences aux courtes distances dans les intégrales : nous supposons que celles-ci sont régularisées d'une manière ou d'une autre, soit par une coupure dure⁸, soit par un écart ε à la vraie dimension du modèle (si l'on utilise la régularisation dimensionnelle) par exemple, de façon à ce que toutes les quantités soient finies. Un terme général à l'ordre n de la série se comporte comme $g^n \langle \varphi^m \rangle$, m étant un autre entier. Comme les moments de φ sont évalués dans la théorie **gaussienne**, nous pouvons utiliser le théorème de Wick : tous les moments du champ φ sont des fonctions des moments d'ordre 2⁹. Cela nous permet de réécrire la série (1.5) sous la forme :

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g^n (\langle \varphi^2 \rangle)^{m(n)} , \quad (1.15)$$

où l'expression des coefficients a_n et $m(n)$ n'a pas d'importance pour notre exposé. Ainsi, un terme quelconque est décrit comme une combinaison des interactions de la théorie et du moment

8. La borne inférieure de l'intégrale est choisie comme étant a au lieu de 0.

9. Du moins tant que la source J est nulle, ce que nous supposons, auquel cas la moyenne de φ est nulle.

d'ordre 2 du champ fluctuant, appelé *propagateur* du champ. Comme l'expression de a_n n'est pas simple en général, et que toutes les combinaisons possibles de couplages et de propagateurs apparaissent à un ordre donné, il est souvent utile de représenter les différents termes de (1.15) sous forme de dessins, appelés « diagrammes de Feynman », qui sont plus simples à manipuler.

Pour notre exemple, les diagrammes de Feynman sont construits à partir des deux blocs suivants :

- Le propagateur, représenté par une simple ligne :

$$\langle \varphi(p)\varphi(-p) \rangle = \frac{1}{p^2 + m^2} = \text{---}\longrightarrow\text{---} . \quad (1.16)$$

Il est souvent plus simple de travailler dans l'espace de Fourier. L'expression simple du propagateur vient du fait que ce moment est évalué dans la théorie gaussienne.

- Le vertex d'interaction correspondant au terme $g\varphi^4$. Comme il couple quatre champs ensemble, il est représenté avec quatre pattes. Le préfacteur provient simplement de son coefficient de normalisation au sein de l'action $S_I[\varphi]$:

$$\frac{(-g)}{4!} = \text{---}\bullet\text{---} . \quad (1.17)$$

À un ordre n donné du développement en couplage faible, la contribution des fluctuations est donnée par l'ensemble de tous les diagrammes avec n vertex. Dans notre exemple, la contribution au premier ordre à la renormalisation du propagateur est donc :

$$\text{---}\bullet\text{---} + \text{---}\bullet\text{---} . \quad (1.18)$$

Le problème de cette approche est que le nombre de diagrammes croît très vite lorsque le développement est poussé au-delà du premier ordre. Une première amélioration consiste à travailler avec la fonctionnelle génératrice des cumulants de φ , qui n'est autre que l'énergie libre $W[J]$, et dont le développement en couplage faible fait intervenir uniquement les graphes *connexes*. Dans notre exemple, cela veut dire que le second terme de (1.18) ne contribuerait pas. Il est possible d'aller encore plus loin en travaillant avec sa transformée de Legendre Γ dont le développement ne contient que des graphes *1-particule irréductibles*, c'est-à-dire des graphes qui sont connexes, même lorsqu'une de leurs lignes est scindée en deux [Kleinert 2001]. Les théories de perturbation travaillent donc généralement directement au niveau de Γ , aussi appelée action effective.

En réalité, même dans ce cas, un nombre très important de graphes est généré aux grands ordres, ce qui constitue une source supplémentaire possible de divergence de la série (1.15) lorsque le facteur $1/n!$ venant du développement de l'exponentielle n'est plus suffisant pour compenser le nombre de termes (ce sont les renormalons). L'étude de la théorie de perturbation est donc en général réduite aux premiers ordres du développement seulement où l'on espère que la série débute sa convergence vers la bonne valeur asymptotique.

Finalement, nous pouvons restaurer \hbar , auquel cas l'argument de l'exponentielle dans l'intégrale fonctionnelle est S/\hbar . Le développement en couplage faible fait alors apparaître le couplage

via la combinaison g/\hbar . Le propagateur porte, quant à lui, un facteur \hbar . Un graphe donné dans le développement de Γ portera donc un \hbar par ligne, et un \hbar^{-1} par vertex. Les restrictions topologiques apportées par le caractère 1-particule irréductible des graphes permet alors d'établir qu'à un ordre n donné du développement, tous les graphes ont exactement $L = n$ boucles fermées [LeBellac 2012]. Le développement en couplage faible est donc également un développement en boucles, du point de vue des diagrammes de Feynman, le terme à $L = 0$ boucle correspondant à la théorie de champ moyen.

1.3.2 Méthode des contretermes

Le développement en couplage faible comporte des divergences aux courtes longueurs (ou hautes énergies) dans les valeurs moyennes du champ. Ces divergences peuvent être régularisées pour que le développement ait lieu, par exemple à l'aide de ε , mais les résultats obtenus sont toujours divergents dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Grâce à l'approche de Wilson, nous pouvons comprendre l'origine de ces divergences : les variables décrivant la physique à l'échelle macroscopique ne sont pas de simples extrapolations à grande échelle des variables microscopiques. En particulier, le champ macroscopique qui constitue l'argument de Γ n'est pas le champ microscopique φ de l'action qui est une variable aléatoire, du moins au-delà de l'approximation de champ moyen. Afin de distinguer ces variables, les variables de la théorie microscopique seront notées dans la suite avec un indice B , car la théorie microscopique est aussi appelée théorie « nue¹⁰ » puisque ses termes ne sont pas « habillés » par les fluctuations.

Considérons par exemple la théorie φ^4 critique (sans masse). Comme cette théorie est *renormalisable*, nous n'avons pas besoin de nouveaux paramètres¹¹ pour décrire le système à l'échelle macroscopique. Dans l'approximation de champ moyen, les champs et couplages sont les mêmes dans les théories microscopique et macroscopique :

$$\Gamma^{L=0}[\varphi_B] = \int_x \left[\frac{1}{2} (\partial\varphi_B)^2 + \frac{g_B}{4!} (\varphi_B)^4 \right]. \quad (1.19)$$

À partir de l'ordre d'une boucle cependant, Γ s'exprime en fonction des variables renormalisées :

$$\Gamma^{L=1}[\varphi; k] = \int_x \left[\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{gk^\varepsilon}{4!} (\varphi)^4 \right]. \quad (1.20)$$

En particulier, Γ^L est toujours **fini**, indépendamment de la procédure utilisée pour régulariser les intégrales. Notons qu'à cause de la régularisation dimensionnelle, qui nous fait travailler ε -proche de la dimension du modèle, la dimension du couplage renormalisé pose problème. En effet, comme la dimension de g , $\Delta(g)$, dépend de D , g n'est pas dimensionné dans la théorie gaussienne, mais ce résultat n'est vrai que dans la dimension D où la théorie est gaussienne. La façon d'y remédier de façon cohérente est d'introduire une dépendance en une échelle d'énergie typique k dans l'action effective renormalisée. Comme Γ renormalisé est fini dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, ceci ne doit pas impacter le calcul des observables macroscopiques. Ce résultat n'est pas si surprenant si l'on comprend qu'en vertu de la dépendance forte du comportement des fluctuations vis-à-vis

10. « Bare » en anglais.

11. Autre que le champ et le couplage g renormalisés.

de l'échelle, le comportement du système dans la théorie renormalisée dépend de l'échelle de longueur, ou d'énergie, considérée comme étant macroscopique.

Pour relier les théories nue et renormalisée, deux types de stratégies existent :

- soit les calculs des diagrammes de Feynman, construits à partir de l'action, sont effectués dans la théorie nue avec l'action habituelle. Des prescriptions de renormalisation sont ensuite utilisées pour relier ces quantités aux quantités renormalisées que l'on veut calculer ;
- soit l'action est réexprimée en termes de variables renormalisées, et le calcul des graphes se fait entièrement en termes de ces variables. C'est la stratégie choisie dans la méthode des contretermes que nous décrivons ci-après. L'avantage de cette stratégie est qu'elle est généralement plus simple à mettre en œuvre aux ordres élevés de la théorie des perturbations où l'inversion de la relation en théorie nue et renormalisée dans des graphes mettant en jeu des puissances élevées des constantes de couplage est difficile.

La méthode des contretermes repose sur la renormalisabilité de la théorie : les termes additionnels apparaissant quand l'action S est exprimée en fonction des variables renormalisées au lieu des variables nues ont nécessairement une forme similaire aux termes déjà présents. Ces termes supplémentaires sont appelés contretermes, et notés à l'aide de la lettre \mathcal{C} dans la suite. Chaque terme de l'action a un contreterme associé. Dans le cas de la théorie φ^4 critique, cela donne :

$$\begin{aligned} S[\varphi; k] &= \int_x \left[\frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{gk^\varepsilon}{4!} \varphi^4 + \mathcal{C} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{\mathcal{C}_g gk^\varepsilon}{4!} \varphi^4 \right] \\ &= \int_x \left[\frac{1}{2} (1 + \mathcal{C}) (\partial_i \varphi)^2 + \frac{gk^\varepsilon}{4!} (1 + \mathcal{C}_g) \varphi^4 \right] \\ &= \int_x \left[\frac{Z}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{Z_g gk^\varepsilon}{4!} \varphi^4 \right], \end{aligned} \quad (1.21)$$

où Z et Z_g sont les coefficients de renormalisation qui définissent le passage de la théorie nue à la théorie renormalisée. Pour que tout soit cohérent, il faut bien sûr que l'action soit la même dans les deux jeux de variables :

$$S[\varphi; k] = S[\varphi_B] = \int_x \left[\frac{1}{2} (\partial_i \varphi_B)^2 + \frac{g_B}{4!} (\varphi_B)^4 \right], \quad (1.22)$$

ce qui conduit à l'identification :

$$\varphi_B = Z^{1/2} \varphi \quad , \quad g_B = k^\varepsilon Z^{-2} Z_g g . \quad (1.23)$$

Les relations (1.23) définissent la relation entre la théorie nue et la théorie renormalisée. En particulier, elle permet d'établir les relations entre les vertex propres¹² nus et renormalisés :

$$\Gamma_B^{(n)}[\varphi_B; p_1, \dots, p_n, \varepsilon] = Z^{n/2} \Gamma^{(n)}[\varphi; p_1, \dots, p_n, \varepsilon, k], \quad (1.24)$$

12. Ce sont les dérivées fonctionnelles de Γ par rapport aux champs macroscopiques.

où nous avons rappelé la dépendance résiduelle de ces quantités dans le régulateur ε . Si Z est bien défini, $\Gamma^{(n)}$ est fini dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, même si $\Gamma_B^{(n)}$ ne l'est pas. En particulier cela veut dire que Z doit réabsorber toutes les divergences de $\Gamma_B^{(n)}$. Concrètement, si nous utilisons la régularisation dimensionnelle, cela veut dire que Z doit contenir au moins toutes les parties divergentes de l'expression de $\Gamma_B^{(n)}$ en fonction des variables renormalisées. Dans le cas où Z ne contient *que* ces termes, on parle de *schéma minimal* de soustraction de divergences.

Revenons sur le rôle de k . Dans (1.24), seul le membre de droite en dépend, il ne s'agit pas d'une variable indépendante des autres. Dans le langage du groupe de renormalisation, la théorie nue est définie à une échelle microscopique donnée, mais la théorie renormalisée peut s'écrire différemment suivant l'échelle choisie pour décrire le système. L'application de l'opérateur kd/dk à la relation (1.24) permet d'obtenir la dépendance des variables renormalisées avec l'échelle courante k , c'est-à-dire le flot de renormalisation :

$$\left[-\frac{n}{2}\partial_t Z + \partial_t g \frac{\partial}{\partial g} + \partial_t \right] \Gamma^{(n)}[\varphi; p_1, \dots, p_n, \varepsilon, k] = 0, \quad (1.25)$$

où pour simplifier l'écriture, nous avons introduit la dérivée logarithmique $\partial_t = k\partial_k$, avec $t = \log(ak)$, appelé aussi « temps » de renormalisation par analogie avec les systèmes dynamiques. Cette équation est l'équation de Callan-Symanzik. Le flot de renormalisation est souvent décrit en fonction des deux quantités suivantes :

$$\eta = \partial_t Z \quad , \quad \beta_g = \partial_t g. \quad (1.26)$$

η est la dimension anormale du champ fluctuant à l'échelle k , et β_g , appelée fonction beta, donne l'évolution du couplage, qui décrit la force de l'interaction, en fonction de l'échelle courante k .

Finalement,

- le lien entre les théories nue et renormalisée se fait *via* les coefficients de renormalisation Z et Z_g qui assurent à chaque ordre du développement perturbatif que les divergences ultraviolettes ne perturbent pas le calcul des observables physiques à l'échelle macroscopique ;
- en régularisation dimensionnelle, ceci est assuré par l'inclusion dans les coefficients de renormalisation de toutes les parties divergentes des graphes. Il est intéressant de noter que ce sont donc bien ces parties divergentes qui font le lien entre les théories microscopique et macroscopique ;
- les résultats ci-dessus ne sont pourtant valables que pour les divergences de type ultraviolet. Cette procédure ne règle pas le problème de la convergence globale de la série perturbative, et ne peut être utilisée pour régulariser des divergences apparaissant dans la limite infrarouge.

1.3.3 Nature des divergences

Malgré toutes ses qualités, la régularisation dimensionnelle a un gros défaut : elle ne discrimine pas les divergences du secteur infrarouge des divergences ultraviolettes. Plus précisément, même si les premières correspondent à des termes du type $\Gamma(D/2 - \alpha)$ (la divergence apparaît quand D est suffisamment faible), et les secondes à $\Gamma(\alpha - D/2)$ (la divergence apparaît quand

D est suffisamment fort) qui sont deux fonctions discernables, elles donneront le même type de pôle une fois le résultat développé en série en puissances de ε .

Illustrons ceci dans le cas des graphes de type « tadpole » (ceux dans lesquels l'impulsion externe ne circule pas) sans masse. Dans les notations de l'Annexe B, celles-ci correspondent à des intégrales $I(\alpha, 0)$ qui sont nulles d'après (B.6). Nous avons donc :

$$I(\alpha, 0) = \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \alpha \end{array} = \int_q \frac{1}{q^{2\alpha}} = 0, \quad (1.27)$$

et ce quel que soit α (les détails de calcul figurent dans l'Annexe B).

Ce résultat est très contre-intuitif, et mérite quelques remarques. D'abord, seul le prolongement analytique de l'intégrale (1.27) est nul, elle n'est pas définie lorsque D est un entier. Ensuite, ce résultat est souvent interprété de la façon suivante : l'intégrale (1.27) diverge de façon évidente à la fois dans le secteur ultraviolet et infrarouge. L'absence de divergence dans le résultat est simplement un signe que les deux divergences se sont mutuellement compensées. Il s'agit d'un exemple où le mélange de divergences de type ultraviolet et infrarouge par la régularisation dimensionnelle peut conduire à l'annulation de certains termes.

Considérons comme second exemple l'intégrale suivante :

$$\int_q \frac{2(p \cdot q)}{q^2(p-q)^4} = 2 \frac{(p^2)^{D/2-2}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(D/2-2)}{\Gamma(1)\Gamma(2)} \frac{\Gamma(3-D/2)}{\Gamma(D-2)}. \quad (1.28)$$

D'après les résultats de l'Annexe B, cette intégrale présente donc un unique pôle, dans l'infrarouge (terme en rouge) au voisinage de 4 dimensions.

De manière équivalente, elle peut être calculée en développant le numérateur en somme de carrés, ce qui fait intervenir des intégrales standard à une boucle $I(\alpha, \beta)$ (voir Annexe B) définies par :

$$I(\alpha, \beta) = \int_q \frac{1}{q^{2\alpha}(p-q)^{2\beta}}. \quad (1.29)$$

Apparaît alors un tadpole :

$$\begin{aligned} \int_q \frac{2(p \cdot q)}{q^2(p-q)^4} &= \int_q \frac{p^2 + q^2 - (p-q)^2}{q^2(p-q)^4} \\ &= p^2 I(1, 2) + I(0, 2) - I(1, 1) \\ &= p^2 I(1, 2) + 0 - I(1, 1). \end{aligned} \quad (1.30)$$

D'après les résultats de l'Annexe B, l'intégrale en rouge diverge dans l'infrarouge, celle en bleu a une divergence ultraviolette. En analysant chaque terme pris séparément, on voit donc apparaître une divergence ultraviolette dans un terme qui d'après (1.28) ne diverge que dans l'infrarouge ; en réalité, le « 0 » contient une divergence infrarouge, et un terme ultraviolet qui doit compenser la divergence en bleu. La régularisation dimensionnelle peut donc vite brouiller l'analyse des divergences dans les théories sans masse.

Mais même dans des cas moins extrêmes cette ambiguïté est gênante, car ces types de divergences ont des origines très différentes. En effet les divergences ultraviolettes viennent typiquement des termes comme (1.6) : la théorie ne peut pas s'extrapoler à des échelles de longueur arbitrairement faibles, ne serait-ce que parce que l'action microscopique est elle-même définie à une certaine échelle. Ces divergences sont régularisées par la procédure de renormalisation décrite dans la section précédente.

Les divergences infrarouges apparaissent en revanche dans la limite des grandes longueurs, bien au-delà de celles où les théories renormalisées sont définies. Leur signification est donc en général beaucoup plus profonde. Elles peuvent être notamment la marque que la théorie des perturbations est construite à partir d'un état fondamental mal défini [Elitzur 1978]. Par exemple, dans le modèle σ non-linéaire, la théorie de perturbation est construite à partir d'un état fondamental de la théorie de champ moyen réalisant une brisure spontanée de la symétrie $O(N)$ du modèle. Cependant à deux dimensions, les fluctuations thermiques restaurent dynamiquement la symétrie $O(N)$, l'état fondamental est détruit par les fluctuations [Amit 1980]. Une trace de cet effet est que les vraies observables, qui sont invariantes sous $O(N)$, sont bien finies dans la limite infrarouge [David 1980, David 1981]. De telles divergences n'ont donc *a priori* aucune raison d'être régularisées par les transformations de renormalisation.

Il est donc très important dans une théorie donnée d'identifier la nature des divergences avant d'appliquer la régularisation dimensionnelle, pour s'assurer que seules des divergences ultraviolettes sont présentes. Seulement dans ce cas, cette méthode pourra être utilisée, sans quoi le calcul devient hors de contrôle.

1.3.4 Réarrangement infrarouge

Le terme de « réarrangement infrarouge » désigne l'ensemble des méthodes qui visent à calculer des divergences ultraviolettes en changeant le comportement des intégrandes dans le régime infrarouge. Cela se justifie car dans la régularisation dimensionnelle en schéma minimal, seules sont comptées dans les coefficients de renormalisation les parties des termes qui divergent dans l'ultraviolet ; un réarrangement infrarouge ne vient donc modifier que des termes qui sont de toute façon oubliés. Le réarrangement infrarouge peut aussi être utilisé pour vérifier la nature des divergences d'une intégrale donnée : seules les divergences de type ultraviolet survivent à la procédure.

La méthode la plus simple consiste à rajouter une masse aux modes causant des divergences infrarouges. En effet, la masse est le régulateur le plus sûr lorsque l'impulsion s'annule au dénominateur. Par exemple, dans la théorie φ^4 , le propagateur est donné par :

$$\langle \varphi(p)\varphi(-p) \rangle = \frac{1}{p^2 + m^2} . \quad (1.31)$$

Dans la limite ultraviolette, il se comporte comme p^{-2} , indépendamment de la présence de m . Dans la limite infrarouge, m assure que n'importe quelle puissance de ce terme sera toujours intégrable.

Examinons le cas le plus simple : le tadpole. Dans une théorie sans masse, cette intégrale est

nulle, nous l'avons vu, mais ce n'est plus le cas pour un mode massif. D'après (B.62),

$$I^m(\alpha) = \int_q \frac{1}{(q^2 + m^2)^\alpha} = \frac{(m^2)^{D/2-\alpha} \Gamma(\alpha - D/2)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(\alpha)}. \quad (1.32)$$

Prenons par exemple le cas $\alpha = 2$. $I(2, 0)$ est nulle, nous ne connaissons pas ses pôles *a priori*. $I^m(2)$ admet un pôle ultraviolet si $D = 4$. Comme les intégrandes de $I^m(2)$ et $I(2, 0)$ sont les mêmes dans la limite $q \rightarrow +\infty$, elles ont les mêmes pôles ultraviolets. On en déduit que $I(2, 0)$ a bien un pôle ultraviolet, mais que celui-ci est annulé par un pôle infrarouge. Son pôle ultraviolet peut être récupéré en faisant la limite de masse nulle sur le développement de $I^m(2, 0)$ en ε . Comme la masse apparaît avec une puissance $-\varepsilon$ dans $I^m(2, 0)$, cette limite est non-nulle, et donne la contribution du tadpole au secteur ultraviolet. L'ambiguïté sur la nature des pôles est donc levée. Cette méthode est surtout utile dans des cas particuliers où les calculs faits de cette façon se simplifient, le calcul d'intégrales massives étant généralement plus difficile que leurs contreparties sans masses.

1.4 Formalisme de l'action effective moyenne

Les théories des perturbations permettent d'approcher le régime gaussien par différents développements en un petit paramètre (ε , $1/N$, ...), mais elles souffrent de sévères limitations :

- la série (1.15) est presque toujours divergente, et la convergence de ses sommes partielles est également rare. Typiquement, au-delà d'un certain ordre, généralement difficile à évaluer, l'addition de termes d'ordres supérieurs ne rend pas le résultat plus précis. Il existe des méthodes pour récupérer des informations plus fiables sur la comportement aux grands ordres (resommation, approximants de Padé-Borel, ... voir [Kleinert 2001] par exemple), mais là encore, elles ne sont rigoureusement applicables que sur très peu de modèles ;
- l'approche d'un régime gaussien nécessite l'exploration d'une région de l'espace des paramètres le plus souvent sans recouvrement avec celle qui est la plus intéressante physiquement. La sortie de ces régions se fait par des extrapolations des résultats en dehors de leur domaine de validité, qui est une source supplémentaire de perte de contrôle sur le résultat.

Ainsi, il est souhaitable de pouvoir traiter des modèles dans des régimes fortement non gaussiens, ce qui n'est pas impossible puisqu'en principe les raisonnements de Wilson présentés en début de chapitre ont un champ d'application bien plus large.

Dans cette section, nous présentons une autre méthode du groupe de renormalisation qui n'est pas basée sur le développement (1.15), mais qui, en s'appuyant sur l'approche de Wilson du groupe de renormalisation, incorpore petit à petit les corrections à l'énergie libre au fur et à mesure que l'échelle courante se rapproche de sa valeur macroscopique (voir par exemple [Berges 2002] ou [Gies 2012] pour une revue).

1.4.1 Organiser les fluctuations

La quantité centrale de ce formalisme est l'énergie libre Γ . Le champ macroscopique sera noté ϕ pour le distinguer du champ microscopique φ . Ils sont reliés par :

$$\phi(x) = \langle \varphi(x) \rangle = \frac{\delta W}{\delta J(x)} . \quad (1.33)$$

Nous rappelons également l'expression de la transformée de Legendre qui relie l'énergie libre de Helmholtz $W[J]$ et l'énergie libre de Gibbs $\Gamma[\phi]$:

$$\Gamma[\phi] = -W[J] + \int_x J(x) \cdot \phi(x) . \quad (1.34)$$

Nous allons suivre les idées de Wilson exposées dans la section 1.1 pour construire l'énergie libre d'un système en présence de fluctuations thermiques. Afin de bien tenir compte de la dépendance en échelle du comportement de ces fluctuations, il s'agit de créer, à chaque échelle intermédiaire k , une *action effective moyenne* $\Gamma_k[\phi]$ à partir d'un processus permettant d'effectuer des moyennes mésoscopiques. L'interprétation du sens de $\Gamma_k[\phi]$ est simple : il s'agit de l'énergie libre qu'aurait le système si seuls les modes d'énergie plus grande que k étaient autorisés à fluctuer.

À l'échelle microscopique $k = \Lambda = 1/a$, aucune moyenne n'est effectuée, aucune fluctuation n'est intégrée, les paramètres du modèle sont tous donnés par leur valeur dans le modèle microscopique : c'est la théorie de champ moyen.

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = S[\varphi = \phi] . \quad (1.35)$$

Si, au contraire, k se rapproche de l'échelle macroscopique (qui correspond à la limite des grandes distances $k \rightarrow 0$), l'action effective moyenne intègre les effets des fluctuations à toutes les échelles, jusqu'à la taille du système. Elle est donc égale à l'énergie libre réelle du système :

$$\Gamma_{k \rightarrow 0}[\phi] = \Gamma[\phi] . \quad (1.36)$$

Mais comment réaliser ceci en pratique? Tout simplement en rajoutant dans l'action un terme de masse dépendant de l'échelle $\Delta S_k[\varphi]$: si tous les modes d'énergie plus petite que k deviennent massifs, ils sont écartés dans la limite des grandes longueurs. En revanche, si l'on veut intégrer les autres modes dans l'action effective, il faut éviter qu'une masse vienne modifier leur comportement, d'où la dépendance de ΔS_k avec k . Dans la limite $k \rightarrow 0$, la masse ΔS_k n'agit plus sur aucun mode, et toutes les fluctuations se comportent normalement.

Le terme de masse ΔS_k est construit à partir d'une fonction de coupure $R_k(x)$ ¹³ :

$$\Delta S_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{x,y} \varphi(x) \cdot R_k(x-y) \cdot \varphi(y) = \frac{1}{2} \int_q \varphi(q) \cdot R_k(q) \cdot \varphi(-q) . \quad (1.37)$$

Idéalement, $R_k(q)$ donnerait une masse infinie aux modes infrarouges, et serait exactement nulle dans le régime ultraviolet :

$$\begin{cases} R_k^{Id}(q) = +\infty & q < k \\ R_k^{Id}(q) = 0 & q \geq k \end{cases} . \quad (1.38)$$

13. Nous utilisons la notation « . » dans l'équation (1.37) pour symboliser la contraction des champs avec la coupure dans le cas où ceux-ci ne sont pas des scalaires.

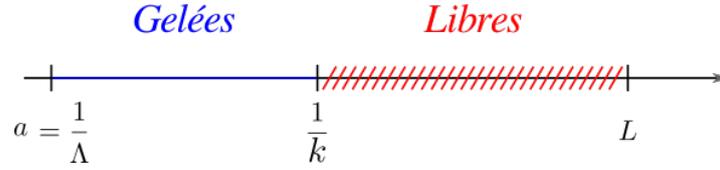


FIGURE 1.6 – Séparation des modes de fluctuation pour construire le flot de renormalisation de l'action effective moyenne. Les fluctuations des modes ultraviolets sont laissées libres, celles à des échelles d'énergie plus petites que l'échelle courante sont gelées par l'addition d'une masse. Dans la limite thermodynamique, k devient de plus en plus petit et la zone bleue se réduit de plus en plus, jusqu'à disparaître : à ce stade toutes les fluctuations sont intégrées.

Cette fonction est très peu régulière, donc peu utilisée en pratique. D'autres familles génériques de coupures lui sont préférées. $R_k(q)$ doit vérifier un certain nombre de conditions afin de donner le comportement attendu pour ΔS_k :

- La coupure doit laisser intacts les modes ultraviolets :

$$R_k(q) \xrightarrow{q \gg k} 0 . \quad (1.39)$$

- Dans le régime infrarouge, la coupure donne aux modes une masse d'ordre k :

$$R_k(q) \underset{q \ll k}{\sim} O(k^2) . \quad (1.40)$$

Comme corollaire de ce résultat, la coupure devient grande dans la limite microscopique :

$$R_k(q) \underset{k \rightarrow \Lambda}{\sim} \Lambda^2 , \quad (1.41)$$

autrement dit, toutes les fluctuations deviennent gelées, nous retrouvons donc bien la limite de la théorie de champ moyen ; la procédure ainsi définie est cohérente.

Les fonctions de coupures peuvent donc typiquement avoir la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_k^1(q) = \alpha (k^2 - q^2) \Theta(k^2 - q^2) \\ R_k^2(q) = \alpha \frac{q^2}{e^{q^2/k^2} - 1} \\ R_k^3(q) = \alpha k^2 e^{-q^2/k^2} , \end{array} \right. \quad (1.42)$$

où $\Theta(\cdot)$ est la fonction de Heaviside. Les allures typiques de ces coupures sont données sur la Figure 1.7.

Bien entendu, les résultats doivent être indépendants de la forme choisie pour la fonction de coupure. Cependant cette condition n'est pas automatiquement vérifiée lorsque des simplifications sont faites pour établir les équations de flot de renormalisation. Pour réduire l'influence de ces troncations sur le résultat final, il est utile d'introduire des paramètres dans la définition des fonctions de coupure, tel que α dans l'équation (1.42) par exemple. En effet ces paramètres peuvent être ajustés de façon à ce que la dépendance des observables universelles dans leur

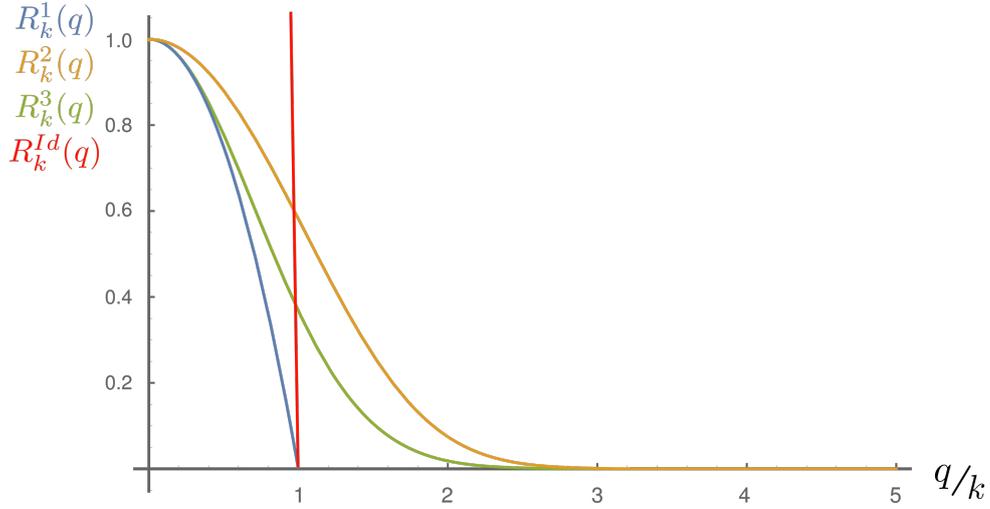


FIGURE 1.7 – Allure des fonctions de coupure avec q . Le régime ultraviolet est laissé intact ; les modes fluctuations du domaine infrarouge acquièrent une masse, infinie dans le cas de la coupure idéale (en rouge sur la figure).

valeur soit minimale : c'est le principe de sensibilité minimale (voir [Canet 2003a] pour plus de détails).

Avec une telle procédure, la condition (1.36) est bien vérifiée. En revanche, dans la limite infrarouge,

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = S[\varphi = \phi] + \Delta S_\Lambda[\phi] . \quad (1.43)$$

La condition à l'échelle microscopique (1.35) n'est donc pas respectée. La solution à ce problème est simple : comme le terme de masse additionnel à l'échelle courante k est nul dans la limite infrarouge, il suffit de modifier la relation entre $\Gamma_k[\phi]$ et $W_k[J]$, qui ne sont plus complètement reliés par une vraie transformation de Legendre :

$$\Gamma_k[\phi] = -W_k[J] + \int_x J(x) \cdot \phi(x) - \Delta S_k[\phi] . \quad (1.44)$$

De cette façon, l'action effective moyenne $\Gamma_k[\phi]$ définit une bonne interpolation entre les régimes microscopique et macroscopique.

1.4.2 Équation de flot

Il n'est, bien sûr, pas question de calculer $\Gamma_k[\phi]$ en intégrant explicitement sur toutes les fluctuations de haute énergie. Au lieu de cela, nous pouvons chercher la dépendance de Γ_k vis-à-vis de l'échelle courante k . L'équation de flot de $\Gamma_k[\phi]$ ainsi obtenue est exacte [Wetterich 1993]. La démonstration est donnée dans l'Annexe C. Le flot de $\Gamma_k[\phi]$ fait intervenir le propagateur renormalisé $\Gamma_k^{(2)}[\phi; x, y] = \frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)}$

$$\partial_t \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \int_q \frac{\partial_t R_k(q)}{\Gamma_k^{(2)}[\phi; q, -q] + R_k(q)} . \quad (1.45)$$

Quelques remarques s'imposent :

- Étant donné une condition initiale $\Gamma_\Lambda[\phi] = S[\phi]$ à l'échelle microscopique, l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (1.45) donne accès à l'énergie libre renormalisée $\Gamma_0[\phi]$, indépendamment de la coupure $R_k(q)$. Ceci est vrai, du moins, tant qu'aucune approximation n'est faite, ce qui n'est jamais le cas en pratique. Il est donc important que la fonction de coupure respecte un maximum des symétries de l'énergie libre $\Gamma[\phi]$ pour éviter de polluer le flot.
- L'équation (1.45) se généralise sans difficulté au cas de champs fermioniques.
- C'est une équation 1-boucle exacte : il n'y a jamais besoin de calculer des intégrales sur un nombre élevé d'impulsions dans ce formalisme, même aux ordres élevés des schémas de troncation. De plus, elle ne présente jamais de problèmes de divergences. En effet, $R_k(q)$ agit comme un régulateur infrarouge au dénominateur, et $\partial_t R_k(q)$ régule à la fois le secteur infrarouge, et ultraviolet, comme l'on peut s'en convaincre avec la Figure 1.8 par exemple.

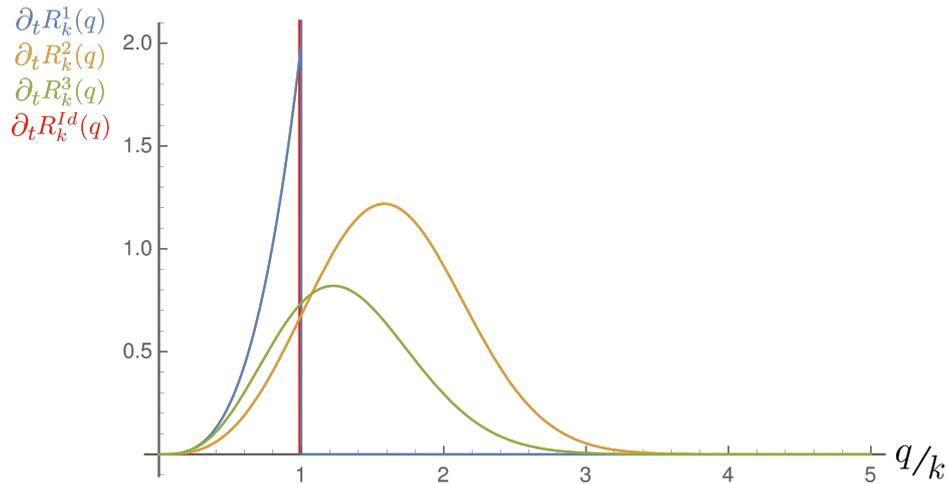


FIGURE 1.8 – Allure des dérivées fonctions de coupure avec q . Elle décroissent rapidement aux deux extrêmes du spectre.

- Contrairement à l'équation (1.5), elle ne fait plus intervenir explicitement l'intégrale fonctionnelle sur le champ microscopique, il est donc un peu plus facile de former des schémas de troncation variés. Le prix à payer est que l'équation (1.45) porte sur une fonctionnelle du champ macroscopique, un objet difficile à bien manipuler.
- En raison de la présence de $\Gamma_k^{(2)}$ au dénominateur, (1.45) est par nature une équation non-perturbative. Il est possible de retrouver le développement habituel en couplage faible, mais celui-ci ne constitue plus qu'un schéma d'approximation parmi d'autres.
- Comme l'intégrale de boucle ne diverge jamais, les coupures ultraviolette et infrarouge n'apparaissent jamais explicitement, ce qui permet de conserver l'auto-similarité des transformations du groupe de renormalisation [Delamotte 2012].

- La structure perturbative avec un développement en boucles peut se retrouver simplement avec un développement adéquat. Pour souligner la similarité avec le développement habituel, \hbar est restauré ici.

À l'ordre 0, aucune fluctuation n'est prise en compte, c'est la théorie de champ moyen :

$$\Gamma^{MF}[\phi] = S[\phi] . \quad (1.46)$$

À l'ordre suivant, il faut remplacer le propagateur dans l'équation (1.45) par sa valeur dans la théorie de champ moyen (qui ne dépend plus de k) : $\Gamma_k^{(2)}[\phi; q, -q] \mapsto S^{(2)}[\phi; q, -q]$.

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k^{1-loop}[\phi] &\simeq \frac{\hbar}{2} \int_q \frac{\partial_t R_k(q)}{S^{(2)}[\phi; q, -q] + R_k(q)} . \\ \Rightarrow \Gamma_{k=0}^{1-loop}[\phi] &= \Gamma_\Lambda[\phi] + \frac{\hbar}{2} \int_q \log \left(S^{(2)}[\phi; q, -q] + R_{k=0}(q) \right) + O(\hbar^2) \\ &= \Gamma^{MF}[\phi] + \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \log \left(S^{(2)}[\phi] \right) + O(\hbar^2) . \end{aligned} \quad (1.47)$$

À partir de deux boucles en revanche, le raccordement des deux développements est bien moins évident.

1.4.3 Schémas d'approximation

1.4.3.1 Fonctions à n points

La source principale de complexité de l'équation (1.45) est le caractère fonctionnel de $\Gamma_k[\phi]$; il est donc naturel d'essayer de le simplifier en priorité. La dépendance en champs aux ordres élevés est contenue dans les fonctions à n points $\Gamma_k^{(n)}[\phi; \{p_i\}]$. D'après (1.45), leur flot fait intervenir seulement $\Gamma_k^{(n+1)}[\phi; \{p_i\}]$ et $\Gamma_k^{(n+2)}[\phi; \{p_i\}]$. À un ordre n donné, remplacer $\Gamma_k^{(n+1)}[\phi; \{p_i\}]$ et $\Gamma_k^{(n+2)}[\phi; \{p_i\}]$ par une fonction des $\Gamma_k^{(m \leq n)}[\phi; \{p_i\}]$ permet d'obtenir un système fermé de n équations aux dérivées partielles, soluble au moins en principe. Ce type d'approximation est appelé développement de Blaizot-Méndez-Wschebor (BMW) [Blaizot 2006a, Blaizot 2006b, Blaizot 2006c].

L'utilité principale de ce type d'approximation est qu'elle tronque le contenu en champ de $\Gamma_k[\phi]$, mais laisse intact le contenu en impulsion externe dans les fonctions à n points, et peut donc permettre d'aller décrire des fonctions d'échelle dans des problèmes hors de l'équilibre par exemple [Canet 2011, Canet 2016], ou étudier l'émergence d'états liés [Rose 2016].

1.4.3.2 Développements dérivatifs

Dans de nombreux modèles, toute la dépendance en impulsion des fonctions à n points n'est pas nécessaire pour décrire le système étudié. Cela n'est pas possible dans les cas cités précédemment, mais c'est une approximation très utile en pratique dans des situations très variées : pour étudier des problèmes à l'équilibre thermodynamique [Dupuis 2011], des systèmes dans leur phase ordonnée [Coquand 2016] ou proches de la criticalité [Debelhoir 2016] par exemple.

Le développement dérivatif consiste à remplacer $\Gamma_k[\phi]$ par un ansatz ne faisant intervenir qu'un nombre fini de dérivées du champ (nous donnons des exemples plus concrets ci-dessous). Tronquer le développement en dérivées revient à ne garder que des termes pour lesquels l'impulsion externe p est petite devant l'impulsion courante k . Après le passage à la limite thermodynamique $k \rightarrow 0$, tout le contenu impulsif est négligé.

L'ordre le plus bas du développement dérivatif est l'approximation du potentiel local (LPA). Dans le cas de la théorie ϕ^4 par exemple, il s'écrit :

$$\Gamma_k^{LPA}[\phi] = \int_x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + U_k[\phi] \right]. \quad (1.48)$$

Cette approximation un peu simpliste ne comporte pas de renormalisation de champ, et s'applique donc plutôt à des modèles à faible dimension anormale. Cependant, le potentiel effectif $U_k[\phi]$ est une *fonctionnelle* du champ ϕ , et contient donc l'information sur une infinité de constantes de couplage. Il est important de noter que malgré l'absence de renormalisation de champ, aucun développement perturbatif n'est effectué sur (1.45) dans ce schéma. En effet, notre paramètre de contrôle dans ce développement est le faible effet de l'impulsion externe p , et non pas la faiblesse des couplages mis en jeu. En particulier, il n'y a pas besoin d'étudier le système au voisinage d'une dimension particulière pour que le développement soit valide.

Il existe également des raffinements de ce développement. Par exemple l'approximation (LPA'), en rajoutant une renormalisation de champ constante à la (LPA), permet de calculer des dimensions anormales tout en bénéficiant de la simplicité du développement dérivatif au plus bas ordre

$$\Gamma_k^{LPA'}[\phi] = \int_x \left[\frac{Z_k}{2} (\partial\phi)^2 + U_k[\phi] \right]. \quad (1.49)$$

Il est également possible d'étoffer légèrement le contenu en impulsion du développement dérivatif en utilisant pour les coefficients du développement non plus des fonctionnelles du champ, mais des *fonctions* des dérivées. La nature du développement est donc différente. Il est aussi appelé (LPA'') [Rose 2018] :

$$\Gamma_k^{LPA''}[\phi] = \int_x \left[\frac{Z_k(\partial^2)}{2} (\partial\phi)^2 + U_k[\phi] \right]. \quad (1.50)$$

La (LPA'') donne accès à la dépendance en impulsion du propagateur dans le régime infrarouge.

L'ordre suivant, appelé $O(\partial^2)$, contient la dépendance *fonctionnelle* en champ jusqu'à l'ordre deux en dérivée :

$$\Gamma_k[\phi] = \int_x \left[\frac{Z_k[\phi]}{2} (\partial\phi)^2 + U_k[\phi] \right] + O(\partial^4). \quad (1.51)$$

Notons que dans le cas d'un champ non-scalaire, l'écriture de ce développement peut être un peu plus subtile. Par exemple, une fonctionnelle supplémentaire est nécessaire dans le cas d'un modèle $O(N)$ (à champ vectoriel) :

$$\Gamma_k[\vec{\phi}] = \int_x \left[\frac{Z_k[\phi]}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{Y_k[\phi]}{4} (\partial\phi^2)^2 + U_k[\phi] \right] + O(\partial^4). \quad (1.52)$$

Le nombre de termes différents requis est donné par les symétries du système.

Ce développement peut bien entendu être poussé plus loin, mais son implémentation aux ordres plus élevés est généralement assez compliquée à mettre en œuvre [Canet 2003b, Canet 2004].

1.4.3.3 Développements en champ

Il n'est pas toujours possible de construire le potentiel effectif $U_k[\phi]$ comme une fonctionnelle des champs. Dans ce cas, il est nécessaire de pousser le niveau d'approximation un cran plus loin en développant $U_k[\phi]$ en séries en fonction du champ. Ce développement en champ et en dérivées est valable quand les puissances élevées du champ jouent un rôle négligeable. Le développement du potentiel fait apparaître à nouveau des constantes de couplage (qui sont donc maintenant en nombre fini), comme le développement perturbatif. Mais il est crucial de comprendre que la troncation se fait maintenant au niveau de l'action effective Γ et non de l'action S , soit après que les fluctuations aient été intégrées. Par conséquent ce développement contient toujours de l'information sur le contenu de la théorie bien au-delà de l'approximation de couplage faible, approximation qui n'est jamais nécessaire pour obtenir notre développement ¹⁴. Un tel développement dans la théorie ϕ^4 s'écrit par exemple au niveau (LPA') :

$$\Gamma_k[\phi] = \int_x \left[\frac{Z_k}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{m_k^2}{2} \phi^2 + \frac{g_k}{4!} \phi^4 \right] + O(\phi^6, \partial^4). \quad (1.53)$$

Dans le cadre d'un développement en couplage faible, la théorie de perturbation à l'ordre de une boucle est toujours exactement retrouvée. En revanche, à partir de deux boucles, la troncation du contenu impulsional de la théorie introduit un décalage entre les deux développements [Papenbrock 1995, Morris 1998].

1.4.4 Action effective moyenne en présence de désordre

L'étude des systèmes désordonnés ajoute un certain nombre de complications ; il est donc préférable d'adapter un peu notre formalisme dans ce cas.

1.4.4.1 Thermodynamique des systèmes désordonnés

Les systèmes désordonnés présentent, en plus des interactions habituelles, un potentiel aléatoire, ou un couplage aléatoire à des dérivées du champ. Ce type de modèle est utilisé pour décrire des systèmes comportant des impuretés ou des défauts.

Bien sûr, il est en général impossible de décrire un système pour une réalisation particulière du désordre, qui peut faire intervenir un très grand nombre de paramètres microscopiques. Il faut donc espérer que, dans le système décrit, la limite thermodynamique réduise l'infinité des configurations possibles du système désordonné en un petit nombre de variables macroscopiques. Comme les détails microscopiques de la réalisation particulière du désordre sont gommés aux grandes échelles, il est attendu que les quantités macroscopiques se construisent à l'aide de moyennes sur les configurations du désordre, notées à l'aide du symbole $\overline{[\cdot]}$. En particulier, une quantité X vérifiant la relation suivante :

$$X \underset{V \rightarrow +\infty}{=} \overline{[X]}, \quad (1.54)$$

est dite *auto-moyennante*. Dans un souci de simplification, la limite thermodynamique est représentée ici par une limite de volume V infini. Autrement dit, les variables auto-moyennantes

¹⁴. Il s'agit en effet de négliger les effets des termes d'ordres élevés en champ, soit des couplages associés, mais cela n'affecte en rien la force des couplages d'ordre plus bas.

sont les « bonnes » variables thermodynamiques, elles ne dépendent du désordre que *via* sa loi de probabilité.

Une autre façon de comprendre cette égalité est que, dans la limite de volume infini, la distribution de la variable aléatoire X devient extrêmement piquée autour de sa valeur moyenne, ce qui peut s'écrire :

$$\lim_{V \rightarrow +\infty} \frac{[\overline{X^2}] - [\overline{X}]^2}{[\overline{X}]^2} = 0 . \quad (1.55)$$

L'énergie libre est une grandeur auto-moyennante, contrairement à la fonction de partition [Castellani 2005]; c'est donc bien sur elle que nous devons nous concentrer. Tout au long de cette section, nous noterons Δ un champ désordonné générique, de loi de probabilité $\mathcal{P}[\Delta]$. La thermodynamique de notre système est donnée par :

$$W[J] = \overline{[W[J; \Delta]]} = -\overline{[\log(\mathcal{Z}[J; \Delta])]} . \quad (1.56)$$

1.4.4.2 Méthode des répliques

Le comportement des paramètres du désordre vis-à-vis des fluctuations thermiques d'un système peut être multiple. Deux comportements limites sont généralement distingués :

- Si le temps de relaxation du désordre est petit devant le temps caractéristique associé aux fluctuations thermiques, le désordre est *recuit*¹⁵. Dans ce cas, il a le temps de s'équilibrer avec le système, et de fluctuer avec lui. L'expression de l'énergie libre (1.56) devient alors :

$$W[J] = -\log \left(\int \mathcal{D}[\Delta] \mathcal{P}[\Delta] \mathcal{Z}[J; \Delta] \right) . \quad (1.57)$$

C'est typiquement ce qui arrive aux suffisamment hautes températures. Puisque le désordre s'équilibre avec le système à chaque instant, ce cas est assez peu intéressant pour étudier la modification des propriétés d'un système en présence d'impuretés.

- Si la configuration du désordre apparaît statique à l'échelle à laquelle évolue le champ ϕ , le désordre est dit *gelé*¹⁶. Sa présence introduit de la frustration dans la dynamique du champ ϕ . Dans ce cas, la formule (1.56) n'est pas modifiée :

$$W[J] = - \int \mathcal{D}[\Delta] \mathcal{P}[\Delta] \log \left(\mathcal{Z}[J; \Delta] \right) . \quad (1.58)$$

Le calcul de la valeur moyenne du logarithme est assez ardu. C'est sur lui que nous allons nous concentrer à présent.

Il existe une astuce pour calculer l'énergie libre en présence de désordre gelé appelée méthode des répliques. Dans un premier temps, la relation suivante permet de permuter le logarithme et la valeur moyenne :

$$\overline{[\log(\mathcal{Z})]} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left(\overline{[\mathcal{Z}^n]} - 1 \right) . \quad (1.59)$$

15. « annealed » en anglais.

16. « quenched » en anglais.

Ensuite, il est supposé que le second membre de (1.59) constitue un prolongement analytique du cas où n est entier, et que l'on peut donc se restreindre à ce cas. Cette dernière hypothèse n'a rien d'évident en pratique, mais elle est nécessaire pour effectuer le calcul.

Pour un entier n ,

$$\overline{[\mathcal{Z}^n[J]]} = \int \mathcal{D}[\varphi_1](\dots)\mathcal{D}[\varphi_n]\mathcal{D}[\Delta]\mathcal{P}[\Delta]e^{-S[\varphi_1;\Delta]-\dots-S[\varphi_n;\Delta]+\sum J^A\varphi_A} . \quad (1.60)$$

Tout peut donc se réduire à l'étude d'un système soumis à une action microscopique $S_n[\{\varphi_B\}; \Delta] = \sum_{A=1}^n S[\varphi_A; \Delta]$ mettant n répliques différentes du champ φ dans la même configuration du désordre. Les indices en lettre latines majuscules correspondent à des indices de réplique dans nos notations.

Il est possible d'associer à cette action S_n une énergie libre de Helmholtz $W[\{J_B\}]$, reliée à son potentiel thermodynamique physique $W[J]$ par la relation :

$$W[J] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} W[\{J_B\}_{B \in \llbracket 1;n \rrbracket}] . \quad (1.61)$$

Le champ macroscopique porte alors un indice de réplique :

$$\phi_A(x) = \langle \varphi_A(x) \rangle = \frac{\delta W[\{J_B\}]}{\delta J^A(x)} . \quad (1.62)$$

Une action effective moyenne dépendant des répliques des champs peut être définie comme auparavant :

$$\Gamma_k[\{\phi_B\}_{B \in \llbracket 1;n \rrbracket}] = -W[\{J_B\}_{B \in \llbracket 1;n \rrbracket}] + \sum_{A=1}^n \int_x J^A(x) \phi_A(x) - \Delta S_k[\{\phi_B\}_{B \in \llbracket 1;n \rrbracket}] , \quad (1.63)$$

où le terme de masse couple maintenant des répliques différentes, ce qui suppose que la coupure a été elle aussi étendue à un objet tensoriel dans l'espace des répliques.

$$\Delta S_k[\{\phi_B\}] = \frac{1}{2} \sum_{A,C} \int_q \phi_A(q) R_k^{AC}(q) \phi_C(q) . \quad (1.64)$$

1.4.4.3 Développement en sommes de répliques libres

Le flot de $\Gamma_k[\{\phi_B\}]$ s'obtient simplement en généralisant (1.45) :

$$\partial_t \Gamma_k[\{\phi_B\}] = \frac{1}{2} \int_q \text{Tr} \left\{ \frac{\partial_t R_k(q)}{\Gamma_k^{(2)}[\{\phi_B\}; q, -q] + R_k(q)} \right\} . \quad (1.65)$$

Le nouveau propagateur dépend maintenant des répliques du champ :

$$\Gamma_{k,AB}^{(2)}[\{\phi\}; q, -q] = \frac{\delta^2 \Gamma_k[\{\phi\}]}{\delta \phi^A(q) \delta \phi^B(-q)} . \quad (1.66)$$

Son inversion n'est donc plus aussi simple que dans l'ancienne équation de flot.

Plutôt que de s'intéresser à la dépendance fonctionnelle complète des potentiels thermodynamiques, qui sera toujours tronquée en pratique à un moment ou un autre du calcul, effectuons un développement en somme de cumulants :

$$W[\{J\}] = \sum_{A=1}^n W_1[J_A] + \frac{1}{2!} \sum_{A,B=1}^n W_2[J_A, J_B] + \dots \quad (1.67)$$

Les n répliques sont couplées à des sources différentes, mais correspondent à la même réalisation du désordre. En introduisant des sources différentes, nous avons brisé explicitement la symétrie des répliques [Tarjus 2008].

Le même type de développement peut être appliqué à Γ_k , dont le développement en champ peut être organisé suivant le nombre de répliques différentes mises en jeu, c'est le développement en somme de répliques libres :

$$\Gamma_k[\{\phi\}] = \sum_{A=1}^n \Gamma_k^1[\phi_A] - \frac{1}{2!} \sum_{A,B=1}^n \Gamma_k^2[\phi_A, \phi_B] + \dots \quad (1.68)$$

Plus de détails sur les relations entre les cumulants des deux énergies libres sont donnés dans [Tarjus 2008]. Pour ce travail, nous retiendrons simplement que grâce au développement en somme de répliques libres, nous pouvons :

- traiter les différentes répliques comme des champs indépendants dans Γ_k , et les compter comme tels dans un développement en puissances du champ ;
- effectuer tous nos calculs sans nous soucier des éventuels problèmes liés à la brisure spontanée de la symétrie des répliques.

1.5 Conclusion

Finalement, comme les propriétés d'un système dans la limite thermodynamique ne dépendent pas de tous les détails de sa configuration microscopique, il peut être décrit à l'échelle macroscopique par un nombre restreint de quantités qui peuvent être calculées en effectuant des moyennes locales aux échelles intermédiaires. L'étude du comportement asymptotique de grandeurs effectives dépendant de l'échelle dans la limite des grandes longueurs donne accès aux lois d'échelle universelles qui régissent l'évolution du système dans ses différents régimes thermodynamiques.

Si les interactions sont suffisamment faibles, un développement en petites perturbations autour de l'état fondamental de la théorie de champ moyen peut être effectué, mais c'est rarement le cas en pratique. L'utilisation de développements en dimension donne toutefois un accès au comportement qualitatif du système. En combinant plusieurs de ces développements, il est possible d'affiner cette image en ayant accès à différents régimes limites.

Alternativement, l'application d'une procédure de renormalisation non-perturbative au niveau de l'action effective permet de gagner en adaptabilité en diversifiant les schémas d'approximation réalisables, ce qui évite d'avoir recours à des extrapolations pour donner des résultats. Il faut cependant rester prudent car la construction de schémas de troncation non-perturbatifs cohérents introduit une source supplémentaire de complexité.

La suite du manuscrit présentera comment ces différents outils peuvent être utilisés pour décrire la physique de la phase ordonnée des membranes cristallines aux grandes distances. En particulier, une étude comparative sera menée dans le Chapitre 3 pour illustrer sur un cas concret les liens entre ces méthodes.

Cristaux bidimensionnels

Sommaire

2.1	Ordre à longue portée à deux dimensions	36
2.1.1	Cristal bidimensionnel idéal	36
2.1.1.1	Théorie de l'élasticité	36
2.1.1.2	Mesure de l'ordre positionnel	39
2.1.2	Membranes fluides	43
2.1.2.1	Surfaces fluctuantes	44
2.1.2.2	Ordre orientationnel	47
2.1.3	Membranes cristallines	49
2.2	Brisure spontanée de symétrie	51
2.2.1	Modes de Goldstone	52
2.2.2	Application aux membranes	54
2.3	Le théorème de Mermin et Wagner	58
2.3.1	Interaction effective entre flexurons	58
2.3.2	Structure de l'interaction effective	59
2.4	Conclusion	60

L'état cristallin est un état de la matière solide dans lequel les atomes sont répartis sur un réseau périodique. Les fortes symétries de ce réseau ont permis de développer rapidement des modèles appropriés à la description de leurs propriétés macroscopiques. Il s'agit en outre d'un des exemples les plus simples de systèmes présentant une forme d'ordre à longue portée.

Si des cristaux à trois dimensions ont été observés depuis longtemps, dès la fin des années 1930 des arguments simples ont été avancés pour montrer que les fluctuations thermiques détruisent l'ordre cristallin à une dimension à toute température non nulle [Peierls 1934, Peierls 1935, Landau 1937], comme l'argument de Peierls, voir Figure 2.1. Essentiellement, sur un réseau unidimensionnel de paramètre a , la position x_n de chaque atome vis-à-vis de son voisin fluctue : $x_n = x_{n-1} + a + \delta_n$, avec $\langle \delta_n^2 \rangle \propto k_B T$. La fluctuation de position de l'atome n par rapport à un atome de référence est notée $x_n = x_0 + na + \Delta_n$. Comme $\Delta_n = \delta_1 + \dots + \delta_n$ est une somme de variables aléatoires indépendantes, la variance de la position du $n^{\text{ième}}$ atome augmente comme $\sqrt{\langle \Delta_n^2 \rangle} \propto \sqrt{n k_B T}$. Ainsi, au-delà d'une certaine longueur, nous n'avons plus aucune information sur la position relative du $n^{\text{ième}}$ atome à l'échelle du cristal. Un édifice atomique est donc d'autant moins stable qu'un atome a peu de voisins. Des arguments plus rigoureux ont permis d'étendre ce résultat à des cristaux de plus haute dimension, notamment à deux dimensions [Mermin 1968].

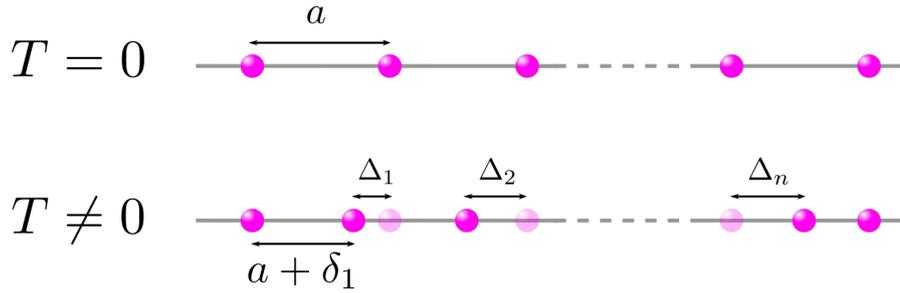


FIGURE 2.1 – **Argument de Peierls** : En haut : état fondamental du cristal à une dimension. En bas : à cause de l’agitation thermique, la position de chaque atome vis-à-vis de son voisin fluctue.

Dans ce contexte, la première observation d’une feuille de graphène [Novoselov 2004], matériau d’une seule épaisseur d’atomes de carbone répartis sur un réseau hexagonal, est apparue comme une surprise. Depuis, bien d’autres cristaux à deux dimensions ont été observés : dichalcogénures de métaux de transition, phosphorène, germanène, stanène, ... L’existence de ces cristaux semble contredire les conclusions précédentes du traitement des fluctuations thermiques. En réalité, nous verrons que d’autres modes de fluctuation entrent en jeu.

L’objectif de ce chapitre est d’expliquer la stabilité des matériaux cristallins à deux dimensions. Nous présentons tout d’abord deux modèles simples pour bien comprendre la physique des modes de fluctuation dans notre système, et en particulier le rôle de la troisième dimension dans laquelle le système est plongé. Puis, nous nous intéresserons à la description qualitative de l’effet des fluctuations thermiques sur les cristaux bidimensionnels. Une analyse précise des symétries du problème permettra également de cerner plus précisément les mécanismes à l’origine de leur stabilité à température ambiante.

2.1 Ordre à longue portée à deux dimensions

2.1.1 Cristal bidimensionnel idéal

Considérons un cristal parfait à deux dimensions, tel que défini sur la Figure 2.2 par exemple. Nous nous intéressons aux propriétés universelles de cet objet dans la limite thermodynamique, les détails microscopiques tels que la forme de la maille n’ont aucune importance ici.

2.1.1.1 Théorie de l’élasticité

Malgré son caractère granuleux à l’échelle atomique, la matière nous apparaît comme un milieu continu. La théorie de l’élasticité décrit les déformations des matériaux¹ dans un formalisme adapté à l’échelle macroscopique à laquelle les observations ont lieu (pour une introduction voir par exemple [Landau 1990]).

Un objet solide est décrit par un champ de vecteurs positions $\vec{r}(x)$, où x est un système de coordonnées interne au matériau. La métrique dans ce milieu est alors $g_{ij}(x) = \partial_i \vec{r}(x) \cdot \partial_j \vec{r}(x)$. Bien entendu, notre description doit être indépendante de l’origine choisie dans l’espace pour

1. Du moins tant que les efforts appliqués ne sont pas suffisants pour causer leur rupture.

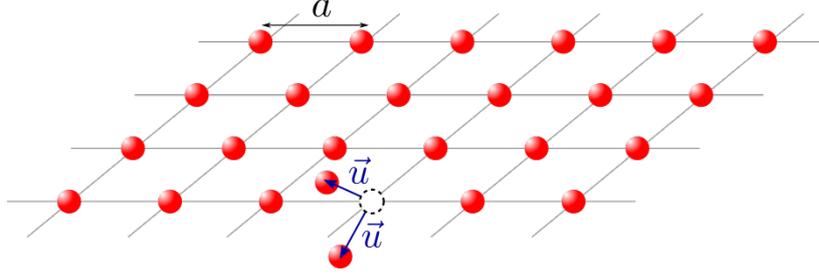


FIGURE 2.2 – Cristal parfait à deux dimensions. a est le paramètre de maille. Les fluctuations de position des atomes par rapport à leur position d'équilibre sont repérées à l'aide du vecteur \vec{u} .

écrire le vecteur \vec{r} , ce qui nous intéresse étant un déplacement *relatif* de l'objet *par rapport* à une situation de *référence* \vec{r}_0 . L'objet central de ce formalisme est donc le tenseur de déformations ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij}(x) = \partial_i \vec{r}(x) \cdot \partial_j \vec{r}(x) - \partial_i \vec{r}_0(x) \cdot \partial_j \vec{r}_0(x) . \quad (2.1)$$

Le plus souvent, \vec{r}_0 correspond simplement à l'équilibre thermodynamique à partir duquel le système est perturbé. Il est alors commode de choisir \vec{r}_0 de façon adaptée au système de coordonnées internes :

$$\vec{r}_0 = \zeta x^i \vec{e}_i , \quad (2.2)$$

où $\{\vec{e}_i\}_{i \in \llbracket 1; D \rrbracket}$ sont les vecteurs de base du système de coordonnées, et ζ est le paramètre d'extension. Dans ces conditions, la métrique de référence est simplement ² :

$$g_{ij}^0 = \zeta^2 \delta_{ij} . \quad (2.3)$$

Pour un matériau sans contraintes et à l'équilibre, $\zeta = 1$ par définition. Cela permet de définir une unité de longueur typique permettant de comparer les différents états de compression et dilatation du système lorsque celui-ci est déformé.

Tant que les efforts appliqués sur le système ne sont pas trop violents, l'énergie libre du système peut être développée en puissances des déformations :

$$F_{el} = F^{(0)} + F_{ij}^{(1)} \varepsilon^{ij} + F_{ijkl}^{(2)} \varepsilon^{ij} \varepsilon^{kl} + \dots \quad (2.4)$$

où $F^{(0)}$ est l'énergie de liaison du cristal, c 'est une constante qui sera laissée de côté dans la suite ; $F^{(1)}$ est l'énergie de rappel qui tend à redonner au solide sa forme à l'équilibre lorsque celui-ci est déformé, elle ne joue de rôle que quand le système est sous contrainte ; et $F_{ijkl}^{(2)}$ est reliée au tenseur d'élasticité c_{ijkl} , c 'est lui qui relie la contrainte à la déformation dans la généralisation de la loi de Hooke.

À l'échelle macroscopique, nous considérerons que notre cristal est isotrope. Sous ces conditions, l'énergie libre doit être invariante par rotation ; le terme d'ordre deux se décompose sur les deux scalaires ε_i^i et $\varepsilon_{ij} \varepsilon^{ij}$:

$$F_{ijkl}^{(2)} \varepsilon^{ij} \varepsilon^{kl} = \int_x \frac{1}{8} c_{ijkl} \varepsilon^{ij} \varepsilon^{kl} = \int_x \frac{1}{8} \left(\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \varepsilon^{ij} \varepsilon^{kl} = \int_x \left[\frac{\lambda}{8} \varepsilon_i^i + \frac{\mu}{4} (\varepsilon_{ij})^2 \right] , \quad (2.5)$$

2. δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

où $\int_x = \int d^D x$, D étant la dimension du cristal. λ et μ sont les coefficients de Lamé. Ils caractérisent la réponse élastique du système à une déformation. μ est le module de cisaillement (voir Figure 2.3). λ et μ peuvent être combinés pour former le module d'Young \mathcal{Y} , qui généralise la raideur apparaissant dans la loi de Hooke pour des matériaux à D dimensions :

$$\mathcal{Y} = 2\mu \frac{D\lambda + 2\mu}{(D-1)\lambda + 2\mu}. \quad (2.6)$$

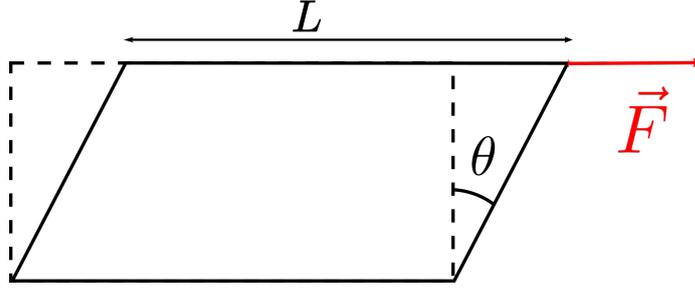


FIGURE 2.3 – Lors de l'application de la force \vec{F} sur un matériau bidimensionnel, réalisant un effort de cisaillement, et pour des déformations suffisamment petites, la relation entre la contrainte et la déformation est donnée, en fonction du module de cisaillement μ , par : $F \simeq \mu\theta L$.

Il peut être intéressant de décomposer l'énergie libre en un terme de cisaillement pur, et un terme de compression pure :

$$F_{ijkl}^{(2)} \varepsilon^{ij} \varepsilon^{kl} = \int_x \left[\frac{\mu}{4} (\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_k^k}{D} \delta_{ij})^2 + \frac{K}{8} \varepsilon_i^i \right]. \quad (2.7)$$

K est le module de compression qui caractérise la réponse du matériau à une compression isostatique. Il est relié au coefficient de compressibilité isotherme du matériau χ_T par la relation :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{K}. \quad (2.8)$$

D'après (2.7), le système admet un équilibre stable si et seulement si :

$$\begin{cases} \mu > 0 \\ K = \lambda + \frac{2}{D} \mu > 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Finalement, afin de mieux examiner les effets d'un écart à la position d'équilibre, le vecteur position est décomposé suivant :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}. \quad (2.10)$$

Les modes de fluctuation de position \vec{u} sont appelés *phonons* ; ceux-ci se décomposent en un phonon longitudinal (qui vibre suivant sa direction de propagation), et $(D-1)$ phonons transverses. L'énergie libre du système s'écrit finalement à l'ordre le plus bas³ :

$$F_{el} = F^{(0)} + \int_x \left[\mu (\partial_i u_j)^2 + \frac{\lambda}{2} (\partial_i u^i)^2 \right], \quad (2.11)$$

3. ζ a été absorbé dans une redéfinition de l'échelle de longueur.

ce qui permet de calculer par exemple la fonction de corrélation phonon-phonon :

$$\begin{aligned} \langle u^i(\vec{x})u^j(0) \rangle &= \int_q \langle u^i(q)u^j(-q) \rangle e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \\ &= \int_q \left[\frac{1}{(\lambda + 2\mu)q^2} P_L^{ij}(q) + \frac{1}{\mu q^2} P_T^{ij}(q) \right] e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

où $\int_q = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D}$ (en accord avec notre convention de transformation de Fourier⁴), $\langle \cdot \rangle$ est la moyenne vis-à-vis des fluctuations thermiques, et $P_L^{ij}(q) = \frac{q^i q^j}{q^2}$ et $P_T^{ij}(q) = \delta^{ij} - P_L^{ij}(q)$ sont respectivement les projecteurs transverse et longitudinal à l'impulsion \vec{q} .

Nous allons maintenant montrer comment des quantités telles que $\langle u^i u^j \rangle$ qui sortent naturellement de la théorie de l'élasticité peuvent être utilisées pour caractériser l'ordre dans le système.

2.1.1.2 Mesure de l'ordre positionnel

La notion d'ordre dans un cristal est définie par rapport à l'état fondamental où tous les atomes sont répartis sur le réseau périodique : c'est un ordre *positionnel*. Il est donc naturel de s'y intéresser, au niveau macroscopique, à travers la fonction de corrélation de densité $G(r) = \langle \rho(r)\rho(0) \rangle$. En effet, la densité $\rho(\vec{r})$ caractérise l'écart des positions atomiques à celles définies par le réseau \mathcal{R} :

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\vec{R} \in \mathcal{R}} \delta(\vec{R} - \vec{r}) , \quad (2.13)$$

de sorte que $\langle \rho \rangle \neq 0$ dans l'état cristallin et $\langle \rho \rangle = 0$ dans un état liquide⁵ par exemple ; $\langle \rho \rangle$ constitue donc un paramètre d'ordre naturel pour la transition de fusion.

Trois cas sont à distinguer suivant le comportement à longue distance de G :

- G converge vers une constante C :

$$G(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} C . \quad (2.14)$$

Les densités sont corrélées aux grandes distances, comme attendu dans la phase ordonnée ; le système présente de l'**ordre à longue portée** (LRO).

- G tend vers 0 dans la limite thermodynamique. Cela peut se faire de plusieurs façons. La décroissance la plus drastique est exponentielle :

$$G(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} e^{-r/\xi} . \quad (2.15)$$

ξ est une longueur de corrélation caractéristique du système. Dans ce cas, le système est fortement désordonné aux distances grandes devant ξ , il présente de l'**ordre à courte**

4. De manière générale, une intégrale sur une impulsion en notation abrégée présentera un facteur $(2\pi)^D$, contrairement à une intégrale dans l'espace direct.

5. Ou amorphe.

portée (SRO). Ce cas est typique de la phase liquide par exemple, où de fortes corrélations de position persistent aux petites échelles de distance mais s'effacent sur des échelles plus grandes.

- G tend vers 0 suivant une loi de puissance, donc infiniment plus lentement que dans le cas de l'ordre à courte portée :

$$G(r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} r^{-\Upsilon} . \quad (2.16)$$

Υ est un exposant dépendant des caractéristiques microscopiques du système. Les corrélations aux grandes distances sont trop faibles pour générer de l'ordre à longue portée, mais elles sont encore visibles à toutes les échelles : c'est un état **quasi-ordonné à longue portée** (QLRO). Généralement, $\Upsilon \propto T$, l'ordre à longue portée émerge donc de nouveau à température nulle : le système présente dans ce cas une transition de phase à température nulle.

De plus, l'observation d'un cristal par diffraction de rayons X donne accès au facteur de structure $S(q)$ qui est la transformée de Fourier de G . Ainsi, non seulement G permet de caractériser sans ambiguïté l'ordre dans le système, mais c'est également une variable accessible expérimentalement.

En présence de fluctuations, il est commode de décomposer ρ en une partie moyenne et une partie fluctuante :

$$\begin{aligned} G(r) &= \langle (\langle \rho(r) \rangle + \delta\rho(r)) (\langle \rho(0) \rangle + \delta\rho(0)) \rangle \\ &= \langle \rho(r) \rangle \langle \rho(0) \rangle + \langle \delta\rho(r) \delta\rho(0) \rangle \\ &= G_B(r) + G_c(r) . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ces deux termes peuvent être étudiés séparément :

- **Diffusion de Bragg** $G_B(r)$: Nous sommes conduits à calculer la moyenne de la densité. Pour cela, il est utile de passer dans l'espace de Fourier, ce qui fait apparaître le facteur de structure $S(q)$. Dans ce dernier, la transformée du réseau atomique \mathcal{R} est le réseau réciproque \mathcal{R}^* :

$$\begin{aligned} \langle \rho(\vec{r}) \rangle &= \left\langle \sum_{\vec{R} \in \mathcal{R}} \delta(\vec{R} - \vec{r}) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\vec{R} \in \mathcal{R}} \sum_{\vec{q} \in \mathcal{R}^*} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{R} - \vec{r})} \right\rangle \\ &= \sum_{\vec{q} \in \mathcal{R}^*} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \left\langle \sum_{\vec{R} \in \mathcal{R}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}} \right\rangle \\ &= \sum_{\vec{q} \in \mathcal{R}^*} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} S(q) . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le facteur de structure peut être facilement calculé car l'énergie libre du système (2.11) est harmonique :

$$\begin{aligned}
S(q) &= \sum_{\vec{R} \in \mathcal{R}} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{R}} \frac{1}{\mathcal{Z}_u} \int \mathcal{D}[u] e^{-k_B T \frac{u \cdot u}{2}} e^{-iq \cdot u} \\
&= \sum_{\vec{R} \in \mathcal{R}} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{R}} e^{-\frac{q^2 k_B T}{2} \langle u \cdot u \rangle} \\
&= \sum_{\vec{R} \in \mathcal{R}} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{R}} e^{-\frac{q^2 k_B T}{2K} g_D},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

\mathcal{Z}_u étant la fonction de partition associée aux phonons.

Le comportement de g_D dépend de la dimension D du cristal :

– $D = 3$:

$$g_{3D} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 k^2} \simeq \frac{1}{\pi a}. \tag{2.20}$$

La densité moyenne consiste en une série de pics infiniment fins, les pics de Bragg, situés en chacun des vecteurs du réseau réciproque. Leur intensité est donnée par le facteur de Debye-Waller $W(q, T)$:

$$G(r) = \sum_{\vec{q} \in \mathcal{R}^*} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} e^{-W(q, T)} = \sum_{\vec{q} \in \mathcal{R}^*} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} e^{-\frac{q^2 k_B T}{2\pi K a}}. \tag{2.21}$$

Notons que l'amplitude des pics diminue avec q , conformément aux observations. Un tel cristal à trois dimensions est donc ordonné à longue distance.

– $D = 1$:

$$g_{1D} = \int \frac{dk}{(2\pi) k^2} \simeq \frac{L}{(2\pi)^2}. \tag{2.22}$$

Le facteur de structure décroît exponentiellement avec la taille du système. Seul le mode zéro subsiste. Un cristal à une dimension ne présente pas de pics de Bragg.

– $D = 2$:

$$g_{2D} = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 k^2} \simeq \frac{1}{(2\pi)} \log\left(\frac{L}{a}\right). \tag{2.23}$$

Le facteur de structure décroît comme une loi de puissance en fonction de L . Il n'y a pas non plus de pics de Bragg pour un cristal à deux dimensions.

L'étude de la diffusion de Bragg permet de voir l'absence d'ordre à longue portée à partir de deux dimensions dans les cristaux, mais elle ne permet pas de discriminer entre l'ordre à courte portée et l'état quasi-ordonné à longue portée. En effet, quand les pics de Bragg sont effacés par les fluctuations thermiques, c'est la partie connexe de la fonction de corrélation en densité qui domine dans la figure de diffraction.

• Partie connexe $G_c(r)$:

$$\begin{aligned}
G_c(r) &= \langle \delta\rho(r)\delta\rho(0) \rangle \\
&= \sum_{\vec{R} \in \mathcal{R}} \langle \delta\rho(r+R)\delta\rho(R) \rangle \\
&= \sum_{\vec{R} \in \mathcal{R}} \left\langle \sum_{\vec{q}_1 \in \mathcal{R}^*} \sum_{\vec{R}_1 \in \mathcal{R}} \sum_{\vec{q}_2 \in \mathcal{R}^*} \sum_{\vec{R}_2 \in \mathcal{R}} e^{i\vec{q}_1 \cdot (\vec{R}_1 - \vec{r} - \vec{R})} e^{i\vec{q}_2 \cdot (\vec{R}_2 - \vec{R})} \right\rangle \\
&= \sum_{\vec{q} \in \mathcal{R}^*} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} \left\langle \sum_{\vec{R}_1 \in \mathcal{R}} \sum_{\vec{R}_2 \in \mathcal{R}} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{R}_1 - \vec{R}_2)} \right\rangle .
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Le facteur de structure associé ressemble beaucoup à celui de la diffusion de Bragg, mais cette fois c'est la position relative $\vec{R}_1 - \vec{R}_2$ qui intervient. Le mode d'impulsion nulle \vec{R}_0 intervient donc :

$$\begin{aligned}
S(q) &= \left\langle \sum_{\vec{R}_1 \in \mathcal{R}} \sum_{\vec{R}_2 \in \mathcal{R}} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{R}_1 - \vec{R}_2)} \right\rangle \\
&= \sum_{\vec{R} \in \mathcal{R}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}} \left\langle e^{i\vec{q} \cdot (\vec{R} - \vec{R}_0)} \right\rangle \\
&= \sum_{\vec{R} \in \mathcal{R}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}} e^{-\frac{q^2 k_B T}{2K}} g_D(R) .
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Le calcul de la fonction de corrélation de paires $g_D(R)$ est un peu plus compliqué, mais il peut être simplifié si l'on s'intéresse à la limite où la taille de l'échantillon L est grande.

– $D = 3$:

$$g_{3D}(\vec{R}) = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 k^2} (1 - \cos(\vec{k} \cdot \vec{R})) \simeq \frac{2}{\pi a} . \tag{2.26}$$

En effet, la partie périodique de l'intégrale s'annule par symétrie ; la dépendance en \vec{R} est donc perdue. On retrouve simplement le facteur de Debye-Waller, multiplié par deux.

– $D = 1$:

$$\begin{aligned}
g_{1D}(R) &= 2 \int \frac{dk}{(2\pi) k^2} (1 - \cos(kR)) \\
&\underset{R \gg a}{\simeq} 2 \times \frac{R}{2} .
\end{aligned} \tag{2.27}$$

La fonction de corrélation connexe décroît aussi exponentiellement. Le facteur de structure est donc une série de lorentziennes centrées sur le réseau réciproque.

– $D = 2$:

$$g_{2D}(\vec{R}) = 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2 k^2} (1 - \cos(\vec{k} \cdot \vec{R})) . \quad (2.28)$$

Cette intégrale fait intervenir des fonctions de Bessel. Une fois encore, il n'est pas possible de donner une expression analytique générale, mais le comportement à grand R peut tout de même être analysé (voir [Chaikin 1995] par exemple) :

$$g_{2D}(R) \underset{R \gg a}{\simeq} 2 \log \left(\frac{R}{a} \right) . \quad (2.29)$$

Le facteur de structure présente donc une série de pics centrés sur les vecteurs du réseau réciproque, mais il ne s'agit pas de pics de Bragg ; ils s'étalent selon une loi de puissance :

$$S(q) \propto \sum_{R \in \mathcal{R}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}} R^{-\Upsilon_q} . \quad (2.30)$$

L'exposant dépend de l'impulsion selon $\Upsilon_q = \frac{q^2 k_B T}{K}$. À température nulle, la structure en pics de Bragg est de nouveau présente. Proche d'un vecteur Q du réseau réciproque, le facteur de structure se comporte comme :

$$S(q) \underset{q \rightarrow Q}{\propto} \frac{1}{\|\vec{q} - \vec{Q}\|^{2-\Upsilon_q}} . \quad (2.31)$$

Le comportement en loi de puissance caractérise l'état quasi-ordonné à longue portée.

En résumé, une trace du type d'ordre présent dans le système est visible au niveau de la fonction de corrélation du champ de fluctuation microscopique ($\langle u.u \rangle$ ici). Si celle-ci tend vers zéro, le système est ordonné à longue portée, si elle diverge logarithmiquement, il est quasi-ordonné, et si la divergence est plus sévère (loi de puissance typiquement), l'ordre existe seulement à courte portée. Un résumé des fonctions de corrélation macroscopiques associées est présenté sur la figure 2.4.

Un autre résultat important est le caractère quasi-ordonné des fonctions de corrélation de position à deux dimensions. C'est un cas particulier d'application du théorème de Mermin et Wagner [Mermin 1966] : les fluctuations thermiques empêchent la génération d'une moyenne non nulle pour un paramètre d'ordre à deux dimensions.

Comment expliquer alors la stabilité du graphène à température ambiante ? Le modèle du cristal bidimensionnel permet d'étudier les fluctuations des positions des atomes autour de l'équilibre dans deux directions seulement. Cependant, pour un matériau réel, il existe un degré de liberté supplémentaire : lorsque la surface engendrée par le matériau se déforme, les atomes bougent dans la troisième direction de l'espace. Nous allons maintenant étudier ces fluctuations.

2.1.2 Membranes fluides

Considérons à présent une surface libre fluctuant dans l'espace. Afin de simplifier le problème au maximum, supposons dans un premier temps que les molécules constituant la surface sont libres de se déplacer le long de la surface. Comme il n'y a pas de position de référence pour les molécules, il n'y a pas de réseau cristallin, donc pas de phonons : un tel objet est appelé

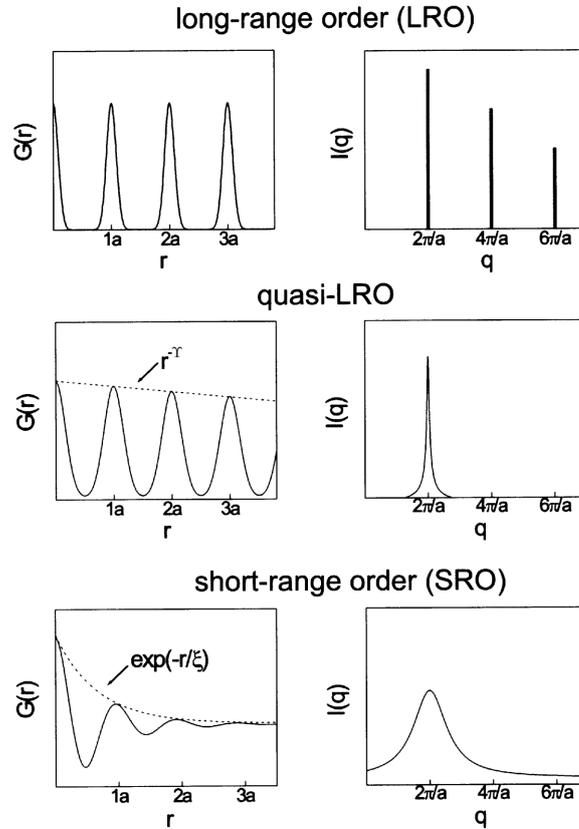


FIGURE 2.4 – Figure extraite de [de Jeu 2003] présentant les fonctions de corrélation (à gauche) et facteurs de structure (à droite) pour des cristaux présentant les différents types d'ordre. De haut en bas nous avons des cristaux à trois dimensions, deux dimensions, puis une dimension.

membrane fluide. Ce type de modèle est surtout approprié pour décrire des systèmes biologiques, comme les parois cellulaires généralement constituées de molécules pour lesquelles la diffusion à l'intérieur du milieu est très peu coûteuse en énergie, comme dans un liquide.

2.1.2.1 Surfaces fluctuantes

Dans leur phase fluide, les membranes ne possèdent pas d'élasticité à proprement parler. Les contributions à l'énergie qui contrôlent leur forme sont [Helfrich 1973, Canham 1970] :

- **La tension** σ : ce terme est proportionnel à la surface de la membrane :

$$\frac{\sigma}{2} \int_x \sqrt{g} , \quad (2.32)$$

où \sqrt{g} est le raccourci de $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$. Ce facteur est simplement le jacobien associé à la métrique g_{ij} de la surface, de telle sorte que l'intégrale dans (2.32) donne toujours l'aire de la surface. En effet, pour les membranes fluides contrairement aux cristaux, il n'y a pas de métrique de référence euclidienne (2.3).

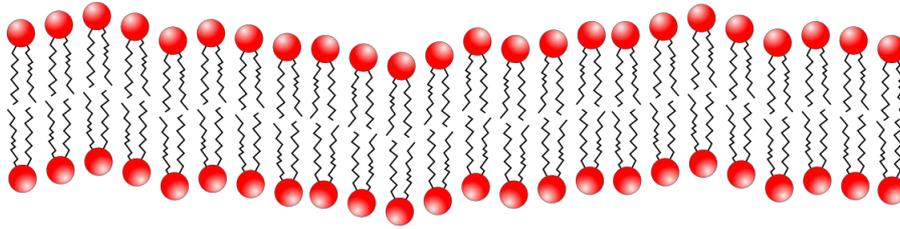


FIGURE 2.5 – Schéma simplifié d'une coupe de paroi cellulaire. La membrane est constituée d'une double couche de molécules, typiquement des phospholipides, dont la tête (en rouge sur le schéma), polaire, est hydrophile, alors que la queue (en noir), aliphatique, est hydrophobe. Dans les conditions de température offertes par le milieu biologique, cette membrane est dans une phase liquide où les molécules échangent fréquemment leur place avec celles de leurs voisines. Cependant les échanges de molécules entre les deux couches sont très rares.

Il faut cependant le distinguer du terme de tension de surface habituel à l'interface entre deux fluides, ou un fluide et un solide [Barbetta 2010, David 1991, Peliti 2005]. En effet, son origine physique est bien différente : il ne s'agit pas de la pénalité énergétique associée à la création d'une interface avec le milieu environnant car il n'y a pas d'interface entre un volume riche en molécules et un milieu externe à cause du caractère bidimensionnel de la membrane⁶ ; c'est plutôt l'énergie nécessaire pour vaincre l'interaction électrostatique entre deux molécules voisines lorsque la membrane est étirée ou compressée. L'appellation « tension de surface » sera donc évitée dans la suite.

D'autre part, il convient de distinguer cette notion du terme de $F^{(1)}$ dans la formule (2.4) malgré les similitudes qu'ils entretiennent, car σ est non nul même à l'équilibre thermodynamique. En effet, en l'absence d'élasticité, c'est le terme de tension qui joue le rôle de module de compression et permet de définir χ_T .

- **La courbure κ** : il s'agit simplement de l'énergie nécessaire pour plier la membrane. Introduire de la courbure revient à écarter ou rapprocher fortement les têtes des molécules (voir figure 2.6). Cette contribution caractérise la relation entre la forme de la surface fluctuante et l'espace dans lequel elle évolue : c'est la troisième dimension qui donne ce degré de liberté supplémentaire. Elle s'exprime en fonction du tenseur de courbure extrinsèque (ou seconde forme fondamentale) \mathcal{K} , qui est l'objet naturel en géométrie différentielle pour décrire la relation entre une surface et son plongement. La formule de Weingarten permet de le relier aux variations du vecteur \vec{n} normal à la surface⁷ :

$$\partial_a \vec{n} = \mathcal{K}_a^b \vec{e}_b . \quad (2.33)$$

- **La courbure intrinsèque κ_G** : l'énergie associée à une forme donnée dépend de sa courbure gaussienne. Cependant, d'après le théorème de Gauss-Bonnet, celle-ci peut être réduite à une simple constante si la topologie de la surface ne change pas (si aucun trou n'est percé notamment). Ce terme ne sera donc pas présent dans notre modèle simple.

6. D'autant plus que l'interaction avec le solvant, aqueux, se fait *via* la partie polaire des molécules impliquées et est donc plutôt favorable.

7. Rappelons que $\{e_i\}$ est une base de l'espace vectoriel tangent à la surface fluctuante.

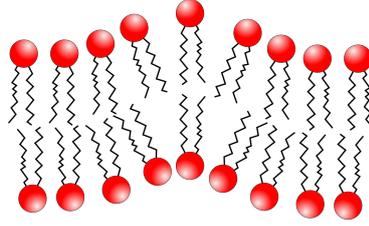


FIGURE 2.6 – Illustration de l’effet de la courbure sur une bicouche de lipides. En écartant les molécules les unes des autres, la courbure les place dans des configurations énergétiquement défavorables.

La physique des membranes fluides est très riche, et peut inclure bien d’autres effets [Peliti 2005], mais nous nous en tiendrons ici à ce modèle minimal mais cohérent. Sous ces conditions, l’énergie libre s’écrit donc :

$$F_{geo} = \int_x \sqrt{g} \left[\frac{\sigma}{2} + \frac{\kappa}{2} (\partial_i \vec{n}(x))^2 \right]. \quad (2.34)$$

Comme il n’y a pas de réseau sous-jacent, le système n’a pas de métrique privilégiée, ou, de manière équivalente, il n’y a pas de système de coordonnées privilégié pour décrire la membrane : le calcul des quantités thermodynamiques doit inclure ici une somme sur toutes les métriques possibles. Ce type de modèle géométrique à métrique fluctuante a été abondamment étudié en relativité générale⁸ et en théorie des cordes [Polyakov 1975, Polyakov 1986, Polyakov 1987] (quoique généralement sans courbure extrinsèque).

En l’absence de système de coordonnées privilégié, l’énergie libre de la surface doit être inchangée si le système de coordonnées est modifié. Cette invariance par les reparamétrisations de la surface est une invariance de jauge plutôt difficile à traiter ; nous n’examinons dans la suite que les ordres les plus bas de la théorie.

Afin de faire des calculs, il est nécessaire de fixer la jauge, c’est-à-dire choisir une métrique particulière. Un choix simple est la paramétrisation de Monge : la membrane est définie à partir d’un plan de référence comme un champ de fluctuations de hauteur $h(\vec{x})$ (voir figure 2.7). Ce choix est justifié tant que la membrane est peu froissée (en présence de plis trop importants la fonction h pourrait devenir multivaluée).

Bien sûr, l’énergie libre du système ne dépend pas du choix du plan de référence : h n’intervient qu’au travers de ses dérivées. Ce champ de fluctuations de hauteur porte le nom de *flexuron*. L’énergie (2.34) peut être exprimée entièrement en fonction des flexurons. Au plus bas ordre, elle devient :

$$F_{geo} = \int_x \left[\frac{\sigma}{2} (\partial_i h(x))^2 + \frac{\kappa}{2} (\partial^2 h(x))^2 \right] + O(h^4). \quad (2.35)$$

En particulier, la métrique g a été développée en puissances de h . L’équation (2.35) nous donne accès aux fonctions de corrélation de flexurons.

8. Où il n’existe pas de référentiel privilégié.

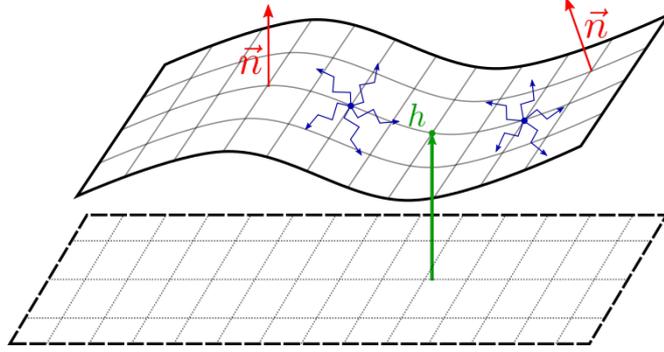


FIGURE 2.7 – **Paramétrisation de Monge** : chaque point de la membrane est repéré par sa hauteur (algébrique) relativement à un plan de référence.

2.1.2.2 Ordre orientationnel

Il n'y a pas de phonons dans les membranes fluides ; l'ordre qui pourrait s'établir à longue portée n'est pas de nature positionnelle. La forme de l'énergie libre (2.34) suggère plutôt un ordre défini à partir du vecteur normal \vec{n} : c'est l'ordre *orientationnel*. L'ordre à longue portée apparaît si la fonction de corrélation entre normales $G(r) = \langle \vec{n}(r) \cdot \vec{n}(0) \rangle$ tend vers une constante aux grandes distances. Autrement dit, dans le cas de l'ordre orientationnel, c'est la fonction de corrélation des vecteurs normaux qui endosse le rôle joué par la fonction de corrélation de densité dans le cas de l'ordre positionnel.

Si les vecteurs normaux sont corrélés aux grandes distances, la surface est un plan présentant quelques ondulations locales : la phase ordonnée est appelée *phase plate*. Si les fluctuations thermiques deviennent trop importantes, il n'est pas possible de connaître l'orientation de la surface aux grandes distances même si elle est connue en un point de référence : la phase désordonnée est appelée *phase froissée*.

Le paramètre d'ordre pour la transition plate-froissée est la valeur moyenne du vecteur normal $\langle \vec{n} \rangle$. Dans la phase plate, il caractérise le plan constituant l'état fondamental du système. Dans la phase froissée, son orientation est aléatoire, sa valeur moyenne est nulle.

Afin d'étudier la nature de l'ordre à deux dimensions, nous allons procéder de manière analogue aux cristaux. Comme nous étudions les perturbations de la phase plate par les fluctuations thermiques, la paramétrisation de Monge peut être utilisée. Il nous faut également choisir un plan de référence pour définir les flexurons. Nous choisissons $\vec{n}(0) = \vec{e}_z$, et définissons θ comme l'angle entre $\vec{n}(\vec{x})$ et \vec{e}_z :

$$\langle \vec{n}(r) \rangle \cdot \langle \vec{n}(0) \rangle = \langle \cos(\theta) \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle . \quad (2.36)$$

De même pour la fonction de corrélation connexe :

$$\langle \delta \vec{n}(r) \cdot \delta \vec{n}(0) \rangle = \langle \cos(\theta(r) - \theta(0)) \rangle = \langle e^{i(\theta(r) - \theta(0))} \rangle . \quad (2.37)$$

Ces résultats sont très similaires à ceux obtenus pour les cristaux en (2.18) et (2.24).

Finalement, dans la paramétrisation de Monge, θ peut être relié au champ de hauteur :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_i h)^2}} . \quad (2.38)$$

Ainsi, les petites fluctuations de θ sont données par celles de la dérivée des flexurons [Nelson 1987] :

$$\langle \theta^2 \rangle \simeq \langle (\partial_i h)^2 \rangle . \quad (2.39)$$

Supposons d'abord que le rôle de la tension peut être négligé. Les corrélations entre flexurons sont déduites de (2.35). La moyenne du paramètre d'ordre est caractérisée par :

$$\begin{aligned} g_{2D} &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \langle \partial_i h(k) \partial^i h(-k) \rangle \\ &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{\kappa k^4} \\ &= \frac{1}{2\pi \kappa} \log \left(\frac{L}{a} \right) , \end{aligned} \quad (2.40)$$

où a est une longueur caractéristique, de la taille des molécules typiquement. Nous retrouvons donc une décroissance en loi de puissance pour la fonction de corrélation macroscopique, de même que pour les cristaux à deux dimensions (2.23).

La partie connexe de la fonction de corrélation, analogue à G_c , ne peut ici aussi être calculée que dans la limite des grandes tailles (voir (2.29)). Elle dépend de la fonction de corrélation de paires :

$$\begin{aligned} g_{2D}(r) &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \langle \partial_i h(k) \partial^i h(-k) \rangle \times 2(1 - \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})) \\ &\underset{r \gg a}{\simeq} \frac{1}{\pi \kappa} \log \left(\frac{r}{a} \right) . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Les membranes fluides sont donc dans un état quasi-ordonné vis-à-vis de l'ordre positionnel. Cela se traduit concrètement par l'existence d'une longueur de persistance [de Gennes 1982], appelée longueur de De Gennes-Taupin :

$$\xi_\kappa = a e^{\frac{2\pi\kappa}{k_B T}} . \quad (2.42)$$

Sur des échelles de longueur plus petites que ξ_κ , la membrane apparaît rigide, alors qu'elle est froissée à plus grande échelle. De plus, à $T = 0$, $\xi_\kappa \rightarrow +\infty$, la transition de phase n'a donc lieu qu'à température nulle, de façon complètement analogue au cristal à deux dimensions, ou au modèle σ non-linéaire (voir Chapitre 1).

L'ajout de σ au propagateur des flexurons vient réguler la divergence de (2.40) avec L , mais ne change rien dans (2.41).

En conclusion, l'étude des fluctuations d'une surface dans l'espace met en évidence un nouveau type de mode de fluctuation, les flexurons, associés à l'ordre orientationnel. Comme le système a toujours deux dimensions, il se trouve dans un état quasi-ordonné à toute température non nulle, conformément au théorème de Mermin et Wagner. L'existence des flexurons seule ne suffit pas à expliquer la stabilité du graphène.

2.1.3 Membranes cristallines

Une membrane cristalline est un réseau bidimensionnel d'atomes libre de changer de forme en fluctuant dans l'espace. Les fluctuations de tels objets comportent donc à la fois des phonons et des flexurons qui interagissent.

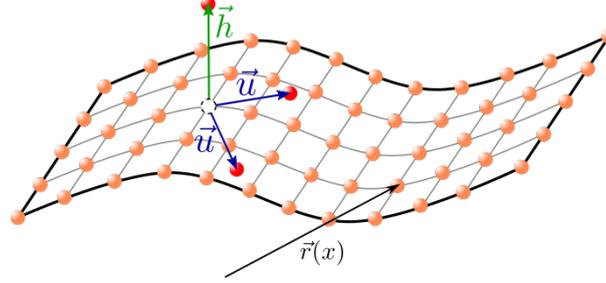


FIGURE 2.8 – **Membrane cristalline** : les atomes constituant la membrane peuvent se déplacer soit dans le plan de celle-ci (phonons), soit hors de celui-ci (flexurons).

L'énergie libre du système met donc en compétition des effets élastiques et des effets géométriques, dus à la courbure de la surface notamment. Elle s'obtient simplement à partir de (2.4) et (2.34)

$$\begin{aligned} F &= F_{el} + F_{geo} \\ &= \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{r})^2 + \frac{c^{ijkl}}{8} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \right]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

La métrique est fixe de nouveau grâce au réseau cristallin, et les déformations sont définies à partir d'un écart à l'équilibre qui inclut maintenant les fluctuations hors de la membrane :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u} + \vec{h}. \quad (2.44)$$

De plus, à partir de maintenant il convient de séparer l'espace interne à la membrane, à D dimensions, dont les indices de sommation sont latins, du plongement, à d dimensions, dans lequel évolue \vec{r} dont les indices sont grecs. Ainsi, par exemple, le tenseur d'élasticité c^{ijkl} porte des indices évoluant seulement à l'intérieur de la membrane. En revanche, la métrique $g_{ij} = \partial_i r^\alpha \partial_j r_\alpha$ inclut une sommation sur toutes les composantes du vecteur position, y compris celles qui sont dans l'espace externe, c'est-à-dire qu'elle couple à la fois les phonons et les flexurons. La codimension de la membrane est notée d_c . Elle est définie par $d_c = d - D$.

D'après ce qui précède, il y a *a priori* deux façons de définir l'ordre dans une membrane cristalline : celui-ci peut être positionnel ou orientationnel. Dans les deux cas des effets fortement anharmoniques entrent en jeu, donc les fonctions de corrélation ne peuvent pas être déduites simplement de l'expression de l'énergie libre (2.43). Le caractère anharmonique de la théorie est décrit par un exposant anormal $\eta \in]0; 1]$ qui est une quantité universelle (η ne dépend pas des caractéristiques microscopiques du système). Les calculs seront donc détaillés plus tard, nous nous contentons ici de donner les résultats (voir aussi [Nelson 2004]).

- **Ordre positionnel :**

L'ordre positionnel peut être caractérisé grâce à la fonction de corrélation $\langle \vec{r}(x) \cdot \vec{r}(0) \rangle$, qui permet de définir l'analogue de g_{2D} pour ce type d'ordre. Celle-ci comprend à la fois la corrélation entre phonons, et celle des flexurons. Les deux types de modes n'ont pas le même comportement aux grandes distances :

$$\begin{cases} \langle \vec{u}(x) \cdot \vec{u}(0) \rangle \underset{x \gg a}{\sim} x^{-2\eta} \\ \langle \vec{h}(x) \cdot \vec{h}(0) \rangle \underset{x \gg a}{\sim} x^{2-\eta} . \end{cases} \quad (2.45)$$

Ainsi, les phonons montrent un comportement typique d'ordre à longue portée, mais les flexurons présentent les caractéristiques d'un ordre à courte portée. Afin de clarifier le sens de cela, des figures de diffraction obtenues sur une feuille de graphène sont présentées sur la figure 2.9.

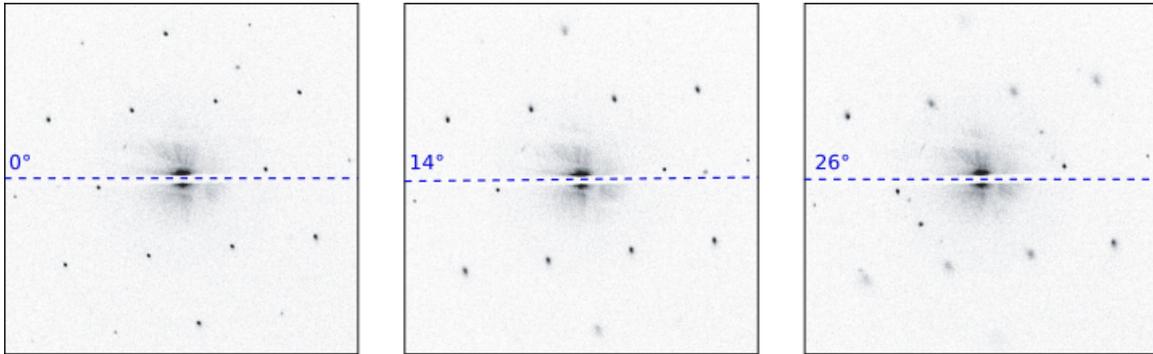


FIGURE 2.9 – Figure issue de [Meyer 2007] présentant trois images obtenues par microscopie électronique à transmission sur une feuille de graphène. La feuille de graphène, initialement vue de dessus, est petit à petit inclinée suivant un axe horizontal indiqué en bleu, de 14° , puis 26° . Au fur et à mesure que l'inclinaison augmente, les pics de diffraction s'élargissent et s'affaiblissent.

Tout d'abord, si la feuille de graphène est vue de dessus, les pics de diffraction semblent être ceux attendus pour un cristal hexagonal. Cela est dû à l'ordre à longue portée apparent sur la fonction de corrélation de phonons (2.45). Cette vue est insensible aux fluctuations de hauteur. Ensuite, lorsque la feuille n'est plus orthogonale au faisceau, les pics de diffraction s'élargissent et s'effacent, portant de plus en plus les marques du caractère courte portée de l'ordre positionnel hors de la feuille.

Du point de vue de l'ordre positionnel, le graphène (et par extension les autres cristaux bidimensionnels) n'est donc pas vraiment dans une phase ordonnée (cristalline), mais il n'est pas non plus dans une phase liquide, comme en témoigne notamment son module de cisaillement non nul. En effet (2.45) met également en évidence le caractère stabilisateur de l'interaction avec les flexurons pour les phonons, dont le comportement n'est plus celui d'un système quasi-ordonné. Ainsi l'ordre dans les cristaux bidimensionnels n'est pas de nature positionnelle.

- **Ordre orientationnel :**

L'ordre orientationnel est caractérisé par les fonctions de corrélation $\langle \partial_i \vec{r}(x) \cdot \partial^i \vec{r}(0) \rangle$. Cette fois-ci, elles incluent les dérivées des phonons. Il s'agit donc plutôt de corrélation entre les *tangentes* à la surface $\vec{t}_i = \langle \partial_i \vec{r} \rangle$ qu'entre les *normales* [Gutter 1989]. En effet, une surface peut être caractérisée aussi bien par l'ensemble de ses vecteurs tangents que de ses vecteurs normaux, mais les tangentes peuvent porter de l'information additionnelle sur l'état de déformation interne au milieu. Par exemple, elles peuvent permettre de discriminer entre deux états où la membrane est complètement plane, mais l'un des deux est fortement étiré dans une direction.

Le paramètre d'ordre associé à la transition plate-froissée n'est autre que le paramètre d'extension ζ (défini en (2.2)) :

$$\zeta^2 = \frac{1}{D} \vec{t}_i \cdot \vec{t}^i . \quad (2.46)$$

Dans la phase plate, ζ prend une valeur finie non nulle, $\zeta > 1$ si la membrane est étirée, $\zeta < 1$ si la membrane est compressée. Dans la phase froissée où l'orientation des tangentes est arbitraire, $\zeta = 0$. Ainsi, contrairement aux membranes fluides, les membranes cristallines possèdent une infinité de phases plates différentes caractérisées par la valeur de ζ .

Les fonctions de corrélation dépendent encore de η :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \partial_i \vec{u}(x) \cdot \partial^i \vec{u}(0) \rangle \underset{x \gg a}{\sim} x^{-2-2\eta} \\ \langle \partial_i \vec{h}(x) \cdot \partial^i \vec{h}(0) \rangle \underset{x \gg a}{\sim} x^{-\eta} . \end{array} \right. \quad (2.47)$$

Grâce à l'exposant anormal η , les flexurons et les phonons présentent de l'ordre orientationnel à longue portée.

Finalement, la phase ordonnée des cristaux bidimensionnels n'est pas une phase cristalline, mais une phase plate. La stabilisation de celle-ci aux grandes distances est assurée par le caractère fortement anharmonique des interactions entre phonons et flexurons, visible à travers la dimension anormale η . De plus, η est universel, c'est le même pour tous les cristaux à deux dimensions.

Mais ce résultat semble contredire le théorème de Mermin et Wagner. En effet, nous avons vu que ce théorème s'applique à la fois aux phonons seuls (dans les cristaux), et aux flexurons seuls (membranes fluides). Il est plus délicat de comprendre ce résultat dans une théorie telle que celle-ci qui présente différents types de modes de fluctuation. Nous allons donc dans la suite caractériser un peu mieux le comportement de ces objets, en examinant notamment le rôle joué par les symétries dans la génération de la phase plate.

2.2 Brisure spontanée de symétrie

Une particularité des modèles présentés dans ce chapitre, et en particulier de celui des membranes cristallines, est l'existence dans ces systèmes de modes de fluctuation sans masse, ou autrement dit peu atténués dans l'infrarouge, qui jouent donc un rôle prépondérant dans la

physique de ces objets aux grandes échelles de longueur. La génération de tels modes de fluctuation peut être associée aux relations entre les symétries de l'énergie libre⁹ et celles des états fondamentaux, notamment *via* le théorème de Goldstone. Cette section vise à montrer comment l'analyse des symétries du problème permet de mieux comprendre le spectre à basse énergie dans les membranes cristallines, et ses conséquences sur la physique de ces objets à grande distance.

2.2.1 Modes de Goldstone

Afin de bien analyser les symétries d'un problème, il ne suffit pas de s'intéresser aux symétries de l'énergie libre, mais il faut également se pencher sur celles des états accessibles au système étudié, car rien ne les oblige à être les mêmes¹⁰. Par exemple, l'énergie libre des systèmes magnétiques est invariante par rotation, mais dans la phase ferromagnétique, l'émergence d'une aimantation spontanée non nulle est le signe de l'existence d'une direction privilégiée dans le système. Le phénomène associé au choix par le système d'un état fondamental qui ne respecte pas une (ou plusieurs) symétrie(s) de l'énergie libre est appelé « brisure spontanée de symétrie ».

Différents états de basse énergie, discernables les uns des autres, doivent avoir la même énergie s'ils sont reliés entre eux par une symétrie de l'énergie libre. En particulier, si un état fondamental brise une symétrie de l'énergie libre, tous les états qui lui sont reliés par cette même symétrie sont aussi des états fondamentaux. Ainsi, l'étude du mécanisme de brisure spontanée de symétrie est reliée à celle des dégénérescences du spectre de la théorie.

Toutes les symétries de l'énergie libre ne sont pas pour autant nécessairement brisées par les états fondamentaux, il peut y avoir des symétries résiduelles. Dans le cas où celles-ci sont associées à des transformations continues, il est possible de relier continûment n'importe quelle paire d'états fondamentaux par un ensemble de transformations ne mettant en jeu que des états fondamentaux. Autrement dit, le spectre contient des excitations de masse nulle (qui correspondent à ces transformations) : ce sont les *bosons de Goldstone*¹¹. Ces modes de Goldstone jouent un rôle majeur dans la physique de tels systèmes à basse énergie. Bien que ces modes n'aient pas de masse, par définition, ils peuvent avoir plusieurs types de relations de dispersion dans la limite de basse énergie dans les théories non invariantes de Lorentz, les plus courantes étant linéaire $\omega \sim q$ et quadratique $\omega \sim q^2$ [Nielsen 1976]. Par exemple, un matériau ferromagnétique décrit par le modèle de Heisenberg possède un mode de Goldstone de relation de dispersion quadratique (le magnon), alors qu'un matériau anti-ferromagnétique possède deux modes de Goldstone de relation de dispersion linéaire [Nielsen 1976].

Le comptage des modes de Goldstone est relié à l'algèbre des groupes de symétries associés à l'énergie libre et aux états fondamentaux par le théorème de Goldstone : si G est le groupe des symétries de l'énergie libre, et H le groupe des symétries des états fondamentaux, ou groupe de symétrie résiduel (avec nécessairement $H \subset G$), le théorème de Goldstone dans sa version la plus simple affirme que le nombre de modes de Goldstone est égal au nombre de générateurs de G brisés par H , qui peut s'écrire $\dim(G/H)$. Cependant,

9. Ou plutôt de la densité d'énergie libre.

10. Il y a cependant une relation d'inclusion : deux états physiquement indiscernables doivent avoir la même énergie.

11. Rien ne s'oppose *a priori* à l'existence de fermions de Goldstone, mais les transformations associées à des générateurs fermioniques sont plus rares.

- cette version du théorème de Goldstone ne s'applique qu'aux théories invariantes de Lorentz. Par exemple, dans le cas du ferromagnétisme, $G = O(3)$ et $H = O(2)$. L'état ferromagnétique brise donc deux générateurs de G , mais il n'y a qu'un seul magnon [Nielsen 1976];
- dans les théories non invariantes de Lorentz, cette formulation du théorème de Goldstone ne permet pas de connaître la relation de dispersion des modes de Goldstone;
- la connaissance de l'algèbre des générateurs brisés n'est pas tout à fait suffisante; en effet, deux générateurs différents peuvent induire des déformations de l'état fondamental qui ne sont pas indépendantes [Low 2002] (voir figure 2.10, d'autres exemples seront présentés dans la suite), et ne génèrent donc pas de modes de Goldstone distincts. Ce type d'effet est assez courant quand des symétries d'espace-temps sont brisées par l'état fondamental.

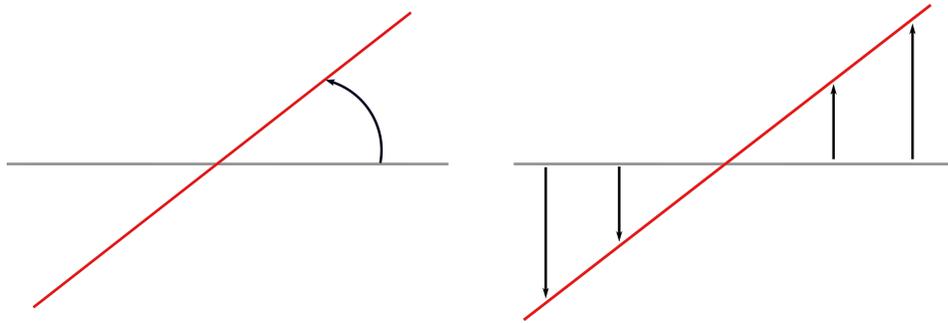


FIGURE 2.10 – À gauche : effet d'une rotation sur une ligne (état fondamental). À droite : l'application au même état fondamental d'une combinaison linéaire de translations produit le même effet. Il s'agit d'un exemple simple où des générateurs indépendants produisent la même excitation d'un état donné.

Ce n'est que récemment qu'une généralisation satisfaisante du théorème de Goldstone aux théories sans symétrie de Lorentz incluant un comptage des modes de Goldstone selon leur relation de dispersion dans la limite infrarouge (basse énergie) a été exhibée [Watanabe 2012, Watanabe 2014]. Afin de prendre en compte les effets mentionnés précédemment, H. Watanabe et H. Murayama ont construit leur formalisme autour de la matrice ρ des commutateurs des générateurs brisés Q_a indépendants évalués dans l'état fondamental :

$$\rho_{ab} = \langle [Q_a, Q_b] \rangle . \quad (2.48)$$

Il nous faut également distinguer les modes de Goldstone ayant des relations de dispersion différentes : dans la suite, nous appellerons mode de Goldstone de type A ceux dont la relation de dispersion est linéaire (il y en a n_A), et mode de Goldstone de type B ceux dont la relation de dispersion est quadratique¹² (il y en a n_B). La relation de comptage s'écrit :

$$\begin{cases} n_A = \dim(G/H) - \text{rank}(\rho) \\ n_B = \frac{\text{rank}(\rho)}{2} . \end{cases} \quad (2.49)$$

12. La définition originale des modes de Goldstone de type A et B est un peu plus subtile, mais les deux définitions coïncident dans notre cas.

Par exemple, considérons le modèle du cristal exposé dans la section précédente. L'état fondamental cristallin, qui est un réseau d'atomes, brise spontanément les symétries de rotation et de translation de la densité d'énergie libre de la théorie de l'élasticité. Il y a donc en D dimensions $\frac{D(D-1)}{2}$ générateurs de rotations brisés, et D générateurs de translations brisés. Cependant, toutes les excitations générées par l'action des rotations et des translations sur le réseau cristallin ne sont pas indépendantes [Watanabe 2013], et l'ensemble des générateurs brisés *indépendants* se réduit aux générateurs des translations. Comme ceux-ci commutent entre eux, la matrice ρ est nulle, et la relation (2.49) donne D modes de Goldstone de relation de dispersion linéaire correspondant aux D phonons acoustiques¹³ décrits précédemment, et non pas $D + \frac{D(D-1)}{2} = \frac{D(D+1)}{2}$ comme aurait conclu une application naïve du théorème de Goldstone. Notons que l'apparition de modes de Goldstone de type B est directement liée à l'existence d'une algèbre non triviale de générateurs brisés indépendants.

2.2.2 Application aux membranes

Le spectre de la phase plate des membranes cristallines est le suivant :

- D phonons acoustiques de relation de dispersion linéaire (modes de Goldstone de type A) ;
- $d - D$ flexurons de relation de dispersion quadratique (modes de Goldstone de type B).

Quel mécanisme est à l'origine de sa génération ?

Le mécanisme de brisure à l'origine de la génération de la phase plate ne fait pas consensus dans la littérature : $O(d) \rightarrow O(D) \times O(d-D)$ [Aronovitz 1989], $ISO(d) \rightarrow SO(d)$ [Zanusso 2014], ou $ISO(d) \rightarrow ISO(D) \times SO(d-D)$ [Gutter 1989]. Il est notable que la plupart d'entre eux datent d'une époque où le comptage des modes de Goldstone n'était connu que pour les théories invariantes sous le groupe de Lorentz.

Le premier mécanisme n'inclut pas les translations qui jouent évidemment un rôle, le second ne respecte visiblement pas les symétries de l'état fondamental (voir Figure 2.11). Nous n'examinerons donc en détail que le dernier mécanisme. L'état fondamental est un plan infini (dans la limite thermodynamique). Ses symétries sont récapitulées sur la figure 2.11. Les isométries à l'intérieur de plan $ISO(D)$ sont préservées, ainsi que le groupe des rotations qui agissent complètement hors du plan $SO(d-D)$ ¹⁴.

Les générateurs brisés sont :

- les $d - D$ translations dans les directions orthogonales au plan $\{P_\alpha\}_{\alpha \in [D+1;d]}$;
- les $D \times (d-D)$ rotations « mixtes » qui transforment un vecteur interne au plan dans la $i^{\text{ième}}$ direction en un vecteur hors du plan pointant dans la $\alpha^{\text{ième}}$ direction $\{J_{i\alpha}\}_{i \in [1;D], \alpha \in [D+1;d]}$.

Les relations de commutation entre ces générateurs sont données par l'algèbre des isométries

13. Les phonons acoustiques sont les phonons sans masse, par opposition aux phonons optiques.

14. Dans le cas d'un plan plongé dans l'espace à trois dimensions, ce groupe est réduit au groupe discret \mathbb{Z}_2 , c'est la symétrie qui inverse le dessus et le dessous du plan.

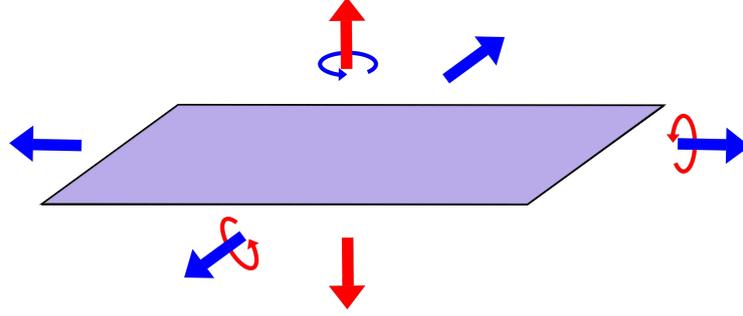


FIGURE 2.11 – Symétries du plan infini dans l’espace à trois dimensions : le plan infini est invariant sous deux translations et une rotation (en bleu), mais il brise les deux autres rotations et la dernière translation (en rouge). Il possède également une symétrie \mathbb{Z}_2 correspondant à l’inversion entre le dessus et le dessous du plan.

$\text{iso}(d)$:

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= \delta_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} - \delta_{\mu\alpha} J_{\nu\beta} - \delta_{\nu\beta} J_{\mu\alpha} + \delta_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} \\ [J_{\mu\nu}, P_\theta] &= \delta_{\nu\theta} P_\mu - \delta_{\mu\theta} P_\nu \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Lesquels de ces générateurs agissent indépendamment sur l’état fondamental ? Considérons l’action d’une rotation mixte sur l’état fondamental $|0\rangle$:

$$J_{i\alpha} |0\rangle = (x_i P_\alpha - x_\alpha P_i) |0\rangle = x_i P_\alpha |0\rangle . \quad (2.51)$$

L’action d’une rotation mixte sur l’état fondamental peut donc toujours être annulée par une combinaison linéaire (locale) des générateurs de translation brisés.

Un raisonnement similaire permet de réduire le nombre de générateurs brisés indépendant aux seules $d - D$ translations externes $\{P_\alpha\}$. L’application de (2.49) donne alors :

$$\begin{cases} n_A = d - D \\ n_B = 0 . \end{cases} \quad (2.52)$$

Un tel mécanisme génère donc $d - D$ modes sans masse, de relation de dispersion linéaire, ce qui ne correspond manifestement pas à la phase plate des membranes cristallines. Le nombre $d - D$ de modes de Goldstone indique qu’il s’agit de fluctuations hors du plan, les phonons acoustiques sont donc absents. Ce mécanisme apparaît en réalité être beaucoup plus approprié pour traiter la phase plate des membranes fluides (qui n’existe qu’à $T = 0$) qui présente effectivement $d - D$ flexurons. En effet, dans les membranes fluides, le propagateur de ceux-ci est donné par :

$$\langle h(q)h(-q) \rangle = \frac{1}{\kappa q^4 + \sigma q^2} , \quad (2.53)$$

ce sont donc bien des modes de fluctuation sans masse et de relation de dispersion linéaire¹⁵. Afin d’adapter ce mécanisme de brisure spontanée de symétrie à la phase plate des membranes

15. Ce résultat semble pouvoir être contourné si la tension σ dans la membrane est nulle. Cependant, cela n’est pas possible, car un tel terme est toujours généré par les fluctuations thermiques, ce qui empêche notamment que la compressibilité isotherme de la membrane s’annule.

cristallines, il nous faut donc être capables de générer des phonons, et des flexurons avec la bonne relation de dispersion.

L'origine des phonons (acoustiques) dans les cristaux est la brisure spontanée des isométries spatiales par le réseau cristallin. Un mécanisme similaire doit donc être présent dans le cas des membranes cristallines où le groupe $ISO(D)$ du plan est brisé par le réseau cristallin de la membrane en un sous-groupe discret \mathcal{C} :

$$ISO(d) \longrightarrow SO(d - D) \times \mathcal{C} . \quad (2.54)$$

La théorie continue de l'élasticité présente une dépendance implicite dans le réseau sous-jacent *via* la dépendance explicite de l'état fondamental (2.2) en le système de coordonnées. Celle-ci est nécessaire pour une définition non ambiguë de la métrique de référence $g_{ij}^0 = \zeta^2 \delta_{ij}$, d'autant plus importante qu'une des différences majeures entre les membranes fluides et cristallines est la perte de l'invariance par reparamétrisation, autrement dit l'existence d'une métrique privilégiée dans ces dernières.

Les générateurs brisés sont donc :

- les $d - D$ translations externes $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \llbracket D+1; d \rrbracket}$,
- les D translations internes $\{P_i\}_{i \in \llbracket 1; D \rrbracket}$,
- les $D \times (d - D)$ rotations mixtes $\{J_{i\alpha}\}_{i \in \llbracket 1; D \rrbracket, \alpha \in \llbracket D+1; d \rrbracket}$,
- les $\frac{D(D+1)}{2}$ rotations internes $\{J_{ij}\}_{(i,j) \in \llbracket 1; D \rrbracket^2}$.

L'action des rotations et translations internes est redondante (comme dans n'importe quel cristal). Cependant cette fois-ci, les rotations mixtes et les translations externes agissent indépendamment (voir figure 2.12). En effet, l'action des rotations mixtes préserve la métrique de l'état fondamental, contrairement à l'action de combinaisons linéaires de translations. Les isométries de l'espace interne peuvent cependant être utilisées pour relier entre elles les rotations mixtes portant le même indice externe α , mais des indices internes i différents. Le nombre total de générateurs brisés indépendants est donc : D translations internes + $(d - D)$ translations externes + $(d - D)$ rotations mixtes, soit $\dim(G/H) = 2d - D$.

La matrice ρ peut être écrite grâce aux relations de commutation de l'algèbre $\mathfrak{iso}(d)$ (2.50) évaluées dans un état fondamental :

$$\begin{aligned} \langle [J_{\alpha i}, J_{\beta i}] \rangle &\propto \langle J_{\alpha \beta} \rangle = 0 \\ \langle [P_\alpha, P_\beta] \rangle &= 0 \\ \langle [J_{\alpha i}, P_\gamma] \rangle &\underset{\gamma \neq i, \gamma \neq \alpha}{=} 0 \\ \langle [J_{\alpha i}, P_\alpha] \rangle &= \langle P_i \rangle \neq 0 \\ \langle [J_{\alpha i}, P_i] \rangle &= \langle P_\alpha \rangle \neq 0 . \end{aligned} \quad (2.55)$$

ρ est écrite dans une base comprenant d'abord les d translations, puis les $d - D$ rotations où

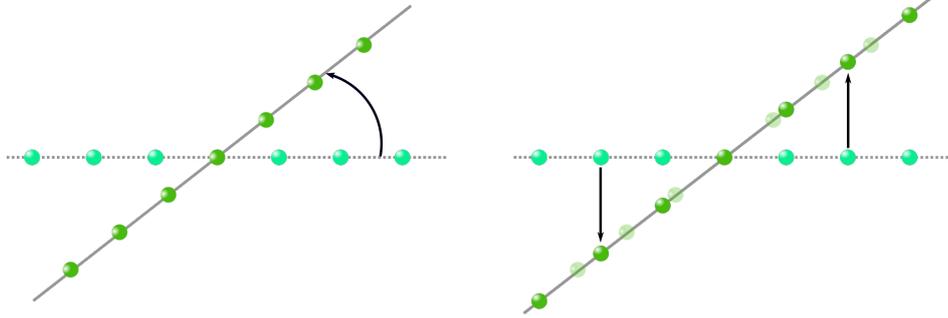


FIGURE 2.12 – À gauche : effet d’une rotation (mixte) sur un réseau d’atomes unidimensionnel. À droite : un ensemble de translations locales peuvent aligner les atomes sur la même droite, mais ceux-ci ne peuvent pas occuper la même position que dans le cas de la rotation. En effet, la translation induit une dilatation des longueurs à cause du théorème de Pythagore, alors que la rotation les préserve.

la détermination de son rang est simple, même sans connaître la valeur de ses coefficients :

$$\rho = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & 0 & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & 0 & 0 & * & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ \hline * & * & * & * & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ * & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & * & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right]. \quad (2.56)$$

Nous pouvons alors appliquer (2.49) :

$$\begin{cases} n_A = 2d - D - 2(d - D) = D \\ n_B = d - D. \end{cases} \quad (2.57)$$

Finalement, ce mécanisme génère D modes de Goldstone avec une relation de dispersion linéaire qui sont les phonons acoustiques, et $d - D$ modes de Goldstone avec une relation de dispersion quadratique qui sont les flexurons. Il permet de mettre en évidence à la fois la différence profonde de comportement des deux types de modes de fluctuation dans l’infrarouge, mais aussi le rôle crucial du réseau cristallin, et donc de l’élasticité du matériau, qui permet d’obtenir pour les flexurons un comportement différent de celui qu’ils ont dans les membranes fluides qui ne présentent pas d’ordre orientationnel à longue portée. Nous avons souligné auparavant la nécessité d’une algèbre de générateurs brisés indépendants suffisamment non triviale pour que cela soit possible, puisqu’il est en particulier impossible de générer des modes de Goldstone quadratiques en ne brisant que des translations¹⁶.

Le spectre de la phase plate présente donc une hiérarchie dans les modes de fluctuations : sur des distances suffisamment grandes, les flexurons seront toujours moins atténués que les

16. En effet, celles-ci commutent, donc aucun mode de type B ne peut être généré.

phonons. Il est cependant important de garder en tête que les phonons sont néanmoins sans masse, et qu'il n'existe pas par conséquent de longueur caractéristique à partir de laquelle ils sont écrantés.

2.3 Le théorème de Mermin et Wagner

Nous allons à présent examiner l'apparente violation du théorème de Mermin et Wagner dans les membranes cristallines à partir de l'étude précédente de leur spectre. Ces résultats constituent un travail original de cette thèse.

2.3.1 Interaction effective entre flexurons

Dans sa formulation originale [Mermin 1966], le théorème de Mermin et Wagner s'écrit pour une théorie avec un seul type de modes de fluctuation. Ce n'est pas le cas de la théorie des membranes cristallines qui, comme nous l'avons montré ci-dessus, comporte à la fois des phonons et des flexurons, avec des comportements très différents dans l'infrarouge. Comme les flexurons sont les modes dominants à basse énergie, il est naturel de chercher à calculer l'énergie libre effective des flexurons seuls dans la limite des grandes distances.

La dépendance de l'énergie libre (2.43) dans les phonons est purement quadratique. L'intégration sur les phonons est donc une simple intégrale gaussienne qui peut être calculée sans approximation supplémentaire.

La première étape consiste à développer le tenseur des déformations au plus bas ordre suivant les différents modes de fluctuations. La paramétrisation (2.44) introduit une dissymétrie fondamentale entre les phonons qui vibrent à l'intérieur de la membrane, et les flexurons dont le produit scalaire avec la configuration de référence \vec{r}_0 est nul. Il est alors possible de développer le tenseur des déformations de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r} - \partial_i \vec{r}_0 \cdot \partial_j \vec{r}_0 \\ &\simeq \partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i \vec{h} \cdot \partial_j \vec{h} \\ &= 2u_{ij} + \partial_i \vec{h} \cdot \partial_j \vec{h} .\end{aligned}\tag{2.58}$$

L'énergie libre peut alors s'écrire :

$$F[u, h] \simeq \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{h})^2 + \frac{c^{abcd}}{2} u_{ab} u_{cd} + \frac{c^{abcd}}{2} u_{ab} (\partial_c \vec{h} \cdot \partial_d \vec{h}) + \frac{c^{abcd}}{8} (\partial_a \vec{h} \cdot \partial_b \vec{h}) (\partial_c \vec{h} \cdot \partial_d \vec{h}) \right]. \tag{2.59}$$

L'intégration sur les phonons produit un vertex effectif dépendant de l'impulsion qui couple quatre flexurons ensemble. Plus de détails sur le calcul sont donnés dans l'Annexe A. Le vertex effectif d'interaction entre les flexurons dépend de leur impulsion ; il est donc plus commode d'écrire l'énergie libre effective dans l'espace de Fourier. Afin de simplifier les notations, nous définissons $\vec{h}_i = \vec{h}(k_i)$. La conservation de l'impulsion est implicite

$$F_{\text{eff}}[h] = \int_{k_1, k_2, k_3, k_4} \left[\frac{\kappa}{2} k_1^4 (\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2) + \frac{\mathcal{R}_{abcd}(q)}{4} k_1^a k_2^b k_3^c k_4^d (\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2) (\vec{h}_3 \cdot \vec{h}_4) \right]_{q=k_1+k_2=-k_3-k_4}. \tag{2.60}$$

Grâce à la structure de la théorie, $\mathcal{R}^{abcd}(q)$ se décompose sur des produits de projecteurs transverses (voir (2.12)). $\mathcal{R}(q)$ est décomposé selon les projecteurs orthogonaux suivants :

$$\begin{aligned} N^{abcd}(q) &= \frac{1}{D-1} P_T^{ab}(q) P_T^{cd}(q) \\ M^{abcd}(q) &= \frac{1}{2} (P_T^{ac}(q) P_T^{bd}(q) + P_T^{ad}(q) P_T^{bc}(q)) - N^{abcd}(q) . \end{aligned} \quad (2.61)$$

L'interaction effective s'écrit alors (voir A.13) :

$$\mathcal{R}^{abcd}(q) = \frac{\mu(D\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} N^{abcd}(q) + \mu M^{abcd}(q) . \quad (2.62)$$

Le prix à payer pour obtenir une théorie avec un seul type de modes de fluctuation est donc d'avoir un vertex d'interaction avec une structure en impulsion non triviale.

Remarquons que lorsque le système est bidimensionnel, l'interaction effective n'a plus qu'un seul terme (les deux projecteurs sont confondus), et que le couplage entre flexurons n'est autre que le module d'Young \mathcal{Y} (2.6) : c'est bien l'élasticité du milieu qui porte l'interaction effective entre les fluctuations de hauteur. D'autre part, c'est la structure particulière de l'interaction effective qui permet de générer un exposant η non nul, contrairement à la théorie de flexurons libres (membranes fluides).

2.3.2 Structure de l'interaction effective

La théorie effective est une théorie de purs flexurons en interaction. En l'analysant précisément, nous pouvons comprendre pourquoi le théorème de Mermin et Wagner ne s'applique pas ici.

Une des hypothèses fondamentales du résultat [Mermin 1966] est le caractère courte portée des interactions. Plus précisément, si $J(r)$ représente la force de l'interaction entre les paramètres d'ordre à la distance r , le théorème s'applique du moment que $\sum J(r)r^2$ reste fini lorsque r tend vers l'infini.

Dans le cas de (2.60), l'interaction entre paramètres d'ordre est simplement :

$$\int_{x,y} \left[(\partial_a \vec{h}(x) \cdot \partial_b \vec{h}(x)) \mathcal{R}^{abcd}(x-y) (\partial_c \vec{h}(y) \cdot \partial_d \vec{h}(y)) \right] ; \quad (2.63)$$

il faut donc analyser la structure de $\mathcal{R}^{abcd}(x-y)$ dans l'espace direct.

La brique de base typique de ce tenseur est un produit de deux projecteurs transverses. Nous donnons un exemple avec des indices génériques, qui permet de comprendre la structure de M ou de N .

$$P_T^{ab}(q) P_T^{cd}(q) = \delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ab} \frac{q^c q^d}{q^2} - \delta^{cd} \frac{q^a q^b}{q^2} + \frac{q^a q^b q^c q^d}{q^4} \quad (2.64)$$

La transformée de Fourier de chaque terme peut être calculée séparément (pour les détails,

voir Annexe A) :

$$\begin{aligned}
\int_q \delta^{ab} \delta^{cd} e^{i q \cdot (x-y)} &= \delta^{ab} \delta^{cd} \delta^{(D)}(x-y) \\
\int_q \frac{q^a q^b}{q^2} e^{i q \cdot (x-y)} &= \frac{\delta^{ab}}{2\pi|x-y|^2} - \frac{(x^a - y^a)(x^b - y^b)}{\pi|x-y|^4} \\
\int_q \frac{q^a q^b q^c q^d}{q^4} e^{i q \cdot (x-y)} &= \frac{X^{abcd}}{4\pi|x-y|^2} - \frac{Y^{abcd}(x-y)}{2\pi|x-y|^4} + \frac{2(x^a - y^a)(x^b - y^b)(x^c - y^c)(x^d - y^d)}{\pi|x-y|^6},
\end{aligned} \tag{2.65}$$

où X^{abcd} est le produit symétrisé de symboles de Kronecker :

$$X_{\mu\nu\rho\sigma} = \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}, \tag{2.66}$$

et $Y^{abcd}(\vec{x})$ est le produit symétrisé d'un symbole de Kronecker et deux vecteurs :

$$Y_{\mu\nu\rho\sigma}(\vec{x}) = x_\mu x_\nu \delta_{\rho\sigma} + x_\mu x_\rho \delta_{\nu\sigma} + x_\mu x_\sigma \delta_{\nu\rho} + x_\nu x_\rho \delta_{\mu\sigma} + x_\nu x_\sigma \delta_{\mu\rho} + x_\rho x_\sigma \delta_{\mu\nu}. \tag{2.67}$$

Le terme en bleu dans (2.65) est local, les termes en rouge sont non locaux, et non intégrables en l'infini lorsqu'ils sont multipliés par $(x-y)^2$. Autrement dit, l'intégration sur les phonons transforme une interaction purement locale entre flexurons (donnée par le tenseur d'élasticité) en une interaction effective non locale, et suffisamment à longue portée pour que le théorème de Mermin et Wagner ne s'applique plus.

Cela est à mettre en relation avec le fait que les phonons, bien que sous-dominants dans l'infrarouge, ne sont pas des modes massifs, mais des modes de Goldstone ; l'interaction effective qu'ils portent n'est donc jamais écrantée au-delà d'une longueur caractéristique. C'est cette interaction qui, en faisant interagir les flexurons à longue distance, permet d'assurer la stabilité de l'édifice cristallin à température finie.

2.4 Conclusion

Ainsi, la particularité des cristaux bidimensionnels réside dans la possibilité qu'ils ont de vibrer également dans leur espace de plongement, leur physique est gouvernée par la compétition entre l'énergie de courbure de la membrane et son élasticité. L'absence de voisins dans les directions concernées donne une relation de dispersion à ces modes qui est différente de celle des phonons acoustiques. Mais cela n'est pas suffisant pour expliquer la stabilité des cristaux à deux dimensions : si les phonons et les flexurons n'interagissaient pas ensemble, le système serait seulement quasi-ordonné à longue portée.

La théorie des membranes fluctuantes, en introduisant des brisures de symétries d'espace-temps par l'état fondamental, permet l'établissement d'un mécanisme de brisure spontanée de symétrie suffisamment complexe pour générer une hiérarchie de modes de Goldstone. Dans un tel scénario, les modes sous-dominants deviennent les vecteurs d'une interaction effective à longue portée qui permet d'échapper au théorème de Mermin et Wagner et rend possible la stabilisation du système à longue portée malgré les fluctuations thermiques.

L'ordre ainsi généré découle d'une interaction effective entre flexurons, il s'agit d'un ordre de nature orientationnelle. L'accès aux figures de diffraction par rayons X dans le graphène permet de confirmer le caractère non pertinent de l'ordre positionnel pour décrire les cristaux bidimensionnels. Cela souligne le rôle particulièrement important de la courbure dans la stabilisation de la matrice cristalline.

La phase plate des membranes cristallines constitue donc un cas plutôt inhabituel d'une théorie fortement anharmonique capable de générer de l'ordre à longue portée à deux dimensions.

Fluctuations thermiques dans la phase plate

Sommaire

3.1	Approches perturbatives	64
3.1.1	Action de phase plate	64
3.1.2	Identité de Ward	68
3.1.3	Approximation de couplage faible au voisinage de D_c^s	71
3.1.4	Théorie de perturbation en deux dimensions	75
3.1.5	Régime de grande codimension $d_c \gg 1$	77
3.1.5.1	Transition plate-froissée	78
3.1.5.2	Phase plate	80
3.1.5.3	Corrections à une boucle	81
3.2	Perturbations au-delà du premier ordre	84
3.2.1	Nature des divergences	84
3.2.2	Théorie effective de flexurons en interaction	86
3.2.3	Corrections à deux boucles	90
3.2.3.1	Graphes à deux boucles	90
3.2.3.2	Contretermes	93
3.2.3.3	Flot de renormalisation	96
3.2.4	Lien avec la théorie à deux champs	99
3.3	Approches non-perturbatives	100
3.3.1	L'approximation d'écrantage auto-cohérent (SCSA)	100
3.3.1.1	Principes généraux	100
3.3.1.2	Énergie propre et potentiel écranté	102
3.3.1.3	Dimensions anormales	106
3.3.2	Action effective moyenne des membranes cristallines (NPRG)	107
3.3.2.1	Schéma de troncation	108
3.3.2.2	Flot de renormalisation	109
3.3.2.3	Fonction de coupure	112
3.3.2.4	Paramètre d'extension et minimisation de l'énergie libre	113
3.3.2.5	Phase plate	116
3.4	Conclusion	122

Les membranes cristallines présentent une phase ordonnée de nature orientationnelle, du moins tant que la température n'est pas trop élevée. Sa stabilité est assurée grâce à un comportement anormal des fonctions de corrélation correspondantes, caractérisé par un exposant η , marqueur de l'existence d'interactions fortement anharmoniques entre les phonons et les flexurons. Le calcul de η nécessite d'analyser l'émergence de phénomènes collectifs entre les fluctuations aux grandes échelles de longueur.

La théorie de l'élasticité, et celle des surfaces fluctuantes, permettent de construire une énergie libre pour les membranes cristallines correspondant à la théorie de champ moyen (2.43). À partir de là, il est possible d'utiliser les méthodes du groupe de renormalisation exposées dans le Chapitre 1 pour intégrer les fluctuations thermiques jusqu'à l'échelle macroscopique correspondant à la taille du système. Comme aucun des modes de fluctuation n'est massif, aucune longueur de corrélation finie ξ ne leur est trivialement associée, il faut donc s'attendre à ce que la gamme d'échelles où l'intégration des fluctuations est non-triviale soit grande (voir la Figure 1.1).

Nous proposons dans ce chapitre plusieurs approches du calcul de η . Tout d'abord, nous présenterons les différentes approches de la théorie de perturbation qui, en extrapolant plusieurs régimes limites (couplage faible, large codimension), permet d'obtenir une image qualitative du flot de renormalisation. Un soin particulier sera apporté à la compréhension de la théorie de perturbation autour de la dimension critique supérieure. Nous examinerons ensuite d'autres schémas d'approximation, non basés sur la théorie des perturbations usuelle, qui permettent d'étudier les fluctuations des systèmes bidimensionnels plongés dans un espace à trois dimensions. L'objectif principal du chapitre est de préciser les propriétés et relations qu'entretiennent ces différentes méthodes entre elles.

3.1 Approches perturbatives

3.1.1 Action de phase plate

L'écriture d'une action est entièrement déterminée par ses symétries. Celle des membranes cristallines décrit le comportement d'une surface fluctuante dans l'espace à trois dimensions, mais nous avons vu qu'il est souvent utile pour construire une bonne théorie de perturbation de pouvoir ajuster la dimension du système pour étudier le voisinage d'une théorie de fluctuations gaussiennes. Nous allons donc décrire, dans un formalisme un peu généralisé, les fluctuations d'une surface à D dimensions plongée dans un espace à d dimensions.

Le champ fondamental de la théorie des surfaces fluctuantes est le champ de positions $\vec{r}(\vec{x})$, où \vec{r} est un vecteur de \mathbb{R}^d et la coordonnée \vec{x} évolue dans \mathbb{R}^D ¹. L'action vérifie donc les propriétés suivantes :

- S a la symétrie $SO(d)$;

1. De façon générale, x décrit une variété à D dimensions, mais la distinction est sans importance pour l'étude de la phase plate.

- la densité d'action ne doit pas dépendre de l'origine choisie pour définir le vecteur position \vec{r} , elle est donc également invariante par translation ;
- Le terme cinétique est donné par l'action de Canham-Helfrich (2.34). Il correspond à l'énergie de courbure de la surface.

Cet ensemble de propriétés est suffisant pour écrire l'action à l'ordre 4 en champs (ce qui correspond à ne garder que les termes les plus essentiels lorsque $D < D_c^s$) :

$$S[\vec{r}] = \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{r})^2 + \frac{t}{2} (\partial_i \vec{r})^2 + \frac{\mu}{4} (\partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r})^2 + \frac{\lambda}{8} (\partial_i \vec{r} \cdot \partial^i \vec{r})^2 \right] + O(r^6) . \quad (3.1)$$

Le rapprochement avec la forme (2.43) de l'énergie libre permet d'identifier les constantes de couplage des termes à quatre champs avec les constantes de Lamé.

Dans la théorie de champ moyen, la configuration d'équilibre est donnée par le minimum de l'action. Ici la minimisation du terme cinétique est assurée en présence de configurations avec $\partial_i \vec{r}$ constant, autrement dit la minimisation du terme de courbure est donnée par les surfaces planes. Nous pouvons donc paramétrer le champ au minimum de la façon suivante :

$$\vec{r} = \xi x^i \vec{e}_i , \quad (3.2)$$

où nous rappelons que les indices latins évoluent dans $\llbracket 1; D \rrbracket$.

L'action prend alors une forme particulièrement simple :

$$S_\xi = V \left[\frac{t}{2} D \xi^2 + \frac{\mu}{4} D \xi^4 + \frac{\lambda}{8} D^2 \xi^4 \right] , \quad (3.3)$$

où V est le volume de la membrane.

Suivant le signe de t , S_ξ présente un ou deux minima (voir Figure 3.1)

$$\frac{dS_\xi}{d\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \xi^2 = 0 & \text{ou} & \xi^2 = \frac{-2t}{D\lambda + 2\mu} & \text{si } t < 0 \\ \xi^2 = 0 & & & \text{si } t \geq 0 \end{cases} . \quad (3.4)$$

L'action $S[\vec{r}]$ est donc minimisée par les configurations du type (3.2) avec ξ donné par (3.4).

Le système subit donc une brisure spontanée de symétrie. Dans la phase symétrique, $\xi = 0$, la membrane est dans sa *phase froissée*. En effet, $\xi = 0$ correspond à $\langle \partial_i \vec{r} \rangle = 0$, autrement dit, l'orientation des tangentes à la surface est aléatoire, ce qui justifie le nom donné à cette phase. Dans la phase brisée, ξ prend une valeur fixée, \vec{r} décrit un plan. Il s'agit de la *phase plate*. La valeur de ξ dans la configuration d'équilibre donne le paramètre d'extension ζ de la membrane (voir Chapitre 2).

L'action (3.1) ne prend pas en compte les effets d'auto-évitement (on parle de membrane fantôme) ; cette description peut se révéler insuffisante pour décrire la phase froissée [Nelson 2004]. Ces considérations n'affecteront cependant pas l'étude suivante, qui se focalise sur la phase plate, dans laquelle les effets d'auto-évitement sont négligeables.

Pour décrire la phase plate $\vec{r}_0 = \zeta x^i \vec{e}_i$, il nous faut reparamétrer l'action (3.1), qui décrit la transition de phase, en termes de petites fluctuations autour de cette configuration. Le spectre des fluctuations dans la phase plate a été donné dans le Chapitre 2 : il contient $(d - D)$ flexurons h^α

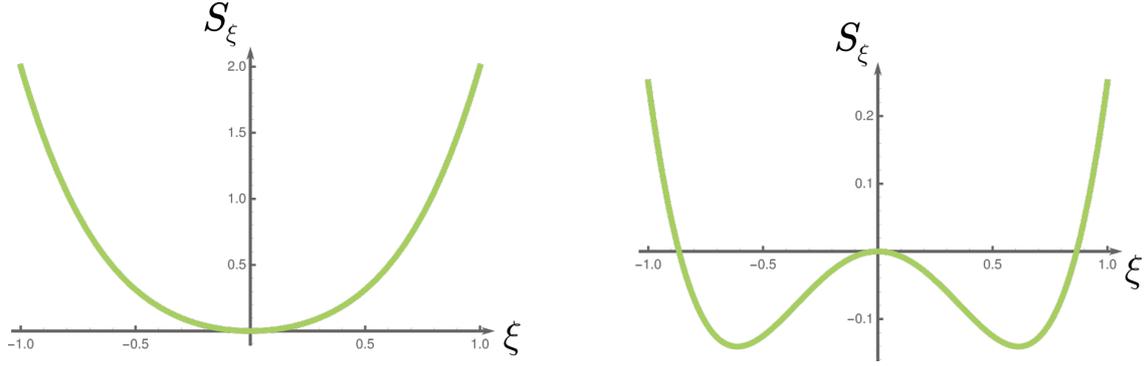


FIGURE 3.1 – Évolution de S_ξ en fonction de ξ (voir (3.3)). À gauche, $t \geq 0$, $\xi = 0$ est le seul minimum. À droite, $t < 0$, l'action admet deux minima symétriques par rapport à $\xi = 0$, qui est maintenant un maximum local.

correspondant aux fluctuations hors du plan défini par \vec{r}_0 (suivant les vecteur \vec{e}_α , $\alpha \in \llbracket D+1; d \rrbracket$) et D phonons u^i correspondant aux fluctuations dans ce plan. La paramétrisation adaptée à la phase ordonnée est donnée par (2.44)

$$\vec{r} = \zeta x^i \vec{e}_i + \vec{u} + \vec{h}, \quad (3.5)$$

ce qui donne :

$$S[u, h] = \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{h})^2 + \frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{u})^2 + \frac{\mu}{4} (\zeta \partial_i u_j + \zeta \partial_j u_i + \partial_i \vec{h} \cdot \partial_j \vec{h} + \partial_i \vec{u} \cdot \partial_j \vec{u})^2 + \frac{\lambda}{8} (2\zeta \partial_i u^i + \partial_i \vec{h} \cdot \partial^i \vec{h} + \partial_i \vec{u} \cdot \partial^i \vec{u})^2 \right]. \quad (3.6)$$

La brisure spontanée de symétrie induite par le choix d'un plan de référence introduit une dissymétrie entre les phonons et les flexurons au niveau de l'action, ce qui change en particulier le comptage des termes essentiels et inessentiels. Par exemple, le seul terme quadratique en flexurons est le terme de courbure, proportionnel à $(\partial^2 \vec{h})^2$, alors que les phonons possèdent également un terme quadratique proportionnel aux constantes de Lamé du type $(\partial_i \vec{u}_j)^2$. Comme ce terme a une dimension plus grande que le coefficient du terme de courbure $(\partial^2 u)^2$ qui met en jeu deux dérivées supplémentaires, c'est le terme quadratique élastique et non le terme de courbure qui définit le terme cinétique des phonons. L'introduction de la paramétrisation (3.5) conduit donc naturellement à la séparation de modes de fluctuations de hauteur hors du plan de la membrane avec un spectre $\omega \sim q^2$ dans l'infrarouge (donné par la courbure), et des phonons vibrant à l'intérieur de la membrane, dont le terme cinétique est celui de la théorie de l'élasticité utilisée pour décrire les cristaux.

Moyennant une redéfinition des phonons par un facteur ζ , l'action de phase plate s'écrit alors lorsque seuls les termes les plus essentiels subsistent :

$$\begin{aligned} S[u, h] &= \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{h})^2 + \frac{\mu}{4} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i \vec{h} \cdot \partial_j \vec{h})^2 + \frac{\lambda}{8} (2\partial_i u^i + \partial_i \vec{h} \cdot \partial^i \vec{h})^2 \right] \\ &= \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{h})^2 + \frac{c^{abcd}}{2} \partial_a u_b \partial_c u_d + \frac{c^{abcd}}{2} \partial_a u_b (\partial_c \vec{h} \cdot \partial_d \vec{h}) + \frac{c^{abcd}}{8} (\partial_a \vec{h} \cdot \partial_b \vec{h}) (\partial_c \vec{h} \cdot \partial_d \vec{h}) \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

où le tenseur d'élasticité c^{abcd} a été défini au Chapitre 2.

Afin de simplifier l'écriture des différents termes apparaissant dans le développement perturbatif, un jeu de règles de Feynman peut être défini à partir de (3.7). Ces règles sont écrites ici dans l'espace de Fourier :

- Propagateur des *flexurons* :

$$G_h^{\alpha\beta}(p) = \langle h^\alpha(p)h^\beta(-p) \rangle = \frac{\delta^{\alpha\beta}}{\kappa p^4} = \begin{array}{c} \alpha \quad p \quad \beta \\ \longrightarrow \end{array} . \quad (3.8)$$

- Propagateur des *phonons* :

$$G_u^{ij}(q) = \langle u^i(q)u^j(-q) \rangle = \frac{1}{\mu q^2} P_T^{ij}(q) + \frac{1}{(\lambda + 2\mu)q^2} P_L^{ij}(q) = \begin{array}{c} i \quad q \quad j \\ \text{~~~~~} \end{array} , \quad (3.9)$$

où nous rappelons la définition des projecteurs transverse $P_{ij}^T(q) = \delta_{ij} - q_i q_j / q^2$ et longitudinal $P_{ij}^L(q) = q_i q_j / q^2$.

- Vertex à trois points :

$$V_{\alpha\beta}^j(q, q_1) = -\frac{i}{2} \left[\lambda(q_1 \cdot q_2)q^j + \mu((q \cdot q_1)q_2^j + (q \cdot q_2)q_1^j) \right] \delta_{\alpha\beta} = \begin{array}{c} q_1 \quad \alpha \\ \text{~~~~~} \\ j \quad q \quad \bullet \\ \text{~~~~~} \\ q_2 \quad \beta \end{array} . \quad (3.10)$$

Comme l'impulsion totale est conservée au vertex, V ne dépend que de deux impulsions. Par exemple dans ce cas, $q_2 = q - q_1$.

- Vertex à quatre points :

De même que pour le vertex à trois points, l'impulsion totale est conservée :

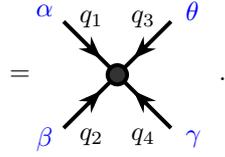
$$W_{\alpha\beta\gamma\theta}(q_1, q_2, q_3) = -\frac{1}{8} \left\{ \lambda \left[(q_1 \cdot q_2)(q_3 \cdot q_4) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} \right] + \mu \left[((q_1 \cdot q_3)(q_2 \cdot q_4) + (q_1 \cdot q_4)(q_2 \cdot q_3)) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} \right] \right\}$$

$$= \begin{array}{c} \alpha \quad q_1 \quad q_3 \quad \theta \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \beta \quad q_2 \quad q_4 \quad \gamma \end{array} . \quad (3.11)$$

Comme ce vertex est asymétrique, il faut bien prendre garde à inclure toutes les contractions possibles de $W_{\alpha\beta\gamma\theta}$ dans l'écriture des graphes de Feynman. Afin de simplifier leur écriture, il est alors intéressant de définir une forme symétrique pour le vertex à quatre

points :

$$W_{\alpha\beta\gamma\theta}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{24} \left[\lambda \left\{ (q_1 \cdot q_2)(q_3 \cdot q_4) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} + (q_1 \cdot q_3)(q_2 \cdot q_4) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta} + (q_1 \cdot q_4)(q_2 \cdot q_3) \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} \right\} \right. \\ \left. + \mu \left\{ ((q_1 \cdot q_3)(q_2 \cdot q_4) + (q_1 \cdot q_4)(q_2 \cdot q_3)) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta} \right. \right. \\ \left. + ((q_1 \cdot q_4)(q_2 \cdot q_3) + (q_1 \cdot q_2)(q_3 \cdot q_4)) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta} \right. \\ \left. + ((q_1 \cdot q_2)(q_3 \cdot q_4) + (q_1 \cdot q_3)(q_2 \cdot q_4)) \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma} \right\} \left. \right]$$



(3.12)

Puisque la structure tensorielle dans l'espace vectoriel associé à h est triviale, nous la garderons implicite autant que possible dans la suite pour alléger les notations, en prenant garde à bien attribuer un facteur d_c à chaque boucle fermée de flexurons.

3.1.2 Identité de Ward

La séparation de modes entre flexurons et phonons dans l'action de la phase plate (3.7) brise explicitement l'invariance par rotation qui était une des propriétés fondamentales de l'action de la transition de phase (3.1). En réalité, une identité de Ward assure la conservation de cette symétrie dans la théorie de la phase ordonnée, en contraignant les fonctions à N points $\Gamma^{(N)}$ à tous les ordres de la théorie de perturbation [Gutter 1989]. Cette identité a des conséquences extrêmement importantes sur l'établissement des équations de flot de renormalisation.

Examinons donc l'action des rotations sur (3.7). Comme les groupes $SO(D)$ et $SO(d-D)$ ne sont pas brisés par l'action de phase plate, il est suffisant de s'intéresser à des rotations \mathcal{R} de la forme suivante :

$$\mathcal{R}_\alpha^\beta = e^{\mathcal{J}_\alpha^\beta}, \quad \mathcal{J}_\alpha^\beta = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -A_\alpha^i \\ \hline A_\alpha^i & 0 \end{array} \right), \quad (3.13)$$

\mathcal{J} étant un générateur du groupe des rotations (donc anti-symétrique), et A_α^i une matrice rectangulaire de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(D, d-D)$.

Considérons une transformation infinitésimale $\mathcal{J} = O(\varepsilon)$. À l'ordre le plus bas, l'action de ce générateur sur des vecteurs dans ou hors du plan de référence génère des fluctuations d'amplitudes différentes :

$$\begin{cases} h = O(\varepsilon) \\ u = O(\varepsilon^2) \end{cases} . \quad (3.14)$$

En effet, l'action du générateur \mathcal{J} de (3.13) sur un vecteur $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^D$ s'écrit :

$$\mathcal{J}_i^\alpha r_0^i = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -A_\alpha^i \\ \hline A_\alpha^i & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} r_0^i \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ A_\alpha^i r_0^i \end{array} \right), \quad (3.15)$$

qui est un vecteur complètement hors du plan. Autrement dit, l'action d'une telle rotation sur l'état fondamental ne génère que des vecteurs orthogonaux à celui-ci à l'ordre le plus bas.

Grâce à (3.14), nous pouvons obtenir la transformation des champs sous l'effet d'une rotation infinitésimale. Une telle transformation se décompose de la façon suivante en fonction de son générateur \mathcal{J} :

$$\mathcal{R}_\alpha^\beta = \mathbb{I}_\alpha^\beta + \mathcal{J}_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\mathcal{J}_\alpha^\gamma \mathcal{J}_\gamma^\beta + O(\varepsilon^3), \quad (3.16)$$

où \mathbb{I} est l'identité. L'action d'une telle transformation sur la configuration (3.5) s'écrit :

$$\mathcal{R}_\alpha^\beta r_\beta = r_\alpha + J_\alpha^\beta r_{0\beta} + J_\alpha^\beta u_\beta + J_\alpha^\beta h_\beta + \frac{1}{2}J_\alpha^\gamma J_\gamma^\beta r_{0\beta} + \frac{1}{2}J_\alpha^\gamma J_\gamma^\beta u_\beta + \frac{1}{2}J_\alpha^\gamma J_\gamma^\beta h_\beta + O(\varepsilon^3), \quad (3.17)$$

les termes bleus étant d'ordre 3 en epsilon, les termes rouges d'ordre 2, les termes oranges d'ordre 1 et le terme vert contribue aux ordres 0, 1 et 2. L'identification terme à terme conduit à :

$$\begin{cases} O(\varepsilon^0) : & r_{0\alpha} \\ O(\varepsilon) : & h_\alpha + J_\alpha^i x_i = h_\alpha + A_\alpha^i x_i \\ O(\varepsilon^2) : & u_\alpha + J_\alpha^\beta h_\beta + \frac{1}{2}J_\alpha^\gamma J_\gamma^i x_i = u_\alpha + (-A_i^\alpha)h_\alpha + \frac{1}{2}(-A_i^\alpha)A_\alpha^j x_j \end{cases}. \quad (3.18)$$

Il est possible de vérifier que les termes d'ordre 1 sont bien tous dans l'espace externe \mathbb{R}^{d-D} , alors que les termes d'ordre 2 sont dans \mathbb{R}^D , en accord avec la décomposition phonons-flexurons. L'action d'une transformation infinitésimale de la forme (3.13) sur les phonons et les flexurons s'écrit donc finalement :

$$\begin{cases} h^\alpha \mapsto h^\alpha + A_\alpha^i x_i \\ u_j \mapsto u_j - (A_j^\alpha h_\alpha) - \frac{1}{2}(A_j^\alpha A_\alpha^i) x_i \end{cases}. \quad (3.19)$$

Les champs \vec{u} et \vec{h} n'interviennent dans l'action que par l'intermédiaire de leurs dérivées, lesquelles se transforment selon :

$$\begin{cases} \partial_i h^\alpha \mapsto \partial_i h^\alpha + A_i^\alpha \\ \partial_i u_j \mapsto \partial_i u_j - (A_j^\alpha \partial_i h_\alpha) - \frac{1}{2}A_j^\alpha A_\alpha^i \end{cases}. \quad (3.20)$$

Il n'est pas difficile de montrer qu'alors l'action de phase plate est invariante sous l'action des rotations. Ainsi, l'asymétrie entre les termes faisant intervenir \vec{u} et \vec{h} dans (3.7) est cruciale dans la préservation de l'invariance de l'action sous le groupe des rotations. Même si l'état fondamental brise spontanément des symétries dans la phase ordonnée, l'action, elle, doit toujours rester invariante.

La symétrie de rotation des champs lors d'un calcul en théorie de perturbation requiert donc que cette dissymétrie entre modes soit préservée de façon cohérente tout au long du calcul. En particulier, la fonction de partition ne doit pas être changée si les champs microscopiques (notés en majuscule dans ce qui suit) subissent une rotation. Une telle transformation correspond en effet à un changement de variable $(U, H) \mapsto (U', H')$, où U' et H' sont les nouveaux phonons et flexurons après application de la rotation :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] &= \int \mathcal{D}[U] \mathcal{D}[H] e^{-S[U, H] - J_u \cdot U - J_h \cdot H} \\ &= \int \mathcal{D}[U'] \mathcal{D}[H'] e^{-S[U', H'] - J_u \cdot U' - J_h \cdot H'}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nous pouvons alors utiliser l'expression de l'effet d'une rotation infinitésimale sur les champs (3.19) pour réexprimer l'argument de l'exponentielle en fonction des champs initiaux :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] &= \int \mathcal{D}[U]\mathcal{D}[H] e^{-S[U,H]-J_u \cdot U - J_h \cdot H + J_u^i \cdot (A_i^\alpha H_\alpha) - J_{h\alpha} \cdot A_i^\alpha x^i + O(\varepsilon^2)} \\ &= \int \mathcal{D}[U]\mathcal{D}[H] e^{-S[U,H]-J_u \cdot U - J_h \cdot H} \left(1 + \int_x J_u^i A_i^\alpha H_\alpha - \int_x J_{h\alpha} A_i^\alpha x^i + O(\varepsilon^2) \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

où nous avons utilisé le fait que l'action S est invariante par rotation. Comme $\mathcal{Z}[J]$ ne peut être modifiée par un changement de variable, nous obtenons :

$$\left\langle \int_x \left(H_\alpha J_u^i - x^i J_{h\alpha} \right) \right\rangle = 0 \quad (3.23)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_x \left(h_\alpha \frac{\delta \Gamma}{\delta u_i} - x^i \frac{\delta \Gamma}{\delta h^\alpha} \right) = 0} . \quad (3.24)$$

L'équation (3.24) est l'identité de Ward associée à l'invariance par rotation de l'action. Elle permet d'établir des relations que cette symétrie impose entre les fonctions à N -points $\Gamma^{(N)}$, et qui doivent être vérifiées à tous les ordres de la théorie des perturbations. En particulier, en dérivant (3.24) par rapport à h , puis u , nous obtenons :

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta u_i(y) \delta u_j(z)} + \int_x h_\alpha(x) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta h^\beta(y) \delta u_j(z) \delta u_i(x)} - \int_x x^i \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta u_j(z) \delta h^\beta(y) \delta u_i(x)} = 0 ,$$

soit finalement, en utilisant le fait qu'il n'existe pas de vertex à trois points faisant intervenir deux phonons, et en se plaçant dans l'espace de Fourier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{\alpha\beta} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta u_i \delta u_j} - i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta u_j \delta h^\beta \delta h^\alpha} \right) \Big|_{q_i=0} = 0 \\ \delta_{\alpha\beta} \text{ (diagramme à 2 lignes)} - i \frac{\partial}{\partial q_i} \text{ (diagramme à 3 lignes)} \Big|_{q_i=0} = 0 . \end{array} \right. \quad (3.25)$$

De même, en dérivant trois fois (3.24) par rapport à h , nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{\alpha\beta} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta u_i \delta h^\theta \delta h^\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta u_i \delta h^\theta \delta h^\beta} + \delta_{\alpha\theta} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta u_i \delta h^\gamma \delta h^\beta} - i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\delta^4 \Gamma}{\delta h^\theta \delta h^\gamma \delta h^\beta \delta h^\alpha} \right) \Big|_{q_i=0} = 0 \\ \delta_{\alpha\beta} \text{ (diagramme 1)} + \delta_{\alpha\gamma} \text{ (diagramme 2)} + \delta_{\alpha\theta} \text{ (diagramme 3)} - i \frac{\partial}{\partial q_i} \text{ (diagramme 4)} \Big|_{q_i=0} = 0 . \end{array} \right. \quad (3.26)$$

La conséquence majeure des relations (3.25) et (3.26) est que les fonctions à 2-,3-, et 4-points ne sont pas indépendantes. Il est donc possible d'avoir accès à l'intégralité du flot de renormalisation en ne s'occupant que des énergies propres des flexurons et des phonons acoustiques, ce qui est une simplification majeure. Cette propriété est le reflet du fait que le propagateur des phonons fait intervenir l'intégralité des couplages élastiques.

3.1.3 Approximation de couplage faible au voisinage de D_c^s

Nous allons maintenant calculer les corrections au premier ordre à la théorie gaussienne. À partir de (3.7), nous obtenons facilement les dimensions associées aux couplages de la théorie de la phase plate $\Delta(\mu) = \Delta(\lambda) = 4 - D$. Ainsi, il est attendu que les fluctuations liées aux interactions élastiques soient importantes pour $D \leq D_c^s = 4$. Nous pouvons donc effectuer un développement en $\varepsilon = 4 - D$. Dans le cadre de la régularisation dimensionnelle, ε fournit un régulateur ultraviolet à la théorie des perturbations.

Procédons de même que dans le Chapitre 1 grâce à la méthode des contretermes. Nous devons d'abord exprimer l'action nue S en fonction des grandeurs renormalisées. Puisque la théorie de la phase plate est renormalisable, les nouveaux termes ainsi générés ont la même forme que les anciens. Nous appelons donc \mathcal{C} le contreterme du terme cinétique, et \mathcal{C}_λ et \mathcal{C}_μ ceux qui sont associés aux deux constantes de couplage élastiques. Rappelons également que la définition de constantes de couplage en $D = 4 - \varepsilon$ de façon cohérente requiert l'introduction d'une échelle d'énergie k :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}[u, h; k] &= \int_x \left[\frac{1}{2} (\partial^2 h)^2 + \frac{\mu k^\varepsilon}{4} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i h \cdot \partial_j h)^2 + \frac{\lambda k^\varepsilon}{8} (2\partial_i u^i + \partial_i h \cdot \partial^i h)^2 \right] \\
&+ \int_x \left[\frac{\mathcal{C}}{2} (\partial^2 h)^2 + \frac{\mathcal{C}_\mu \mu k^\varepsilon}{4} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i h \cdot \partial_j h)^2 + \frac{\mathcal{C}_\lambda k^\varepsilon \lambda}{8} (2\partial_i u^i + \partial_i h \cdot \partial^i h)^2 \right] \\
&= \int_x \left[\frac{1}{2} (1 + \mathcal{C}) (\partial^2 h)^2 + \frac{\mu k^\varepsilon}{4} (1 + \mathcal{C}_\mu) (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i h \cdot \partial_j h)^2 + \frac{\lambda k^\varepsilon}{8} (1 + \mathcal{C}_\lambda) (2\partial_i u^i + \partial_i h \cdot \partial^i h)^2 \right] \\
&= \int_x \left[\frac{Z}{2} (\partial^2 h)^2 + \frac{Z_\mu k^\varepsilon \mu}{4} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i h \cdot \partial_j h)^2 + \frac{Z_\lambda k^\varepsilon \lambda}{8} (2\partial_i u^i + \partial_i h \cdot \partial^i h)^2 \right],
\end{aligned} \tag{3.27}$$

où nous avons introduit à la dernière ligne les coefficients de renormalisation Z , Z_μ et Z_λ qui permettent de lier les grandeurs nues et renormalisées. La théorie nue correspond à l'action microscopique (3.7) exprimée en terme des champs et couplages nus :

$$\mathcal{S}[u_B, h_B] = \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 h_B)^2 + \frac{\mu_B}{4} (\partial_i u_{B,j} + \partial_j u_{B,i} + \partial_i h_B \cdot \partial_j h_B)^2 + \frac{\lambda_B}{8} (2\partial_i u_B^i + \partial_i h_B \cdot \partial^i h_B)^2 \right]. \tag{3.28}$$

La comparaison de cette équation avec (3.27) conduit à l'identification suivante :

$$\begin{aligned}
h_B^\alpha &= Z^{1/2} \kappa^{-1/2} h^\alpha & u_B^i &= Z \kappa^{-1} u^i \\
\lambda_B &= k^\varepsilon Z^{-2} \kappa^2 Z_\lambda \lambda & \mu_B &= k^\varepsilon Z^{-2} \kappa^2 Z_\mu \mu
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Le fait que les deux champs u et h ne portent pas de renormalisations de champ différentes est une conséquence de l'identité de Ward (3.24), l'invariance par rotation dans l'espace relie les fluctuations dans toutes les directions entre elles. κ n'est pas une quantité renormalisée puisque

les renormalisations du terme de courbure sont comptabilisées comme des renormalisations du champ de flexurons \vec{h} ; les constantes de couplage et les champs sont donc redéfinis de façon à ce que κ n'apparaisse plus explicitement.

Les coefficients de renormalisation peuvent tous être liés aux énergies propres à travers l'opération \mathcal{K} , qui sélectionne la partie divergente des graphes. En schéma minimal seules les parties divergentes contribuent :

$$\begin{cases} Z = 1 + \mathcal{K} \left[p^{-4} \Sigma_h(p) \right] \\ Z_\mu = 1 + \mathcal{K} \left[p^{-2} \left\langle \Sigma_u^{ij}(p) | P_T^{ij}(p) \right\rangle \right] \\ Z_\lambda = 1 + \mathcal{K} \left[p^{-2} \left(\left\langle \Sigma_u^{ij}(p) | P_L^{ij}(p) \right\rangle - 2 \left\langle \Sigma_u^{ij}(p) | P_T^{ij}(p) \right\rangle \right) \right] \end{cases} . \quad (3.30)$$

En particulier, nous n'avons pas besoin de calculer les fonctions à trois et quatre points, qui sont reliées aux énergies propres par (3.25) et (3.26).

Il nous faut donc à présent calculer les parties divergentes des énergies propres.

- **Énergie propre des flexurons $\Sigma_h(p)$** : En régularisation dimensionnelle, les graphes de type tadpole sont nuls pour des théories sans masse (voir Chapitre 1). Aucune contribution n'est donc apportée par le vertex à quatre points² :

$$\begin{array}{c} q \\ \curvearrowright \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} q \\ \curvearrowright \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} q \\ \curvearrowright \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} = 0 . \quad (3.31)$$

Il ne reste plus qu'un seul graphe à calculer, l'arc-en-ciel [Aronovitz 1988] :

$$\Sigma_h(p) = \begin{array}{c} q \\ \curvearrowright \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \quad \text{---} \\ p - q \end{array} \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} -\frac{5p^4}{16\pi^2 \varepsilon} \frac{\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} + O(\varepsilon^0) . \quad (3.32)$$

- **Énergie propre des phonons $\Sigma_u^{ij}(p)$** :

L'énergie propre des phonons contient un seul graphe : la bulle. Comme elle présente une boucle fermée de flexurons, elle est proportionnelle à la codimension d_c ³ :

$$\Sigma_u^{ij}(p) = \begin{array}{c} q \\ \curvearrowright \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \quad \text{---} \\ p - q \end{array} \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{d_c(2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2)p^2}{32\pi^2 \varepsilon} P_L^{ij}(p) + \frac{d_c \mu^2 p^2}{96\pi^2 \varepsilon} P_T^{ij}(p) + O(\varepsilon^0) . \quad (3.33)$$

2. Il ne faut pas oublier qu'il y a deux façons de contracter ce vertex dans sa forme asymétrique.
3. Il y a d_c flexurons.

D'après (3.30), les coefficients de renormalisation en schéma minimal sont donc donnés par :

$$\begin{cases} Z = 1 - \frac{5p^4}{16\pi^2 \varepsilon} \frac{\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \\ Z_\mu = 1 + \frac{d_c \mu^2 p^2}{96\pi^2 \varepsilon} \\ Z_\lambda = 1 + \frac{d_c(6\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2) p^2}{96\pi^2 \varepsilon} \end{cases} . \quad (3.34)$$

Ceux-ci sont ensuite reliés à la dimension anormale η et aux fonctions β dans une généralisation simple de (1.26) à une théorie à deux constantes de couplage (les détails se trouvent dans l'Annexe D) :

$$\eta = \beta_\lambda \frac{\partial \log(Z)}{\partial \lambda} + \beta_\mu \frac{\partial \log(Z)}{\partial \mu} , \quad (3.35)$$

où $\beta_\mu = \partial_t \mu$ (de même pour λ), et t est le temps de renormalisation défini par $t = \log(k/\Lambda)$, où Λ est la coupure ultraviolette (typiquement $\Lambda = 1/a$). De même, les fonctions β sont données par :

$$\begin{cases} -\varepsilon + 2\eta = \beta_\lambda \partial_\lambda (\log(\lambda Z_\lambda)) + \beta_\mu \partial_\mu (\log(\lambda Z_\lambda)) \\ -\varepsilon + 2\eta = \beta_\lambda \partial_\lambda (\log(\mu Z_\mu)) + \beta_\mu \partial_\mu (\log(\mu Z_\mu)) \end{cases} . \quad (3.36)$$

En schéma minimal, les coefficients de renormalisation n'ont pas de partie finie :

$$Z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n \varepsilon^{-n} , \quad Z_\mu = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{\mu,n} \varepsilon^{-n} , \quad Z_\lambda = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{\lambda,n} \varepsilon^{-n} . \quad (3.37)$$

Les sommes sont coupées à l'ordre L dans un calcul à L boucles.

Les fonctions β et la dimension anormale η peuvent aussi être développées, mais sur les puissances *positives* de ε , car ce sont des quantités qui doivent rester finies dans la limite où D tend vers 4.

$$\eta = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_n \varepsilon^n , \quad \beta_\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{\mu,n} \varepsilon^n , \quad \beta_\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{\lambda,n} \varepsilon^n , \quad (3.38)$$

Une identification ordre par ordre à partir des équations (3.35) et (3.36) donne alors les relations suivantes (pour plus de détails, se référer à l'Annexe D) :

$$\begin{cases} \eta = -\lambda \partial_\lambda Z_1 - \mu \partial_\mu Z_1 \\ \beta_{\lambda,1} = -\lambda \\ \beta_{\mu,1} = -\mu \\ \beta_{\lambda,0} = \lambda(2\eta + \lambda \partial_\lambda Z_{\lambda,1} + \mu \partial_\mu Z_{\lambda,1}) \\ \beta_{\mu,0} = \mu(2\eta + \lambda \partial_\lambda Z_{\mu,1} + \mu \partial_\mu Z_{\mu,1}) \end{cases} . \quad (3.39)$$

Cela donne finalement le flot de renormalisation dans la phase plate à une boucle :

$$\boxed{\begin{aligned} \eta &= \frac{5\mu(\lambda + \mu)}{16\pi^2(\lambda + 2\mu)} \\ \beta_\lambda &= -\varepsilon\lambda + 2\eta\lambda + \frac{d_c(6\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2)}{96\pi^2} \\ \beta_\mu &= -\varepsilon\mu + 2\eta\mu + \frac{d_c\mu^2}{96\pi^2} \end{aligned}}. \quad (3.40)$$

Le flot de renormalisation dans la phase plate admet 4 points fixes [Aronovitz 1988].

- **Point fixe gaussien \mathbf{P}_1** : Il est instable dans toutes les directions. Tous les autres points fixes sont ε -proches de lui, ce qui valide le développement perturbatif.

$$\left\{ \lambda^* = 0, \mu^* = 0, \eta_1^* = 0 \right\} \quad (3.41)$$

- **\mathbf{P}_2 , Point fixe de cisaillement nul $\mu^* = 0$** : Il est stable dans une direction, instable dans l'autre.

$$\left\{ \lambda^* = \frac{16\pi^2\varepsilon}{d_c}, \mu^* = 0, \eta_2^* = 0 \right\} \quad (3.42)$$

- **\mathbf{P}_3 , Point fixe compressibilité infinie $K^* = 0$** : Il est stable dans une direction, instable dans l'autre.

$$\left\{ \lambda^* = -\frac{48\pi^2\varepsilon}{20 + d_c}, \mu^* = \frac{96\pi^2\varepsilon}{20 + d_c}, \eta_3^* = \frac{10\varepsilon}{20 + d_c} \right\} \quad (3.43)$$

- **\mathbf{P}_4 , Point fixe de phase plate** : Ce point fixe est entièrement attractif; c'est lui qui donne les lois d'échelle à longue distance dans la phase plate.

$$\left\{ \lambda^* = -\frac{32\pi^2\varepsilon}{24 + d_c}, \mu^* = \frac{96\pi^2\varepsilon}{24 + d_c}, \eta_4^* = \frac{12\varepsilon}{24 + d_c} \right\} \quad (3.44)$$

La localisation de \mathbf{P}_2 et \mathbf{P}_3 sur le bord de la zone de stabilité du potentiel (voir la Figure 3.2) met en doute leur pertinence pour décrire des systèmes réels. \mathbf{P}_3 par exemple décrit la physique à longue distance de membranes infiniment compressibles, de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique. Si K est très petit mais pas exactement nul, l'attracteur infrarouge est \mathbf{P}_4 .

\mathbf{P}_4 est situé sur la ligne $3\lambda + \mu = 0$ qui attire toutes les trajectoires dans l'infrarouge. Par conséquent, le coefficient de Poisson des membranes cristallines dans leur phase plate est universel et vaut $\nu = -1/3$. Ce résultat sera discuté plus longuement dans la suite.

Ainsi, la théorie de perturbation au voisinage de la dimension critique supérieure prédit l'émergence d'un point fixe de phase plate avec une dimension anormale η non triviale lorsque $D < 4$. D'après les résultats du Chapitre 2, cela suffit à expliquer la stabilisation de la phase ordonnée à longue distance si ce point fixe persiste jusqu'en deux dimensions. En extrapolant ε jusqu'à 2, la valeur prédite pour la dimension anormale est :

$$\eta_4^{1-loop} = \frac{24}{25} = 0,96. \quad (3.45)$$

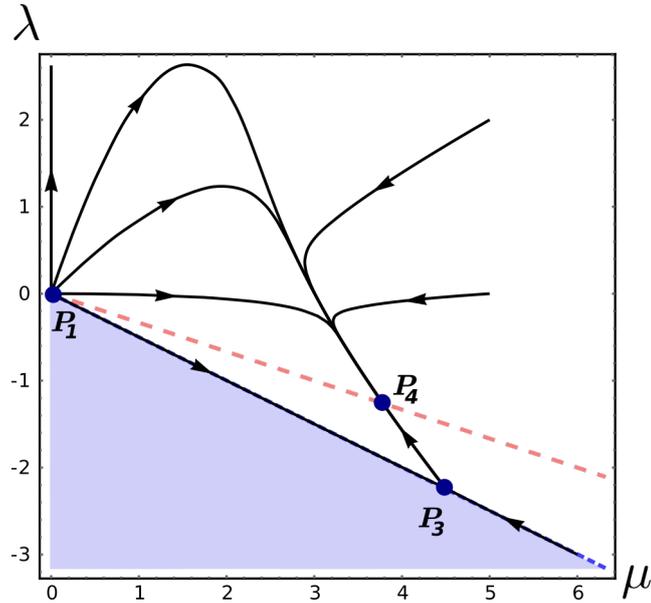


FIGURE 3.2 – Diagramme de flot pour $d_c = 1$ et $\varepsilon = 0.1$. La ligne en pointillés $3\lambda + \mu = 0$ est attractrice. La ligne bleue en pointillés plus serrés $2\lambda + \mu = 0$ est répulsive. La région grisée est interdite, elle correspond à la zone où le potentiel devient instable (voir (2.9)). La stabilité du potentiel est préservée par le flot de renormalisation. Le point fixe \mathbf{P}_2 n'est pas représenté pour que la figure reste lisible, il est plus haut sur la ligne $\mu = 0$. \mathbf{P}_4 attire tous les systèmes dont les conditions initiales ne se trouvent pas sur un bord de la zone.

La valeur relativement forte de la dimension anormale $\eta_4^{1-loop} \simeq 1$ est un indicateur de l'échec du développement en couplage faible en $D = 2$, puisqu'elle suggère l'existence d'effets fortement anharmoniques dans la renormalisation des champs.

3.1.4 Théorie de perturbation en deux dimensions

Le problème de la théorie de perturbation autour de $D_c^s = 4$ est que les vraies membranes sont des systèmes bidimensionnels. Est-il possible dans la théorie des membranes cristallines de construire un analogue du modèle σ non-linéaire avec une théorie de perturbation au voisinage de deux dimensions (voir Chapitre 1) ?

Pour le modèle $O(N)$ à la criticalité, $D = 2$ est la dimension critique inférieure⁴. En cette dimension en effet, la transition de phase n'a lieu qu'à température nulle, ce qui induit une divergence de la constante de couplage du modèle qui introduit une contrainte dure sur la valeur du champ. Cette contrainte réduit le nombre de degrés de liberté du champ de N à $N - 1$. Un développement en $D \gtrsim 2$, correspondant à un développement en basse température permet alors d'étudier le voisinage de cette dimension. Dans le cas où $N = 1$, le modèle est surcontraint, il n'y a pas de modèle σ non-linéaire, mais la dimension critique inférieure est plus petite que 2.

Reprenons l'action de phase plate (3.7). Au niveau champ moyen, la dimension des couplages élastiques est donnée par $\Delta(\mu) = \Delta(\lambda) = 4 - D$. Le comportement des propagateurs des flexurons

4. Du moins tant que $N > 1$.

$G_h(p)$ (6.42) et des phonons $G_u(p)$ (6.43) dans l'infrarouge est donc :

$$G_h(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{p^4} \quad , \quad G_u(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\mu p^2} \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{p^{6-D}} . \quad (3.46)$$

En $D = 2$, les deux types de propagateurs ont donc le même comportement dans l'infrarouge, il n'y a plus de différence entre phonons et flexurons, le spectre redevient symétrique : le système n'existe que dans sa phase froissée. Autrement dit, $D = 2$ est bien la dimension critique inférieure associée à la transition de froissage dans la théorie de champ moyen, ce qui justifie la recherche d'un développement autour de cette dimension.

Le modèle σ non-linéaire est obtenu à partir de l'action du modèle $O(N)$ à la criticalité, pour effectuer le développement autour de D_c^i il nous faut donc travailler avec l'action de la transition de phase (3.1). Afin de renforcer l'analogie entre celle-ci et l'action du modèle $O(N)$ critique (1.7), il est utile de réécrire l'action (3.1) comme un développement autour de l'état fondamental \vec{r}_0 en fonction de la métrique sur la surface $g_{ij} = \partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r}$, du tenseur d'élasticité c^{abcd} , et de restaurer le facteur $1/k_B T$:

$$S[\vec{r}] = \frac{1}{k_B T} \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{r})^2 + \frac{c^{abcd}}{8} (g_{ab} - \zeta^2 \delta_{ab}) (g_{cd} - \zeta^2 \delta_{cd}) \right] . \quad (3.47)$$

Le facteur $k_B T$ peut être absorbé dans le changement de variable $\vec{r} \mapsto \sqrt{k_B T} \vec{r}$, $\zeta \mapsto \sqrt{k_B T} \zeta$ et $c^{abcd} \mapsto c^{abcd}/T$. Si $T \rightarrow 0$, le couplage effectif c^{abcd}/T diverge, ce qui impose une contrainte dure $g_{ab} = \zeta^2 \delta_{ab}$ sur la métrique. Comme le tenseur métrique est symétrique, cela donne $\frac{D(D+1)}{2}$ contraintes indépendantes. Puisque les membranes cristallines possèdent d modes de fluctuations en tout, si $D = 2$ il y a $d - 3$ modes libres. Comme l'espace de plongement a trois dimensions, la situation devient analogue au modèle $O(N = 1)$: la contrainte ne laisse aucun mode de fluctuations. Il n'est donc pas possible d'effectuer un développement en dimension au voisinage de $D = 2$ pour étudier la phase plate [David 1988]. Ce résultat appelle quelques remarques :

- Le modèle σ non-linéaire réexprime la dynamique du système en fonction des modes de Goldstone seulement⁵. Ici, tous les modes sont sans masse, mais les flexurons sont plus atténués dans l'infrarouge, nous pouvons donc penser qu'un analogue du modèle σ non-linéaire serait un modèle de la phase plate exprimé en fonction des flexurons seulement. Nous connaissons un tel modèle : la théorie effective où l'on a intégré sur les phonons (détails dans l'Appendice A). Cependant, contrairement au modèle σ non-linéaire, la théorie effective est perturbative au voisinage de $D = 4$ et non pas $D = 2$ puisqu'elle n'est pas obtenue par un développement à basse température.
- Pour comprendre un peu mieux ce mécanisme, il est instructif de regarder le modèle où $\mu = 0$. Dans ce cas, seule la trace du tenseur métrique est contrainte⁶, il reste donc $d - 1$ modes de fluctuations. La contrainte dure imposée par λ dans (3.1) relie maintenant le phonon longitudinal aux flexurons et génère une nouvelle interaction, l'action résultante s'exprime donc uniquement en termes des modes de fluctuations dominants dans la phase plate : h et u_T (avec $u_T^j = P_T^{ij} u_i$). Si $\mu = 0$, le terme cinétique du phonon transverse u_T

5. Seuls les modes $\vec{\pi}$ apparaissent dans (1.9).

6. Car seul λ/T diverge. Dans (3.1), λ ne se couple qu'à la trace de g_{ab} .

dans la phase plate est à nouveau donné par le terme de courbure, sa relation de dispersion devient quadratique, comme celle du flexuron :

$$\begin{aligned} S[u_T, h] &= \frac{1}{k_B T} \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 h)^2 + \frac{\kappa}{2} (\partial^2 u_T)^2 + \frac{g}{2} (\partial_i (\partial h)^2)^2 \right] \\ &= \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 h')^2 + \frac{\kappa}{2} (\partial^2 u'_T)^2 + \frac{g'}{2} (\partial_i (\partial h')^2)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.48)$$

avec $h' = h/\sqrt{k_B T}$, $u'_T = u_T/\sqrt{k_B T}$ et $g' = g k_B T$. Cette action est donc bien perturbative autour de $D = 2$ car $g' \propto k_B T$.

- L'impossibilité de construire une théorie de perturbation en $D = 2$ est à mettre en relation avec le fait que pour ce modèle, 2 ne correspond pas à la dimension critique inférieure au-delà de l'approximation de champ moyen. Un argument simple pour s'en rendre compte se trouve dans [Aronovitz 1989] : la phase plate correspond à l'émergence d'un ordre orientationnel à longue distance dans le système caractérisé par un exposant anormal η . La généralisation de (2.47) s'écrit simplement :

$$\langle \partial_i h(x) \cdot \partial^i h(0) \rangle_{x \gg a} \sim x^{2-D-\eta}, \quad (3.49)$$

l'ordre orientationnel n'est donc plus stabilisé dès que :

$$D_c^i - 2 + \eta(D_c^i) = 0. \quad (3.50)$$

Il est rappelé que η lui-même dépend de la dimension du système, donc cette équation est auto-cohérente. Cependant, elle porte un message simple : la dimension critique inférieure de ce modèle dépend explicitement des fluctuations (*via* η), il n'est donc pas possible de construire une théorie de perturbation directement autour de D_c^i .

- Quand le tenseur d'élasticité impose une contrainte dure, il reste $d - \frac{D(D+1)}{2}$ modes de fluctuations. La théorie comporte $d_c = d - D$ flexurons. Si, de même que dans le modèle $O(N)$, le nombre de composantes du champ est grand, soit $d_c \gg 1$, ces deux nombres sont du même ordre de grandeur. Ainsi, il est possible de lever le caractère surcontraint de la théorie de la phase plate à deux dimensions en étendant le plongement à un espace de très grande dimension, ce que nous faisons dans le paragraphe suivant.

3.1.5 Régime de grande codimension $d_c \gg 1$

De même que dans la limite $N \gg 1$ du modèle $O(N)$, lorsque $d_c \gg 1$, le champ de flexurons a un grand nombre de composantes, ce qui peut fournir un moyen de se rapprocher du régime gaussien. Le principe de ce calcul est alors de construire une théorie des perturbations autour d'un point col atteint dans la limite $d_c \rightarrow +\infty$, en utilisant $1/d_c$ comme paramètre de développement. Il est alors utile de définir un nouveau tenseur d'élasticité $\tilde{c}^{abcd} = d_c c^{abcd}$, et de manière générale, toutes les variables portant le symbole « $\tilde{\cdot}$ » sont transformées de la même manière.

3.1.5.1 Transition plate-froissée

Avant de s'attaquer directement au calcul de la dimension anormale au point fixe de phase plate \mathbf{P}_4 , il est instructif de comprendre comment se comporte le système quand d_c est grand. Notre action de départ est fonction du champ de position \vec{R} , noté en majuscule car il s'agit d'un champ microscopique. Les notations sont allégées grâce aux définitions liées au tenseur de déformation (2.1) et (2.3). Effectuons une transformée d'Hubbard-Stratonovitch pour séparer le terme quartique à l'aide d'un champ auxiliaire χ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}[\vec{R}] \exp \left\{ - \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{R})^2 + \frac{\tilde{\zeta}^{abcd}}{8 d_c} \varepsilon_{ab} \varepsilon_{cd} \right] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}[\vec{R}] \mathcal{D}[\chi] \exp \left\{ - \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{R})^2 - 2 d_c \chi_{ab} (\tilde{c}^{-1})^{abcd} \chi_{cd} + \chi^{ab} \varepsilon_{ab} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Afin d'étudier la transition de phase, il est utile de développer le champ de position \vec{R} autour d'une configuration plate⁷ suivant la paramétrisation : $\vec{R} = \xi x^i \vec{e}_i + \delta \vec{R}$. L'utilisation d'un paramètre d'extension ξ générique permet d'étudier l'effet de l'écart de celui-ci à sa valeur au minimum ζ . L'intégration sur les fluctuations de position $\delta \vec{R}$ peut alors être menée :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}[\chi] \exp \left\{ - d_c \int_x \left[\frac{1}{2} \text{Tr} \log (\kappa \partial^4 + 2 \chi^{ij} \partial_i \partial_j) - 2 \chi_{ab} (\tilde{c}^{-1})^{abcd} \chi_{cd} + \frac{1}{d_c} \chi_i^i (\xi^2 - \zeta^2) \right] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}[\chi] \exp \left(- S[\chi] \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

L'action a un point col de la forme $\chi_{ab} = \chi_0 \delta_{ab}$ [Gutter 1989]. De plus, la minimisation de l'action vis-à-vis du paramètre d'extension conduit à :

$$\left. \frac{\partial S[\chi]}{\partial \xi^2} \right|_{\chi=\chi_0} = 2 D \chi_0 \xi. \quad (3.53)$$

Dans la phase froissée, $\xi = 0$ à l'équilibre (voir (3.4)), et χ_0 est non trivial; dans la phase plate, c'est χ_0 qui est nul. L'étude de la phase plate quand $d_c \gg 1$ correspond donc à un développement autour d'une configuration de champ nul, ce qui est généralement attendu dans un développement perturbatif.

L'équation de point col est donnée par la minimisation de $S[\chi]$ par rapport à χ_0 (les détails se trouvent dans l'Annexe D) :

$$\frac{\partial S[\chi]}{\partial \chi_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_q \frac{1}{\kappa q^2 + 2\chi_0} - \frac{4D}{D\lambda + 2\mu} \chi_0 + \frac{D}{d_c} (\xi^2 - \zeta^2) = 0. \quad (3.54)$$

- Si $D = 2$, le premier terme de (3.54) est une intégrale logarithmiquement divergente, ce qui est un signe de la disparition de la phase ordonnée. En effet, si $d_c \rightarrow +\infty$, la théorie de champ moyen dans laquelle $D_c^i = 2$ est retrouvée. L'intégrale peut être évaluée à l'aide d'une coupure ultraviolette Λ par exemple :

$$\int_q \frac{1}{\kappa q^2 + 2\chi_0} = \frac{1}{4\pi\kappa} \log \left(\frac{\Lambda^2 \kappa}{2\chi_0} \right). \quad (3.55)$$

7. Ce sont celles qui minimisent l'action champ moyen.

Typiquement, si le système a une échelle de longueur microscopique a , un paramètre du réseau cristallin de la membrane dans notre cas, la coupure Λ peut être choisie égale à $1/a$, ce qui revient à exclure les processus aux échelles plus petites que celle du réseau cristallin.

Comme le système est dans sa dimension critique inférieure, les couplages λ et μ divergent, et $\xi = 0$ d'après (3.53), donc l'équation de point col (3.54) s'écrit :

$$\frac{1}{4\pi\kappa} \log\left(\frac{\Lambda^2\kappa}{2\chi_0}\right) = \frac{2\zeta^2}{d_c} \Rightarrow \chi_0 = \frac{\kappa}{2}\Lambda^2 e^{-\frac{8\pi\kappa}{d_c}\zeta^2}. \quad (3.56)$$

L'interprétation de ce résultat est la suivante : la fonction de corrélation orientationnelle des flexurons est donnée par :

$$\langle \partial h(q) \partial h(-q) \rangle = \int_q \frac{1}{\kappa q^2 + 2\chi_0} \simeq \frac{1}{4\pi\kappa} \log\left(\frac{\Lambda^2\kappa}{2\chi_0}\right). \quad (3.57)$$

Il est donc possible de construire à partir de χ_0 une longueur de persistance ξ_χ à partir de laquelle une membrane cristalline à deux dimensions avec $d_c \rightarrow +\infty$ apparaît froissée, de manière analogue à la longueur de De Gennes-Taupin introduite pour les membranes fluides (2.42) :

$$\xi_\chi = \sqrt{\frac{1}{\chi_0}}. \quad (3.58)$$

En effet, une fois les facteurs $k_B T$ restaurés, le facteur κ dans χ_0 devient $\kappa/k_B T$, et ξ_χ est bien homogène à une longueur.

- Il est possible d'approcher D_c^i par un développement en dimension $D = 2 + \varepsilon$ [Pisarski 1983]. En utilisant ε comme régulateur, l'intégrale de (3.54) peut être évaluée grâce à la régularisation dimensionnelle (c'est un tadpole massif, voir Annexe B) :

$$\int_q \frac{1}{\kappa q^2 + 2\chi_0} = \frac{\kappa^{-D/2}}{(4\pi)^{D/2}} (2\chi_0)^{D/2-1} \Gamma(1 - D/2). \quad (3.59)$$

L'équation de point col (3.54) devient alors :

$$\frac{\kappa^{-D/2} (2\chi_0)^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(1 - D/2) - \frac{4D}{D\lambda + 2\mu} \chi_0 + \frac{D}{d_c} (\xi^2 - \zeta^2) \stackrel{D \neq 2}{=} 0. \quad (3.60)$$

Dans le cadre du développement en dimensions, nous identifions ζ comme la valeur nue de ξ . Puisque $\Delta(\xi^2) = D - 2$, la définition de la variable renormalisée associée nécessite l'introduction d'une échelle k , comme pour les développements autour de D_c^s . Le coefficient de renormalisation Z_{ξ^2} associé est défini par [Pisarski 1983] :

$$\zeta^2 = \xi_B^2 k^{-\varepsilon} = Z_{\xi^2} \xi^2. \quad (3.61)$$

Comme nous avons choisi $\xi \neq 0$, d'après (3.53), $\chi_0 = 0$. L'équation de point col (3.60) devient finalement :

$$-\frac{1}{2\pi\kappa\varepsilon} + \frac{2}{d_c} \xi^2 (1 - Z_{\xi^2}) = 0 \Rightarrow Z_{\xi^2} = 1 - \frac{d_c}{4\pi\varepsilon\xi^2}. \quad (3.62)$$

La renormalisation de ξ^2 , donnée par la fonction $\beta_{\xi^2} = \partial_t \xi^2$, est donc :

$$\beta_{\xi^2} = -\varepsilon \xi^2 + \frac{d_c}{4\pi}. \quad (3.63)$$

Cette fonction admet un point fixe à l'infini, il est donc d'usage d'étudier plutôt $w = \xi^{-2}$, dont l'évolution avec l'échelle de renormalisation est donnée par :

$$\Rightarrow \beta_w = \varepsilon w - \frac{d_c}{4\pi} w^2. \quad (3.64)$$

Cette équation de flot admet deux point fixes : $w^* \neq 0$, répulsif, correspondant à la transition de phase, et $w = 0$, attractif, correspondant à la phase plate. Lorsque $w \rightarrow 0$, le paramètre d'extension **renormalisé dimensionné** $\xi_0^2 = w^{-1} k^\varepsilon$ prend une valeur finie définissant l'extension de la phase plate. La restauration de $k_B T$ dans l'équation de point col (3.54) dans la phase plate ($\chi_0 = 0$) s'écrit :

$$\xi_0^2 = 1 - \frac{k_B T}{\kappa} \frac{d_c}{D} \int_q \frac{1}{q^2}, \quad (3.65)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\xi_0^2 = 1 - \frac{T}{T_c}, \quad (3.66)$$

où

$$T_c = \left[\frac{k_B}{\kappa} \frac{d_c}{D} \int_q \frac{1}{q^2} \right]^{-1} \quad (3.67)$$

dépend explicitement du régulateur utilisé pour rendre finie l'intégrale en rouge de (3.65) (Λ ou ε par exemple). Pour $T \leq T_c$, le paramètre d'extension ξ à l'équilibre est donc d'autant moins grand que T augmente. À la limite de la température critique, $\xi \rightarrow 0$, la membrane se froisse. T_c s'interprète donc comme la température à laquelle la membrane subit la transition de froissage.

3.1.5.2 Phase plate

Pour atteindre la phase plate, il suffit de changer de paramétrisation : $\vec{R} = \zeta x^i \vec{e}_i + \vec{u} + \vec{h}$. En effet, nous développons à présent le champ autour d'une phase ordonnée bien déterminée, où le paramètre d'extension ζ est fixé et les fluctuations sont des phonons et des flexurons. Le résultat de l'intégration sur les phonons est connu : cela génère l'interaction effective $\mathcal{R}_{abcd}(q) = bN_{abcd}(q) + \mu M_{abcd}(q)$. L'introduction du champ auxiliaire χ conduit alors à :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\vec{h}] \mathcal{D}[\chi] \exp \left\{ - \int_x \frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{h})^2 + 2d_c \int_{x,y} \chi_{ab}(x) (\tilde{\mathcal{R}}^{-1})^{abcd}(x-y) \chi_{cd}(y) - \int_x \chi^{ab}(x) (\partial_a \vec{h}(x) \cdot \partial_b \vec{h}(x)) \right\}. \quad (3.68)$$

Par conservation de l'impulsion, seule la composante continue du champ auxiliaire, $\chi(q=0)$, contribue au propagateur de h . L'intégration sur les flexurons donne l'action du champ auxiliaire :

$$S[\chi] = d_c \int_q \left[\frac{1}{2} \text{Tr} \log (\kappa q^4 + \chi_{ab}(0) q^a q^b) - 2 \chi_{ab}(q) (\tilde{\mathcal{R}}^{-1}(q))^{abcd} \chi_{cd}(-q) \right]. \quad (3.69)$$

Le point col correspondant a été calculé dans la section précédente. Il est notable que seule la partie longitudinale⁸ de χ_{ab} intervient dans le logarithme de l'action (3.69). Cependant, comme

8. Celle qui se couple à $P_L^{ij}(q) = q^i q^j / q^2$.

le propagateur de χ , donné par $\tilde{\mathcal{R}}$, est purement transverse à cause de la structure de l'interaction effective, il est naturel d'avoir un champ auxiliaire transverse, ce qui gomme l'influence du terme logarithmique dans la détermination du point col. À l'ordre 0 du développement $d_c \gg 1$,

$$\langle \chi^{ab}(q)\chi^{cd}(-q) \rangle = -\frac{\tilde{\mathcal{R}}^{abcd}(q)}{4d_c} = \begin{array}{c} a \quad q \quad c \\ \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \\ b \quad \text{~~~~~} \quad d \end{array} . \quad (3.70)$$

3.1.5.3 Corrections à une boucle

Les perturbations au premier ordre en $1/d_c$ pour le champ auxiliaire sont calculées grâce à l'action (3.68) [Pisarski 1983]. À cause de la structure transverse du champ auxiliaire, celui-ci se couple uniquement à la partie transverse des dérivées de h dans le vertex à trois points de (3.68). Grâce à la décomposition des tenseurs à quatre indices purement transverses suivant les projecteurs orthogonaux N_{abcd} et M_{abcd} (voir (2.61)), ce vertex peut s'écrire :

$$\begin{array}{c} \quad \quad \quad q_1 \\ \quad \quad \quad \nearrow \\ a \quad q \quad \text{~~~~~} \\ \quad \quad \quad \text{~~~~~} \\ b \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad q_2 \end{array} = -\left(N_{abmn}(q) + M_{abmn}(q)\right) q_1^m q_2^n . \quad (3.71)$$

La correction à une boucle au propagateur de χ permet de définir une énergie propre Σ_χ^{abcd} via :

$$\langle \chi^{ab}(q)\chi^{cd}(-q) \rangle = -\frac{1}{4d_c} \left[(\tilde{\mathcal{R}}^{abcd}(q))^{-1} + \Sigma_\chi^{abcd}(q) \right]^{-1} , \quad (3.72)$$

qui est donnée par la bulle de flexurons [Pisarski 1983] :

$$\begin{aligned} \Sigma_\chi^{abcd}(p) &= \begin{array}{c} \quad \quad \quad q \\ \quad \quad \quad \text{~~~~~} \\ a \quad \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \\ \quad \quad \quad \text{~~~~~} \\ b \quad \quad \quad \text{~~~~~} \quad c \\ \quad \quad \quad \text{~~~~~} \\ \quad \quad \quad p-q \quad d \end{array} \\ &= \frac{2}{4d_c} d_c \left(N_{abmn}(p) + M_{abmn}(p)\right) \int_q \frac{q^m (p^n - q^n) (p^i - q^i) q^j}{q^4 (p-q)^4} \left(N_{ijcd}(p) + M_{ijcd}(p)\right) , \end{aligned} \quad (3.73)$$

où le terme en bleu est le facteur de symétrie du graphe, le terme en orange est issu de la définition de Σ_χ (3.72), et le terme en vert vient de la boucle fermée de flexurons. L'intégrale définit le tenseur de polarisation $\Pi^{mnij}(p)$:

$$\Pi^{mnij}(p) = \int_q \frac{q^m (p^n - q^n) (p^i - q^i) q^j}{q^4 (p-q)^4} . \quad (3.74)$$

Puisque celui-ci est contracté avec les projecteurs N_{abmn} et M_{abmn} qui sont par définition orthogonaux à p , nous pouvons remplacer Π par une intégrale qui ne fait pas intervenir p au numérateur sans changer le résultat :

$$\Sigma_\chi^{abcd}(p) = \frac{1}{2} \left(N_{abmn}(p) + M_{abmn}(p)\right) \int_q \frac{q^m q^n q^i q^j}{q^4 (p-q)^4} \left(N_{ijcd}(p) + M_{ijcd}(p)\right) . \quad (3.75)$$

alors que ceux de $\Sigma_\chi^{abcd}(p)$ sont proportionnels à p^{D-4} d'après (3.79). Σ_h fait donc intervenir des intégrales de type :

$$\mathcal{I}(A) = \int_q \frac{1}{(p-q)^4(1+AQ^{D-4})}, \quad (3.82)$$

où A ne dépend pas de q . Le calcul des intégrales $\mathcal{I}(A)$ est très difficile dans le cas général, mais des approximations peuvent être faites lorsque $p \rightarrow 0$. Une façon de procéder est donc d'utiliser la définition de η à partir de la limite infrarouge de l'énergie propre :

$$\Sigma_h(p) \xrightarrow{p \rightarrow 0} p^{4-\eta}. \quad (3.83)$$

Les calculs étant assez longs, nous ne les développons pas ici. Les détails se trouvent dans l'Annexe D. En l'absence d'hypothèses particulières, η atteint sa valeur à \mathbf{P}_4 [Aronovitz 1989] :

$$\eta_4 = \frac{8(D-1)}{d_c(D+2)B(\frac{D}{2}, \frac{D}{2})B(\frac{D}{2}, 2 - \frac{D}{2})}. \quad (3.84)$$

La dimension anormale est d'ordre $O(1/d_c)$. Sa valeur prédite pour $D = 2$ et $d = 3$ est $\eta_4 = \frac{2}{3}$, plutôt en deçà de la prédiction de la théorie en $D = 4 - \varepsilon$, mais cela confirme l'existence d'un exposant η de l'ordre de 1. Autour de $D = 4$, le résultat prédit est :

$$\eta_4 \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{12\varepsilon}{d_c} + O(\varepsilon^2), \quad (3.85)$$

en accord avec la théorie de couplage faible.

En imposant $K = 0$ ou $\mu = 0$, il est également possible d'atteindre les deux autres points fixes non triviaux. À \mathbf{P}_2 , $\eta_2 = 0$ automatiquement, à \mathbf{P}_3 sa valeur en fonction de D est :

$$\eta_3 = \frac{8(D-2)(D+1)}{d_c D(D+2)B(\frac{D}{2}, \frac{D}{2})B(\frac{D}{2}, 2 - \frac{D}{2})}, \quad (3.86)$$

et, ici encore, le résultat est cohérent avec le développement en ε donné par :

$$\eta_3 \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{10\varepsilon}{d_c} + O(\varepsilon^2). \quad (3.87)$$

Enfin, il est possible de donner également un flot de renormalisation pour les constantes de couplage grâce à la dépendance en impulsion de $\Sigma_\chi(p)$ ¹⁰. Les constantes de couplage sont identifiées à partir de la décomposition du propagateur de χ en projecteurs orthogonaux. L'évolution avec l'échelle du propagateur renormalisé s'écrit grâce à (3.80) :

$$p\partial_p \left[\left\langle \chi^{ab}(p)\chi^{cd}(-p) \right\rangle^{-1} \right] = p\partial_p [\Sigma_\chi^{abcd}(p)], \quad (3.88)$$

ce qui conduit finalement lorsque $D = 4 - \varepsilon$ à¹¹ :

$$\begin{cases} \beta_{\tilde{\lambda}} = -\varepsilon \tilde{\lambda} + \frac{(6\tilde{\lambda}^2 + 6\tilde{\lambda}\tilde{\mu} + \tilde{\mu}^2)}{96\pi^2} \\ \beta_{\tilde{\mu}} = -\varepsilon \tilde{\mu} + \frac{\tilde{\mu}^2}{96\pi^2}, \end{cases} \quad (3.89)$$

10. Ce résultat n'est pas évident en général car $\Sigma(p)$ contient une intégrale sur toutes les échelles d'impulsion.

11. En se rappelant que les variables d'élasticité renormalisées portent un facteur d'échelle p^{4-D} en vertu de (3.29).

en parfait accord avec (3.40) à l'ordre $O(\varepsilon/d_c)$.

Finalement, même s'il n'est pas possible de supposer que les fluctuations dans les membranes sont petites en $d = 3$ et $D = 2$, leur comportement peut être approché en extrapolant deux régimes limites. Ceux-ci permettent de voir émerger \mathbf{P}_4 qui gouverne le comportement de la phase plate dans la limite thermodynamique; ils donnent donc la bonne physique qualitative de ces systèmes. Les relativement fortes valeurs de η_4 prédites par ces modèles sont un bon indicateur du caractère fortement non-perturbatif de la nature de la phase ordonnée des membranes cristallines.

3.2 Perturbations au-delà du premier ordre

La littérature sur la théorie des perturbations dans les membranes cristallines ne traite que des corrections à une boucle, quelle que soit l'approche utilisée. Cependant, ce n'est qu'à partir de l'ordre suivant que la comparaison avec les autres approches non-perturbatives devient non triviale [Papenbrock 1995, LeDoussal 1992]. Même au sein de la théorie des perturbations, la comparaison entre le développement en couplage faible et en grand nombre de composantes du champ peut devenir compliquée à partir de deux boucles, malgré l'universalité du flot de renormalisation (voir [Rim 1984, Camprostrini 1992] pour une illustration dans le cas des modèles σ non linéaire et Gross-Neveu).

Calculer les ordres suivants de la théorie de perturbation en couplage faible nous servira à mieux comprendre les liens entre les différentes approches de la phase plate dans la limite thermodynamique, ce qui nous sera particulièrement utile pour tester la stabilité de notre schéma de troncation du flot de renormalisation non-perturbatif dans la section suivante.

3.2.1 Nature des divergences

Pour aller calculer les corrections aux ordres supérieurs de la théorie en couplage faible, peu de méthodes sont aussi efficaces que la régularisation dimensionnelle. Néanmoins, nous avons évoqué dans le Chapitre 1 les confusions qu'elle peut générer sur la nature des divergences. Comme les fluctuations dans la théorie de la phase plate sont toutes associées à des modes de Goldstone, le risque que des divergences infrarouges soient générées est grand. Même à une boucle, les intégrales typiques ont la forme :

$$\int_q \frac{q^\alpha q^\beta q^\gamma q^\theta}{q^4(p-q)^4}, \quad (3.90)$$

qui diverge quand q tend vers 0 par comptage de puissance. De plus, les résultats de l'Annexe B pour ce type d'intégrales indiquent que l'enrichissement du numérateur par ajout de composantes de q supplémentaires n'est jamais suffisant *a priori* pour régulariser de telles divergences. En effet, la composante de l'intégrale :

$$I_{\mu_1(\dots)\mu_n}(2, 2) = \int_q \frac{q_{\mu_1(\dots)\mu_n}}{q^4(p-q)^4} \quad (3.91)$$

sur le produit $p_{\mu_1(\dots)\mu_n}$ est toujours donnée par :

$$\frac{(p^2)^{D/2-4}}{(4\pi)^{D/2}} G^{(n,0)}(2, 2), \quad (3.92)$$

où la fonction $G^{(n,m)}(\alpha, \beta)$ est définie par :

$$G^{(n,m)} = \frac{a_n(\alpha)a_m(\beta)}{a_n(\alpha + \beta - D/2 - m)}, \quad a_n(\alpha) = \frac{\Gamma(n + D/2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (3.93)$$

L'intégrale (3.91) comporte donc toujours *a priori* un terme proportionnel à :

$$G^{(n,0)}(2, 2) = \Gamma(n + D/2 - 2) \Gamma(D/2 - 2) \frac{\Gamma(4 - D/2)}{\Gamma(D - 4 + n)}, \quad (3.94)$$

dont le terme en rouge contient une divergence infrarouge lorsque $D \rightarrow 4$, et ce quel que soit n .

La méthode la plus simple pour séparer les divergences infrarouges et ultraviolettes est d'effectuer un réarrangement infrarouge en ajoutant une masse au dénominateur (voir Chapitre 1) qui assure la régularité de l'intégrande quand $q \rightarrow 0$ et supprime donc les éventuels pôles infrarouges. Appliquons-la à la bulle de flexurons (3.33) : une masse m est ajoutée au propagateur des flexurons :

$$\begin{aligned} \Sigma_u^{ij}(p; m) &= 2d_c \int_q \frac{V^i(p)V^j(-p)}{(q^2 + m^2)^2((p-q)^2 + m^2)^2} \\ &\stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{d_c(2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2)p^2}{32\pi^2 \varepsilon} P_L^{ij}(p) + \frac{d_c \mu^2 p^2}{96\pi^2 \varepsilon} P_T^{ij}(p) + O(\varepsilon^0), \end{aligned} \quad (3.95)$$

et ce indépendamment de m . Les pôles qui contribuent à ce graphe ne sont pas modifiés par l'ajout d'une masse, ils sont donc bien tous de nature ultraviolette. Cependant au-delà du premier ordre, les intégrales massives générées par ce réarrangement sont difficiles à calculer et le réarrangement est difficile à mettre en place graphe par graphe.

Intéressons-nous au cas particulier des intégrales complètement transverses définies par :

$$I_{\perp}(\alpha, \beta) = \int_q \frac{(q_{\perp})^4}{q^{2\alpha}(p-q)^{2\beta}} = P_T^{ij}(p)P_T^{kl}(p) \int_q \frac{q_i q_j q_k q_l}{q^{2\alpha}(p-q)^{2\beta}} = P_T^{ij}(p)P_T^{kl}(p)I_{ijkl}(\alpha, \beta), \quad (3.96)$$

où $q_{\perp}^i = P_T^{ji} q_j$, et α et β s'écrivent typiquement $2 + n\varepsilon/2$, n étant un entier qui peut être nul¹².

Le caractère transverse du numérateur simplifie au maximum l'expression de I_{\perp} car elle ne fait intervenir qu'un seul des termes de $I_{ijkl}(\alpha, \beta)$ (celui qui est proportionnel au produit symétrisé de symboles de Kronecker X_{ijkl} , voir (3.76)), ce qui rend plus simple l'analyse des pôles. D'après (B.28),

$$I_{\perp}(\alpha, \beta) = (D^2 - 1) \frac{(p^2)^{D/2+2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{G^{(2,2)}(\alpha, \beta)}{4} \propto \Gamma(\alpha + \beta - D/2 - 2), \quad (3.97)$$

où le facteur restant n'est pas divergent quand $\varepsilon \rightarrow 0$. La fonction Γ restante a bien un pôle en $D = 4$ si $\alpha = \beta = 2$. Pour savoir si ce pôle est de nature infrarouge ou ultraviolette, nous effectuons un réarrangement infrarouge avec deux masses m_1 et m_2 , une pour chaque facteur au

12. Ce choix est lié à la structure du propagateur des flexurons $G_h(p) \sim p^4$. De telles intégrales interviennent à $L = n + 1$ boucles dans les graphes où seuls des flexurons se propagent.

dénominateur de I_{\perp} . L'introduction d'un paramètre de Feynman x permet de réduire l'intégrale à un tadpole massif, calculé dans l'Annexe B (voir (B.71)), de masse $M^2 = (1-x)m_1^2 + xm_2^2$:

$$\begin{aligned}
I_{\perp}(\alpha, \beta; m_1, m_2) &= \int_q \frac{(q_{\perp})^4}{(q^2 + m_1^2)^{\alpha} ((p-q)^2 + m_2^2)^{\beta}} \\
&= \int_q (q_{\perp})^4 \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{(1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1}}{[x(p-q)^2 + (1-x)q^2 + (1-x)m_1^2 + xm_2^2]^{\alpha+\beta}} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} \int_q \frac{(q_{\perp})^4}{[x(p-q)^2 + (1-x)q^2 + M^2]^{\alpha+\beta}} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} (D^2 - 1) \frac{(M^2 + x(1-x)p^2)^{D/2+2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{A^{(2)}(\alpha + \beta)}{4} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha + \beta - D/2 - 2)}{4\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} (D^2 - 1) \frac{(M^2 + x(1-x)p^2)^{D/2+2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \\
&\propto \Gamma(\alpha + \beta - D/2 - 2) ,
\end{aligned} \tag{3.98}$$

qui est bien le pôle de (3.97) ; la fonction $A^{(n)}(\alpha)$ étant définie par :

$$A^{(n)}(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha - n - D/2)}{\Gamma(\alpha)} . \tag{3.99}$$

Ainsi, les pôles des intégrales transverses lorsque $D \rightarrow 4$ (et avec α et β de la forme $2 + n\varepsilon/2$) sont tous de nature ultraviolette, et ce quelle que soit la valeur de n . Ceci est d'autant plus intéressant que dans la théorie effective où l'on a intégré sur les phonons, le vertex effectif $\mathcal{R}^{abcd}(q)$ est un objet purement transverse. Le résultat précédent garantit donc le caractère convergent de la théorie de perturbation de la théorie effective dans l'infrarouge à un ordre de boucles $L = n + 1$ arbitrairement grand. Nous pouvons donc appliquer la régularisation dimensionnelle à cette théorie pour aller sonder les ordres supérieurs du développement en couplage faible.

3.2.2 Théorie effective de flexurons en interaction

La théorie effective est construite en intégrant sur les phonons dont l'action est quadratique. L'action effective est donnée par (2.60) ; nous la donnons ici dans l'espace direct (voir Annexe A pour les détails) :

$$S[h] = \int_x \frac{\kappa}{2} (\partial^2 h(x))^2 + \int_{x,y} \frac{1}{4} (\partial_a h(x) \cdot \partial_b h(x)) \mathcal{R}^{abcd}(x-y) (\partial_c h(y) \cdot \partial_d h(y)) . \tag{3.100}$$

Cette action, perturbative autour de $D = 4$, n'a de sens que dans la théorie de la phase plate où les rôles de u et h sont dissymétriques, elle ne décrit pas la transition de froissement. Elle peut être utilisée à la place de l'action $S[u, h]$ (3.7) puisque nous cherchons à décrire la limite des grandes distances où les flexurons dominent. Il n'y a plus qu'un seul type de champ avec un unique vertex à quatre points, mais en contrepartie le vertex d'interaction a une forme plus complexe et dépend explicitement de l'impulsion qui circule à travers lui. La forme la plus épurée (2.62) dans laquelle $\mathcal{R}^{abcd}(q)$ comporte seulement deux termes n'est valable que tant que l'action (3.7)

- Le vertex effectif donne également le propagateur du champ auxiliaire χ_{ab} dans la théorie de large codimension (3.70), ce qui facilite la comparaison entre les deux approches de la théorie des perturbations en établissant des correspondances graphe par graphe également.
- Il y a un graphe que nous n'avons pas pris en compte dans (3.103), c'est la partie du tadpole faisant intervenir une boucle fermée de flexurons :

$$(3.104)$$

Cependant, le vertex effectif n'a pas de composante continue : $\mathcal{R}^{abcd}(q=0) = 0^{14}$; ce graphe est donc automatiquement nul. Il en est de même pour tous les graphes de cette forme, à tous les ordres en boucles.

- Il apparaît dans (3.100) une nette dissymétrie entre les rôles des deux premiers et deux derniers indices de \mathcal{R}^{abcd} , chacun couplant des termes à deux champs évalués à deux positions différentes. Par conséquent, \mathcal{R}^{abcd} apparaîtra toujours dans un graphe dans le sens où circule l'impulsion externe ; en particulier, le vertex effectif n'est jamais dessiné à la verticale. Cela exclut de la théorie les graphes présentant des divergences superposées, comme

$$(3.105)$$

dont le calcul fait intervenir des intégrales de type losange $J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma')$ qui sont particulièrement difficiles à calculer (voir Annexe B).

Cette propriété fait en réalité écho à l'identité de Ward (3.24), qui permet de simplifier ce type de graphe dans la théorie à deux champs basée sur $S[u, h]$, quoique de façon moins directe. En effet, écrivons (3.25) à une boucle :

$$(3.106)$$

où nous avons indiqué en rouge les termes proportionnels à d_c , et en bleu les autres. La fonction à trois points de la théorie de champ moyen (à 0-boucle) est donnée par le vertex d'interaction :

$$(3.107)$$

14. Preuve dans l'Annexe A.

Puisque la théorie est renormalisable, nous pouvons écrire la fonction à trois points à une boucle $\Gamma_j^{(3),1l}$ à l'aide de deux coefficients g_λ et g_μ qui sont fonctions des couplages renormalisés et du régulateur, mais en conservant la *même structure en impulsion* :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_j^{(3),1l}(q, q_1, q_2) &= \text{Diagram: a central circle with '11' inside, an incoming wavy line from the left labeled 'j' and 'q', and two outgoing wavy lines to the right labeled 'q1' and 'q2'.} \\
 &= \text{Diagram: a circle with a dot on the left, an incoming wavy line from the left labeled 'j', and two outgoing wavy lines to the right.} + \text{Diagram: a circle with a dot on the left, an incoming wavy line from the left labeled 'j', and two outgoing wavy lines to the right, with a different internal structure.} + \text{Diagram: a circle with a dot on the left, an incoming wavy line from the left labeled 'j', and two outgoing wavy lines to the right, with a different internal structure.} \\
 &= -\frac{i}{2} \left(g_\lambda(\lambda, \mu, \varepsilon)(q_1 \cdot q_2)q^j + g_\mu(\lambda, \mu, \varepsilon)((q \cdot q_1)q_2^j + (q \cdot q_2)q_1^j) \right). \tag{3.108}
 \end{aligned}$$

L'équation (3.106) fait intervenir la dérivée de $\Gamma_j^{(3),1l}$ par rapport à q_1 (ou q_2), en utilisant la conservation de l'impulsion $q_2 = q - q_1$ (ou $q_1 = q - q_2$)¹⁵. D'après (3.108), cela donne :

$$\left. \frac{\partial \Gamma_j^{(3),1l}}{\partial q_1^i} \right|_{q_1=0} = -\frac{i}{2} \left(g_\lambda(\lambda, \mu, \varepsilon)q^i q^j + g_\mu(\lambda, \mu, \varepsilon)(q^2 \delta^{ij} + q^i q^j) \right). \tag{3.109}$$

L'injection de ce résultat dans (3.106) donne la relation entre g_λ , g_μ et les composantes de $\Sigma_u^{ij}(q)$. Nous l'avons vu, la fonction à trois points n'apporte pas d'information supplémentaire sur la renormalisation des couplages. En particulier,

$$\Sigma_u^{ij} \propto d_c \quad \Rightarrow \quad g_\lambda(\lambda, \mu, \varepsilon) \propto d_c \quad , \quad g_\mu(\lambda, \mu, \varepsilon) \propto d_c. \tag{3.110}$$

La relation (3.110) montre que toute l'information sur la renormalisation des couplages dans la fonction à trois points est comprise dans le graphe rouge de (3.106). Par conséquent, la somme des deux graphes bleus est exactement nulle. De plus, comme (3.110) fait intervenir les fonctions g_λ et g_μ complètes, elle a encore des conséquences aux ordres suivants en induisant des compensations entre des graphes dont les graphes bleus sont des sous-graphes. Par exemple, à l'ordre de deux boucles,

$$\Gamma_j^{(3),1l}(q, q_1, q_2) \propto d_c \quad \Rightarrow \quad \text{Diagram: a circle with '11' inside, an incoming wavy line from the left, and two outgoing wavy lines to the right, with a loop inside.} \propto d_c^2, \tag{3.111}$$

donc en particulier,

$$\text{Diagram: a circle with a dot on the left, an incoming wavy line from the left, and two outgoing wavy lines to the right, with a loop inside.} + \text{Diagram: a circle with a dot on the left, an incoming wavy line from the left, and two outgoing wavy lines to the right, with a different internal structure.} = 0, \tag{3.112}$$

15. En effet, dans l'identité de Ward, c'est une des impulsions des flexurons qui est mise à zéro, celle du phonon dans la fonction à trois points est la même que celle qui circule dans l'énergie propre du phonon qui intervient dans cette identité.

car ces graphes ne comportent qu'une boucle fermée de flexurons, et donc une seule puissance de d_c . En appliquant ce résultat à l'énergie propre des flexurons à deux boucles, le graphe contenant des divergences superposées est aussi compensé par un autre. Notons que ce résultat est indépendant de la méthode de régularisation utilisée.

Finalement, l'absence de divergences superposées, qui apparaît comme une conséquence de la structure de \mathcal{R} dans la théorie effective, est en réalité aussi présente dans la théorie à deux champs (u, h) comme une conséquence de l'invariance par rotation, mais de façon plus subtile puisque ce ne sont pas les graphes eux-mêmes qui s'annulent, mais leurs contributions aux énergies propres sont compensées par d'autres graphes. Ce n'est donc pas la théorie effective elle-même qui donne lieu à des résultats plus simples, mais sa structure semble mieux accordée aux simplifications inhérentes à la théorie de la phase plate.

- Le coefficient de Lamé λ n'apparaît jamais explicitement dans la théorie effective, il est remplacé par le coefficient de $N^{abcd}(q)$:

$$b = \frac{\mu(\lambda D + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} . \quad (3.113)$$

À une boucle cela ne change rien, mais comme ce changement de variables dépend explicitement de ε , et que la construction du flot de renormalisation tronque le développement en ε en sélectionnant uniquement les pôles des coefficients de renormalisation, la correspondance entre les fonctions β de la théorie effective et celles de la théorie à deux champs (u, h) , qui sont exprimées en fonction de λ et μ , n'est pas du tout évidente aux ordres supérieurs.

L'écriture (3.100) présente cependant des avantages : d'abord, la contrainte de stabilité du potentiel élastique (2.9) s'écrit $b > 0$, et ne nécessite donc plus de mélange dépendant de D entre les deux constantes de couplage ; d'autre part, il n'y a plus dans ce formalisme de constantes de couplage dans des dénominateurs. En particulier, la dimension anormale courante s'écrit :

$$\eta = \frac{5(b + 2\mu)}{96\pi^2} , \quad (3.114)$$

expression qui est plus régulière que (3.40) :

$$\eta = \frac{5\mu(\lambda + \mu)}{16\pi^2(\lambda + 2\mu)} \quad (3.115)$$

lorsque les couplages deviennent petits, bien que les valeurs aux points fixes soient les mêmes.

Nous avons donc choisi d'effectuer le calcul des corrections à deux boucles dans la théorie effective plutôt que dans la théorie à deux champs.

3.2.3 Corrections à deux boucles

3.2.3.1 Graphes à deux boucles

Les graphes à l'ordre deux du développement en couplage faible comportent un vertex supplémentaire, et donc une intégrale sur une deuxième impulsion. Si ces deux intégrales comportent

un pôle ultraviolet, le terme le plus divergent dans le graphe sera d'ordre $1/\varepsilon^2$. La troncation du schéma minimal, qui correspond à ne garder que les termes divergents, est donc une troncation à l'ordre sous-dominant. Les graphes à deux boucles de la théorie effective sont les suivants :

• Vertex effectif $\mathcal{R}^{abmn}(p)$:

– Double bulle :

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ b \end{array} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \begin{array}{c} m \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ n \end{array} \\
 & = (-\mathcal{R}_{aba'b'}(p)) \Pi^{a'b'ij}(p) (-\mathcal{R}_{ijj'j'}(p)) \Pi^{i'j'm'n'}(p) (-\mathcal{R}_{m'n'mn}(p)) \\
 & \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} - \left[b^3 \frac{4^{-7+\varepsilon} \pi^{-4+\varepsilon} d_c^2 (-5+\varepsilon)^2 \Gamma(2-\varepsilon/2)^4 \Gamma(\varepsilon/2)^2}{\Gamma(4-\varepsilon)^2} \right] N_{abmn}(p) \\
 & \quad - \left[\mu^3 \frac{4^{-6+\varepsilon} \pi^{-4+\varepsilon} d_c^2 \Gamma(2-\varepsilon/2)^4 \Gamma(\varepsilon/2)^2}{\Gamma(4-\varepsilon)^2} \right] M_{abmn}(p) ,
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

où nous rappelons que le tenseur de polarisation $\Pi^{ijmn}(p)$ a été défini en (3.74). La partie divergente est comprise dans le terme $\Gamma(\varepsilon/2)^2$, qui se développe selon :

$$\Gamma(\varepsilon/2) \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{4\gamma_E}{\varepsilon} + O(\varepsilon^0) , \tag{3.117}$$

où γ_E est la constante d'Euler. La constante γ_E apparaît dans tous les développements de Γ à l'ordre sous-dominant. De même, le facteur $(4\pi)^{D/2}$, issu de notre convention de transformée de Fourier, introduit des facteurs $\log(4\pi)$ à l'ordre sous-dominant. Comme ces termes ne contiennent aucune information utile, il est d'usage de redéfinir l'échelle k de la renormalisation, qui rappelons-le est arbitraire, selon :

$$k \mapsto k \frac{e^{\gamma_E}}{4\pi} , \tag{3.118}$$

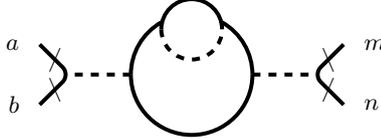
ce qui permet d'obtenir des expressions plus simples pour les graphes à deux boucles¹⁶. Cette convention d'écriture est appelée « schéma $\overline{\mathbf{MS}}$ ». Sous ces conditions,

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ b \end{array} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \begin{array}{c} m \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ n \end{array} \\
 & \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \left[\frac{5b^3 d_c^2 (-5 - 19\varepsilon + 15\varepsilon \log(p^2))}{442368\pi^4 \varepsilon^2} \right] N_{abmn}(p) \\
 & \quad + \left[\frac{\mu^3 d_c^2 (-3 - 5\varepsilon + 3\varepsilon \log(p^2))}{110592\pi^4 \varepsilon^2} \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0) ,
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

où il faut comprendre $\log(p^2)$ comme le raccourci de $\log(p^2/k^2)$. Dans la suite, nous écrirons tous les graphes dans le schéma $\overline{\mathbf{MS}}$.

16. Les fonctions β en revanche sont inchangées.

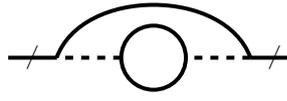
– Bulle-arc-en-ciel :



$$\begin{aligned}
&= (-\mathcal{R}_{aba'b'}(p)) \int_q q^{a'} (p^{b'} - q^{b'}) G_h(q)^2 G_h(p-q) (q^{m'} - p^{m'}) (-q^{n'}) \\
&\quad \times (-\mathcal{R}_{m'n'mn}(p)) \int_k k^i (q^j - k^j) (-\mathcal{R}_{ij'j'}(k)) G_h(k-q) (k^{i'} - q^{i'}) (-k^{j'}) \\
&\stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \left[\frac{5b^2 d_c (60\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) - b(71\varepsilon+60) - 2\mu(41\varepsilon+60))}{221184\pi^4 \varepsilon^2} \right] N_{abmn} \\
&\quad + \left[\frac{\mu^2 d_c (60\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) - b(83\varepsilon+60) - 2\mu(53\varepsilon+60))}{110592\pi^4 \varepsilon^2} \right] M_{abmn} + O(\varepsilon^0) .
\end{aligned} \tag{3.120}$$

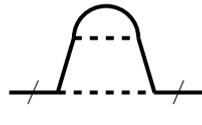
• Énergie propre des flexurons $\Sigma_h(p)$:

– Arc-en-ciel-bulle :



$$\begin{aligned}
&= \int_q G_h(p-q) p^a (q^b - p^b) (-\mathcal{R}_{abij}(q)) \Pi^{ij'j'}(q) (-\mathcal{R}_{i'j'mn}(q)) (p^m - q^m) (-p^n) \\
&\stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} - \frac{d_c p^4 (60\varepsilon(5b^2 + 4\mu^2) \log(p^2) - 5b^2(71\varepsilon+60) - 4\mu^2(53\varepsilon+60))}{442368\pi^4 \varepsilon^2} + O(\varepsilon^0) .
\end{aligned} \tag{3.121}$$

– Double arc-en-ciel :



$$\begin{aligned}
&= \int_q p^a (q^b - p^b) (-\mathcal{R}_{aba'b'}(p-q)) (p^{a'} - q^{a'}) (-p^{b'}) G_h(q)^2 \\
&\quad \times \int_k G_h(k-q) k^i (q^j - k^j) (-\mathcal{R}_{ijmn}(k)) (k^m - q^m) (-k^n) \\
&\stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{5p^4 (b+2\mu) (-60\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) + b(71\varepsilon+60) + 2\mu(11\varepsilon+60))}{221184\pi^4 \varepsilon^2} + O(\varepsilon^0) .
\end{aligned} \tag{3.122}$$

À une boucle, les composantes de \mathcal{R} par rapport aux tenseurs N et M sont indépendantes de p , et $\Sigma_h \propto p^4$. Dans les expressions précédentes, ces comportements ne sont pas respectés à l'ordre sous-dominant à cause des termes logarithmiques. En effet, les graphes précédents sont obtenus à partir de la forme nue de l'action. Cependant, lorsque l'on applique la méthode des contretermes, il faut utiliser l'expression de l'action en fonction des variables renormalisées. Plus précisément, à deux boucles, nous devons utiliser l'action exprimée en termes des variables (couplages et champs) renormalisées à une boucle, qui contient en plus de ces vertex les contributions venant des contretermes.

3.2.3.2 Contretermes

Reprenons l'action (3.100), et exprimons-la en fonction des champs et constantes de couplage renormalisés à une boucle. Il y a un contreterme pour chaque terme de l'action : un contreterme pour le champ \mathcal{C}_h qui a la forme du terme cinétique, et un contreterme pour le vertex $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$. Pour simplifier l'écriture, nous l'écrivons dans l'espace direct :

$$\begin{aligned}
S[h; k] &= \int_x \frac{\kappa}{2} (\partial^2 h(x))^2 + \int_{x,y} \frac{k^\varepsilon}{4} (\partial_a h(x) \cdot \partial_b h(x)) \mathcal{R}^{abcd}(x-y) (\partial_c h(y) \cdot \partial_d h(y)) \\
&+ \int_x \frac{\mathcal{C}}{2} (\partial^2 h(x))^2 + \int_{x,y} \frac{k^\varepsilon}{4} (\partial_a h(x) \cdot \partial_b h(x)) \mathcal{C}_{\mathcal{R}}^{abcd}(x-y) (\partial_c h(y) \cdot \partial_d h(y)) \\
&= \int_x \frac{Z}{2} (\partial^2 h(x))^2 \\
&+ \int_{x,y} \frac{k^\varepsilon}{4} (\partial_a h(x) \cdot \partial_b h(x)) \left[Z_b b N^{abcd}(x-y) + Z_\mu \mu M^{abcd}(x-y) \right] (\partial_c h(y) \cdot \partial_d h(y)) .
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Les contretermes intervenant à deux boucles sont déduits de l'expression des coefficients de renormalisation Z , Z_b et Z_μ à une boucle en schéma minimal. Nous avons donc :

- Contreterme de champ :

$$\mathcal{C}_h = \text{---} \times \text{---} = \frac{5(b+2\mu)}{96\pi^2 \varepsilon} . \tag{3.124}$$

- Contretermes de vertex :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\mathcal{R}}^{abmn}(p) &= \begin{array}{c} a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ b \end{array} \text{---} \square \text{---} \begin{array}{c} m \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ n \end{array} = \mathcal{C}_b N^{abmn}(p) + \mathcal{C}_\mu M^{abmn}(p) \\
&= -\frac{5b^2 d_c}{192\pi^2 \varepsilon} N^{abmn}(p) - \frac{\mu^2 d_c}{96\pi^2 \varepsilon} M^{abmn}(p) .
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Ces nouveaux vertex doivent être utilisés pour construire des graphes qui contribuent aussi à l'ordre de deux boucles.

Il y a cependant une subtilité supplémentaire vis-à-vis du développement en ε . En effet, dans le schéma minimal, seules les parties divergentes des graphes sont incluses dans les contretermes. Cependant, ici, D (et donc ε) apparaît explicitement dans l'action, et donc dans l'expression du vertex d'interaction $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$. Pour le montrer, nous allons nous concentrer sur l'expression du contreterme de vertex dans l'action (3.123) dans l'espace de Fourier. Par conservation de l'impulsion, nous pouvons écrire ce terme de la façon suivante :

$$\int_q \mathcal{C}_{\mathcal{R}}^{abmn}(q) \int_{q_1, q_2} q_1^a (q^b - q_1^b) h(q_1) h(q - q_1) q_2^m (q^n - q_2^n) h(q_2) h(q - q_2) , \tag{3.126}$$

où nous avons omis le facteur global sans importance. Définissons :

$$\mathcal{I}_h^{abmn}(q) = \int_{q_1, q_2} q_1^a (q^b - q_1^b) h(q_1) h(q - q_1) q_2^m (q^n - q_2^n) h(q_2) h(q - q_2) . \tag{3.127}$$

La structure tensorielle de cette intégrale se décompose sur des symboles de Kronecker et des composantes de q :

$$\mathcal{I}_h^{abmn}(q) = \mathcal{I}_h^X(q) X^{abmn} + \mathcal{I}_h^Y(q) Y^{abmn}(q) + \mathcal{I}_h^q(q) q^a q^b q^m q^n , \quad (3.128)$$

où X est défini dans (3.76), le tenseur Y est le produit symétrisé des combinaisons de 2 impulsions q^i et un symbole de Kronecker (voir Annexe A). À cause de la transversalité de \mathcal{C}_R , (3.126) se simplifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_R^{abmn}(q) \mathcal{I}_h^{abmn}(q) &= \mathcal{C}_R^{abmn}(q) \mathcal{I}_h^X(q) X_{abmn} \\ &= \left(\mathcal{C}_b N^{abmn}(q) X_{abmn} + \mathcal{C}_\mu M^{abmn}(q) X_{abmn} \right) I_h^X \\ &= \left((D+1)\mathcal{C}_b + (D+1)(D-2)\mathcal{C}_\mu \right) I_h^X(q) \\ &= \left((D+1)\mathcal{C}_b N_{abmn}(q) + 2\mathcal{C}_\mu M_{abmn}(q) \right) (N^{abmn}(q) + M^{abmn}(q)) I_h^X(q) , \end{aligned} \quad (3.129)$$

où l'avant-dernière égalité découle de (3.78). Ainsi, même si \mathcal{C}_b est purement divergent lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, le couplage entre flexurons qu'il génère au niveau de l'action, défini par la composante du contreterme de vertex sur N_{abmn} , est proportionnel à $(D+1) = 5 - \varepsilon$ et possède donc une partie finie. Une façon de prendre ces effets en compte est de modifier l'expression du contreterme vertex (3.125) en incluant la partie finie dans la définition de \mathcal{C}_b :

$$\mathcal{C}_b \mapsto -\frac{(5-\varepsilon)b^2 d_c}{192\pi^2 \varepsilon} . \quad (3.130)$$

Insistons sur le fait que ceci n'est pas contradictoire avec l'utilisation du schéma minimal. En effet, l'expression (3.130) est juste une astuce pratique pour prendre en compte le fait que ce n'est pas \mathcal{C}_b mais $(D+1)\mathcal{C}_b$ qui joue le rôle de composante du couplage effectif suivant N_{abmn} . Il est tout à fait possible de procéder au calcul sans effectuer ce changement d'expression pour le contreterme, mais en prenant garde à la présence explicite de ε dans l'action.

La présence de ε dans l'expression de l'action nous oblige à adapter la méthodologie standard de la méthode des contretermes pour que le calcul reste cohérent. Ce type de subtilité est présent dans d'autres théories pour lesquelles le respect de symétries dépendant explicitement de D (et donc de ε) est crucial. C'est par exemple le cas de l'étude de l'équation de Kardar-Parisi-Zhang à deux boucles pour laquelle les auteurs de [Frey 1994] ont dû introduire un développement partiel en ε , où certaines occurrences de D ne sont pas explicitées en ε lors du développement en série pour préserver les symétries de la théorie. L'utilisation de cette méthode a donné lieu à une controverse [Sun 1995, Täuber 1995, Wiese 1997], et il n'existe pas aujourd'hui de théorie standard de l'utilisation du développement en ε dans une théorie présentant des symétries dépendant explicitement de D comme la phase plate des membranes cristallines. Nos résultats sont justifiés par leur accord avec les autres développements dans les régimes appropriés.

Sous ces conditions, les contributions des contretermes sont les suivantes :

- Vertex effectif $\mathcal{R}^{abmn}(p)$:

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} a \\ \diagdown \\ \diagup \\ b \end{array} \text{---} \square \text{---} \bigcirc \text{---} \begin{array}{c} m \\ \diagdown \\ \diagup \\ n \end{array} &= \mathcal{C}_{\mathcal{R},aba'b'}(p) \Pi^{a'b'm'n'}(p) (-\mathcal{R}_{m'n'mn}(p)) \\
&\stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \left[\frac{5b^3 d_c^2 (-15\varepsilon \log(p^2) + 13\varepsilon + 30)}{442368\pi^4 \varepsilon^2} \right] N_{abmn} \\
&\quad + \left[\frac{\mu^3 d_c (-3\varepsilon \log(p^2) + 5\varepsilon + 6)}{110592\pi^4 \varepsilon^2} \right] M_{abmn} + O(\varepsilon^0),
\end{aligned} \tag{3.131}$$

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} a \\ \diagdown \\ \diagup \\ b \end{array} \text{---} \bigcirc \text{---} \begin{array}{c} m \\ \diagdown \\ \diagup \\ n \end{array} &= (-\mathcal{R}_{aba'b'}(p)) \Pi^{a'b'm'n'}(p) (-\mathcal{R}_{m'n'mn}(p)) \mathcal{C}_h \\
&\stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} - \left[\frac{5b^2 d_c (b+2\mu) (15\varepsilon \log(p^2) - 19\varepsilon - 30)}{55296\pi^4 \varepsilon^2} \right] N_{abmn} \\
&\quad - \left[\frac{5\mu^2 d_c (b+2\mu) (3\varepsilon \log(p^2) - 5\varepsilon - 6)}{27648\pi^4 \varepsilon^2} \right] M_{abmn} + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{3.132}$$

- Énergie propre des flexurons $\Sigma_h(p)$:

$$\begin{aligned}
\text{---} \square \text{---} &= \int_q q^a (p^b - q^b) \mathcal{C}_{\mathcal{R},abmn}(q) G_h(p-q) (q^m - p^m) (-q^n) \\
&\stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} - \frac{5p^4 (b+2\mu) (-30(b+2\mu) + 15\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) - \varepsilon(19b+22\mu))}{55296\pi^4 \varepsilon^2} + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{3.133}$$

$$\begin{aligned}
\text{---} \bigcirc \text{---} &= \int_q q^a (p^b - q^b) (-\mathcal{R}_{abmn}(q)) G_h(p-q) (q^m - p^m) (-q^n) \mathcal{C}_h \\
&\stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} + \frac{5p^4 (b+2\mu) (15\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) - b(19\varepsilon+30) - 4\mu(2\varepsilon+15))}{55296\pi^4 \varepsilon^2} + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{3.134}$$

Les expressions finales des parties divergentes de Σ_u et Σ_h ne dépendent alors plus de $\log(p^2/k^2)$. Les coefficients de renormalisation sont alors déduits :

$$\begin{aligned}
Z &= 1 - \frac{5(b+2\mu)}{96\pi^2 \varepsilon} - \frac{d_c (b^2(300 - 95\varepsilon) + 4\mu^2(60 - 37\varepsilon))}{442368\pi^4 \varepsilon^2} - \frac{25(\varepsilon+12)(b+2\mu)^2}{221184\pi^4 \varepsilon^2} \\
Z_b &= 1 + \frac{5b^2 d_c}{192\pi^2 \varepsilon} + \frac{5b^3 d_c^2 (5 - 2\varepsilon)}{147456\pi^4 \varepsilon^2} + \frac{25b^2 d_c (b(\varepsilon+12) + 2\mu(12 - 5\varepsilon))}{221184\pi^4 \varepsilon^2} \\
Z_\mu &= 1 + \frac{\mu^2 d_c}{96\pi^2 \varepsilon} + \frac{\mu^3 d_c^2}{36864\pi^4 \varepsilon^2} + \frac{\mu^2 d_c (b(17\varepsilon+60) + 2\mu(60 - 13\varepsilon))}{110592\pi^4 \varepsilon^2}.
\end{aligned} \tag{3.135}$$

3.2.3.3 Flot de renormalisation

Les équations de flot de renormalisation sont construites à partir de (3.135) et des relations (3.39) qui relient les fonctions β aux pôles simples des coefficients de renormalisation. Les termes d'ordre $1/\varepsilon^2$ ne contribuent donc pas. Les équations de flot à deux boucles sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{((5 + \varepsilon)b + 10\mu)}{96\pi^2} + \frac{25(b + 2\mu)^2}{110592\pi^4} - \frac{d_c(95b^2 + 148\mu^2)}{221184\pi^4} \\ \beta_b = -\varepsilon b + 2\eta b + \frac{5d_c b^2}{192\pi^2} - \frac{25b^2 d_c(b - 10\mu)}{110592\pi^4} - \frac{5b^3 d_c^2}{(192)^2\pi^4} \\ \beta_\mu = -\varepsilon \mu + 2\eta \mu + \frac{d_c \mu^2}{96\pi^2} + \frac{d_c(17b - 26\mu)\mu^2}{55296\pi^4} \end{array} \right. . \quad (3.136)$$

La correction en rouge dans η a une origine similaire à celle de (3.130), il s'agit du facteur $(D+1)$ apparaissant devant le couplage effectif b dans l'expression de l'action, et dont il faut garder la trace indépendamment du développement en ε . Il n'y a pas de nouveaux points fixes à cet ordre ; l'allure du diagramme de flot à une boucle Figure 3.2 n'est pas modifiée. Les corrections à l'ordre sous-dominant sont :

- **Point fixe gaussien \mathbf{P}_1** : Ce point fixe est bien sûr inchangé :

$$\left\{ b^* = 0, \mu^* = 0, \eta_1^* = 0 \right\} . \quad (3.137)$$

- **\mathbf{P}_2 , Point fixe de cisaillement nul $\mu^* = 0$** :

Ce point fixe n'est pas accessible *via* la théorie effective. En effet, si $\mu = 0$, le terme cinétique des phonons transverses est donné par le terme de courbure proportionnel à κ puisqu'il n'y a plus de contribution élastique (voir (3.48)). Sous ces conditions, la théorie effective où les phonons sont intégrés ne s'écrit plus sous la forme (3.100).

Une autre façon de comprendre ce résultat est que par définition,

$$b = \frac{\mu(D\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} , \quad (3.138)$$

donc \mathbf{P}_2 est confondu avec \mathbf{P}_1 .

La théorie effective possède cependant un point fixe $\mu = 0, b \neq 0$:

$$\left\{ b^* = \frac{192\pi^2 \varepsilon}{5(4 + d_c)} + \frac{64(-10 + d_c(14 + 3d_c))\pi^2 \varepsilon^2}{25(4 + d_c)^3}, \mu^* = 0, \eta^* = \frac{2\varepsilon}{4 + d_c} + \frac{(192 + 86d_c + 5d_c^2)\varepsilon^2}{30(4 + d_c)^3} \right\} , \quad (3.139)$$

qui est un artefact au vu de la discussion précédente.

- **\mathbf{P}_3 , Point fixe compressibilité infinie $K^* = 0$** :

Si $K = 0, b = 0$ (d'après (3.138)) :

$$\left\{ b^* = 0, \mu^* = \frac{96\pi^2 \varepsilon}{20 + d_c} - \frac{320(5 + d_c)\pi^2}{(20 + d_c)^3}, \eta_3^* = \frac{10\varepsilon}{20 + d_c} - \frac{d_c(890 + 37d_c)\varepsilon^2}{6(20 + d_c)^3} \right\} . \quad (3.140)$$

- **\mathbf{P}_4 , Point fixe de phase plate :**

Ce point fixe, où les deux couplages sont non nuls, est le point fixe attracteur dans l'infrarouge :

$$\left\{ \begin{aligned} b^* &= -\frac{192\pi^2 \varepsilon}{5(24 + d_c)} - \frac{192(264 + 24d_c + d_c^2)\pi^2 \varepsilon^2}{25(24 + d_c)^3}, \quad \mu^* = \frac{96\pi^2 \varepsilon}{24 + d_c} - \frac{2304(13 + d_c)\pi^2 \varepsilon^2}{5(24 + d_c)^3}, \\ \eta_4^* &= \frac{12 \varepsilon}{24 + d_c} - \frac{6d_c(142 + 5d_c)\varepsilon^2}{5(24 + d_c)^3} \end{aligned} \right\}. \quad (3.141)$$

En $D = 2$, $d_c = 1$, la valeur prédite est $\eta_4^* \simeq 0,91$, légèrement inférieure à la valeur prédite à une boucle.

De plus, au point fixe \mathbf{P}_4 , l'identité suivante est vérifiée :

$$(D + 1)b - 2\mu = (5 - \varepsilon)b - 2\mu = O(\varepsilon^3). \quad (3.142)$$

La ligne $(D + 1)b - 2\mu = 0$, qui correspond à $(3 - \varepsilon/2)\lambda + \mu = 0$ dans l'ancien jeu de variables, est la ligne attractrice sur la Figure 3.2. Comme nous le verrons dans la suite, son caractère attracteur vis-à-vis des trajectoires dans l'infrarouge est vrai bien au-delà du développement en couplage faible. Cependant, comme son équation mélange différents ordres du développement en ε , il n'est pas possible de montrer qu'il s'agit d'une ligne attractrice dans le cadre de ce développement. Nous pouvons seulement vérifier *a posteriori* que cette identité est valable, avec un degré de précision cohérent avec le nombre de boucles, au point fixe de phase plate.

Il est également possible de comparer ces résultats au développement en large codimension en examinant un développement jusqu'à l'ordre $O(\varepsilon^2/d_c)$. Puisque les fonctions β sont universelles à deux boucles, il est attendu que les développements en $d_c \gg 1$ et $\varepsilon \ll 1$ commutent à cet ordre. Le développement des fonctions β à deux boucles (3.136) à l'ordre le plus bas en $1/d_c$, et en termes des variables $\tilde{\mu}$ et \tilde{b} , s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{\tilde{b}} &= -\varepsilon \tilde{b} + \frac{5 \tilde{b}^2}{192\pi^2} - \frac{5 \tilde{b}^3}{(192\pi^2)^2} \\ \beta_{\tilde{\mu}} &= -\varepsilon \tilde{\mu} + \frac{\tilde{\mu}^2}{96\pi^2} \end{aligned} \right. \quad (3.143)$$

Il est rappelé que comme dans la limite $d_c \gg 1$, $\eta = O(1/d_c)$, celui-ci n'intervient pas dans les fonctions β à l'ordre le plus bas. La fonction β de $\tilde{\mu}$ a de nouveau la structure d'une équation à une boucle, contrairement à celle de \tilde{b} qui comprend une correction venant de la double bulle. Comparons ces résultats à ceux du développement en $1/d_c$ (3.89) en $D = 4 - \varepsilon$:

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{\tilde{b}} &= -\varepsilon \tilde{b} + \frac{(5 - \varepsilon) \tilde{b}^2}{192\pi^2} \\ \beta_{\tilde{\mu}} &= -\varepsilon \tilde{\mu} + \frac{\tilde{\mu}^2}{96\pi^2} \end{aligned} \right. \quad (3.144)$$

Le changement de variable $\tilde{\lambda} \mapsto \tilde{b}$ est simple dans ce formalisme où D n'est pas un paramètre de développement. Comme le développement en $d_c \gg 1$ a été conduit seulement à l'ordre le plus bas, il n'est pas possible de générer de termes d'ordre 3 en couplages. En revanche, grâce au facteur $(D + 1)$ au numérateur de la fonction $\beta_{\tilde{b}}$, cette fonction présente bien un terme d'ordre ε^3 égal à $-\varepsilon\tilde{b}/(192\pi^2)$.

À première vue, l'universalité de la fonction $\beta_{\tilde{b}}$ est perdue à l'ordre $O(\varepsilon^3/d_c)$ puisque ses expressions dans (3.143) et (3.144) diffèrent. En effet, la fonction issue du développement $d_c \gg 1$ ne peut générer de terme en \tilde{b}^3 , et le développement en ε à deux boucles ne peut pas générer de contribution dépendant explicitement de ε hors du terme dimensionnel $\varepsilon\tilde{b}$. Cependant, ces deux expressions sont compatibles dans une certaine mesure dans l'infrarouge : considérons la fonction $\beta_{\tilde{b}}$ à l'ordre $O(1/d_c)$. À n'importe quel point fixe, celle-ci s'annule, donc :

$$\varepsilon\tilde{b} = \frac{5\tilde{b}^2}{192\pi^2} . \quad (3.145)$$

Injectons ce résultat dans la première équation de (3.144) :

$$\beta_{\tilde{b}} = -\varepsilon\tilde{b} + \frac{5\tilde{b}^2}{192\pi^2} - \frac{\tilde{b}}{192\pi^2} (\varepsilon\tilde{b}) = -\varepsilon\tilde{b} + \frac{5\tilde{b}^2}{192\pi^2} - \frac{\tilde{b}}{192\pi^2} \left(\frac{5\tilde{b}^2}{192\pi^2} \right) , \quad (3.146)$$

qui est bien la première équation de (3.143). La correction à l'approximation (3.145) est d'ordre plus élevé dans le développement. Ainsi, les deux expressions des fonctions β sont bien compatibles au voisinage de n'importe quel point fixe (ou encore suffisamment loin dans l'infrarouge), mais l'obtention du résultat n'est pas directe.

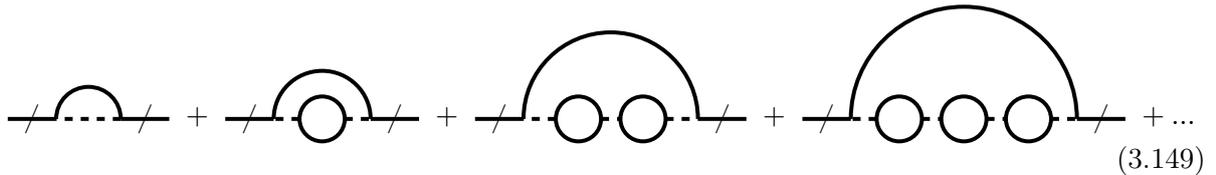
Enfin, il est possible de comparer les valeurs des dimensions anormales aux points fixes \mathbf{P}_3 et \mathbf{P}_4 en développant les expressions (3.86) et (3.84) à l'ordre ε^2 :

$$\eta_3^* \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{10\varepsilon}{d_c} - \frac{37\varepsilon^2}{6d_c} + O(\varepsilon^3) + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right) \quad (3.147)$$

$$\eta_4^* \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{12\varepsilon}{d_c} - \frac{6\varepsilon^2}{d_c} + O(\varepsilon^3) + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right) \quad (3.148)$$

en accord avec la limite $d_c \gg 1$ de (3.140) et (3.141).

Pour retrouver ce résultat, il est important de bien inclure le ε dans η dans (3.136) (terme en bleu). Afin de comprendre l'origine de ce terme, examinons qualitativement le comportement de l'énergie propre Σ_h dans la limite $d_c \gg 1$. Puisque chaque couplage \tilde{b} et $\tilde{\mu}$ apporte une contribution $1/d_c$, et chaque bulle fermée de flexurons un facteur d_c , les graphes dominants dans la limite d_c ont la forme du graphe arc-en-ciel, avec un vertex effectif habillé par des bulles :



$$\text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \quad (3.149)$$

Quel que soit le nombre de bulles, tous ces termes sont du même ordre dans le développement en $1/d_c$.

Par exemple, dans notre calcul précédent, la contribution dominante dans la limite $d_c \gg 1$ est donnée par le graphe arc-en-ciel-bulle (3.121). Les termes comprenant un plus grand nombre de bulles sont d'ordre plus élevé dans le développement en ε .

Revenons au calcul de l'ordre dominant en $1/d_c$. La contribution à η dans cette limite peut donc être obtenue en remplaçant dans l'expression du graphe arc-en-ciel le vertex par la somme de toutes les bulles. Grâce à la structure du vertex effectif, c'est une série géométrique. En effet, rappelons la définition du tenseur de polarisation :

$$\Pi^{abmn}(p) = \int_q \frac{q^a q^b q^m q^n}{q^4 (p-q)^4} = \Pi_{\perp}(p) X^{abmn} + \Pi_Y(p) Y^{abmn}(p) + \Pi_p(p) p^a p^b p^m p^n . \quad (3.150)$$

Comme le vertex effectif est purement transverse, seul Π_{\perp} contribue. D'après les relations (3.78), un graphe contenant n_b bulles sera donc égal à :

$$\tilde{\mathcal{R}}^{a_1 a_2 a_3 a_4} \Pi_{a_2 a_3 a_4 a_5}(\dots) \tilde{\mathcal{R}}^{b_1 b_2 b_3 b_4} = \left[(D+1) \tilde{b} \Pi_{\perp} \right]^{n_b} N^{a_1 a_2 b_3 b_4} + \left[2 \tilde{\mu} \Pi_{\perp} \right]^{n_b} M^{a_1 a_2 b_3 b_4} , \quad (3.151)$$

et la somme de toutes les bulles sera :

$$\left[\frac{\tilde{b}}{1 + (D+1) \tilde{b} \Pi_{\perp}(p)} \right] N^{abmn}(p) + \left[\frac{\tilde{\mu}}{1 + 2 \tilde{\mu} \Pi_{\perp}(p)} \right] M^{abmn}(p) . \quad (3.152)$$

En dimension $D = 4 - \varepsilon$, $\Pi_{\perp}(p) \propto p^{-\varepsilon}$ et devient donc dominant au dénominateur dans l'infrarouge. Finalement, la partie de la dimension anormale venant de la composante de $\tilde{\mathcal{R}}$ sur N^{abmn} est proportionnelle à $1/(D+1)$ dans l'infrarouge dans la limite $d_c \gg 1$. Autrement dit, le facteur $(D+1)$ du couplage suivant N^{abmn} dans l'action contribue comme $1/(D+1)$ à la dimension anormale, ce qui explique le facteur $(5 + \varepsilon)$ dans celle-ci.

3.2.4 Lien avec la théorie à deux champs

En principe, tous les résultats précédents peuvent être obtenus dans la théorie à deux champs basée sur $S[u, h; k]$ (3.27). Cependant, l'utilisation de l'interaction phonon-flexuron au lieu du vertex effectif \mathcal{R} purement transverse réduit considérablement le nombre de simplifications possibles :

- l'interaction avec le phonon longitudinal fait intervenir des intégrales non transverses. Il n'existe pas aujourd'hui de preuve du caractère régulier de la théorie à deux champs dans l'infrarouge. L'utilisation de la régularisation dimensionnelle pourrait alors être problématique.
- le rôle de termes dépendant explicitement de D dans l'action, qui est crucial pour assurer la cohérence des résultats à l'ordre $O(\varepsilon^2/d_c)$ notamment, n'est pas clarifié dans l'écriture de $S[u, h; k]$.
- le passage de β_{λ} à β_b , ou de $\beta_{\mu}(\lambda, \mu)$ à $\beta_{\mu}(b, \mu)$, se fait par un changement de variables dépendant explicitement de ε . Comme ε ne peut intervenir explicitement dans une fonction β hors du terme dimensionnel, il est peu probable que l'équivalence des jeux de fonctions β issus des deux actions soit immédiate. Cela n'empêche cependant pas celles-ci d'être compatibles dans un certain sens, comme les expressions de $\beta_{\tilde{b}}$ obtenues par les développements en ε et $1/d_c$.

- dans la théorie à deux champs, la condition de stabilité du potentiel $D\lambda + 2\mu \geq 0$ prend une expression dépendante de ε , dont la compatibilité avec les troncations de ce développement à un ordre en boucles donné n'est pas évidente. Ceci pourrait être par exemple une source d'anomalies dans β_λ . Cette condition est pourtant automatiquement vérifiée à tous les ordres des autres développements examinés dans ce chapitre.

L'étude comparée des deux formulations du développement en couplage faible est un travail en cours.

3.3 Approches non-perturbatives

L'étude de la phase plate par la théorie des perturbations repose sur des extrapolations de développements en $\varepsilon \ll 1$ ou $d_c \gg 1$ au-delà de leur domaine de validité. Des méthodes de resommation, basées sur des transformations de Borel des séries perturbatives (voir le chapitre 16 de [Kleinert 2001] par exemple), permettent de mieux contrôler ces extrapolations, mais elles nécessitent en général au moins un développement à l'ordre 3. Afin de décrire de façon plus crédible la physique des membranes à deux dimensions, il est donc nécessaire d'avoir recours à d'autres approches du problème ne reposant pas sur un développement au voisinage d'un régime de fluctuations gaussiennes, que nous appellerons un peu abusivement « non-perturbatives »¹⁷. Deux approches ont été développées pour les membranes cristallines : la première (SCSA) se base sur une extension auto-cohérente du développement en $d_c \gg 1$, et donne donc accès avec plus de précision aux lois d'échelle au voisinage des points fixes, la seconde (NPRG) en utilisant le formalisme de l'action effective moyenne exposé dans le Chapitre 1 donne un point de vue complémentaire sur l'évolution des caractéristiques du système avec l'échelle grâce à un développement de l'énergie libre en puissances du gradient de champ \vec{r} .

3.3.1 L'approximation d'écrantage auto-cohérent (SCSA)

3.3.1.1 Principes généraux

L'approximation d'écrantage auto-cohérent (« Self-Consistent Screening Approximation » en anglais) a été utilisée la première fois dans le cadre de l'étude du modèle $O(N)$ [Bray 1974], puis adaptée aux membranes cristallines quelques années plus tard [LeDoussal 1992] (voir aussi [LeDoussal 2017] pour une revue). Elle repose sur la construction d'une « bonne » interpolation entre les deux limites perturbatives $d_c \gg 1$ et $\varepsilon = 4 - D \ll 1$. Pour ce faire, la structure des équations issues du développement en $d_c \gg 1$ est enrichie grâce à un ansatz auto-cohérent.

Le régime $d_c \gg 1$ a été étudié dans la section 3.1.5 par la méthode standard de la théorie des perturbations associée : les fluctuations sont définies par un champ auxiliaire χ_{ab} qui matérialise l'écart d'une configuration donnée à celle du point col atteint dans la limite $d_c \rightarrow +\infty$. L'ensemble des corrections apportées par ce champ de fluctuations s'organise comme une théorie de perturbation usuelle.

17. Le caractère « non-perturbatif » doit se comprendre par rapport aux théories de perturbations usuelles ; en particulier, il ne suppose pas l'absence d'un petit paramètre de développement comme nous le verrons dans la suite.

Il existe une formulation alternative qui consiste à exprimer les corrections dominantes dans la limite $d_c \gg 1$ en termes des champs et vertex de la théorie de perturbation en $\varepsilon = D_c^s - D$. L'esprit est le même que notre approche précédente de la valeur de η_4 à partir de la somme des diagrammes arc-en-ciel avec un nombre arbitraire de bulles habillant le vertex (3.149). En général, la contribution dominante à un ordre donné en $1/d_c$ contient une infinité de diagrammes de la théorie de perturbation en ε ¹⁸, ce qui témoigne du caractère non-perturbatif vis-à-vis de ε du développement en $d_c \gg 1$. C'est ce contenu qui nous intéresse ici pour construire un modèle valable en $D = 2$, loin du régime $\varepsilon \ll 1$.

Il n'est pas simple, en général, de calculer la somme d'une infinité de diagrammes. Cependant, il est souvent possible de construire les contributions dominantes dans la limite $d_c \gg 1$ à un ordre donné comme une série géométrique bâtie à partir des diagrammes à une boucle. Dans notre exemple précédent, nous avons montré que la somme des diagrammes comportant un nombre arbitraire de bulles les unes à la suite des autres est une série géométrique (3.152), et ces diagrammes constituent bien les corrections dominantes à la renormalisation du vertex effectif $\tilde{\mathcal{R}}$ dans la limite $d_c \rightarrow +\infty$. La construction des contributions à l'ordre dominant quand $d_c \gg 1$ par des séries géométriques basées sur des graphes à une boucle du développement en ε est appelée « approximation de la phase aléatoire » (« **R**andom **P**hase **A**pproximation » en anglais).

Une différence fondamentale entre le développement RPA et le développement en ε est que la RPA ne cherche pas à obtenir de flot de renormalisation. Les corrections sont traitées comme des quantités dépendant de l'impulsion externe p qui incluent une somme sur les processus à toutes les échelles sans introduire d'échelle courante k . Il n'y a donc pas de contretermes dans ce formalisme.

De même que le développement en puissances de $1/d_c$ est non-perturbatif en d_c , le développement en ε produit des quantités non-perturbatives en $1/d_c$. Par exemple, η_4 à une boucle est donné par (3.44) :

$$\eta_4^{1-loop} = \frac{12\varepsilon}{24 + d_c} . \quad (3.153)$$

Il est possible de raccorder cette limite avec le développement RPA qui n'est valable que dans la limite $d_c \rightarrow +\infty$ grâce à l'utilisation d'ansatz auto-cohérents inspirés du comportement des constantes de couplage dans le développement en ε .

Afin de mieux comprendre comment le caractère auto-cohérent permet de retrouver le développement en couplage faible, examinons un exemple simplifié [Nelson 1987]. Considérons, dans le cadre d'un développement en $d_c \gg 1$ à l'ordre le plus bas, la correction à l'énergie de courbure κ , qui décrit la renormalisation du champ avec l'échelle¹⁹. Étendons celle-ci à un objet dépendant de l'impulsion de la façon suivante [Nelson 1987] :

$$G_h(p)^{-1} = \kappa p^4 + \Sigma_h(p) = \kappa(p) p^4 . \quad (3.154)$$

Par définition de η ,

$$G_h(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} p^{-4+\eta} \quad \Rightarrow \quad \kappa(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} p^{-\eta} . \quad (3.155)$$

18. L'ensemble des diagrammes arc-en-ciel avec tous les nombres possibles de bulles dans notre exemple précédent.

19. C'est le coefficient du terme cinétique. Comme le SCSA ne nécessite pas la construction du flot de renormalisation, l'introduction d'un coefficient Z décrivant la renormalisation du champ n'est pas nécessaire.

C'est cet ansatz $\kappa(p) \sim p^{-\eta}$ que nous utiliserons pour définir une équation auto-cohérente. L'énergie propre $\Sigma_h(p)$ est donnée au premier ordre de la théorie des perturbations par (3.103) :

$$\Sigma_h(p) = \frac{2}{d_c} \frac{\tilde{b} + (D-2)\tilde{\mu}}{(D-1)} p^4 \int_q \frac{(q_\perp)^4}{q^4 (p-q)^4 \kappa}, \quad (3.156)$$

où q_\perp est défini en (3.96). Remplaçons κ dans le propagateur de flexurons de (3.156) par l'ansatz (3.155), et injectons le résultat dans (3.154) [Nelson 1987] :

$$\begin{aligned} \kappa(p) &= \kappa + p^{-4} \Sigma_h(p) \\ &= \kappa + \frac{2}{d_c} \frac{\tilde{b} + (D-2)\tilde{\mu}}{(D-1)} \int_q \frac{(q_\perp)^4}{q^4 \kappa(p-q)(p-q)^4} \\ &\underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{d_c} \frac{\tilde{b} + (D-2)\tilde{\mu}}{(D-1)} \int_q \frac{(q_\perp)^4}{q^4 (p-q)^{4-\eta}} \\ &\underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{d_c} \frac{\tilde{b} + (D-2)\tilde{\mu}}{(D-1)} I_\perp(2, 2 - \eta/2), \end{aligned} \quad (3.157)$$

l'intégrale transverse I_\perp étant définie dans (3.97) (ou dans l'Annexe B). Son comportement en fonction de p est donné par (3.97), ce qui conduit à :

$$\kappa(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} (p^2)^{(D-4+\eta)/2}. \quad (3.158)$$

D'autre part, par définition, $\kappa(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} p^{-\eta}$, soit finalement $\eta = \frac{4-D}{2}$ [Nelson 1987]. En particulier,

- si $D = 4 - \varepsilon$, cela donne $\eta = 0,5\varepsilon$, à comparer au résultat en couplage faible $\eta_4^{1-loop} = 0,48\varepsilon$;
- si $D = 2$, cela donne $\eta = 1$, à comparer au résultat en couplage faible $\eta_4^{1-loop} = 0,96$.

Ainsi, le caractère auto-cohérent de l'équation permet de retrouver le développement en couplage faible, où rappelons-le d_c n'est pas contraint à être grand.

Insistons sur le fait que $\kappa(p)$ est un objet différent de l'énergie de courbure à l'échelle courante κ_k construit précédemment car il inclut les processus à toutes les échelles. En particulier la stratégie d'utilisation des deux objets pour calculer η est très différente : le flot de renormalisation de κ_k permet de définir une dimension anormale dépendante de l'échelle η_k , qui sera emmenée par le flot de renormalisation à sa valeur dans l'infrarouge donnée par le point fixe attirant le flot, ou alternativement, η est défini à partir de $\kappa(p)$ par l'ansatz (3.155), puis sa valeur est contrainte par une équation auto-cohérente. En particulier, il n'y a pas besoin de définir de point fixe dans ce dernier formalisme. En revanche, η a bien le même sens dans les deux approches (il est défini par le comportement anormal de la fonction de corrélation de flexurons dans l'infrarouge), et peut donc être directement comparé.

3.3.1.2 Énergie propre et potentiel écranté

Le SCSA est basé sur les principes précédents. Il s'agit d'une amélioration du développement RPA, valable seulement dans la limite $d_c \rightarrow +\infty$, grâce à des ansatz dépendants de l'impulsion

qui permettent de construire des équations auto-cohérentes. Le SCSA est plus complet que l'exemple précédent puisqu'il inclut en plus de $\kappa(p)$ des constantes de couplage élastiques b et μ dépendantes de p . Il est défini à partir de la théorie effective de flexurons en interaction à partir des ansatz suivants :

- **Propagateur habillé $\widehat{G}_h(p)$** : son comportement dans l'infrarouge définit η de façon similaire à (3.155). L'énergie de courbure corrigée par les fluctuations thermiques est $\widehat{\kappa}(p)$. L'écart de la partie de $\widehat{\kappa}(p)$ indépendante de p à sa valeur nue κ nécessite l'introduction d'une constante Z_κ . Le propagateur habillé est alors défini par [LeDoussal 1992] :

$$\widehat{G}_h(k) = \frac{1}{\widehat{\kappa}(p)p^4} = \frac{Z_\kappa}{\kappa p^{4-\eta}} = \begin{array}{c} p \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} . \quad (3.159)$$

- **Interaction écrantée $\widehat{\mathcal{R}}$** : l'ansatz utilisé pour l'interaction effective est construit à partir des valeurs des constantes de couplage élastiques corrigées par les fluctuations, et donc dépendantes de l'impulsion $\widehat{b}(p)$ et $\widehat{\mu}(p)$. Autrement dit, les fluctuations thermiques modifient les valeurs des coefficients d'élasticité, le potentiel d'interaction est alors « écranté ». Afin de différencier ces variables de celles construites par le développement RPA valable seulement dans la limite $d_c \rightarrow +\infty$, elles sont notées à l'aide du symbole « $\widehat{\cdot}$ » au lieu de « $\widetilde{\cdot}$ ». Puisque la théorie est renormalisable, la structure du potentiel écranté est la même que celle du potentiel nu [LeDoussal 1992] :

$$\widehat{R}_{abmn}(p) = \widehat{b}(p)N_{abmn}(p) + \widehat{\mu}(p)M_{abmn}(p) = \begin{array}{c} a \qquad m \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ b \qquad n \end{array} . \quad (3.160)$$

Examinons de plus près la construction du potentiel écranté. Dans le développement RPA, celui-ci est donné par l'ensemble de graphes en chaîne de bulles comme nous l'avons vu précédemment :

$$\begin{array}{c} a \qquad m \qquad a \qquad m \qquad a \qquad m \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ b \qquad n \qquad b \qquad n \qquad b \qquad n \end{array} + \dots \quad (3.161)$$

Le SCSA améliore ce développement en remplaçant le propagateur nu des flexurons $G_h(p)$ par le propagateur habillé $\widehat{G}_h(p)$. Cela revient à utiliser à la place de la polarisation Π (3.150) la polarisation habillée $\widehat{\Pi}(p)$ définie par :

$$\widehat{\Pi}_{abmn}(p) = \int_q (p-q)_a q_b (p-q)_m q_n \widehat{G}_h(q) \widehat{G}_h(p-q) = \begin{array}{c} p-q \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ q \end{array} , \quad (3.162)$$

qui se décompose de même :

$$\widehat{\Pi}^{abmn}(p) = \widehat{\Pi}_\perp(p) X^{abmn} + \widehat{\Pi}_Y(p) Y^{abmn}(p) + \widehat{\Pi}_p(p) p^a p^b p^m p^n . \quad (3.163)$$

Puisque le vertex effectif écranté est aussi purement transverse, seul $\widehat{\Pi}_\perp(p)$ contribue. Celui-ci s'exprime en fonction des intégrales transverses (3.97) :

$$\widehat{\Pi}_\perp(p) = \frac{1}{D^2 - 1} I_\perp(2 - \eta/2, 2 - \eta/2) , \quad (3.164)$$

où la dépendance explicite en η est due au remplacement du propagateur nu par $\widehat{G}_h(p)$. Dans la limite $d_c \rightarrow +\infty$, la dimension anormale η s'annule, $G_h(p) \simeq \widehat{G}_h(p)$ et le développement RPA est retrouvé.

Finalement, le potentiel écranté est défini par une somme infinie de graphes, qui forme encore une série géométrique, mais qui dépend maintenant de η *via* le propagateur habillé :

$$\begin{aligned} -\widehat{R}_{abmn}(p) &= \begin{array}{c} a \quad m \quad a \quad m \quad a \quad m \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ b \quad n \quad b \quad n \quad b \quad n \end{array} + \dots \\ &= -\widetilde{R}_{abmn}(q) + (-\widetilde{R}_{aba'b'}(p)) \widehat{\Pi}^{a'b'm'n'}(p) (-\widetilde{R}_{m'n'mn}(p)) + \dots \\ &= \left[\frac{1}{1 + \widetilde{R}(p) \cdot \widehat{\Pi}(p)} \right]_{ab}^{m'n'} (-\widetilde{R}_{m'n'mn}(p)) , \end{aligned} \quad (3.165)$$

ce qui donne l'équation auto-cohérente suivante [LeDoussal 1992] :

$$\boxed{\begin{array}{c} \widehat{R}_{abmn}(p) = \widetilde{R}_{abmn}(p) - \widetilde{R}_{aba'b'}(p) \widehat{\Pi}^{a'b'm'n'}(p) \widehat{R}_{m'n'mn}(p) \\ \begin{array}{c} a \quad m \quad a \quad m \quad a \quad m \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ b \quad n \quad b \quad n \quad b \quad n \end{array} = \begin{array}{c} a \quad m \quad a \quad m \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ b \quad n \quad b \quad n \end{array} + \begin{array}{c} a \quad m \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ b \quad n \end{array} . \end{array}} \quad (3.166)$$

Comme la structure tensorielle du vertex écranté est la même que celle du vertex nu, la solution de (3.166) s'écrit en vertu de (3.78) et (3.164) sous la même forme que (3.152) [LeDoussal 1992] :

$$\begin{cases} \widehat{b}(p) = \frac{\widetilde{b}}{1 + \frac{(D+1)}{(D^2-1)} \widetilde{b} I_\perp(2 - \eta/2, 2 - \eta/2)} \underset{p \rightarrow 0}{\simeq} \frac{D^2 - 1}{(D + 1) I_\perp(2 - \eta/2, 2 - \eta/2)} \\ \widehat{\mu}(p) = \frac{\widetilde{\mu}}{1 + \frac{2}{(D^2-1)} \widetilde{\mu} I_\perp(2 - \eta/2, 2 - \eta/2)} \underset{p \rightarrow 0}{\simeq} \frac{D^2 - 1}{2 I_\perp(2 - \eta/2, 2 - \eta/2)} \end{cases} . \quad (3.167)$$

Dans la limite infrarouge, la forme du potentiel écranté se simplifie et prend une valeur universelle indépendante des valeurs des couplages nus $\widetilde{\mu}$ et \widetilde{b} . Ceci correspond dans ce langage à l'atteinte du régime infrarouge universel contrôlé par \mathbf{P}_4 , où la dépendance en la condition initiale microscopique est perdue, dans le formalisme du groupe de renormalisation. Afin de déterminer η défini par le comportement de $\widehat{G}_h(p)$, il est suffisant d'utiliser dans les équations

SCSA la valeur limite du potentiel écranté dans l'infrarouge ; plus précisément, le fait de ne pas inclure les effets du régime ultraviolet entraîne une mauvaise détermination de Z_κ , mais pas de η qui est universel [Bray 1974].

L'écrantage du potentiel change la valeur de l'énergie propre des flexurons. Définissons $\widehat{\Sigma}(p)$ comme l'énergie propre contenant un propagateur habillé et un potentiel écranté. Comme $\widehat{\mathcal{R}}$ a la même structure tensorielle que $\widetilde{\mathcal{R}}$, celle-ci a une forme similaire à (3.156) :

$$\begin{aligned} \widehat{\Sigma}_h(p) &= \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} = -\frac{2}{d_c} \int_q p^a (p-q)^b (p-q)^m p^n \widehat{R}_{abmn}(q) \widehat{G}_h(p-q) \\ &= -\frac{2}{d_c} p^4 \int_q \frac{\widehat{b}(q) + (D-2)\widehat{\mu}(q)}{(D-1)} \frac{(q_\perp)^4}{\widehat{\kappa}(p-q)(p-q)^4}, \end{aligned} \quad (3.168)$$

dans laquelle nous pouvons injecter les coefficients élastiques écrantés (3.167) et l'énergie de courbure habillée (3.159) :

$$\begin{aligned} \widehat{\Sigma}_h(p) &= -\frac{D(D-1)}{d_c} \frac{Z_\kappa p^4}{\kappa} \int_q \frac{(q_\perp)^4}{(p-q)^{4-\eta} I_\perp(2-\eta/2, 2-\eta/2)} \\ &= -\frac{D(D-1)}{d_c} \frac{Z_\kappa p^{4-\eta}}{\kappa} \frac{G^{(2,2)}(D/2+\eta, 2-\eta/2)}{G^{(2,2)}(2-\eta/2, 2-\eta/2)}, \end{aligned} \quad (3.169)$$

où nous avons utilisé dans la dernière ligne la valeur des intégrales transverses (3.97). La fonction $G^{(2,2)}$ a été définie plus tôt (3.93).

Finalement, afin de retrouver la limite $d_c \gg 1$, le propagateur habillé est relié à l'énergie propre à partir d'une équation inspirée du développement RPA. Dans celui-ci, le propagateur habillé est donné par la somme de toutes les chaînes de graphes arc-en-ciel (qui dominent dans la limite $d_c \rightarrow +\infty$). En SCSA, ce sont des chaînes de $\widehat{\Sigma}_h(p)$:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_h(p) &= \text{---} + \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{---}} \text{---} + \dots \\ &= G_h(p) + G_h(p) \widehat{\Sigma}_h(p) G_h(p) + G_h(p) \widehat{\Sigma}_h(p) G_h(p) \widehat{\Sigma}_h(p) G_h(p) + \dots \\ &= \frac{1}{G_h^{-1}(p) - \widehat{\Sigma}_h(p)}. \end{aligned} \quad (3.170)$$

$$\Rightarrow \widehat{\kappa}(p) = \kappa + p^{-4} \widehat{\Sigma}_h(p). \quad (3.171)$$

D'après (3.169), c'est bien $\widehat{\Sigma}_h(p)$ qui domine dans l'infrarouge, soit :

$$\widehat{\Sigma}_h(p) \simeq -\frac{Z_\kappa}{\kappa p^{4-\eta}}, \quad (3.172)$$

ce qui, par comparaison avec (3.169) donne finalement :

$$1 = \frac{D(D-1)}{d_c} \frac{G^{(2,2)}(D/2+\eta, 2-\eta/2)}{G^{(2,2)}(2-\eta/2, 2-\eta/2)}, \quad (3.173)$$

ou encore, en remplaçant $G^{(2,2)}$ par son expression (3.93) en termes de fonctions Γ , s'écrit [LeDoussal 1992] :

$$\eta_4 = \frac{2}{d_c} D(D-1) \frac{\Gamma(2-\eta_4)\Gamma\left(2-\frac{\eta_4}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\eta_4}{2}\right)\Gamma(\eta_4+D)}{\Gamma\left(\eta_4+\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4+D-\eta_4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-D-2\eta_4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\eta_4+D}{2}\right)}. \quad (3.174)$$

La résolution de cette équation auto-cohérente donne la valeur de η_4 dans la phase plate. Notons que l'utilisation de $\kappa(p)$ au lieu de κ_k nous conduit inévitablement dans la phase plate d'exposant anormal η_4 . En effet, c'est le choix de l'ansatz auto-cohérent qui définit ici le régime infrarouge atteint, plutôt qu'une condition initiale microscopique dans le formalisme du groupe de renormalisation. Cela ne veut pas dire pour autant que les autres régimes décrits dans le diagramme de flot de renormalisation sont inaccessibles. Par exemple, en forçant $\widehat{b}(p) = 0$ (ce qui revient à choisir $\tilde{b} = 0$ d'après (3.167)), l'équation auto-cohérente sur la dimension anormale devient [LeDoussal 2017] :

$$\eta_3 = \frac{2}{d_c} (D+1)(D-2) \frac{\Gamma(2-\eta_3)\Gamma\left(2-\frac{\eta_3}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\eta_3}{2}\right)\Gamma(\eta_3+D)}{\Gamma\left(\eta_3+\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2+D-\eta_3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-D-2\eta_3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\eta_3+D}{2}\right)}, \quad (3.175)$$

qui est la dimension anormale au point fixe de compressibilité infinie \mathbf{P}_3 .

3.3.1.3 Dimensions anormales

Examinons les différents cas limites :

- $d_c \gg 1$: puisque $\eta \underset{d_c \gg 1}{=} O(1/d_c)$, cette limite est atteinte en posant $\eta = 0$ dans le membre de droite des équations (3.174) et (3.175), ce qui donne [LeDoussal 1992] :

$$\begin{aligned} \eta_4 \underset{d_c \gg 1}{=} & \frac{8(D-1)}{d_c(D+2)B\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right)B\left(\frac{D}{2}, 2-\frac{D}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right) \\ \eta_3 \underset{d_c \gg 1}{=} & \frac{8(D-2)(D+1)}{d_c D(D+2)B\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right)B\left(\frac{D}{2}, 2-\frac{D}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right), \end{aligned} \quad (3.176)$$

en parfait accord avec le développement perturbatif associé (3.84) et (3.86), ce qui est attendu puisque nous pouvons vérifier à chaque étape du calcul SCSA qu'imposer $\eta = 0$, en transformant les propagateurs habillés en propagateurs nus, redonne le développement RPA qui est équivalent à l'ordre d'une boucle des perturbations en $1/d_c$. En particulier, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \eta_4 \underset{d_c \gg 1, \varepsilon \ll 1}{=} & \frac{12\varepsilon}{d_c} - \frac{6\varepsilon^2}{d_c} + O(\varepsilon^3) + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right) \\ \eta_3 \underset{d_c \gg 1, \varepsilon \ll 1}{=} & \frac{10\varepsilon}{d_c} - \frac{37\varepsilon^2}{6d_c} + O(\varepsilon^3) + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right), \end{aligned} \quad (3.177)$$

en accord avec le développement en $d_c \gg 1$ du calcul à deux boucles en ε .

- $\varepsilon \ll 1$: cette limite s'obtient en développant en ε les deux membres des équations (3.174) et (3.175) [LeDoussal 1992] :

$$\begin{aligned}\eta_4 &\stackrel{d_c \gg 1, \varepsilon \ll 1}{=} \frac{12\varepsilon}{24 + d_c} - \frac{6d_c(30 + d_c)\varepsilon^2}{(24 + d_c)^3} + O(\varepsilon^3) \\ \eta_3 &\stackrel{d_c \gg 1, \varepsilon \ll 1}{=} \frac{10\varepsilon}{20 + d_c} - \frac{d_c(890 + 37d_c)\varepsilon^2}{6(20 + d_c)^3} + O(\varepsilon^3).\end{aligned}\tag{3.178}$$

Tout d'abord, notons que le SCSA reproduit parfaitement la structure non-perturbative en d_c à l'ordre 1 en ε : le SCSA dans la phase plate redonne exactement les résultats à une boucle des deux séries perturbatives [LeDoussal 1992], contrairement au modèle $O(N)$ par exemple, où la fiabilité des résultats numériques de η pour $N \simeq 1$ n'est pas garantie [Bray 1974]. De plus, η_3 donne également exactement le résultat à deux boucles (3.140). Pour η_4 , une différence numériquement faible apparaît. En effet, le SCSA, en interpolant entre les deux régimes limites, contient de l'information au-delà de l'approximation de couplage faible.

- $D = 2, d_c = 1$: dans ce cas, les équations doivent être résolues numériquement, ce qui conduit à [LeDoussal 2017] :

$$\begin{aligned}\eta_4 &\simeq 0,821 \\ \eta_3 &= 0.\end{aligned}\tag{3.179}$$

Le second résultat est une conséquence de la présence d'un facteur $(D - 2)$ dans l'équation (3.175). La valeur prédite par le SCSA pour η dans la phase plate se situe entre le résultat (sur-estimé) issu du développement en epsilon $\eta_4^{2-loop} \simeq 0,91$ et le résultat (sous-estimé) issu du développement en $1/d_c$ $\eta_4 \simeq 0,66$. L'implémentation d'une procédure SCSA améliorée change cette valeur en $\eta_4 \simeq 0,789$ [Gazit 2009].

Ainsi, le SCSA, en interpolant entre les deux régimes limites quasi-gaussiens, permet de prédire une valeur de η_4 dans la phase plate corrigée, située entre les prédictions des deux développements perturbatifs. Les contraintes apportées par le caractère auto-cohérent des équations SCSA restreignent suffisamment les valeurs possibles de la dimension anormale pour pouvoir la calculer dans un régime où les couplages ne sont pas faibles.

Cependant, le contrôle du régime infrarouge atteint est difficile dans le formalisme SCSA. En particulier, celui-ci repose sur la conjecture que le comportement que l'on cherche à décrire est bien reproduit par un comportement d'échelle bien identifié dans au moins une des limites $d_c \gg 1$ ou $\varepsilon \ll 1$ [Bray 1974], qui semble être très bien vérifiée dans la phase plate des membranes cristallines. De plus la précision du schéma d'approximation utilisé est particulièrement difficile à évaluer dans ce formalisme [Gazit 2009].

3.3.2 Action effective moyenne des membranes cristallines (NPRG)

Une alternative au SCSA consiste à travailler dans un formalisme qui ne repose sur aucun des deux développements $\varepsilon \ll 1$ et $d_c \gg 1$, par exemple en définissant un autre type de développement qui ne suppose pas un petit écart à une théorie gaussienne. C'est le cas du calcul du flot

de renormalisation de l'action effective moyenne (« **Non-Perturbative Renormalisation Group** en anglais).

3.3.2.1 Schéma de troncation

L'ansatz le plus simple que nous pouvons utiliser pour écrire l'action effective des membranes cristallines découle d'un développement dérivatif au moins de type LPA' (car l'exposant η , crucial dans la stabilisation de la phase ordonnée, correspond à la dimension anormale du champ de position), et d'un développement en champs. Dans ce cas, les constantes élastiques peuvent toujours être identifiées comme des constantes de couplage des champs en interaction. Plus précisément, l'ansatz s'écrit [Kownacki 2009] :

$$\Gamma_k[\vec{r}] = \int_x \left[\frac{Z_k}{2} (\partial^2 \vec{r})^2 + \frac{1}{8} c_k^{abmn} (\partial_a \vec{r} \cdot \partial_b \vec{r} - \zeta_k^2 \delta_{ab}) (\partial_m \vec{r} \cdot \partial_n \vec{r} - \zeta_k^2 \delta_{mn}) \right] + O((\partial \vec{r})^6, \partial^6). \quad (3.180)$$

Le coefficient du terme cinétique est la renormalisation de champ Z_k , ce qui suppose que κ a été absorbé dans une redéfinition des constantes de couplage²⁰ : $\vec{r} \mapsto (Z_k/\kappa)^{1/2} \vec{r}$, $c_k \mapsto (\kappa/Z_k)^2 c_k$, $\zeta_k \mapsto (Z_k/\kappa)^{1/2} \zeta_k$.

Le développement LPA' est un développement en dérivées du champ de position. L'ansatz (3.180) est donc basé sur un développement en puissances du gradient du champ \vec{r} plutôt qu'un développement en couplage faible. Il est donc supposé être efficace pour décrire des régimes dans lesquels les configurations où \vec{r} présente de forts gradients sont énergétiquement pénalisées (voir Figure 3.3), ce qui est notamment le cas de la phase plate.

Sous cette forme, Γ_k permet de calculer à la fois les propriétés de la phase ordonnée, mais aussi de la transition vers la phase froissée [Essafi 2014]. En effet, ces deux cas se distinguent par la valeur du paramètre ζ_k dans l'infrarouge²¹ : si $\zeta_k \rightarrow 0$, le système subit la transition de froissement, s'il atteint une valeur finie non nulle, il est dans sa phase plate (voir Chapitre 2). Dans les théories de perturbation examinées précédemment, le flot de ζ_k n'est accessible que *via* l'action de la transition de phase, et non celle de la phase plate qui fournit un développement bien distinct.

Il est intéressant de noter que comme le développement LPA' est non-perturbatif en constante de couplage, le champ de position n'est pas contraint à paramétrer un écart au minimum champ moyen supposé petit ; il est donc possible de travailler directement avec le champ \vec{r} sans introduire de brisure explicite de l'invariance par rotation. Bien entendu, la différence entre phonons et flexurons doit nécessairement se retrouver dans le spectre de la théorie de la phase plate (prédit par le mécanisme de brisure de symétrie) ; ce point sera discuté un peu plus tard.

Cet ansatz est-il suffisant pour décrire la physique des membranes cristallines ?

- L'influence d'une dépendance en impulsion non triviale des constantes de couplage, qui est tronquée par le développement dérivatif, a été étudiée *via* l'enrichissement suivant de l'ansatz [Hasselmann 2011] :

$$\Gamma_k[\vec{r}] = \int_{x,y} \left[\frac{Z_k(x-y)}{2} (\partial^2 \vec{r}(x) \cdot \partial^2 \vec{r}(y)) + \frac{1}{8} c_k^{abmn}(x-y) (\partial_a \vec{r}(x) \cdot \partial_b \vec{r}(x) - \zeta_k^2 \delta_{ab}) (\partial_m \vec{r}(y) \cdot \partial_n \vec{r}(y) - \zeta_k^2 \delta_{mn}) \right]. \quad (3.181)$$

20. Comme dans la théorie de perturbation.

21. ζ_k joue un rôle analogue à l'aimantation dans le modèle $O(N)$.

La conclusion de ce travail est qu'une telle dépendance ne change pas les résultats obtenus pour les propriétés universelles de la phase plate. Ce n'est en revanche pas le cas à la transition de froissage où des modifications sont apportées à la valeur de η [Braghin 2010]. En effet, d'un point de vue qualitatif, l'impulsion p est importante dans les configurations où le champ de position \vec{r} présente de forts gradients (voir Figure 3.3) qui sont énergétiquement pénalisées dans la phase plate; les négliger semble donc être une hypothèse raisonnable pour décrire la phase ordonnée, mais pas la transition de froissement.

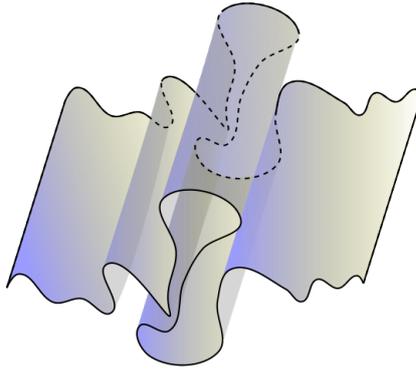


FIGURE 3.3 – Configuration typique où le champ de position présente des gradients forts.

- L'influence des ordres plus élevés du développement en champ²² a également été évaluée [Essafi 2014]. Alors que ceux-ci semblent corriger le comportement du système au voisinage de la transition vers la phase froissée, les constantes de couplage de tous les termes d'ordre supérieur en champ n'interviennent pas dans le flot de celles qui apparaissent dans (3.180), ni de η dans la phase plate. L'ansatz coupé à l'ordre 4 en champs semble donc décrire correctement le comportement de la membrane dans cette phase.

Ainsi, l'ansatz (3.100), combinant simplicité et précision, est particulièrement efficace pour décrire les propriétés de la phase plate des membranes cristallines. En effet, le développement en puissances du gradient du champ de position a l'air mieux adapté à sa description qu'un développement à faible valeur de l'élasticité.

3.3.2.2 Flot de renormalisation

La description de la phase plate ne requiert pas d'obtenir toute la dépendance fonctionnelle du flot de $\Gamma_k[\vec{r}]$ en fonction du champ; l'équation de Wetterich peut être évaluée dans une configuration particulière, que nous choisirons égale au minimum de la théorie de champ moyen \vec{r}_{min} . Cela vient du fait que dans le cadre du développement en champ, nous nous intéressons principalement au flot de constantes de couplage et non pas de fonctionnelles du champ \vec{r} . Au minimum de Γ_k ,

$$\vec{r}_{min} = \zeta_k x^i \vec{e}_i, \quad (3.182)$$

où nous rappelons que les indices latins parcourent $\llbracket 1; D \rrbracket$.

22. Jusqu'à $O((\partial r)^8)$.

Le propagateur renormalisé à l'échelle k s'écrit comme l'inverse de la fonction à deux points $\Gamma_k^{(2)}$, que nous évaluons au minimum (3.182) :

$$\Gamma_{k,\alpha\beta}^{(2)}[\vec{r}_{min}; p, -p] = \delta_{\alpha\beta} Z_k p^4 + \delta_{\alpha}^i \delta_{\beta}^j P_{ij}^L(p) (\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2 p^2 + \delta_{\alpha}^i \delta_{\beta}^j P_{ij}^T(p) \mu_k \zeta_k^2 p^2 . \quad (3.183)$$

Grâce à sa décomposition sur des projecteurs orthogonaux, auxquels on peut ajouter le projecteur sur l'espace externe²³,

$$P_{\alpha\beta}^F = \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha}^i \delta_{i\beta} , \quad (3.184)$$

$\Gamma_{k,\alpha\beta}^{(2)}$ est simple à inverser, ce qui nous donne accès au spectre de la théorie :

- d_c flexurons de propagateur :

$$G_0(p) = \frac{1}{Z_k p^4 + R_k(p)} . \quad (3.185)$$

- $(D - 1)$ phonons transverses de propagateur :

$$G_1(p) = \frac{1}{Z_k p^4 + \mu_k \zeta_k^2 p^2 + R_k(p)} . \quad (3.186)$$

Ces modes sont eux aussi sans masse, mais comme leur comportement est sous-dominant comparé aux flexurons dans l'infrarouge, il est utile de définir une pseudo-masse donnée par le terme proportionnel à p^2 , qui vaut ici $\mu_k \zeta_k^2$. Celle-ci permet de mieux comprendre le phénomène de découplage des phonons dans l'infrarouge (voir section 3.3.2.4).

- 1 phonon longitudinal de propagateur :

$$G_2(p) = \frac{1}{Z_k p^4 + (\lambda + 2\mu_k) \zeta_k^2 p^2 + R_k(p)} , \quad (3.187)$$

et de pseudo-masse $(\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2$.

Nous retrouvons donc un spectre identique à celui des théories de perturbations étudiées précédemment, mais comme le spectre est identifié directement à partir de la fonction à deux points $\Gamma_k^{(2)}$, il n'y a pas besoin d'introduire une brisure explicite de l'invariance par rotation sur le champ \vec{r} pour définir les phonons et les flexurons.

Notons également que bien que ce spectre soit celui de la phase plate à $k \neq 0$, cela n'empêche pas d'utiliser ce formalisme pour décrire la transition de froissage qui peut être atteinte dans la limite infrarouge.

Comme dans la théorie de la phase plate développée en couplage faible, il est possible d'identifier toutes les constantes de couplage à partir des dérivées de la fonction à deux points par rapport à p :

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(p^2)^2} \left[\Gamma_{k,D+1}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}} \\ \mu_k &= \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\Gamma_{k,D}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}} \\ \lambda_k &= \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\Gamma_{k,D}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}} - \mu_k , \end{aligned} \quad (3.188)$$

23. Nous rappelons que les indices grecs parcourent $\llbracket 1; d \rrbracket$, et les indices latins $\llbracket 1; D \rrbracket$.

où p_D est la $D^{\text{ième}}$ composante de \vec{p} .

Considérons de façon générale, la constante de couplage g_k définie par :

$$g_k = \frac{1}{a!} \frac{d^a}{d(p^2)^a} \left[\Gamma_{k,\alpha\beta}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}}, \quad (3.189)$$

où suivant les valeurs de a , α et β , g_k peut décrire soit Z_k , soit μ_k , soit λ_k . Le flot de renormalisation de g_k est donné par sa dérivée partielle par rapport à t :

$$\partial_t g_k = \lim_{p^2 \rightarrow 0} \frac{1}{a!} \frac{d^a}{d(p^2)^a} \left[\partial_t \Gamma_{k,\alpha\beta}^{(2)}[\vec{r}_{min}; p, -p] + \int_q \Gamma_{k,\alpha\beta\gamma}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q-p, p, -q] r_{min}^\gamma(q) \right]. \quad (3.190)$$

L'évaluation du second terme se fait à partir des dérivées de Γ_k par rapport au champ (détails de calcul dans l'Annexe E). Le premier, dépendant du flot de la fonction à deux points, est directement donné par l'équation de Wetterich (1.45). Afin de condenser les expressions, il est utile de l'écrire en fonction de la dérivée $\hat{\partial}_t$, qui est une dérivée par rapport à t qui agit seulement sur la coupure $R_k(q)$:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_{k,\alpha\beta}^{(2)}[\vec{r}_{min}; p, -p] = & -\frac{1}{2} \hat{\partial}_t \left\{ \int_q \left[\frac{1}{\Gamma_k^{(2)}[\vec{r}_{min}; q, -q] + R_k(q)} \right]^{\nu\gamma} \left[\Gamma_k^{(4)}[\vec{r}_{min}; p, -p, q, -q] \right]_{\alpha\beta\gamma\nu} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \hat{\partial}_t \left\{ \int_q \left[\frac{1}{\Gamma_k^{(2)}[\vec{r}_{min}; q, -q] + R_k(q)} \right]^{\nu\gamma} \left[\Gamma_k^{(3)}[\vec{r}_{min}; p, -q, q-p] \right]_{\alpha\gamma\theta} \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{\Gamma_k^{(2)}[\vec{r}_{min}; q-p, p-q] + R_k(p-q)} \right]^{\theta\omega} \left[\Gamma_k^{(3)}[\vec{r}_{min}; -p, p-q, q] \right]_{\beta\omega\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (3.191)$$

La combinaison de (3.190) et (3.191) donne accès au flot de renormalisation de toutes les constantes de couplage. Celui-ci est exprimé à l'aide de fonctions de seuil génériques dont les définitions se trouvent dans l'Annexe F, et qui correspondent aux restes des intégrales sur l'impulsion de boucle q , elles dépendent donc explicitement de la forme choisie pour la fonction de coupure. Il existe plusieurs familles de fonctions de seuil (voir Annexe F), la plus courante dans le flot des constantes de couplage est :

$$l_{abc}^{D+\alpha} = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c, \quad (3.192)$$

où $1/(4v_D) = 2^{D-1} \pi^{D/2} \Gamma(D/2)$, et les fonctions $G_i(q)$ sont les propagateurs des différents modes de fluctuation de la théorie de la phase plate définis en (3.185), (3.186) et (3.187). Grâce à la présence de la coupure $R_k(q)$ dans les propagateurs, les fonctions de seuil sont finies à la fois dans l'ultraviolet et l'infrarouge.

Finalement, il est attendu que les équations de flot de renormalisation admettent des points fixes lorsqu'elles sont exprimées en fonction de variables adimensionnées (voir Chapitre 1). Nous noterons donc à présent à l'aide du symbole « $\bar{\cdot}$ » les contreparties adimensionnées de nos grandeurs. Pour un couplage de dimension $\Delta(g)$, $\bar{g}_k = k^{-\Delta(g)} g_k$. Le flot des constantes de couplage

élastiques s'écrit alors [Kownacki 2009] :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\mu}_k = & (D - 4 + 2\eta_k) \bar{\mu}_k + \frac{4v_D}{D(D+2)(\bar{\mu}_k + \bar{\lambda}_k) \bar{\zeta}_k^2} \left[2\bar{\mu}_k D(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k) (\bar{l}_{010}^{D+2} - \bar{l}_{001}^{D+2}) \right. \\ & + 2\bar{\zeta}_k^2 (\bar{\mu}_k + \bar{\lambda}_k) (3\bar{\mu}_k + \bar{\lambda}_k)^2 \bar{l}_{002}^{D+4} + \bar{\zeta}_k^2 \bar{\mu}_k^2 (\bar{\mu}_k + \bar{\lambda}_k) (D-2)(D+4) \bar{l}_{020}^{D+4} \\ & \left. + 2\bar{\zeta}_k^2 \bar{\mu}_k^2 (\bar{\mu}_k + \bar{\lambda}_k) d_c \bar{l}_{200}^{D+4} \right], \end{aligned} \quad (3.193)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\lambda}_k = & (D - 4 + 2\eta_k) \bar{\lambda}_k + \frac{2v_D}{D(D+2)(\bar{\mu}_k + \bar{\lambda}_k) \bar{\zeta}_k^2} \left[8\bar{\mu}_k (\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k) (\bar{l}_{010}^{D+2} - \bar{l}_{001}^{D+2}) \right. \\ & + \bar{\zeta}_k^2 (\bar{\lambda}_k + \bar{\mu}_k) ((12 + D(D+6)) \bar{\lambda}_k^2 + 12(D+4) \bar{\mu}_k \bar{\lambda}_k + 36\bar{\mu}_k^2) \bar{l}_{002}^{D+4} \\ & + \bar{\zeta}_k^2 (\bar{\lambda}_k + \bar{\mu}_k) (D(D^2 + D - 2) \bar{\lambda}_k^2 + 8(D^2 + D - 2) \bar{\mu}_k \bar{\lambda}_k + 4(2 + 3D) \bar{\mu}_k^2) \bar{l}_{020}^{D+4} \\ & \left. + \bar{\zeta}_k^2 (\bar{\lambda}_k + \bar{\mu}_k) d_c (D(D+2) \bar{\lambda}_k^2 + 4(D+2) \bar{\mu}_k \bar{\lambda}_k + 4\bar{\mu}_k^2) \bar{l}_{200}^{D+4} \right], \end{aligned} \quad (3.194)$$

Ces équations, valables à la fois dans la phase ordonnée et à la transition de phase, sont non-polynomiales grâce au caractère non perturbatif en constantes de couplage du schéma de troncation LPA'. L'expression générale de la dimension anormale η_k est assez longue, elle est simplement donnée en annexe (voir (E.52)). Des exemples plus explicites seront détaillés plus tard.

3.3.2.3 Fonction de coupure

La dépendance en l'échelle courante k des quantités renormalisées dans le formalisme de l'action effective moyenne est générée grâce à un terme de masse ΔS_k (1.37) qui gèle les modes de fluctuations aux énergies plus petites que k . Ce découpage entre modes gelés et fluctuants est défini par la fonction de coupure $R_k(q)$ (voir Chapitre 1) qui se comporte typiquement comme k^2 dans la limite $q \ll k$ (1.40) :

$$\Delta S_k[\vec{r}] = \frac{1}{2} \int_{x,y} r_\alpha(x) R_k^{\alpha\beta}(x-y) r_\beta(y) = \frac{1}{2} \int_q r_\alpha(q) R_k^{\alpha\beta}(q) r_\beta(-q). \quad (3.195)$$

Comme le champ \vec{r} est vectoriel, $R_k^{\alpha\beta}(q)$ est promu au rang de tenseur ; sa structure est choisie la plus simple possible $R_k^{\alpha\beta}(q) = \delta^{\alpha\beta} R_k(q)$.

Une des particularités des membranes cristallines est qu'elles présentent des modes de Goldstone dont la relation de dispersion est quadratique (les flexurons), qui deviennent dominants dans la limite infrarouge, et dont le propagateur est :

$$G_0(q) = \frac{1}{Z_k q^4 + R_k(q)}. \quad (3.196)$$

Cela requiert une adaptation de la forme de la fonction de coupure $R_k(q)$ pour des raisons d'homogénéité :

- soit $R_k(q)$ se comporte encore comme une masse,

$$R_k(q) \underset{q \ll k}{\sim} k^2, \quad (3.197)$$

mais dans ce cas elle doit se coupler non plus au champ mais à ses dérivées :

$$\Delta S_k[\vec{r}] = \frac{1}{2} \int_q \partial_\alpha r^\mu(q) R_{k,\mu\nu}^{\alpha\beta}(q) \partial_\beta r^\nu(-q), \quad (3.198)$$

de façon à ce que $\Delta S_k \sim k^4$. Cette solution a l'avantage de respecter l'invariance par translation de la théorie (car l'ajout d'un vecteur constant à \vec{r} ne modifie pas sa dérivée, et donc pas ΔS_k non plus) ; cependant la coupure devient un moins bon régulateur infrarouge pour le propagateur, et donc pour l'intégrale de boucle de l'équation de Wetterich (1.45). Plus précisément, le flot de Γ_k est toujours bien défini, mais pas celui de ses dérivées par rapport au champ (voir Annexe C). La combinaison d'une coupure invariante par translation et d'un développement dérivatif est donc dangereuse ;

- soit le comportement de $R_k(q)$ dans l'infrarouge est modifié en $R_k(q) \underset{q \ll k}{\sim} k^4$. Il ne s'agit plus d'une masse, dimensionnellement parlant, et cela brise l'invariance par translation, mais aucune divergence infrarouge ne peut être générée en présence d'une telle coupure. La brisure de l'invariance par translation est *a priori* dangereuse, il ne faudrait pas par exemple qu'elle emmène le flot vers des points fixes fictifs, mais en réalité une identité de Ward protège Γ_k des conséquences d'une brisure de l'invariance par translation par la coupure (détails dans l'Annexe E).

Les fonctions présentées dans le Chapitre 1 (1.42) sont donc adaptées en conséquence (voir aussi Figure 3.4) :

$$\begin{cases} R_k^1(q) &= Z_k(k^4 - q^4)\Theta(k^4 - q^4) \\ R_k^2(q) &= Z_k \frac{q^4}{e^{q^4/k^4} - 1} \\ R_k^3(q) &= Z_k k^4 e^{-q^4/k^4} \end{cases} . \quad (3.199)$$

3.3.2.4 Paramètre d'extension et minimisation de l'énergie libre

Le paramètre d'extension ζ_k définit le minimum de l'action effective $\Gamma_k[\vec{r}]$. Son importance est cruciale car c'est lui qui permet de discriminer la configuration d'équilibre parmi toutes les configurations plates accessibles à la membrane ; grâce à la présence de l'élasticité, des configurations plus ou moins étirées ou compressées ont des énergies différentes. Le minimum de l'énergie libre est généralement défini par :

$$\frac{\delta \Gamma_k[\vec{r}_{min}]}{\delta r^\alpha} = 0, \quad (3.200)$$

mais à cause de l'invariance par translation, il peut être vérifié que cette condition est remplie quelle que soit la configuration plate choisie. Un critère plus précis est donc requis pour singulariser ζ_k comme le paramètre d'extension au minimum.

Plusieurs méthodes permettent d'obtenir le flot de ζ_k . La première consiste à dériver Γ_k non pas par rapport au champ de position \vec{r} mais à ses dérivées $\partial_i \vec{r}$, ce qui supprime l'effet indésirable de l'invariance par translation ; le calcul résultant étant assez fastidieux, il est présenté dans l'Annexe E. La seconde méthode, que nous présentons ici, repose sur l'analyse du potentiel

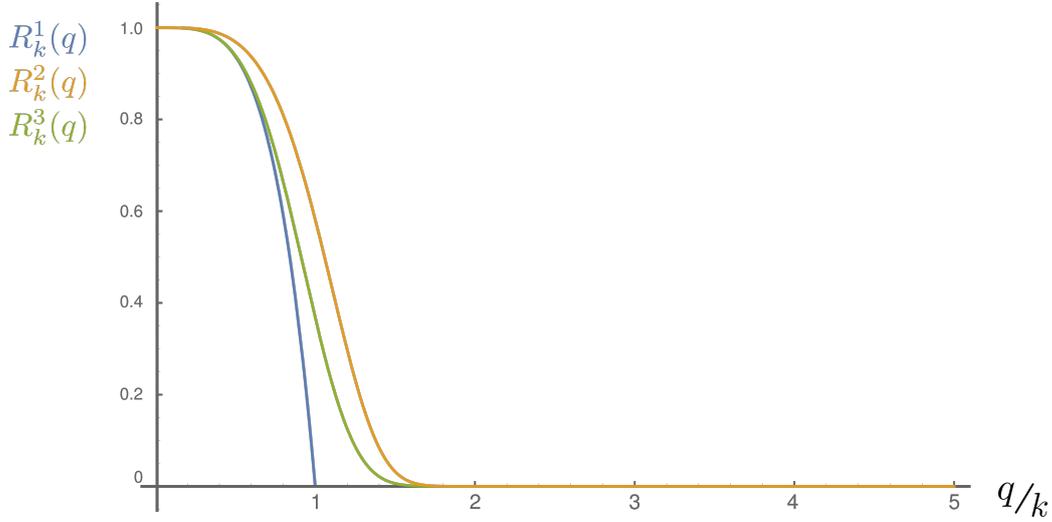


FIGURE 3.4 – Fonctions de coupure adaptées à la théorie des membranes cristallines, voir (3.199). Leur comportement est plus abrupt que celui des fonctions correspondantes de la Figure 1.7.

effectif U_k , défini par l'évaluation de $\Gamma_k[\vec{r}]$ dans une configuration de champ constant (c'est-à-dire ici une configuration plate), et en particulier de ses variations en fonction de la valeur du paramètre d'extension. La minimisation de ces variations donne la valeur du paramètre d'extension ζ_k au minimum de Γ_k .

Considérons une configuration plate générique de la membrane :

$$\vec{r}_{flat} = \xi x^i \vec{e}_i . \quad (3.201)$$

Dans une telle configuration, le potentiel effectif s'écrit simplement :

$$U_k(\xi) = \frac{D}{8} (2\mu_k + \lambda_k D) (\xi^2 - \zeta_k^2)^2 . \quad (3.202)$$

Caractériser ζ_k comme le minimum revient à imposer :

$$\left. \frac{dU_k(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\zeta_k} = 0 . \quad (3.203)$$

Pour obtenir le flot de ζ_k avec l'échelle courante, il suffit alors de dériver cette dernière équation par rapport à t :

$$\partial_t \left[\left. \frac{dU_k(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\zeta_k} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\xi^2} \left[\left. \partial_t U_k(\xi) \right|_{\xi=\zeta_k} \right] + 2\partial_t \zeta_k^2 \left. \frac{d^2 U_k}{d(\xi^2)^2} \right|_{\xi=\zeta_k} = 0 . \quad (3.204)$$

Le flot de U_k découle bien sûr de l'équation de Wetterich (1.45), mais évaluée en \vec{r}_{flat} et non

\vec{r}_{min} :

$$\begin{aligned} \partial_t U_k = \frac{1}{2} \int_q \partial_t R_k(q) & \left[\frac{d_c}{Z_k q^4 + (\mu_k + \lambda_k \frac{D}{2}) q^2 (\xi^2 - \zeta_k^2) + R_k(q)} \right. \\ & + \frac{1}{Z_k q^4 + (\mu_k + \lambda_k \frac{D}{2}) q^2 (\xi^2 - \zeta_k^2) + \xi^2 (\lambda_k + 2\mu_k) q^2 + R_k(q)} \\ & \left. + \frac{(D-1)}{Z_k q^4 + (2\mu_k + \lambda_k \frac{D}{2}) q^2 (\xi^2 - \zeta_k^2) + \mu_k \xi^2 q^2 + R_k(q)} \right]. \end{aligned} \quad (3.205)$$

La combinaison avec (3.204), et l'introduction des fonctions de seuil conduit au résultat final [Kownacki 2009] :

$$\partial_t \zeta_k^2 = \frac{4v_D}{D(2\mu_k + \lambda_k D)} \left[d_c(2\mu_k + \lambda_k D) \bar{l}_{100}^{D+2} + (6\mu_k + (D+2)\lambda_k) \bar{l}_{001}^{D+2} + (D-1)(4\mu_k + \lambda_k D) \bar{l}_{010}^{D+2} \right]. \quad (3.206)$$

L'analyse des points fixes se fait avec sa contrepartie adimensionnée $\bar{\zeta}_k^2 = k^{D-2+\eta_k} \zeta_k^2$, de flot :

$$\partial_t \bar{\zeta}_k^2 = -(D-2+\eta_k) \bar{\zeta}_k^2 + \frac{4v_D}{D(2\bar{\mu}_k + \bar{\lambda}_k D)} \left[d_c(2\bar{\mu}_k + \bar{\lambda}_k D) \bar{l}_{100}^{D+2} + (6\bar{\mu}_k + (D+2)\bar{\lambda}_k) \bar{l}_{001}^{D+2} + (D-1)(4\bar{\mu}_k + \bar{\lambda}_k D) \bar{l}_{010}^{D+2} \right], \quad (3.207)$$

et en combinaison avec (3.193) et (3.194). $\bar{\zeta}_k$ admet deux points fixes :

- Un point fixe non-trivial $\bar{\zeta}^*$ correspondant à $\zeta_0 = 0$, autrement dit à la transition vers la phase froissée.
- Un point fixe à l'infini où le paramètre d'extension dimensionné ζ_0 atteint une valeur finie non nulle dans la limite infrarouge ; c'est le point fixe de phase plate.

Il est instructif d'examiner de plus près le flot du paramètre d'extension dans la limite de phase plate. L'étude perturbative préliminaire nous renseigne sur le fait que les couplages adimensionnés $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ prennent une valeur non nulle au point fixe de phase plate \mathbf{P}_4 . La divergence de $\bar{\zeta}$ au voisinage de \mathbf{P}_4 entraîne donc également celle des pseudo-masses des propagateurs \bar{G}_1 (3.186) et \bar{G}_2 (3.187), qui deviennent négligeables devant \bar{G}_0 (3.185). Les fonctions de seuil associées aux phonons prennent donc une valeur petite devant celles des flexurons : les phonons se *découplent* du flot de renormalisation.

Notons que le découplage ne revient pas à négliger l'existence des phonons puisque leur propagateur, défini à partir de $\Gamma_{k,ij}^{(2)}$ avec des indices dans $\llbracket 1; D \rrbracket$, a toujours une renormalisation non triviale. La conséquence du découplage est plutôt que leur propagateur ne contrôle plus la forme du flot de renormalisation, dans la détermination de laquelle les flexurons dominent. La limite de phase plate est donc la limite de découplage des phonons. C'est elle qui permet de différencier l'étude de la transition de phase de l'étude de la phase ordonnée dans le formalisme NPRG.

Comme seules les fonctions de seuil associées aux flexurons survivent à la limite de phase plate, seuls les termes indiqués en bleu dans les équations (3.193), (3.194) et (3.207) sont conservés dans la phase ordonnée. Les constantes de couplage élastiques se découplent alors de l'équation de flot sur $\bar{\zeta}_k$, qui devient :

$$\partial_t \bar{\zeta}_k^2 = -(D-2+\eta_k) \bar{\zeta}_k^2 + \frac{4v_D}{D} d_c \bar{l}_{100}^{D+2}. \quad (3.208)$$

Cette équation de flot a également été calculée par la théorie des perturbations dans la limite $d_c \gg 1$ (3.64) en dimension $D = 2 + \varepsilon$. Afin de pouvoir les comparer, écrivons le flot de $\bar{w}_k = \bar{\zeta}_k^{-2}$ dans cette limite :

$$\begin{aligned} \beta_{\bar{w}_k} &= (D - 2 + \eta_k) \bar{w}_k - \frac{v_D d_c}{D} \bar{l}_{100}^{D+2} \bar{w}_k^2 \\ &\underset{D=2+\varepsilon}{\simeq} (\varepsilon + \eta_k) \bar{w}_k - \frac{d_c}{4\pi} \left[1 - \frac{\eta_k}{8} \right] \bar{w}_k^2, \end{aligned} \quad (3.209)$$

où dans la deuxième ligne nous avons évalué tous les termes, sauf le terme dimensionnel, en $D = 2$, ce qui correspond à la prise de limite $D = 2 + \varepsilon$ dans ce formalisme²⁴. La fonction de seuil est évaluée avec la coupure $R_k^1(q)$, qui donne les résultats analytiques les plus simples.

Ainsi, (3.209) est très semblable à son homologue dans la limite $d_c \gg 1$, car puisque la fonction de seuil associée aux flexurons dans (3.207) porte un facteur d_c supplémentaire comparée à ses homologues associées aux phonons, les limites $d_c \rightarrow +\infty$ et $\bar{\zeta}_k \rightarrow +\infty$ conduisent toutes les deux au découplage des phonons dans l'équation de flot de $\bar{\zeta}_k^{-2}$. Cependant, l'équation de flot NPRG contient des contributions supplémentaires venant de la dimension anormale, dont nous savons qu'elle n'est pas petite dans la phase plate. Autrement dit, l'information non-perturbative des équations NPRG vis-à-vis de d_c se trouve entièrement comprise dans la dimension anormale, car la limite perturbative $d_c \gg 1$ correspond exactement à une limite $\eta_k \rightarrow 0$ au niveau de la fonction β_w ²⁵.

Enfin, par définition, $\bar{w}_k \geq 0$. Le point fixe $\bar{w}^* \neq 0$ de (3.209) ne peut donc exister que si $D - 2 + \eta_k \geq 0$, ce qui donne un autre argument en faveur d'une dimension critique inférieure définie par :

$$D_c^i - 2 + \eta^*(D_c^i) = 0, \quad (3.210)$$

puisque en n'importe quelle dimension plus basse, le point fixe n'existe plus et la transition de phase n'a plus lieu. Ainsi pour les membranes cristallines, l'abaissement de la dimension critique inférieure $D_c^i < 2$, qui est cruciale pour que le théorème de Mermin et Wagner ne s'applique pas, est entièrement piloté par la valeur non nulle de la dimension anormale. Ceci illustre encore une fois l'importance du caractère fortement non-gaussien des fluctuations thermiques dans la physique de ces systèmes en $d = 3$, $D = 2$.

3.3.2.5 Phase plate

Les équations (3.193) et (3.194) décrivent aussi bien la phase plate que la transition de phase. Nous avons déterminé précédemment que la limite de phase plate correspond au découplage des fonctions de seuil de phonons, ce qui revient à ne conserver que les termes indiqués en bleu. Les équations de flot deviennent donc dans cette limite :

$$\partial_t \bar{\mu}_k = (D - 4 + 2\eta_k) \bar{\mu}_k + \frac{8v_D}{D(D+2)} d_c \bar{\mu}_k^2 \bar{l}_{200}^{D+4}, \quad (3.211)$$

24. En effet, ε joue essentiellement un rôle de régulateur dans la théorie de perturbation. Comme les fonctions de seuil NPRG sont finies, l'utilisation d'un régulateur n'est pas nécessaire ici. Seule subsiste la correction à la dimension du couplage induite par le changement de dimension, qui est requise pour que la théorie soit cohérente.

25. En effet, $\eta_k = O(d_c^{-1})$. En rendant petite la dimension anormale par le passage à la limite $d_c \gg 1$ l'information non-perturbative est perdue.

$$\partial_t \bar{\lambda}_k = (D - 4 + 2\eta_k) \bar{\lambda}_k + \frac{2v_D}{D(D+2)} d_c (D(D+2) \bar{\lambda}_k^2 + 4(D+2) \bar{\lambda}_k \bar{\mu}_k + 4\bar{\mu}_k^2) \bar{l}_{200}^{D+4}. \quad (3.212)$$

La limite de phase plate simplifie donc grandement l'écriture du flot. Afin de comparer nos résultats au calcul à deux boucles en ε , il est intéressant d'écrire l'équation de flot sur la constante de couplage \bar{b}_k :

$$\partial_t \bar{b}_k = (D - 4 + 2\eta_k) \bar{b}_k + \frac{4v_D(D+1)}{D(D+2)} d_c \bar{b}_k^2 \bar{l}_{200}^{D+4}, \quad (3.213)$$

qui est particulièrement simple. La simplification induite par ce changement de variable est une propriété du flot de renormalisation dans la phase plate, l'équation de flot sur \bar{b}_k n'ayant pas une écriture plus simple que celle de $\bar{\lambda}_k$ avant le découplage des phonons. Ainsi, alors que λ est une constante de couplage naturelle à la transition de froissement, b semble être plus adaptée à la description de la phase plate. Notamment, certaines symétries dépendantes de D dans la phase ordonnée deviennent plus évidentes.

En particulier, la partie non dimensionnelle du flot de renormalisation de \bar{b}_k a la même forme que celle de $\bar{\mu}_k$, avec le même type de préfacteur, à un coefficient $(D+1)/2$ près, ce qui fait écho au facteur $(D+1)/2$ reliant les deux composantes du potentiel écranté dans l'infrarouge dans le formalisme SCSA (3.167). Dans le cadre du groupe de renormalisation, cette symétrie est liée au caractère attractif de l'hypersurface $(D+1)\bar{b} - 2\bar{\mu} = 0$, qui a été observé à une boucle (Figure 3.2), et à deux boucles (3.142). Grâce aux équations NPRG, il est possible de montrer que ce résultat est vrai de façon non-perturbative en couplage. En effet, d'après (3.211) et (3.213),

$$\partial_t \left(\frac{\bar{b}_k}{\bar{\mu}_k} \right) = \frac{4v_D}{D(D+2)} d_c \bar{l}_{200}^{D+4} \frac{\bar{b}_k}{\bar{\mu}_k} [(D+1)\bar{b}_k - 2\bar{\mu}_k]. \quad (3.214)$$

Puisque le facteur bleu est toujours positif, la ligne est bien attractrice dans l'infrarouge²⁶. Ce résultat a des conséquences physiques sur l'élasticité des membranes cristallines (voir Chapitre 4).

L'expression de la dimension anormale courante η_k , qui peut être rendue analytique grâce à la coupure $R_k^1(q)$ est :

$$\eta_k = \frac{32v_D(D+4)(D+1)(\bar{b}_k + (D-2)\bar{\mu}_k)}{D^2(D+2)(D+4) + 32v_D(D+1)(\bar{b}_k + (D-2)\bar{\mu}_k)}. \quad (3.215)$$

Notons que la contribution des constantes de couplage ne se fait qu'à travers de la combinaison $\bar{b}_k + (D-2)\bar{\mu}_k$ qui est celle qui gouverne le comportement de l'énergie propre $\widehat{\Sigma}_h$ dans le SCSA (3.168).

Nous pouvons alors examiner les différents cas limites :

- $d_c \gg 1$: dans cette limite, les couplages redeviennent faibles, et η_k s'écrit sous une forme perturbative :

$$\eta_k \underset{d_c \gg 1}{=} \frac{32v_D(D+4)(D+1)}{D^2(D+2)(D+4)} [\tilde{b}_k + (D-2)\tilde{\mu}_k] + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right). \quad (3.216)$$

26. Attention, t tend vers $-\infty$ dans la limite infrarouge.

Comme η_k est d'ordre $1/d_c$, il ne contribue pas à l'ordre le plus bas du développement des fonctions β LPA' en $1/d_c$:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{b}_k = (D-4)\tilde{b} + \frac{4v_D(D+1)}{D(D+2)} \frac{8}{D+4} \tilde{b}_k^2 \\ \partial_t \tilde{\mu}_k = (D-4)\tilde{\mu} + \frac{8v_D}{D(D+2)} \frac{8}{D+4} \tilde{\mu}_k^2, \end{cases} \quad (3.217)$$

où l'utilisation de la coupure $R_k^1(q)$ permet de donner une expression analytique de la fonction de seuil \bar{l}_{200}^{D+4} (voir Annexe F). En particulier, si :

– $D = 2$: les fonctions β s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{b}_k = -2\tilde{b}_k + \frac{2}{3} \frac{3}{8\pi} \tilde{b}_k^2 \\ \partial_t \tilde{\mu}_k = -2\tilde{\mu}_k + \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi} \tilde{\mu}_k^2, \end{cases} \quad (3.218)$$

où le facteur rouge dénote un écart entre le coefficient du terme quadratique du flot entre les équations NPRG et celles issues du développement perturbatif en $1/d_c$. Cette différence vient de l'expression analytique des fonctions de seuil de flexurons avec la coupure R_k^1 , et a aussi une incidence sur la valeur de la dimension anormale, que nous donnons à la fois à \mathbf{P}_4 et \mathbf{P}_3 comme auparavant :

$$\begin{cases} \eta_4 \underset{d_c \gg 1}{=} \frac{6}{d_c} + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right) \\ \eta_3 = 0. \end{cases} \quad (3.219)$$

L'annulation de η_3 en $D = 2$ est une conséquence directe de l'écriture (3.215) qui s'annule si $\bar{b}_k = 0$.

– $D = 4 - \varepsilon$: les fonctions β s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{b}_k = -\varepsilon \tilde{b}_k + \frac{(5-\varepsilon)}{192\pi^2} \tilde{b}_k^2 \\ \partial_t \tilde{\mu}_k = -\varepsilon \tilde{\mu}_k + \frac{1}{96\pi^2} \tilde{\mu}_k^2, \end{cases} \quad (3.220)$$

elles sont cette fois-ci parfaitement en accord avec leur contrepartie perturbative (3.144). Tous les formalismes étudiés donnent donc bien des fonctions β compatibles à l'ordre ε^3/d_c .

Les dimensions anormales sont données par :

$$\begin{cases} \eta_4 \underset{d_c \gg 1, \varepsilon \ll 1}{=} \frac{12\varepsilon}{d_c} - \frac{11\varepsilon^2}{2d_c} + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right) + O(\varepsilon^3) \\ \eta_3 \underset{d_c \gg 1, \varepsilon \ll 1}{=} \frac{10\varepsilon}{d_c} - \frac{23\varepsilon^2}{4d_c} + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right) + O(\varepsilon^3). \end{cases} \quad (3.221)$$

L'ordre le plus bas en ε est parfaitement reproduit, mais une légère différence persiste à l'ordre suivant par rapport à (3.147) et (3.148). L'origine de cette différence peut

être *a priori* reliée à la fois à la troncation du contenu en impulsion présent à l'ordre sous-dominant des théories de perturbations par le développement LPA', mais aussi à la dépendance en D de la fonction de seuil qui n'est pas identique à celle du coefficient quadratique dans les fonctions β du développement en $1/d_c$, et qui peut donc dévier à l'ordre sous-dominant.

- $\varepsilon \ll 1$: les fonctions β du développement LPA' sont construites à partir de l'équation de Wetterich (1.45) qui a la structure d'une équation à une boucle. Les corrections aux ordres suivants se trouvent dans l'expression de η_k :

$$\begin{cases} \partial_t \bar{b}_k = (-\varepsilon + 2\eta_k) \bar{b}_k + \frac{(5 - \varepsilon)}{192\pi^2} d_c \bar{b}_k^2 \left[1 - \frac{\eta_k}{10}\right] \\ \partial_t \bar{\mu}_k = (-\varepsilon + 2\eta_k) \bar{\mu}_k + \frac{1}{96\pi^2} d_c \bar{\mu}_k^2 \left[1 - \frac{\eta_k}{10}\right] . \end{cases} \quad (3.222)$$

Le développement de (3.215) à l'ordre sous-dominant en ε s'écrit :

$$\eta_k \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{(5 - \varepsilon)(\bar{b}_k + 2\bar{\mu}_k)}{96\pi^2} - \frac{3}{2} \frac{25(\bar{b}_k + 2\bar{\mu}_k)^2}{110592\pi^4} + O(\varepsilon^3) , \quad (3.223)$$

qui n'est pas directement égal à (3.136). Nous retrouvons le facteur $3/2$ identifié dans le développement en $1/d_c$. Cependant, le terme en bleu introduit une dépendance en ε différente de (3.136) dans le premier terme dont nous avons vu qu'elle pouvait cacher des termes à deux boucles, notamment des termes proportionnels à d_c , lorsque nous avons examiné l'accord entre les deux développements perturbatifs. Il se peut donc que ces expressions soient en réalité plus compatibles qu'elles n'en ont l'air.

Aux points fixes \mathbf{P}_4 et \mathbf{P}_3 , la dimension anormale se développe selon :

$$\begin{cases} \eta_4 \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{12\varepsilon}{24 + d_c} - \frac{2(3456 + 273d_c + 5d_c^2)\varepsilon^2}{5(24 + d_c)^3} + O(\varepsilon^3) \\ \eta_3 \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{10\varepsilon}{20 + d_c} - \frac{(1600 + 165d_c + 4d_c^2)\varepsilon^2}{2(20 + d_c)^3} + O(\varepsilon^3) . \end{cases} \quad (3.224)$$

La contribution à l'ordre le plus bas est exactement retrouvée, conformément à ce qui est attendu, puisque nous avons montré dans le Chapitre 1 que l'ordre le plus bas du développement en couplage faible de Γ_k est exactement sa valeur à une boucle (1.47). En effet, la structure à une boucle de l'équation de Wetterich assure que le développement en couplage faible à l'ordre le plus bas est toujours retrouvé. L'ordre sous-dominant diffère, à cause du contenu en impulsion du développement à deux boucles qui est tronqué par la LPA' notamment. La faible valeur numérique de ce désaccord témoigne de l'absence d'importance de ce contenu même au voisinage de 4 dimensions, ce qui rassure encore sur la fiabilité de la LPA'.

- $D = 2$: pour un système bidimensionnel, η_k ne dépend plus de $\bar{\mu}_k$:

$$\eta_k \underset{D=2}{=} \frac{6\bar{b}_k}{\bar{b}_k + 8\pi} . \quad (3.225)$$

L'équation de flot sur \bar{b}_k est alors assez simple pour que la recherche de points fixes soit effectuée analytiquement :

$$\partial_t \bar{b}_k = (-2 + 2\eta_k) \bar{b}_k + \frac{d_c}{4\pi} \bar{b}_k^2 \left(1 - \frac{\eta_k}{10}\right), \quad (3.226)$$

qui permet une seule valeur non nulle de \bar{b}_k à un point fixe :

$$\bar{b}^* = \frac{2\pi}{d_c} \left[-5(5 + d_c) + \sqrt{25(5 + d_c)^2 + 40d_c} \right]. \quad (3.227)$$

Les valeurs des dimensions anormales aux point fixes sont alors :

$$\begin{cases} \eta_4 = \frac{35 + 5d_c - \sqrt{25(5 + d_c)^2 + 40d_c}}{10 + d_c} \\ \eta_3 = 0, \end{cases} \quad (3.228)$$

soit en particulier,

$$\eta_4 \underset{d_c \gg 1}{=} \frac{6}{d_c} + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right), \quad (3.229)$$

commenté précédemment, et [Kownacki 2009] :

$$\eta_4 \underset{d=3}{=} \frac{2}{11} \left(20 - \sqrt{235}\right) \simeq 0,849. \quad (3.230)$$

La valeur élevée de la dimension anormale est un signe du caractère fortement non gaussien des fluctuations thermiques dans les membranes cristallines avec $D = 2$ et $d = 3$, c'est-à-dire dans les systèmes réels. Les corrections apportées par la structure non polynomiale de η_k dans le développement LPA' sont donc importantes.

Un résumé des résultats obtenus se trouve dans la Table 3.1, ainsi que certains résultats de simulations numériques pour étoffer la comparaison.

Notons également le bon accord quantitatif entre l'exposant anormal (3.230) prédit par le NPRG et les simulations *ab initio* dans le graphène (voir Figure 3.5). Tous ces éléments valident le schéma de troncation LPA' comme un outil à la fois fiable et efficace pour la description de la phase plate.

Méthode	η	Référence
Perturbations ($0(\varepsilon \ll 1)$)	$\eta = 0,96$	[Aronovitz 1988]
Perturbations ($0(\varepsilon \ll 1)^2$)	$\eta = 0,91$	Non publié
Perturbations ($d_c \gg 1$)	$\eta = 0,66$	[Aronovitz 1989]
SCSA	$\eta = 0,821$	[LeDoussal 1992]
SCSA	$\eta = 0,789$	[Gazit 2009]
NPRG	$\eta = 0,849$	[Kownacki 2009]
NPRG	$\eta = 0,85$	[Hasselmann 2011]
MD	$\eta = 0,81$	[Zhang 1993]
MC	$\eta = 0,750$	[Bowick 1996]
MC	$\eta = 0,85$	[Los 2009]
MC	$\eta = 0,795$	[Tröster 2013]

TABLE 3.1 – Vue d’ensemble des résultats obtenus pour le calcul de η avec différentes méthodes. En noir, les développements perturbatifs, extrapolés en $D = 2$, $d = 3$, en bleu, les méthodes non-perturbatives, et en vert les méthodes numériques, Monte Carlo (MC), ou Dynamique Moléculaire (MD). Malgré une certaine dispersion des résultats, ceux-ci s’accordent sur une valeur de η relativement élevée autour de 0,8.

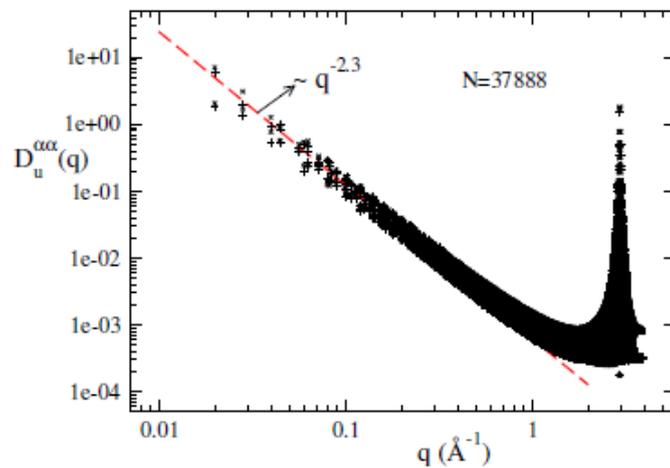


FIGURE 3.5 – Calcul du spectre des phonons dans une feuille de graphène par un calcul *ab initio* basé sur le pseudo-potentiel LCBOPII [Los 2016]. Le spectre à basse énergie s’accorde très bien avec la tendance de la droite rouge, correspondant à la valeur de η calculée par NPRG, en rouge dans la Table 3.1.

3.4 Conclusion

En conclusion, nous avons présenté dans ce chapitre les différentes approches qui ont été utilisées pour calculer l'effet des fluctuations thermiques dans la phase plate des membranes cristallines : à la fois des développements au voisinage des théories gaussiennes $D = D_c^s$ et $d_c = +\infty$, mais aussi d'autres méthodes qui ne s'appuient pas sur des développements en couplage faible qui permettent de décrire le comportement d'objets bidimensionnels plongés dans un espace à trois dimensions qui se trouve hors du domaine de validité des approches basées sur des théories de perturbations usuelles : le SCSA qui construit une interpolation entre les deux théories gaussiennes, basée sur l'espoir que ces deux limites contraignent suffisamment les paramètres mis en jeu pour que le comportement décrit dans le régime non-perturbatif en couplage corresponde à celui que l'on veut décrire²⁷, et l'approximation LPA' du NPRG qui construit une série perturbative en puissances du gradient du champ de position.

Afin de pouvoir comparer ces différentes approches au-delà du régime où leur accord est trivial, nous avons poussé le développement en ε à l'ordre sous-dominant. Cette étude a mené aux conclusions suivantes :

- malgré le caractère systématique des développements perturbatifs usuels, la mise en place du développement en ε dans la phase plate s'avère être particulièrement subtil à cause de la présence explicite de D dans l'action qui interfère avec le développement. En particulier,
 - notre étude à deux boucles a été effectuée sur la théorie effective de flexurons en interactions. La façon de procéder à partir de l'action contenant à la fois phonons et flexurons n'est pas encore claire aujourd'hui. En particulier, nous ne savons pas montrer que cette dernière théorie est régulière dans l'infrarouge.
 - nous avons dû recourir à un développement partiel en ε pour obtenir des résultats cohérents, notamment dans la limite $d_c \gg 1$. Le caractère nécessaire d'une telle astuce est encore à l'étude, mais dans tous les cas, le schéma minimal doit être adapté pour ne pas générer d'artefacts.
 - l'universalité des fonctions β à deux boucles suggère que celles-ci doivent s'écrire de la même façon dans le développement à l'ordre sous-dominant en ε des fonctions obtenues dans le développement $d_c \gg 1$, et dans la limite $d_c \gg 1$ de notre développement à deux boucles. La vérification de ce résultat s'est avérée très indirecte.

Cette complexité inattendue du développement en ε est un frein à l'obtention des ordres suivants, et donc à une resommation de la série perturbative qui permettrait de mieux comprendre comment celle-ci se comporte hors du régime de couplage faible.

- du côté des approches non-perturbatives en couplage,
 - le SCSA, qui reproduit parfaitement bien l'ordre dominant en $1/d_c$ par construction, donne également des résultats très proches du développement en ε à l'ordre sous-dominant même pour des valeurs $d_c \simeq 1$.

27. Cela souligne le rôle important des théories de perturbation usuelles même lorsque les objets réels se trouvent hors de leur régime de validité. En règle générale, il est en effet plus simple de bien contrôler un développement perturbatif, au moins aux faibles ordres.

- le contenu en impulsion tronqué par le développement LPA' des équations NPRG, mais présent au moins partiellement dans le calcul à deux boucles, joue un rôle négligeable même au voisinage de $D = 4$. Cela fournit un argument supplémentaire en faveur de l'applicabilité de ce développement pour décrire la phase plate.

La phase plate des membranes cristallines « réelles »²⁸ est donc bien mieux décrite par un développement en faible gradient du champ de position \vec{r} que par un développement en couplage faible. Ce développement, bien que moins standard, se construit aisément dans le formalisme de l'action effective moyenne. Maintenant que la fiabilité du schéma de troncation LPA' a été évaluée, nous pouvons l'utiliser pour comprendre les conséquences du caractère non-gaussien des fluctuations thermiques sur la physique de ces systèmes.

28. c'est-à-dire en $D = 2, d = 3$.

Thermodynamique dans la phase plate

Sommaire

4.1 Phase plate d'une membrane libre	126
4.1.1 Élasticité et courbure anormales - Critère de Ginzburg	126
4.1.2 Coefficient de Poisson	130
4.1.3 Coefficient d'expansion thermique	132
4.2 Membranes sous tension	135
4.2.1 Ensembles thermodynamiques	135
4.2.1.1 Évolution à volume fixé	136
4.2.1.2 Évolution à tension fixée	136
4.2.2 Diagramme des phases - Transition de flambage	137
4.2.3 Loi de Hooke anormale dans la phase plate	141
4.2.3.1 Évolution à tension fixée	142
4.2.3.2 Lien avec l'évolution à volume fixé	144
4.2.4 Régime sur-étiré	148
4.2.5 Coefficients thermoélastiques	151
4.2.6 Chaleurs spécifiques	153
4.3 Conclusion	155

L'étude comparée de différentes méthodes de calcul des fluctuations thermiques dans la phase plate nous a permis de mettre en évidence l'efficacité du schéma d'approximation LPA' du NPRG à travers le calcul de l'exposant anormal η . Forts de ce résultat, nous allons dans ce chapitre exploiter davantage les équations du groupe de renormalisation afin de caractériser le comportement des membranes cristallines dans leur phase plate. En particulier, nous verrons comment les fluctuations thermiques modifient les lois habituelles de l'élasticité des matériaux cristallins à deux dimensions grâce aux fortes interactions entre fluctuations de hauteur et vibrations du réseau cristallin. L'existence d'un point fixe non trivial \mathbf{P}_4 dans le diagramme de flot se traduit par l'émergence de lois d'échelle indépendantes de la nature des matériaux conférant ainsi une portée large aux résultats établis. Des ordres de grandeurs sont établis à partir de l'exemple du graphène, qui est le matériau le mieux documenté dans la littérature.

Enfin, nous montrerons comment notre formalisme donne également accès à la réponse du système à une contrainte extérieure, correspondant à une tension. Celle-ci résulte généralement de l'interaction du système avec son environnement, par exemple lorsqu'un opérateur externe étire ou comprime le matériau. Nous pourrions alors étudier le diagramme des phases des membranes cristallines, et avoir accès à leurs caractéristiques thermodynamiques.

4.1 Phase plate d'une membrane libre

Considérons d'abord le cas le plus simple d'une membrane fluctuant librement dans son espace de plongement.

4.1.1 Élasticité et courbure anormales - Critère de Ginzburg

Le diagramme de flot de renormalisation a été établi pour des variables adimensionnées intégrant l'effet des fluctuations thermiques à chaque échelle, et qui atteignent des point fixes dans la limite infrarouge. Afin de pouvoir faire des prédictions physiques sur le comportement du système, il faut tout d'abord tout réexprimer en termes de variables dimensionnées.

Prenons par exemple le module de cisaillement μ ¹. Celui-ci a été décrit *via* sa contrepartie adimensionnée $\bar{\mu}_k$ qui sature dans l'infrarouge à la valeur $\bar{\mu}^* \simeq 6,21$. La relation entre les variables dimensionnées et adimensionnées est $\mu_k = \bar{\mu}_k k^{4-D-2\eta_k}$, ce qui donne dans l'infrarouge, $\mu_k \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} 0$ ².

Bien entendu, toutes les membranes cristallines ne sont pas infiniment molles ; en réalité, ce comportement avec une contrepartie adimensionnée prenant une valeur de point fixe finie est le signe d'un comportement dépendant de la taille du système L pour le module de cisaillement dimensionné corrigé par les fluctuations thermiques μ_k . Celui-ci est d'autant plus faible que la taille du système est grande mais il ne devient nul que dans la limite d'un système infini. Le calcul du vrai module de cisaillement μ_0 d'un matériau particulier se fait donc *via* l'analyse de *lois d'échelle* dépendant de L .

Le calcul des corrections dues aux fluctuations par les méthodes du groupe de renormalisation se fait dans un cadre dépendant explicitement de l'échelle courante k , il y a donc aussi nécessairement une longueur caractéristique associée au comportement des fluctuations thermiques. En effet, au début du flot (courtes échelles de longueur), la valeur de $\bar{\mu}_k$ est essentiellement donnée par la condition initiale ; alors qu'au contraire, dans le régime infrarouge $\bar{\mu}_k \simeq \bar{\mu}^*$ et la mémoire de la condition initiale est perdue (voir Figure 4.1). Autrement dit, à des tailles trop petites devant la portée typique des interactions, le régime de fluctuations anharmoniques ne peut pas s'établir. L'échelle typique de séparation entre les régimes de fluctuation harmonique et anharmonique est appelée longueur de Ginzburg L_G .

Afin d'estimer L_G , il nous faut analyser le comportement des solutions de l'équation de flot sur le module de cisaillement (3.211). Cette analyse est très difficile dans le cas général, mais nous pouvons nous restreindre à l'étude de l'équation de flot simplifié dans le régime de fluctuations harmoniques. L_G est alors identifiée comme la longueur typique marquant la sortie du régime harmonique. Dans le régime harmonique, η_k n'intervient pas dans les équations de flot. L'évolution de module de cisaillement dimensionné μ_k avec l'échelle courante k en $D = 2$ est alors donné par l'équation suivante [Coquand 2016] :

$$k^3 \partial_k \mu_k \simeq \frac{1}{6\pi} \mu_k^2, \quad (4.1)$$

1. Le comportement des autres constantes élastiques dimensionnées (module d'Young, module de compression, b , ...) est le même.

2. Du moins pour $D_c^i \leq D \leq D_c^s$.

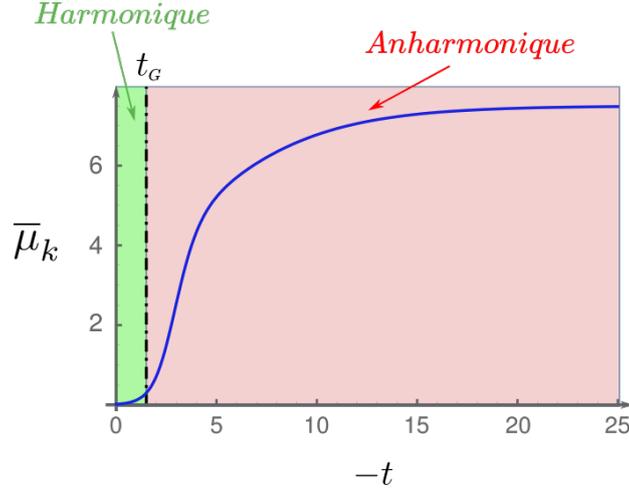


FIGURE 4.1 – Évolution du module de cisaillement adimensionné $\bar{\mu}_k$ avec le temps de renormalisation $t = \log(ak)$, avec des conditions initiales correspondant au graphène à $T = 300$ K. La limite thermodynamique $k \rightarrow 0$ correspond à $t \rightarrow -\infty$. Pour les temps faibles, correspondant aux courtes échelles de longueur, les fluctuations sont gaussiennes ; au-delà du temps caractéristique $t_G = \log(ak_G) \simeq -1,65$, avec $k_G = L_G^{-1}$, le régime anharmonique est atteint, et $\bar{\mu}_k$ est conduit vers sa valeur de point fixe $\bar{\mu}^*$.

qui s'intègre en :

$$\mu_k = \frac{\mu_\Lambda}{1 - \frac{\mu_\Lambda}{12\pi} \left(\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{1}{k^2} \right)}, \quad (4.2)$$

où μ_Λ est la valeur de μ_k à l'échelle microscopique, qui est également la condition initiale du flot de renormalisation. L'échelle typique marquant la sortie du régime harmonique est donc :

$$k_G^2 \simeq \frac{\mu_\Lambda}{6\pi}, \quad (4.3)$$

soit une fois restaurés les facteurs κ et $k_B T$,

$$L_G^2 = \frac{6\pi}{\mu_\Lambda} \frac{\kappa^2}{k_B T}. \quad (4.4)$$

Il peut sembler curieux que μ joue un rôle aussi particulier dans la détermination d'une longueur caractéristique des fluctuations thermiques, en réalité un résultat analogue peut être obtenu avec les autres constantes élastiques comme \mathcal{Y}_k ou K_k . Il faut bien comprendre (4.4) comme un calcul d'ordre de grandeur.

Dans le cas du graphène, $\mu_\Lambda \simeq 9 \text{ eV} \cdot \text{\AA}^{-2}$ et $\kappa \simeq 1 \text{ eV}$, ce qui donne à $T = 300 \text{ K}$ une longueur de Ginzburg $L_G \simeq 7,3 \text{ \AA}$, remarquablement proche de l'échelle du réseau atomique³. Ainsi, dans ce matériau les fluctuations sont anharmoniques sur quasiment toute la gamme d'échelles de longueur possibles.

Pour un matériau de taille L , les lois d'échelle dans la phase plate dépendent essentiellement de la comparaison entre L et L_G :

3. Des comparaisons à la littérature suggèrent que cette valeur est plutôt sur-évaluée.

- Si $L \ll L_G$, les fluctuations thermiques sont encore gaussiennes, c'est le régime harmonique. D'après (4.2), la valeur de μ_k est essentiellement donnée par la condition initiale :

$$\mu_L = \mu_\Lambda \frac{\kappa}{k_B T} = \bar{\mu}_\Lambda \frac{\kappa}{a^2} \frac{\kappa}{k_B T}, \quad (4.5)$$

où $\bar{\mu}_\Lambda$ est la valeur du module de cisaillement adimensionné à l'échelle microscopique a , non corrigée par les fluctuations thermiques. C'est le régime contrôlé par la condition initiale dans lequel l'approximation de champ moyen est encore valable.

- Si $L \gg L_G$, le comportement des fluctuations thermiques est piloté par \mathbf{P}_4 , c'est le régime anharmonique. La condition initiale n'intervient plus dans la loi d'échelle, qui fait maintenant intervenir des quantités universelles comme $\bar{\mu}^*$ ou η^* :

$$\mu_L = \bar{\mu}^* \frac{\kappa}{L_G^2} \frac{\kappa}{k_B T} \left(\frac{L}{L_G} \right)^{-2+2\eta^*}. \quad (4.6)$$

Le module de cisaillement dimensionné s'annule dans la limite thermodynamique, les fluctuations thermiques anharmoniques réduisent la valeur des modules d'élasticité pour les grandes échelles de longueur. Cependant, la relativement forte valeur de $\eta^* \simeq 0,849$ garantit que cette évolution est lente, ce qui explique sans doute l'exceptionnelle rigidité des échantillons de graphène standard (de taille micrométrique) en dépit de l'effet des fluctuations thermiques (voir Table 4.1).

Notons également le rôle de la température qui tend à ramollir le système. Quand la température devient trop importante, l'élasticité du système n'est plus suffisante et celui-ci se froisse.

Pour caractériser la rigidité d'un matériau, il est plus courant d'étudier son module d'Young \mathcal{Y} , ou son module de compressibilité K (voir Chapitre 2), mais ceux-ci suivent les mêmes lois d'échelle que μ :

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_L = \bar{\mathcal{Y}}_\Lambda \frac{\kappa}{a^2} \frac{\kappa}{k_B T} & L \ll L_G \\ \mathcal{Y}_L = \bar{\mathcal{Y}}^* \frac{\kappa}{L_G^2} \frac{\kappa}{k_B T} \left(\frac{L}{L_G} \right)^{-2+2\eta^*} & L \gg L_G, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} K_L = \bar{K}_\Lambda \frac{\kappa}{a^2} \frac{\kappa}{k_B T} & L \ll L_G \\ K_L = \bar{K}^* \frac{\kappa}{L_G^2} \frac{\kappa}{k_B T} \left(\frac{L}{L_G} \right)^{-2+2\eta^*} & L \gg L_G, \end{cases} \quad (4.8)$$

avec $\bar{\mathcal{Y}}^* \simeq 8,30$ et $\bar{K}^* \simeq 3,11$. Les fluctuations thermiques anharmoniques réduisent donc la résistance des matériaux bidimensionnels vis-à-vis des efforts de compression, dilatation, ou cisaillement.

Toutes les quantités étudiées jusqu'à présent sont des caractéristiques de l'élasticité à deux dimensions ; pour pouvoir comparer leurs valeurs à des ordres de grandeurs dans des matériaux usuels, il faut les diviser par l'épaisseur du matériau. Dans le cas du graphène, celle-ci est essentiellement donnée par la longueur microscopique a puisque ce matériau a l'épaisseur d'un atome de carbone seulement. La Table 4.1 donne les valeurs prédites par ce modèle pour le graphène à

Matériau	μ (GPa)	K (GPa)	\mathcal{Y} (GPa)
Aluminium	25	70	70
Cuivre	45	120	120
Acier	80	20	210
Polyéthylène	0,1	5	0,5
Verre	25	40	70
Diamant	460	540	1100
Graphite	7	10	15
Graphène (eq)	900	500	1300

TABLE 4.1 – Comparaison des constantes élastiques du graphène à celles d'autres matériaux à température ambiante. La taille choisie pour les estimations est $L \simeq 10^{-6}$ m, en accord avec les matériaux étudiés expérimentalement. La mention « (eq) » fait référence au fait que les quantités répertoriées pour le graphène sont des quantités équivalentes dans le langage de l'élasticité à trois dimensions. Les matériaux indiquées en bleu sont des allotropes du carbone, tout comme le graphène, mais avec des structures tridimensionnelles. Le graphène apparaît comme un matériau particulièrement rigide.

température ambiante, en bon accord avec les résultats expérimentaux connus. Celui-ci apparaît comme un matériau exceptionnellement rigide malgré l'effet des fluctuations thermiques.

Une étude similaire peut être menée pour l'énergie de courbure du matériau :

$$\begin{cases} \kappa_L = \kappa & L \ll L_G \\ \kappa_L = \kappa \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta^*} & L \gg L_G . \end{cases} \quad (4.9)$$

Dans le régime harmonique, κ est indépendant de la taille du matériau. Quand les flexurons et les phonons commencent à interagir cependant, le matériau acquiert une rigidité de courbure anormale qui est d'autant plus importante que le matériau est grand, et qui permet la stabilisation de la phase plate. De plus, l'évolution de κ_L avec la taille du système L est bien plus rapide que la décroissance des modules d'élasticité.

Un mécanisme qualitatif pour expliquer ces effets a été donné par D. Nelson et A. Košmrlj dans [Košmrlj 2013] (voir Figure 4.2). Ceux-ci proposent de s'intéresser à un système modèle très simple : une feuille de papier légèrement froissée. Le caractère froissé rend compte de la présence de fluctuations dont le rôle est primordial dans l'explication des effets décrits ici, même si les configurations examinées dans ce cadre sont statiques. L'ondulation de la feuille la rend plus facile à étirer ou à comprimer dans le sens des ondulations ((b) sur la Figure 4.2), mais plus difficile à courber dans la direction perpendiculaire aux ondulations ((c) sur la Figure 4.2). Dans une configuration où de telles ondulations sont superposées dans différentes directions, la rigidité de courbure globale du matériau augmente.

En résumé, le fort couplage entre phonons et flexurons dans les membranes cristallines leur confère un comportement élastique anormal qui les rend plus mous aux grandes échelles de longueur, mais particulièrement rigides vis-à-vis des efforts de courbure, à condition que leur taille soit grande devant la longueur de Ginzburg L_G (4.4), liée à leurs caractéristiques microscopiques et à la température. Une augmentation de la température accroît la gamme de longueurs sur

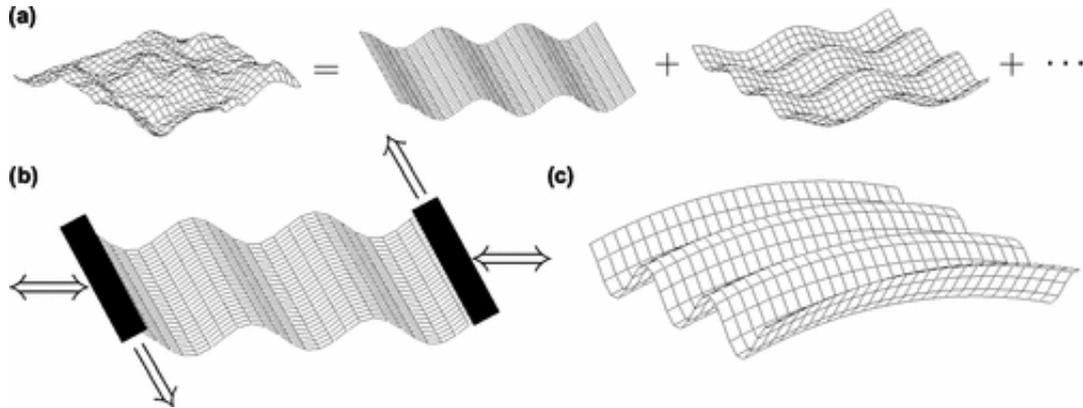


FIGURE 4.2 – Figure extraite de [Kořmrlj 2013] décrivant les propriétés mécaniques d’une feuille de papier légèrement froissée. (a) La forme de la configuration froissée peut être reconstruite à partir d’une combinaison de modes de fluctuation simples. (b) Il est facile d’appliquer des efforts de compression, dilatation ou cisaillement sur la feuille dans le sens des ondulations. (c) Il est plus difficile de plier la feuille dans la direction orthogonale aux ondulations.

laquelle les fluctuations sont anharmoniques, mais conduit néanmoins à une chute de la valeur des coefficients élastiques du matériau, qui déstabilise la phase plate si T est trop grande.

4.1.2 Coefficient de Poisson

Le coefficient de Poisson ν est un autre coefficient élastique, qui a la particularité d’être sans dimension. Lors de l’application d’un effort de traction uniaxiale, ν caractérise l’allongement d’un matériau donné dans les directions orthogonales à l’effort (voir Figure 4.3). Nous nous restreignons dans la suite à des matériaux et des contraintes complètement isotropes.

Le coefficient de Poisson ν est relié au module de compressibilité K de la façon suivante :

$$K = \frac{2\mu}{D} \left[\frac{1 + \nu}{1 - (D - 1)\nu} \right]. \quad (4.10)$$

La contrainte de positivité de K , nécessaire à la stabilité du potentiel élastique impose donc :

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{D - 1}. \quad (4.11)$$

Ainsi, même si les matériaux conventionnels ont un coefficient de Poisson positif, rien n’empêche celui-ci d’être négatif. Des matériaux à coefficient de Poisson négatif tendent à s’étirer dans toutes les directions lorsqu’ils sont allongés dans une direction⁴ (voir Figure 4.3). Ces matériaux sont appelés « *auxétiques* » [Evans 1991], c’est le cas notamment de certaines mousses [Lakes 1987], et de certains cristaux [Baughman 1998].

Ici, nous étudions des matériaux purement bidimensionnels, il est donc naturel que nous étudions le coefficient de Poisson à deux dimensions, qui varie donc entre -1 et 1 d’après (4.11), $\nu = -1$ correspondant à une membrane infiniment compressible ($K = 0$), c’est-à-dire décrite

4. Et à se comprimer dans toutes les directions à la fois pour un effort inverse.

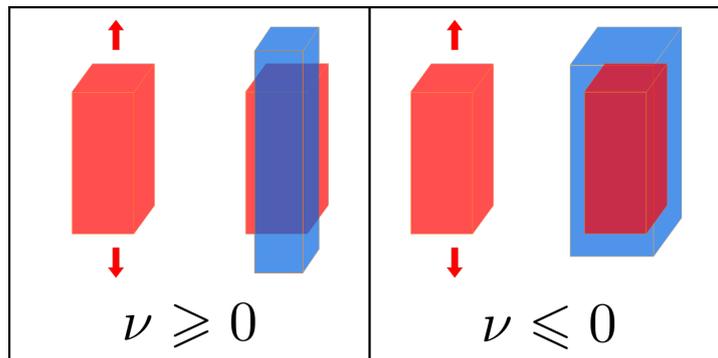


FIGURE 4.3 – Lors d'une traction uniaxiale, le coefficient de Poisson est le rapport de l'élongation relative dans la direction *transverse* à l'effort par l'élongation relative dans la direction *longitudinale* à l'effort. À gauche : un coefficient de Poisson $\nu \geq 0$ caractérise un matériau qui se contracte dans la direction transverse à l'effort, ce qui est le cas de la majorité des matériaux. À droite : certains matériaux ont un coefficient de Poisson $\nu \leq 0$, et ont donc tendance à s'étirer dans toutes les directions.

par le régime contrôlé par \mathbf{P}_3 . Dans la suite, nous nous intéressons plutôt au point fixe de phase plate \mathbf{P}_4 .

Le comportement de ν dans l'infrarouge est relié à une propriété importante du flot de renormalisation : la ligne $(D + 1)\bar{b}_k - 2\bar{\mu}_k = 0$ (ligne rouge en pointillés sur la Figure 3.2) est attractrice, comme nous l'avons montré dans le chapitre 3. En particulier, à \mathbf{P}_4 ,

$$(D + 1)\bar{b}^* - 2\bar{\mu}^* = 0 . \quad (4.12)$$

Finalement, ν s'exprime en fonction des constantes de couplage élastiques adimensionnées au point fixe de la façon suivante :

$$\nu^* = \frac{\bar{b}^* - \bar{\mu}^*}{(D - 2)\bar{b}^* + \bar{\mu}^*} = -\frac{1}{3} . \quad (4.13)$$

Cette valeur est *universelle* pour tous les matériaux dans la phase plate. En particulier, le modèle prédit que toutes les membranes cristallines sont des auxétiques à température ambiante. Ce résultat est d'autant plus intéressant que la fabrication de matériaux auxétiques, rares dans la nature, est un sujet actif de recherche car il est attendu que ces matériaux soient plus résistants aux chocs que les matériaux conventionnels (en présence d'un choc, le matériau se comprime dans toutes les directions, devenant ainsi plus dense, et donc *a priori* plus résistant) et plus difficiles à briser puisque leur capacité à s'étirer dans toutes les directions à la fois réduit les possibilités de propagations de fractures à l'intérieur du matériau, et permettent au son de se propager plus vite que dans les matériaux conventionnels [Jiang 2016].

Ce résultat peut être mis en évidence par une expérience très simple (voir Figure 4.4). Prenons une feuille de papier. Supposons qu'elle soit dans une configuration plate en moyenne, mais présentant des fluctuations de hauteur (la feuille est légèrement froissée). Si l'on tire sur deux coins opposés de cette feuille, elle s'étire dans la direction transverse à la direction de traction, un comportement typiquement auxétique. Cet exemple permet d'illustrer le rôle des fluctuations de hauteur dans ce mécanisme.



FIGURE 4.4 – Expérience simple illustrant le caractère auxétique d’une feuille de papier froissée dans un état quasi-plat. Lorsque la feuille est étirée dans une direction, elle s’étend également dans la direction transverse.

La valeur universelle de ν^* dans la phase plate est fortement liée aux symétries reliant les différentes constantes élastiques au niveau de l’action effective (3.180), qui se retrouvent également dans les équations de SCSA. Notamment, il n’est pas difficile de vérifier que (3.167) conduit $\check{b}(p)$ et $\check{\mu}(p)$ sur la ligne (4.12) dans la limite $p \rightarrow 0$. Par conséquent, le SCSA prédit également $\nu^* = -1/3$, même lorsque les équations auto-cohérentes sont enrichies à un ordre quelconque de ce développement [Gazit 2009]. Des simulations numériques basées sur ce modèle retrouvent ce résultat, même en présence d’une contrainte d’auto-évitement⁵ [Bowick 2001].

Du côté expérimental cependant, ν est difficile à mesurer pour de tels matériaux, et les simulations numériques basées sur des modèles réalistes du graphène prédisent une vaste gamme de valeurs pour le coefficient de Poisson, à la fois positives et négatives (voir notamment l’introduction de [Burmistrov 2018]). La solution à cette controverse réside probablement dans le rôle joué par la force de traction, que nous examinerons dans la section suivante. En effet, nous verrons que suivant l’amplitude des efforts appliqués, les caractéristiques de l’élasticité des membranes cristallines, et en particulier leur coefficient de Poisson, peuvent être très fortement modifiées.

4.1.3 Coefficient d’expansion thermique

Il reste une grandeur que nous n’avons pas encore examinée : le paramètre d’extension ζ . Celui-ci caractérise l’étirement de la membrane dans une configuration donnée : à l’équilibre, pour une membrane libre sans fluctuations, $\zeta = 1$, mais à cause des fluctuations thermiques ou d’une interaction avec le milieu extérieur, la membrane a la possibilité de se dilater ou de se contracter ce qui modifie la valeur de ζ . Le paramètre d’extension corrigé par les fluctuations thermiques jusqu’à l’échelle k , ζ_k , donne donc accès aux variations relatives de volume⁶ du système, et donc en particulier les variations de son volume avec la température, c’est-à-dire le coefficient d’expansion thermique du matériau α :

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial \zeta_0^2}{\partial T}, \quad (4.14)$$

5. Ce qui donne une confirmation supplémentaire du rôle négligeable de l’auto-évitement dans la phase plate.

6. Ou de façon équivalente, d’aire pour un système bidimensionnel.

où ζ_0 désigne le paramètre d'extension corrigé par les fluctuations thermiques à l'échelle macroscopique. Comme la membrane est un système bidimensionnel, ses variations relatives de volume varient comme ζ_0^2 .

Plus précisément, le flot de renormalisation de ζ_k^2 **dimensionné** dans la phase plate est donné par :

$$\partial_t \zeta_k^2 = k^{D-2+\eta_k} \frac{4v_D}{D} d_c l_{100}^{D+2} . \quad (4.15)$$

Lorsque $k \rightarrow 0$, ζ_k devient indépendant de l'échelle k et sature à sa valeur macroscopique ζ_0 . À cause de la présence de η_k qui dépend de la valeur des constantes de couplage élastiques à chaque échelle, l'équation (4.15) n'est pas soluble analytiquement. La forme de (4.15) donne à ζ_0 une dépendance dans l'histoire du flot, et ses conditions initiales. Cependant, il est possible d'intégrer cette équation numériquement en partant de la condition initiale $\zeta_\Lambda^2 = 1$ correspondant à une membrane parfaitement libre et sans fluctuation, ce qui donne ζ_0^2 à T fixé. α est obtenu en dérivant ces résultats par rapport à T . Dans le cas du graphène à température ambiante par exemple, cela prédit :

$$\alpha \simeq -1,62 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1} , \quad (4.16)$$

en bon accord avec les valeurs mesurées par spectroscopie Raman [Yoon 2011] ($\alpha = -8,0 \pm 0,7 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$), et en accord raisonnable avec les simulations numériques [Zakharchenko 2009] ($\alpha = -4,8 \pm 1,0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$). En particulier, le NPRG reproduit la tendance à l'augmentation de α avec la température observée expérimentalement (voir Figure 4.5).

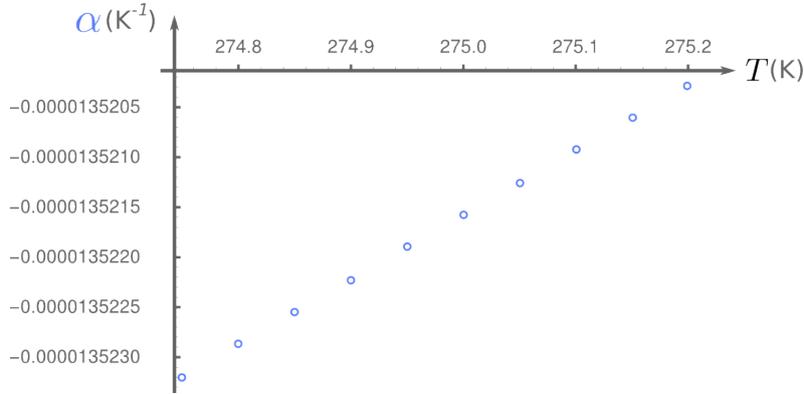


FIGURE 4.5 – Évolution de α avec la température pour une feuille de graphène à $T \simeq 275$ K calculée à partir du flot de ζ_k (4.15).

Les membranes cristallines ont donc toutes un coefficient d'expansion thermique négatif (elles se contractent à cause des fluctuations thermiques, voir Figure 4.6), un autre comportement assez peu commun. En effet, les conditions initiales à l'échelle microscopique changent la valeur numérique de α , mais pas son signe.

Afin d'avoir un aperçu analytique de la situation, et de faciliter la comparaison avec les résultats prédits par la théorie en $d_c \gg 1$ (voir [Burmistrov 2016]), il est utile de simplifier un peu (4.15). En effet, dans le graphène en particulier, la longueur de Ginzburg est petite (voir Figure 4.1), donc la convergence de η_k vers sa valeur de limite thermodynamique est beaucoup plus rapide que celle de ζ_k^2 . Il est donc possible de remplacer η_k par η^* dans (4.15), qui peut

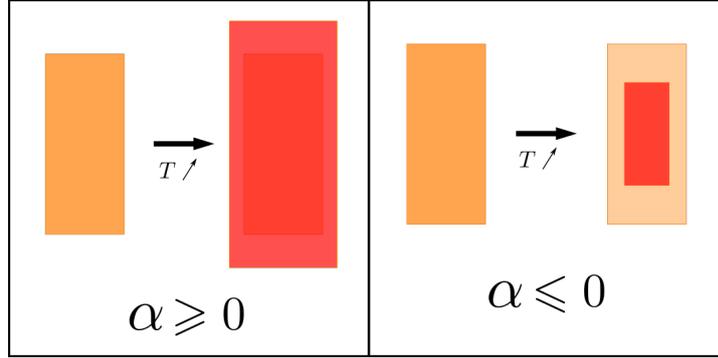


FIGURE 4.6 – Le coefficient d’expansion thermique α caractérise la réaction du système à un changement de température. Un matériau avec $\alpha \geq 0$ se dilate lorsque T augmente, alors qu’un matériau avec $\alpha \leq 0$ se contracte.

alors être intégrée analytiquement :

$$\partial_t \zeta_k^2 \simeq k \eta^* \frac{1}{4\pi} \bar{l}_{100}^4 . \quad (4.17)$$

- La limite $d_c \gg 1$ correspond à prendre $\eta^* = 0$ dans l’équation de flot (4.17). Dans ce cas, le second membre est constant et l’intégration de l’équation donne lieu à l’apparition d’un logarithme :

$$\zeta_k^2 \simeq \zeta_\Lambda^2 + \frac{k_B T}{4\pi\kappa} d_c \log\left(\frac{k}{\Lambda}\right) = 1 - \frac{T}{T_c} , \quad (4.18)$$

où la second équation fait écho au résultat exposé dans le chapitre 3 (3.66) donnant la valeur de ζ_0 dans la phase plate en fonction de la température de froissement T_c . Le coefficient d’expansion thermique correspondant est :

$$\alpha \underset{d_c \gg 1}{\simeq} \frac{k_B}{4\pi\kappa} d_c \log\left(\frac{k}{\Lambda}\right) = -\frac{1}{T_c} \xrightarrow{k \rightarrow 0} -\infty , \quad (4.19)$$

il diverge donc dans cette limite, ce qui montre la faillite du développement en $d_c \gg 1$ à l’ordre le plus bas pour établir des prédictions quantitatives pour α . Ce résultat permet de souligner le rôle prépondérant de η^* dans la description quantitative de la physique de la phase plate.

- La non-divergence de α est due à l’interaction entre phonons et flexurons qui, en générant $\eta^* \neq 0$, rigidifie la membrane. Une façon simple de corriger (4.19) consiste alors à remplacer κ par sa valeur corrigée par les fluctuations à l’échelle L dans le régime anharmonique (4.9) dans l’équation de flot (4.17) [Burmistrov 2016]. Cela donne alors :

$$\alpha \simeq -\frac{k_B}{4\pi\kappa\eta^*} . \quad (4.20)$$

D’autre part, l’intégration de l’équation NPRG (4.17) avec $\eta^* \neq 0$ conduit à :

$$\zeta_k^2 \simeq \frac{k_B T}{4\pi\kappa\eta^*} \left(1 - \frac{\eta^*}{8}\right) k \eta^* + \left(\zeta_\Lambda^2 - \frac{k_B T}{4\pi\kappa\eta^*} \left(1 - \frac{\eta^*}{8}\right)\right) , \quad (4.21)$$

soit, après la prise de limite $k \rightarrow 0$,

$$\alpha \simeq -\frac{k_B}{4\pi\kappa\eta^*} \left(1 - \frac{\eta^*}{8}\right). \quad (4.22)$$

La prédiction (4.20) du développement $d_c \gg 1$ amélioré se distingue du résultat NPRG (4.22) par l'absence du terme en rouge, qui correspond à la partie anormale de la fonction de seuil l_{100}^4 . Cette approximation a donc tendance à sous-évaluer la valeur du coefficient d'expansion thermique, bien que son caractère négatif soit bien retranscrit. De plus, dans ce modèle simplifié, α ne dépend pas de T .

Finalement, nous avons montré comment les équations du groupe de renormalisation établies dans le Chapitre 3 conduisent à des prédictions quant au comportement des caractéristiques thermodynamiques des membranes cristallines dans leur phase plate. Ces prédictions sont en bon accord avec les mesures expérimentales et les simulations *ab initio* pour le graphène. Cependant, pour décrire complètement la thermodynamique de la phase plate, il nous faut également examiner l'effet d'une contrainte extérieure sur une membrane cristalline. Cette contrainte entraîne l'apparition d'une tension dans le système, qui joue ici un rôle analogue à celui de la pression dans un gaz.

4.2 Membranes sous tension

Nous étudions dans cette section la réaction du système à une contrainte extérieure, et les quantités thermodynamiques associées. Cette contrainte peut être due à différentes interactions de la membrane avec son milieu environnant, telles que l'action d'un opérateur extérieur, ou une différence de pression entre les milieux de part et d'autre de la membrane par exemple. Dans l'approximation de l'élasticité linéaire, qui suppose que la contrainte appliquée est petite comparée aux caractéristiques de la réponse du matériau telles que le seuil d'entrée dans le régime de déformations plastiques, ou le seuil de rupture, cette contrainte se couple linéairement au tenseur de déformation, elle a pour forme $\sigma_{ij}\varepsilon^{ij}$. Nous supposons de plus que cette contrainte agit de façon isotrope, de sorte qu'elle puisse être représentée par un seul scalaire σ appelé « tension ».

4.2.1 Ensembles thermodynamiques

D'un point de vue thermodynamique, la tension σ est la variable conjuguée de Legendre du volume du système⁷. Suivant le jeu de variables internes choisies, le choix de potentiel thermodynamique doit être adapté. Dans un souci de simplification, nous travaillons dans cette section au niveau de l'approximation de champ moyen.

7. Ou l'aire du système. Il faut en général distinguer l'aire propre du système, et son aire « projetée » qui correspond à l'aire engendrée par la projection de celui-ci sur le plan de référence. En effet, deux systèmes présentant des fluctuations de hauteur très différentes peuvent avoir des aires projetées similaires, mais ont dans ce cas des aires totales très différentes. La différence entre ces deux cas réside dans la définition de ζ qui est interprété comme une unité de longueur soit au sein du plan de référence (auquel cas il définit l'unité d'aire projetée), soit dans l'espace interne de la membrane (auquel cas il définit l'unité d'aire propre du système). Cette distinction n'est cependant pas importante pour la discussion des résultats de ce manuscrit qui s'intéresse essentiellement à la phase plate dans laquelle la différence entre ces deux points de vue est négligeable.

4.2.1.1 Évolution à volume fixé

Lorsque le système est décrit à volume et température constants, le potentiel thermodynamique est l'énergie libre. D'après les résultats du Chapitre 2, celle-ci s'écrit en présence d'un champ de contrainte σ :

$$\mathcal{F} = \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{r})^2 + \frac{\sigma}{2} (\partial_i \vec{r} \cdot \partial^i \vec{r} - D\zeta^2) + \frac{c^{abcd}}{8} (\partial_a \vec{r} \cdot \partial_b \vec{r} - \zeta^2 \delta_{ab}) (\partial_c \vec{r} \cdot \partial_d \vec{r} - \zeta^2 \delta_{cd}) \right]. \quad (4.23)$$

La tension n'introduit pas de nouvelle puissance du champ de position dans l'énergie libre. En effet, elle contribue seulement au coefficient du terme quadratique en champ, lequel est donc maintenant :

$$\frac{\sigma}{2} - \frac{D}{4} K \zeta^2. \quad (4.24)$$

Il est logique de voir apparaître au côté de la tension le module de compressibilité K , qui est la constante élastique la plus appropriée pour décrire la réaction du système à un effort d'étirement ou de compression isotrope.

L'interprétation de (4.24) est la suivante : tant que l'effort appliqué est suffisamment faible, $D/2 K \zeta^2 - \sigma \geq 0$, donc σ peut être absorbé dans une redéfinition du paramètre d'extension ζ : son effet principal est une compression ou un étirement global du système. Le nouvel équilibre thermodynamique correspond alors à :

$$\zeta_{eq}^2 = \zeta^2 - 2 \frac{\sigma}{DK}. \quad (4.25)$$

Dans le cas d'un effort d'étirement, $\sigma > 0$, et le facteur d'extension de la membrane à l'équilibre est réduit. En effet, considérons deux membranes fluctuantes fixées sur deux cadres identiques (le volume est fixé). Celle dont le paramètre d'extension à l'équilibre est le plus petit est celle qui est la plus étirée, autrement dit, celle qui supporte l'effort le plus important, ce qui est cohérent avec (4.25). Comme $\zeta^2 \geq 0$, ce changement d'équilibre n'est plus possible si σ est trop grand, le système sort du régime élastique.

Si l'on tient compte des fluctuations dans cet ensemble thermodynamique, ζ doit rester égal à sa valeur prédite par la théorie de champ moyen, puisque le volume est fixé ; les fluctuations thermiques du terme quadratique en champ seront comprises comme des corrections à la valeur de la tension σ qui est ici une variable interne au système, et non pas un champ externe.

4.2.1.2 Évolution à tension fixée

Lorsque le système est décrit à température et contrainte fixées, le potentiel thermodynamique est l'enthalpie libre \mathcal{G} . Celle-ci diffère de \mathcal{F} par une quantité égale au travail fourni par l'opérateur externe. Il est important de noter que dans le cas général, l'application d'une pression se décrit à l'aide du tenseur des contraintes suivant :

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Dans les formules de thermodynamique habituelles, le rôle de la pression est donc joué par $-\sigma$, il faut être vigilant aux signes. Un effort de compression correspond alors bien à une tension

$\sigma < 0$, et un étirement à $\sigma > 0$. L'enthalpie libre s'écrit alors :

$$\mathcal{G} = \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{r})^2 - \frac{\sigma}{2} (\partial_i \vec{r} \cdot \partial^i \vec{r} - D\zeta^2) + \frac{c^{abcd}}{8} (\partial_a \vec{r} \cdot \partial_b \vec{r} - \zeta^2 \delta_{ab}) (\partial_c \vec{r} \cdot \partial_d \vec{r} - \zeta^2 \delta_{cd}) \right]. \quad (4.27)$$

Les deux expressions (4.23) et (4.27) ne diffèrent donc formellement que par le signe du terme de tension. Les conséquences sont importantes : dans ce cadre, le changement de paramètre d'extension à l'équilibre s'écrit donc maintenant :

$$\zeta_{eq}^2 = \zeta^2 + 2 \frac{\sigma}{DK}. \quad (4.28)$$

Il faut bien avoir en tête que cette fois-ci, la membrane est libre de modifier son volume. L'équation (4.28) s'interprète donc de la manière suivante : en présence d'un effort d'étirement (avec $\sigma \geq 0$), le paramètre d'extension de la membrane à l'équilibre **augmente** car la membrane s'étire. Nous ne pouvons néanmoins considérer que la membrane s'étire que dans la mesure où son volume n'est pas fixé, c'est pourquoi les résultats (4.28) et (4.25) ne sont pas contradictoires.

En présence de fluctuations thermiques dans cet ensemble thermodynamique, c'est la valeur de ζ qui est modifiée. La tension σ est traitée comme un champ externe qui se renormalise « trivialement », c'est-à-dire que le flot de sa contrepartie adimensionnée est nul.

4.2.2 Diagramme des phases - Transition de flambage

D'après (4.23), la dimension du terme de tension est $\Delta(\sigma) = 2 - \eta$. Autrement dit, σ est un couplage *essentiel* au voisinage de \mathbf{P}_4 : le point fixe de phase plate est entièrement attractif sur l'hypersurface $\sigma = 0$, mais est répulsif dans la direction associée à σ . La transition de phase associée est appelée *transition de flambage* [Gutter 1989].

Ce résultat peut paraître surprenant à première vue : quelle que soit la valeur de la contrainte appliquée, qu'il s'agisse d'une compression ou d'un étirement, elle détruit la phase plate de la membrane qui la subit, mais il est cohérent avec l'analyse des modules d'élasticité effectuée dans la section précédente. En effet, nous y avons établi que dans la limite des systèmes de taille infinie, toutes les constantes élastiques dimensionnées du matériau devenaient nulles ; il est donc logique que dans cette limite la membrane devienne infiniment sensible à l'application d'un effort. Pour comprendre la réaction d'un matériau réel à l'application d'une tension, il faut donc analyser les transitions entre les différents régimes décrits par des lois d'échelle données par le groupe de renormalisation pour des systèmes de taille finie L^8 , et conclure en fonction des caractéristiques dimensionnées du matériau.

Concrètement, l'introduction de la tension change le propagateur des flexurons en :

$$G_h(q) = \frac{1}{\kappa q^4 + \sigma q^2}. \quad (4.29)$$

À faible tension, c'est le terme de courbure qui domine, et les flexurons ont leur comportement habituel dans la phase plate. À partir d'une certaine longueur, le comportement des flexurons est dominé par la tension, leur relation de dispersion devient linéaire, et non plus quadratique. Cette longueur est donnée par $L_\sigma = \sqrt{\kappa/\sigma}$ dans la théorie de champ moyen, mais le régime

8. Qui ont donc des modules d'élasticité non nuls.

de phase plate étant fortement anharmonique, cette valeur peut être fortement modifiée par les fluctuations thermiques. Il nous faut donc distinguer deux régimes :

- Si la longueur L_σ à partir de laquelle le comportement du système est dominé par la tension est très petite devant la longueur de Ginzburg $L_\sigma \ll L_G$, le système entre dans le régime dominé par la tension alors qu'il se trouve toujours dans le régime harmonique. La longueur de transition est donc donnée par sa valeur champ moyen :

$$L_\sigma = \sqrt{\frac{\kappa}{\sigma}}. \quad (4.30)$$

- Lorsque $L_\sigma \gg L_G$, le régime de tension est atteint à une échelle où les fluctuations thermiques sont anharmoniques. À l'échelle de la taille du système L , la courbure du système est modifiée par un facteur dépendant de η^* et L_G (voir (4.9)), ce qui transforme (4.30) en :

$$L_\sigma = \left(\frac{\kappa}{\sigma (L_G)^{\eta^*}} \right)^{\frac{1}{2-\eta^*}}. \quad (4.31)$$

Ainsi les fluctuations thermiques ont tendance à augmenter la taille nécessaire pour que le système entre dans un régime dominé par la tension, ce qui est cohérent avec leur effet rigidificateur, à la fois pour l'élasticité et la courbure.

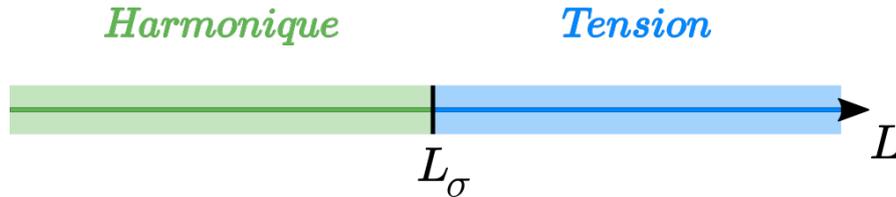
La transition entre les deux régimes précédents se fait pour une contrainte σ^* telle que $L_G \sim L_{\sigma^*}$, soit :

$$\sigma^* = \frac{k_B T}{\kappa} \frac{\mu_\Lambda}{6\pi}. \quad (4.32)$$

La tension de transition est d'autant plus forte que l'élasticité du système est importante (il est dans ce cas plus résistant aux effets extérieurs), et que la température est élevée. C'est une conséquence de la diminution de L_G avec la température : plus T est élevée, plus la plage d'échelles où les fluctuations sont anharmoniques est grande. Dans le graphène, à température ambiante, cette tension est estimée à $\sigma^* \sim 10 \text{ N.m}^{-1}$ [Košmrlj 2016]. Sous des contraintes de taille raisonnables, nous pouvons donc considérer que la transition se fait plutôt à l'échelle typique (4.31).

En résumé, les régimes de fluctuation sont donnés en fonction de la taille L du système par :

- $\sigma \gg \sigma^*$:



La longueur de transition L_σ est donnée par (4.30).

- $\sigma \ll \sigma^*$:



La longueur de transition L_σ est donnée par (4.31).

Une autre grandeur intéressante est la tension critique σ_c à partir de laquelle la phase plate d'un système de taille donnée L est brisée. Autrement dit, σ_c est définie comme la tension pour laquelle la transition vers le régime dominé par la tension a lieu exactement à la taille L , ce qui d'après (4.31) donne :

$$\boxed{\sigma_c = \frac{\kappa}{L^2} \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta^*}}, \quad (4.33)$$

dans le régime anharmonique, alors que d'après (4.30), elle vaut :

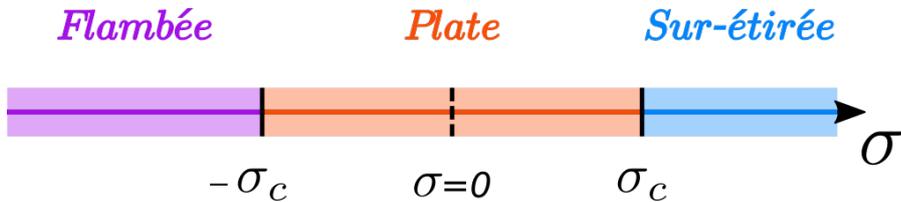
$$\sigma_c = \frac{\kappa}{L^2} \quad (4.34)$$

dans le régime harmonique.

Pour une feuille de graphène de taille micrométrique, $\sigma_c \sim 4 \times 10^{-4} \text{ N.m}^{-1}$, ce qui équivaut à une pression d'environ 3 MPa pour un matériau à trois dimensions. Notons que dans ce cas, $\sigma_c \ll \sigma^*$, donc la transition vers le régime dominé par la tension a lieu depuis le régime anharmonique, ce qui est cohérent avec la très faible valeur de L_G pour ce matériau.

Finalement, le diagramme des phases des membranes cristallines en fonction de la contrainte isotrope σ appliquée a l'allure suivante :

- $\sigma_c \ll \sigma^*$:



– Phase plate :

Pour des tensions appliquées suffisamment faibles ($\sigma \ll \sigma_c$), la membrane reste dans sa phase plate. Sa rigidité est anormalement élevée, en accord avec les lois d'échelle universelles déduites de \mathbf{P}_4 . En effet, si σ est encore suffisamment faible à l'échelle de la taille du système, elle peut être absorbée dans une redéfinition de ζ_k : l'application d'une contrainte externe conduit la membrane vers une nouvelle phase plate caractérisée par un paramètre d'extension à l'équilibre ζ_0 différent, ou autrement dit, la membrane adapte son volume à la contrainte externe grâce à son élasticité propre.

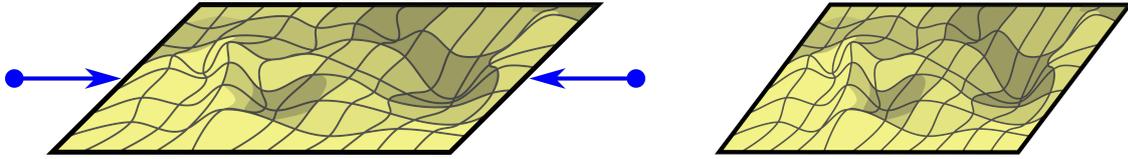


FIGURE 4.7 – À gauche : la membrane est comprimée dans une direction. À droite : pour des efforts de suffisamment faible amplitude, la déformation de la membrane reste dans le régime élastique. La membrane est encore dans sa phase plate, seul son volume a changé, pour s'adapter à la contrainte subie.

– **Phase sur-étirée :**

Si $\sigma > 0$ est trop importante, le propagateur des flexurons (4.29) est fortement atténué à grande distance [Roldàn 2011]. La modification du comportement dans l'infrarouge du propagateur des modes de fluctuation dominants détruit l'anharmonicité dans le système. Le matériau retrouve des lois de l'élasticité conventionnelle. Qualitativement, en présence d'un étirement suffisamment fort, l'éloignement entre les atomes de la structure cristalline est tel que les fluctuations de hauteur sont fortement pénalisées (voir Figure 4.8). Les propriétés de la phase sur-étirée sont discutées plus en détail dans la section 4.2.4.

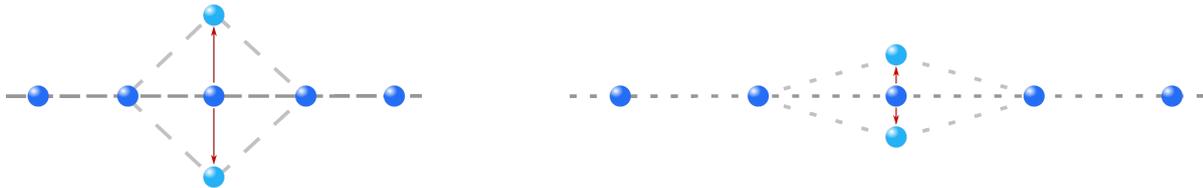


FIGURE 4.8 – Effet d'un étirement sur un réseau d'atomes unidimensionnel. À gauche : en l'absence de contrainte extérieure, les fluctuations de position de l'atome central sont plus favorables dans la direction où il ne comporte pas de voisin. À droite : lorsque le milieu est étiré, la moindre fluctuation de hauteur a un coup énergétique très élevé, la position de l'atome central n'est plus poussée à fluctuer de haut en bas.

– **Phase flambée :**

Lorsque $\sigma < 0$, l'entrée dans le régime dominé par la tension est marqué par une *divergence* du propagateur de flexurons (4.29), la phase plate devient instable. Cette divergence est la marque que l'énergie libre utilisée pour décrire le système n'est plus valide dans ce régime. Les phonons acoustiques et les flexurons ne sont plus les modes de fluctuation élémentaires.

La Figure 4.9 décrit comment le système devient hypersensible aux fluctuations de hauteur lorsque le système est fortement comprimé : en rapprochant trop les atomes les uns des autres, la compression rend les fluctuations de la position des atomes vers l'extérieur du réseau extrêmement favorables énergétiquement. Par conséquent, des fluctuations thermiques très faibles sont suffisantes pour détruire la phase plate.

Par analogie avec les systèmes magnétiques, la phase correspondante, appelée phase flambée, peut être décrite comme une mosaïque de domaines plats, orientés de façon aléatoire, et séparés par des parois de domaines où la tension est localement très forte

[Gutter 1989].

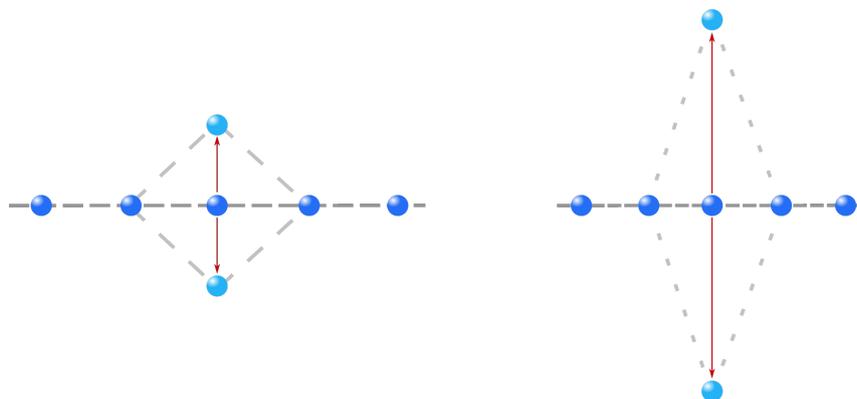
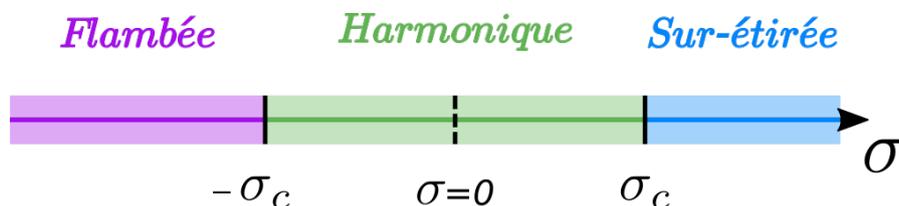


FIGURE 4.9 – Effet d’une compression sur un réseau d’atomes unidimensionnel. À gauche : en l’absence de contrainte extérieure, les fluctuations de position de l’atome central sont plus favorables dans la direction où il ne comporte pas de voisin. À droite : lorsque le milieu est fortement comprimé, la position d’équilibre de l’atome central sur le réseau devient instable. À cause de la frustration induite par la compression, les fluctuations de hauteur sont sur-favorisées.

Même si notre modèle est insuffisant pour bien décrire la phase flambée, il peut être utilisé pour calculer les propriétés de la transition de phase, qui a lieu à \mathbf{P}_4 . Par exemple, dans [Košmrj 2017], ce modèle est utilisé pour étudier le rayon critique que peuvent avoir des vésicules plongées dans un fluide : les vésicules avec un rayon plus grand ont des constantes élastiques plus faibles. À cause de la différence de pression entre le milieu extérieur et le milieu intérieur à la vésicule, sa paroi est soumise à une tension. Lorsque cette tension est trop grande par rapport à la taille de la vésicule, celle-ci flambe et sa forme n’est plus du tout sphérique.

- $\sigma_c \gg \sigma^*$:

Pour des matériaux suffisamment souples, la transition vers les phases dominées par la tension se fait depuis le régime harmonique. De tels matériaux n’ont pas de phase plate.



4.2.3 Loi de Hooke anormale dans la phase plate

La loi de Hooke relie la contrainte appliquée par le milieu extérieur à la déformation du matériau. Dans les membranes cristallines, la modification des lois d’échelle de l’élasticité conventionnelle par des fluctuations thermiques fortement anharmoniques est à l’origine d’une modification inhabituelle de la relation contrainte-déformation appelée loi de Hooke anormale. Celle-ci a été

mise en évidence dans différents calculs perturbatifs par des développements en couplage faible [Aronovitz 1989], ou par une extrapolation des résultats du régime $d_c \gg 1$ [Gornyi 2017]. Les auteurs de [Gutter 1989] ont également prouvé que le résultat correspondant est valide à tous les ordres du développement en ε .

Dans cette section nous montrons que ces résultats sont valides y compris dans le régime non-perturbatif. Nous verrons comment les équations du NPRG permettent de retrouver cette loi, quel que soit l'ensemble thermodynamique choisi. Rappelons que, de toutes les méthodes citées ci-dessus, seul le NPRG donne une valeur de η cohérente avec son schéma d'approximation en $D = 2$ et $d = 3$.

Grâce aux considérations de la section précédente, nous pouvons supposer raisonnablement que $\sigma_c \ll \sigma^*$, et que le système est donc dans un régime de fluctuations thermiques anharmoniques.

4.2.3.1 Évolution à tension fixée

Pour commencer, nous travaillons à tension et température fixées. C'est un choix naturel car dans ce formalisme, la tension est égale au champ de contrainte externe appliqué : $\sigma_k = \sigma_k^{ext}$ qui apparaît dans la loi de Hooke. L'ansatz donnant l'action effective moyenne correspond donc à l'enthalpie libre (4.27) :

$$\Gamma_k[\vec{r}] = \int_x \left[\frac{Z_k}{2} (\partial^2 \vec{r})^2 - \frac{\sigma_k}{2} (\partial_i \vec{r} \cdot \partial^i \vec{r} - D(\zeta_k^{sp})^2) + \frac{c^{abcd}}{8} (\partial_a \vec{r} \cdot \partial_b \vec{r} - (\zeta_k^{sp})^2 \delta_{ab}) (\partial_c \vec{r} \cdot \partial_d \vec{r} - (\zeta_k^{sp})^2 \delta_{cd}) \right]. \quad (4.35)$$

À cause de la présence du terme de tension (en bleu), ζ_k atteint une valeur d'équilibre à $k = 0$ ζ_0 différente de celle qu'il aurait atteint si σ était nul, que nous noterons ζ^{sp} (c'est le paramètre d'extension « spontané »). Ce comportement s'interprète de la façon suivante : comme le système est encore dans sa phase plate, il est possible de définir ζ_k comme le nouveau minimum à l'équilibre thermodynamique dans (4.35), et d'exprimer Γ_k en fonction de ζ_k au lieu de ζ_k^{sp} grâce à (4.28), auquel cas σ_k n'intervient plus mais le paramètre d'extension à l'équilibre définissant la phase plate est modifié en conséquence $\zeta_0 \neq \zeta^{sp}$.

Ceci s'interprète également de la manière suivante : l'application de $\sigma \neq 0$ éloigne le système de la courbe de coexistence $\zeta^{sp}(T)$ (voir Figure 4.10). L'écart de ζ_0 à sa valeur spontanée ζ^{sp} génère une longueur de corrélation finie ξ entre les modes de fluctuation. La façon dont ξ diverge à l'approche de la phase plate définit l'exposant critique ν_σ [Gutter 1989] :

$$\xi \sim |\zeta_0^2 - \zeta_{sp}^2|^{-\nu_\sigma}. \quad (4.36)$$

De plus, l'écart à la phase plate $|\zeta_0^2 - \zeta_{sp}^2|$ correspond à la déformation du matériau engendrée par la présence de la tension. En effet, dans une configuration presque plate, la métrique est quasiment euclidienne, et ζ_0 définit l'échelle de longueur : $g_{ij} \simeq \zeta_0^2 \delta_{ij}$. Le tenseur de déformation correspondant est l'écart entre cette métrique et celle de la configuration spontanée atteinte en l'absence de champ extérieur $g_{ij}^{sp} \simeq \zeta_{sp}^2 \delta_{ij}$. L'exposant critique δ_σ relie l'écart à la phase plate au champ externe σ^{ext} appliqué :

$$\sigma^{ext} \sim |\zeta_0^2 - \zeta_{sp}^2|^{\delta_\sigma}. \quad (4.37)$$

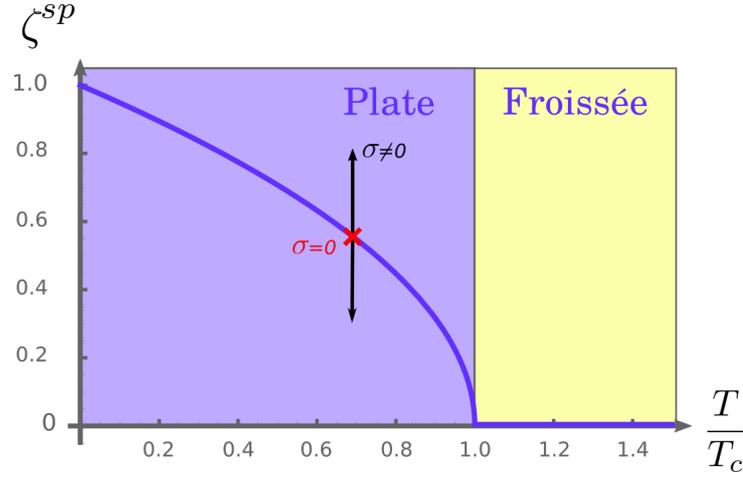


FIGURE 4.10 – Courbe de coexistence donnant l'évolution de ζ^{sp} avec la température. La température de froissage T_c est définie par $T_c = -1/\alpha$; cette courbe est obtenue avec l'approximation $\alpha(T)$ indépendant de T présentée dans la section 4.1.3. L'application d'une tension éloigne le système de la courbe de coexistence.

L'équation (4.37) relie la contrainte appliquée à la déformation : c'est donc elle qui définit la loi de Hooke dans le matériau.

Dans cet ensemble thermodynamique⁹, le paramètre d'extension à l'équilibre est relié à sa valeur spontanée par la relation héritée de (4.28) :

$$\zeta_k^2 = (\zeta_k^{sp})^2 + \frac{2}{D} \frac{\sigma_k}{K_k}, \quad (4.38)$$

ce qui n'est possible que parce que $\sigma_k = \sigma_k^{ext}$. Dans le cas contraire, la renormalisation de la tension est non triviale, et cette identité, héritée de la théorie de champ moyen, n'est plus valide à une échelle arbitraire. Le champ externe est relié à sa contrepartie adimensionnée par :

$$\sigma_k^{ext} = k^{2-\eta_k} \bar{\sigma}_k^{ext}. \quad (4.39)$$

Or, par définition, $\partial_t \bar{\sigma}_k^{ext} = 0$. La dépendance de la contrainte appliquée avec la taille du système est donc donnée par la loi d'échelle suivante :

$$\sigma_L^{ext} = \sigma_\Lambda^{ext} \left(\frac{L}{L_G} \right)^{-2+\eta^*}. \quad (4.40)$$

Cette relation, combinée avec (4.38) et (4.8), est suffisante pour déduire les exposants critiques ν_σ et δ_σ ¹⁰ :

$$|\zeta_0^2 - \zeta_{sp}^2| = \frac{2}{D} \frac{\sigma_L^{ext}}{K_L} \sim L^{-(D-2+\eta^*)}, \quad (4.41)$$

9. C'est-à-dire à champ externe fixé.

10. Nous avons utilisé ici des versions des lois d'échelle précédentes généralisées à D dimensions pour obtenir la dépendance en D des exposants critiques et pouvoir les comparer à ceux des autres approches utilisées dans la littérature.

d'où nous déduisons, grâce à la définition (4.36) que :

$$\boxed{\nu_\sigma = \frac{1}{D - 2 + \eta^*}}. \quad (4.42)$$

Ce résultat est le même que celui établi dans [Gutter 1989], valable à tous les ordres du développement en ε .

En fonction de la contrainte externe appliquée, cela se réécrit :

$$|\zeta_0^2 - \zeta_{sp}^2| = \frac{2}{D} \frac{\sigma_L^{ext}}{K_L} \sim \sigma_L^{ext} L^{D-4+2\eta^*} \sim (\sigma_L^{ext})^{\frac{D-2+\eta^*}{2-\eta^*}}, \quad (4.43)$$

soit finalement :

$$\boxed{\delta_\sigma = \frac{2 - \eta^*}{D - 2 + \eta^*} = 1 + \frac{4 - D - 2\eta^*}{D - 2 + \eta^*}}. \quad (4.44)$$

Dans la théorie de champ moyen, $\delta_\sigma = 1$, ce qui correspond à la loi de Hooke normale. La contrainte est proportionnelle à la déformation :

$$|\zeta^2 - \zeta_{sp}^2| \sim \sigma_L^{ext}. \quad (4.45)$$

Comme le terme en bleu dans (4.44) est toujours positif, la valeur de l'exposant δ_σ est *plus grande* que sa valeur dans la théorie de champ moyen : la loi de Hooke dans la phase plate est anormale. Puisque le matériau est **anormalement rigide**, il faut une **contrainte anormalement grande** pour lui faire subir une déformation donnée. La valeur prédite par le calcul NPRG est $\delta_\sigma \simeq 1,36$.

4.2.3.2 Lien avec l'évolution à volume fixé

Les résultats précédents sont évidemment indépendants de l'ensemble thermodynamique choisi pour décrire le système. Le calcul présenté dans [Gutter 1989] par exemple est effectué à volume fixé. Afin de présenter comment le formalisme NPRG est implémenté dans cet ensemble thermodynamique, nous allons montrer comment la loi de Hooke anormale peut être retrouvée à partir de celui-ci. Lorsque le volume et la température sont fixés, l'ansatz donnant l'action effective moyenne est donc donné par l'énergie libre (4.23) :

$$\Gamma_k[\vec{r}] = \int_x \left[\frac{Z_k}{2} (\partial^2 \vec{r})^2 + \frac{\sigma_k}{2} (\partial_i \vec{r} \cdot \partial^i \vec{r} - D(\zeta_k^{sp})^2) + \frac{c_k^{abcd}}{8} (\partial_a \vec{r} \cdot \partial_b \vec{r} - (\zeta_k^{sp})^2 \delta_{ab}) (\partial_c \vec{r} \cdot \partial_d \vec{r} - (\zeta_k^{sp})^2 \delta_{cd}) \right]. \quad (4.46)$$

Cette fois-ci, en revanche, $\sigma_k \neq \sigma_k^{ext}$. En particulier, la relation (4.25) à l'échelle k s'écrit encore :

$$\zeta_k^2 = (\zeta_k^{sp})^2 + \frac{2}{D} \frac{\sigma_k^{ext}}{K_k} \neq (\zeta_k^{sp})^2 - \frac{2}{D} \frac{\sigma_k}{K_k}. \quad (4.47)$$

En effet, le première égalité découle du fait que le volume atteint par le système à l'équilibre est une grandeur indépendante de la description choisie. La tension σ_k , en revanche, n'est plus liée simplement à la valeur du champ externe σ_k^{ext} car elle inclut en plus de ce dernier l'effet des fluctuations anharmoniques. Ainsi, dans cet ensemble thermodynamique, il n'est pas simple d'avoir accès à $\zeta_0^2 - \zeta_{sp}^2$; nous avons besoin d'un nouveau critère pour caractériser l'écart à la situation sans tension.

Du point de vue du groupe de renormalisation, la phase plate correspond à un point fixe \mathbf{P}_4 dans le diagramme de flot. Dans le plan $\sigma = 0$, les propriétés du point fixe de phase plate ne sont pas modifiées par l'introduction de la tension, mais \mathbf{P}_4 est maintenant répulsif dans cette nouvelle direction. L'existence d'une tension non nulle entraîne donc un départ de \mathbf{P}_4 vers les régions du diagramme de flot dominées par la tension (phase sur-étirée ou flambée). Comme le flot est très lent au voisinage de \mathbf{P}_4 (c'est un point fixe), un système de taille finie pour lequel σ_k s'est peu renormalisé est encore gouverné par les lois d'échelle universelles à \mathbf{P}_4 (si $L \ll L_\sigma$), et est donc encore dans sa phase plate. L'écart à la situation à tension nulle est donc reliée à la façon dont le flot quitte \mathbf{P}_4 , c'est-à-dire aux caractéristiques du flot dans la direction associée à la tension dans un proche voisinage de ce point fixe.

Plus précisément, l'écart à la situation sans tension est caractérisé par le comportement de la *tension adimensionnée* au voisinage du point fixe de phase plate, définie par :

$$\sigma_k = k^{2-\eta_k} \bar{\sigma}_k . \quad (4.48)$$

En effet, si σ_k se comportait comme un champ externe, $\bar{\sigma}$ serait indépendant de l'échelle courante, et \mathbf{P}_4 ne serait pas répulsif dans la direction associée puisque le flot serait paralysé. Cela nous permet de donner une nouvelle définition pour les exposants critiques. ν_σ décrit précisément la façon dont le flot s'écarte de \mathbf{P}_4 , ou de façon équivalente comment une longueur de corrélation finie ξ est générée [Gutter 1989] :

$$\xi \sim |\bar{\sigma}_k|^{-\nu_\sigma} . \quad (4.49)$$

Cette relation est analogue à la définition de l'exposant critique ν du modèle $O(N)$ à partir de la masse renormalisée, qui est aussi l'écart à la température de Curie $|T - T_c|$.

L'exposant δ_σ quant à lui relie la tension *adimensionnée renormalisée* au champ externe appliqué [Gutter 1989] :

$$\sigma^{ext} \sim |\bar{\sigma}_k|^{\delta_\sigma} . \quad (4.50)$$

Le flot de renormalisation de σ_k est non trivial dans cet ensemble thermodynamique. Il peut être défini à partir du flot du propagateur renormalisé avec deux indices pris hors de la membrane $\Gamma_{k,dd}^{(2)}$, autrement dit du propagateur de flexurons renormalisé. En effet, celui-ci s'écrit au minimum de l'action effective (3.182) :

$$\Gamma_{k,dd}^{(2)}[\vec{r}_{min}; p, -p] = \sigma_k p^2 + Z_k p^4 . \quad (4.51)$$

Le flot de σ_k est donc défini par :

$$\partial_t \sigma_k = \partial_t \left[\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_{k,dd}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right]_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}} , \quad (4.52)$$

soit finalement,

$$\partial_t \sigma_k = -2v_D d_c K_k l_{100}^{D+2}(\sigma_k) + \frac{D}{2} K_k \partial_t \zeta_k^2 , \quad (4.53)$$

où maintenant les fonctions de seuil des flexurons ont une pseudo-masse non nulle à cause du terme de tension dans (4.51).

L'équation (4.53) mélange les flots de σ_k et ζ_k ; en effet, ces deux grandeurs sont conjuguées de Legendre. Dans un calcul à volume fixé, c'est le paramètre d'extension à l'équilibre ζ_0 , corrigé

par les fluctuations, qui est fixé, pas sa valeur courante ζ_k . En particulier, cela ne détermine pas si ce volume a été atteint spontanément par le système, ou à cause de la présence d'une contrainte (voir Figure 4.11). σ ne peut donc être défini qu'à partir d'une configuration de référence atteinte en l'absence de tension qui définit ζ^{sp} . Le flot de ζ_k intervenant dans (4.53) est alors choisi comme étant le flot de ζ_k^{sp} , qui n'est autre que le flot du paramètre d'extension dans la phase plate à $\sigma = 0$ donné par (4.15). Le flot de σ_k devient alors :

$$\partial_t \sigma_k = 2v_D d_c K_k (l_{100}^{D+2}(0) - l_{100}^{D+2}(\sigma_k)) . \quad (4.54)$$

Le flot des constantes de couplage élastiques sont les mêmes qu'auparavant, mis à part que les fonctions de seuil mises en jeu sont pseudo-massives puisque dans l'ansatz (4.46), le terme de tension affecte le propageur de tous les modes de fluctuation.

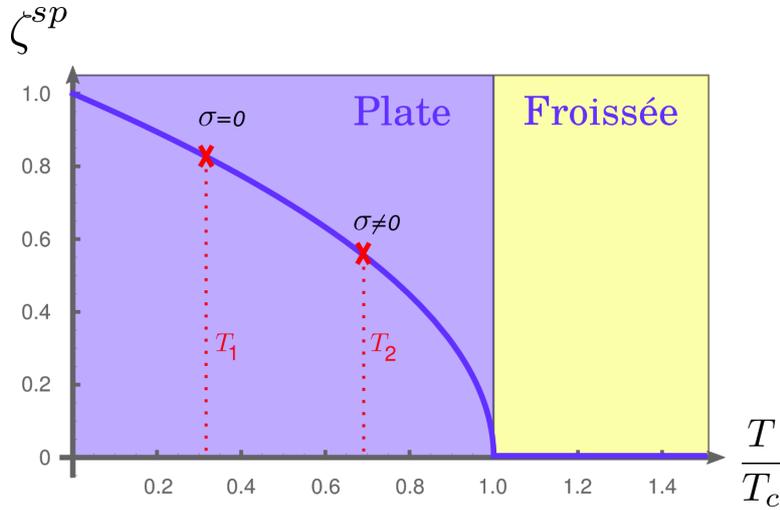


FIGURE 4.11 – Courbe de coexistence donnant l'évolution de ζ^{sp} avec la température. La température de froissage T_c est définie par $T_c = -1/\alpha$; cette courbe correspond à l'approximation $\alpha(T)$ indépendant de T présentée dans la section 4.1.3. La valeur de ζ à une température donnée peut être interprétée soit comme la valeur ζ^{sp} qu'aurait une membrane libre à cette température, soit comme la valeur de ζ d'une membrane sous tension, mais à une température différente.

Pour étudier le voisinage de \mathbf{P}_4 , il nous faut travailler avec des variables adimensionnées. Comme par continuité, la phase plate doit être atteinte pour $\bar{\sigma}^* = 0$, les équations de flot peuvent être développées en puissances de $\bar{\sigma}_k$ pour caractériser l'approche de ce point fixe. Ce développement est justifié car les exposants critiques définis dans (4.50) et (4.49) peuvent être calculés à partir du jacobien du flot à \mathbf{P}_4 , qui ne fait intervenir que les écarts linéaires au point fixe, et n'est donc pas sensible aux ordres supérieurs.

L'essentiel de la dépendance en $\bar{\sigma}_k$ est contenue dans les fonctions de seuil. Nous présentons ici le développement dans le cas particulier où la coupure est donnée par une fonction de Heaviside

$$R_k(q) = Z_k (k^4 - q^4) \Theta(k^4 - q^4) , \quad (4.55)$$

et où les expressions analytiques sont plus simples, mais le même raisonnement s'applique pour une coupure quelconque. À cause de l'adimensionnement, les fonctions de seuil sont des intégrales

sur la variable sans dimension $y = q^2/k^2$. Considérons une fonction de la famille $\bar{l}_{a00}^{D+\alpha}$ de pseudo-masse \bar{m}_k (voir Annexe F) :

$$\begin{aligned} \bar{l}_{a00}^{D+\alpha}(\bar{m}_k) &= \frac{1}{2} \int_0^1 dy \frac{4 a y^{D/2-1}}{(1 + \bar{m}_k^2)^{a+1}} + \frac{\eta_k}{2} \int_0^1 dy \frac{a y^{D/2-1}(y^2 - 1)}{(1 + \bar{m}_k^2)^{a+1}} \\ &\stackrel{\bar{m}_k \ll 1}{=} \left[\frac{1}{2} \int_0^1 dy 4 a y^{D/2-1} + \frac{\eta_k}{2} \int_0^1 dy a y^{D/2-1}(y^2 - 1) \right] \left(1 - (a+1)\bar{m}_k^2 y + O(\bar{m}_k^4) \right) \\ &\stackrel{\bar{m}_k \ll 1}{=} \bar{l}_{a00}^{D+\alpha}(0) - a \bar{m}_k^2 \bar{l}_{(a+1)00}^{D+\alpha+2} + O(\bar{m}_k^4). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ainsi, les équations de flot des constantes élastiques au voisinage de \mathbf{P}_4 ne sont pas modifiées par $\bar{\sigma}_k$ à l'ordre le plus bas. Pour la tension en revanche, la contribution du flot de ζ_k^{sp} vient supprimer la contribution de la fonction seuil \bar{l}_{100}^{D+2} à tension nulle pour faire apparaître une fonction de seuil d'ordre plus élevé :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\sigma}_k &= -(2 - \eta_k) \bar{\sigma}_k + 2v_D d_c \bar{K}_k (\bar{l}_{100}^{D+2}(0) - \bar{l}_{100}^{D+2}(\bar{\sigma}_k)) \\ &\stackrel{\bar{\sigma}_k \ll 1}{=} -(2 - \eta_k) \bar{\sigma}_k + 2v_D d_c \bar{K}_k (\bar{\sigma}_k \bar{l}_{200}^{D+4}(0)) + O(\bar{\sigma}_k^2). \end{aligned} \quad (4.57)$$

La fonction $\bar{l}_{200}^{D+4}(0)$ est précisément celle qui apparaît dans les équations de flot des constantes élastiques (voir (3.211) par exemple). Ceci permet de relier le flot de la tension à celui du module de compression \bar{K}_k dans la phase plate, qui décrit précisément la réaction du système à l'application d'une contrainte isotrope dans la cadre de l'élasticité linéaire :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\sigma}_k \stackrel{\bar{\sigma}_k \ll 1}{=} & -(2 - \eta_k) \bar{\sigma}_k + 2v_D d_c \bar{K}_k (\bar{\sigma}_k \bar{l}_{200}^{D+4}(0)) + O(\bar{\sigma}_k^2) \\ \stackrel{\bar{\sigma}_k \ll 1}{=} & -(2 - \eta_k) \bar{\sigma}_k + \bar{\sigma}_k \frac{(\partial_t \bar{K}_k - (D - 4 + 2\eta_k) \bar{K}_k)}{\bar{K}_k} + O(\bar{\sigma}_k^2) \\ \stackrel{\bar{\sigma}_k \ll 1}{=} & -(D - 2 + \eta_k) \bar{\sigma}_k + \bar{\sigma}_k \frac{\partial_t \bar{K}_k}{\bar{K}_k} + O(\bar{\sigma}_k^2). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Au voisinage de \mathbf{P}_4 , \bar{K}_k tend vers une valeur non nulle, mais son flot s'annule. Le comportement de $\bar{\sigma}_k$ au voisinage du point fixe de phase plate est donc dicté uniquement par le terme en rouge.

Le jacobien \mathbf{J}_4^* du système à \mathbf{P}_4 s'exprime alors simplement en fonction du jacobien réduit du système sans tension \mathbf{J}_4^0 :

$$\mathbf{J}_4^* = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{\mu}} \partial_t \bar{\mu}_k & \partial_{\bar{b}} \partial_t \bar{\mu}_k & \partial_{\bar{\sigma}} \partial_t \bar{\mu}_k \\ \partial_{\bar{\mu}} \partial_t \bar{b}_k & \partial_{\bar{b}} \partial_t \bar{b}_k & \partial_{\bar{\sigma}} \partial_t \bar{b}_k \\ \partial_{\bar{\mu}} \partial_t \bar{\sigma}_k & \partial_{\bar{b}} \partial_t \bar{\sigma}_k & \partial_{\bar{\sigma}} \partial_t \bar{\sigma}_k \end{pmatrix} \stackrel{\mathbf{P}_4}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_4^0 & * \\ * & * \\ 0 & 0 & 2 - D - \eta^* \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

En effet, l'évaluation à \mathbf{P}_4 se fait à $\bar{\sigma} = 0$, de sorte que le bloc en haut à gauche est inchangé par rapport au calcul à tension nulle. De plus, comme $\partial_t \bar{\sigma}_k \propto \bar{\sigma}_k$, les dérivées de ce terme par rapport aux couplages élastiques deviennent nulles lorsqu'elles sont évaluées à \mathbf{P}_4 . Ainsi, les

valeurs propres de \mathbf{J}_4^* sont données par les deux valeurs propres positives de \mathbf{P}_4 en l'absence de tension, et le terme en rouge, négatif, qui correspond à la direction répulsive¹¹.

Finalement, la valeur propre du jacobien dans la direction répulsive donne ν_σ par (4.49) :

$$\nu_\sigma = \frac{1}{D - 2 + \eta^*}, \quad (4.60)$$

conformément au résultat calculé à tension fixée (4.42). Le second exposant se déduit directement du comportement du champ externe avec la taille L du système :

$$\sigma_L^{ext} = \sigma_\Lambda^{ext} \left(\frac{L}{L_G} \right)^{-2+\eta^*}, \quad (4.61)$$

qui conduit naturellement à :

$$|\bar{\sigma}_k| \sim L^{-(D-2+\eta^*)} \sim (\sigma_L^{ext})^{\frac{D-2+\eta^*}{2-\eta^*}}, \quad (4.62)$$

soit finalement :

$$\delta_\sigma = \frac{2 - \eta^*}{D - 2 + \eta^*}. \quad (4.63)$$

Ainsi, le calcul des exposants critiques ν_σ et δ_σ à volume fixé, bien que moins direct que celui à contrainte fixée, permet de donner un éclairage différent sur le problème en reliant les relations contrainte-déformation du matériau au comportement du flot de renormalisation. En particulier, il apparaît que ces quantités caractérisent le départ de \mathbf{P}_4 en présence d'une tension non nulle, et sont donc aussi des exposants critiques universels caractérisant la transition de flambage, qui décrit le passage de la phase plate vers une phase dominée par la tension, qu'elle soit flambée ou sur-étirée.

4.2.4 Régime sur-étiré

Dans la section précédente, nous avons étudié le comportement du flot de renormalisation dans le voisinage de \mathbf{P}_4 par un développement à faible tension ; mais le domaine de validité des équations NPRG est bien plus grand puisqu'elles sont non-perturbatives. Il est alors possible de chercher quels nouveaux points fixes apparaissent dans le diagramme de flot grâce à l'addition de la tension. Cependant, l'expression générale des fonctions de seuil pseudo-massives, qui fait intervenir des fonctions hypergéométriques (voir Annexe F), rend cette analyse difficile dans le cas général.

Lorsque le flot s'écarte de \mathbf{P}_4 , la tension renormalisée grandit et le système entre dans un régime de fluctuations dominé par la tension. Même s'il n'est pas possible de décrire la phase flambée dans notre formalisme à cause de la divergence du propagateur des flexurons, nous pouvons espérer obtenir le point fixe donnant les lois d'échelle valables dans la phase sur-étirée¹². En effet, dans cette phase le propagateur des flexurons a un comportement plus régulier dans l'infrarouge que dans la phase plate, et notre schéma d'approximation, adapté à la description de phénomènes dans lesquels les configurations comportant de forts gradients du

11. En effet, la limite thermodynamique correspond à $t \rightarrow -\infty$.

12. Si toutefois celui-ci existe.

champ de position jouent un rôle négligeable, est encore efficace. Qualitativement, l'allure de la phase étirée ressemble à celle de la phase plate, mais avec des fluctuations de hauteur moins importantes.

D'après ce qui précède, il est attendu que le point fixe correspondant à la phase sur-étirée soit associé à une valeur assez grande de $\bar{\sigma}$; nous pouvons alors chercher celui-ci en effectuant dans le flot NPRG un développement à forte tension. Bien sûr, dans ce qui suit la tension ne prend plus que des valeurs positives. Définissons l'inverse de la tension : $\bar{v}_k = 1/\bar{\sigma}_k$. Le flot de renormalisation se développe de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \bar{v}_k \underset{\bar{v} \ll 1}{=} 2\bar{v}_k + \frac{\bar{b}_k(-3\bar{b}_k + 7\bar{\mu}_k)}{4\pi(\bar{b}_k - 2\bar{\mu}_k)} \bar{v}_k^2 + O(\bar{v}_k^3) \\ \partial_t \bar{\mu}_k \underset{\bar{v} \ll 1}{=} -2\bar{\mu}_k + \bar{\mu}_k \times \frac{3\bar{b}_k}{2\pi} \bar{v}_k + O(\bar{v}_k^2) \\ \partial_t \bar{b}_k \underset{\bar{v} \ll 1}{=} -2\bar{b}_k + \bar{b}_k \times \frac{3\bar{b}_k}{2\pi} \bar{v}_k + O(\bar{v}_k^2) \\ \eta_k \underset{\bar{v} \ll 1}{=} \frac{3\bar{b}_k}{4\pi} \bar{v}_k + O(\bar{v}_k^2) \end{array} \right. . \quad (4.64)$$

Ces résultats s'interprètent de la façon suivante : dans le régime de forte tension, le propagateur des flexurons $G_0(q) \sim \bar{v}_k q^{-2}$ devient très petit. Le flot des constantes de couplage élastiques est donc gouverné par le terme dimensionnel, qui contient leur dimension dans la théorie de champ moyen et la dimension anormale.

La solution des équations de point fixe donne deux valeurs possibles pour \bar{v}_k : à savoir 0 et une valeur non-triviale \bar{v}^* . En réalité, la similarité entre les flots des deux couplages élastiques est telle que les deux équations qu'ils fournissent lorsque $\bar{v} = \bar{v}^*$ ne sont pas indépendantes, donc la valeur précise de \bar{v}^* est indéterminée à ce stade, mais nous allons laisser cette subtilité de côté. L'équation de flot pour la tension inverse peut donc s'écrire :

$$\partial_t \bar{v}_k \underset{\bar{v} \ll 1}{=} 2\bar{v}_k \left(1 - \frac{\bar{v}_k}{\bar{v}^*} \right) + O(\bar{v}_k^3) . \quad (4.65)$$

C'est donc le point fixe $\bar{v} = 0$ qui est attractif dans l'infrarouge. La tension a donc un point fixe à l'infini.

Cependant, il n'est pas difficile de prouver avec (4.64) qu'alors le seul point fixe possible est le point fixe gaussien :

$$\mathbf{P}'_1 = \left\{ \bar{v} = 0 ; \bar{\mu} = 0 ; \bar{b} = 0 \right\} , \quad (4.66)$$

et que celui-ci est **répulsif** dans les directions associées aux deux constantes de couplage élastiques¹³. Ce n'est donc pas lui qui gouverne le comportement de la phase sur-étirée.

13. En effet les fonctions beta associées sont négatives.

Pourtant, en posant $\bar{M}_k = 1/\bar{\mu}_k$ et $\bar{B}_k = 1/\bar{b}_k$:

$$\begin{cases} \partial_t \bar{v}_k \underset{\bar{v} \ll 1}{=} 2\bar{v}_k + \frac{(-7\bar{B}_k + 3\bar{M}_k)}{4\pi\bar{B}_k(2\bar{B}_k - \bar{M}_k)} \bar{v}_k^2 + O(\bar{v}_k^3) \\ \partial_t \bar{M}_k \underset{\bar{v} \ll 1}{=} 2\bar{M}_k - \frac{3\bar{M}_k}{2\pi\bar{B}_k} \bar{v}_k + O(\bar{v}_k^2) \\ \partial_t \bar{B}_k \underset{\bar{v} \ll 1}{=} 2\bar{B}_k - \frac{3}{2\pi} \bar{v}_k + O(\bar{v}_k^2) \end{cases}, \quad (4.67)$$

nous trouvons que les constantes élastiques ont elles aussi un point fixe à l'infini :

$$\mathbf{P}_\infty = \left\{ \bar{v} = 0; \bar{M} = 0; \bar{B} = 0 \right\}, \quad (4.68)$$

au voisinage duquel le Jacobien du système n'a que des valeurs propres positives :

$$\mathbf{J}_\infty \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

Finalement \mathbf{P}_∞ est attractif dans l'infrarouge ; c'est le point fixe de la phase sur-étirée.

Grâce aux valeurs propres du Jacobien (4.69), et aux relations entre couplages dimensionnés et adimensionnés ($\mu_k = k^2 \bar{\mu}_k$, $\sigma_k = k^2 \bar{\sigma}_k$ et $b_k = k^2 \bar{b}_k$), nous pouvons donner les lois d'échelle dans la phase sur-étirée :

$$\sigma_L = \sigma_0, \quad \mu_L = \mu_0, \quad b_L = b_0, \quad (4.70)$$

où σ_0 , μ_0 et b_0 sont des constantes dépendantes du matériau. La situation est analogue à celle de ζ dans la phase plate : les contreparties adimensionnées de ces grandeurs atteignent un point fixe à l'infini. Les valeurs des paramètres dimensionnés correspondants sont alors dépendantes de toute l'histoire du flot, et des paramètres extérieurs comme la température. En particulier, ces lois d'échelle sont indépendantes de T , et de L , contrairement à celles de la phase plate.

Parmi les conséquences de ce résultat, notons que le coefficient de Poisson d'une membrane cristalline dans sa phase sur-étirée n'est plus contraint à sa valeur universelle $\nu^* = -1/3$, et n'a *a priori* aucune raison d'être négatif. C'est probablement une des explications de la forte dispersion des résultats donnés pour ce coefficient dans la littérature expérimentale et numérique du graphène : suivant le protocole précis utilisé pour déterminer ν , les valeurs des contraintes appliquées comparées à la taille des systèmes étudiés, la valeur de ν peut varier entre sa valeur universelle négative de la phase plate, et une valeur positive dans la phase sur-étirée.

D'autre part, le module de compression K_0 ne dépend plus de la taille du système, ce qui implique que :

$$|\zeta_0^2 - \zeta_{sp}^2| = \frac{\sigma_0^{ext}}{K_0} \sim \sigma_0^{ext}, \quad (4.71)$$

autrement dit, les membranes cristallines dans leur phase sur-étirée sont de nouveau soumises aux lois de l'élasticité conventionnelle, avec une loi de Hooke normale.

4.2.5 Coefficients thermoélastiques

En thermodynamique, le comportement d'un système donné vis-à-vis de variations de pression, volume et température est décrit à l'aide d'une équation d'état. L'équation d'état peut être résumée grâce à trois coefficients appelés coefficients thermoélastiques.

Les équations de NPRG permettent d'avoir accès à tous ces coefficients numériquement, mais pas analytiquement. Nous utiliserons donc abondamment dans cette section l'approximation que α ne dépend pas de T sous laquelle nous avons vu que l'équation de flot de ζ_k s'intègre exactement, et le problème peut être traité analytiquement, ce qui nous permettra de vérifier des identités thermodynamiques. Insistons sur le fait que cette approximation n'est en aucun cas nécessaire dans un calcul de NPRG, elle est uniquement motivée ici par l'obtention d'un modèle approché analytique. En particulier, comme le NPRG reproduit la dépendance de α vis-à-vis de T , nous pouvons estimer la précision de cette approximation :

$$\left| \frac{\alpha(T = 25^\circ\text{C}) - \alpha(T = 0^\circ\text{C})}{\alpha(T = 25^\circ\text{C})} \right| \simeq 1\% . \quad (4.72)$$

Nous avons également établi au début de ce chapitre que cette approximation est équivalente à supposer que les constantes de couplage élastiques et la dimension anormale saturent à leur valeur de point fixe avant ζ_k , ce qui donne l'équation de flot soluble (4.17). Elle peut être généralisée au cas où une tension est appliquée grâce à la relation (4.38) reliant le nouveau paramètre d'extension à sa valeur en champ externe nul. En combinant ces équations, nous obtenons l'équation d'état suivante :

$$\zeta_0^2 = 1 + \alpha T + \frac{\sigma_L^{ext}}{K_L} . \quad (4.73)$$

Le terme en noir correspond à la valeur du paramètre d'extension à l'équilibre pour une membrane libre à température nulle. Le terme en bleu contient les corrections apportées par les fluctuations thermiques : le matériau se contracte quand la température augmente. Le terme en rouge est l'apport du champ de contrainte externe sous forme de travail.

Il est intéressant de relier le champ externe au champ de « contraintes internes » σ_L apparaissant dans l'ensemble thermodynamique (V, T) . Dans cet ensemble, c'est la tension qui est renormalisée par les fluctuations thermiques, et non pas le paramètre d'extension. La seule source de modification de la valeur du paramètre d'extension à l'équilibre est donc le travail correspondant au changement de volume imposé par les conditions aux bords. La recherche du minimum de l'énergie libre renormalisée \mathcal{F}_L conduit alors à :

$$\zeta_0^2 = 1 - \frac{\sigma_L}{K_L} , \quad (4.74)$$

qui découle simplement de l'application de (4.25) à l'énergie libre renormalisée à l'échelle L .

Pour un matériau soumis à des conditions données, le volume doit être le même dans les deux ensembles thermodynamiques, ce qui définit le lien entre les deux définitions de la tension :

$$\sigma_L = -\sigma_L^{ext} - \alpha T K_L . \quad (4.75)$$

Cette relation permet de faire le lien entre les deux ensembles thermodynamiques, et d'étudier les coefficients thermoélastiques, qui sont :

- **Le coefficient d'expansion thermique α :**

Le coefficient d'expansion thermique et sa dépendance vis-à-vis de T ont déjà été discutés précédemment. Il est indépendant de la tension appliquée, et de la taille du système.

- **Le coefficient de compressibilité isotherme χ_T :**

Le coefficient de compressibilité isotherme décrit les variations de volume induites par une contrainte isotrope (étirement ou compression) à température fixée. Il est donc relié simplement au module de compression K :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = + \left(\frac{\partial \zeta_0^2}{\partial \sigma^{ext}} \right)_T = \frac{1}{K_L} . \quad (4.76)$$

Le changement de signe est dû au fait qu'un effort de compression ($p > 0$) correspond à une contrainte $\sigma^{ext} < 0$.

Par conséquent, χ_T est indépendant de la tension appliquée (dans la phase plate), et sa dépendance en L et T est donnée par (4.8) :

$$\chi_T \sim L^{2-2\eta^*} \sim T . \quad (4.77)$$

Un matériau plus grand est plus mou, et donc plus compressible.

- **Le coefficient de compression isochore β_V :**

Le coefficient de compression isochore décrit la dépendance de la tension avec la température à volume fixé¹⁴ :

$$\beta_V = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{\sigma_L} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_T . \quad (4.78)$$

Il peut être calculé dans l'approximation α indépendant de T grâce à (4.75) :

$$\beta_V = -\frac{\alpha K_L}{\sigma_L} = -\frac{\alpha}{\sigma_L \chi_T} \geq 0 . \quad (4.79)$$

Si T augmente, ζ_0 diminue, puisque $\alpha \leq 0$, ce qui correspond bien à une tension σ qui augmente lorsque l'on travaille à volume fixé, comme nous l'avions vu en (4.25).

Les trois coefficients thermoélastiques sont reliés par l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{\zeta^2} \left(\frac{\partial T}{\partial \zeta^2} \right)_{\sigma} \left(\frac{\partial \zeta^2}{\partial \sigma} \right)_T &= -1 \\ \Leftrightarrow \alpha &= -\sigma_L \beta_V \chi_T , \end{aligned} \quad (4.80)$$

qui est bien cohérente avec (4.79).

14. Rappelons que le lien entre σ et p est donné par (4.26).

4.2.6 Chaleurs spécifiques

Finalement, l'étude de l'équation d'état donne accès aux chaleurs spécifiques à pression constante C_P et à volume constant C_V , définies par :

$$C_P = \left(\frac{\partial \mathcal{G}_S}{\partial T} \right)_\sigma, \quad C_V = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial T} \right)_{\zeta^2}, \quad (4.81)$$

où par commodité, nous avons utilisé des énergie et enthalpie libres surfaciques.

Les chaleurs spécifiques caractérisent la réponse énergétique des matériaux aux variations de température. Par conséquent, nous allons les déterminer en appliquant à notre matériau une déformation purement thermique $\varepsilon_{ij} = \alpha T \delta_{ij}$. L'enthalpie libre surfacique s'écrit donc, en vertu de (4.27),

$$\mathcal{G}_S = \left[\frac{1}{2} K_L (\alpha T)^2 - \sigma_L^{ext} (\alpha T) \right] \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta^*}. \quad (4.82)$$

Nous avons négligé la contribution de la courbure puisque la membrane est dans une configuration presque plane. Le terme en orange provient de la renormalisation de l'enthalpie par les fluctuations thermiques qui lui confèrent une dépendance anormale en la taille du matériau L , de même que κ . La dépendance des différents termes avec la température sont donnés par les lois d'échelle de la phase plate données précédemment. Cela permet de donner une estimation de la capacité calorifique à pression constante d'une membrane cristalline¹⁵ :

$$C_P = \left(\frac{\partial \mathcal{G}_S}{\partial T} \right)_\sigma = \left[\frac{1}{2} K_L \alpha^2 T - \sigma_L^{ext} \alpha \right] \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta^*}. \quad (4.83)$$

Pour une feuille de graphène de taille micrométrique libre et à température ambiante,

$$C_P \underset{\sigma^{ext}=0}{\simeq} 8 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}, \quad (4.84)$$

en raisonnablement bon accord avec les valeurs trouvées expérimentalement et numériquement $C_P \simeq 4 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ [Pop 2012]. La valeur prédite est moins précise que celle de α , mais C_P , qui met en jeu une dérivée par rapport à la température de ζ_0 de plus que α , est d'autant plus sensible aux erreurs numériques et approximations. Être plus prédictif demanderait d'utiliser des algorithmes d'intégration du flot et des schémas d'approximation plus précis.

Nous pouvons procéder de même avec l'énergie libre, grâce à la relation (4.75) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_S &= \left[\frac{1}{2} K_L (\alpha T)^2 + \sigma_L (\alpha T) \right] \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta^*} \\ &= \left[\frac{1}{2} K_L (\alpha T)^2 - (\sigma_L^{ext} + \alpha T K_L) (\alpha T) \right] \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta^*} \\ &= \left[-\frac{1}{2} K_L (\alpha T)^2 - \sigma_L^{ext} (\alpha T) \right] \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta^*}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

ce qui conduit à :

$$C_V = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial T} \right)_{\zeta^2} = \left[-\frac{1}{2} K_L \alpha^2 T - \sigma_L^{ext} \alpha \right] \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta^*}. \quad (4.86)$$

15. En faisant bien attention à la dépendance de K_L vis-à-vis de T : $K_L \sim 1/T$.

La différence entre les deux s'écrit donc :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{G}_S}{\partial T}\right)_\sigma - \left(\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial T}\right)_{\zeta^2} = \left[K_L \alpha^2 T\right] \left(\frac{L}{L_G}\right)^{\eta^*}, \quad (4.87)$$

qui, au terme orange près (qui est la marque d'un comportement anormal des fluctuations thermiques), n'est autre que la relation de Mayer¹⁶ :

$$C_P - C_V = \frac{T}{V} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_{\zeta^2} \left(\frac{\partial \zeta_0^2}{\partial T}\right)_\sigma = -T (\beta_V \sigma_L) \alpha = T \frac{\alpha^2}{\chi T}. \quad (4.88)$$

Les valeurs prédites sont donc cohérentes avec les lois générales de la thermodynamique, à condition de bien se rappeler que les énergies ont dans la phase plate une dépendance supplémentaire vis-à-vis de la taille du système donnée par le terme anormal (en orange). Dans un solide quasi-incompressible, ou qui se dilate très peu sous l'effet de la température, la relation de Mayer implique que le système peut être décrit avec une seule chaleur spécifique, la différence entre C_P et C_V étant ténue. Cependant ici, la contribution anormale des fluctuations thermiques (en orange) tend à augmenter assez fortement la différence entre les deux capacités calorifiques. En effet, pour une feuille de graphène de taille micrométrique, le terme orange est de l'ordre de 10^4 .

Il peut sembler curieux que la valeur prédite pour la chaleur spécifique C_V à contrainte nulle soit négative. Une façon de le comprendre est de regarder le paramètre de Grüneisen γ_G , qui relie les variations de volume d'un cristal à celles des fréquences des phonons acoustiques. Ce paramètre est intéressant puisqu'il est plus simple à mesurer expérimentalement que la plupart des coefficients élastiques. En effet, la mesure d'un module d'Young par exemple, ne peut se faire qu'en appliquant un effort sur la membrane. Cependant, la détermination précise de l'effort réellement appliqué sur le système est généralement très compliquée, en raison de l'interaction de la membrane avec le substrat sur lequel elle évolue, ou son support dans le cas d'une membrane suspendue. Le paramètre de Grüneisen, en revanche, peut être mesuré par spectroscopie Raman, ce qui permet une mesure indirecte.

Il existe différentes façons de définir γ_G à partir des caractéristiques thermoélastiques d'un solide. La plus courante est :

$$\gamma_G = \left(\frac{\partial p}{\partial \mathcal{F}_S}\right)_{\zeta^2} = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathcal{F}_S}\right)_{\zeta^2} = -\frac{1}{\alpha T}. \quad (4.89)$$

Ce coefficient est donc positif.

Une définition équivalente est :

$$\gamma_G = \frac{\alpha}{\chi T C_V}, \quad (4.90)$$

qui ne peut être positif que si C_V est négatif. En remplaçant C_V par son expression à contrainte nulle, nous retrouvons bien :

$$\gamma_G = \frac{\alpha}{\chi T \left(-\frac{1}{2} K_L \alpha^2 T\right)} = -\frac{1}{\alpha T}.$$

16. Il y a un facteur volumique supplémentaire puisque nous travaillons avec des chaleurs spécifiques volumiques, définies à partir des potentiels thermodynamiques surfaciques.

À température ambiante, notre modèle prédit $\gamma_G \simeq 20$, ce qui est plus élevé que les valeurs mesurées expérimentalement qui donnent plutôt $\gamma_G \simeq 2$ (voir par exemple [Mohiuddin 2009]). Cependant, les déterminations expérimentales de γ_G reposent sur l'utilisation d'un coefficient de Poisson $\nu \geq 0$, ce qui suggère soit que leur détermination n'est pas basée sur des hypothèses compatibles avec notre modèle, soit que le matériau étudié est dans la phase sur-étirée à cause de l'application d'un effort trop important.

Enfin, la relation de Reech relie les chaleurs spécifiques au coefficient γ_L de Laplace, qui nous permet de calculer la compressibilité isentropique χ_S du matériau,

$$\gamma_L = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\chi_T}{\chi_S}. \quad (4.91)$$

Pour une membrane libre, $\gamma_L = -1$; il augmente ensuite lorsque la membrane est sous contrainte.

La relation de Reech nous permet également d'estimer la vitesse du son dans le matériau, définie par la variation de pression en fonction de la masse volumique à entropie fixée :

$$c_{son} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = \sqrt{-\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \rho}\right)_S} = \sqrt{-\frac{\gamma_L}{\rho \chi_T}}. \quad (4.92)$$

Pour une feuille de graphène libre à température ambiante, cela donne $c_{son} \simeq 10^4 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui est colossal. Ce résultat est à mettre en relation avec l'exceptionnelle rigidité du matériau, qui est directement reliée aux propriétés universelles de la phase plate. Comme la compressibilité isotherme est proportionnelle à T , c_{son} tend à diminuer avec la température à cause du ramollissement du matériau. L'application d'une contrainte externe, en réduisant la valeur absolue de γ_L , réduit aussi c_{son} .

4.3 Conclusion

En conclusion, nous avons présenté comment les équations de flot de renormalisation donnent accès aux propriétés thermodynamiques du système. L'existence de points fixes dans le diagramme de flot permet de prédire :

- des caractéristiques universelles, telles que ν^* et η^* , et des exposants critiques ν_σ et δ_σ qui sont reliés à la réponse du matériau à des sollicitations extérieures donnée par la loi de Hooke ;
- des lois d'échelle universelles permettant de calculer les quantités dimensionnées caractéristiques de l'élasticité du matériau telles que K , μ , ou encore κ ;
- des quantités non-universelles dépendant de l'histoire du flot telles que ζ_0 , α et C_P .

Suivant son volume, sa température, et la contrainte externe appliquée, la membrane cristalline peut se trouver dans différentes phases :

- **Harmonique** : cette phase n'existe que pour des systèmes trop petits pour atteindre leur longueur de Ginzburg, ou, à taille fixée, pour des températures inférieures à la température de Ginzburg T_G définie par $L_G(T_G) = L$. Étant donné les ordres de grandeurs pour le

graphène, l'existence de cette phase pour des matériaux réels n'est pas évidente, puisqu'ils pourraient n'exister qu'à des tailles où l'approximation des milieux continus n'est plus évidente.

Dans ce régime, les modules d'élasticité et l'énergie de courbure sont donnés par la théorie de champ moyen, et le matériau obéit aux lois de l'élasticité conventionnelles.

- **Anharmonique** : dans cette phase, la forte interaction entre fluctuations de hauteur et phonons acoustiques entraîne une **rigidification anormale** du matériau, ce qui lui confère des constantes élastiques et une vitesse du son colossales. Sa réponse aux contraintes externes est donnée par une **loi de Hooke anormale** avec $\delta_\sigma \simeq 1,36$. C'est aussi la seule phase dans laquelle la courbure est modifiée par les fluctuations, ce qui est une conséquence du fort couplage phonons-flexurons.

La phase **anharmonique** présente un certain nombre de comportements exotiques comme l'auxétisme, ou encore un coefficient d'expansion thermique négatif, qui la rendent intéressante pour de nombreuses applications. Cependant, le ramollissement du système aux grandes échelles de longueur persiste, ce qui peut entraîner une transition vers les autres phases du diagramme. Il s'agit peut-être d'une des raisons pour lesquelles nous ne savons pas aujourd'hui fabriquer des cristaux bidimensionnels à nos échelles.

La transition entre les régimes **harmonique** et **anharmonique** n'est pas une transition de phase. Le régime transitoire entre ces deux régimes limites gouvernés par les lois d'échelle différentes $L \gg L_G$ et $L \ll L_G$ est décrit grâce à une interpolation régulière entre ces lois représentée par des fonctions d'échelle dont la détermination requerrait une amélioration des procédures numériques utilisées, et le cas échéant du schéma d'approximation (LPA').

- **Froissée** : au-delà d'une température critique T_c , les fluctuations thermiques sont trop importantes, et la membrane se froisse. La valeur de α calculée pour le graphène conduit à $T_c \simeq 10^5$ K. Cependant, nous manquons aujourd'hui d'outils pour décrire cette transition de phase ; en particulier l'ordre de la transition est encore incertain. De plus à l'approche de la phase froissée, l'auto-évitement, que nous n'avons pas pris en compte, pourrait jouer un rôle, voire empêcher la transition de phase de se produire. Il faut donc être prudent vis-à-vis des prévisions de notre modèle dans cette région du diagramme des phases. En raison des ordres de grandeurs évoqués précédemment, la phase **froissée** n'est pas très importante du point de vue des applications.
- **Sur-étirée** : au-delà d'une certaine taille L_σ , ou en présence d'un effort trop important $|\sigma| > \sigma_c$, une membrane cristalline réalise une transition de phase **du second ordre** appelée transition de flambage. Si cet effort étire la membrane, elle entre dans une phase **sur-étirée**, dans laquelle **l'élasticité conventionnelle** des matériaux bidimensionnels est restaurée : les constantes élastiques ne dépendent plus de la taille du matériau, la loi de Hooke redevient normale avec $\delta_\sigma = 1$, l'énergie de courbure ne varie plus. Les grandeurs mesurées expérimentalement semblent indiquer que la plupart des comportements exotiques de la phase **anharmonique**, notamment l'auxétisme, sont alors perdus.
- **Flambée** : dans le cas d'un effort de compression trop important, la membrane devient hypersensible aux fluctuations de hauteur et flambe. Là encore, notre modèle basé sur une

hypothèse de faibles gradients du champ de position n'est plus suffisant. La divergence du propagateur des flexurons indique qu'une recherche des nouveaux modes de fluctuation élémentaires est un prérequis à la description de cette phase, dans laquelle le rôle de l'auto-évitement doit également être quantifié.

La possibilité de froissement des phases **sur-étirée** et **flambée** à haute température est également un sujet de réflexion ouvert.

Le diagramme des phases complet est donné sur les figures 4.12, 4.13 et 4.14.

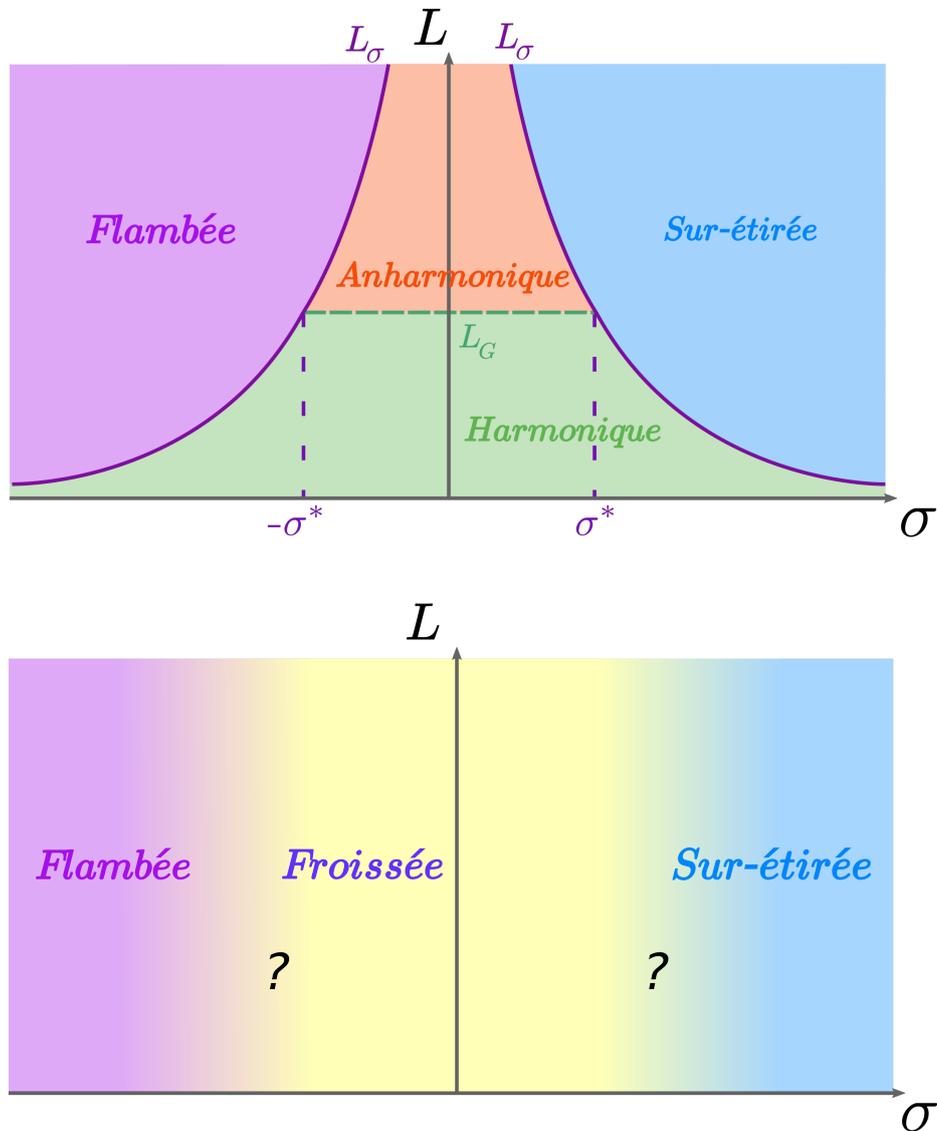


FIGURE 4.12 – Diagramme des phases dans le plan L - σ . En haut : $T < T_c$. Pour des tensions suffisamment faibles, la membrane est dans sa phase plate. Si sa taille est plus grande que L_σ , elle subit une transition de flambage, vers la phase flambée, ou la phase sur-étirée. En bas : si $T > T_c$, la phase plate est détruite par les fluctuations thermiques. Le statut des éventuelles transitions de phase entre la phase froissée et les phases dominées par la tension est aujourd'hui inconnu.

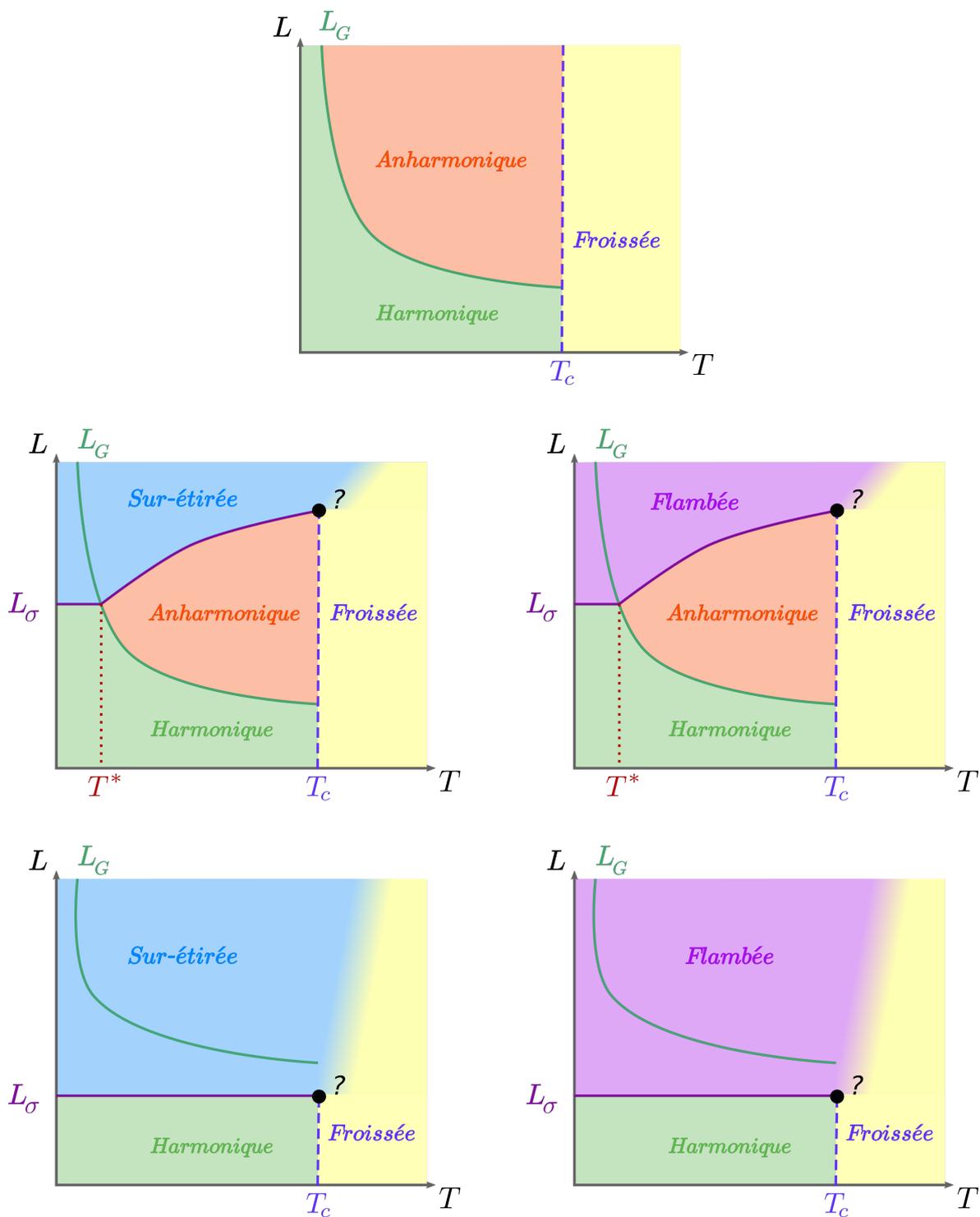


FIGURE 4.13 – Diagramme des phases dans le plan $L - T$. En haut : $\sigma = 0$. La membrane effectue une transition vers la phase froissée à $T = T_c$. Dans les quadrants suivants, le côté gauche correspond à $\sigma < 0$, et le côté droit à $\sigma > 0$. Au milieu : la phase plate anharmonique existe pour $T > T^*$, c'est-à-dire quand la membrane n'a pas encore atteint le régime dominé par la tension à la taille L_G . En bas : à trop forte tension, les fluctuations anharmoniques n'ont pas le temps de se mettre en place avant la transition de flambage.

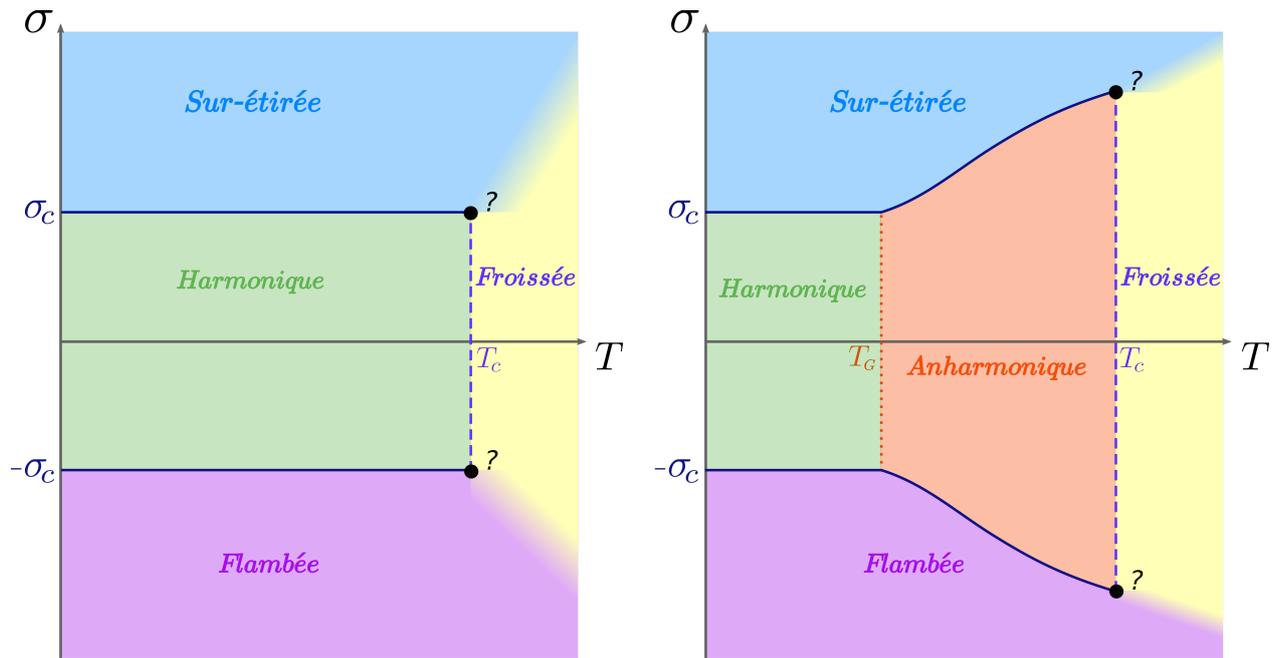


FIGURE 4.14 – Diagramme des phases dans le plan $\sigma - T$. À gauche : pour des tailles plus petites que la longueur de Ginzburg à T_c , $L < L_G(T_c)$, la membrane ne peut atteindre le régime anharmonique avant de se froisser. À droite : dans la plupart des cas, la température T_G définie par $L = L_G(T_G)$ est plus petite que T_c . La phase plate anharmonique de la membrane existe donc pour des températures $T_G < T < T_c$. La dépendance de σ_c vis-à-vis de L_G dans le régime anharmonique augmente la tension critique marquant le seuil vers la transition de flambage, ce qui est un autre signe de la rigidité anormalement élevée du matériau dans ce régime.

Phase plate aux basses températures

Sommaire

5.1	Fluctuations quantiques	162
5.1.1	Quantification de l'action effective moyenne	162
5.1.2	Quantification du champ de position	165
5.2	Propriétés du flot de renormalisation	166
5.2.1	Équations de flot aux basses températures	166
5.2.2	Variables adimensionnées	168
5.2.3	Température adimensionnée	169
5.2.4	Fonction de coupure	171
5.2.5	Dimension anormale temporelle	172
5.3	Phase plate à température nulle	173
5.3.1	Fluctuations quantiques et ordre à longue portée	173
5.3.2	Flot de renormalisation à $T = 0$	174
5.3.3	Élasticité dans la phase plate quantique	176
5.4	Thermodynamique aux basses températures	178
5.4.1	Élasticité et évolution en température	179
5.4.2	Transitions de flambage à basse température	182
5.4.3	Coefficient d'expansion thermique et chaleurs spécifiques	190
5.5	Conclusion	193

Nous avons établi dans le chapitre précédent le diagramme des phases des membranes cristallines en tenant compte des corrections apportées par les fluctuations thermiques. Lorsque la température devient de plus en plus faible, l'effet de ces fluctuations est de moins en moins important et elles ne jouent plus de rôle dans la limite de température nulle. Cependant, cela ne veut pas dire que le système arrête de fluctuer à basse température ; en effet, dans ce régime, les fluctuations de nature quantique, qui sont généralement d'amplitude négligeable à température ambiante comparées aux fluctuations thermiques, deviennent les fluctuations dominantes, ce qui peut conduire à l'apparition de nouvelles phases à basse température ou de transitions de phases quantiques. Nous allons dans ce chapitre évaluer l'effet de ces fluctuations dans les membranes cristallines à basse température.

Mais qu'appelle-t-on « basses températures » ? La réponse à cette question n'est pas simple, car les différentes quantités thermodynamiques ne sont pas affectées de la même façon par les

fluctuations quantiques, comme nous le verrons. En réalité, suivant l'effet observé, différentes températures d'entrée dans le régime où les fluctuations quantiques sont importantes émergent.

Prenons l'exemple du graphène. La température de Debye d'une feuille de graphène, qui indique la température à partir de laquelle les chaleurs spécifiques ne sont plus corrigées par les fluctuations quantiques et saturent à leur valeur classique, est estimée à $T_D \sim 1000$ K. En revanche, la température à laquelle les fluctuations quantiques et thermiques sont supposées être d'amplitude comparable est plutôt de l'ordre de $T \sim 100$ K [DaSilva 2014]. Même si ces ordres de grandeur sont basés sur des théories quasi-harmoniques certainement insuffisantes pour donner une description satisfaisante de la physique de la phase plate dans ce matériau, ils montrent à quel point les différentes définitions des températures de transition entre les régimes thermique et quantique peuvent donner des résultats qui diffèrent par plus d'un ordre de grandeur. De plus, la proximité des valeurs numériques de ces estimations avec la valeur de la température ambiante est un indice de l'intérêt de bien comprendre le rôle des fluctuations quantiques dans le graphène même du point de vue des applications, hors des valeurs extrêmes de température.

Nous allons donc dans ce chapitre adapter le formalisme NPRG utilisé dans le chapitre précédent pour pouvoir étudier les membranes cristallines aux basses températures. Cela nous permettra, dans un premier temps, de comprendre l'effet des fluctuations quantiques dans ces systèmes. En particulier, nous chercherons à savoir si la phase plate est toujours stable dans la limite de température nulle. Nous concluons ensuite sur l'impact de l'existence de ces fluctuations sur les caractéristiques thermodynamiques des membranes cristallines et les modifications qu'elles apportent au diagramme des phases.

5.1 Fluctuations quantiques

5.1.1 Quantification de l'action effective moyenne

La quantification de l'action effective moyenne Γ_k des membranes cristallines découle directement de celle de l'action microscopique S du système, qui peut s'obtenir grâce à une intégrale de chemin par exemple. Le résultat de la quantification est l'apparition d'un nouveau paramètre d'intégration τ dans la définition de l'action. En mécanique quantique, τ s'interprète comme le temps que met le système pour passer d'un état à un autre. En mécanique statistique, τ est relié à la température du système à l'équilibre¹.

L'action effective moyenne quantifiée s'écrit :

$$\Gamma_k[\vec{r}] = \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int d^D x \left[\frac{\kappa_k}{2} (\partial^2 \vec{r})^2 + \frac{\rho_k}{2} (\partial_\tau \vec{r})^2 + \frac{c^{abmn}}{8} (\partial_a \vec{r} \cdot \partial_b \vec{r} - \zeta_k^2 \delta_{ab}) (\partial_m \vec{r} \cdot \partial_n \vec{r} - \zeta_k^2 \delta_{mn}) \right], \quad (5.1)$$

où ρ_k est la masse volumique du système, corrigée par les fluctuations jusqu'à l'échelle k . La première différence avec l'action effective classique est l'apparition d'un second terme cinétique (en bleu). Afin de faire apparaître explicitement les coefficients de renormalisation du champ, il est utile d'effectuer le changement de variables suivant : $\kappa_k = \kappa Z_k$, $\vec{r} \mapsto \vec{r}'/\sqrt{\kappa}$, $c^{abmn} \mapsto \kappa^2 c^{abmn}$,

1. Le signe du terme temporel est cependant différent dans les deux formalismes, qui sont reliés entre eux par une rotation de Wick : en mécanique statistique, l'espace-temps est euclidien. À cause de ce changement de signe, τ est également appelé « temps imaginaire » en mécanique statistique.

$\zeta_k \mapsto \zeta_k/\sqrt{\kappa}$ et $\rho_k \mapsto \kappa Z_k^T$. Z_k^T est le coefficient de renormalisation du champ associé à la direction temporelle, qui évolue *a priori* indépendamment de Z_k et porte donc une nouvelle dimension anormale $\tilde{\eta}_k$.

Le second apport de la quantification est l'intégrale en rouge. Comme elle est définie sur un domaine d'extension finie, nous pouvons distinguer deux régimes :

- **Hautes températures** : si la température du système est suffisamment élevée, la borne supérieure de l'intégrale en rouge s'effondre sur 0, et Γ_k s'écrit :

$$\Gamma_k[\vec{r}] \simeq \frac{\hbar}{k_B T} \int d^D x \left[\frac{Z_k}{2} (\partial^2 \vec{r})^2 + \frac{c_k^{abmn}}{8} (\partial_a \vec{r} \cdot \partial_b \vec{r} - \zeta_k^2 \delta_{ab}) (\partial_m \vec{r} \cdot \partial_n \vec{r} - \zeta_k^2 \delta_{mn}) \right], \quad (5.2)$$

qui est l'action effective non-quantifiée que nous avons utilisée jusqu'à présent, dans le système d'unités $\hbar \neq 1$, $k_B \neq 1$ (le préfacteur en rouge est en effet purement dimensionnel ; il fait le lien entre l'expression des quantités thermodynamiques en termes d'énergie et d'action : $\mathcal{Z} = \text{Tr}(e^{-\beta \mathcal{H}}) = \text{Tr}(e^{-S/\hbar})$). Notons également qu'en l'absence d'intégrale sur τ , les seules configurations qui jouent un rôle important sont celles qui minimisent localement le terme $(\partial_\tau \vec{r})^2$, si bien que ce terme cinétique peut être négligé dans cette limite.

Plus précisément, le régime de haute température est atteint quand les variations « temporelles » du champ de position² sont négligeables par rapport à ses variations spatiales (c'est-à-dire $\kappa(\partial^2 \vec{r})^2 \ll \rho(\partial_\tau \vec{r})^2$), ce qui est équivalent à imposer que le système soit dans un régime où les fluctuations sont dominées par les effets thermiques. Les deux termes cinétiques sont d'amplitudes comparables à l'échelle de longueur typique l , et au temps typique τ , si :

$$\kappa l^{-4} \simeq \rho \tau^{-2} = \rho \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^2. \quad (5.3)$$

Cela permet de définir deux températures de transition :

- La température T_T où les fluctuations quantiques dominent à toutes les échelles de longueur à l'intérieur du système, dont la taille est notée L :

$$T_T \simeq \frac{\hbar}{k_B} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} L^{-2}. \quad (5.4)$$

Dans le graphène, $\rho \simeq 7,6 \times 10^{-7} \text{ kg.m}^{-2}$ et $\kappa \simeq 1 \text{ eV}$ et L est généralement de l'ordre de $1 \mu\text{m}$, donc $T_T \simeq 1,8 \times 10^{-6} \text{ K}$.

- La température T_T^a où les fluctuations quantiques ne jouent un rôle notable qu'à l'échelle microscopique :

$$T_T^a \simeq \frac{\hbar}{k_B} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} a^{-2}. \quad (5.5)$$

Dans le graphène, $T_T^a \simeq 178 \text{ K}$; c'est cette température qui est généralement identifiée dans les simulations numériques comme la température où les fluctuations thermiques

2. C'est-à-dire ses variations par rapport à τ . τ est bien homogène à un temps.

et quantiques jouent un rôle comparable (voir l'introduction du chapitre). En réalité, cette affirmation n'est vraie qu'à l'échelle microscopique si $T = T_T^a$.

Autant T_T correspond vraiment à une « basse température » à notre échelle, autant l'ordre de grandeur de T_T^a est celui de la température ambiante.

Afin de pouvoir conclure sur l'importance des fluctuations quantiques à une température donnée, il faut donc préciser la grandeur qui nous intéresse, qui donne le type de température de transition pertinente. Par exemple, les lois d'échelle donnant le comportement des constantes élastiques en fonction de L et de T dépendent uniquement du type de fluctuations dominantes à l'échelle L (voir chapitre 4); il est donc attendu que ces grandeurs effectuent leur transition vers le régime quantique à T_T . En revanche, les quantités telles que ζ_0 , ou α dépendent de l'histoire du flot de renormalisation à toutes les échelles intermédiaires entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique; elles seront donc sensibles aux effets quantiques dès T_T^a .

- **Basses températures :** lorsque $T \ll T_T^a$, l'intégrale rouge s'enrichit de plus en plus en effets non triviaux issus de l'intégration sur la dépendance en τ du champ de position, ce qui correspond à la prise en compte d'effets quantiques de plus en plus importants.

Dans la limite où $T \rightarrow 0$, l'intégrale sur τ a une extension infinie et se comporte donc comme une intégrale sur une dimension supplémentaire pour le système. Pour des systèmes invariants de Lorentz, la symétrie d'espace-temps permet d'établir que le système quantique à $T = 0$ se comporte comme un système à $D + 1$ dimensions, mais ce n'est pas toujours le cas. La dimension de τ est notée z et appelée « exposant critique dynamique ». Dans l'action effective (5.1), l'analyse champ moyen conduit à :

$$\boxed{\Delta(\tau) = z = 2} . \quad (5.6)$$

Cela justifie le schéma de troncation de Γ_k en fonction des dérivées ∂_τ dans le cadre du développement dérivatif. En effet, l'ajout d'un terme mélangeant des dérivées spatiales et temporelles à l'ordre le plus bas, par exemple, serait tel que :

$$(\partial_i \partial_\tau \vec{r})^2 = O(\partial^6) . \quad (5.7)$$

Il apparaît donc bien à l'ordre suivant du développement.

La valeur de l'exposant critique dynamique $z = 2$ correspond à celle attendue pour des systèmes avec une symétrie d'espace-temps galiléenne, ce qui est le cas de la théorie classique de l'élasticité des milieux continus dans laquelle les évolutions temporelles sont données par le principe fondamental de la dynamique qui possède bien cette symétrie.

En présence de fluctuations, le champ de position se renormalise. Cependant, ses coefficients de renormalisation dans les directions spatiales et temporelle ne sont pas reliés par une symétrie; ils évoluent donc *a priori* indépendamment. Le champ renormalisé porte donc deux dimensions anormales : η_k dans les directions spatiales, et $\tilde{\eta}_k = -\partial_t Z_k^r / Z_k^r$ dans la direction temporelle. La dimension du champ peut alors être calculée séparément à partir de chacun de ses termes cinétiques :

$$\Delta(r) = \frac{D + z_k - 4 + \eta_k}{2} = \frac{D + z_k + \tilde{\eta}_k - 2z_k}{2} , \quad (5.8)$$

ce qui conduit à l'identité suivante :

$$\boxed{2z_k = 4 + (\tilde{\eta}_k - \eta_k)} . \quad (5.9)$$

La différence entre les renormalisations de champ dans les directions spatiales et temporelle est reliée à la dimension de la direction temporelle matérialisée par l'exposant critique dynamique courant z_k .

5.1.2 Quantification du champ de position

Le flot de renormalisation est généralement établi dans l'espace de Fourier. Comme l'intégrale temporelle se fait sur un domaine borné, nous pouvons choisir des conditions aux bords périodiques et définir le champ de position dans cette direction comme une série de Fourier, qui dans nos conventions s'écrit :

$$\vec{r}(\vec{x}, \tau) = \frac{k_B T}{2\pi\hbar} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_q \vec{r}(\vec{q}, \omega_n) e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega_n \tau)} , \quad (5.10)$$

où $\omega_n = 2\pi n k_B T / \hbar$ sont les fréquences de Matsubara. À haute température, les différentes fréquences sont fortement séparées, et seule la fréquence $\omega_0 = 0$ donne une contribution non-négligeable à cause du terme exponentiel fortement oscillant. À basse température, les fréquences de Matsubara se rapprochent les unes des autres et de plus en plus de modes deviennent importants. Dans la limite $T \rightarrow 0$, la somme de Fourier devient une série de Riemann qui converge vers l'intégrale donnant la transformée de Fourier du champ de position dans la direction temporelle, qui est maintenant bien définie car l'extension du domaine d'intégration temporel devient infinie :

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{k_B T}{2\pi\hbar} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\dots) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (\dots) . \quad (5.11)$$

La quantification du champ modifie les propagateurs des différents champs de fluctuations. Dans la théorie de champ moyen, ceux-ci s'écrivent à présent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} G_0(q, \omega_n) = \frac{1}{\kappa q^4 + \rho \omega_n^2} & \text{(flexurons)} \\ G_1(q, \omega_n) = \frac{1}{\kappa q^4 + \mu \zeta^2 q^2 + \rho \omega_n^2} & \text{(phonons transverses)} \\ G_2(q, \omega_n) = \frac{1}{\kappa q^4 + (\lambda + \mu) \zeta^2 q^2 + \rho \omega_n^2} & \text{(phonon longitudinal)} \end{array} \right. . \quad (5.12)$$

Le nouveau terme fréquentiel régule donc le comportement des propagateurs dans la limite infrarouge. En particulier, dans la limite de température nulle, les fonctions de corrélation orientationnelles de la théorie champ moyen s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \partial_i \vec{u}(x) \cdot \partial^i \vec{u}(0) \rangle \underset{x \gg a}{\sim} x^{-D-2} \\ \langle \partial_i \vec{h}(x) \cdot \partial^i \vec{h}(0) \rangle \underset{x \gg a}{\sim} x^{-D} \end{array} \right. . \quad (5.13)$$

À température nulle, il ne reste plus de fluctuations thermiques dans le système, les fluctuations restantes sont de nature quantique. Comme le système quantique se comporte de manière effective comme un système à $D + z$ dimensions dans cette limite, le théorème de Mermin et Wagner ne s'applique pas, et la présence de fluctuations anharmoniques n'est pas requise pour stabiliser l'ordre orientationnel à longue portée dans le système. La phase plate est donc stabilisée par les fluctuations quantiques dans la théorie de champ moyen.

Il est instructif de s'intéresser également aux fonctions de corrélations positionnelles dans cette même limite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{u}(x) \cdot \vec{u}(0) \rangle_{x \gg a} \sim x^{-D} \\ \langle \vec{h}(x) \cdot \vec{h}(0) \rangle_{x \gg a} \sim x^{-D+2} \end{array} \right. \quad (5.14)$$

À deux dimensions, la fonction de corrélation des flexurons diverge logarithmiquement ; le système est donc seulement quasi-ordonné à longue portée vis-à-vis de l'ordre positionnel. Les dimensions supplémentaires dans lesquelles les modes quantiques fluctuent ne sont pas suffisantes pour garantir l'existence d'un ordre cristallin à deux dimensions dans la théorie de champ moyen à température nulle.

Ainsi, par leur possibilité de fluctuer de façon effective dans un espace plus grand, les modes quantiques ont un effet stabilisateur dans l'infrarouge, qui permet de stabiliser la phase plate sans avoir besoin que la dimension anormale du champ de position soit non nulle. Nous allons à présent examiner la validité de ce résultat au-delà de la théorie de champ moyen en étudiant l'importance du rôle joué par les interactions dans le système.

5.2 Propriétés du flot de renormalisation

Nous étudions dans cette partie les propriétés générales du flot de renormalisation, valables à toute température.

5.2.1 Équations de flot aux basses températures

Avant toute chose, il nous faut choisir la configuration d'évaluation de l'équation de Wetterich. Dans le cas classique, nous avons choisi la configuration \vec{r}_{min} (3.182) donnée par le minimum champ moyen. Nous pouvons procéder de même ici, mais il nous faut préciser les variations de ce champ dans l'espace fréquentiel. La configuration qui minimise l'action champ moyen ne dépendant pas de τ , la configuration d'évaluation s'écrit donc dans l'espace de Fourier :

$$r_{min}^\alpha(\vec{q}, \omega_n) = -i \zeta_k \delta_{n0} \delta^{\alpha j} \frac{\partial}{\partial q^j} \delta(\vec{q}) \quad (5.15)$$

Les définitions des différentes constantes de couplage et renormalisations de champ à partir du propagateur renormalisé sont donc essentiellement les mêmes que dans la théorie de haute

température puisque celui-ci est évalué dans une configuration triviale dans le secteur fréquentiel :

$$\begin{aligned}
Z_k &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(p^2)^2} \left[\Gamma_{k,D+1}^{(2)} [r; p, \omega, -p, -\omega] \right] \Big|_{p^2=0, \omega=0, r=r_{min}} \\
Z_k^T &= \frac{d^2}{d\omega^2} \left[\Gamma_{k,D+1}^{(2)} [r; p, \omega, -p, -\omega] \right] \Big|_{p^2=0, \omega=0, r=r_{min}} \\
\mu_k &= \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\Gamma_{k,D}^{(2)} [r; p, \omega, -p, -\omega] \right] \Big|_{p^2=0, \omega=0, r=r_{min}} \\
\lambda_k &= \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\Gamma_{k,D}^{(2)} [r; p, \omega, -p, -\omega] \right] \Big|_{p^2=0, \omega=0, r=r_{min}} - \mu_k .
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Étant donné les similarités de ces définitions avec celles des couplages à haute température (3.188), et celles qui relient l'action effective quantifiée (5.1) et non-quantifiée (3.180), les équations de flot des constantes de couplage *dimensionnées* sont les mêmes que dans le cas classique, mais avec des fonctions de seuil de basse température à la place des fonctions de seuil habituelles. En particulier, l'équation de flot du paramètre d'extension, qui peut être obtenue par la même méthode qu'auparavant, présente bien toujours son point fixe correspondant à la phase plate. Le phénomène de découplage des fonctions de seuil de phonons a donc bien lieu à n'importe quelle température, et nous pouvons utiliser l'expression simplifiée des flots de renormalisation dans la phase plate. Nous avons vu que (b_k, μ_k) forment un couple de variables intéressant dans cette phase ; leurs flots sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\partial_t b_k &= \frac{4v_D(D+1)}{D(D+2)} d_c b_k^2 \mathcal{L}_{200}^{D+4} \\
\partial_t \mu_k &= \frac{8v_D}{D(D+2)} d_c \mu_k^2 \mathcal{L}_{200}^{D+4} ,
\end{aligned} \tag{5.17}$$

à comparer à (3.213) et (3.211).

Afin de mieux comprendre la relation entre les fonctions de seuil de haute et basse température, examinons le cas de la fonction de seuil de basse température $\mathcal{L}_{a00}^{D+\alpha}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{a00}^{D+\alpha} &= -\frac{1}{4v_D} \frac{k_B T}{2\pi \kappa} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha G_0(q, \omega_n(T))^a \\
&\xrightarrow{T \gg T_T} -\frac{1}{4v_D} \frac{k_B T}{\kappa} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha G_0(q, 0)^a \\
&= l_{a00}^{D+\alpha}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

La dépendance en température, qui est simplement linéaire dans les fonctions de seuil classiques $l_{a00}^{D+\alpha}$, se complexifie à basse température. Le changement de fonction de seuil constitue la seule différence entre les flots de renormalisation des constantes de couplage *dimensionnées* à haute et basse température.

Le flot de Z_k^T qui n'a pas d'équivalent classique sera discuté plus tard.

5.2.2 Variables adimensionnées

L'étude du diagramme de flot de renormalisation se fait généralement en termes de variables adimensionnées, puisque ce sont celles-ci qui atteignent des points fixes dans la limite infrarouge. Cela revient à se placer dans un référentiel comobile qui permet d'étudier les variations intrinsèques des constantes de couplage avec l'échelle, indépendamment de la dépendance que leur confère leur dimension propre. À cause de la présence de l'intégrale sur τ cependant, la dimension des variables n'est plus la même dans la théorie de basse température, et il nous faut adapter notre procédure d'adimensionnement.

Plus précisément, considérons l'exemple du module de cisaillement μ_k . Il apparaît dans Γ_k sous la forme d'un terme de type :

$$\int_0^{\beta\hbar} d\tau \int d^D x \left[\frac{\mu_k}{4} (\partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r})^2 \right], \quad (5.19)$$

la variable adimensionnée associée, $\bar{\mu}^q$, est donc :

$$\bar{\mu}_k^q = k^{D+z_k-4+2\eta_k} \mu_k. \quad (5.20)$$

Dans la limite de haute température cependant, ce terme devient :

$$\beta\hbar \int d^D x \left[\frac{\mu_k}{4} (\partial_i \vec{r} \cdot \partial_j \vec{r})^2 \right]. \quad (5.21)$$

Le terme en bleu étant une simple constante, il peut être absorbé dans une redéfinition du champ et des constantes de couplage, et n'affecte donc pas les propriétés du flot. En effet, ce terme est contrôlé par la température du système T qui est fixée, et non plus la variable d'intégration τ . La variable adimensionnée correspondante, $\bar{\mu}^{cl}$, devient alors :

$$\bar{\mu}_k^{cl} = k^{D-4+2\eta_k} \mu_k. \quad (5.22)$$

Les deux variables adimensionnées diffèrent donc par un facteur k^{z_k} .

Le choix de procédure pour définir les contreparties adimensionnées dépend donc du type de phénomène que nous cherchons à décrire (voir Figure 5.1) :

- dans un régime où les fluctuations quantiques sont importantes, le rôle joué par l'intégrale sur τ est incontournable. La variable $\bar{\mu}_k^{cl}$ qui n'intègre pas ces effets diverge dans l'infrarouge. La variable $\bar{\mu}_k^q$ en revanche atteint un point fixe à température nulle.
- dans un régime où les fluctuations thermiques dominent, en revanche, l'effet de l'intégrale sur τ devient négligeable. La variable $\bar{\mu}_k^q$, qui porte un k^{z_k} supplémentaire, s'annule toujours dans l'infrarouge, et ne nous renseigne pas sur la physique du système. C'est ce qui se passe sur les flots de la Figure 5.1 : dans le graphène à $T = 10$ K, le régime infrarouge correspond à la phase plate où les fluctuations thermiques dominent car $10 \text{ K} \gg T_T \simeq 10^{-6} \text{ K}$. Le module de cisaillement adimensionné $\bar{\mu}_k^q$ s'annule donc à cause de l'effet des fluctuations thermiques, et ne nous renseigne pas sur la valeur de point fixe $\bar{\mu}^* \simeq 6,21$, qui intervient dans les lois d'échelle de la phase plate, contrairement à $\bar{\mu}_k^{cl}$. Au début du flot, en revanche, les fluctuations quantiques dominent (comme nous allons le voir dans la suite), et l'évolution non triviale du module de cisaillement adimensionné est mieux décrite par $\bar{\mu}_k^q$.

En résumé, dans un régime dominé par les fluctuations thermiques, l'adimensionnement se fait de la même façon que dans la théorie à haute température, alors que dans un régime dominé par les fluctuations quantiques, les variables adimensionnées avec k^{z_k} , comme $\bar{\mu}_k^q$, sont mieux adaptées à la description du système.

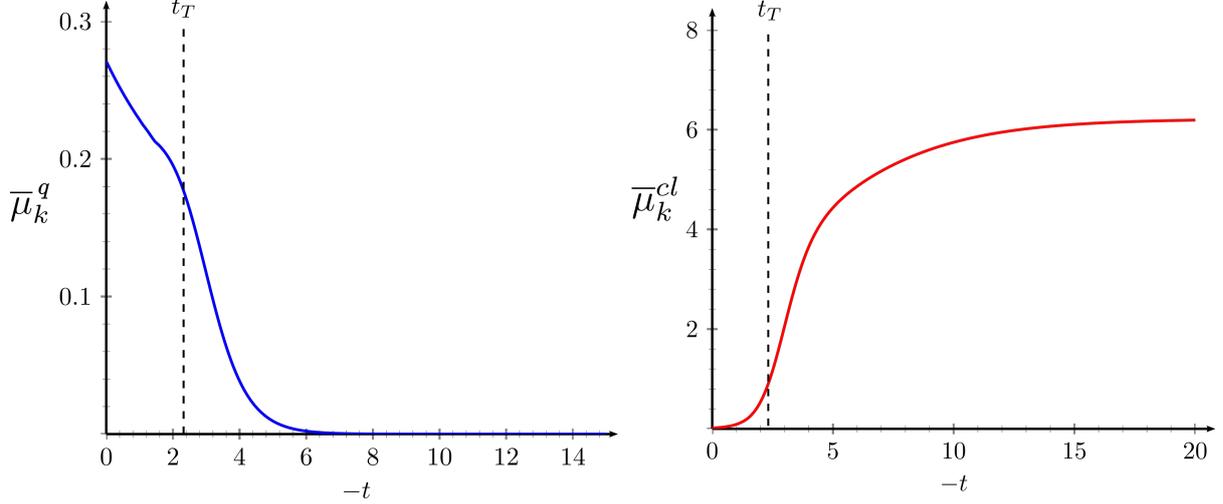


FIGURE 5.1 – Évolution du module de cisaillement adimensionné à l'approche du point fixe de phase plate pour une feuille de graphène à $T = 10$ K . Le temps $t_T^a = \log(ak_T)$ marque l'entrée dans le régime dominé par les fluctuations thermiques à l'échelle $k_T = \sqrt{k_B T / \hbar \sqrt{\rho / \kappa}}$ (voir (5.29)). À gauche : le module de cisaillement est adimensionné dans la théorie de basse température $\bar{\mu}_k^q = k^{D+z-4+2\eta_k} \mu_k$. Une fois la transition vers le régime thermique effectué, $\bar{\mu}_k^q$ tend toujours vers 0. À droite : le module de cisaillement est adimensionné dans la théorie de haute température $\bar{\mu}_k^{cl} = k^{D-4+2\eta_k} \mu_k$. Cet adimensionnement permet de bien décrire le régime dominé par les fluctuations thermiques, mais $\bar{\mu}_k^{cl}$ vaut toujours 0 dans le régime dominé par les fluctuations quantiques.

5.2.3 Température adimensionnée

La température du système est un paramètre de contrôle fixé dans l'ensemble thermodynamique que nous avons choisi. Cependant, c'est une grandeur dimensionnée pour laquelle nous devons définir une contrepartie adimensionnée, qui devient dépendante de l'échelle courante :

$$\bar{T}_k = k^{-z_k} \frac{k_B}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} T . \quad (5.23)$$

En effet, comme la dépendance en T dans l'action quantifiée se fait *via* le paramètre τ dont la dimension est z_k par définition, \bar{T}_k se comporte bien comme k^{-z_k} . Comme T ne dépend pas de k , le flot de \bar{T}_k est simplement donné par :

$$\partial_t \bar{T}_k = -z_k \bar{T}_k . \quad (5.24)$$

Grâce à la relation (5.9) reliant z aux dimensions anormales, et pour des valeurs raisonnables de η_k et $\tilde{\eta}_k$,

$$z_k = 2 + \frac{\tilde{\eta}_k - \eta_k}{2} \geq 0 , \quad (5.25)$$

\bar{T}_k croît donc exponentiellement vite avec l'échelle courante dans la limite infrarouge. Ainsi, même si aux alentours de l'échelle microscopique Λ , la valeur de la température adimensionnée, peu altérée par la renormalisation, est contrôlée par T , le flot de renormalisation guide toujours le système vers des régions de très haute température adimensionnée.

Ce résultat a des conséquences importantes sur le comportement du flot des variables adimensionnées. Examinons par exemple l'adimensionnement d'une fonction de seuil de type $\mathcal{L}_{a00}^{D+\alpha}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{a00}^{D+\alpha} &= -\frac{1}{4v_D} \frac{k_B T}{2\pi \kappa} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha G_0(q, \omega_n(T))^a \\ &= -\frac{1}{4v_D} \frac{\hbar}{\sqrt{\rho \kappa}} k^{D+z_k+\alpha} (Z_k k^4)^{-a} \frac{\bar{T}_k}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\partial}_t \int_y y^{\alpha/2} \bar{G}_0(y, \bar{\omega}_n(\bar{T}_k))^a \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{\rho \kappa}} k^{D+z_k+\alpha} (Z_k k^4)^{-a} \bar{\mathcal{L}}_{a00}^{D+\alpha}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

où $y = q^2/k^2$ est l'impulsion de boucle adimensionnée, et $\bar{\omega}_n = 2\pi n \bar{T}_k$. Il apparaît que le rôle joué par T dans les fonctions de seuil dimensionnées est joué par \bar{T}_k dans les fonctions de seuil adimensionnées. En particulier, dans le régime infrarouge,

$$\bar{T}_k \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{\omega}_n = 2\pi n \bar{T}_k \gg 1 \quad (n \neq 0), \quad (5.27)$$

ce qui conduit à :

$$\bar{\mathcal{L}}_{a00}^{D+\alpha} = -\frac{1}{4v_D} \frac{\bar{T}_k}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\partial}_t \int_y y^{\alpha/2} \bar{G}_0(y, \bar{\omega}_n)^a \xrightarrow{k \rightarrow 0} -\frac{1}{4v_D} \frac{\bar{T}_k}{2\pi} \hat{\partial}_t \int_y y^{\alpha/2} \bar{G}_0(y, 0)^a \simeq k^{-z_k} \bar{l}_{a00}^{D+\alpha}. \quad (5.28)$$

Le facteur k^{-z_k} est le facteur habituel démarquant l'adimensionnement quantique de l'adimensionnement classique. Ainsi, le flot des variables adimensionnées est contrôlé par la valeur de la température adimensionnée \bar{T}_k qui y joue un rôle de température effective. Si la température T du système est suffisamment basse, les premiers instants du flot sont dominés par les fluctuations quantiques. Dans la limite $k \rightarrow 0$ en revanche, la température effective du système est grande, les fonctions de seuil se comportent comme des fonctions de seuil de haute température, et le comportement du système est contrôlé par ses fluctuations thermiques *indépendamment de sa température* T . La transition entre les régimes dominés par les fluctuations thermiques et quantiques se fait à l'échelle typique k_T telle que :

$$\bar{T}_{k_T} \simeq 1 \quad \Rightarrow \quad k_T \simeq \sqrt{\frac{k_B T}{\hbar}} \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}}, \quad (5.29)$$

voir Figure 5.2 .

L'exposant critique dynamique z_k permet donc de comparer les échelles de longueur et de temps, ou de température, qui sont reliées par un simple facteur \hbar/k_B . Il nous permet de comprendre que le comportement des fluctuations dominantes dans le système n'est pas lié à une température, ou une longueur critique, mais plutôt à une comparaison entre les deux. Ainsi,

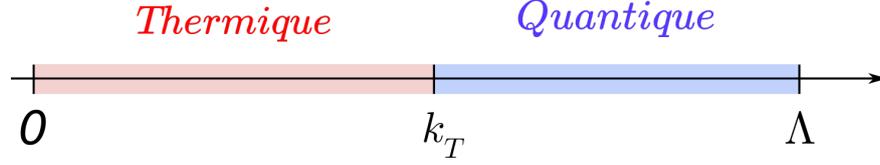


FIGURE 5.2 – Régimes de fluctuation en fonction de l'échelle courante k . Le régime de haute énergie $k \gg k_T$ est dominé par les fluctuations quantiques ; le régime de basse énergie $k \ll k_T$ est dominé par les fluctuations thermiques. Le flot de renormalisation emmène toujours le système vers la zone de basse énergie dominée par les fluctuations thermiques.

- pour un système à une température T fixée, nous pouvons définir une longueur de transition,

$$L_T^2 = \frac{\hbar}{k_B T} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}, \quad (5.30)$$

qui sépare un régime aux courtes échelles de longueur $L \ll L_T$ dominé par les fluctuations quantiques d'un régime aux grandes échelles de longueur $L \gg L_T$ dominé par les fluctuations thermiques ;

- pour un système de taille L fixée, une température de transition T_T définie en (5.4) en dessous de laquelle le système se trouve dans une phase gouvernée par les fluctuations quantiques.

Ce changement de comportement des fluctuations en fonction de la température, ou de la longueur d'onde, a été observé numériquement récemment dans le graphène [Hašik 2018]. En effet comme nous le verrons dans la suite, les modes de fluctuations thermiques et quantiques ont des relations de dispersion différentes, ce qui permet de les identifier sans ambiguïté.

5.2.4 Fonction de coupure

Dans notre étude, nous avons choisi d'adapter la fonction de coupure à la présence d'un terme fréquentiel dans le propagateur à basse température. En règle générale, la coupure $R_k(q)$ est définie par :

$$R_k(q) = Z_k q^4 r_k(q/k), \quad (5.31)$$

où r_k est une fonction d'une variable sans dimension. L'adimensionnement de la coupure s'écrit simplement en termes de la variable $y = q^2/k^2$:

$$R_k(q) = Z_k k^4 y^2 r_k(y) = Z_k k^4 \bar{R}_k(y). \quad (5.32)$$

La fonction r_k coupe les modes d'impulsion $q^2 < k^2$, et laisse intacts les modes d'impulsion $q^2 > k^2$ indépendamment de leur fréquence.

Afin de réguler le secteur fréquentiel en plus du secteur impulsif, nous avons réalisé un « ajustement spectral » : comme seules les fonctions de seuil des flexurons contribuent au flot de renormalisation une fois prise la limite de phase plate, nous pouvons adapter l'argument de la fonction r_k à la relation de dispersion des flexurons. Définissons la variable adimensionnée :

$$Y = y^2 + \bar{\omega}_n^2. \quad (5.33)$$

C'est la combinaison qui apparaît dans le propagateur de flexurons adimensionné :

$$G_0(q) = \frac{1}{Z_k q^4 + Z_k^\tau \omega^2} = (Z_k k^4)^{-1} \frac{1}{Y} = (Z_k k^4)^{-1} \bar{G}_0(Y) . \quad (5.34)$$

Le régulateur peut alors être défini, par analogie avec (5.32), par :

$$R_k(q) = Z_k k^4 Y r_k(Y) = Z_k k^4 \bar{R}_k(Y) , \quad (5.35)$$

auquel cas la fonction de coupure éliminera aussi les modes dont la fréquence est trop faible comparée à leur impulsion (ce sont maintenant les modes tels que $Y < 1$ qui sont coupés). En particulier, dans l'infrarouge lorsque la température adimensionnée \bar{T}_k devient grande, les modes $\bar{\omega}_n$ avec $n \neq 0$ se comportent comme des modes massifs avec une masse plus grande que k et sont donc éliminés par la coupure. La transition vers le régime thermique avec un régulateur ajusté en fréquence peut donc s'interpréter comme un découplage progressif des modes de fréquence non nulle dans la limite infrarouge.

5.2.5 Dimension anormale temporelle

À cause de l'addition d'une dimension temporelle supplémentaire, le champ de position porte une seconde dimension anormale $\tilde{\eta}_k$, indépendante de η_k , et définie à partir du flot de Z_k^τ :

$$\partial_t \tilde{\eta}_k = - \frac{\partial_t Z_k^\tau}{Z_k^\tau} . \quad (5.36)$$

Z_k^τ est relié au propagateur de la façon suivante :

$$Z_k^\tau = \frac{d^2}{d\omega^2} \left[\Gamma_{k,D+1}^{(2)} [r; p, \omega, -p, -\omega] \right] \Big|_{p^2=0, \omega=0, r=r_{min}} . \quad (5.37)$$

Le flot de Z_k^τ dépend donc de la dérivée de celui de $\Gamma_k^{(2)}$ par rapport à la fréquence externe. Cependant, à cause de l'invariance par translation de la théorie de la phase plate des membranes cristallines, les vertex $\Gamma_k^{(3)}$ et $\Gamma_k^{(4)}$ intervenant dans le flot de $\Gamma_k^{(2)}$ contiennent tous au moins une puissance de l'impulsion externe p , et par conséquent,

$$\left[\partial_t \Gamma_{k,D+1}^{(2)} [r; p, \omega, -p, -\omega] \right] \Big|_{p^2=0} = 0 , \quad (5.38)$$

ce qui, comme le contenu fréquentiel de \vec{r}_{min} est trivial, conduit à :

$$\partial_t Z_k^\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{\eta}_k = 0} . \quad (5.39)$$

Il n'y a donc pas de dimension anormale temporelle dans ces systèmes. En particulier, l'équation (5.9) lie maintenant directement la dimension anormale η_k à l'exposant critique dynamique :

$$z_k = 2 - \frac{\eta_k}{2} . \quad (5.40)$$

5.3 Phase plate à température nulle

De même que nous avons caractérisé auparavant le comportement des fluctuations thermiques, nous allons dans cette section analyser l'impact des fluctuations quantiques sur les membranes cristallines. Nous nous plaçons donc dans la limite de température nulle, où aucune fluctuation thermique ne subsiste.

5.3.1 Fluctuations quantiques et ordre à longue portée

Nous avons établi que la phase plate des membranes cristallines est encore stable à basse température dans la théorie de champ moyen, mais cette stabilité est-elle mise en danger par les fluctuations quantiques ? Pour répondre à cette question, il nous faut analyser les points fixes des équations de flot de renormalisation. Puisque les fluctuations quantiques dominent, nous étudions les flots des variables adimensionnées quantiques \bar{b}_k^q et $\bar{\mu}_k^q$, qui découlent directement de (5.17), en évaluant les fonctions de seuil à $T = 0$. Afin de pouvoir analyser le flot de manière analytique, nous utilisons la coupure $\bar{R}_k(Y) = (1 - Y)\Theta(1 - Y)$ qui donne des expressions simples. Les équations de flot sont alors données par [Coquand 2016] :

$$\begin{cases} \eta_k = \frac{48 \bar{b}_k^q}{256\pi + 9 \bar{b}_k^q} \\ \partial_t \bar{b}_k^q = \frac{3}{2} \eta_k \bar{b}_k^q + \frac{3}{64\pi} (\bar{b}_k^q)^2 \left(1 - \frac{\eta_k}{8}\right) \\ \partial_t \bar{\mu}_k^q = \frac{3}{2} \eta_k \bar{\mu}_k^q + \frac{1}{32\pi} (\bar{\mu}_k^q)^2 \left(1 - \frac{\eta_k}{8}\right) . \end{cases} \quad (5.41)$$

Ces équations sont cohérentes avec les flots calculés par les méthodes alternatives dans les limites appropriées : elles redonnent les résultats de [San-José 2011, Guinea 2014] dans la limite $d_c \gg 1$, et ceux de [Kats 2014] (une fois corrigés [Kats 2016]) dans la limite de couplage faible. Pour plus de détails sur la comparaison, voir [Coquand 2016].

Comme la stabilité du potentiel élastique impose $\bar{b}_k^q \geq 0$ et $\bar{\mu}_k^q \geq 0$, le seul point fixe possible pour le système (5.41) est le point fixe gaussien³ :

$$\mathbf{P}_1^Q : \left\{ \bar{\mu}^* = 0 ; \bar{b}^* = 0 ; \eta^* = 0 \right\} . \quad (5.42)$$

De plus, la positivité des constantes de couplage entraîne celle de leurs dérivées par rapport à t . Le point fixe \mathbf{P}_1^Q est donc attractif dans l'ensemble du diagramme de flot⁴, ce qui signifie que les fluctuations quantiques sont toujours gaussiennes dans l'infrarouge.

Puisque $\eta^* = 0$, les résultats de la théorie de champ moyen sont encore valables : les fluctuations quantiques, bien que non-anharmoniques, ne détruisent pas la phase plate grâce à la possibilité qu'elles ont d'évoluer dans un espace agrandi par la dimension temporelle. En effet, la relation (5.9) avec deux dimensions anormales nulles s'écrit $z^* = 2$, le système à température

3. Nous pouvons en effet raisonnablement supposer que $\eta_k \leq 8$.

4. En effet, si les constantes de couplage sont des fonctions croissantes de t , leur valeur diminue dans la limite $t \rightarrow -\infty$ qui correspond à la limite infrarouge.

nulle se comporte de manière effective comme une membrane à $D + z^* = 4$ dimensions, qui est la dimension critique supérieure dans la théorie de la phase plate.

De plus, la ligne $(D + 1)\bar{b}_k - 2\bar{\mu}_k$ est toujours attractrice :

$$\partial_t((D + 1)\bar{b}_k^q - 2\bar{\mu}_k^q) = ((D + 1)\bar{b}_k^q - 2\bar{\mu}_k^q) \left(\frac{3}{2}\eta_k + ((D + 1)\bar{b}_k^q + 2\bar{\mu}_k^q) \left(1 - \frac{\eta_k}{8}\right) \right), \quad (5.43)$$

puisque le terme en orange est toujours positif. Cependant, comme le point fixe est gaussien, le terme orange est d'autant plus petit que l'on se rapproche de \mathbf{P}_1^Q , ce qui rend la convergence d'autant plus inefficace que k devient plus petit. La Figure 5.3 présente le diagramme de flot à température nulle dans le plan $(\bar{\lambda}^q, \bar{\mu}^q)$ pour faciliter la comparaison avec le diagramme de flot à haute température (Figure 3.2). La ligne attractrice apparaît en rouge, matérialisée par une trajectoire puisqu'elle est stable (d'après (5.43)). À cause de la lenteur de la convergence du flot vers la ligne attractrice, sa capacité à attirer les trajectoires est beaucoup moins visible que dans le diagramme à haute température.

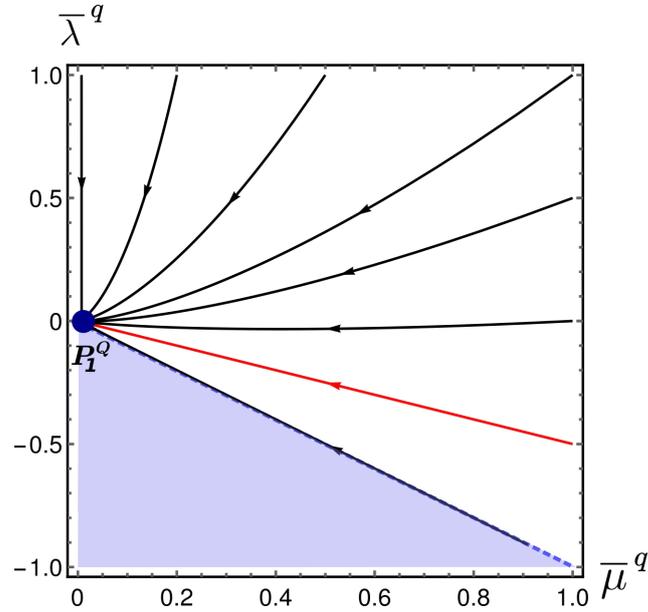


FIGURE 5.3 – Diagramme de flot à $D = 2$, $d = 3$ et $T = 0$. Le seul point fixe est le gaussien \mathbf{P}_1^Q . La zone grisée correspond à la zone d'instabilité du potentiel élastique, inaccessibles aux systèmes dont le potentiel est stable à l'échelle microscopique. La trajectoire en rouge matérialise la ligne $2\bar{\lambda}^q + \bar{\mu}^q = 0$ qui est bien attractrice dans l'infrarouge en dépit des apparences.

5.3.2 Flot de renormalisation à $T = 0$

Comme dans le cas du flot de renormalisation à haute température⁵, nous pouvons définir pour le système à température nulle une échelle de Ginzburg quantique L_G^q séparant le régime

5. Il faut bien sûr comprendre, ici et dans la suite, que haute température signifie que T est plus grande que les échelles de transition thermique-quantique, mais toujours plus faible que la température correspondant à la transition de froissement. Comme $T_c \simeq 10^5$ K dans notre modèle, nous considérons que l'utilisation de l'expression « haute température » ici est tout de même légitime.

des petits temps de renormalisation, où le comportement du système est dicté par sa condition initiale, du régime infrarouge où ses propriétés sont celles du point fixe \mathbf{P}_1^Q . De plus, puisque le point fixe attracteur est gaussien, l'approximation de couplage faible est valable à température nulle. Examinons par exemple le flot de \bar{b}_k^q . À l'ordre le plus bas en puissances des constantes de couplage, son flot, donné par (5.41), devient :

$$\partial_t \bar{b}_k^q = \frac{21}{64\pi} (\bar{b}_k^q)^2 . \quad (5.44)$$

Cette équation est suffisamment simple pour pouvoir être intégrée :

$$\bar{b}_k^q = \frac{\bar{b}_\Lambda^q}{1 - \frac{21}{64\pi} t \bar{b}_\Lambda^q} . \quad (5.45)$$

- Pour $|t| \ll \frac{64\pi}{21 \bar{b}_\Lambda^q}$,

$$\bar{b}_k^q \simeq \bar{b}_\Lambda^q . \quad (5.46)$$

C'est le régime des courtes échelles de longueur gouverné par la condition initiale. Celle-ci est reliée à sa contrepartie dimensionnée par la relation $\bar{b}_\Lambda^q = \hbar b_\Lambda / (\rho^{1/2} \kappa^{3/2})$. Grâce au facteur k^{2k} supplémentaire présent dans les variables adimensionnées quantiques, la relation entre b_Λ et \bar{b}_Λ^q ne dépend plus de $k_B T$.

- Pour $|t| \gg \frac{64\pi}{21 \bar{b}_\Lambda^q}$,

$$\bar{b}_k^q \simeq -\frac{64\pi}{21 t} , \quad (5.47)$$

qui est bien positif puisque $t \leq 0$. Aux grands temps, le comportement du système est dicté par le point fixe indépendamment de la condition initiale \bar{b}_k^q , qui n'apparaît plus dans (5.47).

La séparation entre ces deux régimes se fait pour une longueur L_G^q telle que :

$$\boxed{L_G^q = a \exp\left(\frac{64\pi}{21 \bar{b}_\Lambda^q}\right)} . \quad (5.48)$$

Dans le cas du graphène⁶, $L_G^q \simeq 5 \times 10^6 a$, ce qui est bien plus que la taille typique des échantillons qui est plutôt de l'ordre de $10^4 a$ généralement. En effet, le point fixe attracteur étant gaussien, le flot est d'autant plus lent qu'il s'approche du point fixe, ce qui donne aux constantes de couplage élastiques une évolution typique avec l'échelle k qui est logarithmique⁷. Par conséquent, la convergence vers le point fixe est très lente et la longueur associée à l'entrée du régime gouverné par celui-ci dépend de la condition initiale *via* une fonction exponentielle, et devient donc facilement très grande comparée aux autres échelles de longueur caractérisant le système.

6. Les valeurs numériques de ses caractéristiques sont données plus tôt dans le chapitre.

7. Car $t = \log(ak)$.

5.3.3 Élasticité dans la phase plate quantique

Relions à présent le comportement des variables adimensionnées quantiques donné par les équations (5.41) à celui des observables physiques décrivant l'élasticité des matériaux à température nulle et à l'échelle de la taille du système L . Le lien entre les constantes de couplage élastiques dimensionnées et adimensionnées à l'échelle courante k est donné par (5.20) :

$$\mu_k = k^{4-D-z_k-2\eta_k} \bar{\mu}_k^q. \quad (5.49)$$

Or, comme dans l'infrarouge $z_k = 2$ et $\eta_k = 0$, l'exposant s'annule, et le passage d'un jeu de variables à l'autre se fait par simple multiplication par une constante dimensionnée une fois les facteurs κ , ρ et \hbar restaurés. À partir de l'étude précédente sur le comportement du flot de renormalisation, nous déduisons que :

- Si la taille du système est telle que $L \ll L_G^q$, le régime gouverné par le point fixe gaussien dans lequel la mémoire de la condition initiale est perdue n'est jamais atteint. Dans ce cas, la valeur des constantes de couplage élastiques du matériau est contrôlée par leur valeur à l'échelle microscopique en vertu de (5.46), ce qui donne par exemple pour le module de cisaillement :

$$\mu_L = \mu_\Lambda = \bar{\mu}_\Lambda^q \frac{\sqrt{\rho} \kappa^{3/2}}{\hbar}. \quad (5.50)$$

L'élasticité à température nulle est alors déterminée par la théorie de champ moyen. Ce régime est appelé régime « quantique harmonique » dans la suite.

- Pour des systèmes assez grands $L \gg L_G^q$, la valeur des constantes de couplage élastiques adimensionnées et dimensionnées est corrigée logarithmiquement et ne dépend plus de sa valeur microscopique (5.47) :

$$\mu_L = \frac{32\pi}{7} \frac{\sqrt{\rho} \kappa^{3/2}}{\hbar} \frac{1}{\log\left(\frac{L}{L_G^q}\right)}. \quad (5.51)$$

Le ramollissement du système aux très grandes tailles a donc encore lieu à température nulle, mais il se fait infiniment moins vite. De plus, ce régime marque la résurgence du comportement auxétique du système avec $\nu = -1/3$. En effet, à des échelles de longueur suffisamment grandes, les trajectoires du diagramme de flot sont attirées par la ligne $(D+1)\bar{b} - 2\bar{\mu} = 0$ responsable de ce comportement. Ce régime sera appelé régime « quantique logarithmique » dans la suite.

Ce type de comportement s'étend aux autres caractéristiques dimensionnées de la réponse élastique du système telles que le module d'Young ou le module de compression :

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_L = \bar{\mathcal{Y}}_\Lambda \frac{\sqrt{\rho} \kappa^{3/2}}{\hbar} & L \ll L_G^q \\ \mathcal{Y}_L = \frac{128\pi}{21} \frac{\sqrt{\rho} \kappa^{3/2}}{\hbar} \frac{1}{\log\left(\frac{L}{L_G^q}\right)} & L \gg L_G^q, \end{cases} \quad (5.52)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} K_L = \bar{K}_\Lambda \frac{\sqrt{\rho} \kappa^{3/2}}{\hbar} & L \ll L_G^q \\ K_L = \frac{16\pi}{7} \frac{\sqrt{\rho} \kappa^{3/2}}{\hbar} \frac{1}{\log\left(\frac{L}{L_G^q}\right)} & L \gg L_G^q . \end{array} \right. \quad (5.53)$$

Malgré le fait que $\eta^* = 0$, l'énergie de courbure est elle aussi logarithmiquement modifiée dans le régime quantique logarithmique. En effet, la dimension anormale courante donnée par (5.41) devient lorsque la constante de couplage \bar{b}_k^q est suffisamment faible :

$$\eta_k \simeq \frac{3}{16\pi} \bar{b}_k^q , \quad (5.54)$$

soit dans le régime logarithmique (5.47) :

$$\eta_k \simeq -\frac{4}{7t} . \quad (5.55)$$

L'évolution de l'énergie de courbure renormalisée κ_k , quant à elle, est essentiellement la même que celle de la renormalisation de champ Z_k ⁸ :

$$\partial_t \kappa_k = -\eta_k \kappa_k \simeq \frac{4}{7t} \kappa_k , \quad (5.56)$$

qui s'intègre en :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \kappa_L = \kappa_\Lambda = \kappa & L \ll L_G^q \\ \kappa_L = \kappa \left[\log\left(\frac{L}{L_G^q}\right) \right]^{4/7} & L \gg L_G^q . \end{array} \right. \quad (5.57)$$

Ici encore, nous retrouvons la tendance de la membrane à devenir plus résistante aux efforts visant à la tordre lorsque sa taille augmente, mais dans une moindre mesure comparée à l'ampleur de ce phénomène à haute température.

Enfin, examinons la réponse du système à une contrainte externe dans chacun de ces régimes de fluctuation. La tension se couple au tenseur de déformation exactement de la même façon que dans la théorie de haute température. De plus, sa dimension $\Delta(\sigma) = 2 - \eta_k$ n'est pas modifiée par l'ajout de l'intégrale sur le temps imaginaire τ . En particulier, il n'y a pas lieu de distinguer les procédures d'adimensionnement quantique et classique pour la tension σ_k . À volume fixé, et température nulle, l'action effective moyenne s'écrit :

$$\Gamma_k[\vec{r}] = \int_{x,\tau} \left[\frac{Z_k}{2} (\partial^2 \vec{r})^2 + \frac{Z^\tau}{2} (\partial_\tau \vec{r})^2 + \frac{\sigma_k}{2} (\partial_i \vec{r} \cdot \partial^i \vec{r} - D(\zeta_k^{sp})^2) + \frac{c_k^{abcd}}{8} (\partial_a \vec{r} \cdot \partial_b \vec{r} - (\zeta_k^{sp})^2 \delta_{ab}) (\partial_c \vec{r} \cdot \partial_d \vec{r} - (\zeta_k^{sp})^2 \delta_{cd}) \right] . \quad (5.58)$$

Comme pour les autres quantités, grâce à la similarité des écritures de Γ_k à haute et basse température, le flot de $\bar{\sigma}_k$ à température nulle a la même forme que dans le régime de haute température (4.58), mais avec des fonctions de seuil de basse température incluant une intégrale sur τ :

$$\partial_t \bar{\sigma}_k = -(2 - \eta_k) \bar{\sigma}_k + 2v_D d_c \bar{K}_k^q \left(\bar{\mathcal{L}}_{100}^{D+2}(0) - \bar{\mathcal{L}}_{100}^{D+2}(\bar{\sigma}_k) \right) . \quad (5.59)$$

8. Elles correspondent toutes les deux au terme cinétique de l'action effective (5.1).

Rappelons que les lois donnant la réponse du système à l'application d'une contrainte sont reliées au comportement de cette équation de flot au voisinage du point fixe de phase plate, qui est maintenant \mathbf{P}_1^Q , notamment *via* les exposants ν_σ (4.36) et δ_σ (4.37).

Les identités entre fonctions de seuil massives et non-massives dans le cadre d'un développement à faible pseudo-masses (4.56) sont encore valables à basse température :

$$\bar{\mathcal{L}}_{a00}^{D+\alpha}(\bar{m}_k) \underset{\bar{m}_k \ll 1}{=} \bar{\mathcal{L}}_{a00}^{D+\alpha}(0) - a \bar{m}_k^2 \bar{\mathcal{L}}_{(a+1)00}^{D+\alpha+2}(0) + O(\bar{m}_k^4). \quad (5.60)$$

L'équation de flot de la tension (5.59) peut donc être développée à faible $\bar{\sigma}_k$ exactement de la même façon qu'auparavant :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\sigma}_k \underset{\bar{\sigma}_k \ll 1}{=} & -(2 - \eta_k) \bar{\sigma}_k + 2v_D d_c \bar{K}_k^q (\bar{\sigma}_k \bar{\mathcal{L}}_{200}^{D+4}(0)) + O(\bar{\sigma}_k^2) \\ \underset{\bar{\sigma}_k \ll 1}{=} & -(2 - \eta_k) \bar{\sigma}_k + \bar{\sigma}_k \frac{(\partial_t \bar{K}_k^q - (D + z_k - 4 + 2\eta_k) \bar{K}_k^q)}{\bar{K}_k} + O(\bar{\sigma}_k^2) \\ \underset{\bar{\sigma}_k \ll 1}{=} & -(D + z_k - 2 + \eta_k) \bar{\sigma}_k + \bar{\sigma}_k \frac{\partial_t \bar{K}_k^q}{\bar{K}_k^q} + O(\bar{\sigma}_k^2). \end{aligned} \quad (5.61)$$

De même que dans la théorie de haute température, le terme vert s'annule à \mathbf{P}_1^Q ⁹, et le terme rouge donne la valeur propre associée à la direction essentielle $\bar{\sigma}$ du jacobien du flot au point fixe de phase plate \mathbf{P}_1^Q :

$$\nu_\sigma = \frac{1}{D - 2 + z^* + \eta^*} = \frac{1}{2}. \quad (5.62)$$

La transition de flambage à température nulle se fait donc avec les exposants de la théorie de champ moyen. De plus, comme le champ externe ne se renormalise que par sa dimension, qui vaut toujours $\Delta(\sigma) = 2 - \eta_k$, ce résultat conduit également à :

$$\bar{\sigma}_k \underset{\mathbf{P}_1^Q}{\sim} k^{D-2+z_k+\eta_k} \sim (\sigma_k^{ext})^{\frac{D-2+z_k+\eta_k}{2-\eta_k}} \Rightarrow \delta_\sigma = \frac{2 - \eta^*}{D - 2 + z^* + \eta^*} = 1, \quad (5.63)$$

autrement dit, la loi de Hooke est conventionnelle à température nulle.

Finalement, les fluctuations quantiques ont un effet stabilisateur sur la phase plate des membranes cristallines, sans pour autant modifier les lois de l'élasticité conventionnelle des matériaux bidimensionnels. Aux très grandes tailles $L \gg L_G^q$, cependant, des corrections logarithmiques commencent à apparaître dans la valeur des coefficients d'élasticité, même si ces effets sont numériquement faibles, voire inexistantes en pratique, ne serait-ce qu'à cause de l'ordre de grandeur de L_G^q .

5.4 Thermodynamique aux basses températures

Le régime de température nulle est intéressant théoriquement car il permet d'étudier les fluctuations quantiques dans un régime de fonctionnement où elles sont seules à agir, mais en pratique les deux types de fluctuations coexistent dans un matériau réel. Examinons l'influence de la température T sur le comportement du système.

9. En effet, d'après (5.41), le terme vert est proportionnel à η_k qui s'annule dans la limite infrarouge.

5.4.1 Élasticité et évolution en température

L'introduction d'une température permet la construction d'une échelle de longueur L_T (5.30) séparant les modes de fluctuations de faible longueur d'onde $l \ll L_T$ dominés par les modes quantiques des modes de fluctuations aux grandes longueur d'onde $l \gg L_T$ dominés par les modes thermiques. D'autre part, nous avons établi que dans chacun des régimes où les fluctuations thermiques ou quantiques dominent, le comportement des observables à l'échelle L dépend de la comparaison de celle-ci avec les échelles de Ginzburg correspondantes, L_G (4.4) et L_G^q (5.48) respectivement :

- La détermination du régime *depuis lequel* l'entrée dans le régime thermique se fait dépend de la comparaison de L_T et L_G^q :
 - Si $L_T \ll L_G^q$, le système ne peut pas atteindre le régime dominé par \mathbf{P}_1^Q avant d'entrer dans le régime thermique. La transition vers ce régime a donc lieu depuis le régime quantique harmonique contrôlé par la condition initiale (voir Figure 5.4).

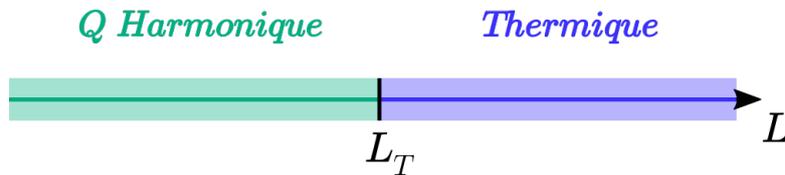


FIGURE 5.4 – Régimes de fluctuation d'un système de longueur thermique petite devant la longueur de Ginzburg quantique. Un tel système sera dans un régime quantique harmonique si $L \ll L_T$, dans un régime dominé par les fluctuations thermiques sinon.

- Si $L_T \gg L_G^q$, le système peut exister dans trois régimes différents suivant sa taille : quantique harmonique si $L \ll L_G^q$, quantique logarithmique si $L_G^q \ll L \ll L_T$, et thermique au-delà (voir Figure 5.5).



FIGURE 5.5 – Régimes de fluctuation d'un système de longueur thermique grande devant la longueur de Ginzburg quantique.

La comparaison entre L_T et L_G^q dépend de la température : typiquement, si T est élevée, L_T sera d'autant plus faible, car les fluctuations thermiques seront déjà importantes aux faibles échelles de longueur. En revanche, à très basse température, $L_T \sim T^{-1/2}$ devient très grande, et finit toujours par dépasser L_G^q qui, elle, ne dépend pas de T . Cela signifie aussi que tout système peut atteindre son régime quantique logarithmique à suffisamment basse température¹⁰. Dans le cas du graphène la température T_Q pour laquelle $L_T = L_G^q$

10. Ce qui n'est pas le cas du régime quantique harmonique par exemple qui, sous ces conditions, ne peut être atteint que si la taille L du système est plus petite que L_G^q .

est :

$$T_Q \simeq \frac{\hbar}{k_B} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} (L_G^q)^{-2} \simeq 7 \times 10^{-12} \text{ K} . \quad (5.64)$$

Ainsi T_Q est typiquement bien plus faible que les températures des échantillons de graphène étudiés expérimentalement, et nous pouvons raisonnablement penser qu'il en est de même pour les autres cristaux bidimensionnels étudiés aujourd'hui. Par conséquent, en pratique, le régime quantique est toujours un régime quantique harmonique, contrôlé par les valeurs de l'élasticité des matériaux dans la théorie de champ moyen. En particulier, l'auxétisme attendu dans la phase quantique a peu de chances d'être observé sur des matériaux réels.

- La détermination du régime *vers lequel* l'entrée dans le régime thermique se fait dépend de la comparaison de L_T et L_G :
 - Si $L_T \ll L_G$, les fluctuations thermiques sont encore harmoniques lorsqu'elles deviennent dominantes. Suivant sa taille, le système sera donc dans un des régimes quantiques précédents, dans le régime harmonique, ou dans le régime anharmonique correspondant à la phase plate classique habituelle (voir Figure 5.6).

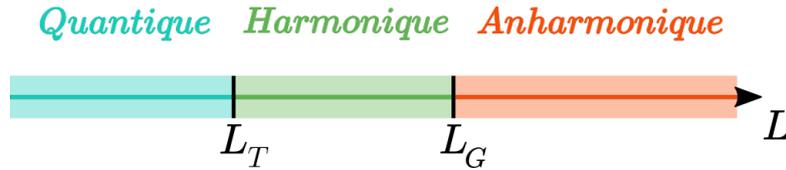


FIGURE 5.6 – Régimes de fluctuation d'un système de longueur thermique petite devant la longueur de Ginzburg classique L_G .

Il est intéressant de constater que l'ordre entre L_T et L_G est *indépendant de la température*, et ne dépend donc que de la nature des matériaux. Le régime $L_T \ll L_G$ correspond aux matériaux « mous » définis par :

$$L_T \ll L_G \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\kappa^{3/2} \rho^{1/2}}{\hbar} \gg \mu_\Lambda . \quad (5.65)$$

Le graphène entrant dans cette catégorie, il faut comprendre l'appellation « mous » relativement à l'exceptionnelle rigidité attendue pour les matériaux avec $L_T \gg L_G$. Cette comparaison conduit à la définition d'un module de cisaillement critique μ_c :

$$\mu_c = \frac{\kappa^{3/2} \rho^{1/2}}{\hbar} . \quad (5.66)$$

Pour le graphène, $\mu_c \simeq 5\mu_0$, ce matériau est donc « faiblement mou ». En pratique cela signifie que la plage de tailles sur laquelle un échantillon de graphène peut théoriquement exister dans le régime harmonique est extrêmement faible.

- Si $L_T \gg L_G$, c'est-à-dire si le matériau est « dur » au sens de (5.65) avec $\mu_\Lambda \gg \mu_c$, les fluctuations thermiques sont anharmoniques dans le domaine où elles dominent (voir Figure 5.7).

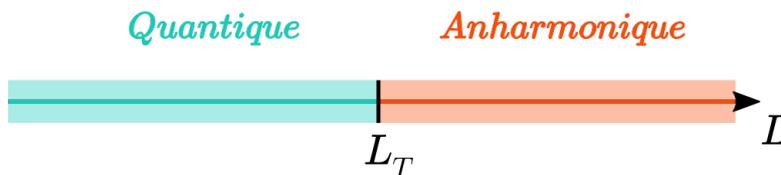


FIGURE 5.7 – Régimes de fluctuation d'un système de longueur thermique grande devant la longueur de Ginzburg classique L_G .

Étant donné les ordres de grandeurs de μ_Λ et μ_c pour le graphène, l'existence de tels matériaux est probable.

Finalement, pour faire le lien avec le flot de renormalisation, considérons l'exemple d'une feuille de graphène à $T = 10$ K. Puisque $T > T_T \simeq 10^{-6}$ K, le matériau est à l'échelle L dans le régime thermique anharmonique. Il est donc intéressant d'étudier l'évolution des grandeurs adimensionnées classiques, et non quantiques, qui sont celles qui atteignent un point fixe (\mathbf{P}_4) dans l'infrarouge (voir Figure 5.1). Les flots de η_k , ν_k , \overline{K}_k^{cl} et $\overline{\mathcal{Y}}_k^{cl}$ sont présentés sur la Figure 5.8. Étant donné la faible différence numérique entre L_G et L_T , les effets de la présence du régime thermique harmonique ne sont pas visibles. Pour des temps de renormalisation plus grands que $t_T = \log(a/L_T)$, les fluctuations thermiques deviennent dominantes et conduisent le système dans le régime anharmonique. Le coefficient de Poisson ν_k entame dès le régime quantique son évolution vers la valeur asymptotique $-1/3$, mais l'efficacité de la convergence est énormément améliorée par les fluctuations thermiques anharmoniques.

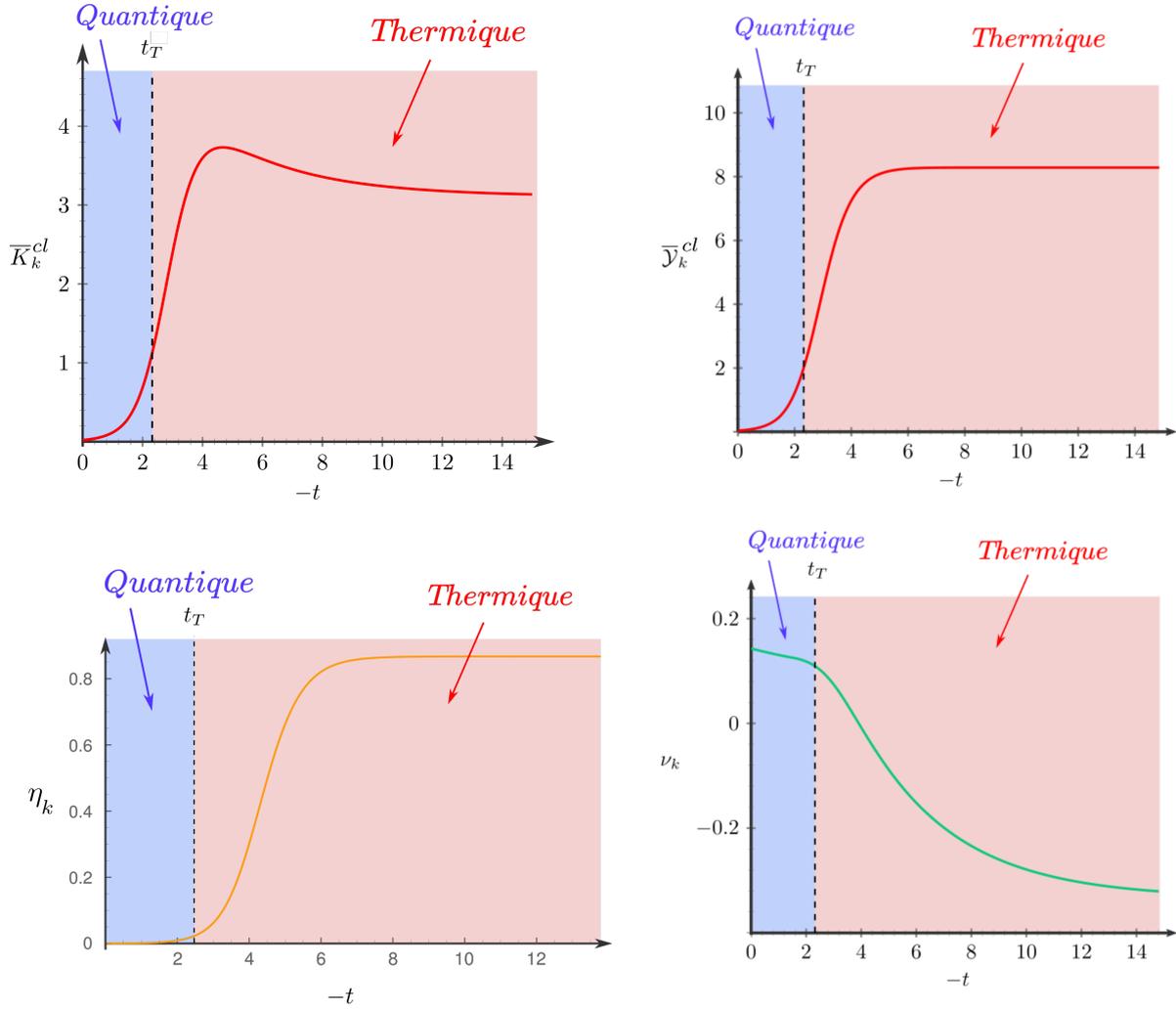


FIGURE 5.8 – Évolution de l'élasticité avec l'échelle courante pour des conditions initiales correspondant au graphène à $T = 10$ K. En haut à gauche : le module de compression adimensionné classique, en haut à droite : le module d'Young adimensionné classique, en bas à gauche : la dimension anormale courante, en bas à droite : le coefficient de Poisson. La transition entre les régimes dominés par les fluctuations quantiques et thermiques a lieu au temps $t_T = \log(a/L_T)$.

5.4.2 Transitions de flambage à basse température

Pour étudier l'influence de la transition de flambage sur les diagrammes précédents, il nous faut à présent comparer la longueur L_σ marquant l'entrée dans le régime de fluctuations dominé par la tension (flambé ou sur-étiré suivant que la membrane est comprimée ou étirée) aux tailles caractéristiques L_T , L_G et L_G^q . Rappelons que L_σ peut être définie à partir du propagateur de flexurons :

$$G_0(q) = \frac{1}{\kappa q^4 + \sigma q^2} \quad (5.67)$$

comme l'échelle de longueur à partir de laquelle le terme bleu domine. Définissons tout d'abord σ_T comme la contrainte à partir de laquelle la transition de flambage a lieu à l'échelle L_T ,

c'est-à-dire $L_{\sigma_T} \simeq L_T$. Nous pouvons alors distinguer les régimes suivants :

- Si $\sigma \gg \sigma_T$, la transition de flambage a lieu à des tailles $L_\sigma < L_T$, autrement dit la phase plate thermique n'est jamais atteinte. D'après notre étude de la transition de flambage depuis les phases quantiques, les exposants critiques de la transition de phase sont dans ce cas les exposants champ moyen : $\nu_\sigma = 1/2$ et $\delta_\sigma = 1$.

Pour savoir depuis quel régime de fluctuations quantiques la transition de flambage a lieu, il nous faut comparer L_σ à L_G^q . Définissons :

$$\sigma_q^* = \frac{\kappa}{(L_G^q)^2}, \quad (5.68)$$

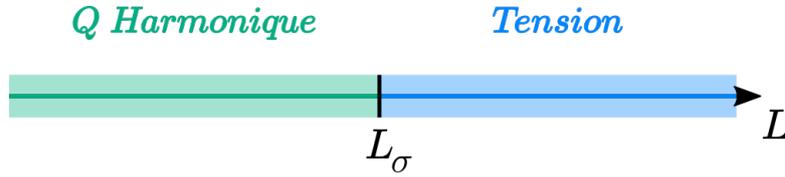
tel que $L_{\sigma_q^*} \simeq L_G^q$. Les régimes de fluctuations accessibles au système sont donc :

- $\sigma \gg \sigma_q^*$: à très forte tension, la transition de flambage a lieu dans le régime quantique harmonique. Dans ce cas, la longueur L_σ à laquelle le système flambe à σ fixé est donnée par sa valeur harmonique :

$$L_\sigma = \sqrt{\frac{\kappa}{\sigma}}, \quad (5.69)$$

et la tension critique pour faire flamber un système de taille L donnée est :

$$\sigma_c = \frac{\kappa}{L^2}. \quad (5.70)$$



- $(\sigma_T \ll) \sigma \ll \sigma_q^*$: la transition de flambage a lieu dans le régime quantique logarithmique. Dans ce cas, la longueur L_σ à laquelle le système flambe à σ fixé est modifiée par les corrections logarithmiques à l'énergie de courbure (5.57). Elle est solution de l'équation suivante :

$$L_\sigma \left[\log \left(\frac{L_\sigma}{L_G^q} \right) \right]^{-2/7} = \sqrt{\frac{\kappa}{\sigma}}, \quad (5.71)$$

et la tension critique pour faire flamber un système de taille L donnée est :

$$\sigma_c = \frac{\kappa}{L^2} \left[\log \left(\frac{L}{L_G^q} \right) \right]^{4/7}. \quad (5.72)$$



- Si $\sigma \ll \sigma_T$, la transition de flambage a lieu dans un régime dominé par les fluctuations thermiques. Le type de régimes accessibles est maintenant donné par la comparaison de σ à σ^* défini en (4.32) comme la tension pour laquelle la transition de flambage a lieu à l'échelle L_G . Nous avons donc :

- $(\sigma_T \gg) \sigma \gg \sigma^*$: si la tension est assez forte, la transition de flambage a lieu depuis le régime harmonique. Elle est donc d'après les résultats du chapitre 4 caractérisée par des exposants $\nu_\sigma = 1/2$ et $\delta_\sigma = 1$. La longueur à laquelle la transition a lieu est

$$L_\sigma = \sqrt{\frac{\kappa}{\sigma}}, \quad (5.73)$$

et la tension critique pour faire flamber un système de taille L donnée est :

$$\sigma_c = \frac{\kappa}{L^2}. \quad (5.74)$$



Notons qu'un tel scénario n'est pas possible pour des matériaux « durs » avec $\mu_\Lambda \gg \mu_c$.

- $\sigma \ll \sigma^*$: la transition de flambage a lieu depuis le régime anharmonique. Elle est donc d'après les résultats du chapitre 4 caractérisée par des exposants $\nu_\sigma = \frac{1}{\eta^*}$ et $\delta_\sigma = +\frac{2-\eta^*}{\eta^*}$. La longueur à laquelle la transition a lieu est corrigée à cause de l'anharmonicité, et dépend de T via L_G :

$$L_\sigma = \left(\frac{\kappa}{\sigma(L_G)^{\eta^*}} \right)^{\frac{1}{2-\eta^*}}, \quad (5.75)$$

et la tension critique pour faire flamber un système de taille L donnée est :

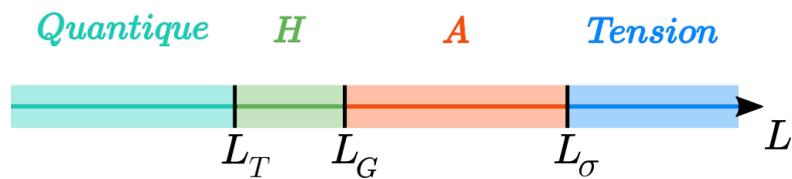
$$\sigma_c = \frac{\kappa}{L^2} \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta^*}. \quad (5.76)$$

Les régimes accessibles dépendent de la rigidité du système : nous avons vu que pour les systèmes les plus rigides, la sortie du régime contrôlé par les fluctuations quantiques se fait directement vers le régime anharmonique. Nous devons donc distinguer :

- * les matériaux « durs » $\mu_\Lambda \gg \mu_c$:



* les matériaux « mous » $\mu_\Lambda \ll \mu_c$:



Enfin, nous pouvons résumer tout cela par les corrections au diagramme des phases apportées par l'étude des régimes de basse température. Nous n'avons représenté ni les portions identiques au diagramme du chapitre 4, ni le cas $T \ll T_Q$ où la phase quantique logarithmique apparaît étant donné son peu d'intérêt pratique au vu des ordres de grandeur discutés précédemment.

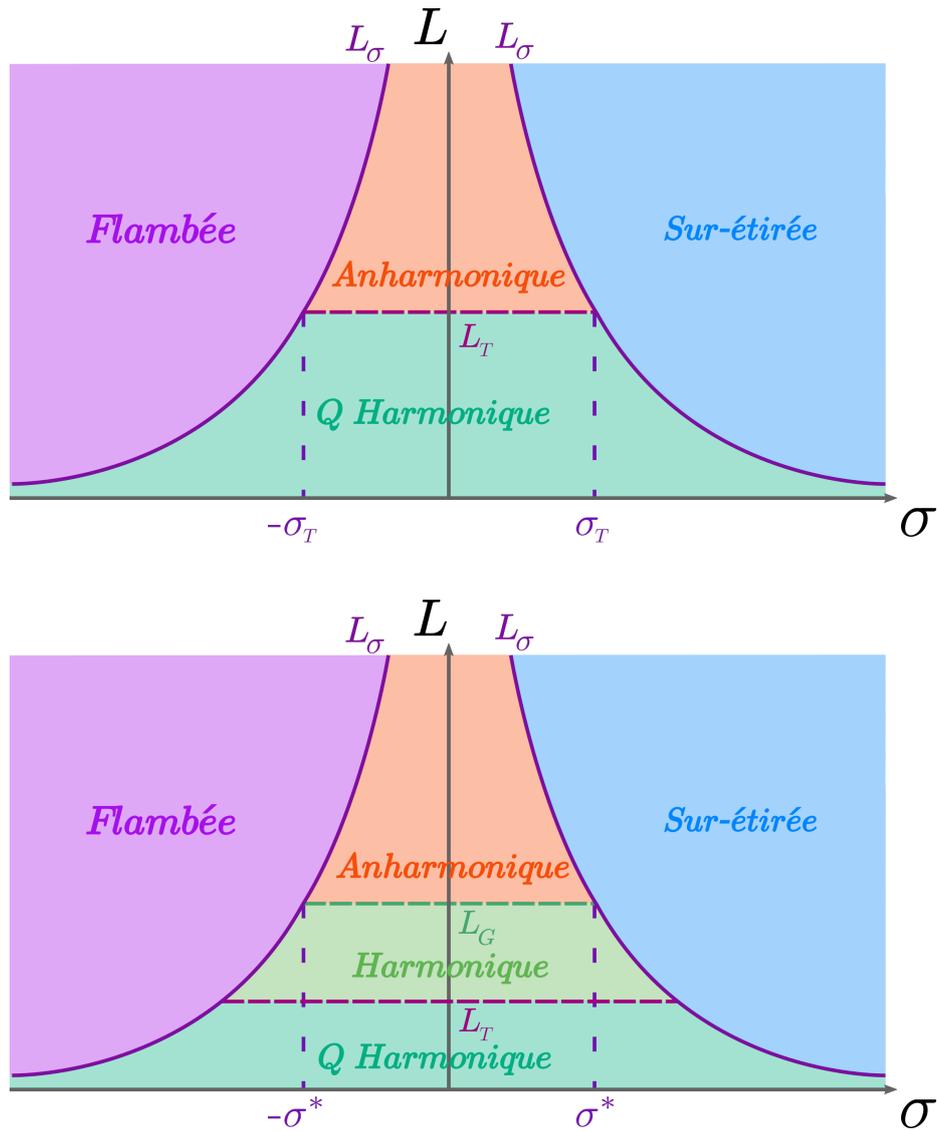


FIGURE 5.9 – Diagramme des phases des membranes cristallines dans le plan (L, σ) . En haut : diagramme d'un matériau « dur ». Il n'y a pas de régime thermique harmonique. En bas : diagramme similaire pour un matériau « mou ».

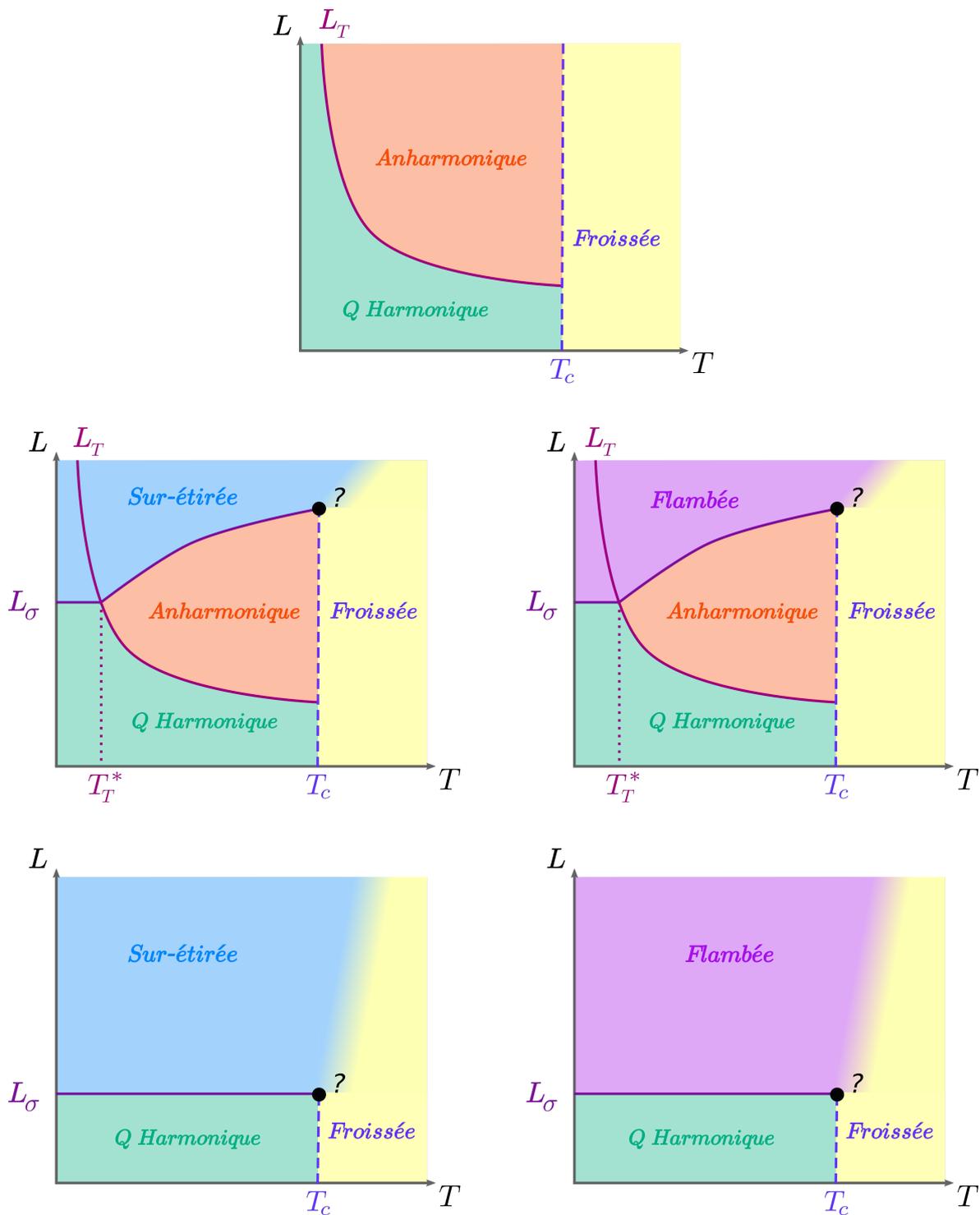


FIGURE 5.10 – Diagramme des phases des membranes cristallines dans le plan (L, T) pour un matériau « dur » $\mu_\Lambda \gg \mu_c$. De haut en bas : diagramme à $\sigma = 0$, $0 < |\sigma| < \sigma^*$ et $|\sigma| > \sigma^*$. À gauche σ est positif, à droite il est négatif.

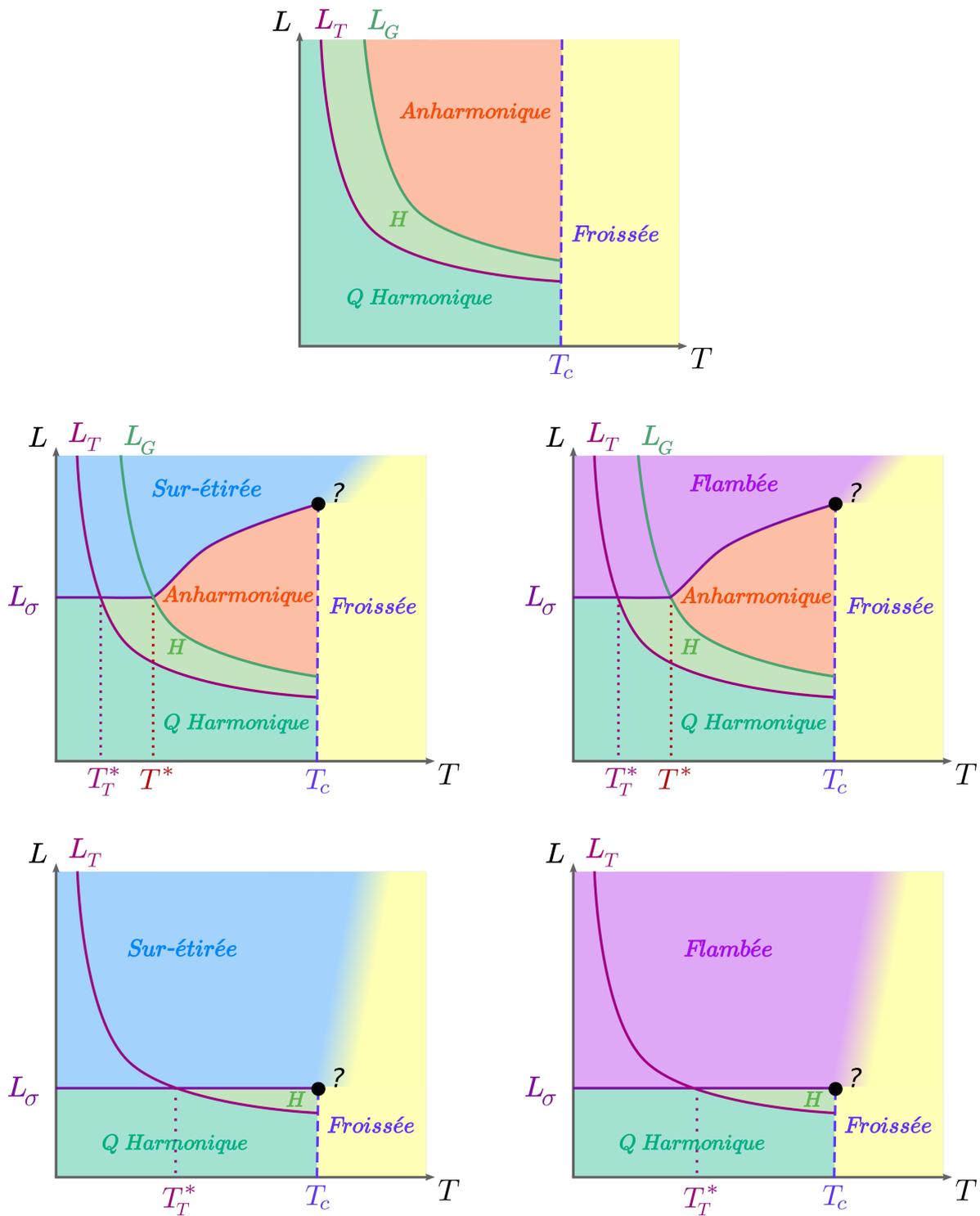


FIGURE 5.11 – Diagramme des phases des membranes cristallines dans le plan (L, T) pour un matériau « mou » $\mu_\Lambda \ll \mu_c$. De haut en bas : diagramme à $\sigma = 0$, $0 < |\sigma| < \sigma^*$ et $|\sigma| > \sigma^*$. À gauche σ est positif, à droite il est négatif.

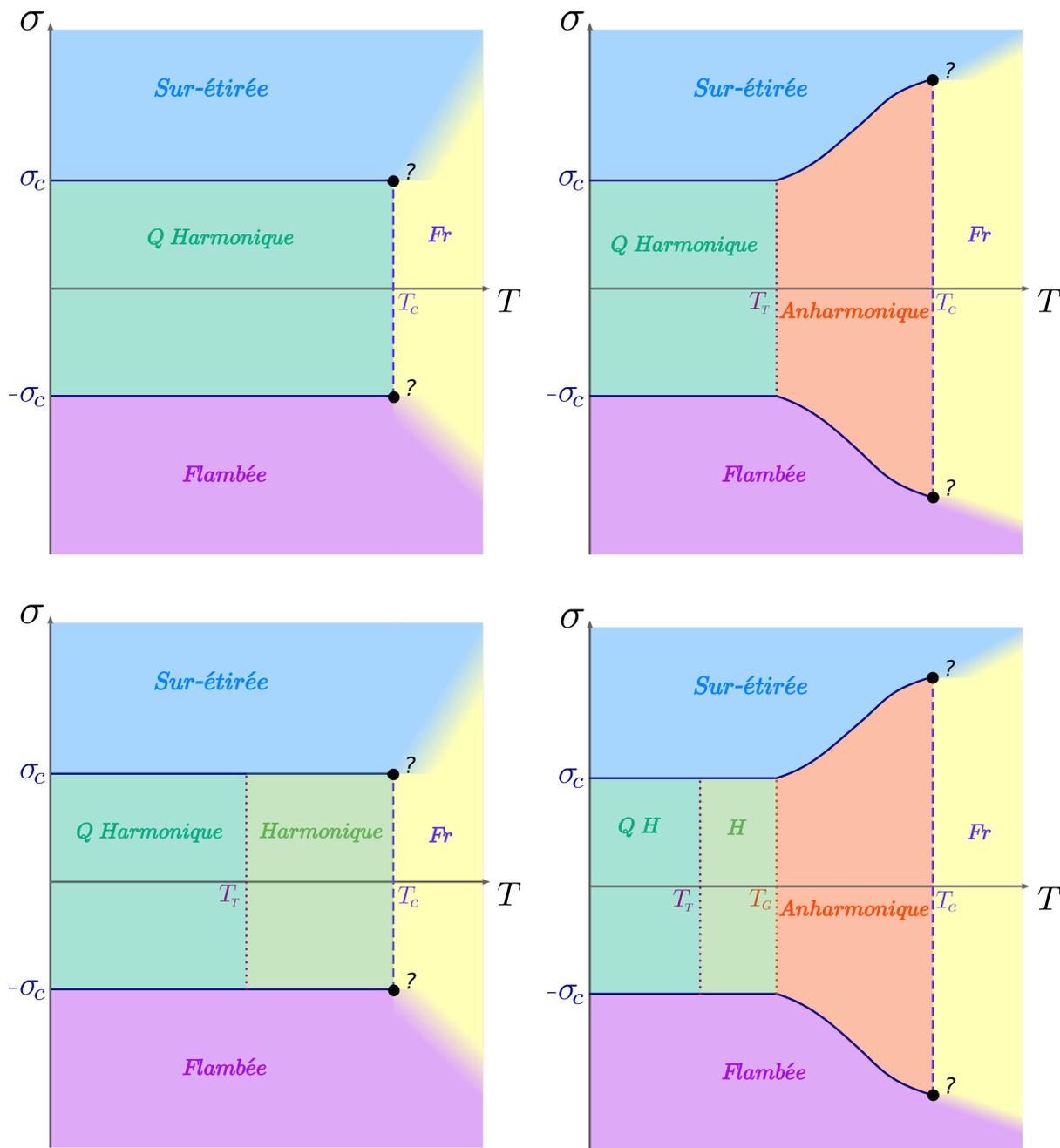


FIGURE 5.12 – Diagramme des phases des membranes cristallines dans le plan (σ, T) . En haut : diagramme d'un matériau « dur ». Il n'y a pas de régime thermique harmonique. En bas : diagramme similaire pour un matériau « mou ». À gauche : $L < L_T$, pour des systèmes trop petits, la transition vers le régime thermique ne peut pas s'effectuer. À droite : $L > L_T$. La transition vers le régime thermique a lieu à T_T .

5.4.3 Coefficient d'expansion thermique et chaleurs spécifiques

Les grandeurs thermodynamiques que nous avons décrites jusqu'à présent sont données par les lois d'échelle à l'échelle L . Ainsi, leur évolution en fonction de T telle qu'elle est mesurée n'est pas impactée par la présence ou l'absence de fluctuations quantiques aux échelles de longueur $l \ll L$. Mais nous avons décrit dans le régime de haute température d'autres grandeurs, telles que α par exemple, qui dépendent de toute l'histoire du flot entre les échelles microscopique et macroscopique du système.

Ces quantités ont comme point commun de dépendre de la valeur du volume du système à l'équilibre thermodynamique, ou plus précisément de son paramètre d'extension dimensionné ζ_0 . Comme pour toutes les autres grandeurs dimensionnées, en vertu des fortes similitudes entre les actions effectives quantifiée (5.1) et non-quantifiée (3.100), le flot de ζ_k à basse température a une expression similaire au flot à haute température (4.15), mais avec des fonctions de seuil adaptées :

$$\partial_t \zeta_k^2 = \frac{4v_D}{D} d_c \mathcal{L}_{100}^{D+2} . \quad (5.77)$$

L'adimensionnement du seuil conduit d'après (5.26) à :

$$\partial_t \zeta_k^2 = k^{\eta_k + z_k} \frac{1}{4\pi} \frac{\hbar}{\sqrt{\rho\kappa}} \bar{\mathcal{L}}_{100}^4 . \quad (5.78)$$

Or, d'après (5.40),

$$\eta_k + z_k = 2 + \frac{\eta_k}{2} > 0 , \quad (5.79)$$

ce qui assure que le flot de ζ_k (5.78) converge toujours vers 0 lorsque $k \rightarrow 0$.

Nous avons également établi que le comportement de la fonction de seuil $\bar{\mathcal{L}}_{100}^4$ est dicté par la valeur de la température effective du système : si $\bar{T}_k \gg 1$, il se comporte comme un seuil de haute température, si $\bar{T}_k \ll 1$, il inclut les contributions de d'autant plus de fréquences de Matsubara $\bar{\omega}_n$ que \bar{T}_k est faible. Ainsi, même si pour $k < k_T$ le seuil adimensionné dans (5.78) se comporte toujours comme un seuil de haute température, la valeur de ζ_k à l'entrée de ce régime, ζ_{k_T} , dépend fortement de l'histoire du flot aux échelles $k > k_T$: deux systèmes ayant des valeurs différentes de ζ_{k_T} auront des paramètres d'extension convergeant vers des valeurs asymptotiques ζ_0 différentes même si leurs valeurs de $\partial_t \zeta_k$ sont les mêmes dans le régime thermique. La dépendance précise de ζ_0 vis-à-vis de T est donc très difficile à évaluer.

Le paramètre d'extension à l'échelle L , ζ_0 , donne accès aux quantités suivantes :

- **Coefficient d'expansion thermique α :**

À cause de la dépendance complexe de ζ_0 vis-à-vis de T , α est très difficile à évaluer analytiquement. Il est cependant possible d'y avoir accès en intégrant numériquement le flot de ζ_k à différentes températures, et en effectuant des dérivées numériques. Dans le cas du graphène, l'allure de $\alpha(T)$ est celle de la Figure 5.13.

Même si les valeurs de α changent d'un matériau à l'autre, sa négativité, préservée aux basses températures, est universelle. L'influence de la présence de fluctuations quantiques sur sa valeur est assez complexe : à $T_T^a \simeq 178$ K, celles-ci apparaissent à l'échelle microscopique sans trop avoir d'effet immédiat. Vers $T = 50$ K, elles donnent à α un changement de

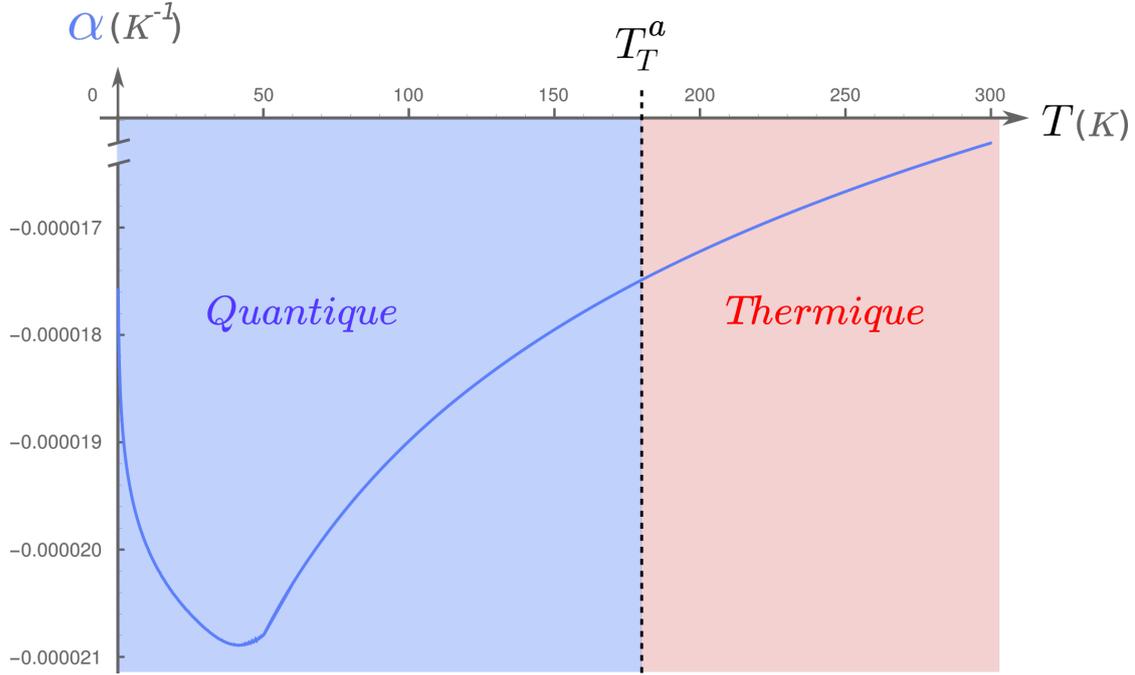


FIGURE 5.13 – Évolution du coefficient d’expansion thermique d’une feuille de graphène libre en fonction de la température. La température T_T^a correspond à celle où les fluctuations quantiques deviennent dominantes à l’échelle microscopique du système.

monotonie, mais une inflexion de la courbe est déjà visible aux échelles intermédiaires. Le coefficient d’expansion thermique est donc sensible à l’arrivée des fluctuations quantiques bien avant $T_T \simeq 10^{-6}$ K. L’introduction d’une tension ne modifie pas α .

À température nulle, $\alpha(T) \rightarrow 0$ comme prévu par la troisième loi de la thermodynamique : en effet sa dépendance en température est liée à celle de ζ_{k_T} . Pour des températures $T \ll T_Q$, la transition du régime quantique au régime thermique a lieu dans la phase quantique logarithmique dans laquelle la mémoire de la condition initiale se perd peu à peu. Dans la limite de température nulle, ζ_{k_T} correspond à une valeur de ζ_k dans un régime quantique logarithmique de plus en plus profond, et devient donc peu à peu indépendant de T .

Ce raisonnement n’est valable que dans la limite où le système est assez grand pour que le régime quantique logarithmique soit atteint, mais la troisième loi de la thermodynamique est elle-même valable dans la limite thermodynamique $L \rightarrow +\infty$ où cette condition est toujours vérifiée.

Il est donc attendu qu’une autre transition importante dans le comportement de α ait lieu à $T_Q \simeq 10^{-12}$ K, mais nous n’avons pas pu l’observer pour des raisons techniques. En effet, la fonction de seuil $\bar{\mathcal{L}}_{100}^4$ fait intervenir une somme sur une infinité de fréquences héritée de la quantification du champ de position (5.10). Grâce à l’ajustement du régulateur dans le domaine fréquentiel (5.35) seules les fréquences suffisamment basses $\bar{\omega}_n(\bar{T}_k) \leq 1$ donnent des contributions importantes. Cependant à très basse température, le nombre de termes

présents à chaque pas de temps de renormalisation est déraisonnablement grand, d'autant que la faible valeur absolue de α le rend très sensible aux baisses de précision. Une étude numérique plus sérieuse de ce problème, encore manquante à ce jour, est donc nécessaire pour décrire ces régimes de très basses températures. En l'absence de modèle analytique décrivant de manière approchée la dépendance de ζ_0 vis-à-vis de T , nous n'avons donc pas non plus accès au comportement de ce coefficient au voisinage de $T = 0$, en particulier de l'éventuel exposant m tel que $\alpha \underset{T \rightarrow 0}{\sim} T^m$.

- **Chaleurs spécifiques (C_V, C_P) :**

Dans le régime de haute température, les chaleurs spécifiques peuvent être évaluées simplement grâce à l'approximation consistant à négliger la dépendance en température de α qui n'est bien sûr plus valable. Il est cependant encore possible de donner une forme approchée de l'équation d'état (4.73). En effet, à tension nulle,

$$T > 1 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\zeta_0^2(T) - (1 + \alpha(T)T)}{\zeta_0^2(T)} \right| < 0,02\% . \quad (5.80)$$

Puisque, tant que nous restons dans la phase plate, la dépendance en tension est simplement donnée par (4.38) comme dans la théorie de hautes températures, nous pouvons donc raisonnablement approximer l'équation d'état par :

$$\boxed{\zeta_0^2(T) \simeq 1 + \alpha(T)T + \frac{\sigma_L^{ext}}{K_L}} , \quad (5.81)$$

du moins pour des températures supérieures à 1 K. En deçà de cette température, il est de toute façon attendu que les contributions des électrons à C_V et C_P ne soient plus négligeables [Pop 2012], donc que notre modèle purement élastique ne soit plus valide.

Grâce à (5.81), nous pouvons généraliser la plupart des expressions obtenues à haute température. Notamment, le champ de contraintes internes σ_L lorsque l'on travaille à volume fixé est relié au champ externe par une relation similaire à (4.75) :

$$\sigma_L = -\sigma_L^{ext} - \alpha(T)T K_L , \quad (5.82)$$

ce qui donne accès à β_V , et comme χ_T est l'inverse de K_L , nous décrivons bien tous les coefficients thermoélastiques pour $T > 1 \text{ K}$.

De plus, nous pouvons généraliser les équations (4.82) et (4.85) pour approximer la valeur des énergies libres et enthalpies libres lors d'un changement de température :

$$\mathcal{G}_S \simeq \left[\frac{1}{2} K_L [\alpha(T)T]^2 - \sigma_L^{ext} \alpha(T)T \right] \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta^*} , \quad (5.83)$$

$$\mathcal{F}_S = \left[-\frac{1}{2} K_L [\alpha(T)T]^2 - \sigma_L^{ext} \alpha(T)T \right] \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta^*} , \quad (5.84)$$

où nous rappelons que, comme $T > T_T$, les valeurs calculées à l'échelle L sont corrigées par l'exposant anormal $\eta^* \simeq 0,849$ de la phase plate anharmonique.

La dérivation de ces expressions par rapport à la température permet d'obtenir les profils de la Figure 5.14. De même qu' α , les chaleurs spécifiques sont sensibles à la présence de fluctuations quantiques dans le système bien avant T_T .

Ces quantités sont cependant encore plus sensibles aux erreurs numériques que α , puisqu'elles sont obtenues en dérivant (4.82) et (4.85) qui mettent déjà en jeu $\alpha(T)$. À cause de la très faible valeur absolue de α par rapport aux autres grandeurs étudiées ($\zeta_0 \simeq 1$, $K_L \simeq 100 \text{ N.m}^{-1}$ par exemple), de faibles erreurs aux étapes intermédiaires peuvent générer de gros écarts à la valeur réelle dans le résultat final. De plus, la présence de bruit dans la valeur de $\alpha(T)$ peut générer des artefacts dans la valeur de ses dérivées par rapport à la température. Ici encore, une amélioration des procédures numériques est souhaitable pour améliorer la précision de nos estimations.

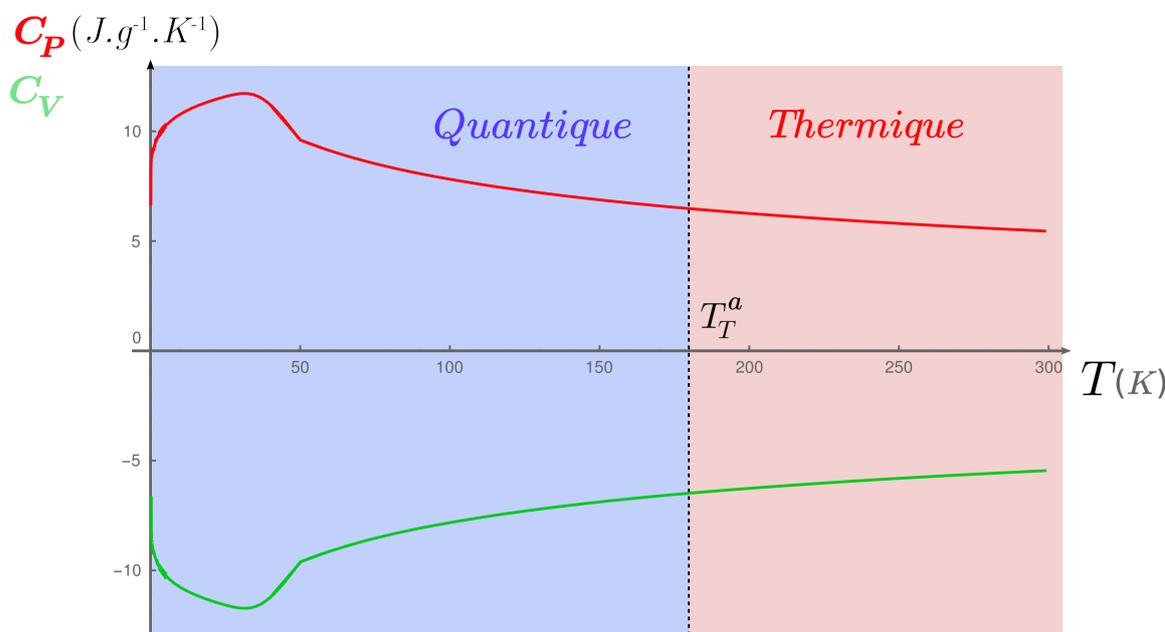


FIGURE 5.14 – Évolution des chaleurs spécifiques d'une feuille de graphène libre avec la température. T_T^a marque la température en deçà de laquelle les fluctuations quantiques sont visibles dans le système.

5.5 Conclusion

Ainsi, à basse température, la phase plate des membranes cristallines est stabilisée par un nouveau type de fluctuations : les fluctuations quantiques, qui sont toujours gaussiennes aux grandes échelles de longueur. Ces fluctuations rendent la membrane plus rugueuse aux basses températures que ne le prédit la théorie classique qui n'inclut que des fluctuations thermiques (voir Figure 5.15). Cette rugosité n'est pas sans lien avec la rigidification du milieu, puisque ce sont bien les fluctuations de hauteur, par leur interaction avec les phonons, qui stabilisent la phase plate déjà aux hautes températures. L'existence des fluctuations quantiques permet de rétablir les règles de l'élasticité conventionnelle pour la réponse des membranes cristallines à des

contraintes externes. En particulier, la transition de flambage a lieu avec les exposants de la théorie de champ moyen, et la loi de Hooke redonne une dépendance linéaire entre contrainte et déformation.

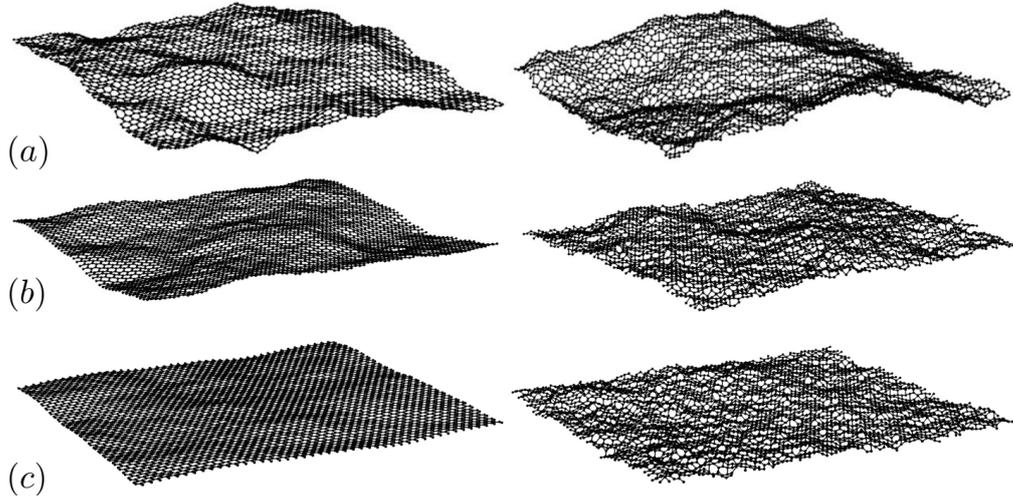


FIGURE 5.15 – Figure extraite de [Hašik 2018]. Elle compare des simulations d’une feuille de graphène libre avec $N = 4860$ atomes par des méthodes de Monte Carlo classique (à gauche), et basées sur l’intégrale de chemin (Path Integral Monte Carlo) (à droite). Pour gagner en visibilité, l’amplitude des flexurons a été multipliée par 10. Les différentes lignes correspondent aux températures suivantes : (a) $T = 50$ K, (b) $T = 12,5$ K, (c) $T = 2,5$ K.

La détermination d’une température de transition vers le régime quantique dépend de l’effet que l’on cherche à décrire :

- la modification du comportement des coefficients élastiques, qui dépendent du régime de fluctuations dominantes à l’échelle L , a lieu à $T_T \simeq 10^{-6}$ K.
- la modification du comportement des quantités dépendantes de $\zeta_0(T)$ a lieu entre T_T et $T_T^a \simeq 180$ K.
- l’arrivée dans le régime contrôlé par le point fixe de phase plate quantique a lieu à $T_Q \simeq 10^{-12}$ K. Ce n’est que dans ce régime que le comportement auxétique par exemple n’est retrouvé dans la phase plate quantique.

La détermination de la variation des grandeurs thermodynamiques vis-à-vis de la température, bien que plus difficile que dans le cas classique, est toujours possible dans le formalisme NPRG, au moins numériquement. Notre étude a montré que des prédictions quantitatives sont possibles, en principe, dans le cadre de la théorie de l’élasticité (c’est-à-dire sans les électrons) et que les résultats préliminaires sont cohérents avec les comportements connus (valeurs des coefficients à haute température, troisième loi de la thermodynamique), mais du travail est encore requis pour y parvenir. Notamment, la précision des procédures numériques utilisées doit être améliorée pour obtenir des prédictions quantitatives fiables.

Désordre dans la phase plate

Sommaire

6.1	Membranes et désordre	196
6.1.1	Types d'impuretés	196
6.1.2	Modèle	198
6.1.3	Résumé des résultats des approches précédentes	204
6.1.3.1	Membranes sans courbure spontanée aléatoire	204
6.1.3.2	Membranes avec courbure spontanée aléatoire	205
6.1.3.3	Approximation de l'écrantage auto-cohérent en présence de désordre	210
6.1.3.4	Conclusion	214
6.2	Méthode de l'action effective moyenne	214
6.2.1	Action effective moyenne en présence d'impuretés	214
6.2.1.1	Flot de l'action effective	214
6.2.1.2	Flot du paramètre d'extension ζ_k	217
6.2.1.3	Flot de renormalisation dans la phase plate	218
6.2.2	Membranes sans courbure spontanée aléatoire	220
6.2.3	Membranes réelles : $D = 2, d = 3$	222
6.2.4	Développement au voisinage de $D_c^s, D = 4 - \varepsilon$	226
6.2.4.1	Équations NPRG à l'ordre dominant	226
6.2.4.2	Développement à deux boucles	228
6.2.4.3	Au-delà de l'ordre sous-dominant	230
6.3	Thermodynamique dans la phase plate désordonnée	231
6.3.1	Élasticité et courbure	231
6.3.2	Caractéristiques thermodynamiques de la phase plate rugueuse	234
6.3.3	Loi de Hooke - Transition de flambage	237
6.4	Conclusion	239

Nous avons jusqu'à présent décrit des membranes dont le réseau cristallin sous-jacent est parfait. C'est cependant rarement le cas dans les systèmes réels, qui présentent des impuretés. Leurs origines sont multiples : il peut s'agir de défauts de polymérisation générés lors du processus de fabrication, d'éléments adsorbés à cause d'une interaction de la membrane avec le milieu environnant, ou encore de modifications locales de la forme de la membrane induites par des inclusions de protéines pour des membranes biologiques par exemple.

L'influence de ces imperfections sur les membranes cristallines a été étudiée expérimentalement. Ces études ont montré que même au niveau des caractéristiques mécaniques (c'est-à-dire, pas les propriétés électroniques, optiques, ni les propriétés de transport), l'augmentation de la densité d'impuretés peut changer radicalement le comportement du système : par exemple, le module d'Young \mathcal{Y} d'une feuille de graphène percée augmente avec le nombre de trous aux faibles densités, alors qu'il diminue lorsque la densité de trous est forte [López-Polin 2014]. Une transition de phase entre la phase plate et une phase « plissée » a également été observée lors du refroidissement de vésicules partiellement polymérisées [Mutz 1991, Chaieb 2006, Chaieb 2008]. Des modèles théoriques basés sur les approches exposées dans le Chapitre 3 ont alors été développés pour expliquer ces phénomènes, et prédire les caractéristiques des éventuelles nouvelles phases apparaissant en présence de désordre [Nelson 1991, Radzihovsky 1991, Morse 1992, Gornyi 2015, LeDoussal 2017, Coquand 2018].

Dans ce chapitre, nous étendons le modèle étudié dans les chapitres précédents à des membranes présentant des impuretés. Tout d'abord, nous présentons les différents modèles théoriques utilisés et les résultats associés. Puis nous discuterons des prédictions de l'approche NPRG basée sur un développement en faibles gradients du champ de position qui prédit une transition de phase à basse température ou forte densité de défauts. Finalement, avec les méthodes exposées dans le Chapitre 4, nous donnerons quelques caractéristiques de cette nouvelle phase de basse température.

6.1 Membranes et désordre

6.1.1 Types d'impuretés

La dénomination « impureté » a un champ d'application assez large et peut rendre compte de différents types d'effets. Il nous faut donc préciser le cadre dans lequel nous allons travailler. Nous considérerons dans la suite deux grands types de sources de désordre :

- **Contrainte locale aléatoire $\delta\sigma^{ij}(x)$** : ce type de termes peut rendre compte de différents types d'imperfections de la matrice cristalline : défauts de polymérisation, atomes manquants, introduction d'atomes d'espèces différentes, variations locales aléatoires de la coordinence des atomes (voir Figure 6.1).

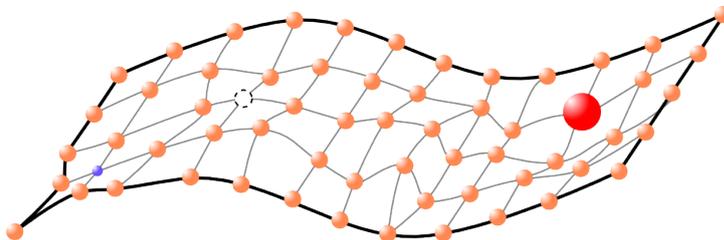


FIGURE 6.1 – Déformation d'une membrane cristalline due à différentes contraintes locales aléatoires : inclusions d'atomes d'espèces différentes, modification locale de la coordinence, atome manquant.

Tout comme les contraintes externes, $\delta\sigma^{ij}$ se couple linéairement au tenseur des déformations ε_{ij} . Elle induit une modification de la métrique de l'état fondamental g_{ij}^0 qui devient

[Radzihovsky 1991] :

$$g_{ij}^0 + \delta g_{ij}(x) = \zeta^2 \delta_{ij} + 2(c^{-1})_{ijkl} \delta \sigma^{kl}(x), \quad (6.1)$$

où nous rappelons que c^{ijkl} est le tenseur d'élasticité.

Qualitativement, ce changement de métrique se traduit par une modification des propriétés élastiques du matériau. De plus, lorsque la membrane est localement trop comprimée, elle peut flamber dans la direction hors du plan, ce qui induit une diminution de sa rigidité de courbure κ [Radzihovsky 2003].

L'introduction de contraintes locales aléatoires brise *localement* la symétrie \mathbb{Z}_2 dessus-dessous de la membrane (ou la symétrie $\text{SO}(d-D)$ en dimensions quelconques). Cette brisure de symétrie est spontanée et dépend de chaque réalisation particulière du désordre [Radzihovsky 2003].

- **Courbure spontanée aléatoire** $\delta \vec{C}(x)$: l'inclusion d'objets asymétriques peut conduire localement à l'apparition d'une courbure spontanée aléatoire (voir Figure 6.2). Contrairement au cas précédent, la brisure de la symétrie \mathbb{Z}_2 est explicite, et non spontanée [Radzihovsky 2003].

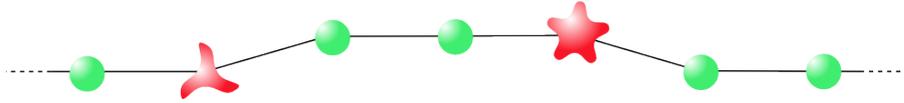


FIGURE 6.2 – L'introduction d'impuretés asymétriques modifie localement la courbure de la surface (vue de côté ici).

Au niveau de l'action, $\delta \vec{C}$ se couple linéairement à la courbure de la surface $\partial^2 \vec{r}$. Le terme cinétique est modifié en :

$$\int_x \frac{\kappa}{2} \left(\partial^2 \vec{r} - \frac{\delta \vec{C}}{\kappa} \right)^2, \quad (6.2)$$

et le minimum de l'action champ moyen correspond à une configuration qui n'est plus plate, avec une courbure donnée par :

$$\partial^2 \vec{r}(x) = \frac{\delta \vec{C}(x)}{\kappa}. \quad (6.3)$$

Ceci justifie la dénomination « courbure spontanée ».

Tous les types de défauts ne sont pas pris en compte dans cette modélisation. En particulier, nous n'étudierons pas en détail le rôle des défauts topologiques du réseau cristallin (disinclinations et dislocations, voir Figure 6.3), dont la prolifération peut mener à la fusion du cristal bidimensionnel. Ceux-ci ont été étudiés dans [Nelson 1991] dans un cadre où les temps d'évolution des disinclinations et dislocations sont petits devant ceux des autres types de désordre, et dans la configuration inverse dans [Radzihovsky 1991]. La fusion bidimensionnelle laisse encore aujourd'hui de nombreuses questions ouvertes, comme l'identification entre la phase fluide obtenue par fusion des membranes cristallines et celle décrite par le modèle des membranes fluides

(voir Chapitre 2), la stabilité de la phase plate après fusion du cristal, ou encore l'existence d'une phase hexatique intermédiaire¹ [Nelson 1987]. Ces questions sont d'autant plus subtiles que, comme nous l'avons vu au Chapitre 2, les membranes cristallines ne sont pas à proprement parler des cristaux à température ambiante. Nous les laissons donc de côté pour nous concentrer sur l'influence des défauts mentionnés précédemment sur la stabilité de la phase plate.

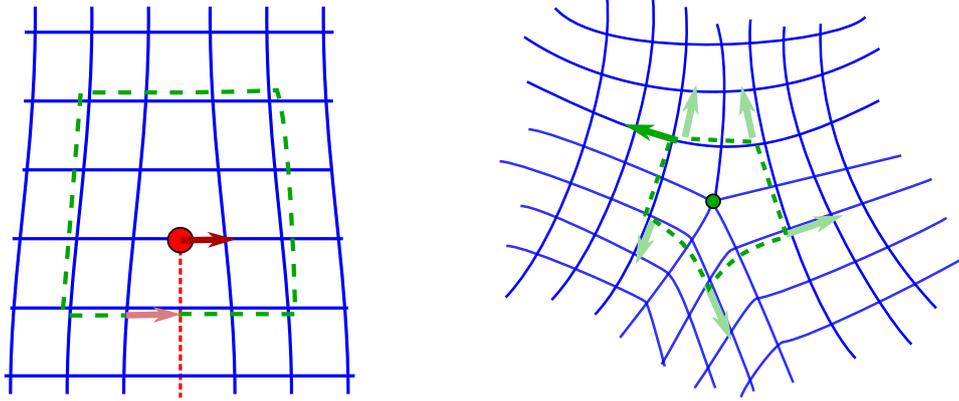


FIGURE 6.3 – Figure issue de [Beekman 2017]. À gauche : Une dislocation est une insertion d'une demi-ligne (en pointillés rouges). Le disque rouge indique le cœur du défaut. Sa charge topologique correspond au vecteur de Burgers, en rouge, qui peut également être obtenu à partir du contour dessiné avec les tirets verts. À droite : une disinclinaison est obtenue par une augmentation de la coordinence de l'atome de cœur (en vert sur le dessin). Sa charge topologique, appelée « charge de Franck », est obtenue par transport parallèle d'un vecteur le long du contour en tirets verts. Elle vaut 90° ici.

Au vu des résultats expérimentaux mentionnés dans l'introduction, il est attendu que les types d'impuretés mentionnés ci-dessus jouent un rôle important, au moins pour certaines gammes de paramètres particulières.

6.1.2 Modèle

L'action des membranes cristallines, en présence d'une contrainte locale $\delta\sigma^{ij}(x)$, et d'une courbure spontanée locale $\delta\vec{C}(x)$ aléatoires, s'écrit [Morse 1992] :

$$S[\vec{r}, \delta\vec{C}, \delta\sigma] = \int_x \left[\frac{\kappa}{2} \left(\partial^2 \vec{r} - \frac{\delta\vec{C}}{\kappa} \right)^2 + \frac{c^{abmn}}{8} \varepsilon_{ab} \varepsilon_{mn} - \delta\sigma^{ab} \varepsilon_{ab} \right]. \quad (6.4)$$

Les fonctions aléatoires $\delta\sigma^{ij}(x)$ et $\delta\vec{C}(x)$ sont caractérisées par leur distribution de probabilité. Dans un souci de simplicité, nous choisissons de leur attribuer des distributions gaussiennes de moyenne nulle, et de variances données par [Morse 1992] :

$$\begin{aligned} \overline{[\delta C_i(x) \delta C_j(y)]} &= \Delta_\kappa \delta_{ij} \delta^{(D)}(x - y) \\ \overline{[\delta\sigma^{ij}(x) \delta\sigma^{ab}(y)]} &= \Delta_\sigma^{ijab} \delta^{(D)}(x - y) = \left(\Delta_\lambda \delta^{ij} \delta^{ab} + \Delta_\mu (\delta^{ai} \delta^{bj} + \delta^{aj} \delta^{bi}) \right) \delta^{(D)}(x - y), \end{aligned} \quad (6.5)$$

1. Il n'y a pas de raison *a priori* que les deux types de défauts topologiques prolifèrent de la même façon. Ainsi, il est théoriquement possible que le système se trouve dans une phase dans laquelle les dislocations prolifèrent, mais pas les disinclinaisons. Une telle phase est appelée phase hexatique.

où nous rappelons que « $\overline{[\cdot]}$ » désigne la moyenne sur l'ensemble des réalisations du désordre, et Δ_λ et Δ_μ sont définis par analogie avec la décomposition du tenseur d'élasticité c^{abij} sur les deux constantes de Lamé.

La promotion de Δ_λ , Δ_μ et Δ_κ à des fonctions de x permet d'étudier l'influence de paramètres désordonnés ayant une action à longue portée. De tels modèles présentent un diagramme des phases très riche suivant le type de corrélations induites par le désordre [Nelson 1992, LeDoussal 2017]. Nous laissons dans la suite ce cas de côté pour nous concentrer sur l'étude du désordre agissant à courte portée.

Les variances sont des quantités positives. Par conséquent,

$$\Delta_\kappa \geq 0 . \quad (6.6)$$

Pour obtenir les relations équivalentes pour Δ_λ et Δ_μ , il nous faut transformer l'équation sur la variance de $\delta\sigma$ en une équation scalaire. Il est alors intéressant de décomposer $\delta\sigma$ en une partie transverse (sans trace) et une partie longitudinale selon :

$$\begin{cases} \delta\sigma_{ab}(x) = \delta\sigma^L(x)\delta_{ab} + \delta\sigma_{ab}^T(x) \\ \delta\sigma_a^T{}^a(x) = 0 . \end{cases} \quad (6.7)$$

Nous pouvons alors effectuer différents types de contractions sur la variance de $\delta\sigma^{ij}$ (6.5) et faire intervenir la décomposition (6.7) :

$$\begin{aligned} \delta^{ab}\delta^{mn} \overline{[\delta\sigma_{ab}(x)\delta\sigma_{mn}(y)]} &= D^2 \overline{[\delta\sigma^L(x)\delta\sigma^L(y)]} \\ \Rightarrow \overline{[\delta\sigma^L(x)\delta\sigma^L(y)]} &= \left(\Delta_\lambda + \frac{2}{D}\Delta_\mu \right) \delta^{(D)}(x-y) . \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \delta^{an}\delta^{mb} \overline{[\delta\sigma_{ab}(x)\delta\sigma_{mn}(y)]} &= D \overline{[\delta\sigma^L(x)\delta\sigma^L(y)]} + \overline{[\delta\sigma_{ab}^T(x)\delta\sigma^{T ab}(y)]} \\ \Rightarrow \overline{[\sigma_{ab}^T(x)\sigma^{T ab}(y)]} &= (D-1)(D+2)\Delta_\mu \delta^{(D)}(x-y) . \end{aligned} \quad (6.9)$$

Cela impose finalement les contraintes de positivité suivantes [Morse 1992] :

$$\begin{cases} \Delta_\lambda + \frac{2}{D}\Delta_\mu \geq 0 \\ \Delta_\mu \geq 0 . \end{cases} \quad (6.10)$$

La fonctionnelle génératrice en présence de la source externe \vec{J} est donnée par :

$$\mathcal{Z}[\delta\vec{C}, \delta\sigma^{ij}; \vec{J}] = \int \mathcal{D}[\vec{R}] e^{-S[\vec{R}, \delta\vec{C}, \delta\sigma] - \vec{J} \cdot \vec{R}} , \quad (6.11)$$

ce qui permet de définir l'énergie libre en présence de désordre :

$$W[\delta\vec{C}, \delta\sigma^{ij}; \vec{J}] = -\log \left(\mathcal{Z}[\delta\vec{C}, \delta\sigma^{ij}; \vec{J}] \right) . \quad (6.12)$$

Il n'est cependant pas possible d'effectuer des calculs en gardant explicite la configuration microscopique du désordre ; il est nécessaire de prendre la moyenne par rapport aux configurations possibles de $\delta\vec{C}$ et $\delta\sigma^{ij}$. La façon de définir l'énergie libre moyenne dépend alors de la comparaison entre le temps caractéristique associé à la dynamique des impuretés τ_{dis} et celui associé aux fluctuations thermiques du système pur τ_{th} :

- **Désordre recuit** $\tau_{dis} \ll \tau_{th}$: Dans ce cas, le désordre s'équilibre avec le système à toute température. L'énergie libre est définie par :

$$W[J] = -\log \left(\int \mathcal{D}[\delta\vec{C}] \mathcal{D}[\delta\sigma^{ij}] \mathcal{P}[\delta\vec{C}] \mathcal{P}[\delta\sigma^{ij}] \mathcal{Z}[\delta\vec{C}, \delta\sigma^{ij}; J] \right), \quad (6.13)$$

où $\mathcal{P}[\delta\vec{C}]$ et $\mathcal{P}[\delta\sigma^{ij}]$ sont les lois de probabilités associées aux variables aléatoires décrivant le désordre.

Nous avons choisi des lois de probabilité gaussiennes pour ces variables aléatoires :

$$\mathcal{P}[\delta\vec{C}] = \mathcal{Z}_C^{-1} e^{-\int \frac{\delta C^2}{2\Delta_\kappa}} \quad , \quad \mathcal{P}[\delta\sigma^{ij}] = \mathcal{Z}_\sigma^{-1} e^{-\int \delta\sigma^{ij} \frac{(\Delta_\sigma^{-1})_{ijab}}{8} \delta\sigma^{ab}} \quad , \quad (6.14)$$

où \mathcal{Z}_C et \mathcal{Z}_σ sont les facteurs de normalisation appropriés. L'intégration sur le champ de courbure spontanée aléatoire s'écrit donc (en restaurant les facteurs $k_B T$) :

$$\int \mathcal{D}[\delta\vec{C}] \mathcal{Z}_C^{-1} e^{-\int \frac{\delta C^2}{2\Delta_\kappa}} e^{-\frac{1}{k_B T} \int \delta\vec{C} \cdot \partial^2 \vec{R}} = e^{+\frac{1}{(k_B T)^2} \frac{\Delta_\kappa}{2} \int (\partial^2 \vec{R})^2} \quad . \quad (6.15)$$

De même, l'intégration sur le champ de contraintes locales donne une contribution égale à :

$$\int \mathcal{D}[\delta\sigma] \mathcal{Z}_\sigma^{-1} e^{-\int \delta\sigma^{ij} \frac{(\Delta_\sigma^{-1})_{ijab}}{8} \delta\sigma^{ab}} e^{-\frac{1}{k_B T} \int \delta\sigma^{ab} \varepsilon_{ab}} = e^{+\frac{1}{(k_B T)^2} \int \frac{\Delta_\sigma^{ijab}}{8} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ab}} \quad . \quad (6.16)$$

Le facteur $1/(k_B T)$ est réabsorbé dans le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \frac{1}{\sqrt{k_B T}} \vec{r} \\ \kappa' &= \kappa & \Delta'_\kappa &= \frac{1}{k_B T} \Delta_\kappa \\ \mu' &= k_B T \mu & \Delta'_\mu &= \Delta_\mu \\ \lambda' &= k_B T \lambda & \Delta'_\lambda &= \Delta_\lambda \quad , \end{aligned} \quad (6.17)$$

de telle sorte que la fonctionnelle génératrice :

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}[\vec{R}] e^{-S[\vec{R}] - \vec{J} \cdot \vec{R}} \quad , \quad (6.18)$$

s'exprime en fonction de l'action suivante :

$$S[\vec{R}] = \int_x \left[\frac{\kappa - \Delta_\kappa}{2} (\partial^2 \vec{R})^2 + \frac{c^{abij} - \Delta_\sigma^{abij}}{8} \varepsilon_{ab} \varepsilon_{ij} \right] \quad , \quad (6.19)$$

qui ne dépend plus des champs désordonnés que par l'intermédiaire de leurs variances Δ_κ , Δ_μ et Δ_λ .

Dans le cas du désordre recuit, le système se comporte donc comme un système non désordonné avec une énergie de courbure $\kappa - \Delta_\kappa$, un module de cisaillement $\mu - \Delta_\mu$ et une constante de Lamé $\lambda - \Delta_\lambda$. L'effet du désordre est donc seulement de réduire la résistance du système aux différents efforts de compression, dilatation, cisaillement et courbure. Il n'y a donc pas de comportement nouveau émergeant à cause de la présence de désordre. Ce cas ne nous intéressera donc pas dans la suite.

- **Désordre gelé** $\tau_{dis} \gg \tau_{th}$: Dans ce cas la configuration du désordre apparaît statique à l'échelle à laquelle évolue \vec{R} . L'énergie libre est alors définie par :

$$W[J] = - \int \mathcal{D}[\delta\vec{C}] \mathcal{D}[\delta\sigma^{ij}] \mathcal{P}[\delta\vec{C}] \mathcal{P}[\delta\sigma^{ij}] \log \left(\mathcal{Z}[\delta\vec{C}, \delta\sigma^{ij}; J] \right). \quad (6.20)$$

Afin de pouvoir estimer la valeur moyenne du logarithme, nous avons recours à la méthode des répliques (voir Chapitre 1) qui transforme celle-ci en la limite du logarithme d'une valeur moyenne, d'allure similaire à celle traitée dans le cas du désordre recuit :

$$\overline{\log(\mathcal{Z})} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left(\overline{\mathcal{Z}^n} - 1 \right). \quad (6.21)$$

En espérant de plus que cette limite est donnée par le prolongement analytique à $n \in \mathbb{R}$ de l'ensemble des puissances *entières* de la fonction de partition \mathcal{Z} , il suffit alors d'étudier un objet comprenant n répliques du système correspondant à n réalisations différentes du désordre. Pour bien les différencier des autres, les indices de répliques sont notés à l'aide de lettre latines majuscules. L'action (6.4) devient alors :

$$S_n[\vec{R}, \delta\vec{C}, \delta\sigma] = \sum_{A=1}^n \int_x \left[\frac{\kappa}{2} \left(\partial^2 \vec{R}^A - \frac{\delta\vec{C}^A}{\kappa} \right)^2 + \frac{c^{abmn}}{8} \varepsilon_{ab}^A \varepsilon_{mn}^A - \delta\sigma_A^{ab} \varepsilon_{ab}^A \right]. \quad (6.22)$$

Grâce à (6.21), la prise de valeur moyenne sur S_n s'effectue de façon très similaire au cas du désordre recuit. L'action finale une fois l'intégration sur le désordre effectuée met en jeu n répliques différentes qui interagissent deux à deux :

$$S_n[\vec{R}] = \int_x \sum_{A=1}^n \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 \vec{R}^A)^2 + \frac{c^{abij}}{8} \varepsilon_{ab}^A \varepsilon_{ij}^A \right] - \int_x \sum_{A,B=1}^n \left[\frac{\Delta\kappa}{2} (\partial^2 \vec{R}^A \cdot \partial^2 \vec{R}^B) + \frac{\Delta\sigma}{8} \varepsilon_{ab}^A \varepsilon_{ij}^B \right], \quad (6.23)$$

en fonction de laquelle l'énergie libre s'écrit :

$$W[\{J_B\}_{B \in [1;n]}] = - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \left(\int \mathcal{D}[\{\vec{R}^B\}_{B \in [1;n]}] e^{-S_n[\vec{R}] - \sum \bar{J}_A \cdot \vec{R}^A} \right). \quad (6.24)$$

Afin de compactifier les notations, il est utile d'étendre l'énergie de courbure et les coefficients élastiques à des tenseurs dans l'espace des répliques de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \kappa^{AB} &= \kappa \delta^{AB} - \Delta_\kappa J^{AB} \\ c_{AB}^{abij} &= c^{abij} \delta_{AB} - \Delta_\sigma^{abij} J^{AB} \\ \mu^{AB} &= \mu \delta^{AB} - \Delta_\mu J^{AB} \\ \lambda^{AB} &= \lambda \delta^{AB} - \Delta_\lambda J^{AB}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

où J^{AB} est la matrice dont tous les coefficients valent 1, de telle sorte que l'action S_n s'écrit :

$$S_n[\vec{R}] = \int_x \left[\frac{\kappa^{AB}}{2} (\partial^2 \vec{R}^A \cdot \partial^2 \vec{R}^B) + \frac{c_{AB}^{abij}}{8} \varepsilon_{ab}^A \varepsilon_{ij}^B \right]. \quad (6.26)$$

Un autre avantage de cette décomposition est que l'espace vectoriel engendré par δ_{AB} et J_{AB} est stable par multiplication, ce qui permet d'inverser facilement les tenseurs dans l'espace des répliques (voir Annexe E). L'inverse de la matrice générique :

$$M_{AB} = M^{(1)}\delta_{AB} + M^{(2)}J_{AB} , \quad (6.27)$$

s'écrit dans la limite $n \rightarrow 0$:

$$M_{AB}^{-1} = \frac{1}{M^{(1)}}\delta_{AB} - \frac{M^{(2)}}{(M^{(1)})^2}J_{AB} . \quad (6.28)$$

Par exemple, l'inverse de l'énergie de courbure, qui intervient dans le propagateur des flexurons, est simplement :

$$\frac{1}{\kappa^{AB}} = \frac{1}{\kappa}\delta_{AB} + \frac{\Delta_\kappa}{\kappa^2}J_{AB} . \quad (6.29)$$

Le passage à l'action de phase plate se fait en décomposant le vecteur \vec{R} en partie moyenne, phonons et flexurons² :

$$\vec{R}^A = \overline{\langle \vec{R}^A \rangle} + \vec{u}^A + \vec{h}^A = \zeta x^i \vec{e}_i + \vec{u}^A + \vec{h}^A . \quad (6.30)$$

En présence de désordre, l'état fondamental n'est pas plat, le paramètre d'extension ζ est défini à partir de la moyenne de $\langle \vec{R} \rangle$ par rapport à l'ensemble des réalisations du désordre. La construction de l'action se fait de la même façon que dans le cas sans désordre (voir Chapitre 3),

$$S_n[\vec{u}, \vec{h}] = \int_x \left[\frac{\kappa_{AB}}{2} (\partial^2 \vec{h}^A \cdot \partial^2 \vec{h}^B) + \frac{c_{AB}^{abij}}{8} \varepsilon_{ab}^A \varepsilon_{ij}^B \right] , \quad (6.31)$$

où le tenseur de déformation est tronqué au plus bas ordre en fluctuations, de la même façon qu'en (2.58) :

$$\varepsilon_{ij}^A = \partial_i u_j^A + \partial_j u_i^A + \partial_i \vec{h}^A \cdot \partial_j \vec{h}^A . \quad (6.32)$$

Comme à cause du désordre gelé, les valeurs moyennes du type $\langle h^A \rangle$ ne sont pas nulles, les propagateurs sont décomposés d'une façon plus adaptée à la présence du désordre. Par exemple, le propagateur des flexurons se décompose selon :

$$G_h^{AB}(q) = \overline{[\langle h^A(q) h^B(-q) \rangle]} = \overline{[(h^A(q) - \langle h^A(q) \rangle)(h^B(q) - \langle h^B(q) \rangle)]} + \overline{[\langle h^A(q) \rangle \langle h^B(q) \rangle]} . \quad (6.33)$$

Le premier terme quantifie l'effet des fluctuations thermiques autour de l'état fondamental non trivial, alors que le second terme quantifie les fluctuations de la valeur moyenne non-triviale $\langle h \rangle$ d'une réalisation du désordre à l'autre. Leur importance relative permet de savoir si le comportement du système est dominé par les effets des fluctuations thermiques ou par les modifications induites par la présence du désordre. Il est donc utile de définir

2. Il est rappelé que les indices latins parcourent $\llbracket 1; D \rrbracket$.

des notations associées à chacun de ces termes, dont les expressions sont données par :

$$\begin{aligned}
G_h^{AB}(q) &= G_h^X(q) \delta^{AB} + G_h^C(q) J^{AB} \\
G_h^X(q) &= \overline{[(h^A(q) - \langle h^A(q) \rangle)(h^B(q) - \langle h^B(q) \rangle)]} = \frac{k_B T}{\kappa q^4} \\
G_h^C(q) &= \overline{[\langle h^A(q) \rangle \langle h^B(q) \rangle]} = \frac{\Delta \kappa}{\kappa^2 q^4} .
\end{aligned} \tag{6.34}$$

L'absence de $k_B T$ de la fonction de corrélation désordonnée $G_h^C(q)$ est liée à la dissymétrie entre variables désordonnées et variables élastiques standard dans le changement de variable (6.17). Ainsi à basse température, $G_h^X \ll G_h^C$ et le comportement de la fonction de corrélation est gouvernée par sa partie désordonnée, alors que lorsque la variance des variables aléatoires est petite, $G_h^X \gg G_h^C$, et le comportement de la fonction de corrélation est contrôlé par les fluctuations thermiques.

Le comportement de ces fonctions dans l'infrarouge permet de définir deux dimensions anormales :

$$G_h^X(q) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{q^{4-\eta}} \quad , \quad G_h^C(q) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{q^{4-\eta'}} . \tag{6.35}$$

η est l'exposant associé aux fluctuations thermiques, il est complètement analogue à la dimension anormale étudiée dans les chapitres précédents ; η' est l'exposant anormal associé au désordre.

La comparaison entre les deux exposants anormaux η et η' au point fixe attractif dans l'infrarouge permet de déterminer qui du désordre ou des fluctuations thermiques dominant :

- $\eta < \eta'$: $G_h^X(q) \gg G_h^C(q)$. Les fluctuations thermiques dominant au point fixe.
- $\eta > \eta'$: $G_h^X(q) \ll G_h^C(q)$. L'effet des impuretés domine au point fixe.
- $\eta = \eta'$: le point fixe est dit « marginal ». Au voisinage d'un tel point fixe, si T est petite mais non nulle, les fluctuations thermiques jouent tout de même un rôle non négligeable.

Il est alors utile de définir l'exposant

$$\phi = \eta - \eta' \tag{6.36}$$

qui permet de déterminer si le rôle de T au voisinage du point fixe infrarouge est essentiel ou inessentiel.

Les fonctions de corrélation de phonons sont décomposées de la même façon. Elles sont définies par les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
G_u^{ij,AB}(q) &= G_u^{X,ij}(q) \delta^{AB} + G_u^{C,ij}(q) J^{AB} \\
G_u^{X,ij}(q) &= \overline{[(\vec{u}^A(q) - \langle \vec{u}^A(q) \rangle) \cdot (\vec{u}^B(q) - \langle \vec{u}^B(q) \rangle)]} = \frac{k_B T}{\mu q^2} P_T^{ij}(q) + \frac{k_B T}{(\lambda + 2\mu) q^2} P_L^{ij}(q) \\
G_u^{C,ij}(q) &= \overline{[\langle \vec{u}^A(q) \rangle \cdot \langle \vec{u}^B(q) \rangle]} = \frac{\Delta \mu}{\mu^2 q^2} P_T^{ij}(q) + \frac{\Delta \lambda + 2\Delta \mu}{(\lambda + 2\mu)^2 q^2} P_L^{ij}(q) ,
\end{aligned} \tag{6.37}$$

dont le comportement infrarouge est donné par :

$$G_u^{X,ij}(q) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{q^{2+\eta}} \quad , \quad G_u^{C,ij}(q) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{q^{2+\eta'}} \quad . \quad (6.38)$$

Grâce à l'identité de Ward associée à l'invariance par rotation, celles-ci ne définissent pas d'exposant caractéristique supplémentaire.

6.1.3 Résumé des résultats des approches précédentes

6.1.3.1 Membranes sans courbure spontanée aléatoire

Le modèle établi ci-dessus a été d'abord étudié dans un développement en couplage faible pour des membranes sans courbure spontanée aléatoire, c'est-à-dire avec $\Delta_\kappa = 0$ [Nelson 1991, Radzihovsky 1991]. Comme la dimension critique supérieure en présence de désordre n'est pas modifiée, le développement autour de D_c^s correspond toujours à une dimension $D = 4 - \varepsilon$. Les propagateurs (6.34) et (6.37) ont maintenant une structure non triviale dans l'espace des répliques. Les couplages eux aussi sont changés par (6.17). Par conséquent, l'énergie propre des flexurons porte également deux indices de réplique³.

Les auteurs de [Nelson 1991] travaillent dans la théorie effective dans laquelle une intégration sur les phonons a été effectuée, ce qui est encore possible car l'action perturbative dans la phase plate avec désordre (6.31) est encore quadratique en \vec{u} . Il est alors utile de définir Δ_b , la variance associée au coefficient élastique b , qui est positive en vertu de (6.10). Comme l'introduction des paramètres désordonnés ne change pas la structure en impulsion de la théorie (les constantes de couplage (6.17) sont encore des constantes, malgré l'ajout de la structure dans l'espace des répliques), les propriétés de convergence infrarouge et, de manière générale, les intégrales impulsionnelles ne sont pas changées par l'ajout du désordre. Les contractions dans l'espace des répliques peuvent être traitées dans un second temps. L'introduction de contraintes locales aléatoires modifie alors l'énergie propre des flexurons en⁴ [Nelson 1991] :

$$\Sigma_h^{AB}(p) = \frac{5p^4}{96\pi^2\varepsilon} (b^{AB} + 2\mu^{AB}) \frac{1}{\kappa} \delta^{AB} + O(\varepsilon^0) = \frac{5p^4}{96\pi^2\varepsilon\kappa} ((b + 2\mu) - (\Delta_b + 2\Delta_\mu)) \delta^{AB} + O(\varepsilon^0) \quad . \quad (6.39)$$

En étendant κ à un objet dépendant de l'impulsion $\kappa(p)$, la correction à l'énergie de courbure au premier ordre en couplages s'écrit :

$$\kappa(p) = \kappa + p^{-4} \langle \Sigma_h^{AB}(p) | \delta^{AB} \rangle = \kappa + \frac{5p^4}{96\pi^2\varepsilon\kappa} ((b + 2\mu) - (\Delta_b + 2\Delta_\mu)) \quad . \quad (6.40)$$

L'introduction de contraintes locales aléatoires réduit donc la résistance des matériaux à la courbure. De plus, cet effet est antagoniste à celui des fluctuations thermiques anharmoniques, qui, au contraire, tendent à rigidifier le matériau.

Les auteurs de [Nelson 1991, Radzihovsky 1991] tirent les conclusions suivantes de leur étude :

3. De même que le propagateur correspondant.

4. Il faut prendre garde que les tenseurs δ^{AB} et J^{AB} sont multipliés et non contractés dans la formule suivante. C'est une conséquence de la forme de l'action (6.31) qui ne couple toujours que deux répliques différentes, même avec ses vertex à trois et quatre points.

- l'introduction de désordre dans la métrique de la membrane⁵ a un effet inessential du point de vue perturbatif dans la phase plate pour toute température non nulle. Cela signifie que l'effet de l'introduction du désordre est de moins en moins visible aux très grandes distances et qu'il n'existe pas de nouveau point fixe dans le diagramme de flot de renormalisation dans le cadre du développement en couplage faible, après l'ajout des couplages associés au désordre.
- si à l'échelle microscopique, $\Delta_\mu \gg \mu$ (ou $\Delta_b \gg b$), le flot de renormalisation est entraîné vers des régions de forts couplages où le développement perturbatif n'est plus valable. Dans ce régime, il est postulé d'après ce qui précède que puisque Δ_μ est très fort, l'énergie de courbure est fortement diminuée. Les différentes configurations qui minimisent l'énergie élastique dans le plan de la membrane mais avec des courbures locales différentes ont donc des énergies très proches, et l'état fondamental du système devient quasi dégénéré [Radzihovsky 1991]. La situation présente donc de fortes analogies avec les verres de spin, où l'analogue des spins est donné ici par les vecteurs normaux à la surface aux différentes positions, ce qui a conduit les auteurs à postuler l'existence d'une phase vitreuse, fortement plissée aux courtes échelles de longueur, mais plate aux grandes échelles (c'est-à-dire avec $\zeta \neq 0$), décrite par un point fixe non-perturbatif en couplage dans le diagramme de flot de renormalisation.
- l'application du critère de Harris à la transition de phase plate-froissée indique l'existence d'un régime de fluctuations contrôlé par le désordre à la transition de phase également [Radzihovsky 1991]. Les auteurs postulent donc l'existence d'une phase vitreuse froissée, caractérisée par :

$$\left[\langle \partial_i \vec{r} \rangle \right] \propto \zeta = 0 \quad , \quad \left[\langle \partial_i \vec{r}^A \rangle \cdot \langle \partial_j \vec{r}^B \rangle \right] \neq 0 \quad , \quad (6.41)$$

qui est qualitativement très différente de la phase vitreuse plissée mentionnée précédemment puisque la phase vitreuse froissée ne présente pas d'ordre orientationnel à grande distance en moyenne ($\zeta = 0$).

Il est donc nécessaire d'avoir accès à un formalisme non-perturbatif en couplages pour étudier les transitions vers les hypothétiques phases contrôlées par le désordre à $\Delta_\kappa = 0$.

6.1.3.2 Membranes avec courbure spontanée aléatoire

Les développements en couplage faible $\varepsilon \ll 1$ et $d_c \gg 1$ avec à la fois des contraintes locales aléatoires et de la courbure spontanée aléatoire ont été étudiés dans [Morse 1992]. L'action du système désordonné (6.31) conduit à une modification des règles de Feynman pour prendre en compte la structure dans l'espace des répliques :

- Propagateur des *flexurons* :

$$G_h^{AB}(p) = \langle h^A(p) h^B(-p) \rangle = \frac{1}{\kappa p^4} \delta^{AB} + \frac{\Delta_\kappa}{\kappa^2 p^4} J^{AB} = \begin{array}{c} A \quad p \quad B \\ \longrightarrow \end{array} . \quad (6.42)$$

5. C'est-à-dire uniquement des contraintes locales aléatoires.

- Propagateur des *phonons* :

$$\begin{aligned}
G_{u,AB}^{ij}(q) &= \langle u_A^i(q) u_B^j(-q) \rangle \\
&= \left(\frac{1}{\mu q^2} P_T^{ij}(q) + \frac{1}{(\lambda + 2\mu) q^2} P_L^{ij}(q) \right) \delta_{AB} + \left(\frac{\Delta_\mu}{\mu^2 q^2} P_T^{ij}(q) + \frac{\Delta_\lambda + 2\Delta_\mu}{(\lambda + 2\mu)^2 q^2} P_L^{ij}(q) \right) J_{AB} \\
&= \begin{array}{c} i \quad q \quad j \\ \text{~~~~~} \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \end{array} .
\end{aligned} \tag{6.43}$$

- Vertex à trois points :

$$\begin{aligned}
V_{AB}^j(q, q_1) &= -\frac{i}{2} \left[(\lambda \delta_{AB} - \Delta_\lambda J_{AB}) (q_1 \cdot q_2) q^j + (\mu \delta_{AB} - \Delta_\mu J_{AB}) ((q \cdot q_1) q_2^j + (q \cdot q_2) q_1^j) \right] \\
&= \begin{array}{c} \quad \quad \quad q_1 \quad B \\ \quad \quad \quad \nearrow \\ j \quad q \quad \bullet \\ \quad \quad \quad \searrow \\ A \quad \quad \quad q_2 \quad B \end{array} .
\end{aligned} \tag{6.44}$$

V_{AB}^j ne couple que deux répliques différentes.

- Vertex à quatre points :

$$\begin{aligned}
W_{AB}(q_1, q_2, q_3) &= -\frac{1}{8} \left\{ (\lambda \delta_{AB} - \Delta_\lambda J_{AB}) (q_1 \cdot q_2) (q_3 \cdot q_4) \right. \\
&\quad \left. + (\mu \delta_{AB} - \Delta_\mu J_{AB}) ((q_1 \cdot q_3) (q_2 \cdot q_4) + (q_1 \cdot q_4) (q_2 \cdot q_3)) \right\} \\
&= \begin{array}{c} A \quad q_1 \quad q_3 \quad B \\ \quad \quad \quad \searrow \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \quad \nearrow \quad \searrow \\ A \quad q_2 \quad q_4 \quad B \end{array} .
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Ce vertex aussi ne couple que deux répliques différentes. Toutes les contractions du type $J_{AC} J^{CB}$ par exemple, qui produisent des facteurs n , deviennent nulles lors de la prise de limite $n \rightarrow 0$ (6.24).

Afin de pouvoir appliquer la méthode des contretermes à l'action (6.31), il faut également exprimer celle-ci en fonction des variables renormalisées, ce qui nécessite l'introduction de coefficients de renormalisation Z , Z_μ , Z_λ , Z_{Δ_κ} , Z_{Δ_λ} , Z_{Δ_κ} ainsi qu'une échelle d'énergie k pour les

quantités dimensionnées :

$$\begin{aligned}
S_n[u, h; k] &= \int_x \left[\frac{Z \kappa \delta^{AB} - Z_{\Delta_\kappa} \Delta_\kappa J^{AB}}{2} (\partial^2 h_A) (\partial^2 h_B) \right. \\
&+ \frac{(Z_\mu \mu \delta^{AB} - Z_{\Delta_\mu} \Delta_\mu J^{AB}) k^\varepsilon}{4} (\partial_i u_{j,A} + \partial_j u_{i,A} + \partial_i h_A \cdot \partial_j h_A) (\partial_i u_{j,B} + \partial_j u_{i,B} + \partial_i h_B \cdot \partial_j h_B) \\
&+ \left. \frac{(Z_\lambda \lambda \delta^{AB} - Z_{\Delta_\lambda} \Delta_\lambda J^{AB}) k^\varepsilon}{8} (2\partial_i u_A^i + \partial_i h_A \cdot \partial^i h_A) (2\partial_i u_B^i + \partial_i h_B \cdot \partial^i h_B) \right] \\
&= \int_x \left[\frac{(\kappa \delta^{AB} - \Delta_{\kappa, \mathfrak{B}} J^{AB})}{2} (\partial^2 h_{\mathfrak{B},A}) (\partial^2 h_{\mathfrak{B},B}) \right. \\
&+ \frac{(\mu_{\mathfrak{B}} \delta_{AB} - \Delta_{\mu, \mathfrak{B}} J_{AB})}{4} (\partial_i u_{\mathfrak{B},j}^A + \partial_j u_{\mathfrak{B},i}^A + \partial_i h_{\mathfrak{B}}^A \cdot \partial_j h_{\mathfrak{B}}^A) (\partial_i u_{\mathfrak{B},j}^B + \partial_j u_{\mathfrak{B},i}^B + \partial_i h_{\mathfrak{B}}^B \cdot \partial_j h_{\mathfrak{B}}^B) \\
&+ \left. \frac{(\lambda_{\mathfrak{B}} \delta^{AB} - \Delta_{\lambda, \mathfrak{B}} J^{AB})}{8} (2\partial_i u_{\mathfrak{B},A}^i + \partial_i h_{\mathfrak{B},A} \cdot \partial^i h_{\mathfrak{B},A}) (2\partial_i u_{\mathfrak{B},B}^i + \partial_i h_{\mathfrak{B},B} \cdot \partial^i h_{\mathfrak{B},B}) \right], \tag{6.46}
\end{aligned}$$

où les couplages nus portent un indice \mathfrak{B} pour ne pas introduire de confusion avec les indices de répliques. Les relations entre couplages nus et renormalisés s'écrivent alors de façon similaire à (3.29) [Morse 1992] :

$$\begin{aligned}
h_{\mathfrak{B}} &= Z^{1/2} \kappa^{-1/2} h & u_{\mathfrak{B}}^i &= Z \kappa^{-1} u^i \\
\lambda_{\mathfrak{B}} &= k^\varepsilon Z^{-2} \kappa^2 Z_\lambda \lambda & \Delta_{\lambda, \mathfrak{B}} &= k^\varepsilon Z^{-2} \kappa^2 Z_{\Delta_\lambda} \Delta_\lambda \\
\mu_{\mathfrak{B}} &= k^\varepsilon Z^{-2} \kappa^2 Z_\mu \mu & \Delta_{\mu, \mathfrak{B}} &= k^\varepsilon Z^{-2} \kappa^2 Z_{\Delta_\mu} \Delta_\mu \\
\Delta_{\kappa, \mathfrak{B}} &= \kappa^{-1} Z^{-1} Z_{\Delta_\kappa} \Delta_\kappa & &
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Les coefficients de renormalisation en schéma minimal sont identifiés à partir des parties divergentes des énergies propres, de même que dans le cas sans désordre, grâce aux relations (6.37) et (6.34) :

$$\left\{ \begin{aligned}
Z &= 1 + \mathcal{K} \left[p^{-4} \langle \Sigma_h^{AB}(p) | \delta^{AB} \rangle \right] \\
Z_{\Delta_\kappa} &= 1 + \mathcal{K} \left[p^{-4} \langle \Sigma_h^{AB}(p) | J^{AB} \rangle \right] \\
Z_\mu &= 1 + \mathcal{K} \left[p^{-2} \langle \Sigma_{u,AB}^{ij}(p) | P_T^{ij}(p) \delta_{AB} \rangle \right] \\
Z_{\Delta_\mu} &= 1 + \mathcal{K} \left[p^{-2} \langle \Sigma_{u,AB}^{ij}(p) | P_T^{ij}(p) J_{AB} \rangle \right] \\
Z_\lambda &= 1 + \mathcal{K} \left[p^{-2} \left(\langle \Sigma_{u,AB}^{ij}(p) | P_L^{ij}(p) \delta_{AB} \rangle - 2 \langle \Sigma_{u,AB}^{ij}(p) | P_T^{ij}(p) \delta_{AB} \rangle \right) \right] \\
Z_{\Delta_\lambda} &= 1 + \mathcal{K} \left[p^{-2} \left(\langle \Sigma_{u,AB}^{ij}(p) | P_L^{ij}(p) J_{AB} \rangle - 2 \langle \Sigma_{u,AB}^{ij}(p) | P_T^{ij}(p) J_{AB} \rangle \right) \right].
\end{aligned} \right. \tag{6.48}$$

Ceux-ci sont reliés aux fonctions β par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = -\lambda\partial_\lambda Z_1 - \mu\partial_\mu Z_1 - \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_1 - \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_1 \\ \beta_\lambda = \lambda(-\varepsilon + 2\eta + \lambda\partial_\lambda Z_{\lambda,1} + \mu\partial_\mu Z_{\lambda,1} + \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_{\lambda,1} + \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_{\lambda,1}) \\ \beta_\mu = \mu(-\varepsilon + 2\eta + \lambda\partial_\lambda Z_{\mu,1} + \mu\partial_\mu Z_{\mu,1} + \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_{\mu,1} + \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_{\mu,1}) \\ \beta_{\Delta_\lambda} = \Delta_\lambda(-\varepsilon + 2\eta + \lambda\partial_\lambda Z_{\Delta_\lambda,1} + \mu\partial_\mu Z_{\Delta_\lambda,1} + \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_{\Delta_\lambda,1} + \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_{\Delta_\lambda,1}) \\ \beta_{\Delta_\mu} = \Delta_\mu(-\varepsilon + 2\eta + \lambda\partial_\lambda Z_{\Delta_\mu,1} + \mu\partial_\mu Z_{\Delta_\mu,1} + \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_{\Delta_\mu,1} + \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_{\Delta_\mu,1}) \\ \beta_{\Delta_\kappa} = \Delta_\kappa(\eta + \lambda\partial_\lambda Z_{\Delta_\kappa,1} + \mu\partial_\mu Z_{\Delta_\kappa,1} + \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_{\Delta_\kappa,1} + \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_{\Delta_\kappa,1} + \Delta_\kappa\partial_{\Delta_\kappa} Z_{\Delta_\kappa,1}) \end{array} \right. \quad (6.49)$$

Plus de détails sur l'obtention de ces résultats sont donnés dans l'Annexe D.

Les auteurs de [Morse 1992] tirent les conclusions suivantes de leur étude :

- l'hypersurface $3\lambda + \mu = 0$ est attractrice dans l'infrarouge, du moins à l'ordre d'une boucle en ε . Rappelons que cette hypersurface, dont l'expression en D dimensions est $(D+2)\lambda + 2\mu = 0$, ou encore $(D+1)b - 2\mu = 0$ en termes des variables de la théorie effective, correspond au lieu des membranes ayant un coefficient de Poisson $\nu = -1/3$.

De plus, une relation analogue lie les couplages élastiques désordonnés : l'hypersurface $3\Delta_\lambda + \Delta_\mu = 0$ est également attractrice. Ces deux relations permettent de réduire le nombre de variables nécessaire pour décrire le flot de renormalisation du système. Nous nous restreindrons donc aux trois constantes de couplage $(\mu, \Delta_\mu, \Delta_\kappa)$ dans la suite, ce qui permettra notamment de représenter le diagramme de flot.

- d'après (6.34) et (6.37), les parties des fonctions de corrélation des champs de phonons et flexurons dominés par le désordre $G_h^C(q)$ et $G_u^C(q)$ deviennent d'autant plus importantes par rapport à leurs contreparties thermiques que T est faible. Or, d'après (6.17), Δ_κ diverge dans la limite $T \rightarrow 0$ une fois effectué le changement de variable. Il est alors utile de définir les variables suivantes [Morse 1992] :

$$g_\mu = \mu \Delta_\kappa \quad , \quad g_\lambda = \lambda \Delta_\kappa \quad , \quad (6.50)$$

qui permettent d'approcher le régime de basse température de façon régulière.

- le flot de renormalisation est donné à l'ordre le plus bas en $\varepsilon = 4 - D$ par [Morse 1992] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_\mu = -\mu \left(\varepsilon + 2\Delta_\mu - \frac{d_c + 12}{6} g_\mu - \frac{d_c + 24}{12} \mu \right) \\ \beta_{g_\mu} = -g_\mu \left(\varepsilon + 4\Delta_\mu - \frac{d_c + 18}{6} g_\mu - \frac{d_c + 36}{12} \mu \right) \\ \beta_{\Delta_\mu} = -\Delta_\mu \left(\varepsilon + 2\Delta_\mu - \frac{d_c + 6}{3} g_\mu - \frac{d_c + 12}{6} \mu \right) - \frac{d_c}{12} g_\mu^2 \end{array} \right. \quad (6.51)$$

Tout d'abord, notons que l'espace $\Delta_\kappa = 0$ (ou plutôt ici $g_\mu = 0$) est stable par le flot de renormalisation. Cela signifie que l'absence de courbure spontanée aléatoire au niveau

microscopique suffit à garantir son absence au niveau macroscopique donc l'approche détaillée dans le paragraphe précédent a du sens. Au contraire, si $\Delta_\mu = 0$, mais $\Delta_\kappa \neq 0$ au niveau microscopique, à cause de l'existence du terme en rouge dans l'expression de β_{Δ_μ} , des contraintes locales aléatoires seront générées aux échelles de longueur intermédiaires. Une membrane ne peut donc pas présenter uniquement du désordre de courbure Δ_κ dans la théorie renormalisée.

- Les équations de flot (6.51) admettent 3 points fixes⁶ (voir Figure 6.4) [Morse 1992] :

- Point fixe gaussien \mathbf{P}_1 :

Il est encore répulsif dans toutes les directions.

- Point fixe de phase plate \mathbf{P}_4 :

\mathbf{P}_4 est attractif dans toutes les directions même en présence de désordre. Ses coordonnées sont [Morse 1992] :

$$\left\{ \mu^* = \frac{96\pi^2\varepsilon}{24+d_c} ; g_\mu^* = 0 ; \Delta_\mu^* = 0 \right\} . \quad (6.52)$$

Les dimensions anormales η et η' sont [Morse 1992] :

$$\eta'_4 = 2\eta_4 = \frac{24\varepsilon}{24+d_c} . \quad (6.53)$$

Notons que $\eta'_4 > \eta_4$ comme attendu à un point fixe où les fluctuations thermiques dominent.

- Point fixe désordonné \mathbf{P}_5 : Ce nouveau point fixe émerge grâce à la présence du désordre. C'est un point fixe à $\mu = 0$, ou encore, d'après le changement de variable (6.17), un point fixe à $T = 0$. Son bassin d'attraction correspond à l'hypersurface $T = 0$. T est une variable marginalement essentielle au voisinage de \mathbf{P}_5 : à toute température non nulle la trajectoire dans le diagramme de flot est attiré par \mathbf{P}_4 .

Ses coordonnées sont [Morse 1992] :

$$\left\{ \mu^* = 0 ; g_\mu^* = \frac{48\pi^2\varepsilon}{6+d_c} ; \Delta_\mu^* = \frac{24\pi^2\varepsilon}{6+d_c} \right\} . \quad (6.54)$$

Les dimensions anormales à \mathbf{P}_5 sont [Morse 1992] :

$$\eta'_5 = \eta_5 = \frac{3\varepsilon}{6+d_c} . \quad (6.55)$$

Comme $\eta_5 = \eta'_5$, le point fixe est marginal, l'exposant ϕ_5 (6.36) est nul.

Ces résultats ont été complétés par une analyse à une boucle en $1/d_c$ qui permet d'établir également [Morse 1992] :

$$\phi_5 \underset{d_c \gg 1}{=} O\left(\frac{1}{d_c^2}\right) . \quad (6.56)$$

6. Les points fixes \mathbf{P}_2 et \mathbf{P}_3 ne sont pas présents car ils ne sont pas sur l'hypersurface $3\lambda + \mu = 0$ à laquelle nous nous sommes restreints.

Le point fixe \mathbf{P}_5 apparaît donc marginal dans les deux développements perturbatifs à l'ordre le plus bas. Cela ouvre la possibilité d'une convergence lente vers \mathbf{P}_4 , et donc de l'existence d'une gamme de longueur assez étendue pendant laquelle le comportement du système est encore sensible aux propriétés de \mathbf{P}_5 [Morse 1992].

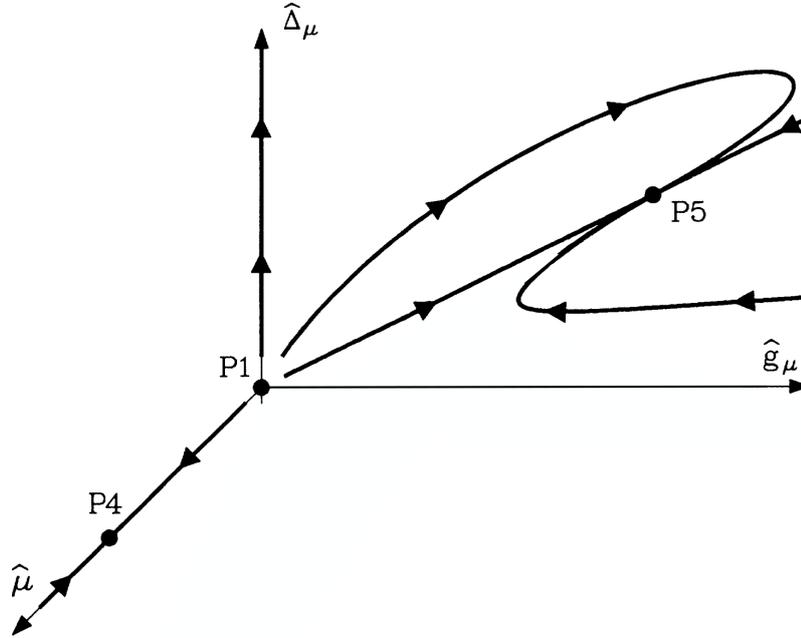


FIGURE 6.4 – Figure extraite de [Morse 1992] représentant le diagramme de flot de renormalisation à une boucle dans l'espace $\text{Vect}(\{\mu, g_\mu, \Delta_\mu\})$. Celui-ci présente trois points fixes : \mathbf{P}_1 complètement répulsif, \mathbf{P}_4 complètement attractif, et \mathbf{P}_5 dont le bassin d'attraction correspond à $T = 0$.

Notons que cette analyse ne prédit pas de point fixe perturbatif gouverné par le désordre sur l'hypersurface $\Delta_\kappa = 0$, en accord avec l'approche détaillée dans le paragraphe précédent.

Finalement, dans le cadre du développement en couplage faible, le désordre est inessentiel à toute température non nulle, et le comportement à longue distance du système est contrôlé par le point fixe de phase plate sans désordre \mathbf{P}_4 .

6.1.3.3 Approximation de l'écrantage auto-cohérent en présence de désordre

Le calcul SCSA présenté dans le Chapitre 3 se généralise simplement en présence de désordre gelé en ajoutant au calcul précédent la structure tensorielle dans l'espace des répliques. Les cinq constantes de couplage et κ sont étendues à des objets dépendant de l'impulsion. L'ansatz donnant le comportement de ces quantités dans l'infrarouge est directement inspiré des définitions de η et η' (6.35) [LeDoussal 2017] :

$$\widehat{\kappa}(p) = Z_\kappa p^{-\eta} \quad , \quad \widehat{\Delta}_\kappa(p) = Z_{\Delta_\kappa} p^{\eta' - 2\eta} \quad , \quad (6.57)$$

où Z_κ et Z_{Δ_κ} sont des constantes incluant le contenu non-universel de ces fonctions.

La polarisation habillée est définie de même qu'en (3.162), mais avec une structure tensorielle supplémentaire dans l'espace des répliques [LeDoussal 2017] :

$$\widehat{\Pi}_{abmn}^{AB}(p) = \int_q (p-q)_a q_b (p-q)_m q_n \widehat{G}_h^{AB}(q) \widehat{G}_h^{AB}(p-q) = \begin{array}{c} a A \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ b A \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p-q \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ q \end{array} \begin{array}{c} m B \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ n B \end{array} . \quad (6.58)$$

Notons que les deux propagateurs sont multipliés, et non contractés. À cause de la transversalité du vertex effectif, seule la composante de $\widehat{\Pi}_{abmn}^{AB}(q)$ sur X_{abmn} intervient. Il est alors intéressant de le décomposer selon la base suivante :

$$\widehat{\Pi}_{abmn}^{AB}(p) = \widehat{\Pi}_{\perp}^{AB}(p) X_{abmn} + \widehat{\Pi}_Y^{AB}(p) Y_{abmn}(p) + \widehat{\Pi}_p^{AB}(p) p_a p_b p_m p_n . \quad (6.59)$$

Seul $\widehat{\Pi}_{\perp}^{AB}(p)$ contribue donc. Celui-ci peut être décomposé à nouveau en fonction de sa structure dans l'espace des répliques :

$$\widehat{\Pi}_{\perp}^{AB}(p) = \left(\widehat{\Pi}_{\kappa\kappa}(p) + 2\widehat{\Pi}_{\kappa\Delta}(p) \right) \delta^{AB} + \widehat{\Pi}_{\Delta\Delta}(p) J^{AB} , \quad (6.60)$$

à l'aide des quantités suivantes [LeDoussal 2017] :

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}_{\kappa\kappa}(p) &= \frac{Z_{\kappa}^{-2}}{(D^2 - 1)} I_{\perp}(2 - \eta/2, 2 - \eta/2) = \frac{Z_{\kappa}^{-2}}{(D^2 - 1)} p^{2\eta-4+D} \Pi(\eta, D) \\ \widehat{\Pi}_{\kappa\Delta}(p) &= \frac{Z_{\kappa}^{-3} Z_{\Delta\kappa}}{(D^2 - 1)} I_{\perp}(2 - \eta/2, 2 + \eta'/2) = \frac{Z_{\kappa}^{-3} Z_{\Delta\kappa}}{(D^2 - 1)} p^{\eta+\eta'-4+D} \Pi(\eta, \eta', D) \\ \widehat{\Pi}_{\Delta\Delta}(p) &= \frac{Z_{\Delta\kappa}^2 Z_{\kappa}^{-4}}{(D^2 - 1)} I_{\perp}(2 + \eta'/2, 2 + \eta'/2) = \frac{Z_{\Delta\kappa}^2 Z_{\kappa}^{-4}}{(D^2 - 1)} p^{2\eta'-4+D} \Pi(\eta', D) , \end{aligned} \quad (6.61)$$

qui diffèrent par le nombre de $\widehat{\kappa}(p)$ et $\widehat{\Delta}_{\kappa}(p)$ qu'elles incluent. Les intégrales transverses I_{\perp} sont définies dans (3.97). Dans la deuxième égalité, la dépendance en impulsion des intégrales tranverses a été factorisée, ce qui permet de définir la fonction $\Pi(\eta, \eta', D)$. Cette étape est importante pour faciliter l'identification des termes dominants dans l'infrarouge.

La resommation de la série géométrique engendrée par les bulles habillées permet de définir le potentiel écranté,

$$-\widehat{R}_{abmn}^{AB}(p) = \begin{array}{c} a A \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ b A \end{array} \begin{array}{c} m B \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ n B \end{array} + \begin{array}{c} a A \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ b A \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} m B \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ n B \end{array} + \begin{array}{c} a A \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ b A \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} m B \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ n B \end{array} + \dots , \quad (6.62)$$

de même qu'en (3.167), dont les composantes s'écrivent à présent [LeDoussal 2017] :

$$\begin{aligned}
\widehat{b}(p) &= \frac{\widetilde{b}}{1 + (D+1)\widetilde{b} \left(\widehat{\Pi}_{\kappa\kappa}(p) + 2\widehat{\Pi}_{\kappa\Delta}(p) \right)} \\
\widehat{\Delta}_b(p) &= \frac{\widetilde{\Delta}_b + (D+1)\widetilde{b}^2 \widehat{\Pi}_{\Delta\Delta}(p)}{\left(1 + (D+1)\widetilde{b} \left(\widehat{\Pi}_{\kappa\kappa}(p) + 2\widehat{\Pi}_{\kappa\Delta}(p) \right) \right)^2} \\
\widehat{\mu}(p) &= \frac{\widetilde{\mu}}{1 + 2\widetilde{\mu} \left(\widehat{\Pi}_{\kappa\kappa}(p) + 2\widehat{\Pi}_{\kappa\Delta}(p) \right)} \\
\widehat{\Delta}_\mu(p) &= \frac{\widetilde{\Delta}_\mu + 2\widetilde{\mu}^2 \widehat{\Pi}_{\Delta\Delta}(p)}{\left(1 + 2\widetilde{\mu} \left(\widehat{\Pi}_{\kappa\kappa}(p) + 2\widehat{\Pi}_{\kappa\Delta}(p) \right) \right)^2}.
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Leur comportement dans l'infrarouge dépend des hypothèses faites sur l'ansatz (6.57), et en particulier, de la relation d'ordre entre η et η' . Notons les fortes similitudes entre $\widehat{b}(p)$ et $\widehat{\mu}(p)$ qui imposent $(D+1)\widehat{b} - 2\widehat{\mu} = 0$ dans l'infrarouge, de même que dans le cas sans désordre. En termes de groupe de renormalisation, cela signifie que l'hypersurface $\nu = -1/3$ est bien toujours attractrice dans cette limite. Comme dans l'étude perturbative du paragraphe précédent, une relation similaire lie les variances associées :

$$(D+1)\widehat{\Delta}_b(p) - 2\widehat{\mu}(p) \xrightarrow{p \rightarrow 0} 0. \tag{6.64}$$

Enfin, les équations auto-cohérentes sur les dimensions anormales découlent de l'introduction de l'ansatz (6.57) dans l'énergie propre des flexurons. Elles s'écrivent [LeDoussal 2017] :

$$\begin{aligned}
\widehat{\kappa}(p) &= \kappa + \frac{2}{d_c} \int_q \frac{(q_\perp)^4}{q^4(p-q)^4} \left\{ \frac{(D-2)\widehat{\mu}(q) + \widehat{b}(q)}{D-1} \left[\frac{1}{\widehat{\kappa}(p-q)} + \frac{\widehat{\Delta}_\kappa(p-q)}{\widehat{\kappa}(p-q)^2} \right] + \frac{(D-2)\widehat{\Delta}_\mu(q) + \widehat{\Delta}_b(q)}{D-1} \frac{\widehat{\Delta}_\kappa(p-q)}{\widehat{\kappa}(p-q)^2} \right\} \\
\widehat{\Delta}_\kappa(p) &= \Delta_\kappa + \frac{2}{d_c} \int_q \frac{(q_\perp)^4}{q^4(p-q)^4} \frac{(D-2)\widehat{\Delta}_\mu(q) + \widehat{\Delta}_b(q)}{D-1} \frac{\widehat{\Delta}_\kappa(p-q)}{\widehat{\kappa}(p-q)^2}.
\end{aligned} \tag{6.65}$$

Là encore, il est utile de définir une fonction $\Sigma(\eta, \eta', D)$ dont l'évaluation correspond aux intégrales de (6.65) modulo la dépendance en impulsion qui est factorisée [LeDoussal 2017] :

$$\Sigma(\eta, \eta', D) = (p^2)^{2-\eta+\eta'/2} I_\perp(D/2 - 2 + \eta, 2 - \eta'/2) \quad , \quad \Sigma(\eta, \eta, D) = \Sigma(\eta, D). \tag{6.66}$$

Le choix des ansatz (6.57) détermine le type de régime infrarouge atteint [LeDoussal 2017] :

- $\eta' > \eta$: régime contrôlé par les fluctuations thermiques

L'équation (6.61) impose alors $\Pi_{\kappa\kappa} \gg \Pi_{\kappa\Delta} \gg \Pi_{\Delta\Delta}$ dans la limite des grandes longueurs. Les deux équations auto-cohérentes (6.65) se réduisent alors à [LeDoussal 2017] :

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{D(D-1)\Sigma(\eta, D)}{d_c \Pi(\eta, D)} \\
\eta' &= 2\eta,
\end{aligned} \tag{6.67}$$

qui redonne η_4 , et un exposant anormal associé au désordre $\eta'_4 = 2\eta_4$, de même qu'en (6.53). Ce régime correspond donc bien au point fixe \mathbf{P}_4 .

- $\Delta_\kappa = 0$: membranes sans courbure spontanée aléatoire

Dans ce cas, les équations (6.65) se réduisent à :

$$1 = \frac{D(D-1)\Sigma(\eta, D)}{d_c \Pi(\eta, D)}, \quad (6.68)$$

ce qui correspond encore à \mathbf{P}_4 [LeDoussal 2017]. Aucun nouveau régime n'émerge sous ces hypothèses, ce qui infirme l'existence d'un point fixe non perturbatif en couplage décrivant une phase plate vitreuse postulée dans [Radzihovsky 1991].

- $\eta' \leq \eta$: régime contrôlé par le désordre

Dans ce cas, l'équation (6.61) impose $\Pi_{\kappa\kappa} \ll \Pi_{\kappa\Delta} \ll \Pi_{\Delta\Delta}$ dans la limite des grandes longueurs, et (6.65) s'écrit [LeDoussal 2017] :

$$1 = \frac{D(D-1)}{4d_c} \left[\frac{2\Sigma\left(\frac{\eta+\eta'}{2}, \eta', D\right)}{\Pi(\eta, \eta', D)} - \frac{\Pi(\eta', D)\Sigma(\eta, D)}{\Pi(\eta, \eta', D)^2} \right] \quad (6.69)$$

$$1 = \frac{D(D-1)}{4d_c} \frac{\Pi(\eta', D)\Sigma(\eta, \eta', D)}{\Pi(\eta, \eta', D)^2}.$$

La seule solution de ces équations continûment reliée à $\eta = \eta' = 0$ dans la limite $d_c \rightarrow +\infty$ est un point fixe marginal, avec $\eta = \eta'$. Dans la limite $\varepsilon = 4 - D \ll 1$, cette solution s'écrit [LeDoussal 2017] :

$$\eta = \eta' = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon \ll 1} \frac{1}{6 + d_c} + O(\varepsilon^2), \quad (6.70)$$

ce qui permet d'identifier ce régime avec celui associé au point fixe \mathbf{P}_5 (6.55).

Dans la limite $d_c \gg 1$, celui-ci s'écrit [LeDoussal 2017] :

$$\eta_5 = \eta'_5 \underset{d_c \gg 1}{=} \frac{2}{d_c} \left(\frac{D-1}{D+2} \right) \frac{\Gamma(D)}{\Gamma(D/2)^3 \Gamma(2-D/2)} + O\left(\frac{1}{d_c^2}\right), \quad (6.71)$$

ce qui confirme le résultat (6.56).

Le caractère non-perturbatif en couplage des équations SCSA permet de donner des valeurs aux exposants anormaux dans des régimes inaccessibles aux développements étudiés précédemment. En particulier, en $D = 2$, $d = 3$, ceux-ci deviennent [LeDoussal 2017] :

$$\eta_5 = \eta'_5 = \frac{2}{2 + \sqrt{6}} \simeq 0,449. \quad (6.72)$$

Ce résultat valide la conjecture de Morse et Lubesky $\phi_5 = 0$ [Morse 1992] au-delà du développement en couplage faible.

D'autre part, les auteurs de [LeDoussal 2017] ont également calculé la dimension critique inférieure dans le régime correspondant au point fixe \mathbf{P}_5 :

$$D_c^i(d_c) = \frac{1}{2} \left(1 - 4d_c + \sqrt{1 + 24d_c + 16d_c^2} \right) \underset{d_c=1}{\simeq} 1,70, \quad (6.73)$$

qui est plutôt supérieur à la valeur prédite par le SCSA à \mathbf{P}_4 $D_c^i(d_c = 1) \simeq 1,41$.

- $\eta = \eta'$ et $T > 0$

L'utilisation de $\eta = \eta'$ directement au niveau de l'ansatz (6.57) conduit au régime précédent dans l'infrarouge [LeDoussal 2017]. Le SCSA ne prédit donc pas de nouveau point fixe marginal non-perturbatif en couplage.

6.1.3.4 Conclusion

En conclusion, du côté expérimental, un changement qualitatif de comportement est observé dans les membranes cristallines lorsque la densité de défauts est augmentée [López-Polin 2014] ou lors du refroidissement d'une membrane défectueuse [Mutz 1991].

En revanche, le modèle théorique que nous avons présenté ne prédit pas de nouvelle phase contrôlée par le désordre, à laquelle serait associée un point fixe attractif dans le diagramme de flot de renormalisation, à température non nulle, à la fois dans les développements en couplage faible, et par l'approche SCSA. L'application du critère de Harris permet de prédire l'existence d'une phase vitreuse froissée [Nelson 1991], mais l'existence d'une phase plate contrôlée par le désordre dans un régime non perturbatif en couplage postulée dans [Radzihovsky 1991] est fortement mise en doute par le calcul SCSA [LeDoussal 2017]. Cependant, un point fixe marginal \mathbf{P}_5 contrôle le comportement du système à température nulle.

6.2 Méthode de l'action effective moyenne

Nous allons à présent détailler les résultats obtenus à partir de la méthode de l'action effective moyenne, qui fournit une alternative au SCSA pour explorer les régions non-perturbatives en constantes de couplage du diagramme de flot de renormalisation. L'étude que nous menons s'inscrit dans la continuité du travail effectué dans [Essafi 2012] pour étudier l'influence du désordre sur la transition de froissement.

6.2.1 Action effective moyenne en présence d'impuretés

6.2.1.1 Flot de l'action effective

Comme nous cherchons encore à étudier le voisinage de la phase plate, nous pouvons effectuer de nouveau un développement en puissances du gradient de champ de position, l'ansatz utilisé sera encore de type LPA'. Afin de prendre en compte l'effet de désordre gelé, celui-ci est affiné grâce à un développement en champ et en somme de répliques libres (voir Chapitre 1) [Coquand 2018] :

$$\Gamma_k[\vec{r}] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{A,B} \int_x \left[\frac{Z_k \delta_{AB} - \Delta_{\kappa k} J_{AB}}{2} (\partial^2 \vec{r}^A) (\partial^2 \vec{r}^B) + \frac{1}{8} c_{k,AB}^{abmn} (\partial_a \vec{r}^A \cdot \partial_b \vec{r}^A - \zeta_k^2 \delta_{ab} J^A) (\partial_m \vec{r}^B \cdot \partial_n \vec{r}^B - \zeta_k^2 \delta_{mn} J^B) \right] + O((\partial r)^6, \partial^6), \quad (6.74)$$

où J^A est le vecteur dont toutes les composantes valent 1. À cet ordre-ci du développement en champ, seules deux répliques différentes peuvent interagir, de même que dans l'action perturbative (6.31). L'énergie de courbure a été réabsorbée dans le changement de variables suivant :

$\vec{r} \mapsto (Z_k/\kappa)^{1/2}\vec{r}$, $c_k \mapsto (\kappa/Z_k)^2 c_k$, $\zeta_k \mapsto (Z_k/\kappa)^{1/2}\zeta_k$ pour faire apparaître explicitement le coefficient de renormalisation de champ Z_k .

Il nous faut ensuite choisir une configuration d'évaluation, que nous prendrons encore égale au minimum champ moyen de l'action, mais nous devons à présent spécifier sa dépendance dans l'espace des répliques :

$$\vec{r}_{min}^A = \zeta_k J^A x^i \vec{e}_i . \quad (6.75)$$

Nous pouvons alors évaluer la fonction à deux points $\Gamma_k^{(2)}$ au minimum (6.75), qui nous donne accès au propagateur⁷ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,\alpha A,\beta B}^{(2)}[\vec{r}_{min}; p, -p] = & Z_k p^4 \delta_{\alpha\beta} \delta_{AB} - \mu_k \zeta_k^2 \delta_{\alpha}^i \delta_{i\beta} p^2 \delta_{AB} - (\lambda_k + \mu_k) \zeta_k^2 p_{\alpha} p_{\beta} \delta_{AB} \\ & - \Delta_{\kappa k} \delta_{\alpha\beta} p^4 J_{AB} + \Delta_{\mu k} \zeta_k^2 \delta_{\alpha}^i \delta_{i\beta} p^2 J_{AB} + (\Delta_{\lambda k} + \Delta_{\mu k}) \zeta_k^2 p_{\alpha} p_{\beta} J_{AB} . \end{aligned} \quad (6.76)$$

De même que dans le cas sans désordre, sa structure en impulsion est simple à inverser grâce à sa décomposition sur des projecteurs orthogonaux. De plus, sa structure tensorielle dans l'espace des répliques est également simple à inverser d'après (6.28). Définissons alors les notations suivantes :

- Fonction de coupure dans l'espace des répliques :

$$R_k^{AB}(p) = R_k(p) \delta^{AB} + \Delta R_k(p) J^{AB} . \quad (6.77)$$

- Partie diagonale en répliques du propagateur de flexurons :

$$G_0(p)^{-1} = Z_k p^4 + R_k(p) . \quad (6.78)$$

- Partie diagonale en répliques du propagateur de phonons transverses :

$$G_1(p)^{-1} = Z_k p^4 + \mu_k \zeta_k^2 p^2 + R_k(p) . \quad (6.79)$$

- Partie diagonale en répliques du propagateur de phonons longitudinaux :

$$G_2(p)^{-1} = Z_k p^4 + (\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2 p^2 + R_k(p) . \quad (6.80)$$

- Partie du propagateur de flexurons contrôlée par le désordre :

$$\Delta G_0(p)^{-1} = \Delta_{\kappa k} p^4 + \Delta R_k(p) . \quad (6.81)$$

- Partie du propagateur de phonons transverses contrôlée par le désordre :

$$\Delta G_1(p)^{-1} = \Delta_{\kappa k} p^4 + \Delta_{\mu k} \zeta_k^2 p^2 + \Delta R_k(p) . \quad (6.82)$$

- Partie du propagateur de phonons longitudinaux contrôlée par le désordre :

$$\Delta G_2(p)^{-1} = \Delta_{\kappa k} p^4 + (\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k}) \zeta_k^2 p^2 + \Delta R_k(p) . \quad (6.83)$$

7. Plus de détails sur l'obtention de ce résultat se trouvent dans l'Annexe E.

- Projecteur sur l'espace externe :

$$P_{\alpha\beta}^F = \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha}^i \delta_{i\beta} . \quad (6.84)$$

- Partie sans masse du dénominateur des propagateurs sans désordre $P(q)$:

$$P(q) = \Delta_{\kappa k} q^4 + \Delta R_k(q) . \quad (6.85)$$

- Partie sans masse du dénominateur des propagateurs contrôlée par le désordre :

$$\Delta P(q) = \Delta_{\kappa k} q^4 + \Delta R_k(q) . \quad (6.86)$$

Le propagateur complet en présence de désordre gelé s'écrit alors dans la limite $n \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{AB}(p) &= \left(G_0(p) P_{\alpha\beta}^F + G_1(p) P_{\alpha\beta}^T + G_2(p) P_{\alpha\beta}^L \right) \delta^{AB} \\ &\quad - \left(\frac{G_0(p)^2}{\Delta G_0(p)} P_{\alpha\beta}^F + \frac{G_1(p)^2}{\Delta G_2(p)} P_{\alpha\beta}^T + \frac{G_2(p)^2}{\Delta G_2(p)} P_{\alpha\beta}^L \right) J^{AB} . \end{aligned} \quad (6.87)$$

L'équation (6.76) permet alors d'identifier chacune des constantes de couplage ainsi que Z_k à partir de $\Gamma_k^{(2)}$, de façon analogue à (3.188) dans le cas sans désordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_k = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(p^2)^2} \left[\Gamma_{k,D+11,D+11}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}} + \Delta_{\kappa k} \\ \mu_k = \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\Gamma_{k,D1,D1}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}} + \Delta_{\mu k} \\ \lambda_k = \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\Gamma_{k,D1,D1}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}} - \mu_k + \Delta_{\lambda k} + \Delta_{\mu k} \\ \Delta_{\kappa k} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d(p^2)^2} \left[\Gamma_{k,D+11,D+12}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}} \\ \Delta_{\mu k} = -\frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\Gamma_{k,D1,D2}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}} \\ \Delta_{\lambda k} = -\frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\Gamma_{k,D1,D2}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}} - \Delta_{\mu k} . \end{array} \right. \quad (6.88)$$

L'obtention des équations de flot se fait de la même façon qu'auparavant, grâce à l'équation (3.190) qui relie les dérivées des couplages par rapport au temps de renormalisation t à celles de $\Gamma_k^{(2)}$. Ces dernières sont données par l'équation de Wetterich (3.191), qui inclut à présent une trace supplémentaire sur les indices de réplique. À cause de la structure *a priori* non-triviale de la fonction de coupure $R_k^{AB}(p)$ dans l'espace des répliques, la définition des fonctions de seuil utilisées doit être aménagée (voir Annexe F). Par exemple, la famille de fonctions la plus utilisée, $l_{abc}^{D+\alpha}$, est remplacée par une famille de fonctions à quatre indices :

$$l_{abcd}^{D+\alpha} = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d . \quad (6.89)$$

Cependant, en pratique, ΔR_k ne joue aucun rôle notable, il est donc possible de travailler directement avec une fonction de coupure diagonale dans l'espace des répliques, auquel cas les fonctions de seuil à quatre indices s'expriment en fonction de leurs homologues à trois indices utilisées précédemment, ce qui simplifie considérablement les expressions. Par exemple, la fonction (6.89) devient sous ces conditions :

$$\bar{l}_{abcd}^{D+\alpha} = \bar{\Delta}_{\kappa k}^d \bar{l}_{abc}^{D+\alpha+4d} . \quad (6.90)$$

Les équations de flot obtenues de cette façon sont valables à la fois à la transition de froissement et dans la phase plate. Leurs expressions, assez longues, se trouvent dans l'Annexe E. Elles se simplifient dans la limite de phase plate, de même que dans le cas sans désordre, mais pour cela, il nous faut d'abord étudier le flot du paramètre d'extension ζ_k .

6.2.1.2 Flot du paramètre d'extension ζ_k

Nous allons procéder de la même manière que dans le Chapitre 3, en étudiant le potentiel effectif U_k dans une configuration plate quelconque. Celle-ci est définie par :

$$\vec{r}_{flat}^A = \xi J^A x^i \vec{e}_i . \quad (6.91)$$

Le potentiel effectif est minimisé lorsque $\xi = \zeta_k$ par définition. Dans la configuration (6.91), le potentiel effectif s'écrit simplement :

$$\begin{aligned} U_k(\xi) = \Gamma_k[\vec{r}_{flat}] &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \frac{nD}{8} (\xi^2 - \zeta_k^2)^2 (2(\mu_k - n\Delta_{\mu k}) + D(\lambda_k - n\Delta_{\lambda k})) \\ &= \frac{D}{8} (\xi^2 - \zeta_k^2)^2 (2\mu_k + D\lambda_k) . \end{aligned} \quad (6.92)$$

Son expression est exactement la même que dans le cas sans désordre (3.202). Caractériser ζ_k comme le minimum revient à imposer :

$$\left. \frac{dU_k(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\zeta_k} = 0 . \quad (6.93)$$

Pour obtenir le flot de ζ_k avec l'échelle courante, il suffit alors de dériver cette dernière équation par rapport à t :

$$\partial_t \left[\left. \frac{dU_k(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\zeta_k} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d}{d\xi^2} [\partial_t U_k(\xi)] \right|_{\xi=\zeta_k} + 2\partial_t \zeta_k^2 \left. \frac{d^2 U_k}{d(\xi^2)^2} \right|_{\xi=\zeta_k} = 0 . \quad (6.94)$$

Le flot de U_k découle de l'équation de Wetterich (1.45), mais évaluée en \vec{r}_{flat} :

$$\begin{aligned}
\partial_t U_k(\xi) = & \frac{1}{2} \int_q \partial_t R_k(q) \left[(d-D) \left\{ \frac{1}{Z_k q^4 + R_k(q) + (\lambda_k \frac{D}{2} + \mu_k)(\xi^2 - \zeta_k^2) q^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\Delta_{\kappa k} q^4}{\left(Z_k q^4 + R_k(q) + (\lambda_k \frac{D}{2} + \mu_k)(\xi^2 - \zeta_k^2) q^2 \right)^2} \right\} \right. \\
& + (D-1) \left\{ \frac{1}{Z_k q^4 + R_k(q) + (\lambda_k \frac{D}{2} + \mu_k)(\xi^2 - \zeta_k^2) q^2 + \mu_k \xi^2 q^2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\Delta_{\kappa k} q^4 + \Delta_{\mu k} \xi^2 q^2}{\left(Z_k q^4 + R_k(q) + (\lambda_k \frac{D}{2} + \mu_k)(\xi^2 - \zeta_k^2) q^2 + \mu_k \xi^2 q^2 \right)^2} \right\} \right. \\
& \left. + 1 \times \left\{ \frac{1}{Z_k q^4 + R_k(q) + (\lambda_k \frac{D}{2} + \mu_k)(\xi^2 - \zeta_k^2) q^2 + (\lambda_k + 2\mu_k) \xi^2 q^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\Delta_{\kappa k} q^4 + (\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k}) \xi^2 q^2}{\left(Z_k q^4 + R_k(q) + (\lambda_k \frac{D}{2} + \mu_k)(\xi^2 - \zeta_k^2) q^2 + (\lambda_k + 2\mu_k) \xi^2 q^2 \right)^2} \right\} \right], \tag{6.95}
\end{aligned}$$

ce qui, une fois combiné avec (6.94), conduit à l'équation de flot suivante pour le paramètre d'extension adimensionné :

$$\begin{aligned}
\partial_t \bar{\zeta}_k^2 = & -(D-2 + \eta_k) \bar{\zeta}_k^2 + \frac{8v_D}{D(D\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)} \left[(d-D) \left\{ (\bar{\lambda}_k \frac{D}{2} + \bar{\mu}_k) \bar{l}_{1000}^{D+2} + (\bar{\lambda}_k \frac{D}{2} + \bar{\mu}_k) \bar{l}_{2001}^{D+2} \right\} \right. \\
& + (D-1) \left\{ (\bar{\lambda}_k \frac{D}{2} + 2\bar{\mu}_k) \bar{l}_{0100}^{D+2} - \bar{\Delta}_{\mu k} \bar{l}_{0100}^{D+2} + (\bar{\lambda}_k \frac{D}{2} + 2\bar{\mu}_k) \bar{l}_{0201}^{D+2} + (\bar{\lambda}_k \frac{D}{2} + 2\bar{\mu}_k) \bar{\Delta}_{\mu k} \bar{\zeta}_k^2 \bar{l}_{0200}^{D+4} \right\} \\
& + 1 \times \left\{ (\bar{\lambda}_k \frac{D+2}{2} + 3\bar{\mu}_k) \bar{l}_{0010}^{D+2} - (\bar{\Delta}_{\lambda k} + 2\bar{\Delta}_{\mu k}) \bar{l}_{0010}^{D+2} + (\bar{\lambda}_k \frac{D+2}{2} + 3\bar{\mu}_k) \bar{l}_{0021}^{D+2} \right. \\
& \left. \left. + (\bar{\lambda}_k \frac{D+2}{2} + 3\bar{\mu}_k) (\bar{\Delta}_{\lambda k} + 2\bar{\Delta}_{\mu k}) \bar{\zeta}_k^2 \bar{l}_{0020}^{D+4} \right\} \right]. \tag{6.96}
\end{aligned}$$

De même que son homologue dans le cas sans désordre (3.207), (6.96) admet un point fixe à l'infini correspondant à la phase plate. Les équations de flot dans la phase plate sont donc obtenues de nouveau par le découplage des fonctions de seuil associées aux phonons acoustiques.

6.2.1.3 Flot de renormalisation dans la phase plate

En plus du découplage des fonctions de seuil associées aux phonons, nous écrivons les équations de flot de la phase plate dans le cas d'une fonction de coupure diagonale dans l'espace des répliques, à l'aide des fonctions de seuil à trois indices grâce à (6.90). Le flot du paramètre d'extension adimensionné $\bar{\zeta}_k$ dans la phase plate est donc donné par les termes en bleu dans (6.96) :

$$\partial_t \bar{\zeta}_k^2 = -(D-2 + \eta_k) \bar{\zeta}_k^2 + \frac{4v_D}{D} d_c (\bar{l}_{100}^{D+2} + \bar{\Delta}_{\kappa k} \bar{l}_{200}^{D+6}). \tag{6.97}$$

Dans la limite de désordre nul $\bar{\Delta}_{\kappa k} \rightarrow 0$, l'équation du cas sans désordre (3.208) est bien retrouvée. La dépendance du flot (6.97) dans les paramètres du désordre associés aux contraintes locales aléatoires se trouve dans η_k .

Les équations de flot des constantes de couplage élastiques s'obtiennent à partir des expressions de l'Annexe E. Comme dans le cas sans désordre, les équations les plus simples dans la phase plate sont obtenues pour le jeu de variables (μ_k^{AB}, b_k^{AB}) et non $(\mu_k^{AB}, \lambda_k^{AB})$. L'expression du changement de variables découle de la généralisation de la définition de b (3.113) au formalisme des répliques :

$$\begin{aligned} b_k^{AB} &= \mu_k^{AC} \frac{1}{\lambda_k^{CF} + 2\mu_k^{CF}} (D\lambda_k^{FB} + 2\mu_k^{FB}) \\ &= \left[\frac{\mu_k(D\lambda_k + \mu_k)}{\lambda_k + 2\mu_k} \right] \delta^{AB} - \left[\frac{D(\Delta_{\mu k}\lambda_k^2 + 2\Delta_{\lambda k}\mu_k^2) - 2\mu_k(\Delta_{\lambda k}\mu_k - 2\Delta_{\mu k}(\lambda_k + \mu_k))}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2} \right] J^{AB} \\ &= b_k \delta^{AB} - \Delta_{bk} J^{AB} . \end{aligned} \tag{6.98}$$

Les équations de flot de la phase plate dans ce formalisme sont alors données par [Coquand 2018] :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\mu}_k &= (D - 4 + 2\eta_k) \bar{\mu}_k + \frac{8v_D d_c}{D(D+2)} \bar{\mu}_k^2 [\bar{l}_{200}^{D+4} + 2\bar{\Delta}_{\kappa k} \bar{l}_{300}^{D+8}] \\ \partial_t \bar{\Delta}_{\mu k} &= (D - 4 + 2\eta_k) \bar{\Delta}_{\mu k} + \frac{8v_D d_c}{D(D+2)} \bar{\mu}_k [2\bar{\Delta}_{\mu k} \bar{l}_{200}^{D+4} + 4\bar{\Delta}_{\kappa k} \bar{\Delta}_{\mu k} \bar{l}_{300}^{D+8} - \bar{\Delta}_{\kappa k}^2 \bar{\mu}_k \bar{l}_{400}^{D+12}] \\ \partial_t \bar{b}_k &= (D - 4 + 2\eta_k) \bar{b}_k + \frac{4(D+1)v_D d_c}{D(D+2)} \bar{b}_k^2 [\bar{l}_{200}^{D+4} + 2\bar{\Delta}_{\kappa k} \bar{l}_{300}^{D+8}] \\ \partial_t \bar{\Delta}_{bk} &= (D - 4 + 2\eta_k) \bar{\Delta}_{bk} + \frac{4(D+1)v_D d_c}{D(D+2)} \bar{b}_k [2\bar{\Delta}_{bk} \bar{l}_{200}^{D+4} + 4\bar{\Delta}_{\kappa k} \bar{\Delta}_{bk} \bar{l}_{300}^{D+8} - \bar{\Delta}_{\kappa k}^2 \bar{b}_k \bar{l}_{400}^{D+12}] . \end{aligned} \tag{6.99}$$

En particulier, nous retrouvons le facteur $(D+1)/2$ (en rouge) et les grandes similitudes de forme entre les équations de flot sur b_k et μ_k , qui est le signe que $(D+1)\bar{b}_k - 2\bar{\mu}_k$ s'annule encore dans l'infrarouge dans le formalisme LPA' en présence de désordre [Coquand 2018], tout comme dans le formalisme SCSA. En effet,

$$\partial_t \left(\frac{\bar{b}_k}{\bar{\mu}_k} \right) = \frac{4v_D}{D(D+2)} d_c (\bar{l}_{200}^{D+4} + 2\bar{\Delta}_{\kappa k} \bar{l}_{300}^{D+8}) \frac{\bar{b}_k}{\bar{\mu}_k} [(D+1)\bar{b}_k - 2\bar{\mu}_k] , \tag{6.100}$$

et le terme en bleu est toujours positif. De plus, le flot de la quantité équivalente en termes de constantes de couplage associées au désordre en supposant $(D+1)\bar{b}_k = 2\bar{\mu}_k$ s'écrit :

$$\partial_t \left(\frac{\bar{\Delta}_{bk}}{\bar{\Delta}_{\mu k}} \right) = \frac{8v_D \bar{\mu}_k^2}{D(D+1)(D+2)\bar{\Delta}_{\mu k}^2} d_c \bar{\Delta}_{\kappa k}^2 \bar{l}_{400}^{D+12} [(D+1)\bar{\Delta}_{bk} - 2\bar{\Delta}_{\mu k}] , \tag{6.101}$$

donc l'hypersurface $(D+1)\bar{\Delta}_{bk} - 2\bar{\Delta}_{\mu k} = 0$ est également attractrice dans l'infrarouge. Sous ces conditions, de même que dans les calculs effectués dans les autres approches étudiées jusqu'à maintenant, nous pouvons réduire le jeu de constantes de couplage utiles à la description du problème à $(\bar{\mu}_k, \bar{\Delta}_{\mu k}, \bar{\Delta}_{\kappa k})$.

Sur cette hypersurface, l'équation de flot de $\bar{\Delta}_{\kappa k}$ se simplifie :

$$\partial_t \bar{\Delta}_{\kappa k} = \eta_k \bar{\Delta}_{\kappa k} + \frac{8v_D \bar{\Delta}_{\kappa k} \bar{\Delta}_{\mu k}}{D(D+2)^2} \left[(8D^2 + 25D + 12) \bar{l}_{200}^{D+4} - 4(D^2 + 5D + 3) \bar{n}_{300}^{D+6} \right]. \quad (6.102)$$

Le domaine $\bar{\Delta}_{\kappa} = 0$ est donc stable sous l'action du flot de renormalisation, même au-delà du développement en couplage faible, ce qui permet d'y chercher d'éventuels points fixes non-perturbatifs postulés dans [Nelson 1991].

Finalement, se placer sur l'hypersurface permet de simplifier également l'expression des dimensions anormales, exprimées ici grâce à la fonction de coupure $R_k^1(q) = (k^4 - q^4)\Theta(k^4 - q^4)$ [Coquand 2018] :

$$\eta_k = \frac{32v_D(D-1)(D+8)[2D\bar{\mu}_k\bar{\Delta}_{\kappa k} + (D+4)(\bar{\mu}_k - \bar{\Delta}_{\mu k})]}{D(D+2)(D+4)(D+8) + 32v_D(D-1)[2D\bar{\mu}_k\bar{\Delta}_{\kappa k} + (D+4)(\bar{\mu}_k - \bar{\Delta}_{\mu k})]} \quad (6.103)$$

$$\eta'_k = 2\eta_k + \frac{8v_D \bar{\Delta}_{\mu k}}{D(D+2)^2} \left[(8D^2 + 25D + 12) \bar{l}_{200}^{D+4} - 4(D^2 + 5D + 3) \bar{n}_{300}^{D+6} \right].$$

La structure de η_k en fraction rationnelle dont le dénominateur est un polynôme inhomogène est la source de contributions non-perturbatives en constantes de couplage dans les équations de flot de la phase plate (6.99).

Les solutions des équations de flot de la phase plate (6.99), (6.102) et (6.103) dans les différents régimes de dimension sont analysées dans les paragraphes suivants.

6.2.2 Membranes sans courbure spontanée aléatoire

Nous commençons par le régime $\bar{\Delta}_{\kappa} = 0$ étudié dans [Nelson 1991, Radzihovsky 1991], où nous rappelons que le développement en couplage faible ne prévoit pas d'autre point fixe que \mathbf{P}_4 , de même que le SCSA [LeDoussal 2017]. Il existe cependant une région dans laquelle les constantes de couplage sont emmenées par le flot vers une zone de très fort couplage, ce qui pose la question de l'existence d'un point fixe non-perturbatif attracteur dans une région de couplage fort, *a priori* accessible par le NPRG.

Dans ce régime, les équations de flot de la phase plate sur l'hypersurface $(\bar{\mu}, \bar{\Delta}_{\mu}, 0)$ se simplifient :

$$\eta_k = \frac{32v_D(D-1)(D+8)(\bar{\mu}_k - \bar{\Delta}_{\mu k})}{D(D+2)(D+8) + 32v_D(D-1)(\bar{\mu}_k - \bar{\Delta}_{\mu k})}$$

$$\partial_t \bar{\mu}_k = (D-4 + 2\eta_k)\bar{\mu}_k + \frac{8v_D d_c}{D(D+2)} \bar{\mu}_k^2 \bar{l}_{200}^{2-D+4} \quad (6.104)$$

$$\partial_t \bar{\Delta}_{\mu k} = (D-4 + 2\eta_k)\bar{\Delta}_{\mu k} + \frac{16v_D d_c}{D(D+2)} \bar{\mu}_k \bar{\Delta}_{\mu k} \bar{l}_{200}^{D+4}.$$

Ces équations de flot n'admettent pas de point fixe autre que \mathbf{P}_4 pour $D < 4$. Il existe cependant une ligne d'instabilité correspondant à l'annulation du dénominateur de η_k , rendue possible par l'occurrence de $\bar{\Delta}_{\mu k}$ avec un signe « - » :

$$D(D+2)(D+8) + 32v_D(D-1)(\bar{\mu}_k - \bar{\Delta}_{\mu k}) = 0. \quad (6.105)$$

Une divergence de la dimension anormale n'est pas possible dans le cadre de développements en couplages faibles où le dénominateur de η_k ne peut pas s'annuler, et est donc une caractéristique du développement LPA' utilisé.

Le diagramme de flot dans le plan $(\bar{\mu}, \bar{\Delta}_\mu)$ se trouve sur la Figure 6.5. Tout comme dans le cas perturbatif, la quasi-totalité des trajectoires sont attirées par \mathbf{P}_4 dans la limite infrarouge. Les trajectoires ayant des conditions initiales $\bar{\mu} \ll \bar{\Delta}_\mu$ sont attirées vers des régions de fort couplage dans le développement LPA' aussi, plus précisément vers la ligne d'instabilité du flot (6.105) où la dimension anormale diverge. Cependant, elles se recourbent en un temps de renormalisation très court, et convergent vers le voisinage de \mathbf{P}_4 .

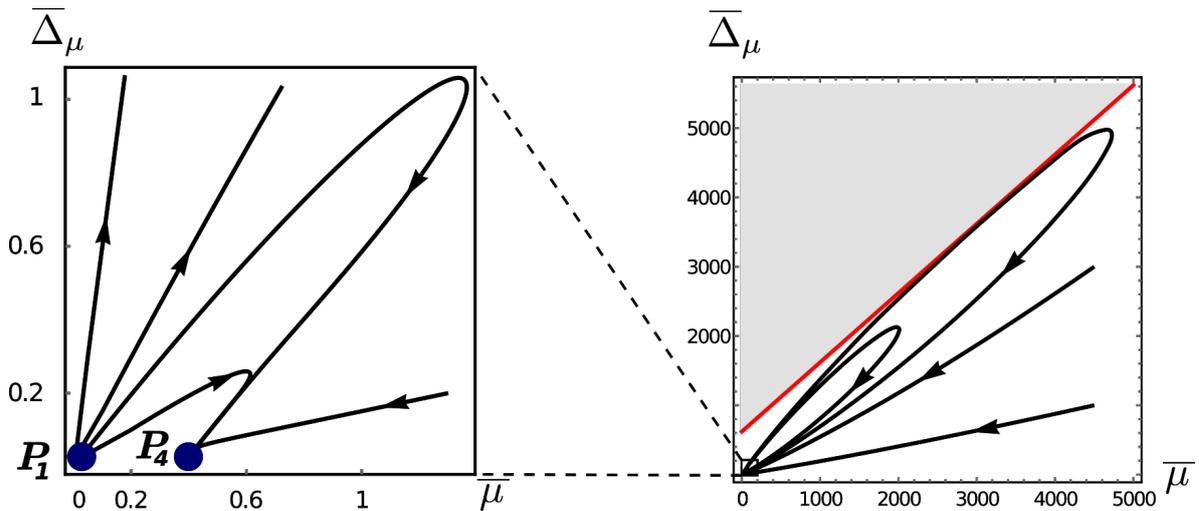


FIGURE 6.5 – Diagramme de flot NPRG sur la surface $\bar{\Delta}_\kappa = 0$ en dimension $D = 3.99$, avec $d_c = 1$. À gauche : agrandissement du voisinage de l'origine. Le point fixe \mathbf{P}_4 attire les trajectoires dans la limite infrarouge. À droite : à plus grande échelle, les trajectoires se rapprochent de la ligne d'instabilité du flot (6.105) avant de converger vers le point fixe de phase plate. La zone grisée n'est pas accessible par des systèmes avec des conditions initiales physiquement acceptables.

Il existe cependant une zone du diagramme aux très faibles valeurs de $\bar{\mu}$, dont les conditions initiales engendrent des trajectoires qui s'écrasent sur la ligne de singularité en un temps de renormalisation fini. Ce résultat appelle quelques remarques :

- la divergence des fonctions β des constantes de couplage élastiques n'est pas reliée à une divergence des propriétés élastiques physiques du système, mais bien de la dimension anormale η_k (voir (6.104), seul η_k peut diverger). Ceci est probablement un signe que le modèle utilisé n'est plus valable dans les régions où la valeur moyenne du module de cisaillement μ est très petite devant sa variance Δ_μ , et où l'identification de η à partir de la partie des propagateurs contrôlée par les fluctuations thermiques (voir (6.34) et (6.37)) devient problématique. La définition même des coefficients de l'élasticité comme des moyennes de variables aléatoires petites devant les variances de ces mêmes variables est d'ailleurs pathologique ;
- si la conjecture de Nelson et Radzihovsky selon laquelle le système subit sous ces conditions une transition de phase vers une phase plate vitreuse [Radzihovsky 1991] est correcte, il

se pourrait que notre description simple soit trop naïve pour bien décrire la physique de ces objets dans ce régime ;

- puisque l'émergence de la ligne d'instabilité (6.105) est une conséquence de l'écriture de η_k dans le développement LPA', l'existence de cette ligne, ou d'une autre ligne d'instabilité aux ordres suivants du développement des équations NPRG en puissances du champ et de ses dérivées, n'est pas évidente. Une étude des ordres suivants, similaire à celle effectuée dans [Essafi 2014], pourrait apporter de premiers éléments de réponse ;
- les ordres de grandeur de $\overline{\Delta}_\mu$ nécessaires pour atteindre la singularité font douter de la pertinence de ces considérations pour des systèmes réels. Par exemple, si $D = 2$, l'équation (6.105) s'écrit :

$$20\pi + \overline{\mu} - \overline{\Delta}_\mu = 0 . \quad (6.106)$$

De plus, cette ligne existe encore si $\overline{\Delta}_\kappa \neq 0$, mais d'après (6.103), l'atteinte du régime d'instabilité est d'autant plus difficile que $\overline{\Delta}_\kappa$ est grand.

L'éclaircissement de cette situation est un travail en cours.

En conclusion, pour des membranes sans courbure spontanée aléatoire, le NPRG ne prédit pas de nouveau régime infrarouge dominé par les paramètres du désordre, mais il n'exclut pas non plus la possibilité de l'existence d'une phase plate vitreuse à forte variance des coefficients d'élasticité.

6.2.3 Membranes réelles : $D = 2, d = 3$

Afin de mieux décrire le régime de fort désordre et basse température, notamment le point fixe \mathbf{P}_5 , nous avons établi qu'il est préférable de travailler avec la variable $\overline{g}_\mu = \overline{\mu}\overline{\Delta}_\kappa$ au lieu de $\overline{\Delta}_\kappa$. Le diagramme de flot du système en $D = 2, d = 3$ sur l'hypersurface $(\overline{\mu}, \overline{\Delta}_\mu, \overline{g}_\mu)$ est représenté sur la Figure 6.8. Il présente quatre points fixes :

- **Point fixe gaussien \mathbf{P}_1 :**

Il est encore répulsif dans toutes les directions.

- **Point fixe de phase plate \mathbf{P}_4 :**

Ce point fixe est encore attractif dans toutes les directions, la phase plate des membranes cristallines est donc stable en présence de désordre, au moins à densité d'impuretés modérée, et à température suffisamment forte. Sa position est :

$$\left\{ \overline{\mu}^* \simeq 6,21 ; \overline{g}_\mu^* = 0 ; \overline{\Delta}_\mu^* = 0 \right\} . \quad (6.107)$$

Il est caractérisé par les exposants anormaux suivants [Coquand 2018] :

$$\eta_4 \simeq 0,849 \quad , \quad \eta'_4 = 2\eta_4 \quad , \quad (6.108)$$

en accord avec les développements en couplage faible (6.53) et le SCSA (6.67).

- **Point fixe de température nulle \mathbf{P}_5 :**

Comme dans les approches précédentes, il se situe sur la surface $\bar{\mu} = 0$:

$$\left\{ \bar{\mu}^* = 0 ; \bar{g}_\mu^* \simeq 12,7 ; \bar{\Delta}_\mu^* \simeq 5,61 \right\}. \quad (6.109)$$

Les dimensions anormales à \mathbf{P}_5 ont été calculées avec chacune des trois fonctions de coupure (3.199). De plus, afin d'améliorer la précision du résultat, celles-ci ont été définies à une constante près qui a ensuite été ajustée de façon à minimiser la dépendance de η_5 et η'_5 en cette constante (voir Figure 6.6). Les valeurs finales sont [Coquand 2018] :

$$\eta_5 \simeq 0,449 \quad , \quad \eta'_5 \simeq 0,227 \quad , \quad \phi_5 \simeq -0,173. \quad (6.110)$$

Les trois premiers chiffres de l'exposant η_5 sont les mêmes que ceux prédits par le SCSA (6.72). Cependant, le développement LPA' prédit un exposant ϕ_5 non nul. Par conséquent, \mathbf{P}_5 n'est pas dans ce formalisme un point fixe marginal, mais un point fixe dominé par le désordre doté d'un bassin d'attraction non-trivial. Cela signifie en particulier que des systèmes à température non-nulle présentant une densité d'impuretés suffisamment élevée sont décrits dans la limite des grandes distances par les lois d'échelle universelles à \mathbf{P}_5 , ou autrement dit, qu'il existe dans les membranes cristallines une phase plate dont le comportement est contrôlé par les impuretés plutôt que par les fluctuations thermiques, et qui est stable à des températures $T \neq 0$.

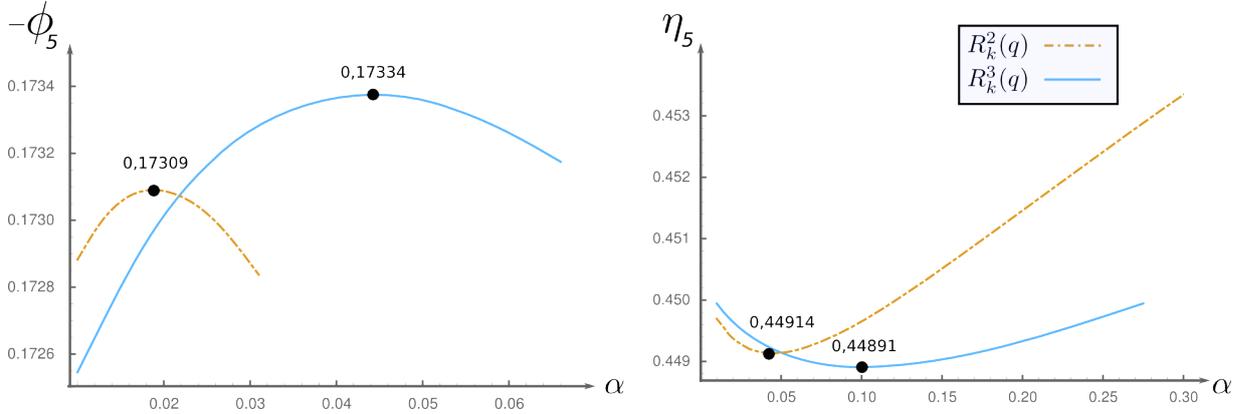


FIGURE 6.6 – Évolution de ϕ_5 (à gauche) et η_5 (à droite) en fonction du paramètre d'ajustement α des fonctions de coupure $R_k^2(q) = \alpha Z_k q^4 / (e^{q^4/k^4} - 1)$ et $R_k^3(q) = \alpha Z_k k^4 e^{-q^4/k^4}$.

La dimension critique inférieure peut également être évaluée en remplaçant η_k par $2 - D_c^i$ dans les équations de flot (6.99) et (6.102). La recherche de points fixes peut alors s'effectuer analytiquement. La combinaison de la position des points fixes à D_c^i comme des fonctions de D , l'expression de $\eta_k(D)$ (6.103) et l'équation $D_c^i = 2 - \eta(D_c^i)$ donnent une équation que D vérifie si $D = D_c^i$. Cela donne à \mathbf{P}_5 :

$$D_c^i(d=3) \simeq 1,71 \quad , \quad D_c^i(d_c=1) \simeq 1,67. \quad (6.111)$$

Le deuxième résultat est mentionné pour permettre la comparaison avec la valeur calculée par le SCSA (6.73) [LeDoussal 2017]. L'accord entre les valeurs prédites par les deux

méthodes est bon. D'autre part, d'après (6.73), le SCSA prédit $D_c^i(d=3) \simeq 1.74$, en bon accord avec le résultat NPRG également. La valeur de D_c^i est plus élevée que sa valeur à \mathbf{P}_4 qui est $D_c^i(d=3) \simeq 1,33$ dans le calcul NPRG. Ceci est cohérent car $\eta_5 < \eta_4$: les fluctuations thermiques sont plus fortement anharmoniques en l'absence de désordre donc leur effet stabilisateur est plus important. Cependant, la conséquence majeure, à savoir $D_c^i < 2$, qui garantit la stabilité des deux types de phases plates pour des systèmes réels, est la même dans les deux cas.

• **Point fixe de transition \mathbf{P}_c :**

Le développement LPA' prédit l'existence d'un nouveau point fixe \mathbf{P}_c situé en :

$$\left\{ \bar{\mu}^* \simeq 0,899 ; \bar{g}_\mu^* \simeq 10,6 ; \bar{\Delta}_\mu^* \simeq 4,85 \right\} . \quad (6.112)$$

Il est caractérisé par les dimensions anormales suivantes [Coquand 2018] :

$$\eta_c = \eta'_c \simeq 0,492 , \quad (6.113)$$

le point fixe est donc marginal.

Le jacobien du flot peut être diagonalisé au voisinage de \mathbf{P}_c . Il possède une valeur propre *négative* $\mathcal{E}_c \simeq -0,131$ associée à une direction essentielle, autrement dit, \mathbf{P}_c décrit une transition de phase du second ordre entre les phases dont les lois d'échelle aux grandes longueurs sont données par \mathbf{P}_4 et \mathbf{P}_5 . La valeur propre \mathcal{E}_c permet de définir un exposant critique universel

$$\nu_c = -1/\mathcal{E}_c , \quad (6.114)$$

associé à la divergence de la longueur de corrélation⁸. En l'absence de connaissance de la quantité précise contrôlant le passage d'un bassin d'attraction à l'autre (qui est une combinaison de la température et des densités de défauts), nous ne pouvons malheureusement pas donner de définition plus précise de cet exposant.

Afin d'améliorer la précision de nos estimations numériques, les valeurs de η_c et \mathcal{E}_c ont été calculées avec les trois fonctions de coupure (3.199). Ces fonctions ont été définies à une constante près, qui a été ajustée de façon à minimiser la dépendance des exposants en sa valeur (voir Figure 6.7).

L'équation sur D_c^i peut également être résolue à \mathbf{P}_c , ce qui donne [Coquand 2016] :

$$D_c^i(d=3) \simeq 1,67 , \quad (6.115)$$

un résultat cohérent avec la relation d'ordre $\eta_4 > \eta_c > \eta_5$.

Le désaccord entre le NPRG et les développements en couplage faible vis-à-vis de l'existence de \mathbf{P}_c et du caractère non marginal de \mathbf{P}_5 sera traité dans le paragraphe suivant dans une dimension appropriée. Il est plus étonnant que ce point fixe, non perturbatif en couplage, semble contredire les conclusions du calcul SCSA [LeDoussal 2017]. Notons cependant que :

8. De même que ν_σ à la transition de flambage par exemple.

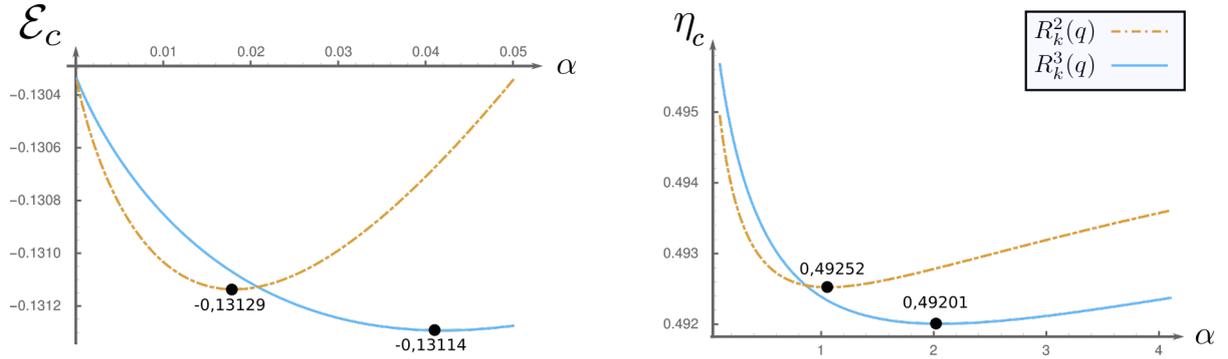


FIGURE 6.7 – Évolution de \mathcal{E}_c (à gauche) et η_c (à droite) en fonction du paramètre d'ajustement α des fonctions de coupure $R_k^2(q) = \alpha Z_k q^4 / (e^{q^4/k^4} - 1)$ et $R_k^3(q) = \alpha Z_k k^4 e^{-q^4/k^4}$.

- le SCSA repose sur des bases différentes des approches du groupe de renormalisation. En particulier, les lois d'échelle aux grandes distances sont obtenues grâce à des ansatz pour les quantités dépendantes de l'impulsion, et non des points fixes dans l'évolution de ces mêmes paramètres avec l'échelle courante k . Notamment, pour atteindre un régime contrôlé dans le langage du groupe de renormalisation par un point fixe donné, le SCSA doit choisir un ansatz dans le bassin d'attraction de ce même point fixe.

C'est par exemple ce qu'il se passe pour \mathbf{P}_3 dans le cas sans désordre : un ansatz $\kappa(p) \sim p^{-\eta}$ sans précision supplémentaire donne une équation auto-cohérente dont la seule solution acceptable est η_4 (voir Chapitre 3). Pour calculer η_3 , il est nécessaire d'effectuer tout le calcul avec $\hat{b}(p) = 0$, ce qui revient dans le langage du groupe de renormalisation à se placer dans le bassin d'attraction de \mathbf{P}_3 .

Comme la forme du bassin d'attraction de \mathbf{P}_c , qui est un point fixe auquel aucune des constantes de couplages utilisées ici ne s'annule, n'est pas connue aujourd'hui, nous ne savons pas avec certitude si les hypothèses présentées dans la section précédente, qui concluent à l'absence de solutions des équations SCSA pour un point fixe marginal à $T > 0$ différent de \mathbf{P}_5 , ne sont pas contradictoires avec la description de ce point fixe car les ansatz utilisés se trouvent hors du bassin d'attraction de \mathbf{P}_c et ne peuvent donc décrire que les régimes infrarouges associés à \mathbf{P}_4 et \mathbf{P}_5 .

- le développement LPA' prédit une valeur de η_5 très proche de celle prédite par le SCSA, mais dans ce premier, le point fixe n'est pas marginal. Cela suggère un désaccord de fond sur les prédictions des deux approches. Puisque dans le développement en ε à l'ordre le plus bas \mathbf{P}_5 est marginal (6.55), ainsi que dans l'ordre dominant du développement en $1/d_c$ (6.56), il n'est pas étonnant que les équations SCSA, construites pour interpoler entre ces deux régimes, reproduisent ce résultat. Il serait intéressant d'examiner des raffinements de cette méthode, comme ceux présentés dans [Gazit 2009], qui construisent les équations SCSA en injectant des ansatz auto-cohérents non pas dans les équations RPA, mais dans le développement analogue, valable à l'ordre sous-dominant en $1/d_c$.

La clarification de cette situation est un travail en cours.

En conclusion, le développement LPA' prédit une transition de phase dans les membranes

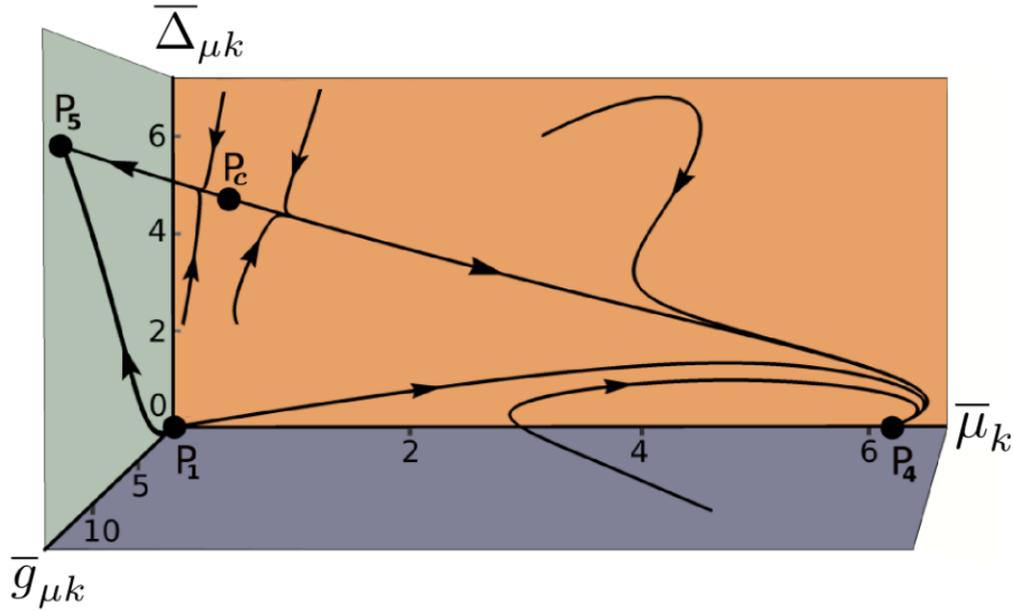


FIGURE 6.8 – Figure extraite de [Coquand 2018] représentant le diagramme de flot quand $D = 2$ et $d = 3$. Les deux points fixes \mathbf{P}_4 et \mathbf{P}_5 sont complètement attractifs. Le point fixe \mathbf{P}_c instable dans une direction contrôle la transition entre les bassins d'attraction associés à ces deux points fixes.

crystallines à forte densité d'impuretés, ou basse température. Le paramètre précis contrôlant cette transition est cependant aujourd'hui inconnu. Comme il est un peu prématuré d'identifier la phase dont les lois d'échelle sont données par \mathbf{P}_5 avec la phase plissée observée dans les vésicules partiellement polymérisées lors de leur refroidissement [Mutz 1991], nous appelons cette phase « phase plate rugueuse ».

6.2.4 Développement au voisinage de D_c^s , $D = 4 - \varepsilon$

Afin d'établir une comparaison qui a du sens entre le développement LPA' et le développement en ε , nous pouvons étudier les équations de flot de renormalisation du NPRG en dimension $D = 4 - \varepsilon$.

6.2.4.1 Équations NPRG à l'ordre dominant

D'après les résultats du Chapitre 3, il est attendu que le développement LPA' en puissances du gradient de champ de position ne reproduise pas exactement l'ordre sous-dominant de la théorie de perturbations usuelle. Nous nous contenterons donc d'étudier le premier ordre non-nul. D'autre part, nous centrerons notre analyse sur \mathbf{P}_5 et \mathbf{P}_c puisqu'il ne semble pas y avoir de désaccord important à \mathbf{P}_4 . Les propriétés de ces points fixes en dimension $D = 4 - \varepsilon$ sont :

- Point fixe de la phase plate rugueuse \mathbf{P}_5 : Sa position à l'ordre le plus bas est :

$$\left\{ \overline{\mu}^* = 0 ; \overline{g}_\mu^* = \frac{48\pi^2\varepsilon}{6 + d_c} ; \overline{\Delta}_\mu^* = \frac{24\pi^2\varepsilon}{6 + d_c} \right\}, \quad (6.116)$$

en parfait accord avec (6.54).

Il est caractérisé par les dimensions anormales suivantes :

$$\eta_5 \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{3\varepsilon}{6+d_c} + O(\varepsilon^2) \quad , \quad \eta'_5 = \eta_5 + \phi_5 \quad , \quad \phi_5 \underset{\varepsilon \ll 1}{=} -\frac{(27+5d_c)d_c\varepsilon^2}{20(6+d_c)^3} + O(\varepsilon^3) . \quad (6.117)$$

La marginalité de \mathbf{P}_5 est donc vraie à une boucle, mais semble être perdue à l'ordre sous-dominant. Il n'y a donc pas en ce qui concerne \mathbf{P}_5 de contradiction entre le développement en ε et le développement LPA'.

En revanche, la relation (6.56) n'est pas vérifiée. Cela fait écho au résultat déjà observé dans le Chapitre 3 pour la théorie sans désordre selon lequel les prédictions du développement LPA' et du calcul à une boucle en $1/d_c$ diffèrent quantitativement, même si ici les conséquences sont plus drastiques.

- **Point fixe de transition \mathbf{P}_c :**

La position de \mathbf{P}_c à l'ordre le plus bas en ε est :

$$\left\{ \bar{\mu}^* = \frac{4\pi^2(27+d_c)\varepsilon^2}{15(6+d_c)^2} ; \bar{g}_\mu^* = \frac{48\pi^2\varepsilon}{6+d_c} ; \bar{\Delta}_\mu^* = \frac{24\pi^2\varepsilon}{6+d_c} \right\} , \quad (6.118)$$

ses coordonnées étant les mêmes que celles de \mathbf{P}_5 à l'ordre ε , il ne peut pas apparaître comme une solution des équations de point fixe des fonction β à une boucle. Il est caractérisé par les dimensions anormales :

$$\eta_5 \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{3\varepsilon}{6+d_c} + O(\varepsilon^2) \quad , \quad \eta'_5 \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \eta_5 + O(\varepsilon^3) , \quad (6.119)$$

et est donc bien marginal. La valeur propre répulsive \mathcal{E}_c associée à la transition de phase entre \mathbf{P}_5 et \mathbf{P}_c est :

$$\mathcal{E}_c \underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{(27+5d_c)d_c\varepsilon^2}{20(6+d_c)^3} + O(\varepsilon^3) = -\phi_5 + O(\varepsilon^3) . \quad (6.120)$$

Comme elle est d'ordre ε^2 , elle ne peut être décrite par le flot de renormalisation à une boucle en ε , ce qui est cohérent avec la conclusion précédente sur la proximité des points fixes.

L'image qui se dégage de l'analyse des équations NPRG est la suivante : en $D = 4 - \varepsilon$, la séparation entre les deux points fixes \mathbf{P}_5 et \mathbf{P}_c est d'ordre ε^2 . Le calcul à une boucle n'a donc pas la résolution suffisante pour les séparer et attribue de façon erronée le caractère répulsif et marginal de \mathbf{P}_c à \mathbf{P}_5 . Insistons cependant que cette proximité pathologique des deux points fixes n'est vraie qu'au voisinage de $D = 4$, et n'est en particulier pas vraie en $D = 2$ pour des systèmes observables.

Il est plus délicat de discuter du désaccord avec le développement en $1/d_c$ et le SCSA qui sont *a priori* non-perturbatifs en ε , même si encore une fois il n'est pas attendu que les résultats du NPRG soient exactement reproduits par ces schémas d'approximation dans cette limite.

L'analyse comparée des développements LPA' et $\varepsilon \ll 1$ peut être étoffée par l'examen des ordres supérieurs du développement en couplage faible, dans lesquels il est attendu que \mathbf{P}_5 et \mathbf{P}_c puissent être discriminés.

6.2.4.2 Développement à deux boucles

Le calcul à l'ordre sous-dominant que nous avons effectué est une généralisation de celui présenté dans le Chapitre 3 en présence de désordre gelé, réalisé sur la théorie effective obtenue par intégration sur les phonons. Grâce aux fortes symétries entre les termes diagonaux et non-diagonaux dans l'espace des répliques, les intégrales intervenant dans ce calcul sont les mêmes que celles du calcul sans désordre ; en particulier, la théorie effective est encore non-divergente dans l'infrarouge, ce qui nous permet d'utiliser sans danger la régularisation dimensionnelle.

Les règles de Feynman sont celles que nous avons utilisées jusqu'à présent modulo la présence de contretermes dans l'action générés par les contributions à une boucle. Ceux-ci sont les généralisations naturelles dans l'espace des répliques des contretermes définis dans (3.123) :

$$\begin{aligned}
S_n[h; k] &= \sum_{A,B} \int_x \frac{\kappa_{AB}}{2} (\partial^2 h^A(x)) (\partial^2 h^B(x)) + \sum_{A,B} \int_{x,y} \frac{k^\varepsilon}{4} (\partial_a h^A(x) \cdot \partial_b h^A(x)) \mathcal{R}_{AB}^{abcd}(x-y) (\partial_c h^B(y) \cdot \partial_d h^B(y)) \\
&+ \sum_{A,B} \int_x \frac{\mathcal{C}_h^{AB}}{2} (\partial^2 h_A(x)) (\partial^2 h_B(x)) + \sum_{A,B} \int_{x,y} \frac{k^\varepsilon}{4} (\partial_a h^A(x) \cdot \partial_b h^A(x)) \mathcal{C}_{\mathcal{R},AB}^{abcd}(x-y) (\partial_c h^B(y) \cdot \partial_d h^B(y)) \\
&= \sum_{A,B} \int_x \frac{Z_{\kappa} \delta_{AB} - Z_{\Delta_{\kappa}} J_{AB}}{2} (\partial^2 h^A(x)) (\partial^2 h^B(x)) \\
&+ \sum_A \int_{x,y} \frac{k^\varepsilon}{4} (\partial_a h^A(x) \cdot \partial_b h^A(x)) \left[Z_b b N^{abcd}(x-y) + Z_\mu \mu M^{abcd}(x-y) \right] (\partial_c h^A(y) \cdot \partial_d h^A(y)) \\
&- \sum_{A,B} \int_{x,y} \frac{k^\varepsilon}{4} (\partial_a h^A(x) \cdot \partial_b h^A(x)) \left[Z_{\Delta_b} \Delta_b N^{abcd}(x-y) + Z_{\Delta_\mu} \Delta_\mu M^{abcd}(x-y) \right] (\partial_c h^B(y) \cdot \partial_d h^B(y)) .
\end{aligned} \tag{6.121}$$

En schéma minimal, les contretermes sont simplement donnés par les parties divergentes des contributions à une boucle. Cependant, pour prendre en compte la présence de D explicitement dans l'action, nous rappelons que nous avons choisi d'effectuer un développement partiel en ε où les occurrences de D venant de l'action ne sont pas développées (voir Chapitre 3). En pratique, cela revient à remplacer le facteur 5 du contreterme associé à b , qui est en réalité un $D + 1$, par $5 - \varepsilon$. Les contretermes s'écrivent alors :

- Contreterme de champ :

$$\mathcal{C}_h^{AB} = \begin{array}{c} A \\ \times \\ B \end{array} = \frac{5((b+2\mu)(1+\Delta_\kappa) - (\Delta_b + 2\Delta_\mu))}{96\pi^2 \varepsilon} \delta^{AB} - \frac{5\Delta_\kappa(\Delta_b + 2\Delta_\mu)}{96\pi^2 \varepsilon} J^{AB} . \tag{6.122}$$

- Contretermes de vertex :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\mathcal{R},AB}^{abmn}(p) &= \begin{array}{c} a A \\ \diagdown \quad \diagup \\ \square \\ \diagup \quad \diagdown \\ b A \end{array} \begin{array}{c} m B \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ n B \end{array} = \mathcal{C}_b^{AB} N^{abmn}(p) + \mathcal{C}_\mu^{AB} M^{abmn}(p) \\
&= - \left[\frac{(5-\varepsilon)b^2 d_c(1+2\Delta_\kappa)}{192\pi^2 \varepsilon} \delta^{AB} + \frac{(5-\varepsilon)b d_c(b\Delta_\kappa^2 - 2\Delta_b(1+2\Delta_\kappa))}{192\pi^2 \varepsilon} \right] N^{abmn}(p) \\
&= - \left[\frac{\mu^2 d_c(1+2\Delta_\kappa)}{96\pi^2 \varepsilon} \delta^{AB} + \frac{d_c \mu(\mu\Delta_\kappa^2 - 3\Delta_\mu(1+2\Delta_\kappa))}{96\pi^2 \varepsilon} J^{AB} \right] M^{abmn}(p) .
\end{aligned} \tag{6.123}$$

Les expressions des graphes étant longues, elles ne sont pas données ici. Elles se trouvent à la fin de l'Annexe D.

Finalement, les fonctions β à deux boucles en présence de désordre s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\beta_\mu &= (-\varepsilon + 2\eta)\mu + \frac{\mu^2 d_c (2\Delta_\kappa + 1)}{96\pi^2} \\
&\quad + \frac{\mu^2 d_c (17b(\Delta_\kappa + 1)(3\Delta_\kappa + 1) - (4\Delta_\kappa + 1)(17\Delta_b + 94\Delta_\mu) + 94(\Delta_\kappa + 1)(3\Delta_\kappa + 1)\mu)}{55296\pi^4} \\
\beta_b &= (-\varepsilon + 2\eta)b + \frac{5b^2 d_c (2\Delta_\kappa + 1)}{192\pi^2} \\
&\quad + \frac{5b^2 d_c (-3bd_c(2\Delta_\kappa + 1)^2 + 5b(\Delta_\kappa + 1)(3\Delta_\kappa + 1) - 5(4\Delta_\kappa + 1)(\Delta_b + 14\Delta_\mu) + 70(\Delta_\kappa + 1)(3\Delta_\kappa + 1)\mu)}{110592\pi^4} \\
\beta_{\Delta_\mu} &= (-\varepsilon + 2\eta)\Delta_\mu + \frac{\mu d_c ((4\Delta_\kappa + 2)\Delta_\mu - \Delta_\kappa^2 \mu)}{96\pi^2} + \frac{\mu d_c}{55296\pi^4} \left[-34b(\Delta_\kappa + 1)(\Delta_\kappa^2 \mu + (-3\Delta_\kappa - 1)\Delta_\mu) \right. \\
&\quad \left. + 51\Delta_b \Delta_\kappa^2 \mu - 2(4\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu(17\Delta_b + 94\Delta_\mu) - 188(\Delta_\kappa + 1)\Delta_\kappa^2 \mu^2 + 94(\Delta_\kappa(9\Delta_\kappa + 8) + 2)\Delta_\mu \mu \right] \\
\beta_{\Delta_b} &= (-\varepsilon + 2\eta)\Delta_b + \frac{5bd_c(\Delta_b(4\Delta_\kappa + 2) - b\Delta_\kappa^2)}{192\pi^2} + \frac{5bd_c}{110592\pi^4} \left[2b^2 \Delta_\kappa^2 (d_c(6\Delta_\kappa + 3) - 5(\Delta_\kappa + 1)) \right. \\
&\quad \left. + b(\Delta_b(-9d_c(2\Delta_\kappa + 1)^2 + 5\Delta_\kappa(9\Delta_\kappa + 8) + 10) + 70\Delta_\kappa^2(3\Delta_\mu - 2(\Delta_\kappa + 1)\mu)) - 10\Delta_b(4\Delta_\kappa + 1)(\Delta_b + 14\Delta_\mu) \right. \\
&\quad \left. + 140\Delta_b(\Delta_\kappa + 1)(3\Delta_\kappa + 1)\mu \right] \\
\beta_{\Delta_\kappa} &= \eta\Delta_\kappa - \frac{5\Delta_\kappa(\Delta_b + 2\Delta_\mu)}{96\pi^2} + \frac{\Delta_\kappa}{221184\pi^4} \left[5(19b^2 d_c \Delta_\kappa^2 - 2b\Delta_b(19d_c(2\Delta_\kappa + 1) + 10(\Delta_\kappa + 1))) + 200b(\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu \right. \\
&\quad \left. + 150(\Delta_b + 2\Delta_\mu)^2 - 8\mu(175\Delta_b(\Delta_\kappa + 1) + 37d_c(2\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu + 50(\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu) + 148d_c \Delta_\kappa^2 \mu^2 \right] \\
\eta &= \frac{(5 + \varepsilon)((b + 2\mu)(1 + \Delta_\kappa) - (\Delta_b + 2\Delta_\mu))}{96\pi^2} + \frac{1}{221184\pi^4} \left[5b^2(19d_c(1 + 3\Delta_\kappa(1 + \Delta_\kappa)) + 10(\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa + 1)) \right. \\
&\quad \left. + 10b(\Delta_b(-19d_c - 10)(2\Delta_\kappa + 1) + 20((-8\Delta_\kappa - 1)\Delta_\mu + \Delta_\kappa(2\Delta_\kappa + 3)\mu + \mu)) + 50(\Delta_b + 2\Delta_\mu)^2 \right. \\
&\quad \left. - 8\mu(25\Delta_b(1 - 4\Delta_\kappa) + (37d_c + 50)(2\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu) + 4\mu^2(37d_c(3\Delta_\kappa(\Delta_\kappa + 1) + 1) + 50(\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa + 1)) \right] \\
\eta' &= \eta + \frac{\beta_{\Delta_\kappa}}{\Delta_\kappa} .
\end{aligned} \tag{6.124}$$

Il n'est pas simple de résoudre analytiquement les équations de points fixes associées avec autant de variables. De plus, comme l'expression de l'hypersurface utilisée pour réduire le nombre de variables dépend explicitement de D , elle n'apparaît pas naturellement comme une hypersurface attractrice dans le développement en ε au-delà de l'ordre le plus bas. Nous devons donc travailler avec les cinq constantes de couplage μ , b , Δ_μ , Δ_b et Δ_κ . Pour étudier l'approche des points fixes gouvernés par le désordre, suivant l'approche de [Morse 1992], nous remplaçons Δ_κ , qui diverge à \mathbf{P}_5 , par $g_\mu = \mu\Delta_\kappa$, et b par $g_b = b\Delta_\kappa$.

Cependant, puisque les positions de \mathbf{P}_5 et \mathbf{P}_c à une boucle sont confondues d'après le développement des équations NPRG en ε , il est possible de chercher toutes les expressions des constantes de couplage à l'ordre $O(\varepsilon^2)$ qui se raccordent à (6.54) à l'ordre $O(\varepsilon)$, et qui annulent

les fonctions β à l'ordre $O(\varepsilon^4)$. Les solutions sont données par :

$$\begin{aligned}
\mu^* &\underset{\varepsilon \ll 1}{=} c_\mu \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \\
\Delta_\mu^* &\underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{24\pi^2 \varepsilon}{6+d_c} - \frac{36\pi^2(9+26d_c)\varepsilon^2}{5(6+d_c)^3} - c_\mu \frac{d_c(24+d_c)\varepsilon^2}{2(6+d_c)^2} + O(\varepsilon^3) \\
\Delta_b^* &\underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{48\pi^2 \varepsilon}{5(6+d_c)} + \frac{24(45+2d_c(d_c-27))\varepsilon^2}{25(6+d_c)^3} - c_\mu \frac{d_c(24+d_c)\varepsilon^2}{5(6+d_c)^2} + O(\varepsilon^3) \\
g_\mu^* &\underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{48\pi^2 \varepsilon}{6+d_c} - \frac{72\pi^2(9+26d_c)\varepsilon^2}{5(6+d_c)^3} - c_\mu \frac{(72+54d_c+d_c^2)\varepsilon}{2(6+d_c)^2} + O(\varepsilon^3) \\
g_b^* &\underset{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{96\pi^2 \varepsilon}{5(6+d_c)} + \frac{48(45+2d_c(d_c-27))\varepsilon^2}{25(6+d_c)^3} - c_\mu \frac{(72+54d_c+d_c^2)\varepsilon}{5(6+d_c)^2} + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{6.125}$$

Le coefficient c_μ n'est en revanche pas déterminé. En effet, la fonction β_μ est telle que :

$$\beta_\mu(\mu = c_\mu \varepsilon^2, \Delta_\mu = \frac{24\pi^2 \varepsilon}{6+d_c}, \Delta_b = \frac{48\pi^2 \varepsilon}{5(6+d_c)}, g_\mu = \frac{48\pi^2 \varepsilon}{6+d_c}, g_b = \frac{96\pi^2 \varepsilon}{5(6+d_c)}) \underset{\varepsilon \ll 1}{=} O(\varepsilon^4), \tag{6.126}$$

et ce quelle que soit la valeur des corrections à l'ordre sous-dominant. Les valeurs propres de la matrice jacobienne associée au flot de renormalisation au point fixe de position c_μ sont données par :

$$\text{Sp}(\mathbf{J}_{\mathbf{c}_\mu}) = \left\{ -\frac{c_\mu \varepsilon^2}{56}; \varepsilon; \varepsilon; \varepsilon; \varepsilon \right\}. \tag{6.127}$$

Dans le cas où $c_\mu = 0$, ce qui correspond à la situation à une boucle, le point fixe est bien marginal, mais s'il existe un point fixe avec $c_\mu \neq 0$, celui-ci est répulsif dans une direction, comme attendu pour \mathbf{P}_c .

Pour expliquer pourquoi le calcul à deux boucles ne permet pas de déterminer la valeur de c_μ , considérons le raisonnement suivant : \mathbf{P}_c est un point fixe avec $\mu^* \sim \varepsilon^2$ et $g_\mu^* \sim \varepsilon$, soit $\Delta_\kappa^* \sim 1/\varepsilon$. Par conséquent, le coefficient de g_μ^* par rapport à ε^2 , qui permet de discriminer \mathbf{P}_c et \mathbf{P}_5 , dépend à la fois du coefficient c_μ de μ^* par rapport à ε^2 , mais aussi de son coefficient par rapport à ε^3 . Il se peut donc que le contenu de la théorie aux ordres suivants soit nécessaire pour déterminer la position de ce point fixe dans le développement en couplage faible.

En conclusion, les résultats du calcul à deux boucles ne sont pas incompatibles avec l'existence du point fixe \mathbf{P}_c , mais ne permettent pas de trancher sur la question de son existence.

6.2.4.3 Au-delà de l'ordre sous-dominant

Il est naturel de se demander si la question de l'existence de \mathbf{P}_c est tranchée par l'analyse des ordres suivants du développement en boucles. Un calcul exploratoire à trois boucles a été commencé dans la théorie sans désordre : les graphes à trois boucles sans contretermes, et avec les contretermes (6.122) et (6.123) issus de la renormalisation à une boucle ont été calculés dans la théorie effective (résultats dans l'Annexe D). Cependant, l'obtention des expressions correctes des contretermes issus du calcul à deux boucles nécessite une analyse très précise des occurrences de D n'étant pas développées dans le cadre du développement partiel en ε qui manque encore à ce jour. Si ce calcul aboutit, il ouvrira également la voie à la possibilité d'effectuer une resommation de la série perturbative qui permettrait de donner un nouvel angle de vue complémentaire sur le problème.

6.3 Thermodynamique dans la phase plate désordonnée

Le développement LPA' prédit l'existence d'une nouvelle phase plate dans laquelle le rôle joué par les impuretés est important, stable à des températures suffisamment basses, ou des densités de défauts suffisamment élevées. Même si nous ne savons pas encore déterminer exactement les densité et température critiques correspondant à cette transition de phase du second ordre, nous pouvons utiliser les outils du Chapitre 4 pour donner certaines caractéristiques de la nouvelle phase plate rugueuse, et faciliter ainsi une éventuelle confirmation expérimentale de notre prédiction. Dans toute cette section, nous travaillerons avec $D = 2$ et $d = 3$.

6.3.1 Élasticité et courbure

À partir des caractéristiques des points fixes, nous pouvons déduire les lois d'échelle donnant l'évolution des différents coefficients d'élasticité du système avec sa taille et la température par exemple. Ces paramètres sont importants car ce sont les plus faciles à mesurer expérimentalement. L'influence de la présence de défauts dans le système dépend de la phase dans laquelle il se trouve :

- **Phase plate usuelle contrôlée par \mathbf{P}_4 :**

Pour bien identifier le changement de comportement induit par le désordre quand le système change de phase, il est utile de comprendre qualitativement l'influence du désordre même dans le régime où l'effet des fluctuations thermiques est dominant.

Considérons par exemple le module de cisaillement moyen μ . L'évolution de sa contrepartie adimensionnée $\bar{\mu}_k$, donnée par (6.99), avec des conditions initiales compatibles avec l'atteinte de \mathbf{P}_4 dans l'infrarouge, c'est-à-dire typiquement $\bar{\mu}_\Lambda \gg \bar{\Delta}_{\mu\Lambda}, \bar{\Delta}_{\kappa\Lambda}$, n'est quasiment pas affectée par la présence du désordre. Le module de cisaillement dimensionné corrigé par les fluctuations thermiques pour un système de taille L s'écrit donc encore :

$$\mu_L = \bar{\mu}_4^* \frac{\kappa}{a^2} \frac{\kappa}{k_B T} \left(\frac{L}{L_G} \right)^{-2+2\eta_4}, \quad (6.128)$$

du moins dans le régime anharmonique, que nous supposons atteint dans la suite (voir Chapitre 4). La loi d'échelle n'est pas modifiée par l'introduction de défauts.

En revanche, pour des échantillons de taille L fixée, les protocoles expérimentaux utilisés pour introduire des défauts entraînent généralement un affaiblissement de la rigidité du matériau à l'échelle microscopique. Par exemple, dans [López-Polin 2014], des échantillons de graphène sont percés à l'aide d'un laser. Les échantillons défectueux ainsi obtenus ont donc un module de cisaillement à l'échelle microscopique μ_Λ réduit par rapport à leurs homologues les plus parfaits. Bien que ce changement soit sans effet sur la forme de la loi d'échelle (6.128), il affecte la valeur de la longueur de Ginzburg L_G (4.4) qui varie selon $L_G \sim 1/\sqrt{\mu_\Lambda}$. Par conséquent, $\mu_L \sim L_G^{2-2\eta_4}$ est également affecté. La valeur du module de cisaillement corrigé par les fluctuations thermiques à l'échelle L est donc plus *grande* que celle qu'aurait un système de même taille L mais sans défauts⁹. Autrement dit, pour

9. Car $2 - 2\eta_4^* \geq 0$.

des échantillons d'un même matériau de tailles identiques, les plus défectueux sont les plus rigides.

Ce résultat peut sembler contre-intuitif à première vue mais peut s'interpréter de la façon suivante : l'augmentation de la densité de défauts a un effet antagoniste à celui des fluctuations thermiques. Or celles-ci tendent à faire chuter les valeurs des coefficients d'élasticité du système aux grandes échelles de longueur. L'introduction d'impuretés augmente la longueur de Ginzburg du système qui donne l'échelle de longueur typique à partir de laquelle les fluctuations thermiques sont efficaces. Ainsi à taille L fixée, la gamme de longueur sur laquelle le régime anharmonique s'établit est d'autant plus restreinte que le système est défectueux, et les échantillons sont donc d'autant plus rigides.

Ce phénomène a été observé expérimentalement, par exemple dans [López-Polin 2014], au niveau du module d'Young qui suit les mêmes lois d'échelle que μ (voir Chapitre 4).

Pour les mêmes raisons, l'énergie de courbure, décrite par la loi d'échelle :

$$\kappa_L = \kappa \left(\frac{L}{L_G} \right)^{\eta_4}, \quad (6.129)$$

est d'autant plus réduite que la densité de défauts est importante.

- **Phase plate rugueuse contrôlée par \mathbf{P}_5 :**

Afin de déterminer les lois d'échelle à \mathbf{P}_5 , nous allons effectuer une analyse similaire à celle utilisée pour \mathbf{P}_4 dans le Chapitre 4. Pour cela, nous allons simplifier les expressions des fonctions β dans le régime harmonique correspondant aux échelles de longueur pour lesquelles l'influence des conditions initiales est forte. La dimension anormale η_k est négligée dans l'approximation harmonique. L'échelle typique de longueur à laquelle le système quitte le régime de fluctuations harmoniques L_{dis} , qui est l'analogue de L_G pour les fluctuations thermiques, marque l'entrée dans le régime de fluctuations contrôlées par le point fixe \mathbf{P}_5 .

Considérons les variables dimensionnées μ_k , $g_{\mu k}$ et $\Delta_{\mu k}$. Comme les conditions initiales du système doivent se trouver dans le bassin d'attraction de \mathbf{P}_5 , nous pouvons supposer $\mu_\Lambda \ll \Delta_{\mu\Lambda}, \Delta_{\kappa\Lambda}$. En outre, il n'est pas nécessaire d'étudier $\partial\mu_k$ puisque $\bar{\mu}_5^* = 0$. Les fonctions β harmoniques, déduites de (6.99) et (6.102), s'écrivent alors :

$$\begin{cases} k^3 \partial_k g_{\mu k} \simeq -\frac{g_{\mu k} \Delta_{\mu k}}{3\pi} + \frac{3}{10\pi} g_{\mu k}^2 \\ k^3 \partial_k \Delta_{\mu k} \simeq \frac{3}{5\pi} g_{\mu k} \Delta_{\mu k} - \frac{1}{7\pi} g_{\mu k}^2. \end{cases} \quad (6.130)$$

D'après la forme de ces équations, nous pouvons supposer que $g_{\mu k}$ évolue plus vite que $\Delta_{\mu k}$, et remplacer $\Delta_{\mu k}$ dans $\partial_k g_{\mu k}$ par $\Delta_{\mu\Lambda}$, auquel cas l'équation d'évolution de $g_{\mu k}$ se résout, et sa solution est :

$$g_{\mu k} = \frac{10g_{\mu\Lambda}\Delta_{\mu\Lambda}}{9g_{\mu\Lambda} + (10\Delta_{\mu\Lambda} - 9g_{\mu\Lambda})e^{\frac{\Delta_{\mu\Lambda}}{6\pi}\left(\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{1}{k^2}\right)}}. \quad (6.131)$$

L'échelle typique de sortie du régime contrôlé par la condition initiale est donc :

$$k_{dis}^2 = \frac{\Delta_{\mu\Lambda}}{6\pi} , \quad (6.132)$$

soit, en restaurant les facteurs $k_B T$ et κ :

$$L_{dis}^2 = \frac{6\pi\kappa}{\Delta_{\mu\Lambda}} . \quad (6.133)$$

Cette formule est très analogue à celle qui définit L_G (4.4), si ce n'est que comme le désordre domine comparé aux fluctuations thermiques à \mathbf{P}_5 , L_{dis} est indépendante de T . Ceci peut être relié à l'asymétrie vis-à-vis de T du changement de variable (6.17) dont l'origine est la prise de valeur moyenne sur les configurations désordonnées.

Les lois d'échelle donnant l'évolution de la variance du module de cisaillement dimensionnée en fonction de la taille L du système, dont la contrepartie adimensionnée atteint une valeur finie au point fixe \mathbf{P}_5 , sont donc très similaires à celles des coefficients d'élasticité dans la phase plate usuelle si l'on excepte la perte de dépendance explicite en T :

$$\begin{cases} \Delta_{\mu L} = \overline{\Delta}_{\mu\Lambda} \frac{\kappa}{a^2} & L \leq L_{dis} \\ \Delta_{\mu L} = \overline{\Delta}_{\mu}^* \frac{\kappa}{L_{dis}^2} \left(\frac{L}{L_{dis}} \right)^{-2+2\eta_5} & L \geq L_{dis} . \end{cases} \quad (6.134)$$

L'effet des fluctuations est donc de réduire la valeur de la variance des coefficients élastiques aux grandes distances. Bien entendu, des relations similaires donnent l'évolution des variances du module d'Young Δ_y et du module de compression Δ_K .

L'évolution de g_μ est également similaire, mais ce n'est pas une grandeur observable. Pour construire l'évolution de la variance de l'énergie de courbure Δ_κ , il suffit de revenir à la définition des dimensions anormales (6.34) par exemple, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \Delta_{\kappa L} = \overline{\Delta}_{\kappa\Lambda} \kappa & L \leq L_{dis} \\ \Delta_{\kappa L} = \overline{\Delta}_{\kappa\Lambda} \kappa \left(\frac{L}{L_{dis}} \right)^{2\eta_5 - \eta'_5} & L \geq L_{dis} . \end{cases} \quad (6.135)$$

D'après les valeurs des exposants anormaux prédites par le NPRG (6.110), la variance de l'énergie de courbure est donc augmentée par les fluctuations anharmoniques de la phase plate rugueuse.

Cependant, ces variances sont rarement les quantités mesurées expérimentalement, il est donc également important d'étudier les valeurs moyennes des variables étudiées. L'évolution de l'énergie de courbure est encore donnée par l'exposant anormal η_5 :

$$\begin{cases} \kappa_L = \kappa & L \leq L_{dis} \\ \kappa_L = \kappa \left(\frac{L}{L_{dis}} \right)^{2\eta_5 - \eta'_5} & L \geq L_{dis} . \end{cases} \quad (6.136)$$

Les fluctuations anharmoniques dans cette phase tendent à rigidifier le matériau vis-à-vis des efforts de courbure, mais comme $\eta_5 < \eta_4$, cette augmentation de l'énergie de courbure avec la taille est moins importante que dans la phase plate usuelle.

Pour la moyenne des coefficients élastiques, il faut revenir à l'analyse du flot au voisinage de \mathbf{P}_5 . Comme $\bar{\mu}^* = 0$ à \mathbf{P}_5 , et que $\partial_t \bar{\mu}_k \propto \bar{\mu}_k$, la forme du jacobien du flot de renormalisation à ce point fixe \mathbf{J}_5 se simplifie :

$$\mathbf{J}_5 = \left(\begin{array}{ccc} \partial_{\bar{\mu}} \partial_t \bar{\mu}_k & \partial_{\bar{g}_\mu} \partial_t \bar{\mu}_k & \partial_{\bar{\Delta}_\mu} \partial_t \bar{\mu}_k \\ \partial_{\bar{\mu}} \partial_t \bar{g}_{\mu k} & \partial_{\bar{g}_\mu} \partial_t \bar{g}_{\mu k} & \partial_{\bar{\Delta}_\mu} \partial_t \bar{g}_{\mu k} \\ \partial_{\bar{\mu}} \partial_t \bar{\Delta}_{\mu k} & \partial_{\bar{g}_\mu} \partial_t \bar{\Delta}_{\mu k} & \partial_{\bar{\Delta}_\mu} \partial_t \bar{\Delta}_{\mu k} \end{array} \right)_{\mathbf{P}_5} = \left(\begin{array}{ccc} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{array} \right). \quad (6.137)$$

Le flot de $\bar{\mu}_k$ au voisinage de \mathbf{P}_5 est donc donné par une des valeurs propres de \mathbf{J}_5 , qui correspond à ϕ_5 :

$$\bar{\mu}_k \underset{\mathbf{P}_5}{\sim} k^{-\phi_5}. \quad (6.138)$$

L'inversion de la relation d'adimensionnement donne alors :

$$\mu_k = \bar{\mu}_k k^{2-2\eta_k} \underset{\mathbf{P}_5}{\sim} k^{-\phi_5+2-2\eta_5} \underset{\mathbf{P}_5}{\sim} k^{2-\eta_5-\eta'_5}, \quad (6.139)$$

soit finalement, en restaurant tous les facteurs κ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu = L = \bar{\mu}_\Lambda \frac{\kappa}{a^2} & L \leq L_{dis} \\ \mu_L = \bar{\mu}_\Lambda \frac{\kappa}{L_{dis}^2} \left(\frac{L}{L_{dis}} \right)^{-2+\eta_5+\eta'_5} & L \geq L_{dis}. \end{array} \right. \quad (6.140)$$

D'après (6.110), la chute de la valeur du module de cisaillement avec la taille du système est donc plus importante que dans la phase plate usuelle. Des lois d'échelle similaires s'appliquent pour l'évolution du module de compression et du module d'Young.

De même que L_G est sensible à μ_Λ , L_{dis} est sensible à la variance des coefficients élastiques. Notamment, d'après (6.133), L_{dis} est d'autant plus *faible* que la densité de défauts est *grande*. Par conséquent, $\mu_L \sim L_{dis}^{2-\eta_5-\eta'_5}$ est d'autant plus faible, à taille fixée, que la densité de défauts est importante, cet effet étant amplifié par la décroissance de μ_Λ induite dans la plupart des protocoles de génération de défauts discutée précédemment.

Ce changement de comportement des coefficients de l'élasticité correspond à l'effet observé dans [López-Polin 2014] : les modules d'Young d'échantillons de graphène identiques percés à l'aide d'un laser sont comparés. À faible densité de défauts, le module d'Young est d'autant plus *grand* que la densité de défauts est grande, mais au-delà d'une densité critique de défauts (correspondant à la transition entre la phase plate usuelle et la phase plate rugueuse?) le module d'Young devient une fonction décroissante de la densité de défauts introduits (voir Figure 6.9). Il est bien sûr prématuré d'affirmer que ce qui a été observé correspond exactement aux effets prédits par la transition de phase exhibée dans les équations NPRG, mais ce scénario est au moins plausible. Cela illustre bien la nécessité actuelle d'obtenir plus de données du côté expérimental, et de bien caractériser la phase plate rugueuse du côté théorique, pour pouvoir tester la véracité de notre prédiction.

6.3.2 Caractéristiques thermodynamiques de la phase plate rugueuse

En plus des lois d'échelle décrivant les coefficients d'élasticité et l'énergie de courbure dans la phase plate rugueuse, l'étude du flot de renormalisation nous renseigne sur les caractéristiques suivantes :

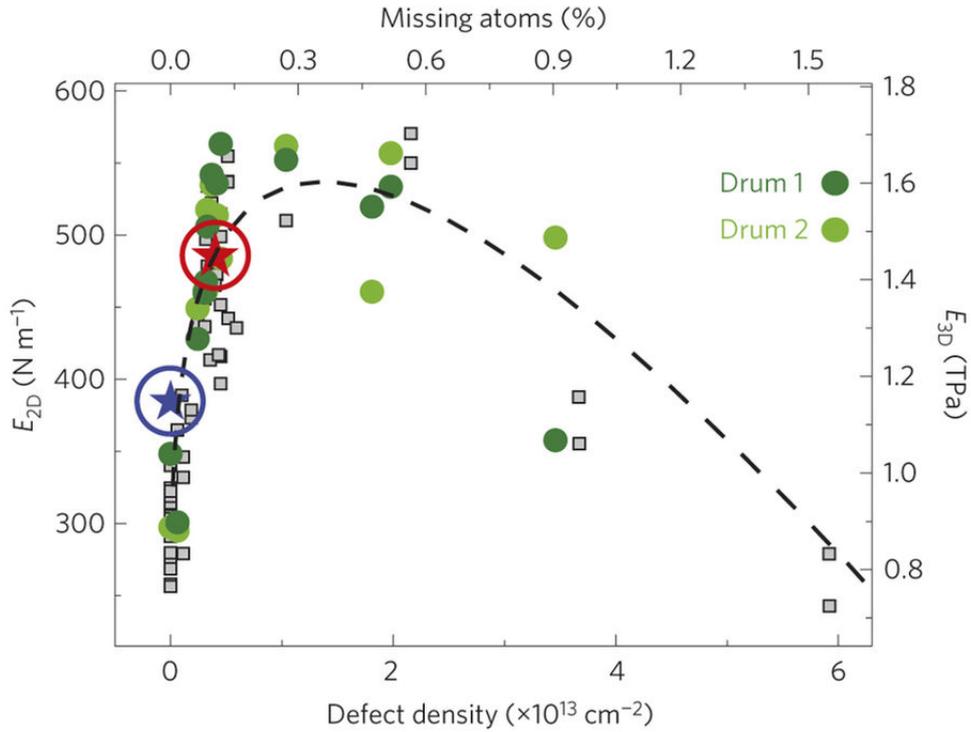


FIGURE 6.9 – Figure extraite de [López-Polin 2014] montrant l'évolution du module d'Young bidimensionnel de plusieurs échantillons de graphène avec la densité de défauts qu'ils comportent. Les points sont des données expérimentales, la ligne pointillée correspond à un ajustement de la tendance de la courbe.

- **Coefficient de Poisson :**

Puisque \mathbf{P}_5 se trouve sur l'hypersurface d'équation $(D + 1)\bar{b}^* - 2\bar{\mu}^* = 0$, le coefficient de Poisson vaut encore $\nu^* = -1/3$. L'introduction de désordre ne brise pas l'auxétisme de la phase plate sous ces conditions. De même que dans le cas de la phase plate habituelle, l'observation de ce comportement nécessite l'application d'efforts modérés sur le matériau, sans quoi celui-ci subit la transition de flambage et se trouve dans la phase sur-étirée dans laquelle la valeur de ν n'est plus universelle.

- **Rugosité :**

Puisqu'elle est caractérisée par $\zeta_0 \neq 0$, la phase plate rugueuse possède un ordre orientationnel à longue portée, autrement dit les vecteurs normaux à la surface sont en moyenne orientés dans la même direction, c'est ce qui justifie la conservation de l'appellation « phase plate ». Cependant, à une température non nulle donnée, la configuration de la membrane n'est pas complètement plate, mais est ondulée. Afin de comparer le caractère plissé dans cette phase à ce qu'il en est dans la phase plate usuelle, un outil intéressant est l'exposant de rugosité ψ défini à partir de comportement à grande distance des fluctuations quadratiques de hauteur par (voir par exemple [LeDoussal 2017]) :

$$\langle (h(x) - h(0))^2 \rangle \propto x^{2\psi} . \quad (6.141)$$

L'étude de ψ est d'autant plus importante que celui-ci est mesurable à travers l'étude de la diffraction de rayons X par la surface de la membrane. D'après les définitions (6.34) des exposants anormaux, celui-ci est relié à η par :

$$\langle (h(x) - h(0))^2 \rangle = 2 \int_k (1 - e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}) \langle h(k)h(-k) \rangle \propto x^{4-D-\eta} \propto x^{2\psi} . \quad (6.142)$$

La phase plate usuelle est donc caractérisée par un exposant de rugosité (universel) :

$$\psi_4 = 1 - \frac{\eta_4}{2} \simeq 0,56 , \quad (6.143)$$

alors que celui de la phase plate rugueuse est :

$$\psi_5 = 1 - \frac{\eta_5}{2} \simeq 0,78 . \quad (6.144)$$

L'aspect d'une même membrane sera donc plus fortement plissé à une température donnée dans la phase plate rugueuse que dans la phase plate usuelle, ce qui justifie cette dénomination. Ce résultat est à mettre en relation avec l'affaiblissement de l'exposant anormal η dans la phase plate rugueuse : toutes choses égales par ailleurs, l'énergie de courbure d'une membrane dans la phase plate rugueuse sera plus faible que dans la phase plate usuelle, les fluctuations de hauteur sont donc moins énergétiquement pénalisées dans le premier cas, ce qui conduit à cet aspect plus « rugueux ».

Notons que cette prédiction va dans le même sens que l'observation expérimentale conduite dans l'étude [Mutz 1991] : des vésicules partiellement polymérisées se plissent lorsqu'elles sont refroidies. Les auteurs mentionnent également la réversibilité de cette transition de phase. Si leur observation correspondait à la transition entre \mathbf{P}_4 et \mathbf{P}_5 via \mathbf{P}_c tout serait cohérent : la transition s'effectue si la température décroît suffisamment, la phase plate à \mathbf{P}_5 est d'aspect plus plissée que celle à \mathbf{P}_4 , et cette transition est du second ordre, donc elle est réversible : un réchauffement du système permet de changer de nouveau le bassin d'attraction dans lequel se situe la condition initiale du flot de renormalisation. Comme il est un peu prématuré de conclure que [Mutz 1991] constitue une observation de ce que nous prédisons, nous préférons conserver deux appellations différentes : phase plate plissée et phase plate rugueuse pour l'instant.

- **Coefficient d'expansion thermique :**

Le coefficient d'expansion thermique α est obtenu à partir de l'intégration du flot du paramètre d'extension ζ_k . D'après (6.97), celui-ci s'écrit dans la limite de phase plate :

$$\partial_t \zeta_k^2 = \frac{1}{4\pi} (l_{100}^4 + \Delta_{\kappa k} l_{200}^8) . \quad (6.145)$$

À partir d'une condition initiale dans le bassin d'attraction de \mathbf{P}_5 , α est déduit de la valeur ζ_0 de ζ_k dans la limite infrarouge par la relation $\alpha = \partial \zeta_0^2 / \partial T$ (voir Chapitre 4). Les résultats obtenus pour des températures proches de la température ambiante sont représentés sur la Figure 6.10.

Ces résultats appellent quelques commentaires :

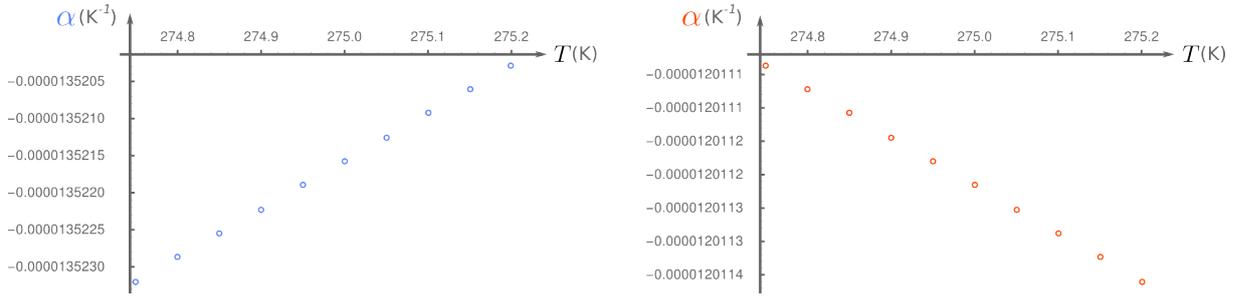


FIGURE 6.10 – Évolution du coefficient d'expansion thermique au voisinage de la température ambiante dans la phase plate pour un matériau avec des coefficients élastiques à l'échelle microscopique proches de ceux du graphène. À gauche : pour une densité de défauts modérée, le matériau est dans la phase plate usuelle. À gauche : pour une densité de défauts suffisamment élevée, le matériau est dans la phase plate rugueuse.

- même si la valeur de α peut varier d'un matériau à l'autre, il est toujours négatif dans la phase plate rugueuse, ce qui signifie que de tels matériaux se contractent lorsqu'ils sont chauffés ;
- contrairement à ce qui se passe dans la phase plate usuelle, α est une fonction décroissante de T dans la phase plate rugueuse¹⁰. En outre, sa dépendance en T est encore plus faible que dans la phase plate usuelle. L'équation d'état approchée :

$$\zeta_0^2 = 1 + \alpha T + \frac{\sigma_L^{ext}}{K_L} \quad (6.146)$$

est donc encore valable dans ce régime. Les raisonnements du Chapitre 4 s'appliquent donc encore dans cette phase ;

- la valeur absolue de α dans la phase plate rugueuse est plus faible que dans la phase plate habituelle ; la dilatation, ou la contraction du matériau à cause d'un changement de température est donc moins important dans cette phase. Ceci est à mettre en relation avec l'aspect plus rugueux des membranes dans cette phase qui rend moins efficaces les changements de volume.

Faute de temps, la détermination des chaleurs spécifiques et leur comparaison aux valeurs dans la phase plate usuelle n'ont pas été effectuées.

6.3.3 Loi de Hooke - Transition de flambage

Enfin, l'étude des équations de flot en présence d'un champ de contraintes externes renseigne sur la réaction des matériaux dans la phase plate rugueuse à des déformations induites par un opérateur extérieur. La méthode la plus simple consiste à se placer à volume fixé, et à considérer le flot de la tension adimensionnée au voisinage de \mathbf{P}_5 , qui détermine les exposants critiques à la transition de flambage ν_σ^{dis} et δ_σ^{dis} , reliés à l'expression de la modification de la loi de Hooke par les fluctuations anharmoniques (voir Chapitre 4).

¹⁰. Il faut cependant prendre garde au fait que ces résultats ne s'extrapolent pas à des températures arbitrairement hautes, à cause de la transition de froissement.

Le champ de tension couple des répliques identiques du système [Morse 1992], il intervient donc dans $\Gamma_k[\vec{r}]$ sous la forme du terme suivant :

$$\sum_A \int_x \frac{\sigma_k}{2} (\partial_i \vec{r}^A \cdot \partial^i \vec{r}^A - D \zeta_k^2) . \quad (6.147)$$

Grâce aux grandes similarités entre les formes de l'action avec et sans désordre, son équation de flot est très similaire à celle dans la phase plate usuelle, mis à part un terme proportionnel à Δ_κ , comme dans (6.145). Afin d'obtenir la dépendance en D des exposants critiques, nous travaillons à D quelconque, même si l'application intéressante est $D = 2$. Comme auparavant, le flot de σ_k fait intervenir des fonctions de seuil massives :

$$\partial_t \sigma_k = 2v_D d_c K_k \left(l_{100}^{D+2}(0) + \Delta_{\kappa k} l_{200}^{D+6}(0) - l_{100}^{D+2}(\sigma_k) - \Delta_{\kappa k} l_{200}^{D+6}(\sigma_k) \right) . \quad (6.148)$$

Afin d'étudier le voisinage de \mathbf{P}_5 , il est utile d'utiliser un développement en puissances de $\bar{\sigma}_k$ (qui vaut 0 au point fixe) :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\sigma}_k &= -(2 - \eta_k) \bar{\sigma}_k + 2v_D d_c \bar{K}_k \left(\bar{l}_{100}^{D+2}(0) + \bar{\Delta}_{\kappa k} \bar{l}_{200}^{D+6}(0) - \bar{l}_{100}^{D+2}(\bar{\sigma}_k) - \bar{\Delta}_{\kappa k} \bar{l}_{200}^{D+6}(\bar{\sigma}_k) \right) \\ &\stackrel{\bar{\sigma}_k \ll 1}{=} -(2 - \eta_k) \bar{\sigma}_k + 2v_D d_c \bar{K}_k \left(\bar{\sigma}_k \bar{l}_{200}^{D+4}(0) + 2\bar{\Delta}_{\kappa k} \bar{l}_{300}^{D+8}(0) \right) + O(\bar{\sigma}_k^2) , \end{aligned} \quad (6.149)$$

où, d'après (6.99), nous reconnaissons encore une fois la partie dimensionnelle du flot de \bar{K}_k , ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\sigma}_k \stackrel{\bar{\sigma}_k \ll 1}{=} & -(2 - \eta_k) \bar{\sigma}_k + \bar{\sigma}_k \frac{(\partial_t \bar{K}_k - (D - 4 + 2\eta_k) \bar{K}_k)}{\bar{K}_k} + O(\bar{\sigma}_k^2) \\ \stackrel{\bar{\sigma}_k \ll 1}{=} & -(D - 2 + \eta_k) \bar{\sigma}_k + \bar{\sigma}_k \frac{\partial_t \bar{K}_k}{\bar{K}_k} + O(\bar{\sigma}_k^2) . \end{aligned} \quad (6.150)$$

Finalement, puisqu'au voisinage du point fixe \mathbf{P}_5 , le comportement de \bar{K}_k est le même que celui de $\bar{\mu}_k$ donné par (6.138), le terme vert est égal à ϕ_k . Le flot de $\bar{\sigma}_k$ est donc enfin donné par :

$$\partial_t \bar{\sigma}_k \stackrel{\bar{\sigma}_k \ll 1}{=} -(D - 2 + \eta_k + \phi_k) \bar{\sigma}_k + O(\bar{\sigma}_k^2) . \quad (6.151)$$

En appliquant les mêmes raisonnements que dans le Chapitre 4, nous déduisons les exposants critiques suivants :

$$\begin{aligned} \nu_\sigma^{dis} &= \frac{1}{D - 2 + \eta_5 + \phi_5} = \frac{1}{D - 2 + \eta_5'} \\ \delta_\sigma^{dis} &= \frac{2 - \eta_5}{D - 2 + \eta_5 + \phi_5} = \frac{2 - \eta_5}{D - 2 + \eta_5'} , \end{aligned} \quad (6.152)$$

qui sont cohérents avec ceux prédits dans [LeDoussal 2017] si l'on excepte le fait que, \mathbf{P}_5 étant marginal dans ce dernier travail, les auteurs ne font pas de différence entre η_5 et η_5' . Pour des matériaux réels, grâce à (6.110), nous obtenons :

$$\nu_\sigma^{dis} \simeq 4,41 \quad , \quad \delta_\sigma^{dis} \simeq 7,81 . \quad (6.153)$$

D'après la valeur relativement élevée de δ_σ^{dis} (rappelons que la loi de Hooke habituelle correspond à $\delta = 1$), nous déduisons que les matériaux dans la phase plate rugueuse sont très résistants aux déformations, même comparés à ceux qui sont dans la phase plate usuelle où $\delta_\sigma \simeq 1,36$.

6.4 Conclusion

En conclusion, l'application du développement LPA' à l'action effective décrivant les membranes cristallines en présence de contraintes locales et courbure spontanée aléatoires conduit à la description d'une transition de phase entre une phase plate rugueuse et la phase plate usuelle décrite dans le Chapitre (4). Cette transition est distincte des transitions vers des phases vitreuses discutées dans [Nelson 1991, Radzihovsky 1991], et n'a pas été décrite par les autres approches, notamment parce qu'elle met en jeu du contenu au-delà de l'ordre le plus bas dans les développements en couplage faible. Notre étude du développement en ε aux ordres supérieurs révèle qu'il est nécessaire de pousser le développement au moins à l'ordre trois pour y avoir accès.

Cette transition de phase est qualitativement en bon accord avec les effets observés expérimentalement [Mutz 1991, López-Polin 2014], mais le manque de données à la fois du côté théorique et expérimental ne permet pas encore de trancher aujourd'hui. Notamment, nous n'avons pas encore identifié précisément le paramètre qui contrôle la transition de phase. Afin de faciliter cette hypothétique vérification, nous avons déterminé certaines des propriétés de la phase plate rugueuse, notamment des exposants critiques et un coefficient de Poisson qui sont universels.

Outre les travaux en cours mentionnés dans le corps du chapitre, il serait intéressant d'utiliser les méthodes du Chapitre 5 pour examiner comment les comportements décrits ici sont modifiés à basse température, d'autant plus que la transition vers la phase plate rugueuse s'effectue pour une membrane défectueuse par refroidissement, ainsi que l'effet de corrélations à longue portée induites par le désordre qui enrichissent sensiblement le diagramme des phases [Nelson 1992, LeDoussal 2017].

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce manuscrit présente l'étude de différentes problématiques liées à la stabilité de la phase plate des membranes cristallines par des méthodes du groupe de renormalisation, et particulièrement des méthodes non-perturbatives en couplage basées sur l'étude de l'action effective moyenne. Ce travail porte à la fois sur des aspects formels liés à la recherche d'un formalisme efficace pour décrire ces systèmes et sur la relation entre ce formalisme et les observables physiques, mesurables, qui permettent de comprendre le comportement des objets décrits.

Le premier résultat important est apporté par l'étude du développement en couplage faible au voisinage de la dimension critique supérieure à l'ordre de deux boucles. Celui-ci a donné un argument de plus en faveur du schéma de troncation LPA' en montrant que le contenu en impulsion, négligé dans cette approche, ne joue pas de rôle important dans la description de la phase plate; mais il a aussi révélé les pathologies qui apparaissent dans le développement en ε au-delà de l'ordre le plus bas et rendent difficile l'amélioration des résultats déjà obtenus par ces approches. De plus nous avons exhibé un cas dans lequel les ordres les plus bas de ce développement se révèlent insuffisants : la description des membranes cristallines en présence d'impuretés. Le développement en faibles gradients du champ de position apparaît donc comme un outil particulièrement efficace pour la description de la phase plate, et, de manière générale, des situations dans lesquelles les configurations présentant une orientation privilégiée pour les vecteurs normaux à la membrane jouent un rôle majeur.

Ce développement a été appliqué à l'étude des propriétés thermodynamiques de la phase plate, contrôlées par l'influence des fluctuations thermiques fortement anharmoniques. Dans la phase plate, les matériaux sont anormalement rigides vis-à-vis des efforts de courbure, mais les fluctuations thermiques entraînent une décroissance lente de la valeur des différents modules d'élasticité en fonction de la taille du système. Témoin de cette rigidification anormale, la loi de Hooke est modifiée dans la phase plate car des efforts plus importants sont nécessaires pour obtenir une déformation donnée. La généralisation du formalisme utilisé au cas où une contrainte est appliquée par un opérateur extérieur donne également accès aux exposants critiques à la transition de flambage, ainsi qu'à la description de la phase sur-étirée dans laquelle les lois de l'élasticité conventionnelle sont restaurées. Le diagramme des phases complet dans l'espace (L, σ, T) a été établi. Les matériaux bidimensionnels dans la phase plate sont également des auxétiques à température ambiante, de coefficient de Poisson $\nu^* = -1/3$, ce qui ouvre la possibilité à de nombreuses applications. Mais les équations de flot de renormalisation ne donnent pas seulement accès à des quantités universelles, grâce à son efficacité particulière pour décrire la phase plate, le développement LPA' est également le premier à pouvoir donner des prédictions quantitatives pour tous les coefficients thermoélastiques et les chaleurs spécifiques des membranes cristallines. L'accord quantitatif avec des valeurs expérimentales et numériques dans le cas particulier du graphène est satisfaisant.

La prise en compte des fluctuations quantiques nous a ensuite permis de décrire le secteur de basse température du diagramme des phases. En outre, le caractère gaussien des fluctuations quantiques permet une restauration des lois de l'élasticité conventionnelle quand la température

est faible. Nous avons également discuté des liens entre la température et l'échelle de longueur choisie pour décrire le système dans la détermination du type de fluctuations dominantes. Une conséquence particulière de cela est la grande variabilité d'échelles de températures qui peuvent être définies comme des températures d'entrée dans le régime quantique suivant le type d'observables que l'on cherche à décrire, qui varie entre 10^{-5} K et 10^2 K dans le cas d'un échantillon de graphène standard, suivant que l'on cherche à décrire l'influence des fluctuations quantiques sur les modules d'élasticité ou sur le coefficient d'expansion thermique, par exemple. Ce travail n'est pour autant pas complètement terminé. Notamment une amélioration des procédures numériques utilisées pour calculer les coefficients thermoélastiques et les chaleurs spécifiques à basse température est souhaitable. D'autre part, la grande complexité des équations de flot à basse température nous a jusqu'à présent empêché de décrire les effets au voisinage de la température nulle, tels que l'exposant n caractérisant la mise à zéro du coefficient d'expansion thermique $\alpha(T) \underset{T \rightarrow 0}{\sim} T^n$.

Enfin, nous avons étudié l'influence de défauts qui introduisent des contraintes locales aléatoires ou de la courbure spontanée aléatoire dans la membrane. Le développement LPA' décrit une transition de la phase plate vers une phase plate rugueuse qui a lieu lors du refroidissement de la membrane, ou de la génération d'une densité suffisamment élevée de défauts. Cet effet est qualitativement en bon accord avec plusieurs observations expérimentales, dont celles qui ont motivé les premiers travaux théoriques sur ce sujet, ce qui donne confiance en les résultats prédits par la LPA', malgré l'absence de cette transition dans les autres travaux théoriques. Dans cette phase, l'aspect de la membrane est plus rugueux, et la majorité des propriétés qualitatives de la phase plate usuelle sont conservées, si l'on excepte une décroissance beaucoup plus rapide des modules d'élasticité avec la distance, et une loi de Hooke caractérisée par un exposant δ_{σ}^{dis} nettement supérieur à celui de la phase plate, ce qui est le signe d'une grande résistance aux efforts externes. La détermination des caractéristiques de cette phase n'est pas encore aussi complète que pour la phase plate usuelle, mais d'autant plus importante ici qu'une éventuelle confirmation expérimentale serait fortement souhaitable. De plus, l'identification d'un paramètre précis contrôlant la transition fait encore défaut à ce jour.

Un des messages les plus importants à retenir de cette étude est que le développement LPA' s'avère être particulièrement efficace dans ce type de modèles pour décrire les phases possédant un ordre orientationnel fort à longue portée (il y a peu d'espoir qu'il soit approprié pour décrire la phase flambée par exemple), ce qui ouvre la voie à de multiples extensions de ce travail, dont nous mentionnons ici deux qui nous semblent importantes.

D'abord l'étude de l'effet des fluctuations quantiques sur la physique de la phase plate rugueuse, ainsi que la transition de phase associée. En effet, comme celle-ci a lieu entre deux phases plates, le développement LPA' reste valable à la transition, contrairement à ce qui se passe à la transition de froissement. Il serait notamment intéressant de savoir si dans ce cadre, une transition de phase a lieu jusqu'à la température nulle, puisqu'une telle transition de phase quantique pourrait étendre le nombre de régimes de fluctuations possibles à température non nulle et enrichir le diagramme des phases.

Enfin, il serait intéressant d'étudier la prolifération de défauts topologiques (disinclinations et dislocations) dans la phase plate, pour décrire la fusion des membranes cristallines. Des études basées sur le développement en couplage faible ont donné des premiers résultats

[Nelson 1991, Radzihovsky 1991], mais la phase plate des matériaux bidimensionnels est hors du régime d'application de ce type de méthodes. D'autre part, des études portant sur la fusion des cristaux liquides à deux dimensions [Beekman 2017] ont montré comment ces défauts peuvent être traités dans une théorie des champs basée sur la théorie de l'élasticité très similaire à la nôtre (et étendue au régime de basse température avec fluctuations quantiques), hormis l'absence d'espace de plongement et d'effets de courbure dans leur approche. Un tel travail pourrait permettre d'apporter des éléments de réponse à la comparaison entre la physique de la phase obtenue par fusion des membranes cristallines, et celle des membranes dites « fluides » (qui ne possèdent pas d'ordre orientationnel à longue portée) par exemple.

Théorie effective

Cette annexe présente les calculs permettant de construire la théorie effective de flexurons en interaction. Notre point de départ sera l'énergie libre des membranes cristallines dans la phase plate (A.1) :

$$F[u, h] = \int_x \left[\frac{\kappa}{2} (\partial^2 h)^2 + \frac{c^{abcd}}{2} u_{ab} u_{cd} + \frac{c^{abcd}}{2} u_{ab} (\partial_c h \cdot \partial_d h) + \frac{c^{abcd}}{8} (\partial_a h \cdot \partial_b h) (\partial_c h \cdot \partial_d h) \right]. \quad (\text{A.1})$$

A.1 Séparation des modes

Afin de pouvoir intégrer les phonons dans la fonction de partition, il est plus simple de séparer le phonon longitudinal des phonons transverses puisque ceux-ci n'ont pas la même pseudo-masse. Ce calcul est également plus simple à effectuer dans l'espace de Fourier, où les opérateurs dérivation sont remplacés par de simples impulsions. Les impulsions des flexurons sont notées k_i , $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$; d'après la conservation de l'impulsion, les phonons portent une impulsion $q = k_1 + k_2 = -k_3 - k_4$. La dissymétrie des deux premiers et deux derniers indices est héritée du tenseur d'élasticité dont les quatre indices ne sont pas tous interchangeables. Nous séparons donc les deux termes cinétiques :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c^{abcd} u_{ab} u_{cd} &= \frac{1}{2} \left[\lambda \delta_{ab} \delta_{cd} + \mu (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \right] \times \frac{1}{2} (q^a u^b + q^b u^a) \times \frac{1}{2} (q^c u^d + q^d u^c) \\ &= \frac{1}{2} \left[\lambda (q \cdot u)^2 + \mu (q^2 u^2 + (q \cdot u)^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} q^2 (\lambda + 2\mu) u_L^2 + \frac{1}{2} q^2 \mu u_T^2, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

puis de même, le vertex à trois points :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c^{abcd} u_{ab} (\partial_c h \cdot \partial_d h) &= \frac{1}{2} \left[\lambda \delta_{ab} \delta_{cd} + \mu (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \right] \times \frac{1}{2} (q^a u^b + q^b u^a) \times k_3^c k_4^d (h_3 \cdot h_4) \\ &= \frac{1}{2} \left[\lambda (q \cdot u) (k_3 \cdot k_4) + \mu ((q \cdot k_3) (u \cdot k_4) + (q \cdot k_4) (u \cdot k_3)) \right] (h_3 \cdot h_4) \\ &= \frac{1}{2} q (\lambda (k_3 \cdot k_4) + 2\mu k_3^L k_4^L) u_L (h_3 \cdot h_4) + \frac{1}{2} q \mu (k_3^L \vec{k}_4^T + k_4^L \vec{k}_3^T) \cdot \vec{u}_T (h_3 \cdot h_4). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La notation abrégée $h_i = h(k_i)$ est utilisée. De plus, la séparation en composantes transverses et longitudinale est étendue à tous les vecteurs.

Comme les différents types de phonons n'interagissent pas entre eux, nous obtenons deux actions distinctes : une purement longitudinale et une purement transverse :

$$\begin{aligned} S_L[u_L] &= \int_q \left[\frac{1}{2} q^2 (\lambda + 2\mu) u_L^2 + \frac{1}{2} q (\lambda(k_3.k_4) + 2\mu k_3^L k_4^L) u_L(h_3.h_4) \right] \\ S_T[u_T] &= \int_q \left[\frac{1}{2} q^2 \mu u_T^2 + \frac{1}{2} q \mu (k_3^L \vec{k}_4^T + k_4^L \vec{k}_3^T) \cdot \vec{u}_T(h_3.h_4) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Ces deux actions étant quadratiques, il est possible d'intégrer exactement sur les phonons grâce à la formule de l'intégrale gaussienne (A.5) :

$$\int_x e^{-\frac{x^2}{2a} - b.x} \propto e^{\frac{b^2 a}{2}}. \quad (\text{A.5})$$

Le facteur global est simplement la fonction de partition des phonons. Il n'intervient plus dans la suite de nos calculs.

Finalement, nous obtenons les contributions des deux actions à l'énergie libre effective :

$$\begin{aligned} S_L &\longrightarrow -\frac{1}{8} \left(\lambda^2 (k_1.k_2)(k_3.k_4) + 2\lambda\mu((k_1.k_2)k_3^L k_4^L + k_1^L k_2^L(k_3.k_4)) + 4\mu^2 k_1^L k_2^L k_3^L k_4^L \right) \frac{(h_1.h_2)(h_3.h_4)}{\lambda + 2\mu} \\ S_T &\longrightarrow -\frac{1}{8} \mu (k_1^L \vec{k}_2^T + k_2^L \vec{k}_1^T) \cdot (k_3^L \vec{k}_4^T + k_4^L \vec{k}_3^T) (h_1.h_2)(h_3.h_4). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Ces deux contributions doivent être combinées avec l'interaction à quatre flexurons déjà présente dans l'énergie libre (A.1) :

$$\frac{c^{abcd}}{8} (\partial_a h . \partial_b h) (\partial_c h . \partial_d h) = \frac{1}{8} \left[\lambda (k_1.k_2)(k_3.k_4) + \mu ((k_1.k_3)(k_2.k_4) + (k_1.k_4)(k_2.k_3)) \right] (h_1.h_2)(h_3.h_4). \quad (\text{A.7})$$

A.2 Vertex effectif

Le vertex effectif est défini à partir de la forme suivante de l'énergie libre. Comme l'intégrale sur les phonons est gaussienne, le seul vertex présent est un vertex à quatre flexurons :

$$F_{eff}[h] = \int_{k_1, k_2, k_3, k_4} \left[\frac{\kappa}{2} k_1^4 (h_1.h_2) + \frac{1}{4} \mathcal{R}_{abcd}(q) k_1^a k_2^b k_3^c k_4^d (h_1.h_2)(h_3.h_4) \right]_{q=k_1+k_2} \quad (\text{A.8})$$

Là encore, il est commode d'analyser les différentes contributions suivant un découpage en composantes transverses et longitudinales :

- $\underline{k_1^L k_2^L k_3^L k_4^L} : \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu) - \frac{4\mu^2 + 4\lambda\mu + \lambda^2}{8(\lambda + 2\mu)} = 0$
- $\underline{(\vec{k}_1^T . \vec{k}_2^T)(\vec{k}_3^T . \vec{k}_4^T)} : \frac{1}{8} \lambda - \frac{\lambda^2}{8(\lambda + 2\mu)} = \frac{1}{4} \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$
- $\underline{(\vec{k}_1^T . \vec{k}_3^T)(\vec{k}_2^T . \vec{k}_4^T)} : \frac{\mu}{8}$

- $(\vec{k}_1^T \cdot \vec{k}_4^T)(\vec{k}_2^T \cdot \vec{k}_3^T) : \frac{\mu}{8}$
- $k_1^L k_2^L (\vec{k}_3^T \cdot \vec{k}_4^T) : \frac{\lambda}{8} - \frac{\lambda^2 + 2\lambda\mu}{8(\lambda + 2\mu)} = 0$
- $(\vec{k}_1^T \cdot \vec{k}_2^T) k_3^L k_4^L : \frac{\lambda}{8} - \frac{\lambda^2 + 2\lambda\mu}{8(\lambda + 2\mu)} = 0$
- $(\vec{k}_1^T \cdot \vec{k}_3^T) k_2^L k_4^L : \frac{\mu}{8} - \frac{\mu}{8} = 0$
- $(\vec{k}_1^T \cdot \vec{k}_4^T) k_2^L k_3^L : \frac{\mu}{8} - \frac{\mu}{8} = 0$
- $k_1^L k_3^L (\vec{k}_2^T \cdot \vec{k}_4^T) : \frac{\mu}{8} - \frac{\mu}{8} = 0$
- $k_1^L k_4^L (\vec{k}_2^T \cdot \vec{k}_3^T) : \frac{\mu}{8} - \frac{\mu}{8} = 0$

La simplicité du tenseur obtenu est fortement tributaire de la troncation utilisée en (A.1). En particulier, la prise en compte des termes sous-dominants donnant l'action de la courbure sur les phonons par exemple suffit à démultiplier le nombre de composantes non nulles de $\mathcal{R}(q)$.

Ainsi, $\mathcal{R}(q)$ ne couple plus que des dérivées transverses des flexurons. Afin de simplifier son écriture, il est commode d'introduire une base des tenseurs à quatre indices adaptée au découpage transverse-longitudinal. Considérons les tenseurs suivants :

$$N_{\alpha\beta\gamma\nu} = \frac{1}{D-1} P_{\alpha\beta}^T P_{\gamma\nu}^T \quad (\text{A.9})$$

$$M_{\alpha\beta\gamma\nu} = \frac{1}{2} (P_{\alpha\gamma}^T P_{\beta\nu}^T + P_{\alpha\nu}^T P_{\beta\gamma}^T) - \frac{1}{D-1} P_{\alpha\beta}^T P_{\gamma\nu}^T .$$

Ils vérifient les identités suivantes :

$$N_{\alpha\beta\gamma\nu} N^{\gamma\nu\theta\omega} = \frac{1}{(D-1)^2} P_{\alpha\beta}^T (D-1) P_T^{\theta\omega} = N_{\alpha\beta}{}^{\theta\omega} , \quad (\text{A.10})$$

$$M_{\alpha\beta\gamma\nu} M^{\gamma\nu\theta\omega} = \frac{1}{4} (P_{\alpha\gamma}^T P_{\beta\nu}^T P_T^{\gamma\theta} P_T^{\nu\omega} + P_{\alpha\gamma}^T P_{\beta\nu}^T P_T^{\gamma\omega} P_T^{\nu\theta} + P_{\alpha\nu}^T P_{\beta\gamma}^T P_T^{\gamma\theta} P_T^{\nu\omega} + P_{\alpha\nu}^T P_{\beta\gamma}^T P_T^{\gamma\omega} P_T^{\nu\theta})$$

$$- \frac{1}{2(D-1)} (P_{\alpha\beta}^T P_T^{\theta\omega} + P_{\alpha\beta}^T P_T^{\theta\omega}) \times 2 + \frac{1}{(D-1)^2} P_{\alpha\beta}^T (D-1) P_T^{\theta\omega}$$

$$= M_{\alpha\beta}{}^{\theta\omega} , \quad (\text{A.11})$$

$$M_{\alpha\beta\gamma\nu} N^{\gamma\nu\theta\omega} = \frac{1}{2(D-1)} [2 \times P_{\alpha\beta}^T P_T^{\theta\omega}] - \frac{1}{(D-1)^2} (D-1) P_{\alpha\beta}^T P_T^{\theta\omega} = 0 = N_{\alpha\beta\gamma\nu} M^{\gamma\nu\theta\omega} . \quad (\text{A.12})$$

M et N sont donc des projecteurs orthogonaux. \mathcal{R} peut alors être décomposé sur cet ensemble :

$$\mathcal{R}_{abcd}(q) = \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} P_{ab}^T P_{cd}^T + \frac{\mu}{2} (P_{ac}^T P_{bd}^T + P_{ad}^T P_{bc}^T)$$

$$= \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{D-1}{D-1} P_{ab}^T P_{cd}^T + \mu M_{abcd} + \frac{\mu}{(D-1)} P_{ab}^T P_{cd}^T \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{\mu(\lambda D + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} N_{abcd} + \mu M_{abcd} .$$

• Remarque sur la composante continue :

La composante continue de \mathcal{R} (sa limite $q \rightarrow 0$) est mal définie dans la formule (A.13). Elle peut tout de même être définie simplement si l'intégrale gaussienne (A.5) est interprétée comme une intégrale sur le tenseur de déformation du plan $2u_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i$:

$$\mathcal{R}_{abcd}(q) = c_{abcd} - c_{aba'b'} \langle u^{a'b'} u^{c'd'} \rangle c_{c'd'cd} , \quad (\text{A.14})$$

qui a une limite bien définie lorsque q tend vers 0. En effet,

$$\begin{aligned} \langle u^{a'b'} u^{c'd'} \rangle &\underset{q \rightarrow 0}{=} \int \mathcal{D}[U] U^{a'b'} U^{c'd'} e^{-\int \frac{1}{2} c_{ijkl} U^{ij} U^{kl}} \\ &\underset{q \rightarrow 0}{=} (c^{-1})^{a'b'c'd'} . \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Un fois cette relation injectée dans (A.14), le résultat devient :

$$\mathcal{R}_{abcd}(q) \underset{q=0}{=} 0 . \quad (\text{A.16})$$

Autrement dit, le vertex d'interaction locale à quatre flexurons est exactement compensé par l'action des phonons dans la limite où leur impulsion est nulle.

A.3 Vertex effectif dans l'espace direct

$\mathcal{R}(q)$ fait intervenir différentes combinaisons de produits de deux projecteurs transverses. Nous devons donc calculer la transformée de Fourier de l'objet suivant :

$$P_T^{ab}(q) P_T^{cd}(q) = \delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ab} \frac{q^c q^d}{q^2} - \delta^{cd} \frac{q^a q^b}{q^2} + \frac{q^a q^b q^c q^d}{q^4} \quad (\text{A.17})$$

Le premier terme s'obtient directement :

$$\int_q \delta^{ab} \delta^{cd} e^{iq \cdot (x-y)} = \delta^{ab} \delta^{cd} \delta^{(D)}(x-y) . \quad (\text{A.18})$$

Les termes suivants sont déduits de l'expression de la transformée de Fourier des fonctions puissances :

$$\frac{1}{(p^2)^a} = \frac{1}{4^a \pi^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - a\right)}{\Gamma(a)} \int_x \frac{e^{ip \cdot x}}{(x^2)^{\frac{D}{2} - a}} . \quad (\text{A.19})$$

Cette formule sera démontrée dans la section A.4.

Pour obtenir les termes d'ordre supérieur, il suffit de dériver cette relation :

$$\begin{aligned} \frac{q_\mu}{(q^2)^a} &= \frac{1}{2(1-a)} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left(\frac{1}{(q^2)^{a-1}} \right) \\ &= -\frac{1}{2^{2a-1} \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - a + 1)}{\Gamma(a)} \int_x \frac{i x_\mu e^{iq \cdot x}}{(x^2)^{D/2 - a + 1}} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2)^a} &= \frac{1}{2(a-1)} \left[\frac{\delta_{\mu\nu}}{(q^2)^{a-1}} - \frac{\partial}{\partial q^\nu} \left(\frac{q_\mu}{(q^2)^{a-1}} \right) \right] \\ &= \frac{\delta_{\mu\nu}}{2^{2a-1} \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - a + 1)}{\Gamma(a)} \int_x \frac{e^{ix \cdot q}}{(x^2)^{D/2 - a + 1}} - \frac{1}{4^{a-1} \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - a + 2)}{\Gamma(a)} \int_x \frac{x_\mu x_\nu e^{iq \cdot x}}{(x^2)^{D/2 - a + 2}}. \end{aligned}$$

Soit finalement,

$$\int_q \frac{q^a q^b}{q^2} e^{iq \cdot (x-y)} = \frac{\delta^{ab}}{2\pi|x-y|^2} - \frac{(x^a - y^a)(x^b - y^b)}{\pi|x-y|^4}. \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \frac{q_\mu q_\nu q_\sigma}{(q^2)^a} &= \frac{1}{2(a-1)} \left[\delta_{\mu\sigma} \frac{q_\nu}{(q^2)^{a-1}} + \delta_{\nu\sigma} \frac{q_\mu}{(q^2)^{a-1}} - \frac{\partial}{\partial q^\sigma} \left(\frac{q_\mu q_\nu}{(q^2)^{a-1}} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4^{a-1} \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - a + 2)}{\Gamma(a)} \int_x \frac{i Z_{\mu\nu\sigma}(x) e^{ix \cdot q}}{(x^2)^{D/2 - a + 2}} \\ &\quad + \frac{1}{2^{2a-3} \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - a + 3)}{\Gamma(a)} \int_x \frac{i x_\mu x_\nu x_\sigma e^{iq \cdot x}}{(x^2)^{D/2 - a + 3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q_\mu q_\nu q_\sigma q_\theta}{(q^2)^a} &= \frac{1}{2(a-1)} \left[\frac{\delta_{\mu\theta} q_\nu q_\sigma}{(q^2)^{a-1}} + \frac{\delta_{\nu\theta} q_\mu q_\sigma}{(q^2)^{a-1}} + \frac{\delta_{\sigma\theta} q_\mu q_\nu}{(q^2)^{a-1}} - \frac{\partial}{\partial q^\theta} \left(\frac{q_\mu q_\nu q_\sigma}{(q^2)^{a-1}} \right) \right] \\ &= \frac{X_{\mu\nu\sigma\theta}}{4^{a-1} \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - a + 2)}{\Gamma(a)} \int_x \frac{e^{ix \cdot q}}{(x^2)^{D/2 - a + 2}} \\ &\quad - \frac{1}{2^{2a-3} \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - a + 3)}{\Gamma(a)} \int_x \frac{Y_{\mu\nu\sigma\theta}(x) e^{ix \cdot q}}{(x^2)^{D/2 - a + 3}} \\ &\quad + \frac{1}{4^{a-2} \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - a + 4)}{\Gamma(a)} \int_x \frac{x_\mu x_\nu x_\sigma x_\theta e^{iq \cdot x}}{(x^2)^{D/2 - a + 4}}. \end{aligned}$$

Les tenseurs symétriques Z , X et Y sont définis ci-dessous :

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu\rho} &= \delta_{\mu\nu} u_\rho + \delta_{\nu\rho} u_\mu + \delta_{\rho\mu} u_\nu \\ X_{\mu\nu\rho\sigma} &= \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} \\ Y_{\mu\nu\rho\sigma}(u) &= u_\mu u_\nu \delta_{\rho\sigma} + u_\mu u_\rho \delta_{\nu\sigma} + u_\mu u_\sigma \delta_{\nu\rho} + u_\nu u_\rho \delta_{\mu\sigma} + u_\nu u_\sigma \delta_{\mu\rho} + u_\rho u_\sigma \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Ce qui donne enfin :

$$\int_q \frac{q^a q^b q^c q^d}{q^4} e^{iq \cdot (x-y)} = \frac{X^{abcd}}{4\pi|x-y|^2} - \frac{Y^{abcd}(x-y)}{2\pi|x-y|^4} + \frac{2(x^a - y^a)(x^b - y^b)(x^c - y^c)(x^d - y^d)}{\pi|x-y|^6}. \quad (\text{A.22})$$

A.4 Transformée de Fourier des lois de puissance

Dans cette section, nous allons montrer la relation (A.19). Il est plus facile d'aborder ce problème à partir du second membre. La composante de x dans la direction de p est appelée x_0 . Il sera utile d'isoler cette composante pour obtenir une intégrale à symétrie sphérique dans l'espace transverse. La fonction B est la fonction beta d'Euler.

$$\begin{aligned}
\int d^D x \frac{e^{ip \cdot x}}{(x^2)^{\frac{D}{2}-a}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 e^{ipx_0} \int d^{D-1}x \frac{1}{(x_0^2 + x^2)^{\frac{D}{2}-a}} \\
&= \int_0^{+\infty} dx_0 [e^{ipx_0} + e^{-ipx_0}] \int d^{D-1}x \frac{1}{(x_0^2 + x^2)^{\frac{D}{2}-a}} \\
&= 2 \int_0^{+\infty} dx_0 \cos(px_0) \times \frac{(2\pi)^{D-1}}{2^{D-2} \Gamma(\frac{D-1}{2}) \pi^{\frac{D-1}{2}}} \int_0^{+\infty} dx x^{D-2} (x_0^2 + x^2)^{a-\frac{D}{2}} \\
&= \frac{4\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int_0^{+\infty} dx_0 \cos(px_0) \int_0^{+\infty} dx x^{D-2} x_0^{2a-D} \left(1 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right)^{a-\frac{D}{2}} \\
&= \frac{4\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int_0^{+\infty} dx_0 \cos(px_0) x_0^{2a-D} x_0^{D-1} \int_0^{+\infty} du u^{D-2} (1+u^2)^{a-\frac{D}{2}} \\
&= \frac{4\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int_0^{+\infty} dx_0 \cos(px_0) x_0^{2a-1} \int_0^{+\infty} dv \frac{v^{\frac{D-3}{2}}}{2} (1+v)^{a-\frac{D}{2}} \\
&= \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int_0^{+\infty} dx_0 \cos(px_0) x_0^{2a-1} B\left(\frac{D-1}{2}, \frac{1}{2}-a\right) \\
&= \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{D-1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}-a)}{\Gamma(\frac{D}{2}-a)} \int_0^{+\infty} dx_0 \cos(px_0) x_0^{2a-1} \\
&= \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2}-a)} \Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right) \int_0^{+\infty} dx_0 \cos(px_0) x_0^{2a-1}.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

L'intégrale restante peut être calculée en passant par le plan complexe. Après un changement de variable, l'intégrale s'effectue sur une variable imaginaire pure. Comme tous les pôles sont sur l'axe réel, il est possible de déformer le contour d'intégration en un contour de Hankel de paramètre δ (voir Figure A.1) qui ramène l'intégration sur l'axe réel, modulo un reste I_δ qui tend vers 0 lorsque δ tend vers 0.

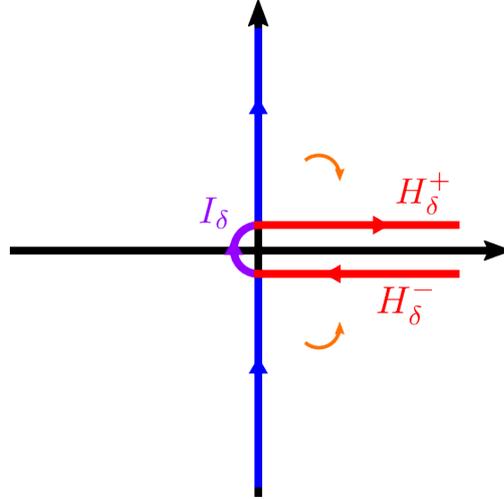


FIGURE A.1 – Déformation de la zone d'intégration (en bleu) en un contour de Hankel de paramètre δ . Lorsque δ tend vers 0, la partie violette, qui est une intégrale d'une quantité finie sur un domaine de plus en plus restreint, s'annule. Seules les branches rouges restent.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} du \cos(u) u^{-\alpha} &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{+\infty} du e^{iu} u^{-\alpha} + \int_0^{+\infty} du e^{-iu} u^{-\alpha} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_0^{+\infty} du e^{iu} u^{-\alpha} + \int_{-\infty}^0 du e^{iu} (-u)^{-\alpha} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[i \int_0^{-i\infty} dt e^{-t} (it)^{-\alpha} + i \int_{+i\infty}^0 dt e^{-t} (-it)^{-\alpha} \right] \\
&= -\frac{i}{2} \left[e^{+i\frac{\pi}{2}\alpha} \int_0^{+i\infty} dt e^{-t} t^{-\alpha} + e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} \int_{-i\infty}^0 dt e^{-t} t^{-\alpha} \right] \tag{A.24} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \left[e^{+i\frac{\pi}{2}\alpha} \int_{H_\delta^+} dt e^{-t} t^{-\alpha} + e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} \int_{H_\delta^-} dt e^{-t} t^{-\alpha} + I_\delta \right] \\
&= \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} - e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} \right) \int_0^{+\infty} dt e^{-t} t^{-\alpha} \\
&= \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \Gamma(1 - \alpha) .
\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement,

$$\int_0^{+\infty} dx_0 \cos(px_0) x_0^{2a-1} = p^{-2a} \Gamma(2a) \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - 2a)\right) . \tag{A.25}$$

Le théorème des résidus donne également la formule des compléments :

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = B(z, 1 - z) = \int_0^{+\infty} dt t^{z-1} (1 + t)^{-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} . \tag{A.26}$$

Ajoutons à cela la relation de duplication :

$$\Gamma(x)\Gamma(x + 1/2) = 2^{1-2x} \sqrt{\pi} \Gamma(2x) . \quad (\text{A.27})$$

Nous pouvons alors enfin conclure :

$$\begin{aligned} \int d^D x \frac{e^{ip \cdot x}}{(x^2)^{\frac{D}{2}-a}} &= \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2}-a)} \Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right) p^{-2a} \Gamma(2a) \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-2a)\right) \\ &= \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2}-a)} p^{-2a} \Gamma(1/2-a) \frac{2^{2a-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(a)\Gamma(a+1/2) \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-2a)\right) \\ &= \frac{4^a \pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2}-a)} p^{-2a} \Gamma(a) \frac{\Gamma(1/2+a)}{\sqrt{\pi}} \sin(\pi(1/2-a)) \Gamma(1/2-a) \\ &= \frac{4^a \pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2}-a)} p^{-2a} \Gamma(a) \frac{\Gamma(1/2+a)}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{\Gamma(1/2+a)} \\ &= \frac{4^a \pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2}-a)} p^{-2a} \Gamma(a) \sqrt{\pi} \\ &= \frac{4^a \pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2}-a)} p^{-2a} \Gamma(a) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Calcul d'intégrales en régularisation dimensionnelle

Cet appendice décrit les méthodes que nous avons utilisées pour calculer les intégrales sur les propagateurs en régularisation dimensionnelle.

B.1 Intégrales sans masse

La théorie de la phase plate des membranes cristallines est entièrement exprimée en termes de modes de Goldstone. Elle ne fait donc intervenir que des intégrales sans masse ; le seul paramètre est l'impulsion externe p . Pour une revue sur le sujet, voir par exemple le treizième chapitre de [Kleinert 2001].

B.1.1 Intégrales à une boucle I

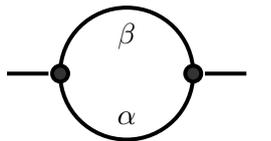
La relation fondamentale pour la régularisation dimensionnelle est l'équation (A.19). Grâce à celle-ci, n'importe quel propagateur sans masse peut être transformé en un produit de fonctions Γ d'Euler, dont le prolongement analytique au plan complexe est naturellement défini. L'intégrale spatiale est en effet simple à effectuer.

Dans un premier temps, intéressons-nous aux intégrales typiques à une boucle, avec deux propagateurs. En l'absence de masse, elles ont la forme générique :

$$I^{\mu(\dots)\nu}(\alpha, \beta) = \int_k \frac{k^\mu(\dots)k^\nu}{(k^2)^\alpha((k-p)^2)^\beta}, \quad (\text{B.1})$$

p est l'impulsion externe. Le numérateur est important car la théorie de la phase plate des membranes cristallines a des vertex dérivatifs.

Sous forme graphique, elles peuvent être représentées de la façon suivante :

$$I^{\mu(\dots)\nu}(\alpha, \beta) = \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet \text{---} . \quad (\text{B.2})$$


Il ne s'agit pas de graphe de Feynman, les deux branches peuvent représenter différents types de champs. Les indices tensoriels sont portés par les pattes externes. Ces représentations sont généralement utilisées pour compter les degrés de divergence infrarouge et ultraviolette de la

théorie, quoiqu'ici le caractère dérivatif des vertex rend ce comptage plus délicat. Elles indiquent néanmoins la forme générale des graphes de Feynman qu'elles permettent de calculer. Ce jeu d'intégrales est suffisant pour calculer toutes les énergies propres à une boucle, ce qui, en vertu de l'identité de Ward (3.24), est suffisant pour l'étude de la phase plate puisque les contributions des graphes à divergences superposées sont toutes compensées par d'autres graphes.

B.1.1.1 Intégrales scalaires

Les intégrales scalaires ont un numérateur trivial. Leur calcul est une simple application de la formule (A.19) :

$$\begin{aligned}
I(\alpha, \beta) &= \int_k \frac{1}{(k^2)^\alpha ((k-p)^2)^\beta} \\
&= \int_k \int_{x,y} \frac{1}{4^\alpha \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{ik \cdot x}}{(x^2)^{D/2 - \alpha}} \frac{1}{4^\beta \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - \beta)}{\Gamma(\beta)} \frac{e^{i(p-k) \cdot y}}{(y^2)^{D/2 - \beta}} \\
&= \frac{a(\alpha)a(\beta)}{4^{\alpha+\beta} \pi^D} \int_{x,y} \int_k \frac{e^{ik \cdot (x-y)} e^{ip \cdot y}}{(x^2)^{D/2 - \alpha} (y^2)^{D/2 - \beta}} \\
&= \frac{a(\alpha)a(\beta)}{4^{\alpha+\beta} \pi^D} \int_{x,y} \delta^{(D)}(x-y) \frac{e^{ip \cdot y}}{(x^2)^{D/2 - \alpha} (y^2)^{D/2 - \beta}} \\
&= \frac{a(\alpha)a(\beta)}{4^{\alpha+\beta} \pi^D} \int_y \frac{e^{ip \cdot y}}{(y^2)^{D/2 - (\alpha + \beta - D/2)}} \\
&= \frac{a(\alpha)a(\beta)}{4^{\alpha+\beta} \pi^D} \times \frac{1}{a(\alpha + \beta - D/2)} 4^{\alpha+\beta - D/2} \pi^{D/2} \frac{1}{(p^2)^{\alpha + \beta - D/2}},
\end{aligned} \tag{B.3}$$

où la fonction

$$a(\alpha) = \frac{\Gamma(D/2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \tag{B.4}$$

a été introduite pour alléger les notations. Nous introduisons également :

$$G(\alpha, \beta) = \frac{a(\alpha)a(\beta)}{a(\alpha + \beta - D/2)}. \tag{B.5}$$

Finalement, I s'écrit :

$$I(\alpha, \beta) = \frac{(p^2)^{D/2 - \alpha - \beta}}{(4\pi)^{D/2}} G(\alpha, \beta). \tag{B.6}$$

L'analyse des pôles se fait au voisinage de la dimension critique supérieure, en $D = 4 - \varepsilon$:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{(p^2)^{2 - \varepsilon/2 - \alpha - \beta}}{(4\pi)^{2 - \varepsilon/2}} \frac{\Gamma(2 - \varepsilon/2 - \alpha) \Gamma(2 - \varepsilon/2 - \beta)}{\Gamma(4 - \varepsilon - \alpha - \beta)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - 2 + \varepsilon/2)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}. \tag{B.7}$$

Conformément à ce qui est attendu, le tadpole sans masse, défini par une intégrale I dont un des deux arguments est nul, s'annule :

$$I(\alpha, 0) = \int_q \frac{1}{q^{2\alpha}} = 0. \tag{B.8}$$

Afin de mieux comprendre ce résultat plutôt surprenant, effectuons le calcul explicitement dans le cas le plus simple. Pour cela, nous allons utiliser la représentation de Schwinger :

$$\frac{1}{X} = \int_0^{+\infty} d\tau e^{-\tau X} . \quad (\text{B.9})$$

Rappelons également :

$$\int_q e^{-\alpha q^2} = \frac{1}{(2\pi)^D} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right)^D = \frac{\alpha^{-D/2}}{(4\pi)^{D/2}} . \quad (\text{B.10})$$

Nous pouvons définir le tadpole sans masse $I(1,0)$ à partir d'une décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} \int_q \frac{m^2}{q^2(q^2 + m^2)} &= \int_q \frac{1}{q^2} - \int_q \frac{1}{q^2 + m^2} \\ &= \int_q \frac{1}{q^2} - \int_q \int_0^{+\infty} d\tau e^{-\tau(q^2+m^2)} \\ &= \int_q \frac{1}{q^2} - \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^{+\infty} d\tau \tau^{-D/2} e^{-\tau m^2} \\ &= \int_q \frac{1}{q^2} - \frac{(m^2)^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(1 - D/2) . \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Bien sûr cela n'a pas de sens si D est un entier pair, mais c'est le prolongement analytique naturel de cette fonction pour toutes les autres valeurs de D . L'équation (B.9) peut également être appliquée au membre de gauche :

$$\begin{aligned} \int_q \frac{m^2}{q^2(q^2 + m^2)} &= m^2 \int_q \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} d\tau_1 d\tau_2 e^{-(\tau_1+\tau_2)q^2 - \tau_2 m^2} \\ &= \frac{m^2}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^{+\infty} d\tau_2 e^{-\tau_2 m^2} \int_{\tau_2}^{+\infty} d\tau \tau^{-D/2} \\ &= \frac{m^2}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^{+\infty} d\tau_2 \frac{-\tau_2^{1-D/2}}{1 - D/2} e^{-\tau_2 m^2} \\ &= -\frac{m^2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{(m^2)^{-2+D/2}}{1 - D/2} \Gamma(2 - D/2) \\ &= -\frac{(m^2)^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(1 - D/2) . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Soit finalement,

$$\int_q \frac{1}{q^2} = 0 , \quad (\text{B.13})$$

formule qui se généralise aisément à une puissance de q arbitraire.

B.1.1.2 Intégrales vectorielles

Il faut à présent calculer les intégrales avec des numérateurs non triviaux. Puisque les intégrales scalaires ne sont non nulles que lorsqu'une impulsion externe circule dans l'intégrande, il est toujours possible de prendre leur dérivée par rapport à p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p^\mu} I(\alpha, \beta) &= \int_k \frac{(-\beta)}{(k^2)^\alpha ((k-p)^2)^{\beta+1}} (2p_\mu - 2k_\mu) \\ &= 2\beta \int_k \frac{k_\mu - p_\mu}{(k^2)^\alpha ((k-p)^2)^{\beta+1}} \\ &= 2\beta (I_\mu(\alpha, \beta+1) - p_\mu I(\alpha, \beta+1)) . \end{aligned}$$

D'autre part, la dérivée peut également être calculée directement à partir de la relation (B.6) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p^\mu} I(\alpha, \beta) &= \frac{\Gamma(D/2 - \alpha)\Gamma(D/2 - \beta)\Gamma(\alpha + \beta - D/2)}{\Gamma(D - \alpha - \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{(D/2 - \alpha - \beta)}{(4\pi)^{D/2} (p^2)^{\alpha+\beta+1-D/2}} \times 2p_\mu \\ &= \left(\frac{D}{2} - \alpha - \beta\right) \frac{2p_\mu}{p^2} I(\alpha, \beta) . \end{aligned}$$

Finalement, les identités de la fonction Γ permettent de relier les intégrales scalaires avec différents arguments :

$$I(\alpha, \beta - 1) = p^2 \frac{D/2 - \beta}{D - \alpha - \beta} \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1 - D/2} I(\alpha, \beta) . \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p^\mu} I(\alpha, \beta - 1) &= 2(\beta - 1)(I_\mu(\alpha, \beta) - p_\mu I(\alpha, \beta)) \\ \left(\frac{D}{2} - \alpha - \beta + 1\right) \frac{2p_\mu}{p^2} \times p^2 \frac{D/2 - \beta}{D - \alpha - \beta} \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1 - D/2} I(\alpha, \beta) &= 2(\beta - 1)(I_\mu(\alpha, \beta) - p_\mu I(\alpha, \beta)) \\ \Rightarrow I_\mu(\alpha, \beta) &= \left[1 - \frac{D/2 - \beta}{D - \alpha - \beta}\right] p_\mu I(\alpha, \beta) = \frac{D/2 - \alpha}{D - \alpha - \beta} p_\mu I(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

La formule générale peut alors être déduite :

$$\boxed{I_\mu(\alpha, \beta) = \frac{(p^2)^{D/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} G^{(1,0)}(\alpha, \beta) p_\mu} , \quad (\text{B.15})$$

où dans un souci de simplification, les fonctions a et G ont été généralisées :

$$a_n(\alpha) = \frac{\Gamma(n + D/2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} , \quad G^{(n,m)} = \frac{a_n(\alpha)a_m(\beta)}{a_n(\alpha + \beta - D/2 - m)} . \quad (\text{B.16})$$

$$I_\mu(\alpha, \beta) \stackrel{D=4-\varepsilon}{=} \frac{(p^2)^{2-\varepsilon/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \frac{\Gamma(3 - \varepsilon/2 - \alpha)\Gamma(2 - \varepsilon/2 - \beta)\Gamma(\alpha + \beta - 2 + \varepsilon/2)}{\Gamma(5 - \varepsilon - \alpha - \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p_\mu . \quad (\text{B.17})$$

Le pôle infrarouge de α a été décalé d'une unité.

B.1.1.3 Intégrales tensorielles d'ordre 2

La méthode est exactement la même.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p^\nu} I_\mu(\alpha, \beta) &= \int_k \frac{k_\mu}{(k^2)^\alpha} (-\beta) \frac{2(p_\nu - k_\nu)}{((k-p)^2)^{\beta+1}} \\ &= 2\beta(I_{\mu\nu}(\alpha, \beta+1) - p_\nu I_\mu(\alpha, \beta+1))\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^\nu} I_\mu(\alpha, \beta) = \delta_{\mu\nu} \frac{D/2 - \alpha}{D - \alpha - \beta} I(\alpha, \beta) + p_\mu \frac{D/2 - \alpha}{D - \alpha - \beta} (D/2 - \alpha - \beta) \frac{2p_\nu}{p^2} I(\alpha, \beta) \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned}\langle I_{\mu\nu}(\alpha, \beta) | \delta_{\mu\nu} \rangle &= \frac{1}{2} \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \beta)}{(D - \alpha - \beta + 1)(D - \alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1 - D/2)} \\ &\times \frac{(p^2)^{D/2+1-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - \alpha)\Gamma(D/2 - \beta)}{\Gamma(D - \alpha - \beta)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - D/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{(p^2)^{D/2+1-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 + 1 - \alpha)\Gamma(D/2 + 1 - \beta)}{2\Gamma(D + 2 - \alpha - \beta)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - D/2 - 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned}\langle I_{\mu\nu}(\alpha, \beta) | p_\mu p_\nu \rangle &= \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)}{(D - \alpha - \beta + 1)(D - \alpha - \beta)} \frac{(p^2)^{D/2+1-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - \alpha)\Gamma(D/2 - \beta)}{\Gamma(D - \alpha - \beta)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - D/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{(p^2)^{D/2+1-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 + 2 - \alpha)\Gamma(D/2 - \beta)}{2\Gamma(D + 2 - \alpha - \beta)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - D/2 - 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\boxed{I_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = \delta_{\mu\nu} \frac{(p^2)^{D/2+1-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{G^{(1,1)}(\alpha, \beta)}{2} + p_\mu p_\nu \frac{(p^2)^{D/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} G^{(2,0)}(\alpha, \beta)} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I_{\mu\nu}(\alpha, \beta) \Big|_{D=4-\varepsilon} &= \delta_{\mu\nu} \frac{(p^2)^{3-\varepsilon/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \frac{\Gamma(3-\varepsilon/2-\alpha)\Gamma(3-\varepsilon/2-\beta)}{2\Gamma(6-\varepsilon-\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-3+\varepsilon/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ &+ p_\mu p_\nu \frac{(p^2)^{2-\varepsilon/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \frac{\Gamma(4-\varepsilon/2-\alpha)\Gamma(2-\varepsilon/2-\beta)}{\Gamma(6-\varepsilon-\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-2+\varepsilon/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

B.1.1.4 Intégrales tensorielles d'ordre 3

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p^\rho} I_{\mu\nu}(\alpha, \beta) &= \int_k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^\alpha} (-\beta) \frac{(2p_\rho - 2k_\rho)}{((k-p)^2)^{\beta+1}} \\ &= 2\beta(I_{\mu\nu\rho}(\alpha, \beta+1) - p_\rho I_{\mu\nu}(\alpha, \beta))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p^\rho} I_{\mu\nu}(\alpha, \beta) &= \delta_{\mu\nu} (D/2 + 1 - \alpha - \beta) p_\rho \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \beta)}{(D - \alpha - \beta + 1)(D - \alpha - \beta)(\alpha + \beta + 1 - D/2)} I(\alpha, \beta) \\
&+ (\delta_{\mu\rho} p_\nu + \delta_{\nu\rho} p_\mu) \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 + 1 - \alpha)}{(D - \alpha - \beta)(D + 1 - \alpha - \beta)} I(\alpha, \beta) \\
&+ \frac{2p_\mu p_\nu p_\rho}{p^2} (D/2 - \alpha - \beta) \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)}{(D - \alpha - \beta)(D + 1 - \alpha - \beta)} I(\alpha, \beta)
\end{aligned}$$

Définissons $Z_{\mu\nu\rho}$ comme :

$$Z_{\mu\nu\rho}(p) = \delta_{\mu\nu} p_\rho + \delta_{\nu\rho} p_\mu + \delta_{\rho\mu} p_\nu . \quad (\text{B.23})$$

$$\langle I_{\mu\nu\rho}(\alpha, \beta) | Z_{\mu\nu\rho} \rangle = p^2 \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)(D/2 - \beta)}{2(D - \alpha - \beta + 1)(D - \alpha - \beta + 2)(D - \alpha - \beta)(\alpha + \beta - D/2 - 1)} I(\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned}
\langle I_{\mu\nu\rho}(\alpha, \beta) | p_\mu p_\nu p_\rho \rangle &= \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)}{(D + 1 - \alpha - \beta)(D - \alpha - \beta)} I(\alpha, \beta) \\
&+ \frac{(D/2 - \alpha + 1)(D/2 - \beta)(D/2 - \alpha - \beta + 1)}{(D - \alpha - \beta)(D - \alpha - \beta + 1)(D - \alpha - \beta + 2)(\alpha + \beta - D/2 - 1)} I(\alpha, \beta)
\end{aligned}$$

$$I_{\mu\nu\rho}(\alpha, \beta) = Z_{\mu\nu\rho}(p) \frac{(p^2)^{D/2+1-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{G^{(2,1)}(\alpha, \beta)}{2} + p_\mu p_\nu p_\rho \frac{(p^2)^{D/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} G^{(3,0)}(\alpha, \beta) \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_{\mu\nu\rho}(\alpha, \beta) \Big|_{D=4-\varepsilon} &= Z_{\mu\nu\rho}(p) \frac{(p^2)^{3-\varepsilon/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \frac{\Gamma(4-\varepsilon/2-\alpha)\Gamma(3-\varepsilon/2-\beta)}{2\Gamma(7-\varepsilon-\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-3+\varepsilon/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\
&+ p_\mu p_\nu p_\rho \frac{(p^2)^{2-\varepsilon/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \frac{\Gamma(5-\varepsilon/2-\alpha)\Gamma(2-\varepsilon/2-\beta)}{\Gamma(7-\varepsilon-\alpha-\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-2+\varepsilon/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}
\end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

B.1.1.5 Intégrales tensorielles d'ordre 4

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p^\sigma} I_{\mu\nu\rho}(\alpha, \beta) &= \int_k \frac{k_\mu k_\nu k_\rho}{(k^2)^\alpha} \frac{(-\beta)(2p_\sigma - 2k_\sigma)}{((k-p)^2)^{\beta+1}} \\
&= 2\beta (I_{\mu\nu\rho\sigma}(\alpha, \beta + 1) - p_\sigma I_{\mu\nu\rho}(\alpha, \beta + 1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p^\sigma} I_{\mu\nu\rho}(\alpha, \beta - 1) &= Z_{\mu\nu\rho} p_\sigma \frac{(D/2 + 2 - \alpha - \beta)(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)(D/2 - \beta + 1)}{(D - \alpha - \beta + 1)(D - \alpha - \beta + 2)(D - \alpha - \beta + 3)(\alpha + \beta - 2 - D/2)} \\
&\times p^2 \frac{(D/2 - \beta)(\beta - 1)}{(D - \alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1 - D/2)} I(\alpha, \beta) + (\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}) \frac{p^2}{2} \\
&\times \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)(D/2 - \beta + 1)}{(D - \alpha - \beta + 1)(D - \alpha - \beta + 2)(D - \alpha - \beta + 3)(\alpha + \beta - 2 - D/2)} \\
&\times p^2 \frac{(D/2 - \beta)(\beta - 1)}{(D - \alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1 - D/2)} I(\alpha, \beta) \\
&+ (\delta_{\mu\sigma}p_\nu p_\sigma + \delta_{\nu\sigma}p_\mu p_\rho + \delta_{\rho\sigma}p_\mu p_\nu) \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)(D/2 - \alpha + 2)}{(D - \alpha - \beta + 1)(D - \alpha - \beta + 2)(D - \alpha - \beta + 3)} \\
&\times p^2 \frac{(D/2 - \beta)(\beta - 1)}{(D - \alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1 - D/2)} I(\alpha, \beta) \\
&+ 2p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma \frac{(D/2 + 1 - \alpha - \beta)(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)(D/2 - \alpha + 2)}{(D - \alpha - \beta + 1)(D - \alpha - \beta + 2)(D - \alpha - \beta + 3)} \\
&\times \frac{(D/2 - \beta)(\beta - 1)}{(D - \alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1 - D/2)} I(\alpha, \beta)
\end{aligned}$$

Les termes en vert se combinent pour donner un facteur (-1) .

Nous avons également besoin de définir de nouveaux tenseurs symétriques.

$$X_{\mu\nu\rho\sigma} = \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned}
\langle I_{\mu\nu\rho\sigma}(\alpha, \beta) | X_{\mu\nu\rho\sigma} \rangle &= \frac{p^2}{4} \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)}{(D - \alpha - \beta)(D - \alpha - \beta + 1)(D - \alpha - \beta + 2)(D - \alpha - \beta + 3)} \\
&\times \frac{(D/2 - \beta)(D/2 - \beta + 1)}{(\alpha + \beta - 1 - D/2)(\alpha + \beta - 2 - D/2)} I(\alpha, \beta) \\
&= \frac{(p^2)^{D/2+2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - \alpha + 2)\Gamma(D/2 - \beta + 2)}{4\Gamma(D + 4 - \alpha - \beta)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - 2 - D/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}
\end{aligned}$$

$$Y_{\mu\nu\rho\sigma}(p) = p_\mu p_\nu \delta_{\rho\sigma} + p_\mu p_\rho \delta_{\nu\sigma} + p_\mu p_\sigma \delta_{\nu\rho} + p_\nu p_\rho \delta_{\mu\sigma} + p_\nu p_\sigma \delta_{\mu\rho} + p_\rho p_\sigma \delta_{\mu\nu} \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned}
\langle I_{\mu\nu\rho\sigma}(\alpha, \beta) | Y_{\mu\nu\rho\sigma} \rangle &= \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)(D/2 - \beta)}{(D - \alpha - \beta)(D + 1 - \alpha - \beta)(D + 2 - \alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1 - D/2)} \\
&\times \left[1 - \frac{D/2 - \beta + 1}{D + 3 - \alpha - \beta} \right] \frac{p^2}{2} I(\alpha, \beta) \\
&= \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)(D/2 - \beta)(D/2 + 2 - \alpha)}{(D - \alpha - \beta)(D + 1 - \alpha - \beta)(D + 2 - \alpha - \beta)(D + 3 - \alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1 - D/2)} \frac{p^2}{2} I(\alpha, \beta) \\
&= \frac{(p^2)^{D/2+1-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - \alpha + 3)\Gamma(D/2 - \beta + 1)}{2\Gamma(D + 4 - \alpha - \beta)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - 1 - D/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle I_{\mu\nu\rho\sigma}(\alpha, \beta) | p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma \rangle &= \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)(D/2 - \alpha + 2)}{(D - \alpha - \beta)(D + 1 - \alpha - \beta)(D + 2 - \alpha - \beta)} \left[1 - \frac{D/2 - \beta}{D + 3 - \alpha - \beta} \right] I(\alpha, \beta) \\
&= \frac{(D/2 - \alpha)(D/2 - \alpha + 1)(D/2 - \alpha + 2)(D/2 - \alpha + 3)}{(D - \alpha - \beta)(D + 1 - \alpha - \beta)(D + 2 - \alpha - \beta)(D + 3 - \alpha - \beta)} I(\alpha, \beta) \\
&= \frac{(p^2)^{D/2 - \alpha - \beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - \alpha + 4)\Gamma(D/2 - \beta)}{\Gamma(D + 4 - \alpha - \beta)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta - D/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\rho\sigma}(\alpha, \beta) &= X_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{(p^2)^{D/2+2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{G^{(2,2)}(\alpha, \beta)}{4} \\
&\quad + Y_{\mu\nu\rho\sigma}(p) \frac{(p^2)^{D/2+1-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{G^{(3,1)}(\alpha, \beta)}{2} \\
&\quad + p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma \frac{(p^2)^{D/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} G^{(4,0)}(\alpha, \beta)
\end{aligned} \tag{B.28}$$

B.1.1.6 Ordres supérieurs

Cette procédure se généralise pour des tenseurs d'ordre n :

- $I_{\mu_1(\dots)\mu_n}(\alpha, \beta)$ a $1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ termes¹.
- $X_{\mu_1(\dots)\mu_n}$ désigne le produit symétrisé de fonctions $\delta_{\mu_i\mu_j}$, dans le cas où n est pair.
- $Z_{\mu_1(\dots)\mu_n}^{(2j+1)}(p)$ désigne le produit symétrisé de $2j + 1$ impulsions et de fonctions $\delta_{\mu_i\mu_k}$ dans le cas où n est impair. Par exemple, dans ces notations, $Z_{\mu\nu\rho}(p) = Z_{\mu\nu\rho}^{(1)}(p)$.
- $Y_{\mu_1(\dots)\mu_n}^{(2j)}(p)$ désigne le produit symétrisé de $2j$ impulsions et de fonctions $\delta_{\mu_i\mu_k}$ dans le cas où n est pair. Par exemple, dans ces notations, $Y_{\mu\nu\rho\sigma}(p) = Y_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2)}(p)$.
- Le terme d'ordre le plus haut en impulsion est proportionnel à $G^{(n,0)}(\alpha, \beta)$.
- Pour chaque terme suivant dans l'ordre des impulsions décroissantes, l'exposant de l'impulsion croît d'une unité (pour assurer l'homogénéité), un facteur 2 apparaît au dénominateur, le premier exposant de G décroît d'une unité, le second croît de même.

1. $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Si n est pair,

$$\begin{aligned}
 I_{\mu_1(\dots)\mu_n}(\alpha, \beta) &= X_{\mu_1(\dots)\mu_n} \frac{(p^2)^{D/2+n/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{G^{(n/2, n/2)}(\alpha, \beta)}{2^{n/2}} \\
 &\dots \\
 &+ Y_{\mu_1(\dots)\mu_n}^{(2j)}(p) \frac{(p^2)^{D/2+n/2-j-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{G^{(n/2+j, n/2-j)}(\alpha, \beta)}{2^{n/2-j}} \\
 &\dots \\
 &+ p_{\mu_1(\dots)\mu_n} \frac{(p^2)^{D/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} G^{(n,0)}(\alpha, \beta)
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

Si n est impair,

$$\begin{aligned}
 I_{\mu_1(\dots)\mu_n}(\alpha, \beta) &= Z_{\mu_1(\dots)\mu_n}^{(1)} \frac{(p^2)^{D/2+(n-1)/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{G^{((n+1)/2, (n-1)/2)}(\alpha, \beta)}{2^{(n-1)/2}} \\
 &\dots \\
 &+ Z_{\mu_1(\dots)\mu_n}^{(2j+1)}(p) \frac{(p^2)^{D/2+(n-1)/2-j-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{G^{((n+1)/2+j, (n-1)/2-j)}(\alpha, \beta)}{2^{(n-1)/2-j}} \\
 &\dots \\
 &+ p_{\mu_1(\dots)\mu_n} \frac{(p^2)^{D/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{D/2}} G^{(n,0)}(\alpha, \beta)
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

B.1.1.7 Intégrales à deux boucles réductibles

Les formules (B.29) et (B.30) sont suffisantes à une boucle, mais elles sont encore très utiles à deux boucles. En effet, un dénominateur générique d'intégrale à deux boucles a la forme :

$$(k^2)^\alpha (q^2)^{\alpha'} ((k-q)^2)^\beta ((k-p)^2)^\gamma ((q-p)^2)^{\gamma'}, \tag{B.31}$$

p étant toujours l'impulsion externe.

Dès que l'un des exposants est égal à 0, au moins une des deux impulsions de boucle apparaît seulement deux fois, et l'intégrale correspondante est de type I .

Essayons par exemple d'évaluer l'intégrale suivante :

$$\int_{k,q} \frac{1}{k^{2\alpha} q^{2\alpha'} (k-q)^{2\beta} (k-p)^{2\gamma}}. \tag{B.32}$$

k apparaît trois fois, son intégrale n'est pas de type I . Ce n'est pas cependant le cas de q ; nous pouvons donc l'intégrer en premier et terminer le calcul (l'intégrale sur q inclut un des facteurs au dénominateur de l'intégrale sur k) :

$$\begin{aligned}
 \int_{k,q} \frac{1}{k^{2\alpha} q^{2\alpha'} (k-q)^{2\beta} (k-p)^{2\gamma}} &= \int_k \frac{1}{k^{2\alpha} (k-p)^{2\gamma}} \frac{G(\alpha', \beta)}{(4\pi)^{D/2}} (k^2)^{2-\varepsilon/2-\alpha'-\beta} \\
 &= \frac{G(\alpha', \beta)}{(4\pi)^{D/2}} I(\alpha + \alpha' + \beta - 2 + \varepsilon/2, \gamma).
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

Un changement de variable peut être nécessaire dans le cas où le numérateur est non trivial. Ainsi, seules les intégrales présentant les cinq termes au dénominateur sont non-réductibles à des intégrales à une boucle imbriquées.

B.1.2 Intégrales losange J

Les intégrales losange sont des intégrales apparaissant au plus tôt à deux boucles. Elles ne se réduisent pas à des intégrales à une boucle à cause de la triple occurrence de k et de q au dénominateur :

$$J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma') = \int_{k,q} \frac{1}{k^{2\alpha} q^{2\alpha'} (k-q)^{2\beta} (k-p)^{2\gamma} (q-p)^{2\gamma'}} . \quad (\text{B.34})$$

Elles correspondent à des configurations de graphe de type :

$$J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma') = \begin{array}{c} \alpha \qquad \qquad \alpha' \\ \circ \qquad \qquad \circ \\ \backslash \qquad \qquad / \\ \circ \qquad \qquad \circ \\ / \qquad \qquad \backslash \\ \gamma \qquad \qquad \gamma' \end{array} . \quad (\text{B.35})$$

B.1.2.1 Intégration par parties

Prouvons d'abord un résultat préliminaire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2)^a} &= \frac{1}{4^a \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - a)}{\Gamma(a)} \int d^D x \frac{e^{ip \cdot x}}{(x^2)^a} \\ \Rightarrow \frac{p_\mu}{(p^2)^a} &= \frac{1}{2(1-a)} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left(\frac{1}{(p^2)^{a-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2(1-a)} \frac{1}{4^{a-1} \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - a + 1)}{\Gamma(a-1)} \int d^D x \frac{i x_\mu e^{ip \cdot x}}{(x^2)^{D/2 - a + 1}} . \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

En insérant la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} ((p_\mu - q_\mu)) = D \quad (\text{B.37})$$

sous le symbole intégral, puis en effectuant une intégration par parties, une des intégrales de J peut être réduite :

$$\begin{aligned} D \int_k \frac{1}{k^{2\alpha} (k-q)^{2\beta} (k-p)^{2\gamma}} &= \int_k \left[\frac{\partial}{\partial k_\mu} (k_\mu - q_\mu) \right] \frac{1}{k^{2\alpha} (k-q)^{2\beta} (k-p)^{2\gamma}} \\ &= \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k_\mu - q_\mu)}{k^{2\alpha} (k-q)^{2\beta} (k-p)^{2\gamma}} \right] - \int_k (k_\mu - q_\mu) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{1}{k^{2\alpha} (k-q)^{2\beta} (k-p)^{2\gamma}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Prouvons que le terme de bord s'annule :

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[\frac{(k_\mu - q_\mu)}{k^{2\alpha}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}} \right] &= \int_k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \int_x \frac{1}{4^\alpha \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{ik \cdot x}}{(x^2)^{D/2 - \alpha}} \int_z \frac{1}{4^\gamma \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - \gamma)}{\Gamma(\gamma)} \frac{e^{i(k-p) \cdot z}}{(z^2)^{D/2 - \gamma}} \\
&\times \int_y \frac{(-1)}{2(\beta - 1)} \frac{1}{4^{\beta-1} \pi^{D/2}} \frac{\Gamma(D/2 - \beta + 1)}{\Gamma(\beta - 1)} \frac{i y_\mu e^{i(k-q) \cdot y}}{(y^2)^{D/2 - \beta + 1}} \\
&= \frac{(-1)}{2(\beta - 1) \pi^{3D/2} 4^{\alpha + \beta + \gamma - 1}} \frac{\Gamma(D/2 - \alpha) \Gamma(D/2 - \beta + 1) \Gamma(D/2 - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta - 1) \Gamma(\gamma)} \\
&\times \int_k \int_{x,y,z} i y_\mu (i x^\mu + i y^\mu + i z^\mu) \frac{e^{ik \cdot x + i(k-q) \cdot y + i(k-p) \cdot z}}{(x^2)^{D/2 - \alpha} (y^2)^{D/2 - \beta + 1} (z^2)^{D/2 - \gamma}} \\
&= \frac{1}{2\pi^{3D/2} 4^{\alpha + \beta + \gamma - 1}} \frac{\Gamma(D/2 - \alpha) \Gamma(D/2 - \beta + 1) \Gamma(D/2 - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)} \\
&\times \int_{x,y,z} y_\mu (x^\mu + y^\mu + z^\mu) \delta^{(D)}(x + y + z) \frac{e^{-iq \cdot y - ip \cdot z}}{(x^2)^{D/2 - \alpha} (y^2)^{D/2 - \beta + 1} (z^2)^{D/2 - \gamma}} .
\end{aligned}$$

Le terme en rouge est automatiquement nul, donc (B.38) n'a qu'un terme dans son membre de droite. Réduisons encore ce terme :

$$\begin{aligned}
D \int_k \frac{1}{k^{2\alpha}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}} &= - \int_k (k_\mu - q_\mu) \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{1}{k^{2\alpha}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}} \right) \\
&= \int_k \frac{1}{k^{2\alpha}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}} \left[2\alpha \frac{k \cdot (k-q)}{k^2} + 2\beta \frac{(k-q)^2}{(k-q)^2} + 2\gamma \frac{(k-q) \cdot (k-p)}{(k-p)^2} \right] .
\end{aligned} \tag{B.39}$$

L'astuce suivante consiste à développer les produits scalaires en sommes de carrés. En effet, tous les carrés possibles apparaissent au dénominateur des intégrales de type J :

$$\begin{aligned}
2k \cdot (k-q) &= k^2 + (k-q)^2 - q^2 \\
2(k-q) \cdot (k-p) &= (k-q)^2 + (k-p)^2 - (q-p)^2
\end{aligned} \tag{B.40}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow D \int_k \frac{1}{k^{2\alpha}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}} &= \int_k \frac{2\beta}{k^{2\alpha}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}} + \alpha \int_k \frac{(k^2 + (k-q)^2 - q^2)}{k^{2(\alpha+1)}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}} \\
&+ \gamma \int_k \frac{((k-p)^2 + (k-q)^2 - (q-p)^2)}{k^{2\alpha}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2(\gamma+1)}} .
\end{aligned} \tag{B.41}$$

Cette relation n'est cependant pas suffisante pour donner une expression générique des intégrales losange. Celles-ci sont uniquement définies par une relation de récurrence :

$$\begin{aligned}
(D - 2\beta - \alpha - \gamma) J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma') &= \alpha \{ J(\alpha + 1, \alpha', \beta - 1, \gamma, \gamma') - J(\alpha + 1, \alpha' - 1, \beta, \gamma, \gamma') \} \\
&+ \gamma \{ J(\alpha, \alpha', \beta - 1, \gamma + 1, \gamma') - J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma + 1, \gamma' - 1) \} .
\end{aligned} \tag{B.42}$$

Si l'un des arguments de J est nul, le problème est de nouveau réductible à des intégrales de type I . Les autres intégrales sont ensuite construites par itérations successives.

B.1.2.2 Relations de récurrence

En réalité, la relation d'intégration par parties (B.37) peut être appliquée à chacun des dénominateurs de J , générant non pas une mais cinq relations de récurrence :

$$\begin{aligned}
(D - 2\beta - \alpha - \gamma)J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma') &= \alpha \{ J(\alpha + 1, \alpha', \beta - 1, \gamma, \gamma') - J(\alpha + 1, \alpha' - 1, \beta, \gamma, \gamma') \} \\
&\quad + \gamma \{ J(\alpha, \alpha', \beta - 1, \gamma + 1, \gamma') - J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma + 1, \gamma' - 1) \} \\
(D - 2\alpha - \beta - \gamma)J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma') &= \beta \{ J(\alpha - 1, \alpha', \beta + 1, \gamma, \gamma') - J(\alpha, \alpha' - 1, \beta + 1, \gamma, \gamma') \} \\
&\quad + \gamma \{ J(\alpha - 1, \alpha', \beta, \gamma + 1, \gamma') - J(\alpha, \alpha' - 1, \beta, \gamma + 1, \gamma') \} \\
(D - 2\gamma - \beta - \alpha)J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma') &= \beta \{ J(\alpha, \alpha', \beta + 1, \gamma - 1, \gamma') - J(\alpha, \alpha', \beta + 1, \gamma, \gamma' - 1) \} \\
&\quad + \alpha \{ J(\alpha + 1, \alpha', \beta, \gamma - 1, \gamma') - J(\alpha + 1, \alpha', \beta, \gamma, \gamma' - 1) \} \\
(D - 2\alpha' - \beta - \gamma')J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma') &= \beta \{ J(\alpha, \alpha' - 1, \beta + 1, \gamma, \gamma') - J(\alpha - 1, \alpha', \beta + 1, \gamma, \gamma') \} \\
&\quad + \gamma' \{ J(\alpha, \alpha' - 1, \beta, \gamma, \gamma' + 1) - J(\alpha - 1, \alpha', \beta, \gamma, \gamma' + 1) \} \\
(D - 2\gamma' - \beta - \alpha')J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma') &= \beta \{ J(\alpha, \alpha', \beta + 1, \gamma, \gamma' - 1) - J(\alpha, \alpha', \beta + 1, \gamma - 1, \gamma') \} \\
&\quad + \alpha' \{ J(\alpha, \alpha' + 1, \beta, \gamma, \gamma' - 1) - J(\alpha, \alpha' + 1, \beta, \gamma - 1, \gamma') \} .
\end{aligned} \tag{B.43}$$

La somme $\alpha + \alpha' + \beta + \gamma + \gamma'$ est conservée dans chaque expression, ce qui permet de définir une bonne procédure itérative :

• Étape 1 :

Si un des arguments est nul, le problème est réductible à un calcul d'intégrales à une boucle :

$$J(0, \alpha', \beta, \gamma, \gamma') = \int_{k,q} \frac{1}{q^{2\alpha'}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}(q-p)^{2\gamma'}} = \frac{G(\gamma, \beta)}{(4\pi)^{D/2}} I(\alpha', \gamma + \gamma' + \beta - D/2)$$

$$J(\alpha, 0, \beta, \gamma, \gamma') = \int_{k,q} \frac{1}{k^{2\alpha}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}(q-p)^{2\gamma'}} = \frac{G(\gamma', \beta)}{(4\pi)^{D/2}} I(\alpha, \gamma + \gamma' + \beta - D/2)$$

$$J(\alpha, \alpha', 0, \gamma, \gamma') = \int_{k,q} \frac{1}{k^{2\alpha}q^{2\alpha'}(k-p)^{2\gamma}(q-p)^{2\gamma'}} = I(\alpha, \gamma)I(\alpha', \gamma')$$

$$J(\alpha, \alpha', \beta, 0, \gamma') = \int_{k,q} \frac{1}{k^{2\alpha}q^{2\alpha'}(k-q)^{2\beta}(q-p)^{2\gamma'}} = \frac{G(\alpha, \beta)}{(4\pi)^{D/2}} I(\alpha + \alpha' + \beta - D/2, \gamma)$$

$$J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, 0) = \int_{k,q} \frac{1}{k^{2\alpha}q^{2\alpha'}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}} = \frac{G(\alpha', \beta)}{(4\pi)^{D/2}} I(\alpha + \alpha' + \beta - D/2, \gamma') .$$

• Étape 2 :

Les étapes suivantes sont construites grâce aux relations de récurrence (B.43), qui permettent d'exprimer les intégrales d'une étape donnée en fonction d'intégrales des étapes

précédentes seulement. Le but est d'augmenter progressivement les puissances au dénominateur. Dans notre cas, chaque argument doit atteindre 2^2 :

$$\begin{aligned}
 J(\alpha, 1, 1, \gamma, 1) &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha - \gamma} \left[\alpha \{ J(\alpha + 1, 1, 0, \gamma, 1) - J(\alpha + 1, 0, 1, \gamma, 1) \} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \{ J(\alpha, 1, 0, \gamma + 1, 1) - J(\alpha, 1, 1, \gamma + 1, 0) \} \right] \\
 J(1, \alpha', 1, 1, \gamma') &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha' - \gamma'} \left[\alpha' \{ J(1, \alpha' + 1, 0, 1, \gamma') - J(0, \alpha' + 1, 1, 1, \gamma') \} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma' \{ J(1, \alpha', 0, 1, \gamma' + 1) - J(1, \alpha', 1, 0, \gamma' + 1) \} \right] \\
 J(1, 1, \beta, \gamma, \gamma') &= \frac{1}{D - 2\alpha - \beta - \gamma} \left[\beta \{ J(0, 1, \beta + 1, \gamma, \gamma') - J(1, 0, \beta + 1, \gamma, \gamma') \} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \{ J(0, 1, \beta, \gamma + 1, \gamma') - J(1, 0, \beta, \gamma + 1, \gamma') \} \right] \\
 J(\alpha, \alpha', \beta, 1, 1) &= \frac{1}{D - 2\gamma - \beta - \alpha} \left[\beta \{ J(\alpha, \alpha', \beta + 1, 0, 1) - J(\alpha, \alpha', \beta + 1, 1, 0) \} \right. \\
 &\quad \left. + \alpha \{ J(\alpha + 1, \alpha', \beta, 0, 1) - J(\alpha + 1, \alpha', \beta, 0, 1) \} \right] .
 \end{aligned}$$

• Étape 3 :

$$\begin{aligned}
 J(\alpha, 1, 1, \gamma, 2) &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha - \gamma} \left[\alpha \{ J(\alpha + 1, 1, 0, \gamma, 2) - J(\alpha + 1, 0, 1, \gamma, 2) \} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \{ J(\alpha, 1, 0, \gamma + 1, 2) - J(\alpha, 1, 1, \gamma + 1, 1) \} \right] \\
 J(1, \alpha', 1, 2, \gamma') &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha' - \gamma'} \left[\alpha' \{ J(1, \alpha' + 1, 0, 2, \gamma') - J(0, \alpha' + 1, 1, 2, \gamma') \} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma' \{ J(1, \alpha', 0, 2, \gamma' + 1) - J(1, \alpha', 1, 1, \gamma' + 1) \} \right] \\
 J(\alpha, 2, 1, \gamma, 1) &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha - \gamma} \left[\alpha \{ J(\alpha + 1, 2, 0, \gamma, 1) - J(\alpha + 1, 1, 1, \gamma, 1) \} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \{ J(\alpha, 2, 0, \gamma + 1, 1) - J(\alpha, 2, 1, \gamma + 1, 0) \} \right] \\
 J(2, \alpha', 1, 1, \gamma') &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha' - \gamma'} \left[\alpha' \{ J(2, \alpha' + 1, 0, 1, \gamma') - J(1, \alpha' + 1, 1, 1, \gamma') \} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma' \{ J(2, \alpha', 0, 1, \gamma' + 1) - J(2, \alpha', 1, 0, \gamma' + 1) \} \right] \\
 J(\alpha, 1, 2, \gamma, 1) &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha - \gamma} \left[\alpha \{ J(\alpha + 1, 1, 1, \gamma, 1) - J(\alpha + 1, 0, 2, \gamma, 1) \} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \{ J(\alpha, 1, 1, \gamma + 1, 1) - J(\alpha, 1, 2, \gamma + 1, 0) \} \right] \\
 J(1, \alpha', 2, 1, \gamma') &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha' - \gamma'} \left[\alpha' \{ J(1, \alpha' + 1, 1, 1, \gamma') - J(0, \alpha' + 1, 2, 1, \gamma') \} \right. \\
 &\quad \left. + \gamma' \{ J(1, \alpha', 1, 1, \gamma' + 1) - J(1, \alpha', 2, 0, \gamma' + 1) \} \right]
 \end{aligned}$$

2. Les propagateurs de flexurons sont en $\frac{1}{q^4}$.

$$\begin{aligned}
J(2, 1, \beta, \gamma, \gamma') &= \frac{1}{D - 2\alpha - \beta - \gamma} \left[\beta \{ J(1, 1, \beta + 1, \gamma, \gamma') - J(2, 0, \beta + 1, \gamma, \gamma') \} \right. \\
&\quad \left. + \gamma \{ J(1, 1, \beta, \gamma + 1, \gamma') - J(2, 0, \beta, \gamma + 1, \gamma') \} \right] \\
J(1, 2, \beta, \gamma, \gamma') &= \frac{1}{D - 2\alpha' - \beta - \gamma'} \left[\beta \{ J(1, 1, \beta + 1, \gamma, \gamma') - J(0, 2, \beta + 1, \gamma, \gamma') \} \right. \\
&\quad \left. + \gamma' \{ J(1, 1, \beta, \gamma, \gamma' + 1) - J(0, 2, \beta, \gamma, \gamma' + 1) \} \right] \\
J(\alpha, \alpha', \beta, 2, 1) &= \frac{1}{D - 2\gamma - \beta - \alpha} \left[\beta \{ J(\alpha, \alpha', \beta + 1, 1, 1) - J(\alpha, \alpha', \beta + 1, 2, 0) \} \right. \\
&\quad \left. + \alpha \{ J(\alpha + 1, \alpha', \beta, 1, 1) - J(\alpha + 1, \alpha', \beta, 2, 0) \} \right] \\
J(\alpha, \alpha', \beta, 1, 2) &= \frac{1}{D - 2\gamma' - \beta - \alpha'} \left[\beta \{ J(\alpha, \alpha', \beta + 1, 1, 1) - J(\alpha, \alpha', \beta + 1, 0, 2) \} \right. \\
&\quad \left. + \alpha' \{ J(\alpha, \alpha' + 1, \beta, 1, 1) - J(\alpha, \alpha' + 1, \beta, 0, 2) \} \right] .
\end{aligned}$$

• Étape 4 :

$$\begin{aligned}
J(\alpha, 2, 1, \gamma, 2) &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha - \gamma} \left[\alpha \{ J(\alpha + 1, 2, 0, \gamma, 2) - J(\alpha + 1, 1, 1, \gamma, 2) \} \right. \\
&\quad \left. + \gamma \{ J(\alpha, 2, 0, \gamma + 1, 2) - J(\alpha, 2, 1, \gamma + 1, 1) \} \right] \\
J(2, \alpha', 1, 2, \gamma') &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha' - \gamma'} \left[\alpha' \{ J(2, \alpha' + 1, 0, 2, \gamma') - J(1, \alpha' + 1, 1, 2, \gamma') \} \right. \\
&\quad \left. + \gamma' \{ J(2, \alpha', 0, 2, \gamma' + 1) - J(2, \alpha', 1, 1, \gamma' + 1) \} \right] \\
J(\alpha, 2, 2, \gamma, 1) &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha - \gamma} \left[\alpha \{ J(\alpha + 1, 2, 1, \gamma, 1) - J(\alpha + 1, 1, 2, \gamma, 1) \} \right. \\
&\quad \left. + \gamma \{ J(\alpha, 2, 1, \gamma + 1, 1) - J(\alpha, 2, 2, \gamma + 1, 0) \} \right] \\
J(2, \alpha', 2, 1, \gamma') &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha' - \gamma'} \left[\alpha' \{ J(2, \alpha' + 1, 1, 1, \gamma') - J(1, \alpha' + 1, 2, 1, \gamma') \} \right. \\
&\quad \left. + \gamma' \{ J(2, \alpha', 1, 1, \gamma' + 1) - J(2, \alpha', 2, 0, \gamma' + 1) \} \right] \\
J(\alpha, 1, 2, \gamma, 2) &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha - \gamma} \left[\alpha \{ J(\alpha + 1, 1, 1, \gamma, 2) - J(\alpha + 1, 0, 2, \gamma, 2) \} \right. \\
&\quad \left. + \gamma \{ J(\alpha, 1, 1, \gamma + 1, 2) - J(\alpha, 1, 2, \gamma + 1, 1) \} \right] \\
J(1, \alpha', 2, 2, \gamma') &= \frac{1}{D - 2\beta - \alpha' - \gamma'} \left[\alpha' \{ J(1, \alpha' + 1, 1, 2, \gamma') - J(0, \alpha' + 1, 2, 2, \gamma') \} \right. \\
&\quad \left. + \gamma' \{ J(1, \alpha', 1, 2, \gamma' + 1) - J(1, \alpha', 2, 1, \gamma' + 1) \} \right] \\
J(2, 2, \beta, \gamma, \gamma') &= \frac{1}{D - 2\alpha - \beta - \gamma} \left[\beta \{ J(1, 2, \beta + 1, \gamma, \gamma') - J(2, 1, \beta + 1, \gamma, \gamma') \} \right. \\
&\quad \left. + \gamma \{ J(1, 2, \beta, \gamma + 1, \gamma') - J(2, 1, \beta, \gamma + 1, \gamma') \} \right]
\end{aligned}$$

$$J(\alpha, \alpha', \beta, 2, 2) = \frac{1}{D - 2\gamma - \beta - \alpha} \left[\beta \{ J(\alpha, \alpha', \beta + 1, 1, 2) - J(\alpha, \alpha', \beta + 1, 2, 1) \} + \alpha \{ J(\alpha + 1, \alpha', \beta, 1, 2) - J(\alpha + 1, \alpha', \beta, 2, 1) \} \right].$$

Ce jeu d'intégrales nous suffit à deux boucles. Il se généralise facilement à des ordres supérieurs.

B.1.2.3 Intégrales tensorielles

Notre théorie ayant des vertex dérivatifs, nous avons *a priori* besoin de tenseurs d'ordre relativement élevé pour exprimer nos graphes. Ceux-ci peuvent être obtenus, comme pour les intégrales à une boucle, en dérivant par rapport à l'impulsion externe. Typiquement, pour construire le vecteur J^μ ,

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma') = 2p^\mu \left[\gamma J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma + 1, \gamma') + \gamma' J(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma' + 1) \right] - 2\gamma J^\mu(\alpha, \alpha', \beta, \gamma + 1, \gamma') - 2\gamma' J^\mu(\alpha', \alpha, \beta, \gamma' + 1, \gamma). \quad (\text{B.44})$$

Il est possible de s'aider de la symétrie qui inverse k et q pour simplifier les expressions. Nous obtenons donc encore une relation de récurrence qui s'initialise sur des intégrales à une boucle.

Cependant, ce type de calculs peut vite devenir lourd, d'autant plus que les intégrales intervenant dans les graphes de type losange de la théorie de perturbations dans la phase plate peuvent faire intervenir des J à 14 indices! Dans ce cas, il est souvent préférable de se ramener à des intégrales scalaires, en décomposant les graphes tensoriels sur des bases adaptées, et d'utiliser les relations du type (B.40) pour réduire les numérateurs.

B.1.3 Intégrales triangle T

Nous avons présenté les méthodes de calcul des intégrales I , mais il existe des configurations à une boucle non décrites par ces intégrales, typiquement dans les fonctions à trois et quatre points. Bien que grâce à l'identité de Ward (3.24) le calcul de la fonction à trois points ne soit pas nécessaire dans la théorie de la phase plate, nous examinons ici les intégrales correspondantes :

The diagram shows a triangle with three vertices, each marked with a solid black dot. The top vertex is labeled with the Greek letter gamma (γ). The bottom-left vertex is labeled with the Greek letter alpha (α). The bottom-right vertex is labeled with the Greek letter beta (β). Each vertex has a short line segment extending outwards from the triangle.

$T(\alpha, \beta, \gamma) =$

\cdot

(B.45)

Le calcul est assez similaire à celui de J , mais avec une seule intégrale :

$$T(\alpha, \beta, \gamma) = \int_k \frac{1}{k^{2\alpha}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}}. \quad (\text{B.46})$$

Le principe est le même : chercher des relations de récurrence en utilisant l'intégration par parties. Par exemple, (B.41) donne :

$$(D - 2\beta - \gamma - \alpha)T(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(T(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma) - q^2 T(\alpha + 1, \beta, \gamma)) + \gamma(T(\alpha, \beta - 1, \gamma + 1) - (q - p)^2 T(\alpha, \beta, \gamma + 1)). \quad (\text{B.47})$$

En tout, trois relations indépendantes peuvent être obtenues, soit en variant la relation d'intégration par parties utilisée, soit en effectuant un changement de variables :

$$\int_k \frac{1}{k^{2\alpha}(k-q)^{2\beta}(k-p)^{2\gamma}} = \int_k \frac{1}{(k+q)^{2\alpha}k^{2\beta}(k+q-p)^{2\gamma}} = \int_k \frac{1}{(k+p)^{2\alpha}(k+p-q)^{2\beta}k^{2\gamma}} . \quad (\text{B.48})$$

La différence majeure avec J cependant réside dans le fait que k et q ne jouent plus ici des rôles symétriques. La somme $\alpha + \beta + \gamma$ n'est pas conservée dans (B.47). Nous pouvons alors établir une hiérarchie d'intégrales, où les termes de rang élevé (avec une grande valeur de $\alpha + \beta + \gamma$) s'expriment en fonction des termes de rang plus faible. Dans un souci d'obtenir des notations plus compactes, les arguments de T seront temporairement notés en indice :

$$\begin{cases} \beta q^2 T_{\alpha, \beta+1, \gamma} & + \gamma p^2 T_{\alpha, \beta, \gamma+1} & = A \\ \alpha q^2 T_{\alpha+1, \beta, \gamma} & + \gamma (q-p)^2 T_{\alpha, \beta, \gamma+1} & = B \\ \alpha p^2 T_{\alpha+1, \beta, \gamma} & + \beta (q-p)^2 T_{\alpha, \beta+1, \gamma} & = C \end{cases} , \quad (\text{B.49})$$

$$\begin{cases} A = (2\alpha + \beta + \gamma - D)T_{\alpha, \beta, \gamma} + \beta T_{\alpha-1, \beta+1, \gamma} + \gamma T_{\alpha-1, \beta, \gamma+1} \\ B = (2\beta + \alpha + \gamma - D)T_{\alpha, \beta, \gamma} + \alpha T_{\alpha+1, \beta-1, \gamma} + \gamma T_{\alpha, \beta-1, \gamma+1} \\ C = (2\gamma + \alpha + \beta - D)T_{\alpha, \beta, \gamma} + \alpha T_{\alpha+1, \beta, \gamma-1} + \beta T_{\alpha, \beta+1, \gamma-1} \end{cases} . \quad (\text{B.50})$$

C'est un système de Kramers, sa solution est donnée par $x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$, où A_k est la matrice du système dont la $k^{\text{ième}}$ colonne est remplacée par le membre de droite. Le déterminant Δ de ce système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \beta q^2 & \gamma p^2 \\ \alpha q^2 & 0 & \gamma (q-p)^2 \\ \alpha p^2 & \beta (q-p)^2 & 0 \end{vmatrix} = 2\alpha\beta\gamma q^2 p^2 (q-p)^2 . \quad (\text{B.51})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(\alpha+1, \beta, \gamma) = \frac{1}{\Delta} \left(-A\beta\gamma(q-p)^4 + B\beta\gamma p^2 (q-p)^2 + C\beta\gamma q^2 (q-p)^2 \right) \\ T(\alpha, \beta+1, \gamma) = \frac{1}{\Delta} \left(A\alpha\gamma p^2 (q-p)^2 - B\alpha\gamma p^4 + C\alpha\gamma q^2 p^2 \right) \\ T(\alpha, \beta, \gamma+1) = \frac{1}{\Delta} \left(A\alpha\beta q^2 (q-p)^2 + B\alpha\beta q^2 p^2 - C\alpha\beta q^4 \right) \end{cases} . \quad (\text{B.52})$$

La relation de récurrence s'écrit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(\alpha + 1, \beta, \gamma) = \frac{1}{2\alpha q^2 p^2} \left[\begin{array}{l} \{(2\alpha + \beta + \gamma - D)(q - p)^2 + (2\beta + \alpha + \gamma - D)p^2 + (2\gamma + \alpha + \beta)q^2\}T(\alpha, \beta, \gamma) \\ - \beta(q - p)^2 T(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma) - \gamma(q - p)^2 T(\alpha - 1, \beta, \gamma + 1) \\ + \alpha p^2 T(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma) + \gamma p^2 T(\alpha, \beta - 1, \gamma + 1) \\ + \alpha q^2 T(\alpha + 1, \beta, \gamma - 1) + \beta q^2 T(\alpha, \beta + 1, \gamma - 1) \end{array} \right] \\ \\ T(\alpha, \beta + 1, \gamma) = \frac{1}{2\beta (q - p)^2 q^2} \left[\begin{array}{l} \{(2\alpha + \beta + \gamma - D)(q - p)^2 + (2\beta + \alpha + \gamma - D)p^2 + (2\gamma + \alpha + \beta)q^2\}T(\alpha, \beta, \gamma) \\ + \beta(q - p)^2 T(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma) + \gamma(q - p)^2 T(\alpha - 1, \beta, \gamma + 1) \\ - \alpha p^2 T(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma) - \gamma p^2 T(\alpha, \beta - 1, \gamma + 1) \\ + \alpha q^2 T(\alpha + 1, \beta, \gamma - 1) + \beta q^2 T(\alpha, \beta + 1, \gamma - 1) \end{array} \right] \\ \\ T(\alpha, \beta, \gamma + 1) = \frac{1}{2\gamma (q - p)^2 p^2} \left[\begin{array}{l} \{(2\alpha + \beta + \gamma - D)(q - p)^2 + (2\beta + \alpha + \gamma - D)p^2 + (2\gamma + \alpha + \beta)q^2\}T(\alpha, \beta, \gamma) \\ + \beta(q - p)^2 T(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma) + \gamma(q - p)^2 T(\alpha - 1, \beta, \gamma + 1) \\ + \alpha p^2 T(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma) + \gamma p^2 T(\alpha, \beta - 1, \gamma + 1) \\ - \alpha q^2 T(\alpha + 1, \beta, \gamma - 1) - \beta q^2 T(\alpha, \beta + 1, \gamma - 1) \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (\text{B.53})$$

Contrairement aux losanges, la relation de récurrence peut donc être résolue pour les triangles. Malheureusement le revers de la médaille est qu'il n'est plus possible d'initialiser la relation avec I car $T(1, 1, 1)$ n'est plus relié à un triangle dont un des arguments est nul. Il faut donc également calculer $T(1, 1, 1)$, qui est plutôt difficile à déterminer :

$$\begin{aligned} T(1, 1, 1) &= \int_k \frac{1}{k^2(k - q)^2(k - p)^2} \\ &= \int_k \int_0^{+\infty} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 e^{-\tau_1 k^2 - \tau_2 (k - q)^2 - \tau_3 (k - p)^2} \\ &= \int_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-\tau_\Sigma q_0^2 + 2(\tau_2 q + \tau_3 p)q_0} \int_q e^{-\tau_\Sigma q^2} e^{-\tau_2 q^2 - \tau_3 p^2}, \quad \tau_\Sigma = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\ &= \int_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} \sqrt{\frac{\pi}{\tau_\Sigma}} \frac{e^{\frac{(\tau_2 q + \tau_3 p)^2}{\tau_\Sigma}}}{2\pi} \times \frac{1}{2^{D-2} \pi^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \frac{\tau_\Sigma^{-\frac{D-1}{2}}}{2} \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right) e^{-\tau_2 q^2 - \tau_3 p^2} \\ &= \frac{1}{2^D \pi^{D/2}} \int_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} (\tau_\Sigma)^{-D/2} e^{-\tau_2 q^2 - \tau_3 p^2} e^{\frac{(\tau_2 q + \tau_3 p)^2}{\tau_\Sigma}}. \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Cette intégrale a un pôle ultraviolet en $D = 6$. Afin de l'extraire, nous effectuons un chan-

gement de variable sphérique pour extraire la fonction Γ correspondante :

$$\begin{cases} \tau_1 = r \cos^2(\theta) \\ \tau_2 = r \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) \\ \tau_3 = r \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) \end{cases}$$

$$d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = \begin{vmatrix} \cos^2(\theta) & -r \sin(2\theta) & 0 \\ \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) & +r \sin(2\theta) \cos^2(\phi) & -r \sin^2(\theta) \sin(2\phi) \\ \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) & +r \sin(2\theta) \sin^2(\phi) & +r \sin^2(\theta) \sin(2\phi) \end{vmatrix} = r^2 \sin^2(\theta) \sin(2\theta) \sin(2\phi) .$$
(B.55)

$$\begin{aligned} T(1, 1, 1) &= \int dr d\theta d\phi r^2 \sin^2(\theta) \sin(2\theta) \sin(2\phi) r^{-D/2} \\ &\quad \times e^{-(p-q)^2 r \sin^4(\theta) \cos^2(\phi) \sin^2(\phi) - r \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) (p^2 \cos^2(\phi) + q^2 \sin^2(\phi))} \\ &= \int dr d\theta d\phi r^{2-D/2} f(\theta, \phi) e^{-rg(\theta, \phi)} \\ &= \int dud\theta d\phi \frac{u^{3-D/2}}{(g(\theta, \phi))^{2-D/2}} f(\theta, \phi) e^{-u} \\ &= \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \int d\theta d\phi f(\theta, \phi) (g(\theta, \phi))^{-2+D/2} . \end{aligned}$$
(B.56)

L'intégrale restante est convergente.

Ce résultat peut être encore un peu simplifié. D'abord, effectuons un autre changement de variables :

$$\begin{cases} u = \cos^2(\theta) \\ v = \cos^2(\phi) \end{cases}, \quad dudv = \sin(2\theta) \sin(2\phi) d\theta d\phi ,$$
(B.57)

$$\begin{aligned} \int d\theta d\phi f(\theta, \phi) (g(\theta, \phi))^{-2+D/2} &= \int_0^1 du \int_0^1 dv (1-u) \left[(1-u)^2 v(1-v)(p-q)^2 + (1-u)u(p^2 v + q^2(1-v)) \right]^{D/2-2} \\ &= \int_0^1 du \int_0^1 dv (1-u)^{D/2-1} \left[\alpha(1-u) + \beta u \right]^{D/2-2}, \end{aligned}$$
(B.58)

avec $\alpha = v(1-v)(p-q)^2$, $\beta = vp^2 + (1-v)q^2$. Ensuite, nous transformons u en $1-z$:

$$\begin{aligned}
\int d\theta d\phi f(\theta, \phi) (g(\theta, \phi))^{-2+D/2} &= \int_0^1 dv \beta^{D/2-2} \int_0^1 dz z^{D/2-1} \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)z \right]^{D/2-2} \\
&= \int_0^1 dv \frac{\beta^{D-2}}{(\beta - \alpha)^{D/2}} \int_0^{1-\alpha/\beta} dt t^{D/2-1} (1-t)^{D/2-2} \\
&= \int_0^1 dv \frac{\beta^{D-2}}{(\beta - \alpha)^{D/2}} B_{1-\frac{\alpha}{\beta}}\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2} - 1\right) \\
&= \int_0^1 dv \frac{\beta^{D-2}}{(\beta - \alpha)^{D/2}} \frac{(1-\frac{\alpha}{\beta})^{D/2}}{D/2} {}_2F_1\left(\frac{D}{2}, 2 - \frac{D}{2}, 1 + \frac{D}{2}, 1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \\
&= \int_0^1 dv \frac{D}{2} \beta^{D/2-2} {}_2F_1\left(\frac{D}{2}, 2 - \frac{D}{2}, 1 + \frac{D}{2}, 1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)
\end{aligned} \tag{B.59}$$

Malheureusement, cette expression ne se simplifie pas plus pour un D générique. Il est cependant possible d'effectuer des développements de son expression en ε dès que D est fixé.

Les termes tensoriels peuvent être déduits à partir d'un système de Kramers similaire.

B.2 Intégrales massives

Nous traitons à présent le cas d'intégrales avec des masses : tout d'abord le cas le plus simple des intégrales où l'impulsion externe ne circule pas, puis le cas général, en réinvestissant les calculs précédents.

B.2.1 Tadpoles massifs

Les intégrales de type tadpole massif ne comportent qu'un seul dénominateur :

$$I_{\mu(\dots)\nu}^m(\alpha) = \begin{array}{c} \text{diagram: tadpole with mass } \alpha \end{array} = \int_q \frac{q_\mu(\dots)q_\nu}{(q^2 + m^2)^\alpha}. \tag{B.60}$$

L'intégrale scalaire a déjà été calculée dans la section B.1.1.1 grâce à la représentation de Schwinger. Elle s'exprime en fonction de A , la contrepartie de a pour les divergences de type ultraviolet :

$$A(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)} \tag{B.61}$$

$$\boxed{I^m(\alpha) = \frac{A(\alpha)}{(4\pi)^{D/2}} (m^2)^{D/2-\alpha}}. \tag{B.62}$$

Bien évidemment la masse empêche l'apparition de divergences infrarouges. Il n'est donc pas surprenant de voir ces intégrales se réduire à des fonctions $A(\alpha)$ (qui ne peuvent porter que des divergences ultraviolettes) plutôt que $G^{(n,m)}(\alpha, \beta)$.

Afin de calculer les intégrales tensorielles correspondantes, il est utile de faire circuler une impulsion artificielle au dénominateur :

$$I^m(\alpha; p) = \int_q \frac{1}{(q^2 - 2(p \cdot q) + m^2)^\alpha} . \quad (\text{B.63})$$

L'équation (B.62) se généralise alors facilement :

$$I^m(\alpha; p) = \frac{A(\alpha)}{(4\pi)^{D/2}} (m^2 - p^2)^{D/2 - \alpha} . \quad (\text{B.64})$$

Les deux intégrales sont évidemment reliées par un simple changement de variable, modulo une redéfinition de la masse :

$$I^m(\alpha) = I^m(\alpha; p) \Big|_{m^2 \rightarrow m^2 + p^2} = \frac{A(\alpha)}{(4\pi)^{D/2}} (m^2)^{D/2 - \alpha} . \quad (\text{B.65})$$

Grâce à la dépendance en impulsion p , il est possible de construire des intégrales tensorielles en dérivant, tout simplement, comme dans le cas des intégrales sans masse :

$$\begin{aligned} \partial_\mu I^m(\alpha; p) &= \int_q \frac{2\alpha q_\mu}{(q^2 - 2(p \cdot q) + m^2)^{\alpha+1}} \\ &= 2\alpha I_\mu^m(\alpha + 1; p) \\ &= \frac{A(\alpha)}{(4\pi)^{D/2}} \times (-2p_\mu)(D/2 - \alpha)(m^2 - p^2)^{D/2 - \alpha - 1} \\ &= -2p_\mu \frac{(-A(\alpha + 1) \times \alpha)}{(4\pi)^{D/2}} (m^2 - p^2)^{D/2 - \alpha - 1} . \\ \Rightarrow \quad &\boxed{I_\mu^m(\alpha; p) = \frac{A(\alpha)}{(4\pi)^{D/2}} (m^2 - p^2)^{D/2 - \alpha} p_\mu} . \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

Le passage aux intégrales initiales se fait grâce au changement de variables (B.65) :

$$I_\mu^m(\alpha) = \int_q \frac{q_\mu - p_\mu}{(q^2 - 2(p \cdot q) + p^2 + m^2)^\alpha} = 0 . \quad (\text{B.67})$$

Il est également intéressant de remarquer que le terme de dérivée ∂_μ agit seulement sur les impulsions externes, donc seulement sur les dénominateurs des intégrales. La structure tensorielle non triviale découle au contraire de son action sur le second membre des équations du type (B.64). Traitons le tenseur d'ordre deux comme exemple. D'abord, dérivons la forme intégrale :

$$\partial_\nu I_\mu^m(\alpha; p) = \int_q \frac{2\alpha q_\mu q_\nu}{(q^2 - 2(p \cdot q) + m^2)^{\alpha+1}} = 2\alpha I_{\mu\nu}^m(\alpha + 1; p) ,$$

puis la forme intégrée (B.66) :

$$\begin{aligned} \partial_\nu I_\mu^m(\alpha; p) &= \frac{A(\alpha)}{(4\pi)^{D/2}} \left[(-2p_\nu)(D/2 - \alpha)(m^2 - p^2)^{D/2 - \alpha - 1} p_\mu + \delta_{\mu\nu} (m^2 - p^2)^{D/2 - \alpha} \right] \\ &= -2p_\mu p_\nu \frac{(-A(\alpha + 1) \times \alpha)}{(4\pi)^{D/2}} (m^2 - p^2)^{D/2 - \alpha - 1} + \delta_{\mu\nu} \frac{A(\alpha)}{(4\pi)^{D/2}} (m^2 - p^2)^{D/2 - \alpha} . \end{aligned}$$

Il est utile de généraliser :

$$A^{(n)}(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha - n - D/2)}{\Gamma(\alpha)} \quad (\text{B.68})$$

$$\Rightarrow I_{\mu\nu}^m(\alpha; p) = \left[\delta_{\mu\nu} \frac{A^{(1)}(\alpha)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{(m^2 - p^2)^{D/2-\alpha+1}}{2} + p_\mu p_\nu \frac{A(\alpha)}{(4\pi)^{D/2}} (m^2 - p^2)^{D/2-\alpha} \right]. \quad (\text{B.69})$$

$$I_{\mu\nu}^m(\alpha) = \delta_{\mu\nu} \frac{A^{(1)}(\alpha)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{(m^2)^{D/2-\alpha+1}}{2}. \quad (\text{B.70})$$

Cette formule se généralise, comme dans le cas des intégrales sans masse, à un ordre n quelconque.

Si n est pair,

$$\begin{aligned} I_{\mu_1(\dots)\mu_n}^m(\alpha; p) = & \left[X_{\mu_1(\dots)\mu_n} \frac{(m^2 - p^2)^{D/2+n/2-\alpha}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{A^{(n/2)}(\alpha)}{2^{n/2}} \right. \\ & \dots \\ & + Y_{\mu_1(\dots)\mu_n}^{(2j)}(p) \frac{(m^2 - p^2)^{D/2+n/2-j-\alpha}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{A^{(n/2-j)}(\alpha)}{2^{n/2-j}} \\ & \dots \\ & \left. + p_{\mu_1(\dots)\mu_n} \frac{(m^2 - p^2)^{D/2-\alpha}}{(4\pi)^{D/2}} A(\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

$$I_{\mu_1(\dots)\mu_n}^m(\alpha) = X_{\mu_1(\dots)\mu_n} \frac{(m^2)^{D/2+n/2-\alpha}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{A^{(n/2)}(\alpha)}{2^{n/2}} \quad (\text{B.72})$$

Si n est impair,

$$\begin{aligned} I_{\mu_1(\dots)\mu_n}^m(\alpha; p) = & \left[Z_{\mu_1(\dots)\mu_n}^{(1)} \frac{(m^2 - p^2)^{D/2+(n-1)/2-\alpha}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{A^{((n-1)/2)}(\alpha)}{2^{(n-1)/2}} \right. \\ & \dots \\ & + Z_{\mu_1(\dots)\mu_n}^{(2j+1)}(p) \frac{(m^2 - p^2)^{D/2+(n-1)/2-j-\alpha}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{A^{((n-1)/2-j)}(\alpha)}{2^{(n-1)/2-j}} \\ & \dots \\ & \left. + p_{\mu_1(\dots)\mu_n} \frac{(m^2 - p^2)^{D/2-\alpha}}{(4\pi)^{D/2}} A(\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

$$I_{\mu_1(\dots)\mu_n}^m(\alpha) = 0 \quad (\text{B.74})$$

B.2.2 Transformée de Mellin-Barnes

Pour aller plus loin, il est nécessaire d'utiliser des outils assez complexes. La transformée de Mellin-Barnes [Boos 1991] permet de réexprimer les intégrales massives en intégrales sans masse (que nous avons déjà calculées), au prix d'une intégration supplémentaire dans le plan complexe. Elle est basée sur la formule suivante :

$$\frac{1}{(q^2 + m^2)^\alpha} = \frac{1}{q^{2\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds \left(\frac{m^2}{q^2}\right)^s \Gamma(-s)\Gamma(\alpha + s). \quad (\text{B.75})$$

Le propagateur massif du membre de gauche est bien changé en un propagateur sans masse dans le membre de droite. L'intégrale restante se fait grâce au théorème des résidus, tous les pôles se trouvant sur l'axe réel; il est en particulier important de bien distinguer les cas $m < q$ et $m > q$ pour savoir si le contour se ferme à gauche ou à droite. Un avantage de cette méthode sur la paramétrisation de Feynman est qu'elle traite avec le même degré de difficulté les théories entièrement massives et les théories où seulement certains propagateurs sont massifs, tout en se basant pour les intégrales à D dimensions sur les formules des intégrales sans masse qui sont plus simples. Cependant, le résultat de l'intégrale s'écrit comme une série (infinie) de fonctions Γ qu'il n'est pas toujours simple d'analyser.

Les calculs avec de telles méthodes deviennent vite assez lourds, d'où l'intérêt des réarrangements infrarouges qui visent à tout réduire à des tadpoles massifs.

Équation de Wetterich

Cette Annexe présente quelques résultats autour de l'équation de Wetterich (1.45).

C.1 Démonstration

L'équation de flot de $\Gamma_k[\phi]$ est un résultat exact découlant des relations entre les potentiels thermodynamiques. Pour les besoins de notre preuve, nous considérerons un champ $\varphi(x)$ scalaire, mais la démonstration est la même sinon (seules les notations sont plus lourdes).

L'action effective moyenne est construite en ajoutant à l'action le terme de masse suivant :

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} \int_q \varphi(q) R_k(q) \varphi(-q) . \quad (\text{C.1})$$

Grâce à ce terme, les fonctionnelles génératrices dépendent de l'échelle courante.

$$\begin{aligned} \partial_k \mathcal{Z}_k[J] &= \int \mathcal{D}[\varphi] \left(-\partial_k \Delta S_k \right) e^{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int J \cdot \varphi} \\ &= -\frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k(q) \int \mathcal{D}[\varphi] \varphi(q) \varphi(-q) e^{-S_k[\varphi, J]} \\ \Rightarrow \partial_k e^{W_k[J]} &= \partial_k W_k[J] e^{W_k[J]} \\ &= -\frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k(q) \left\langle \varphi(q) \varphi(-q) \right\rangle_{k, J} \mathcal{Z}_k[J] \\ \Rightarrow \partial_k W_k[J] &= -\frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k(q) \left\langle \varphi(q) \varphi(-q) \right\rangle_{k, J} . \end{aligned}$$

Dans la suite, nous appelons $\Gamma_k^{Leg}[\phi]$ la transformée de Legendre de $W_k[J]$.

$$J(x) = \frac{\delta \Gamma_k^{Leg}[\phi]}{\delta \phi(x)} , \quad \phi(x) = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J(x)} = \left\langle \varphi(x) \right\rangle_{k, J} . \quad (\text{C.2})$$

D'autre part, la fonction de corrélation connexe est reliée à la dérivée seconde de Γ_k^{Leg} .

$$\begin{aligned} W_k^{(2)}[J; q, -q] &= \left\langle \varphi(q) \varphi(-q) \right\rangle_{k, J} - \left\langle \varphi(q) \right\rangle_{k, J} \left\langle \varphi(-q) \right\rangle_{k, J} \\ &= \left\langle \varphi(q) \varphi(-q) \right\rangle_{k, J} - \phi(q) \phi(-q) \\ &= \left[\Gamma_k^{(2), Leg}[\phi; q, -q] \right]^{-1} . \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

La transformation de Legendre peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}
\partial_k W_k[J] &= -\partial_k \left[\Gamma_k^{Leg}[\phi] \right] \Big|_{\phi} + \partial_k \left(\int_x J(x) \phi(x) \right) \\
&= - \int_x \frac{\delta \Gamma_k^{Leg}[\phi]}{\delta \phi(x)} \partial_k \phi(x) - \left[\partial_k \Gamma_k^{Leg}[\phi] \right] \Big|_{\phi} + \int_x J(x) \partial_k \phi(x) \\
\Rightarrow \partial_k \Gamma_k[\phi] &= \partial_k \Gamma_k^{Leg}[\phi] - \partial_k \Delta S_k[\phi] \\
&= -\partial_k W_k[J] - \frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k(q) \phi(q) \phi(-q) \\
&= \frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k(q) \left[\Gamma_k^{(2), Leg}[\phi; q, -q] \right]^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k(q) \left[\Gamma_k^{(2)}[\phi; q, -q] + R_k(q) \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve.

C.2 Cas pseudo-massif

La fonction de coupure $R_k(q)$ doit respecter au maximum les symétries de l'action effective pour éviter de générer des contributions artificielles au flot de renormalisation. Or, dans le cas d'une théorie invariante par translation, le terme $\Delta S_k[\phi]$ brise la symétrie. Dans cette section, nous nous proposons d'examiner les conséquences d'un couplage de la coupure aux dérivées du champ plutôt qu'aux champs eux-mêmes, qui permet de conserver l'invariance par translation au niveau de l'action à l'échelle courante $S_k[\varphi] = S[\varphi] + \Delta S_k[\varphi]$.

Nous ajoutons à présent le terme de pseudo-masse suivant :

$$\boxed{\Delta S_k = \frac{1}{2} \int_q R_k^{\alpha\beta}(q) \partial_\alpha \varphi(q) \partial_\beta \varphi(-q)}. \quad (\text{C.4})$$

Reprenons la démonstration précédente. La couleur rouge nous aide à suivre les modifications apportées par le changement de $\Delta S_k[\varphi]$.

$$\begin{aligned}
\partial_k \mathcal{Z}_k[J] &= \int \mathcal{D}[\varphi] \left(-\partial_k \Delta S_k \right) e^{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int J \cdot \varphi} \\
&= -\frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k^{\alpha\beta}(q) \int \mathcal{D}[\varphi] \partial_\alpha \varphi(q) \partial_\beta \varphi(-q) e^{-S_k[\varphi, J]} \\
\Rightarrow \partial_k e^{W_k[J]} &= \partial_k W_k[J] e^{W_k[J]} \\
&= -\frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k^{\alpha\beta}(q) \left\langle \partial_\alpha \varphi(q) \partial_\beta \varphi(-q) \right\rangle_{k, J} \mathcal{Z}_k[J] \\
\Rightarrow \partial_k W_k[J] &= -\frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k^{\alpha\beta}(q) q_\alpha q_\beta \left\langle \varphi(q) \varphi(-q) \right\rangle_{k, J}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_k W_k[J] &= -\partial_k \left[\Gamma_k^{Leg}[\phi] \right] \Big|_{\phi} + \partial_k \left(\int_x J(x) \phi(x) \right) \\
&= -\int_x \frac{\delta \Gamma_k^{Leg}[\phi]}{\delta \phi(x)} \partial_k \phi(x) - \left[\partial_k \Gamma_k^{Leg}[\phi] \right] \Big|_{\phi} + \int_x J(x) \partial_k \phi(x) \\
\Rightarrow \partial_k \Gamma_k[\phi] &= \partial_k \Gamma_k^{Leg}[\phi] - \partial_k \Delta S_k[\phi] \\
&= -\partial_k W_k[J] - \frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k^{\alpha\beta}(q) q_\alpha q_\beta \phi(q) \phi(-q) \\
&= \frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k^{\alpha\beta}(q) q_\alpha q_\beta \left[\Gamma_k^{(2),Leg}[\phi; q, -q] \right]^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k^{\alpha\beta}(q) q_\alpha q_\beta \left[\Gamma_k^{(2)}[\phi; q, -q] + R_k^{\alpha\beta}(q) q_\alpha q_\beta \right]^{-1}. \\
\Rightarrow \boxed{\partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \int_q \partial_k R_k^{\alpha\beta}(q) q_\alpha q_\beta \left[\Gamma_k^{(2)}[\phi; q, -q] + R_k^{\alpha\beta}(q) q_\alpha q_\beta \right]^{-1}}. & \quad (C.5)
\end{aligned}$$

Ainsi, la démonstration reste la même avec un couplage pseudo-massif.

Écrite sous cette forme, l'équation (C.5) est bien finie à la fois dans la limite ultraviolette et la limite infrarouge. Cependant, le dénominateur est maintenant beaucoup plus dangereux. En particulier, il n'est plus possible de dériver cette équation par rapport à ϕ un nombre suffisant de fois pour avoir accès à la renormalisation de toutes les fonctions à n points, car dériver augmente la puissance de q au dénominateur mais pas au numérateur, ce qui peut générer des divergences infrarouges pour n assez grand.

Cela peut être le signe que le développement dérivatif est basé sur une série mal définie si l'invariance par translation est imposée à la théorie. Il semble donc préférable d'avoir recours à une coupure couplée au champ quelle que soit la situation pour avoir une théorie toujours bien régulée. Dans le cas particulier de la théorie de la phase plate des membranes cristallines, l'utilisation du développement dérivatif en combinaison avec une coupure couplée aux champs, et non pas à ses dérivées, donne des résultats comparables aux calculs dans des schémas avec dépendance en impulsion, et aux autres approches non-perturbatives ou numériques (voir le Chapitre 3).

Théorie de perturbations - Annexe technique

Cette annexe présente des détails de calcul relatifs aux théories de perturbations présentées dans ce manuscrit.

D.1 Coefficients de renormalisation et fonctions β

D.1.1 Phase plate des membranes pures

η est défini à partir du comportement de la fonction de corrélation des flexurons dans l'infrarouge :

$$\langle h_B h_B \rangle = \frac{1}{\kappa p^4} = Z \langle hh \rangle \quad , \quad \langle hh \rangle \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{p^{4-\eta}} . \quad (\text{D.1})$$

Le coefficient de renormalisation Z est donc relié à l'échelle courante k de la façon suivante :

$$Z \propto \left(\frac{k}{p} \right)^\eta , \quad (\text{D.2})$$

soit finalement,

$$\eta = k \partial_k (\log(Z)) \quad (\text{D.3})$$

$$\Rightarrow \eta = k \frac{\partial \lambda}{\partial k} \frac{\partial \log(Z)}{\partial \lambda} + k \frac{\partial \mu}{\partial k} \frac{\partial \log(Z)}{\partial \mu}$$

$$\Rightarrow \eta = \beta_\lambda \frac{\partial \log(Z)}{\partial \lambda} + \beta_\mu \frac{\partial \log(Z)}{\partial \mu} . \quad (\text{D.4})$$

Le flot de renormalisation des constantes de couplage s'obtient grâce à la propriété selon laquelle *les quantités nues ne dépendent pas de l'échelle courante*. La relation entre quantités nues et renormalisées est donnée par (3.29). Nous avons donc :

$$\begin{cases} \frac{d \lambda_B}{dk} = 0 \\ \frac{d \mu_B}{dk} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \lambda_B}{\partial k} + \frac{\partial \lambda_B}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k} + \frac{\partial \lambda_B}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial \mu_B}{\partial k} + \frac{\partial \mu_B}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k} + \frac{\partial \mu_B}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial k} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_B}{\partial k} = \frac{\varepsilon}{k} \lambda_B \\ \frac{\partial \mu_B}{\partial k} = \frac{\varepsilon}{k} \mu_B \end{cases} , \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda_B}{\partial \lambda} = k^\varepsilon \partial_\lambda (\lambda Z_\lambda Z^{-2}) \\ \frac{\partial \mu_B}{\partial \lambda} = k^\varepsilon \partial_\lambda (\mu Z_\mu Z^{-2}) \end{cases} , \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda_B}{\partial \mu} = k^\varepsilon \partial_\mu (\lambda Z_\lambda Z^{-2}) \\ \frac{\partial \mu_B}{\partial \mu} = k^\varepsilon \partial_\mu (\mu Z_\mu Z^{-2}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon(\lambda Z_\lambda Z^{-2}) + \beta_\lambda \partial_\lambda(\lambda Z_\lambda Z^{-2}) + \beta_\mu \partial_\mu(\lambda Z_\lambda Z^{-2}) = 0 \\ \varepsilon(\mu Z_\mu Z^{-2}) + \beta_\lambda \partial_\lambda(\mu Z_\mu Z^{-2}) + \beta_\mu \partial_\mu(\mu Z_\mu Z^{-2}) = 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon + \beta_\lambda \partial_\lambda(\log(\lambda Z_\lambda Z^{-2})) + \beta_\mu \partial_\mu(\log(\lambda Z_\lambda Z^{-2})) = 0 \\ \varepsilon + \beta_\lambda \partial_\lambda(\log(\mu Z_\mu Z^{-2})) + \beta_\mu \partial_\mu(\log(\mu Z_\mu Z^{-2})) = 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon + \beta_\lambda \partial_\lambda(\log(\lambda Z_\lambda)) + \beta_\mu \partial_\mu(\log(\lambda Z_\lambda)) + \beta_\lambda \partial_\lambda(\log(Z^{-2})) + \beta_\mu \partial_\mu(\log(Z^{-2})) = 0 \\ \varepsilon + \beta_\lambda \partial_\lambda(\log(\mu Z_\mu)) + \beta_\mu \partial_\mu(\log(\mu Z_\mu)) + \beta_\lambda \partial_\lambda(\log(Z^{-2})) + \beta_\mu \partial_\mu(\log(Z^{-2})) = 0 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} -\varepsilon + 2\eta = D - 4 + 2\eta = \beta_\lambda \partial_\lambda(\log(\lambda Z_\lambda)) + \beta_\mu \partial_\mu(\log(\lambda Z_\lambda)) \\ -\varepsilon + 2\eta = D - 4 + 2\eta = \beta_\lambda \partial_\lambda(\log(\mu Z_\mu)) + \beta_\mu \partial_\mu(\log(\mu Z_\mu)) \end{cases} . \quad (D.5)
\end{aligned}$$

Dans le cadre d'une régularisation en schéma minimal, seules les parties divergentes des graphes sont extraites,

$$Z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n \varepsilon^{-n}, \quad Z_\mu = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{\mu,n} \varepsilon^{-n}, \quad Z_\lambda = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{\lambda,n} \varepsilon^{-n}. \quad (D.6)$$

À l'ordre de L boucles, les sommes sont tronquées à l'ordre $n = L$.

Nous pouvons alors développer les fonctions β et η en fonction de ε :

$$\begin{aligned}
\eta(\lambda, \mu, \varepsilon) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n \varepsilon^{-n}\right) &= \beta_\lambda(\lambda, \mu, \varepsilon) \sum_{n=1}^{+\infty} (\partial_\lambda(Z_n) \varepsilon^{-n}) + \beta_\mu(\lambda, \mu, \varepsilon) \sum_{n=1}^{+\infty} (\partial_\mu(Z_n) \varepsilon^{-n}) \\
-\lambda(\varepsilon - 2\eta(\lambda, \mu, \varepsilon)) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{\lambda,n} \varepsilon^{-n}\right) &= \beta_\lambda(\lambda, \mu, \varepsilon) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_\lambda(\lambda Z_{\lambda,n}) \varepsilon^{-n}\right) + \beta_\mu(\lambda, \mu, \varepsilon) \sum_{n=1}^{+\infty} (\partial_\mu(\lambda Z_{\lambda,n}) \varepsilon^{-n}) \\
-\mu(\varepsilon - 2\eta(\lambda, \mu, \varepsilon)) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{\mu,n} \varepsilon^{-n}\right) &= \beta_\lambda(\lambda, \mu, \varepsilon) \sum_{n=1}^{+\infty} (\partial_\lambda(\mu Z_{\mu,n}) \varepsilon^{-n}) + \beta_\mu(\lambda, \mu, \varepsilon) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_\mu(\mu Z_{\mu,n}) \varepsilon^{-n}\right)
\end{aligned} \quad (D.7)$$

Comme les fonctions β et η doivent être finies quand ε tend vers 0, nous pouvons supposer que leur développement ne contient que des puissances positives de ε . Si de plus nous *supposons* que leur développement peut être tronqué à un nombre fini de termes, nous obtenons les relations suivantes :

$$(\eta_n)_{n \geq 1} = 0, \quad (\beta_{\lambda,n})_{n \geq 2} = 0, \quad (\beta_{\mu,n})_{n \geq 2} = 0 \quad (D.8)$$

(le $n^{\text{ième}}$ coefficient de η ne dépend que du $(n-1)^{\text{ième}}$ coefficient de β_λ et β_μ et ainsi de suite).

Nous pouvons alors examiner les développements en ε ordre par ordre :

- Ordre $O(\varepsilon^1)$:

$$\begin{cases} \eta = -\lambda \partial_\lambda Z_1 - \mu \partial_\mu Z_1 \\ \beta_{\lambda,1} = -\lambda \\ \beta_{\mu,1} = -\mu \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

Dans les fonctions β , ce terme est la partie dimensionnelle du flot, due au fait que les coefficients de Lamé ont une unité et ont donc une dépendance triviale en l'échelle courante, qui est découplée des couplages renormalisés grâce au terme k^ε .

- Ordre $O(\varepsilon^0)$:

$$\begin{cases} \beta_{\lambda,0} = \lambda(2\eta + \lambda \partial_\lambda Z_{\lambda,1} + \mu \partial_\mu Z_{\lambda,1}) \\ \beta_{\mu,0} = \mu(2\eta + \lambda \partial_\lambda Z_{\mu,1} + \mu \partial_\mu Z_{\mu,1}) \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

- Ordre $O(\varepsilon^{-n})_{n \geq 1}$:

$$\begin{cases} \eta Z_n = -\lambda \partial_\lambda Z_{n+1} - \mu \partial_\mu Z_{n+1} + \beta_{\lambda,0} \partial_\lambda Z_n + \beta_{\mu,0} \partial_\mu Z_n \\ 2\eta \lambda Z_{\lambda,n} = -\lambda^2 \partial_\lambda Z_{\lambda,n+1} + \beta_{\lambda,0} \partial_\lambda (\lambda Z_{\lambda,n}) - \lambda \mu \partial_\mu Z_{\lambda,n+1} + \beta_{\mu,0} \lambda \partial_\mu Z_{\lambda,n} \\ 2\eta \mu Z_{\mu,n} = -\mu^2 \partial_\mu Z_{\mu,n+1} + \beta_{\mu,0} \partial_\mu (\mu Z_{\mu,n}) - \lambda \mu \partial_\lambda Z_{\mu,n+1} + \beta_{\lambda,0} \mu \partial_\lambda Z_{\mu,n} \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

Ces relations doivent être vérifiées ordre par ordre en théorie des perturbations pour assurer la cohérence du calcul.

D.1.2 Phase plate des membranes désordonnées

La procédure est la même, si ce n'est qu'il y a maintenant cinq constantes de couplage. Le lien entre variables nues et renormalisées est cette fois-ci donné par (6.47).

$$\eta = k \partial_k (\log(Z)) \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \eta &= k \frac{\partial \lambda}{\partial k} \frac{\partial \log(Z)}{\partial \lambda} + k \frac{\partial \mu}{\partial k} \frac{\partial \log(Z)}{\partial \mu} + k \frac{\partial \Delta_\lambda}{\partial k} \frac{\partial \log(Z)}{\partial \Delta_\lambda} + k \frac{\partial \Delta_\mu}{\partial k} \frac{\partial \log(Z)}{\partial \Delta_\mu} + k \frac{\partial \Delta_\kappa}{\partial k} \frac{\partial \log(Z)}{\partial \Delta_\kappa} \\ \eta &= \beta_\lambda \frac{\partial \log(Z)}{\partial \lambda} + \beta_\mu \frac{\partial \log(Z)}{\partial \mu} + \beta_{\Delta_\lambda} \frac{\partial \log(Z)}{\partial \Delta_\lambda} + \beta_{\Delta_\mu} \frac{\partial \log(Z)}{\partial \Delta_\mu} + \beta_{\Delta_\kappa} \frac{\partial \log(Z)}{\partial \Delta_\kappa}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{cases} \frac{d \lambda_B}{dk} = 0 \\ \frac{d \mu_B}{dk} = 0 \\ \frac{d \Delta_{\lambda,B}}{dk} = 0 \\ \frac{d \Delta_{\mu,B}}{dk} = 0 \\ \frac{d \Delta_{\kappa,B}}{dk} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \lambda_B}{\partial k} + \frac{\partial \lambda_B}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k} + \frac{\partial \lambda_B}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial k} + \frac{\partial \lambda_B}{\partial \Delta_\lambda} \frac{\partial \Delta_\lambda}{\partial k} + \frac{\partial \lambda_B}{\partial \Delta_\mu} \frac{\partial \Delta_\mu}{\partial k} + \frac{\partial \lambda_B}{\partial \Delta_\kappa} \frac{\partial \Delta_\kappa}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial \mu_B}{\partial k} + \frac{\partial \mu_B}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k} + \frac{\partial \mu_B}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial k} + \frac{\partial \mu_B}{\partial \Delta_\lambda} \frac{\partial \Delta_\lambda}{\partial k} + \frac{\partial \mu_B}{\partial \Delta_\mu} \frac{\partial \Delta_\mu}{\partial k} + \frac{\partial \mu_B}{\partial \Delta_\kappa} \frac{\partial \Delta_\kappa}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial \Delta_{\lambda,B}}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\lambda,B}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\lambda,B}}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\lambda,B}}{\partial \Delta_\lambda} \frac{\partial \Delta_\lambda}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\lambda,B}}{\partial \Delta_\mu} \frac{\partial \Delta_\mu}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\lambda,B}}{\partial \Delta_\kappa} \frac{\partial \Delta_\kappa}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial \Delta_{\mu,B}}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\mu,B}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\mu,B}}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\mu,B}}{\partial \Delta_\lambda} \frac{\partial \Delta_\lambda}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\mu,B}}{\partial \Delta_\mu} \frac{\partial \Delta_\mu}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\mu,B}}{\partial \Delta_\kappa} \frac{\partial \Delta_\kappa}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial \Delta_{\kappa,B}}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\kappa,B}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\kappa,B}}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\kappa,B}}{\partial \Delta_\lambda} \frac{\partial \Delta_\lambda}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\kappa,B}}{\partial \Delta_\mu} \frac{\partial \Delta_\mu}{\partial k} + \frac{\partial \Delta_{\kappa,B}}{\partial \Delta_\kappa} \frac{\partial \Delta_\kappa}{\partial k} = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_B}{\partial k} = \frac{\varepsilon}{k} \lambda_B \\ \frac{\partial \mu_B}{\partial k} = \frac{\varepsilon}{k} \mu_B \\ \frac{\partial \Delta_{\lambda,B}}{\partial k} = \frac{\varepsilon}{k} \Delta_{\lambda,B} \\ \frac{\partial \Delta_{\mu,B}}{\partial k} = \frac{\varepsilon}{k} \Delta_{\mu,B} \\ \frac{\partial \Delta_{\kappa,B}}{\partial k} = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_B}{\partial g_i} = k^\varepsilon \partial_{g_i} (\lambda Z_\lambda Z^{-2}) \\ \frac{\partial \mu_B}{\partial g_i} = k^\varepsilon \partial_{g_i} (\mu Z_\mu Z^{-2}) \\ \frac{\partial \Delta_{\lambda,B}}{\partial g_i} = k^\varepsilon \partial_{g_i} (\Delta_\lambda Z_{\Delta_\lambda} Z^{-2}) \\ \frac{\partial \Delta_{\mu,B}}{\partial g_i} = k^\varepsilon \partial_{g_i} (\Delta_\mu Z_{\Delta_\mu} Z^{-2}) \\ \frac{\partial \Delta_{\kappa,B}}{\partial g_i} = \partial_{g_i} (\Delta_\kappa Z_{\Delta_\kappa} Z^{-1}) \end{array} \right. , \quad g_i \in \{\lambda, \mu, \Delta_\lambda, \Delta_\mu, \Delta_\kappa\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon (\lambda Z_\lambda Z^{-2}) + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\lambda Z_\lambda Z^{-2}) = 0 \\ \varepsilon (\mu Z_\mu Z^{-2}) + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\mu Z_\mu Z^{-2}) = 0 \\ \varepsilon (\Delta_\lambda Z_{\Delta_\lambda} Z^{-2}) + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\Delta_\lambda Z_{\Delta_\lambda} Z^{-2}) = 0 \\ \varepsilon (\Delta_\mu Z_{\Delta_\mu} Z^{-2}) + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\Delta_\mu Z_{\Delta_\mu} Z^{-2}) = 0 \\ \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\Delta_\kappa Z_{\Delta_\kappa} Z^{-1}) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\lambda Z_\lambda Z^{-2})) = 0 \\ \varepsilon + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\mu Z_\mu Z^{-2})) = 0 \\ \varepsilon + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\Delta_\lambda Z_{\Delta_\lambda} Z^{-2})) = 0 \\ \varepsilon + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\Delta_\mu Z_{\Delta_\mu} Z^{-2})) = 0 \\ \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\Delta_\kappa Z_{\Delta_\kappa} Z^{-1})) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\lambda Z_\lambda)) + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(Z^{-2})) = 0 \\ \varepsilon + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\mu Z_\mu)) + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(Z^{-2})) = 0 \\ \varepsilon + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\Delta_\lambda Z_{\Delta_\lambda})) + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(Z^{-2})) = 0 \\ \varepsilon + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\Delta_\mu Z_{\Delta_\mu})) + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(Z^{-2})) = 0 \\ \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\Delta_\kappa Z_{\Delta_\kappa})) + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(Z^{-1})) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon + 2\eta = D - 4 + 2\eta = \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\lambda Z_\lambda)) \\ -\varepsilon + 2\eta = D - 4 + 2\eta = \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\mu Z_\mu)) \\ -\varepsilon + 2\eta = D - 4 + 2\eta = \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\Delta_\lambda Z_{\Delta_\lambda})) \\ -\varepsilon + 2\eta = D - 4 + 2\eta = \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\Delta_\mu Z_{\Delta_\mu})) \\ \eta = \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} (\log(\Delta_\kappa Z_{\Delta_\kappa})) \end{array} \right. \quad (D.14)$$

Nous pouvons effectuer le développement en ε en schéma minimal.

$$Z = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n \varepsilon^{-n}, \quad Z_{g_i} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{g_i,n} \varepsilon^{-n}. \quad (D.15)$$

$$\begin{aligned}
\eta(\{g_i\}, \varepsilon) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n \varepsilon^{-n}\right) &= \sum_{g_i} \beta_{g_i}(\{g_i\}, \varepsilon) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\partial_{g_i}(Z_n) \varepsilon^{-n}\right) \\
- \lambda \left(\varepsilon - 2\eta(\{g_i\}, \varepsilon)\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{\lambda,n} \varepsilon^{-n}\right) &= \beta_{\lambda}(\{g_i\}, \varepsilon) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{\lambda}(\lambda Z_{\lambda,n}) \varepsilon^{-n}\right) \\
&\quad + \sum_{g_j \neq \lambda} \beta_{g_j}(\{g_i\}, \varepsilon) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\partial_{g_j}(\lambda Z_{\lambda,n}) \varepsilon^{-n}\right) \\
- \mu \left(\varepsilon - 2\eta(\{g_i\}, \varepsilon)\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{\mu,n} \varepsilon^{-n}\right) &= \beta_{\mu}(\{g_i\}, \varepsilon) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{\mu}(\mu Z_{\mu,n}) \varepsilon^{-n}\right) \\
&\quad + \sum_{g_j \neq \mu} \beta_{g_j}(\{g_i\}, \varepsilon) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\partial_{g_j}(\mu Z_{\mu,n}) \varepsilon^{-n}\right) \\
- \Delta_{\lambda} \left(\varepsilon - 2\eta(\{g_i\}, \varepsilon)\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{\Delta_{\lambda},n} \varepsilon^{-n}\right) &= \beta_{\Delta_{\lambda}}(\{g_i\}, \varepsilon) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{\Delta_{\lambda}}(\Delta_{\lambda} Z_{\Delta_{\lambda},n}) \varepsilon^{-n}\right) \\
&\quad + \sum_{g_j \neq \Delta_{\lambda}} \beta_{g_j}(\{g_i\}, \varepsilon) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\partial_{g_j}(\Delta_{\lambda} Z_{\Delta_{\lambda},n}) \varepsilon^{-n}\right) \\
- \Delta_{\mu} \left(\varepsilon - 2\eta(\{g_i\}, \varepsilon)\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{\Delta_{\mu},n} \varepsilon^{-n}\right) &= \beta_{\Delta_{\mu}}(\{g_i\}, \varepsilon) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{\Delta_{\mu}}(\Delta_{\mu} Z_{\Delta_{\mu},n}) \varepsilon^{-n}\right) \\
&\quad + \sum_{g_j \neq \Delta_{\mu}} \beta_{g_j}(\{g_i\}, \varepsilon) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\partial_{g_j}(\Delta_{\mu} Z_{\Delta_{\mu},n}) \varepsilon^{-n}\right) \\
\Delta_{\kappa} \eta(\{g_i\}, \varepsilon) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} Z_{\Delta_{\kappa},n} \varepsilon^{-n}\right) &= \beta_{\Delta_{\kappa}}(\{g_i\}, \varepsilon) \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_{\Delta_{\kappa}}(\Delta_{\kappa} Z_{\Delta_{\kappa},n}) \varepsilon^{-n}\right) \\
&\quad + \sum_{g_j \neq \Delta_{\kappa}} \beta_{g_j}(\{g_i\}, \varepsilon) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\partial_{g_j}(\Delta_{\kappa} Z_{\Delta_{\kappa},n}) \varepsilon^{-n}\right)
\end{aligned} \tag{D.16}$$

Supposons de même qu'auparavant que le développement du flot de renormalisation peut être tronqué à un ordre fini en ε , nous obtenons :

$$(\eta_n)_{n \geq 1} = 0, \quad (\beta_{\lambda,n})_{n \geq 2} = 0, \quad (\beta_{\mu,n})_{n \geq 2} = 0, \quad (\beta_{\Delta_{\lambda},n})_{n \geq 2} = 0, \quad (\beta_{\Delta_{\mu},n})_{n \geq 2} = 0, \quad (\beta_{\Delta_{\kappa},n})_{n \geq 1} = 0 \tag{D.17}$$

Remarquons le rôle particulier joué par Δ_{κ} dont l'échelle est donnée par η , mais pas ε . Il n'a donc qu'un terme constant dans sa fonction β . L'analyse par ordre donne alors :

• Ordre $O(\varepsilon^1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = -\lambda\partial_\lambda Z_1 - \mu\partial_\mu Z_1 - \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_1 - \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_1 \\ \beta_{\lambda,1} = -\lambda \\ \beta_{\mu,1} = -\mu \\ \beta_{\Delta_\lambda,1} = -\Delta_\lambda \\ \beta_{\Delta_\mu,1} = -\Delta_\mu \end{array} \right. \quad (\text{D.18})$$

Le fait que $\partial_{\Delta_\kappa} Z_1$ n'apparaisse pas dans l'expression de η est une conséquence de l'absence de terme d'ordre 1 en ε dans β_{Δ_κ} .

• Order $O(\varepsilon^0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{\lambda,0} = \lambda(2\eta + \lambda\partial_\lambda Z_{\lambda,1} + \mu\partial_\mu Z_{\lambda,1} + \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_{\lambda,1} + \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_{\lambda,1}) \\ \beta_{\mu,0} = \mu(2\eta + \lambda\partial_\lambda Z_{\mu,1} + \mu\partial_\mu Z_{\mu,1} + \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_{\mu,1} + \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_{\mu,1}) \\ \beta_{\Delta_\lambda,0} = \Delta_\lambda(2\eta + \lambda\partial_\lambda Z_{\Delta_\lambda,1} + \mu\partial_\mu Z_{\Delta_\lambda,1} + \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_{\Delta_\lambda,1} + \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_{\Delta_\lambda,1}) \\ \beta_{\Delta_\mu,0} = \Delta_\mu(2\eta + \lambda\partial_\lambda Z_{\Delta_\mu,1} + \mu\partial_\mu Z_{\Delta_\mu,1} + \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_{\Delta_\mu,1} + \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_{\Delta_\mu,1}) \\ \beta_{\Delta_\kappa,0} = \Delta_\kappa(\eta + \lambda\partial_\lambda Z_{\Delta_\kappa,1} + \mu\partial_\mu Z_{\Delta_\kappa,1} + \Delta_\lambda\partial_{\Delta_\lambda} Z_{\Delta_\kappa,1} + \Delta_\mu\partial_{\Delta_\mu} Z_{\Delta_\kappa,1} + \Delta_\kappa\partial_{\Delta_\kappa} Z_{\Delta_\kappa,1}) \end{array} \right. \quad (\text{D.19})$$

• Order $O(\varepsilon^{-n})_{n \geq 1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta Z_n = - \sum_{g_j \neq \Delta_\kappa} g_j \partial_{g_j} Z_{n+1} + \sum_{g_i} \beta_{g_i} \partial_{g_i} Z_n \\ 2\eta \lambda Z_{\lambda,n} = -\lambda^2 \partial_\lambda Z_{\lambda,n+1} + \beta_{\lambda,0} \partial_\lambda (\lambda Z_{\lambda,n}) - \lambda \sum_{g_j \neq \lambda, \Delta_\kappa} g_j \partial_{g_j} Z_{\lambda,n+1} + \lambda \sum_{g_i \neq \lambda} \beta_{g_i,0} \partial_{g_i} Z_{\lambda,n} \\ 2\eta \mu Z_{\mu,n} = -\mu^2 \partial_\mu Z_{\mu,n+1} + \beta_{\mu,0} \partial_\mu (\mu Z_{\mu,n}) - \mu \sum_{g_j \neq \mu, \Delta_\kappa} g_j \partial_{g_j} Z_{\mu,n+1} + \mu \sum_{g_i \neq \mu} \beta_{g_i,0} \partial_{g_i} Z_{\mu,n} \\ 2\eta \Delta_\lambda Z_{\Delta_\lambda,n} = -\Delta_\lambda^2 \partial_{\Delta_\lambda} Z_{\Delta_\lambda,n+1} + \beta_{\Delta_\lambda,0} \partial_{\Delta_\lambda} (\Delta_\lambda Z_{\Delta_\lambda,n}) - \Delta_\lambda \sum_{g_j \neq \Delta_\lambda, \Delta_\kappa} g_j \partial_{g_j} Z_{\Delta_\lambda,n+1} \\ \quad + \Delta_\lambda \sum_{g_i \neq \Delta_\lambda} \beta_{g_i,0} \partial_{g_i} Z_{\Delta_\lambda,n} \\ 2\eta \Delta_\mu Z_{\Delta_\mu,n} = -\Delta_\mu^2 \partial_{\Delta_\mu} Z_{\Delta_\mu,n+1} + \beta_{\Delta_\mu,0} \partial_{\Delta_\mu} (\Delta_\mu Z_{\Delta_\mu,n}) - \Delta_\mu \sum_{g_j \neq \Delta_\mu, \Delta_\kappa} g_j \partial_{g_j} Z_{\Delta_\mu,n+1} \\ \quad + \Delta_\mu \sum_{g_i \neq \Delta_\mu} \beta_{g_i,0} \partial_{g_i} Z_{\Delta_\mu,n} \\ \eta \Delta_\kappa Z_{\Delta_\kappa,n} = \beta_{\Delta_\kappa} \partial_{\Delta_\kappa} Z_{\Delta_\kappa,n} - \Delta_\kappa \sum_{g_j \neq \Delta_\kappa} g_j \partial_{g_j} Z_{\Delta_\kappa,n+1} + \Delta_\kappa \sum_{g_j \neq \Delta_\kappa} \beta_{g_j,0} \partial_{g_j} Z_{\Delta_\kappa,n} \end{array} \right. \quad (\text{D.20})$$

Ces relations doivent être vérifiées à tous les ordres.

D.2 Théorie de large codimension

D.2.1 Flot du paramètre d'extension

D'après (3.52), le propagateur du champ auxiliaire à la transition de phase plate-froissée est donné par l'inverse du tenseur d'élasticité. Celui-ci peut se décomposer de la façon suivante :

$$c^{abcd} = \lambda \mathbb{I}^{abcd} + \mu \mathbb{J}^{abcd} , \quad (\text{D.21})$$

avec $\mathbb{I}^{abcd} = \delta^{ab}\delta^{cd}$ et $\mathbb{J}^{abcd} = \delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{bc}$.

L'espace vectoriel $\text{Vect}\{\mathbb{I}, \mathbb{J}\}$ est stable par multiplication :

$$\begin{cases} \mathbb{I}.\mathbb{I} = D\mathbb{I} \\ \mathbb{I}.\mathbb{J} = 2\mathbb{I} \\ \mathbb{J}.\mathbb{J} = 2\mathbb{J} \end{cases} , \quad (\text{D.22})$$

nous pouvons donc chercher un inverse sous la forme $(c^{-1})^{abcd} = A\mathbb{I}^{abcd} + B\mathbb{J}^{abcd}$.

$$\begin{aligned} c.c^{-1}.c &= c \\ \Rightarrow \begin{cases} (D\lambda + 2\mu)(\lambda AD + 2B\lambda + 2A\mu) = 0 \\ 4B\mu^2 = \mu \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{\lambda}{2\mu(D\lambda + 2\mu)} \\ B = \frac{1}{4\mu} \end{cases} . \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Avec un point col de la forme $\chi_{ij} = \chi_0\delta_{ij}$, il faut calculer la trace de ce tenseur.

$$(c^{-1})^i_j = A\mathbb{I}^i_j + B\mathbb{J}^i_j = \frac{D}{D\lambda + 2\mu} . \quad (\text{D.24})$$

L'équation de point col associée à (3.52) s'écrit donc finalement :

$$\frac{\partial S[\chi]}{\partial \chi_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_q \frac{1}{\kappa q^2 + 2\chi_0} - \frac{4D}{D\lambda + 2\mu} \chi_0 + \frac{D}{d_c} (\xi^2 - \zeta^2) = 0 . \quad (\text{D.25})$$

D.2.2 Correction à une boucle en phase plate

D.2.2.1 Approche alternative du calcul de l'énergie propre

L'énergie propre Σ_χ peut également être calculée grâce à la paramétrisation de Schwinger,

$$\frac{1}{X^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} d\tau \tau^{a-1} e^{-\tau X} . \quad (\text{D.26})$$

Comme cette approche est assez souvent utilisée dans ce type de développement perturbatif, nous présentons donc le calcul. Bien entendu, le résultat est le même.

Comme le vertex d'interaction entre le champ auxiliaire et les flexurons dans la phase plate se décompose sur $N_{abcd}(p)$ et $M_{abcd}(p)$, l'objet central est la polarisation transverse $\Pi_{\perp}(D)$ définie par l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
\Pi_{\perp}(D) &= \frac{d_c}{(D^2-1)p^{D-4}} \int_k \frac{k_{\perp}^4}{k^4(p-k)^4} \\
&= \frac{d_c}{(D^2-1)} \int d^D x \frac{x_{\perp}^4}{x^4(\hat{p}-x)^4} \\
&= \frac{d_c}{D^2-1} \int d^D x x_{\perp}^4 \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{+\infty} d\tau \tau e^{-\tau x^2} \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{+\infty} dt t e^{-t(\hat{p}-x)^2} \\
&= \frac{d_c}{D^2-1} \int \int dt d\tau t \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_0}{2\pi} \int \frac{d^{D-1}x}{(2\pi)^{D-1}} x^4 e^{-\tau x_0^2} e^{-\tau x^2} e^{-t(\hat{p}-x_0)^2} e^{-tx^2} \\
&= \frac{d_c}{D^2-1} \int \int dt d\tau t \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_0}{2\pi} e^{-\tau x_0^2} e^{-t(\hat{p}-x_0)^2} \int \frac{d^{D-1}x}{(2\pi)^{D-1}} x^4 e^{-\tau x^2} e^{-tx^2} .
\end{aligned} \tag{D.27}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_0}{2\pi} e^{-\tau x_0^2} e^{-t(\hat{p}-x_0)^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_0}{2\pi} e^{-t} e^{-(t+\tau)(x_0-\frac{t}{t+\tau})^2} e^{+\frac{t^2}{t+\tau}} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_0}{2\pi} e^{-\frac{t\tau}{t+\tau}} e^{-(t+\tau)(x_0-\frac{t}{t+\tau})^2} \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t\tau}{t+\tau}} \sqrt{\frac{\pi}{t+\tau}} \\
&= \frac{e^{-\frac{t\tau}{t+\tau}}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t+\tau}} .
\end{aligned} \tag{D.28}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^{D-1}x}{(2\pi)^{D-1}} x^4 e^{-\tau x^2} e^{-tx^2} &= \frac{1}{2^{D-2}\pi^{\frac{D-1}{2}}\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int_0^{+\infty} dx x^{4+D-2} e^{-(t+\tau)x^2} \\
&= \frac{1}{2^{D-2}\pi^{\frac{D-1}{2}}\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int_0^{+\infty} dx x^{D+2} e^{-(t+\tau)x^2} \\
&= \frac{1}{2^{D-2}\pi^{\frac{D-1}{2}}\Gamma(\frac{D-1}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{du}{2(t+\tau)} \frac{u^{\frac{D+1}{2}}}{(t+\tau)^{\frac{D+1}{2}}} e^{-u} \\
&= \frac{1}{2^{D-2}\pi^{\frac{D-1}{2}}\Gamma(\frac{D-1}{2})} \frac{1}{(t+\tau)^{\frac{D+3}{2}}} \Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{D-2}\pi^{\frac{D-1}{2}}\Gamma(\frac{D-1}{2})} (t+\tau)^{-\frac{D+3}{2}} \left(\frac{D+1}{2}\right) \left(\frac{D-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right) \\
&= \frac{(D^2-1)}{2^{D+1}\pi^{\frac{D-1}{2}}} (t+\tau)^{-\frac{D+3}{2}} .
\end{aligned} \tag{D.29}$$

Pour calculer l'intégrale restante, nous utilisons le changement de variables suivant :

$$t = y e^z \operatorname{ch}(z), \quad \tau = y e^{-z} \operatorname{ch}(z), \quad dt d\tau = 2y \operatorname{ch}^2(z) dy dz , \tag{D.30}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dt d\tau t \tau (t + \tau)^{-\frac{D}{2}-2} e^{-\frac{t\tau}{t+\tau}} &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dy dz 2y \operatorname{ch}^2(z) \frac{y^2 \operatorname{ch}^2(z)}{(2y \operatorname{ch}^2(z))^{-\frac{D}{2}-2}} e^{-\frac{y^2 \operatorname{ch}^2(z)}{2y \operatorname{ch}^2(z)}} \\
&= \int_0^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} dy 2^{-1-\frac{D}{2}} y^{1-\frac{D}{2}} (\operatorname{ch}(z))^{-D} e^{-y} \\
&= 2^{-1-\frac{D}{2}} \int_0^{+\infty} dY Y^{1-\frac{D}{2}} e^{-Y} 2^{2-\frac{D}{2}} \int_0^{+\infty} dz (\operatorname{ch}(z))^{-D} \\
&= 2^{1-D} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^{+\infty} dz \frac{2^D}{(e^z + z^{-z})^D} \\
&= 2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^{+\infty} dz \frac{e^{zD}}{(1 + e^{2z})^D} \\
&= 2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t} \frac{t^{\frac{D}{2}}}{(1+t)^D} \\
&= \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \times \frac{1}{2} \left[\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} \frac{t^{\frac{D}{2}}}{(1+t)^D} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} \frac{t^{\frac{D}{2}}}{(1+t)^D} \right] \\
&= \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \times \frac{1}{2} \left[\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} \frac{t^{\frac{D}{2}}}{(1+t)^D} + \int_0^1 \frac{du}{u^2} \frac{u^{1-\frac{D}{2}}}{(1+\frac{1}{u})^D} \right] \\
&= \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \times \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt \frac{t^{\frac{D}{2}-1}}{(1+t)^D} \\
&= \frac{1}{2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) B\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right).
\end{aligned} \tag{D.31}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Pi_{\perp}(D) &= \frac{d_c}{D^2 - 1} \times \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \frac{(D^2 - 1)}{2^{D+1}\pi^{\frac{D-1}{2}}} \times \frac{1}{2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) B\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right) \\
&= d_c \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) B\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right)}{2^{D+3}\pi^{\frac{D}{2}}} \\
&= d_c \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{2^{2D+1}\pi^{\frac{D-1}{2}} \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}.
\end{aligned} \tag{D.32}$$

Finalement, il suffit de relier $\Pi_{\perp}(D)$ à Σ_{χ} :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\chi}^{abcd}(p) &= \frac{p^{D-4}}{d_c} \Pi_{\perp}(D) \left((D+1) N^{abcd}(p) + 2M^{abcd}(p) \right) \\
&= \frac{p^{D-4}}{2^{D+3}\pi^{D/2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) B\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right) \left((D+1) N^{abcd}(p) + 2M^{abcd}(p) \right).
\end{aligned} \tag{D.33}$$

D.2.2.2 Dimensions anormales

Rappelons la définition de η en fonction de la limite infrarouge de l'énergie propre :

$$\Sigma_h(p) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} p^{4-\eta}. \tag{D.34}$$

Pour simplifier les expressions obtenues, nous décomposons le propagateur du champ auxiliaire (3.80) sur la base de projecteurs orthogonaux :

$$\begin{aligned} \langle \chi_{ab}(p) \chi_{cd}(-p) \rangle &= \chi_N(p) N_{abcd}(p) + \chi_M(p) M_{abcd}(p) \\ &= \left[\frac{b}{b + (D+1) \frac{p^{D-4}}{d_c} \Pi_{\perp}(D)} \right] N_{abcd}(p) + \left[\frac{\mu}{\mu + 2 \frac{p^{D-4}}{d_c} \Pi_{\perp}(D)} \right] M_{abcd}(p), \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

où $b = \frac{\mu(D\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}$.

La correction à une boucle à l'énergie propre des flexurons est déterminée en injectant le propagateur renormalisé à une boucle du champ auxiliaire (3.80) dans le graphe arc-en-ciel :

$$\begin{aligned} \Sigma_h(p) &= \text{diagram} \\ &= -\frac{2}{d_c} \int_q p^a (p-q)^b (p-q)^c p^d \left[(\tilde{\mathcal{R}}^{abcd})^{-1}(q) + \Sigma_X^{abcd}(q) \right]^{-1} G(p-q) \\ &= -\frac{2}{d_c} \int_q \frac{p_{\perp}^4}{(D-1)(p-q)^4} \left[\chi_N(q) + (D-2)\chi_M(q) \right] \\ &= -\frac{2}{d_c (D-1)} p^4 \int_q \frac{q_{\perp}^4}{q^4 (p-q)^4} \left[\chi_N(q) + (D-2)\chi_M(q) \right] \\ &= -\frac{2}{d_c (D-1)} p^4 \frac{D^2-1}{D(D+2)} \int_q \frac{1}{(p-q)^4} \left[\chi_N(q) + (D-2)\chi_M(q) \right] \\ &= -\frac{2(D+1)p^4}{d_c D(D+2)} \int_q \frac{1}{(p-q)^4} \left[\chi_N(q) + (D-2)\chi_M(q) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

L'avant-dernière étape se justifie de la manière suivante : le numérateur étant transverse, l'intégrale ne peut dépendre en aucune manière de la direction de p .

Le calcul de l'intégrale restante est très compliqué à cause de la structure inhomogène en impulsion du dénominateur de (D.35). Cependant, nous n'avons pas besoin de toutes les informations présentes dans cette intégrale pour obtenir le résultat final, car η , qui est une correction au comportement infrarouge de $\Sigma_h(p)$ en fonction de p , n'apparaît que dans le coefficient de cette intégrale par rapport à $\log(p)$. Nous pouvons alors appliquer une coupure infrarouge à l'échelle p . Afin de simplifier les expressions, nous travaillons d'abord sur une forme d'intégrale

générique :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(A) &= \int_q \frac{1}{(p-q)^4(1+Ap^{D-4})} \\
&\simeq \int_p^{+\infty} dq \frac{q^{D-1}}{2^{D-1}\pi^{\frac{D}{2}}\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{1}{q^4(1+Ap^{D-4})} \\
&= \frac{1}{2^{D-1}\pi^{\frac{D}{2}}\Gamma(\frac{D}{2})} \int_p^{+\infty} dq q^{D-5} \int_0^{+\infty} dt e^{-t(1+Ap^{D-4})} \\
&= \frac{1}{2^{D-1}\pi^{\frac{D}{2}}\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^{+\infty} dt e^{-t} \int_{Atp^{D-4}}^0 \frac{du}{At(D-4)} e^{-u} \\
&= \frac{1}{2^{D-1}\pi^{\frac{D}{2}}\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^{+\infty} dt \frac{e^{-t}}{t} \left[-1 + e^{-Atp^{D-4}} \right].
\end{aligned} \tag{D.37}$$

L'intégrale finale est convergente, bien que ses deux termes pris indépendamment ne le soient pas. Elle peut être calculée grâce au développement en série des fonctions exponentielles intégrales

$$E_i(x) = - \int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx :$$

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{+\infty} dt \frac{e^{-t} - e^{-\beta t}}{t} &= -E_i(-\alpha) + E_i(-\beta\alpha) \\
&= -\left(\gamma + \log(\alpha) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n n!} \right) + \left(\gamma + \log(\beta\alpha) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\beta\alpha)^n}{n n!} \right) \\
&= \log(\beta) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\alpha)^n(1 + \beta^n)}{n n!} \\
&\xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \log(\beta)
\end{aligned} \tag{D.38}$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(A) = - \frac{1}{2^{D-1}\pi^{\frac{D}{2}}\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{\log(1 + Ap^{D-4})}{A(D-4)} \tag{D.39}$$

Il est alors possible d'extraire la dépendance en logarithme dans la limite infrarouge.

$$\begin{aligned}
\frac{d \log(1 + Ap^{D-4})}{d \log(p)} &= A(D-4) p^{D-4} \frac{1}{1 + Ap^{D-4}} \\
&= A(D-4) \frac{1}{A + p^{4-D}} \\
&\xrightarrow{p \rightarrow 0} (D-4)
\end{aligned} \tag{D.40}$$

Grâce à ce résultat simple, nous pouvons exprimer la dimension anormale, qui sans hypothèse

supplémentaire est η_4 :

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \eta_4 &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p \partial_p \Sigma_h(p)}{p^4} \right] \\
&= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \partial_p}{p^4} \left[- \frac{2(D+1)p^4}{d_c D(D+2)} \left(b \mathcal{I}(b(D+1)\Pi_\perp(D)/d_c) + (D-2) \mu \mathcal{I}(2\mu\Pi_\perp(D)/d_c) \right) \right] \\
&= \frac{2(D+1)}{d_c D(D+2)} \frac{1}{2^{D-1} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} \left[\frac{b d_c}{b(D+1)\Pi_\perp(D)} + (D-2) \frac{\mu d_c}{2\mu\Pi_\perp(D)} \right] \\
&= \frac{D(D-1)d_c}{d_c 2^{D-1} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2}) D(D+2)\Pi_\perp(D)} \\
&= \frac{(D-1)2^{D+2} \Gamma(\frac{D+1}{2})}{d_c \sqrt{\pi} (D+2) \Gamma(\frac{D}{2}) B(\frac{D}{2}, 2 - \frac{D}{2})} \\
&= \frac{8(D-1)}{d_c (D+2) B(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}) B(\frac{D}{2}, 2 - \frac{D}{2})} .
\end{aligned} \tag{D.41}$$

Pour atteindre \mathbf{P}_3 , l'autre point fixe où η est non trivial, il faut se restreindre à l'hypersurface sur laquelle il est attractif dans l'infrarouge : $b = 0$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \eta_3 &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{k \partial_k}{p^4} \left[- \frac{2(D+1)p^4}{d_c D(D+2)} (D-2) \mu \mathcal{I}(2\mu\Pi_\perp(D)/d_c) \right] \\
&= \frac{2(D+1)}{d_c D(D+2)} \frac{1}{2^{D-1} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} (D-2) \frac{\mu d_c}{2\mu\Pi_\perp(D)} \\
&= \frac{(D+1)(D-2)d_c}{d_c 2^{D-1} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2}) D(D+2)\Pi_\perp(D)} \\
&= \frac{(D-2)(D+1)2^{D+2} \Gamma(\frac{D+1}{2})}{d_c \sqrt{\pi} D(D+2) \Gamma(\frac{D}{2}) B(\frac{D}{2}, 2 - \frac{D}{2})} \\
&= \frac{8(D-2)(D+1)}{d_c D(D+2) B(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}) B(\frac{D}{2}, 2 - \frac{D}{2})} .
\end{aligned} \tag{D.42}$$

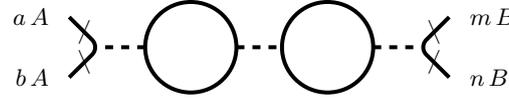
Cette méthode donne des expressions de la dimension anormale qui peuvent être développées à un ordre arbitraire en ε .

D.3 Graphes à deux boucles pour les membranes avec impuretés

Les graphes à deux boucles de la théorie effective sont les suivants :

- Vertex effectif $\mathcal{R}^{abmn}(p)$:

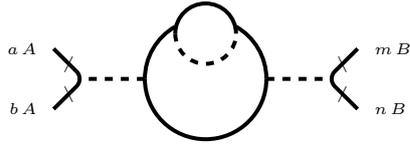
– Double bulle :



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \left[\frac{5b^3 d_c^2 (2\Delta_\kappa + 1)^2 (15\varepsilon \log(p^2) - 19\varepsilon - 15)}{442368\pi^4 \varepsilon^2} \delta^{AB} \right. \\
& \quad \left. + \frac{5b^2 d_c^2 (2\Delta_\kappa + 1) (15\varepsilon \log(p^2) - 19\varepsilon - 15) (2b\Delta_\kappa^2 - 3\Delta_b(2\Delta_\kappa + 1))}{442368\pi^4 \varepsilon^2} J^{AB} \right] N_{abmn}(p) \\
& \quad + \left[\frac{d_c^2 \mu^3 (2\Delta_\kappa + 1)^2 (3\varepsilon \log(p^2) - 5\varepsilon - 3)}{110592\pi^4 \varepsilon^2} \delta^{AB} \right. \\
& \quad \left. - \frac{d_c^2 \mu^2 (2\Delta_\kappa + 1) (3\varepsilon \log(p^2) - 5\varepsilon - 3) (-2\Delta_\kappa^2 \mu + 6\Delta_\kappa \Delta_\mu + 3\Delta_\mu^2)}{110592\pi^4 \varepsilon^2} J^{AB} \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0),
\end{aligned} \tag{D.43}$$

où il faut comprendre $\log(p^2)$ comme le raccourci de $\log(p^2/k^2)$.

– Bulle-arc-en-ciel :



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \left[\frac{5bd_c}{221184\pi^4 \varepsilon^2} \left[-2b^2 (\Delta_\kappa + 1) \Delta_\kappa^2 (71\varepsilon + 60) + 60\varepsilon \log(p^2) (2b^2 (\Delta_\kappa + 1) \Delta_\kappa^2 - b(\Delta_b(9\Delta_\kappa^2 + 8\Delta_\kappa + 2) + 6\Delta_\kappa^2 \Delta_\mu - 4(\Delta_\kappa + 1) \Delta_\kappa^2 \mu)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\Delta_b(4\Delta_b \Delta_\kappa + \Delta_b - 2(3\Delta_\kappa^2 + 4\Delta_\kappa + 1)\mu + 8\Delta_\kappa \Delta_\mu + 2\Delta_\mu) + b(\Delta_b(9\Delta_\kappa^2 + 8\Delta_\kappa + 2)(71\varepsilon + 60) - 2\Delta_\kappa^2(41\varepsilon + 60)(2(\Delta_\kappa + 1)\mu - 3\Delta_\mu)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\Delta_b(-\Delta_b(4\Delta_\kappa + 1)(71\varepsilon + 60) - 2(41\varepsilon + 60)(-3\Delta_\kappa^2 + 4\Delta_\kappa + 1)\mu + 4\Delta_\kappa \Delta_\mu + \Delta_\mu) \right] J^{AB} \right. \\
& \quad \left. + \frac{5b^2 d_c}{221184\pi^4 \varepsilon^2} \left[-b(3\Delta_\kappa^2 + 4\Delta_\kappa + 1)(71\varepsilon + 60) + 60\varepsilon \log(p^2) (3b\Delta_\kappa^2 + 4b\Delta_\kappa + b - 4\Delta_b \Delta_\kappa - \Delta_b + 6\Delta_\kappa^2 \mu - 8\Delta_\kappa \Delta_\mu + 8\Delta_\kappa \mu - 2\Delta_\mu + 2\mu) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 284\Delta_b \Delta_\kappa \varepsilon + 240\Delta_b \Delta_\kappa + 71\Delta_b \varepsilon + 60\Delta_b - 360\Delta_\kappa^2 \mu - 246\Delta_\kappa^2 \mu \varepsilon + 328\Delta_\kappa \Delta_\mu \varepsilon + 480\Delta_\kappa \Delta_\mu - 480\Delta_\kappa \mu \varepsilon - 328\Delta_\kappa \mu \varepsilon + 82\Delta_\mu \varepsilon \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 120\Delta_\mu - 120\mu - 82\mu \varepsilon \right] \delta^{AB} \right] N_{abmn}(p) \\
& \quad + \left[\frac{d_c \mu}{110592\pi^4 \varepsilon^2} \left[-2b(83\varepsilon + 60)(\Delta_\kappa + 1)(\Delta_\kappa^2 \mu - 3\Delta_\kappa \Delta_\mu - \Delta_\mu) + 60\varepsilon \log(p^2) (2b(\Delta_\kappa + 1)(\Delta_\kappa^2 \mu - 3\Delta_\kappa \Delta_\mu - \Delta_\mu) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \Delta_b(-3\Delta_\kappa^2 \mu + 8\Delta_\kappa \Delta_\mu + 2\Delta_\mu) + 4\Delta_\kappa^3 \mu^2 + 2\Delta_\kappa^2 \mu(2\mu - 9\Delta_\mu) + 16\Delta_\kappa \Delta_\mu(\Delta_\mu - \mu) + 4\Delta_\mu(\Delta_\mu - \mu) + 180\Delta_b \Delta_\kappa^2 \mu + 249\Delta_b \Delta_\kappa^2 \mu \varepsilon \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 480\Delta_b \Delta_\kappa \Delta_\mu - 664\Delta_b \Delta_\kappa \Delta_\mu \varepsilon - 120\Delta_b \Delta_\mu - 166\Delta_b \Delta_\mu \varepsilon - 240\Delta_\kappa^3 \mu^2 - 212\Delta_\kappa^3 \mu^2 \varepsilon + 1080\Delta_\kappa^2 \Delta_\mu \mu + 954\Delta_\kappa^2 \Delta_\mu \mu \varepsilon - 240\Delta_\kappa^2 \mu^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 212\Delta_\kappa^2 \mu^2 \varepsilon - 960\Delta_\kappa \Delta_\mu^2 - 848\Delta_\kappa \Delta_\mu^2 \varepsilon + 960\Delta_\kappa \Delta_\mu \mu + 848\Delta_\kappa \Delta_\mu \mu \varepsilon - 240\Delta_\mu^2 - 212\Delta_\mu^2 \varepsilon + 240\Delta_\mu \mu + 212\Delta_\mu \mu \varepsilon \right] J^{AB} \right. \\
& \quad \left. + \frac{d_c \mu^2}{110592\pi^4 \varepsilon^2} \left[-b(83\varepsilon + 60)(3\Delta_\kappa^2 + 4\Delta_\kappa + 1) + 60\varepsilon \log(p^2) (b(3\Delta_\kappa^2 + 4\Delta_\kappa + 1) - \Delta_b(4\Delta_\kappa + 1) + 6\Delta_\kappa^2 \mu - 8\Delta_\kappa \Delta_\mu + 8\Delta_\kappa \mu - 2\Delta_\mu + 2\mu) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 240\Delta_b \Delta_\kappa + 332\Delta_b \Delta_\kappa \varepsilon + 60\Delta_b + 83\Delta_b \varepsilon - 360\Delta_\kappa^2 \mu - 318\Delta_\kappa^2 \mu \varepsilon + 480\Delta_\kappa \Delta_\mu + 424\Delta_\kappa \Delta_\mu \varepsilon - 480\Delta_\kappa \mu - 424\Delta_\kappa \mu \varepsilon + 120\Delta_\mu \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 106\Delta_\mu \varepsilon - 120\mu - 106\mu \varepsilon \right] \delta^{AB} \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.44}$$

• Énergie propre des flexurons $\Sigma_h(p)$:

– Arc-en-ciel-bulle :



$$\begin{aligned}
&\stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{d_c \Delta_\kappa p^4}{442368 \pi^4 \varepsilon^2} \left[5b(71\varepsilon + 60)(\Delta_b(4\Delta_\kappa + 2) - b\Delta_\kappa^2) + 60\varepsilon \log(p^2)(5b(b\Delta_\kappa^2 - 2\Delta_b(2\Delta_\kappa + 1) + 4\Delta_\kappa^2 \mu^2 - 8(2\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu \mu) \right. \\
&\quad \left. - 4\Delta_\kappa^2 \mu^2(53\varepsilon + 60) + 8(2\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu \mu(53\varepsilon + 60) \right] J^{AB} \\
&+ \frac{d_c p^4}{442368 \pi^4 \varepsilon^2} \left[-5b(71\varepsilon + 60)(3b\Delta_\kappa(\Delta_\kappa + 1) + b - 2(2\Delta_b \Delta_\kappa + \Delta_b)) + 60\varepsilon \log(p^2)(5b(3b\Delta_\kappa(\Delta_\kappa + 1) + b - 2(2\Delta_b \Delta_\kappa + \Delta_b)) \right. \\
&\quad \left. - 8(2\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu \mu + 4(3\Delta_\kappa(\Delta_\kappa + 1) + 1)\mu^2) + 8(2\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu \mu(53\varepsilon + 60) - 4(3\Delta_\kappa(\Delta_\kappa + 1) + 1)\mu^2(53\varepsilon + 60) \right] \delta^{AB} + O(\varepsilon^0). \tag{D.45}
\end{aligned}$$

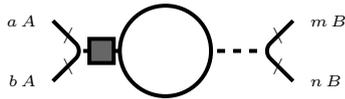
– Double arc-en-ciel :



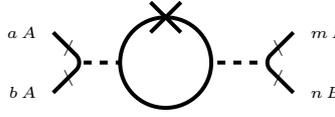
$$\begin{aligned}
&\stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} -\frac{5p^4}{73728 \pi^4 \varepsilon^2} \left[b^2(\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa + 1)(7\varepsilon - 20) + 20\varepsilon \log(p^2)(b^2(\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa + 1) - 2b(2\Delta_\kappa + 1)(\Delta_b - 2(\Delta_\kappa + 1)\mu + 2\Delta_\mu) \right. \\
&\quad - 4(2\Delta_\kappa + 1)\mu(\Delta_b + 2\Delta_\mu) + (\Delta_b + 2\Delta_\mu)^2 + 4(\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa + 1)\mu^2) + 2b(2\Delta_\kappa + 1)(\Delta_b(20 - 7\varepsilon) - 2(17\varepsilon - 20)(\Delta_\mu - (\Delta_\kappa + 1)\mu)) \\
&\quad \left. + \Delta_b^2(7\varepsilon - 20) + 4\Delta_b(17\varepsilon - 20)(\Delta_\mu - (2\Delta_\kappa + 1)\mu) + 4(27\varepsilon - 20)(-2\Delta_\mu(2\Delta_\kappa \mu + \mu) + (\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa + 1)\mu^2 + \Delta_\mu^2) \right] \delta^{AB} \\
&- \frac{5\Delta_\kappa p^4}{73728 \pi^4 \varepsilon^2} \left[-2b(\Delta_\kappa + 1)(7\Delta_b \varepsilon - 20\Delta_b + 34\Delta_\mu \varepsilon - 40\Delta_\mu) - 20\varepsilon(\Delta_b + 2\Delta_\mu) \log(p^2)(2b(\Delta_\kappa + 1) - 3(\Delta_b + 2\Delta_\mu) \right. \\
&\quad \left. + 4(\Delta_\kappa + 1)\mu) - 4(\Delta_\kappa + 1)\mu(17\Delta_b \varepsilon - 20\Delta_b + 54\Delta_\mu \varepsilon - 40\Delta_\mu) + 3(\Delta_b + 2\Delta_\mu)(7\Delta_b \varepsilon - 20\Delta_b + 54\Delta_\mu \varepsilon - 40\Delta_\mu) \right] J^{AB} + O(\varepsilon^0). \tag{D.46}
\end{aligned}$$

Les contributions des contretermes sont les suivantes :

• Vertex effectif $\mathcal{R}^{abmn}(p)$:



$$\begin{aligned}
&\stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} - \left[\frac{5b^3(2d_c \Delta_\kappa + d_c)^2(15\varepsilon \log(p^2) - 13\varepsilon - 30)}{442368 \pi^4 \varepsilon^2} \delta^{AB} \right. \\
&\quad \left. + \frac{5b^2 d_c^2(2\Delta_\kappa + 1)(2b\Delta_\kappa^2 - 3\Delta_b(2\Delta_\kappa + 1))(15\varepsilon \log(p^2) - 13\varepsilon - 30)}{442368 \pi^4 \varepsilon^2} J^{AB} \right] N_{abmn}(p) \\
&- \left[\frac{\mu^3 d_c^2(2\Delta_\kappa + 1)^2(3\varepsilon \log(p^2) - 5\varepsilon - 6)}{110592 \pi^4 \varepsilon^2} \delta^{AB} \right. \\
&\quad \left. - \frac{d_c^2(2\Delta_\kappa + 1)\mu^2(3(2\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu - 2\Delta_\kappa^2 \mu)(3\varepsilon \log(p^2) - 5\varepsilon - 6)}{110592 \pi^4 \varepsilon^2} J^{AB} \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0), \tag{D.47}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} - \left[\frac{5bd_c}{55296\pi^4\varepsilon^2} (15\varepsilon \log(p^2) - 19\varepsilon - 30) \left[2b^2(\Delta_\kappa + 1)\Delta_\kappa^2 - b\Delta_b(\Delta_\kappa(9\Delta_\kappa + 8) + 2) + 2b\Delta_\kappa^2(2(\Delta_\kappa + 1)\mu - 3\Delta_\mu) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\Delta_b(4\Delta_\kappa + 1)(\Delta_b + 2\Delta_\mu) - 4\Delta_b(\Delta_\kappa + 1)(3\Delta_\kappa + 1)\mu \right] J^{AB} \right. \\
& \quad \left. \frac{5b^2d_c}{55296\pi^4\varepsilon^2} (15\varepsilon \log(p^2) - 19\varepsilon - 30) \left[b(\Delta_\kappa + 1)(3\Delta_\kappa + 1) - (4\Delta_\kappa + 1)(\Delta_b + 2\Delta_\mu) + 2(\Delta_\kappa + 1)(3\Delta_\kappa + 1)\mu \right] \delta^{AB} \right] N_{abmn}(p) \\
& - \left[\frac{5d_c\mu(3\varepsilon \log(p^2) - 5\varepsilon - 6)}{27648\pi^4\varepsilon^2} \left[-2b(\Delta_\kappa + 1)(-\Delta_\kappa^2\mu + 3\Delta_\kappa\Delta_\mu + \Delta_\mu) - 3\Delta_b\Delta_\kappa^2\mu + 2(4\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu(\Delta_b + 2\Delta_\mu) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 4(\Delta_\kappa + 1)\Delta_\kappa^2\mu^2 - 2(\Delta_\kappa(9\Delta_\kappa + 8) + 2)\Delta_\mu\mu \right] J^{AB} \right. \\
& \quad \left. \frac{5d_c\mu^2(3\varepsilon \log(p^2) - 5\varepsilon - 6)}{27648\pi^4\varepsilon^2} \left[b(\Delta_\kappa + 1)(3\Delta_\kappa + 1) - (4\Delta_\kappa + 1)(\Delta_b + 2\Delta_\mu) + 2(\Delta_\kappa + 1)(3\Delta_\kappa + 1)\mu \right] \delta^{AB} \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0) . \\
& \hspace{15em} (D.48)
\end{aligned}$$

• Énergie propre des flexurons $\Sigma_h(p)$:



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{d_c\Delta_\kappa p^4}{110592\pi^4\varepsilon^2} \left[5b(13\varepsilon + 30)(b\Delta_\kappa^2 - 2\Delta_b(2\Delta_\kappa + 1)) - 15\varepsilon \log(p^2)(5b(b\Delta_\kappa^2 - 2\Delta_b(2\Delta_\kappa + 1)) + 4\Delta_\kappa^2\mu^2 \right. \\
& \quad \left. - 8(2\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu\mu) + 8\Delta_\kappa^2\mu^2(2\varepsilon + 15) - 16(2\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu\mu(2\varepsilon + 15) \right] J^{AB} \\
& + \frac{d_cp^4}{110592\pi^4\varepsilon^2} \left[5b(13\varepsilon + 30)(3b\Delta_\kappa(\Delta_\kappa + 1) + b - 2\Delta_b(2\Delta_\kappa + 1)) \right. \\
& \quad \left. - 15\varepsilon \log(p^2)(5b(3b\Delta_\kappa(\Delta_\kappa + 1) + b - 2\Delta_b(2\Delta_\kappa + 1)) - 8(2\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu\mu + 4(3\Delta_\kappa(\Delta_\kappa + 1) + 1)\mu^2) \right. \\
& \quad \left. - 16(2\Delta_\kappa + 1)\Delta_\mu\mu(2\varepsilon + 15) + 8(3\Delta_\kappa(\Delta_\kappa + 1) + 1)\mu^2(2\varepsilon + 15) \right] \delta^{AB} + O(\varepsilon^0) . \\
& \hspace{15em} (D.49)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{5p^4}{18432\pi^4\varepsilon^2} \left[-10(b^2(\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa + 1) - 2b(2\Delta_\kappa + 1)(\Delta_b - 2(\Delta_\kappa + 1)\mu + 2\Delta_\mu) - 4(2\Delta_\kappa + 1)\mu(\Delta_b + 2\Delta_\mu) \right. \\
& \quad \left. + (\Delta_b + 2\Delta_\mu)^2 + 4(\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa + 1)\mu^2) - \varepsilon(-5 \log(p^2) - 7)(b^2(\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa + 1) \right. \\
& \quad \left. - 2b(2\Delta_\kappa + 1)(\Delta_b - 2(\Delta_\kappa + 1)\mu + 2\Delta_\mu) - 4(2\Delta_\kappa + 1)\mu(\Delta_b + 2\Delta_\mu) + (\Delta_b + 2\Delta_\mu)^2 + 4(\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa + 1)\mu^2) \right. \\
& \quad \left. + 10\varepsilon(b(\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa\mu - \Delta_\mu + \mu) - \mu(3\Delta_b\Delta_\kappa + \Delta_b + 8\Delta_\kappa\Delta_\mu + 4\Delta_\mu) + \Delta_\mu(\Delta_b + 2\Delta_\mu) + 2(\Delta_\kappa + 1)(2\Delta_\kappa + 1)\mu^2) \right] \delta^{AB} \\
& - \frac{5\Delta_\kappa p^4}{18432\pi^4\varepsilon^2} (2b(\Delta_\kappa + 1) - 3\Delta_b + 4(\Delta_\kappa + 1)\mu - 6\Delta_\mu) \left[\Delta_b(7\varepsilon - 10) + 4\Delta_\mu(6\varepsilon - 5) + 5\varepsilon(\Delta_b + 2\Delta_\mu) \log(p^2) \right] J^{AB} + O(\varepsilon^0) . \\
& \hspace{15em} (D.50)
\end{aligned}$$

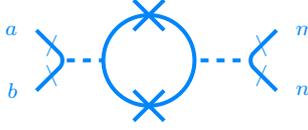
D.4 Graphes à trois boucles

Dans la suite, nous utilisons un code couleur pour repérer les graphes appariés pour l'annulation des termes logarithmiques.

• Vertex effectif $\mathcal{R}^{abmn}(p)$:



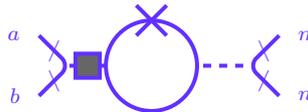
$$\begin{aligned} & \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} -\frac{25b^2 d_c (b+2\mu)^2}{127401984\pi^6 \varepsilon^3} \left[6\varepsilon \log(p^2) (-15\varepsilon \log(p^2) + 38\varepsilon + 60) + \varepsilon(5(3\pi^2 - 88)\varepsilon - 456) - 720 \right] N_{abmn}(p) \\ & - \frac{25\mu^2 d_c (b+2\mu)^2}{63700992\pi^6 \varepsilon^3} \left[6\varepsilon \log(p^2) (-3\varepsilon \log(p^2) + 10\varepsilon + 12) + \varepsilon((3\pi^2 - 112)\varepsilon - 120) - 144 \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0) . \end{aligned} \quad (D.51)$$



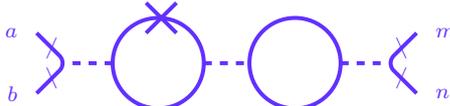
$$\begin{aligned} & \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} -\frac{25b^2 d_c (b+2\mu)^2}{254803968\pi^6 \varepsilon^3} \left[6\varepsilon \log(p^2) (-15\varepsilon \log(p^2) + 38\varepsilon + 60) + \varepsilon(5(3\pi^2 - 88)\varepsilon - 456) - 720 \right] N_{abmn}(p) \\ & - \frac{25d_c \mu^2 (b+2\mu)^2}{127401984\pi^6 \varepsilon^3} \left[6\varepsilon \log(p^2) (-3\varepsilon \log(p^2) + 10\varepsilon + 12) + \varepsilon((3\pi^2 - 112)\varepsilon - 120) - 144 \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0) . \end{aligned} \quad (D.52)$$



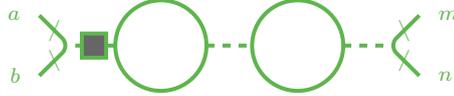
$$\begin{aligned} & \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} -\frac{5b^4 d_c^3}{4076863488\pi^6 \varepsilon^3} \left[-90\varepsilon \log(p^2) (5\varepsilon \log(p^2) + 22\varepsilon - 20) + \varepsilon((75\pi^2 - 3512)\varepsilon + 3960) - 3600 \right] N_{abmn}(p) \\ & + \frac{\mu^4 d_c^3}{509607936\pi^6 \varepsilon^3} \left[6\varepsilon \log(p^2) (3\varepsilon \log(p^2) - 2(5\varepsilon + 6)) + \varepsilon((112 - 3\pi^2)\varepsilon + 120) + 144 \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0) . \end{aligned} \quad (D.53)$$



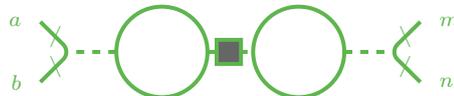
$$\begin{aligned} & \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} -\frac{5b^3 d_c^2 (b+2\mu)}{509607936\pi^6 \varepsilon^3} \left[30\varepsilon \log(p^2) (-15\varepsilon \log(p^2) + 26\varepsilon + 60) + \varepsilon((75\pi^2 - 1744)\varepsilon - 1560) - 3600 \right] N_{abmn}(p) \\ & - \frac{5d_c^2 \mu^3 (b+2\mu)}{127401984\pi^6 \varepsilon^3} \left[6\varepsilon \log(p^2) (-3\varepsilon \log(p^2) + 10\varepsilon + 12) + \varepsilon((3\pi^2 - 112)\varepsilon - 120) - 144 \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0) . \end{aligned} \quad (D.54)$$



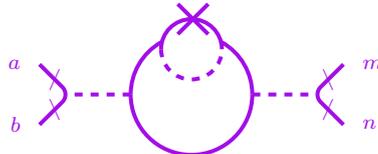
$$\begin{aligned} & \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{5b^3 d_c^2 (b+2\mu) \left[-180\varepsilon \log(p^2) (5\varepsilon \log(p^2) + 14\varepsilon - 10) + \varepsilon((75\pi^2 - 3242)\varepsilon + 2520) - 1800 \right]}{254803968\pi^6 \varepsilon^3} N_{abmn}(p) \\ & + \frac{5d_c^2 \mu^3 (b+2\mu) \left[4\varepsilon \log(p^2) (-3\varepsilon \log(p^2) + 10\varepsilon + 6) + \varepsilon((\pi^2 - 54)\varepsilon - 40) - 24 \right]}{21233664\pi^6 \varepsilon^3} M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0) . \end{aligned} \quad (D.55)$$



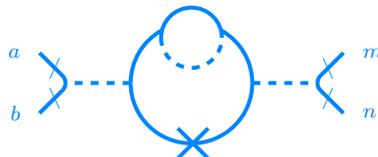
$$\begin{aligned} & \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{5b^4 d_c^3 \left[-180\varepsilon \log(p^2) (5\varepsilon \log(p^2) + 16\varepsilon - 10) + \varepsilon((75\pi^2 - 3746)\varepsilon + 2880) - 1800 \right]}{4076863488\pi^6 \varepsilon^3} N_{abmn}(p) \\ & + \frac{d_c^3 \mu^4 \left[4\varepsilon \log(p^2) (-3\varepsilon \log(p^2) + 10\varepsilon + 6) + \varepsilon((\pi^2 - 54)\varepsilon - 40) - 24 \right]}{169869312\pi^6 \varepsilon^3} M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0). \end{aligned} \quad (D.56)$$



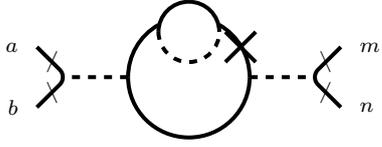
$$\begin{aligned} & \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{5b^4 d_c^3 \left[20\varepsilon \log(p^2) (-15\varepsilon \log(p^2) + 32\varepsilon + 30) + \varepsilon((25\pi^2 - 822)\varepsilon - 640) - 600 \right]}{679477248\pi^6 \varepsilon^3} N_{abmn}(p) \\ & - \frac{d_c^3 \mu^4 \left[2\varepsilon \log(p^2) (3\varepsilon \log(p^2) - 10\varepsilon - 6) + \varepsilon(27\varepsilon + 20) + 12 \right]}{42467328\pi^6 \varepsilon^3} M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0). \end{aligned} \quad (D.57)$$



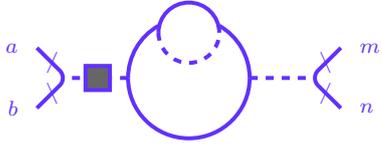
$$\begin{aligned} & \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{5b^2 d_c (b + 2\mu)}{254803968\pi^6 \varepsilon^3} \left[60\varepsilon \log(p^2) (-30\varepsilon (b + 2\mu) \log(p^2) + b(71\varepsilon + 60) + 2\mu(41\varepsilon + 60)) \right. \\ & \quad \left. + b(\varepsilon((150\pi^2 - 7639)\varepsilon - 4260) - 3600) + 2\mu(\varepsilon((150\pi^2 - 5509)\varepsilon - 2460) - 3600) \right] N_{abmn}(p) \\ & + \frac{5d_c \mu^2 (b + 2\mu)}{127401984\pi^6 \varepsilon^3} \left[12\varepsilon \log(p^2) (-30\varepsilon (b + 2\mu) \log(p^2) + b(83\varepsilon + 60) + 120\mu) \right. \\ & \quad \left. + b(\varepsilon((30\pi^2 - 1727)\varepsilon - 996) - 720) + 2\mu(\varepsilon((30\pi^2 - 1229)\varepsilon - 636) - 720) \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0). \end{aligned} \quad (D.58)$$



$$\begin{aligned} & \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{5b^2 d_c (b + 2\mu)}{254803968\pi^6 \varepsilon^3} \left[60\varepsilon \log(p^2) (-30\varepsilon (b + 2\mu) \log(p^2) + b(71\varepsilon + 60) + 2\mu(41\varepsilon + 60)) \right. \\ & \quad \left. + b(\varepsilon((150\pi^2 - 7639)\varepsilon - 4260) - 3600) + 2\mu(\varepsilon((150\pi^2 - 5509)\varepsilon - 2460) - 3600) \right] N_{abmn}(p) \\ & + \frac{5d_c \mu^2 (b + 2\mu)}{127401984\pi^6 \varepsilon^3} \left[12\varepsilon \log(p^2) (-30\varepsilon (b + 2\mu) \log(p^2) + b(83\varepsilon + 60) + 2\mu(53\varepsilon + 60)) \right. \\ & \quad \left. + b(\varepsilon((30\pi^2 - 1727)\varepsilon - 996) - 720) + 2\mu(\varepsilon((30\pi^2 - 1229)\varepsilon - 636) - 720) \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0). \end{aligned} \quad (D.59)$$



$$\begin{aligned} &\stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} \frac{5b^2 d_c (b + 2\mu)}{127401984\pi^6 \varepsilon^3} \left[60\varepsilon \log(p^2) (-30\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) + b(71\varepsilon + 60) + 2\mu(41\varepsilon + 60)) \right. \\ &\quad \left. + b(\varepsilon((150\pi^2 - 7639)\varepsilon - 4260) - 3600) + 2\mu(\varepsilon((150\pi^2 - 5509)\varepsilon - 2460) - 3600) \right] N_{abmn}(p) \\ &- \frac{5d_c \mu^2 (b + 2\mu)}{63700992\pi^6 \varepsilon^3} \left[12\varepsilon \log(p^2) (30\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) - b(83\varepsilon + 60) - 2\mu(53\varepsilon + 60)) \right. \\ &\quad \left. + b(\varepsilon((1727 - 30\pi^2)\varepsilon + 996) + 720) + 2\mu(\varepsilon((1229 - 30\pi^2)\varepsilon + 636) + 720) \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0). \end{aligned} \quad (D.60)$$



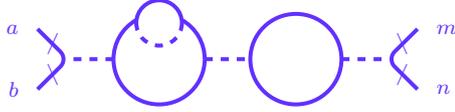
$$\begin{aligned} &\stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} \frac{5b^3 d_c^2}{1019215872\pi^6 \varepsilon^3} \left[60\varepsilon \log(p^2) (-30\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) + b(59\varepsilon + 60) + 2\mu(29\varepsilon + 60)) \right. \\ &\quad \left. + b(\varepsilon((150\pi^2 - 6787)\varepsilon - 3540) - 3600) + 2\mu(\varepsilon((150\pi^2 - 5017)\varepsilon - 1740) - 3600) \right] N_{abmn}(p) \\ &- \frac{d_c^2 \mu^3}{254803968\pi^6 \varepsilon^3} \left[12\varepsilon \log(p^2) (30\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) - b(83\varepsilon + 60) - 2\mu(53\varepsilon + 60)) \right. \\ &\quad \left. + b(\varepsilon((1727 - 30\pi^2)\varepsilon + 996) + 720) + 2\mu(\varepsilon((1229 - 30\pi^2)\varepsilon + 636) + 720) \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0). \end{aligned} \quad (D.61)$$



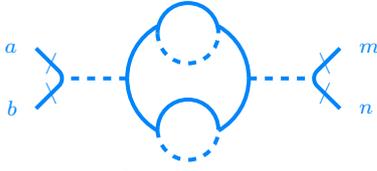
$$\begin{aligned} &\stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} \frac{b^2 d_c^2}{509607936\pi^6 \varepsilon^3} \left[60\varepsilon \log(p^2) (30\varepsilon(5b^2 + 4\mu^2) \log(p^2) - 5b^2(59\varepsilon + 60) - 4\mu^2(41\varepsilon + 60)) \right. \\ &\quad \left. + 5b^2(\varepsilon((6787 - 150\pi^2)\varepsilon + 3540) + 3600) + 4\mu^2(\varepsilon((5509 - 150\pi^2)\varepsilon + 2460) + 3600) \right] N_{abmn}(p) \\ &+ \frac{d_c^2 \mu^2}{254803968\pi^6 \varepsilon^3} \left[12\varepsilon \log(p^2) (30\varepsilon(5b^2 + 4\mu^2) \log(p^2) - 5b^2(71\varepsilon + 60) - 4\mu^2(53\varepsilon + 60)) \right. \\ &\quad \left. + b^2(\varepsilon((7639 - 150\pi^2)\varepsilon + 4260) + 3600) + 4\mu^2(\varepsilon((1229 - 30\pi^2)\varepsilon + 636) + 720) \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0). \end{aligned} \quad (D.62)$$



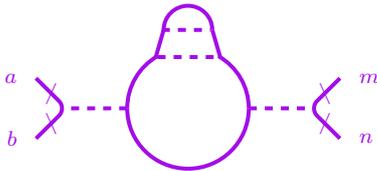
$$\begin{aligned} &\stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} \frac{5b^4 d_c^3 [90\varepsilon \log(p^2) (15\varepsilon \log(p^2) - 38\varepsilon - 20) + \varepsilon((3644 - 75\pi^2)\varepsilon + 2280) + 1200]}{2717908992\pi^6 \varepsilon^3} N_{abmn}(p) \\ &+ \frac{d_c^3 \mu^4 [18\varepsilon \log(p^2) (3\varepsilon \log(p^2) - 10\varepsilon - 4) + \varepsilon((212 - 3\pi^2)\varepsilon + 120) + 48]}{339738624\pi^6 \varepsilon^3} M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0). \end{aligned} \quad (D.63)$$



$$\begin{aligned}
 & \stackrel{=}{\varepsilon \ll 1} \frac{5b^3 d_c^2}{339738624\pi^6 \varepsilon^3} \left[30\varepsilon \log(p^2) (45\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) - b(29\varepsilon+60) + 2\mu(\varepsilon-60)) \right. \\
 & \quad \left. + b(\varepsilon(2339-75\pi^2)\varepsilon+580)+1200) + 2\mu(\varepsilon((2049-75\pi^2)\varepsilon-20)+1200) \right] N_{abmn}(p) \\
 & + \frac{d_c^2 \mu^3}{84934656\pi^6 \varepsilon^3} \left[6\varepsilon \log(p^2) (45\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) - b(53\varepsilon+60) - 2\mu(23\varepsilon+60)) \right. \\
 & \quad \left. + b(\varepsilon((543-15\pi^2)\varepsilon+212)+240) + 2\mu(\varepsilon((437-15\pi^2)\varepsilon+92)+240) \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0).
 \end{aligned} \tag{D.64}$$



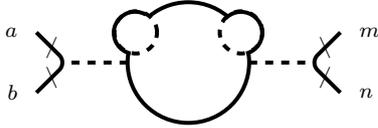
$$\begin{aligned}
 & \stackrel{=}{\varepsilon \ll 1} \frac{5b^2 d_c}{764411904\pi^6 \varepsilon^3} \left[b^2 (\varepsilon((17047-225\pi^2)\varepsilon+5940)+3600) \right. \\
 & \quad + 270\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) (15\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) - b(33\varepsilon+20) - 2\mu(13\varepsilon+20)) \\
 & \quad \left. + 4b\mu(\varepsilon((14077-225\pi^2)\varepsilon+4140)+3600) + 4\mu^2(\varepsilon((12007-225\pi^2)\varepsilon+2340)+3600) \right] N_{abmn}(p) \\
 & + \frac{d_c \mu^2}{382205952\pi^6 \varepsilon^3} \left[b^2 (\varepsilon((18379-225\pi^2)\varepsilon+6660)+3600) \right. \\
 & \quad + 270\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) (15\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) - b(37\varepsilon+20) - 2\mu(17\varepsilon+20)) \\
 & \quad \left. + 4b\mu(\varepsilon((15049-225\pi^2)\varepsilon+4860)+3600) + 4\mu^2(\varepsilon((12619-225\pi^2)\varepsilon+3060)+3600) \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0).
 \end{aligned} \tag{D.65}$$



$$\begin{aligned}
 & \stackrel{=}{\varepsilon \ll 1} \frac{5b^2 d_c}{764411904\pi^6 \varepsilon^3} \left[b^2 (\varepsilon((15392-225\pi^2)\varepsilon+6240)+3600) \right. \\
 & \quad + 90\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) (45\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) - 4(26b\varepsilon+15(b+2\mu)+22\mu\varepsilon)) \\
 & \quad \left. + 4b\mu(\varepsilon((12272-225\pi^2)\varepsilon+4440)+3600) + 4\mu^2(\varepsilon((10052-225\pi^2)\varepsilon+2640)+3600) \right] N_{abmn}(p) \\
 & + \frac{d_c \mu^2}{382205952\pi^6 \varepsilon^3} \left[b^2 (\varepsilon((16784-225\pi^2)\varepsilon+6960)+3600) \right. \\
 & \quad + 90\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) (45\varepsilon(b+2\mu) \log(p^2) - 4(29b\varepsilon+15(b+2\mu)+28\mu\varepsilon)) \\
 & \quad \left. + 4b\mu(\varepsilon((13304-225\pi^2)\varepsilon+5160)+3600) + 4\mu^2(\varepsilon((10724-225\pi^2)\varepsilon+3360)+3600) \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0).
 \end{aligned} \tag{D.66}$$

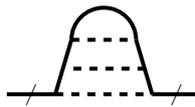


$$\begin{aligned}
&\stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} - \frac{b^2 d_c^2}{1528823808\pi^6 \varepsilon^3} \left[270\varepsilon \log(p^2) (15\varepsilon(5b^2 + 4\mu^2) \log(p^2) - 5b^2(33\varepsilon + 20) - 4\mu^2(27\varepsilon + 20)) \right. \\
&\quad \left. + 5b^2(\varepsilon((17047 - 225\pi^2)\varepsilon + 5940) + 3600) + 4\mu^2(\varepsilon((15049 - 225\pi^2)\varepsilon + 4860) + 3600) \right] N_{abmn}(p) \\
&+ \frac{d_c^2 \mu^2}{764411904\pi^6 \varepsilon^3} \left[54\varepsilon \log(p^2) (-15\varepsilon(5b^2 + 4\mu^2) \log(p^2) + 5b^2(37\varepsilon + 20) + 4\mu^2(31\varepsilon + 20)) \right. \\
&\quad \left. + b^2(\varepsilon((225\pi^2 - 18379)\varepsilon - 6660) - 3600) + 4\mu^2(\varepsilon((45\pi^2 - 3233)\varepsilon - 1116) - 720) \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.67}$$



$$\begin{aligned}
&\stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} \frac{5b^2 d_c}{382205952\pi^6 \varepsilon^3} \left[b^2(\varepsilon((15392 - 225\pi^2)\varepsilon + 6240) + 3600) \right. \\
&\quad \left. + 90\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) (45\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) - 4(26b\varepsilon + 15(b + 2\mu) + 22\mu\varepsilon)) \right. \\
&\quad \left. + 4b\mu(\varepsilon((12317 - 225\pi^2)\varepsilon + 4440) + 3600) + 4\mu^2(\varepsilon((10052 - 225\pi^2)\varepsilon + 2640) + 3600) \right] N_{abmn}(p) \\
&+ \frac{d_c \mu^2}{191102976\pi^6 \varepsilon^3} \left[b^2(\varepsilon((16784 - 225\pi^2)\varepsilon + 6960) + 3600) \right. \\
&\quad \left. + 90\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) (45\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) - 4(29b\varepsilon + 15(b + 2\mu) + 28\mu\varepsilon)) \right. \\
&\quad \left. + 4b\mu(\varepsilon((13304 - 225\pi^2)\varepsilon + 5160) + 3600) + 4\mu^2(\varepsilon((10724 - 225\pi^2)\varepsilon + 3360) + 3600) \right] M_{abmn}(p) + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.68}$$

• Énergie propre des flexurons $\Sigma_h(p)$:



$$\begin{aligned}
&\stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} \frac{5p^4(b + 2\mu)}{254803968\pi^6 \varepsilon^3} \left[b^2(\varepsilon((75\pi^2 - 4109)\varepsilon - 380) - 1200) \right. \\
&\quad \left. + 30\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) (-45\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) + b(19\varepsilon + 60) + 2\mu(60 - 71\varepsilon)) + 4b\mu(\varepsilon((75\pi^2 - 3824)\varepsilon + 520) - 1200) \right. \\
&\quad \left. + 4\mu^2(\varepsilon((75\pi^2 - 4439)\varepsilon + 1420) - 1200) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.69}$$



$$\begin{aligned}
&\stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} \frac{d_c^2 p^4}{6115295232\pi^6 \varepsilon^3} \left[5b^3(\varepsilon((15392 - 225\pi^2)\varepsilon + 6240) + 3600) + 8\mu^3(\varepsilon((2896 - 45\pi^2)\varepsilon + 1176) + 720) \right. \\
&\quad \left. + 18\varepsilon \log(p^2) (45\varepsilon(25b^3 + 8\mu^3) \log(p^2) - 100b^3(26\varepsilon + 15) - 16\mu^3(49\varepsilon + 30)) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.70}$$



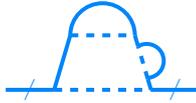
$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{d_c p^4}{1528823808\pi^6 \varepsilon^3} \left[5b^3 (\varepsilon((17047 - 225\pi^2)\varepsilon + 5940) + 3600) + 10b^2 \mu (\varepsilon((14077 - 225\pi^2)\varepsilon + 4140) + 3600) \right. \\
& \quad + 270\varepsilon \log(p^2) (-5b^3(33\varepsilon + 20) + 15\varepsilon(b + 2\mu)(5b^2 + 4\mu^2) \log(p^2) - 10b^2 \mu(23\varepsilon + 20) - 4b\mu^2(27\varepsilon + 20) - 8\mu^3(17\varepsilon + 20)) \\
& \quad \left. + 16b\mu^2 (\varepsilon(3706\varepsilon + 1215) + 900) + 8\mu^3 (\varepsilon((12619 - 225\pi^2)\varepsilon + 3060) + 3600) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.71}$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{d_c p^4}{764411904\pi^6 \varepsilon^3} \left[5b^3 (\varepsilon((15392 - 225\pi^2)\varepsilon + 6240) + 3600) + 10b^2 \mu (\varepsilon((12272 - 225\pi^2)\varepsilon + 4440) + 3600) \right. \\
& \quad + 90\varepsilon \log(p^2) (45\varepsilon(b + 2\mu)(5b^2 + 4\mu^2) \log(p^2) + 4(-5b^3(26\varepsilon + 15) - 5b^2 \mu(37\varepsilon + 30) - 2b\mu^2(43\varepsilon + 30) - 8\mu^3(14\varepsilon + 15))) \\
& \quad \left. + 4b\mu^2 (\varepsilon((13304 - 225\pi^2)\varepsilon + 5160) + 3600) + 8\mu^3 (\varepsilon((10724 - 225\pi^2)\varepsilon + 3360) + 3600) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.72}$$



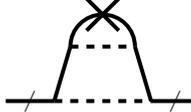
$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{d_c p^4}{764411904\pi^6 \varepsilon^3} \left[5b^3 (\varepsilon((17047 - 225\pi^2)\varepsilon + 5940) + 3600) \right. \\
& \quad + 10b^2 \mu (\varepsilon((14077 - 225\pi^2)\varepsilon + 4140) + 3600) \\
& \quad + 270\varepsilon \log(p^2) (-5b^3(33\varepsilon + 20) + 15\varepsilon(b + 2\mu)(5b^2 + 4\mu^2) \log(p^2) - 10b^2 \mu(23\varepsilon + 20) - 4b\mu^2(27\varepsilon + 20) - 8\mu^3(17\varepsilon + 20)) \\
& \quad \left. + 4b\mu^2 (\varepsilon((15049 - 225\pi^2)\varepsilon + 4860) + 3600) + 8\mu^3 (\varepsilon((12619 - 225\pi^2)\varepsilon + 3060) + 3600) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.73}$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{5p^4(b + 2\mu)}{382205952\pi^6 \varepsilon^3} \left[b^2 (\varepsilon((225\pi^2 - 11552)\varepsilon + 3360) - 3600) \right. \\
& \quad + 90\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) (-45\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) + b(60 - 56\varepsilon) + 4\mu(30 - 73\varepsilon)) \\
& \quad \left. + 4b\mu (\varepsilon((225\pi^2 - 14072)\varepsilon + 6060) - 3600) + 4\mu^2 (\varepsilon((225\pi^2 - 19292)\varepsilon + 8760) - 3600) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.74}$$



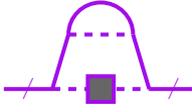
$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} -\frac{5p^4(b + 2\mu)}{127401984\pi^6 \varepsilon^3} \left[b^2 (\varepsilon((150\pi^2 - 5159)\varepsilon + 540) - 3600) \right. \\
& \quad + 180\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) (-10\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2) + b(20 - 3\varepsilon) + 40\mu - 46\mu\varepsilon) \\
& \quad \left. + 4b\mu (\varepsilon((150\pi^2 - 5429)\varepsilon + 2340) - 3600) + 4\mu^2 (\varepsilon((150\pi^2 - 6599)\varepsilon + 4140) - 3600) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.75}$$



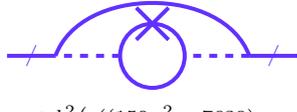
$$\begin{aligned}
& \stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} - \frac{5p^4(b+2\mu)}{254803968\pi^6\varepsilon^3} \left[b^2(\varepsilon((150\pi^2 - 5159)\varepsilon + 540) - 3600) \right. \\
& \quad + 180\varepsilon(b+2\mu)\log(p^2)(-10\varepsilon(b+2\mu)\log(p^2) + b(20-3\varepsilon) + 40\mu - 46\mu\varepsilon) \\
& \quad \left. + 4b\mu(\varepsilon((150\pi^2 - 5429)\varepsilon + 2340) - 3600) + 4\mu^2(\varepsilon((150\pi^2 - 6599)\varepsilon + 4140) - 3600) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.76}$$



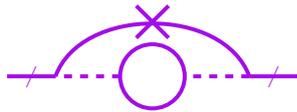
$$\begin{aligned}
& \stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} \frac{d_c p^4}{509607936\pi^6\varepsilon^3} \left[5b^3(\varepsilon((150\pi^2 - 5267)\varepsilon + 1260) - 3600) \right. \\
& \quad + 10b^2\mu(\varepsilon((150\pi^2 - 5897)\varepsilon + 3060) - 3600) \\
& \quad + 180\varepsilon\log(p^2)(5b^3(20-7\varepsilon) - 10\varepsilon(b+2\mu)(5b^2+4\mu^2)\log(p^2) + 10b^2\mu(20-17\varepsilon) + 4b\mu^2(20-13\varepsilon) + 8\mu^3(20-23\varepsilon)) \\
& \quad \left. + 4b\mu^2(\varepsilon((150\pi^2 - 5429)\varepsilon + 2340) - 3600) + 8\mu^3(\varepsilon((150\pi^2 - 6599)\varepsilon + 4140) - 3600) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.77}$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} \frac{d_c p^4}{509607936\pi^6\varepsilon^3} \left[5b^3(\varepsilon((150\pi^2 - 5267)\varepsilon + 1260) - 3600) \right. \\
& \quad + 10b^2\mu(\varepsilon((150\pi^2 - 5897)\varepsilon + 3060) - 3600) \\
& \quad + 180\varepsilon\log(p^2)(5b^3(20-7\varepsilon) - 10\varepsilon(b+2\mu)(5b^2+4\mu^2)\log(p^2) + 10b^2\mu(20-17\varepsilon) + 4b\mu^2(20-13\varepsilon) + 8\mu^3(20-23\varepsilon)) \\
& \quad \left. + 4b\mu^2(\varepsilon((150\pi^2 - 5429)\varepsilon + 2340) - 3600) + 8\mu^3(\varepsilon((150\pi^2 - 6599)\varepsilon + 4140) - 3600) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.78}$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} \frac{5d_c p^4(b+2\mu)}{254803968\pi^6\varepsilon^3} \left[12\varepsilon\log(p^2)(-30\varepsilon(5b^2+4\mu^2)\log(p^2) + 5b^2(71\varepsilon+60) + 4\mu^2(53\varepsilon+60)) \right. \\
& \quad \left. + b^2(\varepsilon((150\pi^2 - 7639)\varepsilon - 4260) - 3600) + 4\mu^2(\varepsilon((30\pi^2 - 1229)\varepsilon - 636) - 720) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.79}$$



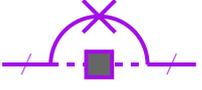
$$\begin{aligned}
& \stackrel{\equiv}{\varepsilon \ll 1} \frac{5d_c p^4(b+2\mu)}{509607936\pi^6\varepsilon^3} \left[12\varepsilon\log(p^2)(-30\varepsilon(5b^2+4\mu^2)\log(p^2) + 5b^2(71\varepsilon+60) + 4\mu^2(53\varepsilon+60)) \right. \\
& \quad \left. + b^2(\varepsilon((150\pi^2 - 7639)\varepsilon - 4260) - 3600) + 4\mu^2(\varepsilon((30\pi^2 - 1229)\varepsilon - 636) - 720) \right] + O(\varepsilon^0).
\end{aligned} \tag{D.80}$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{d_c^2 p^4}{2038431744\pi^6 \varepsilon^3} \left[12\varepsilon \log(p^2) (-30\varepsilon(25b^3 + 8\mu^3) \log(p^2) + 25b^3(59\varepsilon + 60) + 8\mu^3(53\varepsilon + 60)) \right. \\
& \left. + 5b^3(\varepsilon((150\pi^2 - 6787)\varepsilon - 3540) - 3600) + 8\mu^3(\varepsilon((30\pi^2 - 1229)\varepsilon - 636) - 720) \right] + O(\varepsilon^0) .
\end{aligned} \tag{D.81}$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} \frac{25p^4(b + 2\mu)^2}{127401984\pi^6 \varepsilon^3} \left[6\varepsilon \log(p^2) (2(19b\varepsilon + 30(b + 2\mu) + 8\mu\varepsilon) - 15\varepsilon(b + 2\mu) \log(p^2)) \right. \\
& \left. + b(\varepsilon(5(3\pi^2 - 88)\varepsilon - 456) - 720) + 2\mu(\varepsilon((15\pi^2 - 212)\varepsilon - 96) - 720) \right] + O(\varepsilon^0) .
\end{aligned} \tag{D.82}$$



$$\begin{aligned}
& \stackrel{\varepsilon \ll 1}{=} -\frac{5d_c p^4(b + 2\mu)}{254803968\pi^6 \varepsilon^3} \left[6\varepsilon \log(p^2) (-15\varepsilon(5b^2 + 4\mu^2) \log(p^2) + 10b^2(13\varepsilon + 30) + 16\mu^2(2\varepsilon + 15)) \right. \\
& \left. + b^2(\varepsilon((75\pi^2 - 1744)\varepsilon - 1560) - 3600) + 4\mu^2(\varepsilon((15\pi^2 - 212)\varepsilon - 96) - 720) \right] + O(\varepsilon^0) .
\end{aligned} \tag{D.83}$$

Ce calcul est incomplet. Les graphes avec les contretermes issus de la renormalisation à deux boucles sont absents.

NPRG - Annexe technique

Cette annexe présente des détails de calcul relatifs au groupe de renormalisation non-perturbatif.

E.1 Brisure de l'invariance par translation et coupure

Les fonctions de coupure (3.199) brisent explicitement l'invariance par translation de la théorie de la phase plate. Afin d'évaluer l'impact de cette brisure, il est instructif de chercher l'identité de Ward résultante. Nous allons donc examiner comment une translation globale infinitésimale des champs :

$$r^\alpha(x) \mapsto r^\alpha(x) + c^\alpha, \quad (\text{E.1})$$

affecte la fonctionnelle génératrice $\mathcal{Z}[J]$, sachant que l'action $S[R]$ est invariante sous une telle transformation :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] &= \int \mathcal{D}[R] e^{-S[R] - \Delta S_k[R] + J.R} \\ &= \int \mathcal{D}[R'] e^{-S[R'] - \Delta S_k[R'] + J.R'} \\ &= \int \mathcal{D}[R] e^{-S[R] - \Delta S_k[R] + J.R - \frac{1}{2} \int_{x,y} 2c^\alpha R_{k,\alpha\beta}(x-y) R^\beta + J.c + O(c^2)} \\ &= \int \mathcal{D}[R] e^{-S[R] - \Delta S_k[R] + J.R} \left(1 + \int_x J_\alpha c^\alpha - \int_{x,y} c^\alpha R_{k,\alpha\beta}(x-y) R^\beta(y) + O(c^2) \right), \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

$$\Rightarrow \left\langle \int_x \left(J_\alpha - R_{k,\alpha\beta} \cdot R^\beta \right) c^\alpha \right\rangle = 0, \quad (\text{E.3})$$

$$\Rightarrow \int_x \left(\frac{\delta \Gamma^{Leg}}{\delta r^\alpha} - R_{k,\alpha\beta} r^\beta \right) c^\alpha = 0, \quad (\text{E.4})$$

où $\Gamma^{Leg}[\vec{r}]$ est la vraie transformée de Legendre de $W[J]$. $\Gamma^{Leg}[\vec{r}]$ est reliée à l'énergie libre courante $\Gamma_k[\vec{r}]$ par le terme de masse dépendant de la coupure.

$$\Gamma_k[r] = \Gamma^{leg}[r] - \Delta S_k[r], \quad (\text{E.5})$$

$$\Rightarrow \int_x \left(\frac{\delta \Gamma_k}{\delta r^\alpha} + \frac{1}{2} \times 2R_{k,\alpha\beta} r^\beta - R_{k,\alpha\beta} r^\beta \right) c^\alpha = 0, \quad (\text{E.6})$$

$$\Rightarrow \int_x \left(\frac{\delta \Gamma_k}{\delta r^\alpha} \right) c^\alpha = 0. \quad (\text{E.7})$$

Finalement, l'action des translations globales infinitésimales sur $\Gamma_k[\vec{r}]$ s'écrit :

$$\Gamma_k[r] \mapsto \Gamma_k[r] + \int_x \frac{\delta\Gamma_k}{\delta r^\alpha} c^\alpha + O(c^2) = \Gamma_k[r] + O(c^2), \quad (\text{E.8})$$

soit :

$$\boxed{\Gamma_k[r] = \Gamma_k[\{\partial_i^n r\}_{n \in \mathbb{N}^*}]}. \quad (\text{E.9})$$

Ainsi, la brisure de l'invariance par translation par la fonction de coupure compense la brisure explicite introduite par la source J , c'est-à-dire que l'alternative est : soit $R_k(q)$ et J se couplent aux **tangentés**¹ et l'invariance par translation n'est jamais brisée, soit elles se couplent **toutes les deux au champ**, et l'invariance par translation est préservée **au niveau de $\Gamma_k[r]$** .

E.2 Fonctions à n -points

Afin de calculer le flot de $\Gamma_k^{(2)}$, nous avons besoin des fonctions à 3- et 4-points. Les dérivées fonctionnelles sont plus simples à évaluer dans l'espace de Fourier. Dans la suite, Q désigne toujours l'impulsion nécessaire pour respecter la conservation de l'impulsion. Par exemple, dans \int_q , $Q = -q$, mais dans $\int_{q,q'}$, $Q = -q - q'$, et ainsi de suite.

Le point de départ est l'action effective :

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\vec{r}] = \int_q \left[\frac{Z_k}{2} q^2 Q^2 \vec{r}(q) \cdot \vec{r}(Q) + \frac{\lambda_k}{8} \int_{q_1, q_2} \left(\vec{r}(q_1) \cdot \vec{r}(q_2) (q_1 \cdot q_2) + D\zeta_k^2 \right) \left(\vec{r}(q) \cdot \vec{r}(Q) (q \cdot Q) + D\zeta_k^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{\mu_k}{4} \int_{q_1, q_2} \left(\vec{r}(q_1) \cdot \vec{r}(q_2) q_1^i q_2^j + \zeta_k^2 \delta^{ij} \right) \left(\vec{r}(q) \cdot \vec{r}(Q) q_i Q_j + \zeta_k^2 \delta_{ij} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Dans la suite nous garderons implicites les facteurs $\delta(\dots)$ donnant la conservation de l'impulsion.

• Fonction à 1-point :

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,\alpha}^{(1)}[\vec{r}; p] \propto Z_k p^4 r_\alpha(p) + \frac{\lambda_k}{2} \int_{q,q'} r_\alpha(q)(p \cdot q) (\vec{r}(q') \cdot \vec{r}(Q)(q' \cdot Q) + D\zeta_k^2) \\ + \frac{\mu_k}{2} \int_{q,q'} r_\alpha(q)(p^i q^j + p^j q^i) (\vec{r}(q') \cdot \vec{r}(Q) q'_i Q_j + \zeta_k^2 \delta_{ij}). \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Au minimum, $\Gamma_k^{(1)}[\vec{r}_{min}; p] = 0$.

• Fonction à 2-points :

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,\alpha\beta}^{(2)}[\vec{r}; p, p'] \propto Z_k p^4 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\lambda_k}{2} \int_q \delta_{\alpha\beta}(p \cdot p') (\vec{r}(q) \cdot \vec{r}(Q)(q \cdot Q) + D\zeta_k^2) \\ + \lambda_k \int_q r_\alpha(q) r_\beta(Q)(p \cdot q)(p' \cdot Q) + \frac{\mu_k}{2} (p_i p'_j + p_j p'_i) \delta_{\alpha\beta} \int_q (\vec{r}(q) \cdot \vec{r}(Q) q^i Q^j + \zeta_k^2 \delta^{ij}) \\ + \frac{\mu_k}{2} \int_q (p^i q^j + p^j q^i) (p'_i Q_j + p'_j Q_i) r_\alpha(q) r_\beta(Q). \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

1. Les dérivées du champ de position

Au minimum,

$$\Gamma_{k,\alpha\beta}^{(2)}[\vec{r}_{min}; p, -p] = Z_k p^4 \delta_{\alpha\beta} + \mu_k \zeta_k^2 p^2 \delta_\alpha^i \delta_\beta^j P_{ij}^T(p) + (\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2 p^2 \delta_\alpha^i \delta_\beta^j P_{ij}^L(p) . \quad (\text{E.13})$$

• **Fonction à 3-points :**

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,\alpha\beta\gamma}^{(3)}[\vec{r}; p, p', p''] &\propto \lambda_k \delta_{\alpha\beta}(p.p')(p''.Q)r_\gamma(Q) + \lambda_k \delta_{\alpha\gamma}(p.p'')(p'.Q)r_\beta(Q) + \lambda_k \delta_{\beta\gamma}(p.Q)(p'.p'')r_\alpha(Q) \\ &+ \frac{\mu_k}{2} \delta_{\alpha\beta}(p^i p'^j + p^j p'^i)(p''_i Q_j + p''_j Q_i)r_\gamma(Q) + \frac{\mu_k}{2} \delta_{\alpha\gamma}(p_i p'_j + p_j p'_i)(p''^i Q^j + p'^j Q^i)r_\beta(Q) \\ &+ \frac{\mu_k}{2} \delta_{\beta\gamma}(p^i Q^j + p^j Q^i)(p'_i p''_j + p'_j p''_i)r_\alpha(Q) . \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Au minimum,

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,\alpha\beta\gamma}^{(3)}[\vec{r}_{min}; p, p', p''] &= i\zeta_k \delta(p + p' + p'') \left[\lambda_k \delta_{\alpha\beta}(p.p')p''_\gamma + \lambda_k \delta_{\alpha\gamma}(p.p'')p'_\beta + \lambda_k \delta_{\beta\gamma}(p'.p'')p_\alpha \right. \\ &+ \mu_k \delta_{\alpha\beta}((p'.p'')p_\gamma + (p''.p)p'_\gamma) + \mu_k \delta_{\alpha\gamma}((p.p')p''_\beta + (p'.p'')p_\beta) \\ &\left. + \mu_k \delta_{\beta\gamma}((p.p'')p'_\alpha + (p.p')p''_\alpha) \right] . \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

• **Fonction à 4-points :**

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,\alpha\beta\gamma\theta}^{(4)}[\vec{r}; p, p', p'', p'''] &\propto \lambda_k \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta}(p.p')(p''.p''') + \lambda_k \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta}(p.p'')(p'.p''') \\ &+ \lambda_k \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma}(p.p''')(p'.p'') + \mu_k \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\theta}((p.p'')(p'.p''') + (p.p''')(p'.p'')) \\ &+ \mu_k \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\theta}((p.p')(p''.p''') + (p.p''')(p'.p'')) \\ &+ \mu_k \delta_{\alpha\theta} \delta_{\beta\gamma}((p.p')(p''.p''') + (p.p'')(p'.p''')) . \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Comme notre ansatz est d'ordre 4 en champ, $\Gamma_k^{(4)}$ ne dépend pas de sa configuration d'évaluation, son expression est la même au minimum.

E.3 Équations de flot

E.3.1 Flot de ζ_k - Preuve par les tangentes

L'ambiguïté sur la définition du minimum disparaît si l'on dérive Γ_k par rapport aux tangentes $\partial_i \vec{r}$ au lieu du champ de position. En effet, le minimum peut également être défini par :

$$\left. \frac{\delta \Gamma_k[\vec{r}]}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \right|_{min} = 0 . \quad (\text{E.17})$$

Ceci est suffisant pour calculer son flot :

$$\begin{aligned} \partial_t \left[\frac{\delta \Gamma_k[\vec{r}]}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \right]_{min} &= 0 , \\ \Rightarrow \delta_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \left[\partial_t \Gamma_k[\vec{r}] \right]_{min} &+ \delta_{\mu\nu} \int_q \left[\frac{\delta^2 \Gamma_k[\vec{r}]}{\delta(\partial_\mu r_\nu) \delta(\partial_\alpha r_\beta)} \partial_t (\partial_\alpha r_\beta) \right]_{min} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Calculons d'abord le second terme. Dans n'importe quelle configuration plate, $r(p) \propto \delta(p)$, de telle façon que la dérivée fonctionnelle est évaluée à impulsion nulle :

$$\partial_t(\partial_\alpha r_{min}^\beta) = \delta_\alpha^\beta \delta(p) \partial_t \zeta_k . \quad (\text{E.19})$$

Le terme cinétique ne contribue donc pas au flot :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \left(\frac{Z_k}{2} (\partial^2 r)^2 \right)}{\delta(\partial_\mu r_\nu) \delta(\partial_\alpha r_\beta)} &= Z_k \frac{\delta}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \left(\frac{\delta^{\omega\theta} \delta(\partial_\theta \partial_\omega r_\gamma)}{\delta(\partial_\alpha r_\beta)} \partial^2 r_\gamma \right) \\ &= Z_k \frac{\delta}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \left(\delta^{\theta\omega} \partial^2 r_\beta (\partial_\theta \delta_{\omega\alpha} + \delta_{\theta\alpha} \partial_\omega) \right) \\ &= Z_k \frac{\delta}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} (2\partial_\alpha \partial^2 r_\beta) \\ &= 2Z_k \delta_{\beta\nu} (\delta_{\mu\alpha} \partial^2 + \partial_\alpha \partial_\mu) \\ &\underset{p=0}{=} 0 . \end{aligned}$$

Dans le cas de la théorie à basse température, le terme fréquentiel s'annule également pour des raisons évidentes.

Toutes les contributions viennent donc du potentiel élastique qui peut s'écrire comme la somme de trois termes et d'une constante qui ne contribue pas à la dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_k}{4} (\partial_a \vec{r} \cdot \partial_b \vec{r} - \zeta_k^2 \delta_{ab})^2 + \frac{\lambda_k}{8} (\partial_a \vec{r} \cdot \partial_a \vec{r} - D\zeta_k^2)^2 &= \frac{\mu_k}{4} \partial_a r_i \partial_b r_i \partial_a r_j \partial_b r_j + \frac{\lambda_k}{8} \partial_a r_i \partial_a r_i \partial_b r_j \partial_b r_j \\ &\quad - \frac{\zeta_k^2}{2} (2\mu_k + \lambda_k D) \partial_a r_i \partial_a r_i + cst . \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

La contribution de ces trois termes peut être évaluée séparément. Le troisième terme d'abord :

$$\frac{\delta^2}{\delta(\partial_\mu r_\nu) \delta(\partial_\alpha r_\beta)} \left(\frac{\zeta_k^2}{2} (2\mu_k + \lambda_k D) \delta^{ab} \delta^{ij} \partial_a r_i \partial_b r_j \right) = \zeta_k^2 (2\mu_k + \lambda_k D) \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} .$$

Les deux premiers termes sont construits à partir de la même base tensorielle, mais avec différents schémas de contraction. Définissons :

$$I_{aibjckdl} = \frac{\delta}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \frac{\delta}{\delta(\partial_\alpha r_\beta)} [\partial_a r_i \partial_b r_j \partial_c r_k \partial_d r_l] . \quad (\text{E.21})$$

$$\begin{aligned} I_{aibjckdl} &= \frac{\delta}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \left[\delta_{a\alpha} \delta_{i\beta} \partial_b r_j \partial_c r_k \partial_d r_l + \delta_{b\alpha} \delta_{j\beta} \partial_a r_i \partial_c r_k \partial_d r_l + \delta_{c\alpha} \delta_{k\beta} \partial_a r_i \partial_b r_j \partial_d r_l + \delta_{d\alpha} \delta_{l\beta} \partial_a r_i \partial_b r_j \partial_c r_k \right] \\ &= \delta_{a\alpha} \delta_{i\beta} \delta_{b\mu} \delta_{j\nu} \partial_c r_k \partial_d r_l + \delta_{a\alpha} \delta_{i\beta} \delta_{c\mu} \delta_{k\nu} \partial_b r_j \partial_d r_l + \delta_{a\alpha} \delta_{i\beta} \delta_{d\mu} \delta_{l\nu} \partial_b r_j \partial_c r_k \\ &\quad + \delta_{b\alpha} \delta_{j\beta} \delta_{a\mu} \delta_{i\nu} \partial_c r_k \partial_d r_l + \delta_{b\alpha} \delta_{j\beta} \delta_{c\mu} \delta_{k\nu} \partial_a r_i \partial_d r_l + \delta_{b\alpha} \delta_{j\beta} \delta_{d\mu} \delta_{l\nu} \partial_a r_i \partial_c r_k \\ &\quad + \delta_{c\alpha} \delta_{k\beta} \delta_{a\mu} \delta_{i\nu} \partial_b r_j \partial_d r_l + \delta_{c\alpha} \delta_{k\beta} \delta_{b\mu} \delta_{j\nu} \partial_a r_i \partial_d r_l + \delta_{c\alpha} \delta_{k\beta} \delta_{d\mu} \delta_{l\nu} \partial_a r_i \partial_b r_j \\ &\quad + \delta_{d\alpha} \delta_{l\beta} \delta_{a\mu} \delta_{i\nu} \partial_b r_j \partial_c r_k + \delta_{d\alpha} \delta_{l\beta} \delta_{b\mu} \delta_{j\nu} \partial_a r_i \partial_c r_k + \delta_{d\alpha} \delta_{l\beta} \delta_{c\mu} \delta_{k\nu} \partial_a r_i \partial_b r_j . \end{aligned}$$

Le premier terme de (E.20) est donc :

$$\frac{\mu_k}{4} \delta^{ij} \delta^{kl} \delta^{ac} \delta^{bd} I_{aibjckdl} \underset{r=r_{min}}{=} \mu_k \zeta_k^2 [\delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu} + 2\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}] , \quad (\text{E.22})$$

et le second,

$$\frac{\lambda_k}{8} \delta^{ij} \delta^{kl} \delta^{ab} \delta^{cd} I_{aibjckdl} \Big|_{r=r_{min}} = \frac{\lambda_k}{2} \zeta_k^2 [2\delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu} + D\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}] , \quad (\text{E.23})$$

de telle sorte que finalement,

$$\delta_{\mu\nu} \int_q \left[\frac{\delta^2 \Gamma_k[\vec{r}]}{\delta(\partial_\mu r_\nu) \delta(\partial_\alpha r_\beta)} \partial_t(\partial_\alpha r_\beta) \right]_{min} = 2D(2\mu_k + \lambda_k D) \zeta_k^2 \partial_t \zeta_k . \quad (\text{E.24})$$

Nous devons donc maintenant calculer le premier terme de (E.18). Le flot de l'action effective découle de l'équation de Wetterich (1.45) :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \left[\partial_t \Gamma_k \right]_{min} &= \frac{\delta}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \left[\frac{1}{2} \int_q \frac{\partial_t R_k(q)}{\Gamma_k^{(2)}(q, -q) + R_k(q)} \right]_{min} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\int_q (\partial_t R_k(q))^{\theta\omega} \frac{1}{\left[\Gamma_k^{(2)}[\vec{r}; q, -q] + R_k(q) \right]^{\theta\alpha}} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\delta \Gamma_k^{(2),\alpha\beta}[\vec{r}; q, -q]}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \frac{1}{\left[\Gamma_k^{(2)}[\vec{r}; q, -q] + R_k(q) \right]^{\beta\omega}} \right]_{min} . \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Grâce à la décomposition spectrale du propagateur (3.183),

$$\begin{aligned} &\left[(\partial_t R_k(q))^{\theta\kappa} \frac{1}{\left[\Gamma_k^{(2)}[\vec{r}; q, -q] + R_k(q) \right]^{\theta\alpha}} \frac{1}{\left[\Gamma_k^{(2)}[\vec{r}; q, -q] + R_k(q) \right]^{\beta\kappa}} \right]_{min} \\ &= (\partial_t R_k(q)) (P_{\alpha\beta}^F G_0^2(q) + P_{\alpha\beta}^T G_1^2(q) + P_{\alpha\beta}^L G_2^2(q)) . \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

Il ne nous reste donc plus qu'à calculer $\frac{\delta \Gamma_k^{(2),\alpha\beta}}{\delta(\partial_\mu r_\nu)}$. Dans un souci de simplification, nous n'écrivons que les termes quartiques, qui sont les seuls à survivre à la dérivation fonctionnelle. Les fonctions de Dirac concernant la conservation de l'impulsion sont implicites. Afin de réduire le risque d'erreur, les contractions tensorielles sont effectuées à la fin du calcul.

Définissons $J_{aibjckdl}^{\alpha\beta}$ contribution générique d'un terme quartique à la fonction à deux points :

$$J_{aibjckdl}^{\alpha\beta} = \frac{\delta}{\delta r_\alpha} \frac{\delta}{\delta r_\beta} [\partial_a r_i \partial_b r_j \partial_c r_k \partial_d r_l] . \quad (\text{E.27})$$

$$\begin{aligned} J_{aibjckdl}^{\alpha\beta} &= \frac{\delta}{\delta r_\beta} [\delta_{i\alpha} \partial_a \partial_b r_j \partial_c r_k \partial_d r_l + \delta_{j\alpha} \partial_a r_i \partial_b \partial_c r_k \partial_d r_l + \delta_{k\alpha} \partial_a r_i \partial_b r_j \partial_c \partial_d r_l + \delta_{l\alpha} \partial_a r_i \partial_b r_j \partial_c r_k \partial_d] \\ &= \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} \partial_a \partial_b \partial_c r_k \partial_d r_l + \delta_{i\alpha} \delta_{k\beta} \partial_a \partial_b r_j \partial_c \partial_d r_l + \delta_{i\alpha} \delta_{l\beta} \partial_a \partial_b r_j \partial_c r_k \partial_d \\ &\quad + \delta_{j\alpha} \delta_{i\beta} \partial_a \partial_b \partial_c r_k \partial_d r_l + \delta_{j\alpha} \delta_{k\beta} \partial_a r_i \partial_b \partial_c \partial_d r_l + \delta_{j\alpha} \delta_{l\beta} \partial_a r_i \partial_b \partial_c r_k \partial_d \\ &\quad + \delta_{k\alpha} \delta_{i\beta} \partial_a \partial_b r_j \partial_c \partial_d r_l + \delta_{k\alpha} \delta_{j\beta} \partial_a r_i \partial_b \partial_c \partial_d r_l + \delta_{k\alpha} \delta_{l\beta} \partial_a r_i \partial_b r_j \partial_c \partial_d \\ &\quad + \delta_{l\alpha} \delta_{i\beta} \partial_a \partial_b r_j \partial_c r_k \partial_d + \delta_{l\alpha} \delta_{j\beta} \partial_a r_i \partial_b \partial_c r_k \partial_d + \delta_{l\alpha} \delta_{k\beta} \partial_a r_i \partial_b r_j \partial_c \partial_d . \end{aligned}$$

Nous notons dans la suite avec un exposant * la dérivée agissant sur le champ restant :

$$\begin{aligned}
\delta^{ij}\delta^{kl}J_{aibjckdl}^{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta}\delta^{kl}\partial_a\partial_b\partial_c r_k\partial_d r_l + \partial_a\partial_b^* r_\alpha\partial_c\partial_d^* r_\beta + \partial_a\partial_b^* r_\alpha\partial_c^* r_\beta\partial_d \\
&+ \delta_{\alpha\beta}\delta^{kl}\partial_a\partial_b\partial_c r_k\partial_d r_l + \partial_a^* r_\alpha\partial_b\partial_c\partial_d^* r_\beta + \partial_a^* r_\alpha\partial_b\partial_c^* r_\beta\partial_d \\
&+ \delta_{\alpha\beta}\delta^{ij}\partial_a r_i\partial_b r_j\partial_c\partial_d + \partial_a\partial_b^* r_\beta\partial_c\partial_d^* r_\alpha + \partial_a^* r_\beta\partial_b\partial_c\partial_d^* r_\alpha \\
&+ \delta_{\alpha\beta}\delta^{ij}\partial_a r_i\partial_b r_j\partial_c\partial_d + \partial_a\partial_b^* r_\beta\partial_c^* r_\alpha\partial_d + \partial_a^* r_\beta\partial_b\partial_c^* r_\alpha\partial_d .
\end{aligned}$$

Appelons \mathcal{G} la partie de $\frac{\delta\Gamma_k^{(2),\alpha\beta}}{\delta(\partial_\mu r_\nu)}$ proportionnelle à $\delta_{\alpha\beta}$, et \mathfrak{G} le reste. Cette décomposition est justifiée par le fait que seul \mathcal{G} donne une contribution des flexurons, et donc survit dans la limite de phase plate².

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\mu\nu\alpha\beta} &= \left\langle \frac{\delta\Gamma_{k,\alpha\beta}^{(2)}}{\delta(\partial^\mu r^\nu)} \middle| \delta_{\alpha\beta} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}\delta^{ij}(2\mu_k\delta^{ac}\delta^{bd} + \lambda_k\delta^{ab}\delta^{cd})\frac{\delta}{\delta(\partial^\mu r^\nu)}[\partial_a\partial_b\partial_c r_i\partial_d r_j + \partial_a r_i\partial_b r_j\partial_c\partial_d] \\
&= \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}\delta^{ij}(2\mu_k\delta^{ac}\delta^{bd} + \lambda_k\delta^{ab}\delta^{cd})[\delta_{i\nu}\delta_{c\mu}\partial_a\partial_b\partial_d r_j + \delta_{j\nu}\delta_{d\mu}\partial_a\partial_b\partial_c r_i + \delta_{i\nu}\delta_{a\mu}\partial_b r_j\partial_c\partial_d + \delta_{j\nu}\delta_{b\mu}\partial_a r_i\partial_c\partial_d] \\
&= \frac{1}{4}\delta_{\alpha\beta}(2\mu_k\delta^{ac}\delta^{bd} + \lambda_k\delta^{ab}\delta^{cd})[\delta_{c\mu}\partial_a\partial_b\partial_d r_\nu + \delta_{d\mu}\partial_a\partial_b\partial_c r_\nu + \delta_{a\mu}\partial_b r_\nu\partial_c\partial_d + \delta_{b\mu}\partial_a r_\nu\partial_c\partial_d] \\
&\underset{r=r_{min}}{=} \delta_{\alpha\beta}\zeta_k(2\mu_k\partial_\nu\partial_\mu + \lambda_k\delta_{\mu\nu}\partial^2) ,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \delta^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu\alpha\beta} = \zeta_k\delta_{\alpha\beta}q^2(2\mu_k + \lambda_k D) . \quad (\text{E.28})$$

2. En effet, \mathfrak{G} se décompose sur des produits d'impulsions p^α qui sont les seules autres sources possibles d'indices tensoriels. Par définition, il n'a donc aucune contribution non nulle quand un de ses indices est dans $[[D+1; d]]$. De plus, comme les phonons se découplent, seuls les propagateurs de flexurons survivent dans la limite de phase plate.

De même,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{8}(2\mu_k\delta^{ac}\delta^{bd} + \lambda_k\delta^{ab}\delta^{cd})\frac{\delta}{\delta\mu_{r\nu}} \left[\partial_a\partial_b^*r_\alpha\partial_c\partial_d^*r_\beta + \partial_a\partial_b^*r_\alpha\partial_c^*r_\beta\partial_d + \partial_a^*r_\alpha\partial_b\partial_c\partial_d^*r_\beta + \partial_a^*r_\alpha\partial_b\partial_c^*r_\beta\partial_d \right. \\
&\quad \left. + \partial_a\partial_b^*r_\beta\partial_c\partial_d^*r_\alpha + \partial_a^*r_\beta\partial_b\partial_c\partial_d^*r_\alpha + \partial_a\partial_b^*r_\beta\partial_c^*r_\alpha\partial_d + \partial_a^*r_\beta\partial_b\partial_c^*r_\alpha\partial_d \right] \\
&= \frac{1}{8}(2\mu_k\delta^{ac}\delta^{bd} + \lambda_k\delta^{ab}\delta^{cd}) \\
&\quad \left(\delta_{\alpha\nu}\delta_{b\mu}\partial_a\partial_c\partial_d^*r_\beta + \delta_{\beta\nu}\delta_{d\mu}\partial_a\partial_b^*r_\alpha\partial_c + \delta_{\alpha\nu}\delta_{b\mu}\partial_a\partial_c^*r_\beta\partial_d + \delta_{\beta\nu}\delta_{c\mu}\partial_a\partial_b^*r_\alpha\partial_d \right. \\
&\quad + \delta_{\alpha\nu}\delta_{a\mu}\partial_b\partial_c\partial_d^*r_\beta + \delta_{\beta\nu}\delta_{d\mu}\partial_a^*r_\alpha\partial_b\partial_c + \delta_{\alpha\nu}\delta_{a\mu}\partial_b\partial_c^*r_\beta\partial_d + \delta_{\beta\nu}\delta_{c\mu}\partial_a^*r_\alpha\partial_b\partial_d \\
&\quad + \delta_{\alpha\nu}\delta_{d\mu}\partial_a\partial_b^*r_\beta\partial_c + \delta_{\beta\nu}\delta_{b\mu}\partial_a\partial_c\partial_d^*r_\alpha + \delta_{\alpha\nu}\delta_{d\mu}\partial_a^*r_\beta\partial_b\partial_c + \delta_{\beta\nu}\delta_{a\mu}\partial_b\partial_c\partial_d^*r_\alpha \\
&\quad \left. + \delta_{\alpha\nu}\delta_{c\mu}\partial_a\partial_b^*r_\beta\partial_d + \delta_{\beta\nu}\delta_{b\mu}\partial_a\partial_c^*r_\alpha\partial_d + \delta_{\alpha\nu}\delta_{c\mu}\partial_a^*r_\beta\partial_b\partial_d + \delta_{\beta\nu}\delta_{a\mu}\partial_b\partial_c^*r_\alpha\partial_d \right) \\
&\stackrel{r=r_{min}}{=} \frac{\zeta_k}{8}(2\mu_k\delta^{ac}\delta^{bd} + \lambda_k\delta^{ab}\delta^{cd}) \\
&\quad \left[\delta_{\alpha\nu}\delta_{b\mu}\delta_{d\beta}\partial_a\partial_c + \delta_{\beta\nu}\delta_{d\mu}\delta_{b\alpha}\partial_a\partial_c + \delta_{\alpha\nu}\delta_{b\mu}\delta_{c\beta}\partial_a\partial_d + \delta_{\beta\nu}\delta_{c\mu}\delta_{b\alpha}\partial_a\partial_d \right. \\
&\quad + \delta_{\alpha\nu}\delta_{a\mu}\delta_{d\beta}\partial_b\partial_c + \delta_{\beta\nu}\delta_{d\mu}\delta_{a\alpha}\partial_b\partial_c + \delta_{\alpha\nu}\delta_{a\mu}\delta_{d\beta}\partial_b\partial_d + \delta_{\beta\nu}\delta_{c\mu}\delta_{a\alpha}\partial_b\partial_d \\
&\quad + \delta_{\alpha\nu}\delta_{d\mu}\delta_{b\beta}\partial_a\partial_c + \delta_{\beta\nu}\delta_{b\mu}\delta_{d\alpha}\partial_a\partial_c + \delta_{\alpha\nu}\delta_{d\mu}\delta_{a\beta}\partial_b\partial_c + \delta_{\beta\nu}\delta_{a\mu}\delta_{d\alpha}\partial_b\partial_c \\
&\quad \left. + \delta_{\alpha\nu}\delta_{c\mu}\delta_{b\beta}\partial_a\partial_d + \delta_{\beta\nu}\delta_{b\mu}\delta_{c\alpha}\partial_a\partial_d + \delta_{\alpha\nu}\delta_{c\mu}\delta_{a\beta}\partial_b\partial_d + \delta_{\beta\nu}\delta_{a\mu}\delta_{c\alpha}\partial_b\partial_d \right] \\
&= \zeta_k \left[\mu_k(\partial^2)(\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}) + (\lambda_k + \mu_k)(\delta_{\alpha\nu}\partial_\mu\partial_\beta + \delta_{\beta\nu}\partial_\mu\partial_\alpha) \right].
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta} = \delta^{\mu\nu}\mathfrak{G}_{\mu\nu\alpha\beta} = 2\zeta_k[\mu_kq^2\delta_{\alpha\beta} + (\lambda_k + \mu_k)q_\alpha q_\beta]. \quad (\text{E.29})$$

Finalement, ces termes sont réinjectés dans (E.25).

$$\begin{aligned}
\delta_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \left[\partial_t\Gamma_k[\vec{r}] \right]_{min} &= -\frac{1}{2} \int_q (\partial_t R_k(q)) \left[P_{\alpha\beta}^F(\mathcal{G}^{\alpha\beta} + \mathfrak{G}^{\alpha\beta})(G_0(q))^2 + P_{\alpha\beta}^L(\mathcal{G}^{\alpha\beta} + \mathfrak{G}^{\alpha\beta})(G_1(q))^2 \right. \\
&\quad \left. + P_{\alpha\beta}^T(\mathcal{G}^{\alpha\beta} + \mathfrak{G}^{\alpha\beta})(G_2(q))^2 \right].
\end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

Chaque contribution peut être examinée séparément suivant son contenu spectral.

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta}^F(\mathcal{G}^{\alpha\beta} + \mathfrak{G}^{\alpha\beta}) &= P_{\alpha\beta}^F\mathcal{G}^{\alpha\beta} \\
&= \zeta_kq^2(2\mu_k + \lambda_kD)(d - D).
\end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta}^T(\mathcal{G}^{\alpha\beta} + \mathfrak{G}^{\alpha\beta}) &= \zeta_kq^2(2\mu_k + \lambda_kD)P_{\alpha\beta}^T\delta^{\alpha\beta} + 2\zeta_kq^2\mu_kP_{\alpha\beta}^T\delta^{\alpha\beta} + 2\zeta_kq^2(\mu_k + \lambda_k)P_{\alpha\beta}^TP_L^{\alpha\beta} \\
&= \zeta_kq^2(D - 1)[(2\mu_k + \lambda_kD) + 2\mu_k].
\end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta}^L(\mathcal{G}^{\alpha\beta} + \mathfrak{G}^{\alpha\beta}) &= \zeta_kq^2(2\mu_k + \lambda_kD)P_{\alpha\beta}^L\delta^{\alpha\beta} + 2\zeta_kq^2\mu_kP_{\alpha\beta}^L\delta^{\alpha\beta} + 2\zeta_kq^2(\mu_k + \lambda_k)P_{\alpha\beta}^LP_L^{\alpha\beta} \\
&= \zeta_kq^2[(2\mu_k + \lambda_kD) + 2\mu_k + 2(\mu_k + \lambda_k) \times 1].
\end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

(E.30) se réécrit donc, en termes de fonctions de seuil :

$$\delta_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta(\partial_\mu r_\nu)} \left[\partial_t\Gamma_k[\vec{r}] \right]_{min} = -4\zeta_kv_D \left[(2\mu_k + \lambda_kD)(d - D)l_{100}^{D+2} + (6\mu_k + (D + 2)\lambda_k)l_{001}^{D+2} + (D - 1)(4\mu_k + \lambda_kD)l_{010}^{D+2} \right], \quad (\text{E.34})$$

soit avec (E.20) et (E.24) :

$$[\partial_t \zeta_k^2] = \frac{4v_D}{D(2\mu_k + \lambda_k D)} \left[(d-D)(2\mu_k + \lambda_k D) l_{100}^{D+2} + (6\mu_k + (D+2)\lambda_k) l_{001}^{D+2} + (D-1)(4\mu_k + \lambda_k D) l_{010}^{D+2} \right]. \quad (\text{E.35})$$

E.3.2 Fonctions de seuil et règles de remplacement

Dans cette section, nous donnons brièvement les règles de calcul permettant d'obtenir les équations de flot. En particulier, nous montrons comment le calcul se réduit à un nombre très restreint de fonctions de seuil calculées dans l'Annexe F.

Une constante de couplage générique s'écrit à l'aide de la fonction à deux points de la façon suivante :

$$g_k = \text{Coefficient} \left[\Gamma_{k,Y}^{(2)}[\vec{r}; p, -p], X \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}}, \quad (\text{E.36})$$

où Y désigne un couple d'indice, et X une puissance de p . L'équation de flot correspondante s'écrit en fonction de g_k :

$$\begin{aligned} \partial_t g_k &= \partial_t \left\{ \text{Coefficient} \left[\Gamma_{k,Y}^{(2)}[\vec{r}; p, -p], X \right] \Big|_{p^2=0, \vec{r}=\vec{r}_{min}} \right\} \\ &= \text{Coefficient} \left[\partial_t \left\{ \Gamma_{k,Y}^{(2)}[\vec{r}; p, -p] \right\} \Big|_{min} + \int_q \Gamma_{k,\alpha,Y}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^\alpha(q), X \right] \Big|_{p^2=0}. \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

Calculons ces contributions une par une en commençant par la seconde.

- **Flot de la configuration d'évaluation :**

Nous distinguons deux cas, suivant les valeurs de Y :

– $Y = \{D D\}$:

$$\begin{aligned} \int_q \Gamma_{k,\alpha D D}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^\alpha(q) &= \int_q \Gamma_{k,\alpha D D}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \left(-i \partial_t \zeta_k \delta^{\alpha j} \partial_{q_j} \delta(q) \right) \\ &= \int_q i \zeta_k \left[\lambda_k \left(-\delta_{\alpha D}(q.p) p_D - \delta_{\alpha D}(q.p) p_D - \delta_{D D} p^2 q_\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. + \mu_k \left(-\delta_{\alpha D}((q.p) p_D + p^2 q_D) - \delta_{\alpha D}((q.p) p_D + p^2 q_D) \right) \right. \\ &\quad \left. - \delta_{D D}((q.p) p_\alpha + (q.p) p_\alpha) \right] \left(-i \partial_t \zeta_k \delta^{\alpha j} \partial_{q_j} \delta(q) \right) \\ &= \zeta_k \partial_t \zeta_k \sum_{\alpha=1}^D \left[\lambda_k (2\delta_{\alpha D} p^\alpha p_D + p^2) \right. \\ &\quad \left. + \mu_k (2\delta_{\alpha D} (p^\alpha p_D + p^2 \delta_D^\alpha) + 2p^\alpha p_\alpha) \right] \\ &= \zeta_k \partial_t \zeta_k \left[\lambda_k (2p_D^2 + Dp^2) + \mu_k (2(p_D^2 + p^2) + 2p^2) \right], \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

ce qui donne finalement,

* $X = p^2$:

$$\int_q \Gamma_{k,\alpha D D}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^\alpha(q) \rightarrow \zeta_k \partial_t \zeta_k (D\lambda_k + 4\mu_k). \quad (\text{E.39})$$

* $X = p_D^2$:

$$\int_q \Gamma_{k,\alpha D D}^{(3)} [\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^\alpha(q) \rightarrow \zeta_k \partial_t \zeta_k (2\lambda_k + 2\mu_k) . \quad (\text{E.40})$$

– $Y = \{D + 1 D + 1\}$: Le calcul est hautement simplifié par le fait que les indices impulsionnels sont dans $\llbracket 1; D \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \int_q \Gamma_{k,\alpha D+1 D+1}^{(3)} [\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^\alpha(q) &= \int_q \Gamma_{\alpha D+1 D+1}^{(3)} [\vec{r}_{min}; q, p, -p] (-i \partial_t \zeta_k \delta^{\alpha j} \partial_{q^j} \delta(q)) \\ &= \int_q \zeta_k \partial_t \zeta_k \delta^{\alpha j} \partial_{q^j} \delta(q) \left[-\lambda_k (p^2 q_\alpha) - \mu_k (2(q.p) p_\alpha) \right] \\ &= \zeta_k \partial_t \zeta_k \sum_{\alpha=1}^D \left[\lambda_k p^2 + 2\mu_k p^\alpha p_\alpha \right] \\ &= \zeta_k \partial_t \zeta_k \left[D \lambda_k p^2 + 2\mu_k p^2 \right] . \end{aligned} \quad (\text{E.41})$$

D'après (3.188), nous n'avons besoin que du coefficient de ce terme par rapport à p^4 , qui est trivial :

$$\int_q \Gamma_{k,\alpha D+1 D+1}^{(3)} [\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^\alpha(q) \rightarrow 0 . \quad (\text{E.42})$$

• **Coefficients dans l'équation de Wetterich :**

La valeur de X contrôle la procédure utilisée pour dériver les termes, et donc le type de fonction de seuil impliquée.

– $X = p^2$:

Grâce au caractère dérivatif des vertex de la théorie, tous les numérateurs dans (3.191) portent au moins p^2 , nous pouvons obtenir ces coefficients en mettant à 0 l'impulsion externe circulant dans le dénominateur. Les intégrales peuvent alors être simplifiées comme des intégrales sphériques.

Par exemple, considérons pour une fonction f générique l'intégrale :

$$\int_q q_a q_b q_c q_d f(q^2) .$$

Sa structure tensorielle peut être réduite en un produit de symboles de Kronecker. Il existe une constante A scalaire telle que :

$$\int_q q_a q_b q_c q_d f(q^2) = A (\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \int_q q^4 f(q^2) . \quad (\text{E.43})$$

A peut être calculée en contractant l'intégrale avec $\delta^{ab} \delta^{cd}$ par exemple :

$$\int_q q^4 f(q^2) = A (D^2 + D + D) \int_q q^4 f(q^2) \Rightarrow A = \frac{1}{D(D+2)} . \quad (\text{E.44})$$

Les contractions suivantes donnent les autres règles de remplacement :

* $\delta^{Da}\delta^{Db}\delta^{cd}$:

$$q_D^2 q^2 \mapsto \frac{q^4}{D}$$

* $p^a p^b \delta^{cd}$:

$$(q \cdot p)^2 q^2 \mapsto \frac{p^2 q^4}{D}$$

* $p^a p^b \delta^{Dc} \delta^{Dd}$:

$$(q \cdot p)^2 q_D^2 \mapsto \frac{p^2 q^4}{D(D+2)}$$

L'expression finale se réduit donc à de simples produits de puissances de q avec les propagateurs de la théorie : $G_0(q)$ pour les flexurons, $G_1(q)$ pour les phonons acoustiques transverses et $G_2(q)$ pour les phonons acoustiques longitudinaux, soit des intégrales de type :

$$l_{abc}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c, \quad (\text{E.45})$$

dont les propriétés sont discutées plus en détail dans l'Annexe F.

– $X = p_D^2$:

Le calcul se fait exactement de la même manière.

– $X = p^4$:

Cette fois-ci, il est nécessaire de développer les propagateurs faisant intervenir l'impulsion externe p dans les diagrammes de type bulle ; autrement dit, la partie mettant en jeu $\Gamma_k^{(4)}$ dans (3.191) n'intervient pas.

Considérons un des propagateurs $G_i(p - q)$, et développons-le en puissances de p :

$$\begin{aligned} (G_i(p - q))^{-1} &= Z_k(p + q)^4 + (m_k^i)^2(p + q)^2 + R_k((p + q)^2) \\ &\underset{p \rightarrow 0}{=} Z_k q^4 + (m_k^i)^2 q^2 + R_k(q^2) \\ &\quad - 4Z_k q^2(p \cdot q) - 2(m_k^i)^2(p \cdot q) - 2(p \cdot q) \partial_{q^2} R_k(q^2) \\ &\quad + 4Z_k(p \cdot q)^2 + 2Z_k p^2 q^2 + (m_k^i)^2 p^2 + p^2 \partial_{q^2} R_k(q^2) + 2(p \cdot q)^2 \partial_{q^2}^2 R_k(q). \end{aligned} \quad (\text{E.46})$$

D'autre part,

$$G_i^{-1}(p - q) \underset{p \rightarrow 0}{=} G_i^{-1}(q) + O_1(p) + O_2(p^2) + O(p^3)$$

$$\Rightarrow G_i(p - q) \underset{p \rightarrow 0}{=} G_i(q) - O_1(p) G_i^2(q) - O_2(p) G_i^2(q) + O_1(p)^2 G_i^3(q) + O(p^3) \quad (\text{E.47})$$

Le calcul peut être décomposé ordre par ordre en puissances de p . Comme cette fois-ci de nouvelles combinaisons de $R_k(q)$ et de ses dérivées interviennent, il nous faut définir de nouvelles fonctions de seuil. Dans la suite, P désigne la partie sans masse des propagateurs (celle qui est la même pour tous) :

$$P(q) = Z_k q^4 + R_k(q). \quad (\text{E.48})$$

* **Ordre 1 :**

À ce stade, $\partial_{q^2} R_k(q)$ intervient. Nous avons donc en plus de l_{abc}^α les seuils suivants :

$$n_{abc}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{dP}{dq^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c . \quad (\text{E.49})$$

* **Ordre 2 :**

À ce stade, $\partial_{q^2}^2 R_k(q)$ intervient. Nous avons donc en plus de l_{abc}^α les seuils suivants :

$$k_{abc}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{d^2 P}{d(q^2)^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c . \quad (\text{E.50})$$

Cependant, le carré du terme d'ordre 1 intervient également, ce qui conduit à la définition de :

$$m_{abc}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{dP}{dq^2} \right)^2 G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c . \quad (\text{E.51})$$

Le calcul nécessite également quelques règles de remplacement supplémentaires.

$$* q_\alpha(p.q)^3 \mapsto \frac{3q^4 p^2 p_\alpha}{D(D+2)}$$

$$* q_\alpha^2(p.q)^2 \mapsto \left(p^2 + 2p_\alpha^2 \right) \frac{q^4}{D(D+2)}$$

$$* q_\alpha(p.q) \mapsto \frac{q^2 p_\alpha}{D}$$

$$* (p.q)^4 \mapsto \frac{3p^4 q^4}{D(D+2)}$$

$$* q_\alpha^2(p.q)^4 \mapsto \left(3p^4 + 12p^2 p_\alpha^2 \right) \frac{q^6}{D(D+2)(D+4)}$$

E.3.3 Dimension anormale

La dimension anormale est définie par $Z_k \eta_k = -\partial_t Z_k$. Nous obtenons à partir du flot de Z_k :

$$\eta_k = \frac{2v_D}{D(D+2)\bar{\mu}_k(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^4} \left[\begin{aligned} & \bar{\mu}_k(-D(D+2)\bar{\lambda}_k^2 + 4(D^2 - 2D - 2)\bar{\mu}_k\bar{\lambda}_k + 4(D^2 - 2D - 2)\bar{\mu}_k^2)\bar{\zeta}_k^4 \bar{l}_{100}^D \\ & + \bar{\mu}_k(D(D+2)\bar{\lambda}_k^2 + 4(4-D)\bar{\mu}_k\bar{\lambda}_k + 4(D^2 - 4D + 6)\bar{\mu}_k^2)\bar{\zeta}_k^4 \bar{l}_{001}^D \\ & + 12\bar{\mu}_k(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)^4 \bar{\zeta}_k^8 \bar{l}_{003}^{D+4} + 4(D-1)\bar{\mu}_k^4(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^8 \bar{l}_{030}^{D+4} \\ & - \bar{\mu}_k(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)^2((D+2)\bar{\lambda}_k + 2(5D-2)\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^6 \bar{l}_{002}^{D+2} \\ & - (D-6)(D-1)\bar{\mu}_k^3(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^6 \bar{l}_{020}^{D+2} + 12\bar{\mu}_k(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)^3 \bar{\zeta}_k^6 \bar{n}_{003}^{D+2} \\ & + 4(D-1)\bar{\mu}_k^3(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^6 \bar{n}_{030}^{D+2} - 4(D^2 - 3D + 2)\bar{\mu}_k^2(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^4 \bar{l}_{010}^D \\ & + 2(D+2)\bar{\mu}_k(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)^2 \bar{\zeta}_k^4 \bar{n}_{200}^D + 24\bar{\mu}_k \bar{m}_{001}^{D-2} \\ & - 2\bar{\mu}_k(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)(-(D+8)\bar{\lambda}_k + 2(D-10)\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^4 \bar{n}_{002}^D \\ & + 12(D-1)\bar{\mu}_k^2(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^4 \bar{n}_{020}^D - 8\bar{\mu}_k(3D\bar{\lambda}_k + 2(2D+1)\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^2 \bar{n}_{100}^{D-2} \\ & - 4\bar{\mu}_k(-(D+5)\bar{\lambda}_k + 2(D-7)\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^2 \bar{n}_{001}^{D-2} + 12\bar{\mu}_k(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^2 \bar{m}_{002}^D \\ & + 20(D-1)\bar{\mu}_k(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^2 \bar{n}_{010}^{D-2} + 4(D-1)\bar{\mu}_k(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^2 \bar{m}_{020}^D \\ & + 4(D+2)\bar{\mu}_k(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)\bar{\zeta}_k^2 \bar{m}_{200}^D \\ & - 4(2(D-1)\bar{\lambda}_k + (2D+1)\bar{\mu}_k)\bar{m}_{100}^{D-2} + 8(D-1)(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k)\bar{m}_{010}^{D-2} \end{aligned} \right]. \quad (\text{E.52})$$

Il faut cependant bien comprendre que, du fait que les fonctions de seuil font intervenir des dérivées de la coupure vis-à-vis de l'échelle courante et que les fonctions de coupure sont proportionnelles à Z_k , les fonctions de seuil dépendent explicitement de η_k . L'équation (E.52) écrite sous cette forme est donc auto-cohérente, même si très simple à résoudre car il s'agit d'un polynôme d'ordre 1 en η_k . Cette structure particulière des équations de flot de renormalisation donne à η_k une dépendance en constantes de couplage sous la forme d'une fraction rationnelle inhomogène, et est donc une des causes principales du caractère non-perturbatif en couplage des équations de flot dans ce formalisme.

E.3.4 Remarque sur la théorie de basse température

La quantification de l'action introduit un seul terme, correspondant à un nouveau terme cinétique, qui ne se couple pas aux autres. De plus, le contenu fréquentiel de la configuration d'évaluation est trivial. L'obtention des équations est donc formellement la même, à ceci près que l'expression des seuils est modifiée pour prendre en compte la sommation sur les fréquences de Matsubara.

E.4 Membranes désordonnées

E.4.1 Vertex

Nous utilisons les conventions suivantes :

- Les fonctions δ donnant la conservation de l'impulsion sont implicites.

- J est une matrice ou un vecteur dont toutes les composantes valent 1.
- Les indices de répliques sont notés en lettres majuscules.

L'action effective du système désordonné dans l'espace de Fourier est :

$$\begin{aligned}
\Gamma_k[\vec{r}] = & \sum_{A=1}^n \int_q \left[\frac{Z_k}{2} q^2 Q^2 \vec{r}^A(q) \cdot \vec{r}^A(Q) + \frac{\lambda_k}{8} \int_{q_1, q_2} \left(\vec{r}^A(q_1) \cdot \vec{r}^A(q_2)(q_1 \cdot q_2) + D\zeta_k^2 \right) \left(\vec{r}^A(q) \cdot \vec{r}^A(Q)(q \cdot Q) + D\zeta_k^2 \right) \right. \\
& + \frac{\mu_k}{4} \int_{q_1, q_2} \left(\vec{r}^A(q_1) \cdot \vec{r}^A(q_2) q_1^i q_2^j + \zeta_k^2 \delta^{ij} \right) \left(\vec{r}^A(q) \cdot \vec{r}^A(Q) q_i Q_j + \zeta_k^2 \delta_{ij} \right) \\
& - \sum_{B=1}^n \left[\frac{\Delta_{\kappa k}}{2} q^2 Q^2 \vec{r}^A(q) \cdot \vec{r}^B(Q) + \frac{\Delta_{\lambda k}}{8} \int_{q_1, q_2} \left(\vec{r}^A(q_1) \cdot \vec{r}^A(q_2)(q_1 \cdot q_2) + D\zeta_k^2 \right) \left(\vec{r}^B(q) \cdot \vec{r}^B(Q)(q \cdot Q) + D\zeta_k^2 \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{\Delta_{\mu k}}{4} \int_{q_1, q_2} \left(\vec{r}^A(q_1) \cdot \vec{r}^A(q_2) q_1^i q_2^j + \zeta_k^2 \delta^{ij} \right) \left(\vec{r}^B(q) \cdot \vec{r}^B(Q) q_i Q_j + \zeta_k^2 \delta_{ij} \right) \right] \right].
\end{aligned} \tag{E.53}$$

Grâce au haut degré de symétrie entre les termes de la théorie pure et ceux issus de la sommation sur les configurations désordonnées, la prise en compte du désordre ne génère pas de difficulté supplémentaire dans ce calcul.

- **Fonction à 1-point :**

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k, \alpha A}^{(1)}[\vec{r}, p] \propto & Z_k p^4 r_\alpha^A(p) + \frac{\lambda_k}{2} \int_{q, q'} r_\alpha^A(q)(p \cdot q) (\vec{r}^A(q') \cdot \vec{r}^A(Q)(q' \cdot Q) + D\zeta_k^2) \\
& + \frac{\mu_k}{2} \int_{q, q'} r_\alpha^A(q)(p^i q^j + p^j q^i) (\vec{r}^A(q') \cdot \vec{r}^A(Q) q'_i Q_j + \zeta_k^2 \delta_{ij}) \\
& - \sum_{B=1}^n \left[\Delta_{\kappa k} p^4 r_\alpha^B(p) + \frac{\Delta_{\lambda k}}{2} \int_{q, q'} r_\alpha^A(q)(p \cdot q) (\vec{r}^B(q') \cdot \vec{r}^B(Q)(q' \cdot Q) + D\zeta_k^2) \right. \\
& \left. + \frac{\Delta_{\mu k}}{2} \int_{q, q'} r_\alpha^A(q)(p^i q^j + p^j q^i) (\vec{r}^B(q') \cdot \vec{r}^B(Q) q'_i Q_j + \zeta_k^2 \delta_{ij}) \right].
\end{aligned} \tag{E.54}$$

Au minimum, $\Gamma_{k, \alpha A}^{(1)}[\vec{r}; p] = 0$.

- **Fonction à 2-points :**

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k, \alpha A, \beta B}^{(2)}[\vec{r}, p, p'] \propto & Z_k p^4 \delta_{\alpha\beta} \delta_{AB} + \frac{\lambda_k}{2} \int_q \delta_{\alpha\beta}(p \cdot p') (\vec{r}^A(q) \cdot \vec{r}^A(Q)(q \cdot Q) + D\zeta_k^2) \delta_{AB} \\
& + \lambda_k \int_q r_\alpha^A(q) r_\beta^A(Q)(p \cdot q)(p' \cdot Q) \delta_{AB} + \frac{\mu_k}{2} \int_q (p^i q^j + p^j q^i)(p'_i Q_j + p'_j Q_i) r_\alpha^A(q) r_\beta^A(Q) \delta_{AB} \\
& + \frac{\mu_k}{2} (p_i p'_j + p_j p'_i) \delta_{\alpha\beta} \int_q (\vec{r}^A(q) \cdot \vec{r}^A(Q) q^i Q^j + \zeta_k^2 \delta^{ij}) \delta_{AB} \\
& - \Delta_{\kappa k} p^4 \delta_{\alpha\beta} J_{AB} - \frac{\Delta_{\lambda k}}{2} \int_q \delta_{\alpha\beta}(p \cdot p') \sum_{C=1}^n (\vec{r}^C(q) \cdot \vec{r}^C(Q)(q \cdot Q) + D\zeta_k^2) \delta_{AB} \\
& - \Delta_{\lambda k} \int_q r_\alpha^A(q) r_\beta^B(Q)(p \cdot q)(p' \cdot Q) - \frac{\Delta_{\mu k}}{2} \int_q (p^i q^j + p^j q^i)(p'_i Q_j + p'_j Q_i) r_\alpha^A(q) r_\beta^B(Q) \\
& - \frac{\Delta_{\mu k}}{2} (p_i p'_j + p_j p'_i) \delta_{\alpha\beta} \int_q \sum_{C=1}^n (\vec{r}^C(q) \cdot \vec{r}^C(Q) q^i Q^j + \zeta_k^2 \delta^{ij}) \delta_{AB}.
\end{aligned} \tag{E.55}$$

Remarque :

Il faut être prudent lors de l'analyse de la dépendance de $\Gamma_k^{(2)}$ dans les constantes de couplage élastiques :

– Termes proportionnels à μ_k :

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta r^\beta(p')} \frac{\delta}{\delta r^\alpha(p)} (q_i q'_j \vec{r}(q) \cdot \vec{r}(q')) (q''^i q'''^j \vec{r}(q'') \cdot \vec{r}(q''')) \\
&= \frac{\delta}{\delta r^\beta(p')} 2 \times r_\alpha(p) (p^i q^j + p^j q^i) (q'_i q'_j \vec{r}(q') \cdot \vec{r}(q')) \\
&= 2\delta_{\alpha\beta} (p^i p^j + p^j p^i) (q_i q'_j) (\vec{r}(q) \cdot \vec{r}(q')) + 2r_\alpha(p) r_\beta(p') (p^i q^j + p^j q^i) (p'_i q'_j + p'_j q'_i) \\
&= 2\delta_{\alpha\beta} ((p' \cdot q)(p \cdot q') + (p \cdot q)(p' \cdot q')) (\vec{r}(q) \cdot \vec{r}(q')) + 4r_\alpha(p) r_\beta(p') ((p \cdot p')(q \cdot q') + (p \cdot q')(q \cdot p')) \\
&\underset{min}{=} 2\delta_{\alpha\beta} \times (-1) \times (-\zeta_k^2) \times 2p^2 + 4(-1) (-\zeta_k^2) (p^2 \delta_{\alpha\beta} + p_\alpha p_\beta) .
\end{aligned}$$

- * (-1) : vient de l'évaluation sur couche de masse en $(p, -p)$.
- * $\delta_{\alpha\beta}$: ce terme émerge lorsque les deux dérivées fonctionnelles agissent sur le **même facteur** de l'expression de départ. En particulier, il porte des indices parcourant $\llbracket 1; d \rrbracket$ indépendamment de la configuration d'évaluation.
- * $\delta_{\alpha\beta}$: ce terme apparaît lors de l'évaluation du résultat au minimum, $r_\alpha(p) r_\beta(p') \Big|_{min}$. Par conséquent, il devrait plutôt s'écrire $\delta_{\alpha i} \delta_{\beta}^i$, avec $i \in \llbracket 1; D \rrbracket$.

– Termes proportionnels à λ_k :

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta r^\beta(p')} \frac{\delta}{\delta r^\alpha(p)} (q \cdot q') (\vec{r}(q) \cdot \vec{r}(q')) (q'' \cdot q''') (\vec{r}(q'') \cdot \vec{r}(q''')) \\
&= \frac{\delta}{\delta r^\beta(p')} 4 \times r_\alpha(p) (p \cdot q) (q' \cdot q'') (\vec{r}(q') \cdot \vec{r}(q'')) \\
&= 4\delta_{\alpha\beta} (p \cdot p') (q \cdot q') (\vec{r}(q) \cdot \vec{r}(q')) + 8r_\alpha(p) r_\beta(p') (p \cdot q) (p' \cdot q') \\
&\underset{min}{=} 4\delta_{\alpha\beta} \times (-1) \times (-\zeta_k^2) \times p^2 + 8(-1) (-\zeta_k^2) p_\alpha p_\beta
\end{aligned}$$

- * (-1) : vient de l'évaluation sur couche de masse en $(p, -p)$.
- * $\delta_{\alpha\beta}$: ce terme émerge lorsque les deux dérivées fonctionnelles agissent sur le **même facteur** de l'expression de départ. En particulier, il porte des indices parcourant $\llbracket 1; d \rrbracket$ indépendamment de la configuration d'évaluation.
- * 4 : le terme λ_k est plus symétrique que celui proportionnel à μ_k .

Dans tous les cas, le terme en bleu est compensé par la contribution du terme d'ordre 2 en champ (la pseudo-masse) :

$$(q_i q'_j \vec{r}(q) \cdot \vec{r}(q') + \zeta_k^2 \delta_{ij}) \Big|_{min} = 0 = ((q \cdot q') \vec{r}(q) \cdot \vec{r}(q') + D \zeta_k^2) \Big|_{min} . \quad (E.56)$$

Toutes les contributions à $\Gamma_k^{(2)}$ proviennent donc de termes où les deux dérivées agissent sur des facteurs différents, proportionnels à $\delta_{\alpha\beta}$, et qui contribuent donc à la renormalisation du propagateur transverse, mais sont nuls si $\Gamma_k^{(2)}$ est évalué dans l'espace externe.

Au minimum,

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,\alpha A,\beta B}^{(2)}[\vec{r}_{min}; p, -p] = & Z_k p^4 \delta_{\alpha\beta} \delta_{AB} - \mu_k \zeta_k^2 \delta_{\alpha}^i \delta_{i\beta} p^2 \delta_{AB} - (\lambda_k + \mu_k) \zeta_k^2 p_{\alpha} p_{\beta} \delta_{AB} \\ & - \Delta_{\kappa k} \delta_{\alpha\beta} p^4 J_{AB} + \Delta_{\mu k} \zeta_k^2 \delta_{\alpha}^i \delta_{i\beta} p^2 J_A J_B + (\Delta_{\lambda k} + \Delta_{\mu k}) \zeta_k^2 p_{\alpha} p_{\beta} J_A J_B . \end{aligned} \quad (\text{E.57})$$

• Fonction à 3-points :

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,\alpha A,\beta B,\gamma C}^{(3)}[\vec{r}, p, p', p''] \propto & \lambda_k \delta_{\alpha\beta} (p.p')(p''.Q) r_{\gamma}^A(Q) \delta_{AB} \delta_{AC} + \lambda_k \delta_{\alpha\gamma} (p.p'')(p'.Q) r_{\beta}^A(Q) \delta_{AB} \delta_{AC} \\ & + \lambda_k \delta_{\beta\gamma} (p.Q)(p'.p'') r_{\alpha}^A(Q) \delta_{AB} \delta_{AC} + \frac{\mu_k}{2} \delta_{\alpha\beta} (p^i p'^j + p'^j p^i) (p''_i Q_j + p''_j Q_i) r_{\gamma}^A(Q) \delta_{AB} \delta_{AC} \\ & + \frac{\mu_k}{2} \delta_{\alpha\gamma} (p_i p'_j + p_j p'_i) (p''^i Q^j + p''^j Q^i) r_{\beta}^A(Q) \delta_{AB} \delta_{AC} \\ & + \frac{\mu_k}{2} \delta_{\beta\gamma} (p^i Q^j + p^j Q^i) (p'_i p''_j + p'_j p''_i) r_{\alpha}^A(Q) \delta_{AB} \delta_{AC} \\ & - \Delta_{\lambda k} \delta_{\alpha\beta} (p.p')(p''.Q) r_{\gamma}^C(Q) \delta_{AB} - \Delta_{\lambda k} \delta_{\alpha\gamma} (p.p'')(p'.Q) r_{\beta}^B(Q) \delta_{AC} \\ & - \Delta_{\lambda k} \delta_{\beta\gamma} (p.Q)(p'.p'') r_{\alpha}^A(Q) \delta_{BC} - \frac{\Delta_{\mu k}}{2} \delta_{\alpha\beta} (p^i p'^j + p'^j p^i) (p''_i Q_j + p''_j Q_i) r_{\gamma}^C(Q) \delta_{AB} \\ & - \frac{\Delta_{\mu k}}{2} \delta_{\alpha\gamma} (p_i p'_j + p_j p'_i) (p''^i Q^j + p''^j Q^i) r_{\beta}^B(Q) \delta_{AC} \\ & - \frac{\Delta_{\mu k}}{2} \delta_{\beta\gamma} (p^i Q^j + p^j Q^i) (p'_i p''_j + p'_j p''_i) r_{\alpha}^A(Q) \delta_{BC} . \end{aligned} \quad (\text{E.58})$$

Au minimum,

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,\alpha A,\beta B,\gamma C}^{(3)}[\vec{r}_{min}; p, p', p''] = & i \zeta_k \delta(p + p' + p'') \left[\lambda_k \delta_{\alpha\beta} (p.p') p''_{\gamma} \delta_{AB} \delta_{AC} J_A + \lambda_k \delta_{\beta\gamma} (p'.p'') p_{\alpha} \delta_{AB} \delta_{AC} J_A \right. \\ & + \lambda_k \delta_{\gamma\alpha} (p.p'') p'_{\beta} \delta_{AB} \delta_{AC} J_A \\ & + \mu_k \delta_{\alpha\beta} ((p.p'') p'_{\gamma} + (p'.p'') p_{\gamma}) \delta_{AB} \delta_{AC} J_A \\ & + \mu_k \delta_{\alpha\gamma} ((p.p') p''_{\beta} + (p'.p'') p_{\beta}) \delta_{AB} \delta_{AC} J_A \\ & + \mu_k \delta_{\beta\gamma} ((p.p') p''_{\alpha} + (p.p'') p'_{\alpha}) \delta_{AB} \delta_{AC} J_A \\ & - \Delta_{\lambda k} \delta_{\alpha\beta} (p.p') p''_{\gamma} \delta_{AB} J_C - \Delta_{\lambda k} \delta_{\beta\gamma} (p'.p'') p_{\alpha} \delta_{BC} J_A \\ & - \Delta_{\lambda k} \delta_{\gamma\alpha} (p.p'') p'_{\beta} \delta_{CA} J_B \\ & - \Delta_{\mu k} \delta_{\alpha\beta} ((p.p'') p'_{\gamma} + (p'.p'') p_{\gamma}) \delta_{AB} J_C \\ & - \Delta_{\mu k} \delta_{\alpha\gamma} ((p.p') p''_{\beta} + (p'.p'') p_{\beta}) \delta_{AC} J_B \\ & \left. - \Delta_{\mu k} \delta_{\beta\gamma} ((p.p') p''_{\alpha} + (p.p'') p'_{\alpha}) \delta_{BC} J_A \right] . \end{aligned} \quad (\text{E.59})$$

- **Fonction à 4-points :**

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k,\alpha A,\beta B,\gamma C,\delta D}^{(4)}[\vec{r}, p, p', p'', p'''] &\propto \lambda_k \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} (p \cdot p') (p'' \cdot p''') \delta_{AB} \delta_{AC} \delta_{AD} + \lambda_k \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} (p \cdot p'') (p' \cdot p''') \delta_{AB} \delta_{AC} \delta_{AD} \\
&+ \lambda_k \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} (p \cdot p''') (p' \cdot p'') \delta_{AB} \delta_{AC} \delta_{AD} \\
&+ \mu_k \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} ((p \cdot p'') (p' \cdot p''') + (p \cdot p''') (p' \cdot p'')) \delta_{AB} \delta_{AC} \delta_{AD} \\
&+ \mu_k \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} ((p \cdot p') (p'' \cdot p''') + (p \cdot p''') (p' \cdot p'')) \delta_{AB} \delta_{AC} \delta_{AD} \\
&+ \mu_k \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} ((p \cdot p') (p'' \cdot p''') + (p \cdot p'') (p' \cdot p''')) \delta_{AB} \delta_{AC} \delta_{AD} \\
&- \Delta_{\lambda k} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} (p \cdot p') (p'' \cdot p''') \delta_{AB} \delta_{CD} - \Delta_{\lambda k} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} (p \cdot p'') (p' \cdot p''') \delta_{AC} \delta_{BD} \\
&- \Delta_{\lambda k} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} (p \cdot p''') (p' \cdot p'') \delta_{AD} \delta_{BC} \\
&- \Delta_{\mu k} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} ((p \cdot p'') (p' \cdot p''') + (p \cdot p''') (p' \cdot p'')) \delta_{AB} \delta_{CD} \\
&- \Delta_{\mu k} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} ((p \cdot p') (p'' \cdot p''') + (p \cdot p''') (p' \cdot p'')) \delta_{AC} \delta_{BD} \\
&- \Delta_{\mu k} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} ((p \cdot p') (p'' \cdot p''') + (p \cdot p'') (p' \cdot p''')) \delta_{AD} \delta_{BC} .
\end{aligned} \tag{E.60}$$

E.4.2 Propagateur

L'inversion de $\Gamma_k^{(2)}$ est simple grâce à sa décomposition sur des projecteurs orthogonaux $P_{\alpha\beta}^F$, $P_{\alpha\beta}^T$ et $P_{\alpha\beta}^L$, mais maintenant nous devons également tenir compte de sa structure tensorielle dans l'espace des répliques. Heureusement, celle-ci ne dépend que de 2 tenseurs : δ_{AB} et J_{AB} .

Considérons une matrice générique de cette forme :

$$M_{AB} = M^{(1)} \delta_{AB} + M^{(2)} J_{AB} . \tag{E.61}$$

Comme l'espace $\text{Vect}\{\delta, J\}$ est stable par multiplication, nous déduisons que son inverse X admet une décomposition de la même forme,

$$X_{AB} = X^{(1)} \delta_{AB} + X^{(2)} J_{AB} . \tag{E.62}$$

$$M_A^B X_B^C = M^{(1)} X^{(1)} \delta_A^C + (M^{(1)} X^{(2)} + M^{(2)} X^{(1)}) J_A^C + n M^{(2)} X^{(2)} J_A^C ,$$

$$\begin{aligned}
X = M^{-1} &\Leftrightarrow \begin{cases} X^{(1)} M^{(1)} = 1 \\ X^{(2)} M^{(1)} + X^{(1)} M^{(2)} + n X^{(2)} M^{(2)} = 0 \end{cases} , \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} X^{(1)} = (M^{(1)})^{-1} \\ X^{(2)} = -\frac{M^{(2)}}{(M^{(1)})^2 + n M^{(1)} M^{(2)}} \end{cases} .
\end{aligned} \tag{E.63}$$

Définissons les notations suivantes :

- Propagateur pur de flexurons :

$$G_0(p)^{-1} = Z_k p^4 + R_k(p) . \tag{E.64}$$

- Propagateur pur de phonons transverses :

$$G_1(p)^{-1} = Z_k p^4 + \mu_k \zeta_k^2 p^2 + R_k(p) . \tag{E.65}$$

- Propagateur pur de phonons longitudinaux :

$$G_2(p)^{-1} = Z_k p^4 + (\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2 p^2 + R_k(p) . \quad (\text{E.66})$$

- Partie désordonnée du propagateur de flexurons :

$$\Delta G_0(p)^{-1} = \Delta_{\kappa k} p^4 + \Delta R_k(p) . \quad (\text{E.67})$$

- Partie désordonnée du propagateur de phonons transverses :

$$\Delta G_1(p)^{-1} = \Delta_{\kappa k} p^4 + \Delta_{\mu k} \zeta_k^2 p^2 + \Delta R_k(p) . \quad (\text{E.68})$$

- Partie désordonnée du propagateur de phonons longitudinaux :

$$\Delta G_2(p)^{-1} = \Delta_{\kappa k} p^4 + (\Delta \lambda_k + 2\Delta \mu_k) \zeta_k^2 p^2 + \Delta R_k(p) . \quad (\text{E.69})$$

- Projecteur externe :

$$P_{\alpha\beta}^F = \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha}^i \delta_{i\beta} . \quad (\text{E.70})$$

- Projecteur transverse :

$$P_{\alpha\beta}^T = \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} \left(\delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{p^2} \right) . \quad (\text{E.71})$$

- Projecteur longitudinal :

$$P_{\alpha\beta}^L = \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} \frac{p^i p^j}{p^2} ; \quad (\text{E.72})$$

- Partie désordonnée de $P(q)$:

$$\Delta P(q) = \Delta_{\kappa k} q^4 + \Delta R_k(q) . \quad (\text{E.73})$$

Le propagateur complet en présence de désordre gelé s'écrit alors,

$$\begin{aligned} G_{\alpha A, \beta B}^n(p) &= \left(G_0(p) P_{\alpha\beta}^F + G_1(p) P_{\alpha\beta}^T + G_2(p) P_{\alpha\beta}^L \right) \delta_{AB} \\ &\quad - \left(\frac{G_0(p)^2}{nG_0(p) + \Delta G_0(p)} P_{\alpha\beta}^F + \frac{G_1(p)^2}{nG_2(p) + \Delta G_2(p)} P_{\alpha\beta}^T + \frac{G_2(p)^2}{nG_2(p) + \Delta G_2(p)} P_{\alpha\beta}^L \right) J_{AB} . \end{aligned} \quad (\text{E.74})$$

E.4.3 Équations de flot

Nous procédons de même que dans le cas pur, (E.37) étant toujours valable, même si Y porte maintenant en plus un couple d'indices de répliques.

- Flot de la configuration d'évaluation :

– $\underline{Y = \{D1, D1\}}$:

$$\begin{aligned}
\int_q \Gamma_{k,\alpha A,D1,D1}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^{\alpha A}(q) &= \sum_{A=1}^n \int_q \Gamma_{\alpha A,D1,D1}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] (-i \partial_t \zeta_k \delta^{\alpha j} \partial_{q^j} \delta(q) J^A) \\
&= \int_q i \zeta_k \left[\lambda_k (-\delta_{\alpha D}(q.p) p_D - \delta_{\alpha D}(q.p) p_D - \delta_{DD} p^2 q_\alpha) \right. \\
&\quad + \mu_k (-\delta_{\alpha D}((q.p) p_D + p^2 q_D) - \delta_{\alpha D}((q.p) p_D + p^2 q_D) \\
&\quad - \delta_{DD}((q.p) p_\alpha + (q.p) p_\alpha)) \\
&\quad - n \Delta_{\lambda k} (-\delta_{\alpha D}(q.p) p_D - \delta_{\alpha D}(q.p) p_D - \delta_{DD} p^2 q_\alpha) \\
&\quad - n \Delta_{\mu k} (-\delta_{\alpha D}((q.p) p_D + p^2 q_D) - \delta_{\alpha D}((q.p) p_D + p^2 q_D) \\
&\quad \left. - \delta_{DD}((q.p) p_\alpha + (q.p) p_\alpha)) \right] (-i \partial_t \zeta_k \delta^{\alpha j} \partial_{q^j} \delta(q)) \\
&= \zeta_k \partial_t \zeta_k \sum_{\alpha=1}^D \left[\lambda_k (2\delta_{\alpha D} p^\alpha p_D + p^2) + \mu_k (2\delta_{\alpha D} (p^\alpha p_D + p^2 \delta_D^\alpha) + 2p^\alpha p_\alpha) \right. \\
&\quad \left. - n \Delta_{\lambda k} (2\delta_{\alpha D} p^\alpha p_D + p^2) - n \Delta_{\mu k} (2\delta_{\alpha D} (p^\alpha p_D + p^2 \delta_D^\alpha) + 2p^\alpha p_\alpha) \right] \\
&= \zeta_k \partial_t \zeta_k \left[\lambda_k (2p_D^2 + Dp^2) + \mu_k (2(p_D^2 + p^2) + 2p^2) \right. \\
&\quad \left. - n \Delta_{\lambda k} (2p_D^2 + Dp^2) - n \Delta_{\mu k} (2(p_D^2 + p^2) + 2p^2) \right]. \tag{E.75}
\end{aligned}$$

* $\underline{X = p^2}$:

$$\int_q \Gamma_{k,\alpha A,D1,D1}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^{\alpha A}(q) \rightarrow \zeta_k \partial_t \zeta_k \left[D(\lambda_k - n \Delta_{\lambda k}) + 4(\mu_k - n \Delta_{\mu k}) \right]. \tag{E.76}$$

* $\underline{X = p_D^2}$:

$$\int_q \Gamma_{k,\alpha A,D1,D1}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^{\alpha A}(q) \rightarrow \zeta_k \partial_t \zeta_k \left[2(\lambda_k - n \Delta_{\lambda k}) + 2(\mu_k - n \Delta_{\mu k}) \right]. \tag{E.77}$$

Les termes indiqués en vert s'annulent lors de la prise de limite $n \rightarrow 0$.

– $\underline{Y = \{D1, D2\}}$: Seule la structure dans l'espace des répliques est changée. Les termes en bleu sont nuls.

$$\begin{aligned}
\int_q \Gamma_{k,\alpha A,D1,D2}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^{\alpha A}(q) &= \sum_{A=1}^n \int_q \Gamma_{\alpha A,D1,D2}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] (-i \partial_t \zeta_k \delta^{\alpha j} \partial_{q^j} \delta(q) J^A) \\
&= \int_q i \zeta_k \left[-n \Delta_{\lambda k} (-\delta_{\alpha D}(q.p) p_D - \delta_{\alpha D}(q.p) p_D) \right. \\
&\quad \left. - n \Delta_{\mu k} (-\delta_{\alpha D}((q.p) p_D + p^2 q_D) - \delta_{\alpha D}((q.p) p_D + p^2 q_D)) \right] \\
&\quad \times (-i \partial_t \zeta_k \delta^{\alpha j} \partial_{q^j} \delta(q)) \\
&= -\zeta_k \partial_t \zeta_k \sum_{\alpha=1}^D \left[n \Delta_{\lambda k} (2\delta_{\alpha D} p^\alpha p_D) + n \Delta_{\mu k} (2\delta_{\alpha D} (p^\alpha p_D + p^2 \delta_D^\alpha)) \right] \\
&= -\zeta_k \partial_t \zeta_k \left[n \Delta_{\lambda k} (2p_D^2) + n \Delta_{\mu k} (2(p_D^2 + p^2)) \right]. \tag{E.78}
\end{aligned}$$

Tout s'annule dans la limite $n \rightarrow 0$.

* $X = p^2$:

$$\int_q \Gamma_{k,\alpha A,D1,D2}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^{\alpha A}(q) \rightarrow 0. \quad (\text{E.79})$$

* $X = p_D^2$:

$$\int_q \Gamma_{k,\alpha A,D1,D2}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^{\alpha A}(q) \rightarrow 0. \quad (\text{E.80})$$

– $Y = \{D+11, D+11\}$:

$$\begin{aligned} \int_q \Gamma_{k,\alpha A,D+11,D+11}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^{\alpha A}(q) &= \sum_{A=1}^n \int_q \Gamma_{\alpha A,D+11,D+11}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] (-i \partial_t \zeta_k \delta^{\alpha j} \partial_{q^j} \delta(q) J^A) \\ &= \int_q \zeta_k \partial_t \zeta_k \delta^{\alpha j} \partial_{q^j} \delta(q) \left[-\lambda_k (p^2 q_\alpha) - \mu_k (2(q \cdot p) p_\alpha) \right. \\ &\quad \left. + n \Delta_{\lambda k} (p^2 q_\alpha) + n \Delta_{\mu k} (2(q \cdot p) p_\alpha) \right] \\ &= \zeta_k \partial_t \zeta_k \sum_{\alpha=1}^D \left[\lambda_k p^2 + \mu_k \times 2p^\alpha p_\alpha - n \Delta_{\lambda k} p^2 - n \Delta_{\mu k} \times 2p^\alpha p_\alpha \right] \\ &= \zeta_k \partial_t \zeta_k \left[\lambda_k D p^2 + \mu_k \times 2p^2 - n \Delta_{\lambda k} D p^2 - n \Delta_{\mu k} \times 2p^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.81})$$

Le coefficient de ce terme vis-à-vis de p^4 est encore nul.

$$\int_q \Gamma_{k,\alpha A,D+11,D+11}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^{\alpha A}(q) \rightarrow 0. \quad (\text{E.82})$$

– $Y = \{D+11, D+12\}$: Les termes bleus, diagonaux en répliques, s'annulent. Le résultat est trivial.

$$\int_q \Gamma_{k,\alpha A,D+11,D+12}^{(3)}[\vec{r}_{min}; q, p, -p] \partial_t r_{min}^{\alpha A}(q) \rightarrow 0. \quad (\text{E.83})$$

• **Fonctions de seuil :**

Le principe du calcul est le même que précédemment, mais à cause de la structure dans l'espace des répliques, il nous faut étendre notre bibliothèque d'intégrales.

– $X = p^2$ ou $X = p_D^2$:

Pour les mêmes raisons que dans le cas pur, tout se réduit à :

$$l_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d. \quad (\text{E.84})$$

– $X = p^4$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}_i^{AB}(p-q))^{-1} &= Z_k(p+q)^4 \delta_{AB} + (m_k^i)^2 (p+q)^2 \delta_{AB} + R_k((p+q)^2) \delta_{AB} \\
&\quad - \Delta_{\kappa k} (p+q)^4 J_{AB} - (\Delta m_k^i)^2 (p+q)^2 J_{AB} - \Delta R_k((p+q)^2) J_{AB} \\
&\stackrel{p \rightarrow 0}{=} Z_k q^4 \delta_{AB} + (m_k^i)^2 q^2 \delta_{AB} + R_k(q^2) \delta_{AB} \\
&\quad - \Delta_{\kappa k} q^4 J_{AB} - (\Delta m_k^i)^2 q^2 J_{AB} - \Delta R_k(q^2) J_{AB} \\
&\quad - 4Z_k q^2 (p.q) \delta_{AB} - 2(m_k^i)^2 (p.q) \delta_{AB} - 2(p.q) \partial_{q^2} R_k(q^2) \delta_{AB} \\
&\quad + 4\Delta_{\kappa k} q^2 (p.q) J_{AB} + 2(\Delta m_k^i)^2 (p.q) J_{AB} + 2(p.q) \partial_{q^2} \Delta R_k(q^2) J_{AB} \\
&\quad + 4Z_k (p.q)^2 \delta_{AB} + 2Z_k p^2 q^2 \delta_{AB} + (m_k^i)^2 p^2 \delta_{AB} + p^2 \partial_{q^2} R_k(q^2) \delta_{AB} + 2(p.q)^2 \partial_{q^2}^2 R_k(q) \delta_{AB} \\
&\quad - 4\Delta_{\kappa k} (p.q)^2 J_{AB} - 2\Delta_{\kappa k} p^2 q^2 J_{AB} - (\Delta m_k^i)^2 p^2 J_{AB} \\
&\quad - p^2 \partial_{q^2} \Delta R_k(q^2) J_{AB} - 2(p.q)^2 \partial_{q^2}^2 \Delta R_k(q) J_{AB} + O(p^3) .
\end{aligned} \tag{E.85}$$

Nous voyons intervenir de nouveaux termes *via* $\Delta R_k(q)$.

* **Ordre 1 :**

$$n_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{dP}{dq^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d , \tag{E.86}$$

$$\tilde{n}_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{d\Delta P}{dq^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d . \tag{E.87}$$

* **Ordre 2 :**

$$k_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{d^2 P}{d(q^2)^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d , \tag{E.88}$$

$$\tilde{k}_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{d^2 \Delta P}{d(q^2)^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d , \tag{E.89}$$

$$m_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{dP}{dq^2} \right)^2 G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d , \tag{E.90}$$

$$\tilde{m}_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{d\Delta P}{dq^2} \right)^2 G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d , \tag{E.91}$$

$$\check{m}_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{d\Delta P}{dq^2} \right) \left(\frac{dP}{dq^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d . \tag{E.92}$$

Dans le cas où la fonction de coupure est diagonale dans l'espace des répliques, il est possible de réduire le nombre de familles de seuil (voir Annexe F).

E.4.4 Expressions finales

Afin d'éviter d'alourdir des expressions déjà longues, nous donnons seulement des flots dimensionnés.

- Variance du module de cisaillement $\Delta_{\mu k}$:

$$\begin{aligned}
\partial_t \Delta_{\mu k} &= +2 \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k^3} \frac{d}{dp^2} \left[\Gamma_{k,D 1,D 2,min}^{(2)} \right] \Big|_{p^2=0} - \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&\quad - \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\int_q \Gamma_{k,\alpha i,D 1,D 2,min}^{(3)}(q, p, -p) \partial_t r_{min}^{\alpha i} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= 2 \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k^3} (-\Delta_{\mu k} \zeta_k^2) - \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k} (-2\Delta_{\mu k}) - \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= -\frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0}
\end{aligned} \tag{E.93}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \Delta_{\mu k} &= \frac{v_D}{D(D+2)} \left\{ -8(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})^2 (\lambda_k + 3\mu_k)^2 \zeta_k^4 l_{0040}^{D+8} - 4(D^2 + 2D - 8) \Delta_{\mu k}^2 \mu_k^2 \zeta_k^4 l_{0400}^{D+8} \right. \\
&\quad + 16(\Delta_{\lambda k}^2 + 6\Delta_{\mu k} \Delta_{\lambda k} + 8\Delta_{\mu k}^2) (\lambda_k + 3\mu_k) \zeta_k^2 l_{0030}^{D+6} - 16(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k}) (\lambda_k + 3\mu_k)^2 \zeta_k^2 l_{0041}^{D+6} \\
&\quad + 8(D^2 + 4D - 12) \Delta_{\mu k}^2 \mu_k \zeta_k^2 l_{0300}^{D+6} - 8(D^2 + 2D - 8) \Delta_{\mu k} \mu_k^2 \zeta_k^2 l_{0401}^{D+6} \\
&\quad - \frac{8}{(\lambda_k + \mu_k)^2} \left[\Delta_{\lambda k}^2 (\lambda_k + \mu_k)^2 + \Delta_{\lambda k} \Delta_{\mu k} ((D+6)\lambda_k^2 + 4(D+3)\mu_k \lambda_k + 2(2D+3)\mu_k^2) \right. \\
&\quad \left. + 2\Delta_{\mu k} (\Delta_{\mu k} ((D+4)\lambda_k^2 + 4(D+2)\mu_k \lambda_k + 4(D+1)\mu_k^2) - (\lambda_k + \mu_k)^2 (\lambda_k + 3\mu_k)) \right] l_{0020}^{D+4} \\
&\quad + 16(\Delta_{\lambda k} + 4\Delta_{\mu k}) (\lambda_k + 3\mu_k) l_{0031}^{D+4} - 8(\lambda_k + 3\mu_k)^2 l_{0042}^{D+4} \\
&\quad - \frac{4\Delta_{\mu k}}{(\lambda_k + \mu_k)^2} \left[\Delta_{\mu k} ((D^2 - 6)\lambda_k^2 + 2(D^2 - 6)\mu_k \lambda_k + (D^2 + 4D - 6)\mu_k^2) \right. \\
&\quad \left. + 2\mu_k (-2(D-2)\lambda_k^2 - 4(D-2)\mu_k \lambda_k + \mu_k (D\Delta_{\lambda k} - 2\mu_k (D-2))) \right] l_{0200}^{D+4} \\
&\quad + 8(D^2 + 4D - 12) \Delta_{\mu k} \mu_k l_{0301}^{D+4} - 4(D^2 + 2D - 8) \mu_k^2 l_{0402}^{D+4} + 16(d-D) \Delta_{\mu k} \mu_k (l_{2000}^{D+4} + 2l_{3001}^{D+4}) \\
&\quad - 8(d-D) \mu_k^2 l_{4002}^{D+4} + \frac{16D \Delta_{\mu k} (\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k}) \mu_k (\lambda_k + 2\mu_k)}{(\lambda_k + \mu_k)^3 \zeta_k^2} (l_{0100}^{D+2} - l_{0010}^{D+2}) \\
&\quad - \frac{4}{(\lambda_k + \mu_k)^2 \zeta_k^2} \left[\Delta_{\lambda k} ((D+2)\lambda_k^2 + 4(D+1)\mu_k \lambda_k + (5D+2)\mu_k^2) \right. \\
&\quad \left. + 2\Delta_{\mu k} (2(D+1)\lambda_k^2 + 4(2D+1)\mu_k \lambda_k + (9D+2)\mu_k^2) \right] l_{0021}^{D+2} \\
&\quad - \frac{4[2D\Delta_{\lambda k} \mu_k^2 + \Delta_{\mu k} ((D^2 + D - 2)\lambda_k^2 + 2(D^2 + 2D - 2)\mu_k \lambda_k + (D^2 + 9D - 2)\mu_k^2)]}{(\lambda_k + \mu_k)^2 \zeta_k^2} l_{0201}^{D+2} \\
&\quad + \frac{8D(\lambda_k + 3\mu_k)(\Delta_{\lambda k} \mu_k + \Delta_{\mu k} (\lambda_k + 4\mu_k))}{(\lambda_k + \mu_k)^3 \zeta_k^4} (l_{0101}^D - l_{0011}^D) \\
&\quad - \frac{4[(D+1)\lambda_k^2 + 2(2D+1)\mu_k \lambda_k + (5D+1)\mu_k^2]}{(\lambda_k + \mu_k)^2 \zeta_k^4} (l_{0202}^D + l_{0022}^D) \\
&\quad \left. + \frac{8[(D+1)\lambda_k^2 + 2(2D+1)\mu_k \lambda_k + (5D+1)\mu_k^2]}{(\lambda_k + \mu_k)^3 \zeta_k^6} (l_{0102}^{D-2} - l_{0012}^{D-2}) \right\}
\end{aligned} \tag{E.94}$$

- Module de cisaillement moyen μ_k :

$$\begin{aligned}
\partial_t \mu_k &= -2 \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k^3} \frac{d}{dp^2} \left[\Gamma_{k,D 1,D 1,min}^{(2)} \right] \Big|_{p^2=0} + \partial_t \Delta_{\mu k} + \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 1,min} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&+ \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\int_q \Gamma_{k,\alpha i,D 1,D 1,min}^{(3)}(q,p,-p) \partial_t r_{min}^{\alpha i} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= -2 \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k^3} (\mu_k \zeta_k^2) + \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k} (D \lambda_k + 4 \mu_k) + \partial_t \Delta_{\mu k} + \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 1,min} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k} (D \lambda_k + 2 \mu_k) + \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 1,min} - \left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0}
\end{aligned} \tag{E.95}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \mu_k &= \frac{v_D}{D(D+2)} \left\{ 8 \mu_k^2 (d-D) (l_{2000}^{D+4} + 2 l_{3001}^{D+4}) + 8(D^2 + 2D - 8) \mu_k^2 [\Delta_{\mu k} \zeta_k^2 l_{0300}^{D+6} + l_{0301}^{D+4}] \right. \\
&+ 16(\lambda_k + 3\mu_k)^2 [(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k}) \zeta_k^2 l_{0030}^{D+6} + l_{0031}^{D+4}] \\
&+ \frac{4\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \left[-2\Delta_{\mu k} ((D^2 - D - 4)\lambda_k + (D^2 - 2D - 4)\mu_k) + (D^2 + 2D - 8)\mu_k (\lambda_k + \mu_k) \right] l_{0200}^{D+4} \\
&- \frac{8}{\lambda_k + \mu_k} \left[(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k}) ((D+8)\lambda_k \mu_k + 2(D+3)\mu_k^2 + 2\lambda_k^2) - (\lambda_k + \mu_k)(\lambda_k + 3\mu_k)^2 \right] l_{0020}^{D+4} \\
&+ \frac{8D}{\zeta_k^2 (\lambda_k + \mu_k)^2} \left[\mu_k (\mu_k (\Delta_{\lambda k} + 2\mu_k) + \lambda_k^2 + 3\lambda_k \mu_k) - \Delta_{\mu k} (\lambda_k^2 + 4\lambda_k \mu_k + 2\mu_k^2) \right] (l_{0100}^{D+2} - l_{0010}^{D+2}) \\
&+ \left. \frac{8D\mu_k (\lambda_k + 2\mu_k)}{\zeta_k^2 (\lambda_k + \mu_k)} [l_{0201}^{D+2} - l_{0021}^{D+2}] \right\}
\end{aligned} \tag{E.96}$$

- **Variance du premier coefficient de Lamé $\Delta_{\lambda k}$** : Rappelons-nous que p^2 et p_D^2 se comportent comme des variables indépendantes du point de vue de la dérivation.

$$\begin{aligned}
\partial_t \Delta_{\lambda k} &= +2 \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k^3} \frac{d}{dp_D^2} \left[\Gamma_{k,D 1,D 2,min}^{(2)} \right] \Big|_{p^2=0} - \partial_t \Delta_{\mu k} - \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&- \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\int_q \Gamma_{k,\alpha i,D 1,D 2,min}^{(3)}(q,p,-p) \partial_t r_{min}^{\alpha i} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= -2 \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k^3} (\Delta_{\lambda k} + \Delta_{\mu k}) \zeta_k^2 - \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k} (-2\Delta_{\mu k} - 2\Delta_{\lambda k}) - \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0} - \partial_t \Delta_{\mu k} \\
&= -\frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0} + \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0}
\end{aligned} \tag{E.97}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \Delta_{\lambda k} = \frac{v_D}{D(D+2)} \left\{ & -2(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})^2((D^2 + 6D + 12)\lambda_k^2 + 12(D+4)\mu_k\lambda_k + 36\mu_k^2)\zeta_k^4 l_{0040}^{D+8} \right. \\
& - 2\Delta_{\mu k}^2(D(D^2 + D - 2)\lambda_k^2 + 8(D^2 + D - 2)\lambda_k\mu_k + 4(2D+3)\mu_k^2)\zeta_k^4 l_{0400}^{D+8} \\
& + 8(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})((D^2 + 5D + 8)\lambda_k\Delta_{\lambda k} + 4(D+4)\lambda_k\Delta_{\mu k} + 6(D+3)\mu_k\Delta_{\lambda k} + 24\mu_k\Delta_{\mu k})\zeta_k^2 l_{0030}^{D+6} \\
& - 4(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})((D^2 + 6D + 12)\lambda_k^2 + 12(D+4)\mu_k\lambda_k + 36\mu_k^2)\zeta_k^2 l_{0041}^{D+6} \\
& + 8\Delta_{\mu k}(D(D^2 + D - 2)\lambda_k\Delta_{\lambda k} + 3(D^2 + D - 2)\lambda_k\Delta_{\mu k} \\
& + 4(D^2 + D - 2)\mu_k\Delta_{\lambda k} + 2(5D+2)\mu_k\Delta_{\mu k})\zeta_k^2 l_{0300}^{D+6} \\
& - 4\Delta_{\mu k}(D(D^2 + D - 2)\lambda_k^2 + 8(D^2 + D - 2)\lambda_k\mu_k + 4(2+3D)\mu_k^2)\zeta_k^2 l_{0401}^{D+6} \\
& - 2((D^2 + 6D + 12)\lambda_k^2 + 12(D+4)\mu_k\lambda_k + 36\mu_k^2)l_{0042}^{D+4} \\
& + 8(4\Delta_{\mu k}((D+4)\lambda_k + 6\mu_k) + \Delta_{\lambda k}((D^2 + 5D + 8)\lambda_k + 6(D+3)\mu_k))l_{0031}^{D+4} \\
& + \frac{4}{(\lambda_k + \mu_k)^2} \left[-2(D+3)\Delta_{\lambda k}^2(\lambda_k + \mu_k)^2 + 2\Delta_{\mu k}((\lambda_k + \mu_k)^2((D+4)\lambda_k + 6\mu_k) - 4\Delta_{\mu k}(\lambda_k^2 - 2\mu_k^2)) \right. \\
& \left. + \Delta_{\lambda k}((D+2)(\lambda_k + \mu_k)^2((D+2)\lambda_k + 6\mu_k) - 4\Delta_{\mu k}((D+4)\lambda_k^2 + 2(D+3)\mu_k\lambda_k + (D+1)\mu_k^2)) \right] l_{0020}^{D+4} \\
& + \frac{4}{(\lambda_k + \mu_k)^2} \left[2\Delta_{\mu k}((\lambda_k + \mu_k)^2((D^2 + D - 2)\lambda_k + 4D\mu_k) \right. \\
& - \Delta_{\mu k}((2D+3)\lambda_k^2 + 2(2D+3)\mu_k\lambda_k + (2D-1)\mu_k^2)) + \Delta_{\lambda k}((D^2 + D - 2)(\lambda_k + \mu_k)^2(D\lambda_k + 4\mu_k) \\
& \left. - 2\Delta_{\mu k}((D^2 + D - 2)\lambda_k^2 + 2(D^2 + D - 2)\mu_k\lambda_k + (D^2 + D - 4)\mu_k^2)) \right] l_{0200}^{D+4} \\
& + 8(D(D^2 + D - 2)\lambda_k\Delta_{\lambda k} + 3(D^2 + D - 2)\lambda_k\Delta_{\mu k} + 4(D^2 + D - 2)\mu_k\Delta_{\lambda k} + 2(5D+2)\mu_k\Delta_{\mu k})l_{0301}^{D+4} \\
& - 2(D(D^2 + D - 2)\lambda_k^2 + 8(D^2 + D - 2)\lambda_k\mu_k + 4(3D+2)\mu_k^2)l_{0402}^{D+4} \\
& + 4(d-D)(D(D+2)\lambda_k\Delta_{\lambda k} + 2(D+2)\lambda_k\Delta_{\mu k} + 2(D+2)\mu_k\Delta_{\lambda k} + 4\mu_k\Delta_{\mu k})(l_{2000}^{D+4} + 2l_{3001}^{D+4}) \\
& - 2(d-D)(D(D+2)\lambda_k^2 + 4(D+2)\lambda_k\mu_k + 4\mu_k^2)l_{4002}^{D+4} \\
& + \frac{4}{(\lambda_k + \mu_k)^2\zeta_k^2} \left[(\Delta_{\lambda k}((D+2)\lambda_k^2 + 2(D+4)\mu_k\lambda_k + (D+10)\mu_k^2) \right. \\
& \left. + 2\Delta_{\mu k}((D+4)\lambda_k^2 + 2(D+8)\mu_k\lambda_k + (D+18)\mu_k^2)) \right] l_{0021}^{D+2} \\
& + \frac{4}{(\lambda_k + \mu_k)^2\zeta_k^2} \left[(4\Delta_{\lambda k}\mu_k^2 + \Delta_{\mu k}((D^2 + D - 2)\lambda_k^2 + 2D(D+1)\mu_k\lambda_k + (D^2 + D + 14)\mu_k^2)) \right] l_{0201}^{D+2} \\
& + \frac{32}{(\lambda_k + \mu_k)^3\zeta_k^2} \left[\Delta_{\mu k}(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})\mu_k(\lambda_k + 2\mu_k) \right] (l_{0010}^{D+2} - l_{0100}^{D+2}) \\
& + \frac{16}{(\lambda_k + \mu_k)^3\zeta_k^4} \left[(\lambda_k + 3\mu_k)(\Delta_{\lambda k}\mu_k + \Delta_{\mu k}(\lambda_k + 4\mu_k)) \right] (l_{0011}^D - l_{0101}^D) \\
& + \frac{4}{(\lambda_k + \mu_k)^2\zeta_k^4} \left[((D+3)\lambda_k^2 + 2(D+5)\mu_k\lambda_k + (D+11)\mu_k^2) \right] (l_{0022}^D + l_{0202}^D) \\
& \left. + \frac{8}{(\lambda_k + \mu_k)^3\zeta_k^6} \left[((D+3)\lambda_k^2 + 2(D+5)\mu_k\lambda_k + (D+11)\mu_k^2) \right] (l_{0012}^{D-2} - l_{0102}^{D-2}) \right\}
\end{aligned} \tag{E.98}$$

• Premier coefficient de Lamé moyen λ_k :

$$\begin{aligned}
\partial_t \lambda_k &= -2 \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k^3} \frac{d}{dp_D^2} \left[\Gamma_{k,D 1,D 1,min}^{(2)} \right] \Big|_{p^2=0} + \partial_t \Delta_{\mu k} + \partial_t \Delta_{\lambda k} - \partial_t \mu_k \\
&+ \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 1,min} \right] \Big|_{p^2=0} + \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\int_q \Gamma_{k,\alpha i,D 1,D 1,min}^{(3)}(q,p,-p) \partial_t r_{min}^{\alpha i} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= -2 \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k^3} (\lambda_k + \mu_k) \zeta_k^2 + \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k} (2\lambda_k + 2\mu_k) + \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 1,min} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&- \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0} + \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&- \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 1,min} \right] \Big|_{p^2=0} - \frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k} (D\lambda_k + 2\mu_k) \\
&= -\frac{\partial_t \zeta_k}{\zeta_k} (D\lambda_k + 2\mu_k) + \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp_D^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 1,min} - \left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&- \frac{1}{\zeta_k^2} \frac{d}{dp^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 1,min} - \left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D 1,D 2,min} \right] \Big|_{p^2=0}
\end{aligned} \tag{E.99}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \lambda_k &= \frac{v_D}{D(D+2)} \left\{ 2(d-D)(D(D+2)\lambda_k^2 + 4(D+2)\lambda_k\mu_k + 4\mu_k^2) (l_{2000}^{D+4} + 2l_{3001}^{D+4}) \right. \\
&+ 4((D^2 + 6D + 12)\lambda_k^2 + 12(D+4)\lambda_k\mu_k + 36\mu_k^2) [(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})\zeta_k^2 l_{0030}^{D+6} + l_{0031}^{D+4}] \\
&+ 4(D(D^2 + D - 2)\lambda_k^2 + 8(D^2 + D - 2)\lambda_k\mu_k + 4(2 + 3D)\mu_k^2) [\Delta_{\mu k}\zeta_k^2 l_{0300}^{D+6} + l_{0301}^{D+4}] \\
&+ \frac{2}{\lambda_k + \mu_k} [(\lambda_k + \mu_k)((D^2 + 6D + 12)\lambda_k^2 + 12(D+4)\lambda_k\mu_k + 36\mu_k^2) \\
&- 4(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})((D+4)\lambda_k^2 + (D+8)\lambda_k\mu_k + 2\mu_k^2)] l_{0020}^{D+4} \\
&+ \frac{2}{\lambda_k + \mu_k} [(\lambda_k + \mu_k)(D(D^2 + D - 2)\lambda_k^2 + 8(D^2 + D - 2)\lambda_k\mu_k + 4(2 + 3D)\mu_k^2) \\
&- 4\Delta_{\mu k}((D^2 + D - 2)\lambda_k^2 + (D^2 + 3D + 4)\lambda_k\mu_k + 2(D+4)\mu_k^2)] l_{0200}^{D+4} \\
&+ \frac{16}{\zeta_k^2(\lambda_k + \mu_k)^2} [\mu_k(\mu_k(\Delta_{\lambda k} + 2\mu_k) + \lambda_k^2 + 3\lambda_k\mu_k) - \Delta_{\mu k}(\lambda_k^2 + 4\lambda_k\mu_k + 2\mu_k^2)] (l_{0010}^{D+2} - l_{0100}^{D+2}) \\
&+ \left. \frac{16\mu_k(\lambda_k + 2\mu_k)}{\zeta_k^2(\lambda_k + \mu_k)} [l_{0021}^{D+2} - l_{0201}^{D+2}] \right\}
\end{aligned} \tag{E.100}$$

• Variance de l'énergie de courbure $\Delta_{\kappa k}$:

$$\begin{aligned}
\partial_t \Delta_{\kappa k} &= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d(p^2)^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D+1 1,D+1 2,min} (p,-p) \right] \Big|_{p^2=0} \\
&- \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(p^2)^2} \left[\int_q \Gamma_{k,\alpha i,D+1 1,D+1 2,min}^{(3)}(q,p,-p) \partial_t r_{min}^{\alpha i} \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d(p^2)^2} \left[\left(\partial_t \Gamma^{(2)} \right)_{k,D+1 1,D+1 2,min} (p,-p) \right] \Big|_{p^2=0}
\end{aligned} \tag{E.101}$$

Cette fois-ci, il nous faut un grand nombre de seuils différents pour exprimer le résultat.

$$\begin{aligned}
\partial_t \Delta_{\kappa k} = & \frac{vD}{D(D+2)} \left\{ -72(\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^2 (l_{0042}^{D+2} + (\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k}) \zeta_k^2 l_{0041}^{D+4}) - 144(\lambda_k + 2\mu_k)(n_{0042}^{D+2} + (\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k}) \zeta_k^2 n_{0041}^{D+4}) \right. \\
& + 4(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})((D+2)\lambda_k + 2(5D-2)\mu_k) \zeta_k^2 l_{0031}^{D+2} - 24(D-1)\mu_k^2 \zeta_k^2 (l_{0402}^{D+2} + \Delta_{\mu k} \zeta_k^2 l_{0401}^{D+4}) - 48(D-1)\mu_k (n_{0402}^{D+2} + \Delta_{\mu k} \zeta_k^2 n_{0401}^{D+4}) \\
& + 12(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})(2k_{0031}^{D+4} - \tilde{k}_{0020}^{D+4}) + 4(D-1)\Delta_{\mu k}(2k_{0301}^{D+4} - \tilde{k}_{0200}^{D+4}) + 4(3\Delta_{\lambda k} + (D+5)\Delta_{\mu k})(\tilde{k}_{2000}^{D+4} - 2k_{3001}^{D+4} + 6m_{4001}^{D+4} - 4\tilde{m}_{3000}^{D+4}) \\
& + 4(D-1)(4\mu_k \tilde{n}_{0301}^{D+2} - 6\Delta_{\mu k} m_{0401}^{D+4}) + \frac{2(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})}{\lambda_k + 2\mu_k} \left[2((D-22)\lambda_k + 2(5D-26)\mu_k) n_{0031}^{D+2} - (5(D+2)\lambda_k + 2(D+14)\mu_k) \tilde{n}_{0020}^{D+2} \right] \\
& + 4(D^2 - 15D + 14)(\mu_k l_{0302}^{D+2} + \Delta_{\mu k} n_{0301}^{D+2}) + 2(D+2)(5\Delta_{\lambda k} + (D+9)\Delta_{\mu k})(\tilde{n}_{2000}^{D+2} - 2n_{3001}^{D+2}) - 2(D^2 + 9D - 10)\Delta_{\mu k} \tilde{n}_{0200}^{D+2} \\
& + 4((D-22)\lambda_k + 2(5D-26)\mu_k) l_{0032}^{D+2} + 4(D^2 - 7D + 6)\mu_k \Delta_{\mu k} \zeta_k^2 l_{0301}^{D+2} + 8(D^2 - 3D + 2)\Delta_{\mu k} l_{0201}^{D+2} - 72(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k}) m_{0041}^{D+4} \\
& + 48(\lambda_k + 2\mu_k) \tilde{n}_{0031}^{D+2} + \frac{24}{\zeta_k^2} (k_{0032}^{D+2} - \tilde{k}_{0021}^{D+2}) - \frac{96(D-1)\Delta_{\mu k}}{\mu_k \zeta_k^2} n_{0201}^{D+2} + \frac{8(D-1)((D+6)\lambda_k - 2(D-4)\mu_k)(\Delta_{\mu k} \lambda_k - \Delta_{\lambda k} \mu_k)}{(\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^2} (l_{1001}^{D-2} - l_{1001}^{D-2}) \\
& + \frac{2}{\zeta_k^2} (7D^2 - 53D + 46) l_{0202}^{D-2} + \frac{8}{\zeta_k^2} [(D-1)(k_{0302}^{D+2} - \tilde{k}_{0201}^{D+2}) + (D+2)(k_{3002}^{D+2} - \tilde{k}_{2001}^{D+2})] - \frac{48}{(\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2} (\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})(2m_{0031}^{D+2} + \tilde{m}_{0020}^{D+2}) \\
& + \frac{24}{\zeta_k^2} (2\tilde{m}_{0031}^{D+2} - 3m_{0042}^{D+2}) + \frac{2}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^2} \left[4((D^2 - 6D + 2)\lambda_k^2 + (5D^2 - 19D + 2)\mu_k \lambda_k + 2(2D^2 - 7D - 1)\mu_k^2) l_{2002}^{D-2} \right. \\
& \left. - ((D^2 - D + 54)\lambda_k^2 - 8(5D - 32)\mu_k \lambda_k + 4(D^2 - 19D + 72)\mu_k^2) l_{0022}^{D-2} \right] + \frac{4(D(D+14)\lambda_k + 2(D^2 + 5D + 4)\mu_k) n_{3002}^{D+2}}{(\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2} \\
& - \frac{16(D-1)}{\mu_k \zeta_k^2} \Delta_{\mu k} (\tilde{m}_{0200}^{D+2} + 2m_{0301}^{D+2}) + \frac{4}{\zeta_k^2} [(D-1)(4\tilde{m}_{0301}^{D+2} - 6m_{0402}^{D+2}) + (D+2)(4\tilde{m}_{3001}^{D+2} - 6m_{4002}^{D+2})] + \frac{8(3D^2 - 19D + 16)}{\mu_k \zeta_k^4} l_{0102}^{D-4} \\
& + 4 \frac{((D-58)\lambda_k + 2(5D-62)\mu_k) n_{0032}^{D+2} - 4(\Delta_{\mu k}(3(D+5)\lambda_k - 4(D-10)\mu_k) + \Delta_{\lambda k}((D+8)\lambda_k - 3(D-7)\mu_k)) n_{0021}^{D+2}}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^2} \\
& + \frac{8}{\zeta_k^2} [(D-1)(k_{0302}^{D+2} - \tilde{k}_{0201}^{D+2}) + (D+2)(k_{3002}^{D+2} - \tilde{k}_{2001}^{D+2})] - \frac{8((D-1)\lambda_k + 2D\mu_k + \mu_k)}{\mu_k (\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^4} (k_{2002}^{D+2} - 2\tilde{k}_{1001}^{D+2}) + \frac{48(\tilde{m}_{0021}^{D+2} - 3m_{0032}^{D+2})}{(\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^4} \\
& + \frac{4}{\zeta_k^2} [(D^2 - 27D + 26)n_{0302}^{D+2} - 3(D+4)\tilde{n}_{0021}^{D+2} - (D^2 - 5D + 4)\tilde{n}_{0201}^{D+2} - D(D+2)\tilde{n}_{2001}^{D+2}] + \frac{16(D-1)(\Delta_{\mu k} \lambda_k - \Delta_{\lambda k} \mu_k)}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^2} (\tilde{n}_{1000}^{D+2} - \tilde{n}_{0100}^{D+2} - 3n_{2001}^{D+2}) \\
& + \frac{24(k_{0022}^{D+2} - 2\tilde{k}_{0011}^{D+2})}{(\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^4} + \frac{8(D-1)}{\mu_k \zeta_k^4} (k_{0202}^{D+2} - 2\tilde{k}_{0101}^{D+2}) - \frac{4((D^2 + 32)\lambda_k^2 - 4(7D-40)\mu_k \lambda_k + 4(D^2 - 14D + 46)\mu_k^2)}{(\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^4} l_{0012}^{D-4} \\
& - \frac{48(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^4} (\tilde{m}_{0010}^{D+2} + 4m_{0021}^{D+2}) - \frac{16(D-1)\Delta_{\mu k}}{\mu_k^2 \zeta_k^4} (\tilde{m}_{0100}^{D+2} + 4m_{0201}^{D+2}) - \frac{96((D-1)\lambda_k^2 + 4(D-1)\mu_k \lambda_k + (4D-1)\mu_k^2) m_{2002}^{D-2}}{\mu_k^2 (\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^6} \\
& - \frac{288[(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k}) \zeta_k^2 m_{0011}^{D-2} + 2m_{0012}^{D-4} + (\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2 m_{0022}^{D-2}] + \frac{16(D-1)}{\mu_k^3 \zeta_k^8} (\mu_k^2 \zeta_k^4 \tilde{m}_{0201}^{D+2} - 3\mu_k^2 \zeta_k^4 m_{0302}^{D+2} - 6\mu_k \zeta_k^2 m_{0202}^{D-2} + 12m_{0102}^{D-4})}{(\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^8}}{(\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^8} \\
& + \frac{16(\Delta_{\lambda k}((D+8)\lambda_k - 6(D-4)\mu_k) \mu_k^2 + \Delta_{\mu k}(6(D-1)\lambda_k^3 + 36(D-1)\mu_k \lambda_k^2 + 6(13D-10)\mu_k^2 \lambda_k + 4(11D-2)\mu_k^3))}{\mu_k^2 (\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^4} n_{1001}^{D-2} \\
& + \frac{4}{\mu_k \zeta_k^6} [(D^2 - 51D + 50)\zeta_k^2 n_{0202}^{D-2} - 2\zeta_k^2 (D^2 - 3D + 2)\tilde{n}_{0101}^{D-2} - 24(D-1)\Delta_{\mu k} \zeta_k^2 n_{0101}^{D-2} - 84(D-1)n_{0102}^{D-4}] \\
& - \frac{48((D+11)\lambda_k - 2(D-13)\mu_k) n_{0012}^{D-4}}{(\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^6} - \frac{4((D^2 + 33D - 34)\lambda_k^2 + (4D^2 + 141D - 94)\mu_k \lambda_k + 2(2D^2 + 63D - 14)\mu_k^2)}{\mu_k (\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^4} n_{2002}^{D-2} \\
& + \frac{8(D-2)((D-1)\lambda_k + 2D\mu_k + \mu_k) \tilde{n}_{1001}^{D-2}}{\mu_k (\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^4} + 4 \frac{(2\Delta_{\mu k}(3(D+2)\lambda_k - 2(D-10)\mu_k) + \Delta_{\lambda k}((D+8)\lambda_k - 6(D-4)\mu_k)) n_{0011}^{D-2}}{(\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^4} \\
& + \frac{96(3\Delta_{\lambda k} \mu_k^3 + \Delta_{\mu k}((D-1)\lambda_k^3 + 6(D-1)\mu_k \lambda_k^2 + 12(D-1)\mu_k^2 \lambda_k + 2(4D-1)\mu_k^3)) m_{1001}^{D-2}}{\mu_k^3 (\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^6} - \frac{16((D-1)\lambda_k + (2D+1)\mu_k)}{\mu_k (\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^4} (\tilde{m}_{2001}^{D+2} - 3m_{3002}^{D+2}) \\
& - \frac{2((\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})(\lambda_k^2 + 4\mu_k^2) D^2 + 2(\lambda_k + 2\mu_k)(6\Delta_{\mu k} \lambda_k + \Delta_{\lambda k}(\lambda_k - 8\mu_k) - 8\Delta_{\mu k} \mu_k) D + 8(\Delta_{\lambda k} \mu_k (3\lambda_k + 5\mu_k) + \Delta_{\mu k}(-\lambda_k^2 + 2\mu_k \lambda_k + 6\mu_k^2)))}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2} l_{0021}^{D+2} \\
& + \frac{2((\Delta_{\lambda k}(\lambda_k^2 + 4\mu_k \lambda_k - 4\mu_k^2) - 2\Delta_{\mu k}(3\lambda_k^2 + 4\mu_k \lambda_k + 4\mu_k^2)) D^2 + 2(\Delta_{\lambda k} + 2\Delta_{\mu k})(\lambda_k + 2\mu_k)^2 D + 8(2\Delta_{\lambda k} \mu_k + \Delta_{\mu k}(\lambda_k^2 + 2\mu_k \lambda_k + 2\mu_k^2)))}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2} l_{2001}^{D+2} \\
& - \frac{4((6D^2 - 38D + 32)\lambda_k^3 + (35D^2 - 228D + 160)\mu_k \lambda_k^2 + 4(18D^2 - 107D + 56)\mu_k^2 \lambda_k + 4(11D^2 - 62D + 18)\mu_k^3)}{\mu_k (\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^4} l_{1002}^{D-4} \\
& + \frac{16(3\Delta_{\lambda k} \mu_k^2 + \Delta_{\mu k}((D-1)\lambda_k^2 + 4(D-1)\mu_k \lambda_k + 2(2D+1)\mu_k^2))}{\mu_k^2 (\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^4} (\tilde{m}_{1000}^{D+2} - 2m_{2001}^{D+2}) - \frac{12((D+30)\lambda_k + (68-6D)\mu_k) n_{0022}^{D-2}}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^4} \\
& + \frac{48(7(D-1)\lambda_k^3 + 42(D-1)\mu_k \lambda_k^2 + (85D-73)\mu_k^2 \lambda_k + 6(9D-5)\mu_k^3)}{\mu_k^2 (\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^6} n_{1002}^{D-4} + \frac{24(D-2)\tilde{n}_{0011}^{D-2}}{(\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^4} \\
& \left. + \frac{192((D-1)\lambda_k^3 + 6(D-1)\mu_k \lambda_k^2 + 12(D-1)\mu_k^2 \lambda_k + (8D-5)\mu_k^3)}{\mu_k^3 (\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^8} m_{1002}^{D-4} \right\} \tag{E.102}
\end{aligned}$$

• **Dimension anormale :**

η_k découle directement du flot de la renormalisation de champ Z_k .

$$\begin{aligned} \eta_k &= -\frac{\partial_t Z_k}{Z_k} = -\frac{1}{Z_k} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(p^2)^2} \left[\partial_t \Gamma_{k,D+11,D+11,min}^{(2)}(p, -p) \right] \Big|_{p^2=0} + \Delta_{kk} \right\} \\ &= -\frac{1}{Z_k} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(p^2)^2} \left[\partial_t \Gamma_{k,D+11,D+11,min}^{(2)}(p, -p) \right] \Big|_{p^2=0} - \frac{1}{2} \frac{d^2}{d(p^2)^2} \left[\partial_t \Gamma_{k,D+11,D+12,min}^{(2)}(p, -p) \right] \Big|_{p^2=0} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.103})$$

$$\begin{aligned} \eta_k &= \frac{v_D}{D(D+2)} \left\{ 72(\lambda_k + 2\mu_k)^3 \zeta_k^4 (l_{0041}^{D+4} + (\Delta_{\lambda_k} + 2\Delta_{\mu_k}) \zeta_k^2 l_{0040}^{D+6}) + 48(D-1) \mu_k^2 \zeta_k^2 (n_{0401}^{D+4} + \Delta_{\mu_k} \zeta_k^2 n_{0400}^{D+6}) \right. \\ &\quad - 4(D^2 - 7D + 6) \mu_k^2 \zeta_k^2 l_{0301}^{D+2} + 144(\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^2 (n_{0041}^{D+4} + (\Delta_{\lambda_k} + 2\Delta_{\mu_k}) \zeta_k^2 n_{0040}^{D+6}) \\ &\quad + 72(\lambda_k + 2\mu_k) (m_{0041}^{D+4} + (\Delta_{\lambda_k} + 2\Delta_{\mu_k}) \zeta_k^2 m_{0040}^{D+6}) + 24(D-1) \mu_k^3 \zeta_k^4 (l_{0401}^{D+4} + \Delta_{\mu_k} \zeta_k^2 l_{0400}^{D+6}) \\ &\quad - 4(\lambda_k + 2\mu_k) (-6(\lambda_k + 2\mu_k)^2 + (\Delta_{\lambda_k} + 2\Delta_{\mu_k})((D+20)\lambda_k + 2(5D+16)\mu_k)) \zeta_k^4 l_{0030}^{D+4} \\ &\quad - 4(D-1)(D\Delta_{\mu_k} - 2\mu_k) \mu_k^2 \zeta_k^4 l_{0300}^{D+4} - 8(D-1) \Delta_{\mu_k} \mu_k \zeta_k^2 (k_{0300}^{D+6} - 3m_{0400}^{D+6}) + 4(D-1) \mu_k (\tilde{k}_{0200}^{D+4} - 4\mu_k \zeta_k^2 \tilde{n}_{0300}^{D+4}) \\ &\quad - 2(D-1) \mu_k (2(D+2)\Delta_{\mu_k} + (D-6)\mu_k) \zeta_k^2 l_{0200}^{D+2} - 4(D-1)((D-2)\Delta_{\mu_k} - 4\mu_k) \mu_k \zeta_k^2 n_{0300}^{D+4} \\ &\quad + 4(D-1)((\Delta_{\mu_k} - \mu_k) k_{0200}^{D+4} - 2\mu_k k_{0301}^{D+4}) + 2(D-1)((D+10)\Delta_{\mu_k} - (D-10)\mu_k) n_{0200}^{D+2} \\ &\quad + 8(D-1)((\Delta_{\mu_k} + \mu_k) m_{0300}^{D+4} + 3\mu_k m_{0401}^{D+4} - 2\mu_k \tilde{m}_{0300}^{D+4}) - 24(\Delta_{\lambda_k} + 2\Delta_{\mu_k}) (\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2 k_{0030}^{D+6} \\ &\quad - 4(\lambda_k + 2\mu_k)((D+2)\lambda_k + 2(5D-2)\mu_k) l_{0031}^{D+2} \zeta_k^2 + 12(\lambda_k + 2\mu_k) (\tilde{k}_{0020}^{D+4} - 2k_{0031}^{D+4} - 4\tilde{m}_{0030}^{D+4} - 4(\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2 \tilde{n}_{0030}^{D+4}) \\ &\quad - 4((\Delta_{\lambda_k} + 2\Delta_{\mu_k})((D+14)\lambda_k + 10(D+2)\mu_k) - 12(\lambda_k + 2\mu_k)^2) \zeta_k^2 n_{0030}^{D+4} + 12(\Delta_{\lambda_k} + 2\Delta_{\mu_k} - \lambda_k - 2\mu_k) k_{0020}^{D+4} \\ &\quad + 24(\Delta_{\lambda_k} + 2\Delta_{\mu_k} + \lambda_k + 2\mu_k) m_{0030}^{D+4} + 8(D^2 - 3D + 2)((\Delta_{\mu_k} - \mu_k) l_{0100}^{D+4} - \mu_k l_{0201}^{D+4}) \\ &\quad + 4(3\Delta_{\lambda_k} + (D+5)\Delta_{\mu_k} - 3\lambda_k - (D+5)\mu_k) (2m_{3000}^{D+4} - k_{2000}^{D+4}) + 4(3\lambda_k + (D+5)\mu_k) (2k_{3001}^{D+4} - 3m_{4001}^{D+4} - 4\tilde{k}_{2000}^{D+4} + 4\tilde{m}_{3000}^{D+4}) \\ &\quad + 2((D-10)\lambda_k + 2(5D-14)\mu_k) (\tilde{n}_{0020}^{D+2} - 2n_{0031}^{D+2}) + 2(D^2 - 11D + 10) \mu_k (\tilde{n}_{0200}^{D+2} - 2n_{0301}^{D+2}) \\ &\quad - 2(D+2)(5\lambda_k + (D+9)\mu_k) (\tilde{n}_{2000}^{D+2} - 2n_{3001}^{D+2}) - 2(D+2)(5\Delta_{\lambda_k} + (D+9)\Delta_{\mu_k} - 5\lambda_k - (D+9)\mu_k) n_{2000}^{D+2} \\ &\quad + \frac{2}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2} \left[D(D+2)\lambda_k^3 + 2(D^2 + 4D + 8)\lambda_k^2 \mu_k + 4(D^2 - 8D + 14)\lambda_k \mu_k^2 + 8(D^2 - 4D + 6)\mu_k^3 \right. \\ &\quad + 2\Delta_{\mu_k} ((D^2 + 4D - 8)\lambda_k^2 - 4(D^2 - 4D + 6)\mu_k (\lambda_k + \mu_k)) - \Delta_{\lambda_k} (D(D+2)\lambda_k (\lambda + 4\mu_k) - 4(D^2 - 2D - 2)\mu_k^2) \Big] l_{0010}^{D+2} \\ &\quad + \frac{2(D(D+2)\lambda_k^2 - 4(D-2)\lambda_k \mu_k + 4(D^2 - 4D + 6)\mu_k^2) l_{0021}^{D+2} - 2(D(D+2)\lambda_k^2 - 4(D^2 - 2D - 2)\mu_k (\lambda_k + \mu_k)) l_{2001}^{D+2}}{\lambda_k + 2\mu_k} \\ &\quad + \frac{2}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2} \left[-D(D+2)\lambda_k^3 + 2(D^2 - 6D - 4)\lambda_k^2 \mu_k + 4(D^2 - 2D - 2)\mu_k^2 (3\lambda_k + 2\mu_k) + \Delta_{\lambda_k} (D(D+2)\lambda_k (\lambda_k + 4\mu_k) \right. \\ &\quad \left. - 4(D^2 - 2D - 2)\mu_k^2) - 2\Delta_{\mu_k} ((3D^2 - 2D - 4)\lambda_k^2 + 4(D^2 - 2D - 2)\mu_k (\lambda_k + \mu_k)) \right] l_{1000}^{D+2} \\ &\quad + \frac{48(\Delta_{\lambda_k} + 2\Delta_{\mu_k} + \lambda_k + 2\mu_k)}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^4} m_{0010}^D + \frac{48(m_{0021}^D - 2\tilde{m}_{0010}^D)}{(\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^4} + \frac{24(2\Delta_{\lambda_k} + 4\Delta_{\mu_k} + \lambda_k + 2\mu_k)}{(\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2} m_{0020}^{D+2} + \frac{48}{\zeta_k^2} (m_{0031}^{D+2} - \tilde{m}_{0020}^{D+2}) \\ &\quad + \frac{2(\Delta_{\lambda_k} (5(D+2)\lambda_k - 6(D-6)\mu_k) + 2\Delta_{\mu_k} ((9D+6)\lambda_k + 2(D+14)\mu_k) - (\lambda_k + 2\mu_k)((D-10)\lambda_k + 2(5D-14)\mu_k))}{\lambda_k + 2\mu_k} n_{0020}^{D+2} \\ &\quad + \frac{2\zeta_k^2}{\lambda_k + 2\mu_k} \left[\Delta_{\mu_k} (2D(D+8)\lambda_k^2 + 8(7D+2)\lambda_k \mu_k + 8(D^2 + 6D + 2)\mu_k^2) + \Delta_{\lambda_k} ((D+2)^2 \lambda_k^2 + 12(D+2)\mu_k \lambda_k \right. \\ &\quad \left. + 4(D^2 + 2D + 6)\mu_k^2) - (D+2)\lambda_k^3 - 2(2+7D)\lambda_k^2 \mu_k + 4(2-11D)\lambda_k \mu_k^2 + 4(4-10D)\mu_k^3 \right] l_{0020}^{D+2} \\ &\quad + \frac{16}{\zeta_k^2} (D-1)(m_{0301}^{D+2} - \tilde{m}_{0200}^{D+2}) + \frac{8}{\zeta_k^2} (D+2)(m_{2000}^{D+2} + 2m_{3001}^{D+2} - 2\tilde{m}_{2000}^{D+2}) + \frac{16((D-1)\lambda_k + (2D+1)\mu_k)}{\mu_k (\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^4} (2\tilde{m}_{1000}^D - m_{2001}^D) \\ &\quad + \frac{8((D+5)\lambda_k^2 + 24\mu_k \lambda_k - 4(D-7)\mu_k^2 + 4(D-1)(\Delta_{\mu_k} \lambda_k - \mu_k \Delta_{\lambda_k}))}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^2} n_{0010}^D + \frac{8((D+5)\lambda_k - 2(D-7)\mu_k)}{(\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2} (n_{0021}^D - \tilde{n}_{0010}^D) \\ &\quad + \frac{40}{\zeta_k^2} (D-1)(n_{0100}^D + n_{0201}^D - \tilde{n}_{0100}^D) - \frac{16(2(D-1)(\Delta_{\mu_k} \lambda_k - \mu_k \Delta_{\lambda_k}) + 3D\lambda_k^2 + 2(5D+2)\lambda_k \mu_k + 4(2D+1)\mu_k^2)}{(\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^2} n_{1000}^D \\ &\quad + \frac{16(3D\lambda_k + 4D\mu_k + 2\mu_k)}{(\lambda_k + 2\mu_k) \zeta_k^2} (\tilde{n}_{1000}^D - n_{2001}^D) + \frac{16}{\mu_k^2 \zeta_k^4} (D-1)((\Delta_{\mu_k} + \mu_k) m_{0100}^D + \mu_k m_{0201}^D) + \frac{8(D-1)(2\Delta_{\mu_k} + \mu_k)}{\mu_k \zeta_k^2} m_{0200}^{D+2} \\ &\quad \left. - \frac{16(3\Delta_{\lambda_k} \mu_k^2 + (\Delta_{\mu_k} + \mu_k)((D-1)\lambda_k^2 + 4(D-1)\mu_k \lambda_k + 2(2D+1)\mu_k^2))}{\mu_k^2 (\lambda_k + 2\mu_k)^2 \zeta_k^4} m_{1000}^D - \frac{32(D-1)}{\mu_k \zeta_k^4} \tilde{m}_{0100}^D \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.104})$$

Fonctions de seuil

Cette annexe présente les expressions des fonctions de seuil apparaissant dans les équations de flot obtenues par le NPRG. La forme de ces fonctions découle directement de celle de l'équation de Wetterich (1.45). La structure exacte à une boucle réduit considérablement le nombre de types différents d'intégrales qui peuvent apparaître. Cependant, pour les constantes de couplage définies comme des coefficients du propagateur renormalisé $\Gamma_k^{(2)}$ par rapport à des puissances élevées de p , il est nécessaire de définir plusieurs familles d'intégrales.

Les fonctions de seuil dépendent explicitement de la fonction de coupure R_k utilisée, ce qui a deux conséquences majeures :

- Grâce à la coupure, les fonctions de seuil sont toujours bien définies. Ce ne sont jamais des intégrales divergentes.
- Il n'est pas possible de donner de forme explicite aux fonctions de seuil tant qu'une forme précise de R_k n'est pas choisie.

F.1 Définitions

Différentes familles de fonctions de seuil, définies ci-après, interviennent dans les équations de flot. La notation s_{abc}^α sera utilisée pour désigner une fonction de seuil générique, indépendamment de la famille à laquelle elle appartient. Les trois indices désignent les puissances des propagateurs intervenant dans le seuil : a pour les flexurons, b pour les phonons acoustiques transverses, c pour le phonon acoustique longitudinal ; α désigne la puissance de l'impulsion de boucle mise en jeu. Rappelons également que l'opérateur $\hat{\partial}_t$ est une dérivée par rapport au temps de renormalisation n'agissant que sur la fonction de coupure et que P désigne la partie des dénominateurs de propagateurs commune à tous les modes : $P(q) = Z_k q^4 + R_k(q)$. Nous avons donc ainsi les familles suivantes :

- Famille l_{abc}^α :

$$l_{abc}^{D+\alpha} = -\frac{1}{4v_D} \frac{k_B T}{\kappa} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c . \quad (\text{F.1})$$

- Famille n_{abc}^α :

$$n_{abc}^{D+\alpha} = -\frac{1}{4v_D} \frac{k_B T}{\kappa} \hat{\partial}_t \int_q q^{\alpha+2} (\partial_{q^2} P) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c . \quad (\text{F.2})$$

- Famille m_{abc}^α :

$$m_{abc}^{D+\alpha} = -\frac{1}{4v_D} \frac{k_B T}{\kappa} \hat{\partial}_t \int_q q^{\alpha+2} (\partial_{q^2} P)^2 G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c . \quad (\text{F.3})$$

- Famille k_{abc}^α :

$$k_{abc}^{D+\alpha} = -\frac{1}{4v_D} \frac{k_B T}{\kappa} \hat{\partial}_t \int_q q^{\alpha+2} (\partial_{q^2}^2 P) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c . \quad (\text{F.4})$$

Dans la plupart des cas, grâce au choix de système d'unités, le facteur $k_B T/\kappa$ est implicite.

Comme toutes les grandeurs intervenant dans les équations de flot, les fonctions de seuil ont des contreparties adimensionnées, portant le symbole « τ » comme toutes les autres. Dans ce cas, il est nécessaire de redéfinir l'impulsion de boucle, qui, comme les intégrandes sont tous à symétrie sphérique, peut être choisie comme :

$$y = \frac{q^2}{k^2} . \quad (\text{F.5})$$

Les fonctions de seuil dimensionnées et adimensionnées sont reliés par l'identité suivante :

$$\boxed{\bar{s}_{abc}^\alpha = (Z_k k^A)^{-a-b-c} k^\alpha s_{abc}^\alpha} . \quad (\text{F.6})$$

F.2 Identités remarquables

F.2.1 La famille k

N'importe quelle fonction de la famille k_{abc}^α peut en réalité être décomposée sur des fonctions des autres familles par intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_q q^{\alpha+2} (\partial_{q^2}^2 P) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c &= -\frac{D+\alpha}{2} \int_q q^\alpha (\partial_{q^2} P) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \\ &+ \int_q q^{\alpha+2} (\partial_{q^2} P) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \\ &\times (a(\partial_{q^2} P + m_0^2) G_0(q) + b(\partial_{q^2} P + m_1^2) G_1(q) + c(\partial_{q^2} P + m_2^2) G_2(q)) \end{aligned} .$$

Le terme de bord s'annule grâce à la fonction de coupure. Finalement,

$$k_{abc}^{D+\alpha} = -\frac{D+\alpha}{2} n_{abc}^{D-2+\alpha} + a(m_{a+1bc}^{D+\alpha} + m_0^2 n_{a+1bc}^{D+\alpha}) + b(m_{ab+1c}^{D+\alpha} + m_1^2 n_{ab+1c}^{D+\alpha}) + c(m_{abc+1}^{D+\alpha} + m_2^2 n_{abc+1}^{D+\alpha}) . \quad (\text{F.7})$$

Il n'y a donc jamais besoin de calculer les intégrales de cette famille.

F.2.2 Formules de réduction

Les familles de fonctions de seuil sont définies naturellement à partir des intégrales de boucle de l'équation de Wetterich ; elles contiennent donc *a priori* au dénominateur toutes les masses du spectre. Cependant, des décompositions en éléments simples permettent de réduire n'importe quelle fonction de seuil en une fonction à une masse seulement (ou de façon équivalente en une

fonction de seuil dont deux des indices sont nuls), dont les expressions finales explicites sont beaucoup plus simples.

Puisque la dépendance des fonction de seuil en les propagateurs $G_i(q)$ est la même dans toutes les familles, nous pouvons travailler avec un seuil générique $s_{abc}^{D+\alpha}$. De plus, nous utiliserons les notations suivantes :

- la présence de parenthèses autour des indices indique que l'expression est vraie indépendamment de leur ordre. Par exemple, $l_{(100)}^{D+\alpha}$ désigne de la même façon $l_{100}^{D+\alpha}$, $l_{010}^{D+\alpha}$ ou $l_{001}^{D+\alpha}$;
- la présence d'un indice sur un des indices entre parenthèses permet d'identifier la masse associée. Par exemple, dans $(1_i 2_j 0)$, n'importe quelle combinaison de deux modes apparaît, mais le propagateur de celui dont la masse est m_j a une puissance plus élevée.

Nous ne donnons dans la suite que les identités utiles pour un calcul dans l'approximation (LPA') utilisée dans ce travail.

$$s_{(1_i 1_j 0)}^{D+\alpha} = -\frac{1}{(m_i^2 - m_j^2)} s_{(1_i 00)}^{D-2+\alpha} + \frac{1}{m_i^2 - m_j^2} s_{(1_j 00)}^{D-2+\alpha} . \quad (\text{F.8})$$

$$s_{(1_i 2_j 0)}^{D+\alpha} = \frac{1}{(m_i^2 - m_j^2)^2} s_{(1_i 00)}^{D-4+\alpha-4} - \frac{1}{(m_i^2 - m_j^2)^2} s_{(1_j 00)}^{D-4+\alpha} + \frac{1}{(m_i^2 - m_j^2)} s_{(2_j 00)}^{D-2+\alpha} . \quad (\text{F.9})$$

$$s_{(2_i 2_j 0)}^{D+\alpha} = \frac{2}{(m_i^2 - m_j^2)^3} s_{(1_i 00)}^{D-6+\alpha} - \frac{2}{(m_i^2 - m_j^2)^3} s_{(1_j 00)}^{D-6+\alpha} + \frac{1}{(m_i^2 - m_j^2)^2} s_{(2_i 00)}^{D-4+\alpha} + \frac{1}{(m_i^2 - m_j^2)^2} s_{(2_j 00)}^{D-4+\alpha} . \quad (\text{F.10})$$

$$s_{(1_i 3_j 0)}^{D+\alpha} = -\frac{1}{(m_i^2 - m_j^2)^3} s_{(1_i 00)}^{D-6+\alpha} + \frac{1}{(m_i^2 - m_j^2)^3} s_{(1_j 00)}^{D-6+\alpha} - \frac{1}{(m_i^2 - m_j^2)^2} s_{(2_i 00)}^{D-4+\alpha} + \frac{1}{(m_i^2 - m_j^2)} s_{(3_j 00)}^{D-2+\alpha} . \quad (\text{F.11})$$

Dans un souci de simplification, nous ne détaillerons que les formules des fonctions de seuil à une masse, la généralisation étant évidente par symétrie.

F.3 Expressions générales

F.3.1 Coupure quelconque

Tout d'abord, il faut exprimer les intégrandes en fonction de la variable sans dimension y . La fonction de coupure est adimensionnée de la façon suivante (par définition) :

$$R_k(q) = Z_k k^4 \bar{R}_k(y) = Z_k k^4 y^2 r_k(y) . \quad (\text{F.12})$$

Sous ces conditions, la contrepartie sans dimension de P est reliée aux coupures adimensionnées par :

$$\bar{P}(q) = y^2 + \bar{R}_k(y) = y^2(1 + r_k(y)) . \quad (\text{F.13})$$

Nous obtenons alors les identités suivantes :

$$\partial_t R_k(q) = Z_k k^4 \left[(4 - \eta_k) y^2 r_k(y) - 4y^2 r_k(y) - 2y^3 \partial_y r_k(y) \right] = Z_k k^4 \left[-\eta_k y^2 r_k(y) - 2y^3 \partial_y r_k(y) \right] . \quad (\text{F.14})$$

$$\partial_y P = Z_k k^4 \left[2y(1 + r_k(y)) + y^2 \partial_y r_k(y) \right]. \quad (\text{F.15})$$

$$\hat{\partial}_t \partial_y P = \partial_y \hat{\partial}_t P = \partial_y \partial_t R_k(q) = -Z_k k^4 \left[2\eta_k y r_k(y) + y^2 (\eta_k + 6) \partial_y r_k(y) + 2y^3 \partial_y^2 r_k(y) \right]. \quad (\text{F.16})$$

Cela nous permet d'établir finalement :

- Famille l_{abc}^α :

$$\bar{l}_{(a;00)}^{D+\alpha} = -\frac{a}{2} \int dy y^{\frac{D+\alpha}{2}+1} \frac{(\eta_k r_k(y) + 2y \partial_y r_k(y))}{(y^2(1 + r_k(y)) + \bar{m}_i^2 y)^{a+1}}. \quad (\text{F.17})$$

- Famille n_{abc}^α :

$$\begin{aligned} \bar{n}_{(a;00)}^{D+\alpha} = \frac{1}{2} \int dy y^{\frac{D+\alpha+2}{2}} & \left[\frac{2\eta_k r_k(y) + y(\eta_k + 6) \partial_y r_k(y) + 2y^2 \partial_y^2 r_k(y)}{(y^2(1 + r_k(y)) + \bar{m}_i^2 y)^a} \right. \\ & \left. - a(2(1 + r_k(y)) + y \partial_y r_k(y)) \frac{y^2 (\eta_k r_k(y) + 2y \partial_y r_k(y))}{(y^2(1 + r_k(y)) + \bar{m}_i^2 y)^{a+1}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

- Famille m_{abc}^α :

$$\begin{aligned} \bar{m}_{(a;00)}^{D+\alpha} = \frac{1}{2} \int dy y^{\frac{D+\alpha+4}{2}} & (2(1 + r_k(y)) + y \partial_y r_k(y)) \left[2a \frac{(2\eta_k r_k(y) + y(\eta_k + 6) \partial_y r_k(y) + 2y^2 \partial_y^2 r_k(y))}{(y^2(1 + r_k(y)) + \bar{m}_i^2 y)^{a+1}} \right. \\ & \left. - (2(1 + r_k(y)) + y \partial_y r_k(y)) \frac{y^2 (\eta_k r_k(y) + 2y \partial_y r_k(y))}{(y^2(1 + r_k(y)) + \bar{m}_i^2 y)^a} \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

F.3.2 Coupure de Litim

La coupure de Litim est la coupure $R_k^1(q)$ dans le texte. Cette coupure s'exprime en fonction de la fonction de Heaviside Θ , ce qui permet d'obtenir des résultats simples pour les expressions des fonctions de seuil. Son expression est :

$$R_k(q) = Z_k (k^4 - q^4) \Theta(k^4 - q^4) = Z_k k^4 \bar{R}_k(y) = Z_k k^4 y^2 r_k(y), \quad (\text{F.20})$$

où les fonctions adimensionnées sont :

$$\bar{R}(y) = (1 - y^2) \Theta(1 - y^2) \quad , \quad r_k(y) = \frac{1 - y^2}{y^2} \Theta(1 - y^2). \quad (\text{F.21})$$

Le calcul s'effectue simplement en injectant r_k dans les formules (F.17), (F.18) et (F.19).

Les dérivées de r_k sont :

$$\partial_y r_k(y) = -\frac{2}{y^3} \Theta(1 - y^2) + 0, \quad (\text{F.22})$$

où la notation « 0 » désigne des distributions de type $x\delta(x)$ qui sont toujours nulles lorsqu'elles sont évaluées, mais dont les dérivées peuvent générer des termes non triviaux. La dérivée seconde est alors :

$$\partial_y^2 r_k(y) = \frac{6}{y^4} \Theta(1-y^2) + \frac{8}{y^2} \delta(1-y^2) + 4(1-y^2) \delta'(1-y^2) + 0. \quad (\text{F.23})$$

Dans le dernier terme, se trouve la dérivée de la distribution de Dirac δ' . Grâce à son préfacteur rouge, la seule contribution non nulle qu'elle apporte est celle pour laquelle la dérivée qu'elle induit dans l'intégrande agit sur ce facteur rouge¹. Nous pouvons donc écrire de façon équivalente :

$$\partial_y^2 r_k(y) = \frac{6}{y^4} \Theta(1-y^2) + \frac{4}{y^2} \delta(1-y^2) + 0. \quad (\text{F.24})$$

F.3.2.1 Fonctions massives

- Famille l_{abc}^α :

$$\begin{aligned} \bar{l}_{(a_i00)}^{D+\alpha} &= \frac{(4-\eta_k)a}{D+\alpha} {}_2F_1\left(1+a, \frac{D+\alpha}{2}, \frac{D+\alpha+2}{2}, -m\right) \\ &+ \frac{a\eta_k}{D+4+\alpha} {}_2F_1\left(1+a, \frac{D+\alpha+4}{2}, \frac{D+\alpha+6}{2}, -m\right). \end{aligned} \quad (\text{F.25})$$

- Famille n_{abc}^α :

$$\bar{n}_{(a_i00)}^{D+\alpha} = \frac{2}{(1+\bar{m}_i^2)^a} - \frac{2\eta_k}{D+4+\alpha} {}_2F_1\left(a, \frac{D+\alpha+4}{2}, \frac{D+\alpha+6}{2}, -m\right) \quad (\text{F.26})$$

- Famille m_{abc}^α :

$$\bar{m}_{(a_i00)}^{D+\alpha} = \frac{4}{(1+\bar{m}_i^2)^a}. \quad (\text{F.27})$$

Ce dernier résultat dépend de l'hypothèse $\Theta(0) = 1/2$.

F.3.2.2 Fonctions sans masse

- Famille l_{abc}^α :

$$\bar{l}_{(a00)}^{D+\alpha} = \frac{4a}{D+\alpha} - \eta_k \frac{4a}{(D+\alpha)(D+4+\alpha)}. \quad (\text{F.28})$$

- Famille n_{abc}^α :

$$\bar{n}_{(a00)}^{D+\alpha} = 2 - \eta_k \frac{2}{D+4+\alpha}. \quad (\text{F.29})$$

- Famille m_{abc}^α :

$$\bar{m}_{(a00)}^{D+\alpha} = 4. \quad (\text{F.30})$$

Ce dernier résultat dépend de l'hypothèse $\Theta(0) = 1/2$.

1. Tous les autres termes sont proportionnels à $(1-y^2)\delta(1-y^2)$.

F.4 Fonctions de seuil à basse température

F.4.1 Ajustement spectral

La quantification de l'action introduit un contenu fréquentiel supplémentaire dans le propagateur (voir Chapitre 5). La partie sans masse de ceux-ci s'écrit désormais :

$$P = Z_k q^4 + Z_k^T \omega_n^2 + R_k(q, \omega_n) , \quad (\text{F.31})$$

et les fonctions de seuil comportent une somme sur toutes les valeurs de n .

Nous avons également choisi de reporter cette dépendance fréquentielle dans l'argument de la fonction de coupure qui est ainsi adapté au nouveau spectre. Une variable adimensionnée naturelle pour décrire le système est alors :

$$Y_n = y^2 + \bar{\omega}_n^2 , \quad (\text{F.32})$$

qui conduit notamment à :

$$\bar{P}(Y) = Y_n + \bar{R}_k(Y_n) = Y_n(1 + r_k(Y_n)) , \quad (\text{F.33})$$

qui est une écriture proche de celle utilisée dans la théorie non quantifiée (F.13).

Les fonctions de seuil sont alors construites à partir des quantités suivantes :

$$\partial_t R_k(q, \omega) = -Z_k k^4 \left[\eta_k (y^2 r_k(Y_n) - \bar{\omega}_n^2 \partial_Y r_k(Y_n)) + 4Y_n^2 \partial_Y r_k(Y_n) \right] . \quad (\text{F.34})$$

$$\partial_y P = Z_k k^4 \left[2y(1 + r_k(Y)) + Y_n \partial_Y r_k(Y_n) \right] . \quad (\text{F.35})$$

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_t \partial_y P &= \partial_y \hat{\partial}_t P = \partial_y \partial_t R_k(q, \omega) \\ &= -2y Z_k k^4 \left[\eta_k r_k(Y_n) + Y_n (\eta_k + 8) \partial_Y r_k(Y_n) + 4Y_n^2 \partial_Y^2 r_k(Y_n) - \bar{\omega}_n^2 (2\partial_Y r_k(Y_n) + Y_n \partial_Y^2 r_k(Y_n)) \right] . \end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

Les expressions de la théorie de haute température sont bien retrouvées dans la limite $\bar{\omega} \rightarrow 0$.

F.4.2 Expressions générales

F.4.2.1 Coupure quelconque

L'obtention des expressions se fait de la même façon ici, avec une somme supplémentaire sur les fréquences de Matsubara.

- Famille l_{abc}^α :

$$\bar{\mathcal{L}}_{(a;00)}^{D+\alpha} = -\frac{a\bar{T}_k}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dy y^{\frac{D+\alpha}{2}-1} \frac{\left(\eta_k (y^2 r_k(Y_n) - \bar{\omega}_n^2 \partial_Y r_k(Y_n)) + 4Y_n^2 \partial_Y r_k(Y_n) \right)}{\left(Y_n(1 + r_k(Y_n)) + \bar{m}_i^2 y \right)^{a+1}} . \quad (\text{F.37})$$

- Famille n_{abc}^α :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{N}}_{(a_i 00)}^{D+\alpha} = \overline{T}_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dy y^{\frac{D+\alpha+2}{2}} & \\ \left[\frac{\eta_k r_k(Y_n) + Y_n(\eta_k + 8) \partial_Y r_k(Y_n) + 4Y_n^2 \partial_Y^2 r_k(Y_n) - \overline{\omega}_n^2 (2\partial_Y r_k(Y_n) + Y_n \partial_Y^2 r_k(Y_n))}{(Y_n(1 + r_k(Y_n)) + \overline{m}_i^2 y)^a} \right. & \\ \left. - a(1 + r_k(y) + Y_n \partial_Y r_k(Y_n)) \frac{(\eta_k (y^2 r_k(Y_n) - \overline{\omega}_n^2 \partial_Y r_k(Y_n)) + 4Y_n^2 \partial_Y r_k(Y_n))}{(Y_n(1 + r_k(Y_n)) + \overline{m}_i^2 y)^{a+1}} \right] . & \end{aligned} \quad (\text{F.38})$$

- Famille m_{abc}^α :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_{(a_i 00)}^{D+\alpha} = 2\overline{T}_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} dy y^{\frac{D+\alpha+4}{2}} (1 + r_k(Y_n) + Y_n \partial_Y r_k(Y_n)) & \\ \left[a \frac{\eta_k r_k(Y_n) + Y_n(\eta_k + 8) \partial_Y r_k(Y_n) + 4Y_n^2 \partial_Y^2 r_k(Y_n) - \overline{\omega}_n^2 (2\partial_Y r_k(Y_n) + Y_n \partial_Y^2 r_k(Y_n))}{(Y_n(1 + r_k(Y_n)) + \overline{m}_i^2 y)^{a+1}} \right. & \\ \left. - (1 + r_k(Y_n) + Y_n \partial_Y r_k(Y_n)) \frac{(\eta_k (y^2 r_k(Y_n) - \overline{\omega}_n^2 \partial_Y r_k(Y_n)) + 4Y_n^2 \partial_Y r_k(Y_n))}{(Y_n(1 + r_k(Y_n)) + \overline{m}_i^2 y)^a} \right] . & \end{aligned} \quad (\text{F.39})$$

F.4.2.2 Coupure de Litim

Après l'ajustement spectral, les fonctions de coupure adimensionnées correspondant à $R_k^1(q)$ s'écrivent :

$$\overline{R}_k(Y) = (1 - Y)\Theta(1 - Y) \quad , \quad r_k(Y) = \frac{1 - Y}{Y}\Theta(1 - Y) . \quad (\text{F.40})$$

Ses dérivées sont :

$$\begin{aligned} \partial_Y r_k(Y) &= -\frac{1}{Y^2}\Theta(1 - Y) + 0 \\ \partial_Y^2 r_k(Y) &= \frac{2}{Y^3}\Theta(1 - Y) + \frac{2}{Y^2}\delta(1 - Y) - \frac{1 - Y}{Y}\delta'(1 - Y) . \end{aligned} \quad (\text{F.41})$$

C'est maintenant $1 - Y$ qui est passé en argument de la fonction de Θ , ce qui impose $Y_n \leq 1$. En particulier, $\overline{\omega}_n^2 \leq 1$, ce qui impose :

$$2\pi n \overline{T}_k \leq 1 \quad , \quad |n| \leq n_{max} = \left\lfloor \frac{1}{2\pi \overline{T}_k} \right\rfloor , \quad (\text{F.42})$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Ainsi, seul un nombre fini de fréquences interviennent dans les sommes calculées avec la coupure de Litim. Lorsque l'énergie courante k est plus grande que l'énergie de transition thermique k_T , $\overline{T}_k > 1$, donc $n_{max} = 0$ et la fonction de seuil se comporte de nouveau comme sa contrepartie à haute température. Pour plus de détails sur ce passage à la limite, se référer au Chapitre 5.

L'utilisation de la coupure de Litim donne une image simple où, suivant la valeur de \bar{T}_k , plus ou moins de fréquences participent à la somme sur les fréquences (alors qu'elles sont en général toutes présentes à toutes les températures). En revanche, son manque de régularité vis-à-vis de la température du système T rend son utilisation moins intéressante pour les études numériques, notamment de l'évolution des grandeurs avec la température, où d'autres formes lui seront préférées.

Grâce aux fonctions Θ et δ , l'expression des fonctions de seuil se simplifie. Nous avons choisi de couper la somme fréquentielle à n_{max} , ce qui revient à utiliser $\sqrt{1 - \bar{\omega}_n^2}$ comme borne supérieure de l'intégrale sur y . Il est possible de vérifier que les expressions des fonctions de seuil de la théorie non quantifiée sont retrouvées dans la limite $\bar{\omega}_n \rightarrow 0$ (ce qui revient à sélectionner uniquement la contribution de $n = 0$).

• **Fonctions massives :**

– **Famille l_{abc}^α :**

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{(a_i00)}^{D+\alpha} = \bar{T}_k \sum_{|n| \leq n_{max}} & \left[\frac{(4 - \eta_k)a}{D + \alpha} (1 - \bar{\omega}_n^2)^{\frac{D+\alpha}{4}} {}_2F_1 \left(1 + a, \frac{D+\alpha}{2}, \frac{D+\alpha+2}{2}, -m\sqrt{1 - \bar{\omega}_n^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{a\eta_k}{D + 4 + \alpha} (1 - \bar{\omega}_n^2)^{\frac{D+\alpha+4}{4}} {}_2F_1 \left(1 + a, \frac{D+\alpha+4}{2}, \frac{D+\alpha+6}{2}, -m\sqrt{1 - \bar{\omega}_n^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.43})$$

– **Famille n_{abc}^α :**

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{N}}_{(a_i00)}^{D+\alpha} = \bar{T}_k \sum_{|n| \leq n_{max}} & \left[\frac{(4 - \bar{\omega}_n^2)}{2(1 + \bar{m}_i^2 \sqrt{1 - \bar{\omega}_n^2})^a} \right. \\ & \left. - \frac{2\eta_k}{D + 4 + \alpha} (1 - \bar{\omega}_n^2)^{\frac{D+\alpha+4}{4}} {}_2F_1 \left(a, \frac{D+\alpha}{2+4}, \frac{D+\alpha+6}{2}, -m\sqrt{1 - \bar{\omega}_n^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.44})$$

– **Famille m_{abc}^α :**

$$\bar{\mathcal{M}}_{(a_i00)}^{D+\alpha} = \bar{T}_k \sum_{|n| \leq n_{max}} (1 - \bar{\omega}_n^2)^{\frac{D+\alpha+4}{4}} \frac{(4 - \eta_k \bar{\omega}_n^2)}{(1 + \bar{m}_i^2 \sqrt{1 - \bar{\omega}_n^2})^a}. \quad (\text{F.45})$$

• **Fonctions sans masse :**

– **Famille l_{abc}^α :**

$$\bar{\mathcal{L}}_{(a00)}^{D+\alpha} = \bar{T}_k \sum_{|n| \leq n_{max}} \left[\frac{4a}{D + \alpha} (1 - \bar{\omega}_n^2)^{\frac{D+\alpha}{4}} - \eta_k \frac{a(4 + (D + \alpha)\bar{\omega}_n^2)}{(D + \alpha)(D + 4 + \alpha)} (1 - \bar{\omega}_n^2)^{\frac{D+\alpha}{4}} \right]. \quad (\text{F.46})$$

– **Famille n_{abc}^α :**

$$\bar{\mathcal{N}}_{(a00)}^{D+\alpha} = \bar{T}_k \sum_{|n| \leq n_{max}} \left[2(1 - \bar{\omega}_n^2)^{\frac{D+\alpha}{4}} - \eta_k \frac{4 + (D + \alpha)\bar{\omega}_n^2}{2(D + 4 + \alpha)} (1 - \bar{\omega}_n^2)^{\frac{D+\alpha}{4}} \right]. \quad (\text{F.47})$$

– Famille m_{abc}^α :

$$\overline{\mathcal{M}}_{(a00)}^{D+\alpha} = \overline{T}_k \sum_{|n| \leq n_{max}} (1 - \overline{\omega}_n^2)^{\frac{D+\alpha+4}{4}} (4 - \eta_k \overline{\omega}_n^2). \quad (\text{F.48})$$

Il est également possible de simplifier ces expressions dans la limite de température nulle, où la somme devient une somme de Riemann :

$$\overline{T}_k \sum_{|n| \leq n_{max}} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \frac{d\overline{\omega}}{2\pi}, \quad (\text{F.49})$$

du moins pour les fonctions sans masse pour lesquelles l'intégrale restante peut être effectuée analytiquement en toute généralité :

– Famille l_{abc}^α :

$$\overline{\mathcal{L}}_{(a00)}^{D+\alpha} = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left[\frac{D+\alpha}{4}\right]}{\Gamma\left[\frac{D+6+\alpha}{4}\right]} - \eta_k \frac{3a}{16\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left[\frac{D+\alpha}{4}\right]}{\Gamma\left[\frac{D+10+\alpha}{4}\right]}. \quad (\text{F.50})$$

– Famille n_{abc}^α :

$$\overline{\mathcal{N}}_{(a00)}^{D+\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left[\frac{D+4+\alpha}{4}\right]}{\Gamma\left[\frac{D+6+\alpha}{4}\right]} - \eta_k \frac{3}{8\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left[\frac{D+4+\alpha}{4}\right]}{\Gamma\left[\frac{D+10+\alpha}{4}\right]}. \quad (\text{F.51})$$

– Famille m_{abc}^α :

$$\overline{\mathcal{M}}_{(a00)}^{D+\alpha} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left[\frac{D+8+\alpha}{4}\right]}{\Gamma\left[\frac{D+10+\alpha}{4}\right]} - \eta_k \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left[\frac{D+8+\alpha}{4}\right]}{\Gamma\left[\frac{D+14+\alpha}{4}\right]}. \quad (\text{F.52})$$

F.5 Fonctions de seuil avec désordre

À cause de la somme sur les répliques, il faut à présent tenir compte la partie de P dépendant du désordre :

$$\Delta P(q) = \Delta_{\kappa k} q^4 + \Delta R_k(q). \quad (\text{F.53})$$

Il nous faut donc élargir notre bibliothèque de fonctions de seuil :

$$l_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d. \quad (\text{F.54})$$

$$n_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{dP}{dq^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d. \quad (\text{F.55})$$

$$\tilde{n}_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{d\Delta P}{dq^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d. \quad (\text{F.56})$$

$$k_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{d^2 P}{d(q^2)^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d. \quad (\text{F.57})$$

$$\tilde{k}_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{d^2 \Delta P}{d(q^2)^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d . \quad (\text{F.58})$$

$$m_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{dP}{dq^2} \right)^2 G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d . \quad (\text{F.59})$$

$$\tilde{m}_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{d\Delta P}{dq^2} \right)^2 G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d . \quad (\text{F.60})$$

$$\check{m}_{abcd}^{D+\alpha} [\{m_i\}_{i \in \{0,1,2\}}] = -\frac{1}{4v_D} \hat{\partial}_t \int_q q^\alpha \left(\frac{d\Delta P}{dq^2} \right) \left(\frac{dP}{dq^2} \right) G_0(q)^a G_1(q)^b G_2(q)^c \Delta P(q)^d . \quad (\text{F.61})$$

De plus, la partie non diagonale en répliques de la fonction de coupure ne semble pas jouer de rôle. Par conséquent, nous pouvons choisir $\Delta R_k(q) = 0$, auquel cas les fonctions de seuil précédentes s'expriment toutes à l'aide des fonctions de seuil de la théorie sans désordre qui ont toutes été calculées ci-dessus.

- Famille l_{abcd}^α :

$$\bar{l}_{abcd}^{D+\alpha} = \bar{\Delta}_{\kappa k}^d \bar{l}_{abc}^{D+\alpha+4d} . \quad (\text{F.62})$$

- Famille n_{abcd}^α :

$$\bar{n}_{abcd}^{D+\alpha} = \bar{\Delta}_{\kappa k}^d \bar{n}_{abc}^{D+\alpha+4d} . \quad (\text{F.63})$$

- Famille \tilde{n}_{abcd}^α :

$$\tilde{n}_{abcd}^{D+\alpha} = 2\bar{\Delta}_{\kappa k}^{d+1} \bar{l}_{abc}^{D+\alpha+4d+2} . \quad (\text{F.64})$$

- Famille k_{abcd}^α :

$$\bar{k}_{abcd}^{D+\alpha} = \bar{\Delta}_{\kappa k}^d \bar{k}_{abc}^{D+\alpha+4d} . \quad (\text{F.65})$$

Cette fonction s'exprime en fonction des autres famille grâce à la relation (F.7).

- Famille \tilde{k}_{abcd}^α :

$$\tilde{k}_{abcd}^{D+\alpha} = 2\bar{\Delta}_{\kappa k}^{d+1} \bar{l}_{abc}^{D+\alpha+4d} . \quad (\text{F.66})$$

- Famille m_{abcd}^α :

$$\bar{m}_{abcd}^{D+\alpha} = \bar{\Delta}_{\kappa k}^d \bar{m}_{abc}^{D+\alpha+4d} . \quad (\text{F.67})$$

- Famille \tilde{m}_{abcd}^α :

$$\tilde{m}_{abcd}^{D+\alpha} = 4\bar{\Delta}_{\kappa k}^{d+2} \bar{l}_{abc}^{D+\alpha+4d+4} . \quad (\text{F.68})$$

- Famille \check{m}_{abcd}^α :

$$\check{m}_{abcd}^{D+\alpha} = 2\bar{\Delta}_{\kappa k}^{d+1} \bar{n}_{abc}^{D+\alpha+4d+2} . \quad (\text{F.69})$$

Bibliographie

- [Amit 1980] D. Amit and G. Kotliar, Nucl. Phys. B **170**, 187 (1980).
- [Amorim 2014] B. Amorim, R. Roldàn, E. Cappelluto, A. Fasolino, F. Guinea, and M. Katsnelson, Phys. Rev. B **89**, 224307 (2014).
- [Aronovitz 1988] J. Aronovitz and T. Lubensky, Phys. Rev. Lett. **60**, 2634 (1988).
- [Aronovitz 1989] J. Aronovitz, L. Golubovic, and T. Lubensky, J. Phys. (Paris) **50**, 609 (1989).
- [Barbetta 2010] C. Barbetta, *Forces et fluctuations en membranes planes, sphériques et tubulaires*, Ph.D. thesis, Université Paris Diderot Laboratoire Matière et Systèmes Complexes (2010).
- [Baughman 1998] R. Baughman, J. Shacklette, A. Zakhidov, and S. Stafström, Nature **392**, 362 (1998).
- [Beekman 2017] A. Beekman, J. Nissinen, K. Wu, K. Liu, R. Slager, Z. Nussinov, V. Cvetovic, and J. Zaanen, Physics Reports **683** (2017).
- [Berges 2002] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Physics Reports **363**, 223 (2002).
- [Blaizot 2006a] J. Blaizot, R. Méndez, and N. Wschebor, Phys. Rev. E **74**, 051116 (2006).
- [Blaizot 2006b] J. Blaizot, R. Méndez, and N. Wschebor, Phys. Lett. B **632**, 571 (2006).
- [Blaizot 2006c] J. Blaizot, R. Méndez, and N. Wschebor, Phys. Rev. E **74**, 051117 (2006).
- [Boos 1991] É. Boos and A. Davydychev, Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika **89**, 56 (1991).
- [Bowick 1996] M. Bowick, S. Catterall, M. Falcioni, G. Thorleifsson, and K. Anagnostopoulos, J. Phys. I France **6**(10), 1321 (1996).
- [Bowick 2001] M. Bowick, A. Cacciuto, G. Thorleifsson, and A. Travesset, Phys. Rev. Lett. **87**(14), 148103 (2001).
- [Braghin 2010] F. Braghin and N. Hasselmann, Phys. Rev. B **82**, 035407 (2010).
- [Bray 1974] A. Bray, Phys. Rev. Lett. **32**, 1413 (1974).
- [Burmistrov 2016] I. Burmistrov, I. Gornyi, V. Kachorovskii, M. Katsnelson, and A. Mirlin, Phys. Rev. B **94**, 195430 (2016).
- [Burmistrov 2018] I. Burmistrov, I. Gornyi, V. Kachorovskii, M. Katsnelson, J. Los, and A. Mirlin, Phys. Rev. B **97**, 125402 (2018).

- [Campostrini 1992] M. Campostrini and P. Rossi, *International Journal of Modern Physics A* **7**, 3265 (1992).
- [Canet 2003a] L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, and J. Vidal, *Phys. Rev. D* **67**, 065004 (2003).
- [Canet 2003b] L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, and J. Vidal, *Phys. Rev. B* **68**, 064421 (2003).
- [Canet 2004] L. Canet, *Processus de réaction-diffusion : une approche par le groupe de renormalisation non perturbatif*, Ph.D. thesis, Université Paris Diderot Laboratoire Physique Théorique des Hautes Énergies (2004).
- [Canet 2011] L. Canet, H. Chaté, B. Delamotte, and N. Wschebor, *Phys. Rev. E* **84**, 061128 (2011).
- [Canet 2016] L. Canet, B. Delamotte, and N. Wschebor, *Phys. Rev. E* **93**, 063101 (2016).
- [Canham 1970] P. Canham, *J. Theoret. Biol.* **26**, 61 (1970).
- [Castellani 2005] T. Castellani and A. Cavagna, *J. Stat. Mech.* p. P05012 (2005).
- [Chaieb 2006] S. Chaieb, V. Natrajan, and A. El-rahman, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 078101 (2006).
- [Chaieb 2008] S. Chaieb, S. Málková, and J. Lal, *J. Theor. Biol.* **251**(60) (2008).
- [Chaikin 1995] P. Chaikin and T. Lubensky, *Principles of condensed matter physics* (Cambridge University Press, 1995).
- [Coquand 2016] O. Coquand and D. Mouhanna, *Phys. Rev. E* **94**, 032125 (2016).
- [Coquand 2018] O. Coquand, K. Essafi, J.-P. Kownacki, and D. Mouhanna, *Phys. Rev. E* **97**, 030102 (2018).
- [DaSilva 2014] A. DaSilva, L. Cândido, J. T. Rabelo, G. Hai, and F. Peeters, *Euro Physics Lett.* **107**, 56004 (2014).
- [David 1980] F. David, *Nucl. Phys. B* **190**, 205 (1980).
- [David 1981] F. David, *Commun. Math. Phys.* **81**, 149 (1981).
- [David 1988] F. David and E. Gitter, *Europhys. Lett.* **5**, 709 (1988).
- [David 1991] F. David and S. Leibler, *J. Phys. II. France* **1**, 959 (1991).
- [de Gennes 1982] P. de Gennes and C. Taupin, *J. Phys. Chem.* **86**, 2294 (1982).
- [de Jeu 2003] W. de Jeu, B. Ostrovskii, and A. Shalaginov, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 181 (2003).
- [Debelhoir 2016] T. Debelhoir and N. Dupuis, *Phys. Rev. A* **93**, 051603 (2016).
- [Delamotte 2012] B. Delamotte, *Lectures Notes in Physics* **852**, 49 (2012).

- [Dupuis 2011] N. Dupuis, Phys. Rev. E **83**, 031120 (2011).
- [Elitzur 1978] S. Elitzur, Nucl. Phys. B **212**, 501 (1978).
- [Essafi 2012] K. Essafi, *Nonperturbative renormalization group approach to polymerized membranes*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée (2012).
- [Essafi 2014] K. Essafi, J. Kownacki, and D. Mouhanna, Phys. Rev. E **89**, 042101 (2014).
- [Evans 1991] K. Evans, M. Nkansah, I. Hutchinson, and S. Rogers, Nature **353**, 124 (1991).
- [Frey 1994] E. Frey and U. Täuber, Phys. Rev. E **50**(2) (1994).
- [Gazit 2009] D. Gazit, Phys. Rev. E **80**, 041117 (2009).
- [Gies 2012] H. Gies, Lectures Notes in Physics **852**, 287 (2012).
- [Gornyi 2015] I. Gornyi, V. Kachorovskii, and A. Mirlin, Phys. Rev. B **92**, 155428 (2015).
- [Gornyi 2017] I. Gornyi, V. Kachorovskii, and A. Mirlin, 2D Material **4**(1), 011003 (2017).
- [Guinea 2014] F. Guinea, P. L. Doussal, and K. Wiese, Phys. Rev. B **89**, 125428 (2014).
- [Gutter 1989] E. Gutter, F. David, S. Leibler, and L. Peliti, J. Phys. France **50**, 1787 (1989).
- [Hašik 2018] J. Hašik, E. Tosatti, and R. Martoňák, Phys. Rev. B **97**, 140301 (R) (2018).
- [Hasselmann 2011] N. Hasselmann and F. Braghin, Phys. Rev. E **83**, 031137 (2011).
- [Helfrich 1973] W. Helfrich, Z. Naturforsch. **28 c**, 693 (1973).
- [Jiang 2016] J. Jiang, S. Kim, and H. Park, Applied Physics Reviews **3**, 041101 (2016).
- [Kadanoff 1966] L. Kadanoff, Physics **2**, 263 (1966).
- [Kats 2014] E. Kats and V. Lebedev, Phys. Rev. B **89**, 125433 (2014).
- [Kats 2016] E. Kats and V. Lebedev, Phys. Rev. B **94**, 079904 (E) (2016).
- [Kleinert 2001] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -theories* (World Scientific, Singapore, 2001).
- [Košmrlj 2013] A. Košmrlj and D. Nelson, Phys. Rev. E **88**, 012136 (2013).
- [Košmrlj 2016] A. Košmrlj and D. Nelson, Phys. Rev. B **93**, 125431 (2016).
- [Košmrlj 2017] A. Košmrlj and D. Nelson, Phys. Rev. X **7**, 011002 (2017).
- [Kownacki 2009] J. Kownacki and D. Mouhanna, Phys. Rev. E **79**, 040101 (2009).
- [Lakes 1987] R. Lakes, Science **235**, 1038 (1987).

- [Landau 1937] L. Landau, Phys. Z. Sowjetunion **11**, 26 (1937).
- [Landau 1990] L. Landau, E. Lifschitz, and A. Kosevich, *Physique théorique*, vol. 7, Théorie de l'élasticité (Éditions Mir, 1990).
- [LeBellac 2012] M. LeBellac, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge - Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs* (EDP Sciences, 2012).
- [LeDoussal 1992] P. LeDoussal and L. Radzihovsky, Phys. Rev. Lett. **69**, 1209 (1992).
- [LeDoussal 2017] P. LeDoussal and L. Radzihovski, arXiv :1708.05723 (2017).
- [López-Polin 2014] G. López-Polin, C. Gómez-Navarro, V. Parente, F. Guinea, M. Katsnelson, F. Pérez-Murano, and J. Gómez-Herrero, Nat. Phys. **11**(26) (2014).
- [Los 2009] J. Los, M. Katsnelson, O. Yazyev, K. Zakharchenko, and A. Fasolino, Phys. Rev. B **80**, 121405 (2009).
- [Los 2016] J. Los, A. Fasolino, and M. Katsnelson, Phys. Rev. Lett. **116**, 015901 (2016).
- [Low 2002] I. Low and A. Manohar, Phys. Rev. Lett. **88**, 101602 (2002).
- [Mermin 1966] N. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**(22) (1966).
- [Mermin 1968] N. Mermin, Phys. Rev. **176**(1) (1968).
- [Meyer 2007] J. Meyer, A. Geim, M. Katsnelson, K. Novoselov, T. Booth, and S. Roth, nature letters **446**, 60 (2007).
- [Mohiuddin 2009] T. Mohiuddin, A. Lombardo, R. Nair, A. Bonetti, G. Savini, R. Jalil, N. Bonini, D. Basko, C. Galiotis, N. Marzari, *et al.*, Phys. Rev. B **79**, 205433 (2009).
- [Morris 1998] T. R. Morris and M. D. Turner, Nucl. Phys. B **509**, 637 (1998).
- [Morse 1992] D. Morse and T. Lubensky, Phys. Rev. A **46**(4) (1992).
- [Mutz 1991] M. Mutz, D. Bensimon, and M. Brienne, Phys. Rev. Lett. **67**, 923 (1991).
- [Nelson 1987] D. Nelson and L. Peliti, J. Phys. **48**, 1085 (1987).
- [Nelson 1991] D. Nelson and L. Radzihovsky, Europhys. Lett. **16**(1), 79 (1991).
- [Nelson 1992] D. Nelson and L. Radzihovsky, Phys. Rev. A **46**, 7474 (1992).
- [Nelson 2004] D. Nelson, T. Piran, and S. Weinberg, *Proceedings of the Fifth Jerusalem Winter School for Theoretical Physics* (World Scientific Singapore, 2004).
- [Nielsen 1976] H. Nielsen and S. Chadha, Nucl. Phys. B **105**, 445 (1976).
- [Novoselov 2004] K. Novoselov, A. Geim, S. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. Dubonos, I. Grigorieva, and A. Firsov, Science **306**, 666 (2004).

- [Papenbrock 1995] T. Papenbrock and C. Wetterich, *Z. Phys. C* **65**, 519 (1995).
- [Peierls 1934] R. Peierls, *Helv. Phys. Acta* **7**, 81 (1934).
- [Peierls 1935] R. Peierls, *Ann. I.H. Poincaré* **5**, 177 (1935).
- [Peliti 2005] L. Peliti, arXiv :cond-mat/9507076v2 (2005).
- [Pisarski 1983] R. Pisarski, *Phys. Rev. D* **28**, 2547 (1983).
- [Polyakov 1975] A. Polyakov, *Phys. Lett.* **59B**, 79 (1975).
- [Polyakov 1986] A. Polyakov, *Nucl. Phys. B* **268**, 406 (1986).
- [Polyakov 1987] A. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, vol. 3 (Harwood Academic Publishers, 1987).
- [Pop 2012] E. Pop, V. Varshney, and A. Roy, *MRS Bulletin* **37**(12), 1273 (2012).
- [Radzihovsky 1991] L. Radzihovsky and D. Nelson, *Phys. Rev. A* **44**(6) (1991).
- [Radzihovsky 2003] L. Radzihovsky, arXiv :cond-mat/0312567 (2003).
- [Rim 1984] C. Rim and W. Weisberger, *Phys. Rev. D* **30**, 1763 (1984).
- [Roldàn 2011] R. Roldàn, A. Fasolino, K. Zakharchenko, and M. Katsnelson, *Phys. Rev B* **83**, 174104 (2011).
- [Roldàn 2017] R. Roldàn, L. Chirulli, E. Prada, J. Silva-Guillén, P. San-Jose, and F. Guinea, *Chem. Soc. Rev.* **46**, 4387 (2017).
- [Rose 2016] F. Rose, F. Benitez, F. Leonard, and B. Delamotte, *Phys. Rev. D* **93**, 125018 (2016).
- [Rose 2018] F. Rose and N. Dupuis, arXiv :1801.03118 (2018).
- [San-José 2011] P. San-José, J. González, and F. Guinea, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 045502 (2011).
- [Sun 1995] T. Sun, *Phys. Rev. E* **51**(6) (1995).
- [’t Hooft 1972] G. ’t Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys. B* **44**, 189 (1972).
- [Tarjus 2008] G. Tarjus and M. Tissier, *Phys. Rev. B* **78**, 024203 (2008).
- [Täuber 1995] U. Täuber and E. Frey, *Phys. Rev. E* **51**(6) (1995).
- [Tröster 2013] A. Tröster, *Phys. Rev. B* **87**(10), 104112 (2013).
- [Watanabe 2012] H. Watanabe and H. Murayama, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 251602 (2012).
- [Watanabe 2013] H. Watanabe and H. Murayama, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 181601 (2013).
- [Watanabe 2014] H. Watanabe and H. Murayama, *Phys. Rev. X* **4**, 031057 (2014).

- [Wetterich 1993] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
- [Wiese 1997] K. Wiese, Phys. rev. E **56**(5) (1997).
- [Wilson 1971a] K. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3174 (1971).
- [Wilson 1971b] K. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3184 (1971).
- [Wilson 1972] K. Wilson and M. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972).
- [Wilson 1973] K. Wilson, Phys. Rev. D **7**, 2911 (1973).
- [Wilson 1974] K. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. **12**, 75 (1974).
- [Yoon 2011] D. Yoon, Y. Son, and H. Cheong, Nano Lett. **11**, 3227 (2011).
- [Zakharchenko 2009] K. Zakharchenko, M. Katsnelson, and A. Fasolino, Phys. Rev. Lett. **102**, 046808 (2009).
- [Zanusso 2014] O. Zanusso, Phys. Rev. E **90**, 052110 (2014).
- [Zhang 1993] Z. Zhang, H. Davis, and D. Kroll, Phys. Rev. E **48**, R651 (1993).

Fluctuations dans la phase plate des membranes cristallines

Résumé : Cette thèse porte sur l'étude des propriétés mécaniques des membranes cristallines, matériaux bidimensionnels comportant un réseau périodique d'atomes ou de molécules à l'échelle microscopique qui leur confère des propriétés élastiques. Il s'agit de l'un des rares exemples de systèmes bidimensionnels possédant une phase ordonnée stable à grande distance en présence de fluctuations thermiques. Dans celle-ci, les vecteurs normaux à la surface engendrée par la membrane sont fortement corrélés, d'où son nom de phase plate. Ce manuscrit présente une étude des propriétés de la phase plate à l'aide de méthodes du groupe de renormalisation, inspirées notamment du formalisme de l'action effective moyenne.

Tout d'abord, en étudiant la structure de la théorie de perturbations au-delà de l'ordre le plus bas, nous confirmons le bien fondé du schéma d'approximation de l'action effective moyenne utilisé dans la suite et exhibons les pathologies du développement perturbatif.

Puis, nous montrons comment le flot de renormalisation non-perturbatif permet de calculer les différentes propriétés thermodynamiques des membranes cristallines, et d'établir leur diagramme des phases complet dans l'espace (volume, contrainte appliquée, température).

Nous améliorons ensuite le modèle utilisé pour tenir compte des fluctuations quantiques grâce auxquelles le régime de basse température peut être décrit.

Enfin, nous examinons l'effet de la présence d'impuretés dans le matériau. En particulier, nous prédisons l'existence d'une nouvelle transition de phase en présence de désordre qui pourrait expliquer les observations expérimentales dans ces systèmes.

Mots clés :

Membranes Cristallines ; Groupe de Renormalisation ; Systèmes Quantiques ; Systèmes Désordonnés ; Théorie Statistique des Champs ; Thermodynamique .

Fluctuations in the flat phase of crystalline membranes

Abstract : This work deals with the mechanical properties of crystalline membranes, which are two-dimensional materials with an underlying periodic lattice at the microscopic scale which provides them with elastic properties. It is one of the scarce examples of two-dimensional systems possessing a stable ordered phase at large distance in the presence of thermal fluctuations. In that phase, the vectors normal to the surface generated by the membrane are strongly correlated; it is thus called the flat phase. This manuscript presents a study of the properties of the flat phase with help of renormalisation group tools, and in particular the effective average action formalism.

First, by studying the perturbation theory beyond lowest order, we confirm the stability of our effective average action ansatz used in the following, and unveil some pathologies of the perturbative development.

Then we show how the non-perturbative renormalisation group flow can be used to compute various thermodynamic properties of crystalline membranes and draw their complete phase diagram in the space (volume, applied stress, temperature).

Afterwards, we improve our model to account for the effect of quantum fluctuations, which allows to describe the low temperature regime.

Finally, we examine the consequences of the presence of various defects in the material. In particular, we describe a new disorder driven phase transition which seems to be in good qualitative agreement with experimental observations.

Keywords :

Crystalline Membranes ; Renormalisation Group ; Quantum systems ; Disordered systems ; Statistical Field Theory ; Thermodynamics .
