



HAL
open science

Stratégie de résolution hybride structurée / non structurée pour la simulation d'effets technologiques en turbomachines

Matthieu Soismier

► To cite this version:

Matthieu Soismier. Stratégie de résolution hybride structurée / non structurée pour la simulation d'effets technologiques en turbomachines. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes, 2016. Français. NNT : 2016GREAI113 . tel-02628491

HAL Id: tel-02628491

<https://theses.hal.science/tel-02628491>

Submitted on 26 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE
GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Mécanique des fluides, Procédés, Energétique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Matthieu SOISMIER

Thèse dirigée par **Christophe CORRE**
co-encadrée par **Lionel CASTILLON**
Claude MARMIGNON

préparée au sein du
Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels
dans l'**École Doctorale I-MEP2**

Stratégie de résolution hybride structurée / non structurée pour la simulation d'effets technologiques en turbomachines.

Thèse soutenue publiquement le 17 Octobre 2016, devant le jury
composé de :

M. Michel VISONNEAU

Directeur de Recherche CNRS, Ecole Centrale de Nantes, Président

Mme Paola CINNELLA

Professeur des Universités, Arts et Métiers ParisTech, Rapporteur

M. Stéphane AUBERT

Professeur des Universités, Ecole Centrale de Lyon, Rapporteur

M. Christophe CORRE

Professeur des Universités, Ecole Centrale de Lyon, Directeur de thèse

M. Guillaume BALARAC

Maître de Conférences (HDR), ENSE3 Grenoble-INP, Examineur

M. Lionel CASTILLON

Ingénieur de Recherche, ONERA, co-Encadrant

M. Claude MARMIGNON

Ingénieur de Recherche, ONERA, co-Encadrant

M. Éric LIPPINOIS

Ingénieur de Recherche, Safran Aircraft Engines, Invité



Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Michel Visonneau d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier Paola Cinnella et Stéphane Aubert pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon manuscrit lors de la réalisation de leur rapport ainsi que pour la pertinence de leurs propositions de corrections. Leurs remarques sur mes travaux de thèse, constructives et intéressantes, bénéficieront à n'en pas douter à l'ONERA pour les développements futurs des fonctionnalités hybrides du solveur.

Je remercie chaleureusement Guillaume Balarac pour son intérêt spontané à mes travaux.

Mes remerciements sont également destinés à l'ensemble des intervenants du groupe Safran qui se sont intéressés de près ou de loin à mes travaux. Je pense en particulier à Gilles Leroy de Safran Helicopter Engines, à Michel Dumas et Éric Lippinois, ingénieurs chez Safran Aircraft Engines. Tous trois ont suivi très assidument l'avancement des travaux et ont toujours su clairement voir l'intérêt et préciser les attentes industrielles associées à ce projet de recherche.

Merci également à Claude Marmignon, mon premier encadrant à l'ONERA. Je retiens, en plus du regard scientifique critique, qu'il a toujours eu à cœur mon intérêt avec en vue l'aboutissement de cette thèse et il a largement contribué à ce que la flèche ne dévie pas du cœur de cible. Mon deuxième encadrant de l'ONERA, Lionel Castillon, a également largement apporté sa pierre à l'édifice. Alors que mes travaux se sont concentrés sur les aspects numériques d'un traitement par une approche hybride de zones géométriquement complexes des turbomachines, Lionel arpentait la difficile voie du maillage hybride. Sans lui, point de maillage. Sans maillage, point de résultat. Sans résultat, point de slide numéro 35! En plus de son apport incontestable en terme de maillages, Lionel a également apporté toutes ses connaissances en matière de turbomachine pour la réalisation des simulations et leur post-traitement. Infiniment merci Lionel.

Je tiens aussi à remercier les collègues de l'équipe travaillant sur le code CEDRE pour les différents conseils, échanges et partage d'expérience qui ont été instaurés.

Cette thèse aura été pour moi l'occasion de plusieurs belles rencontres, l'une d'entre elles fut incontestablement celle de mon directeur de thèse, Christophe Corre. Il m'a parfaitement accompagné tout au long de la thèse, a su être à la fois une oreille attentive dans les moments de doute et aussi d'excellent conseil. La preuve que les relations à distance ne sont pas forcément vouées à l'échec pour ceux qui voudraient le croire!

Une deuxième très belle rencontre de cette thèse : Panda. Et pour le voir, pas besoin d'aller à Beauval. Bruno Maugars, un vrai compagnon d'aventure. Il m'a apporté un sacré coup de boost. Nous avons beaucoup échangé tous les deux et travailler avec lui est un réel plaisir. Nous continuons à le faire encore et j'espère que ça durera. Merci.

Merci à Sébastien Bourasseau d'avoir supporté mes humeurs, qu'elles aient été bonnes ou mauvaises, alors que nous partagions le même bureau. Personne ne pouvait mieux me comprendre dans ces moments!

Mes remerciements sont également destinés à Laurent Cambier, directeur du département DMFN, Sylvie Plot, directeur de la structure ONERA_elsA, à Denis Gueyffier, chef d'unité CLEF et à Vincent Couaillier qui est à l'origine de ce sujet de thèse, chef de l'unité NFLU. C'est au sein de cette dernière unité que ce sont déroulés mes travaux de thèse et j'en profite pour remercier l'intégralité de cette équipe pour leur bon accueil et leur sympathie. Je pense en particulier à Marie-Claire Le Pape qui a mis à disposition des outils de pré-traitement indispensables pour la mise en œuvre de cas hybrides au cours de la thèse. Ces travaux de pré-traitement ont également impliqué Marc Poinot, maître penseur du CGNS que je remercie pour sa clairvoyance.

C'est certainement très habituel pour des travaux de thèse accomplis dans le cadre du solveur elsA de l'ONERA, mais il serait impensable d'oublier de remercier Sébastien Heib, véritable maître cartographe des arcanes d'elsA. Merci Seb pour toute l'aide que tu m'apportes au quotidien, pour la gentillesse avec laquelle tu as répondu systématiquement à toutes mes questions, cette même gentillesse qui te caractérise tant.

Bertrand Michel, est une autre personne incontournable de l'équipe elsA qui m'a donné de nombreux et précieux conseils, m'a soutenu depuis mon arrivée à l'ONERA et continue encore à le faire. Merci aussi pour le jambon et les rillettes.

Je tiens également à remercier justement tous ces autres collègues, autours de qui je gravite depuis plusieurs années et qui font que chaque matin, j'ai plaisir à aller travailler, et ils n'y sont pas pour rien : Julien, Nicolas, Pascal, Thomas, Pierre-Jacques, JD, et tous les autres que j'oublie.

Mes pensées sont aussi tournées vers Michel Gazaix, qui nous a récemment quitté et dont je garderai à jamais l'image d'une personne généreuse, pragmatique et passionnée.

Merci aussi à tous mes proches, à mes parents, à ma sœur et à ma femme, d'avoir supporté et patienté non pas trois, mais quatre années avant l'aboutissement de ces travaux de thèse. Merci à eux d'avoir su parfaitement quand poser ou plutôt quand ne pas poser des questions comme : « Ta thèse, tu en es où ? » ou « Tu as fini la rédaction ? » ou encore : « Quand est-ce que tu soutiens ? ».

D'après Winston Churchill : «Success consists of going from failure to failure without loss of enthusiasm». Que serait une thèse sans enthousiasme ?

Table des matières

Notations	5
Introduction	7
1 Simulation fluide en turbomachines : intérêt d'une approche hybride	12
1.1 Rappels sur les turbomachines	12
1.1.1 Quelques concepts-clés	12
1.1.2 Conception des turbomachines : une quête continue d'amélioration	13
1.1.3 Effets technologiques dans les turbomachines	15
1.2 Simulation avec prise en compte des effets technologiques	21
1.2.1 Conditions Limites Généralisées (<i>CLG</i>)	22
1.2.2 Approche non coïncidente structurée	23
1.2.3 Approche chimère structurée	24
1.2.4 Intersection de maillages	25
1.3 Approche hybride	26
1.3.1 Concept	26
1.3.2 Mise en place d'une stratégie hybride	27
2 Revue initiale du solveur elsA-H	34
2.1 Modèle physique	34
2.1.1 Équations de Navier-Stokes instantanées	35
2.1.2 Fermeture des équations de Navier-Stokes	36
2.1.3 Autres systèmes d'intérêt	37
2.2 Principes de discrétisation spatiale en maillages quelconques	37
2.2.1 Méthode des Volumes Finis	37
2.2.2 Flux numériques convectifs	41
2.2.3 Stratégie de reconstruction	45
2.2.4 Flux numériques visqueux	47
2.3 Évaluation des choix initiaux de discrétisation spatiale	47
2.3.1 Estimation des gradients au centre des cellules	49
2.3.2 Stratégie de reconstruction	53
2.3.3 Estimation des gradients au centre des faces	54
2.3.4 Conclusions	56
2.4 Description de la discrétisation hybride dans elsA-H	57
3 Évolution du solveur non structuré d'elsA-H	60
3.1 Estimation des gradients au centre des cellules	60
3.1.1 Méthode des <i>Moindres Carrés</i> (<i>LSQ</i>)	61
3.1.2 Méthode des <i>Moindres Carrés Pondérés</i> (<i>WLSQ</i>)	66
3.1.3 Méthode des <i>Moindres Carrés Itératifs</i> (<i>LSQite</i>)	68
3.1.4 Méthode de <i>quasi-Green</i> (<i>qG</i>)	71
3.1.5 Conclusions	75
3.2 Estimation des gradients au centre des faces	76

3.2.1	Parcours diamant	76
3.2.2	Techniques 5p et 5p corrigée	81
3.3	Validation de la nouvelle discrétisation spatiale	85
3.3.1	Écoulement non visqueux	86
3.3.2	Écoulement en régime laminaire	88
3.3.3	Écoulement en régime turbulent	92
3.4	Évaluation du solveur hybride : cas du Film Cooling	97
3.4.1	Présentation de la configuration étudiée	97
3.4.2	Calculs structuré et non structuré de référence	103
3.4.3	Calculs hybrides	106
4	Amélioration de la robustesse du solveur elsA-H	110
4.1	Particularités d'un maillage hybride coïncident	111
4.2	Techniques d'amélioration de la robustesse	112
4.2.1	Lissage des gradients	113
4.2.2	Limiteurs multidirectionnels	115
4.2.3	Calcul du gradient adapté à la qualité du maillage	128
4.2.4	Limiteurs géométriques	131
4.3	Évaluation de l'amélioration de robustesse : cas du Film Cooling	132
4.3.1	Méthodologie	132
4.3.2	Analyse des résultats	133
5	Évaluation de elsA-H sur des configurations industrielles	140
5.1	Aube complète avec congé de raccordement	140
5.1.1	Présentation générale du cas	140
5.1.2	Description des stratégies de maillage étudiées	142
5.1.3	Description des méthodes numériques utilisées	145
5.1.4	Analyse des résultats	145
5.2	Tranche d'aube à deux trous de refroidissement	158
5.2.1	Présentation générale du cas	158
5.2.2	Description des stratégies de maillage étudiées	159
5.2.3	Description des méthodes numériques utilisées	162
5.2.4	Analyse des résultats	162
5.3	Aube de turbine avec trous de refroidissement et fentes de bord de fuite	166
5.3.1	Présentation générale du cas	166
5.3.2	Description de la stratégie de maillage appliquée	169
5.3.3	Description des méthodes numériques utilisées	173
5.3.4	Analyse des résultats	173
5.4	Conclusion du chapitre	179
6	Calcul d'un étage de turbomachine par une approche hybride	180
6.1	Modélisation de l'interaction rotor/stator	180
6.1.1	Technique du plan de mélange	181
6.1.2	Technique chorochronique	181
6.1.3	Application à la stratégie hybride	184
6.2	Application sur la configuration VKI BRITE CT3 (TATEF2)	185
6.2.1	Présentation du cas	185
6.2.2	Calculs stationnaires	187
6.2.3	Calculs instationnaires	192
6.3	Conclusions du chapitre	197
	Conclusion	197
	Bibliographie	202

Notations

Lettres latines

a	vitesse du son
c_i^f	cellule voisine de la cellule c_i par la face f
C_p	chaleur spécifique à pression constante
C_v	chaleur spécifique à volume constant
\mathbf{D}	tenseur des déformations
\mathcal{D}	domaine de calcul
e	énergie interne
E	énergie totale spécifique
F	centre de la face f
F_{c_i}	ensemble des faces de la cellule c_i
\mathcal{F}	flux physique
$\mathcal{F}_c^{(x,y,z)}$	flux physique convectif
$\mathcal{F}_v^{(x,y,z)}$	flux physique diffusif
h	enthalpie spécifique
H	enthalpie totale spécifique
$h\%$	hauteur de veine normalisée
\mathcal{H}	flux numérique
\mathcal{H}_c	flux numérique convectif
\mathcal{H}_v	flux numérique diffusif
I	centre de la cellule c_i
I^f	centre de la cellule c_i^f
\mathbf{I}	tenseur identité
J_c^\perp	flux physique convectif normal à la face
\mathbf{n}_f	vecteur unitaire normal à la face f , $\mathbf{n}_f = (n_{fx}, n_{fy}, n_{fz})^t$
p	pression
P_r	nombre de Prandtl
\mathbf{q}	vecteur flux de chaleur
Q	débit
ΔQ	débit relatif
r_{gaz}	rapport de la constante des gaz parfait par la masse molaire du gaz
t	temps physique
T	température
\mathbf{U}	vecteur des variables primitives
\mathbf{V}	vecteur vitesse, $\mathbf{V} = (u, v, w)^t$
V_{c_i}	voisinage de la cellule c_i
\mathbf{W}	vecteur des variables conservatives

Lettres grecques

κ	conductivité thermique du fluide
μ	coefficient de viscosité dynamique
$ \Omega_{c_i} $	volume de la cellule c_i
ρ	densité du fluide
$ \Sigma_f $	surface de la face f
τ	tenseur des contraintes visqueuses
η	efficacité de refroidissement thermique

Opérateurs, exposants et indices

\tilde{X}	approximation de X
X^t	matrice transposée de X
∇X	opérateur gradient sur X , $\nabla X = \left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z} \right)^t$
δX	opérateur différence sur X
$\delta^2 X$	opérateur différence d'ordre deux sur X
$\frac{\partial Y}{\partial X}$	dérivée partielle de Y par rapport à X
$div(X)$	divergence de X
\bar{X}	opérateur moyenne sur X
X_F^L	valeur à gauche de F de la variable X
X_F^R	valeur à droite de F de la variable X

Acronymes

GG	<i>Green-Gauss</i>
LSQ	<i>Least Squares (Moindres Carrés)</i>
$WLSQ$	<i>Weighted Least Squares (Moindres Carrés Pondérés)</i>
qG	<i>quasi-Green</i>

Introduction

Lors de la conception de nouveaux moteurs d'avion, les motoristes aéronautiques sont en quête perpétuelle d'amélioration à la fois pour satisfaire des normes toujours plus exigeantes et pour conserver un avantage compétitif dans un secteur fortement concurrentiel. Ils cherchent donc à penser ces nouveaux moteurs plus propres, plus silencieux, plus performants, encore plus fiables et avec des coûts contrôlés et réduits tout au long de leur durée de vie. Cette vision de la conception d'un moteur est aujourd'hui renforcée par les objectifs de réduction fixés par l'ACARE (Advisory Council for Aviation Research and Innovation in Europe) pour l'horizon 2050 :

- 75 % de réduction d'émissions de CO_2
- 90 % de réduction d'émissions de NO_x
- 65 % de réduction de bruit

Le LEAP, nouvelle génération de turboréacteur développée par Safran Aircraft Engines et General Electric, s'inscrit dans ces perspectives de réduction et propose déjà de belles performances (réduction de 15 % en CO_2 et 50 % en NO_x). Ces améliorations se traduisent concrètement par des moteurs toujours plus complexes, que ce soit au niveau de la forme donnée aux différents éléments dans le but d'optimiser leur fonctionnement, ou au niveau de la composition de ces éléments afin d'en réduire le poids et d'améliorer leur résistance et donc leur durée de vie ou au niveau des mécanismes mis en œuvre dans le but d'améliorer le rendement de ces machines. Cette complexification des turbomachines d'une génération à l'autre est parfaitement illustrée par la comparaison de la soufflante du LEAP et celle de son prédécesseur, le CFM56, illustrée sur la figure 1. Du point de vue des matériaux, la génération LEAP a ainsi vu apparaître l'utilisation de matériaux composites pour la soufflante qui ont permis une réduction considérable du poids du moteur. Par ailleurs, la forme bien plus complexe des aubes de la soufflante est réellement optimisée avec une vision tridimensionnelle qui est sensiblement moins prononcée sur la génération précédente.



Figure 1 – Évolution de la soufflante entre la génération CFM56 (a) et celle du LEAP (b). Source : images issues de la communication de la "joint-venture" CFM (www.cfmaeroengines.com)

Plus au cœur du moteur, les roues situées à l'aval de la chambre de combustion sont soumises à des températures si élevées qu'elles avoisinent et parfois même dépassent les températures de fusion des matériaux utilisés. De ce fait, des mécanismes complexes de soufflage, par exemple, sont mis en œuvre pour protéger ces roues de ces fortes températures.

Pour s'assurer que ces évolutions sont pertinentes et constituent réellement des améliorations, les motoristes désirent disposer de la représentation la plus fidèle et la plus précise possible de leur turbomachine au niveau de l'étape de conception. Il est en effet primordial de bien mesurer et comprendre les effets de tous les "détails" (forme géométrique complexe des éléments, refroidissement thermique, écoulements secondaires ...) qui constituent pourtant la clé de voûte de ce processus d'amélioration des turbomachines. On peut citer par exemple les travaux de Shabbir [104] qui a montré que la non-prise en compte du jeu inter-plateforme sur la configuration du NASA Lewis Rotor 35 et 37 lors de simulation numérique conduit à des résultats qui ne sont tout simplement pas en accord avec ceux obtenus lors de campagne d'essai. L'inclusion de ce jeu inter-plateforme dans les simulations numériques permet d'aboutir à un bon accord avec ces résultats expérimentaux mais au prix d'une complexité significativement accrue de ces simulations.

De façon générale, la prise en compte de ces "détails" technologiques souvent géométriquement très complexes s'avère à la fois nécessaire au processus de conception des moteurs de nouvelle génération et délicate dans le contexte des outils numériques actuellement disponibles. Les codes (mailleurs / solveurs) utilisés pour mener les simulations fluides doivent donc eux-aussi subir un processus d'amélioration continue de leurs fonctionnalités et de leurs performances.

C. Benoit et S. Péron ont développé depuis plusieurs années au sein de l'ONERA [13] [94] [92] des méthodes de type chimère (ou recouvrement de maillages) et "collar grid" qui permettent de mailler et de simuler des zones géométriquement complexes grâce à un procédé de recouvrement de maillages structurés. Ces techniques ont été appliquées avec succès à la simulation d'écoulements externes [98] et internes [25]. Elles s'avèrent cependant techniquement complexes à mettre en place et peuvent parfois devenir difficilement utilisables dans un contexte de bureau d'études industriel. En outre, dans le contexte de simulations d'écoulements en turbomachines, il a été constaté que ces méthodes n'assuraient pas parfaitement la conservation du débit, propriété pourtant essentielle.

Puisque la prise en compte d'effets technologiques dans les turbomachines pose en premier lieu un épineux problème de génération de maillage, une alternative à la méthode chimère pourrait être de recourir à des maillages entièrement non structurés afin de bénéficier de la versatilité de géométries de cellules offerte par ce type de maillages. Le prix à payer serait alors de devoir mettre en œuvre des techniques de discrétisation adaptées à de tels maillages, *i.e.* des solveurs non structurés dont on sait qu'ils sont plus coûteux que les solveurs structurés qui bénéficient eux de structures de données simplifiées puisque les connectivités entre cellules d'un maillage structuré sont explicites. Ce prix semble bien lourd lorsque l'on note qu'une grande partie des composants d'une turbomachine peuvent être maillés de façon efficace en structuré et bénéficier donc de l'efficacité et de la précision des solveurs structurés existants. Une meilleure stratégie semble donc être de se limiter à utiliser des maillages non structurés et un solveur non structuré associé dans les seules zones du domaine fluide qui le justifient (typiquement aux voisinages de certains détails géométriques précédemment évoqués : jeu inter-plateforme par exemple) et de continuer à utiliser maillages et solveur structurés dans le reste du domaine de simulation. Dans cette thèse, on appellera "hybridation" la stratégie qui consiste à combiner un solveur structuré appliqué dans des blocs de maillage structuré et un solveur non structuré appliqué dans des blocs de maillage non structuré. On désignera par le terme "solveur hybride" un code de simulation qui combine un solveur structuré, un solveur non structuré et les techniques de raccord qui permettent d'échanger l'information entre les différents blocs du maillage, que ceux-ci soient structurés ou non structurés.

L'un des premiers codes hybrides structuré / non structuré réalisés pour la simulation d'écoulements en turbomachines est le code TRACE développé par l'Institute of Propulsion Technology du DLR à Cologne depuis le milieu des années 2000 [130] [11]. Plus récemment, on trouve trace en 2015 d'un solveur structuré / non structuré HyperFLOW développé par le China Aerodynamics Research and Development Center à Mianyang [58] qui semble plutôt orienté vers des applications en aérodynamique externe. En France, la thèse de Lefebvre [75] a établi, dès 1998, la versatilité d'une approche hybride pour la simulation d'écoulements turbulents externes et internes. Depuis quelques années, l'effort est porté conjointement par le CERFACS et l'ONERA à la réalisation d'un solveur hybride dit elsA-H [24] [31]. Ce solveur hybride est ainsi désigné car il s'appuie sur le solveur multiblocs structuré elsA et en lui adjoignant donc un solveur non structuré et les techniques d'échange d'informations entre blocs structurés et non structurés. Une première version du solveur hybride elsA-H a permis de démontrer la faisabilité et l'intérêt de la démarche d'hybridation [34] [33]. Il restait néanmoins alors un effort conséquent à réaliser pour faire du solveur hybride elsA-H une véritable alternative aux méthodologies existantes de prise en compte d'effets technologiques dans les simulations d'écoulements en turbomachines. La présente thèse, qui s'est déroulée à l'ONERA et a été financée par Safran Aircraft Engines et le Consortium Industrie-Recherche en Turbomachines (CIRT), représente une contribution à cet effort.

Nous n'avons fait qu'effleurer ci-dessus les contraintes de résolution discrète et de maillage associées à la simulation d'effets technologiques dans des géométries de turbomachines. Le premier chapitre du mémoire approfondit davantage cette problématique en détaillant tout d'abord quelques-uns des effets technologiques dont la simulation hybride constituera l'aboutissement de la thèse : congé de raccordement, trous de refroidissement, fentes de bord de fuite ... Les stratégies permettant actuellement de prendre en compte ces détails géométriques sont ensuite passées en revue : quelques précisions sont donc apportées sur l'approche chimère mais aussi sur quelques autres approches disponibles. Enfin, ce premier chapitre pose les concepts-clés de l'approche hybride et fait le point sur son état de développement au démarrage de la thèse via un état de l'art critique des simulations réalisées à l'aide du solveur hybride elsA-H. Cet état de l'art nous conduit à proposer de concentrer en premier lieu nos efforts sur l'amélioration de la discrétisation spatiale du solveur non structuré de elsA-H.

Le deuxième chapitre du mémoire est donc consacré à une revue des principales fonctionnalités ou ingrédients de discrétisation spatiale du solveur elsA-H dans sa version initiale de début de thèse. Après avoir rappelé les principes d'une discrétisation de type Volumes Finis centrée sur les cellules en maillage quelconque, nous passons en revue les choix spécifiques du solveur non structuré elsA-H : méthode d'estimation des gradients au centre des cellules, stratégie de reconstruction pour le calcul des flux convectifs, estimation des gradients au centre des faces pour le calcul des flux visqueux. Nous évaluons la pertinence de ces choix et mettons en évidence certaines de leurs limitations via un simple problème modèle bidimensionnel qui nous permet de tester de façon souple ces méthodes de discrétisation pour une large gamme de maillages. La dernière partie de ce chapitre détaille la stratégie de raccord coïncident qui permet de faire communiquer les blocs structurés et non structurés d'un maillage hybride. Il est important de proposer des choix de discrétisation spatiale qui restent bien compatibles avec les contraintes associées à la gestion de ce raccord, réalisée par le biais d'une seule rangée de cellules fictives.

Nous proposons alors dans le troisième chapitre du mémoire quelques évolutions à apporter au solveur non structuré d'elsA-H. Nous concentrons nos efforts sur l'amélioration de l'estimation des gradients au centres des cellules et sur celle des gradients au centre des faces, qui doivent être réalisées de façon à assurer une précision effective d'ordre deux en espace pour le solveur hybride en maillage quelconque. Nous évaluons ainsi différentes stratégies de type *Moindres Carrés* ainsi qu'une approche dite *quasi-Green* et mettons en évidence, toujours sur le même simple problème modèle, les améliorations apportées par rapport à la discrétisation spatiale initiale. Nous procédons de même pour améliorer le traitement des flux visqueux. Les nouvelles méthodes de discrétisation implémentées dans elsA-H sont validées sur quelques écoulements académiques. Ces écoulements sont calculés avec succès dans des maillages réellement hybrides, c'est-à-dire formés de blocs à la fois structurés et non structurés sur

lesquels s'appliquent donc d'une part le solveur structuré d'elsA-H et d'autre part le solveur non structuré incluant les nouvelles stratégies de discrétisation. Cependant, ces maillages ne sont pas réellement représentatifs des maillages hybrides qui seront rencontrés dans les applications visées en turbomachines : le choix d'une stratégie de raccord coïncident entre blocs structurés et non structurés conduit en effet à des maillages hybrides présentant des niveaux de déformation dans la zone de transition structuré / non structuré qui peuvent être élevés. Une évaluation du solveur hybride sur un maillage représentatif est réalisée pour une configuration de refroidissement par film d'une plaque plane, combinant le maillage non structuré du trou d'injection d'air frais et le maillage structuré de la plaque. Le maillage fortement déformé utilisé s'avère particulièrement exigeant en termes de robustesse puisqu'il n'est pas possible de réaliser une simulation de cette configuration pourtant géométriquement et physiquement simple à l'aide d'un solveur hybride d'ordre deux ; seul le solveur hybride d'ordre un permet d'atteindre un état stationnaire, avec une précision malheureusement médiocre compte tenu de la dissipation excessive introduite par la discrétisation spatiale d'ordre un.

Le quatrième chapitre du mémoire est donc entièrement consacré à l'étude de quelques stratégies d'amélioration de la robustesse du solveur hybride afin de permettre de mener des simulations à l'aide du solveur d'ordre deux dans des maillages de qualité géométrique localement médiocre. L'étude de la littérature montre que cette problématique de robustesse est bien d'actualité dans le contexte des solveurs purement non structurés et nous nous inspirons donc de travaux existants pour intégrer dans elsA-H une technique de lissage du gradient, un calcul du gradient adapté à la qualité du maillage et des limiteurs dits géométriques car ils s'activent non pas en fonction des états physiques dans les cellules du maillage mais sur la base de critères de qualité géométrique du maillage. Nous complétons cette panoplie d'ingrédients améliorant la robustesse du solveur avec un limiteur (au sens classique du terme cette fois) multidimensionnel. Nous montrons que l'utilisation, indépendante ou combinée, des techniques qui viennent d'être listées permet bien de résoudre le problème de robustesse observé précédemment à la fin du chapitre précédent.

Les deux derniers chapitres du mémoire sont alors consacrés à l'application du nouveau solveur hybride, incorporant l'ensemble des améliorations apportées, à des simulations d'écoulements en turbomachines. Le cinquième chapitre porte sur des simulations d'aubes en roue isolée comprenant des effets technologiques tandis que le sixième et dernier chapitre s'intéresse à la mise en œuvre de la méthode hybride pour des calculs d'étage comprenant une interaction entre un rotor et un stator.

La conclusion du mémoire tire le bilan des capacités du solveur hybride disponible à l'issue de ces travaux de thèse et propose des pistes de travail précises pour poursuivre l'amélioration des fonctionnalités de ce solveur.

Les travaux de thèse présentés dans le mémoire ont été financés par Safran, l'ONERA et le Consortium Industrie-Recherche en Turbomachines (CIRT). Ils ont donné lieu aux communications suivantes :

- *M. Soismier, L. Castillon, C. Marmignon, M.C. Le Pape, V. Couaillier. Latest improvements around the hybrid grid technique of the elsA CFD software. Application to turbomachinery. Congrès Aérodynamique Appliquée 3AF. Toulouse, France (2015).*
- *M. Soismier, C. Corre, L. Castillon, C. Marmignon, J. Riou. Improvements in the multiblock hybrid CFD solver elsA-H for turbomachinery flow simulation. 12th International Symposium on Experimental Computational Aerothermodynamics of Internal Flows (ISAIF). Lericci, Italie (2015).*

Chapitre 1

Simulation fluide en turbomachines : intérêt d'une approche hybride

Nous avons indiqué dans l'introduction de ce mémoire de thèse que la prise en compte des effets technologiques dans les turbomachines était une motivation essentielle du développement de l'approche hybride auquel est consacré notre travail. Dans ce premier chapitre, nous souhaitons préciser quels sont ces effets technologiques afin de mieux faire comprendre l'intérêt voire la nécessité d'une approche hybride pour leur prise en compte dans le dimensionnement des turbomachines par voie numérique. Nous commençons, dans la première section du chapitre, par rappeler très brièvement les principes de fonctionnement des turbomachines aéronautiques avant de détailler quelques effets technologiques dont la prise en compte dans la simulation des écoulements en turbomachines est devenue aujourd'hui importante voire cruciale pour assurer l'amélioration continue des performances de ces systèmes propulsifs. Dans la deuxième section, nous passons en revue les techniques numériques disponibles pour prendre en compte ces effets technologiques en nous appuyant sur l'exemple d'un trou de refroidissement isolé. Nous concluons cette revue du contexte de la thèse par la présentation du concept d'approche hybride et un état de l'art de cette stratégie.

1.1 Rappels sur les turbomachines

1.1.1 Quelques concepts-clés

Les moteurs d'avion, comme la majorité des moteurs thermiques, font subir à un comburant fluide, l'air par exemple, une série de transformations au cours desquelles le fluide doit acquérir suffisamment d'énergie pour pourvoir à la propulsion de l'aéronef et aux autres besoins énergétiques de l'appareil. D'une manière globale, le fonctionnement principal de ces turbomachines est assez similaire à un cycle de Joule-Brayton. Trois phases se succèdent ainsi :

- une compression adiabatique
- une élévation isobare de la température
- une détente adiabatique.

Il faut noter que dans un cycle de Joule-Brayton classique, représenté sur la figure 1.1, une quatrième étape de refroidissement isobare du fluide a lieu. Les moteurs d'avion réalisent un cycle de Joule-Brayton dit "ouvert" puisque cette phase de refroidissement isotherme est accomplie en dehors de la turbomachine par un mélange du fluide encore chaud à l'air ambiant. Ces trois phases différentes conditionnent la conception des turbomachines. On retrouve en effet dans la structure des turbomachines la succession de trois parties réalisant chacune une des étapes du cycle de Joule-Brayton. Cette structuration est mise en évidence sur la figure 1.2 qui présente la coupe d'un turboréacteur typique.

L'admission permet de faire entrer l'air dans la turbomachine. La compression est assurée par une série d'étages de compresseurs. À l'issue du bloc compresseur, l'écoulement doit être à des conditions de pression, de température et de vitesse optimales pour la chambre de combustion. À l'entrée de cette

dernière, une partie de l'écoulement issu du bloc compresseur est prélevée afin d'assurer le refroidissement thermique de la machine. Le reste de l'écoulement est mélangé avec le carburant avant d'être injecté dans la chambre de combustion. La combustion de ce mélange fournit au fluide un apport de chaleur. En sortie du bloc compresseur, le fluide est environ à une température de 500 K alors que dans la première partie de la chambre de combustion sa température avoisine les 2000 K . S'ensuit dans la chambre de combustion une zone d'homogénéisation de la température, permettant de faire chuter celle-ci à un peu plus de 1200 K . Cet apport de chaleur se traduit par une augmentation de l'énergie thermique du fluide qui sert alors à actionner les différents étages du bloc turbine par transfert en énergie mécanique. La rotation de l'arbre de la turbine entraîne les arbres de la soufflante, des compresseurs et des accessoires. Lors de son passage dans la turbine, le fluide subit une détente. La tuyère, ou évacuation, permet finalement d'accélérer le fluide grâce à une géométrie de type convergent.

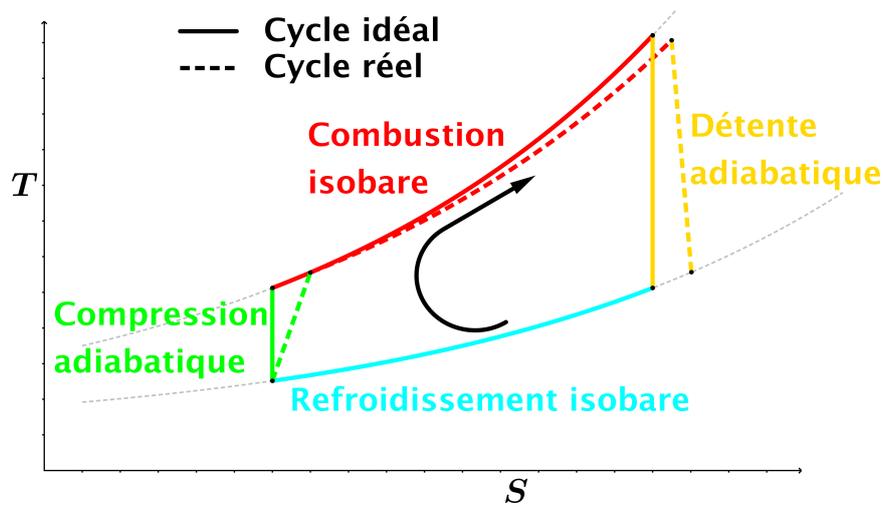


Figure 1.1 – Diagramme $T-S$ du cycle de Joule-Brayton

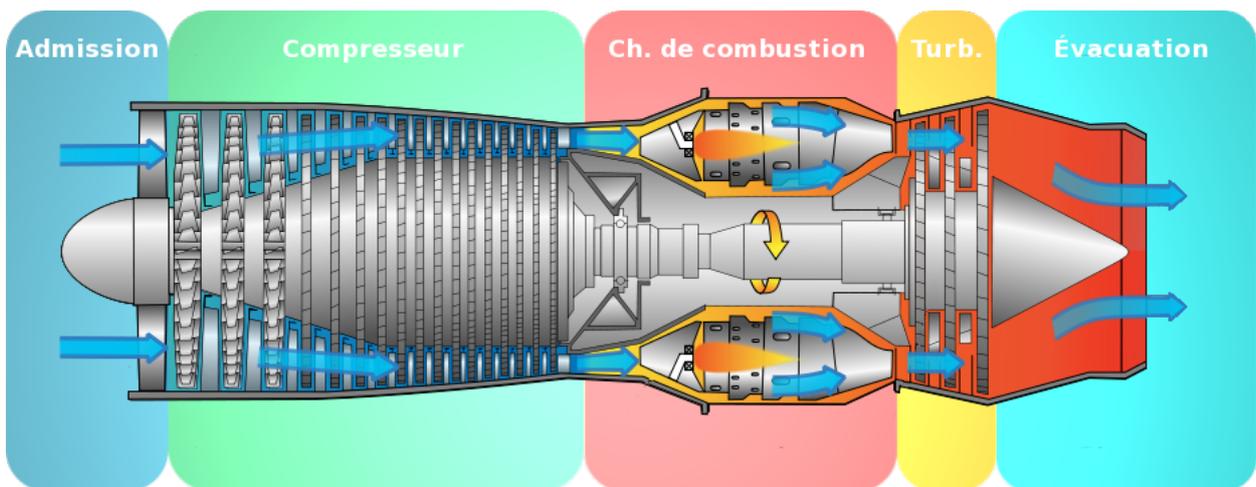


Figure 1.2 – Coupe d'un turboréacteur extraite de [54]

1.1.2 Conception des turbomachines : une quête continue d'amélioration

Les motoristes répondent au besoin des avionneurs. Ces derniers sont toujours à la recherche de meilleures performances pour leurs avions et d'autant plus dans le contexte actuel de forte compéti-

tion économique. Ces meilleures performances se traduisent généralement par un gain financier (prix plus compétitifs pour les appareils) ou par un meilleur respect des exigences en terme de sécurité et d'environnement (pollution, nuisance sonore, ...). Cette quête de la performance exprimée par les avionneurs invite les motoristes à élaborer des turbomachines plus légères, consommant moins tout en étant suffisamment puissantes pour propulser des avions plus lourds car emportant d'avantage de passagers, plus silencieuses, plus sûres, plus fiables et dont la maintenance est la moins coûteuse possible.

Dans cette perspective d'amélioration continue de la conception des turbomachines, les motoristes cherchent à disposer d'une représentation la plus fidèle possible du fonctionnement de leur moteur. C'est la raison pour laquelle ils s'intéressent particulièrement à la prise en compte de tous les détails, notamment géométriques, qui peuvent influencer la solution obtenue lors d'une simulation numérique. On illustre ainsi sur la vue détaillée de la figure 1.3 quelques-unes des multiples complexités mécaniques, thermiques et d'usinage qui sont présentes dans une turbomachine. La représentation idéalisée d'une aube pour la simulation numérique met souvent de côté ces détails géométriques en choisissant de se limiter à les modéliser par une condition limite spécifique (par exemple une condition de soufflage d'air frais au niveau d'une paroi solide, sans chercher à décrire la géométrie du trou de refroidissement). Pourtant, ces particularités géométriques sont souvent le siège de phénomènes physiques entraînant entre autre des pertes, de pression ou de débit, et des variations de température qui exigent une description fine (donc notamment un maillage adapté) pour être correctement captés. Les approximations parfois retenues (conditions aux limites simplifiées par exemple) peuvent donc avoir de réelles conséquences sur la prédiction numérique correcte du comportement physique des turbomachines, comme une variation de la marge au pompage par exemple. La non-prise en compte ou la prise en compte trop grossière d'effets technologiques lors d'une simulation numérique peut ainsi conduire à un résultat qui n'est pas le reflet du fonctionnement réel de la turbomachine. L'objectif de ces travaux de thèse est de permettre la réalisation de calculs capables de prendre en considération ces éléments de manière suffisamment précise pour que le résultat de la simulation soit le plus fidèle possible à la réalité.

Avant de passer en revue dans la section 1.2 les techniques disponibles aujourd'hui pour prendre en compte les effets technologiques dans les turbomachines puis de détailler dans la section 1.3 les principes de l'approche hybride à laquelle nous allons spécifiquement nous intéresser, nous proposons dans les paragraphes qui suivent un catalogue de certains effets technologiques présents dans les turbomachines. Celui-ci nous permettra en particulier de justifier les choix de cas-tests qui seront abordés dans la suite du mémoire pour valider les développements effectués sur l'approche hybride. Nous précisons également à ce stade que la capacité à prédire de façon fiable les caractéristiques de fonctionnement d'une turbomachine ne dépend pas bien sûr exclusivement de la prise en compte des "détails géométriques" que constituent certains des effets technologiques. La modélisation de la turbulence pour les écoulements instationnaires présents dans les turbomachines constitue un autre élément-clé : le recours à des simulations hybrides RANS/LES voire à des simulations des grandes échelles constitue un autre axe de recherche important pour l'amélioration continue de la capacité prédictive des simulations en turbomachines. Le présent travail sera exclusivement consacré à la résolution de la problématique posée par la prise en compte dans la méthodologie numérique (génération du maillage et technique de discrétisation) des complexités géométriques associées aux effets technologiques.

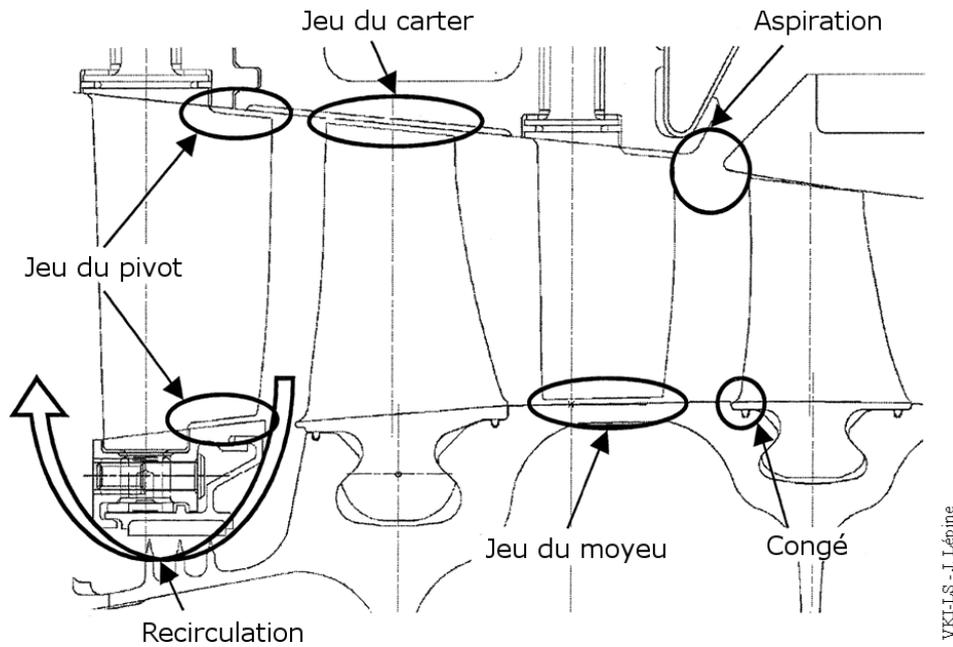


Figure 1.3 – Visualisation d’une coupe de turbomachine et de ses particularités géométriques issue de [76].

1.1.3 Effets technologiques dans les turbomachines

Dans le cadre de ces travaux de thèse, nous nous sommes intéressés à certains éléments des turbomachines qui constituent des zones complexes géométriquement ; nous les passons successivement en revue dans les paragraphes qui suivent.

Congé de raccordement

Le congé de raccordement est la zone réalisant le raccord entre le pied de l’aube et le moyeu, axe principal de la turbomachine (voir Fig. 1.4). L’usinage de cette partie lui confère nécessairement une forme courbe. En jouant sur les caractéristiques géométriques de la courbure du congé, Zess [132] est parvenu à éliminer les tourbillons en fer à cheval généralement associés à ce congé et il parvient ainsi à réduire la génération de vorticité et la production d’énergie cinétique turbulente qui contribuent également aux pertes aérodynamiques. Il obtient un bon accord entre ses simulations numériques et ses résultats expérimentaux démontrant ainsi que la non-prise en compte des géométries de type congé de raccordement est susceptible de conduire à une description physique erronée de l’écoulement. Les travaux de Shi [105] permettent de tirer des conclusions similaires. La figure 1.4 présente une stratégie possible pour prendre en compte dans une simulation la présence d’un congé de raccordement en pied d’aube : il s’agit ici d’utiliser un maillage de type chimère qui superpose le maillage de la zone de congé au maillage de base de l’aube droite.

présente une configuration dotée d’un congé de raccordement qui est pris en compte grâce à un maillage de type chimère (voir 1.2.3 pour une description de cette technique de superposition de maillages).

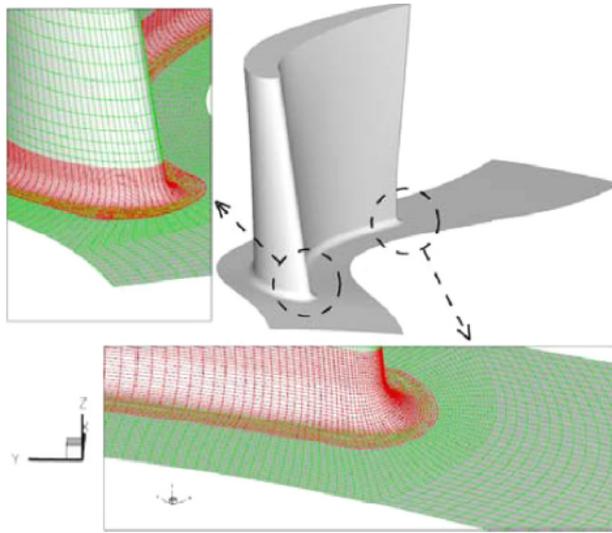


Figure 1.4 – Visualisation de la prise en compte d’un congé de raccordement sur le pied d’une aube avec maillage chimère, extraite de [25].

Trous de refroidissements

Dans la perspective d’améliorer toujours davantage les performances des turbomachines, une stratégie pour diminuer la consommation en carburant consiste à travailler avec des températures très élevées, au-delà de 1200 K , en entrée de turbine. Ces températures dépassent parfois les limites tolérées par les matériaux utilisés lors de la fabrication des aubes. Pour parvenir à supporter de telles températures sans fragiliser la turbomachine, la mise en œuvre d’un système de refroidissement efficace est donc nécessaire. Depuis les années 1970, des stratégies utilisent un flux d’air frais de l’ordre de 500 K , prélevé en sortie de compresseur. Les premiers systèmes mis au point se limitaient à un simple refroidissement interne des aubes. Aujourd’hui, les motoristes n’hésitent pas à souffler cet air frais sur les aubes de la turbine afin de la refroidir de façon plus efficace. Pour créer un flux d’air qui va jouer un rôle de bouclier thermique, les aubes de turbine peuvent être par exemple multiperforées selon le schéma illustré sur la figure 1.5.



Figure 1.5 – Visualisation d’une aube multiperforée, CM2012 (cf. 5.3).

Le positionnement de ces trous de refroidissement est stratégique puisqu'il s'agit de protéger du mieux possible l'aube qui reçoit en sortie de chambre de combustion un écoulement dont la température est très élevée. À titre d'illustration, on présente sur la figure 1.6 une visualisation d'un maillage surfacique d'aube munie de trous de refroidissement (zones en vert) qui ont été positionnés de façon à assurer le refroidissement des parties de l'aube les plus exposées d'un point de vue thermique, à savoir son bord d'attaque et la paroi de son intrados.

Puisque l'air frais prélevé représente aussi une perte énergétique, il est nécessaire de déterminer le gain réellement apporté par l'élévation de la température en sortie de chambre de combustion en tenant compte de cette perte afin d'évaluer de façon précise la pertinence de cette solution de refroidissement. C'est pour répondre à ce type de problématique que les motoristes souhaitent pouvoir réaliser des simulations qui représentent fidèlement les stratégies de *film cooling*. Sans prise en compte de ces trous de refroidissement disposés sur l'aube et des conséquences de leur présence sur l'écoulement, l'analyse critique du fonctionnement de la turbomachine serait imprécise puisqu'elle s'appuierait sur des contraintes thermiques trop élevées sur les aubes et conduirait à des rendements erronés. Comme nous allons le préciser, la prise en compte d'un trou de refroidissement dans une simulation d'écoulement sur une aube est délicate à réaliser dans un code multibloc structuré. Cette prise en compte nécessite donc des développements spécifiques si on souhaite s'en tenir à l'utilisation d'un code structuré ou bien peut être réalisée à l'aide d'une stratégie de calcul hybride que nous allons également préciser ci-après.

Fentes de bord de fuite

Certaines aubes présentent également des fentes au bord de fuite qui sont représentées en rouge sur la figure 1.6. On pourrait penser que la fonction principale de ces fentes est d'assurer un refroidissement des aubes à l'aval par injection d'un fluide frais, extrait du bloc compresseur. Néanmoins, il faut noter que l'écoulement frais injecté ayant une vitesse moins importante que l'écoulement principal, il impacte et donc refroidit majoritairement l'extrados des aubes alors que le besoin de refroidissement se situe essentiellement à l'intrados de la pale. En réalité, ces fentes au bord de fuite permettent essentiellement d'évacuer l'excédent d'air circulant à l'intérieur de l'aube qui n'a pas pu être éjecté par les trous de refroidissement.

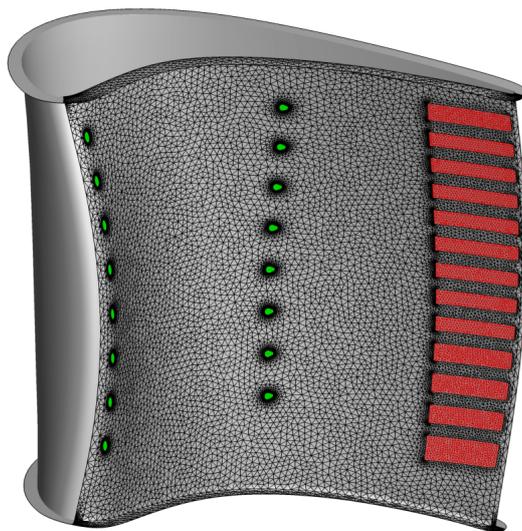


Figure 1.6 – Visualisation de trous de refroidissement en vert et de fentes au bord de fuite en rouge sur une aube de turbine CM2012, configuration étudiée en 5.3.

D'autres effets technologiques non traités dans les applications présentées par la suite dans ce manuscrit ne sont pour autant pas à négliger. Le travail accompli dans cette thèse avec la mise au point d'une stratégie de simulation hybride doit permettre de prendre en compte ces éléments de la même manière que ceux cités précédemment. Parmi ces effets technologiques non abordés, nous signalons donc pour mémoire et future simulation à l'aide de l'outil numérique développé dans nos travaux ceux qui apparaissent dans les paragraphes qui suivent.

Jeu

Un jeu désigne de façon générale un espace sans matière entre une partie mobile et une autre partie fixe de la turbomachine. De nombreuses zones de jeu sont présentes dans les turbomachines, tout particulièrement entre la tête des aubes du rotor et le carter. Certaines turbomachines permettent de caler l'angle d'incidence d'aubes de stator en fonction du régime de la turbomachine. Pour ce faire, la pale bénéficie d'un axe de rotation le long de la direction radiale de la machine. Un jeu est alors nécessaire entre la tête de l'aube et le carter ainsi qu'entre le pied de l'aube et le moyeu pour permettre la rotation.

Dans le cas du jeu en tête de pale d'un rotor, cet espace permet à la différence de pression entre l'intrados et l'extrados de la pale de générer un écoulement secondaire transverse. Celui-ci est appelé *écoulement de jeu*. La figure 1.7 représente l'écoulement de fuite entre le rotor et le carter qui engendre un tourbillon de jeu. Smith et Cumpsty [109] ont démontré que l'écoulement de jeu a tendance à engendrer des pertes de pression. Par ailleurs, la chaleur impactant l'intrados de l'aube parvient à passer au niveau de l'extrados. Syed Arif Khalid analyse dans sa thèse [70] le blocage provoqué par l'écoulement de jeu entre la tête de pale d'un compresseur axial et son carter. Il propose un modèle pour cet écoulement de jeu montrant ainsi l'intérêt de la prise en compte de cet effet technologique.

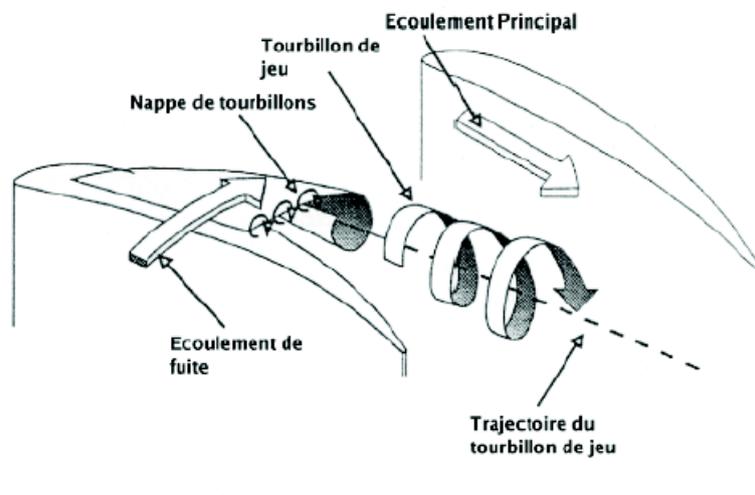


Figure 1.7 – Illustration du tourbillon de jeu extraite de [128].

Traitement de carter

Afin de réduire la masse embarquée des moteurs et leur encombrement, le design moderne des moteurs se dirige vers des machines de plus en plus compactes. Ceci se traduit inévitablement par une réduction du nombre de pièces utilisées et *a fortiori* une réduction du nombre d'étages dans le bloc compresseur et dans le bloc turbine. La diminution du nombre d'étages entraîne une réduction sensible du rendement du moteur et de sa plage de fonctionnement qui est entre autre limitée par le phénomène de pompage du compresseur. Un traitement de carter peut permettre d'augmenter la plage de fonctionnement de la turbomachine en améliorant sa marge au pompage. Il s'agit d'une cavité dans le carter, souvent axi-symétrique, réalisée au niveau de la zone balayée par le rotor. Elle permet de

ré-énergétiser l'écoulement du fluide en tête de pale de rotor. Cette cavité peut par ailleurs être soufflante pour accroître son effet.

Shabbir étudie dans [103] l'amélioration de la marge au pompage apportée par les traitements de carter et fait au préalable un état de l'art des différentes études qui ont été réalisées sur le sujet. La figure 1.8 présente une coupe longitudinale d'un compresseur axial. Elle permet de visualiser un traitement de carter mis en place au niveau du premier rotor. Elle présente également une visualisation tridimensionnelle d'un traitement de carter et une courbe du taux de compression en fonction du débit. Cette dernière montre l'amélioration de la marge au pompage obtenue par un traitement de carter. Il faut noter que cette courbe est expérimentale et que le dernier point donné à $\dot{m} = 12.5\%$ n'est pas la limite au pompage mais la limite en puissance du banc d'essai.

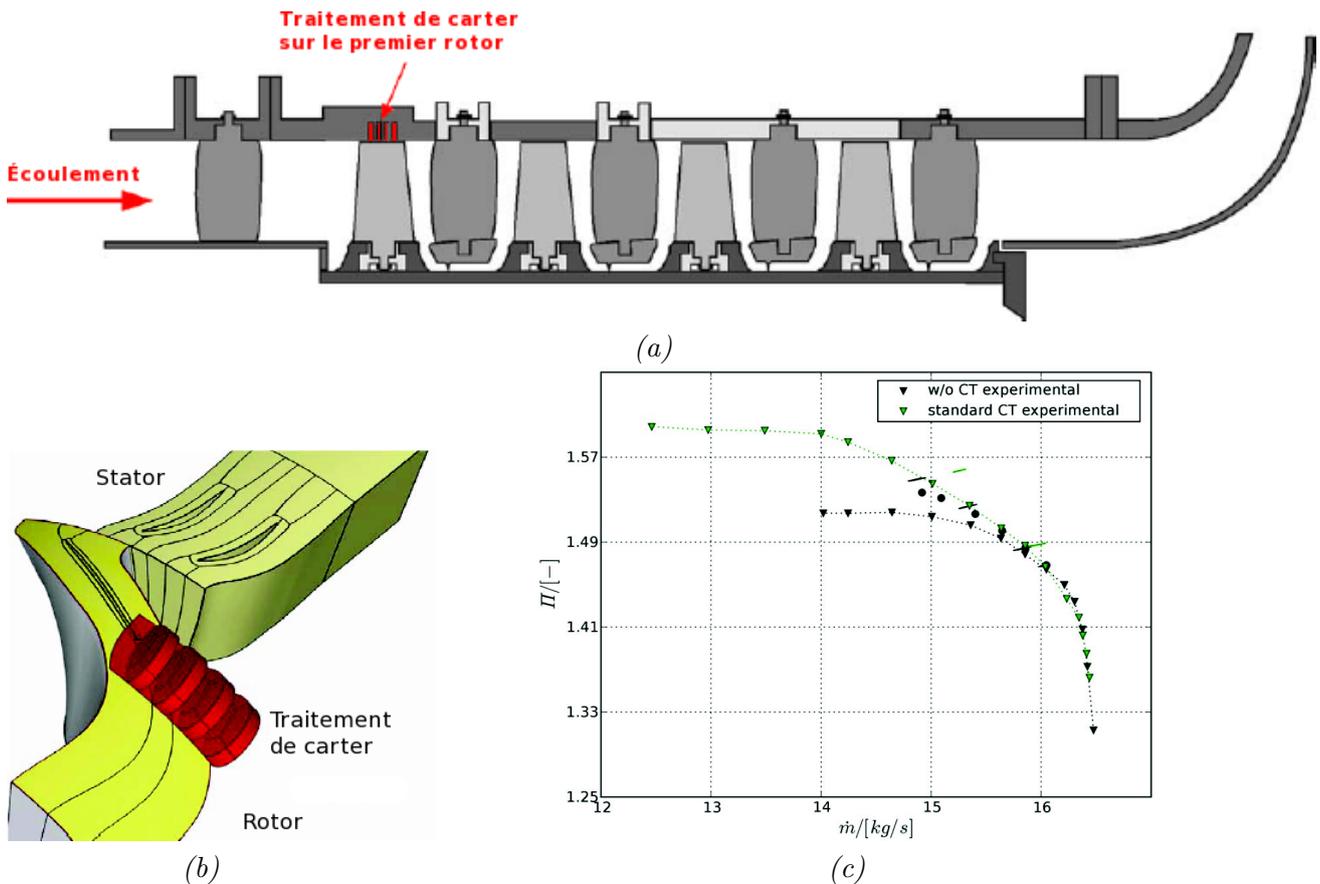


Figure 1.8 – (a) : Coupe axiale illustrant un traitement de carter au niveau du premier rotor, extraite de [103], (b) : Visualisation en perspective d'un traitement de carter issue de [22] et (c) : Courbe expérimentale du taux de compression en fonction du débit illustrant l'amélioration de la marge au pompage tirée de [22].

Cavités entre roues fixe et mobile ou jeu inter-plateforme

Entre toute partie fixe et toute partie mobile de la turbomachine, il existe nécessairement une cavité. Soumis à la fois à une paroi immobile et à une paroi en rotation, ainsi qu'à l'écoulement principal, le fluide a un comportement très complexe dans cette zone. Shabbir a étudié les effets de l'une de ces cavités dans [104]. Il prend soin de comparer des résultats expérimentaux et des résultats numériques sur des configurations de type NASA Lewis Rotor 35 et 37. Il en conclut que les écoulements issus de ces cavités peuvent réduire les capacités de compression de la machine. Il est intéressant de noter que cette étude est l'une des premières de la littérature qui cherche à prendre en compte les conséquences sur l'écoulement d'un effet technologique. Celui-ci était auparavant systématiquement négligé par les modélisations idéalisées des turbomachines.

En outre, ces cavités peuvent également être utilisées afin d'injecter de l'air frais et remplir une fonction de refroidissement.

La figure 1.9 illustrant le jeu inter-plateforme est extraite de l'étude [97] réalisée par Popovic, qui compare des résultats expérimentaux et numériques pour des configurations dotées de ce jeu inter-plateformes et pour d'autres pour lesquelles il n'a pas été pris en compte. Le soufflage issu du jeu inter-plateforme permet de créer un effet de *film cooling* très réduit sur le bord d'attaque du rotor. Une augmentation du soufflage améliore le refroidissement, mais augmente en même temps les pertes. Ces pertes supplémentaires peuvent s'avérer lourdes de conséquences si le soufflage parvient à alimenter le tourbillon en fer à cheval. C'est l'une des raisons pour lesquelles la prise en compte correcte de cet effet technologique est capitale lors de l'étape de conception d'une turbomachine.

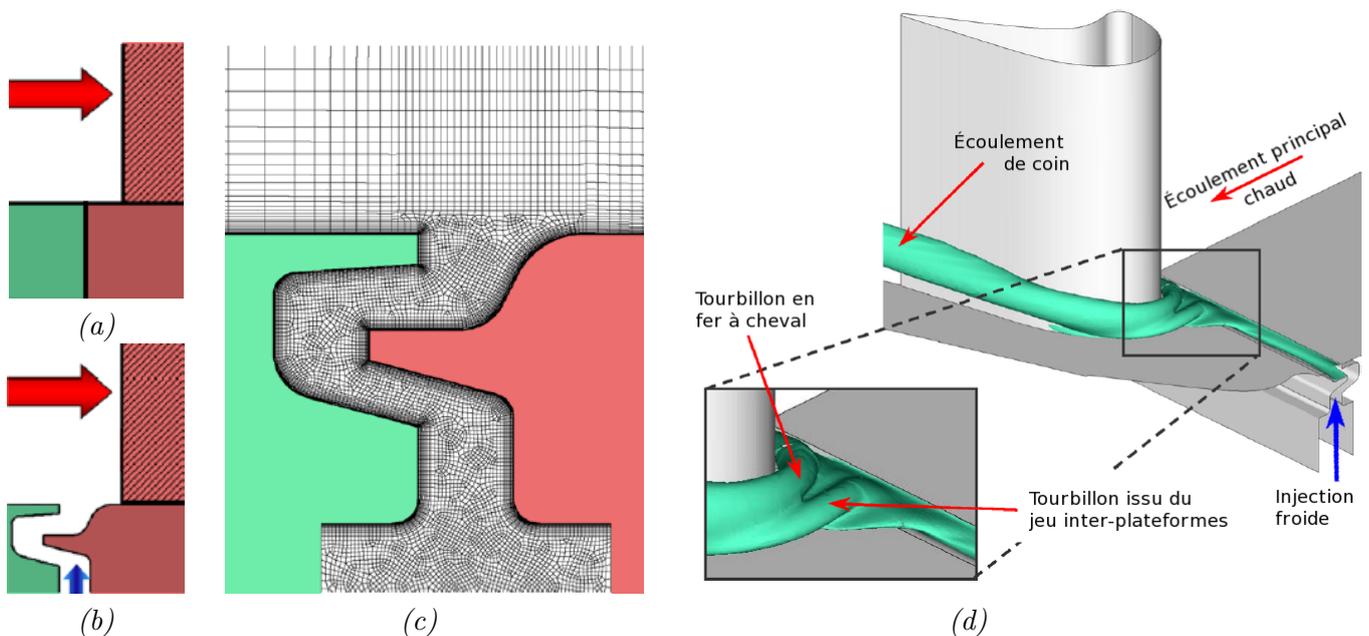


Figure 1.9 – Visualisations du jeu inter-plateforme : non pris en compte (a) avec en vert la plateforme immobile, en rouge celle du rotor qui est hachuré, pris en compte (b), un maillage non structuré (c) et une iso-surface de température (d) extraites de [97]

Baignoires

Les baignoires sont des cavités situées en tête de pale. La figure 1.10 fournit différentes vues d'une géométrie spécifique de baignoire. Ces dernières remplissent trois fonctions : protection mécanique, protection thermique et amélioration aérodynamique de l'écoulement.

Dans le cas d'un rotor de turbine haute pression soumis à de fortes températures, une dilatation de la pale se produit. Ce phénomène de dilatation peut s'avérer dangereux pour la turbomachine puisqu'il réduit le jeu entre la tête de l'aube et le carter jusqu'à ce que l'aube soit au contact du carter. Pour réduire ce phénomène de dilatation, une des solutions envisagées est la réduction de la masse en bout de pale pour réduire à la fois la dilatation mécanique de la pale à cause de la force centrifuge et la dilatation thermique. La réalisation de cette réduction de masse se traduit par la présence de cavité en bout de pales, les baignoires.

Au sein des baignoires, des trous de refroidissement sont parfois insérés afin de refroidir la tête d'aube. Ce qui contribue également à la réduction de la dilatation thermique. Enfin, Wlassow montre dans [128] que la présence d'une baignoire modifie fortement l'écoulement de jeu, retardant la formation du tourbillon de jeu, ce qui permet de réduire les pertes aérodynamiques. Ces résultats sont en bon

accord avec les travaux de Key et Arts [69].

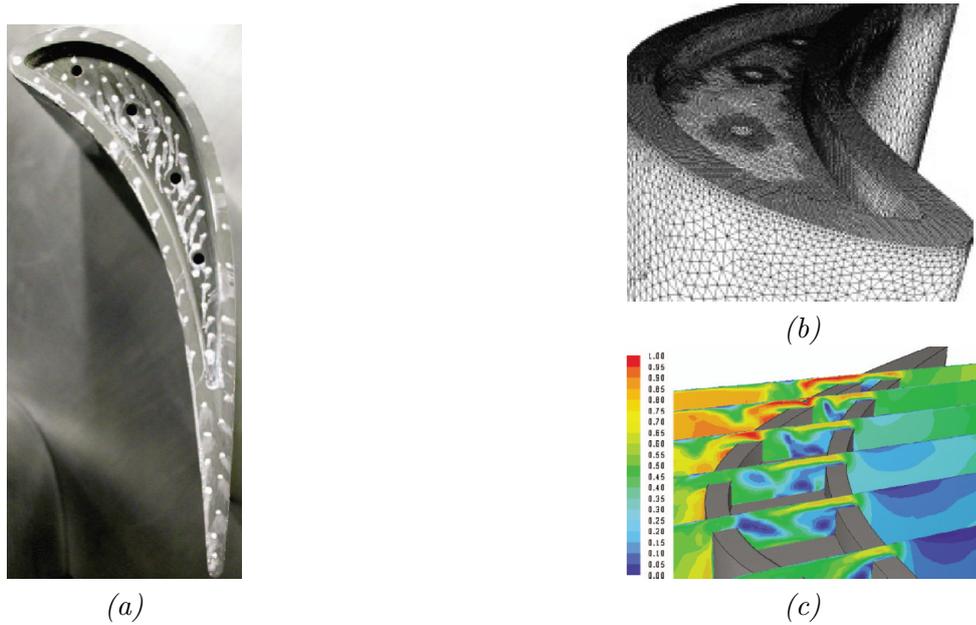


Figure 1.10 – Visualisations d’une baignoire : la géométrie vue de dessus (a), un maillage non structuré (b) et un champ de nombre de Mach (c) extraites de [85]

1.2 Simulation avec prise en compte des effets technologiques

La rapide présentation des effets technologiques que nous venons de proposer souligne la nécessité de les prendre en compte dans la simulation numérique des écoulements en turbomachines afin d’assurer la fiabilité des prédictions. Cette prise en compte peut être réalisée en faisant appel à différentes stratégies numériques, plus ou moins sophistiquées à mettre en œuvre et offrant une précision variable dans la capture des phénomènes physiques associés à ces effets technologiques. Nous choisissons d’illustrer ces différentes stratégies en nous concentrant, à titre d’exemple, sur la prise en compte d’un trou de refroidissement percé dans une aube. Cette technique dite de *film cooling* (la série de trous réalisée en pratique conduisant à la formation d’un film frais au niveau de la paroi de l’aube) est schématisée sur la figure 1.11. Dans le contexte de cette thèse, nous supposons que le point de départ de la simulation à réaliser est un code multibloc structuré, typiquement elsA, bien adapté à la simulation d’une aube lisse.

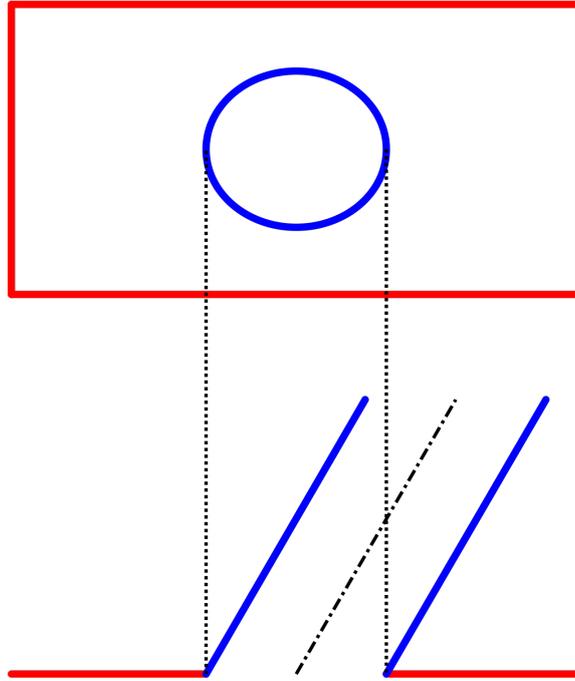


Figure 1.11 – Vue de profil (en bas) et sa vue de dessus (en haut) d'un trou d'injection d'air frais (parois en bleu) percé à la surface d'une aube simplifiée par une plaque (surface en rouge).

1.2.1 Conditions Limites Généralisées (*CLG*)

Une première stratégie consiste à préciser au sein d'une "fenêtre structurée", correspondant par exemple de façon générique à une condition de paroi solide, un ensemble de sous-fenêtres qui vont bénéficier d'une condition limite spécifique. Cette condition limite permettra par exemple de distinguer une paroi solide sans porosité et une paroi solide à travers laquelle il est possible de réaliser une injection, comme illustré sur la figure 1.12.

Avec cette modélisation, le trou n'existe plus réellement, seule sa sortie au niveau de la plaque est modélisée par une injection. La visualisation proposée par la figure 1.12 du flux de chaleur normalisé pour une simulation avec des *CLG* donne une première idée des conséquences d'un refroidissement assuré par des trous injectant de l'air frais. Toutefois ce résultat est peu satisfaisant. La qualité physique de la solution ne permet pas en effet de conserver correctement les traces thermiques des trous. Par ailleurs, la forme de l'intersection des trous avec l'aube est nécessairement approchée par un ensemble de sous-fenêtres structurées. Ainsi la forme ronde ou elliptique de cette intersection est nécessairement approchée par une forme plus ou moins carrée compte tenu du fait que l'on privilégie dans cette stratégie la préservation de la structure de maillage surfacique utilisée pour l'aube lisse (sans trou de refroidissement). Cette approximation n'est pas sans conséquence, comme l'illustrent notamment les travaux de Kalghatgi [68]. Cet auteur établit le lien entre la forme précise du trou et les caractéristiques de la paire de tourbillons contrarotatifs formée au niveau de la zone d'injection. Ces tourbillons servent au refroidissement de la paroi dans ces stratégies de *film cooling* et leur prédiction correcte conditionne donc la qualité de l'estimation du refroidissement réalisé. Enfin, cette modélisation du trou de refroidissement par une condition aux limites généralisée ne permet évidemment pas de représenter la dynamique de l'écoulement dans le trou qui a pourtant un impact fort sur le refroidissement produit par le trou. Si cette approche est donc peu coûteuse et simple à mettre en œuvre, elle ne permet cependant de réaliser que des calculs grossiers de refroidissement thermique, généralement insuffisants au dimensionnement final.

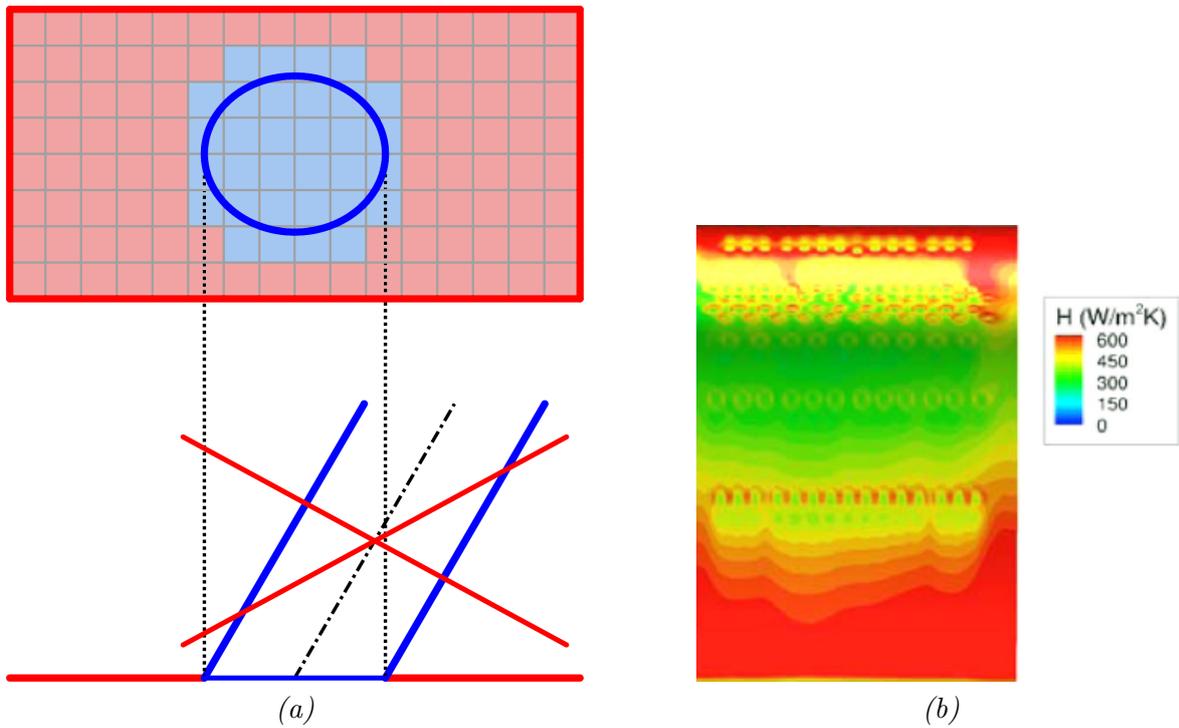


Figure 1.12 – (a) Visualisations de la prise en compte du trou par une stratégie *CLG* avec en rouge les faces traitées par une condition de type paroi et en bleu celles traitées avec une injection, (b) Flux de chaleur normalisé d’une simulation *CLG* de plusieurs rangées de trous injectant de l’air frais extraite de [25].

1.2.2 Approche non coïncidente structurée

On se place désormais dans le cadre d’approches qui permettent de rendre compte de la dynamique de l’écoulement dans le trou d’injection. De plus, on conserve la contrainte de prendre en compte la présence du trou d’injection en préservant dans la plus large mesure possible le maillage structuré initialement disponible pour l’aube lisse. La stratégie la plus naturelle consiste alors à mailler la zone de trou d’injection de façon indépendante de la surface de l’aube puis de réaliser une connexion entre les deux maillages par un raccordement non coïncident, comme illustré sur la figure 1.13. Cette approche, très séduisante dans son principe, n’est malheureusement pas directement réalisable en pratique. En effet, elle supposerait de pouvoir définir, pour certaines faces indiquées en rouge sur la figure 1.13 une appartenance simultanée au raccordement non coïncident d’une part et à la paroi de l’aube d’autre part.

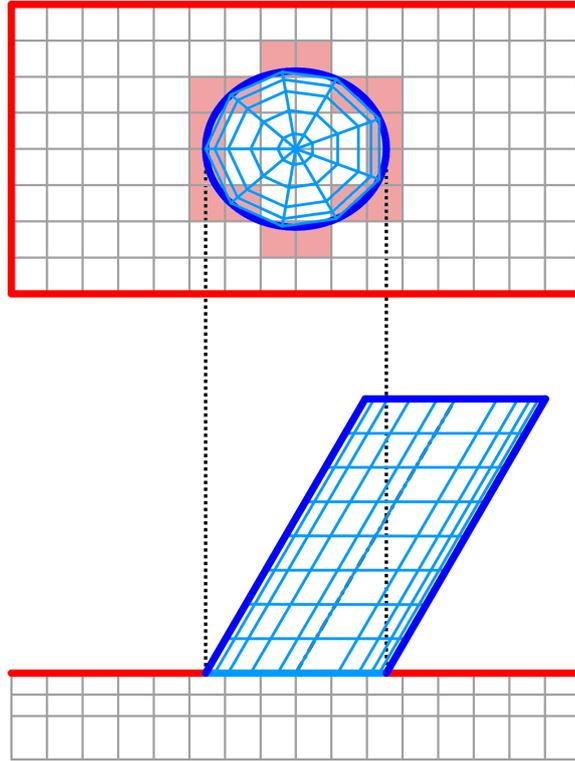


Figure 1.13 – Schématisation d’une approche non coïncidente structurée avec en rouge les faces devant à la fois appartenir au raccord non coïncident et à la condition de paroi.

1.2.3 Approche chimère structurée

En conservant la logique qui consiste à mailler indépendamment la surface de l’aube (lisse) et le trou d’injection, l’approche chimère permet d’immerger un élément muni de son maillage dans un autre. Cette stratégie de maillage a été initialement proposée par Benek [12] et Steger [111]. Les deux maillages sont naturellement recouvrants et des interpolations doivent être effectuées entre les deux maillages afin de calculer la solution dans l’ensemble du domaine fluide. La figure 1.14 illustre cette stratégie avec en bleu le maillage propre au trou et en gris celui de la plaque. Cette méthode peut traiter *a priori* toute forme géométrique avec des maillages structurés. Des résultats de calculs sur plusieurs configurations complexes de turbomachine sont présentés dans [25] et des exemples d’application en aérodynamique externe (hélicoptère, avion) sont fournis dans la thèse de Péron [93].

La figure 1.14 présente également une représentation graphique du flux de chaleur normalisé d’une simulation d’aube multiperforée extraite de [25]. Il s’agit de la même configuration que celle présentée sur la figure 1.12. On constate que relativement à la méthode *CLG*, les traces thermiques semblent bien mieux préservées. Ceci est sûrement dû au meilleur raffinement de la grille du trou dont bénéficie le maillage chimère par rapport à l’approche *CLG* qui elle ne bénéficie que du maillage plus grossier du corps de l’aube. Si le résultat du calcul chimère semble offrir un niveau de précision satisfaisant pour ce qui concerne les traces thermiques, il convient cependant de souligner quelques faiblesses bien connues de cette stratégie.

En premier lieu, la mise en place d’une simulation chimère peut s’avérer complexe et requiert un savoir-faire qui rend cette méthode difficilement exploitable pour un bureau d’étude. Par ailleurs, comme souligné notamment dans [25], l’approche chimère souffre d’une perte de conservativité qui peut atteindre quelques pour cent sur des débits d’intérêt. Celle-ci est trop élevée dans le contexte des turbomachines.

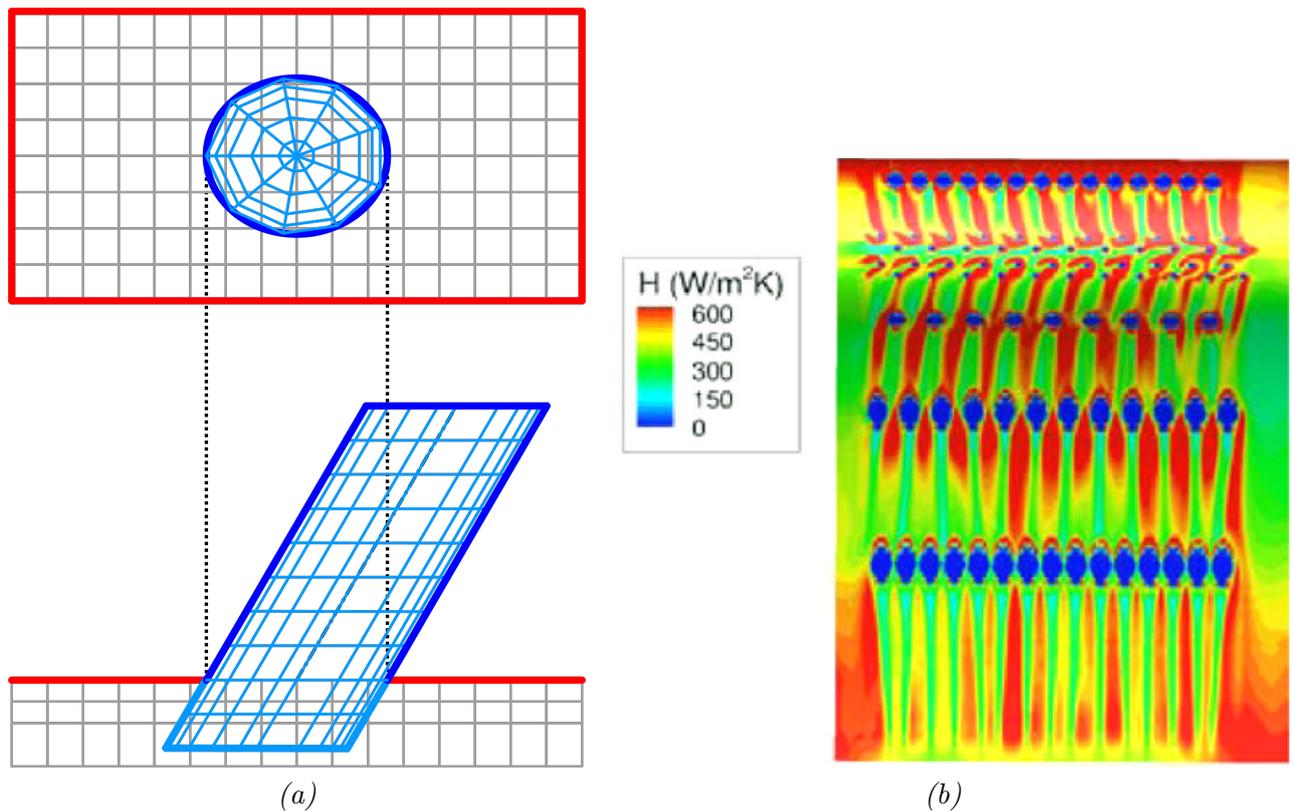


Figure 1.14 – (a) Visualisations de la prise en compte du trou par une stratégie chimère avec en bleu le maillage du trou et en gris celui de la plaque, (b) Flux de chaleur normalisé d’une simulation *CLG* de plusieurs rangées de trous injectant de l’air frais avec une approche chimère extraite de [25].

1.2.4 Intersection de maillages

Comme l’approche chimère, l’intersection de maillages permet de mailler indépendamment les deux corps (aube et trou d’injection) avec des grilles topologiquement structurées. Au lieu de procéder à des interpolations entre les deux grilles, la technique de l’intersection de maillages va créer une seule et unique grille, issue de l’intersection des deux grilles initiales. Cette stratégie a été développée par Brenner au sein du code FLUSEPA® [20] et par Wang dans [127]. Sur la figure 1.15, la grille réellement propre au trou est laissée en bleu alors que la grille propre à la plaque, là où a lieu l’intersection est représentée en gris. L’union de ces deux parties constitue l’unique grille du calcul. Aucune perte de conservativité ne peut être imputée à ce maillage et donc à la stratégie d’intersection de maillages.

En plus de son avantage en terme de conservativité, cette approche permet de disposer d’un catalogue des éléments classiquement utilisés qui sont prémaillés et de n’avoir ainsi plus qu’à les positionner pour générer un maillage à partir de cette stratégie d’intersection. Autrement dit, cette approche confère une grande flexibilité du point de vue de la conception.

Néanmoins, l’intersection des deux grilles est nécessairement non structurée polyédrique. Ainsi pour pouvoir calculer un écoulement à partir d’une configuration issue d’une stratégie d’intersection de maillages, il est indispensable d’avoir recours à un solveur non structuré de type polyédrique. Si on est effectivement incapable de gérer la zone de l’effet technologique de manière convenable par une approche structurée et qu’il faut se résoudre à adopter une approche non structurée dans cette zone, il est dommage pour des raisons de temps de calcul par exemple, que les zones régulières du calcul disposant d’un maillage pouvant permettre une approche structurée soient traitées elles-aussi en non structurée. Puisque nous avons supposé que la démarche de prise en compte des effets technologiques s’inscrivait dans un contexte où préexiste un solveur structuré d’efficacité éprouvée pour la simulation d’aubes lisses par exemple, cette remarque conduit de façon logique au choix de développer une stra-

tégie de simulation dite hybride, qui cherche à combiner les avantages d'une approche non structurée - flexibilité de la génération de maillage - avec les bénéfices établis du solveur structuré existant.

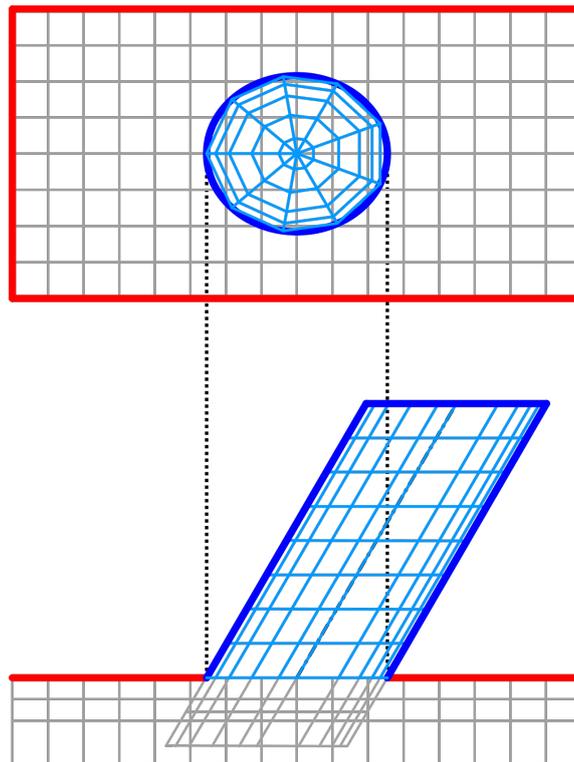


Figure 1.15 – Représentation d'une intersection de maillage avec en bleu la partie du maillage dédiée au trou et en gris celle de la plaque où a lieu l'intersection de maillages.

1.3 Approche hybride

1.3.1 Concept

L'analyse des différentes stratégies existantes de prise en compte des effets technologiques conduit à former le constat qu'aucune stratégie purement structurée ne permet une prise en compte réaliste des zones complexes soit parce que la forme géométrique n'est pas convenablement respectée, soit parce que la physique est trop fortement altérée en raison d'une perte de conservativité. Des stratégies non structurées pour la prise en compte de ces effets technologiques semblent donc à privilégier. Il serait toutefois pénalisant de basculer entièrement d'une stratégie purement structurée à une stratégie purement non structurée. Dans l'exemple considéré du trou de refroidissement percé dans une aube, la zone non structurée serait en effet limitée au trou et à son voisinage immédiat tandis que tout le reste du domaine fluide peut continuer à être traité en structuré, en bénéficiant à la fois de l'expérience acquise avec le solveur structuré existant et des avantages inhérents à un solveur structuré. En effet, à niveau de discrétisation spatiale équivalent, un solveur structuré devrait être plus efficace qu'un solveur non structuré en raison de l'architecture de stockage des données qui facilite leur accès en structuré.

Une bonne représentation physique et géométrique des effets technologiques et une maximisation du nombre de cellules structurées au sein du domaine de calcul dans le but de minimiser le temps de calcul sont nécessaires. Une approche dite hybride a été proposée par l'ONERA dès la fin des années 1990 avec les travaux de thèse de Lefebvre [75]. La stratégie proposée consiste à tirer profit de la souplesse du non structuré pour la génération quasi automatique de maillage dans les zones géométriquement complexes et de l'efficacité d'un solveur structuré pour les zones ne nécessitant pas une approche de type maillage non structuré. Cette nouvelle approche hybride est illustrée sur la figure 1.16 pour le cas

du trou de refroidissement : les zone géométriquement complexes y sont maillées avec une approche non structurée, en orange et bleu, et le reste du domaine de calcul est décrit et traité par une approche structurée, en gris. Le DLR s'est également intéressé à cette stratégie au début des années 2000. Ainsi, Heinrich [59] présente en 2006 un premier prototype de solveur hybride qui s'appuie sur deux solveurs existants du DLR : le solveur structuré multibloc FLOWer et le solveur non structuré TAU.

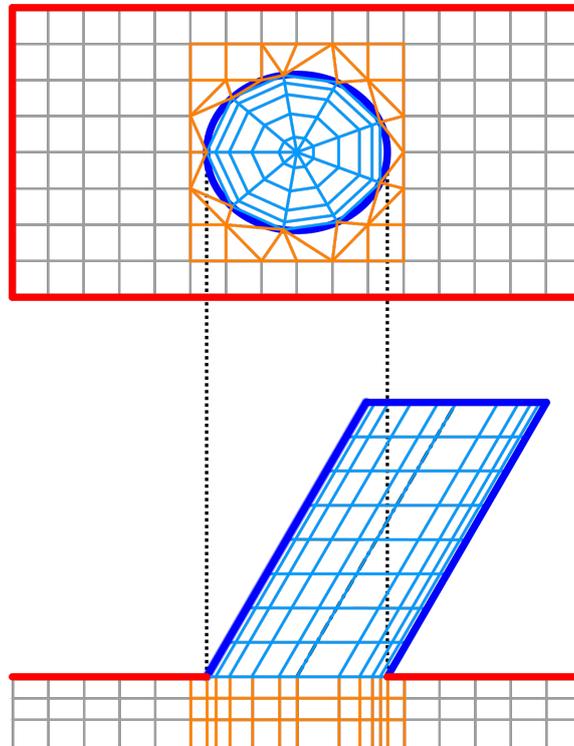


Figure 1.16 – Représentation de la stratégie hybride avec en bleu et en orange la zone non structurée et en gris la zone structurée.

Il est intéressant de noter que les stratégies hybrides envisagées en aérodynamique interne et aérodynamique externe sont radicalement différentes. En effet, en aérodynamique interne, les zones géométriquement complexes correspondant aux effets technologiques et qui sont donc traitées en non structuré, sont généralement situées à proximité immédiate des aubes tandis que les zones structurées multibloc décrivent le domaine fluide en s'éloignant des parois solides. Cette particularité nous sera notamment utile dans la suite du mémoire lorsque nous chercherons à mettre en œuvre une approche hybride pour des simulations instationnaires : nous pourrons en effet bénéficier des traitements de l'interaction rotor-stator développés en structuré tout en insérant une zone non structurée à proximité immédiate des parois solides présentes dans le domaine fluide. En aérodynamique externe, l'un des objectifs de l'approche hybride est de pouvoir réduire le maillage en champ lointain. De ce fait, les zones non structurées envisagées sont situées dans ce cas loin du profil, qui reste maillé de façon structurée.

1.3.2 Mise en place d'une stratégie hybride

Une stratégie hybride consiste donc en la coexistence de blocs structurés et de blocs non structurés au sein d'un même domaine de calcul. Chaque domaine est calculé par la partie du solveur qui lui correspond, structurée ou non structurée. L'échange d'information entre blocs structurés se fait de manière classique pour un solveur structuré et il en va de même pour les échanges entre blocs non structurés si une stratégie multibloc est également adoptée en non structuré. En ce qui concerne les raccords hybrides reliant un bloc structuré à un bloc non structuré, une stratégie spécifique doit

être déployée. Autrement dit, un solveur hybride est constitué d'un solveur structuré qui gère les zones structurées, d'un solveur non structuré qui prend en charge les zones non structurées et d'une stratégie de raccordement hybride pour opérer la jonction entre des blocs structurés et non structurés. Ce raccord hybride peut être traité de manière coïncidente ou non coïncidente.

1.3.2.1 Approche non coïncidente

Dans le cas où les faces du bloc structuré ne correspondent pas aux faces du bloc non structuré, on qualifie l'approche de non coïncidente. Un travail spécifique doit alors être accompli afin d'identifier les cellules en vis-à-vis d'une cellule d'un bloc opposé, avec pour objectif de développer des traitements d'interface préservant la conservativité de la simulation. Cette approche non coïncidente est particulièrement adaptée pour des blocs en mouvement les uns par rapport aux autres par exemple. Cette stratégie est illustrée sur la figure 1.17. La présence des cellules fictives permet d'aborder le calcul des flux sur les faces appartenant à un raccord hybride avec une approche identique à celles développées pour les raccords non coïncidents structurés ou non structurés. Il suffit simplement de veiller à ce que le flux sur cette face soit calculé de la même manière sur le bloc structuré et sur le bloc non structuré afin d'assurer la conservativité. Le choix d'une approche non coïncidente est celui retenu dans les travaux du DLR consacrés au développement d'un solveur hybride plus particulièrement dédié à la simulation en turbomachines. Ces travaux sont illustrés dans [130] et [11]. La figure 1.18 illustre une des applications proposées dans ces deux communications : la prise en compte du jeu entre le rotor et le carter. Le choix d'une approche hybride non coïncidente requiert de développer un traitement de raccord spécifique au niveau de l'interface entre zone structurée et non structurée mais offre en contrepartie une grande flexibilité au niveau de la génération du maillage, flexibilité particulièrement utile pour assurer la qualité du maillage non structuré.

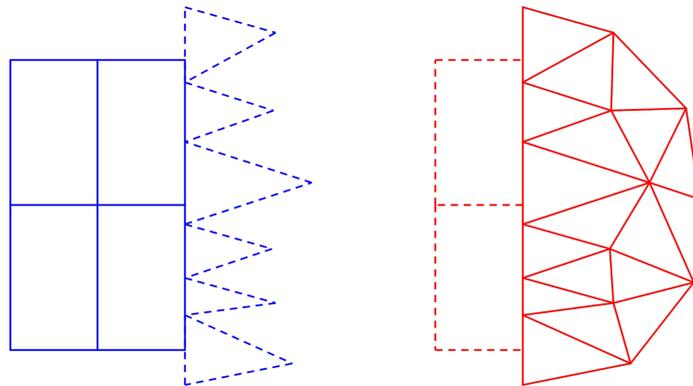


Figure 1.17 – Représentation de la stratégie hybride avec raccords non coïncidents avec en bleu la partie structurée, en rouge la zone non structurée et en pointillés les cellules fictives.

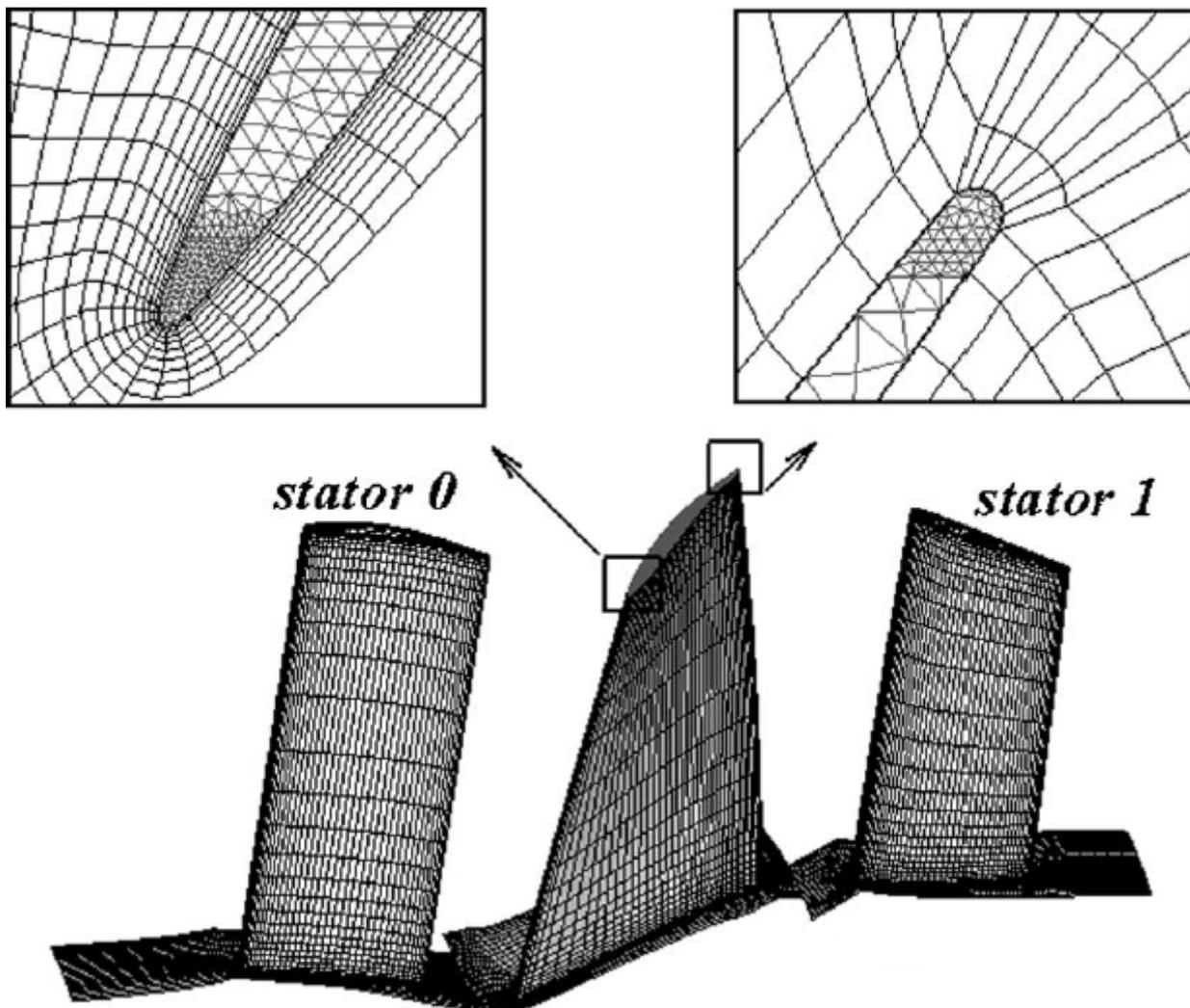


Figure 1.18 – Représentation de la stratégie hybride avec raccords non coïncidents mise en œuvre par le DLR pour prendre en compte le jeu entre le rotor et le carter avec un bloc non structuré.

1.3.2.2 Approche coïncidente

La connectivité entre un bloc structuré et un bloc non structuré peut également être réalisée avec des faces qui se superposent parfaitement entre les deux blocs. Cette approche est qualifiée de coïncidente et est représentée sur la figure 1.19. Sur chacun des deux blocs, une rangée de cellules fictives est introduite. La rangée de cellules fictives d'un bloc correspond géométriquement et physiquement à la première rangée de cellules réelles du bloc en vis-à-vis. Ainsi, les variables conservatives, les gradients des grandeurs primitives et d'autres grandeurs physiques sont susceptibles d'être échangées. Sous réserve de s'assurer que les flux sur les faces situées sur les raccords hybrides sont calculés de la même manière et bénéficient des mêmes données, *i.e.* les différentes variables ont été correctement échangées, alors cette approche coïncidente apparaît comme intrinsèquement conservative. Bien que des fonctionnalités non coïncidentes existent au sein du code elsA, l'approche coïncidente avait été adoptée dans les travaux initiés antérieurement à la présente thèse (cf. paragraphe ci-dessous). Afin de capitaliser les développements déjà effectués, c'est cette approche qui a été retenue dans le cadre de nos travaux. Comme nous le verrons dans la suite du mémoire, la simplicité de traitement du raccord hybride offerte par l'approche coïncidente peut induire d'une dégradation de la qualité du maillage non structuré au voisinage du raccord, en raison des contraintes introduites par la partie structurée du maillage. Ce manque de qualité du maillage peut alors exiger des développements spécifiques pour assurer la robustesse du solveur hybride.

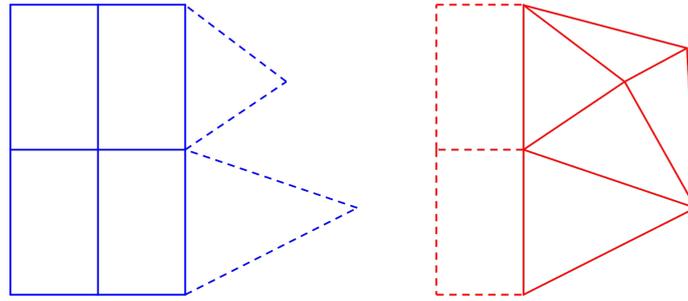


Figure 1.19 – Représentation de la stratégie hybride avec raccords coïncidents avec en bleu la partie structurée, en rouge la zone non structurée et en pointillés les cellules fictives.

1.3.2.3 Version hybride de elsA : état de l'art au démarrage de la thèse

Faisant suite aux travaux de thèse de Lefebvre [75], un partenariat entre le CERFACS et l'ONERA a permis de doter le solveur multibloc structuré elsA de fonctionnalités hybrides. Ce nouveau solveur sera désormais désigné par elsA-H où le "H" fait bien sûr référence au caractère "Hybride". Des premiers résultats [33], [34] ont été présentés peu avant le début de ces travaux de thèse afin de démontrer à la fois la faisabilité et l'intérêt du développement de cette approche dans une structure de code structuré bien éprouvée. Nous proposons une revue des principaux résultats obtenus afin de bien identifier les points acquis au démarrage de la thèse et ceux sur lesquels nos travaux se sont concentrés par la suite.

La démarche suivie dans les travaux préliminaires était en premier lieu de valider le solveur hybride développé, plus particulièrement le solveur non structuré et la condition de raccord coïncident entre zone structurée et zone non structurée. Afin de s'assurer du bon accord entre simulation entièrement structurée et simulation hybride, des calculs ont donc été réalisés à iso-maillage mais en traitant de façon non structurée (connectivité des cellules et méthode de discrétisation associée) une partie du domaine fluide. On présente ainsi sur la figure 1.20 les résultats obtenus dans [34] pour la simulation en fluide parfait de l'écoulement transsonique sur un profil NACA0012. Le calcul hybride est réalisé en appliquant le solveur non structuré à la zone en noir du maillage (qui reste géométriquement identique à la zone correspondante du calcul structuré monobloc de référence) et le solveur structuré à la zone en rouge avec conditions de raccord coïncident au niveau de l'interface entre les deux zones. Les résultats de ce calcul sont comparés à ceux fournis par le solveur structuré de référence et un accord très satisfaisant est observé. On doit noter que, même à iso-maillage, on ne peut attendre une superposition parfaite des résultats du solveur structuré et du solveur hybride dans la mesure où la formulation du schéma adopté en non structuré ne dégénère pas rigoureusement en la formulation structurée du schéma même lorsque le maillage non structuré est en réalité un maillage curviligne.

La figure 1.21 présente le maillage d'une aube de turbine simulée en RANS à l'aide d'un maillage structuré multibloc (solution de référence) et du solveur hybride. Dans ces travaux préliminaires, le calcul hybride est réalisé en "déstructurant" certains blocs du maillage structuré initial et en choisissant comme blocs traités en non structuré les blocs positionnés dans le canal inter-aube et non pas au contact de l'aube. Ce choix présente l'avantage d'être moins exigeant pour le solveur non structuré (en cours de développement dans ces travaux préliminaires) puisque les principaux phénomènes physiques (couches limites, sillage) restent générés par le solveur structuré. Il est néanmoins suffisant pour évaluer l'impact du traitement hybride (en particulier du solveur non structuré) sur l'écoulement calculé par rapport à la solution de référence du solveur multibloc structuré. Dans le cas étudié, on observe ainsi en analysant le champ du nombre de Mach que des différences apparaissent entre les solutions fournies par le calcul structuré et le calcul hybride - les lignes isovaleurs ne sont pas superposées, plus particulièrement à l'aval de l'aube. Ce résultat peut être interprété comme une illustration des limitations du solveur non structuré alors en développement, qui n'assure pas à iso-maillage le même niveau de précision que le solveur structuré. Nous ne détaillons pas davantage ce point ici puisqu'il va faire l'objet d'une étude poussée dans le chapitre suivant du mémoire.

Au-delà de la validation des développements réalisés, les travaux [33], [34] ont également porté sur

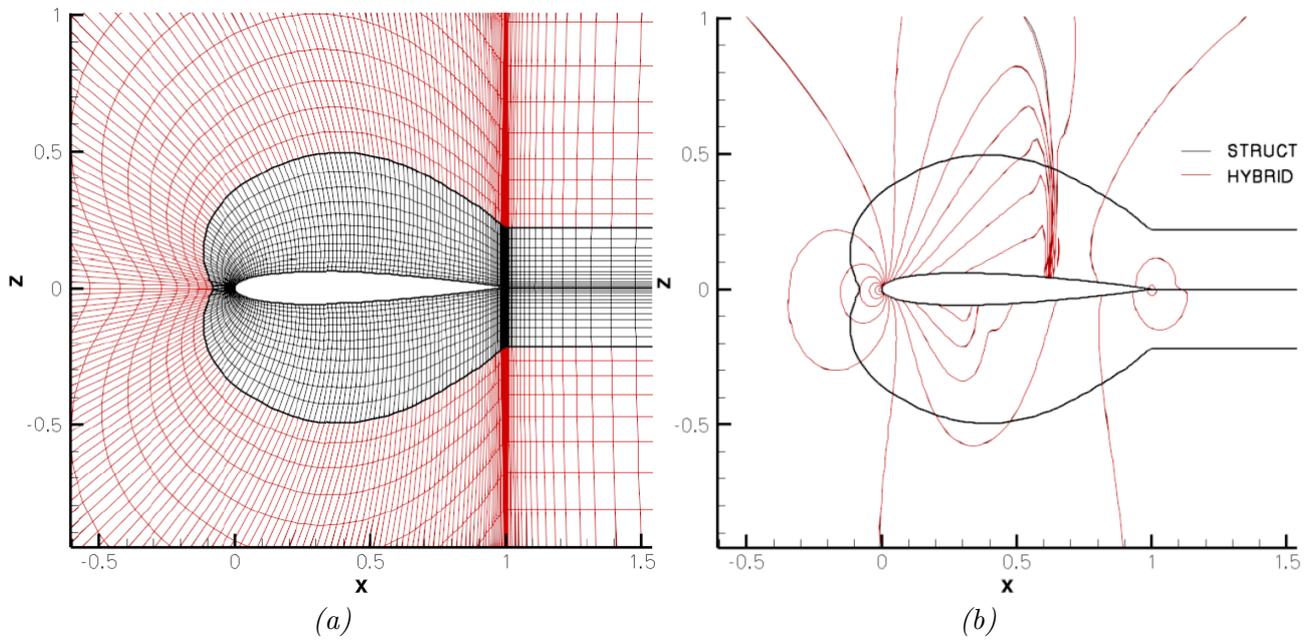


Figure 1.20 – Configuration NACA0012 : (a) Visualisation du maillage hybride avec en noir la grille non structurée et en rouge la structurée, (b) iso-contours de nombre de Mach. Visualisations extraites de [34].

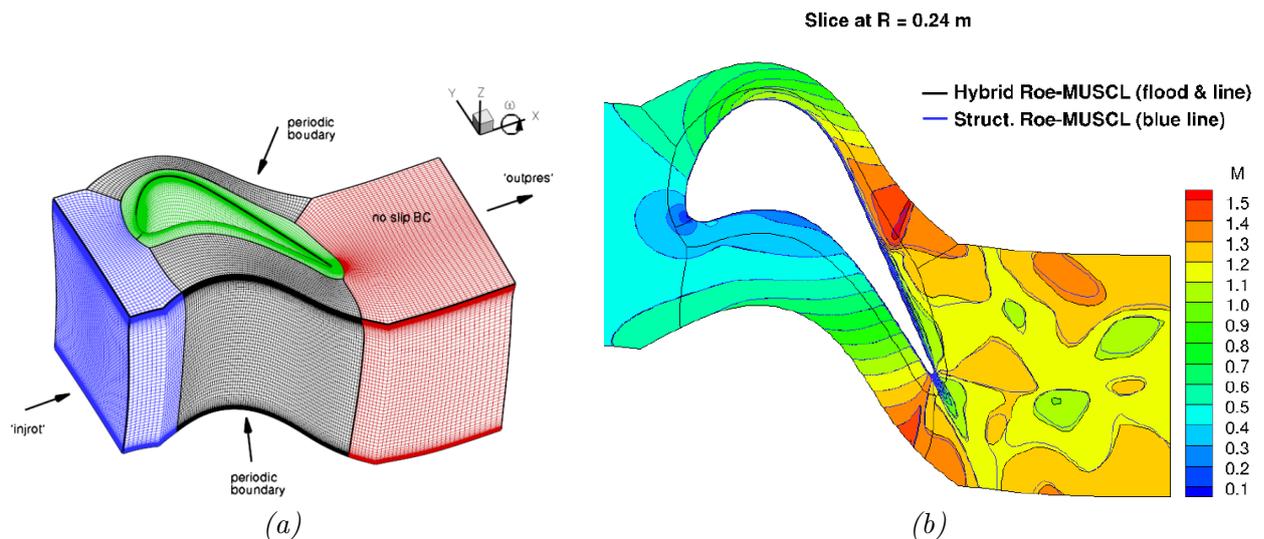


Figure 1.21 – Configuration d'une aube de turbine Haute Pression : (a) Visualisation du maillage hybride avec en noir les grilles non structurées, (b) comparaison des iso-contours de nombre de Mach entre le calcul structuré et hybride. Visualisations extraites de [34].

la démonstration d'intérêt de l'approche hybride pour des configurations d'intérêt industriel. Ainsi, la configuration présentée (via son maillage) sur la figure 1.22 correspond au stator du compresseur CREATE. Ce compresseur CREATE a fait l'objet d'une série d'études expérimentales réalisées par le LMFA et que l'on retrouve par exemple dans [114], [5] et [6]. La configuration analysée inclut l'injection à l'amont de l'aube d'un flux prélevé à l'aval, ayant circulé dans le labyrinthe situé sous l'aube. La discrétisation de cette zone de labyrinthe, typique d'un effet technologique en turbomachine, par une approche multibloc structurée aurait requis l'utilisation d'une trentaine de blocs et un temps-ingénieur conséquent pour réaliser un tel maillage. Dans l'étude présentée, cette zone de labyrinthe est maillée de façon automatique, en un seul bloc, grâce à une approche non structurée, contrainte par la condition de coïncidence des faces avec les blocs structurés au niveau de la zone d'injection et de prélèvement. La flexibilité de l'approche non structurée prend ici tout son sens ainsi que le bénéfice de conserver l'approche structurée bien établie pour la simulation "classique" de l'écoulement autour

de l'aube. Notons que le maillage généré pour cette application contient des éléments autres que des hexaèdres et, plus généralement, ne se prête plus à une comparaison à iso-maillage avec une approche multibloc structurée dans la mesure où la topologie du maillage du labyrinthe et non plus simplement sa connectivité est désormais non structurée. Le calcul hybride est réalisé avec un schéma de Jameson ou de Roe à l'ordre deux dans la zone structurée et par l'extension réalisée en non structurée pour ces deux types de schéma dans la zone non structurée. Seuls les résultats obtenus avec le schéma de Jameson sont qualitativement illustrés via la visualisation des lignes de courant présentées en partie droite de la figure 1.22. Au-delà de l'analyse plus poussée de la précision du solveur hybride qui pourrait être menée sur cette configuration, il nous semble important de souligner que la stratégie de génération des zones non structurées / structurées reste ici encore assez favorable à la mise en œuvre d'une approche hybride coïncidente. En effet, comme on peut le noter sur la figure 1.22 (a), la zone structurée (en noir) retenue dans la simulation est localisée au niveau de l'aube et présente des interfaces planes avec la zone non structurée (en rouge) qui n'introduisent pas de complexité de maillage au niveau de ces interfaces. Ainsi, des cellules hexaédriques régulières peuvent être utilisées dans le maillage non structuré au voisinage de l'interface avec la zone structurée tandis que des éléments tétraédriques par exemple vont apparaître pour représenter de façon souple les zones d'injection et de soufflage. Dans le cas du trou d'injection localisé à la surface d'une aube que nous avons précédemment décrit, la complexité du maillage non structuré dans la zone d'interface est bien plus importante. Les contraintes introduites par le maillage structuré en proche paroi de l'aube sont beaucoup plus fortes que lorsque l'interface est localisée loin de l'aube. Ceci s'explique notamment par des raffinements du maillage structuré associé à la représentation de la couche limite pariétale.

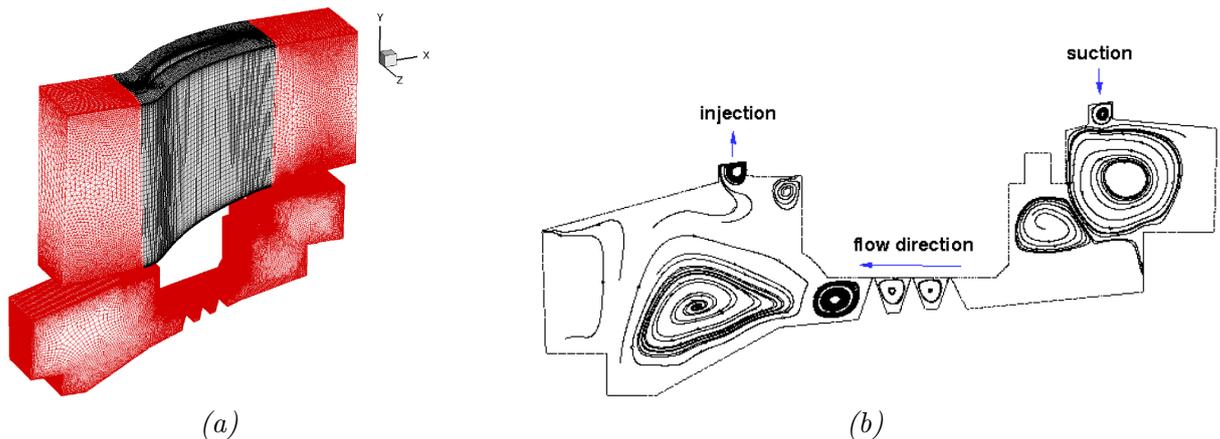


Figure 1.22 – Configuration d'un stator du compresseur CREATE avec labyrinthe : (a) Visualisation du maillage hybride avec en rouge les grilles non structurées, (b) Visualisation des lignes de courant dans le labyrinthe. Visualisations extraites de [34].

La nécessité de la mise en œuvre d'une approche viable afin de prendre en compte les différents effets technologiques qui apparaissent lors de simulation en turbomachines a été mise en évidence dans ce chapitre et le concept d'une stratégie dite hybride répondant à ce besoin a été présenté et justifié. L'analyse des résultats initialement disponibles grâce à cette méthode soulève deux points importants qui sont abordés dans les chapitres suivants :

- le degré de maturité du solveur non structuré développé pour elsA-H n'est pas comparable à celui du solveur structuré. Un premier axe d'études doit donc porter sur l'évaluation précise du solveur non structuré et sur sa "mise à niveau", en tenant compte des contraintes d'environnement associées au contexte elsA-H. Nous verrons que ces contraintes interviennent en particulier lorsqu'il s'agit de choisir une stratégie de reconstruction de la solution dans les cellules du maillage qui soit compatible avec la gestion précédemment mise en place des raccords entre zones.
- la précision et la robustesse du solveur hybride doivent être évaluées pour des configurations contraignantes au niveau de l'interface entre zone structurée et zone non structurée.

Par "contraignantes", on entend en particulier des configurations pour lesquelles la qualité du maillage non structuré pourra être dégradée par le nécessaire respect d'un raccord coïncident avec le maillage structuré. Nous verrons que des configurations de Film Cooling par injection via une rangée de trous ou de congé de raccordement vont introduire ce type de contraintes fortes sur le maillage et qu'il sera alors nécessaire d'adapter le solveur non structuré en conséquence.

Chapitre 2

Revue initiale du solveur elsA-H

Le solveur elsA-H a été développé en adjoignant au solveur structuré existant et largement éprouvé un nouveau solveur non structuré puis en établissant une communication entre ces deux solveurs via une condition d'interface entre bloc structuré et bloc non structuré. Le solveur structuré existant est de type Volumes Finis, centré sur les cellules (les inconnues sont associées aux centres des cellules du maillage) et multibloc. Le solveur non structuré est lui-aussi de type Volumes Finis, avec des inconnues également associées aux centres des cellules et une stratégie dite "basée sur les faces", au sens où le maillage est parcouru en balayant les faces des cellules pour y calculer le flux numérique au niveau de chaque face avant de le distribuer avec le signe adéquat aux cellules partageant cette face afin d'incrémenter le bilan de flux dans chacune de ces cellules. Nous verrons que certains des ingrédients-clés de ce solveur non structuré ont dû être modifiés dans nos travaux afin d'assurer sa cohérence avec le solveur structuré, tout particulièrement pour ce qui concerne la précision assurée dans des maillages quelconques. Enfin, l'échange de données entre blocs structurés et blocs non structurés est réalisé au travers d'une unique couche de cellules fictives. Avant de détailler en fin de chapitre la stratégie de discrétisation hybride proprement dite, c'est-à-dire la procédure d'échange d'information au niveau d'une interface entre un bloc structuré et le bloc non structuré voisin, nous commençons par présenter dans ce chapitre les éléments-clés de discrétisation associés au solveur non structuré de la version d'elsA-H disponible au démarrage des travaux de thèse. Nous nous concentrons sur le solveur non structuré car sa maturité est moindre que celle du solveur structuré. Ces choix de discrétisation spatiale sont ensuite évalués de façon critique sur un problème modèle en faisant varier les propriétés de régularité des maillages non structurés mis en œuvre. Nous mettrons ainsi en évidence la nécessité d'une "mise à niveau" du solveur non structuré en termes de précision assurée dans des maillages quelconques, afin que l'association de ce solveur non structuré avec le solveur structuré, dont la précision est bien établie, ne dégrade pas les performances de l'approche hybride. Cette mise à niveau sera l'objet du chapitre suivant du mémoire. Comme annoncé ci-dessus, le chapitre se conclut avec la description de la stratégie d'hybridation : celle-ci introduit en effet, via l'utilisation d'une seule rangée de cellules fictives, des contraintes sur les possibilités d'évolution du solveur non structuré si l'on souhaite mettre en place une discrétisation générique pour le solveur non structuré, qui puisse s'appliquer de la même façon dans une cellule intérieure au bloc non structuré ou dans une cellule frontière de ce même bloc au niveau de l'interface avec un bloc structuré voisin.

2.1 Modèle physique

Les applications visées dans nos travaux sont des écoulements compressibles d'air, considéré comme un gaz parfait, dans un cadre monophasique et non réactif. Ces écoulements seront décrits par les équations de Navier-Stokes moyennées, ou équations RANS pour Reynolds-Averaged Navier-Stokes, dans le cas du régime turbulent, par les équations de Navier-Stokes instantanées dans le cas du régime laminaire et par les équations d'Euler dans le cas où la viscosité du fluide est supposée négligeable. Nous rappelons brièvement ci-après la forme des équations de Navier-Stokes instantanées afin de bien poser les équations aux dérivées partielles à discrétiser.

2.1.1 Équations de Navier-Stokes instantanées

Les équations de Navier-Stokes traduisent la conservation de la masse (2.1), de la quantité de mouvement (2.2) et de l'énergie (2.3) pour un fluide visqueux et conducteur de la chaleur. Sous forme locale ou différentielle, ce système d'équations s'écrit :

— Équation de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho \mathbf{V}] = 0 \quad (2.1)$$

— Équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + p \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}] = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

— Équation de la conservation d'énergie :

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho E \mathbf{V} + p \mathbf{V} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{q}] = 0 \quad (2.3)$$

où ρ désigne la masse volumique du fluide considéré, t le temps physique, \mathbf{V} le vecteur vitesse de composantes (u, v, w) dans le repère cartésien considéré, p la pression, $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses (\mathbf{I} est le tenseur identité), E l'énergie totale spécifique et \mathbf{q} le vecteur flux de chaleur.

Ce système de lois de conservation peut également être réécrit en faisant apparaître les flux physiques convectifs et diffusifs associés à chacune des directions du repère cartésien considéré :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathcal{F}_c^{(x)} - \mathcal{F}_v^{(x)})}{\partial x} + \frac{\partial (\mathcal{F}_c^{(y)} - \mathcal{F}_v^{(y)})}{\partial y} + \frac{\partial (\mathcal{F}_c^{(z)} - \mathcal{F}_v^{(z)})}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

où le vecteur \mathbf{W} des variables conservatives et les (vecteurs) flux convectifs \mathcal{F}_c et diffusifs \mathcal{F}_d ont pour expressions respectives :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_c^{(x)} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho E u + p u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_c^{(y)} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho E v + p v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_c^{(z)} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho E w + p w \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_v^{(x)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_v^{(y)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_v^{(z)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z \end{pmatrix}.$$

On peut également faire apparaître dans l'expression des flux convectifs l'enthalpie totale spécifique H définie par $H = E + \frac{p}{\rho}$. Pour fermer le système d'équations de Navier-Stokes (2.4), il reste à préciser les équations d'état thermodynamique qui vont relier les variables d'état pression p , masse volumique ρ , température T et énergie interne e et les lois de comportement pour exprimer le flux de chaleur \mathbf{q} et le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}$.

2.1.2 Fermeture des équations de Navier-Stokes

Équations d'état thermodynamique

L'air est considéré comme un gaz calorifiquement parfait, dont les chaleurs spécifiques sont constantes et telles que leur rapport vaut $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4$, avec C_p la chaleur spécifique à pression constante et C_v la chaleur spécifique à volume constant. La relation entre pression p , masse volumique ρ et température T est décrite par l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p = \rho r_{gaz} T \quad (2.5)$$

avec r_{gaz} la constante du gaz. Cette constante est telle que $r_{gaz} = C_p - C_v = \frac{R}{M}$ où R est la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz considéré. Dans le cadre des études réalisées par la suite, on adoptera systématiquement la valeur $r_{gaz} = 287.04 m^2 s^{-2} K^{-1}$.

Par ailleurs, l'énergie interne spécifique e (telle que $E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$) et l'enthalpie spécifique h (telle que $h = e + p/\rho$) sont telles que :

$$\begin{aligned} e &= C_v T \\ h &= C_p T \end{aligned} \quad (2.6)$$

Lois de comportement

- Tenseur des contraintes visqueuses -

L'air est un fluide newtonien, tel donc que le tenseur des contraintes visqueuses est lié par une relation linéaire au tenseur des déformations $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + [\nabla\mathbf{V}]^t)$:

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \operatorname{div}[\mathbf{V}]\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.7)$$

où μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide et λ le second coefficient de viscosité du fluide. L'hypothèse de Stokes permet d'établir la relation $3\lambda + 2\mu = 0$ de sorte que la relation (2.7) devient finalement :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{3} \operatorname{div}[\mathbf{V}]\mathbf{I} \right) \quad (2.8)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}$, est entièrement caractérisé une fois précisée la variation de la viscosité dynamique du fluide en fonction de la température ; la loi de Sutherland est utilisée pour décrire $\mu(T)$:

$$\mu(T) = \mu_{ref} \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{ref} + S}{T + S} \quad (2.9)$$

où les valeurs usuelles des trois constantes pour l'air sont utilisées : $\mu_{ref} = 1.716 \times 10^{-5} kg/m.s$, $T_{ref} = 273.11 K$ et $S = 110.56 K$.

- Vecteur flux de chaleur -

Le flux de chaleur \mathbf{q} est relié à la température T par la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T \quad (2.10)$$

avec κ la conductivité thermique du fluide et ∇ l'opérateur gradient. En introduisant le nombre de Prandtl, $P_r = \frac{\mu C_p}{\kappa}$, la relation (2.10) peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{q} = -\frac{\mu C_p}{P_r} \nabla T \quad (2.11)$$

avec le nombre de Prandtl P_r supposé constant et égal à $P_r = 0.72$ pour l'air.

On dispose donc d'un système d'équations (2.4) entièrement fermé dont les inconnues sont soit les variables conservatives, composantes du vecteur \mathbf{W} , soit les variables primitives masse volumique ρ , pression p , composantes u, v, w de la vitesse, les autres quantités (température, énergie interne, enthalpie, ...) pouvant être déduites de ces variables.

2.1.3 Autres systèmes d'intérêt

Équations d'Euler

Les équations d'Euler sont déduites de (2.4) en annulant les flux diffusifs \mathcal{F}_v dans les trois directions d'espace. Le système hyperbolique résultant s'écrit donc :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}_c^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}_c^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}_c^{(z)}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Une solution exacte (écoulement de Ringleb) du système des équations d'Euler sera considérée par la suite en 3.3.1 pour évaluer la précision des choix de discrétisation des seuls flux convectifs.

Équations dites Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)

Les simulations réalisées par la suite porteront également sur des écoulements turbulents décrits par les équations RANS. Du point de vue du système d'équations à résoudre, ceci signifie en pratique que le système (2.4) porte sur les champs moyens de l'écoulement (c.à.d. la moyenne statistique des réalisations de l'écoulement turbulent) et inclut un terme supplémentaire dans l'équation de quantité de mouvement et dans l'équation de l'énergie qui traduit les effets des fluctuations turbulentes sur le champ moyen. Les composantes du tenseur des contraintes turbulentes ou tenseur de Reynolds qui apparaît dans ce terme supplémentaire sont reliées au champ moyen via un modèle de turbulence. La mise en œuvre de ce modèle de turbulence suppose la résolution supplémentaire d'équations de transport pour des quantités turbulentes (énergie cinétique turbulente, taux de dissipation de cette énergie, viscosité turbulente, ...). Les équations moyennées associées à (2.4) et les équations de transport supplémentaires pour les quantités turbulentes sont formellement analogues aux équations de Navier-Stokes instantanées : elles prennent la forme d'un bilan de flux convectifs et de flux diffusifs et incluent un ou des termes-sources supplémentaires. Du point de vue de la résolution numérique (discrétisation spatiale, intégration temporelle), les équations RANS n'introduisent pas de difficultés conceptuelles spécifiques (à l'exception parfois du traitement des termes sources). Nous avons donc choisi de présenter par la suite les principes de discrétisation spatiale en maillage non structuré en les appliquant aux équations de Navier-Stokes instantanées (2.4). Enfin, seul le modèle à une équation de transport de Spalart-Allmaras [110] est utilisé dans nos travaux.

2.2 Principes de discrétisation spatiale en maillages quelconques

Nous rappelons dans cette section les principes généraux de discrétisation en espace adoptés dans la version non structurée du solveur elsA. Les ingrédients clés retenus pour la discrétisation seront évalués sur un problème modèle dans la section suivante.

2.2.1 Méthode des Volumes Finis

Formulation générale

Considérons une loi de conservation de la forme :

$$\frac{\partial \psi(t, \mathbf{X})}{\partial t} + \text{div}(\mathcal{F}(\psi(t, \mathbf{X}))) = 0 \quad (2.13)$$

qui s'applique en tout point d'un domaine fluide ou domaine de calcul \mathcal{D} . Cette loi de conservation peut prendre une forme vectorielle et correspondre typiquement aux équations de Navier-Stokes (2.4) ou aux équations d'Euler (2.12). Dans le cas des équations d'Euler, le flux physique \mathcal{F} ne dépend que de la variable conservative ψ (et se réduit à un flux de type convectif) alors que dans le cas des équations de Navier-Stokes le flux physique peut être décomposé en une partie convective et une partie diffusive, le flux diffusif dépendant à la fois de ψ et de $\nabla \psi$.

La méthode des Volumes Finis consiste à découper le domaine de calcul \mathcal{D} en un ensemble de cellules $\{c_i\}$ de telle sorte que $\bigcup_i c_i = \mathcal{D}$. Au lieu de chercher la solution de la loi de conservation sous forme

locale en tout point du domaine fluide, on va alors chercher à résoudre la forme intégrale de la loi de conservation :

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \psi(t, \mathbf{X})}{\partial t} d\Omega + \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathcal{F}(\psi(t, \mathbf{X}))) d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

où Ω désigne le volume de contrôle auquel s'applique la loi de conservation. On choisit pour volume de contrôle Ω chacune des cellules c_i du maillage de \mathcal{D} et on utilise le théorème de *Green-Ostrogradski* pour transformer l'intégrale volumique de la divergence du flux physique en intégrale surfacique :

$$\iiint_{c_i} \frac{\partial \psi(t, \mathbf{X})}{\partial t} d\Omega + \sum_{f \in F_{c_i}} \iint_f \mathcal{F}(\psi(t, \mathbf{X})) \cdot \mathbf{n}_f dS = 0 \quad (2.15)$$

avec F_{c_i} l'ensemble des faces de la cellule c_i et \mathbf{n}_f le vecteur unitaire normal à la face f (supposée plane en $3D$ et réduite à un segment de droite en $2D$) orienté vers l'extérieur de la cellule c_i . L'hypothèse de cellules indéformables permet de réécrire la loi de bilan sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{c_i} \psi(t, \mathbf{X}) d\Omega + \sum_{f \in F_{c_i}} \iint_f \mathcal{F}(\psi(t, \mathbf{X})) \cdot \mathbf{n}_f dS = 0 \quad (2.16)$$

On introduit à ce stade la valeur moyenne de ψ sur la cellule c_i , notée $\overline{\psi}_{c_i}$:

$$\overline{\psi}_{c_i}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \iiint_{\Omega_{c_i}} \psi(t, \mathbf{X}) d\Omega \quad (2.17)$$

où $|\Omega_{c_i}|$ désigne le volume de la cellule c_i en $3D$ et sa surface en $2D$.

La loi de conservation prend donc la forme :

$$\frac{d\overline{\psi}_{c_i}(t)}{dt} = - \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in F_{c_i}} \iint_f \mathcal{F}(\psi(t, \mathbf{X})) \cdot \mathbf{n}_f dS \quad (2.18)$$

L'évolution des quantités inconnues $\overline{\psi}_{c_i}(t)$ dans chaque cellule du maillage pourra être calculée dès lors que le bilan de flux physiques dans le membre de droite de (2.18) peut être exprimé en fonction des états moyens dans la cellule courante c_i et dans les cellules voisines de celle-ci. Avant de passer à cette étape d'approximation des flux physiques, on procède à l'évaluation de l'intégrale surfacique au niveau de chaque face de la cellule de contrôle grâce à une formule de quadrature de Gauss qui permet de restituer exactement un polynôme d'ordre $2n^G - 1$ avec n^G le nombre de points de Gauss utilisés pour approcher l'intégrale de surface :

$$\frac{d\overline{\psi}_{c_i}(t)}{dt} = - \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in F_{c_i}} \sum_{k=1}^{n^G} \omega_{f,k} \mathcal{F}(\overline{\psi}, \mathbf{X}_{\mathbf{G}_{f,k}}) \cdot \mathbf{n}_f |\Sigma_f| \quad (2.19)$$

où $\mathbf{X}_{\mathbf{G}_{f,k}}$ représente le vecteur position du k ième point de Gauss de la face f et $\omega_{f,k}$ le poids associé au k ième point de Gauss de la face f pour la formule de quadrature utilisée. On note $|\Sigma_f|$ la surface de la face f (il s'agit de la longueur de cette face pour une formulation $2D$). On a également fait apparaître dans (2.19) le fait que le flux physique \mathcal{F} au niveau d'une face du volume de contrôle était estimé en faisant appel aux valeurs moyennes $\overline{\psi}$ de ψ associées à chaque cellule du maillage.

On suppose dans un premier temps que la quantité ψ est reconstruite dans chaque cellule c_i en adoptant une reconstruction dite constante c'est-à-dire telle que :

$$\forall \mathbf{X} \in c_i, \psi(t, \mathbf{X}) = \overline{\psi}_{c_i}(t) \quad (2.20)$$

Lorsque le flux physique normal $\mathcal{F}(\overline{\psi}, \mathbf{X}_{\mathbf{G}_{f,k}}) \cdot \mathbf{n}_f$ doit être évalué en chaque point de Gauss k d'une face f de la cellule de contrôle, on observe que les valeurs prises par ψ dans chacune des deux cellules se partageant la face considérée sont généralement différentes. Par raison de conservation, le flux physique

normal est donc remplacé par un flux numérique \mathcal{H} calculé à partir des états pris par ψ au niveau du point de contrôle k de la face f , respectivement dans les cellules à gauche (état $\psi_{G_{f,k}}^L$ avec L pour Left / gauche) et à droite (état $\psi_{G_{f,k}}^R$ avec R pour Right / droite). La formulation Volumes Finis de la loi de conservation initiale (2.13) prend donc finalement la forme :

$$\frac{d\overline{\psi_{c_i}}(t)}{dt} = -\frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in F_{c_i}} \sum_{k=1}^{n_G} \omega_{f,k} \mathcal{H}(\psi_{G_{f,k}}^L, \psi_{G_{f,k}}^R) |\Sigma_f| \quad (2.21)$$

Les ingrédients qui restent à préciser sont donc :

- la reconstruction adoptée au niveau d'une cellule de contrôle pour obtenir les états de part et d'autre de la face au niveau de chaque point de Gauss soit $\psi_{G_{f,k}}^L$ et $\psi_{G_{f,k}}^R$.
- la formule de quadrature retenue, qui définit les poids $\omega_{f,k}$ et les points de Gauss $\mathbf{G}_{f,k}$.
- l'expression du flux numérique \mathcal{H} approchant le flux physique normal $\mathcal{F} \cdot \mathbf{n}_f$.

Dans le cas d'une reconstruction dite constante, on a simplement $\psi_{G_{f,k}}^L = \overline{\psi_{c_i}}$ tandis que $\psi_{G_{f,k}}^R = \overline{\psi_{c_i^f}}$ où c_i^f est la cellule qui partage la face f avec la cellule c_i . On peut également adopter une reconstruction dite linéaire, qui décrit ψ dans chaque cellule par un polynôme de degré un en la position dans la cellule ou encore quadratique, qui décrit donc ψ dans chaque cellule par un polynôme de degré deux. La formule de quadrature adoptée est fonction de cette stratégie de reconstruction. Ainsi, pour une reconstruction constante ou une reconstruction linéaire, le choix de formule de quadrature cohérent est une simple formule de point milieu puisque celle-ci permet, avec un seul point de Gauss par face, d'intégrer de façon exacte les polynômes de degré un utilisés pour la reconstruction linéaire (et *a fortiori* de degré zéro utilisés pour la reconstruction constante). En revanche, si une reconstruction quadratique est adoptée, il est indispensable d'élever l'ordre de la formule de quadrature afin que l'étape d'intégration ne dégrade pas la précision gagnée lors de l'étape de reconstruction (voir notamment les travaux de Delanaye [36] consacrés à la mise en œuvre de schémas Volumes Finis à reconstruction quadratique sur des maillages non structurés ou ceux de Haider [53] ou encore les travaux récents de Maugars [79] consacrés à des méthodes Volumes Finis d'ordre élevé en maillages non coïncidents).

Dans nos travaux dont l'enjeu est la mise en œuvre d'une stratégie hybride, nous nous limiterons à adopter une reconstruction constante ou linéaire. Comme cela sera précisé par la suite, à la fin du chapitre 3 puis dans l'ensemble du chapitre 4, l'utilisation d'une stratégie hybride coïncidente, c'est-à-dire telle que les raccords entre blocs structurés et non structurés sont coïncidents, fait payer sa simplicité de mise en œuvre par des déformations de maillage dans les zones de raccord qui conduisent à des problèmes de robustesse pour le solveur hybride. Nous avons donc choisi par la suite de concentrer nos efforts sur la résolution de ces problèmes de robustesse, en nous limitant au mieux à une reconstruction linéaire. Nous adopterons donc de façon systématique une formule de quadrature à un seul point de Gauss par face, ce point de quadrature étant le centre de la face (formule de quadrature dite "du point milieu"). Par conséquent, la relation générale (2.21) peut être simplifiée en :

$$\frac{d\overline{\psi_{c_i}}(t)}{dt} = -\frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in F_{c_i}} \mathcal{H}(\psi_F^L, \psi_F^R) |\Sigma_f| \quad (2.22)$$

où les quantités ψ_F^L et ψ_F^R désignent les états reconstruits à l'ordre zéro (reconstruction constante) ou un (reconstruction linéaire) au centre F de chaque face f de la cellule de contrôle c_i . L'expression (2.22) permet d'expliquer la stratégie dite "basée sur les faces" qui est appliquée lors de la mise en œuvre du solveur non structuré. Plutôt que de balayer les centres des cellules du maillage et de calculer les flux numériques associés à chaque face de la cellule courante, puis de les sommer pour obtenir le bilan de flux du membre de droite de (2.22), il est plus efficace de parcourir le maillage non structuré en balayant les faces de l'ensemble des cellules, de calculer le flux numérique au niveau de chaque face et d'affecter ce flux, avec le signe ad hoc compte tenu de l'orientation de la normale à la face, au bilan de flux associé à chacune des cellules se partageant la face courante. À l'issue de ce balayage sur les faces, les bilans de flux numérique sont complétés dans chacune des cellules et on peut alors

incrémenter l'état moyen de chaque cellule via la discrétisation en temps de (2.22). Pour compléter la description du solveur non structuré, il nous reste à préciser désormais les flux numériques adoptés et le détail de la stratégie de reconstruction linéaire qui permet de calculer ψ_F^L et ψ_F^R à partir de l'état moyen dans les cellules de part et d'autre de la face de centre F et de l'état moyen dans des cellules voisines des deux cellules se partageant cette face - la stratégie de reconstruction constante étant simplement définie par (2.20).

Application aux équations de Navier-Stokes

En comparant la forme différentielle ou locale de la loi de conservation générale (2.13) et la forme locale des équations de Navier-Stokes (2.4), on peut déduire de (2.22) l'expression suivante du schéma d'approximation Volumes Finis, en maillage quelconque, des équations de Navier-Stokes :

$$\frac{d\overline{\psi_{c_i}}(t)}{dt} = -\frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in F_{c_i}} \left[\mathcal{H}_c(\psi_F^L, \psi_F^R) - \mathcal{H}_v(\psi_F^L, \psi_F^R) \right] |\Sigma_f|$$

Dans cette expression, la quantité \mathcal{H}_c désigne le flux numérique dit convectif qui approche le flux physique convectif normal à la face f de la cellule de contrôle soit $\mathcal{F}_c \cdot \mathbf{n}_f$ avec les composantes de \mathcal{F}_c définies dans la section 2.1.1, soit :

$$\mathcal{F}_c \cdot \mathbf{n}_f = \mathcal{F}_c^\perp = \begin{pmatrix} \rho V_\perp \\ \rho u V_\perp + p (n_f)_x \\ \rho v V_\perp + p (n_f)_y \\ \rho w V_\perp + p (n_f)_z \\ \rho H V_\perp \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

avec $V_\perp = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_f$ la vitesse normale à la face f et $H = E + p/\rho$ l'enthalpie totale spécifique. Le flux normal convectif ne dépend donc que des composantes du vecteur ψ défini comme $\psi = \mathbf{W}$ le vecteur des variables conservatives défini dans la section 2.1.1 :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Le flux numérique convectif \mathcal{H}_c approchant ce flux physique convectif normal \mathcal{F}_c^\perp au niveau d'une face de la cellule de contrôle est donc calculé en faisant appel aux états W_F^L et W_F^R reconstruits de part et d'autre du centre F de la face f .

Le flux diffusif normal à la face f de la cellule de contrôle, $\mathcal{F}_v \cdot \mathbf{n}_f$, prend la forme suivante compte tenu de l'expression des composantes de \mathcal{F}_v fournies dans la section 2.1.1 :

$$\mathcal{F}_v \cdot \mathbf{n}_f = \mathcal{F}_v^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ (\tau \cdot \mathbf{n}_f)_x \\ (\tau \cdot \mathbf{n}_f)_y \\ (\tau \cdot \mathbf{n}_f)_z \\ u(\tau \cdot \mathbf{n}_f)_x + v(\tau \cdot \mathbf{n}_f)_y + w(\tau \cdot \mathbf{n}_f)_z + \kappa \nabla T \cdot \mathbf{n}_f \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

On a montré dans la section 2.1.2 que le tenseur τ des contraintes visqueuses dépendait des dérivées spatiales des composantes u , v , w de la vitesse du fluide \mathbf{V} . Par conséquent l'expression (2.25) définit un flux diffusif normal à la face \mathcal{F}_v^\perp qui dépend à la fois du vecteur des variables conservatives donc de \mathbf{W} , au travers des composantes de la vitesse présentes dans la dernière composante de ce flux diffusif (correspondant à la puissance des contraintes de frottement dans le bilan d'énergie), mais dépend également du gradient des vitesses au travers de la contrainte de frottement présente dans l'équation de bilan de quantité de mouvement et du gradient de température au travers du flux de chaleur présent

dans le bilan d'énergie. Si on définit le vecteur \mathbf{U} des variables dites primitives comme :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \\ T \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

on a donc de façon naturelle le flux diffusif ou flux visqueux normal qui s'exprime en fonction des composantes de \mathbf{U} et en fonction du gradient de chacune des composantes de ce vecteur soit $\nabla\mathbf{U}$. On en déduit donc que le flux numérique visqueux ou flux numérique diffusif \mathcal{H}_v qui approche ce flux physique visqueux normal à la face dépend lui-aussi d'une estimation de \mathbf{U} au niveau du centre de la face ainsi que d'une estimation de $\nabla\mathbf{U}$ au niveau du centre de la face. Un choix simple valide consiste à retenir $\mathcal{H}_v = \mathcal{F}_v^\perp$ et c'est celui qui est adopté ici. On retient donc pour approximation Volumes Finis des équations de Navier-Stokes l'expression suivante :

$$\frac{d\overline{\psi}_{c_i}(t)}{dt} = -\frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in F_{c_i}} \left[\mathcal{H}_c(\mathbf{W}_F^L, \mathbf{W}_F^R) - \mathcal{F}_v^\perp(\mathbf{U}_F, (\nabla\mathbf{U})_F) \right] |\Sigma_f| \quad (2.27)$$

ou encore, en reconstruisant les variables primitives plutôt que les variables conservatives :

$$\frac{d\overline{\psi}_{c_i}(t)}{dt} = -\frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in F_{c_i}} \left[\mathcal{H}_c(\mathbf{U}_F^L, \mathbf{U}_F^R) - \mathcal{F}_v^\perp(\mathbf{U}_F, (\nabla\mathbf{U})_F) \right] |\Sigma_f| \quad (2.28)$$

Le schéma de résolution Volumes Finis des équations de Navier-Stokes, à l'ordre un ou deux, en maillage non structuré quelconque, sera donc entièrement caractérisé une fois précisés les ingrédients suivants :

- expression du flux numérique \mathcal{H}_c approchant le flux physique convectif \mathcal{F}_c^\perp
- reconstruction des variables primitives \mathbf{U} de part et d'autre du centre F de la face f pour le calcul du flux convectif
- estimation de \mathbf{U} et de $\nabla\mathbf{U}$ au niveau du centre F de la face f pour l'estimation du flux diffusif.

Les choix initialement disponibles dans le solveur non structuré d'elsA-H au démarrage de cette thèse sont détaillés dans les sections qui suivent.

2.2.2 Flux numériques convectifs

Les flux numériques convectifs définissent le schéma de discrétisation mis en œuvre pour résoudre les équations de Navier-Stokes. On distingue classiquement deux grandes familles de flux numériques ou de schémas : les schémas centrés et les schémas décentrés (dits aussi "upwind" dans la littérature anglo-saxonne). Ces deux types de schémas apportent deux réponses différentes à la même problématique centrale qui est de discrétiser le flux physique convectif en introduisant un niveau de dissipation numérique suffisant pour assurer la stabilité de la résolution discrète mais également suffisamment faible pour ne pas dégrader la précision de l'approximation discrète. Dans le cas des schémas centrés, cette dissipation numérique est introduite explicitement sous la forme d'une viscosité dite artificielle tandis que dans le cas des schémas décentrés la dissipation numérique est introduite de façon plus naturelle par le biais du décentrement de la discrétisation en fonction du sens de propagation des ondes. Il existe de nombreux schémas centrés et décentrés pour la résolution des équations d'Euler ou de Navier-Stokes ; nous nous limiterons à présenter ici deux schémas "emblématiques", tous les deux disponibles dans les solveurs structurés et non structurés constitutifs de elsA-H : le schéma centré de Jameson et le schéma décentré de Roe.

2.2.2.1 Schéma centré de Jameson

L'approximation centrée, au niveau du centre F de la face f du flux convectif normal \mathcal{F}_c^\perp donné par (2.23) s'écrit simplement comme une moyenne des flux convectifs calculés en utilisant les états au

centre des cellules partageant la face f :

$$(\mathcal{H}_c)_F = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{F}_c^\perp)_I + (\mathcal{F}_c^\perp)_{I^f} \right] \quad (2.29)$$

avec I le centre de la cellule c_i et I^f le centre de la cellule c_i^f qui partage la face f avec la cellule c_i , comme illustré sur la figure 2.1 dans un cas choisi volontairement simple où les cellules (2D) sont supposées quadrangulaires.

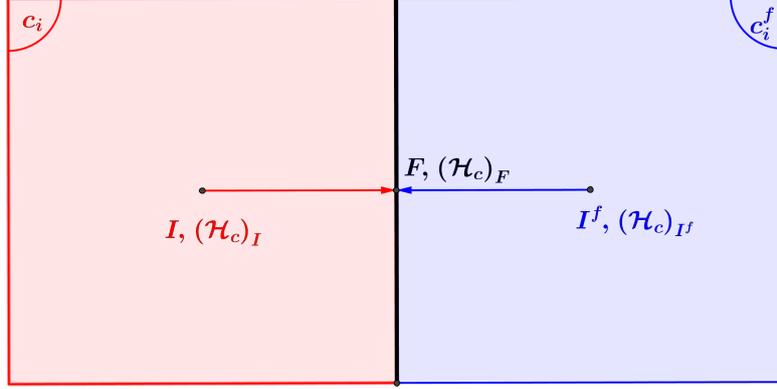


Figure 2.1 – Illustration des notations utilisées pour le schéma de Jameson

Lorsqu'il est couplé à une intégration en temps de type Euler explicite le schéma dit centré simple défini par le flux numérique (2.29) est inconditionnellement instable. Ce schéma peut être stabilisé par une intégration en temps implicite par exemple mais pour pouvoir être utilisé en pratique il doit nécessairement être complété par une dissipation numérique, d'ordre quatre, destinée à éviter les phénomènes d'oscillation maille à maille. De plus, les applications visées dans le contexte applicatif de notre travail pouvant conduire à des écoulements contenant des ondes de choc, la dissipation numérique d'ordre quatre appliquée dans un écoulement régulier doit être complétée par une dissipation numérique d'ordre deux activée au niveau des discontinuités présentes dans l'écoulement. Jameson, Schmidt et Turkel (JST) ont ainsi proposé dans [66] ce type de viscosité artificielle dans le contexte de schémas en maillages structurés. Le schéma de Jameson ou schéma JST a ensuite été étendu aux maillages non structurés composés de triangles réguliers dans [65]. Différentes variantes des termes de dissipation ont été proposées au fil du temps et on peut en trouver une synthèse dans [16]. Pour notre part, nous reprenons ici la description de ce schéma tel qu'implémenté dans le solveur non structuré de elsA-H (voir également [34]).

Le flux numérique associé au schéma JST s'exprime ainsi comme :

$$(\mathcal{H}_c)_F = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{F}_c^\perp)_I + (\mathcal{F}_c^\perp)_{I^f} \right] - \epsilon_f^{(2)} \lambda_f (\mathbf{W}_I - \mathbf{W}_{I^f}) + \epsilon_f^{(4)} \lambda_f (\delta^2 \mathbf{W}_I - \delta^2 \mathbf{W}_{I^f}) \quad (2.30)$$

L'opérateur δ^2 est introduit de façon à généraliser en non structuré le calcul des différences d'ordre deux qui interviennent dans la définition de la dissipation numérique d'ordre élevé active dans les zones régulières de l'écoulement. On calcule ainsi au centre I de la cellule c_i :

$$\delta^2 \mathbf{W}_I = \sum_{f \in F_{c_i}} (\mathbf{W}_{I^f} - \mathbf{W}_I) \quad (2.31)$$

Dans un contexte Volumes Finis, cette somme sur les faces f de la cellule c_i (formant l'ensemble de faces F_{c_i}) de différences entre les valeurs de W aux centres I et I^f des cellules de part et d'autre d'une face f est bien assimilable à une différence d'ordre deux. Le scalaire λ_f est le rayon spectral de la matrice jacobienne associée au flux convectif normal \mathcal{F}_c^\perp et vaut donc :

$$\lambda_f = |(V_\perp)_F| + a_F \quad (2.32)$$

où on rappelle que V_\perp est la vitesse normale à la face f ; a désigne la vitesse du son. Les deux quantités sont estimées au niveau du centre F de la face f comme des moyennes de ces mêmes quantités calculées aux centres I et I^f des cellules se partageant la face f . Enfin, les coefficients de dissipation $\epsilon_f^{(2)}$ et $\epsilon_f^{(4)}$ sont calculés au niveau de la face f via les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \epsilon_f^{(2)} &= k_2 \max(\sigma_{c_i}, \sigma_{c_i^f}) \\ \epsilon_f^{(4)} &= k_4 \max(1 - \epsilon_f^{(2)}, 0) \end{cases} \quad (2.33)$$

avec k_2 et k_4 des coefficients paramétrables mais généralement fixés aux valeurs suivantes $k_2 = \frac{1}{2}$ et $k_4 = \frac{3}{256}$. Le senseur de pression σ_{c_i} est calculé pour chaque cellule par l'expression :

$$\sigma_{c_i} = \frac{|\delta^2 p_I|}{\sum_{f \in F_{c_i}} (p_{I^f} + p_I)} \quad (2.34)$$

où on a appliqué à la pression p l'opérateur défini par (2.31) afin de reproduire dans un maillage non structuré l'opérateur de différence seconde utilisé pour définir ce senseur de choc en maillage structuré. On observe en analysant (2.33) que $\epsilon_f^{(2)}$ reste nul dans les zones régulières de l'écoulement avec par conséquent $\epsilon_f^{(4)} = k_4$ soit une dissipation numérique d'ordre élevé, calibrée pour éviter l'apparition d'oscillations maille à maille dans la solution discrète du schéma centré. Inversement, dans les zones où des chocs sont présents, $\epsilon_f^{(2)}$ devient supérieur à un de sorte que la dissipation d'ordre élevé s'annule pour ne laisser activée que la dissipation nécessaire à la capture de choc.

Le schéma de Jameson qui vient d'être décrit est d'ordre deux en espace, en maillage cartésien du moins. Cette précision est assurée par le fait que la discrétisation centrée simple (2.29), qui assure la consistance du schéma, est d'ordre deux en maillage cartésien et que la viscosité artificielle ajoutée au schéma, dans les zones régulières de l'écoulement où la notion d'ordre de précision a bien un sens, est d'ordre supérieur à deux. En pratique, dans des maillages non structurés quelconques (quadrangulaires déformés, triangulaires), la formule (2.29) n'est pas suffisante pour assurer une discrétisation d'ordre deux. Ce point ne sera pas davantage détaillé ici dans la mesure où le schéma de Jameson ne sera pas utilisé par la suite pour les simulations hybrides présentées dans ce mémoire. En revanche, la version structurée de ce schéma sera mise en œuvre au chapitre 5 dans le cadre d'une approche chimère, qui servira de point de comparaison aux simulations hybrides de configurations industrielles d'écoulements en turbomachines que nous réaliserons grâce à la version du solveur elsA-H développé dans cette thèse.

2.2.2.2 Schéma décentré de Roe

Le schéma de Roe appartient à la classe des schémas dits de type solveurs de Riemann approchés car ils peuvent être interprétés dans un cadre Volumes Finis en considérant la résolution approchée d'un problème de Riemann au niveau de chaque face d'une cellule de contrôle, cette face séparant deux états constants dans chacune des cellules à gauche et à droite d'elle-même. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage de Toro sur les solveurs de Riemann [112] pour des détails sur les principes de construction du schéma de Roe initialement proposé en 1981. Nous nous limitons pour notre part à rappeler les principaux ingrédients du flux numérique définissant ce schéma. Le flux numérique du schéma de Roe s'écrit ainsi, au niveau du centre F de la face f de la cellule de contrôle :

$$(\mathcal{H}_c)_F = \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}_c^\perp(\mathbf{W}_F^L) + \mathcal{F}_c^\perp(\mathbf{W}_F^R) - \left| (\tilde{J}_c^\perp)_F \right| (\mathbf{W}_F^R - \mathbf{W}_F^L) \right] \quad (2.35)$$

avec \tilde{J}_c^\perp la matrice de dissipation calculée à partir de la matrice jacobienne J_c^\perp du flux physique convectif normal à la face, soit $J_c^\perp = \frac{d\mathcal{F}_c^\perp}{dW}$. Le système des équations d'Euler étant hyperbolique, la matrice jacobienne J_c^\perp est diagonalisable à valeurs propres réelles (le rayon spectral de cette matrice,

donné par (2.32) a été précédemment utilisé pour dimensionner le niveau de viscosité artificielle à introduire dans le schéma de Jameson) soit :

$$J_c^\perp = P_c^{-1} \Lambda P_c$$

avec Λ la matrice diagonale des valeurs propres de la matrice jacobienne et P_c, P_c^{-1} les matrices de passage ou de diagonalisation formées à partir des vecteurs propres du système des équations d'Euler. La valeur absolue de la matrice jacobienne est donc définie par :

$$|J_c^\perp| = P_c^{-1} |\Lambda| P_c$$

Si cette matrice est maintenant évaluée au niveau du centre F de la face f , on peut écrire :

$$|J_c^\perp|_F = P_c^{-1} (\mathbf{W}_F) |\Lambda(\mathbf{W}_F)| P_c(\mathbf{W}_F)$$

La matrice de dissipation $(\tilde{J}_c^\perp)_F$ est calculée en utilisant pour l'état au centre de la face un état moyen particulier, dit état moyen de Roe et noté par la suite $\tilde{\mathbf{W}}_F$. On a donc :

$$(\tilde{J}_c^\perp)_F = P_c^{-1} (\tilde{\mathbf{W}}_F) \Lambda (\tilde{\mathbf{W}}_F) P_c (\tilde{\mathbf{W}}_F)$$

Cet état moyen de Roe permet d'assurer l'identité :

$$(\mathcal{F}_c^\perp)_F^R - (\mathcal{F}_c^\perp)_F^L = (\tilde{J}_c^\perp)_F (\mathbf{W}_F^R - \mathbf{W}_F^L) \quad (2.36)$$

et de garantir ainsi la satisfaction, au niveau discret, des relations de saut de Rankine-Hugoniot. On peut aussi utiliser cette identité pour écrire de façon alternative le flux numérique (2.35) du schéma de Roe sous la forme :

$$(\mathcal{H}_c)_F = \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}_c^\perp(\mathbf{W}_F^L) + \mathcal{F}_c^\perp(\mathbf{W}_F^R) - \text{sgn} \left((\tilde{J}_c^\perp)_F \right) \left(\mathcal{F}_c^\perp(\mathbf{W}_F^R) - \mathcal{F}_c^\perp(\mathbf{W}_F^L) \right) \right] \quad (2.37)$$

On voit ainsi clairement apparaître le décentrement introduit par la dissipation matricielle du schéma : si par exemple l'écoulement est localement supersonique de la cellule à gauche de la face f vers la cellule à droite de la face f , alors la matrice $\text{sgn} \left((\tilde{J}_c^\perp)_F \right)$ se réduit à la matrice identité et le flux numérique (2.37) devient le flux physique convectif calculé en utilisant uniquement l'état L à gauche de la face.

L'état moyen de Roe au niveau du centre de la face est calculé comme une moyenne arithmétique pondérée des états à gauche et à droite de la face, respectivement $\mathbf{W}_F^L, \mathbf{W}_F^R$ pour les variables conservatives et $\mathbf{U}_F^L, \mathbf{U}_F^R$ pour les variables primitives. Les coefficients de pondération, qui permettent d'assurer (2.36), sont construits à partir des racines carrées des masses volumiques à gauche et à droite de la face (cf. par exemple [112] pour le détail des formules).

Pour être totalement opérationnel dans le cas général, le schéma de Roe doit inclure une correction d'entropie proposée par Harten dès 1983 et qui évite la formation non-physique d'un choc de détente dans la solution discrète du schéma de Roe lorsque les valeurs propres ou vitesses d'ondes deviennent proches de zéro. Les valeurs propres λ_k utilisées dans la matrice Λ sont ainsi corrigées comme suit :

$$|\lambda_k|_{Harten} = \begin{cases} |\lambda_k| & \text{si } |\lambda_k| > \text{tol}_{Harten} \\ 0.5 \left(\frac{\lambda_k^2}{\text{tol}_{Harten}} + \text{tol}_{Harten} \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.38)$$

où le paramètre (constant) tol_{Harten} permet de contrôler la dissipation supplémentaire apportée par cette correction d'entropie de Harten. Réduire au maximum la valeur de tol_{Harten} permet de limiter la dissipation supplémentaire introduite par la correction et de préserver ainsi la précision de la solution

discrète du schéma de Roe.

Lorsque le flux numérique (2.35) est mis en œuvre dans la formulation Volumes Finis (2.27) en utilisant pour $\mathbf{W}_F^{L/R}$ les états constants dans les cellules à gauche et à droite de l'interface, on obtient un schéma décentré d'ordre un en espace seulement. Pour atteindre une précision d'ordre deux en espace, on fait donc appel à une stratégie dite de reconstruction des états physiques (variables primitives ou conservatives) au niveau du centre F de la face f qui modifie le calcul des états $\mathbf{W}_F^{L/R}$ ou $\mathbf{U}_F^{L/R}$ à partir des états aux centres des cellules voisines de l'interface f sans modifier la forme (2.35) du flux numérique.

2.2.3 Stratégie de reconstruction

Principes généraux

Les travaux fondateurs sur la reconstruction des états à gauche et à droite de la face sur laquelle est calculé le flux numérique sont dus à Van Leer [121], dans le contexte de simulations en maillages structurés. Les travaux pionniers sur la reconstruction en maillages non structurés sont dus à Barth et Jespersen [10]. Suivant Barth et Jespersen, on calcule les variables primitives au niveau de la face, respectivement à gauche et à droite, en effectuant un développement de Taylor autour du centre de la cellule, respectivement à gauche et à droite de la face considérée. En reprenant toujours les notations de la figure 2.1, on écrit donc :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_F^L &= \mathbf{U}_I + \mathbf{I}\mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_F^R &= \mathbf{U}_{I^f} + \mathbf{I}^f \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{U}_{I^f} \end{cases} \quad (2.39)$$

où $\mathbf{I}\mathbf{F}$ désigne le vecteur connectant le centre I de la cellule à gauche de la face avec le milieu F de la face f et $\mathbf{I}^f \mathbf{F}$ désigne le vecteur connectant le centre I^f de la cellule à droite de la face avec ce même point milieu F . Les gradients de \mathbf{U} au centre des cellules à gauche et à droite de la face f doivent être estimés à l'ordre un pour assurer une reconstruction globalement d'ordre deux en espace. Il est naturellement possible de reconstruire, de façon alternative, les variables conservatives \mathbf{W} . Le choix des variables primitives se justifie en général par l'intérêt qu'il y a à reconstruire la pression p au niveau de la face, afin de pouvoir si nécessaire la limiter lorsqu'une version limitée de (2.39) est utilisée. Nous reviendrons en détail sur la question des limiteurs de pente à intégrer dans (2.39) lorsque nous aborderons la problématique d'amélioration de la robustesse du solveur hybride dans la section 4.2.

Le schéma de Roe avec reconstruction linéaire, précis à l'ordre deux en espace, est donc obtenu en insérant les états calculés à l'aide de (2.39) dans le flux numérique (2.35) :

$$(\mathcal{H}_c)_F = \frac{1}{2} \left[\mathcal{F}_c^\perp \left(\mathbf{U}_F^L \right) + \mathcal{F}_c^\perp \left(\mathbf{U}_F^R \right) - \left| \left(\tilde{\mathcal{J}}_c^\perp \right)_F \right| \left(\mathbf{W}_F^R - \mathbf{W}_F^L \right) \right] \quad (2.40)$$

où les composantes des vecteurs \mathbf{W}_F^L , \mathbf{W}_F^R sont calculées à partir des composantes des vecteurs \mathbf{U}_F^L , \mathbf{U}_F^R donnés par (2.39). Pour définir entièrement ce schéma de Roe d'ordre deux, il reste à préciser les modalités d'évaluation, à l'ordre un, des gradients au centre des cellules du maillage non structuré.

Estimation des gradients au centre des cellules

Le solveur non structuré d'elsA-H s'appuie sur un calcul des gradients au centre des cellules réalisé par la méthode de *Green-Gauss*. Avec cette méthode, le gradient au centre de la cellule est approché par le gradient moyen de la cellule. Pour une variable ψ donnée, le gradient au centre I de la cellule c_i de volume $|\Omega_{c_i}|$ vaut donc :

$$\nabla \psi_I = \overline{\nabla \psi}_{c_i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \iiint_{\Omega_{c_i}} \nabla \psi \, d\Omega \quad (2.41)$$

En utilisant le théorème de *Green-Ostrogradski*, la relation précédente devient :

$$\nabla \psi_I = \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \oint_{\Sigma_{c_i}} \psi \, d\Sigma \quad (2.42)$$

Cette expression est ensuite intégrée sur l'ensemble F_{c_i} des faces f de la cellule c_i :

$$\nabla\psi_I = \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in F_{c_i}} \psi_F \mathbf{n}_f |\Sigma_f| \quad (2.43)$$

avec ψ_F la valeur de ψ au centre F de la face f , $|\Sigma_f|$ la surface de la face f et \mathbf{n}_f le vecteur normal unitaire à la face f .

Dans le solveur elsA-H, la valeur ψ_F est simplement estimée par la moyenne arithmétique $\widetilde{\psi}_F$ des états de part et d'autre de la face f :

$$\psi_F \simeq \widetilde{\psi}_F = \frac{1}{2} (\psi_I + \psi_{I^f}) \quad (2.44)$$

de sorte que, après insertion dans (2.43), la formule finale du calcul de gradient au centre des cellules dans elsA-H prend la forme :

$$\nabla\psi_I = \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in F_{c_i}} \frac{1}{2} (\psi_I + \psi_{I^f}) \mathbf{n}_f |\Sigma_f| \quad (2.45)$$

Point d'intégration sur la face

Comme précédemment expliqué, l'utilisation d'une formule de quadrature de type point milieu pour approcher l'intégrale surfacique du flux (ou plus précisément de la densité de flux) au niveau de la face f est suffisante pour assurer une précision globale d'ordre deux du schéma de discrétisation en espace faisant appel à une reconstruction linéaire (2.39) de la solution dans chaque cellule du maillage. La formule du point milieu permet en effet une intégration exacte des polynômes de degré un en la position spatiale dans la cellule qui apparaissent dans les formules de reconstruction.

L'analyse des développements réalisés dans la version initiale du solveur elsA-H a permis d'identifier que la reconstruction effectivement réalisée au niveau de la face f consistait en fait à estimer les états à gauche et à droite non pas du point F milieu de la face mais à gauche et à droite du point M , milieu du segment reliant les centres I et I^f des cellules c_i et c_i^f se partageant la face f (voir la figure 2.2).

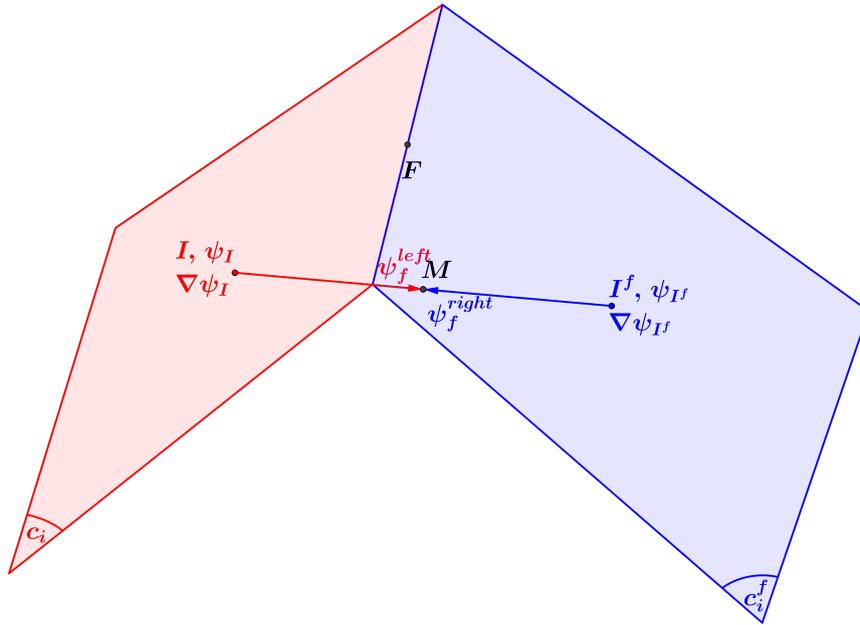


Figure 2.2 – Représentation d'une reconstruction à la face f réalisée en fait au point M , milieu du segment reliant les deux centres de cellules I et I^f se partageant une même face f de centre F (point théorique d'intégration).

Dans le cas très particulier d'un maillage cartésien uniforme les points M et F sont confondus (voir la figure 2.1) mais dans le cas général (voir par exemple la figure 2.2) ces points sont bien différents, avec M qui n'appartient même plus à la face F . La raison de cette approximation assez grossière trouve sans doute son origine dans les structures de données initialement disponibles pour caractériser les éléments géométriques des cellules. La conséquence pratique est que l'estimation des états au milieu F de la face f est en fait réalisée en écrivant :

$$\begin{cases} \psi_F^L &= \psi_I + \mathbf{IM} \cdot \nabla \psi_I \\ \psi_F^R &= \psi_{I^f} + \mathbf{I}^f \mathbf{M} \cdot \nabla \psi_{I^f} \end{cases} \quad (2.46)$$

ce qui introduit évidemment une erreur de discrétisation d'ordre un dans le calcul des états reconstruits à la face dès lors que le maillage n'est plus composé de cellules quadrangulaires régulières en 2D ou hexaédriques régulières en 3D.

2.2.4 Flux numériques visqueux

Comme indiqué précédemment dans l'expression du schéma (2.27) de résolution Volumes Finis des équations de Navier-Stokes, le flux numérique visqueux ou diffusif est systématiquement calculé dans elsA-H en faisant appel à une discrétisation purement centrée au niveau de la face f , soit :

$$(\mathcal{H}_v)_F = \mathcal{F}_v^\perp (\mathbf{U}_F, (\nabla \mathbf{U})_F)$$

où l'expression du flux physique visqueux normal à la face est donnée par (2.25) . Les composantes ψ du vecteur des variables primitives sont estimées au centre de la face comme une simple moyenne arithmétique des états aux centres des cellules de part et d'autre de la face (cf. (2.44)). Il reste à préciser les modalités d'évaluation du gradient des variables primitives au niveau du centre F de la face f .

Estimation des gradients au centre des faces

Afin d'estimer sur un maillage non structuré quelconque le gradient d'une variable ψ au centre F d'une face f séparant deux cellules c_i et c_i^f de centre respectif I et I^f , une méthode basée sur cinq points a été étendue du structuré au non structuré. Cette technique dénotée comme $5p$ s'appuie, dans cette extension aux maillages non structurés, sur les gradients calculés au centre des cellules par la formule de *Green-Gauss* (2.45). Le gradient calculé au centre F de la face f par la méthode $5p$ est une simple moyenne arithmétique des gradients calculés aux centres des cellules se partageant la face f :

$$\nabla \psi_F^{5p} = \frac{1}{2} (\nabla \psi_I + \nabla \psi_{I^f}) \quad (2.47)$$

Toutefois, pour éviter d'une part les problèmes d'apparition de modes d'erreur de type oscillation maille à maille qui peuvent être posés par cette formule et afin d'améliorer d'autre part la précision de l'estimation du gradient au centre de la face, cette méthode peut également bénéficier dans la version initiale du solveur elsA-H d'une correction selon la direction reliant les deux centres I et I^f des cellules c_i et c_i^f se partageant la face. Le gradient calculé par la méthode dite $5pcor$ s'écrit alors :

$$\nabla \psi_F^{5pcor} = \nabla \psi_F^{5p} - \left(\nabla \psi_F^{5p} \cdot \frac{\mathbf{II}^f}{\|\mathbf{II}^f\|} - \frac{\psi_{I^f} - \psi_I}{\|\mathbf{II}^f\|} \right) \cdot \frac{\mathbf{II}^f}{\|\mathbf{II}^f\|} \quad (2.48)$$

La composante sur la direction reliant les deux centres de cellules du gradient au centre de la face f calculée par la méthode $5p$ est ainsi remplacée par la pente prise par la variable ψ entre les deux centres de cellules I et I^f .

2.3 Évaluation des choix initiaux de discrétisation spatiale

Nous venons de passer en revue les principaux ingrédients de la discrétisation spatiale, théoriquement d'ordre deux, initialement disponible dans elsA-H. L'idée de la stratégie hybride est de faire communiquer ce solveur non structuré avec le solveur structuré bien éprouvé, et d'ordre deux, disponible par

ailleurs. Avant de décrire, dans la dernière section de ce chapitre, la stratégie mise en œuvre pour faire communiquer un bloc structuré et un bloc non structuré, nous voulons nous assurer par quelques tests préliminaires simples de la précision spatiale effectivement associée aux choix du solveur non structuré implémenté. Comme nous l'avons déjà laissé entendre, le choix d'une simple moyenne arithmétique telle que (2.44) pour le calcul du gradient au centre d'une cellule ou encore la reconstruction au point M milieu du segment joignant les centres des cellules partageant la face plutôt qu'au centre F de la face sont susceptibles d'impacter négativement la précision du solveur non structuré dès lors que les maillages mis en œuvre s'éloignent de simples maillages cartésiens - ce qui sera nécessairement le cas pour les applications industrielles visées dans cette thèse -.

Pour mettre en évidence les erreurs introduites, nous proposons une simple étude analytique en deux dimensions d'espace. Nous considérons la fonction trigonométrique régulière :

$$f(x, y) = \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \quad (2.49)$$

définies sur le domaine $(x, y) \in [0, 1]^2$ avec conditions de périodicité appliquées aux frontières du domaine de calcul pour s'assurer d'une étude basée uniquement sur l'analyse du point courant. Le domaine $[0, 1]^2$ est discrétisé en faisant appel à différents maillages, composés de triangles ou de quadrangles, qui peuvent être réguliers ou déformés, étirés. Des exemples de maillages représentatifs de ceux utilisés dans l'étude sont présentés sur les figures 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 et 2.8. Les valeurs exactes de la fonction et de ses dérivées sont naturellement connues, aux centres des cellules mais aussi des faces de chacune des cellules des maillages du domaine de définition de la fonction. L'étude proposée consiste donc à estimer ces valeurs de la fonction et des composantes de son gradient aux centres des cellules et des faces en faisant appel aux méthodes de discrétisation initialement disponibles dans elsA-H (formule de *Green-Gauss* (2.45), stratégie de reconstruction (2.46), ...). L'erreur commise par rapport à l'évaluation exacte de ces quantités peut alors être calculée et sa norme peut être tracée pour des calculs réalisés dans des maillages de raffinement croissant. Il est ainsi finalement possible d'établir l'ordre de précision effectif des choix de discrétisation disponibles dans le solveur non structuré d'elsA-H. La précision associée à la convergence en maillage pour des maillages quadrangulaires réguliers illustrés par 2.3 correspond à un idéal qui n'est que rarement, pour ne pas dire jamais, réalisé dans la pratique de simulation de configurations industrielles. Les déformations de maillage observées pour ces configurations, qui sont celles visées dans cette thèse, sont plus proches du maillage à base de triangles déformés illustré par 2.8.

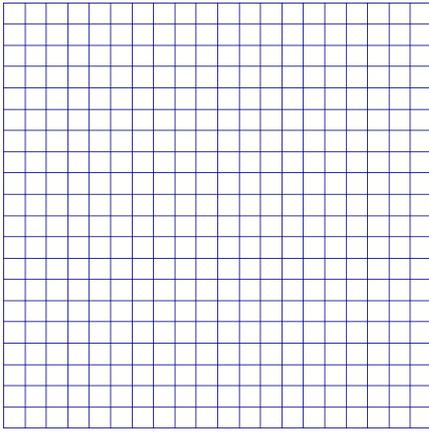


Figure 2.3 – Maillage composé de quadrangles réguliers

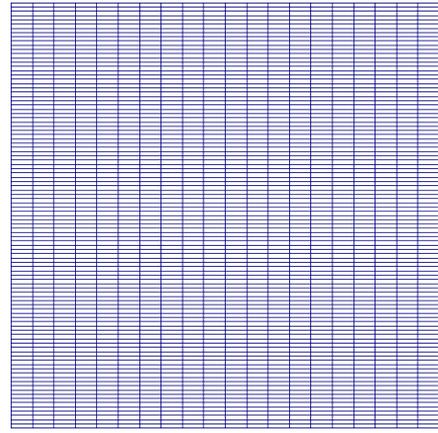


Figure 2.4 – Maillage composé de quadrangles étirés

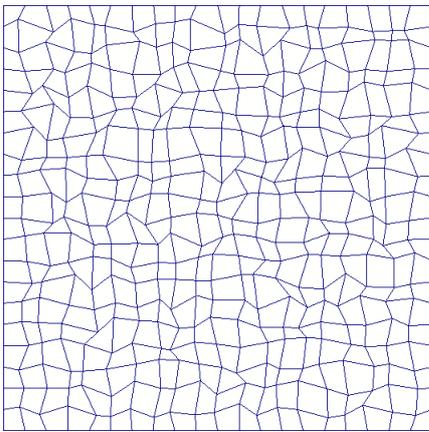


Figure 2.5 – Maillage composé de quadrangles déformés

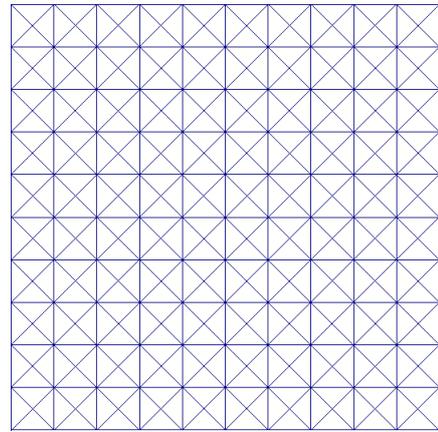


Figure 2.6 – Maillage composé de triangles réguliers

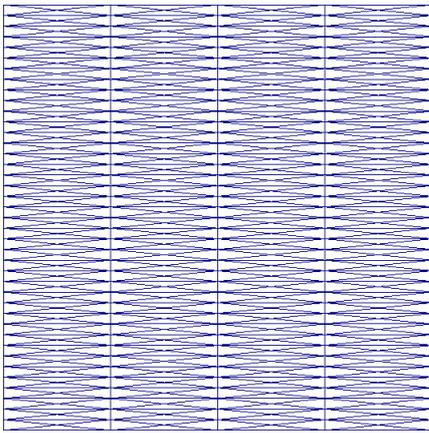


Figure 2.7 – Maillage composé de triangles étirés

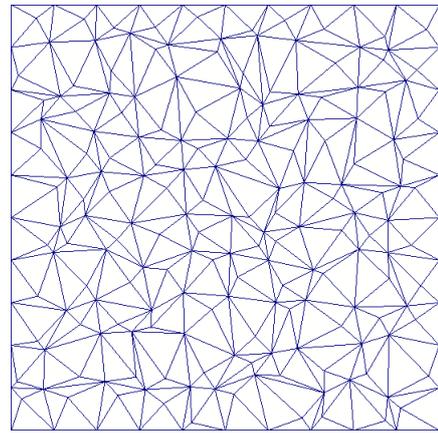


Figure 2.8 – Maillage composé de triangles déformés

2.3.1 Estimation des gradients au centre des cellules

2.3.1.1 Étude du comportement numérique

La figure 2.9 représente l'évolution, lors d'une convergence en maillage pour des maillages quadrangulaires (réguliers, étirés, déformés), de l'erreur en norme L_2 commise pour les gradients au centre des cellules lorsque la méthode de *Green-Gauss* définie par (2.45) est appliquée. On observe que la méthode donne satisfaction pour des maillages quadrangulaires réguliers et étirés, en produisant une

approximation du gradient qui est au moins d'ordre un (et même d'ordre deux), alors que sa précision chute à l'ordre zéro pour les maillages quadrangulaires déformés. Lorsque cette même approche (2.45) est appliquée sur les maillages triangulaires, réguliers, étirés ou déformés, on observe sur la figure 2.10 qu'elle ne permet dans aucun cas de fournir une approximation d'ordre un des gradients au centre des cellules triangulaires du maillage.

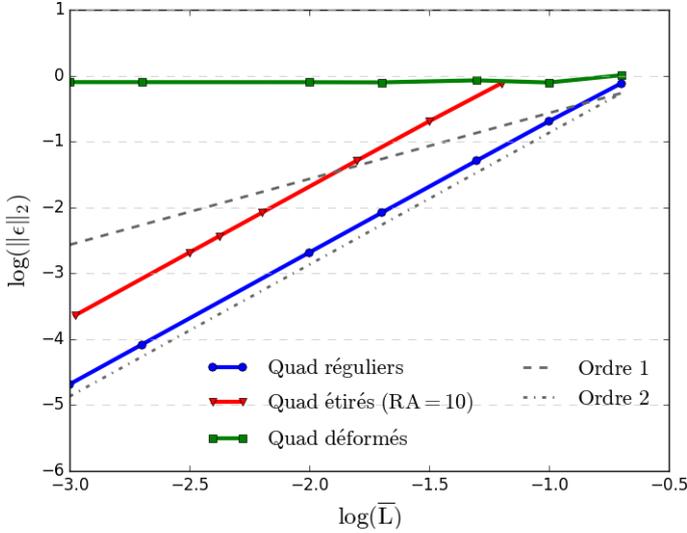


Figure 2.9 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode de GG sur maillages quadrangulaires

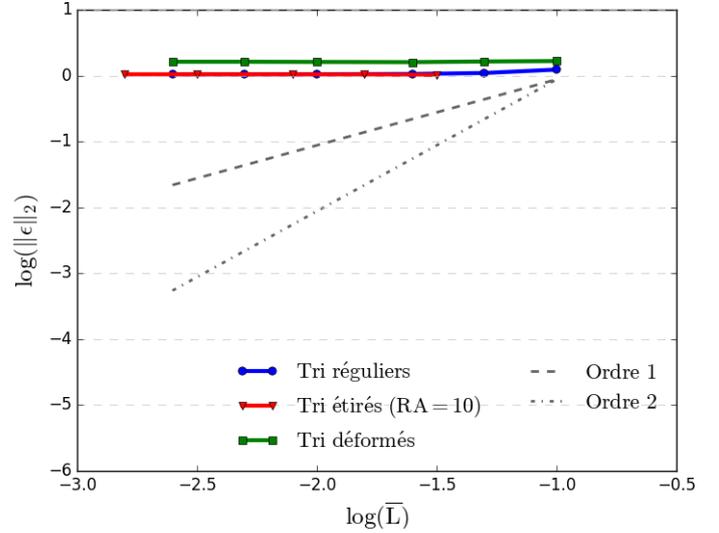


Figure 2.10 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode de GG sur maillages triangulaires

2.3.1.2 Analyse critique

L'étude réalisée montre que la méthode de *Green-Gauss* n'est pas adaptée pour calculer un gradient à l'ordre un au centre de cellule dont la géométrie n'est pas régulière. Rappelons que dans le cas de quadrangles étirés, la métrique est régulière par direction de maillage et que ceci suffit à garantir l'ordre de précision. L'erreur commise doit être imputée à l'approximation réalisée lors de l'équation (2.44). En effet, rien n'assure d'un point de vue du maillage que le centre de la face soit effectivement situé au milieu du segment reliant les deux centres de cellules. Dès lors, l'interpolation effectuée ne conserve pas l'ordre et dégrade celui du calcul du gradient.

Ceci est vérifiable par une brève étude en dimension un pour laquelle une fonction ψ de classe C^∞ est utilisée. Les valeurs prises par la fonction sont supposées connues en x_I et x_{I_f} , centres des cellules du maillage, et notées ψ_I et ψ_{I_f} . On désigne par x_M le milieu du segment $[II^f]$; l'estimation de la valeur prise par ψ en x_M vaut $\widetilde{\psi}_M \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\psi_I + \psi_{I_f})$ (conformément à la définition utilisée dans (2.44)). On considère le point x_F situé au niveau de la face séparant la cellule de centre x_I et celle de centre x_{I_f} . Puisque ψ est de classe C^∞ , un développement de Taylor immédiat à l'ordre deux permet d'écrire :

$$\psi_F = \psi_I + (x_F - x_I) \frac{\psi_{I_f} - \psi_I}{x_{I_f} - x_I} + O(h^2)$$

avec h la taille caractéristique d'une cellule du maillage 1D (non uniforme). Un calcul immédiat permet d'exprimer la différence entre l'état au point milieu du segment joignant les centres $\widetilde{\psi}_M$ et l'état au niveau de la face comme :

$$\widetilde{\psi}_M - \psi_F = \frac{-x_I - x_{I_f} + 2x_F}{2(x_{I_f} - x_I)} \psi_I + \frac{x_{I_f} + x_I - 2x_F}{2(x_{I_f} - x_I)} \psi_{I_f} + O(h^2)$$

Pour que $\widetilde{\psi}_M$ constitue une approximation consistante de ψ_F il est donc nécessaire d'assurer $x_{I_f} + x_I - 2x_F = 0$, ce qui est vérifié si x_F est précisément le milieu du segment $[II^f]$ c'est-à-dire est confondu

avec M . Dans le cas général, approcher la valeur de ψ_F par $\widetilde{\psi}_M$ conduit à une estimation d'ordre zéro pour le gradient. Ce résultat est illustré en 1D pour la fonction :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \cos(2\pi x) \quad (2.50)$$

avec calcul du gradient par *Green-Gauss* (GG) classique sur des maillages 1D déformés du type de celui présenté sur la figure 2.11. L'erreur d'estimation du gradient présentée en bleu (GG classique) sur la figure 2.12 est bien d'ordre zéro, comme celle précédemment observée en 2D sur les figures 2.9, 2.10 dès lors que les maillages utilisés ne sont plus quadrangulaires réguliers ou étirés.

Pour éviter ce problème, certains auteurs (cf. par exemple [99]) suggèrent d'utiliser une formule pondérée pour interpoler la valeur ψ_F dans (2.43) en remplaçant (2.44) par :

$$\begin{cases} \alpha_f &= \frac{|\mathbf{IF} \cdot \mathbf{n}_f|}{|\mathbf{IF} \cdot \mathbf{n}_f| + |\mathbf{IF}^f \cdot \mathbf{n}_f|} \\ \widetilde{\psi}_F &= \alpha_f \psi_{I_f} + (1 - \alpha_f) \psi_I \end{cases} \quad (2.51)$$

Dans le cas de l'étude en dimension un, cela revient à définir la valeur interpolée de ψ en F avec :

$$\widetilde{\psi}_F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x_F - x_I}{x_{I_f} - x_I} \psi_{I_f} + \frac{x_{I_f} - x_F}{x_{I_f} - x_I} \psi_I \quad (2.52)$$

et on vérifie de façon immédiate que $\widetilde{\psi}_F - \psi_F = O(h^2)$. En dimension un, cette formule pondérée permet donc d'estimer avec une précision suffisante la valeur à la face pour obtenir un calcul de gradient à l'ordre un, comme l'illustre l'évolution de l'erreur de discrétisation de l'approche dite " GG corrigé" (courbe rouge) sur la figure 2.12. Étendre cette correction à des dimensions supérieures soulève

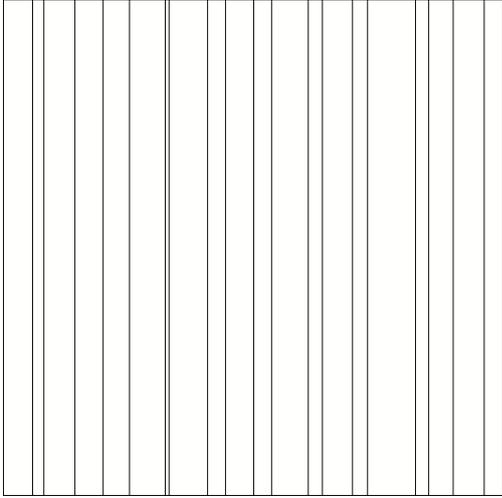


Figure 2.11 – Visualisation d'un maillage 1D déformé

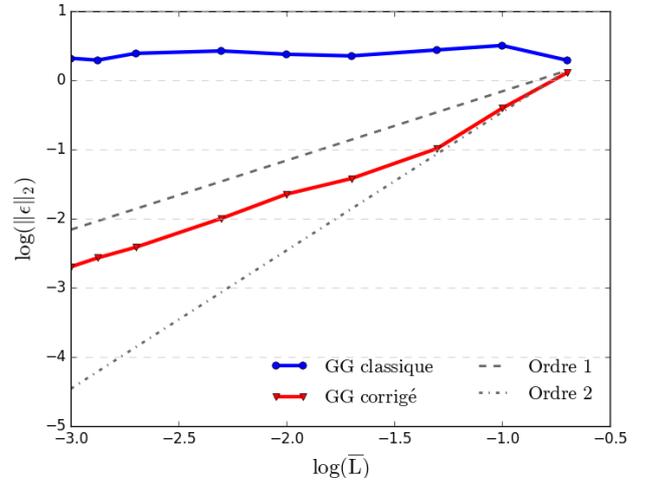


Figure 2.12 – Comparaison du comportement du calcul de gradient entre une méthode de GG classique et une méthode corrigée par interpolation linéaire sur maillage 1D déformé

le problème de l'alignement des deux centres de cellules I et I_f et du centre F de la face f . On illustre sur la figure 2.13 une situation typique pour un maillage quadrangulaire non régulier.

On peut utiliser le facteur de pondération

$$\alpha_f = \frac{\|\mathbf{IP}\|}{\|\mathbf{IF}\|}$$

pour estimer de façon plus précise la valeur de ψ au point P à partir des valeurs disponibles aux centres des cellules c_i et c_i^f . Cependant, si le centre P du segment joignant les centres n'est pas confondu avec

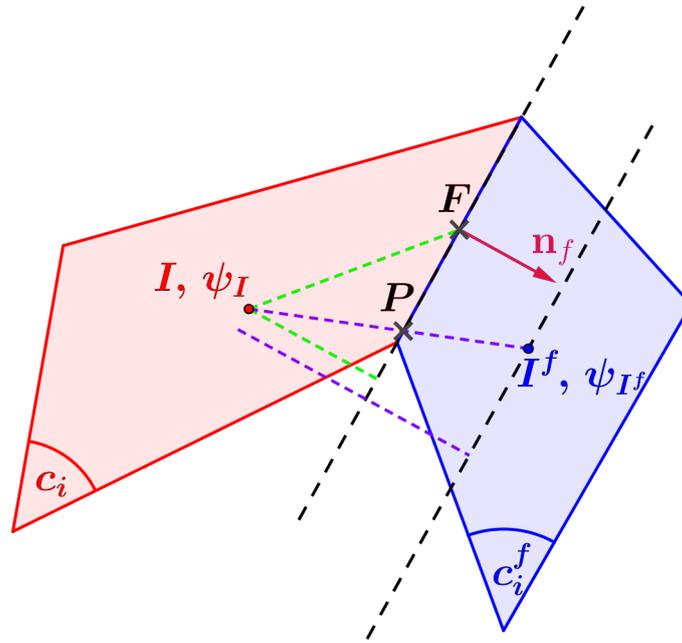


Figure 2.13 – Notations utilisées pour l'étude en dimension deux de l'amélioration de la méthode de *Green-Gauss* par pondération à la distance de la face, lors des calculs des valeurs aux faces

le centre F de la face, on aboutit à nouveau à une formulation non consistante lorsque l'on estime ψ_F à l'aide de l'approximation pondérée de ψ_P ce qui conduit finalement à une approximation d'ordre zéro du gradient. Ce résultat est illustré sur la figure 2.14, représentant l'évolution de l'erreur en norme $L2$ commise sur l'évaluation du gradient au centre des cellules par une méthode de *Green-Gauss* améliorée par cette interpolation linéaire en fonction de la taille caractéristique de maille pour différents types de maillages quadrangulaires. Pour des maillages déformés ne garantissant pas l'alignement des centres cellules avec le centre face, le gradient est d'ordre zéro alors que pour des maillages assurant cet alignement (maillages réguliers et étirés), le gradient calculé est au moins d'ordre un. Par ailleurs le graphique 2.15 représentant la même étude sur des maillages triangulaires illustre que quel que soit le type de maillage triangulaire considéré, cette interpolation linéaire ne permet pas d'obtenir un gradient précis d'ordre un. Généralement, sur des maillages triangulaires, même réguliers, l'alignement des centres cellules avec le centre face n'est pas assuré.

En conclusion, la méthode de *Green-Gauss* utilisée sur un maillage non structuré quelconque ne permet pas d'assurer l'obtention d'un gradient au centre suffisamment précis pour atteindre une discrétisation spatiale d'ordre deux. La faiblesse de cette méthode réside dans l'estimation de la valeur au centre des faces et même une interpolation linéaire - appliquée en maillage structuré dans la littérature - ne permet pas de résoudre le problème en maillage quelconque. Une première préconisation est donc de mettre en œuvre une méthode de calcul du gradient au centre cellule de précision supérieure en maillage quelconque.

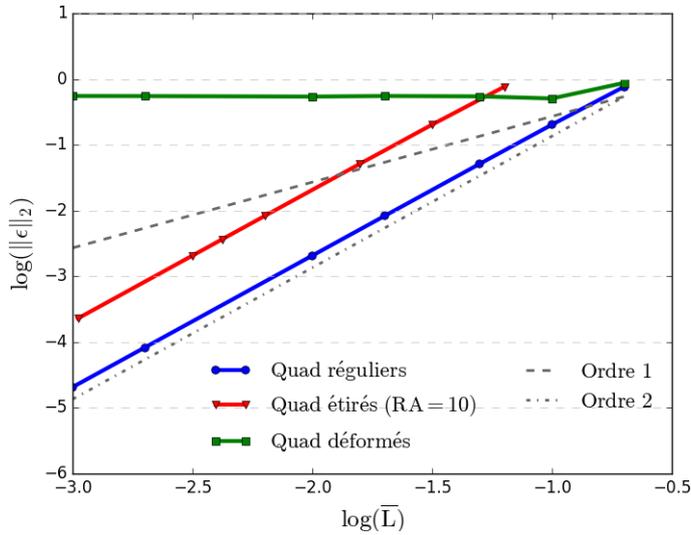


Figure 2.14 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode de GG avec évaluation des valeurs au centre des faces par interpolation linéaire sur maillages quadrangulaires

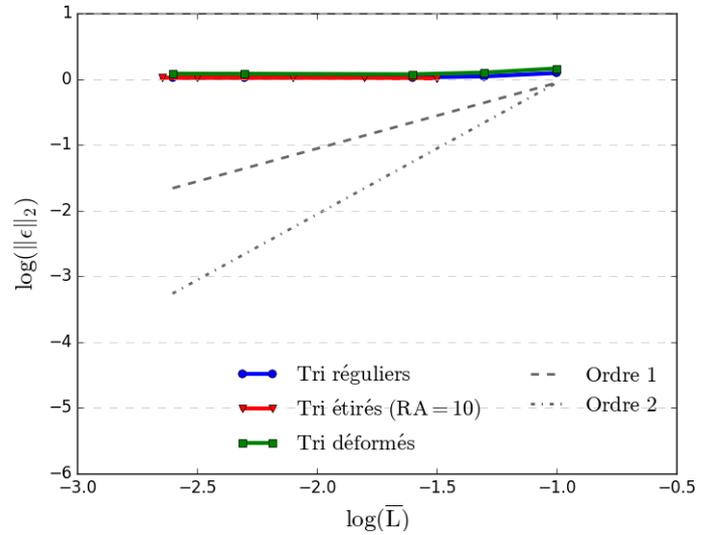


Figure 2.15 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode de GG avec évaluation des valeurs au centre des faces par interpolation linéaire sur maillages triangulaires

2.3.2 Stratégie de reconstruction

On a mentionné précédemment que la reconstruction effectivement réalisée dans elsA-H au niveau de la face f avait lieu au niveau du point M milieu du segment reliant les centres I et I^f des cellules c_i et c_i^f se partageant la face f (point qui n'appartient pas nécessairement à la face f , contrairement au point P introduit dans le paragraphe précédent et qui est bien l'intersection du segment reliant I et I^f avec la face f). De façon évidente, les points M et F sont confondus dans des maillages quadrangulaires réguliers tels que celui illustré sur la figure 2.16 de sorte que l'erreur commise dans ce cas particulier en reconstruisant en M plutôt qu'en F est bien sûr nulle. Dans le cadre de maillages quadrangulaires suffisamment réguliers, c'est-à-dire qui respectent à peu près localement l'alignement des centres de cellules et centre de la face ainsi que l'égalité de distance des deux centres de cellules au centre face, le point M reste une approximation géométrique acceptable pour le point F et la reconstruction effectuée au point M introduit une erreur d'ordre un mais qui peut rester faible en valeur absolue - c'est d'ailleurs sans doute ce qui a motivé cette approximation initiale dans le développement du code. En revanche, dans des maillages quelconques, qu'il s'agisse de maillages quadrangulaires déformés ou de maillages triangulaires, la reconstruction au point M introduit une erreur d'ordre un non négligeable et qui conduit à une précision globale d'ordre un seulement pour le schéma d'approximation. La préconisation qui en découle pour viser des simulations d'ordre deux en maillages quelconques est donc très simple : la reconstruction sera par la suite systématiquement effectuée au point milieu de la face f .

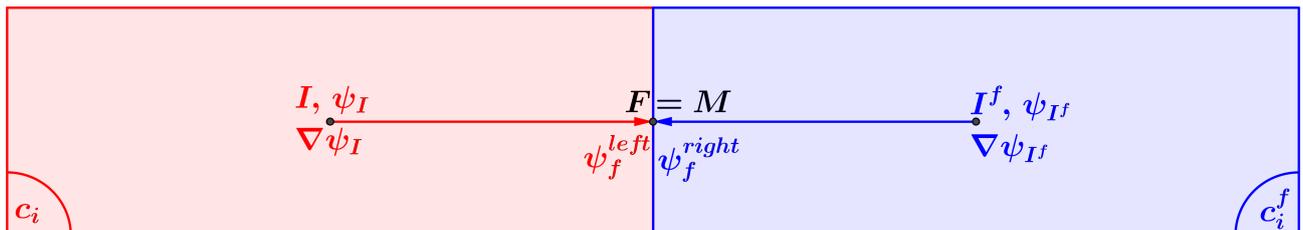


Figure 2.16 – Représentation d'une reconstruction à la face f au point M , milieu du segment reliant les deux centres de cellules I et I^f se partageant une même face f de centre F pour un maillage localement régulier

2.3.3 Estimation des gradients au centre des faces

2.3.3.1 Étude du comportement numérique

Les figures 2.17 et 2.18 représentent l'erreur commise par une méthode de type $5p$ (cf. (2.47)) sur l'estimation du gradient au centre de la face en fonction de la taille caractéristique moyenne pour des maillages quadrangulaires et triangulaires. Afin de mettre en évidence l'erreur associée au seul processus d'estimation du gradient au niveau d'une face, les valeurs exactes des gradients aux centres des cellules sont utilisées ici pour l'étude de convergence en maillage. Sur des maillages quadrangulaires réguliers et étirés, la méthode $5p$ de calcul de gradient au centre face atteint l'ordre deux. Sur maillages quadrangulaires déformés et maillages triangulaires, la méthode $5p$ est d'ordre un seulement. En ce qui concerne la méthode $5pcor$ (cf. (2.48)), les mêmes courbes sont tracées sur les figures 2.19 et 2.20. La méthode $5pcor$ présente la même tendance que la méthode $5p$: ordre deux sur les maillages quadrangulaires réguliers et étirés et ordre un pour les maillages quadrangulaires déformés et tout type de maillage triangulaire. Enfin, les figures 2.21 et 2.22 présentent l'écart entre les erreurs commises par la méthode $5p$ et la méthode $5pcor$ sur les composantes x et y du gradient calculé à la face. La quantité tracée est précisément le logarithme en base 10 du rapport entre l'erreur introduite par la méthode $5p$ et celle introduite par la méthode $5pcor$. Cette quantité est toujours positive, quel que soit le type de maillage étudié ou la composante du gradient analysée. Ceci signifie donc que la méthode $5pcor$ est toujours au moins aussi précise que la méthode $5p$. On constate ensuite que pour les maillages irréguliers, c'est-à-dire quadrangulaires déformés ou triangulaires de tout type, il n'y a que peu de différence entre l'erreur commise par les méthodes $5p$ et $5pcor$. L'intérêt d'utiliser une méthode de type $5pcor$ apparaît en fait uniquement sur des maillages assez réguliers, quadrangulaires réguliers ou étirés. Enfin, on constate que l'erreur commise est aussi sensible à la direction d'étirement du maillage. En effet, sur la figure 2.21, la méthode $5pcor$ est nettement plus précise que la méthode $5p$ pour les maillages quadrangulaires étirés suivant x pour la composante x du gradient, alors que l'erreur commise est identique pour la composante y du gradient. La méthode $5pcor$ telle que définie initialement dans le solveur elsA-H semble donc spécialement indiquée pour traiter les cellules hexahédriques ou quadrangulaires étirées qui sont souvent rencontrées dans des maillages proche paroi.

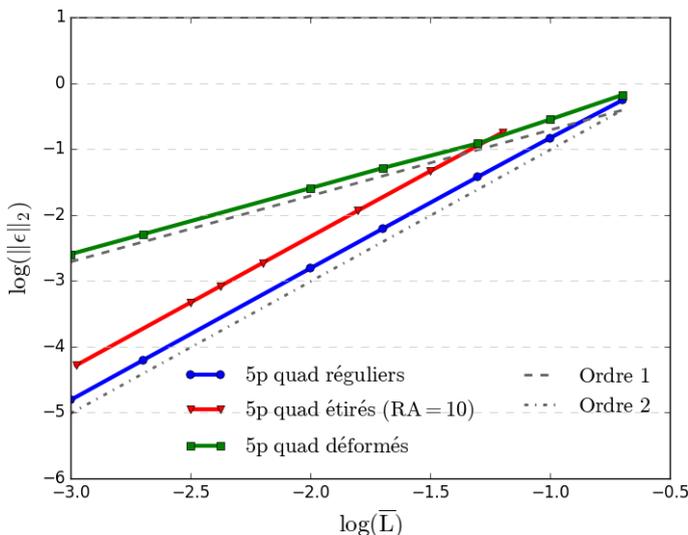


Figure 2.17 – Précision du calcul des gradients au centre face par la méthode $5p$ sur maillages quadrangulaires

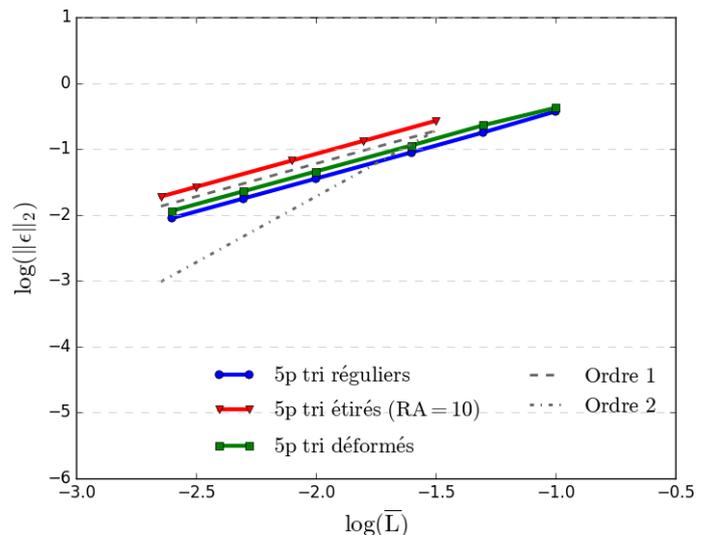


Figure 2.18 – Précision du calcul des gradients au centre face par la méthode $5p$ sur maillages triangulaires

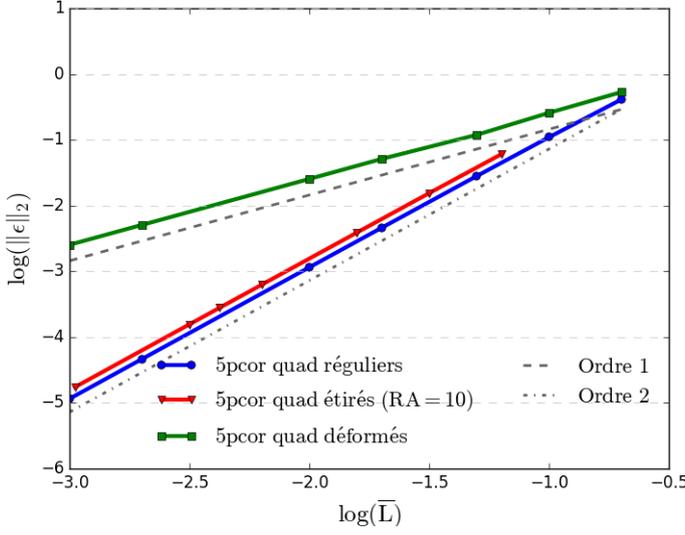


Figure 2.19 – Précision du calcul des gradients au centre face par la méthode *5pcor* sur maillages quadrangulaires

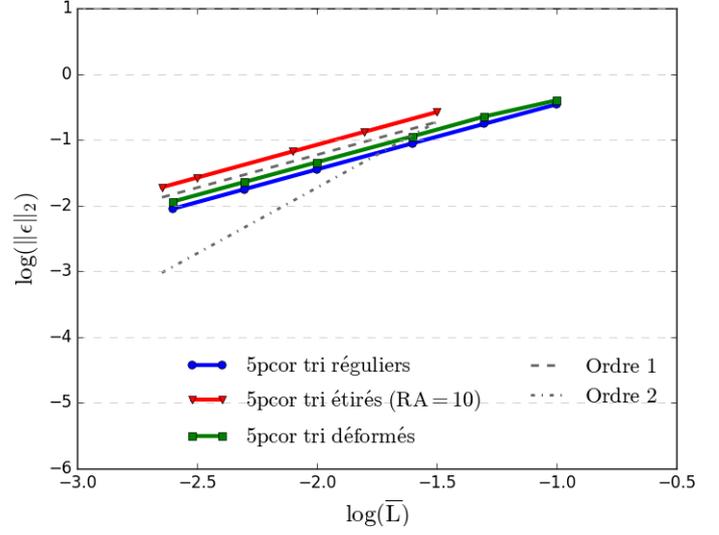


Figure 2.20 – Précision du calcul des gradients au centre face par la méthode *5pcor* sur maillages triangulaires

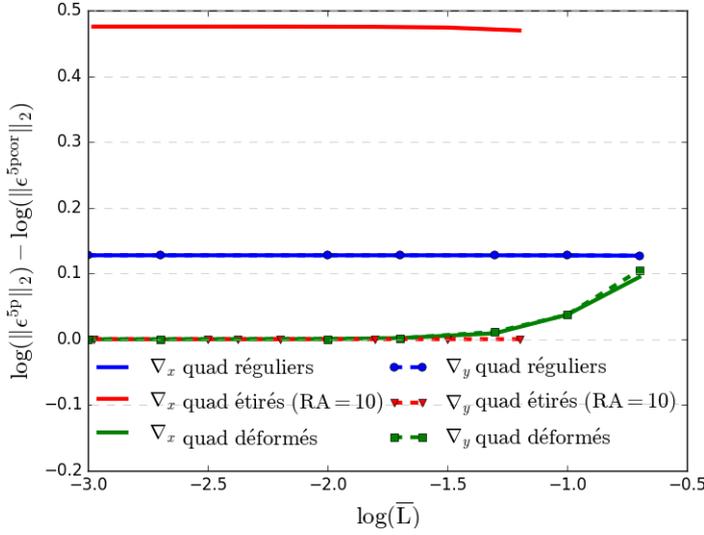


Figure 2.21 – Écart de l'erreur commise entre les méthodes *5p* et *5pcor* sur maillages quadrangulaires

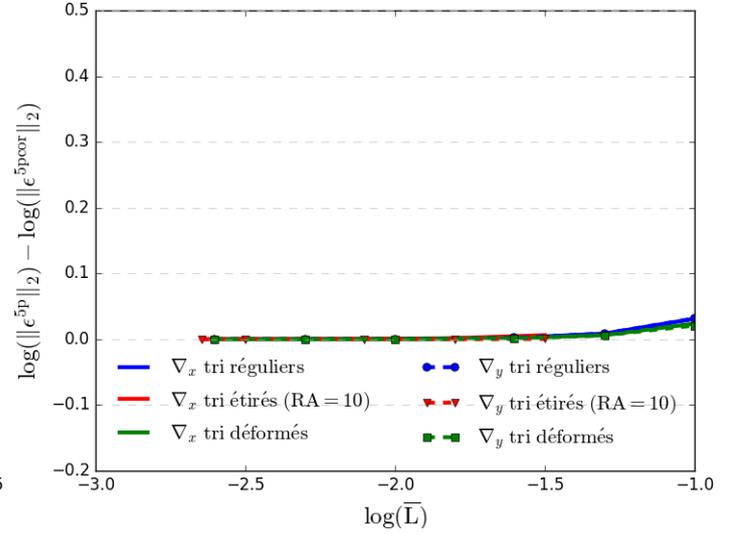


Figure 2.22 – Écart de l'erreur commise entre les méthodes *5p* et *5pcor* sur maillages triangulaires

2.3.3.2 Analyse critique

Soit F le centre de la face f séparant les cellules c_i et c_i^f de centre respectif I et I^f et soit ψ une fonction de classe C^∞ . Le gradient en F peut être exprimé par deux développements de Taylor en I et en I^f :

$$\begin{cases} \nabla\psi_F^{exact} = \nabla\psi_I^{exact} + \mathbf{IF} \cdot \nabla(\nabla\psi^{exact})_I + O(\|\mathbf{IF}\|^2) \\ \nabla\psi_F^{exact} = \nabla\psi_{I^f}^{exact} + \mathbf{I}^f\mathbf{F} \cdot \nabla(\nabla\psi^{exact})_{I^f} + O(\|\mathbf{I}^f\mathbf{F}\|^2) \end{cases} \quad (2.53)$$

d'où on tire :

$$\nabla\psi_F^{exact} = \frac{1}{2} (\nabla\psi_I^{exact} + \nabla\psi_{I^f}^{exact}) + O(\|\mathbf{IF}\|) \quad (2.54)$$

Par ailleurs, les valeurs exactes du gradient, $\nabla\psi^{exact}$, ne sont pas connues en I et en I^f , mais des approximations $\nabla\psi$ à l'ordre un sont (idéalement) disponibles via une approche *Green-Gauss* de sorte

que :

$$\nabla\psi_F^{exact} = \frac{1}{2} (\nabla\psi_I + \nabla\psi_{If}) + O(\|\mathbf{I}^f\|) \quad (2.55)$$

soit encore, par définition de $\nabla\psi_F^{5p}$ dans (2.47) :

$$\nabla\psi_F^{5p} = \nabla\psi_F^{exact} + O(\|\mathbf{I}^f\|) \quad (2.56)$$

Le gradient estimé au centre de la face par une méthode de type $5p$ est donc d'ordre un, à condition que les estimations du gradient au centre soient d'ordre un. On note ainsi que les problèmes de précision posés par la formule *Green-Gauss* implémentée dans elsA-H se répercutent de façon directe sur la précision du calcul du flux visqueux.

Par ailleurs, le résultat numérique obtenu pour des maillages quadrangulaires réguliers et étirés qui donnait une précision d'ordre deux à la méthode $5p$, s'explique par le fait que dans ce type de maillage on a $\mathbf{IF} + \mathbf{I}^f\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Ceci annule le terme d'ordre un et une erreur d'ordre deux est ainsi exceptionnellement obtenue.

Un raisonnement analogue à celui mené ci-dessus permet d'établir que :

$$\nabla\psi_F^{exact} - \nabla\psi_F^{5pcor} = O(\|\mathbf{I}^f\|) \quad (2.57)$$

ce qui justifie donc les résultats obtenus numériquement pour la méthode $5pcor$.

Ces deux méthodes répondent donc au besoin d'avoir un gradient précis d'ordre un à la face en maillage quelconque, à partir du moment du moins où la méthode utilisée par ailleurs pour le calcul des gradients aux centres permet bien d'obtenir une estimation d'ordre un. Compte tenu de sa meilleure précision sur des maillages quadrangulaires étirés, la méthode $5pcor$ telle que définie initialement dans le solveur elsA-H semble spécialement indiquée pour traiter les cellules hexahédriques ou quadrangulaires étirées qui sont souvent rencontrées dans des maillages proche paroi. Bien que les méthodes $5p$ et $5pcor$ répondent au besoin exprimé, d'autres pistes pour calculer le gradient au centre face pourront être explorées afin d'essayer d'améliorer la précision obtenue à moindre coût de calcul.

2.3.4 Conclusions

La principale conclusion qui peut être tirée de cette analyse des choix de discrétisation spatiale disponible dans le solveur non structuré d'elsA-H au début des présents travaux de thèse porte sur la nécessité d'une révision de la stratégie de calcul des gradients aux centres des cellules. L'approche *Green-Gauss* ne permet pas d'obtenir une précision satisfaisante dans des maillages quelconques et ce point doit être nécessairement amélioré compte tenu du fait que l'on anticipe l'utilisation de maillages irréguliers pour les applications complexes visées. De surcroît, les contraintes de génération de maillage associées au caractère coïncident du raccord entre bloc structuré et bloc non structuré adjacent auront tendance à accentuer le niveau de déformation des cellules utilisées dans les simulations hybrides. Un autre enseignement tiré de cette analyse concerne la nécessité d'une reconstruction au centre de la face de la cellule de contrôle. Enfin, l'estimation du gradient au niveau de la face (nécessaire au calcul du flux visqueux) est réalisée de façon satisfaisante par les approches $5p$ et $5pcor$ disponibles - mais reste tributaire du calcul des gradients aux centres -. On peut penser utiliser préférentiellement la stratégie $5pcor$ en raison de sa précision supérieure pour des maillages typiquement utilisés en proche paroi dans des calculs turbulents.

Avant de proposer dans le chapitre qui suit quelques améliorations du calcul du gradient au centre dans le solveur non structuré d'elsA-H, nous souhaitons présenter dans la dernière section du présent chapitre la façon précise dont est réalisée la communication entre solveur structuré et solveur non structuré au sein d'elsA-H. Cette stratégie d'hybridation n'est en effet pas sans conséquence sur les degrés de liberté dont nous disposons pour proposer des pistes d'amélioration.

2.4 Description de la discrétisation hybride dans elsA-H

Les différentes stratégies de calcul de flux exposées dans la section 2.2 ont été présentées pour des maillages quelconques (non structurés). En réalité, l'expression de ces flux s'avère souvent simplifiée avec l'emploi d'une stratégie structurée. Dans ce contexte, les flux sont calculés suivant chaque direction de maillage avant d'être assemblés comme un bilan de flux.

Pour le flux numérique de Jameson, l'opérateur δ^2 introduit en (2.31) diffère également puisque sur une direction de maillage donnée, le long de laquelle les cellules d'indice $i - 1$, i et $i + 1$ sont régulièrement ordonnées, on peut simplement écrire $\delta^2 \mathbf{W}_i = \mathbf{W}_{i+1} - 2\mathbf{W}_i + \mathbf{W}_{i-1}$.

Pour le flux numérique décentré de Roe, les états reconstruits au niveau de la face séparant par exemple la cellule i et la cellule $i + 1$ suivant une direction de maillage donnée ne sont plus obtenus en faisant appel au gradient moyen des cellules i et $i + 1$ concernées mais par le biais des pentes amont et aval utilisant les valeurs aux centres des deux cellules adjacentes à la cellule courante suivant la direction de maillage considérée.

Ces différences de traitement numérique entre solveur structuré et non structuré se justifient naturellement par la régularité généralement associée à un maillage structuré. Elles conduisent nécessairement, à iso-maillage, à une expression différente pour le flux numérique (par exemple convectif) calculé sur une face f de centre F , soit $(\mathcal{H}_c)_F^{\text{structuré}} \neq (\mathcal{H}_c)_F^{\text{non structuré}}$.

Ceci soulève un problème de non-conservativité pour une approche hybride lors du calcul des flux numériques au niveau des faces séparant les domaines ou blocs structurés et non structurés. Pour assurer la conservativité, le flux d'une face f séparant des domaines structurés et non structurés doit absolument être calculé de la même manière que ce soit par un calcul de flux structuré ou non structuré.

En pratique ceci se traduit par un traitement spécifique pour le calcul du flux à la face frontière séparant les domaines structurés et non structurés. Les faces non concernées par le raccord hybride (faces internes, de raccord structuré/structuré ou non structuré/non structuré ou de frontière physique) sont calculées quant à elles de manière parfaitement classique par rapport à la nature structurée ou non du bloc.

Dans le cadre du schéma ou flux numérique de Jameson défini par (2.30), on voit apparaître trois types de terme, le flux centré simple qui assure la consistance avec le flux physique convectif, la dissipation d'ordre faible activée dans les zones de discontinuité seulement et la dissipation d'ordre élevé activée dans les zones régulières de l'écoulement. On exprime ci-après chacun de ces trois termes pour un bloc structuré ou un bloc non structuré en faisant appel aux notations introduites sur la figure 2.23 :

- pour le bloc structuré : $\frac{1}{2} [(\mathcal{H}_c)_S + (\mathcal{H}_c)_{Sf}]$ et pour le bloc non structuré : $\frac{1}{2} [(\mathcal{H}_c)_U + (\mathcal{H}_c)_{Uf}]$
- pour le bloc structuré : $\epsilon_f^{(2)} \lambda_f (\mathbf{W}_S - \mathbf{W}_{Sf})$ et pour le bloc non structuré : $\epsilon_f^{(2)} \lambda_f (\mathbf{W}_U - \mathbf{W}_{Uf})$
- pour le bloc structuré : $\epsilon_f^{(4)} \lambda_f (\delta^2 \mathbf{W}_S - \delta^2 \mathbf{W}_{Sf})$ et pour le bloc non structuré : $\epsilon_f^{(4)} \lambda_f (\delta^2 \mathbf{W}_U - \delta^2 \mathbf{W}_{Uf})$

On observe que les deux premiers termes dépendent uniquement des valeurs des variables conservatives de part et d'autre de la face f . Ces valeurs étant échangées, ces deux expressions sont calculées de la même manière par les blocs structurés et non structurés sans effort particulier à fournir puisqu'on a : $\mathbf{W}_{Sf} = \mathbf{W}_U$ et $\mathbf{W}_{Uf} = \mathbf{W}_S$. En revanche, le troisième terme emploie l'opérateur δ^2 dont on a expliqué que la formulation diffère entre approche structurée et non structurée. Par ailleurs cet opérateur utilise une information qui dépasse la zone d'échange du raccord puisqu'une seule rangée de cellules est échangée. Ainsi, l'information nécessaire au calcul de l'opérateur directement dans la cellule fictive ne peut en aucun cas être disponible. Il convient donc de calculer la valeur prise par cet opérateur de différence seconde avant de l'échanger pour fournir à la cellule fictive du bloc opposé une valeur

Bloc structuré

$$\delta^2 \mathbf{W}_S = \mathbf{W}_{S-1} - 2\mathbf{W}_S + \mathbf{W}_{S+1}$$

⊙ support pour le calcul de $\delta^2 \mathbf{W}_S$

Bloc non structuré

$$\delta^2 \mathbf{W}_S = \sum_{g \in \mathcal{F}_U} (\mathbf{W}_{U^g} - \mathbf{W}_U)$$

⊙ support pour le calcul de $\delta^2 \mathbf{W}_U$

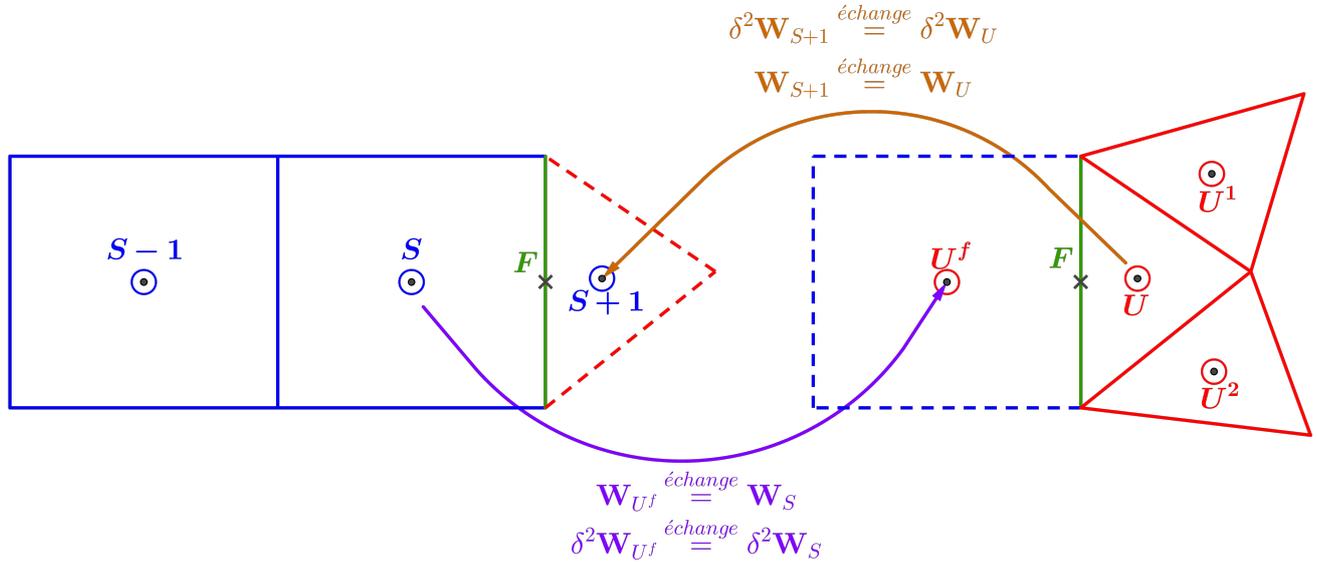


Figure 2.23 – Illustration des notations utilisées pour la mise en œuvre d’un raccord hybride dans le cadre du schéma de Jameson

cohérente de l’opérateur. Il s’agit là d’un second échange car le champ des variables conservatives doit nécessairement être échangé au préalable. Ce double jeu d’échange permet alors d’assurer un calcul de flux identique indépendamment de la nature du bloc et préserve ainsi la propriété de conservativité de la discrétisation hybride.

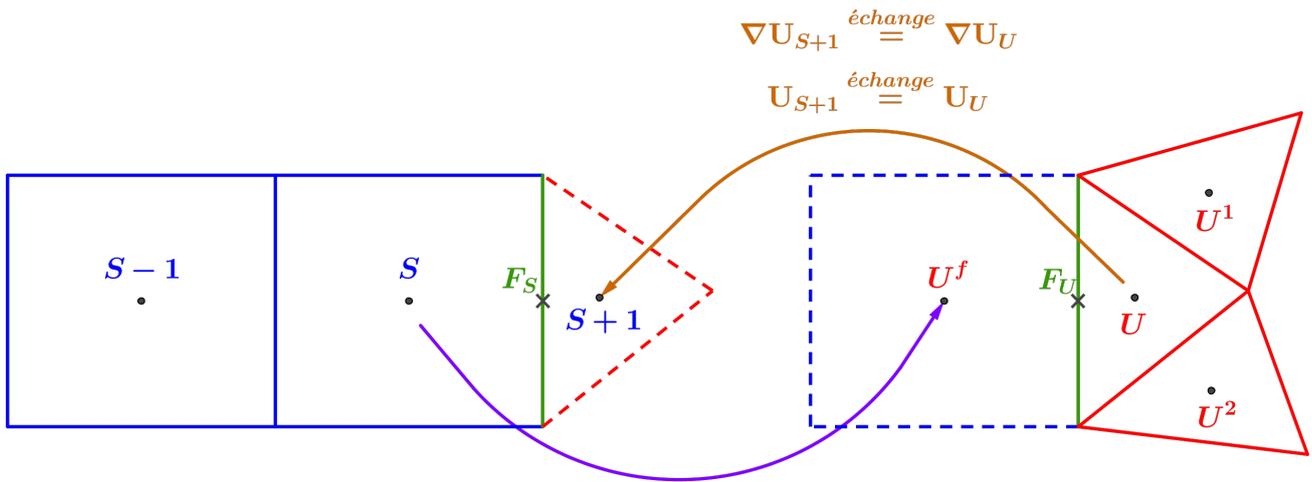
Par ailleurs on note également que, contrairement à l’approche structurée, cette application du schéma de Jameson aux raccords hybrides nécessite de transmettre uniquement les informations sur la première couche de cellule lors de chaque étape d’échange. Cette stratégie est la seule qui soit facilement compatible avec une démarche non structurée.

Pour le schéma de Roe, le flux numérique étant calculé à partir d’états à gauche et à droite de la face, pour garantir l’égalité du calcul de flux indépendamment du type de bloc rencontré, il suffit d’assurer l’homogénéité du calcul de ces états à gauche et à droite de la face. On introduit sur la figure 2.24 les notations utiles à l’explication de la stratégie adoptée. Il a été choisi de modifier le calcul des états à gauche et à droite de la face du raccord hybride sur le bloc structuré afin d’appliquer le mode opératoire du bloc non structuré sur cette face spécifiquement. Pour réaliser cette opération, il est indispensable d’échanger de part et d’autre du raccord hybride les champs des variables conservatives, qui permettent ensuite de retrouver les grandeurs primitives, ainsi que les gradients des grandeurs primitives. Une fois ces échanges réalisés, l’application de la procédure de reconstruction non structurée pour la face du raccord hybride à la fois sur le bloc structuré et le bloc non structuré garantit la conservativité, comme expliqué sur la figure 2.24.

Il convient de noter que seule une rangée de cellules fictives doit être échangée, pour le schéma de Jameson hybride comme pour le schéma de Roe hybride. Toutefois, rappelons que les schémas classiques du solveur structuré s’appuient en réalité sur au moins deux rangées de cellules fictives au sein du solveur elsA structuré multibloc. Ceci implique donc que les améliorations à venir du solveur hybride doivent absolument s’inscrire dans une dynamique d’échange d’une seule rangée de cellule fictive. Nous gardons donc cette contrainte en tête au moment d’aborder dans le chapitre qui suit quelques pistes d’amélioration de la discrétisation spatiale du solveur non structuré d’elsA-H.

Bloc structuré

Bloc non structuré



$$\nabla U_{S+1} \stackrel{\text{échange}}{=} \nabla U_U$$

$$U_{S+1} \stackrel{\text{échange}}{=} U_U$$

$$U_{U^f} \stackrel{\text{échange}}{=} U_S$$

$$\nabla U_{U^f} \stackrel{\text{échange}}{=} \nabla U_S$$

$$U_{F_S}^L = U_{F_U}^L = U_S + \mathbf{S} F_S \cdot \nabla U_S = U_{U^f} + U^f F_U \cdot \nabla U_{U^f}$$

$$U_{F_S}^R = U_{F_U}^R = U_{S+1} + (\mathbf{S}+1) F_S \cdot \nabla U_{S+1} = U_U + U F_U \cdot \nabla U_U$$

Figure 2.24 – Illustration des notations utilisées pour la mise en œuvre d'un raccord hybride dans le cadre du schéma de Roe

Chapitre 3

Évolution du solveur non structuré d'elsA-H

Certaines faiblesses de la discrétisation spatiale initialement présentes dans le solveur non structuré d'elsA-H ont été détaillées et expliquées au chapitre précédent. Des améliorations sont tout particulièrement nécessaires sur le calcul des gradients au centre des cellules et sur la stratégie de reconstruction afin d'atteindre une discrétisation spatiale d'ordre deux lorsqu'une reconstruction linéaire est appliquée au schéma de Roe. Même si les méthodes proposées par le solveur elsA-H pour calculer les gradients au centre des faces, utilisés dans l'estimation des flux visqueux, correspondent au critère pour l'obtention d'une discrétisation spatiale d'ordre deux, il est important de s'assurer que la méthode mise en œuvre propose un bon rapport précision/temps de calcul. Le présent chapitre se propose donc d'aborder l'évaluation de certaines améliorations de la discrétisation spatiale en adoptant la même approche que celle du chapitre précédent : chaque proposition d'amélioration est décrite techniquement dans un premier temps, puis analysée en pratique pour le problème analytique en dimension deux déjà utilisé en 2.3 et enfin discutée de manière critique afin de s'assurer de la cohérence des résultats numériques observés. Dans la deuxième partie de ce chapitre, correspondant à la section 3.3, les méthodes numériques retenues dans les sections 3.1 et 3.2 pour atteindre une discrétisation spatiale d'ordre deux sur un maillage non structuré quelconque sont appliquées à la simulation de quelques écoulements académiques afin de valider leur implémentation au sein de elsA-H. Ces écoulements académiques (problème de Ringleb, écoulement laminaire sur un cylindre, écoulement turbulent sur une plaque plane) font appel à des maillages qui sont rendus artificiellement hybrides, i.e. décomposés en blocs structurés et non structurés, pour les besoins de la validation de elsA-H ; ces écoulements peuvent être par ailleurs calculés sans difficulté dans des maillages structurés faciles à générer. C'est pourquoi, dans la troisième et dernière partie de ce chapitre, le solveur hybride est évalué sur un problème représentatif en terme de maillage de configurations industrielles incluant des effets technologiques. La configuration dite de Film Cooling calculée dans la section 3.4 ne peut en effet être maillée en structuré qu'au prix d'un effort substantiel de génération de maillage. Le recours à un maillage hybride prend dans ce cas tout son sens puisqu'il est naturel de mailler cette configuration en adoptant une stratégie non structurée pour une partie du domaine (zone du trou de refroidissement) et structurée pour l'autre (plaque plane). Le maillage hybride obtenu présente une régularité bien moindre que le maillage structuré de référence pour cette même configuration mais c'est là le prix à payer pour sa simplicité de génération. Cette configuration de Film Cooling permet donc d'évaluer le solveur hybride incluant les évolutions du solveur non structuré dans un maillage hybride réaliste de par ses niveaux de déformation.

3.1 Estimation des gradients au centre des cellules

Les faiblesses rencontrées en matière de précision lorsque la méthode GG est utilisée sur des maillages déformés en formulation Volumes Finis centrée sur les cellules (*i.e.* avec des inconnues stockées aux centres des cellules) ont été identifiées dans la littérature et, pour y remédier, l'utilisation de la technique de *Moindres Carrés* (notée dorénavant LSQ pour *Least Squares*) est classiquement recommandée pour le calcul des gradients au centre des cellules (voir notamment les études détaillées de Diskin *et al*

[43], [42] ou encore les travaux de Mavriplis [80] [81]). Nous rappelons donc dans un premier temps les principes généraux de mise en œuvre de la technique *LSQ* dans un maillage non structuré quelconque puis nous détaillons quelques variantes possibles (*Moindres Carrés Pondérés* ou application *itérative* suggérée dans les travaux [53]). Une nouvelle stratégie de calcul du gradient au centre cellule, dite méthode *quasi-Green* ou *qG*, proposée initialement par Brenner [21] et mise en œuvre dans le code FLUSEPA® [18, 19] de Airbus Space and Defense est présentée dans la thèse de Pont [96] et mentionnée dans [53]. Cette approche s’inspire de la méthode *GG* mais en corrige les principales faiblesses pour rendre le calcul de gradient au centre d’une cellule précis à l’ordre un sur tout type de maillage. La méthode *qG* a également été récemment adoptée dans les travaux de Maugars [79] où elle est mise en œuvre dans le contexte de simulations en maillage structuré. Nous proposons dans la dernière partie de cette section une explication pratique de cette méthode *quasi-Green*.

3.1.1 Méthode des *Moindres Carrés (LSQ)*

Construction d’un support

La méthode des *Moindres Carrés* s’appuie sur un ensemble de cellules voisines pour calculer le gradient $\nabla\psi_I$ au centre I d’une cellule c_i pour la variable ψ . Cet ensemble de cellules constitue le support (ou stencil en anglais) de l’approche *LSQ* appliquée à la cellule c_i . La manière de définir ce support dépend de la structure de données adoptée par le solveur. Deux types de structures sont classiquement employées dans les solveurs non structurés :

- une connectivité basée sur les faces : une face f est partagée par les cellules c_i et c_i^f
- une connectivité basée sur les nœuds : un nœud n est partagé par les cellules c_0^n, c_1^n, \dots et c_N^n

Il est rare de voir cohabiter au sein d’un même solveur ces deux types de connectivité. Généralement le choix d’une connectivité par rapport à une autre se fait en fonction de la nature du solveur. Si le solveur est de type *node-centered* (le volume de contrôle est un élément du maillage dual), la connectivité basée sur les nœuds est préférée car elle permet de basculer directement d’un nœud du maillage primaire vers l’ensemble des cellules constituant le volume de contrôle dual contenant ce nœud. En revanche, dans le cadre d’un solveur *cell-centered*, tel que elsA-H, il est commun d’utiliser une connectivité par face. Il n’y a pas actuellement de consensus établi permettant de préférer l’une des approches *node-centered* ou *cell-centered* par rapport à l’autre. En sachant que les solveurs structurés sont naturellement *cell-centered* et que le solveur elsA-H a été majoritairement développé en étendant le code structuré elsA vers le non structuré, un solveur *cell-centered* semblait tout indiqué pour elsA-H. Ce choix a lui-même orienté vers une connectivité par face. De ce fait, pour le solveur elsA-H, la constitution d’un voisinage est réalisée en utilisant la connectivité par face.

Nous rappelons que pour une face f appartenant à l’ensemble F_{c_i} des faces de c_i , la cellule voisine de c_i par l’intermédiaire de la face f est notée c_i^f . Ainsi, l’ensemble des cellules directement voisines de la cellule c_i s’exprime par : $\{c_i^f, \exists f \in F_{c_i}, f = c_i \cap c_i^f\}$. Cet ensemble de cellules constitue ce qui est appelé par la suite le voisinage de rang un de la cellule c_i et est noté $V_{c_i}^1$. Un exemple de voisinage de rang un est représenté sur la figure 3.1. De même on définit l’ensemble des cellules voisines de rang deux de la cellule c_i , noté $V_{c_i}^2$ de telle sorte que : $V_{c_i}^2 = V_{c_i}^1 \cup \left(\bigcup_{c_j \in V_{c_i}^1} V_{c_j}^1 \right)$. Ce voisinage est illustré par la figure 3.2. Il est envisageable d’établir par processus itératif un voisinage de rang n pour la cellule c_i qui est alors noté $V_{c_i}^n$.

Dans le cas d’un solveur s’appuyant sur une connectivité par nœud, le voisinage est construit à partir de la structure nodale d’information. Notons par exemple $V_{c_i}^N$ l’ensemble des cellules partageant un nœud avec la cellule c_i . La figure 3.3 fournit un exemple d’un tel voisinage.

Par la suite, le support retenu, qu’il ait été obtenu par face avec l’information de rang 1, 2, ou n , ou qu’il ait été construit par nœuds, est simplement et systématiquement noté V_{c_i} .

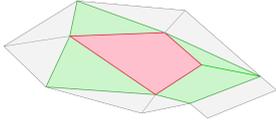


Figure 3.1 – Voisinage de rang un par face pour la cellule c_i

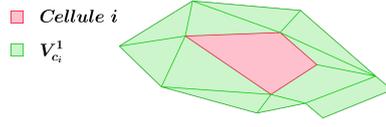


Figure 3.2 – Voisinage de rang deux par face pour la cellule c_i

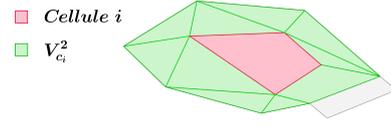


Figure 3.3 – Voisinage de rang un par nœud pour la cellule c_i

Obtention du système des *Moindres Carrés*

Pour chaque cellule c_j de centre J appartenant au voisinage V_{c_i} considéré de la cellule c_i de centre I , un développement de Taylor permet d'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{I}\mathbf{J} \cdot \nabla \psi_I = \delta \psi_{IJ} \\ \forall c_j \in V_{c_i} \end{cases} \quad (3.1)$$

avec δ l'opérateur de différence, de sorte que pour une variable ψ quelconque : $\delta \psi_{IJ} = \psi_J - \psi_I$. Le système (3.1), écrit pour la cellule c_i , possède autant d'équations qu'il y a de cellules dans le stencil V_{c_i} retenu, c'est à dire $N_{V_{c_i}}$. Les seules inconnues de ce système sont les composantes du gradient $\nabla \psi_I$. Le système (3.1) représente $N_{V_{c_i}}$ équations pour trois inconnues en trois dimensions.

On introduit la matrice M_{c_i} de dimension $(N_{V_{c_i}}, 3)$ telle que :

$$M_{c_i} = \begin{pmatrix} \delta x_{IJ_1} & \delta y_{IJ_1} & \delta z_{IJ_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta x_{IJ_{N_{V_{c_i}}}} & \delta y_{IJ_{N_{V_{c_i}}}} & \delta z_{IJ_{N_{V_{c_i}}}} \end{pmatrix}$$

avec $\{c_{j_k}, k \in [1, N_{V_{c_i}}]\} = V_{c_i}$. On introduit également le vecteur colonne Δ_{c_i} tel que pour une variable ψ donnée :

$$\Delta_{c_i}(\psi) = \begin{pmatrix} \delta \psi_{IJ_1} \\ \dots \\ \delta \psi_{IJ_{N_{V_{c_i}}}} \end{pmatrix}$$

Le système (3.1) peut alors être réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$M_{c_i} \nabla \psi_I = \Delta_{c_i}(\psi) \quad (3.2)$$

Résolution du système de *Moindres Carrés*

L'équation (3.2) peut être résolue de plusieurs manières. Deux méthodes de résolution ont été utilisées dans nos travaux. La première utilise la méthode de résolution par l'équation normale. Pour ce faire, le système est multiplié par la transposée de la matrice M_{c_i} , notée $M_{c_i}^t$, de sorte que le système suivant est alors obtenu :

$$M_{c_i}^t M_{c_i} \nabla \psi_I = M_{c_i}^t \Delta_{c_i}(\psi) \quad (3.3)$$

Le produit matriciel $M_{c_i}^t M_{c_i}$ qui apparaît dans (3.3) représente une matrice de taille $(2, 2)$ en deux dimensions ou $(3, 3)$ en trois dimensions. L'inverse de ce produit est calculable à moindre coût. Le système (3.3) est ensuite multiplié par l'inverse de ce produit matriciel :

$$\nabla \psi_I = \left(M_{c_i}^t M_{c_i} \right)^{-1} M_{c_i}^t \Delta_{c_i}(\psi) \quad (3.4)$$

En définissant $M_{c_i}^{LSQ} = \left(M_{c_i}^t M_{c_i} \right)^{-1} M_{c_i}^t$ une matrice de taille $(3, N_{V_{c_i}})$, on a finalement :

$$\nabla \psi_I = M_{c_i}^{LSQ} \Delta_{c_i}(\psi) \quad (3.5)$$

La seconde méthode de résolution s'appuie sur la décomposition en valeurs singulières (*SVD*) de la matrice M_{c_i} afin de calculer sa pseudo-inverse et de résoudre le système de *Moindres Carrés*. Cette méthode de résolution conduit également à une équation matricielle similaire à (3.5). On souligne que la matrice $M_{c_i}^{LSQ}$ ne dépend que de données géométriques. Ceci a deux conséquences :

- une unique évaluation de cette matrice est nécessaire au cours de l'ensemble d'une simulation d'écoulement (sauf bien sûr pour les simulations avec déformation du maillage, qui ne sont pas considérées dans nos travaux)
- les propriétés mathématiques de cette matrice, en particulier son conditionnement, ne dépendent que de la qualité géométrique du support utilisé.

Étude du comportement numérique

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction de ce chapitre, la méthode *LSQ* (comme les autres méthodes numériques évaluées dans la suite du chapitre) est appliquée au problème modèle décrit en 2.3. L'estimation des gradients aux centres des cellules fournie par *LSQ* est comparée aux valeurs exactes attendues pour la fonction test (2.49) sur un ensemble de maillages quadrangulaires et triangulaires, réguliers ou déformés, de raffinement croissant afin de disposer de l'ordre de précision en espace fourni par cette méthode - les maillages utilisés sont les mêmes que ceux mis en œuvre au chapitre précédent pour évaluer en particulier l'approche *GG* et qui sont illustrés sur les figures 2.3 à 2.8.

Les figures 3.4 et 3.5 représentent ainsi l'évolution de l'erreur en norme *L2* commise lors de l'estimation de la valeur au centre des cellules du gradient par une méthode de type *LSQ* basée sur un support de rang un pour une convergence en maillages respectivement quadrangulaires et triangulaires. Ces figures peuvent être comparées aux figures 2.9 et 2.10 du chapitre précédent où la méthode *Green-Gauss* (*GG*) est appliquée sur ces mêmes maillages pour l'estimation du gradient au centre. Comme pour la méthode *Green-Gauss*, sur des maillages quadrangulaires réguliers ou quadrangulaires étirés, l'erreur commise lors de l'estimation du gradient au centre des cellules par la méthode *LSQ* est d'ordre deux. Le résultat le plus spectaculaire est obtenu pour les maillages quadrangulaires déformés et pour les maillages triangulaires. Alors qu'il avait été observé que la méthode *GG* devenait non consistante (d'ordre zéro) à partir du moment où le maillage perd sa régularité en terme d'alignement des centres de cellules avec le centre face et d'iso-éloignement des centres de cellules du centre face, la précision de la méthode *LSQ* pour estimer le gradient au centre cellule reste bien d'ordre un quelque soit le type de maillage utilisé.

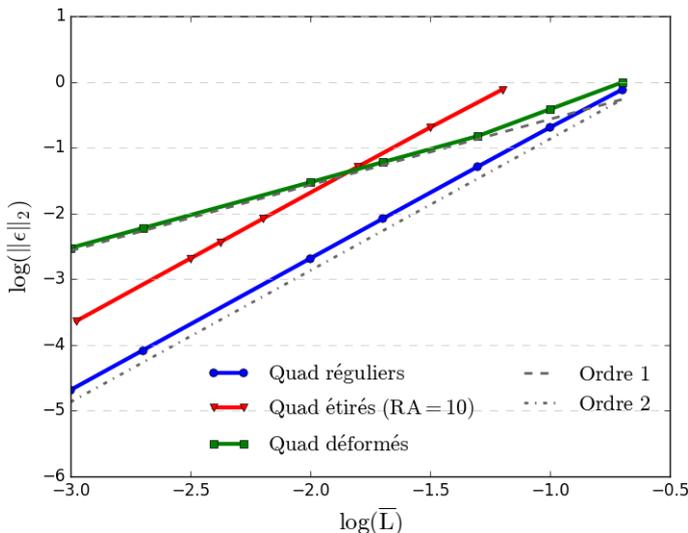


Figure 3.4 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode de *LSQ* sur maillages quadrangulaires

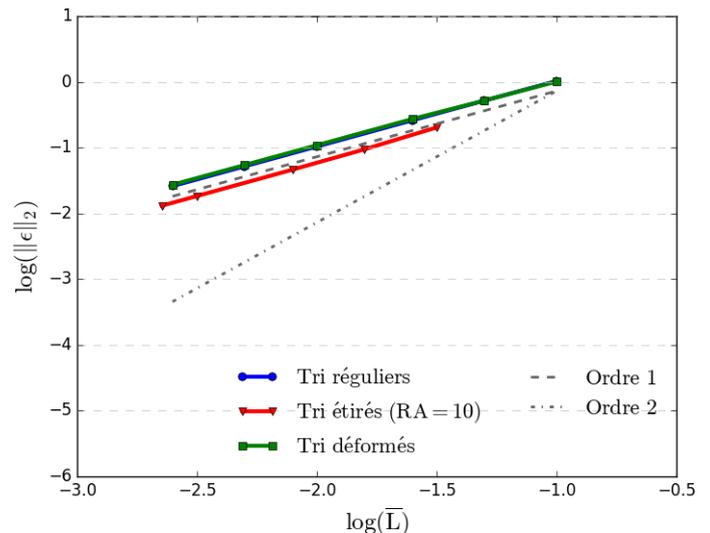


Figure 3.5 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode de *LSQ* sur maillages triangulaires

L'influence du rang du support est également analysée. Cette influence est particulièrement notable sur le maillage quadrangulaire déformé comme le montre le graphique 3.6. En effet, si l'extension du

support ne dégrade pas directement l'ordre de précision, elle contribue cependant à augmenter l'erreur commise. Cette tendance n'est pas observée pour les maillages triangulaires déformés, comme illustré par la figure 3.7. Un support de rang deux est légèrement plus précis dans ce cas qu'un support de rang un, sans modifier pour autant l'ordre de l'erreur commise (qui reste donc une erreur d'ordre un).

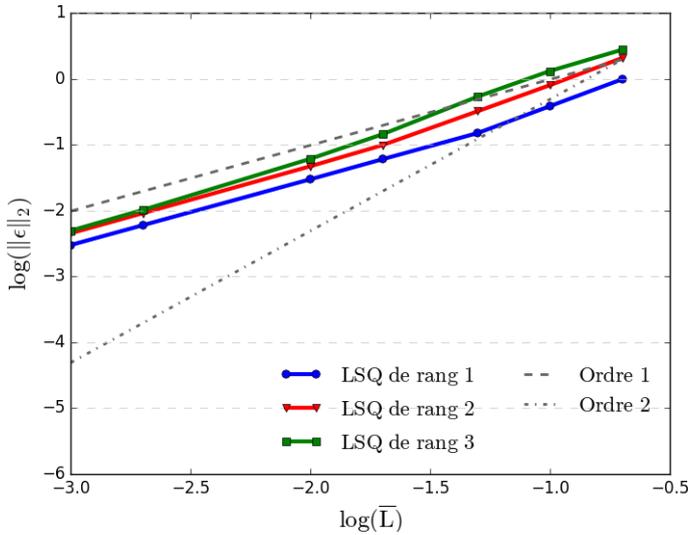


Figure 3.6 – Comparaison de la précision de la méthode *LSQ* pour des supports de rangs différents sur des maillages quadrangulaires déformés

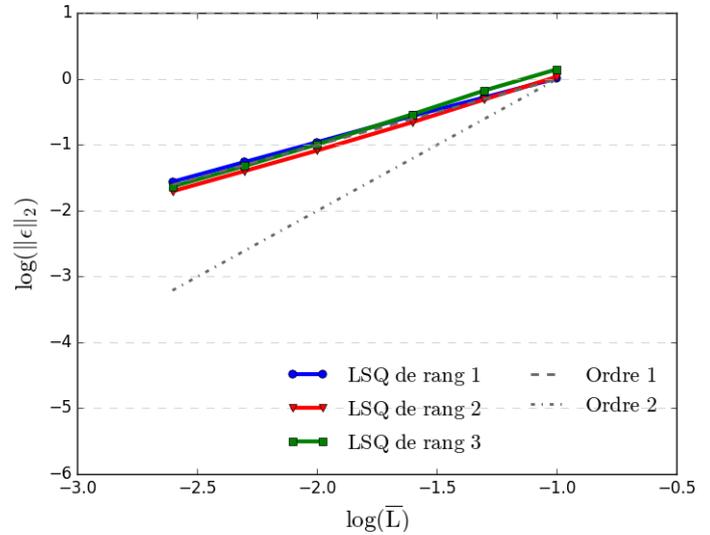


Figure 3.7 – Comparaison de la précision de la méthode *LSQ* pour des supports de rangs différents sur des maillages triangulaires déformés

Analyse critique

Sur tout type de maillage, la méthode des *Moindres Carrés* permet de répondre au besoin de disposer d'un gradient estimé à l'ordre un (au moins) au centre des cellules. L'approche *Moindres Carrés* constitue donc une bonne alternative à la méthode de *Green-Gauss* pour le calcul des gradients au centre des cellules. L'étude numérique de l'influence du rang du support semble indiquer que sur maillage quadrangulaire, l'extension du support peut entraîner une augmentation de l'erreur commise. Ceci s'explique par le fait qu'en étendant le support, des informations plus éloignées sont utilisées. Cela revient en quelque sorte à lisser le calcul du gradient. Cette première analyse semble cependant remise en cause par un résultat opposé sur maillage triangulaire. Toutefois, dans le cadre de maillages triangulaires en dimension deux et tétraédriques en dimension trois, le support de rang un par face ne contient pour ces cellules que $N + 1$ cellules voisines, avec N la dimension d'espace considérée, ce qui correspond au nombre minimum de cellules voisines admissible pour constituer un système de *Moindres Carrés*. Certains auteurs [129] [53] recommandent d'agrandir le support *Moindres Carrés* en maillages triangulaires afin d'augmenter la quantité d'informations physiques (états aux centres) disponibles et de réduire les éventuelles singularités géométriques associées à un support compact. On peut noter qu'une augmentation de la précision peut être effectivement attendue d'une extension du support en maillage triangulaire - contrairement au cas quadrangulaire - car une telle extension en maillage triangulaire n'induit pas une augmentation trop importante des distances séparant les centres des cellules nouvellement ajoutées au support par rapport à celles contenues dans le support de rang un. Par ailleurs, ajouter les cellules de rang deux au support d'une cellule triangulaire peut permettre d'enrichir le support dans des directions pour lesquelles un support de rang un ne fournit pas suffisamment d'information (voir par exemple Fig.3.9). Ceci peut avoir un impact très positif sur la précision. Les maillages quadrangulaires n'ont pas ce besoin et l'extension du support implique nécessairement un éloignement plus important (cf. Fig. 3.8).

Il faut être néanmoins conscient que l'utilisation d'un support de rang deux pour un solveur multibloc avec une connectivité basée sur les faces pose de grandes difficultés pour la gestion des raccords entre blocs. Pour le solveur elsA-H, seule la première rangée de cellules est en effet échangée (cf. 2.4), empêchant d'accéder à l'information de rang deux. Si l'on considère l'exemple fourni par la figure

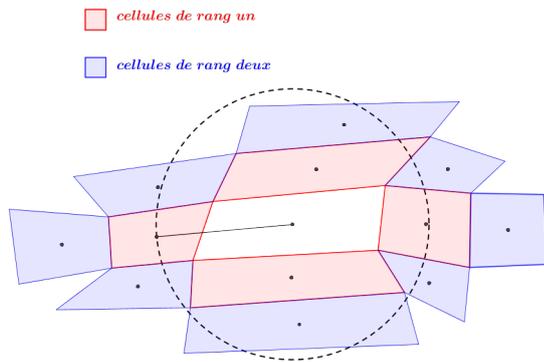


Figure 3.8 – Comparatif support de rang un et de rang deux pour une cellule quadrangulaire

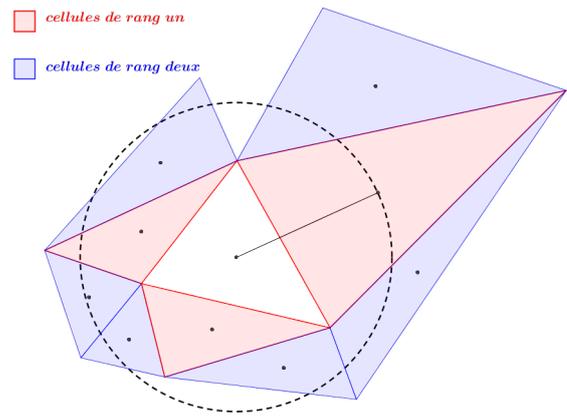


Figure 3.9 – Comparatif support de rang un et de rang deux pour une cellule triangulaire

3.10, les données des cellules de rang un des blocs opposés *Sud* et *Est* sont correctement échangées. En revanche, les cellules de ces mêmes blocs de rang deux, marquées par des pointillés, ne le sont pas. Il est possible d'envisager une stratégie de prétraitement au sein des blocs *Sud* et *Est* avant l'échange afin que celui-ci ne soit pas effectué simplement sur les cellules de rang un mais sur, par exemple, la somme des données de rang un et deux pour la cellule c_i . Toutefois, cette stratégie s'avère insuffisante dans la mesure où le bloc *Sud-Est* n'est pas en communication avec le bloc courant. En conclusion, une stratégie de rang deux est difficilement transparente aux raccords. De ce fait, sur les conditions limites et les raccords, le support est décentré et seule l'information de rang un venant des conditions limites et des raccords est utilisée, comme illustré sur la figure 3.11 dans le cadre du décentrement lié à une cellule appartenant à un raccord.

Enfin, lorsque l'on envisage d'étendre un support *LSQ* sur une configuration tridimensionnelle, on doit également garder en tête que le nombre d'éléments contenus dans un support de rang deux peut assez vite s'avérer pénalisant en terme de coût de calcul.

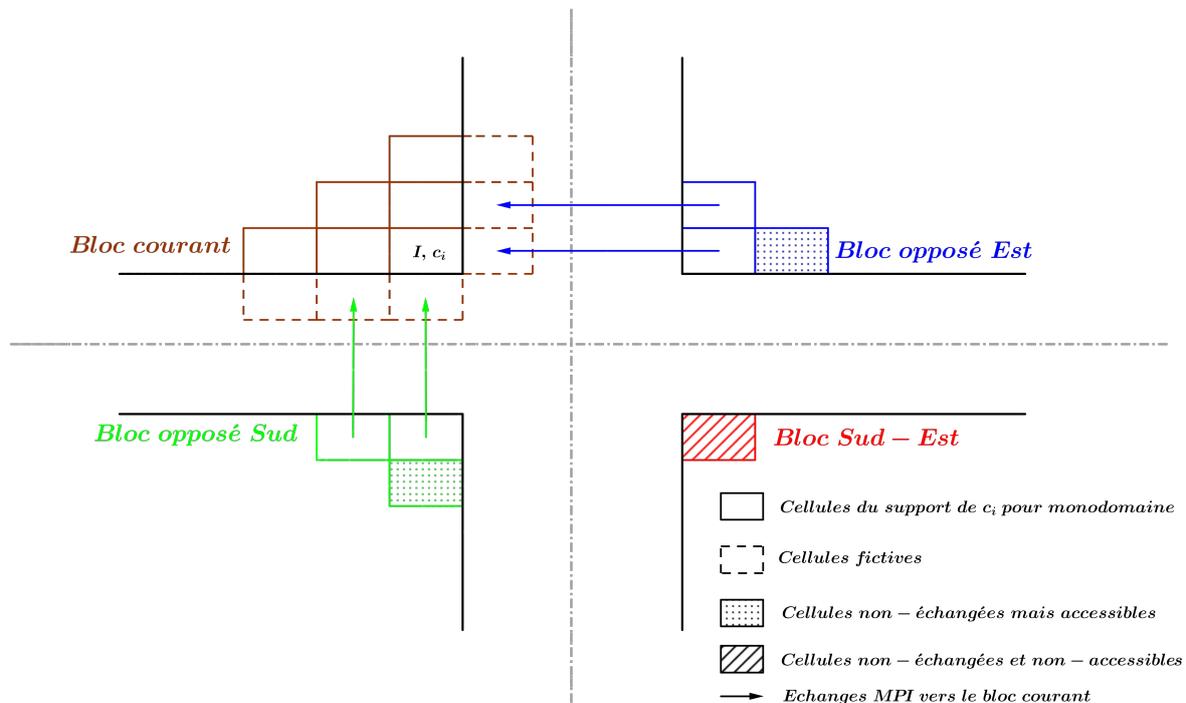


Figure 3.10 – Mise en évidence de la difficulté de mise en œuvre d'échange d'informations de rang deux

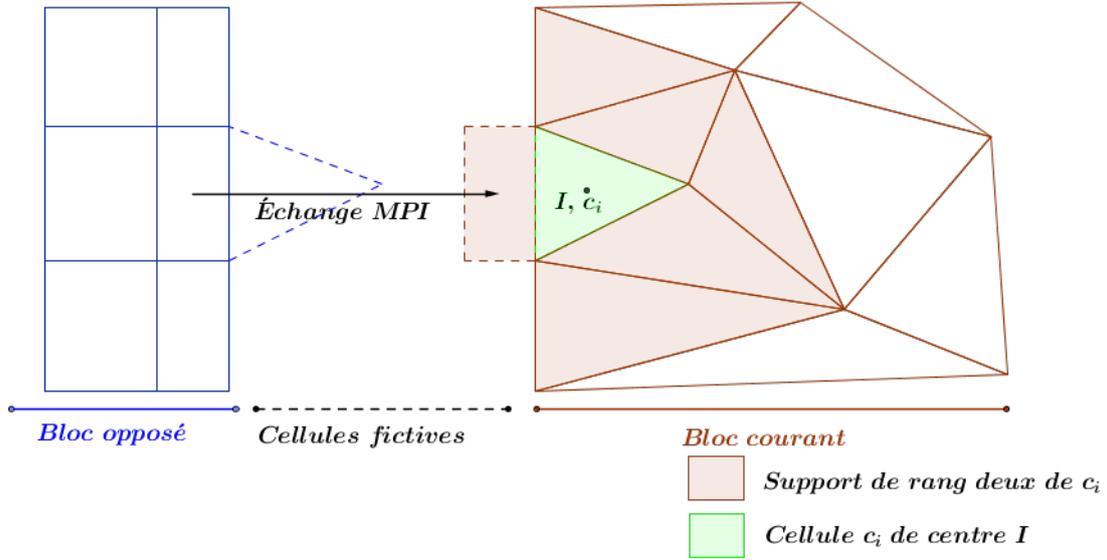


Figure 3.11 – Support de rang deux sur un raccord

3.1.2 Méthode des *Moindres Carrés Pondérés* (*WLSQ*)

Description

Dans la méthode des *Moindres Carrés* classique ou standard, telle qu'elle a été présentée dans la section précédente, chaque cellule appartenant au support considéré du volume de contrôle contribue de la même manière au système (3.1). Ainsi, qu'une cellule soit éloignée ou proche du volume de contrôle au niveau duquel on souhaite estimer le gradient, l'information apportée aura la même importance. Toutefois, en présence de support étendu, comme ceux de rang deux par exemple, ou de support naturellement étiré, il peut être intéressant d'augmenter l'importance accordée aux données provenant des cellules les plus proches. Ceci est réalisé en introduisant une pondération lors de la construction du système (3.1) qui devient alors :

$$\begin{cases} w_{ij} \mathbf{IJ} \cdot \nabla \psi_I = w_{ij} \delta \psi_{IJ} \\ \forall c_j \in V_{c_i} \end{cases} \quad (3.6)$$

avec w_{ij} le poids de l'information issue de la cellule c_j lors du calcul du gradient pour la cellule c_i . Des fonctions classiques de pondération utilisent par exemple une fonction puissance inverse de la distance séparant les centres I et J des cellules c_i et c_j , comme par exemple dans [88] où : $w_{ij} = \frac{1}{|\mathbf{IJ}|^k}$, avec $k = 0, 1, 2$. Nous reprenons ici cette proposition en adoptant $k = 1$.

Étude du comportement numérique

Les figures 3.12 et 3.13 présentent l'évolution de l'erreur en norme $L2$ pour l'estimation du gradient au centre des cellules par une méthode de *Moindres Carrés Pondérés* - *WLSQ* - en fonction de la taille de maille caractéristique moyenne pour des maillages respectivement quadrangulaires et triangulaires. En comparant les résultats *WLSQ* présentés sur ces figures à ceux des figures 3.4 et 3.5 présentant les résultats *LSQ*, on constate en premier lieu que l'introduction d'une pondération ne dégrade pas (mais n'améliore pas non plus) l'ordre de précision du calcul du gradient au centre de la cellule : l'ordre deux reste assuré en maillages quadrangulaires réguliers et étirés tandis que l'ordre un reste obtenu en maillages quadrangulaires déformés et en maillages triangulaires.

Les figures 3.14 et 3.15 illustrent la comparaison de l'erreur commise pour l'estimation du gradient au centre de la cellule entre la méthode *LSQ* classique et la méthode *WLSQ* pour des supports de rangs différents sur des maillages respectivement quadrangulaires déformés et triangulaires déformés. Seuls

les maillages déformés sont présentés car ils correspondent au cas le plus général qui nous intéresse. La première constatation est que l'écart $\log(\|\epsilon^{LSQ}\|_2) - \log(\|\epsilon^{WLSQ}\|_2)$ est toujours positif. Ceci signifie que l'utilisation de la pondération dans la méthode *WLSQ* contribue à la réduction de l'erreur donc à l'amélioration de la précision lors de l'estimation du gradient au centre des cellules. Dans les maillages quadrangulaires déformés les plus fins utilisés (cf. la partie gauche de la Fig.3.14), la réduction d'erreur offerte par l'approche *WLSQ* est de l'ordre de 40% pour une méthode utilisant un support de rang un. Cette réduction atteint quasiment 50% pour un support de rang deux ou trois, toujours dans les maillages quadrangulaires les plus fins. L'amélioration de la précision offerte par *WLSQ* bénéficie donc d'avantage aux supports étendus qu'au support de rang un. Cette observation reste vérifiée pour les maillages triangulaires déformés avec cependant une réduction d'erreur qui n'excède pas 15% pour un support de rang un mais atteint à nouveau quasiment 50% pour un support de rang trois.

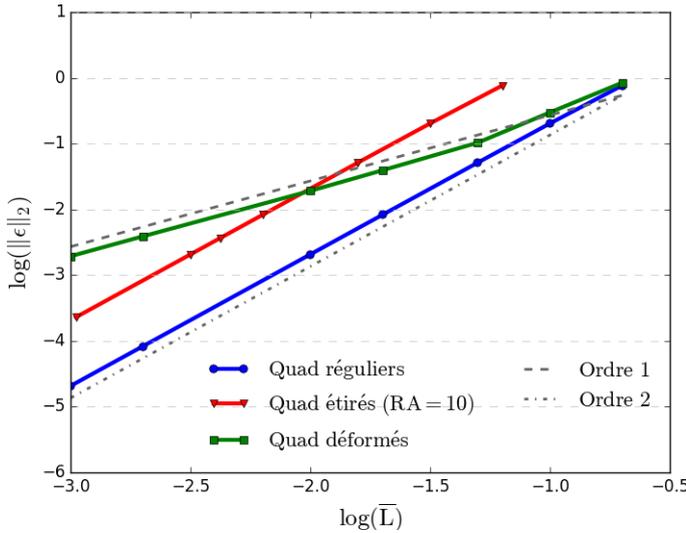


Figure 3.12 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode de *WLSQ* sur maillages quadrangulaires

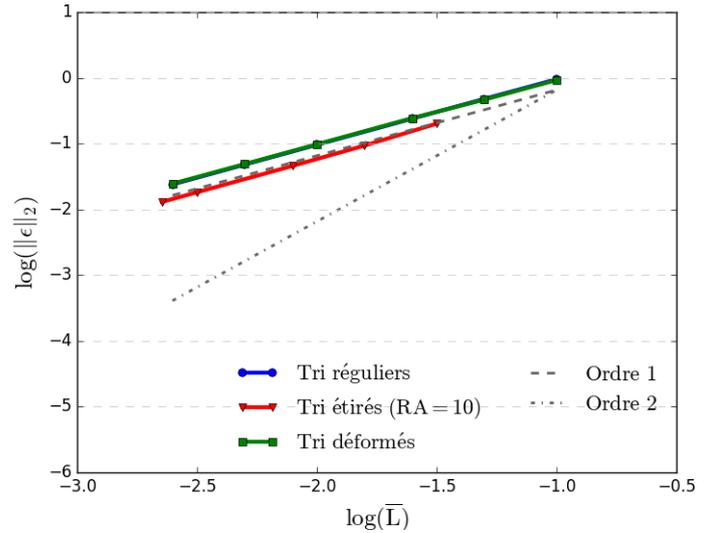


Figure 3.13 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode de *WLSQ* sur maillages triangulaires

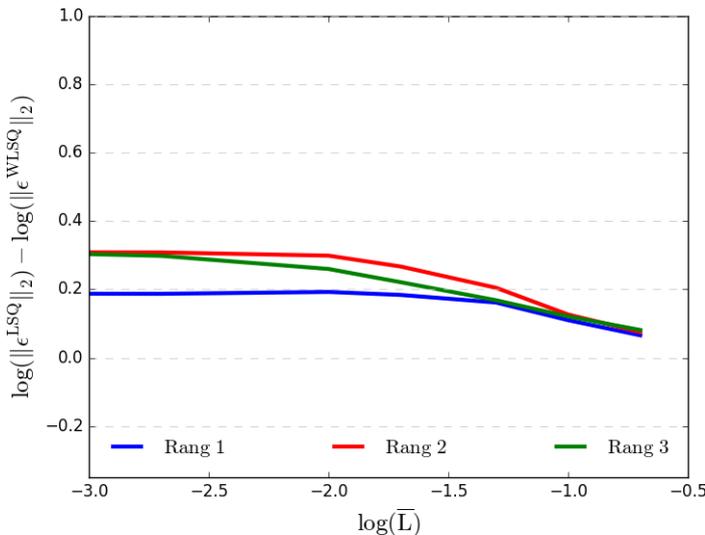


Figure 3.14 – Comparaison de l'erreur commise entre une méthode *LSQ* et *WLSQ* pour un support de rang donné sur maillages quadrangulaires déformés

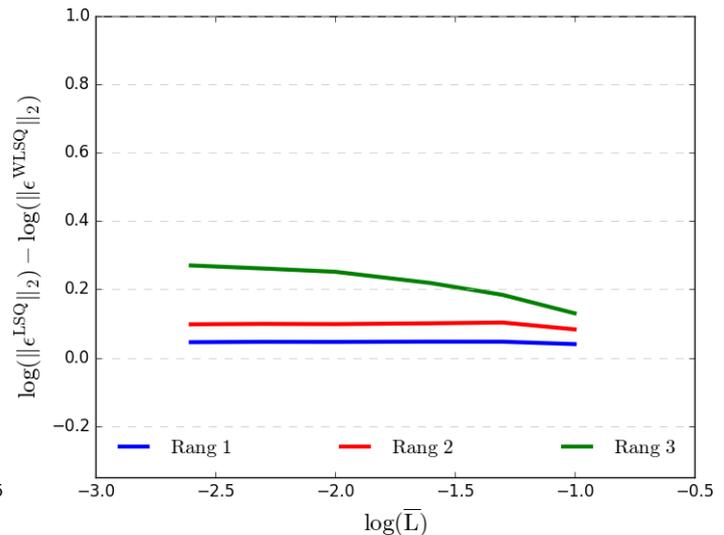


Figure 3.15 – Comparaison de l'erreur commise entre une méthode *LSQ* et *WLSQ* pour un support de rang donné sur maillages triangulaires déformés

Analyse critique

L'utilisation d'une pondération dans l'application de la méthode des *Moindres Carrés* ne dégrade pas l'ordre de précision du gradient calculé au centre des cellules tout en permettant dans certains cas de réduire le niveau de l'erreur commise. L'amélioration de la précision peut même devenir significative dans le cas où le support utilisé est étendu. L'intérêt est en revanche plus limité pour un support de rang un. Ces résultats corroborent ceux obtenus par Mavriplis [80] qui recommande l'utilisation de la pondération sur des maillages étirés et curvilignes. Ces résultats sont aussi à mettre en relation avec ceux obtenus en utilisant une méthode de *Moindres Carrés* sans pondération. En effet, lors de l'étude réalisée pour une méthode de *Moindres Carrés* standard, il a été expliqué que l'extension du support pouvait ajouter des cellules fortement éloignées du volume de contrôle et que l'information fournie par ces cellules était prise en compte avec la même importance que celle venant de cellules directement au contact du volume de contrôle. La pondération permet de réduire l'importance accordée à ces cellules éloignées par rapport à celle accordée aux cellules proches et permet de ce fait d'améliorer la précision de l'estimation du gradient.

Du point de vue de la mise en œuvre pratique, la pondération constitue une amélioration peu coûteuse dans la mesure où seule la matrice $M_{c_i}^{LSQ}$, calculée une fois pour toutes à l'initialisation du calcul puis stockée, est impactée par la modification du système des *Moindres Carrés*.

Dans cette étude, seule une pondération inverse à la distance a été étudiée. Les travaux de Petrovskaja [95] étudient d'un point de vue mathématique l'emploi de pondérations dépendant non seulement de la géométrie mais également de la valeur du champ pour lequel une estimation du gradient est attendue. Ce type de pondération, qualifiée de *data-dependent*, a été évoqué par Barth dès le début des années 1990 dans un cours donné au Von Karman Institute [9] puis mis en œuvre par la suite dans [89] par exemple. Pour notre part, nous n'avons pas davantage creusé la piste de pondérations plus élaborées car nous avons estimé que si celles-ci pouvaient avoir un intérêt en termes de précision, elles risquaient d'avoir un impact surtout lorsqu'elles étaient couplées à des supports étendus. Or, nous avons préféré nous concentrer sur des supports compacts, de rang un, dans la mesure où ceux-ci sont les mieux adaptés à la stratégie d'échange de données entre blocs structurés et non structurés à mettre en œuvre dans elsA-H.

3.1.3 Méthode des *Moindres Carrés Itératifs (LSQite)*

Description

Dans l'optique de travailler directement avec un support de rang un afin de s'affranchir des problèmes liés aux raccords multidomaines tout en intégrant de façon implicite les informations issues de cellules de rang deux, il est possible d'itérer le processus d'estimation *LSQ* du gradient, en s'inspirant ainsi du travail accompli par Haider dans [53]. L'approche obtenue sera dénommée *LSQite* et nous en décrivons maintenant les principes de mise en œuvre.

Un premier calcul de gradient $\widetilde{\nabla}\psi$ est réalisé par la méthode des *Moindres Carrés* avec un support de rang un sur l'ensemble des cellules du domaine de calcul. À l'issue de cette opération, toutes les cellules c_j de centre J du voisinage V_{c_i} de la cellule c_i disposent de la valeur du champ ψ ainsi que de son gradient $\widetilde{\nabla}\psi$. Dès lors, il est possible de calculer le gradient de chacune des composantes de $\widetilde{\nabla}\psi$ sur la cellule c_i . Cette opération qui consiste en la réalisation de deux *Moindres Carrés* supplémentaires en dimension deux ou de trois en dimension trois avec un support de rang un, donne accès à une estimation de la hessienne H_I^ψ pour la variable ψ en I . On peut réécrire le système (3.1) en utilisant un développement de Taylor à l'ordre deux :

$$\begin{cases} \mathbf{I}\mathbf{J}.\nabla\psi_I = \delta\psi_{IJ} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\mathbf{J}^t H_I^\psi \mathbf{I}\mathbf{J} \\ \forall c_j \in V_{c_i} \end{cases} \quad (3.7)$$

La résolution de ce nouveau système de *Moindres Carrés* fournit une valeur du gradient pour la variable ψ en c_i corrigée par la Hessienne H_I^ψ . Étant donné que le calcul de cette hessienne H_I^ψ

s'appuie sur les gradients des cellules directement voisines de la cellule c_i et que ces gradients des cellules voisines sont eux-mêmes obtenus en utilisant le voisinage de rang un de ces cellules voisines, le support réellement utilisé pour calculer ce gradient implique des cellules de rang deux alors qu'en pratique, seuls des voisinages de rang un ont été utilisés. Il convient en revanche d'ajouter dans le processus l'échange entre les différents blocs des valeurs de $\widetilde{\nabla\psi}$ immédiatement après son obtention pour pouvoir correctement déterminer H_I^ψ .

Par ailleurs, la résolution du système (3.7) peut être facilitée en réutilisant la solution $\widetilde{\nabla\psi}_I$ obtenue lors de la résolution du système (3.1) dans la première étape de cette procédure. Dans ce but, le système est réécrit sous sa forme matricielle, comme en (3.2), soit dans le cas présent :

$$M_{c_i} \nabla\psi_I = \Delta_{c_i}(\psi) - h_I^\psi \quad (3.8)$$

avec le vecteur colonne h_I^ψ défini comme :

$$h_I^\psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} \delta x_{IJ_1} & \delta y_{IJ_1} & \delta z_{IJ_1} \end{matrix} \right) H_I^\psi \left(\begin{matrix} \delta x_{IJ_1} & \delta y_{IJ_1} & \delta z_{IJ_1} \end{matrix} \right)^t \\ \vdots \\ \left(\begin{matrix} \delta x_{IJ_{N_{V_{c_i}}}} & \delta y_{IJ_{N_{V_{c_i}}}} & \delta z_{IJ_{N_{V_{c_i}}}} \end{matrix} \right) H_I^\psi \left(\begin{matrix} \delta x_{IJ_{N_{V_{c_i}}}} & \delta y_{IJ_{N_{V_{c_i}}}} & \delta z_{IJ_{N_{V_{c_i}}}} \end{matrix} \right)^t \end{pmatrix}$$

où $\{c_{jk}, k \in [1, N_{V_{c_i}}]\} = V_{c_i} (= V_{c_i}^1)$. Le système (3.8) peut alors être résolu par exemple par la méthode de l'équation normale. L'équation (3.8) est ainsi multipliée par $M_{c_i}^t$:

$$M_{c_i}^t M_{c_i} \nabla\psi_I = M_{c_i}^t \Delta_{c_i}(\psi) - M_{c_i}^t h_I^\psi \quad (3.9)$$

Si la matrice $M_{c_i}^t M_{c_i}$ est inversible alors le système précédent peut être inversé pour obtenir :

$$\nabla\psi_I = \left(M_{c_i}^t M_{c_i} \right)^{-1} M_{c_i}^t \Delta_{c_i}(\psi) - \left(M_{c_i}^t M_{c_i} \right)^{-1} M_{c_i}^t h_I^\psi \quad (3.10)$$

Sachant que $\widetilde{\nabla\psi}_I = \left(M_{c_i}^t M_{c_i} \right)^{-1} M_{c_i}^t \Delta_{c_i}(\psi)$ grâce à l'équation (3.4) et en réutilisant la notation $M_{c_i}^{LSQ} = \left(M_{c_i}^t M_{c_i} \right)^{-1} M_{c_i}^t$ précédemment introduite, l'équation (3.10) peut être finalement mise sous la forme :

$$\nabla\psi_I = \widetilde{\nabla\psi}_I - M_{c_i}^{LSQ} h_I^\psi \quad (3.11)$$

Cette expression laisse bien apparaître que la stratégie itérative mise en œuvre constitue en réalité une correction du gradient initialement calculé par une méthode de *Moindres Carrés* classiques sur un support de rang un. Cette correction s'appuie sur une estimation de la Hessienne du volume de contrôle, utilisant des données de cellule de rang deux.

Étude du comportement numérique

Les figures 3.16 et 3.17 fournissent une représentation graphique de l'évolution de l'erreur commise sur l'estimation du gradient au centre des cellules en fonction de la taille caractéristique moyenne des cellules pour un ensemble de maillages respectivement quadrangulaires et triangulaires lorsque l'approche *LSQite* qui vient d'être décrite est appliquée. Sur les maillages quadrangulaires réguliers et quadrangulaires étirés, la régularité géométrique des maillages permet à la méthode *LSQite* d'estimer le gradient au centre des cellules avec une erreur d'ordre deux. Pour les maillages quadrangulaires déformés, l'ordre deux est obtenu sur les premiers niveaux de maillage mais l'ordre un seulement est réalisé sur les maillages les plus fins. Sur les maillages triangulaires, la méthode *LSQite* commet une erreur d'ordre un et celle-ci est assez équivalente sur différents types de triangles. Ces résultats peuvent être mis en rapport avec les résultats *LSQ* présentés sur les figures 3.6 et 3.7.

Pour faciliter la comparaison entre *LSQ* et *LSQite*, les figures 3.18 et 3.19 présentent la différence entre l'erreur commise par une méthode *LSQ* classique et une méthode *LSQite* sur des maillages

respectivement quadrangulaires et triangulaires. La première constatation réside dans le fait que l'écart entre l'erreur commise par la méthode LSQ et celle commise par la méthode $LSQite$ est toujours positif. Ainsi, la méthode $LSQite$ améliore ou en tout cas maintient la précision par rapport à la méthode LSQ classique dans tous les maillages considérés. Sur les maillages quadrangulaires réguliers et quadrangulaires étirés, la précision est simplement maintenue par rapport à une méthode LSQ . Cela est sûrement dû à la régularité géométrique de ces maillages qui confère une précision supplémentaire à la méthode LSQ . Sur tous les autres maillages, un apport net de précision par la méthode $LSQite$ est observable. Dans les maillages quadrangulaires déformés les plus fins, la réduction d'erreur obtenue est presque de 90 %. En maillage triangulaire régulier, cette diminution d'erreur est de l'ordre de 55 %.

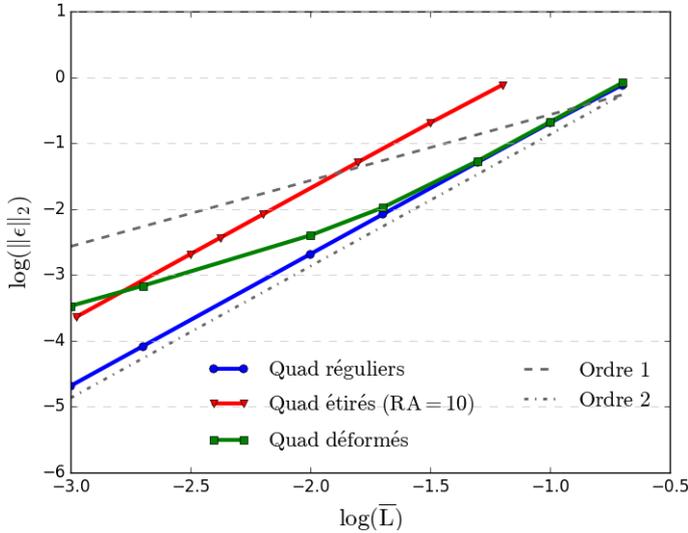


Figure 3.16 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode de $LSQite$ sur maillages quadrangulaires

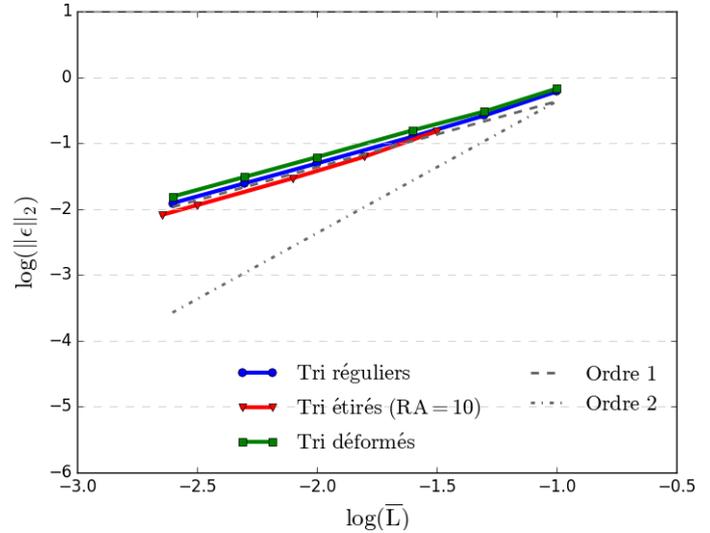


Figure 3.17 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode de $LSQite$ sur maillages triangulaires

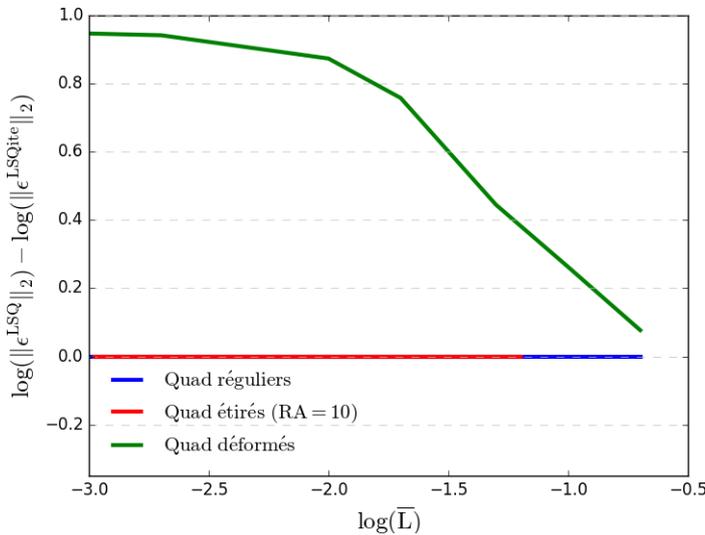


Figure 3.18 – Comparaison de l'erreur commise entre une méthode LSQ et $LSQite$ sur maillages quadrangulaires

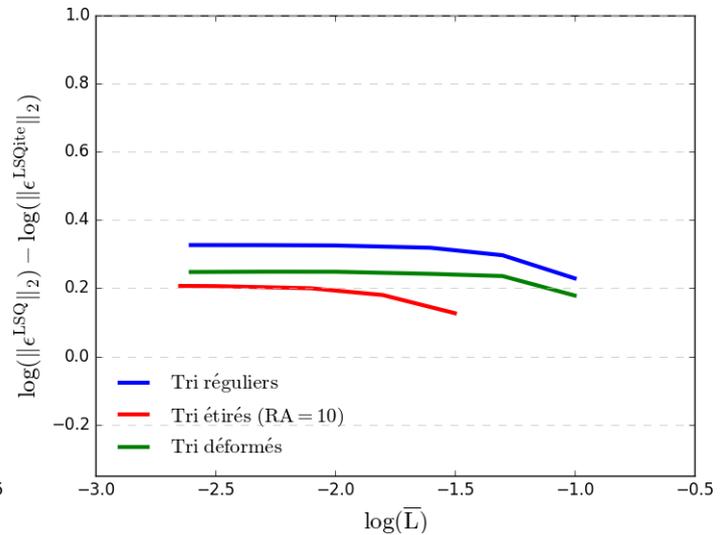


Figure 3.19 – Comparaison de l'erreur commise entre une méthode LSQ et $LSQite$ sur maillages triangulaires

Analyse critique

La méthode $LSQite$, telle qu'elle a été présentée ici, ne permet pas d'améliorer l'ordre de précision du gradient - même si elle offre une réduction parfois significative du niveau d'erreur commise sur cette estimation du gradient. Cependant cette méthode est très coûteuse puisqu'il faut ajouter au calcul

de gradient par la méthode *LSQ* : une étape d'échange des gradients aux raccords, deux calculs de gradients, si l'on est en dimension deux, trois sinon, par *LSQ* afin de déterminer la Hessienne et un dernier calcul de gradient pour corriger le gradient initialement calculé. En sachant que le calcul de gradient représente une partie non négligeable du temps de calcul d'une itération, le surcoût occasionné, estimable à trois ou quatre opérations de calcul de gradient, constitue un véritable frein à l'utilisation de cette stratégie.

3.1.4 Méthode de *quasi-Green* (*qG*)

Comme indiqué dans l'introduction du présent chapitre, on pourra trouver dans [96] les détails théoriques relatifs à l'approche *quasi-Green*, également exposée dans [79]. Nous proposons ici une interprétation différente de la méthode qui conduit à une formulation rigoureusement équivalente.

3.1.4.1 Quelques résultats préliminaires utiles

Utilisation du théorème de *Green-Gauss*

Le théorème de *Green-Gauss* permet d'écrire, pour un volume E de surface fermée associée Σ , la relation :

$$\iiint_E \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dx \, dy \, dz = \oiint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.12)$$

En utilisant cette relation, le volume $|\Omega_E|$ de E peut être exprimé comme suit :

$$\Omega_E = \iiint_E 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_E \operatorname{div}(x, 0, 0) \, dx \, dy \, dz = \oiint_{\Sigma} (x, 0, 0) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

soit encore, en intégrant sur les faces f qui composent Σ :

$$|\Omega_E| = \sum_{f \in \Sigma} (x_F, 0, 0) \cdot \mathbf{n}_f |\Sigma_f|$$

avec $F = (x_F, y_F, z_F)$ le centre de la face f , $\mathbf{n}_f = (n_{f_x}, n_{f_y}, n_{f_z})$ le vecteur unitaire normal à cette face et $|\Sigma_f|$ la surface de la face f . On peut aussi écrire :

$$\sum_{f \in \Sigma} x_F n_{f_x} |\Sigma_f| = |\Omega_E| \quad (3.13)$$

De façon alternative, le volume de E peut aussi s'exprimer comme :

$$|\Omega_E| = \iiint_E 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_E \operatorname{div}(x, x, 0) \, dx \, dy \, dz = \oiint_{\Sigma} (x, x, 0) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

soit par intégration sur les faces composant Σ :

$$|\Omega_E| = \sum_{f \in \Sigma} (x_F, x_F, 0) \cdot \mathbf{n}_f |\Sigma_f|$$

ou encore

$$|\Omega_E| = \sum_{f \in \Sigma} x_F n_{f_x} |\Sigma_f| + \sum_{f \in \Sigma} x_F n_{f_y} |\Sigma_f|$$

En utilisant l'identité (3.13) on obtient finalement :

$$\sum_{f \in \Sigma} x_F n_{f_y} |\Sigma_f| = 0 \quad (3.14)$$

On retient donc ces identités géométriques (3.13), (3.14).

Identité matricielle

Soient \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} trois vecteurs colonnes de \mathbb{R}^3 tels que $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^t$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^t$ et $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^t$. Il existe alors une matrice M indépendante de \mathbf{b} telle que $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = M \mathbf{b}$. On a en effet :

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 b_1 + a_2 c_1 b_2 + a_3 c_1 b_3 \\ a_1 c_2 b_1 + a_2 c_2 b_2 + a_3 c_2 b_3 \\ a_1 c_3 b_1 + a_2 c_3 b_2 + a_3 c_3 b_3 \end{pmatrix}$$

et puisque

$$\begin{pmatrix} a_1 c_1 & a_2 c_1 & a_3 c_1 \\ a_1 c_2 & a_2 c_2 & a_3 c_2 \\ a_1 c_3 & a_2 c_3 & a_3 c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 c_1 b_1 + a_2 c_1 b_2 + a_3 c_1 b_3 \\ a_1 c_2 b_1 + a_2 c_2 b_2 + a_3 c_2 b_3 \\ a_1 c_3 b_1 + a_2 c_3 b_2 + a_3 c_3 b_3 \end{pmatrix}$$

alors, en choisissant $M = \begin{pmatrix} a_1 c_1 & a_2 c_1 & a_3 c_1 \\ a_1 c_2 & a_2 c_2 & a_3 c_2 \\ a_1 c_3 & a_2 c_3 & a_3 c_3 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \mathbf{c}^t = \mathbf{c} \otimes \mathbf{a}$, on établit l'identité :

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = M \mathbf{b} \tag{3.15}$$

3.1.4.2 Établissement de la formule *quasi-Green*

Notations

On reprend ici les notations utilisées jusqu'à présent pour l'établissement de différentes formules de discrétisation spatiale et récapitulées sur la figure 2.13 - ces notations sont aussi rappelées sur la figure 3.20. On considère donc toujours une cellule c_i de centre I , de volume $|\Omega_{c_i}|$ et on note \mathcal{F}_{c_i} l'ensemble des faces de c_i . Soit $f \in \mathcal{F}_{c_i}$ une face de centre F , de surface $|\Sigma_f|$ et de normale unitaire \mathbf{n}_f . La face f est supposée partagée par c_i et par c_i^f de centre I^f . Le point P est l'intersection entre le segment $[II^f]$ joignant les centres et la face f . Si ψ est un champ scalaire (typiquement une composante du vecteur \mathbf{W} des variables conservatives ou du vecteur \mathbf{U} des variables primitives), alors $\bar{\psi}_{c_i}$ désigne toujours la valeur moyenne de ψ dans la cellule c_i tandis que ψ_I est la valeur de ψ au centre I de la cellule ; les deux quantités diffèrent d'un terme d'ordre deux : $\psi_I = \bar{\psi}_{c_i} + \mathcal{O}(h^2)$, avec h une dimension caractéristique de la cellule c_i (par exemple la racine cubique de son volume).

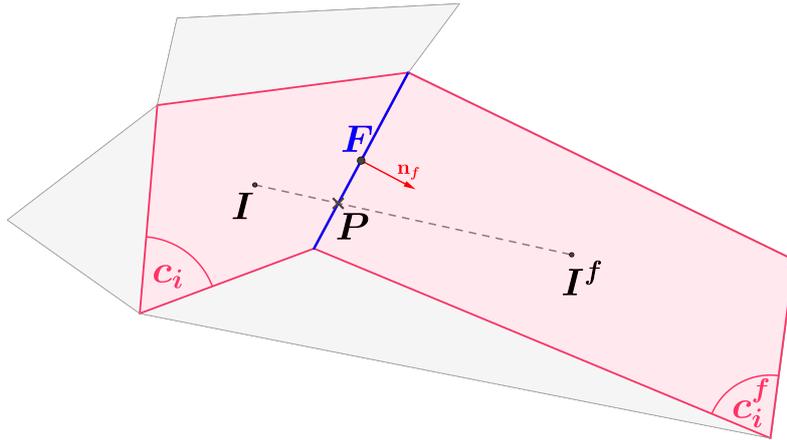


Figure 3.20 – Notations utilisées dans l'établissement de la formule *quasi-Green*.

Démonstration

Le gradient moyen dans la cellule c_i est donné, à l'ordre deux, par le théorème de *Green-Gauss* :

$$\bar{\nabla} \psi_{c_i} = \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} \psi_F |\Sigma_f| \mathbf{n}_f \tag{3.16}$$

Par rapport à l'approche *Green-Gauss* classique, l'idée est d'estimer ψ au point F de façon plus précise que la simple moyenne arithmétique des états aux points I et I^f (cf. (2.44)) ou la moyenne pondérée (2.52) afin d'éviter la non-consistance du calcul du gradient sur des maillages quelconques. Si on suppose, pour les besoins de la démonstration, le gradient exact $\overline{\nabla\psi}_{c_i}$ connu, alors un développement de Taylor autour du point P permet d'exprimer la valeur de ψ au point F sous la forme :

$$\psi_F = \psi_P + \mathbf{PF} \cdot \overline{\nabla\psi}_{c_i} + \mathcal{O}(h^2)$$

En utilisant alors cette expression de ψ_F dans (3.16) on obtient :

$$\overline{\nabla\psi}_{c_i} = \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} \psi_P |\Sigma_f| \mathbf{n}_f + \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} [|\Sigma_f| (\mathbf{PF} \cdot \overline{\nabla\psi}_{c_i}) \mathbf{n}_f] \quad (3.17)$$

Le premier terme au membre de droite de (3.17) correspond au gradient classiquement estimé par l'approche *Green-Gauss*, ou encore, plus précisément, au gradient estimé par la méthode de *Green-Gauss* en utilisant P comme point d'intégration et en calculant :

$$\psi_P = \alpha_f \psi_{I^f} + (1 - \alpha_f) \psi_I \quad (3.18)$$

avec $\alpha_f = \frac{\|\mathbf{IP}\|}{\|\mathbf{IF}\|}$.

D'après l'identité matricielle établie dans les résultats préliminaires, nous savons qu'il existe une matrice \mathbf{M}_f de dimension $(3, 3)$ telle que :

$$(\mathbf{PF} \cdot \overline{\nabla\psi}_{c_i}) \mathbf{n}_f = M_f \overline{\nabla\psi}_{c_i} \quad (3.19)$$

La matrice M_f est uniquement déterminée à partir des métriques du maillage et s'exprime comme suit en fonction de \mathbf{n}_f et \mathbf{PF} :

$$M_f = \begin{pmatrix} (x_F - x_P) n_{f_x} & (y_F - y_P) n_{f_x} & (z_F - z_P) n_{f_x} \\ (x_F - x_P) n_{f_y} & (y_F - y_P) n_{f_y} & (z_F - z_P) n_{f_y} \\ (x_F - x_P) n_{f_z} & (y_F - y_P) n_{f_z} & (z_F - z_P) n_{f_z} \end{pmatrix} = \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{PF}$$

En tenant compte de (3.19) dans (3.17), on peut aussi écrire :

$$\overline{\nabla\psi}_{c_i} = \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} \psi_P |\Sigma_f| \mathbf{n}_f + \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} [|\Sigma_f| M_f \overline{\nabla\psi}_{c_i}]$$

Puisque le gradient moyen dans la cellule $\overline{\nabla\psi}_{c_i}$ ne dépend pas de f , il peut être sorti de la somme sur les faces pour obtenir finalement :

$$\left(|\Omega_{c_i}| Id_3 - \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} [|\Sigma_f| M_f] \right) \overline{\nabla\psi}_{c_i} = \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} \psi_P |\Sigma_f| \mathbf{n}_f \quad (3.20)$$

avec Id_3 la matrice identité de dimension (3×3) . En utilisant maintenant les identités géométriques établies dans les résultats préliminaires, on peut mettre sous la forme suivante le terme $|\Omega_{c_i}| Id_3$ qui apparaît au membre de gauche de (3.20) en facteur de $\overline{\nabla\psi}_{c_i}$:

$$|\Omega_{c_i}| Id_3 = \begin{pmatrix} \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} (x_F - x_I) n_{f_x} |\Sigma_f| & \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} (y_F - y_I) n_{f_x} |\Sigma_f| & \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} (z_F - z_I) n_{f_x} |\Sigma_f| \\ \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} (x_F - x_I) n_{f_y} |\Sigma_f| & \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} (y_F - y_I) n_{f_y} |\Sigma_f| & \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} (z_F - z_I) n_{f_y} |\Sigma_f| \\ \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} (x_F - x_I) n_{f_z} |\Sigma_f| & \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} (y_F - y_I) n_{f_z} |\Sigma_f| & \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} (z_F - z_I) n_{f_z} |\Sigma_f| \end{pmatrix} = \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} |\Sigma_f| \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{IF}$$

En tenant compte alors de cette expression et de la définition de la matrice \mathbf{M}_f , la relation (3.20) peut être mise sous la forme :

$$\left(\sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} |\Sigma_f| \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{IF} \right) \overline{\nabla\psi}_{c_i} = \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} \psi_P |\Sigma_f| \mathbf{n}_f$$

et puisque $\mathbf{IP} = \alpha_f \mathbf{II}^f$:

$$\left(\sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} |\Sigma_f| \alpha_f \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{II}^f \right) \nabla \psi_{c_i} = \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} \psi_P |\Sigma_f| \mathbf{n}_f$$

En posant alors

$$M = \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} |\Sigma_f| \alpha_f \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{II}^f \quad (3.21)$$

on peut finalement calculer le gradient au centre de la cellule, estimé comme le gradient moyen dans la cellule, à l'aide de l'expression :

$$\nabla \psi_I = M^{-1} \sum_{f \in \mathcal{F}_{c_i}} \psi_P |\Sigma_f| \mathbf{n}_f \quad (3.22)$$

où ψ_P est donné par (3.18). Ainsi le gradient au centre de la cellule c_i peut être vu comme la correction par la matrice M^{-1} d'un gradient calculé par la méthode de *Green-Gauss* aux différentes intersections entre les faces et les droites reliant le centre I de la cellule c_i avec les centres des cellules voisines.

3.1.4.3 Étude du comportement numérique

L'évolution de l'erreur commise sur l'estimation du gradient au centre des cellules calculée par une méthode de qG en fonction de la longueur caractéristique moyenne de cellule sur différents maillages quadrangulaires et triangulaires est représentée respectivement sur les figures 3.21 et 3.22. On constate ainsi que, comme l'approche *LSQ* et contrairement à la méthode *Green-Gauss*, la méthode *quasi-Green* permet bien d'obtenir au minimum un gradient d'ordre un sur tout type de maillage. Par ailleurs, les figures 3.23 et 3.24 permettent d'évaluer l'apport de qG par rapport à *LSQ* en présentant la différence entre l'erreur commise par une méthode *LSQ* classique et une méthode qG sur différents maillages. On constate ainsi que la méthode qG présente sur l'ensemble des maillages une précision au minimum équivalente à celle obtenue par la méthode *LSQ*. Sur des maillages quadrangulaires déformés, l'intérêt de l'utilisation de la méthode qG pour améliorer la précision est très net puisque l'erreur est diminuée de 40% environ par rapport à l'approche *LSQ* dans les maillages les plus fins. Une diminution encore un peu plus forte est également offerte dans les maillages triangulaires étirés.

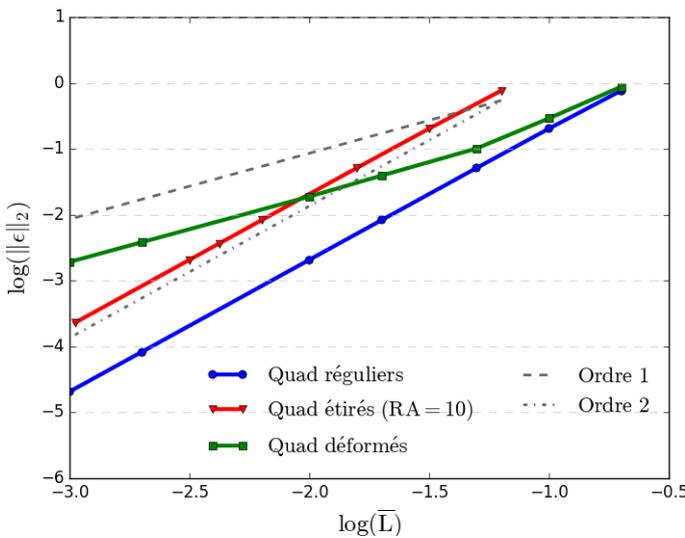


Figure 3.21 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode *quasi-Green* sur maillages quadrangulaires

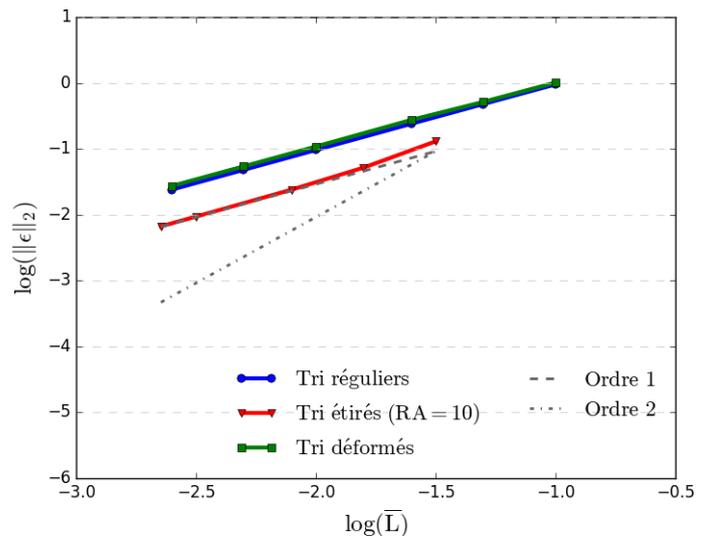


Figure 3.22 – Précision du calcul des gradients au centre des cellules par la méthode *quasi-Green* sur maillages triangulaires

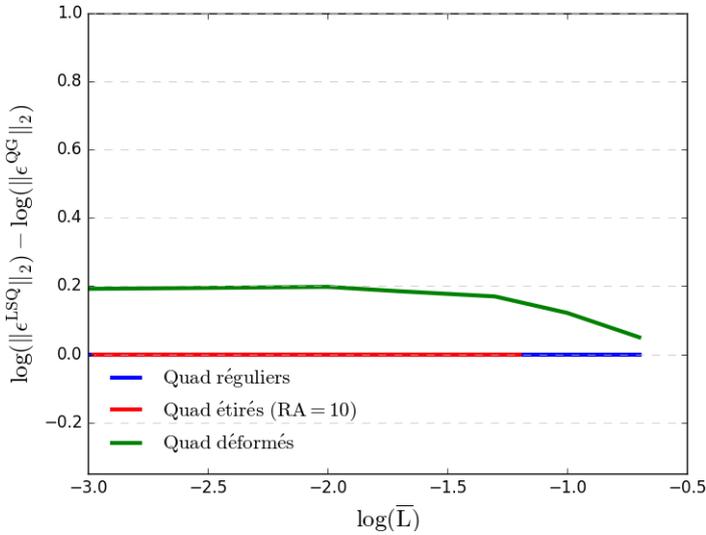


Figure 3.23 – Comparaison de l’erreur com- mise entre une méthode LSQ et qG sur maillages quadrangulaires

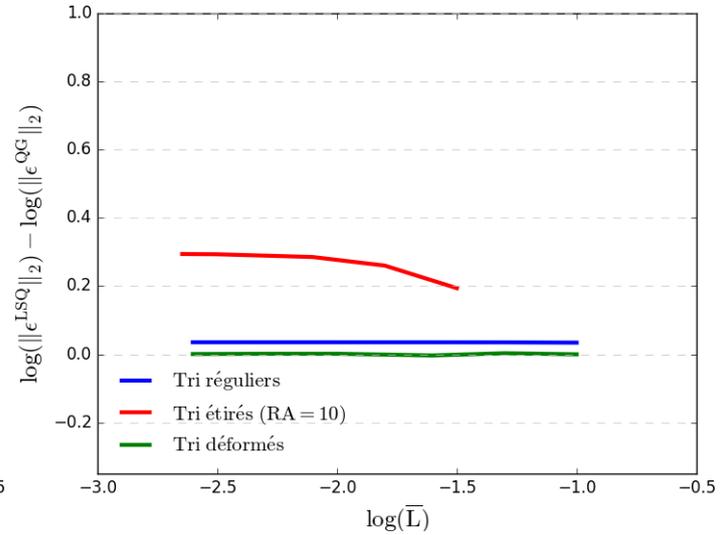


Figure 3.24 – Comparaison de l’erreur com- mise entre une méthode LSQ et qG sur maillages triangulaires

Analyse critique

La méthode qG offre clairement de bonnes propriétés de précision. En outre, son implémentation est assez aisée car il suffit de corriger un calcul de gradient réalisé par la méthode de *Green-Gauss* en faisant appel à une matrice qui ne dépend que de la métrique du problème considéré. Le procédé ressemble à celui d’un calcul de gradient par une méthode de *Moindres Carrés* dans la mesure où cette matrice peut être calculée une fois pour toute en initialisation du calcul. Le coût de mise en œuvre de l’approche qG est donc comparable à celui de l’approche LSQ standard.

3.1.5 Conclusions

Nous avons établi à ce stade qu’il était possible de corriger les défauts de l’approche GG mis en évidence au chapitre précédent en faisant appel à une approche de type LSQ ou qG . Ces deux stratégies, de coût équivalent, permettent d’obtenir une estimation d’ordre un au moins du gradient au centre de la cellule de contrôle pour tout type de maillage - alors que, dans le même temps, l’approche GG pouvait conduire à des estimations d’ordre zéro (non consistantes) du gradient dans des maillages non réguliers. Nous retiendrons par la suite ces deux approches LSQ et qG pour mettre en œuvre le schéma de Roe avec reconstruction linéaire. Les variantes de type $WLSQ$ ou $LSQite$ ne seront pas davantage étudiées dans la mesure où elles n’ont pas démontré d’intérêt suffisant dans le cadre de la présente analyse réalisée sur problème modèle.

Rappelons également que ces gradients aux centres des cellules sont utilisés dans la reconstruction linéaire pour estimer les états à gauche et à droite du centre de la face suivant la formule (non limitée) (2.39), rappelée ici :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_F^L = \mathbf{U}_I + \mathbf{IF} \cdot \nabla \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_F^R = \mathbf{U}_{I^f} + \mathbf{I}^f \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{U}_{I^f} \end{cases}$$

Comme souligné au chapitre précédent dans (2.3.2), il est important de corriger la formulation initiale de elsA-H dans laquelle la reconstruction était en fait effectuée au point M milieu du segment connectant les centres I et I^f des cellules partageant la face f , ce qui ne permettait pas d’assurer une précision d’ordre deux de la discrétisation spatiale dans le cas général. Par conséquent, les processus de limitation initialement disponibles s’appuyant sur cette reconstruction au point M ne sont pas adaptés à une reconstruction au centre de la face. La stratégie de limitation proposée en 4 devra être compatible avec une telle reconstruction.

3.2 Estimation des gradients au centre des faces

Le calcul des gradients au centre face doit pouvoir être réalisé à l'ordre un sur tout type de maillage. L'analyse des méthodes *5p* et *5pcor* présentes dans elsA-H qui a été menée au chapitre précédent (cf. 2.3.3) a permis de montrer que ces deux méthodes répondent à ce besoin, dès lors que des estimations d'ordre un des gradients aux centres sont bien disponibles - ce qui est désormais établi grâce à *LSQ* ou *qG*. On s'intéresse néanmoins ici aux alternatives permettant d'estimer un gradient au centre face de façon éventuellement moins coûteuse ou plus précise. Dans cet esprit, deux méthodes s'appuyant sur un parcours diamant sont tout d'abord présentées. Enfin, des améliorations pour les méthodes *5p* et *5pcor* sont proposées et étudiées.

3.2.1 Parcours diamant

Description

Dans ses travaux de thèse [27], Coirier introduit une méthode de calcul des gradients à la face. Plusieurs variantes de sa méthode existent et sont utilisées, par exemple dans [74], [30]. Cependant toutes ces méthodes s'appuient sur l'élément de base de la stratégie proposée par Coirier : l'utilisation d'un parcours dit diamant autour de la face, ainsi dénommé en raison de son allure géométrique qui va être détaillée maintenant. Soit F le centre d'une face f partagée par les cellules c_i et c_i^f de centre respectif I et I^f . La face f est constituée d'un ensemble de m nœuds : $\{N_k^f, k \in [1 \dots m]\}$. Le parcours diamant est alors constitué par l'ensemble des facettes, éléments de dimension égale à la dimension du problème moins un, reliant ces nœuds aux centres des cellules se partageant la face. Les centres de ces facettes sont notés par $\{D_k^f, k \in [1 \dots m]\}$ et le domaine dont le contour est constitué de l'ensemble de ces facettes est noté \mathcal{D}_f . Par exemple, pour une configuration de dimension deux, la figure 3.25 illustre à la fois les notations et présente le parcours diamant en tirets verts. Une fois ce parcours défini, la méthode correspond à un calcul de gradient par la méthode de *Green-Gauss* sur le contour diamant. On approche en effet la valeur du gradient en F par la valeur moyenne du gradient sur \mathcal{D}^f :

$$\nabla\psi_F = \overline{\nabla\psi_{\mathcal{D}^f}} \quad (3.23)$$

Dès lors le gradient de ψ au point milieu F peut s'écrire :

$$\nabla\psi_F = \frac{1}{|\Omega_{\mathcal{D}^f}|} \sum_{f_k \in F_{\mathcal{D}^f}} \psi_{D_k^f} |S_{f_k}| \mathbf{n}_{f_k} \quad (3.24)$$

Comme expliqué pour le calcul des gradients au centre par la méthode de *Green-Gauss*, l'élément capital de cette stratégie de calcul de gradient est l'estimation des valeurs au centre des facettes, les $\psi_{D_k^f}$. Ici, ces valeurs sont obtenues par moyennes barycentriques des valeurs aux nœuds des facettes f_k . Dans le cas de dimension deux considéré ici, on a ainsi $\psi_{D_k^f}$ qui est obtenu par moyenne entre une valeur prise à un nœud et une valeur prise en un centre de cellule :

$$\begin{cases} \psi_{D_1^f} &= \frac{1}{2} (\psi_I + \psi_{N_1^f}) \\ \psi_{D_2^f} &= \frac{1}{2} (\psi_{I^f} + \psi_{N_1^f}) \\ \psi_{D_3^f} &= \frac{1}{2} (\psi_{I^f} + \psi_{N_2^f}) \\ \psi_{D_4^f} &= \frac{1}{2} (\psi_I + \psi_{N_2^f}) \end{cases} \quad (3.25)$$

Les valeurs au centre des cellules ψ_I et ψ_{I^f} sont connues puisque le code elsA-H est *cell-centered*. Ce n'est en revanche pas le cas des valeurs aux nœuds $\psi_{N_1^f}$ et $\psi_{N_2^f}$ ou de manière plus générale de $\{\psi_{N_k^f}, k \in [1 \dots m]\}$. Le problème rencontré avec l'estimation de la valeur au centre de la face pour calculer correctement un gradient par *Green-Gauss* est reporté avec cette méthode sur l'estimation

des valeurs aux nœuds $\{\psi_{N_k^f}, k \in [1 \dots m]\}$. Les variantes de la stratégie proposée par Coirier se différencient ainsi par leur manière d'estimer ces valeurs aux nœuds. Dans ce travail, deux approches pour calculer les valeurs aux nœuds à partir des valeurs au centre des cellules sont présentées. La première permet d'obtenir une estimation de la valeur de la variable d'intérêt au nœud par moyenne volumique des valeurs au centre des cellules partageant le nœud. La seconde s'appuie sur une reconstruction polynomiale de la valeur au nœud par *Moindres Carrés*. Une fois ces valeurs aux nœuds obtenues, le calcul du gradient à la face est immédiat.

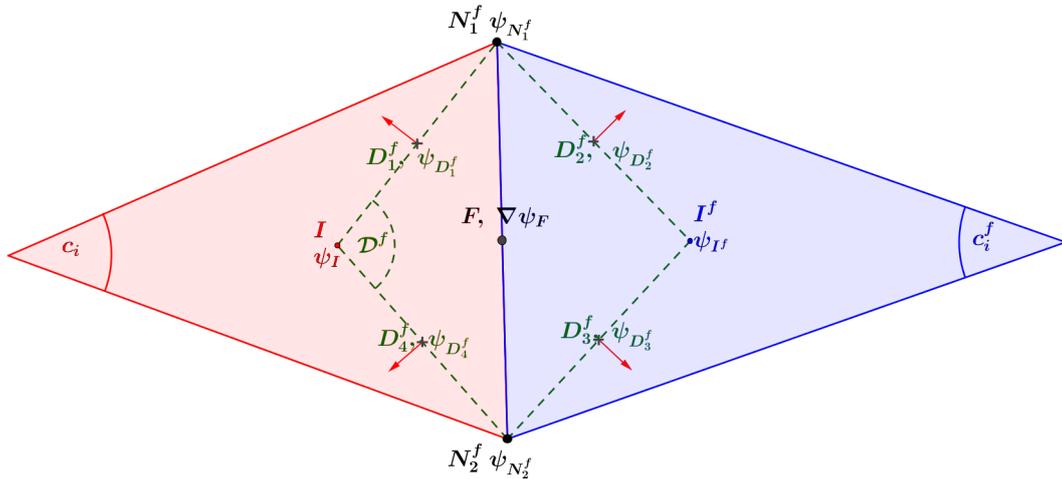


Figure 3.25 – Notations pour la méthode du calcul des gradients au face par parcours diamant

Calcul des valeurs aux nœuds par moyenne volumique

Pour détailler la détermination des valeurs aux nœuds à partir des valeurs au centre des cellules, une notation orientée "node-centered" est adoptée. Soit N le nœud dont on cherche à déterminer la valeur ψ_N et $\{c_k^N, k \in [1 \dots m]\}$ l'ensemble des m cellules ayant le nœud N en commun. La cellule c_k^N a pour centre le point I_k^N où la variable d'intérêt prend la valeur $\psi_{I_k^N}$. Ces notations sont représentées sur la figure 3.26.

La valeur au nœud N s'obtient en écrivant :

$$\psi_N = \frac{\sum_{k=1}^m |\Omega_{c_k^N}| \psi_{I_k^N}}{\sum_{k=1}^m |\Omega_{c_k^N}|} \quad (3.26)$$

On désigne par *diamMoy* la méthode de calcul du gradient au centre face utilisant le parcours diamant avec des valeurs aux nœuds estimées par moyenne volumique.

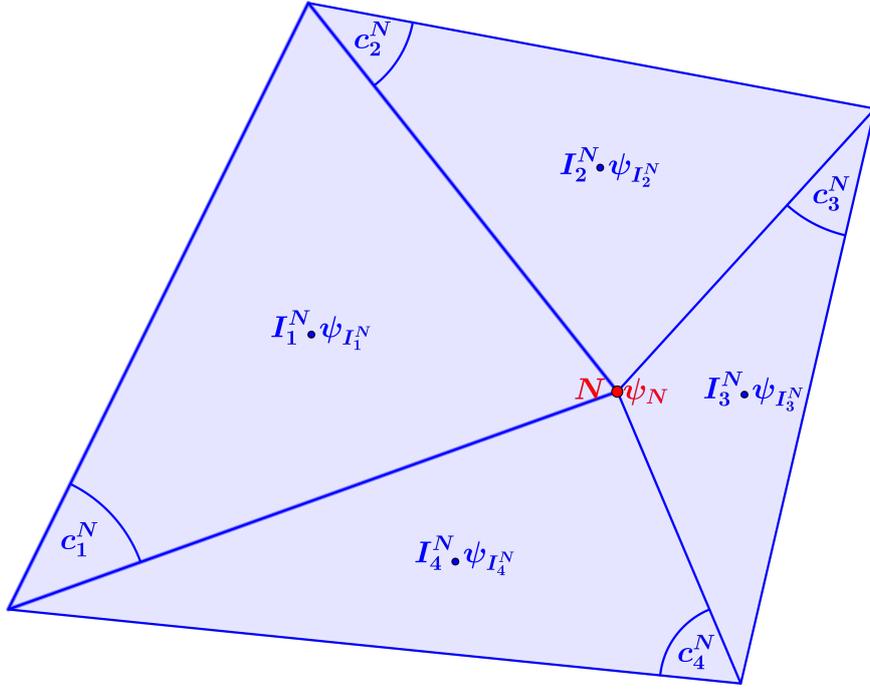


Figure 3.26 – Notations de type "node-centered"

Calcul des valeurs aux nœuds par *Moindres Carrés*

Dans cette approche alternative, la valeur de ψ au nœud N est toujours calculée par une combinaison linéaire des valeurs prises par ψ sur l'ensemble des centres des cellules partageant le nœud N : $\{c_k^N, k \in [1 \cdots m]\}$. Mais au lieu de définir les coefficients de cette combinaison linéaire à partir des volumes (en 3D) ou des surfaces (en 2D) des cellules partageant le nœud comme dans l'approche précédente (3.26), on choisit de déterminer les coefficients de cette combinaison linéaire par une méthode de *Moindres Carrés*. On explique ici les grandes lignes du raisonnement suivi et on renvoie le lecteur à [30] pour plus de détails. Cette stratégie plus sophistiquée permet de corriger les faiblesses de la simple formule (3.26) dans des maillages déformés.

La valeur prise par ψ en N est donc exprimée par la combinaison linéaire suivante :

$$\psi_N = \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_{I_k^N} \quad (3.27)$$

Soit $\tilde{\psi}$ la fonction polynomiale de degré un qui approche au mieux les valeurs prises par ψ sur l'ensemble des centres $\{I_k^N, k \in [1 \cdots m]\}$. Alors $\tilde{\psi}$ peut s'exprimer dans un repère d'origine le nœud N par :

$$\tilde{\psi}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} a + bx + cy \quad (3.28)$$

Le problème à résoudre pour trouver les valeurs des α_k consiste à minimiser $\sum_{k=1}^m \left(\psi_{I_k^N} - (a + bx_{I_k^N} + cy_{I_k^N}) \right)^2$ avec $(x_{I_k^N}, y_{I_k^N})$ les coordonnées du point I_k^N . En dérivant cette expression par rapport à a, b et c , et en notant $\tilde{\psi}_{I_k^N} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\psi}(x_{I_k^N}, y_{I_k^N})$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a \sum_{k=1}^m 1 + b \sum_{k=1}^m x_{I_k^N} + c \sum_{k=1}^m y_{I_k^N} = \sum_{k=1}^m \psi_{I_k^N} \\ a \sum_{k=1}^m x_{I_k^N} + b \sum_{k=1}^m x_{I_k^N}^2 + c \sum_{k=1}^m x_{I_k^N} y_{I_k^N} = \sum_{k=1}^m \psi_{I_k^N} x_{I_k^N} \\ a \sum_{k=1}^m y_{I_k^N} + b \sum_{k=1}^m x_{I_k^N} y_{I_k^N} + c \sum_{k=1}^m y_{I_k^N}^2 = \sum_{k=1}^m \psi_{I_k^N} y_{I_k^N} \end{cases} \quad (3.29)$$

dont les inconnues sont a , b et c . Il peut être réécrit sous la forme matricielle $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \beta$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & R_x & R_y \\ R_x & I_{xx} & I_{xy} \\ R_y & I_{xy} & I_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m 1 & \sum_{k=1}^m x_{I_k^N} & \sum_{k=1}^m y_{I_k^N} \\ \sum_{k=1}^m x_{I_k^N} & \sum_{k=1}^m x_{I_k^N}^2 & \sum_{k=1}^m x_{I_k^N} y_{I_k^N} \\ \sum_{k=1}^m y_{I_k^N} & \sum_{k=1}^m x_{I_k^N} y_{I_k^N} & \sum_{k=1}^m y_{I_k^N}^2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \beta = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m \psi_{I_k^N} \\ \sum_{k=1}^m \psi_{I_k^N} x_{I_k^N} \\ \sum_{k=1}^m \psi_{I_k^N} y_{I_k^N} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Comme le repère est centré sur le nœud N , on a $\widetilde{\psi}_N = a$ et la résolution du système $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \beta$ permet finalement d'établir l'expression du coefficient de pondération α_k en fonction des métriques du maillage :

$$\alpha_k = \frac{1 + \lambda_x x_{I_k^N} + \lambda_y y_{I_k^N}}{m + \lambda_x R_x + \lambda_y R_y} \quad (3.31)$$

en posant : $D = I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2$, $\lambda_x = \frac{I_{xy}R_y - I_{yy}R_x}{D}$ et $\lambda_y = \frac{I_{xy}R_x - I_{xx}R_y}{D}$.

On désigne par *diamLSQ* la méthode de calcul de gradient à la face utilisant le parcours diamant avec des valeurs aux nœuds déterminées par cette approche *Moindres Carrés*.

Étude du comportement numérique

Les figures 3.27 et 3.28 présentent l'évolution de l'erreur commise sur l'estimation du gradient à la face par la méthode *diamMoy* en fonction de la longueur caractéristique moyenne des cellules pour différents maillages quadrangulaires et triangulaires. L'erreur est toujours calculée pour le problème modèle défini en 2.3. Sur des maillages géométriquement réguliers (réguliers et étirés), qu'ils soient de nature triangulaire ou quadrangulaire, la méthode *diamMoy* est précise à l'ordre un, comme les approches *5p* et *5pcor*. En revanche, sur l'ensemble des maillages déformés, la précision de la méthode *diamMoy* tombe à l'ordre zéro.

Les figures 3.29 et 3.30 illustrent également l'évolution de l'erreur de calcul du gradient à la face en fonction d'une taille de maille caractéristique, cette fois-ci pour la méthode *diamLSQ* appliquée en maillages quadrangulaires et triangulaires. La valeur ajoutée par cette approche est ainsi bien mise en évidence puisqu'il apparaît que, quel que soit le maillage considéré, la méthode parvient à assurer une précision asymptotique d'ordre un.

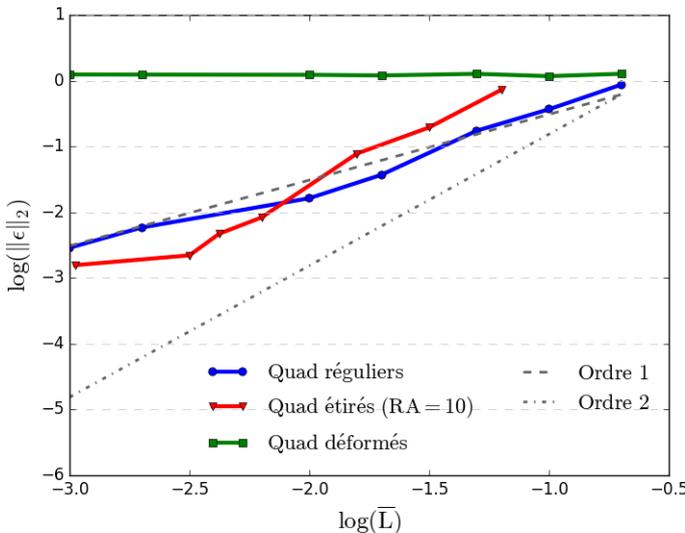


Figure 3.27 – Précision du calcul des gradients au centre face par une méthode *diamMoy* sur maillages quadrangulaires

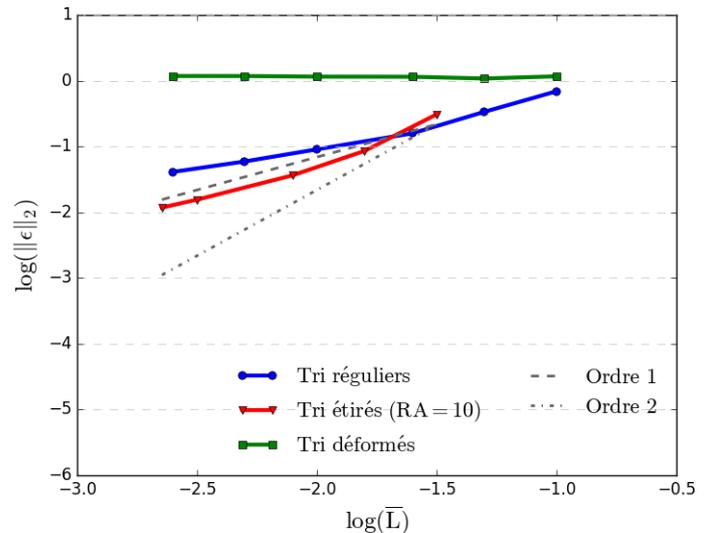


Figure 3.28 – Précision du calcul des gradients au centre face par une méthode *diamMoy* sur maillages triangulaires

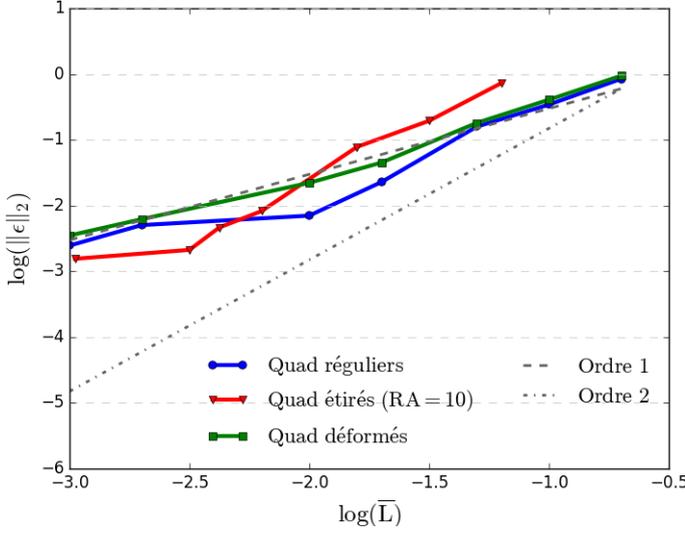


Figure 3.29 – Précision du calcul des gradients au centre face par une méthode *diamLSQ* sur maillages quadrangulaires

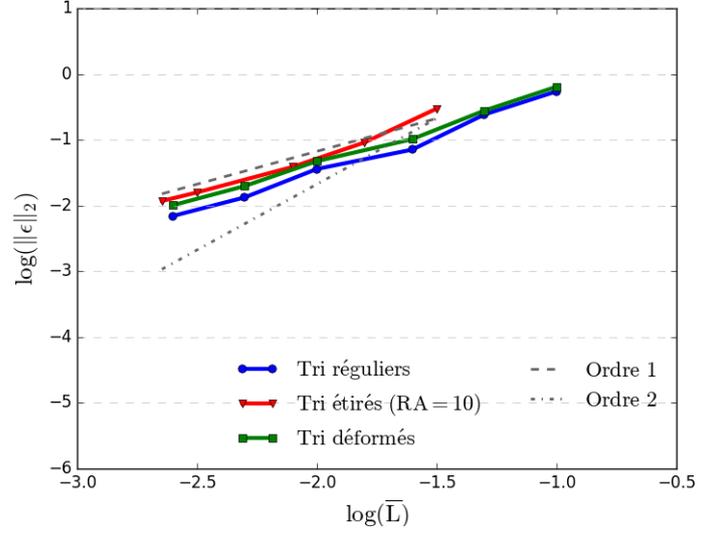


Figure 3.30 – Précision du calcul des gradients au centre face par une méthode *diamLSQ* sur maillages triangulaires

Analyse critique

Les résultats numériques obtenus sur le problème modèle pour la méthode *diamMoy* étaient attendus comme nous allons l'expliquer. Avec les notations définies sur la figure 3.26, on a N un nœud partagé par un ensemble de cellules $\xi = \{c_k^N, k \in [1 \dots m]\}$. La valeur moyenne d'une grandeur d'intérêt ψ sur l'ensemble ξ est donnée par :

$$\bar{\psi}_\xi = \frac{1}{|\Omega_\xi|} \iiint_\xi \psi d\Omega = \frac{1}{|\Omega_\xi|} \sum_{k=1}^m \iiint_{c_k^N} \psi d\Omega = \frac{\sum_{k=1}^m |\Omega_{c_k^N}| \bar{\psi}_{c_k^N}}{|\Omega_\xi|} \quad (3.32)$$

Si on définit C_ξ comme le centre de gravité de ξ , alors on sait que :

$$\psi_{C_\xi} = \bar{\psi}_\xi + O(h^2) = \frac{\sum_{k=1}^m |\Omega_{c_k^N}| \bar{\psi}_{c_k^N}}{|\Omega_\xi|} + O(h^2) \quad (3.33)$$

et un développement de Taylor immédiat fournit :

$$\psi_N = \psi_{C_\xi} + \mathbf{C}_\xi \mathbf{N} \cdot \nabla \psi_{C_\xi} + O(h^2) \quad (3.34)$$

d'où finalement :

$$\psi_N - \frac{\sum_{k=1}^m |\Omega_{c_k^N}| \bar{\psi}_{c_k^N}}{|\Omega_\xi|} = \mathbf{C}_\xi \mathbf{N} \cdot \nabla \psi_{C_\xi} + O(h^2) \quad (3.35)$$

Cette dernière relation montre que l'utilisation d'une moyenne volumique permet d'obtenir une valeur estimée au nœud précise à l'ordre deux sous réserve que le nœud et le centre de gravité de l'élément composé de l'ensemble des cellules se partageant le nœud en question soient confondus. Sinon, une erreur d'ordre un est introduite sur l'estimation de la valeur au nœud. Cette erreur se répercute alors sur l'estimation par interpolation linéaire de la valeur au centre de la facette. Enfin, comme il a été montré dans l'étude sur la méthode *Green-Gauss* en 2.3.1.2, si la valeur au centre de la facette n'est pas déterminée avec une erreur d'ordre deux au moins, alors le gradient ne peut pas être d'ordre un - c'est bien ce qui a été observé dans l'étude numérique -. Les maillages suffisamment réguliers (réguliers et étirés) permettent de confondre un nœud N avec le centre de gravité de l'ensemble des cellules partageant N . Ceci permet de disposer des valeurs aux nœuds et donc au centre des facettes précises à

l'ordre deux, d'où l'ordre un obtenu pour le gradient. En revanche, pour les maillages déformés, cette approximation n'est plus valable et les valeurs aux nœuds et aux centres des facettes chutent à l'ordre un, rendant le gradient inconsistant. La méthode *diamMoy* ne permet donc pas d'obtenir un gradient d'ordre un à la face sur des maillages généraux et ne répond pas aux besoins définis.

La méthode *diamLSQ* détermine les valeurs aux nœuds avec une précision d'ordre deux. De ce fait, le gradient obtenu à la face est logiquement précis à l'ordre un sur tout type de maillage. Cette méthode pourrait être employée en remplacement des méthodes *5p* et *5pcor*. Toutefois, il faut avoir à l'esprit que pour calculer un gradient par la méthode *diamLSQ*, il faut déterminer les valeurs aux nœuds par application d'une méthode des *Moindres Carrés* et procéder à un calcul de *Green-Gauss* supplémentaire. Le surcoût en opérations et en temps de calcul est donc conséquent. Par ailleurs, déterminer les valeurs aux nœuds soulève deux autres difficultés : l'établissement du voisinage pour les nœuds de coin en multidomaine et la définition de la valeur d'un nœud appartenant à deux conditions limites différentes. Pour évaluer si ces difficultés et surcoûts restent acceptables, il faut examiner la plus-value éventuelle en terme de précision pour le calcul du gradient au centre face apportée par *diamLSQ* par rapport à des méthodes de type *5p* et *5pcor*. Avant d'effectuer cette comparaison et afin de la rendre la plus équitable possible, des améliorations des techniques *5p* et *5pcor* sont étudiées.

3.2.2 Techniques 5p et 5p corrigée

Les techniques classiques du *5p* et du *5pcor* ont été exposées en 2.2.4 et il a été montré qu'elles satisfont le critère d'obtention d'une estimation du gradient à la face d'ordre un. Cependant, des améliorations de ces méthodes existent et sont étudiées dans la suite - elles seront notées respectivement $\overline{5p}$ et $\overline{5pcor}$.

Description

La première amélioration proposée pour la technique $\overline{5p}$ consiste à estimer le gradient au point F centre de la face f non plus comme une moyenne arithmétique des gradients en I et I^f centres des cellules c_i et c_i^f se partageant la face f (cf. formule (2.47) définissant l'approche *5p*) mais comme une combinaison linéaire de ces gradients. Une pondération volumique n'est pas forcément le choix le plus judicieux en terme de précision dans la mesure où cette pondération revient à donner plus de poids au gradient issu de la cellule de plus grand volume, donc *a priori* la cellule dont le centre est le plus éloigné de la face considérée. Une autre pondération envisageable s'appuie plutôt sur une interpolation linéaire. En définissant α_f tel que :

$$\alpha_f = \frac{\|\mathbf{IP}\|}{\|\mathbf{II}^f\|} = \frac{\mathbf{IF} \cdot \mathbf{n}_f}{\mathbf{II}^f \cdot \mathbf{n}_f} \quad (3.36)$$

avec les notations introduites par la figure 2.13, alors le gradient en F peut être approché à l'ordre un par :

$$\nabla\psi_F^{\overline{5p}} = (1 - \alpha_f) \nabla\psi_I + \alpha_f \nabla\psi_{I^f} \quad (3.37)$$

L'ordre de précision n'est pas amélioré par cette pondération, mais la plus grande importance donnée au gradient issu de la cellule dont le centre est le plus proche de la face peut conduire à une diminution du niveau absolu de l'erreur commise. Cette amélioration du gradient calculé par la méthode *5p* avec ajout d'une pondération peut directement être utilisée afin d'améliorer également le gradient calculé par la méthode du *5pcor*.

La technique du *5pcor* corrige le gradient calculé par la méthode *5p* sur l'axe qui relie les deux centres de cellules se partageant la face. Ce choix de correction est en fait arbitraire. La direction naturellement importante pour un gradient à la face se situe plutôt le long de la normale à la face qui n'est pas forcément alignée à l'axe reliant les deux centres de cellule. Dans cette mesure, le *5pcor* peut être modifié pour ne plus corriger le long de l'axe reliant les deux centres de cellule, mais pour corriger le long de la normale à la face :

$$\nabla\psi_F^{\overline{5pcor}} = \nabla\psi_F^{\overline{5p}} - \frac{\nabla\psi_F^{\overline{5p}} \cdot \mathbf{II}^f}{\mathbf{II}^f \cdot \mathbf{n}_f} \mathbf{n}_f + \frac{\psi_{I^f} - \psi_I}{\mathbf{II}^f \cdot \mathbf{n}_f} \mathbf{n}_f \quad (3.38)$$

Étude du comportement numérique

Les figures 3.31 et 3.32 illustrent le fait que la méthode $\overline{5p}$ conserve la propriété de précision d'ordre un de la méthode $5p$ sur tout type de maillage. Il en va de même pour la méthode $\overline{5pcor}$, qui conserve la précision à l'ordre un de la méthode $5pcor$, comme indiqué par les courbes 3.35 et 3.36. Les courbes 3.33 et 3.34 représentent l'écart entre l'erreur commise par la méthode $5p$ et la méthode $\overline{5p}$ pour l'estimation du gradient à la face sur des maillages respectivement quadrangulaires et triangulaires. On n'observe pas de différence sur les maillages réguliers et étirés, qu'ils soient quadrangulaires ou triangulaires. Ce résultat est attendu dans la mesure où les centres sont équidistants de la face sur ces maillages. En revanche, un gain de précision est apporté par la méthode $\overline{5p}$ sur l'ensemble des maillages déformés pour lesquels les centres ne sont pas équidistants des faces. Les figures 3.37 et 3.38 proposent la même comparaison pour les méthodes $5pcor$ et $\overline{5pcor}$. Un gain de précision apparaît pour la méthode $\overline{5pcor}$ uniquement sur le maillage quadrangulaire déformé. Ce gain de précision peut être dû à l'amélioration du calcul du gradient par la méthode $\overline{5p}$ dont bénéficie la méthode $\overline{5pcor}$ et il est envisageable que l'amélioration de l'axe de correction de cette méthode ne constitue pas une contribution significative dans ce faible gain de précision.

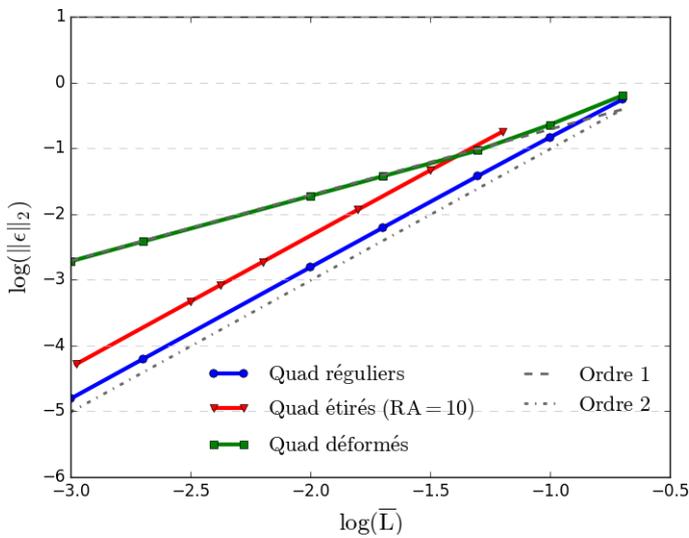


Figure 3.31 – Précision du calcul des gradients au centre face par la méthode $\overline{5p}$ sur maillages quadrangulaires

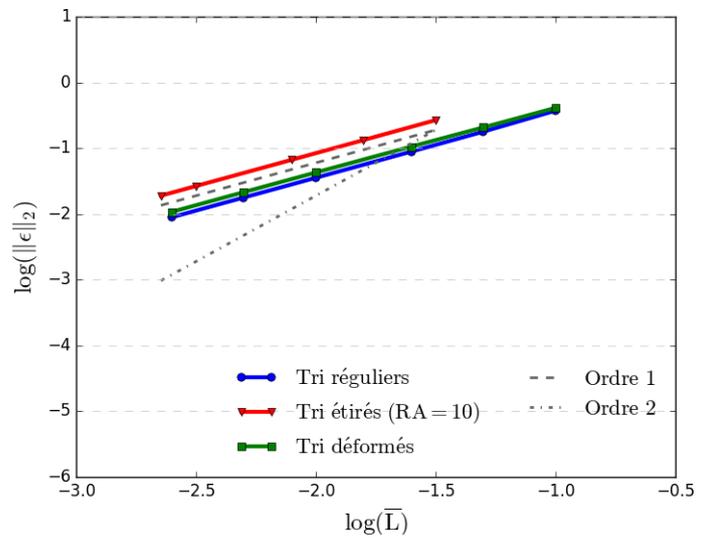


Figure 3.32 – Précision du calcul des gradients au centre face par la méthode $\overline{5p}$ sur maillages triangulaires

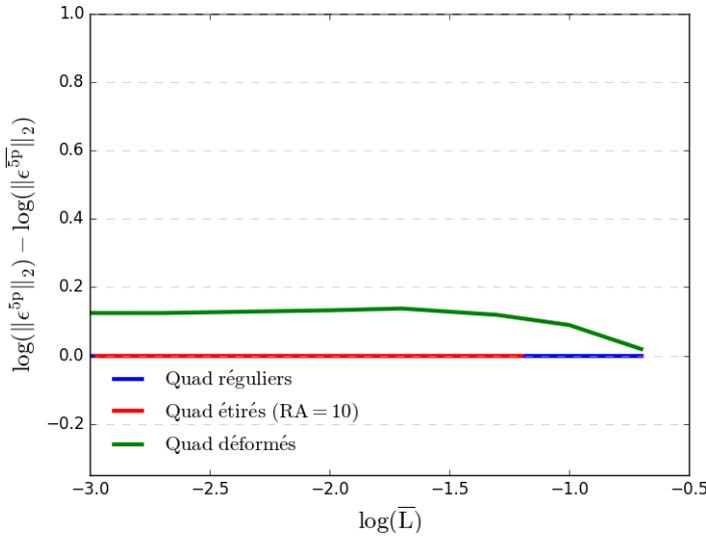


Figure 3.33 – Écart de l'erreur commise entre les méthodes $5p$ et $\overline{5p}$ sur maillages quadrangulaires

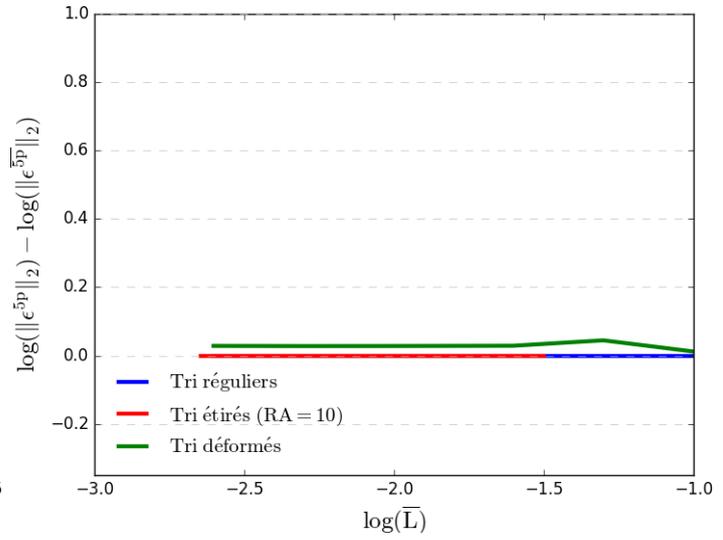


Figure 3.34 – Écart de l'erreur commise entre les méthodes $5p$ et $\overline{5p}$ sur maillages triangulaires

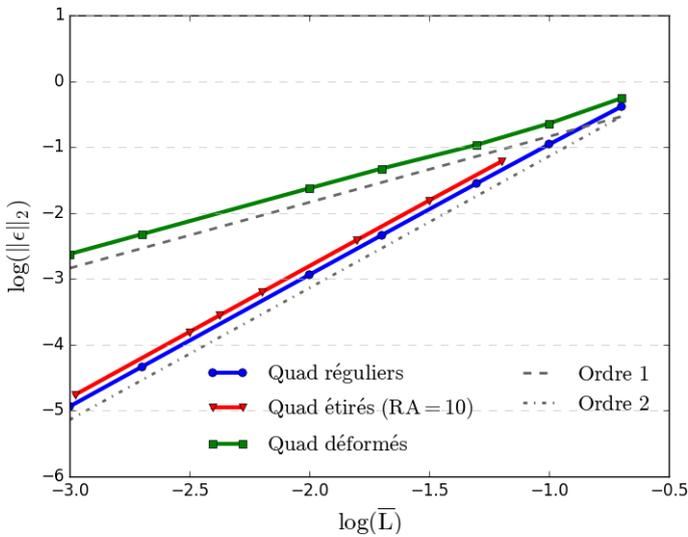


Figure 3.35 – Précision du calcul des gradients au centre face par la méthode $\overline{5p}$ sur maillages quadrangulaires

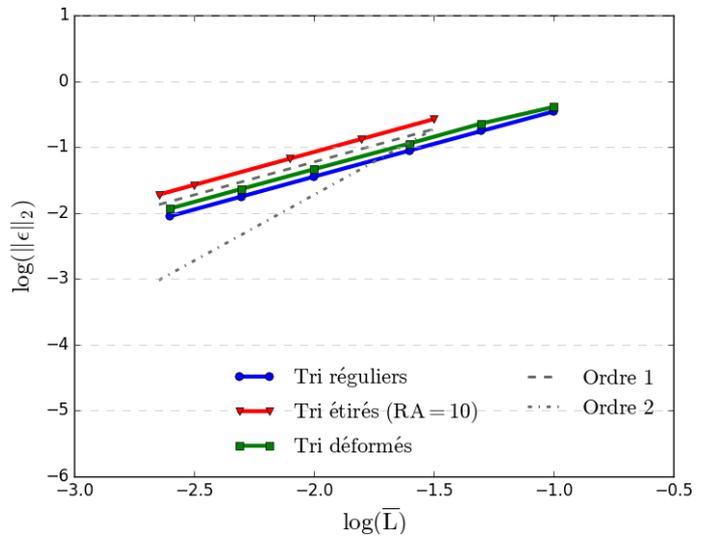


Figure 3.36 – Précision du calcul des gradients au centre face par la méthode $\overline{5p}$ sur maillages triangulaires

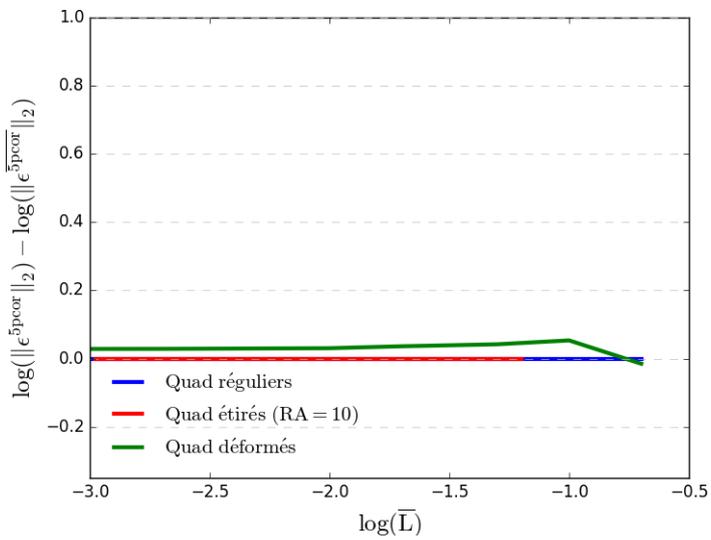


Figure 3.37 – Écart de l'erreur com-mise entre les méthodes $5pcor$ et $\overline{5pcor}$ sur maillages quadrangulaires

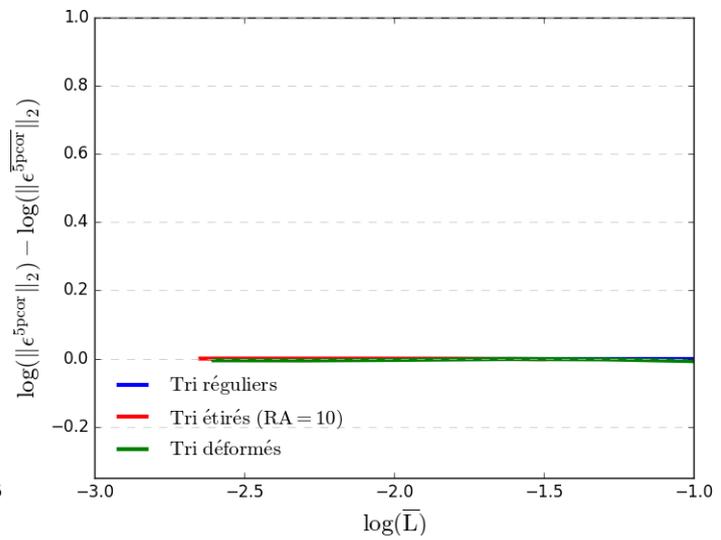


Figure 3.38 – Écart de l'erreur com-mise entre les méthodes $5pcor$ et $\overline{5pcor}$ sur maillages triangulaires

Analyse critique

La méthode $\overline{5p}$ constitue une amélioration du gradient calculé à la face par la méthode $5p$, essentiellement sur des maillages quelconques. Le surcoût associé à cette approche réside dans la détermination du facteur de pondération ou d'interpolation α_f pour chaque face, ce qui représente un très faible surcoût. La méthode $\overline{5pcor}$ ne semble pas apporter en revanche une plus-value en terme de précision par rapport à la méthode $5pcor$, même si le coût supplémentaire de son utilisation reste lui-aussi très faible. Il faut rappeler que ces méthodes de type $5p$, $5pcor$, $\overline{5p}$ et $\overline{5pcor}$ sont toutes les quatre basées sur l'utilisation des gradients estimés au centre des cellules. Ces derniers doivent être d'ordre un au minimum si l'on souhaite obtenir effectivement un gradient à la face d'ordre un avec ces méthodes. L'utilisation de ces méthodes pour calculer le gradient à la face sera donc nécessairement associée par la suite à une approche de type LSQ ou qG pour l'estimation des gradients aux centres des cellules. L'approche $diamLSQ$ n'a pas été retenue par la suite pour des raisons de coût de calcul et de mise en œuvre et l'on a privilégié la simplicité des approches $5p$, $5pcor$ ou $\overline{5pcor}$.

3.3 Validation de la nouvelle discrétisation spatiale

Le calcul du gradient au centre cellule par approche LSQ ou *quasi-Green* (qG) a été implémenté dans le solveur elsA-H, couplé à une stratégie de reconstruction au centre de la face. En ce qui concerne le calcul des gradients aux faces, seules les améliorations des techniques initialement présentes ont été implémentées dans le solveur. Notons que certaines approximations de géométries de maillage (utilisation du point M milieu du segment joignant les faces plutôt que du centre face F pour la reconstruction) identifiées comme sources de perte de précision du solveur non structuré initial d'elsA-H sont également partagées par la partie structurée du solveur et ont donc été corrigées à la fois dans la partie non structurée et dans la partie structurée afin d'assurer la cohérence de la résolution dans les blocs structurés et non structurés. Par ailleurs, toutes les méthodes de calcul de gradient ont été implémentées dans le solveur structuré d'elsA afin de permettre, entre autre, des comparaisons à iso-méthode numérique et iso-maillage entre les solveurs structuré et non structuré.

Pour valider les développements réalisés, on propose tout d'abord d'appliquer la nouvelle version de elsA-H à quelques cas tests académiques bien documentés, permettant d'évaluer la précision du solveur en s'affranchissant totalement ou largement de l'influence des choix de modélisation physique. Le premier cas de calcul proposé est un écoulement de fluide parfait de solution exacte connue, l'écoulement dit de Ringleb. Le fait de disposer d'une solution analytique permettra d'estimer l'ordre de précision effectivement atteint avec elsA-H pour la résolution des équations d'Euler, *i.e.* la discrétisation des flux physiques convectifs. Le second cas de calcul est un écoulement laminaire, à bas nombre de Reynolds, sur un cylindre. Le choix d'un régime d'écoulement à bas Reynolds permettra d'évaluer à la fois la précision de l'approximation des flux convectifs et des flux diffusifs. Le troisième et dernier cas académique est l'écoulement turbulent sur une plaque plane. Ces écoulements précédents seront calculés en maillages complètement non structurés ou hybrides, même si l'hybridation ne se justifie pas d'un point de vue pratique pour ces configurations géométriquement simples.

Dans la dernière partie de la section, nous aborderons une première simulation justifiant en pratique le recours à l'hybridation : il s'agit d'une configuration de "refroidissement par film" ou *film cooling* sur plaque plane. La gestion du maillage du trou d'injection d'air frais d'une part et de la plaque d'autre part conduit de façon naturelle à adopter une stratégie hybride pour simuler cet effet technologique modèle - nous reprendrons par la suite l'étude de Film Cooling pour des configurations industrielles de refroidissement d'aubes.

Avant d'exposer les premiers résultats de calculs réalisés avec elsA-H, il est important de préciser que toutes les simulations numériques des cas de validation académique qui suivent, ainsi que celles de l'ensemble des configurations d'intérêt industriel étudiées par la suite dans le chapitre 5 sont traitées avec une phase implicite de type Euler implicite qui est résolue par une méthode LU-SSOR.

3.3.1 Écoulement non visqueux

Le problème de Ringleb est un écoulement de type fluide parfait entre deux lignes de courant décrivant un coude. Cet écoulement est solution des équations d'Euler et une solution analytique a été déterminée en 1940 par Ringleb [100]. La connaissance d'une solution dépendant uniquement de la position à chaque instant (l'écoulement est stationnaire) permet de déterminer l'erreur commise en chaque point du calcul et ainsi de caractériser la précision du solveur utilisé. Par ailleurs, à l'entrée et à la sortie du domaine fluide, l'écoulement est subsonique ($M = 0.6$) et subit une compression avec la courbure de l'écoulement rendant progressivement l'écoulement supersonique ($M = 1.5$) dans la zone de courbure maximale sans pour autant générer de choc. Ceci permet d'étudier le comportement d'un écoulement de type fluide parfait sur une large plage de nombres de Mach sans rencontrer de difficulté de robustesse liée à la présence de choc.

Compte tenu de ces différentes spécificités, le cas Ringleb est fréquemment étudié pour la validation de code et la caractérisation de la précision de la discrétisation spatiale des flux convectifs, en particulier dans [50], [60], [126], [131] et [28]. C'est dans cette optique que le cas Ringleb a été étudié ici avec une stratégie de convergence en maillage basée sur une série de six niveaux de maillage. Les maillages utilisés sont quadrangulaires réguliers ou déformés ou bien triangulaires.

Dans un premier temps, l'étude de la précision de elsA-H est réalisée pour une stratégie de maillage usuellement utilisée dans ce cas d'écoulement, composée de quadrangles réguliers qui suivent la courbure de l'écoulement. Un maillage quadrangulaire régulier typique est présenté sur la figure 3.39. Cette figure fournit également le champ de nombre de Mach pour lequel la zone de compression est bien visible et où on peut noter l'absence de choc ainsi que des lignes de courant avec lesquelles le maillage est très bien aligné. La figure 3.40 montre que sur ce maillage la discrétisation spatiale initiale ($GG-M$) de la partie non structurée du solveur elsA-H, basée sur une classique méthode de *Green-Gauss* (GG) pour le calcul des gradients au centre des cellules et sur une reconstruction au point M milieu du segment qui relie les centres des cellules, assure l'ordre deux bien que le maillage soit légèrement courbé. On se trouve ainsi typiquement (cf. l'étude du problème analytique pour des maillages quadrangulaires réguliers dans la section 2.3) dans le cas favorable à la précision pour ces ingrédients de la version initiale de elsA-H ; les conséquences sur la précision des insuffisances identifiées pour GG et la reconstruction au point M deviendront par la suite bien visibles pour des maillages de moindre régularité. La nouvelle discrétisation spatiale proposée ($LSQ-F$), s'appuyant sur un calcul de gradient au centre des cellules réalisé par la méthode des *Moindres Carrés* (LSQ) et sur une reconstruction en F le centre de la face, permet également d'assurer cet ordre deux et assure en outre une meilleure précision (niveau d'erreur plus faible) que la discrétisation spatiale $GG-M$.

Pour pouvoir mettre en évidence les faiblesses de la discrétisation spatiale $GG-M$, l'étude analytique incite à étudier des maillages quadrangulaires déformés. Une étude de convergence sur le cas Ringleb a été réalisée sur ce type de maillage, illustré par exemple sur la figure 3.41. On constate sur la figure 3.42 que la discrétisation initiale d'elsA-H $GG-M$ est bien précise à l'ordre un seulement sur ce type de maillage. L'amélioration du calcul du gradient au centre des cellules par une méthode de type *Moindres Carrés* en conservant une reconstruction au point M , $LSQ-M$, et l'amélioration du point de reconstruction en F en conservant un calcul de gradient par méthode de *Green-Gauss*, $GG-F$, ne permettent pas, comme attendu, d'améliorer l'ordre de précision qui reste égal à un. En revanche en combinant ces deux améliorations dans l'approche $LSQ-F$, la précision de la discrétisation spatiale à l'ordre deux est effectivement maintenue en maillage déformé. De la même manière une discrétisation spatiale s'appuyant sur un calcul de gradient au centre des cellules par une approche *quasi-Green* et une reconstruction en F permet également de conserver une précision d'ordre deux sur un maillage quelconque.

Enfin, ces deux discrétisations spatiales permettant d'assurer une précision d'ordre deux sur des maillages quelconques, $LSQ-F$ et $qG-F$, sont testées sur une série de maillages hybrides. Sur la figure 3.43, la partie structurée apparaît en bleu et est naturellement maillée en quadrangles alors que

la partie non structurée, représentée en rouge, se compose de triangles. On rappelle que l'étude analytique menée au chapitre précédent et dans la première partie de ce chapitre a mis en évidence la difficulté à assurer une précision d'ordre deux même sur des maillages triangulaires réguliers. C'est la raison pour laquelle, il n'a pas été jugé utile d'appliquer de déformation à ces maillages. La série de simulations réalisées permet également de vérifier si l'interface hybride permet bien de conserver la précision d'ordre deux au sein du domaine de calcul. On constate ainsi sur la figure 3.44 que les deux méthodes $LSQ-F$ et $qG-F$ sont bien insensibles à l'interface hybride en terme d'ordre de précision et permettent d'assurer une précision d'ordre deux en espace. Il faut préciser que \bar{L} est déterminé avant la triangularisation du maillage et que dès lors il n'est pas étonnant que l'erreur de troncature commise soit plus faible sur le cas hybride que dans les cas de maillages quadrangulaires (non structurés) précédemment présentés puisque la triangularisation de la partie hybride revient à densifier le maillage par un facteur deux dans les deux directions.

Les résultats obtenus sur cette étude du cas Ringleb sont finalement en parfait accord avec les résultats obtenus sur l'étude analytique et on peut tirer les conclusions suivantes pour la partie fluide parfait (flux convectif) du solveur elsA-H :

- la discrétisation spatiale initiale du solveur elsA-H ne permet d'atteindre l'ordre deux que sur des maillages quadrangulaires réguliers
- l'amélioration du calcul des gradients au centre des cellules par une méthode de type *Moindres Carrés* (LSQ) ou *quasi-Green*, qG associée à une amélioration du point de reconstruction, placé au centre face F , permet d'atteindre une précision d'ordre deux sur maillage quelconque
- le raccord hybride ne dégrade pas l'ordre de précision du schéma pour cette simulation d'écoulement de fluide parfait (seuls les flux convectifs sont testés)

On peut donc considérer comme validée cette évolution de elsA-H pour ce qui concerne en tout cas la discrétisation des flux convectifs (résolution des équations d'Euler).

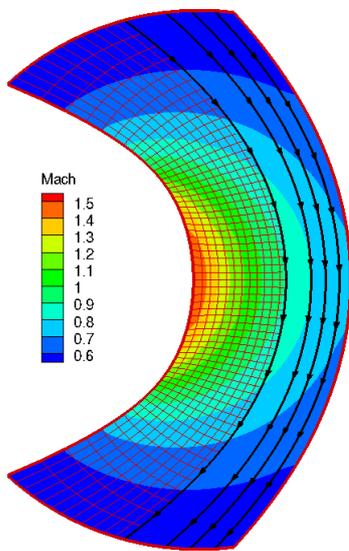


Figure 3.39 – Maillage quadrangulaire régulier, champ de nombre de Mach et lignes de courant de la configuration Ringleb

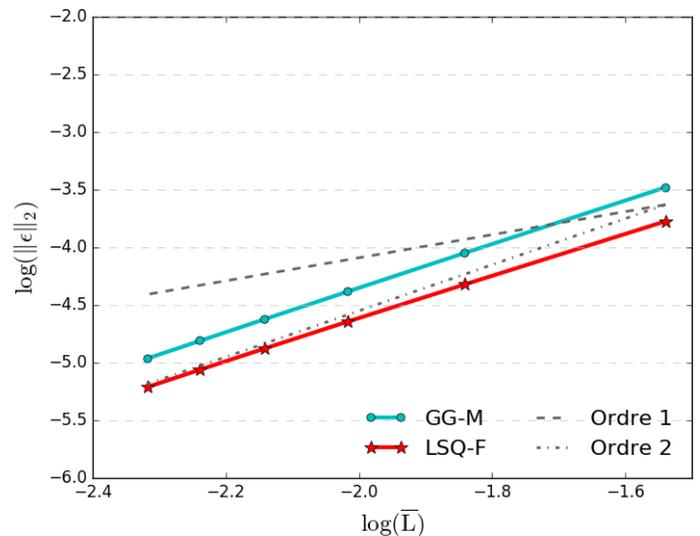


Figure 3.40 – Précision de différentes discrétisations spatiales sur la configuration Ringleb avec maillage quadrangulaire régulier

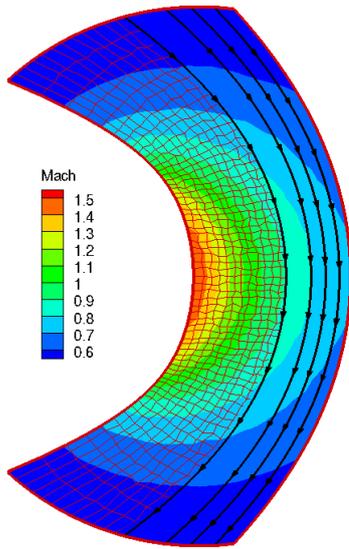


Figure 3.41 – Maillage quadrangulaire déformés, champ de nombre de Mach et lignes de courant de la configuration Ringleb

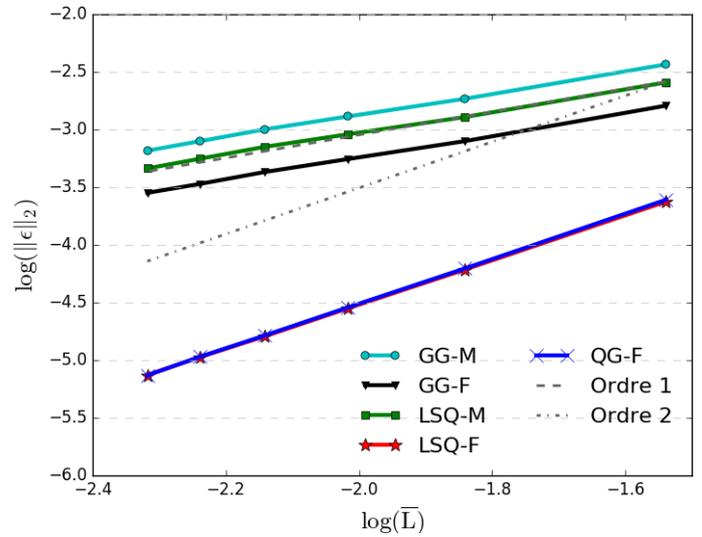


Figure 3.42 – Précision de différentes discrétisations spatiales sur la configuration Ringleb avec maillage quadrangulaire déformé

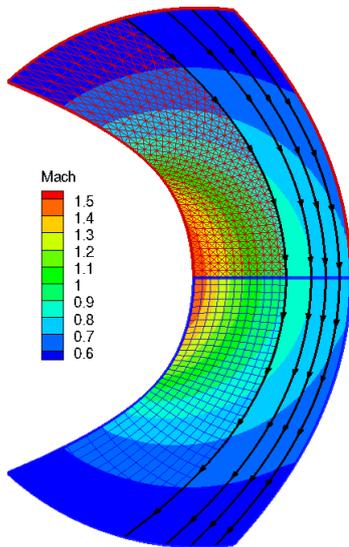


Figure 3.43 – Maillage hybride avec la partie non structurée (*Rouge*) maillée en triangles et la partie structurée (*Bleu*) maillée en quadrangles, champ de nombre de Mach et lignes de courant de la configuration Ringleb

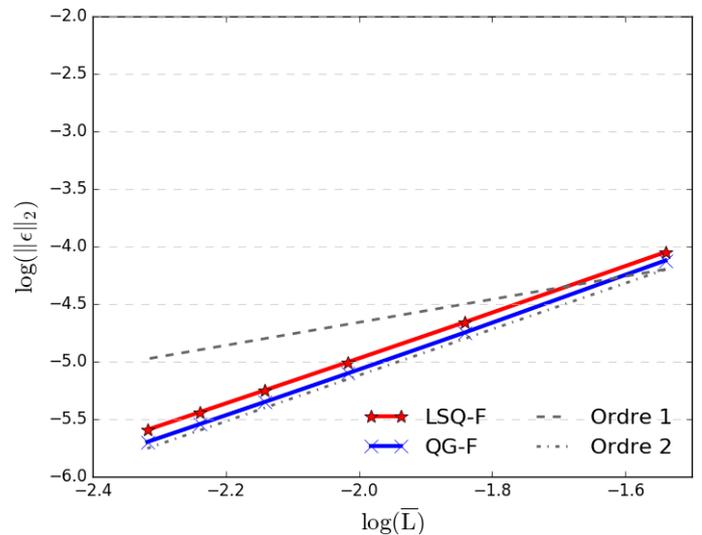


Figure 3.44 – Précision de différentes discrétisations spatiales sur la configuration Ringleb avec maillage hybride

3.3.2 Écoulement en régime laminaire

Les cas d'écoulement autour de cylindre suscitent un fort intérêt car ils sont bien adaptés à l'analyse d'une discrétisation spatiale, en particulier des flux visqueux, et éventuellement de la modélisation de la turbulence, grâce aux nombreuses études expérimentales menées à différents nombres de Reynolds (du régime de Stokes au régime pleinement turbulent) qui fournissent donc un ensemble conséquent de données de référence auxquelles comparer les résultats de simulation. La physique de l'écoulement mise en jeu pour une telle configuration est bien connue en fonction du nombre de Reynolds et Lienhard décrit dès 1966 dans [77] cette répartition qui est rappelée dans le tableau 3.1.

Pour vérifier et valider la discrétisation des flux visqueux dans elsA-H, il est nécessaire de considérer un écoulement stationnaire en régime laminaire afin de s'affranchir des effets instationnaires et de la

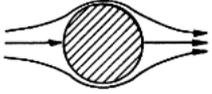
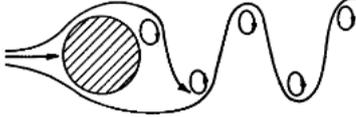
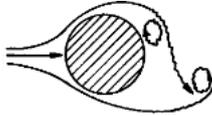
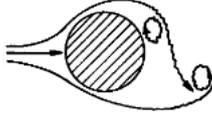
$Re < 5$		Écoulement attaché
$5 < Re < 40$		Écoulement décollé avec une paire de tourbillons fixes de recirculation
$40 < Re < 90$		Écoulement instationnaire dont le sillage est laminaire. La périodicité est déterminée par l'instabilité du sillage
$90 < Re < 150$		Écoulement instationnaire. Le sillage est laminaire. La périodicité est déterminée par le vortex shedding
$150 < Re < 300$		Transition du sillage vers un régime turbulent
$300 < Re < 3.10^5$		Le sillage est complètement turbulent

Table 3.1 – Différentes configurations d'écoulement autour d'un cylindre en fonction du nombre de Reynolds construit à partir de la vitesse uniforme à l'infini amont et du diamètre du cylindre *Données extraites et traduites de [77]*

turbulence. Ceci permet de sélectionner une plage de nombre de Reynolds, entre 5 et 40, pour laquelle l'écoulement autour d'un cylindre satisfait ce critère de régime laminaire stationnaire. Le choix s'est porté sur un écoulement à $Re = 20$. Le calcul est réalisé en dimensionné, ce qui conduit à un diamètre du cylindre très faible, de l'ordre de $4.10^{-6}m$ pour satisfaire le critère du nombre de Reynolds dans des conditions atmosphériques.

À un nombre de Reynolds fixé, la physique de l'écoulement autour du cylindre est déterminée. Ainsi, plusieurs caractéristiques de l'écoulement sont vérifiables et comparables comme par exemple, l'angle θ du point de décollement, la longueur maximale de la zone de recirculation, L . Certains auteurs fournissent plus d'informations avec par exemple l'épaisseur des zones de recirculation et les positions des centres de ces deux zones. Ces différents éléments géométriques sont illustrés sur la figure 3.45 qui reprend les notations de Coutanceau dans [32]. D'autre part, une grandeur physique globale d'intérêt comme le coefficient de traînée, C_d , est généralement accessible.

Pour réaliser cette étude, un domaine de calcul multibloc est considéré. Les deux blocs entourant directement le cylindre sont traités en non structuré alors qu'une approche structurée est conservée pour les autres blocs. Cette stratégie de répartition des zones structurées et non structurées est représentative de celle qui est visée pour les maillages des effets technologiques autour des aubes de turbomachine, où de manière très simplificatrice l'objectif est de mailler le champ proche paroi en non structuré et le champ lointain en structuré. Cette répartition des blocs est illustrée sur la figure 3.46. Par ailleurs, trois maillages différents sont considérés. Pour les deux premiers, tous les blocs sont composés de quadrangles, l'un est considéré comme un maillage grossier et l'autre est plus fin. Pour

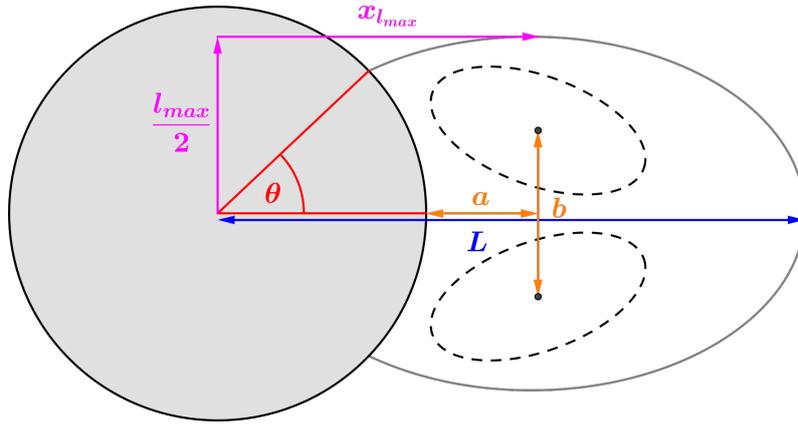


Figure 3.45 – Notations des grandeurs d'intérêt géométrique de l'écoulement autour d'un cylindre à $Re = 20$

le troisième maillage, le bloc non structuré, immédiatement à l'aval du cylindre, est triangularisé. Ces deux types de maillages sont représentés respectivement sur les figures 3.47 et 3.48. Pour éviter que les conditions imposées en bordure de domaine perturbent l'écoulement, les différentes frontières sont éloignées de plusieurs diamètres du cylindre.

De nombreuses études tant expérimentales que numériques ont été menées pour l'écoulement à $Re = 20$. Braza [17] reprend plusieurs d'entre elles et les compare à ses propres résultats de simulation. Il apparaît globalement un bon accord entre les différents résultats de la littérature sélectionnés pour comparaison dans [17] et les résultats numériques produits par Braza. De ce fait, seuls les résultats numériques de Braza et les mesures expérimentales de Tritton reportées dans [115] sur le coefficient de trainée, C_d , l'angle de décollement, θ , et la longueur de la zone de recirculation, L , sont comparées ici à nos propres simulations. Par ailleurs, Coutanceau dans [32] réalise expérimentalement l'étude du sillage d'un cylindre en translation uniforme dans un réservoir de fluide. Différents rapports entre le diamètre du cylindre et la taille du réservoir lui permettent d'étudier les effets des parois du réservoir sur l'écoulement. En s'intéressant au jeu de données correspondant à un réservoir de taille infini, on se positionne dans le même contexte de non influence des limites du domaine que l'étude numérique réalisée ici. Ceci justifie que les données de Coutanceau soient exploitables pour notre validation. En plus de fournir l'angle de décollement θ et la longueur de la zone de recirculation, L , Coutanceau reporte également a , b , $x_{l_{max}}$ et l_{max} tels que définis sur la figure 3.45. Comme Braza, Coutanceau effectue une revue de résultats numériques et expérimentaux pour des écoulements à différents nombres de Reynolds, en particulier à $Re = 20$, qui établissent des valeurs pour θ et L . De la même manière que pour Braza, l'ensemble de ces résultats est cohérent et conforme aux résultats fournis par l'étude de Coutanceau, qui seront donc seuls reportés dans notre tableau de synthèse.

Les différentes manières de calculer les gradients au centre des cellules (LSQ et qG) sont combinées avec les différentes approches pour calculer les gradients au centre des faces ($5p$, $5p_{cor}$ et $5p_{cor}$). Les résultats de ces différentes simulations sont présentés dans le tableau récapitulatif 3.2. Les valeurs des grandeurs communément étudiées sur cette configuration, θ , L et C_d , sont conformes à celles retrouvées dans la littérature. Les grandeurs caractéristiques de la géométrie de l'écoulement présentées par Coutanceau sont globalement en bon accord. Il faut tout de même mentionner, que les grandeurs relevées par Coutanceau sont délicates à obtenir avec précision tant expérimentalement que numériquement. Ceci est particulièrement vrai pour la grandeur $x_{l_{max}}$ par exemple. Ces mesures s'accompagnent en réalité d'un degré d'incertitude qui n'est pas reporté ici dans nos simulations - ni n'est fourni pour les résultats expérimentaux de Coutanceau.

Les résultats obtenus sur des maillages quadrangulaires ou triangulaires sont sensiblement identiques : les variations les plus notables apparaissent sur l'angle de décollement et sont de l'ordre du degré. Le premier point de cette étude, visant à la validation des développements réalisés dans elsA-H, semble atteint à la vue de ces résultats. Dans un second temps cette étude peut permettre de mener avec un

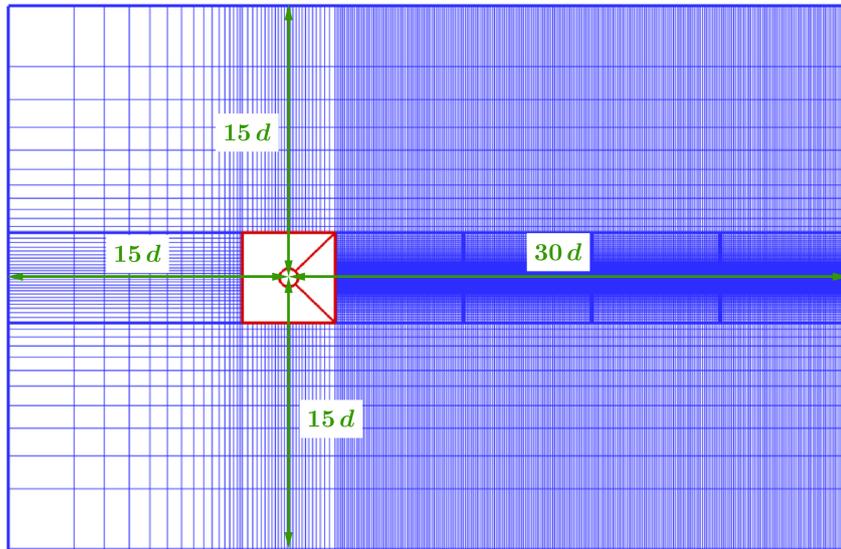


Figure 3.46 – Répartition des blocs structurés en *bleu* et non structurés en *rouge* pour l'écoulement autour d'un cylindre

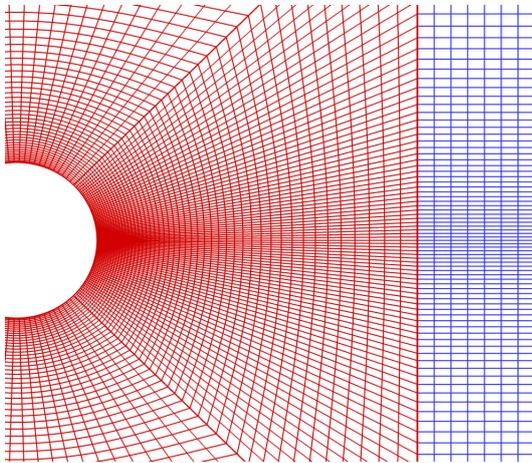


Figure 3.47 – Maillage du bloc non structuré à l'aval du cylindre en quadrangles

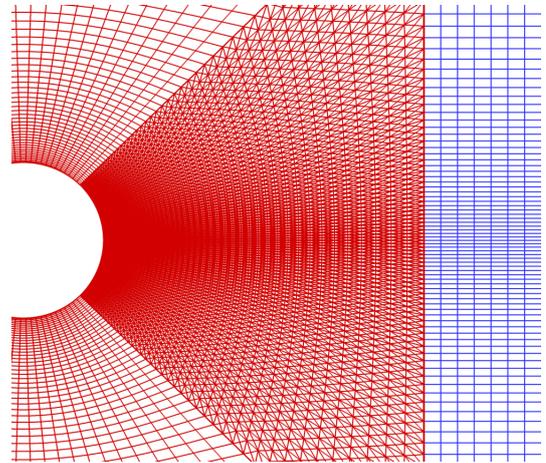


Figure 3.48 – Maillage du bloc non structuré à l'aval du cylindre en triangles

regard critique une analyse plus fine de la qualité des résultats physiques obtenus par les différentes méthodes employées. Les calculs s'appuyant sur une stratégie $qG-F$ capturent globalement mieux la longueur de la zone de re-circulation que ceux basés sur une méthode $LSQ-F$. En revanche et de manière étonnante, la méthode $qG-F$ semble souffrir d'un manque de précision sur le maillage quadrangulaire fin avec des gradients au centre des faces calculés par $5p$ ou $5pcor$. L'angle de décollement θ est sous-évalué et conduit à une sous-estimation du coefficient de traînée. De manière moins étonnante, sur maillage quadrangulaire grossier, les calculs ayant recours à la stratégie $LSQ-F$ pour le calcul des gradients au centre des cellules et $5p$ ou $5pcor$ pour le calcul des gradients au face, sous-évaluent également l'angle de décollement. Cependant, la valeur du coefficient de traînée, bien que plus faible, reste dans la fourchette donnée par les résultats de Tritton et ceux de Braza. Ces deux problèmes sont résolus avec l'utilisation de la nouvelle version de l'approche $5pcor$ notée $\overline{5pcor}$, qui s'appuie sur une combinaison linéaire des gradients aux centres plutôt que sur une simple moyenne arithmétique. En ce qui concerne les autres grandeurs, l'ensemble des résultats est globalement en très bon accord avec les valeurs fournies par l'étude de Coutanceau.

En conclusion, les méthodes de calcul de gradient au face $5p$, $5pcor$ et $\overline{5pcor}$ ont été évaluées et validées sur un écoulement laminaire autour d'un cylindre. On a pu noter une meilleure précision des résultats lors de l'utilisation de la méthode $\overline{5pcor}$. Cette étude nous a également permis de comparer $LSQ-F$ et $qG-F$ pour le calcul de gradient au centre des cellules. Bien que les résultats de ces deux approches

soient assez similaires, il faut noter que la stratégie $qG-F$ capture mieux la longueur de la zone de recirculation en aval du cylindre.

Origine du résultat	C_d	θ	$\frac{L}{d}$	$\frac{l_{max}}{d}$	$\frac{x_{l_{max}}}{d}$	$\frac{a}{d}$	$\frac{b}{d}$
Braza [17]	2.18	45	0.95	-	-	-	-
Tritton [115]	2.04	45	0.93	-	-	-	-
Countanceau [32]	-	44.8	0.93	0.80	0.66	0.33	0.47
elsA-H : $LSQ-F$ 5p							
Quad grossier	2.07	38.5/40.2	0.88	0.78	0.58	0.32	0.43
Quad fin	2.10	40.3/41.6	0.93	0.77	0.65	0.34	0.43
Tri	2.07	40.2/41.9	0.86	0.76	0.59	0.33	0.41
elsA-H : $qG-F$ 5p							
Quad grossier	2.11	41.9/43.9	0.93	0.78	0.66	0.35	0.46
Quad fin	1.93	35.3/36.6	0.94	0.76	0.66	0.36	0.43
Tri	2.11	41.9/43.9	0.93	0.77	0.66	0.35	0.43
elsA-H : $LSQ-F$ 5pcor							
Quad grossier	2.08	38.5/40.2	0.89	0.78	0.60	0.32	0.43
Quad fin	2.10	40.3/41.6	0.93	0.78	0.59	0.34	0.43
Tri	2.07	40.2/41.9	0.87	0.73	0.65	0.33	0.42
elsA-H : $qG-F$ 5pcor							
Quad grossier	2.11	43.9/46.8	0.94	0.78	0.67	0.36	0.43
Quad fin	1.93	35.3/36.6	0.94	0.77	0.63	0.35	0.43
Tri	2.11	43.9/46.8	0.94	0.77	0.67	0.36	0.43
elsA-H : $LSQ-F$ 5pcor							
Quad grossier	2.11	41.9/43.9	0.89	0.77	0.61	0.32	0.43
Quad fin	2.11	43.0/44.3	0.93	0.78	0.62	0.34	0.44
Tri	2.11	43.9/46.8	0.93	0.77	0.66	0.36	0.43
elsA-H : $qG-F$ 5pcor							
Quad grossier	2.11	41.9/43.9	0.89	0.77	0.61	0.32	0.43
Quad fin	2.11	43.0/44.3	0.92	0.78	0.64	0.35	0.44
Tri	2.11	41.9/43.9	0.93	0.77	0.62	0.36	0.43

Table 3.2 – Simulation 2D de l’écoulement à $Re = 20$ sur un cylindre. Étude de l’influence des choix de discrétisation spatiale sur la prédiction des principales caractéristiques physiques de l’écoulement.

3.3.3 Écoulement en régime turbulent

L’étude d’un écoulement sur une plaque plane est un classique de la vérification et validation de code de CFD étant donné la quantité de données (expérimentales et numériques) disponibles. Avec un nombre de Mach tel que $M = 0.2$, les effets de compressibilité deviennent négligeables et à $Re = 5 \cdot 10^6$ (où le nombre de Reynolds est basé sur une longueur de 1), l’écoulement est pleinement turbulent. La NASA a intégré un tel cas test de plaque plane turbulente à sa base de données de cas de validation de modèles de turbulence (<http://www.turbmodels.larc.nasa.gov/flatplate.html>). Cette base de donnée dont le contenu est décrit de façon détaillée dans [102] a pour vocation de permettre notamment de vérifier la bonne mise en œuvre de différents modèles de turbulence au sein de codes de CFD en partageant les valeurs attendues à convergence en maillage. Dans [101], Rumsey détaille en particulier le cas de la plaque plane turbulente qui est d’intérêt ici. L’objectif de cette étude est de comparer les résultats obtenus avec une stratégie hybride (elsA-H) sur cette configuration de plaque plane par rapport aux résultats de référence fournis par la NASA avec les codes CFL3D [72] et FUN3D [87], tous deux utilisant comme nous le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras [110] pour cette configuration. Notons que CFL3D est un code structuré qui s’appuie sur une formulation *cell-centered* tandis que FUN3D est un code non structuré basé sur une approche *node-centered*.

En amont de la plaque plane et sur une longueur de 0.3 unité, une condition de symétrie est appliquée. La plaque plane commence en $X = 0$ et se termine en $X = 2$. Une condition d'injection subsonique en entrée et une condition de sortie subsonique pour l'écoulement à l'aval de la plaque plane sont imposées. La condition supérieure est de type champ lointain - il s'agit d'une condition de non-réflexion -. On pourra trouver plus de détails sur la mise en données du cas sur le site de la NASA indiqué ci-dessus.

Les cinq maillages proposés par la NASA pour réaliser cette étude sont à la base des maillages quadrangulaires structurés, de raffinement croissant et permettent donc de réaliser une étude de convergence sur la taille moyenne de maille. Dans le cadre d'une étude avec une approche hybride, ces maillages sont séparés en deux zones, la première structurée, pour laquelle le maillage NASA initial n'est naturellement pas modifié et une seconde non structurée. Il pourrait être tentant de triangulariser cette zone non structurée pour renforcer la démonstration d'intérêt de la démarche hybride. Cependant, l'objectif de l'étude est de vérifier et de valider le comportement du solveur hybride sur un maillage fixé. Triangulariser une zone du maillage pourrait avoir des conséquences sur la précision des grandeurs étudiées et rendre la vérification et la validation plus délicate par rapport aux données fournies par la NASA. C'est la raison pour laquelle cette étude est réalisée à iso-maillage hybride. La figure 3.49 détaille les deux zones structurée et non structurée ainsi que le maillage quadrangulaire pour le maillage 35×25 . L'interface entre zone structurée et non structurée est localisée en $X = 0.23$ quel que soit le niveau de raffinement de maillage considéré. Pour accélérer les temps de restitution sur les deux maillages les plus fins, (273×193 et 545×385), chacune de ces deux zones est divisée en six sous-domaines auxquels une résolution parallèle est appliquée.

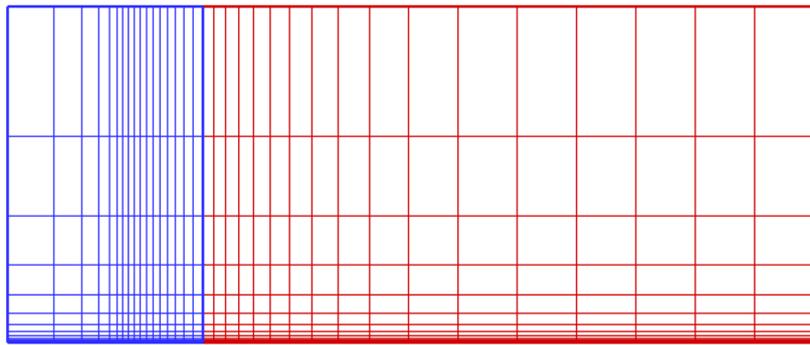


Figure 3.49 – Maillage hybride de la plaque plane 35×25 avec en *bleu* la partie structurée et en *rouge* la partie non structurée

Le modèle physique utilisé est constitué par les équations dites RANS (cf. les explications fournies en 2.1) et le modèle de turbulence utilisé est le modèle de *Spalart-Allmaras* qui utilise une unique équation de transport pour décrire l'évolution de la viscosité turbulente. Les modifications apportées à la discrétisation des flux convectifs et diffusifs s'appliquent à la fois aux équations décrivant l'évolution du champ moyen de l'écoulement et à cette équation décrivant l'évolution de la grandeur turbulente modélisée. Les simulations sont réalisées avec un calcul des gradients au centre des cellules par la méthode des *Moindres Carrés* (*LSQ*) et une reconstruction exacte au centre face F . Les gradients au centre des faces sont calculés soit par la méthode *5p* soit par la méthode *5pcor*. En effet, étant donné que le maillage est parfaitement orthogonal et que les variations de maille à maille sont très légères, les corrections apportées par les techniques $\overline{5p}$ et $\overline{5pcor}$ ne présentent pas d'intérêt particulier sur cette configuration. Les simulations avec des calculs de gradients au centre des cellules assurés par la méthode *quasi-Green* ont également été menées. Les résultats sont similaires à ceux obtenus avec un calcul de ces gradients par *Moindres Carrés* et ne sont pas systématiquement présentés dans la suite.

La première donnée comparable est le coefficient de frottement. En tout début de plaque plane chaque solveur fournit des solutions différentes. Ceci est dû à la difficulté représentée par la singularité du

bord d'attaque de la plaque plane. Il convient de s'intéresser aux résultats un peu après le début de la plaque : les coefficients de frottements deviennent alors parfaitement comparables sur la longueur de la plaque plane pour le maillage le plus fin (545×385) pour les différents codes comparés. Ceci peut être observé sur les figures 3.50 et 3.51 pour les calculs réalisés respectivement en $5p$ et en $5pcor$. Une échelle logarithmique a été adoptée pour tracer à la fois la position le long de la plaque et la valeur du coefficient de frottement afin de faire ressortir au maximum d'éventuelles différences entre solutions. L'accord entre elsA-H et les solveurs structuré et non structuré CFL3D et FUN3D est excellent dès que l'on s'éloigne un peu du bord d'attaque de la plaque. On aurait pu trouver des résultats légèrement différents en fin de plaque plane en raison de la présence d'une autre "singularité" : le coin où sont à la fois imposées les conditions de mur visqueux et de sortie subsonique. Des implémentations différentes de ces conditions d'un code à l'autre pourraient engendrer des résultats légèrement différents mais ce n'est visiblement pas le cas ici.

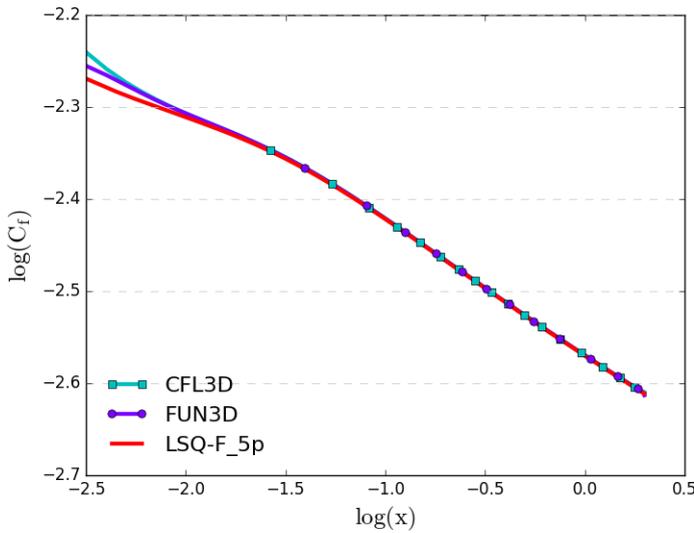


Figure 3.50 – Coefficient de frottement en fonction de la position sur la plaque plane pour un écoulement turbulent calculé avec elsA-H et une méthode $5p$ dans le maillage 545×385 .

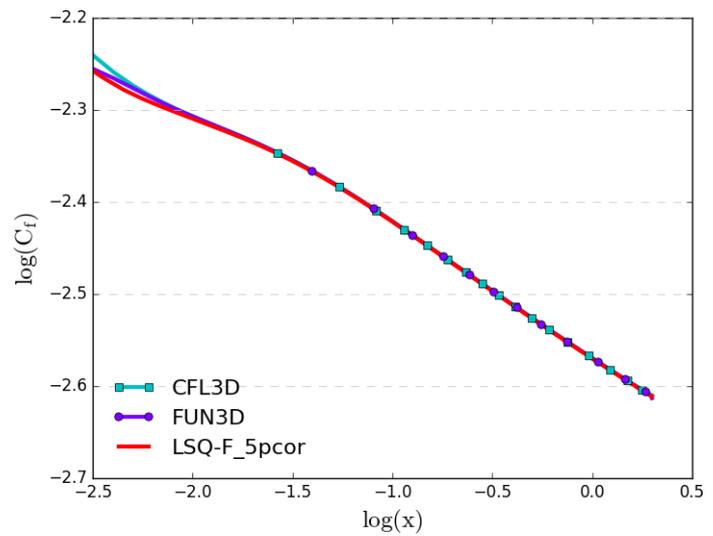


Figure 3.51 – Coefficient de frottement en fonction de la position sur la plaque plane pour un écoulement turbulent calculé avec elsA-H et une méthode $5pcor$ 545×385 .

Après avoir analysé le coefficient de frottement sur la globalité de la plaque plane, il est intéressant de procéder à l'analyse d'autres données plus locales. La NASA propose en particulier d'étudier la position $X = 0.97$. Comme la configuration a été réalisée sur un ensemble de cinq maillages, une étude de convergence de la valeur du coefficient de frottement est menée pour les différents codes. Graphiquement, ceci est traduit par les courbes 3.52 et 3.53 pour un calcul avec une méthode $5pcor$ s'appuyant sur des gradients au centre des cellules déterminés respectivement par une méthode de *Moindres Carrés* et une méthode *quasi-Green*. On constate que les valeurs du coefficient de frottement sont assez différentes dans les maillages les plus grossiers pour les différents solveurs représentés - l'écart entre CFL3D et elsA-H utilisant *LSQ-F* et $5pcor$ atteint presque 10% dans le maillage 35×25 - mais qu'à convergence en maillage, le coefficient de frottement au point considéré semble prendre une valeur proche de $C_f = 2.71 \cdot 10^{-3}$ pour l'ensemble des codes. Il est intéressant de noter que la méthode *quasi-Green* pour le calcul des gradients au centre des cellules semble apporter une meilleure précision que l'approche *LSQ* : la convergence vers la valeur finale ou asymptotique du coefficient de frottement est en effet plus rapide que celle obtenue avec l'utilisation de la méthode des *Moindres Carrés*. On peut également noter que les résultats fournis par elsA-H avec l'approche *quasi-Green* sont très proches, dans l'ensemble des maillages, de ceux fournis par le code structuré CFL3D. Pour analyser la vitesse de convergence en maillage de la valeur du coefficient de frottement, la NASA propose d'utiliser la technique introduite par Celik dans [26] pour mesurer ce qui est qualifié d'ordre apparent du solveur. Pour ce faire les trois maillages les plus fins sont utilisés. CFL3D exhibe alors un ordre apparent de

1.98, FUN3D de 1.34 et elsA-H de 1.77 et 3.09 pour le $5pcor$ basé sur des gradients au centre obtenus respectivement par *Moindres Carrés* et par *quasi-Green*. Ces données sont reprises dans la table 3.3. Dans [101], Rumsey précise qu'il n'y a pas nécessairement une adéquation parfaite entre l'ordre apparent et l'ordre nominal d'une discrétisation spatiale. Ces résultats comparatifs observés entre l'apport de la méthode de *quasi-Green* et celle des *Moindres Carrés* vont cependant dans le sens des résultats obtenus précédemment sur la configuration de l'écoulement laminaire à faible nombre de Reynolds autour d'un cylindre.

Solveur	CLF3D	FUN3D	elsA-H <i>LSQ-F 5pcor</i>	elsA-H <i>qG-F 5pcor</i>
Ordre apparent	1.98	1.34	1.77	3.09

Table 3.3 – Ordre apparent des différents solveurs comparés pour une convergence en maillage sur le C_f en $X = 0.97$

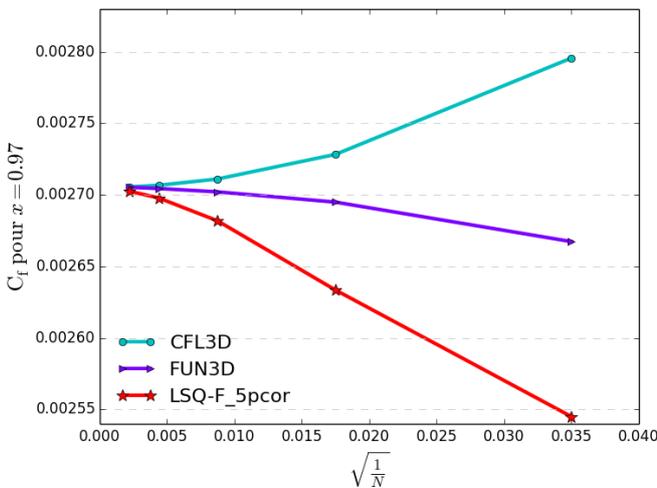


Figure 3.52 – Convergence en maillage de la valeur du coefficient de frottement en $X = 0.97$ pour un écoulement turbulent sur une plaque plane calculé avec elsA-H et une méthode $5p$

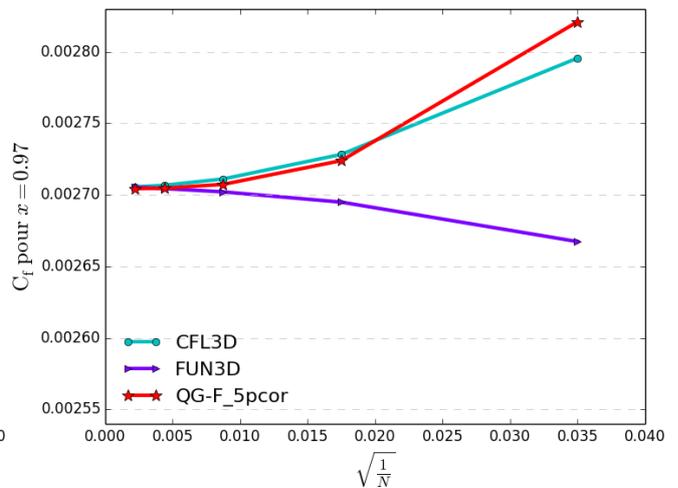


Figure 3.53 – Convergence en maillage de la valeur du coefficient de frottement en $X = 0.97$ pour un écoulement turbulent sur une plaque plane calculé avec elsA-H et une méthode $5pcor$

Une autre donnée classique à exploiter pour $X = 0.97$ sur le maillage le plus fin (545×385) est l'évolution de la vitesse en unité pariétale, u^+ , en fonction de la distance à la paroi en coordonnées pariétales, y^+ . Les figures 3.54 et 3.55 montrent que l'évolution de u^+ en fonction de y^+ pour un calcul réalisé par le solveur elsA-H avec une méthode respectivement $5p$ et $5pcor$ est en parfait accord avec les résultats fournis à la fois par le code de calcul CFL3D mais aussi avec la théorie de la *loi visqueuse* (sous-couche visqueuse) et de la *loi log* (zone inertielle).

On choisit d'analyser finalement une information qui relève essentiellement de la modélisation de la turbulence avec l'étude du rapport entre la viscosité turbulente et laminaire, $\frac{\mu_t}{\mu}$ calculé dans le maillage le plus fin. Les images 3.56 et 3.57 représentent cette grandeur obtenue par les codes CFL3D et FUN3D. Ces deux images sont directement extraites du site (http://www.turbmodels.larc.nasa.gov/flatplate_sa.html) et utilisent un facteur de dilatation important suivant l'axe y perpendiculaire à la plaque afin de mettre en évidence le détail de l'évolution du rapport des viscosités turbulentes et physiques dans la zone de couche limite. Les mêmes représentations 3.58 et 3.59 ont été générées avec les résultats obtenus par elsA-H pour des calculs $5p$ et $5pcor$. On constate que ces résultats sont visuellement très proches. En outre, le raccord entre zone structurée et non structurée, dont on rappelle qu'il se situe en $X = 0.23$, apparaît bien comme "transparent" au niveau des résultats de simulation.

En conclusion, on observe donc que les résultats obtenus par le solveur elsA-H incluant les nouveaux ingrédients de discrétisation spatiale précédemment proposés sont en parfaite cohérence avec les ré-

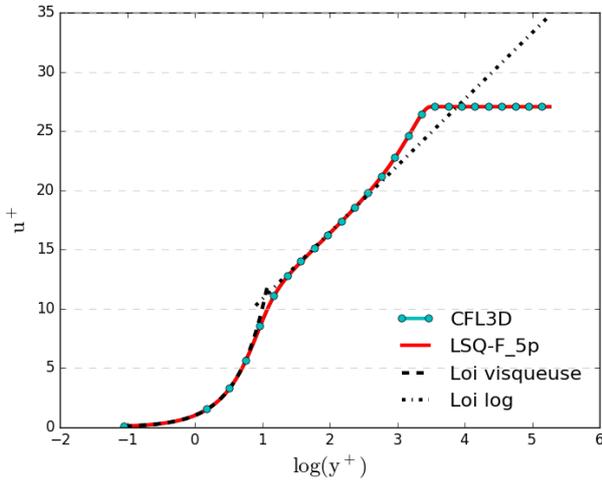


Figure 3.54 – Évolution de u^+ en fonction de y^+ pour un écoulement turbulent sur une plaque plane à $X = 0.97$ sur le maillage 545×385 pour un calcul elsA-H avec une méthode $5p$.

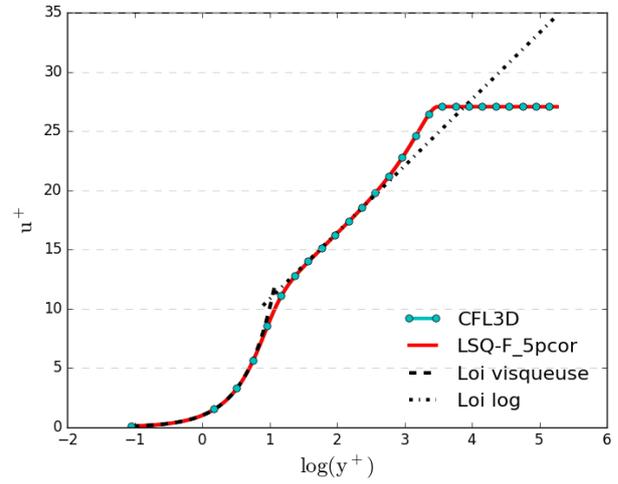


Figure 3.55 – Évolution de u^+ en fonction de y^+ pour un écoulement turbulent sur une plaque plane à $X = 0.97$ sur le maillage 545×385 pour un calcul elsA-H avec une méthode $5pcor$.

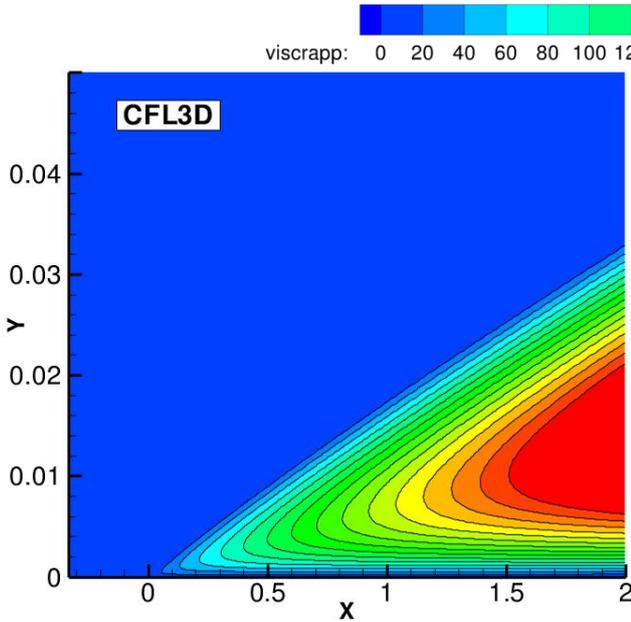


Figure 3.56 – Champ du rapport de viscosité turbulente sur la viscosité laminaire pour un écoulement turbulent au niveau du bord d'attaque d'une plaque plane calculé par CFL3D

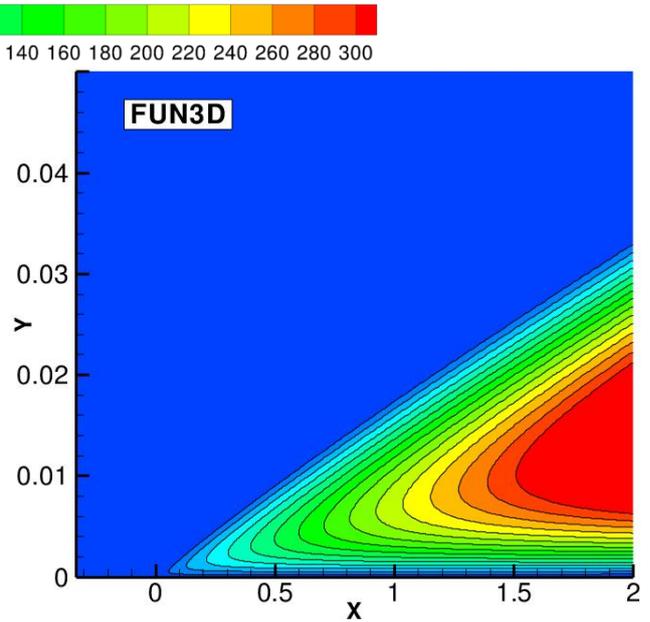


Figure 3.57 – Champ du rapport de viscosité turbulente sur la viscosité laminaire pour un écoulement turbulent au niveau du bord d'attaque d'une plaque plane calculé par FUN3D

sultats de référence mis à disposition par la NASA pour une configuration d'écoulement turbulent sur plaque plane. Nous pouvons donc considérer la nouvelle discrétisation spatiale comme validée et procéder maintenant à la mise en œuvre du solveur elsA-H pour des configurations d'écoulement qui font appel de façon naturelle à la stratégie d'hybridation disponible pour prendre en compte des effets technologiques.

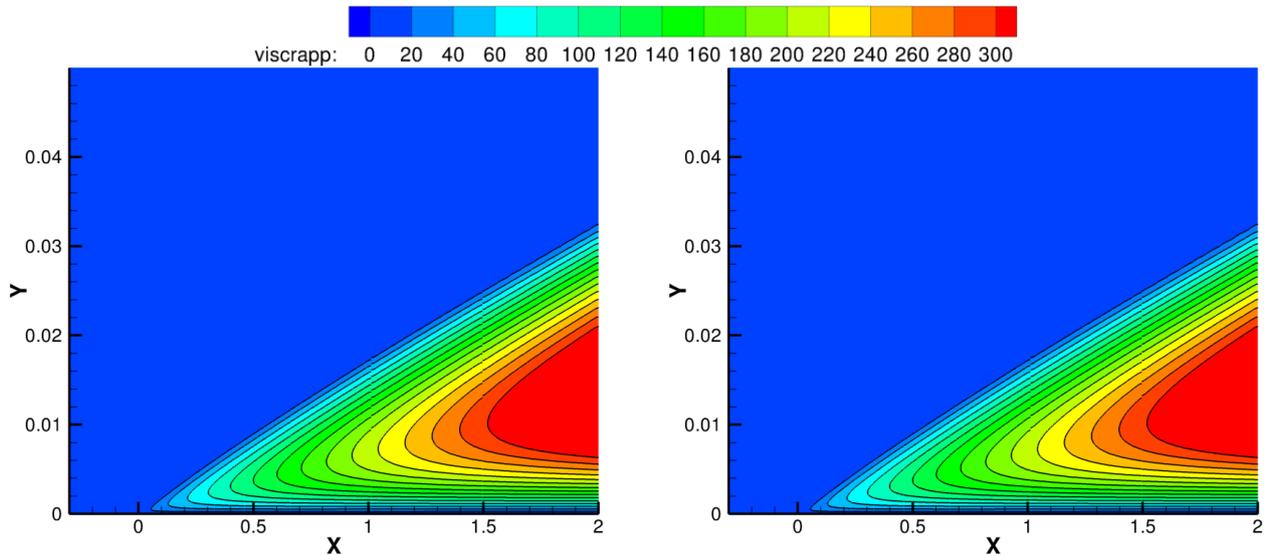


Figure 3.58 – Champ du rapport de viscosité turbulente sur la viscosité laminaire pour un écoulement turbulent au niveau du bord d’attaque d’une plaque plane calculé par elsA-H avec une méthode *5p*

Figure 3.59 – Champ du rapport de viscosité turbulente sur la viscosité laminaire pour un écoulement turbulent au niveau du bord d’attaque d’une plaque plane calculé par elsA-H avec une méthode *5pcor*

3.4 Évaluation du solveur hybride : cas du Film Cooling

Objectif

La nouvelle discrétisation spatiale a été évaluée sur des cas académiques et a donné satisfaction. Il faut cependant garder en tête que, à la fois les maillages et la physique des écoulements simulés pour ces validations à caractère académique, sont restés très simples. Il est donc indispensable de procéder désormais à une évaluation du comportement de la discrétisation spatiale de elsA-H pour des conditions d’utilisation davantage représentatives des configurations industrielles visées. Dans le même temps, on souhaite conserver une certaine souplesse dans cette démarche d’évaluation : on souhaite notamment pouvoir faire varier les stratégies de calcul des gradients aux centres ou aux faces par exemple. Cette souplesse n’est que peu compatible avec des configurations réellement industrielles qui sont le plus souvent tridimensionnelles, font appel à des maillages de plusieurs millions d’éléments et présentent des particularités géométriques rendant l’interprétation physique de l’écoulement complexe. Nous appliquerons bien entendu le solveur hybride à de telles configurations dans les chapitres 5 et 6 du mémoire mais, à ce stade, nous proposons plutôt d’introduire une configuration intermédiaire, représentative de la complexité des configurations industrielles tout en restant d’un coût modéré et en se prêtant à une analyse relativement aisée des champs calculés. La configuration proposée est un problème dit de *film cooling* (refroidissement par film) appliqué non pas sur une aube mais sur une simple plaque plane. Ce problème va nous permettre d’éprouver à moindre coût le solveur elsA-H dans des maillages hybrides dont les niveaux de déformation deviennent représentatifs de ceux classiquement rencontrés dans des configurations industrielles.

3.4.1 Présentation de la configuration étudiée

La configuration de Film Cooling correspond à un écoulement de fluide chaud sur une plaque plane qui bénéficie de l’arrivée d’un écoulement de fluide froid par un trou d’injection localisé à l’amont de la plaque. L’objectif pratique ou technologique de cette injection de fluide froid est de réaliser un refroidissement thermique du fluide à la paroi à l’aval du trou d’injection. La physique de cet écoulement reste relativement simple à comprendre et à vérifier. Par ailleurs, cette configuration peut être considérée comme une évolution du cas de la plaque plane turbulente qui a été précédemment validé, auquel on adjoint un effet technologique. Cet écoulement a fait l’objet de différentes études numériques

et expérimentales ([133],[84], [7], [29], [15]).

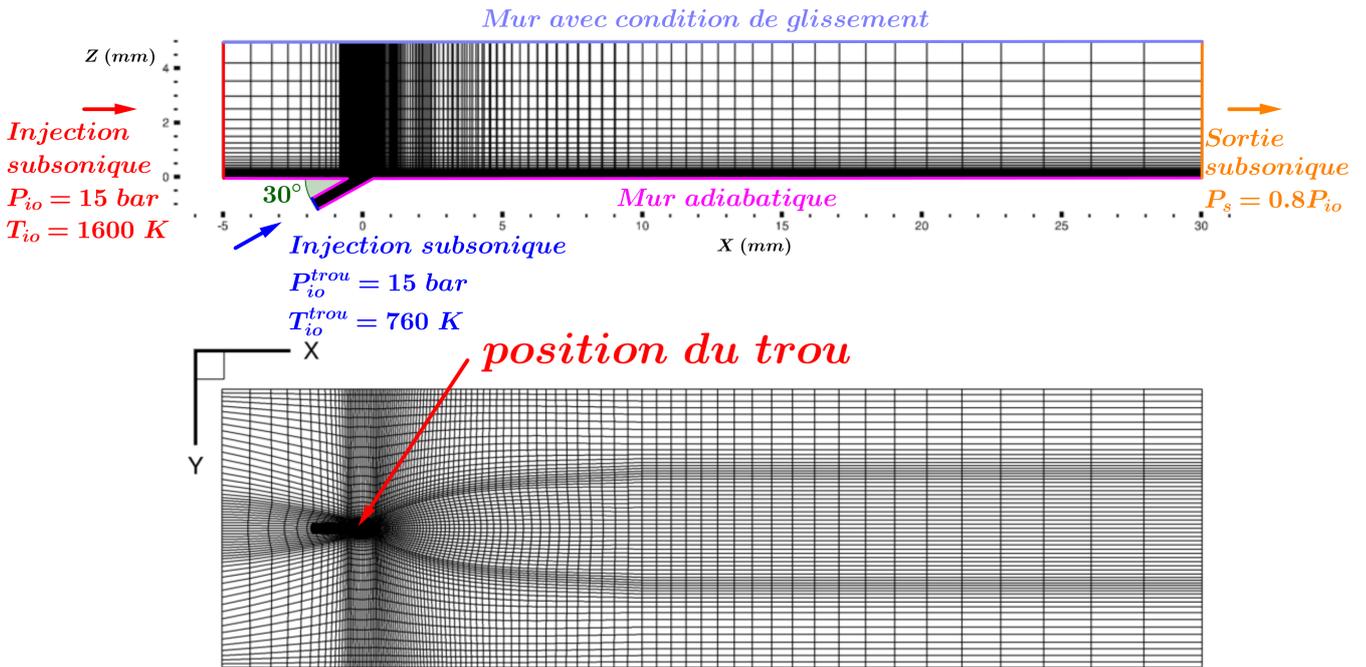


Figure 3.60 – Présentation de la configuration du Film Cooling. En haut : vue en coupe XZ du domaine de simulation fluide et des conditions aux limites associées. En bas : vue en coupe XY .

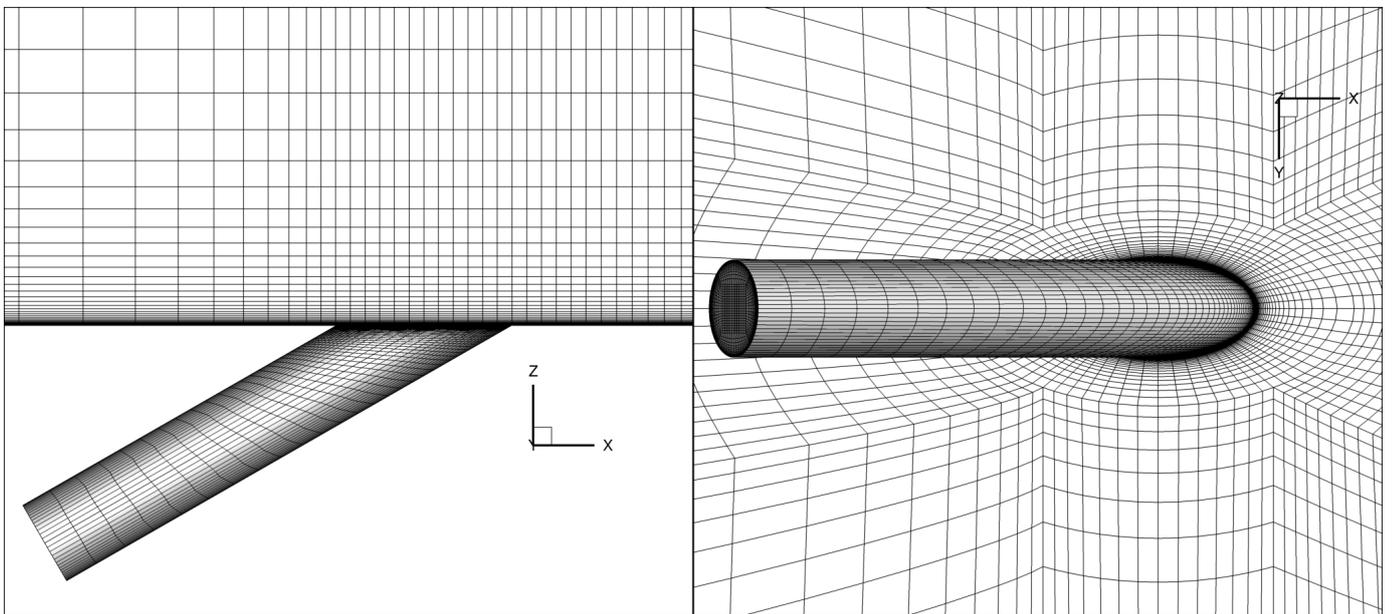


Figure 3.61 – Présentation de la configuration du Film Cooling, visualisation de la zone du trou. À gauche : vue en coupe XZ . À droite : vue en coupe XY .

Cette configuration simplifiée présente un véritable intérêt d'un point de vue industriel. En effet, la stratégie du *film cooling* est un effet technologique souvent présent sur les aubes de turbine afin de les protéger, via ce refroidissement, des températures très élevées en sortie de chambre de combustion, ce

qui permet d'augmenter leur durée de vie. Ainsi, Montomoli [84] compare différentes géométries des trous de refroidissement sur une plaque plane afin d'en améliorer la protection et le refroidissement. Les paramètres caractérisant cette étude de Film Cooling sont en réalité assez nombreux, tant sur le plan géométrique que sur le plan physique. Par exemple, les trous peuvent être purement cylindriques ou être légèrement évasés (configuration de type *shaped cooling holes* dans la littérature). Auf Dem Kampe [7] s'intéresse à une étude assez poussée de ces différents paramètres géométriques et physiques. La diversité de ces paramètres rend compliquée la comparaison des tracés de refroidissement thermique et conduit certains auteurs, comme Colban [29] par exemple, à s'intéresser à l'établissement de corrélations pour l'efficacité du refroidissement thermique vis-à-vis de ces différents paramètres.

L'objectif recherché dans notre étude n'est pas de mener une analyse physique fine de l'écoulement mais il n'est plus non plus de caractériser la précision de la discrétisation spatiale. En effet, celle-ci a désormais été évaluée assez finement sur les différents cas de validation qui ont précédé. Notre but premier, avec cette configuration de Film Cooling, est de procéder à l'évaluation des propriétés de robustesse du nouveau solveur elsA-H sur un maillage représentatif d'une stratégie de maillage hybride qui pourra être déployée par la suite pour traiter des configurations industrielles. La précision de la solution numérique reste bien sûr un critère que nous allons observer et évaluer mais nous anticipons en premier lieu de possibles problèmes de robustesse compte tenu des niveaux de déformation du maillage qui vont apparaître dans le maillage hybride développé pour réaliser nos simulations.

La mise en œuvre numérique de cette étude de Film Cooling est détaillée sur la figure 3.60 où différentes visualisations de l'ensemble du domaine de calcul sont proposées. On présente ainsi en partie haute une coupe du domaine de calcul correspondant au plan XZ en $Y = 0$ et en partie basse une vue de dessus du domaine de calcul correspondant au plan XY en $Z = 0$ sur laquelle on repère la position médiane du trou de refroidissement suivant Y . Des conditions d'injection subsonique sont appliquées à l'amont de la plaque et à l'entrée du trou, l'aval de la plaque est traitée par une condition de sortie subsonique, la plaque et la paroi du trou sont représentées par une condition de mur adiabatique et enfin, les deux frontières transverses ainsi que la frontière supérieure du domaine sont traitées par une condition de paroi avec glissement. Les détails de la géométrie et des conditions aux limites (conditions d'injection notamment) de notre étude pourraient être choisis de façon à correspondre à un cas d'étude de la littérature, afin d'autoriser la comparaison des résultats de nos simulations à des résultats numériques ou expérimentaux disponibles. Toutefois, l'objectif principal recherché dans cette étude n'étant pas d'établir (à nouveau) la précision du solveur mais d'évaluer plutôt son comportement sur un maillage représentatif d'une stratégie hybride industrielle, il a été choisi de faire correspondre la géométrie et les conditions limites, non pas à des données de la littérature, mais à des données caractéristiques d'un cas d'aube perforée d'intérêt pour Safran. Il sera fait référence à cette configuration d'aube perforée dans la suite de ce document sous l'appellation CM2013 (voir en particulier les applications industrielles du chapitre 5). Le prix à payer pour ce choix est que nous ne disposons d'aucune donnée expérimentale ou numérique de référence pour caractériser la solution physique de l'écoulement simulé.

Nous avons donc choisi de construire notre propre solution de référence pour ce problème de Film Cooling en utilisant en premier lieu le solveur structuré elsA, ce qui suppose de disposer d'un maillage structuré pour cette configuration combinant un trou d'injection et une plaque plane. La réalisation de ce maillage structuré est particulièrement délicate - ce qui justifie naturellement le recours à une stratégie hybride pour laquelle la génération automatisée du maillage est facilitée -. Nous illustrons sur les figures 3.60 et 3.61 les caractéristiques de ce maillage structuré de référence qui a été produit par Lionel Castillon.

Les calculs menés par la suite en formulation hybride seront réalisés sur un maillage bien différent du maillage structuré. Les caractéristiques de ce maillage hybride sont présentées sur la figure 3.62. Nous pouvons dès à présent anticiper des effets de maillage dans les solutions numériques produites en utilisant elsA-H dans ces maillages hybrides. La figure 3.63 représentant une comparaison des maillages structuré et hybride met en lumière la différence de qualité de ces deux maillages. Afin de vérifier que

les écarts qui apparaîtraient entre la solution de référence en maillage structuré et les solutions calculées dans des maillages hybrides sont bien imputables aux différences existantes entre les maillages utilisés, nous avons également souhaité réaliser une simulation du problème de Film Cooling en utilisant le solveur non structuré d'elsA-H sur le même maillage que celui utilisé en structuré. Nous avons donc réalisé une version non structurée du maillage, obtenue par déstructuration du maillage structuré déjà présenté sur les figures 3.60 et 3.61 et sur laquelle nous ferons tourner le solveur non structuré d'elsA-H. Nous pourrions ainsi vérifier l'accord entre solution totalement structurée et solution totalement non structurée à iso-maillage. Le cas échéant, nous pourrions ainsi imputer des différences de solutions aux effets de maillage.

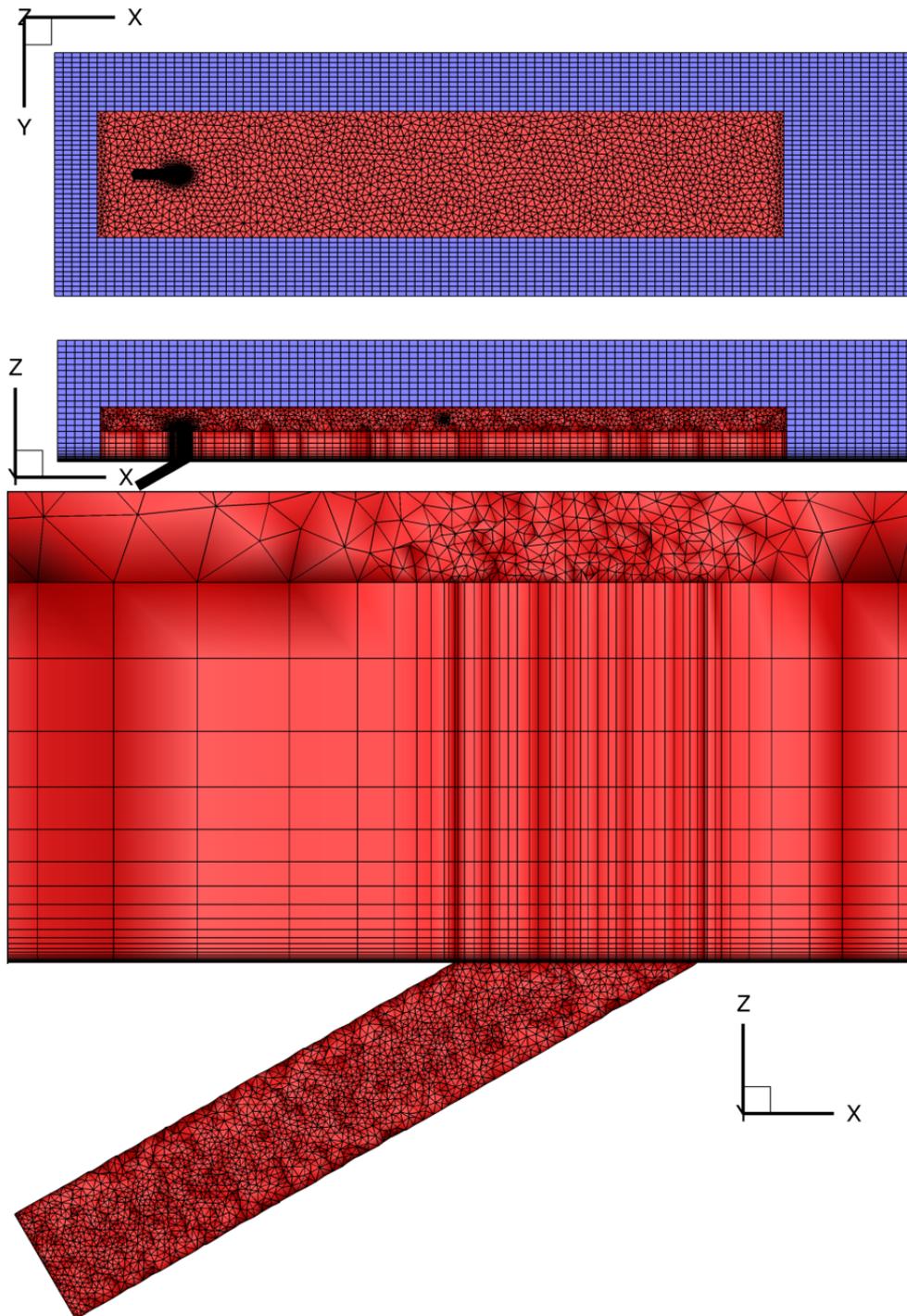


Figure 3.62 – Présentation du maillage hybride de la configuration du Film Cooling, avec en rouge la zone non structurée et en bleu la zone structurée. En haut : vue en coupe XZ . Au milieu : vue en coupe XY . En bas : visualisation de la zone du trou avec une coupe en XZ pour $Y = 0$.

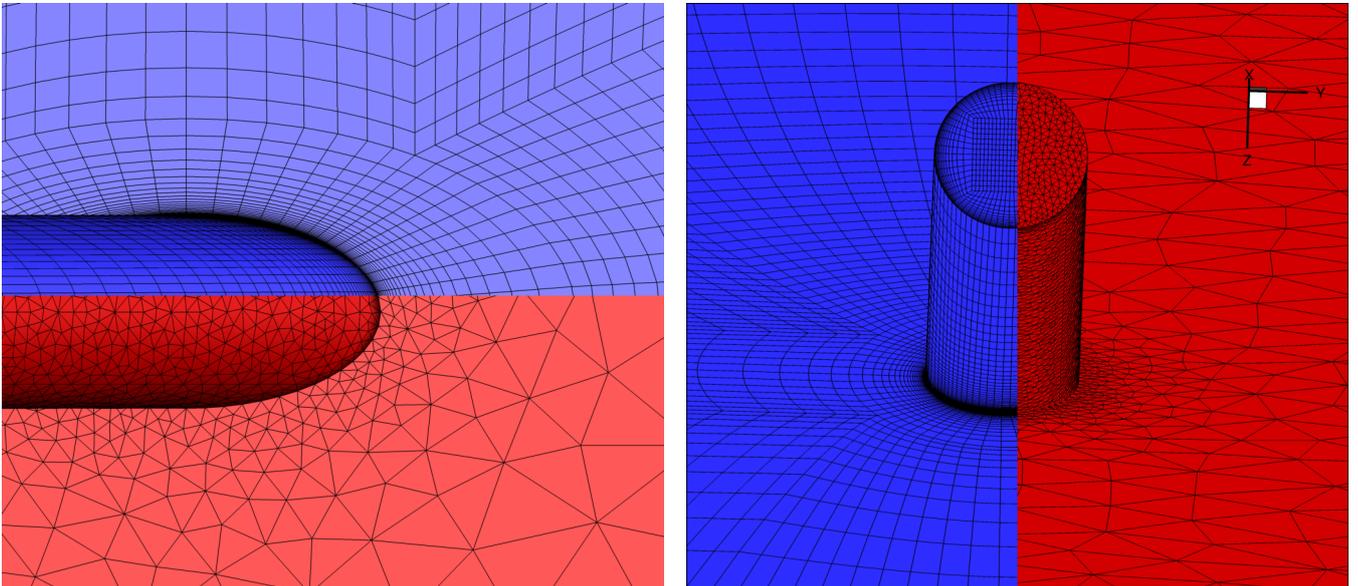


Figure 3.63 – Différence des maillages structuré et hybride (en rouge les zones non structurées et en bleu les zones structurées).

3.4.2 Calculs structuré et non structuré de référence

Calcul structuré

La simulation structurée de référence est réalisée avec un calcul des gradients au centre des cellules par la méthode des *Moindres Carrés*, les gradients aux faces sont calculés par la méthode *5p*. Un schéma de Roe d'ordre deux (reconstruction linéaire) est appliqué sans limitation. La turbulence est décrite par le modèle de *Spalart-Allmaras*. Comme l'indique la figure 3.64, le calcul converge correctement et sans difficulté particulière : plusieurs ordres sont perdus sur les résidus de ρ - un comportement analogue est observé pour les résidus associés aux autres composantes du vecteur des variables conservatives -. La figure 3.65 illustre différentes coupes de température réalisées sur le champ stationnaire calculé. Les coupes selon X sont réalisées à 25, 50 et 90% de la longueur de la plaque comme illustré sur l'image (d) de la figure 3.65. On observe que le fluide frais injecté à environ 14% (en $X = 0$) génère une trace thermique dont la section s'étend au fur et à mesure que l'on progresse vers l'aval de la plaque et qui est globalement persistante sur l'intégralité de la longueur de la plaque. Le tracé des lignes de courant sur la coupe (a) indique la présence d'une paire de tourbillons contra-rotatifs. Ceux-ci sont bien attendus, en accord avec l'étude expérimentale d'Andreopoulos [4]. Ces tourbillons contribuent au refroidissement du fluide chaud et également à la protection thermique de la plaque plane puisque le fluide frais est rabattu vers la paroi. L'étude d'Acalar et Smith [2] prévoit également que l'injection d'un fluide au niveau d'une paroi engendre l'apparition de tourbillons en forme de fer à cheval. Plus généralement, ces tourbillons apparaissent facilement au contact de petites perturbations, comme une zone de rugosité irrégulière par exemple.

Cette étude de référence menée en maillage structuré permet d'établir certaines attentes physiques clés sur cette configuration, à savoir une préservation de la trace thermique tout au long de la plaque et la présence de tourbillons contra-rotatifs.

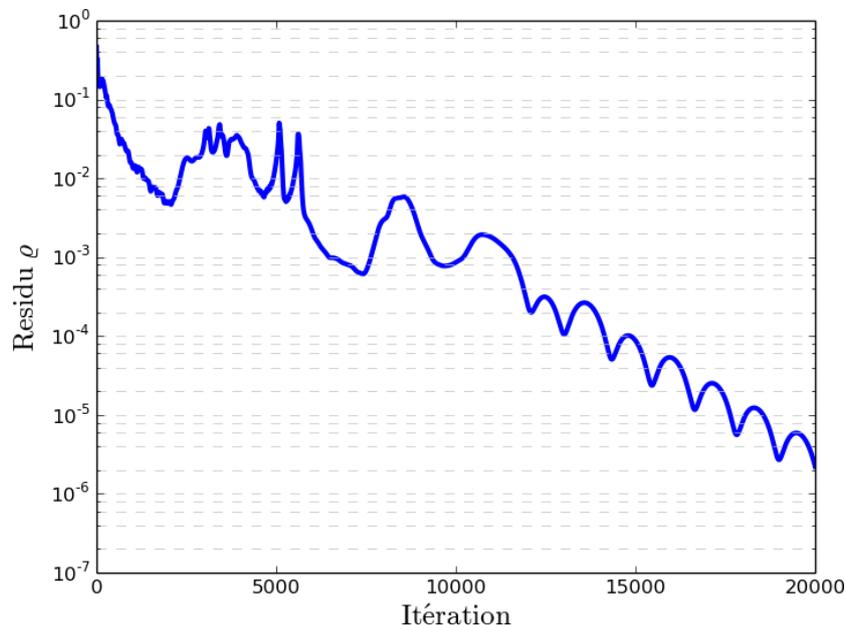


Figure 3.64 – Calcul de référence structuré d'ordre deux sur la configuration du Film Cooling : historique de convergence des résidus sur ρ

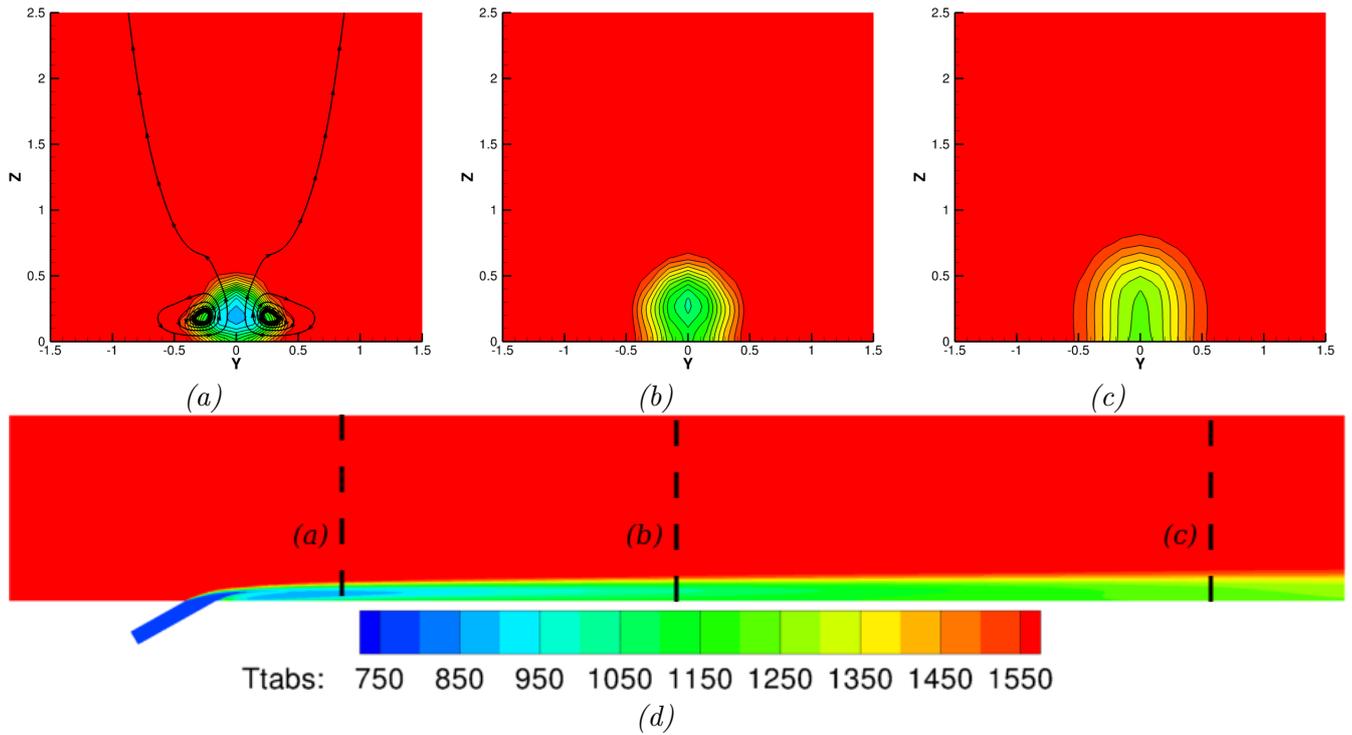


Figure 3.65 – Calcul de référence structuré d’ordre deux sur la configuration du Film Cooling. Coupes de température selon X : (a) à 25%, (b) à 50% et (c) à 90% de la longueur de plaque ; selon Y pour (d) et lignes de courant pour (a).

Calcul non structuré

Le calcul non structuré de référence s’appuie sur le maillage de l’étude structurée après déstructuration. Les méthodes numériques utilisées sont les mêmes que celles employées lors de l’étude structurée, seule leur implémentation diffère dans la mesure où le solveur non structuré est sollicité ici. La figure 3.66 confirme que la convergence se fait sans difficulté particulière, comme en structuré. On retrouve bien également sur la figure 3.67 à la fois la préservation de la trace thermique et les tourbillons contra-rotatifs. Visuellement, les résultats obtenus en non structuré et présentés sur la figure 3.67 apparaissent tout à fait semblables à ceux obtenus en structuré et présentés sur la figure 3.65.

Afin de faciliter d’une part la comparaison globale entre ces deux simulations à iso-maillage et de disposer d’autre part d’une quantité physique facilement visualisable qui donne une indication de la performance de refroidissement associée au trou d’injection, on introduit l’efficacité de refroidissement thermique à la paroi, notée η et définie par la relation :

$$\eta = \frac{T_{io} - T_w}{T_{io} - T_{io}^{trou}} \quad (3.39)$$

où T_w désigne la température au niveau de la paroi de la plaque plane ; T_{io} et T_{io}^{trou} correspondent respectivement à la température à l’amont de la plaque et à l’amont du trou, comme indiqué sur la figure 3.60. La quantité η permet d’évaluer le long de la plaque plane si la paroi de la plaque est correctement refroidie ou non. Si le refroidissement est efficace, la température de paroi va s’approcher de la température froide T_{io}^{trou} et η va alors tendre vers 1. En revanche, si le refroidissement est inefficace, T_w sera proche de la valeur de T_{io} et η tendra alors vers 0.

La figure 3.67 présente l’efficacité du refroidissement thermique à la paroi en fonction de la position le long de l’axe X de la paroi telle que calculée par le solveur structuré et non structuré dans le même maillage de référence (particulièrement régulier mais aussi ayant exigé une forte expertise ingénieur pour pouvoir être construit). Il est ainsi possible de conclure que les calculs structuré et non structuré fournissent à iso-maillage des solutions parfaitement comparables.

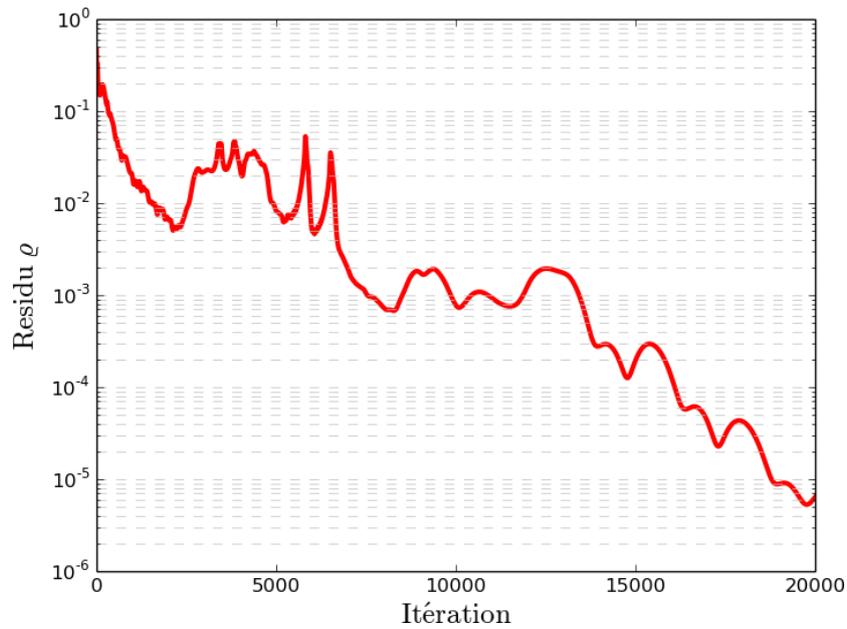


Figure 3.66 – Calcul de référence non structuré d’ordre deux sur la configuration du Film Cooling : historique de convergence des résidus sur ρ

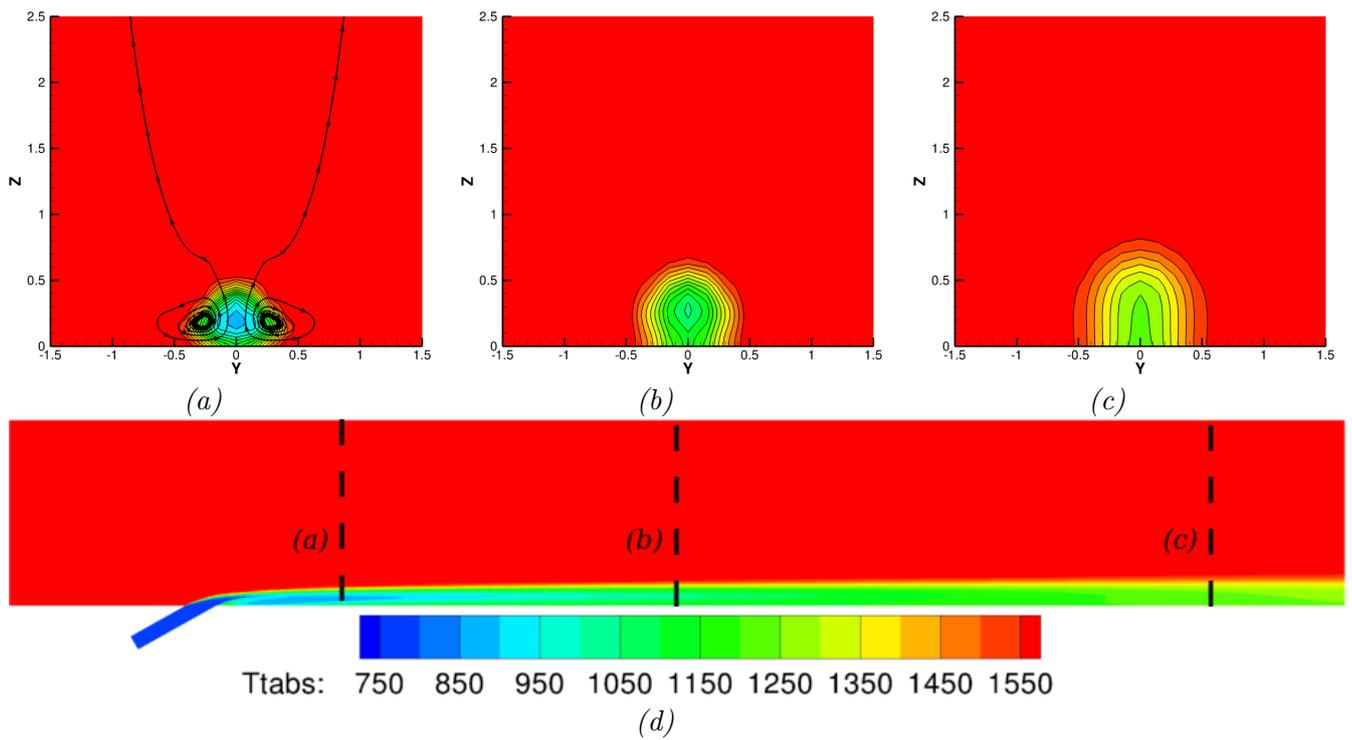


Figure 3.67 – Calcul de référence non structuré d’ordre deux sur la configuration du Film Cooling. Coupes de température selon X : (a) à 25%, (b) à 50% et (c) à 90% de la longueur de plaque ; selon Y pour (d) et lignes de courant pour (a).

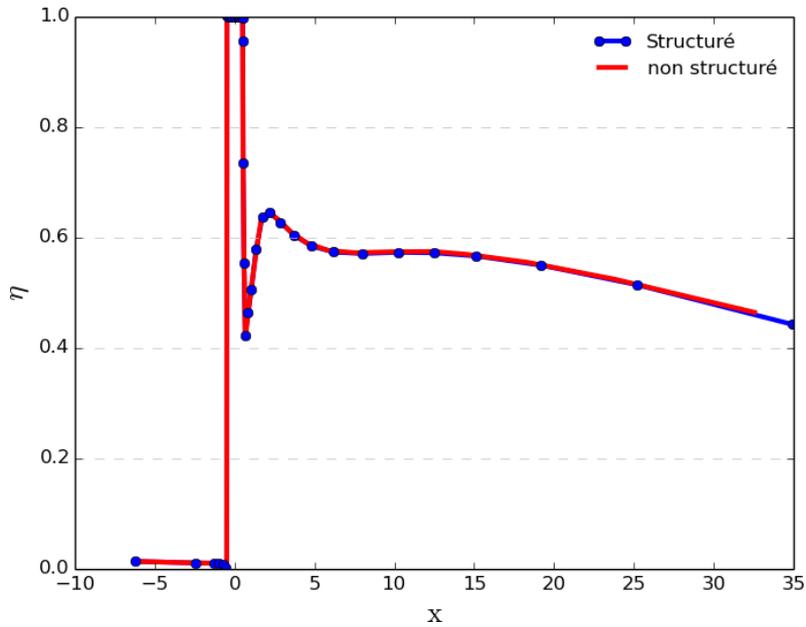


Figure 3.68 – Comparaison de l’efficacité de refroidissement thermique η entre le calcul structuré de référence et le calcul non structuré de référence à iso-maillage

Performance

Les calculs qui viennent d’être réalisés avec les solveurs structuré et non structuré de elsA-H pour la configuration de Film Cooling nous permettent d’introduire ici quelques commentaires sur la performance des simulations hybrides - avant de procéder au calcul hybride proprement dit de cette configuration -. Nous rappelons tout d’abord que l’une des justifications de l’adoption d’une stratégie hybride est de limiter l’application du solveur non structuré à des zones spécifiques de l’écoulement afin de continuer à bénéficier de l’efficacité a priori supérieure du solveur structuré dans les zones qui peuvent être facilement maillées en structuré. Il semble donc intéressant de mettre à profit la réalisation de calculs structurés et non structurés à iso-maillage, iso-méthodes numériques et iso-répartition de charge pour évaluer plus précisément le rapport de coût qui existe entre les deux solveurs - dans leur état actuel de développement respectif -.

Lors de la simulation structurée, le temps moyen nécessaire à la réalisation du calcul d’une itération sur une cellule est de : $T_{structuré} = 9.59 \cdot 10^{-6} \text{ s/itération/cellule}$. Le temps obtenu pour le calcul non structuré est : $T_{non\ structuré} = 1.41 \cdot 10^{-5} \text{ s/itération/cellule}$. On observe alors un surcoût de calcul de l’ordre de 47 % en non structuré par rapport au structuré. Ce résultat est donc conforme à notre hypothèse initiale sur l’efficacité supérieure du solveur structuré mais doit cependant être pris avec précaution dans la mesure où il n’est que le reflet du niveau d’optimisation actuel des solveurs structuré et non structuré. On peut en particulier imaginer qu’une amélioration continue des performances du solveur non structuré puisse aboutir in fine à rendre attractives des simulations entièrement non structurées.

3.4.3 Calculs hybrides

Maillages hybrides

Disposant désormais de calculs de référence structuré et non structuré qui fournissent des résultats comparables, nous poursuivons maintenant l’étude du Film Cooling en faisant appel à des maillages représentatifs d’une stratégie hybride à caractère industriel. On entend par là qu’il est attendu un effort minimal à réaliser pour construire un maillage de la configuration plaque avec trou d’injection. On peut imaginer ainsi par exemple construire un maillage hybride qui combine un maillage structuré pour une grande partie de la zone de plaque et un maillage non structuré dans le trou d’injection et au niveau de la zone de transition entre la surface du trou au niveau de la plaque et la partie structurée du maillage de la plaque. Les caractéristiques du maillage hybride réalisé ont déjà été présentées sur

la figure 3.62 et on récapitule dans le tableau 3.4 les données relatives à ce maillage.

	Maillage hybride	Maillage de référence
Hexaèdres	130 920	421 160
Pyramides	2 928	-
Prismes	113 564	-
Tétraèdres	252 873	-
Total	500 285	421 160
Trou	Tétraèdres	Hexahèdres
Insertion Trou/Plaque	Prismes	Hexahèdres
Plaque proche paroi	Hexaèdres Prismes	Hexahèdres
Plaque	Hexahèdres Tétraèdres Pyramides	Hexahèdres

Table 3.4 – Description du maillage hybride de l'étude Film Cooling

Calcul hybride à l'ordre 2

La simulation hybride de la configuration du Film Cooling est réalisée en adoptant les mêmes ingrédients numériques que ceux utilisés dans les simulations structurée et non structurée précédentes : calcul des gradients au centre des cellules par la méthode LSQ , calcul des gradients aux faces par $5p$, utilisation d'un schéma de Roe d'ordre deux (reconstruction linéaire) sans limitation. La turbulence est toujours décrite par le modèle de *Spalart-Allmaras*. La figure 3.69 présente l'évolution des résidus sur ρE au cours des itérations. On observe une divergence très rapide du calcul.

Différentes variantes du schéma hybride d'ordre deux ont alors été testées en jouant sur les options de discrétisation disponible (qG plutôt que LSQ , $\overline{5pcor}$ plutôt que $5p$, etc). Il n'a pas été possible d'obtenir, dans le maillage hybride utilisé, de convergence. Nous n'avons volontairement pas cherché à modifier le maillage hybride dans la mesure où notre objectif est d'être en mesure de réaliser une simulation hybride quelle que soit la qualité du maillage à disposition. Naturellement, la qualité du maillage n'est pas sans impact sur la précision de la solution et nous pouvons ainsi anticiper une qualité moindre de la solution physique obtenue dans le maillage hybride déformé disponible par rapport à la qualité de la solution physique obtenue dans le maillage structuré de référence - au prix d'un très substantiel effort de génération de ce maillage, qui serait démultiplié pour une configuration industrielle -. Il s'agirait ensuite d'établir un compromis entre la flexibilité de génération du maillage hybride et la précision de la solution attendue. Dans le cas présent, le problème auquel nous sommes confrontés est celui de la robustesse du solveur hybride qui ne nous permet pas d'obtenir une solution stationnaire exploitable pour analyser le champ physique de cette configuration Film Cooling tel que calculé dans le maillage hybride exigeant généré.

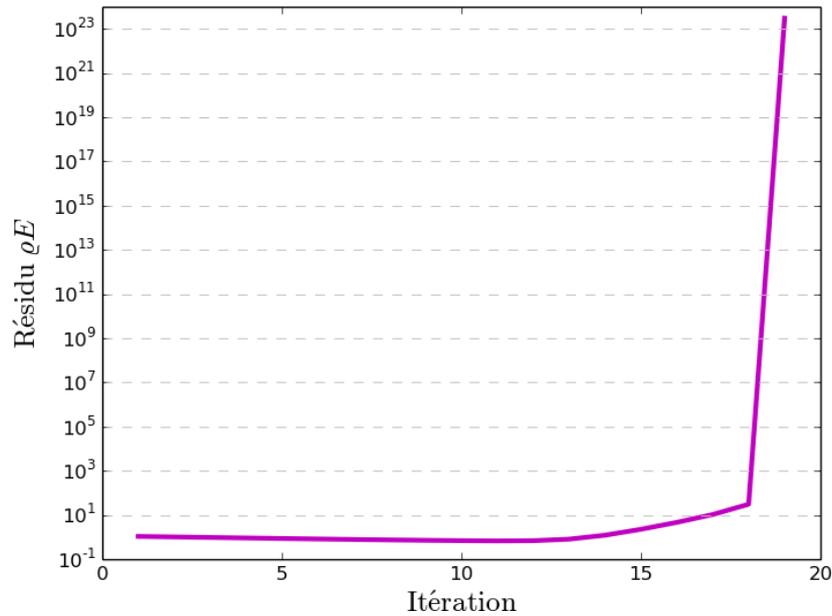


Figure 3.69 – Divergence des résidus pour ρE lors du calcul sur le maillage hybride de la configuration Film Cooling à l’ordre deux

Calcul hybride à l’ordre un

On a finalement recours à une simulation d’ordre un à l’aide d’elsA-H, en remplaçant donc la reconstruction linéaire dans le flux numérique du schéma de Roe par une reconstruction constante. Il est alors possible d’obtenir un calcul qui converge vers l’état stationnaire, comme illustré sur la figure 3.70. Cependant, comme on pouvait s’y attendre, l’utilisation d’une discrétisation spatiale d’ordre un seulement limite fortement la précision de la solution discrète. L’efficacité de refroidissement thermique à la paroi calculée par le solveur elsA-H à l’ordre un est présentée sur la figure 3.71. On observe qu’une fois passé le trou, le refroidissement obtenu est beaucoup moins efficace que celui constaté en structuré et en non structuré avec le maillage de référence (cf. figure 3.68). Les coupes de température à $X = cste$ le long de la plaque, à 25%, 50% et 90% de la longueur de plaque, sont présentées sur la figure 3.72. On observe un fort étalement selon l’axe Y de la trace thermique à 25% et 50% de la longueur de plaque avec des amplitudes beaucoup plus faibles que celles obtenues sur les calculs de référence (figures 3.65 et 3.66). À la fin de la plaque, la trace thermique a quasiment intégralement disparu. À 25% de la longueur de plaque, les tourbillons contra-rotatifs ne sont pas présents. La physique de l’écoulement restituée est donc très éloignée de celle obtenue par les simulations de référence.

Un certain manque de précision était attendu dans le calcul hybride en raison de l’effet de maillage (la qualité du maillage hybride généré étant moindre que celle du maillage structuré de référence) mais lorsque s’ajoute à cet effet de maillage la dissipation numérique excessive du solveur d’ordre un la perte de précision observée n’est évidemment pas acceptable. Il apparaît donc indispensable d’être en mesure de réaliser une simulation d’ordre deux dans le maillage hybride développé pour cette configuration de Film Cooling et pour ce faire nous nous proposons dans le chapitre qui suit d’améliorer la robustesse du solveur d’ordre deux.

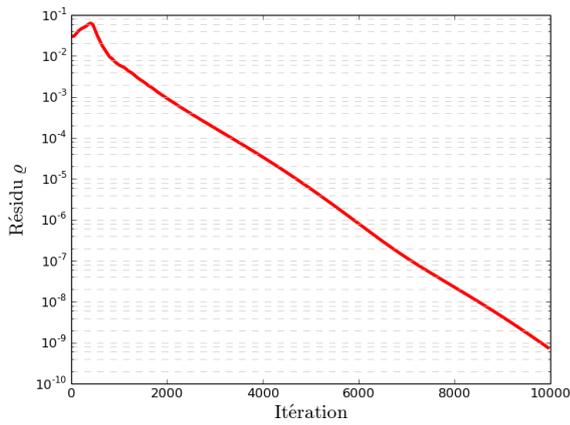


Figure 3.70 – Convergence des résidus sur la densité pour le maillage hybride de la configuration Film Cooling à l'ordre un.

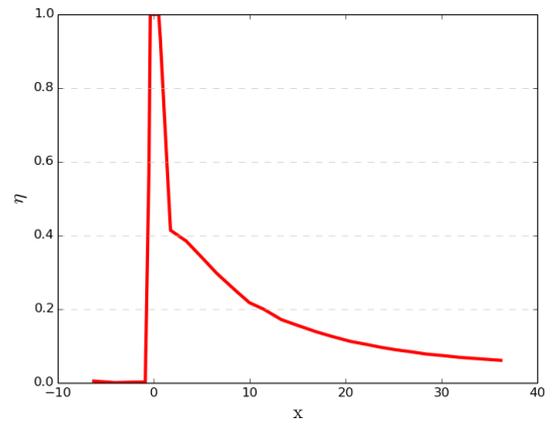


Figure 3.71 – Efficacité du refroidissement thermique à la paroi pour le maillage hybride de la configuration Film Cooling à l'ordre un.

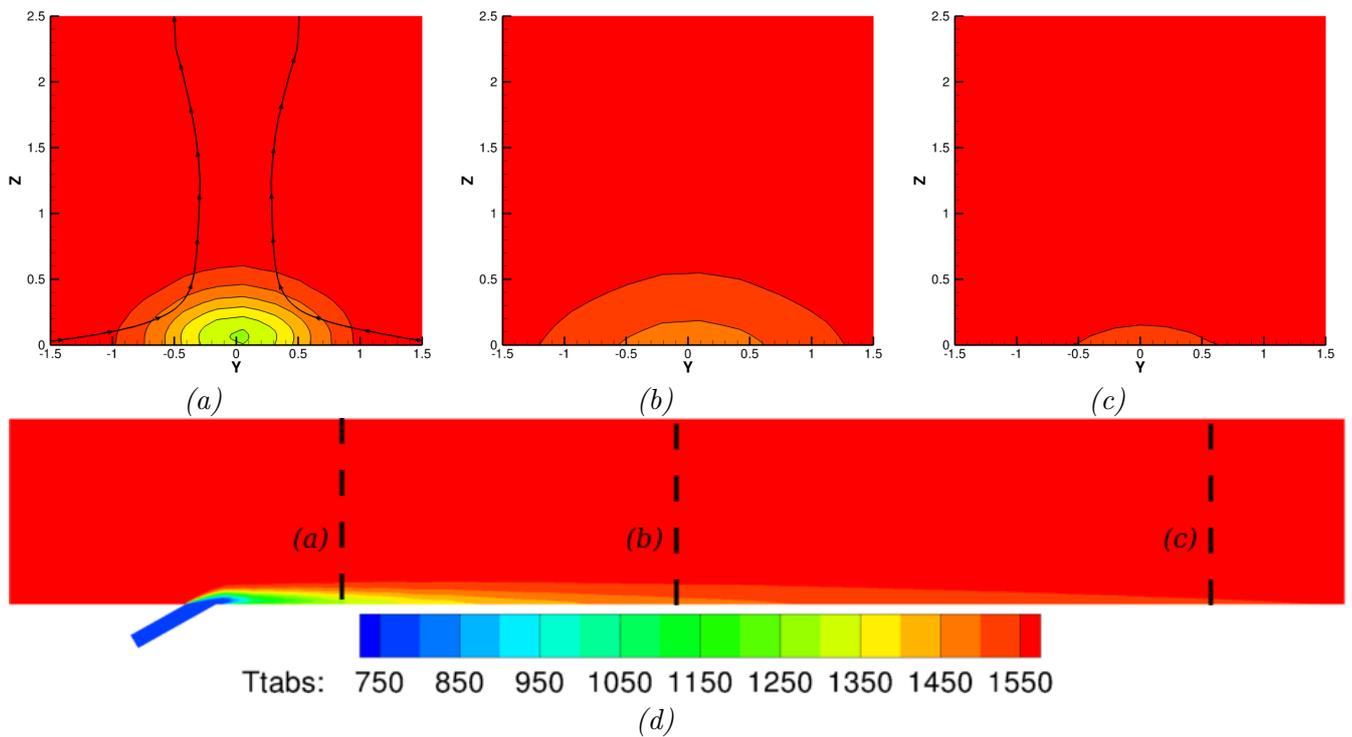


Figure 3.72 – Calcul Film Cooling sur le maillage hybride à l'ordre un. Coupes de température selon X : (a) à 25%, (b) à 50% et (c) à 90% de la longueur de plaque ; selon Y pour (d) et lignes de courant pour (a).

Chapitre 4

Amélioration de la robustesse du solveur elsA-H

Le chapitre précédent a permis d'une part de valider, en s'appuyant sur quelques configurations académiques, la précision d'ordre deux offerte par le solveur hybride développé dans cette thèse et d'autre part de mettre en évidence la mise en échec du solveur hybride d'ordre deux en espace dès lors qu'on cherchait à le mettre en œuvre sur une configuration un peu plus exigeante, technique de *film cooling* sur plaque plane. Soulignons plus précisément, - ce point est très important - que le caractère "exigeant" de la configuration du Film Cooling est apparu lié non pas à sa géométrie ou à la physique de l'écoulement mais au niveau de déformation ou au manque de régularité du maillage hybride sur lequel la simulation a été effectuée. Cette observation est en effet confortée par le fait que le solveur hybride d'ordre deux a pu être mis en œuvre sans difficulté sur un maillage régulier (maillage initialement structuré puis transformé en maillage entièrement non structuré sans en modifier les caractéristiques géométriques). Ce maillage régulier n'a cependant pu être généré qu'au prix d'un travail conséquent et grâce à l'expertise de l'ingénieur ayant produit ce maillage. L'un des enjeux importants de la stratégie hybride développée est bien de pouvoir réaliser des simulations, de précision acceptable donc en faisant appel à un solveur d'ordre deux, dans des maillages qui peuvent être de qualité médiocre mais auront pu être générés au prix d'un effort modéré. Soulignons aussi que le défaut de robustesse du solveur d'ordre deux a été clairement mis en évidence par le fait qu'il a été nécessaire de dégrader la précision du solveur hybride à l'ordre un pour être en mesure de converger vers une solution stationnaire du problème de Film Cooling sur le maillage hybride utilisé.

Le fait que le solveur d'ordre deux ait été mis en échec dans le maillage hybride utilisé pour le problème de Film Cooling alors que le solveur d'ordre un a été en mesure de produire une solution - malheureusement peu précise en raison de la dissipation excessive du schéma de Roe à l'ordre un - c'est-à-dire avec reconstruction constante des états aux faces - nous donne une indication précise de la source première du manque de robustesse du solveur d'ordre deux : il s'agit du processus de reconstruction linéaire des états aux faces

$$\begin{cases} \mathbf{U}_F^L = \mathbf{U}_I + \mathbf{IF} \cdot \nabla \mathbf{U}_I \\ \mathbf{U}_F^R = \mathbf{U}_{If} + \mathbf{I}^f \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{U}_{If} \end{cases}$$

qui fait appel aux estimations d'ordre un du gradient des variables primitives au centre des cellules. Il apparaît donc que ce processus de reconstruction linéaire produit des états non-physiques qui conduisent à l'échec de la simulation. Plus précisément encore, on peut formuler deux hypothèses quant à l'origine des états non-physiques produits : i) l'estimation du gradient au centre réalisée dans certaines cellules conduit à des valeurs erronées de ce gradient qui, une fois injectées dans les formules de reconstruction, produisent la divergence du solveur ; ii) la formule de reconstruction elle-même produit des oscillations dans la solution générant *in fine* la divergence du solveur. Ces deux effets peuvent également se combiner pour expliquer le manque de robustesse. Nous disposons donc de deux pistes que nous allons explorer dans ce chapitre pour améliorer la robustesse du solveur hybride : corriger l'estimation des gradients et/ou corriger la formule de reconstruction.

Avant de proposer différentes pistes d'amélioration de la robustesse du solveur hybride, nous souhaitons mieux caractériser les particularités géométriques qui peuvent être associées aux maillages hybrides qui doivent être générés en assurant des raccords coïncidents entre les blocs structurés et non structurés puisqu'il s'agit là d'une hypothèse de base de la stratégie d'hybridation développée. La dégradation de la qualité du maillage par les contraintes de raccord coïncident - avec pour conséquence le manque de robustesse du solveur hybride - est mise en évidence dans la première section du présent chapitre.

Les techniques d'amélioration de la robustesse que nous étudions ensuite peuvent être réparties en deux grandes familles ou classes de méthodes : la première famille met en œuvre des techniques qui s'appuient exclusivement sur les caractéristiques géométriques du maillage tandis que la seconde famille est constituée par des techniques qui s'appuient sur les conditions physiques locales de l'écoulement (il s'agit par exemple de limiteurs de pente qui comparent les valeurs prises par les champs solutions de l'écoulement dans les différentes cellules du maillage).

L'apport de ces différentes stratégies d'amélioration de la robustesse est finalement évalué en reprenant la configuration du Film Cooling qui a tenu en échec le solveur hybride d'ordre deux au chapitre précédent. Il est ainsi démontré que les améliorations proposées permettent bien de mettre en œuvre le solveur hybride d'ordre deux dans le maillage hybride déformé initialement généré, ce qui constitue une étape importante vers l'application du solveur hybride à la simulation d'effets technologiques dans des configurations industrielles.

4.1 Particularités d'un maillage hybride coïncident

Au sein d'un domaine de calcul hybride, des zones structurées et non structurées sont simultanément présentes. Dès lors, les raccords entre blocs peuvent être de différentes natures :

- structuré lorsque les blocs de part et d'autre du raccord sont eux-mêmes tous les deux structurés,
- non structuré quand à l'inverse, les deux blocs en vis-à-vis sont non structurés,
- hybride lorsque l'un des blocs est structuré et le second non structuré.

Les raccords peuvent également être de différents types : coïncidents, non coïncidents, quasi coïncidents ... Comme expliqué précédemment dans le manuscrit, le cadre de travail de cette thèse se limite exclusivement à des raccords coïncidents. Ces derniers sont tels que deux cellules en vis-à-vis de part et d'autre de l'interface du raccord partagent exactement la même face.

Les raccords structurés sont bien maîtrisés et moyennant un effort de raffinement éventuel du maillage dans certaines directions, l'interface d'un raccord structuré ne soulève pas de difficulté majeure en terme de saut de taille de maille ou de forme de cellule. En effet, de part et d'autre de l'interface de raccordement, se trouvent nécessairement deux rectangles ou deux hexaèdres dont la forme et la taille peuvent être comparables.

Lorsqu'un raccord hybride ou non structuré possède de part et d'autre de son interface des cellules similaires en taille, en forme et en type, alors ce raccord ne pose guère plus de difficulté qu'un raccord structuré. En effet, on se retrouve dans la même logique : deux cellules comparables sont en vis-à-vis.

En revanche, la diversité du type de cellules disponibles en non structuré conduit souvent à des maillages qualifiés de mixtes pour lesquels au sein d'un même bloc, plusieurs types d'éléments différents sont utilisés. Dès lors, il est possible d'avoir un bloc non structuré composé d'hexaèdres en contact avec un bloc constitué de tétraèdres. Pour que le raccord soit coïncident entre ces deux blocs, la présence de pyramides dans un des deux blocs est indispensable. Par ailleurs, pour des raisons de précision évidente lors de simulation d'écoulement en régime turbulent, des blocs composés d'hexaèdres fortement étirés sont régulièrement employés à proximité des parois. Pour des raisons de flexibilité

de maillage, des blocs non structurés mixtes sont utilisés dans les zones de géométries complexes. Ces zones de géométries complexes sont le plus souvent associées à des parois. Cette stratégie de maillage mixte non structurée conduit nécessairement à une interface pour laquelle on aura d'un côté un hexaèdre fortement étiré en vis-à-vis d'une pyramide qui donne sur un tétraèdre. En réalité, cette association conduit à un dilemme. Il faut choisir entre deux critères de qualité ou régularité géométrique : maintenir un saut de volume acceptable entre l'hexaèdre et la pyramide ou bien travailler avec une pyramide pas trop étirée. La forme de la pyramide n'est d'ailleurs pas à négliger car elle détermine la forme des tétraèdres directement adjacents.

La figure 4.1 est représentative d'un raccord de ce type pour une zone de couche limite. On comprend avec les vignettes (a) et (b) l'impossibilité de définir un raccord multi-élément qui puisse simultanément satisfaire de façon convenable plusieurs critères géométriques. Par ailleurs, il faut noter que bien que cette figure est vocation à être illustrative d'une zone de couche limite, le rapport de forme de l'hexaèdre est bien plus important en réalité, ce qui sans chercher à respecter absolument le saut de volume lors de la génération de la pyramide entraîne la création d'une pyramide fortement étirée et par conséquent d'un tétraèdre également trop étiré.

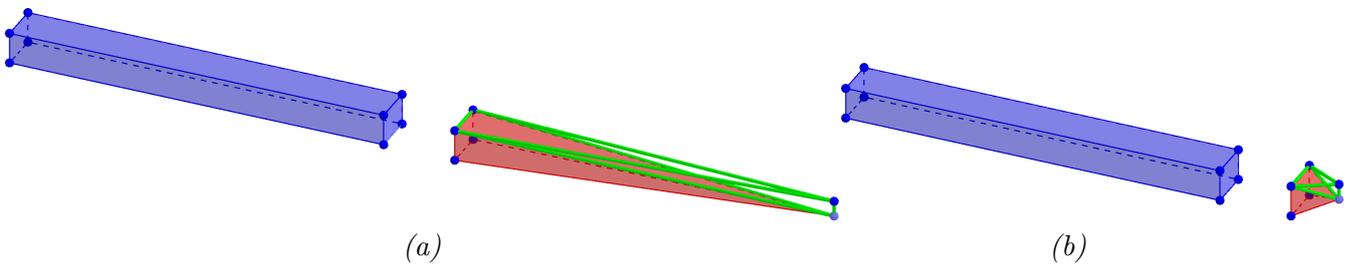


Figure 4.1 – Illustration d'un raccord hybride ou non structuré coïncident avec un hexaèdre et une pyramide représentatifs d'un maillage de couche limite. En **bleu** : l'hexaèdre, en **rouge** : la pyramide et en **vert** : le tétraèdre adjacent à la pyramide. (a) : préservation du volume, (b) : préservation de la qualité de la forme

Cette difficulté de maillage, propre aux approches hybride coïncidente et non structuré mixte, constitue une problématique qui a été longtemps peu abordée car il était finalement préférable de retravailler le maillage plutôt que de s'y confronter. Mais cette problématique est désormais en pleine actualité compte tenu de la complexité des géométries actuelles. Ce sujet est ainsi traité, parmi d'autres références de la littérature que nous évoquerons dans la suite du chapitre, par une équipe de chercheurs du JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency) [107] qui cherchent à améliorer la robustesse de leurs simulations en maillages mixtes.

On pourrait facilement imaginer lever ces contraintes en basculant vers des raccords de type non coïncidents et en augmentant la taille de la face de la pyramide sur le raccord afin d'augmenter le volume de l'élément sans avoir à l'étirer. Cependant ceci implique de ne plus respecter les tailles de première maille. Par ailleurs, les travaux de thèse de Maugars [79] montrent que la mise en œuvre de tels raccords n'est pas triviale.

4.2 Techniques d'amélioration de la robustesse

Bien que les spécificités géométriques causant le manque de robustesse du solveur soient directement liées à la stratégie de maillage hybride avec des raccords coïncidents, les conséquences néfastes de la mauvaise géométrie d'une cellule sur la robustesse d'un solveur se retrouvent également dans des stratégies complètement non structurées. En effet certains auteurs explorent des stratégies de maillage mixte : la majorité du domaine est maillée de telle sorte que les zones à proximité des parois soient composées de quadrangles (en 2D) fortement étirés tandis que le champ lointain est composé de tri-

angles (toujours en 2D), les zones géométriquement complexes restant maillées en triangles - pour bénéficier de la flexibilité de ce type de maillage - même si elles se situent à proximité de parois. En fait, cette stratégie de maillage peut être considérée comme le pendant complètement non structuré de la stratégie hybride que nous développons. La zone de transition entre les triangles et les quadrangles présente les mêmes caractéristiques géométriques que la zone de raccord hybride. De ce fait, les difficultés géométriques rencontrées sont identiques et entraînent les mêmes conséquences pour la robustesse. Cette problématique de la robustesse sur des maillages de qualité géométrique faible est un axe de travail important pour plusieurs auteurs. Par exemple, Mavriplis dans [80] s'intéresse aux lacunes de la méthode des *Moindres Carrés* pour le calcul des gradients au centre des cellules situées dans la couche limite. Ces cellules sont naturellement étirées, voire courbées en fonction de la géométrie étudiée. Il s'intéresse à différents types d'éléments en 2D, triangulaires ou quadrangulaires, et montre l'intérêt de la pondération pour améliorer l'estimation du gradient sur des cellules de qualité géométrique faible. La pondération proposée par Mavriplis repose sur la distance qui sépare les centres des cellules. Il s'agit d'une pondération géométrique qui donne plus d'importance aux cellules dont les centres sont proches de celui de la cellule pour laquelle on cherche à calculer le gradient et moins aux cellules dont les centres sont plus éloignés. Petrovskaya [95] s'intéresse également à ce problème de robustesse géométrique des cellules de la couche limite et remet en cause la pertinence de la pondération géométrique proposée par Mavriplis pour introduire finalement une pondération dite *data dependent*, c'est-à-dire qui dépend de l'état physique local dans les cellules. Ces travaux ont été précédemment évoqués dans 3.1.2 lors de l'analyse des différentes stratégies disponibles pour évaluer le gradient au centre des cellules en maillage quelconque, parmi lesquelles ces approches de type *Moindres Carrés Pondérés* ou *WLSQ*. Rappelons-le que nous n'avons pas davantage approfondi l'utilisation de pondérations dans une approche *Moindres Carrés* car il nous est apparu, lors de l'analyse réalisée sur le problème modèle, que ces pondérations pouvaient avoir un intérêt surtout lorsqu'elles étaient appliquées à des supports étendus. Dans le contexte de simulations purement non structurées, tel que celui exploré par Mavriplis et Petrovskaya, l'utilisation de supports étendus ne pose pas de problème *a priori*. En revanche, dans le contexte du solveur hybride, la nécessaire communication entre blocs par l'intermédiaire d'une unique rangée de cellules fictives nous incite à privilégier des supports compacts et nous a donc conduits à abandonner cette piste.

Nous pouvons cependant retenir de ces études que si, par le passé, un soin particulier a été souvent accordé à la génération de maillages de bonne qualité (déformations faibles, transition régulière d'une maille à l'autre) et a donc conduit à assurer plus aisément la robustesse des solveurs, la complexité des géométries actuelles et les nouvelles stratégies de maillage, qu'elles soient hybrides ou complètement non structurées, ne permettent plus nécessairement de disposer d'un maillage de bonne qualité géométrique - nous définirons plus précisément dans la suite de ce chapitre des critères de qualité géométrique pour un maillage -. Par conséquent, des travaux d'amélioration de la robustesse sur des maillages de qualité géométrique médiocre sont menés actuellement dans plusieurs groupes de recherche dont nous évoquerons ci-après les travaux. Les stratégies envisagées peuvent se regrouper en deux grandes familles : la première famille analyse la physique de l'écoulement au niveau des cellules géométriquement "délicates" en s'appuyant sur les grandeurs physiques associées aux cellules voisines des précédentes ; la seconde famille regroupe des méthodes qui s'appuient uniquement sur la caractérisation de la qualité géométrique de la cellule pour tenter d'améliorer la robustesse du solveur. Des critères précis de qualité géométrique devront donc nécessairement être définis. Ces deux familles de techniques d'amélioration de la robustesse sont présentées dans cette section en commençant par une technique de lissage du gradient et une stratégie de limitation multidimensionnelle qui ne font appel ni l'une ni l'autre à des critères de caractérisation du maillage puis en terminant par une stratégie de calcul du gradient adapté à la qualité du maillage et l'application de limiteurs géométriques, approches faisant toutes les deux appel à la notion de qualité géométrique du maillage qui sera donc précisée.

4.2.1 Lissage des gradients

Le lissage des gradients a été introduit par F. Haider dans [53] afin de résoudre les problèmes de stabilité observés lors de l'utilisation de la méthode des *Moindres Carrés* sur des configurations maillées avec

des tétraèdres. Cette technique consiste à recalculer le gradient $\nabla\psi_I$ au centre de la cellule c_i comme le gradient moyen sur le volume constitué par l'union de la cellule c_i et de l'ensemble de ses cellules voisines de rang un, noté $V_{c_i}^1$. La valeur $\widehat{\nabla\psi_I}$ effectivement retenue pour l'estimation du gradient au centre I de la cellule courant est donc donnée par la relation :

$$\widehat{\nabla\psi_I} = \frac{1}{|\Omega_{c_i}| + \sum_{j \in V_{c_i}^1} |\Omega_{c_j}|} \left(|\Omega_{c_i}| \nabla\psi_I + \sum_{j \in V_{c_i}^1} |\Omega_{c_j}| \nabla\psi_J \right) \quad (4.1)$$

où les gradients $\nabla\psi_I$ et $\nabla\psi_J$ sont typiquement calculés au centre de chaque cellule du maillage par une approche *LSQ* ou *qG*. Le lissage des gradients permet d'élargir indirectement le support des cellules utilisées lors du calcul des gradients au centre d'une cellule. Par ailleurs, il est possible d'aborder ce processus de lissage avec une stratégie itérative, ce qui permet à chaque utilisation d'élargir encore plus le support utilisé. Il est attendu que l'élargissement du support lors d'une itération de lissage du gradient ne conduise pas à une dégradation de l'ordre de précision de la discrétisation spatiale mais puisse cependant introduire une erreur de troncature supplémentaire.

Du point de vue de la robustesse, le lissage des gradients avec des voisinages plus ou moins éloignés devrait permettre de réduire l'impact de gradients localement erronés - par exemple en raison d'une forte déformation locale du maillage - grâce à la prise en compte du gradient des cellules voisines. Ceci devrait contribuer à l'amélioration de la robustesse des calculs.

Nous nous proposons d'évaluer en pratique les différentes techniques d'amélioration de la robustesse dans la dernière partie de ce chapitre en calculant à nouveau à l'aide du solveur hybride la configuration de Film Cooling, après avoir bien sûr implémenté dans le solveur hybride lesdites techniques. Par ailleurs, nous reprenons ici l'étude de précision menée en dimension deux sur une fonction analytique au cours du chapitre 2.3 afin de vérifier *a priori* la précision du solveur hybride incluant la technique de lissage des gradients.

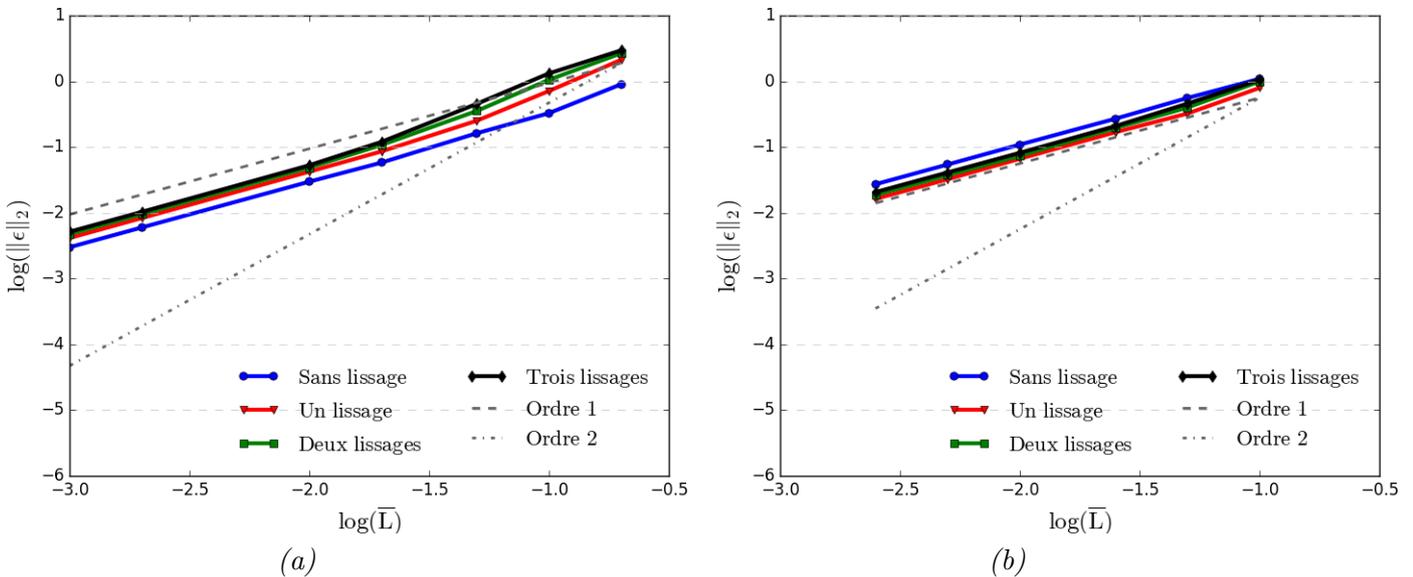


Figure 4.2 – Convergence en maillage quadrangulaire déformé (a) et triangulaire déformé (b) de l'erreur commise sur le calcul du gradient au centre des cellules par application de plusieurs niveaux de lissage sur un gradient calculé par *LSQ*

On constate ainsi sur la figure 4.2 que le lissage des gradients ne dégrade pas l'ordre de la solution obtenue, que ce soit sur des maillages quadrangulaires déformés ou triangulaires déformés. Par ailleurs, on note l'intérêt qui existe, en terme de précision, à effectuer une opération de lissage sur les maillages triangulaires. Ceci peut s'expliquer par le fait que le support *LSQ* d'une cellule triangulaire est plus facilement déformé que celui associé à une cellule quadrangulaire. Enfin, l'itération du processus de

lissage introduit une légère erreur supplémentaire pour chaque nouvelle itération. Cette petite erreur supplémentaire peut être stabilisante mais il faut veiller par ailleurs à ce que la solution reste physiquement acceptable.

Notons enfin que cette méthode de lissage de gradient peut également être considérée comme une stratégie de limitation multidimensionnelle. En effet, elle présente de fortes similarités avec la méthode de limitation multidimensionnelle proposée par Van Rosendale dans [122] et reprise par Jawahar dans [67]. Van Rosendale détermine la valeur du gradient au centre d'une cellule à partir d'une combinaison linéaire des valeurs des gradients aux nœuds de la cellule. Les pondérations de cette combinaison linéaire sont obtenues par application de la fonction de limitation proposée par van Albada dans [116].

4.2.2 Limiteurs multidirectionnels

4.2.2.1 Bref historique

Mavriplis explique dans [81] que la limitation, indispensable pour les écoulements faisant intervenir des ondes de choc, peut également être utilisée par les solveurs non structurés dans le but d'améliorer la robustesse lorsque la reconstruction basée sur l'utilisation du gradient souffre d'un manque de précision à cause d'un maillage de mauvaise qualité. Le parallèle effectué dans le paragraphe précédent entre le lissage des gradients qui améliore la robustesse et la méthode de limitation proposée par Van Rosendale permet de réaliser que la limitation est une piste souvent empruntée afin d'améliorer la robustesse des solveurs et qu'il convient donc de l'explorer ici.

Avant de parler de techniques de limitation proprement dites, nous proposons un bref rappel historique sur le développement de schémas robustes, *i.e.* ne produisant pas d'états non-physiques conduisant à l'échec de la résolution numérique. Ces états non-physiques sont la conséquence d'apparition d'oscillations dans la solution numérique discrète. Ces oscillations peuvent être produites par exemple par la capture d'une discontinuité dans l'écoulement mais elles peuvent aussi apparaître, comme dans notre cas, dans des zones de forte déformation du maillage. La robustesse de la simulation exige alors d'éviter que la méthode de discrétisation mise en œuvre ne conduise à l'amplification de ces oscillations et *in fine* à la divergence du calcul. L'analyse mathématique des conditions d'apparition et d'amplification de ces oscillations numériques a été menée dès 1959 par Godunov [51], qui a introduit le concept-clé de schéma monotone et a montré qu'un schéma *linéaire* monotone ne pouvait pas dépasser une précision d'ordre un. Notons que bien d'autres concepts ont été introduits au fil du temps pour caractériser les propriétés de robustesse d'un schéma numérique. Harten a ainsi introduit la notion de schéma *TVD* (pour Total Variation Diminishing ou à Variation Totale Décroissante) dans [55] et Jameson a également développé le concept de schéma *LED* (pour Local Extremum Diminishing) dans [64].

Van Leer dans sa célèbre série d'articles parus entre 1973 et 1979 [117, 118, 119, 120, 121] a construit un cadre général (dit méthode ou schéma *MUSCL* pour Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) permettant d'obtenir des schémas monotones *non linéaires* d'ordre deux. Le schéma *MUSCL* de Van Leer repose sur l'estimation des valeurs à droite et à gauche de chaque interface d'une cellule de contrôle à partir de la valeur moyenne et de la pente de la solution dans chaque cellule. L'élément clé de l'approche *MUSCL* réside dans la limitation de ces pentes par des fonctions non linéaires dites limiteurs de pente de façon à satisfaire les conditions de monotonie du schéma. Il est important de souligner que tous ces développements ont été réalisés initialement pour des problèmes mono-dimensionnels (voir notamment l'ouvrage de référence [73]) puis progressivement étendus à la simulation d'écoulements multidimensionnels sur des maillages structurés.

On doit également mentionner le développement des schémas volumes finis de type Essentially Non-Oscillatory (ENO) qui ont été introduits initialement par Harten *et al.* [56] puis ont été adaptés avec succès en maillages non structurés par différents auteurs (voir en particulier [1] et [89]). La mise en œuvre de l'approche ENO s'avère cependant coûteuse pour des applications industrielles dans la mesure où elle fait appel à plusieurs représentations polynomiales de la solution dans chaque cellule (en

faisant varier le support de cette représentation) pour sélectionner et utiliser finalement la représentation polynomiale assurant la régularité maximale. Une autre alternative possible est l'approche dite WENO (pour Weighted Essentially Non-Oscillatory) qui combine plusieurs reconstructions au lieu de sélectionner la plus régulière (voir également [125]). L'extension de ce type de stratégie à des géométries et des maillages à caractère industriel est complexe et surtout trop coûteuse pour être envisagée en pratique.

Par la suite, nous allons donc nous contenter de considérer une limitation de pente classique en nous plaçant classiquement dans la lignée de l'approche initialement proposée par Barth et Jespersen [10] dès 1989 et en y incorporant quelques ingrédients plus récents. Avant de détailler cette procédure de limitation multidimensionnelle, nous proposons quelques brefs rappels sur la limitation initialement disponible dans le solveur elsA-H.

4.2.2.2 État de l'art de la limitation pour le solveur elsA-H

Initialement dans le solveur elsA-H, la limitation a été obtenue par extension des stratégies de limitation du solveur structuré. Un maillage structuré de qualité bénéficie généralement d'un bon alignement de ses cellules avec les principales structures de l'écoulement. Ceci permet d'aborder la limitation avec une approche mono-dimensionnelle et d'appliquer directement, par direction de maillage, les stratégies précédemment évoquées, telles que l'approche *MUSCL* de Van Leer par exemple. La reconstruction au niveau de chaque face est alors traitée comme un problème de dimension un dans la direction perpendiculaire à la face.

En revanche, ces propriétés d'alignement du maillage disparaissent quasi-systématiquement avec un maillage non structuré. La pertinence de cette approche mono-dimensionnelle en non structuré est ainsi largement remise en cause par Jawahar dans [67]. Il prend pour exemple les travaux de Fezoui [45] et de Hosangadi [62] qui ont développé le limiteur de van Albada dans un contexte non structuré avec une approche de type mono-dimensionnelle. Il apparaît que les résultats numériques obtenus avec ces solveurs présentent une dépendance marquée au maillage ce qui n'est évidemment pas souhaitable. Lorsqu'il s'agit d'étendre en multi-D une méthode TVD, il est d'ailleurs utile de rappeler le résultat établi par Goodman et Leveque [52] qui ont démontré qu'au delà de la dimension un tout schéma *TVD* est au mieux précis à l'ordre un. Dans les maillages tout à fait généraux auxquels nous avons affaire dans le cadre de calculs hybrides, il semble donc raisonnable de ne pas chercher à développer des approches TVD mais de faire appel à des critères de monotonie moins stricts et surtout mieux adaptés à une approche véritablement multidimensionnelle, tel que le principe du maximum utilisé par Barth et Jespersen [10].

4.2.2.3 Mise en place d'une limitation multidimensionnelle

Le design et le développement de stratégies de limitation multidimensionnelle pour des solveurs non structurés a été le sujet d'intenses recherches. Néanmoins, exception faite des travaux de Van Rosendale [122], la plupart des stratégies proposées dans la littérature s'appuient sur les travaux réalisés par Barth et Jespersen dans [10] et en particulier sur la proposition d'utilisation du *principe du maximum*, une notion moins contraignante que le principe *TVD* qui assure également la non-apparition ou non-amplification des oscillations artificielles dans la solution (produites par des discontinuités ou des fortes déformations de maillage) et permet d'atteindre un ordre plus élevé de précision que l'ordre un associé à une reconstruction constante.

La stratégie proposée par Barth consiste à limiter les gradients des cellules de telle sorte qu'aucune valeur reconstruite ne devienne un nouvel extremum local. Pour limiter les gradients, Barth introduit donc pour une variable ψ un coefficient de limitation $\phi_{c_i} \in [0, 1]$ pour chaque cellule c_i , de telle sorte qu'en supposant pour les notations que la cellule c_i est une cellule gauche pour la face f , on ait :

$$\begin{cases} \psi_F^L &= \psi_I + \phi_{c_i} \mathbf{IF} \cdot \nabla \psi_I \\ \psi_F^R &= \psi_{If} + \phi_{c_i^f} \mathbf{IF} \cdot \nabla \psi_{If} \end{cases} \quad (4.2)$$

Si ϕ_{c_i} vaut 1, alors une reconstruction exacte à l'ordre deux est déployée. En revanche, si ϕ_{c_i} vaut 0, alors la reconstruction est limitée et se rapproche d'une valeur obtenue avec une reconstruction d'ordre un. Définir ϕ_{c_i} revient à établir la stratégie de limitation. Dans l'objectif d'être le plus proche possible de l'ordre deux tout en évitant de créer de nouveaux extremum locaux, Barth propose de prendre ϕ_{c_i} le plus grand possible, dans la limite de création d'extremum locaux. Pour se faire, sur l'ensemble $V_{c_i}^1$ des cellules $\{c_j\}$ de centre J voisines de rang un de la cellule c_i de centre I , il convient de déterminer les plus grandes variations de ψ :

$$\begin{cases} \delta^{max}\psi_{c_i} &= \max_{c_j \in V_{c_i}^1} (\psi_J - \psi_I) \\ \delta^{min}\psi_{c_i} &= \min_{c_j \in V_{c_i}^1} (\psi_J - \psi_I) \end{cases} \quad (4.3)$$

Sur chacune des faces f de centre F composant la cellule c_i , une reconstruction de la variable ψ sans limitation est réalisée. Cette dernière est notée $\psi_{c_i, f}$:

$$\psi_{c_i, f} = \psi_I + \mathbf{IF} \cdot \nabla \psi_I \quad (4.4)$$

Une comparaison entre d'une part l'écart de cette valeur reconstruite avec la valeur au centre de la cellule et d'autre part les accroissements maximum et minimum locaux de la cellule permet à Barth de définir un coefficient limiteur $\phi_{c_i}^f$ pour chaque face f d'une cellule c_i de sorte que la reconstruction limitée par ce coefficient au centre F de cette face ne devienne pas un nouvel extremum local :

$$\phi_{c_i}^f = \begin{cases} \min_{f \in F_{c_i}} \left(1, \frac{\delta^{max}\psi_{c_i}}{\psi_{c_i, f} - \psi_I} \right) & \text{si } \psi_{c_i, f} - \psi_I > 0 \\ \min_{f \in F_{c_i}} \left(1, \frac{\delta^{min}\psi_{c_i}}{\psi_{c_i, f} - \psi_I} \right) & \text{si } \psi_{c_i, f} - \psi_I < 0 \\ 1 & \text{si } \psi_{c_i, f} - \psi_I = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Pour que les différentes reconstructions au sein de la même cellule soient réalisées avec la même pente, Barth détermine une valeur ϕ_{c_i} constante sur la cellule c_i à partir de l'ensemble $\{\phi_{c_i}^f, f \in F_{c_i}\}$:

$$\phi_{c_i} = \min_{f \in F_{c_i}} \phi_{c_i}^f \quad (4.6)$$

Enfin, la reconstruction limitée par ϕ_{c_i} et $\phi_{c_i}^f$ des états gauches ψ_F^L et droits ψ_F^R de la face f peut être effectuée selon la relation (4.2). Ce processus assure logiquement qu'aucun nouvel extrema n'est créé. Néanmoins, ce limiteur présente deux défauts relevés par Venkatakrisnan dans [123] et [124]. Premièrement, il est trop sensible et s'active de manière inopinée dans des zones de l'écoulement où il n'est pas nécessaire - typiquement, dans les tests réalisés par Venkatakrisnan, des zones sans discontinuité de l'écoulement puisque la déformation du maillage n'est pas un paramètre des analyses de Venkatakrisnan -. Deuxièmement, avec ce limiteur, des difficultés de convergence sont observées. Pour Venkatakrisnan, les non-différentiabilités introduites par l'utilisation d'une fonction de type *minimum* dans les différentes étapes de détermination de la valeur du coefficient limiteur ϕ_{c_i} sont responsables de ces problèmes. Toujours selon Venkatakrisnan, l'étape de détermination de $\phi_{c_i}^f$ est celle qui est la plus préjudiciable à la convergence. Il propose donc de calculer $\phi_{c_i}^f$ par la relation :

$$\phi_{c_i}^f = \frac{1}{\Delta_-} \left[\frac{(\Delta_+^2 + \epsilon^2) \Delta_- + 2\Delta_-^2 \Delta_+}{\Delta_+^2 + 2\Delta_-^2 + \Delta_- \Delta_+ + \epsilon^2} \right] \quad \text{où} \quad : \quad \begin{cases} \Delta_- = \psi_{c_i, f} - \psi_I \\ \Delta_+ = \delta^{max}\psi_{c_i} \text{ si } \Delta_- > 0 \\ \Delta_+ = \delta^{min}\psi_{c_i} \text{ si } \Delta_- < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

et avec $\epsilon = (K\Delta x)^3$ et K un paramètre de réglage laissé libre à l'utilisateur (valeur recommandée dans la littérature : $K = 0.3$) et Δx une taille de maille locale caractéristique. Certains auteurs définissent Δx comme l'arrête du tétraèdre de volume équivalent, ou le diamètre de la plus grande sphère

inscrite dans le volume, ou encore une dimension caractéristique moyenne de cellule sur l'ensemble du domaine. Le rôle de ce terme ϵ est d'obtenir $\phi_{ci}^f = 1$ dans les régions où l'écoulement n'est pas trop perturbé et donc de ne pas activer le limiteur. En augmentant la valeur de K , on réduit la limitation. De ce fait, de grandes valeurs de K conduisent à une meilleure précision et une meilleure convergence dans les zones d'écoulement régulier. En revanche, elles provoquent l'apparition de surévaluation lors de la reconstruction dans les zones d'écoulement proches de discontinuités. Une explication très pratique de l'action du terme ϵ est fournie par Michalak dans [83]. Il explique que le terme ϵ définit une zone de *gradient acceptable*. Tout gradient dépassant cette zone de gradient acceptable est limité de sorte à intégrer cette zone. Les effets de la variation de K sur cette zone sont expliqués. Dès lors, une augmentation de la valeur de K permet d'augmenter cette zone de *gradient acceptable*. Ceci se fait au détriment du respect des critères de monotonie et entraîne des problèmes d'oscillation dans les zones proches de discontinuité (ou des zones à forte déformation du maillage) comme expliqué précédemment. Une faible valeur de K , ou même $K = 0$, entraîne une forte diminution de la zone de gradient acceptable, ce qui se traduit immédiatement par une limitation plus prononcée et une activation inopinée du limiteur. Ceci peut avoir pour conséquence une perte de précision et des difficultés de convergence.

Le problème de robustesse rencontré avec l'approche hybride coïncidente, nous conduit à chercher dans un premier temps à limiter le plus possible et donc à choisir $K = 0$. Par ailleurs, prendre $K = 0$ présente l'intérêt de rendre la méthode indépendante de tout paramètre de réglage.

Néanmoins, des difficultés de convergence sont fréquemment observées avec ce choix de limitation - et ce même pour des valeurs de K non nulles. Si l'on ajoute le limiteur de Venkatakrishnan tel que défini dans cette section comme ingrédient numérique à la reconstruction d'ordre deux (avec approche *LSQ* pour le calcul du gradient au centre) sur la configuration du Film Cooling présentée dans la partie 3.4.3, on observe un plateau de convergence illustré sur la figure 4.3. Ce plateau de convergence peut être perçu comme l'activation/désactivation du limiteur dans des régions non perturbées de l'écoulement. Plusieurs stratégies sont proposées dans la littérature pour éviter un tel comportement.

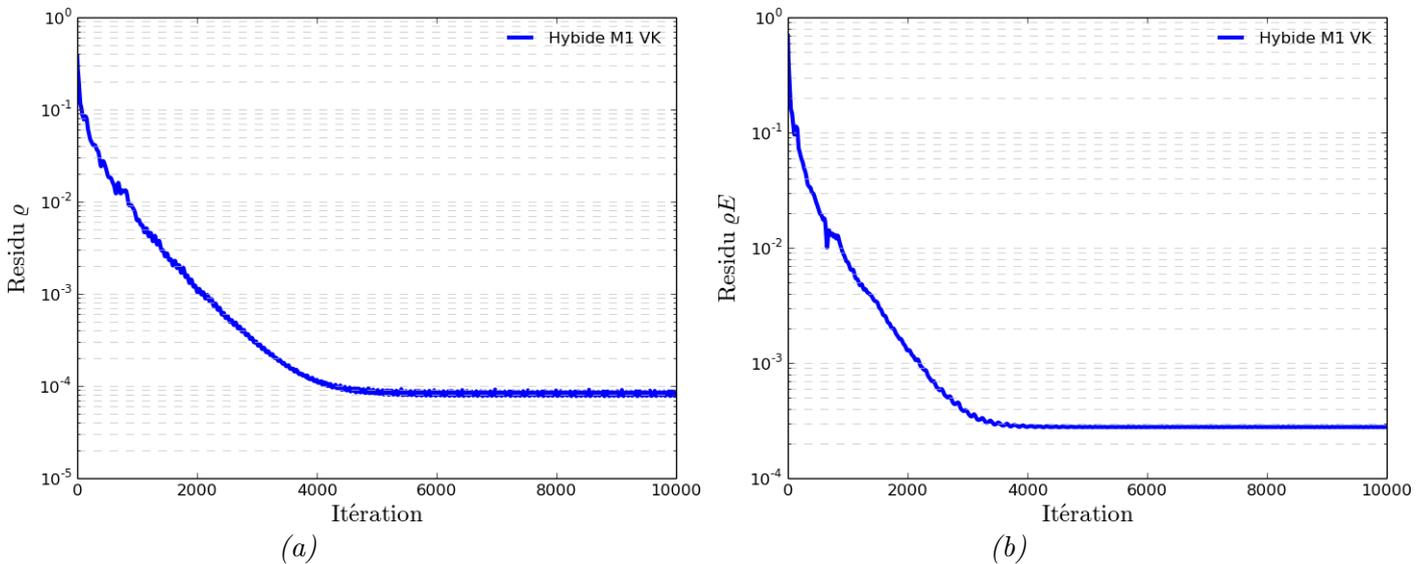


Figure 4.3 – Convergence des résidus pour ρ (a) et ρE (b) sur la configuration Film Cooling pour la stratégie *LSQ-VK*

L'une de ces stratégies consiste à utiliser un deuxième limiteur en complément du premier. Lorsque le deuxième limiteur détecte une zone d'écoulement non perturbé, il vaut 1 et prend le pas sur le premier limiteur. En revanche, lorsque l'écoulement présente des fortes variations associées à des discontinuités physiques ou à de fortes irrégularités locales du maillage, le second limiteur s'annule et laisse le premier limiteur opérer. Ce deuxième limiteur peut être perçu comme un senseur. Le premier et le deuxième

limiteur s'articulent de la manière suivante :

$$\phi_{c_i}^f = \sigma_{c_i} + (1 - \sigma_{c_i}) \widetilde{\phi}_{c_i}^f \quad (4.8)$$

où $\widetilde{\phi}_{c_i}^f$ est la valeur du limiteur calculée par la première fonction limiteur, σ_{c_i} est un senseur, ou le deuxième limiteur.

On peut mentionner ici les travaux de Michalak dans [82] qui introduit justement ce deuxième limiteur détectant les zones subsoniques grâce à un critère de nombre de Mach. L'une des propositions d'amélioration de Michalak réside dans le fait que le limiteur doit valoir 1 dans les zones subsoniques, indépendamment de la valeur calculée par la première fonction limiteur et qu'à l'approche des zones de discontinuités, la valeur obtenue par la première fonction limiteur doit prévaloir. Une représentation graphique de la deuxième fonction limiteur $\sigma^{Michalak}$ est donnée sur la figure 4.4. L'idée de Michalak est intéressante mais introduit trop de paramètres réglables (K , $M1$, $M2$). D'autres auteurs proposent des senseurs différents. Ainsi Kitamura, qui s'inspire de Michalak, dans [71] propose une définition de σ qui ne dépend que du nombre de Mach local et s'affranchit donc de toute paramétrisation.

Geuzaine dans [49] propose d'utiliser le détecteur défini par Delanaye dans [36] qui est lui-même une extension de l'indicateur d'erreur développé par Löhner dans [78]. Ce détecteur s'appuie sur un senseur de pression pour les ondes de choc et sur un second senseur basé sur l'amplitude de la vitesse.

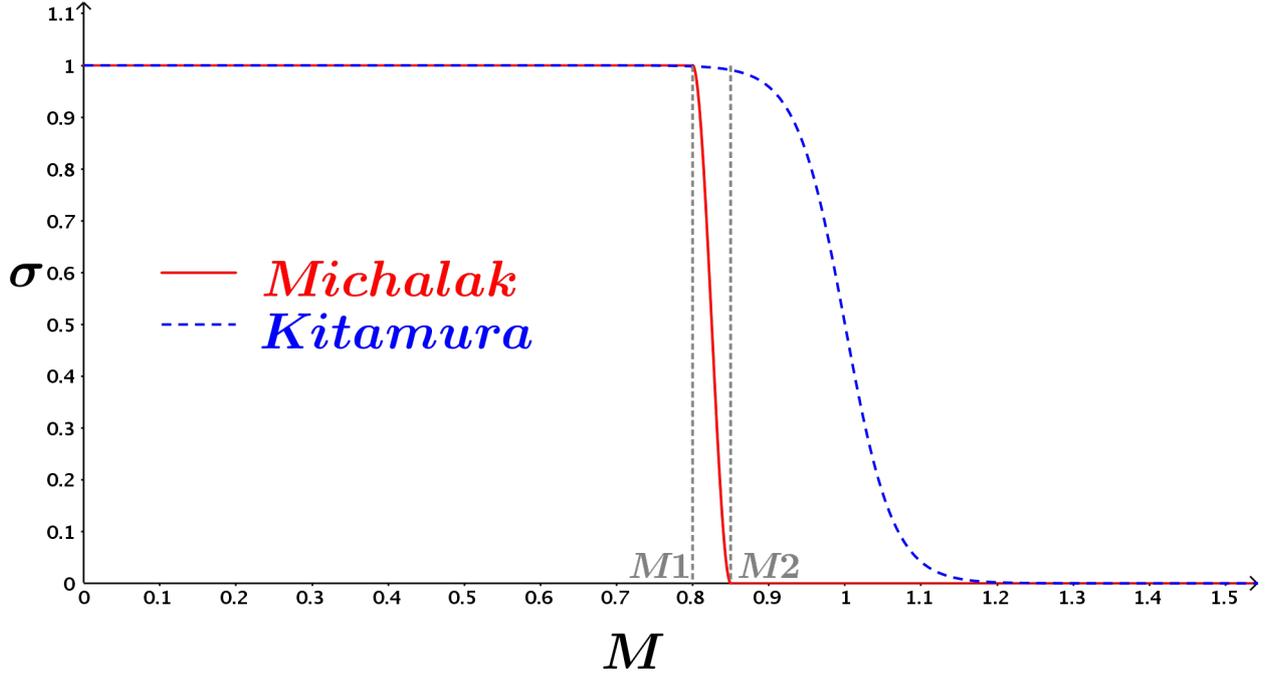


Figure 4.4 – Représentation graphique de différents senseurs σ basés sur le nombre de Mach

Enfin une approche radicalement différente consiste à bloquer la valeur du limiteur après un certain nombre d'itérations. Cette idée a été initialement introduite par De Zeeuw dans [41] et améliorée par Delanaye dans [36] qui au lieu de la bloquer, la prend égale au minimum entre la valeur actuelle et la plus petite valeur obtenue pour le limiteur au cours des itérations, autrement dit :

$$\phi_{c_i}^n = \min_{k \in [n_0, n-1]} (\widetilde{\phi}_{c_i}^k, \phi_{c_i}^k) = \min (\widetilde{\phi}_{c_i}^n, \phi_{c_i}^{n-1}) \quad \text{avec } n > n_0 \quad (4.9)$$

et n_0 désigne l'itération à partir de laquelle le blocage des valeurs du limiteur est activé. Il est fait référence à cette stratégie par la suite en tant qu'effet mémoire du limiteur de Venkatakrisnan et

l'approche est notée $VK-MEM(n)$.

Il faut néanmoins être prudent lors de l'utilisation de l'effet mémoire avec le limiteur de Venkatakrishnan. En effet, si on prend n_0 trop faible, comme la valeur des limiteurs ne peut que diminuer, on prend le risque d'avoir un schéma dont le fonctionnement tendra vers celui d'un schéma d'ordre un. Il peut donc être intéressant de relaxer progressivement cette contrainte du minimum sur la valeur du limiteur. Nous avons ainsi introduit la possibilité d'une relaxation sur la stratégie $VK-MEM$. Si la valeur courante du limiteur est plus faible que celle des itérations précédentes, alors le solveur a besoin sur cette itération de limiter davantage que précédemment. Dans ce cas, on impose que $\phi_{c_i}^n = \widetilde{\phi}_{c_i}^n$. En revanche, si la valeur courante du limiteur $\widetilde{\phi}_{c_i}^n$ est supérieure à la valeur $\phi_{c_i}^{n-1}$, alors au lieu d'imposer $\phi_{c_i}^n = \phi_{c_i}^{n-1}$, on peut relaxer la contrainte en prenant : $\phi_{c_i}^n = \alpha \widetilde{\phi}_{c_i}^n + (1 - \alpha) \phi_{c_i}^{n-1}$ où $\alpha \in [0, 1]$. Ainsi, une valeur faible du limiteur à une itération donnée ne nuit pas à la précision en fin de calcul dans la mesure où s'il est possible d'augmenter à nouveau la valeur prise par le limiteur sur cette cellule c_i , la relaxation permettant une réévaluation progressive de celle-ci. Cette stratégie, appelée relaxation de l'effet mémoire, est notée par la suite $VK-MEM-RELAX(\alpha)$.

4.2.2.4 Évaluation sur la configuration de la Bosse Axisymétrique Transsonique (ATB)

Pour évaluer la pertinence de ce limiteur de type multidimensionnel proposé par Venkatakrishnan et des évolutions que nous y avons apportées, il convient de trouver un cas dont la physique nécessite l'emploi d'un limiteur dans le solveur non structuré ou hybride d'ordre deux. Nous disposons bien sûr déjà d'un tel cas avec la configuration du Film Cooling mais nous nous proposons de consacrer plutôt l'intégralité de la dernière section du présent chapitre à l'évaluation des différentes techniques d'amélioration de la robustesse pour cette configuration de Film Cooling. Dans la présente sous-section, nous nous proposons plutôt d'évaluer les techniques de limitation multidimensionnelle pour un cas exigeant non pas en termes de régularité de maillage mais plutôt en termes de forts gradients physiques dans le champ solution (présence de discontinuités). Il est en effet attendu que des effets de compressibilité marqués soient présents dans les écoulements en turbomachines auxquels l'approche hybride sera amenée à être appliquée.

La base de données de cas de la NASA (http://www.turbmodels.larc.nasa.gov/axibump_val.html) fournit un cas simple de validation tridimensionnelle dont l'écoulement contient un choc : la Bosse Axi-symétrique Transsonique (ATB en anglais). Bien que le cas soit tridimensionnel, comme illustré sur la figure 4.5, seules quatre nappes sont simulées, le reste étant obtenu par des raccords périodiques par rotation. Des conditions limites de champ lointain et de mur adiabatique sont appliquées aux autres frontières du domaine, comme montré sur la figure 4.5. Par ailleurs, l'écoulement considéré est à $T = 300K$, $M = 0.875$ et le nombre de Reynolds vaut $Re_c = 2.763 \cdot 10^6$ pour $c = 1$. Il faut noter que ce cas est bien référencé dans la mesure où comme pour la configuration de la plaque plane, il s'agit d'un cas de validation de modèle de turbulence de la NASA. Ceci signifie que plusieurs niveaux de raffinement de maillage ainsi que des résultats d'autres études numériques sont disponibles. Par ailleurs, une série de mesures expérimentales [8] a eu lieu sur cette configuration pour trois nombres de Mach différents ($M = 0.90$, $M = 0.85$ et $M = 0.875$, celui qui concerne notre étude). Néanmoins, comme l'objectif est de tester une série de configurations du limiteur, les maillages les plus denses n'ont pas été envisagés afin de conserver une certaine souplesse à l'analyse et l'étude porte seulement sur le maillage $181 \times 81 \times 5$.

L'écoulement contient un choc au-delà de la moitié de la bosse, en $x/c = 0.65$ environ. L'interaction entre ce choc et la couche limite turbulente qui se développe sur la bosse conduit l'écoulement à décoller puis à se ré-attacher plus loin à l'aval sur la paroi. Les résultats, tant numériques qu'expérimentaux, sur cette configuration, donnent un point de décollement un peu avant $x/c = 0.7$ et un point de rattachement également un peu avant $x/c = 1.2$ avec une zone de re-circulation bien marquée à l'aval de la bosse.

Nos simulations ont été réalisées avec un calcul des gradients au centre des cellules réalisés en *quasi-Green* (qG) et au centre des faces par la méthode *5pcor*, en implicite à $CFL = 10$. Les maillages ont été découpés en douze domaines. Pour simplifier l'étude, les cas étudiés ici sont complètement non structurés. Le maillage est obtenu par déstructuration du maillage structuré $181 \times 81 \times 5$ fourni sur le site de la NASA.

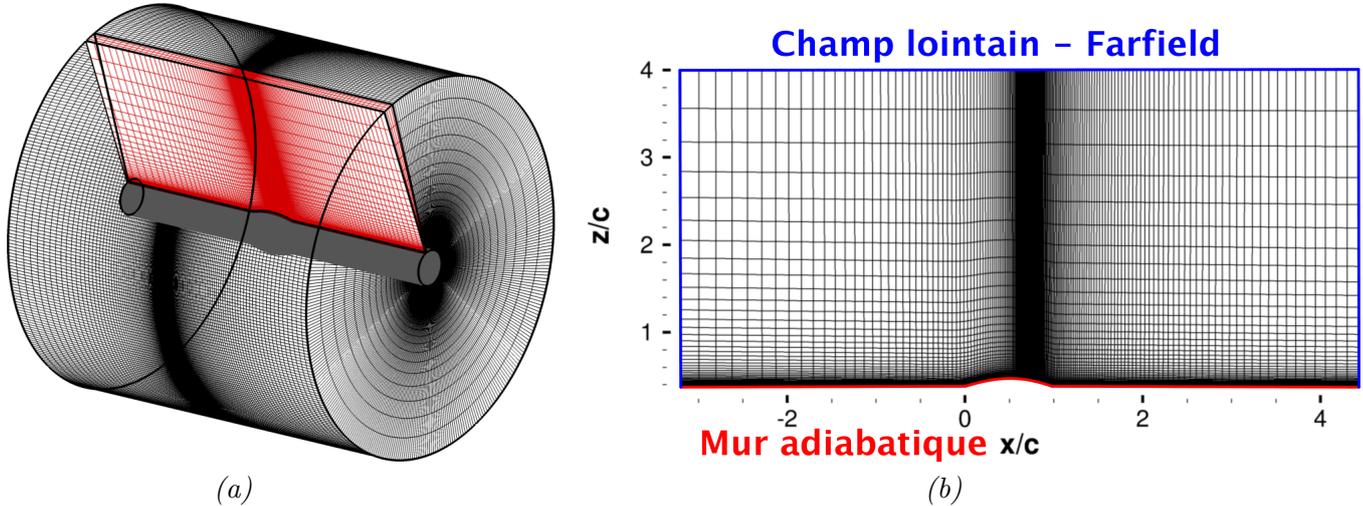


Figure 4.5 – Détail de la géométrie et du maillage de la configuration ATB : (a) raccords périodiques par rotation, (b) conditions limites

Cette étude a pour principal objectif de confronter les différentes stratégies de mise en œuvre du limiteur de Venkatakrishnan qui ont été introduites dans la sous-section 4.2.2.3, notamment celles faisant appel à un effet mémoire. Les simulations réalisées seront analysées selon plusieurs critères : convergence vers l'état stationnaire, qualité de la solution stationnaire, zone d'activation du processus de limitation.

Une simulation d'ordre un est conduite dans un premier temps. Elle sert de borne inférieure pour évaluer la qualité de la solution stationnaire. Comme on peut le constater sur la figure 4.6, cette simulation d'ordre un converge sans difficulté. La figure 4.7 représente les champs de nombre de Mach pour cette simulation d'ordre un. On constate que la position du pied du choc est prédite un peu en aval de la position attendue, avec pour conséquence une zone de re-circulation bien plus restreinte, qui n'apparaît d'ailleurs pas sur le post-traitement de l'image (a) de la figure 4.7. Sur l'image (b) de la figure 4.7, qui propose un zoom du bord de fuite de la bosse, on observe que le réattachement a lieu vers $x/c = 1.1$.

Pour améliorer la précision des résultats sur ce cas de calcul, il apparaît donc nécessaire de passer à l'ordre deux. Toutefois, le calcul hybride utilisant la reconstruction linéaire au centre face avec une estimation qG du gradient au centre de la cellule ne parvient pas à dépasser la dizaine d'itérations. Bien évidemment, l'emploi d'un limiteur s'avère indispensable sur cette configuration. La première simulation réalisée avec le limiteur de Venkatakrishnan n'utilise pas d'effet mémoire sur les valeurs du limiteur comme introduit par De Zeeuw. Cette simulation correspond à la dénomination $QG-VK$. Les résultats physiques obtenus par cette approche sont parfaitement acceptables dans la mesure où les positions de séparation et de rattachement sont correctement prédites et que le choc est bien capturé en intensité. Néanmoins, cette simulation peine à converger puisqu'un plateau de convergence est rencontré vers l'itération 20 000 pour une convergence à 10^{-4} . Tout ceci est observable sur les figures 4.6 et 4.8.

Une deuxième simulation est réalisée avec un effet mémoire démarrant dès le début de la simulation. Ainsi, les valeurs du limiteur ne peuvent que diminuer au cours des itérations. Il est fait référence à cette simulation par l'acronyme $QG-VK-MEM(1)$. Du point de vue de la précision, on retrouve un

résultat assez similaire à celui obtenu lors de la simulation d'ordre un. Le choc est retardé et la zone de recirculation est raccourcie (cf. Figure 4.8(b)). En revanche, on récupère une courbe de convergence sans plateau (cf. Fig.4.6).

Une troisième simulation avec un effet mémoire débutant à partir de l'itération 10 000 a été réalisée. Cette dernière est notée *QG-VK-MEM(10000)*. On constate sur la figure 4.8(c) que la physique est correctement capturée, tant sur la prédiction des points de séparation que de rattachement que sur la position et l'intensité du choc. Par ailleurs, cette simulation converge bien mieux que *QG-VK* puisqu'elle rencontre un plateau de convergence pour un niveau de résidu à 10^{-12} seulement.

Enfin une dernière simulation a été menée avec un effet mémoire mis en œuvre dès le début de calcul mais accompagné par une relaxation de facteur 0.1. On constate sur la figure 4.8(d) que la solution physique est parfaitement acceptable et sur la figure 4.6 (historique de l'approche *QG-VK-RELAX(0.1)*) que le calcul a dépassé le plateau de convergence de 10^{-4} et rencontre un plateau de convergence à 10^{-8} seulement. D'autres facteurs de relaxation, plus élevés, ont été utilisés, mais la relaxation est alors trop forte et on ne parvient pas à dépasser le plateau de convergence de 10^{-4} .

En résumé, on observe trois comportements différents sur ce cas d'étude :

- une trop grande dissipation qui confère à la discrétisation spatiale *QG-VK-MEM(1)* un comportement similaire à celui d'un solveur à l'ordre un seulement,
- un problème de convergence pour *QG-VK* ainsi que pour *QG-VK-RELAX(0.3; 0.5; 0.7; 0.9)* mais qui ne nuit pas à la qualité de la solution physique,
- une convergence améliorée et une qualité de solution physique maintenue pour *QG-VK-MEM(10000)* mais au prix d'un ajustement de l'activation de l'effet mémoire qui apparaît comme très dépendant du cas étudié (dans le cas présent on peut même considérer que c'est la connaissance des calculs préalables qui a guidé le choix de l'itération 10000).

Pour mieux appréhender les raisons pour lesquelles ces trois comportements différents sont observés, il est nécessaire de s'intéresser aux valeurs prises par le limiteur à la fois spatialement mais aussi au cours du calcul. Ces informations sont apportées par les figures 4.9 et 4.10. La figure 4.9 représente pour les différentes simulations réalisées les valeurs minimales, maximales et moyennes prises par le limiteur de ρ sur l'ensemble du domaine de calcul au cours des itérations. La figure 4.10 fournit quant à elle le champ des valeurs du limiteur de ρ en fin de calcul. Si on s'intéresse au cas (b) ou *QG-VK-MEM(1)*, on constate que la valeur moyenne du limiteur a chuté à 0.4 en moins de 5000 itérations et reste constante par la suite du calcul. Ceci explique qu'en fin de calcul les valeurs du limiteur soient très faibles. L'intégralité du domaine est concerné, pas uniquement les zones de discontinuité de la solution physique. Ceci justifie le fait qu'un comportement proche de l'ordre un soit retrouvé lors de l'analyse physique de la solution. La différence avec les trois autres simulations, *QG-VK*, *QG-VK-MEM(10000)* et *QG-VK-RELAX(0.1)*, est que celles-ci proposent des remèdes ou corrections pour lutter contre la chute de la valeur du limiteur causée par l'effet mémoire :

- *QG-VK* n'a tout simplement pas d'effet mémoire,
- *QG-VK-MEM(10000)* active l'effet mémoire à l'itération 10000, or on a constaté que sur cette configuration, la chute de la valeur des limiteurs a lieu dans les 5000 premières itérations,
- *QG-VK-RELAX(0.1)* a été pensé pour relâcher si possible les contraintes de l'effet mémoire.

On observe que pour ces trois simulations, la valeur moyenne de la limitation est de l'ordre de 0.95, ce qui est parfaitement acceptable. On remarque également que certaines cellules sont à l'ordre deux formellement et d'autres à l'ordre un. Cette capacité à maintenir des valeurs proches de un pour le limiteur assure que ces trois simulations fournissent une solution nettement plus précise et plus proche des résultats de référence. Il apparaît également clairement que la convergence est améliorée par l'effet mémoire. Pour nuancer ces bons résultats, on observe sur la figure 4.10 que le limiteur de Venkatakrishnan a tout de même une tendance à se déclencher dans des zones sans discontinuité d'écoulement. Il pourrait donc être intéressant d'évaluer l'effet de l'introduction d'un senseur comme proposé par Delanaye dans [36].

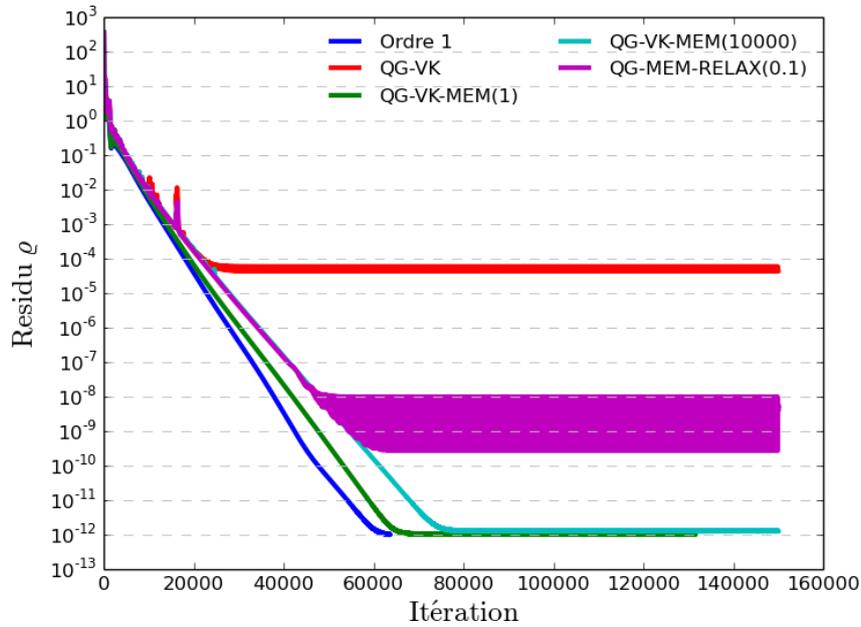


Figure 4.6 – Courbes de convergence des résidus sur la configuration ATB

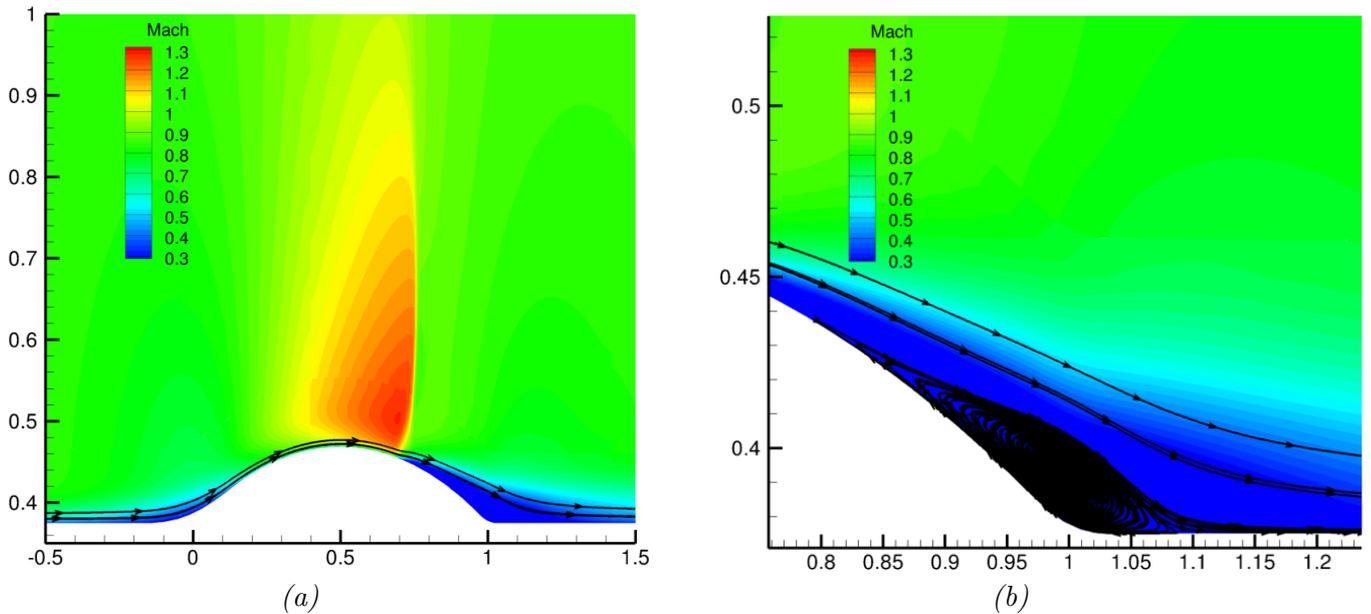


Figure 4.7 – Champs de nombre de Mach sur la configuration ATB pour une simulation d'ordre 1

On rappelle que cette approche résumée par (4.8) empêche la limitation de s'appliquer là où elle n'est pas véritablement nécessaire et la laisse identique ailleurs. Par souci de concision, nous renvoyons à [36] pour l'expression détaillée du senseur utilisé dans cette étude, dont nous rappelons simplement ici qu'il intègre les variations locales de la pression et de la vitesse de l'écoulement.

On propose sur la vignette (a) de la figure 4.11 la courbe de convergence des résidus de la densité pour le solveur hybride limité utilisant le limiteur de Venkatakrishnan couplé au senseur de pression et d'amplitude de vitesse de Delanaye. On constate que cette approche converge bien mieux que la simulation basée uniquement sur le limiteur de Venkatakrishnan et dépourvue d'effet mémoire. La figure 4.12 fournit les valeurs des champs de limiteur en fin de calcul. On constate une réduction très nette des zones de déclenchement du limiteur qui se restreignent à présent à la zone de choc essentiel-

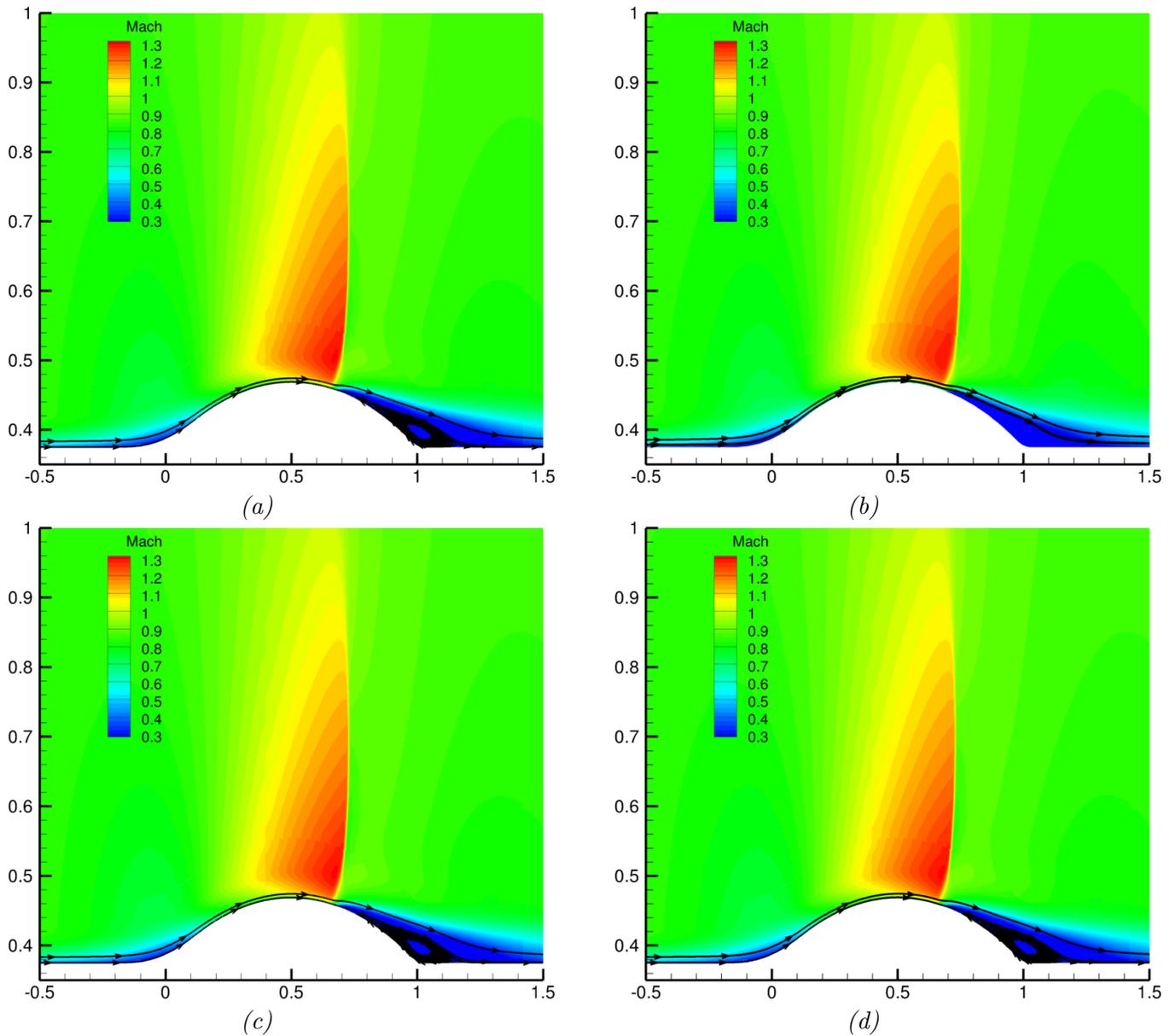


Figure 4.8 – Champs de nombre de Mach sur la configuration ATB pour : (a) *QG-VK*, (b) *QG-VK-MEM(1)*, (c) *QG-VK-MEM(10000)* et (d) *QG-VK-MEM-RELAX(0.1)*

lement. Par ailleurs la solution physique fournie par la vignette (b) de la figure 4.11 est parfaitement comparable aux attentes exprimées précédemment sur cette configuration.

En conclusion, coupler le limiteur de Venkatakrishnan à un senseur permet d'améliorer la convergence du calcul sans dégrader sa précision. Cette méthode permet également de s'affranchir de l'effet mémoire qui est une stratégie discutable et difficilement applicable dans des simulations industrielles instationnaires dans la mesure où le champ de limiteur ne saurait alors être figé dans le temps. Dans les simulations de Film Cooling de la section suivante puis dans les applications en turbomachines des chapitres qui suivent, l'approche de limitation avec effet mémoire ne sera pas retenue afin d'éviter de multiplier les paramètres de réglage de la simulation. En dépit de l'intérêt de la stratégie d'utilisation d'un senseur que nous venons d'illustrer, nous nous limiterons au simple emploi du limiteur de Venkatakrishnan dans le souci de privilégier la simplicité et la réduction du coût de mise en œuvre de l'approche hybride.

Des méthodes d'amélioration de la robustesse qui s'appuient uniquement sur les données physiques de la simulation ont été présentées. Ces approches sont assez classiques pour des solveurs non structurés.

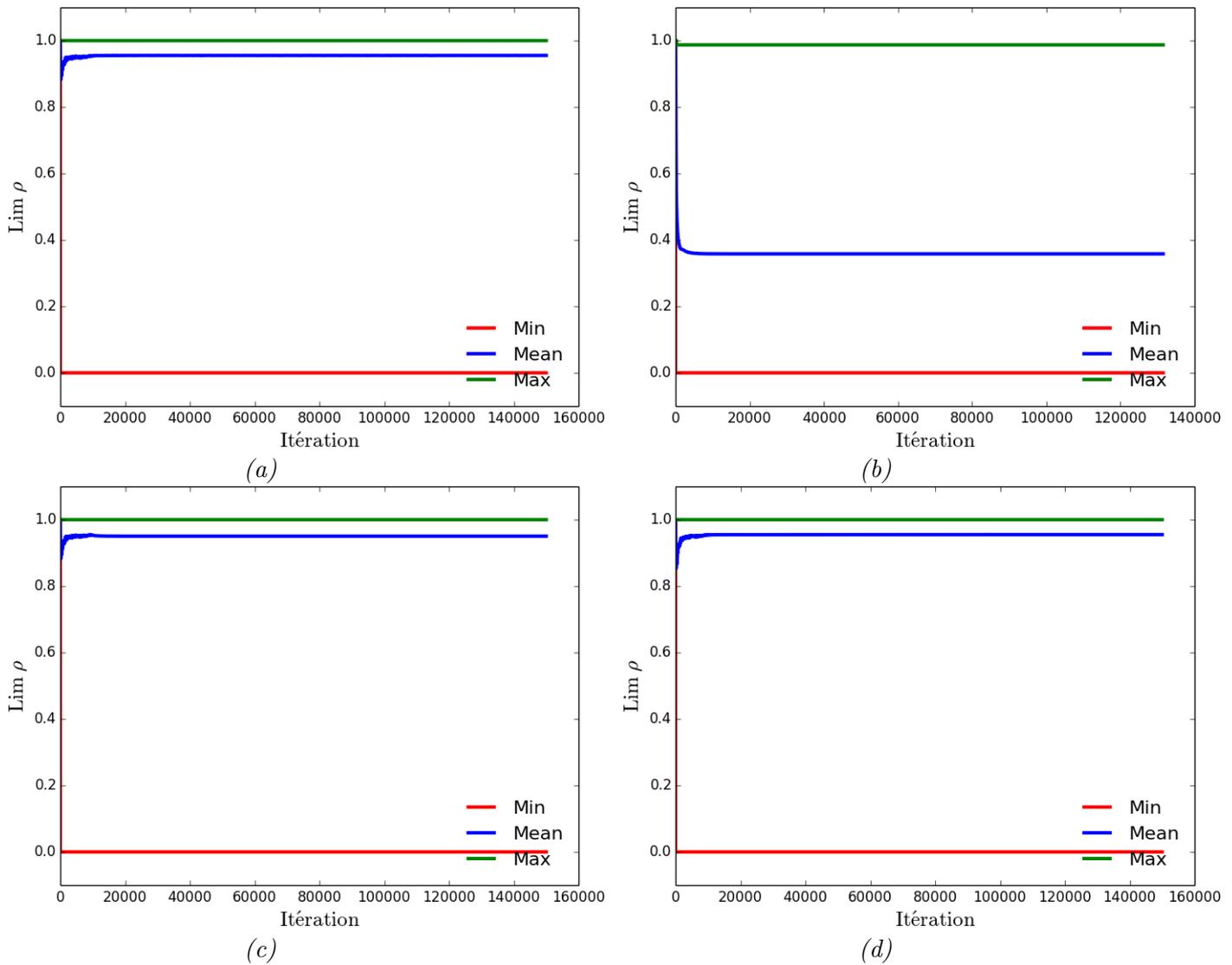


Figure 4.9 – Statistiques des valeurs du limiteur au cours des itérations sur la configuration ATB pour : (a) *QG-VK*, (b) *QG-VK-MEM(1)*, (c) *QG-VK-MEM(10000)* et (d) *QG-VK-MEM-RELAX(0.1)*

Cependant l’une des causes du manque de robustesse du solveur hybride réside dans la spécificité géométrique d’un maillage hybride avec une approche coïncidente pour les raccords (maillage de type mixte pour une approche complètement non structurée). Les sous-sections 4.2.3 et 4.2.4 proposent deux nouvelles méthodes d’amélioration de la robustesse qui s’éloignent d’une simple analyse des données physiques pour utiliser des considérations géométriques. Dans le paragraphe précédent, il a été montré qu’une stratégie de limitation des pentes lors de la reconstruction permettait de renforcer la robustesse des calculs. Il a également été constaté que cette limitation devait être effectuée de manière réfléchie afin que la dégradation de la précision engendrée par la limitation ne soit pas réhivitoire sur la qualité physique de la solution obtenue. La sous-section 4.2.3 s’intéresse dans un premier temps à l’analyse et la mise en œuvre d’une nouvelle stratégie hybride de calcul de gradient proposé par Shima dans [107]. L’intérêt de cette dernière réside dans le fait qu’elle adapte directement le calcul du gradient en fonction de critère géométrique. Ceci permet en fin de compte de limiter les pentes de la reconstruction sans pour autant nécessairement recourir à une stratégie de limitation comme présentée précédemment. Une seconde méthode étudiée dans la sous-section 4.2.4 propose d’introduire une limitation géométrique lors de la reconstruction. Ces deux méthodes s’appuyant sur des critères de qualité géométrique des cellules, il est nécessaire d’aborder ce sujet et de décrire les choix retenus pour évaluer la qualité géométrique des cellules.

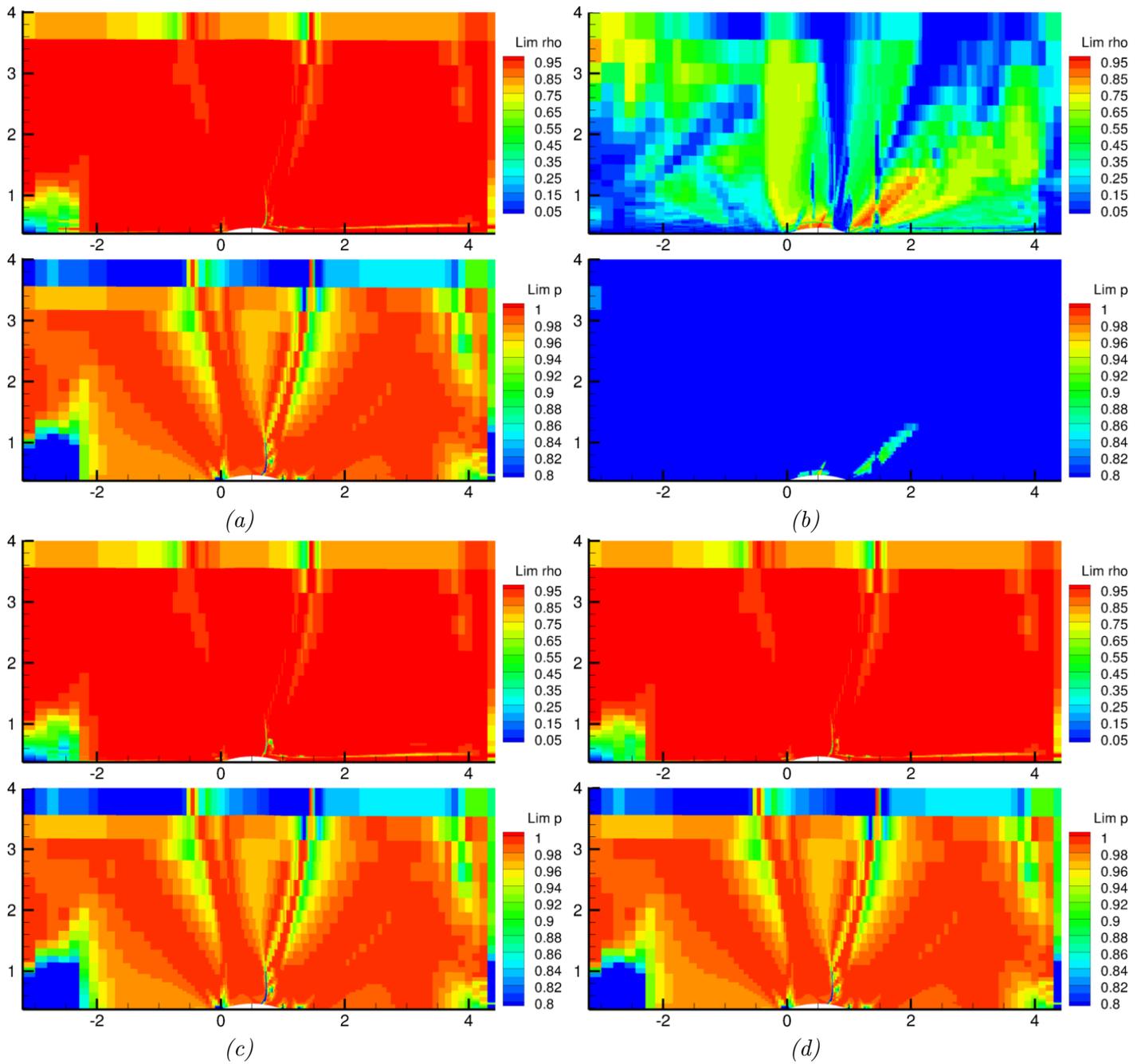


Figure 4.10 – Champs des valeurs du limiteur en fin de calcul sur la configuration ATB pour : (a) QG-VK, (b) QG-VK-MEM(1), (c) QG-VK-MEM(10000) et (d) QG-VK-MEM-RELAX(0.1)

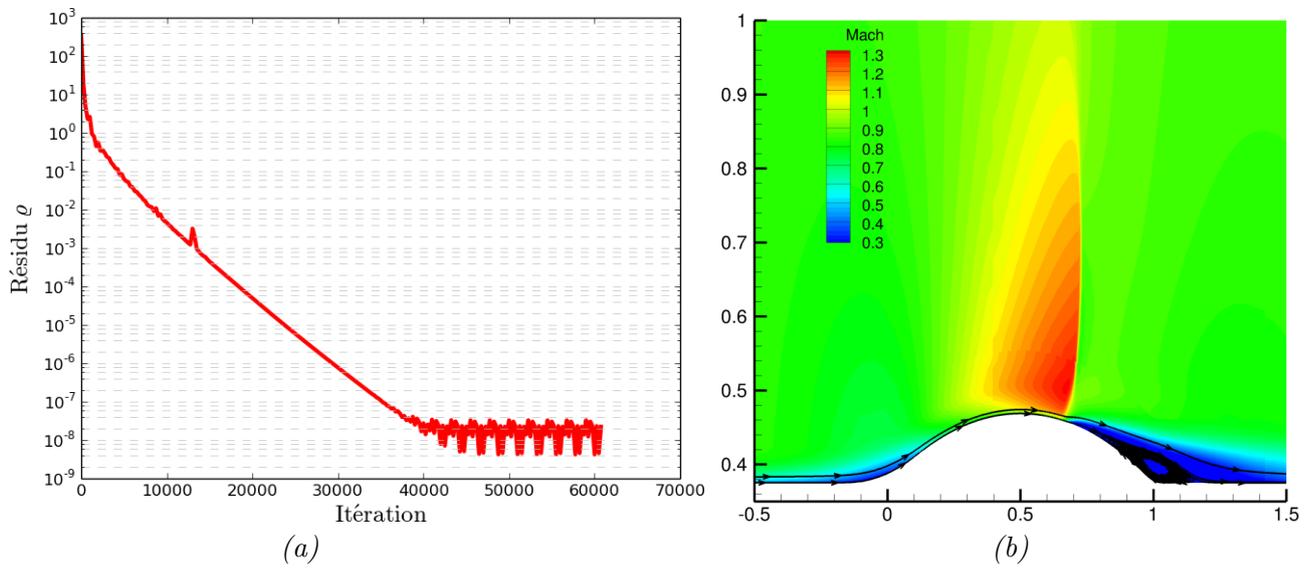


Figure 4.11 – Configuration ATB pour l’utilisation d’un limiteur de Venkatakrishnan couplé à un capteur de pression et d’amplitude de vitesse. (a) : Historique de convergence des résidus de la densité. (b) : Champ de nombre de Mach

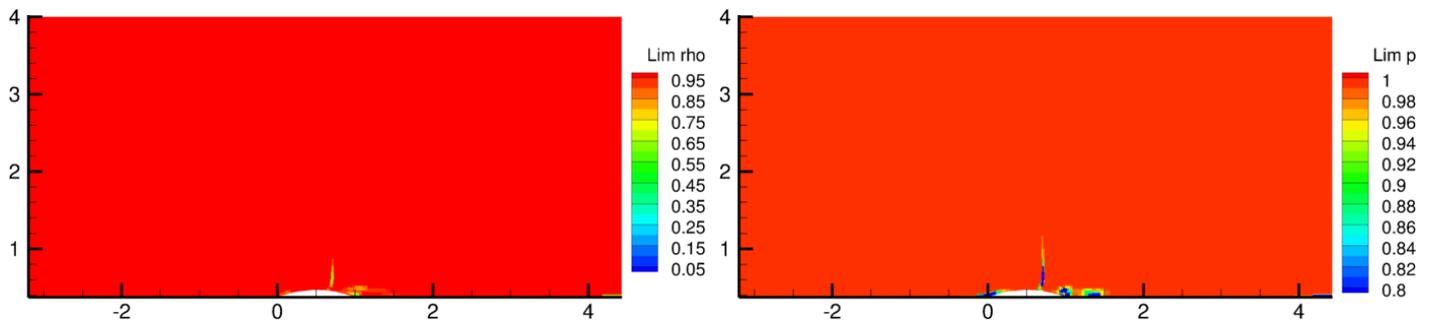


Figure 4.12 – Champ des valeurs de limiteur en fin de calcul sur la configuration ATB pour l’utilisation d’un limiteur de Venkatakrishnan couplé à un capteur de pression et d’amplitude de vitesse.

4.2.3 Calcul du gradient adapté à la qualité du maillage

Dans ses travaux [80] Mavriplis rappelle les bonnes propriétés de précision et de robustesse obtenues par la méthode des *Moindres Carrés (LSQ)* pour calculer les gradients au centre des cellules et ce, pour différents types de cellule, sur des configurations académiques, du type plaque plane par exemple. En revanche, il est plus sceptique sur la préservation de ces bonnes propriétés sur des maillages curvilignes fortement étirés. Il expose ce problème en prenant l'exemple de l'étude du calcul du gradient d'une fonction analytique, le calcul de la distance à la paroi, sur la configuration du RAE2822. Il calcule le gradient avec différentes méthodes : *Green-Gauss*, *Différence Finie*, *Moindres Carrés* et *Moindres Carrés pondérés*. Il adimensionne la valeur calculée du gradient par la valeur exacte. De ce fait, un gradient précisément calculé doit systématiquement se traduire par une valeur de 1 au cours de cette étude. Ses principaux résultats sont présentés sur la figure 4.13 (se référer à [80] pour plus de détails) et le conduisent à tirer les conclusions suivantes :

- les bonnes propriétés de la méthode des *Moindres Carrés* ne sont pas préservées sur des maillages curvilignes fortement étirés,
- l'utilisation de la pondération permet de résoudre le problème sur certaines cellules,
- la méthode de *Green-Gauss* pour le calcul de gradient, bien qu'ayant une faible précision démontrée, peut s'avérer une alternative intéressante sur les cellules de ces maillages curvilignes fortement étirés.

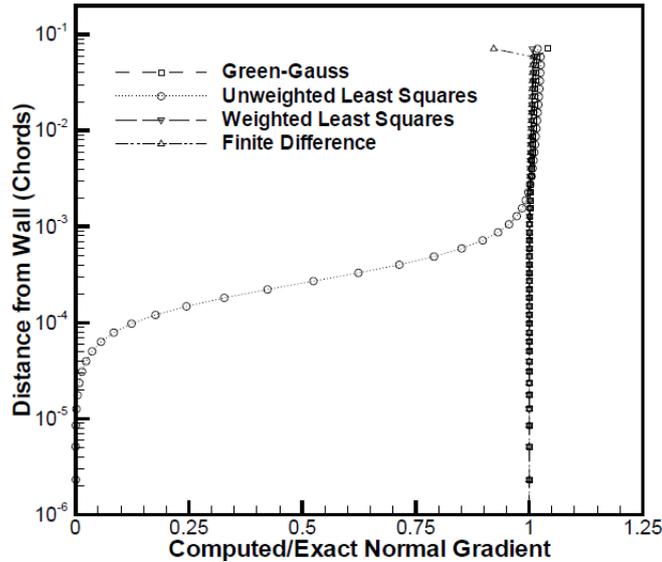


Figure 4.13 – Ratio entre la valeur calculée du gradient par différentes méthodes et la valeur exacte du gradient d'une fonction analytique de distance à la paroi sur un profil RAE2822. Source : [80]

Cette étude de Mavriplis est à l'origine des travaux réalisés par Shima et Kitamura dans [106] et [107]. Les auteurs justifient, par l'exemple illustré sur la figure 4.14, le manque de précision de la méthode des *Moindres Carrés* sur des maillages curvilignes fortement étirés. Sur cet exemple, la composante selon l'axe y du gradient d'une variable ψ en P_0 s'écrit :

$$(\nabla\psi_{P_0})_y = \frac{\Delta y_1^2 \frac{1}{\Delta y_1} \left(\psi_{P_0} - \frac{\psi_{P_1} + \psi_{P_3}}{2} \right) + \Delta y_2^2 \frac{\psi_{P_2} - \psi_{P_4}}{2\Delta y_2}}{\Delta y_1^2 + \Delta y_2^2} \quad (4.10)$$

Dans cette expression de type *Moindres Carrés* classique c'est-à-dire sans pondération, on retrouve un terme associé à la différence issue des deux cellules au-dessus et en-dessous de la cellule de centre P_0 et un terme issu du *cisaillement* du maillage, impliquant les cellules de centre P_1 et P_3 . Naturellement,

il serait logique que ce premier terme soit prépondérant par rapport au second. Dans le cadre de l'application d'une pondération, ceci dépend uniquement du type de pondération choisi et de la géométrie des cellules. Par exemple, une pondération par la distance donnerait une plus grande importance au second terme si $\Delta x \ll \Delta y_2$, ce qui n'est pas souhaitable.

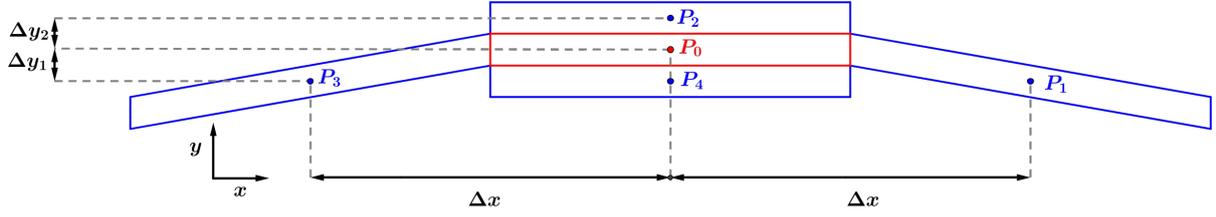


Figure 4.14 – Notations pour l'exemple du calcul du gradient sur une cellule curviligne fortement étirée

Shima rappelle alors que bien que la méthode de *Green-Gauss* pour le calcul des gradients au centre puisse présenter selon Mavriplis jusqu'à 10% d'erreur, elle n'en reste pas moins plus précise que la méthode des *Moindres Carrés* sur des maillages curvilignes fortement étirés. L'idée de Shima est de bénéficier du moins mauvais comportement de la méthode du *Green-Gauss* sur les cellules géométriquement délicates et de profiter des avantages de la méthode des *Moindres Carrés* sur le reste du domaine de calcul. Pour ce faire, Shima propose une expression unifiée ou en tout cas analogue pour ces deux méthodes de calcul de gradient au centre d'une cellule, qui prend la forme d'une somme, sur l'ensemble des faces de la cellule, d'une quantité proportionnelle à la différence entre la valeur de la variable prise au centre de la cellule voisine et celle prise au centre de la cellule courante, soit :

$$\nabla\psi_I = \sum_{f \in F_{c_i}} \sigma_{\mathbf{f}} (\psi_{I^f} - \psi_I) \quad (4.11)$$

avec F_{c_i} l'ensemble des faces de la cellule c_i , ψ_I et ψ_{I^f} la valeur prise en I , centre de la cellule c_i et en I^f , centre de la cellule voisine de la cellule c_i par la face f . $\sigma_{\mathbf{f}}$ est le coefficient dont l'expression dépend uniquement de la méthode retenue. Pour un calcul avec la méthode de *Green-Gauss*, on a ainsi :

$$\sigma_{\mathbf{f}} = \frac{1}{|\Omega_{c_i}|} |\Sigma_f| \alpha_f \mathbf{n}_{\mathbf{f}} \quad (4.12)$$

où conformément aux notations employées dans l'équation 2.51, α_f est le coefficient de pondération permettant de déterminer la valeur ψ_F à la face dans le cadre du calcul du *Green-Gauss* : $\psi_F = \alpha_f \psi_{I^f} + (1 - \alpha_f) \psi_I$ - le choix le plus simple étant $\alpha_f = \frac{1}{2}$. De la même manière, pour un calcul de gradient réalisé en utilisant la méthode des *Moindres Carrés* avec pondération, on a :

$$\sigma_{\mathbf{f}} = w_{c_i c_i^f} \left(\mathbf{M}_{c_i}^t \mathbf{M}_{c_i} \right)^{-1} \mathbf{II}^f \quad (4.13)$$

où les notations du chapitre 3 sont reprises.

Shima propose alors d'utiliser la pondération suivante pour l'approche *Moindres Carrés* :

$$\begin{cases} w_{c_i c_i^f} &= \alpha_{c_i c_i^f}^{WLSQ} \frac{|\Sigma_f|}{\|\mathbf{II}^f\|} \\ \alpha_{c_i c_i^f}^{WLSQ} &= \left(\frac{2|\mathbf{IF} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{f}}|}{\|\mathbf{II}^f \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{f}}\|} \right)^2 \end{cases} \quad (4.14)$$

puis couple les méthodes *WLSQ* et *Green-Gauss* en estimant le gradient au centre de la cellule courante par la relation :

$$\left[\beta_{c_i} \mathbf{M}_{c_i}^t \mathbf{M}_{c_i} + 2(1 - \beta_{c_i}) |\Omega_{c_i}| \mathbf{Id} \right] \nabla \psi_I = \sum_{f \in F_{c_i}} \left[\left(\beta_{c_i} \alpha_{c_i c_i^f}^{WLSQ} \frac{\mathbf{I}f}{\|\mathbf{I}f\|} + 2(1 - \beta_{c_i}) \alpha_{c_i c_i^f} \mathbf{n}_f \right) |\Sigma_f| (\psi_{If} - \psi_I) \right] \quad (4.15)$$

où $\alpha_{c_i c_i^f}$ correspond au coefficient de pondération α_f entre la cellule c_i et la cellule c_i^f . Cette nouvelle méthode proposée dans [106] est appelée *GLSQ*. Elle est pilotée par la valeur de β_{c_i} qui ajuste la composante issue du *Green-Gauss* (*GG*) dans le calcul du gradient et celle issue du *Moindres Carrés* avec pondération (*WLSQ*). Shima détermine la valeur de β_{c_i} par un critère géométrique puisque l'expression qu'il utilise est donnée par :

$$\beta_{c_i} = \min \left(1, 2 \times \frac{|\Omega_{c_i}|}{\max_{f \in F_{c_i}} (\|\mathbf{I}f\|) \cdot \max_{f \in F_{c_i}} (|\Sigma_f|)} \right) \quad (4.16)$$

Ainsi toute cellule dont le rapport de forme dépasse 2, possède une contribution de type *Green-Gauss* au calcul de son gradient.

4.2.3.1 Caractérisation de la qualité géométrique des cellules

L'utilisation par Shima d'un critère géométrique basé uniquement sur le rapport de forme de la cellule pour adapter sa méthode de calcul de gradient est justifiée par le type de maillage spécifiquement ciblé par cet auteur (maillage à cellules curvilignes fortement étirées). Pour notre part, nous avons souhaité définir d'autres critères afin de caractériser de façon plus générale la qualité géométrique d'une cellule. Plusieurs critères sont disponibles dans la littérature et on peut en trouver certains mentionnés dans les manuels de logiciels commerciaux (cf. [63] par exemple). Après analyse, trois critères apparaissent d'un intérêt particulier dans l'identification de cellules de mauvaise qualité géométrique engendrée par un raccord hybride non coïncident ; il s'agit des critères :

— saut de volume

$$\gamma_{c_i}^{vol} = \min_{f \in F_{c_i}} \left(\min \left(\frac{\Omega_{c_i}}{\Omega_{c_i^f}}, \frac{\Omega_{c_i^f}}{\Omega_{c_i}} \right) \right) \quad (4.17)$$

— orthogonalité

$$\gamma_{c_i}^{ortho} = \min_{f \in F_{c_i}} \left(\frac{|\mathbf{I}f \cdot \mathbf{n}_f|}{\|\mathbf{I}f\|} \right) \quad (4.18)$$

— rapport de forme (ou Aspect Ratio)

$$\gamma_{c_i}^{AR} = \frac{l_{min}}{l_{max}} \quad (4.19)$$

où les notations utilisées sont illustrées sur la figure 4.15. La quantité l_{min} correspond à la distance séparant le centre de la cellule courante de la face la moins éloignée tandis que l_{max} est la plus grande distance séparant un nœud de la cellule courante de son centre. Cette définition du rapport de forme est non conventionnelle. Elle fournit nécessairement une valeur telle que $\gamma_{c_i}^{AR} \neq 1$ quelle que soit la cellule. En revanche, sa mise en œuvre est extrêmement simplifiée et sa définition est adaptée à tout type de cellule, qu'elle soit de dimension deux ou trois. Enfin, on définit la qualité géométrique d'une cellule c_i en prenant en compte les 3 critères précédents par l'expression :

$$\gamma_{c_i} = \min \left(\gamma_{c_i}^{vol}, \gamma_{c_i}^{ortho}, \gamma_{c_i}^{AR} \right) \quad (4.20)$$

La définition des trois critères géométriques permet d'affirmer que :

— quelle que soit la forme de la cellule c_i : $\gamma_{c_i} \in [0, 1]$

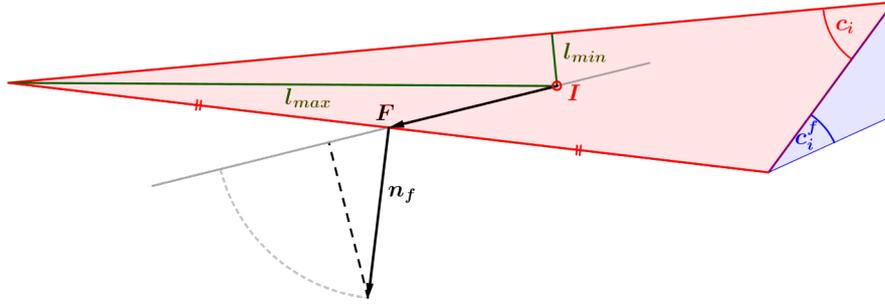


Figure 4.15 – Notations utilisées pour la définition des critères de qualité géométrique d'une cellule de maillage.

- une meilleure qualité géométrique de c_i implique une valeur de γ_{c_i} plus proche de 1
- et à l'inverse, une plus mauvaise qualité géométrique de c_i conduit à une valeur de γ_{c_i} plus proche de 0.

Pour une meilleure pertinence dans le cadre de nos applications de la définition du critère géométrique pour le calcul de gradient par *GLSQ*, la définition (4.20) de la qualité géométrique d'une cellule γ_{c_i} est employée dans (4.16) en lieu et place de celle définie initialement par Shima et notée β_{c_i} .

4.2.4 Limiteurs géométriques

Étant donné que les problèmes de robustesse rencontrés lors des calculs réalisés avec un schéma de Roe à l'ordre deux semblent associés à des cellules de mauvaise qualité géométrique, une stratégie de limitation basée sur un critère purement géométrique a également été étudiée. L'objectif visé est de réduire la reconstruction à l'ordre un, à l'image d'une stratégie de limitation classique telle qu'exposée en 4.2.2, pour toutes les cellules dont la qualité géométrique est considérée comme faible ou médiocre et de maintenir l'ordre deux pour les autres cellules. Cette stratégie peut être rapidement mise en œuvre à partir du critère de qualité géométrique γ_{c_i} défini en 4.20 puisque $\gamma_{c_i} \in [0, 1]$. Par ailleurs, cette limitation géométrique, notée $\phi^{géo}$ n'est en rien incompatible avec une stratégie de limitation "physique", qui est à partir de maintenant notée ϕ^{phys} , comme le limiteur de Venkatakrishnan par exemple. Dans ce cas, le processus de reconstruction exposé en 4.2 devient :

$$\begin{cases} \psi_F^I &= \psi_I + \phi_{c_i}^{géo} \phi_{c_i}^{phys} \mathbf{IF} \cdot \nabla \psi_I \\ \psi_F^R &= \psi_{If} + \phi_{c_i}^{géo} \phi_{c_i}^{phys} \mathbf{I}^f \mathbf{F} \cdot \nabla \psi_{If} \end{cases} \quad (4.21)$$

Avec cette écriture, on assure d'une part une reconstruction classique à l'ordre deux lorsque l'écoulement ne présente aucune discontinuité et que la cellule est suffisamment peu déformée, et d'autre part une dégradation à l'ordre un de la reconstruction si le champ physique fait apparaître des oscillations ou que la cellule est jugée de mauvaise qualité géométrique.

Ainsi, le limiteur géométrique $\phi_{c_i}^{géo}$ est choisi comme une fonction du critère de qualité géométrique $\gamma_{c_i} : \phi_{c_i}^{géo} = f(\gamma_{c_i})$. Le choix de la fonction f constitue un degré de liberté que nous n'avons pas particulièrement cherché à explorer. Nous avons développé à la fois une fonction identité ainsi qu'une définition alternative suivante pour la fonction f :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, \xi], & f(x) = 0 \\ \forall x \in]\xi, 1], & f(x) = 1 \end{cases} \quad (4.22)$$

Cette fonction alternative présente l'avantage de trancher nettement entre l'ordre un et l'ordre deux pour une valeur du critère géométrique donné mais l'estimation générale *a priori* d'une valeur seuil ξ bien adaptée n'est pas triviale. On pourrait également s'intéresser, par analogie aux travaux conduits par Kitamura dans [71] sur un processus de limitation physique, à une fonction de type *tanh* pour réaliser une transition régulière entre reconstruction constante et linéaire. Dans cette étude, seule la première solution (fonction identité) a été appliquée pour le choix de f .

4.3 Évaluation de l'amélioration de robustesse : cas du Film Cooling

4.3.1 Méthodologie

Quatre méthodes d'amélioration de la robustesse ont été implémentées dans le solveur hybride elsA-H :

- la stratégie de lissage des gradients et le calcul de gradient par méthode *GLSQ* qui permettent de modifier l'évaluation du gradient au centre des cellules
- le limiteur de Venkatakishnan et les limiteurs géométriques qui s'appliquent au processus de reconstruction linéaire des états à gauche et à droite du centre face

Chacune de ces méthodes va être évaluée de façon indépendante sur le cas du Film Cooling pour lequel le solveur hybride a été mis en échec dans 3.4.3. Les choix numériques de base sont un schéma de Roe avec reconstruction linéaire des états aux faces et un calcul de gradient au centre des cellules réalisé par la méthode *quasi-Green*. Les gradients aux centres sont utilisés pour l'estimation des gradients aux faces via l'approche *5pcor*. Le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras est utilisé pour décrire les effets de la turbulence sur le champ moyen.

Les améliorations de type *GLSQ* et limitation géométrique utilisent des critères de qualité géométrique comme expliqué en 4.2. Pour les simulations réalisées en activant ces techniques, la caractérisation de la qualité géométrique des cellules intègre l'analyse des sauts de volume entre deux cellules et l'orthogonalité de chaque cellule. La figure 4.16 présente une vue d'ensemble des valeurs prises par la qualité géométrique des cellules (cf. définition (4.20)) dans le plan longitudinal contenant l'insertion du trou de refroidissement.

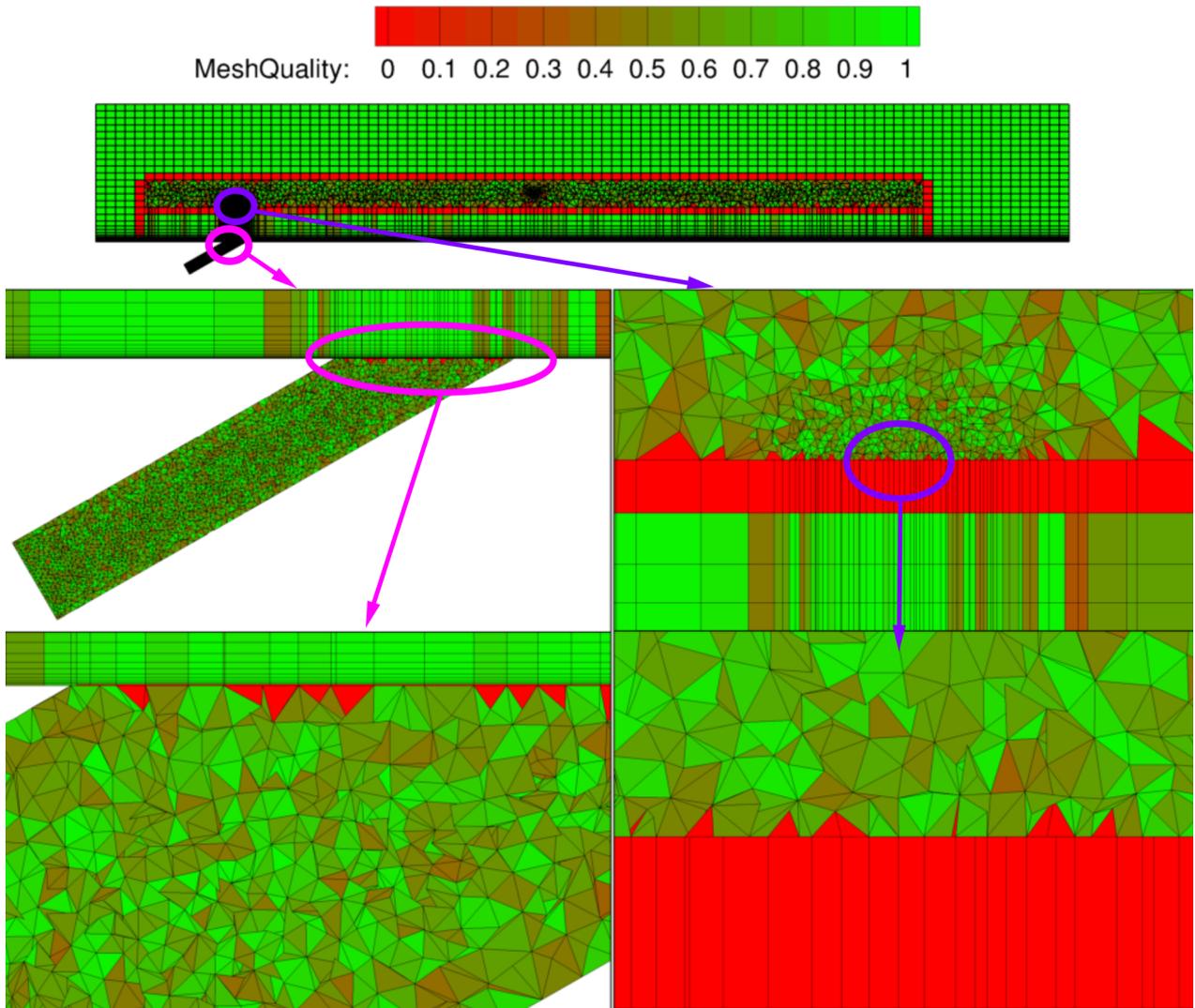


Figure 4.16 – Visualisation de la qualité du maillage hybride de la configuration Film Cooling dans le plan $Y = 0$ d'insertion du trou pour des critères de saut de volume et d'orthogonalité.

4.3.2 Analyse des résultats

La figure 4.17 présente les courbes d'historique de la convergence des résidus sur la masse volumique pour chacune des quatre simulations réalisées (désignées sur la figure par la technique d'amélioration de la robustesse mise en œuvre). Une excellente convergence est obtenue pour les simulations s'appuyant sur les limiteurs géométriques, un calcul de gradient réalisé par la méthode *GLSQ* ou une stratégie de lissage de gradients. La simulation réalisée avec un limiteur de Venkatakrishnan rencontre un plateau de convergence après avoir perdu plus de quatre ordres. Si l'on observe l'historique de convergence des débits de cette simulation (Figure 4.18), on constate qu'en dépit de ce plateau de convergence, les débits ont correctement convergé. Ainsi, on peut accepter le niveau de convergence de cette simulation avec le limiteur de Venkatkrishnan. Les historiques de convergence des débits de l'ensemble des simulations sont également fournis par cette même figure 4.18. On n'observe aucun problème de convergence sur cette grandeur pour les autres simulations.

Contrairement au calcul purement d'ordre deux qui avait échoué dans 3.4.3, chacune des quatre simulations aidées par une méthode d'amélioration de la robustesse a pu être menée à son terme.

Le tableau 4.1 reprend l'ensemble des débits amont, aval et d'injection du trou pour les simulations réalisées avec les méthodes d'amélioration de la robustesse sur la configuration du Film Cooling à l'ordre deux en espace. On constate que ces méthodes influencent peu les valeurs finales obtenues pour les débits. La conservativité reste parfaitement assurée par chacune de ces méthodes puisque les

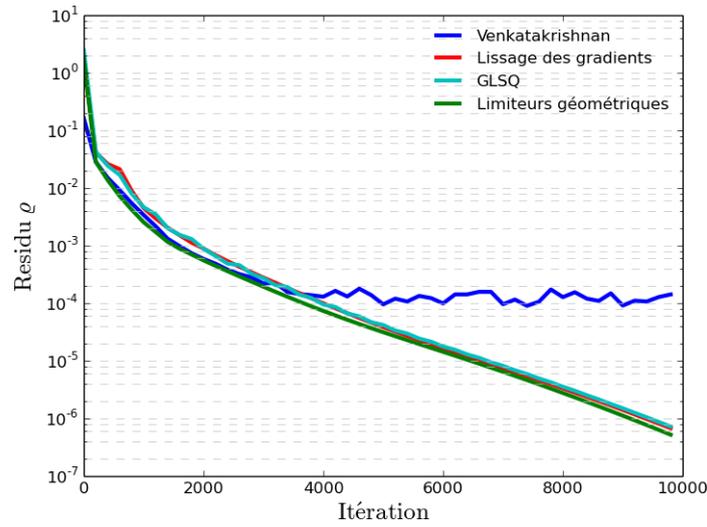


Figure 4.17 – Historique de convergence des résidus pour la densité sur la configuration Film Cooling pour des simulations utilisant des méthodes d’amélioration de la robustesse.

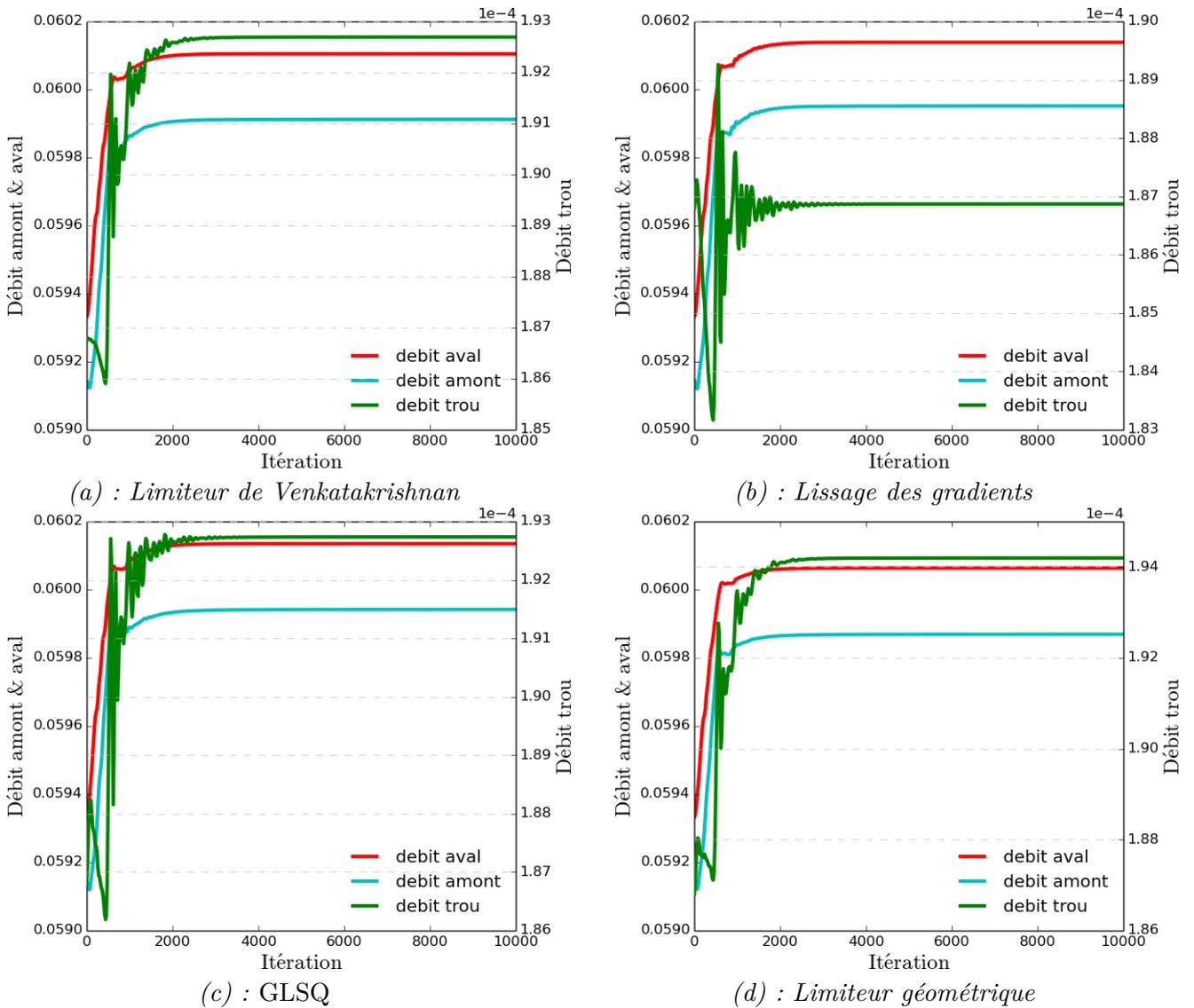


Figure 4.18 – Historique de convergence des débits (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) sur la configuration hybride du Film Cooling à l’ordre deux en espace avec utilisation de méthodes d’amélioration de la robustesse.

valeurs de l'erreur de conservativité sont toutes de l'ordre de 10^{-6} %.

Les coupes de trace thermique pour les différentes simulations sont synthétisées sur les figures 4.19, 4.20, 4.21 et 4.22. Comme pour le calcul de référence structuré à l'ordre deux sur la figure 3.65 et le calcul hybride d'ordre un sur la figure 3.72, on présente pour chacune des simulations hybrides d'ordre deux avec technique d'amélioration de la robustesse trois coupes à X fixé (respectivement à 25%, 50% et 90% de la longueur de la plaque et une coupe à Y fixé (milieu de la plaque). En outre, on visualise les lignes de courant sur la coupe à X fixé à 25% de la longueur de plaque. On rappelle, par comparaison avec les résultats de référence obtenus dans le maillage structuré, que l'on souhaite d'une part préserver la trace thermique sur toute la longueur de la plaque et capturer d'autre part les tourbillons de recirculation présents à l'aval proche du trou d'injection. On constate tout d'abord que les traces thermiques pour les calculs hybrides à l'ordre deux bénéficiant d'une stratégie d'amélioration de la robustesse sont assez similaires en forme et en intensité. Les simulations avec *GLSQ* et avec lissage des gradients sont légèrement moins dissipées que celles avec limiteur de Venkatakrishnan ou limitation géométrique. En étant moins dissipées, elles se rapprochent naturellement de la solution de référence obtenue à l'ordre deux, avec en particulier la présence attendue des tourbillons contrarotatifs. On note toutefois une différence sensible dans la forme de la trace thermique entre les calculs hybrides d'ordre deux et le calcul référence d'ordre deux dans le maillage structuré : les traces obtenues par les calculs hybrides sont systématiquement plus "aplaties". Dans la mesure où nous avons montré précédemment que le solveur hybride fournissait la même solution que le solveur structuré lorsqu'il était mis en œuvre dans le même maillage déstructuré, nous en concluons que ces différences entre solutions hybrides d'ordre deux et solution structurée de référence sont au moins en partie imputables à des effets de maillage - on rappelle que la qualité du maillage hybride est bien moindre que celle du maillage structuré - et pas uniquement à l'utilisation de techniques d'amélioration de la robustesse. En outre, même si les simulations hybrides d'ordre deux présentent des différences sur la forme de la trace thermique par rapport à la solution de référence d'ordre deux, l'apport en terme de précision de ces calculs hybrides d'ordre deux par rapport à une simulation hybride d'ordre un est indéniable : on rappelle en effet que quand on analyse les traces thermiques du calcul hybride d'ordre un on observe une disparition quasi totale de cette trace à $X = 90$ % et une dissipation déjà très marquée à 50 %.

La même analyse est réalisée sur l'efficacité de refroidissement thermique. L'efficacité de refroidissement thermique à la paroi pour les calculs hybrides d'ordre deux est fournie sur la figure 4.23 ; nous rappelons que l'efficacité thermique obtenue pour le calcul de référence d'ordre deux est présentée sur la figure 3.68 et celle du calcul hybride d'ordre un par la figure 3.71. Naturellement, les mêmes conclusions que celles issues de l'analyse des traces thermiques peuvent être tirées puisque l'efficacité de refroidissement thermique est directement liée aux traces thermiques précédemment analysées. Les simulations hybrides d'ordre deux présentent une efficacité de refroidissement thermique à la paroi similaire quelle que soit la méthode d'amélioration de la robustesse utilisée. Alors que l'efficacité de refroidissement thermique à l'aval du trou se situe entre 0.4 et 0.6 pour le calcul de référence d'ordre deux, cette quantité varie plutôt entre 0.2 et 0.4 pour les calculs hybrides d'ordre deux. Pour les raisons déjà évoquées, cette sous-estimation est imputable au moins en partie aux effets de maillage associés à l'utilisation du maillage hybride. Même s'il serait bien sûr souhaitable dans l'absolu de générer un maillage hybride de qualité suffisante pour ne pas dégrader ainsi la prédiction numérique, cette voie n'a pas été explorée ici puisque notre objectif était centré sur la capacité du solveur hybride à produire des solutions dans des maillages de qualité géométrique dégradée. Il est intéressant d'observer que les simulations hybrides d'ordre deux améliorent en tout cas, à iso-maillage, de façon très nette l'efficacité de refroidissement thermique par rapport à la simulation hybride d'ordre un. En particulier, elles parviennent à capturer une particularité de l'allure générale de l'efficacité du refroidissement thermique qui est la ré-augmentation de cette grandeur à partir de $X = 2$. Dans le même temps, la simulation hybride d'ordre un prédit de façon erronée une décroissance continue de η depuis son pic à 1 au niveau du trou.

Chacune des méthodes proposées permet donc effectivement d'améliorer la robustesse du solveur sans

perte de la propriété de conservativité en vue d'un calcul à l'ordre deux. Par ailleurs les résultats obtenus montrent que les caractéristiques clés de la physique de l'écoulement de Film Cooling sont correctement reproduites par ces simulations d'ordre deux, ce qui n'était pas le cas auparavant avec les calculs d'ordre un. La solution apparaît néanmoins plus dissipée que celle obtenue par un calcul de référence. Il faut y voir les conséquences combinées d'un effet de discrétisation incluant une estimation modifiée du gradient ou un processus de limitation et d'un effet de dégradation de la qualité géométrique du maillage hybride par rapport au maillage structuré. La forte similitude des résultats obtenus par les approches hybrides d'ordre deux faisant appel à des techniques d'amélioration de la robustesse bien différentes - stratégie de limitation, physique ou géométrique, ou modification du calcul du gradient par utilisation d'une formule *GLSQ* ou par lissage - peut laisser penser que l'effet de maillage est prédominant.

Configuration	Q_{amont} ($kg \cdot s^{-1}$)	Q_{aval} ($kg \cdot s^{-1}$)	Q_{trou} ($kg \cdot s^{-1}$)	$\varepsilon_{conservativité}$ (%)
Venkatakrishnan + senseur	$5.9911951 \cdot 10^{-2}$	$6.0104668 \cdot 10^{-2}$	$1.9271299 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-6}$
Venkatakrishnan	$5.9912242 \cdot 10^{-2}$	$6.0104936 \cdot 10^{-2}$	$1.9269394 \cdot 10^{-4}$	$6.92 \cdot 10^{-7}$
Lissage des gradients	$5.9951887 \cdot 10^{-2}$	$6.0138762 \cdot 10^{-2}$	$1.8687107 \cdot 10^{-4}$	$7.32 \cdot 10^{-6}$
<i>GLSQ</i>	$5.9942022 \cdot 10^{-2}$	$6.0134761 \cdot 10^{-2}$	$1.9273588 \cdot 10^{-4}$	$5.30 \cdot 10^{-6}$
Limiteurs géométriques	$5.9869215 \cdot 10^{-2}$	$6.0063418 \cdot 10^{-2}$	$1.9419780 \cdot 10^{-4}$	$8.85 \cdot 10^{-6}$

Table 4.1 – Débits en $kg \cdot s^{-1}$ et erreur de conservativité $\varepsilon_{conservativité} = \frac{|Q_{amont} + Q_{trou} - Q_{aval}|}{\frac{1}{2}|Q_{amont} + Q_{trou} + Q_{aval}|}$ obtenus à convergence sur la configuration du Film Cooling.

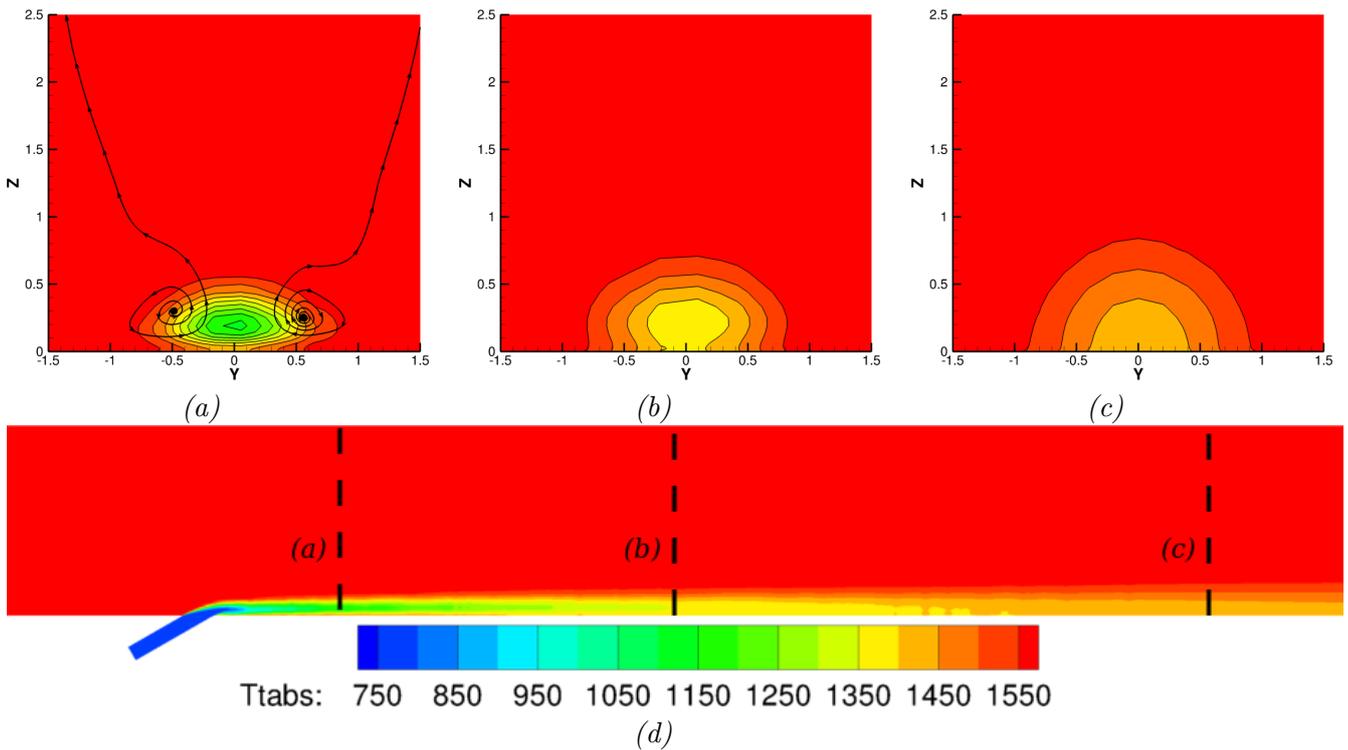


Figure 4.19 – Coupes de température selon X pour la configuration hybride du Film Cooling avec utilisation du limiteur de Venkatakrishnan : (a) à 25%, (b) à 50% et (c) à 90% de la longueur de plaque ; selon Y pour (d) et lignes de courant pour (a).

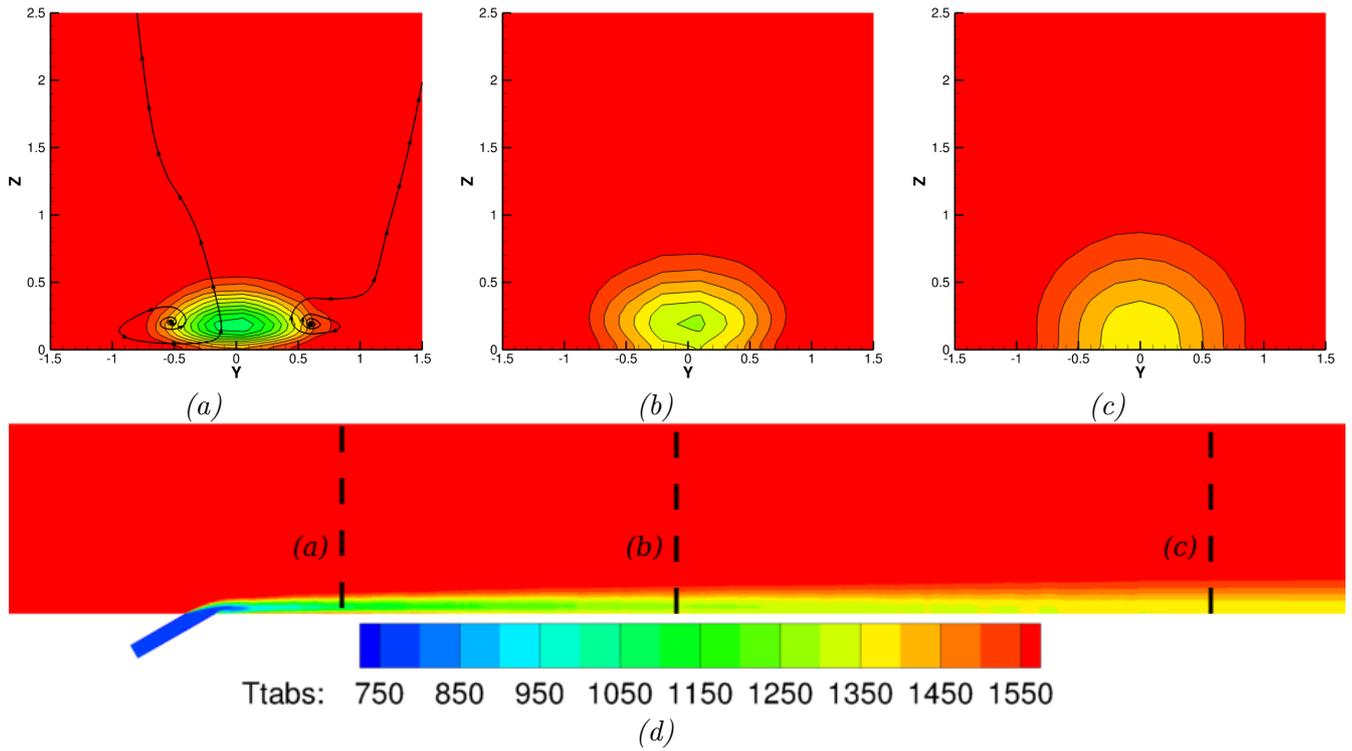


Figure 4.20 – Coupes de température selon X pour la configuration hybride du Film Cooling avec utilisation du **lissage de gradients** : (a) à 25%, (b) à 50% et (c) à 90% de la longueur de plaque ; selon Y pour (d) et lignes de courant pour (a).

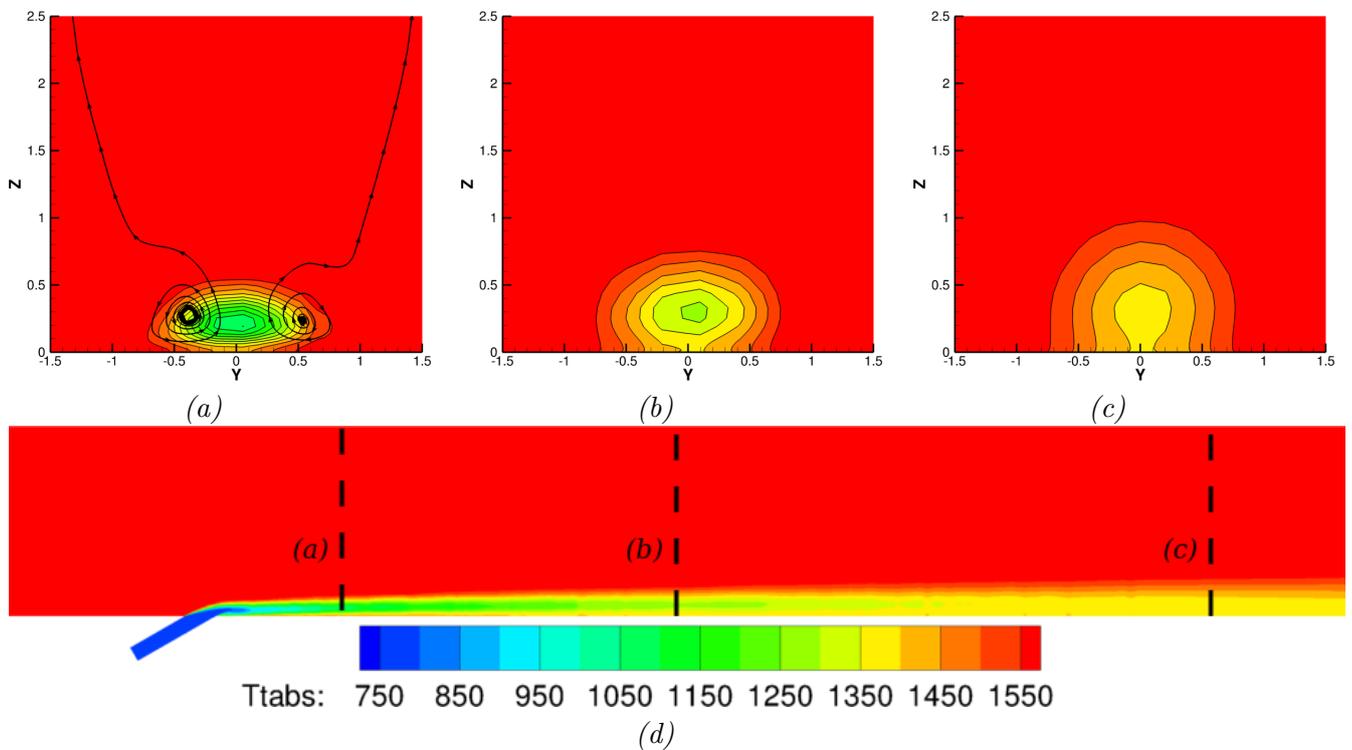


Figure 4.21 – Coupes de température selon X pour la configuration hybride du Film Cooling avec utilisation d'une méthode **GLSQ** pour le calcul des gradients : (a) à 25%, (b) à 50% et (c) à 90% de la longueur de plaque ; selon Y pour (d) et lignes de courant pour (a).

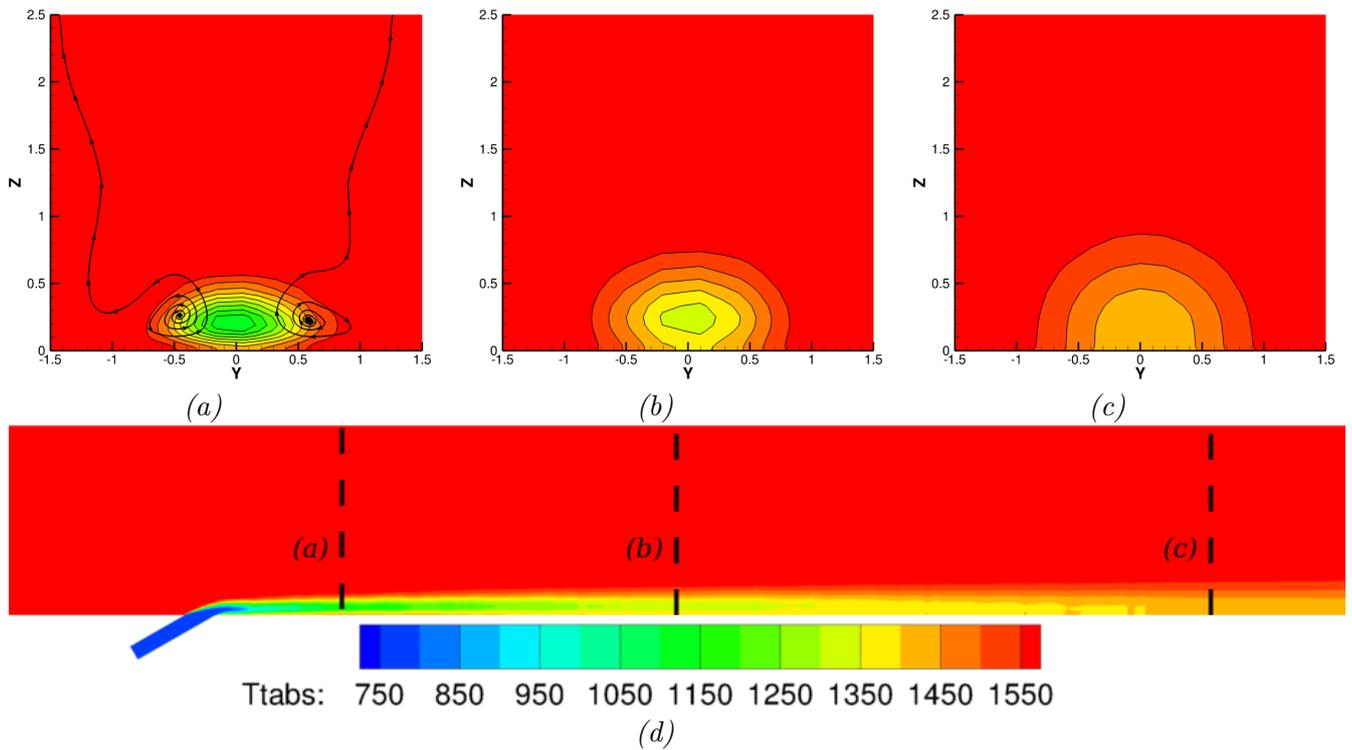


Figure 4.22 – Coupes de température selon X pour la configuration hybride du Film Cooling avec utilisation d'une **limitation géométrique** : (a) à 25%, (b) à 50% et (c) à 90% de la longueur de plaque ; selon Y pour (d) et lignes de courant pour (a).

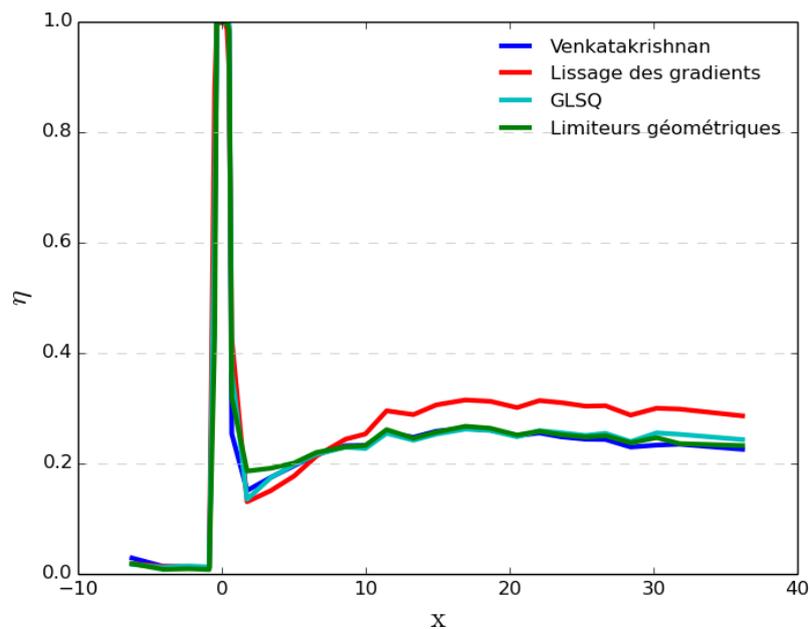


Figure 4.23 – Efficacité du refroidissement thermique à la paroi sur la configuration hybride du Film Cooling.

Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en évidence que l'approche hybride avec raccords coïncidents est susceptible de conduire à la génération de maillages dont certaines cellules déformées rendent difficile une résolution précise mais, surtout, peuvent compromettre la robustesse d'une simulation hybride. Pour corriger ce manque de robustesse du solveur hybride initial dans des maillages hybrides qui seront nécessairement rencontrés dans les applications industrielles visées, différentes stratégies d'amélioration de la robustesse ont été proposées, implémentées et testées sur une configuration simple présentant un effet technologique : le *film cooling* sur plaque plane. Il a été observé que les stratégies proposées fournissent effectivement un gain sensible de robustesse mais au prix d'une certaine perte de précision de la solution. Les résultats obtenus peuvent cependant être considérés comme très encourageants et nous autorisent donc, munis de cette panoplie d'ingrédients numériques, à mettre en œuvre dans les chapitres qui suivent la stratégie hybride pour la prise en compte d'effets technologiques sur des configurations à caractère industriel.

Chapitre 5

Évaluation de elsA-H sur des configurations industrielles

Grâce aux améliorations de robustesse proposées et testées dans le chapitre précédent sur une configuration de Film Cooling, le solveur hybride doit être désormais en mesure d'être appliqué à des configurations géométriquement et physiquement plus ambitieuses que celles abordées dans les chapitres de mise au point précédents et pour des maillages hybrides exigeants. Le présent chapitre est consacré à la démonstration de ces nouvelles capacités de calcul. Plusieurs configurations d'aubes isolées mettant en œuvre des effets technologiques différents et de difficulté croissante sont étudiées. Dans un premier temps, une configuration d'aube complète avec prise en compte du congé de raccordement entre l'aube et le moyeu est considérée (cas dit CONGE). Ensuite, l'intérêt est porté sur les stratégies de refroidissement avec une tranche d'aube (stratégie dite $2.5D$ émettant l'hypothèse que l'écoulement reste confiné dans une nappe de courant d'épaisseur donnée) dotée de deux trous de refroidissement (cas CM2013). Enfin un cas comprenant à la fois des trous de refroidissement et des fentes au bord de fuite sur une aube tridimensionnelle (cas CM2012) est traité à l'aide de elsA-H.

Ces configurations ont été générées dans le cadre du projet de développement du solveur elsA-H et ne bénéficient malheureusement pas de mesures d'essai ou de résultats numériques comparables avec un autre code. Sur quelques-unes de ces configurations cependant, une comparaison avec un calcul basé sur une stratégie chimère peut être réalisée. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que la solution obtenue par la méthode chimère n'est pas nécessairement fiable dans la mesure où elle est non conservative et que les débits prédits peuvent être imprécis. Nous montrerons que les propriétés de conservation du débit par l'approche hybride sont, par construction-même, excellentes.

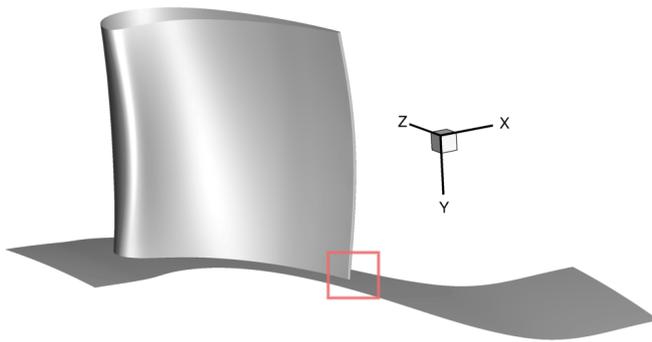
Un objectif également poursuivi dans ce chapitre est de faire émerger du retour d'expérience accumulé sur les différentes configurations simulées de bonnes pratiques de mise en œuvre du solveur hybride. On souhaite ainsi en particulier identifier les choix pertinents de méthodes d'amélioration de la robustesse.

5.1 Aube complète avec congé de raccordement

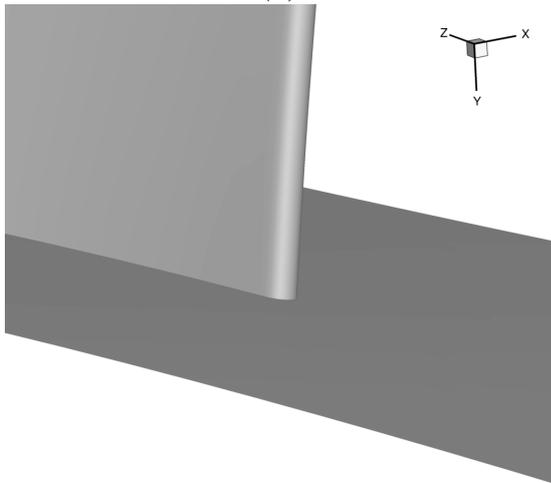
5.1.1 Présentation générale du cas

Le cas étudié consiste en une aube tridimensionnelle de rotor, un moyeu et un carter. On s'intéresse à la prise en compte du congé de raccordement entre le pied de l'aube et le moyeu. Désormais, cette configuration d'étude sera désignée comme la configuration CONGE. La figure 5.1 illustre une aube sans prise en compte du congé de raccordement, configuration qui est qualifiée d'aube lisse. L'image 5.2 représente quant à elle la même aube avec prise en compte dans la géométrie du congé de raccordement. En comparant l'image (b) de ces deux figures, on constate nettement la différence géométrique entre l'aube lisse et l'aube avec congé de raccordement. Ce congé de raccordement est caractérisé par un rayon de courbure de 1 mm comme l'illustre la figure 5.4.

Les conditions limites imposées pour le calcul sont décrites par la figure 5.3. Elles se composent d'une injection subsonique en amont, d'une sortie subsonique à l'aval, de parois adiabatiques pour le moyeu, le carter et l'aube ainsi que de raccords périodiques par rotation.

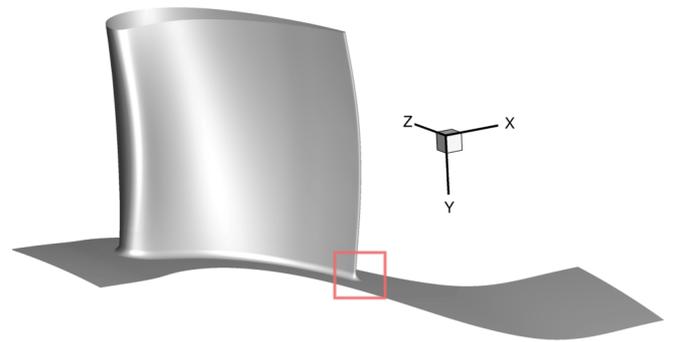


(a)

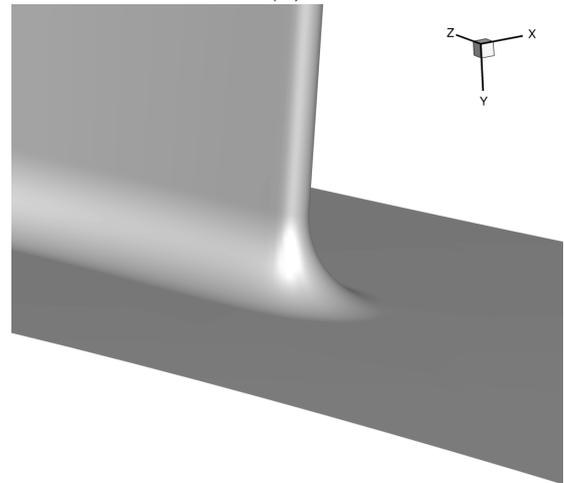


(b)

Figure 5.1 – (a) moyeu et aube sans prise en compte du congé de raccordement, (b) : grossissement au niveau du bord de fuite du pied de pale



(a)



(b)

Figure 5.2 – (a) moyeu et aube avec prise en compte du congé de raccordement, (b) : grossissement au niveau du bord de fuite du pied de pale

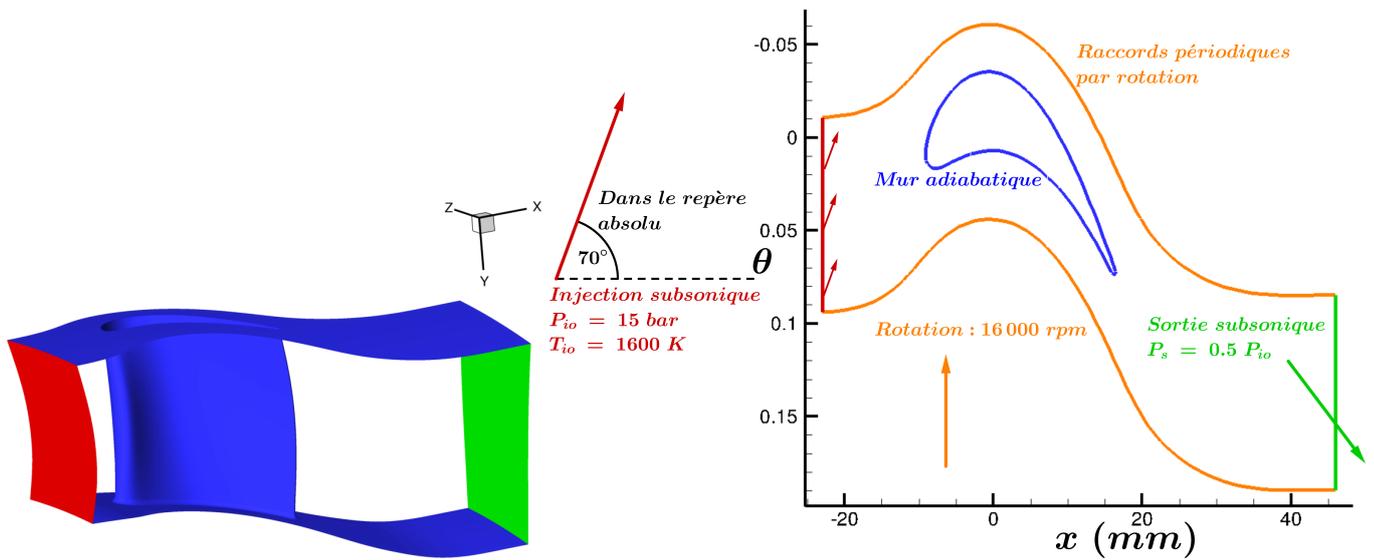


Figure 5.3 – Application des conditions limites sur la configuration CONGE avec en *bleu* les murs adiabatiques, en *rouge* l'injection subsonique, en *vert* la sortie subsonique et en *orange* les raccords périodiques par rotation.

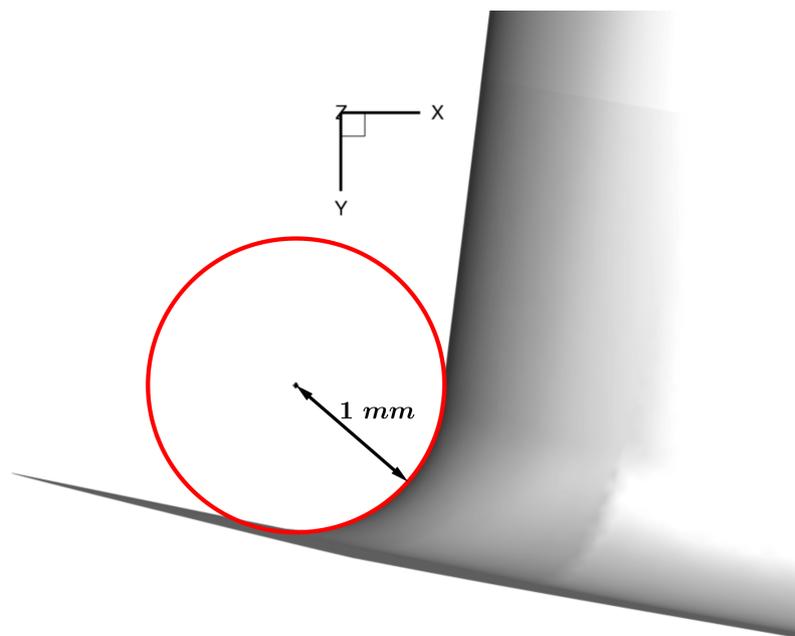


Figure 5.4 – Visualisation du congé de raccordement de la configuration CONGE au bord d'attaque du pied de pale.

5.1.2 Description des stratégies de maillage étudiées

Il n'est pas attendu que la modification physique de l'écoulement due à la prise en compte de ce détail de fabrication soit conséquente. En réalité, la difficulté de cette configuration réside en majeure partie dans l'élaboration du maillage. Cette difficulté contrôlée fait de cette configuration un bon premier exercice de prise en compte d'effet technologique.

Une première configuration de type aube lisse a été maillée par déstructuration du maillage structuré existant pour cette configuration. Celle-ci permettra de constater les effets de l'ajout du congé de raccordement à la géométrie. Ensuite, une configuration dotée du congé de raccordement a été maillée avec une approche chimère, figure 5.5. Cette dernière permet d'avoir une première idée de l'impact du

congé de raccordement sur l'écoulement. Elle sert également à illustrer les faiblesses de cette stratégie de maillage pour le problème considéré. Enfin, un troisième maillage a été réalisé avec une approche hybride. Sur la figure 5.6, un bloc non structuré en rouge a été ajouté pour restituer parfaitement la forme du congé de raccordement sur deux maillages de densité différente. On remarque les sauts de taille de maille importants à la jonction entre les parties structurées (*bleu*) et non structurées (*rouge*), figure 5.7. En plus du saut de maille, ces cellules sont fortement étirées. Ces deux éléments combinés rendent le calcul délicat en terme de robustesse.

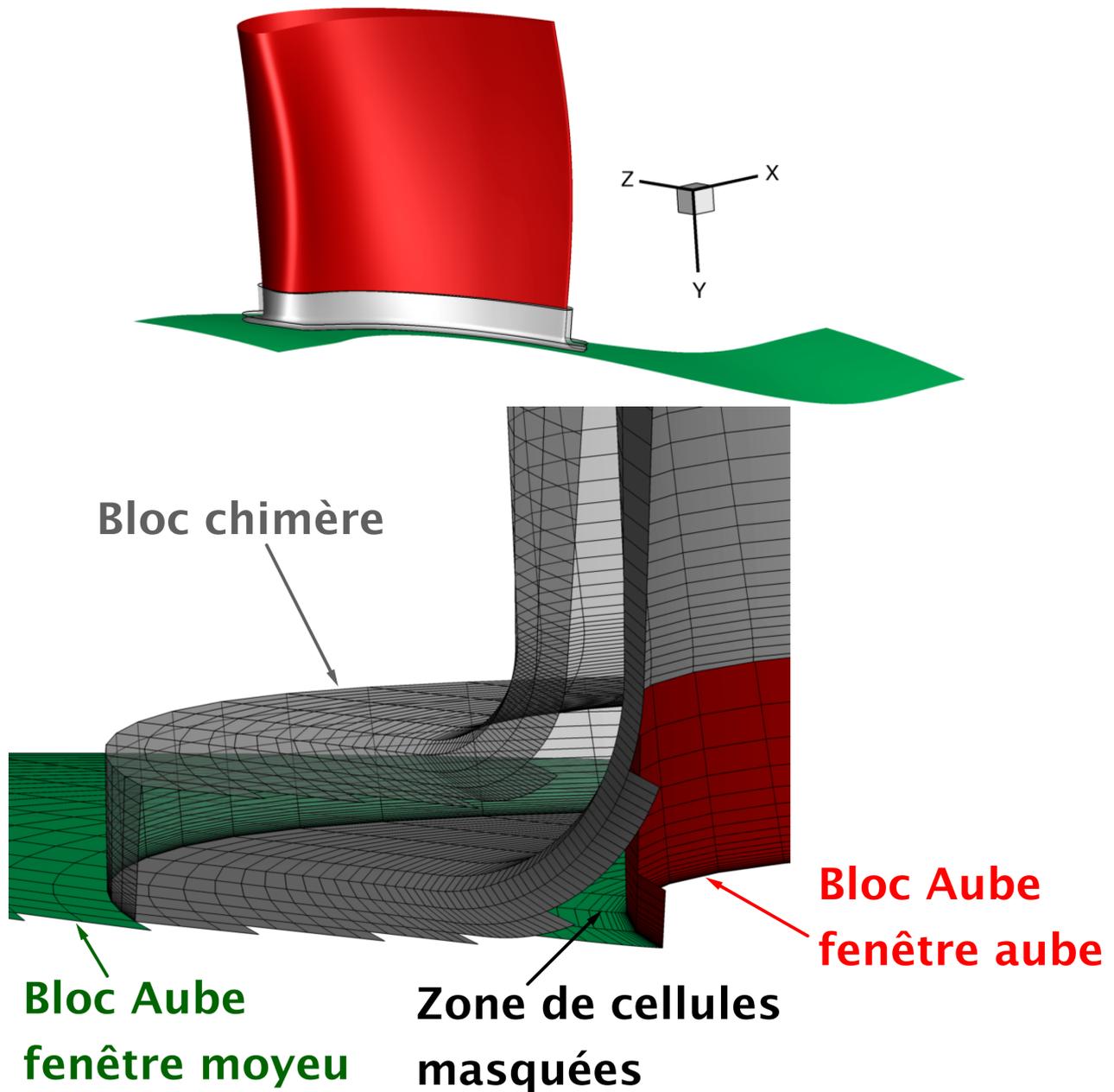


Figure 5.5 – (a) Visualisation du maillage Chimère pour la prise en compte du congé de raccordement. En gris le bloc Chimère de recouvrement, en vert le moyeu et en rouge l'aube.

Les trois stratégies de maillage (aube lisse, maillage chimère de l'aube avec congé et maillage hybride de l'aube avec congé) ont été appliquées pour créer un maillage grossier et un maillage fin à chaque fois. Les irrégularités de maillage sont beaucoup plus légères sur une configuration plus lâche. La stratégie de maillage appliquée pour générer les cas hybrides consiste à mailler les couches limites de l'aube et du congé avec des rangées de prismes. Une fois suffisamment éloigné de l'aube, des tétraèdres sont insérés. Afin d'assurer la jonction entre les domaines structurés et non structurés, des pyramides

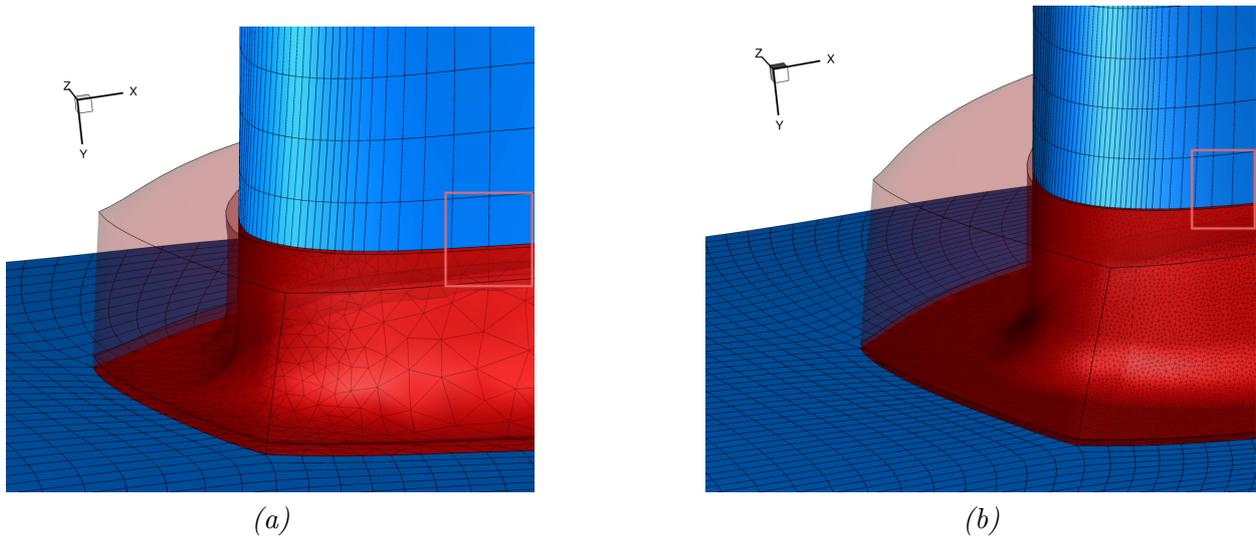


Figure 5.6 – Maillages hybrides du congé de raccordement avec en *rouge* la partie non structurée et en *bleu* la partie structurée. (a) : Maillage grossier et (b) : Maillage fin

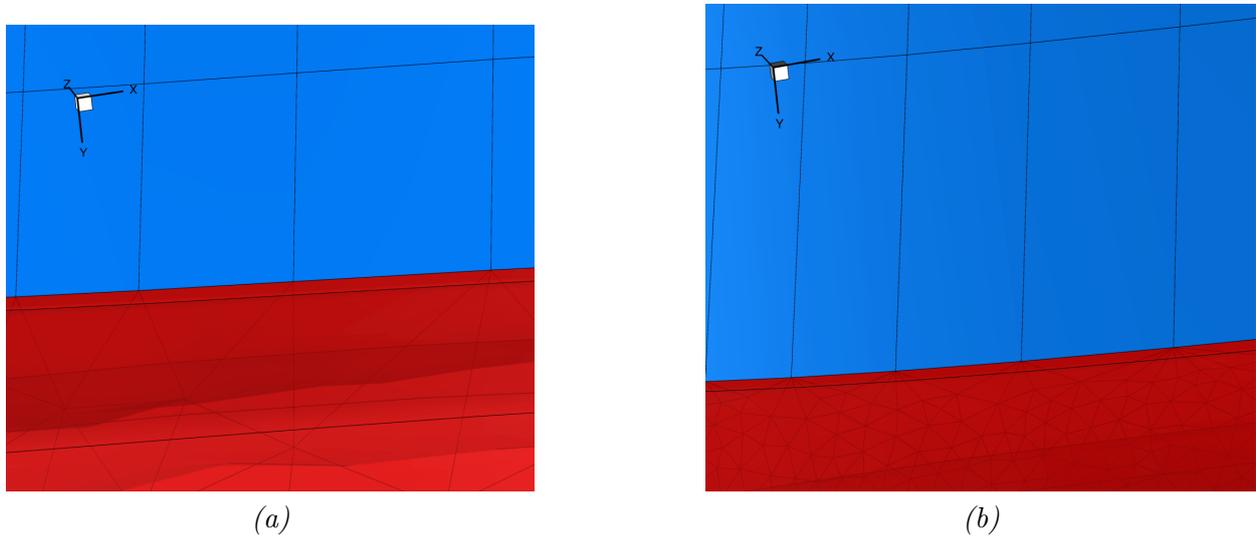


Figure 5.7 – Grossissement de la figure 5.6.

sont utilisées. Les tableaux 5.1 et 5.2 reprennent les caractéristiques de ces trois maillages pour les deux niveaux de raffinement. Par ailleurs, en tête d’aube, un jeu entre le rotor et le carter est présent. Celui-ci est pris en compte lors des simulations associées au maillage dense, mais ne nécessite pas l’emploi d’une approche chimère ou hybride.

Maillages	Aube lisse	Aube & congé - Chimère	Aube & congé - Hybride
Hexaèdres	265 216	265 216 & 125 280	230 656
Pyramides	-	-	2 160
Prismes	-	-	22 048
Tétraèdres	-	-	34 903
Total	265 216	390 496	289 767

Table 5.1 – Répartition en éléments des différents maillages utilisés pour l’étude. (Maillages grossiers)

Maillages	Aube lisse	Aube & congé - Chimère	Aube & congé - Hybride
Hexaèdres	996 864	996 864 & 299 520	904 704
Pyramides	-	-	4 480
Prismes	-	-	1 211 540
Tétraèdres	-	-	671 194
Total	996 864	1 296 384	2 791 918

Table 5.2 – Répartition en éléments des différents maillages utilisés pour l'étude. (Maillages fins)

5.1.3 Description des méthodes numériques utilisées

Les simulations réalisées sur les aubes lisses utilisent un flux de Roe et une reconstruction linéaire sans limiteur avec un calcul des gradients au centre des cellules s'appuyant sur la méthode du *quasi-Green*. Les simulations de type chimère sont réalisées en suivant les recommandations pratiques du Département d'Aérodynamique APpliquée de l'ONERA en la matière, à savoir un schéma de Jameson tel que décrit au chapitre 2. La simulation hybride sur le maillage grossier nécessite l'utilisation d'un limiteur de Venkatakrishnan lors de la reconstruction des états gauche et droit pour le calcul des flux de Roe ainsi qu'un calcul des gradients au centre des cellules réalisé par la méthode de *quasi-Green*. La configuration hybride la plus fine emploie elle-aussi un flux de Roe couplé à l'utilisation du limiteur de Venkatakrishnan. Cependant, pour assurer la robustesse de la simulation, le calcul des gradients au centre des cellules est assuré par la méthode *GLSQ*, dont la formulation dépend de la qualité géométrique des cellules.

5.1.4 Analyse des résultats

Avec l'utilisation de ces différents ingrédients numériques, les calculs à l'ordre deux se déroulent correctement, comme l'attestent les courbes de convergence des résidus de la figure 5.8. Ce bon comportement des calculs hybrides est rendu possible par l'utilisation des méthodes adaptées d'amélioration de la robustesse décrites précédemment dans 4.2.

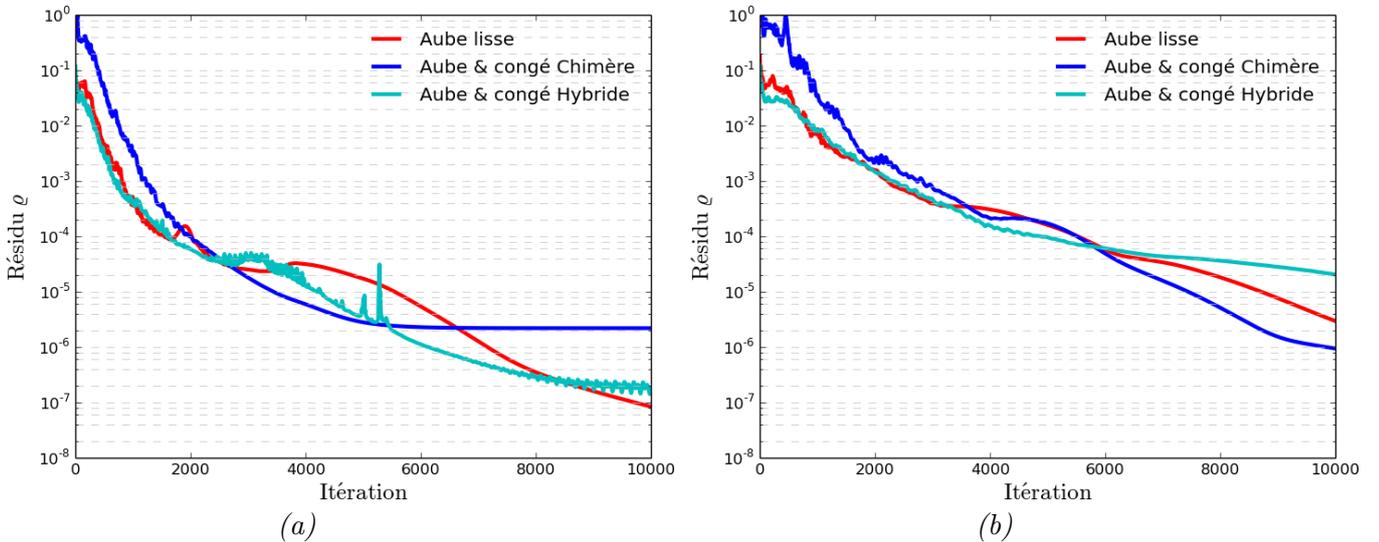


Figure 5.8 – Historique de convergence sur la densité pour la configuration CONGE en maillages grossiers (a) et fins (b).

Par ailleurs, une convergence des débits est également rapidement obtenue, après un peu plus de 4000 itérations, comme indiqué par les figures 5.9 pour le calcul d'aube lisse, 5.10 pour le calcul d'aube avec congé pris en compte par une stratégie chimère et 5.11 pour une aube avec congé maillé avec une approche hybride. On constate que les valeurs des débits amont et aval sont cohérentes entre elles

pour les six différentes simulations autour de $18.8 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Cette similarité dans les valeurs des débits obtenus par les trois types de simulation nous permet d'espérer être sur un même point de fonctionnement de la machine et donc de pouvoir comparer les comportements physiques de ces trois types de simulations. On remarque que les débits amont et aval semblent converger vers la même valeur pour les simulations d'aube lisse et celles où le congé est pris en compte par une approche hybride. Ceci n'est clairement pas le cas pour la simulation modélisant le congé grâce à une stratégie chimère. Cet écart entre les débits amont et aval sur cette configuration illustre un problème de conservativité pour l'approche chimère.

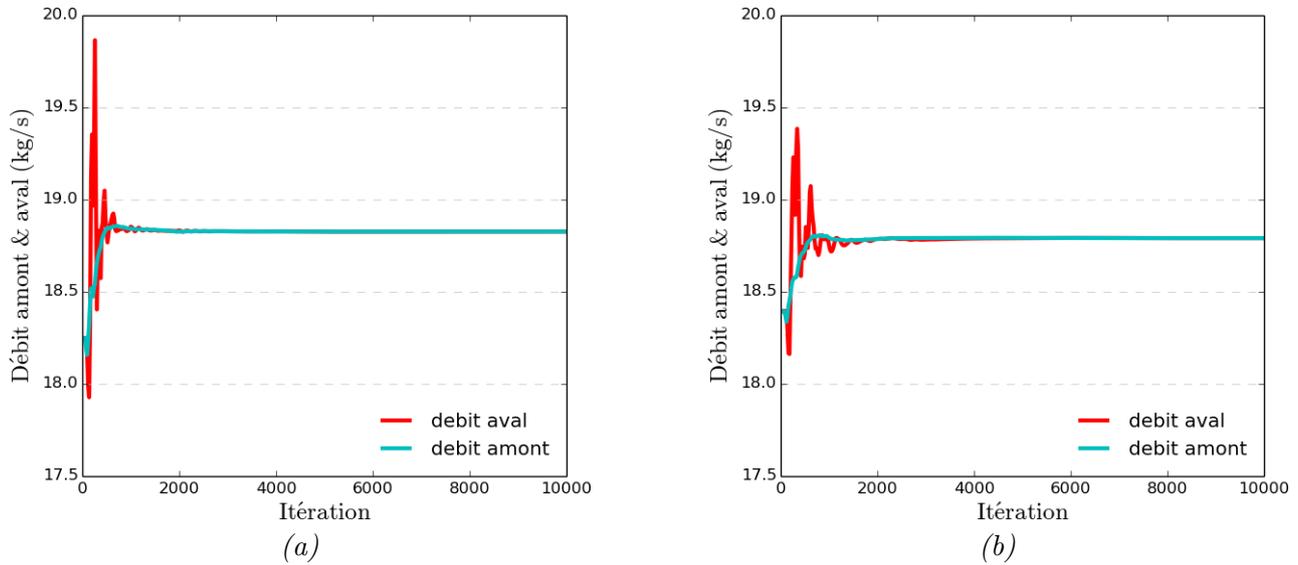


Figure 5.9 – Historique des valeurs des débits amont et aval (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) sur la configuration CONGE : aube lisse pour des maillages grossiers (a) et fins (b).

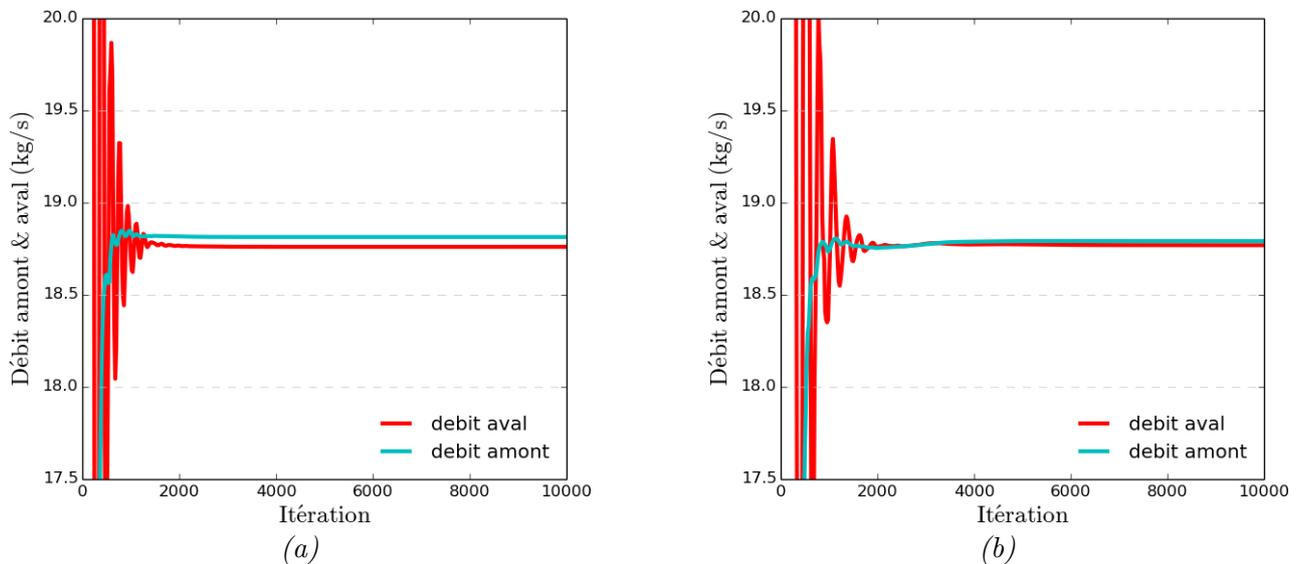


Figure 5.10 – Historique des valeurs des débits amont et aval (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) sur la configuration CONGE : aube et congé maillé en chimère pour des maillages grossiers (a) et fins (b).

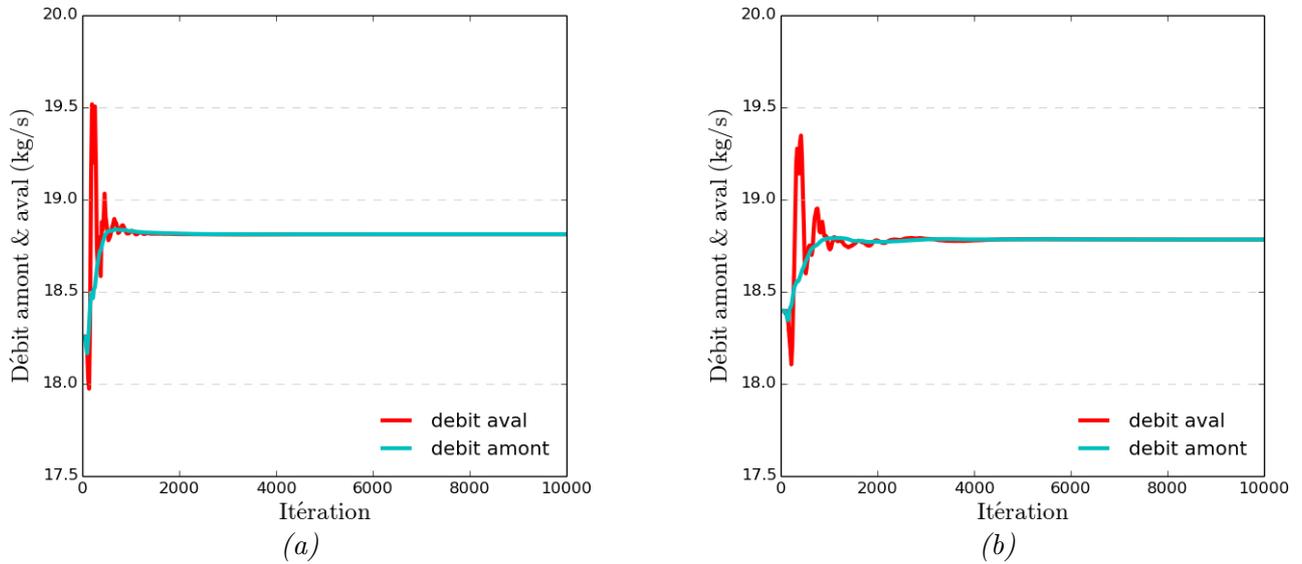


Figure 5.11 – Historique des valeurs des débits amont et aval (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) sur la configuration CONGE : aube et congé maillé avec une approche hybride pour des maillages grossiers (a) et fins (b).

Les données des débits amont et aval des six configurations sont reprises dans les tables 5.3 pour les maillages grossiers et 5.4 pour les maillages fins. Ces tables confirment les résultats observés sur les graphiques d'historique des débits, à savoir que les calculs avec une prise en compte du congé de raccordement par une stratégie chimère souffrent effectivement d'un problème de conservativité de l'ordre de $10^{-1}\%$. L'approche hybride qui permet elle-aussi la prise en compte du congé de raccordement bénéficie d'une bien meilleure conservativité, entre 10^{-3} et $10^{-4}\%$. Ce premier résultat valide l'intérêt de l'approche hybride par rapport à l'approche chimère pour la prise en compte des effets technologiques en maintenant une conservativité excellente.

Configuration	Q_{amont} ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)	Q_{aval} ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)	$\varepsilon_{conservativité}$ (%)
Aube lisse	18.82671165	18.82670975	$1.01\ 10^{-5}$
Aube & congé chimère	18.81363106	18.76028252	$2.84\ 10^{-1}$
Aube & congé hybride	18.81209755	18.81180382	$1.56\ 10^{-3}$

Table 5.3 – Débits et erreur de conservativité $\varepsilon_{conservativité} = \frac{|Q_{amont}-Q_{aval}|}{\frac{1}{2}|Q_{amont}+Q_{aval}|}$ obtenus à convergence sur la configuration CONGE pour des maillages grossiers.

Configuration	Q_{amont} ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)	Q_{aval} ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)	$\varepsilon_{conservativité}$ (%)
Aube lisse	18.79115486	18.79110909	$2.44\ 10^{-4}$
Aube & congé chimère	18.79107285	18.76908302	$1.17\ 10^{-1}$
Aube & congé hybride	18.78294182	18.78299522	$2.84\ 10^{-4}$

Table 5.4 – Débits et erreur de conservativité $\varepsilon_{conservativité} = \frac{|Q_{amont}-Q_{aval}|}{\frac{1}{2}|Q_{amont}+Q_{aval}|}$ obtenus à convergence sur la configuration CONGE pour des maillages fins.

Il vient d'être montré que les trois types de calcul avaient correctement convergé à l'ordre deux pour des maillages fins et grossiers tant d'un point de vue de l'historique des résidus que de celui de l'historique des débits. L'analyse de l'historique des débits a confirmé le problème de conservativité rencontré par l'approche chimère et ce sur une configuration minimaliste en terme d'injection et de sortie. La suite de l'analyse s'intéresse à l'étude des conséquences de la prise en compte de cet effet technologique, le

congé de raccordement. Dans un objectif de synthèse des résultats, seuls ceux obtenus sur les maillages fins sont à présent présentés. Les résultats obtenus sur les maillages grossiers conduisent aux mêmes conclusions.

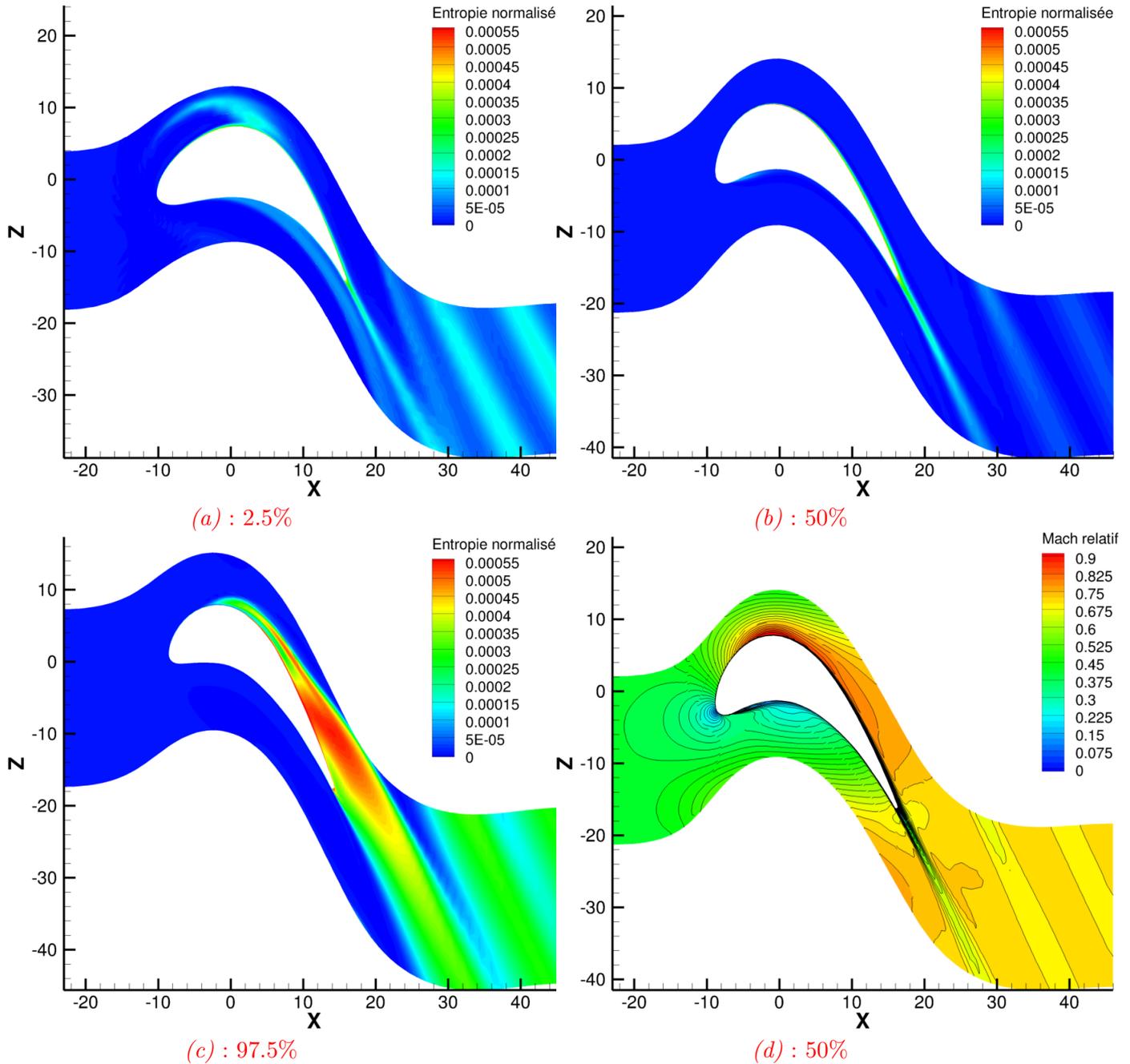


Figure 5.12 – Coupes de la configuration CONGE à iso-hauteur de veine pour l'aube lisse : (a), (b) et (c) : entropie normalisée à respectivement 2.5%, 50% et 97.5% de hauteur de veine, et (d) : nombre de Mach relatif à 50% de hauteur de veine.

Les figures 5.12, 5.13 et 5.14 fournissent respectivement pour la simulation d'aube lisse, d'aube avec congé géré en chimère et d'aube avec congé maillé en hybride des coupes à iso-hauteur de veine proche moyen (2.5% de hauteur de veine), à mi-hauteur de veine et proche carter (97.5% de hauteur de veine). Ces dernières représentent l'entropie normalisée : $\left(\frac{1}{r_{gaz}} \left[\log \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) - \log \left(\frac{P_{io}}{\rho_{io}^\gamma} \right) \right] \right)$. Une dernière visualisation sur ces figures fournit le nombre de Mach relatif. On constate qu'il n'y a pas de différence à mi-hauteur de veine et proche carter pour les trois approches. En revanche, proche moyen, la simulation d'aube lisse présente une trace à valeur élevée d'entropie qui n'est pas reproduite par les

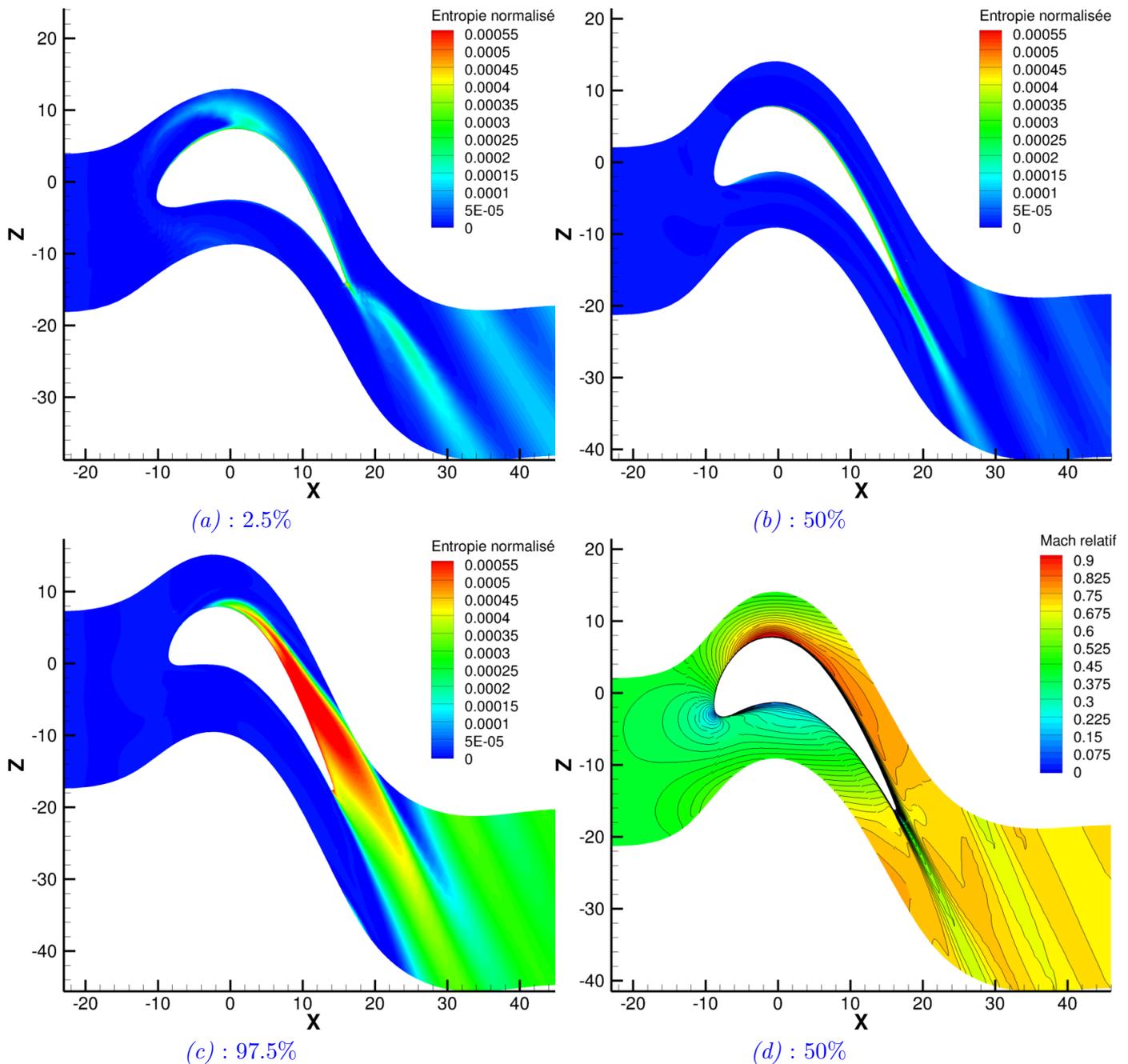


Figure 5.13 – Coupes de la configuration CONGE à iso-hauteur de veine pour l’aube et le congé en chimère : (a), (b) et (c) : entropie normalisée à respectivement 2.5%, 50% et 97.5% de hauteur de veine, et (d) : nombre de Mach relatif à 50% de hauteur de veine.

simulations dotées du congé de raccordement.

Pour observer plus finement l’impact de la prise en compte du congé de raccordement en fonction de la hauteur de veine, on réalise juste à l’aval de l’aube (en $X = 17 \text{ mm}$), une représentation de l’entropie normalisée en fonction de l’azimut pour différentes hauteurs de veine. Ces différents graphiques sont fournis sur l’image 5.17. Le positionnement de cette coupe est représenté sur la figure 5.16.

On remarque sur cette figure 5.17 que les différences entre les trois types de simulation sont négligeables sauf pour les hauteurs de veine comprises dans les cinq derniers pour cents. Effectivement, on

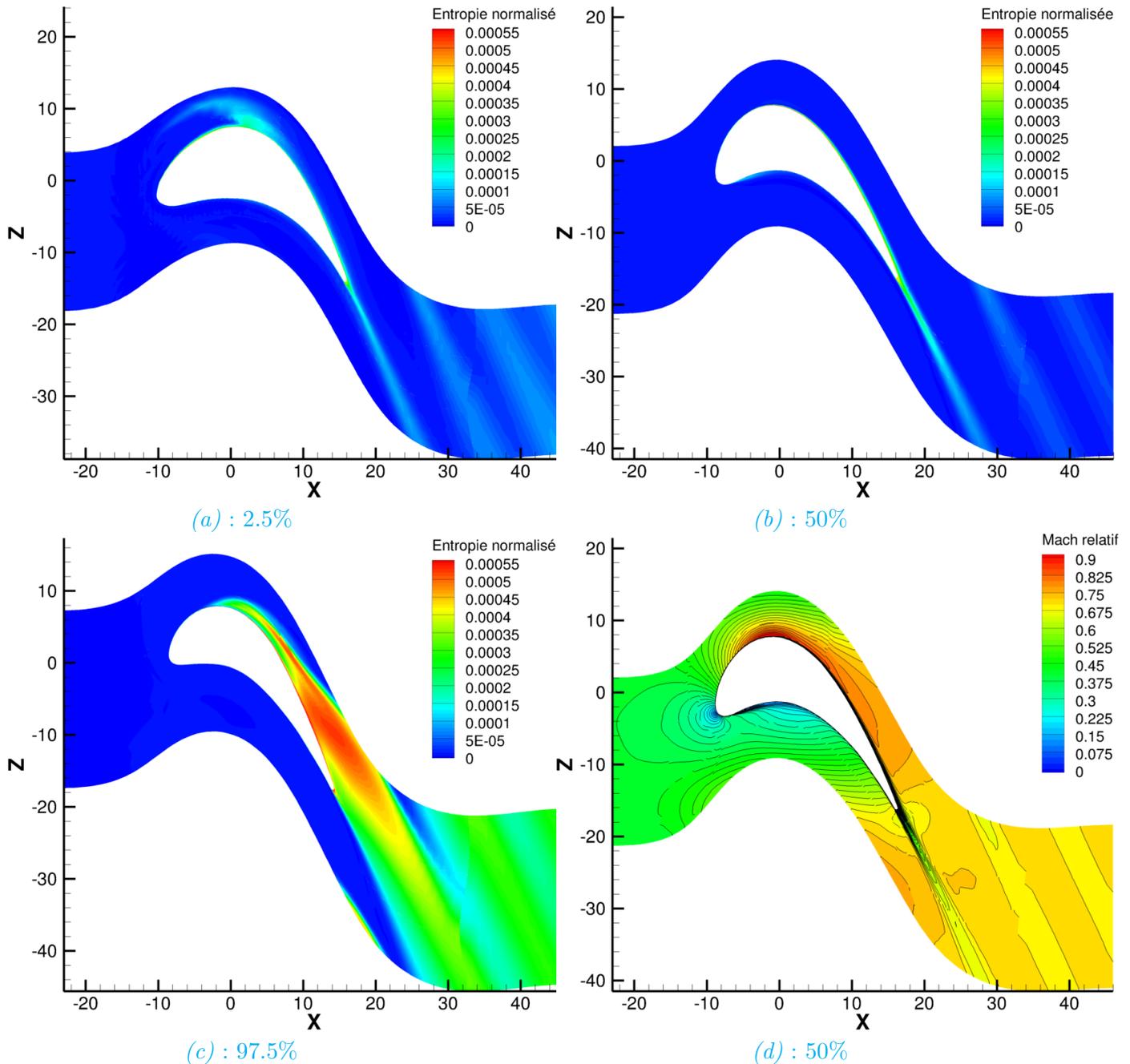


Figure 5.14 – Coupes de la configuration CONGE à iso-hauteur de veine pour l’aube et le congé en hybride : (a), (b) et (c) : entropie normalisée à respectivement 2.5%, 50% et 97.5% de hauteur de veine, et (d) : nombre de Mach relatif à 50% de hauteur de veine.

constate deux pics d’entropie pour le calcul d’aube lisse alors que les calculs prenant en compte le congé de raccordement ne présentent qu’un seul et unique pic d’entropie localisé pour des azimuts entre 0.4 et 0.6. Ainsi le calcul de type aube lisse capture un pic d’entropie supplémentaire pour des azimuts entre 0.6 et 0.8. Une visualisation globale de l’entropie normalisée dans ce plan $X = 17 \text{ mm}$ confirme la différence entre les simulations prenant en compte le congé de raccordement de celle réalisée en aube lisse, figure 5.18. En effet, on observe qu’une zone d’entropie plus élevée existe pour des azimuts allant de 0.55 jusqu’à 0.75 entre 0 et 5% de la hauteur de veine sur la configuration aube lisse. Cette région d’entropie élevée n’existe pas sur les configurations prenant en compte le congé de raccordement.

De plus, en observant la figure 5.19 qui représente la valeur absolue de l’hélicité dans ce même plan, on réalise que cette zone d’entropie plus élevée correspond à une zone pour laquelle les valeurs prises

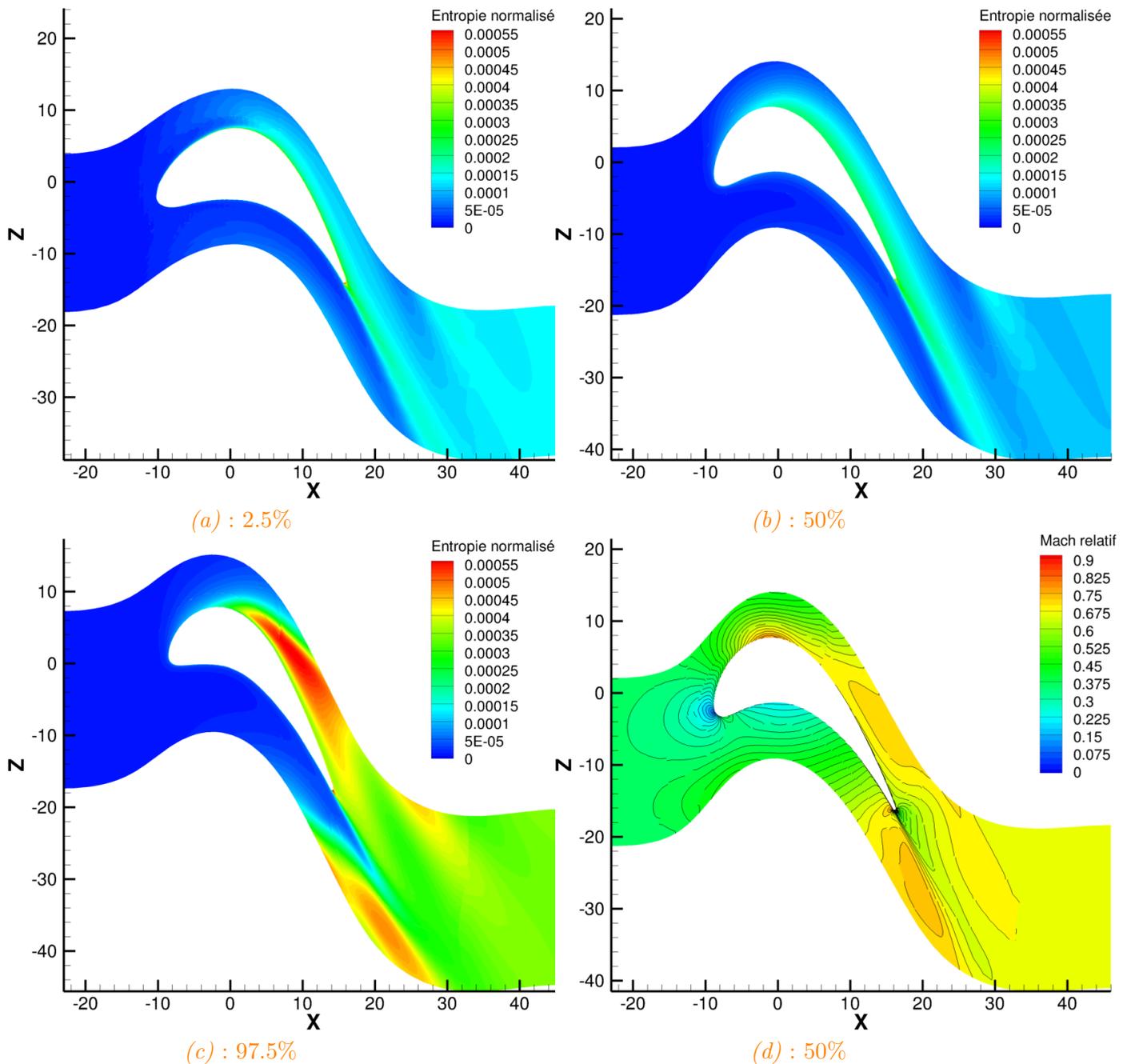


Figure 5.15 – Coupes de la configuration CONGE à iso-hauteur de veine pour l'aube et le congé en hybride à l'ordre un : (a), (b) et (c) : entropie normalisée à respectivement 2.5%, 50% et 97.5% de hauteur de veine, et (d) : nombre de Mach relatif à 50% de hauteur de veine.

par l'hélicité semblent indiquer la présence d'un tourbillon. Les simulations prenant en compte l'effet technologique, que ce soit par l'intermédiaire d'une approche chimère ou hybride ne retransmettent pas l'existence de ce tourbillon. Certes, il faut convenir qu'il y a entre toutes ces simulations plusieurs différences à ne pas négliger :

- un effet de maillage, avec entre autre l'utilisation de tétraèdres pour la stratégie hybride, ce qui peut réduire la précision de la solution obtenue,
- un effet de schéma, puisque les schémas utilisés sont très différents et qu'entre autre, celui utilisé avec l'approche hybride dégrade nécessairement la précision en faveur de la robustesse.

En considérant ces effets de maillage et de schéma, il est logique que la solution obtenue avec l'approche hybride soit plus dissipée que celle obtenue lors du calcul de l'aube lisse. Ceci est clairement visible

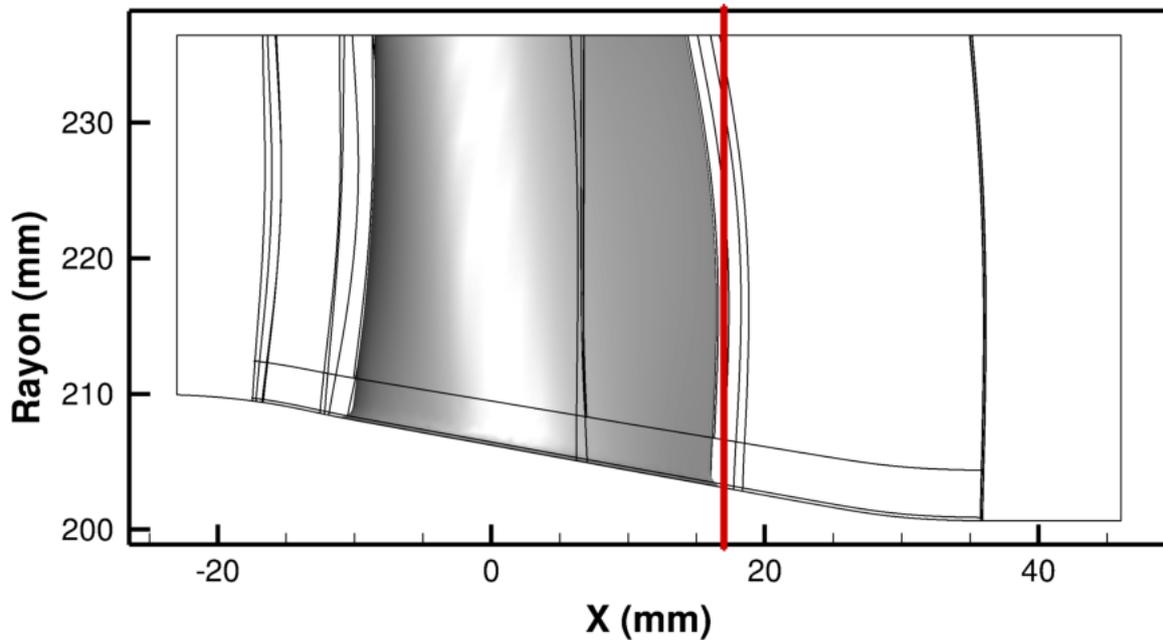


Figure 5.16 – Coupe en $X = 17 \text{ mm}$ dans le repère méridien sur la configuration CONGE

sur la coupe d'hélicité de la figure 5.19. Néanmoins, une seule zone d'hélicité élevée est complètement absente de la simulation hybride alors qu'elle figure parmi les zones les plus intenses dans le calcul d'aube lisse. De ce fait, justifier l'absence de cette zone d'intense hélicité par les effets de maillage et de schéma n'est pas satisfaisant. Toutefois, nous ne disposons pas non plus en toute rigueur des éléments permettant d'assurer que l'absence de cette zone est due à la prise en compte du congé de raccordement.

Des visualisations des lignes de courant et de frottement permettent de mettre en évidence de façon claire l'absence de ce tourbillon lors de la prise en compte du congé de raccordement avec une simulation hybride et sa présence dans le cadre d'une simulation d'aube lisse, figures 5.20 et 5.21.

Une première analyse des lignes de courant et de frottement est réalisée pour l'intrados de l'aube, qui correspond à la vignette (a) des figures 5.20 et 5.21. Les deux rubans de courant colorés par la valeur absolue de l'hélicité présentés sont obtenus sur ces deux figures à partir des mêmes points d'intersection avec le plan $X = 17 \text{ mm}$, également représenté sur les deux figures. Environ à mi-hauteur de veine, une zone de recirculation est présente. La migration radiale vers le moyeu est alors perturbée. Néanmoins, l'arrivée dans la zone du congé paraît atténuer le tourbillon contrairement à l'aube lisse dont la jonction avec le moyeu semble provoquer un obstacle à l'écoulement qui demeure tourbillonnaire. Les lignes de frottement de l'aube lisse indiquent que l'écoulement reste plus longtemps dans le coin avant de se diriger dans le canal inter-aube. Le congé semble faciliter cette migration de l'écoulement dans le canal inter-aube.

En ce qui concerne l'extrados, vignette (b) des figures 5.20 et 5.21, on peut s'interroger sur la hauteur de la tache d'hélicité dans le plan $X = 17 \text{ mm}$. Celle-ci est due à la migration radiale vers le carter d'un écoulement proche moyeu issu du canal inter-aube. On retrouve sur l'aube lisse et l'aube avec congé de raccordement calculé en hybride une légère migration radiale de l'écoulement vers la tête d'aube sur toute la hauteur de la pale. De la même manière qu'on a l'impression sur l'intrados que le départ de l'écoulement vers le canal inter-aube est retardé par l'absence de congé de raccordement, sur l'extrados, la migration radiale de l'écoulement vers la tête d'aube semble s'amorcer bien plus tardivement au moyeu sans la prise en compte du congé de raccordement.

Au-delà de l'intérêt de l'approche hybride à prendre en compte les effets technologiques comme le congé de raccordement, par exemple, cette configuration est également l'occasion de montrer les plus values obtenues dans les résultats suite aux améliorations proposées dans ces travaux de thèse. Avant

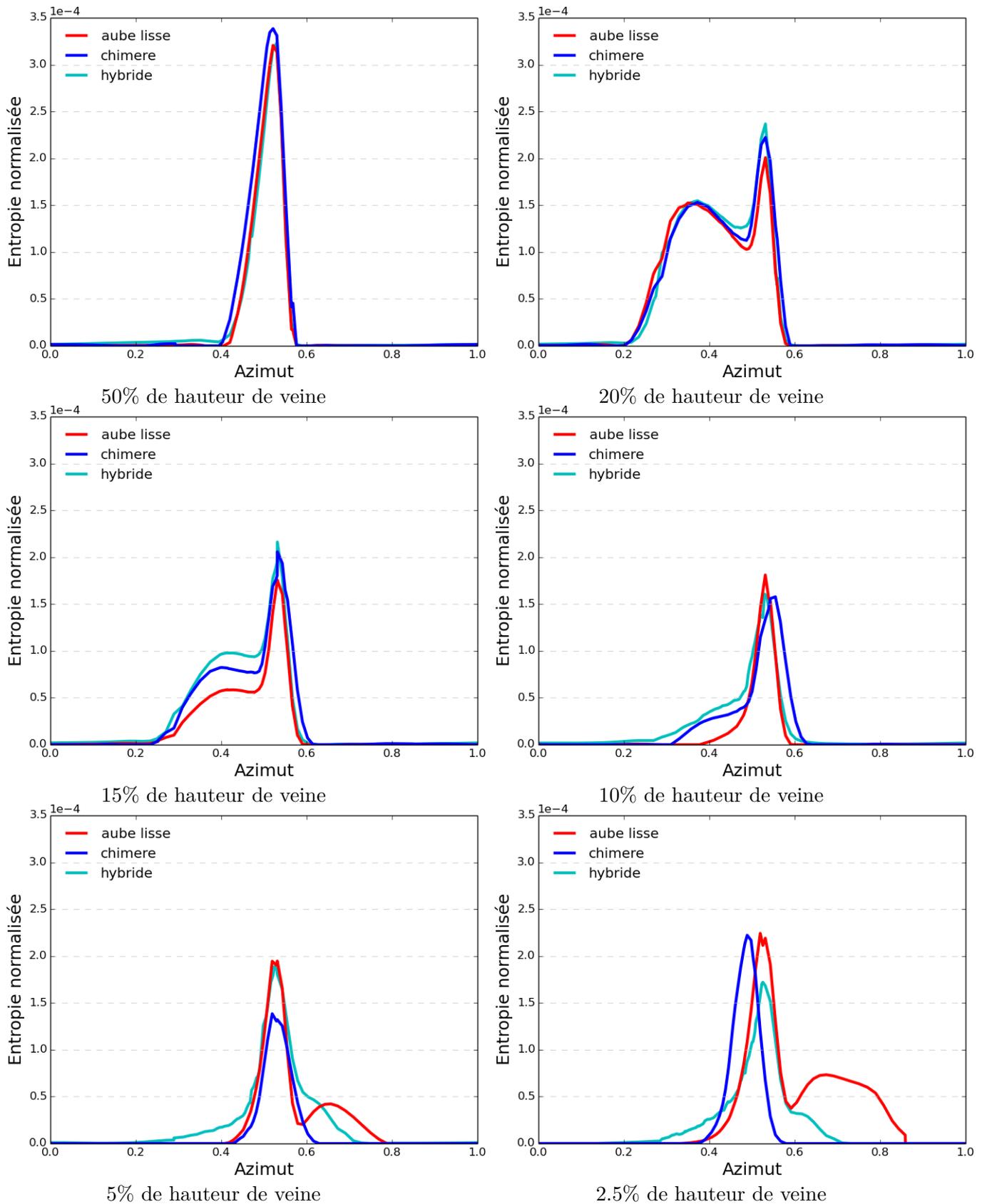


Figure 5.17 – Représentation de l’entropie normalisée en fonction de l’azimut pour différentes hauteurs de veine dans le plan $X = 17 \text{ mm}$ situé à l’aval de l’aube.

ces dernières, les simulations hybrides étaient limitées à l’ordre un sur ce genre de configuration. Pour illustrer ces améliorations, les figures 5.15, 5.18 et 5.19 fournissent respectivement des visualisations

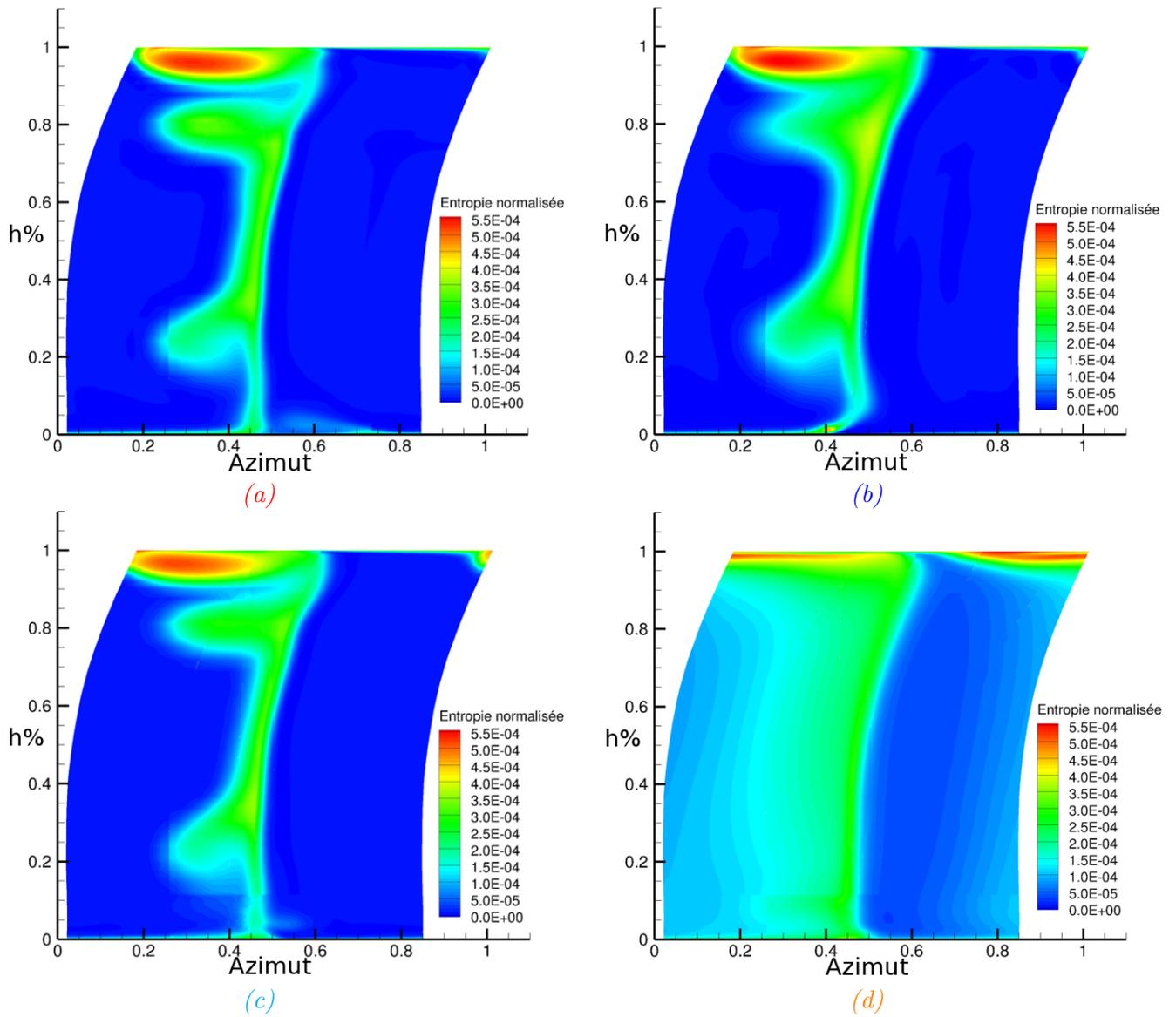


Figure 5.18 – Visualisation de l’entropie normalisée dans le plan $X = 17 \text{ mm}$: (a) : aube lisse, (b) : aube avec congé chimère, (c) : aube avec congé hybride et (d) : aube avec congé hybride à l’ordre un.

d’une coupe d’entropie normalisée et de nombre de Mach à iso-hauteur de veine, d’une coupe dans le plan $X = 17 \text{ mm}$ de l’entropie normalisée et de la valeur absolue de l’hélicité en fonction de l’azimut et de la hauteur de veine adimensionnée. Prendre en compte le congé de raccordement avec une simulation hybride précise à l’ordre un n’est clairement pas satisfaisant car la qualité de la solution obtenue est telle qu’elle rend l’analyse des effets du congé de raccordement impossible.

En résumé, nous avons retrouvé les conclusions de Castillon sur l’étude de ce cas dans [25], à savoir que :

- l’effet de la prise en compte du congé de raccordement impacte uniquement les premiers pour cents de la hauteur de veine,
- la simulation chimère du congé de raccordement souffre d’un manque de conservativité.

Par ailleurs, nous avons mis en évidence un tourbillon issu de l’intrados en pied de l’aube lisse qu’aucune simulation mettant en œuvre le congé de raccordement ne retransmet. Compte tenu des intensités de l’hélicité représentées par ce tourbillon et de la bonne capture d’autres tourbillons plus faibles, l’effet de la géométrie (prise en compte du congé de raccordement) semble la piste la plus crédible par rapport aux effets de maillage ou de schéma. Enfin, le caractère essentiel d’une précision à l’ordre deux a été

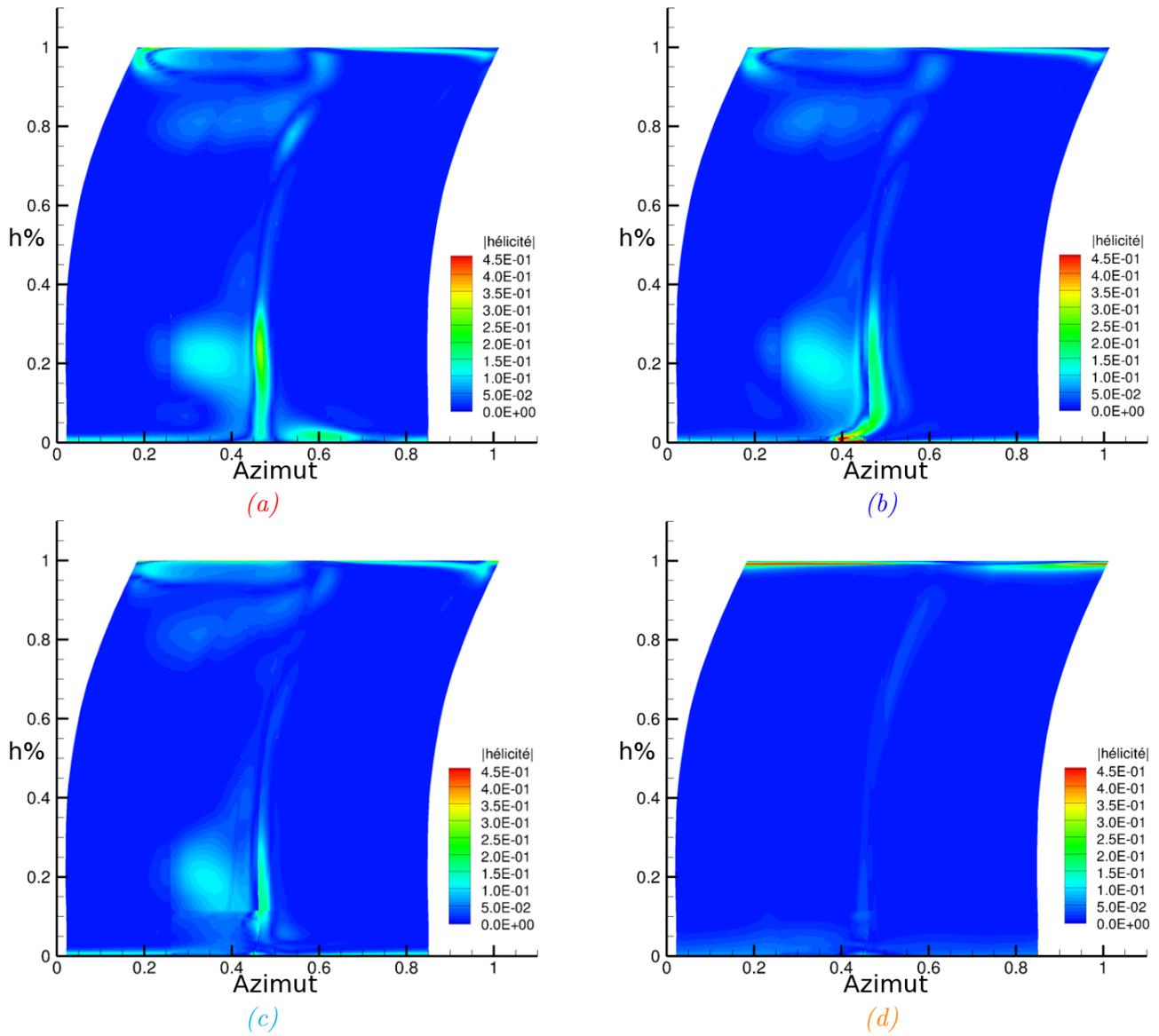
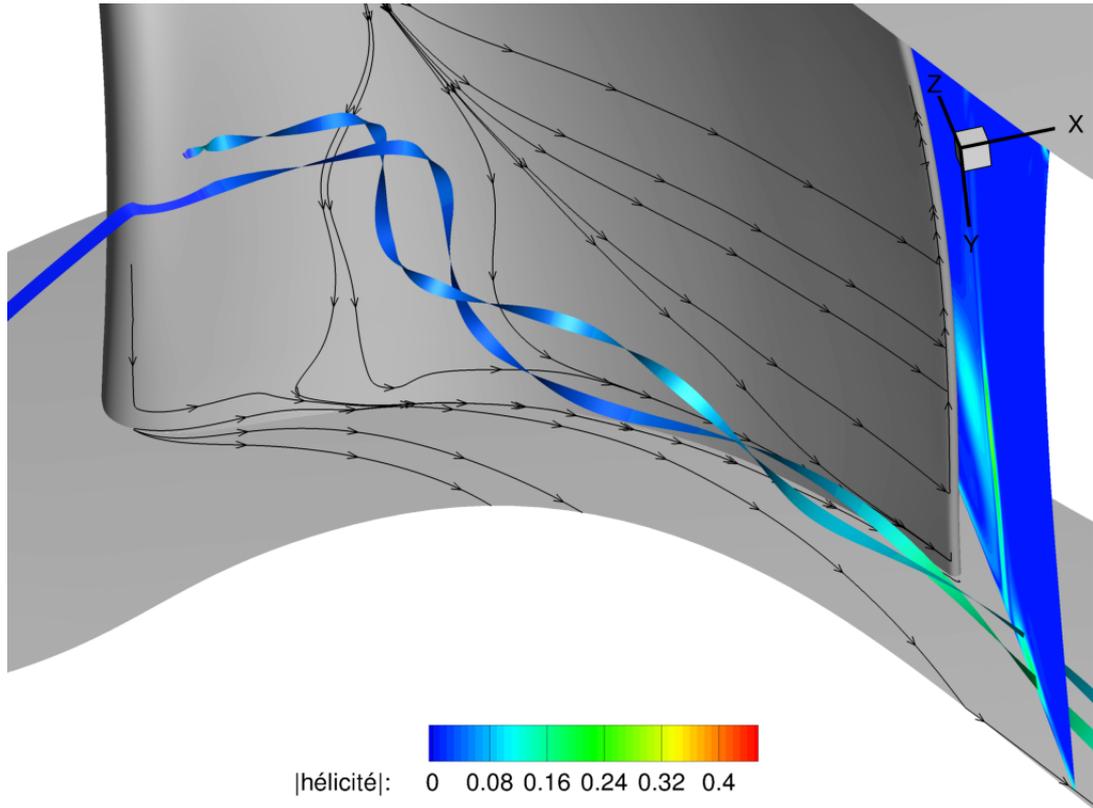
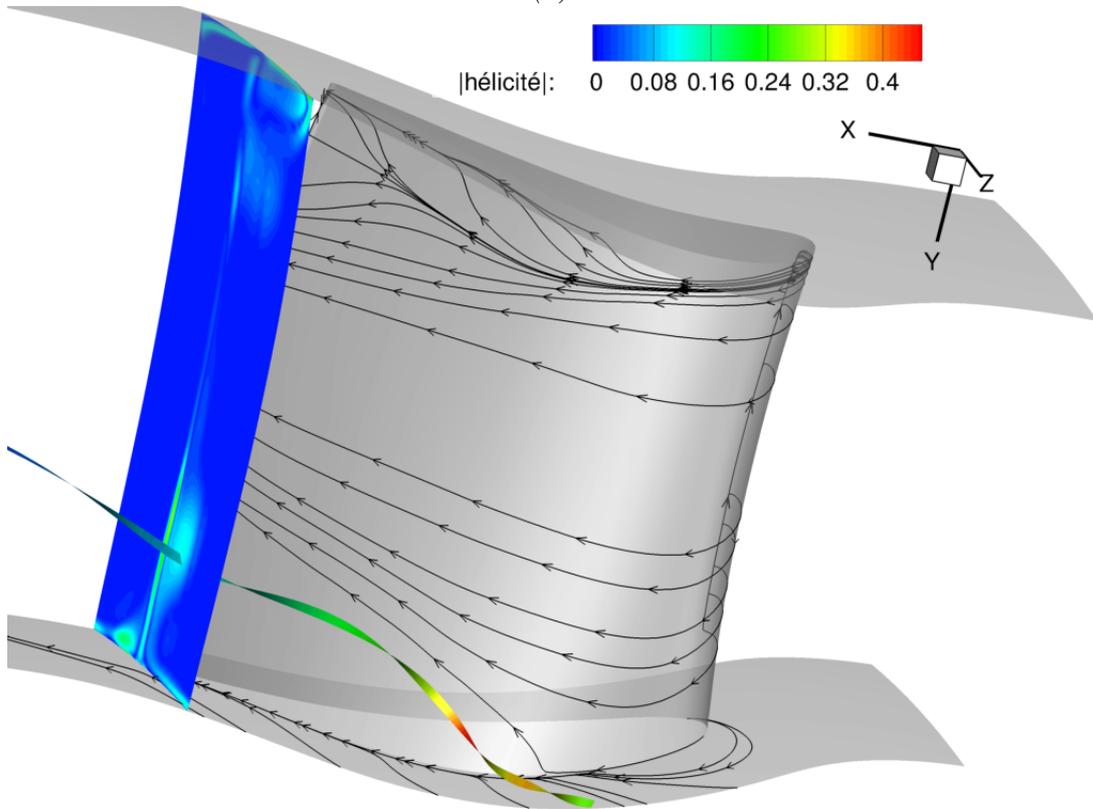


Figure 5.19 – Visualisation de la valeur absolue de l’hélicité dans le plan $X = 17 \text{ mm}$: (a) : aube lisse, (b) : aube avec congé chimère, (c) : aube avec congé hybride et (d) : aube avec congé hybride à l’ordre un.

mis en avant pour la prise en compte de cet effet technologique par rapport à une simulation d’ordre un.



(a)



(b)

Figure 5.20 – (a) Lignes de courant et de frottement sur l'intrados de l'aube lisse, (b) sur l'extrados de l'aube lisse.

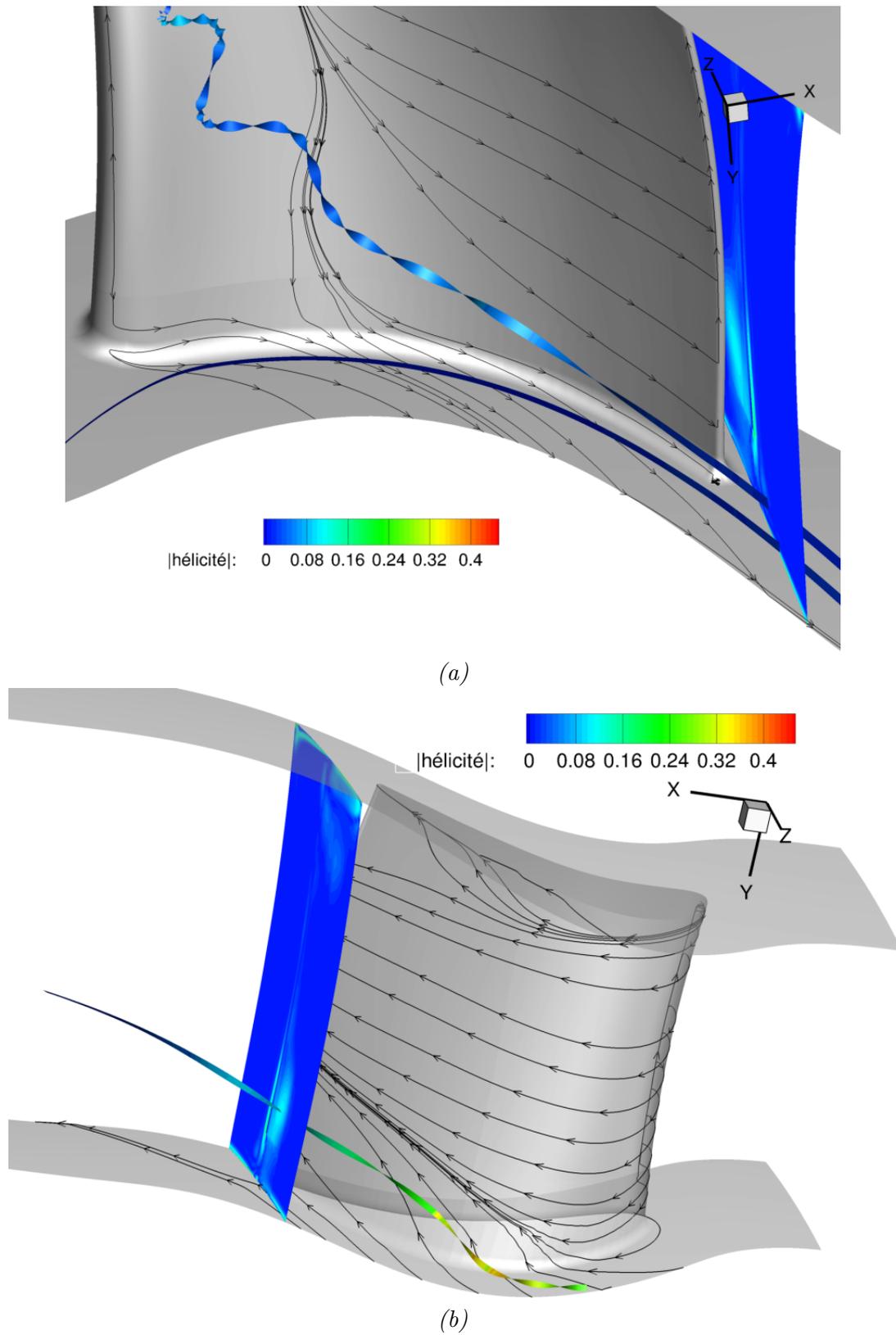


Figure 5.21 – (a) Lignes de courant et de frottement sur l'intrados de l'aube avec congé de raccordement simulé en hybride, (b) sur l'extrados de l'aube avec congé de raccordement simulé en hybride.

5.2 Tranche d'aube à deux trous de refroidissement

5.2.1 Présentation générale du cas

Cette configuration a pour objectif d'étudier les stratégies de *film cooling* décrites précédemment en les appliquant à une tranche de grille d'aube dans un premier temps. Elle constitue de ce fait une configuration à la fois d'intérêt industriel et de difficulté industrielle. Cette aube dispose de deux trous de refroidissement positionnés sur l'intrados. Le trou amont, le plus délicat physiquement, souffle de manière transverse à l'écoulement. Le second trou est aligné avec l'écoulement et souffle vers le bord de fuite. Les plénums des trous sont également représentés dans cette géométrie qui est illustrée sur la figure 5.22. Cette configuration sera désignée désormais sous l'appellation CM2013. Cette configuration est le fruit d'une collaboration entre Safran Aircraft Engines et l'ONERA.

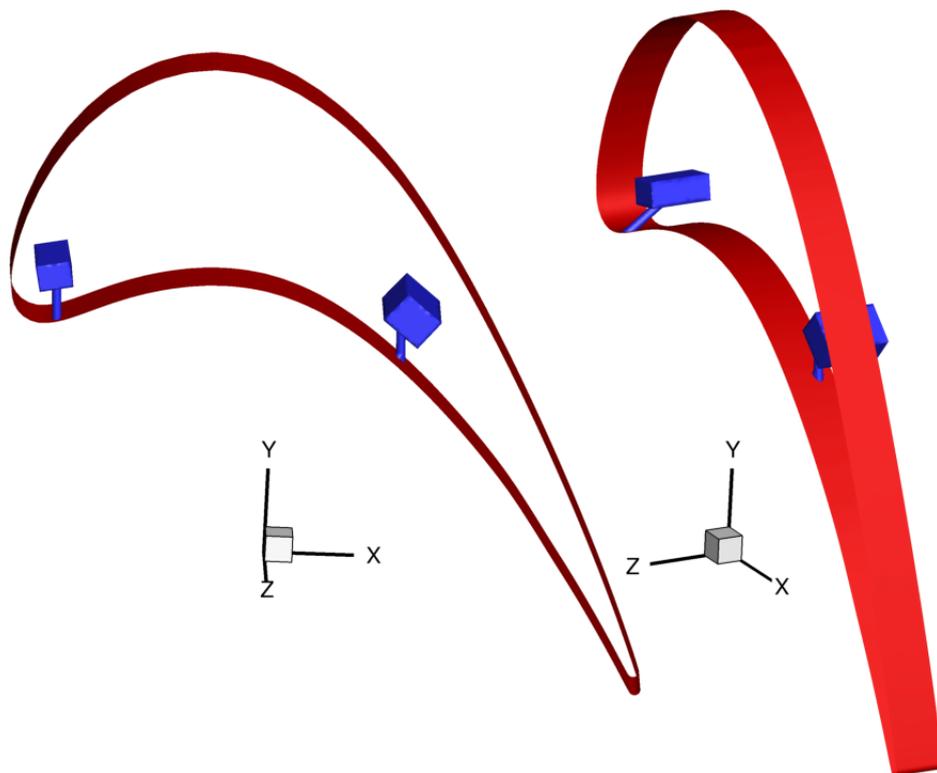


Figure 5.22 – Géométrie du CM2013 avec en *rouge* la paroi de l'aube et en *bleu* les deux trous de refroidissement et leur plénum.

L'étude de ce cas est naturellement orientée vers la capacité de refroidissement thermique fournie par l'ajout des deux trous. La capture des traces thermiques et leur préservation constituent deux caractéristiques d'intérêt de l'écoulement.

L'écoulement en amont de l'aube est à une température fortement élevée de l'ordre de 1600 K . Ceci correspond à un écoulement typique rencontré par les premiers étages de turbine haute pression, qui sont situés directement en sortie de chambre de combustion. L'air soufflé par les trous est quant à lui à une température de 760 K qui correspond au bon ordre de grandeur de température d'un écoulement prélevé sur le bloc compresseur haute pression. Ces deux types d'injections sont modélisées par des injections subsoniques. À l'aval de l'aube, une condition de sortie subsonique permet de fixer une pression de contrôle. Toutes les parois sont considérées comme des murs adiabatiques. Enfin, comme il s'agit d'une tranche d'une grille d'aube, une simple condition de périodicité par translation est utilisée à la fois dans les dimensions Y et Z . La définition de ces conditions limites est reprise sur la figure 5.23.

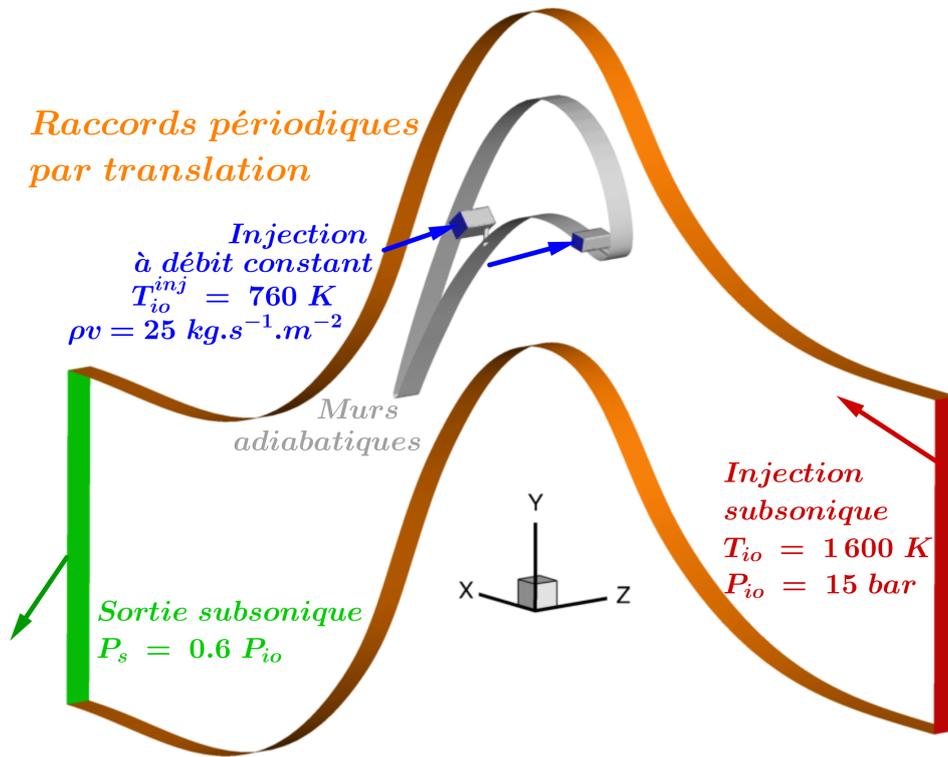


Figure 5.23 – Définition des conditions limites de la configuration CM2013. Attention, l’injection est à droite de l’image et la sortie à gauche de sorte que l’injection des plénums des trous soit visible.

5.2.2 Description des stratégies de maillage étudiées

Différentes stratégies de maillage ont été utilisées sur ce cas. Puisque cette configuration ne dispose d’aucune référence dans la littérature tant d’un point de vue numérique qu’expérimental, il a été choisi de réaliser une simulation avec l’approche chimère. Le maillage général de l’aube est réalisé de manière classique pour une approche multibloc structuré. Les trous intersectent le maillage général au niveau de l’intrados de l’aube et se jettent également dans les plénums. Afin d’améliorer les rapports de taille de maille, un bloc tampon est utilisé au niveau de l’intersection du maillage des trous et du maillage général. Toute cette stratégie de maillage est représentée sur la figure 5.24.

Le maillage hybride se compose d’une zone non structurée au niveau de l’intrados de l’aube entre les deux trous de refroidissement. Elle comprend les plénums, les trous et l’intrados de l’aube. La couche limite est maillée avec des prismes au contact de la paroi. En s’éloignant de la paroi, des tétraèdres sont insérés. Le reste du domaine de calcul est constitué de zones structurées. Dans les zones non structurées, la jonction avec les zones structurées est assurée par l’utilisation de pyramides. La figure 5.25 représente ce maillage hybride. La répartition d’éléments des différents maillages est donnée dans la table 5.5.

Maillages	Chimère	Hybride
Hexaèdres	734 080 + 16 000 + 492 000 + 37 600	697 740
Pyramides	-	9 593
Prismes	-	55 638
Tétraèdres	-	172 767
Total	1 279 680	935 738

Table 5.5 – Répartition en éléments des différents maillages utilisés pour l’étude de la configuration CM2013.

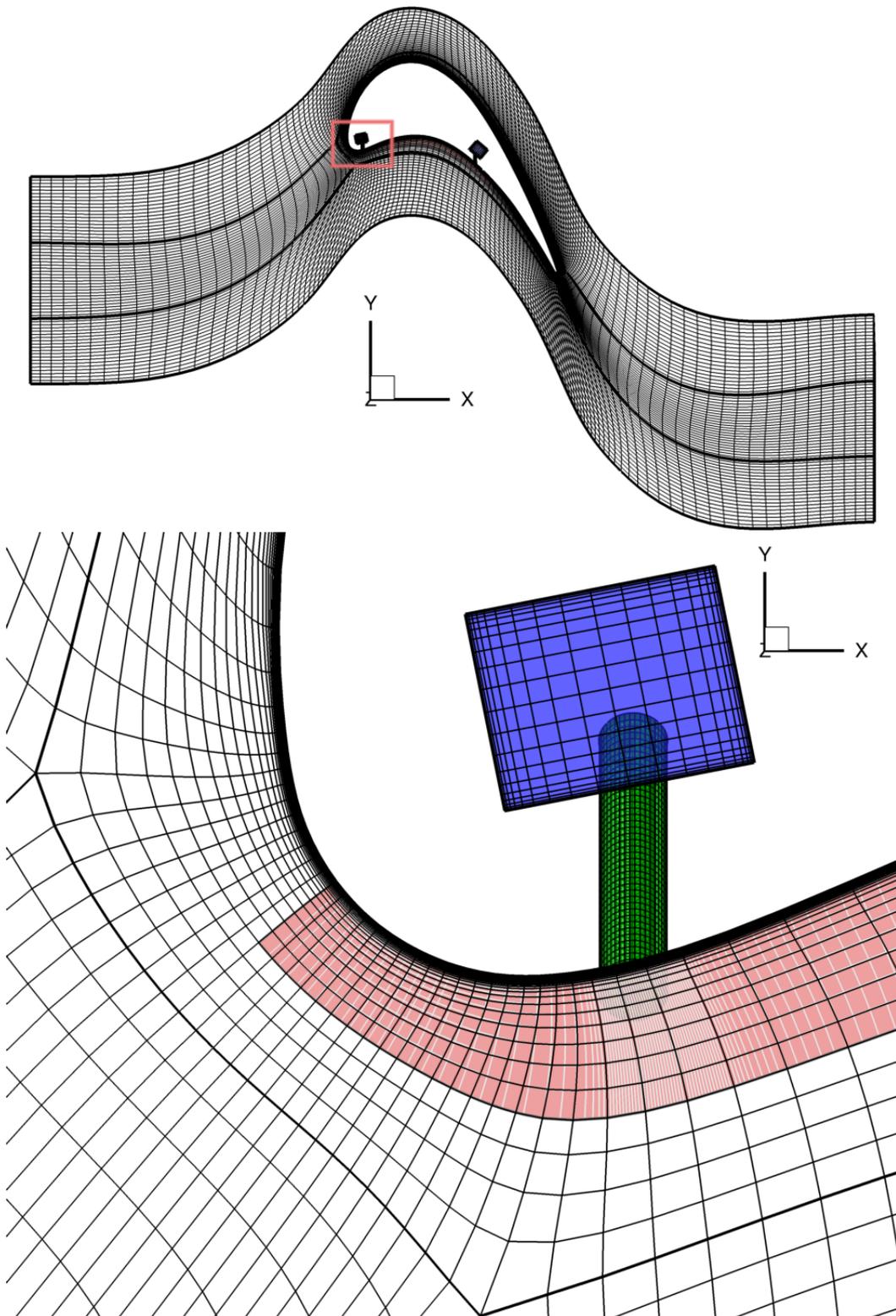


Figure 5.24 – Illustration de la stratégie de maillage chimère sur la configuration CM2013 avec en *bleu* les plénums, en *vert* les trous et en *rouge* le bloc tampon dont le maillage apparaît en blanc.

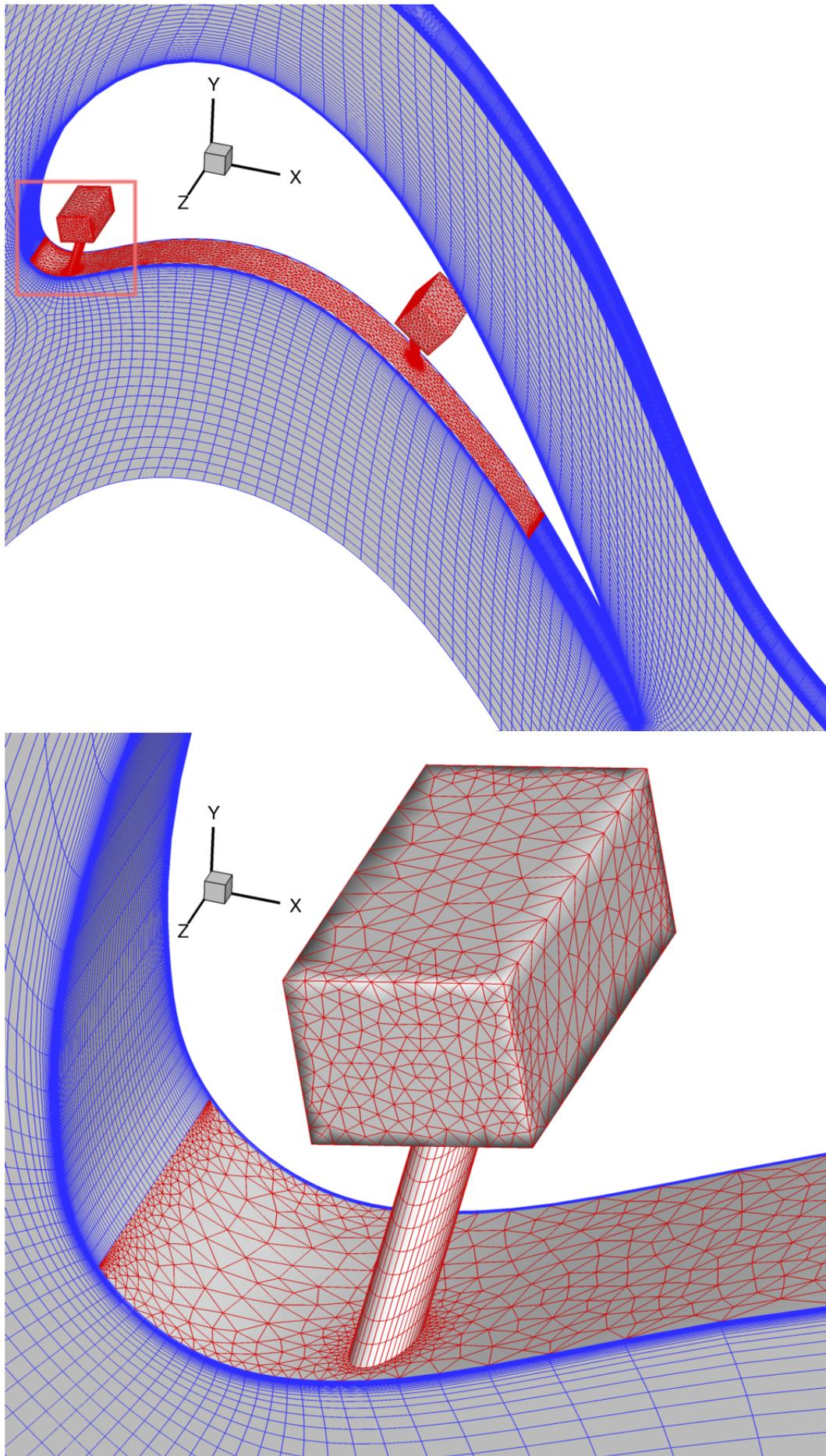


Figure 5.25 – Illustration de la stratégie de maillage hybride sur la configuration CM2013 avec en *bleu* la partie structurée et en *rouge* la partie non structurée.

5.2.3 Description des méthodes numériques utilisées

Dans cette étude, on s'intéresse à deux types d'analyses comparatives. La première établit les différences entre la simulation de type chimère et la simulation hybride d'ordre deux. La seconde met en avant l'intérêt de la réalisation d'une simulation d'ordre deux hybride par rapport à une simulation d'ordre un hybride qui constitue l'état de l'art avant les travaux d'améliorations du solveur hybride. Pour ce faire, trois simulations vont être confrontées : une simulation de type chimère et deux simulations hybrides, l'une à l'ordre un et la seconde à l'ordre deux.

Comme pour la configuration CONGE, présentée en 5.1, la simulation de type chimère s'appuie sur les pratiques du DAAP, à savoir un schéma de Jameson. La simulation hybride d'ordre un utilise un schéma de Roe avec reconstruction constante pour les flux convectifs. Les flux visqueux restent discrétisés en utilisant une approche $\overline{5pcor}$. La simulation hybride d'ordre deux a été réalisée avec un schéma de Roe utilisant une reconstruction au centre face limitée par un limiteur de Venkatakrisnan, un calcul des gradients au centre des cellules obtenu par la méthode *GLSQ* auquel est également appliqué un lissage des gradients.

5.2.4 Analyse des résultats

Les trois simulations convergent correctement, comme l'atteste la figure 5.26 pour les résidus de la densité. La simulation hybride d'ordre deux semble présenter plus de difficulté à converger, mais elle perd plus de cinq ordres en dépit d'une pente qui peut sembler plus erratique que celle des deux autres simulations.

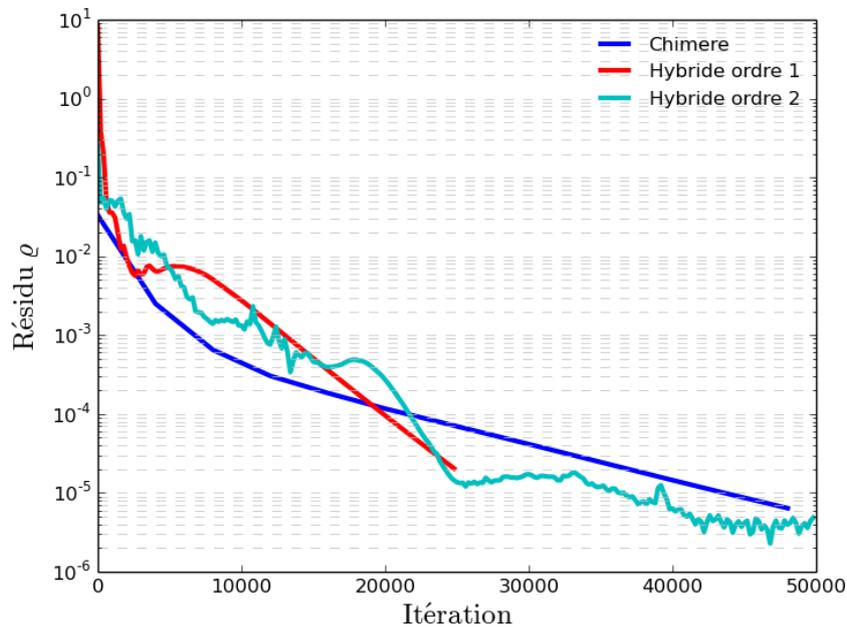


Figure 5.26 – Historique de convergence sur la densité pour la configuration CM2013 pour des simulations chimère, hybride d'ordre un et hybride d'ordre deux.

Cette convergence se retrouve sur l'observation de l'historique des débits présentés par la figure 5.27. Les débits des plénums sont naturellement convergés puisque la condition limite impose les débits. Une petite fluctuation de ces débits est possible en tout début de calcul en fonction de l'état initial. On constate d'ailleurs que les débits du plénum amont et du plénum aval sont bien identiques pour les trois simulations envisagées. En revanche, l'excellente convergence des débits amont et aval pour les trois configurations confirme la convergence obtenue sur les résidus de la densité. Par ailleurs on observe que la simulation hybride d'ordre un a tendance à sous-évaluer les débits par rapport aux simulations chimère et hybride d'ordre deux. Enfin, contrairement aux simulations relatives au cas

CONGE, présenté en 5.1, il est parfaitement normal d’observer un écart entre le débit amont et le débit aval. Celui-ci doit être compensé par les débits des deux plénums.

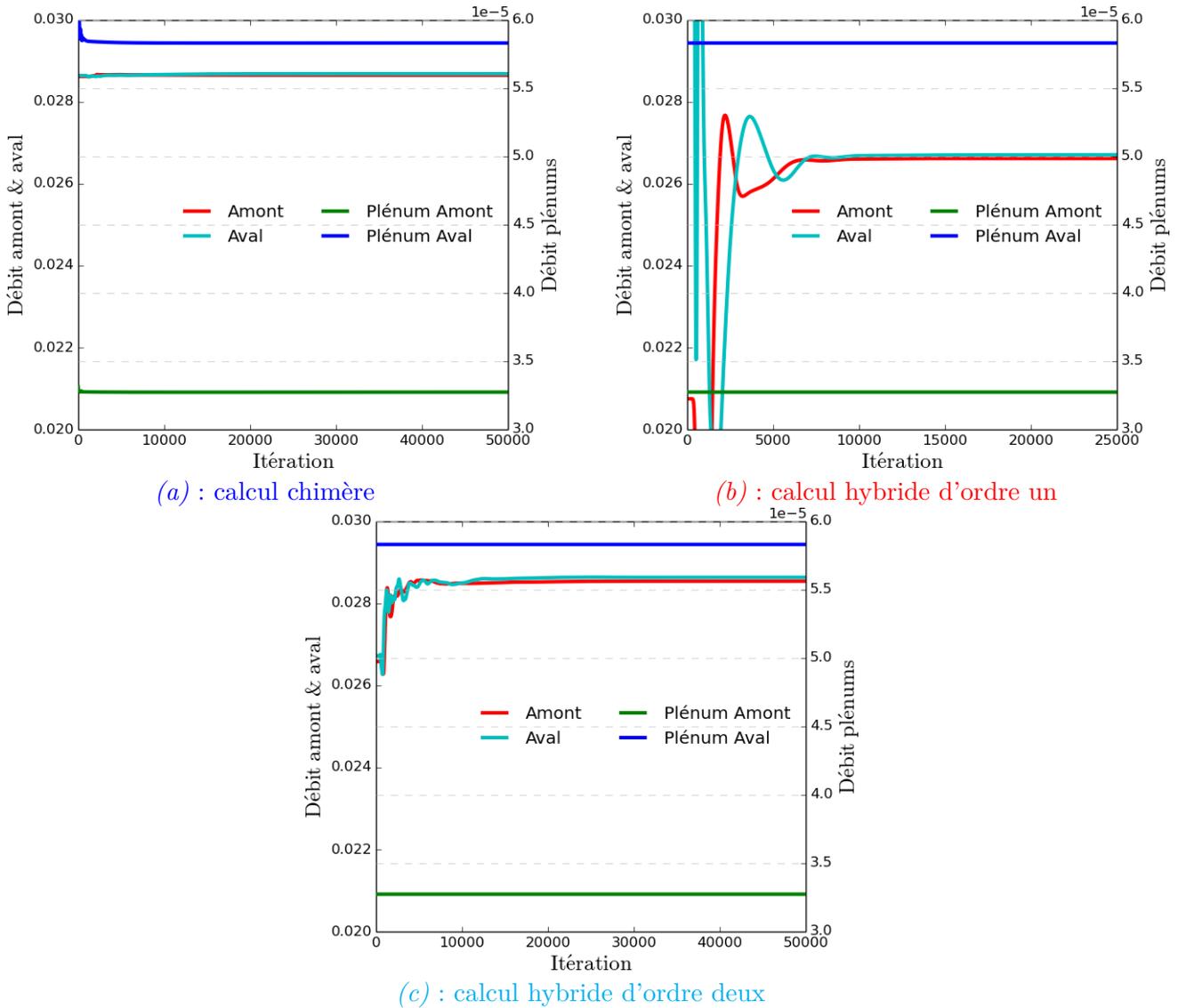


Figure 5.27 – Historique des valeurs des débits à l’amont, à l’aval ainsi que pour le plénum amont et le plénum aval sur la configuration CM2013.

Le tableau 5.6 montre les erreurs de conservativité commises sur les trois simulations. On retrouve le mauvais comportement du calcul chimère qui a été relevé lors de l’étude sur le cas du CONGE dans 5.1 alors que les calculs hybrides d’ordre un et d’ordre deux présentent tous deux une bonne conservativité. La conservativité du calcul hybride d’ordre un pourrait certainement être un peu meilleure si l’on avait poussé d’avantage la convergence de la simulation qui ne compte que 25000 itérations, là où les calculs hybrides d’ordre deux et chimère en ont réalisé le double.

La solution physique de ces trois calculs est comparée grâce à la figure 5.28 qui présente les traces thermiques à la paroi et une répartition du nombre de Mach dans un plan pour $Z = 50\%$. Si les champs du nombre de Mach sont assez similaires entre les simulations chimère et hybride d’ordre deux, ils sont radicalement différents de celui proposé par la simulation hybride d’ordre un. On note toutefois que le calcul chimère a tendance à légèrement surévaluer le nombre de Mach par rapport à la simulation hybride d’ordre deux. Ce résultat souligne une fois de plus, l’intérêt de chercher à tendre vers l’ordre deux pour la prise en compte des effets technologiques afin de capturer le mieux possible les phénomènes physiques associés.

Configuration	Q_{amont} ($kg \cdot s^{-1}$)	Q_{aval} ($kg \cdot s^{-1}$)	$Q_{pl\acute{e}num\ amont}$ ($kg \cdot s^{-1}$)	$Q_{pl\acute{e}num\ aval}$ ($kg \cdot s^{-1}$)	$\varepsilon_{cons.}$ (%)
Chimere	$2.865367 \cdot 10^{-2}$	$2.868751 \cdot 10^{-2}$	$3.273 \cdot 10^{-5}$	$5.831 \cdot 10^{-5}$	$1.99 \cdot 10^{-1}$
Hybride ordre un	$2.661838 \cdot 10^{-2}$	$2.670909 \cdot 10^{-2}$	$3.273 \cdot 10^{-5}$	$5.831 \cdot 10^{-5}$	$1.26 \cdot 10^{-3}$
Hybride ordre deux	$2.854519 \cdot 10^{-2}$	$2.863626 \cdot 10^{-2}$	$3.273 \cdot 10^{-5}$	$5.831 \cdot 10^{-5}$	$6.91 \cdot 10^{-5}$

Table 5.6 – Débits et erreur de conservativité $\varepsilon_{cons.} = \frac{|Q_{amont} + Q_{pl\acute{e}num\ s} - Q_{aval}|}{\frac{1}{2}(Q_{amont} + Q_{pl\acute{e}num\ s} + Q_{aval})}$ obtenus à convergence sur la configuration du CM2013.

La trace thermique du premier trou du [calcul chimère](#) est bien préservée. Par ailleurs, compte tenu du fait que le trou est incliné de manière transverse à l'écoulement du canal inter-aube, il est logique que cette trace thermique suive une direction légèrement transverse à l'écoulement, c'est-à-dire non purement selon l'axe X , mais également selon Z . Ceci se traduit par la réapparition de la trace thermique du premier trou de l'autre côté du raccord périodique. On retrouve bien ce comportement lors du [calcul hybride d'ordre deux](#). En revanche, pour le [calcul hybride d'ordre un](#), il semble que la trace thermique du trou amont suive une direction purement selon X , dans la direction de l'écoulement principal. D'ailleurs, on constate que pour cette simulation, la trace thermique ne traverse absolument pas le raccord périodique.

En ce qui concerne le trou aval, les [calculs chimère](#) et [hybride d'ordre deux](#) semblent tous deux bien préserver la trace thermique le long de la paroi alors qu'elle se dissipe beaucoup plus rapidement avec le [calcul hybride d'ordre un](#). On retrouve ici une conclusion de l'étude de la configuration Film Cooling qui a été tirée en 3.4 : l'ordre un dissipe de façon excessive l'effet d'un trou de refroidissement. Si l'on compare la trace thermique du trou aval pour les calculs chimère et hybride d'ordre deux, on peut observer que celle du calcul hybride d'ordre deux est plus diffuse. Ceci peut être causé par un effet de maillage.

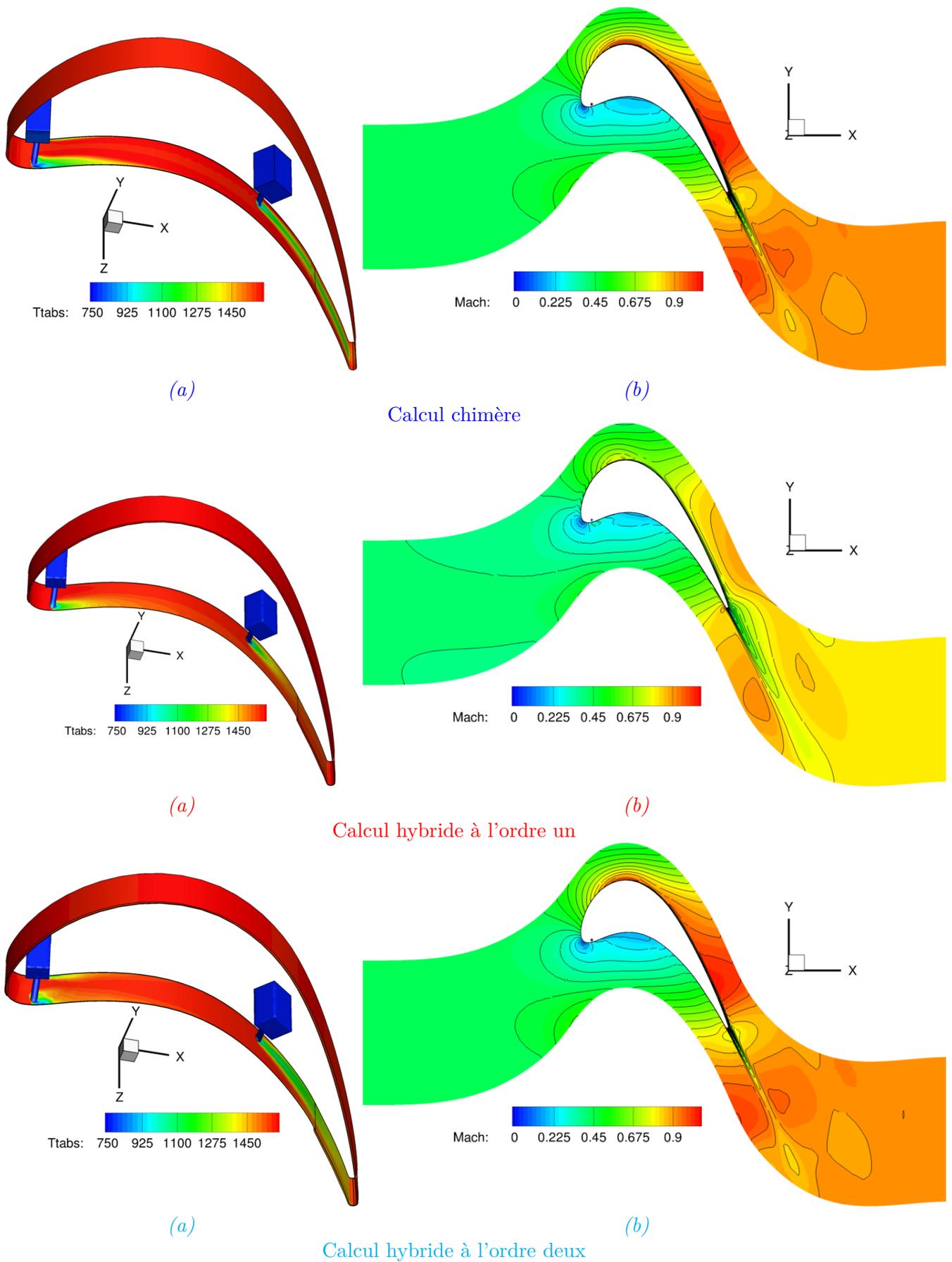


Figure 5.28 – Visualisations pour la configuration CM2013 du champ de température à la paroi (a) et d'une coupe à $Z = 50\%$ du nombre de Mach (b).

L'étude de cette configuration CM2013 a permis de montrer une fois encore l'intérêt de la montée en ordre pour la prise en compte des effets technologiques avec une approche hybride. On a également à nouveau constaté la pertinence de l'approche hybride en terme de respect de la conservativité par rapport à l'approche chimère. L'étude de cette configuration CM2013 a permis de réaliser la prise en compte d'effets technologiques de refroidissement d'une aube. Ceci constitue une réelle réussite dans la mesure où ce genre d'effet technologique est nécessairement associé à de forts gradients de température qui rendent la simulation délicate. Cette réussite ouvre les portes à des simulations encore plus complexes et réalistes avec par exemple l'étude d'une aube complète et de l'ensemble de ses systèmes de refroidissement. C'est ce que propose d'étudier la configuration suivante.

5.3 Aube de turbine avec trous de refroidissement et fentes de bord de fuite

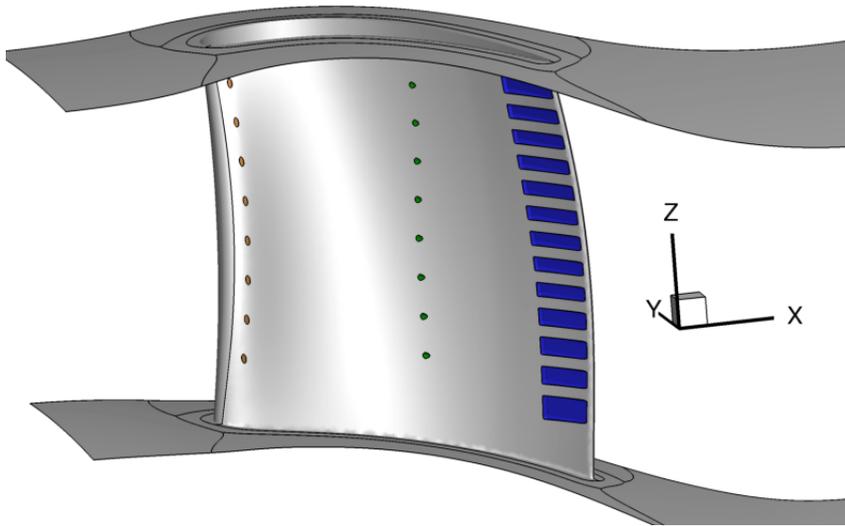
5.3.1 Présentation générale du cas

La configuration étudiée ici est une aube de turbine haute pression soumise à de fortes températures puisque située proche de la sortie de la chambre de combustion. Sa géométrie est identique à celle du cas CONGE exposé en 5.1. Cette configuration sera désignée désormais sous l'appellation CM2012. Cette configuration est issue de la même collaboration entre Safran Aircraft Engines et l'ONERA, qui a également permis l'élaboration du CM2013 traité en 5.2.

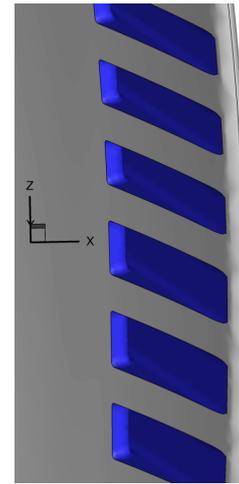
Afin d'ajouter une protection thermique à cette aube, la configuration CM2012 intègre un système complet de refroidissement par une stratégie de *film cooling*. Ce système ne se résume pas simplement à deux trous de refroidissement comme lors de la configuration CM2013 rencontrée en 5.2. En effet, cette configuration vise à modéliser deux rangées de huit trous chacune (vignette (a) de l'image 5.29) ainsi qu'une rangée de treize fentes au bord de fuite (vignette (b) de l'image 5.29). Par ailleurs, l'accent est mis ici sur une meilleure modélisation des conditions d'injection de ces trous de refroidissement avec la prise en compte intégrale des cheminées d'alimentation (vignettes (b), (e) et (f) de l'image 5.29).

On remarque sur l'ensemble des éléments présentés sur la figure 5.29 que les géométries associées à ce cas sont très complexes. Les trous sont évasés et les fentes au bord de fuite ne sauraient être réduites à de simples parallélépipèdes. Cette complexité géométrique de ces différents effets technologiques rend l'approche multibloc structurée et l'approche chimère inenvisageables, dans la mesure où la durée de préparation du cas serait bien trop longue. Si l'on a pu précédemment montrer l'intérêt de l'approche hybride relativement à l'approche chimère, cette configuration constitue le cœur de cible de la stratégie hybride.

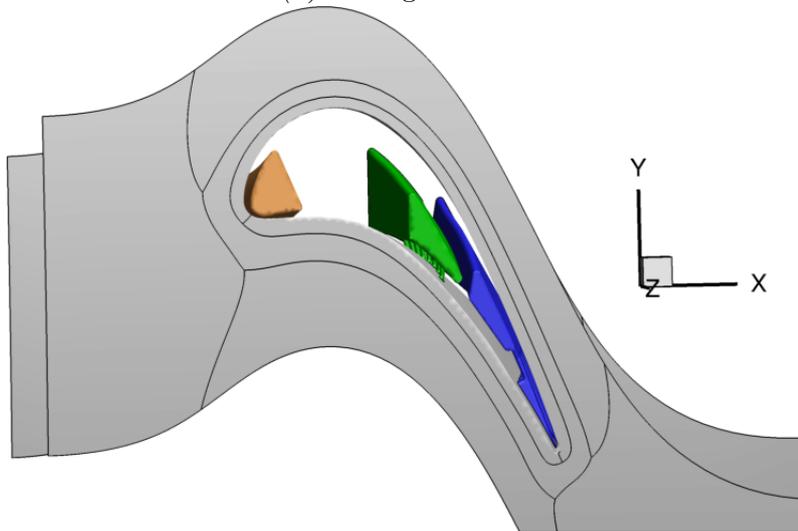
En amont de l'aube, un écoulement chaud à 1600 K est injecté. Les trois cheminées situées dans l'aube sont alimentées par un écoulement froid à 760 K . Les écoulements de ces trois cheminées desservent l'ensemble des trous de refroidissement et fentes de bord de fuite. Pour éviter des retours d'écoulement dans les trous qui pourraient nuire à la robustesse du calcul lors de la phase de transitoire numérique, le débit est imposé par la condition d'injection des cheminées. En sortie de roue, une condition de sortie subsonique est employée avec une pression telle que $P_s = 0.5 P_{io}$. L'ensemble des parois de la configuration est modélisé par une condition de type mur adiabatique. Ces conditions limites sont reprises sur la figure 5.30.



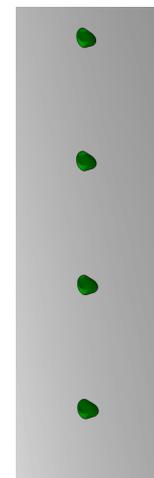
(a) : vue générale



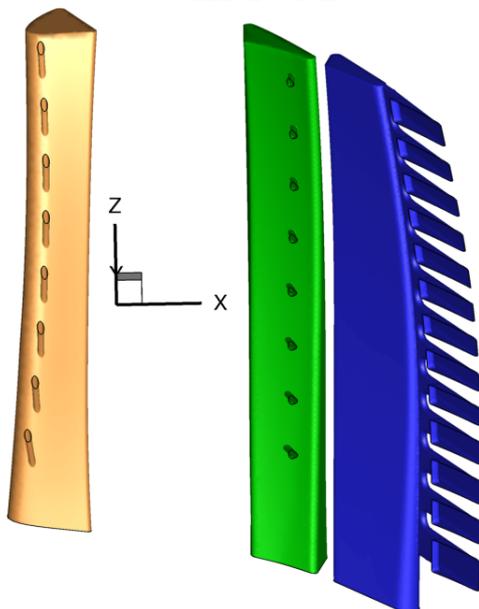
(b) : fentes du bord de fuite



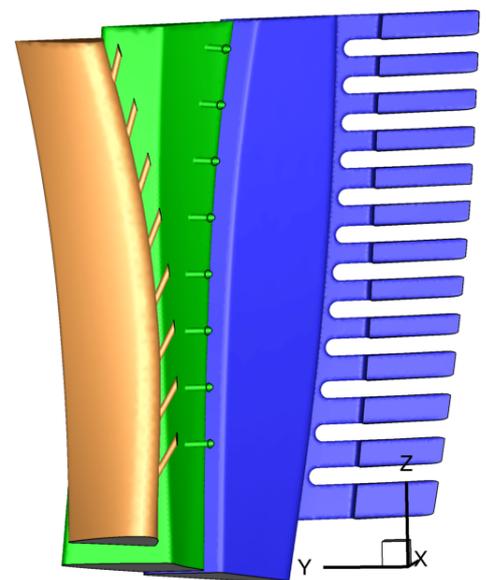
(c) : vue du moyeu vers le carter des cheminées d'alimentation



(d) : rangée aval de trous de refroidissement



(e) : vue des cheminées d'alimentation isolées



(f) : vue des cheminées d'alimentation isolées

Figure 5.29 – Visualisations de la géométrie de la configuration du CM2012.

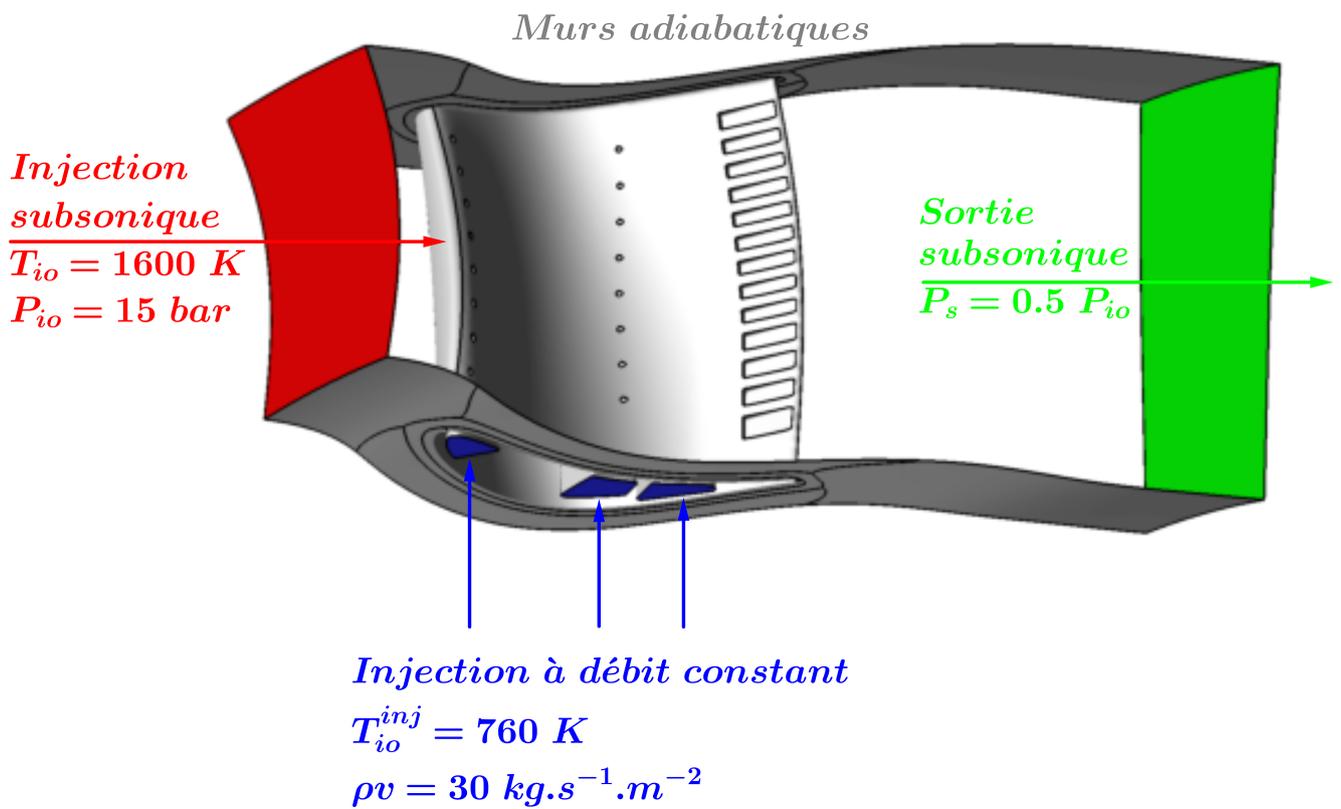


Figure 5.30 – Visualisation des conditions limites appliquées à la configuration CM2012.

5.3.2 Description de la stratégie de maillage appliquée

Sur cette configuration, seules des approches hybrides ou complètement non structurées sont envisageables. Les stratégies multiblocs structurées et chimère sont d'office écartées compte tenu à la fois du nombre élevé d'éléments géométriques complexes mais aussi des formes qui leur sont associées et qui sont peu commodes à mailler avec une approche structurée. Cette simulation a pour objectif de montrer la nouvelle capacité du solveur hybride de s'attaquer à des configurations hautement complexes et représentatives des besoins actuels des bureaux d'étude industriels. On ne cherche pas ici la comparaison avec une approche complètement non structurée. De ce fait, seule l'étude d'un maillage de cette configuration constitué avec une approche hybride est proposée.

La génération de ce maillage hybride respecte les stratégies précédemment entrevues sur les cas du CONGE et du CM2013 vus en 5.1 et en 5.2. Les zones éloignées des géométries complexes sont représentées par un maillage structuré et les zones délicates, comme les cheminées d'alimentation, les trous, les fentes et la paroi de l'aube à l'insertion de ces éléments, sont décrites par des maillages non structurés. La figure 5.31 illustre cette répartition avec en **bleu** les zones structurées et en **rouge** celles qui sont non structurées.

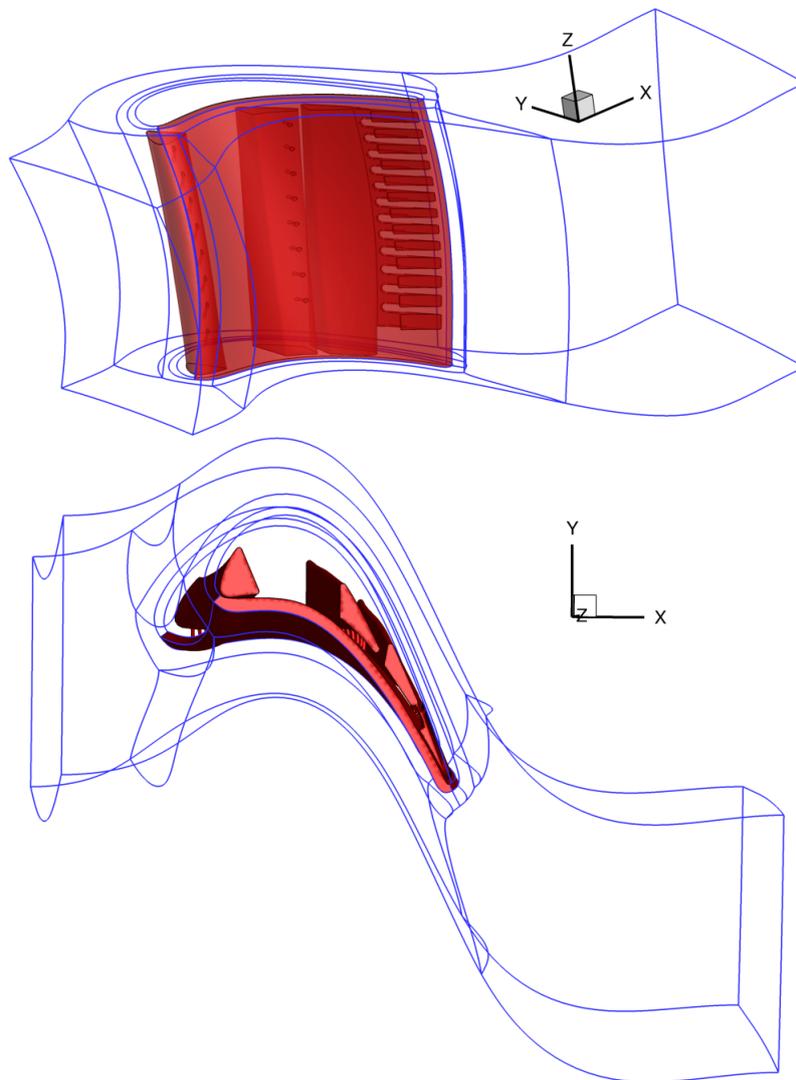


Figure 5.31 – Répartition des zones structurées et des zones non structurées sur la configuration CM2012 hybride.

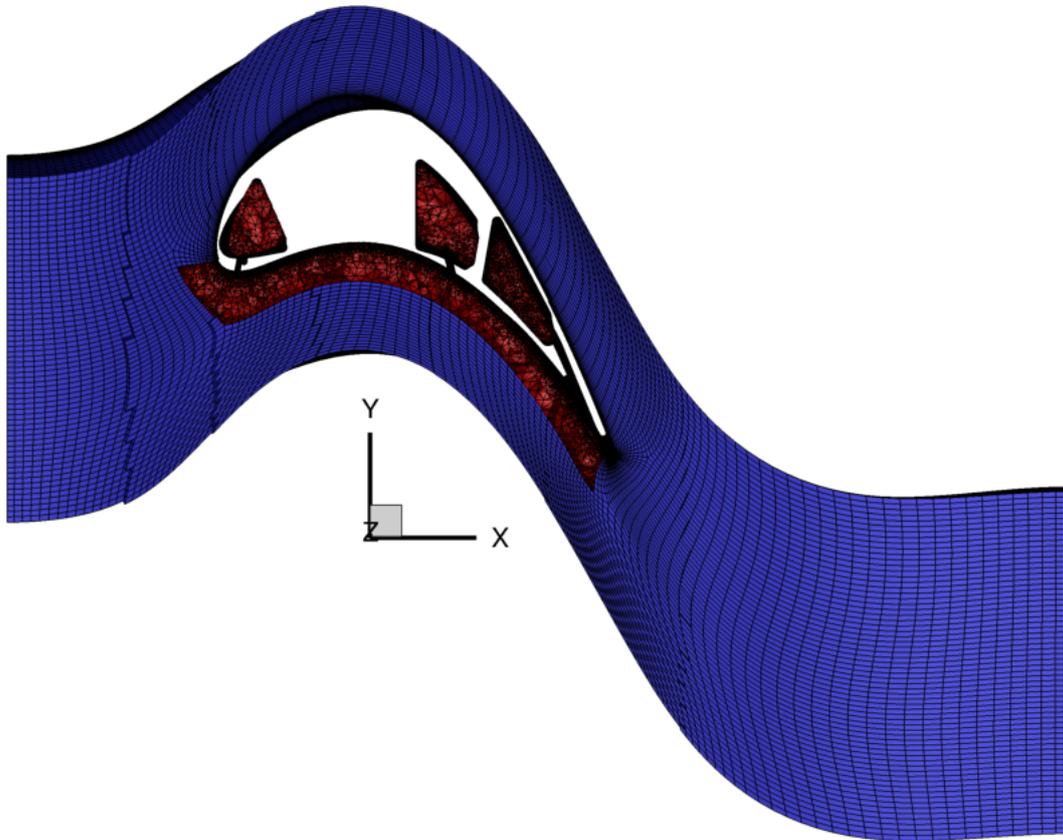
Le maillage structuré, représenté en bleu sur la figure 5.32 est parfaitement acceptable et propose une gestion correcte de la taille des mailles au niveau des couches limites. En revanche, les zones non structurées des cheminées d'alimentation ont été maillées sans prisme et sans accorder de réelle

Éléments	Maillage hybride
Hexaèdres	938 256
Pyramides	4 582
Prismes	4 011 476
Tétraèdres	2 644 953
Total	7 599 267

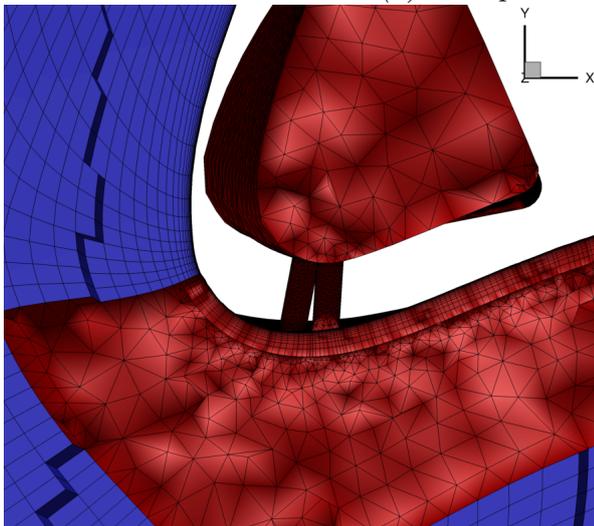
Table 5.7 – Répartition en éléments du maillage hybride pour l'étude de la configuration CM2012.

importance à la taille de première maille. C'est ce que l'on peut constater sur les figures 5.32 et 5.33.

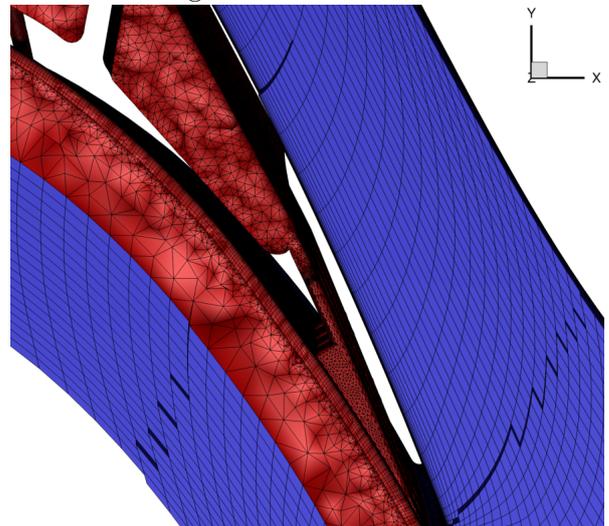
Cette stratégie suffit dans une approche quantitative pour réaliser la simulation des cheminées et des trous dans la mesure où la simple prise en compte des effets de giration et de variation radiale constitue une réelle valeur ajoutée pour l'alimentation des trous de refroidissement par rapport à des conditions limites plus classiques par exemple. En effet le débit de chaque trou n'est pas le même, puisque leur alimentation dépend de l'écoulement dans la cheminée et que celui-ci est en réalité soumis à des phénomènes de giration et à des variations radiales. Même si le maillage est trop lâche pour représenter pleinement la physique, il capture néanmoins bien plus qu'une simulation qui modéliserait une injection pour chaque trou.



(a) : Coupe d'une vue globale du maillage

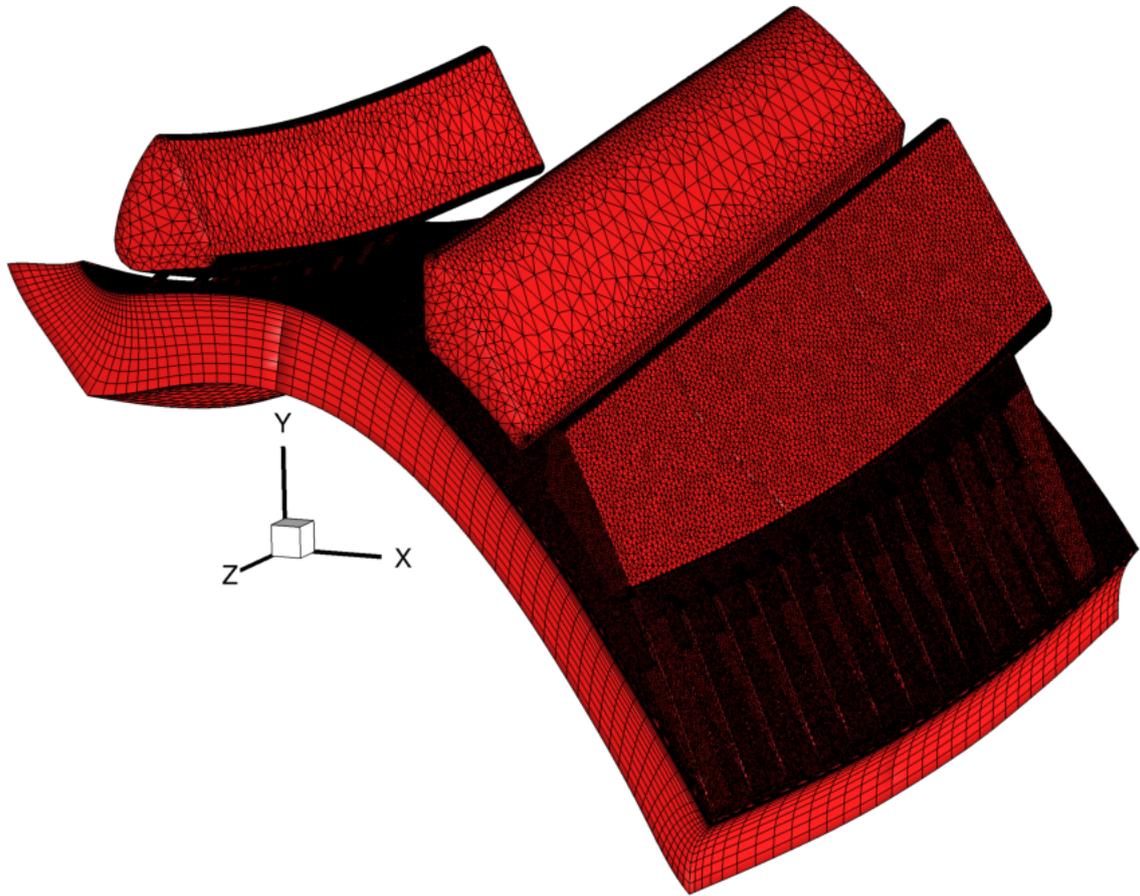


(b) : Coupe du maillage au niveau du trou amont

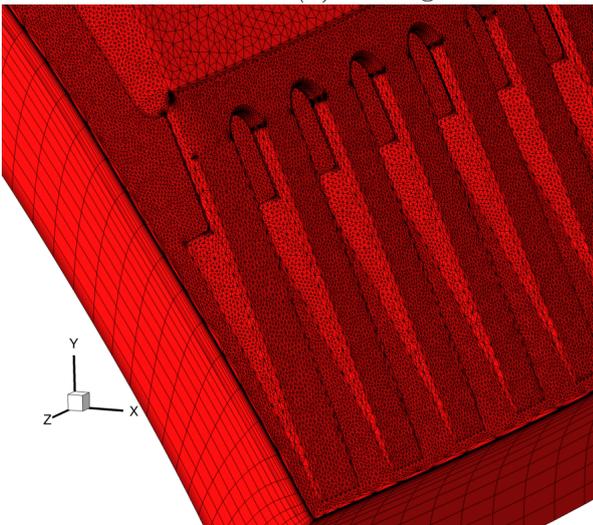


(c) : Coupe du maillage au niveau du trou aval

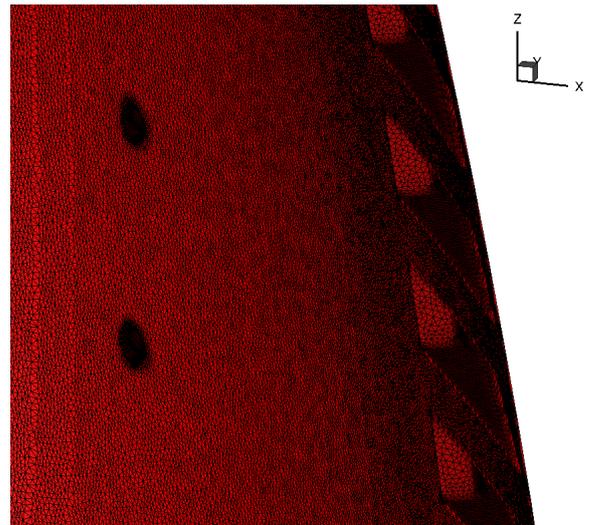
Figure 5.32 – Visualisation du maillage de la configuration complète du CM2012.



(a) : Vue globale du maillage de la zone non structurée



(b) : Insertion des fentes au bord de fuite



(c) : Vue depuis le canal inter-aube des fentes au bord de fuite et de la dernière rangée de trous de refroidissement

Figure 5.33 – Visualisation du maillage de la zone non structurée pour la configuration du CM2012.

5.3.3 Description des méthodes numériques utilisées

Deux calculs sont réalisés avec un schéma de Roe. Le premier est à l'ordre un et le second à l'ordre deux en utilisant un gradient calculé par la méthode de *GLSQ*, qui dépend de la qualité géométrique de chaque cellule, un limiteur de Venkatakrishnan ainsi qu'un lissage de gradient.

5.3.4 Analyse des résultats

La figure 5.34 représente l'historique de convergence des résidus pour les calculs à l'ordre un et à l'ordre deux. On observe que même si elle est délicate, la convergence du calcul à l'ordre un a bien lieu. En revanche, à l'ordre deux, un plateau assez "chaotique" de convergence est rencontré après avoir perdu un peu plus de deux ordres seulement sur les résidus en densité.

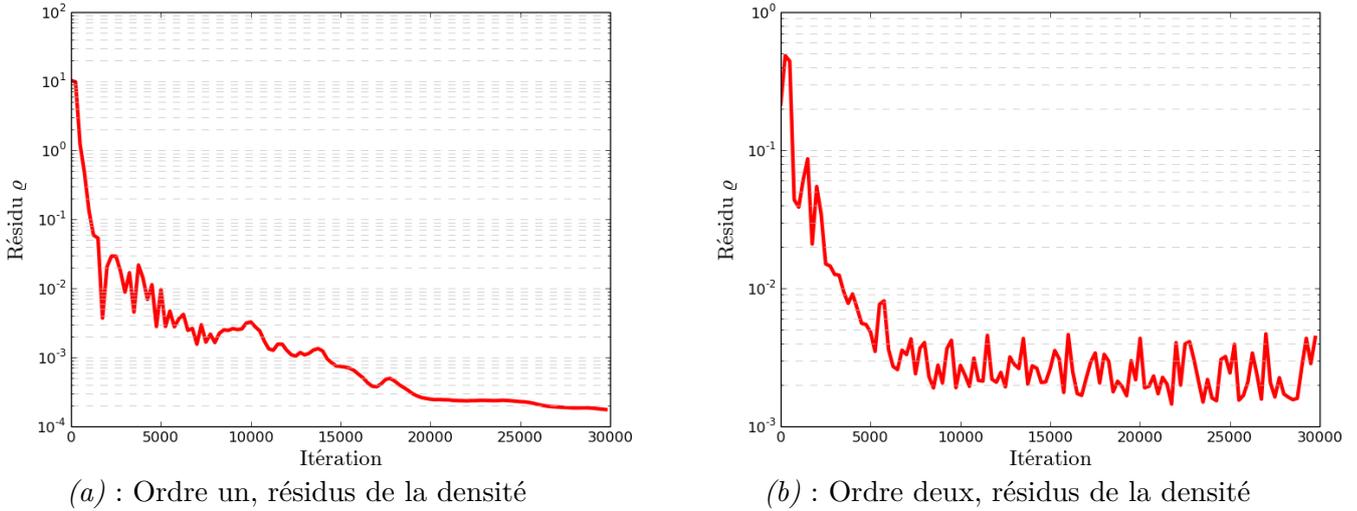


Figure 5.34 – Historique de la convergence des résidus sur la configuration CM2012.

L'historique de convergence des débits présenté sur la figure 5.35 indique cependant une convergence correcte de ces quantités d'intérêt. On retrouve également le comportement relevé sur la configuration du CONGE 5.1, avec une sous-évaluation des débits par la méthode d'ordre un rapport à l'approche d'ordre deux.

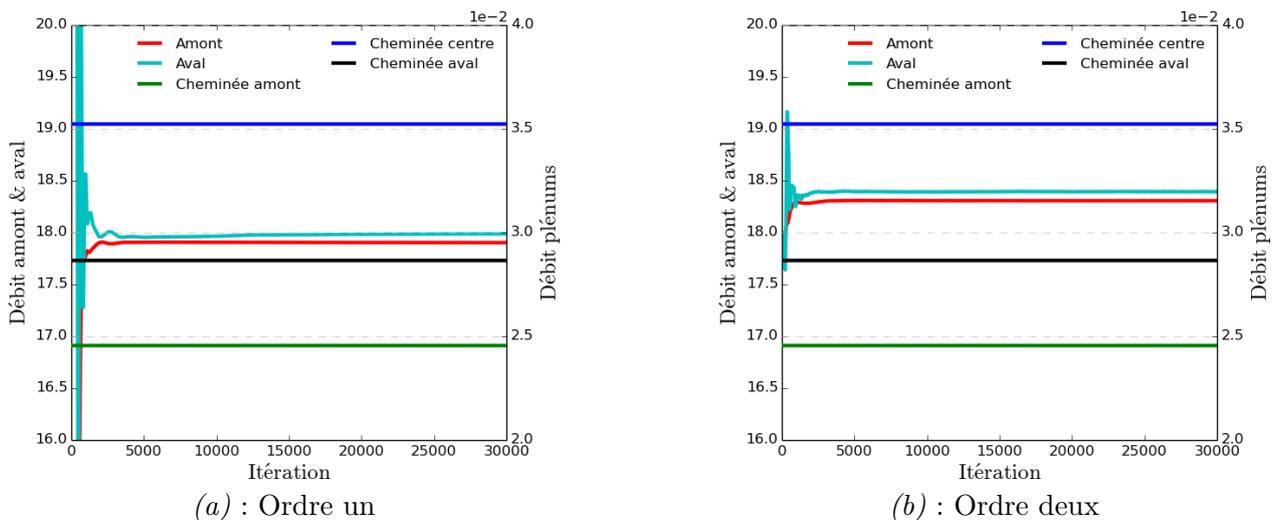


Figure 5.35 – Historique de la convergence des débits sur la configuration CM2012.

Le tableau 5.8 fournit les différents débits pour les calculs hybrides à l'ordre un et deux. La conserva-

tivité est bonne bien qu'inférieure à celle obtenue lors des simulations hybrides sur les configurations du CONGE 5.1 et du CM2013 5.2. Ceci peut s'expliquer par une convergence délicate et des débits encore très légèrement oscillants (ce que montrerait une vue détaillée des courbes de la figure 5.35.

Config.	Q_{amont} ($kg \cdot s^{-1}$)	Q_{aval} ($kg \cdot s^{-1}$)	$Q_{ch.amont}$ ($kg \cdot s^{-1}$)	$Q_{ch.centre}$ ($kg \cdot s^{-1}$)	$Q_{ch.aval}$ ($kg \cdot s^{-1}$)	$\varepsilon_{cons.}$ (%)
Ordre 1	$1.790283 \cdot 10^{+1}$	$1.798738 \cdot 10^{+1}$	$2.4553 \cdot 10^{-2}$	$3.5228 \cdot 10^{-2}$	$2.8652 \cdot 10^{-2}$	$2.16 \cdot 10^{-2}$
Ordre 2	$1.830617 \cdot 10^{+1}$	$1.839354 \cdot 10^{+1}$	$2.4553 \cdot 10^{-2}$	$3.5228 \cdot 10^{-2}$	$2.8652 \cdot 10^{-2}$	$5.81 \cdot 10^{-3}$

Table 5.8 – Débits et erreur de conservativité $\varepsilon_{cons.} = \frac{|Q_{amont} + Q_{cheminées} - Q_{aval}|}{\frac{1}{2}(Q_{amont} + Q_{cheminées} + Q_{aval})}$ obtenus à convergence sur la configuration du CM2012.

L'intérêt essentiel de cette configuration CM2012 est la prise en compte d'un système complet de refroidissement. Cependant, cette étude peut seulement s'appuyer sur une montée en ordre des simulations hybrides pour évaluer la pertinence des caractéristiques physiques prédites par la simulation dans la mesure où aucune autre référence n'existe, ni expérimentale, ni numérique. L'analyse qui suit met donc en évidence les améliorations associées à un passage à l'ordre deux sur les phénomènes de refroidissement pour cette aube.

Il semble tout d'abord opportun de présenter les traces thermiques de l'aube sur son intrados, qui bénéficie du refroidissement par *film cooling*, puisqu'il s'agit d'une grandeur d'intérêt pour le concepteur qui doit établir le dimensionnement de la pièce et sa durée de vie. Ceci est représenté sur la figure 5.36. On constate que l'ordre deux préserve beaucoup mieux l'intensité du refroidissement thermique que l'ordre un, en particulier pour la rangée de trous amont, tendance également observée pour l'étude du Film Cooling. Par ailleurs, la direction de soufflage est également sensiblement différente à l'ordre deux. Ceci s'explique par la complexité des écoulements proche paroi sur cette configuration qui sont certainement mieux capturés par une simulation d'ordre deux. Les lignes de courant sur l'aube pour des simulations à l'ordre un et à l'ordre deux sont représentées sur la figure 5.37. On constate le bon accord entre ces lignes de courant et les directions de refroidissement des trous. À l'ordre un, le refroidissement se fait du bord d'attaque vers le bord de fuite. L'écoulement suit exactement la même trajectoire. Pour l'ordre deux, la physique est plus complexe. Pour la deuxième rangée de trous, on observe un phénomène de migration radiale de la tête d'aube vers le moyeu amorcé à l'amont de la deuxième rangée de trous. Cette migration entraîne le refroidissement issu de la deuxième rangée de trou vers le moyeu. Juste dans la courbure après la première rangée de trous, plusieurs zones de recirculation sont présentes. Celles-ci, du fait de leur proximité avec les trous de la première rangée, contraignent le refroidissement à se faire en direction du carter.

On peut également s'intéresser à l'évolution de la température dans les différentes cheminées. En effet, la prise en compte de ces dernières dans cette simulation a pour objectif principal de retranscrire plus fidèlement au niveau de l'injection des trous les différences de débit, de température, etc. de l'écoulement qui les alimente. On observe en regardant la figure 5.38, qu'il y a pour la simulation d'ordre un une forte variation radiale de la température dans les trois cheminées, passant de $760 K$ au niveau du moyeu à plus de $900 K$ à hauteur du carter. Cette variation n'est pas sans importance puisqu'elle se retrouve au niveau de la température de l'air servant pour le refroidissement. Autrement dit, on s'attend à ce que l'efficacité de refroidissement thermique soit moins bonne plus près du carter.

L'efficacité du refroidissement thermique, définie comme :

$$\eta = \frac{T_{veine} - T}{T_{veine} - T_{injection}} \quad (5.1)$$

est visualisée le long de deux jeux de coupes. Les deux coupes d'un jeu sont réalisées à l'aval d'une rangée de trous, la première à l'aval immédiat et la seconde un peu plus loin. Ces coupes sont définies sur la figure 5.39. Ceci permet de mettre en évidence l'atténuation de l'efficacité du refroidissement

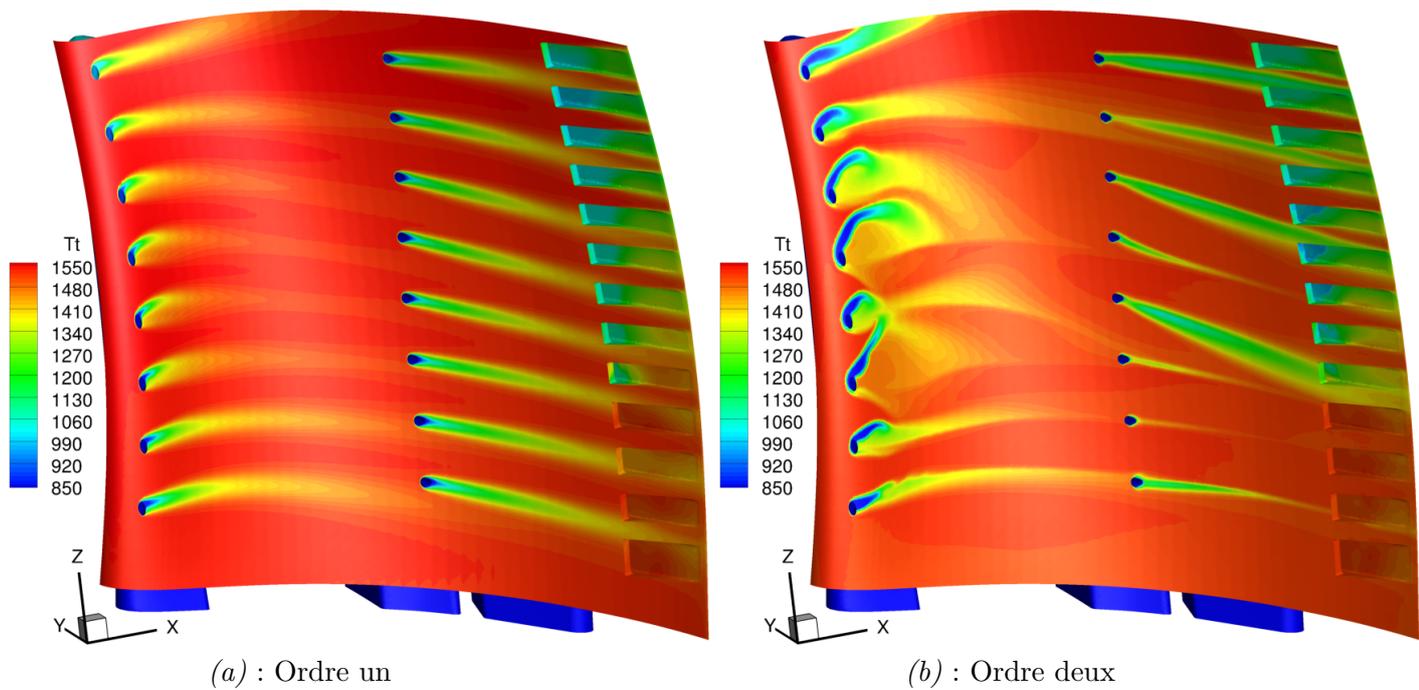


Figure 5.36 – Traces thermiques des trous de refroidissement sur la paroi de l'intrados de l'aube CM2012.

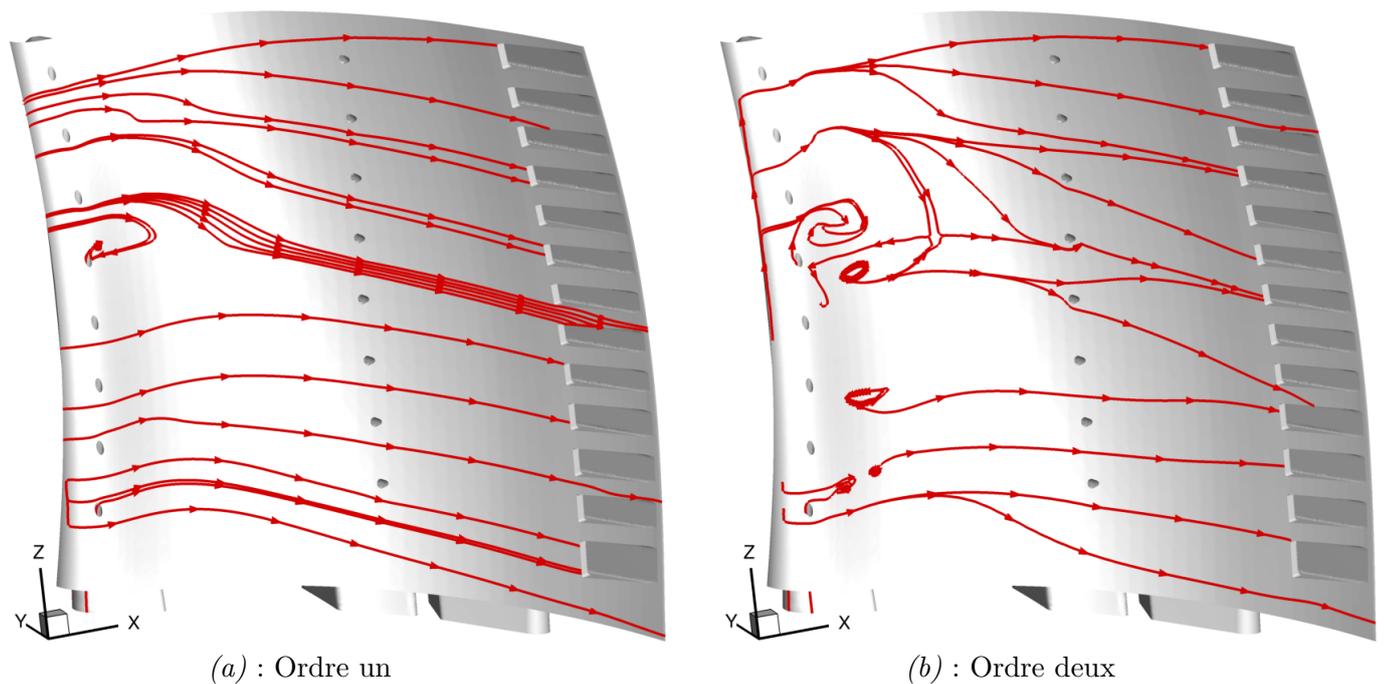


Figure 5.37 – Visualisation des lignes de courant sur la paroi de l'intrados de l'aube CM2012.

thermique ainsi que sa "déviation". La figure 5.40 représente ces tracés pour des simulations d'ordre un et d'ordre deux. L'analyse de ces coupes peut être recoupée avec les représentations surfaciques des traces thermiques présentées sur la figure 5.36. Pour chaque rangée de trous, l'atténuation de l'efficacité du refroidissement thermique est moins importante entre la première coupe et la seconde pour les simulations d'ordre deux. L'intensité maximale de cette efficacité de refroidissement thermique est également plus forte au niveau de la première rangée de trous. En revanche, l'intensité maximale de l'efficacité du refroidissement thermique est équivalente sur la deuxième rangée de trous entre la simulation d'ordre un et celle d'ordre deux avec une valeur autour de 0.6. On retrouve sur ces vues

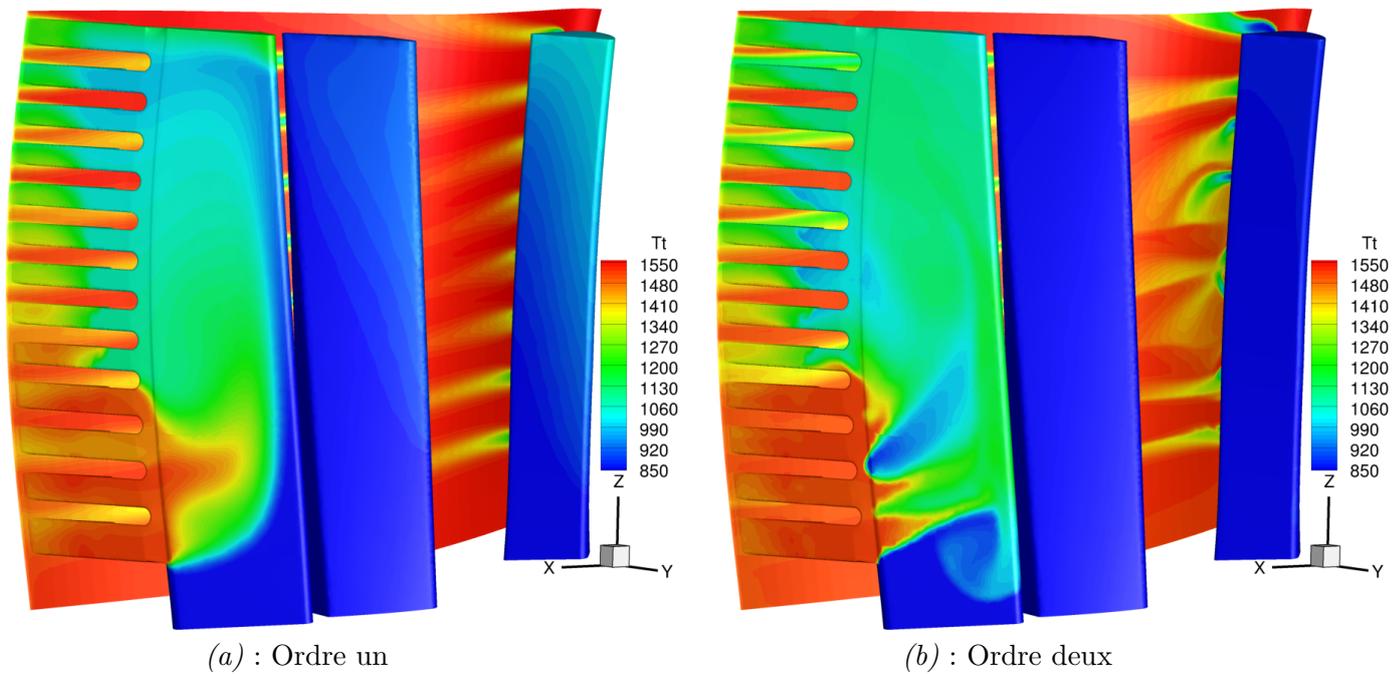
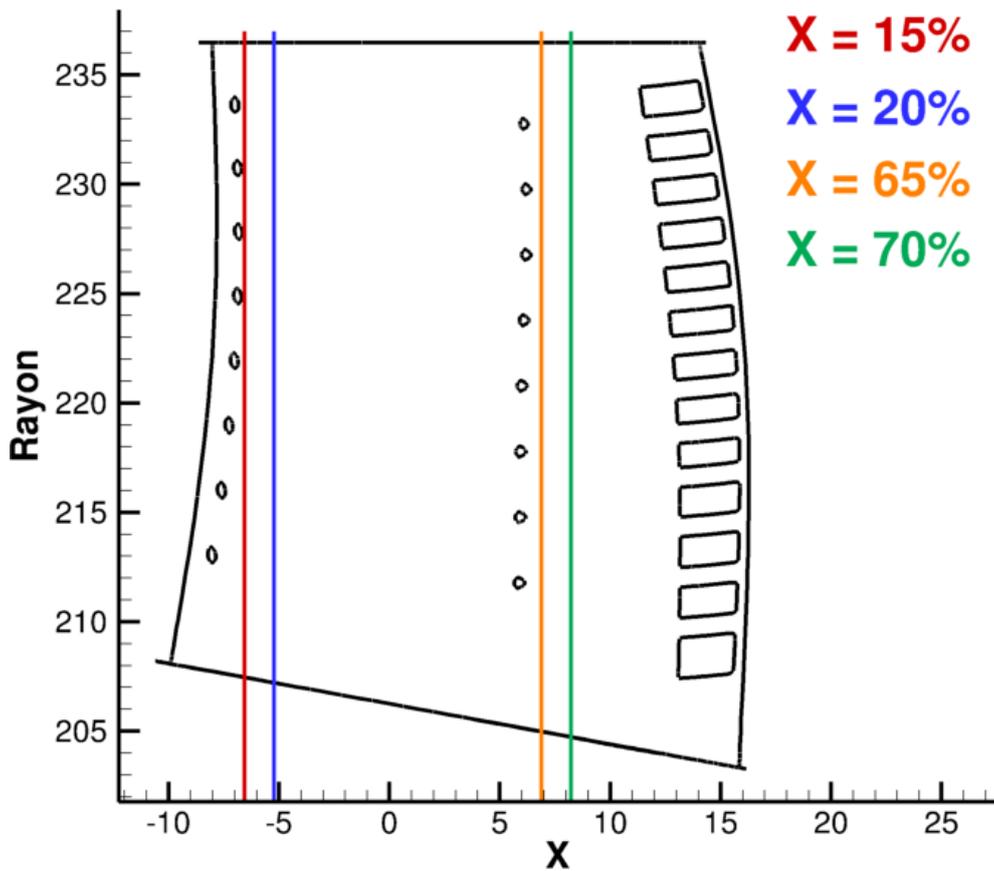


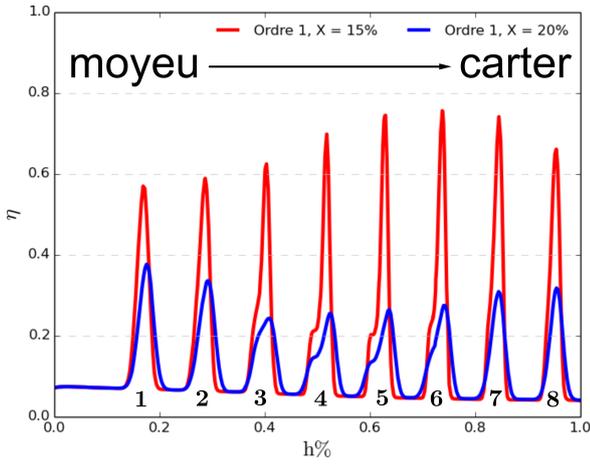
Figure 5.38 – Traces thermiques sur la paroi des cheminées d'alimentation de la configuration CM2012.

en coupe l'absence de déviation du refroidissement pour les simulations à l'ordre un, contrairement à celles d'ordre deux qui dévient vers le carter pour la première rangée de trous et vers le moyeu pour la seconde. Par ailleurs, on observe, sur la coupe à $X = 20\%$ de la simulation d'ordre deux, une "fusion" des traces thermiques issues des trous trois et quatre de la première rangée et on note également que la déviation du refroidissement thermique observée sur la simulation d'ordre deux pour la première rangée de trous, semble provoquer un refroidissement thermique global entre les trous avec des valeurs d'efficacité de refroidissement de l'ordre de 0.2. Enfin, pour la simulation d'ordre un, la baisse de l'efficacité du refroidissement thermique pour les trous les plus proches du carter à cause du réchauffement de l'écoulement dans les cheminées pour ces hauteurs n'est pas aussi prononcée qu'attendue.

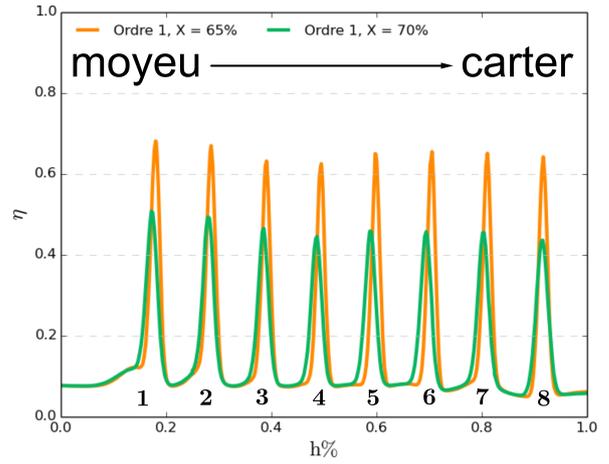


Remarque : l'ordonnée de cette image est un rayon (en mm) qui pour des coupes à $X=cste$ est transformé en hauteur de veine normalisée, notée $h\%$.

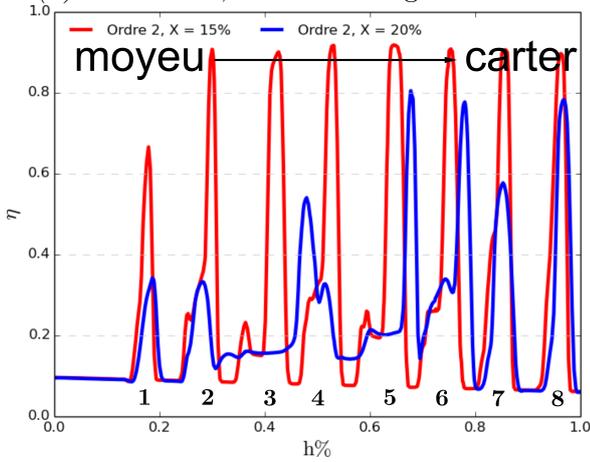
Figure 5.39 – Positionnement des différentes coupes envisagées dans le plan $X = cste$ sur la configuration du CM2012.



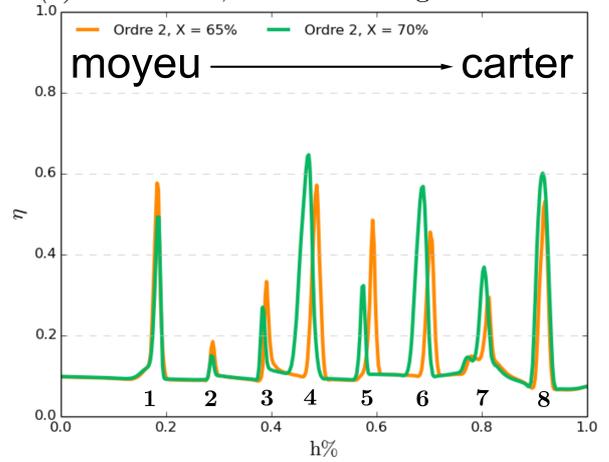
(a) : Ordre un, Première rangée de trous



(b) : Ordre un, Deuxième rangée de trous



(c) : Ordre deux, Première rangée de trous



(d) : Ordre deux, Deuxième rangée de trous

Figure 5.40 – Coupe dans un plan $X = cste$ de η , l'efficacité de refroidissement thermique pour la configuration CM2012 en fonction de la hauteur de veine normalisée $h\%$.

Conclusion

Les simulations de cette configuration CM2012 ont montré l'intérêt d'une approche hybride pour le traitement des systèmes de refroidissement complexes sur les aubes de turbine. La prise en compte des cheminées d'alimentation semble capitale tant les conditions du refroidissement (direction, intensité et température) varient d'un trou à l'autre et ne sauraient donc être réduites ou correctement modélisées via une condition unique appliquée à chaque trou de manière figée. La complexité géométrique introduite notamment par la prise en compte de ces cheminées d'alimentation dans la simulation rend extrêmement délicat le maillage en multibloc structuré d'une telle configuration alors que l'approche hybride permet comme souhaité la génération efficace d'un maillage combinant blocs structurés et non structurés. La présence de cellules déformées dans ce maillage hybride à raccords structuré / non structuré coïncidents n'empêche pas de mener à bien des simulations à l'aide du solveur hybride d'ordre deux incluant les techniques d'amélioration de robustesse précédemment développées. L'analyse comparée des solutions produites par le solveur hybride d'ordre un et le solveur d'ordre deux met bien en évidence l'apport de la résolution avec reconstruction linéaire qui rend bien davantage compte de la complexité physique du système de refroidissement complexe simulé.

5.4 Conclusion du chapitre

Les simulations réalisées dans ce chapitre ont pleinement bénéficié des fonctionnalités offertes par le solveur elsA-H. Les configurations CONGE, CM2013 et CM2012 ont ainsi pu être efficacement maillées en s'appuyant sur des maillages hybrides formés de blocs structurés et non structurés. Grâce aux techniques d'amélioration de la robustesse développées, ces simulations prenant en compte des effets technologiques d'intérêt industriel ont pu être réalisées avec une bonne efficacité. L'analyse des résultats physiques produits par ces simulations a rappelé toute l'importance de la prise en compte des effets technologiques dans l'étude des écoulements en turbomachines. Du point de vue de la méthodologie numérique, on a également pu dégager les préconisations suivantes :

- le solveur elsA-H avec schéma de Roe d'ordre 2 (reconstruction linéaire), calcul du gradient au centre par *quasi-Green* et calcul du gradient à la face par $\overline{5pcor}$ constitue le choix privilégié pour une simulation initiale.
- en cas d'échec de la simulation réalisée à l'aide des ingrédients précédents, on fera appel au limiteur de Venkatakrisnan dans la reconstruction linéaire, en conservant les autres choix ci-dessus (notamment le calcul qG pour le gradient au centre).
- si l'échec de la simulation persiste, on fera appel à l'estimation $GLSQ$ du gradient au centre en remplacement de l'estimation qG , tout en conservant le limiteur de Venkatakrisnan.
- si la combinaison du gradient $GLSQ$ et du limiteur de Venkatakrisnan ne suffit pas à assurer la convergence du calcul, on fera appel à la technique de lissage des gradients.
- enfin, en dernier recours, on appliquera les limiteurs géométriques. On gardera également en tête que cette démarche d'incorporation progressive des techniques d'amélioration de la robustesse s'accompagne d'une diminution progressive de la précision des solutions stationnaires obtenues - la précision minimale correspondant au cas où la reconstruction linéaire n'est pas appliquée, *i.e.* au cas d'une résolution d'ordre un.

Chapitre 6

Calcul d'un étage de turbomachine par une approche hybride

Dans le chapitre précédent, des simulations d'aubes isolées dotées d'effets technologiques ont pu être réalisées grâce aux différentes stratégies d'amélioration de la robustesse mises en place dans 4.2. Ces simulations ont permis de montrer l'intérêt de la prise en compte de ces effets technologiques pour la capture de phénomènes physiques à l'œuvre dans les écoulements de turbomachine. Néanmoins, aussi complexes soient-elles, ces simulations d'aubes isolées sont incapables de reproduire fidèlement les conditions d'entrée et de sortie de la roue. En effet, les phénomènes physiques hautement instationnaires associés à l'interaction entre un rotor et un stator constituent également un élément technique à ne pas négliger pour représenter le plus fidèlement possible le fonctionnement d'une turbomachine partielle ou complète.

Ainsi, dans ce chapitre, on s'intéresse à la mise en œuvre et à la démonstration de faisabilité d'une stratégie de prise en compte de l'interaction existant entre un rotor et un stator dans le cadre de simulations hybrides. Dans un premier temps, deux stratégies classiques de modélisation de l'interaction entre un rotor et un stator sont présentées : le plan de mélange et le chorochronique. L'adaptation de ces techniques à l'approche hybride est rapidement expliquée. Enfin, l'utilisation de ces deux méthodes est réalisée sur une configuration académique d'interaction entre un rotor et un stator : la configuration 2.5D - ou quasi tridimensionnelle - du VKI Brite CT3 ou cas TATEF2.

6.1 Modélisation de l'interaction rotor/stator

La prise en compte de l'interaction entre un rotor et un stator (ou même entre deux rotors contrarotatifs) est capitale dans la mesure où elle peut être à l'origine de plusieurs phénomènes physiques instationnaires aux effets notables sur la performance et le comportement de la turbomachine. On peut citer parmi ces phénomènes instationnaires associés à l'interaction entre un rotor et un stator : les effets potentiels et les effets de sillage par exemple. Dans l'hypothèse où les nombres d'aubes du rotor et du stator dont l'interaction commune est étudiée sont multiples l'un de l'autre, il est possible de restreindre le domaine d'étude. Néanmoins, dans la réalité industrielle, les nombres d'aubes d'un étage sont généralement premiers entre eux. Sans la possibilité de réaliser cette simplification géométrique, la seule manière d'étudier exactement le comportement de cette interaction entre le rotor et le stator d'un étage réside dans une simulation complète *i.e.* sur 360° . À cause des limites imposées par les performances des calculateurs actuels, réaliser une telle simulation n'est envisageable que dans des circonstances exceptionnelles et ne permet pas d'accepter cette solution à l'échelle industrielle. De ce fait, il est nécessaire de modéliser cette interaction entre le rotor et le stator. La technique du plan de mélange est la première modélisation envisagée dans cette thèse. Il s'agit d'une approche stationnaire, contrairement à l'approche chorochronique qui constitue le second traitement envisagé pour décrire l'interaction entre le rotor et le stator.

6.1.1 Technique du plan de mélange

Le plan de mélange est une stratégie de modélisation de l'interface entre un rotor et un stator qui a été initialement proposée par Denton dans [39] et que l'on retrouve utilisée dans différents travaux, tels que par exemple ceux de Callot [23], Sicot [108], Benyahia [14] et Maugars [79] comme étape préalable à des calculs instationnaires. Par ailleurs, elle est aujourd'hui largement utilisée pour les phases de conception. Cette modélisation de l'interface entre un rotor et un stator apparaît en effet séduisante puisque le domaine de calcul se trouve réduit à un simple canal inter-aube dans chaque roue. Chacune des roues est calculée dans son repère relatif et l'interface d'une roue se voit imposer une condition limite obtenue par une moyenne azimutale à rayon constant sur la roue adjacente.

Ce procédé est bien adapté pour des simulations stationnaires mais empêche toutefois la reproduction des phénomènes instationnaires. Par ailleurs, les champs étant moyennés, même un sillage stationnaire d'une aube amont est filtré au travers de l'interface entre les deux roues. La figure 6.1 illustre ainsi la différence entre une interaction rotor/stator réalisée par un plan de mélange et un calcul instationnaire.

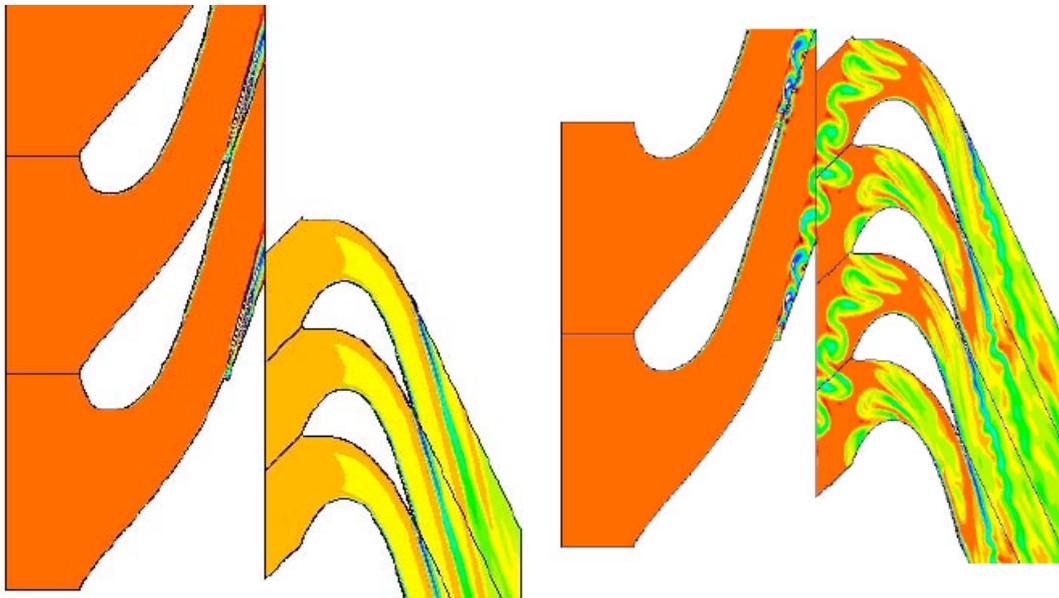


Figure 6.1 – Comparaison de contours d'entropie pour des simulations avec plan de mélange et instationnaire pour un étage de turbine, extrait de [40].

6.1.2 Technique chorochronique

Le plan de mélange est une méthode purement stationnaire qui permet de modéliser l'interaction entre un rotor et un stator, comme expliqué en 6.1.1. Cependant, le défilement relatif du rotor par rapport au stator induit un écoulement fortement instationnaire dont les phénomènes physiques mis en jeu peuvent être corrélés avec la vitesse de rotation de la machine. L'approximation stationnaire de l'interaction entre un rotor et un stator permet d'obtenir une approximation du champ moyen de l'écoulement. Toussaint, dans [113], compare cette modélisation de l'interface entre un rotor et un stator par une approche plan de mélange avec une simulation instationnaire poussée. Il montre justement que les valeurs moyennes entre les deux approches sont comparables. Il nuance sa conclusion en reconnaissant que cette méthode ne permet pas de capturer les effets instationnaires de l'interaction entre les deux roues. Avec cette approche, toutes les variations instationnaires de l'écoulement sont filtrées et on perd par exemple les effets de sillage. C'est la raison pour laquelle la méthode chorochronique est envisagée pour modéliser l'interaction entre le rotor et le stator.

L'analyse proposée par Hodson [61] et reprise sur la figure 6.2 fournit une classification des phénomènes instationnaires présents dans les turbomachines en fonction de leur origine.

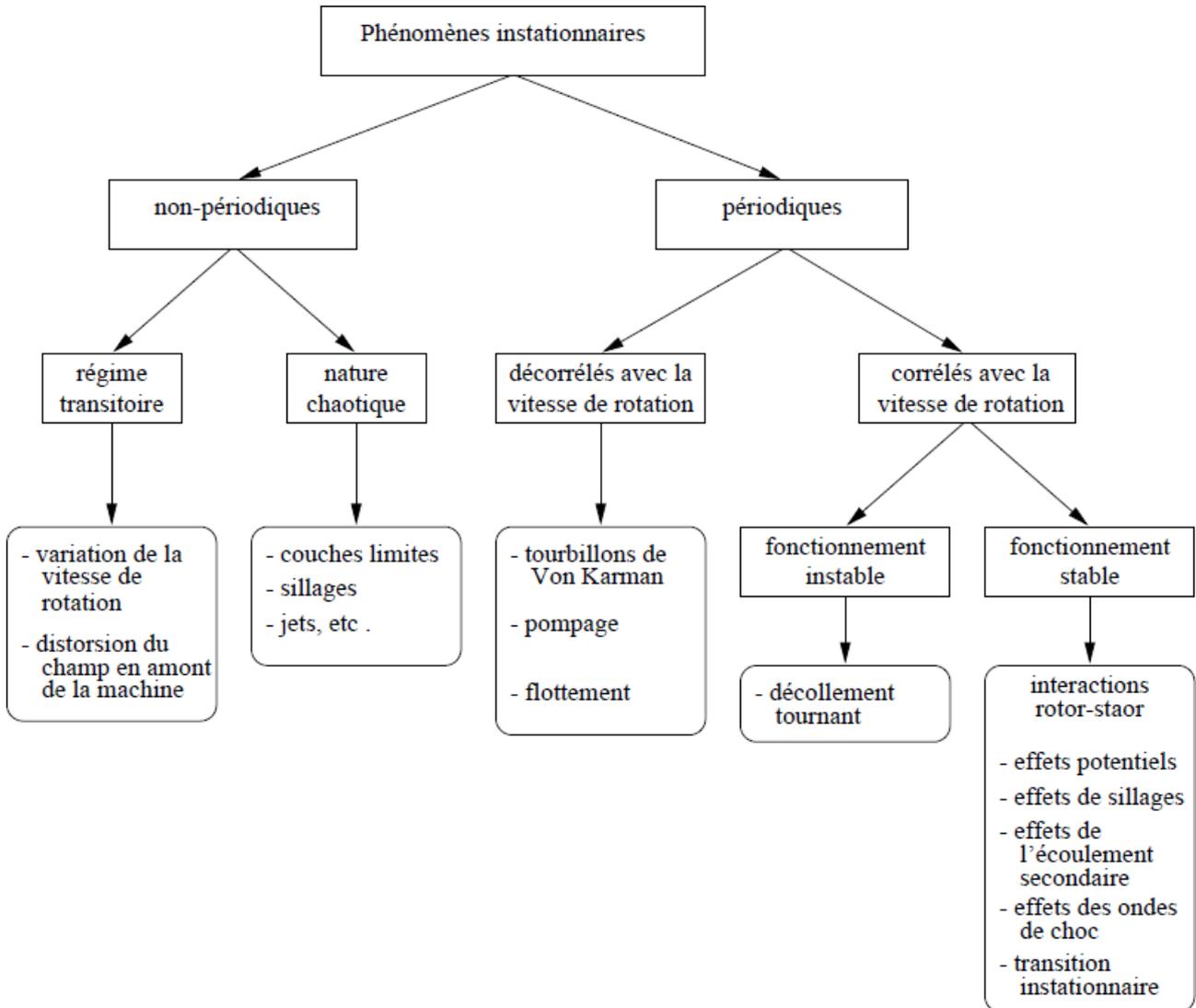


Figure 6.2 – Classement des phénomènes instationnaires rencontrés dans les écoulements de turbomachine en fonction de leur origine par Hodson et extrait de [23].

Si l'on se place dans l'hypothèse d'une simulation représentative d'une turbomachine en fonctionnement sans incident particulier, c'est-à-dire, sans variation de la vitesse de rotation (pas de démarrage, d'arrêt ou de modification du régime de la turbomachine), sans pompage, etc., on s'intéresse exclusivement à la catégorie des phénomènes instationnaires associés aux interactions rotor/stator. Ceux-ci sont corrélés à la vitesse de rotation. Par ailleurs, si l'on suppose que les seules sources d'instationnarité de l'écoulement sont effectivement uniquement dues à la rotation alors l'écoulement est périodique en temps dans chaque roue. Si l'on considère un stator de N_s aubes et que l'on se positionne dans le référentiel du rotor, la configuration vue par le rotor est identique à chaque rotation de variation angulaire α_s du stator avec α_s l'angle en radians de périodicité du stator définit par :

$$\alpha_s = \frac{2\pi}{N_s} \quad (6.1)$$

En se positionnant dans le repère lié au rotor, tous les α_s radians, le stator est à la même position par

rapport au rotor. On définit donc T_r la période pour le rotor :

$$T_r = \frac{\alpha_s}{|\Omega_{s/r}|} = \frac{2\pi}{|\Omega_{s/r}|N_s} \quad (6.2)$$

avec $\Omega_{s/r}$ la vitesse de rotation en $rad.s^{-1}$ du stator vue par le rotor fixe dans son référentiel.

Le même raisonnement est applicable au stator en notant N_r le nombre d'aubes du rotor et en se positionnant dans le référentiel lié au stator. On en tire :

$$\alpha_r = \frac{2\pi}{N_r} \quad (6.3)$$

et :

$$T_s = \frac{\alpha_r}{|\Omega_{r/s}|} = \frac{2\pi}{|\Omega_{r/s}|N_r} \quad (6.4)$$

Du fait de cette hypothèse de périodicité temporelle pour l'écoulement dans chacune des roues, toute variable aérodynamique g de l'écoulement peut être décrite par une fonction périodique F en tout point P de coordonnées (x, r, θ) . Ceci se traduit par :

$$g(t, x, r, \theta) = F(t, x, r, \theta) = F(t + T, x, r, \theta) \quad (6.5)$$

Dans la suite les notations indicées par r sont prises dans le référentiel du rotor et celles par s dans celui du stator.

Si l'on se donne une base canonique $(e_{x_r}, e_{r_r}, e_{\theta_r})$ et $(e_{x_s}, e_{r_s}, e_{\theta_s})$ respectivement pour le rotor et le stator, on peut lier la position angulaire d'un point P au cours du temps $\theta_s(t)$ dans la base liée au stator à $\theta_r(t)$ dans celle liée au rotor par :

$$\theta_s(t) = \theta_{r/s}(t_0) + \Omega_{r/s}t + \theta_r(t) \quad (6.6)$$

où $\theta_{r/s}(t_0)$ est une constante qui correspond à l'angle formé initialement par les vecteurs e_{θ_r} et e_{θ_s} . Cette relation est explicitée par la figure 6.3.

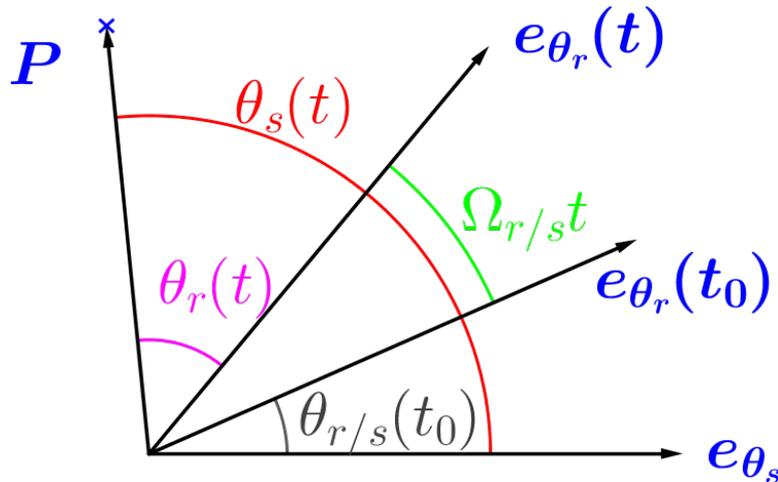


Figure 6.3 – Représentation des notations des différents angles dans les repères relatifs au rotor et au stator.

En appliquant la périodicité géométrique du rotor à chaque période T_r , qui se traduit par $\theta_r(t + T_r) = \theta_r(t)$, la relation (6.6) donne :

$$\theta_s(t + T_r) - \theta_s(t) = \Omega_{r/s} T_r \quad (6.7)$$

En appliquant l'hypothèse de périodicité physique de l'écoulement au sein du rotor, on obtient :

$$F(t + T_r, x_r, r_r, \theta_r(t + T_r)) = F(t, x_r, r_r, \theta_r(t)) \quad (6.8)$$

Que cette équation soit exprimée dans le repère relatif au rotor ou au stator ne change rien à la valeur physique du champ en ce point, on a donc :

$$F(t + T_r, x_s, r_s, \theta_s(t + T_r)) = F(t, x_s, r_s, \theta_s(t)) \quad (6.9)$$

Enfin, en utilisant la relation (6.7) on parvient à :

$$F(t, x_s, r_s, \theta_s(t)) = F\left(t + T_r, x_s, r_s, \theta_s(t) + \Omega_{r/s} T_r\right) \quad (6.10)$$

Le même raisonnement en inversant les rôles du rotor et du stator conduit également à :

$$F(t, x_r, r_r, \theta_r(t)) = F\left(t + T_s, x_r, r_r, \theta_r(t) + \Omega_{s/r} T_s\right) \quad (6.11)$$

Ces deux équations établissent la relation de déphasage spatio-temporel qui existe entre le rotor et le stator. Ces relations ont été vérifiées expérimentalement. Ottavy [90] observe un écart de seulement 1.5% entre le déphasage théorique et le déphasage expérimental sur le cas d'un compresseur. Ce résultat est excellent compte tenu du fait que les différents canaux inter-aubes ne sont pas identiques (différences d'usure, d'usinage ...) contrairement à l'hypothèse théorique. L'ajout de cette relation de périodicité temporelle permet de réduire le calcul à un simple canal inter-aube et de ne pas devoir dans le cas général (non-multiplicité du nombre d'aubes entre les deux roues) traiter une configuration 360°. Le reste de la configuration est alors déterminé par la périodicité spatio-temporelle assurée par les relations précédentes. L'application de cette périodicité spatio-temporelle nécessite des conditions spécifiques au niveau des frontières azimutales et à l'interface entre le rotor et le stator.

Cette stratégie chorochronique, initialement proposée par Erdos [44] et généralisée ensuite par Gerylmos dans [47] et [48], s'appuie sur des hypothèses fortes. Il est en effet supposé que l'écoulement est périodique de fréquence liée à la vitesse de rotation. Toutefois, plusieurs phénomènes non périodiques ou non liés à la vitesse de rotation peuvent survenir dans le fonctionnement d'une turbomachine, comme illustré dans le classement de la figure 6.2. En outre, seule l'interaction au sein d'un étage a été prise en compte. Si l'on ajoute une roue supplémentaire au problème, une nouvelle fréquence va apparaître dans l'écoulement et rendra caduque toute cette stratégie. Neubauer explore cette problématique dans [86] et expose la stratégie multi-chorochronique qui permet de prendre en compte plusieurs fréquences et donc plusieurs étages en s'appuyant sur les travaux de He [57].

6.1.3 Application à la stratégie hybride

Les deux techniques qui viennent d'être décrites pour modéliser une interaction entre un rotor et un stator s'appuient sur une condition de raccord spécifique au niveau de la zone d'interface entre les deux blocs rotor et stator. Dans l'hypothèse d'une utilisation de la technique chorochronique, une condition de raccord spécifique est également utilisée pour gérer le raccord azimutal entre deux aubes au sein d'une même roue. Ainsi, les seules zones éventuellement concernées par un traitement spécifique se situent aux limites du domaine et se retrouvent *de facto* éloignées de l'aubage.

Par ailleurs, le concept de la stratégie hybride repose sur l'emploi de zones non structurées pour les zones de géométries complexes ou d'effets technologiques. Ces zones sont généralement positionnées sur les aubes. Ainsi, dans le cadre d'une approche hybride, les conditions de raccords spécifiques pour les techniques de plan de mélange ou chorochronique sont traitées par le solveur structuré. Ce dernier, bénéficiant d'un héritage et de fonctionnalités abouties pour la gestion des turbomachines,

ne requiert pas de nouveau développement de ces conditions de raccords spécifiques. Le déploiement des fonctionnalités proposées de prise en compte de l'interaction entre le rotor et le stator est donc, dans ces conditions, immédiat avec la stratégie hybride. Il suffit, dans le cadre d'une modélisation chorochronique de l'interaction entre le rotor et le stator, de mettre en place des capacités de calcul d'écoulement instationnaire pour le point courant dans le solveur non structuré.

Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que cette approche fait l'hypothèse que les zones d'intérêt non structurées sont situées proche de l'aubage. Cette hypothèse n'est pas systématiquement vérifiée. Par souci de généralité, des conditions de plan de mélange et de chorochronicité devront donc être développées spécifiquement par la suite pour le solveur non structuré afin de permettre également leur utilisation dans le cadre d'une simulation hybride.

6.2 Application sur la configuration VKI BRITE CT3 (TATEF2)

6.2.1 Présentation du cas

La configuration VKI BRITE CT3 (ou TATEF2) représente un étage de turbine haute pression qui a été étudié en particulier par Denos [37, 38] puis par Adami [3], De La Loma [35] et Paniagua [91]. Cette configuration a fait l'objet de séries de mesures expérimentales. L'instrumentation réalisée pour les mesures est décrite dans [14] et dans [38]. On retient notamment que des mesures sont largement disponibles à mi-hauteur de veine sur le rotor et le stator. Par ailleurs, Benyahia [14] étudie numériquement la configuration complète du VKI BRITE CT3 ainsi que sa réduction à une nappe de courant à mi-hauteur de veine, appelée configuration 2.5D ou quasi-tridimensionnelle. Les résultats fournis indiquent que l'approximation quasi-tridimensionnelle est raisonnable. En outre, les méthodes d'interaction entre le rotor et le stator envisagées, le plan de mélange pour les simulations stationnaires et l'approche chorochronique pour les simulations instationnaires, permettent de considérer uniquement un seul canal inter-aube. C'est pourquoi notre étude est limitée à une nappe de courant à mi-hauteur de veine pour un canal inter-aube. La figure 6.4 qui illustre la configuration complète, comprend une représentation d'une nappe de courant à mi-hauteur de veine pour un canal inter-aube (en rouge).

Le rotor tourne à une vitesse de 6500 tours par minute et est constitué de 64 aubes. Le stator quant à lui se compose de 43 aubes. À l'entrée de l'étage, une pression totale $P_{io} = 1.65 \text{ bar}$ et une température $T_{io} = 434 \text{ K}$ sont imposées avec un écoulement purement axial. La condition de mur utilisée pour modéliser les aubes est de type paroi isotherme avec une température $T_{paroi} = 288.5 \text{ K}$. Deux régimes de fonctionnement sont étudiés et définis par la pression statique P_s imposée en sortie telle que fournie par le tableau 6.1 : il s'agit du régime nominal désigné par NOM et d'un régime dans lequel l'aube est fortement chargée désigné par HIGH.

Régime	$\frac{P_{io}}{P_s}$
HIGH	5.12
NOM	3.86

Table 6.1 – Valeur du taux de détente pour les deux régimes étudiés sur la configuration VKI BRITE CT3.

Lors de cette étude, l'approche hybride est comparée à l'approche complètement structurée, qui est rendue possible compte tenu de la simplicité géométrique du cas. Le maillage hybride est obtenu par déstructuration d'une zone entourant les aubes du rotor et du stator. La répartition entre nombre de cellules structurées et non structurées est donnée par le tableau 6.2 et par la figure 6.5. Le positionnement de la zone non structurée autour des aubes permet de traiter l'interface entre le rotor et le

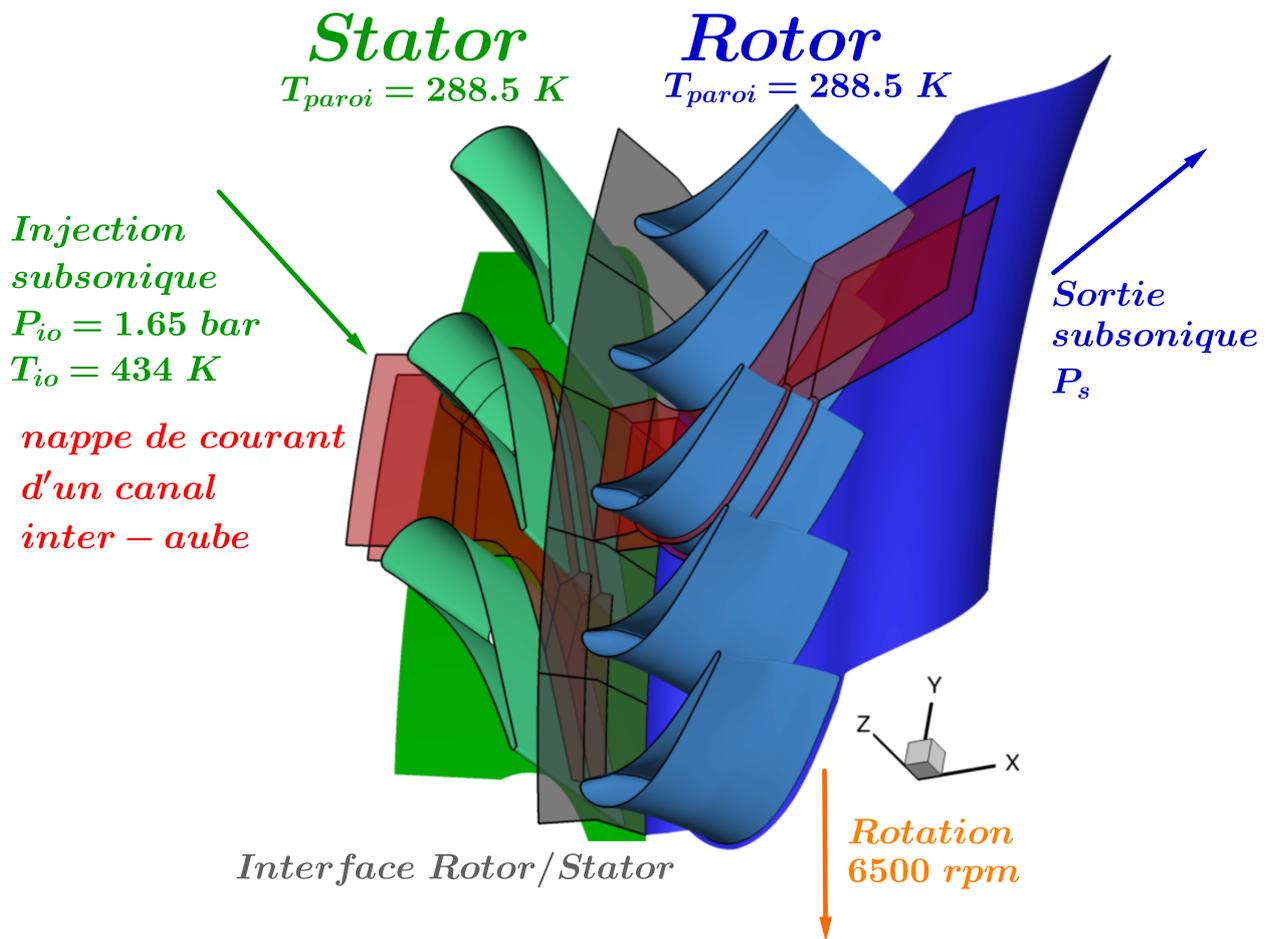


Figure 6.4 – Détails de la configuration VKI BRITE CT3.

stator ainsi que le raccord azimuthal entre les aubes d'une même roue avec une approche structurée. L'utilisation d'une approche structurée dans ces zones permet l'utilisation des fonctionnalités de plan de mélange et d'approche chorochronique.

Les calculs complètement structuré et hybride sont réalisés à iso-méthodes numériques. Celles-ci s'appuient sur une schéma de Roe d'ordre deux basé sur un gradient au centre des cellules calculé par la méthode de *quasi-Green* et sur une reconstruction linéaire au centre face sans limitation. L'intégration d'ordre deux en temps est réalisée par un schéma de *Gear* [46].

Type de zone	Stator	Rotor
Structurée	25 632	42 592
Non structurée	21 632	20 352
Total	47 264	62 944

Table 6.2 – Répartition des cellules entre zone structurée et non structurée sur la configuration VKI BRITE CT3.

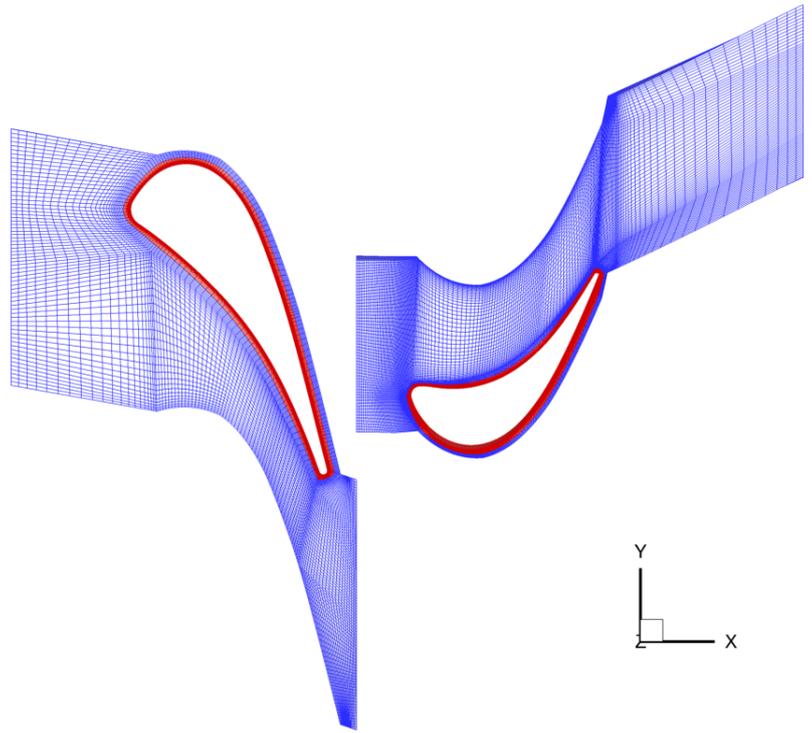


Figure 6.5 – Visualisation du maillage hybride de la configuration VKI BRITE CT3 avec en **bleu** la zone structurée et en **rouge** la zone déstructurée.

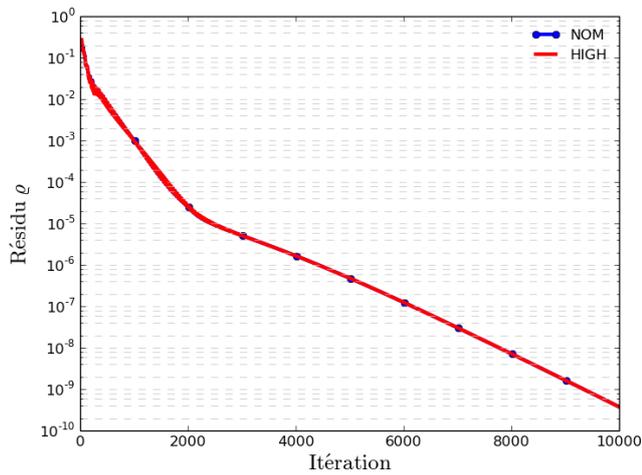
6.2.2 Calculs stationnaires

Les calculs stationnaires sont réalisés en gérant l'interface entre le rotor et le stator avec une technique de plan de mélange. Les raccords entre aubes d'une même roue sont assurés par un raccord périodique classique.

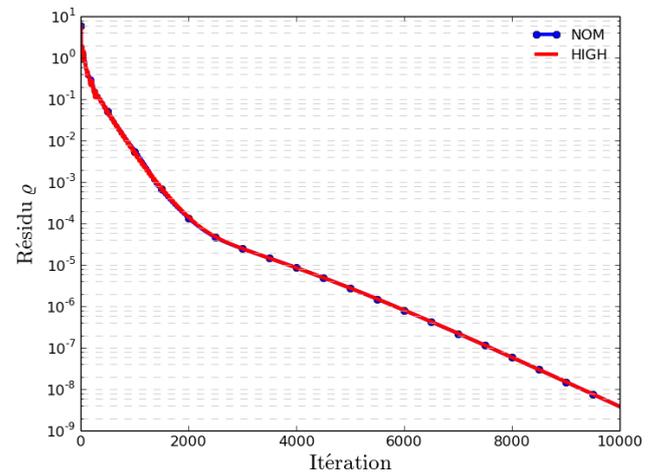
La figure 6.6 représente les courbes de convergence des résidus pour la densité sur une configuration complètement structurée (*a*) et sur un maillage hybride (*b*) pour les deux régimes d'écoulement envisagés, (cf. Table 6.1). La convergence se fait sans difficulté particulière et est très similaire pour l'ensemble des simulations, à la fois donc selon le régime d'écoulement et le type de résolution (complètement structurée ou hybride).

Comme l'illustre la figure 6.7 et comme l'indique Paniagua dans [91], la turbomachine est amorcée pour le régime le moins chargé : le débit est bloqué. Par conséquent, il est normal que la variation de la pression statique en sortie de calcul n'influence pas les valeurs de débit. Dès lors, dans une perspective de synthèse, nous ne présentons sur la figure 6.8 que les courbes de débits pour le cas nominal (les débits du rotor et du stator sont décalés pour une meilleure visibilité). Les autres régimes fournissent des courbes semblables avec, à convergence, les mêmes valeurs de débit comme en attestent les tables 6.3 et 6.4. On constate que les débits convergent bien vers la même valeur.

La qualité physique de la solution peut être appréciée par une visualisation de strioscopie qui représente le *Schlieren*, défini par $Schlieren = \frac{\|\nabla \rho\|}{\rho}$. En particulier sur le stator de la configuration, où l'on parvient à capturer correctement le choc en queue de poisson au bord de fuite du stator ainsi que sa réflexion sur l'aube suivante. Néanmoins, cette visualisation illustre également les faiblesses de cette méthode de résolution. Ni la réflexion du choc, ni le sillage du stator, pourtant bien prononcé,



(a) : configuration complètement structurée



(b) : configuration hybride

Figure 6.6 – Historique de convergence des résidus pour la densité sur la configuration VKI BRITE CT3, calculs stationnaires.

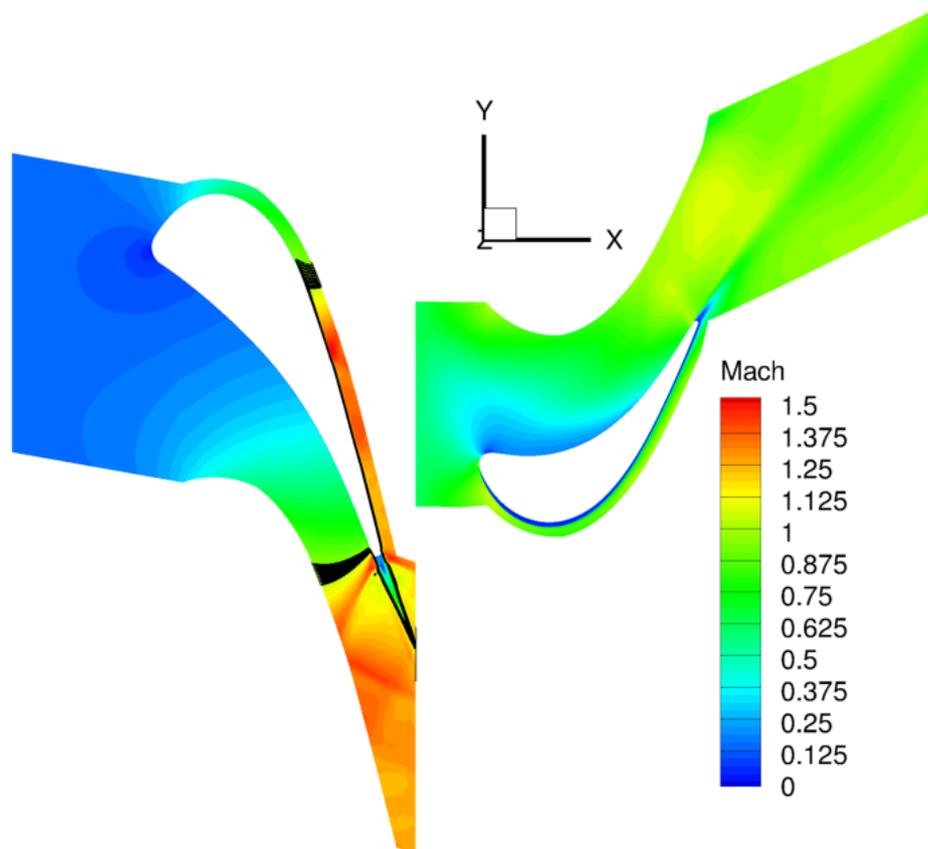


Figure 6.7 – Visualisation du blocage pour le régime NOM de la configuration VKI BRITE CT3 sur le maillage hybride. Des isovaleurs ont été ajoutées pour la gamme de nombre de Mach $[0.95, 1.05]$ afin de mieux mettre en évidence la zone sonique dans le bloc stator.

ne parviennent à être restitués au-delà de l'interface rotor/stator. Ces deux éléments n'impactent pas le rotor. Ceci constitue la principale limite de l'utilisation d'une stratégie stationnaire comme le plan de mélange pour la prise en compte de l'interaction entre le rotor et le stator. C'est la raison pour laquelle il convient de réaliser cette même étude avec une approche instationnaire en modélisant l'interface rotor/stator avec une condition chorochnique par exemple.

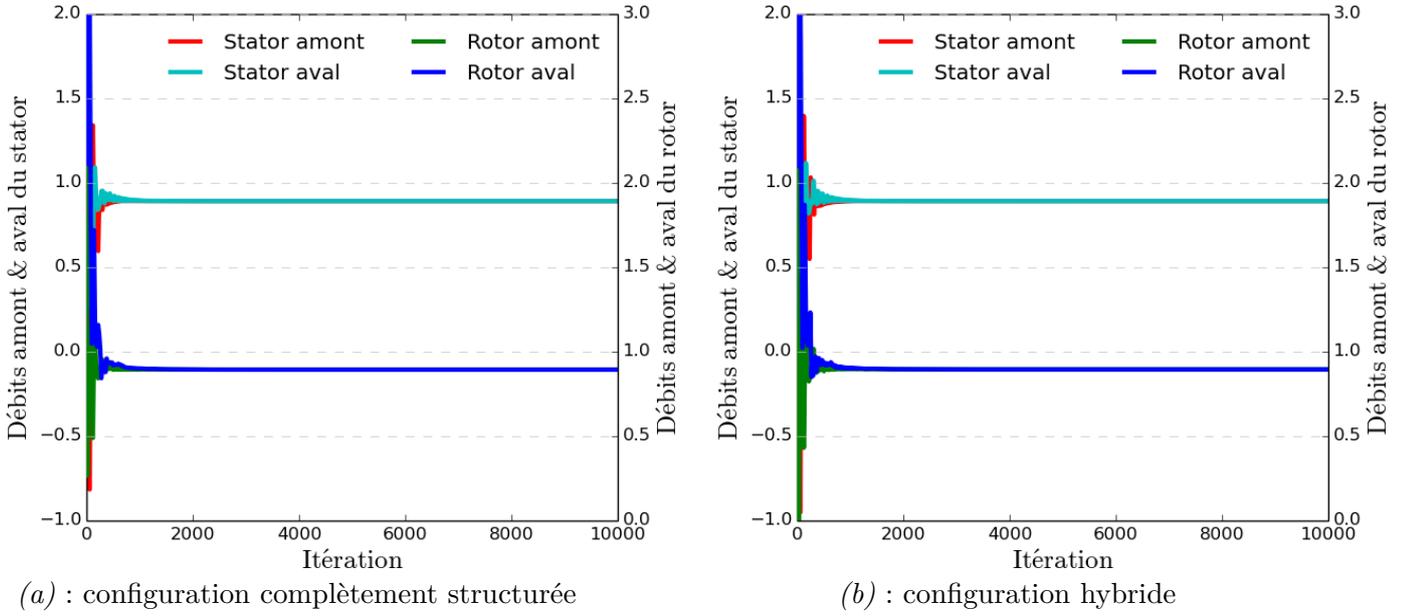


Figure 6.8 – Historique de convergence des débits (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) pour le régime nominal sur la configuration VKI BRITE CT3, calculs stationnaires.

Régime	$Q_{stator\ amont}$ ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)	$Q_{stator\ aval}$ ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)	$Q_{rotor\ amont}$ ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)	$Q_{rotor\ aval}$ ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)
NOM	$8.922521 \cdot 10^{-1}$	$8.922514 \cdot 10^{-1}$	$8.940488 \cdot 10^{-1}$	$8.940546 \cdot 10^{-1}$
HIGH	$8.922520 \cdot 10^{-1}$	$8.922513 \cdot 10^{-1}$	$8.941475 \cdot 10^{-1}$	$8.941528 \cdot 10^{-1}$

Table 6.3 – Débits obtenus à convergence sur la configuration complètement structurée du VKI BRITE CT3.

Régime	$Q_{stator\ amont}$ ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)	$Q_{stator\ aval}$ ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)	$Q_{rotor\ amont}$ ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)	$Q_{rotor\ aval}$ ($\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$)
NOM	$8.922520 \cdot 10^{-1}$	$8.922512 \cdot 10^{-1}$	$8.952891 \cdot 10^{-1}$	$8.952939 \cdot 10^{-1}$
HIGH	$8.922518 \cdot 10^{-1}$	$8.922511 \cdot 10^{-1}$	$8.953769 \cdot 10^{-1}$	$8.953813 \cdot 10^{-1}$

Table 6.4 – Débits obtenus à convergence sur la configuration hybride du VKI BRITE CT3.

Pour analyser plus finement la solution physique obtenue, on s'intéresse à l'étude de grandeurs à la paroi du rotor et du stator. La première de ces grandeurs est le nombre de Mach isentropique, défini par :

$$M_{is} = \sqrt{\left(\frac{p_t}{p_s} \frac{\gamma-1}{\gamma} - 1\right) \frac{2}{\gamma-1}} \quad (6.12)$$

avec p_t la pression totale à l'amont et p_s la pression statique locale. Pour le stator, la pression totale à l'amont est déduite des conditions limites. En ce qui concerne la pression totale à l'amont du rotor, elle est intégrée sur l'ensemble de la fenêtre partagée avec le stator.

La figure 6.10 représente le nombre de Mach isentropique en fonction de l'abscisse curviligne dans le cas de la configuration HIGH stationnaire, pour le stator (a) et le rotor (b). Par souci de concision, seuls les résultats de la configuration HIGH sont ici présentés. Rappelons que l'abscisse curviligne décrit sur $[-1; 0]$ l'intrados de l'aube et sur $[0; 1]$ son extrados ; le bord d'attaque correspond à la valeur 0 de l'abscisse curviligne et le bord de fuite est repéré par les valeurs -1 et 1 .

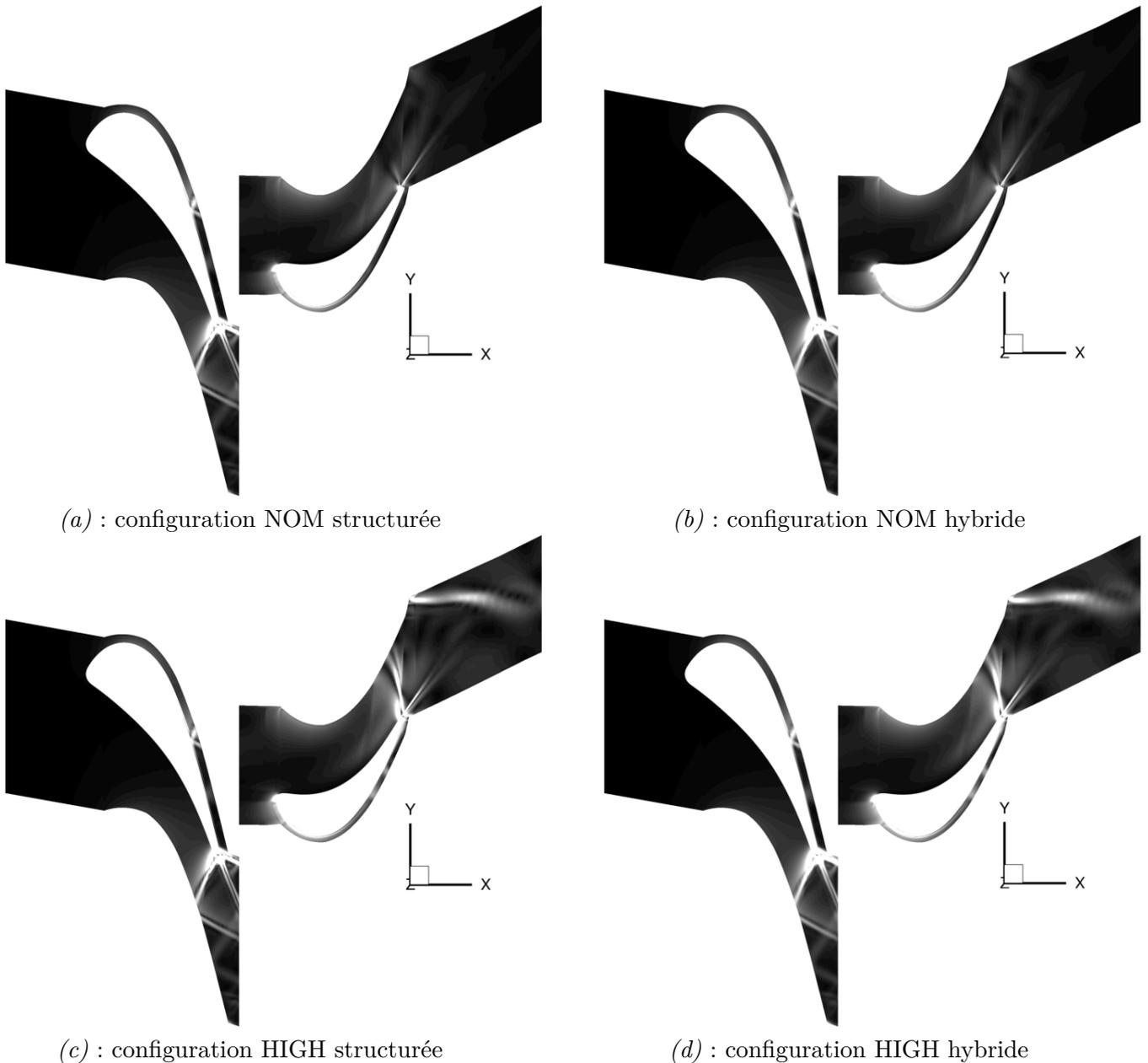


Figure 6.9 – Visualisations du *Schlieren* sur la configuration stationnaire du VKI BRITE CT3.

Il faut noter, de façon globale, qu'il y a une très bonne correspondance entre les résultats obtenus entre la simulation de référence structurée et la simulation hybride. Par ailleurs, ces deux simulations semblent également fournir des résultats très satisfaisants par rapport aux mesures expérimentales. Sur l'extrados du stator, l'écoulement est accéléré en direction du bord de fuite jusqu'à un pic de survitesse qui correspond à l'impact du choc en queue de poisson du bord de fuite de l'aube précédente sur l'aube courante. Ce choc a été mentionné lors de l'analyse des visualisations du *Schlieren* présenté sur la figure 6.9. Pour l'intrados l'accélération est progressive et s'accroît au niveau du bord de fuite en présence du choc. Pour ce régime HIGH, le bord de fuite du rotor est marqué par la présence d'un choc qui est moins visible en régime NOM. Ce choc part au niveau du bord de fuite côté intrados et vient impacter l'extrados de l'aube suivante. On retrouve trace de ce phénomène dans l'analyse du nombre de Mach isentropique pour l'extrados du rotor avec un pic de survitesse situé dans une fenêtre de valeurs d'abscisse curviligne entre 0.6 et 0.7.

La figure 6.11 représente la distribution du nombre de Nusselt en fonction de l'abscisse curviligne pour la configuration stationnaire HIGH sur le stator (a) et le rotor (b). Le nombre de Nusselt est défini

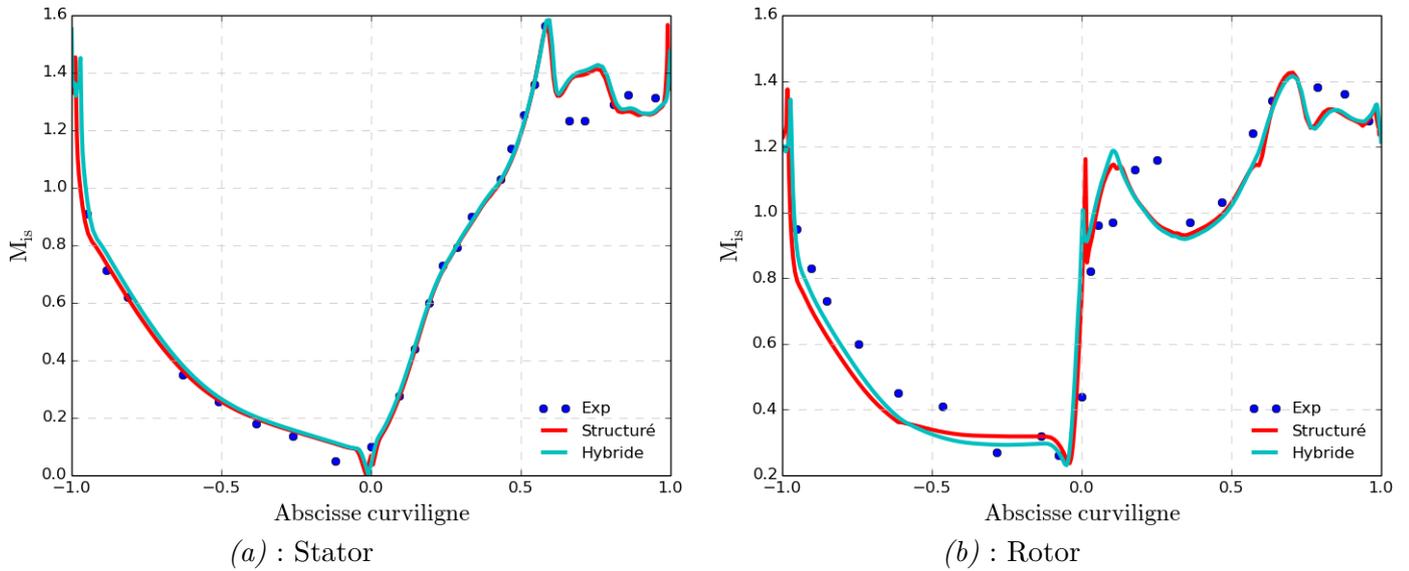


Figure 6.10 – Visualisation du nombre de Mach isentropique sur la configuration stationnaire HIGH du VKI BRITE CT3.

par :

$$Nu = \frac{h c}{k_{air}} \quad (6.13)$$

avec h le coefficient d'échange thermique (calculé à partir de la densité de flux de chaleur à la paroi et de la différence de température entre la paroi et le fluide), c la corde de l'aube et k_{air} la conductivité thermique de l'air. Si les résultats étaient en bon accord avec les données expérimentales pour le nombre de Mach isentropique, la reproduction des valeurs expérimentales du nombre de Nusselt est plus délicate à obtenir. Ceci peut notamment s'expliquer par le fait que le nombre de Nusselt traduit un phénomène d'échange thermique qui présente une dépendance importante vis-à-vis de la turbulence et de sa modélisation dans la simulation. La surestimation du nombre de Nusselt sur l'extrados du stator par rapport aux données expérimentales est ainsi attribuée par Benyahia dans [14] à une turbulence qui se déclenche trop rapidement dans le calcul RANS. En effet, avec un modèle de transition, Benyahia parvient à obtenir une meilleure correspondance pour le nombre de Nusselt sur l'extrados du stator. En ce qui concerne le rotor, la physique réelle de l'écoulement est hautement instationnaire. La non prise en compte des aspects instationnaires et l'emploi d'une modélisation RANS de la turbulence conduisent à une mauvaise capture des phénomènes d'échange thermique à la paroi du rotor.

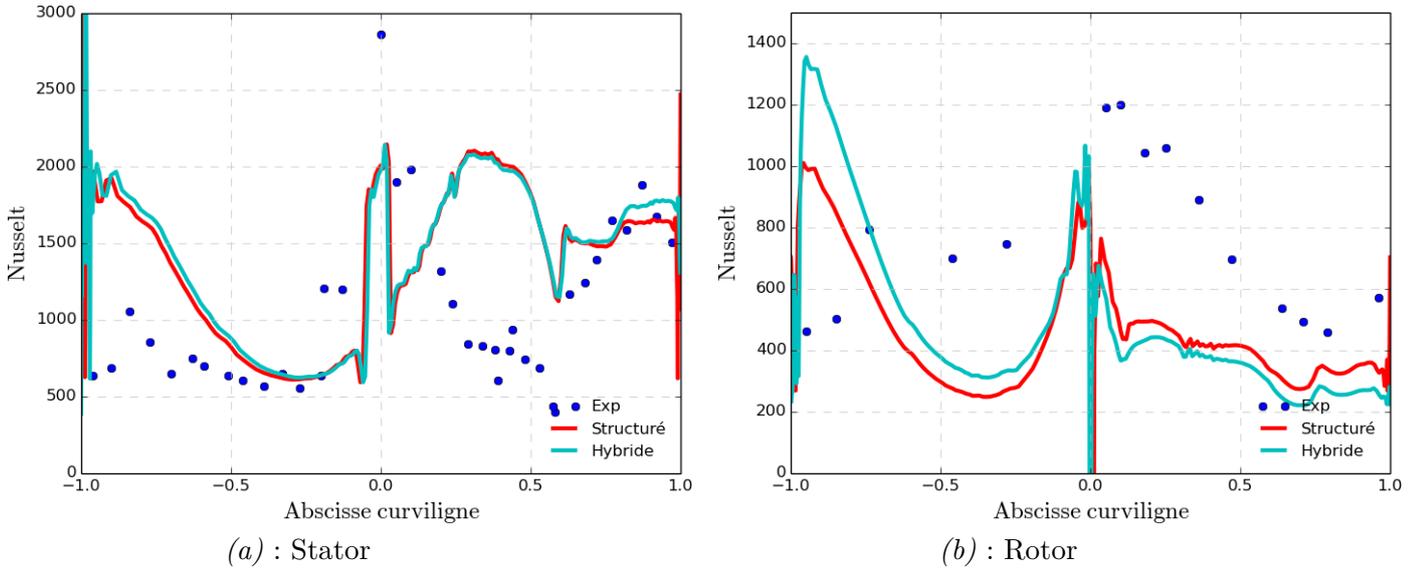


Figure 6.11 – Visualisation du nombre de Nusselt sur la configuration stationnaire HIGH du VKI BRITE CT3.

6.2.3 Calculs instationnaires

Pour la réalisation d'une simulation instationnaire avec une méthode chorochronique, il convient d'être précis sur les périodicités temporelles. L'avance en temps est gérée par un pas de temps global, dt . Pour un avancement de dt , on souhaite réaliser l'équivalent d'une partie de rotation de $\frac{1}{k} \frac{2\pi}{N_s \cdot N_r}$ avec N_s le nombre d'aubes du stator et N_r celui du rotor et k le nombre de portions de cette rotation. Dans notre cas, $k = 10$. Dès lors : $dt = \frac{2\pi}{k \cdot \Omega_{r/s} \cdot N_r \cdot N_s}$ avec dt en s et $\Omega_{r/s}$ la vitesse de rotation du rotor par rapport au stator en $rad.s^{-1}$. Pour amorcer le calcul, une première rotation complète est effectuée. Cette première rotation représente 27520 itérations dans notre cas. En effet, $N_{iter\ 1\ tour} = \frac{t_1\ tour}{dt} = \frac{2\pi}{\Omega_{r/s}} \frac{1}{dt} = k \cdot N_r \cdot N_s = 27520$. À l'issue de ces 27520 itérations, les hypothèses chorochroniques permettent de réduire l'étude à une fenêtre de $k \cdot N_r$ itérations, soit 640 itérations.

La figure 6.12 présente l'historique de convergence des résidus pour la densité pour les configurations instationnaires NOM et HIGH hybrides. La figure 6.13 fournit quant à elle une représentation de l'historique de convergence des différents débits pour la configuration instationnaire NOM hybride. Sur ces deux images, on mesure pleinement le caractère instationnaire de la simulation. La figure 6.14 propose d'isoler chacun des débits et de visualiser quelques périodes. On remarque alors que :

- la convergence des différents débits est soumise à un phénomène périodique
- le débit amont du stator n'est pas concerné par ce phénomène périodique et converge comme si la simulation était stationnaire, ce qui est logique, puisque les effets potentiels du rotor ne peuvent remonter le col sonique relevé sur le stator, ce qui les empêchent de parvenir à l'amont du stator et d'en influencer le débit.
- la fréquence du phénomène périodique sur le stator est : $f_{stator} = \frac{1}{T_{stator}} = \frac{1}{k \cdot N_s \cdot dt} = \frac{\Omega_{r/s} \cdot N_r}{2\pi}$, ce que l'on retrouve bien avec une période de 430 itérations
- la fréquence du phénomène périodique sur le rotor est : $f_{rotor} = \frac{1}{T_{rotor}} = \frac{1}{k \cdot N_r \cdot dt} = \frac{\Omega_{r/s} \cdot N_s}{2\pi}$, ce que l'on retrouve également, à l'amont et à l'aval avec une période de 640 itérations.

Une visualisation du *Schlieren* donnée par la figure 6.15 permet de constater que les chocs et le sillage du stator traversent correctement l'interface entre le rotor et le stator et qu'ils impactent le rotor. Le balayage du rotor fait varier l'angle du choc au bord de fuite de l'aube du stator. Ceci modifie le point d'impact de ce choc sur l'extrados de l'aube suivante du stator. Par ailleurs, la réflexion de ce choc atteint le bord d'attaque des aubes du rotor. Le battement de ce choc couplé au défilement du rotor génère une bulle d'entropie au niveau du bord d'attaque des aubes du rotor qui se propage le long de l'extrados du rotor jusqu'au bord de fuite. Tous ces phénomènes instationnaires, non illustrés

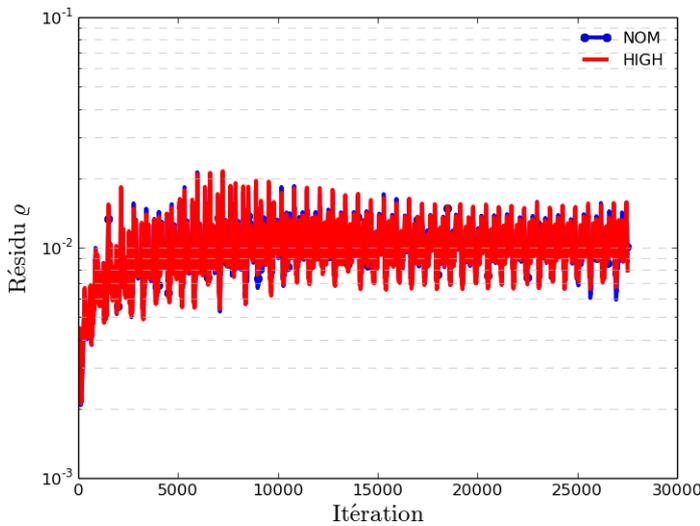


Figure 6.12 – Historique de convergence des résidus de la densité pour les régimes NOM et HIGH sur la configuration hybride VKI BRITE CT3, calculs instationnaires.

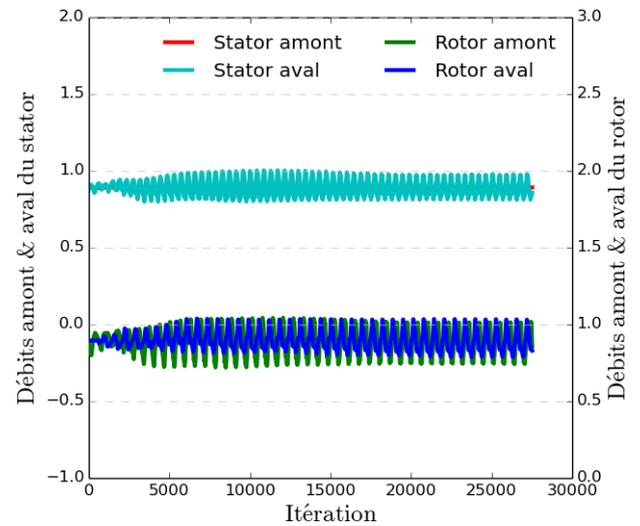


Figure 6.13 – Historique de convergence des débits (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$) pour le régime NOM sur la configuration hybride VKI BRITE CT3, calculs instationnaires.

ici mais présentés dans [91], ne peuvent être capturés par une simulation stationnaire de type plan de mélange. On constate également le bon accord obtenu entre les simulations hybrides et les simulations structurées de référence grâce à la figure 6.16.

On s'intéresse finalement aux grandeurs pariétales déjà étudiées pour les simulations stationnaires : le nombre de Mach isentropique et le nombre de Nusselt. Pour obtenir ces grandeurs, une moyenne en temps sur les champs physiques est réalisée sur la période des 640 itérations de calcul. On trace simultanément les résultats stationnaires (en trait plein) et les résultats instationnaires moyennés (en pointillés) afin de mieux visualiser l'impact de la prise en compte des instationnarités. La figure 6.17 représente le nombre de Mach isentropique en fonction de l'abscisse curviligne pour le régime HIGH de la configuration du VKI BRITE CT3. On constate que les courbes ont exactement les mêmes tendances en stationnaire et en instationnaire. On réalise que le rotor est beaucoup plus impacté par la prise en compte des phénomènes instationnaires que le stator, ce qui était attendu. Enfin, le bon accord des résultats obtenus en hybride avec les données expérimentales et le calcul de référence structuré permet d'être confiant quant au comportement de cette stratégie chorochronique hybride.

En ce qui concerne le nombre de Nusselt, figure 6.18, la prise en compte des instationnarités du calcul ne permet pas d'améliorer la cohérence des résultats avec les données expérimentales. Une fois de plus, cette amélioration semble devoir passer par l'utilisation d'un modèle de transition comme l'explique Benyahia dans [14]. On peut néanmoins logiquement constater que, tout comme pour le nombre de Mach isentropique, la distribution de Nusselt le long du rotor subit bien plus de modifications que celle le long du stator du fait de la prise en compte des phénomènes instationnaires.

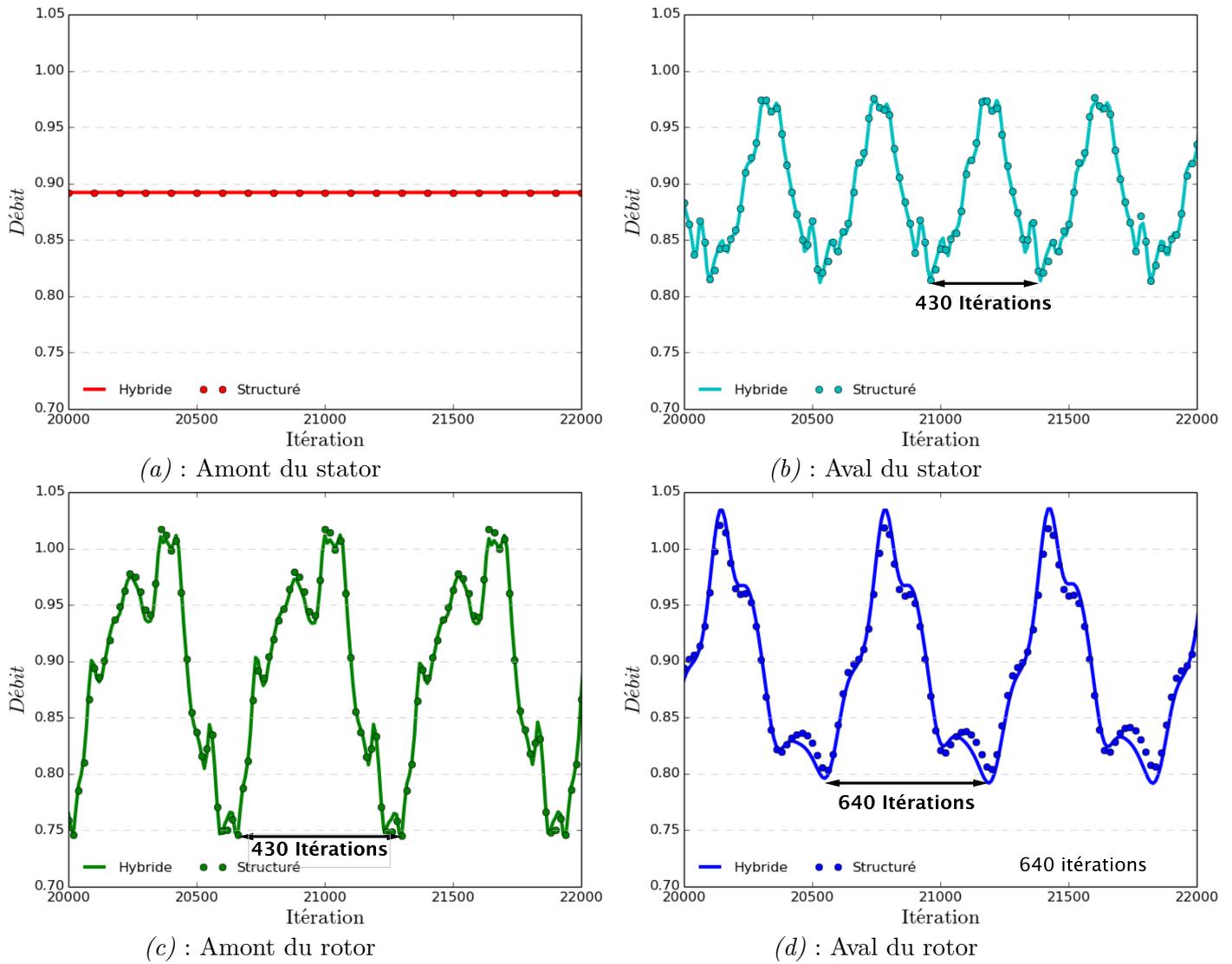
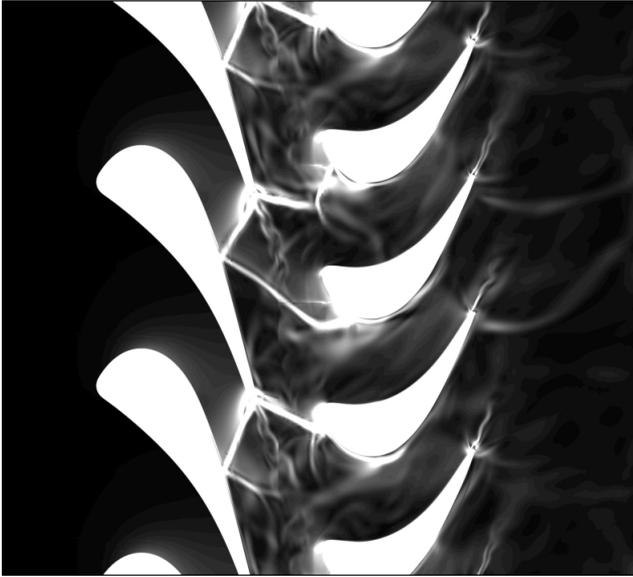
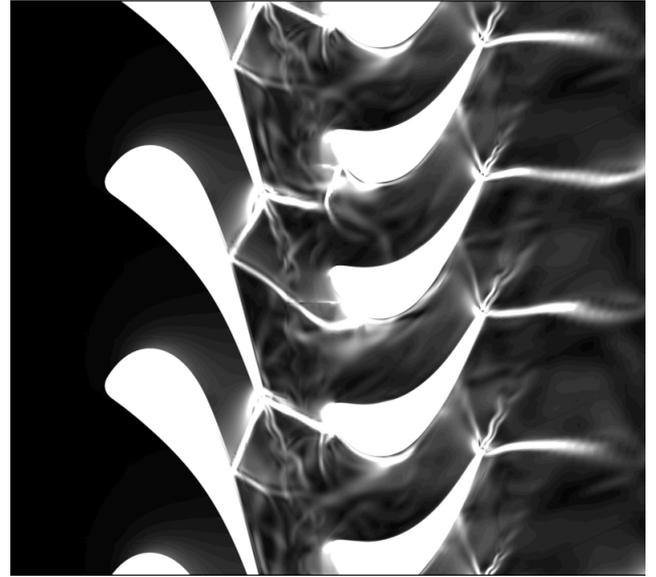


Figure 6.14 – Visualisation de la convergence des débits sur quelques périodes pour les configurations NOM instationnaires structurée et hybride du VKI BRITE CT3.

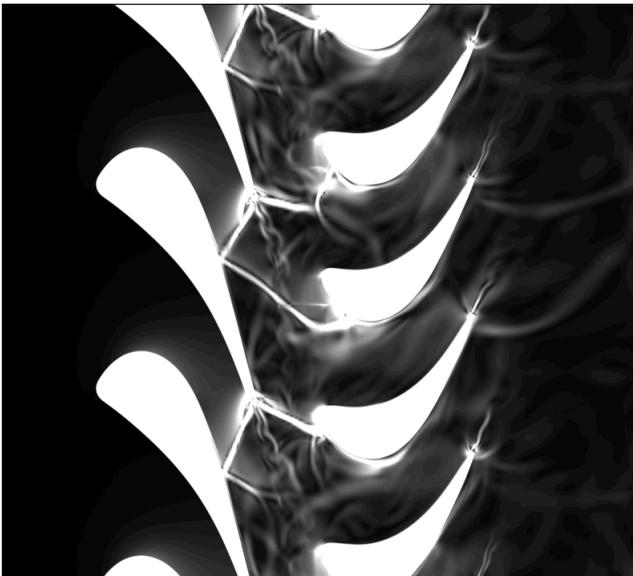


(a) : Régime NOM

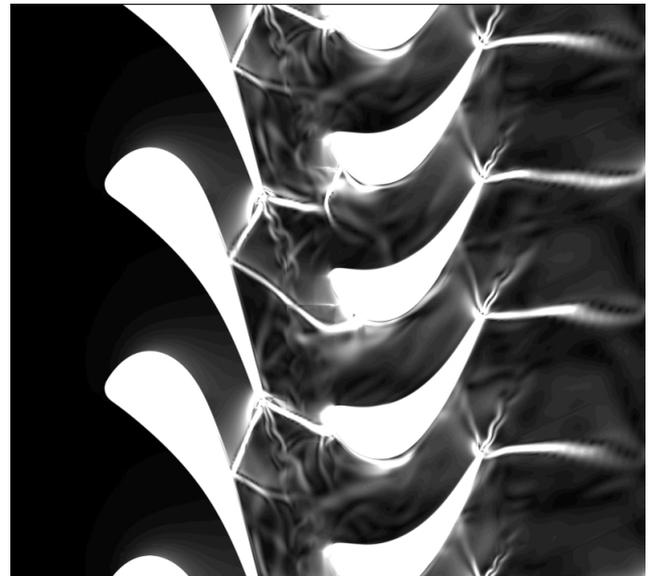


(b) : Régime HIGH

Figure 6.15 – Visualisation du *Schlieren* à l'itération 28000 sur la configuration instationnaire hybride du VKI BRITE CT3.



(a) : Régime NOM



(b) : Régime HIGH

Figure 6.16 – Visualisation du *Schlieren* à l'itération 28000 sur la configuration instationnaire structurée du VKI BRITE CT3.

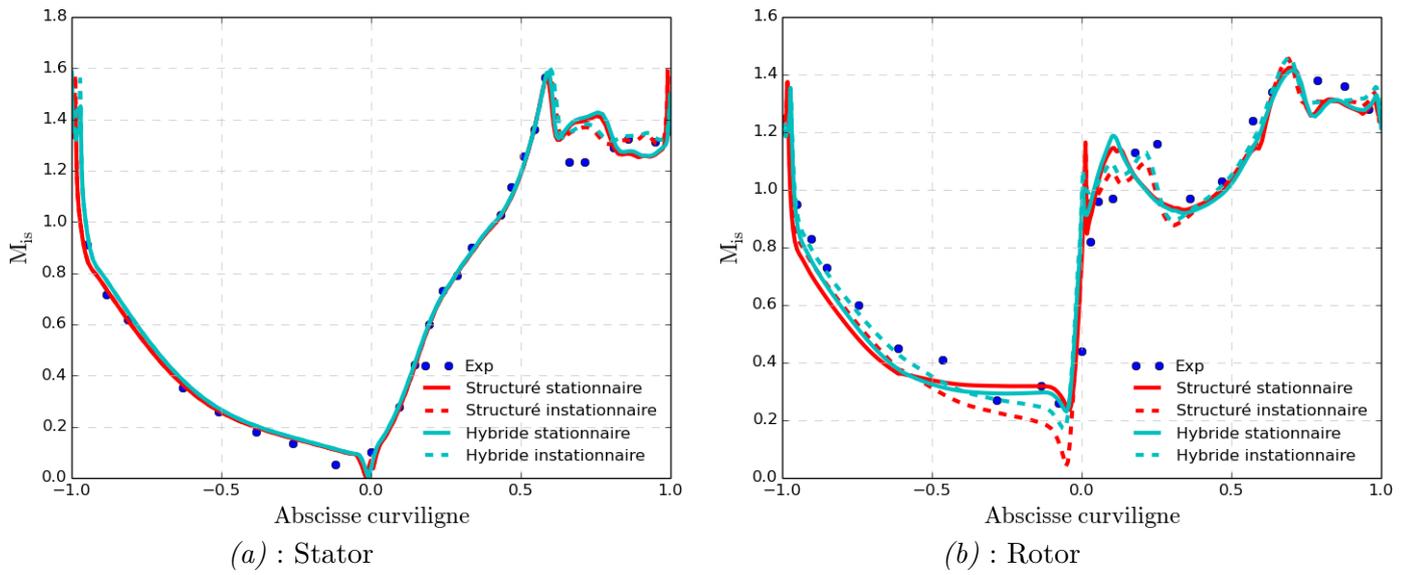


Figure 6.17 – Visualisation du nombre de Mach isentropique sur les configurations stationnaire et instationnaire HIGH du VKI BRITE CT3.

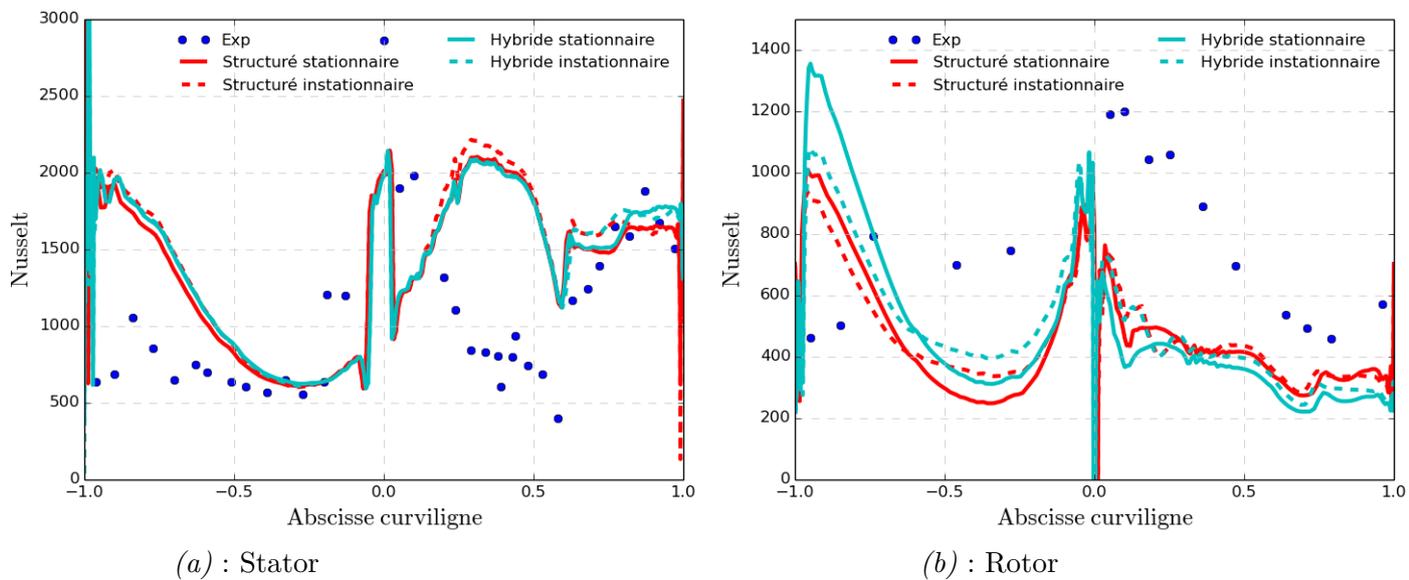


Figure 6.18 – Visualisation du nombre de Nusselt sur les configurations stationnaire et instationnaire HIGH du VKI BRITE CT3.

6.3 Conclusions du chapitre

L'intérêt et la difficulté de la prise en compte de l'interaction entre un rotor et un stator ont été expliqués. Deux stratégies de modélisation de cette interaction ont été succinctement présentées. La première, le plan de mélange, est adaptée à des simulations stationnaires. La seconde, la stratégie chorochronique, s'appuie sur une hypothèse de périodicité spatio-temporelle et permet de réaliser des simulations instationnaires en modélisant l'interaction du rotor avec le stator. Elle repose sur une hypothèse de phénomènes périodiques dont les fréquences sont liées à la fréquence de passage des aubes.

La stratégie hybride permet de tirer profit de ces deux méthodes car elles sont d'ores et déjà présentes et utilisées au sein du solveur structuré. Cet avantage permet de réaliser des simulations d'étage complet de manière hybride en prenant en compte des effets technologiques proches de la paroi des aubes. La démonstration de la faisabilité de cette méthode a été établie dans ce chapitre avec en particulier la réalisation de simulations hybrides sur l'étage de turbine VKI BRITE CT3. L'interaction entre le rotor et le stator a été modélisée à la fois avec un plan de mélange et une condition chorochronique. Les résultats ont été comparés à des résultats expérimentaux ainsi qu'à des simulations de référence structurées. Cette comparaison a été réalisée en utilisant un maillage réellement hybride, au sens où composé de blocs structurés et non structurés, mais qui restait très régulier dans la mesure où les blocs non structurés ont été obtenus "artificiellement" en déstructurant certaines zones du maillage structuré de référence. Ceci explique également que les simulations aient pu être menées en mettant en œuvre la même approche numérique d'ordre deux et non limitée dans les blocs structurés et non structurés. Si le solveur hybride peut donc être considéré comme validé sur ces simulations instationnaires à la physique exigeante, il restera à éprouver ce solveur pour des configurations instationnaires incluant des effets technologiques et les maillages exigeants en termes de robustesse qui leur sont associés.

Un autre point restant à éclaircir est l'origine des différences observées entre solution en maillage structuré et solution en maillage hybride sur les visualisations du nombre de Mach isentropique et du nombre de Nusselt, en régime stationnaire comme en régime instationnaire (cf. figures 6.10, 6.11 et 6.17, 6.18). En effet, alors qu'il avait pu être vérifié dans la section 3.4 du chapitre 3 que des simulations structurée et non structurée réalisées à iso-maillage et iso-méthode de discrétisation conduisaient à des solutions identiques, tel n'est pas le cas pour la configuration étudiée dans ce chapitre. Les écarts structuré / hybride restent certes globalement faibles sur le stator mais sont plus marqués sur le rotor. À l'heure actuelle, les raisons de ces écarts ne sont pas clairement identifiées. Même si des différences existent entre calcul structuré et calcul hybride sur la convergence vers l'état stationnaire pour le cas avec plan de mélange (cf. Figure 6.6), les méthodes d'avancement en temps n'étant pas rigoureusement identiques entre les deux solveurs, les niveaux de convergence atteints sont largement suffisants pour écarter toute influence du processus de convergence. La convergence en sous-itération dans le cas instationnaire est également suffisante pour que la stratégie d'avancement en temps ne soit pas une source d'écart. Une source plausible, mais pas formellement établie, d'explication de ces écarts pourrait être la stratégie de post-traitement des solutions : par exemple, les plans de coupe ne sont pas nécessairement calculés de façon identique en structuré et en hybride.

Conclusion

Nous avons proposé dans cette thèse un ensemble de stratégies numériques permettant de simuler à l'ordre deux en espace des écoulements en turbomachines mettant en jeu des géométries et une physique complexe à l'aide d'un solveur dit hybride.

Un tel solveur associe des zones structurées et non structurées au sein d'un même maillage et applique des méthodes de discrétisation adaptées, *i.e.* structurée ou non structurée, à chaque type de zone. Ces simulations hybrides apportent une réponse aux attentes industrielles actuelles en combinant la flexibilité d'un maillage non structuré pour la prise en compte souple des effets technologiques et de leurs particularités géométriques et l'efficacité d'un solveur structuré qui peut être appliqué dans les zones de l'écoulement régulièrement maillées en structuré, comme expliqué dans le chapitre 1 du mémoire.

Nous avons pu nous appuyer au démarrage de la thèse sur le solveur hybride existant elsA-H, conjointement développé par l'ONERA et le CERFACS, solveur qui a lui-même bénéficié pour sa partie structurée de l'héritage du solveur structuré multibloc elsA, développé depuis bientôt 20 ans. Compte tenu de son développement plus récent, la partie non structurée du solveur elsA-H ne pouvait pas présenter le même niveau de maturité et c'est la raison pour laquelle un état de l'art approfondi de la discrétisation spatiale disponible initialement a été réalisé. Cette analyse, présentée au chapitre 2, a conduit au constat que trois éléments étaient manquants pour réellement obtenir une discrétisation spatiale d'ordre deux en maillage non structuré : un calcul de gradient au centre des cellules à l'ordre un, un calcul de gradient au centre des faces à l'ordre un et une reconstruction au centre de la face. Des études de convergence en maillage pour une solution analytique ont notamment mis en évidence la précision insuffisante, en maillage quelconque, de la méthode de *Green-Gauss* disponible pour l'estimation du gradient au centre des cellules.

Faisant suite à ce constat, une phase d'amélioration de la précision de la discrétisation spatiale a été entreprise au chapitre 3 afin d'atteindre effectivement l'ordre deux pour le solveur hybride. L'étude de convergence en maillage pour une solution analytique a montré qu'une stratégie de calcul par *Moindres Carrés* (*LSQ*) permettait d'obtenir un gradient d'ordre un sur maillage quelconque. Une nouvelle méthode proposée par [96], appelée *quasi-Green* (ou *qG*) et qui consiste à corriger la méthode de calcul de *Green-Gauss* par des considérations purement géométriques, permet également d'estimer un gradient au centre d'une cellule à l'ordre un au moins quelle que soit la déformation du maillage. À l'issue de cette étude, certaines méthodes (*Moindres Carrés pondérés* ou *itératifs*, *Moindres Carrés* sur supports étendus) ont été écartées pour des raisons de coût ou de complexité de mise en œuvre compte tenu de la contrainte de raccord structuré / non structuré utilisant une unique rangée de cellules fictives. Les autres méthodes (*LSQ*, *qG*) ont été retenues pour être implémentées dans le solveur hybride elsA-H.

Une fois ces développements effectués, la nouvelle version du solveur hybride enrichie de ces améliorations en terme de précision a été validée sur des écoulements de type fluide parfait, laminaire et turbulent. Cette validation a été réalisée sur des maillages hybrides principalement obtenus par découpage et déstructuration de maillages structurés disponibles dans la littérature pour ces configurations qui restent du domaine académique. La précision du solveur a été évaluée sur chacune de ces configurations académiques par l'analyse de données pertinentes pour le cas et par la confrontation à des résultats expérimentaux, théoriques ou numériques.

Forts des résultats de cette validation, une simulation se rapprochant des intérêts industriels a pu être envisagée : un procédé de *film cooling* sur une plaque plane. Dans cette configuration, un fluide chaud s'écoule le long d'une plaque plane. De l'air frais est injecté par le biais d'un trou percé dans la plaque. Cette injection a pour but de refroidir l'écoulement et de protéger thermiquement la plaque plane à l'aval du trou. Cette configuration représente une simplification académique des effets technologiques de *film cooling* mis en œuvre sur les aubes de turbine, d'où l'intérêt de son étude dans le cadre de cette thèse. Un premier jeu de maillage servant de référence structurée et non structurée a permis la réalisation de simulations à l'ordre deux. En revanche, avec un maillage hybride, la simulation à l'ordre deux est restée vouée à l'échec et seul un calcul d'ordre un a pu être réalisé.

Cet échec nous a permis de prendre conscience des contraintes fortes en terme de maillage imposées par la stratégie hybride coïncidente. Comme expliqué dans le chapitre 4, la région du raccord hybride coïncident est une zone très complexe à mailler, entraînant nécessairement de forts sauts de taille de maille, des pyramides ou des tétraèdres fortement anisotropes. En se basant sur des critères géométriques d'évaluation de qualité du maillage, les maillages générés par l'approche hybride coïncidente peuvent être considérés comme de très mauvaise qualité. Ce constat soulève la question de la robustesse du solveur hybride sur des maillages de qualité géométrique faible. Plus généralement, cette question peut être étendue à des maillages mixtes (maillages non structurés comprenant différents types d'éléments) de mauvaise qualité pour tout solveur. Il s'agit d'un sujet qui a longtemps été "laissé pour compte". En effet, il apparaissait préférable de refaire un maillage plus "propre" plutôt que de s'intéresser à la robustesse du solveur. Néanmoins, aujourd'hui, avec des configurations géométriquement de plus en plus complexes, il devient très délicat et trop consommateur en temps d'améliorer la qualité d'un maillage. Différents auteurs se sont donc intéressés à cette question d'amélioration de la robustesse des solveurs dans des maillages déformés ainsi qu'à celle de la fiabilité de la solution obtenue sur de tels maillages. Dans le chapitre 4, plusieurs méthodes permettant d'améliorer la robustesse sont proposées. Elles ont toutes été implantées dans le solveur hybride elsA-H.

Ces méthodes d'amélioration de la robustesse sont employées dans la suite du chapitre 4 afin de parvenir à réaliser des simulations d'ordre deux sur le maillage hybride de la configuration Film Cooling et permettent bien l'aboutissement des calculs. En comparant les résultats obtenus avec ceux des références structurées et non structurées, on observe la dissipation introduite par ces méthodes sur la trace thermique. Néanmoins, il faut avoir à l'esprit que cette dissipation peut être en partie due à un effet de maillage, puisque les maillages hybrides et structurés sont différents en terme d'éléments et de densification et que cette dissipation de trace thermique est de toute façon bien plus faible que celle présente pour le calcul à l'ordre un sur le même maillage. En fin de compte, l'expérience numérique menée indique qu'il reste nettement préférable de réaliser une simulation hybride d'ordre deux, de précision effective dégradée par la technique d'amélioration de la robustesse, plutôt que de réaliser une simulation d'ordre un.

Ce premier calcul hybride d'effet technologique ouvre les portes à des simulations plus complexes et plus proches de la réalité quotidienne des bureaux d'étude. Un ensemble de trois cas d'aube isolée est ainsi abordé dans le chapitre 5.

La première configuration vise à prendre en compte un congé de raccordement en pied de pale. Les résultats hybrides obtenus sont confrontés à ceux d'une simulation de type chimère prenant en compte ce congé de raccordement et d'une simulation de l'aube lisse sans congé de raccordement. Cette étude montre que sur la majeure partie de la hauteur de veine, la prise en compte du congé de raccordement, qu'elle soit faite par une approche hybride ou chimère, n'induit pas de différence majeure avec la simulation privée de congé. Néanmoins, il est noté que dans une zone de l'intrados proche moyeu, la physique des écoulements secondaires peut être fortement modifiée par la prise en compte du congé de raccordement, à la fois par une approche chimère et une approche hybride (d'ordre deux). Ce cas d'étude met également en évidence les propriétés supérieures de conservation du débit de l'approche hybride par rapport à l'approche chimère.

La deuxième configuration étudiée propose l'observation de trous de refroidissement sur une tranche

d'aube. Deux trous sont présents sur l'intrados de l'aube avec des directions de soufflage très différentes, la première étant transverse à la direction de l'écoulement et la seconde dans le sens de l'écoulement. Cette étude s'appuie sur une comparaison à un calcul représentant ces deux trous grâce à une approche chimère. La physique du refroidissement thermique mis en jeu par les deux trous est en bon accord entre la simulation hybride et la simulation chimère. De plus, pour cette configuration aussi, on relève un manque de conservativité de l'approche chimère qui est problématique dans le cadre de simulations de turbomachine et dont ne souffre pas l'approche hybride.

Lors de l'étude de la troisième configuration d'aube isolée, l'intégralité d'un système de refroidissement d'une aube a été pris en compte. Ceci représente seize trous de refroidissement répartis en deux rangées, treize fentes au bord de fuite et trois cheminées internes d'alimentation. Sur une configuration de cette complexité, la mise en œuvre d'un calcul de référence chimère est hors de portée et l'approche hybride prend alors tout son intérêt. L'évaluation des résultats fournis par l'approche hybride est malheureusement rendue délicate par le fait que le système de refroidissement étudié est un configuration "fictive" pour laquelle aucune donnée numérique ou expérimentale n'est disponible en vue d'une comparaison. En dépit de difficulté de convergence, l'intérêt d'une simulation d'ordre deux aidée en robustesse par rapport à une simulation d'ordre un apparaît sans conteste, ce qui constitue une avancée très prometteuse pour l'approche hybride développée.

Si l'on s'est pleinement intéressé à la prise en compte de quelques effets technologiques sur des configurations d'aubes isolées au cours du chapitre 5, l'application industrielle visée à terme est plus ambitieuse encore. Elle implique d'être en mesure de réaliser en hybride des calculs pour lesquels interagissent rotors et stators. Une première étape a été réalisée dans ce sens au cours de cette thèse et est présentée dans le chapitre 6. Une stratégie qui consiste à localiser les zones non structurées proche des parois et à s'appuyer sur les fonctionnalités structurées avancées du solveur en terme d'interaction entre un rotor et un stator a été proposée. Un tel positionnement des zones non structurées impliquent qu'elles sont éloignées de l'interface entre le rotor et le stator, ainsi que des périodicités hautes et basses du domaine. Il faut être conscient que cette stratégie atteindra rapidement ses limites en terme d'utilisation. Toutefois, une démonstration de faisabilité a été réalisée sur la configuration quasi-tridimensionnelle du VKI BRITE CT3 et les résultats obtenus, tant en stationnaire avec une interface rotor/stator gérée par un plan de mélange qu'en instationnaire avec l'utilisation des fonctionnalités chorochroniques, peuvent être considérés comme très encourageants.

À l'issue de cette thèse, il a donc été démontré que le solveur hybride elsA-H dans son état actuel de développement était capable de traiter à l'ordre deux des effets technologiques en turbomachines et de réaliser des simulations d'interaction entre un rotor et un stator.

Une suite logique à envisager est la réalisation d'une configuration d'interaction entre un rotor et un stator en prenant en compte des effets technologiques. La configuration du VKI BRITE CT3 avec une fente au bord de fuite du stator fait office de bon candidat pour cet objectif, puisque ce cas existe et que des données de comparaison sont disponibles. Naturellement, la suite en terme de simulation orientée turbomachine consiste à monter en niveau de difficulté et à avoir des configurations de plus en plus proches de la réalité. Ceci implique nécessairement un nombre d'éléments bien plus important que les simulations qui ont été réalisées au cours de cette thèse. D'autres configurations orientées vers l'aérodynamique externe sont susceptibles de tirer profit de l'approche hybride. Une démonstration d'intérêt de l'approche hybride en aérodynamique externe serait certainement la bienvenue.

Quelques évolutions pour le calcul du gradient au centre des cellules peuvent encore être envisagées. La technique dite *GLSQ*, proposée par Shima dans [106, 107] et exposée dans le chapitre 4, repose sur l'utilisation conjointe des méthodes de calcul de gradient au centre des cellules de type *Green-Gauss* et *Moindres Carrés*. La contribution de chaque méthode est déterminée selon un critère géométrique. Il pourrait être intéressant, compte tenu des bonnes propriétés observées pour l'estimation du gradient par méthode de *quasi-Green*, de coupler le gradient obtenu par la méthode de *Green-Gauss* non plus au gradient calculé par *Moindres Carrés* mais à celui calculé par la méthode de *quasi-Green*.

Lors de ces travaux, un accent particulier a été placé sur la précision et la robustesse de la discrétisation spatiale. Ceci s’est certainement fait au détriment d’une étude des performances (efficacité de la résolution) de l’hybride qui aurait certainement pu conduire à des propositions d’amélioration du solveur tant côté non structuré que structuré. Ce travail d’amélioration des performances reste à accomplir. Il englobe, entre autre, tout ce qui a trait à la phase implicite ou à la stratégie multigrille. Cela concerne également l’architecture du code en vue d’une optimisation des calculs dans des thématiques HPC. Ces évolutions vont s’avérer nécessaires puisque l’objectif est de s’orienter vers des configurations toujours plus réalistes, donc toujours plus coûteuses en nombre d’éléments.

Parallèlement à l’avancement du solveur hybride, la stratégie de maillage hybride a également évolué, en s’appuyant sur les propositions de Lionel Castillon. Cette stratégie de maillage consiste à retirer une zone d’un maillage structuré et à la remplacer par une zone non structurée prenant en compte la géométrie de l’effet technologique d’intérêt. Le passage d’une zone structurée à une zone non structurée se fait par raccordement coïncident, comme expliqué dans ce manuscrit. Avec ces contraintes, la stratégie de maillage des zones non structurées repose sur :

- des maillages de couche limite en prismes afin de triangulariser le maillage de peau tout en conservant une bonne discrétisation de la couche limite
- des pyramides en guise de premier élément aux raccords hybrides
- une migration vers des tétraèdres pour bénéficier de la flexibilité du maillage pour le reste des éléments.

Comme détaillé dans le chapitre 4 les contraintes de cette stratégie sont lourdes en terme de régularité du maillage et pèsent *in fine* sur la qualité géométrique du maillage et donc sur la robustesse du calcul. D’autres stratégies pourraient être envisagées comme par exemple la mise en place de raccords non coïncidents conservatifs [79]. Une autre piste résiderait dans le passage du solveur en polyédrique. En effet, actuellement, le solveur non structuré accepte uniquement des éléments de type hexaédrique, pyramidal, prismatique ou tétraédrique en tridimensionnel. Un code polyédrique, qui pourrait traiter n’importe quel élément constitué de faces triangulaires ou quadrangulaires, lèverait définitivement et simplement la contrainte des raccords hybrides. Il suffirait que le premier élément non structuré soit un hexaèdre dont chaque face, ne donnant pas sur le premier hexaèdre du bloc structuré voisin, pourrait être découpée en triangles ou quadrangles pour être distribuée sur plusieurs cellules. Ceci permettrait de gérer plus facilement les sauts de maille ainsi que l’anisotropie des éléments non structurés proche d’un raccord hybride qui resterait coïncident. Par ailleurs, il faut noter que la génération de maillage de type octree est extrêmement rapide et que leur utilisation serait rendue possible avec un solveur polyédrique. Dans la même lignée, le passage du code en polygonal permettrait de généraliser au maximum le solveur. Enfin, avoir un solveur complètement générique dans les éléments qu’il traite permettrait également de recourir à des stratégies d’intersection de maillage. Dans une optique d’utilisation en bureau d’étude pour la modélisation des effets technologiques, ce qui est le but premier de la stratégie hybride, cette capacité permettrait de générer des maillages hybrides de manière extrêmement rapide et surtout très facilement paramétrable (position des trous de refroidissement, angle, etc. ...), ce qui paraît un réel avantage dans une étape de design.

Pour conclure sur ces perspectives, afin que la stratégie hybride d’elsA puisse être pleinement utilisée, il est important que l’accent soit également porté sur le pré- et le post-traitement. Le découpage d’un maillage hybride est ainsi un rouage important de la stratégie hybride appliquée à des configurations complexes et demande un vrai travail spécifique de développement pour être mis au point ; il ne peut être obtenu de façon immédiate en s’appuyant sur des outils existants de découpage (splitters) de maillage structuré et de maillage non structuré. En ce qui concerne le post-traitement, un travail reste nécessaire pour que le post-traitement non structuré puisse disposer des mêmes fonctionnalités que celles proposées par le solveur structuré tout en assurant une forme d’harmonisation entre le post-traitement structuré et celui du non structuré - on rappelle que les différences de stratégies de post-traitement restent aujourd’hui une source d’explication possible pour certains écarts observés entre structuré et hybride dans le dernier chapitre applicatif de cette thèse.

Bibliographie

- [1] ABGRALL, R. On ENO schemes on unstructured meshes : analysis and implementation. *Journal of Computational Physics* 114 (1994), 45–58.
- [2] ACARLAR, M., AND SMITH, C. A study of hairpin vortices in a laminar boundary layer. Part 2 : Hairpin vortices generated by fluid injection. *Journal of Fluid Mechanics* 175 (1987), 43–83.
- [3] ADAMI, P., AND MARTELLI, F. Three-dimensional unsteady investigation of HP turbine stages. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A : Journal of Power and Energy* 220, 2 (2006), 155–167.
- [4] ANDREOPOULOS, J., AND RODI, W. Experimental investigation of jets in a crossflow. *Journal of Fluid Mechanics* 138 (1984), 93–127.
- [5] ARNAUD, D., OTTAVY, X., AND VOUILLARMET, A. Experimental investigation of the rotor-stator interactions within a high speed, multi-stage, axial compressor : Part 1—experimental facilities and results. In *ASME Turbo Expo 2004 : Power for Land, Sea, and Air* (2004), American Society of Mechanical Engineers, pp. 903–914.
- [6] ARNAUD, D., OTTAVY, X., AND VOUILLARMET, A. Experimental investigation of the rotor-stator interactions within a high speed, multi-stage, axial compressor : Part 1—experimental facilities and results. In *ASME Turbo Expo 2004 : Power for Land, Sea, and Air* (2004), American Society of Mechanical Engineers, pp. 903–914.
- [7] AUF DEM KAMPE, T., VÖLKER, S., SÄMEL, T., HENEKA, C., LADISCH, H., SCHULZ, A., AND BAUER, H.-J. Experimental and numerical investigation of flow field and downstream surface temperatures of cylindrical and diffuser shaped film cooling holes. *Journal of Turbomachinery* 135, 1 (2013), 011026.
- [8] BACHALO, W., AND JOHNSON, D. Transonic, turbulent boundary-layer separation generated on an axisymmetric flow model. *AIAA Journal* 24, 3 (1986), 437–443.
- [9] BARTH, T. J. Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier-Stokes equations. In *VKI Lecture Series 1994-05* (1994).
- [10] BARTH, T. J., AND JESPERSEN, D. C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. *AIAA Paper 90-0013* (1989).
- [11] BECKER, K., HEITKAMP, K., AND KÜGELER, E. Recent progress in a hybrid-grid CFD solver for turbomachinery flows. In *Proceedings Fifth European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD* (2010), vol. 2010.
- [12] BENEK, J., STEGER, J., AND DOUGHERTY, F. A flexible grid embedding technique with application to the Euler equations. *AIAA Paper 83-1944* (1981).
- [13] BENOIT, C., AND PÉRON, S. Automatic structured mesh generation around two-dimensional bodies defined by polylines or PolyC1 curves. *Computers and Fluids* 61 (2012), 64–76.
- [14] BENYAHIA, A. *Mise en oeuvre et évaluation d'un modèle de transition à équations de transport pour la simulation d'écoulements en turbomachines*. PhD thesis, Toulouse, ISAE, 2012.
- [15] BERGELES, G., GOSMAN, A., AND LAUNDER, B. Near-field character of a jet discharged through a wall at 30 deg to a mainstream. *AIAA Journal* 15, 4 (1977), 499–504.
- [16] BIGARELLA, E. D. V., AND AZEVEDO, J. L. F. A study of convective flux schemes for aerospace flows. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 34, 3 (2012), 314–329.

- [17] BRAZA, M., CHASSAING, P., AND MINH, H. H. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* 165 (1986), 79–130.
- [18] BRENNER, P. Three-dimensional aerodynamics with moving bodies applied to solid propellant. In *27th Joint Propulsion Conference* (1991), p. 2304.
- [19] BRENNER, P. Numerical simulation of three-dimensional and unsteady aerodynamics about bodies in relative motion applied to a tsto separation. In *AIAA and DGLR, International Aerospace Planes and Hypersonics Technologies Conference, 5 th, Munich, Germany* (1993).
- [20] BRENNER, P. Simulation du mouvement relatif de corps soumis à un écoulement instationnaire par une méthode de chevauchement de maillages. In *AGARD CONFERENCE PROCEEDINGS AGARD CP* (1996), AGARD, pp. 32–32.
- [21] BRENNER, P. Unsteady flows about bodies in relative motion. In *1st AFOSR Conference on Dynamic Motion CFD Proceedings, Rutgers University, New Jersey, USA* (1996).
- [22] BRIGNOLE, G., DANNER, F., AND KAU, H.-P. Time resolved simulation and experimental validation of the flow in axial slot casing treatments for transonic axial compressor. *ASME Turbo Expo, Berlin, Germany, June* (2008), 9–13.
- [23] CALLOT, S. *Analyse des mécanismes macroscopiques produits par les interactions rotor/stator dans les turbomachines*. PhD thesis, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2003.
- [24] CAMBIER, L., GAZAIX, M., HEIB, S., PLOT, S., POINOT, M., VEUILLOT, J., BOUSSUGE, J., AND MONTAGNAC, M. An Overview of the Multi-Purpose elsA Flow Solver. *Aerospace Lab*, 2 (2011), 1–15.
- [25] CASTILLON, L., BILLONNET, G., RIOU, J., PÉRON, S., AND BENOIT, C. A technological effect modeling on complex turbomachinery applications with an overset grid numerical method. *Journal of Turbomachinery* 136, 10 (2014), 101005.
- [26] CELIK, I. B., GHIA, U., ROACHE, P. J., ET AL. Procedure for estimation and reporting of uncertainty due to discretization in CFD applications. *Journal of Fluids Engineering - Transactions of the ASME* 130, 7 (2008).
- [27] COIRIER, W. J. *An adaptively-refined, Cartesian, cell-based scheme for the Euler and Navier-Stokes equations*. PhD thesis, NASA Lewis Research Center, 1994.
- [28] COIRIER, W. J., AND POWELL, K. G. An accuracy assessment of cartesian-mesh.
- [29] COLBAN, W. F., THOLE, K. A., AND BOGARD, D. A film-cooling correlation for shaped holes on a flat-plate surface. *Journal of Turbomachinery* 133, 1 (2011), 011002.
- [30] COUDIÈRE, Y., VILA, J.-P., AND VILLEDIEU, P. Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 33, 03 (1999), 493–516.
- [31] COURBET, B., BENOIT, C., COUAILLIER, V., HAIDER, F., LE PAPE, M. C., AND PÉRON, S. Space Discretization Methods. *Aerospace Lab*, 2 (2011), 1–14.
- [32] COUTANCEAU, M., AND BOUARD, R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1 : Steady flow. *Journal of Fluid Mechanics* 79, 02 (1977), 231–256.
- [33] DE LA LLAVE PLATA, M., COUAILLIER, V., LE PAPE, M.-C., MARMIGNON, C., AND GAZAIX, M. elsA-Hybrid : an all-in-one structured/unstructured solver for the simulation of internal and external flows. Application to turbomachinery. In *Progress in Propulsion Physics* (2013), vol. 4, EDP Sciences, pp. 417–444.
- [34] DE LA LLAVE PLATA, M., COUAILLIER, V., MARMIGNON, C., LE PAPE, M.-C., GAZAIX, M., AND CANTALOUBE, B. Further developments in the multiblock hybrid cfd solver elsA-H. *AIAA Paper 2012-1112* (2012).
- [35] DE LA LOMA, A., PANIAGUA, G., VERRASTRO, D., AND ADAMI, P. Transonic turbine stage heat transfer investigation in presence of strong shocks. *Journal of Turbomachinery* 130, 3 (2008), 031019.

- [36] DELANAYE, M. *Polynomial Reconstruction Finite Volume Schemes for the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations on Unstructured Adaptive Grids*. PhD thesis, 1998.
- [37] DÉNOS, R. *Investigation of the Unsteady Aerothermal Flow Field in the Rotor of a Transonic Turbine*. PhD thesis, Institut Von Karman-Université de Poitiers, 1996.
- [38] DÉNOS, R., ARTS, T., PANIAGUA, G., MICHELASSI, V., AND MARTELLI, F. Investigation of the unsteady rotor aerodynamics in a transonic turbine stage. *Journal of Turbomachinery* 123, 1 (2001), 81–89.
- [39] DENTON, J., AND SINGH, U. Time marching methods for turbomachinery flow calculation. In *VKI Application of Numerical Methods to Flow Calculations in Turbomachines 47 p (SEE N80-12365 03-34)* (1979), vol. 1.
- [40] DENTON, J. D. Some limitations of turbomachinery CFD. In *ASME Turbo Expo 2010 : Power for Land, Sea, and Air* (2010), pp. 735–745.
- [41] DEZEEUW, D., AND POWELL, K. G. An adaptively refined Cartesian mesh solver for the Euler equations. *Journal of Computational Physics* 104, 1 (1993), 56–68.
- [42] DISKIN, B., AND THOMAS, J. L. Comparison of Node-Centered and Cell-Centered Unstructured Finite-Volume Discretizations : Inviscid Fluxes. *AIAA Journal* 49, 4 (April 2011), 836–854.
- [43] DISKIN, B., THOMAS, J. L., NIELSEN, E. J., NISHIKAWA, H., AND WHITE, J. A. Comparison of Node-Centered and Cell-Centered Unstructured Finite-Volume Discretizations : Viscous Fluxes. *AIAA Journal* 48, 7 (July 2010), 1326–1338.
- [44] ERDOS, J. I., ALZNER, E., AND MCNALLY, W. Numerical solution of periodic transonic flow through a fan stage. *AIAA Journal* 15, 11 (1977), 1559–1568.
- [45] FEZOU, L., AND STOUFFLET, B. A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes. *Journal of Computational Physics* 84, 1 (1989), 174–206.
- [46] GEAR, C. W. *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*. Prentice Hall PTR, 1971.
- [47] GEROLYMOS, G., AND CHAPIN, V. Generalized expression of chorochronic periodicity in turbomachinery blade-row interaction. *La Recherche Aérospatiale*, 5 (1991), 69–73.
- [48] GEROLYMOS, G., MICHON, G., AND NEUBAUER, J. Analysis and application of chorochronic periodicity in turbomachinery rotor/stator interaction computations. *Journal of propulsion and power* 18, 6 (2002), 1139–1152.
- [49] GEUZAIN, P. *An implicit finite volume method for compressible turbulent flows on unstructured meshes*. PhD thesis, Université de Liege, Faculté des Sciences appliquées, 1999.
- [50] GIANGASPERO, G., VAN DER WEIDE, E., SVÄRD, M., CARPENTER, M. H., AND MATTSSON, K. Case c1. 1 : Transonic Ringleb Flow. In *3rd International Workshop on High-Order CFD Methods* (2015).
- [51] GODUNOV, S. K. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik* 89, 3 (1959), 271–306.
- [52] GOODMAN, J. B., AND LEVEQUE, R. J. On the accuracy of stable schemes for 2D scalar conservation laws. *Mathematics of computation* (1985), 15–21.
- [53] HAIDER, F. *Discrétisation en maillage non structuré général et applications LES*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2009.
- [54] HANDBOOK, A. F. Us department of transportation, federal aviation administration–flight standards service, 2004. Tech. rep., FAA-H-8083-3A.
- [55] HARTEN, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics* 49, 3 (1983), 357–393.
- [56] HARTEN, A., ENGQUIST, B., OSHER, S., AND CHAKRAVARTHY, S. R. Uniformly High Order Accurate Schemes, Essentially. *Journal of Computational Physics* 71 (1987), 231–303.
- [57] HE, L. Method of simulating unsteady turbomachinery flows with multiple perturbations. *AIAA Journal* 30, 11 (1992), 2730–2735.

- [58] HE, X., HE, X., HE, L., ZHAO, Z., AND ZHANG, L. HyperFLOW : A Structured/Unstructured Hybrid Integrated Computational Environment for Multi-purpose Fluid Simulation. *Procedia Engineering* 126, 11272339 (2015), 645–649.
- [59] HEINRICH, R. Implementation and usage of structured algorithms within an unstructured CFD-code. In *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics V*. Springer, 2006, pp. 430–437.
- [60] HIRSCH, C. The challenges of present and future industrial CFD. In *3rd International Workshop on High-Order CFD Methods* (2015).
- [61] HODSON, H. Blade row interactions in low pressure turbines. *Lecture Series-Von Karman Institute for Fluid Dynamics 2* (1998), A1–A124.
- [62] HOSANGADI, A., LEE, R. A., YORK, B. J., SINHA, N., AND DASH, S. M. Upwind unstructured scheme for three-dimensional combusting flows. *Journal of Propulsion and Power* 12, 3 (1996), 494–502.
- [63] INC., A. Ansys fluent theory guide. *Technical Documentation* (2005).
- [64] JAMESON, A. The Construction of Discretely Conservative Finite Volume Schemes that Also Globally Conserve Energy or Entropy. *Journal of Scientific Computing* 34, 2 (Dec 2007), 152–187.
- [65] JAMESON, A., AND MAVRIPLIS, D. Finite volume solution of the two-dimensional Euler equations on a regular triangular mesh. *AIAA Journal* 24, 4 (1986), 611–618.
- [66] JAMESON, A., SCHMIDT, W., TURKEL, E., ET AL. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. *AIAA Paper 1259-1981* (1981).
- [67] JAWAHAR, P., AND KAMATH, H. A high-resolution procedure for Euler and Navier–Stokes computations on unstructured grids. *Journal of Computational Physics* 164, 1 (2000), 165–203.
- [68] KALGHATGI, P., AND ACHARYA, S. Improved film cooling effectiveness with a round film cooling hole embedded in a contoured crater. *Journal of Turbomachinery* 137, 10 (2015), 101006.
- [69] KEY, N. L., AND ARTS, T. Comparison of turbine tip leakage flow for flat tip and squealer tip geometries at high-speed conditions. *Journal of Turbomachinery* 128, 2 (2006), 213–220.
- [70] KHALID, S. A. *The effects of tip clearance on axial compressor pressure rise*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1995.
- [71] KITAMURA, K., AND SHIMA, E. Simple and parameter-free second slope limiter for unstructured grid aerodynamic simulations. *AIAA Journal* 50, 6 (2012), 1415–1426.
- [72] KRIST, S. L., BIEDRON, R. T., AND RUMSEY, C. L. *CFL3D User’s Manual (Version 5.0)*. NASA Langley Research Center, 1998.
- [73] LANEY, C. B. *Computational Gasdynamics*. Cambridge University Press, 1998.
- [74] LE POTIER, C. Schéma volumes finis monotone pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages de triangles non structurés. *Comptes Rendus Mathématique* 341, 12 (2005), 787–792.
- [75] LEFEBVRE, M. *Développement de nouvelles techniques numériques pour la résolution des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles stationnaires sur des maillages hybrides «structurés/non structurés»*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1998.
- [76] LÉPINE, J. Fan and low-pressure compressor design : general considerations fan aerodynamic design low-pressure compressor aerodynamic design. *Aero-Engine Design : A State of the Art (von Karman Lecture Series VKI LS 2003-06)*, von Karman Institute, Rhode-St-Genese, Belgium (2003).
- [77] LIENHARD, J. H. *Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders*. Washington State University, 1966.
- [78] LÖHNER, R. An adaptive finite element scheme for transient problems in CFD. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 61, 3 (1987), 323–338.

- [79] MAUGARS, B. *Méthodes de volumes finis d'ordre élevé en maillages non-coïncidents pour les écoulements dans les turbomachines*. PhD thesis, Arts et Métiers ParisTech, 2015.
- [80] MAVRIPLIS, D. J. Revisiting the least-squares procedure for gradient reconstruction on unstructured meshes. *AIAA Paper 3986-2003* (2003).
- [81] MAVRIPLIS, D. J. Unstructured-mesh discretizations and solvers for computational aerodynamics. *AIAA Journal* 46, 6 (2008), 1281–1298.
- [82] MICHALAK, C., AND OLLIVIER-GOOCH, C. Accuracy preserving limiter for the high-order accurate solution of the Euler equations. *Journal of Computational Physics* 228, 23 (2009), 8693–8711.
- [83] MICHALAK, K., AND GOOCH, C. O. Differentiability of slope limiters on unstructured grids. In *Proceedings of 14th Annual Conference of the CFD Society of Canada* (2006).
- [84] MONTOMOLI, F., D'AMMARO, A., AND UCHIDA, S. Numerical and experimental investigation of a new film cooling geometry with high P/D ratio. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 66 (2013), 366–375.
- [85] NAIK, S., GEORGAKIS, C., HOFER, T., AND LENGANI, D. Heat transfer and film cooling of blade tips and endwalls. *Journal of Turbomachinery* 134, 4 (2012), 041004.
- [86] NEUBAUER, J. *Aérodynamique 3-D instationnaire des turbomachines axiales multi-étages*. PhD thesis, Université Paris 6, 2004.
- [87] NIELSEN, E. J., AND ANDERSON, W. K. Recent improvements in aerodynamic design optimization on unstructured meshes. *AIAA Journal* 40, 6 (2002), 1155–1163.
- [88] OLLIVIER-GOOCH, C. F. A new class of ENO schemes based on unlimited data-dependent least-squares reconstruction. In *AIAA-34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, US, AIAA-96-0887* (1996).
- [89] OLLIVIER-GOOCH, C. F. Quasi-ENO Schemes for Unstructured Meshes Based on Unlimited Data-Dependent Least-Squares Reconstruction. *Journal of Computational Physics* 133 (1997), 6–17.
- [90] OTTAVY, X. *Mesures par anémométrie laser dans un compresseur axial transsonique. Étude des structures instationnaires périodiques*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1999.
- [91] PANIAGUA, G., YASA, T., LA LOMA, A. D., CASTILLON, L., AND COTON, T. Unsteady strong shock interactions in a transonic turbine : experimental and numerical analysis. *Journal of Propulsion and Power* 24, 4 (2008), 722–731.
- [92] PERON, S. *Méthode d'assemblage de maillages recouvrants autour de géométries complexes pour des simulations en aérodynamique compressible*. PhD thesis, Arts et Métiers ParisTech, 2014.
- [93] PERON, S. *Méthode d'assemblage de maillages recouvrants autour de géométries complexes pour des simulations en aérodynamique compressible*. PhD thesis, Paris, ENSAM, 2014.
- [94] PÉRON, S., AND BENOIT, C. Automatic off-body overset adaptive Cartesian mesh method based on an octree approach. *Journal of Computational Physics* 232, 1 (2013), 153–173.
- [95] PETROVSKAYA, N. B. The Impact of Grid Cell Geometry on the Least-Squares Gradient Reconstruction. Tech. rep., Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science, 2003.
- [96] PONT, G. *Modèles de turbulence auto-adaptatifs pour la simulation des écoulements compressibles instationnaires*. PhD thesis, Arts et Métiers ParisTech, 2015.
- [97] POPOVIĆ, I., AND HODSON, H. Aerothermal impact of the interaction between hub leakage and mainstream flows in highly-loaded HP turbine blades. *ASME Paper No. GT2010-22311* (2010).
- [98] RENAUD, T., COSTES, M., AND PÉRON, S. Computation of GOAHEAD configuration with Chimera assembly. *Aerospace Science and Technology* 19, 1 (2012), 50–57.
- [99] REZGUI, A., CINNELLA, P., AND LERAT, A. Third-order accurate finite volume schemes for Euler computations on curvilinear meshes. *Computers and Fluids* 30, 7-8 (2001), 875–901.

- [100] RINGLEB, F. Exakte lösungen der differentialgleichungen einer adiabatischen gasströmung. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 20, 4 (1940), 185–198.
- [101] RUMSEY, C. L. Consistency, Verification, and Validation of Turbulence Models for Reynolds-Averaged Navier—Stokes Applications. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering* 224, 11 (2010), 1211–1218.
- [102] RUMSEY, C. L., SMITH, B. R., AND HUANG, G. P. Description of a website resource for turbulence modeling, verification and validation. *AIAA Paper 4742-2010* (2010).
- [103] SHABBIR, A., AND ADAMCZYK, J. J. Flow mechanism for stall margin improvement due to circumferential casing grooves on axial compressors. *Journal of Turbomachinery* 127, 4 (2005), 708–717.
- [104] SHABBIR, A., CELESTINA, M., ADAMCZYK, J., AND STRAZISAR, A. The effect of hub leakage flow on two high speed axial flow compressor rotors. In *ASME 1997 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition* (1997), pp. V001T03A053–V001T03A053.
- [105] SHI, Y., LI, J., AND FENG, Z. Influence of rotor blade fillets on aerodynamic performance of turbine stage. In *ASME Turbo Expo 2010 : Power for Land, Sea, and Air* (2010), pp. 1657–1668.
- [106] SHIMA, E., KITAMURA, K., AND FUJIMOTO, K. New gradient calculation method for MUSCL-type CFD schemes in arbitrary polyhedra. *AIAA Paper 1081-2010* (2010).
- [107] SHIMA, E., KITAMURA, K., AND HAGA, T. Green–Gauss/Weighted-Least-Squares hybrid gradient reconstruction for arbitrary polyhedra unstructured grids. *AIAA Journal* 51, 11 (2013), 2740–2747.
- [108] SICOT, F. *Simulation efficace des écoulements instationnaires périodiques en turbomachines*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2009.
- [109] SMITH, G., AND CUMPSTY, N. Flow phenomena in compressor casing treatment. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 106, 3 (1984), 532–541.
- [110] SPALART, P. R., AND ALLMARAS, S. R. A one equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA journal* 94 (1992).
- [111] STEGER, J. L., DOUGHERTY, F. C., AND BENEK, J. A. A chimera grid scheme.[multiple oversight body-conforming mesh system for finite difference adaptation to complex aircraft configurations. 59–69.
- [112] TORO, E. F. *Riemann Solver and Numerical Methods for Fluid Dynamics - A Practical Introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [113] TOUSSAINT, C., FOURMAUX, A., AND BILLONNET, G. Comparison of steady and unsteady 3D viscous flow computations through a transonic turbine stage. In *13th International Symposium on Airbreathing Engines (ISABE)* (1997).
- [114] TOUYERAS, A., AND VILLAIN, M. Aerodynamic design and test result analysis of a three stage research compressor. In *ASME Turbo Expo 2004 : Power for Land, Sea, and Air* (2004), American Society of Mechanical Engineers, pp. 589–597.
- [115] TRITTON, D. A note on vortex streets behind circular cylinders at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics* 45, 01 (1971), 203–208.
- [116] VAN ALBADA, G., VAN LEER, B., AND ROBERTS JR, W. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. In *Upwind and High-Resolution Schemes*. Springer, 1997, pp. 95–103.
- [117] VAN LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme I. The quest of monotonicity. In *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics* (1973), Springer, pp. 163–168.
- [118] VAN LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics* 14, 4 (1974), 361–370.

- [119] VAN LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. *Journal of Computational Physics* 23, 3 (1977), 263–275.
- [120] VAN LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics* 23, 3 (1977), 276–299.
- [121] VAN LEER, B. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second-order sequel to godunov’s method. *Journal of computational Physics* 32, 1 (1979), 101–136.
- [122] VAN ROSENDALE, J. *Floating shock fitting via lagrangian adaptive meshes*. Institute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center, 1994.
- [123] VENKATAKRISHNAN, V. On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions. *AIAA Paper 93-0880* (1993).
- [124] VENKATAKRISHNAN, V. Convergence to steady state solutions of the euler equations on unstructured grids with limiters. *Journal of Computational Physics* 118, 1 (1995), 120–130.
- [125] VINCENT, P. E., AND JAMESON, A. Facilitating the adoption of unstructured high-order methods amongst a wider community of fluid dynamicists. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* 6, 3 (May 2011), 97–140.
- [126] WANG, Z., FIDKOWSKI, K., ABGRALL, R., BASSI, F., CARAENI, D., CARY, A., DECONINCK, H., HARTMANN, R., HILLEWAERT, K., HUYNH, H., ET AL. High-order CFD methods : current status and perspective. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 72, 8 (2013), 811–845.
- [127] WANG, Z., YANG, H., AND PRZEKWAŚ, A. Implicit conservative interfacing for 3D overlapped Chimera grids. In *Proceedings of the 12th AIAA Computatinal Fluid Dnyamics Conference, San Diego, CA* (1995).
- [128] WLASSOW, F. *Analyse instationnaire aérothermique d’un étage de turbine avec transport de points chauds*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2012.
- [129] XI, D. *Schéma d’ordre élevé basé sur le résidu pour la simulation numérique d’écoulements compressibles en maillages non-structurés*. PhD thesis, Arts & Métiers ParisTech, 2010.
- [130] YANG, H., NUERNBERGER, D., AND KERSKEN, H.-P. Toward excellence in turbomachinery computational fluid dynamics : A hybrid structured-unstructured reynolds-averaged navier-stokes solver. *Journal of Turbomachinery* 128, 2 (2006), 390–402.
- [131] YANO, M., AND DARMOFAL, D. L. Case c1. 2 : Transonic Ringleb flow. In *3rd International Workshop on High-Order CFD Methods* (2015).
- [132] ZESS, G., AND THOLE, K. Computational design and experimental evaluation of using a leading edge fillet on a gas turbine vane. *Journal of Turbomachinery* 124, 2 (2002), 167–175.
- [133] ZIEFLE, J., AND KLEISER, L. Numerical investigation of a film-cooling flow structure : effect of crossflow turbulence. *Journal of Turbomachinery* 135, 4 (2013), 041001.

Résumé

Les motoristes aéronautiques souhaitent disposer de la représentation la plus fidèle possible du fonctionnement des propulseurs, dans une perspective d'amélioration continue de leurs performances. Les modèles numériques doivent donc intégrer au maximum les détails géométriques susceptibles d'influencer la physique de l'écoulement analysé. La prise en compte de tels effets technologiques s'avère difficile dans le contexte des solveurs structurés disponibles. Une stratégie hybride de prise en compte des effets technologiques fait coexister au sein d'un même domaine de calcul des zones structurées et non structurées. La flexibilité de génération d'un maillage non structuré permet une prise en compte aisée des détails géométriquement complexes tandis que la préservation de zones structurées dans une majeure partie du domaine de calcul permet de bénéficier de l'efficacité d'un solveur structuré. La présente thèse contribue au développement de cette stratégie hybride au sein du solveur elsA de l'ONERA en proposant des gains de précision et de robustesse par rapport à la version initialement développée pour établir la faisabilité et l'intérêt de l'approche. Après un état de l'art des techniques de discrétisation spatiale disponibles dans cette version initiale, différentes améliorations (techniques de *Moindres Carrés*, approche dite *quasi-Green*, méthode d'estimation des gradients aux faces) ont été analysées puis implémentées et validées sur des cas académiques. Le choix d'une stratégie hybride avec raccords coïncidents entre zones structurées et non structurées conduit à des déformations de maillage dans la zone d'interface structuré / non structuré qui ont exigé le développement supplémentaire de techniques d'amélioration de la robustesse (limiteurs physiques ou géométriques). Le solveur hybride rassemblant ces différentes fonctionnalités a permis de simuler avec succès des géométries d'aubes isolées dotées d'effets technologiques tels que congé de raccordement, trous de refroidissement, fentes de bord de fuite, cheminées internes d'alimentation. Enfin, une stratégie permettant l'utilisation de l'approche hybride en étage complet a été proposée et appliquée à la simulation hybride de l'interaction rotor/stator pour la configuration VKI-BRITE CT3, en stationnaire et en instationnaire, respectivement via une condition de plan de mélange et une condition de chorochronicité.

Mots clés : Turbomachines, maillages hybrides structurés/non structurés, solveur hybride robuste, trou de refroidissement, interaction rotor/stator

Abstract

The aerospace engine manufacturers wish to rely on the most accurate description of their propulsion systems in order to continuously improve their performance levels. Therefore, numerical models must include as much as possible geometrical details likely to impact the physics of the flow under study. Taking into account such technological effects turns out to be a difficult task when working with available structured solvers. A hybrid strategy takes advantage of structured and unstructured zones within the same computational domain in order to efficiently describe technological effects. Geometrically complex local details are easily accounted for thanks to the flexibility of unstructured grid generation while keeping structured zones in the remainder of the flow domain allows to benefit from the tried and tested structured solver efficiency. The present work contributes to the development of such a hybrid strategy in ONERA elsA solver and enhances accuracy and robustness with respect to the solver initially developed to establish the feasibility and interest of hybridization. Following a review of the space discretization techniques available in the initial solver, several improvements (least square techniques, *quasi-Green* approach, computation of face gradients) have been analysed, then implemented and validated for academic test-cases. The choice of a hybrid strategy with coincident matching between structured and unstructured zones leads to highly deformed cells in the structured / unstructured interface region, requiring the development of supplementary robustness improvement techniques (physics- or geometry-based limiters). The hybrid solver gathering these various options allows to successfully compute isolated blade geometries including technological effects such as blade fillet, cooling holes, trailing edge cutbacks, internal coolant supply channels. Finally, a structured / unstructured strategy has been proposed and applied to the hybrid simulation of a rotor/stator interaction for the steady and unsteady.

Keywords : Turbomachinery, hybrid structured / unstructured grids, robust hybrid solver, cooling hole, rotor/stator interaction