



**HAL**  
open science

# Méthodes numériques pour le calcul des vibrations auto-entretenues liées au frottement : Application au bruit de crissement ferroviaire

Lucien Charroyer

► **To cite this version:**

Lucien Charroyer. Méthodes numériques pour le calcul des vibrations auto-entretenues liées au frottement : Application au bruit de crissement ferroviaire. Autre. Université de Lyon, 2017. Français. NNT : 2017LYSEC065 . tel-02611962

**HAL Id: tel-02611962**

**<https://theses.hal.science/tel-02611962>**

Submitted on 18 May 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École doctorale n° 162 : Mécanique - Énergétique - Génie civil - Acoustique

# THÈSE

présentée par

**Lucien CHARROYER**

pour l'obtention du

**GRADE DE DOCTEUR**

Spécialité : Génie mécanique

**Méthodes numériques pour le calcul des vibrations auto-entretenues  
liées au frottement**

**Application au bruit de crissement ferroviaire**

soutenue le 19 Décembre 2017 devant un jury composé de :

P. Dufrénoy, Professeur, Polytech'Lille, LML

G. Michon, Ingénieur Chercheur HDR, ISAE Sup Aéro, Institut Clément Ader

E. Sarrouy, Maître de Conférences, École Centrale Marseille, LMA

L. Jézéquel, Professeur, École Centrale de Lyon, LTDS

O. Chiello, Chercheur, IFSTTAR, LAE

J-J. Sinou, Professeur, École Centrale de Lyon, LTDS

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Encadrant de thèse

Directeur de thèse

École Centrale de Lyon  
Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes  
UMR CNRS 5513, F-69134 Ecully, France



## Remerciements

Je remercie Messieurs Dufrénoy et Michon d'avoir accepté de rapporter ce travail de thèse ainsi que pour leurs remarques pertinentes.

Je remercie aussi Madame Sarrouy et Monsieur Jézéquel d'avoir accepté de juger ce travail et pour l'intérêt qu'ils y ont porté.

Je tiens à remercier l'ensemble de mes collègues de l'IFSTTAR de Bron et du LTDS de m'avoir accueilli dans leurs équipes respectives et pour l'environnement de travail plus que confortable dont j'ai pu bénéficier durant ces trois années.

Je remercie Olivier et Jean-Jacques, mes encadrants de thèse, de m'avoir accompagné dans ce travail tout au long de ces trois ans. Merci de m'avoir enseigné la rigueur scientifique et aussi l'art de la communication de mes résultats. J'espère que mon travail de thèse est à la hauteur de vos espérances.

Je remercie ma chère et tendre d'avoir partagé cette dernière année de thèse à mes côtés, pour les bons et moins bons moments, d'avoir fait preuve de patience avec moi lors de la rédaction de ce mémoire et de m'avoir soutenu pendant cette thèse.

Enfin je remercie mes parents, Christine et Christophe, à qui je dédie cette thèse. Merci de m'avoir soutenu dans tous les choix que j'ai faits, d'avoir aiguisé ma curiosité et de m'avoir enseigné à donner le meilleur de moi-même. Merci de m'avoir appris que l'intelligence n'est pas seulement intellectuelle mais aussi pratique; qu'il ne suffit pas de comprendre mais qu'il faut aussi savoir mettre en œuvre. Même si je suis maintenant docteur, il me reste énormément à apprendre de vous.



## Résumé

Ces travaux s'inscrivent dans le cadre des recherches destinées à réduire ou à éliminer le bruit de crissement émis par les véhicules ferroviaires en courbe ou au freinage. Ces bruits peuvent en effet atteindre des niveaux sonores très élevés, jusqu'à 105 dB(A) à proximité des rames en cas de freinage par exemple, et constituent une gêne importante pour les usagers et les riverains.

Afin d'apporter des solutions de réduction de ce bruit de crissement, on se concentre sur la modélisation des vibrations auto-entretenues de structures avec contact frottant ainsi que sur la compréhension des mécanismes à l'origine du crissement résultant, en particulier dans le cas d'un frein à disque ferroviaire. On fait l'hypothèse que les vibrations ont pour origine un couplage de modes de la structure dans les directions tangentielles et normale à l'interface en contact frottant. Ce couplage entraîne une instabilité de l'équilibre quasi-statique glissant du système et l'apparition de vibrations auto-entretenues. On cherche à déterminer ces vibrations par le calcul ce qui s'effectue en deux étapes.

Dans un premier temps, l'analyse de stabilité de l'équilibre quasi-statique du système permet de déterminer l'occurrence des vibrations. Dans cette thèse, deux hypothèses de modélisation du frottement – plan ou rectiligne – sont comparées dans le cas d'un modèle académique minimal. Dans le cas non-amorti, on montre que l'hypothèse simplificatrice du frottement rectiligne tend à stabiliser le système. Dans le cas amorti, on constate que les résultats établis dans la littérature pour un frottement rectiligne, en particulier le paradoxe de déstabilisation, ne sont pas facilement généralisables au cas du frottement plan bien que des similitudes existent.

Dans un deuxième temps, une analyse non-linéaire est nécessaire pour déterminer les amplitudes et le contenu fréquentiel précis des vibrations auto-entretenues. Cette étape est généralement effectuée à l'aide d'une intégration temporelle numérique à partir de conditions initiales données, proches de l'équilibre glissant. En examinant l'évolution temporelle des vibrations obtenues à l'aide de cette technique, on peut distinguer d'une part le régime transitoire au cours duquel les non-linéarités apparaissent et stabilisent progressivement la solution instable, et d'autre part le régime stationnaire (ou régime de fonctionnement) où les amplitudes vibratoires sont stabilisées. Dans le cas du modèle académique, une analyse rigoureuse des échanges énergétiques au cours de l'évolution temporelle permet de mettre en évidence l'origine de la stabilisation des vibrations, en particulier la baisse du taux de puissance injectée au contact résultant de l'accumulation des événements fortement non-linéaires : décollements, adhérences ou chocs.

L'intégration temporelle directe n'est toutefois pas adaptée à des modèles numériques comportant de nombreux degrés de liberté et pour lesquels la détermination du régime stationnaire est généralement suffisante pour proposer des solutions de réduction. Le surcoût de calcul engendré par le régime transitoire est en effet très limitant. C'est pourquoi, une méthode est proposée pour approximer directement le régime stationnaire dans le cas d'un système mono-instable. Cette méthode combine une technique de tir à une initialisation basée sur les observations énergétiques ci-dessus. Elle est d'abord validée sur le modèle minimal puis adaptée au modèle éléments finis de frein ferroviaire moyennant une approximation originale de la technique de tir : la réduction de l'espace des phases des conditions initiales. Les approximations des régimes stationnaires sont comparées avec ceux obtenus par l'intégration temporelle directe. Les avantages et les limitations de la méthode sont discutés.



## Abstract

This work is part of research intended to mitigate or eliminate the squeal noise produced by railway vehicles in curves or during braking. For instance, brake noise can reach very high sound levels up to 105 dB(A) close to the trains and constitutes an important nuisance for passengers and residents in the station.

In order to provide some mitigation measures, the study focuses on the modelling of self-sustained structural vibrations in presence of frictional contact and the understanding of the squeal generation mechanism, especially for of a railway disc brake. It is assumed that vibration is due to structural mode coupling in the normal and tangential directions at the frictional interface. This coupling leads to instability of the sliding quasi-static equilibrium of the system and the occurrence of self-sustained vibrations. Two steps are necessary to calculate these vibrations.

Firstly, the occurrence of the vibrations is determined through the stability analysis of the quasi-static equilibrium. In this thesis, two modelling assumptions for the friction law – planar or rectilinear – are compared in the case of an academic model. Without damping, the simplified rectilinear friction law tends to stabilize the system. With damping, the results established in the literature in case of rectilinear friction, especially the destabilization paradox, cannot be applied generally in case of planar friction even if similarities may be observed.

Secondly, a nonlinear analysis is necessary and performed to calculate the amplitudes and the detailed spectral content of the self-sustained vibrations. This step is generally performed by using numerical time integration from given initial conditions, close to the equilibrium. Taking a look at the vibrations time histories obtained by this technique, two different states may be distinguished. In the transient state, nonlinear forces appear and gradually stabilize the unstable solution whereas in the steady (stationary) state, vibrations are stabilized. In the case of the academic model, the cause of the stabilization is highlighted thanks to a rigorous analysis of energy exchanges, especially the decrease of the power rate injected via the contact interface resulting from the accumulation of strongly nonlinear events like loss of contact, stick or impacts.

However, direct time integration is not very appropriate in the case of large numerical models with many degrees of freedom. Indeed, the additional computational cost due to the transient state is very high although the determination of the steady state is generally sufficient from a practical point of view. Consequently, a method is proposed in order to directly approximate the steady state in case of mono-instability. This method combines a shooting technique with an initialization based on the above energy considerations. It is first validated on the minimal model and then transposed to the finite element model of a railway disc brake through an original approximation of the shooting technique : the reduction of the initial conditions phase space. The estimations of the steady states are compared with those obtained by direct time integration. The advantages and the limitations of the method are discussed.



# Table des matières

Remerciements . . . . .	3
<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>3</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
1.1 Contexte scientifique . . . . .	10
1.2 Orientation des travaux . . . . .	11
1.3 Plan du manuscrit . . . . .	12
<b>2 État de l'art</b>	<b>15</b>
2.1 Introduction . . . . .	16
2.2 Modélisation du contact frottant . . . . .	16
2.3 Mécanisme de génération des vibrations auto-entretenues . . . . .	21
2.4 Le phénomène de crissement . . . . .	29
2.5 Intégration numérique avec contact frottant . . . . .	31
2.6 Recherche de régime périodique : approche de mode non-linéaire . . . . .	45
2.7 Conclusion . . . . .	54
<b>3 Analyse de stabilité d'un modèle minimal : comparaison frottement rectiligne - frottement plan</b>	<b>57</b>
3.1 Introduction . . . . .	58
3.2 Description du système mécanique . . . . .	59
3.3 Analyse de stabilité . . . . .	61
3.4 Résultats . . . . .	64
3.5 Conclusion . . . . .	79
<b>4 Analyse non-linéaire d'un modèle minimal : développement d'une méthode de tir adaptée</b>	<b>81</b>
4.1 Introduction . . . . .	82
4.2 Modélisation et formulation du problème . . . . .	83
4.3 Développement du bilan de puissance . . . . .	85
4.4 Validation de l'intégration numérique . . . . .	92
4.5 Détermination des cas d'étude . . . . .	97
4.6 Méthode de Tir et choix d'une initialisation appropriée . . . . .	111
4.7 Résultats numériques . . . . .	117
4.8 Conclusion . . . . .	126

<b>5</b>	<b>Application à un modèle éléments finis simplifié de frein à disque ferroviaire</b>	<b>127</b>
5.1	Introduction . . . . .	128
5.2	Formulation éléments finis du problème et description des modèles de frein	128
5.3	Analyse de stabilité . . . . .	138
5.4	Analyse non-linéaire . . . . .	148
5.5	Méthode de tir appliquée à un modèle éléments finis . . . . .	166
5.6	Conclusion . . . . .	187
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>189</b>
6.1	Conclusion . . . . .	190
6.2	Perspectives . . . . .	192
<b>A</b>	<b>Calcul des coefficients de Routh-Hurwitz</b>	<b>197</b>
A.1	Cas général : frottement plan avec amortissement . . . . .	197
A.2	Frottement plan sans amortissement . . . . .	199
A.3	Frottement rectiligne avec amortissement . . . . .	199
A.4	Frottement rectiligne sans amortissement . . . . .	200

# Liste des figures

1.1	Échelle du bruit (Source : audilo.com)	11
2.1	Lois de contact unilatéral	18
2.2	Lois de frottement	19
2.3	Modèle à un degré de liberté	22
2.4	(a) Loi de frottement avec discontinuité (b) Évolution dans l'espace des phases avec un phénomène de "stick/slip"	23
2.5	(a) Loi de frottement avec décroissance du coefficient de frottement (b) Évolution dans l'espace des phases avec un phénomène de décroissance du coefficient de frottement	25
2.6	Modèle illustrant le "sprag/slip"	25
2.7	Modèle minimal de Hoffmann	27
2.8	Évolution (a) des parties réelles et (b) des fréquences en fonction du coefficient de frottement	27
2.9	(a) Mode axial à 3 diamètres nodaux (crissement basse fréquence) (b) Mode axial à 6 diamètres nodaux (crissement haute fréquence)	30
2.10	Intégration temporelle en utilisant un schéma de Newmark non-linéaire implicite	38
2.11	Description du déroulement d'une étude numérique de systèmes crissant	55
3.1	Description du système mécanique minimal	60
3.2	Zones de stabilité pour les paramètres de référence	65
3.3	Influence de la différence des raideurs $k_1 - k_2$ avec $k_1 + k_2$ constant sur (a-b) les zones de stabilité, (c-d), les parties réelles pour $\gamma = -30^\circ$ , (e-f) et les fréquences pour $\gamma = -30^\circ$ , pour (a,c,e) le frottement plan et pour (b,d,f) le frottement rectiligne	66
3.4	Influence de la vitesse de glissement sur (a) les parties réelles et (b) les fréquences pour $\gamma = -30^\circ$	68
3.5	Influence de la direction de la vitesse de glissement sur (a) les parties réelles, (b) les fréquences et (c) le plan complexe pour un frottement plan	70
3.6	Influence de l'amortissement iso-réparti sur (a,b) les zones de stabilité, (c,d) les parties réelles pour $\gamma = -30^\circ$ et (e,f) les fréquences pour $\gamma = -30^\circ$ (a,c,e) et pour un frottement plan ou (b,d,f) un frottement rectiligne	72
3.7	Influence d'un amortissement non proportionnel avec (a,b) $\eta_y$ constant ou (c,d) $\eta_x$ constant sur les zones de stabilité pour (a,c) un frottement plan ou (b,d) un frottement rectiligne	74
3.8	Influence d'un amortissement non proportionnel sur (a, c, e) les parties réelles et (b, d, f) les fréquences avec $\eta_y$ constant pour (a,b) frottement plan et $\gamma = -30^\circ$ , (c,d) frottement plan et $\gamma = -60^\circ$ , (e,f) frottement rectiligne et $\gamma = -30^\circ$	76

3.9	Influence d'un amortissement non proportionnel sur le plan complexe avec $\eta_y$ constant pour (a) frottement plan et $\gamma = -30^\circ$ , (b) frottement plan et $\gamma = -60^\circ$ et (c) frottement rectiligne et $\gamma = -30^\circ$ . . . . .	77
4.1	Description du système mécanique minimal . . . . .	84
4.2	Évolution en transitoire linéaire (a) de l'énergie mécanique, (b) de la puissance mécanique, (c) de la puissance dissipée et (d) de la puissance injectée par le contact . . . . .	91
4.3	Rapports entre les différentes puissances et l'énergie mécanique en instantané (a) et moyennés (b) . . . . .	91
4.4	Erreur relative du bilan de puissance . . . . .	93
4.5	Valeur de MAC pour une discrétisation en temps de (a) $T_{ins}/64$ , (b) $T_{ins}/256$ , (c) $T_{ins}/1024$ et (d) $T_{ins}/4096$ . . . . .	94
4.6	Valeurs des (a) énergies mécaniques et (b) erreur relative des énergies mécaniques pour différentes discrétisations. . . . .	95
4.7	Comparaison des bilans de puissance en fonction de la tolérance . . . . .	96
4.8	Comparaison des cycles limites selon $Z$ en non-linéaire pour différentes discrétisations . . . . .	96
4.9	Zone de stabilité pour (a) $V = 3 \text{ m.s}^{-1}$ (b) $V = 0.75 \text{ m.s}^{-1}$ . . . . .	98
4.10	Cas 1 : Évolution des déplacements selon les directions (a) $x$ , (b) $y$ et (c) $z$ . . . . .	100
4.11	Cas 1 : Évolution (a) de l'énergie mécanique et (b) du taux moyen relatif de puissance mécanique . . . . .	100
4.12	Cas 1 : Évolution (a) de la réaction normale et (b) de la vitesse normale sur une portion du régime stationnaire . . . . .	101
4.13	Cas 1 : Évolution des puissances (a) mécanique, (b) dissipée par amortissement, (c) injectée par le frottement, (d) dissipée aux chocs, (e) des forces extérieures et (f) du bilan de puissance . . . . .	102
4.14	Cas 1 : Évolution des taux de puissances moyens . . . . .	103
4.15	Cas 2 : Évolution des déplacements selon les directions (a) $x$ et (b) $y$ et des vitesses selon (c) $x$ et (d) $y$ . . . . .	104
4.16	Cas 2 : Évolution de l'énergie mécanique . . . . .	104
4.17	Cas 2 : Évolution des puissances (a) mécanique, (b) dissipée par amortissement, (c) injectée par le frottement et (d) du bilan de puissance . . . . .	105
4.18	Cas 2 : Évolution des taux de puissances moyens . . . . .	106
4.19	Cas 3 : Évolution des déplacements selon les directions (a) $x$ , (b) $y$ et (c) $z$ . . . . .	107
4.20	Cas 3 : Évolution (a) de l'énergie mécanique et (b) du taux moyen relatif de puissance mécanique . . . . .	108
4.21	Cas 3 : Évolution des puissances (a) mécanique, (b) dissipée par amortissement, (c) injectée par le frottement, (d) dissipée aux chocs, (e) des forces extérieures et (f) du bilan de puissance . . . . .	109
4.22	Cas 3 : Évolution des taux de puissances moyens . . . . .	110
4.23	Illustration de la méthode de tir . . . . .	112
4.24	Résumé de la méthode de tir avec initialisation appropriée . . . . .	117
4.25	Évolution des taux moyens de puissance en fonction de l'amplitude modale pour (a) le Cas 1, (b) le Cas 2 et (c) le Cas 3 . . . . .	118
4.26	Diagrammes de phase obtenus par l'intégration temporelle directe (rouge) et cycles limites donnés par la méthode de tir (bleu) dans les directions $x$ (a), $y$ (b) et $z$ (c) pour le cas 1 . . . . .	120

4.27 Diagrammes de phase obtenus par l'intégration temporelle directe (rouge) et cycles limites donnés par la méthode de tir (bleu) dans les directions $x$ (a), $y$ (b) et $z$ (c) pour le cas 2 . . . . .	120
4.28 Diagrammes de phase obtenus par l'intégration temporelle directe (rouge) et cycles limites instables donnés par la méthode de tir (bleu) dans les directions $x$ (a), $y$ (b) et $z$ (c) pour le cas 3 . . . . .	122
4.29 Évolutions temporelles (a) des déplacements et (b) de la vitesse obtenus par intégration temporelle directe selon la direction $z$ pour le cas 3 . . . . .	122
4.30 Diagrammes de phase obtenus par l'intégration temporelle directe (rouge) et cycles limites stables donnés par la méthode de tir (bleu) dans les directions $x$ (a), $y$ (b) et $z$ (c) pour le cas 3 . . . . .	123
4.31 Comparasion des cycles limites obtenus par l'intégration temporelle de la matrice de monodromie (rouge) et calcul de la matrice de monodromie par différences finies (bleu) dans les directions $x$ (a), $y$ (b) et $z$ (c) pour le cas 1 .	125
5.1 Notations . . . . .	129
5.2 Essieu TGV équipé de freins à disque . . . . .	132
5.3 (a) Disque double freiné sur l'essieu (b) timoneries équipées de garnitures à plots . . . . .	132
5.4 Discrétisation du disque (a) du moyeu (b) des Modèles 1 et 2 . . . . .	134
5.5 Discrétisation des garnitures et portes garnitures du Modèle 1 . . . . .	134
5.6 Discrétisation des garnitures du Modèle 2 . . . . .	135
5.7 Couplage de modes du Modèle 1 : évolution des parties réelles des valeurs propres complexes (a) et des fréquences des modes (b) en fonction du coefficient de frottement $\mu$ . . . . .	143
5.8 Couplage de modes du Modèle 2 : évolution des parties réelles des valeurs propres complexes (a) et des fréquences des modes (b) et (c) en fonction du coefficient de frottement $\mu$ . . . . .	144
5.9 Déformées quasi-statiques du Modèle 1 (a) et du Modèle 2 (b) . . . . .	146
5.10 Diagrammes de stabilité du Modèle 1 (a) et du Modèle 2 (b) pour $\mu = 0.2$ . .	147
5.11 Déformées du mode instable du Modèle 1 (a) et du Modèle 2 (b) pour $\mu = 0.2$	147
5.12 Nombre d'itérations de l'algorithme du point fixe en fonction du pas de temps (Modèle 1, $h = 10^{-6}$ s, $\epsilon_{tol} = 10^{-5}$ ) . . . . .	153
5.13 Statuts des noeuds au cours du temps (Modèle 1) . . . . .	154
5.14 Évolution de l'énergie mécanique (Modèle 1) . . . . .	155
5.15 Effort de freinage au cours du temps (Modèle 1) . . . . .	156
5.16 Spectrogramme de l'énergie mécanique moyenne $\hat{E}$ en dB (Modèle 1) . . . .	157
5.17 Évolution de la zone de contact supérieure en régime stationnaire (Modèle 1)	158
5.18 Évolution des déplacements selon le repère relatif au contact (a), (b) et (c) et portraits de phase (d), (e) et (f) du nœud 1864 (Modèle 1) . . . . .	159
5.19 Nombre d'itérations de l'algorithme du point fixe en fonction du pas de temps (Modèle 2, $h = 10^{-6}$ s, $\epsilon_{tol} = 10^{-5}$ ) . . . . .	160
5.20 Statuts des noeuds au cours du temps (Modèle 2) . . . . .	160
5.21 Évolution de l'énergie mécanique (Modèle 2) . . . . .	161
5.22 Effort de freinage au cours du temps (Modèle 2) . . . . .	162
5.23 Spectrogramme de l'énergie mécanique moyenne $\hat{E}$ en dB (Modèle 2) . . . .	162
5.24 Évolution de la zone de contact supérieure en régime stationnaire (Modèle 2)	164
5.25 Évolution des déplacements selon le repère relatif au contact (a), (b) et (c) et portraits de phase (d), (e) et (f) du nœud 1864 (Modèle 2) . . . . .	165

5.26	Comparaison des évolutions de l'énergie mécanique moyenne selon l'initialisation du Modèle 1 (a) et du Modèle 2 (b) . . . . .	170
5.27	Comparaison référence/tir des évolutions de l'énergie mécanique sur une période avec la base avec équilibre (a) et la base sans équilibre (b) et des erreurs relatives en énergie mécanique sur une période avec la base avec équilibre (c) et la base sans équilibre (d) (Modèle 1) . . . . .	173
5.28	Comparaison référence/tir des spectres de l'énergie mécanique avec la base avec équilibre (a) et la base sans équilibre (b) et des erreurs relatives sur les composantes de l'énergie mécanique avec la base avec équilibre (c) et la base sans équilibre (d) (Modèle 1) . . . . .	174
5.29	Comparaison des déformées spectrales en déplacement avec la base avec équilibre (a) et la base sans équilibre (b) (Modèle 1) . . . . .	175
5.30	Comparaison référence/tir des portraits de phase avec la base avec équilibre (a,c,e) et la base sans équilibre (b,d) des modes dynamiques (a,b,c,d) et du mode statique (e) (Modèle 1) . . . . .	176
5.31	Illustration du cycle limite du régime stationnaire du Modèle 1 obtenu par intégration temporelle directe (a,c,e,g) et par la méthode de tir (b,d,f,h) . . . . .	178
5.32	Erreur d'estimation des déformées du Modèle 1 . . . . .	179
5.33	Comparaison référence/tir des portraits de phase du nœud 1864 entre l'intégration temporelle directe (rouge) et la méthode de tir (bleu) dans le repère local (Modèle 1) . . . . .	179
5.34	Comparaison référence/tir des évolutions de l'énergie mécanique sur une période avec la base avec équilibre (a) et la base sans équilibre (b) et des erreurs relatives en énergie mécanique sur une période avec la base avec équilibre (c) et la base sans équilibre (d) (Modèle 2) . . . . .	180
5.35	Comparaison référence/tir des spectres de l'énergie mécanique avec la base avec équilibre (a) et base sans équilibre (b) et des erreurs relatives sur les composantes de l'énergie mécanique avec la base avec équilibre (c) et avec la base sans équilibre (d) (Modèle 2) . . . . .	181
5.36	Comparaison des déformées spectrales en déplacement avec la base avec équilibre (a) et la base sans équilibre (b) (Modèle 2) . . . . .	182
5.37	Comparaison référence/tir des portraits de phase de la base avec équilibre (a,c,e) et de la base sans équilibre (b,d) des modes instables (a,b,c,d) et du mode statique (e) (Modèle 2) . . . . .	183
5.38	Illustration du cycle limite du régime stationnaire du Modèle 2 obtenu par intégration temporelle directe (a,c,e,g) et la méthode de tir (b,d,f,h) . . . . .	185
5.39	Erreur d'estimation des déformées du Modèle 2 . . . . .	186
5.40	Comparaison référence/tir des portraits de phase du nœud 1864 entre l'intégration temporelle directe (rouge) et la méthode de tir (bleu) dans le repère local (Modèle 2) . . . . .	186

# Liste des tableaux

2.1	Schémas d'intégration de la famille de Newmark . . . . .	40
3.1	Valeurs des coefficients de frottement et des fréquences du mode instable au point de bifurcation de Hopf pour $\gamma = -30^\circ$ . . . . .	67
3.2	Valeurs des coefficients de frottement et des fréquences des modes stable et instable au point de bifurcation de Hopf pour le frottement plan, $\gamma = -30^\circ$ et différentes vitesses de glissement . . . . .	69
3.3	Valeur du coefficient de frottement de la fréquence du mode instable au point de bifurcation de Hopf pour un système iso-amorti et pour $\gamma = -30^\circ$ .	73
3.4	Coefficient de frottement et fréquence du mode instable au point de la bifurcation de Hopf pour $\eta_y = 0.02$ (système avec amortissement non proportionnel) . . . . .	79
4.1	Puissance normale relative moyenne et nombre moyen d'itérations . . . . .	93
4.2	Comparaison des Discrétisations . . . . .	97
4.3	Fréquences et parties réelles des valeurs propres des modes instables des différents cas d'étude. . . . .	99
4.4	Cas 1 : Taux moyens relatifs de puissance et bilan de puissance moyen . . .	103
4.5	Cas 2 : Taux moyens relatifs de puissance et bilan de puissance moyen . . .	106
4.6	Cas 3 : Taux moyens relatifs de puissance et bilan de puissance moyen . . .	110
4.7	Valeurs propres de la matrice de monodromie pour les Cas 1 et 2 . . . . .	119
4.8	Valeurs propres de la matrice de monodromie pour le Cas 3 instable et stable	121
4.9	Fréquence des vibrations auto-entretenues issue de l'analyse de stabilité (à partir de la valeur propre du mode instable), de l'intégration temporelle directe et de la méthode de tir . . . . .	123
4.10	Nombre d'itérations nécessaire à la convergence selon les initialisations . .	124
5.1	Paramétrage des modèles éléments finis . . . . .	137
5.2	Numéro du mode instable et valeur de la partie réelle et de la fréquence associée . . . . .	145
5.3	Taux moyens relatifs de puissance et bilan de puissance moyen dans le régime stationnaire (Modèle 1) . . . . .	157
5.4	Taux moyens relatifs de puissance et bilan de puissance moyen (Modèle 2) .	163
5.5	Nombre d'itérations nécessaires à la convergence selon les initialisations (Modèle 1) . . . . .	176
5.6	Fréquences obtenues suite à la convergence de la méthode de tir (Modèle 1)	177
5.7	Nombre d'itérations nécessaires à la convergence selon les initialisations (Modèle 2) . . . . .	182
5.8	Fréquences obtenues suite à la convergence de la méthode de tir (Modèle 2)	183



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1 Contexte scientifique</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>1.2 Orientation des travaux</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>1.3 Plan du manuscrit</b> . . . . .	<b>12</b>

---

## 1.1 Contexte scientifique

Le sujet s'inscrit dans le cadre de recherches destinées à réduire ou à éliminer les bruits de crissement émis par les véhicules ferroviaires en courbe ou au freinage. Concernant le bruit de freinage, on peut donner l'exemple du bruit strident émis par les Trains à Grande Vitesse (TGV) lors de leur arrivée en gare. Ces bruits sont souvent perçus par les usagers comme une gêne et peuvent atteindre des niveaux dangereux (jusqu'à 105 dB(A) à proximité des rames pour les TGV par exemple cf Figure 1.1). Ils sont caractérisés par des spectres de raies en moyennes ou hautes fréquences. Cependant le crissement n'altère en rien la qualité du freinage. Par conséquent l'étude des phénomènes de crissement dans le domaine ferroviaire n'a pour objectif que de réussir à mettre en œuvre des méthodes de réduction de bruit pour le confort des usagers et des riverains.

Bien que les recherches concernant les bruits de freinage automobiles aient débuté il y a plusieurs décennies, les moyens de réduction de ces bruits sont longtemps restés empiriques en raison de la difficulté à modéliser les phénomènes à l'origine de leur génération. Concernant le ferroviaire, depuis quelques années en France, plusieurs travaux s'intéressent à ce problème à travers différents projets (notamment Acoufren ou Crisfis), en particulier sous l'angle de la modélisation [1, 2]. Les modèles de crissement sont généralement basés sur l'hypothèse que le bruit est dû au rayonnement acoustique de structures en contact frottant. Selon l'hypothèse la plus répandue, en tout cas en ce qui concerne le crissement au freinage, le phénomène microscopique du frottement induit dans la structure un couplage de modes géométrique entre les directions normale et tangentielle qui entraîne alors une instabilité de l'équilibre quasi-statique glissant du frein et l'observation macroscopique de vibrations auto-entretenues dont l'amplitude est de l'ordre du micromètre. Par conséquent le bruit de crissement s'étudie à deux échelles. La première concerne la modélisation du contact frottant entre les garnitures et le disque du frein. La seconde est liée au calcul des niveaux des vibrations auto-entretenues liées à l'instabilité.

Deux étapes sont généralement utilisées pour comprendre et prévoir la génération de ces vibrations auto-entretenues. La première étape est une étude de stabilité consistant à résoudre le système aux valeurs propres non symétrique associé aux équations linéaires vérifiées par de petites perturbations de l'équilibre. Cette première étape prévoit alors l'occurrence des vibrations auto-entretenues lorsque l'équilibre est instable. La deuxième étape est le calcul de la solution dynamique non-linéaire. Dans le cadre du crissement ferroviaire cette étude est généralement menée en calculant l'évolution temporelle du système avec des conditions initiales données, par exemple proches de l'équilibre glissant instable. Le plus souvent, on observe alors un régime transitoire puis un régime stationnaire. Cette étape est indispensable pour obtenir les niveaux de vibrations auto-entretenues et donc les niveaux de crissement. Cependant le fait qu'elle soit très coûteuse en temps de calcul (modèles éléments finis de grande taille, dynamique en moyennes ou hautes fréquences, non-linéarités) constitue un verrou scientifique.

D'un point de vue industriel, la partie stationnaire du régime vibratoire caractérise généralement assez bien le crissement. La détermination de cette partie de la solution est par conséquent visée en priorité. Les méthodes fréquentielles de calcul de solution stationnaire telle que la méthode de la balance harmonique (HBM) ont récemment fait l'objet d'innovations permettant de s'adapter aux systèmes autonomes et aux instabilités liées au contact frottant. Leur performance s'avère satisfaisante en particulier dans le cas d'instabilité simple. Toutefois leur utilisation dans le cas d'instabilités multiples reste pénalisée par le nombre élevé de fréquences mises en jeu. L'utilisation d'une intégration

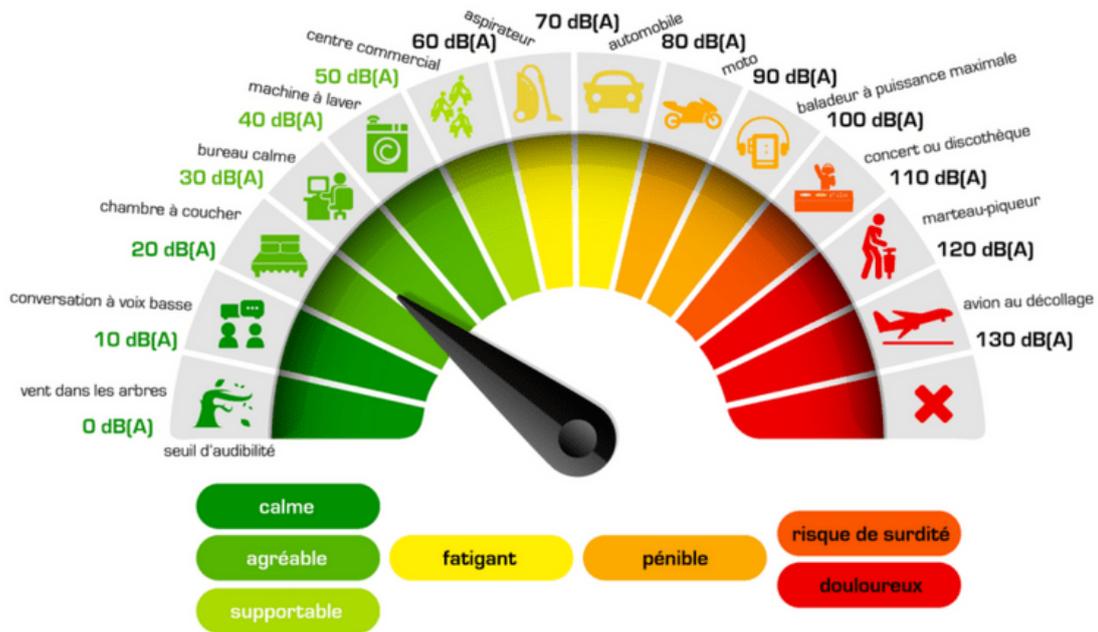


FIGURE 1.1 – Échelle du bruit (Source : audilo.com)

numérique temporelle permet de s'affranchir de ce problème mais, comme indiqué plus haut, c'est la longueur des signaux transitoires nécessaires à l'obtention d'une solution stationnaire qui devient alors limitante. Les méthodes de tirs associées aux méthodes de continuation ont été développées spécifiquement dans l'optique d'accélérer cette étape mais n'ont jamais été testées dans le cas de systèmes autonomes déstabilisés par frottement, caractérisés par des solutions fortement non-linéaires alternant des périodes de glissement, d'adhérence et de décollement à l'interface frottante. Ces travaux de thèse s'inscrivent donc dans l'optique de simuler et prédire le crissement de frein en développant une technique numérique originale basée sur une adaptation de la méthode de tir afin d'estimer les niveaux vibratoires.

## 1.2 Orientation des travaux

Comme expliqué précédemment, l'objectif de ces travaux de thèse est de proposer une méthodologie numérique basée sur la méthode de tir pour estimer les niveaux vibratoires d'un système soumis à une instabilité de crissement dans le cas ferroviaire. Dans un premier temps il a été choisi de proposer et d'étudier un modèle minimal qui a toutes les caractéristiques requises. Ce modèle est soumis à un frottement plan de type Signorini-Coulomb ce qui permet d'observer des phénomènes d'adhérence/glisement et décollement/glisement. De plus il est soumis à un couplage de modes entre les directions tangentielles du frottement et la direction normale de contact. Il a été choisi d'étudier la stabilité de ce modèle puis de poursuivre par une étude non-linéaire classique avec une intégration temporelle afin de déterminer des cas de référence. On propose ensuite la mise en place d'une technique numérique permettant d'approximer les niveaux vibratoires auto-entretenus. Pour ce faire, une méthodologie numérique originale basée sur la méthode de tir et combinée à une initialisation originale du problème afin de limiter le temps de calcul et de rendre robuste la méthode vis-à-vis de l'estimation des cycles limites a été développée et les résultats obtenus ont été confrontés à ceux de l'analyse

non-linéaire classique.

Pour aller plus loin dans l'applicatif, on propose deux variantes d'un modèle éléments finis représentatif d'un frein ferroviaire sur lequel une analyse non-linéaire complète est conduite (analyse de stabilité et détermination des niveaux vibratoires par intégration temporelle classique). La méthodologie développée pour le modèle minimaliste est adaptée au modèle éléments finis tout en apportant des développements complémentaires ce qui permet de répondre aux objectifs de ces travaux de thèse. Le traitement des réponses quasi-périodiques (i.e. réponses composées de plusieurs fréquences incommensurables entre elles) n'est pas proposé dans le cadre de ces travaux de thèse, seules les réponses périodiques (i.e. réponses composées d'une seule fondamentale) sont traitées dans ces travaux.

### 1.3 Plan du manuscrit

Le deuxième chapitre est un état de l'art qui fait le point sur les principaux phénomènes mis en jeu, les modèles utilisés et les méthodes numériques existantes, dans le cadre général des vibrations auto-entretenues liées au frottement et plus particulièrement dans celui du crissement au freinage. La première section traite spécifiquement des différentes modélisations du contact et du frottement. Les vibrations liées au freinage ainsi que les différents mécanismes permettant d'expliquer leur origine sont ensuite présentés. Enfin les outils de l'analyse non-linéaire permettant de calculer les niveaux vibratoires sont abordés en deux temps : une revue non-exhaustive des schémas d'intégration numérique est en premier lieu réalisée puis les principales méthodes utilisées en recherche de solutions stationnaires sont examinées.

Le troisième chapitre de cette thèse traite de l'occurrence de vibrations auto-entretenues d'un système frottant minimal à 3 degrés de liberté. La stabilité de l'équilibre quasi-statique du système frottant considéré est étudiée. L'avantage du modèle utilisé est qu'il permet de mettre en avant les différences de stabilité obtenues en utilisant l'hypothèse simplificatrice d'un frottement rectiligne ou celle du frottement plan. Une étude paramétrique complète comprenant l'influence de l'amortissement, des raideurs ou encore de la vitesse de glissement est proposée et des résultats originaux sont discutés. Une extension de certains phénomènes complexes observés avec un frottement rectiligne tels que le paradoxe de déstabilisation, le "lowering effect" ou encore le "smoothing effect", est entreprise pour un frottement plan.

Le quatrième chapitre est dédié à l'analyse non-linéaire du modèle développé dans le chapitre 3. En effet, après avoir déterminé les paramètres pour lesquels l'occurrence du crissement existe, une analyse non-linéaire complémentaire à l'analyse de stabilité doit être envisagée afin d'estimer le comportement vibratoire réellement généré. Comme explicité précédemment, ces travaux de thèse proposent le développement d'une méthode de tir adaptée pour des systèmes non-linéaires autonomes. Ainsi l'algorithme d'intégration temporelle qui constitue la méthode de référence pour valider les développements proposés, est alors présenté. Ensuite une analyse non-linéaire par intégration temporelle est conduite afin d'analyser les régimes transitoire et stationnaire de trois configurations du système différentes. Ces trois cas permettront de valider le développement et la démarche scientifique proposés. Les spécificités d'utilisation de la méthode de tir pour ce modèle (critères de convergence, calcul de la matrice de monodromie et méthode énergétique pour l'initialisation) sont par la suite présentées. Les résultats de l'estimation du régime stationnaire obtenue avec la méthode de tir et ceux de l'intégration temporelle directe pour des cas mono-instables sont discutés et comparés. Cette étude amène à l'ob-

servation de phénomènes complexes en dynamique non-linéaire (bifurcation par doublement de période) et aussi à la mise en avant des avantages et limitations de la méthode de tir proposée.

Enfin le cinquième chapitre propose une étude numérique complète d'un modèle éléments finis de frein. La méthode de calcul de stabilité pour un modèle éléments finis et les résultats de stabilité de l'équilibre quasi-statique sont présentés. L'analyse non-linéaire du modèle dans le cas mono-instable est menée. Les adaptations nécessaires au traitement de modèles éléments finis et à l'utilisation des algorithmes d'intégration temporelle et de la méthode de tir sont discutés et développés. Ainsi une modification de l'estimation énergétique permettant d'initialiser la méthode de tir ainsi que le développement d'une technique de réduction pour le calcul de la matrice de monodromie sont proposés. La robustesse de la méthode numérique et de la démarche scientifique sont mises à l'épreuve sur différentes variantes du modèle éléments finis de frein en comparant les régimes stationnaires obtenus avec ceux issus de l'intégration temporelle directe.

Le dernier chapitre conclut sur les apports et limitations des développements théoriques et stratégies numériques proposés dans le cadre de ces travaux de thèse. Les perspectives de recherche sont également abordées.



# Chapitre 2

## État de l'art

### Sommaire

---

<b>2.1 Introduction</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>2.2 Modélisation du contact frottant</b> . . . . .	<b>16</b>
2.2.1 Modélisation du contact . . . . .	16
2.2.2 Modélisation du frottement . . . . .	18
2.2.3 Problème de contact en dynamique . . . . .	20
<b>2.3 Mécanisme de génération des vibrations auto-entretenues</b> . . . . .	<b>21</b>
2.3.1 Origine tribologique . . . . .	22
2.3.2 Origine structurale ou géométrique . . . . .	24
2.3.3 Instabilités, cycles limites et généralisation à des modèles éléments finis . . . . .	27
<b>2.4 Le phénomène de crissement</b> . . . . .	<b>29</b>
2.4.1 Domaine automobile et aéronautique . . . . .	29
2.4.2 Domaine ferroviaire . . . . .	30
<b>2.5 Intégration numérique avec contact frottant</b> . . . . .	<b>31</b>
2.5.1 Schémas de premier ordre pour des modèles en variable d'état . . . . .	32
2.5.2 Schémas à différences finies de second ordre . . . . .	35
2.5.3 La $\theta$ -méthode . . . . .	41
2.5.4 Traitement numérique du contact frottant non-régulier . . . . .	42
<b>2.6 Recherche de régime périodique : approche de mode non-linéaire</b> . . . . .	<b>45</b>
2.6.1 Présentation du problème . . . . .	45
2.6.2 Méthode de discrétisation . . . . .	47
2.6.3 Méthode de tir . . . . .	50
2.6.4 Méthode des différences finies . . . . .	52
2.6.5 Méthodes perturbatives . . . . .	53
<b>2.7 Conclusion</b> . . . . .	<b>54</b>

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre permet de situer ces travaux de thèse par rapport aux études déjà effectuées sur le crissement et plus généralement sur les vibrations auto-entretenues induites par le frottement. Premièrement les différentes modélisations du contact frottant sont examinées. Ensuite les différentes modélisations de mécanisme permettant de mettre en évidence les bruits de freinage sont présentées et séparées en deux catégories : les mécanismes d'origine tribologique et ceux d'origine géométrique en particulier le couplage de modes via l'analyse de stabilité du système. Enfin, le phénomène de crissement est caractérisé et comparé aux autres bruits de freinage.

Dans un second temps, considérant que l'analyse de stabilité ne suffit pas à déterminer les niveaux vibratoires auto-entretenus, on se focalise sur les méthodes permettant une analyse non-linéaire, en particulier l'intégration temporelle du système avec des conditions initiales données, par exemple proches de l'équilibre quasi-statique instable. Les différents schémas d'intégration numérique sont alors exposés. Ils sont séparés en trois catégories : schémas du premier ordre pour des problèmes en variables d'état, schémas du second ordre et enfin la  $\theta$ -méthode.

L'intégration temporelle d'un système soumis à des vibrations auto-entretenues permet de montrer que le système traverse le plus souvent deux phases : un régime transitoire (évolution linéaire et apparition des non-linéarités) et un régime stationnaire (saturation des non-linéarités et établissement d'un régime périodique ou quasi-périodique). Le régime stationnaire étant généralement la quantité recherchée, l'intégration temporelle directe n'est pas forcément la méthode la plus adaptée. En effet, afin d'obtenir le régime stationnaire, cette méthode oblige à calculer un régime transitoire qui peut nécessiter des ressources en calcul conséquentes si le modèle possède de nombreux degrés de liberté. On propose donc de réduire les coûts de calcul de l'obtention du régime stationnaire en adaptant une autre vision du problème. On constate que la recherche du régime stationnaire d'un système auto-entretenu mono-instable revient à trouver l'amplitude du mode non-linéaire pour laquelle la trajectoire du système est périodique. Plusieurs méthodes de recherche de modes non-linéaires périodiques sont par conséquent exposées dans la dernière partie de ce chapitre.

## 2.2 Modélisation du contact frottant

La modélisation du contact frottant reste un vaste sujet dans la communauté des mécaniciens du solide. En effet, selon l'échelle à laquelle l'étude est portée (tribologique ou dynamique des structures) les modèles sont plus ou moins complexes afin de traduire les phénomènes de contact frottant. C'est pourquoi, cette section fait le point sur les différents modèles de contact frottant utilisés dans le cadre général de la mécanique des milieux continus et plus particulièrement dans celui des vibrations de structures.

### 2.2.1 Modélisation du contact

La modélisation du contact a débuté au début du XIX<sup>e</sup> siècle avec l'ère industrielle suite à l'apparition de problèmes de fatigue par contact. Signorini propose alors l'une des modélisations du contact la plus intuitive [3] : le contact unilatéral. Il exprime une modélisation du contact unilatéral sans interpénétration entre les deux corps et s'assure du caractère répulsif de l'effort entre ces deux corps. Une condition de réciprocité est imposée dans cette modélisation et assure que le travail de l'effort normal est nul. Ainsi

s'il existe un jeu normal entre les deux solides alors l'effort normal est nul. Inversement si l'effort normal est non nul alors il y a contact.

Cette formulation de contact unilatéral se traduit par les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} (g_n - g_0) \leq 0 \\ r_n \leq 0 \\ (g_n - g_0)r_n = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $g_n$  est le déplacement relatif normal entre les deux solides,  $g_0$  le jeu initial et  $r_n$  la réaction de contact normale.

On remarque alors que cette loi est bi-univoque en effort-déplacement. En effet si l'effort est nul, le jeu peut prendre différentes valeurs. De plus cette loi possède un point anguleux en  $(r_n, g_n) = (0, 0)$ , comme illustré en Figure 2.1.

D'autres modélisations du contact ont été développées. Pour ce faire le contact n'est plus étudié à une échelle locale mais à une échelle plus petite. Les relations entre effort de contact et déplacement sont alors déterminées pour cette petite zone d'étude et ensuite moyennées pour revenir à l'échelle locale.

L'une de ces relations est la relation de contact de Hertz [4] traitant le contact non-conforme entre deux corps élastiques. Elle utilise la solution de Boussinesq de la déformation d'un plan élastique soumis à une force normale ponctuelle. Ainsi la forme de la zone de contact entre deux ellipsoïdes et la répartition de pression sont connues. En utilisant ce modèle, l'effort normal de contact est proportionnel à la racine du déplacement (2.2) et dépend aussi des rayons de courbure des surfaces en contact.

$$r_n \propto g_n^{\frac{3}{2}} \quad (2.2)$$

D'un point de vue pratique, la loi de contact Hertzienne est soit appliquée sur la zone de contact dans son ensemble [5], soit en discrétisant cette zone et en recalculant les raideur de contact pour chaque discrétisation comme effectué dans [6]; la méthode ainsi utilisée est appelée semi-Hertzienne. Une loi linéaire est également utilisée dans le cadre de la modélisation du bruit de roulement ferroviaire : la relation entre effort de contact et déplacement est linéarisée autour du point de fonctionnement introduisant ainsi une raideur de contact.

De manière générale, l'utilisation d'une raideur de contact, qui est une forme de régularisation du contact unilatéral, est fréquente en dynamique des structures même si la possibilité de décollement est conservée. La loi prend alors la forme suivante :

$$r_n = \epsilon_n g_{n-}, \quad \epsilon_n > 0 \quad (2.3)$$

On remarque que cette régularisation autorise alors une certaine interpénétration. On parle alors de méthode de pénalité. Ce terme provient de la conséquence de la violation de l'interpénétrabilité sur la pénalisation de l'effort normal. Afin de réduire cette interpénétration, on choisit dans la pratique  $\epsilon_n$  suffisamment grand, ce qui entraîne alors, une relation bi-univoque entre la réaction de contact et le déplacement. On obtient ainsi un problème non-linéaire mais régulier dont les inconnues sont cinématiques [7]. Cependant les inconvénients de cette méthode sont un mauvais conditionnement de la matrice du jeu normal pour une grande valeur de  $\epsilon_n$  et un statut de contact entre les noeuds inconnu lors d'une interpénétration.

D'autres lois de contact existent. Elles sont principalement bi-univoques et ne présentent aucun point anguleux. Ces lois sont proposées afin de satisfaire deux objectifs. Le premier consiste en la régularisation de la loi de Signorini ce qui permet une simplification de la résolution du problème de contact. Ainsi plusieurs paramètres arbitraires

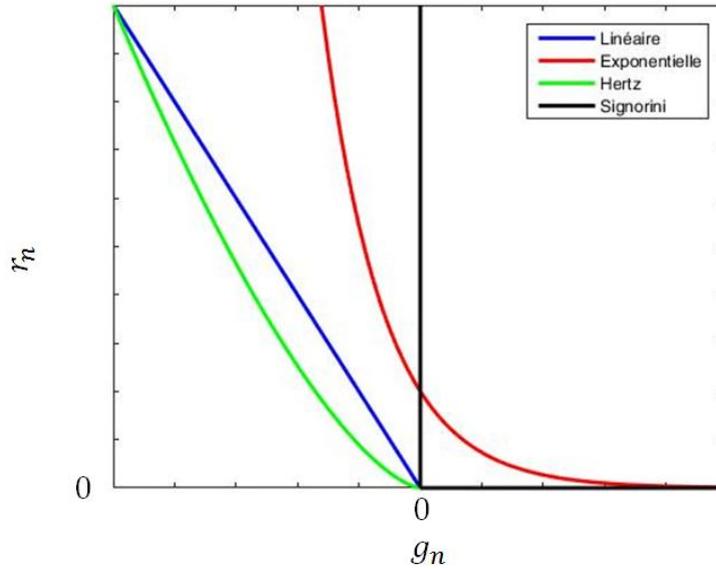


FIGURE 2.1 – Lois de contact unilatéral

sont introduits afin de réaliser un compromis entre la vérification de la loi de Signorini et le coût de résolution du problème de contact. Le second objectif est de déterminer un caractère plus physique du contact. En effet si l'on s'intéresse aux interfaces de contact à l'échelle microscopique, ces interfaces présentent des aspérités. Lors du contact, ces aspérités peuvent s'écraser sous la pression ce qui n'est pas pris en considération dans la loi idéale de Signorini. Cette considération justifie donc l'utilisation de lois bi-univoques. Ces lois sont généralement de type exponentielle [7].

La Figure 2.1 représente les différents graphes des lois de contact décrites ci-dessus.

L'inconvénient des modélisations du contact pénalisées est la détermination des raideurs de contact. Ces raideurs sont généralement très élevées par rapport à la raideur du système. Cela nécessite donc un protocole expérimental fiable et robuste afin de pouvoir déterminer les paramètres et recalibrer le modèle numérique au modèle expérimental. Dans le contexte de contacts plans et peu rugueux à l'échelle des vibrations considérées, l'hypothèse asymptotique de contact unilatéral semble plutôt réaliste et permet d'obtenir une famille de résultats canoniques qui peut être précisée dans un deuxième temps par l'utilisation de raideurs de contact mesurées. On évite ainsi d'introduire des paramètres supplémentaires afin d'assurer la généralité des résultats.

### 2.2.2 Modélisation du frottement

La modélisation du frottement sec est un domaine aussi riche que celui de la modélisation du contact. L'importance de la modélisation du frottement provient du fait que le frottement s'oppose au mouvement. Ainsi il peut devenir un facteur de dimensionnement pour la puissance des machines ou la détérioration des pièces composant les systèmes mécaniques. Le modèle de frottement le plus utilisé est le modèle de Coulomb. Coulomb s'est basé sur les observations de Leonard de Vinci et de Amontons pour proposer la loi de frottement exprimée en Équation (2.4) où  $\mathbf{w}$  est le vecteur de vitesse relative tangentielle entre les deux solides et  $\mathbf{r}_t$  le vecteur des efforts de frottement.

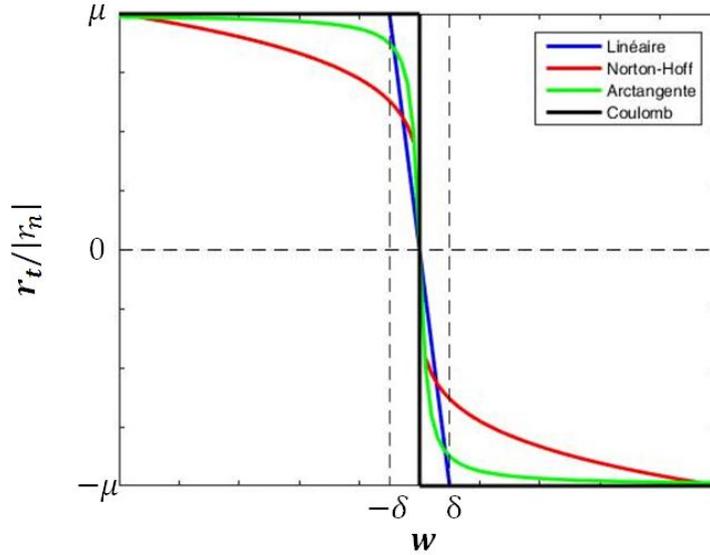


FIGURE 2.2 – Lois de frottement

$$\begin{cases} \|\mathbf{r}_t\| \leq -\mu r_n \\ \|\mathbf{r}_t\| = -\mu r_n \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, \mathbf{w} = -\lambda \mathbf{r}_t \\ \|\mathbf{r}_t\| < -\mu r_n \Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.4)$$

Le frottement de Coulomb fait généralement référence à un frottement à coefficient  $\mu$  constant ou bien bi-évalué : on distingue alors le coefficient de frottement statique  $\mu_s$  lors de l'adhérence et le coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  lors de la phase de glissement.

On constate donc que la loi de Coulomb est non-régulière et non-univoque. Plusieurs propositions ont été faites afin de la régulariser. La plus simple est de définir un seuil en vitesse  $\delta$  et de faire la transition entre les deux sens sur l'intervalle  $[-\delta, \delta]$ . Les autres propositions sont d'utiliser des fonctions de type Arctangente ou de Norton-Hoff afin de régulariser la loi de Coulomb tout en respectant au maximum le comportement. Les graphes de ces lois sont représentées en Figure 2.2.

Les études expérimentales montrent des phénomènes tels que le phénomène d'adhérence, des phénomènes liés à un coefficient statique plus élevé qu'un coefficient dynamique, des effets visqueux, l'effet Stribeck et des effets d'histoire de type cycles hystérésis. Le formalisme de Coulomb permet de prendre en compte ces phénomènes si le coefficient de frottement  $\mu$  est exprimé en fonction de plusieurs variables. On peut citer par exemple les travaux de Stribeck [8] qui suite à des observations expérimentales a modifié le formalisme de Coulomb afin de pouvoir simuler l'effet Stribeck. Il s'agit d'une chute du coefficient de frottement en fonction de la vitesse relative pour de petites vitesses relatives puis une augmentation quasi-linéaire du coefficient pour de plus grandes vitesses. Les effets d'histoire comme le cycle hystérésis sont simulés en utilisant le formalisme adopté par Dahl [9]. Il est basé sur la vitesse relative et le glissement relatif. Ce modèle est modifié afin de prendre en compte l'effet Stribeck [10].

Le bon niveau de complexité à prendre en compte concernant la loi de frottement est un point de discussion majeur dans la littérature scientifique. Nous verrons que certains des effets évoqués ici comme la variation du coefficient de frottement avec la vitesse peuvent avoir des effets importants sur la stabilité des systèmes dynamiques et donc sur

l'occurrence de vibrations auto-entretenues. La loi de Coulomb à coefficient de frottement constant est toutefois suffisante dans de nombreux cas, un coefficient de frottement variable n'est pas indispensable à l'apparition d'instabilités, en particulier pour le phénomène de couplage modal qui sera pris en compte dans cette thèse. Comme dans le cas du contact unilatéral, le choix d'utiliser cette loi en première approche est une manière de privilégier la parcimonie et de ne pas introduire de paramètres à l'aveugle dans les modèles.

### 2.2.3 Problème de contact en dynamique

Pour des systèmes discrets en dynamique, la loi de contact unilatérale en déplacement sera en fait insuffisante à décrire les phénomènes : lors d'un choc (passage d'un état sans contact à état avec contact) il faudra introduire une loi qui lie les vitesses avant et après le choc. On utilise assez souvent une loi de choc inélastique qui impose une vitesse normale nulle après le choc (loi de Signorini-Moreau [11]). Ces chocs introduisent d'ailleurs des discontinuités de vitesse qui rendent l'accélération non définie et les réactions au moment des chocs sont traitées sous forme d'impulsions. Ces considérations devront être prises en compte au moment du choix des schémas d'intégrations temporels [12, 13, 14, 15].

#### Cas des lois régulières

Dans le cas où l'effort de contact frottant est non-linéaire mais peut être exprimé sous la forme d'une fonction régulière des quantités cinématiques  $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})$ , où  $\mathbf{U}$  et  $\dot{\mathbf{U}}$  sont les vecteurs de déplacement et de vitesse, la résolution de l'équation du mouvement fait intervenir des méthodes de prédiction-corrrection. Ces méthodes font intervenir des algorithmes de type Newton-Raphson ou Newton tangent. Le vecteur de force non-linéaire étant régulier, il est possible d'exprimer la jacobienne du résidu de l'équation du mouvement par rapport à la correction en déplacement. Cette correction en déplacement est ensuite calculée et les corrections en vitesse et accélération sont effectuées grâce aux relations du schéma d'intégration numérique [2, 16].

#### Cas des lois non-régulières

Lorsque les lois de contact frottant sont non-régulières, des difficultés d'ordre numérique surviennent. Les lois sont donc non-dérivables en tout point, et l'utilisation d'une méthode de résolution employant les gradients devient complexe. De plus, ces lois permettent l'apparition de choc ou de cycle d'adhérence/glisement. Ces phénomènes mènent à des discontinuités et nécessitent une attention particulière lors de l'intégration numérique : l'utilisation d'un intégrateur du second ordre faisant intervenir l'accélération n'est pas forcément recommandé dans ce cas, en effet l'accélération n'est pas définie lors de l'occurrence d'un choc. Enfin les lois non-régulières de contact frottant ne sont pas bi-univoques : les efforts de contact frottant sont aussi une inconnue du problème. Ainsi, suivant la méthode adoptée, cela peut entraîner une augmentation significative du problème (chaque inconnue cinématique de la zone de contact et associée à une inconnue en effort).

Ainsi on propose d'utiliser une reformulation des lois de Signorini-Coulomb introduites par Duvaut et Lions [13, 17, 18], permettant d'écrire le problème en termes de projections sur des ensembles. Les lois de contact frottant sont donc équivalentes aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} r_n &= \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(r_n - \rho_n g_n) & \forall \rho_n > 0 \\ \mathbf{r}_t &= \text{proj}_{\mathcal{D}(\mu r_n)}(\mathbf{r}_t - \rho_t \mathbf{w}) & \forall \rho_t > 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $\text{proj}_{\mathbb{R}^+}$  est l'opérateur de projection sur les réels positifs tandis que  $\text{proj}_{\mathcal{D}(\mu r_n)}$  est la projection sur le cône de Coulomb qui est l'ensemble des vecteurs dont la composante tangente est de norme inférieure ou égale à  $\mu$  fois la composante normale.  $\rho_n$  et  $\rho_t$  sont des paramètres scalaires arbitraires.

De nombreux travaux ont permis de développer des méthodes pour le traitement numérique de formulation non-régularisée de contact frottant. Une liste non exhaustive de ces travaux peut être retrouvée dans [1, 2]. On peut citer par exemples les méthodes numériques de multiplicateurs de Lagrange ou du Lagrangien augmenté. Dans ces travaux de thèse nous choisissons d'utiliser une méthode du Lagrangien augmenté permettant ainsi de résoudre les Équations 2.6.

### Formulation nœud à nœud en éléments finis

En considérant un nœud se situant à l'interface frottante  $\alpha$  dont le vecteur de déplacement dans le repère local est noté  $\mathbf{U} = (U_t \ U_b \ U_n)^T$  avec  $U_n$  la composante normale du déplacement,  $U_t$  et  $U_b$  les composantes tangentielles. On note aussi  $\mathbf{R}_c = (R_t \ R_b \ R_n)^T$  le vecteur des forces liées au contact frottant. On introduit  $V$  la vitesse de glissement suivant la direction tangentielle  $\vec{t}$  au nœud. Sous certaines hypothèses, on verra qu'on peut réécrire les relations de projections (2.5) afin qu'elles soient adaptées au formalisme éléments finis introduit, les relations suivantes sont alors obtenues :

$$\begin{aligned} R_n &= \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(R_n - \rho_n U_n) & \forall \rho_n > 0 \\ \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} &= \text{proj}_{\mathcal{D}(\mu R_n)} \left( \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} - \rho_t \begin{Bmatrix} \dot{U}_t - V \\ \dot{U}_b \end{Bmatrix} \right) & \forall \rho_t > 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 2.3 Mécanisme de génération des vibrations auto-entretenues

Dans cette section nous nous intéressons aux mécanismes à l'origine des vibrations auto-entretenues induites par frottement sec. Le crissement est encore un sujet de grand intérêt et de nombreux chercheurs ont proposés des modèles permettant d'expliquer la génération d'instabilités dues aux frottements [19, 20, 21, 22]. De nombreux mécanismes ont été proposés pour expliquer l'apparition de ces vibrations dues au frottement que l'on peut aisément retrouver dans la littérature [21, 22, 23]. Quatre mécanismes majeurs peuvent être distingués et peuvent être séparés en deux catégories.

La première permet de mettre en avant l'apparition d'instabilités dues au frottement en raisonnant sur un modèle à un degré de liberté avec un coefficient de frottement non constant. En suivant ces hypothèses l'origine du crissement est expliquée comme étant tribologique et les mécanismes ainsi avancés sont connus comme étant un mécanisme d'adhérence/glisement ou "stick/slip" et une décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement.

La seconde catégorie explique l'importance de la géométrie du système sur l'apparition des vibrations. Le coefficient de frottement reste constant et ce sont des phénomènes liés à la géométrie des systèmes qui produisent les instabilités par l'intermédiaire du frottement. Ces mécanismes sont l'arc-boutement/glisement ou "sprag/slip" et le couplage de modes.

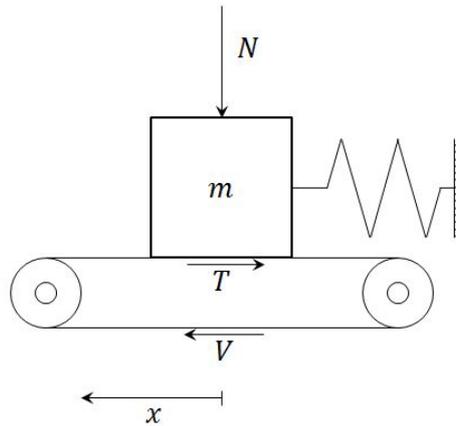


FIGURE 2.3 – Modèle à un degré de liberté

### 2.3.1 Origine tribologique

Plusieurs études traitent de ces mécanismes. On reprend ici les développements proposés par [24, 25, 22] pour le stick-slip et la décroissance du coefficient de frottement. Pour cela, on considère le modèle à un degré de liberté représenté sur la Figure 2.3. Il s'agit d'une masse  $m$  sur un tapis roulant à une vitesse  $V$  et retenue par un ressort de raideur  $k$ . Un effort normal  $N$  maintient la masse en contact avec le tapis. On note  $x$  la position de la masse et  $\dot{x}$  sa vitesse. On note  $V_g = V - \dot{x}$  le vitesse relative entre la masse et le plan. Ce modèle permet de mettre en évidence l'origine des vibrations auto-entretenues selon la loi de frottement utilisée. L'équation de la masse s'écrit :

$$m\ddot{x} + kx = T(V_g) \quad (2.7)$$

avec  $T(V_g)$  la force de frottement non-linéaire.

#### Cas du "stick/slip"

Parmi les lois de frottement, celles qui présentent une discontinuité du coefficient de frottement entre l'état adhérent (coefficient de frottement statique  $\mu_s$ ) et glissant (coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$ ) du système ont longtemps été considérées comme étant à l'origine des instabilités observées. En effet si l'on considère la force non-linéaire  $T(V_g)$  telle décrite en Équation (2.8), le système peut osciller de manière auto-entretenue :

$$\begin{aligned} T(V_g) &= \mu_d N \text{sign}(V_g) \text{ si } V_g \neq 0 \\ |T(V_g)| &\leq \mu_s N \end{aligned} \quad (2.8)$$

Avec  $\text{sign}$  la fonction signe, (la loi de frottement utilisée pour exprimer une telle force non-linéaire est représentée Figure 2.4(a)).

En considérant l'état initial du système comme étant la masse adhérente au tapis ( $V_g = 0$ ) et un ressort faiblement comprimé, le déplacement de la masse entraîne une augmentation de la contrainte de frottement  $T$  jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur limite  $\mu_s N$ . À ce moment la masse commence à glisser sur le tapis avec une force de frottement  $\mu_d N$ . La masse adhèrera de nouveau au tapis lorsque la vitesse de glissement relative  $V_g$  sera nulle et l'effort de frottement  $T$  égalera  $\mu_s N$ .

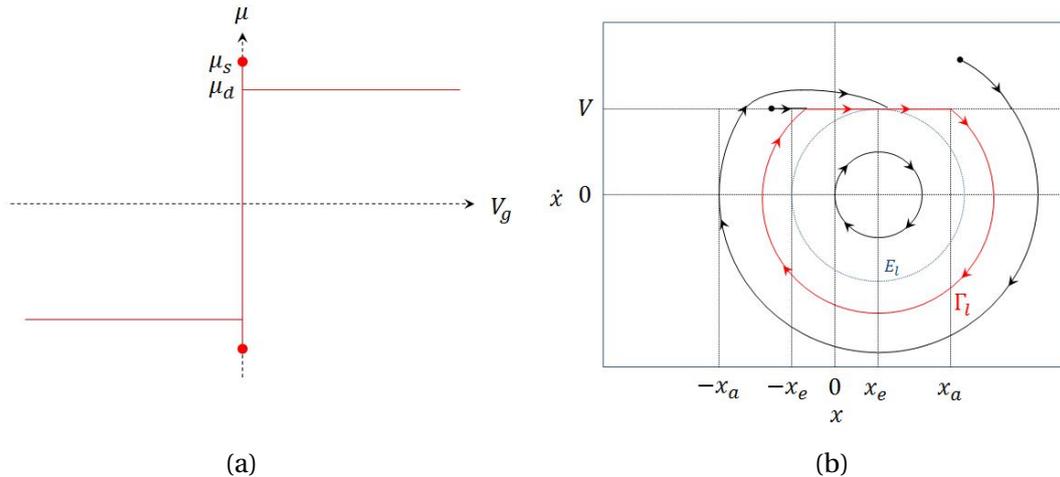


FIGURE 2.4 – (a) Loi de frottement avec discontinuité (b) Évolution dans l'espace des phases avec un phénomène de “stick/slip”

Afin de s'intéresser au comportement du système soumis à une telle force non-linéaire, on introduit l'abscisse d'adhérence  $x_a$  tel que  $T(0) = kx_a$ . Cette abscisse délimite l'état adhérent de l'état glissant du système. On définit aussi l'abscisse  $x_e = \mu_d N/k$  qui représente l'équilibre quasi-statique. On s'intéresse maintenant aux trajectoires possibles du système dans l'espace des phases  $(x, \dot{x})$ . Ainsi dans cette espace l'état adhérent du système est décrit par le segment  $([-x_a, x_a], V)$ . Lorsque la vitesse de glissement  $V_g$  est positive, le système décrit des trajectoires elliptiques centrées sur  $(x_e, 0)$ . Pour  $V_g$  négative, ces trajectoires sont centrées sur  $(-x_e, 0)$ . Selon les conditions initiales, on distingue trois cas :

- Si les conditions initiales se trouvent à l'intérieur de l'ellipse limite  $E_l$  de centre  $(x_e, 0)$  et tangente au segment adhérent  $([-x_a, x_a], V)$ , alors le système est stable et ne sera pas soumis au phénomène d'adhérence/glisement. Il décrit une trajectoire elliptique bornée par  $E_l$ .
- Si les conditions initiales sont prises sur le segment  $([-x_a, x_a], V)$ , la trajectoire du système suit le segment jusqu'au point  $(x_a, V)$  puis décrit une courbe elliptique centrée sur  $(x_e, 0)$  jusqu'à intercepter de nouveau le segment adhérent. La trajectoire qui est alors décrite par le système est la courbe  $\Gamma_l$  sur la Figure 2.4(b).
- Pour toutes les autres conditions initiales, la trajectoire du système a une portion elliptique jusqu'à intercepter le segment adhérent, puis elle décrit la courbe  $\Gamma_l$ .

Ces trois cas sont représentés en Figure 2.4(b). Pour le premier cas, si les conditions initiales correspondent à l'équilibre quasi-statique alors la trajectoire du système correspond au point  $(x_e, 0)$ . Dans le cas présenté, seules les vibrations auto-entretenues sont obtenues du fait que le système ne possède aucun amortissement. Si le système était amorti, les trajectoires elliptiques du premier cas deviendraient des spirales convergentes vers leur centre  $(x_e, 0)$  qui serait alors l'unique point solution stationnaire. Ce modèle historique est donc plus une manière de caractériser les vibrations auto-entretenues de type adhérence/glisement que d'expliquer leur occurrence par une instabilité comme c'est le cas dans le modèle ci-dessous.

### Cas de l'amortissement négatif

En considérant le même système que le paragraphe précédent décrit en Figure 2.3, on définit la nouvelle force non-linéaire  $T(V_g)$  par l'Équation 2.9. Cette force revient à choisir la loi de frottement décrit par la Figure 2.5(a). Ainsi on obtient un système pouvant être soumis à des vibrations auto-entretenues dues à la loi de frottement :

$$\begin{aligned} T(V_g) &= \mu_s(1 - \alpha V_g)N \text{sign}(V_g) \text{ si } V_g \neq 0 \\ |T(V_g)| &\leq \mu_s N \end{aligned} \quad (2.9)$$

Comme pour le cas précédent on définit  $x_e = \mu_s(1 - \alpha V)N/k$  la position de l'équilibre quasi-statique. L'équation du mouvement linéarisée autour de cette position d'équilibre donne alors :

$$m\ddot{x} - \alpha\mu_s N\dot{x} + kx = \mu_s N(1 - \alpha V) \quad (2.10)$$

On constate que la décroissance du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement relative  $V_g$  amène une contribution en amortissement. Cette contribution est négative et est responsable de l'origine des vibrations auto-entretenues. Le point d'équilibre quasi-statique est alors instable. Ainsi en définissant  $x_a$  l'abscisse qui délimite le comportement adhérent du comportement glissant du système, on considère les possibilités de trajectoires d'un tel système dans l'espace des phases :

- Si les conditions initiales se trouvent à l'intérieur de  $\Gamma_1$ , la trajectoire est une spirale divergente jusqu'à interception du segment adhérent  $([-x_a, x_a], V)$ . La trajectoire du système suivra ensuite le comportement  $\Gamma_1$ .
- Si les conditions initiales sont prises sur le segment  $([-x_a, x_a], V)$ , la trajectoire du système suit le segment jusqu'au point  $(x_a, V)$  puis décrit le comportement  $\Gamma_1$  de la même façon que pour le cas du "stick/slip".
- Pour toutes les autres conditions initiales, la trajectoire du système a une portion elliptique jusqu'à intercepter le segment adhérent, puis elle décrit la courbe  $\Gamma_1$ . Ce cas correspond au dernier cas du comportement du "stick/slip".

L'ensemble des trajectoires possibles pour un système soumis à la force de frottement décrite par l'Équation 2.9 est représenté en Figure 2.5(b). Cette fois, l'ajout d'un amortissement infinitésimal ne change pas la stabilité du système. En revanche, en ajoutant un amortissement suffisant on peut stabiliser le système. Le mécanisme à l'origine de la déstabilisation de l'équilibre est appelé amortissement négatif.

### 2.3.2 Origine structurale ou géométrique

On s'intéresse maintenant aux deux mécanismes expliquant l'apparition de vibrations auto-entretenues dans un système mécanique suite à une modification de la géométrie de ce système ou des phénomènes géométriques plus complexes. Dans ce cas les instabilités peuvent apparaître avec une loi de frottement à coefficient constant en fonction de la vitesse de glissement. Le phénomène de "sprag/slip" est un mécanisme d'arc-boutement facilement compréhensible et assez simple à modéliser pour de petits systèmes. Le couplage de modes est beaucoup moins accessible. Dans ces deux cas un phénomène concernant la géométrie du système est à l'origine du crissement.

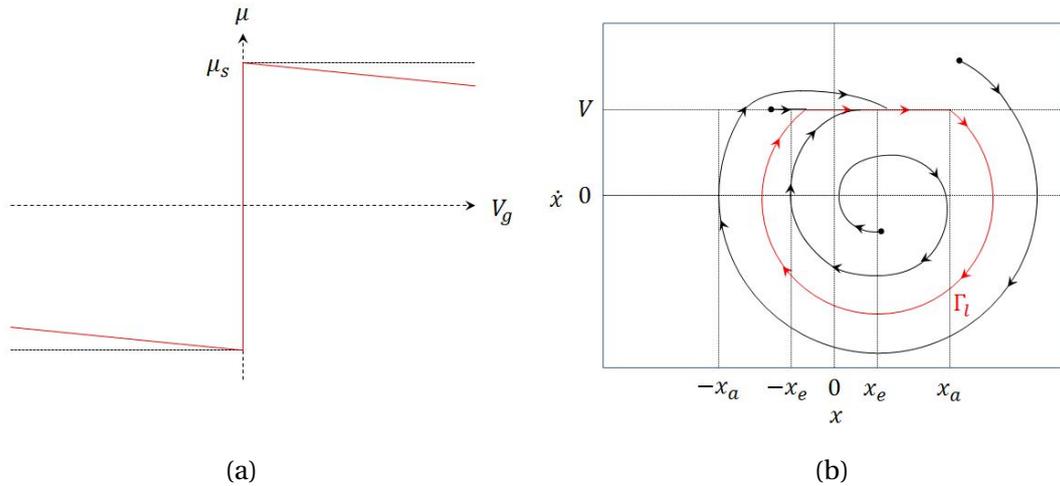


FIGURE 2.5 – (a) Loi de frottement avec décroissance du coefficient de frottement (b) Évolution dans l'espace des phases avec un phénomène de décroissance du coefficient de frottement

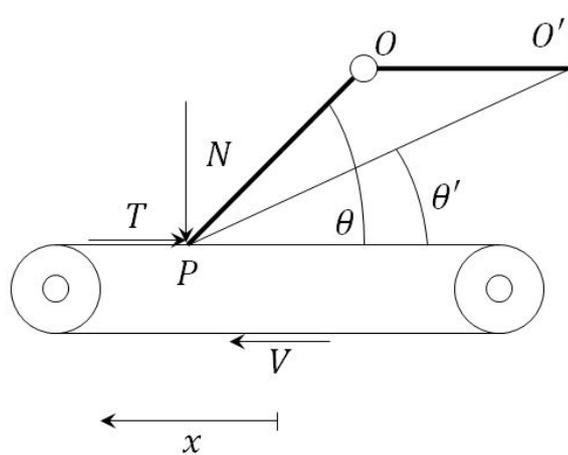


FIGURE 2.6 – Modèle illustrant le “sprag/slip”

### Cas du “Sprag/slip”

Ce mécanisme a été introduit par Spurr [26] et permet de montrer qu'un système soumis à du frottement peut osciller de manière auto-entrenue avec une loi de frottement à coefficient fixe. Les vibrations ont pour origine le changement de géométrie du système. Le système considéré est représenté Figure 2.6. Il est composé de deux poutres. La première est supposée encastree en  $O'$  et reliée à la seconde par une liaison pivot parfaite en  $O$ . L'autre extrémité de la seconde poutre est en contact frottant en  $P$  sur un tapis glissant à la vitesse  $V$ . Le coefficient de frottement  $\mu$  de la loi de frottement est constant. On note alors  $N$  l'effort normal et  $T$  l'effort de frottement appliqué en  $P$ . En supposant la poutre encastree en  $O'$  il est possible d'exprimer l'effort tangentiel  $T$  en fonction de l'angle  $\theta$  [26] :

$$T = \frac{\mu N}{1 - \mu \tan(\theta)} \quad (2.11)$$

On s'intéresse maintenant au mouvement du système. Le point  $P$  glisse sur le tapis et l'angle  $\theta$  se rapproche de la valeur  $\arctan(1/\mu)$ , l'effort  $T$  devient alors suffisamment im-

portant pour bloquer le mouvement. La phase d'arc-boutement du cycle est alors amorcée. Par conséquent, la liaison en  $O'$  n'est plus considérée comme un encastrement mais comme une pivot parfaite et on se retrouve avec une barre rigide  $O'P$ . L'angle  $\theta$  de l'expression (2.11) prend alors la valeur bien plus faible  $\theta'$ , ce qui provoque une diminution soudaine de l'effort tangent  $T$ , le point  $P$  glissant à nouveau sur le tapis.

On note que le système décrit par le Figure 2.3 permet d'illustrer des phénomènes de "sprag/slip" si l'on considère l'effort de frottement suivant :

$$T(V_g) = T(x) = \mu Kx \quad (2.12)$$

avec  $\mu$  un coefficient de frottement constant. Le système est alors stable si  $K < k/\mu$ . Ces deux modèles permettent donc d'expliquer l'apparition de vibrations auto-entretenues dans un système soumis au frottement avec une loi de frottement à coefficient constant. En revanche la modélisation effectuée par Spurr implique que le système étudié doit être relativement simple pour pouvoir exprimer la relation entre l'effort de frottement et les changements géométriques du système.

### Cas du couplage de modes

La notion de couplage de modes a été introduite par Oden et Martins dans [7] suite à l'observation d'un couplage entre les directions normale et tangentielles effectuée dans [27, 28]. Ainsi plusieurs études [29, 30, 31] ont proposé des modèles à deux dimensions pour mettre en évidence le couplage de modes. En effet, contrairement aux instabilités d'origine tribologique, le couplage de modes nécessite au moins deux degrés de liberté. Pour bien appréhender ce mécanisme, on présente maintenant le modèle de Hoffmann étudié dans [29] en Figure 2.7. Sa dynamique est gouvernée par l'équation suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\mu)\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

avec  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur et  $\mathbf{K}_\mu$  la matrice liée à la réaction de frottement définies ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_\mu &= \begin{bmatrix} 0 & \mu k_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

où  $k_{11} = k_1 \cos^2(\alpha_1) + k_2 \cos^2(\alpha_2)$ ,  $k_{12} = k_1 \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) + k_2 \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_2)$  et  $k_{22} = k_1 \sin^2(\alpha_1) + k_2 \sin^2(\alpha_2) + k_3$ . On remarque que la matrice liée à la réaction de frottement engendre une dissymétrie de la matrice de raideur du système. L'instabilité du système est apportée par cette dissymétrie.

Ainsi pour connaître l'occurrence des vibrations auto-entretenues, une analyse des valeurs propres complexes du système est menée. Le système 2.13 est alors résolu avec  $\mathbf{U} = \phi e^{\lambda t}$ . On détermine ainsi les valeurs propres complexes  $\lambda = a + i\omega$ .  $\omega$  correspond à la pulsation du mode et détermine la fréquence du mode.  $a$  correspond à la partie réelle de la valeur propre et permet d'analyser la stabilité du système. Si la partie réelle d'une des valeurs propres du système devient positive alors le système est instable et est soumis à des oscillations divergentes.

Les Figures 2.8(a) et 2.8(b) représentent l'évolution des parties réelles et des fréquences en fonction du coefficient de frottement  $\mu$ . Les paramètres choisis pour cette simulation

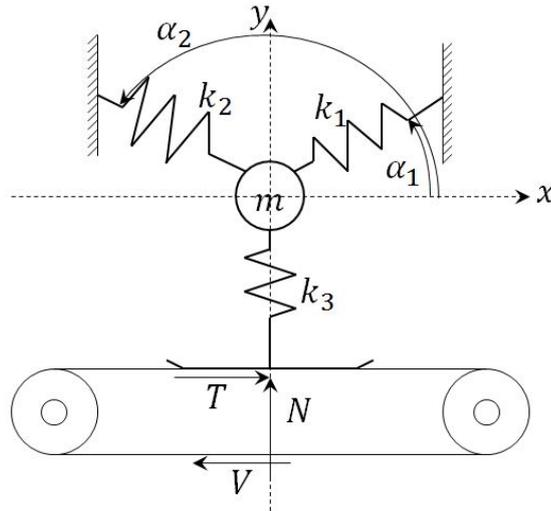


FIGURE 2.7 – Modèle minimal de Hoffmann

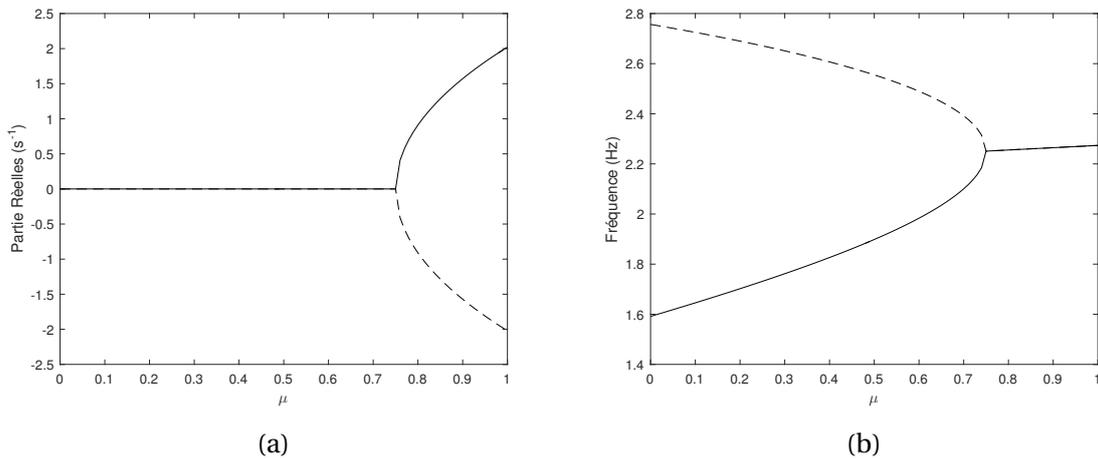


FIGURE 2.8 – Évolution (a) des parties réelles et (b) des fréquences en fonction du coefficient de frottement

sont :  $m = 0.01\text{kg}$ ,  $\alpha_1 = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$ ,  $k_1 = k_2 = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{3})\text{N/m}$  et  $k_3 = \frac{4}{3}\text{N/m}$ . Sur la Figure 2.8(b), les modes coalescent pour un coefficient de frottement  $\mu_c = 0.75$ . Pour ce coefficient de frottement critique on observe une bifurcation de Hopf sur la Figure 2.8(a) [2, 32], et une valeur propre voit sa partie réelle devenir positive ce qui entraîne une déstabilisation du système. Le mode instable est le mode avec la fréquence de 1.592 Hz pour un coefficient de frottement nul.

### 2.3.3 Instabilités, cycles limites et généralisation à des modèles éléments finis

Différents phénomènes permettant d'expliquer l'occurrence d'instabilité d'un système menant au crissement ont été expliqués, ils sont résumés dans cette section en différenciant les phénomènes expliquant l'origine de l'instabilité et ceux permettant seulement de décrire un cycle limite. Ces conclusions permettent ensuite d'introduire un modèle académique qui sert de base de travail pour ces travaux de thèse. Seuls des modèles mi-

nimalistes ont été présentés, une généralisation à des modèles éléments finis est par la suite entreprise.

### **Instabilités et cycles limites**

Les mécanismes expliqués permettant de mettre en évidence l'origine des instabilités vibratoires liées au crissement sont au nombre de deux. En effet on a vu qu'une variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement est un des mécanismes permettant d'expliquer l'origine tribologique de l'apparition des instabilités. Le second mécanisme est le couplage de modes. Un couplage entre les directions tangentielle et normale permet d'expliquer de manière géométrique l'origine des instabilités.

Le modèle de Spurr [26] permet de décrire un cycle limite de type arc-bouttement/glissement mais pas l'origine de l'instabilité elle-même. En effet il s'agit d'un modèle dont l'application à un système physique peut se révéler difficile. Les modèles à 1 degré de liberté avec une variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement quant à eux illustrent des cycles limites qui sont qualifiés d'adhérence/glissement. Comme vu précédemment cette variation entraîne une phase d'adhérence.

Enfin le couplage de mode peut aussi illustrer des cycles limites d'adhérence/glissement comme du décollement/glissement. Le modèle d'Hoffman présenté dans l'état de l'art ne permet pas de mettre en évidence ces cycles limites à cause de la présence d'une raideur linéaire de contact. En revanche si la raideur de contact est cubique, il est possible d'observer une montée en divergence des niveaux vibratoires jusqu'à une saturation de ceux-ci. Cette saturation peut être due au contact frottant. Une non-linéarité entrainerait un régime stationnaire car permettrait de saturer les réactions de contact frottant.

Il est possible aussi de s'abstenir de la raideur de contact comme le fait Moiro [12] (masse maintenue par trois raideurs en contact sur un plan glissant). Ainsi suivant les paramètres du système choisit la non-linéarité peut se révéler être de l'adhérence de la masse sur le plan frottant ou un décollement de la masse. Dans [12], le mécanisme à l'origine des instabilités est le couplage de modes et les cycles limites obtenus sont aussi bien des cycles décollement/glissement que des cycles adhérence/glissement.

Ces conclusions nous amènent alors à établir un modèle minimal plus représentatif. Il semblerait que le mécanisme de couplage de modes soit le plus intéressant pour expliquer l'origine des vibrations auto-entretenues de crissement. En effet en modélisant intelligemment le système il est alors possible d'obtenir des cycles limites de deux types différents. Dans [12], le système utilisé est une masse maintenue par trois raideurs sur un plan glissant. Un couplage de modes permet de mettre en évidence des cycles limites de type décollement/glissement comme d'adhérence/glissement mais aussi d'obtenir des résultats différents selon l'hypothèse de frottement utilisée (frottement plan et rectiligne). Cependant ce modèle ne possède pas d'amortissement structural. Hors l'amortissement est l'un des paramètres prédominant dans l'établissement des vibrations auto-entretenues [31, 33], c'est pourquoi dans cette thèse on propose un modèle académique qui sert de base pour le développement des outils d'analyse non-linéaire, en s'inspirant du modèle de Moiro et en ajoutant de l'amortissement. Ce modèle est présenté au Chapitre 3.

### **Généralisation à des modèles éléments finis**

De nombreux travaux sur le crissement de frein utilisant une modélisation de type éléments finis ont été menés [1, 2, 34]. Si l'on suppose que le crissement est dû au phé-

nomène de couplage de modes (cf. Section 2.3), la première étape de l'étude des phénomènes crissants correspond à l'analyse de stabilité de l'équilibre quasi-statique glissant. Cette analyse consiste à calculer les valeurs propres complexes du système linéarisé autour de la position d'équilibre et permet de statuer sur l'occurrence des phénomènes de vibrations auto-entretenues en étudiant la partie réelle des valeurs propres. Si l'une des parties réelles est positive alors le système est soumis à des vibrations auto-entretenues et des phénomènes de crissement peuvent survenir. Même si cette première étape est essentielle dans le processus de conception, permettant en outre de clarifier la propension à crisser, elle n'est pas suffisante à décrire précisément le comportement vibratoire et les vibrations auto-entretenues menant au crissement [35].

En effet, ces vibrations sont les résultats d'effets purement non-linéaires, plus précisément ceux qui se produisent dans la zone de contact, comme par exemple des phénomènes de contact/décollement (perte de contact) ou d'adhérence/glisement. Par conséquent une seconde étape primordiale correspond à une analyse non-linéaire du problème et amène à calculer le niveau vibratoire et le spectre des vibrations auto-entretenues lors de l'apparition du crissement. Des résultats plus réalistes peuvent alors être trouvés par l'intermédiaire de ce type d'analyse non-linéaire [35, 36].

## 2.4 Le phénomène de crissement

Le crissement est caractérisé comme un bruit émis par une structure dotée d'une interface frottante. Ce bruit peut être considéré comme une nuisance sonore. L'origine du crissement est vibratoire : le système de freinage est soumis à des vibrations auto-entretenues qui sont à l'origine de la nuisance sonore. Ces vibrations sont dues aux mécanismes se situant à l'interface frottante. Ainsi l'étude du crissement peut être effectuée à deux échelles : l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. L'échelle microscopique permet de déterminer les phénomènes se produisant à l'interface frottante. L'échelle macroscopique permet de mettre en évidence la déstabilisation de l'équilibre statique du système et l'occurrence potentielle de vibrations auto-entretenues.

### 2.4.1 Domaine automobile et aéronautique

On peut généralement regrouper les bruits de freinage ayant pour origine des vibrations auto-entretenues en trois catégories :

- *Le bourdonnement (“hum”) ou ronflement (“moan”).* Les vibrations à l'origine de ces bruits sont caractérisées par des basses fréquences de l'ordre de 100 à 500 Hz et des amplitudes fortes. Le mécanisme à l'origine de ces vibrations est une instabilité de type géométrique. En effet les constituants du frein sont considérés comme des solides rigide, et l'instabilité est due au couplage du déplacement normal et du déplacement tangentiel de l'étrier. Ce couplage est possible grâce aux éléments de liaison de l'étrier au châssis. Ce mécanisme à coefficient de frottement constant est appelé “sprag/slip” ou arc-boutement/glisement et a été introduit par Spurr [26]. Ce phénomène peut aussi se retrouver sur des freins d'avions. Dans ce cas l'instabilité est due à la rotation du disque de freinage autour de deux axes autres que l'axe de révolution [37].
- *Le broutement (“groan”).* Ce sont des vibrations basses fréquences (supérieur à 100 Hz) se produisant pour une faible vitesse de glissement. Ici aussi les éléments du

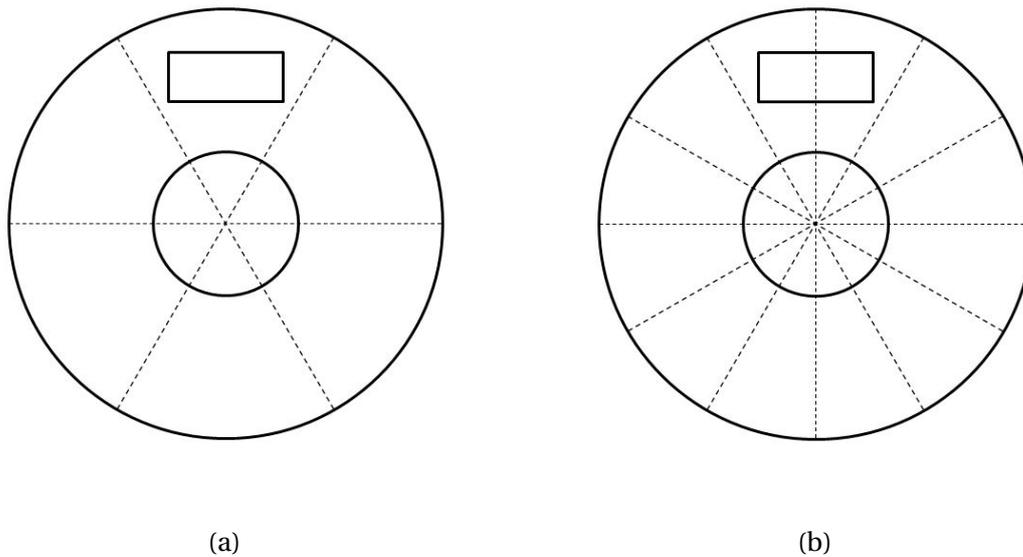


FIGURE 2.9 – (a) Mode axial à 3 diamètres nodaux (crissement basse fréquence) (b) Mode axial à 6 diamètres nodaux (crissement haute fréquence)

freins sont considérés comme des solides rigides. Cependant l'origine des vibrations est due à la variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement. Les comportements alors identifiés sont du “stick/slip” ou adhérence/glisement du porte-garniture par rapport au disque que l'on peut retrouver dans [19].

- *Le crissement (“squeal”)*. Le crissement caractérise une vibration auto-entretenue du frein possédant un spectre de raies composé d'une ou plusieurs fréquences fondamentales et de ses ou leurs harmoniques. Ce phénomène est expliqué par le verrouillage de modes ou “mode lock-in” introduit par Akay [38]. Les fréquences mises en jeu sont supérieures à 1000 Hz et l'on distingue deux types de crissement. Le crissement basse fréquence (entre 1 et 5 kHz) implique des modes à 4 diamètres nodaux maximum, la longueur de la garniture est donc plus petite que l'espace inter-diamètres nodaux (comme représenté Figure 2.9(a)). Le crissement haute fréquence (supérieur à 5 kHz) implique des modes à au moins 5 diamètres nodaux, par conséquent la longueur de la garniture est plus grande que l'espace inter-diamètres nodaux (comme représenté Figure 2.9(b)). Ainsi il a été montré qu'une instabilité de type géométrique permet de modéliser ces phénomènes haute fréquence [19].

## 2.4.2 Domaine ferroviaire

Dans le domaine ferroviaire deux types de crissement sont distingués :

- *Le crissement en courbe*. Ce crissement a lieu lorsque le véhicule ferroviaire entre dans une courbe. L'angle d'attaque imposé aux roues par la dynamique du véhicule dans une courbe est associé avec une force de frottement latérale. Cette force engendre une dynamique instable de la roue et mène à des vibrations auto-entretenues et donc du crissement [39]. Le crissement en courbe est composé d'une ou plusieurs fondamentales comprises entre 400 Hz et 10 kHz avec des niveaux vibratoires compris entre 105 – 110 dB à 7,5 m du centre de la piste [40] soit 15 à 20 dB supérieur au bruit de roulement.

- *Le crissement de freinage.* Ce crissement a lieu lors du freinage du véhicule ferroviaire. Des essais ont été menés dans la thèse de Loyer ou Lorang [1, 2] permettant de caractériser ce bruit de freinage. Ce phénomène vibratoire comporte une ou plusieurs fondamentales comprises entre 1000 Hz et 15 kHz. Lors de l'arrêt du véhicule certaines fondamentales peuvent évoluer (changement de fréquence), ou disparaître. Lors de ces essais, Loyer mesure l'évolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement et observe une pente négative. Il indique alors qu'en plus du couplage de modes, une origine tribologique du crissement est possible. Sur une deuxième série d'essais pour laquelle la vitesse de glissement est maintenue constante, il observe les mêmes fondamentales que pour les précédents essais et suppose alors que même si le crissement peut avoir une origine tribologique, le mécanisme principal de l'occurrence de ce phénomène vibratoire est le couplage de modes. L'analyse non-linéaire de système soumis à des vibrations auto-entretenues dues au frottement est effectuée en utilisant un schéma d'intégration numérique. Le système est initialisé proche de sa position d'équilibre quasi-statique puis son évolution temporelle est calculée à l'aide du schéma d'intégration. Il est constaté que l'évolution des amplitudes des vibrations augmentent exponentiellement jusqu'à apparition de non-linéarités (décollement/choc ou adhérence). Ces phénomènes complexes permettent l'établissement d'un régime stationnaire [41]. L'évolution temporelle du système est alors composée d'une phase transitoire où des phénomènes non-linéaires font leur apparition et d'une phase de régime établi où l'évolution du système est périodique ou quasi-périodique.

## 2.5 Intégration numérique avec contact frottant

Comme introduit précédemment, une analyse de stabilité ne permet pas de déterminer les niveaux vibratoires et la fréquence d'excitation d'un système soumis à des vibrations auto-entretenues [35]. Pour ce faire une analyse non-linéaire semble nécessaire afin de déterminer l'occurrence de phénomènes non-linéaires tels que des cycles décollement/choc ou bien adhérence. Les calculs des vibrations sont généralement effectués par intégration numérique dans le domaine temporel [1, 16, 42, 43, 44, 45, 46] à partir de conditions initiales proches de l'équilibre ou en utilisant des chargements progressifs.

Une analyse détaillée pertinente des différentes méthodes est effectuée dans la thèse de Vermot des Roches [16]. Un grand nombre des éléments proposés dans cette section en est inspiré sous une forme plus synthétique ou avec des compléments. On s'intéresse à l'évolution temporelle du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) - \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t) = \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{U}}(0), \dot{\mathbf{U}}(0), \mathbf{U}(0) \\ \text{Conditions limites sur } \mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement visqueux et de raideur supposées constantes dans le temps.  $\mathbf{U}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  et  $\ddot{\mathbf{U}}$  sont respectivement le déplacement, la vitesse et l'accélération de la structure considérée.  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  correspond aux forces linéaires externes au système alors que  $\mathbf{F}_{\text{NL}}$  représente les forces non-linéaires dans la structure et dépendent du temps et du champ cinématique. Dans le cadre des vibrations en présence de contact frottant qui nous intéressent ici, ces forces sont les réactions de contact et les forces de frottement à l'interface. Dans le cas de lois régulières, la notation  $\mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, t)$  est appropriée. Dans le cas de lois non régulières, la relation entre  $\mathbf{F}_{\text{NL}}$  et  $\mathbf{U}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$

n'est pas bi-univoque et il faut ajouter des relations de contact type (2.6).

Les schémas d'intégration temporelle numérique permettent de déterminer une réponse temporelle en effectuant une discrétisation du temps. Ces schémas sont utilisés lorsque la structure est trop complexe pour que son équation du mouvement soit intégrée analytiquement. Des méthodes de discrétisation sont alors utilisées et l'on parle alors de méthode de type *éléments finis en temps* ou *différences finies*.

Les schémas de différences finies sont généralement basés sur des quadratures numériques. Ainsi les quantités cinématiques à un instant  $t_i$  sont calculées en fonction des quantités aux pas de temps précédents et suivants. On distingue alors deux types de schémas. Les schémas dits explicites où les quantités cinématiques du pas  $t_{i+1}$  dépendent uniquement des quantités aux pas de temps précédents  $f(t_{i+1}) = G(t_0, \dots, t_i)$ . Les schémas implicites quand à eux ont besoin des quantités aux pas de temps suivants pour calculer les quantités cinématiques au pas  $t_{i+1}$ , on a alors  $f(t_{i+1}) = G(t_0, \dots, t_i, \dots, t_N \geq t_{i+1})$ .

Trois qualités sont recherchées pour un schéma d'intégration. La première est appelée la consistance. On dit que sur un intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$  de longueur  $h$ , un schéma est consistant si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{h} = \dot{\mathbf{U}}(t_i) \quad (2.16)$$

La deuxième s'appelle la stabilité. Un schéma d'intégration est dit stable s'il existe un pas d'intégration  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $h \in [0, h_0]$ , une variation finie du vecteur d'état au temps  $t_i$  induit seulement une variation bornée du vecteur d'état calculé à un instant subséquent  $t_{i+j}$  [47]. Lorsque le schéma d'intégration est explicite, sa stabilité est généralement conditionnelle. Un des critères de stabilité usuellement utilisé est la condition de Courant qui lie la discrétisation spatiale et temporelle. Cependant les schémas d'intégration ont tendance à devenir coûteux dès que la discrétisation spatiale se raffine.

Enfin la troisième s'appelle la conservation d'énergie. Un algorithme est dit conservatif si le bilan de puissance de la structure étudiée est respecté. En d'autres termes cela correspond à l'absence d'amortissement numérique induit par le schéma d'intégration.

Dans cette section, seront présentés dans un premier temps, les schémas de premier ordre pour résoudre un modèle en variable d'état puis les schémas de second ordre et enfin la  $\theta$ -méthode.

### 2.5.1 Schémas de premier ordre pour des modèles en variable d'état

L'équation du second ordre (2.15) en linéaire peut généralement être réécrite sous forme d'équation du premier ordre grâce à la formulation en variable d'état, on a alors :

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{AZ}(t) + \mathbf{B} = \mathbf{G}(\mathbf{Z}, t) \quad (2.17)$$

avec  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{U}^T \quad \dot{\mathbf{U}}^T\}^T$  le vecteur en variable d'état.

#### Méthode de Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta est un schéma d'intégration temporelle qui peut à la fois être implicite ou explicite. L'équation (2.17) est alors résolue sur une période  $T$  discrétisée en plusieurs intervalle de temps de longueur  $h$  ( $0 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < T$ ). On rappelle que la réponse exacte de  $\mathbf{Z}^{i+1} = \mathbf{Z}(t_{i+1})$  est donnée par :

$$\mathbf{Z}^{i+1} = \mathbf{Z}^i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{Z}}(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

Ainsi le but d'un schéma d'intégration est d'estimer l'intégrale à l'aide d'une quadrature numérique. Le schéma de Runge-Kutta se base alors sur une combinaison linéaire des vitesses dans le pas de temps  $I = [t_i, t_{i+1}]$ . On a alors :

$$\mathbf{Z}^{i+1} = \mathbf{Z}^i + h \sum_{n=1}^s b_n \mathbf{k}_n \quad (2.19)$$

où

$$\mathbf{k}_n = \mathbf{G} \left( \mathbf{Z} + h \sum_{j=1}^s a_{nj} \mathbf{k}_j, t_i + c_n h \right), \quad n = 1, \dots, s \quad (2.20)$$

Les coefficients  $b_n$ ,  $c_n$  et  $a_{nj}$  sont donnés par le tableau de Butcher [48] :

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} = \frac{\mathbf{c} \mid \mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} \quad (2.21)$$

Le schéma de Runge-Kutta est alors consistant si  $\sum_{j=1}^s a_{nj} = c_n$  pour  $n = 2, \dots, s$ .

Ainsi exprimé le schéma est implicite et nécessite la résolution d'un système algébrique à chaque étape de calcul ce qui entraîne un coût de calcul non-négligeable. En effet si l'on souhaite une résolution en  $s$  étapes pour une structure ayant  $N$  degrés de liberté (par conséquent  $\mathbf{Z}$  est un vecteur de taille  $2N \times 1$ ) alors le système d'équations algébriques à résoudre à chaque étape a  $2Ns$  composantes.

Le schéma explicite est obtenu en conservant seulement les coefficients  $a_{nj}$  pour  $j < n - 1$ . Ce qui rend la matrice  $\mathbf{A}$  triangulaire inférieure.

### Schéma d'Euler

Le schéma d'Euler introduit un paramètre  $\theta$  permettant d'approximer l'intégrale de l'Équation (2.18) de la manière suivante.

$$\mathbf{Z}^{i+1} = \mathbf{Z}^i + h(1 - \theta)\dot{\mathbf{Z}}^i + h\theta\dot{\mathbf{Z}}^{i+1} + \mathbf{r}^i \quad (2.22)$$

où  $\mathbf{r}^i$  est l'erreur de la quadrature en vitesse. Elle est déterminée en utilisant les développements de Taylor suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}^i = \dot{\mathbf{Z}}(\tau) + \ddot{\mathbf{Z}}(t_i - \tau) + \mathbf{Z}^{(3)}(\tau) \frac{(t_i - \tau)^2}{2} + \mathcal{O}(h^3 \mathbf{Z}^{(4)}) \\ \dot{\mathbf{Z}}^{i+1} = \dot{\mathbf{Z}}(\tau) + \ddot{\mathbf{Z}}(t_{i+1} - \tau) + \mathbf{Z}^{(3)}(\tau) \frac{(t_{i+1} - \tau)^2}{2} + \mathcal{O}(h^3 \mathbf{Z}^{(4)}) \end{cases} \quad (2.23)$$

L'expression de la vitesse en  $\tau$  peut être alors formulée :

$$\dot{\mathbf{Z}}(\tau) = (1 - \theta)\dot{\mathbf{Z}}^i + \theta\dot{\mathbf{Z}}^{i+1} + (\tau + \theta h - t_i)\ddot{\mathbf{Z}}(\tau) + \mathcal{O}(h^2 \mathbf{Z}^{(3)}) \quad (2.24)$$

En utilisant l'expression (2.18) on obtient le résidu :

$$\mathbf{r}^i = \left( \theta - \frac{1}{2} \right) h^2 \ddot{\mathbf{Z}}(\bar{\tau}) + \mathcal{O}(h^3 \mathbf{Z}^{(3)}) \quad (2.25)$$

Pour déterminer les quantités cinématiques à l'instant  $t_{n+1}$ , le système devient :

$$\begin{cases} (h\theta\mathbf{I} + \mathbf{A})\dot{\mathbf{Z}}^{i+1} = \mathbf{A}(\mathbf{Z}^i + h(1-\theta)\dot{\mathbf{Z}}^i) + \mathbf{B} \\ \mathbf{Z}^{i+1} = \mathbf{Z}^i + h(1-\theta)\dot{\mathbf{Z}}^i + h\theta\dot{\mathbf{Z}}^{i+1} \end{cases} \quad (2.26)$$

le calcul de  $\dot{\mathbf{Z}}^{i+1}$  donne accès à la valeur de  $\mathbf{Z}^{i+1}$ .

Si  $\theta = 0$  le schéma est explicite et est connu comme étant un schéma de *Euler forward*. Il est conditionnellement stable [47]. Si  $\theta = 1$  alors le schéma est purement implicite et est appelé schéma *Euler backward*. Ce schéma est inconditionnellement stable et montre un large amortissement numérique. Si  $\theta = 1/2$ , le schéma est inconditionnellement stable est conservatif. En utilisant l'Équation (2.25) on observe que l'erreur du résidu est augmentée d'un ordre ce qui assure une meilleure précision [16]. Dans [47] on évoque alors un schéma *loi trapézoïdale*.

### Schéma de Krenk

L'avantage du formalisme en espace d'état est de séparer les déplacements des vitesses. Cela permet de relaxer la relation mathématique de dérivation entre les deux variables et ainsi d'obtenir une meilleure précision et stabilité. Krenk dans [49] propose alors un schéma d'intégration avec un contrôle d'énergie. L'idée principale est d'intégrer par partie et séparément les vitesses des déplacements. En posant  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{U}}$  l'Équation (2.18) devient alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{V}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Selon l'Équation (2.27), le déplacement  $\mathbf{U}$  et la vitesse  $\mathbf{V}$  sont considérés séparément pour intégrer le vecteur de variables d'états. Cette distinction entraîne le fait que  $\dot{\mathbf{U}}$  et  $\mathbf{V}$  sont deux variables distinctes. L'intégration de  $\dot{\mathbf{U}}$  et  $\dot{\mathbf{V}}$  est effectuée en écrivant :

$$\begin{cases} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{U}}(\tau) d\tau = \Delta\mathbf{U} = \mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^i \\ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{V}}(\tau) d\tau = \Delta\mathbf{V} = \mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{V}^i \end{cases} \quad (2.28)$$

Les équations précédentes (2.28) requièrent alors l'évaluation de  $\mathbf{U}^{i+1}$  et de  $\mathbf{V}^{i+1}$ . Pour ce faire une intégration par partie est envisagée en choisissant de dériver la fonction et en intégrant 1 comme  $\int 1 d\tau = (t - t_i - \frac{h}{2})$ . Ensuite les quantités dans les intégrales sont remplacées par leur égalité donnée par le système (2.27). Une interpolation de type élément finis est ensuite utilisée. On se place dans un contexte d'une variation linéaire des quantités cinématiques sur le pas de temps. On a alors :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(\tau) \approx \frac{t_{i+1}-\tau}{h} \mathbf{U}^i + \frac{\tau-t_i}{h} \mathbf{U}^{i+1} \\ \mathbf{V}(\tau) \approx \frac{t_{i+1}-\tau}{h} \mathbf{V}^i + \frac{\tau-t_i}{h} \mathbf{V}^{i+1} \end{cases} \quad (2.29)$$

Le schéma d'intégration de Krenk résultant de toutes les opérations précédentes est donc :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} + \frac{h}{2}\mathbf{K} & \mathbf{M} - \frac{h^2}{12}\mathbf{K} \\ \mathbf{M} - \frac{h^2}{12}\mathbf{K} & -\frac{h}{2}\mathbf{M} - \frac{h^2}{12}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{i+1} \\ \mathbf{V}^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} - \frac{h}{2}\mathbf{K} & \mathbf{M} - \frac{h^2}{12}\mathbf{K} \\ \mathbf{M} - \frac{h^2}{12}\mathbf{K} & \frac{h}{2}\mathbf{M} - \frac{h^2}{12}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^i \\ \mathbf{V}^i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}_{\text{ext}}(\tau) d\tau \\ -\frac{h^2}{12} \Delta\mathbf{F}_{\text{ext}} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Ce schéma d'intégration numérique présente alors de bonnes propriétés mathématiques de précision et de stabilité. Ces propriétés sont dues au traitement séparé des déplacements et des vitesses permettant alors d'obtenir une consistance du quatrième

ordre pour un modèle linéaire. On note aussi que ce formalisme permet d'introduire un moyen de contrôler l'amortissement.

### Schéma de Galerkin discontinu

Le schéma de Galerkin discontinu a été introduit par Hulbert *et al.* [50]. Ce schéma permet d'intégrer des discontinuités qui ont lieu entre deux pas de temps. Pour ce faire la représentation du système peut changer entre deux intervalles de temps si une projection existe entre les deux modèles. Ainsi Aubry *et al.* ont utilisé ce schéma pour étudier la propagation d'une onde dans un solide élastique 3D [51, 52] : le maillage est seulement raffiné sur le front d'onde ce qui permet d'obtenir un bon compromis entre la taille du modèle éléments finis et le raffinement du maillage. L'intérêt d'un tel schéma est de bien prendre en compte les discontinuités en déplacements.

Une discrétisation en temps et espace est utilisée pour une meilleure intégration de l'équation du mouvement. Des discontinuités en vitesses et déplacements pouvant être présentes, il est intéressant de traiter ces deux variables séparément comme proposé dans le schéma de Krenk. Ensuite un correcteur-prédicteur est utilisé pour déterminer les déplacements et vitesses aux instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . On remarque alors que l'on cherche à déterminer 4 variables en même temps, alors que le problème initial était de déterminer une seule variable par pas de temps ce qui rend le schéma de Galerkin discontinu quatre fois plus grand.

L'un des avantages de ce schéma est de pouvoir prendre en compte des discontinuités spatiales grâce à un maillage adaptatif. Ainsi son application aux problèmes non-linéaires du crissement, où de fortes non-linéarités dues au contact frottant sont observées, est étudiée. Hulbert dans [50] applique le schéma de Galerkin discontinu dans le cas d'impact. Mancuso a implémenté le schéma de Galerkin discontinu pour des cas non-linéaires plus généraux. Ainsi dans [53] les schémas de prédiction-correction sont reformulés afin d'utiliser un algorithme de Newton-Raphson et il est observé que les forces non-linéaires doivent être correctement intégrées.

Un problème d'utiliser des schémas formulés en variables d'état est que la taille du système est doublée comparé à la formulation de premier ordre, ce qui peut engendrer une augmentation du coût de calcul lors de l'étude de modèles industriels où les degrés de liberté sont nombreux. De plus peu d'études emploient ces schémas d'intégration dans le cas d'intégration temporelle de systèmes non-linéaires correspondant à des problèmes de crissement. Ainsi malgré leurs propriétés de stabilité et de précision pour des modèles éléments finis, ces schémas ne sont pas retenus pour la suite de l'étude.

### 2.5.2 Schémas à différences finies de second ordre

Pour cette partie on suppose que les lois de contact frottant sont régularisées, l'accélération du système est donc continue. Ainsi des schémas d'intégration du second ordre peuvent être utilisés. Généralement ces schémas sont définis en accélération ou déplacement. L'avantage des schémas du second ordre est qu'ils permettent de résoudre directement une équation différentielle du second ordre tel que (2.15). Par conséquent si les lois de contact frottant sont régularisées, ces schémas peuvent être utilisés pour intégrer le système. Dans cette section sont présentés le schéma de Newmark dans le cas linéaire et non-linéaire et une de ses modifications proposée par Hilber Hughes et Taylor.

### Schéma de Newmark dans le cas linéaire

Ce schéma a été introduit par Newmark [54]. Contrairement aux schémas de premier ordre il utilise une quadrature en accélération pour pouvoir calculer exactement la vitesse et le déplacement :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}^i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{\mathbf{U}}(\tau) d\tau \\ \mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i + h\dot{\mathbf{U}}^i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{\mathbf{U}}(\tau) d\tau \end{cases} \quad (2.31)$$

Afin de calculer les deux intégrales, la quadrature pour les vitesses est paramétrée par  $\gamma$  et celle pour les déplacements par  $\beta$  on a alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}^i + h(1-\gamma)\ddot{\mathbf{U}}^i + h\gamma\ddot{\mathbf{U}}^{i+1} + \mathbf{r}^i \\ \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}^i + h\dot{\mathbf{U}}^i + h^2(\frac{1}{2}-\beta)\ddot{\mathbf{U}}^i + h^2\beta\ddot{\mathbf{U}}^{i+1} + \mathbf{r}'^i \end{cases} \quad (2.32)$$

où les termes  $\mathbf{r}^i$  et  $\mathbf{r}'^i$  sont les erreurs des quadratures en accélération pour un  $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$  données par les développements de Taylor suivants :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}^i = \ddot{\mathbf{U}}(\tau) + \mathbf{U}^{(3)}(\tau)(t_i - \tau) + \mathcal{O}(h^2\mathbf{U}^{(4)}) \\ \ddot{\mathbf{U}}^{i+1} = \ddot{\mathbf{U}}(\tau) + \mathbf{U}^{(3)}(\tau)(t_{i+1} - \tau) + \mathcal{O}(h^2\mathbf{U}^{(4)}) \end{cases} \quad (2.33)$$

Les Équations (2.33) nous permettent alors d'obtenir les erreurs de quadratures :

$$\begin{cases} \mathbf{r}^i = (\gamma - \frac{1}{2}) h^2 \mathbf{U}^{(3)}(\bar{\tau}) + \mathcal{O}(h^3 \mathbf{U}^{(4)}) \\ \mathbf{r}'^i = (\beta - \frac{1}{6}) h^3 \mathbf{U}^{(3)}(\bar{\tau}) + \mathcal{O}(h^4 \mathbf{U}^{(4)}) \end{cases} \quad (2.34)$$

On remarque que le choix de  $\beta = \frac{1}{6}$  et  $\gamma = \frac{1}{2}$  permet de réduire l'ordre d'erreur de la quadrature. Cependant ces paramètres sont instables [47]. En comparant les Équations (2.25) et (2.34) on remarque que l'erreur obtenue pour le déplacement est d'un ordre plus élevé avec le schéma de Newmark. Par conséquent lorsque le modèle est régulier, intégrer avec un schéma de Newmark permet d'obtenir une meilleure précision qu'en utilisant un schéma Euler.

Ainsi en connaissant les quantités cinématiques du système au pas  $i$ , on résout les équations suivantes :

$$\begin{cases} (\mathbf{M} + h\gamma\mathbf{C} + h^2\beta\mathbf{K})\ddot{\mathbf{U}}^{i+1} = (h(1-\gamma)\mathbf{C} + h^2(\frac{1}{2}-\beta)\mathbf{K})\ddot{\mathbf{U}}^i + (\mathbf{C} + h\mathbf{K})\dot{\mathbf{U}}^i + \mathbf{K}\mathbf{U}^i + \mathbf{F}_{\text{ext}}^{i+1} \\ \dot{\mathbf{U}}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}^i + h(1-\gamma)\ddot{\mathbf{U}}^i + h\gamma\ddot{\mathbf{U}}^{i+1} \\ \mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i + h\dot{\mathbf{U}}^i + h^2(\frac{1}{2}-\beta)\ddot{\mathbf{U}}^i + h^2\beta\ddot{\mathbf{U}}^{i+1} \end{cases} \quad (2.35)$$

afin de déterminer les quantités cinématiques au pas  $i+1$  en calculant en suivant  $\ddot{\mathbf{U}}^{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}^{i+1}$  et enfin  $\mathbf{U}^{i+1}$ .

### Schéma de Newmark dans le cas non-linéaire

Dans le cas non-linéaire le schéma de Newmark utilise une quadrature en déplacement car généralement les forces non-linéaires dépendent des vitesses et des déplacements. Le système (2.35) est alors couplé à un algorithme itératif de prédiction/correction. On suppose la solution donnée au pas  $i$ . La prédiction est effectuée pour une accélération choisie nulle au pas  $i+1$ . Le système (2.35) permet alors d'obtenir les quantités  $\mathbf{U}_0^{i+1}$  et  $\dot{\mathbf{U}}_0^{i+1}$

$$\begin{cases} \mathbf{U}_0^{i+1} = \mathbf{U}^i + h\dot{\mathbf{U}}^i + h^2(\frac{1}{2}-\beta)\ddot{\mathbf{U}}^i \\ \dot{\mathbf{U}}_0^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}^i + h(1-\gamma)\ddot{\mathbf{U}}^i \end{cases} \quad (2.36)$$

En considérant la correction du déplacement  $\Delta \mathbf{U}^{i+1}$  comme inconnue, on détermine alors la vitesse et l'accélération au pas  $i + 1$  [47] :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}_0^{i+1} \\ \dot{\mathbf{U}}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_0^{i+1} + \frac{\gamma}{h\beta} \Delta \mathbf{U}^{i+1} \\ \ddot{\mathbf{U}}^{i+1} = \frac{1}{\beta h^2} \Delta \mathbf{U}^{i+1} \end{cases} \quad (2.37)$$

Le système étant non-linéaire, on applique une correction incrémentale. On corrige le déplacement  $N$  fois jusqu'à répondre à une tolérance  $\epsilon$ . On a alors :

$$\Delta \mathbf{U}^{i+1} = \sum_{k=1}^N \Delta \mathbf{U}_k^{i+1} \quad (2.38)$$

par conséquent de l'itération  $k$  à  $k + 1$ , l'Équation (2.37) est réécrite :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}_{k+1}^{i+1} = \mathbf{U}_{k+1}^{i+1} - \mathbf{U}_k^{i+1} \\ \dot{\mathbf{U}}_{k+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_k^{i+1} + \frac{\gamma}{h\beta} \Delta \mathbf{U}_{k+1}^{i+1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_{k+1}^{i+1} = \ddot{\mathbf{U}}_k^{i+1} + \frac{1}{\beta h^2} \Delta \mathbf{U}_{k+1}^{i+1} \end{cases} \quad (2.39)$$

Ainsi l'équation mécanique à résoudre devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_k^{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_k^{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_k^{i+1} - \mathbf{F}_{\text{ext}}^{i+1} - \mathbf{F}_{\text{NL}}^{i+1}(\dot{\mathbf{U}}_k^{i+1}, \mathbf{U}_k^{i+1}, t_{i+1}) = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

On suppose connaître les quantités cinématiques à l'itération  $k$  et elles ne vérifient pas l'Équation (2.40). Ainsi on peut déterminer le résidu  $\mathbf{r}_{k+1}^{i+1}$  permettant de pouvoir calculer les corrections pour l'itération  $k + 1$ .

$$\mathbf{r}_{k+1}^{i+1} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_k^{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_k^{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_k^{i+1} - \mathbf{F}_{\text{ext}}^{i+1} - \mathbf{F}_{\text{NL}}^{i+1}(\dot{\mathbf{U}}_k^{i+1}, \mathbf{U}_k^{i+1}, t_{i+1}) \quad (2.41)$$

Les corrections à apporter à l'itération  $k + 1$  sont déterminées à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson en déterminant la dérivée du résidu par rapport au déplacement :

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})|_{\Delta \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})}{\partial \Delta \mathbf{U}} \Big|_{\Delta \mathbf{U}} = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C} + \mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{NL}}(\dot{\mathbf{U}} + \frac{\gamma}{\beta h} \Delta \mathbf{U}, \mathbf{U} + \mathbf{U})}{\partial \Delta \mathbf{U}} \quad (2.42)$$

On remarque que le calcul de la Jacobienne dépend de la dérivée des forces non-linéaires de contact frottant à l'état courant. Vermot Des Roches [16] propose d'utiliser une Jacobienne fixe afin de ne pas répéter le calcul de cette Jacobienne pour chaque état. Il utilise alors une matrice de raideur  $\mathbf{K}_\tau$  directement associée aux forces de contact frottant. On a alors :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_\tau \quad (2.43)$$

On spécifie que l'utilisation de la Jacobienne fixée ne change en aucun cas la solution du problème mais seulement la propriété de convergence de l'algorithme. L'intégration temporelle du système par un schéma de Newmark non-linéaire est implicite et détaillée par le diagramme 2.10.

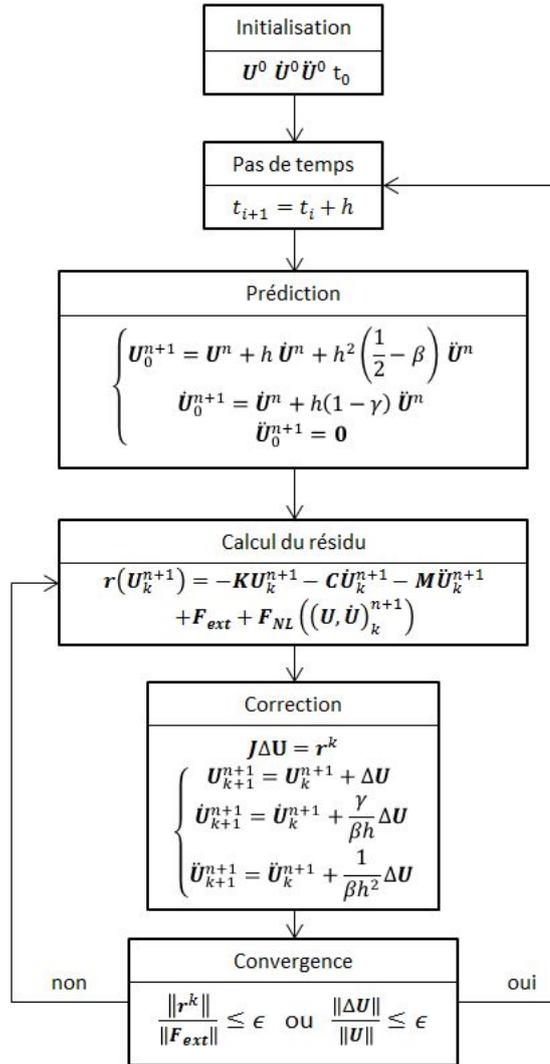


FIGURE 2.10 – Intégration temporelle en utilisant un schéma de Newmark non-linéaire implicite

### La Hilber-Hughes-Taylor (HHT) $\alpha$ -méthode

Hilber, Hughes et Taylor ont proposé une nouvelle méthode d'intégration basée sur le schéma de Newmark [55]. Ils introduisent le paramètre  $\alpha$  qui engendre alors un amortissement dans la méthode de Newmark tout en conservant l'ordre de précision [47]. On définit la fonction  $\mathbf{f}$  suivante :

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{KU} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} \quad (2.44)$$

Dans le cas linéaire (forces de contact frottant supposées nulles), l'équation du mouvement discrétisée en temps et espace est écrite de la façon suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{i+1} + (1 - \alpha)\mathbf{f}(\mathbf{U}^{i+1}, \dot{\mathbf{U}}^{i+1}) + \alpha\mathbf{f}(\mathbf{U}^i, \dot{\mathbf{U}}^i) = (1 - \alpha)\mathbf{F}_{\text{ext}}^{i+1} + \alpha\mathbf{F}_{\text{ext}}^i \quad (2.45)$$

On intègre cette équation en utilisant un schéma de Newmark :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}^i + h(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{U}}^i + h\gamma\ddot{\mathbf{U}}^{i+1} \\ \mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i + h\dot{\mathbf{U}}^i + h^2(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{\mathbf{U}}^i + h^2\beta\ddot{\mathbf{U}}^{i+1} \end{cases} \quad (2.46)$$

Cependant si  $\alpha \in [0; \frac{1}{3}]$ ,  $\gamma = \frac{1}{2} + \alpha$  et  $\beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha)^2$  le schéma HHT est inconditionnellement stable. On remarque aussi que si  $\alpha = 0$  on retrouve le schéma de Newmark classique. La procédure d'intégration de la HHT  $\alpha$ -méthode est la même que celle du schéma de Newmark que ce soit pour le cas explicite ou implicite.

Les avantages de ce schéma d'intégration sont sa stabilité inconditionnelle et l'introduction d'amortissement à hautes fréquences tout en préservant un ordre élevé de précision. Ainsi la HHT méthode est principalement utilisée pour des systèmes dont certains degrés de liberté sont contraints ou pour une analyse non-linéaire [56].

On a vu que les schémas de la famille de Newmark dépendent de deux paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ . Différentes valeurs de  $\gamma$  et  $\beta$  sont utilisées dans la littérature. Gérardin [47] regroupe les propriétés du schéma de Newmark pour les différentes valeurs de ces paramètres dans le Tableau 2.1 avec  $\omega$  la fréquence du système. On remarque alors que le schéma explicite n'est jamais utilisé car instable; l'algorithme de Fox & Goodwin permet d'obtenir une erreur de périodicité d'ordre 3 mais est conditionnellement stable; l'algorithme d'accélération moyenne constante est le meilleur schéma inconditionnellement stable. Pour finir le schéma d'accélération moyenne constante modifié introduit un amortissement qui croît avec la fréquence.

Ces schémas sont avant tout utilisés lorsque le système est régularisé. En effet la modélisation du contact frottant qui est choisie pour ces travaux (lois de Signorini/Coulomb) est non-régulière (cf. Section 2.2). L'accélération n'étant pas définie à chaque pas de temps, il est par conséquent impossible d'utiliser ces algorithmes.

Algorithme	$\gamma$	$\beta$	Limite de stabilité $\omega h$	Erreur d'amplitude $\rho - 1$	Erreur de périodicité $\frac{\Delta T}{T}$
Purement explicite	0	0	0	$\frac{\omega^2 h^2}{4}$	-
Différence centrée Fox & Goodwin	$\frac{1}{2}$	0	2	0	$-\frac{\omega^2 h^2}{24}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	2.45	0	$\mathcal{O}(h^3)$
Accélération linéaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	3.46	0	$\frac{\omega^2 h^2}{24}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\infty$	0	$\frac{\omega^2 h^2}{12}$
Accélération moyenne constante	$\frac{1}{2} + \alpha$	$\frac{(1+\alpha)^2}{4}$	$\infty$	$-\alpha \frac{\omega^2 h^2}{2}$	$\frac{\omega^2 h^2}{12}$
Accélération moyenne constante (modifié)	$\frac{1}{2} + \alpha$	$\frac{(1+\alpha)^2}{4}$	$\infty$	$-\alpha \frac{\omega^2 h^2}{2}$	$\frac{\omega^2 h^2}{12}$

TABLEAU 2.1 – Schémas d'intégration de la famille de Newmark

### 2.5.3 La $\theta$ -méthode

On suppose dans cette section que les expressions des forces de contact frottant sont sous une forme non-régulière, avec une formulation éléments finis de type multiplicateurs de Lagrange ou Lagrangien augmenté (cf. Section 2.2.3). On parle ici de dynamique non-régulière car on se retrouve face à des difficultés mathématiques telles que l'intégration d'un signal qui n'est pas continu partout. En effet les impacts entraînent des discontinuités en accélération. Pour ce faire Moireau et Jean [13] propose un schéma d'intégration nommé  $\theta$ -méthode permettant de prendre en compte les problèmes d'impact.

On reformule l'Équation (2.15) par une équation du second ordre plus générale en supposant une distribution en accélération. L'évolution du système entre deux pas de temps  $t_i$  et  $t_{i+1}$  est alors décrite par l'équation suivante :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(\tau) d\tau = - \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{K}\mathbf{U}(\tau) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(\tau)) d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\tau) + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\tau)) d\tau \quad (2.47)$$

Parce que des phénomènes irréguliers peuvent survenir dans un pas de temps les intégrales  $\int_{]t_i, t_{i+1}[} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(\tau) d\tau$  et  $\int_{]t_i, t_{i+1}[} \mathbf{F}_{\text{NL}}(\tau) d\tau$  sont réécrites en supposant que les forces de contact frottant sont connues à l'instant  $i+1$ . On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(\tau) d\tau = \mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i) \\ \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}_{\text{NL}}(\tau) d\tau = \mathbf{F}_{\text{NL}}^{i+1} \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Les autres contributions régulières de l'Équation (2.47) sont calculées ensuite en utilisant la quadrature numérique qui introduit le paramètre  $\theta$  :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{f}(\tau) d\tau = h\theta \mathbf{f}^{i+1} + h(1-\theta) \mathbf{f}^i \quad (2.49)$$

Ainsi les intégrales restantes dans l'expression (2.47) deviennent :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{K}\mathbf{U}(\tau) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(\tau) + \mathbf{F}_{\text{ext}}(\tau)) d\tau = h\theta (\mathbf{K}\mathbf{U}^{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \mathbf{F}_{\text{ext}}^{i+1}) + h(1-\theta) (\mathbf{K}\mathbf{U}^i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^i + \mathbf{F}_{\text{ext}}^i) \quad (2.50)$$

Le déplacement est ensuite intégré en utilisant la même approximation que pour le schéma d'Euler :

$$\mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i + h(1-\theta)\dot{\mathbf{U}}^i + h\theta\dot{\mathbf{U}}^{i+1} \quad (2.51)$$

L'hypothèse des forces non-linéaires à l'instant  $t_{i+1}$  implique l'utilisation du stratégie de prédiction/correction. On résout alors l'équation suivante pour déterminer le vecteur vitesse au pas  $i+1$  :

$$\hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{U}}^{i+1} = \mathbf{E}^i + h\mathbf{F}_{\text{NL}}^{i+1} \quad (2.52)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i &= -h\mathbf{K}\mathbf{U}^i + (\mathbf{M} - h(1-\theta)(\mathbf{C} + h\theta\mathbf{K}))\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + h(\theta\mathbf{F}_{\text{ext}}^{i+1} + (1-\theta)\mathbf{F}_{\text{ext}}^i) \\ \hat{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} + h^2\theta^2\mathbf{K} + h\theta\mathbf{C} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Une fois les vitesses  $\dot{\mathbf{U}}^{i+1}$  déterminées, les déplacements sont mis à jour :

$$\mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i + h \left( \theta \dot{\mathbf{U}}^{i+1} + (1 - \theta) \dot{\mathbf{U}}^i \right) \quad (2.54)$$

On retrouve cette algorithmme dans les travaux de Lorang [1], Loyer [2], et Raous [57]. On remarque que le schéma proposé est implicite puisqu'il nécessite la résolution du système (2.52) à chaque itération. Cependant ce schéma est inconditionnellement stable pour  $\theta \geq 1/2$ , et ceci pour n'importe quelle valeur de pas de temps  $h$ . Comparé aux schémas explicites, cette propriété de stabilité inconditionnelle permet de choisir la discrétisation temporelle indépendamment de la discrétisation spatiale. De plus dans [14, 15], il est montré que le schéma est conservatif pour  $\theta = 1/2$ .

#### 2.5.4 Traitement numérique du contact frottant non-régulier

Dans la Section 2.2.3, les difficultés rencontrées pour l'intégration numérique de lois de contact frottant non-régulières sont présentées. Le choix effectué dans ces travaux de thèse est d'exprimer les réactions de contact frottant sous formes de projections (2.6) et d'utiliser une méthode de résolution de type Lagrangien augmenté. Dans une première partie on résume les différents types de méthodes numériques permettant la résolution de problème de contact frottant non-régulier puis on applique la méthode du point fixe retenu à la  $\theta$ -méthode.

##### Méthodes de traitement du contact frottant non-régulier

Dans le traitement numérique du contact frottant non-régulier, on distingue deux types de méthode de résolution : un premier type fait appelle explicitement au multiplicateurs de Lagrange pour l'imposition des conditions de contact, le second type utilise les efforts de contacts au second membre uniquement.

Une première méthode consiste à déterminer l'état de la surface de contact à chaque pas de temps avec une algorithmme des statuts [17, 58]. L'algorithme itère alors sur le statut des noeuds présents sur la zone de contact jusqu'à vérification des lois de contact frottant. Le statut des noeuds étant ainsi déterminé, les relations de contact frottant deviennent différentiables (le cas de lois régulières est retrouvé pour ce pas de temps) et l'algorithme de type Newton-Raphson est alors employé pour la résolution numérique. Cette méthode est bien évidemment coûteuse car à chaque changement de statut, la jacobienne généralisée doit être recalculée.

Khenous [59] propose une autre méthode basée sur les multiplicateur de Lagrange pour la définition du contact. Cette méthode est appelée *Semi-smooth Newton* (Newton généralisé), et d'après Khenous est une des méthodes les moins coûteuses en nombre d'itérations. La résolution du problème de contact revient à trouver le zéro d'une fonction lipschitzienne  $\mathbb{C}^1$  par morceaux composée de l'équation du mouvement et des lois de contact frottant sous forme de projection. Une résolution de type Newton est alors appliquée. Lorsque la fonction est différentiable sa jacobienne est naturellement utilisée, si un point singulier est rencontré alors le gradient d'un point régulier proche est utilisé. Cependant la jacobienne est non-symétrique ce qui peut entraîner un coût de calcul non négligeable pour des systèmes de grande taille et doit être recalculée à chaque pas de temps.

On présente maintenant deux méthodes permettant de traiter le contact frottant en dynamique de la famille de Lagrangien augmenté. En premier la méthode *Large Time INcrement* est décrite [60, 61, 62, 63]. Cette méthode sépare les équations du problème en deux ensembles. Le premier correspond aux équations linéaires qui peut être global et le second aux équations locales éventuellement non-linéaires. Dans le cas de la dynamique d'un système en contact frottant, le premier sous-ensemble comporte le principe des puissances virtuelles avec des efforts extérieurs connus, les conditions d'admissibilité cinématique et les relations de comportement. Le second sous-ensemble décrit les lois de contact frottant de Signorini-Coulomb. La séparation effectuée, la méthode *La-TIn* consiste à rechercher successivement des solutions de chacun des jeux d'équations en partant d'une solution de l'autre sous-ensemble et d'une direction de recherche. La direction de recherche influe alors sur la convergence de la méthode vers une solution vérifiant les deux jeux d'équations (résolution du problème non-linéaire complet).

La seconde méthode de résolution est maintenant présentée. Il s'agit de la méthode du point fixe décrite par Laborde et Renard dans [64] et utilisée également par Khenous [59]. Les Équations (2.6) définissent assez naturellement une formulation du type point fixe. Une itération sur les projections sont effectuées jusqu'à l'obtention du point fixe de la solution : l'itéré au rang  $n + 1$  est défini par projections successives du rang  $n$ . Les paramètres  $\rho_n$  et  $\rho_t$  sont alors les paramètres d'augmentation du Lagrangien et viennent modifier l'effort de contact frottant en fonction de la non-vérification des lois de Signorini-Coulomb. Cette méthode nécessite seulement l'introduction des paramètres d'augmentation. Cependant le choix de ces paramètres influe sur la convergence du point fixe et des travaux ont été effectués afin d'en déterminer la valeur optimale [2, 59]. Cette méthode est retenue dans ces travaux de thèse afin de résoudre les équations non-linéaires locales. Elle ne nécessite pas de recalculer la Jacobienne et la valeur des paramètres  $\rho_n$  et  $\rho_t$  est introduite en fonction du cas traité (cf. Chapitre 4 et Chapitre 5).

### Application à la $\theta$ -méthode

Le problème dynamique (2.52) étant ainsi formulé en vitesse, il reste à exprimer les réactions de contact et de frottement (2.6) à chaque pas de temps en fonction de la vitesse au pas de temps. Pour la loi de frottement, cette opération est immédiate mais la loi de contact étant formulée en déplacement, il est nécessaire d'utiliser la relation (2.54) entre déplacements et vitesses donnée par le schéma d'intégration numérique choisi. On se place alors à un noeud  $\alpha$  situé sur l'interface frottante. On note  $U_n$  le déplacement normale et  $\dot{U}_n$  la vitesse normale. La quadrature de la  $\theta$ -méthode donne :

$$\dot{U}_n^{i+1} = \frac{1}{h\theta}(U_n^{i+1} - U_n^i) + \frac{\theta-1}{\theta}\dot{U}_n^i \quad (2.55)$$

En dynamique de contact, il est possible que des chocs surviennent entraînant alors une discontinuité en accélération. La  $\theta$ -méthode permet de traiter ce type de comportement non-linéaire car c'est un schéma de premier ordre. Dans ces travaux de thèse une loi de choc inélastique est associée avec la loi de contact. On suppose qu'un choc a lieu à l'itération  $i$  on a alors  $U_n^i = 0$ ,  $U_n^{i+1} = 0$  et  $\dot{U}_n^i \neq 0$  ce qui conduit à :

$$\dot{U}_n^{i+1} = \frac{\theta-1}{\theta}\dot{U}_n^i \neq 0 \quad (2.56)$$

On remarque que lors d'un choc à l'itération  $i$  le déplacement reste donc constant entre les pas  $i$  et  $i + 1$  alors que la vitesse à l'itération  $i + 1$  est non nulle. L'hypothèse de choc inélastique n'est pas vérifiée et ce phénomène se traduit par un rebond lorsque le

choc survient entre deux pas de temps. Ce rebond est propre au formalisme discrétisé spatialement, ainsi pour pouvoir l'endiguer plusieurs stratégies ont été mises en place et sont résumées dans [2].

La première consiste à éviter le rebond en ajoutant aux interfaces de contact une fine couche d'éléments sans masse mais dotés d'une raideur. Le problème de rebond est ainsi évité mais cette méthode s'apparente à une méthode de pénalisation du contact qui a été évoquée précédemment.

La seconde correspond à une re-répartition des masses du système [65]. Cette méthode a été proposée suite au constat que l'effet de rebond est dû à une concentration de masse à l'interface alors que pour un formalisme continu cette masse est nulle. Ainsi au lieu de modifier la géométrie du système en ajoutant une couche d'élément sans masse, la masse des éléments à l'interface est répartie sur l'ensemble des autres éléments du système de manière à ne pas altérer les propriétés dynamiques de ce-dernier. Par conséquent, le système conserve sa géométrie initiale et est muni d'une couche de raideurs aux interfaces permettant d'éviter le rebond. Cependant, comme évoqué avec la première méthode, cette modification s'apparente à une pénalisation du contact.

Avec la  $\theta$ -méthode, on remarque que pour  $\theta = 1$  le choc inélastique est garanti (2.56) et l'on utilise alors un schéma dit de  $\theta$ -Euler forward. Cependant une modification de la  $\theta$ -méthode proposée par M. Jean [13] et D. Vola [14] permet de simuler un choc inélastique indépendamment de la valeur de  $\theta$  choisie. Cette méthode est utilisé dans ces travaux de thèse et consiste à anticiper l'occurrence d'un choc entre deux pas de temps en estimant le déplacement normal postérieur au pas  $i + 1$  lors du calcul des efforts. On évalue maintenant le déplacement normal à un instant futur (noté  $\tilde{U}_n^{i+1}$ ) :

$$\tilde{U}_n^{i+1} = U_n^{i+1} + h(1 - \theta)\dot{U}_n^{i+1} \quad (2.57)$$

En utilisant la relation (2.54) on obtient :

$$\tilde{U}_n^{i+1} = \tilde{U}_n^i + h\dot{U}_n^{i+1} = U_n^i + h\left(\dot{U}_n^{i+1} + (1 - \theta)\dot{U}_n^i\right) \quad (2.58)$$

Par conséquent :

$$\tilde{U}_n^{i+1} \geq 0 \Rightarrow \dot{U}_n^{i+1} + (1 - \theta)\dot{U}_n^i + \frac{U_n^i}{h} \geq 0 \quad (2.59)$$

Cette variante appelée la  $\theta$ -méthode modifiée assure le caractère inélastique du choc. En effet si  $\tilde{U}_n^{i+1} = 0$  et  $\tilde{U}_n^i = 0$  et que  $\dot{U}_n^i \neq 0$ , on obtient par la relation (2.58)  $\dot{U}_n^{i+1} = 0$  ce qui résout le problème évoqué plus haut. De plus la relation (2.57) donne  $\tilde{U}_n^{i+1} = U_n^{i+1}$ .

En intégrant cette modification aux relations de projection (2.6) à l'instant  $i + 1$  on obtient :

$$\begin{aligned} R_n^{i+1} &= \text{proj}_{\mathbb{R}^+} \left( R_n^{i+1} - \rho_n \left( \dot{U}_n^{i+1} + B_m^i \right) \right) \quad \forall \rho_n > 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} R_t^{i+1} \\ R_b^{i+1} \end{array} \right\} &= \text{proj}_{\mathcal{D}(\mu R_n^{i+1})} \left( \left\{ \begin{array}{l} R_t^{i+1} \\ R_b^{i+1} \end{array} \right\} - \rho_t \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_t^{i+1} - V \\ \dot{U}_b^{i+1} \end{array} \right\} \right) \quad \forall \rho_t > 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

où

$$B_m^i = (1 - \theta)\dot{U}_n^i + \frac{U_n^i}{h} \quad (2.61)$$

Remarque : Si le choc se produit à l'instant  $i$  la relation (2.57) peut s'écrire  $U_n^i = \tilde{U}_n^i - h(1 - \theta)\dot{U}_n^i = -h(1 - \theta)\dot{U}_n^i \neq 0$ . Par conséquent une interprétation de la  $\theta$ -méthode

modifiée est qu'elle permet d'ajuster le jeu à l'itération  $i$  pour garantir une vitesse normale relative nulle à l'itération  $i + 1$ .

La  $\theta$ -méthode ainsi modifiée est utilisée par Lorang [1] et Loyer [2] afin de calculer le régime transitoire de vibrations auto-entretenues de frein ferroviaire.

Ce schéma d'intégration sera utilisé dans ces travaux de thèse pour ces différentes propriétés : schéma inconditionnellement stable, schéma du premier ordre qui permet de prendre en compte des discontinuités en accélération, schéma modifié pour la prise en compte de choc inélastique et schéma conservatif pour une valeur de  $\theta = 1/2$ . Pour la suite, la  $\theta$ -méthode sera aussi bien utilisée pour l'étude de la dynamique d'un système à trois degrés de liberté (Chapitre 4) que celle de modèles éléments finis (Chapitre 5). Aussi l'algorithme utilisé devra subir des modifications selon la taille du système traité. Ces adaptations seront précisées dans les chapitres concernés.

## 2.6 Recherche de régime périodique : approche de mode non-linéaire

### 2.6.1 Présentation du problème

L'intégration temporelle engendre généralement un surcoût de calcul non-négligeable. En effet la quantité recherchée est le régime de fonctionnement (régime stationnaire) mais l'intégration temporelle nécessite de calculer le régime transitoire pour obtenir le régime établi. Si le système étudié est discrétisé avec une méthode de type éléments finis cela engendre des coûts de calcul. Ainsi l'une des contributions originales de ces travaux de thèse est de proposer des méthodes permettant un gain de coût de calcul. On peut d'abord remarquer que la recherche directe de solutions stationnaires de systèmes auto-entretenues se rapproche de celle de modes non-linéaires, en particulier pour les solutions périodiques auxquelles nous allons nous consacrer dans le cadre de cette thèse.

La notion de modes non-linéaires non-amortis a été abordée par Rosenberg [66]. Un mode non-linéaire non-amorti est alors défini comme une vibration à l'unisson et on parle d'oscillation périodique synchrone. Seulement cette définition ne peut correspondre à un mouvement quasi-périodique contenant les fréquences d'au moins deux modes qui interagissent entre eux. Ainsi les modes non-linéaires non-amortis ont été redéfinis comme étant seulement des régimes périodiques [67]. Un mode non-linéaire non-amorti est alors caractérisé par sa fréquence, sa déformée modale et son mouvement périodique qui dépendent de l'énergie du système. À faible énergie, ces modes ressemblent aux modes linéaires du système. Si l'énergie augmente, en considérant un point de vue énergie-fréquence, on peut observer des bifurcations de branches périodiques [68]. Ainsi l'intérêt de calculer les modes non-linéaires d'un système est de tracer ces bifurcations de mouvements périodiques non-intuitifs [69, 70, 71, 72, 73]. En déterminant l'énergie du système et sa fréquence, il est alors possible d'analyser le mouvement effectué.

Le cadre de modes non-linéaires amortis a été établi par Shaw et Pierre [74, 75]. Lorsque le système est amorti les modes non-linéaires ne sont plus périodiques. Ils correspondent à une surface invariante dans l'espace des phases définie par deux paramètres, par exemple l'amplitude du mode et sa phase. Cette surface est alors tangente aux plans

linéaires proche du point d'équilibre. Dans ce cadre la recherche de régime périodique d'un système soumis à des vibrations auto-entretenues revient à calculer l'amplitude du mode non-linéaire amorti pour laquelle il est périodique.

Par la suite les méthodes de calcul de solution périodique utilisées dans le cadre de la recherche de modes non-linéaires sont présentées. On peut définir quatre catégories : les méthodes basées sur la discrétisation, la méthode de tir, la méthodes des différences finies et les méthodes perturbatives.

On considère maintenant un système mécanique continu discrétisé spatialement par  $N$  degrés de liberté, dont la réponse dynamique libre est gouvernée par l'équation différentielle (2.15). Cette équation est réécrite en variables d'état (i.e.  $\mathbf{Z}^T = \{\mathbf{U}^T \quad \dot{\mathbf{U}}^T\}^T$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{2N}$ ) :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{G}(\mathbf{Z}) \quad (2.62)$$

où

$$\mathbf{G}(\mathbf{Z}) = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{Z} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{0} \quad (\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{NL} + \mathbf{F}_{ext}))^T\}^T \quad (2.65)$$

Avec  $\mathbf{G}(\mathbf{Z})$  le champ de vecteurs. La solution du système dynamique (2.62) pour les conditions initiales  $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0 = \{\mathbf{U}_0^T \quad \dot{\mathbf{U}}_0^T\}^T$  est alors notée comme  $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0, t)$  afin d'indiquer sa dépendance aux conditions initiales  $\mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0, 0) = \mathbf{Z}_0$ .

Une solution périodique  $\mathbf{Z}_p(t)$  du système autonome (2.62) est une solution qui satisfait :

$$\mathbf{Z}_p(\mathbf{Z}_{p0}, t) = \mathbf{Z}_p(\mathbf{Z}_{p0}, t + T) \quad (2.66)$$

avec  $T$  la période minimale et  $\mathbf{Z}_{p0}$  les conditions initiales supposées inconnues. Une telle solution peut se traduire par l'équation

$$\mathbf{H}(\mathbf{Z}_p(t), T) = 0 \quad (2.67)$$

qui, en tenant compte de (2.62), permet de représenter la "cloture" du cycle limite dans l'espace des phases. L'unicité de la solution est alors déterminée par une condition sur la phase du système. En effet si  $\mathbf{Z}_p(t)$  est une solution périodique de (2.62), alors  $\mathbf{Z}_p(t + \Delta t)$  est aussi solution périodique dans le même espace d'état et ce pour tout  $\Delta t$ . Différentes conditions de phases peuvent être trouvées dans la littérature [76, 77]. Cette condition de phase permettant de supprimer le choix arbitraire des conditions initiales et ainsi d'obtenir une solution unique est représentée par l'équation :

$$h(\mathbf{Z}_p(t)) = 0 \quad (2.68)$$

Par conséquent le recherche de modes non-linéaires périodiques revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{Z}_p(t), T) = 0 \\ h(\mathbf{Z}_p(t)) = 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

Il existe deux façon pour définir la fonction  $\mathbf{H}$ . La première consiste à approcher la solution de l'équation du mouvement avec des fonctions de forme, en discrétisant le problème et en minimisant un résidu. La seconde consiste à trouver les conditions initiales et la période qui définissent le cycle limite. La première solution s'intéressent alors à l'ensemble du cycle alors que la seconde ne cherche qu'un point particulier du cycle.

### 2.6.2 Méthode de discrétisation

L'approche par discrétisation du problème (2.69) dans le domaine temporel permet d'approximer une solution périodique en utilisant des fonctions de forme et en transformant la recherche de régime périodique en une résolution de système d'équations algébriques non-linéaires. On s'intéresse alors à la trajectoire  $\mathbf{Z}(t)$  sur  $[0, T]$  que l'on peut approximer à l'aide de la série suivante :

$$\mathbf{Z}(t) = \sum_{i=1}^{n_p} \rho_i(t) \mathbf{Z}_i \quad (2.70)$$

où les  $\rho_i$  et  $\mathbf{Z}_i$  sont respectivement les fonctions de forme et les coefficients inconnus. En utilisant une approche résiduelle, l'équation du mouvement peut être écrite comme suit :

$$\int_0^T (\dot{\mathbf{Z}} - \mathbf{G}(\mathbf{Z})) \delta \mathbf{Z} dt = \mathbf{0} \quad (2.71)$$

où la variation  $\delta \mathbf{Z}$  est décrite comme :

$$\delta \mathbf{Z}(t) = \sum_{i=1}^{n_\xi} \xi_i(t) \delta \mathbf{Z}_i \quad (2.72)$$

Les fonctions  $\xi_i$  sont appelées les fonctions tests. Ainsi la résolution de (2.71) pour un  $\delta \mathbf{Z}$  arbitrairement choisi revient à résoudre le système d'équations algébriques :

$$\mathbf{H}(\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{n_p}, T) = \mathbf{0} \quad (2.73)$$

On remarque que l'Équation (2.73) ne définit que la trajectoire dans l'espace des phases, c'est pourquoi une condition de périodicité doit être ajoutée. On présente maintenant deux exemples de méthodes discrétisées : les méthodes d'équilibrage harmonique et de collocation orthogonale.

#### Méthode de l'équilibrage harmonique

L'équilibrage harmonique est une approche qui est utilisée dans le domaine de l'ingénierie mécanique ou électrique depuis les années 1960. Elle consiste à rechercher une solution stationnaire au problème sous la forme d'une série de Fourier tronquée. Les fonctions de formes et tests sont définies en utilisant une base de Fourier :

$$\{1, \cos(\omega t), \dots, \cos(n_H \omega t), \sin(\omega t), \dots, \sin(n_H \omega t)\} \quad (2.74)$$

avec  $\omega = 2\pi/T$  la pulsation de la solution périodique et  $n_H$  le nombre d'harmoniques retenues. L'inconnue  $\mathbf{Z}(t)$  est alors approximée par les séries de Fourier :

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}_E + \sum_{i=1}^{n_H} (\cos(i\omega t) \mathbf{Z}_{C_i} + \sin(i\omega t) \mathbf{Z}_{S_i}) \quad (2.75)$$

La périodicité de la solution est assurée par le choix d'une base de Fourier, ainsi la trajectoire  $\mathbf{Z}(t)$  est contrainte de vérifier  $\mathbf{Z}(T) = \mathbf{Z}(0)$ . En utilisant l'Équation (2.75) pour calculer le résidu avec l'Équation (2.71) on collecte et équilibre les termes qui ont le même index harmonique. On obtient alors un système algébrique de taille  $2N(2n_H + 1)$  équations pour  $2N(2n_H + 1)$  coefficients de Fourier inconnus  $\mathbf{Z}_E$ ,  $\mathbf{Z}_{C_i}$  et  $\mathbf{Z}_{S_i}$  :

$$\mathbf{A}(\omega)\bar{\mathbf{Z}} - \mathbf{F}_{\text{NL}}^-(\bar{\mathbf{Z}}, \omega) - \mathbf{F}_{\text{ext}}^- = \mathbf{0} \quad (2.76)$$

avec

$$\mathbf{A}(\omega) = \text{diag}(\mathbf{K}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n_H}) \quad (2.77)$$

où pour  $i = 1, \dots, n_H$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (i\omega)^2 \mathbf{M} & (i\omega) \mathbf{C} \\ -(i\omega) \mathbf{C} & \mathbf{K} - (i\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

$$\bar{\mathbf{Z}}^T = \{ \mathbf{Z}_E^T, \mathbf{Z}_{C_1}^T, \mathbf{Z}_{S_1}^T, \dots, \mathbf{Z}_{C_{n_H}}^T, \mathbf{Z}_{S_{n_H}}^T \} \quad (2.79)$$

et  $\mathbf{F}_{\text{NL}}^-(\bar{\mathbf{Z}}, \omega)$  est l'approximation en séries de Fourier des forces non-linéaires et  $\mathbf{F}_{\text{ext}}^-$  celle des forces extérieures.

La mise en équation de la méthode d'équilibrage harmonique est assez simple. Cependant dans la pratique son utilisation devient plus complexe car le terme  $\mathbf{F}_{\text{NL}}^-$  peut être difficile à évaluer dans le cas où les non-linéarités sont non-triviales ou non-différentiables. Plusieurs travaux ont proposés des solutions pour palier à ce problème dont un résumé est présenté dans [68]. Par exemple, la méthode d'équilibrage harmonique incrémentale [78, 79] permet d'équilibrer les harmoniques seulement pour les problèmes linéarisés qui apparaissent dans le processus de continuation. Une autre méthode consiste à évaluer le terme  $\mathbf{F}_{\text{NL}}^-$  en effectuant des transformations successives dans les domaines temporel et fréquentiel avec une transformée de Fourier rapide (FFT) et son inverse. On peut ainsi déterminer n'importe quel type d'efforts non-linéaires temporellement et les transposer ensuite dans le domaine fréquentiel [80].

Un des paramètres importants de cette méthode est le nombre d'harmoniques retenues pour l'approximation en séries de Fourier. En effet il influence naturellement le coût de calcul. On parle alors de méthode globale si le même nombre d'harmoniques est retenu pour tous les degrés de liberté. Une première idée est alors de réduire le nombre de degrés de liberté en réécrivant le calcul uniquement sur les degrés de liberté non-linéaires. Cette technique de substitution est détaillée dans [81]. D'autres approches consistent à sélectionner le nombre d'harmoniques en fonction de la plage de fréquence [82] ou à observer que seul quelques degrés de liberté sont soumis à des efforts non-linéaires et nécessitent un plus grand nombre d'harmoniques, on parle alors de méthode locale [83].

Une extension de la technique d'équilibrage harmonique à  $n$  fréquences incommensurables permet de traiter des problèmes non-linéaires soumis à des excitations multiples [79].

Enfin la stabilité de la trajectoire obtenue peut être directement analysée dans le domaine fréquentiel en utilisant la méthode de Hill [84, 85]. Un problème aux valeurs propres dont les solutions donnent accès directement aux exposants de Floquet et donc aux multiplicateurs de Floquet et permet de déterminer la stabilité de la trajectoire calculée.

Dans un problème de vibrations auto-entretenues dues au frottement, des modifications de cette méthode appelée la Constrained Harmonic Balance Method ont été employées par Coudeyras pour déterminer le régime stationnaire périodique (système soumis à un seul mode instable) ou quasi-périodique système (soumis à plusieurs modes instables)[86, 87]. Cependant ces méthodes restent très peu utilisées dans l'industrie car elles exigent de nombreux développements pour une correcte estimation de la (ou des) fréquence(s) d'excitation du système qui lui est (sont) inhérente(s), du nombre d'harmoniques à utiliser et du terme  $\mathbf{F}_{\text{NL}}$  [88]. Par ailleurs, la troncature harmonique n'est pas très adaptée aux fortes non-linéarités des lois de contact frottant.

### Méthode de collocation orthogonale

Contrairement à la méthode d'équilibrage harmonique, travailler avec une méthode de collocation orthogonale permet de résoudre le problème dans le domaine temporel. L'intervalle temporel est alors subdivisé en  $n_{\Delta t}$  intervalles plus petits de longueur  $\Delta t_j = [t_j, t_{j+1}]$ . Des polynômes Lagrangien d'ordre  $p$  sont utilisés comme fonctions de formes. L'Équation (2.62) est alors étudiée au point de Gauss en utilisant des fonctions tests sous forme de distribution de Dirac. En groupant alors les équations du mouvement discrétisées ensemble et ajoutant une condition de périodicité, le système algébrique comprenant  $2N(pn_{\Delta t} + 1)$  équations est résolu grâce à un algorithme de type Newton. Les inconnues étant les valeurs de  $\mathbf{Z}(t)$  aux points de collocation.

Samoilenko et Ronto [89] utilisent une variation de cette méthode appelée la méthode de collocation trigonométrique. La base utilisée pour décomposer l'équation du mouvement est sous forme de série de Fourier (ce qui assure la périodicité) et l'équilibre du problème est alors écrit pour  $2n + 1$  instants discrets  $t_1, \dots, t_k, \dots, t_{2n+1}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t_1) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t_1) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t_1) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t_1) + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{U}(t_1), \dot{\mathbf{U}}(t_1)) \\ \dots \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t_k) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t_k) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t_k) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t_k) + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{U}(t_k), \dot{\mathbf{U}}(t_k)) \\ \dots \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t_{2n+1}) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t_{2n+1}) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t_{2n+1}) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t_{2n+1}) + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{U}(t_{2n+1}), \dot{\mathbf{U}}(t_{2n+1})) \end{array} \right. \quad (2.80)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) &= \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^n (\mathbf{A}_k \sin(k\Omega t) + \mathbf{B}_k \cos(k\Omega t)) \\ \dot{\mathbf{U}}(t) &= \sum_{k=1}^n i k \Omega (\mathbf{A}_k \cos(k\Omega t) - \mathbf{B}_k \sin(k\Omega t)) \\ \ddot{\mathbf{U}}(t) &= \sum_{k=1}^n (-k\Omega)^2 (\mathbf{A}_k \sin(k\Omega t) + \mathbf{B}_k \cos(k\Omega t)) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Une résolution de ce système est alors effectuée par un algorithme de continuation. Il est à noter que l'augmentation du nombre de point de considération permet une meilleure prise en compte des phénomènes non-linéaires.

La stabilité de la trajectoire obtenue est étudié avec la théorie de Floquet. La matrice de monodromie est alors déterminée en utilisant les composants de la matrice qui représente le système discrétisé. Les valeurs propres de la matrice de monodromie sont les multiplicateurs de Floquets, si leur amplitude est supérieure à 1 alors la trajectoire est instable. Cet aspect est vu plus en détail dans la section suivante.

Cette méthode, en particulier l'utilisation de polynômes, n'est pas non plus bien adaptée aux fortes non-linéarités des lois de contact frottant.

### 2.6.3 Méthode de tir

La méthode de tir est une technique numérique très populaire [71, 72, 73, 90, 77, 91] qui permet de déterminer itérativement les conditions initiales ainsi que la période  $T$  correspondant au mouvement périodique et à la condition de phase  $h$ . Le processus de tir définit la condition  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$  comme un problème aux frontières en utilisant la condition de périodicité :

$$\mathbf{H}(\mathbf{Z}_{p0}, T) = \mathbf{Z}_p(T, \mathbf{Z}_{p0}) - \mathbf{Z}_{p0} = \mathbf{0} \quad (2.82)$$

La fonction de tir  $\mathbf{H}(\mathbf{Z}_0, T) = \mathbf{Z}(T, \mathbf{Z}_0) - \mathbf{Z}_0$  représente alors la différence entre les états initial et final du système au temps  $T$ .

En commençant avec des conditions initiales données  $\mathbf{Z}_{p0}^0$ , le mouvement  $\mathbf{Z}_p^0(T, \mathbf{Z}_{p0}^0)$  à la fin de la supposée période  $T^0$  est obtenue par une intégration numérique de l'équation du mouvement. L'avantage de la méthode de tir est qu'elle permet d'utiliser un schéma d'intégration adapté à la résolution de l'équation du mouvement du système considéré. Il peut s'agir d'un schéma de Runge-Kutta classique, d'un schéma de Newmark [69] ou encore d'une méthode d'énergie instantanée discrète comme utilisée dans [92].

Généralement les supposées conditions initiales et période  $(\mathbf{Z}_{p0}^0, T^0)$  ne satisfont pas la condition de périodicité (2.82) et des corrections leurs sont apportées. Dans [71], un algorithme d'optimisation est utilisé pour modifier les conditions initiales afin d'aboutir à la condition de périodicité. Cependant dans ces travaux un algorithme de Newton-Raphson est plutôt envisagé [69]. Les corrections  $\Delta\mathbf{Z}_{p0}^i$  et  $\Delta T^i$  à l'itération  $i$  sont déterminées en développant la fonction non-linéaire :

$$\mathbf{H}(\mathbf{Z}_{p0}^i + \Delta\mathbf{Z}_{p0}^i, T^i + \Delta T^i) = \mathbf{0} \quad (2.83)$$

en séries de Taylor :

$$\mathbf{H}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{Z}_{p0}} \right|_{\mathbf{Z}_{p0}^i, T^i} \Delta\mathbf{Z}_{p0}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right|_{\mathbf{Z}_{p0}^i, T^i} \Delta T^i + \text{HOT} = \mathbf{0} \quad (2.84)$$

et en négligeant les termes d'ordre supérieur (HOT). Comme mis en évidence dans l'Équation (2.84), cette procédure requiert le calcul des deux dérivées partielles de  $\mathbf{H}(\mathbf{Z}_0, T)$ . Le vecteur  $2N \times 1$   $\partial\mathbf{H}/\partial t$  est donnée par :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right|_{\mathbf{Z}_{p0}^i, T^i} = \left. \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{Z}_{p0}^i, t)}{\partial t} \right|_{t=T^i} = \mathbf{G}(\mathbf{Z}(\mathbf{Z}_{p0}^i, T^i)) \quad (2.85)$$

la matrice  $2N \times 2N$   $\partial\mathbf{H}/\partial\mathbf{Z}_0$  suit :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{Z}_{p0}} \right|_{\mathbf{Z}_{p0}^i, T^i} = \left. \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_{p0}} \right|_{\mathbf{Z}_{p0}^i, T^i} - \mathbf{I} \quad (2.86)$$

où  $\mathbf{I}$  correspond à la matrice identité. La matrice de monodromie  $\left. \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_{p0}} \right|_{\mathbf{Z}_{p0}^i, T^i}$  représente la variation de la solution finale à  $T$  pour des conditions initiales perturbées  $\mathbf{Z}_0$ . Elle est une  $2N \times 2N$  matrice  $T$ -périodique. Il existe deux façons de calculer cette matrice :

- Elle peut être évaluée numériquement par différences finies : chaque condition initiale est succesivement perturbée et l'équation du mouvement est alors intégrée en

temps [76, 77]. Cette méthode approximative entraîne alors des simulations supplémentaires et peut se révéler coûteuse en temps de calcul pour des modèles éléments finis.

- Une solution alternative est obtenue avec une analyse de sensibilité appelée méthode de Newton-Fox [76, 93]. En dérivant l'équation du mouvement (2.62) et en respectant les conditions initiales  $\mathbf{Z}_0$ , la matrice de monodromie suit l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_{p0}} \right] = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} \Big|_{\mathbf{z}_0, T} \left[ \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_{p0}} \right] \quad (2.87)$$

à  $t = T$ . Alors en utilisant l'Équation (2.87), la matrice de monodromie peut être calculée par intégration temporelle avec des conditions initiales unitaires. Comme montré dans [69], l'intégration de la matrice de monodromie peut être effectuée en même temps que l'intégration de l'équation du mouvement ce qui accroît le gain en temps de calcul.

Il est à noter que la stabilité des solutions périodiques du système décrit par les équations différentielles non-linéaires (2.62) peut être facilement déterminée en utilisant le théorème de Floquet et la matrice de monodromie. Cela requiert le calcul des valeurs propres complexes  $\rho_i$  de cette matrice, appelées multiplicateurs de Floquet. Les multiplicateurs de Floquet représentent les nombres sans dimension qui indiquent l'augmentation ou diminution des perturbations période après période. Si un multiplicateur de Floquet a un module supérieur à un, l'orbite périodique est instable, autrement dit si tous les multiplicateurs de Floquet ont un module inférieur à 1, l'orbite périodique est stable [76, 94].

Une fois le système (2.84) résolu, les conditions initiales et la période corrigées sont données par :

$$\mathbf{Z}_{p0}^{i+1} = \mathbf{Z}_{p0}^i + \Delta \mathbf{Z}_{p0}^i \quad (2.88)$$

$$T^{i+1} = T^i + \Delta T^i \quad (2.89)$$

L'avantage de la méthode de tir est qu'elle permet d'utiliser un schéma d'intégration temporelle adapté au système. Par conséquent il est possible de combiner cette méthode pour le calcul du régime stationnaire, avec la  $\theta$ -méthode modifiée pour prendre en compte les irrégularités des forces de contact frottant tout en assurant un choc inélastique. Ainsi l'évolution du système est conservée, et contrairement aux méthodes de discrétisation les forces non-linéaires ne sont pas simplifiées.

Cependant l'utilisation de la méthode de tir engendre deux problèmes. Le premier provient de l'utilisation d'un algorithme de Newton-Raphson pour le calcul des corrections des conditions initiales et de la période. Cet algorithme est local, par conséquent lorsque la méthode de tir est initialisée trop loin de la solution recherchée, il se peut qu'elle diverge. La seconde difficulté concerne le calcul de la matrice de monodromie. Comme expliqué plus haut il existe généralement deux solutions pour calculer la matrice de monodromie. Seulement lors de l'utilisation de la méthode de tir pour déterminer le régime stationnaire d'un système discrétisé en éléments finis avec  $N$  degrés de liberté, le calcul de la matrice de monodromie revient à intégrer une matrice  $2N \times 2N$  sur une période à condition que le problème soit différentiable ou à effectuer  $2N$  simulations temporelles supplémentaires pour le calcul par différences finies. Cela reste un frein majeur

pour l'utilisation de cette méthode sur des modèles industriels. Dans le cadre de ces travaux de thèse, une adaptation de la méthode de tir pour traiter un problème de vibrations auto-entretenues sera proposée et développée dans le Chapitre 4 et le Chapitre 5.

### 2.6.4 Méthode des différences finies

La méthode de tir précédemment présentée, transforme un problème de recherche de solution périodique de l'équation du mouvement en un problème d'optimisation basé sur l'intégration temporelle. Or l'intégration temporelle d'un problème non-linéaire fait déjà intervenir un problème d'optimisation. Une méthode permettant de regrouper alors ces deux problèmes d'optimisation en un seul est la méthode des différences finies [95] qui est maintenant expliquée.

On choisit de fixer le schéma d'intégration : la  $\theta$ -méthode. On définit le pas d'intégration comme une fraction de la période :

$$h = \frac{T}{n_T} \quad (2.90)$$

À chaque instant  $t_{i+1}$  l'intégration temporelle consiste à résoudre le problème d'optimisation suivant en  $\dot{\mathbf{U}}^{i+1}$  :

$$\hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \mathbf{E}^i - h\mathbf{F}_{\text{NL}}^{i+1} = \mathbf{0} \quad (2.91)$$

La condition de périodicité peut aussi s'écrire en vitesse :

$$\dot{\mathbf{U}}(T) = \dot{\mathbf{U}}(0) \quad (2.92)$$

Ainsi en reprenant l'expression (2.91), le problème de recherche de la solution périodique de la  $\theta$ -méthode peut s'écrire comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{U}}^1 - \mathbf{E}^0 - h\mathbf{F}_{\text{NL}}^1 = \mathbf{0} \\ \dots \\ \hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \mathbf{E}^i - h\mathbf{F}_{\text{NL}}^{i+1} = \mathbf{0} \\ \dots \\ \hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{U}}^{n_T-1} - \mathbf{E}^{n_T-2} - h\mathbf{F}_{\text{NL}}^{n_T-1} = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{U}}^0 - \mathbf{E}^{n_T-1} - h\mathbf{F}_{\text{NL}}^0 = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (2.93)$$

Le problème comporte alors  $2 \times N \times n_T$  inconnues où  $N$  est le nombre de degrés de liberté du problème discret. Le système (2.93) contient  $N \times n_T$  équations non-linéaires auxquelles on ajoute les relations linéaires de la  $\theta$ -méthode :

$$\mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^0 + h(1 - \theta)\dot{\mathbf{U}}^0 + h\theta\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \sum_{j=1}^m h\dot{\mathbf{U}}^{i+1-j} \quad \forall i \in [0, n_T - 1] \quad (2.94)$$

Pour cette relation, la périodicité de la solution est prise en compte : si l'indice  $i + 1 - j$  devient négatif, il est alors remplacé par  $i + 1 - j + n_T$ . Il y a ainsi  $N \times n_T$  relations supplémentaires. Le problème d'optimisation de taille  $2 \times N \times n_T$  est alors complété. On rappelle que ce problème est dépendant de la pulsation  $\Omega$  qui est inversement proportionnelle au pas de temps  $h = 2\pi / \Omega$ .

Une des limites de cette méthode est la taille du système obtenue qui peut s'avérer importante si une bonne précision est souhaitée. Si la réponse souhaitée présente des

gradients importants ou bien des composantes fréquentielles en haute et moyenne fréquences, l'utilisation de la méthode des différences finies peut s'avérer peu adaptée.

### 2.6.5 Méthodes perturbatives

Sans utiliser l'intégration temporelle pour résoudre les équations de la dynamique, les méthodes perturbatives utilisent une résolution analytique au voisinage d'une fréquence choisie. Ces méthodes sont détaillées dans [96, 97] et cette partie n'en expose que le principe. Pour ce paragraphe, les grandeurs utilisées sont adimensionnées.

Les méthodes perturbatives supposent que la solution de l'équation de la dynamique non-linéaire peut s'écrire sous la forme de superposition de solutions à différentes échelles notées  $\epsilon^n$  où  $\epsilon$  est un petit paramètre adimensionné représentant généralement l'intensité des forces non-linéaires par rapport à la force de raideur linéaire. Le principe des méthodes perturbatives est de perturber la solution de l'équation linéaire pour la rendre solution de l'équation non-linéaire.

Soit  $\mathbf{U}$  un déplacement à l'ordre 1, on suppose alors que la force non-linéaire est petite et d'ordre minimale  $\epsilon$ . Les méthodes perturbatives proposent alors de traiter chaque ordre séparément. La réponse  $\mathbf{U}$  est décomposée :

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0(t) + \epsilon \mathbf{U}_1(t) + \dots + \epsilon^n \mathbf{U}_n(t) + \mathcal{O}(\epsilon^n) \quad (2.95)$$

Selon les problèmes, la considération de petits déplacements en  $\mathbf{U}$  mène à écrire  $\mathbf{U}_0(t) = \mathbf{0}$ . La fonction temporelle est aussi développée, mais selon les méthodes la variable utilisée n'est pas la même :

— la méthode de Lindstedt-Poincaré considère la pulsation  $\Omega$  :

$$\Omega = \Omega_0 + \epsilon \Omega_1 + \dots + \epsilon^n \Omega_n + \mathcal{O}(\epsilon^n) \quad (2.96)$$

— la méthode des développements multi-échelles considère le temps :

$$t = t_0 + \epsilon t_1 + \dots + \epsilon^n t_n + \mathcal{O}(\epsilon^n) \quad (2.97)$$

— la méthode de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky considère la phase  $\phi = \Omega t$  :

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + \dots + \epsilon^n \phi_n + \mathcal{O}(\epsilon^n) \quad (2.98)$$

Malgré des développements analytiques différents pour ces trois méthodes, la solution à l'ordre 1 reste solution du problème linéaire, l'objectif étant de déterminer l'amplitude complexe de cette réponse.

Des relations complémentaires sur cette amplitude sont apportées par les équations aux ordres suivants. On rappelle que l'unicité du développement en polynôme de  $\epsilon$  introduit précédemment, n'est valable que si les ordres suivants (i.e  $\mathbf{U}_2(t)$ ,  $\mathbf{U}_3(t)$ ,  $\dots$ ) sont indépendants temporellement de  $\mathbf{U}_1(t)$ . Par conséquent, les termes de forçages proportionnels à  $e^{i\Omega_0 t}$  doivent s'annuler entre eux dans les équations de la dynamique aux ordres supérieurs à 1. Ainsi une relation entre l'amplitude de la solution d'ordre 1 et la fréquence d'excitation peut être écrite. Cette relation est le résultat final de ces méthodes perturbatives : une expression analytique de la courbe en réponse fréquentielle. Cette expression

analytique permet une compréhension de l'effet des termes non-linéaires sur la courbe de réponse fréquentielle.

L'hypothèse que la pulsation  $\Omega$  soit au voisinage de  $\Omega_0$  rend cette expression analytique valable seulement pour ce voisinage. La pulsation du crissement étant inhérente aux paramètres du système, elle ne correspond généralement pas aux fréquences des modes instables issus de l'analyse de stabilité. Ainsi l'utilisation de ce type de méthodes n'est pas envisageable dans nos travaux.

## 2.7 Conclusion

Au vu de la littérature abordée dans ce premier chapitre, le phénomène de crissement de freins et en particulier dans le domaine ferroviaire semble être bien appréhendé par des modèles d'instabilité par couplage modal et de vibrations auto-entretenues saturées par des événements fortement non-linéaires type adhérence ou décollement. Ces travaux de thèse proposent une étude numérique complète du crissement et s'intègrent dans la continuité des travaux effectués par Lorang et Loyer [1, 2]. Une telle étude est résumée Figure 2.11. Après une étape de modélisation des phénomènes non-linéaires, une analyse de stabilité détermine l'occurrence du crissement en étudiant la stabilité de l'équilibre quasi-statique. Lorsque l'équilibre est instable, une analyse de la stabilité n'est pas suffisante pour conclure sur le comportement vibratoire du système. Sinou [35] met en avant l'importance de compléter l'analyse de stabilité par une analyse non-linéaire, en démontrant que d'importants phénomènes complexes en dynamique vibratoire ne peuvent être déduits de l'analyse de stabilité seule. L'objectif principal de ces travaux est donc d'améliorer les performances des méthodes de prédiction des niveaux vibratoires établies dans [1, 2] en proposant une méthode rapide mais suffisamment précise d'estimation du régime stationnaire dans le cadre de systèmes soumis à des mono-instabilités.

Les hypothèses effectuées dans ces travaux permettent une généralisation de la démarche. En premier lieu, la modélisation du contact frottant a été choisie dans un souci de parcimonie et de généralité. En effet le contact frottant est défini par les lois non-régulières de Signorini et Coulomb, ce qui permet de s'affranchir de tous les paramètres tribologiques qui peuvent éventuellement être intégrés au système. Ensuite le choix de la  $\theta$ -méthode modifiée en tant qu'intégrateur temporel permet d'effectuer une analyse non-linéaire de la dynamique du système sans avoir à régulariser les lois de contact frottant ou à modifier le système. Enfin une méthode de réduction du coût de calcul de l'obtention du régime stationnaire est proposée. Cette méthode se base sur une vision du problème comme étant la recherche d'un mode non-linéaire périodique d'un système amorti. Parmi les méthodes disponibles le choix de la méthode de tir s'est avéré être le plus approprié pour notre problème. En effet la méthode de tir permet par intégrations temporelles successives d'itérer sur les conditions initiales et la période du système jusqu'à obtenir celles qui correspondent au régime périodique. Cette méthode basée sur une résolution temporelle du système permet alors d'utiliser la  $\theta$ -méthode modifiée et ainsi de ne pas avoir à effectuer d'approximation sur les forces non-régulières et non-linéaires liées au contact frottant.

Afin de développer ces outils numériques, l'une des premières phases de cette thèse a été d'établir un modèle académique permettant une bonne compréhension des phénomènes non-linéaires. En effet, il semble que le crissement ferroviaire est dû à un cou-

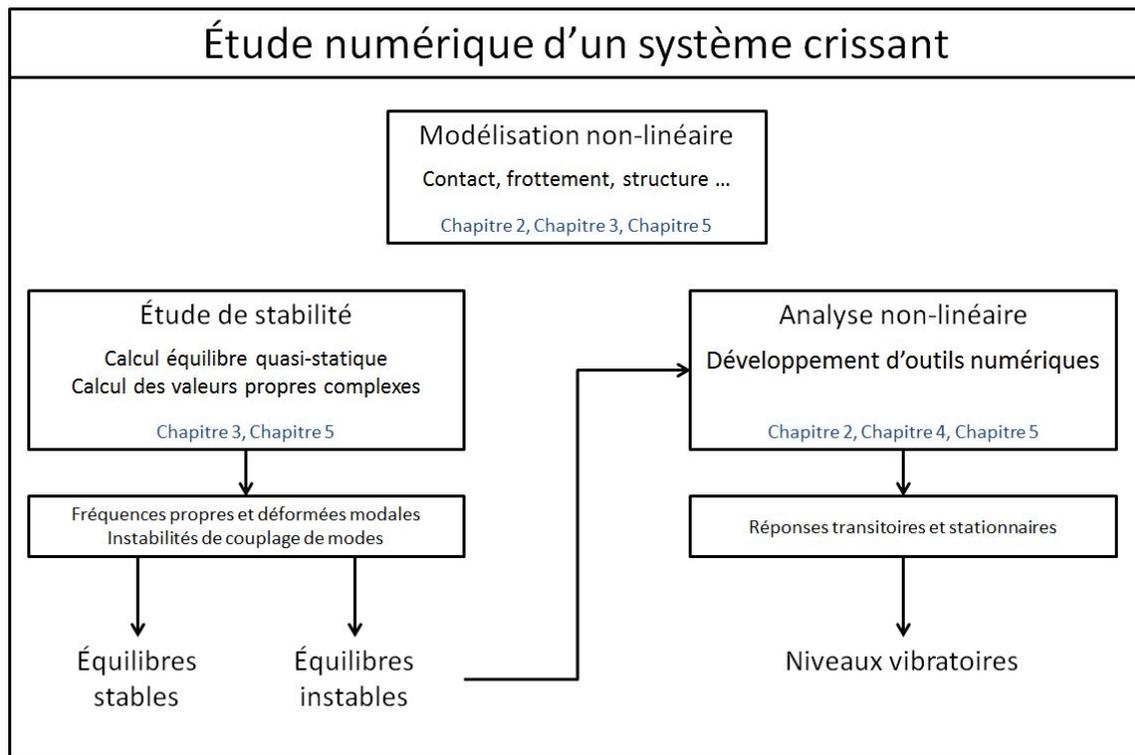


FIGURE 2.11 – Description du déroulement d'un étude numérique de systèmes crissant

plage de mode. Lors de l'évolution temporelle de tels systèmes des fortes non-linéarités de type décollement/choc ou adhérence/glissement seraient la cause de l'établissement du régime stationnaire. Ainsi il a été choisi d'étudier un modèle composé d'une masse en contact sur un plan glissant. Ce modèle a permis d'une part de se questionner sur l'importance de la modélisation du frottement : l'hypothèse réductrice du frottement rectiligne permet-elle une bonne compréhension de l'occurrence du crissement comparé au frottement plan ? D'autre part lors de l'analyse non-linéaire, l'absence de raideur de contact permettra alors de pouvoir vérifier si le régime stationnaire est bien issu d'apparition de fortes non-linéarités au niveau de la zone de contact. Enfin l'ajout d'amortissement structural a été pris en compte car il s'avère que ce paramètre a une grande influence sur l'occurrence des vibrations auto-entretenues mais aussi sur la dynamique du système [31, 33].



# Chapitre 3

## Analyse de stabilité d'un modèle minimal : comparaison frottement rectiligne - frottement plan

### Sommaire

---

<b>3.1 Introduction</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>3.2 Description du système mécanique</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>3.3 Analyse de stabilité</b> . . . . .	<b>61</b>
3.3.1 Calcul de l'équilibre . . . . .	61
3.3.2 Stabilité autour de l'équilibre . . . . .	62
3.3.3 Analyse de la stabilité autour de l'équilibre . . . . .	63
<b>3.4 Résultats</b> . . . . .	<b>64</b>
3.4.1 Modèle non-amorti avec frottement plan ou rectiligne : influence des paramètres sur les zones de stabilité et sur les valeurs propres complexes . . . . .	64
3.4.2 Influence de l'amortissement sur un système soumis au frottement plan ou au frottement rectiligne . . . . .	69
<b>3.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>79</b>

---

### 3.1 Introduction

Les éléments de l'état de l'art présentés dans le chapitre précédent nous amènent à privilégier l'hypothèse de vibrations auto-entretenues à coefficient de frottement constant pour expliquer le phénomène de crissement de frein. On a vu que l'instabilité à l'origine de ces vibrations est due à un couplage de modes structuraux du système entre les directions normale et tangentielle identifiable à une bifurcation de Hopf. Cette approche est aujourd'hui largement utilisée pour reproduire des vibrations induites par frottement dans de nombreux systèmes mécaniques. Des modèles minimaux permettant d'obtenir ce type de vibration peuvent être facilement trouvés dans la littérature [29, 30, 31]. Dans ces études, le contact entre une masse et un plan frottant est étudié en considérant une simple raideur de contact. C'est un choix relativement commun pas seulement pour les modèles minimaux mais aussi pour des modèles éléments finis beaucoup plus élaborés (cf. Chapitre 2 Section 2.2). Ce choix peut être expliqué par des considérations physiques (i.e. l'élasticité locale du contact) ou par des considérations numériques (i.e. la force de frottement est directement liée au déplacement normal afin de simplifier la formulation du problème et les équations du mouvement). De plus les chercheurs restreignent souvent la modélisation du contact à l'interface frottante à un degré de liberté tangent (i.e. frottement rectiligne). Cependant, en utilisant cette hypothèse, il n'est pas possible d'expliquer certains phénomènes spécifiques dûs à la nature plan de la loi de frottement de Coulomb, en particulier, le fait que la direction des forces de frottement varie avec les vibrations de la structure. Un modèle combinant ces deux caractéristiques (i.e. absence de raideur de contact et frottement plan) a été proposé par Moiro [12]. On y retrouve les différences de formulations de frottement plan et rectiligne et la déstabilisation due à l'utilisation du frottement plan. Cependant, les recherches de Moiro traitent uniquement un modèle sans amortissement. De plus, d'autres chercheurs ont mené des études similaires sur des modèles éléments finis beaucoup plus complexes [1, 2, 34] et ont démontré que le frottement plan semblait stabiliser le système. Ainsi l'influence précise du frottement plan sur le crissement comparé au frottement rectiligne reste une question ouverte. Ce chapitre permettra notamment d'apporter des éléments de réponse à ce problème scientifique.

Un des phénomènes les plus intéressants concerne l'existence d'un effet non-intuitif de la distribution de l'amortissement qui peut alors générer des vibrations instables. Comme reporté dans des travaux récents, l'amortissement structural est d'une importance primordiale dans la stabilité par couplage de modes et les résultats indiquent que l'addition d'amortissement dans les systèmes mécaniques altère les frontières entre les zones stables et instables. Dans la littérature, la relation entre l'amortissement et la propension du système à devenir instable, appelée "paradoxe de déstabilisation" et appliquée à des vibrations induites par frottement, a souvent été illustrée par plusieurs études analytiques et numériques [31, 33, 98, 99]. Massi et Giannini [100] ont aussi proposé une recherche expérimentale de la relation entre la répartition de l'amortissement et la propension à développer du crissement sur une installation d'une poutre frottante sur un disque. Il a été constaté qu'une répartition non-uniforme de l'amortissement modal cause une augmentation de la propension au crissement. Des études plus complètes ont été menées incluant le rôle de l'amortissement sur les autres facteurs physiques. Par exemple Hervé *et al.* [101, 102] ont utilisé un modèle non-linéaire à deux degrés de liberté du crissement d'embrayage afin d'étudier en détail l'influence de l'amortissement modal sur les effets des actions circulatoires et gyroscopiques combinées. Récemment Kirillov *et al.*

[103, 104, 105] ont travaillé sur la détermination de forme explicite des configurations amorties stabilisantes pour une large gamme de systèmes non-conservatifs. Ils ont proposé une théorie pour la description qualitative et quantitative du “paradoxe de déstabilisation” de tels systèmes. Cependant, aucune contribution considère l’effet de l’amortissement structural dans le cas d’un système vibratoire avec frottement plan qui introduit une nouvelle contribution en amortissement due à la présence du frottement. Ainsi, l’influence du frottement plan dans un système amorti reste une question ouverte. Une autre contribution originale de ce chapitre sera d’étendre les résultats précédemment cités (effets non-intuitif de la répartition de l’amortissement) pour un cas spécifique de système mécanique amorti soumis à un frottement plan.

Après la description du système mécanique étudié et des équations correspondantes, la méthode permettant l’analyse de stabilité est présentée incluant notamment l’étude du critère de Routh-Hurwitz. Des études paramétriques et des résultats numériques sur des systèmes amortis ou non, soumis à un frottement rectiligne ou plan, sont ensuite menées afin de discuter de l’effet élémentaire du frottement plan ou rectiligne et d’entreprendre une extension du paradoxe de déstabilisation en présence de frottement plan.

## 3.2 Description du système mécanique

Le système considéré dans ce chapitre est décrit en Figure 3.1. Il est composé d’une masse  $m$  en contact frottant sur un plan rigide. Ce plan se déplace à une vitesse rectiligne constante dénotée  $V$ . La masse est maintenue contre le plan par trois raideurs et est soumise à une force extérieure  $F$ . L’amortissement est aussi intégré comme décrit par la Figure 3.1. L’angle entre la direction de la vitesse imposée du plan (dénotée  $\vec{v}$  comme indiqué sur la Figure 3.1) et la coordonnée  $\vec{x}$  du système mécanique est définie par  $\gamma$ . L’équation du mouvement du système peut être écrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} + \mathbf{F} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{U} = (U_x \ U_y \ U_z)^T$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  et  $\ddot{\mathbf{U}}$  sont respectivement les vecteurs déplacements, vitesses et accélérations regroupant les composantes selon les trois directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ . La matrice de masse  $\mathbf{M}$  est définie par  $\mathbf{M} = m\mathbf{I}$  (avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité). Le vecteur  $\mathbf{R}$  inclus la réaction de contact normal et la force de frottement appliquée sur la masse dues au contact frottant avec le plan.  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices d’amortissement et de raideur, respectivement. Le vecteur  $\mathbf{F}$  représente la force externe. Ils sont donnés par :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_1 \tan \alpha \\ 0 & k_2 & k_2 \tan \beta \\ k_1 \tan \alpha & k_2 \tan \beta & k_n \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{F} = (0 \ 0 \ -F)^T \quad \text{avec } F > 0 \quad (3.4)$$

avec

$$k_1 = k'_1 \cos^2 \alpha \quad (3.5)$$

$$k_2 = k'_2 \cos^2 \beta \quad (3.6)$$



$$\mathbf{P}_b = [-\sin \gamma \quad \cos \gamma \quad 0] \quad (3.9)$$

$$\mathbf{P}_t = [\cos \gamma \quad \sin \gamma \quad 0] \quad (3.10)$$

$$\mathbf{P}_n = [0 \quad 0 \quad 1] \quad (3.11)$$

$R_t$ ,  $R_b$  et  $R_n$  sont, respectivement, les deux composantes de la force de frottement et de la réaction de contact appliquées sur la masse, selon les directions  $\vec{t}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{z}$ .  $\dot{\mathbf{U}}_t = \mathbf{P}_t \dot{\mathbf{U}}$  et  $\dot{\mathbf{U}}_b = \mathbf{P}_b \dot{\mathbf{U}}$  sont les vitesses de la masses selon les directions  $\vec{t}$  et  $\vec{b}$ . Les matrices  $\mathbf{P}_t$ ,  $\mathbf{P}_b$  et  $\mathbf{P}_n$  sont utilisées pour transposer les efforts du système de coordonnées locales dans le système de coordonnées globales. Il est à noter que, même si nous avons une phase glissante, le caractère plan du frottement fait que la loi de frottement est non-linéaire : la force de frottement dépend de la direction du déplacement. En comparaison, pour le frottement rectiligne, la composante de la force de frottement selon la direction  $\vec{b}$  est nulle et la loi de Coulomb est simplement écrite  $R_t = \mu R_n$ .

### 3.3 Analyse de stabilité

Dans cette section, la stabilité du système est étudiée. Cela consiste à analyser le comportement de petites perturbations autour de l'équilibre quasi-statique glissant. Le calcul de l'équilibre est d'abord étudié. Ensuite, l'équation de frottement est linéarisée autour de la position d'équilibre et le problème est projeté dans le plan tangent. Enfin la stabilité de l'équilibre est déterminée par la méthode classique d'analyse aux valeurs propres complexes (CEA) complétée par le critère de Routh-Hurwitz.

#### 3.3.1 Calcul de l'équilibre

En premier lieu, l'équilibre  $\mathbf{U}^e$ , tel que  $\ddot{\mathbf{U}}^e = \mathbf{0}$  et  $\dot{\mathbf{U}}^e = \mathbf{0}$ , est calculé. Si les vitesses tangentielles de la masse sont nulles, nous avons :

$$\begin{cases} R_t^e = \mu R_n^e \\ R_b^e = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

où  $R_t^e$  et  $R_b^e$  sont les forces de frottement quasi-statique selon les directions  $\vec{t}$  et  $\vec{b}$  respectivement et  $R_n^e$  est la réaction normale quasi-statique. Nous devons maintenant résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{U}^e = \mathbf{F} + (\mu \mathbf{P}_t + \mathbf{P}_n) R_n^e \\ U_z^e = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

ce qui mène aux équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathbf{U}^e = \mu R_n^e \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ k_1 & k_2 & F \end{pmatrix}^T \\ R_n^e = \frac{F}{1 - \mu (\cos \gamma \tan \alpha + \sin \gamma \tan \beta)} \end{cases} \quad (3.14)$$

La dernière équation du système (3.14) exprime la relation entre  $R_n^e$  et les paramètres du système et requiert  $R_n^e > 0$  pour préserver le contact. C'est pourquoi, en rappelant que  $F > 0$ , le coefficient de frottement critique  $\mu^e$ , au-delà duquel l'équilibre glissant quasi-statique n'existe plus, est donné par :

$$\mu^e = \frac{1}{\cos \gamma \tan \alpha + \sin \gamma \tan \beta} \quad (3.15)$$

Nous remarquons que pour le modèle proposé, seul les angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et la direction de frottement  $\gamma$  ont une influence sur l'existence de l'équilibre.

### 3.3.2 Stabilité autour de l'équilibre

La stabilité de l'équilibre est étudiée pour de petites perturbations  $\delta \mathbf{U}$  autour de l'équilibre  $\mathbf{U}^e$  du système (i.e.  $\delta \mathbf{U} + \mathbf{U}^e$ ). Ainsi la troisième équation du système (3.8) doit être linéarisée autour de l'équilibre. Nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta R_t \\ \delta R_b \end{Bmatrix} &= \frac{\partial \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix}}{\partial R_n} \Big|_{\dot{\mathbf{U}}=0, R_n=R_n^e} \delta R_n + \frac{\partial \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix}}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \Big|_{\dot{\mathbf{U}}=0, R_n=R_n^e} \delta \dot{\mathbf{U}} \\ &= \mu \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \delta R_n - \frac{\mu R_n^e}{V} \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \delta \dot{U}_t \\ \delta \dot{U}_b \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \mu \delta R_n \\ -\mu \frac{R_n^e}{V} \delta \dot{U}_b \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dans le cas du frottement rectiligne, la composante  $\delta R_b$  est négligée et la loi de Coulomb est directement retrouvée. Avec le frottement plan, le terme  $-\mu \frac{R_n^e}{V} \delta \dot{U}_b$ , résultant de la linéarisation de la direction de la force de frottement, fournit une contribution en vitesse à la force de frottement linéaire. Ce terme additionnel dans le cas du frottement plan (en comparaison au frottement rectiligne) correspond à une nouvelle contribution d'amortissement caractérisée par un coefficient d'amortissement visqueux  $c_b = \frac{R_n^e}{V}$  et dépendant de l'équilibre glissant. Cette contribution, qui accroît lorsque la force externe augmente ou la vitesse de glissement décroît, peut être pris en compte via la matrice d'amortissement  $\mathbf{C}_b$ . La dynamique du système est alors donnée par :

$$\begin{cases} m \delta \ddot{\mathbf{U}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_b) \delta \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \delta \mathbf{U} &= (\mu \mathbf{P}_t + \mathbf{P}_n) \delta R_n \\ \delta U_z &= 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

avec

$$\mathbf{C}_b = \mu \mathbf{P}_b^T \frac{R_n^e}{V} \mathbf{P}_b \quad (3.18)$$

Finalement une unique formulation avec les déplacements, vitesses et accélérations dans le plan tangent peut être obtenue en substituant la réaction normale dans le problème. La première étape est d'utiliser le fait que le déplacement normal est nul et d'exprimer  $\delta R_n$  selon  $\mathbf{U}_p = (\delta U_x \quad \delta U_y)^T$  :

$$\delta R_n = [k_1 \tan \alpha \quad k_2 \tan \beta] \mathbf{U}_p \quad (3.19)$$

Ensuite en utilisant cette équation, l'équation du mouvement projetée dans le plan tangent est écrite comme :

$$m \tilde{\mathbf{I}} \ddot{\mathbf{U}}_p + (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{C}}_b) \dot{\mathbf{U}}_p + (\tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_\mu) \mathbf{U}_p = 0 \quad (3.20)$$

où  $\tilde{\mathbf{C}}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_b$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  sont respectivement les restrictions des matrices  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}_b$  et  $\mathbf{K}$  au plan tangent. Les matrices  $m \tilde{\mathbf{I}}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  sont diagonales. Elles caractérisent les deux modes non

couplés qui déterminent le comportement glissant du système sans frottement. De plus, nous avons :

$$\mathbf{K}_\mu = -\mu \tilde{\mathbf{P}}_t^T [k_1 \tan \alpha \quad k_2 \tan \beta] \quad (3.21)$$

où  $\tilde{\mathbf{P}}_t = [\cos \gamma \quad \sin \gamma]$  est la restriction de  $\mathbf{P}_t$  au plan tangent. L'effet du frottement est lié aux matrices  $\tilde{\mathbf{C}}_b$  et  $\mathbf{K}_\mu$  qui amènent le couplage de modes. Le couplage est plus important lorsque le coefficient de frottement est grand. Il est à noter que le couplage de modes dépend de la géométrie du système, (le couplage dû aux angles  $\alpha$  et  $\beta$ ) et à la direction de frottement du système caractérisée par l'angle  $\gamma$ .

### 3.3.3 Analyse de la stabilité autour de l'équilibre

La stabilité du système est analysée en calculant les valeurs propres complexes  $\lambda$  de l'équation caractéristique :

$$\det(\lambda^2 m \tilde{\mathbf{I}} + \lambda (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{C}}_b) + (\tilde{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_\mu)) = 0 \quad (3.22)$$

Si toutes les parties réelles des valeurs propres complexes sont négatives, alors l'équilibre est stable. Cependant, si une des parties réelles devient positive, l'équilibre devient instable. Les parties imaginaires des valeurs propres représentent les pulsations propres des modes alors que les parties réelles représentent les divergences.

Pour déterminer les zones de stabilité de l'équilibre du système selon différents paramètres, le critère de Routh-Hurwitz peut aussi être utilisé [106]. Un des principaux avantages du critère de Routh-Hurwitz est la possibilité d'obtenir les expressions analytiques contrairement à l'analyse de stabilité du système étudié. Le développement de l'équation (3.22) permet d'obtenir une équation polynomiale de degré 4 :

$$\lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (3.23)$$

où  $\lambda$  sont les valeurs propres du système mécanique linéarisé. Appliquer le critère de Routh-Hurwitz à cette équation caractéristique donne les quatre coefficients suivants  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ .

$$a = a_0 \quad (3.24)$$

$$b = a_3 \quad (3.25)$$

$$c = a_2 a_3 - a_1 \quad (3.26)$$

$$d = a_1 (a_2 a_3 - a_1) - a_0 a_3^2 \quad (3.27)$$

Généralement, si tous les coefficients sont positifs, l'équilibre est stable. Quand un des quatre coefficients est négatif, l'équilibre est instable. Dans notre cas physique et pratique, il peut être observé que  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $c > 0$ . Donc la stabilité de l'équilibre est uniquement gouvernée par le coefficient  $d$  : si  $d > 0$  alors l'équilibre est stable (i.e.  $\forall i \Re(\lambda_i) < 0$ ). Si  $d < 0$  l'équilibre est instable. En utilisant le critère de Routh-Hurwitz, le coefficient de frottement critique  $\mu_c$ , tel que le coefficient  $d$  est égale à zéro (i.e.  $d(\mu_c) = 0$  et la nature de l'équilibre change), peut être déterminé. Selon les différents cas, le coefficient de frottement critique est solution d'une équation polynomiale de degré 1 (frottement plan sans amortissement), de degré 2 (frottement rectiligne avec ou sans amortissement) et de degré 4 (frottement plan avec amortissement). Il est à noter que pour les deux derniers cas,

s'il y a deux solutions positives, l'équilibre peut redevenir stable après avoir été instable. Tous les développements mathématiques sont donnés en Annexe A.

Dans la section suivante, la stabilité du système mécanique est analysée en calculant les valeurs propres complexes  $\lambda$  de l'équation caractéristique définie par l'équation (3.22).

## 3.4 Résultats

Dans ce chapitre, on choisit de présenter les résultats pour deux cas particuliers : le premier est le modèle non-amorti. Ce premier cas permet non seulement de comprendre l'influence des paramètres physiques du système, mais aussi de discuter de l'effet élémentaire du frottement plan ou rectiligne. Le second cas concerne le modèle amorti. Plus précisément, ce dernier cas nous permet d'entreprendre une extension du paradoxe de déstabilisation en présence de frottement rectiligne.

Cette étude est effectuée sur un système non-amorti de référence possédant les paramètres suivants :  $m = 0.01$  kg,  $k_i = m\omega_i^2$  (pour  $i = 1, 2$  avec  $\omega_1 = 100 \times 2\pi$  rad.s<sup>-1</sup>,  $\omega_2 = 75 \times 2\pi$  rad.s<sup>-1</sup>),  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $F = 10$  N,  $\gamma = -30^\circ$ ,  $k'_n = 20$  N et  $V = 5$  m.s<sup>-1</sup>. Les paramètres qui différeront de ces paramètres de référence ainsi que l'ajout l'amortissement seront explicitement spécifiés.

### 3.4.1 Modèle non-amorti avec frottement plan ou rectiligne : influence des paramètres sur les zones de stabilité et sur les valeurs propres complexes

Dans cette section une étude paramétrique sur la stabilité du système non-amorti est menée. L'influence de l'équilibre, des raideurs du système et de la direction de glissement sur les zones de stabilité et les évolutions des frontières entre zones stables et instables sont traitées.

#### Zone de stabilité : présentation et compréhension

Le principal objectif de ce paragraphe est d'introduire la représentation graphique des zones de stabilité qui est utilisée dans ce chapitre. Une étude préliminaire nous permettra d'illustrer les premiers résultats montrant ainsi les possibles différences de stabilité entre un système soumis à un frottement rectiligne ou plan.

La Figure 3.2 montre la différence des zones de stabilité pour un système non-amorti avec frottement plan ou rectiligne. Ce graphique a deux variables : la direction de la vitesse de glissement  $\gamma$  et le coefficient de frottement  $\mu$ . Pour chaque couple  $(\gamma, \mu)$ , la frontière entre les zones stable et instable peut être déterminée (en bleu pour le frottement rectiligne et rouge pour le frottement plan). Pour faciliter la compréhension de la lecture de ce graphique, deux exemples sont illustrés. Le premier, pour le couple  $(-45^\circ, 0.5)$ , est indiqué par un cercle sur la Figure 3.2. Le système mécanique est instable dans les deux cas (i.e. avec frottement plan ou rectiligne). Le second exemple est obtenu pour le couple  $(-10^\circ, 0.2)$  et est indiqué par une étoile sur la Figure 3.2. Pour ce second exemple, le système avec frottement plan est instable alors que le système avec frottement rectiligne est stable.

Plus généralement, il est à noter que pour un système non-amorti, le système avec frottement plan est moins stable que celui soumis au frottement rectiligne (en compa-

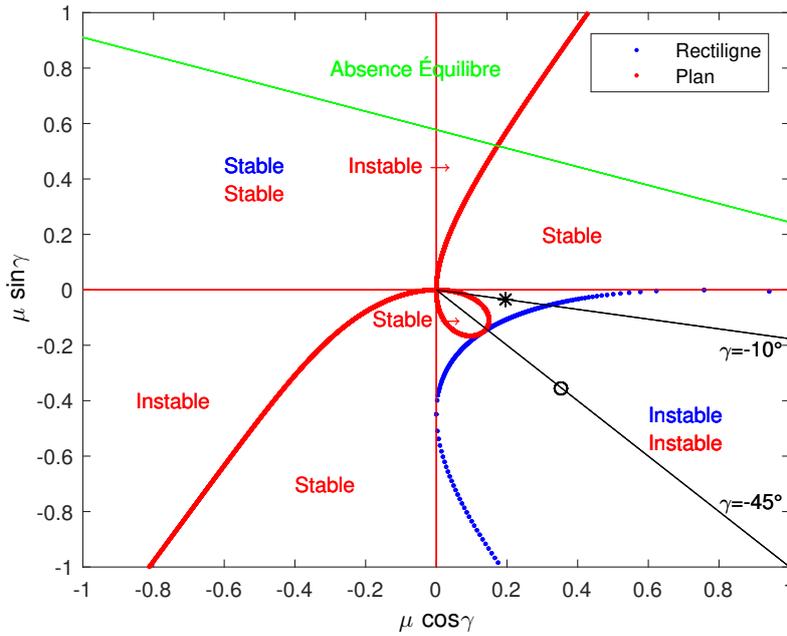


FIGURE 3.2 – Zones de stabilité pour les paramètres de référence

rant les zones de stabilité selon les couples possibles  $(\gamma, \mu)$ . Pour une meilleure compréhension, toutes les régions stables et instables pour le frottement rectiligne et plan sont indiquées par les mots "Stable" et "Instable" en bleu et rouge respectivement.

Finalement, on remarque que l'équilibre n'existe pas pour certaines directions de la vitesse de glissement : ces zones associées sont indiquées par "Absence Équilibre" en vert (cf. Équation (3.15)).

### Influence des raideurs

Dans cette section, l'influence des raideurs est étudiée. La somme des raideurs est fixée constante avec les valeurs de référence  $(k_1 + k_2)/m = (175 \times 2\pi)^2 \text{ N.m}^{-1}$  et trois cas sont choisis avec des différences de raideurs :  $k_1 - k_2 = 8.75 \times (2\pi)^2 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $43.75 \times (2\pi)^2 \text{ N.m}^{-1}$  et  $78.75 \times (2\pi)^2 \text{ N.m}^{-1}$ , le cas medium correspondant au cas de référence. Les Figures 3.3(a) et (b) montrent respectivement les zones de stabilité pour un système soumis à du frottement plan et rectiligne. De plus, pour ces trois cas avec frottement plan ou rectiligne, la bifurcation de Hopf (i.e. évolution des parties réelles) et l'évolution des fréquences sont représentées sur les Figures 3.3(c), (d), (e) et (f), pour  $\gamma = -30^\circ$ .

En observant les Figures 3.3(a) et (b), on constate que la différence entre  $k_1$  et  $k_2$  a un réel impact sur la stabilité du système. Les zones stables et instables peuvent changer drastiquement selon les variations de ces paramètres. On remarque aussi que l'influence de la différence entre  $k_1$  et  $k_2$  est similaire pour un système mécanique soumis au frottement plan ou au frottement rectiligne. On observe que lorsque la différence est plus petite, l'équilibre est plus instable (i.e. la zone de stabilité diminue selon le couple  $(\gamma, \mu)$ ). Dans notre cas, cela peut être expliqué par le fait que la différence des fréquences des modes qui coalescent est directement liée à la différence entre les raideurs  $k_1$  et  $k_2$  : si la différence entre  $k_1$  et  $k_2$  est petite, la différence entre les fréquences l'est également et le couplage entre les modes associés est facilité. Par conséquent, les instabilités de couplage de modes apparaissent pour un coefficient de frottement  $\mu$  plus faible comme illustré sur les Figures 3.3(e) et (f).

**CHAPITRE 3. ANALYSE DE STABILITÉ D'UN MODÈLE MINIMAL :  
COMPARAISON FROTTEMENT RECTILIGNE - FROTTEMENT PLAN**

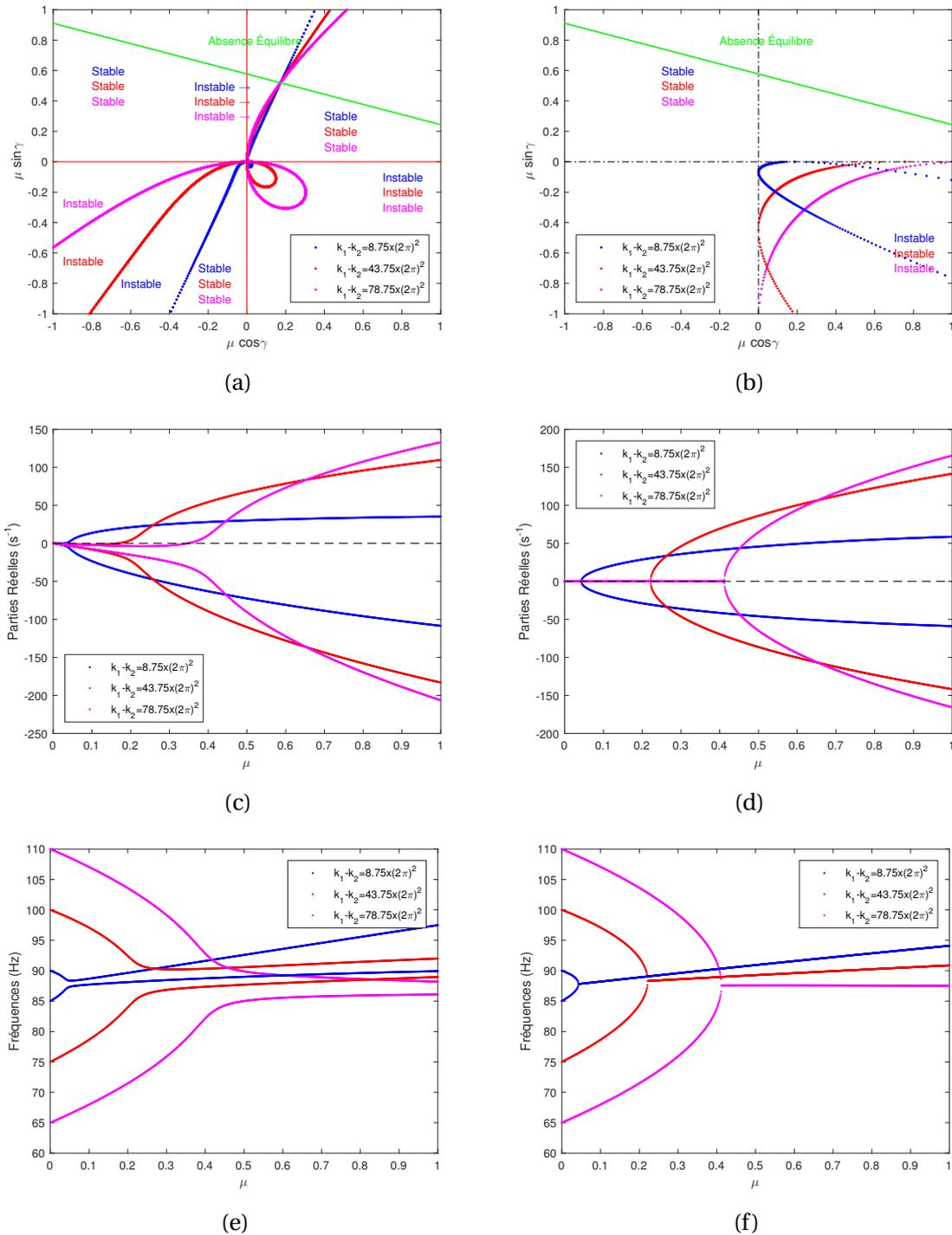


FIGURE 3.3 – Influence de la différence des raideurs  $k_1 - k_2$  avec  $k_1 + k_2$  constant sur (a-b) les zones de stabilité, (c-d), les parties réelles pour  $\gamma = -30^\circ$ , (e-f) et les fréquences pour  $\gamma = -30^\circ$ , pour (a,c,e) le frottement plan et pour (b,d,f) le frottement rectiligne

$k_1 - k_2$ (N.m <sup>-1</sup> )	Frottement Plan		Frottement Rectiligne	
	$\mu_c$	Fréquence instable (Hz)	$\mu_c$	Fréquence instable (Hz)
$8.75 \times (2\pi)^2$	0.029	89.12	0.043	87.81
$43.75 \times (2\pi)^2$ (ref)	0.168	94.22	0.222	88.31
$78.75 \times (2\pi)^2$	0.347	96.44	0.412	87.58

TABEAU 3.1 – Valeurs des coefficients de frottement et des fréquences du mode instable au point de bifurcation de Hopf pour  $\gamma = -30^\circ$

Ensuite, les Figures 3.3(c), (d), (e) et (f) illustrent clairement la différence entre les frottements plan et rectiligne. Dans le cas d'un système soumis au frottement rectiligne, le comportement classique d'un système non-amorti est observé (Figures 3.3(d) et (f)) : quand le système est stable, les parties réelles sont nulles. Lorsque le système devient instable, les variations des parties réelles selon le coefficient de frottement sont symétriques selon l'axe des parties réelles (i.e. symétrie selon zéro) et un modèle de coalescence parfaite est obtenu (les fréquences du mode instable et du mode stable associé sont égales). En revanche, dans le cas du système soumis au frottement plan, le modèle de coalescence n'est pas parfait (le mode instable et le mode stable associé n'ont pas la même fréquence comme le montre la Figure 3.3(c)). Par ailleurs, sur la Figure 3.3(d), on observe que l'évolution des parties réelles est plus complexe en raison de l'introduction du terme d'amortissement additionnel dans le cas du frottement plan en comparaison avec le cas du frottement rectiligne (comme cela a été démontré en Section 3.3.2). Finalement, le Tableau 3.1 donne les valeurs  $\mu_c$  du coefficient de frottement au point de la bifurcation de Hopf et les valeurs des fréquences du mode instable du système mécanique avec frottement plan et frottement rectiligne. Il apparaît que la considération du frottement rectiligne induit une modification de la bifurcation de Hopf.

### Influence de la vitesse de glissement

L'influence de la vitesse de glissement sur la stabilité d'un système non-amorti avec frottement plan est maintenant étudiée. Comme vu précédemment dans la Section 3.3.2, la considération du frottement plan induit une contribution en vitesse et un terme d'amortissement supplémentaire (i.e. matrice  $\tilde{\mathbf{C}}_b$ ) résultant de la linéarisation de la direction de la force de frottement. Il est rappelé que dans le cas d'un frottement rectiligne, cette contribution n'existe pas.

Pour déterminer si la contribution en amortissement a une influence sur la stabilité du système, une analyse aux valeurs propres complexes est entreprise pour trois valeurs de vitesse de glissement :  $V = 1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $5 \text{ m.s}^{-1}$  et  $10 \text{ m.s}^{-1}$ . Les zones de stabilité ne sont pas montrées car les résultats sur les frontières entre zones stables et instables sont identiques à celles présentées dans la section précédente 3.4.1 (Figure 3.2). En effet, la variation de la vitesse de glissement n'a pas d'effet sur les zones de stabilité d'un système non-amorti soumis au frottement plan (i.e.  $\mu_c$  ne dépend pas de  $c_b$  comme le montre l'expression du coefficient  $d(\mu)$  en Section A.2 de l'Annexe A).

Afin de mieux comprendre l'influence de la vitesse de glissement sur la stabilité du système, les Figures 3.4(a) et (b) illustrent les évolutions des parties réelles et imaginaires pour  $\gamma = -30^\circ$ , respectivement (selon le coefficient de frottement pour les trois valeurs de vitesse de glissement choisies). En premier lieu, on montre avec la Figure 3.4(a) que pour toutes les valeurs de la vitesse de glissement  $V$ , le système avec frottement plan devient instable pour un coefficient de frottement plus petit que pour un système soumis au frot-

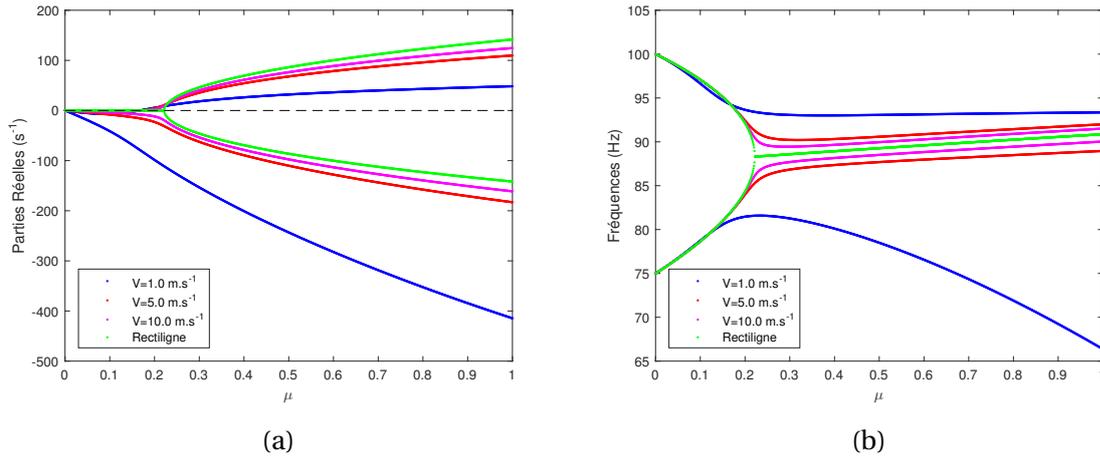


FIGURE 3.4 – Influence de la vitesse de glissement sur (a) les parties réelles et (b) les fréquences pour  $\gamma = -30^\circ$

tement rectiligne. Il apparaît donc clairement que prendre en compte le frottement plan peut contribuer au paradoxe de déstabilisation : une augmentation de l'amortissement via une contribution additionnelle en amortissement  $\tilde{C}_b$  peut rendre le système instable pour une plus petite valeur du coefficient de frottement que dans le cas d'un frottement rectiligne. Comme mentionné plus haut, la valeur de la vitesse de glissement n'a aucune influence sur la frontière de la stabilité dans le cas d'un système non-amorti soumis au frottement plan : pour chaque configuration, le système devient instable pour la même valeur du coefficient de frottement au point de bifurcation de Hopf  $\mu_c$  (cf. Figure 3.4(a) pour  $\mu = \mu_c = 0.168$  et Tableau 3.2). Cependant, on montre que la vitesse de glissement affecte de manière importante l'évolution des parties réelles quand le système est stable ou instable. L'évolution des parties réelles selon les différentes valeurs de la vitesse de glissement est complexe : par exemple pour  $\mu = [0, \mu_c]$ , diminuer la vitesse de glissement, fait chuter la valeur des parties réelles. Le même comportement est observé pour une valeur plus grande du coefficient de frottement (i.e.  $\mu > 0.25$ ). Pour un coefficient de frottement compris entre  $\mu = [\mu_c, 0.25]$ , diminuer la vitesse de glissement, augmente la valeur des parties réelles du système. De plus, on note que si  $c_b = \frac{R_n^e}{V}$  est petit, le comportement du système tend à devenir similaire à celui soumis au frottement rectiligne.

Finalement la Figure 3.4(b) montre l'évolution des fréquences associées selon le coefficient de frottement  $\mu$  pour les trois valeurs de la vitesse de glissement. La diminution de la vitesse de glissement  $V$  conduit à une augmentation de l'amortissement apporté par la contribution du frottement plan et a une influence sur la coalescence des modes. Alors que le couplage des modes est parfait dans le cas du frottement rectiligne, les fréquences des deux modes (i.e. les modes instable et stable) ne sont pas les mêmes dans le cas du frottement plan. C'est notablement vrai au point de bifurcation de Hopf indiqué dans le Tableau 3.2. La diminution de la vitesse de glissement accroît le phénomène de coalescence imparfaite. Ce fait est une conséquence directe de l'influence de l'amortissement (plus précisément "the smoothing effect") et peut être retrouvé dans différentes études sur le sujet [29, 31, 99, 101].

### Influence de la direction de la vitesse de glissement

L'influence de la direction de la vitesse de glissement sur un système soumis au frottement plan est étudiée dans cette section. Comparée à la section précédente 3.4.1, l'évo-

Vitesse de glissement (m.s <sup>-1</sup> )	$\mu_c$	Fréquence instable (Hz)	Fréquence stable (Hz)
1.0	0.168	94.24	81.02
5.0 (reference)	0.168	94.22	81.97
10.0	0.168	94.22	82.00

TABLEAU 3.2 – Valeurs des coefficients de frottement et des fréquences des modes stable et instable au point de bifurcation de Hopf pour le frottement plan,  $\gamma = -30^\circ$  et différentes vitesses de glissement

lution des parties réelles, des fréquences et le plan complexe ont été tracés pour deux valeurs de  $\gamma$  ( $\gamma = -30^\circ$  et  $-60^\circ$ ). La valeur de la vitesse de glissement est égale à  $5 \text{ m.s}^{-1}$  dans les deux cas. On rappelle que les zones de stabilité (i.e. les frontières entre les zones stables et instables) pour un système non-amorti soumis au frottement plan (avec la direction de la vitesse de glissement comprise entre  $-180^\circ$  et  $180^\circ$ ) ont été préalablement présentées dans la Section 3.4.1.

La Figure 3.5(a) montre que pour les différentes directions de la vitesse de glissement (i.e.  $\gamma = -30^\circ$  ou  $-60^\circ$ ), le système peut “être plus ou moins stable” : pour  $\gamma = -30^\circ$ , les parties réelles des valeurs propres complexes deviennent positives pour un coefficient de frottement plus petit que pour  $\gamma = -60^\circ$ . La Figure 3.5(b) illustre l'évolution des fréquences. On montre que, pour  $\gamma = -60^\circ$ , un croisement des deux modes, impliqués dans le couplage modal, est observé.

Finalement, l'un des effets les plus importants de la direction de la vitesse de glissement peut être observé sur la Figure 3.5(c) qui représente l'évolution des modes dans le plan complexe (évolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres). On montre que, pour  $\gamma = -30^\circ$ , le mode instable au point de la bifurcation de Hopf est le mode avec la fréquence la plus élevée (i.e. le mode avec une fréquence de 100Hz pour  $\mu = 0$ ) et le mode avec la fréquence la plus petite est associé au mode stable. En revanche, pour  $\gamma = -60^\circ$ , le mode instable au point de la bifurcation de Hopf correspond au mode avec la plus petite fréquence (i.e. le mode avec une fréquence de 75Hz pour  $\mu = 0$ ). Après la coalescence des modes, l'intersection des modes stable et instable explique que le mode instable devient celui avec la fréquence la plus élevée. Ce phénomène est propre au frottement plan. Dans le cas du frottement rectiligne, le mode instable correspond au mode avec la fréquence la plus élevée (pour les deux valeurs de  $\gamma$ ).

### 3.4.2 Influence de l'amortissement sur un système soumis au frottement plan ou au frottement rectiligne

Une des contributions originales de cette partie est d'étendre les résultats proposés par de nombreux chercheurs concernant l'effet de l'amortissement structural sur les vibrations induites par frottement en considérant le cas spécifique d'un système mécanique avec frottement plan. On montre que le “lowering effect” (qui tend à stabiliser un système mécanique avec frottement rectiligne si les deux modes impliqués dans le couplage sont également amortis) et le “smoothing effect” (qui peut agir de manière contre intuitive en déstabilisant le système [29, 31, 99]) sont affectés par le frottement plan.

Pour accomplir ces recherches, l'influence de l'amortissement sur la stabilité est étudiée pour un système soumis au frottement plan ou rectiligne. Des comparaisons avec les résultats de la section précédente 3.4.1 (i.e. le cas d'un système non-amorti soumis au frottement plan ou rectiligne) et sur la stabilité du système amorti selon le modèle de frottement utilisé sont entreprises.

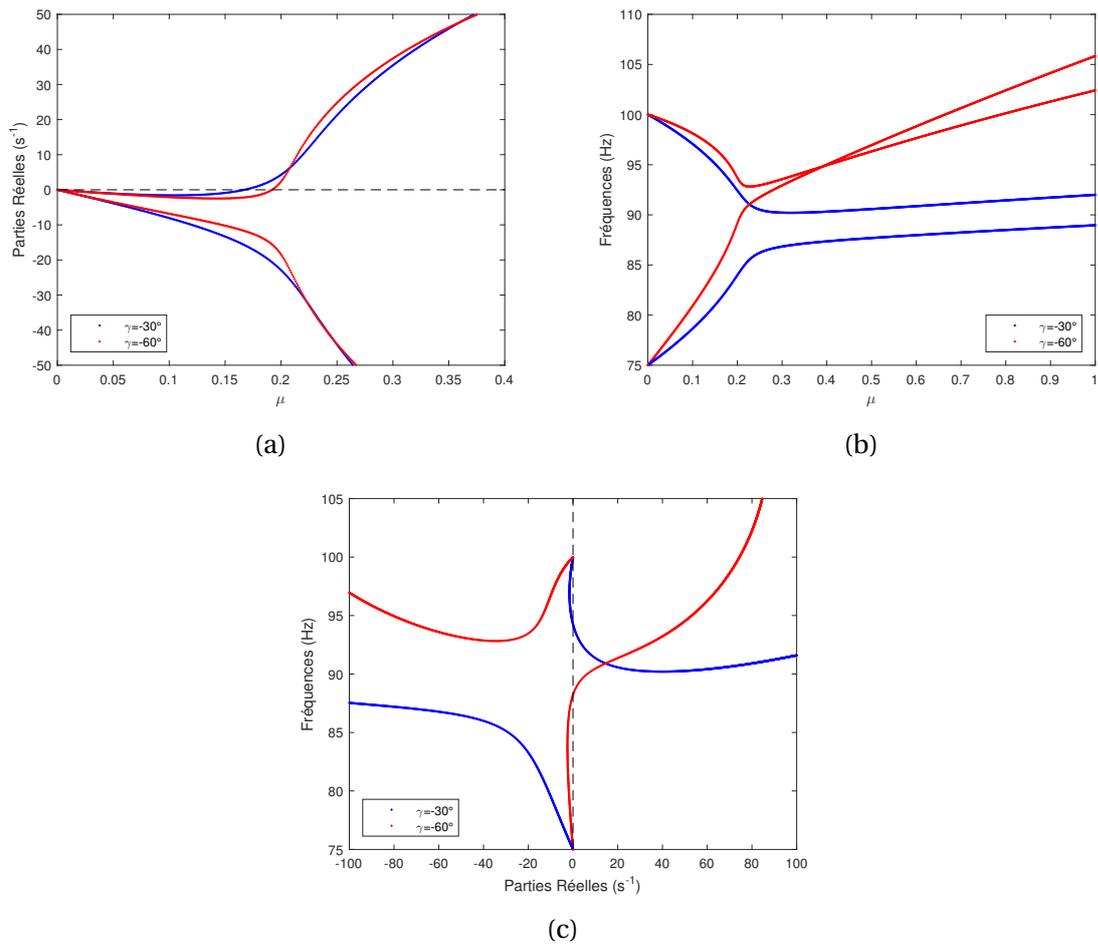


FIGURE 3.5 – Influence de la direction de la vitesse de glissement sur (a) les parties réelles, (b) les fréquences et (c) le plan complexe pour un frottement plan

L'amortissement est défini par défaut comme :  $\eta = 0.02$  et  $c = m\eta\omega_1$ . Premièrement l'influence d'un amortissement iso-réparti ( $\eta = \eta_1 = \eta_2$ ) est étudiée pour le système mécanique avec frottement plan ou rectiligne. Ensuite les effets d'un amortissement non iso-réparti sont discutés. Enfin l'influence de la vitesse de glissement sur un système amorti est présentée.

### Influence d'un amortissement iso-réparti

L'analyse de stabilité d'un système iso-amorti pour trois coefficients d'amortissement est menée. Les valeurs suivantes d'amortissement structural ont été choisies :  $\eta = 0.01, 0.02$  et  $0.05$ . Les Figures 3.6(a) et (b) représentent respectivement les zones de stabilité pour un frottement plan et un frottement rectiligne. En premier lieu, on observe que les frontières entre les zones stables et instables d'un système amorti soumis au frottement plan ou rectiligne sont assez proches même si des différences peuvent être observées. Cette première constatation montre que la contribution d'un amortissement structural iso-réparti dans le système change complètement les remarques précédentes sur l'impact du choix du frottement (plan ou rectiligne). En effet, pour un système non amorti, les résultats obtenus avec le frottement plan ou le frottement rectiligne sur les zones de stabilité étaient très différents concernant les frontières entre les zones stables et instables (cf. Section 3.4.1). De plus, la taille des zones stables croît en augmentant l'amortissement proportionnel  $\eta$  pour toutes les valeurs de  $\gamma$  entre  $[0; -90]^\circ$ . Le fait d'ajouter un amortissement proportionnel stabilise donc le système pour les deux types de frottement.

L'évolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres sont tracées Figures 3.6(c) et (e), et Figures 3.6(d) et (f) pour les frottements plan et rectiligne, respectivement (avec  $\gamma = -30^\circ$ ). Tout d'abord, comme expliqué dans certains travaux [29, 31, 99] pour un système mécanique soumis au frottement rectiligne, augmenter la valeur de  $\eta$  implique une diminution des parties réelles des valeurs propres, alors que les fréquences restent approximativement constantes, comme l'illustrent les Figures 3.6(d) et (f). De plus, les deux modes impliqués dans le couplage étant également amortis, le modèle de coalescence est parfait. Ce phénomène d'amortissement iso-réparti, appelé "lowering effect", peut être immédiatement étendu au système mécanique avec frottement plan : augmenter  $\eta$  augmente la zone stable du fait de la diminution des parties réelles des valeurs propres, comme l'indique la Figure 3.6(c). Ainsi, augmenter  $\eta$  accroît la stabilité parce que les parties réelles des valeurs propres deviennent positives pour une plus grande valeur du coefficient de frottement. Cependant, les changements des fréquences sont invariants selon la valeur de l'amortissement iso-réparti  $\eta$ . L'imparfaite coalescence des modes est uniquement due à la présence du terme d'amortissement supplémentaire  $\tilde{C}_b$  qui est généré par le frottement plan. Le Tableau 3.3 donne les valeurs des coefficients de frottement au point de bifurcation de Hopf et les valeurs des fréquences associées au mode instable du système mécanique soumis au frottement plan ou rectiligne.

La seule différence notable entre le frottement plan et rectiligne semble être la sensibilité des frontières entre les zones stables et instables : augmenter l'amortissement iso-réparti  $\eta$  a plus d'effet sur la zone stable d'un système soumis au frottement plan (cf. Figures 3.6(a) et (b)). Cela peut être facilement expliqué en considérant la pente des parties réelles avec le coefficient de frottement. Dans le cas d'un système soumis au frottement plan, cette pente est plus faible à cause du terme additionnel d'amortissement  $\tilde{C}_b$ . Ceci produit une modification plus importante de la valeur du point de bifurcation de Hopf  $\mu_c$  pour un système avec frottement plan en comparaison du cas avec frottement rectiligne, comme illustré sur les Figures 3.6(c) et (d). Cela reflète le fait que, pour une valeur

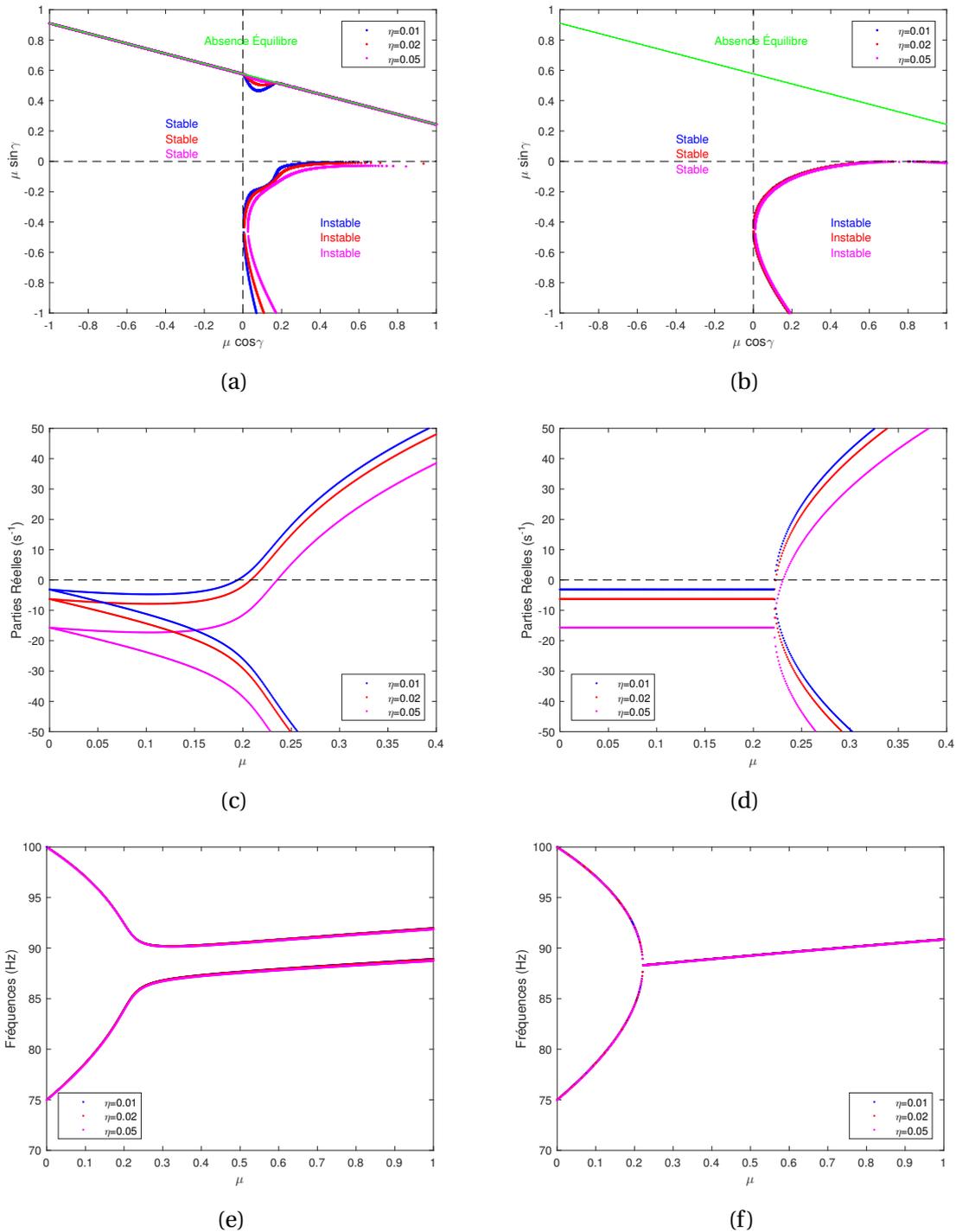


FIGURE 3.6 – Influence de l'amortissement iso-réparti sur (a,b) les zones de stabilité, (c,d) les parties réelles pour  $\gamma = -30^\circ$  et (e,f) les fréquences pour  $\gamma = -30^\circ$  (a,c,e) et pour un frottement plan ou (b,d,f) un frottement rectiligne

Frottement	Amortissement	$\mu_c$	Fréquence instable (Hz)
Plan	$\eta = 0.01$	0.195	92.70
Plan	$\eta = 0.02$	0.209	91.88
Plan	$\eta = 0.05$	0.236	90.74
Rectiligne	$\eta = 0.01$	0.222	88.27
Rectiligne	$\eta = 0.02$	0.224	88.28
Rectiligne	$\eta = 0.05$	0.231	88.31

TABEAU 3.3 – Valeur du coefficient de frottement de la fréquence du mode instable au point de bifurcation de Hopf pour un système iso-amorti et pour  $\gamma = -30^\circ$

de vitesse de glissement, le frottement plan induit une évolution positive plus faible des parties réelles autour du point de bifurcation de Hopf. Ce phénomène est seulement dû à la contribution additionnelle en amortissement  $\tilde{\mathbf{C}}_b$ . Cependant on doit rappeler que ce terme d'amortissement additionnel dû au frottement plan peut aussi contribuer au paradoxe de déstabilisation : une augmentation de l'amortissement via la contribution  $\tilde{\mathbf{C}}_b$  peut tendre à rendre le système instable pour une plus faible valeur de coefficient de frottement (cf. Section 3.4.1).

En conclusion, considérant l'ajout d'un amortissement iso-réparti, les zones de stabilité d'un système soumis au frottement plan sont proches de celles d'un système avec frottement rectiligne. En effet, la matrice d'amortissement ajoutée  $\tilde{\mathbf{C}}$  (i.e. contribution de l'amortissement iso-réparti) limite les effets de la contribution initiale de  $\tilde{\mathbf{C}}_b$  (i.e. contribution du frottement plan). On rappelle, cependant, que ces résultats dépendent évidemment du jeu de paramètres physiques. Si les contributions des matrices  $\tilde{\mathbf{C}}_b$  et  $\tilde{\mathbf{C}}$  varient et la contribution de  $\tilde{\mathbf{C}}_b$  devient plus importante que celle de  $\tilde{\mathbf{C}}$  (par exemple en changeant la vitesse de glissement  $V$  ou l'amortissement iso-réparti  $\eta$ ), des différences plus importantes entre le frottement plan et le frottement rectiligne peuvent apparaître (comme décrites dans le Section 3.4.1).

### Influence d'un amortissement non proportionnel

L'influence d'un amortissement non proportionnel est ici abordée pour un frottement plan et rectiligne. Une des contributions principales de cette section est d'étudier l'extension du paradoxe de déstabilisation dû à la présence de l'amortissement non proportionnel et aux phénomènes associés tels que le "lowering effect" et "smoothing effect" dans le cas spécifique d'un système avec frottement plan. Les zones de stabilité sont présentées pour différentes valeurs de  $\eta_x$  avec  $\eta_y = 0.02$  constant telles que  $\frac{\eta_y}{\eta_x} = 0.5, 1.0$  et  $2.0$  et pour plusieurs valeurs de  $\eta_y$  avec  $\eta_x = 0.02$  constant telles que  $\frac{\eta_x}{\eta_y} = 0.5, 1.0$  et  $2.0$ . Les Figures 3.7(a) et (c) montrent les zones de stabilité pour le frottement plan alors que les Figures 3.7(b) et (d) correspondent aux zones de stabilité pour le frottement rectiligne. Les zones de stabilité pour le frottement plan ou rectiligne et plusieurs distributions d'amortissement non-proportionnelles sont assez similaires même si des différences sont notables. Par exemple, dans le cas du frottement plan, on peut remarquer que la variation de  $\eta_x$  ou  $\eta_y$  a un effet bien visible sur la stabilité pour des directions de la vitesse de glissement proche de l'axe  $x$  ( $0^\circ$  ou  $180^\circ$ ) ou de l'axe  $y$  ( $90^\circ$  ou  $-90^\circ$ ). Dans le cas avec le frottement rectiligne, les changements sont peu visibles à l'échelle de la figure.

Comparé aux résultats obtenus pour un amortissement iso-réparti, la compréhension de l'évolution de la stabilité du système selon le jeu de variables  $(\gamma, \frac{\eta_x}{\eta_y})$  n'est pas immédiate. Alors que dans le cas d'un système iso-amorti, les changements des zones

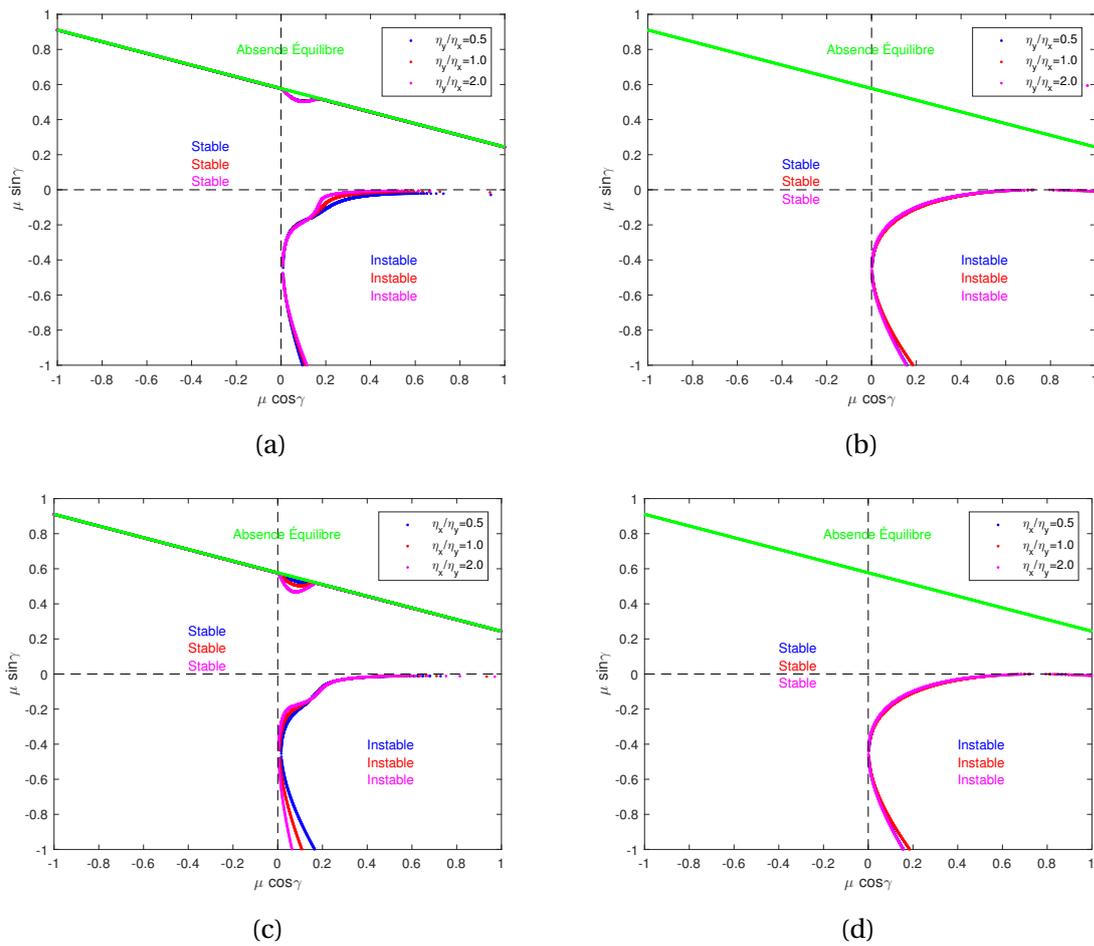


FIGURE 3.7 – Influence d'un amortissement non proportionnel avec (a,b)  $\eta_y$  constant ou (c,d)  $\eta_x$  constant sur les zones de stabilité pour (a,c) un frottement plan ou (b,d) un frottement rectiligne

de stabilité sont similaires selon l'ajout de l'amortissement pour toutes valeurs de  $\gamma$ , dans le cas d'un amortissement non proportionnel, la variation de la stabilité du système est plus complexe, particulièrement pour un frottement plan (cf. Figures 3.7(a) et (c)). Par exemple, une augmentation du ratio de l'amortissement  $\frac{\eta_y}{\eta_x}$ , avec  $\eta_y$  constant, décroît la stabilité pour  $\gamma = [0; -54.4]^\circ$  mais accroît la stabilité pour  $\gamma = [-54.4; -90]^\circ$  (cf. Figure 3.7(a)). Au contraire, une augmentation du ratio d'amortissement  $\frac{\eta_x}{\eta_y}$ , avec  $\eta_x$  constant, n'a aucun effet notable sur la stabilité pour  $\gamma = [0; -45]^\circ$  alors qu'il décroît la stabilité pour  $\gamma = [-45; -90]^\circ$  (cf. Figure 3.7(c)). Par conséquent, même s'il est possible d'accroître la stabilité d'un système avec un amortissement non proportionnel dans des directions spécifiques de glissement en modifiant le ratio d'amortissement, cela peut décroître la stabilité du système dans d'autres directions.

Pour explorer et développer ces observations initiales sur le rôle de l'amortissement non proportionnel et étudier les changements amenés par la contribution additionnelle en amortissement par le frottement plan, on propose de tracer les variations des parties réelles et des fréquences pour deux valeurs spécifiques de  $\gamma$  ( $\gamma = -30^\circ$  et  $\gamma = -60^\circ$ ). Les résultats sont tracés en Figures 3.8. Les variations des valeurs propres dans le plan complexe sont aussi tracées en Figure 3.9.

En premier lieu, les résultats classiques sur l'effet d'un amortissement non proportionnel pour un système mécanique soumis au frottement rectiligne sont retrouvés [29, 31, 99] : si l'amortissement n'est pas réparti de manière égale entre les deux modes, les "shifting effect" et "smoothing effect" peuvent être observés sur les variations des parties réelles et des courbes de couplage. Alors que la variation des parties réelles se produit uniquement au point de bifurcation de Hopf dans le cas d'un iso-amortissement  $\eta_y = \eta_x$  (cf. Figure 3.6(d)), les parties réelles associées aux modes stable et instable croissent et décroissent, respectivement, avec la variation du coefficient de frottement dans le cas d'un amortissement non proportionnel  $\eta_y \neq \eta_x$  (cf. Figure 3.8(e)). Ensuite, si le "smoothing effect" prévaut, ajouter de l'amortissement agit de façon non intuitive en déstabilisant le système, comme illustré sur la Figure 3.8(e) : le système avec un amortissement non proportionnel (i.e.  $\frac{\eta_y}{\eta_x} = 0.5$  et  $\eta_y = 0.02$  en Figure 3.8(e)) devient instable pour une plus faible valeur du coefficient de frottement que le cas d'un système avec un amortissement iso-réparti (i.e.  $\frac{\eta_y}{\eta_x} = 1$  et  $\eta_y = 0.02$  en Figure 3.8(e)) tandis que l'amortissement  $\eta_x$  croît (pour la même valeur de  $\eta_y$ ). Par conséquent, accroître l'écart en amortissement entre les deux modes tend à décoûtre les zones de stabilité comme précédemment expliqué par Hoffman et Gaul [98] et Fritz *et al.* [99]. De plus, la coalescence entre les deux modes est imparfaite dans le cas d'un amortissement non proportionnel comme illustré en Figure 3.8(f) : la différence entre les fréquences des modes stable et instable dépend du ratio de l'amortissement structural  $\frac{\eta_y}{\eta_x}$ . Le Tableau 3.4 donne les coefficients de frottement au point de bifurcation de Hopf et les fréquences correspondant au mode instable pour toutes les configurations.

Toujours pour le cas du frottement rectiligne, la Figure 3.9(a) nous permet de suivre le mode instable selon le modèle de coalescence via le plan complexe. Les résultats montrent que le mode instable est le mode le moins amorti. Ainsi, le mode instable peut être le mode avec la plus haute ou basse fréquence initialement selon le ratio entre les coefficients  $\eta_x$  et  $\eta_y$  (voir [33, 99] pour plus de détails). Dans notre cas, lorsque  $\frac{\eta_y}{\eta_x} = 0.5$  le mode instable correspond à celui avec la fréquence à 75Hz pour un coefficient de frottement nul. Quand le ratio entre  $\eta_y$  et  $\eta_x$  est inversé, le mode instable est le mode avec la fréquence à 100Hz pour un coefficient de frottement nul.

On approfondit maintenant le cas d'un système avec un amortissement non proportionnel et soumis au frottement plan et la notion du paradoxe de déstabilisation avec le

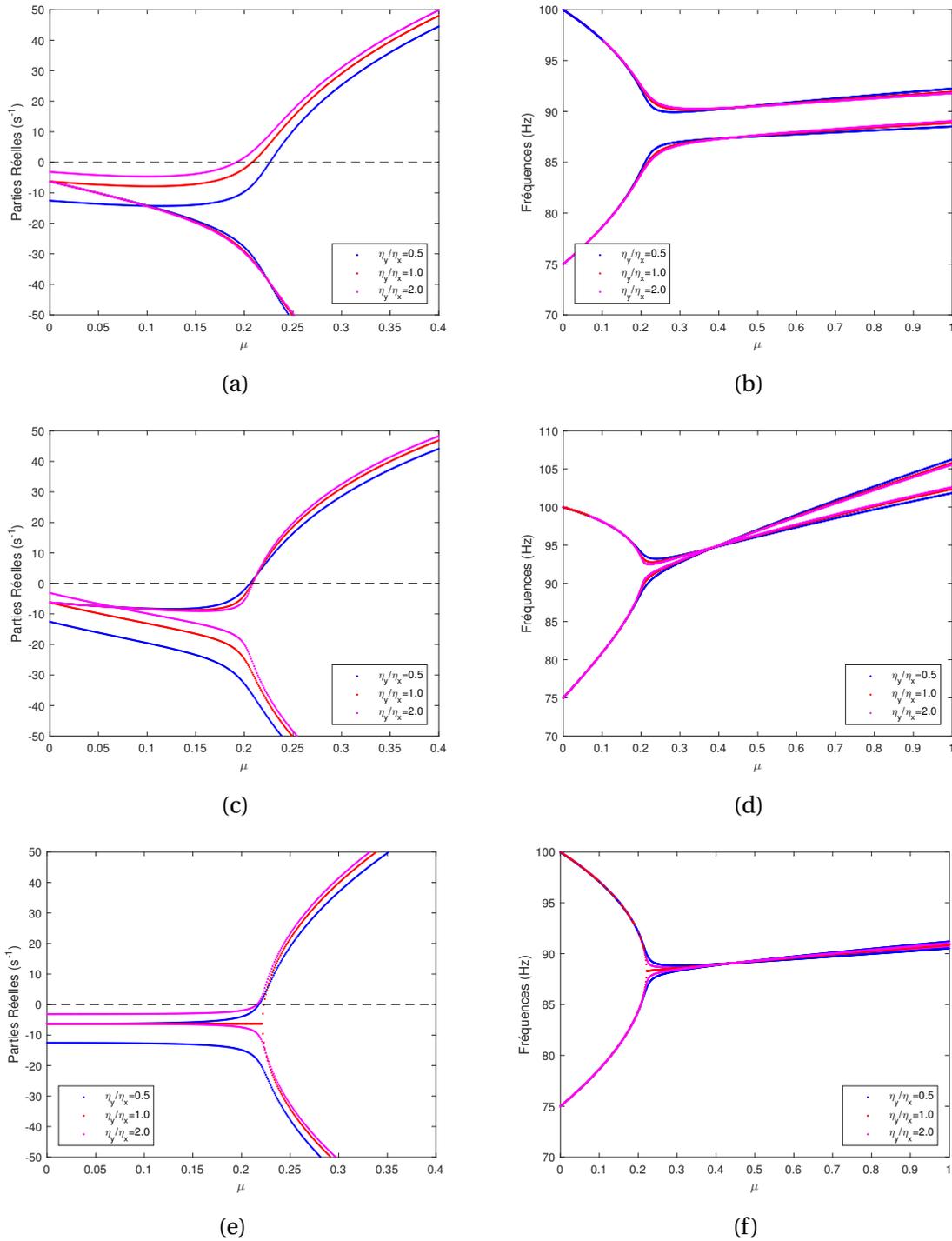


FIGURE 3.8 – Influence d'un amortissement non proportionnel sur (a, c, e) les parties réelles et (b, d, f) les fréquences avec  $\eta_y$  constant pour (a,b) frottement plan et  $\gamma = -30^\circ$ , (c,d) frottement plan et  $\gamma = -60^\circ$ , (e,f) frottement rectiligne et  $\gamma = -30^\circ$

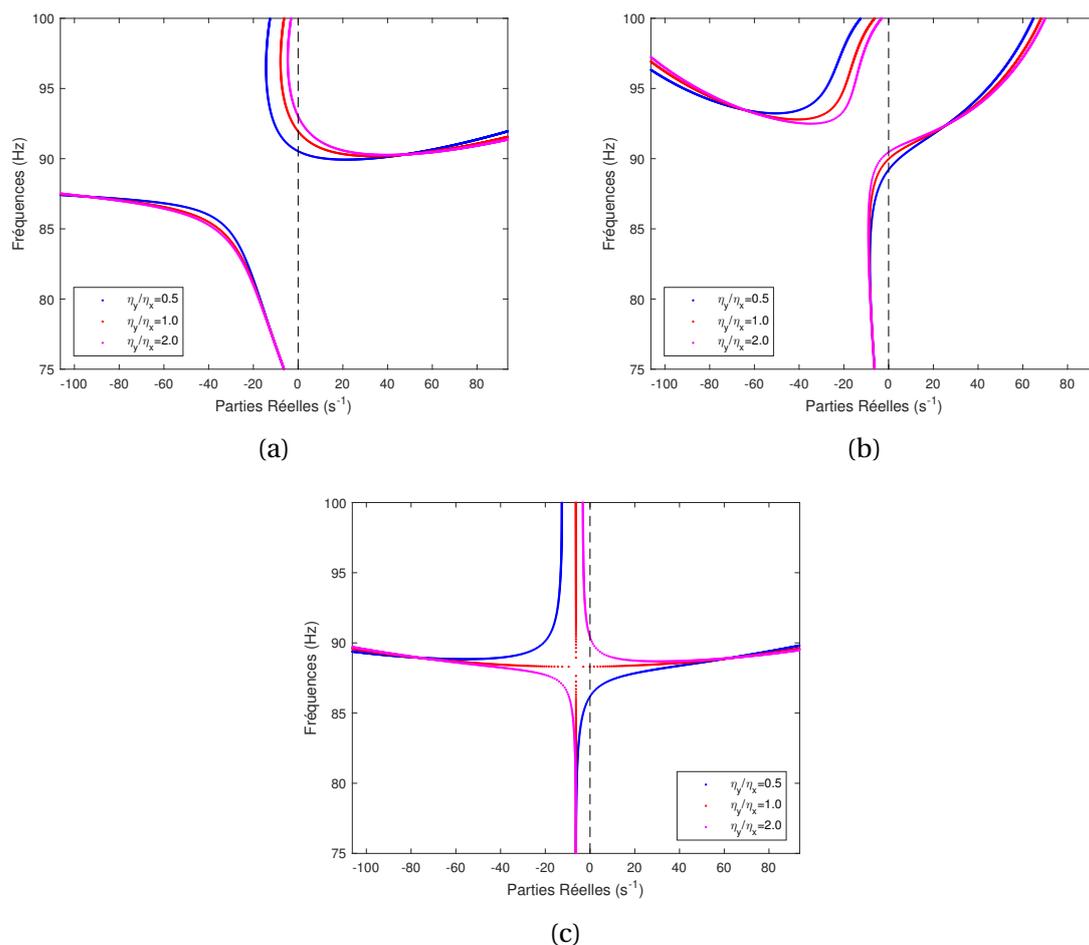


FIGURE 3.9 – Influence d'un amortissement non proportionnel sur le plan complexe avec  $\eta_y$  constant pour (a) frottement plan et  $\gamma = -30^\circ$ , (b) frottement plan et  $\gamma = -60^\circ$  et (c) frottement rectiligne et  $\gamma = -30^\circ$

concept de “lowering effect” et “smoothing effect” dans ce cas. Les Figures 3.8(a-d) et 3.9(a,b) décrivent les parties réelles et les fréquences pour deux valeurs spécifiques de  $\gamma$  ( $\gamma = -30^\circ$  et  $\gamma = -60^\circ$ ) et la variation des valeurs propres correspondantes dans le plan complexe, respectivement. Le Tableau 3.4 donne le coefficient de frottement au point de bifurcation de Hopf et les fréquences du mode instable correspondant. Premièrement, pour une direction de la vitesse de glissement proche de l’axe x (i.e.  $\gamma = -30^\circ$ ), une augmentation du ratio  $\frac{\eta_y}{\eta_x}$  (pour une valeur de  $\eta_y = 0.02$  constante) génère un système plus instable (i.e. la bifurcation de Hopf se produit pour une valeur plus faible du coefficient de frottement). Ce résultat est en accord avec le paradoxe de déstabilisation de système soumis au frottement rectiligne.

Cependant, quand  $\gamma = -60^\circ$  (ce qui signifie que la direction de la vitesse de glissement est proche de l’axe y), le point de bifurcation de Hopf est indépendant du ratio  $\frac{\eta_y}{\eta_x}$ . Ce résultat ne suit pas la notion classique du paradoxe de déstabilisation mis en évidence pour le frottement rectiligne. L’introduction de l’amortissement additionnel  $\tilde{C}_b$  dû au frottement plan altère les conclusions classiques concernant les effets d’un amortissement non proportionnel. Les changements sur la stabilité du système restent faibles mais non négligeables si l’on vise à rendre un système mécanique plus stable en ajoutant de l’amortissement modal. L’unique considération du ratio d’amortissement modal (qui est un résultat classique pour un système mécanique avec un frottement rectiligne) n’est pas suffisant pour assurer la conception robuste selon l’effet amortissant et la contribution de l’amortissement introduit par le frottement plan doit être prise en compte.

On discute maintenant des phénomènes de couplage de modes plus précisément. Pour  $\frac{\eta_y}{\eta_x} = 1$ , la coalescence imparfaite (i.e. différence entre les fréquences des modes stable et instable), qui peut être observée en Figure 3.8(b) et (d), dépend seulement de l’amortissement supplémentaire  $\tilde{C}_b$  dû au frottement plan. Pour tous les autres ratios (i.e.  $\frac{\eta_y}{\eta_x} \neq 1$ ) cet écart entre les fréquences est la combinaison des deux types d’amortissement : l’amortissement supplémentaire  $\tilde{C}_b$  dû au frottement plan et l’amortissement non proportionnel  $\frac{\eta_y}{\eta_x}$ . Les Figures 3.9(a) et (b) révèlent un effet inattendu dû à la présence de l’amortissement supplémentaire  $\tilde{C}_b$ . Comme illustré pour les deux directions de vitesse de glissement ( $\gamma = -30^\circ$  et  $\gamma = -60^\circ$  en Figures 3.9(a) et (b) respectivement), le mode instable n’est pas directement lié au ratio  $\frac{\eta_y}{\eta_x}$  contrairement au résultat classique du frottement rectiligne. En fait, la direction de glissement semble être le facteur principal déterminant quel mode devient instable. Pour  $\gamma = -30^\circ$ , le mode instable correspond au mode avec une fréquence à 100Hz pour  $\mu = 0$  (le mode pour lequel la fréquence est la plus élevée pour  $\mu = 0$ ). Au contraire, pour  $\gamma = -60^\circ$  le mode instable est celui avec la fréquence à 75Hz pour  $\mu = 0$  (mode pour lequel la fréquence est la plus faible pour  $\mu = 0$ ), même si la fréquence du mode instable devient plus grande que celle du mode stable après une coalescence imparfaite. Ainsi on peut conclure que la contribution de l’amortissement supplémentaire dû au frottement plan peut modifier drastiquement les modèles de coalescence. L’extension du paradoxe de déstabilisation dû à la présence d’un amortissement non proportionnel n’est pas si intuitive et des phénomènes complexes tels que le “lowering effect” et le “smoothing effect” sont plus complexes. En considérant le frottement plan, un des paramètres clefs qui altère les conclusions obtenues pour le frottement rectiligne est la direction de la vitesse de glissement.

Tous ces résultats montrent que les tendances classiques d’un système avec frottement rectiligne ne peuvent être extrapolées à un système avec frottement plan. Même si le “smoothing effect” est toujours observé (i.e. le fait d’ajouter de l’amortissement peut déstabiliser le système, comme précédemment discuté et illustré en Figure 3.8(a)), le frottement plan peut soit renforcer ou compenser le paradoxe de déstabilisation (cf. par exemple

Direction	Frottement	Ratio $\eta_y/\eta_x$	$\mu_c$	Fréquence instable (Hz)
$\gamma = -30^\circ$	Plan	0.5	0.227	90.50
$\gamma = -30^\circ$	Plan	1.0	0.209	91.88
$\gamma = -30^\circ$	Plan	2.0	0.192	93.00
$\gamma = -30^\circ$	Rectiligne	0.5	0.219	86.30
$\gamma = -30^\circ$	Rectiligne	1.0	0.224	88.28
$\gamma = -30^\circ$	Rectiligne	2.0	0.216	90.39
$\gamma = -60^\circ$	Plan	0.5	0.206	89.30
$\gamma = -60^\circ$	Plan	1.0	0.208	89.98
$\gamma = -60^\circ$	Plan	2.0	0.209	90.49

TABLEAU 3.4 – Coefficient de frottement et fréquence du mode instable au point de la bifurcation de Hopf pour  $\eta_y = 0.02$  (système avec amortissement non proportionnel)

la comparaison entre les deux configurations montrées en Figures 3.8(a) et (c)). Ainsi, les effets d'un amortissement non proportionnel pour un système en frottement plan est complexe et l'extention du paradoxe de déstabilisation doit être effectuée en fonction du rôle des paramètres clés liés au frottement plan.

### 3.5 Conclusion

La stabilité d'un modèle 3-D avec frottement plan ou rectiligne est étudiée sous différentes configurations et en considérant l'influence de l'équilibre, les raideurs du système et la direction de glissement.

Dans un premier temps, les résultats de stabilité pour un modèle non-amorti soumis au frottement plan ou rectiligne ont montré des différences significatives dans les zones stables et instables. Les coefficients de frottement critiques au point de bifurcation de Hopf sont plus faibles dans le cas du frottement plan, ce qui peut être interprété comme une déstabilisation dû au terme d'amortissement introduit par la linéarisation de la direction de la force de frottement. Cet amortissement mène à un lissage des courbes de bifurcations et à un couplage de modes imparfait. En augmentant la vitesse de glissement, le terme d'amortissement devient plus petit et les valeurs propres complexes correspondant au frottement plan se rapprochent de celles obtenues avec le frottement rectiligne, sauf au voisinage de la bifurcation de Hopf. L'effet des raideurs est similaire pour le frottement plan et rectiligne : l'effet du couplage de mode est principalement affecté par la proximité des fréquences des modes sans frottement. Comparé au frottement rectiligne, la direction de glissement a une grande influence sur le couplage : pour certaines directions, un croisement entre les deux modes impliqués dans l'instabilité est observé.

Dans un second temps, l'effet combiné de l'amortissement sur la structure et le frottement plan est discuté. En terme de zones de stabilité, l'introduction de l'amortissement aboutit à des résultats proches entre le frottement plan et le frottement rectiligne cela dépend évidemment du ratio entre les différents termes d'amortissement. Une extension du paradoxe de déstabilisation dû à la présence de l'amortissement et des phénomènes tels que le "lowering effect" et le "smoothing effect" a été réalisée en considérant un cas spécifique du système avec frottement plan. On a montré que la contribution en amortissement supplémentaire dû à la considération d'un frottement plan peut drastiquement modifier le couplage et les phénomènes d'instabilité associés ne sont pas si intuitifs. En plus du ratio d'amortissement et du coefficient de frottement, la direction de la vitesse de glissement apparaît être un des facteurs prédominants sur la stabilité du système frottant

étudié.

# Chapitre 4

## Analyse non-linéaire d'un modèle minimal : développement d'une méthode de tir adaptée

### Sommaire

---

<b>4.1 Introduction</b> . . . . .	<b>82</b>
<b>4.2 Modélisation et formulation du problème</b> . . . . .	<b>83</b>
4.2.1 Système étudié . . . . .	83
4.2.2 Intégration numérique . . . . .	83
<b>4.3 Développement du bilan de puissance</b> . . . . .	<b>85</b>
4.3.1 Bilan de puissance théorique . . . . .	85
4.3.2 Bilan de puissance discrétisé . . . . .	87
4.3.3 Bilan de puissance en régime linéaire . . . . .	89
<b>4.4 Validation de l'intégration numérique</b> . . . . .	<b>92</b>
4.4.1 Analyse en régime linéaire . . . . .	92
4.4.2 Analyse en régime non-linéaire . . . . .	95
<b>4.5 Détermination des cas d'étude</b> . . . . .	<b>97</b>
4.5.1 Analyse de stabilité . . . . .	97
4.5.2 Vibrations non-linéaires . . . . .	98
4.5.3 Conclusion . . . . .	108
<b>4.6 Méthode de Tir et choix d'une initialisation appropriée</b> . . . . .	<b>111</b>
4.6.1 Méthode de tir appliquée à un système mono-instable autonome . . . . .	111
4.6.2 Calcul de la matrice de monodromie . . . . .	111
4.6.3 Proposition d'initialisation de la méthode de tir . . . . .	115
<b>4.7 Résultats numériques</b> . . . . .	<b>117</b>
4.7.1 Résultat de la démarche numérique développée sur les cas de référence . . . . .	118
4.7.2 Influence des conditions initiales . . . . .	124
4.7.3 Comparaison des méthodes de calcul de la matrice de monodromie . . . . .	124
<b>4.8 Conclusion</b> . . . . .	<b>126</b>

---

## 4.1 Introduction

Le chapitre précédent permet de mettre en avant les paramètres du système pour lesquels le crissement peut apparaître mais ne permet en aucun cas de déterminer les niveaux de vibrations auto-entretenues menant au crissement. Comme mentionné dans la Section 2.5, il est nécessaire de compléter l'analyse de stabilité par une analyse non-linéaire qui illustre alors les phénomènes dynamiques non-linéaires (contact/décollement (perte de contact) ou d'adhérence/glissement). Cette analyse, généralement conduite par une intégration temporelle du système pour une initialisation donnée par exemple proche de l'équilibre quasi-statique instable, permet alors de statuer sur le niveau vibratoire du système.

Cependant, ces intégrations numériques ont souvent un coût de calcul très élevé et peuvent donc être considérées comme impraticables et plus spécialement pour des systèmes représentés par des modèles éléments finis de grande taille. En supposant l'existence des cycles limites du régime stationnaire, des méthodes alternatives ont été développées pour directement estimer la partie stationnaire des solutions dynamiques non-linéaires. Dans le cas de mono-instabilité, une solution stationnaire périodique peut être appréhendée comme un mode normal non-linéaire du problème. Une description des concepts de modes normaux non-linéaires et un état de l'art en terme de méthode de calcul peuvent être trouvés en Section 2.6 ou dans [68, 69, 107]. Le choix d'utiliser la méthode de tir dans ces travaux a été expliqué en Section 2.6.3. On rappelle qu'elle consiste à chercher itérativement les conditions initiales et la période qui réalise le mouvement périodique et une condition de phase. Cette méthode permet de ne pas approximer le mouvement du système car elle est basée sur des intégrations temporelles ce qui constitue un avantage certain par rapport à la méthode d'équilibrage harmonique sous contraintes proposée par Coudeyras *et al.* [87]. Ainsi la performance d'estimation du régime stationnaire de la méthode de tir dépend en grande partie du choix de l'intégrateur temporel : il est nécessaire que le schéma d'intégration reproduise fidèlement les effets non-linéaires du système. Cependant, deux importantes limitations sont identifiées. La première est la sensibilité de l'algorithme itératif local utilisé à son initialisation : la méthode requiert une bonne estimation initiale afin de converger. La seconde limitation est le calcul de la matrice de monodromie, qui rend l'algorithme très coûteux pour des modèles avec de nombreux degrés de liberté comme les modèles éléments finis de grande taille.

Dans cette thèse il est proposé de tester les performances de la méthode de tir dans le cas de systèmes autonomes sujets à des instabilités de flottement et plus précisément aux systèmes mécaniques soumis à des mono-instabilités induites par frottement. Afin de ne pas être confronté à la première limitation de la méthode de tir, une contribution originale est proposée pour initialiser l'algorithme itératif. Cette initialisation approximée est calculée en utilisant une approche combinant les résultats de l'analyse de la stabilité linéaire pour les déformées et la période avec un bilan de puissances non-linéaire pour l'amplitude. Dans ce chapitre la méthode de tir proposée est appliquée au système décrit dans le chapitre précédent : un système à trois degrés de liberté glissant sur un plan et soumis au frottement plan à coefficient de frottement constant. La seconde limitation de la méthode de tir – le calcul de la matrice de monodromie dans le cas de modèle de grande taille – n'est par conséquent pas traité ici et sera abordée dans le chapitre suivant.

Ce chapitre est décomposé en six parties. La première présente le système étudié ainsi que l'algorithme d'intégration temporelle utilisé. La seconde présente les développements des différents bilans de puissance selon le cas étudié : bilan de puissance non linéaire théorique, application de la discrétisation temporelle au bilan de puissance, ex-

pressions analytiques du bilan de puissance linéaire. Le bilan de puissance étant formulé, il est utilisé pour valider l'algorithme d'intégration temporelle dans une troisième partie. Cette validation est effectuée en deux temps. Dans un premier temps la formulation du bilan de puissance discrétisée temporellement est validée en comparant les évolutions linéaires des énergies et puissances avec les formules analytiques. Ensuite cette même formulation est utilisée en régime non-linéaire pour statuer sur l'influence de la tolérance du point fixe et de la discrétisation temporelle. La quatrième partie présente l'analyse non-linéaire du système pour trois jeux de paramètres différents. L'analyse de stabilité de ces trois cas est brièvement présentée. Les régimes transitoire et stationnaire obtenus par intégration temporelle pour chaque jeu de paramètres sont discutés et serviront de références pour la suite de ce chapitre. La cinquième partie complète la présentation de la méthode de tir effectuée en Section 2.6.3 en décrivant les critères de convergence utilisés pour ce modèle ainsi que les différentes méthodes de calcul de la matrice de monodromie et son initialisation appropriée. La dernière partie compare les résultats entre l'approche de tir proposée et l'intégration temporelle.

## 4.2 Modélisation et formulation du problème

### 4.2.1 Système étudié

La Figure 4.1 montre le système en frottement considéré dans ce chapitre. Il s'agit du même système étudié dans le Chapitre 3 précédent. On rappelle brièvement qu'il s'agit d'une masse  $m$  en contact frottant sur un plan rigide se déplaçant à la vitesse rectiligne constante  $V$ .  $\gamma$  correspond à la direction entre  $\vec{t}$  de la vitesse imposée du plan et l'axe de coordonnée  $\vec{x}$  du système mécanique. Les trois raideurs (i.e.  $k'_1$ ,  $k'_2$  et  $k'_n$ ) maintiennent la masse contre le plan et une force extérieure  $\mathbf{F}$  est appliquée sur la masse.

La dynamique du système est alors décrite par les équations suivantes :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} + \mathbf{F} \quad (4.1)$$

On peut se référer au Chapitre 3 pour la description des différentes matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{F}$ . En revanche, contrairement au chapitre précédent, les non-linéarités fortes des lois de contact frottant sont conservées :

$$\begin{aligned} R_n &= \text{proj}_{\mathbb{R}^+} (R_n - \rho_n (\dot{U}_n + B_m)) & \forall \rho_n > 0 \\ \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} &= \text{proj}_{\mathcal{D}(\mu R_n)} \left( \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} - \rho_t \begin{Bmatrix} \dot{U}_t - V \\ \dot{U}_b \end{Bmatrix} \right) & \forall \rho_t > 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

### 4.2.2 Intégration numérique

On utilise ici la  $\theta$ -méthode modifiée présentée dans le Chapitre 2 permettant de simuler un choc inélastique couplée à un algorithme du point fixe afin de déterminer les efforts non-linéaires. L'intégration numérique se résume alors à résoudre le système suivant à l'itération  $i + 1$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{U}}^{i+1} &= \mathbf{E}^i + h\mathbf{R}^{i+1} \\ R_n^{i+1} &= \text{proj}_{\mathbb{R}^+} (R_n^{i+1} - \rho_n (\dot{U}_n^{i+1} + B_m^i)) & \forall \rho_n > 0 \\ \begin{Bmatrix} R_t^{i+1} \\ R_b^{i+1} \end{Bmatrix} &= \text{proj}_{\mathcal{D}(\mu R_n^{i+1})} \left( \begin{Bmatrix} R_t^{i+1} \\ R_b^{i+1} \end{Bmatrix} - \rho_t \begin{Bmatrix} \dot{U}_t^{i+1} - V \\ \dot{U}_b^{i+1} \end{Bmatrix} \right) & \forall \rho_t > 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

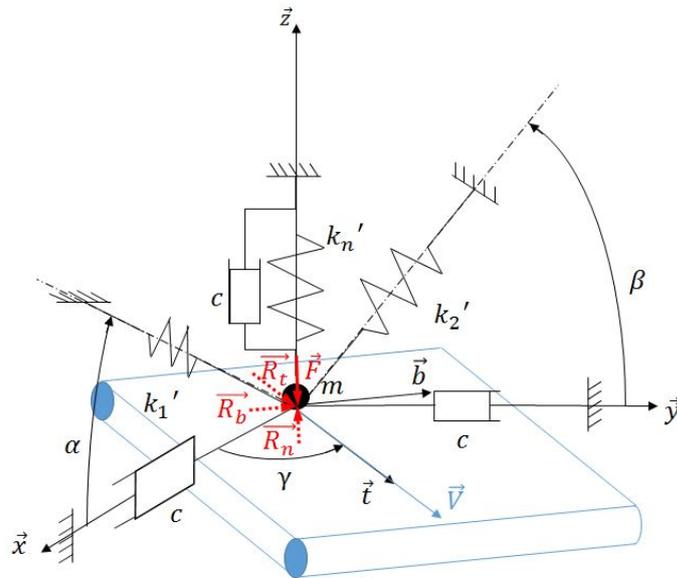


FIGURE 4.1 – Description du système mécanique minimal

où  $\hat{\mathbf{M}}$  et  $\mathbf{E}^i$  sont donnée par les Équations (2.53) et  $\mathbf{B}_m^i$  par (2.61).

Un algorithme du point fixe permet de calculer les réactions de contact frottant et ainsi de mettre à jour le vecteur vitesse. Une fois les vitesses déterminées, le schéma de discrétisation est utilisé pour actualiser les déplacements. La valeur de  $\theta$  est fixée à 0.5 ce qui permet d'obtenir un schéma conservatif. Les détails de la méthode sont proposés dans l'Algorithme 1.

Un point important pour la bonne convergence et la performance de l'algorithme est le choix des paramètres d'augmentation  $\rho_n$  et  $\rho_t$ . Ce point a été traité de manière approfondie par Loyer [2]. On choisit ici une  $\rho_n = \rho_t = \rho$  comme étant la plus petite valeur propre de  $\hat{\mathbf{M}}$ . Il s'agit d'un choix prudent qui ne maximise pas la performance de l'algorithme (pas nécessaire pour ce modèle à 3 degrés de liberté) mais qui assure une convergence certaine de l'algorithme.

**Algorithme 1** Algorithme de résolution dynamique du problème de contact frottant

---

$\dot{\mathbf{U}}^0$  et  $\mathbf{U}^0$  donnés  
 Calcul de l'opérateur  $\hat{\mathbf{M}}$   
 Calcul du paramètre  $\rho$   
**pour**  $i=1,2,\dots,N$  **effectuer**  
   Calcul de  $\mathbf{E}^i$   
   Calcul de  $\mathbf{B}_m^i$   
   Initialisation  $\mathbf{R}_0^i = \mathbf{R}^i$   
    $k=0$ , point fixe sur les efforts de contact frottant  
   **tant que**  $\epsilon > Tol$  **effectuer**  
     Résolution de :  $\hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{U}}_k^{i+1} = \mathbf{E}^i + h\mathbf{R}_k^{i+1}$   
     Détermination effort normal :  $\mathbf{R}_{n_{k+1}}^{i+1} = \text{proj}_{\mathbb{R}^+} \left( \mathbf{R}_{n_k}^{i+1} - \rho \left( \dot{\mathbf{U}}_{n_k}^{i+1} + \mathbf{B}_m^i \right) \right)$   
     Détermination efforts tangents :  $\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{t_{k+1}}^{i+1} \\ \mathbf{R}_{b_{k+1}}^{i+1} \end{Bmatrix} = \text{proj}_{\mathcal{D}(\mu\mathbf{R}_{n_{k+1}}^{i+1})} \left( \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{t_k}^{i+1} \\ \mathbf{R}_{b_k}^{i+1} \end{Bmatrix} - \rho \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_{t_k}^{i+1} - \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{U}}_{b_k}^{i+1} \end{Bmatrix} \right)$   
     Calcul critère de convergence :  $\epsilon = \frac{\mathbf{R}_{k+1}^{i+1} - \mathbf{R}_k^{i+1}}{\mathbf{R}_k^{i+1}}$   
      $k = k + 1$   
   **fin**  
   Mise à jour déplacements :  $\mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i + h(\theta\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + (1-\theta)\dot{\mathbf{U}}^i)$   
**fin**

---

### 4.3 Développement du bilan de puissance

Dans cette section on s'intéresse à l'expression du bilan de puissance d'un système soumis à des vibrations auto-entretenues dues au contact frottant. Cette section est divisée en trois parties. Dans la première partie la formulation du bilan de puissance non-linéaire théorique est donnée. Cette formulation est discrétisée temporellement en utilisant la  $\theta$ -méthode dans une seconde partie. La troisième partie est consacrée au bilan de puissance dans le régime linéaire : les expressions analytiques des différentes puissances et énergies sont alors données.

#### 4.3.1 Bilan de puissance théorique

Dans cette section nous exprimons le bilan de puissance d'un système soumis à une dynamique non-régulière avec contact frottant. Cette démonstration peut être retrouvée dans [15] et permet d'introduire les différentes puissances auxquelles est soumis le système. Dans le cas d'un mouvement non-régulier avec contact frottant, on rappelle l'équation du mouvement sur un intervalle de temps  $dt$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}d\dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U})dt &= \mathbf{F}dt + \mathbf{R}dt \\ d\mathbf{U} &= \dot{\mathbf{U}}dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

On se place dans le cas où un impact se produit à l'instant  $t_i$ , on note alors  $\dot{\mathbf{U}}^+$  la vitesse suivant l'impact et  $\dot{\mathbf{U}}^-$  la vitesse précédent l'impact. Le bilan de puissance peut être obtenu en multipliant l'équation du mouvement par  $\dot{\mathbf{U}}^+ + \dot{\mathbf{U}}^-$  on a alors :

$$(\dot{\mathbf{U}}^+ + \dot{\mathbf{U}}^-)^T \mathbf{M}d\dot{\mathbf{U}} + (\dot{\mathbf{U}}^+ + \dot{\mathbf{U}}^-)^T (\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U})dt = (\dot{\mathbf{U}}^+ + \dot{\mathbf{U}}^-)^T \mathbf{F}dt + (\dot{\mathbf{U}}^+ + \dot{\mathbf{U}}^-)^T \mathbf{R}dt \quad (4.5)$$

qui est équivalent à :

$$d(\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}) + (\dot{\mathbf{U}}^+ + \dot{\mathbf{U}}^-)^T (\mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U}) dt = (\dot{\mathbf{U}}^+ + \dot{\mathbf{U}}^-)^T \mathbf{F} dt + (\dot{\mathbf{U}}^+ + \dot{\mathbf{U}}^-)^T \mathbf{R} dt \quad (4.6)$$

On rappelle ensuite la définition de l'énergie mécanique du système :

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (4.7)$$

ainsi le bilan de puissance devient :

$$2dE = d(\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}) + 2\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = 2\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F} dt - 2\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} dt + (\dot{\mathbf{U}}^+ + \dot{\mathbf{U}}^-)^T \mathbf{R} dt \quad (4.8)$$

$\mathbf{R}$  est la somme des réactions de contact frottant, et peut se décomposer comme suit :

$$\mathbf{R} dt = \mathbf{P}_t^T \mathbf{R}_t dt + \mathbf{P}_b^T \mathbf{R}_b dt + \sum \mathbf{P}_n^T \mathbf{R}_{ni} \delta_{ti} \quad (4.9)$$

où  $\delta_{ti}$  représente l'impulsion du choc, on a alors :

$$2dE = d(\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}) + 2\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = 2\dot{\mathbf{U}}^T (\mathbf{F} + \mathbf{P}_t^T \mathbf{R}_t + \mathbf{P}_b^T \mathbf{R}_b) dt - 2\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} dt + \sum_i (\dot{\mathbf{U}}^+ + \dot{\mathbf{U}}^-)^T \mathbf{P}_n^T \mathbf{R}_{ni} \delta_{ti} \quad (4.10)$$

En intégrant sur un intervalle de temps  $[t_0, t_1]$  tel que  $t_i \in (t_0, t_1)$ , on obtient l'équation du bilan de puissance suivante :

$$\Delta E = E(t_1) - E(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{U}}^T (\mathbf{F} + \mathbf{P}_t^T \mathbf{R}_t + \mathbf{P}_b^T \mathbf{R}_b) dt - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} dt + \sum_i (\dot{\mathbf{U}}^+(t_i) + \dot{\mathbf{U}}^-(t_i))^T \mathbf{P}_n^T \mathbf{R}_{ni} \quad (4.11)$$

La partie droite de l'équation du bilan de puissance représente les travaux effectués sur un intervalle de temps  $[t_0, t_1]$ . Ces puissances sont décomposées ainsi :

La puissance injectée par les forces extérieures :

$$P_F = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{F} dt \quad (4.12)$$

La puissance dissipée par amortissement :

$$P_C = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} dt \quad (4.13)$$

La matrice  $\mathbf{C}$  étant semi-définie positive, la puissance dissipée par amortissement est bien positive.

La puissance injectée par les forces de frottement :

$$P_\mu = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{U}}^T (\mathbf{P}_t^T \mathbf{R}_t + \mathbf{P}_b^T \mathbf{R}_b) dt \quad (4.14)$$

Cette puissance peut être dissipée si négative mais on verra qu'elle est bien positive en cas d'instabilité de frottement.

La puissance injectée par les forces de contact au moment des chocs  $t_i$  :

$$P_n = (\dot{\mathbf{U}}^+(t_i) + \dot{\mathbf{U}}^-(t_i))^T \mathbf{P}_n^T \mathbf{R}_{ni} \quad (4.15)$$

On note qu'au moment de l'impact  $\dot{U}_n^-$  la vitesse normale avant impact est négative (recollement) et que  $\dot{U}_n^+$  la vitesse normale après impact est nulle (choc inélastique). La

force de contact  $R_n$  étant toujours positive, la puissance due à cette force est donc négative et résulte bien d'une dissipation d'énergie lors de l'impact au temps  $t_i$  donnant lieu à une puissance non nulle.

Les différentes puissances auxquelles est soumis un système en contact frottant sont maintenant définies. On observe que malgré l'hypothèse de réaction de contact unilatéral, une puissance est générée par cette force et représente la dissipation d'énergie à l'impact. Dans la section suivante, ce bilan de puissance est discrétisé temporellement en utilisant le schéma de la  $\theta$ -méthode afin de pouvoir l'utiliser dans la suite de cette thèse.

### 4.3.2 Bilan de puissance discrétisé

On se propose de discrétiser le bilan de puissance formulé dans la section précédente en utilisant l'hypothèse de la  $\theta$ -méthode comme intégrateur temporel. En notant  $\mathbf{U}^{i+\theta} = \theta\mathbf{U}^{i+1} + (1-\theta)\mathbf{U}^i$ , la  $\theta$ -méthode permet d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \dot{\mathbf{U}}^i) &= \frac{1}{h}(\mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^i) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i) \\ \dot{\mathbf{U}}^{i+\theta} &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \dot{\mathbf{U}}^i) - \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i)\end{aligned}\quad (4.16)$$

Sur un intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$  de longueur  $h$ , il est possible d'exprimer la variation de l'énergie mécanique  $\Delta E$  :

$$\begin{aligned}\Delta E &= E(\mathbf{U}^{i+1}, \dot{\mathbf{U}}^{i+1}) - E(\mathbf{U}^i, \dot{\mathbf{U}}^i) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^{i+1\text{T}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \frac{1}{2}\mathbf{U}^{i+1\text{T}}\mathbf{K}\mathbf{U}^i - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^{i\text{T}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}^i - \frac{1}{2}\mathbf{U}^{i\text{T}}\mathbf{K}\mathbf{U}^i\end{aligned}\quad (4.17)$$

Les matrices de masse  $\mathbf{M}$  et de raideur  $\mathbf{K}$  étant symétriques, on peut réécrire l'Équation 4.17 sous la forme :

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \dot{\mathbf{U}}^i)^{\text{T}}\mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i) + \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{i+1} + \mathbf{U}^i)^{\text{T}}\mathbf{K}(\mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^i) \\ &= \Delta E_c + \Delta E_k\end{aligned}\quad (4.18)$$

où  $\Delta E_c$  et  $\Delta E_k$  sont respectivement les variations d'énergie cinétique et potentielle sur le pas de temps. En utilisant les Équations (4.16) dans (4.18) la variation d'énergie mécanique du système devient :

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i)^{\text{T}}\mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i) + \frac{1}{h}(\mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^i)^{\text{T}}\mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i) + \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{i+1} + \mathbf{U}^i)^{\text{T}}\mathbf{K}(\mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^i)\quad (4.19)$$

Or, pour cet intervalle discrétisé temporellement de longueur  $h$ , l'équation du mouvement peut être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i) + h\mathbf{K}\mathbf{U}^{i+\theta} + h\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{i+\theta} - h\mathbf{F} = h\mathbf{R}^{i+1} \\ \mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i + h\dot{\mathbf{U}}^{i+\theta} \end{cases}\quad (4.20)$$

En remplaçant donc le terme  $\mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i)$  dans (4.19) par son équivalent dans (4.20), on peut écrire :

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i)^{\text{T}}\mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i) + \\ &\quad \frac{1}{h}(\mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^i)^{\text{T}}[-h\mathbf{K}\mathbf{U}^{i+\theta} - h\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{i+\theta} + h\mathbf{F} + h\mathbf{R}^i] + \\ &\quad \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{i+1} + \mathbf{U}^i)^{\text{T}}\mathbf{K}(\mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^i) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i)^{\text{T}}\mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)(\mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^i)^{\text{T}}\mathbf{K}(\mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^i) \\ &\quad - h(\dot{\mathbf{U}}^{i+\theta})^{\text{T}}\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{i+\theta} + h(\dot{\mathbf{U}}^{i+\theta})^{\text{T}}\mathbf{F} + h(\dot{\mathbf{U}}^{i+\theta})^{\text{T}}\mathbf{R}^i\end{aligned}\quad (4.21)$$

En divisant l'équation finale de (4.21) par  $h$  (longueur de l'intervalle de temps), on obtient alors la formulation du bilan discrétisé. On remarque que pour  $\theta = \frac{1}{2}$ , le système est conservatif car les termes  $(\frac{1}{2} - \theta) (\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i)^T \mathbf{M} (\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i)$  et  $(\frac{1}{2} - \theta) (\mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^i)^T \mathbf{K} (\mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^i)$  s'annulent pour cette valeur de  $\theta$ . On peut alors identifier les différentes puissances ci-dessus.

La puissance liée aux réactions de frottement  $P_\mu$  :

$$P_\mu = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \dot{\mathbf{U}}^i)^T (\mathbf{P}_t^T \mathbf{R}_t^{i+1} + \mathbf{P}_b^T \mathbf{R}_b^{i+1}) \quad (4.22)$$

La puissance liée à la réaction de contact  $P_n$  :

$$P_n = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \dot{\mathbf{U}}^i)^T \mathbf{P}_n^T \mathbf{R}_n^{i+1} \quad (4.23)$$

La puissance dissipée par amortissement  $P_C$  :

$$P_C = \frac{1}{4} (\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \dot{\mathbf{U}}^i)^T \mathbf{C} (\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \dot{\mathbf{U}}^i) \quad (4.24)$$

et la puissance injectée par les forces extérieures  $W_F$  :

$$P_F = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \dot{\mathbf{U}}^i)^T \mathbf{F} \quad (4.25)$$

Pour calculer la puissance mécanique qui est la dérivée de l'énergie mécanique, on introduit un terme de pseudo accélération noté  $\mathbf{A}$ . On définit ce terme comme suit :

$$\mathbf{A}^i = \frac{1}{h} \mathbf{M} (\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i) \quad (4.26)$$

L'hypothèse de  $\theta = \frac{1}{2}$  signifie que lors de l'intégration temporelle, les vitesses entre l'instant  $i$  et  $i + 1$  sont moyennées. On exprime avec ce même objectif la variation d'énergie mécanique entre chaque pas de temps  $i$  et  $i + 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial E_c}{\partial t} + \frac{\partial E_k}{\partial t} \\ \left( \frac{\partial E_c}{\partial t} \right)^i &= \frac{1}{2h} (\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \dot{\mathbf{U}}^i)^T \mathbf{M} (\dot{\mathbf{U}}^{i+1} - \dot{\mathbf{U}}^i) \\ \left( \frac{\partial E_k}{\partial t} \right)^i &= \frac{1}{4} (\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + \dot{\mathbf{U}}^i)^T \mathbf{K} (\mathbf{U}^{i+1} + \mathbf{U}^i) \end{aligned} \quad (4.27)$$

On peut alors réécrire le bilan de puissance :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P_C = P_\mu + P_n + P_F \quad (4.28)$$

Ce bilan de puissance contient l'équilibre statique. Un bilan hors équilibre quasi-statique peut être effectué de la même manière. Dans ce cas, les quantités liées à l'équilibre, déplacements statiques et réactions statiques, sont respectivement retirées de l'évaluation de la variation de l'énergie de déformation et des puissances de contact frottant tandis que la puissance des forces extérieures est nulle. Ce bilan hors équilibre traduit les échanges énergétiques liées aux perturbations de l'équilibre. Il est pertinent en particulier en régime linéaire comme nous allons le voir dans la section suivante.

### 4.3.3 Bilan de puissance en régime linéaire

Dans cette section le bilan de puissance en régime linéaire est formulé. On ne s'intéresse dans cette partie qu'aux grandeurs exprimées hors équilibre quasi-statique. En régime linéaire et dans un cas mono-instable, seul le mode instable issu de l'analyse de stabilité est excité. On note alors  $\Phi$  le vecteur propre associée au mode instable,  $\lambda$  la valeur propre complexe instable et  $q$  l'amplitude modale du mode instable. Ainsi en projetant sur le mode complexe instable, il est possible d'exprimer analytiquement les déplacement, vitesse et accélération :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_a &= \frac{1}{2} (\Phi q e^{\lambda t} + \Phi^* q^* e^{\lambda^* t}) \\ \dot{\mathbf{U}}_a &= \frac{1}{2} (\lambda \Phi q e^{\lambda t} + \lambda^* \Phi^* q^* e^{\lambda^* t}) \\ \ddot{\mathbf{U}}_a &= \frac{1}{2} (\lambda^2 \Phi q e^{\lambda t} + \lambda^{*2} \Phi^* q^* e^{\lambda^* t}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

L'indice \* dénote la quantité complexe conjuguée de la valeur. Les quantités cinématique étant ainsi définies, l'expression analytique de l'énergie mécanique notée  $E^a$  est donnée par :

$$\begin{aligned} E^a &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}_a^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}_a + \frac{1}{2} \mathbf{U}_a^T \mathbf{K} \mathbf{U}_a \\ &= \frac{1}{4} (\Re(\lambda^2 q^2 \Phi^T \mathbf{M} \Phi e^{2\lambda t}) + \Re(q^2 \Phi^T \mathbf{K} \Phi e^{2\lambda t})) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\|\lambda\|^2 \|q\|^2 \Phi^{*T} \mathbf{M} \Phi e^{2\Re(\lambda)t} + \|q\|^2 \Phi^{*T} \mathbf{K} \Phi e^{2\Re(\lambda)t}) \\ &= E^{sin} + E^{moy} \end{aligned} \quad (4.30)$$

de même l'expression de la variation d'énergie mécanique notée  $\frac{\partial E^a}{\partial t}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^a}{\partial t} &= \dot{\mathbf{U}}_a^T \mathbf{K} \mathbf{U}_a + \dot{\mathbf{U}}_a^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_a \\ &= \frac{1}{2} \Re(\lambda q^2 \Phi^T \mathbf{K} \Phi e^{2\lambda t} + \lambda^3 q^2 \Phi^T \mathbf{M} \Phi e^{2\lambda t}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\Re(\lambda) \|q\|^2 \Phi^{*T} \mathbf{K} \Phi e^{2\Re(\lambda)t} + \|\lambda\|^2 \Re(\lambda) \|q\|^2 \Phi^{*T} \mathbf{M} \Phi e^{2\Re(\lambda)t}) \\ &= \frac{\partial E^{sin}}{\partial t} + \frac{\partial E^{moy}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.31)$$

On remarque que l'énergie mécanique et sa variation sont respectivement constituées, d'une énergie ou d'une variation d'énergie sinusoïdale de pulsation  $2\Im(\lambda)$  qui oscille autour d'une énergie ou d'une variation d'énergie évoluant en  $e^{2\Re(\lambda)t}$ .

Les puissances restantes sont de même exprimées analytiquement. La puissance dissipée par amortissement est formulée comme suit :

$$\begin{aligned} P_C^a &= \dot{\mathbf{U}}_a^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_a \\ &= \frac{1}{2} \Re(\lambda^2 q^2 \Phi^T \mathbf{C} \Phi e^{2\lambda t}) + \frac{1}{2} (\|\lambda\|^2 \|q\|^2 \Phi^{*T} \mathbf{C} \Phi e^{2\Re(\lambda)t}) \\ &= P_C^{sin} + P_C^{moy} \end{aligned} \quad (4.32)$$

La puissance injectée par le contact s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P_\mu^a &= \dot{\mathbf{U}}_a^T (\mathbf{P}_t \mathbf{R}_t + \mathbf{P}_b \mathbf{R}_b) \\ P_\mu^a &= P_{\mu t}^a + P_{\mu b}^a \end{aligned} \quad (4.33)$$

La puissance injectée par le contact peut être décomposée par la puissance injectée par le contact dans la direction  $\mathbf{t}$  et celle injectée par le contact dans la direction  $\mathbf{b}$ . Le problème étant linéarisé autour de l'équilibre (cf. Chapitre 3), il est possible d'exprimer les efforts de frottement en fonction du déplacement et de la vitesse notamment pour le modèle minimal (cf. Section 3.3.2). En effet on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t \mathbf{R}_t &= -\mathbf{K}_\mu \mathbf{U}_a \\ \mathbf{P}_b \mathbf{R}_b &= -\mathbf{C}_b \dot{\mathbf{U}}_a \end{aligned} \quad (4.34)$$

La matrice  $\mathbf{K}_\mu$  n'étant pas symétrique, les puissances injectées par le contact s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned}
 P_{\mu t}^a &= -\dot{\mathbf{U}}_a^T \mathbf{K}_\mu \mathbf{U}_a \\
 &= -\frac{1}{2} \Re(\lambda q^2 \Phi^T \mathbf{K}_\mu \Phi e^{2\lambda t}) - \frac{1}{4} (\|\mathbf{q}\|^2 e^{2\Re(\lambda)t} (\lambda \Phi^T \mathbf{K}_\mu \Phi^* + \lambda^* \Phi^{*T} \mathbf{K}_\mu \Phi)) \\
 &= P_{\mu t}^{sin} + P_{\mu t}^{moy} \\
 P_{\mu b}^a &= -\dot{\mathbf{U}}_a^T \mathbf{C}_b \dot{\mathbf{U}}_a \\
 &= -\frac{1}{2} \Re(\lambda^2 q^2 \Phi^T \mathbf{C}_b \Phi e^{2\lambda t}) - \frac{1}{2} (\|\lambda\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 e^{2\Re(\lambda)t} \Phi^T \mathbf{C}_b \Phi^*) \\
 &= P_{\mu b}^{sin} + P_{\mu b}^{moy}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Comme pour l'énergie mécanique et sa variation, il est possible de décomposer les différentes puissances en puissances sinusoïdales de pulsation  $2\Im(\lambda)$  qui oscillent autour de puissances moyennes évoluant en  $e^{2\Re(\lambda)t}$ .

Le bilan de puissance hors équilibre analytique s'écrit alors :

$$\frac{\partial E^a}{\partial t} + P_C^a = P_\mu^a \tag{4.36}$$

Afin de mieux comprendre les transferts d'énergie, il est possible de calculer les taux moyens de variation de puissance mécanique  $\bar{\tau}_E^a$ , de puissance dissipée par amortissement  $\bar{\tau}_C^a$  et de puissance injectée par le contact  $\bar{\tau}_\mu^a$ . Ces taux de variations sont exprimés ainsi :

$$\begin{aligned}
 \bar{\tau}_E^a &= \frac{\frac{\partial E^a}{\partial t}}{E^{moy}} \\
 &= 2\Re(\lambda) \\
 \bar{\tau}_C^a &= \frac{P_C^{moy}}{E^{moy}} \\
 &= 2 \frac{\Phi^{*T} \mathbf{C}_b \Phi}{\|\lambda\|^2 \Phi^{*T} \mathbf{M} \Phi + \Phi^{*T} \mathbf{K} \Phi} \\
 \bar{\tau}_\mu^a &= \frac{P_\mu^{moy}}{E^{moy}} \\
 &= \frac{-\lambda \Phi^{*T} \mathbf{K}_\mu \Phi - \lambda^* \Phi^T \mathbf{K}_\mu \Phi^* - 2\|\lambda\|^2 \Phi^{*T} \mathbf{C}_b \Phi}{\|\lambda\|^2 \Phi^{*T} \mathbf{M} \Phi + \Phi^{*T} \mathbf{K} \Phi}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

On illustre ici les résultats mis en avant dans la section précédente. Pour ce faire on se place en régime linéaire (cf. Équation 3.20).

Les paramètres choisis sont alors les suivants :  $m = 0.01$  kg,  $f_1 = 100$  Hz,  $f_2 = 75$  Hz,  $k_i = m \times f_i$  N/m,  $\eta = 0.02$ ,  $c = m \times \eta f_1$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = -30^\circ$ ,  $F = -10$  N,  $V = 3$  m/s et  $\mu = 0.22$ . L'analyse de stabilité du système ainsi défini met en évidence la présence d'un mode instable de fréquence de 92 Hz auquel est associée la partie réelle de la valeur propre  $\lambda$  égale à  $4.4056$  s<sup>-1</sup>. L'amplitude modale du mode instable est égale à 10% de celle pour laquelle le premier décollement se produit. L'amplitude du mode stable est nulle. L'énergie mécanique et les différentes puissances sont ensuite calculées sur 500 ms.

La Figure 4.2 illustre l'évolution de l'énergie mécanique et des différentes puissances. Comme il a été mis en évidence dans la Section 4.3.3, on remarque que la valeur moyenne de ces grandeurs évolue en  $2\Re(\lambda)$  et une partie oscille autour de cette valeur moyenne. Les différents rapports entre puissances et énergies sont maintenant tracés en instantané et moyennés sur une période.

La Figure 4.3 illustre le fait que les rapports entre les puissances et l'énergie mécanique ont une valeur moyenne constante au cours du temps. De plus on vérifie bien que

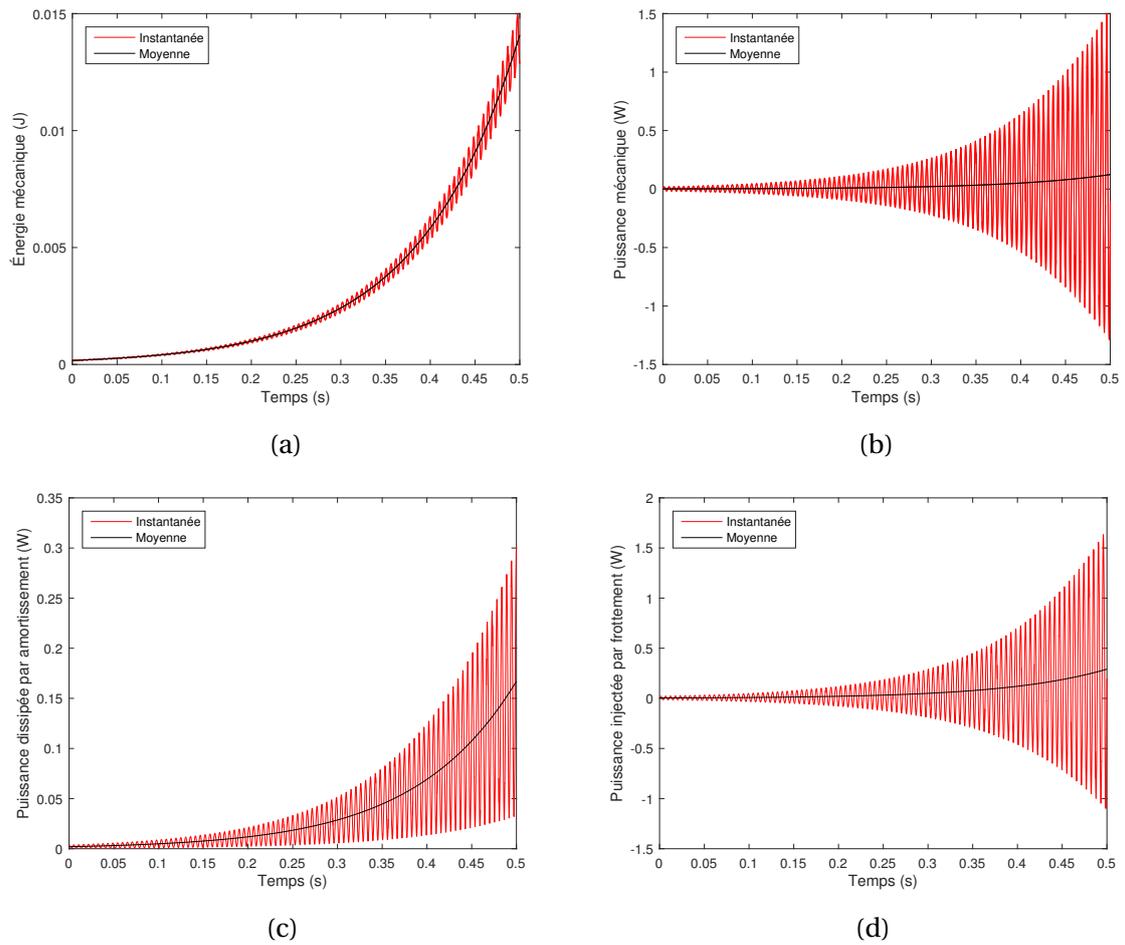


FIGURE 4.2 – Évolution en transitoire linéaire (a) de l'énergie mécanique, (b) de la puissance mécanique, (c) de la puissance dissipée et (d) de la puissance injectée par le contact

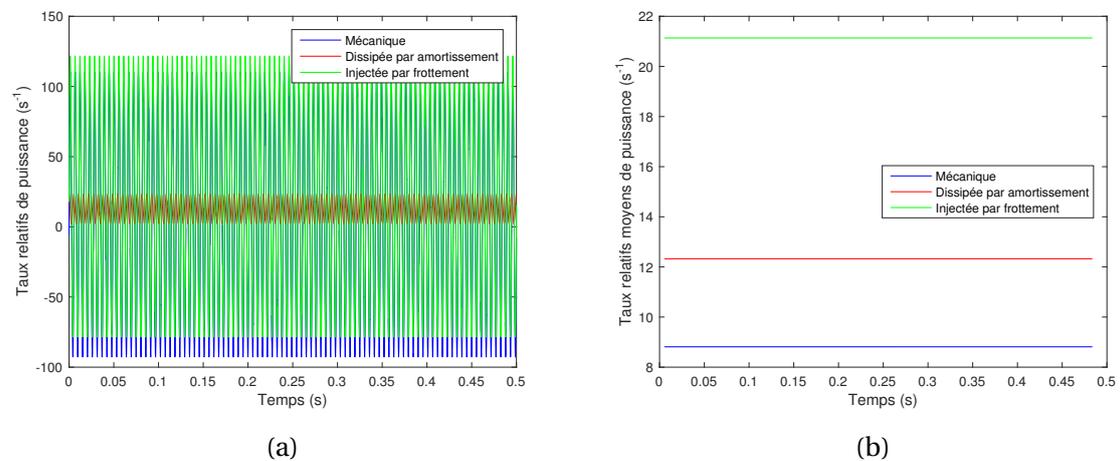


FIGURE 4.3 – Rapports entre les différentes puissances et l'énergie mécanique en instantané (a) et moyennés (b)

le rapport entre la puissance et l'énergie mécanique est bien égale à  $2\Re(\lambda)$  avec  $\lambda$  la valeur propre associée au mode instable, ainsi que l'égalité entre la somme des taux relatifs de puissance mécanique et de puissance dissipée par amortissement avec le taux relatif de puissance injectée par le frottement (égalité donnée par l'Équation (4.36)).

## 4.4 Validation de l'intégration numérique

Nous allons maintenant valider l'algorithme utilisé. Dans [1, 2], la validation est effectuée en étudiant le choc d'un lopin élastique. Dans notre cas nous choisissons de considérer le système à 3 degrés de liberté précédemment décrit et de confronter les résultats obtenus dans le cas linéaire entre la simulation numérique et les formules analytiques.

Pour ce faire, dans un premier temps, le régime linéaire est étudié : le calcul est initialisé en projetant les vitesses et déplacements sur la déformée du mode instable déterminé par l'étude de stabilité. L'amplitude modale est égale à 10% de l'amplitude du mode au premier décollement. La durée de simulation sera de 500 ms ce qui permet d'éviter l'occurrence de non-linéarités fortes telles que les phénomènes de décollement de la masse ou d'adhérence. Les formules de puissances discrétisées sont comparées aux formules analytiques déterminées dans la section précédente. Ensuite les influences de la discrétisation temporelle  $h$  et de la tolérance du point fixe  $\epsilon$  sont établies.

Dans un second temps, on porte notre attention sur le régime non-linéaire : la simulation est entreprise sur un intervalle de temps plus long pour différentes valeurs de discrétisation temporelle et de tolérance du point fixe, ce qui permet d'étudier leur influence sur la simulation des phénomènes non-linéaires. Des études paramétriques sont ensuite menées afin de déterminer la valeur de tolérance du point fixe ainsi que celle de la discrétisation temporelle.

Les paramètres choisis sont alors les suivants :  $m = 0.01$  kg,  $f_1 = 100$  Hz,  $f_2 = 75$  Hz,  $k_i = m \times f_i$  N.m<sup>-1</sup>,  $\eta = 0.02$ ,  $c = m \times \eta f_1$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = -30^\circ$ ,  $F = -10$  N,  $V = 3$  m.s<sup>-1</sup>,  $k'_n = 20$  N et  $\mu = 0.22$ .

### 4.4.1 Analyse en régime linéaire

On s'intéresse à l'évolution linéaire du système. Les déplacements et vitesses initiaux sont projetés sur la déformée du mode instable avec une amplitude modale fixée à 10% de l'amplitude du premier décollement ce qui assure l'absence de non-linéarités fortes lors de l'évolution temporelle. Ainsi une formulation analytique des valeurs cinématiques peut être établie (cf. Section 4.3.3) et sert de référence pour les différentes simulations entreprises dans cette section. L'objectif de cette section est de déterminer les valeurs de tolérance du point fixe et de discrétisation temporelle permettant d'obtenir de bons résultats pour le régime linéaire, ce qui permettra de réduire le champ d'étude de ces paramètres pour un régime non-linéaire.

#### Influence de la tolérance $\epsilon$

Le schéma d'intégration numérique est conservatif pour la valeur  $\theta = 0.5$ , par conséquent la quantité premièrement choisie pour étudier l'influence de la tolérance du point fixe  $\epsilon$  est le bilan de puissance. On s'intéresse alors à l'erreur relative sur ce bilan :

$$\text{Erreur}_{\text{bilan}} = \frac{P_\mu + P_n - \partial E / \partial t}{P_C} - 1 \quad (4.38)$$

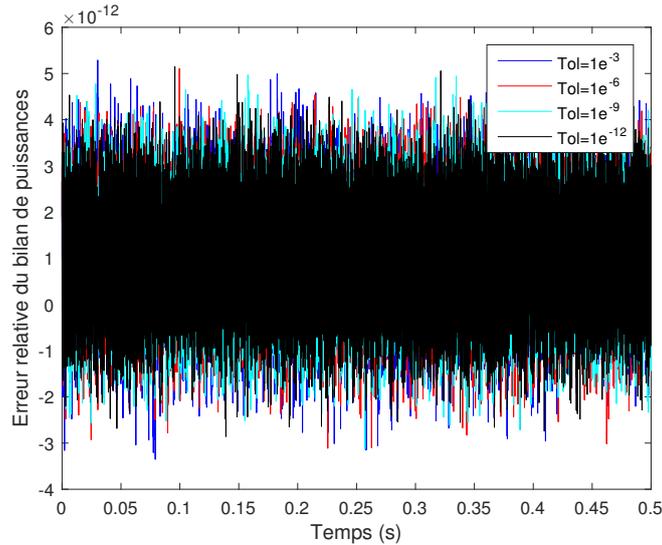


FIGURE 4.4 – Erreur relative du bilan de puissance

Tolérance	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$
$\frac{\overline{P_n}}{\overline{P_C}}$	$1.4812 \times 10^{-10}$	$4.4283 \times 10^{-15}$	$1.6339 \times 10^{-18}$	$1.6266 \times 10^{-20}$
Nbr moyen itérations	2.5012	3.0084	4.0028	4.9915

TABLEAU 4.1 – Puissance normale relative moyenne et nombre moyen d'itérations

La Figure 4.4 représente l'erreur relative pour quatre valeurs de  $\epsilon$  :  $10^{-3}$ ,  $10^{-6}$ ,  $10^{-9}$  et  $10^{-12}$ . Il est à noter que la tolérance n'a pas d'influence sur le bilan de puissance. La conservation de l'énergie est donc bien validée indépendamment de ce paramètre de convergence.

On rappelle que seul le régime linéaire est étudié, ce qui signifie que la masse reste en contact avec le plan (contact bilatéral : absence de décollement). Or la tolérance  $\epsilon$  permet de contrôler la précision sur la détermination des réactions de contact, par conséquent une quantité intéressante à utiliser pour quantifier son influence est la puissance de la réaction de contact  $P_n$ . Sous l'hypothèse du régime linéaire, le jeu est nul et cette puissance est théoriquement nulle. On compare ainsi les différentes puissances moyennes de la réaction de contact relative à la puissance moyenne dissipée par amortissement  $\frac{\overline{P_n}}{\overline{P_C}}$ .

Le Tableau 4.1 récapitule les puissances normales relatives moyennes et le nombre d'itérations moyen lors de la simulation. On remarque que lorsque la tolérance  $\epsilon$  augmente, la puissance relative normale moyenne diminue mais à contrario le nombre d'itérations augmente. Une valeur de tolérance de  $\epsilon = 10^{-6}$  permet d'obtenir une valeur de puissance relative moyenne faible comparée à l'erreur du bilan de puissance, tout en respectant un nombre d'itérations relativement faible. Cette valeur est choisie par la suite.

### Influence de la discrétisation temporelle $h$

On s'intéresse maintenant à l'influence de la discrétisation temporelle. Soit  $h$  le pas de temps choisi et  $T_{ins}$  la période du mode instable. En régime linéaire, la fréquence des vibrations est égale à la fréquence du mode instable et  $h$  doit donc être petit par rapport la période  $T_{ins}$ .

Des simulations sont calculées pour différentes valeurs de  $h$  :  $h = \frac{T_{ins}}{64}$ ,  $h = \frac{T_{ins}}{256}$ ,  $h = \frac{T_{ins}}{1024}$

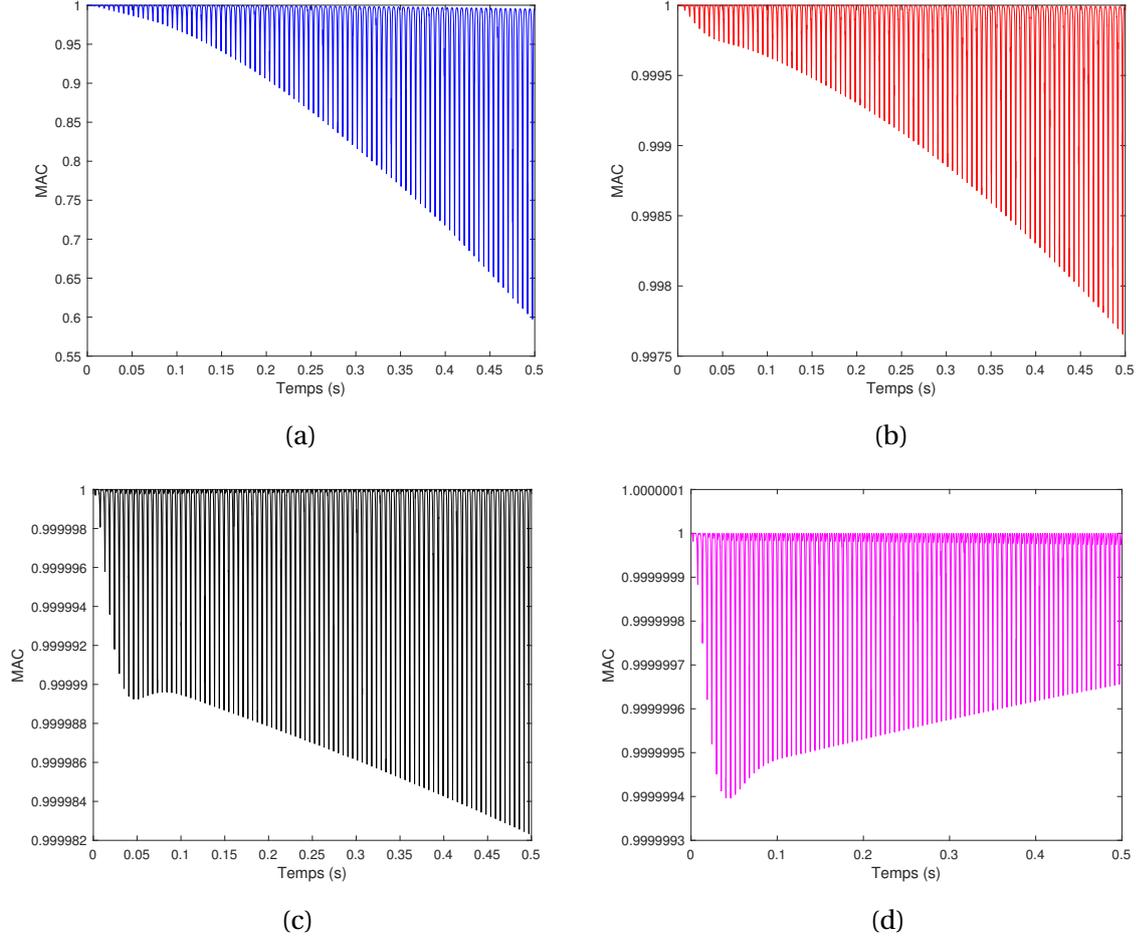


FIGURE 4.5 – Valeur de MAC pour une discrétisation en temps de (a)  $T_{ins}/64$ , (b)  $T_{ins}/256$ , (c)  $T_{ins}/1024$  et (d)  $T_{ins}/4096$

et  $h = \frac{T_{ins}}{4096}$ . Les résultats du calcul numérique sont ensuite comparés à ceux du calcul analytique sous la forme du MAC. Ce nombre est défini de la manière suivante :

$$MAC = \frac{(\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}_{ref})^2}{\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \times \dot{\mathbf{U}}_{ref}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}_{ref}} \quad (4.39)$$

où l'indice ref définit les quantités associées au calcul de référence (ici formules analytiques).

Les énergies mécaniques ainsi que les erreurs relatives des énergies mécaniques sont ensuite calculées pour chaque discrétisation. Ces dernières sont formulées de la manière suivante :

$$Erreur = \frac{\|E^i - E_{ref}^i\|}{E_{ref}^i} \quad (4.40)$$

La Figure 4.5 représente l'évolution temporelle du MAC en fonction de la valeur de discrétisation temporelle. On remarque que plus la valeur  $h$  est petite plus le nombre de MAC est faible. La Figure 4.6 représente la variation de l'énergie mécanique ainsi que l'erreur relative de l'énergie mécanique pour chaque discrétisation. On remarque que l'erreur devient de plus en plus faible avec la discrétisation. Un bon compromis entre précision et temps de calcul semble être atteint pour la valeur de  $T_{ins}/1024$ , valeur qui est choisie pour

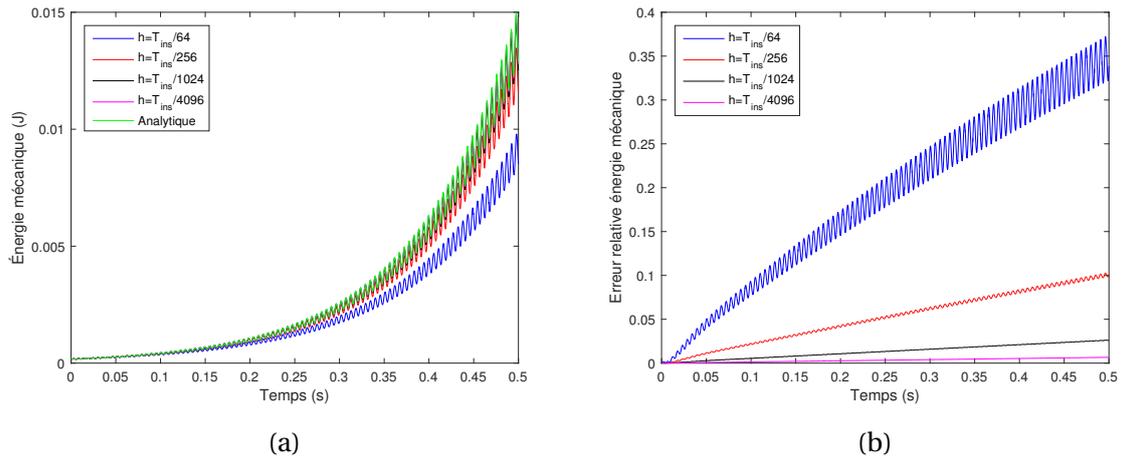


FIGURE 4.6 – Valeurs des (a) énergies mécaniques et (b) erreur relative des énergies mécaniques pour différentes discrétisations.

la suite de l'étude.

#### 4.4.2 Analyse en régime non-linéaire

Dans cette section la simulation du système est initialisée avec les mêmes conditions que précédemment mais contrairement à l'analyse linéaire la période de simulation est de 3 secondes. Cette durée de simulation permet l'observation des phases de contact et décollement, aboutissant à des chocs de la masse sur le plan glissant.

##### Influence de la tolérance $\epsilon$

Les puissances sont ici calculées afin de vérifier l'exactitude du bilan. On a vu que pour le cas linéaire une tolérance de  $10^{-6}$  était utilisée afin de minimiser l'influence de la réaction normale sur le bilan. On utilise ici une tolérance en  $10^{-6}$  et  $10^{-7}$  pour vérifier l'influence de  $\epsilon$  sur la précision du bilan dans le cas d'occurrence de chocs. La discrétisation temporelle est celle déterminée lors de l'étude précédente :  $T_{ins}/1024$ .

La Figure 4.7 représente la comparaison des bilans de puissance pour les deux tolérances. On remarque que la diminution de la tolérance n'influe pas sur le bilan bien que cela augmente la durée de calcul. C'est pourquoi la valeur de tolérance de  $10^{-6}$  est conservée pour la suite de l'étude.

##### Influence de la discrétisation temporelle $h$

Dans cette section une étude de la discrétisation temporelle sur la convergence est effectuée. En régime potentiellement non-linéaire il est possible que le système développe des variations rapides de vitesses lors des chocs et des fréquences harmoniques peuvent apparaître. Un raffinement nécessaire de la discrétisation temporelle est donc à étudier afin de capter ces contributions harmoniques. Les discrétisations choisies dans cette étude sont  $T_{ins}/1024$ ,  $T_{ins}/2048$ ,  $T_{ins}/4096$ ,  $T_{ins}/8192$  et  $T_{ins}/16384$ . Chaque discrétisation est comparée à celle qui lui est deux fois plus petite. Ces comparaisons aux mêmes instants sont effectuées sur les 100 dernières ms de l'intégration temporelle afin de ne prendre en compte que le régime stationnaire.

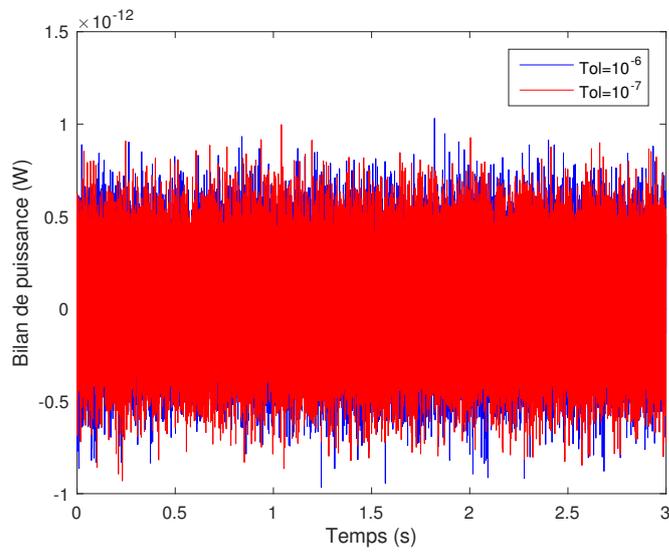


FIGURE 4.7 – Comparaison des bilans de puissance en fonction de la tolérance

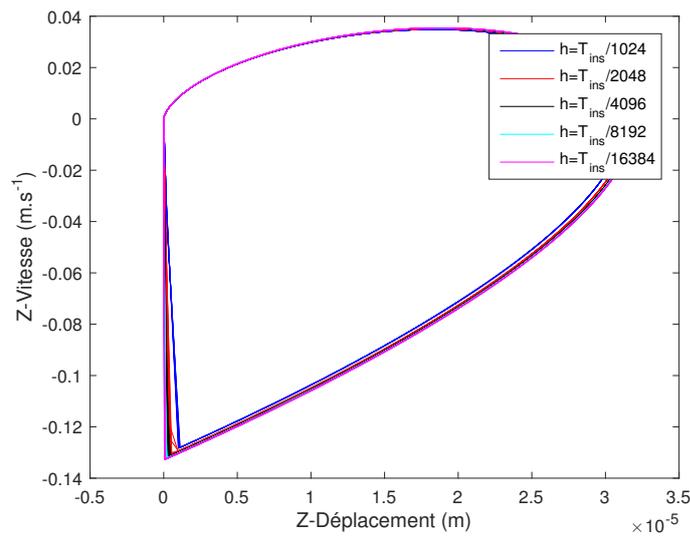


FIGURE 4.8 – Comparaison des cycles limites selon  $Z$  en non-linéaire pour différentes discrétisations

Discrétisations	MAC	Erreur
$h_1 = T_{ins}/1024, h_2 = T_{ins}/2048$	0.99991	0.0024328
$h_1 = T_{ins}/2048, h_2 = T_{ins}/4096$	0.99998	0.0010802
$h_1 = T_{ins}/4096, h_2 = T_{ins}/8192$	0.99999	0.00050609
$h_1 = T_{ins}/8192, h_2 = T_{ins}/16384$	1	0.0002446

TABLEAU 4.2 – Comparaison des Discrétisations

Premièrement, les cycles limites selon la direction normale sont comparés pour vérifier la convergence de chaque discrétisation (cf. Figure 4.8). Il a été remarqué que la  $\theta$ -méthode modifiée permet, lors d'un choc, d'ajuster le déplacement normal à l'instant  $i$  afin de satisfaire une vitesse normale relative nulle à l'itération  $i + 1$ . On constate ce phénomène sur la Figure 4.8. En effet dans le cas non-discrétisé le choc de la masse sur le plan se traduirait par une droite verticale (variation des vitesses sans variation des déplacements). Pour autant, avec une discrétisation temporelle le choc de la masse n'est pas parfaitement reproduit. En effet le déplacement normal est modifié à l'itération antérieure au choc pour assurer une vitesse normale relative nulle à l'instant du choc. On remarque que plus la discrétisation est fine, plus on se rapproche du cas continu. Ainsi afin de pouvoir statuer sur la valeur de discrétisation temporelle adéquate, les valeurs moyennes de MAC et d'erreur sur l'énergie mécanique seront calculées afin de ne pas donner trop d'importance à l'erreur due au choc et à la  $\theta$ -méthode modifiée. On reprend ainsi les expressions données lors de l'analyse linéaire que l'on moyenne numériquement.

La Tableau 4.2 recense les résultats de comparaison entre les différentes discrétisations. Dès la première comparaison la valeur du MAC est très proche de 1 et l'erreur sur l'énergie mécanique est inférieure à 0.24%. Une valeur de  $T_{ins}/1024$  semble donc acceptable même en régime non-linéaire. Cette valeur est retenue pour la suite de l'étude.

## 4.5 Détermination des cas d'étude

Dans cette section on propose de déterminer des cas d'étude afin de les utiliser comme références lors du développement d'une nouvelle démarche numérique pour l'analyse non-linéaire des vibrations auto-entretenues.

Cette section est décomposée en deux parties principales : l'analyse de stabilité et l'analyse non-linéaire pour la détermination des vibrations non-linéaires stationnaires. Les simulations numériques et résultats concernant l'analyse de stabilité sont brièvement présentés dans ce chapitre étant donné qu'une étude paramétrique complète sur le même modèle est traitée dans le chapitre précédent. L'objectif est d'introduire les conditions de fonctionnement pour lesquelles les calculs des réponses vibratoires non-linéaires sont menés. Dans la seconde partie de cette section, l'évolution des régimes transitoire et stationnaire des trois cas d'étude est déterminée à l'aide de l'intégration temporelle proposée.

Les études numériques sont effectuées avec les paramètres suivants :  $m = 0.01$  kg,  $f_1 = 100$  Hz,  $f_2 = 75$  Hz,  $k_i = m \times f_i$  N.m<sup>-1</sup>,  $k'_n = 20$  N.m<sup>-1</sup>,  $\eta = 0.02$ ,  $c = m \times \eta f_1$   $\alpha = 30^\circ$   $\beta = 60^\circ$ ,  $F = 10$  N.

### 4.5.1 Analyse de stabilité

Afin de prévoir la propension du système mécanique à crisser, sa stabilité est étudiée. Cela consiste à analyser le comportement de petites perturbations autour de l'équilibre

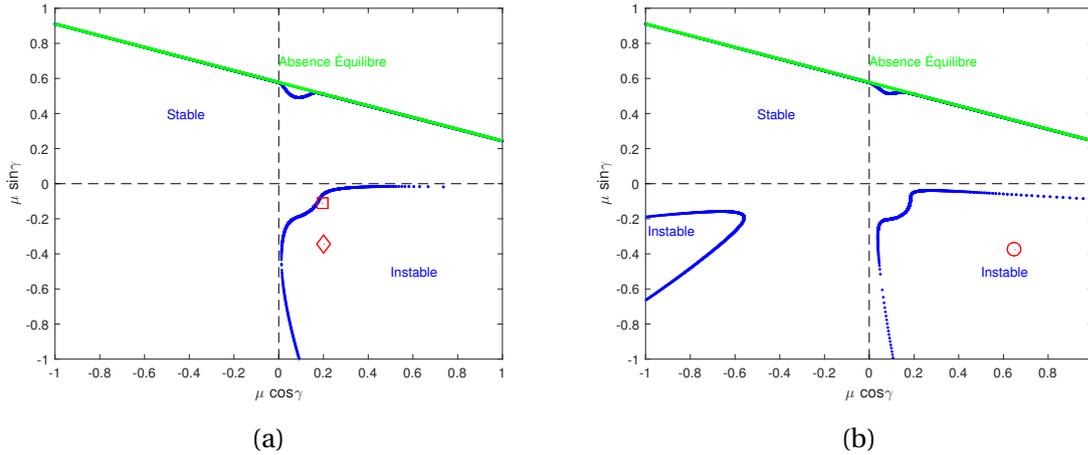


FIGURE 4.9 – Zone de stabilité pour (a)  $V = 3 \text{ m.s}^{-1}$  (b)  $V = 0.75 \text{ m.s}^{-1}$

glissant quasi-statique. On suppose que le contact entre la masse et le plan est bilatéral. Ainsi comme vu au chapitre précédent les réactions de frottement sont linéarisées autour de cet équilibre et les valeurs propres complexes du système sont calculées. On rappelle que si toutes les parties réelles de ces valeurs propres sont négatives, alors le système est stable. Au contraire, si l'une d'entre elles est positive, alors le système est instable et soumis à des vibrations auto-entretenues.

La Figure 4.9 montre les zones de stabilité selon deux paramètres (i.e. le coefficient de frottement  $\mu$  et la direction de glissement  $\gamma$ ) dans le cas de deux configurations spécifiques. Dans le premier cas une vitesse de glissement  $V = 3 \text{ m.s}^{-1}$  est considérée alors que dans le second cas,  $V = 0.75 \text{ m.s}^{-1}$ . Ce choix de configurations est expliqué dans la section suivante. Pour chaque configuration la principale zone de stabilité est le quartier en bas à droite des Figures 4.9 et correspond aux directions de la vitesse de glissement entre  $-90^\circ$  et  $0^\circ$ .

#### 4.5.2 Vibrations non-linéaires

Basé sur les résultats précédents concernant l'analyse de stabilité du système mécanique étudié, les trois cas suivants sont choisis pour des simulations non-linéaires :

- cas 1 :  $(\mu, \gamma, V)$  égale à  $(0.2244, -30^\circ, 3 \text{ m.s}^{-1})$  - indiqué par un carré sur la Figure 4.9(a),
- cas 2 :  $(\mu, \gamma, V)$  égale à  $(0.75, -30^\circ, 0.75 \text{ m.s}^{-1})$  - indiqué par un cercle sur la Figure 4.9(b),
- cas 3 :  $(\mu, \gamma, V)$  égale à  $(0.40, -60^\circ, 3 \text{ m.s}^{-1})$  - indiqué par un losange sur la Figure 4.9(a),

Ces trois cas de référence sont utilisés pour démontrer l'efficacité et la robustesse de la méthode de tir proposée pour prévoir l'estimation des vibrations auto-entretenues mais aussi pour discuter de la limitation et des précautions d'utilisation de cette méthode (plus spécifiquement pour le cas 3). Le cas 1 et 3 sont choisis parce qu'ils mettent en évidence des vibrations auto-entretenues avec des phénomènes d'impact/décollement alors que le second cas illustre l'occurrence de vibrations de type adhérence/glissement. Quand le système est dans une zone instable, une perturbation de l'équilibre statique génère des vibrations auto-entretenues. L'amplitudes de ces vibrations augmentent linéairement jusqu'à apparition de fortes non-linéarités (i.e. phénomène d'impact/décollement pour

Cas	Fréquence (Hz)	Partie réelle s <sup>-1</sup>
Cas 1	91.88	5.65
Cas 2	93.40	26.55
Cas 3	94.94	40.29

TABLEAU 4.3 – Fréquences et parties réelles des valeurs propres des modes instables des différents cas d'étude.

les premier et troisième cas et phénomène d'adhérence/glissement pour le second cas) et établissement du mouvement non-linéaire périodique et stationnaire. Le Tableau 4.3 recense les fréquences des modes instables ainsi que la partie réelle des valeurs propres instables des différents cas d'étude.

Ces évolutions transitoires puis stationnaires sont maintenant analysées en utilisant les outils développées dans les sections précédentes. Dans chacun des cas d'étude l'amplitude modale du mode instable est initialisée comme étant égale à 10% de l'amplitude modale d'observation du premier phénomène non-linéaire (décollement dans les cas 1 et 3, adhérence dans le cas 2). La durée des simulations est fixée à 3 s afin d'être certain d'atteindre le régime stationnaire. La valeur de la tolérance du point fixe est égale à 10<sup>-6</sup> et le pas de temps  $h$  à  $T_{ins}/1024$  comme déterminés dans la Section 4.4.

### Cas 1

On présente maintenant les résultats de l'intégration temporelle de l'équation du mouvement dans le Cas 1. La Figure 4.10 représente l'évolution des amplitudes vibratoires selon les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  du système. On remarque la présence de deux régimes. Le premier régime comporte une évolution linéaire pour  $t \in [0, 0.5]$  avec une absence de décollement de la masse (cf. Figure 4.10(c)) et où les amplitudes vibratoires selon les directions  $x$  et  $y$  augmentent exponentiellement (cf. Figure 4.10(a) et (b)). Le second régime est non-linéaire. En effet à partir de  $t = 0.5$  s des décollements de la masse se produisent (cf. Figure 4.10(c)). Ces décollements induisent alors une saturation de l'augmentation des amplitudes dans le plan tangentiel, ce qui induit le régime stationnaire (cf. Figure 4.10(a) et (b)).

Afin de s'assurer que le régime stationnaire soit bien atteint, on moyenne numériquement les différentes puissances ainsi que l'énergie mécanique sur des fenêtres égales à  $10 \times T_{ins}$  avec un recouvrement de 50% où  $T_{ins}$  correspond à la période du mode instable. On définit ensuite le taux moyen relatif de puissance mécanique comme étant le rapport entre la puissance mécanique moyenne et l'énergie mécanique moyenne :

$$\bar{\tau}_{meca} = \frac{\bar{\partial E}}{\bar{E}} \quad (4.41)$$

La Figure 4.11 représente l'évolution de l'énergie mécanique du système ainsi que celle du taux moyen relatif de puissance mécanique. On observe que l'énergie mécanique augmente puis sature, ceci s'explique par l'augmentation exponentielle des amplitudes des niveaux vibratoires en régime linéaire et la saturation de ces niveaux en régime non-linéaire. En observant le taux moyen relatif de puissance mécanique, on remarque que celui-ci augmente puis décroît jusqu'à devenir nul pour une valeur  $t_{sta} = 1.252$  s. À partir de cette valeur le régime stationnaire est établi.

La Figure 4.12 représente l'évolution de la vitesse normale et de la réaction de contact sur une portion du régime stationnaire. On observe lors des chocs, des augmentations

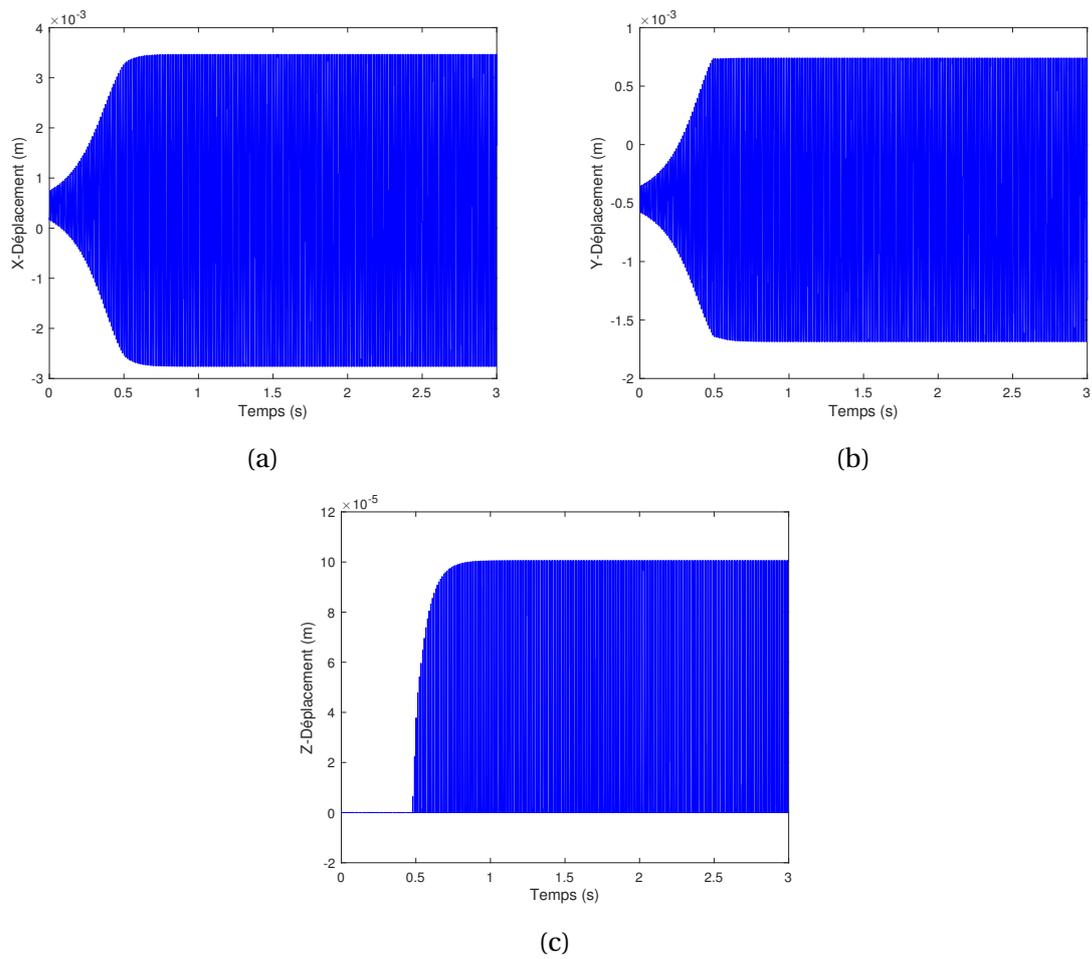


FIGURE 4.10 – Cas 1 : Évolution des déplacements selon les directions (a) x, (b) y et (c) z

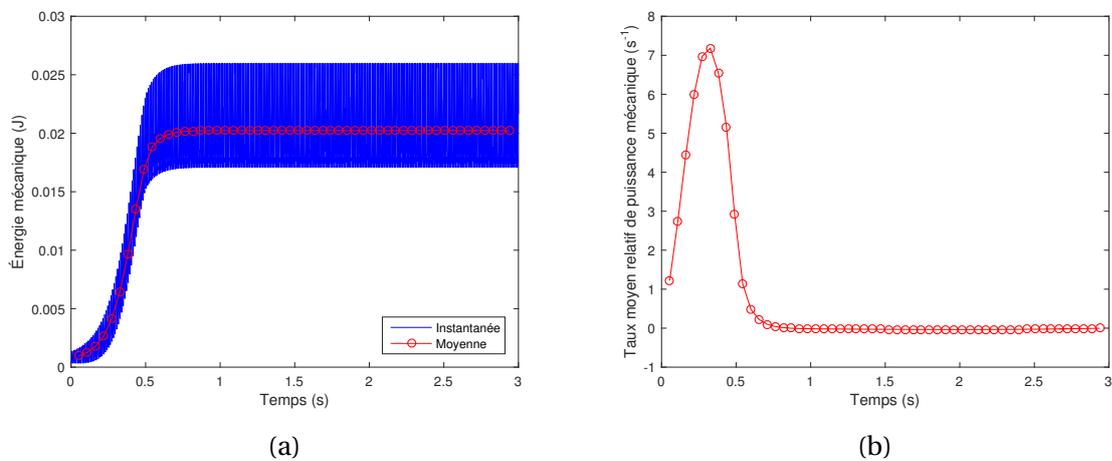


FIGURE 4.11 – Cas 1 : Évolution (a) de l'énergie mécanique et (b) du taux moyen relatif de puissance mécanique

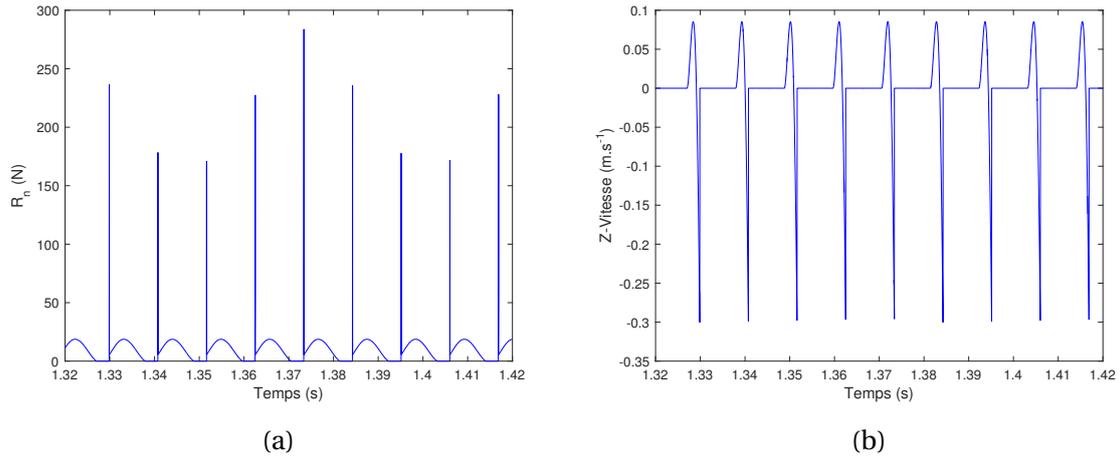


FIGURE 4.12 – Cas 1 : Évolution (a) de la réaction normale et (b) de la vitesse normale sur une portion du régime stationnaire

soudaines de la réaction normale avec une vitesse normale non nulle. Cela engendre une puissance normale qui représente la dissipation d'énergie lors du choc. Ensuite lorsque la réaction normale est non nulle (hors impact), la vitesse normale est nulle et donc la puissance normale est aussi nulle. Par conséquent la simulation de choc est bien modélisée.

La Figure 4.13 représente l'évolution temporelle des différentes puissances du système ainsi que le bilan de puissance. On constate que la puissance due aux chocs est bien négative ce qui vérifie la dissipation d'énergie à l'impact. Le bilan de puissance reste vérifié tout au long de la simulation.

On effectue ensuite le calcul de l'énergie mécanique et des puissances hors équilibre qui sont par la suite moyennées sur une fenêtre de 0.25 s avec un recouvrement de 50%. La Figure 4.14 représente alors la variation des différents taux de puissances moyens hors équilibre. Le taux de puissance mécanique à une valeur initiale environ égale à deux fois la partie réelle de la valeur propre du mode instable (5.65 s<sup>-1</sup>) et ensuite décroît pour atteindre la valeur de 0 qui signifie que le régime stationnaire est atteint. On constate que le taux de puissance moyen dissipée par amortissement est à peu près constant lors de l'évolution du système. Les taux de puissance moyens injectée par le frottement et due aux chocs décroissent en même temps que le taux de puissance mécanique jusqu'à ce que leur somme soit égale au taux de puissance moyen dissipée par amortissement. Cette observation permet de mettre en avant une hypothèse sur l'établissement du régime stationnaire pour des systèmes soumis à des vibrations auto-entretenues liées au frottement. L'amplitude des niveaux vibratoires augmentent de façon exponentielle jusqu'à établissement de phénomènes non-linéaires de type décollement et saturation des réactions de contact frottant. Cette saturation provoque une diminution de la puissance moyenne injectée par le contact frottant alors que la puissance moyenne dissipée par amortissement visqueux reste constant. Lorsque la puissance moyenne injectée par les réactions de contact frottant est égale à la puissance moyenne dissipée par amortissement, le régime stationnaire est établi.

On s'intéresse maintenant au bilan de puissance moyen avec équilibre sur le régime stationnaire. Les puissances sont moyennées numériquement à partir de  $t = 1.5$  s. Le Tableau 4.4 retranscrit les valeurs des différents taux moyens relatifs de puissances sur cette période. On remarque que la majorité des puissances en régime stationnaire est donnée par la puissance dissipée par amortissement et les puissances dues au contact frottant, on constate même une égalité entre ces puissances ce qui vérifie l'hypothèse évoquée

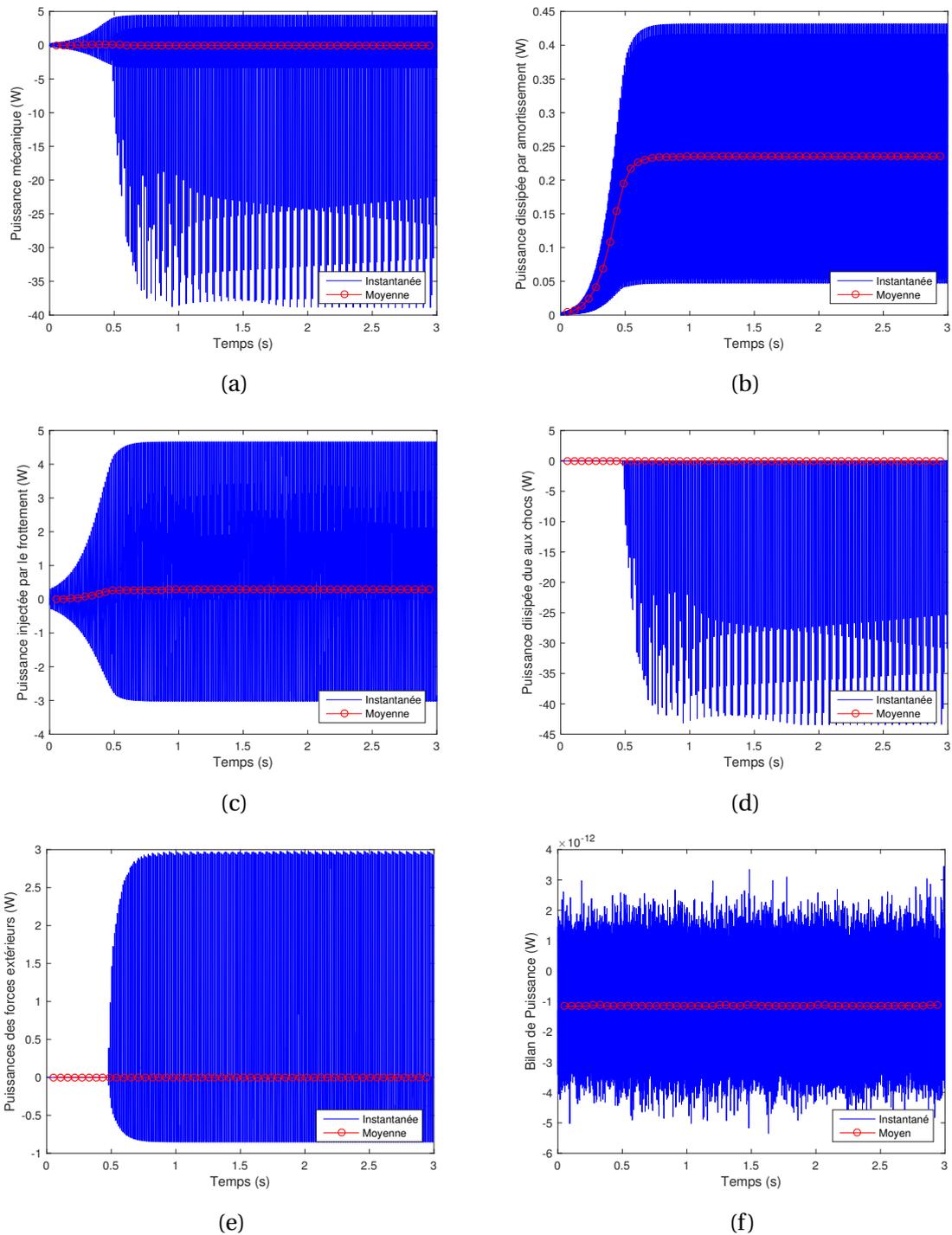


FIGURE 4.13 – Cas 1 : Évolution des puissances (a) mécanique, (b) dissipée par amortissement, (c) injectée par le frottement, (d) dissipée aux chocs, (e) des forces extérieures et (f) du bilan de puissance

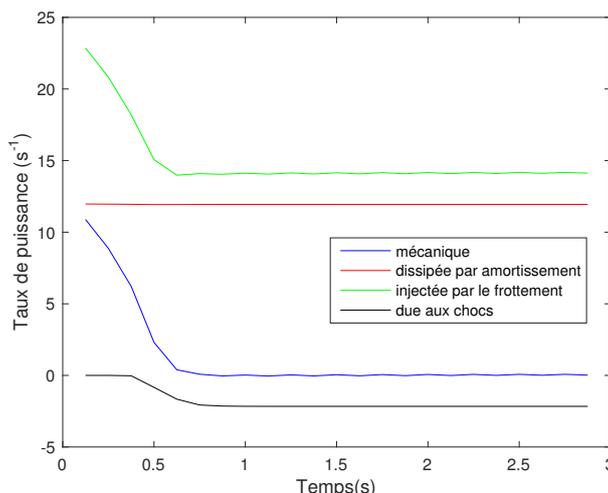


FIGURE 4.14 – Cas 1 : Évolution des taux de puissances moyens

Nom	Valeur	Unité
Taux de puissance mécanique	0.07565	$s^{-1}$
Taux de puissance dissipée par amortissement	11.61	$s^{-1}$
Taux de puissance injectée par le frottement	13.786	$s^{-1}$
Taux de puissance des efforts extérieurs	$-1.073 \times 10^{-16}$	$s^{-1}$
Taux de puissance due aux chocs	-2.1013	$s^{-1}$
Bilan de puissance	$-1.167 \times 10^{-12}$	adimensionné

TABLEAU 4.4 – Cas 1 : Taux moyens relatifs de puissance et bilan de puissance moyen

précédemment sur l'établissement du régime stationnaire.

## Cas 2

On présente maintenant les résultats de l'intégration temporelle de l'équation du mouvement dans le Cas 2. La Figure 4.15 représente l'évolution des amplitudes vibratoires et des vitesses dans le plan tangent. Comme pour le Cas 1, on remarque la présence de deux régimes. Le premier régime comporte une évolution linéaire pour  $t \in [0, 0.010]$  où les amplitudes vibratoires et les vitesses selon les directions  $x$  et  $y$  augmentent exponentiellement. Le second régime est non-linéaire. En effet à partir de  $t = 0.010$  s les vitesses dans le plan tangent saturent (pour une valeur de  $0.65 \text{ m.s}^{-1}$  pour la direction  $x$  et  $-0.375 \text{ m.s}^{-1}$  pour la direction  $y$ ) et provoquent des phénomènes adhérents. Ces phénomènes non-linéaires induisent alors une saturation de l'augmentation des amplitudes dans le plan tangentiel, ce qui aboutit à régime stationnaire.

Afin de mieux visualiser l'évolution de l'énergie et des puissances, on moyenne numériquement les différentes puissances ainsi que l'énergie mécanique sur des fenêtres égales à  $10 \times T_{ins}$  avec un recouvrement de 50% où  $T_{ins}$  correspond à la période du mode instable. La Figure 4.16 représente l'évolution de l'énergie mécanique du système. On observe que l'énergie mécanique augmente puis sature, ceci s'explique par l'augmentation exponentielle des amplitudes des niveaux vibratoires en régime linéaire et la saturation de ces niveaux en régime non-linéaire.

La Figure 4.17 représente l'évolution temporelle des différentes puissances du système ainsi que le bilan de puissance. Étant dans un cas où seuls des cycles adhérent/glisement

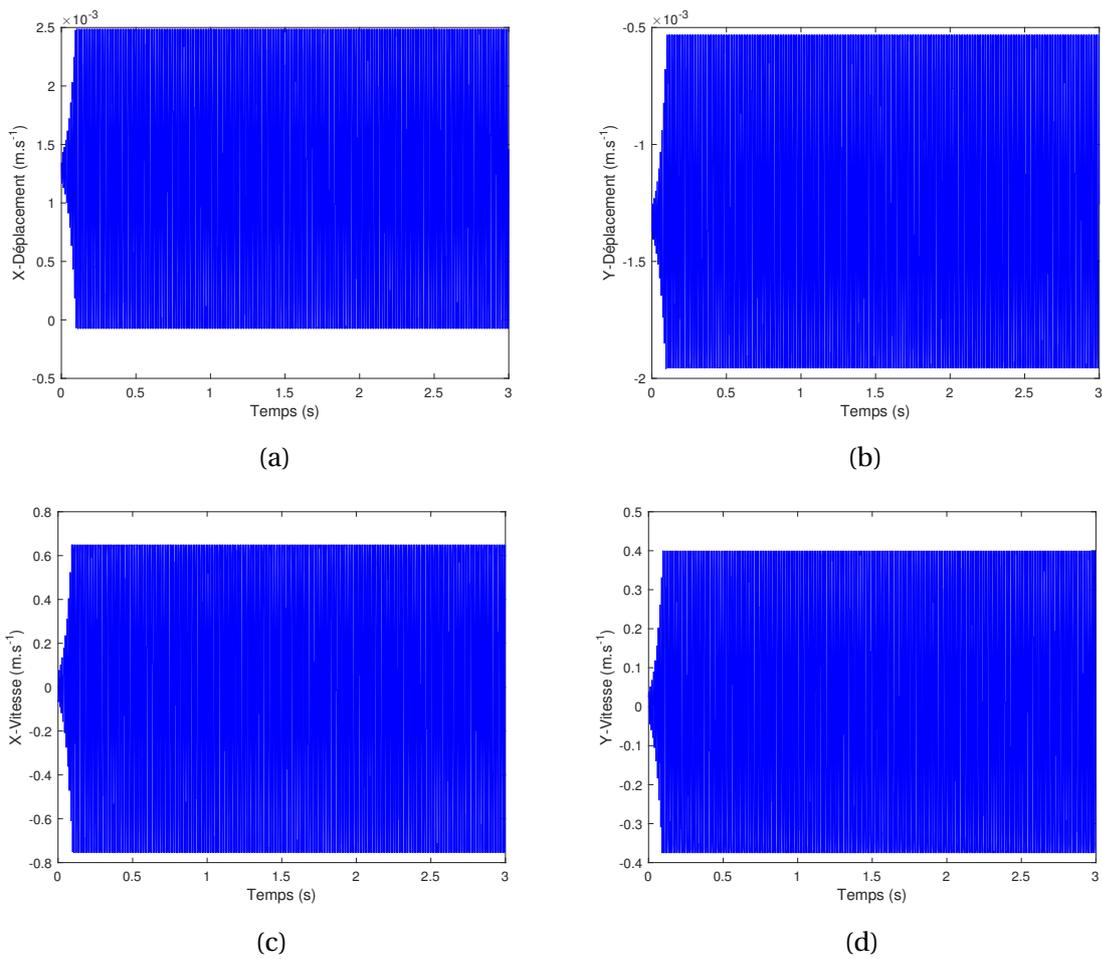


FIGURE 4.15 – Cas 2 : Évolution des déplacements selon les directions (a)  $x$  et (b)  $y$  et des vitesses selon (c)  $x$  et (d)  $y$

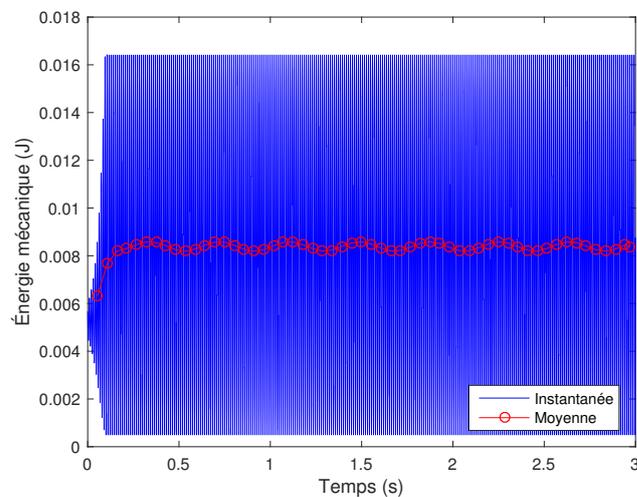


FIGURE 4.16 – Cas 2 : Évolution de l'énergie mécanique

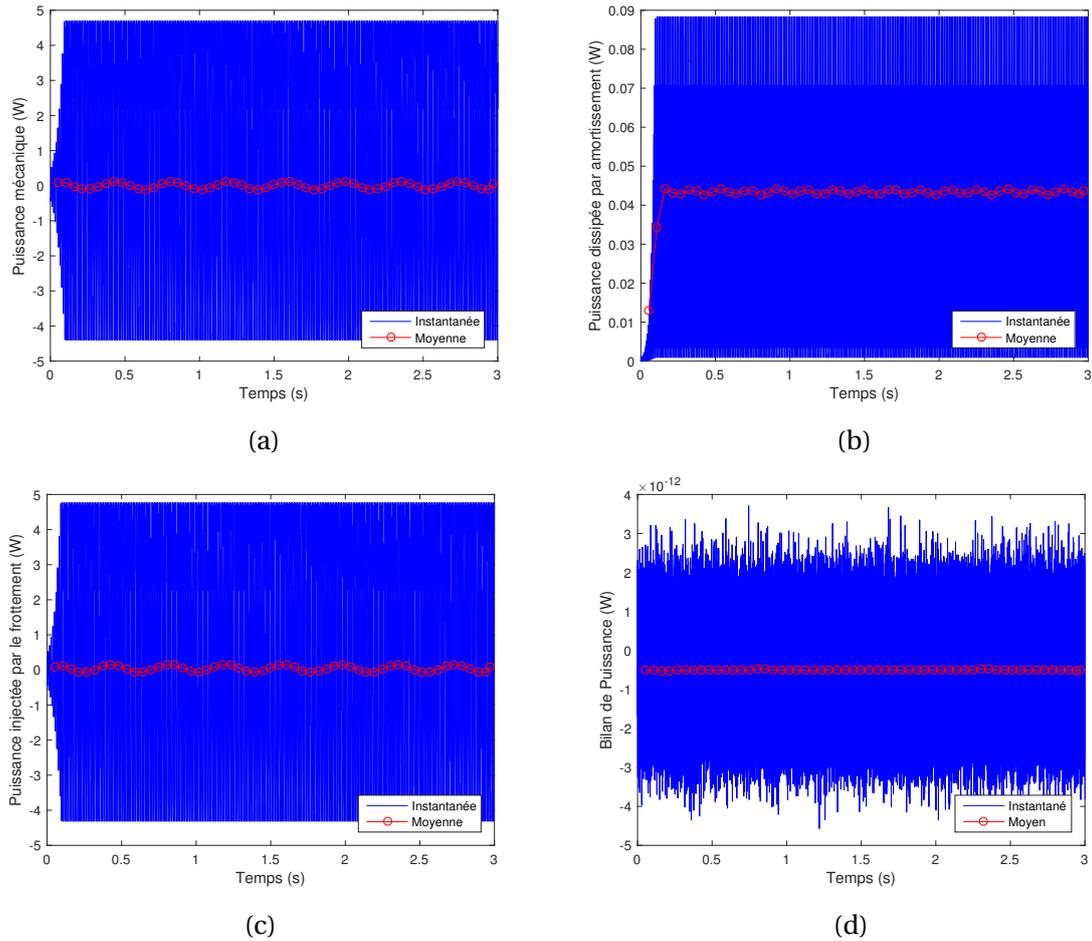


FIGURE 4.17 – Cas 2 : Évolution des puissances (a) mécanique, (b) dissipée par amortissement, (c) injectée par le frottement et (d) du bilan de puissance

se produisent, la puissance dissipée due au choc et celle des efforts extérieurs ne sont pas représentées car non-significatives. On constate que le bilan de puissance reste vérifié tout au long de la simulation.

On effectue maintenant le calcul de l'énergie mécanique et des puissances hors équilibre qui sont par la suite moyennées sur une fenêtre de 0.050 s avec un recouvrement de 50%. La valeur de cette fenêtre a été réduite car, comparé au Cas 1, la montée en divergence du Cas 2 est beaucoup plus forte aboutissant à un rapide établissement du régime stationnaire. Du coup le moyennage n'est pas optimal ce qui explique les oscillations observées. La Figure 4.18 représente alors la variation des différents taux de puissances moyens. Comme pour le cas précédent, le taux de puissance mécanique à une valeur initiale environ égale à deux fois la partie réelle de la valeur propre du mode instable ( $26.55 \text{ s}^{-1}$ ). Ensuite on constate que le taux de puissance moyen dissipée par amortissement est constant lors de l'évolution du système ainsi que l'absence de décollement (taux de puissance moyen due au choc nul). Le taux de puissance moyen injectée par le frottement décroît en même temps que le taux de puissance mécanique jusqu'à ce que sa valeur soit égale au taux de puissance moyen dissipée par amortissement. Cette fois, c'est le phénomène d'adhérence, qui est à l'origine du régime stationnaire.

On s'intéresse enfin au bilan de puissance moyen avec équilibre sur le régime stationnaire. Les puissances sont moyennées numériquement à partir de  $t = 1$  s. Le Tableau 4.5 retranscrit les valeurs des différents taux moyens relatifs de puissances sur cette période.

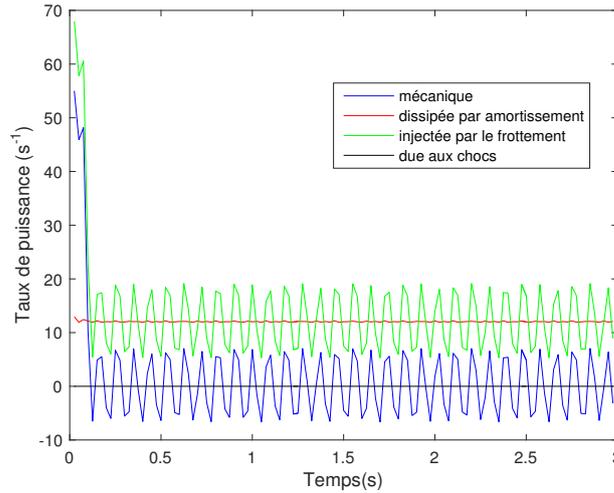


FIGURE 4.18 – Cas 2 : Évolution des taux de puissances moyens

Nom	Valeur	Unité
Taux de puissance mécanique	-0.179	$s^{-1}$
Taux de puissance dissipée par amortissement	5.1852	$s^{-1}$
Taux de puissance injectée par le frottement	5.0059	$s^{-1}$
Taux de puissance des efforts extérieurs	$1.6739 \times 10^{-18}$	$s^{-1}$
Taux de puissance due aux chocs	$-1.4637 \times 10^{-17}$	$s^{-1}$
Bilan de puissance	$-3.455 \times 10^{-13}$	adimensionné

TABLEAU 4.5 – Cas 2 : Taux moyens relatifs de puissance et bilan de puissance moyen

On remarque que la majorité des puissances en régime stationnaire est donnée par la puissance dissipée par amortissement et la puissance injectée par le frottement, on constate même une égalité entre ces puissances permettant alors de vérifier l'hypothèse précédente.

### Cas 3

On présente maintenant les résultats de l'intégration temporelle de l'équation du mouvement dans le Cas 3. La Figure 4.19 représente l'évolution des amplitudes vibratoires selon les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Contrairement aux Cas 1 et 2, on remarque la présence de trois régimes. Le premier régime comporte une évolution linéaire pour  $t \in [0, 0.066]$  où les amplitudes vibratoires et les vitesses selon les directions  $x$  et  $y$  augmentent exponentiellement avec une absence de décollement selon  $z$ . Le second régime est non-linéaire. En effet à partir de  $t = 0.066$  s des phénomènes de décollement/impact apparaissent. Cependant contrairement au Cas 1, le régime obtenu n'est pas stationnaire et l'amplitude des décollements continuent d'augmenter jusqu'à obtenir saturation des amplitudes vibratoires pour  $t = 1.5$  s. Ainsi le cycle limite est obtenu à une période deux fois plus importante lors de laquelle deux décollements et impacts se produisent.

La Figure 4.20 représente l'évolution de l'énergie mécanique du système ainsi que celle du taux moyen relatif de puissance mécanique (moyenné sur des fenêtres de période de  $10 \times T_{ins}$  avec recouvrement de 50%). On observe que l'énergie mécanique augmente puis sature, ceci s'explique par l'augmentation exponentielle des amplitudes des niveaux vibratoires en régime linéaire et la saturation de ces niveaux en régime non-linéaire. En

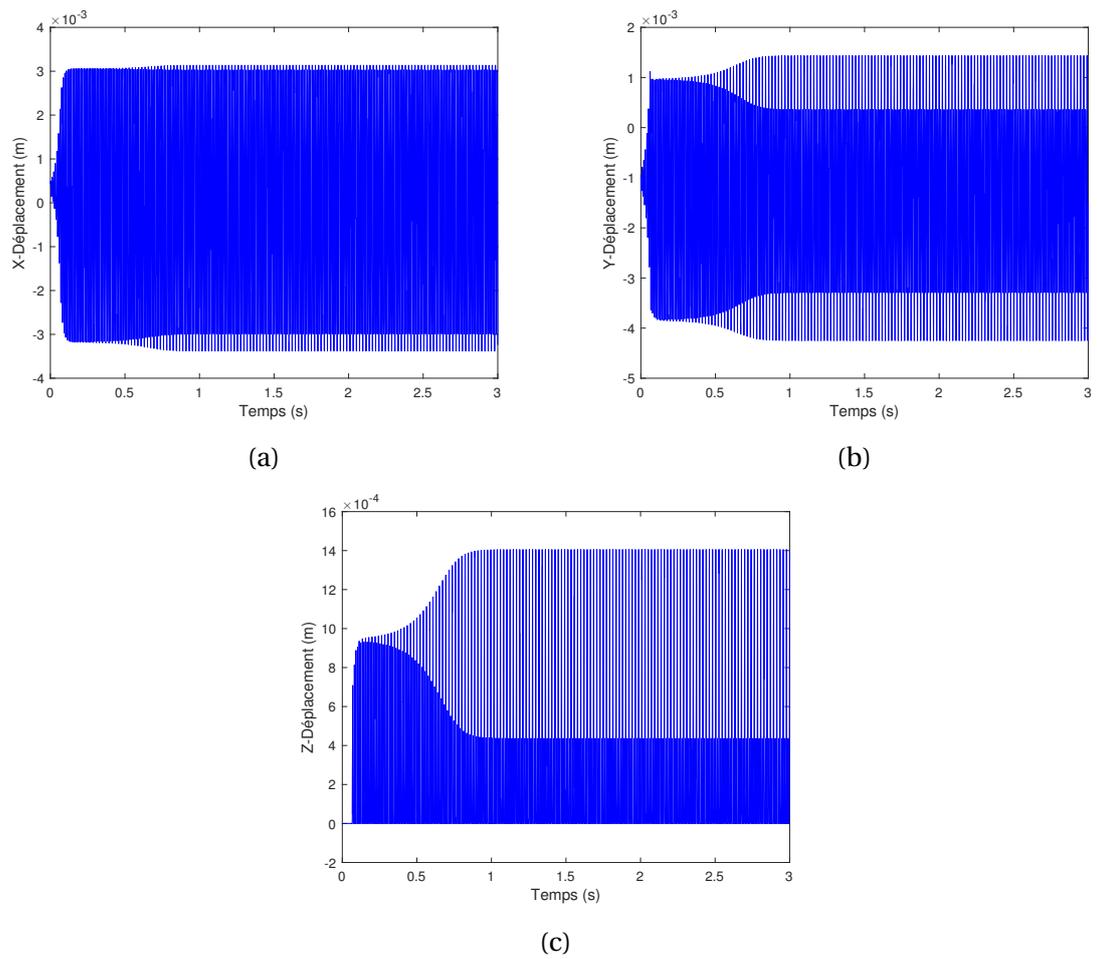


FIGURE 4.19 – Cas 3 : Évolution des déplacements selon les directions (a)  $x$ , (b)  $y$  et (c)  $z$

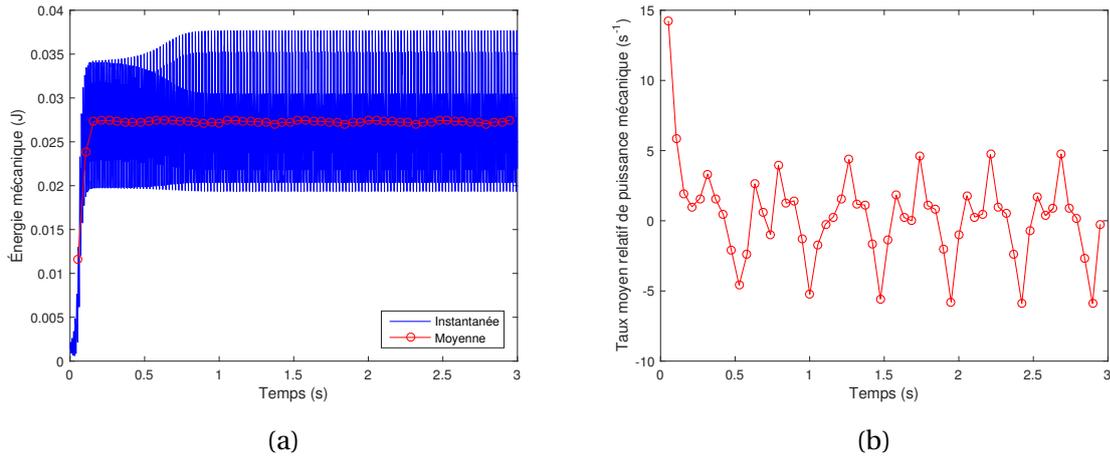


FIGURE 4.20 – Cas 3 : Évolution (a) de l'énergie mécanique et (b) du taux moyen relatif de puissance mécanique

observant le taux moyen relatif de puissance mécanique, on remarque que celui décroît jusqu'à osciller autour de 0 pour une valeur  $t_{sta} = 1.5$  s. À partir de cette valeur on suppose le régime stationnaire est établi.

La Figure 4.21 représente l'évolution temporelle des différentes puissances du système ainsi que le bilan de puissance. On constate que la puissance due aux chocs est bien négative ce qui vérifie la dissipation d'énergie à l'impact. Le bilan de puissance reste vérifié tout au long de la simulation.

On effectue le calcul de l'énergie mécaniques et des puissances hors équilibre qui sont par la suite moyennées sur une fenêtre de 0.050 s avec un recouvrement de 50%. La Figure 4.22 représente alors la variation des différents taux de puissances moyens. Comme pour les cas précédents, le taux de puissance mécanique à une valeur initiale environ égale à deux fois la partie réelle de la valeur propre du mode instable ( $40.29 \text{ s}^{-1}$ ). Ensuite on constate que le taux de puissance moyen dissipée par amortissement est constant lors de l'évolution du système et que les taux de puissance moyens injectée par le frottement et due au choc décroissent en même temps que le taux de puissance mécanique jusqu'à ce que leur somme soit égale au taux de puissance moyen dissipée par amortissement. Ainsi une fois de plus les phénomènes non-linéaires de type décollement et choc ici, semblent être à l'origine du régime stationnaire.

On s'intéresse maintenant au bilan de puissance moyen avec équilibre sur le régime stationnaire. Les puissances sont moyennées numériquement à partir de  $t = 1.5$  s. Le Tableau 4.6 retranscrit les valeurs des différents taux moyens relatifs de puissances sur cette période. Similaire au Cas 1, on remarque que la majorité des puissances en régime stationnaire est donnée par la puissance dissipée par amortissement et des puissances injectées par le contact frottant, on constate même une égalité entre ces puissances vérifiant une fois de plus l'hypothèse effectuée précédemment. La puissance dissipée aux chocs représente toutefois ici une cause importante de la saturation contrairement aux deux premiers cas.

### 4.5.3 Conclusion

Les trois cas de référence ont été présentés et leurs évolutions transitoire et stationnaire discutées. Cette analyse a permis de soumettre l'hypothèse que le régime stationnaire résulte d'un équilibre énergétique entre les puissances dissipées par amortissement

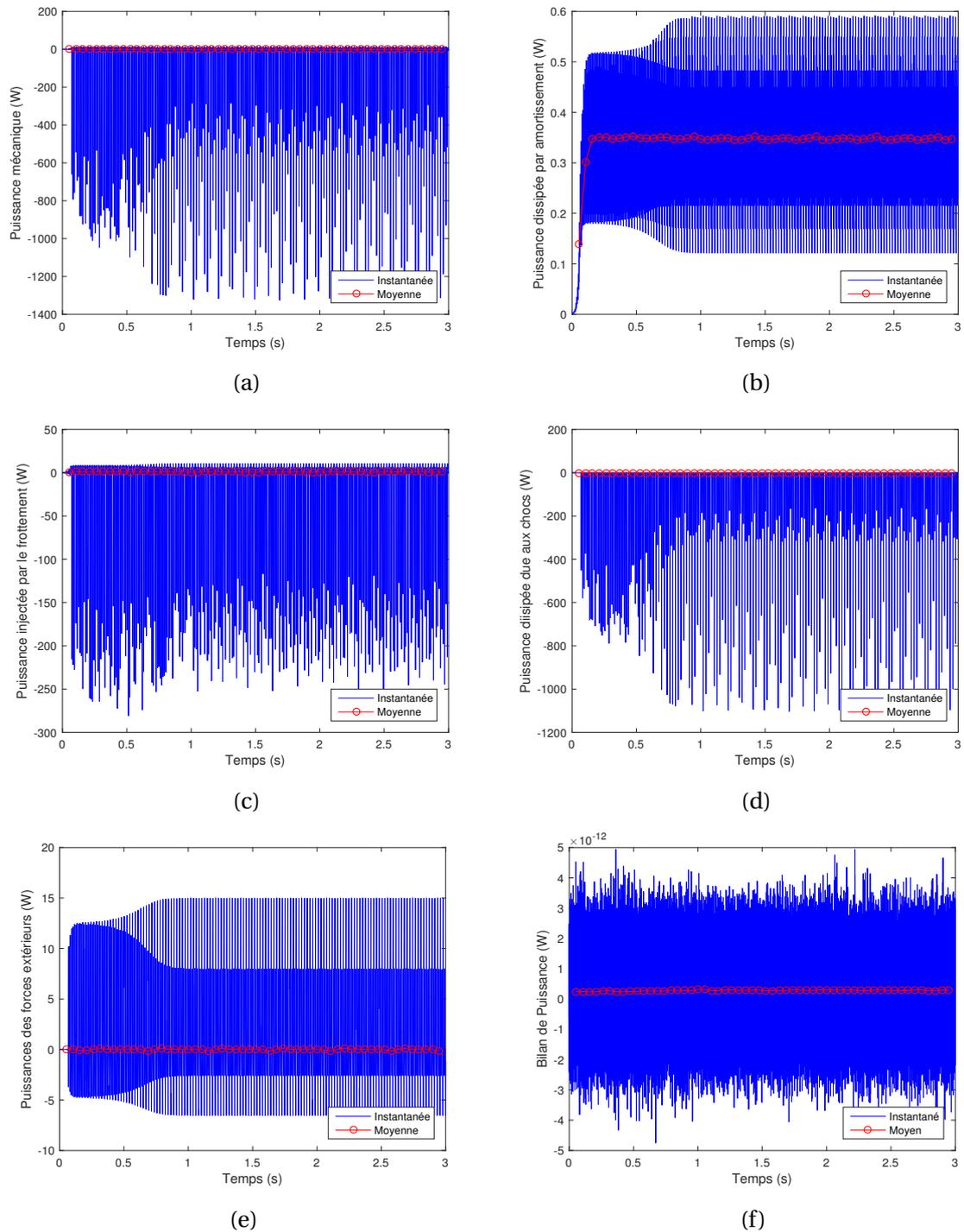


FIGURE 4.21 – Cas 3 : Évolution des puissances (a) mécanique, (b) dissipée par amortissement, (c) injectée par le frottement, (d) dissipée aux chocs, (e) des forces extérieures et (f) du bilan de puissance

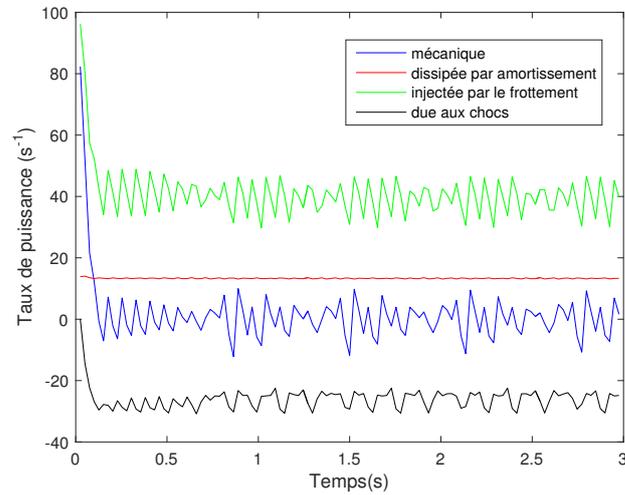


FIGURE 4.22 – Cas 3 : Évolution des taux de puissances moyens

Nom	Valeur	Unité
Taux de puissance mécanique	-0.169	s <sup>-1</sup>
Taux de puissance dissipée par amortissement	12.753	s <sup>-1</sup>
Taux de puissance injectée par le frottement	37.663	s <sup>-1</sup>
Taux de puissance des efforts extérieurs	-0.337	s <sup>-1</sup>
Taux de puissance due aux chocs	-24.743	s <sup>-1</sup>
Bilan de puissance	$3.4994 \times 10^{-13}$	adimensionné

TABLEAU 4.6 – Cas 3 : Taux moyens relatifs de puissance et bilan de puissance moyen

et celles dues aux réactions de contact frottant. En effet les réactions de contact frottant saturent via des phénomènes non-linéaires ce qui produit alors une modification des puissances liées à ces réactions jusqu'à équilibrer le bilan de puissance. Les phénomènes non-linéaires de type adhérence ou décollement provoquent une diminution de la puissance moyenne injectée par le frottement, les chocs entre la masse et le plan introduisent une dissipation d'énergie tandis que la puissance moyenne dissipée par amortissement reste à peu près constante.

## 4.6 Méthode de Tir et choix d'une initialisation appropriée

Dans cette section nous proposons d'introduire la méthode de tir pour déterminer la réponse non-linéaire stationnaire du système auto-entretenu soumis à une mono-instabilité induite par frottement. La méthode de tir développée pour le système académique étudié est tout d'abord présentée. Ensuite, l'approche énergétique utilisée pour estimer une initialisation appropriée pour l'algorithme de la méthode de tir est décrite et discutée.

### 4.6.1 Méthode de tir appliquée à un système mono-instable autonome

La méthode de tir est une méthode itérative basée sur une procédure d'intégration temporelle numérique qui détermine une solution périodique en itérant sur les conditions initiales et la période de la réponse vibratoire. Dans un contexte de systèmes auto-entretenus, la fréquence fondamentale de la solution non-linéaire stationnaire est inconnue. En effet elle peut différer de la fréquence du mode instable qui peut être calculée par exemple via l'analyse de stabilité.

Ainsi, l'implémentation de la méthode de tir requiert non seulement la détermination de la solution périodique (i.e. les vecteurs de déplacements et de vitesses du système) mais aussi de la fréquence fondamentale associée. La mise en équation de la méthode de tir pour des systèmes à excitations externes (sans besoin de détermination de la fréquence fondamentale) ainsi que son principe peuvent être retrouvés à la Section 2.6.3. On s'attarde dans ce qui suit à la description des notifications associées à la considération d'un système autonome (i.e. avec l'ajout de la fréquence fondamentale) et à l'application au modèle à trois degrés de liberté soumis au frottement.

La méthode de tir est une démarche de recherche de régime périodique basée sur une intégration temporelle sur une période. Elle itère alors sur les conditions initiales (notées  $\mathbf{Z}_0$ ) de l'intégration temporelle ainsi que sur sa période (notée  $T$ ) jusqu'à obtenir un régime périodique représenté sur la Figure 4.23 par un cycle limite.

En reprenant les notations de la Section 2.6.3, on estime que le régime périodique est correctement approximé lorsque les conditions de convergence suivantes sont vérifiées :

$$\|\mathbf{H}^j\| / \|\mathbf{Z}_0^{j+1}\| < \epsilon_1 \quad (4.42)$$

$$|\Delta T^j| / |T^{j+1}| < \epsilon_2 \quad (4.43)$$

### 4.6.2 Calcul de la matrice de monodromie

Dans la Section 2.6.3, deux méthodes pour le calcul de la matrice de monodromie que l'on note ici  $\mathbf{J}$  ont été présentées. On se propose dans ce qui suit d'expliquer ces deux méthodes pour le cas du système étudié.

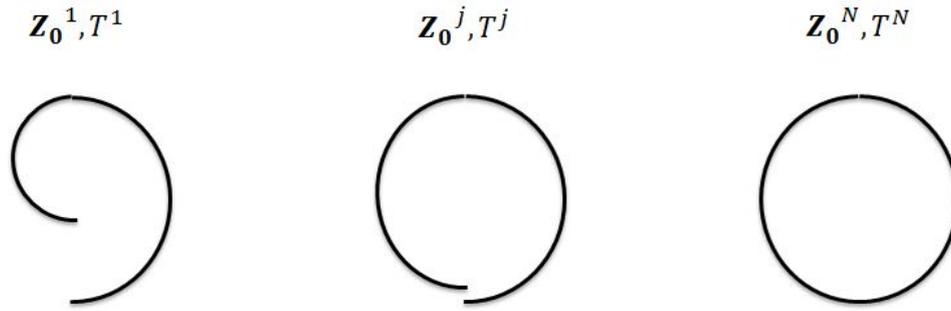


FIGURE 4.23 – Illustration de la méthode de tir

### Calcul par différences finies

On détaille tout d'abord la méthode des différences finies où la matrice de monodromie est calculée en perturbant chacune des conditions initiales. On a alors :

$$\mathbf{Z}(\mathbf{0})_l^+ = \mathbf{Z}_0 + \delta \mathbf{e}_l \quad (4.44)$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{0})_l^- = \mathbf{Z}_0 - \delta \mathbf{e}_l \quad (4.45)$$

où  $\mathbf{e}_l$  représente la  $l^{\text{ième}}$  colonne de la matrice identité. La  $l^{\text{ième}}$  colonne de la matrice de monodromie est calculée en utilisant la relation suivante :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{Z}_0^j, T^j}^l = \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0^j + \delta \mathbf{e}_l, T^j)_l^+ - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0^j - \delta \mathbf{e}_l, T^j)_l^-}{2\delta} \quad (4.46)$$

On observe que la méthode d'estimation de cette matrice par différences finies est pilotée par le paramètre  $\delta$ . Ainsi lorsque  $\delta$  est suffisamment petit l'approximation apportera des corrections plus tangentes, si  $\delta$  est grand elles seront plus sécantes. Par conséquent, le paramètre  $\delta$  permet de diminuer l'influence du caractère local de l'algorithme de Newton-Raphson.

### Calcul par intégration temporelle

La seconde méthode est d'intégrer la matrice sur une période  $T$ . Notre système est soumis à des lois de contact frottant non-régulières et les champs cinématiques peuvent présenter des discontinuités. Cependant la solution peut être considérée comme continue par morceaux et la notion de Jacobienne généralisée peut s'appliquer. En effet en déterminant le statut du contact frottant à chaque instant  $t_i$  de la solution pour des conditions initiales données, il est possible de linéariser le système autour de la position au même instant. La méthode de calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle pour le système à 3 degrés de liberté est présentée ci-dessous. La matrice de monodromie doit vérifier le système linéaire à coefficients périodiques suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{AM}\dot{\mathbf{J}} + \mathbf{AKJ} &= \mathbf{J}_{\text{NL}} \\ \mathbf{J}(0) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.47)$$

où  $\mathbf{J}_{\text{NL}}$  est la matrice jacobienne généralisée du contact frottant obtenue par la linéarisation des efforts de contact et  $\mathbf{AM}$  et  $\mathbf{AK}$  sont les matrices de masse et de raideur en variables d'états exprimées ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{AM} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \\ \mathbf{AK} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.48)$$

La discrétisation temporelle de l'Équation (4.47) sur un intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$  de longueur  $h$  en utilisant la  $\theta$ -méthode modifiée donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{AM}(\mathbf{J}^{i+1} - \mathbf{J}^i) &= -\mathbf{AK}(h\theta\mathbf{J}^{i+1} + h(1-\theta)\mathbf{J}^i) + h\mathbf{J}_{\text{NL}}^{i+1} \\ (\mathbf{AM} + h\theta\mathbf{AK})\mathbf{J}^{i+1} &= (-h(1-\theta)\mathbf{AK} + \mathbf{AM})\mathbf{J}^i + h\mathbf{J}_{\text{NL}}^{i+1} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ainsi la matrice  $\mathbf{J}$  est intégrée numériquement sur la période  $T^j$  et  $\mathbf{J}(T^j)$  peut être déterminée. La matrice  $6 \times 6$   $\mathbf{J}_{\text{NL}}$  est alors calculée à l'instant  $t_{i+1}$  en utilisant un algorithme du point fixe. On rappelle que les relations de contact frottant sont non-régulières et non-linéaires. À chaque itération, la jacobienne généralisée est calculée en linéarisant les équations de contact frottant autour de la solution correspondant à la condition initiale courante. Pour cela, on suppose que le statut du contact (glissement, adhérence ou décollement) n'est pas modifié par rapport à cette solution connue car déjà intégrée numériquement. On exprime la matrice  $\mathbf{J}_{\text{NL}}$  comme suit :

$$\mathbf{J}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \partial\mathbf{R}_t \\ \partial\mathbf{R}_b \\ \partial\mathbf{R}_n \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Les matrices  $\partial\mathbf{R}_t$ ,  $\partial\mathbf{R}_b$  et  $\partial\mathbf{R}_n$  de taille  $1 \times 6$  résultent de la linéarisation des relations de contact en fonction du statut.

- Si le contact n'est pas établi, la matrice  $\mathbf{J}_{\text{NL}}$  est nulle.
- Si le contact est établi, on note  $\mathbf{Ant}$  la matrice de passage de la base locale dans la base globale en variables d'état.

$$\begin{aligned} \mathbf{Ant} &= \begin{bmatrix} \mathbf{nt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{nt} \end{bmatrix} \\ \mathbf{nt} &= [\mathbf{P}_t^T \quad \mathbf{P}_b^T \quad \mathbf{P}_n^T] \end{aligned} \quad (4.51)$$

On exprime la matrice de monodromie dans le repère local  $\mathbf{J}_{\text{loc}}$  :

$$\mathbf{J}_{\text{loc}} = \mathbf{Ant}^T \mathbf{J} \quad (4.52)$$

La condition de bilatéralité est alors imposée par le point fixe. À chaque itération de point fixe  $k$ , la matrice  $\partial\mathbf{R}_n$  est alors déterminée comme suit :

$$\partial\mathbf{R}_n^{k+1} = \partial\mathbf{R}_n^k - \rho \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & [0 & 0 & 1] \end{bmatrix} \mathbf{J}_{\text{loc}}^k + \mathbf{AB}_m \right) \quad (4.53)$$

avec,

$$\mathbf{AB}_m = \left[ \frac{1}{h} \mathbf{P}_n \quad (1-\theta)\mathbf{P}_n \right] \mathbf{J} \quad (4.54)$$

Il reste maintenant à calculer les réactions de frottement linéarisées suivant le statut du frottement.

---

**Algorithme 2** Algorithme d'intégration temporelle de la jacobienne

---

$\mathbf{J}^0 = \mathbf{I}$

Calcul de  $\mathbf{AM}_{\text{loc}} = \mathbf{Ant}^T \frac{1}{h} (\mathbf{AM} + h\theta\mathbf{AK}) \mathbf{Ant}$

Évaluation  $\rho$

**pour**  $i=1,2,\dots,N$  **effectuer**

Calcul de  $\mathbf{AE}^i = \frac{1}{h} (\mathbf{AM} - h(1-\theta)\mathbf{AK}) \mathbf{J}^{i-1}$

Calcul de  $\mathbf{Ae}^i = \mathbf{Ant}^T \mathbf{AE}^i$

Calcul de  $\mathbf{AB}_m^i$

Repérage du statut du contact frottant à l'itération  $i$

Point fixe sur  $\mathbf{J}_{\text{NL}}^i$  et  $\mathbf{J}_{\text{loc}}$  en fonction du statut du contact frottant

Actualisation :  $\mathbf{J}^i = \mathbf{Ant} \mathbf{J}_{\text{loc}}$

**fin**

---

- Si le frottement est adhérent, l'adhérence est imposée par le point fixe et les matrices  $\partial\mathbf{R}_t$  et  $\partial\mathbf{R}_b$  sont alors exprimées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \partial\mathbf{R}_t^{k+1} &= \partial\mathbf{R}_t^k - \rho \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}_{\text{loc}}^k \\ \partial\mathbf{R}_b^{k+1} &= \partial\mathbf{R}_b^k - \rho \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}_{\text{loc}}^k \end{aligned} \quad (4.55)$$

- Si on considère maintenant un frottement glissant. Suite au calcul de la solution correspondant à la condition initiale courante  $\mathbf{Z}_0^j$  les valeurs des déplacements, des vitesses et des réactions de contact frottant sont connues pour chaque itération  $i$ . On note  $w_t = V - \mathbf{P}_t \dot{\mathbf{U}}$ , et  $w_b = -\mathbf{P}_b \dot{\mathbf{U}}$ , on a alors le vecteur de vitesse relatif  $\mathbf{w}$  sous la forme :

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} w_t \\ w_b \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

La relation de frottement donnée sous forme de projection sur le cône de Coulomb lorsque le frottement est glissant est :

$$\begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} = \mu R_n \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \quad (4.57)$$

La linéarisation de l'équation précédente donne alors :

$$\partial \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} = \mu \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \partial R_n + \mu R_n \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \left( \mathbf{I}_2 - \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \otimes \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \right) \partial \mathbf{w} \quad (4.58)$$

$$\text{Avec } \partial \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} -\partial \dot{\mathbf{U}}_t \\ -\partial \dot{\mathbf{U}}_b \end{Bmatrix}$$

On exprime donc les matrices  $\partial\mathbf{R}_t$  et  $\partial\mathbf{R}_b$  de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \partial\mathbf{R}_t \\ \partial\mathbf{R}_b \end{bmatrix}^{k+1} = \mu \partial\mathbf{R}_n^{k+1} \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} + \mu R_n \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \left( \mathbf{I}_2 - \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \otimes \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \right) \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}_{\text{loc}}^k \\ -\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}_{\text{loc}}^k \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Le paramètre  $\rho$  est égal à la valeur choisie pour l'intégration de l'équation du mouvement. Le calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle est alors synthétisé par l'Algorithme 2.

Une comparaison des résultats obtenus en utilisant les deux méthodes de calcul de la matrice de monodromie est effectuée en Section 4.7.3. Les avantages et inconvénients de chaque méthode y sont aussi discutés.

### 4.6.3 Proposition d'initialisation de la méthode de tir

Comme déjà mentionné dans l'état de l'art, un des verrous de l'utilisation de la méthode de tir est son initialisation (i.e. définition des conditions initiales du problème). En effet les corrections sur les conditions initiales et la période sont calculées avec un algorithme de Newton-Raphson. L'algorithme étant à caractère local, il se peut que la méthode ne converge pas lorsque son initialisation est trop éloignée de la solution recherchée. C'est pourquoi l'une des contributions originales de cette thèse est l'introduction de conditions initiales pertinentes afin d'améliorer l'efficacité de la méthode de tir proposée.

Considérant un point de vue énergétique, le processus d'initialisation proposé est dérivé de l'analyse du comportement auto-entretenu qui se produit lors de l'établissement des vibrations stationnaires. En effet, pour un système soumis à des instabilités de couplage de modes, les amplitudes vibratoires augmentent jusqu'à l'apparition de non-linéarités (i.e. la génération de cycles contact/décollement ou adhérence/glisement dans notre cas). Ces non-linéarités induisent une saturation des réactions de contact frottant et une diminution du ratio de la puissance moyenne injectée due aux réactions de contact, comparé au cas linéaire. Par ailleurs, en première approche on peut considérer que le ratio de la puissance dissipée par amortissement reste presque constant. Ce phénomène physique est responsable de la stabilisation de la solution et de la convergence vers une réponse non-linéaire stationnaire du système mécanique frottant.

À partir de ce constat, l'approche proposée pour l'initialisation de la méthode de tir est décomposée en deux étapes. Premièrement un simple choix linéaire pour approximer la solution auto-entretenu stationnaire du système est proposé. Deuxièmement le calcul d'un bilan de puissance du système est développé en considérant la saturation non-linéaire des réactions de contact frottant. Cela mène à l'estimation des conditions initiales pour le calcul de la méthode de tir. Ce processus proposé est maintenant développé et discuté en détail.

Premièrement, la solution (qui est composée du déplacement  $\mathbf{U}(t)$  et de la vitesse  $\dot{\mathbf{U}}(t)$ ) est approximée en supposant qu'elle est périodique et gouvernée par le mode instable (qui est préalablement calculé via l'analyse de stabilité, voir Chapitre 3 pour plus de détails) :

$$\mathbf{U}(t) = q\Re\left(\Phi e^{i\Im(\lambda)t}\right) \quad (4.60)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = q\Re\left(i\Im(\lambda)\Phi e^{i\Im(\lambda)t}\right) \quad (4.61)$$

où  $\lambda$  est la valeur propre du mode instable,  $\Phi$  le vecteur propre associé, et  $q$  l'amplitude modale.  $\Re(\cdot)$  et  $\Im(\cdot)$  dénotent les parties réelle et imaginaire des variables.

La valeur de  $q$  la plus pertinente (qui est notée  $q_{\text{est}}$  par la suite) est recherchée afin de définir l'expression suivante comme conditions initiales de la méthode de tir :

$$\mathbf{z}_0^0 = \begin{Bmatrix} q_{\text{est}}\Re(\Phi) + \mathbf{U}_{\text{eq}} \\ q_{\text{est}}\Re(\lambda\Phi) \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

$$T^0 = 2\pi/\Im(\lambda) \quad (4.63)$$

où  $\mathbf{U}_{\text{eq}}$  correspond à l'équilibre quasi-statique glissant du système non-linéaire préalablement calculé lors de l'analyse de stabilité (voir Chapitre 3 pour plus de détails).

On remarque que les Équations (4.60) et (4.61) correspondent à une partie purement dynamique de la vibration auto-entrenue approximée du système non-linéaire, en considérant seulement la participation du mode instable. La formulation donnée par l'Équation (4.62) suppose aussi que l'équilibre ne change pas durant les vibrations transitoires initiales du système non-linéaire. Cette hypothèse est certainement restrictive et peut ne pas être vérifiée (cf. [35] par exemple). Cependant, dans un premier temps nous recherchons seulement une approximation du système qui nous permet d'améliorer l'efficacité de la méthode de tir via l'introduction de conditions initiales pertinentes, la solution non-linéaire finale recherchée étant, quand à elle, déterminée par la méthode de tir.

La deuxième étape du processus proposé concerne le calcul de la valeur  $q_{\text{est}}$ . Ainsi, nous proposons d'établir le bilan de puissance moyen sur une période  $T$  du régime stationnaire. On rappelle que le bilan de puissance instantané du système peut s'écrire :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P_C = P_R + P_F \quad (4.64)$$

où  $\frac{\partial E}{\partial t}$  définit la variation de l'énergie mécanique,  $P_C$  la puissance dissipée par amortissement,  $P_R$  la puissance injectée ou dissipée par les réactions de contact et  $P_F$  la puissance injectée par la force extérieure. Considérant un régime stationnaire périodique, la variation de l'énergie mécanique est nulle. Considérant ensuite le bilan de puissance sur une période  $T$ , la puissance moyenne liée aux contributions quasi-statiques comme la force extérieure est nulle. Ainsi, si l'on s'intéresse au bilan dynamique moyen des perturbations de l'équilibre sur une période et normalisant les puissances par l'énergie mécanique moyenne  $\bar{E}$ , le bilan de puissance peut être exprimé en fonction du coefficient de puissance moyen  $\bar{\tau}_C$  dissipée par amortissement et du coefficient de puissance moyen  $\bar{\tau}_R$  injectée par les réactions de contact frottant (cf Section 4.3.3) :

$$\bar{\tau}_C = \bar{\tau}_R \quad (4.65)$$

avec

$$\bar{\tau}_C = \frac{\bar{P}_C}{\bar{E}} \quad (4.66)$$

$$\bar{\tau}_R = \frac{\bar{P}_R}{\bar{E}} \quad (4.67)$$

On note alors  $\mathbf{R}_{\text{eq}}$  les réactions de contact frottant de l'équilibre quasi-statique  $\mathbf{U}_{\text{eq}}$  (cf. Chapitre 3 pour plus de détails) et  $\mathbf{R}$  le vecteur des forces de contact frottant (expression donnée par l'Équation (2.6)). L'indice  $-$  désigne une quantité moyennée sur une période.

Comme attendu, utiliser une approximation linéaire des déplacements et vitesses, permet d'écrire l'expression analytique du coefficient de puissance moyen dissipée par amortissement. On rappelle qu'il est indépendant de l'amplitude modale  $q$ .

Le coefficient de puissance moyen dû aux efforts de contact frottant  $\bar{\tau}_R$  dépend quant à lui de l'amplitude modale  $q$  et est calculé numériquement en saturant les réactions correspondant au problème de contact glissant linéarisé. Supposant un contact glissant, la partie dynamique des réactions de contact frottant est linéairement liée aux déplacements par  $\mathbf{P}_n \mathbf{K} \mathbf{U}$  pour ce modèle à trois degrés de liberté. Une approximation des réactions saturées de contact frottant est donnée par :

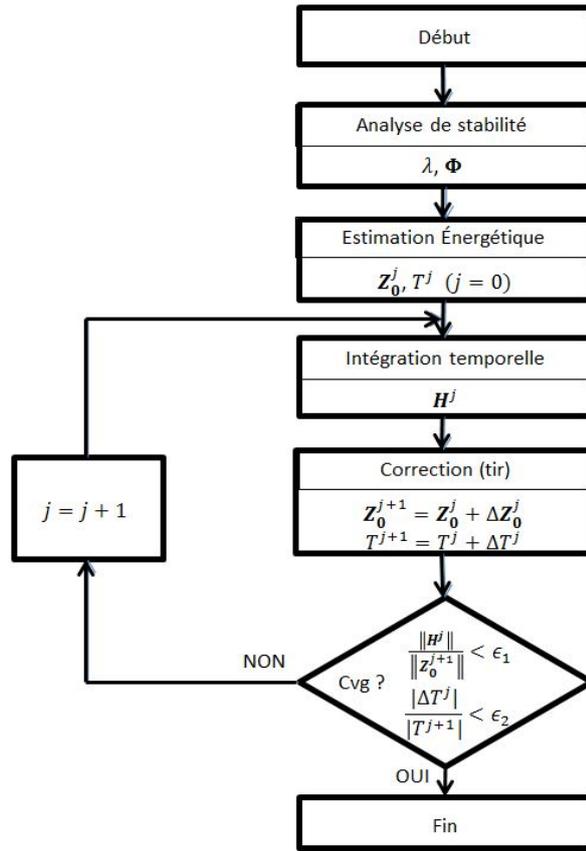


FIGURE 4.24 – Résumé de la méthode de tir avec initialisation appropriée

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_n &= \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_{neq} + (\mathbf{P}_n \mathbf{K} \mathbf{U})) \\
 \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_t \\ \mathbf{R}_b \end{Bmatrix} &= -\mu \mathbf{R}_n \frac{\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_t - \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{U}}_b \end{Bmatrix}}{\left\| \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_t - \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{U}}_b \end{Bmatrix} \right\|} \text{ si } \begin{Bmatrix} \mathbf{V} - \dot{\mathbf{U}}_t \\ -\dot{\mathbf{U}}_b \end{Bmatrix} \neq \mathbf{0}, \mathbf{0} \text{ sinon}
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Nous rappelons que le vecteur des forces de contact frottant est donné par  $\mathbf{R} = \mathbf{P}_t^T \mathbf{R}_t + \mathbf{P}_b^T \mathbf{R}_b + \mathbf{P}_n^T \mathbf{R}_n$ .

Finalement, la valeur  $q_{\text{est}}$  vérifiant la relation (4.65) est calculée numériquement et la méthode de tir est initialisée en utilisant les Équations (4.62) et (4.63). L'approche globale est résumée par la Figure 4.24.

## 4.7 Résultats numériques

Cette section concernant les résultats numériques est décomposée en deux parties. Dans une première partie, le calcul des vibrations auto-entretenues non-linéaires est présenté. Plus spécifiquement, l'efficacité de la méthode de tir est illustrée. Tous les résultats proposés sont analysés et comparés aux calculs de référence effectués par intégration temporelle présentés dans la Section 4.5. Dans une seconde partie, des résultats obtenus avec les différentes méthodes de calcul de la matrice de monodromie exposées en Section 4.6.2 sont présentés et discutés.

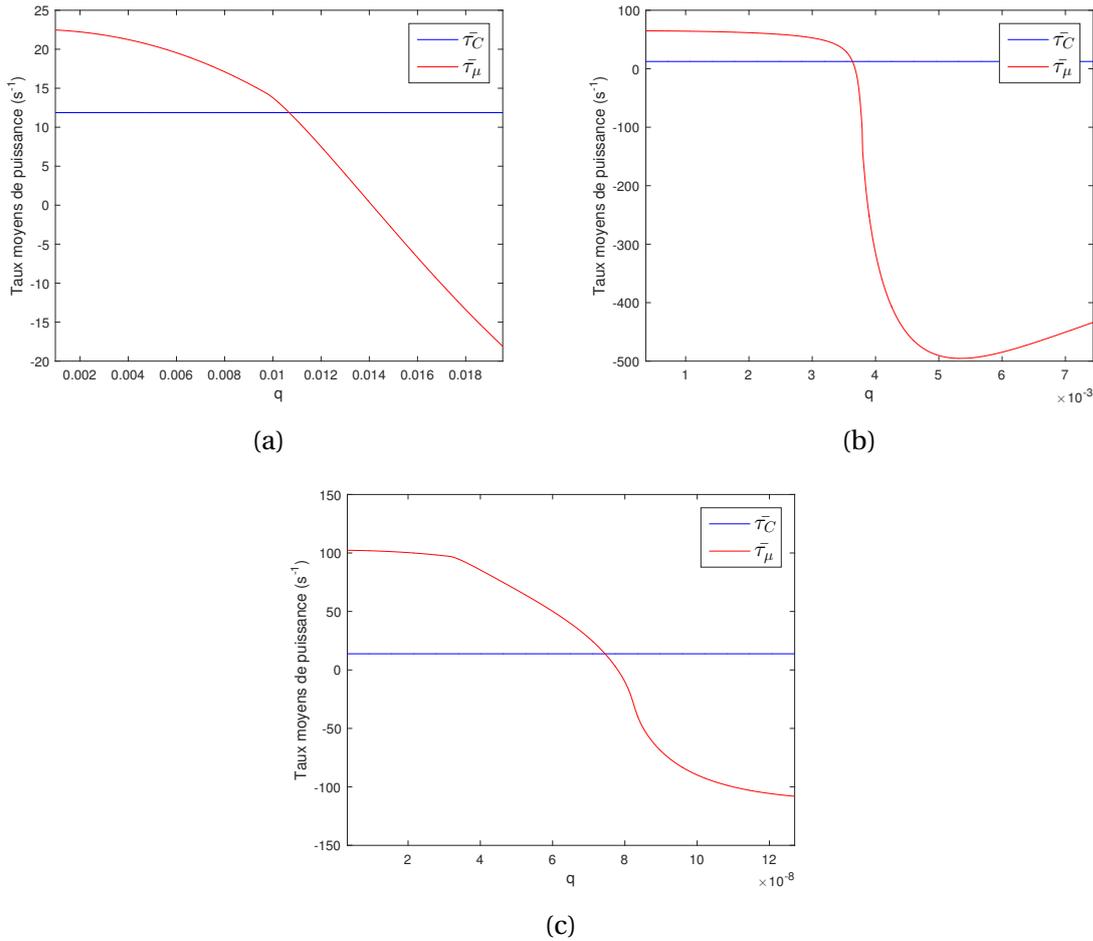


FIGURE 4.25 – Évolution des taux moyens de puissance en fonction de l'amplitude modale pour (a) le Cas 1, (b) le Cas 2 et (c) le Cas 3

Concernant la méthode de tir, les deux valeurs  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  des critères de convergence (cf. Équations (4.42) et (4.43)) sont choisies égales à  $10^{-3}$ . Le calcul de la matrice de monodromie par différences finies est préféré au calcul par intégration. En effet comme expliqué dans la Section 4.6.2, cette méthode permet de diminuer le caractère local de l'algorithme de Newton-Raphson en modifiant le paramètre  $\delta$ . Ce paramètre est fixé par la suite à  $10^{-9}$ .

#### 4.7.1 Résultat de la démarche numérique développée sur les cas de référence

On discute ici du processus d'initialisation de la méthode de tir. La Figure 4.25 représente les variations des taux moyens de puissance pour chacun des cas de référence. On constate bien que pour chaque cas le taux moyen de puissance dissipée par amortissement reste constant alors que celui lié à la puissance injectée par le frottement évolue. Ainsi la Figure 4.25 permet d'identifier la valeur de  $q_{\text{est}}$  nécessaire à l'initialisation présentée en Section 4.6.3 (croisement des courbes). Pour le Cas 1 cette valeur est égale à 0.0107, 0.0036 pour le Cas 2 et  $7.4567 \times 10^{-8}$  pour le Cas 3. Ces valeurs sont utilisées, par la suite, pour initialiser le processus de tir afin de calculer le régime stationnaire.

Pour chaque cas, les résultats obtenus par la méthode de tir proposée sont maintenant comparés avec ceux obtenus après une intégration temporelle. Tous les résultats sont pré-

Cas	Valeurs propres					
Cas 1	1.00	0.87	$0.14 + 0.26i$	$0.14 - 0.26i$	$2.06 \times 10^{-7}$	$-3.77 \times 10^{-9}$
Cas 2	1.00	-0.13	$7.14 \times 10^{-6}$	$-3.94 \times 10^{-9}$	$-4.15 \times 10^{-10}$	$-8.35 \times 10^{-14}$

TABEAU 4.7 – Valeurs propres de la matrice de monodromie pour les Cas 1 et 2

sentés en traçant les diagrammes de phase des solutions. L'initialisation de la méthode de tir effectuée est alors représentée par une étoile bleue sur les diagrammes de phase. Les courbes rouges correspondent aux résultats de l'intégration temporelle directe et les bleues correspondent aux résultats de la méthode de tir proposée.

### Cycles limites stables

Les Figures 4.26 et 4.27 représentent les diagrammes de phase selon les trois directions (i.e.  $x$ ,  $y$  et  $z$ ) pour les premier et second cas, respectivement. On montre clairement que les résultats basés sur la méthode de tir proposée sont en parfait accord avec ceux obtenus par l'intégration temporelle directe. De plus, l'initialisation utilisée par la méthode de tir est très proche des cycles limites finaux estimés. Cela démontre la pertinence de l'utilisation des critères énergétiques proposés en Section 4.6.3 comme premier indicateur des amplitudes des cycles limites et plus précisément comme initialisation de la méthode de tir. Pour information, ne pas utiliser ce point d'initialisation peut mener à des difficultés d'estimation des cycles limites via la méthode de tir. Cela illustre l'efficacité de la méthode non-linéaire proposée. On peut aussi observer que les cycles limites obtenus peuvent être très complexes, avec des comportements non-linéaires prononcés, tels que, par exemple, des discontinuités de choc des cycles limites observées sur les Figures 4.26(a) et 4.26(b). Des phénomènes de adhérence/glisement sont aussi reproduits avec une bonne précision pour le second cas (cf. Figures 4.27(a) et (b)). Le Tableau 4.7 recense les différentes valeurs propres de la matrice de monodromie pour les Cas 1 et 2. Pour ces cas, le module des valeurs propres des matrices de monodromie est plus petit que 1 ce qui signifie que les réponses auto-entrenues stationnaires du système mécanique sont stables.

### Cycles limites instables

On considère maintenant le Cas 3. Les Figures 4.28 représentent les cycles limites obtenus par la méthode de tir comparés aux diagrammes de phase obtenus par l'intégration temporelle directe. Les évolutions temporelles du déplacement et de la vitesse verticaux obtenues par intégration directe sont aussi montrés sur les Figures 4.29. On peut distinguer deux étapes. Dans la première étape (avant  $t = 0.15$  s environ), la solution diverge de l'équilibre et semble se stabiliser proche du cycle limite périodique obtenu par la méthode de tir. Dans une seconde étape (à partir de  $t = 0.15$  s environ) une augmentation des oscillations autour du cycle limite est observée avec une stabilisation définitive sur un nouveau cycle limite avec une période doublée comparé au premier cycle. Cela peut s'expliquer par le fait que le cycle limite calculé avec la méthode de tir est instable, ce qui est confirmé par l'étude des multiplicateurs de Floquet de la matrice de monodromie obtenue par la méthode de tir. De plus, un phénomène de bifurcation de dédoublement de période peut être détecté. En effet, en variant le paramètre de bifurcation  $\gamma$  (i.e. la direction de la vitesse de glissement) de  $-90^\circ$  à  $0^\circ$ , un multiplicateur de Floquet croise le cercle unitaire par -1 pour  $\gamma$  égale à  $-70^\circ$  et  $-48^\circ$ , ce qui traduit une bifurcation de doublement de période du cycle limite pour  $\gamma = [-70^\circ; -48^\circ]$  comme établi par exemple dans [76]. Une

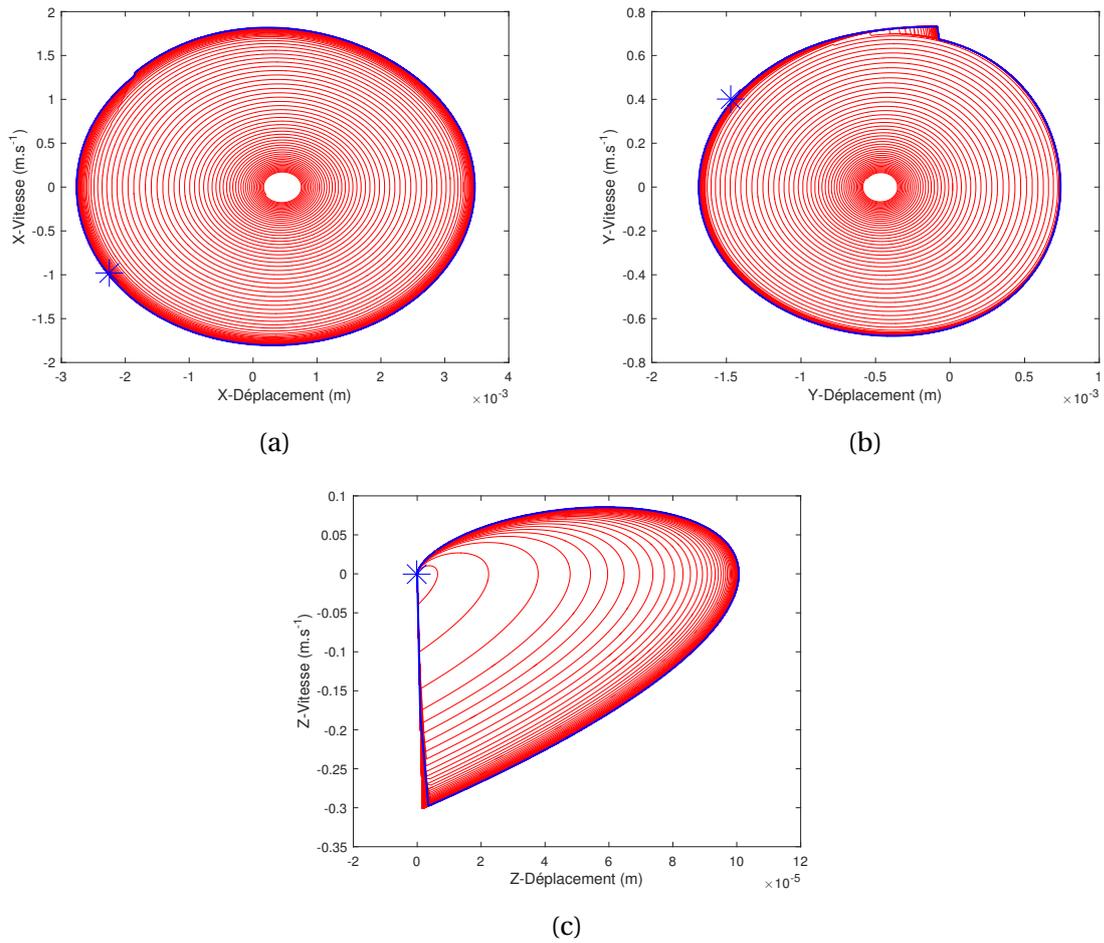


FIGURE 4.26 – Diagrammes de phase obtenus par l'intégration temporelle directe (rouge) et cycles limites donnés par la méthode de tir (bleu) dans les directions  $x$  (a),  $y$  (b) et  $z$  (c) pour le cas 1

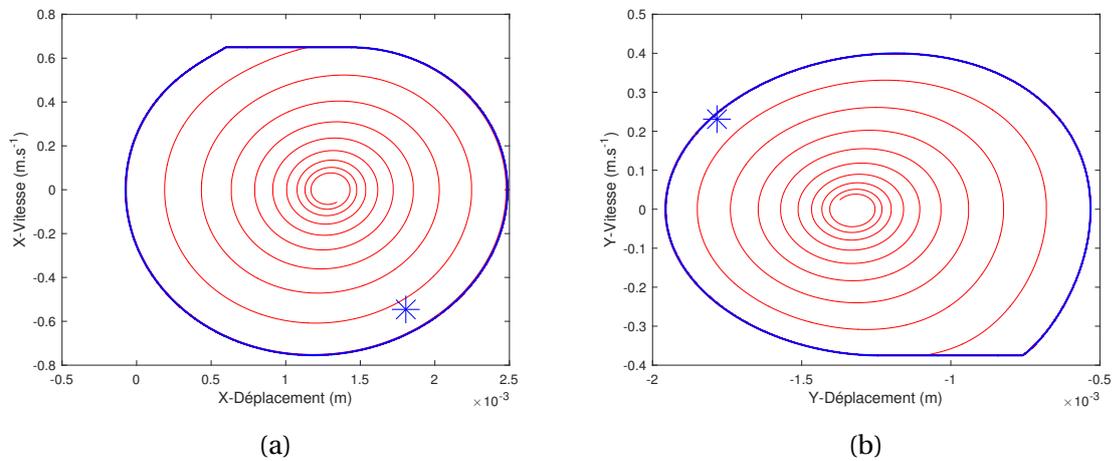


FIGURE 4.27 – Diagrammes de phase obtenus par l'intégration temporelle directe (rouge) et cycles limites donnés par la méthode de tir (bleu) dans les directions  $x$  (a),  $y$  (b) et  $z$  (c) pour le cas 2

Cas	Valeurs propres					
Instable	-1.07	0.99	0.49	0.08	$7.88 \times 10^{-9}$	$-1.61 \times 10^{-6}$
Stable	1.00	0.70	0.27	-0.05	$2.65 \times 10^{-9}$	$-2.47 \times 10^{-12}$

TABLEAU 4.8 – Valeurs propres de la matrice de monodromie pour le Cas 3 instable et stable

bifurcation de doublement de période en dynamique des systèmes est une bifurcation dans laquelle le système change pour un nouveau comportement avec une période doublée comparée au comportement initial. Ainsi, afin de trouver ce nouveau cycle limite, la méthode de tir est utilisée en considérant la période initiale  $T^0 = \frac{4\pi}{\Im(\lambda)}$  avec  $\lambda$  la valeur propre du mode instable. Cela mène au calcul d'une solution périodique stable (les valeurs propres de la matrice de monodromie dans le cas instable et stable sont indiquées dans le Tableau 4.8) avec les diagrammes de phase présentés en Figures 4.30. Ces nouveaux cycles limites sont en parfait accord avec les cycles limites de référence calculés par l'intégration temporelle directe.

### Conclusions sur les performances de la méthode

Tous ces résultats mènent à plusieurs commentaires :

- Premièrement la méthode de tir permet de trouver un cycle limite instable, ce qui n'est pas possible avec l'utilisation de l'intégration temporelle directe.
- La méthode de tir ne donnera pas nécessairement le cycle limite obtenu par l'intégration temporelle si la période initialement choisie pour le calcul n'est pas proche de la période du cycle limite stable. Elle trouve généralement le cycle limite (qui peut être stable ou instable) le plus proche des conditions initiales données alors que le schéma d'intégration direct obtient seulement le cycle limite stable.
- L'utilisation de la théorie de Floquet qui teste la stabilité du cycle limite solution peut donner des informations concernant le nouveau comportement du système original.

Un autre point intéressant est l'étude des périodes des cycles limites. Pour chaque cas, on remarque que la fréquence fondamentale des oscillations auto-entretenues stationnaires (calculées par l'intégration temporelle et la méthode de tir) est légèrement différente de la fréquence du mode instable issue de l'analyse de stabilité comme indiqué dans le Tableau 4.9. Ces résultats mettent en évidence l'importance de mener une analyse non-linéaire pas seulement pour estimer les vibrations auto-entretenues mais aussi pour prévoir avec précision la valeur de la fréquence fondamentale des vibrations stationnaires durant les événements crissants. Cela démontre aussi la nécessité de considérer la fréquence des vibrations auto-entretenues du système comme une inconnue. Nous rappelons que l'initialisation de la méthode de tir en fréquence correspond à la fréquence du mode instable.

Finalement, la convergence de la méthode de tir proposée est discutée. Dans ce chapitre, le calcul de la réponse non-linéaire stationnaire est effectué en considérant les valeurs des critères de convergence suivantes :  $\epsilon_1 = 10^{-3}$  et  $\epsilon_2 = 10^{-3}$ . Seulement 3 itérations sont nécessaires dans les trois cas, sauf dans le cas du cycle limite correspondant à la période double. Dans ce cas précis, les conditions initiales sont moins adaptées et l'algorithme converge en 7 itérations. Ceci peut être expliqué par la part importante de la puissance dissipée au choc dans l'obtention du régime stationnaire. Cette contribution

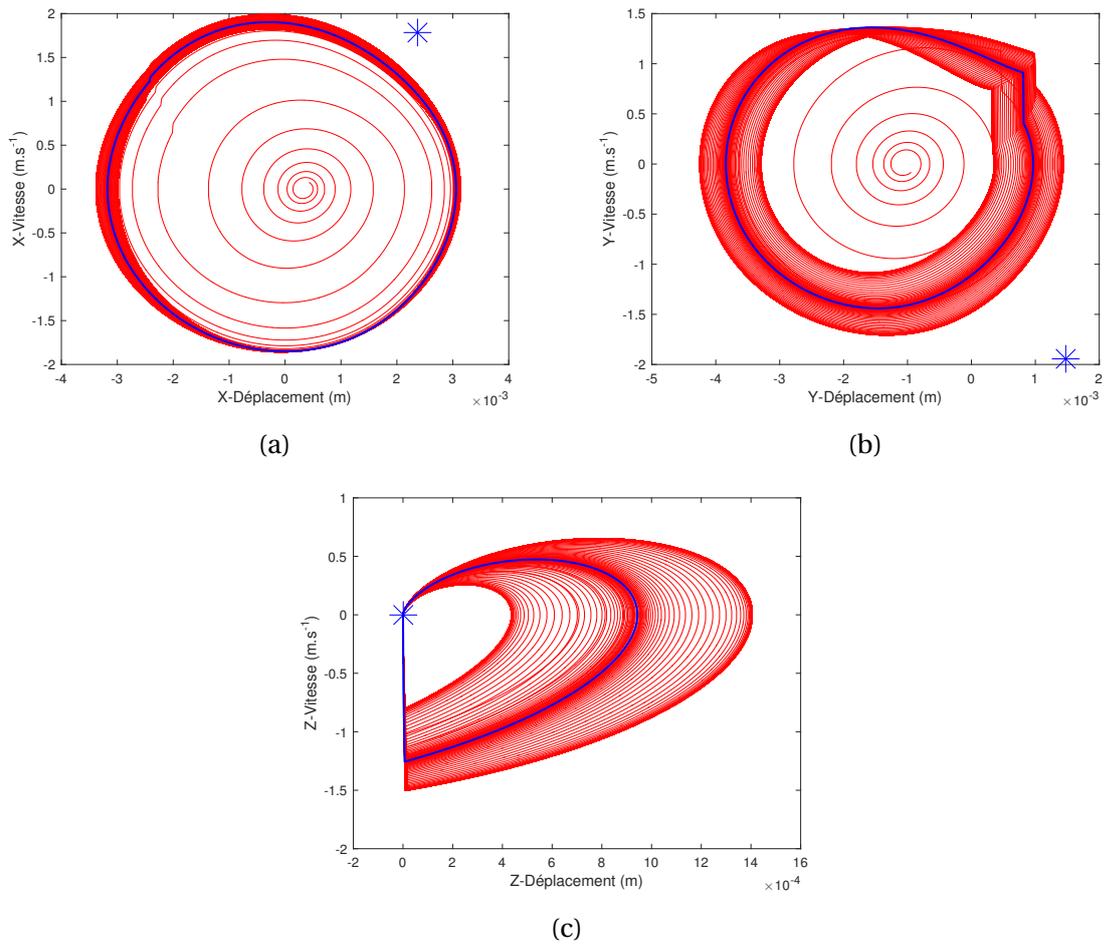


FIGURE 4.28 – Diagrammes de phase obtenus par l'intégration temporelle directe (rouge) et cycles limites instables donnés par la méthode de tir (bleu) dans les directions  $x$  (a),  $y$  (b) et  $z$  (c) pour le cas 3

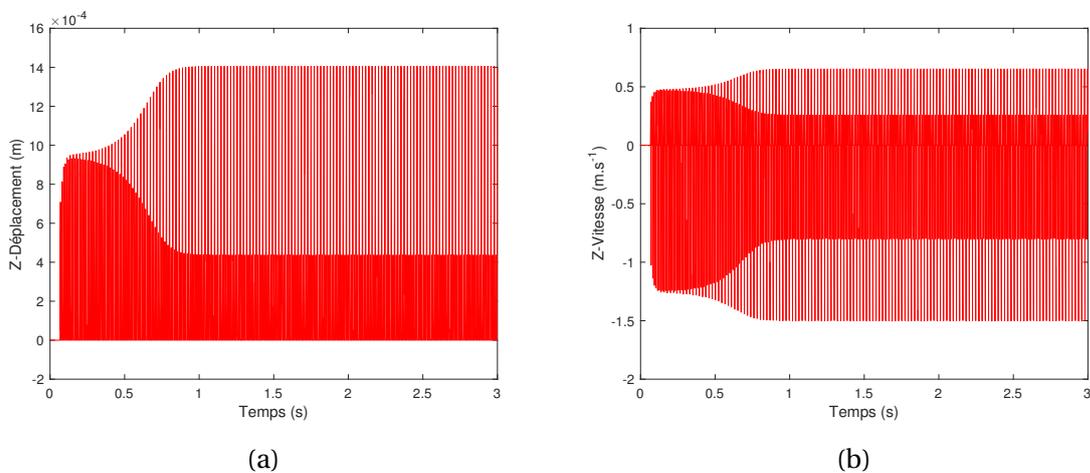


FIGURE 4.29 – Évolutions temporelles (a) des déplacements et (b) de la vitesse obtenus par intégration temporelle directe selon la direction  $z$  pour le cas 3

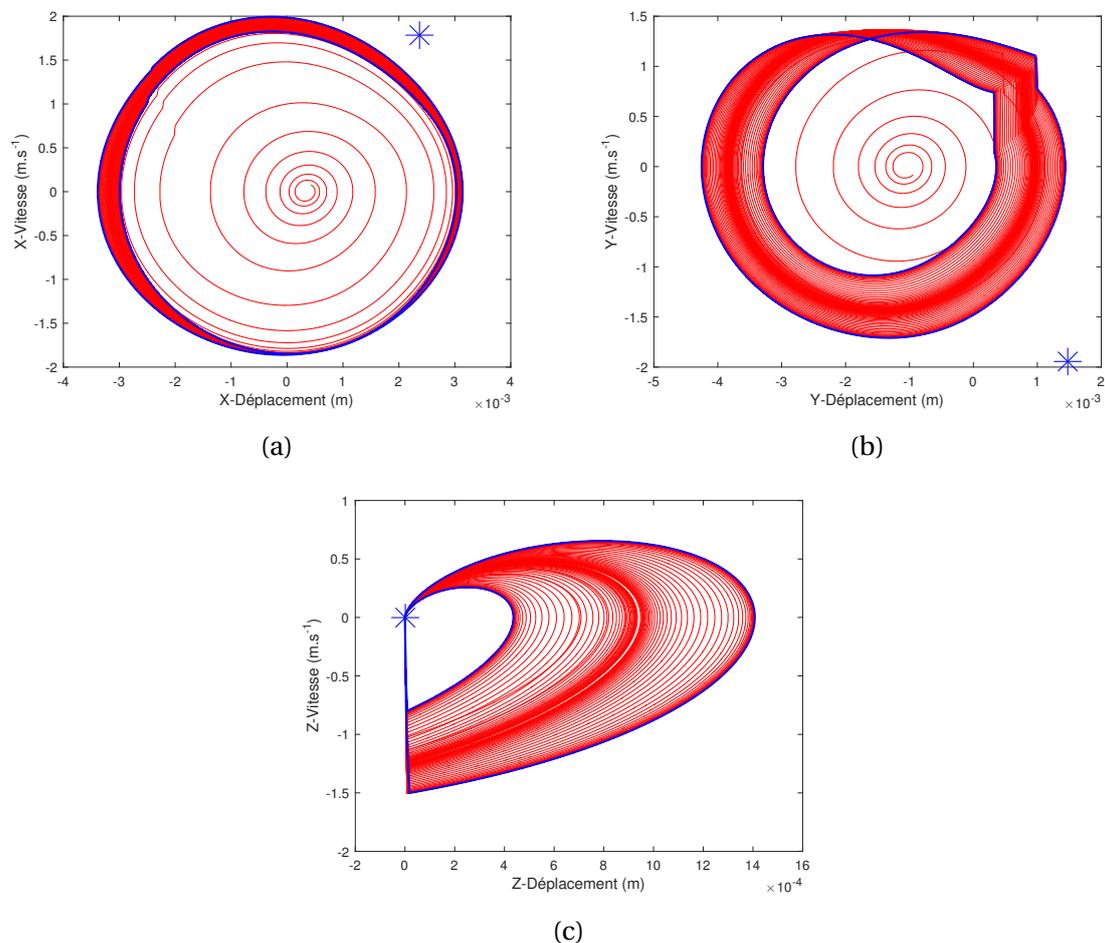


FIGURE 4.30 – Diagrammes de phase obtenus par l'intégration temporelle directe (rouge) et cycles limites stables donnés par la méthode de tir (bleu) dans les directions  $x$  (a),  $y$  (b) et  $z$  (c) pour le cas 3

	Analyse de stabilité	Intégration temporelle	Méthode de tir
Cas 1 : $(\mu, \gamma, V) = (0.2244, -30^\circ, 3 \text{ m.s}^{-1})$	91.88 Hz	91.96 Hz	91.95 Hz
Cas 2 : $(\mu, \gamma, V) = (0.75, -30^\circ, 0.75 \text{ m.s}^{-1})$	93.40 Hz	90.84 Hz	90.79 Hz
Cas 3 : $(\mu, \gamma, V) = (0.40, -60^\circ, 3 \text{ m.s}^{-1})$	94.94 Hz	46.38 Hz	46.93 Hz

TABEAU 4.9 – Fréquence des vibrations auto-entretenues issue de l'analyse de stabilité (à partir de la valeur propre du mode instable), de l'intégration temporelle directe et de la méthode de tir

Initialisation	$q = 0.7 \times q_{\text{est}}$	$q = q_{\text{est}}$	$q = 1.3 \times q_{\text{est}}$
Nombre d'itération	8	3	10

TABLEAU 4.10 – Nombre d'itérations nécessaire à la convergence selon les initialisations

n'est effectivement pas intégrée lors du processus d'initialisation de la méthode de tir ce qui peut expliquer l'augmentation du nombre d'itérations nécessaire à la convergence.

### 4.7.2 Influence des conditions initiales

On a vu précédemment l'influence des conditions initiales sur la convergence de la méthode de tir. Si elles sont bien adaptées, les conditions initiales permettent une convergence de la méthode de tir en très peu d'itérations. Pour montrer que les conditions établies par l'estimation énergétique sont optimales, la méthode de tir est appliquée au cas 1 pour différentes valeurs de  $q$ , l'amplitude modale de l'initialisation :  $q = 0.7 \times q_{\text{est}}$ ,  $q = q_{\text{est}}$  et  $q = 1.3 \times q_{\text{est}}$ . Pour chacune des initialisations, la méthode de tir estime correctement le régime stationnaire. Cependant le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de la méthode de tir diffère suivant l'amplitude modale utilisée. Le Tableau 4.10 réfère le nombre d'itérations pour chaque initialisation. On remarque que l'initialisation  $q = q_{\text{est}}$  permet d'obtenir le régime stationnaire avec un minimum d'itérations, la convergence de la méthode de tir dépend énormément de son initialisation et cela est dû au caractère local de l'algorithme de Newton-Raphson.

### 4.7.3 Comparaison des méthodes de calcul de la matrice de monodromie

Nous étudions l'influence de la méthode de calcul de la matrice de monodromie. Pour ce faire nous comparons les deux résultats obtenus entre eux en utilisant le Cas 1. Dans les deux calculs la méthode de tir est initialisée en utilisant les conditions initiales appropriées déterminées en Section 4.6.3. Les Figures 4.31 représentent les diagrammes de phase selon les trois directions. La couleur bleu est associée à la méthode de calcul par différences finies et rouge à l'intégration temporelle de la matrice de monodromie. Sur les trois figures les courbes sont identiques et dans les deux cas la méthode de tir converge en trois itérations. La méthode de calcul de la matrice de monodromie par intégration temporelle permet d'obtenir la matrice exacte. Ainsi l'évolution des corrections est beaucoup plus tangente. Cette propriété peut alors être perçue comme un défaut lorsqu'un algorithme de Newton-Raphson est utilisé. En effet si les conditions initiales sont éloignées de la solution finale alors utiliser une matrice de monodromie exacte peut augmenter le nombre d'itérations permettant la convergence de la matrice de tir. Contrairement à l'intégration de la matrice de monodromie, la méthode d'estimation de cette matrice par différences finies est pilotée par le paramètre  $\delta$ . Ainsi lorsque  $\delta$  est suffisamment petit l'approximation apportera des corrections plus tangentes, si  $\delta$  est grand elles seront plus sécantes. Par conséquent, le paramètre  $\delta$  permet de diminuer l'influence du caractère local de l'algorithme de Newton-Raphson. Le surcoût de calcul engendré par l'utilisation de cette méthode de calcul de la matrice de monodromie peut être réduit en remarquant que les calculs supplémentaires sont dissociés les uns des autres. Une mise en parallèle des calculs peut alors être effectuée, réduisant ainsi le coût de calcul d'un facteur égal au nombre de processeurs utilisés.

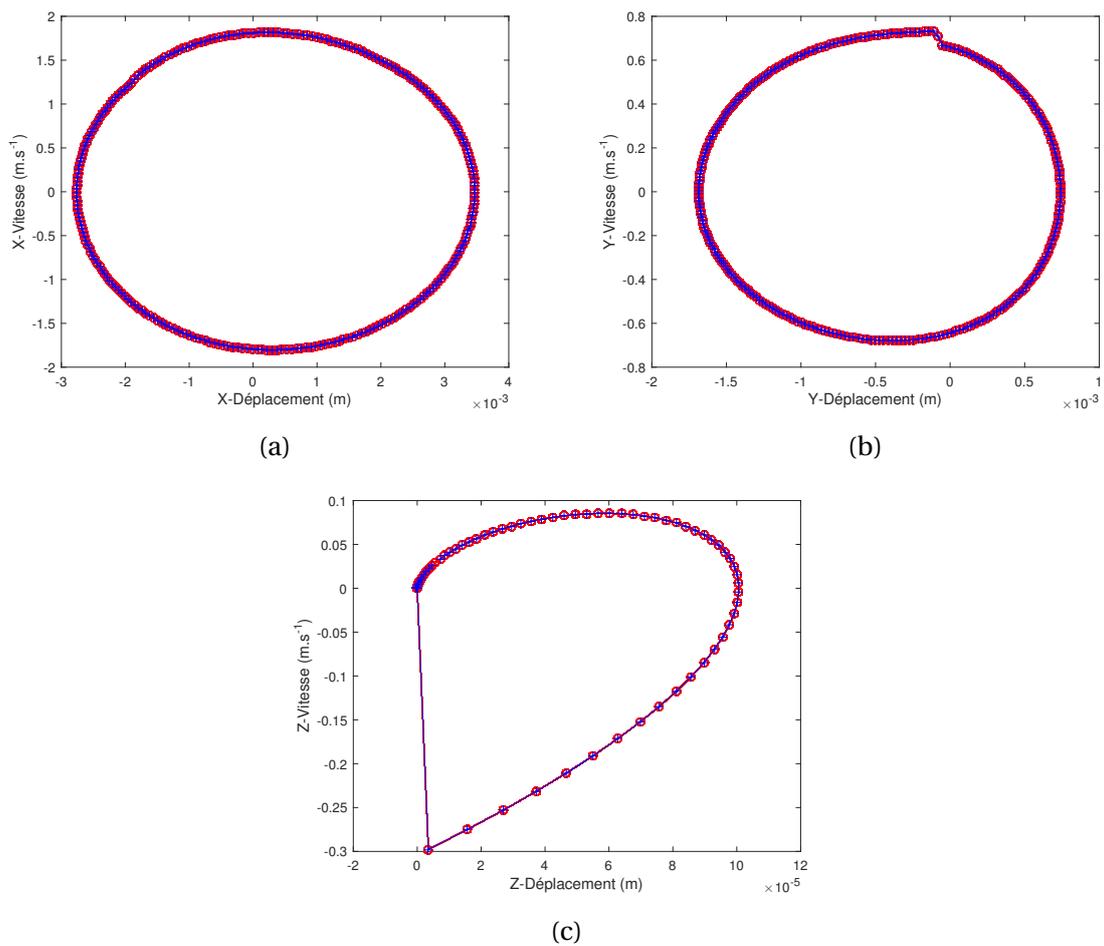


FIGURE 4.31 – Comparasion des cycles limites obtenus par l'intégration temporelle de la matrice de monodromie (rouge) et calcul de la matrice de monodromie par différences finies (bleu) dans les directions  $x$  (a),  $y$  (b) et  $z$  (c) pour le cas 1

## 4.8 Conclusion

Dans un premier temps, le modèle étudié (masse-ressort amorti à trois degrés de liberté et soumis au frottement plan) ainsi que l'algorithme permettant l'intégration temporelle directe sont présentés. Un développement d'outils basés sur l'expression des différentes puissances auxquelles est soumis le modèle étudié est effectué afin de vérifier la validité de l'algorithme et de déterminer l'influence du pas de temps et du critère de convergence du point fixe sur les résultats obtenus. Cette algorithme est ensuite utilisé pour calculer l'évolution transitoire et stationnaire pour trois configurations différentes du système. Ces évolutions sont ensuite analysées : dans deux cas le système est soumis à des phénomènes non-linéaires de type décollement/glissement, dans le troisième cas le phénomène non-linéaire est de type adhérence/glissement. Cette analyse de l'évolution temporelle de ces trois cas permet de mettre en évidence les phénomènes à l'origine de l'établissement du régime stationnaire : il semble que les phénomènes non-linéaires de contact frottant (décollement/choc et adhérence/glissement) saturent les réactions de contact frottant provoquant alors la diminution de la puissance moyenne injectée par ces réactions ou l'augmentation de la puissance moyenne dissipée par les chocs jusqu'à l'égalité avec la puissance moyenne dissipée par amortissement qui reste constante. Ainsi cet équilibrage de puissances est à l'origine du régime stationnaire pour un système soumis à des vibrations auto-entretenues.

Dans un second temps, une méthode de tir avec une initialisation spécifique basée sur un critère énergétique est proposée afin de calculer les vibrations auto-entretenues non-linéaires d'un système mécanique soumis à des vibrations induites par frottement. L'efficacité de la méthode proposée est testée sur le modèle étudié. Les résultats obtenus avec la méthode de tir corrént parfaitement avec ceux résultant de l'intégration temporelle directe. Cela démontre le potentiel de la méthode de tir adaptée proposée pour prévoir les vibrations auto-entretenues lors d'événements crissants. La stabilité de la réponse vibratoire non-linéaire stationnaire peut aussi être déterminée en analysant les valeurs propres complexes de la matrice de monodromie qui est calculée lors du processus de tir. Cette analyse se révèle utile pour identifier les solutions instables et les bifurcations spécifiques comme le phénomène de doublement de période illustré dans ce chapitre. L'un des avantages de la méthode développée est que cette dernière se base sur une intégration temporelle du système non-linéaire sur une période et ne nécessite pas par conséquent d'hypothèse ou d'approximation par rapport à la solution non-linéaire recherchée. La limitation majeure actuelle réside dans le fait que seules les réponses comportant une seule fréquence fondamentale sont considérées. Une solution à la problématique d'utilisation de la méthode de tir pour un modèle constitué d'un grand nombre de degrés de liberté (calcul de la matrice de monodromie) est proposée dans le chapitre suivant. Le traitement des réponses quasi-périodiques (i.e. réponses composées de plusieurs fréquences incommensurables entre elles) n'est pas proposé dans le cadre de ces travaux de thèse.

# Chapitre 5

## Application à un modèle éléments finis simplifié de frein à disque ferroviaire

### Sommaire

---

<b>5.1 Introduction</b> . . . . .	<b>128</b>
<b>5.2 Formulation éléments finis du problème et description des modèles de frein</b> . . . . .	<b>128</b>
5.2.1 Formulation variationnelle . . . . .	129
5.2.2 Discrétisation par éléments finis . . . . .	130
5.2.3 Description du modèle de frein . . . . .	131
<b>5.3 Analyse de stabilité</b> . . . . .	<b>138</b>
5.3.1 Calcul de l'équilibre glissant . . . . .	138
5.3.2 Analyse de stabilité de l'équilibre . . . . .	140
5.3.3 Résultats . . . . .	142
<b>5.4 Analyse non-linéaire</b> . . . . .	<b>148</b>
5.4.1 Méthode numérique pour l'intégration temporelle . . . . .	148
5.4.2 Résultats . . . . .	150
<b>5.5 Méthode de tir appliquée à un modèle éléments finis</b> . . . . .	<b>166</b>
5.5.1 Adaptation de la méthode de tir aux modèles industriels : réduction de l'espace des phases initial . . . . .	166
5.5.2 Adaptation de l'initialisation énergétique de la méthode de tir . . . . .	168
5.5.3 Régimes stationnaires obtenus par la méthode de tir . . . . .	171
<b>5.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>187</b>

---

## 5.1 Introduction

Forts de notre étude non-linéaire sur le modèle académique et des résultats obtenus par la méthode de tir proposée dans le chapitre précédent, nous nous intéressons maintenant à la transposition des méthodes développées à un modèle éléments finis afin de pouvoir estimer leur pertinence dans le cadre de systèmes industriels. Premièrement, la formulation variationnelle des équations dynamiques d'une structure soumise à un contact frottant de type Signorini-Coulomb est présentée. Cette formulation permet ensuite d'envisager une discrétisation de type éléments finis d'un système simplifié de frein à disque ferroviaire et de distinguer deux variantes de ce modèle.

On cherche à transposer notre démarche numérique exposée dans le chapitre précédent au formalisme éléments finis. C'est pourquoi, dans un second temps, les outils permettant le calcul de l'équilibre quasi-statique et l'analyse de stabilité de modèles éléments finis sont présentés. L'analyse des valeurs propres complexes du problème linéarisé autour de la position de l'équilibre quasi-statique permet de déterminer les coefficients de frottement des deux cas d'étude garantissant des cas mono-instables, forte hypothèse du travail précédemment effectué.

Une fois l'analyse de stabilité effectuée, une analyse non-linéaire des régimes transitoire et stationnaire des deux modèles est menée afin de déterminer les cycles limites de vibrations auto-entretenues qui serviront de références pour la comparaison des résultats de la méthode de tir proposée. Pour ce faire, les équations sont intégrées à partir de conditions initiales proches de l'équilibre quasi-statique en utilisant la  $\theta$ -méthode et une condensation sur l'interface frottante est proposée. On discute ensuite les évolutions transitoire et stationnaire des deux modèles en explicitant les indicateurs utilisés.

Les résultats de références étant déterminés, on expose enfin la formulation de la méthode de tir adaptée aux modèles de type éléments finis. La principale difficulté de l'utilisation de la méthode de tir avec des modèles éléments finis est le calcul de la matrice de monodromie. Une adaptation de la méthode de tir par réduction de l'espace des phases initial est alors proposée ce qui permet de faciliter ce calcul. Ensuite l'initialisation énergétique décrite dans le chapitre précédent est transposée aux modèles éléments finis ce qui permet de répondre à la deuxième difficulté évoquée dans l'état de l'art (cf. Chapitre 2). Les résultats obtenus avec différentes initialisations pour les deux modèles sont ensuite comparés à ceux issus de l'intégration temporelle directe et discutés. La question des performances de la méthode développée en terme de ratio précision/coût de calcul est également abordée.

## 5.2 Formulation éléments finis du problème et description des modèles de frein

Dans cette section, la formulation variationnelle et la discrétisation par éléments finis d'un problème de contact frottant est présentée. Les hypothèses classiques de la mécanique des milieux continus d'un solide viscoélastique en petites transformations sont utilisées en négligeant les effets gyroscopiques [1]. Deux variantes d'un modèle éléments finis de frein à disque ferroviaire sont présentées. Le choix de ce modèle éléments finis est le résultat d'un compromis entre le réalisme d'une part - permettant de décrire des phénomènes quantitativement et qualitativement proches de ceux intervenant dans le crissement des freins à disques ferroviaires - et la taille d'autre part - permettant de déterminer des résultats de référence dans des délais raisonnables pour la validation des mé-

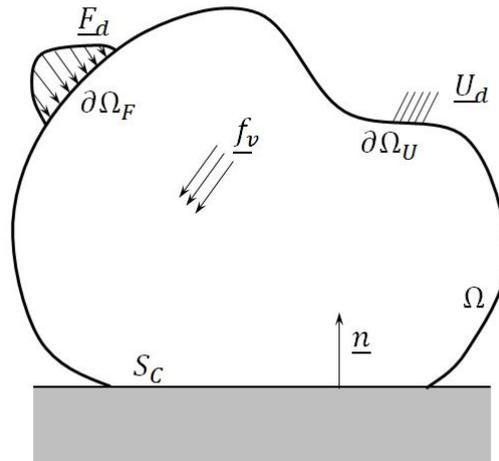


FIGURE 5.1 – Notations

thodes proposées. Il se base notamment sur l'expérience acquise dans ce domaine dans le cadre des projets de recherche collaboratifs CrisFis et AcouFren où la question du crissement des freins à disques ferroviaires est abordée selon une démarche très appliquée avec des partenaires industriels.

### 5.2.1 Formulation variationnelle

Afin de simplifier les notations, on se propose d'étudier le problème de mécanique des milieux continus d'un solide viscoélastique en petite transformation en situation de contact unilatéral frottant avec un solide rigide dans le cadre dynamique comme illustré par la Figure 5.1.

On note alors  $\underline{u}(\underline{x}, t)$  le champ de déplacement et  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$  le champ de contrainte dans le domaine  $\Omega$ .  $\underline{r}(\underline{x}, t)$  représente les forces liées au contact frottant sur la surface de contact  $S_C$ . On note  $\mathcal{A}$  le tenseur de Hooke et  $\mathcal{B}$  le tenseur viscoélastique. Le problème est alors de trouver les champs  $\underline{u}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{r}$  vérifiant l'ensemble des équations suivantes [1, 57] :

Le principe fondamental de la dynamique :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}_v = \rho \underline{\ddot{u}} \text{ dans } \Omega \quad (5.1)$$

Les conditions limites en effort et en déplacement :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}[\underline{n}] &= \underline{F}_d \text{ sur } \partial\Omega_F \\ \underline{u} &= \underline{U}_D \text{ sur } \partial\Omega_U \end{aligned} \quad (5.2)$$

La relation de comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{A} : \underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}] + \mathcal{B} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}[\underline{u}] \text{ dans } \Omega \quad (5.3)$$

L'équation de compatibilité :

$$\underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}] = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) \text{ dans } \Omega \quad (5.4)$$

Les conditions limites de contact :

$$\underline{\underline{\sigma}}[\underline{n}] = \underline{r} \text{ sur } S_C \quad (5.5)$$

Les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, 0) &= \underline{u}_0(\underline{x}) \\ \underline{\dot{u}}(\underline{x}, 0) &= \underline{v}_0(\underline{x}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

où  $\underline{f}_v$  correspond aux forces volumiques,  $\underline{F}_d$  aux efforts extérieurs,  $\underline{U}_d$  aux déplacements imposés,  $\underline{\underline{\epsilon}}$  au tenseur des petites déformations,  $\underline{u}_0$  et  $\underline{v}_0$  aux conditions initiales en déplacement et vitesse. La notation  $\underline{\cdot}$  est utilisée pour les vecteurs et  $\underline{\underline{\cdot}}$  pour les tenseurs. Afin d'écrire les relations de contact frottant, on sépare les composantes normales et tangentielles du déplacement et de la force liée au contact frottant :

$$\begin{aligned} u_n &= \underline{u} \cdot \underline{n}, & \underline{u}_t &= \underline{u} - u_n \underline{n} \\ r_n &= \underline{r} \cdot \underline{n}, & \underline{r}_t &= \underline{r} - r_n \underline{n} \end{aligned} \quad (5.7)$$

avec  $\underline{n}$  la normale rentrante au solide considéré  $\Omega$ . On suppose que la relation entre le déplacement normal  $u_n$  et la réaction normale  $r_n$  est une relation de contact unilatéral ou Signorini. Un frottement de Coulomb à coefficient  $\mu$  constant lie les réactions de frottement  $\underline{r}_t$  aux vitesses tangentielles  $\underline{\dot{u}}_t$ . Ces deux relations sont explicitées dans l'état de l'art ((2.1) et (2.4)), et peuvent être formulées sous forme de projection (2.5).

On peut alors proposer une formulation variationnelle hybride à deux champs  $(\underline{u}, \underline{r})$  du problème de contact précédemment introduit. Pour ce faire on définit l'espace admissible  $\mathcal{U} = \{\underline{u} | \underline{u} = \underline{U}_d \text{ sur } \partial\Omega_U\}$  et l'espace  $\mathcal{U}^0 = \{\underline{u} | \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega_U\}$ . Ainsi le problème est de trouver  $\underline{u} \in \mathcal{U}$  et  $\underline{r}$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho \underline{u}^* \cdot \underline{\dot{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}[\underline{u}^*] : \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}] d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} \underline{u}^* \cdot \underline{F}_d dS + \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{f}_v d\Omega + \int_{S_C} \underline{u}^* \cdot \underline{r} dS, \quad \forall \underline{u}^+ \in \mathcal{U}^0 \\ (\underline{u}, \underline{r}) \text{ vérifiant la forme faible de la loi de Signorini} \\ (\underline{\dot{u}}, \underline{r}) \text{ vérifiant la forme faible de la loi de Coulomb} \end{array} \right. \quad (5.8)$$

La première ligne correspond au principe des puissances virtuelles. Le champ  $\underline{r}(\underline{x}, t)$  est considéré ici comme un multiplicateur de Lagrange associé aux conditions sur  $\underline{u}(\underline{x}, t)$ . Les formes faibles des lois de Signorini et Coulomb peuvent s'écrire sous différentes formes (inclusion d'ensemble ou inégalités) et sont détaillées par exemple dans [59, 64]. Cette formulation est utilisée par la suite pour la discrétisation en éléments finis.

## 5.2.2 Discrétisation par éléments finis

On se place maintenant dans le cas de deux structures comportant une interface de contact frottant. On discrétise spatialement les équations dans les structures par éléments finis en prenant soin d'obtenir un maillage de degré 1 compatible sur les surfaces potentiellement en contact. L'interface de contact est par conséquent définie par un ensemble de  $P$  couples de noeuds  $(M_i, M'_i)$ ,  $i \in [1, P]$  en vis-à-vis appartenant aux maillages de la surface potentiellement en contact du disque et la face interne des plots. On suppose dans cette étude que les contraintes sont approchées par les mêmes fonctions d'interpolation que celles utilisées pour les déplacements. Ainsi, le problème revient à appliquer les lois non-régulières de contact unilatéral et de frottement de Coulomb aux couples nodaux situés à l'interface tel qu'il a été montré dans [12, 59] (cf. Équation 2.6).

Par conséquent, on se propose de définir des matrices d'observation des déplacements relatifs des noeuds des interfaces frottantes discrétisées. On note donc :

- $\mathbf{P}_n \in \mathcal{M}_{(P,N)}(\mathbb{R})$  la matrice d'observation des déplacements relatifs à l'interface selon la direction normale  $\mathbf{n}$ .
- $\mathbf{P}_t \in \mathcal{M}_{(P,N)}(\mathbb{R})$  la matrice d'observation des déplacements relatifs à l'interface selon la direction tangente principale du contact  $\mathbf{t}$ .
- $\mathbf{P}_b \in \mathcal{M}_{(P,N)}(\mathbb{R})$  la matrice d'observation des déplacements relatifs à l'interface selon la direction tangente secondaire du contact  $\mathbf{b}$ .

avec  $N$  le nombre de degrés de liberté de la structure globale. Si on définit par  $\mathbf{U}$  les déplacements généralisés, il est possible à l'aide des matrices précédemment présentées, de définir les déplacements relatifs dans le repère local du contact. Ils sont alors exprimés sous la forme de trois vecteurs de taille  $P$  :

$$(\mathbf{G}_n, \mathbf{G}_t, \mathbf{G}_b) = (\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_t, \mathbf{P}_b)\mathbf{U} \quad (5.9)$$

De même, on définit le vecteur  $\mathbf{V}$  des amplitudes de glissement imposées avec  $V_i = v(M_i)$ ,  $i \in [1, P]$  évaluées aux noeuds de l'interface.

En prenant en compte les différents espaces admissibles classiques associés à la formulation faible (5.8), on peut alors écrire les équations du mouvement sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \quad (5.10)$$

avec  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  les matrices de masse, d'amortissement visqueux et de raideur, respectivement.  $\mathbf{F}$  représente le vecteur des forces extérieures et  $\mathbf{R}$  est le vecteur de taille  $N$  des forces équivalentes liées au contact frottant tel que :

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_n^T \mathbf{R}_n + \mathbf{P}_t^T \mathbf{R}_t + \mathbf{P}_b^T \mathbf{R}_b \quad (5.11)$$

où  $\mathbf{R}_n$ ,  $\mathbf{R}_t$  et  $\mathbf{R}_b$  sont les vecteurs de tailles  $P$  des forces équivalentes dans le repère local suivant les direction  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{b}$  respectivement.

Ainsi ces forces sont liées aux déplacements relatifs dans le repère local par la loi de contact unilatéral et la loi de frottement de Coulomb décrites dans le chapitre état de l'art. Avec le formalisme éléments finis l'écriture des projections devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n &= \mathbf{proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_n - \rho_n \mathbf{G}_n) & \forall \rho_n \text{ diagonale et positive} \\ \{\mathbf{R}_t \quad \mathbf{R}_b\} &= \mathbf{proj}_{\mathcal{D}(\mu \mathbf{R}_n)} \{\mathbf{R}_t - \rho_t (\dot{\mathbf{G}}_t - \mathbf{V}) \quad \mathbf{R}_t - \rho_t \dot{\mathbf{G}}_b\} & \forall \rho_t \text{ diagonale et positive} \end{aligned} \quad (5.12)$$

où les opérateurs  $\mathbf{proj}_{\mathbb{R}^+}$  et  $\mathbf{proj}_{\mathcal{D}(\mu \mathbf{R}_n)}$  représentent respectivement les versions nodales des projections définies par (2.6) sur l'ensemble des réels positifs et sur le cône de Coulomb. Ainsi pour un vecteur  $\mathbf{x}$ , la composante  $i$  de  $\mathbf{proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{x})$  est  $\mathbf{proj}_{\mathbb{R}^+}(x_i)$ , de même pour une matrice  $\mathbf{A}$  la ligne  $i$  de  $\mathbf{proj}_{\mathcal{D}(\mu \mathbf{R}_n)}(\mathbf{A})$  correspond à  $\mathbf{proj}_{\mathcal{D}(\mu \mathbf{R}_n)}(\mathbf{A}_i)$ .

### 5.2.3 Description du modèle de frein

On se propose de tester notre méthode sur un modèle de frein de TGV. Les composants du mécanisme de frein sont maintenant décrits. La Figure 5.2 représente l'ensemble du mécanisme. On observe alors un essieu sur lequel sont montés 4 disques de frein (cf. Figure 5.3(a)) sur lesquels sont serrés les étriers de frein. Les timoneries seules sont représentées Figure 5.3(b). Elles sont composées de garnitures à plots qui rentrent en contact

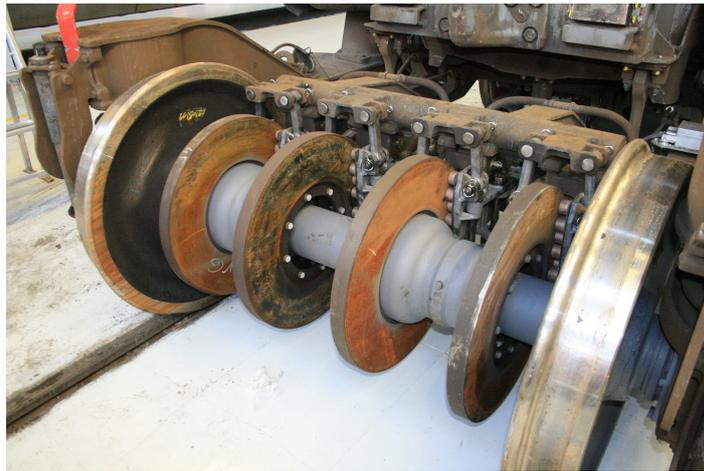


FIGURE 5.2 – Essieu TGV équipé de freins à disque

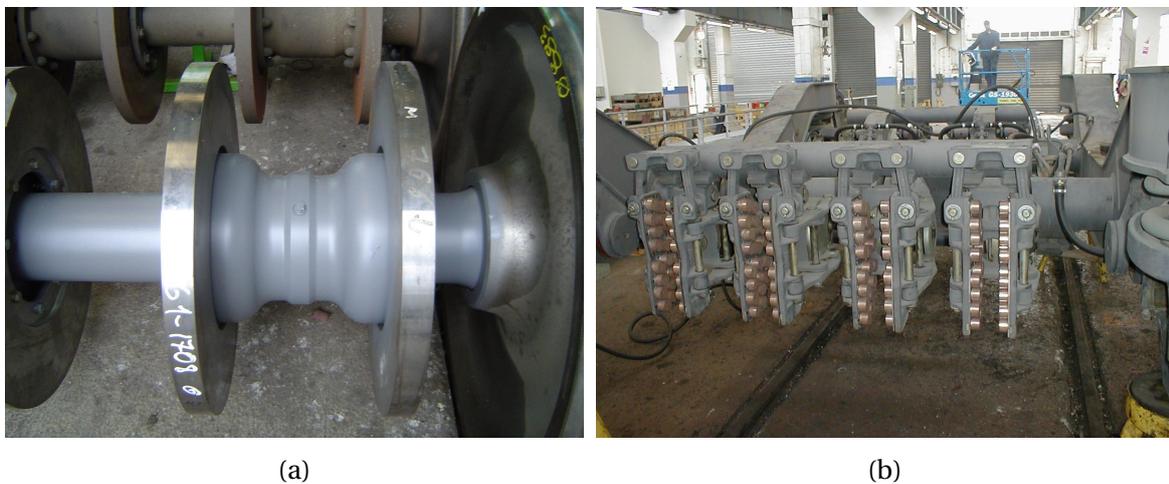


FIGURE 5.3 – (a) Disque double freiné sur l'essieu (b) timoneries équipées de garnitures à plots

avec le disque de freinage. Ces garnitures sont montées sur un porte-garniture qui lui-même est en liaison avec les biellets et étriers. Ces derniers sont montés en liaison pivot sur le bogie.

Différents modèles éléments finis de ce frein ont été développés [2, 34, 108]. Lors du projet Acoufren notamment, le modèle éléments finis développé, est très réaliste et représente le disque, le moyeu, tous les plots de garniture ainsi que l'ensemble de la timonerie. Ces structures sont modélisées avec des éléments quadratiques (P2). Une bonne représentation du comportement modal est obtenue pour des fréquences comprises entre 0 et 10000 Hz.

Loyer [2] utilise dans ses travaux une version simplifiée de ce modèle. Les biellets et étriers ne sont plus représentés et leur comportement dynamique est simulé par des raidisseurs d'attache aux portes-garnitures. Les portes-garnitures sont quant à eux représentés par des masses rigides et la face externe des plots de garniture et en liaison rigide avec les portes-garnitures. Le maillage du disque et du moyeu a été simplifié. Les structures sont modélisées avec des éléments quadratiques. Comparé au modèle Acoufren, celui-ci propose une réduction du nombre de degrés de liberté tout en assurant une validité du comportement dynamique sur une plage de 0 à 10000 Hz.

Enfin Brizard [34], utilise une dernière variation du modèle précédent. Il a été constaté que tous les plots de garnitures n'entraient pas en contact avec le disque dans certaines

configurations. Ainsi afin de réduire le nombre de degrés de liberté seulement 6 plots de garnitures par face ont été conservés. Les portes-garnitures ont été supprimés et une condition de déplacement normal sur les faces externes des plots a été imposée pour simuler la force de freinage. Le maillage des structures est effectué avec des éléments linéaires (P1). La validité de ce modèle est vérifiée pour des fréquences comprises entre 0 et 5000 Hz. Il s'agit d'un modèle facile à manipuler tout en assurant une bonne représentation du comportement dynamique de la structure.

L'objectif principal de cette étude n'est pas d'établir un modèle éléments finis simulant avec une grande précision le comportement dynamique d'un frein industriel sur une grande plage de fréquences mais plutôt de modéliser simplement un frein afin d'avoir un outil de travail avec un nombre raisonnable de degrés de liberté pour effectuer de l'expérimentation numérique et essayer de transposer la méthode non-linéaire mise au point dans le chapitre précédent sur des modèles éléments finis. C'est pourquoi dans ces travaux, le modèle développé par Brizard est repris et modifié afin d'obtenir une variante de cette modélisation où la timonerie est intégrée au modèle à l'instar du modèle de Loyer, les portes-garnitures sont représentés ainsi que le comportement en raideur des bielles et étriers. Deux variantes de ce modèle sont présentées : le Modèle 1 avec la représentation des portes-garnitures et une condition de serrage en force et le Modèle 2 (modèle original de Brizard) avec une condition de serrage en déplacement. L'utilisation de deux variantes d'un même modèle éléments finis de frein ferroviaire permettra de vérifier la robustesse de la méthode non-linéaire qui sera développée dans ce chapitre.

### Modèle 1

Cette variante du modèle prend en compte le moyeu, le disque, les garnitures ainsi que les portes-garnitures du système de freinage. Un maillage structuré avec des éléments volumiques est utilisé.

Le disque est une structure en acier massive. Les paramètres de discrétisation sont alors le nombre d'éléments dans l'épaisseur, dans le rayon et dans la circonférence. Le moyeu est une structure beaucoup plus fine que le disque. C'est pourquoi une discrétisation en éléments de type coque est utilisée. En effet, cette discrétisation permet d'obtenir une bonne représentation cinématique du moyeu pour un nombre de degrés de liberté raisonnable. La Figure 5.4 représente le modèle éléments finis retenu pour cet ensemble disque/moyeu. On peut noter qu'une partie du disque est maillée différemment. Cette zone est celle où les garnitures vont entrer en contact. Le maillage est donc différent de façon à être coïncident avec celui des plots de garnitures pour rendre possible un traitement du contact compatible.

Afin de simplifier la modélisation d'un système complet seuls les portes-garnitures et les plots de garnitures sont modélisés. Les conditions aux limites sur les portes-garnitures représentent alors le comportement de toute la timonerie (système externe non représenté). Les plots de garnitures sont représentés en éléments volumiques. Les portes-garnitures quant à eux sont modélisés par un solide rigide. La Figure 5.5 représente l'ensemble garnitures/portes-garnitures. Cette modélisation permet de représenter toutes les inerties avec un faible nombre d'éléments.

On note que le porte-garnitures est fixé au bâti par des raideurs d'attache. L'amortissement choisi est de type Rayleigh par morceaux. On considère alors deux zones : d'un côté le disque et le moyeu, de l'autre les garnitures et les portes-garnitures. La liaison entre les portes-garnitures et les faces externes des plots est de type rigide.

Le modèle éléments finis comporte alors 31974 degrés de liberté, dont 27090 pour

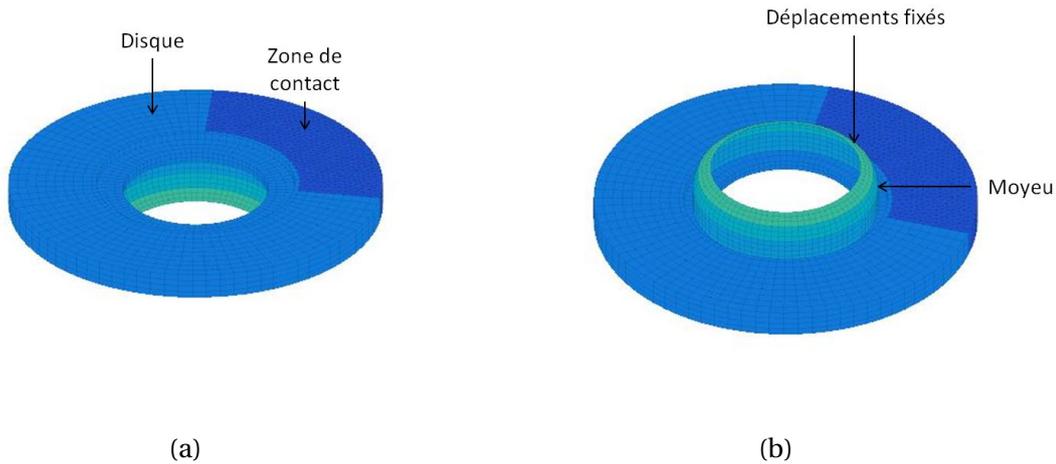


FIGURE 5.4 – Discretisation du disque (a) du moyeu (b) des Modèles 1 et 2

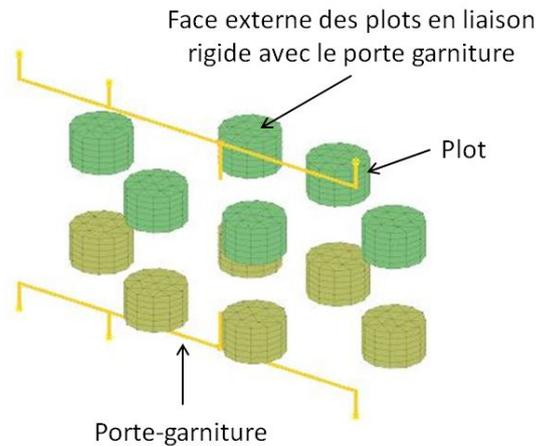


FIGURE 5.5 – Discretisation des garnitures et portes garnitures du Modèle 1

l'ensemble disque/moyeu et 4884 pour les garnitures/portes-garnitures. La zone de contact potentielle comporte 228 paires de noeuds en vis-à-vis soit 1368 degrés de liberté. Bien que simplifié, le modèle comporte un nombre de degrés de liberté important pour effectuer des simulations en dynamique non-linéaire transitoire.

Les conditions aux limites ainsi que les paramètres du modèle sont précisés dans le Tableau 5.1.

## Modèle 2

Cette variante du modèle prend en compte seulement le moyeu, le disque et les garnitures du système de freinage. Cette modélisation est utilisée par Brizard dans [34].

L'ensemble disque/moyeu est identique au Modèle 1 et représenté sur la Figure 5.4. Le second ensemble représente seulement les plots des garnitures. Ainsi le comportement de la timonerie et des portes-garnitures est simulé au travers des conditions aux limites imposées sur les faces externes des plots (un déplacement normal est imposé sur ces faces externes). Ces plots sont modélisés de la même façon que ceux du Modèle 1 et sont représentés Figure 5.6.

L'amortissement utilisé est de type Rayleigh par morceaux. On distingue comme pour

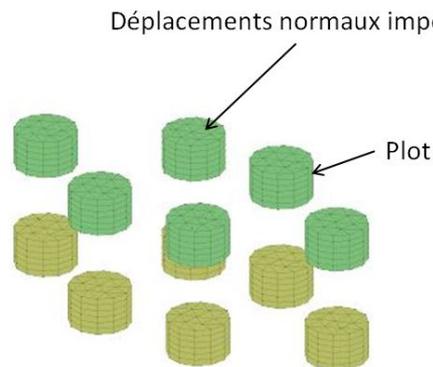


FIGURE 5.6 – Discrétisation des garnitures du Modèle 2

le Modèle 1, deux ensembles : le moyeu et le disque d'un côté, les plots de l'autre.

Le modèle éléments finis final comporte donc 31878 degrés de liberté, dont 27090 pour l'ensemble disque/moyeu et 4788 pour les garnitures. La zone de contact potentielle comporte 228 paires de noeuds en vis-à-vis soit 1368 degrés de libertés. Comme pour le Modèle 1, ce modèle possède un nombre de degrés de liberté élevé pour effectuer des simulations en dynamique non-linéaire transitoire avec une zone de contact importante.

Les conditions aux limites ainsi que les paramètres non-explicités du modèle sont précisés dans la suite de ce mémoire.

### Paramètres et conditions aux limites des modèles

Dans cette section les paramètres utilisés par les Modèles 1 et 2 sont spécifiés. On rappelle que l'objectif de cette modélisation n'est pas d'obtenir un modèle ultra réaliste de frein ferroviaire mais plutôt d'obtenir un outil de travail pour le développement d'une nouvelle méthode de calcul non-linéaire. C'est pourquoi les paramètres sont choisis selon les études [2, 34] sans chercher à effectuer des recalages ou des identifications par rapport à des essais expérimentaux. Ces paramètres sont résumés dans le Tableau 5.1.

Le choix des paramètres des matériaux (élasticité, amortissement Rayleigh) et des conditions de fonctionnement (serrage, vitesse de rotation) est réaliste et a été effectué sur la base des différentes mesures et recalages réalisés dans le cadre des projets CrisFis et AcouFren. Dans le cas du Modèle 1, le choix des raideurs ne permet qu'une translation libre du porte-garniture dans la direction normale. Les paramètres de serrage choisis permettent toutefois d'obtenir un équilibre quasi-statique comparable entre les deux variantes du modèle : le déplacement normal des faces externes des plots imposé dans le Modèle 2 a été calculé afin d'obtenir une force de serrage normale aux environs de 2000 N comparable au Modèle 1. Les déplacements sur le bord du moyeu sont encastres pour les deux modèles.

Le Modèle 1 est plus réaliste que le Modèle 2 grâce à la modélisation des portes-garnitures et la prise en compte de l'élasticité des mécanismes non représentés par l'ajout de raideurs d'attache des portes-garnitures aux bielles et étriers. Ces raideurs rendent alors le Modèle 1 plus flexible que le Modèle 2 où seuls les déplacements normaux sont imposés sur les faces externes des plots. On montrera dans les sections suivantes que

même si ces modèles sont représentatifs d'un même système de frein ferroviaire, ils ont un comportement dynamique différent. Cette différence d'évolution dynamique permettra alors de tester la robustesse de la méthodologie numérique pour l'approximation des niveaux vibratoires stationnaires de ces systèmes qui sera développée dans ce chapitre.

Paramètre	Variable	Modèle 1	Modèle 2
Amortissement Rayleigh moyen et disque en masse	$\alpha_{disc}$	$7.50 \text{ s}^{-1}$	$7.50 \text{ s}^{-1}$
Amortissement Rayleigh moyen et disque en raideur	$\beta_{disc}$	$1.0 \times 10^{-7} \text{ s}$	$1.0 \times 10^{-7} \text{ s}$
Amortissement Rayleigh garnitures et porte-garnitures en masse	$\alpha_{gar}$	$150 \text{ s}^{-1}$	$135 \text{ s}^{-1}$
Amortissement Rayleigh garnitures et porte-garnitures en raideur	$\beta_{gar}$	$1.80 \times 10^{-6} \text{ s}$	$1.80 \times 10^{-6} \text{ s}$
Raideur de traction biellette $x$	$k_{tbx}$	$1.00 \times 10^8 \text{ N/m}$	–
Raideur de traction biellette $y$	$k_{tby}$	$1.00 \times 10^8 \text{ N/m}$	–
Raideur de traction biellette $z$	$k_{tbz}$	$1.00 \times 10^3 \text{ N/m}$	–
Raideur de rotation biellette $x$	$k_{r bx}$	$1.00 \times 10^8 \text{ N/rad}$	–
Raideur de rotation biellette $y$ et $z$	$k_{r byz}$	$1.00 \times 10^8 \text{ N/rad}$	–
Raideur de traction étrier $x$	$k_{tex}$	$1.00 \times 10^8 \text{ N/m}$	–
Raideur de traction étrier $y$	$k_{tey}$	$1.00 \times 10^8 \text{ N/m}$	–
Raideur de traction étrier $z$	$k_{tez}$	$1.00 \times 10^3 \text{ N/m}$	–
Raideur de rotation étrier $x$	$k_{rex}$	$1.00 \times 10^8 \text{ N/rad}$	–
Raideur de rotation étrier $y$	$k_{rey}$	$1.00 \times 10^8 \text{ N/rad}$	–
Raideur de rotation étrier $z$	$k_{rez}$	$1.00 \times 10^8 \text{ N/rad}$	–
Force normale imposée sur l'étrier	$F_{ext}$	2000 N	–
Déplacement normal imposé face externe plots	$U_{ext}$	–	$1.60 \times 10^{-6} \text{ m}$
Module d'Young moyen et disque	$E_{disque}$	210 GPa	210 GPa
Masse volumique moyen et disque	$\rho_{disque}$	$7850 \text{ kg/m}^3$	$7850 \text{ kg/m}^3$
Coefficient de poisson moyen et disque	$\nu_{disque}$	0.28	0.28
Module d'Young plot	$E_{plot}$	3.5 GPa	2.0 GPa
Masse volumique plot	$\rho_{plot}$	$6250 \text{ kg/m}^3$	$5000 \text{ kg/m}^3$
Coefficient de poisson plot	$\nu_{plot}$	0.30	0.3

TABLEAU 5.1 – Paramétrage des modèles éléments finis

## 5.3 Analyse de stabilité

L'un des points importants de l'étude d'un système soumis à des vibrations auto-entretenues de crissement est l'analyse de stabilité de l'équilibre glissant. Cette analyse permet de déterminer l'occurrence de ces vibrations. On présente dans cette étude les différents outils utilisés pour l'analyse de stabilité. En premier lieu l'équilibre glissant est calculé à l'aide d'une méthode itérative dites des statuts [109] où l'on recherche l'équilibre glissant en itérant sur le statut des noeuds à l'interface (contact/décollement) jusqu'à convergence. La stabilité de cet équilibre glissant est ensuite déterminée en utilisant une méthode d'itération sur le résidu [1, 34, 110]. Les  $n$  premiers modes complexes du système sont calculés à partir d'une base solution réelle du problème symétrique non amorti que l'on vient enrichir avec des bases modales calculées à partir d'un résidu en effort. Il s'agit donc d'un solveur itératif.

### 5.3.1 Calcul de l'équilibre glissant

On remarque dans un premier temps que l'hypothèse du glissement permet de simplifier la loi de Coulomb :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t &= \mu \mathbf{R}_n \\ \mathbf{R}_b &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Un système d'équation est obtenu et traduit d'une part la recherche de l'équilibre quasi-statique et de l'autre la vérification du contact unilatéral :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} + (\mathbf{P}_n^T + \mu \mathbf{P}_t^T) \mathbf{R}_n \\ \mathbf{G}_n \text{ et } \mathbf{R}_n \text{ vérifiant le contact unilatéral (2.1)} \end{array} \right. \quad (5.14)$$

#### Construction des matrices frottantes

Comme vu dans le Chapitre 3, la première étape de résolution du système (5.14) est d'éliminer les composantes tangentielles des réactions de frottement en projetant la condition d'équilibre statique sur l'espace des déplacements normaux à l'interface. L'orthogonalité des matrices de projection  $\mathbf{P}_n$  et  $\mathbf{P}_t$  permet d'exprimer les réactions normales  $\mathbf{R}_n$  directement en fonction des déplacements :

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_{n+}^T (\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}) \quad (5.15)$$

avec  $\mathbf{P}_{n+}^T = (\mathbf{P}_n \mathbf{P}_n^T)^{-1} \mathbf{P}_n^T$  la pseudo-inverse de  $\mathbf{P}_n^T$ .

En substituant l'Équation (5.15) dans (5.14), on exprime l'équilibre quasi-statique réduit suivant :

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{F}} + \mathbf{P}_n^T \mathbf{R}_n \quad (5.16)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} + \mathbf{K}_\mu & \text{avec } \mathbf{K}_\mu &= -\mu \mathbf{P}_t^T \mathbf{P}_{n+}^T \mathbf{K} \\ \tilde{\mathbf{F}} &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_\mu & \text{avec } \mathbf{F}_\mu &= -\mu \mathbf{P}_t^T \mathbf{P}_{n+}^T \mathbf{F} \end{aligned} \quad (5.17)$$

On rappelle que les déplacements normaux et les réactions normales doivent toujours vérifier la condition de contact unilatéral. L'effet du frottement est alors exprimé au travers de la matrice frottante  $\mathbf{K}_\mu$  qui est explicitement non-symétrique ainsi que du vecteur frottant  $\mathbf{F}_\mu$ . On note que ce dernier est non-nul lorsque les efforts extérieurs sont appliqués sur la direction normale des noeuds en contact.

### Algorithme des statuts

Les équations de contact unilatéral rendent le système de recherche de l'équilibre quasi-statique non-linéaire. On se propose alors d'appliquer un algorithme itératif [12]. L'idée est de linéariser ces équations de contact pour une surface de contact donnée. Cette surface est alors caractérisée par un sous-ensemble de couple nodaux à l'interface  $\mathcal{C}_k \subset [1, P]$  vérifiant des conditions de contact bilatéral : les réactions normales pour les couples nodaux complémentaires sont nulles. Cela donne

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathcal{C}_k \quad G_{ni} &= 0 \\ \forall i \notin \mathcal{C}_k \quad R_{ni} &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

que l'on peut reformuler :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{P}_n^k \tilde{\mathbf{R}}_n \\ \tilde{\mathbf{G}}_n &= \mathbf{P}_n^k \mathbf{U} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.19)$$

où  $\mathbf{P}_n^k \in \mathcal{M}_{(\text{Card}(\mathcal{C}_k), P)(\mathbb{R})}$  est la matrice de projection sur les déplacements relatifs normaux en contact à l'itération  $k$ .

La méthode utilisée consiste à résoudre le système (5.16) associée aux contraintes symétriques (5.19) par élimination en projetant sur une base  $\mathbf{T}_n^k$  du noyau de  $\mathbf{P}_n^k$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{T}_n^k \mathbf{X} \\ \mathbf{T}_n^{kT} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{T}_n^k \mathbf{X} &= \mathbf{T}_n^{kT} \tilde{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

À l'itération  $k$ , les déplacements et les réactions normales sont alors connus. Il est donc possible de déterminer les noeuds pour lesquels les conditions de contact unilatéral ne sont pas vérifiées. Ces couples nodaux sont alors regroupés dans un sous-ensemble que l'on note  $\mathcal{D}_k \subset [1, P]$  :

$$\mathcal{D}_k = \{i \in \mathcal{C}_k \text{ et } R_{ni} > 0\} \cup \{i \notin \mathcal{C}_k \text{ et } G_{ni} > 0\} \quad (5.21)$$

L'algorithme utilisé est présenté par l'Algorithme 3. On se fixe une surface de contact initiale égale à la surface potentiellement en contact :

$$\mathcal{C}_0 = [1, P] \quad (5.22)$$

puis on inverse, à chaque itération, le statut des couples nodaux pour lesquels les conditions de contact unilatéral ne sont pas vérifiées :

$$\mathcal{C}_{k+1} = (\mathcal{C}_k \cup \mathcal{D}_k) - (\mathcal{C}_k \cap \mathcal{D}_k) \quad (5.23)$$

et ce, jusqu'à ce que tous les couples nodaux vérifient les conditions de contact unilatéral ce qui se traduit par  $\mathcal{D}_k = \emptyset$ . On note alors  $\mathcal{C}^e$  le sous-ensemble des  $Q$  couples nodaux obtenus définissant la surface de contact à l'équilibre.

On remarque qu'à chaque itération un système non symétrique de grande taille doit être résolu, c'est pourquoi dans notre implémentation on utilise le solveur *spfmex* disponible dans la Toolbox SDT (SDTools©).

**Algorithme 3** Algorithme des statuts

Données :  $\mathbf{K}, \mathbf{F}, \mu, \mathbf{P}, \mathbf{P}_n, \mathbf{P}_t, \mathbf{P}_{n+}^T$   
 Calcul des matrices frottantes  $\mathbf{K}_\mu, \mathbf{F}_\mu$   
 Calcul de  $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{F}}$   
 Initialisation  $k = 0, \mathcal{C}_1 = [1, P], \mathcal{D}_0 = [1, P]$   
**tant que**  $\mathcal{D}_k \neq \emptyset$  **effectuer**  
      $k = k + 1$   
     Réduction de  $\mathbf{P}_n$  à  $\mathcal{C}_k$  :  $\mathbf{P}_n^k$   
     Calcul de la base du noyau de  $\mathbf{P}_n^k$  :  $\mathbf{T}_n^k$   
     Résolution du système :  $\mathbf{T}_n^{kT} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{T}_n^k \mathbf{X} = \mathbf{T}_n^{kT} \tilde{\mathbf{F}}$   
     Mise à jour des déplacements :  $\mathbf{U} = \mathbf{T}_n^k \mathbf{X}$   
     Calcul des déplacements normaux relatifs :  $\mathbf{G}_n = \mathbf{P}_n \mathbf{U}$   
     Calcul des réactions normales de contact :  $\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_{n+}^T (\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F})$   
     Vérification de la loi de contact unilatéral :  $\mathcal{D}_k = \{i \in \mathcal{C}_k \text{ et } R_{ni} > 0\} \cup \{i \notin \mathcal{C}_k \text{ et } G_{ni} > 0\}$   
  
     Changement de statuts des couples nodaux de  $\mathcal{D}_k$  :  $\mathcal{C}_{k+1} = (\mathcal{C}_k \cup \mathcal{D}_k) - (\mathcal{C}_k \cap \mathcal{D}_k)$   
**fin**  
 Calcul des réactions de frottement :  $\mathbf{R}_t = \mu \mathbf{R}_n$  et  $\mathbf{R}_b = \mathbf{0}$

### 5.3.2 Analyse de stabilité de l'équilibre

L'équilibre quasi-statique étant déterminé, la stabilité de cet équilibre est étudiée. Pour ce faire, on note  $\mathcal{C}^e$  la zone de contact à l'équilibre comportant  $Q < P$  couples nodaux. On suppose alors un contact bilatéral sur cette surface et seules les perturbations glissantes sont étudiées. On exprime donc les forces liées au contact frottant équivalentes :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n^T \mathbf{R}_n &= \mathbf{P}_n^{eT} \tilde{\mathbf{R}}_n \\ \mathbf{P}_t^T \mathbf{R}_t &= \mathbf{P}_t^{eT} \tilde{\mathbf{R}}_t \\ \mathbf{P}_b^T \mathbf{R}_b &= \mathbf{P}_b^{eT} \tilde{\mathbf{R}}_b \end{aligned} \quad (5.24)$$

avec  $\tilde{\mathbf{R}}_n, \tilde{\mathbf{R}}_t$  et  $\tilde{\mathbf{R}}_b$  les vecteurs de tailles  $Q$  de réactions non nulles et  $\mathbf{P}_n^e, \mathbf{P}_t^e$  et  $\mathbf{P}_b^e$  correspondent aux matrices d'observation des déplacements relatifs dans le repère local de taille  $Q \times N$ .

Comme dans le Chapitre 3 la loi de Coulomb en glissement est maintenant linéarisée. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t &= \mu \mathbf{R}_n \\ \mathbf{R}_b &= -\mu \text{diag} \left( \frac{R_{ni}^e}{V_i} \right) \dot{\mathbf{G}}_b = -\mu \text{diag}(c_{bi}) \mathbf{P}_b \dot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

où  $R_{ni}^e$  est la réaction normale à l'équilibre glissant au noeud de l'interface de contact  $i$  (strictement positive) et  $c_{bi} = R_{ni}^e / V_i$  l'amortissement visqueux équivalent.

L'étude de perturbations glissantes permet de réécrire le système d'équations discrétisées :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_b) \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} &= (\mathbf{P}_n^{eT} + \mu \mathbf{P}_t^e) \tilde{\mathbf{R}}_n \\ \tilde{\mathbf{G}}_n &= \mathbf{P}_n^e \mathbf{U} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.26)$$

où  $\mathbf{C}_b$  est la matrice d'amortissement visqueux liée à la linéarisation de la direction de frottement et donnée par :

$$\mathbf{C}_b = \mu \mathbf{P}_b^{eT} \text{diag}(c_{bi}) \mathbf{P}_b^e \quad (5.27)$$

On constate une fois de plus une dissymétrie des équations : les contraintes en déplacements ne s'appliquent que sur la direction normale alors que les réactions tangentielles sont non nulles. Un calcul des matrices frottantes similaire à celui utilisé pour le calcul de l'équilibre glissant est alors employé pour palier à cette difficulté [1, 12].

La résolution du système (5.26) aux valeurs propres consiste à rechercher des solutions harmoniques  $(\mathbf{U}, \mathbf{R}) = (\hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{R}})e^{\lambda t}$ . On peut alors formuler le problème aux valeurs propres quadratique non symétrique suivant :

$$\begin{aligned} (\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda(\mathbf{C} + \mathbf{C}_b) + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{U}} &= (\mathbf{P}_n^e{}^T + \mu \mathbf{P}_t^e) \hat{\mathbf{R}}_n \\ \mathbf{P}_n^e \hat{\mathbf{U}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.28)$$

La résolution de ce problème permet alors de calculer un ensemble de vecteurs propres complexes  $(\hat{\Phi}_j, \hat{\mathbf{R}}_j)$  associés aux valeurs propres  $\lambda_j = r_j + i\omega_j$  dans le domaine fréquentiel. Toute perturbation peut alors être approchée par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}, \mathbf{R}) &\approx \sum_j \hat{q}_i (\hat{\Phi}_j, \hat{\mathbf{R}}_j) e^{\lambda_j t} \\ &\approx \sum_j |\hat{q}_j| e^{r_j t} (\hat{\Phi}_j, \hat{\mathbf{R}}_j) e^{i\omega_j t} \end{aligned} \quad (5.29)$$

### Construction des matrices frottantes

On s'attarde maintenant sur les outils spécifiques utilisés lors du calcul de la stabilité de l'équilibre glissant. On a vu que le système (5.26) est dissymétrique car les contraintes en déplacements sont exclusivement normales et les réactions tangentielles non nulles. Comme pour le calcul de l'équilibre glissant on propose alors d'éliminer les réactions liées au frottement de Coulomb en projetant les équations de la dynamique sur l'espace des perturbations des déplacements normaux à l'interface, obtenant ainsi le vecteur des perturbations des réactions normales :

$$\hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{P}_{n+}{}^T (\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda(\mathbf{C} + \mathbf{C}_b) + \mathbf{K}) \hat{\mathbf{U}} \quad (5.30)$$

Il est alors possible d'écrire le système aux valeurs propres réduit en substituant l'équation (5.30) dans l'expression des forces de frottement :

$$\begin{aligned} (\lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} + \lambda(\tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}_b) + \tilde{\mathbf{K}}) \hat{\mathbf{U}} &= \mathbf{P}_n^e{}^T \hat{\mathbf{R}}_n \\ \mathbf{P}_n^e \hat{\mathbf{U}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.31)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} + \mathbf{M}_\mu \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_\mu = \mu \mathbf{P}_t^e{}^T \mathbf{P}_{n+}{}^T \mathbf{M} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} + \mathbf{C}_\mu \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_\mu = \mu \mathbf{P}_t^e{}^T \mathbf{P}_{n+}{}^T \mathbf{C} \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} + \mathbf{K}_\mu \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_\mu = \mu \mathbf{P}_t^e{}^T \mathbf{P}_{n+}{}^T \mathbf{K} \end{aligned} \quad (5.32)$$

La prise en compte du contact bilatéral symétrique s'effectue de manière classique par élimination en réécrivant le système dans une base  $\mathbf{T}_n^e$  du noyau des contraintes en déplacements :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}} &= \mathbf{T}_n^e \mathbf{X} \\ \mathbf{T}_n^e{}^T (\lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} + \lambda(\tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}_b) + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{T}_n^e \mathbf{X} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.33)$$

### Calcul des valeurs propres complexes

Une étape de réduction est nécessaire pour la résolution de tels problèmes aux valeurs propres quadratiques non symétriques de grande taille. Il s'agit d'effectuer la recherche

de modes dans un espace réduit caractérisé par une base  $\mathbf{T}^r$ . Ainsi on peut réécrire le problème aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}} &= \mathbf{T}^r \mathbf{X} \\ \mathbf{T}^{rT} (\lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} + \lambda(\tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}_b) + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{T}^r \mathbf{X} &= 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

La base initiale choisie dans cette étude est composée des premiers modes réels  $\hat{\Phi}_j$  issus du problème symétrique non amorti associé. Les effets du frottement et de l'amortissement sont négligés et les modes réels sont calculés à partir du système suivant :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}} &= \mathbf{T}_n^e \mathbf{X} \\ \mathbf{T}_n^{eT} (\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{T}_n^e \mathbf{X} &= 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Afin d'améliorer la précision du calcul des modes complexes plusieurs méthodes d'enrichissement de base ont été développées [34, 111]. Dans notre étude la méthode d'enrichissement itératif et d'erreur sur le résidu développée dans [110] et notamment utilisée dans [1, 109] est employée. À chaque itération, pour un mode complexe  $\hat{\Phi}_j$  donné, une erreur résiduelle est calculée :

$$\epsilon_j^{\text{res}} = \frac{\mathbf{F}_j^{\text{res}*T} \mathbf{X}_j^{\text{res}}}{\hat{\Phi}_j^{*T} \mathbf{K} \hat{\Phi}_j} \quad (5.36)$$

où  $\mathbf{F}_j^{\text{res}}$  et  $\mathbf{X}_j^{\text{res}}$  sont respectivement les résidus modaux en forces et déplacements donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j^{\text{res}} &= \mathbf{T}_n^{eT} (\lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} + \lambda(\tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}_b) + \tilde{\mathbf{K}}) \hat{\Phi}_j \\ \mathbf{X}_j^{\text{res}} &= (\mathbf{T}_n^{eT} \mathbf{K} \mathbf{T}_n^e)^{-1} \mathbf{F}_j^{\text{res}} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Si l'erreur résiduelle est trop élevée, la base  $\mathbf{T}^r$  est alors enrichie avec le résidu modal en déplacement. Cette méthode d'enrichissement itératif sur le résidu permet d'obtenir des erreurs de l'ordre de  $10^{-6}$  à  $10^{-9}$  en une dizaine d'itérations.

### 5.3.3 Résultats

Dans cette section sont présentés les résultats de stabilité pour les modèles éléments finis retenus. On rappelle que dans le chapitre précédent, une méthode non-linéaire a été développée dans le cas d'un système simple soumis à une mono-instabilité. Le but de ce chapitre est d'étendre cette méthodologie à un modèle industriel. En premier lieu, une étude de stabilité est menée en fonction du coefficient de frottement. Le problème aux valeurs propres complexes est résolu en faisant varier le coefficient de frottement  $\mu$  et les diagrammes de bifurcations de Hopf des deux modèles éléments finis sont présentés. Cette première étape permet notamment de choisir un coefficient de frottement afin de retrouver une condition d'étude similaire que pour le modèle académique dans le Chapitre 4 (i.e. une condition ne comportant qu'un seul mode instable). Une fois ce coefficient de frottement déterminé, la position d'équilibre quasi-statique, les taux de divergence des modes complexes et la déformée modale du mode instable sont présentés.

#### Bifurcations en fonction du coefficient de frottement

Les cas d'études sont maintenant déterminés en menant des analyses de stabilité pour des valeurs de coefficient de frottement de 0.005 à 0.5 avec une vitesse de rotation du disque de  $4 \text{ rad.s}^{-1}$ . Le problème aux valeurs propres complexes est résolu en utilisant

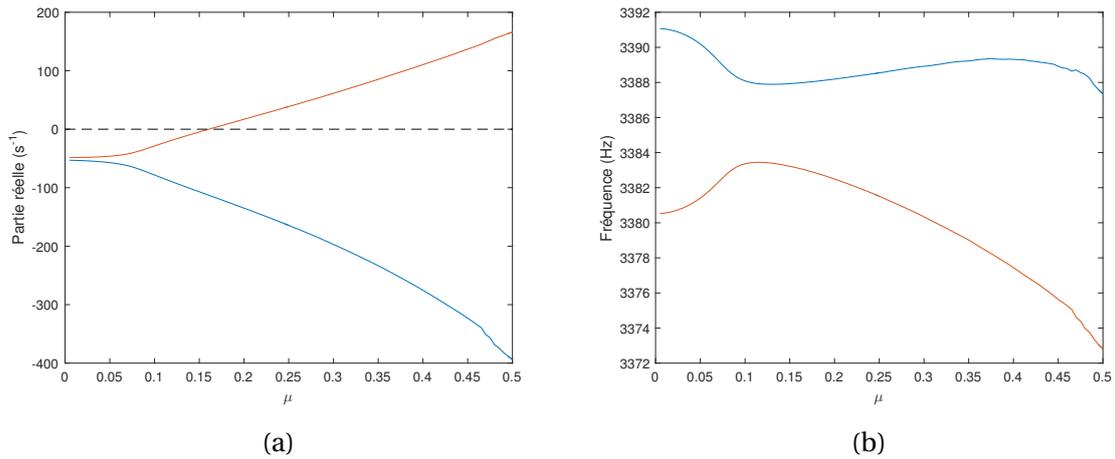


FIGURE 5.7 – Couplage de modes du Modèle 1 : évolution des parties réelles des valeurs propres complexes (a) et des fréquences des modes (b) en fonction du coefficient de frottement  $\mu$

une base  $\mathbf{T}^r$  composée des 80 premiers modes réels du problème non-amorti et sans frottement associé (symétrique). Cette base est ensuite enrichie en utilisant la méthode itérative sur le résidu jusqu'à obtenir une erreur résiduelle inférieure à  $10^{-6}$ .

Les Figures 5.7 et 5.8 représentent l'évolution des parties réelles des valeurs propres et celle des fréquences selon le coefficient de frottement  $\mu$ . On remarque sur la Figure 5.7 que le Modèle 1 ne possède qu'un seul mode instable sur la plage d'étude. La coalescence des modes est imparfaite due à la présence d'amortissement visqueux (amortissement de Rayleigh et linéarisation de la réaction de frottement) comme expliqué dans le Chapitre 3. Le mode avec la fréquence la plus faible pour  $\mu = 0.005$  devient instable pour  $\mu = 0.16$ . Dans le cas du Modèle 2, l'accroissement du coefficient de frottement sur la plage d'étude mène à l'observation de deux bifurcations de Hopf. En effet, deux couples de modes coalescent entraînant ainsi l'apparition de deux modes instables. Dans le cas du premier couplage, le mode avec la fréquence égale à 3381 Hz pour une valeur du coefficient de frottement  $\mu = 0.005$  devient instable pour  $\mu = 0.15$ , la fréquence de ce mode reste inférieure à celle du mode stable associé. Dans le cas du deuxième couplage, le mode avec une fréquence égale à 2284 Hz pour une valeur du coefficient de friction de 0.005 devient instable pour  $\mu = 0.25$  et sa fréquence est alors plus faible que celle du mode stable associé. Cependant pour  $\mu = 0.5$  la fréquence de ce mode est de 2299 Hz et est plus élevée que celle du mode stable. Le croisement des fréquences ce produit pour  $\mu = 0.39$ .

Afin de trouver des conditions d'études similaires à celles du modèle académique, on cherche à déterminer un coefficient de frottement pour lequel les deux modèles sont soumis à des mono-instabilités : présence d'un seul mode instable. On choisit pour la suite de cette étude  $\mu = 0.2$ .

### Description des instabilités à $\mu = 0.2$

Le coefficient de frottement maintenant déterminé, on se propose d'approfondir l'analyse de la stabilité des deux cas d'étude. Dans un premier temps, l'équilibre quasi-statique des deux cas sont présentés. Ensuite la stabilité des deux cas est analysée.

**Équilibre quasi-statique** Les Figures 5.9(a) et (b) représentent les déformées de l'équilibre quasi-statique des Modèles 1 et 2, respectivement. Les rotations du disque étant blo-

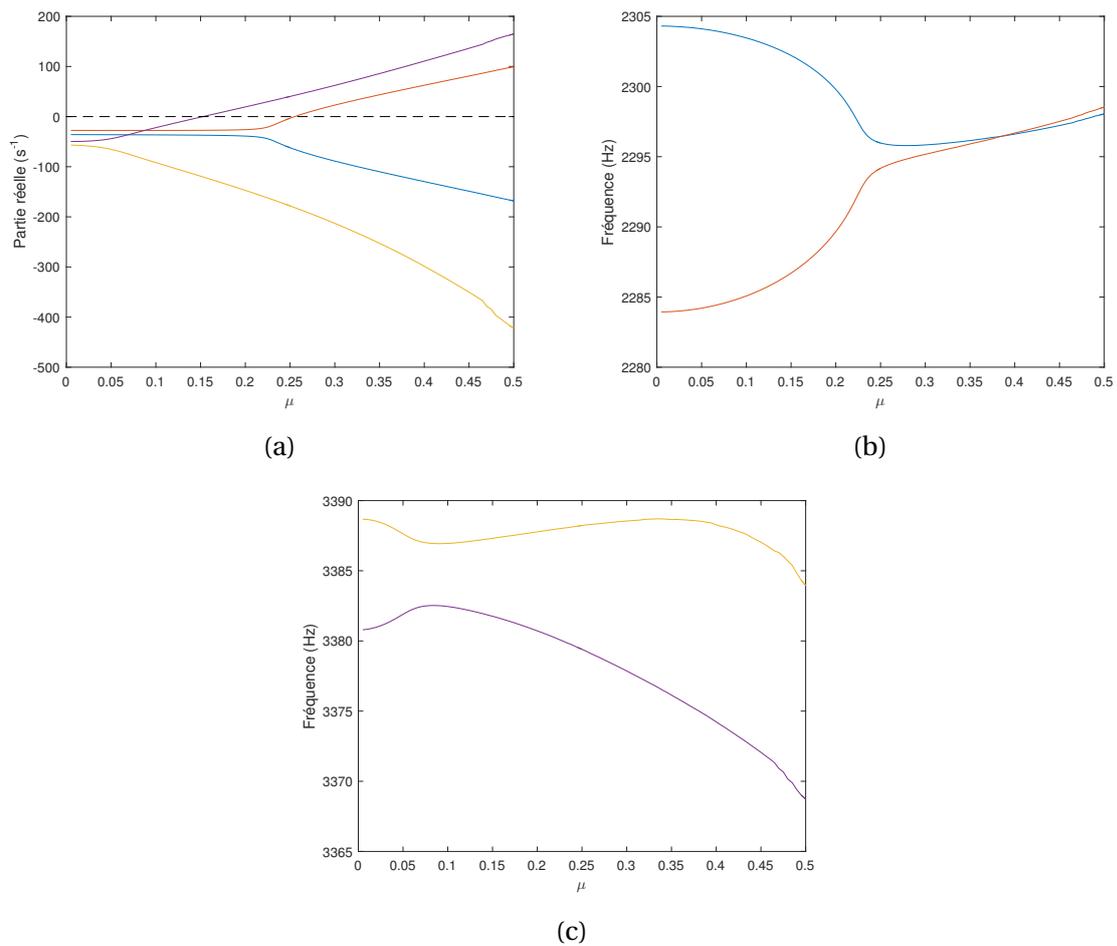


FIGURE 5.8 – Couplage de modes du Modèle 2 : évolution des parties réelles des valeurs propres complexes (a) et des fréquences des modes (b) et (c) en fonction du coefficient de frottement  $\mu$

	Partie Réelle ( $s^{-1}$ )	Fréquence (Hz)	Numéro du mode instable
Modèle 1	17.0	3382.5	26
Modèle 2	19.29	3380.7	20

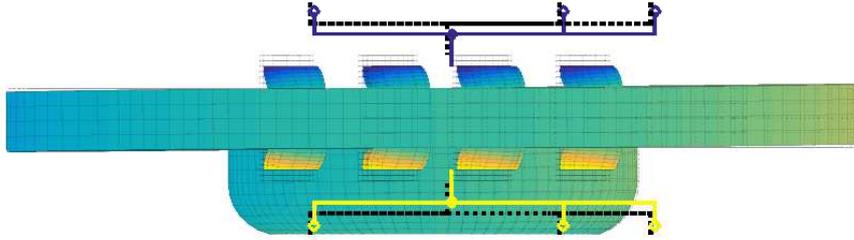
TABEAU 5.2 – Numéro du mode instable et valeur de la partie réelle et de la fréquence associée

quées et les efforts normaux quasiment identiques, les équilibres quasi-statiques des Modèles 1 et 2 sont similaires.

**Analyse de stabilité** Les Figures 5.10 (a) et (b) représentent les parties réelles des valeurs propres en fonction des fréquences avec et sans amortissement de Rayleigh pour les Modèles 1 et 2, respectivement. On remarque que l’ajout de l’amortissement de Rayleigh tend à stabiliser le système dans les deux cas : les parties réelles sont moins élevées avec amortissement, ce phénomène peut être expliqué par le “lowering effect” introduit dans le Chapitre 3. On note aussi que sans amortissement les deux modèles possèdent 3 modes instables, alors que seulement un d’entre eux reste instable suite à l’ajout de l’amortissement.

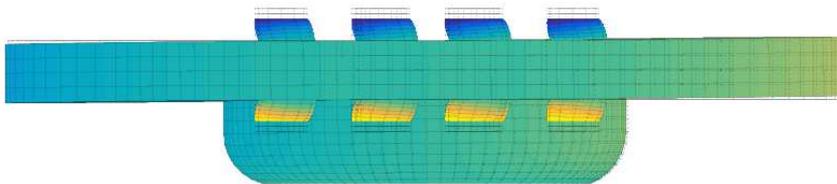
Les fréquences et parties réelles associées au mode instable avec amortissement sont relevées dans le Tableau 5.2 et la déformée est représentée en Figure 5.11. On remarque que dans les deux cas d’étude, le mode instable est un mode contrôlé par le disque. La déformée du disque est en effet très proche du mode libre de disque axial à 0 cercles nodaux et 5 diamètres nodaux. La déformation des plots est pilotée par les déplacements du disque au niveau de l’interface. Il s’agit d’un type d’instabilité par couplage de modes double du disque qui est représentatif de celles se produisant réellement dans les freins à disques TGV et menant au crissement.

Equilibre glissant



(a)

Equilibre glissant



(b)

FIGURE 5.9 – Déformées quasi-statiques du Modèle 1 (a) et du Modèle 2 (b)

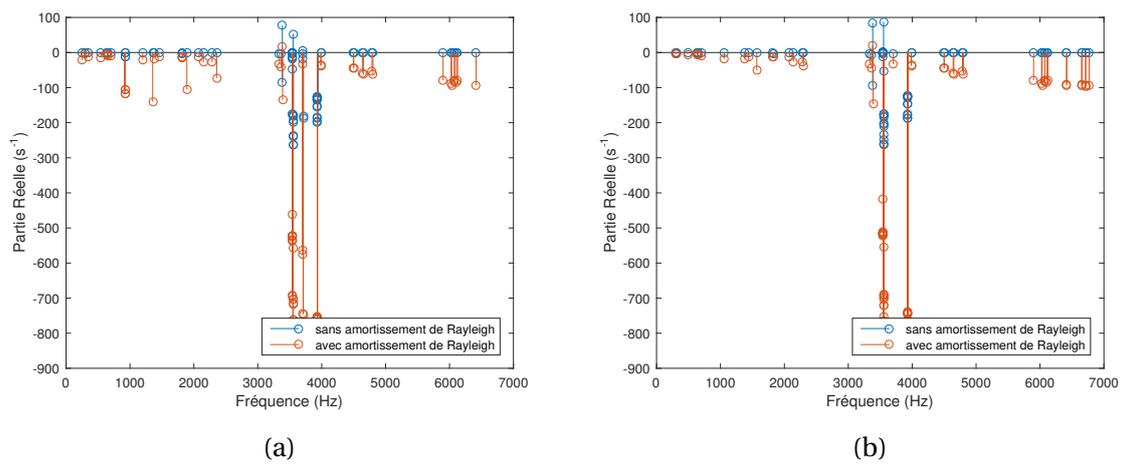
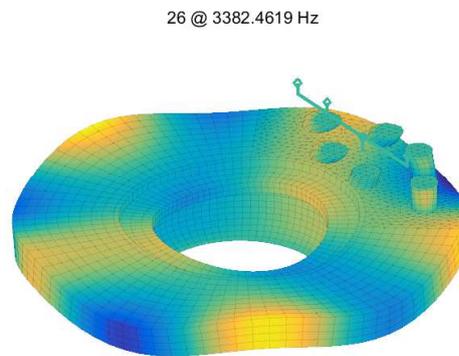
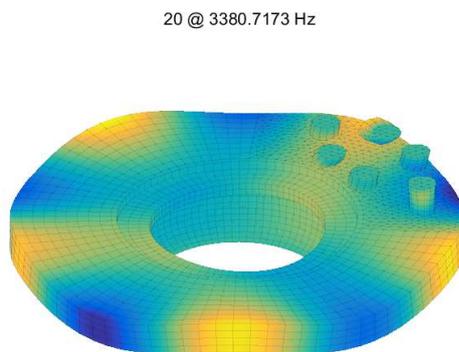


FIGURE 5.10 – Diagrammes de stabilité du Modèle 1 (a) et du Modèle 2 (b) pour  $\mu = 0.2$



(a)



(b)

FIGURE 5.11 – Déformées du mode instable du Modèle 1 (a) et du Modèle 2 (b) pour  $\mu = 0.2$

## 5.4 Analyse non-linéaire

L'occurrence de vibrations auto-entretenues a été déterminée par l'analyse de stabilité. Pour connaître les caractéristiques de ces vibrations (niveau et spectre), une analyse non-linéaire doit compléter celle de la stabilité. Dans cette section l'évolution non-linéaire des perturbations proches de l'équilibre quasi-statique des modèles est déterminée en utilisant la  $\theta$ -méthode présentée dans le Chapitre 2 et des conditions initiales proches de l'équilibre.

### 5.4.1 Méthode numérique pour l'intégration temporelle

#### $\theta$ -méthode

Suite à la discrétisation spatiale et en utilisant le formalisme éléments finis présenté précédemment l'équation du mouvement à résoudre est la suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \quad (5.38)$$

avec

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_n^T \mathbf{R}_n + \mathbf{P}_t^T \mathbf{R}_t + \mathbf{P}_b^T \mathbf{R}_b \quad (5.39)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n &= \mathbf{proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_n - \rho_n \mathbf{G}_n) & \forall \rho_n \text{ diagonale et positive} \\ \{\mathbf{R}_t \quad \mathbf{R}_b\} &= \mathbf{proj}_{\mathcal{D}(\mu\mathbf{R}_n)}\{\mathbf{R}_t - \rho_t(\dot{\mathbf{G}}_t - \mathbf{V}) \quad \mathbf{R}_t - \rho_t \dot{\mathbf{G}}_b\} & \forall \rho_t \text{ diagonale et positive} \end{aligned} \quad (5.40)$$

En utilisant la  $\theta$ -méthode présentée dans l'état de l'art (cf. Chapitre 2) comme schéma d'intégration sur un intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  de longueur  $h$  l'équation du mouvement est réécrite :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{i+1} &= \mathbf{U}^i + h(\theta\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + (1-\theta)\dot{\mathbf{U}}^i) \\ \mathbf{J}\dot{\mathbf{U}}^{i+1} &= \mathbf{E}^{i+1} + \mathbf{R}^{i+1} \end{aligned} \quad (5.41)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{1}{h}(\mathbf{M} + (h\theta)^2\mathbf{K} + h\theta\mathbf{C}) \\ \mathbf{E}^{i+1} &= \mathbf{K}_e\dot{\mathbf{U}}^i - \mathbf{K}\mathbf{U}^i + \mathbf{F} \\ \mathbf{K}_e &= \frac{1}{h}(\mathbf{M} - h(1-\theta)\mathbf{C} - h^2\theta(1-\theta)\mathbf{K}) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Comme pour le modèle simplifié, on choisit les vitesses comme intégrateur. Par conséquent la loi de contact unilatéral est réécrite en terme de vitesses en assurant le respect de la loi de choc inélastique (cf Section 2.5.3). On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n^{i+1} &= \mathbf{proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_n^{i+1} - \rho_n(\dot{\mathbf{G}}_n^{i+1} + \mathbf{B}^i)) & \forall \rho_n \text{ diagonale et positive} \\ \{\mathbf{R}_t^{i+1} \quad \mathbf{R}_b^{i+1}\} &= \mathbf{proj}_{\mathcal{D}(\mu\mathbf{R}_n^{i+1})}\{\mathbf{R}_t^{i+1} - \rho_t(\dot{\mathbf{G}}_t^{i+1} - \mathbf{V}) \quad \mathbf{R}_b^{i+1} - \rho_t \dot{\mathbf{G}}_b^{i+1}\} & \forall \rho_t \text{ diagonale et positive} \end{aligned} \quad (5.43)$$

où

$$\mathbf{B}^i = \frac{1}{h}\mathbf{G}_n^i + (1-\theta)\dot{\mathbf{G}}_n^i \quad (5.44)$$

### Algorithme du point fixe

Comme précisé dans le Chapitre 4, à chaque pas de temps il est nécessaire de déterminer les réactions équivalentes au contact comme un point fixe de la fonction vectorielle  $\mathfrak{F}$  pour résoudre l'équation du mouvement :

$$\mathfrak{F} : (\mathbf{R}) \mapsto [\mathfrak{F}_n(\mathbf{R}) \quad \mathfrak{F}_t(\mathbf{R})] \quad (5.45)$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_n : (\mathbf{R}) &\mapsto \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_n - \boldsymbol{\rho}_n(\mathbf{P}_n \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{B})) \\ \mathfrak{F}_t : (\mathbf{R}) &\mapsto \text{proj}_{\mathcal{D}(\mu \mathbf{R}_n)} \{ \mathbf{R}_t - \boldsymbol{\rho}_t(\mathbf{P}_t \dot{\mathbf{U}} - \mathbf{V}) \quad \mathbf{R}_b - \boldsymbol{\rho}_t \mathbf{P}_b \dot{\mathbf{U}} \} \end{aligned} \quad (5.46)$$

avec

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{R}) \quad (5.47)$$

Par conséquent, à chaque pas de temps, on utilise un algorithme afin de faire converger les réactions de la fonction  $\mathfrak{F}$  vers le point fixe solution en partant de la solution au pas de temps précédent. Le vecteur vitesse est ensuite déterminé ce qui permet de mettre à jour le vecteur déplacement. Les performances de la démarche proposée dépendent alors du choix des paramètres d'augmentation  $\boldsymbol{\rho}_n$  et  $\boldsymbol{\rho}_t$  et du critère de convergence  $\epsilon$ .

Le choix des paramètres d'augmentation est souvent effectué comme étant la plus petite valeur propre de l'intégrateur condensé sur les degrés de liberté correspondant aux déplacements relatifs de contact [59]. Ce choix ne peut s'appliquer à un modèle éléments finis avec des propriétés matériaux trop contrastées. La valeur propre peut alors être très petite comparée à la norme de l'intégrateur condensé ce qui peut mener à de trop petites modifications du Lagrangien et une mauvaise convergence du point fixe.

Loyer [2] propose alors une nouvelle définition des paramètres d'augmentation. Ainsi une estimation de la constante de Lipschitz de la fonction  $\mathfrak{F}$  est proposée en distinguant les paramètres d'augmentation pour chaque noeud de l'interface. On recherche des matrices  $\boldsymbol{\rho}_n$  et  $\boldsymbol{\rho}_t$  comme des approximations diagonales de l'intégrateur condensé.

Une première étape consiste à calculer les paramètres quasi-optimaux  $\boldsymbol{\rho}_{n0}$  et  $\boldsymbol{\rho}_{t0}$  :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{n0} &= \mathbf{D} \left( \boldsymbol{\Psi}_n^s \mathbf{T} \mathbf{J} \boldsymbol{\Psi}_n^s \right) \\ \boldsymbol{\rho}_{t0} &= \frac{1}{2} \mathbf{D} \left( \boldsymbol{\Psi}_t^s \mathbf{T} \mathbf{J} \boldsymbol{\Psi}_t^s + \boldsymbol{\Psi}_b^s \mathbf{T} \mathbf{J} \boldsymbol{\Psi}_b^s \right) \end{aligned} \quad (5.48)$$

où  $\boldsymbol{\Psi}^s = [\boldsymbol{\Psi}_n^s \quad \boldsymbol{\Psi}_t^s \quad \boldsymbol{\Psi}_b^s]$  est la matrice des modes statiques de liaison de l'opérateur  $\mathbf{J}$  sur les degrés à l'interface et  $\mathbf{D}$  est l'opérateur qui transforme toute matrice en matrice diagonale en annulant les termes extra-diagonaux :  $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} = \mathbf{D}(\mathbf{A}) \Leftrightarrow B_{ij} = \delta_{ij} A_{ij}$ . Les modes statiques de liaisons  $\boldsymbol{\Psi}^s$  sont les réponses à des vitesses unitaires sur chacun des degrés de liberté de l'interface, les vitesses des autres degrés de liberté sont nulles :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \boldsymbol{\Psi}^s &= [\mathbf{P}_n \mathbf{T} \quad \mathbf{P}_t \mathbf{T} \quad \mathbf{P}_b \mathbf{T}] \mathbf{R}_s \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_n \\ \mathbf{P}_t \\ \mathbf{P}_b \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^s &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Les paramètres quasi-optimaux ainsi définis ne sont pas utilisés car si les paramètres d'augmentation possèdent une valeur légèrement supérieure à celle des paramètres optimaux, il se peut que l'algorithme diverge rapidement. Pour y remédier, Loyer propose dans une seconde étape d'effectuer une pondération de sécurité en supposant que l'un

des paramètres optimales est trop grand. On définit alors les paramètres d'augmentation effectifs  $\rho_n$  et  $\rho_t$  :

$$\begin{aligned}\rho_n &= \alpha \frac{\min(\text{tr}(\rho_{n0}), \text{tr}(\rho_{t0}))}{\text{tr}(\rho_{n0})} \rho_{n0} \\ \rho_t &= \alpha \frac{\min(\text{tr}(\rho_{n0}), \text{tr}(\rho_{t0}))}{\text{tr}(\rho_{t0})} \rho_{t0}\end{aligned}\quad (5.50)$$

avec  $\alpha$  le paramètre d'ajustement final. Les résultats proposés par la suite sont calculés avec une valeur  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Le paramètre de convergence du point fixe correspond à un critère sur les réactions :

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{R}_{k+1} - \mathbf{R}_k\|}{\|\mathbf{R}_k\|}\quad (5.51)$$

### Condensation statique sur la zone de contact

On remarque que les étapes de prédiction/correction ne sont nécessaires que sur les degrés de liberté des noeuds à l'interface. Ainsi, afin d'augmenter l'efficacité de l'algorithme on se propose d'effectuer ces étapes sur un système réduit issu d'une condensation statique sur les noeuds potentiellement en contact. On introduit l'indice  $c$  correspondant aux noeuds en contact et l'indice  $y$  pour les autres. On décompose alors le système d'équation du mouvement comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{cc} & \mathbf{J}_{cy} \\ \mathbf{J}_{yc} & \mathbf{J}_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_c \\ \dot{\mathbf{U}}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{E}}_c \\ \dot{\mathbf{E}}_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}\quad (5.52)$$

La deuxième ligne permet d'exprimer le vecteur des déplacements en fonction des déplacements à l'interface :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_c \\ \dot{\mathbf{U}}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{cc} & \\ -\mathbf{J}_{yy}^{-1} \mathbf{J}_{yc} & \end{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_c + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{J}_{yy}^{-1} \mathbf{E}_y \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{cs} \dot{\mathbf{U}}_c + \mathbf{B}_{cs}\quad (5.53)$$

Par conséquent la condensation sur la base  $\mathbf{T}_{cs}$  donne :

$$\mathbf{J}_{cs} \dot{\mathbf{U}}_c = \mathbf{E}_c - \mathbf{J}_{yc} \mathbf{J}_{yy}^{-1} \mathbf{E}_y + \mathbf{R} = \mathbf{E}_{cs} + \mathbf{R}\quad (5.54)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{cs} &= \mathbf{T}_{cs}^T \mathbf{J} \mathbf{T}_{cs} \\ \mathbf{E}_{cs} &= \mathbf{E}_c - \mathbf{J}_{yc} \mathbf{J}_{yy}^{-1} \mathbf{E}_y\end{aligned}\quad (5.55)$$

Cette condensation est possible car la matrice  $\mathbf{J}$  est symétrique. Le calcul de  $\mathbf{T}_{cs}$  n'est pas effectué en inversant  $\mathbf{J}_{yy}$ , le terme  $-\mathbf{J}_{yy}^{-1} \mathbf{J}_{yc}$  est directement calculé en cherchant la réponse aux déplacements imposés unitaires des degrés de liberté de contact.

L'algorithme utilisé est décrit par l'Algorithme 4.

### 5.4.2 Résultats

Dans cette section les résultats des analyses non-linéaires des différents modèles sont présentés. Les conditions initiales des calculs de dynamique sont expliquées. Ensuite, pour chaque modèle, l'évolution de la dynamique est commentée en utilisant des outils qui sont alors présentés.

---

**Algorithme 4** Algorithme de résolution dynamique transitoire

---

Données :  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathbf{V}, \mathbf{U}^0, \dot{\mathbf{U}}^0, \epsilon_{tol}, \theta, h, N_h$

Calcul de  $\mathbf{J}$

Calcul de  $\mathbf{K}_e$

Factorisation :  $\mathbf{T}_{cs}, \mathbf{J}_{cs}$

Détermination de  $\rho_n$  et  $\rho_t$

**pour**  $i = 0..(N_h - 1)$  **effectuer**

Calcul de  $\mathbf{E}^{i+1}, \mathbf{B}_{cs}^{i+1}, \mathbf{E}_{cs}^{i+1}$

Calcul de  $\mathbf{B}^i = \frac{1}{h} \mathbf{P}_n \mathbf{U}^i + (1 - \theta) \mathbf{P}_n \dot{\mathbf{U}}^i$

$\mathbf{R}_0^{i+1} = \mathbf{R}^i$

Calcul de  $\dot{\mathbf{U}}_{c_0}^{i+1}$  en résolvant :  $\mathbf{J}_{cs} \dot{\mathbf{U}}_c = \mathbf{E}_{cs}^{i+1} + \mathbf{R}_0^{i+1}$

$\epsilon = \epsilon_{tol} + 1$

$k=0$

**tant que**  $\epsilon > \epsilon_{tol}$  **effectuer**

$\mathbf{R}_{n_{k+1}}^{i+1} = \text{proj}_{\mathbb{R}^+} (\mathbf{R}_{n_k}^{i+1} - \rho_n (\mathbf{P}_n^c \dot{\mathbf{U}}_{c_k}^{i+1} + \mathbf{B}^i))$

$[\mathbf{R}_{t_{k+1}}^{i+1} \quad \mathbf{R}_{b_{k+1}}^{i+1}] = \text{proj}_{\mathcal{D}(\mu \mathbf{R}_{n_{k+1}}^{i+1})} \left\{ \mathbf{R}_{t_k}^{i+1} - \rho_t (\mathbf{P}_t^c \dot{\mathbf{U}}_{c_{k+1}}^{i+1} - \mathbf{V}) \quad \mathbf{R}_{b_k}^{i+1} - \rho_t \mathbf{P}_b^c \dot{\mathbf{U}}_{c_k}^{i+1} \right\}$

Calcul de  $\dot{\mathbf{U}}_{c_{k+1}}^{i+1}$  en résolvant :  $\mathbf{J}_{cs} \dot{\mathbf{U}}_c = \mathbf{E}_{cs}^{i+1} + \mathbf{R}_{k+1}^{i+1}$

$\epsilon = \frac{\|\mathbf{R}_{k+1}^{i+1} - \mathbf{R}_k^{i+1}\|}{\|\mathbf{R}_k^{i+1}\|}$

$k = k + 1$

**fin**

$(\mathbf{R}^{i+1}, \dot{\mathbf{U}}_c^{i+1}) = (\mathbf{R}_k^{i+1}, \dot{\mathbf{U}}_{c_k}^{i+1})$

Décondensation :  $\dot{\mathbf{U}}^{i+1} = \mathbf{T}_{cs} \dot{\mathbf{U}}_c^{i+1} + \mathbf{B}_{cs}^{i+1}$

Calcul des déplacements :  $\mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i + h(\theta \dot{\mathbf{U}}^{i+1} + (1 - \theta) \dot{\mathbf{U}}^i)$

**fin**

---

### Choix des conditions initiales

Afin d'étudier la dynamique transitoire du système, un choix de conditions initiales en déplacements et vitesses sous la forme de projection sur le mode instable  $i$  issu de l'analyse de stabilité a été fait [2, 109]. Ces conditions peuvent alors s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^0 &= \mathbf{U}^e + A\mathfrak{R}(q_i^0 \hat{\Phi}_i) \\ \dot{\mathbf{U}}^0 &= A\mathfrak{R}(q_i^0 \lambda_i \hat{\Phi}_i)\end{aligned}\quad (5.56)$$

où  $\mathbf{U}^e$  est le vecteur de déplacements à l'équilibre,  $q^0$  la contribution modale et  $A$  l'amplitude globale du champ, qui traduit l'amplitude minimale permettant d'observer un phénomène non-linéaire (décollement ou adhérence) correspondant aux limites de l'approximation linéaire. On exprime l'amplitude globale du champ ainsi :

$$A = \tau_s \min(A_d, A_a) \quad (5.57)$$

avec

$$\begin{aligned}A_d &= \min_{j \in \mathcal{C}^e} \left( \frac{R_{nj}^e}{\|q_i^0 R_{nij}\|} \right) \\ A_a &= \min_{j \in \mathcal{C}^e} \left( \frac{V_j}{\|q_i^0 \lambda_i G_{tij}\|} \right)\end{aligned}\quad (5.58)$$

où les  $R_{nij}$  et  $G_{tij}$  correspondent aux composantes du vecteur des réactions normales associé au mode instable  $i$  et celles du vecteur des déplacements tangents relatifs au contact associé au même mode instable :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{ni} &= \mathbf{P}_{n+}^T (\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{C} + \mathbf{K}) \hat{\Phi}_i \\ \mathbf{G}_{ti} &= \mathbf{P}_t \hat{\Phi}_i\end{aligned}\quad (5.59)$$

On rappelle que l'algorithme du point fixe nécessite également une initialisation des forces liées au contact frottant que l'on exprime à partir du mode instable  $i$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_n^0 &= \mathbf{R}_n^e + A\mathfrak{R}(q_i^0 \mathbf{R}_{ni}) \\ \mathbf{R}_t^0 &= \mathbf{R}_t^e + A\mathfrak{R}(q_i^0 \mathbf{R}_{ti}) \\ \mathbf{R}_b^0 &= \mathbf{R}_b^e + A\mathfrak{R}(q_i^0 \mathbf{R}_{bi})\end{aligned}\quad (5.60)$$

avec  $\mathbf{R}_n^e$ ,  $\mathbf{R}_t^e$  et  $\mathbf{R}_b^e$  les vecteurs des réactions à l'équilibre tandis que  $\mathbf{R}_{ti}$  et  $\mathbf{R}_{bi}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{ti} &= \mu \mathbf{R}_{ni} \\ \mathbf{R}_{bi} &= -\mu \lambda_i \text{diag}(c_{bi}) \mathbf{P}_b \hat{\Phi}_i\end{aligned}\quad (5.61)$$

Dans cette étude le paramètre  $\tau_s$  a été fixé à 1 afin de commencer la simulation à l'observation du premier phénomène non-linéaire, ce qui économise du temps de calcul pour atteindre le régime stationnaire. De même la contribution modale  $q_i^0$  est fixée à 1.

### Cas du Modèle 1

Les résultats de simulation correspondant au Modèle 1 avec une condition initiale au premier décollement sont maintenant présentés. La simulation a été effectuée pour une durée de 400 ms avec un pas de temps  $h = 10^{-6}$  s et un critère de tolérance du point fixe  $\epsilon_{tol} = 10^{-5}$ . Ces paramètres conduisent à un nombre total de pas de temps égal à 400000. Afin d'alléger le fichier de résultat, seul un pas de temps sur dix est sauvegardé ( $\Delta t = 10^{-5}$

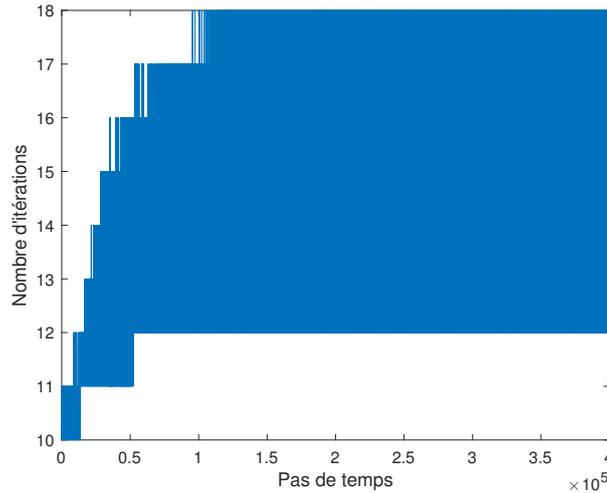


FIGURE 5.12 – Nombre d’itérations de l’algorithme du point fixe en fonction du pas de temps (Modèle 1,  $h = 10^{-6}$  s,  $\epsilon_{tol} = 10^{-5}$ )

s) ce qui correspond à un sous-échantillonnage de la solution à une fréquence de 100000 Hz. La simulation a duré environ une dizaine d’heures sur une machine 6 coeurs Xéon 2.67 GHz. La Figure 5.12 représente le nombre d’itérations à chaque pas de temps. On remarque que le nombre d’itérations est inférieur à 18. Dans une première partie ce nombre croît jusqu’à atteindre sa valeur maximale (transitoire fortement non-linéaire). Puis dans la seconde partie le nombre d’itérations maximale sature et le nombre d’itération oscille entre 12 et 18 (stationnaire fortement non-linéaire).

**Décollements** La variation des nœuds en contact glissant et décollement est donnée Figure 5.13. Premièrement on ne constate aucun phénomène adhérent lors de cette simulation. Cela peut s’expliquer par la valeur assez grande de la vitesse de rotation qui impose des vitesses de glissement quasi-statiques au contact plus importantes que les vibrations nécessaires à la saturation par décollement. On observe ensuite que le nombre de décollement augmente progressivement jusqu’à se stabiliser pour une valeur maximale d’environ 65. Une fois cette saturation atteinte, il oscille entre 35 et 65 nœuds en décollement simultanément. Cette observation soutient alors l’hypothèse effectuée selon laquelle les phénomènes non-linéaires (de type décollement ici) qui par saturation de l’énergie injectée dans le contact conduisent au régime stationnaire par une baisse du taux de puissance moyen injectée au contact.

**Variation d’énergie mécanique** Les Figures 5.14 montrent les évolutions de l’énergie mécanique du système  $E(t)$  et de la variation d’énergie mécanique  $\frac{\partial E}{\partial t}(t)$  calculées selon les formules suivantes :

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E(t) - E(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Les évolutions moyennes de ces quantités sont calculées sur des fenêtres temporelles glissantes de taille  $\Delta T = 10$  ms avec un taux de recouvrement de 50%, ce qui correspond à 80 fenêtres pour une durée de simulation de 400 ms :

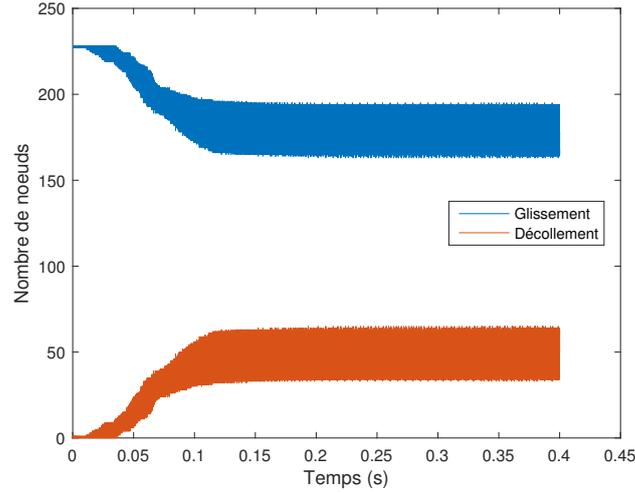


FIGURE 5.13 – Statuts des noeuds au cours du temps (Modèle 1)

$$\begin{aligned}\bar{E}(t_j) &= \frac{1}{n_T} \sum_{k \in \tau_j} E(t_k) \\ \frac{\bar{\partial}E}{\partial t} &= \frac{\Delta E(t_j)}{\Delta T} = \frac{E(t_j + \frac{\Delta T}{2}) - E(t_j - \frac{\Delta T}{2})}{\Delta T}\end{aligned}\quad (5.63)$$

où  $n_T$  est le nombre de pas de temps sur la durée  $\Delta T$  et  $\tau_j$  est l'ensemble des pas de temps  $k$  tel que  $|t_k - t_j| \leq \frac{\Delta T}{2}$ . On distingue alors trois étapes qui sont la croissance, la saturation et la stabilisation. En observant la variation d'énergie mécanique autour de 100 ms, on constate une légère décroissance de cette dernière.

On ajoute aussi le taux de variation relatif d'énergie mécanique moyenne hors équilibre  $\bar{\tau}_E(t)$  en  $s^{-1}$  donné par :

$$\bar{\tau}_E = \frac{1}{\bar{E}} \frac{\bar{\partial}E}{\partial t}\quad (5.64)$$

où  $\bar{E}$  et  $\frac{\bar{\partial}E}{\partial t}$  sont calculées en enlevant les contribution de l'équilibre quasi-statique.

Contrairement au modèle académique, la valeur initiale du taux de variation de l'énergie mécanique n'est pas égale à deux fois la partie réelle du mode instable ( $17.0 s^{-1}$ ). On suppose que cela résulte du fait que le calcul est initialisé au premier décollement (et non pas à 10% du premier décollement comme pour le modèle académique) et par conséquent n'est plus en régime linéaire. Cette quantité décroît pour atteindre une valeur inférieure à  $1 s^{-1}$ . On peut alors utiliser cet indicateur afin de caractériser la solution stationnaire.

**Effort de freinage** Afin de vérifier le changement ou non d'équilibre on se propose d'illustrer l'évolution de l'effort de freinage effectif  $N_b$ . L'évolution moyennée de l'effort de freinage est calculée comme suit :

$$\bar{N}_b(t_j) = \frac{1}{n_t} \sum_{k \in \tau_j} N_b(t_k)\quad (5.65)$$

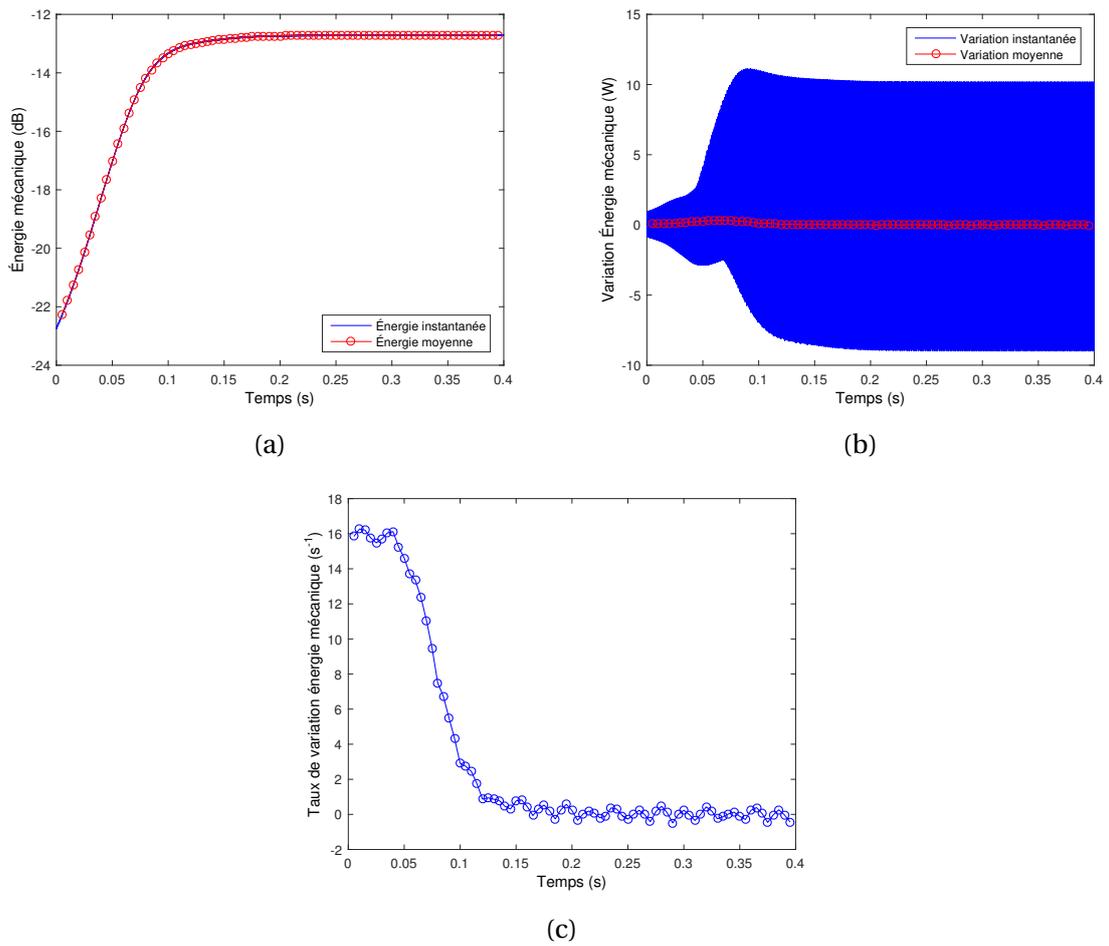


FIGURE 5.14 – Évolution de l'énergie mécanique (Modèle 1)

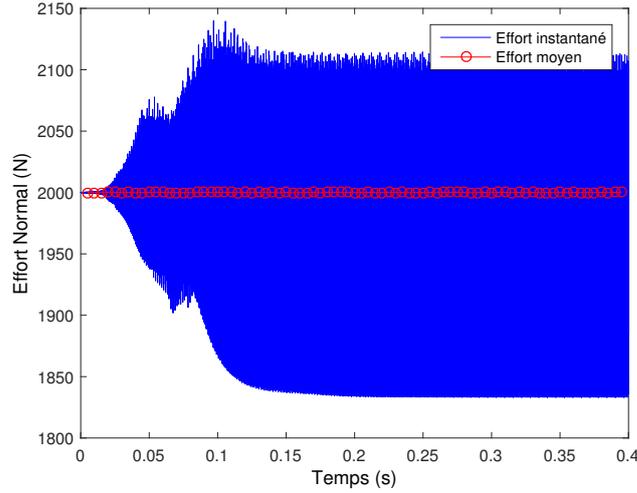


FIGURE 5.15 – Effort de freinage au cours du temps (Modèle 1)

La Figure 5.15 représente l'évolution de l'effort de freinage. On constate que la quantité moyennée est égale à 2000 N ce qui ne traduit pas un changement fort de l'équilibre statique.

**Analyse spectrale** La Figure 5.16 montre le spectrogramme énergétique de la solution déterminé à partir des spectres glissants  $\hat{\mathbf{U}}(f_k, t_j)$  et  $\hat{\mathbf{V}}(f_k, t_j)$  des évolutions temporelles des déplacements et des vitesses respectivement. On note que le spectre glissant d'une variable  $x(t)$  est calculé à partir de transformées de Fourier discrètes, telles que :

$$\tilde{x}(f_k, t_j)_{1 \leq j \leq n_T} = \frac{1}{n_T} \text{FFT}(x(t_k)_{k \in \tau_j}) \quad (5.66)$$

Seules les fréquences positives des spectres de raies données par  $f_k = \frac{k-1}{\Delta T}$  avec  $k \leq \frac{n_T}{2} + 1$  sont conservées en doublant la contribution des fréquences non-nulles :

$$\begin{aligned} \hat{x}(0, t_j) &= \tilde{x}(0, t_j) \\ \hat{x}(f_k, t_j) &= 2\tilde{x}(f_k, t_j) \quad \forall k : 1 \leq k \leq \frac{n_T}{2} + 1 \end{aligned} \quad (5.67)$$

ainsi pour chaque fenêtre glissante il est possible de déterminer l'énergie mécanique  $\hat{E}$  calculée à partir des transformées en vitesses et déplacements. Pour les fréquences non-nulles cette énergie est donnée par :

$$\forall f_k \neq 0 \quad \hat{E} = \frac{1}{4} \hat{\mathbf{U}}^{*T} \mathbf{K} \hat{\mathbf{U}} + \frac{1}{4} \hat{\mathbf{U}}^{*T} \mathbf{M} \hat{\mathbf{U}} \quad (5.68)$$

tandis que la partie non-oscillante s'écrit :

$$\text{pour } f_k = 0 \quad \hat{E} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}^{*T} \mathbf{K} \hat{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{U}}^{*T} \mathbf{M} \hat{\mathbf{U}} \quad (5.69)$$

On constate alors que l'énergie mécanique se répartit entre une fondamentale et ses harmoniques.

**Analyse du régime stationnaire** On analyse maintenant le régime stationnaire obtenu. La Figure 5.17 représente l'évolution de la zone de contact des garnitures supérieures. On constate que des phénomènes non-linéaires de type décollement/choc se produisent. Sur la Figure 5.17(h) est représenté le nœud 1864 pour lequel les déplacements dans le repère

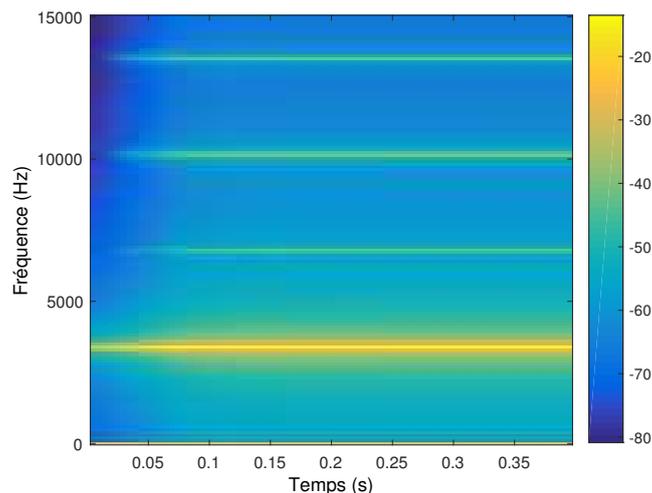


FIGURE 5.16 – Spectrogramme de l'énergie mécanique moyenne  $\hat{E}$  en dB (Modèle 1)

Nom	Valeur	Unité
Énergie mécanique moyenne	0.0503	J
Taux de puissance mécanique	0.02765	$s^{-1}$
Taux de puissance dissipée par amortissement	363.7	$s^{-1}$
Taux de puissance injectée par le frottement	371.62	$s^{-1}$
Taux de puissance due aux chocs	-7.8962	$s^{-1}$
Bilan de puissance	$-6.7057 \times 10^{-15}$	adimensionné

TABLEAU 5.3 – Taux moyens relatifs de puissance et bilan de puissance moyen dans le régime stationnaire (Modèle 1)

relatif au contact ainsi que les portraits de phase sont tracés en Figure 5.18. Sur la Figure 5.18(c) on observe qu'un seul décollement se produit par période. L'impact peut être observé sur le portrait de phase selon la direction normale Figure 5.18(f) : il est représenté par une variation de la vitesse normale pour un déplacement relatif nul. Les discontinuités observées sur ce portrait de phase avant le recollement (cf. Figure 5.18(f)) sont dues aux recollements des nœuds au voisinage.

Enfin l'énergie mécanique moyenne ainsi que les différents taux de puissance moyens et le bilan de puissance moyen relatif hors équilibre sont proposés dans le Tableau 5.3. On remarque que le bilan de puissance relatif moyen est vérifié. De plus, on constate que l'ensemble de la puissance du système est injectée par les réactions de frottement et dissipée par amortissement visqueux ou choc. Cela confirme l'hypothèse d'établissement du régime stationnaire : les phénomènes non-linéaires de type décollement/impact, mènent à une égalité entre la puissance moyenne injectée par le frottement et les puissances moyennes dissipées par amortissement et par les chocs.

## Cas du Modèle 2

Les résultats de simulation correspondant au Modèle 2 avec une condition initiale au premier décollement sont maintenant présentés. La simulation a été effectuée pour une durée de 400 ms avec un pas de temps  $h = 10^{-6}$  s et un critère de tolérance du point fixe  $\epsilon_{tol} = 10^{-5}$ . Ces paramètres conduisent à un nombre total de pas de temps égal à 400000.

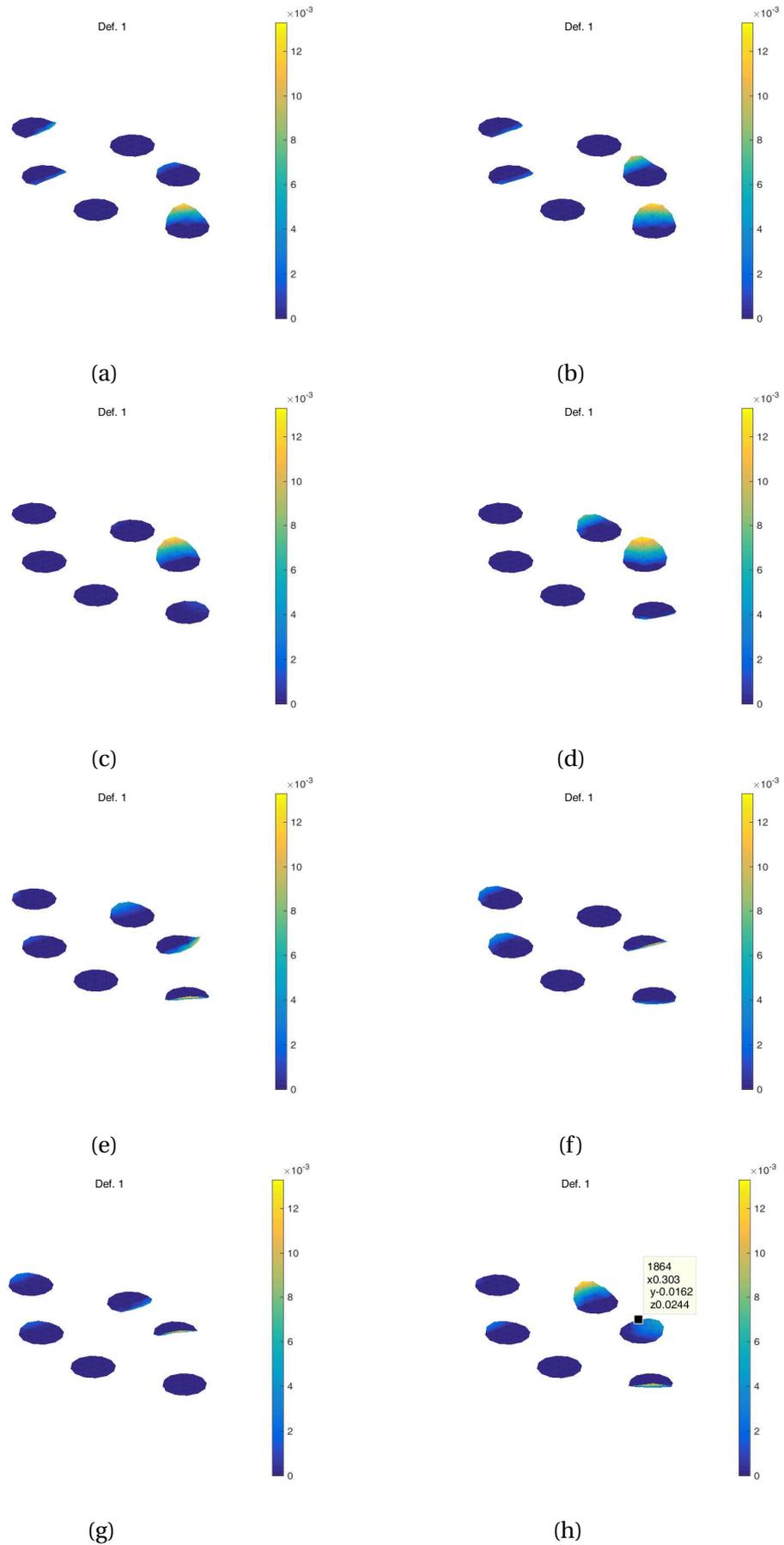


FIGURE 5.17 – Évolution de la zone de contact supérieure en régime stationnaire (Modèle 1)

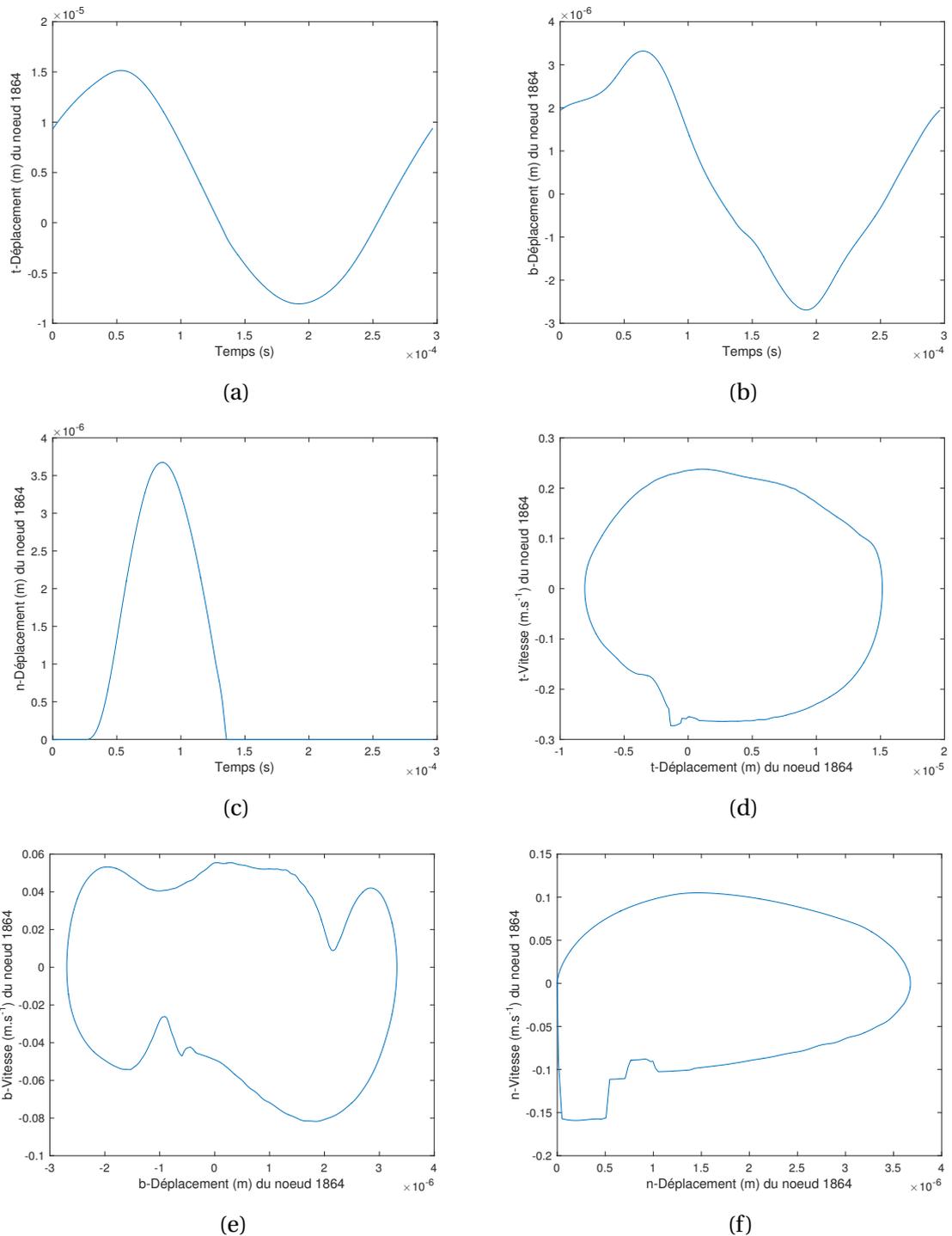


FIGURE 5.18 – Évolution des déplacements selon le repère relatif au contact (a), (b) et (c) et portraits de phase (d), (e) et (f) du nœud 1864 (Modèle 1)

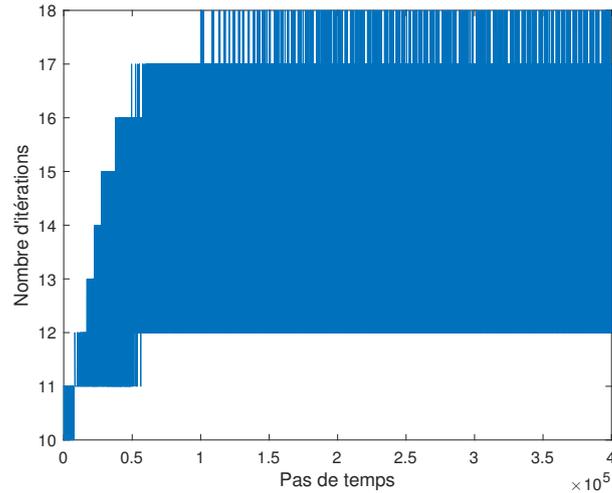


FIGURE 5.19 – Nombre d’itérations de l’algorithme du point fixe en fonction du pas de temps (Modèle 2,  $h = 10^{-6}$  s,  $\epsilon_{tol} = 10^{-5}$ )

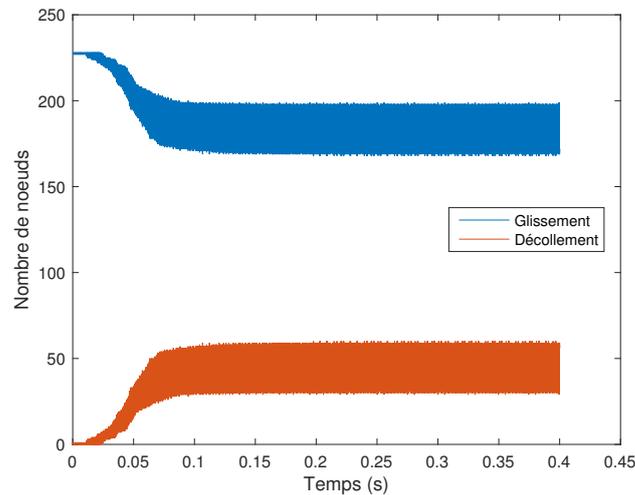


FIGURE 5.20 – Statuts des noeuds au cours du temps (Modèle 2)

Comme pour le Modèle 1, seul un pas de temps sur dix est sauvegardé ( $\Delta t = 10^{-5}$  s) ce qui correspond à un sous-échantillonnage de la solution à une fréquence de 100000 Hz. La simulation a duré environ une dizaine d’heures sur une machine 6 coeurs Xéon 2.67 GHz. La Figure 5.19 représente le nombre d’itération à chaque pas de temps. On remarque que le nombre d’itérations est inférieur à 18. L’évolution de ce nombre d’itérations est similaire au Modèle 1.

**Décollements** La variation des nœuds en contact glissant et décollement est donnée Figure 5.20. Premièrement, comme pour le Modèle 1, on ne constate aucun phénomène adhérent lors de cette simulation. On observe ensuite que le nombre de décollement augmente progressivement jusqu’à se stabiliser pour une valeur maximale d’environ 60. Une fois cette saturation atteinte, il oscille entre 30 et 60 nœuds en décollement simultanément.

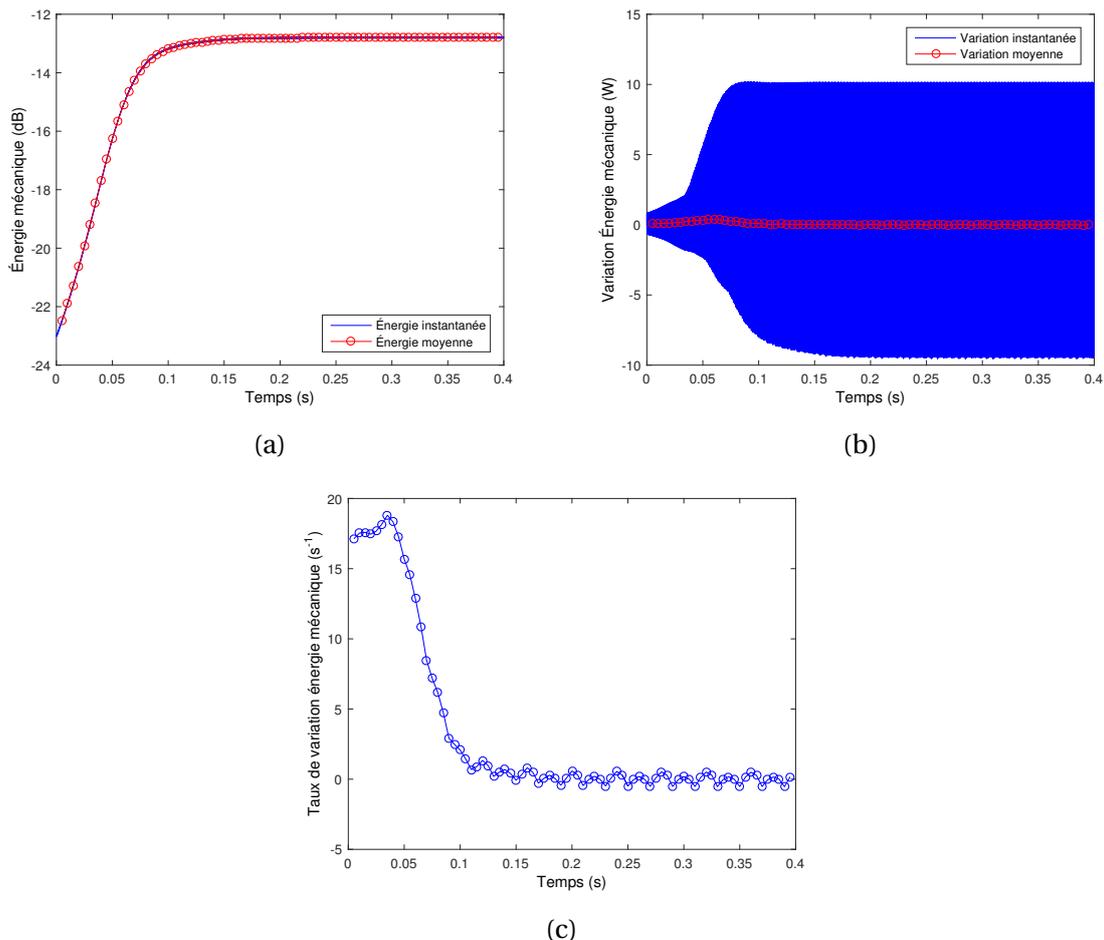


FIGURE 5.21 – Évolution de l'énergie mécanique (Modèle 2)

**Variation d'énergie mécanique** Les Figures 5.21 montrent les évolutions de l'énergie mécanique du système  $E(t)$  et de la variation d'énergie mécanique  $\frac{\partial E}{\partial t}(t)$  ainsi que le taux de variation relatif d'énergie mécanique moyenne hors équilibre  $\bar{\tau}_E(t)$  en  $s^{-1}$ . Comme pour le cas 1, on observe une légère augmentation puis diminution de la variation de l'énergie mécanique entre 50 et 100 ms.

**Effort de freinage** La Figure 5.22 représente l'évolution de l'effort de freinage. On remarque un comportement différent de celui du Modèle 1. En effet, on constate un changement d'équilibre par une variation de l'effort de freinage. Ce phénomène est lié aux contraintes en déplacements sur les faces externes des plots qui permettent une augmentation de l'effort de freinage. Ainsi le Modèle 2 permettra de vérifier la démarche non-linéaire développée dans ces travaux sur un cas avec changement d'équilibre quasi-statique.

**Analyse spectrale** La Figure 5.23 montre le spectrogramme énergétique de la solution déterminé à partir des spectres glissants. On constate alors que l'énergie mécanique se répartit sur une fondamentale et ses harmoniques.

**Analyse du régime stationnaire** On analyse maintenant le régime stationnaire obtenu. La Figure 5.24 représente l'évolution de la zone de contact des garnitures supérieures. On

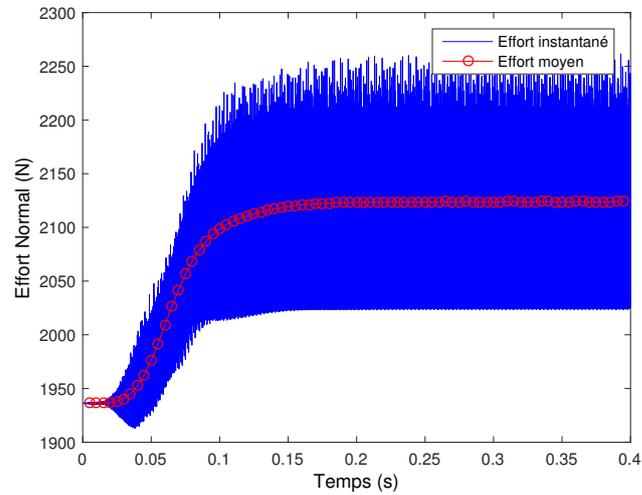


FIGURE 5.22 – Effort de freinage au cours du temps (Modèle 2)

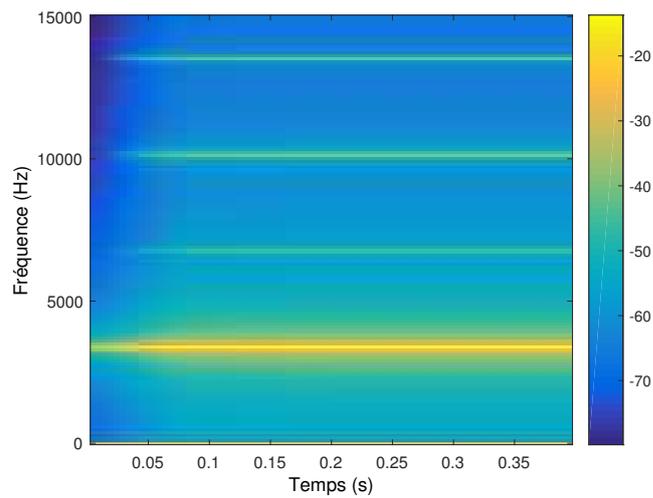


FIGURE 5.23 – Spectrogramme de l'énergie mécanique moyenne  $\hat{E}$  en dB (Modèle 2)

Nom	Valeur	Unité
Énergie mécanique moyenne	0.0514	J
Taux de puissance mécanique	-0.18073	s <sup>-1</sup>
Taux de puissance dissipée par amortissement	356.44	s <sup>-1</sup>
Taux de puissance injectée par le frottement	364.54	s <sup>-1</sup>
Taux de puissance due aux chocs	-8.2753	s <sup>-1</sup>
Bilan de puissance	$4.1078 \times 10^{-15}$	adimensionné

TABLEAU 5.4 – Taux moyens relatifs de puissance et bilan de puissance moyen (Modèle 2)

constate que des phénomènes non-linéaires de type décollement/choc se produisent. Sur la Figure 5.24(h) est représenté le nœud 1864 pour lequel les déplacements dans le repère relatif au contact ainsi que les portraits de phase sont tracés en Figure 5.18. Sur la Figure 5.25(c) on observe qu'un seul décollement se produit par période. L'impact peut être observé sur le portrait de phase selon la direction normale Figure 5.18(f) : il est représenté par une variation de la vitesse normale pour un déplacement relatif nul. Les discontinuités observées sur ce portrait de phase avant le recollement (cf. Figure 5.25(f)) sont dues aux recollements des nœuds au voisinage.

Enfin l'énergie mécanique moyenne ainsi que les différents taux de puissance moyen et le bilan de puissance moyen relatif hors équilibre sont proposés dans le Tableau 5.4. Comme pour le Modèle 1, on remarque que le bilan de puissance relatif moyen est vérifié. De plus, on constate que l'ensemble de la puissance du système est injectée par les réactions de frottement et dissipée par amortissement visqueux ou choc.

Les résultats obtenus avec ce modèle sont donc très proches de ceux correspondant au Modèle 1 excepté en ce qui concerne la variation de l'effort de freinage et donc le changement d'équilibre.

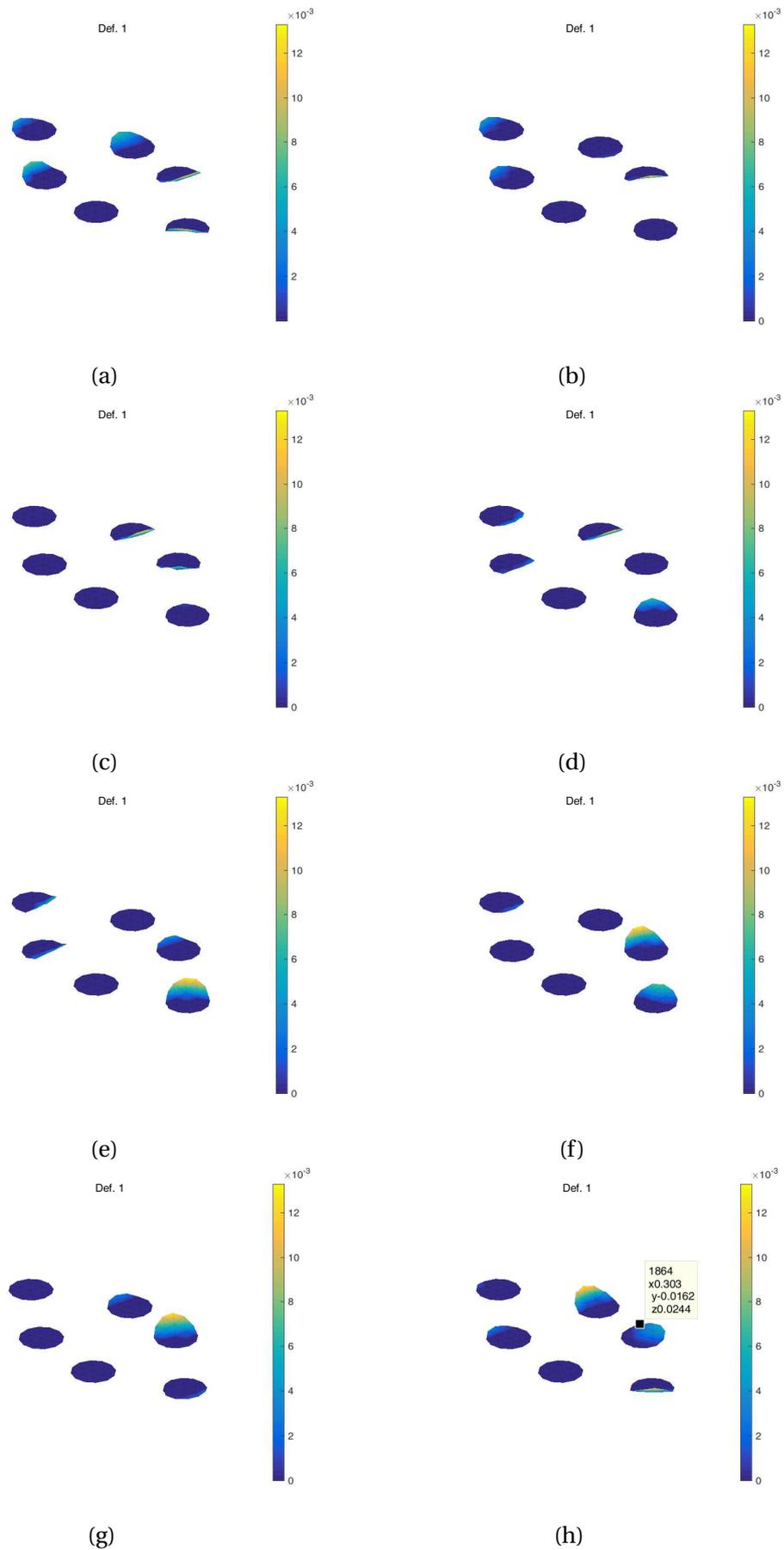


FIGURE 5.24 – Évolution de la zone de contact supérieure en régime stationnaire (Modèle 2)

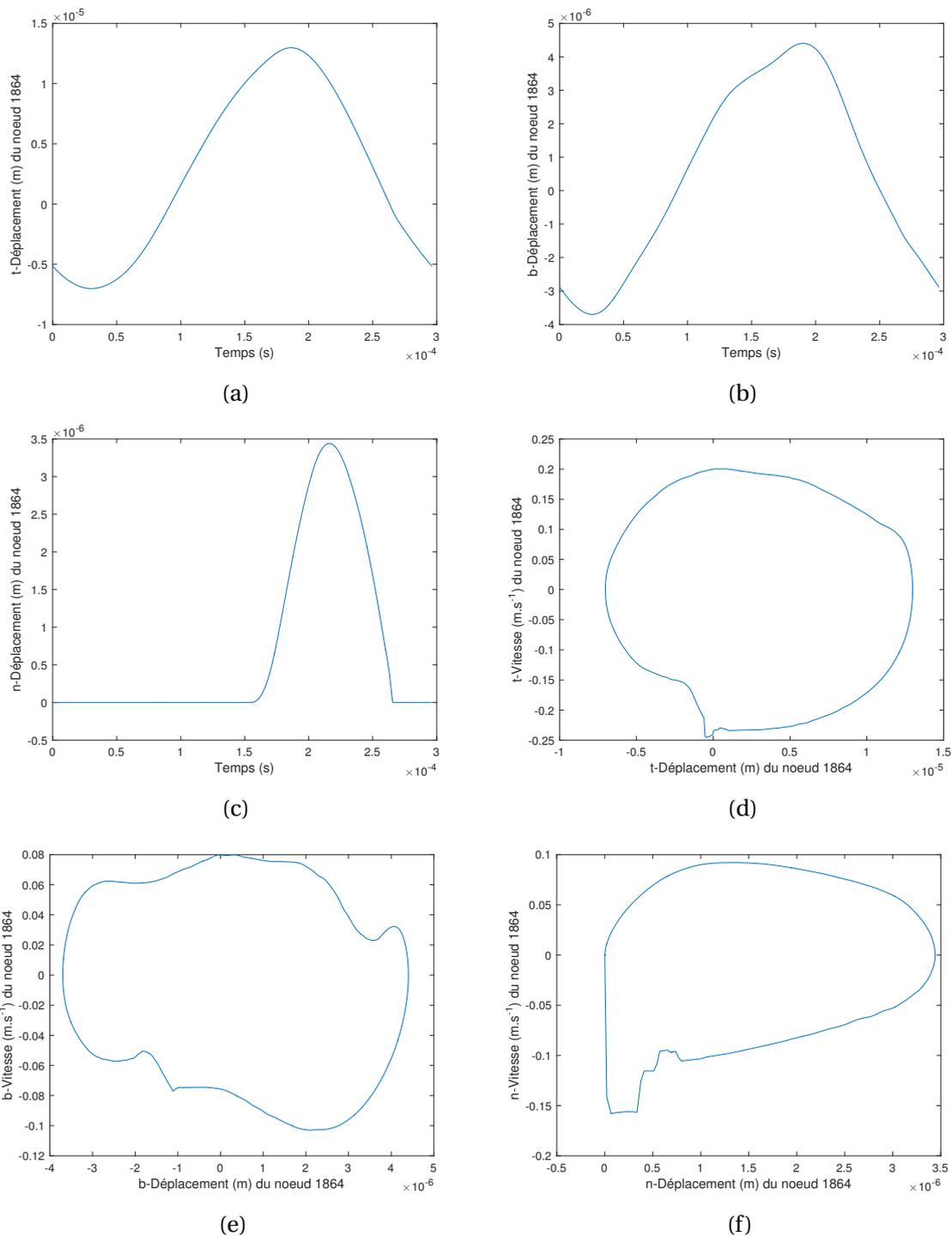


FIGURE 5.25 – Évolution des déplacements selon le repère relatif au contact (a), (b) et (c) et portraits de phase (d), (e) et (f) du nœud 1864 (Modèle 2)

## 5.5 Méthode de tir appliquée à un modèle éléments finis

Dans la section précédente, on a pu constater que le temps de calcul d'une simulation d'une durée de 400 ms était d'environ une dizaine d'heures. Cette durée de simulation est nécessaire afin de s'assurer de la fin de l'évolution transitoire et de l'obtention du régime stationnaire. Dans cette section, la méthode de tir est adaptée aux modèles éléments finis afin de réduire le temps de calcul pour l'obtention du régime stationnaire.

On rappelle que les cas d'étude traités ne sont soumis qu'à un mode instable et sont qualifiés par la suite de mono-instable. Le principe de la méthode de tir est exposé dans l'état de l'art (cf. Chapitre 2). On rappelle ici les deux difficultés majeures pour son application à des cas industriels. La première est son initialisation : une méthode basée sur une observation des phénomènes à l'origine des vibrations auto-entretenues a été proposée dans le Chapitre 4 afin d'initialiser la méthode de tir dans le cas de recherche d'un régime périodique pour un système académique mono-instable. Cette méthode d'initialisation est testée dans le cas d'un modèle éléments finis. La seconde difficulté est le calcul de la matrice de monodromie. Lors de l'application de la méthode de tir dans le Chapitre 4, deux méthodes sont proposées et testées. Cependant ces deux méthodes ne sont appropriées que pour des modèles avec peu de degrés de liberté car à chaque itération de la méthode de tir, le nombre d'intégrations sur une période à effectuer est égale au nombre de degrés de liberté et une matrice de grande taille doit être intégrée sur une période. Le coût de calcul de la matrice exacte serait donc exorbitant. Le développement d'une démarche pour un calcul de la matrice de monodromie à faible coût est alors proposé. Ce type d'approche consistant à réduire la matrice de monodromie, bien que peu employé, a toutefois été abordée par exemple dans les travaux de Kuether [73].

Cette section s'organise donc ainsi : dans un premier temps la méthode de calcul réduit de la matrice de monodromie et par conséquent l'adaptation de la méthode de tir à un modèle industriel est présentée puis l'initialisation de cette méthode par estimation énergétique est formulée. Enfin cette démarche est appliquée aux deux modèles éléments finis et les résultats obtenus sont comparés avec ceux issus de l'intégration temporelle directe effectuée dans la section précédente.

### 5.5.1 Adaptation de la méthode de tir aux modèles industriels : réduction de l'espace des phases initial

L'une des difficultés de l'application de la méthode de tir à un modèle éléments finis est le nombre de degrés de liberté du modèle qui est souvent très important. En effet la méthode de tir est une démarche itérative permettant de trouver des conditions initiales et une période qui assurent un mouvement périodique du système (cf. Chapitre 2). Ainsi un grand nombre de degrés de liberté implique un vecteur de conditions initiales important. On développe ici une démarche permettant ainsi de réduire le nombre de degrés de liberté sur lesquels la méthode de tir itère.

On recherche alors les conditions initiales dans un espace de phase réduit de la forme :

$$\mathbf{Z}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \dot{\mathbf{U}}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{\text{stat}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \quad (5.70)$$

où  $\mathbf{T}_0$  est une base réduite réelle de taille  $m$  du champs de déplacements,  $\mathbf{Q}_0$  le vecteur d'amplitudes en déplacement et vitesse associé et  $\mathbf{U}_{\text{stat}}$  un champ statique.

Ainsi l'objectif est d'itérer sur le vecteur  $\mathbf{Q}_0$  afin de rechercher les amplitudes permettant d'obtenir les conditions initiales approximant le mieux un régime périodique. Si l'on

note  $N$  le nombre de degrés de liberté du système mécanique étudié et  $m$  le nombre de mode de la base  $\mathbf{T}_0$  avec  $N \gg m$ , une méthode de tir classique doit itérer alors sur  $2N + 1$  inconnues alors qu'en utilisant la projection des conditions initiales il ne reste que  $2m + 1$  inconnues. **On insiste sur le fait que seules les conditions initiales sont projetées sur la base  $\mathbf{T}_0$  et non la dynamique du système. Cette dernière est conservée inchangée et est résolue en utilisant l'algorithme d'intégration présenté dans la section précédente.**

Dans la pratique, la base  $\mathbf{T}_0$  est orthonormalisée par rapport à la matrice de masse  $\mathbf{M}$  et orthogonalisée par rapport à la matrice de raideur  $\mathbf{K}$ . La base  $\mathbf{T}$  résulte de cette opération et on note alors  $\mathbf{Q}$  le vecteur d'amplitudes modales en déplacement et vitesse recherchées. On a alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{Q} \quad (5.71)$$

tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} &\text{ diagonale} \end{aligned} \quad (5.72)$$

avec  $\mathbf{Q} = \{q_1 \dots q_n \ p_1 \dots p_n\}^T$  et  $\mathbf{T} = [\Phi_1 \dots \Phi_m]$ .

À chaque itération, les corrections apportées au vecteur  $\mathbf{Q}$  ainsi qu'à la période  $T$  sont calculées en projetant le système (2.84) sur la base  $\mathbf{T}$  :

$$\mathbf{H}_q^i + \left. \frac{\partial \mathbf{H}_q}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}^i, T^i} \Delta \mathbf{Q}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{H}_q}{\partial t} \right|_{\mathbf{Q}^i, T^i} \Delta T^i = 0 \quad (5.73)$$

où  $\mathbf{H}_q$  est la projection de la condition de périodicité sur la base  $\mathbf{T}$ . Ce vecteur de taille  $2m \times 1$  traduit la condition de périodicité en amplitude. Chaque composante du vecteur est exprimée ainsi :

$$\left. \begin{aligned} H_{q_j} &= \Phi_j^T \mathbf{M}(\mathbf{U}(\mathbf{Q}, t = T) - \mathbf{U}_{\text{stat}}) - q_j \\ H_{q_{j+m}} &= \Phi_j^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{Q}, t = T) - p_j \end{aligned} \right\} \forall j : 1 \leq j \leq m \quad (5.74)$$

Comme mis en évidence dans l'Équation (5.73), cette procédure requiert le calcul des deux dérivées partielles de  $\mathbf{H}_q(\mathbf{Q}, T)$ . Le vecteur  $2m \times 1$   $\partial \mathbf{H}_q / \partial t$  est donnée par :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}_q}{\partial t} \right|_{\mathbf{Q}^i, T^i} = \left. \frac{\partial \mathbf{Z}_q(\mathbf{Q}^i, t)}{\partial t} \right|_{t=T^i} = \mathbf{G}_q(\mathbf{Z}(\mathbf{Q}^i, T^i)) \quad (5.75)$$

où  $\mathbf{G}_q$  est la projection de l'équation du mouvement en variable d'état sur la base  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{Z}_q$  la projection du vecteur d'état sur la base  $\mathbf{T}$ . On a alors :

$$\left. \begin{aligned} G_{q_j} &= \Phi_j^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{Q}, T) \\ G_{q_{j+m}} &= \Phi_j^T (\mathbf{E} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{Q}, T) - \mathbf{K}(\mathbf{U}(\mathbf{Q}, T) - \mathbf{U}_{\text{stat}})) \end{aligned} \right\} \forall j : 1 \leq j \leq m \quad (5.76)$$

avec  $\mathbf{E} = \mathbf{F} + \mathbf{R}(\mathbf{Q}, T)$ . La matrice  $2m \times 2m$   $\partial \mathbf{H}_q / \partial \mathbf{Q}$  est donné par :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{H}_q}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}^i, T^i} = \left. \frac{\partial \mathbf{Z}_q}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}^i, T^i} - \mathbf{I} \quad (5.77)$$

où  $\mathbf{I}$  correspond à la matrice identité. La matrice de monodromie  $\left. \frac{\partial \mathbf{Z}_q}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}^i, T^i}$  représente la variation des amplitudes modales dans la solution finale à  $T$  pour des conditions initiales perturbées  $\mathbf{Q}$ . Il s'agit de la matrice de monodromie projetée sur la base  $\mathbf{T}$ , une matrice

$2m \times 2m$  T-periodique qui sera notée par la suite  $\mathbf{J}_q$ . Chaque colonne de cette matrice est calculée suite à une perturbation d'une amplitude du vecteur  $\mathbf{Q}$ . Pour  $1 \leq k \leq 2m$  le vecteur perturbé à l'amplitude  $k$  est défini par :

$$\mathbf{Q} + \delta Q_k \mathbf{e}_k \quad \forall k : 1 \leq k \leq 2m \quad (5.78)$$

où  $\mathbf{e}_k$  représente la  $k^{ieme}$  colonne de la matrice de identité,  $Q_k$  la  $k^{ieme}$  composante de  $\mathbf{Q}$  et  $\delta$  le taux de perturbation. La  $k^{ieme}$  colonne de la matrice de monodromie projetée est alors donnée par :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}_q|_j^k &= \frac{\Phi_j^T \mathbf{M}(\mathbf{U}(\mathbf{Q} + \delta Q_k \mathbf{e}_k, T) - \mathbf{U}(\mathbf{Q}, T))}{\delta Q_k} \\ \mathbf{J}_q|_{j+m}^k &= \frac{\Phi_j^T \mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{Q} + \delta Q_k \mathbf{e}_k, T) - \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{Q}, T))}{\delta Q_k} \end{aligned} \right\} \forall j : 1 \leq j \leq m \quad (5.79)$$

Cette méthode permet de calculer alors la jacobienne en utilisant  $2m$  intégrations temporelles sur une période T qui peuvent être menées en parallèle pour une optimisation du temps de calcul. Cependant il s'agit bien d'une matrice de monodromie approchée et non-exacte.

Il est alors possible de résoudre le système (5.73). Les amplitudes et la période corrigées sont alors données par :

$$\mathbf{Q}^{i+1} = \mathbf{Q}^i + \Delta \mathbf{Q}^i \quad (5.80)$$

$$T^{i+1} = T^i + \Delta T^i \quad (5.81)$$

On itère ainsi jusqu'à satisfaction des critères de convergences :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_q &< \epsilon_1 \\ \epsilon_T &= \frac{\Delta T^i}{T^{i+1}} < \epsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.82)$$

avec  $\epsilon_q$  un critère énergétique permettant d'assurer l'équivalence entre les amplitudes en vitesse et en déplacement :

$$\epsilon_q = \frac{\sum_{j=1}^m (k_j^2 H_{q_j}^2 + H_{q_{j+m}}^2)}{\sum_{j=1}^m (k_j^2 q_j^2 + p_j^2)} \quad (5.83)$$

où les  $k_j$  résultent de l'orthogonalisation de la base par rapport à la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  :

$$k_j^2 = \Phi_j^T \mathbf{K} \Phi_j \quad \forall j : 1 \leq j \leq m \quad (5.84)$$

L'algorithme utilisé est explicité par l'Algorithme 5.

### 5.5.2 Adaptation de l'initialisation énergétique de la méthode de tir

La méthode de tir étant maintenant formulée afin de diminuer le coût de calcul de son application à un modèle éléments finis, il reste à déterminer une méthode permettant d'initialiser l'algorithme itératif de recherche de solution périodique. Dans la Section 4.6.3, une démarche énergétique a été proposée afin d'initialiser la méthode de tir. Cette démarche a été développée pour un modèle académique avec un faible nombre de degrés de liberté en observant les phénomènes conduisant à l'établissement des vibrations auto-entrenues stationnaires. Les résultats obtenus étant satisfaisants, on propose

---

**Algorithme 5** Algorithme de résolution dynamique transitoire

---

Données :  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathbf{T}_0, \mathbf{Q}_0, T^0, \epsilon_1, \epsilon_2$

Orthonormalisation de  $\mathbf{T}_0$  par rapport à  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  :  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{Q}^0$

$\epsilon_q = \epsilon_1 + 1$

$\epsilon_T = \epsilon_2 + 1$

$i = 0$

**tant que**  $\epsilon_q > \epsilon_1$  &  $\epsilon_T > \epsilon_2$  **effectuer**

Création des conditions initiales perturbées pour le calcul de  $\mathbf{J}_q$

$2m+1$  intégrations temporelles sur une période  $T^i$  suivant les amplitudes initiales  $\mathbf{Q}^i$   
et les conditions initiales perturbées

Calcul de  $\mathbf{H}_q^i$

Calcul de  $\mathbf{G}_q^i$

Calcul de  $\mathbf{J}_q^i$

Résolution du système :  $\mathbf{H}_q^i + \frac{\partial \mathbf{H}_q}{\partial \mathbf{Q}} \Big|_{\mathbf{Q}^i, T^i} \Delta \mathbf{Q}^i + \frac{\partial \mathbf{H}_q}{\partial t} \Big|_{\mathbf{Q}^i, T^i} \Delta T^i = 0$

Correction sur les amplitudes :  $\mathbf{Q}^{i+1} = \mathbf{Q}^i + \Delta \mathbf{Q}^i$

Correction de la période :  $T^{i+1} = T^i + \Delta T^i$

Calcul des critères de convergence :  $\epsilon_q$  et  $\epsilon_T$

$i=i+1$

**fin**

---

dans cette section de reformuler cette méthode afin de l'adapter aux modèles éléments finis étudiés dans ce chapitre.

On rappelle que cette approche d'initialisation est décomposée en deux étapes. La première consiste à approximer la solution auto-entretenu stationnaire du système en utilisant les déformées propres des modes complexes instables issus de l'analyse de stabilité (linéaire). La deuxième mène au calcul d'un bilan de puissance du système en considérant une saturation non-linéaire des réactions de contact frottant. Ce processus résulte en une estimation de conditions initiales pour la méthode de tir.

Comme pour le modèle académique, la solution stationnaire est approximée en supposant qu'elle est périodique et gouvernée par le mode instable issu de l'analyse de stabilité. En notant  $\lambda$  la valeur propre du mode instable,  $\Phi$  le vecteur propre associé, et  $q$  l'amplitude modale, il est possible de déterminer le vecteur de déplacement  $\mathbf{U}(t)$  et le vecteur de vitesse  $\dot{\mathbf{U}}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) &= q \Re(\Phi e^{i\Im(\lambda)t}) \\ \dot{\mathbf{U}}(t) &= q \Re(i\Im(\lambda)\Phi e^{i\Im(\lambda)t}) \end{aligned} \quad (5.85)$$

où  $\Re(\cdot)$  et  $\Im(\cdot)$  dénotent les parties réelle et imaginaire des variables.

On recherche par la suite la valeur la plus pertinente de  $q$  notée  $q_{\text{est}}$  afin de proposer les conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{Z}_0^0 = \begin{Bmatrix} q_{\text{est}} \Re(\Phi) + \Phi_E \\ q_{\text{est}} \Re(\lambda \Phi) \end{Bmatrix} \quad (5.86)$$

$$T^0 = 2\pi / \Im(\lambda) \quad (5.87)$$

où  $\Phi_E$  est l'équilibre quasi-statique glissant du système préalablement déterminé lors de l'analyse de stabilité.

Comme pour le modèle académique à 3 degrés de liberté on suppose que l'équilibre quasi-statique ne change pas. On convient que cette hypothèse est réductrice mais on

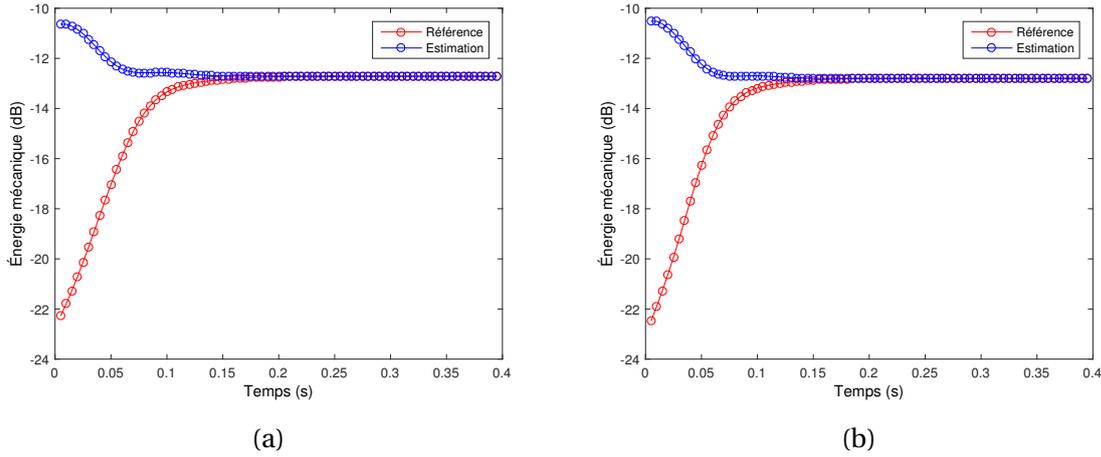


FIGURE 5.26 – Comparaison des évolutions de l'énergie mécanique moyenne selon l'initialisation du Modèle 1 (a) et du Modèle 2 (b)

rappelle que l'objectif de ce processus est de trouver des conditions initiales pertinentes pour la méthode de tir. Cette dernière détermine la solution non-linéaire finale recherchée qui comprend bien entendu une modification éventuelle de la partie quasi-statique initiale.

On recherche ensuite la valeur de  $q_{\text{est}}$ . Pour ce faire on établit le bilan moyen de puissance sur une période  $T$  du régime stationnaire. Considérant seulement les forces dynamiques, moyennant sur une période et normalisant les puissances par l'énergie mécanique moyenne  $\bar{E}$ , le bilan de puissance peut être exprimé en fonction du coefficient de puissance moyen  $\bar{\tau}_C$  dissipée par amortissement et du coefficient de puissance moyen  $\bar{\tau}_R$  injectée par les réactions de contact frottant (les détails du passage de bilan de puissance instantané au bilan de puissance moyen peut être trouvé en Section 4.6.3) :

$$\bar{\tau}_C = \bar{\tau}_R \quad (5.88)$$

Le calcul des taux de puissance est identique à la Section 4.6.3 exceptée l'évaluation des réactions de contact normales. En supposant un contact glissant, la partie dynamique de la réaction de contact est liée au déplacement par  $\Re(\mathbf{P}_{n+}(-\Im(\lambda\mathbf{M}) + j\Im(\lambda\mathbf{C}) + \mathbf{K})\mathbf{U})$  avec  $j^2 = -1$ . L'approximation sur les réactions normales devient alors :

$$\mathbf{R}_n = \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(\mathbf{R}_{nE} + (\Re(\mathbf{P}_{n+}(-\Im(\lambda\mathbf{M}) + j\Im(\lambda\mathbf{C}) + \mathbf{K})\mathbf{U}))) \quad (5.89)$$

La valeur  $q_{\text{est}}$  peut donc être déterminée et la méthode de tir initialisée selon les expressions (5.86) et (5.87).

Afin de valider cette approche d'estimation initiale, on effectue une simulation de l'évolution dynamique des Modèles 1 et 2 sur une durée de 400 ms en initialisant les déplacements et vitesses avec la méthode d'estimation énergétique. La Figure 5.26 compare l'évolution de l'énergie mécanique moyenne des simulations précédentes initialisées au premier décollage et celles initialisées avec le processus proposé. On constate que la valeur de l'énergie mécanique de l'initialisation est proche de celle du régime stationnaire, ce qui permet de justifier la démarche proposée. Les conditions initiales de la méthode de tir calculées sont proches énergétiquement du régime stationnaire ce qui laisse à suggérer une convergence probable de la méthode de tir.

### 5.5.3 Régimes stationnaires obtenus par la méthode de tir

Dans cette section, nous comparons les approximations des régimes stationnaires obtenus par la méthode de tir avec ceux obtenus par intégration temporelle directe qui ont déjà été présentés en Section 5.4.2. Pour ce faire, on analyse l'évolution de l'énergie mécanique sur une période ainsi que le spectre de cette énergie tel qu'il a été formulé en Section 5.4.2. L'utilisation d'une base modale pour la réduction des conditions initiales permet alors de tracer les portraits de phase de chaque mode. Enfin les niveaux vibratoires sont représentés sur les différents modèles éléments finis et les portraits de phase pour le nœud 1864 sont comparés.

#### Base réduites pour les conditions initiales

On introduit dans cette partie les deux bases de réduction des conditions initiales utilisées par la suite :

- **Base avec équilibre** notée  $\mathbf{T}_0 = [\Phi_E \ \Phi_{\Re} \ \Phi_{\Im}]$  composée des 3 modes : l'équilibre quasi-statique  $\Phi_E$ , la partie réelle du vecteur propre du mode instable issu de l'analyse de stabilité  $\Phi_{\Re}$  et sa partie imaginaire  $\Phi_{\Im}$ .

On note alors le vecteur d'amplitude  $\mathbf{Q}_0 = \{q_E \ q_{\Re} \ q_{\Im} \ p_E \ p_{\Re} \ p_{\Im}\}$  où  $q_E, q_{\Re}, q_{\Im}$  sont les amplitudes en déplacement des modes  $\Phi_E, \Phi_{\Re}, \Phi_{\Im}$  et  $p_E, p_{\Re}, p_{\Im}$  leur amplitude en vitesse, respectivement. Il est initialisé de la sorte :

$$\mathbf{Q}_0 = \{1 \ q_{\text{est}} \ 0 \ 0 \ \Re(\lambda)q_{\text{est}} \ -\Im(\lambda)q_{\text{est}}\} \quad (5.90)$$

Le champ statique  $\mathbf{U}_{\text{stat}}$  dans l'Équation 5.70 est nul car la base contient l'équilibre.

- **Base sans équilibre** notée  $\mathbf{T}_0 = [\Phi_{\Re} \ \Phi_{\Im}]$  composée des 2 modes : les parties réelle  $\Phi_{\Re}$  et imaginaire  $\Phi_{\Im}$  du vecteur propre du mode instable issu de l'analyse de stabilité.

On note alors le vecteur d'amplitude  $\mathbf{Q}_0 = \{q_{\Re} \ q_{\Im} \ p_{\Re} \ p_{\Im}\}$  où  $q_{\Re}, q_{\Im}$  sont les amplitudes en déplacement  $p_{\Re}, p_{\Im}$  les amplitudes en vitesse, respectivement. Il est initialisé de la sorte :

$$\mathbf{Q}_0 = \{q_{\text{est}} \ 0 \ \Re(\lambda)q_{\text{est}} \ -\Im(\lambda)q_{\text{est}}\} \quad (5.91)$$

Le champ statique dans l'Équation 5.70 est pris à l'équilibre quasi-statique. Dans ce cas,

$$\mathbf{U}_{\text{stat}} = \Phi_E \quad (5.92)$$

La différence entre les deux bases est la possibilité que les amplitudes modales en déplacement et vitesse de l'équilibre quasi-statique peuvent être modifiées par le processus de tir avec la base avec équilibre.

Pour chaque base, la recherche des vibrations auto-entretenues stationnaires a été effectuée avec des coefficients pondérant la valeur de  $q_{\text{est}}$ . En plus de la valeur déterminée par le processus énergétique, deux autres valeurs de l'amplitude modale du mode instable ont été testées :  $0.9 \times q_{\text{est}}$  et  $1.1 \times q_{\text{est}}$  ceci afin de tester l'impact de l'initialisation du problème au voisinage de la valeur provenant du calcul énergétique. Ainsi pour chaque modèle éléments finis, les résultats de six recherches de solution stationnaire par la méthode de tir sont présentés : trois d'entre elles sont effectuées avec la base avec équilibre

pour trois amplitudes modales différentes ( $0.9 \times q_{\text{est}}$ ,  $q_{\text{est}}$  et  $1.1 \times q_{\text{est}}$ ) et les trois autres sont effectuées avec la base sans équilibre pour les trois mêmes amplitudes modales. Les paramètres de convergences  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont égaux à  $10^{-3}$  tandis que le taux de perturbation pour le calcul de la matrice de monodromie est égal à  $10^{-5}$ . Dans ce qui suit nous cherchons à statuer sur la pertinence de la méthodologie pour les deux modèles éléments finis de freins étudiés.

D'autres bases de projection des conditions initiales peuvent être envisageables. La base de tous les modes complexes issus de la stabilité serait un choix pertinent. Une stratégie d'enrichissement de la base suite à une première convergence de la méthode de tir et à une décomposition du signal en temps et espace de type SVD (*Singular Value Decomposition*) pourrait aussi être intéressante. Cependant les bases que l'on propose ici sont issues de simplifications très fortes afin de limiter au maximum le temps de calcul dans une optique très appliquée.

### Recherche de solutions stationnaires : Modèle 1

Dans cette section sont comparées les différentes solutions déterminées par la méthode de tir avec la solution stationnaire de référence qui est issue d'une intégration temporelle directe. La Figure 5.27 illustre l'évolution de l'énergie mécanique ainsi que l'erreur relative en énergie mécanique sur une période du régime stationnaire. On remarque que les trois initialisations sur les deux bases différentes permettent à la méthode de tir d'approximer correctement le régime stationnaire au niveau énergétique (erreur relative inférieure à 2% pour  $q_{\text{est}}$  et  $1.1 \times q_{\text{est}}$  et 8% pour  $0.9 \times q_{\text{est}}$  pour la base avec équilibre). On remarque que les deux bases d'initialisation permettent d'obtenir un niveau énergétique plus proche de la référence pour les amplitudes modales  $q_{\text{est}}$  et  $1.1 \times q_{\text{est}}$ , l'initialisation avec la base avec équilibre semble aboutir à de meilleurs résultats que l'initialisation avec la base sans équilibre (cf. Figure 5.27(c) et (d)).

La Figure 5.28 représente le spectre de l'énergie mécanique et l'erreur relative sur les différentes composantes fréquentielles de l'énergie mécanique, obtenus par transformée de Fourier sur la période. On constate premièrement que la majeure partie de l'énergie mécanique est répartie entre la composante statique et la fondamentale. Pour la fréquence nulle et celle de la fondamentale, la méthode de tir arrive à estimer très convenablement les composantes des niveaux vibratoires. L'approximation des composantes pour les harmoniques restent représentatives de celles de la référence : la tendance du spectre de référence est respectée par les spectres des solutions trouvées.

On propose ensuite de comparer les déformées spatiales résultant de la transformée de Fourier. Pour cela on introduit l'opérateur MAC relatif à la matrice de masse  $\mathbf{M}$ . Cet opérateur permet de comparer deux vecteurs complexes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  et est défini ainsi :

$$\text{MAC}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left| \frac{\mathbf{A}^* \mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{B}}{(\mathbf{A}^* \mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{A})(\mathbf{B}^* \mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{B})} \right| \quad (5.93)$$

où l'indice \* désigne le complexe conjugué. Ainsi si les vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont identiques, la valeur du MAC est égale à 1. On compare alors les 30 premières déformées en déplacement grâce cet opérateur. La Figure 5.29 représente  $1 - \text{MAC}$  pour les différentes initialisations. On constate que la déformée statique ainsi que celle de la fondamentale sont correctement estimées par le processus de tir (erreur inférieure à 6%). Au contraire les déformées des harmoniques sont moins bien estimées mais leur participation à l'énergie globale du système est moins conséquente que celle de la déformée statique et de la

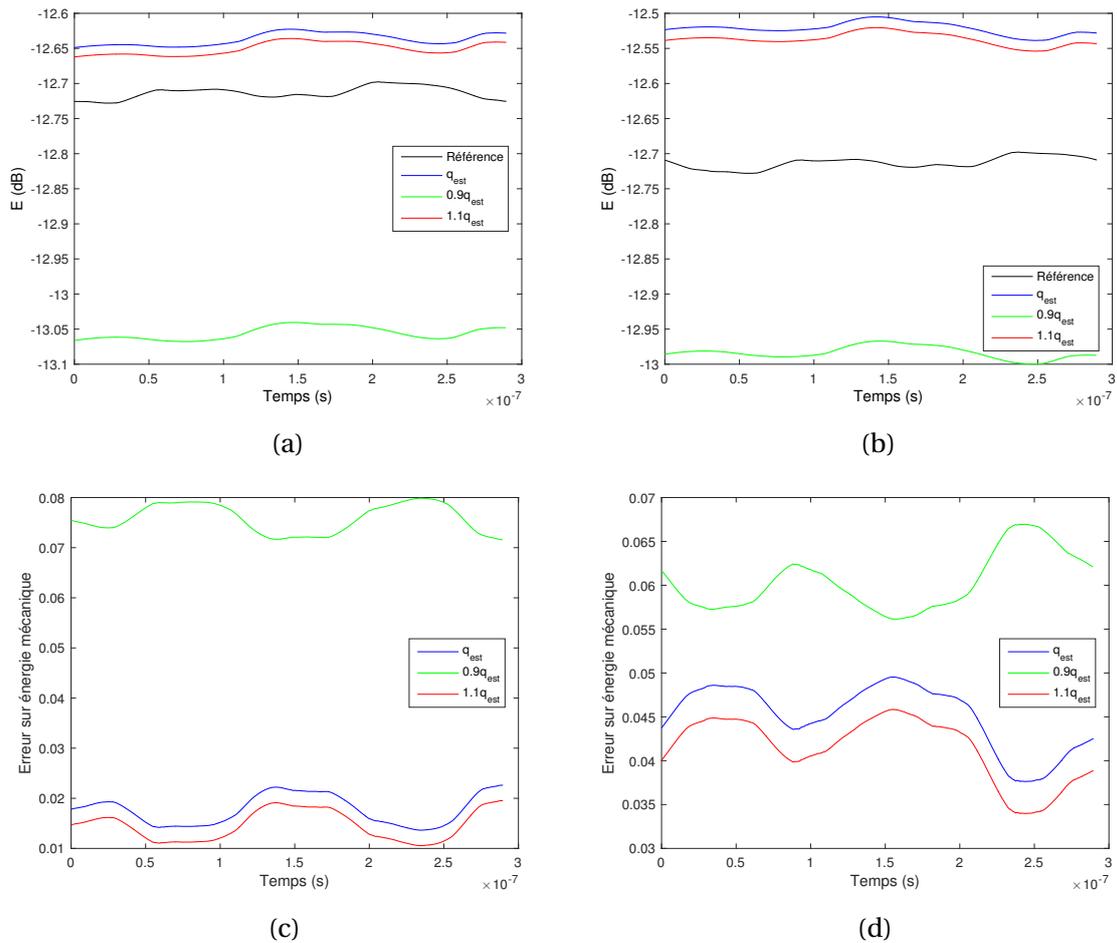


FIGURE 5.27 – Comparaison référence/tir des évolutions de l'énergie mécanique sur une période avec la base avec équilibre (a) et la base sans équilibre (b) et des erreurs relatives en énergie mécanique sur une période avec la base avec équilibre (c) et la base sans équilibre (d) (Modèle 1)

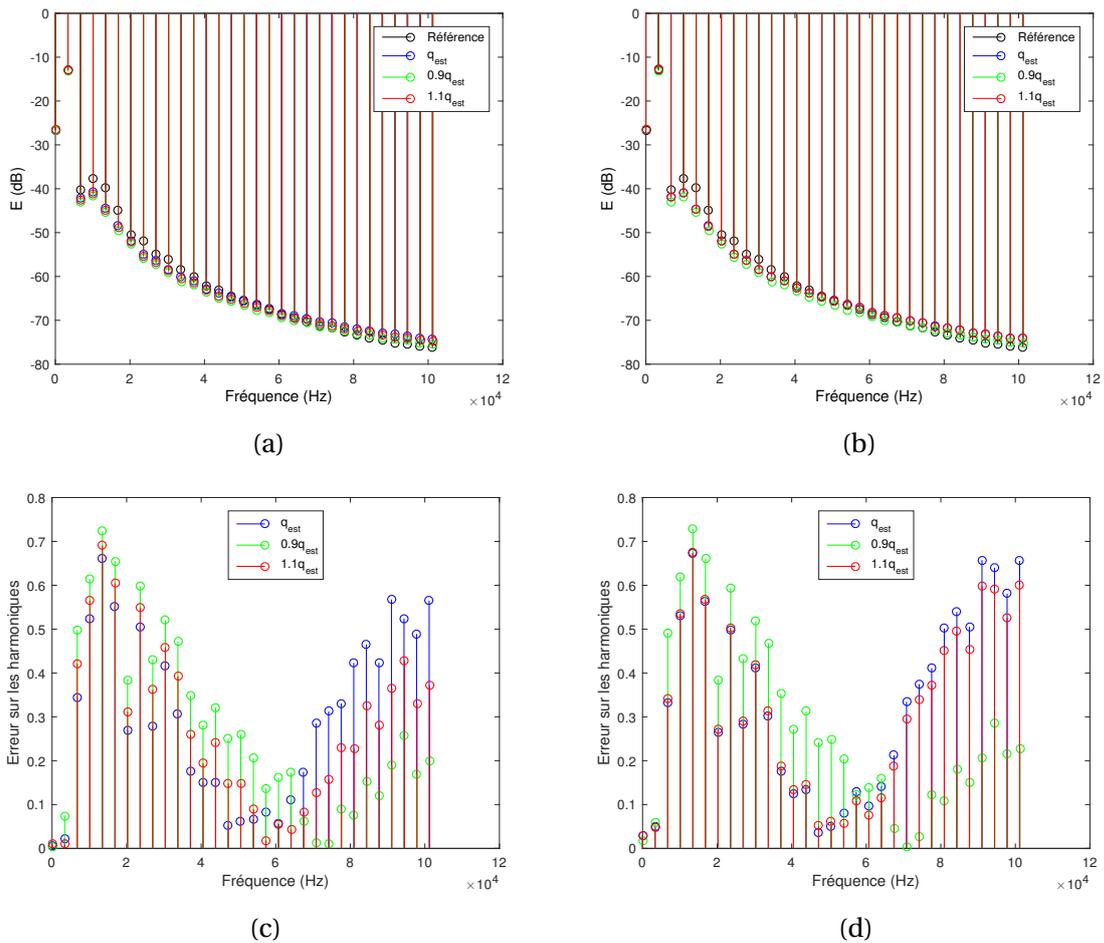


FIGURE 5.28 – Comparaison référence/tir des spectres de l'énergie mécanique avec la base avec équilibre (a) et la base sans équilibre (b) et des erreurs relatives sur les composantes de l'énergie mécanique avec la base avec équilibre (c) et la base sans équilibre (d) (Modèle 1)

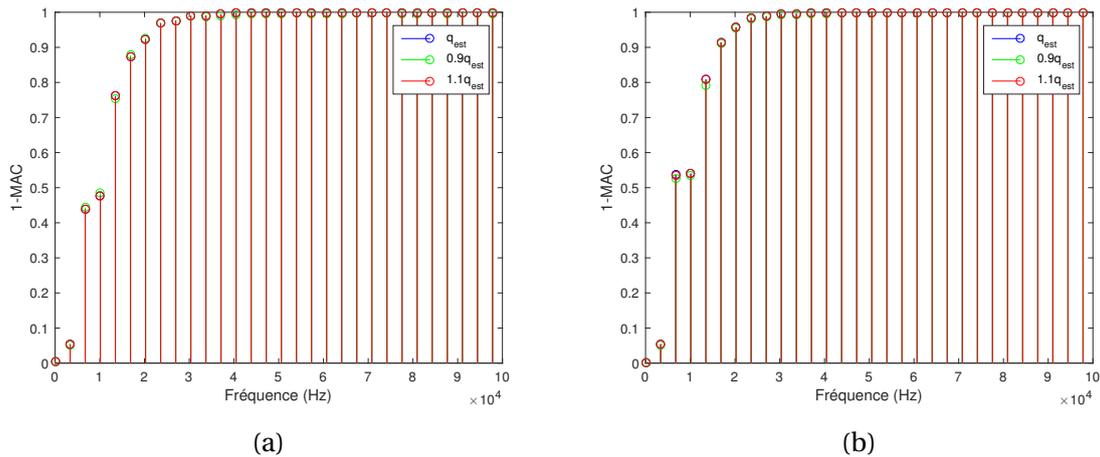


FIGURE 5.29 – Comparaison des déformées spectrales en déplacement avec la base avec équilibre (a) et la base sans équilibre (b) (Modèle 1)

fondamentale (cf. Figures 5.28(a) et (b)). Les déformées de ces harmoniques sont majoritairement locales (déformées des plots) et la méthode de tir ne permet pas d’obtenir ces déformées car les vibrations aux harmoniques n’ont pas tout à fait convergé. La méthode de tir est initialisée seulement en utilisant la composante statique et la fondamentale. Par conséquent les harmoniques ne sont pas représentées par des modes dans la base de projection des conditions initiales.

La Figure 5.30 représente les portraits de phases des modes constituant la base  $\mathbf{T}$  de réduction des conditions initiales. Dans le cas d’une initialisation avec la base avec équilibre, un mode semble inclure de manière prépondérante la contribution du mode statique (cf. Figure 5.30(e)) tandis que les deux autres sont plutôt représentatifs des parties réelles et imaginaires du mode instable. Le portrait de phase des deux modes liés au mode instable semble bien représenté par les approximations de la méthode de tir (et ce indépendamment de la base d’initialisation utilisée). Les portraits de phase de ces deux modes sont identiques pour les amplitudes modales  $q_{est}$  et  $1.1 \times q_{est}$ . Pour le mode statique on remarque une différence dans les portraits de phase pour les trois amplitudes. L’amplitude modale  $0.9 \times q_{est}$  semble bien moins approximer l’évolution de ce mode statique alors que le meilleur résultat est obtenu avec l’amplitude modale  $q_{est}$ . Du fait de sa faible contribution, le mode statique a du mal à converger, en particulier s’il est mal-estimé au départ. C’est pourquoi, pour l’amplitude modale  $0.9 \times q_{est}$ , les résultats issus de la base sans équilibre sont globalement meilleurs que ceux issus de la base avec équilibre.

Le Tableau 5.5 donne le nombre total d’itérations de la méthode de tir dans les différents cas pour atteindre les résultats présentés. On constate que les itérations sont entre 2 et 3 ce qui est plus qu’acceptable. Cela signifie qu’avec la démarche mise en place, il suffit d’effectuer 14 ou 21 (selon la base) intégrations temporelles sur une période de la dynamique d’un modèle éléments finis pour obtenir une approximation du régime stationnaire.

Le Tableau 5.6 donne les différentes approximations de la fréquence du cycle stationnaire obtenu par la méthode de tir. On rappelle que la fréquence instable du Modèle 1 est de 3382.5 Hz. On montre ainsi l’importance d’ajouter la période  $T$  aux inconnues de la méthode de tir lors de la recherche de régime stationnaire d’un système autonome.

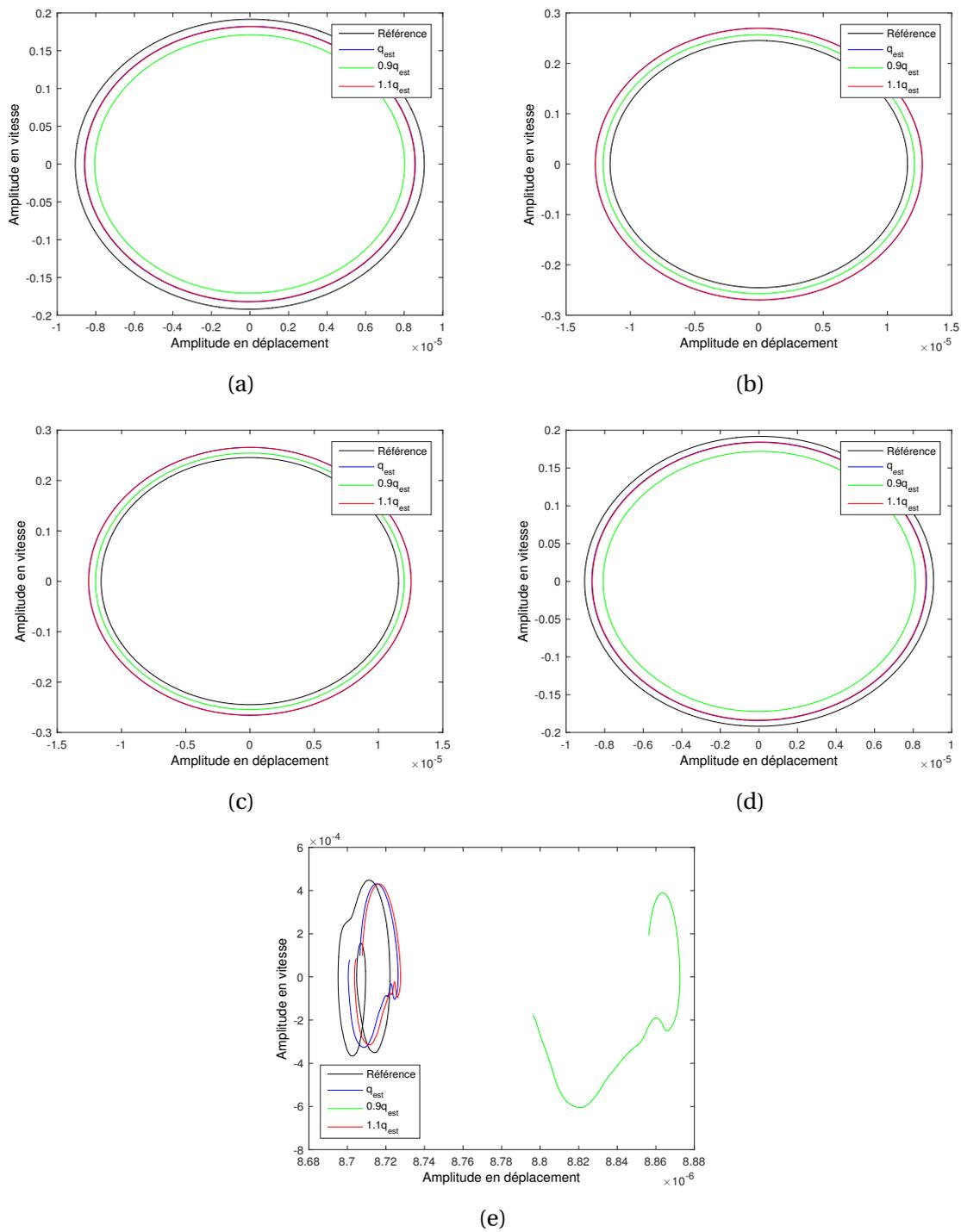


FIGURE 5.30 – Comparaison référence/tir des portraits de phase avec la base avec équilibre (a,c,e) et la base sans équilibre (b,d) des modes dynamiques (a,b,c,d) et du mode statique (e) (Modèle 1)

Initialisation	$q = 0.9 \times q_{est}$	$q = q_{est}$	$q = 1.1 \times q_{est}$
Base avec équilibre	2	3	3
Base sans équilibre	2	3	3

TABEAU 5.5 – Nombre d'itérations nécessaires à la convergence selon les initialisations (Modèle 1)

Initialisation	$q = 0.9 \times q_{\text{est}}$	$q = q_{\text{est}}$	$q = 1.1 \times q_{\text{est}}$	Référence
Base avec équilibre	3375.0 Hz	3371.9 Hz	3372.0 Hz	3376.2 Hz
Base sans équilibre	3375.0 Hz	3371.9 Hz	3372.0 Hz	–

TABLEAU 5.6 – Fréquences obtenues suite à la convergence de la méthode de tir (Modèle 1)

La Figure 5.31 illustre les déformées de quatre instants du cycle limite stationnaire de référence obtenu par intégration temporelle et celles correspondant à l'approximation du régime stationnaire par la méthode de tir pour une initialisation avec la base avec équilibre et l'amplitude  $q_{\text{est}}$ . On note que l'approximation du cycle limite est très satisfaisante, l'ensemble des déplacements correspond au cycle de référence, malgré des amplitudes maximales légèrement différentes. Les résultats de la méthode de tir appliquée à cette première variation du modèle éléments finis sont tout à fait convenables et l'on suggère de tester la démarche numérique développée sur un autre modèle afin de s'assurer de sa robustesse.

Afin de comparer ces déformées entre elles, on introduit le critère de MAC relatif à la matrice de masse  $\mathbf{M}$ , de deux vecteurs réels  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$\text{MAC}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{(\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{B})^2}{(\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A})(\mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B})} \quad (5.94)$$

Ainsi plus les vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont similaires, plus le MAC est proche de 1. La Figure 5.32 représente les valeurs  $1 - \text{MAC}$  des déformées présentées en Figure 5.31. La méthode de tir avec une base d'initialisation avec équilibre et l'amplitude modale  $q_{\text{est}}$  permet de bien estimer le comportement global du cycle limite avec des erreurs inférieures à 7%.

Lors de l'analyse des déformées spectrales, on a constaté que la méthode de tir n'approximait pas correctement les déformées des harmoniques. Cela est dû à un manque de représentation de modes de plot dans la base de projection des conditions initiales, ce qui ne permet pas de reproduire le comportement local à l'interface. On se propose donc de comparer les portraits de phase du nœud 1864. La Figure 5.33 représente les portraits de phase de la référence (rouge) et de l'approximation pour une base avec équilibre et l'amplitude  $q_{\text{est}}$  (bleu) dans les trois directions du repère local. Premièrement on observe que même pour le comportement local, l'erreur en périodicité de la méthode de tir est faible : les portraits de phase bleus sont quasiment cycliques. Ensuite comme supposé précédemment, on constate que le comportement local n'est pas fidèlement reproduit pas la méthode de tir bien que le comportement global soit correctement estimé. Les niveaux vibratoires des harmoniques n'ont pas tout à fait convergé car la méthode de tir est initialisée seulement en utilisant la composante statique et la fondamentale. Ainsi une perspective de recherche serait d'introduire les modes de plots proches des harmoniques dans la base de projection des conditions initiales afin de s'assurer de la bonne convergence des niveaux vibratoires hautes fréquences.

### Recherche de solutions stationnaires : Modèle 2

Dans cette section sont comparées les différentes solutions déterminées par la méthode de tir avec la solution stationnaire de référence qui est issue d'une intégration temporelle directe. La Figure 5.34 illustre l'évolution de l'énergie mécanique ainsi que l'erreur relative en énergie mécanique sur une période du régime stationnaire. Contrairement, au

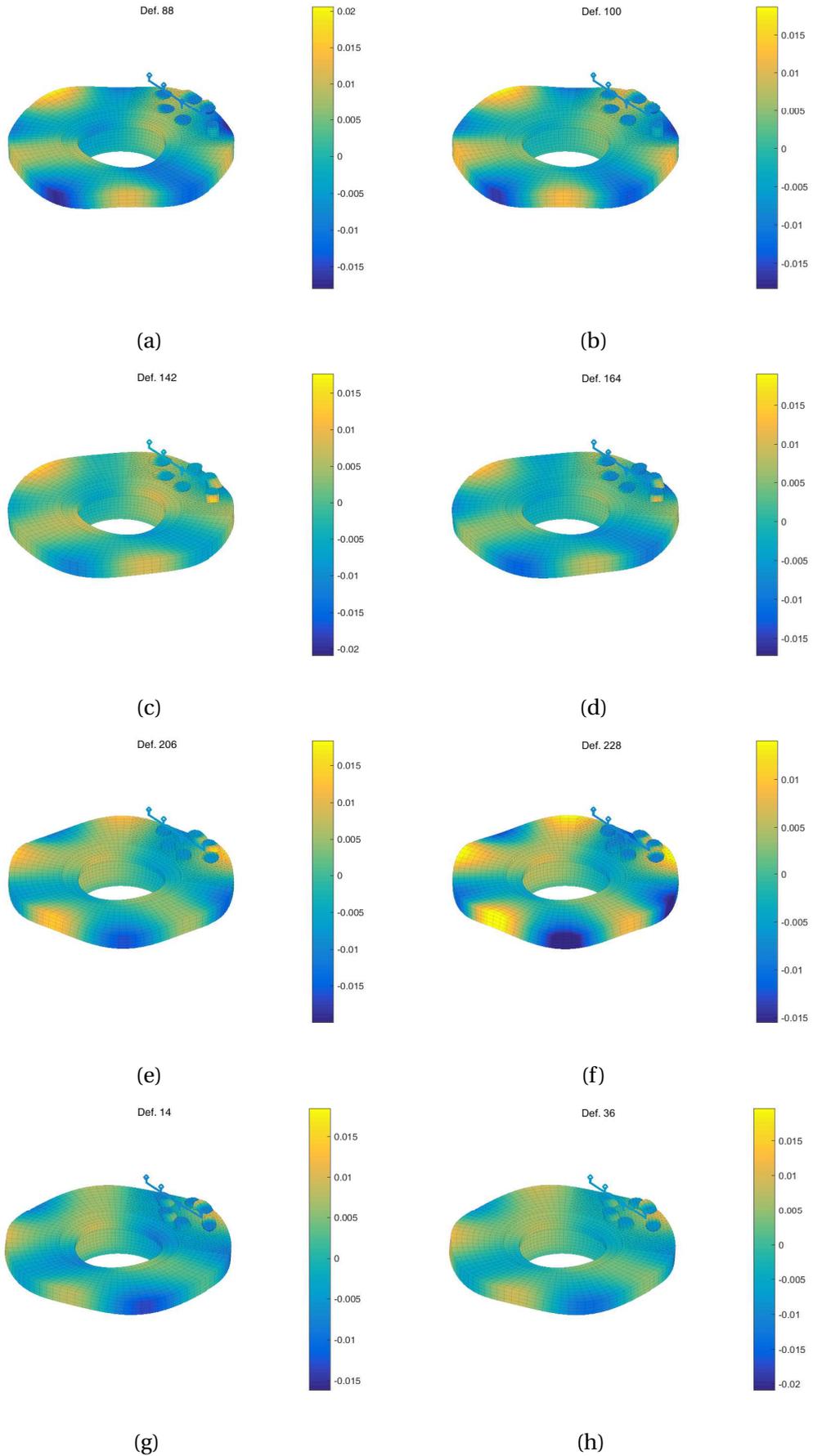


FIGURE 5.31 – Illustration du cycle limite du régime stationnaire du Modèle 1 obtenu par intégration temporelle directe (a,c,e,g) et par la méthode de tir (b,d,f,h)

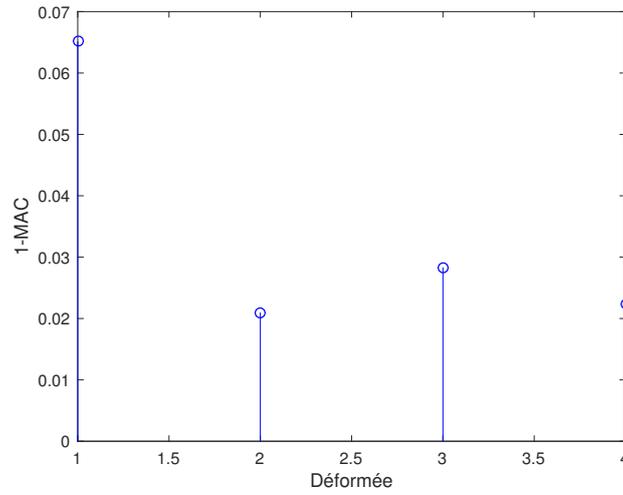


FIGURE 5.32 – Erreur d'estimation des déformées du Modèle 1

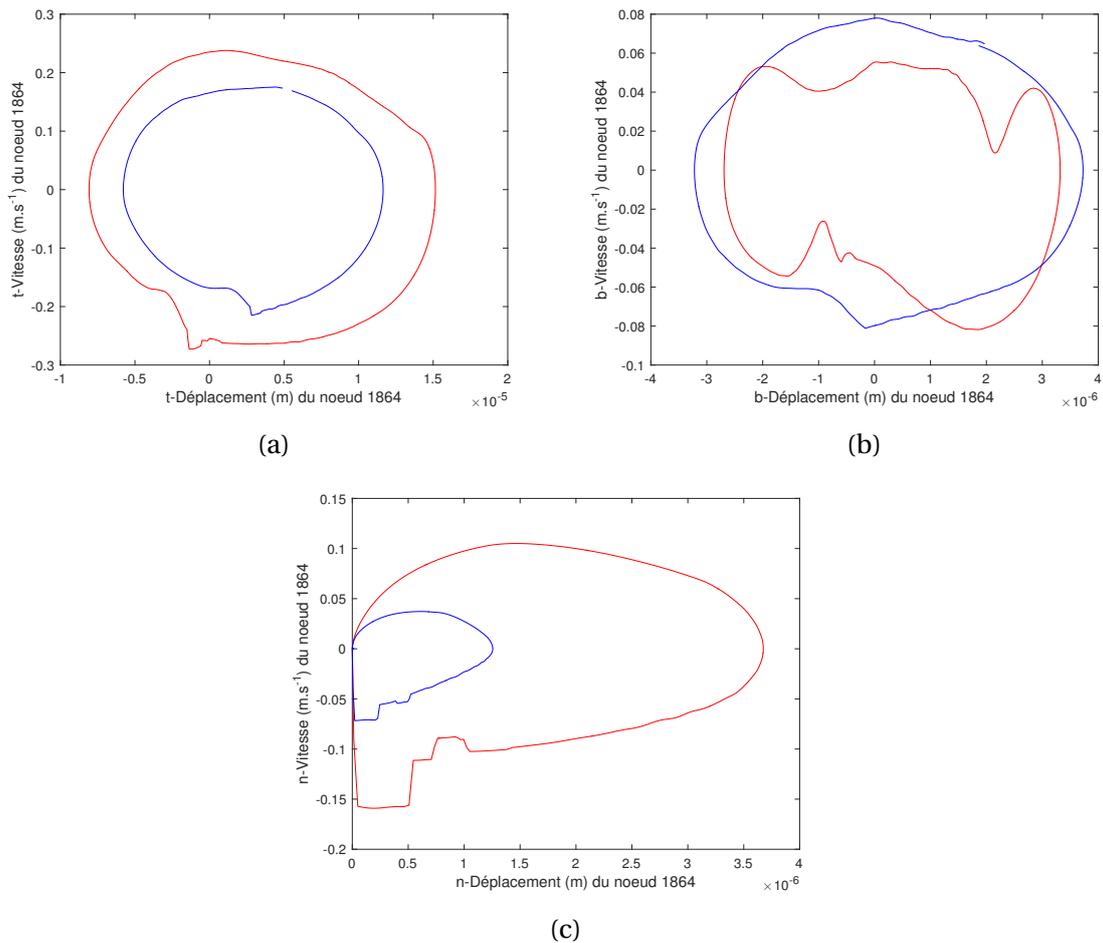


FIGURE 5.33 – Comparaison référence/tir des portraits de phase du nœud 1864 entre l'intégration temporelle directe (rouge) et la méthode de tir (bleu) dans le repère local (Modèle 1)

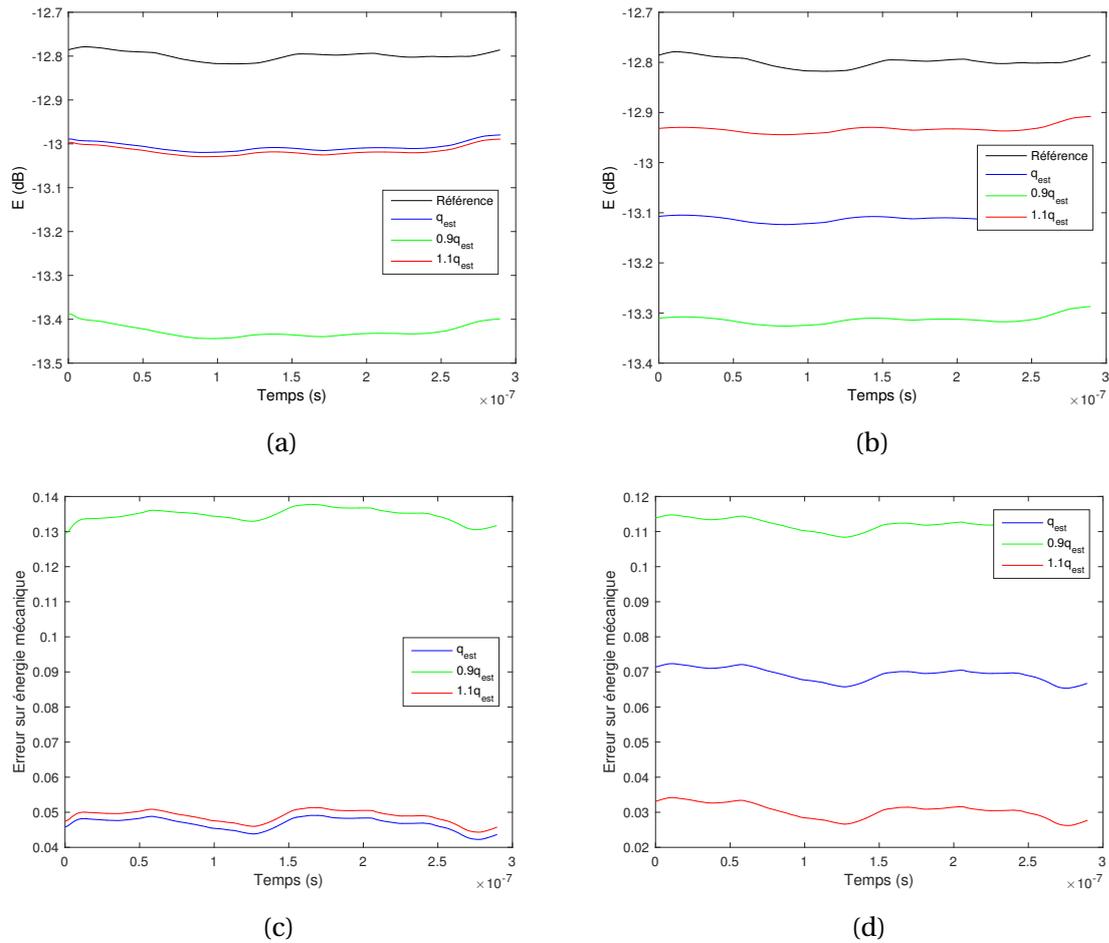


FIGURE 5.34 – Comparaison référence/tir des évolutions de l'énergie mécanique sur une période avec la base avec équilibre (a) et la base sans équilibre (b) et des erreurs relatives en énergie mécanique sur une période avec la base avec équilibre (c) et la base sans équilibre (d) (Modèle 2)

Modèle 1, la méthode de tir initialisée avec la base sans équilibre permet d'obtenir de meilleurs résultats que dans le cas d'une initialisation avec la base avec équilibre. En effet, l'erreur relative minimale est supérieure à 4% dans le cas de la base avec équilibre et inférieure à 4% avec la base sans équilibre (cf. Figure 5.34(c) et (d)). Ceci peut s'expliquer par le changement d'équilibre quasi-statique qui a été remarqué lors de l'analyse de l'évolution transitoire du Modèle 2 (cf. Section 5.4.2). En effet si la déformée du nouvel équilibre ne correspond pas à celle de l'ancien, la méthode de tir avec la base comportant l'équilibre itère sur l'amplitude modale jusqu'à faire correspondre les deux déformées sans succès. Avec la base sans équilibre, la méthode de tir itère uniquement sur les amplitudes modales des modes correspondant à la partie dynamique, l'équilibre quasi-statique est ajoutée aux conditions initiales mais ne subit aucune modification lors du processus de tir. Par conséquent le processus de tir parvient à déterminer les amplitudes de la partie dynamique permettant d'approximer le régime stationnaire. Dans le cas de l'utilisation de la base sans équilibre pour la projection des conditions initiales, on remarque une meilleure approximation énergétique du régime stationnaire pour une amplitude de  $1.1 \times q_{est}$ .

La Figure 5.35 représente le spectre de l'énergie mécanique et les erreurs relatives sur les différentes composantes en énergie mécanique. Comme pour le Modèle 1, on constate

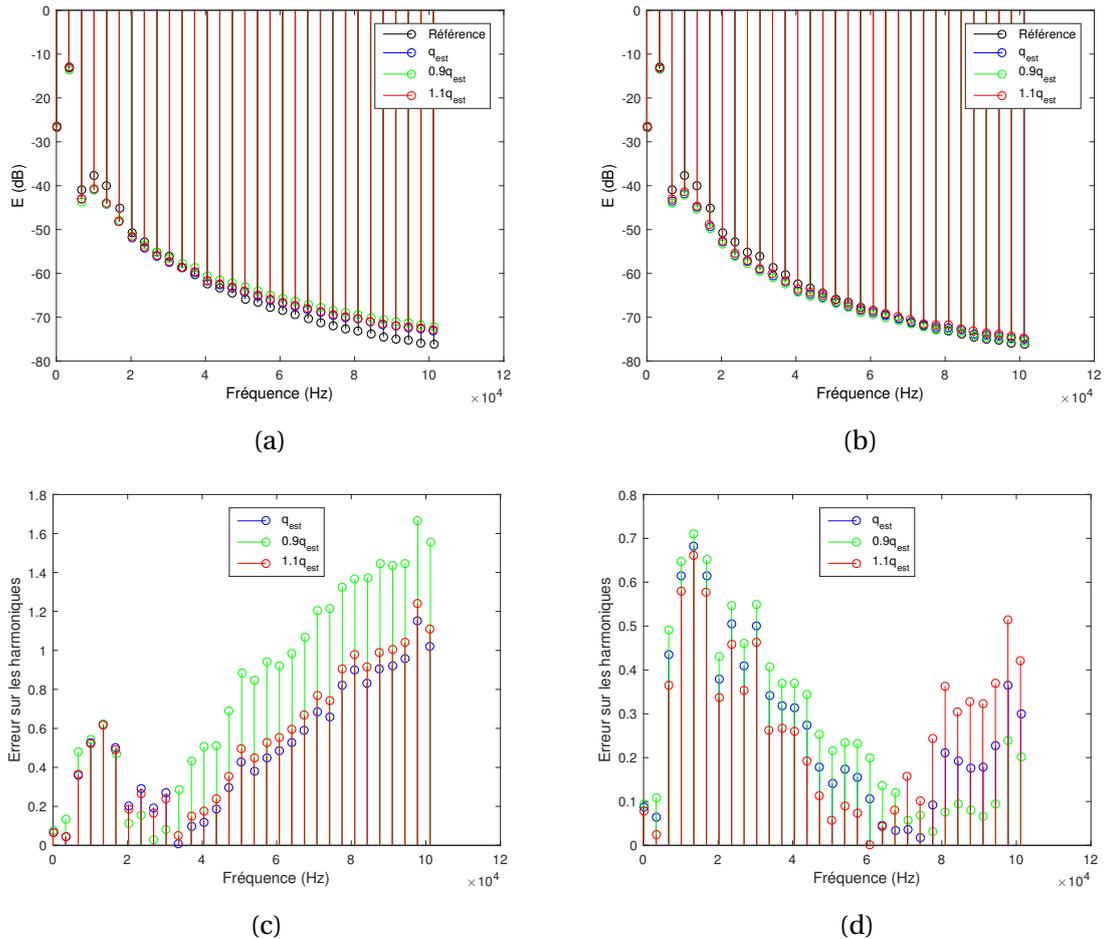


FIGURE 5.35 – Comparaison référence/tir des spectres de l'énergie mécanique avec la base avec équilibre (a) et base sans équilibre (b) et des erreurs relatives sur les composantes de l'énergie mécanique avec la base avec équilibre (c) et avec la base sans équilibre (d) (Modèle 2)

premièrement que la majeure partie de l'énergie mécanique est répartie entre la composante statique et la fondamentale. Pour la fréquence nulle et celle de la fondamentale, la méthode de tir avec une base avec et sans équilibre parvient correctement à estimer les composantes des niveaux vibratoires. L'approximation des composantes pour les harmoniques restent représentatives de celles de la référence : la tendance du spectre de référence est respectée par les spectres des solutions trouvées. Dans le cas de l'utilisation d'une base avec équilibre, l'erreur relative de l'énergie spectrale de la composante statique est meilleure qu'avec une base sans équilibre mais celle de la fondamentale reste moins bonne. En effet, l'erreur relative en énergie de la fondamentale est inférieure à 2.4% dans le cas d'une base sans équilibre et supérieure à 4% lors de l'utilisation de la base avec équilibre (cf Figures 5.35(c) et (d)). Ceci permet de vérifier l'hypothèse que la base sans équilibre permet à la méthode de tir une meilleure approximation de la partie dynamique du régime stationnaire.

On compare maintenant les déformées spectrales en déplacement en utilisant le critère de MAC complexe. La Figure 5.36 illustre les valeurs de  $1 - \text{MAC}$  pour les différentes initialisations. L'erreur d'estimation des déformées de la composante statique et de la fondamentale est similaire pour une base avec ou sans équilibre. Comme pour le Modèle 1, les déformées des harmoniques sont quant à elles approximées de manière grossière.

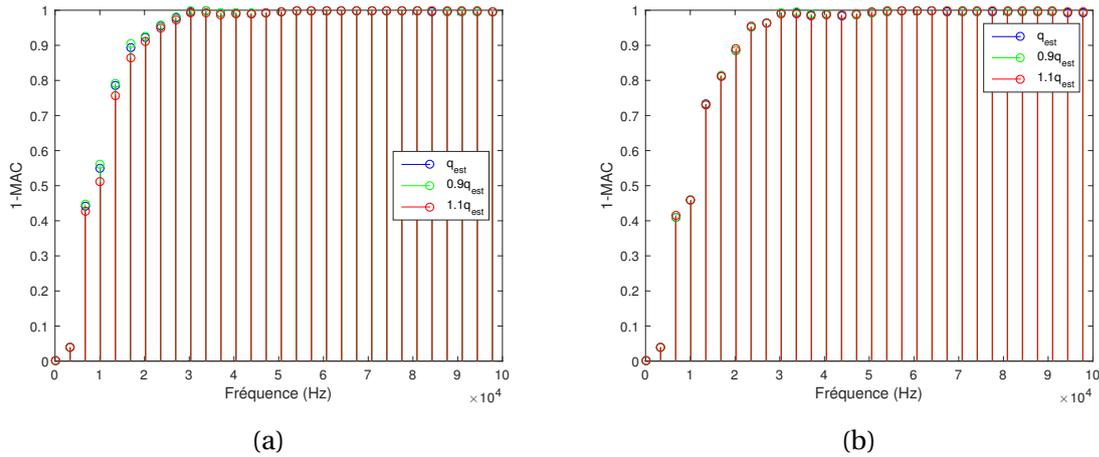


FIGURE 5.36 – Comparaison des déformées spectrales en déplacement avec la base avec équilibre (a) et la base sans équilibre (b) (Modèle 2)

Initialisation	$q = 0.9 \times q_{est}$	$q = q_{est}$	$q = 1.1 \times q_{est}$
Base avec équilibre	2	3	3
Base sans équilibre	2	2	3

TABLEAU 5.7 – Nombre d’itérations nécessaires à la convergence selon les initialisations (Modèle 2)

La Figure 5.37 représente les portraits de phases des modes constituant la base **T** de réduction des conditions initiales. On remarque sur le portrait de phase du mode représentant le mode statique une mauvaise approximation du portrait de phase par la méthode de tir (cf. Figure 5.37(e)). Comme expliqué précédemment cela est dû au changement d’équilibre quasi-statique lors de l’évolution transitoire (à cause des contraintes en déplacements sur les faces externes des plots), la méthode de tir itère alors sur les amplitudes pour essayer de faire correspondre les déformées sans succès. L’observation des portraits de phase obtenus avec une base sans équilibre (cf. Figure 5.37(b) et (d)) permet de juger que la méthode de tir approxime de manière très correcte l’évolution des modes dynamiques lors d’une période (cf. Figure 5.37(b) et (d)) en itérant seulement sur les amplitudes des modes dynamiques. De meilleurs résultats sont obtenus avec l’amplitude  $1.1 \times q_{est}$  et de moins bons pour une initialisation avec l’amplitude  $0.9 \times q_{est}$ .

Le Tableau 5.7 donne le nombre total d’itérations de la méthode de tir selon les différentes bases pour atteindre les résultats présentés. Comme pour le cas du modèle 1, on constate que les itérations sont entre 2 et 3 ce qui est plus qu’acceptable.

Le Tableau 5.8 donne les différentes approximations de la fréquence du cycle stationnaire obtenu par la méthode de tir. On rappelle que la fréquence instable du Modèle 2 est de 3380.7 Hz. On montre ainsi, une fois de plus, l’importance d’ajouter la période  $T$  aux inconnues de la méthode de tir lors de la recherche de régime stationnaire d’un système autonome.

La Figure 5.38 illustre les déformées de quatre instants du cycle limite stationnaire de référence obtenu par intégration temporelle et celles correspondant à l’approximation du régime stationnaire par la méthode de tir pour une initialisation avec la base sans équi-

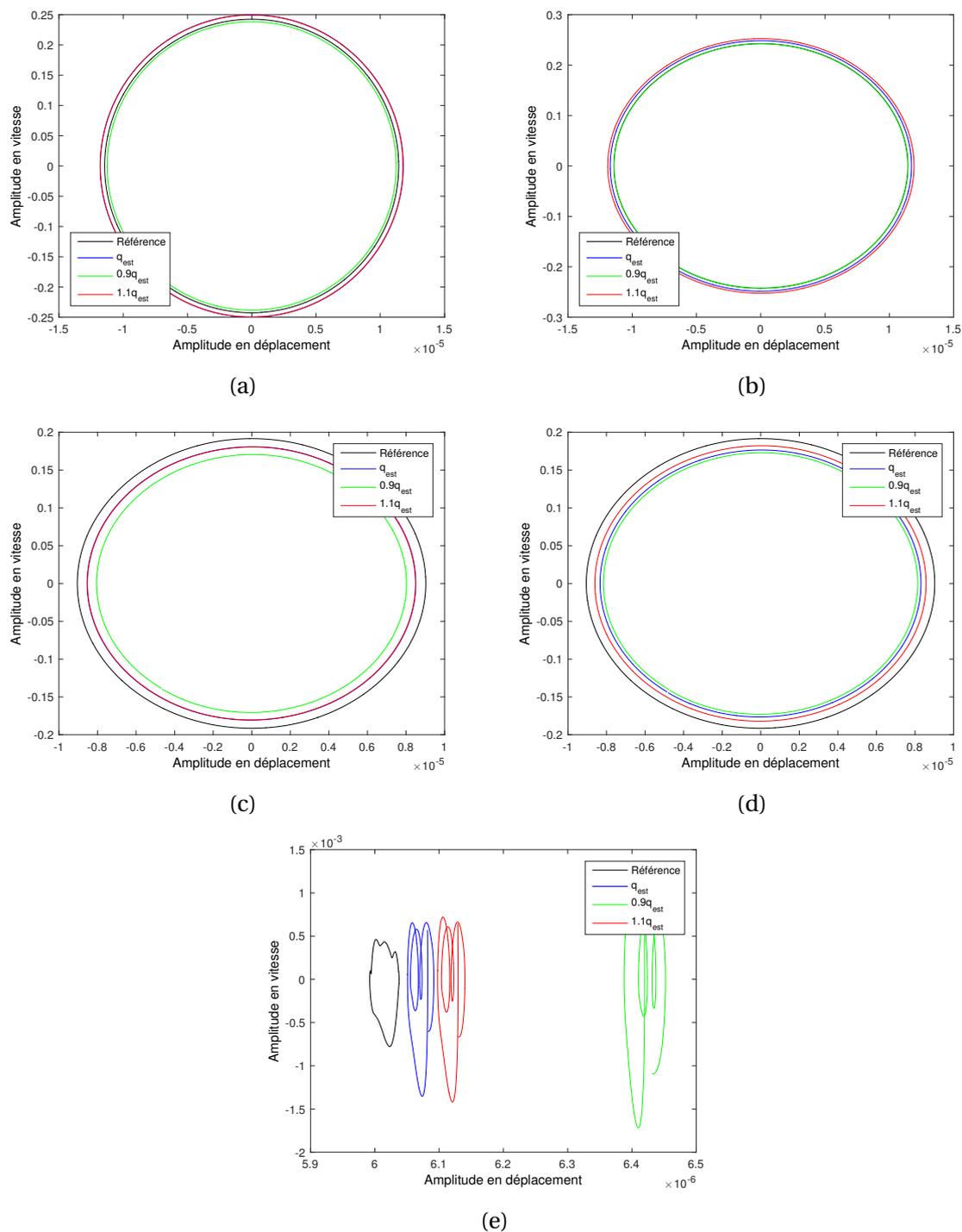


FIGURE 5.37 – Comparaison référence/tir des portraits de phase de la base avec équilibre (a,c,e) et de la base sans équilibre (b,d) des modes instables (a,b,c,d) et du mode statique (e) (Modèle 2)

Initialisation	$q = 0.9 \times q_{est}$	$q = q_{est}$	$q = 1.1 \times q_{est}$	Référence
Base avec équilibre	3373.7 Hz	3370.7 Hz	3370.7 Hz	3374.2 Hz
Base sans équilibre	3373.4 Hz	3373.9 Hz	3370.6 Hz	–

TABLEAU 5.8 – Fréquences obtenues suite à la convergence de la méthode de tir (Modèle 2)

libre et l'amplitude  $1.1 \times q_{\text{est}}$ . Comme pour le Modèle 1, on note que l'approximation du cycle limite est très correcte, l'ensemble des déplacements correspond au cycle de référence, malgré des amplitudes maximales qui sont légèrement différentes.

Finalement, il semble que la méthode de tir converge mieux pour des conditions initiales dont l'amplitude assure une saturation franche selon le critère énergétique. Ceci peut s'expliquer par le fait que le système initialisé avec une amplitude de  $0.9 \times q_{\text{est}}$  ne semble pas avoir atteint le régime stationnaire selon le critère énergétique utilisé et que la méthode de tir itère alors jusqu'à obtenir un régime transitoire satisfaisant les conditions de périodicité. Une autre conclusion de ce chapitre est qu'il est préférable d'utiliser la méthode de tir avec base sans équilibre afin de se prémunir d'un changement d'équilibre quasi-statique lors de l'évolution transitoire.

Comme pour le Modèle 1, on propose de comparer les déformées de la Figure 5.38 en utilisant un critère de MAC relatif à la matrice de masse  $\mathbf{M}$ . La Figure 5.39 représente les valeurs  $1 - \text{MAC}$  de ces déformées. La méthode de tir avec une base d'initialisation sans équilibre et l'amplitude  $1.1 \times q_{\text{est}}$  permet de bien estimer le comportement global du cycle limite avec des erreurs inférieures à 3.5%.

On compare maintenant le comportement local au travers des portraits de phase du nœud 1864. La Figure 5.40 représente les portraits de phase de la référence (rouge) et de l'approximation par la méthode de tir avec la base sans équilibre et l'amplitude  $1.1 \times q_{\text{est}}$  (bleu) dans les trois directions du repère local. Premièrement on observe que même pour le comportement local, l'erreur en périodicité de la méthode de tir est plus importante que pour le Modèle 1 : les portraits de phase bleus sont moins cycliques. Ensuite, comme évoqué précédemment, le comportement local, contrairement au comportement global, n'est pas correctement approximé car il n'est pas représenté par des modes adéquates dans la base de réduction des conditions initiales. Cependant l'approximation de la méthode de tir est plus fidèle pour le Modèle 2 que pour le Modèle 1 : les amplitudes obtenues sont quasiment du même ordre de grandeur.

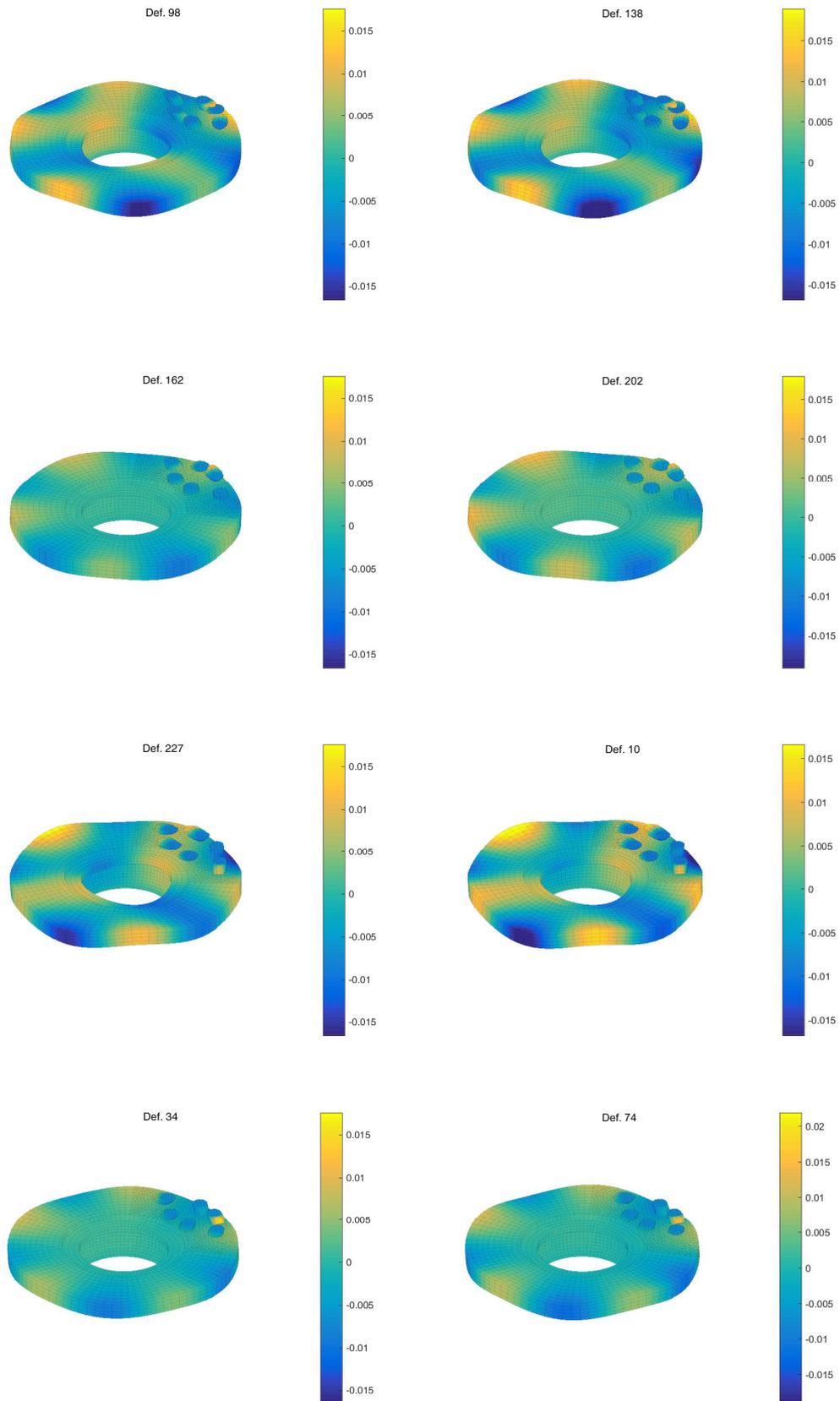


FIGURE 5.38 – Illustration du cycle limite du régime stationnaire du Modèle 2 obtenu par intégration temporelle directe (a,c,e,g) et la méthode de tir (b,d,f,h)

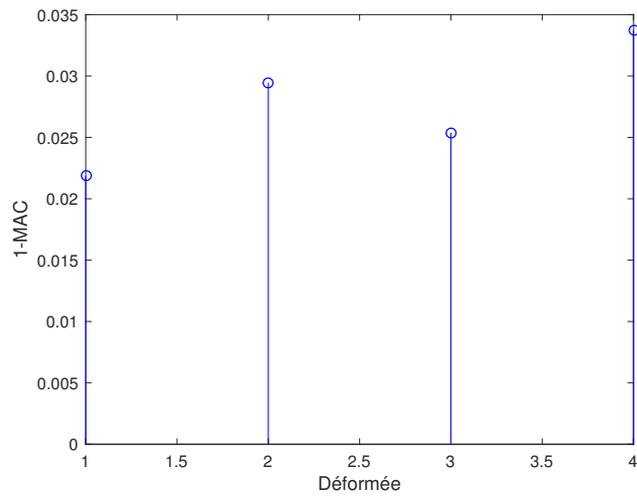


FIGURE 5.39 – Erreur d'estimation des déformées du Modèle 2

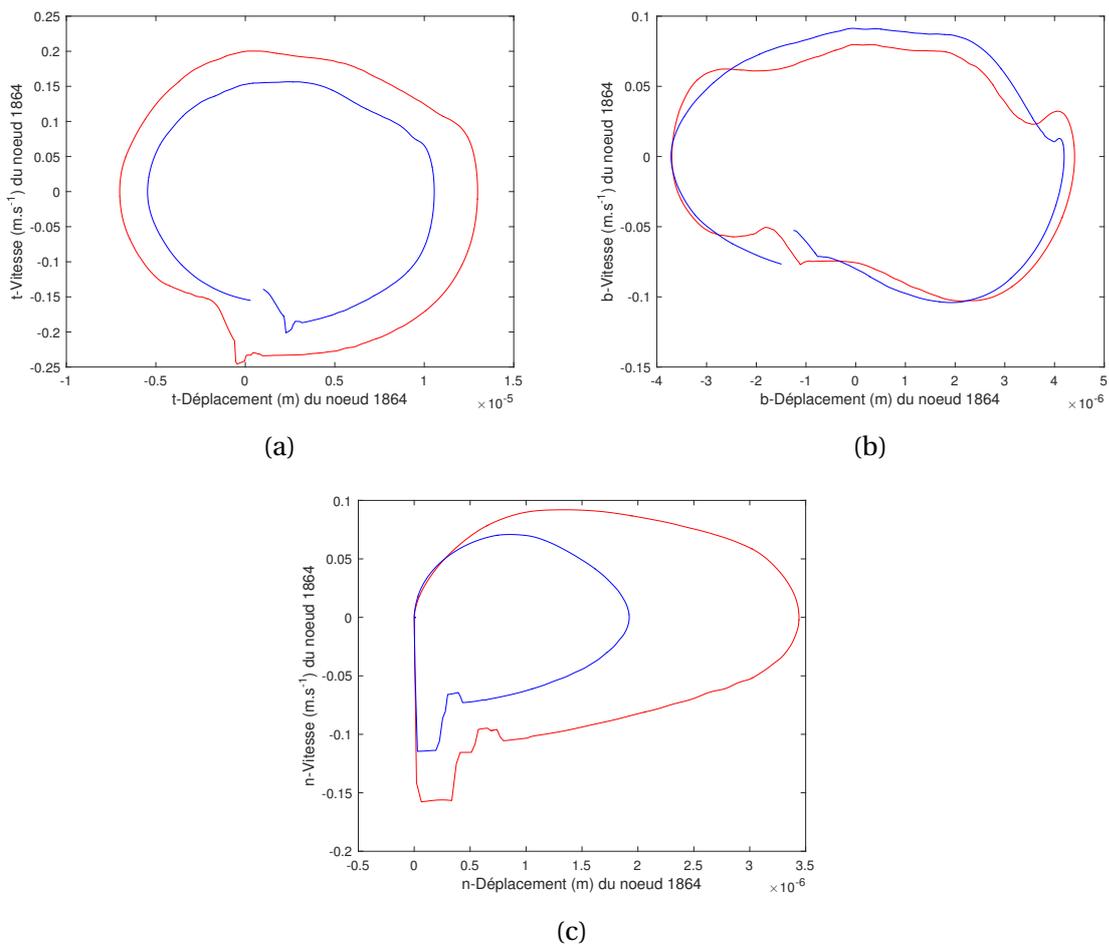


FIGURE 5.40 – Comparaison référence/tir des portraits de phase du nœud 1864 entre l'intégration temporelle directe (rouge) et la méthode de tir (bleu) dans le repère local (Modèle 2)

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude non-linéaire complète de deux variantes d'un modèle éléments finis a été menée. En premier lieu les différences entre les deux modélisations ont été présentées. Ensuite les développements nécessaires au calcul de l'équilibre quasi-statique et à l'analyse de stabilité du modèle éléments finis ont été précisés. L'analyse de stabilité par le calcul des valeurs propres complexes du problème linéarisé autour de la position d'équilibre quasi-statique permet de déterminer les cas d'études pour l'analyse non-linéaire : on recherche des cas mono-instables afin de transposer la démarche numérique proposée dans le Chapitre 4 pour l'approximation du régime stationnaire.

Les outils permettant l'analyse non-linéaire par intégration temporelle avec la  $\theta$ -méthode sont ensuite présentés et les évolutions transitoire et stationnaire des deux modèles éléments finis sont discutées. Enfin la méthode de tir est adaptée pour une application aux modèles éléments finis : une méthode de calcul de la matrice de monodromie par réduction de l'espace des phases initial est développée et l'initialisation énergétique du Chapitre 4 est transposée au problème éléments finis. La méthode de tir ainsi proposée est appliquée aux variantes du modèle éléments finis avec différents types de bases réduites pour les conditions initiales.

Les résultats sont ensuite discutés : on obtient une approximation correcte du régime stationnaire dans le cas mono-instable avec un nombre restreint d'itérations. L'approximation du régime stationnaire nécessite alors seulement une trentaine de minutes avec la méthode développée (contre une dizaine d'heure pour l'intégration temporelle) et permet d'obtenir une erreur inférieure à 7% sur les déformées du comportement global et ce pour des régimes fortement non-linéaires avec la présence de décollements dans le cycle stationnaire. Cependant le manque de représentation des déformées hautes fréquences dans la base de réduction des conditions initiales entraîne une approximation moins bonne du comportement local à l'interface et des harmoniques.

On rappelle que ces calculs ont été effectués avec des bases de projection des conditions initiales issues d'hypothèses simplificatrices fortes afin de réduire au maximum le temps de calcul dans une optique appliquée. Cependant d'autres bases pourraient être utilisées. Une base composée des parties réelles et imaginaires de tous les modes issus du calcul de stabilité est très intuitive mais nécessiterait un temps de calcul plus important. En effet, dans notre cas les 80 premiers modes du modèle ont été calculés ce qui conduit à l'élaboration d'une base de 160 à 161 modes (base sans et avec équilibre, respectivement). Le nombre de périodes à calculer pour une itération de la méthode de tir serait alors compris entre 321 et 323 périodes (une stratégie de calcul en parallèle peut cependant être utilisée pour le calcul de ces périodes afin d'optimiser le temps de calcul).

Une autre stratégie envisagée est de converger une première fois à l'aide de la méthode de tir vers un cycle potentiellement stationnaire et d'utiliser une technique de SVD (*Singular Value Decomposition*) afin de déterminer les déformées principales du cycle et de les utiliser pour enrichir la base de projection des conditions initiales.

Ainsi il faut établir un équilibre entre coût de calcul et pourcentage d'erreur de l'approximation en utilisant la démarche développée. Plus les bases de projection des conditions initiales sont conséquentes, plus l'erreur d'approximation devrait être faible, mais plus le coût de calcul de l'approximation du régime stationnaire est important. En revanche, on rappelle que l'intégration numérique elle-même n'est pas réduite et les cycles limites obtenus sont équilibrés d'un point de vue dynamique. Cette caractéristique de la

méthode est originale et diffère fortement d'une simple réduction de la dynamique.

# Chapitre 6

## Conclusion et perspectives

### Sommaire

---

<b>6.1 Conclusion</b> . . . . .	<b>190</b>
<b>6.2 Perspectives</b> . . . . .	<b>192</b>
6.2.1 Enrichissement de la base de projection des conditions initiales . . .	192
6.2.2 Multi-instabilités . . . . .	193
6.2.3 Perspectives générales . . . . .	194

---

## 6.1 Conclusion

Lors de ces travaux de thèse nous avons apporté une contribution à l'étude de phénomène de crissement principalement du point de vue des méthodes de calcul des vibrations auto-entretenues à l'origine du bruit émis et avec une application au cas du système de freinage de TGV. On a supposé que l'instabilité vibratoire des structures frottantes a pour origine un couplage modal entre les directions normale et tangentielles de l'interface en contact. Le contact frottant est modélisé avec la loi de contact unilatéral de Signorini et la loi de frottement de Coulomb à coefficient de frottement constant. Les études proposés dans le cadre de ces travaux de thèse sur un système soumis à des vibrations auto-entretenues dues au frottement se sont basées sur deux types d'analyse : l'analyse de stabilité permettant de déterminer l'occurrence des vibrations et l'analyse non-linéaire calculant les niveaux de ces vibrations.

Une première contribution originale de cette thèse est l'étude de la stabilité de l'équilibre quasi-statique d'un modèle 3-D masse ressort amorti en frottement sur un plan glissant. En effet ce modèle permet de comparer la stabilité de l'équilibre lorsque le frottement est supposé rectiligne ou plan. Les résultats déjà observés dans la littérature avec l'hypothèse simplificatrice du frottement rectiligne dans le cas d'un système amorti sont vérifiés ("lowering effect" et "smoothing effect"). Ensuite la comparaison des zones de stabilité pour un système non-amorti permet de conclure que l'hypothèse du frottement rectiligne induit une meilleure stabilité de l'équilibre du système comparé au frottement plan. Ceci est dû à la linéarisation de la direction de frottement qui aboutit à l'ajout d'un terme d'amortissement visqueux dans le cadre du frottement plan. De plus, lors de l'utilisation du frottement plan, un paramètre important pour la stabilité du système non-amorti est la direction de glissement. Ce paramètre influe sur l'évolution de la stabilité des modes. Enfin une étude paramétrique de l'amortissement sur la stabilité du système soumis au frottement plan montre un comportement plus complexe de l'évolution des zones instables que pour le frottement rectiligne. L'ajout d'un amortissement modal iso-réparti permet d'étendre le principe du "lowering effect" au frottement plan. Cependant lors de l'étude d'un amortissement non-proportionnel, le phénomène du "smoothing effect" est moins intuitif pour un système soumis au frottement plan. Suivant la direction de glissement, l'ajout d'un amortissement non-proportionnel peut aussi bien stabiliser que déstabiliser l'équilibre du système. On remarque aussi que, comme pour le cas non-amorti, la direction de glissement gouverne la stabilité des modes.

L'analyse non-linéaire de ce modèle est effectuée dans un premier temps en utilisant des techniques numériques déjà développées dans des travaux antérieurs. Les évolutions transitoire et stationnaire du modèle précédent sont calculées à l'aide d'un intégrateur implicite ( $\theta$ -méthode) qui a subi une modification pour la simulation de chocs inélastiques et couplé à un algorithme du point fixe pour la détermination des forces non-linéaires de contact frottant. L'une des contributions de ces travaux de thèse a été le développement et la formulation du bilan de puissance adapté aux outils utilisés afin de mieux comprendre les phénomènes physiques mis en jeu lors de l'apparition du crissement. Ainsi l'observation de l'évolution des différents échanges énergétiques du système a permis d'expliquer l'origine du régime stationnaire pour un système soumis à des vibrations auto-entretenues : les amplitudes vibratoires d'un tel système augmentent exponentiellement jusqu'à apparition de phénomènes non-linéaires (décollement/choc ou adhérence). Ces phénomènes engendrent alors la saturation des réactions de contact provo-

quant une diminution du taux de la puissance moyenne injectée liée à ces réactions. On a aussi observé que le taux de la puissance moyenne dissipée par amortissement varie peu tout au long de cette évolution. Ainsi l'origine du régime stationnaire est fortement piloté par les phénomènes non-linéaires qui conduisent à un équilibre entre la puissance moyenne injectée par les réactions de contact frottant et la puissance moyenne dissipée par amortissement.

L'évolution temporelle d'un système soumis à des instabilités dues au frottement est composé d'un régime transitoire et d'un régime stationnaire qui est supposé être le régime de fonctionnement. D'un point de vue pratique, seul le régime de fonctionnement est généralement recherché et l'utilisation de l'intégration temporelle comme méthode d'analyse non-linéaire engendre des coûts de calcul supplémentaires non-négligeables. Ces travaux de thèse contribuent au développement d'une méthode d'analyse non-linéaire permettant directement d'approximer le régime stationnaire d'un système mono-instable (soumis à un seul mode instable). Cette méthode est composée d'une méthode de tir et d'un critère énergétique basé sur l'observation précédente permettant de l'initialiser. La méthode de tir est une méthode non-linéaire basée sur l'intégration temporelle sur une période itérant sur les conditions initiales et la période du système jusqu'à obtention du régime stationnaire via un algorithme de Newton-Raphson.

Cette démarche est tout d'abord développée et testée pour trois configurations du modèle académique 3D. Le système étant autonome, la méthode de tir doit itérer sur la période inconnue du système, en plus de déterminer les conditions initiales menant au régime stationnaire. La méthode utilise un algorithme de Newton-Raphson qui est local. Par conséquent des problèmes de convergence peuvent être rencontrés si l'initialisation de la méthode est trop éloignée de la solution recherchée. Ce problème a été résolu par une approximation du régime stationnaire suivant un critère énergétique. Le régime stationnaire est issu de l'équilibrage entre la puissance moyenne injectée par les réactions de contact frottant et la puissance moyenne dissipée par amortissement. Ainsi les déplacements et vitesses ont été projetés sur la déformée du mode instable et les réactions de contact frottant exprimées de manière à pouvoir être saturées. La détermination de l'amplitude modale égalisant la puissance moyenne injectée par le contact frottant et la puissance moyenne dissipée par amortissement permet d'initialiser l'algorithme de tir. La période initiale est supposée égale à la période du mode instable.

La comparaison des approximations du régime stationnaire issues de la méthode de tir avec les résultats obtenus par intégration temporelle directe pour les trois cas du système académique mène aux conclusions suivantes :

- la méthode de tir permet de trouver un cycle limite instable, ce qui n'est pas possible avec l'utilisation de l'intégration temporelle directe.
- L'initialisation de la période est un critère important. La méthode de tir ne donnera pas nécessairement le cycle limite obtenu par intégration temporelle si la période initialement choisie pour le calcul n'est pas proche de la période du cycle limite stable. Elle trouve généralement le cycle limite (qui peut être stable ou instable) le plus proche des conditions initiales données alors que le schéma d'intégration direct obtient seulement le cycle limite stable (dépendant des conditions initiales choisies).
- L'utilisation de la théorie de Floquet qui teste la stabilité du cycle limite solution du processus de tir via la matrice de monodromie, peut donner des informations

concernant le comportement du système pour un cycle limite instable.

Ainsi en prenant en compte ces remarques, la méthode non-linéaire développée permet une bonne approximation du régime stationnaire dans les trois configurations. De plus, l'utilisation de la méthode de tir (plus précisément le calcul de la matrice de monodromie) permet de mettre en avant un phénomène complexe en dynamique vibratoire pour une des trois configurations. Il s'agit d'une bifurcation de doublement de période qui a pu être observée en utilisant la théorie de Floquet.

Les résultats obtenus sur le modèle académique étant encourageants et la technique numérique de méthode de tir adaptée validée, une transposition de la méthode non-linéaire développée aux modèles éléments finis représentant un frein de TGV est entreprise. L'établissement de deux variantes d'un même modèle ainsi que les différents outils permettant l'analyse de stabilité sont étudiés. Deux cas d'étude mono-instables sont déterminés et l'analyse de leurs évolutions transitoires et stationnaires permet de vérifier l'hypothèse concernant l'origine du régime stationnaire.

Une des difficultés de l'utilisation de la méthode de tir pour des modèles éléments finis est le calcul de la matrice de monodromie. Les techniques classiques de calcul de cette matrice (différences finies ou intégration temporelle) engendrent des coûts de calcul importants. L'une des contributions de cette thèse est le développement d'une technique pour réduire ces coûts. Elle consiste en une projection des conditions initiales sur un espace des phases réduit diminuant ainsi de manière considérable le nombre d'inconnues du processus de tir. Cette réduction n'intervient en aucun cas sur l'évolution dynamique des systèmes qui reste inchangée et intégrée via l'algorithme temporel non réduit. Deux bases de projection sont testées : une base comportant l'équilibre quasi-statique et les parties réelle et imaginaire du vecteur propre du mode instable et une autre base comportant que ces deux derniers vecteurs. La méthode d'initialisation de l'algorithme de tir pour le modèle académique est ensuite transposée aux modèles éléments finis.

Les approximations des régimes stationnaires par la méthode de tir et ceux obtenus par intégration temporelle directe sont ensuite comparés. Les comportements globaux des systèmes sont correctement approximés. Pour autant, si l'on s'attarde à l'échelle locale du contact frottant on peut constater que des améliorations d'estimation sont possibles. En effet, la déformation des plots est importante aux harmoniques hautes fréquences et la méthode de tir ne permet pas de converger vers ceux obtenus avec l'intégration temporelle directe. Ceci peut s'expliquer par l'absence de modes représentatifs de ces harmoniques dans la base réduite des conditions initiales. Toutefois dans une optique appliquée, ces détails ne sont pas forcément indispensables et une estimation très correcte des déformés et des niveaux à la fondamentale peuvent parfois suffire comme c'est le cas ici.

## 6.2 Perspectives

### 6.2.1 Enrichissement de la base de projection des conditions initiales

L'adaptation de la méthode de tir aux modèles éléments finis nous a amené à utiliser une base réduite des conditions initiales afin de réduire les inconnues du processus de tir. Les bases utilisées dans ces travaux de thèse sont issues de simplifications très fortes afin de limiter au maximum le temps de calcul dans une optique très appliquée.

Par conséquent les approximations des régimes stationnaires obtenues représentent correctement le comportement global du système et celles du comportement local, à l'interface de contact, peuvent être améliorées. Ce phénomène peut s'expliquer par l'absence de modes dans la base réduite permettant de représenter le comportement local haute fréquence. Ainsi des stratégies d'enrichissement de base peuvent être envisagées.

Une première base très intuitive serait constituée de l'ensemble des vecteurs propres liés aux modes issus de l'analyse de stabilité. Cela permettrait alors de représenter l'évolution de la dynamique du système avec beaucoup plus de finesse mais à contrario augmenterait le nombre d'intégrations temporelles sur une période par itération du processus de tir.

Une autre proposition d'enrichissement serait de se souvenir que les bases utilisées dans ces travaux manquent de représentation modale pour décrire les déformées aux harmoniques. Ainsi après l'analyse de stabilité et la détermination du mode instable, un critère permettant de sélectionner les modes potentiellement au voisinage des harmoniques et de les inclure dans la base réduite des conditions initiales pourrait être développé. Comparé à la première proposition, le nombre de modes dans la base serait alors plus restreint et le coût de calcul en serait diminué.

Une troisième proposition serait d'alterner convergence de la méthode de tir et enrichissement de la base réduite des conditions initiales. Un premier processus de tir approximerait alors le régime stationnaire que l'on nomme Approximation 1. Ensuite une décomposition temps espace de Approximation 1 serait effectuée en utilisant soit la transformée de Fourier soit les SVD. Les déformées spatiales qui ont les plus grandes contributions seraient retenues. La base réduite des conditions initiales serait alors enrichie en ajoutant ces déformées spatiales ou en définissant une nouvelle base à partir de ces déformées. Un nouveau processus de tir serait alors calculé avec cette nouvelle base. Cet enrichissement/remplacement serait répété jusqu'au respect de la condition de périodicité physique.

Cette liste de propositions d'enrichissement de base est bien entendu non-exhaustive. Cependant on rappelle que l'objectif du développement de cette méthode non-linéaire est de réduire le temps de calcul pour l'obtention du régime stationnaire. C'est pourquoi on doit garder à l'esprit que si la base de projection des conditions initiales comporte trop de modes, il se pourrait que le temps de calcul nécessaire à la convergence de la méthode de tir soit du même ordre de grandeur que celui nécessaire à l'intégration temporelle pour l'obtention du régime stationnaire avec une initialisation correcte (cf. estimation énergétique). La méthode non-linéaire perdrait alors son intérêt principal. Il faut donc trouver un équilibre entre l'erreur commise lors de l'approximation et le temps de calcul de la méthode.

### 6.2.2 Multi-instabilités

Dans ces travaux de thèse seul le cas d'un système périodique est traité. En effet, l'ensemble des développements effectués ont pour hypothèse que le système étudié est soumis à un mode instable. Cependant les essais effectués sur banc montrent que le crissement est une instabilité vibratoire qui peut comporter plusieurs fréquences fondamentales [2]. Ce cas est appelé quasi-périodique où l'évolution du système est soumise à une instabilité comportant plusieurs modes instables avec des fréquences incommensurables. Ainsi des développements supplémentaires à la méthode de tir proposée dans ces travaux seraient à apporter afin de pouvoir approximer le régime stationnaire de tels systèmes.

Dans le cas quasi-périodique, la trajectoire du régime stationnaire dans l'espace des phases (le cycle limite) est contenue dans un espace à plusieurs dimensions contrairement au cas périodique où la trajectoire est unidimensionnelle. Définir un critère de quasi-périodicité strict dans le domaine temporel n'est donc pas évident et il faudra probablement se contenter d'un critère plus souple (stationnarité par exemple) ou passer dans le domaine fréquentiel. Par ailleurs, l'initialisation de la méthode de tir sur un ensemble de contributions de modes instables nécessite la recherche des amplitudes modales optimales mais aussi des déphasages entre les modes.

Malgré tous ces efforts, l'approximation du régime stationnaire par la méthode de tir n'est pas garantie. L'algorithme de Newton-Raphson utilisé par la méthode de tir étant local, si les amplitudes modales initiales ne sont pas pertinentes, il est possible que la méthode ne converge pas.

Un travail préliminaire peut consister à chercher des solutions périodiques d'un système multi-instable. En effet, [2] a bien montré que dans certains cas, un seul mode dominant peut subsister dans la solution stationnaire, les contributions des autres modes instables ayant été stabilisés voire annihilés dans le régime transitoire. Dans ce cas, l'estimation énergétique est pertinente pour nous renseigner sur l'amplitude modale du mode induisant la saturation et peut être utilisée en tant qu'initialisation comme cela a été effectué dans cette thèse. Ces amplitudes modales peuvent également fournir des informations sur les éventuelles contributions des modes dans un régime stationnaire quasi-périodique. A fortiori, si une amplitude est nettement supérieure aux autres, il est possible que le mode associé soit dominant dans le régime stationnaire.

### 6.2.3 Perspectives générales

L'étude du crissement reste un sujet très complexe en dynamique des structures et comporte encore de nombreux verrous scientifiques.

Même si les principaux verrous concernent l'analyse non-linéaire, des progrès peuvent être accomplis dans le cadre de l'analyse de stabilité qui est en pleine évolution. Dans le cas des systèmes de freinage par exemple, l'influence des différentes zones de contact entre les composants du frein ainsi que l'évolution de ces contacts influent considérablement sur l'occurrence des vibrations. Prendre en compte ces variations de manière déterministe voire probabiliste pourrait être intéressant pour fiabiliser l'analyse.

La modélisation de l'amortissement dans les structures est toujours un thème à approfondir, en particulier dans le domaine temporel. Dans le cas de vibrations auto-entretenues, une modification pertinente de l'amortissement peut stabiliser complètement la solution et le besoin de réalisme est crucial. Des améliorations peuvent certainement être apportées au modèle d'amortissement très simple (visqueux Rayleigh par morceaux) utilisé dans cette thèse.

Enfin, dans nos travaux, le contact frottant est modélisé par des lois de Signorini-Coulomb. Comme indiqué à plusieurs reprises, le bon niveau de complexité à prendre en compte concernant le modèle de contact frottant est un point de discussion majeur dans la littérature scientifique. Les hypothèses asymptotiques effectuées ici ont l'avantage de fournir une famille de résultats de référence, ramenant assez brutalement l'ensemble des aspects tribologiques à un seul coefficient de frottement local et en évacuant à dessein toutes les difficultés liées à la connaissance précise des phénomènes physiques à l'interface. Bien entendu, d'autres hypothèses doivent être progressivement incluses dans les modèles de manière à accroître le réalisme : géométrie, élasticité et plasticité des rugosités réelles pour ce qui relève du contact normal, coefficients de frottement variables et

effets d'histoire pour ce qui relève du frottement, le tout en lien avec l'usure aux interfaces et les variations de température. Tous ces phénomènes doivent d'ailleurs être appréhendés dans un cadre plus large que la seule dynamique des structures puisqu'ils jouent un rôle actif dans les domaines voisins tels que la tribologie et la thermomécanique.



# Annexe A

## Calcul des coefficients de Routh-Hurwitz

Dans cette annexe, les coefficients de Routh-Hurwitz sont calculés dans le cas général (pour un système avec frottement plan et amortissement). Ensuite les expressions simplifiées pour un système non amorti avec frottement plan et un système avec frottement rectiligne avec amortissement sont données.

En premier lieu, après calcul les coefficients  $a_3$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  et  $a_0$  de l'Équation 3.23 sont donnés par :

$$a_3 = \frac{mc_x + mc_y + \mu mc_b}{m^2} \quad (\text{A.1})$$

$$a_2 = \frac{\mu (c_x c_b \cos^2 \gamma + c_y c_b \sin^2 \gamma - mk_1 \tan \alpha \cos \gamma - mk_2 \tan \beta \sin \gamma) + mk_1 + mk_2 + c_x c_y}{m^2} \quad (\text{A.2})$$

$$a_1 = (-\mu^2 (c_b k_1 \cos \gamma \tan \alpha + c_b k_2 \sin \gamma \tan \beta) + \mu (c_b k_2 \sin^2 \gamma + c_b k_1 \cos^2 \gamma - c_x k_2 \tan \beta \sin \gamma - c_y k_1 \tan \alpha \cos \gamma) + c_x k_2 + c_y k_1) / m^2 \quad (\text{A.3})$$

$$a_0 = \frac{-\mu (k_1 k_2 \tan \beta \sin \gamma + k_2 k_1 \tan \alpha \cos \gamma) + k_1 k_2}{m^2} \quad (\text{A.4})$$

où  $c_b = \frac{R_d^e}{V}$ .

### A.1 Cas général : frottement plan avec amortissement

Les coefficients de Routh-Hurwitz dans le cas général sont donnés par :

$$a = a_0 = \frac{-\mu (k_1 k_2 \tan \beta \sin \gamma + k_2 k_1 \tan \alpha \cos \gamma) + k_1 k_2}{m^2} \quad (\text{A.5})$$

$$b = a_3 = \frac{mc_x + mc_y + \mu mc_b}{m^2} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}
 c = a_2 a_3 - a_1 = & (\mu^2 (c_y c_b^2 \sin^2 \gamma + c_x c_b^2 \cos^2 \gamma) \\
 & + \mu \left( (c_y^2 + c_x c_y) c_b - c_b k_2 m \right) \sin^2 \gamma - c_y k_2 m \tan \beta \sin \gamma + ((c_x c_y + c_x^2) c_b - c_b k_1 m) \cos^2 \gamma \\
 & - c_x k_1 m \tan \alpha \cos \gamma + (c_b k_2 + c_b k_1) m + c_x c_y c_b + (c_y k_2 + c_x k_1) m + c_x c_y^2 + c_x^2 c_y) / m^3
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$d = a_1 (a_2 a_3 - a_1) - a_0 a_3^2 = -(b_4 \mu^4 + b_3 \mu^3 + b_2 \mu^2 + b_1 \mu + b_0) / m^5 \tag{A.8}$$

où  $b_4, b_3, b_2, b_1$  et  $b_0$  sont définis par :

$$b_4 = c_y c_b^3 k_2 \tan \beta \sin^3 \gamma + c_y c_b^3 k_1 \tan \alpha \cos \gamma \sin^2 \gamma + c_x c_b^3 k_2 \tan \beta \cos^2 \gamma \sin \gamma + c_x c_b^3 k_1 \tan \alpha \cos^3 \gamma \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
 b_3 = & -c_y c_b^3 k_2 \sin^4 \gamma + ((c_y + 2c_x) c_y - k_2 m) c_b^2 k_2 \tan \beta \sin^3 \gamma \\
 & + ((-c_x k_2 - c_y k_1) c_b^3 \cos^2 \gamma + ((2c_y + c_x) c_y - k_2 m) c_b^2 k_1 \tan \alpha \cos \gamma \\
 & - c_y c_b k_2^2 m \tan^2 \beta) \sin^2 \gamma + (((c_y + 2c_x) c_x - k_1 m) c_b^2 k_2 \tan \beta \cos^2 \gamma \\
 & + (-c_y - c_x) c_b k_1 k_2 m \tan \alpha \tan \beta \cos \gamma + c_b^2 k_2^2 m \tan \beta + c_x c_y c_b^2 k_2 \tan \beta) \sin \gamma \\
 & - c_x c_b^3 k_1 \cos^4 \gamma + ((2c_y + c_x) c_x - k_1 m) c_b^2 k_1 \tan \alpha \cos^3 \gamma \\
 & - c_x c_b k_1^2 m \tan^2 \alpha \cos^2 \alpha + (k_1 m + c_x c_y) c_b^2 k_1 \tan \alpha \cos \gamma
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 = & (k_2 m + (-c_y^2 - c_x c_y)) c_b^2 k_2 \sin^4 \gamma + ((c_y - c_x) k_2 m + (c_x c_y^2 + c_x^2 c_y)) c_b k_2 \tan \beta \sin^3 \gamma \\
 & + ((2k_1 k_2 m + (-c_x c_y - c_x^2) k_2 + (-c_y^2 - c_x c_y) k_1) c_b^2 \cos^2 \gamma + ((c_x - c_y) k_2 m \\
 & + (c_y + c_x) c_y^2) c_b k_1 \tan \alpha \cos \gamma + ((-c_b^2 - c_x c_y \tan^2 \beta) k_2 - c_b^2 k_1) k_2 m - 2c_x c_y c_b^2 k_2 - c_y^2 c_b^2 k_1) \sin^2 \gamma \\
 & + (((c_y - c_x) k_1 m + (c_y + c_x) c_x^2) c_b k_2 \tan \beta \cos^2 \gamma + (-c_y^2 - c_x^2) k_1 k_2 m \tan \alpha \tan \beta \cos \gamma \\
 & + ((c_y - c_x) k_2 - 2c_y k_1) c_b k_2 m \tan \beta + (c_y + c_x) c_x c_y c_b k_2 \tan \beta) \sin \gamma + (k_1 m + (-c_y - c_x) c_x) c_b^2 k_1 \cos^4 \gamma \\
 & + ((c_x - c_y) k_1 m + (c_y + c_x) c_x c_y) c_b k_1 \tan \alpha \cos^3 \gamma + (((-c_b^2 - c_x c_y \tan^2 \alpha) k_1 - c_b^2 k_2) k_1 m \\
 & - c_x^2 c_b^2 k_2 - 2c_x c_y c_b^2 k_1) \cos^2 \gamma + (((c_y + c_x) k_1 - 2c_x k_2) m + (2c_y + c_x) c_x c_y) c_b k_1 \tan \alpha \cos \gamma + c_b^2 k_1 k_2 m
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 = & (((c_x - c_y) k_2 + (c_y - c_x) k_1) c_b k_2 m + (-2c_y - 2c_x) c_x c_y c_b k_2 + (-c_y - c_x) c_y^2 c_b k_1) \sin^2 \gamma \\
 & + ((2k_2 - 2k_1) m + (c_x c_y + c_x^2)) c_x c_y k_2 \tan \beta \sin \gamma + (((c_x - c_y) k_2 + (c_y - c_x) k_1) c_b k_1 m \\
 & + (-c_y - c_x) c_x^2 c_b k_2 + (-2c_y - 2c_x) c_x c_y c_b k_1) \cos^2 \gamma + ((2k_1 - 2k_2) m + (c_y^2 + c_x c_y)) c_x c_y k_1 \tan \alpha \cos \gamma \\
 & + (-c_x k_2^2 + (c_y + c_x) k_1 k_2 - c_y k_1^2) c_b m - c_x^2 c_y c_b k_2 - c_x c_y^2 c_b k_1
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$b_0 = -(k_2 - k_1)^2 c_x c_y m + (-c_x c_y - c_x^2) c_x c_y k_2 + (-c_y^2 - c_x c_y) c_x c_y k_1 \tag{A.13}$$

On remarque que, pour le cas général, si les coefficients  $a, b$  et  $c$  sont strictement positifs, la valeur du coefficient de frottement à la bifurcation de Hopf  $\mu_c$  tel que  $d(\mu_c) = 0$  est solution d'une équation polynomiale de degré 4. Cela permet d'avoir plus d'une solution positive de coefficient de frottement ce qui signifie que le système mécanique peut redevenir stable après avoir été déstabilisé par une instabilité de couplage de modes.

## A.2 Frottement plan sans amortissement

Le cas d'un système avec frottement plan sans amortissement ( $c_x = c_y = 0$ ) est maintenant étudié. Les coefficients de Routh-Hurwitz sont :

$$a = \frac{-\mu (k_1 k_2 \tan \beta \sin \gamma + k_2 k_1 \tan \alpha \cos \gamma) + k_1 k_2}{m^2} \quad (\text{A.14})$$

$$b = \frac{\mu m c_b}{m^2} \quad (\text{A.15})$$

$$c = \frac{\mu c_b (k_2 \cos^2 \gamma + k_1 \sin^2 \gamma)}{m^2} \quad (\text{A.16})$$

$$d = \frac{\mu^2 c_b^2 (k_1 - k_2) \cos \gamma \sin \gamma}{m^4} ((k_1 - k_2) \cos \gamma \sin \gamma - \mu (k_1 \tan \alpha \sin \gamma - k_2 \tan \beta \cos \gamma)) \quad (\text{A.17})$$

Pour ce cas, la valeur du coefficient de frottement au point de la bifurcation de Hopf  $\mu_c$  tel que  $d(\mu_c) = 0$  est solution d'une équation polynomiale de degré 1 et ne dépend pas de  $c_b$ . Il y a seulement une valeur de  $\mu_c$  pour chaque direction de glissement  $\gamma$ , ce qui signifie que contrairement au système avec amortissement, le système non-amorti reste instable quand il est déstabilisé par une instabilité de couplage de modes.

## A.3 Frottement rectiligne avec amortissement

Le cas d'un système avec frottement rectiligne et amortissement ( $c_b = 0$ ) est maintenant étudié. Les coefficients de Routh-Hurwitz sont :

$$a = \frac{-\mu (k_1 k_2 \tan \beta \sin \gamma + k_2 k_1 \tan \alpha \cos \gamma) + k_1 k_2}{m^2} \quad (\text{A.18})$$

$$b = \frac{m c_x + m c_y}{m^2} \quad (\text{A.19})$$

$$c = \frac{\mu (-k_2 c_y \tan \beta \sin \gamma - k_1 c_x \tan \alpha \cos \gamma) m + (c_y k_2 + c_x k_1) m + c_x c_y (c_x + c_y)}{m^3} \quad (\text{A.20})$$

$$d = \frac{\mu^2 b_2 + \mu b_1 + b_0}{m^5} \quad (\text{A.21})$$

où

$$b_2 = (k_2^2 \tan^2 \beta \sin^2 \gamma + k_1^2 \tan^2 \alpha \cos^2 \gamma) c_x c_y m + (c_y^2 + c_x^2) k_1 k_2 m \tan \alpha \tan \beta \sin \gamma \cos \gamma \quad (\text{A.22})$$

$$b_1 = -c_x c_y \left( ((k_2 - k_1) 2m + (c_x c_y + c_x^2)) k_2 \tan \beta \sin \gamma + ((k_1 - k_2) 2m + (c_y^2 + c_x c_y)) k_1 \tan \alpha \cos \gamma \right) \quad (\text{A.23})$$

$$b_0 = c_x c_y \left( (k_1 - k_2)^2 m + (c_x c_y + c_x^2) k_2 + (c_y^2 = c_x c_y) k_1 \right) \quad (\text{A.24})$$

Pour ce cas la valeur du coefficient de frottement au point de la bifurcation de Hopf  $\mu_c$  est la solution d'une équation polynomiale de degré 2. Si les deux solutions sont réelles positives, le système peut être de nouveau stabilisé après avoir été déstabilisé par une instabilité de couplage de modes.

## A.4 Frottement rectiligne sans amortissement

Pour le cas d'un système avec frottement rectiligne et sans amortissement, la stabilité du système a été étudié en calculant les valeurs propres au lieu d'utiliser le critère de Routh-Hurwitz. Les détails de cette méthode peuvent être trouvés dans [12]. La valeur du coefficient de frottement au point de bifurcation de Hopf  $\mu_c$  est solution d'une équation polynomiale de degré 2. Donc, le système peut être stabilisé de nouveau quand il a été préalablement déstabilisé.

# Bibliographie

- [1] X. Lorang. *Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV*. PhD thesis, École Polytechnique, 2007. [10](#), [21](#), [28](#), [31](#), [42](#), [45](#), [54](#), [58](#), [92](#), [128](#), [129](#), [138](#), [141](#), [142](#)
- [2] A. Loyer. *Étude numérique et expérimentale du crissement des systèmes de freinage ferroviaires*. PhD thesis, École Centrale Lyon, 2012. [10](#), [20](#), [21](#), [27](#), [28](#), [31](#), [42](#), [43](#), [44](#), [45](#), [54](#), [58](#), [84](#), [92](#), [132](#), [135](#), [149](#), [152](#), [193](#), [194](#)
- [3] A. Signorini. Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata. *Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni*, 18 :95–139, 1959. [16](#)
- [4] H. Hertz. Über die berührung fester elastischer körper and über die härte an. *J. für reine und angewandte Mathematik*, 92, 1882. [17](#)
- [5] V. A. Duong. *Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2008. [17](#)
- [6] M. Sebes, J-B. Ayasse, H. Chollet, P. Pouligny, J. Plu, and L. Chevalier. Application de la méthode semi-hertzienne pour la simulation du passage d'un tgv dans un appareil de voie. *18 ème Congrès Français de Mécanique*, 2007. [17](#)
- [7] J.T. Oden and J.A.C. Martins. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52 :527–634, 1987. [17](#), [18](#), [26](#)
- [8] R. Stribeck and Schöter M. Die wesentlichen eigenschaften der gleit- und rollenlager : Untersuchung einer tandem-verbundmaschine von 1000 ps / schöter [u.a.]. In *Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, insbesondere aus den Laboratorien der technischen Hochschulen*. Springer, 1903. [19](#)
- [9] P. R. Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal*, 14 :1675–1682, 1976. [19](#)
- [10] C. C. D. Wit, H. Olsson, K. J. Aström, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on automatic control*, 40 :419–425, 1995. [19](#)
- [11] B.D. Hachmi and Z. Chokri. Level-sets fields, placement and velocity based formulations of contact-impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69 :2711–2735, 2007. [20](#)
- [12] F. Moirot. *Étude de la stabilité d'un équilibre en présence de frottement de Coulomb*. PhD thesis, École Polytechnique, 1998. [20](#), [28](#), [58](#), [130](#), [139](#), [141](#), [200](#)
- [13] M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 177 :235–257, 1999. [20](#), [41](#), [44](#)
- [14] D. Vola, E. Pratt, M. Jean, and M. Raous. Consistent time discretization for a dynamical frictional contact problem and complementarity techniques. *Revue européenne des éléments finis*, 7 :149–162, 1998. [20](#), [42](#), [44](#)

- [15] V. Acary. Energy conservation and dissipation properties of time-integration methods for the nonsmooth elastodynamics with contact. *Research Report : Project-Team Bipop*, 8602, 2014. [20](#), [42](#), [85](#)
- [16] G. Vermot Des Roches. *Frequency and time simulation of squeal instabilities. Application to the design of industrial automotive brakes*. PhD thesis, École Centrale Paris, 2011. [20](#), [31](#), [34](#), [37](#)
- [17] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(3) :353 – 375, 1991. [20](#), [42](#)
- [18] G. Duvaut and J-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique vol 1 dans Travaux et recherches mathématiques*. Dunod, 1972. [20](#)
- [19] N.M. Kinkaid, O.M. O'Reilly, and P. Papadopoulos. Automotive disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 267 :105–166, 2003. [21](#), [30](#)
- [20] H. Ouyang, W. Nack, Y. Yuan, and F. Chen. Numerical analysis of automotive disc brake squeal : a review. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 1 :207–231, 2005. [21](#)
- [21] R.A. Ibrahim. Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos part ii : Dynamics and modelling. *Applied Mechanics Review*, 47 :227–253, 1994. [21](#)
- [22] R.A. Ibrahim. Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos part 1 : mechanics of contact and friction. *Applied Mechanics Review*, 47 :209–226, 1994. [21](#), [22](#)
- [23] D.A. Crolla and Lang A.M. Brake noise and vibration - state of art. *Vehicule Tribology, Tribology Series*, 18 :165–174, 1991. [21](#)
- [24] K. Popp and P. Stelzer. Stick-slip vibrations and chaos. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 332 :89–105, 1990. [22](#)
- [25] M. T. Bengisu and A. Akay. Stability of friction-induced vibrations in multi-degree-of-freedom systems. *Journal of Sound and Vibration*, 171 :557–570, 1994. [22](#)
- [26] R. Spurr. A theory of brake squeal. *Proc. Auto. Div. Inst. Mech. Eng.*, 1 :33–40, 1961. [25](#), [28](#), [29](#)
- [27] V. Aronov, A.F. D'Souza, S. Kalpakjian, and I. Shareff. Experimental investigation on the effect of system rigidity on wear and friction-induced vibrations. *Journal of Tribology*, 105 :206–211, 1983. [26](#)
- [28] V. Aronov, A.F. D'Souza, S. Kalpakjian, and I. Shareff. Interactions among friction, wear and system stiffness - part 1 : Effect of normal load and system stiffness; part 2 : Vibration induced by dry friction; part 3 : Wear model. *Journal of Tribology*, 106 :54–69, 1984. [26](#)
- [29] N. Hoffmann, M. Fischer, R. Allgaier, and L. Gaul. A minimal models for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations. *Mechanics Research Communications*, 29 :197–205, 2002. [26](#), [58](#), [68](#), [69](#), [71](#), [75](#)
- [30] U. Von Wagner, P. Hagedorn, and D. Hochlenert. Minimal models for disk brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 302 :527–539, 2007. [26](#), [58](#)
- [31] J-J. Sinou and L. Jézéquel. Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 26 :106–122, 2007. [26](#), [28](#), [55](#), [58](#), [68](#), [69](#), [71](#), [75](#)
- [32] E. Hopf. Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differential-systems. *Berichte der Mathematisch-Physischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, XCIV :384–390, 1942. [27](#)

- [33] J-J. Sinou, G. Fritz, and L. Jézéquel. The role of damping and definition of the robust damping factor (rd-factor) for a self-exciting mechanism with constant friction. *Journal of Vibration and Acoustics*, 129(3) :297–306, 2007. [28](#), [55](#), [58](#), [75](#)
- [34] D. Brizard, O. Chiello, J-J. Sinou, and X. Lorang. Performances of some reduced bases for the stability analysis of a disc/pads system in sliding contact. *Journal of Sound and Vibration*, 330 :703–720, 2011. [28](#), [58](#), [132](#), [134](#), [135](#), [138](#), [142](#)
- [35] J-J. Sinou. Transient non-linear dynamic analysis of automotive disc brake squeal - on the need to consider both stability and non-linear analysis. *Mechanics Research Communications*, 37 :96–105, 2010. [29](#), [31](#), [54](#), [116](#)
- [36] A. R. AbuBakar and H. Ouyang. Complex eigenvalue analysis and dynamic transient analysis in predicting disc brake squeal. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 2 :143–155, 2006. [29](#)
- [37] J-J. Sinou, F. Thouverez, and L. Jézéquel. Methods to reduce non-linear mechanical systems for instability computation. *Archives of Computational Methods in Engineering : State of the Art Reviews* 11, 3 :257–344, 2004. [29](#)
- [38] A. Akay. Acoustics of friction. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111 :1252–1548, 2002. [30](#)
- [39] O. Chiello, J-B. Ayasse, N. Vincent, and Koch J-R. Curve squeal of urban rolling - part 3 : Theoretical model. *Journal of Sound and Vibration*, 293 :710–727, 2006. [30](#)
- [40] C. Vincent, J.R. Koch, H. Chollet, and J.Y. Guerder. Curve squeal of urban rolling stock - part 1 : State of the art and field measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 293 :691–700, 2006. [30](#)
- [41] O. Chiello. Modélisation et analyse non linéaire des vibrations auto-entretenues de frein à disque crissants. *22 ème Congrès Français de Mécanique*, 2015. [31](#)
- [42] X. Lorang and O. Chiello. Stability and transient analysis in the modelling of railway disc brake squeal. In *Noise and vibration mitigation for rail transportation systems*, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, pages 447–453. Springer, 2008. [31](#)
- [43] F. Massi, L. Baillet, O. Giannini, and A. Sestieri. Linear and non-linear numerical approaches. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21 :2374–2393, 2007. [31](#)
- [44] A. Loyer, J-J. Sinou, O. Chiello, and X. Lorang. Study of nonlinear behaviors and modal reductions for friction destabilized systems. application to an elastic layer. *Journal of Sound and Vibration*, 331 :1011–1041, 2012. [31](#)
- [45] S. Oberst and J.C.S. Lai. Nonlinear transient and chaotic interactions in disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 342 :272–289, 2015. [31](#)
- [46] A. Meziane, L. Baillet, and B. Laulagnet. Experimental and numerical investigation of friction-induced vibration of a beam-on-beam in contact with friction. *Applied Acoustics*, 71(9) :843 – 853, 2010. [31](#)
- [47] M. Géradin and D. Rixen. *Mechanical Vibrations - Theory and Application to Structural Dynamics*. Wiley, 1997. [32](#), [34](#), [36](#), [37](#), [39](#)
- [48] Butcher J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, 2008. [33](#)
- [49] S. Krenk. State-space time integration with energy control and fourth-order accuracy for linear dynamic systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65 :595–619, 2006. [34](#)

- [50] Hulbert G. M. and Hughes T. Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 84 :327–348, 1990. [35](#)
- [51] B. Tie and D. Aubry. Reliable and efficient numerical modeling of elastic wave propagation in engineering structures by discontinuous galerkin fem. *Computational Mechanics*, WCCM VI in conjunction with APCOM'04, 2004. [35](#)
- [52] H. Adouani, B. Tie, C. Berdin, and D. Aubry. Adaptive numerical modeling of dynamic crack propagation. *Journal de physique*, 134 :501–506, 2006. [35](#)
- [53] M. Mancuso and F. Ubertini. An efficient time discontinuous galerkin procedure for non-linear structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :6391–6406, 2006. [35](#)
- [54] N. M. Newmark and F. Asce. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE 85 :67–94, 1959. [36](#)
- [55] M. Hilber, T. Hughes, and R. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5 :283–292, 1977. [39](#)
- [56] M. Gérardin and A. Cardona. Time integration of the equations of motion in mechanism analysis. *Computers & Structures*, 33 :801–820, 1989. [39](#)
- [57] M. Raous, S. Barbadin, and D. Vola. Numerical characterization and computation of dynamic instabilities for frictional contact problems in friction and instabilities. In *Friction and Instabilities*, International Centre for Mechanical Sciences, pages 233–291. Springer, 2002. [42](#), [129](#)
- [58] A-D. Kudawoo. *Problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique du contact : performance, fiabilité et robustesse*. PhD thesis, Université d'Aix Marseille, 2012. [42](#)
- [59] H. B. Khenous. *Problèmes de contact unilatéral avec frottement de Coulomb en élastostatique et élastodynamique, étude mathématique et résolution numérique*. PhD thesis, INSAT, 2005. [42](#), [43](#), [130](#), [149](#)
- [60] L. Champaney, J-Y. Cognard, and P. Lavedèze. Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral conditions. *Computers and Structures*, 73 :249–266, 1998. [43](#)
- [61] H. Lemoussu, P-A. Boucard, and P. Lavedèze. A 3d shock computational strategy for real assembly and shock attenuator. *Advances in engineering software*, 73, 2002. [43](#)
- [62] D. Odièvre, P-A. Boucard, and F. Gatuingt. Stratégie de calcul multiéchelle pour la multirésolution en dynamique transitoire. *Neuvième Colloque national en Calcul des Structures - Giens*, 2009. [43](#)
- [63] C Royer. *Une Approche des problèmes de dynamique non-linéaires par la méthode à grand incrément de temps*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1990. [43](#)
- [64] P. Laborde and Y. Renard. Fixed point strategies for elastostatic frictional contact problems. *Mathematical methods in the applied sciences*, 31 :415 – 441, 2008. [43](#), [130](#)
- [65] H. B. Khenous, P. Laborde, and Y. Renard. Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 5 :283–292, 1977. [44](#)
- [66] R. M. Rosenberg. Normal modes of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, 27 :263–268, 1960. [45](#)

- [67] Y. S. Lee, G. Kerschen, A. F. Vakakis, P. Panagopoulos, L. Bergman, and D. M. McFarland. Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 204 :41–69, 2005. [45](#)
- [68] L. Renson, G. Kerschen, and B. Cochelin. Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. *Journal of Sound and Vibration*, 364 :177 – 206, 2016. [45](#), [48](#), [82](#)
- [69] M. Peeters, R. Vigié, G. Sérandour, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :195 – 216, 2009. [45](#), [50](#), [51](#), [82](#)
- [70] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324 :243–262, 2009. [45](#)
- [71] J. C. Slater. A numerical method for determining nonlinear normal modes. *Nonlinear Dynamics*, 10(1) :19–30, 1996. [45](#), [50](#)
- [72] F. Wang. Bifurcations of nonlinear normal modes via the configuration domain and the time domain shooting methods. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 20(2) :614–628, 2015. [45](#), [50](#)
- [73] R. J. Kuether and M. S. Allen. A numerical approach to directly compute nonlinear normal modes of geometrically nonlinear finite element models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 46(1) :1–15, 2014. [45](#), [50](#), [166](#)
- [74] S. W. Shaw and C. Pierre. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150 :170–173, 1991. [45](#)
- [75] S. W. Shaw and C. Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, 164 :85–124, 1993. [45](#)
- [76] Ali H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley-VCH, 2004. [46](#), [51](#), [119](#)
- [77] R. Seydel. *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York, 2009. [46](#), [50](#), [51](#)
- [78] S. L. Lau and Y. K. Cheung. Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 28 :959–964, 1981. [48](#)
- [79] E. Sarrouy and J.-J. Sinou. Non-linear and quasi-periodic vibrations in mechanical systems - on the use of the harmonic balance methods. In *Advances in Vibration Analysis Research*, pages 419–434. INTECH Publisher, 2011. [48](#)
- [80] T. M. Cameron and J. H. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56 :149–154, 1989. [48](#)
- [81] J.-J. Sinou. Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 44 :1713–1732, 2009. [48](#)
- [82] V. Jaumouillé, J.-J. Sinou, and B. Petitjean. An adaptative harmonic balance method for predicting the non-linear dynamic responses of mechanical systems - application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :4048–4067, 2010. [48](#)
- [83] A. Grolet and F. Thouverez. On a new harmonic selection technique for harmonic balance method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 30 :43–60, 2012. [48](#)

- [84] G. Von Groll and D. J. Ewins. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, 241 :223–233, 2001. [48](#)
- [85] A. Lazarus and O. Thomas. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338 :510–517, 2010. [48](#)
- [86] N. Coudeyras, S. Nacivet, and J-J. Sinou. A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : the constrained harmonic balance method, with application to disc brake squeal,. *Journal of Sound and Vibration*, 319 :1175–1199, 2009. [49](#)
- [87] N. Coudeyras, S. Nacivet, and J-J. Sinou. Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 328 :520–540, 2009. [49](#), [82](#)
- [88] S. Nacivet and J-J. Sinou. Modal amplitude stability analysis and its application to brake squeal. *Applied Acoustics*, 116 :127–138, 2017. [49](#)
- [89] A.M. Samoilenko and N.I. Ronto. *Numerical-analytic methods of investigating periodic solutions*. Mir publishers, 1979. [49](#)
- [90] P. Ribeiro. Non-linear forced vibrations of thin/thick beams and plates by the finite element and shooting methods. *Computers & Structures*, 82(17-19) :1413–1423, 2004. [50](#)
- [91] S. Stoykov and S. Margenov. Numerical computation of periodic responses of nonlinear large-scale systems by shooting method. *Computers & Mathematics with Applications*, 67(12) :2257–2267, 2014. [50](#)
- [92] J. C. Simo and N. Tarnow. The discrete energy-momentum method, conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 43 :757–792, 1992. [50](#)
- [93] D. Demailly. *Étude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel - Application à la dynamique rotor*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2003. [51](#)
- [94] J. Hale and H. Koçak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer, 1991. [51](#)
- [95] R.D. Richtmyer and K.W. Morton. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. New York : Interscience Publishers, 1957. [52](#)
- [96] A.H. Nayfeh. *Perturbations Methods*. John Wiley & Sons, 1973. [53](#)
- [97] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, 1973. [53](#)
- [98] N. Hoffmann and L. Gaul. Effects of damping on mode-coupling instability in friction induced oscillations. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 83(8) :524–534, 2003. [58](#), [75](#)
- [99] G. Fritz, J-J. Sinou, J-M. Duffal, and L. Jézéquel. Investigation of the relationship between damping and mode coupling patterns in case of brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3-5) :591–609, 2007. [58](#), [68](#), [69](#), [71](#), [75](#)
- [100] F. Massi and O. Giannini. Effect of damping on the propensity of squeal instability : An experimental investigation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(4) :2017–2023, 2008. [58](#)
- [101] B. Hervé, J-J. Sinou, H. Mahé, and L. Jézéquel. Extension of the destabilization paradox to limit cycle amplitudes for a nonlinear self-excited system subject to gyroscopic and circulatory actions. *Journal of Sound and Vibration*, 323(3) :944–973, 2009. [58](#), [68](#)

- [102] B. Hervé, J-J. Sinou, H. Mahé, and L. Jézéquel. Analysis of squeal noise and mode coupling instabilities including damping and gyroscopic effects. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27(2) :141–160, 2008. [58](#)
- [103] O.N. Kirillov. Destabilization paradox due to breaking the hamiltonian and reversible symmetry. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 42(1) :71–87, 2007. [59](#)
- [104] O.N. Kirillov and A.O. Seyranian. The effect of small internal and external damping on the stability of distributed non-conservative systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 69(4) :529–552, 2005. [59](#)
- [105] O.N. Kirillov and A.P. Seyranian. Stabilization and destabilization of a circulatory system by small velocity-dependent forces. *Journal of Sound and Vibration*, 283 :781–800, 2005. [59](#)
- [106] G. Meinsma. Elementary proof of the routh-hurwitz test. *Systems and Control Letters* 25, 4 :237–242, 1995. [63](#)
- [107] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval, and A.F. Vakakis. Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :170 – 194, 2009. [82](#)
- [108] O Chiello. *ACOUFREN, Rapport 3.1A : Modélisation mécanique des systèmes de freins à disques TGV et AGC et des garnitures pilotes*. 2013. [132](#)
- [109] O Chiello, X. Lorang, and J-J. Sinou. *ACOUFREN, Rapport 1.1A : Méthode de calcul des instabilités vibratoires à l'origine du crissement sur bases réduites*. 2013. [138](#), [142](#), [152](#)
- [110] A. Bobillot. *Méthode de réduction pour le recalage. Application au cas d'Ariane 5*. PhD thesis, École Centrale Paris, 2002. [138](#), [142](#)
- [111] A. C. Plouin and E. Balmes. Steel/viscoelastic/steel sandwich shells, computational methods and experimental vibrations. *Proceedings of International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 330 :384–390, 2000. [142](#)