



**HAL**  
open science

# Contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles paraboliques peu diffusives

Armand Koenig

► **To cite this version:**

Armand Koenig. Contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles paraboliques peu diffusives. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. COMUE Université Côte d'Azur (2015 - 2019), 2019. Français. NNT : 2019AZUR4066 . tel-02733032

**HAL Id: tel-02733032**

**<https://theses.hal.science/tel-02733032v1>**

Submitted on 2 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

## Contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles paraboliques peu diffusives

Présentée et soutenue par :

**Armand KOENIG**

En vue de l'obtention du grade de

**Docteur en Sciences**  
de l'Université Côte d'Azur

Discipline : Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques J.A. Dieudonné (LJAD)

---

Thèse dirigée par Gilles LEBEAU

Soutenue le 23 octobre 2019

Devant le jury, composé de :

Karine Beauchard	Professeur	ENS Rennes	Examinatrice
Jérôme Le Rousseau	Professeur	Université Paris-XIII	Rapporteur
Gilles Lebeau	Professeur	Université Côte d'Azur	Directeur de thèse
Pierre Lissy	Maitre de Conférences	Université Paris-Dauphine	Examineur
Jean-Baptiste Pomet	Directeur de Recherche	INRIA Sophia Antipolis-Méditerranée	Examineur
Marjolaine Puel	Professeur	Université Côte d'Azur	Examinatrice
Luc Robbiano	Professeur	Université Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines	Rapporteur
Emmanuel Trélat	Professeur	Sorbonne Université	Examineur





---

# Thèse de Doctorat

---

## CONTRÔLABILITÉ DE QUELQUES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES PARABOLIQUES PEU DIFFUSIVES

---

Présentée et soutenue par :

**Armand KOENIG**

En vue de l'obtention du grade de

**Docteur en Sciences**

de l'Université Côte d'Azur

Discipline : Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques J.A. Dieudonné (LJAD)

---

Thèse dirigée par Gilles LEBEAU

Soutenue le 23 octobre 2019

Devant le jury, composé de :

---

Karine Beauchard	PR	ENS Rennes	Examinatrice
Jérôme Le Rousseau	PR	Université Paris-XIII	Rapporteur
Gilles Lebeau	PR	Université Côte d'Azur	Directeur de thèse
Pierre Lissy	MCF	Université Paris-Dauphine	Examineur
Jean-Baptiste Pomet	DR	INRIA Sophia Antipolis-Méditerranée	Examineur
Marjolaine Puel	PR	Université Côte d'Azur	Examinatrice
Luc Robbiano	PR	Université Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines	Rapporteur
Emmanuel Trélat	PR	Sorbonne Université	Examineur

---



## Contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles paraboliques peu diffusives

**Résumé :** La théorie du contrôle est la branche des mathématiques qui étudie dans quelle mesure on peut modifier l'état d'un système en fonction des propriétés intrinsèques dudit système et de la façon dont on peut agir dessus. Par exemple, on peut se demander si on peut amener la température d'un solide à une température constante *en temps fini*, en chauffant et refroidissant *seulement une partie du solide*. Ce problème, appelé «contrôle à zéro de l'équation de la chaleur», est résolu depuis 1995.

Mais si on étudie les équations paraboliques dégénérées, qui ressemblent à l'équation de la chaleur mais qui ont une diffusion plus faible, on ne sait traiter que quelques exemples particuliers, et la situation est plus compliquée : pour l'équation de la chaleur, la contrôlabilité à zéro est toujours vraie, même en temps arbitrairement petit ; mais pour certaines équations paraboliques dégénérées, il peut exister un temps minimal en dessous duquel la contrôlabilité à zéro n'est pas vraie.

Nous étudions quelques équations paraboliques dégénérées, notamment *l'équation de Grushin* et des *équations de type Kolmogorov*, et complétons partiellement les résultats de contrôle dessus. Nous précisons en particulier la relation entre le domaine de contrôle et le temps minimal de contrôle à zéro. Cette étude se fait par une analyse spectrale fine, qui permet de ramener l'étude des équations de Grushin et de type Kolmogorov à l'étude d'équation de la chaleur fractionnaire. Nous étudions donc également les équations de la chaleur fractionnaire, grâce à des techniques et fonctions holomorphes et d'optique géométrique.

Nous étudions également des systèmes transport-chaleur, et montrons qu'il existe un temps minimal de contrôle à zéro, et on généralise (presque) les résultats obtenus sur plusieurs exemples particuliers de systèmes transport-chaleur. Cette étude est basée sur une analyse spectrale qui permet de séparer les systèmes transport-chaleur en un système de transport et un système d'équations de la chaleur faiblement couplés.

**Mots-clefs :** Équations aux dérivées partielles, Contrôle, Observabilité, Équations paraboliques, Analyse spectrale

---

## Controllability of some parabolic partial differential equations with low diffusion

**Abstract:** Control theory is the branch of mathematics that is concerned in what extent the state of a system can be modified, depending in the intrinsic properties of the system and how we can act on it. For example, one may wonder if the temperature of a solid can be brought to a constant temperature in finite time by heating and

cooling only part of the solid. This problem, called the null-controllability of the heat equation, has been solved since 1995.

But if we study degenerate parabolic equations, which looks like the heat equation but have a weaker diffusion, we know how to treat only a few particular examples, and the situation is more complicated: for the heat equation, the null-controllability is always true, even in arbitrarily small time; but for some degenerate parabolic equations there exists a minimum time for the null-controllability to hold.

We study some degenerate parabolic equations, including the Grushin equation and some Kolmogorov-type equations, and partially complete existing results about the null-controllability on those equations. In particular, we make the relationship between the control domain and the minimum time of null-controllability more precise. We do this with a fine spectral analysis, which allows us to reduce the study of the Grushin and Kolmogorov-type equations to the study of the fractional heat equation. So we also study the fractional heat equation, with holomorphic functions techniques and geometric optics.

We also study transport-heat systems, and prove that there exists a minimum control time of null-controllability, (almost) generalizing the existing results obtained on several examples of transport-heat systems. This study is based on a spectral analysis that separates the transport-heat systems into a transport system and a system of heat equations that are weakly coupled.

**Keywords:** Partial differential equations, Control theory, Observability, Parabolic equations, Spectral theory

## Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse, Gilles Lebeau, pour sa bienveillance, sa patience, et toutes les idées qu'il m'a apportées. C'est un truisme de dire que cette thèse n'existerait pas sans son directeur, mais c'est ici particulièrement vrai. Ça a été un honneur de faire mon doctorat sous sa direction.

Je remercie ensuite Jérôme Le Rousseau et Luc Robbiano, pour avoir accepté d'être rapporteurs pour mon manuscrit. Leurs remarques ont indubitablement amélioré le verbiage des 200 prochaines pages. Je remercie de même Karine Beauchard, Pierre Lissy, Jean-Baptiste Pomet, Marjolaine Puel et Emmanuel Trélat pour avoir accepté de former le reste du jury. Merci aussi à mon comité de thèse, Fabrice Planchon et Oana Ivanovici, pour leur aide pour certaines démarches, disons, peu usuelles.

Je remercie aussi tout ceux avec qui j'ai pu discuter ou collaborer, à qui je dois beaucoup (sans ordre particulier) : Karine Beauchard, Michel Duprez, Kévin Le Balc'h, Pierre Lissy, David Chiron, Emmanuel Trélat, Dario Prandi, Laurent Michel, Karel Pravda-Starov, Eliot Pacherie, Camille Laurent, Mathieu Léautaud et Vincent Perrollaz.

Merci également à tous les doctorants ou postdoc du LJAD : Julie, Mehdi, Alexis, Eliot, Alexis (l'autre), Bjorn, Olivier, Ludovick, et ceux que j'oublie pour tous les moments passés. Et en particulier Julie, Mehdi et Alexis pour tout ce qu'ils ont organisés, et les gâteaux. Surtout les gâteaux, en fait.

Merci aussi aux gestionnaires pour la navigation dans le méandre que sont les règles administratives, en particulier Julia Blondel, Valérie Xicluna, Anita Ibrahim, Angélique Guittard, Chiara Soresi et Cécile Yvon. Pour les mêmes raisons, je remercie aussi le chef d'équipe, Roland Masson, ainsi que Jean-Marc Lacroix et Roland Ruelle du service informatique, et Elizabeth Taffin de Givenchy de l'école doctorale.

Je remercie enfin mes parents et ma famille pour leur soutien et leur patience. Oh, et aussi pour leur relecture. Sans eux, ce mémoire aurait (encore) plus de fêtes d'ortographe.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Contrôle des équations aux dérivées partielles . . . . .	1
1.1.1	Équations aux dérivées partielles . . . . .	1
1.1.2	Contrôle d'équations aux dérivées partielles . . . . .	1
1.1.3	Exemple de l'équation des ondes . . . . .	4
1.1.4	Contrôle de l'équation de la chaleur . . . . .	4
1.2	Équations peu diffusives . . . . .	8
1.2.1	Équation de la chaleur fractionnaire . . . . .	9
1.2.2	Équations paraboliques dégénérées . . . . .	9
1.3	Contrôle d'équations peu diffusives . . . . .	12
1.3.1	Contrôle de l'équation de la chaleur fractionnaire . . . . .	12
1.3.2	Contrôle de l'équation de Grushin . . . . .	16
1.3.3	Contrôle des équations de type Kolmogorov . . . . .	20
1.4	Contrôle des systèmes paraboliques-hyperboliques . . . . .	21
1.4.1	Systèmes paraboliques-hyperboliques . . . . .	21
1.4.2	Contrôle de quelques systèmes paraboliques-hyperboliques particuliers . . . . .	22
1.5	Commentaires : autres équations paraboliques avec un temps minimal de contrôlabilité . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Non-contrôlabilité de l'équation de la chaleur fractionnaire</b>	<b>25</b>
2.1	Équation de la chaleur fractionnaire . . . . .	25
2.1.1	Définition . . . . .	25
2.1.2	Caractère bien posé . . . . .	26
2.2	Équation de la demi-chaleur . . . . .	27
2.2.1	Non-contrôlabilité . . . . .	27
2.2.2	Non-contrôlabilité spectrale . . . . .	33
2.3	Équation de la chaleur fractionnaire sous-critique . . . . .	36
2.3.1	Méthode du point col . . . . .	36
2.3.2	Non-contrôlabilité . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Un peu d'analyse complexe et d'analyse spectrale</b>	<b>45</b>
3.1	Opérateurs sur les polynômes . . . . .	45
3.1.1	Introduction . . . . .	45
3.1.2	Classes de symboles . . . . .	47
3.1.3	Continuation analytique des séries de Taylor . . . . .	52
3.1.4	Estimation en norme uniforme d'opérateurs sur les polynômes	63

3.1.5	Une application : non-contrôlabilité des équations de la « quasi-demi-chaleur » . . . . .	69
3.2	Analyse spectrale de l'oscillateur harmonique . . . . .	73
3.2.1	Oscillateur harmonique sur la droite réelle . . . . .	73
3.2.2	Oscillateur harmonique sur un segment : généralités . . . . .	74
3.2.3	Première valeur propre de l'oscillateur harmonique sur un segment . . . . .	75
3.2.4	Première fonction propre de l'oscillateur harmonique sur un segment . . . . .	84
3.3	Analyse spectrale de l'opérateur d'Airy . . . . .	90
3.3.1	Opérateur d'Airy sur une demi-droite . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Contrôlabilité de l'équation de Grushin</b>	<b>93</b>
4.1	Généralités . . . . .	93
4.1.1	Caractère bien posé . . . . .	93
4.1.2	Composantes de Fourier . . . . .	96
4.1.3	Inégalité spectrale . . . . .	98
4.2	Non-contrôlabilité sur des bandes horizontales . . . . .	101
4.2.1	Non-contrôlabilité les bandes horizontales avec $x$ non borné . . . . .	101
4.2.2	Non-contrôlabilité sur les bandes horizontales avec $x$ borné . . . . .	108
4.3	Contrôle par des domaines non rectangulaires . . . . .	112
4.3.1	Cas $x$ non borné : non-contrôlabilité sur quelques domaines . . . . .	112
4.3.2	Cas $x$ borné : temps minimal de contrôlabilité à zéro pour quelques domaines . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Contrôlabilité de l'équation de Kolmogorov</b>	<b>127</b>
5.1	Généralités . . . . .	127
5.1.1	Définition . . . . .	127
5.1.2	Caractère bien posé . . . . .	127
5.1.3	Composantes de Fourier . . . . .	128
5.2	Non-contrôlabilité avec un potentiel quadratique . . . . .	129
5.2.1	Non-contrôlabilité sur des bandes verticales . . . . .	129
5.2.2	Minoration du temps minimal pour des domaines de contrôle non rectangulaires . . . . .	134
5.3	Non-contrôlabilité avec un potentiel affine . . . . .	138
<b>6</b>	<b>Systèmes paraboliques-hyperboliques à coefficients constants</b>	<b>143</b>
6.1	Introduction . . . . .	143
6.1.1	Systèmes paraboliques-transports . . . . .	143
6.1.2	Étapes de la démonstration . . . . .	145
6.2	Résultats préliminaires . . . . .	145
6.2.1	Composantes de Fourier . . . . .	145

6.2.2	Théorie perturbative . . . . .	146
6.2.3	Estimation des composantes de Fourier et caractère bien posé . . . . .	149
6.2.4	Système adjoint et observabilité . . . . .	152
6.3	Obstruction à la contrôlabilité à zéro en temps petit . . . . .	153
6.4	Contrôlabilité en temps grand . . . . .	157
6.4.1	Une décomposition adaptée de $L^2(\mathbb{T})^d$ . . . . .	157
6.4.2	Stratégie de contrôle . . . . .	159
6.4.3	Contrôle des hautes fréquences hyperboliques . . . . .	161
6.4.4	Contrôle des hautes fréquences paraboliques . . . . .	166
6.4.5	Contrôle des basses fréquences . . . . .	177
6.5	Systèmes chaleur-demi chaleur . . . . .	179
6.5.1	Définition . . . . .	179
6.5.2	Caractère bien posé . . . . .	179
6.5.3	Non contrôlabilité à zéro . . . . .	182
<b>7</b>	<b>Perspectives</b> . . . . .	<b>187</b>
<b>Annexe A</b>	<b>Semigroupes, contrôlabilité et observabilité</b> . . . . .	<b>193</b>
A.1	Solutions faibles . . . . .	193
A.2	Inégalités d'observabilité . . . . .	195
A.2.1	Inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité partielle à zéro . . . . .	195
A.2.2	Inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité à zéro d'une condition initiale . . . . .	196



# 1 | Introduction

**L**E problème de la contrôlabilité consiste à se demander à quel point on peut agir sur un système en fonction de ses propriétés ainsi que de nos possibilités d'action sur ledit système. Le sujet est particulièrement riche lorsqu'on considère des systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles.

## 1.1 Contrôle des équations aux dérivées partielles

### 1.1.1 Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles est une relation entre les dérivées partielles d'une fonction  $f$  (c'est-à-dire la vitesse à laquelle  $f$  varie en fonction de la position ou du temps). Par exemple, dans un solide dont la température n'est pas homogène, on s'attend à ce que les parties plus chaudes se refroidissent en transmettant leur énergie thermique aux parties les plus froides, et que ce processus soit d'autant plus rapide que la différence de température est grande. Sous certaines hypothèses physiques, ce phénomène est modélisé par l'équation aux dérivées partielles suivante, avec  $\Delta T = \partial_x^2 T + \partial_y^2 T + \partial_z^2 T$  :

$$\partial_t T(x, y, z, t) - \frac{k}{c\rho} \Delta T(x, y, z, t) = 0,$$

où  $T(t, x, y, z)$  est la température au temps  $t$  et position  $(x, y, z)$ , et  $k$ ,  $c$  et  $\rho$  sont des constantes physiques, respectivement la conductivité thermique, la capacité thermique massique et la masse volumique. Cette équation aux dérivées partielles est appelée *équation de la chaleur*.

Les équations aux dérivées partielles sont utilisées comme modèles de nombreux phénomènes physiques, par exemple la diffusion de la chaleur, la propagation des ondes, la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, etc.

### 1.1.2 Contrôle d'équations aux dérivées partielles

#### Un exemple : l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur précédente décrit un système qui évolue librement. En théorie du contrôle, on s'intéresse à un système sur lequel on peut agir. Toujours avec l'exemple de l'équation de la chaleur, si on peut chauffer ou refroidir une partie du solide, on peut essayer de rendre la répartition de température du solide uniforme

plus rapidement que la diffusion naturelle ne le ferait. Du point de vue de l'équation, ceci revient à ajouter un second membre :

$$\partial_t T(x, y, z, t) - \frac{k}{c\rho} \Delta T(x, y, z, t) = u(t, x, y, z) \mathbb{1}_\omega,$$

où  $u(t, x, y, z)$  représente l'énergie thermique que l'on retire ou ajoute, et  $\omega$  est la partie du solide sur laquelle on peut faire cela. La question est alors de savoir si, pour chaque répartition de température initiale, on peut choisir le contrôle  $u$  de sorte que à un instant donné  $t_f$ , la température du solide soit homogène.

### Système de contrôle abstrait

On a décrit un problème où on peut agir directement à l'intérieur du solide, mais on peut aussi s'intéresser au problème où on peut agir sur une partie du bord du solide. Bien sûr, on peut aussi formuler des questions similaires pour d'autres phénomènes que la propagation de la chaleur. D'un point de vue abstrait, si on se donne un espace des états  $H$  et un espace des contrôles  $U$ , qui sont supposés être des espaces de Hilbert, un système de contrôle linéaire général<sup>1</sup> a la forme suivante :

$$\partial_t f = Af + Bu, \tag{CS}$$

où  $f \in L^2([0, T]; H)$  est l'état du système,  $A$  est un opérateur sur  $H$  (en général un opérateur différentiel),  $u \in L^2([0, T]; U)$  est le contrôle qu'on peut choisir et  $B \in \mathcal{L}(U, H)$  est un opérateur borné, appelé *opérateur de contrôle*, qui décrit comment le contrôle  $u$  agit sur l'état  $f$  du système. Pour l'équation de la chaleur, l'état est la température  $T$ , l'opérateur  $A$  est aux constantes physiques près  $\Delta$  et l'opérateur de contrôle  $B$  est la multiplication par  $\mathbb{1}_\omega$ .

La question est dans les grandes lignes de savoir si on peut amener le système de l'état initial  $f_0$  vers un autre état  $f_1$ . Plus précisément, on peut définir plusieurs notions de contrôlabilité. Les plus importantes sont la *contrôlabilité exacte*, la *contrôlabilité approchée* et la *contrôlabilité à zéro*.

**Définition 1.1** (Contrôlabilité exacte). Soit  $T > 0$ . Le système de contrôle (CS) est exactement contrôlable en temps  $T$  si pour tout  $f_0, f_1 \in H$ , il existe un contrôle  $u \in L^2([0, T]; U)$  tel que la solution  $f$  de (CS) avec condition initiale  $f(0) = f_0$  vérifie  $f(T) = f_1$ .

**Définition 1.2** (Contrôlabilité approchée). Soit  $T > 0$ . Le système de contrôle (CS) est approximativement contrôlable en temps  $T$  si pour tout  $f_0, f_1 \in H$ , et  $\varepsilon > 0$ , il existe un contrôle  $u \in L^2([0, T]; U)$  tel que la solution  $f$  de (CS) avec condition initiale  $f(0) = f_0$  vérifie  $|f(T) - f_1|_H \leq \varepsilon$ .

<sup>1</sup>Cette présentation est essentiellement tirée du livre de Coron [30, Section 2.3], où le lecteur trouvera plus de détails ainsi que les démonstrations.

**Définition 1.3** (Contrôlabilité à zéro). Soit  $T > 0$ . Le système de contrôle (CS) est contrôlable à zéro en temps  $T$  si pour tout  $f_0 \in H$ , il existe un contrôle  $u \in L^2([0, T]; U)$  tel que la solution  $f$  de (CS) avec condition initiale  $f(0) = f_0$  vérifie  $f(T) = 0$ .

La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité approchée et la contrôlabilité à zéro, et est donc la plus forte des trois notions. On peut démontrer que si les solutions de l'équation (CS) sont définies pour les temps négatifs, la contrôlabilité à zéro implique la contrôlabilité exacte, mais ce n'est pas le cas en général.

Mentionnons au passage que si  $B = \mathbb{1}_\omega$ , comme cela sera souvent le cas dans cette thèse, on parlera, de « contrôlabilité exacte sur  $\omega$  », « contrôlabilité approchée sur  $\omega$  » et « contrôlabilité à zéro sur  $\omega$  ».

### Observabilité : une notion duale à la contrôlabilité

Construire directement un contrôle est en général chose peu aisée. Souvent, on préfère raisonner par dualité, et démontrer une inégalité équivalente. Donnons les notions duales de chacune des notions de contrôlabilité qu'on a énoncées. Ces notions portent sur le système adjoint, où  $A^*$  est l'adjoint de  $A$  :

$$\partial_t g + A^* g = 0. \quad (\text{CS}^*)$$

**Théorème 1.4.** Soit  $T > 0$ . Le système de contrôle (CS) est exactement contrôlable en temps  $T$  si et seulement s'il existe  $C_T > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in H$ , la solution  $g$  du système adjoint (CS\*) avec condition initiale  $g(0) = g_0$  vérifie

$$|g_0|_H^2 \leq C_T \int_0^T |B^* g(t)|_U^2 dt.$$

Cette inégalité est appelée inégalité d'observabilité. Le cas échéant, on peut choisir le contrôle  $u$  qui amène  $f_0$  à  $f_1$  de sorte que  $|u|_{L^2([0, T]; U)} \leq \sqrt{C_T}(|f_1|_H + C'_T |f_0|_H)$ .

**Théorème 1.5.** Soit  $T > 0$ . Le système de contrôle (CS) est approximativement contrôlable en temps  $T$  si et seulement si pour tout  $g_0 \in H$ , la solution  $g$  du système adjoint (CS\*) avec condition initiale  $g(0) = g_0$  vérifie

$$B^* g(\cdot) = 0 \text{ dans } L^2([0, T]; U) \implies g_0 = 0.$$

Cette propriété est appelée observabilité approchée, ou dans certains cas, comme  $B = \mathbb{1}_\omega$ , continuation unique.

**Théorème 1.6.** Soit  $T > 0$ . Le système de contrôle (CS) est contrôlable à zéro en temps  $T$  si et seulement s'il existe  $C_T > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in H$ , la solution  $g$  du système adjoint (CS\*) avec condition initiale  $g(0) = g_0$  vérifie

$$|g(T)|_H^2 \leq C_T \int_0^T |B^* g(t)|_U^2 dt.$$



Cette inégalité est appelée inégalité d'observabilité au temps final. Le cas échéant, on peut choisir le contrôle  $u$  qui amène  $f_0$  à 0 de sorte que  $\|u\|_{L^2([0,T];U)} \leq \sqrt{C_T} \|f_0\|_H$ .

### 1.1.3 Exemple de l'équation des ondes

Démontrer l'une des propriétés d'observabilité présentée ci-dessus nécessite une compréhension fine de l'évolution de l'état  $f$  selon l'équation du système adjoint (CS\*). Considérons par exemple l'équation des ondes  $\partial_t^2 f(t, x) - \Delta f(t, x) = 0$ . Les physiciens considèrent qu'en négligeant le phénomène de diffraction, les ondes se propagent selon des rayons qui satisfont les lois de l'optique géométrique. Dit autrement, l'optique géométrique est une approximation en hautes fréquences de l'équation des ondes. Comprendre ceci est la clef du théorème suivant de contrôlabilité de l'équation des ondes.

**Théorème 1.7** (Bardos, Lebeau & Rauch 1992 [12]). *Soit  $T > 0$ . Soit  $M$  une variété riemannienne compacte. Soit  $\omega$  un ouvert non-vide de  $M$  tel que toutes les géodésiques de  $M$  se déplaçant à vitesse 1 intersectent  $\omega$  avant le temps  $T$ . Alors, pour tout  $(f_0, f'_0)$  et  $(f_1, f'_1) \in H^1(M) \times L^2(M)$ , il existe  $u \in L^2([0, T] \times \omega)$  tel que la solution  $f$  de*

$$\begin{cases} \partial_t^2 f(t, x) - \Delta f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega & (t, x) \in [0, T] \times M \\ (f(0, x), \partial_t f(0, x)) = (f_0(x), f'_0(x)) & x \in M \end{cases}$$

vérifie  $(f(T, x), \partial_t f(T, x)) = (f_1(x), f'_1(x))$  pour tout  $x \in M$ .

Rauch et Taylor avaient déjà démontré un résultat proche en 1974 [75], mais le théorème de Bardos, Lebeau et Rauch traite aussi le cas des variétés à bords, où les rayons peuvent se réfléchir sur le bord de la variété, ou encore glisser le long de la frontière.

La condition sur les géodésiques du théorème précédent est essentiellement optimale. Puisque dans la limite des hautes fréquences, les solutions de l'équation des ondes se propagent selon les lois de l'optique géométrique, on ne peut espérer contrôler  $f(T, x)$  sur tout  $\Omega$  que si tous les rayons sont passés là où on peut agir dessus.

### 1.1.4 Contrôle de l'équation de la chaleur

Contrairement à l'équation des ondes, l'équation de la chaleur ne propage pas l'énergie, mais la dissipe. Une caractéristique de cette dissipation est que les solutions de l'équation de la chaleur sont lisses. Ainsi, peu importe le contrôle que l'on choisit dans le membre droit de l'équation  $\partial_t f(t, x) - \Delta f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega$ , il est impossible d'amener l'état  $f$  vers un état qui n'est pas lisse en dehors de  $\omega$  : l'équation de la chaleur n'est pas exactement contrôlable. Cependant, en exploitant les propriétés de diffusion de l'équation de la chaleur, on peut démontrer la contrôlabilité à zéro.

**Théorème 1.8** (Fursikov & Imanuvilov 1996 [44], Lebeau & Robbiano 1995 [57]). Soit  $T > 0$ . Soit  $\Omega$  un ouvert lisse borné et connexe de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ . Pour tout  $f_0 \in L^2(\Omega)$ , il existe un contrôle  $u \in L^2([0, T] \times \omega)$  tel que la solution  $f$  de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) - \Delta f(t, x) = u(t, x) \mathbf{1}_\omega & (t, x) \in [0, T] \times \Omega \\ f(0, x) = f_0(x) & x \in \Omega \\ f(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

vérifie  $f(T, x) = 0$  pour tout  $x \in \Omega$ .

On peut donc contrôler l'équation de la chaleur, aussi petit que soit  $T$ , et aussi petit que soit  $\omega$ . Ceci est cohérent avec la propagation à vitesse infinie que manifeste l'équation de la chaleur. Notons qu'en remplaçant  $f_0$  par  $f_0 - f_1$ , on voit que la contrôlabilité à zéro implique la « contrôlabilité aux trajectoires » : pour tout  $f_0, f_1 \in L^2(\Omega)$ , on peut trouver un contrôle qui amène  $f_0$  à  $e^{T\Delta} f_1$  (la solution à l'instant  $T$  de l'équation de la chaleur sans contrôles avec condition initiale  $f_1$ ). On peut donc amener toute condition initiale vers toute cible suffisamment régulière.

### Le cas de la dimension un : la méthode des moments

Fattorini et Russel ont démontré la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur en dimension 1 en 1971 [42]. Ils construisent le contrôle en résolvant un *problème des moments*, en construisant une famille biorthogonale à la famille de fonctions  $(e^{-\lambda_n t})$  où les  $(\lambda_n)$  sont les valeurs propres du laplacien. Cette méthode est très féconde pour traiter les questions de contrôle des problèmes paraboliques en dimension 1 [8, 23, 80] (voir aussi la bibliographie de ces articles).

### La démonstration de Fursikov et Immanuvilov

Fursikov et Immanuvilov ont démontré l'inégalité d'observabilité au temps final en démontrant des inégalités d'énergie à poids appelées « inégalités de Carleman ». Sous les hypothèses géométriques suivantes sur  $\psi \in C^2(\Omega)$  :

$$\psi > 0 \text{ sur } \Omega, \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \nabla\psi \neq 0 \text{ sur } \overline{\Omega} \setminus \omega,$$

ils démontrent qu'il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que pour tout  $\lambda > \lambda_0$ , en notant

$$\phi(t, x) = \frac{e^{2\lambda|\psi|_{L^\infty}} - e^{\lambda\psi(t, x)}}{t(T - t)},$$

il existe  $C > 0, s_0 > 0$  tel que pour tout  $s > s_0$  et toute fonction  $u \in C^\infty([0, T] \times \overline{\Omega})$  nulle au bord de  $\Omega$

$$\begin{aligned} & \int_{[0, T] \times \Omega} e^{-2s\phi} \left( \frac{s}{t(T-t)} |\nabla u|^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3} |u|^2 \right) dt dx \\ & \leq C \left( \int_{[0, T] \times \Omega} e^{-2s\phi} |(\partial_t - \Delta)u|^2 dt dx + \int_{[0, T] \times \omega} \frac{s^3 e^{-2s\phi}}{t^3(T-t)^3} |u|^2 dt dx \right). \end{aligned}$$

Or, en fixant  $s$  et  $\lambda$  quelconque, on utilise le fait que  $e^{-2s\phi}$  soit minoré par  $e^{-2s|\phi|_{L^\infty}}$  et la décroissance des solutions libres en norme  $L^2$  pour démontrer que si  $g$  est solution de  $(\partial_t - \Delta)g = 0$ ,

$$|g(T, \cdot)|_{L^2}^2 \leq C \int_{[T/4, 3T/4] \times \Omega} |g|^2 dt dx \leq C' \int_{[0, T] \times \Omega} \frac{s^3 e^{-2s\phi}}{t^3(T-t)^3} |g|^2 dt dx.$$

Alors, l'inégalité de Carleman nous donne

$$|g(T, \cdot)|_{L^2}^2 \leq C'' \int_{[0, T] \times \omega} \frac{s^3 e^{-2s\phi}}{t^3(T-t)^3} |g|^2 dt dx \leq C''' |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2,$$

parce que  $e^{-2s\phi(t,x)}$  tend exponentiellement vite vers 0 lorsque  $t \rightarrow 0$  ou  $t \rightarrow T$ , et donc  $e^{-2s\phi}/(t^3(T-t)^3)$  est borné.

Cette méthode permet, si on a le courage de faire les calculs qui sont alors très fastidieux, de traiter le cas de coefficients non constants aussi bien en temps qu'en espace, et de traiter les termes d'ordre inférieur. En dehors de la construction de la fonction de poids  $\psi$ , qui demande en dimension supérieure à 1 quelques considérations géométriques, la démonstration de Fursikov et Immanuvilov ne repose que sur des intégrations par parties et des majorations de fonctions. On peut donc espérer suivre la valeur des constantes en fonctions des différents paramètres [36, 43].

### La démonstration de Lebeau & Robbiano : diffusion et contrôlabilité

La démonstration par Lebeau et Robbiano de la contrôlabilité de l'équation de la chaleur exploite plus explicitement les propriétés de diffusion de l'équation de la chaleur. Ils démontrent, grâce à des inégalités de Carleman pour des opérateurs elliptiques l'inégalité spectrale suivante.

**Théorème 1.9** (Inégalité spectrale [56, 58]). *Soit  $\Omega$  un ouvert lisse borné et connexe de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ , et soit  $(\phi_n)$  les fonctions propres de  $-\Delta$ , de valeurs propres associées  $(\lambda_n)$ . Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\mu > 0$  et pour toute suite de nombres complexes  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,*

$$\left| \sum_{\lambda_n \leq \mu} a_n \phi_n \right|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \left| \sum_{\lambda_n \leq \mu} a_n \phi_n \right|_{L^2(\omega)}.$$

Cette inégalité affirme que les combinaisons linéaires de fonctions propres du laplacien ne peuvent pas trop se concentrer dans un ouvert strict de  $\Omega$ . On déduit de cette inégalité une inégalité d'observabilité au temps final pour les basses fréquences de l'équation de la chaleur. Donc on peut amener les composantes associées à des valeurs propres inférieures à  $\mu$ , par un contrôle de norme  $L^2$  inférieure à  $C T^{-1/2} e^{C\sqrt{\mu}}$ . Ceci ajoute de l'énergie dans les composantes à hautes fréquences, mais la dissipation libre (c.-à-d. sans contrôle) des hautes fréquences est maintenant de  $e^{-\mu t}$ . Comme cette dissipation est plus forte que la constante  $C e^{C\sqrt{\mu}}$  de l'inégalité spectrale, par un procédé itératif où on alterne contrôle de quelques fréquences et dissipation libre de l'énergie, on peut construire un contrôle pour l'équation de la chaleur.

Décrivons plus en détails cette démonstration. On suppose qu'on veut amener une condition initiale  $f_0$  vers 0 en temps  $T > 0$ . On note  $\pi_\mu : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  la projection sur les fonctions propres associées à des valeurs propres inférieures à  $\mu$ . Si  $g$  est une solution de l'équation de la chaleur sans contrôle, on a alors

$$T|\pi_\mu g(T)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^T |\pi_\mu g(t, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T C e^{C\sqrt{\mu}} |\pi_\mu g(t, \cdot)|_{L^2(\omega)}^2 dt,$$

où on a utilisé la décroissance de la norme  $L^2$  des solutions de l'équation de la chaleur pour la première inégalité, et l'inégalité spectrale pour la seconde inégalité. On a donc une inégalité d'observabilité au temps final pour le système de contrôle de l'équation de la chaleur basses fréquences suivant.

$$\partial_t \pi_\mu g(t, \cdot) - \Delta \pi_\mu g(t, \cdot) = \pi_\mu(u(t, \cdot) \mathbb{1}_\omega)$$

De plus, la constante de cette inégalité d'observabilité est  $T^{-1} C e^{C\sqrt{\mu}}$ , donc on peut choisir un contrôle tel que  $|u|_{L^2([0, T] \times \omega)} \leq C' T^{-1/2} e^{C'\sqrt{\mu}} |f(0, \cdot)|_{L^2(\Omega)}$ .

On se donne alors une suite  $(a_k)_{k \geq 0}$  de durées définie par  $a_k = c 2^{-k/2}$ , où  $c$  est choisi de sorte que  $\sum_{k=0}^{+\infty} 2a_k = T$ . On définit alors  $T_0 = 0$  et  $T_{k+1} = T_k + 2a_k$ . Sur chaque intervalle de temps  $[T_k, T_k + a_k]$ , on amène à zéro les composantes associées à des valeurs propres inférieures à  $2^{2k}$ . Ceci se fait avec un contrôle  $u_k$  de norme inférieure à  $C' a_k^{-1/2} e^{C' 2^k} |f(T_k, \cdot)|_{L^2(\Omega)}$  (remarquons le  $2^k$  au lieu de  $2^{2k}$ ). On a donc grâce à la formule de Duhamel :

$$f(T_k + a_k, \cdot) = e^{a_k \Delta} f(T_k, \cdot) + \int_0^{a_k} e^{(a_k-s)\Delta} u_k(s, \cdot) ds$$

et donc

$$|f(T_k + a_k, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq |e^{a_k \Delta} f(T_k, \cdot)|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{a_k} |u_k|_{L^2} \leq C'' e^{C' 2^k} |f(T_k, \cdot)|_{L^2(\Omega)}$$

Ensuite, sur l'intervalle de temps  $[T_k + a_k, T_{k+1}]$ , on n'applique aucun contrôle. Comme  $f(T_k + a_k, \cdot)$  n'a aucune composante selon les valeurs propres inférieures

à  $2^{2k}$ , on a  $|f(T_{k+1}, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-a_k 2^{2k}} |f(T_k + a_k, \cdot)|_{L^2(\Omega)}$ . Donc, en utilisant aussi  $a_k = c2^{-k/2}$  :

$$|f(T_{k+1}, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq C'' e^{C' 2^k - a_k 2^{2k}} |f(T_k, \cdot)|_{L^2(\Omega)} = C'' e^{C' 2^k - c 2^{3k/2}} |f(T_k, \cdot)|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme  $\sum_{k=0}^{+\infty} (C' 2^k - c 2^{3k/2}) = -\infty$ , la norme  $L^2$  de  $f(T_k, \cdot)$  tend vers 0, et le contrôle  $u$ , construit comme la somme des contrôles  $u_k$  qu'on a appliqué entre  $T_k$  et  $T_k + a_k$ , est de norme  $L^2$  finie. On a donc bien construit un contrôle qui amène  $f_0$  à 0.  $\square$

Cette démonstration, depuis appelée « méthode Lebeau-Robbiano », a été adaptée pour d'autres équations paraboliques [4], généralisée dans un cadre abstrait [64] et généralisée à nouveau [18, 21].

### Autres résultats

Si le domaine de contrôle  $\omega$  est mesurable de mesure de Lebesgue positive mais pas ouvert, on ne sait pas démontrer d'inégalité de Carleman, mais on peut encore démontrer une inégalité spectrale par d'autres moyens, et donc démontrer la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur [9]. Ceci est encore vrai si le contrôle est choisi à support dans une partie  $\omega_T \subset ]0, T[ \times \Omega$  mesurable de mesure positive [10]. Si  $\Omega$  est non borné, Miller a démontré que si, dit informellement, le domaine de contrôle « ne se rétrécit pas à l'infini », l'équation de la chaleur est contrôlable à zéro en tout temps [66]. Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$  et  $\omega$  est mesurable, on peut grâce à des techniques d'analyse complexe démontrer une inégalité spectrale si  $\omega$  vérifie la condition suivante [55], où  $B(x, a)$  est la boule de centre  $x$  et de rayon  $a$  :

$$\exists c, a > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{mesure}(\omega \cap B(x, a)) \geq c.$$

Le cas échéant, on a donc contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur [41, 82], et cette condition géométrique est même nécessaire.

On a mentionné que la contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur n'est pas vraie, parce que les solutions de l'équation de la chaleur sont lisses. On peut se demander tout de même quels sont les états finaux qu'on peut atteindre. On considère l'équation de la chaleur sur  $]-1, 1[$  avec des contrôles frontières en  $x = \pm 1$ . Il se trouve que l'ensemble des états qu'on peut atteindre est un sous espace des fonctions qui s'étendent en une fonction holomorphe sur le « diamant »  $\{x + iy, x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| < 1\}$ , et qui contient toutes les fonctions qui s'étendent sur un diamant un peu plus grand  $\{x + iy, |x| + |y| < 1 + \varepsilon\}$  [32, 46, 72].

## 1.2 Équations peu diffusives

Pour l'équation de la chaleur, on a vu que la contrôlabilité résulte des fortes propriétés de dissipation par rapport au coefficient de l'inégalité spectrale (Th. 1.9). Dans cette

thèse, nous étudions la contrôlabilité à zéro d'équations aux dérivées partielles pour lesquelles cette propriété n'est pas vérifiée, qu'on appellera *équations peu diffusives*.

Passons en revue les équations qui nous occuperont pendant le cœur de cette thèse : l'équation de la chaleur fractionnaire, les équations de type Grushin et les équations de type Kolmogorov. Nous regarderons aussi les systèmes couplant des équations paraboliques et des équations hyperboliques, bien qu'ils ne soient pas réellement de même nature que les précédents exemples.

### 1.2.1 Équation de la chaleur fractionnaire

L'équation de la chaleur fractionnaire est la suivante, où  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + (-\Delta)^{\alpha/2} f(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T] \times \Omega \\ f(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  est défini grâce au calcul fonctionnel. Par exemple, si  $\Omega$  est le tore  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ,  $(-\Delta)^{\alpha/2} f$  consiste à multiplier le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f$  par  $|n|^\alpha$ , et si  $\Omega = \mathbb{R}$ , on multiplie la transformée de Fourier de  $f$  par  $|\xi|^\alpha$ .

L'équation de la chaleur non-fractionnaire ( $\alpha = 2$ ) modélise les phénomènes de diffusion, comme l'évolution de la température mais aussi l'évolution de la concentration d'une espèce chimique en l'absence de convection. Certains phénomènes présentent une dissipation plus faible ou plus forte que celle décrite par l'équation de la chaleur [62, 79], comme par exemple la diffusion dans des milieux poreux. Même si l'équation de la chaleur fractionnaire ne semble pas avoir été beaucoup utilisée pour modéliser de tels phénomènes, elle décrit aussi des phénomènes où la diffusion est plus forte (si  $\alpha > 2$ ) ou plus faible (si  $\alpha < 2$ ) que celle prévue par l'équation de la chaleur.

Mais la vraie raison pour laquelle nous nous intéressons à l'équation de la chaleur fractionnaire est qu'elle est un modèle de certaines équations paraboliques dégénérées, dont nous allons maintenant discuter.

### 1.2.2 Équations paraboliques dégénérées

#### Hypoellipticité et condition de Hörmander

Une équation parabolique dégénérée est, de manière cavalière, une équation de la chaleur où on aurait mis dans le laplacien des coefficients variables, positifs, mais qui peuvent s'annuler. Plus précisément, on considère un opérateur du second ordre sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  de la forme  $L = -\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_i + c(x)$ , où les  $a_{i,j}$ ,  $b_j$  et  $c$  sont des fonctions à valeur réelles  $C^\infty$ , et on suppose que pour tout  $x \in \Omega$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq 0.$$

L'opérateur  $-\Delta$ , donné par  $a_{ij}(x)$  constant égal à  $\delta_{ij}$ , vérifie la condition plus forte  $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j \geq |\xi|^2$ . On dit alors que  $-\Delta$  est *uniformément elliptique*. Mais si  $\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$  s'annule pour un  $\xi$  non nul et pour au moins un  $x$ , l'opérateur est appelé *elliptique dégénéré*. Dans cette thèse, on s'intéresse à quelques équations de la forme  $\partial_t + L$  où  $L$  est elliptique dégénéré ; on appellera ces équations *équations paraboliques dégénérées*.

On s'intéressera plus particulièrement aux équations  $\partial_t + L$ , où  $L$  n'est certes pas elliptique, mais satisfait tout de même la condition plus faible d'*hypoellipticité* : si  $Lu$  est  $C^\infty$  sur un ouvert  $\Omega$ , alors  $u$  est  $C^\infty$  sur  $\Omega$ . Un opérateur uniformément elliptique du second ordre satisfait cette condition, mais si un opérateur n'est pas uniformément elliptique, on peut souvent démontrer l'hypoellipticité grâce à la condition de Hörmander [50, Sec. 22.2] (voir aussi [76] pour le calcul de certaines constantes et [48, Ch. 2] pour une présentation simplifiée d'une partie de la démonstration).

**Théorème 1.10.** *Soit  $(X_i)_{0 \leq i \leq m}$  des champs de vecteurs  $C^\infty$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si les  $X_i$  et leur crochet de Lie itérés  $[X_i, X_j]$ ,  $[X_i, [X_j, X_k]]$  etc. engendrent  $\mathbb{R}^n$  en tout point de  $\Omega$ , alors l'opérateur  $X_0 + \sum_{i=1}^m X_i^2$  est hypoelliptique.*

Rappelons que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs  $X, Y$ , vus comme des dérivations, est défini par, pour tout  $u \in C^\infty(\Omega)$ ,  $[X, Y](u) = X(Y(u)) - Y(X(u))$ . Par exemple, si  $X_1 = \partial_x$  et  $X_2 = x\partial_y$ , les opérateurs  $X_1$  et  $X_2$  ne génèrent pas  $\mathbb{R}^2$  sur  $\{x = 0\}$ , mais  $[X_1, X_2] = \partial_y$ , donc  $X_1$  et  $[X_1, X_2]$  engendrent  $\mathbb{R}^2$  en tout point, et la condition de Hörmander est vérifiée. On en déduit que l'opérateur  $\partial_x^2 + x^2\partial_y^2$  est hypoelliptique.

### Équation de Grushin

L'équation la plus étudiée dans cette thèse est l'équation parabolique dégénérée suivante, qu'on appellera *équation de Grushin*.

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x, y) - \partial_x^2 f(t, x, y) - x^2 \partial_y^2 f(t, x, y) = 0 & (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ f(t, x, y) = 0 & (t, x, y) \in [0, T] \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Notons que l'opérateur de Grushin  $-\partial_x^2 - x^2\partial_y^2$ , qui est l'exemple donné juste avant, satisfait la condition de Hörmander. Bien que cette équation ressemble à une équation de la chaleur, elle se comporte sur certains sous-espaces de  $L^2(\Omega)$  plutôt comme une équation de la chaleur fractionnaire. En effet, dans le cas  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ , on vérifie que  $f_n(x, y) = e^{-|n|x^2/2 + iny}$  est une fonction propre de l'opérateur de Grushin associée à la valeur propre  $|n|$ . Donc, sur le sous-espace engendré par ces fonctions propres, les solutions de l'équation de Grushin sont

$$f(t, x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-|n|x^2/2 + iny - nt},$$

qui ont la même forme en la variable  $y$  que les solutions de l'équation de la demi-chaleur  $\partial_t f(t, y) + \sqrt{-\Delta} f(t, y) = 0$ ,  $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{T}$ .

### Équations de type Kolmogorov

Un autre opérateur qui vérifie la condition de Hörmander est donné par  $X_0 = v^\gamma \partial_x$  et  $X_1 = \partial_v$ , avec  $\gamma \in \mathbb{N}^*$ . On étudiera dans cette thèse l'équation associée, qui est une équation de type Kolmogorov :

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x, v) - \partial_v^2 f(t, x, v) - v^\gamma \partial_x f(t, x, v) = 0 & (t, x, v) \in [0, T] \times \Omega \\ f(t, x, v) = 0 & (t, x, v) \in [0, T] \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Cette équation est proche du linéarisé autour d'un état stationnaire de l'équation de Prandtl pour les couches limites en mécanique des fluides [26], une fois qu'on a écrit l'équation de Prandtl en variables de Crocco (voir [70]).

On remarque que dans le cas  $\gamma = 2$  et  $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , la fonction<sup>2</sup>  $e^{-\sqrt{in}v^2/2+inx}$ , est une fonction propre de l'opérateur  $-\partial_v^2 + v^2 \partial_x$ , de valeur propre associée  $\sqrt{in}$ . Donc, sur l'espace engendré par ces fonctions propres, les solutions de l'équation de type Kolmogorov ci-dessus sont de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-\sqrt{in}v^2/2+inx-\sqrt{int}}.$$

Ces solutions se comportent dans la variable  $x$  comme les solutions de l'équation de la chaleur fractionnaire tournée  $\partial_t f(t, x) + \sqrt{i}(-\Delta)^{1/4} f(t, x) = 0$ ,  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{T}$ .

Dans le cas  $\gamma = 1$  et  $\Omega = \mathbb{T} \times ]0, +\infty[$ , on peut donner explicitement des fonctions propres de  $-\partial_v^2 + v \partial_x$  grâce à la fonction d'Airy  $\text{Ai}$ . Plus précisément,  $\text{Ai}$  vérifie  $-\text{Ai}'' + x \text{Ai} = 0$  et  $\text{Ai}(z)$  décroît en  $z^{-1/4} e^{-2z^{3/2}/3}$  lorsque  $z \rightarrow +\infty$ ,  $|\arg(z)| < \pi - \epsilon$ . Alors, si  $-\mu_0$  est le premier zéro (négatif) de  $\text{Ai}$ , la fonction  $f_n$  définie par

$$f_n(x, y) = \text{Ai}(n^{1/3} e^{-i\pi/6} v - \mu_0) e^{inx}$$

est fonction propre de  $\partial_v^2 + v \partial_x$  de valeur propre associée  $n^{2/3} e^{-i\pi/3} \mu_0 = n^{2/3} \lambda_0$ . Donc, les solutions selon les combinaisons linéaires de ces fonctions propres sont de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx - tn^{2/3} \lambda_0} \text{Ai}(n^{1/3} e^{-i\pi/6} v - \mu_0),$$

qui ont en la variable  $x$  la même forme que les solutions de l'équation de la chaleur fractionnaire tournée  $(\partial_t + \lambda_0(-\Delta)^{1/3})f(t, x) = 0$ ,  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{T}$ .

Même si ces équations sont spécifiques, et peut-être pas très pertinentes physiquement, nous espérons que leur étude permettra de comprendre sur des exemples quelques phénomènes lié à la contrôlabilité d'équations paraboliques dégénérées, dans le but d'aborder de manière plus générale le problème lors de travaux futurs.

<sup>2</sup>Ici,  $\sqrt{in}$  est choisi à partie réelle positive. Sauf mention du contraire, toutes les racines carrées seront prises à partie réelle positive.



## 1.3 Contrôle d'équations peu diffusives

### 1.3.1 Contrôle de l'équation de la chaleur fractionnaire

#### Inégalité spectrale

Les fonctions propres de  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  sont les mêmes que celles de  $-\Delta$ . Par exemple, sur le tore, ce sont les  $x \mapsto e^{inx}$ . On a donc la même inégalité spectrale que pour le laplacien (Théorème 1.9) : si  $\omega$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{T}$ , il existe  $C > 0$  tel que pour toute  $N \in \mathbb{N}^*$  et pour toute suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes,

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{n=0}^N a_n e^{inx} \right| dx \leq C e^{CN} \int_{\omega} \left| \sum_{n=0}^N a_n e^{inx} \right| dx.$$

Pour l'équation de la chaleur, la dissipation pour des solutions sans composantes selon les  $e^{inx}$  pour  $|n| < N$  est en  $e^{-N^2 t}$ , donc pour l'équation de la chaleur fractionnaire, la dissipation est de  $e^{-N^\alpha t}$ . On voit que, tant que  $\alpha > 1$ , la dissipation reste plus forte que l'inégalité spectrale, et on peut alors grâce à la méthode Lebeau-Robbiano démontrer la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur fractionnaire, comme ceci a déjà été remarqué par Micu & Zuazua [63] et Miller [65].

Notons que le facteur  $Ce^{CN}$  dans l'inégalité spectrale est optimal ; on ne peut le remplacer par aucun  $Ce^{CN^\gamma}$  avec  $\gamma < 1$  [56, Proposition 5.5]. Donc si  $\alpha \leq 1$ , la diffusion n'est pas plus forte que l'inégalité spectrale. On ne peut alors plus démontrer la contrôlabilité à zéro grâce à la méthode Lebeau-Robbiano.

#### Non-contrôlabilité par des contrôles scalaires dans le cas peu diffusif

Pour des opérateurs de contrôle un peu différents de ceux considérés dans cette thèse, Micu, Zuazua et Miller constatent que l'équation de la chaleur fractionnaire avec  $\alpha < 1$  n'est pas contrôlable.

Plus précisément, Micu et Zuazua [63] considèrent le système de contrôle  $\partial_t f(t, x) + (-\Delta)^{\alpha/2} f(t, x) = u(t)h(x)$  pour  $x \in (0, \pi)$  avec condition aux bords de Dirichlet, où  $0 < \alpha < 1$ ,  $h$  est une fonction donnée, et le contrôle  $u(t)$  est juste un nombre. On appelle ce type de contrôle *contrôle profil*.

On définit  $a_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t, x)(x) \sin(nx) dx$  le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f$ , et de manière similaire on définit  $h_n$  le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $h$ . D'après l'équation vérifiée par  $f$ , on a  $a'_n + |n|^\alpha a_n = u(t)h_n$ . Alors, en prenant le produit scalaire de l'équation vérifiée par  $f$  avec  $\sin(nx)$ , on voit qu'on a  $a'_n + |n|^\alpha a_n = u(t)h_n$ . Donc si l'un des  $h_n$  est nul, on ne pourra pas agir sur la  $n$ -ième composante de Fourier de  $f$ , et la contrôlabilité à zéro n'est pas vraie. Supposons donc qu'aucun des  $h_n$  n'est nul.

La contrôlabilité à zéro est équivalente à l'inégalité d'observabilité au temps final du Théorème 1.6. Pour le contrôle profil, qui correspond au cas où  $U = \mathbb{R}$  et  $Bu(t) = x \mapsto h(x)u(t)$  dans le système de contrôle (CS), cette inégalité est : il existe  $C > 0$  tel que pour toute solution  $g$  de l'équation de la chaleur fractionnaire  $\partial_t g(t, x) + (-\Delta)^{\alpha/2} g(t, x) = 0$ ,

$$\int_0^\pi |g(T, x)|^2 dx \leq C \int_0^T \left| \int_0^\pi h(x)g(t, x) dx \right|^2 dt.$$

Comme les solutions de l'équation de la chaleur fractionnaire sont de la forme  $g(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-|n|^\alpha t} \sin(nx)$ , cette inégalité est équivalente à : il existe  $C > 0$  tel que pour toute suite  $(a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 e^{-2T|n|^\alpha} \leq C \int_0^T \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n h_n e^{-t|n|^\alpha} \right|^2 dt,$$

Fixons  $n_0$  un entier et définissons une forme linéaire  $\mu$  sur les combinaisons linéaires finies  $\sum a_n h_n e^{-|n|^\alpha t}$  par  $\mu\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n h_n e^{-|n|^\alpha t}\right) = a_{n_0}$ . L'inégalité précédente nous assure que

$$|\mu(f)|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 e^{-2T(|n|^\alpha - |n_0|^\alpha)} \leq C e^{2T|n_0|^\alpha} \int_0^T \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n h_n e^{-t|n|^\alpha} \right|^2 dt = C' |f|_{L^2(0, T)}^2.$$

On peut donc étendre  $\mu$  en une forme linéaire continue sur  $L^2(0, T)$  grâce au théorème de Hahn-Banach. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe  $\tilde{f} \in L^2(0, T)$  tel que pour tout  $f$  dans  $L^2(0, T)$ ,  $\mu(f) = \langle \tilde{f}, f \rangle$ , et donc en particulier  $\langle \tilde{f}, h_n e^{-|n|^\alpha t} \rangle = 1$  si  $n = n_0$  et 0 sinon. Donc l'espace vectoriel engendré par la famille de fonctions  $(h_n e^{-|n|^\alpha t})_{n \neq n_0}$  n'est pas dense dans  $L^2(0, T)$ . Donc, d'après le théorème de Müntz,  $\sum_{n=1}^{+\infty} |n|^{-\alpha} < +\infty$ , donc  $\alpha > 1$ .

Donc, par contraposé, si  $\alpha \leq 1$ , il existe des conditions initiales qu'on ne peut pas contrôler à zéro.  $\square$

Dans un registre similaire, Miller [65] considère le laplacien avec conditions aux bords de Neumann, qu'on notera  $\Delta_N$ , et l'équation de la chaleur fractionnaire avec contrôle au bord  $\partial_t f(t, x) + (-\Delta_N)^{\alpha/2} f(t, x) = 0$ ,  $f(t, 0) = u(t)$ . Il montre, également grâce au théorème de Müntz, qu'aucune combinaison linéaire finie non triviale de fonctions propres de  $\Delta_N$  ne peut être amenée à zéro.

### Cas du contrôle interne : nouveaux résultats

Les deux articles dont nous avons discuté regardent le cas d'un contrôle scalaire, c'est-à-dire que l'espace des contrôles,  $U$  dans le système de contrôle (CS), est juste  $\mathbb{R}$ . Un espace de contrôle  $U = L^2(\omega)$  est plus large, et on pourrait espérer contrôler à

zéro l'équation de la chaleur fractionnaire avec de tels contrôles. Le premier résultat de cette thèse est que ce n'est en fait pas le cas.

**Théorème 1.11** (voir aussi Sec. 2.2). *Soit  $\Omega = \mathbb{T}$ , ou  $\Omega = \mathbb{R}$ , soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(z) > 0$ . Soit  $\omega$  un ouvert strict de  $\Omega$  et  $T > 0$ . L'équation de la demi-chaleur tournée  $\partial_t f + z\sqrt{-\Delta}f = \mathbb{1}_\omega u$  n'est pas contrôlable à 0 en temps  $T$ .*

Cet énoncé affirme qu'il existe une condition initiale qu'on ne peut amener à zéro avec un contrôle  $L^2$  (pour l'équation de la demi-chaleur). La remarque centrale pour l'équation de la demi-chaleur tournée sur le tore  $\mathbb{T}$  est que les solutions sont de la forme  $\sum a_n e^{inx - z|n|t}$ , donc une solution sans composantes selon les fréquences négatives est une fonction holomorphe en  $\zeta = e^{-zt+ix}$ . Montrons comment on en déduit que l'équation de la demi-chaleur sur le tore est non-contrôlable. On ne le fait pour le moment que dans le cas  $z = 1$  pour simplifier les notations.

*Démonstration dans le cas  $\Omega = \mathbb{T}$ ,  $z = 1$ .* L'inégalité d'observabilité au temps final pour l'équation de la demi-chaleur sur  $\mathbb{T}$  est : il existe  $C > 0$  tel que pour toute suite  $(a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 e^{-2|n|T} \leq C \int_{[0,T] \times \omega} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx - |n|t} \right|^2 dt dx.$$

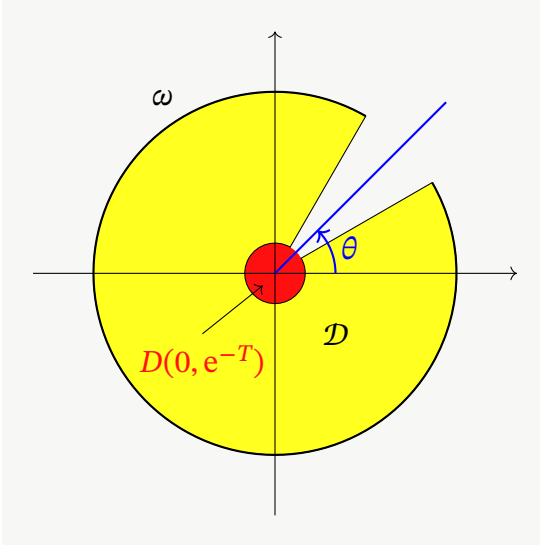


FIGURE 1.1 – En jaune, le domaine  $\mathcal{D}$ . En rouge, le disque  $D(0, e^{-T})$ . La contrôlabilité à zéro de l'équation de la demi-chaleur implique le contrôle de la norme  $L^2$  des polynômes sur  $D(0, e^{-T})$  par leur norme  $L^2$  sur  $\mathcal{D}$ . Mais on peut construire un contre-exemple à ceci en prenant une suite de polynômes qui converge vers  $\zeta \mapsto \zeta^{-1}$  hors de la demi-droite bleue.

On teste cette inégalité sur les suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  avec  $a_n = 0$  pour  $n \leq 0$  et seulement un nombre fini de termes non-nuls. Alors, en faisant le changement de variables  $\zeta = e^{-t+ix}$ , l'inégalité d'observabilité implique que pour le polynôme à coefficients complexes  $p(\zeta) = \sum_{n > 0} a_n \zeta^{n-1}$ ,

$$\sum_{n > 0} |a_n|^2 e^{-2nT} \leq C |p|_{L^2(\mathcal{D})}^2,$$

où  $\mathcal{D} = \{e^{-T} < |\zeta| < 1, \arg(\zeta) \in \omega\}$  (voir Fig. 1.1). De plus, un calcul en coordonnées polaires nous donne :

$$|p|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2 = \pi \sum_{n>0} \frac{|a_n|^2}{n} e^{-2nT} \leq \pi \sum_{n>0} |a_n| e^{-2nT}.$$

Donc l'inégalité d'observabilité pour l'équation de la demi-chaleur implique qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynôme  $p$  à coefficients complexes,  $|p|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \leq C|p|_{L^2(\mathcal{D})}$ . On va construire un contre-exemple à cette inégalité grâce au théorème de Runge (voir par exemple le livre de Rudin [77, Theorem 13.9]).

**Théorème 1.12** (Théorème de Runge). *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  tel que  $\mathbb{C} \setminus U$  soit connexe, et soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $U$ . Il existe une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  de polynômes qui converge uniformément sur tout compact de  $U$  vers  $f$ .*

On choisit  $U = \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+$  avec  $\theta \notin \bar{\omega}$  et  $f : \zeta \mapsto \zeta^{-1}$ . Il existe d'après le théorème de Runge une suite  $p_k$  qui converge uniformément vers  $\zeta \mapsto \zeta^{-1}$  sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ . En particulier, la suite  $(p_k)_{k \geq 0}$  est uniformément bornée sur  $\mathcal{D}$ . Mais comme  $|\zeta^{-1}|_{L^2(D(0, e^{-T}))} = +\infty$ , d'après le lemme de Fatou,  $|p_k|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \rightarrow +\infty$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Donc la suite  $p_k$  est un contre exemple à l'inégalité  $|p|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \leq C|p|_{L^2(\mathcal{D})}$ . Et donc l'équation de la demi-chaleur n'est pas contrôlable à zéro.  $\square$

Cette démonstration, qui consiste à nier l'inégalité d'observabilité n'est pas constructive : on sait qu'il existe une condition initiale qu'on ne peut amener à zéro avec des contrôles  $L^2([0, T] \times \omega)$ , mais on n'a aucune idée de quelles sont les conditions initiales qui sont contrôlables ou non. On pourrait espérer, comme ceci arrive pour d'autres équations [20, Th. 1.4] que les conditions initiales suffisamment régulières soient contrôlable. Ce n'est en fait pas le cas, car on peut montrer qu'aucune condition initiale assez régulière ne peut être contrôlée à zéro.

**Théorème 1.13** (voir aussi Sec. 2.2). *Soit  $\Omega = \mathbb{T}$ , soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(z) > 0$ . Soit  $\omega$  un ouvert strict de  $\Omega$  et  $T > 0$ . Aucune combinaison linéaire finie non triviale de fonctions propres du laplacien ne peut être contrôlée à zéro pour l'équation de la demi-chaleur tournée.*

Nous montrerons même dans le corps de la thèse une version un peu plus forte de ce théorème. Au vu de ce théorème, on peut se demander s'il existe une condition initiale non nulle qui soit contrôlable à zéro. Le problème est ouvert, mais on conjecture qu'il n'en existe pas.

Pour le cas de l'équation de la chaleur fractionnaire sous-critique (cas  $\alpha < 1$ ), on n'a également pas la contrôlabilité à zéro.

**Théorème 1.14** (voir Sec. 2.3). *Soit  $0 \leq \alpha < 1$ , soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(z) > 0$ . Soit  $\omega$  un ouvert strict de  $\mathbb{T}$  et  $T > 0$ . L'équation de la chaleur fractionnaire tournée*

$$\partial_t f(t, x) + z(-\Delta)^{\alpha/2} f(t, x) = u(t, x)\mathbb{1}_\omega, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{T}$$

n'est pas contrôlable à zéro en temps  $T$ .

La démonstration consiste à considérer la suite de solutions  $(g_h)$  du système adjoint ayant pour condition initiale essentiellement  $g_h(0, x) = e^{-ix\xi_0/h - x^2/2h}$ . Dans la limite  $h \rightarrow 0$ , l'état initial est concentré en zéro, et on montre grâce à une méthode standard, appelée méthode du point col, l'asymptotique  $g_h(t, x) \approx g_h(0, x)e^{-t\bar{z}(\xi_0 + ix)^\alpha/h^\alpha}$ . Donc la solution reste concentrée en 0, et la famille de solutions  $(g_h)$  est un contre-exemple à l'inégalité d'observabilité au temps final associée à la contrôlabilité à zéro de la chaleur fractionnaire.

### 1.3.2 Contrôle de l'équation de Grushin

#### Inégalité spectrale

L'équation de Grushin  $\partial_t f - \partial_x^2 f - x^2 \partial_y^2 f = 0$ , bien que ressemblant à une équation de la chaleur, est peu diffusive au sens que la dissipation naturelle n'est pas plus forte que l'inégalité spectrale. En effet, on a déjà remarqué que l'équation de Grushin se comportait sur certains sous-espaces comme l'équation de la demi-chaleur, et l'équation de la demi-chaleur est peu diffusive.

En fait, on peut montrer une inégalité spectrale pour l'opérateur de Grushin  $-\partial_x^2 - x^2 \partial_y^2$  sur  $] -1, 1[ \times \mathbb{T}$  avec conditions aux bords de Dirichlet [52]<sup>3</sup>. Si on note  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  une base de fonctions propres et  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  les valeurs propres associées, pour tout ouvert non vide  $\omega$  de  $] -1, 1[ \times \mathbb{T}$ , il existe  $C > 0$  tel que pour toute suite de nombre complexes  $(a_n)_{n \geq 0}$  :

$$\left| \sum_{\lambda_n \leq \mu} a_n \phi_n \right|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{C\mu} \left| \sum_{\lambda_n \leq \mu} a_n \phi_n \right|_{L^2(\omega)}.$$

Lorsque  $\{x = 0\} \not\subset \bar{\omega}$ , l'exposant 1 de  $\mu$  dans le facteur  $C e^{C\mu}$  est optimal, on ne peut remplacer ce facteur par aucun  $C e^{C\mu^\gamma}$  avec  $\gamma < 1$ . Cela sera confirmé par le fait que l'équation n'est alors pas contrôlable à zéro en temps arbitrairement petit, mais on peut déjà s'en douter en testant l'inégalité spectrale avec les fonctions  $e^{iny - nx^2/2}$ , qui sont des fonctions propres approchées (elle ne vérifient pas les conditions aux bords) de valeurs propres approchées  $n$ .

#### Contrôle sur une bande verticale

L'article fondateur sur la contrôlabilité de l'équation de Grushin, de Beauchard, Cannarsa et Guglielmi [15], traite le cas de l'équation de Grushin sur<sup>4</sup>  $(x, y) \in$

<sup>3</sup>Comme ce mémoire n'est pas publié, nous donnerons plus loin la démonstration, au moins dans les grandes lignes.

<sup>4</sup>En fait  $] -1, 1[ \times ]0, 1[$  mais c'est pareil.

$] -1, 1[ \times \mathbb{T}$ , et  $\omega = ]a, b[ \times \mathbb{T}$ , où  $0 < a < b$ . Ils montrent que l'équation de Grushin n'est pas contrôlable si  $T$  est trop petit, et est contrôlable si  $T$  est assez grand. L'existence d'un temps minimal pour avoir contrôlabilité, phénomène attendu pour les équations hyperboliques, est plus surprenant pour une équation parabolique. Détaillons un peu ces démonstrations.

Comme  $e^{iny-nx^2/2}$  est une fonction propre de l'opérateur de Grushin sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ , de valeur propre associée  $n$ , les fonctions  $\chi(x)e^{iny-nx^2/2}$ , où  $\chi$  est  $C^\infty$  à support dans  $] -1, 1[$ , et qui vaut 1 au voisinage de 0, vérifient

$$(-\partial_x^2 - x^2\partial_y^2 - n)(\chi(x)e^{iny-nx^2/2}) = \mathcal{O}(e^{-cn}).$$

Ces sont des « fonctions propres approchées », ou en termes plus techniques, des *quasi-modes*. En conséquence,  $\chi(x)e^{iny-nx^2/2-nt}$  est une solution approchée de l'équation de Grushin. Donc la solution  $g_n$  de l'équation de Grushin avec condition initiale  $\chi(x)e^{iny-nx^2/2}$  vérifie  $g_n(t, x, y) = e^{iny-nx^2/2-nt} + \mathcal{O}(e^{-cn})$ . En particulier,

$$\begin{aligned} |g_n(T, \cdot, \cdot)|_{L^2([-1,1] \times \mathbb{T})}^2 &\geq cn^{-1/2}e^{-2nT}; \\ |g_n|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 &\leq e^{-c'n}. \end{aligned}$$

Donc si  $2T < c'$ , l'inégalité d'observabilité au temps final est fautive, et l'équation de Grushin n'est pas contrôlable sur  $\omega$ . En remplaçant  $e^{-nx^2/2}$  par la véritable fonction propre de  $-\partial_x^2 + (nx)^2$ , on peut grâce à des techniques d'inégalité d'Agmon montrer que  $|g_n|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2$  est alors  $\mathcal{O}(e^{-(1-\epsilon)a^2})$  pour tout  $\epsilon > 0$ . Ceci démontre que l'équation de Grushin n'est en fait pas contrôlable si  $2T < a^2$ .

Pour la contrôlabilité en temps grand, les auteurs décomposent les solutions  $g(t, x, y)$  de l'équation de Grushin en série de Fourier suivant  $y$ , c'est-à-dire qu'ils écrivent  $g(t, x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(t, x)e^{iny}$ . La  $n$ -ième composante  $g_n(t, x)$  vérifie alors l'équation suivante :

$$\partial_t g_n(t, x) - \partial_x^2 g_n(t, x) + (nx)^2 g_n(t, x) = 0,$$

ainsi que les conditions aux bords  $g_n(t, \pm 1) = 0$ .

Cette décomposition en série de Fourier est à la base des résultats de contrôlabilité sur l'équation de Grushin.<sup>5</sup> L'observabilité au temps final de l'équation de Grushin sur  $\omega = ]a, b[ \times \mathbb{T}$  est équivalente, d'après l'égalité de Parseval, à l'observabilité au temps final de chaque équation  $\partial_t - \partial_x^2 + (nx)^2$  sur  $]a, b[$ , uniformément en  $n$ , c'est à dire à l'existence de  $C > 0$  telle que pour tout  $n$  et pour toute solution  $g_n$  de

$$\partial_t g_n(t, x) - \partial_x^2 g_n(t, x) + (nx)^2 g_n(t, x) = 0, \quad (\text{G}_n)$$

<sup>5</sup>Mentionnons que c'est aussi un ingrédient pour démontrer l'inégalité spectrale que nous avons énoncée.

on a l'inégalité d'observabilité au temps final

$$\int_{-1}^1 |g(T, x)|^2 dx \leq C \int_{[0, T] \times ]a, b[} |g(t, x)|^2 dt dx.$$

En démontrant des inégalités de Carleman pour les opérateurs  $\partial_t - \partial_x^2 + (nx)^2$ , et en suivant la valeur des constantes en fonction de  $n$ , les auteurs démontrent<sup>6</sup> qu'il existe  $C > 0$ , tel que pour tout  $T > 1$ , pour tout  $n$  et pour toute solution  $g_n$  de  $(G_n)$ ,

$$\int_{-1}^1 |g_n(T, x)|^2 dx \leq Ce^{Cn} \int_{[0, T] \times ]a, b[} |g_n(t, x)|^2 dt dx.$$

La constante d'observabilité n'est pas uniforme en  $n$ , mais on peut la compenser grâce à la dissipation de chaque équation  $(G_n)$ . En effet, en exploitant les fonctions  $e^{-nx^2/2}$ , qui sont des fonctions propres approchées des opérateurs  $-\partial_x^2 + (nx)^2$ , on peut voir que la première valeur propre  $\lambda_n$  de ces opérateurs a pour asymptotique  $\lambda_n = n + \mathcal{O}(e^{-cn})$ . Donc, les solutions de  $(G_n)$  satisfont  $|g_n(T, \cdot)|_{L^2(-1,1)}^2 \leq Ce^{-2nT} |g_n(0, \cdot)|_{L^2(-1,1)}^2$ . En conséquence, si  $2T > C + 2$  les équations  $(G_n)$  sont observables au temps final uniformément en  $n$ .  $\square$

Cette démonstration ne donne pas le temps minimal pour avoir contrôlabilité, on sait juste qu'il est plus grand que  $a^2/2$ . Dans le cas où  $\omega$  est la réunion de deux bandes symétriques, c.-à-d.  $\omega = (]-b, -a[ \cup ]a, b[) \times \mathbb{T}$ , un article de Beauchard, Miller & Morancey [20] démontre que la valeur du temps minimal est  $T^* = a^2/2$ , et que l'équation de Grushin n'est pas contrôlable si  $T = T^*$ . Dans un preprint récent, Beauchard, Dardé et Ervedoza [16], montrent que si  $\omega = ]a, b[ \times \mathbb{T}$  est une seule bande, alors, le temps minimal est toujours  $T^* = a^2/2$ . Damien Allonsius [3, Ch. 4] propose également une autre démonstration de ce résultat, modulo une conjecture de gap uniforme qui est vérifiée numériquement (et très largement). En résumé :

**Théorème 1.15.** *Soit  $\Omega = ]-1, 1[ \times \mathbb{T}$ ,  $T > 0$ ,  $0 < a < b < 1$  et  $\omega = ]a, b[ \times \mathbb{T}$ . Alors :*

- *si  $T > a^2/2$ , l'équation de Grushin  $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)f = \mathbb{1}_\omega u$  sur  $\Omega$  est contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ ;*
- *si  $T \leq a^2/2$ , l'équation de Grushin sur  $\Omega$  n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ .*

Mentionnons que les articles que nous avons cités contiennent bien d'autres informations, comme des conditions suffisantes pour qu'une condition initiale soit contrôlable à zéro même dans le cas  $T \leq a^2/2$ , et des résultats sur les équations de Grushin généralisées

$$\partial_t f(t, x, y) - \partial_x^2 f(t, x, y) - q(x)^2 \partial_y^2 f(t, x, y) = u(t, x, y) \mathbb{1}_\omega.$$

<sup>6</sup>Même si cela est présenté de manière différente.

Si  $q(x) = |x|^\gamma$  et  $\gamma < 1$ , on a la contrôlabilité en tout temps et sur tout  $\omega$ . Dans le cas  $q \in C^3(-1, 1; \mathbb{R})$ ,  $q(0) = 0$  et  $q'(x) \geq c > 0$ ; et si le domaine de contrôle est une bande verticale  $\omega = ]a, b[ \times \mathbb{T}$  avec  $0 < a < b$ , le temps minimal de contrôle est  $T^* = q'(0)^{-1} \int_0^a q'(x) dx$ .

### Contrôle sur d'autres domaines : nouveaux résultats

Notre premier résultat est que si le domaine de contrôle est le complémentaire d'une bande *horizontale*  $\omega = ]-1, 1[ \times (\mathbb{T} \setminus [a, b])$ , l'équation n'est jamais contrôlable<sup>7</sup>.

**Théorème 1.16** (voir aussi Sec. 4.2). *Soit  $T > 0$ . Supposons qu'il existe un segment non trivial  $[a, b]$  de  $\mathbb{T}$  tel que  $\omega = ]-1, 1[ \times (\mathbb{T} \setminus [a, b])$ . L'équation de Grushin sur  $\Omega = ]-1, 1[ \times \mathbb{T}$  n'est pas contrôlable sur  $\omega$  en temps  $T$ .*

Ceci découle du fait que l'équation de Grushin se comporte sur certains sous-espaces comme l'équation de la demi-chaleur, et que cette dernière n'est jamais contrôlable. Plus précisément, on construit des solutions, qui sont approximativement de la forme  $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-nx^2/2 + iny - nt}$  et qui se concentrent hors de  $\omega$ . Ceci se fait de la même manière que pour la demi-chaleur, mais en traitant  $x$  comme un paramètre. Les fonctions ci-dessus ne sont que solutions approchées, donc nous aurons besoin de traiter les termes d'erreurs. Comme nous sommes dans le cas critique, où la diffusion est faible mais de presque rien, ces termes d'erreurs sont difficiles à traiter. Nous aurons besoin d'outils d'analyse complexe et d'une analyse spectrale fine de l'opérateur  $-\partial_x^2 + (\eta x)^2$  sur  $] -1, 1[$ , dans la limite  $\eta \rightarrow \infty$ ,  $\Re(\eta) > 0$ .

Dans les résultats sur les bandes verticales, la non-contrôlabilité en temps petit était liée à une concentration des fonctions propres en  $x = 0$ . Dans le cas des bandes horizontales, la non-contrôlabilité vient d'une faible diffusion dans la direction  $y$ . On peut combiner ces deux phénomènes, et trouver le temps minimal de contrôlabilité pour d'autres domaines<sup>8</sup>.

**Théorème 1.17** (voir aussi Sec. 4.3). *Soit  $\Omega = ]-1, 1[ \times \mathbb{T}$ . Soit  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{T} \rightarrow [-1, 1]$  deux fonctions continues et  $\omega = \{(x, y) \in ]-1, 1[ \times \mathbb{T}, \gamma_1(y) < x < \gamma_2(x)\}$  (voir Fig. 1.2). Soit<sup>9</sup>  $a = \max(\sup(\gamma_2^-), \sup(\gamma_1^+))$ . Alors :*

1. si  $T > a^2/2$ , l'équation de Grushin est contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ ;
2. si  $T < a^2/2$ , l'équation de Grushin n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ .

*Ce théorème reste vrai si l'équation de Grushin est posée sur  $] -1, 1[ \times ]0, \pi[$  au lieu de  $] -1, 1[ \times \mathbb{T}$ ; dans ce cas, on demande que les fonctions  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  aillent de  $[0, \pi]$  dans  $[-1, 1]$ .*

<sup>7</sup>Ce résultat a été publié dans [54].

<sup>8</sup>Ce résultat a été obtenu en collaboration avec Michel Duprez [38].

<sup>9</sup>Si  $f$  est une fonction numérique, on note  $f^+ = \max(f, 0)$  et  $f^- = \max(-f, 0)$ .



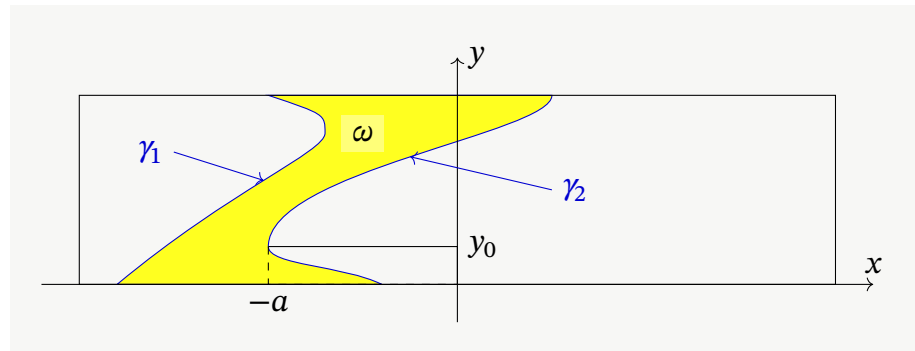


FIGURE 1.2 – En jaune, un exemple de domaine  $\omega$  pour le théorème 1.17 si l'équation de Grushin est posée sur  $] -1, 1[ \times ] 0, \pi$ . La fonction  $\max(\gamma_2^-, \gamma_1^+)$  atteint son maximum en  $y_0$ .

La démonstration du résultat de contrôlabilité à zéro en temps grand découle du résultat sur les bandes verticales grâce à un argument de troncature, et le résultat de non-contrôlabilité à zéro en temps petit se démontre par une extension de la méthode employée pour montrer la non-contrôlabilité sur les bandes horizontales.

### 1.3.3 Contrôle des équations de type Kolmogorov

#### Contrôle sur une bande horizontale

Dans un article de 2014, Beauchard montre que comme pour l'équation de Grushin, il peut exister un temps minimal de contrôlabilité.

**Théorème 1.18** ([13]). *On considère l'équation de type Kolmogorov  $(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x) f(t, x, v) = \mathbb{1}_\omega u(t, x, v)$ , posée sur  $\Omega = \mathbb{T} \times ] -1, 1[$ , et avec  $\omega = \mathbb{T} \times ] a, b[$  ( $0 < a < b \leq 1$ ). Il existe  $T^* \geq a^2/2$  tel que :*

1. si  $T > T^*$ , l'équation de Kolmogorov sur  $\Omega$  est contrôlable en temps  $T$  sur  $\omega$ ;
2. si  $T < T^*$ , l'équation de Kolmogorov n'est pas contrôlable en temps  $T$  sur  $\omega$ .

La stratégie de la démonstration est similaire à celle employée pour Grushin. Pour montrer la non-contrôlabilité en temps petit, on exploite les fonctions propres (approchées)  $e^{inx - \sqrt{in}v^2/2}$ . Pour la contrôlabilité en temps grand, on décompose en séries de Fourier selon la variable  $x$  les solutions libres de l'équation de Kolmogorov, puis on montre l'observabilité uniforme des composantes de Fourier en combinant un calcul explicite de la vitesse de dissipation de ces dernières et des inégalités de Carleman.

Contrairement à l'équation de Grushin, le temps minimal pour la contrôlabilité de l'équation de Kolmogorov est encore inconnu, mais on conjecture que dans le cadre du théorème ci-dessus, ce temps minimal est  $a^2/2$ .

Notons aussi qu'on dispose de résultats de contrôlabilité sur d'autres équations de type Kolmogorov, où on a remplacé  $v^2$  par  $v^\gamma$  :

$$\partial_t f(t, x, v) - \partial_v^2 f(t, x, v) - v^\gamma \partial_x f(t, x, v) = u(t, x, v) \mathbb{1}_\omega.$$

Pour  $\gamma = 1$  et  $\omega = \mathbb{T} \times ]a, b[$ , où  $-1 < a < b < 1$ , on a toujours contrôlabilité [13], et pour  $\gamma \geq 3$ , on n'a jamais contrôlabilité [17].

### Contrôle sur d'autres domaines : nouveaux résultats

Notre résultat principal, similaire à celui sur l'équation de Grushin, est la non-contrôlabilité sur les complémentaires des bandes verticales.<sup>10</sup>

**Théorème 1.19** (voir aussi Sec. 5.2). *Supposons qu'il existe un segment non trivial  $[a, b]$  de  $\mathbb{T}$  tel que  $\omega \subset (\mathbb{T} \setminus [a, b]) \times ]-1, 1[$ . L'équation de Kolmogorov  $(\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x) f = \mathbb{1}_\omega u$  posée sur  $\Omega = \mathbb{T} \times ]-1, 1[$  n'est jamais contrôlable sur  $\omega$ .*

Comme pour l'équation de Grushin, la démonstration de ce théorème consiste à remarquer que sur certains sous-espaces de  $L^2(\Omega)$ , l'équation de Kolmogorov se comporte comme l'équation de la chaleur fractionnaire tournée  $\partial_t f + \sqrt{|v|}(-\Delta)^{1/4} f = 0$ , et à adapter la démonstration de la non-contrôlabilité de cette dernière. Mentionnons qu'il existait déjà des résultats similaires sur un modèle de cette équation [17], mais les méthodes employées pour traiter ce modèle ne permettent pas de conclure sur l'équation de Kolmogorov. Nous donnerons également un résultat analogue pour l'équation de type Kolmogorov  $\partial_t - \partial_v^2 + v \partial_x$ , avec une stratégie de démonstration similaire (voir Sec. 5.3).

## 1.4 Contrôle des systèmes paraboliques-hyperboliques

### 1.4.1 Systèmes paraboliques-hyperboliques

Un système parabolique-hyperbolique est un système d'équations de la forme

$$\partial_t f(t, x) - B \partial_x^2 f(t, x) + A \partial_x f(t, x) + K f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega$$

où  $f(t, x)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , et  $A, B$  et  $K$  sont des matrices réelles. Ces systèmes sont bien posés par exemple si  $B$  est à partie symétrique positive et  $A$  est symétrique [22].

Les systèmes de thermo-élasticité avec loi de Fourier (systèmes ondes-chaleur couplés) ou de Cattaneo, sont des exemples d'équations qui sont de ce type, une fois qu'on les a réécrites comme des systèmes d'ordre un en temps. Il en est de même pour l'équation des ondes avec amortissement structurel ou l'équation de la chaleur avec terme de mémoire.

<sup>10</sup>Ce résultat a été prépublié dans [53] (article soumis).

### 1.4.2 Contrôle de quelques systèmes paraboliques-hyperboliques particuliers

Lebeau et Zuazua [59] étudient le système de thermo-élasticité suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 f_1(t, x) - c^2 \Delta f_1(t, x) + \alpha \Delta f_2(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega & (t, x) \in [0, T] \times M \\ \partial_t f_2(t, x) - \nu \Delta f_2(t, x) + \beta \partial_t f_1(t, x) = v(t, x) \mathbb{1}_\omega & (t, x) \in [0, T] \times M \\ f_1(t, x) = f_2(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T] \times \partial M \end{cases}$$

où  $M$  est une variété riemannienne compacte (possiblement à bords). Ce système peut se mettre sous la forme du système parabolique-hyperbolique

$$\partial_t F(t, x) - B \Delta F(t, x) + K F(t, x) = U(t, x) \mathbb{1}_\omega,$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \partial_t f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Ils démontrent que si la condition de contrôle géométrique pour le contrôle de de l'équation des ondes non couplée (voir Th. 1.7) est vérifiée, alors le système de thermo-élasticité est contrôlable à zéro.

Pour ce faire, ils remarquent que les valeurs propres de l'opérateur  $-B\Delta + K$  se décomposent en deux familles : celles équivalentes à  $\pm ic\omega_j$  où les  $(\omega_j)$  sont les valeurs propres de  $-\Delta$ , et celles équivalentes à  $\nu\omega_j$ . En projetant suivant les premières valeurs propres, l'équation est égale à des termes compacts près à  $\partial_t^2 f_1(t, x) - c^2 \Delta f_1(t, x) + \frac{\alpha\beta}{\nu} \partial_t f_1(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega$ , et cette équation est exactement contrôlable. En projetant sur les secondes valeurs propres, ils parviennent à adapter la méthode Lebeau-Robbiano pour montrer la contrôlabilité de l'équation sur ces valeurs propres. Un argument algébrique et l'alternative de Fredholm permettent de contrôler les deux équations à la fois.

Un article de Albano et Tataru [2] étudie un système d'une équation hyperbolique du second ordre et d'une parabolique couplées. Mais les techniques employées requièrent que le symbole de l'équation hyperbolique soit réel. Comme le symbole d'une équation de transport est imaginaire pur, nous ne pouvons pas adapter cette méthode.

Mentionnons aussi un article de Chaves-Silva, Rosier & Zuazua [27] qui étudie l'équation  $(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_x^2 \partial_t + b(x) \partial_t) y(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega$ . On peut l'écrire comme le système parabolique-hyperbolique  $(\partial_t - B \partial_x^2 + A \partial_x) F(t, x) = U(t, x) \mathbb{1}_\omega$  avec  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $y$  est solution de l'équation des ondes avec amortissement structurel si et seulement si c'est la première composante d'une solution du système précédent. Ils remarquent que l'équation n'est jamais contrôlable si le domaine de

contrôle est fixe, et ils donnent une condition suffisante pour que l'équation soit contrôlable si le domaine de contrôle dépend du temps (voir aussi les références de cet article).

Également, un article de Guerrero et Imanuvilov [45] étudie la contrôlabilité des équations  $\partial_t y - \Delta y - \int_0^t \Delta y \, d\tau = 0$  et  $\partial_t y - \Delta y + \int_0^t y \, d\tau = 0$  avec contrôle frontière, et démontre que ces équations ne sont pas contrôlables à zéro. En dimension 1 et pour la première équation, les solutions sont les secondes composantes des solutions du système  $\partial_t Y - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x^2 Y + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x Y = 0$ , qui est bien un système parabolique-hyperbolique (mais avec contrôle frontière).

### Nouveaux résultats

Notre résultat sur les systèmes paraboliques-hyperboliques, est le suivant<sup>11</sup>,

**Théorème 1.20** (voir aussi Sec. 6.1–6.4). *Soient  $A, B, K \in M_d(\mathbb{R})$  et  $\omega$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{T}$ . On considère le système*

$$\partial_t f(t, x) - B \partial_x^2 f(t, x) + A \partial_x f(t, x) + K f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{T}.$$

*On suppose que les matrices  $A$  et  $B$  vérifient*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ avec } D \in M_{d_2}(\mathbb{R});$$

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(D), \Re(\lambda) > 0;$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ avec } A_{11} \in M_{d_1}(\mathbb{R}), A_{22} \in M_{d_2}(\mathbb{R});$$

$$A_{11} \text{ est diagonalisable avec } \text{Sp}(A_{11}) \subset \mathbb{R}.$$

*Alors, en définissant  $T^* = (2\pi - \text{longueur } \omega) \max_{\rho \in \text{Sp}(A_{11})} |\rho|^{-1}$ , on a*

1. *le système est contrôlable sur  $\omega$  en temps  $T > T^*$ ;*
2. *le système n'est pas contrôlable sur  $\omega$  en temps  $T < T^*$ .*

Ce théorème est certes limité, il ne contient par exemple pas les systèmes de thermo-élasticité, et est limité au cas de la dimension 1, mais nous espérons l'étendre dans des travaux futurs. La démonstration est une adaptation de la démonstration de Lebeau & Zuazua pour le système de thermo-élasticité.

<sup>11</sup>Ce résultat a été obtenu en collaboration avec Karine Beauchard et Kévin Le Balc'h, et a été prépublié dans [19] (article soumis)

## 1.5 Commentaires : autres équations paraboliques avec un temps minimal de contrôlabilité

Comme les équations hyperboliques présentent une vitesse finie de propagation, il est naturel que le contrôle des équations hyperboliques requière une condition géométrique sur le domaine de contrôle et le temps. Mais ce genre d'obstacle n'existe pas pour les équations paraboliques. Il est donc assez surprenant que des conditions de contrôles géométriques apparaissent pour les équations paraboliques dégénérées.

Ces « phénomènes hyperboliques » du contrôle des équations paraboliques sont encore peu compris hors de quelques cas particuliers, mais on sait désormais qu'il existe en fait beaucoup de problèmes paraboliques pour lesquels de tels phénomènes se manifestent.

Déjà pour l'équation de la chaleur, si on applique un contrôle ponctuel, c.-à-d. si  $\partial_t f(t, x) - \partial_x^2 f(t, x) = u(t)\delta_{x_0}$  sur  $]0, 1[$  avec conditions au bord de Dirichlet, où  $\delta_{x_0}$  est la distribution Dirac en  $x_0$ , alors selon la valeur de  $x_0$ , la contrôlabilité peut nécessiter un temps minimal, ce temps minimal pouvant prendre toutes les valeurs de  $[0, +\infty]$  suivant la valeur de  $x_0$  [35].

Une équation parabolique dégénérée que nous n'avons pas encore mentionnée est l'équation de la chaleur sur le groupe de Heisenberg  $(\partial_t - \partial_x^2 - (x\partial_z + \partial_y)^2)f = u\mathbb{1}_\omega$ , qui présente aussi en temps minimal de contrôlabilité [14].

Enfin, les systèmes paraboliques ont été beaucoup étudiés, surtout en dimension un. Si on ne contrôle pas toutes les composantes du système et que le support du contrôle et du couplage sont disjoints, il peut exister un temps minimal de contrôlabilité [6, 37]. D'un point de vue abstrait, un temps minimal de contrôlabilité pour les systèmes peut venir d'une concentration des fonctions propres [7], d'une condensation des valeurs propres [5] ou d'autres phénomènes encore [23] (voir aussi les bibliographies de ces articles).

Nos résultats sont dans le même esprit : nous cherchons à comprendre les « effets hyperboliques » qui peuvent se manifester lorsqu'on essaye de contrôler certaines équations paraboliques. Bien entendu, une compréhension complète reste encore hors de portée, et de nombreux autres travaux seront nécessaires à cette fin.

## 2 | Non-contrôlabilité de l'équation de la chaleur fractionnaire

L'ÉQUATION de la chaleur est contrôlable à zéro grâce à ses fortes propriétés de dissipation, comme on peut le voir grâce à la méthode de Lebeau-Robbiano. Si on considère l'équation de la chaleur fractionnaire avec un exposant suffisamment faible, qui dissipe moins, on s'attend à perdre la contrôlabilité à zéro, et c'est ce que nous montrons ici.

### 2.1 Équation de la chaleur fractionnaire

#### 2.1.1 Définition

Dans tout ce chapitre,  $\alpha \geq 0$  et  $z \in \mathbb{C}$  avec  $\Re(z) > 0$ . Commençons par définir le laplacien fractionnaire, ce qu'on se limitera à faire sur  $\Omega = \mathbb{R}^n$  ou  $\Omega = \mathbb{T}^n$ .

**Définition 2.1.** Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , on définit  $(-\Delta)^{\alpha/2} f$  par<sup>1</sup>

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha/2} f)(\xi) = |\xi|^\alpha \mathcal{F} f(\xi).$$

Si  $\Omega = \mathbb{T}^n$ , pour  $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$  un  $n$ -uplet d'entiers, on note  $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{ik \cdot x} dx$  le «  $k$ -ième » coefficient de Fourier de  $f$ , et on définit  $(-\Delta)^{\alpha/2} f$  par

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n, c_k((-\Delta)^{\alpha/2} f) = |k|^\alpha c_k(f).$$

Par simplicité, on notera  $A := (-\Delta)^{\alpha/2}$  le laplacien fractionnaire ainsi défini.

Comme le laplacien  $\Delta$  agit comme la multiplication en Fourier par  $-|\xi|^2$ , cette définition est cohérente. L'équation de la chaleur fractionnaire tournée est alors la suivante, où  $f(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$  est l'état,  $f_0 \in L^2(\Omega)$  est l'état initial,  $\omega$  est un sous-ouvert de  $\Omega$ , et  $u \in L^2([0, T] \times \omega)$  est le contrôle :

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + zA f(t, x) = \mathbb{1}_\omega u(t, x) & (t, x) \in ]0, t[ \times \Omega \\ f(0, x) = f_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Le cas  $z = 1$  correspond au cas de l'équation de la chaleur fractionnaire (non tournée) dont nous avons discutée en introduction. Si  $\alpha = 1$ , on parlera d'*équation de la demi-chaleur* (tournée), et si  $\alpha < 1$ , on parlera d'*équation de la chaleur fractionnaire sous-critique* (tournée).

Considéré comme opérateur non borné sur  $L^2(\Omega)$ , le laplacien fractionnaire a pour domaine  $D(A) = H^\alpha(\Omega)$  (l'espace de Sobolev d'indice  $\alpha$  sur  $L^2$ ).

<sup>1</sup>On note  $\mathcal{F} f$  la transformée de Fourier de  $f$ , définie par  $\mathcal{F} f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix \cdot \xi} d\xi$ .

### 2.1.2 Caractère bien posé

On commence par montrer que l'équation homogène est bien posée.

**Proposition 2.2.** *Le laplacien fractionnaire tourné  $-zA$  génère un semi-groupe de contractions. On notera  $e^{-tzA}$  ce semi-groupe.*

On pourrait le démontrer avec le théorème de Lumer-Phillips (Th. A.4), mais on peut construire le semi-groupe directement grâce à la transformée de Fourier. On se bornera ici à le démontrer lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . La démonstration pour  $\Omega = \mathbb{T}^n$  consiste essentiellement à remplacer  $\mathcal{F}f(\xi)$  par  $c_k(f)$ .

*Démonstration.* Si  $f_0 \in L^2(\Omega)$  et  $t \geq 0$ , on définit  $S(t)f_0$  par  $\mathcal{F}(S(t)f_0)(\xi) = e^{-tz|\xi|^\alpha} \mathcal{F}f_0(\xi)$ . On constate alors que  $S$  est un semi-groupe fortement continu de contractions sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . On remarque qu'en posant  $f(t) = S(t)f_0$ , on a  $f'(t) + zAf(t) = 0$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Or, si  $B$  est le générateur infinitésimal du semi-groupe  $S$ , on doit avoir pour tout  $f_0 \in D(B)$  et  $t \geq 0$ ,  $f'(t) = Bf(t)$  (Prop. A.2). Donc,  $B$  agit comme  $-zA$ . Il reste seulement à déterminer le domaine de  $B$ . Si  $f_0 \in D(B)$ , par définition, la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{h} (e^{-hz|\xi|^\alpha} - 1) \mathcal{F}f_0(\xi) \right)$$

existe dans  $L^2(\mathbb{T})$ . Comme cette limite est  $\mathcal{F}^{-1}(-z|\xi|^\alpha \mathcal{F}f_0(\xi))$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , le domaine  $D(B)$  du générateur infinitésimal est  $D(B) = D(A) = H^\alpha$ .

Donc le générateur infinitésimal de  $S$  est  $B = -zA$ . □

On définit alors les solutions faibles de l'équation de la chaleur fractionnaire tournée grâce à la définition générale A.5, et le Théorème A.6 nous assure que pour tout  $f_0 \in L^2(\Omega)$  et  $u \in L^2([0, T] \times \omega)$ , il existe une unique solution douce de l'équation de la chaleur fractionnaire tournée (2.1).

Donnons pour finir l'inégalité d'observabilité au temps final associé au problème de la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur fractionnaire tournée (2.1) (voir Th. 1.6) : il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in L^2(\Omega)$ , la solution  $g$  du système adjoint

$$\partial_t g + \bar{z}Ag = 0 \tag{2.2}$$

avec condition initiale  $g(0) = g_0$  vérifie

$$|g(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq C |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}. \tag{2.3}$$

## 2.2 Équation de la demi-chaleur

On a déjà démontré dans l'introduction que l'équation de la demi-chaleur (cas  $\alpha = 1$  et  $z = 1$ ) sur le tore n'est jamais contrôlable à zéro. Montrons d'abord comment cette démonstration se généralise à l'équation de la demi-chaleur tournée avant de donner une large classe de conditions initiales qui ne peuvent être amenées à zéro. Dans cette section, on supposera donc  $\alpha = 1$ .

### 2.2.1 Non-contrôlabilité

**Théorème 2.3.** *Soit  $T > 0$ . On suppose que le complémentaire de  $\omega$  est d'intérieur non-vide. L'équation de la chaleur fractionnaire tournée (2.1) n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ .*

*Démonstration dans le cas  $\Omega = \mathbb{T}$ . Étape 1 : réinterpréter l'inégalité d'observabilité comme une inégalité sur les polynômes.*

On veut montrer que l'inégalité d'observabilité (2.3) n'est pas vraie. Pour cela, on considère des conditions initiales de l'équation adjointe (2.2) de la forme  $\sum_{n>0} a_n e^{inx}$ , où la somme est finie. La solution associée est

$$g(t, x) = \sum_{n>0} a_n e^{inx - t\bar{z}n}, \quad (2.4)$$

et l'inégalité d'observabilité appliquée à ces fonctions s'écrit

$$2\pi \sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2n\Re(z)T} \leq C \int_{\substack{0 < t < T \\ x \in \omega}} \left| \sum_{n>0} a_n e^{inx - t\bar{z}n} \right|^2 dt dx. \quad (2.5)$$

Dans le membre droit, on pose  $\zeta(t, x) = e^{ix - \bar{z}t}$  et on fait le changement de variables  $(t, x) \mapsto (|\zeta(t, x)|, \arg(\zeta(t, x))) = (r, \theta)$ , qu'on identifie à  $\zeta = re^{i\theta}$ . On a alors

$$\begin{aligned} dr &= d(e^{-\Re(z)t}) = -\Re(z)r dt \\ d\theta &= d(x + \Im(z)t) = dx + \Im(z) dt. \end{aligned}$$

Donc  $r dr d\theta = \Re(z)r^2 dt dx$ . Donc si on note  $\mathcal{D}$  l'image de  $]0, T[ \times \omega$  par ce changement de variables, le membre droit de l'inégalité d'observabilité est égal à

$$\frac{C}{\Re(z)} \int_{\mathcal{D}} \left| \sum_{n>0} a_n (re^{i\theta})^n \right|^2 \frac{1}{r^2} r dr d\theta = \frac{C}{\Re(z)} \int_{\mathcal{D}} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta), \quad (2.6)$$

où on a noté  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ . Notons que si  $\zeta = e^{ix - \bar{z}t}$ , alors  $|\zeta| = e^{-\Re(z)t}$  et  $\arg(\zeta) = x + \Im(z)t = x - \ln |\zeta| \frac{\Im(z)}{\Re(z)}$ . En conséquence, le domaine  $\mathcal{D}$  est égal à (voir Fig. 2.1)

$$\mathcal{D} = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}, e^{-T\Re(z)} < |\zeta| < 1, \arg(\zeta) + \ln |\zeta| \frac{\Im(z)}{\Re(z)} \in \omega \right\}.$$



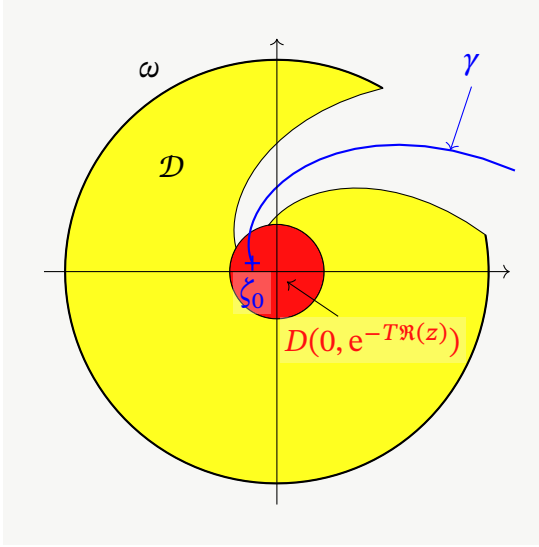


FIGURE 2.1 – En jaune le domaine  $\mathcal{D}$ ; en rouge le disque  $D(0, e^{-T\Re(z)})$ . L'arc de cercle extérieur est  $\omega$  identifié à un sous-ensemble du cercle unité complexe. L'inégalité d'observabilité pour l'équation de la demi-chaleur tournée implique une estimation de la norme  $L^2(D(0, e^{-T\Re(z)}))$  des polynômes par leur norme  $L^2(\mathcal{D})$ . Mais c'est impossible car il existe une suite de polynômes qui converge vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  en dehors de la courbe bleue.

Pour le membre de gauche de l'inégalité d'observabilité (2.5), on remarque que les fonctions  $\zeta \mapsto \zeta^n$  sont orthogonales sur n'importe quel disque de centre 0. En effet, en calculant en coordonnées polaires, on a pour tout  $R > 0$ , et  $n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{D(0,R)} \zeta^n \bar{\zeta}^m d\lambda(\zeta) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} r dr d\theta$$

qui vaut 0 si  $n \neq m$  et  $2\pi \int_0^R r^{2n+1} dr = 2\pi R^{2n+2}/(2n+2)$  si  $n = m$ . En conséquence, on a

$$\int_{D(0,R)} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) = 2\pi \sum_{n>0} \frac{|a_n|^2}{2n} R^{2n}. \quad (2.7)$$

Donc, en choisissant  $R = e^{-T\Re(z)}$ , le membre de gauche de l'inégalité d'observabilité (2.5) vérifie l'inégalité

$$\int_{D(0,R)} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) \leq \pi \sum_{n>0} |a_n|^2 R^{2n} = \pi \sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2n\Re(z)T}. \quad (2.8)$$

Donc, en combinant l'expression (2.6) du membre droit et l'inégalité (2.8) pour le membre gauche, l'inégalité d'observabilité (2.5) pour l'équation de la demi-chaleur tournée implique que pour toute suite complexe finie  $(a_n)_{n>0}$ ,

$$\int_{D(0,R)} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) \leq \frac{\pi C}{\Re(z)} \int_{\mathcal{D}} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta).$$

En faisant le changement d'indice  $n' = n - 1$  dans la somme, cette inégalité s'écrit : il existe  $C' > 0$  tel que pour tout polynômes  $p \in \mathbb{C}[X]$ ,

$$|p|_{L^2(D(0,R))} \leq C' |p|_{L^2(\mathcal{D})}. \quad (2.9)$$

*Étape 2 : construction du contre-exemple.* Nous allons à nouveau nous servir du théorème de Runge (Th. 1.12) pour montrer que cette inégalité ne peut être vraie. On choisit  $\theta \in \mathbb{T}$  non adhérent à  $\omega$ , et on pose la courbe  $\gamma = \{e^{i\theta - t\bar{z}}, -\infty < t \leq T + 1\}$  ainsi que  $\zeta_0 = e^{i\theta - (T+1)\Re(z)}$  (voir Fig. 2.1). Cette courbe est disjointe de  $\mathcal{D}$ , et  $\zeta_0$  en est une extrémité. On choisit dans le théorème de Runge  $U = \mathbb{C} \setminus \gamma$  et  $f(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{-1}$ , ce qui donne une suite  $(p_n)_{n \geq 0}$  de polynômes qui converge uniformément vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ .

Comme  $\gamma$  est disjointe de  $\overline{\mathcal{D}}$ , la suite  $(p_n)$  est uniformément bornée sur  $\mathcal{D}$ , et donc

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|p_n\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq C \sup_{n \in \mathbb{N}} \|p_n\|_{L^\infty(\mathcal{D})} < +\infty$$

De plus,  $\zeta_0 \in D(0, R)$ , donc la fonction  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  est de norme  $L^2(D(0, R))$  infinie. D'après le lemme de Fatou, on a donc

$$\begin{aligned} \liminf \int_{D(0, R)} |p_n(\zeta)|^2 d\lambda(\zeta) &\geq \int_{D(0, R)} \liminf |p_n(\zeta)|^2 d\lambda(\zeta) \\ &= \int_{D(0, R)} \frac{d\lambda(\zeta)}{|\zeta - \zeta_0|^2} = +\infty. \end{aligned}$$

Donc  $\|p_n\|_{L^2(D(0, R))} \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . L'estimation (2.9) sur les polynômes ne peut donc pas être vraie.  $\square$

Pour le cas  $\Omega = \mathbb{R}$ , le Théorème de Runge ne suffit pas, car il ne donne qu'une convergence sur tout compacts. Nous allons donc construire explicitement des contre-exemples, ce qui est forcément un peu plus technique.

*Démonstration dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}$ . Étape 1 : réinterpréter l'inégalité d'observabilité au temps final comme une inégalité sur certaines fonctions holomorphes.*

Dans le reste de cette démonstration, on fixe  $\xi_0 > 0$ . Soit  $\varphi \in L^2([\xi_0, +\infty[; \mathbb{C})$ . On pose

$$g_0(\zeta) = \int_{\xi_0}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{i\xi\zeta} d\xi, \quad (2.10)$$

qui est défini pour  $\Im(\zeta) \geq 0$ . Avec cette notation, et d'après la condition sur le support de  $\varphi$ , la solution de l'équation adjointe à l'équation de la demi-chaleur tournée (2.2) avec  $g_0(x)$  comme condition initiale est

$$g(t, x) = \int_{\xi_0}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{ix\xi - t\bar{z}\xi} d\xi = g_0(x + i\bar{z}t).$$

Regardons comment on peut réinterpréter l'inégalité d'observabilité au temps final pour cette classe de solutions. Commençons par remarquer que d'après le théorème de Plancherel, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\|g_0(\cdot + it)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_0}^{+\infty} |\varphi(\xi)|^2 e^{-2t\xi} d\xi. \quad (2.11)$$

Donc, en intégrant pour  $t$  entre  $\Re(z)T$  et  $+\infty$ , et d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\Im(\zeta) > \Re(z)T} |g_0(\zeta)|^2 d\lambda(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_0}^{+\infty} |\varphi(\xi)|^2 \int_{\Re(z)T}^{+\infty} e^{-2t\xi} dt d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_0}^{+\infty} |\varphi(\xi)|^2 \frac{1}{2\xi} e^{-2\Re(z)T\xi} d\xi \end{aligned}$$

Donc, en majorant  $\xi^{-1}$  par  $\xi_0^{-1}$ , on trouve la minoration suivante du membre de gauche de l'inégalité d'observabilité :

$$|g_0|_{L^2(\Im(\zeta) > \Re(z)T)}^2 \leq \frac{1}{4\pi\xi_0} \int_0^{+\infty} |\varphi(\xi)|^2 e^{-2\Re(z)T\xi} d\xi = \frac{1}{4\pi\xi_0} |g(T, \cdot)|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (2.12)$$

Pour le membre de droite, on a

$$|g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{[0, T] \times \omega} |g_0(t + i\bar{z}t)|^2 dt dx.$$

On fait le changement de variables  $\zeta = x + i\bar{z}t$ , pour lequel  $d\Re(\zeta) = dx + \Re(z) dt$  et  $d\Im(\zeta) = -\Re(z) dt$ , et donc  $d\lambda(\zeta) = \Re(z)^{-1} dt dx$ . En notant  $\mathcal{D} = \{x + i\bar{z}t, x \in \omega, 0 < t < T\}$  l'image de  $[0, T] \times \omega$  par le changement de variables, on a donc

$$|g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \frac{1}{\Re(z)} |g_0|_{L^2(\mathcal{D})}^2. \quad (2.13)$$

En rassemblant la minoration (2.12) et la majoration (2.13), on voit que l'inégalité d'observabilité (2.3) implique que pour toute fonction  $g_0$  de la forme (2.10),

$$|g_0|_{L^2(\Im(\zeta) > \Re(z)T)} \leq \frac{C}{2\sqrt{\pi\Re(z)\xi_0}} |g_0|_{L^2(\mathcal{D})}. \quad (2.14)$$

*Étape 2 : construction du contre-exemple.* Comme l'équation de la demi-chaleur est invariante par translation, on peut supposer  $\omega = \{|x| > \eta\}$ . On choisit alors  $\theta \in ]-\pi, 0[$  tel que la droite  $e^{i\theta}\mathbb{R}$  soit non-adhérente à  $\mathcal{D}$  (on peut p. ex. choisir  $\theta$  tel que  $\cotan(\theta) = -\Re(z)/\Im(z)$ , voir Fig. 2.2). On choisit aussi  $\zeta_0$  sur cette droite tel que  $\Im(\zeta_0) > T\Re(z)$  (p. ex. avec le précédent choix de  $\theta$ ,  $\zeta_0 = i(T+1)\bar{z}$ ). On va construire des fonctions qui seront « petites » en dehors d'un secteur autour de la demi-droite  $D = \zeta_0 + e^{i\theta}[0, +\infty[$  (en fait en  $O(|\zeta - \zeta_0|^{-1})$ ) et grandes en  $\zeta_0$ . Commençons par construire des fonctions entières petites en dehors d'un secteur autour de  $\mathbb{R}_-$  et grandes en 0. Des rotations, translations et décalages en fréquences nous donnerons alors les contre-exemples à l'inégalité sur les fonctions holomorphes (2.14).

*Étape 2a : construction d'une fonction entière qui décroît en dehors d'un secteur autour de  $\mathbb{R}_-$ .* Pour  $\epsilon > 0$  et  $\mu > 1$ , on pose

$$g_{\epsilon, \mu}(\zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon\xi^\mu - \xi\zeta} d\xi. \quad (2.15)$$

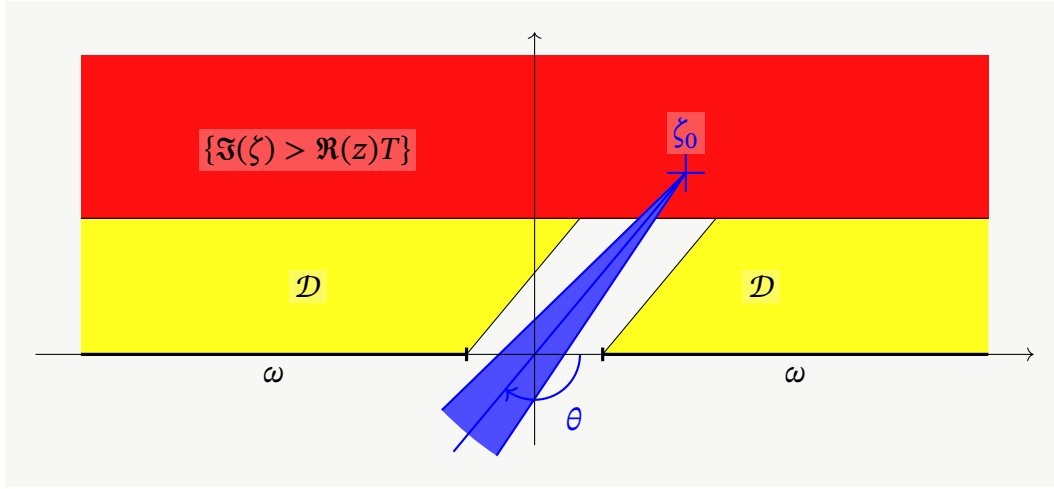


FIGURE 2.2 – En jaune le domaine  $\mathcal{D}$ ; en rouge le domaine  $\{\Im(\zeta) > \Re(z)T\}$ . L'inégalité d'observabilité pour l'équation de la demi-chaleur tournée implique que pour les fonctions dont la transformée de Fourier est à support dans  $[\xi_0, +\infty[$ , leur norme  $L^2(\Im(\zeta) > \Re(z)T)$  est majorée par leur norme  $L^2(\mathcal{D})$ . On nie ceci en construisant une suite fonction grande en  $\xi_0$  mais petite en dehors du secteur bleu.

Cette fonction  $g_{\varepsilon, \mu}$  est entière. On remarque que pour  $\Re(\zeta) > 0$ , on a  $|g_{\varepsilon, \mu}(\zeta)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\Re(\zeta)\xi} d\xi = \Re(\zeta)^{-1}$ . En faisant des changements de chemin d'intégration, on va en fait montrer que sur un secteur de la forme  $\{|\arg(\zeta)| \leq \pi(1 - \delta_\mu)\}$ , on a  $|g_{\varepsilon, \mu}(\zeta)| \leq c_\mu |\zeta|^{-1}$ , avec de plus  $\delta_\mu \rightarrow 0$  lorsque  $\mu \rightarrow 1^+$ .

Si  $\xi = re^{i\alpha}$ , on a  $\Re(\xi^\mu) = r^\mu \cos(\mu\alpha)$ . Donc si  $|\mu\alpha| < \pi/2$ , on a  $-\Re(\xi^\mu) \leq -cr^\mu$ . Auquel cas, on peut choisir  $e^{i\alpha}\mathbb{R}_+$  comme chemin d'intégration dans la définition (2.15) de  $g_{\varepsilon, \mu}$ . Si de plus  $\zeta = r'e^{i\alpha'}$  avec  $\alpha' \in ]-\pi, \pi[$ , on choisit  $\alpha = -\alpha'/2\mu$ . Ce  $\alpha$  vérifie bien  $|\mu\alpha| < \pi/2$ , donc on peut choisir  $e^{i\alpha}\mathbb{R}_+$  comme chemin d'intégration :

$$g_{\varepsilon, \mu}(\zeta) = e^{i\alpha} \int_0^{+\infty} \exp(-\varepsilon e^{i\alpha\mu} r^\mu - r r' e^{i\alpha + \alpha'}) dr. \quad (2.16)$$

Grâce à cette expression de  $g_{\varepsilon, \mu}$ , on va montrer que si  $|\alpha'| \leq \pi/(2\mu - 1)$ , on a  $|g_{\varepsilon, \mu}(\zeta)| \leq C_\mu |\zeta|^{-1}$ , avec  $C_\mu$  indépendant de  $\varepsilon$ . En effet, toujours avec  $\alpha = -\alpha'/2\mu$ , on a

$$|\alpha + \alpha'| = |\alpha'| \left(1 - \frac{1}{2\mu}\right) \leq \frac{\pi}{2\mu - 1} \left(1 - \frac{1}{2\mu}\right) = \frac{\pi}{2\mu} < \frac{\pi}{2}.$$

Auquel cas, on a  $\cos(\alpha + \alpha') \geq \cos(\pi/2\mu) > 0$ . Et donc, comme  $|\exp(-r r' e^{i(\alpha + \alpha')})| = \exp(-r r' \cos(\alpha + \alpha'))$ , on a

$$|g_{\varepsilon, \mu}(\zeta)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-r r' \cos(\alpha + \alpha')} dr = \frac{1}{r' \cos(\alpha + \alpha')} \leq \frac{1}{|\zeta| \cos\left(\frac{\pi}{2\mu}\right)} = \frac{C_\mu}{|\zeta|}. \quad (2.17)$$

Cette majoration est vraie pour  $\zeta \in \mathbb{C}$  tel que  $|\arg(\zeta)| \leq \pi/(2\mu - 1)$ , ce qu'on notera  $|\arg(\zeta)| \leq \pi - \delta_\mu$ . Avec cette notation, on a  $\delta_\mu > 0$  pour  $\mu > 1$  et  $\delta_\mu \rightarrow 0^+$  lorsque  $\mu \rightarrow 1^+$ .

Donc  $g_{\epsilon,\mu}$  est « petit » en dehors d'un secteur autour de  $\mathbb{R}_-$  d'angle  $2\delta_\mu$ . De plus, en faisant le changement de variables  $t = \epsilon\xi^\mu$ , pour lequel  $d\xi = d((t/\epsilon)^{1/\mu}) = \epsilon^{-1/\mu} t^{1/\mu-1} dt$ , on a

$$g_{\epsilon,\mu}(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon\xi^\mu} d\xi = \int_0^{+\infty} \epsilon^{-1/\mu} t^{1/\mu-1} e^{-t} dt = \epsilon^{-1/\mu} \Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Donc  $g_{\epsilon,\mu}(0) \rightarrow +\infty$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Or, pour tout  $r > 0$  il existe  $C_r > 0$  tel que pour toute fonction  $f$  holomorphe sur un voisinage de  $\overline{D(0,r)}$ ,  $|f(0)| \leq C_r |f|_{L^2(D(0,r))}$ . Donc pour tout  $r > 0$ ,  $\epsilon > 0$  et  $\mu > 1$

$$|g_{\epsilon,\mu}|_{L^2(D(0,r))} \geq C_{r,\mu} \epsilon^{-1/\mu}. \quad (2.18)$$

*Étape 2b : conclusion.* Revenons à la négation de l'inégalité sur les fonctions holomorphes (2.14). Avec les notations de la figure 2.2, on pose

$$g_{0,\epsilon,\mu}(\zeta) = e^{i\zeta\xi_0} g_{\epsilon,\mu}(-e^{-i\theta}(\zeta - \zeta_0)). \quad (2.19)$$

Notons que  $\zeta \mapsto -e^{-i\theta}(\zeta - \zeta_0)$  envoie la demi-droite  $D = \zeta_0 + e^{i\theta}[0, +\infty[$  sur  $]-\infty, 0]$ . Donc, d'après la majoration (2.17) de  $g_{\epsilon,\mu}$ , on a en dehors d'un secteur d'angle  $2\delta_\mu$  autour de la demi-droite  $D$

$$|g_{0,\epsilon,\mu}(\zeta)| \leq |e^{i\zeta\xi_0}| \frac{C_\mu}{|\zeta - \zeta_0|} = C_\mu \frac{e^{-\xi_0\Im(\zeta)}}{|\zeta - \zeta_0|}.$$

On choisit alors  $\mu$  suffisamment proche de 1 (ou de manière équivalente,  $\delta_\mu$  assez petit) pour que le secteur dans lequel cette estimée est vraie contienne  $\overline{D}$ . On a alors :

$$|g_{0,\epsilon,\mu}|_{L^2(D)}^2 \leq C_\mu^2 \int_{0 < \Im(\zeta) < \Re(\zeta)T} \frac{e^{-2\xi_0\Im(\zeta)}}{|\zeta - \zeta_0|^2} d\lambda(\zeta) \leq CC_\mu^2. \quad (2.20)$$

De plus, pour  $t > \Im(\zeta_0) + 1$ , on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g_{0,\epsilon,\mu}(x + it)|^2 dx \leq c_\mu^{-2} e^{-2t\xi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi c_\mu^{-2} e^{-2t\xi_0}.$$

Donc, d'après le théorème de Paley-Wiener (voir p. ex. [77, Th. 19.2]),  $g_{0,\epsilon,\mu}$  est la transformée de Fourier d'une fonction  $L^2$  à support dans  $[\xi_0, +\infty[$ . Donc  $g_{0,\epsilon,\mu}$  est bien sous la forme (2.10).

<sup>2</sup>Ceci découle de la formule intégrale de Cauchy :  $f$  satisfait une propriété de la moyenne, donc  $f(0)$  est la moyenne de  $f$  sur  $D(0,r)$ , et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz; voir p. ex. [29, Ch. 18, §1].

Enfin, si  $r$  est assez petit pour que  $D(\zeta_0, r) \subset \{\Im(\zeta) > \Re(z)T\}$ , on a d'après la minoration (2.18) de  $g_{\varepsilon, \mu}$  :

$$|g_{0, \varepsilon, \mu}|_{L^2(\Im(\zeta) > \Re(z)T)} \geq |g_{0, \varepsilon, \mu}|_{L^2(D(\zeta_0, r))} \geq C|g_{\varepsilon, \mu}|_{L^2(D(0, r))} \geq C\varepsilon^{-1/\mu}.$$

Le dernier membre tend vers  $+\infty$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, donc  $|g_{0, \varepsilon, \mu}|_{L^2(\Im(\zeta) > \Re(z)T)}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Si on compare ceci avec la majoration (2.20) de  $|g_{0, \varepsilon, \mu}|_{L^2(D)}$ , on voit que la famille  $(g_{0, \varepsilon, \mu})_{\varepsilon > 0}$  est un contre-exemple à l'inégalité sur les fonctions holomorphes (2.14). Donc l'inégalité d'observabilité pour l'équation de la demi-chaleur tournée (2.3) n'est pas vraie, et l'équation de la demi-chaleur tournée n'est pas contrôlable.  $\square$

## 2.2.2 Non-contrôlabilité spectrale

La démonstration précédente ne donne pas vraiment d'information sur les conditions initiales qui peuvent être amenées à zéro ou non ; on sait juste qu'il en existe au moins une qu'on ne peut pas amener à zéro. Si on veut réussir à dire si une condition initiale particulière est contrôlable à zéro ou non, il nous faut un autre outil que l'inégalité d'observabilité. Par raisonnement par dualité similaire à celui utilisé pour démontrer l'équivalence entre contrôlabilité et l'observabilité, on peut donner une inégalité nécessaire si une condition initiale donnée est contrôlable à zéro. Nous le faisons dans un cadre abstrait dans la Proposition A.10 (Annexe A). Dans le cas de l'équation de la demi-chaleur tournée, cette proposition devient le Lemme 2.4 suivant.

**Lemme 2.4.** *Soit  $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ . On suppose qu'il existe  $u \in L^2([0, T] \times \omega)$  tel que la solution  $f$  de l'équation de la demi-chaleur (2.1) avec condition initiale  $f_0$  vérifie  $f(T) = 0$ . Alors il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in L^2(\mathbb{T})$ , la solution  $g$  de l'équation adjointe  $g'(t) + \bar{z}Ag(t) = 0$ ,  $g(0) = g_0$  vérifie<sup>3</sup>*

$$|\langle f_0, g(T, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{T})}| \leq C|g|_{L^2([0, T] \times \omega)}. \quad (2.21)$$

Grâce à ce lemme, on montre que les conditions initiales trop régulières ne sont pas contrôlables via le théorème suivant, qui est même plus fort que celui énoncé en introduction (Th. 1.11).

**Théorème 2.5.** *On suppose que le complémentaire de  $\omega$  est d'intérieur non vide. Soit  $f_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx} \in L^2(\mathbb{T})$  tel que les coefficients  $a_n$  décroissent exponentiellement : il existe  $C, c > 0$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $|a_n| \leq Ce^{-c|n|}$ . Si la condition initiale  $f_0$  peut être amenée à zéro avec un contrôle  $u \in L^2([0, T] \times \omega)$ , alors  $f_0 = 0$ .*

<sup>3</sup>On note  $\langle f, g \rangle_H$  le produit scalaire sur un espace de Hilbert  $H$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 2.4, s'il existe  $u \in L^2([0, T] \times \omega)$  tel que la solution  $f$  de l'équation de la demi-chaleur tournée (2.1) avec  $f(0, \cdot) = f_0$  vérifie  $f(T) = 0$ , alors il existe  $C' > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in L^2(\mathbb{T})$ , la solution  $g$  de l'équation adjointe (2.2) avec  $g(0, \cdot) = g_0$  vérifie

$$|\langle f_0, g(T, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{T})}| \leq C' |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}. \quad (2.22)$$

Réinterprétons cette inégalité comme une inégalité sur les polynômes. À la condition initiale  $g_0 = \sum_{n \geq 0} b_n e^{inx}$ , on associe le polynôme  $g_{\text{pol}}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} b_n \zeta^n$  (on commence par supposer que cette somme est finie). Le membre de gauche est égal à

$$\begin{aligned} \langle f_0, g(T, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} &= \int_0^{2\pi} \sum_{n, m \geq 0} \overline{a_n e^{inx}} b_m e^{imx - \bar{z}mT} dx \\ &= 2\pi \sum_{n \geq 0} \overline{a_n} b_n e^{-\bar{z}nT} = 2\pi \sum_{n > 0} \overline{a_n} \alpha^n b_n, \end{aligned}$$

avec  $\alpha = e^{-\bar{z}T}$ . Ainsi, si on note  $\varphi_{f_0}$  la forme linéaire sur les polynômes définie par

$$\varphi_{f_0} \left( \sum_{n \geq 0} b_n \zeta^n \right) = 2\pi \sum_{n \geq 0} \overline{a_n} e^{-\bar{z}nT} b_n = 2\pi \sum_{n \geq 0} \overline{a_n} \alpha^n b_n, \quad (2.23)$$

le membre gauche de l'inégalité (2.22) est égal à  $|\varphi_{f_0}(g_{\text{pol}})|$ . On va montrer que cette forme linéaire est continue pour les normes  $L^2(\mathcal{D})$  et  $L^2(D(0, R'))$  pour un certain  $R' < |\alpha| = e^{-\Re(z)T}$ . On en déduira que la forme linéaire  $\varphi_{f_0}$  est nulle.

On a déjà vu que le membre droit de l'inégalité d'observabilité (2.22) est égal à  $\Re(z)^{-1} |\sum b_n \zeta^{n-1}|_{L^2(\mathcal{D})}$  (Eq. (2.6)). Ainsi, en remarquant que pour  $\zeta \in \mathcal{D}$ ,  $|\zeta^{-1}| \leq e^{\Re(z)T}$ , on a

$$|g|_{L^2([0, T] \times \omega)} \leq \frac{1}{\Re(z)} |\zeta^{-1} g_{\text{pol}}|_{L^2(\mathcal{D})} \leq \frac{e^{\Re(z)T}}{\Re(z)} |g_{\text{pol}}|_{L^2(\mathcal{D})}.$$

Donc la forme linéaire  $\varphi_{f_0}$  est telle que pour tout polynôme  $g_{\text{pol}}$ ,

$$|\varphi_{f_0}(g_{\text{pol}})| \leq \frac{C' e^{\Re(z)T}}{\Re(z)} |g_{\text{pol}}|_{\mathcal{D}}. \quad (2.24)$$

Pour montrer que  $\varphi_{f_0}$  est continue pour la norme  $L^2(D(0, R'))$ , on va utiliser l'hypothèse de décroissance des coefficients  $a_n$  (on rappelle que  $|a_n| \leq C e^{-cn}$ ). On choisit  $R' = |\alpha| e^{-c/2} = e^{-\Re(z)T - c/2}$ , et on note  $a'_n = a_n \alpha^n R'^{-n}$ . Par définition de  $\varphi_{f_0}$  (Eq. (2.23)) on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\varphi_{f_0}(g_{\text{pol}})| = 2\pi \left| \sum_{n \geq 0} \overline{a'_n R'^n} b_n \right| \leq 2\pi \left( \sum_{n \geq 0} (n+1) |a'_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n \geq 0} \frac{|b_n|^2}{n+1} R'^{2n} \right)^{1/2}.$$

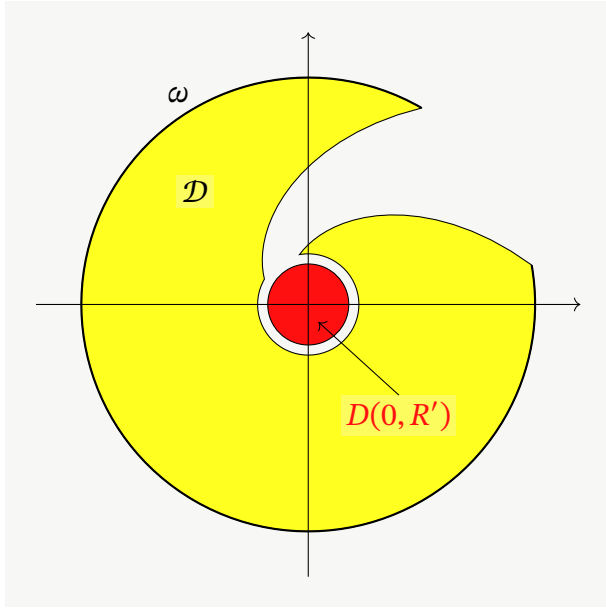


FIGURE 2.3 – En jaune le domaine  $\mathcal{D}$ ; en rouge le disque  $D(0, R')$ , qui est plus petit que  $D(0, e^{-T\Re(z)})$ . Remarquons que le complémentaire de  $U = \mathcal{D} \cup D(0, R')$  est connexe par arc. Si  $f_0 = \sum a_n e^{inx}$  est une condition initiale qu'on peut amener à zéro et telle que  $|a_n| \leq Ce^{-cn}$ . Alors la forme linéaire  $\varphi_{f_0}$  définie par la formule (2.23) est continue à la fois pour la norme  $L^2$  sur  $\mathcal{D}$  et pour la norme  $L^2$  sur  $D(0, R')$ .

Or, par hypothèse,  $|a'_n| = |a_n|e^{cn/2} \leq Ce^{-cn/2}$ , donc  $\sum_{n \geq 0} (n+1)|a'_n|^2 = C''^2 < +\infty$ .  
Donc

$$|\varphi_{f_0}(g_{\text{pol}})| \leq 2\pi C'' \left( \sum_{n \geq 0} \frac{|b_n|^2}{n+1} R'^{2n} \right)^{1/2}.$$

On a déjà vu que  $|g_{\text{pol}}|_{L^2(D(0, R'))}^2 = \pi \sum_{n \geq 0} \frac{|b_n|^2}{n+1} R'^{2n}$  (Eq. (2.7)), donc on a

$$|\varphi_{f_0}(g_{\text{pol}})| \leq 2C'' |g_{\text{pol}}|_{L^2(D(0, R'))} \quad (2.25)$$

ce qui démontre bien que  $\varphi_{f_0}$  est continue pour la norme  $|g_{\text{pol}}|_{L^2(D(0, R'))}$ .

Remarquons que  $\varphi_{f_0}$  est continue pour deux normes  $L^2$  sur des ouverts de  $\mathbb{C}$  d'adhérences disjointes, à savoir  $\mathcal{D}$  et  $D(0, R')$ . C'est ce qui va nous permettre de conclure que  $\varphi_{f_0}$  est nulle. Posons  $U := \mathcal{D} \cup D(0, R')$  et considérons  $\mathcal{B}^2(U)$  l'espace des fonctions holomorphes sur  $U$  qui sont  $L^2$ . Muni de la norme  $|\cdot|_{L^2(U)}$ , c'est un espace de Hilbert.<sup>4</sup>

Notons que  $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$  est connexe (voir Fig. 2.3). Donc, d'après le théorème de Runge, l'ensemble des polynômes est dense dans  $\mathcal{B}^2(U)$ . Et donc la forme linéaire  $\varphi_{f_0}$  s'étend de manière unique en une forme linéaire continue sur  $\mathcal{B}^2(U)$ . Comme  $\mathcal{B}^2(U)$  est un espace de Hilbert, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction holomorphe  $\psi_{f_0} \in \mathcal{B}^2(U)$  telle que  $\varphi_{f_0} = \langle \cdot, \psi_{f_0} \rangle_{\mathcal{B}^2(U)}$ .

<sup>4</sup>Cet espace est appelé espace de Bergman. Le fait qu'une limite en norme  $L^2$  d'une suite de fonctions holomorphes est encore une fonction holomorphe découle de la formule intégrale de Cauchy; voir par exemple [29, Ch. 18 Prop. 1.3].



Or, comme  $U = \mathcal{D} \cup D(0, R')$  et que  $\overline{\mathcal{D}}$  et  $\overline{D(0, R')}$  sont disjoints, l'indicatrice  $\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$  de  $\mathcal{D}$  est holomorphe sur  $U$ . Alors

$$\varphi_{f_0}(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}\psi_{f_0}) = \langle \mathbb{1}_{\mathcal{D}}\psi_{f_0}, \psi_{f_0} \rangle_{B^2(U)} = |\psi_{f_0}|_{L^2(\mathcal{D})}^2$$

Or, la continuité de  $\varphi_{f_0}$  pour la norme  $L^2(D(0, R'))$  (Eq. (2.25)) implique que

$$|\varphi_{f_0}(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}\psi_{f_0})| \leq 2C'' |\mathbb{1}_{\mathcal{D}}\psi_{f_0}|_{L^2(D(0, R'))} = 0.$$

Donc  $\psi_{f_0}$  est nulle sur  $\mathcal{D}$ . De même,  $\psi_{f_0}$  est nulle sur  $D(0, R')$ . Donc  $\psi_{f_0} = 0$ , et donc  $\varphi_{f_0} = 0$ . D'après la définition de  $\varphi_{f_0}$  (Eq. 2.23), ceci implique que pour  $n \geq 0$ , les coefficients  $a_n$  sont nuls.

Pour montrer que les  $a_n$  pour  $n < 0$  sont également nuls, on effectue un raisonnement similaire mais en considérant des conditions initiales de la forme  $g_0(x) = \sum_{n \leq 0} b_n e^{inx}$ , où la somme est supposée finie. La solution associée est  $g(t, x) = \sum_{n \leq 0} b_n e^{inx + \bar{z}nt}$ . On associe alors à  $g_0$  le polynôme  $g_{\text{pol}} = \sum_{n \leq 0} b_n \zeta^{-n}$  et on considère la forme linéaire

$$\varphi_{f_0} \left( \sum_{n \leq 0} b_n \zeta^{-n} \right) = \langle f_0, g(T, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 2\pi \sum_{n \leq 0} \overline{a_n} b_n e^{\bar{z}nt}.$$

Les autres étapes sont les mêmes : on en déduit que  $\varphi_{f_0}$  est nulle, et donc que pour  $n \leq 0$ ,  $a_n = 0$ .  $\square$

*Remarque 2.6.* Au vu de ce théorème, on peut se demander s'il existe des conditions initiales non nulles qui peuvent être contrôlables à zéro. Nous conjecturons qu'il n'en existe pas.

## 2.3 Équation de la chaleur fractionnaire sous-critique

### 2.3.1 Méthode du point col

Pour montrer la non-contrôlabilité de l'équation de la chaleur fractionnaire non-critique, nous allons choisir comme condition initiale pour l'équation adjointe (2.2) des fonctions qui sont concentré dans l'espace des phases. Le but est de montrer que les solutions associées restent concentrées dans l'espace des phases. Le principal outil pour ceci est la méthode du point col.

**Théorème 2.7.** *Soit  $a > 0$  et  $D_a = \{z \in \mathbb{C}, |z| < a\}$ . Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $h > 0$ , et toute fonction holomorphe  $u$  sur un voisinage de  $\overline{D_a}$ , on a*

$$\int_{-a}^a e^{-x^2/2h} u(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2\pi} h^{j+1/2}}{j! 2^j} u^{(2j)}(0) + R_N(h) \quad (2.26)$$

avec

$$\frac{|R_N(h)|}{\sup_{D_a} |u|} \leq Ch^{1/2+N} \sqrt{N+1} N! 2^N a^{-N}. \quad (2.27)$$

La démonstration consiste essentiellement à écrire  $u$  comme série de Taylor au voisinage de 0, et à faire des intégrations pour calculer  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2h} x^p dx$ . On se référera à [78, Th. 2.1] pour la démonstration complète.

Si on a une intégrale de la forme  $\int e^{-\phi(x)/h} u(x) dx$ , il est souvent possible de se ramener au cas du Théorème précédent grâce à un changement de variables donné par le lemme de Morse (voir référence précédente).

Il est aussi possible de démontrer un résultat apparenté pour les intégrales de la forme  $\int e^{ix^2/2h} u(x) dx$ , en exploitant le fait que pour  $x \neq 0$ , l'intégrande est très oscillant et ces contributions auront tendance à se compenser. On appelle cette méthode la « méthode de la phase stationnaire », dont on utilisera plus tard la version suivante de cette méthode (voir [61, Th. 2.6.1] pour le cas où essentiellement  $h \in i\mathbb{R}$ , la démonstration est la même dans le cas général) :

**Théorème 2.8.** *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et  $h \in \{h \neq 0, \Re(h) \geq 0\}$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2h} u(x) dx = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2\pi} h^{j+1/2}}{j! 2^j} u^{(2j)}(0) + R_n(u, h),$$

où  $h^s$  est défini comme  $e^{s \ln(h)}$  avec la branche principale du logarithme, et où  $R_N(u, h)$  vérifie

$$|R_N(u, h)| \leq \frac{C|h|^{N+1/2}}{2^N n!} \sum_{k=0}^2 |u^{(2N+k)}|_{L^1}.$$

Pour la suite, on a besoin d'adapter la méthode du point col lorsqu'il y a un terme supplémentaire dans l'exponentielle.

**Proposition 2.9.** *Soit  $\mathcal{O}_a^\infty$  l'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur  $D_a = \{|z| < a\}$ , muni de la norme  $|u|_\infty = \sup_{|z| < a} |u(z)|$ . Soit  $0 < \alpha < 1$ ,  $r \in \mathcal{O}_a^\infty$  et  $u \in \mathcal{O}_a^\infty$ . On a :*

$$\int_{-a}^a e^{-\xi^2/2h+r(\xi)/h^\alpha} u(\xi) d\xi = \sqrt{2\pi h} e^{r(0)/h^\alpha + O(h^{1-2\alpha})} (u(0) + O(h^{1-\alpha} |u|_\infty)) \quad (2.28)$$

De plus, le premier  $O$  ne dépend pas de  $u$ , et les deux  $O$  sont localement uniformes en  $r \in \mathcal{O}_a^\infty$ .

*Démonstration.* L'idée est de voir  $\phi_{h,r}(\xi) = \xi^2 - h^{1-\alpha} r(\xi)$  comme la phase, et de faire un changement de variables (dépendant de  $h$ ) nous ramenant au cas du théorème 2.7 précédent.

On note  $h' = h^{1-\alpha}$  et on fixe  $r_0 \in \mathcal{O}_a^\infty$ . On veut trouver un voisinage  $V$  de  $r_0$  dans  $\mathcal{O}_a^\infty$  tel que l'asymptotique (2.28) soit valable pour  $r \in V$ , avec les  $O$  localement uniformes en  $r \in V$ . On notera également  $I_{h,r}(u)$  l'intégrale qu'on cherche à estimer :

$$I_{h,r}(u) = \int_{-a}^a e^{-\xi^2/2h+r(\xi)/h^\alpha} u(\xi) d\xi = \int_{-a}^a e^{-\phi_{h,r}(\xi)/h} u(\xi) d\xi. \quad (2.29)$$

On commence par chercher le point critique de la phase  $\phi_{h,r}$ . On considère l'application  $F$  définie par

$$\begin{aligned} F: D_a \times \mathbb{R} \times \mathcal{O}_a^\infty &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\xi, h', r) &\longmapsto \phi'_{h,r}(\xi) = \xi - h'r'(\xi). \end{aligned} \quad (2.30)$$

On a  $F(0, 0, r_0) = 0$  et  $\partial_\xi F = 1 - h'r''(\xi)$ , donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe  $\delta, \epsilon > 0$ , un voisinage  $V$  borné de  $r_0$  dans  $\mathcal{O}_a^\infty$ , une fonction  $\xi_c : ]-\epsilon, \epsilon[ \times V$  telle que pour  $|\xi| < \delta$ ,  $|h'| < \epsilon$  et  $r \in V$ .

$$F(\xi, h', r) = 0 \Leftrightarrow \xi = \xi_c(h', r).$$

Dit autrement, le seul point critique de  $\phi_{h',r}$  proche de 0 est  $\xi_c(h', r)$ . De plus, pour  $h$  assez petit, la partie de l'intégrale  $I_{h,r}(u)$  pour  $|\xi| > \delta$  est un  $O(e^{-c/h}|u|_\infty)$ , c'est-à-dire

$$I_{h,r}(u) = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\phi_{h,r}(\xi)/h} u(\xi) d\xi + O(e^{-c/h}|u|_\infty), \quad (2.31)$$

où  $\phi_{h,r}$  admet un unique point fixe dans  $]-\eta, \eta[$  (à savoir  $\xi_c(h', r)$ ), qui est non dégénéré si  $h$  est assez petit. De plus, et quitte à réduire  $\epsilon$ , le  $O$  est localement uniforme en  $r \in V$ .

Commençons par déterminer une asymptotique de la valeur critique  $c_{h,r} = \phi_{h,r}(\xi_c(h', r))$ . On a  $\xi_c(h', r) = h'r'(\xi_c(h', r)) = h'R_{h,r}$ , où  $R_{h,r}$  dépend continument de  $(h', r) \in ]-\epsilon, \epsilon[ \times V$ . Donc, la valeur critique vérifie

$$c_{h,r} = \frac{(h'R_{h,r})^2}{2} - h'\phi_{h,r}(h'R_{h,r}) = h'r(0) + h'^2 R'_{h,r},$$

où  $R'_{h,r}$  dépend également continument de  $(h', r) \in ]-\epsilon, \epsilon[ \times V$ .

Maintenant, décrivons le changement de variables qui va nous permettre de nous ramener à la méthode du point col standard. D'après la formule de Taylor, si on pose

$$\psi_{h,r}(\xi) = 2 \int_0^1 (1-s)r''(\xi_c(h', r) + s\xi) d\xi,$$

on a

$$\phi_{h,r}(\xi_c(h', r) + \xi) = c_{h,r} + (1 + h'\psi_{h,r}(\xi)) \frac{\xi^2}{2}.$$

On veut donc faire le changement de variables/chemin d'intégration  $\eta = \sqrt{1 + h'\psi_{h,r}(\xi)}\xi$ . Remarquons qu'on a  $\eta = \xi + O(h')$ , où le  $O$  doit s'entendre comme un  $O$  dans  $\mathcal{O}(D(0, \delta))$ . En conséquence, on a  $\frac{d\xi}{d\eta} = 1 + O(h')$  et  $u(\xi(\eta)) = u(\eta) + O(h'|u|_\infty)$ . On a alors

$$\begin{aligned} I_{h,r}(u) &= \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\phi_{h,r}(\xi)/h} u(\xi) d\xi + O(e^{-c/h}|u|_\infty) \\ &= e^{-c_{h,r}/h} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\eta^2/2h} u(\xi_c(h', r) + \xi(\eta)) \frac{d\xi}{d\eta} d\eta + O(e^{-c/h}|u|_\infty) \end{aligned}$$

et d'après le théorème 2.7, on a

$$\begin{aligned} I_{h,r} &= \sqrt{2\pi h} e^{-c_{h,r}/h} (u(\xi_c(h', r)) + O(h'|u|_\infty)) \\ &= \sqrt{2\pi h} e^{-c_{h,r}/h} (u(0) + O(h'|u|_\infty)). \end{aligned}$$

Quitte à réduire  $\epsilon$ , tous les  $O$  des formules précédentes sont localement uniformes en  $r \in V$ . En utilisant l'asymptotique pour  $c_{h,r}$  (Eq. (2.31)), on en déduit l'asymptotique recherchée pour  $I_{h,r}$ .  $\square$

*Remarque 2.10.* On a supposé  $r$  analytique pour justifier les changements de chemins d'intégrations. Mais on peut dans certains cas se passer de cette hypothèse. Déjà si  $r$  est à valeurs réelles, on n'a pas besoin de changer de chemin d'intégration, et il suffit alors que  $r$  soit  $C^\infty$ . On peut aussi essayer de remplacer  $r$  par une extension quasi-analytique (voir p. ex. [34, Ch. 8] ou [33, Sec. 2.2]). On peut alors se rendre compte que si  $\alpha < 1/2$ , il suffit de supposer que  $r$  soit  $C^\infty$ . Si  $\alpha \geq 1/2$ , la situation est plus compliquée, et il semblerait qu'on aie besoin de supposer que  $r$  soit de classe Gevrey.

### 2.3.2 Non-contrôlabilité

On démontre la non-contrôlabilité de l'équation de la chaleur fractionnaire tournée sous-critique, dès que l'ouvert de contrôle n'est pas dense dans  $\Omega$ .

**Théorème 2.11.** *Soit  $\Omega = \mathbb{R}$  ou  $\Omega = \mathbb{T}$ ,  $\omega$  un ouvert strict de  $\Omega$  et  $T > 0$ . L'équation de la chaleur fractionnaire tournée sur  $\Omega$  n'est pas contrôlable sur  $\omega$  en temps  $T$ .*

*Remarque 2.12.* Ce théorème reste valable, avec la même démonstration, si  $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ . Par simplicité, on se limite aux cas  $\Omega = \mathbb{R}$  et  $\Omega = \mathbb{T}$ .

Commençons par le cas  $\Omega = \mathbb{R}$ . On choisit  $\xi_0 > 0$  et  $\chi$  une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ , à support compact dans  $[-\xi_0/2, \xi_0/2]$  et qui vaut 1 dans  $[-\xi_0/4, \xi_0/4]$ . Pour  $h > 0$  on considère la fonction  $g_{0,h}$  définie par

$$g_{0,h}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{h}\right)^{1/4} \int_{\mathbb{R}} \chi(h\xi - \xi_0) e^{-(h\xi - \xi_0)^2/2h} d\xi.$$

Si on introduit la transformée de Fourier semi-classique  $\mathcal{F}_h$  définie par  $\mathcal{F}_h(f)(\xi) = h^{-1/2}\mathcal{F}(f)(\xi/h)$ , ou de manière équivalente,

$$\mathcal{F}_h(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix\xi/h} d\xi,$$

on a  $\mathcal{F}_h(g_{0,h}) = (\pi h)^{-1/4}\chi(\xi - \xi_0)e^{-(\xi - \xi_0)^2/2h}$ . On note  $g_h$  la solution de l'équation adjointe (2.2) de condition initiale  $g_{0,h}$ . Par définition du laplacien fractionnaire, la transformée de Fourier en  $x$  de  $g_h(t, \cdot)$  est

$$\mathcal{F}g_h(t, \xi) = \left(\frac{h}{\pi}\right)^{1/4} \chi(h\xi - \xi_0)e^{-(h\xi - \xi_0)^2/2h - t\bar{z}|\xi|^\alpha}.$$

Si on prend plutôt la transformée de Fourier semi-classique, on trouve

$$\mathcal{F}_hg_h(t, \xi) = (\pi h)^{-1/4}\chi(\xi - \xi_0)e^{-(\xi - \xi_0)^2/2h - t\bar{z}|\xi|^\alpha/h^\alpha}. \quad (2.32)$$

Grâce à la méthode du point col, on montre les estimations suivantes.

**Proposition 2.13** (Estimations ponctuelles). *Soit  $\epsilon > 0$ . Dans la limite  $h \rightarrow 0^+$ , on a uniformément en  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \geq 0$ ,*

$$|g_h(t, x)| = O(e^{-ct/h^\alpha}). \quad (2.33)$$

De plus, on a uniformément en  $t > 0$  et  $|x| > \epsilon$

$$g_h(t, x) = O(|x|^{-2}e^{-c/h - ct/h^\alpha}). \quad (2.34)$$

Enfin, on a localement uniformément en  $t \geq 0$  et  $|x| < \xi_0/8$

$$g_h(t, x) = (\pi h)^{-1/4}e^{ix\xi_0/h - x^2/2h - t\bar{z}(\xi_0 + ix)^\alpha/h^\alpha + O(h^{1-2\alpha})}(1 + O(h^{1-\alpha})). \quad (2.35)$$

*Remarque 2.14.* Pour nier la contrôlabilité de l'équation de la chaleur fractionnaire, on peut au lieu de l'asymptotique (2.35), se contenter de

$$g_h(t, x) = e^{ix\xi_0/h - x^2/2h + O(h^{-\alpha})}. \quad (2.36)$$

L'asymptotique avec plus de termes énoncée dans la Proposition 2.13 nous servira lorsqu'on étudiera l'équation de Kolmogorov. La majoration (2.33) ne nous servira également que pour traiter l'équation de Kolmogorov.

*Démonstration.* D'après l'expression de la transformée de Fourier de la solution  $g$ , on a

$$g_h(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2}(\pi h)^{3/4}} \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi - \xi_0)e^{-(\xi - \xi_0)^2/2h + ix\xi/h - t\bar{z}|\xi|^\alpha/h^\alpha} d\xi. \quad (2.37)$$

La troncature  $\chi$  est nulle hors de  $[-\xi_0/2, \xi_0/2]$ . Donc, dans l'intégrale ci-dessus, les seules valeurs de  $\xi$  qui interviennent sont  $\xi_0/2 \leq \xi \leq 3\xi_0/2$ . On en déduit la majoration suivante :

$$|g_h(t, x)| \leq \frac{1}{(\pi h)^{1/4}} e^{-t\Re(\bar{z})(\xi_0/2)^\alpha/h^\alpha},$$

ce qui nous donne la majoration (2.33).

Remarquons que sur le support de  $\chi$ ,  $|\xi| = \xi$ . En notant  $\phi_x(\xi) = (\xi - ix)^2/2$ , on a  $-(\xi - \xi_0)^2/2 + ix\xi = -\phi_x(\xi - \xi_0) + ix\xi_0 - x^2/2$ . Donc, en faisant le changement de variables  $\xi \mapsto \xi - \xi_0$ , on a

$$g_h(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2}(\pi h)^{3/4}} e^{ix\xi_0/h - x^2/2h} \int_{\mathbb{R}} e^{-\phi_x(\xi)/h - t\bar{z}(\xi + \xi_0)^\alpha/h^\alpha} \chi(\xi) d\xi. \quad (2.38)$$

La fonction  $\xi \mapsto \chi(\Re(\xi))$  est constante (et donc holomorphe) sur  $\{|\Re(\xi)| < \xi_0/4\}$ , donc la fonction  $\xi \mapsto \chi(\Re(\xi))e^{-\phi_x(\xi)/h - t\bar{z}(\xi + \xi_0)^\alpha/h^\alpha}$  est holomorphe sur  $\{|\Re(\xi)| < \xi_0/4\}$ . Donc on peut changer le chemin d'intégration entre  $-\xi_0/4$  et  $\xi_0/4$ .

Pour démontrer la majoration (2.34), on commence par intégrer par parties afin d'obtenir une décroissance en  $x$ . On remarque que  $-h\partial_\xi e^{-\phi_x(\xi)/h} = (\xi - ix)e^{-\phi_x(\xi)/h}$ . Donc l'intégrale dans l'expression de  $g_h$  est égale à

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\phi_x(\xi)/h} \chi(\xi) e^{-t\bar{z}(\xi + \xi_0)^\alpha/h^\alpha} d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{-\phi_x(\xi)/h} u_x(\xi) d\xi \quad (2.39)$$

avec<sup>5</sup>

$$u_x(\xi) = \left( h\partial_\xi \frac{1}{\xi - ix} \right)^2 (\chi(\xi) e^{-t\bar{z}(\xi + \xi_0)^\alpha/h^\alpha}). \quad (2.40)$$

Alors, on déforme le chemin d'intégration vers  $ix$ , dans le but d'augmenter  $\Re(\phi_x)$ . Par exemple, on peut choisir de suivre un arc d'hyperbole de la forme  $\Re(\phi_x(\xi)) = \Re(\phi_x(a)) = a^2/2 - x^2/2$  avec  $a$  suffisamment petit (voir Fig. 2.4). La longueur de cet arc d'hyperbole reste bornée uniformément en  $x$ , et on a alors

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{-\phi_x(\xi)/h} u_x(\xi) d\xi \right| \leq C \sup_{\xi \in \text{chemin d'intégration}} |u_x(\xi)| e^{-a^2/2h + x^2/2h}.$$

Quitte à réduire  $a$ , on peut supposer que le chemin d'intégration reste proche de l'axe réel, de sorte que  $\Re(\bar{z}(\xi + \xi_0)^\alpha) \geq c > 0$  pour tout  $\xi$  sur le chemin d'intégration. Alors, en utilisant la définition de  $u_x$  (Eq. (2.40)) et le fait que  $\chi$  soit à support dans  $[-\xi_0/2, \xi_0/2]$ , on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\phi_x(\xi)/h} \chi(\xi) e^{-t\bar{z}(\xi + \xi_0)^\alpha/h^\alpha} d\xi \leq C|x|^{-2} e^{-a^2/2h + x^2/2h} e^{-ct/h^\alpha}.$$

<sup>5</sup>On a fait seulement 2 intégrations par parties parce que cela nous suffit, mais on peut bien sûr en faire autant que l'on souhaite. On obtient alors une décroissance en  $|x|^{-N}$  pour n'importe quel  $N$ .

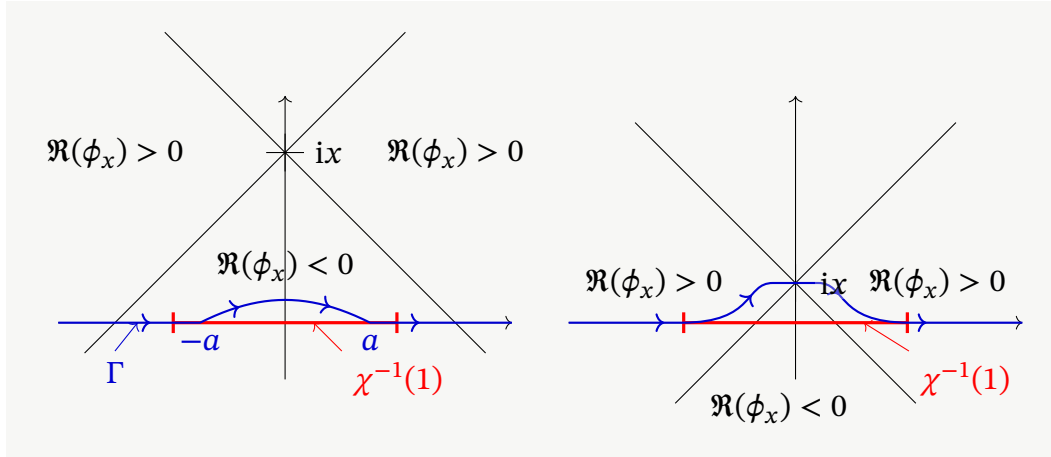


FIGURE 2.4 – En rouge, l'intervalle où  $\chi = 1$ . Les lignes diagonales définissent quatre quadrants ; dans ceux de gauche et de droite,  $\Re(\phi_x) > 0$ , et dans les autres,  $\Re(\phi_x) < 0$ . En bleu, le chemin d'intégration que l'on choisit dans l'intégrale définissant  $g_h(t, x)$  (Eq. (2.38)). Figure de gauche : si  $x$  n'est pas trop petit, on déforme le chemin en direction de  $ix$ , en suivant un arc d'hyperbole  $\Re(\phi_x) = \text{constant}$  entre  $-a$  et  $a$ . Figure de droite : si  $|x| < \xi_0/4$ , on choisit un chemin qui passe par le point col  $\xi = ix$  et qui reste dans les quadrants où  $\Re(\phi_x) > 0$ .

Si on utilise cette estimée dans l'expression de  $g_h$  (Eq. (2.38)), on en déduit

$$|g_h(t, x)| \leq C|x|^{-2}h^{-3/4}e^{-a^2/2h-ct/h^\alpha},$$

qui est l'inégalité recherchée.

Pour démontrer l'asymptotique (2.35), on va utiliser la méthode du point col donnée en Prop. 2.9. On commence par changer le chemin d'intégration pour un chemin qui passe par le point critique  $\xi = ix$  (voir Fig. 2.4), et on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) e^{-\phi_x(\xi) - t\bar{z}(\xi + \xi_0)^\alpha/h^\alpha} d\xi = \int_{-a}^a e^{-\xi^2/2 - t\bar{z}(\xi + \xi_0 + ix)^\alpha/h^\alpha} d\xi + O(e^{-c/h}),$$

où  $a > 0$  est suffisamment petit (par exemple  $a = \xi_0/8$ ), et le  $O$  correspond à la partie de l'intégrale pour  $\xi$  loin du point critique, et est localement uniforme en  $t \geq 0$  et  $|x| < \xi_0/8$ . Alors, d'après la méthode du point col, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) e^{-\phi_x(\xi) - t\bar{z}(\xi + \xi_0)^\alpha/h^\alpha} d\xi = \sqrt{2\pi h} e^{-t\bar{z}(\xi_0 + ix)^\alpha/h^\alpha + O(h^{1-2\alpha})} (1 + O(h^{1-\alpha})).$$

D'après la proposition 2.9, les  $O$  sont localement uniformes en  $t > 0$  et  $|x| < \xi_0/8$ . Alors, l'expression (2.38) de  $g_h$  donne l'asymptotique recherchée.  $\square$

On peut désormais démontrer la non-contrôlabilité de l'équation de la chaleur fractionnaire tournée. Commençons par le cas  $\Omega = \mathbb{R}$ .

Cas  $\Omega = \mathbb{R}$ . Comme l'équation de la chaleur fractionnaire tournée est invariante par translation, on peut supposer que  $\omega \subset \{|x| > \epsilon\}$ . Alors les fonctions  $(g_h)_{h>0}$  définies précédemment forment un contre-exemple à l'inégalité d'observabilité (2.3). En effet, d'après la majoration (2.34) de  $g_h$ , on a

$$|g_h(t, \cdot)|_{L^2([0, T] \times \omega)} \leq T \int_{|x| > \epsilon} \frac{C}{x^4} e^{-c/h} dx \leq Ce^{-c/h},$$

et d'après l'asymptotique (2.36), on a

$$|g_h(T, \cdot)|_{L^2(\mathbb{R})} \geq |g_h(T, \cdot)|_{L^2(|x| < \epsilon)} \geq e^{O(h^{-\alpha})}.$$

En prenant la limite  $h \rightarrow 0$ , on voit que l'inégalité d'observabilité ne peut être vraie.  $\square$

Traitons maintenant le cas  $\Omega = \mathbb{T}$ .

Cas  $\Omega = \mathbb{T}$ . Comme l'équation de la chaleur fractionnaire tournée est invariante par translation (du tore), on peut supposer que  $\omega = \mathbb{T} \setminus [-\epsilon, \epsilon]$ . Sur le tore  $\mathbb{T}$ , les solutions s'expriment comme somme (série de Fourier) et non comme intégrale (transformée de Fourier). La méthode du point col ne semble alors pas être d'un grand secours. Cependant, en périodisant les fonctions  $g_h$ , on peut se ramener au cas  $\Omega = \mathbb{R}$ . On définit  $g_{h\text{per}}$  par

$$g_{h\text{per}}(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_h(t, x + 2\pi k).$$

Notons que comme la transformée de Fourier de  $g_h(t, \cdot)$  est  $C^\infty$  à support compact,  $g_h(t, \cdot)$  décroît plus vite que  $|x|^{-2}$  à l'infini, et donc la somme précédente a du sens. Or, d'après l'astuce de la formule de Poisson, le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $g_{h\text{per}}$  est  $(2\pi)^{-1/2} \mathcal{F}(g_h(t, \cdot))(n)$ . Mais par définition de  $g_h$  comme solution de l'équation de la chaleur fractionnaire tournée, on a

$$\mathcal{F}(g_h(t, \cdot))(\xi) = e^{-t|\bar{z}|\xi|^\alpha} \mathcal{F}(g_{h,0})(\xi).$$

Donc, en utilisant à nouveau la même astuce,  $c_k(g_{h\text{per}}(t, \cdot)) = e^{-t|\bar{z}|k|^\alpha} c_k(g_{h\text{per}}(0, \cdot))$ . Donc  $g_{h\text{per}}$  est solution de l'équation de la chaleur fractionnaire tournée sur  $\mathbb{T}$ . On montre maintenant que dans la somme définissant  $g_{h\text{per}}$ , les termes pour  $k \neq 0$  sont négligeables. En effet, on a d'après la définition de  $g_{h\text{per}}$

$$|g_{h\text{per}}(t, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})} = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_h(t, \cdot + 2\pi k) \right|_{L^2(-\pi, \pi)}.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a donc

$$|g_{h\text{per}}(t, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})} \geq |g_h(T, \cdot)|_{L^2(-\pi, \pi)} - \sum_{k \neq 0} |g_h(t, \cdot)|_{L^2((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)}.$$



Donc, d'après l'asymptotique (2.36) de  $g_h$ , on a

$$\begin{aligned} |g_{h\text{per}}(t, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})} &\geq e^{O(h^{-\alpha})} - \sum_{k \neq 0} O(k^{-2} e^{-c/h}) \\ &\geq e^{O(h^{-\alpha})} - O(e^{-c/h}). \end{aligned}$$

Dans le même esprit, on a d'après l'inégalité triangulaire, et en identifiant  $\omega = \mathbb{T} \setminus [-\epsilon, \epsilon]$  avec  $]-\pi, \pi[ \setminus [-\epsilon, \epsilon] \subset \mathbb{R}$ ,

$$|g_{h\text{per}}|_{L^2([0, T] \times \omega)} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_h|_{L^2([0, T] \times ]\omega + 2\pi k[)}$$

et grâce à la majoration (2.34) de  $g_h$

$$|g_{h\text{per}}|_{L^2([0, T] \times \omega)} = O(e^{-c/h}).$$

En prenant la limite  $h \rightarrow 0$ , on voit que la famille  $(g_{h\text{per}})_{h>0}$  est un contre-exemple à l'inégalité d'observabilité (2.3).  $\square$

*Remarque 2.15.* • On a implicitement supposé que l'équation de la chaleur fractionnaire était posée pour des fonctions à valeurs complexes : il existe une condition initiale à valeurs complexes  $f_0$  qui ne peut être amenée à zéro en temps  $T$ . Si  $z = 1$ , on pourrait se poser la question pour des conditions initiales à valeurs réelles. Mais le résultat précédent implique qu'il existe une condition initiale à valeurs réelles qui ne peut être amenée à zéro en temps  $T$ . En effet, si à la fois  $\Re(f_0)$  et  $\Im(f_0)$  pouvaient être amenées à zéro en temps, alors  $f_0$  elle-même pourrait être amenée à zéro en temps  $T$ .

- Micu et Zuazua ont démontré que si on considère l'équation de la chaleur fractionnaire sous-critique sur  $]0, \pi[$ , alors il existe des conditions initiales dans n'importe quel  $H^m$  qu'on peut amener à zéro (qui plus est avec un contrôle de la forme  $u(t)v(x)$ ) [63, Prop. 3.3]. Notons qu'il est dit dans l'article que cette Proposition s'applique aussi au cas  $\alpha = 1$ , ce qui semble contredire la conjecture que nous avons formulée dans la Remarque 2.6. Mais les hypothèses de décroissances des coefficients de Fourier de la fonction profil de la proposition en question impliquent que le contrôle que l'on construit avec, a pour support en espace  $]0, \pi[$  tout entier. Il n'y a donc pas contradiction avec notre conjecture.

# 3 | Un peu d'analyse complexe et d'analyse spectrale

**A**NALYSER les propriétés de contrôlabilité de l'équation « modèle » qu'est l'équation de la chaleur fractionnaire était somme toute facile grâce à l'expression explicite du semi-groupe. Mais pour les équations où on ne peut déterminer que de manière approchée les éléments spectraux, quelques outils techniques seront nécessaires. Le premier outil est une estimation  $L^\infty$  sur certains opérateurs sur les polynômes. Estimation qui sera centrale pour traiter des termes d'erreurs pour l'équation de Grushin. Le second est une asymptotique spectrale en limite semi-classique de l'oscillateur harmonique et de l'opérateur d'Airy.

## 3.1 Opérateurs sur les polynômes

### 3.1.1 Introduction

On a vu que pour l'équation de la demi-chaleur, certaines solutions sont de la forme  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  avec  $z = e^{-t+ix}$ . Nous verrons dans les chapitres suivants que pour certaines équations, comme l'équation de Grushin, nous aurons des solutions approchées de cette forme. Les solutions exactes présenteront un terme d'erreur qui vient multiplier  $z^n$  : elles sont de la forme  $\sum_{n \geq 0} a_n \gamma_{t,n} z^n$ . Pour adapter les méthodes employées pour l'équation de la demi-chaleur, on veut trouver une estimation de  $\sum_{n \geq 0} a_n \gamma_{t,n} z^n$ , pour des normes appropriées et de bonnes hypothèses sur chaque suite  $(\gamma_{t,n})_n$ . Afin de ne pas s'encombrer de questions de sommabilité, on supposera les sommes finies, quitte à étendre les estimées par densité après coup.

Une estimation  $L^2$  sur les disques centrés en 0 est facile à démontrer. En calculant  $\int_{\partial D(0,1)} z^n \bar{z}^m dz$  en coordonnées polaires, on constate que les fonctions  $z \mapsto z^n$  sont orthogonales sur  $D(0, 1)$ . En conséquence, on a

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n \gamma_n z^n \right|_{L^2(D(0,1))}^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 |\gamma_n|^2 |z^n|_{L^2(D(0,1))}^2 \leq \sup_{n \geq 0} |\gamma_n|^2 \left| \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right|_{L^2(D(0,1))}^2.$$

Mais comme on peut le voir sur la Fig. 2.1 du chapitre précédent, les domaines qui nous intéressent ne sont pas des disques, et on a besoin d'une autre approche. Prenons l'exemple  $\gamma_n = n$  pour voir ce que l'on peut faire. On a alors

$$\sum_{n \geq 0} n a_n z^n = z \frac{d}{dz} \left( \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right).$$

Donc, d'après la formule intégrale de Cauchy, on a pour  $r > 0$  et  $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n \geq 0} n a_n z^n = \frac{z}{2i\pi} \oint_{\partial D(z,r)} \frac{1}{(\zeta - z)^2} \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n d\zeta.$$

Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{C}$  et  $U$  un voisinage de  $K$ , on a pour  $r$  assez petit et  $z \in K$ ,  $D(z, r) \subset U$ . On a alors l'estimée

$$\left| \sum_{n \geq 0} n a_n z^n \right|_{L^\infty(K)} \leq \frac{1}{r} \sup_{z \in K} |z| \left| \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right|_{L^\infty(U)}.$$

C'est ce type d'estimées que nous établissons ici, sous des hypothèses géométriques sur  $K$  et des hypothèses générales sur la suite  $(\gamma_n)$ .

Désormais et dans le reste de cette section,  $E$  est un espace de Banach complexe. Le lecteur pourra supposer  $E$  de dimension finie sans problème pour la suite, puisque ce sera le seul cas que nous rencontrerons dans les applications. On cherche des estimées  $L^\infty$  sur les opérateurs suivant.

**Définition 3.1.** Si  $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$  est une suite à coefficients dans  $\mathcal{L}(E)$  (l'ensemble des opérateurs linéaires continus sur  $E$ ), on définit l'opérateur  $H_\gamma$  sur les polynômes à coefficients dans  $E$  par

$$H_\gamma \left( \sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = \sum_{n \geq 0} \gamma_n a_n z^n.$$

On dit que  $\gamma$  est la *symbole* de l'opérateur  $H_\gamma$ .

Notons que cette définition inclut les cas où  $\gamma_n$  et  $a_n$  sont scalaires (cas  $E = \mathbb{C}$ ) et le cas où  $a_n$  est un vecteur de taille  $d$  et  $\gamma_n$  est une matrice carrée de taille  $d$  (cas  $E = \mathbb{C}^d$ ). Ce sont les deux cas que nous rencontrerons dans les applications.

Commençons par la remarque suivante, qui permet de voir  $H_\gamma$  comme un opérateur de convolution sur des cercles.

**Lemme 3.2.** Soit  $(\gamma_n)$  une suite à valeurs dans  $\mathcal{L}(E)$  à croissance sous-exponentielle, soit  $K_\gamma(\zeta) = \sum_{n \geq 0} \gamma_n \zeta^n$  (qui converge pour  $|\zeta| < 1$ ), et soit  $R > 0$ . Alors, pour tout  $|z| < R$  et pour tout polynôme  $f \in E[X]$ ,

$$H_\gamma f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D(0,R)} \frac{1}{\zeta} K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) f(\zeta) d\zeta. \quad (3.1)$$

*Démonstration.* Si  $f(\zeta) = \sum a_n \zeta^n$  est un polynôme, on a d'après la formule intégrale de Cauchy

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Alors, en remplaçant cette formule dans la définition de  $H_\gamma$  :

$$H_\gamma f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \geq 0} \gamma_n \oint_{\partial D(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta z^n.$$

Donc, d'après le théorème de Fubini, pour  $|\zeta| < R$ ,

$$H_\gamma f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D(0,R)} \sum_{n \geq 0} \frac{\gamma_n z^n}{\zeta^{n+1}} f(\zeta) d\zeta,$$

ce qui, d'après la définition de  $K_\gamma$ , est bien la formule annoncée.  $\square$

L'idée pour étudier les opérateurs  $H_\gamma$  est de changer le chemin d'intégration dans l'expression de  $H_\gamma$  comme opérateur de convolution. Pour ce faire, on a besoin d'étendre le noyau  $K_\gamma$  analytiquement sur un plus grand domaine que  $D(0, 1)$ . On commence par décrire les espaces de symboles pour lesquels nous le faisons.

### 3.1.2 Classes de symboles

Commençons par quelques rappels sur les fonctions holomorphes.

**Définition 3.3.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On note  $\mathcal{O}(U; E)$  l'espace de fonctions holomorphes sur  $U$  à valeur dans  $E$ . On munit  $\mathcal{O}(U; E)$  de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. C.-à-d. que pour tout compact  $K$  de  $U$ , on munit  $\mathcal{O}(U; E)$  de la semi-norme  $p_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|$ .

Rappelons que grâce à la formule intégrale de Cauchy,  $f \mapsto f'$  est continue de  $\mathcal{O}(U; E)$  dans lui-même. Rappelons aussi que  $\mathcal{O}(U; E)$  est un espace de Fréchet.

#### Symboles tronqués

Dans les applications, nous aurons selon les cas plus ou moins d'information sur le symbole  $(\gamma_n)_n$  de l'opérateur  $H_\gamma$ . Plus on a une information précise, meilleure sera l'estimation sur l'opérateur  $H_\gamma$ . Nous décrivons trois espaces de symboles, qui nous permettront d'obtenir des estimations différentes.

**Définition 3.4.** Soit  $r \geq -1$ . On définit  $\mathcal{S}_{r,0}(E)$  l'ensemble des fonctions  $\gamma$  holomorphes sur  $\Delta_r = \{\Re(z) > r\}$ , à valeur dans  $\mathcal{L}(E)$ , et qui ont une croissance sous-exponentielle, c.-à-d. que pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$p_\epsilon(\gamma) := \sup_{z \in \Delta_r} |\gamma(z) e^{-\epsilon|z|}| < +\infty.$$

On munit  $\mathcal{S}_{r,0}(E)$  des semi-normes  $(p_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ .

*Exemple 3.5.* Les polynômes sont des exemples de fonctions qui sont dans  $\mathcal{S}_{r,0}(\mathbb{C})$  pour tout  $r \geq -1$ . La fonction  $z \mapsto \sqrt{z}$  est dans  $\mathcal{S}_{r,0}$  pour tout  $r \geq 0$ . La fonction  $z \mapsto e^{-\lambda z}$  est dans  $\mathcal{S}_{r,0}(\mathbb{C})$  si et seulement si  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . La fonction  $z \mapsto e^{-z^2}$  n'est dans aucun  $\mathcal{S}_{r,0}(\mathbb{C})$ .

**Définition 3.6.** Soit  $r : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction croissante, et pour tout  $\theta \in ]0, \pi/2[$ ,  $\Delta_{r,\theta} := \{|z| > r(\theta), |\arg(z)| < \theta\}$ . On définit  $\mathcal{S}_r(E)$  l'ensemble des fonctions  $\gamma$  holomorphes sur  $\bigcup_{0 < \theta < \pi/2} \Delta_{r,\theta}$ , à valeur dans  $\mathcal{L}(E)$ , et qui ont une croissance sous-exponentielle sur chaque  $\Delta_{r,\theta}$ , c.-à-d. telles que pour tout  $\epsilon > 0$  et  $0 < \theta < \pi/2$ ,

$$p_{\theta,\epsilon}(\gamma) := \sup_{z \in \Delta_{r,\theta}} |\gamma(z)e^{-\epsilon|z|}| < +\infty$$

On munit  $\mathcal{S}_r(E)$  des semi-normes  $(p_{\theta,\epsilon})_{\substack{0 < \theta < \pi/2 \\ \epsilon > 0}}$ .

*Exemple 3.7.* Les fonctions de l'exemple 3.5 vérifient les mêmes propriétés si on remplace  $\mathcal{S}_{r,0}(\mathbb{C})$  par  $\mathcal{S}_r(\mathbb{C})$  (pour n'importe quelle fonction  $r : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ).

Pour tout  $\alpha > 0$ , la fonction  $\gamma_\alpha : z \mapsto \exp(z^\alpha e^{-z})$  est dans tous les  $\mathcal{S}_r(\mathbb{C})$ , mais si  $\alpha > 1$ , elle n'est dans aucun  $\mathcal{S}_{r,0}(\mathbb{C})$ . En effet, dans chaque secteur  $\{|\arg(z)| < \theta\}$  avec  $\theta < \pi/2$ , la décroissance du terme  $e^{-z}$  compense la croissance du terme  $z^\alpha$  : la fonction  $\gamma_\alpha$  est donc bornée sur chaque secteur  $\{|\arg(z)| < \theta\}$ . Mais si on prend  $z = r_0 + it$  et qu'on fait tendre  $t$  vers  $\pm\infty$ , le terme  $e^{-z}$  est de module constant, et ne peut compenser la croissance de  $z^\alpha$  : dans le cas  $\alpha \geq 1$ , la fonction  $\gamma_\alpha$  n'est à croissance sous-exponentielle sur aucun demi-plan  $\{\Re(z) > r_0\}$ .

*Remarque 3.8.* La condition «  $r$  croissante » est là pour éviter quelques bizarreries dans les démonstrations (comme p. ex. un calcul qui est valide pour un  $\theta$  donné mais qui ne semble pas marcher pour certains  $\theta' < \theta$ ). Elle est cependant assez artificielle.

En effet, si  $r : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction quelconque, on pose (par exemple)  $\tilde{r}(\theta) := \inf_{\pi/2 > \theta' \geq \theta} r(\theta') + 1$ . Alors, pour tout  $\theta \in ]0, \pi/2[$ , le secteur  $\Delta_{\tilde{r},\theta}$  est inclus dans un secteur de la forme  $\Delta_{r,\theta'}$ . Donc une fonction holomorphe sur l'union de  $\Delta_{r,\theta}$  l'est également sur l'union des  $\Delta_{\tilde{r},\theta}$ . La propriété de croissance sous-exponentielle est également préservée.

C'est pourquoi, lorsqu'il s'agira de démontrer qu'une fonction  $\gamma$  est dans un  $\mathcal{S}_r(E)$ , on se contentera de montrer que pour tout  $\theta \in ]0, \pi/2[$ , il existe  $r_\theta > 0$  tel que  $\gamma$  est holomorphe sur le secteur  $\{|z| > r_\theta, |\arg(z)| < \theta\}$  et est à croissance sous-exponentielle sur ce secteur. Et ceci sans se préoccuper de montrer que  $\theta \mapsto r_\theta$  est croissante.

**Définition 3.9.** Soit  $r \geq 0$ , et  $D_{>r} = \{|z| > r\}$ . On définit  $\mathcal{S}_{r,\infty}(E)$  l'ensemble des fonctions  $\gamma$  holomorphes bornées sur  $D_{>r}$ , à valeur dans  $\mathcal{L}(E)$ , et telles que  $z \mapsto \gamma(z^{-1})$  soit holomorphe en 0. On munit  $\mathcal{S}_{r,\infty}(E)$  de la norme  $|\gamma| = \sup_{z \in D_r} |\gamma(z)|$ .

*Remarque 3.10.* On pourrait autoriser dans cette définition  $\infty$  à être un point de branchement pour  $\gamma$ , et même un pôle, dans le but d'autoriser des fonctions comme  $\gamma(z) = \sqrt{z}$ . On demande alors qu'il existe  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$  tels que  $z \mapsto z^{n_1}\gamma(z^{-n_2})$  soit holomorphe en 0. Pour  $\gamma(z) = \sqrt{z}$ , on aurait  $n_1 = 1$  et  $n_2 = 2$ . On aurait alors un espace  $\mathcal{S}_{r,n_1,n_2,\infty}(E)$  paramétré par  $n_1, n_2$  en plus de  $r$ . Les théorèmes qui suivent restent vrais si on remplace  $\mathcal{S}_{r,\infty}(E)$  par  $\mathcal{S}_{r,n_1,n_2,\infty}(E)$ , mais nous nous abstenons de développer plus avant cela, car des telles complications ne nous seront pas utiles.

*Remarque 3.11.* Notons que pour  $r_0 \geq 0$  et  $r(\theta) \geq r_0/\cos(\theta)$ , on a les inclusions continues

$$\mathcal{S}_{r_0,\infty}(E) \subset \mathcal{S}_{r_0,0}(E) \subset \mathcal{S}_r(E).$$

Ces espaces partagent les propriétés suivantes.

**Proposition 3.12.** *Soit  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{r,0}(E)$ ,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_r(E)$ , ou  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{r,\infty}(E)$ . L'espace  $\mathcal{S}$  vérifie les propriétés suivantes :*

1. *La topologie de  $\mathcal{S}$  est plus forte que la topologie de la convergence sur tout compact.*
2. *Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x_0$  dans le domaine de définition des éléments de  $\mathcal{S}$ , la forme linéaire  $\gamma \in \mathcal{S} \mapsto \gamma^{(j)}(x_0)$  est continue.*
3. *Si  $E$  est une algèbre de Banach, l'application  $(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1\gamma_2$  est continue de  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  vers  $\mathcal{S}$ .*

*Démonstration.* On fait la démonstration dans le cas  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_r(E)$ .

1. Soit  $K$  un compact de  $\bigcup_{0 < \theta < \pi/2} \Delta_{r,\theta}$ . D'après la propriété de Borel-Lebesgue, il existe un nombre fini de  $\theta$  dans  $]0, \pi/2[$ , disons  $\theta_1, \dots, \theta_k$  tels que  $K \subset \bigcup_{j=1}^k \Delta_{r,\theta_j}$ . Alors, en notant  $R = \sup_{z \in K} |z|$ , on a

$$|\gamma|_{L^\infty(K)} \leq \sup_{1 \leq j \leq k} p_{\theta_k,1}(\gamma)e^R,$$

ce qui démontre le premier point.

2. Le second point découle du premier et du fait que les formes linéaires  $\gamma \mapsto \gamma^{(j)}(x_0)$  sont continues sur l'espace  $\mathcal{O}(U; E)$  des fonctions holomorphes sur  $U$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.
3. Pour démontrer le dernier point, on remarque que pour tout  $z \in \Delta_{r,\theta}$ , on a  $|\gamma_1(z)\gamma_2(z)| \leq p_{\theta,\epsilon/2}(\gamma_1)p_{\theta,\epsilon/2}(\gamma_2)e^{\epsilon|z|}$ , et donc  $p_{\theta,\epsilon}(\gamma_1\gamma_2) \leq p_{\theta,\epsilon/2}(\gamma_1)p_{\theta,\epsilon/2}(\gamma_2)$ . □

*Remarque 3.13.* Ceci ne nous servira pas, mais on peut montrer que les espaces  $\mathcal{S}_{r,0}(E)$  et  $\mathcal{S}_{r,\infty}(E)$  sont en fait de Fréchet. L'espace  $\mathcal{S}_r(E)$  est complet, mais on ne sait pas s'il est de Fréchet. Cependant, si on impose que la fonction  $r$  ne prenne qu'un nombre dénombrable de valeurs,  $\mathcal{S}_r(E)$  est alors un espace de Fréchet. Notons que dans les applications, on pourrait toujours remplacer  $r$  par une fonction  $\tilde{r}$ , supérieure à  $r$ , qui ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs.

### Symboles non tronqués

Si  $\gamma$  est dans l'un des espaces  $\mathcal{S}_{r,0}(E)$ ,  $\mathcal{S}_r(E)$ , etc. définis à la section précédente, la valeur de  $\gamma$  en  $n \in \mathbb{N}$  n'est définie que pour  $n$  assez grand. Par exemple, si  $\gamma \in \mathcal{S}_{r,0}(E)$ , alors  $\gamma(n)$  est défini pour  $n > r$ , mais pas pour  $n \leq r$ . C'est pourquoi nous appelons ces éléments « symboles tronqués ».

Cependant, nombre de propriétés qui nous intéresseront ne dépendent pas des premières valeurs  $\gamma(n)$ . En conséquence, si  $\gamma(n)$  n'est pas défini pour des petites valeurs de  $n$ , on peut en choisir arbitrairement la valeur. Nous formalisons cette idée dans la définition suivante.

**Définition 3.14.** Soit  $\mathcal{S}$  est un espace vectoriel localement convexe de fonctions sur un domaine  $X \subset \mathbb{C}$ , à valeur dans  $E$ , et tel qu'il existe  $N \geq 0$  tel que tous les entiers supérieurs à  $N$  sont dans  $X$ . On note  $n_0$  le plus petit de ces entiers  $N$ .

On définit  $\bar{\mathcal{S}}$  comme étant l'ensemble des suites  $\gamma = (\gamma_n)$  tel qu'il existe  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{S}$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $\gamma_n = \tilde{\gamma}(n)$ . On munit  $\bar{\mathcal{S}}$  de la famille de semi-norme formée de :

1. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la semi-norme  $p_n(\gamma) = |\gamma_n|$ ;
2. pour chaque semi-norme  $p$  continue sur  $\mathcal{S}$ , la semi-norme toujours notée  $p$  définie par

$$p(\gamma) = \inf\{p(\tilde{\gamma}), \tilde{\gamma} \in \mathcal{S} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \tilde{\gamma}(n) = \gamma_n\}.$$

*Remarque 3.15.* Si  $E = \mathbb{C}$ , on notera simplement  $\bar{\mathcal{S}}_r(\mathbb{C}) = \bar{\mathcal{S}}_r$ , si  $E = \mathbb{C}^d$ , on notera  $\bar{\mathcal{S}}_r(\mathbb{C}^d) = \bar{\mathcal{S}}_r^d$ , et si  $E = M_d(\mathbb{C})$  (l'ensemble des matrices de tailles  $d \times d$  à coefficients complexes), on notera  $\bar{\mathcal{S}}_r(M_d(\mathbb{C})) = \bar{\mathcal{S}}_r^{d \times d}$ . On notera de manière similaire  $\bar{\mathcal{S}}_{r,\infty}^{d \times d}$ ,  $\bar{\mathcal{S}}_{r,0}^d$ , etc.

Donnons également la Proposition suivante, qui nous servira pour changer le paramètre  $r$  par un autre plus grand.

**Proposition 3.16.** Soit  $r, r' : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions croissantes telle que  $r' \geq r$ . Alors  $\bar{\mathcal{S}}_r(E) \subset \bar{\mathcal{S}}_{r'}(E)$  avec injection continue.

La démonstration ne présente pas de difficultés particulières, mais détaillons-la, ne serait-ce que pour se familiariser avec les notions introduites.

*Démonstration.* Si on note  $n_0$  le plus petit entier de la Définition 3.14 pour  $\bar{\mathcal{S}} = \bar{\mathcal{S}}_r(E)$ , on a  $n_0 = \lfloor \inf_{\theta} r(\theta) \rfloor + 1$ . De manière similaire, on définit  $n'_0$ , et on a  $n'_0 = \lfloor \inf_{\theta} r'(\theta) \rfloor + 1$ . L'hypothèse  $r' \geq r$  implique donc que  $n'_0 \geq n_0$ . Elle implique également que pour tout  $\theta \in ]0, \pi/2[$ ,  $\Delta_{r',\theta} \subset \Delta_{r,\theta}$ .

Si  $(\gamma_n) \in \bar{\mathcal{S}}_r(E)$ , il existe  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{S}_r(E)$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\gamma_n = \tilde{\gamma}(n_0)$ . Comme  $\tilde{\gamma}$  est holomorphe à croissance sous-exponentielle sur chaque  $\Delta_{r,\theta}$  et que  $\Delta_{r,\theta} \subset \Delta_{r',\theta}$ , la fonction  $\tilde{\gamma}$  est holomorphe à croissance sous-exponentielle sur chaque  $\Delta_{r',\theta}$ . Autrement dit  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{S}_{r'}(E)$ . De plus, comme  $n'_0 \geq n_0$ , on a pour tout  $n \geq n'_0$ ,  $\gamma_n = \tilde{\gamma}(n)$ . On a donc démontré que  $(\gamma_n) \in \bar{\mathcal{S}}_{r'}(E)$ . Notons  $\iota$  l'application d'inclusion.

Soit  $p'$  une des semi-normes définissant la topologie de  $\bar{\mathcal{S}}_{r'}$ . Dans le cas où  $p'(\gamma) = |\gamma_n|$ , comme  $p := p'$  est également une semi-norme continue sur  $\bar{\mathcal{S}}_r$ , on a bien  $p'(\iota(\gamma)) \leq p(\gamma)$ .

Traisons maintenant le cas  $p' = p_{\theta,\varepsilon}$ , c'est-à-dire le cas où

$$p'((\gamma_n)_n) = \inf \left\{ p_{\theta,\varepsilon}(\tilde{\gamma}), \tilde{\gamma} \in \mathcal{S}_{r'}(E) \text{ tel que } \forall n \geq n'_0, \tilde{\gamma}(n) = \gamma_n \right\},$$

où on rappelle que pour  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{S}_{r'}(E)$ ,

$$p_{\theta,\varepsilon}(\tilde{\gamma}) = \sup_{z \in \Delta_{r',\theta}} |\tilde{\gamma}(z)e^{-\varepsilon|z|}|.$$

On définit  $p$  par la même formule, mais avec  $r$  au lieu de  $r'$ . On affirme que pour tout  $\gamma = (\gamma_n) \in \bar{\mathcal{S}}_r(E)$ ,  $p'(\iota(\gamma)) \leq p(\gamma)$ , ce qui terminera la démonstration. Soit  $\eta > 0$ . Par définition de  $p$ , il existe  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{S}_r(E)$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\gamma_n = \tilde{\gamma}(n_0)$  et

$$\sup_{z \in \Delta_{r,\theta}} |\tilde{\gamma}(z)e^{-\varepsilon|z|}| = p_{\theta,\varepsilon}(\tilde{\gamma}) \leq p(\gamma) + \eta.$$

Alors, pour tout  $n \geq n'_0 \geq n_0$ , on a  $\tilde{\gamma}(n) = \gamma_n$ . Et comme  $\Delta_{r,\theta} \subset \Delta_{r',\theta}$ , on a

$$\sup_{z \in \Delta_{r',\theta}} |\tilde{\gamma}(z)e^{-\varepsilon|z|}| \leq \sup_{z \in \Delta_{r,\theta}} |\tilde{\gamma}(z)e^{-\varepsilon|z|}| \leq p(\gamma) + \eta.$$

Donc, par définition de  $p'$ , on a  $p'(\iota(\gamma)) \leq p(\gamma) + \eta$ . Comme ceci est vrai pour tout  $\eta > 0$ , on a  $p'(\iota(\gamma)) \leq p(\gamma)$ .  $\square$

De même, on a les inclusions continues  $\bar{\mathcal{S}}_{r,0} \subset \bar{\mathcal{S}}_{r',0}$  et  $\bar{\mathcal{S}}_{r,\infty} \subset \bar{\mathcal{S}}_{r',\infty}$  si  $r' \geq r$ . Enfin, mentionnons que le décalage  $(\gamma_n)_{n \geq 0} \mapsto (\gamma_{n+1})_{n \geq 0}$  est continu.

**Proposition 3.17.** *Soit  $r : ]0, \pi/2[ \mapsto \mathbb{R}_+$  une fonction croissante. L'application de décalage  $(\gamma_n)_{n \geq 0} \mapsto (\gamma_{n+1})_{n \geq 0}$  est continue sur  $\bar{\mathcal{S}}_r(E)$ .*

*Démonstration.* La remarque principale que pour tout  $\theta \in ]0, \pi/2[$ , le domaine  $\Delta_{r,\theta}$  est stable par  $z \mapsto z + 1$  (voir Fig. 3.1). Alors, si  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{S}_r(E)$  est telle que  $\tilde{\gamma}(n) = \gamma_n$  pour  $n \geq n_0$ , la fonction  $\tau\tilde{\gamma} : z \mapsto \tilde{\gamma}(z + 1)$  est dans  $\mathcal{S}_r(E)$ , et coïncide avec  $\gamma_{n+1}$  pour les entiers  $n \geq n_0$ .

Pour la continuité, on remarque que  $|\tilde{\gamma}(z + 1)|e^{-\varepsilon|z|} \leq e^\varepsilon |\tilde{\gamma}(z + 1)|e^{-\varepsilon|z+1|}$ . Donc  $p_{\theta,\varepsilon}(\tau\tilde{\gamma}) \leq e^\varepsilon p_{\theta,\varepsilon}(\tilde{\gamma})$ . Donc  $p_{\theta,\varepsilon}((\gamma_{n+1})_n) \leq e^\varepsilon p_{\theta,\varepsilon}((\gamma_n)_n)$ .  $\square$



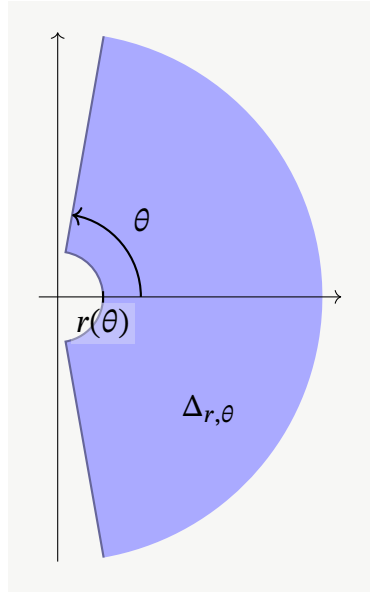


FIGURE 3.1 – En bleu, la partie  $\Delta_{r,\theta}$  du domaine de définition d'un symbole  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_r$ . Ce domaine  $\Delta_{r,\theta}$  est stable par translation  $z \mapsto z + 1$ , et donc l'application de décalage  $(\gamma_n) \mapsto (\gamma_{n+1})$  est continue sur  $\overline{\mathcal{S}}_r$ .

De même le décalage  $(\gamma_n)_n \mapsto (\gamma_{n+1})_n$  est continu de  $\overline{\mathcal{S}}_{R,\infty}(E)$  dans  $\overline{\mathcal{S}}_{R+1,\infty}(E)$ .

### 3.1.3 Continuation analytique des séries de Taylor

On note  $U = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$  et pour  $\sigma > 0$ , on note  $S_\sigma = \{\zeta \in \mathbb{C}^*, \sigma < \arg(\zeta) < 2\pi - \sigma\}$ .

**Théorème 3.18.** Soit  $r \geq -1$ . Soit  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r,0}(E)$ . La fonction  $K_\gamma : \zeta \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \zeta^n$  s'étend en une fonction holomorphe sur  $U$ , et  $K_\gamma$  vérifie alors pour tout  $\sigma > 0$  et  $r' > r$ ,<sup>1</sup>

$$p_{r',\sigma}(K_\gamma) := \sup_{\zeta \in S_\sigma} \langle \zeta \rangle^{-r'} |K_\gamma(\zeta)| < +\infty$$

De plus, l'application  $\gamma \mapsto K_\gamma$  est continue de  $\overline{\mathcal{S}}_{r,0}$  dans l'espace

$$\mathcal{O}_{r'}(U; E) := \{f \in \mathcal{O}(U; E); \forall \sigma > 0, p_{r',\sigma}(f) < +\infty\},$$

où on a muni  $\mathcal{O}_{r'}(U; E)$  des semi-normes de  $\mathcal{O}(U; E)$  et des  $(p_{r',\sigma})_{0 < \sigma < \pi}$  définies ci-dessus.

Hormis la continuité de  $K_\gamma$  en fonction de  $\gamma$ , ce théorème est la version historique, telle qu'énoncée par Lindelöf dans une formulation équivalente [60, Ch. V].

**Théorème 3.19.** Soit  $r : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction croissante. Soit  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_r(E)$ . La fonction  $K_\gamma : \zeta \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \zeta^n$  s'étend en une fonction holomorphe sur  $U$ . De plus, l'application  $\gamma \mapsto K_\gamma$  est continue de  $\overline{\mathcal{S}}_r(E)$  dans  $\mathcal{O}(U; E)$ .

<sup>1</sup>On note  $\langle \zeta \rangle = \sqrt{1 + |\zeta|^2}$ .

Cette version est due à Arakelyan [11], et a été redécouverte par l'auteur de cette thèse avec une autre méthode [54, Th. 18]. Nous présenterons ici la démonstration d'Arakelyan, qui est une adaptation de celle de Lindelöf.

**Théorème 3.20.** *Soit  $r \geq 0$ . Soit  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}(E)$ . La fonction  $K_\gamma : \zeta \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \zeta^n$  s'étend en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  sauf  $\zeta = 0$  et  $\zeta = 1$  qui sont des points de branchements.*

*Dit plus rigoureusement, en notant  $F$  le revêtement universel de  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ,  $K_\gamma$  s'étend en une fonction holomorphe sur  $F$ . De plus, l'application  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}(E) \mapsto K_\gamma \in \mathcal{O}(F; E)$ , est continue.*

Nous ne sommes pas au courant d'une référence qui démontre ce dernier Théorème de continuation analytique<sup>2</sup>. La démonstration que nous en faisons est très différente de la démonstration des deux précédents théorèmes.

Avant de démontrer ces trois théorèmes, donnons quelques remarques générales.

*Remarque 3.21.* Pour ces théorèmes de continuation analytique, les premières valeurs de  $\gamma_n$  n'ont pas d'importance : si on modifie  $\gamma_{n_1}$ , on ne fait qu'ajouter un multiple de  $z^{n_1}$  à  $K_\gamma$ , ce qui ne change pas les conclusions des trois théorèmes précédents (pour le premier, il faut supposer  $n_1 < r$ ). Comme les espaces de symboles complets (Def. 3.14) ont pour semi-normes  $p_{n_1}(\gamma) = |\gamma_{n_1}|$ , la continuité de  $K_\gamma$  en fonction des premières valeur de  $\gamma$  est également assurée.

En conséquence, il suffit de montrer chacun de ces théorèmes dans le cas où  $\gamma_n = 0$  pour  $n < n_0$ . Dit autrement, nous allons supposer dans les démonstrations que  $K_\gamma(\zeta) = \sum_{n \geq n_0} \gamma(n) \zeta^n$ , où  $\gamma \in \mathcal{S}_{r,0}(E)$  (respectivement  $\gamma \in \mathcal{S}_r(E)$ , respectivement  $\gamma \in \mathcal{S}_{r,\infty}(E)$ ).

*Remarque 3.22.* Comme dernière remarque générale, mentionnons que d'après la série définissant  $K_\gamma$ , l'application  $\gamma \mapsto K_\gamma$  est toujours continue de l'espace des suites  $(\gamma_n)$  à croissance sous-exponentielle<sup>3</sup> vers  $\mathcal{O}(D(0, 1); E)$ . En effet, si  $|\zeta| < e^{-\epsilon}$  on a en notant  $C_\epsilon(\gamma) = \sup_n |e^{-\epsilon n} \gamma_n|$

$$|K_\gamma(\zeta)| \leq C_\epsilon(\gamma) \sum_{n \geq 0} e^{\epsilon n} |\zeta|^n \leq C_\epsilon(\gamma) \frac{1}{1 - |\zeta|e^\epsilon}.$$

Remarquons que dans chacun des espaces  $\overline{\mathcal{S}}_{r,0}(E)$ ,  $\overline{\mathcal{S}}_r(E)$  et  $\overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}$ , la seminorme  $\gamma \mapsto \sup_n |e^{-\epsilon n} \gamma_n|$  est continue. On sait donc déjà  $\gamma \mapsto K_\gamma$  est continu de chacun de ces espaces dans  $\mathcal{O}(D(0, 1); E)$ . Ainsi, si  $X$  est un compact de  $U$ , lorsqu'on cherchera à montrer une inégalité de la forme  $\sup_X |K_\gamma| \leq Cp(\gamma)$ , on pourra supposer, par exemple, que  $X$  est disjoint de  $[0, 1[$  : il suffit d'écrire  $X = X_1 \cup X_2$ , où  $X_1$  est disjoint de  $[0, 1[$  et  $X_2$  est un compact de  $D(0, 1)$ .

<sup>2</sup>Notons au passage que nous n'avons ici pas précisé la croissance de  $K_\gamma$  car nous n'en aurons pas besoin, mais ceci doit bien entendu être possible.

<sup>3</sup>Dit autrement, la série  $\sum \gamma_n \zeta^n$  converge pour  $|\zeta| < 1$ .

*Démonstration des Théorèmes 3.18 et 3.19.* L'idée est de trouver une expression de  $K_\gamma(\zeta)$  sous forme intégrale. Ceci se fait avec le théorème des résidus. Par exemple, la fonction  $z \mapsto (e^{2i\pi z} - 1)^{-1}$  a un pôle simple chaque  $n \in \mathbb{Z}$ , avec résidus tous égaux à  $(2i\pi)^{-1}$ . On peut alors s'attendre à ce que pour un chemin  $\Gamma$  convenablement choisi,

$$K_\gamma(\zeta) = \int_\Gamma \frac{\gamma(z)\zeta^z}{e^{2i\pi z} - 1} dz. \quad (3.2)$$

Avant de donner le bon chemin  $\Gamma$  (qui n'est pas le même dans le théorème 3.18 et 3.19), essayons d'estimer l'intégrande

$$g_\zeta(z) := \frac{\gamma(z)\zeta^z}{e^{2i\pi z} - 1}. \quad (3.3)$$

On va supposer que le chemin  $\Gamma$  reste à distance supérieure à  $\delta > 0$  de  $\mathbb{Z}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{|e^{2i\pi z} - 1|} &\leq C_\delta && \text{si } \Im(z) > 0 \\ \frac{1}{|e^{2i\pi z} - 1|} &\leq C_\delta e^{2\pi \Im(z)} && \text{si } \Im(z) < 0. \end{aligned}$$

De plus,  $\zeta^z = e^{z \ln(\zeta)} = e^{z(\ln|\zeta| + i \arg(\zeta))}$ . On choisit l'argument de  $\zeta$  dans  $]0, 2\pi[$  (on suppose que  $\zeta \notin \mathbb{R}_+$ ). On a alors

$$|\zeta^z| = e^{\Re(z) \ln|\zeta| - \Im(z) \arg(\zeta)}$$

En rassemblant cette égalité avec la majoration précédente, on trouve l'estimation de l'intégrande  $g_\zeta$  suivante :

$$\begin{aligned} |g_\zeta(z)| &\leq C_\delta |\gamma(z)| e^{\Re(z) \ln|\zeta| - |\Im(z)| \arg(\zeta)} && \text{si } \Im(z) > 0; \\ |g_\zeta(z)| &\leq C_\delta |\gamma(z)| e^{\Re(z) \ln|\zeta| - |\Im(z)| (2\pi - \arg(\zeta))} && \text{si } \Im(z) < 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Notons que  $\arg(\zeta)$  et  $(2\pi - \arg(\zeta))$  sont positifs. Selon cette estimation, il vaut mieux maximiser  $|\Im(z)|$  et minimiser  $\Re(z)$  si on veut que l'intégrale de  $g_\zeta$  converge.

*Cas  $\gamma \in \mathcal{S}_{r,0}(E)$ .* On choisit  $r' \in ]r, [r] + 1[$ , et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on choisit  $\Gamma_k$  le chemin formé de la moitié du cercle  $|z - r'| = k$  incluse dans le demi-plan  $\{\Re(z) > r'\}$ , et du diamètre de ce cercle  $\{\Re(z) = r', |\Im(z)| < k\}$  (voir Fig. 3.2). Ce chemin reste bien à distance supérieure à  $\delta > 0$  de  $\mathbb{Z}$ . D'après le théorème des résidus, on a

$$\oint_{\Gamma_k} g_\zeta(z) dz = \sum_{r' < n < r' + k} \gamma(n) z^n. \quad (3.5)$$

On veut faire tendre  $k$  vers  $+\infty$ , et montrer que

$$K_\gamma(\zeta) = \int_{r' - i\infty}^{r' + i\infty} g_\zeta(z) dz = \int_{r' - i\infty}^{r' + i\infty} \frac{\gamma(z)\zeta^z}{e^{2i\pi z} - 1} dz. \quad (3.6)$$

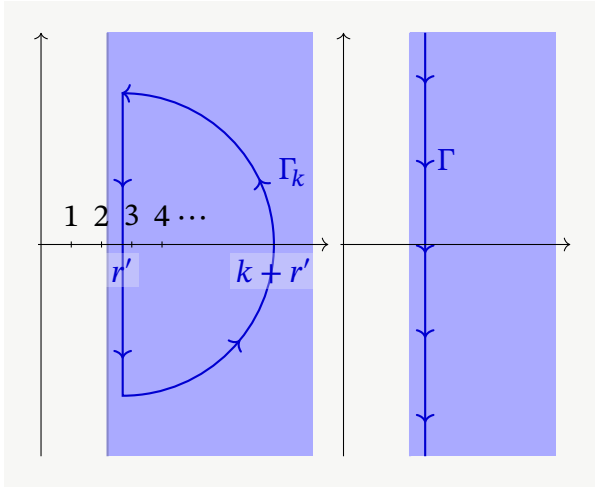


FIGURE 3.2 – En bleu clair le domaine de définition de  $\gamma$ . En bleu le chemin d'intégration pour appliquer le théorème des résidus dans l'équation (3.5). Si on fait tendre  $k$  (le rayon du demi-cercle) vers  $+\infty$ , on démontre que l'intégrale sur la partie « demi-cercle » de  $\Gamma_k$  tend vers 0. Donc l'intégrale sur  $\Gamma_k$  tend vers l'intégrale sur la droite verticale  $\Gamma = \{\Re(z) = r'\}$  (en noir à droite).

Soit  $\zeta \in \mathbb{C}$  tel que  $|\zeta| < 1$  et  $\zeta \notin \mathbb{R}$ . Commençons par montrer que l'intégrale sur la partie « demi-cercle » de  $\Gamma_k$  tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . On a

$$c_\zeta := \min(-\ln|\zeta|, -\arg(\zeta), \arg(\zeta) - 2\pi) > 0,$$

et donc, d'après la majoration (3.4) de  $g_\zeta$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , et  $\Re(z) > r'$ , on a

$$|g_\zeta(z)| < C_{r'} |\gamma(z)| e^{-c_\zeta(\Re(z) + |\Im(z)|)} \leq C_{r'} p_\epsilon(\gamma) e^{-c_\zeta|z| + \epsilon|z|}, \quad (3.7)$$

où on a utilisé pour la deuxième inégalité la définition des semi-normes  $p_\epsilon$  et le fait que si  $\Re(z) > r'$ , alors  $|z| \leq \Re(z) + |\Im(z)|$ . Donc l'intégrale de  $g_\zeta$  sur la partie « demi-cercle » de  $\Gamma_k$  est majorée pour tout  $\epsilon > 0$  par

$$\left| \int_{\substack{|z-r'|=k \\ \Re(z) > r'}} g_\zeta(z) dz \right| \leq C_{r'} p_\epsilon(\gamma) \pi k e^{-c_\zeta k + \epsilon k}.$$

Donc l'intégrale sur la partie demi-cercle de  $\Gamma_k$  tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .

Montrons maintenant que  $g_\zeta$  est bien intégrable sur  $]r' - i\infty, r' + i\infty[$ . Si  $z = r' + it$ , on a d'après la majoration (3.7) de  $g_\zeta$  :

$$|g_\zeta(z)| \leq C_{r'} p_\epsilon(\gamma) e^{-c_\zeta|t| + \epsilon|z|} \leq C_{r'} p_\epsilon(\gamma) e^{-c_\zeta|t| + \epsilon|t| + \epsilon r'}.$$

Donc l'intégrale  $\int_{r' - i\infty}^{r' + i\infty} g_\zeta(z) dz$  existe, et on peut passer à la limite  $k \rightarrow +\infty$  dans l'intégrale (3.5). Pour  $|\zeta| < 1$ ,  $\zeta \notin \mathbb{R}$ , on a donc bien la formulation intégrale (3.6) de  $K_\gamma(\zeta)$ .

Pour terminer la démonstration (dans le cas  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{r,0}(E)$ ), montrons que cette intégrale converge pour  $\zeta \notin [0, +\infty[$ . On reprend la majoration (3.4) de  $g_\zeta$ . Si  $z = r' + it$  et  $\zeta \in S_\sigma$  (c.-à-d. que  $\sigma < \arg(\zeta) < 2\pi - \sigma$ ), on a d'après cette estimation

$$|g_\zeta(z)| \leq C_{r'} p_\epsilon(\gamma) e^{r' \ln|\zeta| - \sigma|t| + \epsilon|z|} \leq C_{r'} p_\epsilon(\gamma) |\zeta|^{r'} e^{-(\sigma - \epsilon)|t|}.$$

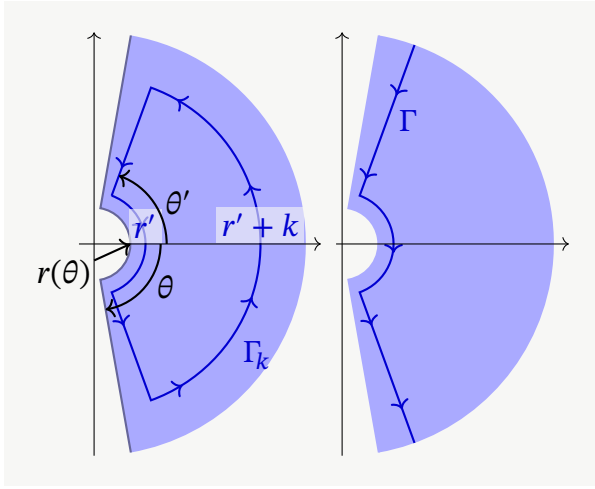


FIGURE 3.3 – En bleu clair la partie  $\Delta_{r,\theta}$  du domaine de définition de  $\gamma$ . En bleu un chemin d'intégration pour appliquer le théorème des résidus dans l'équation (3.8). Si on fait tendre  $r' + k$  (le rayon du grand arc de cercle bleu) vers  $+\infty$ , on démontre que l'intégrale sur la partie « grand arc de cercle » de  $\Gamma_k$  tend vers 0, et donc l'intégrale sur le chemin  $\Gamma_k$  tend vers l'intégrale sur le chemin noir  $\Gamma$ .

Donc, en choisissant  $\epsilon < \sigma$ , on voit que l'intégrale converge pour tout  $\zeta \in S_\sigma$  et qu'elle définit une fonction holomorphe sur  $S_\sigma$ . De plus, on a l'inégalité

$$|K_\gamma(\zeta)| \leq \frac{2C'_{r'}}{\sigma - \epsilon} p_\epsilon(\gamma) |\zeta|^{r'},$$

donc, d'après la définition des semi-normes  $p_{r',\sigma}$ , on a  $p_{r',\sigma}(K_\gamma) \leq C p_\epsilon(\gamma)$ . D'après la remarque 3.22, ceci démontre la continuité de  $\gamma \mapsto K_\gamma$ .

Cas  $\gamma \in \mathcal{S}_r(E)$ . On veut trouver un chemin  $\Gamma$  tel que la formulation intégrale (3.2) soit vraie.

Soit  $\theta' \in ]0, \pi/2[$  qu'on choisira plus tard, soit  $\theta \in ]\theta', \pi/2[$ , soit  $r' > r(\theta)$  non entier, et soit  $\Gamma_k$  la frontière orientée positivement de  $\{r' < |z| < r' + k, |\arg(z)| < \theta'\}$  (voir Fig. 3.3). D'après le théorème des résidus, on a

$$\oint_{\Gamma_k} g_\zeta(z) dz = \sum_{r' < n < r' + k} \gamma(n) z^n. \quad (3.8)$$

Comme dans le cas  $\gamma \in \mathcal{S}_r(E)$ , on veut faire tendre  $k$  vers  $+\infty$  pour montrer qu'avec  $\Gamma$  la frontière de  $\{|z| > r', |\arg(z)| < \theta'\}$  (voir Fig. 3.3),

$$\sum_{n > r'} \gamma(n) z^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} g_\zeta(z) dz. \quad (3.9)$$

Si  $|\zeta| < 1$ ,  $\zeta \notin [0, 1[$ , on a d'après la majoration (3.4) de  $g_\zeta(z)$ , et de la même manière que dans le cas  $\gamma \in \mathcal{S}_r(E)$ ,

$$|g_\zeta(z)| < C_{r'} |\gamma(z)| e^{-c_\zeta(\Re(z) + |\Im(z)|)} \leq C_{r'} p_{\theta,\epsilon}(\gamma) e^{-c_\zeta|z| + \epsilon|z|}. \quad (3.10)$$

Donc l'intégrale de  $g_\zeta$  sur le grand arc de cercle de  $\Gamma_k$  est majorée pour tout  $\epsilon > 0$  par

$$\left| \int_{\substack{|z|=r'+k \\ |\arg(z)| < \theta'}} g_\zeta(z) dz \right| \leq C_{r'} p_\epsilon(\gamma) \pi k e^{-c_\zeta k + \epsilon k}.$$

Donc l'intégrale sur le grand arc de cercle de  $\Gamma_k$  tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .

Montrons maintenant que  $g_\zeta$  est intégrable sur  $\Gamma$ . Si  $z = \rho e^{\pm i\theta'}$ , c.-à-d. si  $z$  est sur l'une des parties droites de  $\Gamma$ , on a d'après la majoration (3.7),

$$|g_\zeta(z)| \leq C_{r'} p_{\theta,\varepsilon}(\gamma) e^{-(c_\zeta - \varepsilon)\rho}.$$

Donc  $g_\zeta$  est intégrable sur  $\Gamma$ . Et donc on peut passer à la limite  $k \rightarrow +\infty$  dans l'équation (3.8), ce qui démontre la formulation intégrale (3.9).

Reste à montrer que cette formulation intégrale permet d'étendre  $K_\gamma$  sur  $U$ . Remarquons que cette formulation intégrale reste vraie pour tout  $\theta' < \theta < \pi/2$  et  $r' > r(\theta)$  non entier. Nous allons nous servir de cette liberté de choix pour étendre  $K_\gamma$  à tout  $U$ .

Soit  $X$  un compact de  $U = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ , qu'on suppose disjoint de  $[0, 1[$ . On note  $C_X = \sup_{\zeta \in X} \ln|\zeta|$  et  $c_X = \inf_{\zeta \in X} \min(\arg(\zeta), 2\pi - \arg(\zeta)) > 0$ . D'après la majoration (3.4) de  $g_\zeta$ , on a pour tout  $\zeta \in X$

$$|g_\zeta(z)| \leq C_{r'} p_{\theta,\varepsilon}(\gamma) e^{C_X \Re(z) - c_X |\Im(z)| + \varepsilon |z|}.$$

Donc, si  $z = \rho e^{\pm i\theta'}$  est sur l'une des parties droites de  $\Gamma$ , on a

$$|g_\zeta(\rho e^{\pm i\theta'})| \leq C_{r'} p_{\theta,\varepsilon}(\gamma) e^{(C_X \cos(\theta') - c_X \sin(\theta') + \varepsilon)\rho}.$$

Si on choisit  $\theta'$  suffisamment proche de  $\pi/2$  de sorte que  $c'_X := C_X \cos(\theta') - c_X \sin(\theta') < 0$ , on a alors

$$|g_\zeta(\rho e^{\pm i\theta'})| \leq C_{r'} p_{\theta,\varepsilon}(\gamma) e^{-(c'_X - \varepsilon)\rho}. \quad (3.11)$$

Donc, en choisissant  $0 < \varepsilon < c'_X$ , on voit que  $g_\zeta(z)$  décroît exponentiellement le long de  $\Gamma$ . Donc l'intégrale (3.9) converge, et étend  $K_\gamma$  en une fonction holomorphe sur  $X$ . Comme  $X$  est un compact arbitraire de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $K_\gamma$  s'étend en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . De plus, on sait déjà que  $K_\gamma$  est holomorphe sur  $D(0, 1)$ , donc  $K_\gamma$  est holomorphe sur  $U = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ .

Pour montrer la continuité de  $\gamma \mapsto K_\gamma$ , reprenons la majoration (3.11). En intégrant cette majoration pour  $z \in \Gamma$ , on a

$$\left| \int_\Gamma g_\zeta(z) dz \right| \leq C'_X \sup_{|z|=r', |\arg(z)| < \theta'} |\gamma(z)| + \frac{2C_{r'}}{c'_X - \varepsilon} p_{\theta,\varepsilon}(\gamma),$$

où le premier terme vient de l'intégrale sur la partie « arc de cercle » de  $\Gamma$ . Le second terme est continu en fonction de  $\gamma \in \mathcal{S}_r(E)$ , et comme la topologie sur  $\mathcal{S}_r(E)$  est plus forte que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, le premier terme est également continu en fonction de  $\gamma$ . On a donc bien un nombre fini de seminormes  $(p_k)$  de  $\mathcal{S}_r(E)$  telles que pour tout  $\gamma \in \mathcal{S}_r(E)$ ,

$$|K_\gamma|_{L^\infty(X)} \leq C \sup_k p_k(\gamma).$$

Ceci termine la démonstration. □

Avant de faire la démonstration du Théorème 3.20, donnons-en l'idée générale. Si  $\gamma_n = \sum_{k>0} a_k n^{-k}$ , on a formellement

$$\sum_{n>0} \gamma_n \zeta^n = \sum_{k,n>0} a_k \frac{\zeta^n}{n^k} = \sum_{k>0} a_k \text{Li}_k(\zeta),$$

où  $\text{Li}_k(\zeta) := \sum_{n>0} \zeta^n n^{-k}$ . La démonstration consiste à étendre la fonction  $\text{Li}_k$ , qui se nomme « polylogarithme », et montrer des estimations dessus pour conclure que la somme  $\sum a_k \text{Li}_k(z)$  converge. Nous aurons en fait besoin d'informations sur une variante du polylogarithme. Ce qui suit est essentiellement adapté de [69].

**Définition 3.23.** Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $N \in \mathbb{N}$ . On appelle polylogarithme<sup>4</sup> incomplet la fonction  $\text{Li}_{k,N}$  définie pour  $|\zeta| < 1$  par

$$\text{Li}_{k,N}(\zeta) = \sum_{n>N} \frac{\zeta^n}{n^k}.$$

On montre que le polylogarithme peut s'étendre analytiquement sur un plus grand domaine que  $\{|\zeta| < 1\}$ .

**Proposition 3.24.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $N \in \mathbb{N}$ . Le polylogarithme incomplet  $\text{Li}_{k,N}$  s'étend en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$  par la formule,

$$\text{Li}_{k,N}(\zeta) = \frac{\zeta^{N+1}}{\Gamma(k)} \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(z))^{k-1} z^{-(N+1)}}{z - \zeta} dz = \frac{\zeta^{N+1}}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1} e^{-Nt}}{e^t - \zeta} dt. \quad (3.12)$$

*Démonstration.* Les deux intégrales de la formule (3.12) se déduisent l'une de l'autre par le changement de variables  $z = e^t$ . Montrons que la deuxième est bien égale à  $\text{Li}_{k,N}(\zeta)$  lorsque  $|\zeta| < 1$ .

Si  $|\zeta| < 1$  et  $t \geq 0$ , on a

$$\frac{1}{e^t - \zeta} = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t} \zeta)^n.$$

D'après le théorème de Fubini, on a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1} e^{-Nt}}{e^t - \zeta} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-(N+n+1)t} dt \zeta^n.$$

De plus, en faisant le changement de variable  $t' = (N + n + 1)t$ , on a

$$\int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-(N+n+1)t} dt = \frac{1}{(N + n + 1)^k} \int_0^{+\infty} t'^{k-1} e^{-t'} dt = \frac{\Gamma(k)}{(N + n + 1)^k}.$$

<sup>4</sup>On pourrait choisir  $k$  non entier, et les théorèmes qui suivent resteraient vrai, à quelques modifications près [31]. Ceci permettrait de traiter les espaces  $\mathcal{S}_{r,n_1,n_2,\infty}$  de la remarque 3.10, mais comme on l'a dit, nous n'aurons pas besoin de ces complications.

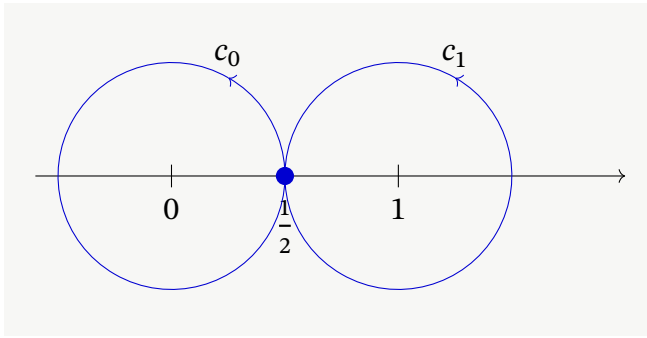


FIGURE 3.4 – Les deux générateurs du groupe fondamental  $G$  de  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .

Donc, en utilisant ceci dans le calcul précédent,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1} e^{-Nt}}{e^t - \zeta} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k)}{(N+n+1)^s} \zeta^n.$$

Enfin, en multipliant ceci par  $\zeta^{N+1}/\Gamma(k)$ , on retrouve bien la définition de  $\text{Li}_{k,N}(\zeta)$ .

De plus, les formules intégrales de (3.12) convergent bien pour tout  $\zeta \notin [1, +\infty[$ , et définissent une fonction holomorphe sur ce domaine. Ainsi, la formule (3.12) étend bien  $\text{Li}_{k,N}$  en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ .  $\square$

Pour aller plus loin, et avoir les informations dont nous avons besoin sur le polylogarithme, nous avons besoin de quelques notions plus avancées de théorie des fonctions holomorphes, en l'occurrence la notion de continuation analytique et de surface de Riemann, voir par exemple [28, Ch. IX]. Cependant, ceci (et le Théorème 3.30 relié) ne sera utilisé qu'à la toute fin de cette thèse, lorsque nous traiterons de la contrôlabilité des systèmes chaleur-demi chaleur en Section 6.5.3. Si le lecteur n'est pas intéressé par la contrôlabilité des systèmes chaleur-demi chaleur, il peut sauter à la section 3.1.4, et également sauter le Théorème 3.30.

Soit  $F$  le revêtement universel  $F$  de  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , avec point de base  $1/2$ . En tant qu'ensemble,

$$F = \left\{ \text{classes d'homotopie } [c] \text{ de chemins } c \text{ de } \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \text{ commençant en } \frac{1}{2} \right\}.$$

Le groupe fondamental  $G = \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, 1/2)$  agit sur  $F$  par  $g \cdot [c] = [\tilde{g}c]$ , où  $g = [\tilde{g}] \in G$  et  $[c] \in F$ . Si  $f : F \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction analytique, et si  $[c] \in F$ , où  $c$  est un chemin allant de  $1/2$  à  $z$ , on note

$$f^{[c]}(z) := f([c]).$$

Remarquons que  $G$  est un groupe libre à deux générateurs,  $[c_0]$  et  $[c_1]$ , où (voir Fig. 3.4)

$$c_0(t) := \frac{e^{2i\pi t}}{2}, \quad c_1(t) := 1 + \frac{e^{2i\pi t}}{2},$$



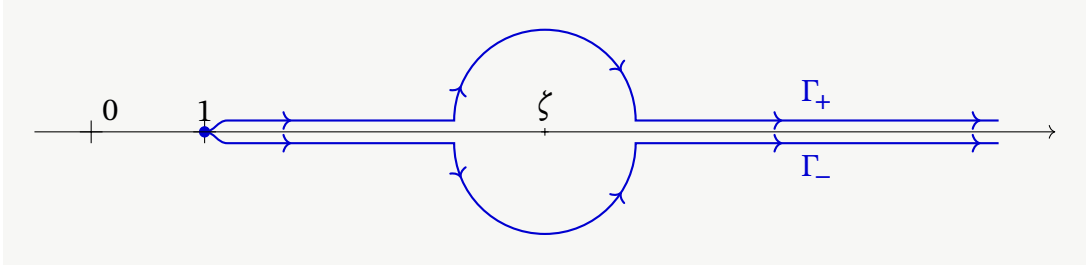


FIGURE 3.5 – Chemins d'intégration pour calculer le saut (3.15) avec la formule (3.12). Pour calculer la limite de  $\text{Li}_{k,N}$  en approchant  $\zeta$  par dessus, on déforme le chemin vers le bas. Pour calculer la limite en approchant  $\zeta$  par le bas, on déforme le chemin vers le haut. Ainsi, la différence des deux limites est égale à l'intégrale sur un cercle autour de  $\zeta$ .

**Proposition 3.25.** *Le polylogarithme incomplet s'étend analytiquement en une fonction holomorphe sur le revêtement universel de  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . De plus,  $\text{Li}_{k,N}$  satisfait les relations de monodromies*

$$\text{Li}_{k,N}^{[c_0c]}(\zeta) = \text{Li}_{k,N}^{[c]}(\zeta) \quad \text{Li}_{k,N}^{[c_1c]}(\zeta) = \text{Li}_{k,N}^{[c]}(\zeta) - 2i\pi \frac{(\log^{[c]}(\zeta))^{k-1}}{\Gamma(k)} \quad (3.13)$$

$$\log^{[c_0c]}(\zeta) = \log^{[c]}(\zeta) + 2i\pi \quad \log^{[c_1c]}(\zeta) = \log^{[c]}(\zeta). \quad (3.14)$$

*Démonstration.* D'après la série définissant  $\text{Li}_{k,N}$  (Def. 3.23), on a  $\zeta \text{Li}'_{k,N}(\zeta) = \text{Li}_{k-1,N}(\zeta)$ . De plus, toujours d'après cette définition,

$$\text{Li}_{0,N}(\zeta) = \frac{\zeta^{N+1}}{1-\zeta}.$$

Donc, par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$ , en intégrant la relation  $\text{Li}'_{k,N}(\zeta) = \text{Li}_{k-1,N}(\zeta)/\zeta$ , le polylogarithme incomplet  $\text{Li}_{k,N}$  est défini et holomorphe sur  $F$ .

Les relations de monodromie (3.14) du logarithme sont standards. La première relation de monodromie (3.13) de  $\text{Li}_{k,N}$  vient de la définition 3.23 par une série. Pour la seconde relation de monodromie de  $\text{Li}_{k,N}$ , on calcule le « saut » de  $\text{Li}_{k,N}$  sur l'axe  $[1, +\infty[$ . C.-à-d. que pour  $\zeta > 1$ , on calcule

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Li}_{k,N}(\zeta + i\epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Li}_{k,N}(\zeta - i\epsilon). \quad (3.15)$$

En déformant un peu le chemin d'intégration dans la formule (3.12) vers le bas (respectivement vers le haut), et en notant  $\Gamma_-$  ce chemin (respectivement  $\Gamma_+$ , voir Fig. 3.5), on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Li}_{k,N}(\zeta \pm i\epsilon) = \frac{\zeta^{N+1}}{\Gamma(k)} \int_{\Gamma_{\mp}} \frac{(\ln(z))^{k-1} z^{-(N+1)}}{z - \zeta} dz.$$

Donc, la différence est égale à l'intégrale sur le cercle  $\partial D(\zeta, r)$  avec  $r$  assez petit (voir Fig. 3.5) :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Li}_{k,N}(\zeta + i\epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Li}_{k,N}(\zeta - i\epsilon) = \frac{\zeta^{N+1}}{\Gamma(k)} \int_{\partial D(\zeta, r)} \frac{(\ln(z))^{k-1} z^{-(N+1)}}{z - \zeta} dz.$$

Donc, d'après la formule intégrale de Cauchy,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Li}_{k,N}(\zeta + i\epsilon) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Li}_{k,N}(\zeta - i\epsilon) = \frac{2i\pi \ln(\zeta)^{k-1}}{\Gamma(k)}.$$

La seconde relation de monodromie (3.13) de  $\text{Li}_{k,N}$  en découle.  $\square$

Comme dernier préparatif pour la démonstration du Théorème 3.20, nous montrons des asymptotiques pour  $\text{Li}_{k,N}$  dans la limite  $s \rightarrow +\infty$ .

**Proposition 3.26.** *Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $\ell \geq N$ , on a dans la limite  $k \rightarrow +\infty$ , et localement uniformément en  $\zeta \in F$ , l'asymptotique*

$$\text{Li}_{k,N}(\zeta) = \sum_{n=N+1}^{\ell} \frac{\zeta^n}{n^k} + O\left(\frac{1}{(\ell+1)^k}\right).$$

*Démonstration.* Par définition 3.23 de  $\text{Li}_{k,N}$  par une série, on a

$$\text{Li}_{k,N}(\zeta) = \sum_{n=N+1}^{\ell} \frac{\zeta^n}{n^k} + \text{Li}_{k,\ell}(\zeta).$$

Il suffit donc de démontrer la majoration  $\text{Li}_{k,N}(\zeta) = O((N+1)^{-k})$ . On le fait en appliquant la méthode du point col à l'expression intégrale de  $\text{Li}_{k,N}$  (Prop. 3.24). Commençons par le cas  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ . En notant  $k' = k - 1$  et en faisant le changement de variables  $t = k't'$  dans la seconde intégrale de la formule (3.12), on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1} e^{-(N+1)t}}{1 - \zeta e^{-t}} dt = k'^{k'+1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{k'(\ln(t') - (N+1)t')}}{1 - \zeta e^{-k't'}} dt'.$$

La phase  $\phi(t') = (N+1)t' - \ln(t')$  a un unique maximum en  $t'_c = (N+1)^{-1}$ , avec  $\phi(t'_c) = \ln(N+1)$  et  $\phi''(t'_c) = (N+1)^2$ . Alors, d'après la méthode du point col, on a localement uniformément en  $\zeta \notin [1, +\infty[$ , dans la limite  $k' \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1} e^{-(N+1)t}}{1 - \zeta e^{-t}} dt &= k'^{k'+1} e^{-k'(1+\ln(N+1))} \sqrt{\frac{2\pi}{k'(N+1)^2}} (1 + O(k'^{-1})). \\ &= \sqrt{2\pi} (N+1)^{-k'-1} k'^{k'+1/2} e^{-k'} (1 + O(k'^{-1})) \end{aligned}$$

D'après la représentation intégrale de  $\text{Li}_{k,N}$  (Eq. (3.12)) et la formule de Stirling, on a donc dans le même régime

$$\text{Li}_{k,N}(\zeta) \sim \frac{\zeta^{N+1}}{(N+1)^{k'+1}},$$

ce qui est bien l'asymptotique recherchée.

Le fait que cet asymptotique reste vraie sur tout  $F$  provient des relations de monodromie (3.13). En effet, pour tout  $\zeta \in F$ , et  $M > 0$ , on a

$$\frac{(\log^{[c]}(\zeta))^{k-1}}{\Gamma(k)} = O(M^{-k}),$$

et comme  $\text{Li}_{k,N}^{[c]}(\zeta)$  ne diffère de la formule (3.12) que d'un nombre fini de termes de la forme précédente, l'asymptotique annoncée est démontrée.  $\square$

On peut enfin faire la démonstration du Théorème 3.20

*Démonstration du Théorème 3.20. Étape 1 :* on commence par montrer que pour  $|z| < 1$ , et  $\gamma(\zeta) = \sum_{k \geq 0} a_k \zeta^{-k}$  (qui converge pour  $|\zeta| > r$  si  $\gamma \in \mathcal{S}_{r,\infty}(E)$ ) et  $n_0 \geq r$  entier, on a

$$\sum_{n > n_0} \gamma(n) \zeta^n = \sum_{k \geq 0} a_k \text{Li}_{k,n_0}(\zeta). \quad (3.16)$$

Par définition de  $\mathcal{S}_{r,\infty}(E)$ ,  $\gamma$  est borné sur  $D_{>r} = \{|\zeta| > r\}$ , et on rappelle que  $|\gamma|$  est la norme  $\mathcal{S}_{r,\infty}$  de  $\gamma$ , c.-à-d.  $|\gamma|_{L^\infty(|\zeta| > r)}$ . Donc, d'après la formule de Cauchy appliquée à  $\gamma(\eta^{-1}) = \sum_{k \geq 0} a_k \eta^k$ , on a pour tout  $r' > r$ ,

$$|a_k| = \left| \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D(0,r'-1)} \frac{\gamma(\eta^{-1})}{\eta^{k+1}} d\eta \right| \leq |\gamma| r'^k.$$

Donc, pour tout  $k$ ,  $|a_k| \leq |\gamma| r^k$ . On considère la série double  $\sum_{k \geq 0, n > n_0} a_k \zeta^n n^{-k}$ . On a

$$\sum_{k \geq 0, n > n_0} \left| a_k \frac{\zeta^n}{n^k} \right| \leq |\gamma| \sum_{k \geq 0, n > n_0} \frac{|\zeta|^n r^k}{n^k}.$$

On a choisi  $n_0 \geq r$ , donc, pour tous les  $n$  intervenant dans la série ci-dessus, on a  $r/n < 1$ . Alors,

$$\sum_{k \geq 0, n > n_0} \left| a_k \frac{\zeta^n}{n^k} \right| \leq |\gamma| \sum_{n > n_0} |\zeta|^n \frac{1}{1 - r/n}.$$

Or  $(1 - r/n)^{-1}$  décroît en fonction  $n$ . Donc, en se souvenant que  $|\zeta| < 1$ , on a

$$\sum_{k \geq 0, n > n_0} \left| a_k \frac{\zeta^n}{n^k} \right| \leq \frac{|\gamma|}{1 - r/n_0} \sum_{n > r} |\zeta|^n < +\infty.$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini, et on trouve que pour  $|\zeta| < 1$ ,

$$\sum_{n>n_0} \gamma(n)\zeta^n = \sum_{n>n_0, k \geq 0} a_k \frac{\zeta^n}{n^k} = \sum_{k \geq 0} a_k \sum_{n>n_0} \frac{\zeta^n}{n^k} = \sum_{k \geq 0} a_k \operatorname{Li}_{k, n_0}(\zeta).$$

*Étape 2 :* la série  $\sum a_k \operatorname{Li}_{k, n_0}(\zeta)$  définit une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , sauf 0 et 1 qui sont des points de branchements.

Ceci découle de l'asymptotique donnée dans la Proposition 3.26. Cette asymptotique nous dit que pour tout  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , on a localement uniformément en  $\zeta$ ,  $\operatorname{Li}_{k, n_0}(\zeta) = O((n_0 + 1)^{-k})$  dans la limite  $k \rightarrow +\infty$ . De plus,  $a_k = O(r^k)$ . Donc localement uniformément en  $\zeta$ , on a  $a_k \operatorname{Li}_{k, n_0}(\zeta) = O(r^k (n_0 + 1)^{-k})$ . Alors, en se souvenant que  $n_0 \geq r$ , on voit que la série  $\sum_{k \geq 0} a_k \operatorname{Li}_{k, n_0}(\zeta)$  converge localement uniformément en  $\zeta$ . Ceci démontre bien qu'elle définit une fonction holomorphe là où  $\operatorname{Li}_{k, n_0}$  l'est.

*Étape 3 :* continuité en fonction  $\gamma$ . On déduit de l'étape précédente que l'application  $\gamma \mapsto \sum_{k \geq 0} a_k \operatorname{Li}_{k, n_0}(\zeta)$  est une fonction continue de  $\gamma \in \mathcal{S}_{r, \infty}(E)$ . Or, on a

$$K_\gamma(\zeta) = \sum_{n < n_0} \gamma_n z^n + \sum_{n \geq n_0} \gamma_n z^n = \sum_{n < n_0} \gamma_n \zeta^n + \sum_{k \geq 0} a_k \operatorname{Li}_{k, n_0}(\zeta).$$

Le second-membre dépend bien continument de  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r, \infty}(E)$ . □

### 3.1.4 Estimation en norme uniforme d'opérateurs sur les polynômes

On démontre enfin les théorèmes d'estimation des opérateurs  $H_\gamma : \sum a_n z^n \mapsto \sum \gamma_n a_n z^n$ . On notera par simplicité  $\overline{\mathcal{S}}_r$  au lieu de  $\overline{\mathcal{S}}_r(\mathcal{L}(E))$ , et de même  $\overline{\mathcal{S}}_{r, 0} = \overline{\mathcal{S}}_{r, 0}(\mathcal{L}(E))$  et  $\overline{\mathcal{S}}_{r, \infty} = \overline{\mathcal{S}}_{r, \infty}(\mathcal{L}(E))$ .

**Théorème 3.27.** *Soit  $V$  un ouvert borné et étoilé en zéro de  $\mathbb{C}$ . Soit  $r : ]0, \pi/2[$  une fonction croissante et  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_r = \overline{\mathcal{S}}_r(\mathcal{L}(E))$ . L'opérateur  $H_\gamma$  s'étend de manière unique en un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{O}(V; E)$ .*

*De plus, l'application  $\gamma \mapsto H_\gamma$  vérifie l'inégalité de « continuité » suivante : pour tout compact  $X$  de  $V$  et pour tout voisinage  $W \subset\subset V$  de  $X$  qui est étoilé en zéro, il existe  $C > 0$  et un nombre fini de semi-normes  $(p_k)$  de  $\overline{\mathcal{S}}_r$  tels que pour tout  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_r$  et  $f \in \mathcal{O}(V; E)$ ,*

$$|H_\gamma(f)|_{L^\infty(X)} \leq C \sup_k p_k(\gamma) |f|_{L^\infty(W)}. \tag{3.17}$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer l'estimation (3.17) pour les polynômes. En effet, d'après le théorème de Runge, les polynômes sont denses dans  $\mathcal{O}(W; \mathbb{C}^d)$  donc cette inégalité montre que  $H_\gamma$  s'étend de manière unique en un opérateur  $\mathcal{O}(V; \mathbb{C}^d)$ . Quitte à remplacer  $W$  par un plus petit voisinage, on peut le supposer lisse.

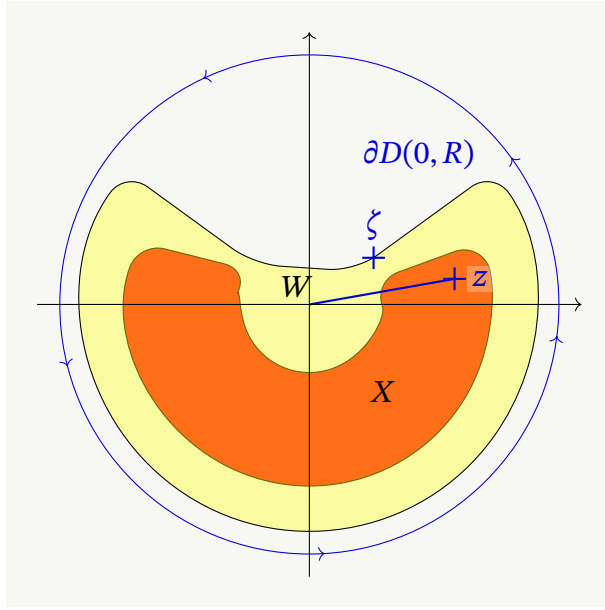


FIGURE 3.6 – En rouge, un exemple de domaine  $X$  pour l'inégalité (3.17), et en jaune, un exemple de domaine  $W$ . Comme  $W$  est un voisinage étoilé en 0 de  $\bar{X}$ , si  $z \in X$  alors aucun  $\zeta \in \partial W$  n'est sur le segment  $[0, z]$ , ce qui implique qu'on n'a jamais  $z/\zeta \in [1, +\infty[$ .

On veut changer de chemin d'intégration dans l'expression de  $K_\gamma$  en tant qu'opérateur à noyau (Lemme 3.2). On veut choisir comme chemin d'intégration  $\partial W$ . Notons que comme  $W$  est étoilé en zéro, si  $z \in X$ ,  $\zeta \in \partial W$ , on n'a jamais  $z/\zeta \in [1, +\infty[$  (voir Fig. 3.6). Comme d'après le théorème 3.19,  $K_\gamma$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ , le changement de chemin d'intégration est valide (voir Fig. 3.6) :

$$H_\gamma p(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial W} \frac{1}{\zeta} K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) p(\zeta) d\zeta.$$

Donc, pour  $z \in X$ ,

$$|H_\gamma p(z)| \leq \frac{\text{longueur}(\partial W)}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial W} \frac{1}{|\zeta|} \sup_{z \in X, \zeta \in \partial W} \left| K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) \right| \sup_{\zeta \in \partial W} |p(\zeta)|.$$

Or, d'après l'estimation du théorème 3.19, il existe des semi-normes  $p_k$  de  $\bar{S}_r$  et  $C > 0$  tels que

$$\sup_{z \in X, \zeta \in \partial W} \left| K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) \right| \leq C \sup_k p_k(\gamma).$$

Alors, avec  $C' = C \frac{\text{longueur}(\partial W)}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial W} |\zeta|^{-1}$ , on a pour  $z \in X$

$$|H_\gamma p(z)| \leq C' \sup_k p_k(\gamma) \sup_{z \in \partial W} |p(\zeta)|,$$

qui est bien l'inégalité annoncée.  $\square$

*Remarque 3.28.* Si  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite telle que la série de Taylor  $\sum \gamma_n \zeta^n$  converge pour  $|\zeta| < 1$ , on a en fait l'équivalence entre les affirmations suivantes :

1. il existe  $R > 0$  tel qu'avec  $r(\theta) = R/\cos(\theta)$ ,  $(\gamma_n)$  appartient à  $\overline{\mathcal{S}}_r$  ;
2. la série de Taylor  $K_\gamma(\zeta) = \sum \gamma_n \zeta^n$  s'étend en une fonction holomorphe sur  $U = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$  ;
3. pour tout compact  $X$  de  $\mathbb{C}$ , et tout voisinage  $W$  de  $X$  qui est étoilé en 0, il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynôme  $p$ ,

$$|H_\gamma(p)|_{L^\infty(X)} \leq C|p|_{L^\infty(W)}.$$

*Démonstration.* On a déjà montré les implications 1.  $\implies$  2.  $\implies$  3. Pour simplifier légèrement les notations, on ne fait les autres démonstrations que dans le cas où la suite  $\gamma_n$  est à valeurs scalaires (au lieu de  $\mathcal{L}(E)$ ).

3.  $\implies$  2. On aimerait appliquer  $H_\gamma$  à  $\sum_{n \geq 0} z^n$ . En effet, on a formellement  $H_\gamma(\sum_{n \geq 0} z^n) = \sum_{n \geq 0} \gamma_n z^n = K_\gamma(z)$ . Cependant, la série  $\sum_{n \geq 0} z^n$  ne converge pas en dehors de  $|z| < 1$ , et nous n'aurions ainsi pas beaucoup d'informations. À la place, on choisit une suite de polynômes  $(p_k)$  qui converge uniformément sur tout compact de  $U = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$  vers  $z \mapsto (z - 1)^{-1}$  (il en existe d'après le théorème de Runge). Alors, comme  $H_\gamma$  est continue sur  $\mathcal{O}(U)$  par hypothèse,  $H_\gamma p_k(z)$  converge vers  $K_\gamma(z)$  pour  $|z| < 1$ .

Soit  $V$  un ouvert connexe, contenant  $D(0, 1/2)$  et d'adhérence compacte dans  $U$ . Il existe un voisinage borné  $W$  de  $\overline{V}$  qui est étoilé en 0. Donc, d'après l'hypothèse 3. et le fait que  $p_k$  converge sur  $W$ , la suite  $H_\gamma p_k$  est bornée en norme  $L^\infty(V)$ . D'après le théorème de Montel, il existe donc une sous-suite de  $H_\gamma p_k$  qui converge sur  $V$ . Mais comme  $H_\gamma p_k(z)$  converge vers  $K_\gamma(z)$  pour  $|z| < 1$ , on a  $f(z) = K_\gamma(z)$  pour  $z \in V \cap D(0, 1)$ . Donc  $f$  est une continuation analytique de  $K_\gamma$  sur  $V$ .

Comme ceci peut-être fait pour tout ouvert  $V$  connexe, contenant  $D(0, 1/2)$  et d'adhérence compacte dans  $U$ , on a bien démontré que  $K_\gamma$  s'étend analytiquement en une fonction holomorphe sur  $U$ .

L'implication 2.  $\implies$  1. est démontrée par Arakelyan [11]. □

Si  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r,0} = \overline{\mathcal{S}}_{r,0}(\mathcal{L}(E))$ , les informations supplémentaires sur la croissance de  $K_\gamma$  nous autorisent à faire partir  $z/\zeta$  vers l'infini. Voici un exemple de théorème qu'on peut démontrer. Les conditions géométriques sur  $V$  et  $W$  de ce Théorème sont très spécifiques, mais nous n'auront pas besoin d'en donner des plus générales.

**Théorème 3.29.** *Soit  $r > 0$  et  $n_0 = \lfloor r \rfloor + 1$ . Soit  $R > 0$  et  $I = [a, b]$  un segment, soit  $V$  le « pacman »  $V = \{0 < |z| < R, \arg(z) \notin I\}$ , et soit  $W$  un voisinage de  $V$  de la forme  $W = \{0 < |z| < R', \arg(z) \notin I'\}$ . Alors il existe  $C > 0$  et un nombre fini de semi-normes  $(p_k)$  de  $\overline{\mathcal{S}}_{r,0} = \overline{\mathcal{S}}_{r,0}(\mathcal{L}(E))$  telles que pour tout  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r,0}$  et polynôme  $f \in E[X]$ ,*

$$|H_\gamma(f)|_{L^\infty(V)} \leq C \sup_k p_k(\gamma) \sup_{0 \leq k \leq n_0+1} |f^{(k)}|_{L^\infty(W)}. \tag{3.18}$$

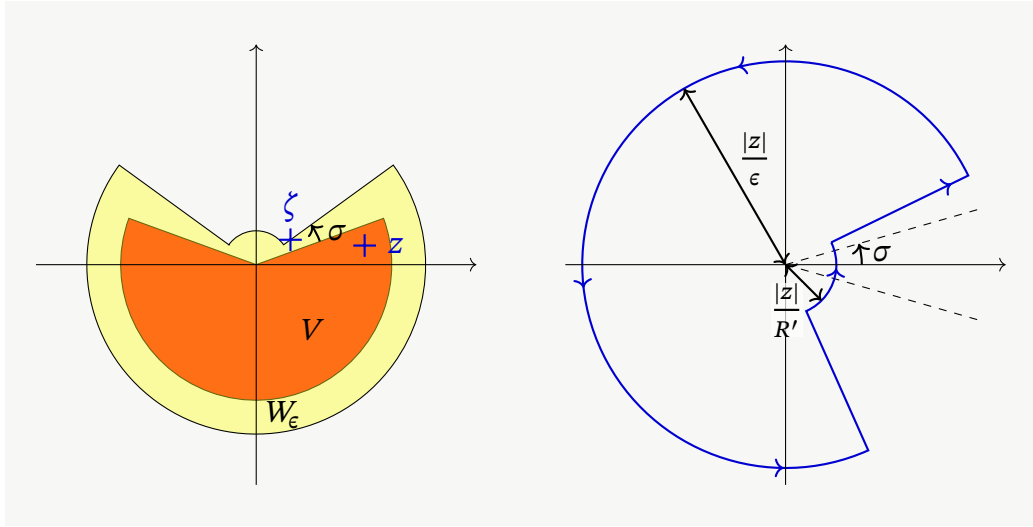


FIGURE 3.7 – À gauche : en rouge, un exemple de « pacman » pour le Théorème 3.29, et un exemple de domaine  $W_\epsilon$  qui approxime  $W$ . À droite : image du chemin  $\partial W_\epsilon$  par la transformation  $\zeta \mapsto z/\zeta$ . On voit que le chemin reste dans le domaine  $\{\sigma \leq \arg(\zeta) \leq 2\pi - \sigma\} \cup D(0, 1)$ .

*Démonstration.* On veut choisir dans l'expression de  $H_\gamma$  comme opérateur de convolution (Lemme 3.2) le chemin d'intégration  $c = \partial W$ . Mais  $0 \in \partial W$ , donc  $K_\gamma(z/\zeta)$  n'est pas holomorphe. Pour contourner le problème, on approxime  $\partial W$  par la frontière  $c_\epsilon$  de  $W \cup D(0, \epsilon)$  (voir Fig. 3.7).

Mais avant d'appliquer le Théorème 3.27 pour justifier le changement d'intégration, on a besoin de séparer les polynômes  $f = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$  en ses premiers termes  $f_{n_0} = \sum_{k \leq n_0} a_k z^k$  et ses derniers termes  $f_{>n_0} = \sum_{k > n_0} a_k z^{k-n_0-1}$  (on verra que le Théorème 3.27 ne permet pas de gérer les premiers termes).

*Étape 1 :*  $f_{n_0}$  et  $f_{>n_0}$  dépendent continument de  $f$ . En effet, on a  $a_k = \frac{1}{n!} f^{(k)}(0)$ , et donc

$$|f_{n_0}|_{L^\infty(V)} \leq C \sum_{k \leq n_0} |f^{(k)}(0)|.$$

Pour traiter  $f_{>n_0}$ , on introduit l'opérateur  $P$  défini par

$$Pf(z) = \frac{1}{z}(f(z) - f(0)).$$

On a  $P(\sum_{k \geq 0} a_k z^k) = \sum_{k \geq 1} a_k z^{k-1}$  et donc  $f_{>n_0} = P^{n_0+1} f$ . Or, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout  $z$

$$|Pf(z)| = \frac{1}{|z|} \left| \int_0^z f'(\zeta) d\zeta \right| \leq \sup_{[0,z]} |f'|.$$

Comme  $W_\epsilon := W \cup D(0, \epsilon)$  est étoilé en zéro, on a donc

$$|Pf|_{L^\infty(W_\epsilon)} \leq |f'|_{L^\infty(W_\epsilon)}.$$

Donc, en itérant

$$|f_{>n_0}|_{L^\infty(W_\epsilon)} \leq |f^{(n_0+1)}|_{L^\infty(W_\epsilon)}.$$

*Étape 2 : estimation du noyau.* On montre qu'il existe  $C > 0$  et des semi-normes  $(p_k)$  continues sur  $\bar{S}_{r,0}$ , indépendantes de  $\epsilon$  telles que pour  $\gamma \in \bar{S}_{r,0}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $z \in V$  et  $\zeta \in c_\epsilon$ <sup>5</sup>,

$$\left| \frac{1}{\zeta} K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) \right| \leq C \sup_k p_k(\gamma) \langle \zeta \rangle^{n_0}. \quad (3.19)$$

1<sup>er</sup> cas :  $\zeta$  est sur le « grand arc de cercle », c.-à-d.  $|\zeta| = R'$ . Auquel cas, on a pour  $z \in V$ ,  $|z/\zeta| < R/R' < 1$ . D'après le Théorème 3.27, l'application  $\gamma \mapsto K_\gamma$  est continue de  $\bar{S}_{r,0}$  dans  $\mathcal{O}_{n_0}(U; \mathcal{L}(E))$ . Donc,  $\gamma \mapsto |K_\gamma|_{L^\infty(D(0,R/R'))}$  est continu : il existe  $C > 0$  et des semi-normes  $(p_k)$  continues sur  $\bar{S}_{r,0}$  telles que pour  $z \in V$  et  $|\zeta| = R'$ ,

$$\left| K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) \right| \leq |K_\gamma|_{L^\infty(D(0,R/R'))} \leq C \sup_k p_k(\gamma).$$

Notons que rien de cette inégalité ne dépend de  $\epsilon$ .

2<sup>e</sup> cas :  $|\zeta| < R'$ . Si  $\zeta \in c_\epsilon$ , ceci ne peut arriver d'après la définition de  $W$  que si  $\arg(\zeta) \in I'$ . Or, si  $z \in V$ , on a  $\arg(z) \notin I$ . Donc en notant  $\sigma := \text{distance}(I', \mathbb{T} \setminus I) > 0$ , on a  $\sigma \leq \arg(z/\zeta) \leq 2\pi - \sigma$ . Autrement dit,  $z/\zeta \in S_\sigma$ . Notons que  $\sigma$  ne dépend pas de  $\epsilon$ . Alors, d'après le Théorème 3.27, il existe  $C' > 0$  et des semi-normes  $(p'_k)$  continues sur  $\bar{S}_{r,0}$  telles que pour  $\epsilon > 0$ ,  $\gamma \in \bar{S}_{r,0}$ ,  $z \in V$  et  $\zeta \in c_\epsilon$  avec  $|\zeta| < R'$ , on a

$$\left| K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) \right| \leq C' \sup_k p'_k(\gamma) \left\langle \frac{z}{\zeta} \right\rangle^{n_0}.$$

Encore une fois, rien ne dépend de  $\epsilon$  dans cette inégalité.

*Étape 3 : conclusion.* Par définition de  $f_{n_0}$  et  $f_{>n_0}$ , on a  $f = f_{n_0} + z^{n_0+1} f_{>n_0}$ . Donc, avec  $f = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ ,

$$H_\gamma f(z) = H_\gamma f_{n_0}(z) + H_\gamma(z^{n_0+1} f_{>n_0})(z).$$

Donc, d'après l'expression de  $H_\gamma$  comme opérateur de convolution (Lemme 3.2) où on a changé de chemin d'intégration,

$$H_\gamma f(z) = \sum_{k \leq n_0} \gamma_k a_k z^k + \frac{1}{2i\pi} \oint_{c_\epsilon} \zeta^{n_0} K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) f_{>n_0}(\zeta) d\zeta. \quad (3.20)$$

D'après la première étape, le premier terme vérifie

$$\left| \sum_{k \leq n_0} \gamma_k a_k z^k \right|_{L^\infty(V)} \leq C \sum_{k \neq n_0} |\gamma_k| \sup_{k \leq n_0} |f^{(k)}(0)|.$$

<sup>5</sup>On rappelle que  $\langle \zeta \rangle = \sqrt{1 + |\zeta|^2}$ .



Comme les  $\gamma \mapsto |\gamma_k|$  sont des semi-normes continues sur  $\overline{\mathcal{S}}_{r,0}$  (Définition 3.14), on a bien l'inégalité voulue (3.18) sur ce terme :

$$|H_\gamma(f_{n_0})|_{L^\infty(V)} = \left| \sum_{k \leq n_0} \gamma_k a_k z^k \right|_{L^\infty(V)} \leq C \sup_k p_k(\gamma) \sup_{k \leq n_0} |f^{(k)}(0)|. \quad (3.21)$$

Pour le second terme, on a d'après l'inégalité triangulaire

$$|H_\gamma(z^{n_0+1} f_{>n_0})|_{L^\infty(V)} \leq \frac{\text{longueur}(c_\epsilon)}{2\pi} \sup_{z \in V, \zeta \in c_\epsilon} \left| \zeta^{n_0} K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) \right| |f_{>n_0}|_{L^\infty(c_\epsilon)}. \quad (3.22)$$

Or, on a d'après la première étape (et en rappelant que  $c_\epsilon$  est la frontière de  $W_\epsilon = W \cup D(0, \epsilon)$ ),

$$|f_{>n_0}|_{L^\infty(c_\epsilon)} \leq |f_{>n_0}|_{L^\infty(W_\epsilon)} \leq |f^{(n_0+1)}|_{L^\infty(W_\epsilon)}.$$

Donc, d'après l'étape 2 (Eq. (3.19)), on a

$$|H_\gamma(z^{n_0+1} f_{>n_0})|_{L^\infty(V)} \leq C \sup_k p_k(\gamma) |f^{(n_0+1)}|_{L^\infty(W_\epsilon)},$$

où  $C$  ne dépend pas de  $\epsilon$ . En passant à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , on a  $W_\epsilon \rightarrow W$  et donc

$$|H_\gamma(z^{n_0+1} f_{>n_0})|_{L^\infty(V)} \leq C \sup_k p_k(\gamma) |f^{(n_0+1)}|_{L^\infty(W)}. \quad (3.23)$$

En rassemblant les inégalités (3.21) et (3.23) sur les deux termes de membre droit de l'expression (3.20) de  $H_\gamma(f)$ , on obtient bien l'inégalité (3.18).  $\square$

**Théorème 3.30.** *Soit  $V$  un ouvert borné et simplement connexe de  $\mathbb{C}$  avec  $0 \in V$ . Soit  $r > 0$  et  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r,\infty} = \overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}(\mathcal{L}(E))$ . L'opérateur  $H_\gamma$  s'étend de manière unique en un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{O}(V)$ .*

*De plus, l'application  $\gamma \mapsto H_\gamma$  vérifie l'inégalité de « continuité » suivante : pour tout compact  $X$  de  $V$  et pour tout voisinage  $W \subset\subset V$  de  $X$  qui contient  $0$  et qui est simplement connexe, il existe  $C > 0$  et un nombre fini de semi-normes  $(p_k)$  de  $\overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}$  tels que pour tout  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}$  et  $f \in \mathcal{O}(V)$ ,*

$$|H_\gamma(f)|_{L^\infty(X)} \leq C \sup_k p_k(\gamma) |f|_{L^\infty(W)}. \quad (3.24)$$

*Démonstration.* Comme au début de la démonstration du Théorème 3.27, il suffit de montrer l'inégalité 3.17 sur les polynômes. Quitte à remplacer  $W$  par un voisinage de  $\overline{V}$  plus petit, on peut supposer que  $W$  est lisse. On veut à nouveau changer de chemin d'intégration dans l'expression de  $H_\gamma$  comme opérateur de convolution (Lemme 3.2).

Comme  $0 \in V$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $D(0, \epsilon) \subset V$ . Pour majorer  $K_\gamma(z/\zeta)$ , on distingue les cas<sup>6</sup>  $z \in D(0, \epsilon/2)$  et  $|z| \geq \epsilon/2$ .

<sup>6</sup>On aurait pu s'en passer si on avait été plus précis dans la formulation du Théorème 3.30 : ce théorème à l'air de dire que  $K_\gamma$  n'est pas holomorphe en  $0$ . C'est a priori le cas, sauf sur le premier feuillet de sa surface de Riemann, où  $K_\gamma$  est bien sûr holomorphe !

1<sup>er</sup> cas :  $|z| < \epsilon/2$ . Si  $\zeta \in \partial W$ , on a  $|\zeta| \geq \epsilon$  et donc  $|z/\zeta| < 1/2$ . Or  $\gamma \mapsto K_\gamma$  est continue, donc il existe  $C > 0$  et des semi-normes  $(p_k)$  continues sur  $\overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}$  telles que pour  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}$ ,  $|z| < \epsilon/2$  et  $\zeta \in \partial W$ ,

$$\left| K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) \right| \leq C \sup_k p_k(\gamma). \quad (3.25)$$

2<sup>e</sup> cas :  $|z| \geq \epsilon/2$ . On pose  $c_z$  le chemin  $\zeta \in \partial W \mapsto z/\zeta$ . Comme  $z \neq 0$ , le chemin  $c_z$  ne contient pas 0. De plus,  $\partial W$  reste à distance strictement positive de  $V$ , donc  $c_z$  ne contient pas 1 non plus. Donc il se relève en un chemin  $\tilde{c}_z$  de la surface de Riemann  $F$  de  $K_\gamma$ . Disons qu'on fixe  $\zeta_0 \in \partial W$  de module maximum, et qu'on choisit le relèvement  $\tilde{c}_z$  de sorte que  $\tilde{c}_z(\zeta_0)$  soit sur le premier feuillet de  $F$ . Alors, l'union de ces relèvements  $X := \bigcup_{z \in V, |z| \geq \epsilon/2} \tilde{c}_z$  est un compact de  $F$ .

Donc, d'après le Théorème 3.30, il existe  $C' > 0$  et des semi-normes  $(p'_k)$  continues sur  $\overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}$  telles que pour  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}$ ,  $z \in V$  avec  $|z| \geq \frac{\epsilon}{2}$  et  $\zeta \in \partial W$ ,

$$\left| K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) \right| \leq |K_\gamma|_{L^\infty(X)} \leq C' \sup_k p'_k(\gamma). \quad (3.26)$$

Donc, en rassemblant les majorations (3.25) et (3.26), on voit qu'il existe  $C > 0$  et des semi-normes  $(p_k)$  continues sur  $\overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}$  telles que pour  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}$ ,  $z \in V$  et  $\zeta \in \partial W$ ,

$$\left| K_\gamma \left( \frac{z}{\zeta} \right) \right| \leq C \sup_k p_k(\gamma). \quad (3.27)$$

Alors, d'après l'expression de  $H_\gamma$  comme opérateur de convolution (Lemme 3.2) où on a changé le chemin d'intégration en  $\partial W$  (qui est bien homotope à  $\partial D(0, R)$  dans  $\mathbb{C} \setminus V$  parce que  $V$  et  $W$  sont simplement connexes), on a pour  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_{r,\infty}$  et  $f \in C^d[X]$ ,

$$|H_\gamma f|_{L^\infty(V)} \leq C \frac{\text{longueur}(\partial W)}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial W} |\zeta|^{-1} \sup_k p_k(\gamma) \sup_{\partial W} |f|,$$

ce qui démontre le théorème.  $\square$

### 3.1.5 Une application : non-contrôlabilité des équations de la « quasi-demi-chaueur »

Finissons cette section par une application des théorèmes précédents, peut-être très académique, mais qui montre dans un cadre simplifié les techniques que nous emploieront pour traiter l'équation de Grushin.

**Proposition 3.31.** *Soit  $\omega$  un ouvert strict de  $\mathbb{T}$ , soit  $T > 0$  et soit  $\rho$  une fonction holomorphe bornée sur  $\{\Re(z) > 0\}$ . On note  $A$  l'opérateur  $\sqrt{-\Delta} + \rho(\sqrt{-\Delta})$ . L'équation*

$$\partial_t f(t, x) + Af(t, x) = \mathbb{1}_\omega u(t, x) \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{T}, \quad (3.28)$$

*n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ .*

*Remarque 3.32.* L'opérateur  $A = \sqrt{-\Delta} + \rho(\sqrt{-\Delta})$  est défini par

$$A\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (|n| + \rho(|n|)) a_n e^{inx}.$$

Son adjoint est  $A^* = \sqrt{-\Delta} + \bar{\rho}(\sqrt{-\Delta})$ .

La démonstration est une adaptation de la méthode employée pour démontrer la non-contrôlabilité de l'équation de la demi-chaueur, où on s'aide des théorèmes de la section précédente pour gérer la perturbation  $\rho(\sqrt{-\Delta})$ . On commence par démontrer le lemme suivant.

**Lemme 3.33.** *Soit  $W$  un voisinage borné et étoilé en 0 de  $\{|\zeta| \leq 1, \arg(\zeta) \in \bar{\omega}\}$  (voir Fig. 3.8). Si l'équation (3.28) est contrôlable à zéro sur  $\omega$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynôme  $f$ ,*

$$\|f\|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \leq C \|f\|_{L^\infty(W)}. \quad (3.29)$$

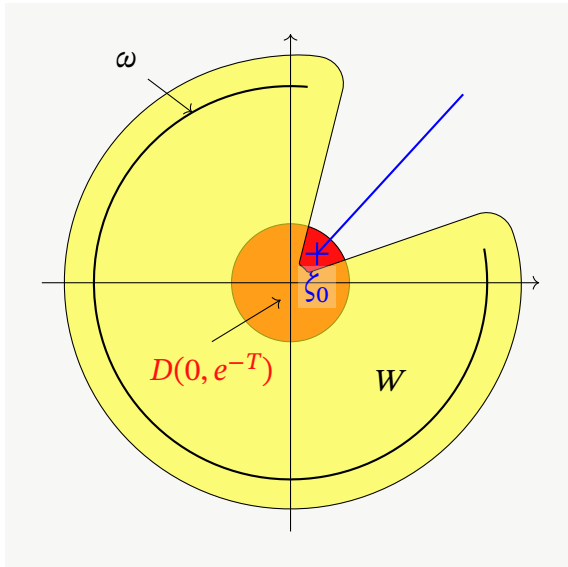


FIGURE 3.8 – À gauche, le domaine  $\mathcal{D}$  en jaune et le disque  $D(0, e^{-T})$  en rouge. À droite, un voisinage  $W$  étoilé en 0 de  $\bar{\mathcal{D}}$  en jaune. Si l'équation de la « quasi-demi-chaueur » est contrôlable à zéro, alors on peut estimer la norme  $L^2$  de tout polynôme sur le disque rouge par sa norme  $L^\infty$  sur le domaine jaune. Mais c'est impossible, comme on peut le voir en considérant une suite de polynôme qui converge vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  en dehors de la demi-droite bleue.

*Démonstration. Étape 1 : inégalité d'observabilité.* L'inégalité d'observabilité associée au problème de contrôlabilité de la Prop. 3.31 est la suivante : il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $g_0 \in L^2(\mathbb{T})$ , la solution  $g$  de l'équation adjointe  $(\partial_t + A^*)g(t, x) = 0$  avec comme condition initiale  $g(0, \cdot) = g_0$  vérifie

$$\|g(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C \|g\|_{L^2([0, T] \times \omega)}.$$

Notons que les solutions de l'équation adjointe  $(\partial_t + A^*)g(t, x) = 0$  sont de la forme

$$g(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-t(|n| + \bar{\rho}(n)) + inx}.$$

On teste l'inégalité d'observabilité sur les solutions qui sont des sommes finies de fréquences strictement positives. Sur ces solutions, l'inégalité d'observabilité se lit : il existe  $C > 0$  telle que pour toute suite complexe finie  $(a_n)_n$ ,

$$\sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2T(n+\Re(\rho(n)))} \leq C \int_{[0,T] \times \omega} \left| \sum_{n>0} a_n e^{(-t+ix)n} e^{-t\bar{\rho}|n|} \right|^2 dt dx. \quad (3.30)$$

*Étape 2 : minoration du membre gauche de l'inégalité d'observabilité.* On utilise le fait que  $\rho$  soit borné. En notant  $M := \sup_{\Re(z)>0} |\rho(z)|$ , on a pour tout  $n > 0$ ,  $e^{-2T\Re(\rho(n))} \geq e^{-2TM} > 0$ . Donc

$$\sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2Tn} \leq e^{2TM} \sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2T(n+\Re(\rho(n)))}.$$

De plus, en calculant en coordonnées polaires et en développant le module, on a<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \int_{D(0,e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{e^{-T}} \sum_{n,m>0} a_n \bar{a}_m e^{i(n-m)\theta} r^{n+m-1} dr d\theta \\ &= \pi \sum_{n>0} \frac{|a_n|^2}{n} e^{-2nT}. \end{aligned}$$

Donc le membre gauche de l'inégalité d'observabilité (3.30) vérifie la minoration

$$\left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^2(D(0,e^{-T}))}^2 \leq \pi e^{2TM} \sum_{n>0} |a_n|^2 e^{-2T(n+\Re(\rho(n)))}. \quad (3.31)$$

*Étape 3 : majoration du membre droit de l'inégalité d'observabilité.* Dans le membre droit de l'inégalité d'observabilité (3.30), on fait le changement de variables  $\zeta = e^{-t+ix}$ , pour lequel on a  $dt dx = |\zeta|^{-2} d\lambda(\zeta)$  :

$$\int_{[0,T] \times \omega} \left| \sum_{n>0} a_n e^{(-t+ix)n} e^{-t\bar{\rho}|n|} \right|^2 dt dx = \int_{\mathcal{D}} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} |\zeta|^{\bar{\rho}(n)} \right|^2 d\lambda(\zeta),$$

où  $\mathcal{D}$  est l'image de  $[0, T] \times \omega$  par le changement de variables :

$$\mathcal{D} = \{e^{-t+ix}, 0 \leq t \leq T, x \in \omega\}.$$

On veut appliquer les théorèmes de la section précédente. À cette fin, on commence par définir des symboles.

**Lemme 3.34.** *Pour  $\eta \in \mathcal{D}$ , on définit  $\gamma_\eta(n) = |\eta|^{\bar{\rho}(n+1)}$  (le +1 vient du fait qu'on veuille multiplier  $\zeta^{n-1}$  par  $|\zeta|^{\bar{\rho}(n)}$ ). Alors la famille  $(\gamma_\eta)_{\eta \in \mathcal{D}}$  est une famille bornée<sup>8</sup> de  $\bar{\mathcal{S}}_{0,0}$ .*

<sup>7</sup>On désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  par  $\lambda$ .

<sup>8</sup>On rappelle que si  $E$  est un espace vectoriel dont la topologie est définie par une famille  $(p_k)$  de semi-normes, un ensemble  $X \subset E$  est borné si et seulement si pour tout  $k$ , l'ensemble  $\{p_k(x), x \in X\}$  est borné dans  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* On définit  $\tilde{\gamma}_\eta(z) = |\eta|^{\bar{\rho}(\bar{z}+1)}$ . Comme  $\rho$  est holomorphe,  $z \mapsto \bar{\rho}(\bar{z}+1)$  l'est également. Donc chaque  $\tilde{\gamma}_\eta$  est holomorphe. En se souvenant que pour  $\eta \in \mathcal{D}$ , on a  $e^{-T} \leq |\eta| \leq 1$  et que  $\rho$  est bornée, on a avec  $M = \sup_{\Re(z)>0} |\rho(z)|$ , pour tout  $\eta \in \mathcal{D}$ ,

$$\sup_{\Re(z)>0} |\tilde{\gamma}_\eta(z)| \leq e^{TM}.$$

Donc chaque  $\tilde{\gamma}_\eta$  est borné. En particulier, chaque  $\tilde{\gamma}_\eta$  est dans  $\mathcal{S}_{0,0}$ . De plus, la majoration précédente est uniforme en  $\eta \in \mathcal{D}$ , donc la famille  $(\tilde{\gamma}_\eta)_{\eta \in \mathcal{D}}$  est bornée dans  $\mathcal{S}_{0,0}$ . On en déduit que la famille de suites  $(\gamma_\eta)_{\eta \in \mathcal{D}}$  est bornée dans  $\bar{\mathcal{S}}_{0,0}$  (voir Def. 3.14).  $\diamond$

Or, si  $\eta \in \mathcal{D}$ , on a

$$\sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} |\eta|^{\bar{\rho}(n)} = H_{\gamma_\eta} \left( \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right).$$

Donc, d'après le Théorème 3.29 (et le fait que  $\bar{\mathcal{S}}_{0,0}$  s'injecte continument dans  $\bar{\mathcal{S}}_0$ ; voir Remarque 3.11), il existe  $C > 0$  et un nombre fini de semi-normes  $(p_k)$  de  $\bar{\mathcal{S}}_0$  tels que pour  $\eta, \zeta \in \mathcal{D}$ ,

$$\left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} |\eta|^{\bar{\rho}(n)} \right| \leq C \sup_k p_k(\gamma_\eta) \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(W)},$$

(rappelons que  $W$  est un voisinage borné et étoilé en 0 de  $\{|\zeta| \leq 1, \arg(\zeta) \in \bar{\omega}\}$ , et donc  $\bar{\mathcal{D}} \subset W$ ). Comme la famille  $(\gamma_\eta)_{\eta \in \mathcal{D}}$  est bornée dans  $\bar{\mathcal{S}}_{0,0}$  (et donc également dans  $\bar{\mathcal{S}}_0$ ), on a il existe  $C'$  indépendant de  $\eta \in \mathcal{D}$  tel que pour tout  $\zeta \in \mathcal{D}$ ,

$$\left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} |\eta|^{\bar{\rho}(n)} \right| \leq C' \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(W)}.$$

En prenant  $\eta = \zeta$  dans cette inégalité, on a

$$\left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} |\zeta|^{\bar{\rho}(n)} \right|_{L^\infty(\mathcal{D})} \leq C \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(W)}. \quad (3.32)$$

*Étape 4 : conclusion.* En rassemblant la minoration (3.31) du membre gauche et la majoration (3.32) du membre droit, on voit que l'inégalité d'observabilité (3.30) implique qu'il existe  $C > 0$  telle que pour toute suite complexe finie  $(a_n)_n$ ,

$$\left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2 \leq C \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(W)}^2. \quad \square$$

Pour démontrer la non-contrôlabilité de l'équation (3.28), il suffit donc de nier l'inégalité sur les polynômes (3.29).

*Démonstration de la Proposition 3.31.* Comme  $\omega$  est un ouvert strict de  $\mathbb{T}$ , il existe un voisinage  $W$  borné et étoilé de  $\{0 < |\zeta| < 1, \arg(\zeta) \in \bar{\omega}\}$  qui ne contienne pas  $D(0, e^{-T})$  (voir Fig. 3.8). Alors, on choisit  $\zeta_0 \in D(0, e^{-T})$  qui ne soit pas dans  $\mathcal{D}$ . D'après le théorème de Runge (Th. 1.12), il existe une suite de polynômes  $(p_k)$  qui converge vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ .

Alors,  $(p_k)$  est uniformément borné sur  $\mathcal{D}$ , donc  $\sup_k |p_k|_{L^2(\mathcal{D})} < +\infty$ . Mais comme  $\zeta_0 \in D(0, e^{-T})$ , la fonction  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  a une norme  $L^2(D(0, e^{-T}))$  infinie. Donc, d'après le lemme de Fatou,  $|p_k|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \rightarrow +\infty$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Donc la suite  $(p_k)$  est un contre-exemple à l'inégalité (3.29) sur les polynômes. Et donc, d'après le Lemme 3.33, l'équation (3.28) n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ .  $\square$

*Remarque 3.35.* Les hypothèses de la Propriété 3.31 ne sont pas optimales : on peut se limiter avec la même démonstration à  $\rho_n = \tilde{\rho}(n)$  avec  $\tilde{\rho}$  une fonction holomorphe sur  $\{\Re(z) > 0\}$  et à croissance sous-linéaire (c.-à-d.  $\tilde{\rho}(z) = o(z)$ ) sur chaque secteur  $\{|\arg(z)| < \theta\}$  avec  $\theta < \pi/2$ .

En fait, on peut démontrer grâce au Théorème 3.29 et sous les hypothèses de la Propriété 3.31 plus que la non-contrôlabilité : on peut montrer que toute combinaison linéaire finie de fonctions propre contrôlable à zéro est constante (nous ferons quelque chose de similaire pour l'équation de Grushin, voir Th. 4.14).

## 3.2 Analyse spectrale de l'oscillateur harmonique

Nous changeons maintenant totalement de sujet, et on passe de l'analyse complexe à l'analyse spectrale. Nous démontrons quelques asymptotiques spectrales qui nous seront utiles lorsqu'on traitera les équations paraboliques dégénérées.

### 3.2.1 Oscillateur harmonique sur la droite réelle

L'oscillateur harmonique est l'opérateur  $P_1^{\mathbb{R}}$  sur  $L^2(\mathbb{R})$  de domaine  $D(P_1^{\mathbb{R}}) = \{f \in H^2(\mathbb{R}), x^2 f \in L^2(\mathbb{R})\}$  et défini par  $P_1^{\mathbb{R}} f = -f'' + x^2 f$ . Il apparaît en mécanique quantique comme un exemple d'Hamiltonien pour lequel on peut faire des calculs explicites, et comme approximation d'Hamiltoniens autour d'un point d'équilibre. Pour nous, il apparaît lorsqu'on écrit l'équation satisfaite par les composantes de Fourier des solutions de l'équation de Grushin  $(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)g(t, x, y) = 0$  (on verra ceci en détail au chapitre suivant).

On s'intéresse plus particulièrement à l'opérateur redimensionné  $P_h^{\mathbb{R}} = -h^2 \Delta + x^2$ , de domaine  $D(P_h^{\mathbb{R}}) = \{f \in H^2(\mathbb{R}), x^2 f \in L^2(\mathbb{R})\}$ , et à la limite de ses éléments spectraux lorsque  $h \rightarrow 0$ . Si  $h > 0$ , l'opérateur  $P_h$  est symétrique maximal dissipatif (et donc auto-adjoint), le spectre de  $P_h$  est entièrement constitué de valeur propres,

qui sont simples, et la  $k$ -ième valeur propre est  $h(2k + 1)$  (avec  $k \geq 0$ ). De plus, l'espace propre associé à cette valeur propre est engendré par une fonction de la forme  $H_k(x/\sqrt{h})e^{-x^2/2h}$ , où  $H_k$  est un polynôme de degré  $k$ . Le polynôme  $H_k$  est appelé  $k$ -ième polynôme de Hermite et la fonction propre  $e_k(x) := H_k(x)e^{-x^2/2}$  est appelée  $k$ -ième fonction de Hermite.

La formule  $P_h^{\mathbb{R}}(e_k(x/\sqrt{h})) = h(2k + 1)e_k(x/\sqrt{h})$  garde un sens dans  $L^2$  lorsque  $h$  est complexe que  $\Re(h) > 0$ . Donc les  $h(2k + 1)$  sont encore des valeurs propre de  $P_h^{\mathbb{R}}$  lorsque  $h$  est complexe avec  $\Re(h) > 0$ <sup>9</sup>.

### 3.2.2 Oscillateur harmonique sur un segment : généralités

On s'intéresse cette fois-ci à l'oscillateur harmonique avec conditions aux bords de Dirichlet sur  $] -1, 1[$ , autrement dit à l'opérateur  $P_h^b$  de domaine  $D(P_h^b) = H^2(-1, 1) \cap H_0^1(-1, 1)$  défini par  $P_h^b f = -h^2 f'' + x^2 f$ .

**Proposition 3.36.** *Si  $h$  est réel positif,  $P_h^b$  est symétrique maximal monotone (et donc auto-adjoint).*

*Démonstration.* Cette proposition est standard, mais donnons au moins les idées de la démonstration. Le fait que  $P_h^b$  soit symétrique et monotone se voit par intégration par parties. Le fait qu'il soit maximal monotone, c.-à-d. que  $\text{Im}(I + P_h^b) = L^2$ , est conséquence du théorème de Lax-Milgram et de la régularité elliptique. Il est donc auto-adjoint [25, Prop. 7.6].  $\square$

La proposition suivante est également standard, au moins dans sa méthode.

**Proposition 3.37.** *Soit  $h \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re(h) > 0$ . Le spectre de l'opérateur  $P_h^b$  est constitué d'une suite de valeurs propres simples qui n'a pas de point d'accumulation.*

*Démonstration.* Encore une fois, nous laissons au lecteur le soin de vérifier certains détails.

On commence par remarquer que  $P_h^b$  est injectif. En effet, si  $f \in D(P_h^b)$ , en multipliant  $P_h^b f$  par  $h^{-1}\bar{f}$  et en faisant une intégration par parties, on a  $\langle h^{-1}f, P_h^b f \rangle_{L^2} = h|f'|_{L^2}^2 + h^{-1}|xf|_{L^2}^2$ , donc  $\Re\langle h^{-1}f, P_h^b f \rangle_{L^2} \geq c(|f'|_{L^2}^2 + |xf|_{L^2}^2)$ . En particulier, si  $P_h^b f = 0$ , alors  $f = 0$ .

De plus, d'après le théorème de Lax-Milgram, de l'inégalité de Poincaré et de la régularité elliptique, l'opérateur  $-\Delta$  de domaine  $H^2 \cap H_0^1$  admet un inverse à droite borné et même compact  $(-\Delta)^{-1} : L^2 \rightarrow L^2$ . Alors, on a  $P_h^b = -h^2\Delta(I + (-h^2\Delta)^{-1}x^2)$ . Or l'opérateur  $I + (-h^2\Delta)^{-1}x^2$  est injectif parce que  $P_h^b$  l'est, donc

<sup>9</sup>Il reste vrai que le spectre de  $P_h^{\mathbb{R}}$  n'est constitué que des valeurs propres simples  $h(2k + 1)$  lorsque  $\Re(h) > 0$ ; voir par exemple [47, Sec. 14.4] pour le cas  $h = e^{-i\pi/4}$ , ainsi que les références du chapitre en question.

d'après l'alternative de Fredholm, il est inversible. Alors  $P_h^b$  admet comme inverse  $(I + (-h^2\Delta)^{-1}x^2)^{-1}(-h^2\Delta)^{-1}$ , qui est compact. Son spectre est alors de la forme  $\{\lambda_k\} \cup \{0\}$  où les  $\lambda_k$  sont des valeurs propres, non nulles, et  $\lambda_k \rightarrow 0$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Alors le spectre de  $P_h^b$  est  $\{\lambda_k^{-1}\}$ .

Les valeurs propres sont simples parce que si  $P_h^b f = \lambda f$  et  $P_h^b g = \lambda g$ , alors  $f$  et  $\frac{f'(-1)}{g'(-1)}g$  vérifient le même problème de Cauchy  $-h^2 f'' + x^2 f = \lambda f$ ,  $f(-1) = 0$ . Elles sont donc égales.  $\square$

### 3.2.3 Première valeur propre de l'oscillateur harmonique sur un segment

Pour les applications dans les chapitres suivant, on a surtout besoin de la première valeur propre de  $P_h^b$ . Dans le cas où  $h \in \mathbb{R}_+^*$ , le spectre est d'après la sous-section précédente une suite de nombres réels, strictement positifs et sans point d'accumulation. On note  $\lambda_h$  la plus petite valeur propre de  $P_h^b$ . Parler de  $\lambda_h$  n'a pour l'instant de sens que si  $h$  est réel positif, mais on verra que  $\lambda_h$  se prolonge analytiquement à un sous-domaine de  $\{\Re(h) > 0\}$ .<sup>10</sup>

Commençons par une asymptotique simple dans le cas  $h > 0$ .

**Proposition 3.38.** *Pour  $h > 0$ , dans la limite  $h \rightarrow 0$ , on a  $\lambda_h = h + O(e^{-c/h})$ . Si  $h > 0$  est assez petit, c'est la seule valeur propre de  $P_h^b$  dans l'intervalle  $]-\infty, 2h[$ . De plus, la fonction propre associée est paire.*

*Démonstration.* On ne donne encore que les idées, la méthode reposant sur des outils standards [34, Th. 4.23]. Soit  $\chi$  une fonction  $C_c^\infty(-1, 1)$  qui vaut 1 au voisinage de 0. Alors les fonctions  $f_h(x) = \chi(x)e^{-x^2/2h}$  sont des quasi-modes pour l'opérateur  $P_h^b$  :

$$P_h^b(f_h) = hf_h + O(e^{-c/h}).$$

Autrement dit,  $|(P_h^b - h)f_h| = O(e^{-c/h})$ . Comme  $P_h^b$  est autoadjoint, on en déduit [47, Prop. 8.20] qu'il existe une valeur propre  $\lambda_h$  de  $P_h^b$  de la forme  $\lambda_h = h + O(e^{-c/h})$ .

Grâce au principe max-min [47, Th. 11.7] et des arguments de troncature pour approximer  $P_h^b$  par  $P_h^{\mathbb{R}}$ , on peut montrer que la  $k$ -ième valeur propre de  $P_h^b$  est minorée par quelque chose de la forme  $h(2k + 1) + o(h)$ . Donc, si on prend  $k = 1$ , la valeur propre en  $h + O(e^{-c/h})$  est bien la plus petite valeur propre de  $P_h^b$ . De plus, la valeur propre suivante est  $\geq 3h - o(h)$ .

<sup>10</sup>Comme le spectre de  $P_h^b$  n'est constitué que de valeurs propres simples et isolées, on pourrait invoquer des théorèmes généraux pour montrer que les valeurs propres de  $P_h^b$  dépendent continument et même analytiquement de  $h$  dans  $\{\Re(h) > 0\}$  tout entier [51, Ch. IV §3.5 et Ch. VII, Th. 1.8]. Nous ne détaillerons pas ceci car nous retrouverons suffisamment de ces résultats comme sous-produits de nos démonstrations.



Le fait que les fonctions propres associées soient paires se démontre grâce à la théorie de Sturm-Liouville (voir p. ex. [15, Lem. 2]).  $\square$

Mais tout ceci est basé de manière essentielle sur le caractère auto-adjoint de  $P_h^b$ , ce qui n'est plus vrai si  $h$  n'est pas réel. Le cas  $h$  complexe est intéressant car il apparaît naturellement si on veut traiter l'équation de Kolmogorov, et est également utile pour vérifier les hypothèses techniques des estimations de la Section 3.1.4. On va donc démontrer une asymptotique pour  $\lambda_h$  qui reste valable dans certains régimes où  $h$  est complexe.

**Théorème 3.39.** *Pour  $h > 0$ , soit  $\lambda_h$  la première valeur propre de  $-h^2\Delta + x^2$  avec conditions aux bords de Dirichlet sur  $]-1, 1[$ . Soit  $\theta \in ]0, \pi/2[$ . Il existe  $h_\theta > 0$  tel que  $h \mapsto \lambda_h$  s'étende holomorphiquement sur  $\{|h| < h_\theta, |\arg(h)| < \theta\}$ . De plus, on a l'asymptotique*

$$\lambda_h = h + 4\sqrt{\frac{h}{\pi}}(1 + O(h))e^{-1/h},$$

valable dans la limite  $|h| \rightarrow 0, |\arg(h)| < \theta$ .

*Remarque 3.40.* 1. Si  $\lambda_h$  est la continuation analytique de la première valeur propre donnée par le Théorème précédent, alors  $\lambda_h$  est une valeur propre de  $P_h^b$ , dès qu'il est défini. En effet, soit  $v_h$  la solution du problème de Cauchy  $-h^2v_h'' + x^2v_h = \lambda_h v_h, v_h(0) = 1, v_h'(0) = 0$ . Si  $h$  est réel, on sait que la fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda_h$  est paire, et donc sa dérivée en 0 est nulle. Donc cette fonction propre est à égale à  $v_h$  (à une constante multiplicative près). Or, en tant que solution d'une équation différentielle avec un paramètre  $h$ , la solution  $v_h$  dépend analytiquement de  $h$ . En particulier, on a  $v_h(\pm 1) = 0$  pour  $h$  réel, et donc aussi pour tout  $h$  complexe. C'est-à-dire que  $v_h$  vérifie le problème aux bords  $P_h^b v_h = \lambda_h v_h, v_h(\pm 1) = 0$  : c'est une fonction propre associée à la valeur propre  $\lambda_h$ .

2. En fait, un examen attentif de la démonstration montrerait qu'on a même une asymptotique de la forme  $\lambda_h \sim h + e^{-1/h} \sum_{k \geq 0} c_k h^{1/2-k}$ , valable dans le même régime. On aurait pu démontrer ceci dans le cas  $h$  réel en raffinant le quasi-mode  $\chi(x)e^{-x^2/2h}$  grâce à des solutions WKB [68, Annexe A]. Mais cette méthode se base de manière essentielle sur le caractère autoadjoint de  $P_h^b$  lorsque  $h$  est réel. Pour traiter le cas  $h$  complexe, nous utilisons une autre approche, basée sur des techniques d'équations différentielles.

*Démonstration.* On découpe la démonstration en plusieurs étapes :

- dans le Lemme 3.41, on donne des solutions particulières de l'équation différentielles  $-h^2v'' + x^2v - \lambda v = 0$ ;
- dans le Corollaire 3.42, on en déduit une équation implicite entre  $\lambda_h$  et  $h$ ;

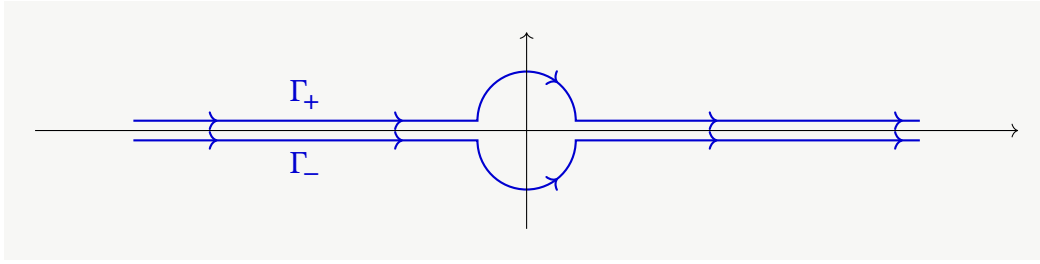


FIGURE 3.9 – Les chemins  $\Gamma_+$  et  $\Gamma_-$  utilisés dans la définition de  $v_{h,\rho}^\pm$ . Le chemin  $\Gamma_+$  contourne 0 par dessus, et le chemin  $\Gamma_-$  le contourne par dessous.

- dans le Lemme 3.43, on donne des asymptotiques pour les solutions particulières du Lemme 3.41 ;
- enfin, on résout l'équation implicite du Corollaire 3.42 grâce au schéma de Newton, avec le Lemme 3.43 qui nous donne les estimations assurant sa convergence.

**Lemme 3.41.** Soit  $\Gamma_+$  (respectivement  $\Gamma_-$ ) un chemin du plan complexe qui va de  $-\infty$  à  $+\infty$  en passant au dessus de 0 (respectivement en dessous de 0; voir Fig. 3.9). Soit  $\Re(h) > 0$  et  $\rho \in \mathbb{C}$ . Soit

$$v_{h,\rho}^\pm(x) := e^{-x^2/2h} \int_{\Gamma_\pm} e^{-(t^2/4+xt)/h - (1+\rho)\ln(t)} dt, \quad (3.33)$$

où on choisit le logarithme continu sur le chemin d'intégration et tel que  $\ln(1) = 0$ . Alors, pour  $\rho \in \mathbb{C}$ , les fonctions  $v_{h,\rho}^\pm$  sont des solutions du problème de Cauchy<sup>11</sup>

$$\begin{cases} -h^2 v_{h,\rho}^\pm + x^2 v_{h,\rho}^\pm - h(1+2\rho)v_{h,\rho}^\pm = 0, \\ v_{h,\rho}^\pm(0) = 2^{-1-\rho} h^{-\rho/2} (1 - e^{\mp i\pi\rho}) \Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right), \\ v_{h,\rho}^\pm{}'(0) = -2^{-\rho} h^{-(1+\rho)/2} (1 + e^{\mp i\pi\rho}) \Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}\right), \end{cases}$$

De plus, si  $\rho \notin -1 - \mathbb{N}$ , ces solutions sont indépendantes.

*Démonstration. Étape 1 : ce sont des solutions.* On pose

$$g(t) = e^{-t^2/4h - (1+\rho)\ln(t)}$$

et

$$w_{h,\rho}^\pm(x) = \int_{\Gamma_\pm} g(t) e^{-xt/h} dt,$$

<sup>11</sup>Pour  $\rho = -2k \in -2\mathbb{N}$ , les formules pour les conditions initiales doivent s'entendre comme limite de ces formules pour  $\rho \rightarrow -2k$ . Par exemple pour  $\rho = 0$ ,  $v_{h,0}^\pm(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} v_{h,\rho}^\pm(0) = \mp i\pi$ .

de sorte que  $v_{h,\rho}^{\pm}(x) = w_{h,\rho}^{\pm}(x)e^{-x^2/2h}$ . D'après cette relation, on a en développant les dérivées

$$\begin{aligned} hv_{h,\rho}^{\pm \prime} &= (-xw_{h,\rho}^{\pm} + hw_{h,\rho}^{\pm \prime})e^{-x^2/2h} \\ h^2v_{h,\rho}^{\pm \prime\prime} &= (-hw_{h,\rho}^{\pm} - 2xw_{h,\rho}^{\pm \prime} + h^2w_{h,\rho}^{\pm \prime\prime} + x^2w_{h,\rho}^{\pm})e^{-x^2/2h}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$-h^2v_{h,\rho}^{\pm \prime\prime} + x^2v_{h,\rho}^{\pm} - h(1+2\rho)v_{h,\rho}^{\pm} = (-h^2w_{h,\rho}^{\pm \prime\prime} + 2xw_{h,\rho}^{\pm \prime} - 2h\rho w_{h,\rho}^{\pm})e^{-x^2/2h}. \quad (3.34)$$

Or, par dérivation sous le signe intégrale et intégration par parties,

$$\begin{aligned} hw_{h,\rho}^{\pm \prime}(x) &= \int_{\Gamma} -tg(t)e^{-xt/h} dt; \\ h^2w_{h,\rho}^{\pm \prime\prime}(x) &= \int_{\Gamma} t^2g(t)e^{-xt/h} dt; \\ xhw_{h,\rho}^{\pm \prime}(x) &= \int_{\Gamma} -xtg(t)e^{-xt/h} dt = - \int_{\Gamma} h \frac{d}{dt}(tg(t))e^{-xt/h} dt. \end{aligned}$$

donc,

$$-h^2w_{h,\rho}^{\pm \prime\prime} + 2xw_{h,\rho}^{\pm \prime} - 2h\rho w_{h,\rho}^{\pm} = \int_{\Gamma_{\pm}} (-t^2g(t) + 2h \frac{d}{dt}(tg(t)) - 2h\rho g(t))e^{-xt/h} dt.$$

Et comme  $t^2g(t) - 2h \frac{d}{dt}(tg(t)) + 2h\rho g(t) = 0$ , on a  $-h^2w_{h,\rho}^{\pm \prime\prime} + 2xw_{h,\rho}^{\pm \prime} - 2h\rho w_{h,\rho}^{\pm} = 0$ , et donc  $v_{h,\rho}^{\pm}$  vérifie bien l'équation différentielle annoncée.

*Étape 2 : conditions initiales.* On commence par calculer les dérivées en 0 de  $w_{h,\rho}^{\pm}$ . En dérivant sous le signe intégrale, on a pour  $k \in \mathbb{N}$

$$(-h\partial_x)^k w_{h,\rho}^{\pm}(0) = \int_{\Gamma_{\pm}} e^{-t^2/4h + (k-1-\rho)\ln(t)} dt. \quad (3.35)$$

Pour calculer cette intégrale, on pose  $s = k - 1 - \rho$ . On fait d'abord le calcul en supposant  $\Re(s) > -1$  (le résultat général s'en déduira par continuation analytique). Dans ce cas, la fonction  $t \mapsto t^s$  est intégrable en 0, et on peut déformer le chemin d'intégration  $\Gamma_{\pm}$  en  $\mathbb{R}$ , en gardant à l'esprit qu'on a alors  $\ln(t) = \ln|t|$  si  $t > 0$  et  $\ln|t| \pm i\pi$  si  $t < 0$  (selon si on est sur  $\Gamma_+$  ou  $\Gamma_-$ ). Alors, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\pm}} e^{-t^2/4h + s\ln(t)} dt &= \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/4h + s(\ln|t| \pm i\pi)} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2/4h + s\ln|t|} dt \\ &= (1 + e^{\pm i\pi s}) \int_0^{+\infty} e^{-t^2/4h} t^s dt. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Or, en faisant le changement de variables  $y = t^2/4h$  dans l'intégrale (avec  $dt = 2h dy/t$ ), on trouve

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/4h} t^s dt = \int_0^{+\infty} e^{-y} (4hs)^{(s-1)/2} 2h dy = 2^s h^{(s+1)/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right).$$

Ainsi, en remplaçant  $s = k - 1 - \rho$ , et en utilisant l'expression (3.35) de  $\partial_x^k w_{h,\rho}^\pm(0)$  ainsi que le calcul (3.36), on a

$$(-h\partial_x)^k w_{h,\rho}^\pm(0) = 2^{k-1-\rho} h^{(k-\rho)/2} (1 - (-1)^k e^{\mp i\pi\rho}) \Gamma\left(\frac{k-\rho}{2}\right).$$

En utilisant  $v_{h,\rho}^\pm(0) = w_{h,\rho}^\pm(0)$  et  $v_{h,\rho}^{\pm'}(0) = w_{h,\rho}^{\pm'}(0)$ , on obtient bien les formules annoncées pour  $v_{h,\rho}^\pm(0)$  et  $v_{h,\rho}^{\pm'}(0)$ .

*Étape 3 : indépendance.* On calcule le wronskien  $W(0)$  de  $v_{h,\rho}^+$  et  $v_{h,\rho}^-$  en zéro, grâce aux formules pour  $v_{h,\rho}^\pm(0)$  et  $v_{h,\rho}^{\pm'}(0)$  :

$$\begin{aligned} W(0) &= -2^{-1-2\rho} h^{-1/2-\rho} \Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}\right) \det \begin{pmatrix} (1 - e^{-i\pi\rho}) & (1 - e^{i\pi\rho}) \\ (1 + e^{-i\pi\rho}) & (1 + e^{i\pi\rho}) \end{pmatrix} \\ &= -i 2^{1-2\rho} h^{-1/2-\rho} \Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}\right) \sin(\pi\rho). \end{aligned}$$

Comme auparavant, si  $\rho \in \mathbb{N}$ , cette formule doit s'entendre comme limite pour des  $\rho$  approchant. Si  $\rho \notin -1 - \mathbb{N}$ , le wronskien  $W(0)$  n'est pas nul<sup>12</sup> auquel cas les fonctions  $v_{h,\rho}^+$  et  $v_{h,\rho}^-$  sont indépendantes.  $\diamond$

Ceci nous permet de donner une condition nécessaire, sous forme d'une équation implicite, pour qu'un nombre complexe  $h(1 + 2\rho)$  soit valeur propre.

**Corollaire 3.42.** *Pour  $\Re(h) > 0$  et  $\rho \in \mathbb{C}$ , soit*

$$v_{h,\rho}(x) := (1 + e^{i\pi\rho}) v_{h,\rho}^+(x) - (1 + e^{-i\pi\rho}) v_{h,\rho}^-(x). \quad (3.37)$$

Soit  $\Phi(h, \rho) := e^{-1/2h} v_{h,\rho}(-1)$ .

Alors, si  $\Re(h) > 0$  et si  $\rho \in \mathbb{C}$  avec  $|\rho| < 1$  et  $\Phi(h, \rho) = 0$ , alors  $h(1 + 2\rho)$  est valeur propre de  $P_h^b$ .<sup>13</sup>

<sup>12</sup>Si  $\rho \in \mathbb{N}$ , alors  $\sin(\pi\rho)$  s'annule, mais comme les termes en  $\Gamma$  ont alors un pôle, le produit a une limite finie non nulle.

<sup>13</sup>Cette propriété reste vraie si  $\rho \in \mathbb{C}$  n'est ni un entier strictement négatif, ni un entier impair (conditions qui assurent que  $v_{h,\rho}^+$  et  $v_{h,\rho}^-$  sont indépendantes et que  $v_{h,\rho}$  n'est pas nulle). Mais la réciproque n'est pas vraie : si  $\lambda$  est une valeur propre quelconque de  $P_h^b$ , qu'on écrit  $\lambda = h(1 + 2\rho)$ , il n'est pas vrai en général que  $\Phi(h, \rho) = 0$ . Ceci est tout de même vrai si  $\lambda$  est la première valeur propre de  $P_h^b$ .

*Démonstration.* Si  $|\rho| < 1$ , les coefficients  $1 + e^{i\pi\rho}$  et  $1 + e^{-i\pi\rho}$  ne sont pas nuls. Donc, comme les fonctions  $v_{h,\rho}^+$  et  $v_{h,\rho}^-$  sont indépendantes (Lemme 3.41), la fonction  $v_{h,\rho}$  n'est pas nulle. De plus, d'après les conditions initiales de  $v_{h,\rho}^\pm$ , on a  $v_{h,\rho}'(0) = 0$ , et donc, d'après l'équation vérifiée par  $v_{h,\rho}$ , elle est paire.

Donc si  $\Phi(h, \rho) = 0$ , on a  $v_{h,\rho}(-1) = 0$ , et donc également  $v_{h,\rho}(1) = 0$ . En résumé,  $v_{h,\rho}$  vérifie

$$-v_{h,\rho}'' + x^2 v_{h,\rho} - h(1 + 2\rho)v_{h,\rho} = 0, \quad v_{h,\rho}(\pm 1) = 0, \quad v_{h,\rho} \neq 0.$$

Autrement dit,  $v_{h,\rho}$  est une fonction propre de  $P_h^b$ , de valeur propre associée  $h(1 + 2\rho)$ .  $\diamond$

Pour finir ces préparatifs, donnons quelques asymptotiques sur les fonctions  $v_{h,\rho}$  qui nous seront utiles.

**Lemme 3.43.** *Soit  $0 < \theta < \pi/2$  et  $j \in \mathbb{N}$ . Dans la limite  $|h| \rightarrow 0$ ,  $|\arg(h)| < \theta$ , on a l'asymptotique localement uniforme en  $\rho \in \mathbb{C}$  et  $x \in \mathbb{R}^*$*

$$\partial_\rho^j v_{h,\rho}^\pm(x) = e^{x^2/2h} \sqrt{\pi h} e^{-(1+\rho)\ln(-2x)} (-\ln(-2x))^j (1 + O(h)), \quad (3.38)$$

où  $\ln(-2x) = \ln|2x|$  si  $-2x > 0$  et  $\ln|-2x| \pm i\pi$  sinon (selon si on considère  $v_{h,\rho}^+$  ou  $v_{h,\rho}^-$ ).

*Démonstration.* On note comme précédemment  $w_{h,\rho}^\pm(x) = e^{x^2/2h} v_{h,\rho}^\pm(x)$ . D'après la définition de  $v_{h,\rho}^\pm$  (Eq. (3.33)), on a

$$\partial_\rho^j w_{h,\rho}^\pm(x) = \int_{\Gamma_\pm} e^{-t^2/4h - xt - (1+\rho)\ln(t)} (-\ln(t))^j dt. \quad (3.39)$$

On veut appliquer la méthode du point col (Prop. 2.8) à ces intégrales. La phase  $\phi(t) = t^2/4 + xt$  a pour unique point critique  $t_c = -2x$ , avec  $\phi(t_c) = -x^2$  et  $\phi''(t_c) = 1/2$ . On commence alors par remplacer  $\Gamma_\pm$  par un chemin qui passe par  $t_c$  et qui est suffisamment proche de l'axe réel pour que sur  $\Gamma_\pm \setminus \{t_c\}$  et pour  $\Re(h) > 0$ ,  $|\arg(h)| < \theta$ , on aie  $\Re((t - t_c)^2/h) > 0$ . C'est possible parce que si  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\Re((t - t_c)^2/h) \geq (t - t_c)^2 \cos(\theta)/h$ .

Dans ces conditions, la partie de l'intégrale (3.39) hors d'un voisinage fixe de  $t_c$  est en  $O(e^{-\phi(t_c)/h - c/h})$ . Donc seule la partie au voisinage du point critique  $t_c = -2x$  compte. D'après la méthode de la phase stationnaire (Prop. 2.8), on a donc pour  $x \neq 0$

$$\partial_\rho^j w_{h,\rho}^\pm(x) = e^{-\phi(t_c)/h} \sqrt{\pi h} e^{-(1+\rho)\ln(t_c)} (-\ln(t_c))^j (1 + O(h)),$$

où le  $O$  est localement uniforme en  $x \neq 0$  et  $\rho \in \mathbb{C}$  (voir la majoration explicite du reste dans la phase stationnaire Prop. 2.8). En remplaçant  $t_c = -2x$  dans l'asymptotique ci-dessus, et comme  $\phi(t_c) = -x^2$  et  $v_{h,\rho}^\pm(x) = e^{-x^2/2h} w_{h,\rho}^\pm(x)$ , on a bien l'asymptotique annoncée.  $\diamond$

Revenons à la démonstration du Théorème 3.39.

*Étape 1 : schéma de Newton.* D'après le Corollaire 3.42, pour trouver une valeur propre  $\lambda = h(1 + 2\rho)$ , il suffit de résoudre  $\Phi(h, \rho) = 0$ . On va montrer grâce à un schéma de Newton que pour  $\rho_*$  assez petit, pour tout  $\theta \in ]0, \pi/2[$ , il existe  $h_\theta > 0$  tel que pour tout  $|h| < h_\theta$  avec  $|\arg(h)| < \theta$ , il existe  $|\rho(h)| < \rho_*$  tel que  $\Phi(h, \rho(h)) = 0$ .

Le schéma de Newton consiste à définir une suite  $(\rho_n(h))_n$  définie par

$$\rho_0(h) = 0, \quad \rho_{n+1}(h) = \rho_n(h) - \partial_\rho \Phi(h, \rho_n(h))^{-1} \Phi(h, \rho_n(h)). \quad (3.40)$$

Le théorème suivant nous dit essentiellement que  $(\rho_n(h))_{n \in \mathbb{N}}$  converge si  $\Phi(h, 0)$  est assez petit :

**Proposition 3.44.** *Soit  $D = D(0, R)$  un disque du plan complexe. On note  $5D = D(0, 5R)$  et de même pour  $6D$ . Soit  $\Phi : 6D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe telle que  $\Phi(5D) \subset 5D$  et pour tout  $z \in 6D$ ,  $\Phi'(z) \neq 0$ .*

*Alors, avec  $C_1 := \sup_{5D} |\Phi''|$ ,  $C_2 := \sup_{5D} |\Phi'|^{-1}$  et  $A = C_1 C_2^2$ , pour tout  $z_0 \in D$  tel que  $|\Phi(z_0)| \leq \min((2A)^{-1}, 2RC_2^{-1})$ , la suite  $(z_n)_n$  définie par*

$$z_{n+1} = z_n - \Phi'(z_n)^{-1} \Phi(z_n)$$

*converge. De plus, la limite  $z_\infty$  est dans  $5D$  et vérifie  $\Phi(z_\infty) = 0$ . De plus, pour tout  $n \geq 0$ , on a*

$$|z_\infty - z_n| \leq \frac{2}{C_1 C_2} |A \Phi(z_0)|^{2^n}. \quad (3.41)$$

On commence par démontrer les estimations nécessaires à la convergence du schéma de Newton, comme corollaire des estimations du Lemme 3.43).

**Corollaire 3.45.** *Soit  $0 < \theta < \pi/2$ . Avec les notations du Corollaire 3.42, on a pour tout  $\Re(h) > 0$ ,*

$$\Phi(h, 0) = -4i\pi e^{-1/h}. \quad (3.42)$$

*De plus, localement uniformément en  $\rho \in \mathbb{C}$ , dans la limite  $|h| \rightarrow 0$ ,  $|\arg(h)| < \theta$ ,*

$$\Phi(h, \rho) = O(h^{1/2}), \quad (3.43)$$

$$\partial_\rho^2 \Phi(h, \rho) = O(h^{1/2}), \quad (3.44)$$

*et pour  $\rho$  assez petit (disons  $|\rho| < \rho_*$ ), dans la même limite,*

$$(\partial_\rho \Phi(h, \rho))^{-1} = O(h^{-1/2}). \quad (3.45)$$

*Démonstration.* Commençons par calculer  $v_{h,0}(x)$ . En spécialisant à  $\rho = 0$ , dans la définition de  $v_{h,\rho}$  (Eq. (3.37)) et de  $v_{h,\rho}^\pm$  (Eq. (3.33)), on trouve

$$v_{h,0}(x) = 2(v_{h,0}^+(0) - v_{h,0}^-(0)) = 2e^{-x^2/2h} \left( \int_{\Gamma_+} - \int_{\Gamma_-} \right) e^{-t^2/4h - xt/h} \frac{dt}{t},$$

où on a utilisé l'abus de notations  $(a \int_{\Gamma_+} + b \int_{\Gamma_-})g(t) dt = a \int_{\Gamma_+} g(t) dt + b \int_{\Gamma_-} g(t) dt$ .

Or, d'après la définition de  $\Gamma_{\pm}$  (voir Fig. 3.9), l'intégrale  $(\int_{\Gamma_+} - \int_{\Gamma_-})g(t) dt$  est égale à l'intégrale sur un cercle autour de 0 orienté négativement :

$$\left( \int_{\Gamma_+} - \int_{\Gamma_-} \right) e^{-t^2/4h - xt/h} \frac{dt}{t} = - \int_{\partial D(0,R)} e^{-t^2/4h - xt/h} \frac{dt}{t}.$$

Donc, d'après la formule intégrale de Cauchy,  $v_{h,0}(0) = -4i\pi e^{-x^2/2h}$ . Donc, on a bien  $\Phi(h, 0) = e^{-1/2h} v_{h,0}(-1) = -4i\pi e^{-1/h}$ . Ceci termine la démonstration de la formule (3.42).

Passons maintenant à la démonstration des majorations (3.43) et (3.44). D'après la définition de  $v_{h,\rho}$  en tant que combinaison linéaire de  $v_{h,\rho}^+$  et  $v_{h,\rho}^-$ , les quantités  $\partial_{\rho}^k \Phi(h, \rho)$  s'expriment comme combinaison linéaire des  $\partial_{\rho}^j v_{h,\rho}^{\pm}(-1)$  pour  $j \leq k$ . Donc, d'après les asymptotiques du Lemme 3.43 et la relation  $\Phi(h, \rho) = e^{-1/2h} v_{h,\rho}(-1)$ , on a bien les majorations de  $\Phi(h, \rho)$  et  $\partial_{\rho}^2 \Phi(h, \rho)$  annoncées en Eq. (3.43) et (3.44).

Pour la majoration (3.45), on va montrer que le premier terme de l'asymptotique de  $\partial_{\rho} \Phi(h, \rho)$  n'est pas nul. D'après la définition de  $v_{h,\rho}$ , on a

$$\begin{aligned} \partial_{\rho} v_{h,\rho}(-1) &= (1 + e^{i\pi\rho}) \partial_{\rho} v_{h,\rho}^+(-1) - (1 + e^{-i\pi\rho}) \partial_{\rho} v_{h,\rho}^-(-1) \\ &\quad + i\pi e^{i\pi\rho} v_{h,\rho}^+(-1) + i\pi e^{-i\pi\rho} v_{h,\rho}^-(-1). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Donc, en remplaçant dans cette formule les asymptotiques du Lemme 3.43,

$$\begin{aligned} \partial_{\rho} v_{h,\rho}(-1) &= ((1 + e^{i\pi\rho}) - (1 - e^{-i\pi\rho})) 2\sqrt{\pi h} 2^{-(1+\rho)} \ln 2 \\ &\quad + (i\pi e^{i\pi\rho} + i\pi e^{-i\pi\rho}) 2\sqrt{\pi h} 2^{-(1+\rho)} + O(h^{3/2}) \\ &= i2^{1-\rho} \sqrt{\pi} (\ln(2) \sin(\pi\rho) + \pi \cos(\pi\rho)) \sqrt{h} + O(h^{3/2}). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Donc, pour  $\rho$  assez petit, disons  $|\rho| < \rho_*$ , on a  $|\ln(2) \sin(\pi\rho) + \pi \cos(\pi\rho)| > \pi/2$ . Alors, si  $|\rho| < \rho_*$  et si  $h$  assez petit avec  $\Re(h) \geq 0$ , on a

$$|\partial_{\rho} \Phi(h, \rho)| \geq 2^{-\rho_*} \pi^{3/2} |h|^{1/2}.$$

Ceci nous donne bien l'asymptotique (3.45) annoncée.  $\diamond$

On reprend les notations de la Proposition 3.44, dans laquelle on choisit  $R = \rho_*/10$  (par exemple). D'après les estimations (3.42–3.45) du Corollaire précédent, il existe  $h_{\theta} > 0$  tel que pour tout  $|h| < h_{\theta}$ ,  $|\arg(h)| < \theta$  et  $|\rho| < R$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(h, \rho) &\in 5D, \\ C_1(h) &:= \sup_{\rho \in 5D} |\partial_{\rho}^2 \Phi(h, \rho)| = O(h^{1/2}), \\ C_2(h) &:= \sup_{\rho \in 5D} |(\partial_{\rho} \Phi(h, \rho))^{-1}| = O(h^{-1/2}), \\ A(h) &:= C_1(h) C_2(h)^2 = O(h^{-1/2}) \\ |\Phi(h, 0)| &\leq \min((2A(h))^{-1}, 2RC_2(h)^{-1}), \end{aligned}$$

où, dans la dernière inégalité, on a utilisé le fait que dans la limite  $|h| \rightarrow 0$ ,  $|\arg(h)| < \theta$ ,  $e^{-1/h}$  est exponentiellement petit.

Ce sont les hypothèses de la Proposition 3.44 qui assure la convergence de la suite  $\rho_n(h)$  définie par la récurrence (3.40). On note  $\rho_\infty(h)$  la limite.

*Étape 2 : conclusion.* Le schéma de Newton nous assure que  $\Phi(h, \rho_\infty(h)) = 0$ . Il nous reste à montrer que  $\rho_\infty$  est holomorphe, à en calculer l'expansion asymptotique, et à montrer que si  $h > 0$  est assez petit,  $\lambda_h = h + 2h\rho_\infty(h)$ .

L'estimation (3.41) du schéma de Newton nous assure que  $\rho_n$  converge uniformément sur chaque domaine  $\{|h| < h_\theta, |\arg(h)| < \theta\}$ . Comme chaque  $\rho_n$  est holomorphe, on en déduit que  $\rho_\infty$  est également holomorphe.

De plus, d'après cette même estimation avec  $n = 1$ , on a

$$\rho_\infty(h) = \rho_1(h) + O(|A(h)\Phi(h, 0)|^2) = -\partial_\rho \Phi(h, 0)^{-1} \Phi(h, 0) + O(h^{-1}e^{-2/h}). \quad (3.48)$$

D'après les asymptotiques du Lemme 3.43, et le fait que  $\Phi(h, 0) = -4i\pi e^{-1/h}$ , on a

$$\rho_1(h) = \frac{4i\pi e^{-1/h}}{2i\pi^{3/2}\sqrt{h} + O(h^{3/2})} = (2(\pi h)^{-1/2} + O(h^{3/2}))e^{-1/h}.$$

Or, pour tout  $\theta \in ]0, \pi/2[$ ,  $e^{-1/h}$  décroît exponentiellement dans la limite  $h \rightarrow 0$ ,  $|\arg(h)| < \theta$ . Donc, le terme  $he^{-2/h}$  est négligeable devant n'importe quel  $h^s e^{-1/h}$ . Donc dans cette limite,

$$\rho_\infty(h) \sim 2(\pi h)^{-1/2} e^{-1/h} = O(e^{-c/h}). \quad (3.49)$$

Pour démontrer que  $\lambda_h = h + 2h\rho_\infty(h)$ , on remarque que  $h + 2h\rho_\infty(h)$  est valeur propre de  $P_h^b$  (Corollaire 3.42). Mais d'après la théorie spectrale standard (Prop. 3.38), si  $h > 0$  est assez petit, la seule valeur propre de  $P_h^b$  dans  $] -\infty, 2h[$  est  $\lambda_h$ . On a donc bien  $\lambda_h = h + 2h\rho_\infty(h)$ .

Enfin, d'après l'équivalent (3.49) de  $\rho_\infty(h)$ , on a l'asymptotique  $\lambda_h = h + 4\pi^{-1/2}h^{1/2}e^{-1/h}(1 + O(h^{-1}))$ , qui est celle qu'on voulait démontrer.  $\square$

On peut reformuler ce Théorème avec le langage des symboles (voir Section 3.1.2).

**Corollaire 3.46.** *Il existe une fonction  $r : ]0, \pi/2[$  croissante et il existe un symbole  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_r$  telle que pour  $n \in \mathbb{N}$ , la première valeur propre  $\tilde{\lambda}_n$  de  $-\partial_x^2 + (nx)^2$  avec conditions de Dirichlet sur  $] -1, 1[$  soit égale à  $\tilde{\lambda}_n = n + \gamma(n)e^{-n}$ .*

*Démonstration.* Avec les notations du Théorème 3.39, on a  $\tilde{\lambda}_n = n^2\lambda_{n-1}$ . On note alors  $r(\theta) = h_\theta^{-1}$  et  $\gamma(z) = e^z(z^2\lambda_{z-1} - z)$ .

D'après le Théorème 3.39,  $\gamma(z)$  est défini et holomorphe sur chaque  $\{|z| > r(\theta), |\arg(z)| < \theta\}$ , et est équivalent sur chacun de ces secteurs à  $\gamma(z) \sim 4\pi^{-1/2}z^{3/2}$ . Quitte à remplacer  $r$  par une fonction croissante  $\tilde{r}$  selon la procédure de la Remarque 3.8, on a démontré que  $\gamma \in \overline{\mathcal{S}}_r(\mathbb{C}) = \overline{\mathcal{S}}_r$ . De plus, par définition de  $\gamma$ , on a  $\tilde{\lambda}_n = n + \gamma(n)e^{-n}$ .  $\square$



### 3.2.4 Première fonction propre de l'oscillateur harmonique sur un segment

La section précédente nous a donné une information très précise sur la première valeur propre de  $P_h^b$ . Mais même si la démonstration donnait une intuition de ce que doit être la fonction propre associée, nous n'avons en fait rien démontré sur la fonction propre en question. Nous le faisons maintenant. On commence par une minoration simple.

**Proposition 3.47.** *Soit  $v_h$  la fonction propre de  $P_h^b$  associée à la valeur propre  $\lambda_h$ , normalisée par  $v_h(0) = 1$ . Alors il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $h \in ]0, 1[$ ,  $|v_h|_{L^2(-1,1)}^2 \geq c\sqrt{h}$ .*

*Démonstration.* Soit  $w_h(y) = v_h(\sqrt{h}y)$ , qui est solution du problème de Cauchy  $-w_h'' + y^2 w_h = h^{-1} \lambda_h w_h$ ,  $w_h(0) = 1$ ,  $w_h'(0) = 0$ . Lorsque  $h \rightarrow 0^+$ , on a  $\lambda_h \sim h$  (Prop. 3.38), donc  $w_h$  tend vers la solution  $w$  du problème de Cauchy  $-w'' + y^2 w = w$ ,  $w(0) = 1$ ,  $w'(0) = 0$ , à savoir  $w(y) = e^{-y^2/2}$ , cette convergence étant uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}$ .

En particulier, on a  $\int_{-1}^1 w_h(y)^2 dy \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{-1}^1 e^{-y^2} dy$ . Donc, on a

$$c := \inf_{0 < h < 1} \int_{-1}^1 w_h(y)^2 dy > 0.$$

Or, d'après le changement de variables  $x = \sqrt{h}y$ , on a

$$\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} v_h(x)^2 dx = \sqrt{h} \int_{-1}^1 w_h(y)^2 dy \geq c\sqrt{h}.$$

Comme  $\int_{-1}^1 v_h(x)^2 dx \geq \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} v_h(x)^2 dx$ , ceci démontre la proposition.  $\square$

On montre maintenant une majoration plus fine, basée sur des méthodes d'inégalité d'Agmon (voir par exemple [34, Prop. 6.4]).

**Proposition 3.48.** *Pour  $h \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda_h$  soit défini (voir Th. 3.39), on note  $v_h$  la fonction propre de  $P_h^b$  associée à la valeur propre  $\lambda_h$ , normalisée par  $v_h(0) = 1$ . C'est-à-dire que  $v_h$  est la solution du problème de Cauchy*

$$-h^2 v_h'' + x^2 v_h - \lambda_h v_h = 0, \quad v_h(0) = 1, \quad v_h'(0) = 0.$$

*Soit  $0 < \epsilon \leq 1$  et  $\theta \in ]0, \pi/2[$ . Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in ]-1, 1[$  et  $|h| < h_\theta$  avec  $|\arg(h)| < \theta$ ,*

$$|v_h(x)| \leq \frac{C}{|h|} |e^{-(1-\epsilon)x^2/2h}|. \quad (3.50)$$

*Démonstration.* Dans cette démonstration, on fixe  $\theta_0 \in ]0, \pi/2[$ . On pose  $w_h(x) := e^{(1-\epsilon)x^2/2h} v_h(x)$ . Comme  $w_h(x)$  ainsi défini dépend continument de  $h$ , le problème se situe uniquement au voisinage de  $h = 0$  (mais toujours avec  $|\arg(h)| < \theta_0$ ).

*Étape 1 : égalité d'Agmon.* En développant les dérivées dans la relation  $v_h(x) = e^{-(1-\epsilon)x^2/2h} w_h(x)$ , on a

$$\begin{aligned} h v'_h &= (h w'_h - (1-\epsilon)x w_h) e^{-(1-\epsilon)x^2/2h} \\ h^2 v''_h &= (h^2 w''_h - h(1-\epsilon)w_h - 2(1-\epsilon)x h w'_h + (1-\epsilon)^2 x^2 w_h) e^{-(1-\epsilon)x^2/2h}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & -h^2 v''_h + x^2 v_h - \lambda_h v_h \\ &= \left( -h^2 w''_h + 2(1-\epsilon)x h w'_h + (1 - (1-\epsilon)^2)x^2 w_h - (\lambda_h - h(1-\epsilon))w_h \right) e^{-(1-\epsilon)x^2/2h}. \end{aligned}$$

En posant  $\delta^2 = 1 - (1-\epsilon)^2 > 0$  et avec  $\lambda_h = h + 2h\rho_h$ , on voit ainsi que  $w_h$  vérifie l'équation différentielle

$$-h^2 w''_h + 2(1-\epsilon)x h w'_h + \delta^2 x^2 w_h - h(\epsilon + 2\rho_h)w_h = 0. \quad (3.51)$$

On note  $h = |h|e^{i\theta}$ , et on multiplie l'équation différentielle (3.51) par  $e^{-i\theta}\overline{w_h}$  :

$$-|h|^2 e^{i\theta} w''_h \overline{w_h} + 2|h|(1-\epsilon)x w'_h \overline{w_h} + e^{-i\theta} \delta^2 x^2 |w_h|^2 - |h|(\epsilon + 2\rho_h)|w_h|^2 = 0. \quad (3.52)$$

On veut intégrer cette relation pour  $x \in ]-1, 1[$ . Regardons chacun des termes. Pour le premier terme, on a en intégrant par parties

$$-\int_{-1}^1 w''_h(x) \overline{w_h(x)} dx = \int_{-1}^1 |w'_h(x)|^2 dx.$$

Pour le second terme, on a  $2\Re(w'_h \overline{w_h}) = \frac{d}{dx} |w_h|^2$ , et donc par intégration par parties

$$2 \int_{-1}^1 x \Re(w'_h(x) \overline{w_h(x)}) dx = - \int_{-1}^1 |w_h(x)|^2 dx.$$

Donc, en intégrant (3.52) et en prenant la partie réelle, on a

$$\begin{aligned} & \cos(\theta) |h|^2 \int_{-1}^1 |w'_h(x)|^2 dx \\ & + \int_{-1}^1 (-|h|(1-\epsilon) + \cos(\theta)\delta^2 x^2 - |h|(\epsilon + 2\Re(\rho_h))) |w_h(x)|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

En rassemblant les termes, on réécrit cette relation en

$$|h|^2 \int_{-1}^1 |w'_h(x)|^2 dx + \int_{-1}^1 \left( \delta^2 x^2 - |h| \frac{1 + 2\Re(\rho_h)}{\cos(\theta)} \right) |w_h(x)|^2 dx = 0. \quad (3.53)$$

*Étape 2 : approximation naïve de  $w_h$  par une gaussienne.* On voit l'équation différentielle (3.51) vérifiée par  $w_h$  comme équation de la variable *complexe*  $x$ . On pose alors  $\tilde{w}_h(x) := w_h(\sqrt{h}x)$ . La fonction  $\tilde{w}_h$  vérifie le problème de Cauchy

$$-\tilde{w}_h'' + 2(1 - \epsilon)x\tilde{w}_h' + \delta^2 x^2 \tilde{w}_h - (\epsilon + 2\rho_h)\tilde{w}_h = 0, \quad \tilde{w}_h(0) = 1, \quad \tilde{w}_h'(0) = 0. \quad (3.54)$$

Or, d'après le Théorème 3.39, on a  $\rho_h = (\lambda_h - h)/2h \rightarrow 0$  dans la limite  $h \rightarrow 0$ ,  $|\arg(h)| < \theta_0$ . Donc, dans cette limite,  $\tilde{w}_h$  tend uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$  vers la solution  $\tilde{w}$  de

$$-\tilde{w}'' + 2(1 - \epsilon)x\tilde{w}' + \delta^2 x^2 \tilde{w} - \epsilon\tilde{w} = 0, \quad \tilde{w}(0) = 1, \quad \tilde{w}'(0) = 0.$$

La solution de ce problème de Cauchy est  $\tilde{w}(x) = e^{-\epsilon x^2/2}$  (rappelons que  $\delta^2 = 1 - (1 - \epsilon)^2$ ).

Donc, pour tout  $R > 0$ , il existe  $h'_0 > 0$  tel que pour tout  $|h| < h'_0$  avec  $|\arg(h)| < \theta_0$ ,

$$|\tilde{w}_h - e^{-\epsilon x^2/2}|_{L^\infty(|x| < R)} \leq 1.$$

Donc, sous les mêmes conditions, pour tout  $|x| < R$ ,  $|\tilde{w}_h(x)| \leq 2$ , et donc,

$$|w_h|_{L^\infty(|x| < \sqrt{|h|R})} \leq 2. \quad (3.55)$$

*Étape 3 : conclusion.* On définit l'ensemble

$$E_h := \left\{ x \in ]-1, 1[, \delta^2 x^2 - \frac{2|h|}{\cos(\theta_0)} \leq 0 \right\} = \left\{ |x| \leq \frac{\sqrt{2|h|}}{\delta \sqrt{\cos(\theta_0)}} \right\}.$$

Quitte à réduire  $h'_{\theta_0}$ , on peut supposer d'après le Théorème 3.39 que pour  $|h| < h'_{\theta_0}$  et  $|\arg(h)| < \theta_0$ , on a  $|\rho_h| < 1/2$ . Alors, pour  $x \in ]-1, 1[ \setminus E_h$ , on a  $\delta^2 x^2 - 2|h|/\cos(\theta_0) > 0$ . Donc, d'après l'égalité d'Agmon (3.53),  $|h|^2 |w'_h|_{L^2(-1,1)}^2 \leq C |w_h|_{L^2(E_h)}^2$ . Mais d'après l'étape 2, on a  $|w_h|_{L^2(E_h)}^2 \leq 4$ , donc  $|w'_h|_{L^2(-1,1)}^2 \leq 4Ch^{-2}$ .

Enfin, on a pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $|w_h(x) - w_h(0)| \leq |w'_h|_{L^1(-1,1)}$ , donc, d'après l'inégalité de Holder,  $|w_h(x) - w_h(0)| \leq \sqrt{2} |w'_h|_{L^2(-1,1)} \leq C|h|^{-1}$ .  $\square$

On réinterprète la Proposition 3.48 en terme de symboles :

**Corollaire 3.49.** *Soit  $0 < \epsilon \leq 1$ . Il existe une fonction croissante  $r : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que la famille de suites  $({}^\epsilon w(x))_{-1 < x < 1}$  définie par*

$${}^\epsilon w(x)(n) = v_{1/n}(x) e^{n(1-\epsilon)x^2/2}$$

*soit une famille bornée de  $\overline{\mathcal{S}}_r$ .*

*Remarque 3.50.* On rappelle qu'une famille  $(f_i)$  d'un espace vectoriel localement convexe, dont la topologie est définie par une famille de semi-normes  $(p_k)$ , est bornée si et seulement si pour tout  $k$ ,  $\sup_i p_k(f_i) < +\infty$ . Donc, d'après la définition de  $\overline{S}_r = \overline{S}_r(\mathbb{C})$  (Def. 3.14 et 3.6), le corollaire ci-dessus n'est qu'une reformulation de la Prop. 3.48 (quoiqu'un peu moins précise sur la croissance lorsque  $h \rightarrow 0$ ).

La proposition 3.48 nous donne une majoration de la fonction propre. On en donne maintenant une asymptotique, valable sur chaque segment  $[-1 + \epsilon, 1 - \epsilon]$ .

**Proposition 3.51.** *On note toujours  $v_h$  la fonction propre de  $P_h^b$  associée à la première valeur propre  $\lambda_h$ , normalisée par  $v_h(0) = 1$ . Soit  $w_h(x) = v_h(x)e^{x^2/2h}$ . Soit  $\theta \in ]0, \pi/2[$  et  $\epsilon > 0$ . On a uniformément en  $|x| < 1 - \epsilon$ ,*

$$w_h(x) \xrightarrow[\substack{|h| \rightarrow 0 \\ |\arg(h)| < \theta}]{} 1,$$

cette convergence étant exponentiellement rapide.

*Démonstration.* La démonstration consiste à écrire le développement en série entière de  $v_h(x)$ , et à reconnaître en ce développement une expression de la forme

$$w_h(x) = 1 + \rho_h H_{\gamma_h}(e^{x^2/2h} - 1). \quad (3.56)$$

(Voir Def. 3.1 pour la définition des opérateurs  $H_\gamma$ .) Alors, les estimations sur les opérateurs  $H_\gamma$  (Th. 3.27) vont nous permettre de conclure.

Comme dans la démonstration précédente, on note  $\lambda_h = h(1 + 2\rho_h)$ .

*Étape 1 : développement en série entière.* La fonction  $w_h$  vérifie le problème de Cauchy

$$-h^2 w_h'' + 2hxw_h' - 2h\rho_h w_h = 0, \quad w_h(0) = 1, \quad w_h'(0) = 0.$$

Donc, si on écrit  $w_h(x) = \sum_{n \geq 0} a_{h,n} x^n$ , on a  $a_{h,0} = 1$ ,  $a_{h,1} = 0$  et la relation de récurrence valable pour  $n \geq 0$  :

$$-h^2(n+1)(n+2)a_{h,n+2} + 2h(n-\rho_h)a_{h,n} = 0,$$

ou encore

$$a_{h,n+2} = \frac{2(n-\rho_h)}{h(n+1)(n+2)} a_{h,n}.$$

*Étape 2 : expression de la forme (3.56).* Par récurrence,  $a_{h,n} = 0$  si  $n$  est impair,  $a_{h,2} = -\rho_h/h$  et pour  $n \geq 1$ ,

$$a_{h,2n} = -2\rho_h \frac{4^{n-1}(n-1)!}{h^n(2n)!} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\rho_h}{2k}\right).$$

Alors, si on définit

$$\gamma_h(n) = -\frac{1}{2n} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \times \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\rho_h}{2k}\right),$$

on a  $a_{h,2n} = \rho_h \gamma_h(n) h^{-n}/n!$ . Auquel cas

$$w_h(x) = 1 + \rho_h \sum_{n \geq 1} \gamma_h(n) \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{h}\right)^n. \quad (3.57)$$

*Étape 3 : la famille  $(\gamma_h)$  est une famille bornée de symboles.* Désormais, on fixe  $\theta \in ]0, \pi/2[$ . Soit  $h_\theta > 0$  tel que  $\lambda_h$  (et aussi  $\rho_h$ ) soit défini pour  $|h| < h_\theta$ ,  $|\arg(h)| < \theta$ . Montrons que quitte à réduire  $h_\theta$ , la famille  $(\gamma_h)_{|h| < h_\theta, |\arg(h)| < \theta}$  est une famille bornée de  $\bar{\mathcal{S}}_{1,0} = \bar{\mathcal{S}}_{1,0}(\mathbb{C})$  (voir Def. 3.14 et 3.4).

Il faut pour cela réussir à étendre  $n \mapsto \gamma_h(n)$  en une fonction holomorphe à croissance sous-exponentielle sur  $\{\Re(z) > 1\}$ . Le terme  $-1/2n$  s'étend de manière évidente par  $-1/2z$ . Le terme  $4^n (n!)^2 / (2n)!$  s'étend grâce à la fonction  $\Gamma$  d'Euler, et la formule de Stirling donne la croissance sous-exponentielle (en fait un équivalent en  $\sqrt{\pi z}$ ). Le terme produit semble plus difficile à étendre, puisque cela demande de donner un sens à « un produit de  $z$  termes » lorsque  $z$  est complexe. On le fait par la formule suivante, inspirée par [67], et où on note  $\tau_h = -\rho_h/2$  :

$$\delta_h(z) := \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1 + \frac{\tau_h}{k}}{1 + \frac{\tau_h}{k+z-1}}. \quad (3.58)$$

Ce produit converge localement uniformément si  $\Re(z) > 1$  et  $|\tau_h| < 1/2$ . De plus, si  $z = n$  est entier, ce produit est télescopique, et on a alors  $\delta_h(n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \tau_h/k)$ . Enfin, on affirme qu'il existe  $c, C > 0$  tels que si  $\Re(z) > 1$  et  $|\tau_h| < 1/2$ , alors  $|\delta_h(z)| \leq C|z|^c$ . La démonstration de ce fait consiste en quelques calculs élémentaires ; terminons d'abord la démonstration de la Proposition 3.51.

Comme  $\tau_h = -\rho_h/2$ , quitte à réduire  $h_\theta$ , le Théorème 3.39 assure que si  $|\arg(h)| < \theta$  et  $|h| < h_\theta$ , alors  $|\tau_h| < 1/2$ . Auquel cas, d'après ce qui précède  $\delta_h(z)$  existe pour  $\Re(z) > 1$ , est holomorphe et  $|\delta_h(z)| < C|z|^c$ . Donc chaque  $\delta_h$  est dans  $\bar{\mathcal{S}}_{1,0}$ . De plus, la majoration  $|\delta_h(z)| < C|z|^c$  est uniforme en  $h$ , donc la famille  $(\delta_h)_{|h| < h_\theta, |\arg(h)| < \theta}$  est bornée dans  $\bar{\mathcal{S}}_{1,0}$ .

Comme la multiplication est continue dans  $\bar{\mathcal{S}}_{1,0}$  (Prop. 3.12), la famille de suites  $(\gamma_h)_{|h| < h_\theta, |\arg(h)| < \theta}$  est donc bornée dans  $\bar{\mathcal{S}}_{1,0}$ . Or  $\bar{\mathcal{S}}_{1,0}$  s'injecte continûment dans  $\bar{\mathcal{S}}_r$  avec  $r(\theta) = 1/\cos(\theta)$  (Rq. 3.11). Donc la famille est également bornée dans  $\bar{\mathcal{S}}_r$ .

*Étape 4 : conclusion.* Pour  $\eta > 0$ , on note  $U_\eta := \{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| < 1 - \epsilon + \eta, |\Im(z)| < \eta\}$ , qui est un voisinage complexe de  $[-1 + \epsilon, 1 - \epsilon]$ , et qui est étoilé en 0. Alors, d'après le

Théorème 3.27, pour tout  $\eta$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $|h| < h_\theta$  avec  $|\arg(h)| < \theta$  et pour tout  $x \in ]-1 + \epsilon, 1 - \epsilon[$ ,

$$|H_{\gamma_h}(e^{x^2/h} - 1)|_{L^\infty(-1+\epsilon, 1-\epsilon)} \leq C_\eta(1 + |e^{x^2/h}|_{L^\infty(U_\eta)}).$$

Si on choisit  $\eta$  assez petit, on trouve qu'avec  $\delta > 0$  assez petit,

$$|H_{\gamma_h}(e^{x^2/h} - 1)|_{L^\infty(-1+\epsilon, 1-\epsilon)} \leq C'|e^{(1-\delta)/h}|.$$

Enfin, d'après l'équation (3.56), on a pour  $|x| < 1 - \epsilon$  et  $|h| < h_\theta$ ,  $|\arg(h)| < \theta$ ,

$$|w_h(x) - 1| \leq C'|\rho_h||e^{(1-\delta)/h}|.$$

Alors, l'asymptotique sur  $\rho_h = (\lambda_h - h)/2h$  (Théorème 3.39) nous donne pour  $|x| < 1 - \epsilon$  et  $|h| < h_\theta$ ,  $|\arg(h)| < \theta$ ,

$$|w_h(x) - 1| \leq C''|h|^{-1/2}|e^{-\delta/h}|. \quad \square$$

On démontre maintenant que pour  $\Re(z) > 1$ ,  $|\delta_h(z)| \leq C|z|^c$ .

*Démonstration de  $|\delta_h(z)| \leq C|z|^c$ .* On commence par écrire

$$\delta_h(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\tau_h}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{\tau_h}{k+z-1}\right)\right). \quad (3.59)$$

On rappelle également qu'on suppose  $|\tau_h| < 1/2$  et  $\Re(z) > 1$ . On a alors pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $|\tau_h/k| < 1/2$  et  $|\tau_h/(k+z-1)| < 1/2$ .

On note  $k_0 = \lfloor |z_0| \rfloor$ , et on sépare la somme en une somme pour  $k \leq k_0$  et une somme pour  $k > k_0$  :

$$S_{\leq k_0} = \sum_{k=1}^{k_0} \ln\left(1 + \frac{\tau_h}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{\tau_h}{k+z-1}\right)$$

$$S_{> k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\tau_h}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{\tau_h}{k+z-1}\right)$$

Pour la partie de la somme pour  $k \leq k_0$ , on a d'après l'inégalité triangulaire et le fait que pour  $|x| < 1/2$ ,  $|\ln(1+x)| \leq c|x|$ ,

$$|S_{\leq k_0}| \leq 2c|\tau_h| \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{k}.$$

Donc, d'après la comparaison entre la somme harmonique et le logarithme

$$|S_{\leq k_0}| \leq 2c|\tau_h|(\ln(k_0) + C').$$

Et comme  $k_0 = \lfloor |z| \rfloor$ , on en déduit

$$|S_{\leq k_0}| \leq 2c|\tau_h|(\ln(|z|) + C'). \quad (3.60)$$

En ce qui concerne la somme pour  $k > k_0$ , on a en écrivant  $\ln(1+b) - \ln(1+a) = \int_a^b \frac{dx}{1+x}$ ,

$$|S_{>k_0}| \leq \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \left| \int_{\tau_h/k}^{\tau_h/(k+z-1)} \frac{dx}{1+x} \right|.$$

Or, pour  $x \in \left[ \frac{\tau_h}{k}, \frac{\tau_h}{k+z-1} \right]$ , on a  $\left| \frac{1}{1+x} \right| \leq 2$ , donc

$$|S_{>k_0}| \leq \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} 2 \left| \frac{\tau_h}{k} - \frac{\tau_h}{k+z-1} \right| \leq 2|\tau_h|(z-1) \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

En comparant cette somme avec une intégrale, on a donc

$$|S_{>k_0}| \leq 2|\tau_h|(z-1) \int_{k_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq 2|\tau_h| \frac{|z-1|}{k_0} \leq C''|\tau_h|, \quad (3.61)$$

où on a encore utilisé le fait que  $k_0 = \lfloor |z| \rfloor$ .

En sommant les deux majorations (3.60) et (3.61), on a

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{\tau_h}{k} \right) - \ln \left( 1 + \frac{\tau_h}{k+z-1} \right) \right| \leq 2c|\tau_h|(\ln(|z|) + C''').$$

Ce qui, avec l'expression (3.59) de  $\delta_h$ , démontre bien que  $|\delta_h(z)| \leq e^{cC'''} |z|^c$ .  $\square$

### 3.3 Analyse spectrale de l'opérateur d'Airy

L'oscillateur harmonique apparaît naturellement lorsque qu'on étudie l'équation de Grushin ou l'équation de Kolmogorov  $\partial_t - \partial_v^2 + v^2 \partial_x$ . Si on étudie l'équation de Kolmogorov  $\partial_t - \partial_v^2 + v \partial_x$ , c'est l'opérateur  $-\partial_v^2 + i\xi v$  qui apparaît, où  $\xi \in \mathbb{R}$ , qui est relié à l'opérateur d'Airy  $-\partial_x^2 + x$ .

#### 3.3.1 Opérateur d'Airy sur une demi-droite

Les résultats de cette sous-section sont essentiellement extraits du livre de Helffer [47, Sec. 14.5].

Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $\Re(z) > 0$ . On note  $\mathcal{A}_z$  l'opérateur de domaine

$$D(\mathcal{A}_z) := \{f \in H_0^1(\mathbb{R}^+), \sqrt{x}f \in L^2(\mathbb{R}_+), (-\partial_x^2 + zx)f \in L^2(\mathbb{R}^+)\},$$

défini par  $\mathcal{A}_z f = (-\partial_x^2 + zx)f$ . Comme pour l'oscillateur harmonique, on est surtout intéressé par la première valeur propre de  $\mathcal{A}_z$ . Pour l'étudier, on introduit la *fonction d'Airy*.

**Définition 3.52.** On appelle *fonction d'Airy*, et on note  $\text{Ai}$  la transformée de Fourier inverse de  $\xi \mapsto e^{i\xi^3/3}$ .

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes [71, Ch. 9] :

**Proposition 3.53.** *La fonction  $\text{Ai}$  vérifie l'équation différentielle  $-\text{Ai}''(x) + x\text{Ai}(x) = 0$ . Elle est positive sur  $[0, +\infty[$ , et ses zéros forment une suite décroissante tendant vers  $-\infty$ . Elle est entière, et pour tout  $\delta > 0$ , on a dans la limite  $|z| \rightarrow +\infty$  l'asymptotique valable sur le secteur  $\{|\arg(z)| < \pi - \delta\}$*

$$\text{Ai}(z) = \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} (1 + O(z^{-3/2})) \quad \text{et} \quad \text{Ai}'(z) = \frac{z^{1/4}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}} (1 + O(z^{-3/2})). \quad (3.62)$$

Ces asymptotiques peuvent se déduire d'une représentation intégrale de  $\text{Ai}$  (essentiellement celle obtenue en écrivant la transformée de Fourier inverse de  $e^{i\xi^3/3}$  grâce à la méthode du point col.

Grâce à la fonction d'Airy, on peut donner des fonctions propres de  $\mathcal{A}_z$ .

**Proposition 3.54.** *Soit  $-\mu$  un des zéros de la fonction d'Airy (on rappelle qu'ils sont négatifs). Alors  $x \mapsto \text{Ai}(z^{1/3}x - \mu)$  est une fonction propre de l'opérateur  $\mathcal{A}_z$ , de valeur propre  $z^{2/3}\mu$ . Ces valeurs propres sont simples.*

*Démonstration.* On note  $f(x) = \text{Ai}(z^{1/3}x - \mu)$ . Comme  $\mu$  est un zéro de  $\text{Ai}$ , on a  $f(0) = 0$ . De plus, d'après l'équation différentielle vérifiée par  $\text{Ai}$ , on a

$$f''(x) = z^{2/3} \text{Ai}''(z^{1/3}x - \mu) = z^{2/3}(z^{1/3}x - \mu) \text{Ai}(z^{1/3}x - \mu) = (zx - z^{2/3}\mu)f(x).$$

Donc  $f$  vérifie l'équation différentielle  $-f'' + zxf = z^{2/3}\mu f$ . D'après l'asymptotique (3.62) vérifiée par la fonction d'Airy,  $f$  décroît exponentiellement lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . Il en est de même pour  $f'$ . Avec  $f(0) = 0$ , ceci démontre que  $f \in H_0^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $\sqrt{x}f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ , et l'équation différentielle vérifiée par  $f$  montre que  $(-\partial_x^2 + zx)f \in L^2$ . Autrement dit,  $f \in D(\mathcal{A}_z)$  et  $\mathcal{A}_z f = z^{2/3}\mu f$ .

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions propres de  $\mathcal{A}_z$  associées à la même valeur propre  $\lambda$ , alors  $f$  vérifie  $f(0) = 0$  et  $-f'' + (zx - \lambda)f = 0$  (et de même pour  $g$ ). Donc  $f$  et  $f'(0)g'(0)^{-1}g(x)$  vérifient le même problème de Cauchy, et sont donc égales.  $\square$

*Remarque 3.55.* On pourrait en fait démontrer que le spectre de  $\mathcal{A}_z$  n'est formé que de ces valeurs propres.





# 4 | Contrôlabilité de l'équation de Grushin

**A**PRÈS cet intermède technique, nous sommes enfin capables de traiter les équations de Grushin et de Kolmogorov. On commence par la première. Si on considère le cas où l'équation de Grushin est posée pour  $x \in \mathbb{R}$ , des expressions simples et explicites de certaines fonctions propres permettent de « plonger » l'équation de la demi-chaleur dans l'équation de Grushin. La démonstration de la non-contrôlabilité est alors une simple adaptation du cas de la demi-chaleur. Mais si le domaine est borné en  $x$ , on aura besoin de tous les résultats du chapitre précédent pour traiter les perturbations des fonctions propres par rapport au cas non-borné.

## 4.1 Généralités

L'équation de Grushin est l'équation suivante :

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2) f(t, x, y) = \mathbb{1}_\omega u(t, x, y), & t \in ]0, T[, (x, y) \in \Omega \\ f(t, x, y) = 0, & t \in ]0, T[, (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

On étudiera le cas où  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$  avec  $\Omega_x = \mathbb{R}$  ou  $] -1, 1[$  et  $\Omega_y = \mathbb{T}$  ou  $]0, \pi[$ . Commençons par définir ce qu'on entend par solution de l'équation de Grushin et montrons qu'elle est bien posée.

### 4.1.1 Caractère bien posé

Il faut d'abord donner le domaine de l'opérateur  $-\partial_x^2 - x^2 \partial_y^2$ . Si  $f, g \in L^2(\Omega) \cap \{\partial_x f \in L^2, x \partial_y f \in L^2\}$ , on définit

$$a(f, g) := \langle \partial_x f, \partial_x g \rangle_{L^2} + \langle x \partial_y f, x \partial_y g \rangle_{L^2}.$$

On considère alors  $V$  le complété séparé de  $C_c^\infty(\Omega)$  pour la norme  $|\cdot|_V$  définie par  $\|f\|_V^2 := \|f\|_{L^2}^2 + a(f, f)$ . Toute suite de Cauchy pour la norme  $|\cdot|_V$  est de Cauchy dans  $L^2$ , donc  $V$  est un sous-espace de  $L^2$ , avec injection continue. La forme bilinéaire  $a$  s'étend par continuité à une forme bilinéaire continue sur  $V$ , qu'on notera toujours  $a$ . L'espace  $V$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $\langle f, g \rangle_V := \langle f, g \rangle_{L^2} + a(f, g)$ . Enfin,  $V$  contient  $C_c^\infty(\Omega)$ , donc  $V$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ .

Alors on considère l'opérateur  $A$  de domaine

$$D(A) := \{f \in V, \exists C > 0, \forall g \in V, |a(f, g)| \leq C \|g\|_{L^2}\},$$

et tel que pour  $f \in D(A)$ ,  $Af$  soit l'unique  $u \in L^2$  tel que pour tout  $g \in V$ ,  $\langle u, g \rangle_{L^2} = -a(f, g)$ .

**Proposition 4.1.** *L'opérateur  $A$  défini ci-dessus est symétrique maximal dissipatif.*

*Démonstration.* Si  $f \in D(A)$ , on a  $\langle Af, f \rangle_{L^2} = -a(f, f) = -|\partial_x f|^2 - |x\partial_y f|_{L^2}^2 \leq 0$ . Donc  $A$  est dissipatif. Si  $f, g \in D(A)$ , on a

$$\langle Af, g \rangle_{L^2} = -a(f, g) = -a(g, f) = \langle Ag, f \rangle_{L^2} = \langle f, Ag \rangle_{L^2}.$$

Donc  $A$  est symétrique. Montrons qu'il est maximal dissipatif, c.-à-d. que  $\text{Im}(I - A) = L^2$ .

Soit  $g \in L^2$ . La forme linéaire  $h \in V \mapsto \langle g, h \rangle_{L^2}$  est continue sur  $V$ . Donc, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe  $f \in V$  tel que pour tout  $h \in V$ ,  $\langle f, h \rangle_V = \langle g, h \rangle_{L^2}$ . Alors, par définition du produit scalaire sur  $V$ , on a pour tout  $h \in V$ ,  $\langle f, h \rangle_{L^2} + a(f, h) = \langle g, h \rangle_{L^2}$ . On en déduit que  $h \in V \mapsto a(f, h)$  est continue pour la norme  $L^2$ , c.-à-d. que  $f \in D(A)$ . Alors, on a pour tout  $h \in V$ ,  $\langle (I - A)f, h \rangle_{L^2} = \langle g, h \rangle_{L^2}$ . Donc  $f \in D(A)$  est solution de  $(I - A)f = g$ . On a bien montré que  $\text{Im}(I - A) = L^2$ .  $\square$

D'après le Théorème de Hille-Yosida (Th. A.4 et A.7), on en déduit que  $A$  génère un semi-groupe de contraction.

**Proposition 4.2.** *L'opérateur  $A$  est autoadjoint et génère un semigroupe fortement continu de contractions.*

Alors, on définit les solutions de l'équation de Grushin grâce à la définition A.5 générale pour les semi-groupes. On montre que ces solutions faibles sont dans  $L^2([0, T]; V)$ .

**Proposition 4.3.** *Soit  $f_0 \in L^2(\Omega)$  et  $u \in L^2([0, T]; \Omega)$ , alors la solution faible  $f$  de  $\partial_t - Af = u$  est dans  $L^2([0, T]; V)$ .*

*Démonstration.* Étape 1 :  $u = 0$ . Dans le cas où  $u = 0$ , on a  $f(t, x, y) = e^{tA} f_0(x, y)$ . Comme  $A$  est auto-adjoint, on a d'après le Théorème A.7

$$f \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1(]0, T[, L^2(\Omega)) \cap C^0(]0, T[, D(A)).$$

On prend le produit scalaire de l'équation  $\partial_t f = Af$  avec  $f$ , et on trouve pour tout  $t > 0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |f(t)|_{L^2}^2 = \langle Af(t), f(t) \rangle_{L^2},$$

où on note par simplicité  $f(t) := f(t, \cdot, \cdot)$ . Soit  $\epsilon > 0$ . En intégrant sur  $[\epsilon, T]$ , on en déduit

$$\frac{1}{2} |f(T)|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} |f(\epsilon)|_{L^2}^2 = \int_{\epsilon}^T \langle Af(t), f(t) \rangle_{L^2} dt.$$

Or,  $\langle Af(t), f(t) \rangle_{L^2} = -a(f(t), f(t)) = -|f(t)|_V^2 + |f(t)|_{L^2}^2$ , donc, en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 (rappelons que  $f \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$ ), on a

$$\frac{1}{2}|f(T)|_{L^2}^2 + \int_0^T |f(t)|_V^2 dt = \frac{1}{2}|f_0|_{L^2}^2 + \int_0^T |f(t)|_{L^2}^2 dt.$$

On a donc bien  $f \in L^2([0, T]; V)$ . De plus, comme  $e^{tA}$  est un semi-groupe de contractions, cette inégalité nous donne

$$\int_0^T |e^{tA} f_0|_V^2 dt \leq (T + \frac{1}{2})|f_0|_{L^2}^2. \quad (4.2)$$

*Étape 2 : cas général.* On passe maintenant au cas où  $u \neq 0$ . D'après la formule de Duhamel (voir Prop. A.6), on a

$$f(t) = e^{tA} f_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} u(s) ds,$$

où on a encore noté  $u(s) := u(s, \cdot, \cdot)$ . D'après le cas  $u = 0$  (Eq. (4.2)), on a  $e^{tA} f_0 \in L^2([0, T]; V)$ . On se concentre donc sur le second terme

$$I(t) := \int_0^t e^{(t-s)A} u(s) ds.$$

Notons que, toujours d'après le cas  $u = 0$  (Eq. (4.2)), dès que  $u(s) \in L^2(\Omega)$  et  $t > s$ , on a  $e^{(t-s)A} u(s, \cdot) \in V$ . Alors, on a en notant  $|g|_V = +\infty$  si  $g \notin V$ ,

$$\begin{aligned} |I|_{L^2([0, T]; V)}^2 &= \int_0^T |I(t)|_V^2 dt = \int_0^T \left| \int_0^t e^{(t-s)A} u(s) ds \right|_V^2 dt \\ &\leq \int_0^T \left( \int_0^t |e^{(t-s)A} u(s)|_V ds \right)^2 dt \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \int_0^T t \int_0^t |e^{(t-s)A} u(s)|_V^2 ds dt \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq T \int_{[0, T]^2} \mathbb{1}_{s < t} |e^{(t-s)A} u(s)|_V^2 dt ds \quad (\text{théorème de Fubini et } t \leq T) \\ &= T \int_0^T |e^{tA} u(s)|_{L^2([0, T-s]; V)}^2 ds \quad (\text{théorème de Fubini}) \\ &\leq T \int_0^T (T - s + \frac{1}{2}) |u(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \quad (\text{Eq. (4.2)}) \\ &\leq T(T + \frac{1}{2}) |u|_{L^2([0, T] \times \Omega)}^2. \end{aligned}$$

Donc on a bien  $I \in L^2([0, T]; V)$ , et donc également  $f \in L^2([0, T]; V)$ , avec

$$|f|_{L^2([0, T]; V)} \leq \sqrt{T + \frac{1}{2}} |f_0|_{L^2} + \sqrt{T(T + \frac{1}{2})} |u|_{L^2([0, T] \times \Omega)}. \quad \square$$

Terminons cette introduction en donnant l'inégalité d'observabilité associée au problème de contrôlabilité de l'équation de Grushin. Comme l'opérateur de Grushin est auto-adjoint, l'inégalité d'observabilité est d'après la Proposition A.8 la suivante :

**Proposition 4.4.** *On a l'équivalence entre les deux affirmations suivantes :*

1. *pour tout  $f_0 \in L^2(\Omega)$ , il existe  $u \in L^2([0, T] \times \omega)$  tel que la solution  $f$  de l'équation de Grushin (4.1) et avec condition initiale  $f(0, \cdot, \cdot) = f_0$  vérifie  $f(T) = 0$ ;*
2. *il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in L^2(\Omega)$ , la solution  $g$  de*

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2)g(t, x, y) = 0, & t \in ]0, T[, (x, y) \in \Omega \\ g(t, x, y) = 0, & t \in ]0, T[, (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

*avec condition initiale  $g(0, \cdot, \cdot) = g_0$  vérifie*

$$|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq M \int_{[0, T] \times \omega} |g(t, x, y)|^2 dt dx dy. \quad (4.4)$$

### 4.1.2 Composantes de Fourier

Soit  $(e_n)_n$  une suite orthonormée de  $L^2(\Omega_y)$  de fonctions propres de  $-\partial_y^2$ , c.-à-d.  $e_n(y) = (2\pi)^{-1} e^{iny}$  si  $\Omega_y = \mathbb{T}$  et  $e_n(y) = \sqrt{2} \sin(ny)$  si  $\Omega_y = ]0, \pi[$  (on indexe  $(e_n)_n$  par  $n \in \mathbb{Z}$  si  $\Omega_y = \mathbb{T}$  et par  $n \in \mathbb{N}^*$  si  $\Omega_y = ]0, \pi[$ ). La valeur propre associée à  $e_n$  est  $n^2$ .

Si  $f(t, x, y)$  est une solution de l'équation de Grushin, on l'écrit sous la forme

$$f(t, x, y) = \sum_n f_n(t, x) e_n(y),$$

avec  $f_n(t, x) = (e_n, f(t, x, \cdot))_{L^2(\Omega_x)}$ . Formellement, on a alors

$$(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2) f(t, x, y) = \sum_n (\partial_t - \partial_x^2 + n^2 x^2) f_n(t, x) e_n(y).$$

Donc, toujours formellement,  $(\partial_t - \partial_x^2 + (nx)^2) f_n(t, x) = u_n(t, x)$ , où  $u_n(t, x) = (u(t, x, \cdot), e_n)_{L^2(\Omega_y)}$ . Montrons ceci rigoureusement, au moins dans le cas où il n'y a pas de second membre, qui est en fait le seul cas dont nous aurons besoin.

Pour  $n \neq 0$ , on considère  $A_n = -\partial_x^2 + (nx)^2$ , qui est oscillateur harmonique avec pour domaine celui défini à la Section 3.2. Pour  $n = 0$ , on note  $A_0 = -\partial_x^2$ , de domaine  $H^2(\Omega_x) \cap H_0^1(\Omega_x)$ .

**Proposition 4.5.** Soit  $g_0 \in L^2(\Omega)$  et  $g$  l'unique solution faible de l'équation de Grushin libre (4.3) avec condition initiale  $g_0$ . Pour tout  $n$ , soit  $g_n \in L^2([0, T] \times \Omega_x)$  définie pour tout  $t \in [0, T]$  et pour presque tout  $x \in \Omega_x$  par  $g_n(t, x) = \langle g(t, x, \cdot), e_n \rangle_{L^2(\Omega_y)}$ . Alors  $g_n(t, \cdot) = e^{-tA_n} g_n(0, \cdot)$ .

*Démonstration.* Supposons pour commencer que  $g_0$  soit de la forme  $g_{0n}(x)e_n(y)$ . Soit  $g_1(t, x) = e^{-tA_n} g_{0n}(x)$  la solution faible de  $(\partial_t - \partial_x^2 + (nx)^2)g_1 = 0$  avec condition initiale  $g_{0n} \in C_c^\infty(\Omega_x)$ . Comme cette équation est parabolique, la solution faible est  $C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ , et est donc une solution forte.

On définit alors  $\tilde{g}(t, x, y) = g_1(t, x)e_n(y)$ . Alors, la fonction  $\tilde{g}$  est  $C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ , et on a

$$(\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2) \tilde{g} = 0.$$

De plus,  $\tilde{g}$  est nulle sur le bord de  $\Omega$  (si non vide), parce que  $g_1$  est nulle sur  $\partial\Omega_x$  et  $e_n$  est nulle sur  $\partial\Omega_y$ . Donc  $\tilde{g}$  est solution forte de l'équation de Grushin. On affirme également que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\tilde{g}(t, \cdot, \cdot) \in D(A)$ . On a  $g_{0n} \in C_c^\infty(\Omega_x)$ . Donc, d'après la définition de  $g_1$  et la Proposition A.2, pour tout  $t$ ,  $g_1(t, \cdot) \in D(A_n)$ . Rappelons que  $D(A_n) = H^2 \cap H_0^1$  si  $\Omega_x = ]-1, 1[$ ,  $D(A_n) = \{f \in H^2, x^2 f \in L^2\}$  si  $\Omega_x = \mathbb{R}$  et  $n > 0$ , et  $D(A_0) = H^2$  si  $\Omega_x = \mathbb{R}$  et  $n = 0$ . Alors, grâce à un argument de troncature, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\tilde{g}(t, \cdot, \cdot) \in V$ , et grâce à une intégration par partie,  $\tilde{g}(t, \cdot, \cdot) \in D(A)$ .

On considère alors  $h(t) = \tilde{g}(t, \cdot, \cdot) - e^{-tA} g_0$ , et on veut montrer que  $h(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . D'après ce qui précède, on a pour tout  $t$ ,  $h(t) \in D(A)$ , et  $h$  vérifie au sens des distributions

$$\partial_t h(t) + Ah(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad h(0) = 0,$$

ainsi que les conditions aux bords  $h(t) = 0$  sur  $\partial\Omega$  (dans le sens où  $h(t) \in D(A) \subset V$ ). On veut montrer que  $h(t) = 0$ . Comme  $g_{0n} \in D(A_n)$ , d'après la Proposition A.2, l'application  $t \mapsto e^{-tA_n} g_{0n}$  est  $C^1([0, T]; L^2(\Omega_x))$ , donc  $t \mapsto \tilde{g}(t, \cdot, \cdot)$  est dans  $C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ . De plus  $g_0 \in D(A)$ , donc, toujours d'après la Proposition A.2, l'application  $t \mapsto e^{-tA} g_0$  est dans  $C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ . Donc la fonction  $h$  est  $C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ . On a alors

$$\frac{d|h(t)|_{L^2}^2}{dt} = \frac{d}{dt} \langle h(t), h(t) \rangle_{L^2} = 2 \langle h'(t), h(t) \rangle_{L^2} = 2 \langle Ah(t), h(t) \rangle_{L^2} \leq 0$$

car  $A$  est dissipatif. On a de plus  $h(0) = 0$ , donc, d'après le lemme de Gronwall,  $|h(t)|_{L^2}^2$  est toujours nul. Ceci démontre bien que  $e^{-tA}(g_{0n}(x)e_n(y)) = (e^{-tA_n} g_{0n}(x))e_n(y)$ .

Par linéarité, le cas  $g_0(x, y) = g_{0n}(x)e_n(y)$  montre la Proposition 4.5 pour les sommes finies de la forme  $g_0(x, y) = \sum_n g_{0n}(x)e_n(y)$ . Alors, on étend la formule par densité.  $\square$

Une Proposition reliée est qu'on peut donner explicitement les fonctions propres.

**Proposition 4.6.** *Si  $n > 0$  ou si  $\Omega_x = ]-1, 1[$ , soit  $(v_{nk})_{k \geq 0}$  une base orthonormée de fonctions propres de  $A_n$ , de valeurs propres respectives  $(\lambda_{nk})_k$ . Alors la fonction  $\Phi_{nk}$  définie par*

$$\forall (x, y) \in \Omega, \Phi_{n,k}(x, y) = v_{nk}(x)e_n(y)$$

*est fonction propre de l'opérateur de Grushin  $A$ , de valeur propre associée  $\lambda_{nk}$ . La famille  $(\Phi_{nk})_{n,k}$  est une famille orthonormée de  $L^2(\Omega)$ .*

*Démonstration.* On calcule  $A\Phi_{nk}$  :

$$\begin{aligned} A\Phi_{nk}(x, y) &= -(\partial_x^2 + x^2\partial_y^2)v_{nk}(x)e_n(y) \\ &= -v_{nk}''(x)e_n(y) - x^2v_{nk}(x)e_n''(y) \\ &= (-v_{nk}''(x) + (nx)^2v_{nk}(x))e_n(y) \\ &= \lambda_{nk}v_{nk}(x)e_n(y) = \lambda_{nk}\Phi_{nk}(x, y). \end{aligned}$$

Le fait que  $(\Phi_{nk})_{n,k}$  soit orthonormée découle de fait que  $(e_n)_n$  soit orthonormée, et que pour tout  $n$ ,  $(v_{nk})_k$  soit orthonormée.  $\square$

*Remarque 4.7.* Si  $\Omega_x = \mathbb{R}$ , on a  $A_0 = -\partial_x^2$ , avec domaine  $D(A_0) = H^2(\mathbb{R})$ , donc  $A_0$  n'est pas à résolvante compacte, et son spectre est en fait  $\mathbb{R}_+$ . En conséquence, si  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ , le spectre de  $A$  n'est pas uniquement constitué de valeurs propres et la famille  $(\Phi_{nk})_{n,k}$  définie ci-dessus n'est pas une base de  $L^2(\Omega)$ . En revanche, dans les autres cas, la famille  $(\Phi_{nk})_{n,k}$  est bien une base de  $L^2(\Omega)$ .

### 4.1.3 Inégalité spectrale

L'opérateur de Grushin vérifie l'inégalité spectrale suivante :

**Théorème 4.8.** *Si  $\Omega = ]-1, 1[ \times \Omega_y$  (c.-à-d.  $\Omega_x = ]-1, 1[$ ) et si  $\omega \subset \Omega$  est un ouvert non vide, il existe  $C > 0$  tels que pour toute suite complexe  $(a_{nk})_{n,k}$  et tout  $\mu > 0$ ,*

$$\sum_{\lambda_{nk} \leq \mu} |a_{nk}|^2 \leq Ce^{C\mu} \int_{\omega} \left| \sum_{\lambda_{nk} \leq \mu} a_{nk} \Phi_{nk}(x, y) \right|^2 dx dy.$$

Cette inégalité spectrale à été démontrée dans un mémoire de master [52], mais comme il est non publié, nous donnons ici les idées de la démonstration. Cependant, cette inégalité spectrale ne nous servira pas, nous resterons donc succinct (voire elliptique), et nous laisserons le lecteur combler les trous.

L'idée de la démonstration est de démontrer une inégalité spectrale pour chaque oscillateur harmonique  $A_n = -\partial_x^2 + (nx)^2$ , en estimant les constantes en fonction de  $n$ , et de combiner ces inégalités spectrales en une inégalité pour l'opérateur de Grushin.

Pour démontrer les inégalité spectrales sur  $A_n$ , nous suivons la démonstration de Lebeau [58] (voir aussi [56]). La première étape est de démontrer une inégalité de Carleman sur les opérateurs  $B_n = -\partial_s^2 + A_n = -\partial_s^2 - \partial_x^2 + (nx)^2$ .

**Proposition 4.9.** *Soit  $V$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\psi$  une fonction  $C^\infty$  telle que  $\nabla\psi$  ne s'annule pas sur  $\bar{V}$ . Alors, si  $D > 0$  et  $D' > 0$  sont assez grands, il existe  $h_1 > 0$  et  $C > 0$  tels qu'avec  $\phi = D'e^{D\psi}$ , pour toute fonction  $u \in C_c^\infty(V)$ , pour tout  $n \geq 0$  et  $h \leq h_1/(n+1)$*

$$h|e^{\phi/h}u|_{L^2(V)}^2 + h^3|e^{\phi/h}\nabla u|_{L^2(V)}^2 \leq Ch^4|e^{\phi/h}B_n u|_{L^2(V)}^2.$$

Ceci se fait en considérant l'opérateur conjugué  $Q_{h,n} = h^2 e^{\phi/h}(B_n)e^{-\phi/h}$ . Or, on a  $B_n = -\partial_s^2 - \partial_x^2 + (nx)^2$ , donc  $Q_{h,n} = h^2 e^{\phi/h}(-\partial_s^2 - \partial_x^2)e^{-\phi/h} + (nhx)^2$ . Donc, dans le régime  $h < h_1/(n+1)$ , le terme  $(nhx)^2$  reste borné, et donc  $Q_{h,n}$  est une perturbation bornée de l'opérateur conjugué au laplacien :

$$Q_{h,n} = Q_{h,0} + \text{borné.}$$

Or, le laplacien vérifie l'inégalité de Carleman annoncée, qui peut s'écrire

$$h|u|_{L^2(V)}^2 + h^3|\nabla u|_{L^2(V)}^2 \leq C|Q_{h,0}u|_{L^2(V)}^2,$$

inégalité qui est valable dès que  $D$  et  $D'$  sont assez grand, et si  $h > 0$  est assez petit (dépendant de  $D, D'$ ) et si  $u \in C_c^\infty(V)$ . Il s'agit alors d'examiner la démonstration de cette inégalité et de se rendre compte qu'on peut ajouter une perturbation bornée, assez petite, à  $Q_{h,0}$  tout en gardant cette inégalité de Carleman. Ceci démontre l'inégalité de Carleman annoncée.

On adapte aussi les inégalités de Carleman aux bords [58, Th. 3.5] pour la famille d'opérateurs  $B_n$ , toujours valables dans le régime  $h \leq h_1/(n+1)$ . Muni de ces inégalités de Carleman, on démontre une inégalité d'interpolation.

**Proposition 4.10.** *Soit  $I \subset ]a, b[$  un intervalle ouvert borné de  $\mathbb{R}$ , soit  $s_0 > 0$  et  $\alpha \in ]0, \alpha/2[$ . Soit  $Z = ]0, s_0[ \times I$  et  $Y = ]\alpha, s_0 - \alpha[ \times I$ . Soit  $\omega$  un ouvert non vide de  $I$ . Il existe  $C > 0, K > 0$  et  $\delta \in ]0, 1[$  tels que pour tout  $n \geq 0$  et pour toute fonction  $u \in H^2(Z)$  telle que  $\forall s \in ]0, s_0[, u(s, a) = u(s, b) = 0$  et  $\forall x \in I, u(0, x) = 0$ , on a*

$$|u|_{H^1(Y)} \leq Ce^{Kn}|u|_{H^1(Z)}^{1-\delta}(|B_n u|_{L^2(Z)} + |\partial_s u(0, \cdot)|_{L^2(\omega)})^\delta.$$

On sait que chaque opérateur uniformément elliptique vérifie ce genre d'inégalité d'interpolation [58, Th. 5.1]. L'originalité ici est de montrer que la constante de cette inégalité est en  $O(e^{Kn})$ . Ceci se fait en suivant la valeur des constantes dans la démonstration.

On commence par démontrer grâce aux inégalités de Carleman aux bords des inégalités de la forme

$$|u|_{H^1(V)} \leq C'(e^{-\alpha/h}|u|_{H^1(Z)} + e^{\beta/h}\Theta_n),$$

où  $\Theta_n := |B_n u|_{L^2(Z)} + |\partial_s u(s, \cdot)|_{L^2(\omega)}$ , et où  $V$  est un voisinage assez petit de  $(s, x) \in ]0, s_0[ \times \omega$  avec  $s$  assez petit. Il s'agit ensuite d'optimiser en  $h$  cette inégalité. Comme



cette inégalité n'est valable que pour  $h \leq h_0(n) := h_1/(n+1)$ , l'optimisation nous donne une inégalité de la forme

$$|u|_{H^1(V)} \leq C e^{K/h_0(n)} |u|_{H^1(Z)}^\delta \Theta_n^{1-\delta}.$$

On propage ensuite ces inégalités grâce aux autres inégalités de Carleman, ce qui donne bien l'inégalité d'interpolation annoncée.

Enfin, on déduit de cette inégalité d'interpolation l'inégalité spectrale pour  $A_n$ .

**Proposition 4.11.** *Soit  $\omega$  un ouvert non vide de  $] -1, 1[$ . Il existe  $C > 0$  et  $K > 0$  tels que pour tout  $n \geq 0$ , pour tout  $\mu > 0$  et pour toute suite  $(a_k)$  de nombre complexes,*

$$\sum_{k|\lambda_{nk} \leq \mu} |a_k|^2 \leq C e^{K(n+\sqrt{\mu})} \int_{\omega} \left| \sum_{k|\lambda_{nk} \leq \mu} a_k v_{nk}(x) \right|^2 dx.$$

Cette propriété se démontre de la même manière que l'inégalité spectrale pour le laplacien, en appliquant l'inégalité d'interpolation à la fonction  $u(s, x) = \sum_k a_k (\lambda_{nk})^{-1/2} \text{sh}(s\sqrt{\lambda_{nk}}) v_{nk}(x)$ .

Pour combiner ces inégalités spectrales, on commence par remarquer que si  $\omega \subset \Omega$  est un ouvert non-vidé, il existe  $a < b$  et  $c < d$  tels que  $]a, b[ \times ]c, d[ \subset \omega$ .

On choisit d'ordonner les valeurs propres de  $A_n$ , de sorte que  $\lambda_{n0}$  soit la plus petite. D'après le Théorème 3.39, cette plus petite valeur propre  $\lambda_{n0}$  est équivalente à  $n$  (dans la limite  $n \rightarrow +\infty$ ), et donc il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $n$  et  $k$ ,  $\lambda_{nk} \geq cn$ . En particulier, dans toutes les sommes  $\sum_{\lambda_{nk} \leq \mu}$ , les seules valeurs de  $n$  qui interviennent sont inférieures à  $c^{-1}\mu$ .

Avec ces informations, on combine les inégalités spectrales des  $A_n$  en exploitant le théorème de Fubini et le fait que les  $(e_n)$  forment une base orthonormée de  $L^2(\Omega_y)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \sum_{n,k|\lambda_{nk} \leq \mu} a_{nk} v_{nk}(x) e_n(y) \right|^2 dx &= \sum_{n|\lambda_{n0} \leq \mu} \int_{\Omega_x} \left| \sum_{k|\lambda_{nk} \leq \mu} a_{nk} v_{nk}(x) \right|^2 dx \\ &\leq C e^{K'\mu} \sum_{n|\lambda_{n0} \leq \mu} \int_a^b \left| \sum_{k|\lambda_{nk} \leq \mu} a_{nk} v_{nk}(x) \right|^2 dx \\ &= C e^{K'\mu} \int_{]a,b[ \times \Omega_y} \left| \sum_{n,k|\lambda_{nk} \leq \mu} a_{nk} v_{nk}(x) e_n(y) \right|^2 dx dy. \end{aligned}$$

On conclut grâce à l'inégalité spectrale pour l'opérateur  $-\partial_y^2$  appliquée à la suite complexe  $a_n(x) := \sum_{k|\lambda_{nk} \leq \mu} a_{nk} v_{nk}(x)$  :

$$\int_{\Omega_y} \left| \sum_{n,k|\lambda_{nk} \leq \mu} a_{nk} v_{nk}(x) e_n(y) \right|^2 dy \leq C e^{K\mu} \int_c^d \left| \sum_{n,k|\lambda_{nk} \leq \mu} a_{nk} v_{nk}(x) e_n(y) \right|^2 dy,$$

qu'on intègre sur  $]a, b[$ .

## 4.2 Non-contrôlabilité sur des bandes horizontales

Les résultats de non-contrôlabilité pour l'équation de Grushin que nous présentons se démontrent en adaptant la méthode qu'on a utilisée pour traiter l'équation de la demi-chaleur (Sec. 2.2).

### 4.2.1 Non-contrôlabilité les bandes horizontales avec $x$ non borné

On commence par démontrer une version simple de nos résultats, où le lien avec l'équation de la demi-chaleur est exact, et sans termes d'erreur.

**Théorème 4.12.** *On suppose  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ . Soit  $T > 0$ , soit  $[a, b]$  un segment non trivial de  $\mathbb{T}$ , soit  $\omega_y := \mathbb{T} \setminus [a, b]$ , et soit  $\omega = \mathbb{R} \times \omega_y$ . L'équation de Grushin (4.1) sur  $\Omega$  n'est pas contrôlable sur  $\omega$  en temps  $T$ .*

*Démonstration.* On commence par réinterpréter l'inégalité d'observabilité comme une inégalité sur les polynômes.

**Lemme 4.13.** *Soit  $U := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \arg(z) \in \omega_y\}$  (voir Fig. 4.1). Si l'équation de Grushin est contrôlable sur  $\omega$  en temps  $T$ , alors il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynôme complexe  $p \in \mathbb{C}[X]$ ,*

$$|p|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \leq C |p|_{L^\infty(U)}. \quad (4.5)$$

*Démonstration.* La contrôlabilité de l'équation de Grushin est équivalente à l'inégalité d'observabilité (Prop. 4.4). D'après la Proposition 4.6, pour toute suite finie  $(a_n)_{n>0}$ , la fonction

$$g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nx^2/2 + iny - nt}$$

est solution de l'équation de Grushin sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ . On teste l'inégalité d'observabilité sur ces fonctions.

Le membre gauche de l'inégalité d'observabilité appliquée à  $g$  vérifie

$$|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\pi \sum_{n>0} |a_n|^2 |e^{-nx^2/2}|_{L^2(\mathbb{R})}^2 e^{-2nT} = 2\pi^{3/2} \sum_n \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT}.$$

Or, on a vu lorsqu'on a traité l'équation de la demi-chaleur qu'en calculant en coordonnées polaires (Eq. (2.7)),

$$\int_{D(0, e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(z) = 2\pi \sum_{n>0} \frac{|a_n|^2}{2n} e^{-2nT}. \quad (4.6)$$

Donc le membre de gauche de l'inégalité d'observabilité appliquée à  $g$  est minoré par

$$\int_{D(0, e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} |g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.7)$$

On majore maintenant le membre de droite, qui est égal à

$$|g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{\substack{0 \leq t \leq T \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \omega_y}} \left| \sum_{n>0} a_n e^{-nx^2/2 + inx - nt} \right|^2 dt dx dy.$$

Pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ , on fait le changement de variables  $\zeta_x(y, t) = e^{iy - t - x^2/2}$ , pour lequel  $dt dy = |\zeta_x|^{-2} d\lambda(\zeta_x)$ . Alors, en notant  $\mathcal{D}_x = \{\zeta_x(t, y), t \in [0, T], y \in \omega_y\}$  l'image de  $[0, T] \times \omega_y$  par ce changement de variables, on a

$$|g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ \zeta \in \mathcal{D}_x}} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^n \right|^2 |\zeta_x|^{-2} d\lambda(\zeta_x) dx.$$

Or, on a

$$\mathcal{D}_x = \{e^{-T - x^2/2} < |\zeta| < e^{-x^2/2}, \arg(\zeta) \in \omega_y\}.$$

En particulier, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{D}_x \subset U$  et  $\lambda(\mathcal{D}_x) \leq \pi e^{-x^2}$ . Donc, en majorant la norme  $L^2$  sur  $\mathcal{D}_x$  par la norme  $L^\infty$  sur  $U$  (fois  $\lambda(\mathcal{D}_x)$ ), on a

$$|g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 \leq \pi \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-x^2} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(U)}^2 dx = \pi^{3/2} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(U)}^2. \quad (4.8)$$

En rassemblant la majoration (4.8) et la minoration (4.7), on voit que l'inégalité d'observabilité (4.4) implique que pour toute suite finie  $(a_n)_{n>0}$ ,

$$\left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^2(D(0, e^{-T}))}^2 \leq \frac{\pi M}{2} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(U)}^2.$$

Ce qui, à un changement d'indice  $n \mapsto n-1$  près, est l'estimation (4.5) annoncée.  $\diamond$

On revient à la démonstration de la non-contrôlabilité de l'équation de Grushin. D'après le lemme précédent, il suffit de nier l'inégalité sur les polynômes (4.5). On va à nouveau utiliser le théorème de Runge (Th. 1.12). On choisit  $\zeta_0 \in D(0, e^{-T})$  tel que  $\arg(\zeta_0) \notin \overline{\omega_y}$  et une suite de polynômes  $(p_k)_k$  qui converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \zeta_0[1, +\infty[$  vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$ . Alors, la suite  $(p_k)_k$  est un contre-exemple à l'inégalité sur les polynômes (4.5). En effet la suite  $(p_k)_k$  est uniformément bornée sur  $\overline{U}$ , mais  $|(\zeta - \zeta_0)^{-1}|_{L^2(D(0, e^{-T}))} = +\infty$ , donc, d'après le lemme de Fatou,  $|p_k|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \rightarrow +\infty$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .  $\square$

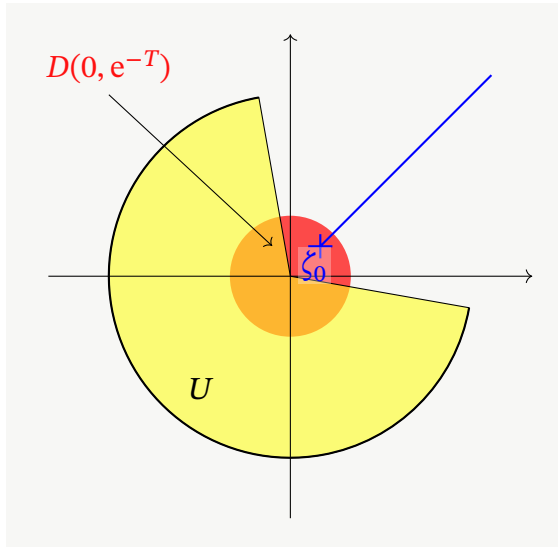


FIGURE 4.1 – En jaune, le domaine  $\{|\zeta| < 1, \arg(\zeta) \in \omega_y\}$ , et en rouge le disque  $D(0, e^{-T})$ . Si l'inégalité d'observabilité pour l'équation de Grushin était vraie, on pourrait contrôler la norme  $L^2(D(0, e^{-T}))$  des polynômes par leur norme  $L^2(U)$ . Mais d'après le théorème de Runge, il existe une suite de polynômes qui converge vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  en dehors de la demi-droite bleue.

Dans le cadre du théorème précédent, on peut en fait dire beaucoup plus. On note  $(v_{nk})_{k \geq 0}$  une base orthonormée de fonctions propres de  $A_n$ , qui est de la forme (voir Sec. 3.2.1)  $v_{nk}(x) = H_k(\sqrt{|n|x})e^{-|n|x^2/2}$ , où  $H_k$  est un polynôme de degré  $k$ . Comme dans la Proposition 4.6, on note  $\Phi_{nk}(x, y) = v_{nk}(x)e_n(y)$ . Alors, on montre qu'aucune combinaison linéaire non triviale de fonction propres  $\Phi_{nk}$  avec  $|n| \geq 2$  n'est contrôlable à zéro. Plus précisément, on a le Théorème 4.14 suivant.

**Théorème 4.14.** *On suppose  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ . Soit  $T > 0$ , soit  $[a, b]$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{T}$ , soit  $\omega_y = \mathbb{T} \setminus [a, b]$  et soit  $\omega = \mathbb{R} \times \omega_y$ . Soit  $f_0 \in L^2$  de la forme*

$$f_0(x, y) = m(x) + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ k \geq 0}} f_{nk} \Phi_{nk}(x, y),$$

où  $m \in L^2(\mathbb{R})$ . On suppose que  $f_0$  est contrôlable à zéro<sup>1</sup>. Soit  $k \geq 0$ . Si la suite  $(f_{nk})_{n \neq 0}$  n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, alors pour tout  $|n| \geq 3$ ,  $f_{nk} = 0$ .

*Démonstration.* Si  $f_0$  est contrôlable à zéro, d'après la Proposition A.10, il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in L^2(\Omega)$ ,

$$|\langle f_0, e^{-tA} g_0 \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 \leq C^2 \int_{[0, T] \times \omega} |e^{-tA} g_0(x, y)|^2 dt dx dy. \quad (4.9)$$

On réinterprète cette inégalité comme inégalité sur les polynômes. On se concentre d'abord sur les termes pour  $n > 0$ . Les termes pour  $n < 0$  se traitent de manière similaire.

<sup>1</sup>C.-à-d. qu'il existe  $u \in L^2([0, T] \times \omega)$  tel que la solution  $f$  de l'équation de Grushin (4.1) vérifie  $f(T, \cdot, \cdot) = 0$ .

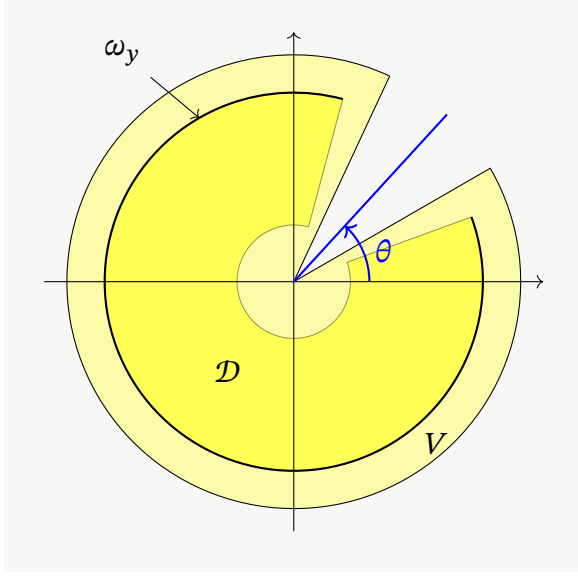


FIGURE 4.2 – En jaune, le domaine  $\mathcal{D} = \{e^{-T} < |\zeta| < 1, \arg(\zeta) \in \omega_y\}$ , et en jaune plus clair le domaine  $V$  (avec un rayon un peu plus petit que la réalité).

**Lemme 4.15.** Soit  $[a', b'] \subset ]a, b[$  et  $V := \{|\zeta| < 2, \arg(\zeta) \notin [a', b']\}$  (voir Fig. 4.2). Pour  $n > 0$ , on définit

$$b_{n-1} = \bar{f}_{nk} \frac{e^{-n(2k+1)T}}{\sqrt{n(n-1)!}}. \quad (4.10)$$

Alors, sous l'hypothèse (4.9) la forme linéaire  $\varphi$  sur les polynômes définie par  $\varphi(p) = \sum_{n \geq 0} b_n p^{(n)}(0)$  est continue pour la norme  $|p|_{L^\infty(V)} + |p'|_{L^\infty(V)}$ . Autrement dit, il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynôme  $p$ ,

$$\left| \sum_{n \geq 0} b_n p^{(n)}(0) \right| \leq C(|p|_{L^\infty(V)} + |p'|_{L^\infty(V)}). \quad (4.11)$$

*Démonstration.* Dans le but de réinterpréter l'inégalité (4.9) comme une estimation sur les polynômes, on la teste sur les  $g_0$  qui sont combinaisons linéaires finies de  $(\Phi_{nk})_{n>0}$ . Pour ces  $g_0$ , la solution  $e^{-tA}g_0$  de l'équation de Grushin libre est de la forme

$$e^{-tA}g_0(x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-n(2k+1)t} \Phi_{nk}(x, y) = \sum_{n>0} a_n H_k(\sqrt{n}x) e^{-nx^2/2 + iny - n(2k+1)t}. \quad (4.12)$$

*Étape 1 : Calcul du membre gauche.* Les fonctions  $\Phi_{nk}$  sont orthogonales, donc le membre de gauche de l'équation (4.9) est égal à

$$\langle f_0, e^{-tA}g_0 \rangle_{L^2(\Omega)} = 2\pi \sum_{n>0} \bar{f}_{nk} a_n |v_{nk}|_{L^2(\mathbb{R})}^2 e^{-n(2k+1)T}.$$

Ou encore, en notant  $b'_n = 2\pi \bar{f}_{nk} |v_{nk}|_{L^2(\mathbb{R})}^2 e^{-n(2k+1)T}$ ,

$$\langle f_0, e^{-tA}g_0 \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{n>0} a_n b'_n.$$

Donc, d'après l'inégalité (4.9), on a

$$\left| \sum_{n>0} a_n b'_n \right|^2 \leq C \int_{[0,T] \times \omega} |e^{-tA} g_0(x, y)|^2 dt dx dy.$$

Notons qu'on a  $|v_{nk}|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = n^{-1/2} |v_{1k}|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ , donc  $b'_n = 2\pi |v_{1k}|_{L^2}^3 (n-1)! b_{n-1}$ . Donc, si on note  $p(\zeta) = \sum a_n \zeta^{n-1}$ , comme  $a_n = p^{(n-1)}(0)/(n-1)!$ , on a

$$\left| \sum_{n>0} b_{n-1} p^{(n-1)}(0) \right|^2 \leq C' \int_{[0,T] \times \omega} |e^{-tA} g_0(x, y)|^2 dt dx dy. \quad (4.13)$$

*Étape 2 : changement de variables dans le membre droit.* Pour le membre droit de l'inégalité (4.9), on fait pour tout  $x \in \mathbb{R}$  le changement de variables  $\zeta(t, y) = e^{-x^2/2 + iy - (2k+1)t}$ , pour lequel  $d\lambda(\zeta) = (2k+1)|\zeta|^2 dt dy$ . Alors, en notant  $\mathcal{D}_x$  l'image de  $[0, T] \times \omega_y$  par ce changement de variables, on a

$$|e^{-tA} g_0|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 = \frac{1}{2k+1} \int_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ \zeta \in \mathcal{D}_x}} \left| \sum_{n>0} a_n H_k(\sqrt{n}x) \zeta^n \right|^2 \frac{1}{|\zeta|^2} d\lambda(\zeta) dx.$$

Notons que si on définit

$$\mathcal{D} = \{e^{-T} < |\zeta| < 1, \arg(\zeta) \in \omega_y\},$$

alors, pour tout  $x$ , on a  $\mathcal{D}_x = e^{-x^2/2} \mathcal{D}$ . En particulier,  $\lambda(\mathcal{D}_x) = \lambda(\mathcal{D}) e^{-x^2}$ . Et si on pose  $U := \{|\zeta| < 1, \arg(\zeta) \notin [a, b]\}$ , on a pour tout  $x$ ,  $\mathcal{D}_x \subset U$ . Donc, on a d'après l'inégalité de Hölder.

$$|e^{-tA} g_0|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 \leq \frac{\lambda(\mathcal{D})}{2k+1} \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-x^2} \left| \sum_{n>0} a_n H_k(\sqrt{n}x) \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(U)}^2 dx. \quad (4.14)$$

*Étape 3 : majoration du membre droit grâce aux opérateurs  $H_\gamma$ .* On reconnaît dans l'intégrande du membre droit de cette égalité une expression de la forme<sup>2</sup>

$$\sum_{n>0} a_n H_k(\sqrt{n}x) \zeta^{n-1} = H_{\gamma_x} \left( \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right),$$

avec  $\gamma_x(z) = H_k(\sqrt{z+1}x)$ . On veut alors appliquer le Théorème 3.29.

Le domaine  $V = \{|\zeta| < 2, \arg(\zeta) \notin [a', b']\}$  est de la forme requise par le Théorème 3.29. Comme  $H_k$  est un polynôme de degré  $k$ , chaque  $\gamma_x$  est holomorphe et à croissance sous-exponentielle sur  $\{\Re(z) > -1\}$ . Autrement dit, pour tout  $x$ , la suite

<sup>2</sup>Voir Def. 3.1 pour les opérateurs  $H_\gamma$ .

$(\gamma_x(n))_n$  est dans  $\overline{\mathcal{S}}_{-1,0}$  (voir Def. 3.4 et 3.14). De plus, en écrivant  $H_k(X) = \sum_j h_{jk} X^j$ , on a pour tout  $\epsilon > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$p_\epsilon(\gamma_x) = \sup_{\Re(z) > -1} |\gamma_x(z)| e^{-\epsilon|z|} \leq \sum_j |h_{jk}| |x|^j \sup_{r>0} r^{k/2} e^{-\epsilon r} \leq C_{\epsilon,k} (1 + |x|^k).$$

Les conditions du Théorème 3.29 sont réunies. Ce Théorème nous dit qu'il existe  $C > 0$  telle que pour tout polynôme  $p \in \mathbb{C}[X]$  et pour tout  $x$ ,

$$|H_{\gamma_x}(p)|_{L^\infty(U)} \leq C(1 + |x|^k)(|p|_{L^\infty(V)} + |p'|_{L^\infty(V)}). \quad (4.15)$$

On applique cette estimée pour  $p(\zeta) = \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1}$ . Alors, en l'intégrant pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a d'après l'inégalité (4.14),

$$|e^{-tA} g_0|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 \leq C'' \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-x^2} (1 + |x|^k)^2 (|p|_{L^\infty(V)} + |p'|_{L^\infty(V)})^2 dx.$$

Comme  $\int_{\mathbb{R}} |x|^j e^{-x^2} dx < +\infty$  pour tout  $j \geq 0$ , on en déduit

$$|e^{-tA} g_0|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 \leq C''' (|p|_{L^\infty(V)} + |p'|_{L^\infty(V)})^2. \quad (4.16)$$

Combiné avec la minoration (4.13), ceci démontre que pour toute suite  $(a_n)_{n>0}$  n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls, et avec  $p(\zeta) = \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1}$ ,

$$\left| \sum_{n>0} b_{n-1} p^{(n-1)}(0) \right|^2 \leq C' C''' (|p|_{L^\infty(V)} + |p'|_{L^\infty(V)})^2.$$

ce qui est l'estimation (4.11) annoncée.  $\diamond$

Il nous reste à nier l'inégalité du Lemme 4.15. Notons que comme la suite  $(b_n)_{n>0}$  n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, le membre de gauche de l'inégalité (4.11) dépend continument de  $p$  dans toute norme  $|p|_{L^\infty(D(0,\epsilon))}$ . Donc on peut étendre cette inégalité par densité aux fonctions holomorphes dans un voisinage de  $\overline{V}$ , grâce au théorème de Runge.

On choisit  $\theta \in ]a', b'[$  (de sorte que la demi-droite  $e^{i\theta} \mathbb{R}_+^*$  soit disjointe de  $\overline{V}$ ), et pour tout  $r > 0$ , on choisit  $p_r(\zeta) := (\zeta - re^{i\theta})^{-1}$ . Alors, on a  $|p_r|_{L^\infty(V)} = O(r^{-1})$  et  $|p_r'|_{L^\infty(V)} = O(r^{-2})$ . Mais le membre de gauche de l'inégalité (4.11) est égal à

$$\sum_{n \geq 0} b_n p_r^{(n)}(0) = \sum_{n \geq 0} -\frac{b_n n!}{(re^{i\theta})^n}.$$

Rappelons que  $b_n$  est de la forme  $c_n \overline{f}_{(n+1)k}$  avec  $c_n \neq 0$  (Eq. (4.10)). Donc, par hypothèse, il n'existe qu'un nombre fini de  $b_n$  non nuls. Supposons qu'il y en ait au

moins un, et notant  $N$  le plus grand entier tel que  $b_n \neq 0$ . Alors, d'après la formule précédente, on a l'équivalent

$$\sum_{n \geq 0} b_n p_r^{(n)}(0) \underset{r \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{b_N N!}{e^{i(N+1)\theta} r^{N+1}}.$$

Mais alors l'inégalité (4.11) du Lemme 4.15 implique que  $r^{-N-1} = O(r^{-2})$ , ce qui n'est possible que si  $N \leq 1$ . Donc pour tout  $n \geq 2$ ,  $b_n = 0$ . Comme  $b_n = c_n f_{(n+1)k}$  avec  $c_n \neq 0$ , tout les  $f_{nk}$  pour  $n \geq 3$  sont nuls.

Pour montrer que les  $f_{nk}$  pour  $n \leq -3$  sont nuls, on refait le même raisonnement, mais en testant l'inégalité (4.9) sur les

$$g(t, x, y) = \sum_{n < 0} a_n e^{nx^2/2 + iny + n(2k+1)t}.$$

En adaptant la démonstration du Lemme 4.15, on démontre que la contrôlabilité de  $f_0$  implique l'inégalité (4.11) où  $V$  est changé en son conjugué et surtout où  $f_{nk}$  est changé en  $f_{-nk}$ . On démontre que cette inégalité est fautive de la même manière.  $\square$

*Remarque 4.16.* En optimisant certains paramètres, on peut remplacer dans le Théorème 4.14 la condition  $|n| \geq 3$  par  $|n| \geq 2$ . D'abord, on considère le noyau

$$K_{\gamma_x}(\zeta) = \sum_{n > 0} H_k(\sqrt{n}x)\zeta^n.$$

Le théorème 3.18 montre que  $K_\gamma$  est un  $O(|\zeta|^r)$  pour tout  $r > 0$  et sur tout  $S_\sigma = \{\sigma < \arg(\zeta) < 2\pi - \sigma\}$  avec  $\sigma > 0$ . Mais on peut en fait montrer que  $K_{\gamma_x}$  est borné. En effet,  $H_k$  est un polynôme, donc  $K_{\gamma_x}$  est de la forme

$$K_{\gamma_x}(\zeta) = \sum_{j \geq 0} h_{jk} x^j \sum_{n \geq 0} n^{j/2} \zeta^n = \sum_{j \geq 0} h_{jk} x^j \text{Li}_{-j/2}(\zeta).$$

Alors, en utilisant des asymptotiques pour  $\text{Li}_s(\zeta)$  dans la limite  $|\zeta| \rightarrow +\infty$ , on peut montrer que pour tout  $s \leq 0$  et tout  $\sigma > 0$ ,  $\text{Li}_s$  est borné sur  $S_\sigma$ . On en déduit que  $K_{\gamma_x}$  est borné sur chaque  $S_\sigma$  par quelque chose de la forme  $C(1 + |x|^k)$ . Alors, en reprenant la démonstration du Théorème 3.29, on peut démontrer une estimation de la forme

$$|H_{\gamma_x}(p)|_{L^\infty(U)} \leq C(1 + |x|^k) |p|_{L^\infty(V)}.$$

Autrement dit, on peut retirer le terme  $|p'|_{L^\infty(V)}$  dans l'inégalité (4.15). Donc on peut également le retirer de l'inégalité (4.11). Alors, lorsqu'on teste cette inégalité sur  $p_r(\zeta) = (\zeta - re^{i\theta})^{-1}$ , et toujours avec  $N$  le plus grand entier tel que  $b_n \neq 0$ , on trouve  $r^{-N-1} = O(r^{-1})$ . On en déduit que  $N = 0$ , donc que tous les  $b_n$  pour  $n \geq 1$  sont nuls, et donc que les  $f_{nk}$  pour  $n \geq 2$  sont nuls. On traite les termes pour  $n \leq -2$  de la même manière.



On a traité le cas  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ , mais le cas  $\Omega = \mathbb{R} \times ]0, \pi[$  est analogue.

**Théorème 4.17.** *On suppose  $\Omega = \mathbb{R} \times ]0, \pi[$ . Soit  $T > 0$ , soit  $[a, b] \subset ]0, \pi[$  un intervalle non trivial, soit  $\omega_y = ]0, \pi[ \setminus [a, b]$  et soit  $\omega = \mathbb{R} \times \omega_y$ . Soit  $f_0 \in L^2$  de la forme*

$$f_0(x, y) = \sum_{\substack{n \neq 0 \\ k \geq 0}} f_{nk} \Phi_{nk}(x, y),$$

*On suppose que  $f_0$  est contrôlable à zéro. Pour tout  $k \geq 0$ , si la suite  $(f_{nk})_{n \neq 0}$  n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, alors pour tout  $|n| \geq 3$ ,  $f_{nk} = 0$ .*

*Démonstration.* Donnons brièvement ce qu'il faut changer dans la démonstration pour traiter le cas  $\Omega_y = ]0, \pi[$ .

On teste l'inégalité (4.9) sur les fonctions de la forme

$$g_0 = \sum_{n>0} a_n \Phi_{nk} = \sum_{n>0} a_n v_{nk}(x) \sin(ny).$$

On obtient l'inégalité (4.13) de la même manière que dans le cas  $\Omega_y = \mathbb{T}$ . Pour majorer  $|e^{-tA} g_0|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2$ , on écrit  $\sin(ny) = (e^{iny} - e^{-iny})/2i$ , et donc pour tout  $t \geq 0$  et  $(x, y) \in \Omega$

$$|e^{-tA} g_0(x, y)|^2 \leq \frac{1}{2} \left( \left| \sum_{n>0} a_n v_{nk}(x) e^{iny} e^{-n(2k+1)t} \right|^2 + \left| \sum_{n>0} a_n v_{nk}(x) e^{-iny} e^{-n(2k+1)t} \right|^2 \right)$$

Ainsi, si on pose  $\tilde{\omega}_y := \omega_y \cup (-\omega_y)$ , on a

$$|e^{-tA} g_0|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \int_{[0, T] \times \mathbb{R} \times \tilde{\omega}_y} \left| \sum_{n>0} a_n v_{nk}(x) e^{iny} e^{-n(2k+1)t} \right|^2 dt dx dy.$$

Ainsi, on peut démontrer l'inégalité (4.14) avec  $U := \{|\zeta| < 1, |\arg(\zeta)| \in \omega_y\}$ . Enfin, on démontre un équivalent du Lemme 4.15 avec  $V := \{|\zeta| < 2, |\arg(\zeta)| \notin [a', b']\}$ . Le reste de la démonstration est un copié-collé.  $\square$

### 4.2.2 Non-contrôlabilité sur les bandes horizontales avec $x$ borné

Dans le cas où  $\Omega_x = ]-1, 1[$ , on n'a toujours pas contrôlabilité.

**Théorème 4.18.** *On suppose  $\Omega = ]-1, 1[ \times \mathbb{T}$ . Soit  $[a, b]$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{T}$ , soit  $\omega_y = \mathbb{T} \setminus [a, b]$  et soit  $T > 0$ . L'équation de Grushin (4.1) n'est pas contrôlable sur  $\omega = ]-1, 1[ \times \omega_y$  en temps  $T > 0$ .*

*Démonstration.* On veut montrer que l'inégalité d'observabilité (4.4) est fautive. À cette fin, on commence par la réinterpréter comme inégalité sur des polynômes.

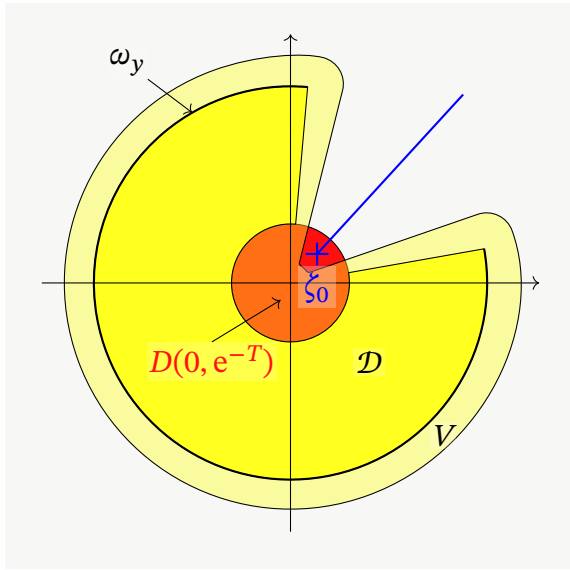


FIGURE 4.3 – En jaune le domaine  $\mathcal{D}$ , en jaune plus clair, le domaine  $V$ , et en rouge le disque  $D(0, e^{-T})$ . Si l'équation de Grushin est contrôlable à zéro sur  $\omega = ]-1, 1[ \times \omega_y$  en temps  $T$ , alors on peut estimer la norme  $L^2(D(0, e^{-T}))$  des polynômes par leur norme  $L^\infty(V)$ . Mais ce n'est pas possible, comme le montre l'exemple d'une suite de polynômes qui convergent vers  $(\zeta - \zeta_0)^{-1}$  en dehors de la demi-droite bleue.

**Lemme 4.19.** Soit  $V$  un voisinage borné et étoilé en 0 de  $\{|\zeta| < 1, \arg(\zeta) \in \omega_y\}$  (voir Fig. 4.3). Si l'équation de Grushin est contrôlable à zéro, alors il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynôme  $p \in \mathbb{C}[X]$ ,

$$|p|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \leq C |p|_{L^\infty(V)}. \quad (4.17)$$

*Démonstration. Étape 1 : inégalité d'observabilité.* On teste l'inégalité d'observabilité (4.4) sur les solutions de la forme

$$g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n v_{n0}(x) e^{iny - \lambda_{n0} t},$$

où on suppose la somme finie. On suppose également, comme dans la section 3.2.4, que  $v_{n0}$  est normalisé par  $v_{n0}(0) = 1$ . On voit ainsi que si l'équation de Grushin est contrôlable à zéro, alors il existe  $C > 0$  telle que pour toute suite finie  $(a_n)_{n>0}$ ,

$$\sum_{n>0} |a_n|^2 |v_{n0}|_{L^2}^2 e^{-2\lambda_{n0} T} \leq C \int_{[0, T] \times \omega} \left| \sum_{n>0} a_n v_{n0}(x) e^{iny - \lambda_{n0} t} \right|^2 dt dx dy. \quad (4.18)$$

*Étape 2 : minoration du membre de gauche.* D'après la minoration de  $v_{n0}$  donnée par la Proposition 3.47 avec  $h = 1/n$ , on a  $|v_{n0}|_{L^2}^2 \geq c/\sqrt{n}$ . De plus, d'après la Proposition 3.38, on a  $\lambda_{n0} = n + o(1)$ . Donc le membre de gauche de l'inégalité d'observabilité (4.18) est minoré de la façon suivante :

$$\sum_{n>0} |a_n|^2 |v_{n0}|_{L^2}^2 e^{-2\lambda_{n0} T} \geq c' \sum_{n>0} \frac{|a_n|^2}{\sqrt{n}} e^{-2nT}.$$

Or, on a déjà vu (Eq. (4.6)) que

$$\int_{D(0, e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) = \pi \sum_{n>0} \frac{|a_n|^2}{n} e^{-2nT}.$$

Donc le membre de gauche de l'inégalité d'observabilité est minoré par

$$\int_{D(0, e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) \leq \pi c^{-1} \sum_{n>0} |a_n|^2 |v_{n0}|_{L^2}^2 e^{-2\lambda_{n0}T}. \quad (4.19)$$

*Étape 3 : changement de variables dans le membre de droite.* On note  $\lambda_{n0} = n + \rho_n$ . Alors, en notant  $\zeta(t, y) = e^{-t+iy}$ , on a  $e^{-\lambda_{n0}t+iy} = \zeta(t, y)^n |\zeta|^{\rho_n}$ .

Alors, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on fait le changement de variables  $\zeta = e^{-t+iy}$ , pour lequel  $dt dy = |\zeta|^{-2} d\lambda(\zeta)$ . Si on note  $\mathcal{D}$  l'image de  $]0, T[ \times \omega_y$ , on a

$$\int_{[0, T] \times \omega} \left| \sum_{n>0} a_n v_{n0}(x) e^{iny - \lambda_{n0}t} \right|^2 dt dx dy = \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{D}} \left| \sum_{n>0} v_{n0}(x) a_n \zeta^{n-1} |\zeta|^{\rho_n} \right|^2 d(\zeta) dx. \quad (4.20)$$

Notons que

$$\mathcal{D} = \{e^{-T} < |\zeta| < 1, \arg(\zeta) \in \omega_y\}. \quad (4.21)$$

*Étape 4 : majoration du membre droit grâce aux opérateurs  $H_\gamma$ .* Pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\eta \in \mathcal{D}$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\gamma_{x, \eta}(n) = v_{(n+1)0}(x) |\eta|^{\rho_{n+1}}.$$

On veut montrer que la famille  $(\gamma_{x, \eta})_{-1 < x < 1, \eta \in \mathcal{D}}$  est bornée dans un  $\bar{\mathcal{S}}_r$ .

On commence par traiter le terme  $|\eta|^{\rho_{n+1}}$ . On définit  $\gamma_{\eta, 1}(n) = |\eta|^{\rho_n}$ . D'après le Corollaire 3.46, il existe une fonction  $r_1 : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  croissante et  $\gamma \in \mathcal{S}_{r_1}$  telle que pour tout  $n$  assez grand,  $\rho_n = \gamma(n)e^{-n}$ . Alors, pour  $\eta \in \mathcal{D}$ , on note

$$\tilde{\gamma}_{\eta, 1}(z) = |\eta|^{\gamma(z)e^{-z}}$$

lorsque c'est défini (c'est-à-dire lorsque  $z$  est dans l'un des  $\Delta_{r_1, \theta}$ , voir Def. 3.6). Avec cette définition, on a pour  $n$  assez grand, disons  $n \geq n_1$ ,  $\gamma_{\eta, 1}(n) = \tilde{\gamma}_{\eta, 1}(n)$ . Or  $\tilde{\gamma}_{\eta, 1}$  est holomorphe. De plus,  $\gamma$  est à croissance sous-exponentielle, donc  $z \mapsto \gamma(z)e^{-z}$  est bornée sur chaque  $\Delta_{r_1, \theta}$ . On note  $C_\theta$  ce supremum :

$$C_\theta := \sup_{z \in \Delta_{r_1, \theta}} |\gamma(z)e^{-z}|.$$

Alors, si  $\eta = e^{-t+iy} \in \mathcal{D}$  et si  $\theta \in ]0, \pi/2[$ , on a pour  $z \in \Delta_{r_1, \theta}$ ,

$$|\tilde{\gamma}_{\eta, 1}(z)| = |e^{-t\gamma(z)e^{-z}}| \leq e^{tC_\theta} \leq e^{TC_\theta},$$

où on a utilisé le fait que pour  $\eta = e^{-t+iy} \in \mathcal{D}$ , on a  $0 < t < T$ . En particulier,  $\tilde{\gamma}_{\eta, 1}$  est à croissance sous-exponentielle sur chaque  $\Delta_{r_1, \theta}$ . Donc  $\gamma_{\eta, 1} \in \mathcal{S}_{r_1}$ . De plus, la majoration  $|\tilde{\gamma}_{\eta, 1}(z)| \leq e^{TC_\theta}$  est uniforme en  $\eta \in \mathcal{D}$ , donc la famille  $(\tilde{\gamma}_{\eta, 1})_{\eta \in \mathcal{D}}$  est une famille bornée de  $\mathcal{S}_{r_1}$ . On en déduit que la famille de suites  $(\gamma_{\eta, 1})_{\eta \in \mathcal{D}}$  est une famille bornée de  $\bar{\mathcal{S}}_{r_1}$ .

D'après le Corollaire 3.49 avec  $\varepsilon = 1$ , il existe une fonction  $r_2 : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  croissante telle que pour tout  $x$ , la suite  $(v_{n0}(x))_{n \geq 0}$  soit dans  $\overline{\mathcal{S}}_{r_2}$ , et que si on note  $v(x)$  cette suite, la famille  $(v(x))_{-1 < x < 1}$  est bornée dans  $\overline{\mathcal{S}}_{r_2}$ .

Alors, on définit  $r = \max(r_1, r_2)$ . D'après ce qui précède et d'après l'inclusion continue de  $\overline{\mathcal{S}}_{r_1}$  et  $\overline{\mathcal{S}}_{r_2}$  dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$  (Cor. 3.16), les familles  $(v(x))_{-1 < x < 1}$  et  $(\gamma_{\eta,1})_{\eta \in \mathcal{D}}$  sont bornées dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$ . Comme la multiplication est continue dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$  (Prop. 3.12), la famille  $(\gamma'_{x,\eta})_{-1 < x < 1, \eta \in \mathcal{D}}$  définie par

$$\gamma'_{x,\eta}(n) = v_{n0}(x)|\eta|^{\rho n}$$

est bornée dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$ . Remarquons que  $\gamma_{x,\eta}(n) = \gamma'_{x,\eta}(n+1)$ . Or, le décalage est continu dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$  (Prop. 3.17). Donc la famille  $(\gamma_{x,\eta})_{-1 < x < 1, \eta \in \mathcal{D}}$  est bornée dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$ .

Rappelons qu'on a supposé que  $V$  est un voisinage borné et étoilé en 0 de  $\{|\zeta| < 1, \arg(\zeta) \in \omega_y\}$ , donc également de  $\mathcal{D}$  (voir Fig. 4.3). Donc, d'après le Théorème 3.27, il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , pour tout  $\zeta \in \mathcal{D}$  et pour tout polynôme  $p \in \mathbb{C}[X]$ ,

$$|H_{\gamma_{\eta,x}}(p)|_{L^\infty(\mathcal{D})} \leq C|p|_{L^\infty(V)}.$$

Dit autrement, pour tout  $\zeta, \eta \in \mathcal{D}$ , pour tout  $x \in ]-1, 1[$  et pour toute suite finie  $(a_n)_n$ ,

$$\left| \sum_{n>0} v_{n0}(x) \zeta^{n-1} |\eta|^{\rho n} \right| \leq \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(V)}.$$

On prend  $\eta = \zeta$  dans cette inégalité, et on l'intègre pour  $x \in ]-1, 1[$  et  $\zeta \in \mathcal{D}$  :

$$\int_{-1}^1 \int_{\mathcal{D}} \left| \sum_{n>0} v_{n0}(x) \zeta^{n-1} |\zeta|^{\rho n} \right|^2 d\lambda(\zeta) dx \leq 2\lambda(\mathcal{D}) \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(V)}^2.$$

En combinant cette inégalité avec le changement de variables (4.20), on a la majoration du membre de droite de l'inégalité d'observabilité

$$\int_{[0,T] \times \omega} \left| \sum_{n>0} a_n v_{n0}(x) e^{iny - \lambda_{n0}t} \right|^2 dt dx dy \leq 2\lambda(\mathcal{D}) \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(V)}^2. \quad (4.22)$$

*Étape 5 : conclusion.* La minoration (4.19) et la majoration (4.22) des membres gauche et droit respectivement de l'inégalité d'observabilité montrent l'inégalité (4.17) annoncée.  $\diamond$

Revenons maintenant à la démonstration de la non-contrôlabilité de l'équation de Grushin. Comme le complémentaire de  $\omega_y$  est d'intérieur non vide, on peut choisir  $V$  de sorte que  $D(0, e^{-2T})$  ne soit pas inclus dans  $V$  (voir Fig. 4.3). Alors, on choisit  $\zeta_0 \in D(0, e^{-T})$  tel que  $\zeta_0 \notin \overline{V}$ . Alors, d'après le théorème de Runge, il existe une suite de polynômes  $p_k$  qui converge vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \zeta_0[1, +\infty[$ .

Alors  $p_k(\zeta)$  converge vers  $(\zeta - \zeta_0)^{-1}$  uniformément sur  $V$ . En particulier,  $(|p_k|_{L^\infty(V)})_{k \geq 0}$  est bornée. Or, comme  $\zeta_0 \in D(0, e^{-T})$ , la fonction  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  est de norme  $L^2(D(0, e^{-T}))$  infinie, et d'après le lemme de Fatou,  $|p_k|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \rightarrow +\infty$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

Donc la suite  $(p_k)$  est un contre-exemple à l'inégalité (4.17).  $\square$

De la même manière que dans le cas  $\Omega_x = \mathbb{R}$ , on peut adapter la démonstration du Théorème 4.18 pour traiter le cas  $\Omega_y = ]0, \pi[$  au lieu de  $\mathbb{T}$ .

## 4.3 Contrôle par des domaines non rectangulaires

Jusqu'ici, tous les résultats que nous avons énoncés sur la contrôlabilité de l'équation de Grushin concernent des domaines rectangulaires. La raison est qu'on exploite le fait que les fonctions propres sont à variables séparées, ce qui ne permet de traiter que des domaines tensorisés. Ici, on montre grâce à quelques arguments supplémentaires des résultats pour des domaines non rectangulaires, avec en particulier le temps minimal de contrôlabilité pour une large classe de domaines de contrôle.

### 4.3.1 Cas $x$ non borné : non-contrôlabilité sur quelques domaines

On a traité dans la section précédente le cas des domaines des bandes horizontales. En poussant un peu la méthode de démonstration du Théorème 4.12, on peut démontrer la non-contrôlabilité de l'équation de Grushin sur des domaines un peu plus généraux.

**Théorème 4.20.** *On suppose  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ . Soit  $\omega \subset \Omega$  ouvert. S'il existe  $y_0 \in \mathbb{T}$  et  $a > 0$  tels que le segment  $\{(x, y_0) \in \Omega, |x| \leq a\}$  soit disjoint de  $\bar{\omega}$ , l'équation de Grushin (4.1) n'est pas contrôlable sur  $\omega$  en temps  $T < a^2/2$ .*

En particulier, si le domaine de contrôle  $\omega$  est une « bande horizontale qui se rétrécit à l'infini », la contrôlabilité à zéro n'est vraie pour aucun  $T > 0$ .

**Corollaire 4.21.** *On suppose  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ . Soit  $y_0 \in \mathbb{T}$ , soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction continue qui ne s'annule pas, soit  $T > 0$  et soit  $\omega = \{(x, y) \in \Omega, |y - y_0| > f(x)\}$  (voir Fig. 4.4). L'équation de Grushin n'est pas contrôlable sur  $\omega$  en temps  $T$ .*

On ne sait en revanche pas démontrer la non-contrôlabilité spectrale (au sens du Th. 4.14). Comme dans les théorèmes précédents, on peut remplacer  $\Omega_y = \mathbb{T}$  par  $\Omega_y = ]0, \pi[$ .

*Démonstration.* Il s'agit d'une certaine manière de combiner les arguments de concentration de fonctions propres déployés par Beauchard, Cannarsa, Guglielmi [15]

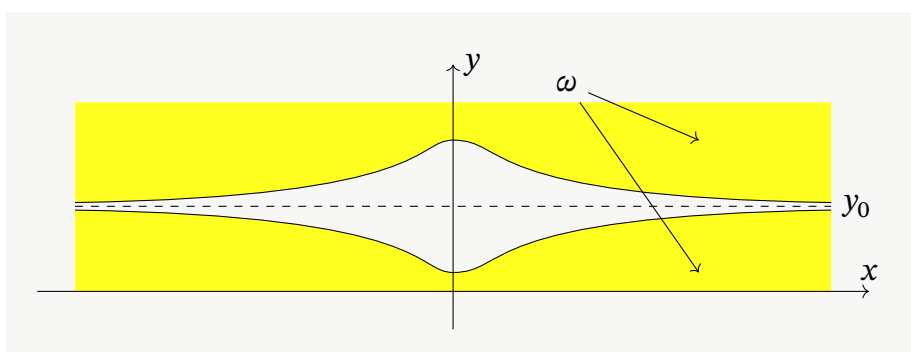
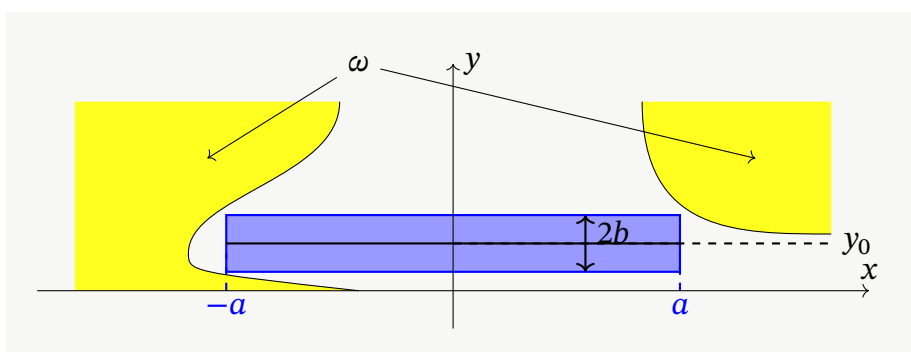

 FIGURE 4.4 – Un exemple de domaine  $\omega$  pour le Corollaire 4.21


FIGURE 4.5 – Forme du domaine de contrôle  $\omega$  (en jaune). Si un segment horizontal est disjoint de  $\omega$ , on peut trouver un rectangle autour de ce segment qui soit disjoint de  $\omega$  (en bleu). On peut alors supposer que  $\omega$  est en fait le complémentaire du rectangle bleu.

(voir aussi Section 1.3.2) et l'argument de faible diffusion que nous avons utilisé pour traiter sur les bandes horizontales.

Remarquons pour commencer que comme le segment  $\{(x, y_0), |x| \leq a\}$  est disjoint de  $\bar{\omega}$ , alors il existe un rectangle de la forme  $\{(x, y) \in \Omega, |y - y_0| < b, |x| < a\}$  qui est disjoint de  $\omega$ . On peut donc supposer que  $\omega$  est le complémentaire de ce rectangle (voir Fig. 4.5).

Comme d'habitude, on réinterprète l'inégalité d'observabilité comme inégalité sur les polynômes.

**Lemme 4.22.** *Soit  $U = D(0, e^{-a^2/2}) \cup \{|\zeta| < 1, |\arg(\zeta) - y_0| > b\}$  (voir Fig. 4.6). Si l'équation de Grushin est contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynôme  $p \in \mathbb{C}[X]$ ,*

$$|p|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \leq C |p|_{L^\infty(U)}. \quad (4.23)$$

*Démonstration.* On teste à nouveau l'inégalité d'observabilité sur les solutions de la forme

$$g(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n e^{-nx^2/2 + iny - nt}.$$

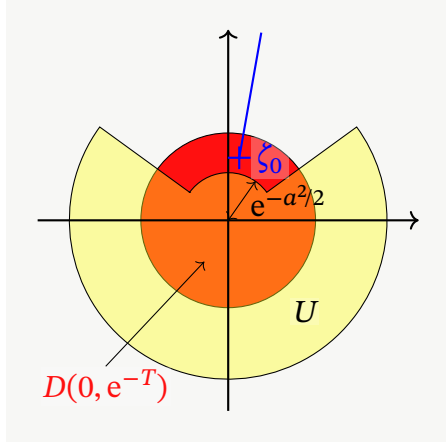


FIGURE 4.6 – En rouge, le disque  $D(0, e^{-T})$ ; en jaune le domaine  $U$ . Si l'équation de Grushin est contrôlable sur  $\omega$  en temps  $T$ , alors on peut estimer la norme  $L^2(D(0, e^{-T}))$  des polynômes par leur norme  $L^\infty(U)$ . Mais si le disque rouge n'est pas inclus dans le domaine  $U$ , alors c'est faux, comme le montre une suite de polynômes qui converge vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  en dehors de la demi-droite bleue.

*Étape 1 : minoration du membre gauche de l'inégalité d'observabilité.* On réutilise la minoration (4.7) du membre de gauche de l'inégalité d'observabilité :

$$\int_{D(0, e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) \leq C |g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2.$$

*Étape 2 : changement de variables dans le membre droit.* Pour majorer le membre droit, comme dans le cas des bandes horizontales, on fait dans le membre droit de l'inégalité d'observabilité le changement de variables  $\zeta_x = e^{-x^2/2 + iy - t}$ . Si on note  $\mathcal{D}_x$  l'image de  $[0, T] \times \omega(x)$  par ce changement de variables, on a

$$|g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 = \int_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ \zeta \in \mathcal{D}_x}} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta_x^n \right|^2 |\zeta_x|^{-2} d\lambda(\zeta_x) dx. \quad (4.24)$$

Pour décrire  $\mathcal{D}_x$ , on introduit  $\omega(x)$  la coupe de  $\omega$  selon  $x$ , c.-à-d.  $\omega(x) := \{y \in \mathbb{T}, (x, y) \in \omega\}$ . Notons que pour  $|x| < a$ , on a  $\omega(x) = \mathbb{T} \setminus [y_0 - b, y_0 + b]$ , et que pour  $|x| > a$ ,  $\omega(x) = \mathbb{T}$  (voir Fig. 4.5). Alors, on a

$$\mathcal{D}_x = \{e^{-t + iy - x^2/2}, 0 < t < T, y \in \omega(x)\}.$$

*Étape 3 : majoration du membre droit.* Pour  $|x| > a$ , on a  $\omega(x) = \mathbb{T}$  et donc  $\mathcal{D}_x$  est la couronne  $\mathcal{D}_x = e^{-x^2/2} \mathcal{C}$ , où  $\mathcal{C} = \{e^{-T} < |\zeta| < 1\}$ . Pour  $|x| < a$ ,  $\omega(x)$  n'est qu'une partie de  $\mathbb{T}$ , donc  $\mathcal{D}_x$  est une partie de couronne  $\mathcal{D}_x = e^{-x^2/2} \mathcal{D}$  avec  $\mathcal{D} = \{e^{-T} < |\zeta| < 1, |\arg(\zeta) - y_0| > b\}$  (voir Fig. 4.7).

Notons que  $U$  est en fait l'union des  $\mathcal{D}_x$  et de  $\{0\}$  (comparer les Fig. 4.7 et 4.6). Donc, d'après l'inégalité (4.24), on a

$$\begin{aligned} |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 &= \int_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ \zeta \in \mathcal{D}_x}} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta_x^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta_x) dx \\ &\leq \int_{x \in \mathbb{R}} \lambda(\mathcal{D}_x) \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(U)}^2 dx \end{aligned}$$

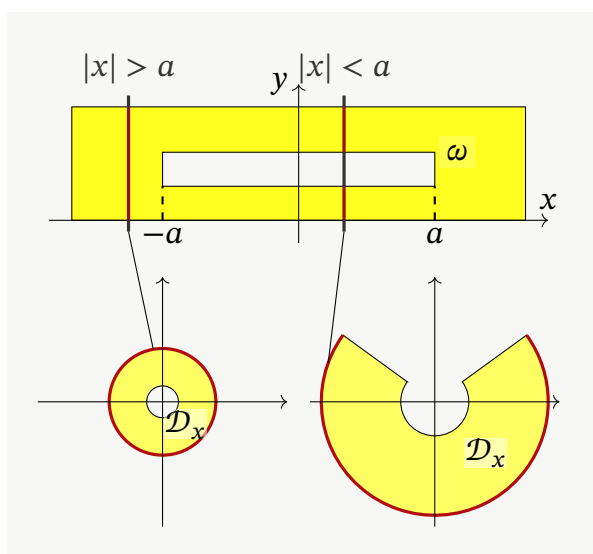


FIGURE 4.7 – En haut : le domaine  $\omega$ . En bas : le domaine  $\mathcal{D}_x$  est défini comme l'ensemble des nombres complexes  $\zeta$  de module entre  $e^{-T-(1-\varepsilon)x^2/2}$  et  $e^{-(1-\varepsilon)x^2/2}$ , et dont l'argument est tel que  $(x, \arg(z)) \in \omega$ . C'est une couronne partielle si  $|x| < a$  et une couronne complète si  $|x| > a'$ . En effet, si on considère la coupe  $\omega(x) := \{y \in ]-\pi, \pi[, (x, y) \in \omega\}$ , alors pour  $|x| < a$ ,  $\omega(x)$  n'est pas égal à  $]-\pi, \pi[$  tout entier, mais pour  $|x| > a$ , la coupe  $\omega$  est bien l'intervalle  $]-\pi, \pi[$  tout entier.

$$\leq \int_{x \in \mathbb{R}} \pi e^{-x^2/2} dx \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(U)}^2.$$

Alors, en rassemblant cette majoration et la minoration du membre gauche, l'inégalité d'observabilité implique bien l'inégalité (4.23) annoncée sur les polynômes.  $\diamond$

On nie l'inégalité (4.23) sur les polynômes comme d'habitude, avec le théorème de Runge. Si  $T < a^2/2$ ,  $U$  ne contient pas  $D(0, e^{-T})$ . On choisit alors  $\zeta_0 \in D(0, e^{-T})$  tel que  $\zeta_0 \notin \bar{U}$ . Alors, comme dans le cas du Théorème 4.12, une suite de polynômes qui converge vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \zeta_0[1, +\infty[$  est un contre exemple à cette inégalité.  $\square$

### 4.3.2 Cas $x$ borné : temps minimal de contrôlabilité à zéro pour quelques domaines

#### Un résultat positif de contrôlabilité

On s'intéresse maintenant au cas où  $\Omega_x = ]-1, 1[$ . On montre (pour une fois) un résultat positif de contrôlabilité, lorsque le domaine de contrôle contient un  $\varepsilon$ -voisinage d'un chemin allant de frontière inférieure à la frontière supérieure de  $\Omega^3$ .

**Théorème 4.23.** *Soit  $\Omega = ]-1, 1[ \times ]0, \pi[$ . On suppose qu'il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma \in C^0([0, 1], \bar{\Omega})$  avec  $\gamma(0) \in ]-1, 1[ \times \{0\}$  et  $\gamma(1) \in ]-1, 1[ \times \{\pi\}$  tel que*

$$\omega_0 := \{z \in \Omega, \text{distance}(z, \text{Im}(\gamma)) < \varepsilon\} \subset \omega, \quad (4.25)$$

<sup>3</sup>Cette stratégie nous a été communiquée par Michel Duprez. Voir aussi [38].



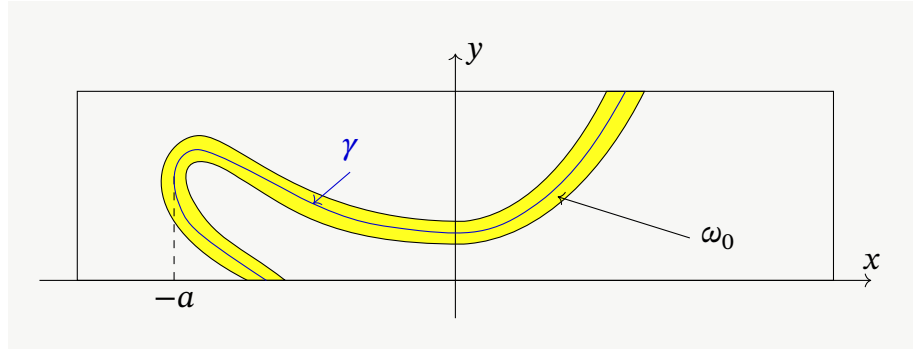


FIGURE 4.8 – En jaune, un exemple de domaine  $\omega_0$  pour le Théorème 4.23. Si  $\omega$  contient un tel  $\omega_0$ , alors l'équation de Grushin est contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T > a^2/2$ .

(voir Fig. 4.8). Soit

$$a := \max_{s \in [0,1]} (|\text{abscisse}(\gamma(s))|). \quad (4.26)$$

Alors l'équation de Grushin (4.1) est contrôlable à zéro sur  $\omega$  en tout temps  $T > a^2/2$ .

*Remarque 4.24.* On peut remplacer dans le Théorème  $\Omega_y = ]0, \pi[$  par  $\Omega_y = \mathbb{T}$ , en demandant alors à  $\gamma$  d'être continue de  $\mathbb{T}$  dans  $\overline{\Omega}$ , et que  $\text{pr}_y(\gamma) = \mathbb{T}$  (le chemin  $\gamma$  doit « faire le tour du tore »).

De plus, ce Théorème peut être adapté pour les équations de Grushin généralisées sur  $\Omega = ]-L_-, L_+[ \times ]0, \pi[$  :

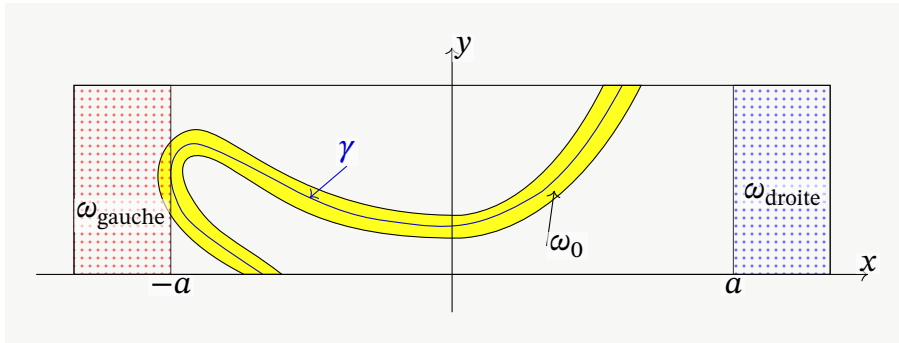
$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2 - q(x)^2 \partial_y^2) f(t, x, y) = \mathbf{1}_\omega u(t, x, y) & t \in [0, T], (x, y) \in \Omega, \\ f(t, x, y) = 0 & t \in [0, T], (x, y) \in \partial\Omega, \\ f(0, x, y) = f_0(x, y) & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (4.27)$$

où  $q \in C^3(L_-, L_+)$  est telle que  $q(0) = 0$  et  $\inf_{]L_-, L_+[} \partial_x q > 0$ . Alors, sous les hypothèses du Théorème 4.23, l'équation (4.27) est contrôlable à zéro en temps  $T > q(0)^{-1} \int_0^a q(s) ds$ . En effet, la démonstration du Théorème 4.23 est basée sur les résultats correspondant pour les bandes verticales [16, Th. 1.4], qui sont énoncés et démontrés dans le cadre de l'équation (4.27).

La stratégie de démonstration du Théorème 4.23 est d'exploiter des résultats préexistants pour le contrôle de l'équation de Grushin sur les bandes verticales, et de conclure avec un argument de troncature.

*Démonstration du Théorème 4.23.* L'inégalité d'observabilité de Beauchard, Dardé et Ervedoza [16, Th. 1.4] peut s'interpréter comme un résultat de contrôlabilité de l'équation de Grushin avec contrôle frontière, dont on déduit par un argument de troncature le résultat de contrôlabilité suivant [38, Appendix A].

**Proposition 4.25.** *Si  $\omega = ]a, 1[ \times ]0, \pi[$ , alors pour tout  $T > a^2/2$ , l'équation de Grushin (4.1) est contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ .*


 FIGURE 4.9 – Définition de  $\omega_{\text{gauche}}$  (rouge) et de  $\omega_{\text{droite}}$  (bleu).

Soit  $\omega_0$  et  $a$  comme dans l'énoncé du Théorème 4.23 (Eq. (4.25) et (4.26)). Soit  $T > a^2/2$ . On définit

$$\begin{cases} \omega_{\text{gauche}} := (-1, -a) \times (0, \pi), \\ \omega_{\text{droite}} := (a, 1) \times (0, \pi). \end{cases}$$

Cette construction est illustrée Fig. 4.9. Considérons les deux problèmes de contrôle

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2) f_{\text{gauche}}(t, x, y) = \mathbf{1}_{\omega_{\text{gauche}}} u_{\text{gauche}}(t, x, y) & t \in [0, T], (x, y) \in \Omega \\ f_{\text{gauche}}(t, x, y) = 0 & t \in [0, T], (x, y) \in \partial\Omega \\ f_{\text{gauche}}(0, x, y) = f_0(x, y), f_{\text{gauche}}(T, x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega \end{cases} \quad (4.28)$$

et

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2) f_{\text{droite}}(t, x, y) = \mathbf{1}_{\omega_{\text{droite}}} u_{\text{droite}}(t, x, y) & t \in [0, T], (x, y) \in \Omega \\ f_{\text{droite}}(t, x, y) = 0 & t \in [0, T], (x, y) \in \partial\Omega \\ f_{\text{droite}}(0, x, y) = f_0(x, y), f_{\text{droite}}(T, x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (4.29)$$

Comme  $T > a^2/2$ , d'après le Théorème 4.25, les problèmes de contrôles (4.28) et (4.29) ont des solutions. On recolle ces deux solutions  $f_{\text{gauche}}$  et  $f_{\text{droite}}$  avec une fonction de troncature appropriée, donnée par le Lemme 4.26 suivant :

**Lemme 4.26.** *Il existe une fonction  $\theta \in C^\infty(\bar{\Omega})$  telle que*

$$\begin{cases} \theta(z) = 0 \text{ pour tout } z \in \omega_{\text{gauche}} \setminus \omega_0, \\ \theta(z) = 1 \text{ pour tout } z \in \omega_{\text{droite}} \setminus \omega_0, \\ \text{support}(\nabla\theta) \subset \omega_0. \end{cases}$$

On peut se convaincre qu'une telle troncature existe en regardant la Figure 4.9; mais démontrons-le rigoureusement.

*Démonstration.* Soit  $\tilde{\gamma} \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$  le chemin  $\gamma$  étendu verticalement en haut et en bas. C.-a-d. que si on note  $\gamma(0) = (x_0, 0)$  et  $\gamma(1) = (x_1, \pi)$ , on définit

$$\tilde{\gamma}(s) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{pour } s \in [0, 1], \\ (x_0, s) & \text{pour } s < 0, \\ (x_1, \pi + s - 1) & \text{for all } s > 1. \end{cases}$$

Soit  $\tilde{\omega}_{\text{droite}}$  la composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\gamma}(\mathbb{R})$  qui contient  $(2, 0)$  (par exemple), c.-à-d. le domaine « à droite de  $\tilde{\gamma}$  ». Soit alors  $\tilde{\theta} := \mathbf{1}_{\tilde{\omega}_{\text{droite}}}$  la fonction indicatrice de  $\tilde{\omega}_{\text{droite}}$ . Enfin, choisissant une fonction  $\rho_\epsilon \in C_c^\infty$  qui est supportée dans  $B(0, \epsilon/2)$ , on définit  $\theta := \rho_\epsilon * \tilde{\theta}$ .

Comme  $\tilde{\theta}$  est localement constante en dehors de  $\tilde{\gamma}(\mathbb{R})$ ,  $\theta$  est localement constante en dehors de chaque  $z \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\text{distance}(z, \tilde{\gamma}(\mathbb{R})) > \epsilon/2$ . Avec la définition de  $\omega_0$  (Eq. (4.25)), cela démontre que  $\text{support}(\nabla\theta) \cap \Omega \subset \omega_0$ . Par définition de  $a$  (Eq. (4.26)), si  $z = (x, y)$  est dans  $\omega_{\text{droite}} \setminus \omega_0$ , c.-à-d. si  $a < x < 1$  mais  $z$  n'est pas dans  $\omega_0$ , alors le segment ouvert  $\{(x', y), x < x' < 1\}$  est en dehors de  $\omega_0$ . Ainsi, on peut voir que  $z$  est dans la composante connexe de  $(2, 0)$ , c.-à-d. que  $z \in \tilde{\omega}_{\text{droite}}$  et comme il n'est pas dans  $\omega_0$ ,  $\text{distance}(z, \tilde{\gamma}(\mathbb{R})) > \epsilon$ , et donc  $\theta(z) = 1$ . De même manière, si  $z$  est dans  $\omega_{\text{gauche}} \setminus \omega_0$ , alors  $z$  est dans la composante connexe de  $(-2, 0)$ , qui n'est pas dans la même composante connexe que  $(2, 0)$ , et donc  $\theta(z) = 0$ .  $\diamond$

On définit alors

$$f := \theta f_{\text{gauche}} + (1 - \theta) f_{\text{droite}}.$$

On remarque que  $f$  est solution de

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2 - x^2 \partial_y^2) f(t, x, y) = u(t, x, y) & t \in [0, T], (x, y) \in \Omega, \\ f(t, x, y) = 0 & t \in [0, T], (x, y) \in \partial\Omega, \\ f(0, x, y) = f_0(x, y) & (x, y) \in \Omega, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} u := & \theta \mathbf{1}_{\omega_{\text{gauche}}} u_{\text{gauche}} + (1 - \theta) \mathbf{1}_{\omega_{\text{droite}}} u_{\text{droite}} + (f_{\text{droite}} - f_{\text{gauche}})(\partial_x^2 + x^2 \partial_y^2) \theta \\ & + 2\partial_x(f_{\text{droite}} - f_{\text{gauche}})\partial_x \theta + 2x^2 \partial_y(f_{\text{droite}} - f_{\text{gauche}})\partial_y \theta. \end{aligned}$$

Les propriétés de  $\theta$  du Lemme 4.26, impliquent que  $u$  est à support dans  $\omega_0 \subset \omega$ . Comme  $f_{\text{gauche}}(T) = f_{\text{droite}}(T) = 0$ , on a  $f(T) = 0$ . De plus, comme  $f_{\text{gauche}}, f_{\text{droite}} \in L^2([0, T]; V)$  (voir Prop. 4.3), on en déduit que  $u \in L^2((0, T) \times \Omega)$ .  $\square$

### Un résultat de non-contrôlabilité

Comme dans le cas  $\Omega_x = \mathbb{R}$ , on montre que si un segment horizontal centré en  $x = 0$  ne touche pas  $\omega$ , alors l'équation de Grushin n'est pas contrôlable à zéro en temps petit.

**Théorème 4.27.** *On suppose  $\Omega = ]-1, 1[ \times ]0, \pi[$ . S'il existe  $y_0 \in ]0, \pi[$  et  $a > 0$  tel que le segment  $\{(x, y_0), |x| \leq a\}$  soit disjoint de  $\bar{\omega}$  (voir Fig. 4.10), alors l'équation de Grushin (4.1) n'est pas contrôlable à zéro en temps  $T < a^2/2$ .*

À nouveau, ce Théorème peut s'adapter au cas  $\Omega_y = \mathbb{T}$ .

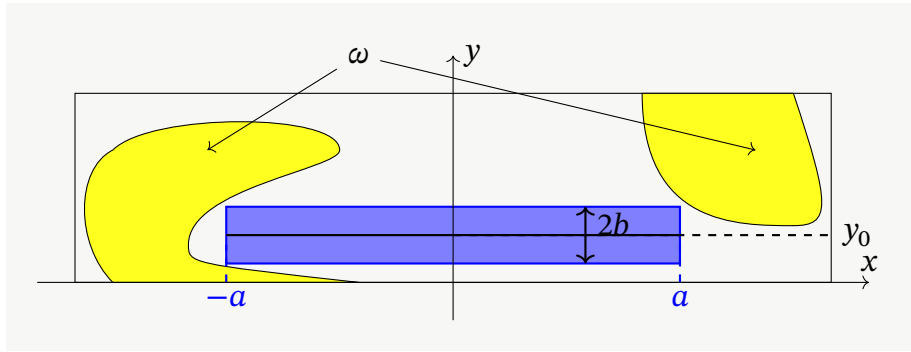


FIGURE 4.10 – En jaune, le domaine  $\omega$ . Si on a un segment horizontal qui ne touche pas  $\omega$ , on peut trouver un rectangle autour de ce segment qui est disjoint de  $\omega$  (en bleu).

*Démonstration.* On commence par remarquer que d'après l'hypothèse selon laquelle  $\{(x, y_0), -a \leq x \leq a\}$  est disjoint de  $\bar{\omega}$ , il existe un rectangle de la forme  $\{-a < x < a, |y - y_0| < b\}$  qui n'intersecte pas  $\omega$  (voir Fig. 4.10). Ainsi, on suppose dans le reste de cette démonstration que  $\omega$  est le complémentaire de ce rectangle, c.-à-d.

$$\omega = \Omega \setminus \{-a < x < a, |y - y_0| < b\}.$$

Comme dans le cas  $\Omega_x = \mathbb{R}$ , on teste l'inégalité d'observabilité (4.4) sur les solutions  $f$  de la forme

$$f(t, x, y) = \sum_{n>0} a_n v_{n0}(x) e^{-\lambda_{n0} t} \sin(ny).$$

Pour ne pas s'embarrasser de questions de sommabilités, on suppose les sommes finies. L'inégalité d'observabilité (4.4) appliquée à ces solutions s'écrit

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n>0} |a_n|^2 |v_{n0}|_{L^2}^2 e^{-2\lambda_{n0} T} \leq C \int_{[0, T] \times \omega} \left| \sum_{n>0} a_n v_{n0}(x) e^{-\lambda_{n0} t} \sin(ny) \right|^2 dt dx dy. \quad (4.30)$$

Comme pour les précédents  $n - 1$  théorèmes, on commence par réinterpréter cette inégalité d'observabilité comme inégalité sur les polynômes. Soit  $\epsilon \in (0, 1/2)$  un réel suffisamment petit qu'on choisira plus tard (il ne dépendra que de  $T$  et  $a$ ). Alors, on a le Lemme 4.28 :

**Lemme 4.28.** Soit  $U = \{|z| < 1, ||\arg(z)| - y_0| > b/2\} \cup D(0, e^{-(1-2\epsilon)a^2/2})$  (voir Fig. 4.11). L'inégalité (4.30) implique qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynômes  $p(\zeta) = \sum_n a_n \zeta^n$ ,

$$|p|_{L^2(D(0, e^{-T}))} \leq C |p|_{L^\infty(U)}. \quad (4.31)$$

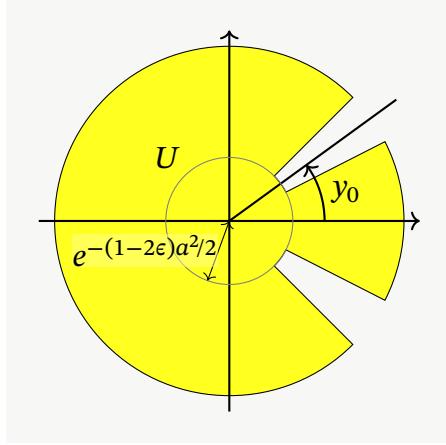


FIGURE 4.11 – Le domaine  $U$  en fonction de  $y_0$ , pour le Lemme 4.28.

*Démonstration. Étape 1 : minoration du membre de gauche.* Pour le membre de gauche de l'inégalité d'observabilité (4.30), on réutilise la minoration (4.19) du membre gauche :

$$\int_{D(0,e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) \leq \pi c^{-1} \sum_{n>0} |a_n|^2 |v_{n0}|_{L^2}^2 e^{-2\lambda_{n0}T}.$$

Ainsi, l'inégalité d'observabilité implique que pour une autre constante  $C$  :

$$\int_{D(0,e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) \leq C |f|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2. \quad (4.32)$$

*Étape 2a : majoration du membre droit; bidouilles pour remplacer sin par exp.* Pour majorer le membre droit, on commence par écrire  $\sin(ny) = (e^{iny} - e^{-iny})/2i$ . Alors, le membre de droit de l'inégalité d'observabilité (4.30) vérifie

$$\begin{aligned} & |f|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{[0,T] \times \omega} \left( \left| \sum_n a_n v_{n0}(x) e^{iny - \lambda_{n0}t} \right|^2 + \left| \sum_n a_n v_{n0}(x) e^{-iny - \lambda_{n0}t} \right|^2 \right) dt dx dy. \end{aligned}$$

Alors, en notant  $\tilde{\omega} = \omega \cup \{(x, -y), (x, y) \in \omega\}$  (voir Fig. 4.12), on réécrit l'inégalité précédente comme

$$|f|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \int_{[0,T] \times \tilde{\omega}} \left| \sum_n a_n v_{n0}(x) e^{iny - \lambda_{n0}t} \right|^2 dt dx dy.$$

*Étape 2b : majoration du membre droit; changement de variables.* Alors, on écrit  $\lambda_{n0} = n + \rho_{n0}$  et  $v_{n0}(x) = e^{-(1-\epsilon)nx^2/2} w_n(x)$ , de sorte qu'avec  $\zeta_x(t, y) = e^{-t+iy-(1-\epsilon)x^2/2}$ , l'inégalité précédente implique :

$$|f|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \int_{[0,T] \times \tilde{\omega}} \left| \sum_{n>0} a_n w_n(x) e^{-\rho_{n0}t} \zeta_x(t, y)^n \right|^2 dt dx dy. \quad (4.33)$$

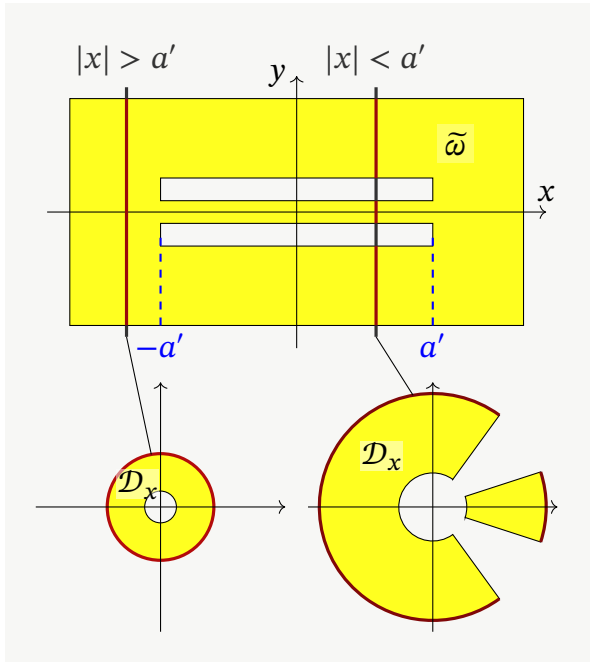


FIGURE 4.12 – En haut : le domaine  $\tilde{\omega}$  est l'union de  $\omega$  et de son symétrique par rapport à l'axe  $x = 0$ . En bas : le domaine  $\mathcal{D}_x$  est défini comme l'ensemble des nombres complexes  $\zeta$  de module entre  $e^{-T-(1-\varepsilon)x^2/2}$  et  $e^{-(1-\varepsilon)x^2/2}$ , et dont l'argument est tel que  $(x, \arg(z)) \in \tilde{\omega}$ . C'est une couronne partielle si  $|x| < a$  et une couronne complète si  $|x| > a'$ . En effet, si on considère la coupe  $\tilde{\omega}(x) := \{y \in ]-\pi, \pi[, (x, y) \in \tilde{\omega}\}$ , alors pour  $|x| < a$ ,  $\tilde{\omega}(x)$  n'est pas égal à  $]-\pi, \pi[$  tout entier, mais pour  $|x| > a$ , la coupe  $\tilde{\omega}$  est bien l'intervalle  $]-\pi, \pi[$  tout entier.

Pour chaque  $x \in ]-1, 1[$ , on fait le changement de variables  $\zeta_x = e^{-t+iy-(1-\varepsilon)x^2/2}$ , pour lequel  $dt dy = |\zeta_x|^{-2} d\lambda(\zeta_x)$ . Pour chaque  $x$ , on note  $\mathcal{D}_x$  l'image par ce changement de variables de l'ensemble sur lequel on intègre (voir Fig. 4.12), c.-à-d.

$$\mathcal{D}_x = \{e^{-(1-\varepsilon)x^2/2} e^{-t+iy}, 0 < t < T, (x, y) \in \tilde{\omega}\}.$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \int_{[0, T] \times \tilde{\omega}} \left| \sum_{n>0} a_n w_n(x) e^{-\rho_n t} \zeta_x(t, y)^n \right|^2 dt dx dy \\ = \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{D}_x} \left| \sum_{n>0} a_n w_n(x) e^{-\rho_n t} \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) dx, \end{aligned}$$

où on a gardé la notation  $e^{-\rho_n t}$  par simplicité, au lieu de l'exprimer comme fonction de  $\zeta$  et  $x$  (on a  $e^{-\rho_n t} = |e^{(1-\varepsilon)x^2/2} \zeta|^{\rho_n}$ ). Avec ce changement de variables, l'inégalité (4.33) devient

$$\|f\|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{D}_x} \left| \sum_{n>0} a_n w_n(x) e^{-\rho_n t} \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) dx. \quad (4.34)$$

*Étape 2c : majoration du membre droit; construction de symboles.* On veut majorer le membre droit de (4.34) par  $|\sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1}|_{L^\infty(U)}^2$  en utilisant les théorèmes sur les opérateurs  $H_\gamma$  (voir Sec. 3.1.4). Pour ceci, on commence par définir des symboles.

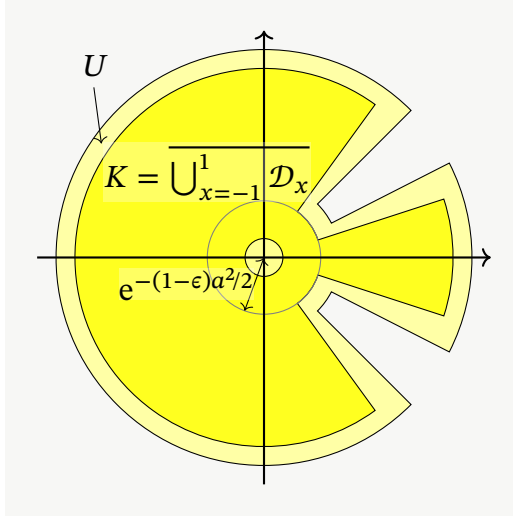


FIGURE 4.13 – Le domaine  $K$ , en jaune, est (l'adhérence de) l'union des domaines  $\mathcal{D}_x$  décrits dans la Figure 4.12. Pour le domaine  $K$  le rayon de l'arc de cercle intérieur est le plus grand rayon des  $\mathcal{D}_x$  qui sont des couronne complètes, c.-à-d.  $e^{-(1-\epsilon)a^2/2}$ . Pour comparaison, on montre  $U$  sur la même figure (en jaune clair). Remarquons que  $U$  a été défini de manière à être un voisinage de  $K$  qui est étoilé en 0.

Ceci ce fait de même manière que dans le cas des bandes horizontales, en remplaçant  $v_{n0}(x)$  par  $w_n(x)$ .

Pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $0 < \tau < T$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\gamma_{x,\tau}(n) = w_{n+1}(x)e^{-\tau\rho_{n+1}}.$$

On veut montrer que  $(\gamma_{x,\tau})_{-1 < x < 1, 0 < \tau < T}$  est bornée dans un  $\bar{\mathcal{S}}_r$ .

On commence par le terme  $\gamma_{\tau,1}(n) := e^{-\tau\rho_n}$ . D'après le Théorème 3.39, il existe une fonction  $r_1 : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  croissante et  $\gamma \in \mathcal{S}_{r_1}$  telle que pour tout  $n$  assez grand,  $\rho_n = \gamma(n)e^{-n}$ . Alors, pour  $0 < \tau < T$ , on note

$$\tilde{\gamma}_{\tau,1}(z) = e^{-\tau\gamma(z)e^{-z}}$$

lorsque c'est défini (c'est-à-dire lorsque  $z$  est dans l'un des  $\Delta_{r_1,\theta}$ , voir Def. 3.6). Avec cette définition, on a pour  $n$  assez grand, disons  $n \geq n_1$ ,  $\gamma_{\tau,1}(n) = \tilde{\gamma}_{\tau,1}(n)$ . Or  $\tilde{\gamma}_{\tau,1}$  est holomorphe. De plus,  $\gamma$  est à croissance sous-exponentielle, donc  $z \mapsto \gamma(z)e^{-z}$  est bornée sur chaque  $\Delta_{r_1,\theta}$ . On note  $C_\theta$  ce supremum :

$$C_\theta := \sup_{z \in \Delta_{r_1,\theta}} |\gamma(z)e^{-z}|.$$

Alors, si  $0 < \tau < T$  et si  $\theta \in ]0, \pi/2[$ , on a pour  $z \in \Delta_{r_1,\theta}$ ,

$$|\tilde{\gamma}_{\tau,1}(z)| = |e^{-\tau\gamma(z)e^{-z}}| \leq e^{\tau C_\theta} \leq e^{T C_\theta},$$

En particulier,  $\tilde{\gamma}_{\tau,1}$  est à croissance sous-exponentielle sur chaque  $\Delta_{r_1,\theta}$ . Donc  $\gamma_{\tau,1} \in \mathcal{S}_{r_1}$ . De plus, la majoration  $|\tilde{\gamma}_{\tau,1}(z)| \leq e^{T C_\theta}$  est uniforme en  $0 < \tau < T$ , donc la famille  $(\tilde{\gamma}_{\tau,1})_{0 < \tau < T}$  est une famille bornée de  $\mathcal{S}_{r_1}$ . On en déduit que la famille de suites  $(\gamma_{\tau,1})_{0 < \tau < T}$  est une famille bornée de  $\bar{\mathcal{S}}_{r_1}$ .

D'après le Corollaire 3.49, il existe une fonction croissante  $r_2 : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x$ , la suite  $(w_n(x))_{n \geq 0}$  soit dans  $\overline{\mathcal{S}}_{r_2}$ , et que si on note  $w(x)$  cette suite, la famille  $(w(x))_{-1 < x < 1}$  est bornée dans  $\overline{\mathcal{S}}_{r_2}$ .

Alors, on définit  $r = \max(r_1, r_2)$ . D'après ce qui précède et d'après le l'inclusion continue de  $\overline{\mathcal{S}}_{r_1}$  et  $\overline{\mathcal{S}}_{r_2}$  dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$  (Cor. 3.16), les familles  $(w(x))_{-1 < x < 1}$  et  $(\gamma_{\tau,1})_{0 < \tau < T}$  sont bornées dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$ . Comme la multiplication est continue dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$  (Prop. 3.12), la famille  $(\gamma'_{x,\tau})_{-1 < x < 1, 0 < \tau < T}$  définie par

$$\gamma'_{x,\tau}(n) = w_n(x)e^{-\tau \rho n}$$

est bornée dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$ . Remarquons que  $\gamma_{x,\tau}(n) = \gamma'_{x,\tau}(n+1)$ . Or, le décalage est continu dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$  (Prop. 3.17). Donc la famille  $(\gamma_{x,\tau})_{-1 < x < 1, 0 < \tau < T}$  est bornée dans  $\overline{\mathcal{S}}_r$ .

*Étape 2d : majoration du membre droit grâce aux opérateurs  $H_\gamma$ .* D'après le Théorème 3.27, si  $K$  est un compact de  $\mathbb{C}$  et si  $V$  est un voisinage borné étoilé en 0 de  $K$ , alors il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , pour tout  $\tau \in ]0, T[$  et pour toute suite finie  $(a_n)$ ,

$$\left| \sum_{n>0} a_n w_n(x) e^{-\rho n \tau} \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(K)} \leq C \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(V)}. \quad (4.35)$$

*Étape 2e : majoration de membre droit; conclusion.* Dans cette inégalité, on choisit  $K = \bigcup_{x=-1}^1 \mathcal{D}_x$  et  $V = U$ , où  $U$  a été défini dans l'énoncé du Lemme 4.28 (voir Fig. 4.13). Remarquons que par définition de  $\mathcal{D}_x$ ,  $K$  est l'union de la couronne  $\{e^{-T-(1-\epsilon)/2} \leq |\zeta| \leq e^{-(1-\epsilon)a^2/2}\}$  et de la couronne partielle  $\{e^{-T-(1-\epsilon)a^2/2} \leq |\zeta| \leq 1, |\arg(\zeta) - y_0| \geq b\}$ . Donc  $U$  est un voisinage de  $K$  qui est étoilé en 0, donc on peut appliquer l'estimée (4.35).

Si on prend de plus  $\tau = t$  dans l'inégalité (4.35) (rappelons que  $t$  est une fonction de  $z$  et  $x$ ) :

$$\left| \sum_{n>0} a_n w_n(x) e^{-\rho n t} \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(K)} \leq C \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(U)}.$$

Comme  $K$  contient tous les  $\mathcal{D}_x$ , on a  $x \in (-1, 1)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_x} \left| \sum_{n>0} a_n w_n(x) e^{-\rho n t} \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) &\leq \lambda(K) \left| \sum_{n>0} a_n w_n(x) e^{-\rho n t} \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(K)}^2 \\ &\leq \pi C^2 \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(U)}^2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Alors, on utilise cette inégalité (4.36) dans l'estimée (4.34) pour trouver, avec une certaine constante  $C > 0$  :

$$\|f\|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 \leq C \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(U)}^2.$$



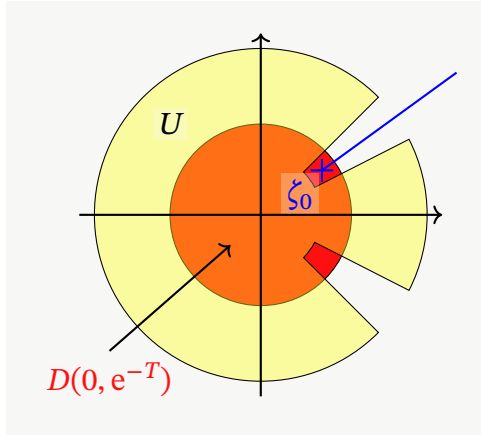


FIGURE 4.14 – Si le disque  $D(0, e^{-T})$  (en rouge) n'est pas inclus dans  $U$ , on peut trouver des fonctions holomorphes petites dans  $U$  mais arbitrairement grandes dans  $D(0, e^{-T})$  (par exemple, une suite de polynômes qui convergent vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  hors de la demi-droite bleue).

*Étape 3 : conclusion.* Si on combine cette dernière inégalité avec la minoration du membre (4.32) du membre gauche, on trouve qu'avec une certaine constante  $C > 0$  :

$$\int_{D(0, e^{-T})} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|^2 d\lambda(\zeta) \leq C \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^\infty(U)}^2,$$

qui est à un changement d'indice de sommation  $n' = n - 1$  l'inégalité (4.31) annoncée.  $\diamond$

Supposons  $T < (1 - 2\epsilon)a^2/2$ . On veut nier l'inégalité (4.31) du Lemme 4.28. On le fait comme d'habitude, grâce au théorème de Runge (Th. 1.12). Comme  $T < (1 - 2\epsilon)a^2/2$ , le domaine  $U$  ne contient pas le disque  $D(0, e^{-T})$  (voir Fig. 4.14). On choisit alors  $\zeta_0 \in D(0, e^{-T})$  tel que  $\zeta_0 \notin U$ . Alors, une suite de polynômes qui converge vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \zeta_0[1, +\infty[$  est un contre-exemple à l'inégalité (4.31).

Donc l'équation de Grushin n'est pas contrôlable en temps  $T < (1 - \epsilon)a^2/2$ . Mais  $\epsilon > 0$  peut être choisi arbitrairement petit, donc l'équation de Grushin n'est pas contrôlable en temps  $T < a^2/2$ .  $\square$

### Temps minimal pour quelques domaines

Le Théorème 4.23 permet dans certains cas de majorer le temps minimal de contrôlabilité, tandis que le Théorème 4.27 permet de le minorer. Si la majoration et la minoration coïncident, on a trouvé le temps minimal de contrôlabilité. Cela arrive pour un certain nombre de domaines.

**Théorème 4.29.** Soit  $\Omega = ]-1, 1[ \times ]0, \pi[$ . Soit  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  deux fonctions continues et  $\omega = \{(x, y) \in ]-1, 1[ \times \mathbb{T}, \gamma_1(y) < x < \gamma_2(x)\}$  (voir Fig. 4.15). Soit<sup>4</sup>  $a = \max(\sup(\gamma_2^-), \sup(\gamma_1^+))$ . Alors :

<sup>4</sup>Si  $f$  est une fonction numérique, on note  $f^+ = \max(f, 0)$  et  $f^- = \max(-f, 0)$ .

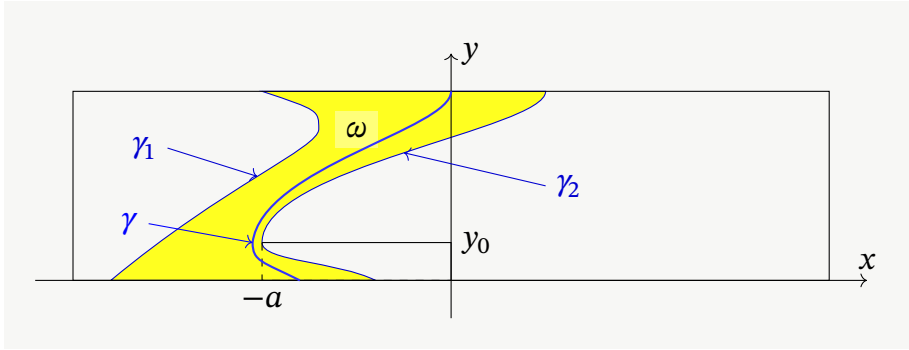


FIGURE 4.15 – En jaune, le domaine de contrôle  $\omega$ . À  $y = y_0$ , la fonction  $\max(\gamma_2^-, \gamma_1^+)$  atteint son maximum  $a$ . Alors l'intervalle ouvert  $\{(x, y_0), -a < x < a\}$  est disjoint de  $\bar{\omega}$ . Donc, l'équation de Grushin n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T < a^2/2$ . Également, si on prend un chemin  $\gamma$  (ici en bleu) du bord inférieur vers le bord supérieur qui reste dans  $\omega$  et qui est proche de la frontière autour de  $y = y_0$ , alors on peut appliquer le Théorème 4.23, et donc l'équation de Grushin est contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T > a^2/2$ .

1. si  $T > a^2/2$ , l'équation de Grushin (4.1) est contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ ;
2. si  $T < a^2/2$ , l'équation de Grushin (4.1) n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ .

Ce théorème reste vrai si  $\Omega = ]-1, 1[ \times \mathbb{T}$ , où on demande  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  d'être continues de  $\mathbb{T}$  dans  $[-1, 1]$  (toujours avec  $\gamma_1 < \gamma_2$ ).

*Démonstration.* En regardant la Figure 4.15, on peut se convaincre que les Théorèmes 4.23 et 4.27 donneront bien  $a^2/2$  comme temps minimal de contrôlabilité à zéro, mais démontrons-le proprement.

*Étape 1 : minoration du temps minimal.* Pour cette étape, on a seulement besoin de traiter le cas  $a > 0$ . Par définition de  $a$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $y_\epsilon \in (0, \pi)$  tel que  $\gamma_2(y_\epsilon) < -a + \epsilon$  ou  $\gamma_1(y_\epsilon) > a - \epsilon$ . Or  $\gamma_1 < \gamma_2$ , donc le segment  $\{(x, y_\epsilon), |x| \leq a - \epsilon\}$  est disjoint de  $\bar{\omega}$ , donc, d'après le Théorème 4.27, l'équation de Grushin (4.1) n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T < (a - \epsilon)^2/2$ . Ceci est vrai pour tout  $\epsilon > 0$ .

*Étape 2 : majoration du temps minimal.* Soit  $\epsilon > 0$  suffisamment petit pour que  $\gamma_2 - \gamma_1 > \epsilon$ . Soit  $\tilde{\gamma}_1 = \max(\gamma_1, -a - \epsilon)$  et  $\tilde{\gamma}_2 = \min(\gamma_2, a + \epsilon)$ . En exploitant les inégalités  $\gamma_2 - \gamma_1 > \epsilon$ ,  $\gamma_2 \geq -a$ ,  $\gamma_1 \leq a$  et en distinguant chaque cas, on trouve immédiatement  $\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_1 \geq \epsilon$ . Alors on définit le chemin

$$\gamma : s \in [0, \pi] \mapsto \left( \frac{\tilde{\gamma}_1(s) + \tilde{\gamma}_2(s)}{2}, s \right).$$

Ce chemin va de la frontière inférieure vers la frontière supérieure, et vérifie  $|\text{abscisse}(\gamma)| \leq a + \epsilon$  et  $\gamma_1 + \epsilon/2 \leq \text{abscisse}(\gamma) \leq \gamma_2 - \epsilon/2$ . Donc, pour  $\eta > 0$  assez petit, on a

$$\omega_0 := \{z \in \Omega, \text{distance}(z, \text{Im}(\gamma)) < \eta\} \subset \omega.$$

Alors, d'après le Théorème 4.23, l'équation de Grushin (4.1) est contrôlable en temps  $T > (a + \epsilon)^2/2$ . Ceci est vrai pour tout  $\epsilon > 0$ . □

# 5 | Contrôlabilité de l'équation de Kolmogorov

ON traite maintenant le cas des équations de type Kolmogorov. Comme pour l'équation de Grushin, si on considère les équations de type Kolmogorov posées pour  $x \in \mathbb{R}$ , des expressions explicites des fonctions propres permettent de plonger des équations de la chaleur fractionnaire tournée, sous-critique cette fois-ci, dans les équations de type Kolmogorov. On adapte alors la démonstration de la non-contrôlabilité des équations de la chaleur fractionnaire sous-critique. Le cas où  $x$  est borné en est une perturbation, plus simple conceptuellement à traiter que les perturbations de l'équation de Grushin, quoiqu'un peu plus calculatoire.

## 5.1 Généralités

### 5.1.1 Définition

On s'intéresse à l'équation de type Kolmogorov suivante, où  $\gamma \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_v^2 - v^\gamma \partial_x) f(t, x, v) = 1_\omega u(t, x, v) & t \in ]0, T[, (x, v) \in \Omega \\ f(t, x, v) = 0 & t \in ]0, T[, (x, v) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

On étudiera le cas où  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$  avec  $\Omega_x = \mathbb{R}$ , ou  $\mathbb{T}$  et  $\Omega_v = \mathbb{R}$  ou  $] -1, 1[$  si  $\gamma = 2$ , et  $\Omega_v = ]0, +\infty[$  dans le cas  $\gamma = 1$ .

### 5.1.2 Caractère bien posé

Étant donné que nous travaillerons uniquement du point de vue de l'observabilité et que les seules solutions que nous considérerons seront des solutions fortes, nous ne donnons que les idées principales de la démonstration du caractère bien posé de l'équation de Kolmogorov.

On peut montrer que l'équation de Kolmogorov (5.1) est bien posée en prenant la transformée de Fourier (ou série de Fourier) en  $x$ . En effet, dans le cas  $\Omega_x = \mathbb{R}$ , si  $f$  est solution de l'équation de Kolmogorov (5.1) sans terme source ( $u = 0$ ), on a formellement

$$(\partial_t - \partial_v^2 - i\xi v^\gamma) \mathcal{F}_x f(t, \xi, v) = 0. \quad (5.2)$$

Si  $\Omega_x = \mathbb{T}$ , il faut remplacer la transformée de Fourier par les coefficients de Fourier. Pour chaque  $\xi \in \mathbb{R}$ , cette équation est bien posée (si  $\Omega_v = ] -1, 1[$ , c'est une équation

parabolique avec coefficients  $C^\infty$  bornés, et voir [47, Sec. 14.4 et 14.5.2] pour les cas  $\gamma = 2$ ,  $\Omega_v = \mathbb{R}$  et  $\gamma = 1$ ,  $\Omega_v = ]0, +\infty[$  respectivement, avec la définition précise des opérateurs et de leur domaine, et la démonstration qu'ils sont maximaux monotones).

On démontre des estimées de dissipation pour les équations (5.2) (voir [13, Prop. 10 et Prop. 17] pour le cas  $\Omega_x = \mathbb{T}$ ,  $\Omega_v = \mathbb{R}$ ). On définit alors le semi-groupe en prenant la transformée de Fourier inverse (ou série de Fourier) des solutions de (5.2).

Finissons par donner l'inégalité d'observabilité associée au problème de contrôlabilité de l'équation de Kolmogorov.

**Proposition 5.1.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout  $f_0 \in L^2([0, T] \times \Omega)$ , il existe  $u \in L^2([0, T] \times \omega)$  tel que la solution  $f$  de l'équation de type Kolmogorov (5.1) vérifie  $f(T, \cdot, \cdot) = 0$  sur  $\Omega$ .
2. Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in L^2(\Omega)$ , la solution  $g$  de l'équation adjointe

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_v^2 + v^\gamma \partial_x)g(t, x, v) = 0 & t \in ]0, T[, (x, v) \in \Omega \\ g(t, x, v) = 0 & t \in ]0, T[, (x, v) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.3)$$

vérifie l'inégalité d'observabilité suivante :

$$|g(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \leq C |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}. \quad (5.4)$$

### 5.1.3 Composantes de Fourier

Soit  $g$  une solution de l'équation adjointe (5.3). Soit  $g_\xi(t, v)$  la transformée de Fourier de  $g$  selon la variable  $x$  (ou le  $\xi$ -ième coefficient de Fourier si  $\Omega_x = \mathbb{T}$ ). Alors, on a formellement

$$(\partial_t - \partial_v^2 + i\xi v^\gamma)g_\xi(t, v) = 0.$$

Dans le cas  $\gamma = 2$ , l'opérateur  $-\partial_v^2 + i\xi v^2$  est l'oscillateur harmonique étudié à la section 3.2 (à un facteur  $i\xi$  près et avec  $h = (i\xi)^{-1/2}$ ). Plus précisément, si  $\Omega_x = \mathbb{R}$ , la première fonction propre de cet opérateur est  $u_\xi(v) = e^{-\sqrt{i\xi}v^2/2}$  de valeur propre  $\mu_\xi = \sqrt{i\xi}$ . Et si  $\Omega_x = ]-1, 1[$ , la première fonction propre est, avec les notations de la section 3.2.4,  $u_\xi = v_{(i\xi)^{-1/2}}$ , de valeur propre  $\mu_\xi = i\xi \lambda_{(i\xi)^{-1/2}}$ . En particulier, si  $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ , alors la fonction  $g$  définie par

$$g(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{ix\xi - t\mu_\xi} u_\xi(v) d\xi \quad (5.5)$$

est solution de l'équation de Kolmogorov sur  $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega_v$  (si  $\Omega = \mathbb{T} \times \Omega_v$ , on remplace l'intégrale par une somme pour  $\xi \in \mathbb{Z}$ ).

Dans le cas  $\gamma = 1$ , l'opérateur  $-\partial_v^2 + i\xi v$  est l'opérateur d'Airy dont on a discuté à la Section 3.3, avec  $z = i\xi$ . Soit  $-\mu_0$  le premier zéro de la fonction d'Airy. D'après la Proposition 3.54, la fonction  $u_\xi$  définie par

$$u_\xi(v) = \text{Ai}(\xi^{1/3} e^{i\pi/6} v - \mu_0)$$

est fonction propre de  $-\partial_v^2 + i\xi v$ , de valeur propre  $\xi^{2/3} \mu_0 e^{2i\pi/3} =: \xi^{2/3} \lambda_0$ . Alors, si  $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ , la fonction  $g$  définie par

$$g(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{ix\xi - t\lambda_0 \xi^{2/3}} u_\xi(v) d\xi = \int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{ix\xi - t\lambda_0 \xi^{2/3}} \text{Ai}(\xi^{1/3} e^{i\pi/6} v - \mu_0) d\xi \quad (5.6)$$

est solution de l'équation de Kolmogorov. Notons que d'après l'asymptotique de la fonction d'Airy (3.62), cette intégrale converge.

## 5.2 Non-contrôlabilité avec un potentiel quadratique

On suppose dans cette section que  $\gamma = 2$ .

### 5.2.1 Non-contrôlabilité sur des bandes verticales

On démontre que l'équation de Kolmogorov n'est pas contrôlable à zéro si le domaine de contrôle est une bande verticale.

**Théorème 5.2.** *Soit  $\Omega_x = \mathbb{R}$  ou  $\Omega_x = \mathbb{T}$  et  $\Omega_v = \mathbb{R}$  ou  $\Omega_v = ]-1, 1[$ , soit  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$ , et soit  $\gamma = 2$ . Soit  $T > 0$  et  $\omega_x$  un ouvert strict de  $\Omega_x$ . L'équation de Kolmogorov (5.1) n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega = \omega_x \times \Omega_v$  en temps  $T$ .*

*Démonstration dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}^2$ .* Comme l'équation de Kolmogorov est invariante par translation dans la direction  $x$ , on peut supposer que  $\omega_x$  est de la forme  $\omega_x = \{x \in \mathbb{R}, |x| > \epsilon\}$ .

D'après notre discussion sur les composantes de Fourier, la formule (5.5) définit une solution de l'équation de Kolmogorov. Dans le cas  $\Omega_v = \mathbb{R}$ , on a  $\mu_\xi = \sqrt{i\xi}$  et  $u_\xi(v) = e^{-\sqrt{i\xi} v^2/2}$ . La solution donnée par cette formule est alors

$$g(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{-\sqrt{i\xi}(t+v^2/2)+ix\xi} d\xi.$$

Fixons alors  $\xi_0 > 0$  et  $\chi$  une fonction  $C_c^\infty(]-\xi_0/2, \xi_0/2[)$  qui vaut 1 sur le segment  $[-\xi_0/4, \xi_0/4]$ . Alors, pour  $h > 0$ , on choisit  $a(\xi) = h^{-1/4} \chi(h\xi - \xi_0) e^{-(h\xi - \xi_0)^2/2h}$ . La

solution définie par la formule (5.5) est alors en faisant le changement de variables  $\xi' = h\xi$

$$g_h(t, x, v) = h^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi - \xi_0) e^{-(\xi - \xi_0)^2/2h + ix\xi/h - (t+v^2/2)\sqrt{i\xi/h}} d\xi. \quad (5.7)$$

Remarquons que c'est à une constante près la solution de l'équation de la chaleur fractionnaire (2.37) avec  $\alpha = 1/2$ ,  $\bar{z} = \sqrt{i}$  et où on a remplacé  $t$  par  $t + v^2/2$ .

On exploite alors les estimations ponctuelles de  $g_h$  qu'on a démontrées dans la Prop. 2.13 : pour tout  $\epsilon > 0$  assez petit, on a uniformément en  $|x| > \epsilon$ ,  $t \geq 0$  et  $v \in \mathbb{R}$

$$g_h(t, x, v) = O\left(|x|^{-2} e^{-c/h - c(t+v^2/2)\sqrt{h}}\right) \quad (5.8)$$

et localement uniformément en  $t > 0$ ,  $|x| < \epsilon$  et  $v \in \mathbb{R}$

$$g_h(t, x, v) = e^{ix\xi_0/h - x^2/2h + O(h^{-1/2})} \quad (5.9)$$

Donc, on a

$$|g_h|_{L^2([0, T] \times \omega)} = O(e^{-c/h}) \quad (5.10)$$

et

$$|g_h(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \geq |g_h(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(|x| < \epsilon, |v| < 1)} \geq e^{-Ch^{-1/2}}. \quad (5.11)$$

En prenant la limite  $h \rightarrow 0$ , On voit que la famille  $(g_h)_{h>0}$  est un contre-exemple à l'inégalité d'observabilité (5.4).  $\square$

*Ébauche de la démonstration dans le cas  $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ .* Comme dans le cas de l'équation de la chaleur fractionnaire sur  $\mathbb{T}$ , on définit  $g_{h\text{per}}(t, x, v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_h(t, x + 2\pi k, v)$  qui est solution de l'équation de Kolmogorov (5.3), et comme pour le cas de l'équation de la chaleur fractionnaire, tous les termes pour  $k \neq 0$  sont en  $O(e^{-c/h})$ . Les détails des calculs sont laissés au lecteur.  $\square$

Pour le cas  $\Omega_v = ]-1, 1[$ , les fonctions propres ne sont plus exactement  $e^{-\sqrt{i\xi}v^2/2}$ . Nous allons nous servir des résultats de la Section 3.2 pour gérer les termes d'erreurs. On rappelle que  $u_\xi$  est la première fonction propre de  $-\partial_v^2 + i\xi v^2$  (qu'on normalisera par  $u_\xi(0) = 1$ ), de valeur propre associée  $\mu_\xi$ . On rappelle également qu'avec les notations de la Section 3.2,  $\mu_\xi = i\xi \lambda_{(i\xi)^{-1/2}}$  et  $u_\xi(v) = v_{(i\xi)^{-1/2}}(v)$ .

*Démonstration du Théorème 5.2 dans le cas  $\Omega = \mathbb{R} \times ]-1, 1[$ .* Le contre-exemple à l'inégalité d'observabilité (5.4) est essentiellement le même que dans le cas  $\Omega_v = \mathbb{R}$ , mais en ajoutant les corrections aux fonctions propres et valeurs propres. On définit  $g_h(t, x, v)$  par :

$$g_h(t, x, v) = h^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi - \xi_0) e^{-ix\xi/h - (\xi - \xi_0)^2/2h - \mu_\xi/h t} u_{\xi/h}(v) d\xi. \quad (5.12)$$

De manière équivalente, si on définit  $\rho_\xi := \mu_\xi - \sqrt{i\xi}$  et la « correction »  $\delta_{h,t,v}(\xi)$  par

$$\delta_{h,t,v}(\xi) = e^{\sqrt{i\xi/h}v^2/2} u_{\xi/h}(v) e^{-t\rho_{\xi/\sqrt{h}}}, \quad (5.13)$$

on a

$$g_h(t, x, v) = h^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi - \xi_0) e^{-ix\xi/h - (\xi - \xi_0)^2/2h - (t+v^2/2)\sqrt{i\xi/h}} \delta_{h,t,v}(\xi) d\xi. \quad (5.14)$$

Remarquons que d'après le Théorème 3.39 et la Proposition 3.51, cette correction  $\delta$  vérifie  $\delta_{h,t,v}(\xi) \rightarrow 1$  lorsque  $h \rightarrow 0$  (plus de détails Eq. (5.19) et (5.21) plus loin). Chaque fonction  $(t, x, v) \mapsto e^{-ix\xi - \mu_\xi t} u_\xi(v)$  est solution de l'équation adjointe (5.3) (même si elle n'est pas dans l'espace d'énergie). Donc  $g_h$  est solution de l'équation adjointe.

Avec la notation  $\phi_x(\xi) = (\xi - ix)^2/2$  (comme dans la démonstration de la Proposition 2.13), on réécrit la définition de  $u_h$  de la manière suivante :

$$g_h(t, x, v) = h^{-3/4} e^{ix\xi_0/h - x^2/2h} I_h(t, x, v), \quad (5.15)$$

avec

$$I_h(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) e^{-\phi_x(\xi)/h - \sqrt{i(\xi + \xi_0)/h}(t+v^2/2)} \delta_{h,t,v}(\xi + \xi_0) d\xi \quad (5.16)$$

Comme dans le cas  $\Omega_v = \mathbb{R}$ , on démontre les estimations ponctuelles suivantes

**Proposition 5.3** (Estimations ponctuelles). *Soit  $\epsilon > 0$  assez petit. On a uniformément en  $|x| > \epsilon$ ,  $t > 0$  et  $v \in ]-1, 1[$*

$$g_h(t, x, v) = O(|x|^{-2} e^{-c/h}) \quad (5.17)$$

*et localement uniformément en  $|x| < \epsilon$ ,  $t > 0$  et  $v \in ]-1, 1[$*

$$g_h(t, x, v) = e^{ix\xi_0/h - x^2/2h + O(h^{-1/2})} \quad (5.18)$$

Ces estimations impliquent comme dans le cas  $\Omega_v = \mathbb{R}$  que  $g_h$  est un contre-exemple à l'inégalité d'observabilité (5.4), ce qui implique le Théorème 5.2. Nous omettons cette partie de la démonstration.

La démonstration de ces estimations ponctuelles est en essence la même que la démonstration de la Proposition similaire (mais plus simple) 2.13. Mais on doit s'assurer que la « correction » ne pose pas de problème dans la démonstration, notamment avec les changements de chemins d'intégration.

Notons que dans l'intégrale définissant  $g_h$  (Eq. (5.15) et (5.16)), d'après le support de  $\chi$ , on intègre seulement sur  $]-\xi_0/2, \xi_0/2[$ . Donc, si on veut changer de chemin d'intégration de  $\mathbb{R}$  à un autre  $\Gamma$ , on doit s'assurer, comme dans la Proposition 2.13,



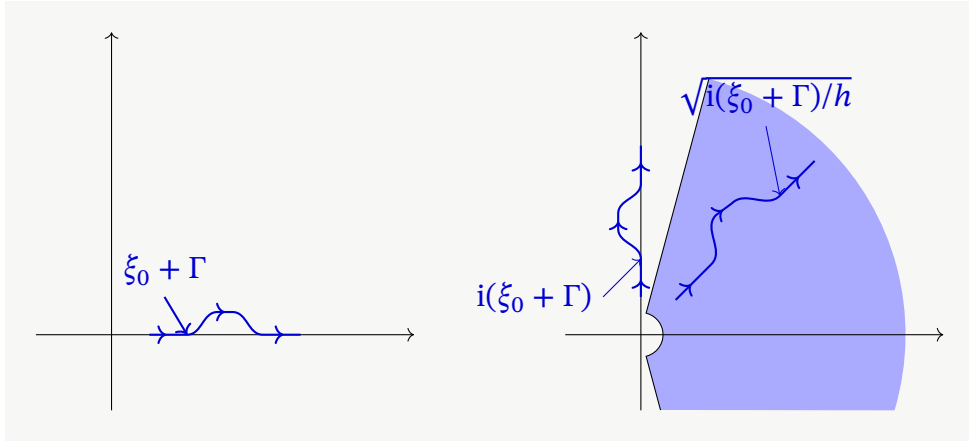


FIGURE 5.1 – À gauche, un exemple de chemin sur lequel on veut intégrer la définition de  $g$  (Eq. (5.15)). À droite, la transformation de  $\Gamma$  par  $\xi \mapsto \sqrt{-i(\xi_0 + \xi)/h}$ , pour un  $h$  fixé. En bleu clair, une partie du domaine complexe où la valeur propre  $\rho_\xi$  et la fonction propre  $u_\xi$  sont définis. La « correction »  $\delta_{h,t,v}(\xi + \xi_0)$  est définie sur  $\Gamma$  si  $\sqrt{-i(\xi + \xi_0)/h}$  est dans le domaine bleu lorsque  $\xi \in \Gamma$ .

qu'on ne change le chemin qu'entre  $\xi = -\xi_0/4$  et  $\xi_0/4$  (où  $\chi = 1$ ). Mais on doit aussi vérifier que la « correction » est définie sur ce chemin.

Rappelons que  $\mu_\xi = i\xi\lambda_{(i\xi)^{-1/2}}$  et  $u_\xi = v_{(i\xi)^{-1/2}}$ . Or, d'après les résultats de la section 3.2,  $\lambda_{h'}$  et  $v_{h'}$  sont définis sur des domaines de la forme  $\{|h'| < h'_\theta, |\arg(h')| < \theta\}$  pour  $0 < \theta < \pi/2$  (voir Th. 3.39 et 3.48). Donc la « correction »  $\delta_{h,t,v}(\xi)$  est définie pour  $|\arg(\sqrt{i\xi/h})| < 3\pi/8$  (par exemple) et  $|\sqrt{i\xi/h}|$  assez grand (voir Fig. 5.1). Ceci est vrai par exemple si  $\xi - \xi_0$  est dans un voisinage  $V$  fixe, assez petit, de  $[-\xi_0/2, \xi_0/2]$  et  $h < h_0$  (avec  $h_0$  assez petit). Dans le reste de cette démonstration, nous justifierons les changements de chemin d'intégration dans (5.15) en nous assurant qu'ils restent dans  $V$ . De plus, le Théorème 3.39 et les Propositions 3.48 et 3.51 se traduisent respectivement en les estimations suivantes, où  $\rho_\xi = \mu_\xi - \sqrt{i\xi}$ ,

$$|e^{-t\rho_{\xi/h}} - 1| \leq Ce^{-c/h^{-1/2}} \quad \text{pour } \xi \in \xi_0 + V, h < h_0 \text{ et } 0 < t < T \quad (5.19)$$

$$|e^{\sqrt{i\xi/h}v^{2/4}}u_{\xi/h}(v)| \leq C \quad \text{pour } \xi \in \xi_0 + V, h < h_0 \text{ et } |v| < 1 \quad (5.20)$$

$$|e^{\sqrt{i\xi/h}v^{2/2}}u_{\xi/h}(v) - 1| \leq Ce^{-ch^{-1/2}} \quad \text{pour } \xi \in \xi_0 + V, h < h_0 \text{ et } |v| < 1/2. \quad (5.21)$$

Pour obtenir l'estimée (5.17), on commence par intégrer par parties dans la définition de  $I_h$  (Eq. (5.16)) pour obtenir une décroissance en  $x$  :

$$I_h(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\phi_x(\xi)/h} u_{h,t,x,v}(\xi) d\xi$$

avec

$$\begin{aligned} u_{h,t,x,v}(\xi) &= \left( h \partial_\xi \frac{1}{\xi - ix} \right)^2 \left( \chi(\xi) e^{-\sqrt{i(\xi+\xi_0)/h}(t+v^2/2)} \delta_{h,t,v}(\xi + \xi_0) \right) \\ &= \left( h \partial_\xi \frac{1}{\xi - ix} \right)^2 \left( \chi(\xi) e^{-\sqrt{i(\xi+\xi_0)/h}t} u_{(\xi+\xi_0)/h}(v) e^{-t\rho(\xi+\xi_0)/h} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Alors, on change le chemin d'intégration pour un chemin  $\Gamma_h$  qui suit un arc d'hyperbole  $\Re(\phi_x(\xi)) = a^2/2 - x^2/2 = \Re(\phi_x(a))$  avec  $a$  assez petit pour que les arcs d'hyperboles pour  $|x| > \epsilon$  restent dans le domaine  $V$  (où  $\delta_{h,t,v}(\xi + \xi_0)$  est défini). Ainsi, on a

$$I_h(t, x, v) \leq C \sup_{\xi \in \Gamma_h} |u_{h,t,x,v}(\xi)| e^{-a^2/2h + x^2/2h}. \quad (5.23)$$

De plus, les estimées (5.19) et (5.20) impliquent que pour  $\xi \in \Gamma_h$  et  $|x| > \epsilon$  :

$$|u_{h,t,x,v}(\xi)| \leq C_\epsilon |x|^{-2}.$$

Donc, en combinant cette estimée avec l'équation (5.23) et la définition de  $g_h$  (Eq. (5.15)), la majoration (5.17) de  $g_h$  est démontrée.

Pour obtenir la minoration (5.18), on utilise à nouveau la méthode du point col. On commence par déformer le chemin d'intégration en un chemin qui passe par le point critique  $\xi_c = ix$  de  $\phi_x$ . Comme on ne peut déformer le chemin d'intégration que dans un voisinage  $V$  de  $[-\xi_0/2, \xi_0/2]$ , on ne peut faire ceci que si  $x$  est assez petit, disons  $|x| < \epsilon$ .

Alors, on utilise à nouveau la Proposition 2.9. Même si cette Proposition est énoncée pour  $u$  indépendant de  $h$ , le premier  $O$  ne dépend pas de  $u$  et le second n'en dépend que par sa norme  $H_a^\infty$ . On peut donc en fait utiliser cette proposition avec  $u$  dépendant de  $h$ , si on suppose que  $u_h \rightarrow u_0$  dans  $H_a^\infty$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . Dans notre cas, on applique la méthode du point col avec  $u_h(\xi) = \delta_{h,t,v}(\xi + \xi_0)$  (avec  $\delta$  défini à l'équation (5.13)). Les estimées (5.19) et (5.21) assurent que pour  $a > 0$  assez petit, on a  $u_h \rightarrow 1$  dans  $H_a^\infty$  lorsque  $h \rightarrow 0$ , cette convergence étant uniforme en  $0 \leq t \leq T$ ,  $\xi \in \xi_0 + V$  et  $|v| < 1/2$ .

Donc la méthode du point col implique que localement uniformément en  $x$  assez petit,  $v \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$ ,

$$I_h(t, x, v) = e^{\mathcal{O}(h^{-1/2})} (1 + O(\sqrt{h})). \quad (5.24)$$

Donc, d'après la définition de  $g_h$  (Eq. (5.15)), on a localement uniformément en  $|x| < \epsilon$ ,  $v \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$ ,

$$g_h(t, x, v) = e^{ix\xi_0/h - x^2/2h + \mathcal{O}(h^{-1/2})} (1 + O(\sqrt{h})). \quad (5.25)$$

On a donc bien l'asymptotique (5.9) annoncée.

La démonstration de la Proposition 5.3 est achevée, ainsi que la démonstration du Théorème 5.2 dans le cas  $\Omega = \mathbb{R} \times ]-1, 1[$ , comme on l'a déjà dit.  $\square$

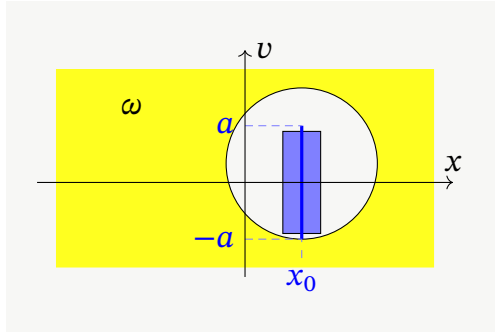


FIGURE 5.2 – En jaune, le domaine de contrôle  $\omega$ . S'il existe une ligne verticale (en bleu foncé) symétrique par rapport à  $\{v = 0\}$ , qui est disjointe de  $\bar{\omega}$ , alors pour tout  $a' < a$ , il existe un rectangle de la forme  $\{|x - x_0| < b, -a' < v < a'\}$  (en bleu plus clair) qui est disjoint de  $\bar{\omega}$ .

*Ébauche de démonstration dans le cas  $\Omega = \mathbb{T} \times ]-1, 1[$ .* Dans le cas  $\Omega_x = \mathbb{T}$ ,  $\Omega_v = ]-1, 1[$ , on regarde à nouveau le périodisé de  $g_h$ , c.-à-d.  $g_{h\text{per}}(t, x, v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_h(t, x + 2\pi k, v)$ . Comme dans le cas de la chaleur fractionnaire sous-critique (et Kolmogorov avec  $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ ),  $g_{h\text{per}}$  est solution de l'équation de Kolmogorov (5.3), et est un contre-exemple à l'inégalité d'observabilité (5.4).  $\square$

### 5.2.2 Minoration du temps minimal pour des domaines de contrôle non rectangulaires

**Théorème 5.4.** *Soit  $\Omega_x = \mathbb{R}$  ou  $\Omega_x = \mathbb{T}$  et  $\Omega_v = \mathbb{R}$  ou  $\Omega_v = ]-1, 1[$ , et soit  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$ . Soit  $\omega \subset \Omega$ . On suppose qu'il existe  $x_0 \in \Omega_x$  et  $a > 0$  tel que l'intervalle vertical symétrique  $\{(x_0, v), -a < v < a\}$  est disjoint de  $\bar{\omega}$ . Alors l'équation de Kolmogorov (5.1) n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T < a^2/2$ .*

*Démonstration dans le cas  $\Omega_x = \Omega_v = \mathbb{R}$ .* Si  $0 < a' < a$ , il existe  $b > 0$  tel que le rectangle  $R := \{|x - x_0| < b, |v| < a'\}$  soit disjoint de  $\bar{\omega}$  (voir Fig. (5.2)). Comme l'équation de Kolmogorov est invariante par translation dans la direction  $x$ , on peut supposer que  $x_0 = 0$ .

On va utiliser les mêmes fonctions  $g_h$  que dans le cas des bandes verticales (Eq. (5.7)). Mais alors que nous avons utilisé uniquement le terme en  $h^{-1}$  dans l'exposant de l'asymptotique (2.35), nous allons ici utiliser le terme suivant. Plus précisément, selon cette asymptotique avec  $\bar{z} = \sqrt{i}$ ,  $\alpha = 1/2$  et  $t$  remplacé par  $t + v^2/2$ , on a localement uniformément en  $|x| < \xi_0/8$ ,  $t \geq 0$  et  $v \in \mathbb{R}$  :

$$g_h(t, x, v) = ch^{-1/4} e^{\phi(t, x, v)/h} (1 + O_h(\sqrt{h})) \quad (5.26)$$

avec

$$\phi(t, x, v) = ix\xi_0 - \frac{x^2}{2} - \sqrt{i\xi_0 - x} \left( t + \frac{v^2}{2} \right) h^{1/2} + \mathcal{O}_h(h).$$

L'idée est alors de remarquer que dans l'intégrale  $\int_{\Omega} |g_h(T, x, v)|^2 dx dv$ , la partie avec la plus grande contribution est au voisinage de  $x = v = 0$ , et que dans l'intégrale  $\int_{[0, T] \times \omega} |g_h(t, x, v)|^2 dt dx dv$ , la plus grande contribution vient du voisinage de  $t =$

0,  $x = x_0 = 0$  et  $v = a$  ou  $-a$ . Ainsi, en notant  $c_0 = \Re(\sqrt{i\xi_0}) > 0$  et en oubliant pour le moment les termes d'erreurs, on a

$$\int_{\Omega} |g_h(T, x, v)|^2 dx dv \approx c^2 h^{-1/2} \int_{\substack{|x| < \epsilon \\ |v| < \epsilon}} e^{-x^2/h - c_0(2T+v^2)/\sqrt{h}} dx dv \approx Ch^{1/4} e^{-2Tc_0/\sqrt{h}}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{[0, T] \times \Omega} |g_h(t, x, v)|^2 dt dx dv &\approx c^2 h^{-1/2} \int_{\substack{|x| < \epsilon \\ a < |v| < a + \epsilon \\ t < \epsilon}} e^{-x^2/h - c_0(2t+v^2)/\sqrt{h}} dt dx dv \\ &\approx Che^{-c_0 a^2/\sqrt{h}}. \end{aligned}$$

Donc, si  $2T < a^2$ , l'inégalité d'observabilité ne peut être vraie. Démontrons maintenant rigoureusement ceci. Soit  $\epsilon > 0$  et  $T = a^2/2 - \epsilon$ . On a  $\Re(\sqrt{i\xi_0 - x}) = c_0 + O_x(x)$ . Donc, pour  $x$  assez petit, disons  $|x| < \delta_{\xi_0}$ , on a

$$c_0 - \epsilon \leq \Re(\sqrt{i\xi_0 - x}) \leq c_0 + \epsilon.$$

Donc, localement uniformément en  $|x| < \delta_{\xi_0}$ ,  $t \geq 0$  et  $v \in \mathbb{R}$  :

$$\Re(\phi(t, x, v)) \geq -\frac{x^2}{2} - (c_0 + \epsilon) \left( t + \frac{v^2}{2} \right) h^{1/2} - O_h(h) \quad (5.27)$$

et

$$\Re(\phi(t, x, v)) \leq -\frac{x^2}{2} - (c_0 - \epsilon) \left( t + \frac{v^2}{2} \right) h^{1/2} + O_h(h). \quad (5.28)$$

Pour minorer le membre de gauche de l'inégalité d'observabilité (5.4), on écrit

$$|g_h(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \geq |g_h(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(|x| < b, |v| < a')}^2.$$

Alors, d'après l'asymptotique (5.26) :

$$|g_h(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c^2 h^{-1/2} \int_{\substack{|x| < b \\ |v| < a'}} e^{2\Re(\phi(T, x, v))/h} dx dv (1 + O(\sqrt{h}))$$

et d'après la minoration de  $\phi$  (5.27) :

$$|g_h(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c^2 h^{-1/2} e^{O_h(1)} \int_{\substack{|x| < b \\ |v| < a'}} e^{-x^2/h - (c_0 + \epsilon)(2T + v^2)/\sqrt{h}} dx dv (1 + O(\sqrt{h})).$$

L'intégrale en  $x$  est

$$\int_{|x| < b} e^{-x^2/h} dx = \sqrt{\pi h} + O(e^{-c/h})$$

et l'intégrale en  $v$  est

$$\int_{|v| < a'} e^{-(c_0 + \epsilon)v^2/\sqrt{h}} dv = \sqrt{\frac{\pi}{c_0 + \epsilon}} h^{1/4} + O(e^{-c/\sqrt{h}}).$$

Donc,

$$|g_h(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \geq c' h^{1/4} e^{-(c_0 + \epsilon)2T/\sqrt{h}} (1 + O(\sqrt{h}))$$

et donc, pour  $h$  assez petit :

$$|g_h(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c' h^{1/4} e^{-(c_0 + \epsilon)2T/\sqrt{h}}. \quad (5.29)$$

Majorons maintenant le membre droit de l'inégalité d'observabilité (5.4). Rappelons que  $\omega$  est un sous-ensemble de  $\Omega \setminus \{|x| < b, |v| < a'\}$ . Soit  $a'' > a'$ , qui sera choisi assez grand plus tard. On définit

$$\omega_0 := \{|x| < \delta_{\xi_0}, a' < |v| < a''\} \quad (5.30)$$

$$\omega_1 := \{|x| \geq \delta_{\xi_0}\} \quad (5.31)$$

$$\omega_2 := \{|x| < \delta_{\xi_0}, |v| > a''\}. \quad (5.32)$$

Quitte à réduire  $\delta_{\xi_0}$ , on peut supposer,  $\delta_{\xi_0} < b$ . Avec les définitions précédentes, on a alors  $\omega \subset \omega_0 \cup \omega_1 \cup \omega_2$ . donc,

$$|g_h|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 \leq |g_h|_{L^2([0, T] \times \omega_0)}^2 + |g_h|_{L^2([0, T] \times \omega_1)}^2 + |g_h|_{L^2([0, T] \times \omega_2)}^2$$

D'après la majoration (2.33) avec  $t$  remplacé par  $t + v^2/2$ , on a :

$$|g_h|_{L^2([0, T] \times \omega_2)}^2 = O\left(\int_{|v| \geq a''} e^{-c'v^2/\sqrt{h}} dv\right) = O\left(e^{-c'a''^2/\sqrt{h}}\right).$$

On choisit  $a''$  assez grand pour que  $c'a''^2 > (c_0 - \epsilon)a'^2$ . Alors, on a

$$|g_h|_{L^2([0, T] \times \omega_2)}^2 = O\left(e^{-(c_0 - \epsilon)a'^2/\sqrt{h}}\right). \quad (5.33)$$

On a déjà vu en traitant les bandes verticales (Eq. (5.10)) que

$$|g_h|_{L^2([0, T] \times \omega_1)}^2 = O(e^{-c/h}). \quad (5.34)$$

Enfin, d'après l'asymptotique (5.26) et la majoration (5.28), on a uniformément en  $0 \leq t \leq T$ ,  $|x| < \delta_{\xi_0}$  et  $a' < |v| < a''$

$$|g_h(t, x, v)|^2 \leq (\pi h)^{-1/2} e^{-x^2/h - (c_0 - \epsilon)(2t + v^2)/\sqrt{h} + O_h(1)}.$$

On a donc

$$|g_h|_{L^2([0,T] \times \omega_0)}^2 = O\left(\int_{a' < |v| < a''} e^{-(c_0 - \epsilon)v^2/\sqrt{h}} dv\right) = O\left(e^{-(c_0 - \epsilon)a'^2/\sqrt{h}}\right). \quad (5.35)$$

Alors, en rassemblant les trois majorations (5.33), (5.34) et (5.35), on a

$$|g_h|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 = O\left(e^{-(c_0 - \epsilon)a'^2/\sqrt{h}}\right). \quad (5.36)$$

Supposons que  $(c_0 - \epsilon)a'^2 > 2T(c_0 + \epsilon)$ . Alors, en considérant la majoration (5.36) de  $|g_h|_{L^2([0,T] \times \omega)}$  et la minoration (5.29) de  $|g_h(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)}$ , et prenant la limite  $h \rightarrow 0$ , on voit que l'inégalité d'observabilité n'est pas vraie. Donc l'équation de Kolmogorov (5.1) n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T < \frac{c_0 - \epsilon}{c_0 + \epsilon} a'^2/2$ . Ceci est vrai pour tout  $a' < a$  et  $\epsilon > 0$ , donc l'équation de Kolmogorov n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T < a^2/2$ .  $\square$

*Ébauche de démonstration dans le cas  $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ .* Le cas  $\Omega_x = \mathbb{T}$ ,  $\Omega_v = \mathbb{R}$  est similaire; avec l'argument de périodisation qu'on a utilisé pour l'équation de la chaleur fractionnaire et pour l'équation de Kolmogorov avec  $\Omega_x = \mathbb{T}$  dans le Théorème 5.2. On considère  $g_{h\text{per}}(t, x, v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_h(t, x + 2\pi k, v)$ , qui est solution de l'équation de Kolmogorov. Dans cette somme, comme pour l'équation de la chaleur fractionnaire, seul le terme pour  $k = 0$  compte, puisque les autres sont  $O(e^{-c/h})$ .  $\square$

*Ébauche de démonstration dans le cas  $\Omega_v = ]-1, 1[$ .* Le cas  $\Omega_v = ]-1, 1[$  est encore semblable au précédent, mais en incorporant la « correction »  $\delta$  définie à l'équation (5.13) dans la démonstration du Théorème 5.2 pour le cas  $\Omega_v = ]-1, 1[$ .

Décrivons ce qu'on doit faire par rapport au cas  $\Omega_v = \mathbb{R}$ . Dans le cas  $\Omega = \mathbb{R} \times ]-1, 1[$ , on considère les mêmes solutions  $g_h$  que pour les bandes verticales (Eq. (5.14)). On démontre qu'uniformément en  $|x| > \epsilon$ ,  $t > 0$  et  $v \in ]-1, 1[$ ,

$$g_h(t, x, v) = O(|x|^{-2} e^{-c/h}). \quad (5.37)$$

Ensuite, on calcule l'ordre suivant dans l'asymptotique (5.18). On démontre que localement uniformément en  $v \in ]-1, 1[$ ,  $|x|$  assez petit et  $t > 0$ ,

$$g_h(t, x, v) = ch^{-1/4} e^{ix\xi_0/h - x^2/2h - \sqrt{\xi_0 + ix(t+v^2/2)}/\sqrt{h} + O_h(1)} \left(1 + O(\sqrt{h})\right). \quad (5.38)$$

On choisit  $a' < a$  et  $\delta > 0$  comme dans le cas  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , ainsi que  $a' < a'' < 1$ , et on définit  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  par les équations (5.30), (5.31) et (5.32).

Avec l'asymptotique (5.38), on peut démontrer une minoration du membre de gauche de l'inégalité d'observabilité qui est similaire à (5.29). On démontre également une majoration similaire à (5.35). Avec la majoration (5.37), on peut démontrer une majoration similaire à (5.34). Et grâce au Théorème 3.48 pour traiter les termes pour

$|v| > a''$ , on démontre une majoration similaire à (5.33). Le reste de la démonstration est un copier-coller.

Pour le cas  $\Omega = \mathbb{T} \times ]-1, 1[$ , on considère à nouveau les fonctions  $g_{h\text{per}}$ , qu'on traite de la même manière.  $\square$

### 5.3 Non-contrôlabilité avec un potentiel affine

On traite maintenant l'équation de Kolmogorov avec  $\gamma = 1$  et  $\Omega = \Omega_x \times \mathbb{R}_+^*$ .

**Théorème 5.5.** *Soit  $\Omega_x = \mathbb{R}$  ou  $\Omega_x = \mathbb{T}$  et  $\Omega = \Omega_x \times ]0, +\infty[$ , et soit  $\gamma = 1$ . Soit  $T > 0$  et  $\omega_x$  un ouvert strict de  $\Omega_x$ . L'équation de Kolmogorov (5.1) n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega = \omega_x \times ]0, +\infty[$  en temps  $T$ .*

*Démonstration dans le cas  $\Omega_x = \mathbb{R}$ .* De manière analogue au cas  $\gamma = 2$ , on va considérer des solutions définies par la formule (5.6). Fixons  $\xi_0 > 0$  et  $\chi$  une fonction  $C^\infty(]-\xi_0/2, \xi_0/2[)$  qui vaut 1 sur  $[-\xi_0/4, \xi_0/4]$ . Alors, pour  $h > 0$ , on choisit dans la formule (5.6)  $a(\xi) = h^{-1/4} \chi(h\xi - \xi_0) e^{-(h\xi - \xi_0)^2/2h}$ . La solution ainsi définie est alors en faisant le changement de variables  $\xi' = h\xi$

$$g_h(t, x, v) = h^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi - \xi_0) e^{-(\xi - \xi_0)^2/2h + ix\xi/h - t\lambda_0 \xi^{2/3} h^{-2/3}} u_{\xi/h}(v) d\xi, \quad (5.39)$$

où on rappelle que

$$u_{\xi/h}(v) = \text{Ai}(\xi^{1/3} e^{i\pi/6} v h^{-1/3} - \mu_0).$$

Comme dans le cas  $\gamma = 1$ , on montre grâce à la méthode du point col des estimations ponctuelles sur  $g_h$ .

**Proposition 5.6** (Estimations ponctuelles). *Soit  $\epsilon > 0$  assez petit. On a uniformément en  $|x| > \epsilon$ ,  $t > 0$  et  $v \in \mathbb{R}_+^*$*

$$g_h(t, x, v) = O(|x|^{-2} e^{-c/h - cv^{3/2} h^{-1/2}}) \quad (5.40)$$

*et localement uniformément en  $|x| < \epsilon$ ,  $t > 0$  et  $v \in \mathbb{R}_+^*$*

$$g_h(t, x, v) = e^{ix\xi_0/h - x^2/2h + O(h^{-2/3})}. \quad (5.41)$$

*Démonstration.* La démonstration suit le même plan que pour l'équation de la chaleur fractionnaire ou l'équation de Kolmogorov avec  $\gamma = 2$ . On écrit  $g_h$  sous la forme

$$g_h(t, x, v) = h^{-3/4} e^{ix\xi_0/h - x^2/2h} I_h(t, x, v), \quad (5.42)$$

auquel cas  $I_h$  est égal à, avec  $\phi_x(\xi) = (\xi - ix)^2/2$  :

$$I_h(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}} \chi(\xi) e^{-\phi_x(\xi)/h - t\lambda_0(\xi + \xi_0)^{2/3} h^{-2/3}} \text{Ai}((\xi + \xi_0)^{1/3} e^{i\pi/6} v h^{-1/3} - \mu_0) d\xi. \quad (5.43)$$

*Étape 1 : majoration.* Comme dans le cas  $\gamma = 2$ , on intègre par parties pour obtenir une décroissance en  $x$ , et on change de chemin d'intégration pour un chemin  $\Gamma_h$  qui suit un arc d'hyperbole  $\Re(\phi_x(\xi)) = \Re(\phi_x(a))$  avec  $a$  assez petit :

$$I_h(t, x, v) = \int_{\Gamma_h} e^{-\phi_x(\xi)/h} u_{h,t,x,v}(\xi) d\xi$$

avec

$$u_{h,t,x,v}(\xi) = \left( h \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi - ix} \right)^2 \left( \chi(\xi) e^{-t\lambda_0 \xi^{2/3} h^{-2/3}} \text{Ai}((\xi + \xi_0)^{1/3} e^{i\pi/6} v h^{-1/3} - \mu_0) \right). \quad (5.44)$$

D'après l'asymptotique (3.62) de la fonction d'Airy, on a dans la limite  $|\zeta| \rightarrow +\infty$ ,  $|\arg(\zeta)| < \pi/2$  (par exemple), on a

$$\text{Ai}(\zeta) \sim C \zeta^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}\zeta^{3/2}}, \quad \text{et} \quad \text{Ai}'(\zeta) \sim C \zeta^{1/4} e^{-\frac{2}{3}\zeta^{3/2}}.$$

En utilisant l'équation différentielle  $\text{Ai}''(\zeta) = \zeta \text{Ai}(\zeta)$ , on a une asymptotique pour  $\text{Ai}''(\zeta)$  dans le même régime. En particulier, on a une majoration de  $u_{h,t,x,v}$  de la forme

$$|u_{h,t,x,v}(\xi)| \leq |x|^{-2} e^{-ct h^{-2/3} - cv^{3/2} h^{-1/2}}$$

valable pour  $|x| > \epsilon$ ,  $t > 0$  et  $v > 0$  et  $h$  assez petit, disons  $h < h_0$ . Donc, d'après la définition de  $I_h$  (Eq. (5.43)), on a pour  $t > 0$ ,  $|x| > \epsilon$ ,  $v > 0$  et  $h < h_0$

$$|I_h(t, x, v)| \leq C |x|^{-2} e^{-a^2/2h + x^2/2h - ct h^{-2/3} - cv^{3/2} h^{-1/2}}.$$

Donc, d'après l'expression de  $g_h$  en fonction de  $I_h$  (Eq. (5.42)), on a pour  $t > 0$ ,  $|x| > \epsilon$ ,  $v > 0$  et  $h < h_0$

$$|g_h(t, x, v)| \leq C |x|^{-2} e^{-a^2/2h - ct h^{-2/3} - cv^{3/2} h^{-1/2}},$$

qui est bien la majoration annoncée.

*Étape 2a : minoration ; expression de  $I_h$  pour appliquer la méthode du point col.* Pour obtenir l'asymptotique (5.41), on veut appliquer la méthode du point col (Prop. 2.9). On commence par choisir dans l'intégrale définissant  $I_h$  un chemin  $\Gamma_h$  qui passe par  $\xi = ix$ . Alors, en notant  $z(\xi) = \xi + \xi_0 + ix$ , on a avec  $a > 0$  assez petit

$$I_h(t, x, v) = \int_{-a}^a e^{-\xi^2/2h - t\lambda_0 z(\xi)^{2/3} h^{-2/3}} \text{Ai}(z(\xi)^{1/3} e^{i\pi/6} v h^{-1/3} - \mu_0) d\xi + O(e^{-c/h}),$$

où le  $O$  vient de la partie de l'intégrale loin de  $\xi = 0$ , et est localement uniforme en  $x$  assez petit,  $v > 0$  et  $t > 0$ . En utilisant l'asymptotique

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\zeta - \mu_0) &= C(\zeta - \mu_0)^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}(\zeta - \mu_0)^{3/2}} (1 + O(\zeta^{-3/2})) \\ &= C \zeta^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}\zeta^{3/2} + \mu_0 \zeta^{1/2}} (1 + O(\zeta^{-1/2})), \end{aligned}$$



on réécrit  $I_h$  comme

$$I_h = \int_{-a}^a e^{-\xi^2/2h + r_1(\xi)h^{-2/3} + r_2(\xi)h^{-1/2} + r_3(\xi)h^{-1/6}} u_h(\xi) d\xi + O(e^{-c/h}), \quad (5.45)$$

avec (où on a toujours  $z(\xi) = \xi + \xi_0 + ix$ )

$$\begin{aligned} r_1(\xi) &= -t\lambda_0 z(\xi)^{2/3} \\ r_2(\xi) &= -2/3 e^{i\pi/4} v^{3/2} z(\xi)^{1/2} \\ r_3(\xi) &= \mu_0 e^{i\pi/12} v^{1/2} z(\xi)^{1/6} \\ u_h(\xi) &= C' z(\xi)^{-1/12} h^{1/12} (1 + O(h^{1/6})), \end{aligned}$$

le  $O$  étant localement uniforme en  $t, v > 0$  et  $x$  assez petit.

*Étape 2b : minoration ; méthode du point col.* La méthode du point col que nous avons énoncée (Prop. 2.9) ne peut gérer directement l'expression de  $I_h$  précédente ; il y a trop de termes dans l'exponentielle. On doit à nouveau l'adapter. On affirme que localement uniformément en  $t > 0, v > 0$  et  $x$  assez petit, on a toujours

$$I_h(t, x, v) = e^{O(h^{-2/3})}. \quad (5.46)$$

La démonstration de ceci est une adaptation de la Proposition 2.9. On pose  $h' := h^{1/3}$ , et il suffit alors essentiellement de modifier l'application  $F$  à laquelle on applique le théorème des fonctions implicites ; on considère ici

$$F : (\xi, h', r_1, r_2, r_3) \mapsto \xi - h' r_1'(\xi) - |h'|^{3/2} r_2'(\xi) - |h'|^{5/2} r_3'(\xi).$$

Ainsi, avec  $\phi_{h,r}(\xi) := \xi^2/2 - h^{1/3} r_1(\xi) - h^{1/2} r_2(\xi) - h^{5/6} r_3(\xi)$ , on a l'équivalence  $\phi_{h,r}'(\xi) = 0 \Leftrightarrow F(\xi, h^{1/3}, r_1, r_2, r_3) = 0$ . De même que dans la Prop. 2.9, on démontre grâce au théorème des fonctions implicites l'existence d'un point critique  $\xi_c(h', r)$  de  $\phi_{h,r}$ , dépendant continûment de  $h, r_1, r_2, r_3$ , et qui est non dégénéré et unique dans  $D_a$  pour  $h$  assez petit. Le reste de la démonstration est identique : le point critique est en  $\xi_c(h', r) = O(h')$ , la valeur critique est en  $c_{h,r} = \phi_{h,r}(\xi_c(h', r)) = O(h')$ . On fait alors le changement de variables  $\eta = \sqrt{1 + h' \psi_{h,r}(\xi)} \xi$ , avec

$$\psi_{h,r}(\xi) = 2 \int_0^1 (1-s)(r_1'' + h^{1/6} r_2'' + h^{1/2} r_3'')(\xi_c(h', r) + s\xi) d\xi.$$

Avec ce changement de variables, et avec  $\delta > 0$  assez petit, on a localement uniformément en  $t > 0, x$  assez petit et  $v > 0$ ,

$$I_h(t, x, v) = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\eta^2/2h} u_h(\xi_c(h', r) + \xi(\eta)) \frac{d\xi}{d\eta} d\eta + O(e^{-c/n}).$$

Alors, la méthode de la phase stationnaire (Th. 2.7) donne l'asymptotique localement uniforme en  $x$  assez petit et  $t, v > 0$

$$I_h(t, x, v) = e^{O(h^{-2/3})}(u_h(0) + O(h^{1/3}|u_h|_\infty)).$$

*Étape 2c : minoration ; conclusion.* Comme  $u_h(x) = C'(\xi + \xi_0 + ix)^{-1/12}h^{1/12}(1 + O(h^{1/6}))$ , on a bien l'asymptotique (5.46) annoncée sur  $I_h$ . D'après l'expression de  $g_h$  en fonction de  $I_h$  (Eq. (5.42)), on a l'asymptotique (5.41) annoncée.  $\diamond$

Avec les asymptotiques sur  $g_h$  de la Proposition 5.6, nier l'inégalité d'observabilité pour l'équation de Kolmogorov se fait de la même manière que dans le cas  $\gamma = 2$ . Comme l'équation de Kolmogorov est invariante par translation dans la direction  $x$ , on peut supposer que l'ouvert de contrôle est inclus dans un ouvert de la forme  $\{|x| > \epsilon\}$ . Alors, on a

$$|g_h|_{L^2([0,T] \times \omega)} = O(e^{-c/h})$$

et

$$|g_h(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(\Omega)} \geq |g_h(T, \cdot, \cdot)|_{L^2(|x| < \epsilon, 1 < v < 2)} \geq e^{-Ch^{-2/3}}.$$

En prenant la limite  $h \rightarrow 0$ , on voit que la famille  $(g_h)_{h>0}$  est un contre exemple à l'inégalité d'observabilité (5.4).  $\square$

*Ébauche de démonstration dans le cas  $\Omega_x = \mathbb{T}$ .* Dans le cas  $\Omega = \mathbb{T} \times ]0, \infty[$ , on considère les solutions  $g_h$  du cas  $\Omega = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  qu'on périodise :

$$g_{h\text{per}}(t, x, v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_h(t, x + 2\pi k, v).$$

Comme dans le cas  $\gamma = 2$ , seul le terme pour  $k = 0$  n'est pas  $O(e^{-c/h})$ , et la famille  $(g_{h\text{per}})_{h>0}$  est alors un contre-exemple à l'inégalité d'observabilité (5.4).  $\square$



# 6 | Systèmes paraboliques-hyperboliques à coefficients constants

**L**A contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur est déjà connue, et les propriétés de contrôlabilité de l'équation de transport sont également bien comprises. En particulier, comme les solutions de l'équation de transport se propagent à vitesse finie, la contrôlabilité ne peut être vraie en temps petit. Mais si on couple des équations de transport et des équations de la chaleur, il n'y a plus de raisons pour que le support se propage à vitesse finie. Nous examinons ici le cas d'un système d'équation de transport et de la chaleur à coefficients constants et sur le tore de dimension un. On démontre que ces systèmes sont contrôlables à zéro en temps grand, le temps critique étant celui donné par les équations de transport<sup>1</sup>.

## 6.1 Introduction

### 6.1.1 Systèmes paraboliques-transports

Les systèmes que nous considérons sont les suivants

$$\begin{cases} \partial_t f - B\partial_x^2 f + A\partial_x f + Kf = u\mathbb{1}_\omega & \text{sur } ]0, T[ \times \mathbb{T}, \\ f(0, \cdot) = f_0 & \text{sur } \mathbb{T}, \end{cases} \quad (6.1)$$

où

- $T > 0$ ,  $\omega$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{T}$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B, K \in M_d(\mathbb{R})$ ,
- l'état est  $f : [0, T] \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,
- le contrôle est  $u : [0, T] \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

On suppose

$$d = d_1 + d_2 \text{ avec } 1 \leq d_1 < d, 1 \leq d_2 < d, \quad (H.1)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \text{ avec } D \in M_{d_2}(\mathbb{R}), \Re(\text{Sp}(D)) \subset ]0, +\infty[ \quad (H.2)$$

$$(6.2)$$

<sup>1</sup>Ce chapitre est issu d'un travail en collaboration avec Karine Beauchard et Kévin Le Bal'h [19].

En introduisant la décomposition par blocs analogue pour les matrices  $A$  et  $K$ , et les fonctions  $f$  et  $u$ , c.-à-d.

$$A = \begin{pmatrix} A' & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad u(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix},$$

on voit que le système (6.1) couple un système d'équation de transport sur  $f_1$  et un système d'équations paraboliques sur  $f_2$  :

$$\begin{cases} (\partial_t + A' \partial_x + K_{11}) f_1 + (A_{12} \partial_x + K_{12}) f_2 = u_1 \mathbb{1}_\omega & \text{sur } ]0, T[ \times \mathbb{T}, \\ (\partial_t - D \partial_x^2 + A_{22} \partial_x + K_{22}) f_2 + (A_{21} \partial_x + K_{21}) f_1 = u_2 \mathbb{1}_\omega & \text{sur } ]0, T[ \times \mathbb{T}, \\ (f_1, f_2)(0, \cdot) = (f_{01}, f_{02}) & \text{sur } \mathbb{T}. \end{cases} \quad (6.3)$$

On fait l'hypothèse suivante sur  $A'$  :

$$A' \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(A') \subset \mathbb{R}. \quad (\text{H.3})$$

On démontrera ultérieurement grâce à des séries de Fourier vectorielles et une analyse spectrale minutieuse que pour tout  $f_0 \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^d)$  et  $u \in L^2(]0, T[ \times \mathbb{T}, \mathbb{C}^m)$ , il existe une unique solution<sup>2</sup>  $f \in C^0([0, T], L^2(\mathbb{T})^d)$  de (6.1) (voir Sec. 6.2.3).

On identifie le temps minimal de contrôlabilité à zéro.

**Théorème 6.1.** *On suppose que  $\omega$  est un ouvert strict de  $\mathbb{T}$ . On suppose également (H.1)–(H.3). On définit<sup>3</sup>*

$$\ell(\omega) := \sup\{|I|; I \text{ composante connexe de } \mathbb{T} \setminus \omega\}, \quad (6.4)$$

$$\mu_* = \min\{|\mu|; \mu \in \text{Sp}(A')\},$$

et

$$T^* = \begin{cases} \frac{\ell(\omega)}{\mu_*} & \text{if } \mu_* > 0, \\ +\infty & \text{if } \mu_* = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Alors

1. le système (6.1) n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T < T^*$ ,
2. le système (6.1) est contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T > T^*$ .

<sup>2</sup>Si on suppose  $D + D^* > 0$ , on pourrait le démontrer grâce au Théorème de Lumer-Philips, par une méthode analogue à celle qu'on emploiera pour les systèmes chaleur-demi-chaleur (Sec. 6.5.2). Mais on a besoin de toute façon de l'analyse spectrale, et elle nous donne facilement (au moins conceptuellement) le caractère bien posé avec l'hypothèse plus faible  $\Re(\text{Sp}(D)) \subset ]0, +\infty[$ .

<sup>3</sup>Si  $I \subset \mathbb{R}$  est mesurable, on note  $|I|$  sa mesure de Lebesgue.

En particulier, si  $\omega$  est un intervalle de  $\mathbb{T}$  et  $\mu_* > 0$ , le temps minimal de contrôlabilité à zéro est  $T^* = \frac{2\pi - |\omega|}{\mu_*}$ .

Le résultat négatif en temps  $T < T^*$  est attendu en raison de l'équation de transport. Mais à cause du couplage avec l'équation parabolique, il n'y a aucune raison pour qu'il existe des solutions dont le support se propage à vitesse finie. La démonstration de la non contrôlabilité en temps  $T < T^*$  est donc un peu plus compliquée que pour l'équation de transport pur; nous utiliserons pour cela les résultats de la Section 3.1.4.

La démonstration du résultat positif en temps  $T > T^*$  est une adaptation, pour des systèmes de taille arbitraire, de la méthode employée par Lebeau et Zuazua sur les systèmes de thermoélasticité [59].

La contrôlabilité à zéro en temps  $T = T^*$  n'est pas encore élucidée.

### 6.1.2 Étapes de la démonstration

On commence par démontrer quelques résultats préliminaires (Sec. 6.2), dont une analyse spectrale de l'opérateur  $-B\partial_x^2 + A\partial_x + K$  sur  $\mathbb{T}$ , ce qui nous permettra de montrer que le système parabolique transport considéré est bien posé.

Ensuite, on démontre la non-contrôlabilité à zéro en temps  $T < T^*$  (Sec. 6.3), en construisant des solutions proches d'un transport pur, et en traitant les termes d'erreurs grâce aux résultats de la Section 3.1.4.

Enfin, on démontre la contrôlabilité à zéro en temps  $T > T^*$  (Sec. 6.4). Ceci se fait en projetant l'équation sur les « fréquences hyperboliques » (qu'on traite grâce à des techniques de propagation de singularités) et sur les « fréquences paraboliques » (qu'on traite grâce à la méthode de Lebeau et Robbiano). On rassemble ces deux projections et on traite les basses fréquences grâce à des arguments de compacité et de continuation unique.

## 6.2 Résultats préliminaires

### 6.2.1 Composantes de Fourier

On veut étudier l'opérateur

$$\mathcal{L} := -B\partial_x^2 + A\partial_x + K \quad (6.6)$$

de domaine

$$D(\mathcal{L}) = \{f \in L^2(\mathbb{T})^d, -B\partial_x^2 f + A\partial_x f + Kf \in L^2(\mathbb{T})^d\} \quad (6.7)$$

où les dérivées doivent être entendues au sens des distributions sur  $\mathbb{T}$ . Dans ce chapitre, on note  $e_n$  la fonction  $x \mapsto e^{inx}$ . On remarque qu'en appliquant  $\mathcal{L}$  à  $Xe_n$ ,

(où  $X \in \mathbb{C}^d$ ), on trouve

$$\mathcal{L}(Xe_n) = n^2 \left( B + \frac{i}{n}A + \frac{1}{n^2}K \right) Xe_n. \quad (6.8)$$

Ainsi, si on définit  $E(z)$  la perturbation de  $B$  par

$$\forall z \in \mathbb{C}, E(z) = B + zA - z^2K, \quad (6.9)$$

alors  $\mathcal{L}$  agit en Fourier comme la multiplication par  $n^2E(i/n)$ .

## 6.2.2 Théorie perturbative

Si on veut comprendre le semi-groupe  $e^{t\mathcal{L}}$ , nous devons connaître le spectre et les fonctions propres de  $E(z)$ . Ici, on relie les éléments spectraux de  $E(z)$  en fonctions de ceux de  $A$  et  $B$ , dans la limite  $z \rightarrow 0$ . Ceci joue un rôle clef dans le reste de ce chapitre. Ceci se base sur la théorie perturbative analytique en dimension finie, et nous utiliserons librement des formules données par Kato [51, Ch. II §1 et §2].

Pour  $r > 0$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{O}_r^{m \times m}$  l'espace des fonctions holomorphes sur le disque complexe  $D(0, r)$ , à valeur dans  $M_m(\mathbb{C})$  (les matrices carrées de taille  $m$  à coefficients complexes).

Le premier résultat porte sur la perturbation de la projection sur le noyau de  $B$ . Notons que ce résultat repose seulement sur les hypothèses sur  $B$ , mais pas sur les hypothèses sur  $A$ .

**Proposition 6.2.** *Sous les hypothèses (H.1–H.2), il existe  $r > 0$  et une fonction à valeur dans les matrices  $P^h \in \mathcal{O}_r^{m \times m}$  telle que*

1.  $P^h(0) = \begin{pmatrix} I_{d_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;
2. pour tout  $|z| < r$ ,  $P^h(z)$  est une projection qui commute avec  $E(z)$ ;
3. dans la limite  $z \rightarrow 0$ ,  $E(z)P^h(z) = O(z)$ .

*Démonstration.* Le spectre de  $E(z)$  est continu en fonction de  $z$  (voir [51, Ch. II §1.1]). On considère le « 0-groupe de valeurs propres », c-à-d. l'ensemble des valeurs propres qui tendent vers 0 lorsque  $z \rightarrow 0$ . Alors, on note  $P^h(z)$  la somme des projections sur les espaces propres<sup>4</sup> de  $E(z)$  associés à ces valeurs propres selon les autres espaces propres.

Une autre façon de définir  $P^h(z)$  est de choisir  $R = \min_{\lambda \in \text{Sp}(D)} |\lambda|/2$  et  $r$  assez petit de sorte que pour  $|z| < r$ , il n'y ait pas de valeur propres de  $E(z)$  sur le cercle  $\partial D(0, R)$ . Alors, on définit (voir [51, Ch. II §1.4, Eq. (1.16)])

$$P^h(z) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0, R)} (E(z) - \zeta)^{-1} d\zeta. \quad (6.10)$$

<sup>4</sup>Lorsqu'on parle « d'espace propre », on parle d'espace propre généralisé (où, dans les termes de Kato, d'espace propre algébrique), c-à-d. l'ensemble des vecteurs propres généralisés.

Dans les termes de Kato,  $P^h(z)$  est la « projection totale pour le 0-groupe ». Alors, selon [51, Ch. II §1.4],  $P^h(z)$  est la projection sur la somme des espaces propres associés aux valeurs propres de  $E(z)$  qui sont dans  $D(0, R)$  selon les autres espaces propres. Elle dépend holomorphiquement de  $|z|$ . Pour  $z = 0$ , la formule (6.10) qui définit  $P^h(0)$  devient

$$P^h(0) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,R)} (B - \zeta)^{-1} d\zeta.$$

Alors,  $P^h(0)$  est la projection sur l'espace propre de  $B$  associé à la valeur propre 0 selon les autres espaces propres (voir [51, Ch. II §1.4]). Alors, d'après les hypothèses (H.2) sur les blocs de  $B$ ,  $P^h(0) = \begin{pmatrix} I_{d_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Ceci démontre le premier point.

D'après sa définition (6.10),  $P^h(z)$  commute avec  $E(z)$ . Ceci démontre le second point. Alors on a

$$P^h(0)E(0) = E(0)P^h(0) = BP^h(0) = 0,$$

ce qui, avec l'holomorphie de  $P^h$  et de  $E$ , démontre le troisième point.  $\square$

On dit que  $P^h$  est la « projection sur les branches hyperboliques ». On note  $P^p(z) := I_d - P^h(z)$ , qu'on appelle la « projection sur les branches paraboliques », et qui vérifie des propriétés analogues à  $P^h$ .

**Proposition 6.3.** *Sous les hypothèses (H.1–H.2), la fonction à valeurs matricielles  $P^p$  est dans  $\mathcal{O}_r^{m \times m}$  et*

1.  $P^p(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{d_2} \end{pmatrix}$ ;
2. pour tout  $|z| < r$ ,  $P^p(z)$  est une projection qui commute avec  $E(z)$ ;
3. dans la limite  $z \rightarrow 0$ ,  $E(z)P^p(z) = B + O(z)$ .

Nous aurons besoin de séparer les branches hyperboliques plus finement.

**Proposition 6.4.** *Sous les hypothèses (H.1–H.2) et en supposant  $A'$  diagonalisable, il existe  $r > 0$  et une famille de fonctions holomorphes à valeurs matricielles  $(P_\mu^h)_{\mu \in \text{Sp}(A')} \in (\mathcal{O}_r^{d \times d})^{\text{Sp}(A')}$  telle que*

1. pour tout  $\mu \in \text{Sp}(A')$  et  $|z| < r$ ,  $P_\mu^h(z)$  est une projection non nulle qui commute avec  $E(z)$ ;
2. pour tout  $|z| < r$ ,  $P^h(z) = \sum_{\mu \in \text{Sp}(A')} P_\mu^h(z)$  et pour tout  $\mu \neq \mu'$ ,  $P_\mu^h(z)P_{\mu'}^h(z) = 0$ ;
3. pour tout  $\mu \in \text{Sp}(A')$ , il existe  $R_\mu^h \in \mathcal{O}_r^{d \times d}$  telle que

$$\forall |z| < r, E(z)P_\mu^h(z) = \mu z P_\mu^h(z) + z^2 R_\mu^h(z).$$



*Remarque 6.5.* Pour  $\mu \in \text{Sp}(A')$ , la projection  $P_\mu^{\text{h}}$  est holomorphe et donc continue sur  $D(0, r)$ . Donc, le rang de  $P_\mu^{\text{h}}(z)$ , qui est sa trace, ne dépend pas de  $|z| < r$  (les  $P_\mu^{\text{h}}(z)$  sont même similaires, voir [51, Ch. I, §4.6, Lemme 4.10]). Pour les mêmes raisons, les rangs de  $P^{\text{h}}(z)$  et  $P^{\text{p}}(z)$  ne dépendent pas de  $z$ .

*Démonstration.* La démonstration est essentiellement le « processus de réduction » de Kato [51, Ch. II §2.3]. Selon la Proposition 6.2,  $P^{\text{h}}$  est holomorphe et  $P^{\text{h}}(z)E(z) = O(z)$ . Alors, on définit

$$E^{(1)}(z) = z^{-1}E(z)P^{\text{h}}(z) = z^{-1}P^{\text{h}}(z)E(z),$$

qui est holomorphe pour  $|z| < r$ . Notons que d'après Kato [51, Ch. II Eq. (2.38)], on a

$$E^{(1)}(0) = P^{\text{h}}(0)E'(0)P^{\text{h}}(0) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons pour le moment que 0 n'est pas valeur propre de  $A'$ . Alors, pour  $\mu \in \text{Sp}(A')$ , on définit  $P_\mu^{\text{h}}(z)$  la projection totale pour le  $\mu$ -groupe de valeurs propres de  $E^{(1)}(z)$ . Dit autrement, et d'après la définition de  $E^{(1)}(z)$ ,  $P_\mu^{\text{h}}(z)$  est la « projection totale sur le  $\mu z$ -groupe » de valeurs propres de  $E(z)$ . La projection  $P_\mu^{\text{h}}(z)$  est ainsi définie et holomorphe pour  $z$  assez petit (voir [51, Ch. II, §1.4]).

Pour  $z$  assez petit,  $P_\mu^{\text{h}}(z)$  est la projection sur des espaces propres de  $E^{(1)}(z)$  associés à des valeurs propres non nulles, donc

$$\text{Im}(P_\mu^{\text{h}}(z)) \subset \text{Im}(E^{(1)}(z)) \subset \text{Im}(P^{\text{h}}(z)),$$

où la dernière inclusion vient de la définition de  $E^{(1)}(z)$ . Donc  $P_\mu^{\text{h}}(z)$  est une sous-projection de  $P^{\text{h}}(z)$ . De plus,  $P_\mu^{\text{h}}(z)$  commute avec  $E^{(1)}(z)$ , donc il commute avec  $E(z)$ . Ceci démontre le point 1 dans le cas  $0 \notin \text{Sp}(A')$ .

Pour  $\mu \neq \nu$ ,  $P_\mu^{\text{h}}(z)$  et  $P_\nu^{\text{h}}(z)$  sont des projections sur des sommes d'espaces propres associés à des valeurs propres différentes, donc  $P_\mu^{\text{h}}(z)P_\nu^{\text{h}}(z) = 0$ . Notons temporairement  $Q^{\text{h}}(z) = \sum_{\mu \in \text{Sp}(A')} P_\mu^{\text{h}}(z)$ . Alors, pour  $z$  petit,  $Q^{\text{h}}(z)$  est la projection sur tout les espaces propres de  $E^{(1)}(z)$  associés à des valeurs propres non nulles. D'après la définition de  $E^{(1)}(z)$ , ceci démontre que  $Q^{\text{h}}(z)$  est une sous-projection de  $P^{\text{h}}(z)$ . Vérifions que les rangs de  $Q^{\text{h}}(z)$  et de  $P^{\text{h}}(z)$  sont égaux. Cela justifiera que pour  $z$  assez petit,  $Q^{\text{h}}(z) = P^{\text{h}}(z)$ . Le rang de  $Q^{\text{h}}(z)$ , qui est sa trace, ne dépend pas de  $z$ . La même chose est vraie pour  $P^{\text{h}}(z)$ . Pour  $z = 0$ , on a  $E^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , donc, en rappelant que  $0 \notin \text{Sp}(A')$ , on a

$$Q^{\text{h}}(0) = \begin{pmatrix} I_{d_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{\text{h}}(0).$$

Donc, pour  $z$  assez petit,  $Q^{\text{h}}(z) = P^{\text{h}}(z)$ , ce qui termine la démonstration du point 2 dans le cas  $0 \notin \text{Sp}(A')$ .

Si  $0 \in \text{Sp}(A')$ , on ajoute  $\alpha zI$  à  $E(z)$  pour un certain  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Cela revient à ajouter  $\alpha P^h(z)$  à  $E^{(1)}(z)$ . Cela décale les valeurs propres de la restriction de  $E^{(1)}(z)$  sur  $\text{Im}(P^h(z))$  (mais pas de sa restriction à  $\text{Im}(I_d - P^h(z))$ ) par  $\alpha$ , sans modifier les projections propres. Ainsi, en choisissant  $\alpha$  de sorte que  $0 \notin \alpha + \text{Sp}(A')$ , on démontre les points 1 et 2 dans le cas  $0 \in \text{Sp}(A')$ .

Il nous reste à démontrer le point 3. Comme  $A'$  est diagonalisable, il en est de même pour  $E^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Donc il n'y a pas de terme nilpotent dans la décomposition spectrale de  $E^{(1)}(0)$ . C'est-à-dire que pour tout  $\mu \in \text{Sp}(A')$ ,

$$E^{(1)}(0)P_\mu^h(0) = \mu P_\mu^h(0). \quad (6.11)$$

Comme  $z \mapsto E^{(1)}(z)P_\mu^h(z)$  est holomorphe, on a

$$E^{(1)}(z)P_\mu^h(z) = \mu P_\mu^h(z) + O(z).$$

Enfin, on multiplie par  $z$  pour revenir à  $E(z)$ , ce qui donne

$$E(z)P_\mu^h(z) = \mu z P_\mu^h(z) + O(z^2). \quad \square$$

### 6.2.3 Estimation des composantes de Fourier et caractère bien posé

#### Dissipation des composantes paraboliques

On démontre l'estimation de dissipation des composantes paraboliques suivante.

**Proposition 6.6.** *Il existe  $r, K_p, c_p > 0$  tels que pour tout  $|z| < r$ ,  $\tau > 0$  et  $X \in \text{Im}(P^p(z))$ ,*

$$|e^{-E(z)\tau}X| \leq K_p e^{-c_p\tau}|X|.$$

*Démonstration.* En utilisant la Proposition 6.3, pour  $|z| \leq r$ , on appelle  $E^p(z)$  la restriction de  $E(z)$  au sous-espace vectoriel  $\text{Im}(P^p(z))$ , qui est un endomorphisme de  $\text{Im}(P^p(z))$ .

D'après l'hypothèse (H.2) sur  $D$ , il existe  $c > 0$  tel que  $\Re(\text{Sp}(-D)) \subset ]-\infty, -c[$ . Donc il existe un disque ouvert  $\Omega$  du plan complexe tel que  $\text{Sp}(-D) \subset \Omega$  et  $\max\{\Re(z); z \in \overline{\Omega}\} < -c$ . Alors, par continuité du spectre, pour  $r$  assez petit, on a pour tout  $|z| \leq r$ ,  $\text{Sp}(E^p(z)) \subset \Omega$ .

*Étape 1 : formule de Cauchy.* On démontre l'égalité d'endomorphismes de  $\text{Im}(P^p(z))$

$$\forall |z| \leq r, \tau \in \mathbb{R}, \quad e^{E^p(z)\tau} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} e^{\tau\xi} (\xi I - E^p(z))^{-1} d\xi, \quad (6.12)$$

où  $I$  est l'identité de  $\text{Im}(P^p(z))$ . Le membre droit est bien défini parce qu'il n'y a pas de valeur propre de  $E^p(z)$  sur le chemin d'intégration. Notons le  $\phi(\tau)$ . Alors

$$\begin{aligned}\phi'(\tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} e^{\tau\xi} \xi (\xi I - E^p(z))^{-1} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} e^{\tau\xi} ((\xi I - E^p(z)) + E^p(z)) (\xi I - E^p(z))^{-1} d\xi.\end{aligned}$$

D'après la formule intégrale de Cauchy,  $\int_{\partial\Omega} e^{\tau\xi} d\xi = 0$  donc  $\phi'(\tau) = E^p(z)\phi(\tau)$ . De plus,  $\phi(0) = I$  parce que toutes les valeurs propres de  $E^p(z)$  sont dans  $\Omega$  (voir [51, Ch. I, Problem 5.9]). Donc, on a bien  $\phi(\tau) = e^{\tau E^p(z)}$ .

*Étape 2 : estimée.* On déduit de l'étape précédente l'égalité suivante entre endomorphismes de  $\mathbb{C}^d$

$$\forall |z| \leq r, \tau \in \mathbb{R}, \quad e^{E(z)\tau} P^p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} e^{\tau\xi} (\xi I - E(z))^{-1} P^p(z) d\xi. \quad (6.13)$$

Notons que si  $r$  est assez petit, les valeurs propres de  $E(z)$  sont soit dans  $\Omega$  (branche parabolique), soit proche de 0 (branche hyperbolique) disons dans  $\{\Re(\xi) > -c/2\}$ . Alors,  $(\xi I - E(z))$  est inversible comme opérateur de  $\mathbb{C}^d$  pour tout  $\xi \in \partial\Omega$ , et le membre droit de l'équation précédente est bien défini.

On déduit de (6.13) que

$$|e^{E(z)\tau} P^p(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} e^{\tau\Re(\xi)} |(\xi I - E(z))^{-1} P^p(z)| d\xi.$$

l'application  $(\xi, z) \in \partial\Omega \times \bar{D}(0, r) \mapsto |(\xi I - E(z))^{-1} P^p(z)|$  est continue sur un espace compact, donc majorée par une certaine constante  $K$ . Alors, pour tout  $|z| < r$  et  $\tau > 0$ ,  $|e^{E(z)\tau} P^p(z)| \leq K e^{-c\tau}$ .  $\square$

### Caractère borné des composantes de transport

On démontre que les composantes de transport sont bornées en fonction de  $n$ .

**Proposition 6.7.** *Il existe  $r, K_h, c_h > 0$  tel que pour tout  $z \in i[-r, r] \setminus \{0\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $X \in \text{Im}(P^h(z))$ ,*

$$\left| \exp\left(\frac{1}{z^2} E(z)t\right) X \right| \leq K_h e^{c_h |t|} |X|.$$

*Démonstration.* Soit  $r$  donné par la Proposition 6.4,  $z \in i[-r, r] \setminus \{0\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \text{Sp}(A')$  et  $Y \in \text{Im}(P_\mu^h(z))$ . En se rappelant que  $\text{Im}(P_\mu^h(z))$  est stable par  $E(z)$ , on trouve

$$\exp\left(\frac{1}{z^2} E(z)t\right) Y = \exp\left(\frac{1}{z^2} E(z) P_\mu^h(z) t\right) Y = \exp\left(\frac{1}{z^2} (\mu z P_\mu^h(z) + z^2 R_\mu^h(z)) t\right) Y.$$

Notons que  $P_\mu^h(z)$  et  $R_\mu^h(z)$  commutent parce que  $P_\mu^h(z)$  et  $E(z)$  commutent et  $E(z)P_\mu^h(z) = \mu z P_\mu^h(z) + z^2 R_\mu^h(z)$ . Donc, en utilisant le fait que  $\mu/z \in i\mathbb{R}$ , on a

$$\left| \exp\left(\frac{1}{z^2}E(z)t\right)Y \right| = |e^{\mu t/z} \exp(R_\mu^h(z)t)Y| \leq e^{c_\mu |t|} |Y|$$

où  $c_\mu = \max\{|R_\mu^h(z)|, z \in \bar{D}(0, r)\}$ . On en déduit que pour  $X \in \text{Im}(P^h(z))$ ,

$$\begin{aligned} \left| \exp\left(\frac{1}{z^2}E(z)t\right)X \right| &\leq \sum_{\mu \in \text{Sp}(A')} \left| \exp\left(\frac{1}{z^2}E(z)t\right)P_\mu^h(z)X \right| \\ &\leq \sum_{\mu \in \text{Sp}(A')} e^{c_\mu |t|} |P_\mu^h(z)X| \leq Ke^{c|t|} |X|^2 \end{aligned}$$

avec  $c = \max\{c_\mu, \mu \in \text{Sp}(A')\}$  et  $K = \max\left\{\sum_{\mu \in \text{Sp}(A')} |P_\mu^h(\zeta)|, \zeta \in \bar{D}(0, r)\right\}$ .  $\square$

### Caractère bien posé

En combinant les estimations sur les composantes paraboliques et les composantes de transport, on montre que le système parabolique transport (6.1) est bien posé. On définit les coefficients de Fourier de  $f \in L^2(\mathbb{T})$  par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int} dt \in \mathbb{C}^d.$$

On considère l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini par (6.6) et (6.7). D'après l'égalité de Parseval et la définition de  $E(z)$  (Eq. (6.9)),

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T})^d, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| n^2 E\left(\frac{i}{n}\right) \hat{f}(n) \right|^2 < \infty \right\}, \quad (6.14)$$

On démontre que  $-\mathcal{L}$  génère un semi-groupe fortement continu.

**Proposition 6.8.** *L'opérateur  $-\mathcal{L}$  génère un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés sur  $L^2(\mathbb{T}^d)$ .*

**Définition 6.9.** On définit alors les solutions du système (6.1) grâce à la définition A.5, qui d'après la Proposition A.6 existent et sont uniques. On notera  $S(t, f_0, u) := f(t, \cdot, \cdot)$  la solution de (6.1). De plus,  $S(t, f_0, u)$  vérifie l'estimée

$$\forall 0 \leq t \leq T, \|f(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C(\|f_0\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|u\|_{L^2([0, T] \times \omega)}), \quad (6.15)$$

*Démonstration.* On déduit des Propositions 6.6 et 6.7 que pour tout  $z \in i[-r, r] \setminus \{0\}$ ,  $t > 0$  et  $X \in \mathbb{C}^d$ ,

$$\begin{aligned} \left| \exp\left(\frac{1}{z^2}E(z)t\right)X \right| &\leq \left| \exp\left(-E(z)\frac{t}{|z|^2}\right)P^p(z)X \right| + \left| \exp\left(\frac{1}{z^2}E(z)t\right)P^h(z)X \right| \\ &\leq K_p e^{-c_p \frac{t}{|z|^2}} |P^p(z)X| + K_h e^{c_h t} |P^h(z)X| \\ &\leq Ke^{c_h t} |X| \end{aligned} \quad (6.16)$$

où  $K = \max \{K_p |P^p(z)| + K_h |P^h(z)|, z \in i[-r, r]\}$ .

Pour  $f \in L^2(\mathbb{T})^d$  et  $t \in [0, \infty)$ , on définit

$$S(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{tn^2 E(\frac{i}{n})} \hat{f}(n) e_n.$$

D'après l'égalité de Parseval et l'estimée (6.16),  $S(t)$  est un opérateur borné de  $L^2(\mathbb{T})^d$ , parce que le nombre de  $n \in \mathbb{Z}$  tels que  $\frac{1}{n} \notin [-r, r]$  est fini. Les propriétés de semi-groupe  $S(0) = I$  et  $S(t+s) = S(t)S(s)$  découlent immédiatement de la définition.

Vérifions que  $-\mathcal{L}$  est bien le générateur du semi-groupe  $S(t)$ . On remarque qu'au sens des distributions, et d'après la relation entre  $E(z)$  et  $\mathcal{L}$  (Sec. 6.2.1), pour tout  $f \in L^2(\mathbb{T})^d$ ,

$$\frac{1}{t}(S(t) - I)f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{tn^2 E(\frac{i}{n})} - I_d}{t} \hat{f}(n) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 E\left(\frac{i}{n}\right) \hat{f}(n) = -\mathcal{L}f.$$

Donc le générateur du semi-groupe  $S(t)$  agit comme  $-\mathcal{L}$ . En particulier, son domaine est inclus dans  $D(\mathcal{L})$  (voir Eq. (6.7)). Vérifions l'inclusion inverse.

Pour  $f \in D(\mathcal{L})$ , on a d'après l'inégalité de Parseval

$$\left\| \left( \frac{S(t) - I}{t} + \mathcal{L} \right) f \right\|_{L^2(\mathbb{T})^d}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \left( \frac{e^{tn^2 E(\frac{i}{n})} - I_d}{t} - n^2 E\left(\frac{i}{n}\right) \right) \hat{f}(n) \right|^2.$$

Dans le membre de droite, chaque terme de la série converge vers 0 lorsque  $t \rightarrow 0$ , et d'après l'estimée (6.16), est dominé pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $n > 1/r$  par

$$\left| \left( \int_0^1 e^{t\theta n^2 E(\frac{i}{n})} d\theta - I_d \right) n^2 E\left(\frac{i}{n}\right) \hat{f}(n) \right|^2 \leq (Ke^{cn} + 1) \left| n^2 E\left(\frac{i}{n}\right) \hat{f}(n) \right|^2,$$

qui peut être sommée pour  $n \in \mathbb{Z}$  parce que  $f \in D(\mathcal{L})$ , (voir (6.14)). D'après le théorème de convergence dominée, la somme de cette série tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow 0$ . Donc  $f$  est dans le domaine du générateur du semi-groupe  $S(t)$ .  $\square$

#### 6.2.4 Système adjoint et observabilité

Explicitons l'inégalité d'observabilité au temps final associée au problème de contrôlabilité à zéro du système (6.1) (voir Prop. A.8).

**Proposition 6.10.** *Soit  $T > 0$ . Le système (6.1) est contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$  si et seulement s'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in L^2(\mathbb{T}; \mathbb{C}^d)$ , la solution  $g$  du système adjoint*

$$\begin{cases} \partial_t g - B^{\text{tr}} \partial_x^2 g - A^{\text{tr}} \partial_x g + K^{\text{tr}} g = 0 & \text{in } ]0, T[ \times \mathbb{T}, \\ g(0, \cdot) = g_0 & \text{sur } \mathbb{T}. \end{cases} \quad (6.17)$$

vérifie

$$|g(T, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T}; \mathbb{C}^d)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |g(t, x)|^2 dt dx. \quad (6.18)$$

Notons que les solutions du système adjoint (6.17) sont de la forme<sup>5</sup>

$$g(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx - tn^2 E(\frac{i}{n})^*} \widehat{g}_0(n). \quad (6.19)$$

De plus, on a une théorie spectrale similaire aux Propositions 6.2–6.4 : il suffit de prendre l'adjoint de chacune des formules de ces Propositions.

### 6.3 Obstruction à la contrôlabilité à zéro en temps petit

On démontre ici la non-contrôlabilité en temps petit. Il suffit de le faire lorsque l'ouvert de contrôle  $\omega$  est un intervalle. En effet, dans le cas général,  $\epsilon$  est inclus dans un intervalle  $\widetilde{\omega}$  de  $\mathbb{T}$  tel que  $\ell(\omega) = \ell(\widetilde{\omega})$ , auquel cas le résultat négatif pour le plus grand domaine de contrôle  $\widetilde{\omega}$  implique le résultat négatif pour le plus petit domaine de contrôle  $\omega$ . Ainsi, dans toute cette section, on suppose que  $\omega$  est un intervalle de  $\mathbb{T}$ .

*Démonstration du résultat négatif du Théorème 6.1.* On veut nier l'inégalité d'observabilité (6.18). On fait ceci en identifiant des solutions qui sont approximativement des solutions de la forme  $g(t, x) = g_0(x - \mu t)$ , et on traite les termes d'erreurs grâce aux résultats de la section 3.1.4.

Soit  $\mu \in \text{Sp}(A')$  de valeur absolue minimum. On commence par réinterpréter l'inégalité d'observabilité comme inégalité sur les polynômes

**Lemme 6.11.** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  étoilé en 0, qui contient  $\omega_T := \bigcup_{0 \leq t \leq T} (\overline{\omega} - \mu t)$  (où  $\overline{\omega} - \mu t$  doit s'entendre comme la rotation de  $\overline{\omega}$  par un angle  $-\mu t$ , voir Figure 6.1).*

*Si le système (6.1) est contrôlable sur  $\omega$  en temps  $T$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynôme  $p(\zeta) = \sum_n a_n \zeta^n$ ,*

$$|p|_{L^2(D(0,1))} \leq C |p|_{L^\infty(U)}. \quad (6.20)$$

*Démonstration. Étape 1 : solution de transport approchées.* D'après la Proposition 6.4, il existe  $r > 0$ , une fonction à valeur dans les projections  $P_\mu^h$  et une fonction à valeurs matricielles  $R_\mu^h$  qui sont holomorphes sur  $D(0, r)$  et telles que pour tout  $|z| < r$ ,

$$P_\mu^h(z)E(z) = E(z)P_\mu^h(z) = \mu z P_\mu^h(z) + z^2 R_\mu^h(z). \quad (6.21)$$

<sup>5</sup>Lorsqu'on écrit  $E(z)^*$ , cela doit se comprendre comme  $(E(z))^*$ . On utilisera la même convention pour  $P_\mu^h(z)^*$  etc.

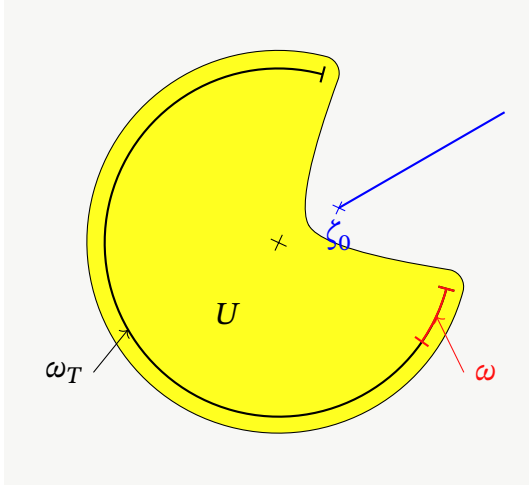


FIGURE 6.1 – En jaune, un exemple de domaine  $U$ . L'arc de cercle noir est  $\omega_T$ , une fois qu'on a identifié  $\mathbb{T}$  et le cercle complexe unité. La contrôlabilité à zéro du systèmes parabolique-transport implique une estimation de la norme  $L^2(D(0, 1))$  des polynômes par leur norme  $L^\infty(U)$ .

Mais si  $T$  n'est pas trop grand,  $\omega_T$  n'est pas la totalité du cercle unité, et on peut alors choisir  $U$  de sorte que  $D(0, 1) \not\subset U$ . Auquel cas, on peut choisir  $\zeta_0 \in D(0, 1) \setminus U$  et une suite de polynômes qui converge vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  en dehors de la demi-droite bleue.

Soit  $\varphi_0 \neq 0$  dans l'image de  $P_\mu^h(0)^*$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  assez grand (à choisir plus tard, dépendant seulement de la fonction  $P_\mu^h$ ), et soit  $\varphi_n = P_\mu^h(i/n)^* \varphi_0$  pour  $n > N$  et  $\varphi_n = \varphi_0$  pour  $n \leq N$ .

Pour nier l'inégalité d'observabilité (6.18), on considère les solutions  $g(t, x)$  du système adjoint (6.17) avec conditions initiales de la forme  $g(0, x) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{inx} \varphi_n$ . Pour ne pas s'embarrasser de questions de sommabilité, on supposera toutes les sommes finies. Sur l'image de  $P_\mu^h(z)$ ,  $E(z)$  agit comme  $\mu z + z^2 R_\mu^h(z)$  (voir Eq. (6.21)). On a donc

$$\begin{aligned} g(t, x) &= \sum_{n \geq 0} a_n e^{inx} e^{-tn^2 E(\frac{i}{n})^*} \varphi_n \\ &= \sum_{n \leq N} a_n e^{inx} e^{-tn^2 E(\frac{i}{n})^*} \varphi_0 + \sum_{n > N} a_n e^{in(x+\mu t) + t R_\mu^h(\frac{i}{n})^*} P_\mu^h\left(\frac{i}{n}\right)^* \varphi_0. \end{aligned}$$

Alors, en définissant pour  $0 \leq t \leq T$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\gamma_t(n) = \begin{cases} e^{t R_\mu^h(\frac{i}{n})^*} P_\mu^h\left(\frac{i}{n}\right)^*, & \text{si } n > N, \\ e^{-tn^2 E(\frac{i}{n})^* - in\mu t} & \text{si } n \leq N, \end{cases} \quad (6.22)$$

on écrit  $g(t, x)$  comme

$$g(t, x) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{in(x+\mu t)} \gamma_t(n) \varphi_0. \quad (6.23)$$

Commençons par minorer le membre de gauche de l'inégalité d'observabilité.

*Étape 2 : minoration du membre gauche de l'inégalité d'observabilité.* D'après l'égalité de Parseval,

$$|g(T, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \left| \sum_{n \geq 0} a_n e^{in(x+\mu T)} \gamma_T(n) \varphi_0 \right|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = 2\pi \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 |\gamma_T(n) \varphi_0|^2. \quad (6.24)$$

Comme  $R$  est holomorphe sur  $D(0, r)$ , la fonction  $z \mapsto R_\mu^h(\bar{z})^*$  l'est également. En particulier, on a  $C_1 := \sup_{|z| \leq r/2} |R_\mu^h(z)^*| < +\infty$ . Donc, pour  $n \geq 2r^{-1}$ , on a

$$\left| \left( e^{-TR_\mu^h(\frac{i}{n})^*} \right)^{-1} \right| = \left| e^{TR_\mu^h(\frac{i}{n})^*} \right| \leq e^{C_1 T}. \quad (6.25)$$

De plus,  $\varphi_0$  est dans l'image de  $P_\mu^h(0)^*$  et  $P_\mu^h$  est holomorphe sur  $D(0, r)$ , donc il existe  $r' > 0$  assez petit de sorte que pour  $|z| < r'$ ,

$$|P_\mu^h(z)^* \varphi_0| \geq |\varphi_0|/2 =: c. \quad (6.26)$$

On choisit alors  $N := \lfloor \max(2r^{-1}, r'^{-1}) \rfloor$ . En rassemblant (6.25) et (6.26), on a alors pour  $n > N$ ,

$$|\gamma_T(n)\varphi_0| = \left| e^{-TR_\mu^h(\frac{i}{n})^*} P_\mu^h\left(\frac{i}{n}\right)^* \varphi_0 \right| \geq e^{-C_1 T} c =: c'.$$

Or, par définition de  $\gamma_T(n)$  dans le cas  $n \leq N$  (Eq. (6.22)), cette minoration reste vraie pour  $n \leq N$  (quitte à réduire  $c'$ ). Donc, en l'utilisant dans l'égalité de Parseval (6.24), on a

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n \right|_{L^2(D(0,1))}^2 = \pi \sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|^2}{n+1} \leq \frac{\pi}{c'} \sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|^2}{n+1} |\gamma_T(n)\varphi_0|^2 \leq \frac{1}{2c'} |g(T, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})}^2. \quad (6.27)$$

*Étape 3a : majoration ; symboles.* Pour majorer le membre droit de l'inégalité d'observabilité, on veut utiliser le Théorème 3.27. En effet, on a pour  $\tau \geq 0$

$$\sum_{n \geq 0} \gamma_\tau(n) a_n \varphi_0 \zeta^n = H_{\gamma_\tau} \left( \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n \varphi_0 \right). \quad (6.28)$$

Pour ceci, on commence par montrer que  $(\gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une famille (de suites) bornée de  $\bar{\mathcal{S}}_\rho^{d \times d}$  pour une certaine fonction croissante  $\rho : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

Définissons  $\tilde{\gamma}_\tau(z) = e^{tR_\mu^h(i/\bar{z})^*} P_\mu^h(i/\bar{z})^*$ . Pour  $n > N$ , on a alors  $\gamma_\tau(n) = \tilde{\gamma}_\tau(n)$  (voir la définition de  $\gamma_t$  Eq. (6.22)).

Vérifions que  $(\tilde{\gamma}_\tau)_{0 \leq \tau \leq T}$  est une famille bornée de  $\mathcal{S}_{N,0}^{d \times d}$ . Comme  $R_\mu^h$  et  $P_\mu^h$  sont holomorphes sur  $D(0, r)$ ,  $\tilde{\gamma}_\tau$  est holomorphe sur  $\{|z| > r^{-1}\}$ , et en particulier sur  $\{\Re(z) > r^{-1}\}$ . Donc, pour  $|z| > 2r^{-1}$  et  $0 \leq \tau \leq T$ , on a

$$|\tilde{\gamma}_\tau(z)| \leq e^{T \sup_{|z| < r/2} |R_\mu^h(z)|} \sup_{|z| < r/2} |P_\mu^h(z)| < +\infty.$$

Comme  $N \geq 2r^{-1}$ ,  $\gamma_\tau$  est bornée sur  $\{\Re(z) > N\}$ , et est en particulier à croissance sous-exponentielle. Donc  $\gamma_\tau$  est dans  $\mathcal{S}_{N,0}^{d \times d}$ . Et comme la majoration précédente est uniforme en  $0 \leq \tau \leq T$ , la famille  $(\gamma_\tau)_{0 \leq \tau \leq T}$  est bornée dans  $\mathcal{S}_{N,0}^{d \times d}$ .

Comme  $\tilde{\gamma}_\tau$  est dans  $\mathcal{S}_{N,0}^{d \times d}$ , la suite  $(\gamma_\tau(n))_{n \geq 0}$ , qui coïncide avec  $\tilde{\gamma}_\tau(n)$  pour  $n > N$ , est dans  $\bar{\mathcal{S}}_{N,0}^{d \times d}$  (voir Def. 3.14). De plus, les termes  $\gamma_\tau(n)$  pour  $n \leq N$  vérifient une



estimation de la forme  $|\gamma_\tau(n)| \leq e^{CTN^2}$  (voir leur définition Eq. (6.22)), et sont donc bornés pour  $0 \leq \tau \leq T$ . Donc  $(\gamma_\tau)_{0 \leq \tau \leq T}$  est une famille bornée de  $\overline{\mathcal{S}}_{N,0}^{d \times d}$ .

Comme  $\overline{\mathcal{S}}_{N,0}^{d \times d}$  est inclus continument dans  $\overline{\mathcal{S}}_\rho^{d \times d}$  avec  $\rho(\theta) = N/\cos(\theta)$ , ceci démontre bien que  $(\gamma_\tau)_{0 \leq \tau \leq T}$  est une famille bornée de  $\overline{\mathcal{S}}_\rho^{d \times d}$ .

*Étape 3b : majoration du membre droit; utilisation du Théorème 3.27.* Rappelons que  $U$  est étoilé en 0 et que  $\omega_T \subset U$ . Les conditions du Théorème 3.27 sont réunies. On applique alors l'estimée (3.17) avec  $X = \omega_T$  et  $W = U$ :

$$\left| H_{\gamma_\tau} \left( \sum_{n \geq 0} a_n \varphi_0 \zeta^n \right) \right|_{L^\infty(\omega_T)} \leq C \left| \sum_{n \geq 0} a_n \varphi_0 \zeta^n \right|_{L^\infty(U)} = C \left| \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n \right|_{L^\infty(U)}, \quad (6.29)$$

où  $C$  ne dépend ni du polynôme  $\sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n$ , ni de  $0 \leq \tau \leq T$  car la famille  $(\gamma_\tau)_{0 \leq \tau \leq T}$  est bornée.

Alors, par définition de  $H_{\gamma_\tau}$  (Def. 3.1), il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynôme  $\sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n$  et pour tout  $0 \leq \tau \leq T$ ,

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n \gamma_\tau(n) \right|_{L^\infty(\omega_T)} \leq C \left| \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n \right|_{L^\infty(U)} \quad (6.30)$$

*Étape 3c : majoration du membre droit; conclusion.* Si on note  $\zeta(t, x) = e^{i(x+\mu t)}$ , qui est dans  $\omega_T$  si  $(t, x) \in [0, T] \times \omega$ , on a (voir l'expression de  $g$  en fonction de  $\gamma_t$  Eq. (6.23))

$$g(t, x) = \sum_{n \geq 0} a_n \zeta(t, x)^n \gamma_t(n) \varphi_0.$$

Soit  $(t, x) \in [0, T] \times \omega$ . En appliquant l'estimée (6.30) avec  $\tau = t$ , on a

$$|g(t, x)| \leq C \left| \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n \right|_{L^\infty(U)}.$$

Le membre droit de l'inégalité d'observabilité (6.18) vérifie donc

$$|g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 \leq 2\pi T |g|_{L^\infty([0, T] \times \omega)}^2 \leq 2\pi T C^2 \left| \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n \right|_{L^\infty(U)}^2. \quad (6.31)$$

*Étape 4 : conclusion.* En rassemblant la minoration (6.27) et la majoration (6.31), l'inégalité d'observabilité (6.18) implique

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n \right|_{L^2(D(0,1))}^2 \leq C |g(T, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq C' |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}^2 \leq C'' \left| \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n \right|_{L^\infty(U)}^2. \quad \diamond$$

On va montrer que l'inégalité de la Proposition 6.11 n'est pas vraie grâce au théorème de Runge (Th. 1.12).

Soit  $T < T^*$  et  $\omega_T$  comme dans la Proposition 6.11. Par définition de  $T^*$ ,  $\omega_T$  n'est pas le cercle unité entier, donc on peut trouver un domaine ouvert  $U$  qui est étoilé en 0 et qui ne contient pas  $D(0, 1)$  (voir Fig. 6.1).

Avec ce choix de  $U$ , il existe un nombre complexe  $\zeta_0 \in D(0, 1)$  qui n'est pas adhérent à  $U$ . Alors, d'après le Théorème de Runge il existe une suite de polynômes  $(p_k)_k$  qui converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus (\zeta_0[1, +\infty))$  vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$ . Alors, la suite  $(p_k)_k$  est un contre-exemple à l'inégalité sur les polynômes (6.20). En effet, comme  $(\zeta - \zeta_0)^{-1}$  est bornée sur  $U$ ,  $(p_k)_k$  est uniformément bornée sur  $U$ , donc le membre droit de l'inégalité (6.20) est bornée. Mais comme  $\zeta_0 \in D(0, 1)$ ,  $(\zeta - \zeta_0)^{-1}$  est de norme  $L^2(D(0, 1))$  infinie. Donc, d'après le lemme de Fatou,  $\|p_k\|_{L^2(D(0, 1))}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .  $\square$

## 6.4 Contrôlabilité en temps grand

Le but de cette section est de démontrer le point 2 du Théorème 6.1, en adaptant la stratégie de Lebeau et Zuazua [59], basée sur une décomposition spectrale. En hautes fréquences, le spectre se sépare en une partie parabolique et une partie hyperbolique. On introduit alors une décomposition de  $L^2(\mathbb{T})^d$  adaptée en Section 6.4.1. La stratégie de contrôle est présentée en Section 6.4.2. On verra qu'en projetant la dynamique sur les espaces paraboliques/hyperboliques, le système se décompose en deux systèmes faiblement couplés, le premier se comportant comme une équation de transport, le second comme une équation de la chaleur. On traite l'équation de transport dans la Section 6.4.3 en utilisant des méthodes développées par Alabau-Boussouira, Coron et Olive [1]. On traite l'équation parabolique en Section 6.4.4 en adaptant la méthode de Lebeau et Robbiano [57] à des systèmes de taille arbitraire. La partie basses fréquences est gérée avec des arguments de compacité et de continuation unique en Section 6.4.5.

Dans toute cette section, le paramètre  $r > 0$  est supposé assez petit pour que les Proposition 6.2–6.4 ainsi que 6.6 et 6.7 soient vraies.

### 6.4.1 Une décomposition adaptée de $L^2(\mathbb{T})^d$

**Proposition 6.12.** *Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{n_0} < r$ . On a la décomposition de  $L^2(\mathbb{T})^d$  suivante*

$$L^2(\mathbb{T})^d = F^0 \oplus F^p \oplus F^h, \quad (6.32)$$

où

$$F^0 := \bigoplus_{|n| \leq n_0} \mathbb{C}^d e_n, \quad (6.33)$$

$$F^p := \bigoplus_{|n| > n_0} \operatorname{Im} \left( P^p \left( \frac{i}{n} \right) \right) e_n, \quad (6.34)$$

$$F^h := \bigoplus_{|n|>n_0} \text{Im} \left( P^h \left( \frac{i}{n} \right) \right) e_n. \quad (6.35)$$

De plus, les projections  $\Pi^0$ ,  $\Pi^p$ ,  $\Pi^h$  et  $\Pi$  définies par

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{T})^d &= F^0 \oplus F^p \oplus F^h \\ \Pi^0 &= I_{F^0} + 0 + 0 \\ \Pi^p &= 0 + I_{F^p} + 0 \\ \Pi^h &= 0 + 0 + I_{F^h} \\ \Pi &= 0 + I_{F^p} + I_{F^h} = \Pi^p + \Pi^h \end{aligned}$$

sont des opérateurs bornés sur  $L^2(\mathbb{T})^d$ .

*Démonstration.* La fonction  $z \in D(0, r) \mapsto P^p(z)$  est continue. Donc il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $z \in \overline{D}(0, 1/n_0)$ ,  $|P^p(z)| \leq C$ . Soit  $f \in L^2(\mathbb{T})^d$ . On déduit de la majoration suivante

$$\sum_{|n|>n_0} \left| P^p \left( \frac{i}{n} \right) \hat{f}(n) \right|^2 \leq C^2 \sum_{|n|>n_0} |\hat{f}(n)|^2 \leq C^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{T})^d}^2 \quad (6.36)$$

et de l'égalité de Parseval que la série  $\sum P^p \left( \frac{i}{n} \right) \hat{f}(n) e_n$  converge dans  $L^2(\mathbb{T})^d$ . En utilisant  $I_d = P^p(z) + P^h(z)$ , on obtient la décomposition

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n = \sum_{|n| \leq n_0} \hat{f}(n) e_n + \sum_{|n| > n_0} P^p \left( \frac{i}{n} \right) \hat{f}(n) e_n + \sum_{|n| > n_0} P^h \left( \frac{i}{n} \right) \hat{f}(n) e_n$$

où les séries convergent dans  $L^2(\mathbb{T})^d$ . Ceci démontre que  $L^2(\mathbb{T})^d = F^0 + F^p + F^h$ . La somme est directe parce que  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthogonale et  $\text{Im}(P^p(z)) \cap \text{Im}(P^h(z)) = \{0\}$  lorsque  $|z| < r$ . Les applications linéaires  $\Pi^0$  et  $\Pi$  sont des projections orthogonales, et donc bornées sur  $L^2(\mathbb{T})^d$ . On déduit de l'égalité de Parseval et (6.36) que  $\Pi^p$  est un opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{T})^d$ , et il en est de même pour  $\Pi^h = \Pi - \Pi^p$ .  $\square$

L'opérateur  $\mathcal{L}$  défini à l'équation (6.6) envoie  $D(\mathcal{L}) \cap F^0 = F^0$  dans  $F^0$ . On peut donc définir l'opérateur  $\mathcal{L}^0$  sur  $F^0$  par  $D(\mathcal{L}^0) = D(\mathcal{L}) \cap F^0$  et  $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}|_{F^0}$ . De plus,  $-\mathcal{L}^0$  engendre un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés sur  $F^0$  et  $e^{-t\mathcal{L}^0} = e^{-t\mathcal{L}}|_{F^0}$ .

Pour les mêmes raisons, on peut définir un opérateur  $\mathcal{L}^p$  sur  $F^p$  par  $D(\mathcal{L}^p) = D(\mathcal{L}) \cap F^p$  et  $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}|_{F^p}$ , qui engendre un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés sur  $F^p$  :  $e^{-t\mathcal{L}^p} = e^{-t\mathcal{L}}|_{F^p}$ . Enfin, on définit un opérateur  $\mathcal{L}^h$  sur  $F^h$  par  $D(\mathcal{L}^h) = D(\mathcal{L}) \cap F^h$  et  $\mathcal{L}^h = \mathcal{L}|_{F^h}$ , qui engendre un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés sur  $F^h$  :  $e^{-t\mathcal{L}^h} = e^{-t\mathcal{L}}|_{F^h}$ .

**Proposition 6.13.** *L'opérateur  $-\mathcal{L}^0$  engendre un groupe fortement continu  $(e^{-t\mathcal{L}^0})_{t \in \mathbb{R}}$  d'opérateurs bornés sur  $F^0$ . L'opérateur  $-\mathcal{L}^h$  engendre un groupe fortement continu  $(e^{-t\mathcal{L}^h})_{t \in \mathbb{R}}$  d'opérateurs bornés sur  $F^h$*

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que  $e^{-t\mathcal{L}}$  définit un opérateur borné sur  $F^0$  et  $F^h$  lorsque  $t < 0$ . C'est évident pour  $F^0$  parce qu'il est de dimension finie. Pour  $F^h$ , on peut procéder comme lors de la démonstration de la Proposition 6.8, en remarquant que l'estimée de la Proposition 6.7 reste vraie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Pour les raisonnements par dualité, nous aurons besoin de la décomposition duale à (6.32), c.-à-d.

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{T})^d &= F^0 \oplus \widetilde{F}^p \oplus \widetilde{F}^h, \\ \text{où } \widetilde{F}^p &:= \text{Im}((\Pi^p)^*), \quad \widetilde{F}^h := \text{Im}((\Pi^h)^*). \end{aligned} \quad (6.37)$$

En utilisant les définitions de  $F^p$  et  $F^h$  dans (6.34) et (6.35) et le fait que  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{T})$ , on obtient

$$\widetilde{F}^p = \bigoplus_{|n| > n_0} \text{Im} \left( P^p \left( \frac{i}{n} \right)^* \right) e_n, \quad (6.38)$$

$$\widetilde{F}^h = \bigoplus_{|n| > n_0} \text{Im} \left( P^h \left( \frac{i}{n} \right)^* \right) e_n. \quad (6.39)$$

De plus,

$$(e^{-t\mathcal{L}})^* f = e^{-t\mathcal{L}^*} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-tn^2 E \left( \frac{i}{n} \right)^*} \widehat{f}(n) e_n \quad (6.40)$$

et les espaces  $F^0$ ,  $\widetilde{F}^p$  et  $\widetilde{F}^h$  sont stables par le semi-groupe  $e^{t\mathcal{L}^*}$ .

### 6.4.2 Stratégie de contrôle

Soit  $T^*$  comme dans l'équation (6.5) et  $T, T'$  tels que

$$T^* < T' < T. \quad (6.41)$$

Dans cette section, on considère des contrôles  $u$  de la forme

$$u := (u_h, u_p)^{\text{tr}} \in \mathbb{C}^{d_1} \times \mathbb{C}^{d_2}, \quad (6.42)$$

où

$$\begin{aligned} \text{supp}(u_h) &\subset [0, T'] \times \overline{\omega}, & \text{supp}(u_p) &\subset [T', T] \times \overline{\omega}, \\ u_h &\in L^2([0, T'] \times \mathbb{T})^{d_1}, & u_p &\in L^2([T', T] \times \mathbb{T})^{d_2}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Le contrôle  $u_h$  est choisi pour contrôler les composantes hyperboliques du systèmes, et le contrôle  $u_p$  est choisi pour contrôler les composantes paraboliques.

La stratégie de contrôle pour le système (6.1) est la suivante

- démontrer la contrôlabilité en temps  $T$  sur un sous-espace de  $L^2(\mathbb{T})^d$  de codimension finie;
- puis exploiter des arguments de continuation unique pour obtenir la contrôlabilité à zéro sur tout  $L^2(\mathbb{T})^d$ .

La première étape relève de la Proposition suivante.

**Proposition 6.14.** *Il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{G}$  de  $L^2(\mathbb{T})^d$  de codimension finie et un opérateur continu*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \mathcal{G} &\rightarrow L^2([0, T] \times \omega)^d \\ f_0 &\mapsto (u_h, u_p), \end{aligned}$$

qui associe à chaque  $f_0 \in \mathcal{G}$  une paire de contrôle  $\mathcal{U}f_0 = (u_h, u_p)$  tels que

$$\forall f_0 \in \mathcal{G}, \Pi S(T, f_0, \mathcal{U}f_0) = 0. \quad (6.44)$$

Par « opérateur continu », on veut dire que pour tout  $s \in \mathbb{N}$ , l'application  $\mathcal{U} : \mathcal{G} \mapsto L^2([0, T'] \times \omega)^{d_1} \times H_0^s([T', T] \times \omega)^{d_2}$  est continue : il existe  $C_s > 0$  tel que

$$\forall f_0 \in \mathcal{G}, |u_h|_{L^2([0, T'] \times \omega)^{d_1}} + |u_p|_{H_0^s([T', T] \times \omega)^{d_2}} \leq C_s |f_0|_{L^2(\mathbb{T})^d}.$$

La démonstration de la Proposition 6.14 consiste à séparer le problème en deux morceaux :

- pour toute condition initiale  $f_0$  et contrôle parabolique  $u_p$ , contrôler les hautes fréquences hyperboliques à zéro en temps  $T$  (Proposition 6.15);
- pour toute condition initiale  $f_0$  et contrôle hyperbolique  $u_h$ , contrôler les hautes fréquences paraboliques à zéro en temps  $T$  (Proposition 6.16).

**Proposition 6.15.** *Si  $n_0$  (dans Eq. (6.33–6.34)) est assez grand, il existe un opérateur continu*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^h : L^2(\mathbb{T})^d \times L^2([T', T] \times \omega)^{d_2} &\rightarrow L^2([0, T'] \times \omega)^{d_1} \\ (f_0, u_p) &\mapsto u_h, \end{aligned}$$

tel que pour tout  $(f_0, u_p) \in L^2(\mathbb{T})^d \times L^2([T', T] \times \omega)^{d_2}$ ,

$$\Pi^h S(T, f_0, (\mathcal{U}^h(f_0, u_p), u_p)) = 0.$$

**Proposition 6.16.** *Si  $n_0$  est assez grand, il existe un opérateur continu*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^p : L^2(\mathbb{T})^d \times L^2([0, T'] \times \omega)^{d_1} &\rightarrow C_c^\infty([T', T] \times \omega)^{d_2} \\ (f_0, u_h) &\mapsto u_p, \end{aligned}$$

tel que pour tout  $(f_0, u_h) \in L^2(\mathbb{T})^d \times L^2([0, T'] \times \omega)^{d_1}$ ,

$$\Pi^p S(T, f_0, (u_h, \mathcal{U}^p(f_0, u_h))) = 0.$$

Admettons les Propositions 6.15 et 6.16 pour le moment, et démontrons la Proposition 6.14.

*Démonstration.* On remarque que la relation  $\Pi S(T, f_0, (u_h, u_p)) = 0$  est vérifiée si les deux équations suivantes sont vérifiées simultanément :

$$\begin{aligned} u_h &= \mathcal{U}^h(f_0, u_p) = \mathcal{U}_1^h(f_0) + \mathcal{U}_2^h(u_p), \\ u_p &= \mathcal{U}^p(f_0, u_h) = \mathcal{U}_1^p(f_0) + \mathcal{U}_2^p(u_h). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Si on définit

$$C := \mathcal{U}_1^p + \mathcal{U}_2^p \mathcal{U}_1^h : L^2(\mathbb{T})^d \rightarrow C_c^\infty([T', T] \times \mathbb{T})^{d_2},$$

alors résoudre le système (6.45) équivaut à

$$\text{trouver } u_p \in C_c^\infty([T', T] \times \mathbb{T})^{d_2}, \text{ tel que } C f_0 = (I - \mathcal{U}_2^p \mathcal{U}_2^h) u_p. \quad (6.46)$$

L'opérateur  $\mathcal{U}_2^p \mathcal{U}_2^h$  est compact sur  $L^2([T', T] \times \mathbb{T})^{d_2}$  parce qu'il est continu à valeurs dans  $C_c^\infty([T', T] \times \mathbb{T})^{d_2}$ . Donc, d'après l'alternative de Fredholm (voir [25, Thm. 6.6]), il existe  $N \in \mathbb{N}$  et des formes linéaires continues  $l_1, \dots, l_N$  sur  $L^2([T', T] \times \mathbb{T})^{d_2}$  telles que l'équation (6.46) admette une solution  $u_p \in L^2([T', T] \times \mathbb{T})^{d_2}$  si et seulement si

$$\forall j \in \{1, \dots, N\}, l_j(C f_0) = 0. \quad (6.47)$$

Si ces conditions (6.47) sont vérifiées, l'équation (6.46) admet une solution  $u_p = L(f_0)$  donnée par une application linéaire continue  $L : \mathcal{G} \rightarrow L^2([T', T] \times \mathbb{T})^{d_2}$  définie sur le sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{T})^d$

$$\mathcal{G} := \{f_0 \in L^2(\mathbb{T})^d ; l_j(C f_0) = 0, 1 \leq j \leq N\}. \quad (6.48)$$

Alors,  $L(f_0) = u_p = \mathcal{U}_2^p \mathcal{U}_2^h u_p + C f_0$  appartient à  $C_c^\infty([T', T] \times \omega)$ . On obtient la conclusion en choisissant

$$\forall f_0 \in \mathcal{G}, \mathcal{U}(f_0) := (\mathcal{U}^h(f_0, L(f_0)), L(f_0)). \quad \square$$

La Proposition 6.15 est démontrée dans la Section 6.4.3. La Proposition 6.16 est démontrée dans la Section 6.4.4. L'argument de continuation unique pour gérer les basses fréquences est présenté en Section 6.4.5.

### 6.4.3 Contrôle des hautes fréquences hyperboliques

Le but de cette section est de démontrer la Proposition 6.15. On rappelle que  $T > T' > T^*$  et que le contrôle  $u = (u_h, u_p)$  vérifie l'hypothèse (6.43).

### Réduction à un problème de contrôle exact

On commence par transformer le problème de contrôle à zéro de la Proposition 6.15 en un problème de contrôle exact pour une équation hyperbolique. Plus précisément, nous allons démontrer la Proposition 6.15 comme corollaire du résultat suivant.

**Proposition 6.17.** *Si  $n_0$  (dans les Eq. (6.33–6.34)) est assez grand, alors, pour tout  $T > T^*$ , il existe un opérateur continu*

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{U}}_T^h : F^h &\rightarrow L^2(]0, T[ \times \omega)^{d_1} \\ f_T &\mapsto u_h, \end{aligned}$$

tel que pour tout  $f_T \in F^h$ ,

$$\Pi^h S(T; 0, (\underline{\mathcal{U}}_T^h(f_T), 0)) = f_T.$$

Avant de démontrer cette Proposition, montrons comment on en déduit la Proposition 6.15.

*Démonstration de la Proposition 6.15.* Soit  $(f_0, u_p) \in L^2(\mathbb{T}^d) \times L^2([T', T] \times \omega)^{d_2}$ . On cherche  $u_h \in L^2([0, T'] \times \omega)^{d_1}$  tel que

$$\Pi^h S(T, f_0, (u_h, u_p)) = 0,$$

ou, de manière équivalente,

$$\Pi^h S(T, 0, (u_h, 0)) = -\Pi^h S(T, f_0, (0, u_p)). \quad (6.49)$$

Comme le système (6.1) est bien posé et que la projection  $\Pi^h$  est continue (Définition 6.9 et Proposition 6.12), l'application linéaire

$$(f_0, u_p) \mapsto -\Pi^h S(T, f_0, (0, u_p)), \quad (6.50)$$

est continue de  $L^2(\mathbb{T}^d) \times L^2([T', T] \times \omega)^{d_2}$  dans  $F^h$ . Comme  $u_h$  est à support dans  $[0, T'] \times \omega$  d'après l'hypothèse (6.43), on a

$$\Pi^h S(T, 0, (u_h, 0)) = e^{-(T-T')\mathcal{L}^h} \Pi^h S(T'; 0, (u_h, 0)). \quad (6.51)$$

Comme on l'a remarqué dans la Proposition 6.13,  $e^{t\mathcal{L}^h}$  est bien défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Donc, en utilisant les équations (6.50) et (6.51), la relation (6.49) équivaut à

$$\Pi^h S(T'; 0, (u_h, 0)) = -e^{(T-T')\mathcal{L}^h} \Pi^h S(T, f_0, (0, u_p)) \in F^h. \quad (6.52)$$

On obtient alors ce qu'on veut avec

$$\underline{\mathcal{U}}^h(f_0, u_p) = \underline{\mathcal{U}}_{T'}^h \left( -e^{(T-T')\mathcal{L}^h} \Pi^h S(T, f_0, (0, u_p)) \right). \quad \square$$

### Contrôle exact de la partie hyperbolique

On démontre maintenant la contrôlabilité exacte du problème décrit ci-dessus. Par des arguments de dualités (voir Prop. A.8), la Proposition 6.17 est équivalente à l'inégalité d'observabilité suivante :

**Proposition 6.18.** *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in \widetilde{F}^h$ , la solution  $g$  du système adjoint (6.17) vérifie*

$$|g_0|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2 \leq C \int_0^{T'} \int_{\omega} |g_1(t, x)|^2 dt dx, \quad (6.53)$$

où  $g_1$  dénote les  $d_1$  premières composantes de  $g$ .

*Démonstration.* Soit  $g_0 \in \widetilde{F}^h$ . En utilisant la définition de  $F^h$  (6.39), et la théorie perturbative (Prop. 6.4),  $g_0$  se décompose de la manière suivante :

$$g_0 = \sum_{\mu \in \text{Sp}(A')} \sum_{|n| > n_0} P_{\mu}^h \left( \frac{i}{n} \right)^* \widehat{g}_0(n) e_n. \quad (6.54)$$

Alors, la solution  $g$  du système adjoint (6.17) est

$$g(t) = \sum_{\mu \in \text{Sp}(A')} G_{\mu}(t) \quad \text{avec} \quad G_{\mu}(t) = \sum_{|n| > n_0} e^{-tn^2 E \left( \frac{i}{n} \right)^*} P_{\mu}^h \left( \frac{i}{n} \right)^* \widehat{g}_0(n) e_n. \quad (6.55)$$

Soit  $\mu \in \text{Sp}(A')$ .

*Étape 1 :* On démontre qu'il existe  $C_1 = C_1(T') > 0$ , indépendant de  $g_0$ , tel que

$$|G_{\mu}(0, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq C_1 (|G_{\mu}|_{L^2(q_{T'})^d} + |g_0|_{H^{-1}(\mathbb{T}^d)}) \quad (6.56)$$

où  $q_{T'} = ]0, T'[ \times \omega$  et

$$|g_0|_{H^{-1}(\mathbb{T}^d)} = \left( \sum_{|n| > n_0} \frac{|\widehat{g}_0(n)|^2}{n^2} \right)^{1/2}. \quad (6.57)$$

En utilisant les points 1 et 3 de la Proposition 6.4, on a

$$e^{-tn^2 E \left( \frac{i}{n} \right)^*} P_{\mu}^h \left( \frac{i}{n} \right)^* = e^{-tn^2 \left( \mu \frac{i}{n} + \left( \frac{i}{n} \right)^2 R_{\mu}^h \left( \frac{i}{n} \right) \right)^*} P_{\mu}^h \left( \frac{i}{n} \right)^* = e^{t\mu in + t R_{\mu}^h \left( \frac{i}{n} \right)^*} P_{\mu}^h \left( \frac{i}{n} \right)^*,$$

ce qui donne

$$\partial_t G_{\mu} - \mu \partial_x G_{\mu} - R_{\mu}^h(0)^* G_{\mu} = S_{\mu} g_0 \quad \text{sur } (0, T') \times \mathbb{T}, \quad (6.58)$$



où

$$S_\mu g_0(t) = \sum_{|n|>n_0} \left( R_\mu^h\left(\frac{i}{n}\right)^* - R_\mu^h(0)^* \right) e^{t\mu i n + t R_\mu^h\left(\frac{i}{n}\right)^*} P_\mu^h\left(\frac{i}{n}\right)^* \widehat{g}_0(n) e_n. \quad (6.59)$$

D'après l'holomorphie de  $z \mapsto R_\mu^h(z)$ , l'égalité de Parseval et (6.57) il existe  $C = C(T') > 0$ , indépendant de  $g_0$ , tel que

$$|S_\mu g_0|_{L^\infty((0,T'),L^2(\mathbb{T})^d)} \leq C |g_0|_{H^{-1}(\mathbb{T})^d}. \quad (6.60)$$

D'après l'équation (6.58) vérifiée par  $G_\mu$ , la fonction  $\widetilde{G}_\mu$  définie par

$$\widetilde{G}_\mu(t, x) = e^{t R_\mu^h(0)^*} G_\mu(t, x) \quad (6.61)$$

est solution de

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{G}_\mu - \mu \partial_x \widetilde{G}_\mu = e^{t R_\mu^h(0)^*} S_\mu g_0 & \text{sur } (0, T') \times \mathbb{T}, \\ \widetilde{G}_\mu(0, \cdot) = G_\mu(0, \cdot) & \text{sur } \mathbb{T}. \end{cases} \quad (6.62)$$

On considère la solution  $G_\mu^b$  de

$$\begin{cases} \partial_t G_\mu^b - \mu \partial_x G_\mu^b = 0 & \text{sur } (0, T') \times \mathbb{T}, \\ G_\mu^b(0, \cdot) = G_\mu(0, \cdot) & \text{sur } \mathbb{T}. \end{cases} \quad (6.63)$$

En utilisant la formule de Duhamel pour le système (6.62) et l'estimée (6.60), on trouve

$$|\widetilde{G}_\mu - G_\mu^b|_{L^\infty((0,T'),L^2(\mathbb{T})^d)} \leq C |e^{t R_\mu^h(0)^*} S_\mu g_0|_{L^1((0,T'),L^2(\mathbb{T})^d)} \leq C |g_0|_{H^{-1}(\mathbb{T})^d} \quad (6.64)$$

où  $C = C(T') > 0$  est indépendant de  $g_0$ . le temps  $T_\mu := \ell(\omega)/|\mu|$  est le temps minimal d'observabilité du système (6.63) sur  $\omega$  (voir par exemple [1, Theorem 2.2]). En effet, pour tout  $T'' > T_\mu$ ,

$$\mathbb{T} \subset \{x - \mu t; (t, x) \in [0, T''] \times \omega\}.$$

Comme  $T' > T_\mu$ , il existe  $C = C(T', \omega) > 0$ , indépendant de  $g_0$ , tel que

$$|G_\mu(0, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})^d} \leq C |G_\mu^b|_{L^2(q_{T'})^d}.$$

D'après l'inégalité triangulaire, la définition de  $\widetilde{G}_\mu$  (6.61) et celle de  $G_\mu^b$  (6.64), on en déduit que

$$|G_\mu(0, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})^d} \leq C \left( |\widetilde{G}_\mu|_{L^2(q_{T'})^d} + |\widetilde{G}_\mu - G_\mu^b|_{L^2(q_{T'})^d} \right) \leq C \left( |G_\mu|_{L^2(q_{T'})^d} + |g_0|_{H^{-1}(\mathbb{T})^d} \right)$$

ce qui termine la première étape.

Étape 2 : On démontre qu'il existe  $C_2 = C_2(T', \omega) > 0$ , indépendant de  $g_0$ , tel que

$$|G_\mu(0, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})^d} \leq C_2 \left( |P_\mu^{\text{h}}(0)^* g|_{L^2(q_{T'})^d} + |g_0|_{H^{-1}(\mathbb{T})^d} \right). \quad (6.65)$$

En se rappelant que la projection  $P_\lambda^{\text{h}}(z)$  commute avec  $E(z)$ , on déduit de la définition de  $G_\lambda$  (Eq. (6.55)) que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A')$ ,

$$G_\lambda(t) = \sum_{|n| > n_0} P_\lambda^{\text{h}}\left(\frac{i}{n}\right)^* e^{-tn^2 E\left(\frac{i}{n}\right)^*} P_\lambda^{\text{h}}\left(\frac{i}{n}\right)^* \widehat{g}_0(n) e_n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & G_\mu(t) - P_\mu^{\text{h}}(0)^* g(t) \\ &= \sum_{|n| > n_0} \left( P_\mu^{\text{h}}\left(\frac{i}{n}\right)^* - P_\mu^{\text{h}}(0)^* \right) e^{-tn^2 E\left(\frac{i}{n}\right)^*} P_\mu^{\text{h}}\left(\frac{i}{n}\right)^* \widehat{g}_0(n) e_n \\ &\quad - \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A') \setminus \{\mu\}} \sum_{|n| > n_0} P_\mu^{\text{h}}(0)^* \left( P_\lambda^{\text{h}}\left(\frac{i}{n}\right)^* - P_\lambda^{\text{h}}(0)^* \right) e^{-tn^2 E\left(\frac{i}{n}\right)^*} P_\lambda^{\text{h}}\left(\frac{i}{n}\right)^* \widehat{g}_0(n) e_n \end{aligned} \quad (6.66)$$

car, pour  $\lambda \neq \mu$ , on a  $P_\mu^{\text{h}}(0)^* P_\lambda^{\text{h}}(0)^* = 0$ . En utilisant à nouveau l'holomorphie de  $z \mapsto P_\lambda^{\text{h}}(z)$ , l'égalité de Parseval et 6.57, on obtient  $C = C(T') > 0$  indépendant de  $g_0$  te que

$$|G_\mu - P_\mu^{\text{h}}(0)^* g|_{L^\infty(]0, T'[ , L^2(\mathbb{T})^d)} \leq C |g_0|_{H^{-1}(\mathbb{T})^d}.$$

On déduit de la première, de l'inégalité triangulaire et de la majoration ci-dessus que

$$\begin{aligned} |G_\mu(0, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})^d} &\leq C \left( |G_\mu|_{L^2(q_{T'})} + |g_0|_{H^{-1}(\mathbb{T})^d} \right) \\ &\leq C \left( |P_\mu^{\text{h}}(0)^* g|_{L^2(q_{T'})} + |G_\mu - P_\mu^{\text{h}}(0)^* g|_{L^2(q_{T'})} + |g_0|_{H^{-1}(\mathbb{T})^d} \right) \\ &\leq C \left( |P_\mu^{\text{h}}(0)^* g|_{L^2(q_{T'})} + |g_0|_{H^{-1}(\mathbb{T})^d} \right), \end{aligned}$$

ce qui termine l'étape 2.

Étape 3 : Conclusion. Pour tout  $\mu \in \text{Sp}(A')$ , on a  $P_\mu^{\text{h}}(0)^* = P_\mu^{\text{h}}(0)^* P^{\text{h}}(0)^*$  et donc

$$|P_\mu^{\text{h}}(0)^* g|_{L^2(q_{T'})} \leq |P_\mu^{\text{h}}(0)^*| |P^{\text{h}}(0)^* g|_{L^2(q_{T'})} \leq C |g_1|_{L^2(q_{T'})}.$$

En utilisant la décomposition  $g = \sum_\mu G_\mu$  (Eq. (6.55)), l'inégalité triangulaire, l'étape 2 et l'inégalité précédente, on obtient

$$|g_0|_{L^2(\mathbb{T})^d} \leq \sum_{\mu \in \text{Sp}(A')} |G_\mu(0, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})^d} \leq C \left( |g_1|_{L^2(q_{T'})^d} + |g_0|_{H^{-1}(\mathbb{T})^d} \right). \quad (6.67)$$

De cette inégalité et de l'injection compacte  $L^2(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^{-1}(\mathbb{T})$ , on peut déduire par un argument classique de compacité-unicité l'inégalité d'observabilité (6.53) (voir par exemple [40, Lemma 2.1 and Remark 2.2]). Détaillons-le tout de même.

D'après le lemme de Peetre [74, Lemma 3]) et l'inégalité d'observabilité faible (6.67), l'espace

$$N_{T'} := \{g_0 \in \widetilde{F}^h; g_1 = 0 \text{ sur } ]0, T'[ \times \omega\}$$

est de dimension fine. De plus, afin de démontrer l'inégalité d'observabilité (6.53), il nous suffit d'après un deuxième lemme de Peetre [74, Lemma 4] de démontrer que  $N_{T'} = \{0\}$ . On commence par remarquer que par définition,  $N_{T'}$  est décroissant en fonction de  $T'$ . Ainsi, quitte à perturber un peu  $T'$ , on peut supposer que  $N_T = N_{T'}$  pour  $T - T'$  petit. Auquel cas,  $N_{T'}$  est stable par  $e^{-t\mathcal{L}^{*h}}$  où  $\mathcal{L}^{*h}$  est la restriction de  $\mathcal{L}^*$  à  $\widetilde{F}^h$ . Alors, si  $N_{T'}$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , il contient une fonction propre de  $\mathcal{L}^{*h}$ , c.-à-d. une fonction de la forme  $Xe_n$  avec  $X \in \mathbb{C}^d$ ,  $|n| > n_0$  et  $X = P^h\left(\frac{i}{n}\right)X$ . Par définition de  $N_{T'}$ , les premières composantes de cette fonction propre s'annulent sur  $\omega$  c.-à-d.  $X_1 = 0$ , où, de manière équivalente,  $P^h(0)X = 0$ . Ainsi,

$$|X| = \left| \left( P^h\left(\frac{i}{n}\right) - P^h(0) \right) X \right| \leq \frac{C}{|n|} |X|,$$

où  $C > 0$  ne dépend pas de  $n$ . En choisissant  $n_0$  assez grand, ceci est impossible.  $\square$

#### 6.4.4 Contrôle des hautes fréquences paraboliques

On démontre maintenant la Proposition 6.16. On rappelle que  $0 < T' < T$  sont choisis de sorte que (6.41) soit vérifié et que le contrôle  $u$  vérifie (6.42) et (6.43).

Le plan est d'identifier l'équation vérifiée par les  $d_2$  dernières composantes du système (6.17), ce qui se fait grâce aux asymptotiques données par la théorie perturbative (Prop. 6.4), et ensuite d'adapter la méthode de Lebeau et Robbiano pour construire des contrôles lisses.

Dans cette section, pour tout vecteur  $\varphi \in \mathbb{C}^d$ , on notera  $\varphi_1$  ses  $d_1$  premières composantes et  $\varphi_2$  ses  $d_2$  dernières composantes.

#### Réduction à un problème de contrôle à zéro

On commence par transformer le problème de contrôle à zéro de la Proposition 6.16 en un problème de contrôle à zéro plus standard, associé à un système parabolique. Plus précisément, on va démontrer la Proposition 6.16 comme conséquence du résultat suivant.

**Proposition 6.19.** *Si  $n_0$  est assez grand, alors pour tout  $T > 0$ , il existe un opérateur continu*

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{U}}_T^p : F^p &\rightarrow C_c^\infty(]0, T[ \times \omega)^{d_2} \\ f_0 &\mapsto u_p, \end{aligned}$$

tel que pour tout  $f_0 \in F^p$ ,

$$\Pi^p S(T, f_0, (0, \underline{\mathcal{U}}_T^p(f_0))) = 0.$$

Cette Proposition sera démontrée dans les paragraphes suivants en adaptant la méthode de Lebeau et Robbiano. Pour le moment, montrons comment on en déduit la Proposition 6.16.

*Démonstration de la Proposition 6.16.* Soit  $(f_0, u_h) \in L^2(\mathbb{T}^d) \times L^2([0, T'] \times \omega)^{d_1}$ . On cherche  $u_p \in C_c^\infty([T', T] \times \omega)^{d_2}$  tel que

$$\Pi^p S(T, f_0, (u_h, u_p)) = 0. \quad (6.68)$$

ou, de manière équivalente,

$$\Pi^p S(T, 0, (0, u_p)) = -\Pi^p S(T, f_0, (u_h, 0)). \quad (6.69)$$

En raison de la condition sur les supports des contrôles (Eq. (6.43)), l'égalité (6.69) est équivalente à

$$\Pi^p S(T - T'; 0, (0, u_p(\cdot - T'))) = -e^{-(T-T')\mathcal{L}^p} \Pi^p S(T', f_0, (u_h, 0)), \quad (6.70)$$

ou encore

$$\Pi^p S\left(T - T'; e^{-(T-T')\mathcal{L}^p} \Pi^p S(T'; f_0, (u_h, 0)), (0, u_p(\cdot - T'))\right) = 0. \quad (6.71)$$

Comme l'équation est bien posée au sens de la définition 6.9 et d'après la Proposition 6.12, on voit que l'application  $(f_0, u_h) \mapsto \Pi^p S(T'; f_0, (u_h, 0))$  est continue de  $L^2(\mathbb{T}^d) \times L^2([0, T'] \times \omega)^{d_1}$  vers  $F^p$ . Ainsi, on obtient la conclusion souhaitée avec

$$\forall t \in [T', T], \mathcal{U}^p(f_0, u_h)(t) = \underline{\mathcal{U}}_{(T-T')}^p\left(e^{-(T-T')\mathcal{L}^p} \Pi^p S(T'; f_0, (u_h, 0))\right)(t - T'). \quad \square$$

### Équation vérifiée par les composantes paraboliques

On commence par démontrer que si  $g$  appartient à  $\widetilde{F}^p$ , on peut calculer ses première  $d_1$  composantes à partir des  $d_2$  dernières. Cela nous permettra d'écrire une équation non couplée sur ces dernières composantes.

**Proposition 6.20.** *Si  $z$  est assez petit, il existe une matrice  $G(z)$  telle que pour tout  $\varphi \in \mathbb{C}^d$ ,*

$$\varphi \in \text{Im}(P^p(z)^*) \iff \varphi_1 = G(z)\varphi_2.$$

*De plus,  $G(z)$  dépend holomorphiquement en  $z$  et  $G(0) = 0$ .*

*Démonstration.* On écrit

$$P^p(z)^* = \begin{pmatrix} p_{11}(z) & p_{12}(z) \\ p_{21}(z) & p_{22}(z) \end{pmatrix}.$$

Comme  $P^p(z)^*$  est une projection,  $\varphi$  appartient à  $\text{Im}(P^p(z)^*)$  si et seulement si

$$\begin{cases} p_{11}(z)\varphi_1 + p_{12}(z)\varphi_2 = \varphi_1 \\ p_{21}(z)\varphi_1 + p_{22}(z)\varphi_2 = \varphi_2. \end{cases}$$

En particulier, si  $\varphi \in \text{Im}(P^p(z)^*)$ , alors  $(I_{d_1} - p_{11}(z))\varphi_1 = p_{12}(z)\varphi_2$ . Et comme  $P^p(0)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{d_2} \end{pmatrix}$  (voir Proposition 6.3),  $p_{11}(0) = 0$ . Donc, si  $z$  est assez petit,  $|p_{11}(z)| < 1$  et  $I_{d_1} - p_{11}(z)$  est inversible.

Dans ce cas,  $\varphi_1 = (I_{d_1} - p_{11}(z))^{-1}p_{12}(z)\varphi_2$ . Ceci démontre que l'application

$$\varphi \in \text{Im}(P^p(z)^*) \mapsto \varphi_2 \in \mathbb{C}^{d_2}$$

est injective. Mais le rang de  $P^p(z)^*$  ne dépend pas de  $z$  (Remarque 6.5), et est donc toujours  $d_2$ . Donc l'application précédente est bijective. On note  $G(z)$  les premières  $d_1$  composantes de son inverse. Remarquons que d'après les calculs précédents,  $G(z) = (I_{d_1} - p_{11}(z))^{-1}p_{12}(z)$ . Alors, si  $\varphi \in \text{Im}(P^p(z)^*)$ , on a

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = (G(z)\varphi_2, \varphi_2).$$

Pour l'implication réciproque, il suffit de remarquer que l'application inverse de  $\varphi \in \text{Im}(P^p(z)^*) \mapsto \varphi_2$  est  $\varphi_2 \in \mathbb{C}^{d_2} \mapsto (G(z)\varphi_2, \varphi_2)$ .  $\square$

Quitte à augmenter  $n_0$ , on peut supposer que pour  $|n| > n_0$ ,  $G(i/n)$  est bien défini. Alors, on définit l'opérateur (borné)  $G$  de  $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{d_2})$  dans  $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{d_1})$  par

$$G\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_{n,2} e_n\right) = \sum_{|n| > n_0} G\left(\frac{i}{n}\right) \varphi_{n,2} e_n. \quad (6.72)$$

Alors, d'après la définition de  $\widetilde{F^p}$ , on a le Corollaire suivant, qui nous permet de calculer les  $d_1$  premières composantes à partir des  $d_2$  dernières.

**Corollaire 6.21.** *Pour tout  $g \in (F^0)^\perp$  (l'espace des fonctions sans composantes selon les fréquences inférieures  $n_0$ ), on a l'équivalence  $g \in \widetilde{F^p} \Leftrightarrow g_1 = Gg_2$ .*

Grâce à ce Corollaire, on peut écrire une équation sur les  $d_2$  dernières composantes des solutions du système adjoint (6.17) si la condition initiale est dans  $\widetilde{F^p}$ .

**Proposition 6.22.** *On définit l'opérateur  $\mathfrak{D}$  par*

$$D(\mathfrak{D}) = H^2(\mathbb{T})^{d_2}, \quad \mathfrak{D} = D^{\text{tr}} \partial_x^2 + A_{22}^{\text{tr}} \partial_x - K_{22}^{\text{tr}} + A_{12}^{\text{tr}} \partial_x G - K_{12}^{\text{tr}} G. \quad (6.73)$$

Soit  $g_0 \in \widetilde{F^p}$  et  $g(t) = e^{-t\mathcal{L}^*} g_0$ . Alors, pour tout  $t \geq 0$ ,  $g_1(t) = Gg_2(t)$  et  $g_2$  est solution de l'équation suivante

$$\partial_t g_2(t, x) - \mathfrak{D}g_2(t, x) = 0 \quad \text{in } ]0, T[ \times \mathbb{T}. \quad (6.74)$$

*Démonstration.* La fonction  $g$  est solution du système

$$(\partial_t - B^{\text{tr}} \partial_x^2 - A^{\text{tr}} \partial_x + K^{\text{tr}})g(t, x) = 0 \quad \text{in } ]0, T[ \times \mathbb{T}.$$

Si on prend les  $d_2$  dernières composantes de ce système, on obtient que sur  $]0, T[ \times \mathbb{T}$ ,

$$(\partial_t - D^{\text{tr}} \partial_x^2 - A_{22}^{\text{tr}} \partial_x + K_{22}^{\text{tr}})g_2(t, x) - (A_{12}^{\text{tr}} \partial_x - K_{12}^{\text{tr}})g_1(t, x) = 0. \quad (6.75)$$

Mais pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $g(t, \cdot) \in \widetilde{F^{\text{p}}}$ , donc, d'après le Corollaire 6.21,  $g_1(t) = Gg_2(t)$ . En substituant ceci dans l'équation (6.75), on trouve l'équation (6.74) annoncée.  $\square$

### Contrôle d'un nombre fini de fréquences paraboliques par des contrôles réguliers

Pour  $N > n_0$  on définit les espaces

$$F_N^{\text{p}} := \bigoplus_{n_0 < |n| \leq N} \text{Im} \left( P^{\text{p}} \left( \frac{i}{n} \right) \right) e_n, \quad (6.76)$$

$$F_{>N}^{\text{p}} := \bigoplus_{|n| > N} \text{Im} \left( P^{\text{p}} \left( \frac{i}{n} \right) \right) e_n.$$

et la projection  $\Pi_N^{\text{p}}$  définie par

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{T})^d &= F^0 \oplus F_N^{\text{p}} \oplus F_{>N}^{\text{p}} \oplus F^{\text{h}} \\ \Pi_N^{\text{p}} &= 0 + I_{F_N^{\text{p}}} + 0 + 0 \end{aligned}$$

qui est un opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{T})^d$  (composition de l'opérateur borné  $\Pi^{\text{p}}$  et d'une projection orthogonale). Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant.

**Proposition 6.23.** *Il existe  $\mathcal{C} > 0$  tel que, pour tout  $T \in ]0, 1]$  et  $N > n_0$ , il existe une application linéaire*

$$\mathcal{K}_{T,N} : F^{\text{p}} \rightarrow C_0^\infty(]0, T[ \times \omega)^6$$

telle que pour tout  $f_0 \in F^{\text{p}}$  et  $s \in \mathbb{N}$

$$\Pi_N^{\text{p}} S \left( T; f_0, (0, \mathcal{K}_{T,N}(f_0)) \right) = 0,$$

$$|\mathcal{K}_{T,N}(f_0)|_{H_0^s(]0, T[ \times \mathbb{T})} \leq \frac{\mathcal{C}}{T^{s+1}} N^{2s} e^{cN} |f_0|_{L^2(\mathbb{T})^d}.$$

<sup>6</sup>Cet espace est l'espace des fonctions à support dans  $[0, T] \times K$  où  $K$  est un compact de  $\omega$ , et dont toutes les dérivées s'annulent sur  $\omega$  aux temps  $t = 0$  et  $t = T$ .

*Démonstration.* Soit  $f_0 \in F^p$ . Durant cette démonstration, nous noterons  $E_2(n)$  la matrice de taille  $d_2 \times d_2$  définie par

$$E_2(n) := D^{\text{tr}} - \frac{i}{n}A_{22}^{\text{tr}} + \frac{1}{n^2}K_{22}^{\text{tr}} - \left( \frac{i}{n}A_{12}^{\text{tr}} - \frac{1}{n^2}K_{12}^{\text{tr}} \right) G\left(\frac{i}{n}\right).$$

*Étape 1 : problème des moments.* On démontre que  $u_2 \in C_0^\infty(]0, T[ \times \omega)$  vérifie  $\Pi_N^p S(T, f_0, (0, u_2)) = 0$  si et seulement si  $u_2$  est solution du problème des moments suivant

$$\forall n_0 < |n| \leq N, \int_0^T \int_\omega e^{-n^2(T-t)E_2(n)^*} u_2(t, x) e^{-inx} dx dt = F_n, \\ \text{où } F_n = -e^{-n^2TE_2(n)^*} \left( G\left(\frac{i}{n}\right)^* \widehat{f}_{01}(n) + \widehat{f}_{02}(n) \right) \quad (6.77)$$

et  $E_2(n)^* = \overline{E_2(n)}^{\text{tr}}$ .

On commence par rappeler que si  $P$  est une projection de  $\mathbb{C}^d$  et  $x \in \text{Im}(P)$ , alors,

$$(x = 0) \Leftrightarrow (\forall z \in \text{Im}(P^*), \langle x, z \rangle_{\mathbb{C}^d} = 0)$$

car  $|x|^2 = \langle x, x \rangle_{\mathbb{C}^d} = \langle Px, x \rangle_{\mathbb{C}^d} = \langle x, P^*x \rangle_{\mathbb{C}^d}$ .

En conséquence, la relation  $\Pi_N^p S(T, f_0, (0, u_2)) = 0$  équivaut à

$$\forall g_T \in \widetilde{F}_N^p, \langle S(T, f_0, ((0, u_2))), g_T \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0 \quad (6.78)$$

où

$$\widetilde{F}_N^p := \bigoplus_{n_0 < |n| \leq N} \text{Im} \left( P^p \left( \frac{i}{n} \right)^* \right) e_n.$$

Pour  $g_T \in \widetilde{F}_N^p$ , on note  $g(t) = e^{-\mathcal{L}^*(T-t)} g_T$  la solution du système adjoint (6.17). Alors, d'après la Proposition 6.22,  $g = (g_1, g_2)$ , avec  $g_1 = G(g_2)$  et

$$\langle S(T, f_0, ((0, u_2))), g_T \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \langle f_0, g(0) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} + \int_0^T \int_\omega \langle u_2(t, x), g_2(t, x) \rangle_{\mathbb{C}^{d_2}} dx dt.$$

D'après le Corollaire 6.21, l'assertion (6.78) équivaut à : pour tout  $g_2^T \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}^{d_2})$  sans composantes selon les fréquences  $\leq n_0$ ,

$$\int_0^T \int_\omega \langle u_2(t, x), g_2(t, x) \rangle_{\mathbb{C}^{d_2}} dx dt = - \langle f_0, (G(g_2^0), g_2^0) \rangle_{L^2(\mathbb{T})},$$

où  $g_2(t) = e^{-\mathfrak{D}(T-t)} g_2^T$  et  $g_2^0 = g_2(0)$ . En considérant  $g_2^T = X e_n$  avec  $X \in \mathbb{C}^{d_2}$  et  $n_0 < |n| \leq N$ , on obtient

$$g_2(t) = e^{-n^2(T-t)E_2(n)} X e_n \text{ et } G(g_2^0) = G\left(\frac{i}{n}\right) e^{-n^2TE_2(n)} X e_n.$$

La précédente propriété est donc équivalente à

$$\begin{aligned} \forall n_0 < |n| \leq N, \forall X \in \mathbb{C}^{d_2}, \int_0^T \int_{\omega} \langle u_2(t, x), e^{-n^2(T-t)E_2(n)} X \rangle_{\mathbb{C}^{d_2}} e^{-inx} dx dt \\ = -\langle f_{01}, G(i/n) e^{-n^2TE_2(n)} X e_n \rangle_{L^2(\mathbb{T})} - \langle f_{02}, e^{-n^2TE_2(n)} X e_n \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente

$$\begin{aligned} \forall n_0 < |n| \leq N, \forall X \in \mathbb{C}^{d_2}, \left\langle \int_0^T \int_{\omega} e^{-n^2(T-t)E_2(n)^*} u_2(t, x) e^{-inx} dx dt, X \right\rangle_{\mathbb{C}^{d_2}} \\ = -\left\langle e^{-n^2TE_2(n)^*} G(i/n)^* \widehat{f}_{01}(n) + e^{-n^2TE_2(n)^*} \widehat{f}_{02}(n), X \right\rangle_{\mathbb{C}^{d_2}} \end{aligned}$$

ce qui démontre (6.77).

*Étape 2 : Résolution du problème des moments.* On cherche une solution  $u_2 \in C_0^\infty(]0, T[ \times \omega)$  du problème des moments (6.77) sous la forme

$$u_2(t, x) = \rho(t, x) v_2(t, x) \quad (6.79)$$

où  $v_2 \in C^\infty(]0, T[ \times \mathbb{T})^{d_2}$  et  $\rho \in C_0^\infty(]0, T[ \times \omega)$  est une fonction scalaire avec un support approprié. Plus précisément, soit

- $\widehat{\omega}$  un ouvert tel que  $\widehat{\omega} \subset\subset \omega$  et  $\rho_2 \in C_c^\infty(\omega, \mathbb{R}_+)$  tel que  $\rho_2 = 1$  sur  $\widehat{\omega}$ ,
- $\rho_1 \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R}_+)$  telle que  $\rho_1(0) = \rho_1(1) = 0$  et

$$\exists C_0 > 0, \forall \gamma > 0, \int_0^1 \rho_1(\tau) e^{-\gamma\tau} d\tau \geq \frac{1}{C_0} e^{-C_0\sqrt{\gamma}}. \quad (6.80)$$

Par exemple, on peut choisir  $\rho_1$  tel que  $\rho_1(\tau) = \rho_1(1 - \tau) = e^{-\frac{1}{\tau}}$  for  $\tau \in ]0, 1/4[$ . En effet, pour tout  $\gamma > 0$ , le changement de variables  $s = \sqrt{\gamma}\tau$  donne

$$\int_0^1 \rho_1(\tau) e^{-\gamma\tau} d\tau \geq \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_0^{\sqrt{\gamma}/4} e^{-\sqrt{\gamma}\phi(s)} ds$$

avec  $\phi(s) = \frac{1}{s} + s$ . La fonction  $\phi$  atteint son minimum en  $s_* = 1$  et  $\phi''(1) = 2 > 0$ , donc, d'après la méthode de Laplace (on fait le changement de variables  $\xi^2 = \phi(s - s_*)$  et on applique Prop. 2.7),

$$\int_0^2 e^{-\sqrt{\gamma}\phi(s)} ds \underset{\gamma \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}} e^{-2\sqrt{\gamma}}.$$



ce qui démontre (6.80) pour  $C_0$  assez grand.

Alors on choisit  $\rho(t, x) = \rho_1((T-t)/T)\rho_2(x)$ . On cherche également  $v_2$  sous la forme

$$v_2(t, x) = \sum_{n_0 < |k| \leq N} e^{-k^2(T-t)E_2(k)} V_k e^{ikx} \text{ avec } V_k \in \mathbb{C}^{d_2}. \quad (6.81)$$

La construction de  $v_2$  utilise le résultat algébrique suivant.

**Lemme 6.24.** *Il existe  $\mathcal{C} > 0$  tel que, pour tout  $N > n_0$  et  $T \in ]0, 1]$  la matrice  $A$  dans  $\mathbb{C}^{(2(N-n_0)d_2) \times (2(N-n_0)d_2)}$ , définie par blocs  $A = (A_{n,k})_{\substack{n_0 < |n| \leq N \\ n_0 < |k| \leq N}}$  par*

$$A_{n,k} = \int_0^T \int_{\omega} e^{-n^2(T-t)E_2(n)^*} e^{-k^2(T-t)E_2(k)} e^{i(k-n)x} \rho(t, x) dx dt \in \mathbb{C}^{d_2 \times d_2},$$

est inversible et

$$\forall F \in \mathbb{C}^{2(N-n_0)d_2}, |A^{-1}F| \leq \frac{\mathcal{C}}{T} e^{cN} |F|,$$

où  $|\cdot|$  est la norme hermitienne sur  $\mathbb{C}^{2(N-n_0)d_2}$ .

*Remarque 6.25.* Par exemple, pour  $N = n_0 + 2$ , la matrice  $A$  est

$$A = \begin{pmatrix} A_{-n_0-2, -n_0-2} & A_{-n_0-2, -n_0-1} & A_{-n_0-2, n_0+1} & A_{-n_0-2, n_0+2} \\ A_{-n_0-1, -n_0-2} & A_{-n_0-1, -n_0-1} & A_{-n_0-1, n_0+1} & A_{-n_0-1, n_0+2} \\ A_{n_0+1, -n_0-2} & A_{n_0+1, -n_0-1} & A_{n_0+1, n_0+1} & A_{n_0+1, n_0+2} \\ A_{n_0+2, -n_0-2} & A_{n_0+2, -n_0-1} & A_{n_0+2, n_0+1} & A_{n_0+2, n_0+2} \end{pmatrix}.$$

Pour  $X \in \mathbb{C}^{4d_2}$  de décomposition par blocs

$$X = \begin{pmatrix} X_{-n_0-2} \\ X_{-n_0-1} \\ X_{n_0+1} \\ X_{n_0+2} \end{pmatrix}$$

où  $X_k \in \mathbb{C}^{d_2}$  pour tout  $n_0 < |k| \leq n_0 + 2$ , on a

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{n_0 < |k| \leq n_0+2} A_{-n_0-2, k} X_k \\ \sum_{n_0 < |k| \leq n_0+2} A_{-n_0-1, k} X_k \\ \sum_{n_0 < |k| \leq n_0+2} A_{n_0+1, k} X_k \\ \sum_{n_0 < |k| \leq n_0+2} A_{n_0+2, k} X_k \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $\langle X, AX \rangle = \sum_{\substack{n_0 < |n| \leq n_0+2 \\ n_0 < |k| \leq n_0+2}} X_n^* A_{n,k} X_k$ .

*Démonstration.* La démonstration repose sur l'inégalité spectrale sur les combinaisons linéaires finies de fonctions propres du Laplacien, due à Lebeau et Robbiano (voir [57] ou encore [56, Thm. 5.4]) :

$$\exists C_1 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \forall (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \sum_{n=-N}^{+N} |a_n|^2 \leq C_1 e^{C_1 N} \int_{\hat{\omega}} \left| \sum_{n=-N}^{+N} a_n e^{inx} \right|^2 dx. \quad (6.82)$$

En sommant les composantes, la même inégalité reste vraie si  $a_n \in \mathbb{C}^{d_2}$  est un vecteur et  $|\cdot|$  est la norme hermitienne sur  $\mathbb{C}^{d_2}$ .

Soit  $N > n_0$  et  $X \in \mathbb{C}^{2(N-n_0)d_2}$  de blocs  $X = (X_k)_{n_0 < |k| \leq N}$  avec  $X_k \in \mathbb{C}^{d_2}$ . Alors, d'après les définitions de  $A$ ,  $\rho$ , ainsi que les propriétés de  $\rho_2$  et l'inégalité spectrale, on a

$$\begin{aligned} \langle AX, X \rangle &= \sum_{n_0 < |n|, |k| \leq N} X_n^* A_{n,k} X_k \\ &= \int_0^T \int_{\omega} \left| \sum_{n_0 < |k| \leq N} e^{-k^2(T-t)E_2(k)} X_k e^{ikx} \right|^2 \rho(t, x) dx dt \\ &\geq \int_0^T \int_{\hat{\omega}} \left| \sum_{n_0 < |k| \leq N} e^{-k^2(T-t)E_2(k)} X_k e^{ikx} \right|^2 \rho_1\left(\frac{T-t}{T}\right) dx dt \\ &\geq \frac{e^{-C_1 N}}{C_1} \int_0^T \sum_{n_0 < |k| \leq N} |e^{-k^2(T-t)E_2(k)} X_k|^2 \rho_1\left(\frac{T-t}{T}\right) dt. \end{aligned}$$

Il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $|k| > n_0$ ,  $|E_2(k)| \leq c$ . Alors,

$$\forall |k| > n_0, \tau > 0, Y \in \mathbb{C}^{d_2}, |e^{E_2(k)\tau} Y| \leq e^{c\tau} |Y|.$$

Alors, en prenant  $\tau = k^2(T-t)$  et  $Y = \exp(-k^2(T-t)E_2(k)) X_k$ , on a

$$\forall |k| > n_0, t \in ]0, T[, |e^{-k^2(T-t)E_2(k)} X_k| \geq e^{-ck^2(T-t)} |X_k|.$$

Donc, en faisant le changement de variables  $\tau = \frac{T-t}{T}$  et en utilisant les propriétés de  $\rho_1$  (Eq. (6.80)), on a

$$\begin{aligned} \langle AX, X \rangle &\geq \frac{T e^{-C_1 N}}{C_1} \sum_{n_0 < |k| \leq N} |X_k|^2 \int_0^T e^{-2ck^2 T \tau} \rho_1(\tau) d\tau \\ &\geq \frac{T e^{-C_1 N}}{C_1 C_0} \sum_{n_0 < |k| \leq N} |X_k|^2 e^{-C_0 k \sqrt{2cT}} \\ &\geq \frac{T}{C_1 C_0} e^{-(C_1 + C_0 \sqrt{2cT})N} |X|^2. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente, valide pour  $X \in \mathbb{C}^{2(N-n_0)d_2}$ , démontre que  $A$  est inversible. De plus, si  $F \in \mathbb{C}^{2(N-n_0)d_2} \setminus \{0\}$ , le vecteur  $X = A^{-1}F$  vérifie

$$\frac{T}{C_1 C_0} e^{-(C_1 + C_0 \sqrt{2cT})N} |X|^2 \leq \langle AX, X \rangle = \langle F, X \rangle \leq |F| |X|.$$

Donc

$$|X| \leq \frac{C_1 C_0}{T} e^{(C_1 + C_0 \sqrt{2cT})N} |F|.$$

Ceci démontre le Lemme 6.24 avec  $\mathcal{C} = \max\{C_1 C_0; C_1 + C_0 \sqrt{2c}\}$ .  $\diamond$

Revenons à la démonstration de la Proposition 6.23. Pour un contrôle de la forme (6.79), le problème des moments (6.77) s'écrit

$$\forall n_0 < |n| \leq N, \quad \sum_{n_0 < |k| \leq N} A_{n,k} V_k = F_n$$

ou de manière équivalente,  $AV = F$  avec les notations du Lemme 6.24. Il suffit ainsi de prendre  $V = A^{-1}F$ . D'après la définition de  $F$  Eq. (6.77), et d'après l'égalité de Parseval, il existe  $C_2 > 0$  indépendant de  $(T, N)$  tel que

$$|F| = \left( \sum_{n_0 < |n| \leq N} |F_n|^2 \right)^{1/2} \leq C_2 |f_0|_{L^2(\mathbb{T})^d}.$$

Donc, d'après le Lemme 6.24

$$|V| = \left( \sum_{n_0 < |k| \leq N} |V_k|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{C_2 \mathcal{C}}{T} e^{cN} |f_0|_{L^2(\mathbb{T})^d}. \quad (6.83)$$

*Étape 3 : estimations sur  $u_2$ .* Soit  $s \in \mathbb{N}^*$ . D'après la formule définissant le contrôle (Eq. (6.79)), il existe  $C = C(\rho, s) > 0$  tel que

$$|u_2|_{H^s([0, T] \times \omega)} \leq \frac{C}{T^s} |v_2|_{H^s([0, T] \times \mathbb{T})}. \quad (6.84)$$

Pour tout  $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$  tels que  $s_1 + s_2 \leq s$ , on a

$$\partial_t^{s_1} \partial_x^{s_2} v_2(t, x) = \sum_{n_0 < |k| \leq N} k^{2s_1} E_2(k)^{s_1} e^{-k^2(T-t)E_2(k)} V_k(ik)^{s_2} e^{ivkx}.$$

D'après l'égalité de Parseval, on a

$$\begin{aligned} |\partial_t^{s_1} \partial_x^{s_2} v_2|_{L^2([0, T] \times \mathbb{T})}^2 &= \int_0^T \sum_{n_0 < |k| \leq N} |k^{2s_1 + s_2} E_2(k)^{s_1} e^{-k^2(T-t)E_2(k)} V_k|^2 dt \\ &\leq C \int_0^T \sum_{n_0 < |k| \leq N} k^{4s} |e^{-k^2(T-t)E_2(k)} V_k|^2 dt \end{aligned}$$

En travaillant comme dans la démonstration de la Proposition 6.6, on obtient, pour  $n_0$  assez grand, des constantes  $K_p, c_p > 0$  telles que

$$\begin{aligned} |\partial_t^{s_1} \partial_x^{s_2} v_2|_{L^2([0, T] \times \mathbb{T})}^2 &\leq C \sum_{n_0 < |k| \leq N} k^{4s} K_p^2 \int_0^T e^{-2c_p k^2 (T-t)} dt |V_k|^2 \\ &\leq \frac{CK_p^2}{2c_p} \sum_{n_0 < |k| \leq N} k^{4s-2} |V_k|^2 \leq \frac{CK_p^2}{c_p} N^{4s-2} |V|^2 \end{aligned}$$

D'après l'estimation sur  $V$  (Eq. (6.83)), on a

$$|\partial_t^{s_1} \partial_x^{s_2} v_2|_{L^2([0, T] \times \mathbb{T})} \leq \sqrt{\frac{C}{c_p}} K_p N^{2s-1} \frac{C_2 \mathcal{C}}{T} e^{cN} |f_0|_{L^2(\mathbb{T})^d}.$$

Ceci démontre l'existence de  $C > 0$  indépendant de  $(T, N)$  tel que

$$|v_2|_{H^s([0, T] \times \mathbb{T})} \leq \frac{C}{T} N^{2s-1} e^{cN} |f_0|_{L^2(\mathbb{T})^d}$$

et l'estimation (6.84) donne l'estimée annoncée sur  $u$  dans  $H^s$ .  $\square$

### Méthode de Lebeau et Robbiano

On démontre enfin la Proposition 6.19. Soit  $T > 0$ . Fixons  $\delta \in (0, T/2)$  et  $\rho \in ]0, 1[$ . Pour  $\ell \in \mathbb{N}^*$ , on définit,  $a_\ell = A2^{-\rho\ell}$  où  $A > 0$  est tel que  $2 \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell = T - 2\delta$ . Soit  $f_0 \in F^p$ . On définit

$$\begin{cases} f_1 = e^{-\delta \mathcal{L}^p} f_0, \\ g_\ell = \Pi^p S(a_\ell, f_\ell, u_\ell) \text{ avec } u_\ell = (0, K_{a_\ell, 2^\ell}(f_\ell)), \\ f_{\ell+1} = e^{-a_\ell \mathcal{L}^p} g_\ell, \end{cases}$$

avec  $K_{a_\ell, 2^\ell}$  l'opérateur de contrôle de la Proposition 6.23. Par construction, on a  $\Pi_{2^\ell}^p g_\ell = 0$ , et donc, les propriétés de dissipation des composantes paraboliques (Prop. 6.6) donnent

$$\begin{aligned} |f_{\ell+1}|_{L^2(\mathbb{T})^d}^2 &= |e^{-a_\ell \mathcal{L}^p} g_\ell|_{L^2(\mathbb{T})^d}^2 = \sum_{|n| > 2^\ell} |e^{-n^2 E(i/n) a_\ell} \widehat{g}_\ell(n)|^2 \\ &\leq \sum_{|n| > 2^\ell} K_p^2 e^{-2n^2 c_p a_\ell} |\widehat{g}_\ell(n)|^2 \leq K_p^2 e^{-2c_p (2^\ell)^2 a_\ell} |g_\ell|_{L^2(\mathbb{T})^d}^2. \end{aligned}$$

D'après la propriété de semi-groupe démontrée dans la Proposition 6.8, il existe des constantes  $K$  et  $c$  tels que

$$\forall f \in L^2(\mathbb{T})^d, t \geq 0, |e^{-t\mathcal{L}} f|_{L^2(\mathbb{T})^d} \leq K e^{ct} |f|_{L^2(\mathbb{T})^d}.$$

Alors, d'après l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |g_\ell|_{L^2(\mathbb{T})^d} &\leq C|S(a_\ell, f_\ell, u_\ell)| \leq CKe^{ca_\ell}|f_\ell|_{L^2(\mathbb{T})^d} + \int_0^{a_\ell} CKe^{c(a_\ell-t)}|u_\ell(t)|_{L^2(\mathbb{T})} dt \\ &\leq CKe^{ca_\ell} \left( |f_\ell|_{L^2(\mathbb{T})^d} + \sqrt{a_\ell}|u_\ell|_{L^2([0, a_\ell] \times \omega)} \right), \end{aligned}$$

et d'après la Proposition 6.23,

$$|u_\ell|_{L^2([0, a_\ell] \times \omega)} \leq \frac{c}{a_\ell} e^{c2^\ell} |f_\ell|_{L^2(\mathbb{T})^d}.$$

Ainsi

$$|g_\ell|_{L^2(\mathbb{T})^d} \leq CKe^{ca_\ell} \left( 1 + \frac{c}{\sqrt{a_\ell}} e^{c2^\ell} \right) |f_\ell|_{L^2(\mathbb{T})^d}.$$

Donc, en définissant

$$m_\ell = K_p e^{-c_p 4^\ell a_\ell} CKe^{ca_\ell} \left( 1 + \frac{c}{\sqrt{a_\ell}} e^{c2^\ell} \right),$$

on a

$$|f_{\ell+1}|_{L^2(\mathbb{T})^d} \leq m_\ell |f_\ell|_{L^2(\mathbb{T})^d}.$$

Il existe  $C_1, C_2 > 0$  tels que  $m_\ell \leq C_1 e^{-C_2 2^{(2-\rho)\ell}}$ . Donc  $|f_\ell|_{L^2(\mathbb{T})^d} \rightarrow 0$ , et, plus précisément, il existe  $C_3, C_4 > 0$  tels que

$$|f_\ell|_{L^2(\mathbb{T})^d} \leq C_3 \exp(-C_4 2^{(2-\rho)\ell}) |f_0|_{L^2(\mathbb{T})^d}.$$

De plus,

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |u_\ell|_{L^2([0, a_\ell] \times \omega)}^2 \leq c \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{e^{c2^\ell}}{a_\ell} C_3 \exp(-C_4 2^{(2-\rho)\ell}) |f_0|_{L^2(\mathbb{T})^d} < \infty. \quad (6.85)$$

On définit  $T_0 = \delta, T_2 = \delta + 2a_1, \dots, T_\ell = T_{\ell-1} + 2a_\ell$ . On a  $T_\ell \rightarrow (T - \delta)$  lorsque  $\ell \rightarrow \infty$ . Ainsi, pour tout  $f_0 \in F^p$ , on définit le contrôle

$$\underline{u}_T^p(f_0)(t, x) = \begin{cases} K_{a_\ell, 2^\ell}(f_\ell)(t - T_{\ell-1}) & \text{pour } T_{\ell-1} \leq t \leq aT_\ell - 1 + a_\ell, \\ 0 & \text{pour } T_{\ell-1} + a_\ell \leq t \leq T_{\ell-1} + 2a_\ell = T_\ell, \\ 0 & \text{for } T - \delta \leq t \leq T. \end{cases}$$

Alors,  $\underline{u}_T^p(f_0) \in C_0^\infty((\delta, T - \delta) \times \omega)^{d_2}$  car toutes les dérivées s'annulent au temps  $t = a_\ell$ . Ainsi,  $\underline{u}_T^p(f_0) \in C_c^\infty(]0, T[ \times \omega)^{d_2}$ .

D'après (6.85),  $\underline{u}_T^p(f_0) \in L^2(]0, T[ \times \omega)^d$ , donc  $S(T - \delta; f_0, \underline{u}_T^p(f_0))$  est la limite dans  $L^2(\mathbb{T})^d$  de la suite  $S(T_\ell; f_0, \underline{u}_T^p(f_0))$ . Donc,  $\Pi^p S(T - \delta; f_0, \underline{u}_T^p(f_0))$  est la limite dans  $L^2(\mathbb{T})$  de la suite  $\Pi^p S(T_\ell; f_0, \underline{u}_T^p(f_0)) = f_{\ell+1}$ . Enfin,

$$\Pi^p S(T, f_0, \underline{u}_T^p(f_0)) = \Pi^p S(T - \delta; f_0, \underline{u}_T^p(f_0)) = 0.$$

D'après la Proposition 6.23, pour tout  $s \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left| \underline{\mathcal{U}}_T^p(f_0) \right|_{H^s([0, T] \times \omega)} \leq \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{C}{T^{\ell s+1}} 4^{\ell s} e^{c2^\ell} C_3 \exp(-C_4 2^{(2-\rho)\ell})}_{< \infty} |f_0|_{L^2(\mathbb{T})^d}.$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 6.19.  $\square$

### 6.4.5 Contrôle des basses fréquences

On démontre ici qu'on peut contrôler les basses fréquences, ce qui est la dernière étape de la démonstration du Théorème 6.1. Soit  $T > T^*$  où  $T^*$  est défini Eq. (6.5). Alors, il existe  $T' > 0$  tel que  $T^* < T' < T$ . Soit  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{U}$  définis à la Proposition 6.14.

On peut supposer que  $F_0 \subset \mathcal{G}$  en étendant l'opérateur  $\mathcal{U}$  de la manière suivante. Soit  $W$  un supplémentaire de  $\mathcal{G} \cap F^0$  dans  $F^0$ . Alors  $W$  est un supplémentaire de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{G} + F^0$ , et on étend  $\mathcal{U}$  à  $\mathcal{G} + F^0 = \mathcal{G} \oplus W$  en définissant  $\mathcal{U}(f_0) = 0$  pour tout  $f_0 \in W$ .

L'espace  $\mathcal{G}$  est muni de la topologie induite, c.-à-d. de la norme  $L^2(\mathbb{T})^d$ . L'opérateur  $S$  est celui de la Définition 6.9.

On introduit  $\mathcal{F}_T$  le sous-espace de  $L^2(\mathbb{T})^d$  défini par

$$\mathcal{F}_T = \{f_0 \in L^2(\mathbb{T})^d; \exists u \in L^2([0, T'] \times \omega)^{d_1} \times C_c^\infty([T', T] \times \omega)^{d_2} / S(T, f_0, u) = 0\}.$$

Étape 1 :  $\mathcal{F}_T$  est un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{T})^d$  de codimension finie.

Si  $f_0 \in \mathcal{G}$ , la fonction  $S(T, f_0, \mathcal{U}f_0)$  appartient à  $F^0$ , donc

$$\mathcal{K}(f_0) := -e^{T\mathcal{L}^0} S(T, f_0, \mathcal{U}f_0) \quad (6.86)$$

est bien définie dans  $F^0$  grâce à la Proposition 6.13. Alors, l'opérateur  $\mathcal{K}$  est de rang fini et donc compact. D'après l'alternative de Fredholm,  $(I + \mathcal{K})(\mathcal{G})$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{G}$  et il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{G}'$  de  $\mathcal{G}$ , de codimension finie dans  $\mathcal{G}$ , tel que  $(I + \mathcal{K})$  soit un isomorphisme de  $\mathcal{G}'$  sur  $(I + \mathcal{K})(\mathcal{G})$ . Remarquons que  $\mathcal{G}'$  est également un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{T})^d$  de codimension finie.

Pour tout  $f_0 \in \mathcal{G}'$ , en utilisant le fait que  $\mathcal{K}(f_0) \in F^0$  et la définition de  $\mathcal{K}$  (Eq. (6.86)), on obtient

$$S(T, \mathcal{K}(f_0), 0) = e^{-T\mathcal{L}} \mathcal{K}(f_0) = e^{-T\mathcal{L}^0} \mathcal{K}(f_0) = -S(T, f_0, \mathcal{U}f_0)$$

et donc

$$S(T, f_0 + \mathcal{K}(f_0), \mathcal{U}f_0) = S(T, f_0, \mathcal{U}f_0) + S(T, \mathcal{K}(f_0), 0) = 0.$$

<sup>7</sup>Si  $f \in \mathcal{G} + F^0$ , on le décompose en  $f_{\mathcal{G}} + f_{F_0}$ , puis on décompose  $f_{F_0}$  selon la somme directe  $F_0 = \mathcal{G} \cap F_0 \oplus W : f_{F_0} = f_{\mathcal{G} \cap F_0} + f_W$ . Donc  $f = (f_{\mathcal{G}} + f_{\mathcal{G} \cap F_0}) + f_W \in \mathcal{G} + W$ . Ceci démontre que  $\mathcal{G} + F_0 = \mathcal{G} + W$ . De plus, si  $f \in \mathcal{G} \cap W$ , comme  $W \subset F_0$ , on a alors  $f \in \mathcal{G} \cap F_0 \cap W$ , qui est réduit à  $\{0\}$ . Donc la somme  $\mathcal{G} + W$  est directe.

Ceci démontre que  $\mathcal{F}_T$  contient  $(I + \mathcal{K})(\mathcal{G}')$ , qui est un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{T})^d$  de codimension finie. Il existe donc un sous-espace de  $L^2(\mathbb{T})^d$  de dimension finie  $F_{\sharp}$  tel que  $\mathcal{F}_T = (I + \mathcal{K})(\mathcal{G}') \oplus F_{\sharp}$ . Ceci termine cette première étape.

*Étape 2 : quitte à réduire  $T > T^*$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\mathcal{F}_{T'} = \mathcal{F}_T$  pour  $T' \in [T, T + \delta]$ . Lorsque  $0 < T' < T''$ , si un contrôle défini sur  $[0, T']$ , en l'étendant par zéro sur  $(T', T'')$ , on voit que  $\mathcal{F}_{T'} \subset \mathcal{F}_{T''}$ . Donc, l'application  $T' \mapsto \text{codim}(\mathcal{F}_{T'})$  est décroissante. Comme elle est à valeurs entières, ses discontinuités sur  $(T^*, T + 1]$  sont isolées. Si  $T$  n'est pas une discontinuité, il existe  $\delta > 0$  tel que  $\text{codim}(\mathcal{F}_{T'}) = \text{codim}(\mathcal{F}_T)$  pour tout  $T' \in [T, T + \delta]$ . Si  $T$  est une discontinuité, on le remplace pour une plus petite valeur, qui n'est pas une discontinuité.*

*Étape 3 : on démontre que  $(e^{-t\mathcal{L}^*} \mathcal{F}_T^\perp)^\perp \subset \mathcal{F}_T$  pour tout  $t \in ]0, \delta[$ . Soit  $t \in ]0, \delta[$  et  $g_0 \in L^2(\mathbb{T})^d$  tels que  $\langle g_0, e^{-t\mathcal{L}^*} f_0 \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0$  pour tout  $f_0 \in \mathcal{F}_T^\perp$ . Alors  $\langle e^{-t\mathcal{L}} g_0, f_0 \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = 0$  pour tout  $f_0 \in \mathcal{F}_T^\perp$ . Dit autrement,  $e^{-t\mathcal{L}} g_0 \in (\mathcal{F}_T^\perp)^\perp$ . D'après l'étape 1,  $\mathcal{F}_T$  est un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{T})^d$ , ainsi,  $(\mathcal{F}_T^\perp)^\perp = \mathcal{F}_T$ . Donc  $e^{-t\mathcal{L}} g_0 \in \mathcal{F}_T$ . Par définition de  $\mathcal{F}_T$ , ceci implique que  $g_0 \in \mathcal{F}_{T+t}$ . D'après l'étape 2, on obtient alors  $g_0 \in \mathcal{F}_T$ , ce qui termine cette étape 3.*

*Étape 4 : il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que tout  $f_0 \in \mathcal{F}_T^\perp$  peut s'écrire sous la forme*

$$f_0 = \sum_{k \leq N} \varphi_k e_k \quad \text{avec} \quad \varphi_k \in \mathbb{C}^d. \quad (6.87)$$

Soit  $S(t)^*$  la restriction du semi-groupe  $e^{t\mathcal{L}^*}$  à  $\mathcal{F}_T^\perp$  :  $S(t)^* = e^{-t\mathcal{L}^*}|_{\mathcal{F}_T^\perp}$ . Alors  $S(t)^*$  peut se mettre sous la forme  $S(t)^* = e^{tM}$ , où  $M$  est une matrice telle que  $\mathcal{L}^* f_0 = M f_0$  pour tout  $f_0 \in \mathcal{F}_T^\perp$ . Mais alors  $\ker(M - \bar{\lambda})^j = \ker(\mathcal{L}^* - \bar{\lambda})^j \cap \mathcal{F}_T^\perp$ . Le lemme de décomposition des noyaux et la structure des espaces propres de  $\mathcal{L}^*$  donne la conclusion de l'étape 4.

*Étape 5 : tout élément de  $L^2(\mathbb{T})^d$  peut être amenée dans  $\mathcal{F}_T$  en temps arbitrairement petit. C.-à-d. qu'on veut montrer que pour tout  $\epsilon > 0$  et  $f_0 \in L^2(\mathbb{T})^d$ , il existe  $u \in L^2([0, T] \times \omega)^d$  tel que  $S(\epsilon, f_0, u) \in \mathcal{F}_T$ .*

Ce problème correspond à une inégalité d'observabilité. Plus précisément, d'après la Proposition A.8, où on choisit  $B = \mathbb{1}_\omega$  et  $C$  la projection sur  $\mathcal{F}_T^\perp$ , la propriété recherchée est équivalente à : il existe  $K > 0$  pour tout  $g_0 \in \mathcal{F}_T$ , la solution  $g$  du système adjoint (6.17) vérifie  $|g(T, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})} \leq K |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}$ . Comme  $\mathcal{F}_T^\perp$  est de dimension finie, toutes les normes dessus sont équivalentes, et il suffit donc de montrer la propriété de continuation unique suivante : si  $g(t, \cdot) = e^{tM} g_0$  avec  $g = 0$  sur  $]0, \epsilon[ \times \omega$ , alors  $g = 0$ . Cette propriété est vraie en vertu de l'inégalité spectrale (6.82) et du fait que toutes les fonctions dans  $\mathcal{F}_T^\perp$  soient de la forme (6.87).

*Étape 6 : Conclusion.* L'étape 5 implique la contrôlabilité à zéro du système en tout temps  $\tau > T$ . Comme  $T$  est un temps arbitraire tel que  $T > T^*$ , ceci démontre que le système (6.1) est contrôlable à zéro en tout temps  $T > T^*$ .

## 6.5 Systèmes chaleur-demi chaleur

### 6.5.1 Définition

Nous considérons comme dernier exemple d'application de notre méthode d'étude de la contrôlabilité grâce aux fonctions holomorphes les systèmes chaleur-demi chaleur suivants :

$$\begin{cases} \partial_t f - B\partial_x^2 f + A|\partial_x|f + Kf = u\mathbb{1}_\omega & \text{sur } ]0, T[ \times \mathbb{T}, \\ f(0, \cdot) = f_0 & \text{sur } \mathbb{T}, \end{cases} \quad (6.88)$$

où,  $A, B, K$  sont des matrices comme pour les systèmes paraboliques-transport, et  $|\partial_x|$  est défini par la multiplication de  $e_n$  par  $|n|$ , c.-à-d. que si  $(a_n)$  est une suite vectorielle telle que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |a_n|^2 < +\infty$ ,

$$|\partial_x| \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| a_n e_n.$$

On suppose que les matrices  $A$  et  $B$  vérifient

$$d = d_1 + d_2 \text{ avec } 1 \leq d_1 < d, 1 \leq d_2 < d; \quad (\text{H'.1})$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \text{ avec } D \in M_{d_2}(\mathbb{R}), D + D^* > 0; \quad (\text{H'.2})$$

$$A = \begin{pmatrix} A' & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \text{ avec } A' \in M_{d_1}(\mathbb{R}), A' + A'^* > 0, A' \text{ est diagonalisable.} \quad (\text{H'.3})$$

### 6.5.2 Caractère bien posé

On commence par définir proprement l'opérateur considéré.

**Définition 6.26.** Soit  $D(\mathcal{L})$  le sous espace de  $L^2(\mathbb{T})^d$  défini par

$$D(\mathcal{L}) := \{f \in L^2(\mathbb{T})^d, f_1 \in H^1(\mathbb{T})^{d_1}, f_2 \in H^2(\mathbb{T})^{d_2}\}, \quad (6.89)$$

où  $f_1$  est le vecteur formé des  $d_1$  premières composantes de  $f$  et  $f_2$  est le vecteur formé des  $d_2$  dernières composantes de  $f$ . On considère  $\mathcal{L}$  l'opérateur sur  $L^2(\mathbb{T})^d$  de domaine  $D(\mathcal{L})$  et défini pour  $f \in D(\mathcal{L})$  par

$$\mathcal{L}f := B\partial_x^2 f - A|\partial_x|f - Kf.$$

De même manière que pour les systèmes paraboliques-transport, on constate qu'en définissant pour  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$E(z) := B + zA + z^2K, \quad (6.90)$$



l'opérateur  $\mathcal{L}$  agit en Fourier comme la multiplication par  $-n^2E(|n|^{-1})$ ; c.-à-d. que pour  $n \in \mathbb{Z}$  et  $X \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathcal{L}(Xe_n) = (-n^2B - |n|A + K)Xe_n = -n^2E\left(\frac{1}{|n|}\right)Xe_n.$$

Si  $f \in L^2(\mathbb{T})^d$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $\widehat{f}(n)$  le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f$ , ainsi que  $\widehat{f}_1(n)$  le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f_1$  et  $\widehat{f}_2(n)$  le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f_2$ . Notons que

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T})^d, \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |\widehat{f}_1(n)|^2 < +\infty, \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^4 |\widehat{f}_2(n)|^2 < +\infty \right\}.$$

On montre que  $\mathcal{L}$  génère un semi-groupe fortement continu.

**Proposition 6.27.** *Il existe  $\omega > 0$  tel que les opérateurs  $\mathcal{L} - \omega$  et  $\mathcal{L}^* - \omega$  soient dissipatifs.*

*Démonstration.* Rappelons que pour toute matrice carrée  $M$  et vecteur  $X$ , on a  $\Re\langle MX, X \rangle = \langle (M + M^*)X, X \rangle / 2$ . Si  $f \in D(\mathcal{L})$ , on a par intégration par parties

$$\Re\langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2} = -\Re\langle B\partial_x f, \partial_x f \rangle_{L^2} - \Re\langle A|\partial_x|f, f \rangle_{L^2} - \Re\langle Kf, f \rangle_{L^2}. \quad (6.91)$$

D'après la structure de  $B$  et l'hypothèse sur  $D$  (hypothèses (H'2)), le premier terme vérifie

$$-\Re\langle B\partial_x f, \partial_x f \rangle = -\Re\langle D\partial_x f_2, \partial_x f_2 \rangle_{L^2} = -\left\langle \frac{D + D^*}{2} \partial_x f_2, \partial_x f_2 \right\rangle_{L^2} \leq -c|\partial_x f_2|_{L^2}^2. \quad (6.92)$$

Le second terme s'écrit

$$\begin{aligned} -\langle A|\partial_x|f, f \rangle_{L^2} &= -\langle A'|\partial_x|^{1/2}f_1, |\partial_x|^{1/2}f_1 \rangle_{L^2} - \langle A_{12}|\partial_x|f_2, f_1 \rangle_{L^2} \\ &\quad - \langle A_{21}f_1, |\partial_x|f_2 \rangle_{L^2} - \langle A_{22}|\partial_x|f_2, f_2 \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

Comme  $A' + A'^* > 0$ , le premier terme du membre droit est majoré par

$$-\Re\langle A'|\partial_x|^{1/2}f_1, |\partial_x|^{1/2}f_1 \rangle_{L^2} \leq -c\|\partial_x|^{1/2}f_1\|_{L^2}^2.$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les autres termes

$$-\Re\langle A|\partial_x|f, f \rangle_{L^2} \leq -c\|\partial_x|^{1/2}f_1\|_{L^2}^2 + C\|\partial_x f_2\|_{L^2}(\|f_1\|_{L^2} + \|f_2\|_{L^2}).$$

Et en utilisant  $ab \leq \epsilon a^2 + b^2/4\epsilon$ ,

$$-\Re\langle A|\partial_x|f, f \rangle_{L^2} \leq -c\|\partial_x|^{1/2}f_1\|_{L^2}^2 + \epsilon\|\partial_x f_2\|_{L^2}^2 + \frac{C'}{\epsilon}(\|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}^2). \quad (6.93)$$

Le troisième terme vérifie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\Re\langle Kf, f \rangle_{L^2} \leq C'' |f|_{L^2}^2. \quad (6.94)$$

Ainsi, en sommant les majorations sur chacun des termes (Eq. (6.92–6.94)) et en prenant  $\epsilon = \frac{c}{2}$  pour absorber le terme  $\epsilon |\partial_x f_2|_{L^2}^2$ , on a

$$\Re\langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2} \leq -\frac{c}{2} (|\partial_x f_2|_{L^2}^2 + \|\partial_x|^{1/2} f_1\|_{L^2}^2) + C''' |f|_{L^2}^2. \quad (6.95)$$

Donc  $\mathcal{L} - C'''$  est dissipatif.

Grâce à des intégrations par parties (ou en regardant en Fourier), on voit que l'adjoint de  $\mathcal{L}$  agit comme  $B^* \partial_x^2 - A^* |\partial_x| - K^*$ , et que le domaine de  $\mathcal{L}^*$  est

$$D(\mathcal{L}^*) = \{f \in L^2; (\partial_x^2 B^* - |\partial_x| A^* - K^*)f \in L^2\},$$

où les dérivées sont au sens des distributions. Montrons que ce domaine est égal à celui de  $\mathcal{L}$  (voir Eq. (6.89)). Soit  $f \in D(\mathcal{L}^*)$ , c.-à-d.  $f \in L^2$  et  $(\partial_x^2 B - |\partial_x| A)f \in L^2$  (le terme  $K^* f$  ne joue aucun rôle). D'après l'égalité de Parseval, on a

$$\|(\partial_x^2 B^* - |\partial_x| A^*)f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(n^2 B^* + |n| A^*) \hat{f}(n)|^2 \quad (6.96)$$

Or, en écrivant  $A, B$  et  $\hat{f}(n)$  par blocs,

$$(n^2 B^* + |n| A^*) \hat{f}(n) = \begin{pmatrix} |n| A'^* \hat{f}_1(n) + |n| A_{21}^* \hat{f}_2(n) \\ n^2 D^* \hat{f}_2(n) + |n| (A_{12}^* \hat{f}_1(n) + A_{22}^* \hat{f}_2(n)) \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} & \Re\langle (n^2 B^* + |n| A^*) \hat{f}(n), \hat{f}(n) \rangle \\ &= |n| \Re\langle A'^* \hat{f}_1(n), \hat{f}_1(n) \rangle + n^2 \Re\langle D^* \hat{f}_2(n), \hat{f}_2(n) \rangle + O_n(n) (|\hat{f}_1(n)| |\hat{f}_2(n)| + |\hat{f}_2(n)|^2). \end{aligned}$$

Et donc, en utilisant le fait que  $A' + A'^* > 0$  et  $D + D^* > 0$ , ainsi que l'inégalité de Young pour absorber les doubles produits, on a

$$\Re\langle (n^2 B^* + |n| A^*) \hat{f}(n), \hat{f}(n) \rangle \geq (c|n| - C) |\hat{f}_1(n)|^2 + (cn^2 - C|n|) |\hat{f}_2(n)|^2.$$

Donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(n^2 B^* + |n| A^*) \hat{f}(n)| |\hat{f}(n)| \geq (c|n| - C) |\hat{f}_1(n)|^2 + (cn^2 - C|n|) |\hat{f}_2(n)|^2,$$

donc,

$$c' |(n^2 B^* + |n| A^*) \hat{f}(n)| \geq (c|n| - C') |\hat{f}_1(n)| + (cn^2 - C|n| - C') |\hat{f}_2(n)|.$$

Donc, pour  $n$  assez grand, on a

$$n^2 |\hat{f}_1(n)|^2 + n^4 |\hat{f}_2(n)|^2 \leq C'' |(n^2 B^* + |n| A^*) \hat{f}(n)|^2,$$

et comme la série des  $|(n^2 B^* + |n| A^*) \hat{f}(n)|^2$  est sommable (Eq. (6.96)), on en déduit que  $f_1 \in H^1(\mathbb{T})^d$  et  $f_2 \in H^2(\mathbb{T})^d$ . C'est-à-dire que  $f \in D(\mathcal{L}^*)$ .  $\square$

On déduit alors du théorème de Lumer-Phillips (Th. A.3) que  $\mathcal{L}$  génère un semi-groupe fortement continu, et que  $|e^{t\mathcal{L}}| \leq e^{\omega t}$ . On définit alors les solutions faibles grâce à la Définition A.5. Alors, d'après la Proposition A.8, la contrôlabilité à zéro du système chaleur-demi chaleur (6.88) est équivalente à l'inégalité d'observabilité suivante : il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in L^2(\mathbb{T})^d$ , la solution du système adjoint

$$\begin{cases} \partial_t g - B^* \partial_x^2 g + A^* |\partial_x| g + K^* g = u \mathbb{1}_\omega & \text{sur } ]0, T[ \times \mathbb{T}, \\ g(0, \cdot) = g_0 & \text{sur } \mathbb{T}, \end{cases} \quad (6.97)$$

vérifie

$$|g(T, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C |g|_{L^2([0, T] \times \omega)}. \quad (6.98)$$

### 6.5.3 Non contrôlabilité à zéro

On montre que les systèmes chaleur-demi chaleur ne sont jamais contrôlables à zéro.

**Théorème 6.28.** *On suppose que  $A$  et  $B$  vérifient les hypothèses (H'.1–H'.3). Soit  $T > 0$  et  $\omega$  un ouvert strict de  $\mathbb{T}$ . Le système chaleur-demi chaleur (6.88) n'est pas contrôlable à zéro sur  $\omega$  en temps  $T$ .*

*Démonstration.* On suit essentiellement la démonstration de la non-contrôlabilité en temps petit pour les systèmes paraboliques-transport, mais cette fois-ci en remarquant que les systèmes chaleur-demi-chaleur se comportent comme des équations de la demi-chaleur tournée (voir Sec. 2.2).

Remarquons que les matrices  $A$  et  $B$  vérifient les hypothèses qui nous permettent d'appliquer la théorie perturbative analytique des Propositions 6.2–6.4. Soit alors  $\mu \in \text{Sp}(A')$ . À nouveau, on réinterprète l'inégalité d'observabilité comme inégalité sur les polynômes.

**Lemme 6.29.** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  simplement connexe et qui contient 0 ainsi que l'adhérence du domaine*

$$\mathcal{D} := \left\{ \zeta \in \mathbb{C}, e^{-T\Re(\mu)} < |\zeta| < 1, \arg(\zeta) + \ln|\zeta| \frac{\Im(\mu)}{\Re(\mu)} \in \omega \right\},$$

(voir Figure 6.2). Si le système (6.88) est contrôlable sur  $\omega$  en temps  $T$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynôme  $p$ ,

$$|p|_{L^2(D(0, e^{-\Re(\mu)T})} \leq C |p|_{L^\infty(U)}. \quad (6.99)$$

*Démonstration. Étape 1 : solutions de la demi-chaleur approchées.* Ceci se fait de la même manière que pour les systèmes parabolique-transport, mais en remplaçant  $i/n$

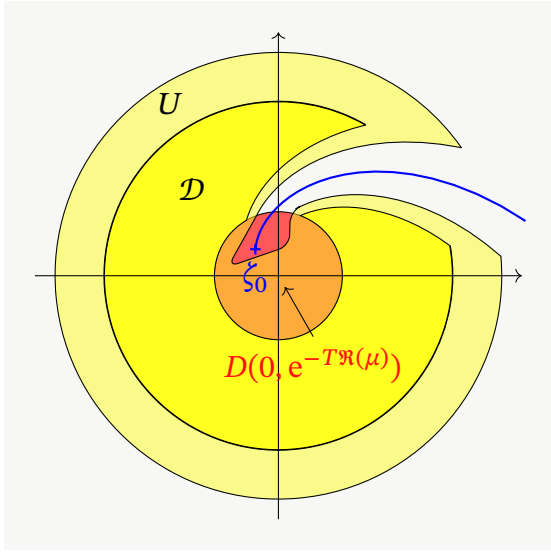


FIGURE 6.2 – En jaune, le domaine  $\mathcal{D}$ . En jaune plus clair, un exemple de domaine  $U$ , simplement connexe, qui contient 0 et  $\mathcal{D}$ . En rouge, le disque  $D(0, e^{-\Re(\mu)T})$ . La contrôlabilité à zéro du système chaleur-demi chaleur implique une estimation de la norme  $L^2(D(0, e^{-\Re(\mu)T}))$  des polynômes par leur norme  $L^\infty(U)$ .

Mais on peut choisir  $U$  de sorte qu'il ne contienne pas le disque rouge. Auquel cas, on peut trouver  $\zeta_0 \in D(0, e^{-\Re(\mu)T}) \setminus U$  et une suite de polynômes qui converge vers  $\zeta \mapsto (\zeta - \zeta_0)^{-1}$  en dehors de la courbe bleue.

par  $1/n$ . Si  $(a_n)_{n>0}$  est une suite finie, on construit de cette manière une solution  $g$  du système adjoint (6.97) qui est égale à

$$g(t, x) = \sum_{n>0} a_n e^{n(ix - \mu t)} \gamma_t(n) \varphi_0. \quad (6.100)$$

où  $\gamma_t(n)$  est défini pour  $0 \leq t \leq T$  et  $n \in \mathbb{N}$  par

$$\gamma_t(n) = \begin{cases} e^{tR\mu^h(\frac{1}{n})^*} P_\mu^h(\frac{1}{n})^*, & \text{si } n > N, \\ e^{-tn^2 E(\frac{1}{n})^* + n\mu t} & \text{si } n \leq N, \end{cases} \quad (6.101)$$

(et où  $N$  est assez grand, mais indépendant de la suite  $(a_n)$ ).

*Étape 2 : minoration du membre gauche de l'inégalité d'observabilité.* Ceci ce fait comme d'habitude (voir par exemple Prop. 3.31 ou Th. 4.18), grâce à l'inégalité de Parseval, et en minorant les termes d'erreurs  $\gamma_t(n)$ . On trouve avec  $R = e^{-\Re(\mu)T}$

$$\left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \right|_{L^2(D(0,R))}^2 \leq C |g(T, \cdot)|_{L^2(\mathbb{T})}^2. \quad (6.102)$$

*Étape 3a : majoration; changement de variables.* Le membre droit de l'inégalité d'observabilité appliquée à  $g$  est

$$|g|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 = \int_{[0,T] \times \omega} \left| \sum_{n>0} a_n e^{n(ix - \mu t)} \gamma_t(n) \varphi_0 \right|^2 dt dx.$$

On fait le changement de variables  $\zeta = e^{ix - \mu t}$ , pour lequel  $\Re(\mu) |\zeta|^2 dt dx = d\lambda(\zeta)$  :

$$|g|_{L^2([0,T] \times \omega)}^2 = \frac{1}{\Re(\mu)} \int_{\mathcal{D}} \left| \sum_{n>0} a_n \zeta^{n-1} \gamma_t(n) \varphi_0 \right|^2 d\lambda(\zeta), \quad (6.103)$$

où on a gardé la notation  $\gamma_t(n)$  par simplicité au lieu de l'écrire en fonction de  $\zeta$  (on a  $t = -\ln|\zeta|/\Re(\mu)$ ). Notons que l'image de l'ensemble d'intégration, c-à-d.

$$\mathcal{D} = \{e^{ix-\mu t}, 0 < t < T, x \in \omega\}$$

est bien le domaine  $\mathcal{D}$  défini à l'énoncé du lemme 6.29.

*Étape 3b : majoration ; symboles.* Pour majorer le membre droit du changement de variables précédent, on veut utiliser le Théorème 3.30. En effet, on a avec  $\delta_\tau(n) = \gamma_\tau(n+1)$ ,

$$\sum_{n>0} \gamma_\tau(n) a_n \varphi_0 \zeta^{n-1} = H_{\delta_\tau} \left( \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \zeta^n \varphi_0 \right). \quad (6.104)$$

Pour ceci, on commence par montrer que  $(\delta_\tau)_{0 \leq \tau \leq T}$  est une famille (de suites) bornée de  $\overline{\mathcal{S}}_{\rho, \infty}^{d \times d}$  pour un certain  $\rho > 0$ .

Définissons  $\tilde{\gamma}_\tau(z) = e^{tR_\mu^h(1/\bar{z})^*} P_\mu^h(1/\bar{z})^*$ . Pour  $n > N$ , on a alors  $\gamma_\tau(n) = \tilde{\gamma}_\tau(n)$  (voir la définition de  $\gamma_t$  Eq. (6.101)).

On vérifie de la même manière que pour les systèmes paraboliques-transport que quitte à augmenter  $N$ ,  $(\tilde{\gamma}_\tau)_{0 \leq \tau \leq T}$  est une famille bornée de  $\mathcal{S}_{N, \infty}^{d \times d}$ , et donc que  $(\gamma_\tau)_{0 \leq \tau \leq T}$  est une famille bornée de  $\overline{\mathcal{S}}_{N, \infty}^{d \times d}$ . Comme  $\delta_\tau(n) = \gamma_\tau(n+1)$  et que le décalage  $(\gamma_n)_{n \geq 0} \mapsto (\gamma_{n+1})_{n \geq 0}$  est continu de  $\overline{\mathcal{S}}_{N, \infty}^{d \times d}$  dans  $\overline{\mathcal{S}}_{N+1, \infty}^{d \times d}$ , la famille  $(\delta_\tau)_{0 \leq \tau \leq T}$  est une famille bornée de  $\overline{\mathcal{S}}_{N+1, \infty}^{d \times d}$ .

*Étape 3c : majoration du membre droit ; utilisation du Théorème 3.30.*

Rappelons que  $U$  est simplement connexe, et contient 0 et  $\mathcal{D}$ . Les conditions du Théorème 3.30 sont réunies. On applique alors l'estimée (3.18) avec  $X = \mathcal{D}$  et  $W = U$  :

$$\left| H_{\delta_\tau} \left( \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \varphi_0 \zeta^n \right) \right|_{L^\infty(\omega_\tau)} \leq C \left| \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \varphi_0 \zeta^n \right|_{L^\infty(U)} = C \left| \sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n \right|_{L^\infty(U)},$$

où  $C$  ne dépend ni du polynôme  $\sum_{n \geq 0} a_{n+1} \zeta^n$ , ni de  $0 \leq \tau \leq T$  car la famille  $(\delta_\tau)_{0 \leq \tau \leq T}$  est bornée.

Alors, par définition de  $H_{\delta_\tau}$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout polynôme  $\sum_{n \geq 0} a_n \zeta^n$  et pour tout  $0 \leq \tau \leq T$ ,

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \zeta^n \gamma_\tau(n) \right|_{L^\infty(\mathcal{D})} \leq C \left| \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \zeta^n \right|_{L^\infty(U)} \quad (6.105)$$

*Étape 3d : majoration du membre droit ; conclusion.* D'après le changement de variables (6.103), en appliquant l'estimée (6.105) avec  $\tau = t$ , on a

$$|g|_{L^2([0, t] \times \omega)} \leq \left| \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \zeta^n \right|_{L^\infty(\mathcal{D})}^2. \quad (6.106)$$

En rassemblant la minoration (6.102) et la majoration (6.106), l'inégalité d'observabilité (6.98) implique

$$\left| \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \zeta^n \right|_{L^2(D(0,1))}^2 \leq C' \left| \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \zeta^n \right|_{L^\infty(U)}^2. \quad \diamond$$

On construit un contre-exemple à l'inégalité (6.99) du Lemme 6.29 comme d'habitude, avec le Théorème de Runge. Ainsi, l'inégalité d'observabilité (6.98) n'est pas vraie, et les systèmes chaleur-demi chaleur ne sont pas contrôlables.  $\square$



## 7 | Perspectives

**N**OUS formulons ici quelques questions ouvertes, et éventuellement des pistes pour les résoudre.

### Équations de Grushin avec potentiel perturbé

Les démonstrations que nous avons présentées lors du Chapitre 4 sont spécifiques au cas du potentiel  $x^2$ . Nous ne sommes pas parvenus actuellement à démontrer de résultat pour *l'équation de Grushin généralisée*

$$(\partial_t - \partial_x^2 - q(x)^2 \partial_y^2)f(t, x, y) = \mathbb{1}_\omega u(t, x, y),$$

où  $q(x) \sim_0 x$ . La raison est que nos résultats dépendent de l'analyse spectrale de l'oscillateur harmonique complexe, cette analyse reposant sur des techniques d'équations différentielles, en particulier sur une représentation intégrales des solutions de  $-f'' + x^2 f - \lambda f = 0$ . Mais de telles représentations intégrales sont rares, et nous ne pouvons pas en espérer pour les solutions de  $-f'' + q(x)f = 0$  hors de quelques cas particuliers. Il faut donc adopter des techniques plus modernes.

Notons pour les opérateurs de Schrödinger de la forme  $-\partial_x^2 + V(x)$  qui sont autoadjoints, les outils d'analyse spectrale auto-adjointe permettent de donner des approximations, asymptotiques etc. des valeurs propres (voir par exemple [34]). Mais pour appliquer les théorèmes de la section 3.1.4, il nous faut étudier les opérateur de Schrödinger complexes. Ces opérateurs n'étant plus auto-adjoints, leur analyse est plus difficile. En particulier, il ne suffit pas de construire des quasi-modes pour localiser le spectre.

Cependant, des techniques ont tout de même été développées pour analyser des opérateurs non-autoadjoint, voir par exemple [47, Ch. 13–15] et les références de ces chapitres, ou encore [49] et les références de cet article. Les résultats de ces articles sont très proches de ce dont nous avons besoin, et la compréhension des méthodes qu'ils déploient pour les adapter à nos besoins devrait nous permettre de démontrer des résultats de non-contrôlabilité pour l'équation de Grushin généralisée.

### Domaine de contrôle généraux pour l'équation de Grushin

Le Théorème 4.29 donne le temps minimal de contrôlabilité pour certains domaines, mais pas pour tous. Par exemple, on ne connaît pas le temps minimal de non-



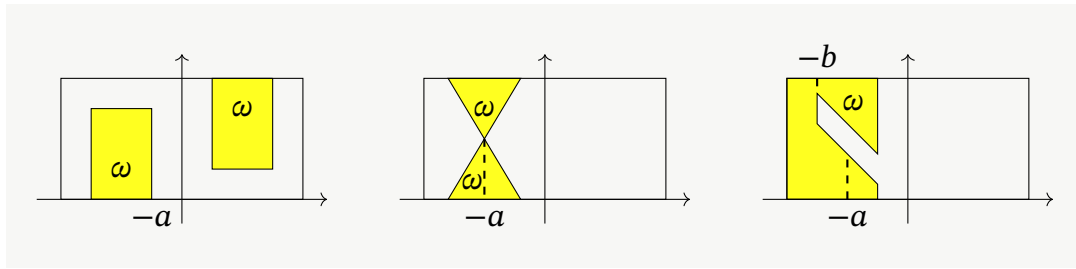


FIGURE 7.1 – Exemples de domaines de contrôle pour l'équation de Grushin pour lesquels on ne connaît pas le temps minimal de contrôle.

contrôlabilité pour les domaines de la Figure 7.1. Dans le premier domaine, il n'existe de chemin allant de la frontière inférieure à la frontière supérieure, on ne sait donc pas si l'équation de Grushin est contrôlable dessus, même en temps très grand ; on sait seulement que  $a^2/2 \leq T_{\min} \leq +\infty$ . Également, si on a un domaine « pincé », comme pour le second domaine, on est dans un cas limite du Théorème 4.29 : le segment ouvert  $\{(x, \pi/2) : -1 < x < 1\}$  est disjoint de  $\omega$  mais pas de  $\bar{\omega}$ . Encore une fois, on peut seulement dire que  $a^2/2 \leq T_{\min} \leq +\infty$ . Enfin, si le domaine contient une « grotte », comme le troisième domaine, on peut seulement dire, avec les notations de la figure, que  $a^2/2 \leq T_{\min} \leq b^2/2$ .

## Non-contrôlabilité spectrale pour l'équation de Grushin en domaine borné

Pour l'équation de Grushin posée sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ , on a démontré un résultat de non contrôlabilité spectrale en Théorème 4.17, si le domaine de contrôle est une bande horizontale. Mais si on considère l'équation de Grushin posée sur  $] -1, 1[ \times \mathbb{T}$ , nous n'avons pas pu démontrer un résultat équivalent.

Nous aurions pu le faire si la fonction  $\rho : z \mapsto \lambda_z - z$  était bornée sur un demi-plan à droite (où  $\lambda_z$  est la première valeur propre de  $-\partial_x^2 + (zx)^2$  avec conditions de Dirichlet sur  $] -1, 1[$ ). Si tel était le cas, les suites  $\gamma_t := (e^{-\rho(n)t})_{n \geq 0}$  seraient dans  $\bar{\mathcal{S}}_{r,0}$ , et on pourrait appliquer la même méthode que dans le cas  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ .

Mais le mieux que l'on ai réussi à démontrer est que la fonction  $\rho$  est bornée sur des domaines de la forme

$$D_\epsilon := \{\Re(z) > (1/2 + \epsilon) \ln^+ |\Im(z)| + C_\epsilon\},$$

ce qui ne nous permet pas de conclure. Le problème est que si  $z$  n'est pas dans ce domaine, la gaussienne  $e^{-zx^2/2}$  (qui est fonction propre sur  $\mathbb{R}$ ) n'est plus un quasinmode sur  $] -1, 1[$  : les valeurs aux bords sont trop grandes. On peut aussi remarquer que la condition  $z \in D_\epsilon$  équivaut à  $\rho(z) = o(z)$ , ce qui correspond à l'idée de départ de

la démonstration, qui est que l'oscillateur harmonique sur  $] -1, 1[$  est une perturbation de l'oscillateur harmonique sur  $\mathbb{R}$ .

Notons qu'on pourrait essayer de reprendre la démonstration du Théorème 3.29 avec l'information que  $e^{-t\rho(z)}$  est borné sur  $D_\varepsilon$  (au lieu de  $\{\Re(z) > R\}$ ). Il faut pour cela contrôler la croissance de  $K_{\gamma_t}(\zeta) = \sum_{n \geq 0} e^{-t\rho(n)} \zeta^n$  lorsque  $|\zeta| \rightarrow +\infty$ ,  $\zeta \in S_\sigma = \{\zeta \in \mathbb{C}, \sigma \leq \arg(\zeta) \leq 2\pi - \sigma\}$ . Mais le mieux que nous sommes parvenu à trouver est  $|K_{\gamma_t}(\zeta)| \leq C_\varepsilon |\zeta|^{(1/2+\varepsilon)\ln \ln |\zeta|}$ , ce qui ne nous permet pas de démontrer le Théorème 3.29.

Nous ne savons pas si le Théorème 4.17 a un équivalent dans le cas  $\Omega = ] -1, 1[ \times \mathbb{T}$ .

## Temps minimal pour le contrôle de l'équation de Kolmogorov

On a démontré en Théorème 5.4 que l'équation de Kolmogorov  $(\partial_t - \partial_v^2 - x^2 \partial_x) f = \mathbb{1}_\omega u$  n'est pas contrôlable en temps petit sous des hypothèses générales sur  $\omega$ . Une question serait de savoir si la minoration du temps minimal que nous trouvons est optimale. Si on disposait du temps minimal pour les bandes horizontales<sup>1</sup>, on pourrait faire le même argument de troncature qu'au Théorème 4.23 et obtenir le temps minimal pour l'équation de Kolmogorov sur des domaines de la forme  $\{\gamma_1(x) < v < \gamma_2(x)\}$ .

## Non-contrôlabilité en temps petit d'équations paraboliques dégénérées générales

Une question plus ambitieuse serait d'essayer d'aborder les équations paraboliques dégénérées de manière générale, et d'essayer de trouver des conditions nécessaire ou suffisantes entre l'équation, le domaine de contrôle et le temps pour que la contrôlabilité à zéro soit vraie.

Une première piste serait d'essayer de construire des fonctions propres qui se concentrent sur la dégénérescence, et ainsi obtenir un résultat de non-contrôlabilité en temps petit si le domaine de contrôle reste loin de la dégénérescence<sup>2</sup>. Malheureusement, des résultats plus ambitieux semblent actuellement hors de portée. Les techniques qui démontrent l'existence d'un temps minimal de contrôlabilité pour les équations paraboliques dégénérées reposent sur des méthodes ad-hoc, et ne donnent pas vraiment d'idée sur les mécanismes sous-jacents.

<sup>1</sup>Un travail par Dardé est en cours dans cette direction.

<sup>2</sup>Un travail avec Lissy et Prandi est en cours sur ce sujet.



# **Annexes**



# A | Semigroupes, contrôlabilité et observabilité

**L**A dualité entre contrôlabilité et observabilité est classique, et nous en avons déjà parlé en introduction. Cependant, nous passons ici en revue quelques résultats plus précisément que ce que nous avons déjà fait, ne serait-ce que pour fixer les notations, et nous en profitons pour donner l'inégalité d'observabilité associée à quelques problèmes de contrôlabilité qui ne semblent pas disponibles dans des livres (même si nous ne prétendons aucune originalité ici).

Dans ce chapitre,  $H$  est un espace de Hilbert. Cette partie est essentiellement basée sur [30, Annexe A & Sec. 2.3.1] (voir aussi [81], ainsi que [25, Ch. 7] et [73] pour les démonstrations non présentes dans les autres références).

## A.1 Solutions faibles

**Définition A.1.** Un semi-groupe fortement continu est une famille  $(S(t))_{t \geq 0}$  d'opérateurs bornés de  $H$  telle que  $S(0) = I$ , pour tout  $t, s \geq 0$ ,  $S(t + s) = S(t) \circ S(s)$  et pour tout  $f \in H$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x$ .

On appelle générateur infinitésimal de  $S$  l'opérateur  $A$  de domaine  $D(A) = \{f \in H, \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(S(h)f - f) \text{ existe}\}$  et défini par  $Af = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(S(h)f - f)$ .

**Proposition A.2.** *Le générateur infinitésimal  $A$  d'un semi-groupe fortement continu  $S$  vérifie les propriétés suivantes :*

- le domaine de  $A$  est dense et  $A$  est fermé (c.-à-d. que le graphe  $\{(f, Af), f \in D(A)\}$  est une partie fermée de  $H \times H$ );
- pour tout  $f_0 \in D(A)$ , la fonction  $f(t) = S(t)f_0$  est dérivable de  $[0, +\infty[$  dans  $H$ , et vérifie pour tout  $t \geq 0$ ,  $f(t) \in D(A)$  et  $f'(t) = Af(t)$ ;
- le générateur d'un semi-groupe caractérise le semi-groupe : si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux semi-groupes fortement continus ayant le même générateur infinitésimal, alors  $S_1 = S_2$ ;
- la famille  $(S(t)^*)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu, dont le générateur infinitésimal est  $A^*$ .

Rappelons aussi que  $A^*$  est l'opérateur de domaine  $D(A^*) = \{g, \exists C > 0, \forall f \in D(A), |\langle g, Af \rangle| \leq C|f|_H\}$  et défini par  $\forall f \in D(A)$ ,  $\langle A^*g, f \rangle = \langle g, Af \rangle$ .

Si  $S$  est un semi-groupe fortement continu de générateur infinitésimal  $A$ , on notera aussi  $S(t) = e^{tA}$ . On dispose en particulier du théorème de Lumer-Phillips pour démontrer qu'un opérateur  $A$  est le générateur d'un semi-groupe.

**Théorème A.3** ([73], Cor. 4.4). *On suppose que pour tout  $x \in D(A)$ ,  $\Re\langle Ax, x \rangle \leq 0$  et que pour tout  $x \in D(A^*)$ ,  $\Re\langle A^*x, x \rangle \leq 0$  (on dit que  $A$  et  $A^*$  sont dissipatifs). Alors  $A$  génère un semi-groupe. De plus, on a alors pour tout  $t \geq 0$ ,  $|e^{tA}| \leq 1$  (on dit que  $e^{tA}$  est un semi-groupe de contractions).*

On dispose également de la variante suivante du théorème de Lumer-Phillips.

**Théorème A.4** ([25], Th. 7.4; [73], Th. 4.3). *On suppose que pour tout  $x \in D(A)$ ,  $\Re\langle Ax, x \rangle \leq 0$  et que  $(I + A)(D(A)) = H$  (on dit que  $A$  est maximal dissipatif). Alors  $A$  génère un semi-groupe. De plus, on a alors pour tout  $t \geq 0$ ,  $|e^{tA}| \leq 1$  (on dit que  $e^{tA}$  est un semi-groupe de contractions).*

Ce théorème implique que si  $f_0 \in D(A)$ , il existe une unique solution du problème de Cauchy  $f' = Af$ ,  $f(0) = f_0$ . On définit maintenant ce qu'est une solution faible de l'équation  $f' = Af + u$ .

**Définition A.5.** On suppose que  $A$  génère un semi-groupe fortement continu. Soit  $u \in L^2([0, T]; H)$ . Alors, une solution faible de l'équation  $f' = Af + u$  est une fonction  $f \in C^0([0, T]; H)$  telle que pour tout  $0 \leq t \leq T$  et pour tout  $g_0 \in H$ , si  $g(s) = e^{tA^*} g_0$ ,

$$\langle f(t), g_0 \rangle_H - \langle f_0, g(t) \rangle_H = \int_0^t \langle u(s), g(t-s) \rangle_H ds. \quad (\text{A.1})$$

Si  $A$  génère un semi-groupe, alors pour toute condition initiale et pour tout second membre, il existe une unique solution faible de  $f' = Af + u$ , et cette solution dépend continument de la condition initiale et du second-membre.

**Théorème A.6.** *Soit  $u \in L^2([0, T]; H)$  et  $f_0 \in H$ . Il existe une unique solution faible du problème de Cauchy  $f' = Af + u$ ,  $f(0) = f_0$ . Cette solution est donnée par la «formule de Duhamel»*

$$f(t) = e^{tA} f_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} u(s) ds. \quad (\text{A.2})$$

De plus, il existe  $C > 0$  indépendant de  $f_0$  et  $u$  tel que la solution  $f$  vérifie pour tout  $0 \leq t \leq T$ ,

$$|f(t)| \leq C(|f_0|_H + |u|_{L^2([0, T]; H)}). \quad (\text{A.3})$$

Remarquons qu'il n'y a aucune raison qu'une solution faible  $f$  de  $f' = Af + u$  vérifie  $f(t) \in D(A)$  pour  $t > 0$  (ou même pour presque tout  $t > 0$ ). En revanche, si  $A$  est autoadjoint, c'est le cas.

**Théorème A.7** ([25], Prop. 7.6 et Th. 7.7). *Si  $A$  est maximal dissipatif (voir Th. A.4), et symétrique (c.-à-d.  $\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$  pour tout  $f, g \in D(A)$ ), alors  $A$  est autoadjoint (c.-à-d. que  $A$  est symétrique et  $D(A^*) = D(A)$ ) et pour tout  $f_0 \in H$ , la fonction  $f(t) := e^{tA} f_0$  appartient à*

$$C([0, +\infty[; H) \cap C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A)),$$

où  $D(A)$  est muni de la norme du graphe  $|f|_{D(A)}^2 := |f|_H^2 + |Af|_H^2$ .

## A.2 Inégalités d'observabilité

### A.2.1 Inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité partielle à zéro

Nous démontrons la proposition A.8 suivante, généralisant la dualité entre contrôlabilité à zéro et observabilité au temps final du théorème 1.6. La démonstration en est d'ailleurs une adaptation sans difficultés (voir p. ex. [39, Prop. 1]).

**Proposition A.8.** *Soit  $A$  le générateur d'un semi-groupe fortement continu sur  $H$ . Soient  $U, V$  deux espaces de Hilbert,  $B$  un opérateur linéaire borné de  $U$  dans  $H$  et  $C$  un opérateur borné de  $H$  dans  $V$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tout  $f_0 \in H$ , il existe  $u \in L^2([0, T]; U)$  tel que la solution  $f$  de  $f'(t) = Af(t) + Bu(t)$ ,  $f(0) = f_0$  vérifie  $Cf(T) = 0$ ;*
2. *il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in V$ , la solution  $g$  de  $g'(t) = A^*g(t)$ ,  $g(0) = C^*g_0$  vérifie*

$$|g(T)|_H^2 \leq M \int_0^T |B^*g(t)|_U^2 dt. \quad (\text{A.4})$$

*Le cas échéant, le contrôle  $u$  peut-être choisi linéairement en  $f_0$  et tel que  $|u|_U \leq \sqrt{M}|f_0|_H$ .*

On utilise le lemme de dualité suivant [30, Lem. 2.48] :

**Lemme A.9.** *Soient  $H_1, H_2, H_3$  des espaces de Hilbert, soit  $C_2 : H_2 \rightarrow H_1$  un opérateur linéaire continu, et soit  $C_3 : H_3 \rightarrow H_1$  un opérateur linéaire continu. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $h_1 \in H_1$ ,  $|C_2^*h_1|_{H_2} \leq M|C_3^*h_1|_{H_3}$ ;*
2. *on a l'inclusion  $C_2(H_2) \subset C_3(H_3)$ .*



Si l'une de ces conditions est vérifiées, il existe un opérateur linéaire continu  $C_1 : H_2 \rightarrow H_3$  tel que  $C_2 = C_3 C_1$  et  $|C_1|_{\mathcal{L}(H_2, H_3)} \leq M$ .

*Démonstration.* On note  $\mathcal{F}_T : u \in L^2([0, T]; U) \rightarrow \tilde{f}(T) \in H$ , où  $\tilde{f}$  est la solution de  $\tilde{f}' = A\tilde{f} + Bu$ ,  $\tilde{f}(0) = 0$ . On choisit  $H_2 = H$ ,  $H_1 = V$  et  $H_3 = L^2([0, T]; U)$ . On pose  $C_2 = Ce^{TA}$  et  $C_3 = C\mathcal{F}_T$ .

Alors, on affirme que la première propriété de la Proposition A.8 est équivalente à l'inclusion  $C_2(H_2) \subset C_3(H_3)$ . En effet, si la première propriété est vraie, et si  $h \in C_2(H_2)$ , autrement dit si  $h = Ce^{TA}f_0$ , il existe  $u$  tel que la solution  $f$  de  $f' = Af + Bu$ ,  $f(0) = f_0$  vérifie  $Cf(T) = 0$ . Or  $f(T) = e^{TA}f_0 + \mathcal{F}_T u$ , donc  $Ce^{TA}f_0 = -C\mathcal{F}_T u$ , autrement dit  $h = C_2 f_0 = -C_3 u$ . Donc  $C_2(H_2) \subset C_3(H_3)$ .

Inversement si  $C_2(H_2) \subset C_3(H_3)$  et  $f_0 \in H$ , il existe  $u \in L^2([0, T]; U)$  tel que  $C_2 f_0 = C_3 u$ . Autrement dit, la solution  $\tilde{f}$  de  $\tilde{f}' = A\tilde{f} + Bu$ ,  $\tilde{f}(0) = 0$  vérifie  $C\tilde{f}(T) = Ce^{TA}f_0$ . Alors, la solution  $f$  de  $f' = Af - Bu$  vérifie  $f(T) = e^{TA}f_0 - \mathcal{F}_T u$  et donc  $Cf(T) = C_2 f_0 - C_3 u = 0$ .

Donc, d'après le Lemme A.9, la première propriété de la Proposition A.8 est équivalente à l'existence de  $M$  tel que pour tout  $h_1 \in H_1 = V$ ,  $|C_2^* h_1|_{H_1} \leq M |C_3^* h_1|_{H^3}$ . Or, on a  $C_2^* = e^{TA^*} C^*$  et  $C_3^* = \mathcal{F}_T^* C^*$ . On peut de plus vérifier grâce à la définition des solutions faibles que  $\mathcal{F}_T^* g_0(t) = B^* e^{(T-t)A^*} f_0$  (voir [30, Lem. 2.47]). Donc l'inégalité  $|C_2^* h_1|_{H_1} \leq M |C_3^* h_1|_{H^3}$  est équivalente à l'inégalité d'observabilité (A.4).

Le fait que le contrôle puisse être choisi de manière linéaire continue en  $f_0$  provient de la dernière affirmation du Lemme A.9.  $\square$

## A.2.2 Inégalité d'observabilité pour la contrôlabilité à zéro d'une condition initiale

On donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une condition initiale soit contrôlable à zéro (voir aussi [24, Prop. 1.18])

**Proposition A.10.** *Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur  $H$  et  $f_0 \in H$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe  $u \in L^2([0, T]; U)$  tel que la solution  $f$  de  $f'(t) = Af(t) + Bu(t)$ ,  $f(0) = f_0$  vérifie  $f(T) = 0$ ;*
2. *il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $g_0 \in H$ , la solution  $g$  de  $g'(t) = A^*g(t)$ ,  $g(0) = g_0$  vérifie*

$$|\langle f_0, g(T) \rangle_H|^2 \leq M \int_0^T |B^* g(t)|_U^2 dt. \quad (\text{A.5})$$

*Démonstration.* Le cas  $f_0 = 0$  est trivial. On suppose donc que  $f_0 \neq 0$ . On considère les applications

$$\begin{aligned} C_2 : f_1 \in \mathbb{C}f_0 &\mapsto e^{TA}f_1 \in H \\ C_3 : u \in L^2([0, T]; U) &\mapsto f(T) \in H, \end{aligned}$$

où, dans la définition de  $C_3$ ,  $f$  est la solution de  $\partial_t f = Af + Bu$  avec  $f(0) = 0$ . Autrement dit, en notant  $\iota_{f_0}$  l'inclusion  $\mathbb{C}f_0 \hookrightarrow H$ , et avec les notations de la démonstration de la Proposition A.8, on a  $C_2 = e^{tA} \circ \iota_{f_0}$  et  $C_3 = \mathcal{F}_T$ .

On affirme que la propriété 1. de la Prop. A.10 équivaut à  $\text{Im}(C_2) \subset \text{Im}(C_3)$ . En effet, si cette inclusion est vraie, il existe  $u \in L^2([0, T]; U)$  tel que  $-e^{TA}f_0 = \mathcal{F}_T u$ . Alors  $u$  est un contrôle qui amène  $f_0$  à zéro. Inversement, s'il existe  $u$  qui amène  $f_0$  à zéro, d'après la formule de Duhammel (A.6), on a  $-e^{TA}f_0 = \mathcal{F}_T u$ . Or, si  $f_1 \in \text{Im}(C_2)$ , il s'écrit  $f_1 = \lambda e^{TA}f_0$ , et on a donc  $f_1 = -\lambda \mathcal{F}_T u$ .

Donc, d'après le Lemme de dualité A.9, la propriété 1. de la Prop. A.10 est équivalente à l'existence de  $M \geq 0$  tel que pour tout  $g_0 \in H$ ,

$$|C_2^* g_0|_H^2 \leq |C_3^* g_0|_{L^2([0, T]; U)}^2.$$

Or  $C_2^* = \iota_{f_0}^* \circ (e^{TA})^*$  et  $C_3^* = \mathcal{F}_T^*$ . On a vu que  $\mathcal{F}_T^* f_0(t) = B^* e^{(T-t)A^*} f_0$  [30, Lem. 2.47]. De plus,  $(e^{TA})^* = e^{TA^*}$ . Enfin, on affirme que  $\iota_{f_0}^*$  est la projection orthogonale sur  $\mathbb{C}f_0$ . En effet, si  $g = g_{f_0} + g_{f_0^\perp}$ , on a  $\langle f_0, g \rangle_H = \langle f_0, g_{f_0} \rangle_H$ . Donc  $\iota_{f_0}^* g_0$  est bien la projection de  $g_0$  sur  $f_0$ , ou encore  $\iota_{f_0}^*(g_0) = |f_0|_H^{-2} \langle g_0, f_0 \rangle_H f_0$ .

Donc l'équation donnée par le lemme de dualité s'écrit

$$|\langle e^{TA^*} g_0, f_0 \rangle|^2 = |f_0|_H^2 |C_2^* g_0|_H^2 \leq |f_0|_H^2 M |C_3^* g_0|_{L^2([0, T]; U)}^2 = M \int_0^T |B^* e^{(T-t)A^*} g_0|_U^2 dt,$$

qui est bien l'inégalité (A.5). □



# Bibliographie

- [1] F. ALABAU-BOUSSOUIRA, J.-M. CORON et G. OLIVE. “Internal Controllability of First Order Quasi-Linear Hyperbolic Systems with a Reduced Number of Controls”. In : *SIAM J. Control Optim.* 55.1 (2017), p. 300-323.
- [2] P. ALBANO et D. TATARU. “Carleman Estimates and Boundary Observability for a Coupled Parabolic-Hyperbolic System”. In : *Electron. J. Differential Equations* (2000), No. 22, 15.
- [3] D. ALLONSIUS. “Etude spectrale d’opérateurs de Sturm-Liouville et applications à la contrôlabilité de problèmes paraboliques discrets et continus”. Thèse de doct. Aix Marseille Université, sept. 2018.
- [4] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, C. DUPAIX et I. KOSTIN. “Null-Controllability of Some Systems of Parabolic Type by One Control Force”. In : *ESAIM : COCV* 11.3 (juil. 2005), p. 426-448.
- [5] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. de TERESA. “Minimal Time for the Null Controllability of Parabolic Systems : The Effect of the Condensation Index of Complex Sequences”. In : *Journal of Functional Analysis* 267.7 (oct. 2014), p. 2077-2151.
- [6] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. de TERESA. “New Phenomena for the Null Controllability of Parabolic Systems : Minimal Time and Geometrical Dependence”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 444.2 (déc. 2016), p. 1071-1113.
- [7] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZÁLEZ-BURGOS et M. MORANCEY. *Quantitative Fattorini-Hautus Test and Minimal Null Control Time for Parabolic Problems*. Juil. 2017. [hal-01557933](#).
- [8] F. AMMAR-KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. DE TERESA. *Recent Results on the Controllability of Linear Coupled Parabolic Problems : A Survey*. Sept. 2011. [hal-01305493](#).
- [9] J. APRAIZ et L. ESCAURIAZA. “Null-Control and Measurable Sets”. In : *ESAIM : COCV* 19.1 (jan. 2013), p. 239-254.
- [10] J. APRAIZ, L. ESCAURIAZA, G. WANG et C. ZHANG. “Observability Inequalities and Measurable Sets”. In : *J. Eur. Math. Soc.* 16.11 (nov. 2014), p. 2433-2475.
- [11] N. ARAKELYAN. “On Efficient Analytic Continuation of Power Series”. In : *Math. USSR Sb.* 52.1 (1985), p. 21-39.

- [12] C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH. “Sharp Sufficient Conditions for the Observation, Control, and Stabilization of Waves from the Boundary”. In : *SIAM J. Control Optim.* 30.5 (sept. 1992), p. 1024-1065.
- [13] K. BEAUCHARD. “Null Controllability of Kolmogorov-Type Equations”. In : *Math. Control Signals Syst.* 26.1 (mar. 2014), p. 145-176.
- [14] K. BEAUCHARD et P. CANNARSA. “Heat Equation on the Heisenberg Group : Observability and Applications”. In : *Journal of Differential Equations* 262.8 (avr. 2017), p. 4475-4521.
- [15] K. BEAUCHARD, P. CANNARSA et R. GUGLIELMI. “Null Controllability of Grushin-Type Operators in Dimension Two”. In : *J. Eur. Math. Soc.* 16.1 (2014), p. 67-101.
- [16] K. BEAUCHARD, J. DARDÉ et S. ERVEDOZA. *Minimal Time Issues for the Observability of Grushin-Type Equations*. Preprint. Preprint. Jan. 2018. [hal-01677037](#).
- [17] K. BEAUCHARD, B. HELFFER, R. HENRY et L. ROBBIANO. “Degenerate Parabolic Operators of Kolmogorov Type with a Geometric Control Condition”. In : *ESAIM : Control Optim. Calc. Var.* 21.2 (avr. 2015), p. 487-512.
- [18] K. BEAUCHARD, P. JAMING et K. PRAVDA-STAROV. *Spectral Inequality for Finite Combinations of Hermite Functions and Null-Controllability of Hypoelliptic Quadratic Equations*. Avr. 2018. [hal-01766300](#).
- [19] K. BEAUCHARD, A. KOENIG et K. LE BALC’H. *Null-Controllability of Linear Parabolic-Transport Systems*. Juil. 2019. [hal-02191017](#).
- [20] K. BEAUCHARD, L. MILLER et M. MORANCEY. “2d Grushin-Type Equations : Minimal Time and Null Controllable Data”. In : *Journal of Differential Equations* 259.11 (déc. 2015), p. 5813-5845.
- [21] K. BEAUCHARD et K. PRAVDA-STAROV. “Null-Controllability of Hypoelliptic Quadratic Differential Equations”. In : *J. L’École Polytech. — Mathématiques* 5 (2018), p. 1-43.
- [22] K. BEAUCHARD et E. ZUAZUA. “Large Time Asymptotics for Partially Dissipative Hyperbolic Systems”. In : *Arch Rational Mech Anal* 199.1 (jan. 2011), p. 177-227.
- [23] A. BENABDALLAH, F. BOYER et M. MORANCEY. *A Block Moment Method to Handle Spectral Condensation Phenomenon in Parabolic Control Problems*. Preprint. Déc. 2018. [hal-01949391](#).
- [24] F. BOYER. “On the Penalised HUM Approach and Its Applications to the Numerical Approximation of Null-Controls for Parabolic Problems”. In : *CANUM 2012, 41e Congrès National d’Analyse Numérique*. T. 41. ESAIM Proc. EDP Sci., Les Ulis, 2013, p. 15-58.

- 
- [25] H. BREZIS. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, New York, 2011. xiv+599.
- [26] J.-M. BUCHOT et J.-P. RAYMOND. “Feedback Stabilization of a Boundary Layer Equation. II. Nonhomogeneous State Equations and Numerical Simulations”. In : *Appl. Math. Res. Express. AMRX* 2 (2009), p. 87-122.
- [27] F. W. CHAVES-SILVA, L. ROSIER et E. ZUAZUA. “Null Controllability of a System of Viscoelasticity with a Moving Control”. In : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 101.2 (fév. 2014), p. 198-222.
- [28] J. B. CONWAY. *Functions of One Complex Variable*. Second. Graduate Texts in Mathematics 11. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. xiii+317.
- [29] J. B. CONWAY. *Functions of One Complex Variable. II*. Graduate Texts in Mathematics 159. Springer-Verlag, New York, 1995. xvi+394.
- [30] J.-M. CORON. *Control and Nonlinearity*. Mathematical Surveys and Monographs 143. Boston, MA, USA : American Mathematical Society, 2007.
- [31] O. COSTIN et S. GAROUFALIDIS. “Resurgence of the Fractional Polylogarithms”. In : *Math. Res. Lett.* 16.5 (2009), p. 817-826.
- [32] J. DARDÉ et S. ERVEDOZA. “On the Reachable Set for the One-Dimensional Heat Equation”. In : *SIAM J. Control Optim.* 56.3 (2018), p. 1692-1715.
- [33] E. B. DAVIES. *Spectral Theory and Differential Operators*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 42. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. x+182.
- [34] M. DIMASSI et J. SJÖSTRAND. *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*. London Mathematical Society Lecture Note Series 268. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. xii+227.
- [35] S. DOLECKI. “Observability for the One-Dimensional Heat Equation”. In : *Studia Math.* 48 (1973), p. 291-305.
- [36] A. DOUBOVA, E. FERNÁNDEZ-CARA, M. GONZÁLEZ-BURGOS et E. ZUAZUA. “On the Controllability of Parabolic Systems with a Nonlinear Term Involving the State and the Gradient”. In : *SIAM J. Control Optim.* 41.3 (2002), p. 798-819.
- [37] M. DUPREZ. “Controllability of a  $2 \times 2$  Parabolic System by One Force with Space-Dependent Coupling Term of Order One”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 23.4 (2017), p. 1473-1498.
- [38] M. DUPREZ et A. KOENIG. *Control of the Grushin Equation : Non-Rectangular Control Region and Minimal Time*. Preprint. Juil. 2018. arXiv : [1807.01241](https://arxiv.org/abs/1807.01241) [math].

- [39] M. DUPREZ et P. LISSY. “Indirect Controllability of Some Linear Parabolic Systems of  $m$  Equations with  $M-1$  Controls Involving Coupling Terms of Zero or First Order”. In : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 106.5 (nov. 2016), p. 905-934.
- [40] M. DUPREZ et G. OLIVE. “Compact Perturbations of Controlled Systems”. In : *Math. Control Relat. Fields* 8.2 (2018), p. 397-410.
- [41] M. EGIDI et I. VESELIĆ. “Sharp Geometric Condition for Null-Controllability of the Heat Equation on  $\mathbb{R}^d$  and Consistent Estimates on the Control Cost”. In : *Arch. Math.* 111.1 (juil. 2018), p. 85-99.
- [42] H. O. FATTORINI et D. L. RUSSELL. “Exact Controllability Theorems for Linear Parabolic Equations in One Space Dimension”. In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 43.4 (jan. 1971), p. 272-292.
- [43] E. FERNÁNDEZ-CARA et E. ZUAZUA. “The Cost of Approximate Controllability for Heat Equations : The Linear Case”. In : *Adv. Differential Equations* 5.4-6 (2000), p. 465-514.
- [44] A. V. FURSIKOV et O. Y. IMANUVILOV. *Controllability of Evolution Equations*. Lecture Note Series 34. Seoul National University, 1996. 180 p.
- [45] S. GUERRERO et O. Y. IMANUVILOV. “Remarks on Non Controllability of the Heat Equation with Memory”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 19.1 (2013), p. 288-300.
- [46] A. HARTMANN, K. KELLAY et M. TUCSNAK. *From the Reachable Space of the Heat Equation to Hilbert Spaces of Holomorphic Functions*. Juil. 2017. [hal-01569695](#).
- [47] B. HELFFER. *Spectral Theory and Its Applications*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 139. Cambridge University Press, Cambridge, 2013. vi+255.
- [48] B. HELFFER et F. NIER. *Hypoelliptic Estimates and Spectral Theory for Fokker-Planck Operators and Witten Laplacians*. Lecture Notes in Mathematics 1862. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [49] M. HITRIK et K. PRAVDA-STAROV. “Eigenvalues and Subelliptic Estimates for Non-Selfadjoint Semiclassical Operators with Double Characteristics”. In : *Ann. L’institut Fourier* 63.3 (2013), p. 985-1032.
- [50] L. HÖRMANDER. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*. Classics in Mathematics. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [51] T. KATO. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Classics in Mathematics 132. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [52] A. KOENIG. *Inégalité Spectrale Pour l’opérateur de Grushin*. Mémoire de M2. Non publié. Université de Nice-Sofia Antipolis, juin 2015.

- 
- [53] A. KOENIG. *Non-Null-Controllability of the Fractional Heat Equation and of the Kolmogorov Equation*. Preprint. Avr. 2018. arXiv : [1804.10581](https://arxiv.org/abs/1804.10581) [math].
- [54] A. KOENIG. “Non-Null-Controllability of the Grushin Operator in 2D”. In : *Comptes Rendus Mathématique* 355.12 (déc. 2017), p. 1215-1235.
- [55] O. KOVRIJKINE. “Some Results Related to the Logvinenko-Sereda Theorem”. In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 129.10 (2001), p. 3037-3047.
- [56] J. LE ROUSSEAU et G. LEBEAU. “On Carleman Estimates for Elliptic and Parabolic Operators. Applications to Unique Continuation and Control of Parabolic Equations”. In : *ESAIM : COCV* 18.3 (mai 2012), p. 712-747.
- [57] G. LEBEAU et L. ROBBIANO. “Contrôle Exact de l'équation de La Chaleur”. In : *Commun. Partial Differ. Equ.* 20.1-2 (jan. 1995), p. 335-356.
- [58] G. LEBEAU. “Introduction Aux Inégalités de Carleman”. In : *Control and Stabilization of Partial Differential Equations*. Séminaires & Congrès 29. Paris : Société Mathématique de France, 2015, p. 51-92.
- [59] G. LEBEAU et E. ZUAZUA. “Null-Controllability of a System of Linear Thermoelasticity”. In : *Arch Rational Mech Anal* 141.4 (avr. 1998), p. 297-329.
- [60] E. LINDELÖF. *Le Calcul Des Résidus et Ses Applications à La Théorie Des Fonctions*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1989. viii+145.
- [61] A. MARTINEZ. *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Universitext. Springer New York, 2002. 191 p.
- [62] R. METZLER et J. KLAFTER. “The Restaurant at the End of the Random Walk : Recent Developments in the Description of Anomalous Transport by Fractional Dynamics”. In : *J. Phys. A : Math. Gen.* 37.31 (juil. 2004), R161-R208.
- [63] S. MICU et E. ZUAZUA. “On the Controllability of a Fractional Order Parabolic Equation”. In : *SIAM J. Control Optim.* 44.6 (jan. 2006), p. 1950-1972.
- [64] L. MILLER. “A Direct Lebeau-Robbiano Strategy for the Observability of Heat-like Semigroups”. In : *Discrete Contin. Dyn. Syst. - Ser. B* 14.4 (août 2010), p. 1465-1485.
- [65] L. MILLER. “On the Controllability of Anomalous Diffusions Generated by the Fractional Laplacian”. In : *Math. Control Signals Syst.* 18.3 (août 2006), p. 260-271.
- [66] L. MILLER. “Unique Continuation Estimates for the Laplacian and the Heat Equation on Non-Compact Manifolds”. In : *Math. Res. Lett.* 12.1 (jan. 2005), p. 37-47.



- [67] M. MÜLLER et D. SCHLEICHER. “How to Add a Non-Integer Number of Terms, and How to Produce Unusual Infinite Summations”. In : *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Proceedings of the Seventh International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications 178.1 (juin 2005), p. 347-360.
- [68] F. NIER et B. HELFFER. *Quantitative Analysis of Metastability in Reversible Diffusion Processes via a Witten Complex Approach : The Case with Boundary*. Sept. 2004. [hal-00002744](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00002744).
- [69] J. OESTERLÉ. “Polylogarithmes”. In : *Astérisque* 216 (1993), Exp. No. 762, 3, 49-67.
- [70] O. A. OLEINIK et V. N. SAMOKHIN. *Mathematical Models in Boundary Layer Theory*. T. 15. Applied Mathematics and Mathematical Computation. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999. x+516.
- [71] F. W. J. OLVER, A. B. OLDE DAALHUIS, D. W. LOZIER, B. I. SCHNEIDER, R. F. BOISVERT, C. W. CLARK, B. R. MILLER et B. V. SAUNDERS, éd. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. Release 1.0.22. Mar. 2019. URL : <http://dlmf.nist.gov/> (visité le 05/06/2019).
- [72] M.-A. ORSONI. *Reachable States and Holomorphic Function Spaces for the 1-D Heat Equation*. Preprint. Sept. 2019. arXiv : [1909.01644](https://arxiv.org/abs/1909.01644) [math].
- [73] A. PAZY. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. T. 44. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1983. viii+279.
- [74] J. PEETRE. “Another Approach to Elliptic Boundary Problems”. In : *Commun. Pure Appl. Math.* 14.4 (1961), p. 711-731.
- [75] J. RAUCH et M. TAYLOR. “Exponential Decay of Solutions to Hyperbolic Equations in Bounded Domains”. In : *Indiana Univ. Math. J.* 24 (1974), p. 79-86.
- [76] L. P. ROTHSCHILD et E. M. STEIN. “Hypoelliptic Differential Operators and Nilpotent Groups”. In : *Acta Math.* 137 (1976), p. 247-320.
- [77] W. RUDIN. *Real and Complex Analysis*. 3<sup>e</sup> éd. McGraw Hill Education, 1986.
- [78] J. SJÖSTRAND. “Singularités Analytiques Microlocales”. In : *Astérisque*, 95. T. 95. Astérisque. Soc. Math. France, Paris, 1982, p. 1-166.
- [79] I. M. SOKOLOV, J. KLAFTER et A. BLUMEN. “Fractional Kinetics”. In : *Physics Today* 55.11 (nov. 2002), p. 48-54.
- [80] G. TENENBAUM et M. TUCSNAK. “New Blow-up Rates for Fast Controls of Schrödinger and Heat Equations”. In : *Journal of Differential Equations* 243.1 (déc. 2007), p. 70-100.

- 
- [81] M. TUCSNAK et G. WEISS. *Observation and Control for Operator Semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Basel : Birkhäuser Basel, 2009.
- [82] G. WANG, M. WANG, C. ZHANG et Y. ZHANG. “Observable Set, Observability, Interpolation Inequality and Spectral Inequality for the Heat Equation in  $\mathbb{R}^n$ ”. In : *J. Math. Pures Appl.* (9) 126 (2019), p. 144-194.