



HAL
open science

Modélisation non-locale et stochastique de matériaux à fort gradient de propriétés par développement asymptotique

Sami Ben Elhaj Salah

► **To cite this version:**

Sami Ben Elhaj Salah. Modélisation non-locale et stochastique de matériaux à fort gradient de propriétés par développement asymptotique. Autre. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, 2019. Français. NNT : 2019ESMA0018 . tel-02860056

HAL Id: tel-02860056

<https://theses.hal.science/tel-02860056>

Submitted on 8 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DE MECANIQUE ET D'AEROTECHNIQUE

(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

Ecole doctorale :
Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique, Energétique
Secteur de recherche : Mécanique des solides, des matériaux, des structures et
des surfaces

Présentée par :

Sami BEN ELHAJ SALAH

Modélisation non-locale et stochastique de matériaux à fort gradient de propriétés par développement asymptotique

Co-encadrant de thèse : **A. NAIT-ALI**

Co-encadrant de thèse : **M. GUEGUEN**

Directrice de thèse : **C. NADOT-MARTIN**

Soutenue le 04 Décembre 2019

JURY

S. FOREST	Directeur de Recherche CNRS, MINES ParisTech, Rapporteur
JJ. MARIGO	Professeur, Ecole Polytechnique, Paris, Rapporteur
M. POTIER-FERRY	Professeur Émérite, Université de Lorraine, Président
O. IOSIFESCU	Maître de Conférence HDR, Université de Montpellier 2, Examineur
P. KARAMIAN	Maître de Conférence HDR, Université de Caen, Examineur
A. NAIT-ALI	Maître de Conférence, ISAE-ENSMA, Poitiers, Examineur
M. GUEGUEN	Ingénieur Recherche, Institut Pprime, Poitiers, Examineur
C. NADOT-MARTIN	Professeur, ISAE-ENSMA, Poitiers, Examineur

Remerciements

Je profite de l'occasion qui m'est accordée par le biais de ce manuscrit pour exprimer ma sincère gratitude et ma très profonde reconnaissance envers tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ce que cette thèse voit le jour. Je tiens à remercier sincèrement les membres de mon jury de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes résultats, de la richesse et de la qualité de la discussion que nous avons pu avoir. Merci à mes rapporteurs Samuel Forest et Jean-Jacques Marigo pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture et à l'évaluation de mon manuscrit de thèse. Je remercie Oana Iosifescu et Philippe Karamian d'avoir accepté d'examiner ma thèse. Je remercie également Michel Potier-Perry d'avoir accepté de présider le jury.

Mes remerciements vont ensuite à mes encadrants de thèse : Azdine Nait-Ali, Mikael Gueguen et Carole Nadot-Martin. Je vous remercie tous les trois pour votre engagement, votre disponibilité, votre bienveillance mais aussi pour vos compétences et votre expérience. L'excellente qualité de votre encadrement m'a permis de grandir et de m'épanouir dans cette aventure. Je vous remercie également pour toutes les discussions non scientifiques que nous avons pu avoir, et qui ont fait que cette expérience a été plus qu'une simple collaboration.

A un niveau plus administratif, un grand merci aux ladies du secrétariat Brigitte, Francine, Karine et Jocelyne pour leur sourire et leur gentillesse perpétuels !

J'ai connu d'autres laboratoires et s'il est une certitude, c'est que l'équipe ENDO offre un univers chaleureux à l'ambiance humaine plutôt rare. J'ai connu plusieurs générations de collègues doctorants (et post-doctorants) et sans tous ces moments de détente, de rire, de joie, de camaraderie partagés ensemble, les choses auraient été très différentes. Je ne peux assurément pas me lancer dans un listing de toutes les personnes avec qui j'ai apprécié de vivre tous ces moments sans en oublier, ou risquer de ne pas leur consacrer un nombre de mots à la hauteur de ce qu'ils m'ont apporté.

Je me lance tout de même dans une petite liste non exhaustive... Je tiens pour commencer à remercier l'équipe de l'ATEM 2016 : merci à Cyril, Paul, Lucille, Caroline, Nicolas : ça a été un réel plaisir de partager cette aventure avec vous. Je remercie ensuite l'ensemble des doctorants que j'ai côtoyé pendant cette aventure, vous participez tous à cette ambiance unique qui existe au laboratoire, qui le rend si difficile à quitter. En vrac, merci à Alice, Nathan, Federico, Gulien G., Antonion, Romain, Sarah, Coline, Maxime, Marina, Luciana, Giuseppe, Blanche, Mahak, Floriant, Mame, Aurélien, Pierre, Emeline, Anani, Adèle, Vincezo, Vincent et tous ceux que j'oublie... Evidemment, je termine avec les membres du B014. Merci à Clément, Marco et Happy. Ce bureau est bien plus qu'un simple lieu de travail à mes yeux, c'est un lieu où j'ai appris à connaître des personnes que j'espère retrouver dans un futur très proche. Merci à vous pour ces parties de Fléchettes, ces discussions scientifiques et non scientifiques, ces séances de blagues...

Ma reconnaissance va à ceux qui ont plus particulièrement assuré le soutien affectif pendant ma thèse : mon père Ridha, ma mère Noura, mon grand frère Selim et mes deux soeurs Refka et Ons : merci pour votre irremplaçable et inconditionnel soutien. Je tiens à remercier tout particulièrement mes parents pour leur soutien quotidien indéfectible et leur enthousiasme contagieux à l'égard de mes travaux comme de la vie en général. Ils sont mon moteur, ma source de motivation, ils n'ont jamais cessé de me soutenir, de me supporter, m'encourager. Je n'aurais pas assez de mots pour vous remercier et vous dire ce que vous représentez pour moi. Vous m'avez toujours encouragé à aller de l'avant malgré la difficulté d'être loin de ses proches. Merci d'avoir été là pour écarter les doutes, soigner les blessures et partager les joies. Cette thèse est aussi la vôtre.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions mathématiques et étude bibliographique	7
1.1 Introduction	9
1.2 Méthodologie de l'homogénéisation	9
1.2.0.1 Méthodes en champs complets	13
1.2.0.2 Méthodes en champs moyens	14
1.3 Analyse variationnelle	15
1.3.1 Théorie ergodique	16
1.3.1.1 Système dynamique abstrait	16
1.3.1.2 Théorème ergodique de Birkhoff	18
1.3.1.3 Processus additifs	19
1.3.1.4 Processus sous-additifs	21
1.3.2 Γ -convergence	21
1.4 Modèles non-locaux	26
1.4.1 Modèles à gradient	26
1.4.1.1 Modèles de Peerlings	26
1.4.1.2 Modèles à gradients multiples	28
1.4.2 Modèle d'endommagement non-local à gradient	32
1.4.3 Modèle non-local intégral ou modèle à noyau	35
1.4.4 Discussion sur les modèles à gradient et modèles intégraux	37
1.4.5 Modèle non-local plus théorique	38
1.5 Conclusion	40
2 Modélisation asymptotique	43
2.1 Introduction	45
2.2 Homogénéisation asymptotique	45
2.2.1 Généralités	45

2.2.2	Application dans un cadre probabiliste	46
2.2.2.1	Formulation du problème local	47
2.2.2.2	Définition de l'espace probabilisé adéquat	48
2.2.2.3	Développement asymptotique du champ de déplacement	52
2.2.2.4	Les problèmes d'homogénéisation et leurs solutions	54
2.3	Méthode énergétique	58
2.3.1	Problème de minimisation d'ordre η^0	59
2.3.2	Problème de minimisation d'ordre η^1 et identification du terme du second gradient	60
2.4	Conclusion	62
3	Mise en oeuvre du modèle	63
3.1	Introduction	65
3.2	Cas monodimensionnel	67
3.2.1	Description du cas de calcul	67
3.2.2	Comparaison du module effectif avec les bornes classiques	68
3.3	Cas tridimensionnel	72
3.3.1	Génération des microstructures aléatoires	73
3.3.2	Détermination des longueurs caractéristiques l_0 et l_1	77
3.3.3	Génération des maillages	82
3.3.4	Calcul des tenseurs $\nabla_x E^0(x)$ et $\chi^0(y, \omega)$	84
3.3.4.1	Calcul du tenseur $\nabla_x E^0(x)$	84
3.3.4.2	Calcul du tenseur $\chi^0(y, \omega)$	86
3.3.5	Bilan	87
3.3.6	Résultats numériques et discussion	87
3.4	Conclusion	91
4	Régularisation au sens de la Γ-convergence	93
4.1	Introduction	95
4.2	Compacité	95
4.3	Estimation de la borne variationnelle de la Γ -limite supérieure	97
4.4	Estimation de la borne variationnelle de la Γ -limite inférieure	100
4.5	Calcul de $W^{hom}(u, v)$	103
4.6	Conclusion	114
5	Formulation variationnelle et développement d'un élément fini non-local enrichi	115

5.1	Introduction	117
5.2	Formulation variationnelle du problème	117
5.2.1	Problème d'ordre 0	118
5.2.1.1	Réprésentaion matricielle	118
5.2.1.2	Test du modèle à l'ordre 0	120
5.2.2	Réprésentation matricielle du problème d'ordre 1	122
5.3	Élément fini non-local de type Hermite	126
5.3.1	Interpolation d'Hermite	126
5.3.2	Élément de type Hermite d'une barre unidimensionnelle	127
5.3.3	Élément tridimensionnel de type Hermite	128
5.4	Représentation matricielle du problème complet	130
5.5	Conclusion	132
	Conclusion générale et Perspectives	133
6	ANNEXE	137
6.1	Tenseurs Isotropes	139
6.2	Moyenne d'un tenseur de rang 4	140
6.3	Rappels sur les vecteurs	141
6.4	Objectivité et pertinence de la notation d'Einstein	142
6.5	Tenseurs du second ordre	143
6.5.1	Qu'est ce qu'un tenseur?	143
6.5.2	Produit tensoriel et base canonique	144
6.5.3	Produit simple ou contraction d'indice pour les tenseurs du premier et second ordre	145
6.5.4	Double contraction	146
6.6	Tenseurs d'ordre supérieur et en particulier du quatrième ordre	147
6.6.1	Tenseur d'ordre n	147
6.6.2	Base minimale	148
6.6.3	Ecriture de Voigt	149
6.7	Rappels sur les opérateurs différentiels	150
6.7.1	Dérivées par rapport au temps	150
6.7.2	Dérivées par rapport à l'espace	151
6.7.2.1	Opérateurs du premier ordre	151
6.7.2.2	Opérateur Nabla	152
6.8	Quelques mots sur la méthode des éléments finis	152
6.9	Quelques mots sur le solveur élément fini FoXtroT	154

6.10 Fonctions de base pour l'élément d'Hermite dans une base cubique incomplète	155
--	-----

Introduction

Au sein de la grande famille des matériaux, la catégorie des matériaux composites est largement répandue et utilisée dans différents domaines industriels, comme par exemple celui des transports aéronautique et terrestre, ou même le génie civil. Les propriétés intéressantes des matériaux composites engendrent la multiplication des recherches afin d'appréhender leur comportement, le prévoir de manière efficace et garantir la fiabilité des structures.

Ces matériaux peuvent être étudiés principalement à deux échelles caractéristiques :

- Échelle macroscopique qui correspond à l'échelle de sollicitation mécanique et où le matériau est considéré homogène.
- Échelle microscopique qui est celle de la microstructure et peut être constituée de différentes phases.

Les théories permettant le passage du niveau microscopique au niveau macroscopique, dites de transition d'échelles, sont aussi appelées passage micro-macro, upscaling ou encore homogénéisation. Elles supposent la séparation stricte des échelles qui conduit à mieux comprendre le comportement des matériaux en fonction de leurs microstructures, des propriétés de chaque phase et aussi des sollicitations qu'ils subissent (voir Figure 1).

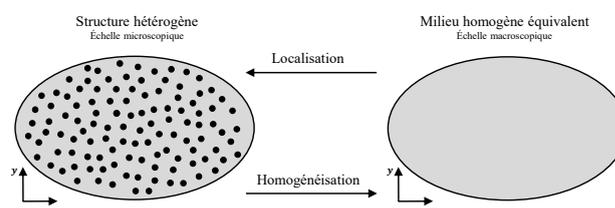


Figure 1 – Principe d'homogénéisation.

L'hypothèse de séparation des échelles apparaît raisonnable lorsque les longueurs caractéristiques des fluctuations des champs macroscopiques sont grandes devant la taille des éléments issus de la microstructure. Pour un certain nombre de problèmes en mécanique, ces hypothèses s'avèrent non valides. C'est le cas notamment en mécanique de la rupture où la loi élastique prédit une singularité des champs mécaniques au voisinage de la pointe de fissure. Un autre exemple est celui de la localisation qui se traduit par la concentration des déformations dans des zones très petites à l'échelle desquelles la nature hétérogène du matériau devient apparente. De plus, cette hypothèse de séparation d'échelle est difficile à justifier dans le cadre stochastique. C'est pourquoi la construction d'un cadre stochastique en adéquation avec la méthode de transition d'échelles utilisée est très importante. Des modèles introduisant les effets de taille de la microstructure ont été proposés dans les années 60. Ce sont essentiellement les modèles du second gradient de Toupin [Toupin, 1962, Toupin, 1964] et Mindlin [Mindlin, 1964, Mindlin et Eshel, 1968] auxquels on peut ajouter d'autres contributions dues à Mindlin [Mindlin, 1965], Green and Rivlin [Green et Rivlin, 1964] et Eringen and Edelen [Eringen et Edelen, 1972]. Le modèle du second gradient est bâti sur une expression de l'énergie élastique qui est fonction de la déformation et de son gradient. Il introduit également une longueur interne caractéristique de la taille de la microstructure. Le modèle du second gradient est de nature non-locale puisqu'il introduit des couplages entre les points matériels qui n'existent pas dans la théorie classique de l'élasticité. Les modèles qui incluent les effets du second gradient ont connu un fort regain d'intérêt dans les années 80 et 90 essentiellement pour leur capacité à corriger certaines incapacités des modèles usuels (locaux) de plasticité et d'endommagement. Dans le contexte de la plasticité, on peut noter en outre les travaux de [Aifantis, 1984], [Fleck et Hutchinson, 1993, Hutchinson et Fleck, 1997], [Nix et Gao, 1998]. Ces théories ont été largement utilisées dans la littérature pour étudier la rupture [Xia et Hutchinson, 1996, Huang *et al.*, 1997], la localisation en bandes de déformations [De Borst et Mühlhaus, 1992, Mikkelsen, 1999], la propagation de fissures [Wei et Hutchinson, 1997], l'endommagement où la régularisation est basée sur le second gradient du paramètre d'endommagement α [Pham et Marigo, 2013], ou encore les effets de tailles des inclusions et des cavités dans les milieux plastiques [Liu *et al.*, 2003, Monchiet et Bonnet, 2013] et [Wen *et al.*, 2005].

Toutefois, toutes les modélisations mentionnées ci-dessus qui incluent les gradients de déformation ou bien du paramètre d'endommagement α sont de nature phénoménologique dans le sens où les effets microstructuraux sont obtenus par postulat et non dans un cadre d'homogénéisation. Le but de ce travail de thèse est de construire un modèle mathématique non-local,

macroscopique et déterministe, faisant apparaître le second gradient de déplacement et dont les paramètres non-locaux sont explicitement connectés à la microstructure. Il s'agit de réunir l'essentiel des avantages des modèles et techniques décrits précédemment, notamment retrouver le formalisme non-local développé par [Frémond, 2013], tout en renforçant le lien avec la microstructure. Pour cela, nous proposons de procéder par homogénéisation. Les matériaux supports de l'étude sont constitués d'inclusions de formes convexes dont la distribution des centres est régie par un processus stochastique ponctuel. Pour une première approche, les inclusions et la matrice sont considérées élastiques linéaires mais avec un fort contraste de propriétés pour exacerber les effets non-locaux. Nous utilisons successivement deux techniques de transition d'échelles différentes. Tout d'abord, une étude asymptotique et variationnelle dans le cadre de l'homogénéisation stochastique est réalisée dans le but de faire émerger le second gradient de déplacement dans l'expression de l'énergie libre homogénéisée. Cette première étape s'appuie sur une extension au cadre aléatoire de la technique de développement asymptotique pour les milieux périodiques. Une première version du modèle non-local, à second gradient de déplacement, est ainsi construite. Le passage à la limite sur le paramètre d'hétérogénéité η , issu du développement asymptotique mené à l'étape précédente, est alors effectué en utilisant le concept de Γ -convergence et ses propriétés variationnelles. Le but est d'obtenir une seconde version du modèle exploitable en calcul de structure. Chacune des deux versions du modèle fait l'objet d'évaluations intermédiaires et de développements numériques spécifiques pour leur implémentation.

Plus précisément ce mémoire est constitué de cinq chapitres :

- Le premier chapitre est essentiellement de nature bibliographique. Tout d'abord, nous présentons les différentes classes d'analyse variationnelle utilisées. Nous rappelons ensuite les modélisations continues à gradient de déformation. La dernière partie est consacrée à la présentation des modèles régularisés aussi bien dans le cadre de l'élasticité linéaire que dans celui de l'endommagement.
- Au second chapitre, nous combinons la méthode variationnelle et celle des développements asymptotiques dans le cadre de l'homogénéisation aléatoire (ergodique) pour construire un modèle non-local à gradient de déformation. Nous construisons une énergie effective du milieu hétérogène dont les coefficients homogénéisés, fortement connectés à la microstructure, sont obtenus en résolvant le système d'équations en cascade généré par le développement asymptotique.

- Dans le troisième chapitre, afin de tester la validité et la pertinence du modèle développé dans le chapitre précédent, des simulations numériques sont réalisées. Le premier exemple concerne un composite aléatoire qui possède une microstructure 1D. Dans cette première partie, on évalue la partie commune du modèle, autrement dit la partie locale. Le tenseur élastique effectif obtenu est comparé avec les bornes classiques de Voigt, Reuss et d'Hashin-Shtrikman. Dans la seconde partie du chapitre, une évaluation du modèle complet est faite en utilisant l'expression de l'énergie totale du milieu homogénéisé équivalent. Cette dernière est traitée dans le cas 3D sur deux types de microstructures de complexité morphologique croissante.

- Le quatrième chapitre est dédié au passage à la limite sur le paramètre d'hétérogénéité η dans le but d'obtenir un modèle homogène. Dans un premier temps, nous expliquons notre choix de régulariser le problème au sens de la Γ -convergence. Dans la suite, le problème limite est traité. Le modèle final est macroscopique, à second gradient de déplacement, déterministe, et conserve une forte connexion avec la microstructure.

- Dans le cinquième chapitre, et afin de pouvoir effectuer des calculs de structures, la formulation variationnelle faible du modèle obtenu dans le chapitre 4 est établie. Un élément fini non-local qui prend en considération le champ de déplacement virtuel lié aux inclusions est développé et implémenté dans le code FoXtroT (code éléments finis [FoX, 2018] propre à l'équipe). Concernant le calcul du terme du second gradient de déplacement, on a besoin d'une autre variable nodale attachée à chaque noeud : aux variables u_i nous ajoutons les valeurs aux noeuds des dérivées de u_i , d'où la nécessité d'implémenter un élément fini enrichi de type Hermite prenant en compte ce deuxième degré de liberté.

Chapitre 1

Notions mathématiques et étude bibliographique

L'objectif de ce premier chapitre est de fournir l'ensemble des notions mathématiques essentielles à la modélisation proposée dans la suite du manuscrit et de dresser un panorama des modèles non-locaux parmi les plus connus, notamment dans les cadres de l'élasticité linéaire et de la mécanique de l'endommagement.

1.1 Introduction

L'utilisation des matériaux hétérogènes est de plus en plus importante depuis des décennies particulièrement dans le domaine des transports aéronautiques et terrestres. Dans l'objectif de performances de plus en plus élevées, il est devenu essentiel de connaître le lien entre leur microstructure complexe et le comportement mécanique. Cela conduit à la nécessité de développer des modèles théoriques, puis numériques capables de prédire les réponses d'une grande variété de microstructures à différentes sollicitations. Dans la présente thèse, on va s'intéresser au cas de matériaux hétérogènes constitués d'une distribution aléatoire d'inclusions dans une matrice élastique et présentant de forts gradients de propriétés mécaniques. La morphologie des inclusions sera supposée convexe autorisant l'utilisation des différents outils mathématiques décrits dans ce chapitre.

Le besoin de modèles non-locaux afin de comprendre et de prévoir le comportement de ces matériaux hétérogènes est devenu une nécessité. Le développement de ces derniers fait l'objet de nombreuses recherches de nos jours, en particulier lorsqu'il s'agit de prendre en compte les interactions à grande distance pouvant influencer les comportements macroscopiques que ce soit dans le cadre élastique, ou pour des comportements plus complexes.

Dans ce premier chapitre, nous commençons par une brève introduction aux méthodes de transition d'échelles, en élasticité, afin d'en comprendre les principes et les difficultés. Puis, les notions mathématiques indispensables à l'élaboration du modèle proposé dans la thèse seront décrits : analyse stochastique liée aux processus ergodiques, processus sous additifs, analyse variationnelle et Γ -convergence. Enfin, dans la dernière partie du chapitre, une description des modèles non-locaux de la littérature parmi les plus pertinents dans le cadre de notre étude sera réalisée afin de positionner la démarche proposée.

1.2 Méthodologie de l'homogénéisation

Comme illustré sur la figure 1, une transition d'échelle permet de substituer au milieu hétérogène étudié un milieu homogène équivalent. Il est possible dans la majorité des approches d'obtenir simultanément des informations sur les champs à l'échelle microscopique. Selon le type d'approche, on aura accès aux champs complets ou seulement aux champs moyens par

phase et second moments par phase... Pour la plupart, la remontée de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique se fait grâce à l'opérateur de moyenne spatiale sur le volume élémentaire représentatif (V.E.R). La moyenne volumique sur un domaine de volume $|V|$ est définie de la façon suivante :

$$\langle v \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V v dv$$

Le volume V est le V.E.R. s'il s'agit de définir les grandeurs macroscopiques, ou une phase pour une moyenne par phase, ou tout autre domaine.

La plupart des modélisations micromécaniques suivent trois étapes, la représentation, la localisation et l'homogénéisation, dont les principales caractéristiques sont rappelées ci-après. La présentation est ici abordée sous l'angle des approches en champs complets et en champs moyens. La méthode d'homogénéisation par développement asymptotique sera plus spécifiquement présentée au chapitre 2.

- **Représentation** : Cette étape consiste en une description mathématique et/ou morphologique du V.E.R. On définit préalablement l'échelle de description des hétérogénéités afin de pouvoir ensuite identifier leur géométrie, leur comportement, leur distribution dans le cas stochastique et leurs interactions.

La description géométrique la plus simple ne considère que la fraction volumique des phases. Ce type de description donne accès à ce que l'on appelle la loi des mélanges. Toutefois, cette donnée est insuffisante si l'on souhaite rendre compte de l'influence de la répartition spatiale des phases et de l'éventuelle anisotropie susceptible d'en découler. D'autres paramètres morphologiques doivent alors être introduits à cet effet. Le nombre et la richesse des caractéristiques microstructurales prises en compte distinguent les approches. Le développement des moyens d'imagerie porte la tendance actuelle à l'usage d'images 3D (tomographie ou autre) comme base de représentation du milieu [Madi, 2006].

La description du comportement passe nécessairement par le choix d'une représentation cinématique du milieu. Ces dernières années, l'utilisation de milieux continus enrichis intégrant la possibilité de rotation (i.e. milieu micromorphe, milieu de Cosserat) pour la description de la cinématique locale a ouvert de nouvelles voies [Forest, 2006]. Cependant, l'essor de ce type de représentation est fortement dépendant du dévelop-

pement de codes de calculs adéquats. Enfin, l'utilisation de ces modèles au sein des démarches d'homogénéisation peut s'avérer délicate selon l'approche sélectionnée.

La description des interactions entre les phases est essentielle car elles peuvent être source de non-linéarités macroscopiques. Les modèles les plus simples considèrent des phases parfaitement collées, ce qui induit une continuité du champ de déplacement. Il est également possible de considérer un contact parfait (i.e. sans frottement) assurant une continuité des contraintes normales. La réalité étant comme souvent à mi-chemin entre ces représentations, l'usage de lois d'interaction inspirées des lois d'adhésion et de friction s'est développé [Fouchal *et al.*, 2009]. Là encore, l'emploi au sein des approches d'homogénéisation n'est pas toujours aisé.

- **Localisation** : L'étape de localisation consiste à déterminer les champs locaux, à l'intérieur du V.E.R., à partir de la donnée d'un état macroscopique (moyen) de contrainte ou de déformation. Il s'agit de résoudre le problème local suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij} = (u_{i,j})^s \\ \text{lois locales de comportement} \\ \sigma_{ij,j} = 0 \\ \text{relations de moyenne} \\ \text{conditions aux limites} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Les conditions aux limites doivent représenter au mieux l'état in situ du V.E.R. au sein de la structure étudiée. Elles peuvent être de plusieurs types, homogènes en contrainte, homogènes en déformation, cinématiques périodiques, Les résultats obtenus diffèrent selon le choix des conditions aux limites, sauf dans le cas où la taille du V.E.R. est suffisamment grande devant la taille des hétérogénéités. La taille d'un V.E.R. doit être choisie de sorte à satisfaire la condition de séparation des échelles : elle doit être petite devant la taille de la structure pour pouvoir considérer cette dernière comme un milieu macroscopiquement continu et suffisamment grande devant la taille des hétérogénéités pour respecter la macrohomogénéité au sens de Hill-Mandel ([Hill, 1967] [Mandel, 1964]). C'est la condition de séparation des échelles, et précisément une taille de V.E.R. suffisante devant celle des hétérogénéités, qui permet de tendre vers la dualité classique déformation/contrainte.

Selon l'approche en déformation ou contrainte, la résolution du problème local (1.1) permet d'établir le lien entre déformations locale et macroscopique (équation (1.2)₁) ou entre contraintes locale et macroscopique (équation (1.2)₂) :

$$\begin{cases} \varepsilon = \mathbb{K} : \bar{\varepsilon} \\ \sigma = \mathbb{T} : \bar{\sigma} \end{cases} \quad (1.2)$$

où $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\sigma}$ désignent les tenseurs de déformation et de contrainte macroscopiques. Dans le système (1.2), les tenseurs \mathbb{K} et \mathbb{T} désignent les tenseurs de localisation des déformations et de concentration des contraintes. Toute la difficulté d'une transition d'échelle se situe au niveau de la résolution du problème local. Le degré d'approximation introduit lors de la représentation de la microstructure et les hypothèses éventuelles formulées sur les champs dans le V.E.R. conduisent à des bornes (encadrements) plus ou moins resserrées ou à des estimations des propriétés effectives. C'est à ce niveau que le développement des méthodes d'homogénéisation numérique en champs complets prend toute sa mesure. En effet, la possibilité de simuler une multitude de formes et de distributions spatiales des phases en présence permet, moyennant une information statistique sur leurs forme et répartition réelles, d'affiner considérablement la détermination des champs locaux et par suite l'estimation des propriétés effectives.

- **Homogénéisation** : Cette étape permet de déterminer le comportement effectif du matériau hétérogène en effectuant le passage des grandeurs locales aux grandeurs macroscopiques par moyenne volumique sur le V.E.R. Parmi les précurseurs de cette approche, on peut citer [Hill, 1965] et [Hashin, 1983].
- **Synthèse** : La force mais aussi la faiblesse de la méthodologie de l'homogénéisation telle qu'exposée ici est qu'elle laisse la place à une multitude de variantes de comportements homogènes équivalents pour un matériau donné. En effet, le nombre d'hypothèses possibles lors des étapes de représentation et de résolution du problème local peut être très grand et mener à des approximations trop pauvres de la réalité. A l'inverse, trop raffiner la description locale peut conduire à une complexité trop importante difficile à gérer à l'échelle d'une structure.

Sans rechercher l'exhaustivité concernant ces techniques, le prochain paragraphe introduit les méthodes en champs complets et en champs moyens. Elles seront utilisées au chapitre 3 de ce manuscrit.

1.2.0.1 Méthodes en champs complets

Les méthodes dites en champs "complets", comme la Méthode des Eléments Finis (MEF) ou la technique fondée sur la transformation de Fourier rapide (Fast Fourier Transform (FFT)), s'appuient sur une description explicite du matériau à l'échelle des hétérogénéités sélectionnée, pour calculer les champs dans le V.E.R. et déterminer la réponse macroscopique. La première méthode, MEF, nécessite la discrétisation spatiale du V.E.R, caractérisée par l'étape de maillage. Cela repose en amont sur la génération artificielle et/ou la reconstruction numérique à partir d'images réelles de la microstructure étudiée. Les propriétés effectives sont obtenues à partir des réponses moyennes du V.E.R pour six chargements élémentaires [Moravec et Roman, 2009]. Une des difficultés ici peut venir du temps de calculs qui peut rapidement être trop important.

Moulinec [Moulinec, 1994] a présenté une méthode alternative aux éléments finis, appelée FFT, qui s'affranchit du maillage. Cette méthode est basée sur les fonctions de Green développées en élasticité [Mura, 1987]. Elle a par la suite [Moulinec et Suquet, 1998] et [Moulinec et Suquet, 2003] été étendue à d'autres comportements matériaux et améliorée par la même occasion. Cette méthode présente un grand intérêt lorsque la microstructure est compliquée (aléatoire) et difficile à reconstruire et/ou à mailler. Une limite réside dans la voxelisation des éléments rendant compliquée l'interprétation des résultats aux interfaces. De plus, le gain de temps de cette méthode peut être limité dans le cas de forts gradients de propriétés entre les différentes phases.

Pour des microstructures aléatoires, la taille du V.E.R nécessaire à l'obtention de résultats fiables a fait l'objet de différents travaux avec une définition déterministe, pouvant conduire à des tailles gigantesques dans le cas de forts contrastes notamment, et plus récemment avec une approche statistique. Cette dernière présente l'avantage d'associer la taille du V.E.R à une certaine précision sur la grandeur effective recherchée et à un nombre de réalisations [Kanit *et al.*, 2003], [Kanit *et al.*, 2006], [Pelissou *et al.*, 2009], [Dirrenberger *et al.*, 2014]. Cela permet notamment de limiter la taille du domaine de calcul si un grand nombre de réalisations est disponible. Mais on constate que dans le cas aléatoire "non ergodique" il faut potentiellement faire un nombre de tirages important pour ensuite faire une moyenne "probabiliste". Cela est également coûteux, ce qui nous emmène à nous placer dans un cadre ergodique pour le présent travail.

Les méthodes en champs complets servent de référence pour l'évaluation des méthodes en champs moyens car la microstructure est représentée de manière plus riche et les champs locaux sont calculés de manière explicite et sont accessibles. Ces approches présentent toutefois le

désavantage d'avoir un coût élevé pour la génération des cas, les calculs et leur post-traitement.

1.2.0.2 Méthodes en champs moyens

Les méthodes dites en champs " moyens " [Bornert *et al.*, 2001] permettent d'estimer les propriétés effectives à partir d'une description partielle de la microstructure et d'hypothèses plus ou moins fortes pour la résolution du problème local.

A partir des relations de localisation (1.2), l'étape d'homogénéisation telle que décrite précédemment conduit aux relations suivantes :

$$\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle = \mathbb{C}^{eff} : \bar{\varepsilon}, \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^{eff} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{K} \rangle = \sum_{p=1}^N f^p \mathbb{C}^p : \mathbb{K}^p \quad (1.3)$$

Ou encore :

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = \mathbb{S}^{eff} : \bar{\sigma}, \quad \text{avec} \quad \mathbb{S}^{eff} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{T} \rangle = \sum_{p=1}^N f^p \mathbb{S}^p : \mathbb{T}^p \quad (1.4)$$

avec \mathbb{C}^p et \mathbb{S}^p les tenseurs de rigidité et de souplesse de la phase p et N le nombre de phases. Dans (1.3) et (1.4), $\mathbb{K}^p = \langle \mathbb{K} \rangle_p$ et $\mathbb{T}^p = \langle \mathbb{T} \rangle_p$ sont les tenseurs de localisation et de concentration moyens sur la phase p . Ils sont tels que $\bar{\varepsilon}^p = \mathbb{K}^p : \bar{\varepsilon}$ et $\bar{\sigma}^p = \mathbb{T}^p : \bar{\sigma}$, où $\bar{\varepsilon}^p$ et $\bar{\sigma}^p$ sont respectivement la déformation et la contrainte moyennes sur la phase p .

Ainsi, comme le montrent les formules (1.3) et (1.4) en élasticité linéaire, il suffit de déterminer les tenseurs de localisation et de concentration moyens par phase (\mathbb{K}^p et \mathbb{T}^p) pour estimer le comportement effectif. Les théories d'homogénéisation par champs moyens fournissent, pour des composites élastiques linéaires, des estimations analytiques ou semi-analytiques concernant ces tenseurs. Elles se distinguent au niveau de l'étape de représentation de la microstructure et des hypothèses introduites pour l'estimation des tenseurs \mathbb{K}^p et \mathbb{T}^p .

Quelques-uns des schémas d'homogénéisation, dont certains seront utilisés dans la suite du manuscrit, sont mentionnés ci-après.

- Voigt et Reuss ont développé des bornes strictes pour les propriétés effectives du M.H.E., fondées sur les hypothèses de déformations uniformes (Voigt) et des contraintes uniformes

(Reuss) dans le V.E.R. Elles ne tiennent compte que de la fraction volumique des phases.

- [Eshelby, 1957] a donné la solution exacte de la perturbation mécanique que génère une inclusion ellipsoïdale dans un milieu infini, base de bon nombre des schémas d'homogénéisation existants.

- [Hashin, 1962] puis [Hashin et Rosen, 1964] ont proposé respectivement les schémas "Composite Sphere Assembly" (CSA) et "Composite Cylinder Assembly" (CCA).

- [Mori et Tanaka, 1973] puis [Benveniste, 1987] ont étendu l'approche d'Eshelby aux polycristaux puis aux composites renforcés par des inclusions.

- [Hori et Nemat-Nasser, 1993] ont introduit le principe de double inclusion, fondé aussi sur la théorie d'Eshelby, qui a par la suite donné naissance à l'interprétation de [Lielens *et al.*, 1998].

- [Luciano et Barbero, 1994] donnent des formules explicites pour les propriétés effectives à partir d'un schéma adapté à une microstructure périodique à inclusions sphériques ou à fibres longues.

De nombreux autres schémas célèbres, (p. ex. Autocohérent [Kröner, 1958], pontecastaneda et Willis [Castañeda et Willis, 1995], Méthode de Cellules [Trinh, 2011], Halpin-Tsai [Affdl et Kardos, 1976]...) ont été proposés et utilisés pour différents types de matériaux hétérogènes dans divers travaux comme ceux de [Hill, 1965], [Christensen et Lo, 1979], [Aboudi, 2013], [Affdl et Kardos, 1976].

Il existe donc une grande variété de schémas d'homogénéisation en élasticité linéaire dont le choix est principalement dicté par le type de microstructure à traiter. Tous permettent de déterminer les champs moyens dans chacune des phases à partir des relations de localisation (passage macro-micro) ainsi que la réponse homogénéisée (relation micro-macro).

1.3 Analyse variationnelle

Dans cette partie, on s'appuie sur la thèse de [Nait-Ali, 2012] et le livre de [Attouch *et al.*, 2014].

1.3.1 Théorie ergodique

Dans ce travail, on considère un milieu homogène, renforcé par des inclusions aléatoirement réparties sous la forme de clusters et supposées toutes de forme convexe. Nous sommes donc amenés à faire une étude probabiliste sur la répartition aléatoire des sections des inclusions dans \mathbb{R}^3 . Les centres des sections des inclusions sont répartis suivant un processus ponctuel de type Poisson auquel on adjoindra des hypothèses supplémentaires précisées dans les paragraphes suivants. Ces hypothèses sont des conditions de stationnarité, d'invariance par translation de la loi de processus ainsi qu'une condition d'indépendance ou plus généralement d'ergodicité traduisant l'homogénéité statistique de la présence des inclusions. Cette hypothèse d'ergodicité a pour principal avantage de permettre d'utiliser une grande partie des outils et/ou hypothèses utilisés en homogénéisation périodique. Nous précisons ci-après les outils qui permettent d'élaborer le cadre mathématique de notre étude.

La théorie ergodique des systèmes dynamiques a réellement vu le jour dans les années 1930 essentiellement grâce à [Birkhoff, 1942] et J. Von Neumann dans la continuité des travaux de [Poincaré, 1890]. A l'origine, l'hypothèse d'ergodicité nous dit que lorsqu'on a un système de particules en mouvement, presque toutes les trajectoires sont réparties de façon "homogène" dans l'espace où elles sont définies. Pour nous, ces trajectoires seront caractérisées par $(\tau_z(\omega))_{z \in \mathbb{Z}^3}$ où τ_z est l'opérateur de translation $\tau_z(\omega) = \omega + z$ dans un sous ensemble Ω_p bien choisi dans \mathbb{R}^3 décrivant les centres des sections des inclusions.

Cette théorie ergodique consiste en l'étude des systèmes dynamiques abstraits du point de vue de la théorie de la mesure. Dans notre cas, les théorèmes et définitions qui suivent seront énoncés dans le cadre d'un espace probabiliste $(\Omega_p, \mathcal{A}, P)$ mais ces résultats restent valables dans un espace mesuré quelconque (X, \mathcal{A}, μ) [Krengel, 1985].

1.3.1.1 Système dynamique abstrait

Dans ce paragraphe, les propriétés seront énoncées dans un cadre général, avec $N \in \mathbb{N}^*$. Dans les chapitres suivants, on considèrera $N = 3$.

Définition 1.3.1 (Système dynamique abstrait). *On appelle système dynamique abstrait (s.d.a) tout quadruplet $(\Omega_p, \mathcal{A}, P, (\tau_z)_{z \in \mathbb{R}^N})$, où $(\Omega_p, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et $(\tau_z)_{z \in \mathbb{R}^N}$ est un groupe d'opérateurs sur Ω_p préservant la mesure P , i.e., vérifiant $\tau_z \# P = P$ pour tout $z \in \mathbb{R}^N$.*

Dans les chapitres suivants, $(\Omega_p, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé où Ω_p est un sous-ensemble de points de \mathbb{R}^3 et $(\tau_z)_{z \in \mathbb{R}^3}$ est la famille des opérateurs de translation sur Ω_p définis par $\tau_z(\omega) = \omega + z$ pour tout $\omega \in \Omega_p$. L'opérateur de translation $\tau_z(\cdot)$ joue un rôle primordial dans la modélisation car il permet d'utiliser les mêmes outils que dans le cas périodique. Plus précisément quelque soit le point de l'espace d'étude on peut se ramener via cet opérateur au V.E.R. Par conséquent le V.E.R sera représentatif modulo l'opérateur $\tau_z(\cdot)$.

Définition 1.3.2. Soit $(\Omega_p, \mathcal{A}, P, (\tau_z)_{z \in \mathbb{R}^N})$ un système dynamique abstrait. On appelle ensemble des invariants de la tribu \mathcal{A} l'ensemble \mathcal{F} défini par :

$$\mathcal{F} := \{E \in \mathcal{A}, \forall z \in \mathbb{R}^N, \tau_z E = E\}$$

Il est facile de vérifier que \mathcal{F} est une σ -algèbre [Attouch et al., 2014].

Tout événement E pourra subir une translation et donc être ramené au V.E.R par exemple. Cette propriété sera indispensable pour le schéma d'homogénéisation stochastique proposé.

Définition 1.3.3. Un système dynamique abstrait est dit ergodique si tout ensemble mesurable invariant par l'opérateur τ_z pour tout $z \in \mathbb{R}^N$ est de mesure 0 ou 1 pour la mesure de probabilité P , i.e, $\forall E \in \mathcal{F} \subset \mathcal{A}, P(E) \in \{0, 1\}$.

Définition 1.3.4 (fortement mélangeant). Un système $(\Omega_p, \mathcal{A}, P, (\tau_z)_{z \in \mathbb{R}^N})$ est fortement mélangeant lorsque pour tout $z \in \mathbb{R}^N$ assez grand et pour tout événement E et F de Ω_p , les événements $\tau_z E$ et F deviennent indépendants. Le système dynamique abstrait $(\Omega_p, \mathcal{A}, P, (\tau_z)_{z \in \mathbb{R}^N})$ est fortement mélangeant si

$$\forall E, F \in \mathcal{F}, \lim_{|z| \rightarrow +\infty} P(\tau_z E \cap F) = P(E).P(F)$$

Une illustration de cette notion est donnée par la Figure (1.1).

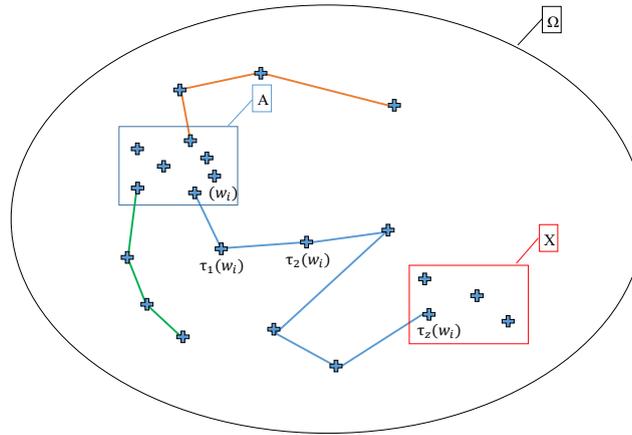


Figure 1.1 – Schéma représentatif d'un système fortement mélangeant [Nait-Ali, 2012].

Cette notion d'indépendance entre plusieurs événements fait partie des conditions nécessaires à l'existence d'un V.E.R.

1.3.1.2 Théorème ergodique de Birkhoff

Théorème 1.3.1 (Théorème de Birkhoff (1993)). *Soit le système dynamique abstrait $(\Omega_p, \mathcal{A}, P, (\tau_z)_{z \in \mathbb{R}})$. Si $f \in L^1_P(\Omega_p)$ alors :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(\tau_z \omega) dz = E_f^F \quad \omega\text{-presque sûrement} \quad (1.5)$$

où E_f^F est l'espérance conditionnelle de f suivant la tribu \mathcal{F} , c'est-à-dire, l'unique application \mathcal{F} -mesurable de Ω_p vers \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall E \in \mathcal{F} \quad \int_E E_f^F(\omega) dP = \int_E f(\omega) dP(\omega) \quad (1.6)$$

Dans le cas où $(\Omega_p, \mathcal{A}, P, (\tau_z)_{z \in \mathbb{R}})$ est ergodique, E_f^F est égale à l'espérance mathématique $E(f)$ de f .

Dans le cas ergodique, par la définition 1.3.1 ainsi que l'équation (1.5) nous obtenons l'existence d'un V.E.R que nous nommerons V.E.R.D (Volume Élémentaire Représentatif Déterministe). En effet, si par exemple f représente une densité d'énergie mécanique, ce résultat donne que $\frac{1}{n} \int_0^n f(\tau_z \omega) dz$ converge vers une espérance mathématique. Et donc si un V.E.R.D subit des translations via l'opérateur τ_z , et que l'on fait la moyenne de cette énergie, on obtient l'espérance mathématique de cette dernière. Si l'on fait l'analogie avec les méthodes déterministes, cela signifie que si l'on détermine un V.E.R.D, il suffit de calculer l'espérance mathématique pour déterminer les champs mécaniques moyens.

Il faut maintenant définir la densité d'énergie moyenne utilisée lors de la transition d'échelle au chapitre 4. Elle sera construite à partir d'un processus sous-additif.

1.3.1.3 Processus additifs

Le résultat suivant généralise le Théorème 1.3.1 aux limites presque sûres des moyennes $\frac{S_{A_n}}{|A_n|}$ lorsque la fonction S est une fonction additive ou sous-additive d'ensembles Boréliens bornés de \mathbb{R}^N . Nous notons $\mathbb{B}_b(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des boréliens bornés de \mathbb{R}^N . Posons $\rho(A) := \sup\{r \geq 0 : \exists \bar{B}_r(x) \subset A\}$ où $\bar{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^N \text{ dist}(x,y) \leq r\}$, avec $dist$ représentant l'opérateur distance.

Une famille d'ensemble $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{B}_b(\mathbb{R}^N)$ est dite régulière s'il existe une suite croissante de pavés I_n de sommets dans \mathbb{Z}^N et une constante positive C indépendante de n telle que $B_n \subset I_n$ et $|I_n| \leq C|B_n|$ pour tout n .

Théorème 1.3.2 (Théorème additif ([Nguyen et Zessin, 1979])). *Soit $(\Omega_p, \mathcal{A}, P, (\tau_z)_{z \in \mathbb{Z}^N})$ un système dynamique abstrait, on considère une fonction :*

$$\begin{aligned} S : \mathbb{B}_b(\mathbb{R}^N) &\rightarrow L^1_P(\Omega_p) \\ A &\mapsto S_A \end{aligned} \tag{1.7}$$

vérifiant les trois axiomes suivants :

$$\begin{aligned}
i) & \text{ Si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } \mathcal{S}_{A \cup B} = \mathcal{S}_A + \mathcal{S}_B \\
ii) & \forall A \in \mathbb{B}_B(\mathbb{R}^N) \forall z \in \mathbb{Z}^N \mathcal{S}_{A+z} = \mathcal{S}_A \circ \tau_z \\
iii) & \exists a \in L^1_p(\mathbb{R}^N) \text{ tel que } |\mathcal{S}_A| \leq a \forall A \subset [0, 1]^N, A \in \mathbb{B}_b(\mathbb{R}^N)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Alors, pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ régulière d'ensembles bornés et convexes vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(A_n) = +\infty$, on a ω -presque sûrement

$$\frac{\mathcal{S}_{A_n}(\omega)}{|A_n|} = \begin{cases} E(\mathcal{S}_{[0,1]^N}) & \text{si le s.d.a est ergodique,} \\ E^F(\mathcal{S}_{[0,1]^N}) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.9}$$

Autrement dit 1.3.1. *Le premier axiome de (1.8) est la propriété définissant l'additivité de \mathcal{S} dans l'ensemble des Boréliens $\mathbb{B}_b(\mathbb{R}^N)$, et par analogie directe la sous-additivité et la sur-additivité de \mathcal{S} sont caractérisées de la même façon en remplaçant respectivement "=" par " \leq " et " \geq ". Cette axiome sera indispensable pour le calcul de l'énergie totale au chapitre 4.*

Autrement dit 1.3.2. *Le deuxième axiome de (1.8) correspond à une propriété dite de covariance. Il permet de translater un volume élémentaire représentatif déterministe (V.E.R.D) par exemple sans modifier l'énergie potentielle. Plus précisément si l'on a une taille de V.E.R.D fixée, cette axiome nous dit que quelque soit l'endroit ou l'on déplace cette fenêtre, l'énergie sera presque-sûrement la même. Et cela, même si la distribution des inclusions à l'intérieur de la fenêtre est différente. Notons qu'ici le V.E.R est réduit par soucis de simplicité à $[0, 1]^N$. Dans le présent travail, le V.E.R.D sera choisi suffisamment grand pour être représentatif de l'hétérogénéité du milieu, c'est à dire de sorte à contenir suffisamment d'hétérogénéités (inclusions).*

Autrement dit 1.3.3. *Le dernier axiome de (1.8) est une propriété de domination sur les ensembles Boréliens A inclus dans $[0, 1]^N$. Cette axiome nous assure que lorsque l'on translate le V.E.R.D dans le domaine d'étude il intercepte "toujours" une inclusion.*

La proposition suivante est la conséquence directe du Théorème (1.3.2) et sera le résultat permettant de procéder à la transition d'échelle.

Proposition 1.3.1. *Soit $(\Omega_p, \mathcal{A}, (\tau_z)_{z \in \mathbb{Z}^N}, P)$ un système dynamique ergodique et $\psi : \Omega_p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) - \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ mesurable vérifiant les trois conditions suivantes :*

- i) *Pour P -presque tout $\omega \in \Omega_p, y \rightarrow \psi(\omega, y)$ appartient à $L^r_{loc}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N)$, $1 \leq r \leq +\infty$;*
- ii) *Pour tout Borélien A de \mathbb{R}^m l'application $A \mapsto \int_A \psi(\omega, y) dy$ appartient à $L^1_p(\Omega_p)$;*

iii) Pour tout $z \in \mathbb{Z}^m$, pour tout $y \in \mathbb{R}^m$, $\psi(\omega, y+z) = \psi(\tau_z \omega, y)$ pour P -presque $\omega \in \Omega_p$.
Alors pour tout ouvert borné O de \mathbb{R}^m :

$$\psi(\omega, \frac{\cdot}{\varepsilon}) \rightharpoonup E \int_{(0,1)^N} \psi(\cdot, y) dy$$

pour la topologie $\sigma(L^r(O, \mathbb{R}^m))$ où r' désigne le conjugué de r .

Démonstration. Voir Théorème 4.2 et Proposition 5.3 dans [Chabi et Michaille, 1994].

Autrement dit 1.3.4. La densité d'énergie $\psi(\omega, \frac{\cdot}{\varepsilon})$ (à l'échelle micro) converge faiblement vers l'espérance mathématique de la moyenne de cette énergie dans le V.E.R.D $(0, 1)^N$.

1.3.1.4 Processus sous-additifs

Pour les études asymptotiques réalisées dans cette thèse, on utilisera une fonction sous additive \mathcal{S} construite à partir d'une énergie convenablement localisée. On cherche à déterminer la limite presque sûre de la moyenne $\frac{S_{A_n}(\omega)}{|A_n|}$. Pour cela on utilise un théorème ergodique pour les fonctions sous additives d'ensemble tiré des travaux de Krengel et Ackoglu-Krengel (1981). Pour une estimation de la convergence des processus sous additifs, on se réfère à [Gloria et al., 2011, Gloria et Otto, 2012, Michaille et al., 1998].

Remarque 1.3.1. Dans les chapitres suivants, le paramètre n introduit dans le processus présenté auparavant sera remplacé par le paramètre d'hétérogénéité η en utilisant un changement de variable donné par la relation suivante :

$$\eta = \frac{1}{n}$$

1.3.2 Γ -convergence

Soit X un espace topologique. La Γ -convergence est une notion de convergence pour des suites de fonctionnelles $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $F_n : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, introduite par De Giorgio et Franzoni dans les années 70 [DEGIORGI, 1975] de façon à être la convergence la plus faible vérifiant les deux propriétés suivantes (sous certaines hypothèses d'inf-compacité et de compacité) :

$$F_n \rightarrow F \implies \inf_X F_n \rightarrow \min_X F \quad (1.10)$$

$$F_n \rightarrow F, u_n \in \operatorname{argmin}_X F_n \text{ et } u_n \rightarrow u \implies u \in \operatorname{argmin}_X F \quad (1.11)$$

où pour toute fonction $G : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$\operatorname{argmin}_X G := \{v \in X; G(v) = \inf_X G(u)\} \quad (1.12)$$

Les fonctions minima et les minimiseurs sont continus pour la Γ -convergence des variables fonctionnelles. Le choix d'une topologie sur X en adéquation avec (1.11) est déterminé par la compacité des suites de minimiseurs. Il est en effet nécessaire que ces suites soient relativement compactes pour la topologie choisie.

Il existe deux définitions de la Γ -convergence, la première est une définition en terme de voisinage, et la seconde en terme de séquentiel. Ces deux définitions sont données ci-après.

Définition 1.3.5 (Γ -convergence (voisinage)). *Soit (X, τ) un espace topologique. Considérons une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et une fonction $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge vers F en $u \in X$ si et seulement si*

$$\Gamma - \liminf_n F_n(u) = \Gamma - \limsup_n F_n(u) = F(u) \quad (1.13)$$

avec :

$$(\Gamma - \liminf_n F_n(u) := \sup_{U \in \mathcal{V}(u)} \liminf_n (\inf_{y \in U} F_n(y))) \quad (1.14)$$

$$(\Gamma - \limsup_n F_n(u) := \sup_{U \in \mathcal{V}(u)} \limsup_n (\inf_{y \in U} F_n(y))) \quad (1.15)$$

où $\mathcal{V}(u)$ désigne la famille de tous les ouverts de X pour la topologie τ contenant u . Dans le cas où X est un espace métrique, (1.14) et (1.15) se traduisent immédiatement par

$$(\Gamma - \liminf_n F_n)(u) := \sup_{m \in \mathbb{N}^*} \liminf_n \left(\inf_{y \in B(x, \frac{1}{m})} F_n(y) \right) \quad (1.16)$$

$$(\Gamma - \limsup_n F_n)(u) := \sup_{m \in \mathbb{N}^*} \limsup_n \left(\inf_{y \in B(x, \frac{1}{m})} F_n(y) \right) \quad (1.17)$$

Si l'égalité (1.13) est vérifiée pour tout u de X , alors $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge vers F .

La proposition qui suit donne une version "pénalisée" des expériences (1.16) et (1.17) dans le cas où (X, d) est un espace métrique. Nous allons introduire pour cela la notion de transformée (ou régularisée) de Baire d'une fonctionnelle $G : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la transformée de Baire de G par :

$$G^k(x) := \inf_{y \in X} \{g(y) + kd(x, y)\} \quad (1.18)$$

On rappelle ci-dessous les propriétés de G^k . On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $x_0 \in X$ tels que pour tout $u \in X$, $G(u) \geq -\alpha(1 + d(u, x_0))$. Alors G^k vérifie les propriétés suivantes :

- i) G^k est k -Lipschitzienne ;
- ii) $G \geq$ et $(G^k)_{k>0}$ est croissante ;
- iii) Si G est semi-continue inférieurement alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} G^k = G$.

Proposition 1.3.2. Soient (X, d) un espace métrique et une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant : il existe $\alpha > 0$ et $x_0 \in X$ tels que

$$F_n(u) \geq -\alpha(1 + d(u, x_0)) \quad (1.19)$$

alors,

$$\Gamma - \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(u) := \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n^k(u) \quad (1.20)$$

$$\Gamma - \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(u) := \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n^k(u) \quad (1.21)$$

Pour une démonstration nous renvoyons aux livres de H. Attouch, G. Dal Maso et A. Braides. Nous passons maintenant à la définition de la Γ -convergence séquentielle.

Définition 1.3.6. (Γ -convergence (séquentielle)). Soit X un espace topologique. Considérons une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et une fonction $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge séquentiellement vers F en $u \in X$ si les deux assertions suivantes sont vérifiées :

$$\forall u_n \rightarrow u \text{ dans } X \implies F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(u_n) \quad (1.22)$$

$$\exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow u \text{ dans } X \text{ tel que } F(u) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(v_n) \quad (1.23)$$

Lorsque les deux propriétés (1.22) et (1.23) sont vérifiées pour tout u , on dit alors que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge séquentiellement vers F .

On remarque que cette convergence n'est pas comparable à la convergence simple, l'assertion (1.22) étant plus forte que la convergence simple alors que l'assertion (1.23) est plus faible.

Dans le cas où X est un espace vectoriel normé, lorsque dans (1.22) on substitue la convergence faible $u_n \rightharpoonup u$ à la convergence forte, la convergence variationnelle ainsi définie est appelée Mosco-convergence. Evidemment lorsque X est de dimension finie, Γ -convergence et Mosco-convergence coïncident. Il est important de remarquer que cette convergence ne donne pas directement le champ limite u mais plutôt l'énergie limite F . Elle permet d'obtenir la forme variationnelle limite à partir de laquelle on pourra obtenir les champs et la densité d'énergie homogénéisés.

Dans toute la suite, sauf mention contraire, X désignera un espace topologique à base dénombrable de voisinages. Dans ce cas il est facile de montrer que la Γ -convergence (voisinage) et la Γ -convergence (séquentielle) coïncident. Puisque la convergence utilisée dans la thèse est fondée sur le développement asymptotique et sur la construction de suites, la Γ -convergence

utilisée sera séquentielle.

La proposition suivante est une conséquence directe de la Définition 1.3.6.

Proposition 1.3.3. Soient X un espace topologique et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On définit les deux fonctionnelles $\Gamma - \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n$ et $\Gamma - \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n$ pour $u \in X$ par :

$$\Gamma - \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(u) := \min_{u_n \in X} \{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(u_n) : u_n \rightarrow u \} \quad (1.24)$$

$$\Gamma - \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(u) := \min_{u_n \in X} \{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(u_n) : u_n \rightarrow u \} \quad (1.25)$$

Les deux fonctionnelles ainsi définies sont semi-continues inférieurement et la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge vers la fonctionnelle $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ssi

$$\Gamma - \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(u) \leq F \leq \Gamma - \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(u) \quad (1.26)$$

Définition 1.3.7. (Suite minimisante). Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minimisante associée à $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (F_n(u_n) - \inf F_n) = 0$.

Théorème 1.3.3 (Théorème fondamental de la Γ -convergence). Soient X un espace topologique et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}, F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tels que $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$

(i) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minimisante associée à $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ relativement compacte de X , alors toute valeur d'adhérence \bar{u} de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ minimise F et :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_X \{ F_n(u) \} = F(\bar{u}) \quad (1.27)$$

(ii) Si $G \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $(F_n + G)_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge vers $F + G$

L'assertion (ii) est une conséquence directe de la définition de la Γ -convergence, et l'assertion (i) montre que cette convergence est bien "variationnelle".

1.4 Modèles non-locaux

Dans cette partie de nature bibliographique, pour les modèles présentés ci-après, on a gardé les notations des auteurs afin d'éviter toute confusion avec celles liées au modèle développé dans le présent travail.

Les modèles non-locaux nous amènent naturellement aux travaux développés par [Kröner, 1967],[Krumhansl, 1968] et [Eringen et Edelen, 1972]. La théorie de la non-localité considère que la réponse d'un point du matériau dépend de la déformation en ce point ainsi que de la déformation des points voisins (**potentiellement longue distance**). Dans les paragraphes suivantes, on propose de présenter les différentes familles de modèles non-locaux : les modèles non-locaux à gradients et les modèles basés sur une formulation intégrale.

1.4.1 Modèles à gradient

1.4.1.1 Modèles de Peerlings

Une famille de modélisations permet de rendre compte des effets non-locaux, celles des modèles du second gradient. Cette dernière se fonde sur l'introduction de termes cinématiques d'ordre supérieurs dans la relation de comportement du milieu.

Ce type de modèles, dits enrichis, donnent une description plus complète du comportement du milieu en utilisant des équations constitutives d'ordres supérieurs à celles utilisées dans le cas classique. La prise en compte des conditions aux limites additionnelles génère cependant des difficultés d'implémentation non négligeables. Par conséquent, l'implémentation de ces modèles nécessite des procédures complexes.

Formulation explicite : L'idée sous-jacente aux modèles explicites est d'augmenter l'ordre du développement limité permettant de calculer la déformation [Lasry et Belytschko, 1988] ou la déformation équivalente [Peerlings, 1999]. Ainsi, les effets de localisation sont pris en compte grâce à un champ de déformations régularisées.

La déformation équivalente non-locale est liée à la déformation locale et à son laplacien par

la relation :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq} + c\nabla^2\varepsilon_{eq} \quad (1.28)$$

où le paramètre c a la dimension d'une longueur au carré caractérisant le milieu hétérogène. Cette relation peut être déduite par une décomposition en série de Taylor de la déformation équivalente ε_{eq} en négligeant les termes d'ordre 4 et plus [Peerlings *et al.*, 1996b]. Le calcul utilisant cette formulation conduit à une instabilité mécanique dans la phase d'écroissage positive [Askes *et Sluys*, 2002]. C'est en partie pour cette raison qu'on lui préfère généralement une formulation implicite.

Formulation implicite : La forme implicite du modèle à gradient peut être déduite de l'équation (1.28). En supposant $\nabla^2\bar{\varepsilon}_{eq} \approx \nabla^2\varepsilon_{eq}$, on obtient :

$$\varepsilon_{eq} = \bar{\varepsilon}_{eq} - c\nabla^2\bar{\varepsilon}_{eq} \quad \text{sur } \Omega \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial\bar{\varepsilon}_{eq}}{\partial n} = n \frac{\partial\bar{\varepsilon}_{eq}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.30)$$

Avec n le vecteur normal sortant sur le bord $\partial\Omega$. Cette condition permet de retrouver la solution des problèmes homogènes où $\bar{\varepsilon}_{eq} = \varepsilon_{eq}$ [Peerlings *et al.*, 1996a].

Une alternative à cette formulation consiste à appliquer le même raisonnement, mais sous forme tensorielle, afin d'obtenir le tenseur des déformations non-locales $\bar{\varepsilon}_{ij}$ au lieu de la déformation non-locale scalaire $\bar{\varepsilon}_{eq}$. On obtient ainsi :

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} - c\nabla^2\bar{\varepsilon}_{ij} \quad \text{sur } \Omega \quad (1.31)$$

$$\nabla\bar{\varepsilon}.n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.32)$$

Cette approche est adaptée au modèle d'endommagement isotrope en remplaçant la déformation équivalente locale (1.33) par sa version non-locale (1.34)

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i^e \rangle_+)^2} \quad (1.33)$$

où $\langle \varepsilon_i^e \rangle_+$ désigne les valeurs propres positives du tenseur de déformations élastiques.

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \bar{\varepsilon}_i^e \rangle_+)^2} \quad (1.34)$$

L'inconvénient du modèle cité ci-dessus réside dans le fait que la déformation est pondérée par un paramètre scalaire c assimilé à une distance pouvant être considérée comme une portée d'influence non-locale. Le problème est que ce paramètre n'a aucun lien avec la microstructure et correspond juste à un paramètre numérique de régularisation. De plus, les résultats du modèle dépendent sensiblement du maillage. Il présente néanmoins des avantages comme le fait d'être facile à implémenter et d'être très efficace dans le cas monodimensionnel.

1.4.1.2 Modèles à gradients multiples

On présente ici les approches phénoménologiques qui ont été développées dans les années 60. On commence par le modèle du second gradient de [Toupin, 1962] et [Mindlin, 1964], puis on poursuivra avec le modèle de triple gradient de [Mindlin, 1965]. Enfin, la formulation de [Green et Rivlin, 1964] qui généralise ces modèles en tenant compte des gradients de déformation à tous les ordres sera présentée.

A) Modèle du second gradient ([Toupin, 1962] et [Mindlin, 1964])

On considère un matériau élastique de volume V dans un état statique, dont la frontière est notée ∂V . Le vecteur de déplacement en un point quelconque est noté \underline{U} , et $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ est le vecteur position. Le tenseur des petites déformations E est défini par :

$$E_{ij} = \text{sym}(\nabla_j U_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (1.35)$$

On admet que E est dérivable en fonction de la variable d'espace, on note ∇E son gradient

dont les composantes sont notées :

$$\nabla_k E_{ij} = E_{ij,k}.$$

On constate que le tenseur d'ordre 3, ∇E , est symétrique par rapport à ses deux premiers indices, il possède donc 18 composantes pouvant être indépendantes. Dans le cadre de la théorie linéaire du second gradient, on admet que l'énergie élastique est une fonction quadratique de E et ∇E :

$$W = \frac{1}{2} E : \mathbb{C}^{0,0} : E + h E : \mathbb{C}^{0,1} : \nabla E + \frac{h^2}{2} \nabla E : \mathbb{C}^{1,1} : \nabla E \quad (1.36)$$

où h est une longueur interne, à l'échelle de la microstructure. Dans l'expression (1.36), les symboles " : " et " : : " représentent les produits doublement et triplement contractés tels que :

$$\begin{aligned} [\mathbb{C}^{0,0} : E]_{ij} &= C_{ijkl}^{0,0} E_{kl} \\ [\mathbb{C}^{1,1} : \nabla E]_{ijk} &= C_{ijklmn}^{1,1} \nabla E_{lmn} \end{aligned} \quad (1.37)$$

et les exposants 0,0 , 0,1 et 1,1 les ordres (en dérivée) des grandeurs dont on fait le produit contracté (ou doublement et triplement contracté). Par exemple, dans l'équation (1.36), $\mathbb{C}^{0,0}$ est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 tandis que $\mathbb{C}^{0,1}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$ sont les tenseurs d'élasticité du second gradient d'ordre 5 et 6 respectivement. Le tenseur de déformation étant symétrique, cela conduit à des relations d'invariance par permutation des indices qui sont données par :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{0,0} &= C_{jikl}^{0,0} = C_{ijlk}^{0,0}, \\ C_{ijklm}^{0,1} &= C_{jiklm}^{0,1} = C_{ijlkm}^{0,1}, \\ C_{ijklmn}^{1,1} &= C_{jiklmn}^{1,1} = C_{ijkmln}^{1,1} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Ces propriétés correspondent aux symétrie mineures auxquelles s'ajoutent les symétries majeures pour les tenseurs $\mathbb{C}^{0,0}$ et $\mathbb{C}^{1,1}$:

$$C_{ijkl}^{0,0} = C_{klij}^{0,0}, \quad C_{ijklmn}^{1,1} = C_{lmnijk}^{1,1} \quad (1.39)$$

Les lois de comportement sont obtenues à partir des lois d'état. On associe aux variables d'état E et ∇E les variables duales Σ^0 et Σ^1 :

$$\begin{aligned}\Sigma^0 &= \frac{\partial W}{\partial E} = \mathbb{C}^{0,0} : E + h\mathbb{C}^{0,1} : \nabla E \\ \Sigma^1 &= \frac{\partial W}{\partial \nabla E} = h\mathbb{C}^{1,0} : E + h^2\mathbb{C}^{1,1} : \nabla E\end{aligned}\quad (1.40)$$

où Σ^0 est le tenseur des contraintes de Cauchy classique et Σ^1 est appelée hypercontrainte. Ces tenseurs possèdent les mêmes symétries indicielles que E et ∇E à savoir

$$\Sigma_{ij}^0 = \Sigma_{ji}^0 \text{ et } \Sigma_{ijk}^1 = \Sigma_{jik}^1$$

Dans l'équation (1.36), on voit l'intégration des effets des gradients de déformation avec la contribution du paramètre h qui représente la taille caractéristique des éléments microstructuraux. Dans le présent travail, on souhaitera également obtenir un modèle avec second gradient mais avec des paramètres matériaux dépendant de la distribution des inclusions.

B) Modèle du triple gradient ([Mindlin, 1965])

Il est possible de formuler des modèles à gradient en incorporant les dérivées d'ordre supérieur du gradient de la déformation. Ainsi la théorie introduite par [Mindlin, 1965] inclut les effets du second gradient de la déformation (et donc triple gradient du déplacement). Le modèle de Mindlin est formulé avec une énergie dépendant de la déformation E , du gradient de la déformation ∇E et du double gradient de la déformation $\nabla^2 E$ (dont les composantes sont $E_{ij,kl}$) :

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2}E : \mathbb{C}^{0,0} : E + hE : \mathbb{C}^{0,1} : \nabla E \\ &+ \frac{h^2}{2}\nabla E : \mathbb{C}^{1,1} : \nabla E + h^2E : \mathbb{C}^{0,2} :: \nabla^2 E \\ &+ h^3\nabla E : \mathbb{C}^{1,2} :: \nabla^2 E + \frac{h^4}{2}\nabla^2 E :: \mathbb{C}^{2,2} :: \nabla^2 E\end{aligned}\quad (1.41)$$

$\mathbb{C}^{0,2}$, $\mathbb{C}^{1,2}$ et $\mathbb{C}^{2,2}$ sont des tenseurs d'élasticité d'ordre 6, 7 et 8 respectivement. Ils possèdent les propriétés de symétrie :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{(ij)(kl)(mn)}^{0,2} &= \mathbb{C}_{(ij)(mn)(kl)}^{0,2} \\ \mathbb{C}_{(ij)k(pq)(rt)}^{1,2} &= \mathbb{C}_{(ij)k(rt)(pq)}^{1,2} \\ \mathbb{C}_{(ij)(kl)(pq)(rt)}^{2,2} &= \mathbb{C}_{(pq)(rt)(ij)(kl)}^{2,2} = \mathbb{C}_{(kl)(ij)(pq)(rt)}^{2,2} = \mathbb{C}_{(ij)(kl)(rt)(pq)}^{2,2}\end{aligned}\quad (1.42)$$

où (ij) désigne l'invariance par permutation des indices i et j . A partir des lois d'état

associées à W , on définit les variables duales :

$$\begin{aligned}\Sigma^0 &= \frac{\partial W}{\partial E} = \mathbb{C}^{0,0} : E + h\mathbb{C}^{0,1} : \nabla E + h^2\mathbb{C}^{0,2} :: \nabla^2 E \\ \Sigma^1 &= \frac{\partial W}{\partial \nabla E} = h\mathbb{C}^{1,0} : E + h^2\mathbb{C}^{1,1} : \nabla E + h^3\mathbb{C}^{1,2} :: \nabla^2 E \\ \Sigma^2 &= \frac{\partial W}{\partial \nabla^2 E} = h^2\mathbb{C}^{2,0} : E + h^3\mathbb{C}^{2,1} : \nabla E + h^4\mathbb{C}^{2,2} :: \nabla^2 E\end{aligned}\quad (1.43)$$

où Σ^0 , Σ^1 et Σ^2 sont des tenseurs d'ordre 2, 3 et 4 respectivement, ayant les mêmes symétries que E , ∇E et $\nabla^2 E$.

Le modèle donné par l'équation (1.41) est très riche en faisant apparaître les dérivées d'ordre supérieur du gradient de la déformation. Il est probablement inutile d'aller jusqu'au troisième ordre étant données les difficultés potentielles sous-jacentes à l'implémentation numérique et au remplissage des tenseurs d'ordre 8.

C) Modèle de Green et Rivlin([Green et Rivlin, 1964])

Le modèle de Green et Rivlin [Green et Rivlin, 1964] généralise les modèles de [Mindlin, 1964, Mindlin, 1965] en introduisant toutes les dérivées du tenseur des déformations. Le potentiel élastique est choisi de forme :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{n=0} \sum_{m=0} h^{n+m} \nabla^n E \odot_{n+2} \mathbb{C}^{n,m} \odot_{m+2} \nabla^m E \quad (1.44)$$

qui est quadratique par rapport à toutes ses dérivées $\nabla^n E$ ($n = 0, 1, \dots$). Par \odot_n on définit le produit n fois contracté de deux tenseurs d'ordre $\geq n$ et tel que $a \odot_n b$ est obtenu par contraction des n derniers indices de a et des n premiers indices de b . Les tenseurs élastiques $\mathbb{C}^{n,m}$ sont d'ordres $n+m+4$. Le potentiel ainsi défini, introduit une infinité de variables d'état E , ∇E , $\nabla^2 E$, etc. On définit alors, à partir des lois d'état, une infinité de variables duales :

$$\Sigma^n = \frac{\partial W}{\partial \nabla^n E} = \sum_{m=0} h^{n+m} \mathbb{C}^{n,m} \odot_{m+2} \nabla^m E \quad (1.45)$$

où Σ^0 est la contrainte classique et Σ^1 , Σ^2 , etc. sont les hypercontraintes.

Ce modèle généralise l'apparition des ordres élevés du gradient de déformation. Dans le présent travail, on trouvera le même résultat en se basant sur un développement asymptotique. Dans la pratique, nous nous arrêterons à l'ordre 1 faisant apparaître le premier gradient de déformation afin de garder une information sur le phénomène non-local.

1.4.2 Modèle d'endommagement non-local à gradient

Ce paragraphe est consacré à la présentation de modèles non-locaux, à gradient d'endommagement. Il s'agit de fournir un cadre général pour l'écriture de loi d'endommagement à gradient. Il suffit en fait de changer la forme du travail de déformation en y incluant des termes en gradient d'endommagement, ce qui est fait dans le cadre de la théorie linéarisée pour un matériau isotrope. Dans une série de travaux [Pham, 2010], [Pham et Marigo, 2013], [Pham *et al.*, 2011] et [Benallal et Marigo, 2006], les auteurs ont proposé d'introduire des termes en gradient d'endommagement dans le travail de déformation afin de pénaliser la localisation d'endommagement. Le problème d'évolution reste formellement le même par rapport à la loi d'évolution standard d'endommagement et s'écrit toujours en termes des trois principes d'irréversibilité, de stabilité et de conservation de l'énergie.

Nouvelle forme de l'énergie de déformation (endommagement non-local) par rapport à la formulation standard du problème d'endommagement

Dans cette partie, le gradient d'endommagement $\nabla\alpha$ est considéré comme une variable d'état local de même que l'état α d'endommagement. En conséquence, l'état du point matériel est caractérisé par le triplet $(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha)$. Le travail de déformation devient la fonction d'état suivante :

$$W : \mathbb{M}_s^n \times [0, \alpha_m[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) \mapsto W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha)$$

ici \mathbb{M}_s^n désigne l'espace de tenseurs d'ordre 2 avec la dimension de l'espace n . α_m représente la valeur maximale de l'endommagement. Dans le cadre d'une théorie linéarisée, ils développent W au voisinage de " l'état d'équilibre thermodynamique " $(0, \alpha, 0)$ jusqu'à l'ordre 2 en ε et $\nabla\alpha$. Cette linéarisation n'est que partielle puisqu'il n'est pas possible de linéariser en α à cause des fortes variations de rigidité. Cela conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}, \nabla \boldsymbol{\alpha}) &= w(\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \nabla \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2} A(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\
&+ \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \nabla \boldsymbol{\alpha}) + \frac{1}{2} \Gamma(\boldsymbol{\alpha}) \nabla \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \boldsymbol{\alpha}
\end{aligned} \tag{1.46}$$

où le point désigne le produit scalaire entre vecteurs ou tenseurs du même ordre. Dans (1.46) apparaissent les nouvelles fonctions de la variable d'endommagement $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{M}_s^n \otimes \mathbb{R}^n$ et $\Gamma(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{M}_s^n$ alors que $\boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\alpha})$ représente une précontrainte variant avec l'endommagement qui est supposée nulle comme dans le modèle local. Les termes $w(\boldsymbol{\alpha})$ (énergie dissipée) et $\frac{1}{2} A(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ sont dans la partie locale de l'énergie (1.46).

Si nous supposons que le matériau est isotrope et que la variable d'endommagement est un scalaire objectif (i.e. invariant dans tout changement de référentiel), W doit alors satisfaire les conditions d'invariance données par l'équation (1.47). La condition de paramètre non-local scalaire est une limitation du modèle surtout dans le cas de microstructures complexes ou composites avec des distributions d'inclusions complexes, ce qui sera le cas dans la suite de ce travail.

$$W(Q\boldsymbol{\varepsilon}Q^T, \boldsymbol{\alpha}, Q\nabla\boldsymbol{\alpha}) = W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}, \nabla\boldsymbol{\alpha}), \quad \forall Q \in \mathbb{O}^n, \quad \forall (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}, \nabla\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{M}_s^n \times [0, \boldsymbol{\alpha}_m] \times \mathbb{R}^n \tag{1.47}$$

où \mathbb{O}^n désigne le groupe orthogonal. Dans ce cas le vecteur $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\alpha})$ et le tenseur d'ordre trois $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha})$ sont nécessairement nuls, alors que le tenseur d'ordre deux $\Gamma(\boldsymbol{\alpha})$ est proportionnel à l'identité. De sorte à avoir des termes non-locaux régularisants, il faut que $\Gamma(\boldsymbol{\alpha})$ soit défini positif, ce qui permet d'écrire $\Gamma(\boldsymbol{\alpha}) = \gamma(\boldsymbol{\alpha})I$ avec $\gamma(\boldsymbol{\alpha}) > 0$.

En résumé pour un matériau isotrope, en théorie linéarisée et en supposant qu'il n'y ait pas de précontrainte, l'énergie de déformation s'écrit :

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}, \nabla \boldsymbol{\alpha}) = w(\boldsymbol{\alpha}) + \frac{1}{2} A(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \gamma(\boldsymbol{\alpha}) \nabla \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \boldsymbol{\alpha} \tag{1.48}$$

Elle diffère de son homologue local que par l'ajout d'un terme quadratique en $\nabla \boldsymbol{\alpha}$ dont il

est attendu qu'il ait des vertus régularisantes.

À ce stade, la variable d'endommagement a été choisie arbitrairement, elle permet de paramétrer l'évolution des propriétés thermomécaniques du matériau. Une infinité de choix sont possibles via un changement de variable sans changer de modèle. Mais un autre choix tout aussi intéressant en pratique consiste à faire un changement de variable de façon à faire apparaître une constante devant le terme quadratique non-local au lieu de la fonction $\gamma(\alpha)$. Il est même autorisé de prendre cette constante égale à 1. Il suffit pour cela de faire le changement de variable :

$$\alpha \rightarrow D = \Delta(\alpha) := \int_0^\alpha \sqrt{\gamma(\beta)} d\beta \quad (1.49)$$

Toutefois, pour comparer différents matériaux entre eux, il est intéressant de normaliser la variable d'endommagement en la prenant sans dimension et variant par exemple entre 0 et 1 lorsque α varie entre 0 et α_m . Ainsi, en supposant que $\Delta(\alpha_m) < +\infty$ et en faisant le changement de variable $\alpha \rightarrow d := \Delta(\alpha)/\Delta(\alpha_m)$, le travail de déformation peut s'écrire :

$$\tilde{W}(\varepsilon, d, \nabla d) = \tilde{w}(d) + \frac{1}{2} \tilde{A}(d) \varepsilon \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}(d) \nabla d \cdot \nabla d \quad (1.50)$$

où la variable d varie entre 0 et 1 et $\tilde{\gamma} > 0$ est maintenant une constante caractéristique du matériau qui a la dimension d'une force. Cette constante pourrait aussi s'écrire $\tilde{\gamma} = E_0 l^2$, E_0 désignant le module d'Young du matériau sain et $l > 0$ étant donc une longueur caractéristique du matériau.

En conclusion, les auteurs supposent que la variable d'endommagement a été choisie comme une fonction variant dans l'intervalle $[0,1]$ et que $\tilde{\gamma}$ est une constante par rapport à la variable d'endommagement. Cette variable d'endommagement sera toujours désignée par α . En conséquence, la fonction de travail de déformation s'écrit :

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla \alpha) = W_0(\varepsilon, \alpha) + \frac{1}{2} \gamma \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \quad (1.51)$$

avec :

$$W_0(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}A(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\varepsilon}.\boldsymbol{\varepsilon} + w(\boldsymbol{\alpha}) \quad (1.52)$$

La partie locale dépend de la variable $\boldsymbol{\alpha}$, ce qui est bien puisque la partie élastique doit dépendre de l'endommagement.

Le modèle qui sera construit dans le présent travail sera proche de la formulation utilisée pour obtenir le modèle donné ci-dessus par l'équation (1.51). Dans notre étude, on souhaite toutefois ne pas se limiter à un scalaire l qui soit une variable numérique de régularisation. On cherchera à ce que les variables non-locales puissent dépendre explicitement de la microstructure (forme, distribution, etc, des inclusions).

1.4.3 Modèle non-local intégral ou modèle à noyau

Après avoir présenté les modèles à gradients multiples, nous allons maintenant présenter une autre famille de modèles non-locaux fondée sur une formulation intégrale. Ces modèles sont aussi qualifiés de modèles à noyau. Un milieu non-local est un milieu dans lequel au moins un champ variable est sujet à une moyenne spatiale dans un voisinage fini d'un point ([Bažant *et al.*, 1984]). L'avantage d'un tel concept est qu'il est applicable à tout type de modèle continu : modèles ([Bažant et Lin, 1988] et [Jirásek et Zimmermann, 1998]), modèles d'endommagement ([Bazant et Pijaudier-Cabot, 1988], [Rodríguez-Ferran *et al.*, 2005] et [Desmorat *et al.*, 2007]), modèles microplans ([Bažant et Ožbolt, 1990], [Ožbolt et Bažant, 1992] et [Di Luzio, 2007]) et modèles de plasticité ([Strömberg et Ristinmaa, 1996] et [Jirásek et Rolshoven, 2003]). Seule la variable responsable de l'adoucissement est considérée comme non-locale, c'est-à-dire, selon le modèle utilisé, l'endommagement, la déformation plastique, etc. Dans ce type de milieu non-local, la contrainte en un point d'intégration ne dépend pas seulement de la déformation au même point, mais également de la déformation dans un certain voisinage (à une longue distance) décrit par un volume représentatif défini par une longueur caractéristique.

Pour les modèles d'endommagement définis par une déformation équivalente, la déformation équivalente non-locale $\bar{\varepsilon}_{eq}$ s'écrit en tout point x de la structure :

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \frac{1}{V_r(x)} \int_{\Omega} \psi(x-s) \varepsilon_{eq}(s) d\Omega \quad (1.53)$$

où Ω est le volume de la structure, et $V_r(x)$ est le volume représentatif au point x défini par :

$$V_r(x) = \int_{\Omega} \psi(x-s) d\Omega \quad (1.54)$$

$\psi(x-s)$ est une fonction de pondération non-locale. Celle-ci peut être choisie arbitrairement mais la forme la plus répandue est une Gaussienne :

$$\psi(x-s) = \exp\left(\frac{-4 \|x-s\|^2}{l_c}\right) \quad (1.55)$$

l_c est la longueur caractéristique du matériau, appelée plus généralement longueur interne pour un milieu non-local. [Bažant et Pijaudier-Cabot, 1989] ont lié la longueur interne à la zone de microfissuration (voir Figure 1.2). En considérant que l'aire sous la courbe "a" est la même que l'aire sous la courbe "b", la relation suivante peut être établie :

$$l_{FPZ} = \alpha l_c \quad (1.56)$$

avec $\alpha = 1,93$. l_{FPZ} est la largeur de la zone de microfissuration. [Bažant et Pijaudier-Cabot, 1989] ont alors proposé une méthode permettant de déterminer la longueur interne expérimentalement en délocalisant l'endommagement. Ils ont déterminé ainsi la relation $l_c \cong 3.d_a$ où d_a est le diamètre du plus gros granulats présent dans le béton.

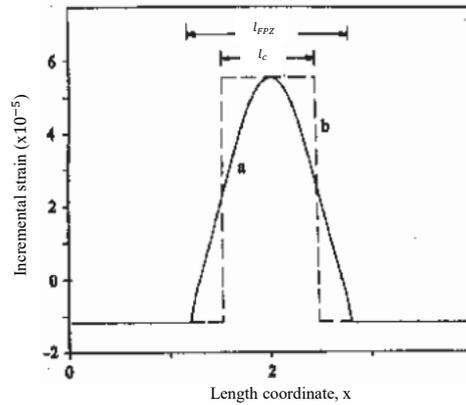


Figure 1.2 – Profil de déformation obtenu analytiquement avec le modèle non-local intégral ([Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987]).

1.4.4 Discussion sur les modèles à gradient et modèles intégraux

Il est notable que les deux formulations non-locales, l'une basée sur l'approche en gradient, l'autre sur l'approche intégrale, sont exactement équivalentes dans le cas du milieu infini et pour une fonction de pondération spécifique [Peerlings *et al.*, 2001].

La relation entre la longueur interne l_c pour le modèle non-local intégral et c pour les approches à gradient a été discutée par plusieurs auteurs. [Jason, 2004] a comparé les courbes force-déplacement, obtenues avec le modèle non-local intégral et l'approche en gradient, sur des tests en flexion trois points. Il a trouvé :

$$\sqrt{c} \approx \frac{l_c}{4} \quad (1.57)$$

Par contre, [Dufour *et al.*, 2008] ont déterminé les deux longueurs internes sur la largeur de la zone de microfissuration d'une barre en traction et ont obtenu :

$$\sqrt{c} \approx \frac{l_c}{2,55} \quad (1.58)$$

Les modèles non-locaux permettent de réaliser une modélisation cohérente de la rupture et du comportement adoucissement des matériaux cimentaires [de Borst *et al.*, 1993], [Peerlings *et al.*, 1996a] et [de Borst, 2002], mais également d'autres matériaux quasi-fragiles comme les alliages métalliques ([Leblond *et al.*, 1994]), les composites ([Geers *et al.*, 1996]), les sols et roches, les polymères, les biomatériaux ou même les nanomatériaux ([Bazant, 2004]).

Tous les modèles présentés ci-dessus sont basés sur une approche à gradient ou intégrale à l'échelle macroscopique. Le paramètre c qui a la dimension d'une longueur au carré caractérisant le milieu hétérogène et la longueur caractéristique l_c , appelée généralement longueur interne pour un milieu non-local, sont des paramètres principalement numériques de régularisation. Ils ne sont pas explicitement reliés avec la microstructure et ils dépendent énormément du maillage. Dans le présent travail, on souhaite développer un modèle régularisé qui prend en considération les paramètres matériaux liés à la microstructure. Dans le prochain paragraphe, on va présenter une autre famille de modèles non-locaux fondée essentiellement sur une formulation variationnelle analytique.

1.4.5 Modèle non-local plus théorique

On s'intéresse ici au comportement macroscopique d'une structure aléatoirement fibrée dont la configuration de référence est le sous-ensemble ouvert $O := \widehat{O} \times (0, h)$ de \mathbb{R}^3 , de base $\widehat{O} := (0, l_1) \times (0, l_2) \subset \mathbb{R}^2$. Plus précisément, on considère la réunion des fibres $T_\varepsilon(\omega) := \varepsilon D(\omega) \times \mathbb{R}$ où $D(\omega) := \cup_{i \in \mathbb{N}} D(\omega_i)$ et $D(\omega_i)$ sont des disques distribués aléatoirement dans \mathbb{R}^2 selon un processus stochastique ponctuel $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^2 associé à l'espace de probabilité $(\Omega_p, \mathcal{A}, P)$.

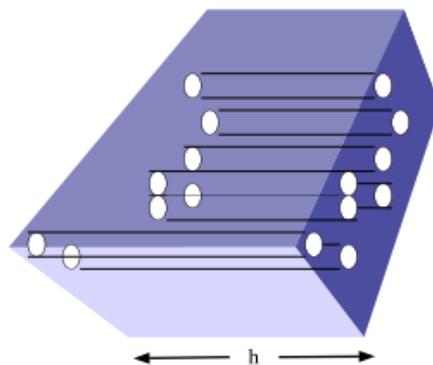


Figure 1.3 – Structure (S) aléatoirement fibrée [Michaille *et al.*, 2011] et [Nait-ali, 2017].

Pour obtenir le comportement limite de la structure complète (S), on commence par étudier séparément le comportement dans la matrice $O \setminus T_\varepsilon$ et dans la fibre T_ε en décrivant la limite variationnelle déterministe de chacune des fonctionnelles énergies F_ε^v et G_ε de $\Omega_p \times L^p(O, \mathbb{R}^3)$ à valeur dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ définies par :

$$F_\varepsilon^v(\omega, u) = \begin{cases} \varepsilon^p \int_{O \setminus T_\varepsilon} f(\nabla u) \, dx \text{ si } u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(O, \mathbb{R}^3), u = v \text{ sur } O \cap T_\varepsilon \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$G_\varepsilon^v(\omega, u) = \begin{cases} \int_{O \cap T_\varepsilon} g(\nabla u) \, dx \text{ si } u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(O \cap T_\varepsilon, \mathbb{R}^3), u = 0 \text{ dans } O \setminus T_\varepsilon \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases}$$

La fonctionnelle G_ε modélise l'énergie mécanique interne de la structure, constituée de l'union T_ε , représentant les fibres cylindriques parallèles fixées sur \widehat{O} . On a seulement une connaissance statistique de leur répartition, dans le sens où leurs positions sont statistiquement homogènes. D'un point de vue mathématique, cela signifie que les sections transversales sont placées au hasard à partir d'un processus ponctuel stationnaire.

La fonctionnelle F_ε^v modélise l'énergie interne dans la matrice $O \setminus T_\varepsilon$ avec un déplacement prescrit le long de la frontière aléatoire $\partial T_\varepsilon \cap O$. La rigidité du matériau mou et élastique qui occupe $O \setminus T_\varepsilon$ est d'ordre ε^p . Le cadre des grandes déformations dans la matrice et les fibres (voir par exemple [Laniel *et al.*, 2008]) et les matériaux solides sont hyper-élastiques. En supposant alors que les deux corps sont parfaitement collés et soumis à un chargement L , le problème $(\mathcal{P}_{H_\varepsilon})$ est obtenu.

$$(\mathcal{P}_{H_\varepsilon}) \quad \min \left\{ H_\varepsilon^v(u) - \int_{\Omega} L \cdot u \, dx : u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3) \right\}$$

où $L \in L^q(O, \mathbb{R}^3)$, $q = \frac{p}{p-1}$ et

$$H_\varepsilon^v(\omega, u) = \begin{cases} \varepsilon^p \int_{O \setminus T_\varepsilon} f(\nabla u) \, dx + \int_{O \cap T_\varepsilon} g(\nabla u) \, dx & \text{si } u \in W_{\Gamma_0}^{1,p}(O, \mathbb{R}^3) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque ε tend vers 0, on obtient un modèle simplifié et déterministe du comportement d'un matériau de type *TexSolTM* [Laniel et al., 2007]. On montre que la Γ -limite de la fonctionnelle H_ε^v est non-locale, elle est plus précisément la somme épigraphique (ou inf-convolution) $F_0 \nabla G_0$ définie par (1.59) où F_0 et G_0 sont les fonctionnelles d'énergie Γ -limites de la matrice et des fibres respectivement.

$$F_0 \nabla G_0(u) := \inf_{v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} \left(F_0(u - v) + G_0(\mathbb{E}v) \right) = \inf_{v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^3)} \left(F_0^v(u) + G_0(\mathbb{E}v) \right) \quad (1.59)$$

La démonstration de ce résultat s'obtient aisément grâce aux limites obtenues pour chacun des deux milieux. La seule difficulté est dans le récollement des deux champs dans la matrice et dans les fibres, i.e., $v_\varepsilon = a(\omega, \cdot)u_\varepsilon$ et $(1 - a(\omega, \cdot))u_\varepsilon$. Ce dernier modèle a été développé dans le cadre de fibres très minces [Bellieud et Bouchitté, 1998], et de particules très fines [Nait-ali, 2018].

1.5 Conclusion

Ce chapitre a eu pour but de donner d'une part les principaux éléments mathématiques (processus ergodiques sous additifs, Γ -convergence) qui serviront de socles à la suite, et d'autre part de donner un aperçu des travaux existant dans la littérature en termes de modélisation non-locale.

Dans le cas des matériaux adoucissants, les modèles locaux conduisent à des problèmes mal posés en raison de l'absence de termes gérant les mécanismes de localisation de la déformation et/ou de l'endommagement. Pour éviter ces problèmes, un terme quadratique du tenseur de gradient de déformation est introduit directement dans l'énergie ([Bazant et Pijaudier-Cabot, 1988]) ou une régularisation impliquant le gradient de la variable

d'endommagement ([Pham et Marigo, 2013]). Le problème de l'évolution associée à ces modèles est obtenu en utilisant les principes d'irréversibilité, la stabilité et le bilan d'énergie.

Les modèles [Pham et Marigo, 2013] et [Bazant et Pijaudier-Cabot, 1988] ont réussi à éviter les pathologies des modèles locaux et sont capables d'approximer la rupture du matériau. Toutefois, l'introduction de termes en gradient dans l'énergie est purement phénoménologique, elle souffre d'un manque d'informations liées à l'échelle microscopique, même si on voit bien l'introduction d'une longueur caractéristique du matériau l . Il en est de même pour le modèle [Peerlings, 1999] avec le paramètre c qui a la dimension d'une longueur au carré caractérisant le milieu. Pour les modèles non-locaux qualifiés de "plus théoriques" [Nait-ali, 2017], [Nait-ali, 2018] et [Michaille *et al.*, 2011], l'implémentation numérique est difficile.

Dans ce contexte, l'objectif de la thèse est de construire par homogénéisation un modèle non-local faisant apparaître le second gradient de déplacement et dont les paramètres non-locaux sont explicitement reliés à la microstructure. On se placera dans le cadre de l'élasticité linéaire pour des matériaux hétérogènes constitués d'inclusions convexes aléatoirement réparties dans une matrice selon un processus stochastique ponctuel. Une première version de ce modèle sera construite dans le prochain chapitre en associant développements asymptotiques et approche énergétique. Cette première version sera mise en oeuvre numériquement sur des cas d'application unidimensionnel et tridimensionnels dans le chapitre 3. Le passage à la limite sur le paramètre d'hétérogénéité η impliqué dans cette première version du modèle, sera réalisé au chapitre 4 en utilisant la Γ -convergence et ses propriétés variationnelles dans le but de cheminer vers une seconde version exploitable en calcul de structure.

Chapitre 2

Modélisation asymptotique

Dans ce chapitre, on présente une approche fondée sur la combinaison des développements asymptotiques avec une approche énergétique dans le cadre de l'homogénéisation aléatoire pour construire un modèle à gradient de déformation fortement connecté à la microstructure. L'alliance de ces deux méthodes, qui plus est dans un cadre stochastique, constitue une des contributions théoriques importantes de la présente thèse.

2.1 Introduction

Les limites de l'approche phénoménologique classique ont incité au développement de l'approche micromécanique (ou méthode de transition d'échelle) depuis les années cinquante. L'homogénéisation [Zaoui, 1997] a pour but de remplacer un matériau hétérogène par un milieu homogène de comportement équivalent à partir d'une description microstructurale. Ce chapitre constitue un premier pas vers cet objectif avec l'ambition simultanée de construire un modèle homogénéisé à gradient de déformation, le tout pour un milieu hétérogène constitué d'inclusions convexes aléatoirement réparties dans une matrice élastique. Dans la première partie, le but est d'appliquer la technique d'homogénéisation par développement asymptotique dans un cadre probabiliste grâce à l'introduction d'un paramètre stochastique ω dans \mathbb{R}^3 associé à une espace probabilisé qui sera tout d'abord présenté. Les développements sont ensuite menés jusqu'à faire apparaître un terme non-local macroscopique. Les termes d'ordre plus élevé du développement asymptotique du champ de déplacement sont aussi présentés. Puis, dans la seconde partie, les développements précédents sont exploités dans le cadre d'une approche énergétique de laquelle émergent notamment les expressions des tenseurs d'élasticité homogénéisés.

2.2 Homogénéisation asymptotique

2.2.1 Généralités

La méthode d'homogénéisation par développement asymptotique a été développée par [Suquet, 1982] et [Francfort, 1983] dans le cadre des milieux hétérogènes périodiques. Cette méthode a été utilisée pour calculer les propriétés thermomécaniques homogénéisées des matériaux composites (module d'élasticité et coefficient de dilatation thermique) ([Dasgupta *et al.*, 1996] et [Nasution *et al.*, 2014]). Cette technique permet par exemple la substitution d'un milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent (voir Figure 2.1) dont la loi de comportement implique le second gradient de déplacement [Forest *et al.*, 2000]. La méthode d'homogénéisation par développement asymptotique est à la fois une excellente approche pour résoudre des problèmes impliquant des phénomènes physiques dans des milieux continus et une technique utile pour étudier le comportement mécanique de composants structuraux élaborés en matériaux composites. Les principaux avantages de cette méthodologie résident dans le fait qu'elle permet

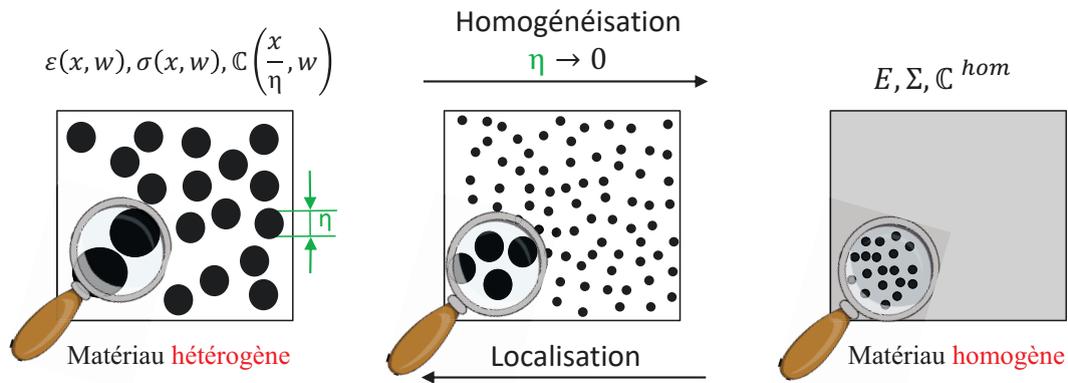


Figure 2.1 – Principe de la technique d’homogénéisation par développement asymptotique.

(i) une réduction significative de la taille du problème (nombre de degrés de liberté) et (ii) qu’elle a la capacité de caractériser les champs microstructuraux de déformations et de contraintes. En fait, contrairement aux méthodes d’homogénéisation en champs moyens, l’homogénéisation par développement asymptotique conduit à des équations spécifiques qui caractérisent ces champs par le processus de localisation. L’un des points forts de ce travail vis à vis de la littérature est le souhait d’utiliser l’approche par développement asymptotique dans un cadre stochastique. L’hypothèse d’ergodicité nous facilitera la tâche en permettant de mettre à profit plusieurs des outils de l’homogénéisation périodique.

2.2.2 Application dans un cadre probabiliste

Dans cette partie, on applique l’approche d’homogénéisation par développement asymptotique pour des composites élastiques linéaires aléatoires définis par un processus stochastique ponctuel. On considère un matériau hétérogène associé à un domaine Ω . Sa microstructure est constituée d’inclusions distribuées aléatoirement dans une matrice élastique. En homogénéisation classique, un tel milieu hétérogène peut être remplacé par un milieu homogène équivalent, munies des propriétés mécaniques homogénéisées (dites effectives), sous réserve que la condition de séparation des échelles soit satisfaite. Cependant, dans les composites réels, les effets d’échelle peuvent entraîner des phénomènes non-locaux spécifiques. Les effets d’échelle peuvent être systématiquement analysés en utilisant la méthode d’homogénéisation par développement asymptotique d’ordre supérieur. Selon cette approche, les champs physiques et mécaniques d’un composite sont représentés par des expansions asymptotiques en puissances d’un petit

paramètre $\eta = \frac{l}{L}$, où l est la taille du volume élémentaire représentatif et L est la taille de l'échantillon/structure. η caractérise l'hétérogénéité de la structure composite. Ceci conduit à une décomposition de la solution finale en macro et micro-composantes. De plus, l'application de l'opérateur d'homogénéisation fournit un lien entre les grandeurs micro et macroscopiques du matériau et permet l'évaluation des propriétés effectives.

Afin de séparer les composantes macro et microscopiques de la solution, les variables lente (x) et rapide (y) sont introduites avec $y = \frac{x}{\eta}$. En utilisant les variables x et y , la règle de différenciation fonctionnelle suivante est utilisée :

$$\frac{d(\cdot)}{dx} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}$$

2.2.2.1 Formulation du problème local

Dans le cadre d'élasticité, le problème local est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{div}(\sigma^\eta(x, \omega)) + f(x, \omega) = 0 \\ \sigma^\eta(x, \omega) = \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : \varepsilon^\eta(x, \omega) \\ \varepsilon^\eta(x, \omega) = \text{sym}(\nabla u^\eta(x, \omega)) \end{cases} \quad x \in \Omega \quad (2.1)$$

Avec (2.1)₁ représentant l'équation d'équilibre, (2.1)₂ définissant la loi de comportement qui dépend des deux échelles ($\frac{x}{\eta} = y$ et x) et (2.1)₃ définissant la relation de compatibilité. De plus nous considérons classiquement ici des conditions aux limites périodiques en déplacement sur les bords de Ω . La force volumique $f(x, \omega)$ est classiquement considérée négligeable. Par $\mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right)$ on définit le tenseur d'ordre 4 des modules élastiques du milieu hétérogène; il est supposé constant par phase. Les interfaces entre les inclusions et la matrice sont considérées comme parfaitement collées. Ceci se traduit par la continuité aux interfaces du champ de déplacement $u^\eta(x, \omega)$ et du vecteur contrainte, $t^\eta(x, \omega) = \sigma^\eta(x, \omega) \cdot n$ avec n le vecteur normal sortant.

Dans le système précédent, les symboles div et ∇ dénotent respectivement les opérations différentielles "divergence" et "gradient". Ces opérations peuvent être décomposées en deux

parties :

$$\nabla(\cdot) = \nabla_x(\cdot) + \frac{1}{\eta} \nabla_y(\cdot)$$

et

$$\operatorname{div}(\cdot) = \operatorname{div}_x(\cdot) + \frac{1}{\eta} \operatorname{div}_y(\cdot)$$

où les indices x et y correspondent aux dérivées par rapport aux variables x et y . Le problème se réécrit alors en conservant les conditions aux limites périodique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_x(\sigma^\eta(x, \omega)) + \frac{1}{\eta} \operatorname{div}_y(\sigma^\eta(x, \omega)) + f(x, \omega) = 0 \\ \sigma^\eta(x, \omega) = \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : \varepsilon^\eta(x, \omega) \\ \varepsilon^\eta(x, \omega) = \operatorname{sym}\left(\nabla_x u^\eta(x, \omega) + \frac{1}{\eta} \nabla_y u^\eta(x, \omega)\right) \end{array} \right. \quad x \in \Omega \quad (2.2)$$

Dans le cadre de cette thèse, on fait dépendre toutes les équations du paramètre ω caractérisant la distribution aléatoire des inclusions considérée. On définit en effet $S_\eta(\omega)$ l'ensemble des formes convexes de taille η et de centres

$$\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^3$$

Ces centres sont aléatoirement distribués suivant le processus stochastique appartenant à l'espace probabilisé (Ω_p, A, P) décrit dans le prochain paragraphe.

2.2.2.2 Définition de l'espace probabilisé adéquat

Ce paragraphe s'appuie sur la thèse de [Nait-Ali, 2012] et sur le livre de [Attouch *et al.*, 2014].

Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 , on note $\mathbb{M}^{3 \times 3}$ l'espace des matrices 3×3 , Y la cellule unitaire $(0, 1)^3 \in \mathbb{R}^3$ et

$$nY := (0, n)^3.$$

Dans la suite de cette partie on considérera la cellule nY comme un V.E.R.D (Volume Élémentaire Représentatif Déterministe). L'existence de ce V.E.R.D est donné grâce à l'hypothèse

d'ergodicité (*section 1.3.1*) et ses propriétés (*section 1.3.1.2*).

Soit $\delta > 0$ et A un ensemble non vide de \mathbb{R}^3 , on définit :

$$A_\delta := \{x \in A : d(x, \mathbb{R}^3 \setminus A) > \delta\}$$

A_δ représente tous les points dans l'ensemble A situés à une distance δ du bord (voir Figure 2.2). Cela permettra de garder une distance entre les inclusions, aspect important pour le passage à la limite qui sera effectué au chapitre 4. Pour tout ensemble A de \mathbb{R}^3 , $|A|$ est la mesure de Lebesgue de A et $\#(A)$ son cardinal lorsqu'il est fini.

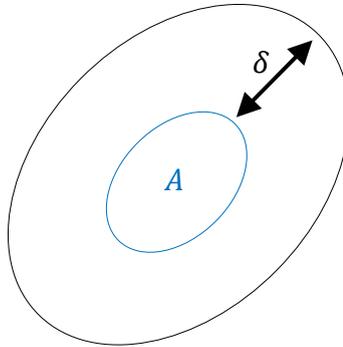


Figure 2.2 – Représentation de l'ensemble A .

Dans notre problème, l'aspect aléatoire concerne seulement la position des centres de chaque inclusion dans \mathbb{R}^3 . On définit l'ensemble Ω_p des centres d'inclusions par

$$\Omega_p = \{(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} : \omega_i \in \mathbb{R}^3, |\omega_i - \omega_j| \geq d \text{ pour } i \neq j\}$$

où $0 < d \leq 1$. Cela signifie que les centres sont distants d'au moins d garantissant que les inclusions ne s'intersectent pas. Le rayon est donc inférieur à $\delta < 0.5 * d$ dans le cas d'inclusions sphériques. Les inclusions sont définies par $S^\eta(\omega)$ centrées en ω_i .

Définissons pour tout $z \in Z^3$ l'opérateur de translation

$$\begin{aligned}\tau_z : \Omega_p &\rightarrow \Omega_p \\ \omega &\mapsto \tau_z \omega = \omega - z.\end{aligned}$$

On remarque que $S^n(\tau_z \omega) = S^n(\omega) - z$. Cela correspond à la translation de la sphère $S^n(\omega)$. On suppose alors l'existence d'une mesure de probabilité sur (Ω_p, A, P) , vérifiant le système des trois axiomes suivants :

- (A₁) Distribution "riche" : $P(\{\omega \in \Omega_p : |Y \cup S(\omega)| > 0\}) = 1$
- (A₂) Stationarité : $\forall z \in Z^3, \tau_z \# P = P$ où $\tau_z \# P$ est la probabilité image de P par τ_z
- (A₃) Indépendance asymptotique : pour tous les ensembles E et F de A

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} P(\tau_z E \cap F) = P(E)P(F)$$

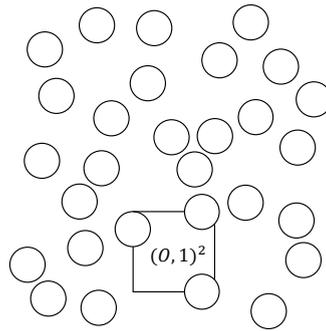


Figure 2.3 – Représentation de la non rareté de la distribution d'inclusions.

Autrement dit 2.2.1. — *i) La taille de la cellule Y est choisie de façon à fixer le générateur du groupe $(\tau_z)_{z \in Z^3}$. La condition (A₂) signifie que les fonctions aléatoires X définies sur Ω_p sont statistiquement homogènes dans le sens où X et $X \circ \tau_z$ ont la même loi de probabilité, i.e.,*

$$X \# P = X \circ \tau_z \# P.$$

On peut traduire cela par le fait que lorsque l'on déplace notre V.E.R dans Y , la répartition des sphères est statistiquement la même en fraction volumique et nombre, etc...(voir Figure (2.3)).

- ii) Les conditions (A_1) et (A_2) expriment la non rareté des inclusions. Autrement dit lorsque l'on déplace la fenêtre Y dans le domaine on intercepte (presque sûrement) toujours au moins une partie d'inclusion. En effet, pour toute fenêtre $A = Y + z$.

$$\begin{aligned} P(\{\omega : |A \cap S(\omega)| > 0\}) &= P(\{\omega : |Y \cap (S(\omega) - z)| > 0\}) \\ &= P(\{\omega : |Y \cap (D(\tau_z \omega))| > 0\}) \\ &= P(\{\omega : |Y \cap (D(\omega))| > 0\}) = 1. \end{aligned}$$

on remarque que la fonction volumique $\int_{\Omega} |Y \cap S(\omega)| dP(\omega)$ est strictement positive.

- iii) La condition (A_3) exprime une indépendance asymptotique : les évènements $\tau_z E$ et F sont indépendants pour z assez grand. D'après la Définition 1.3.4, cet axiome est une condition suffisante pour assurer l'ergodicité de $(\Omega_p, A, P, (\tau_z)_{z \in Z})$, ainsi que la séparation des échelles.
- iv) Considérons $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la répartition des centres des sphères de \mathbb{R}^3 en empilement hexagonal. Alors cette distribution est maximale dans le sens suivant :

$$\forall \omega \in \Omega_p, |Y \cap S_{\eta}(\omega)| \leq |Y \cap S_{\eta}(\bar{\omega})| \quad \text{presque sûrement dans } \Omega_p.$$

Cette propriété de distribution maximale sera utile pour certaines majorations dans les chapitres qui vont suivre.

Voici comme exemple simple le cas de l'échiquier aléatoire Figure 2.4.

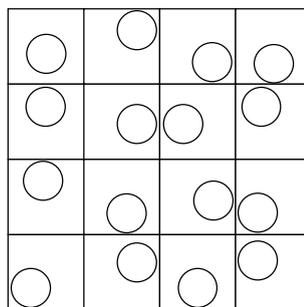


Figure 2.4 – Distribution dans le cas d'un échiquier aléatoire.

Exemple 2.2.1 (échiquier aléatoire). Soient $0 < d \leq 1$ comme précédemment, et un ensemble dénombrable

$$\Omega_0 = \{x_k : x_k \in Y_{d/2}, k \in \mathbb{N}\}$$

ainsi que

$$\Omega_p := \prod_{z \in \mathbb{Z}^3} \Omega_z \quad \text{où} \quad \Omega_z = \Omega_0 + z, \quad \forall z \in \mathbb{Z}^3$$

(voir Figure 2.4). On munit Ω_p de la σ -algèbre A générée par les sphères de Ω . Pour une famille $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée de \mathbb{R}^3 satisfaisant

$$0 \leq \alpha_k \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k = 1$$

on considère la mesure de probabilité $\mu_0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \delta_{x_k}$ sur Ω_0 et la mesure produit $P = \prod_{z \in \mathbb{Z}^3} \mu_z$ on (Ω_p, A) où $\mu_z = \mu_0$ pour tout $z \in \mathbb{Z}^3$, il est facile de voir que P vérifie les axiomes $(A_1) - (A_3)$.

2.2.2.3 Développement asymptotique du champ de déplacement

En s'appuyant sur le principe de la méthode d'homogénéisation par développement asymptotique, le champ de déplacement peut être estimé à l'échelle macroscopique Ω et microscopique Y sous la forme d'un développement en puissance de η :

$$\begin{aligned} u^\eta(x, \omega) &= u^0(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \eta^1 u^1(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \eta^2 u^2(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \eta^3 u^3(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{n=+\infty} \eta^n u^n(x, \frac{x}{\eta}, \omega) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Où chaque terme $u^n(x, \frac{x}{\eta}, \omega)$ dépend de la variable globale x , de la variable locale $y = x/\eta$ et de la variable de distribution aléatoire ω des centres des inclusions. Le premier terme u^0 représentera la partie homogénéisée de la solution et ne dépendra que de la variable lente comme démontré ci-après. Les termes suivants $u^n, n = 1, 2, 3, \dots$, fournissent des corrections d'ordres supérieurs et décrivent les variations locales du déplacement à l'échelle des hétérogénéités.

En utilisant l'expansion asymptotique (2.3) du déplacement dans (2.2)₃, la déformation devient alors :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^\eta(x, \omega) &= \frac{1}{\eta} \varepsilon_y(u^0) + \varepsilon_x(u^0) + \varepsilon_y(u^1) + \eta[\varepsilon_x(u^1) + \varepsilon_y(u^2)] + \eta^2[\varepsilon_x(u^2) + \varepsilon_y(u^3)] + \dots \\
&= \frac{1}{\eta} \varepsilon_y(u^0) + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \eta^n \varepsilon^n(u^n, u^{n+1})
\end{aligned} \tag{2.4}$$

où $\varepsilon^n(u^n, u^{n+1}) = \varepsilon_x(u^n) + \varepsilon_y(u^{n+1})$. L'opérateur ε_x dénote le gradient symétrisé par rapport à la variable lente, $\varepsilon_x = (\nabla_x + \nabla_x^t)/2$, tandis que ε_y est le gradient symétrisé par rapport à la variable rapide, $\varepsilon_y = (\nabla_y + \nabla_y^t)/2$. Dans (2.4) le champ de déformation doit rester fini lorsque $\eta \rightarrow 0$. Ceci suggère que :

$$\varepsilon_y(u^0) = 0 \quad \text{et} \quad u^0(x, \frac{x}{\eta}, \omega) = U^0(x) \tag{2.5}$$

Le déplacement $u^0(x, \frac{x}{\eta}, \omega)$ dépend de la variable x uniquement. La méthode d'homogénéisation par développement asymptotique est fondée sur l'hypothèse suivante concernant le tenseur de contrainte de Cauchy σ :

$$\begin{aligned}
\sigma^\eta(x, \omega) &= \sigma^0(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \eta^1 \sigma^1(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \eta^2 \sigma^2(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \eta^3 \sigma^3(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{n=+\infty} \eta^n \sigma^n(x, \frac{x}{\eta}, \omega)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

En utilisant l'équation (2.6), l'équation d'équilibre (2.2)₁ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\eta} \operatorname{div}_y(\sigma^0) &+ \operatorname{div}_x(\sigma^0) + \operatorname{div}_y(\sigma^1) + \eta[\operatorname{div}_x(\sigma^1) + \operatorname{div}_y(\sigma^2)] \\
&+ \eta^2[\operatorname{div}_x(\sigma^2) + \operatorname{div}_y(\sigma^3)] + \dots + f(x, \omega) = 0 \\
&= \frac{1}{\eta} \operatorname{div}_y(\sigma^0) + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \eta^n [\operatorname{div}_x(\sigma^n) + \operatorname{div}_y(\sigma^{n+1})] + f(x, \omega) = 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Par identification, $f(x, \omega)$ est associée seulement à l'ordre zéro quand. Cela conduit aux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^0) = 0 \\ \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^0) + \operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^1) + f(x, \boldsymbol{\omega}) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2.2.4 Les problèmes d'homogénéisation et leurs solutions

Pour des valeurs successives de n (i.e pour des ordres successifs de correction), il est possible d'établir des systèmes d'équations différentielles en cascade à condition que la limite des équations existe quand η tend vers zéro. Dans les paragraphes suivants, cette méthodologie est illustrée jusqu'à l'ordre 2 et les solutions associées en termes de déplacement sont obtenues en considérant des conditions aux limites périodiques (voir [Sab, 1992]). Ensuite, on termine par la construction de la solution générale par sommation des solutions précédentes.

Problème d'ordre 0

Le premier système hiérarchique d'équations (sans correction) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \boldsymbol{\omega}\right) : (\boldsymbol{\varepsilon}_x(u^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^1)) \\ \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^0) + \operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^1) + f(x, \boldsymbol{\omega}) = 0 \\ u^0, u^1 \text{ périodiques} \end{cases} \quad (2.9)$$

où u^0 est donné par (2.5) et $\boldsymbol{\varepsilon}_x(u^0) = \boldsymbol{\varepsilon}_x(U^0) = E^0(x)$ est la déformation macroscopique à l'ordre 0.

Problème d'ordre 1

Le second système hiérarchique d'équations (premier ordre de correction) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \boldsymbol{\omega}\right) : (\boldsymbol{\varepsilon}_x(u^1) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^2)) \\ \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^1) + \operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^2) = 0 \\ u^1, u^2 \text{ périodiques} \end{cases}$$

Le problème associé à l'ordre 1 peut être interprété comme un problème d'élasticité linéaire en $E^0(x)$ caractérisant le chargement appliqué. En conséquence, la solution de ce problème peut se définir comme suit :

$$\begin{aligned} u^1(x, \frac{x}{\eta}, \omega) &= U^1(x) + \chi^0(y, \omega) : \nabla_x U^0(x) \\ &= U^1(x) + \chi^0(y, \omega) : E^0(x) \end{aligned}$$

où le champ $U^1(x)$ apparaît comme une constante d'intégration pour la variable y . $\chi^0(y, \omega)$ est un correcteur élastique ou fonction caractéristique, de moyenne nulle $\langle \chi^0(y, \omega) \rangle_Y = 0$. Le champ de déformation, $\varepsilon^0(u^0, u^1)$, s'écrit alors :

$$\varepsilon^0(u^0, u^1) = E^0(x) + \varepsilon_y(u^1) = \mathbb{L}^0(y, \omega) : E^0(x)$$

où $\mathbb{L}^0(y, \omega)$ dénote le tenseur de localisation d'ordre 4, défini par :

$$\mathbb{L}^0(y, \omega) = \mathbb{1} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \chi^0(y, \omega)}{\partial y} + \frac{\partial (\chi^0(y, \omega))^t}{\partial y} \right\} \quad (2.10)$$

avec $\mathbb{1}$ tenseur d'identité d'ordre 4.

Le développement à cet ordre fait émerger une déformation macroscopique $E^0(x)$. On souhaite ici faire apparaître des contributions non-locales qui font intervenir non seulement la déformation mais aussi son gradient. Pour cela, il faut continuer le développement à un ordre supérieur.

Problème d'ordre 2

Le troisième système hiérarchique d'équations (deuxième ordre de correction) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \boldsymbol{\omega}\right) : (\boldsymbol{\varepsilon}_x(u^2) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^3)) \\ \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^2) + \operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}^3) = 0 \\ u^2, u^3 \text{ périodiques} \end{cases}$$

Les champs mécaniques issus du développement à l'ordre 1 dépendent des champs macroscopiques $U^1(x)$ et $E^0(x)$ qui apparaissent dans le problème d'ordre 2 comme variables de chargement. Le problème d'ordre 2 peut être interprété comme un problème d'élasticité linéaire en $E^1(x) = \boldsymbol{\varepsilon}_x(U^1)$ et $\nabla_x E^0(x)$. Ainsi, avec un raisonnement similaire à celui mené pour le problème d'ordre 1 précédent, la solution s'écrit :

$$u^2\left(x, \frac{x}{\eta}, \boldsymbol{\omega}\right) = U^2(x) + \boldsymbol{\chi}^0(y, \boldsymbol{\omega}) : E^1(x) + \boldsymbol{\chi}^1(y, \boldsymbol{\omega}) : \nabla_x E^0(x)$$

où le champ $U^2(x)$ apparaît comme une constante d'intégration pour la variable y . $\boldsymbol{\chi}^1(y, \boldsymbol{\omega})$ est un correcteur élastique à moyenne nulle, $\langle \boldsymbol{\chi}^1(y, \boldsymbol{\omega}) \rangle_{Y=0} = 0$. Par suite, le champ de déformation, $\boldsymbol{\varepsilon}^1(u^1, u^2)$, s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1(u^1, u^2) = \boldsymbol{\varepsilon}_x(u^1) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^2) = \mathbb{L}^0(y, \boldsymbol{\omega}) : E^1(x) + \mathbb{L}^1(y, \boldsymbol{\omega}) : \nabla_x E^0(x)$$

où $\mathbb{L}^0(y, \boldsymbol{\omega})$ est donné par (2.10) et $\mathbb{L}^1(y, \boldsymbol{\omega})$, appelé tenseur de localisation, s'écrit comme suit :

$$\mathbb{L}^1(y, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\chi}^0(y, \boldsymbol{\omega}) \otimes \boldsymbol{\delta} + (\boldsymbol{\chi}^0(y, \boldsymbol{\omega}))^t \otimes \boldsymbol{\delta}) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}^1(y, \boldsymbol{\omega})}{\partial y} + \frac{\partial (\boldsymbol{\chi}^1(y, \boldsymbol{\omega}))^t}{\partial y} \right\}$$

Dans cette équation, \otimes est l'opérateur de produit tensoriel entre deux tenseurs et $\boldsymbol{\delta}$ désigne ici le tenseur identité d'ordre 2.

Les développements précédents jusqu'à l'ordre 2 ont permis de faire émerger le gradient de déformation ($\nabla_x E^0(x) = \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon}_x(u^0(x))$) qui traduit le phénomène de non-localité. L'un des apports de cette stratégie d'homogénéisation est la présence d'un terme devant le gradient de

déformation dépendant de paramètres microstructuraux tels que la distribution des inclusions, leurs morphologie, etc. L'objectif que nous nous étions fixés de faire apparaître le gradient de déformation étant atteint, il est à présent inutile d'aller à des ordres supérieurs. Le prochain paragraphe s'attache à construire la solution générale du problème.

Solution générale

Elle est obtenue en sommant les champs solutions des problèmes d'ordre 0, 1, 2. Rappelons que les champs 0, 1, et 2 ont pour expressions :

$$\begin{aligned} u^0(x, \frac{x}{\eta}, \omega) &= U^0(x) \\ u^1(x, \frac{x}{\eta}, \omega) &= U^1(x) + \chi^0(y, \omega) : \nabla_x U^0(x) \\ u^2(x, \frac{x}{\eta}, \omega) &= U^2(x) + \chi^0(y, \omega) : E^1(x) + \chi^1(y, \omega) : \nabla_x E^0(x) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dans (2.11), on remarque que les champs de déplacement à l'ordre n sont composés d'une constante d'intégration $U^n(x)$ ($n = 0, 1, 2$), qui représente la translation du centre géométrique de la cellule. On peut également l'interpréter comme un déplacement macroscopique. Puis on ajoute à ce dernier un terme linéaire qui dépend de la variation des solutions aux ordres précédents et d'un tenseur caractéristique de moyenne nulle à l'échelle locale. Le champ de déplacement total défini par (2.3) peut donc s'écrire sous la forme :

$$u^n(x, \omega) = U(x) + \eta \chi^0(y, \omega) : E(x) + \eta^2 \chi^1 : \nabla_x E(x) + \dots$$

dans laquelle on a introduit les quantités :

$$\begin{cases} U(x) = U^0(x) + \eta U^1(x) + \eta^2 U^2(x) + \dots \\ E(x) = E^0(x) + \eta E^1(x) + \dots \end{cases} \quad (2.12)$$

$\nabla_x E(x)$ désigne le gradient du tenseur des déformations macroscopiques $E(x)$. Les tenseurs $\chi^0(y, \omega)$ d'ordre 3 et χ^1 d'ordre 4 sont des correcteurs élastiques (ou fonctions caractéristiques), de moyenne nulle sur le V.E.R (Y). Ces tenseurs ne dépendent pas de la solution à l'échelle

macroscopique, mais dépendent uniquement des paramètres microstructuraux tels que les propriétés des phases, leurs distribution, tailles, et morphologies.

Avec les développements des champs mécaniques, on veut procéder désormais à une première transition d'échelle dans le but de dériver une formulation de l'énergie totale impliquant non seulement une contribution locale mais aussi des termes non-locaux.

2.3 Méthode énergétique

La loi de comportement en tout point du milieu continu est caractérisée par un potentiel élastique fonction strictement convexe et coercive. [Tran *et al.*, 2012] ont présenté une formulation du modèle macroscopique incluant les gradients de la déformation. Elle est fondée sur une généralisation du lemme de Hill-Mandel qui permet d'inclure les termes de la série à tous les ordres. En introduisant ici le paramètre de la distribution stochastique ω , l'énergie élastique macroscopique est donnée par l'équation ci-dessous :

$$W^{(\eta)}(u^\eta) = W(u^0, u^1, u^2) = \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} \left(\varepsilon^\eta(x, \omega) : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : \varepsilon^\eta(x, \omega) \right) dx dy \quad (2.13)$$

En substituant (2.4) dans la fonction de l'énergie (2.13) et en regroupant les termes de même puissance en η , on obtient :

$$W^{(\eta)}(u^\eta) = W(u^0, u^1, u^2, \dots) = \frac{1}{\eta^2} W^{(-2)} + \frac{1}{\eta} W^{(-1)} + W^{(0)} + \eta W^{(1)} + \eta^2 W^{(2)} + \dots \quad (2.14)$$

Avec :

Ordre (-2)

$$\frac{1}{\eta^2} W^{(-2)}(u^0) = \frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega \times Y} \frac{1}{2} \varepsilon_y(u^0) : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : \varepsilon_y(u^0) dx dy$$

Ordre (-1)

$$\frac{1}{\eta} W^{(-1)}(u^0, u^1) = \frac{1}{\eta} \int_{\Omega \times Y} [\boldsymbol{\varepsilon}_x(u^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^1)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \boldsymbol{\omega}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^0) dx dy$$

Ordre (0)

$$W^{(0)}(u^0, u^1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \times Y} [\boldsymbol{\varepsilon}_x(u^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^1)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \boldsymbol{\omega}\right) : [\boldsymbol{\varepsilon}_x(u^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^1)] dx dy - \int_{\Omega \times Y} f u^0 dx dy$$

avec $\int_{\Omega \times Y} f dx dy = 0$

Ordre (1)

$$\eta W^{(1)}(u^0, u^1, u^2) = \eta \int_{\Omega \times Y} [\boldsymbol{\varepsilon}_x(u^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^1)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \boldsymbol{\omega}\right) : [\boldsymbol{\varepsilon}_x(u^1) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^2)] dx dy$$

Dans le présent travail, les développements analytiques ont été réalisés jusqu'au premier ordre de correction de l'énergie afin d'introduire le second gradient de déplacement qui représente le noyau du terme régularisé. Le paragraphe suivant s'attache à présenter le problème de minimisation d'ordre η^0 , puis celui d'ordre η^1 qui permettra finalement l'identification du terme de second gradient dans l'expression de l'énergie.

2.3.1 Problème de minimisation d'ordre η^0

Les champs de déplacement u^0 et u^1 sont les solutions du problème de minimisation de la fonction quadratique $W^{(0)}$ donnée par :

$$W^{(0)}(u^0, u^1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \times Y} [\boldsymbol{\varepsilon}_x(u^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^1)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \boldsymbol{\omega}\right) : [\boldsymbol{\varepsilon}_x(u^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(u^1)] dx dy \quad (2.15)$$

En substituant (2.11)₂ pour u^1 dans (2.15), on trouve :

$$W^{(0)}(u^0, u^1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \times Y} \varepsilon_x(u^0) : [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \varepsilon_x(u^0) dx dy \quad (2.16)$$

Avec $\varepsilon_x(u^0) = E^0(x)$, la déformation macroscopique, on obtient :

$$W^{(0)}(u^0, u^1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{A}^{(0,0)} : E^0(x) dx \quad (2.17)$$

où $\mathbb{A}^{(0,0)}$, tenseur élastique effectif, est donné par l'expression suivante :

$$\mathbb{A}^{(0,0)} = \int_Y [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] dy \quad (2.18)$$

et où l'on rappelle que $\chi^0(y, \omega)$ est le tenseur de la fonction caractéristique dépendant de la distribution d'inclusions, $\mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right)$ le tenseur d'élasticité d'ordre 4 du matériau hétérogène, et $\mathbb{1}$ représente le tenseur d'identité d'ordre 4.

2.3.2 Problème de minimisation d'ordre η^1 et identification du terme du second gradient

L'expression précédente de l'énergie est une forme classique qui ne contient pas le terme du second gradient de déplacement. On poursuit donc le développement à l'ordre supérieur.

Les champs de déplacement u^0 , u^1 et u^2 sont les solutions du problème de minimisation de la fonction quadratique donnée par :

$$\eta W^{(1)}(u^0, u^1, u^2) = \eta \int_{\Omega \times Y} [\varepsilon_x(u^0) + \varepsilon_y(u^1)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : [\varepsilon_x(u^1) + \varepsilon_y(u^2)] dx dy \quad (2.19)$$

En substituant (2.11)₂ et (2.11)₃ pour u^1 et u^2 , l'énergie $W^{(1)}$ se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\eta W^{(1)}(u^0, u^1, u^2) &= \eta \int_{\Omega \times Y} [\varepsilon_x(u^0) : (\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega))] : \mathbb{C}(\frac{x}{\eta}, \omega) : [(\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)) : \nabla_x U^1(x)] dx dy \\
&+ \eta \int_{\Omega \times Y} [\varepsilon_x(u^0) : (\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega))] : \mathbb{C}(\frac{x}{\eta}, \omega) : \chi^0(y, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx dy \\
&+ \eta \int_{\Omega \times Y} [\varepsilon_x(u^0) : (\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega))] : \mathbb{C}(\frac{x}{\eta}, \omega) : \nabla_y \chi^1(y, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx dy
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Avec $\varepsilon_x(u^0) = E^0(x)$ et $\varepsilon_x(U^1) = E^1(x)$ qui représentent respectivement les déformations macroscopiques à l'ordre 0 et 1, l'équation (2.20) devient :

$$\begin{aligned}
\eta W^{(1)}(u^0, u^1, u^2) &= \eta \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{B}^{(0,1)} : E^1(x) dx + \eta \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{C}^{(0,0)} : \nabla_x E^0(x) dx \\
&+ \eta \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{D}^{(0,0)} : \nabla_x E^0(x) dx
\end{aligned} \tag{2.21}$$

avec :

$$\begin{cases}
\mathbb{B}^{(0,1)} = \int_Y [(\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega))] : \mathbb{C}(\frac{x}{\eta}, \omega) : [(\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega))] dy \\
\mathbb{C}^{(0,0)} = \int_Y [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \mathbb{C}(\frac{x}{\eta}, \omega) : \chi^0(y, \omega) dy \\
\mathbb{D}^{(0,0)} = \int_Y [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \mathbb{C}(\frac{x}{\eta}, \omega) : \nabla_y \chi^1(y, \omega) dy
\end{cases} \tag{2.22}$$

Dans l'équation (2.21), on a obtenu le premier gradient de déformation $\nabla_x E^0(x)$ qui est équivalent au second gradient du champ de déplacement $\nabla \nabla_x U^0$. Il représente la clé principale du terme régularisé. De plus, trois tenseurs d'élasticité homogénéisés ($\mathbb{B}^{(0,1)}$, $\mathbb{C}^{(0,0)}$ et $\mathbb{D}^{(0,0)}$) émergent naturellement dans l'équation (2.21). Ce sont des tenseurs d'ordre 4, 3 et 5 respectivement et leurs expressions sont données par le système (2.22). On notera que le premier de ces tenseurs $\mathbb{B}^{(0,1)}$, a la même expression que celui apparu à l'ordre 0, $\mathbb{A}^{(0,0)}$, donnée par (2.18). A travers les tenseurs caractéristiques et leurs gradients ($\nabla_y \chi^0(y, \omega)$ et $\nabla_y \chi^1(y, \omega)$), la distribution aléatoire est prise en compte lors de la transition d'échelle et un effet non-local est également présent au sein des tenseurs homogénéisés.

2.4 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, on a combiné les développements asymptotiques et la méthode variationnelle pour construire un modèle à gradient de déformation pour matériaux hétérogènes constitués d'inclusions réparties selon un processus stochastique dans une matrice élastique linéaire. Une séparation des ordres de l'énergie initiale a conduit à un système de problèmes de minimisation successifs grâce à l'ergodicité et à ses propriétés. Selon l'équation (2.14) en s'arrêtant à l'ordre 1, suffisant pour faire apparaître le second gradient de déplacement, et avec $\frac{1}{\eta^2}W^{(-2)} = \frac{1}{\eta}W^{(-1)} = 0$, l'énergie totale homogénéisée est finalement obtenue sous la forme :

$$\begin{aligned} W^{(\eta)}(u^0, u^1, u^2) &= W^{(0)} + \eta W^{(1)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{A}^{(0,0)} : E^0(x) dx + \eta \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{B}^{(0,1)} : E^1(x) dx \\ &\quad + \eta \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{C}^{(0,0)} : \nabla_x E^0(x) dx + \eta \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{D}^{(0,0)} : \nabla_x E^0(x) dx \end{aligned} \quad (2.23)$$

Cette énergie implique quatre tenseurs d'élasticité homogénéisés donnés par (2.18) et (2.22) richement connectés à la microstructure, et ayant par ailleurs un caractère non-local qui s'ajoute à la non-localité due à la présence du second gradient de déplacement dans l'expression (2.23). On s'arrête ici à l'ordre 1 de l'énergie. En continuant le développement aux ordres plus élevés, on obtiendrait un terme quadratique en $\nabla_x E(x)$. Le prochain chapitre s'attache à la mise en oeuvre numérique de cette première version de modélisation, le passage à la limite sur le paramètre η faisant l'objet du chapitre 4.

Chapitre 3

Mise en oeuvre du modèle

L'objectif de ce chapitre est de tester le modèle non-local obtenu dans le chapitre précédent selon une approche progressive. Cette dernière commencera par l'évaluation de l'énergie à l'ordre 0 dans un cas simple, unidimensionnel, et se poursuivra par le traitement de l'énergie complète pour des microstructures tridimensionnelles de complexité morphologique croissante.

3.1 Introduction

Dans une première partie, on s'intéresse à l'évaluation de la seule partie $W^{(0)}$ de l'énergie (2.23) dans le cas d'une barre composite monodimensionnelle aléatoirement renforcée. Les propriétés effectives correspondantes calculées à partir d'un code éléments finis spécifiquement développé pour l'étude sont positionnées par rapport aux bornes classiques (Voigt-Reuss et Hashin-Shtrikman). Puis, la mise en oeuvre du modèle complet (2.23) est abordée en 3D sur deux types de microstructures différentes constituées d'inclusions convexes aléatoirement réparties dans une matrice homogène selon un processus stochastique ponctuel. Les deux phases sont élastiques linéaires et isotropes et présentent un fort contraste sur le module d'Young. Les premières sont générées numériquement à partir d'un motif morphologique simple et identique alors que les secondes sont des microstructures réelles issues de microtomographie présentant des clusters d'inclusions. Après la description des différentes étapes nécessaires à la mise en place des simulations numériques, les résultats obtenus pour un large éventail de fractions volumiques de la phase inclusionnaire sont présentés pour les deux types de microstructures.

3.2 Cas monodimensionnel

On s'intéresse ici au premier terme de (2.23) qui représente l'énergie à l'ordre 0. Cela revient à négliger les termes de régularisation, soit :

$$W^{(\eta)}(u^0, u^1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{A}^{(0,0)} : E^0(x) dx + O(\eta) \quad (3.1)$$

avec $\mathbb{A}^{(0,0)}$, tenseur élastique effectif, donné par l'expression (2.18) :

$$\mathbb{A}^{(0,0)} = \int_Y [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] dy \quad (3.2)$$

3.2.1 Description du cas de calcul

Pour une première évaluation, on considère une barre constituée d'une répartition aléatoire de deux matériaux élastiques homogènes et isotropes (voir Figure 3.1). Le couple (E_1, L_1) , respectivement (E_2, L_2) , dénote le module d'élasticité et la longueur de la première, respectivement, deuxième phase. On a :

$$\begin{cases} L_1 = \sum_{i \in \text{phase 1}} l_i \\ L_2 = \sum_{i \in \text{phase 2}} l_i \end{cases} \quad (3.3)$$

et

$$E(y, \omega) = E\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) = \begin{cases} E_1 = 100 \text{ GPa} & \text{si } y \in \text{phase 1} \\ E_2 = 1 \text{ GPa} & \text{si } y \in \text{phase 2} \end{cases} \quad (3.4)$$

avec ω la variable représentant la distribution aléatoire des deux phases.

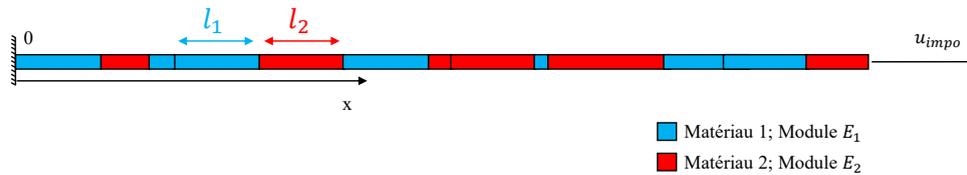


Figure 3.1 – Barre composite utilisée pour l’analyse monodimensionnelle.

La barre est encastée à son extrémité gauche et soumise à un déplacement axial à l’autre extrémité.

3.2.2 Comparaison du module effectif avec les bornes classiques

Dans le cas monodimensionnel de la barre encastée précédemment définie, le tenseur $\mathbb{A}^{(0,0)}$ donné par l’équation (3.2) se résume à un module d’Young homogénéisé noté E^{hom} , que l’on peut calculer à partir de l’expression suivante :

$$E^{hom} = 2 \cdot \frac{W^{(0)}}{(E^0)^2} \quad (3.5)$$

où $W^{(0)}$ représente l’énergie calculée par éléments finis. Plus précisément $W^{(0)} = \{U\}^T [K] \{U\}$ avec $\{U\}$, $\{U\}^T$ et $[K]$ représentant respectivement le vecteur solution des déplacements nodaux, son transposé et la matrice de rigidité globale. E^0 est calculée à partir de la différence des déplacements des noeuds successifs moyennée sur la longueur de la barre. Pour mener à bien la simulation, les différents blocs caractéristiques d’un calcul par éléments finis présentés en **ANNEXE** ont été particularisés au cas de la barre composite étudiée et programmés en C++ dans un code maison spécifiquement développé pour cette étude.

Pour chaque fraction de la phase 1 ($\frac{L_1}{L_1+L_2}$) investiguée, 20 réalisations (tirages de la répartition des phases) ont été effectuées par un algorithme statistique. Plus précisément, cette fraction linéique est calculée en conservant constante son espérance mathématique sur les 20 réalisations, mais la fraction elle-même peut varier d’un tirage à l’autre. Chaque réalisation a été maillée avec environ 10 000 éléments linéaires unidimensionnels et les calculs réalisés avec le code développé. La valeur de E^{hom} a été déduite de l’équation (3.5) pour chacune des 20

réalisations. Enfin, une moyenne arithmétique sur les 20 réalisations des valeurs obtenues a été réalisée et fournit la valeur finale de E^{hom} .

En premier lieu, on a cherché à comparer les résultats avec les bornes classiques de Voigt [Voigt, 1889] et Reuss [Reuss, 1929] du comportement effectif. Il s'agit des estimations les plus simples des tenseurs \mathbb{K}^p et \mathbb{T}^p définis par les équations (1.3) et (1.4). Leur simplicité est notamment liée au fait que la seule information statistique nécessaire à leur détermination est la fraction volumique des phases. De plus, le champ local de déformation (pour la borne de Voigt) ou de contrainte (pour la borne de Reuss) est supposé uniforme sur tout le volume. Il est par conséquent égal à la déformation $\bar{\epsilon}$ (Voigt) ou contrainte $\bar{\sigma}$ (Reuss) macroscopique. Il s'en suit que les tenseurs de localisation des déformations \mathbb{K}^p et de concentration des contraintes \mathbb{T}^p sont égaux au tenseur identité : $\mathbb{K}^p = \mathbb{1} = \mathbb{T}^p$. Par conséquent, les estimations de Voigt (\mathbb{C}^V) et de Reuss (\mathbb{C}^R) des tenseurs effectifs pour un milieu biphasé s'écrivent en se référant aux relations (1.3) et (1.4) par :

$$\begin{cases} \mathbb{C}^V = \sum_{p=1}^2 f^p \mathbb{C}^p \\ \mathbb{S}^R = \sum_{p=1}^2 f^p \mathbb{S}^p \end{cases} \iff \mathbb{C}^R = (\mathbb{S}^R)^{-1} = \left(\sum_{p=1}^2 f^p (\mathbb{C}^p)^{-1} \right)^{-1}$$

En utilisant les théorèmes de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire, on peut montrer facilement que les tenseurs \mathbb{C}^V et \mathbb{C}^R sont des bornes supérieure et inférieure, dites de Voigt et Reuss, du comportement effectif au sens des formes quadratiques :

$$\overbrace{\left(\sum_{p=1}^2 f^p (\mathbb{C}^p)^{-1} \right)^{-1}}^{\mathbb{C}^R} \leq \mathbb{C}^{eff} \leq \overbrace{\sum_{p=1}^2 f^p \mathbb{C}^p}^{\mathbb{C}^V}$$

D'autres auteurs ont par la suite introduit des estimations plus sophistiquées et plus précises comme l'estimation de Hashin-Shtrikman (voir [Hashin, 1962] et [Hashin et Shtrikman, 1962]). Ces bornes fournissent un encadrement des propriétés effectives pour des matériaux biphasés isotropes (isotropie de la répartition des phases et de leurs propriétés). Elles sont plus restrictives que les bornes de Voigt et Reuss, car elles tiennent compte, en plus de la fraction volumique f^p de la répartition isotrope des phases. Les bornes de Hashin et Shtrikman sont dites d'ordre 2.

Dans le cas de l'assemblage de sphères composites de Hashin [Hashin, 1962], ces bornes sont optimales.

Dans le cas isotrope, le comportement effectif est défini à partir du coefficient de compressibilité k^{hom} et du module de cisaillement μ^{hom} encadrés selon les relations (3.6) et (3.7) en supposant les modules des deux phases ordonnés $k_1 > k_2$ et $\mu_1 > \mu_2$.

$$k^{HS-} \leq k^{hom} \leq k^{HS+} \quad (3.6)$$

$$\text{avec : } k^{HS} = k^1 + f^2 \frac{k^2 - k^1}{1 + f^1 \frac{k^2 - k^1}{k^* + k^1}}$$

où $k^* = \frac{4}{3}\mu^2$ pour la borne k^{HS-} et $k^* = \frac{4}{3}\mu^1$ pour la borne k^{HS+} .

$$\mu^{HS-} \leq \mu^{hom} \leq \mu^{HS+} \quad (3.7)$$

$$\text{avec : } \mu^{HS} = \mu^1 + f^2 \frac{\mu^2 - \mu^1}{1 + f^1 \frac{\mu^2 - \mu^1}{\mu^* + \mu^1}}$$

où $\mu^* = \frac{\mu^2}{6} \frac{9k^2 + 8\mu^2}{k^2 + 2\mu^2}$ pour la borne μ^{HS-} et $\mu^* = \frac{\mu^1}{6} \frac{9k^1 + 8\mu^1}{k^1 + 2\mu^1}$ pour la borne μ^{HS+} .

L'encadrement du module d'Young effectif issu du modèle de Hashin et Shtrikman est :

$$E^{HS-} \leq E^{hom} \leq E^{HS+} \quad (3.8)$$

Les valeurs obtenues pour E^{hom} selon le modèle proposé sont comparées aux bornes de Voigt, Reuss, HS- et HS+ sur un large éventail de fractions de la phase 1 dans la Table 3.1. Les résultats sont également présentés sous forme d'un fuseau de Hill sur la Figure 3.2.

On constate tout d'abord que tous les points se situent entre les bornes classiques. De plus en accord avec les résultats observés dans la littérature sur ce type de problème, le module d'élasticité effectif $\mathbb{A}^{(0,0)}$ est très proche des bornes inférieures (Reuss et HS-). Une explication peut être donnée par le fait que les bornes inférieures pourraient être utilisées comme la première approximation du module d'élasticité .

Fraction de la phase 1	Module d'Young effectif (GPa)				
	Reuss	HS-	Modèle proposé	HS+	Voigt
0,10	1,10	1,17	3,99	4,85	10,90
0,15	1,17	1,23	4,00	6,98	15,85
0,20	1,24	1,38	3,99	9,26	20,80
0,25	1,32	1,51	4,04	11,71	25,75
0,30	1,42	1,66	3,97	14,35	30,70
0,35	1,53	1,82	4,03	35,65	17,22
0,40	1,65	2,02	4,01	20,32	40,60
0,45	1,80	2,25	4,04	23,71	45,55
0,50	1,98	2,52	4,03	27,40	50,50
0,55	2,19	2,85	4,05	31,47	55,45
0,60	2,46	3,27	6,11	35,94	60,40
0,65	2,80	3,79	4,17	40,91	65,35
0,70	3,25	4,48	5,30	46,45	70,30
0,75	3,88	5,43	7,51	52,65	75,25
0,80	4,80	6,82	8,07	59,67	80,20
0,85	6,30	9,05	11,06	67,65	85,15
0,90	9,17	13,20	15,53	76,83	90,10
0,95	16,80	23,65	62,72	87,48	95,05

Table 3.1 – Valeurs du module élastique effectif E^{hom} du modèle proposé pour différentes fractions de la phase 1. Les valeurs correspondantes des bornes de Voigt, Reuss et Hashin-Shtrikman sont rajoutées pour comparaison.

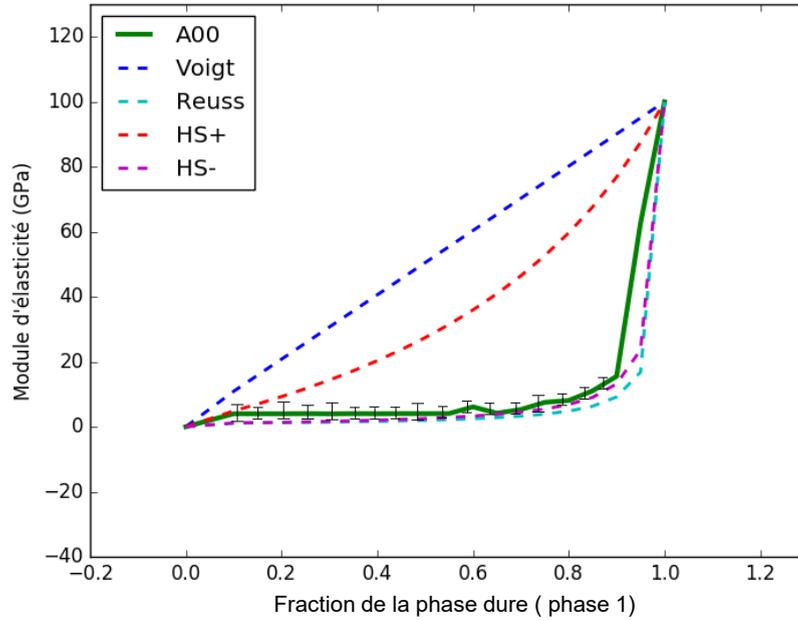


Figure 3.2 – Fuseau de Hill. Comparaison du modèle proposé avec les bornes classiques.

3.3 Cas tridimensionnel

Le but de cette section est d'évaluer numériquement les propriétés mécaniques effectives associées aux développements d'ordre 0 et 1. On tient ici compte non seulement de la partie 'locale' de l'énergie (uniquement fonction du premier gradient de déplacement) mais aussi des termes non-locaux. Il s'agit d'évaluer l'énergie élastique complète rappelée ci-dessous par l'équation (3.9) :

$$\begin{aligned}
 W^{(\eta)}(u^0, u^1, u^2) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{A}^{(0,0)} : E^0(x) dx + \eta \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{B}^{(0,1)} : E^1(x) dx \\
 & + \eta \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{C}^{(0,0)} : \nabla_x E^0(x) dx + \eta \int_{\Omega} E^0(x) : \mathbb{D}^{(0,0)} : \nabla_x E^0(x) dx
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

avec

$$\begin{cases} \mathbb{A}^{(0,0)} = \mathbb{B}^{(0,1)} = \int_Y [\mathbb{I} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \mathbb{C}(\frac{x}{\eta}, \omega) : [\mathbb{I} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] dy \\ \mathbb{C}^{(0,0)} = \int_Y [(\mathbb{I} + \nabla_y \chi^0(y, \omega))] : \mathbb{C}(\frac{x}{\eta}, \omega) : \chi^0(y, \omega) dy \\ \mathbb{D}^{(0,0)} = \int_Y [(\mathbb{I} + \nabla_y \chi^0(y, \omega))] : \mathbb{C}(\frac{x}{\eta}, \omega) : \nabla_y \chi^1(y, \omega) dy \end{cases} \quad (3.10)$$

Deux types de microstructures sont utilisées comme support afin de tester la validité du modèle proposé. Les premières sont des microstructures virtuelles tandis que les secondes sont des microstructures réelles obtenues par microtomographie.

Tout d'abord, on commence par présenter la technique de génération des microstructures étudiées. Ensuite, on s'intéresse à la détermination des tenseurs de déformation macroscopiques $E^0(x)$ et $E^1(x)$ impliqués dans l'expression de l'énergie. Cela nous conduit à définir deux volumes élémentaires représentatifs dont les tailles respectives sont fixées par deux longueurs caractéristiques l_0 et l_1 . Les propriétés générales d'un covariogramme sont alors rappelées avant d'être exploitées pour l'identification de ces longueurs caractéristiques pour chacune des microstructures. Puis, les maillages des deux types de microstructures sont décrits. Par la suite, on propose des méthodes du calcul visant à déterminer le second gradient du déplacement $\nabla_x E^0(x)$ et le tenseur $\chi^0(y, \omega)$. On termine par présenter les simulations numériques et leurs résultats.

3.3.1 Génération des microstructures aléatoires

La première étape dans une étude numérique consiste à créer une géométrie qui représente la microstructure du matériau étudié. Cette étape fait appel à des notions de morphologie mathématique.

On s'intéresse ici à la notion de milieu hétérogène aléatoire dans un cadre élastique linéaire isotrope. On a choisi de se focaliser sur des microstructures tridimensionnelles composées d'inclusions de forme convexe, aléatoirement distribuées selon un processus de Poisson représenté par une variable stochastique ω .

Les premières microstructures générées sont des microstructures virtuelles construites à l'aide d'Abaqus/CAE grâce à des macros en Python. Elles ont été générées à partir d'un même motif

simple, composé d'une grande inclusion sphérique entourée par six petites inclusions identiques. La Figure 3.3 montre un exemple ainsi que le motif utilisé pour la génération. Ce motif est distribué aléatoirement suivant une loi uniforme. Les six petites inclusions subissent une rotation aléatoire suivant la même loi. On utilise cette loi de sorte à satisfaire l'hypothèse d'ergodicité sur laquelle est fondée le modèle (voir paragraphe 1.3.1). A fraction volumique fixée, tous les motifs sont identiques. La taille des deux types d'inclusions du motif a été homothétiquement modifiée et le nombre de motifs ajusté pour avoir la fraction désirée. Il est à noter que la taille des volumes générés est identique quelle que soit la fraction volumique étudiée. Elle est choisie suffisamment grande pour donner du sens à un calcul en champs complets pour la plus forte fraction volumique. Un tel calcul sera en effet mené pour comparaison.

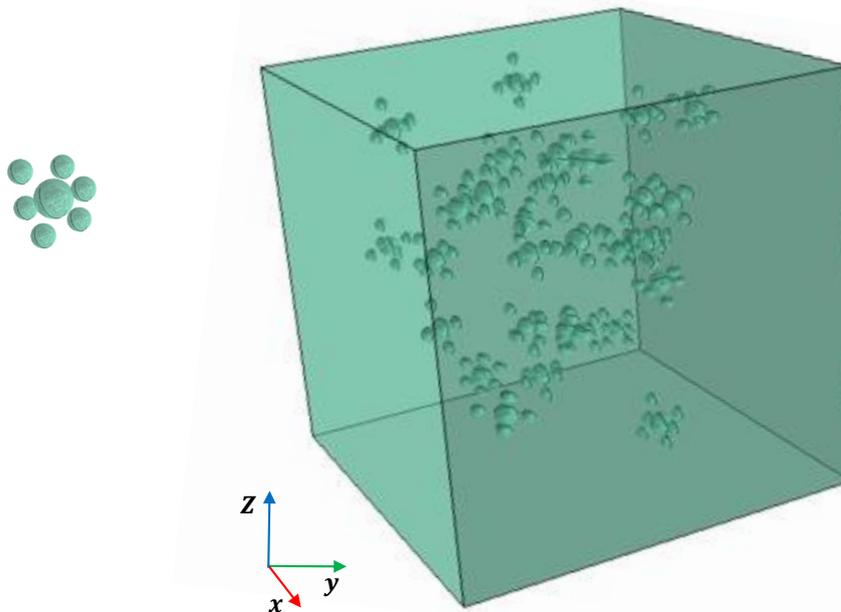


Figure 3.3 – Exemple de microstructure virtuelle (modèle CAO) et motif utilisé pour la génération.

Les secondes microstructures sont construites à partir de données expérimentales 3D issues des travaux de [Castagnet *et al.*, 2018] combinées à une méthode de génération "synthétique" (voir exemple Figure 3.4). Elles correspondent à des volumes d'EPDM (Éthylène-Propylène-Diène-Monomère) à différents stades de décompression après avoir été exposés sous pression d'hydrogène. En effet, sous décompression d'hydrogène, l'endommagement de ces matériaux consiste en la nucléation et croissance d'agrégats de cavités quasi-sphériques. Ainsi, les micro-

structures obtenues à différents instants de la décompression présentent des cavités distribuées par paquets (clusters), propices à générer un comportement non-local comme souhaité dans la thèse. La fraction volumique des cavités diffère selon le niveau de décompression. La taille de toutes les images, quelle que soit la fraction volumique, est identique.

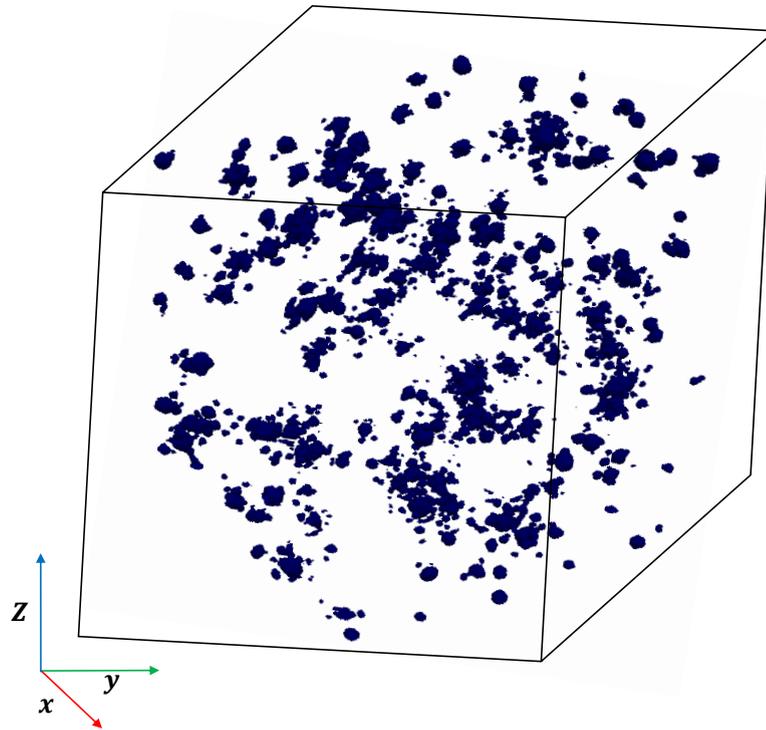


Figure 3.4 – Exemple d'une microstructure réelle d'EPDM contenant des cavités.

Les images obtenues par microtomographie dans les travaux [Castagnet *et al.*, 2018] ont été traitées dans le cadre de cette thèse afin de pouvoir générer les configurations numériques et leurs maillages. Ceci a été rendu possible grâce à l'adaptation et à l'enrichissement d'outils existants au sein de l'équipe Endommagement et Durabilité de l'Institut Pprime. Ces derniers ont été rendus plus généraux, afin de pouvoir être appliqués à différents types de microstructures, et notamment à celles au coeur de la présente étude.

Les étapes du traitement réalisées sur chacune des images (chacune associée à un taux de cavités) sont référencées sur la Figure 3.5 et décrites ci-après.

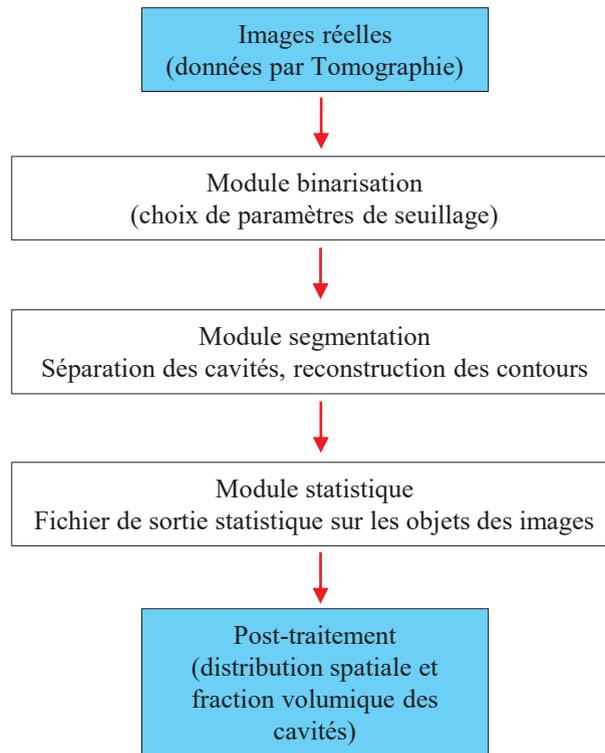


Figure 3.5 – Schéma général des étapes de traitement d'images.

1) Binarisation des images :

L'étape de binarisation permet de distinguer les clusters du reste de la matrice. Une image est constituée de pixels ayant chacun un niveau de gris variant de 0 à 255. La binarisation consiste à « seuiller » ces niveaux de gris et à affecter à chaque pixel une valeur égale à 0 ou 1. Par exemple, sur les Figures 3.6 (a et b), une couleur blanche est affectée à tout les pixels de niveau de gris inférieur à un seuil bien déterminé et les pixels supérieurs au seuil, prennent une couleur noire. Cette étape est très importante parce qu'on a besoin de séparer les cavités au sein d'un cluster. En fait, si le cluster est segmenté comme une seule cavité on risque de perdre les effets non-locaux.

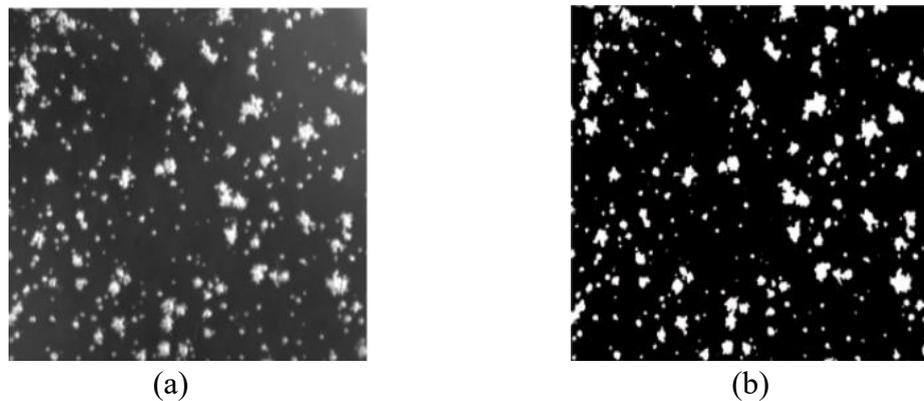


Figure 3.6 – (a) : Image réelle avant binarisation. (b) : Image réelle après binarisation.

2) Segmentation des images :

C'est une étape complémentaire à la binarisation, elle permet de séparer définitivement les clusters en délimitant leurs contours. La segmentation permet ainsi d'avoir le périmètre des clusters.

3) Analyse statistique :

Cette troisième étape permet l'analyse morphologique des microstructures et notamment la détermination des longueurs caractéristiques impliquées dans le modèle grâce à un outil mathématique appelé covariogramme. C'est l'objet du paragraphe (3.3.2).

3.3.2 Détermination des longueurs caractéristiques l_0 et l_1

Les quantités $E^0(x)$ et $E^1(x)$ impliquées dans l'équation (3.9) représentent deux déformations macroscopiques à deux échelles différentes. Afin de les déterminer, des simulations numériques en champs complets sur deux différents volumes élémentaires morphologiquement représentatifs (V.E.M.R) sont réalisées. Ces volumes sont notés respectivement V.E.M.R0 et V.E.M.R1. Cela nécessite de déterminer deux longueurs caractéristiques l_0 et l_1 définissant la taille de ces deux volumes. On se propose ici de formaliser des corrélations entre les paramètres morphologiques des deux phases (matrice et inclusions) des microstructures étudiées afin de déterminer les deux longueurs caractéristiques l_0 , l_1 et la fraction volumique de la distribution des inclusions. A cet effet, une analyse statistique a été appliquée aux images reconstruites. Cette analyse repose sur un outil de morphologie mathématique appelé covariogramme [Azdine *et al.*, 2015], [Jeulin, 2012] que l'on se propose de décrire et d'exploiter ci-après.

En modélisation micromécanique ([Jeulin, 2012], [Jeulin, 2000] et [Kanit *et al.*, 2003]), le covariogramme permet d'estimer les caractéristiques morphologiques à partir d'images représentatives de la microstructure d'un milieu donné. Si on se place dans le cadre de la non-localité, l_0 et l_1 correspondent aux distances "d'influence" des inclusions qui sont à l'origine du comportement non-local.

Pour construire un covariogramme, il est d'abord important de définir la surface d'observation ou région de référence. Dans ce travail, cette région est définie de telle sorte qu'elle contienne tous les centres de gravité des inclusions. La surface restante qui ne contient pas d'inclusions n'est pas prise en compte lors du traitement par le covariogramme.

La covariance $C(x, x+h)$ où x appartient au domaine d'étude Ω , est définie comme la probabilité, P , pour qu'un segment de longueur h , appartienne à la même phase du matériau hétérogène (voir équation (3.11)). Autrement dit, elle décrit la probabilité d'intercepter, à partir d'une inclusion de référence, d'autres inclusions à une distance donnée [Azdine *et al.*, 2015], [Jeulin, 2000], [Lantuéjoul, 2002] et [Torquato, 1982].

$$C(x, x+h) = P\{x \in B, x+h \in B\} \quad (3.11)$$

où B représente l'ensemble aléatoire choisi. En analyse d'images, si I est définie comme la fonction caractérisant les pixels j tels que $I(j) = 1$ si j est dans une cavité et 0 si j appartient à la matrice, la fonction covariance $C(h)$ peut être traduite par l'équation suivante :

$$C_z(h) = \int_{\Omega} I(j) \cdot I(j+(z, h)) dj$$

où $h \in \mathbb{R}$ et z représente le vecteur unitaire dans la direction d'intérêt.

La mesure de la covariance permet d'étudier l'anisotropie géométrique. La Figure 3.7 montre quelques propriétés particulières du covariogramme et la manière dont elles sont estimées sur la courbe. L'analyse est faite à partir d'une matrice avec une répartition aléatoire d'inclusions. Les propriétés sont également expliquées ci-après.

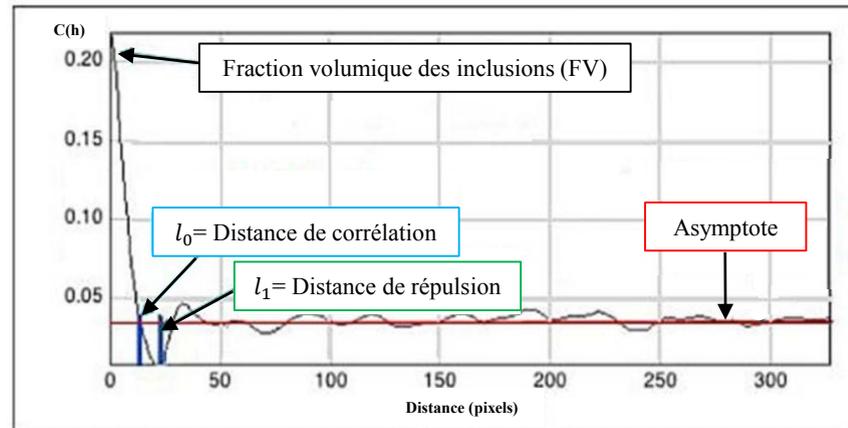


Figure 3.7 – Exemple de covariogramme et principales propriétés.

- **PROPRIÉTÉ 1** : la fraction volumique de l'ensemble des inclusions f_B est directement donnée par le covariogramme pour une distance h nulle correspondant au centre d'une inclusion quelconque. La fraction volumique des inclusions peut varier avec le temps à cause de l'apparition de nouvelles inclusions et/ou de changement de taille des inclusions. Elle est donnée par l'équation suivante :

$$C(0) = P\{x \in B\} = f_B \quad (:= \text{fraction volumique de la phase B})$$

- **PROPRIÉTÉ 2** : Lorsque la distance h tend vers des grandes valeurs, les corrélations s'estompent et la probabilité de rencontrer une inclusion devient très faible. Les inclusions sont donc décorréelées et $C(h)$ tend vers une asymptote (ligne horizontale rouge sur la Figure 3.7).

Lorsque la valeur de cette asymptote $C_z(h) = f_B^2$, la probabilité de distribution des inclusions dans la matrice est dite ergodique i.e. la distribution des inclusions est homogène. Cette probabilité est la même en tout point du milieu. L'ergodicité est une propriété importante pour pouvoir déterminer un V.E.R. Elle est vérifiée dans le cadre de cette étude. Par contre, pour $C_z(h) \neq f_B^2$, la distribution devient statistiquement inhomogène. Dans ce cas, l'échelle d'observation devient insuffisante pour définir un V.E.R parce que les inclusions restent corrélées (forte interaction). Il faut soit augmenter la surface de référence, soit augmenter la taille de l'échantillon.

- **PROPRIÉTÉ 3** : le covariogramme étant obtenu pour deux directions, si les asymptotes ont les mêmes valeurs, alors la répartition spatiale des inclusions est macroscopiquement isotrope. Dans le cas contraire, elle est anisotrope.

- **PROPRIÉTÉ 4** : la première intersection de $C_z(h)$ avec l'asymptote correspond à la distance de corrélation suivant la direction z notée $D_c(z)$ définie par :

$$D_c(z) = \min_{h \in \mathbb{R}^*} \{C_z(h) - f_B^2 = 0\}$$

C'est la distance au-delà de laquelle l'asymptote est atteinte et l'influence statistique des inclusions est négligeable.

Cette distance nous permet de définir la première longueur caractéristique l_0 (voir Figure 3.7). Dès lors que la distance de corrélation est obtenue dans toutes les directions, il devient possible d'estimer la taille du premier Volume Élémentaire Morphologiquement Représentatif (V.E.M.R0) de la statistique de répartition des inclusions (voir Figure 3.8 (b et e) et Figure 3.9 (b et e)).

- **PROPRIÉTÉ 5** : La seconde intersection de $C_z(h)$ avec l'asymptote correspond à la distance de répulsion suivant la direction z notée $D_r(z)$. Elle estime la distance "statistique moyenne" entre deux inclusions.

Dans notre étude, cette distance est appelée l_1 (voir Figure 3.7) et donne une estimation de la distance "statistique moyenne" entre deux clusters dans chaque direction. En effet, cette distance représente la portée du premier volume élémentaire représentative (V.E.M.R0). Au-delà de cette distance, on croise une deuxième population de distribution des clusters. Cette dernière nous a permis de définir la taille du deuxième V.E.M.R1 (voir Figure 3.8 (c et f) et Figure 3.9 (c et f)). La distance de répulsion $D_r(z)$ évolue proportionnellement à $D_c(z)$ et à la fraction volumique des inclusions.

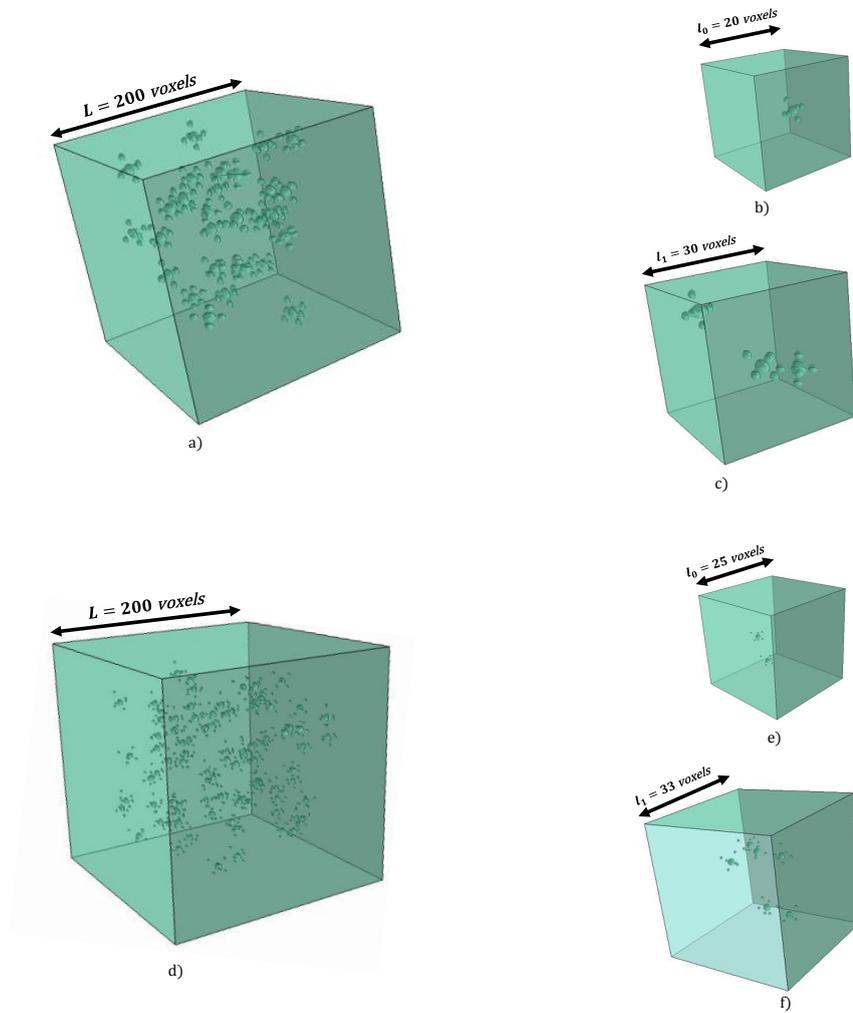


Figure 3.8 – Microstructures virtuelles générées par un processus stochastique. a-d) : Exemples de réalisations pour deux fractions volumiques d'inclusions (0.0035 & 0.0112), b-e) et c-f) : Longueurs caractéristiques correspondantes l_0 et l_1 définissant respectivement la taille des premier et deuxième volumes (V.E.M.R0 et V.E.M.R1).

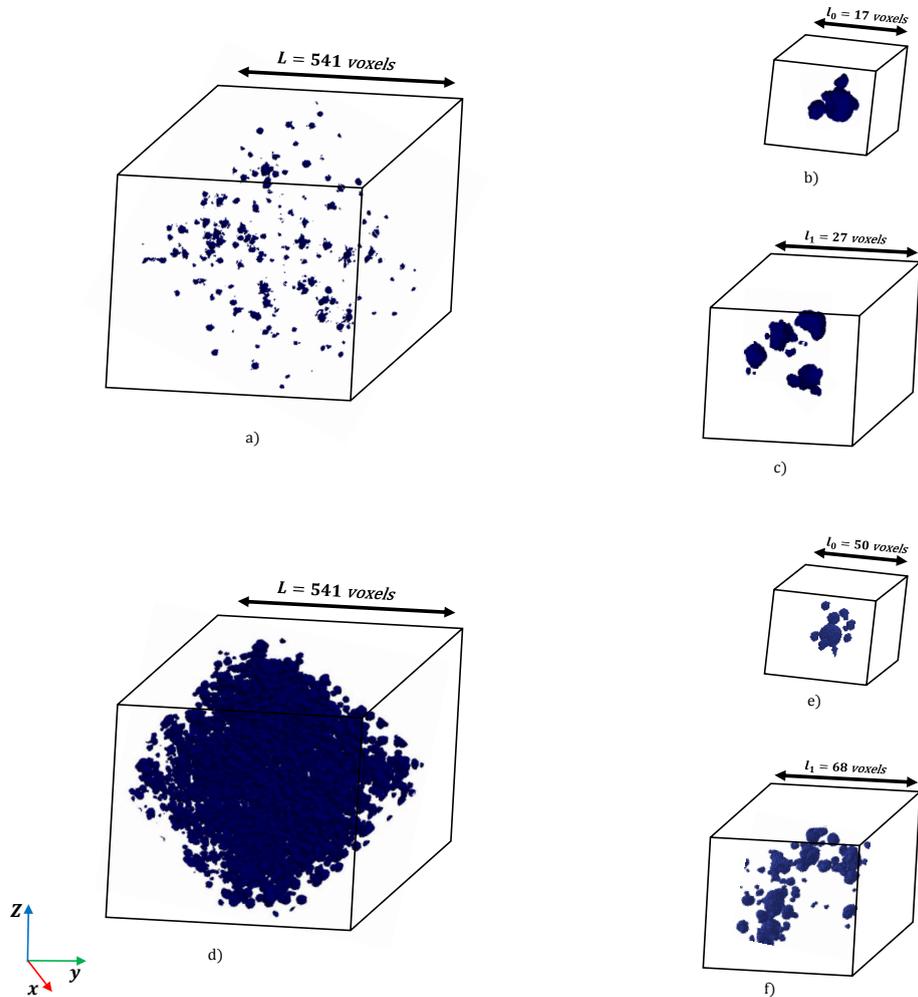


Figure 3.9 – Microstructures réelles d'EPDM contenant des cavités. a-d) : Images issues de tomographie après traitement pour deux fractions volumiques (0.0285 & 0.1521), b-e) et c-f) : Longueurs caractéristiques correspondantes l_0 et l_1 définissant respectivement la taille des premier et deuxième volumes (V.E.M.R0 et V.E.M.R1).

3.3.3 Génération des maillages

Un maillage est une structure de données géométriques composée de sommets de l'espace, reliés entre eux par des arêtes et plus généralement, par des éléments. Ces éléments peuvent être des polygones (triangles, quadrilatères...) qui se contentent de recouvrir la surface de l'objet représenté (auquel cas on parle de « maillage surfacique »). Un maillage composé d'éléments volumiques (comme les tétraèdres, ou les hexaèdres) qui occupent l'intégralité du volume est

appelé « maillage volumique ». Dans le cadre de ce travail, seuls des maillages volumiques ont été générés.

Les microstructures virtuelles ont été maillées par des éléments tétraédriques (voir Figure 3.10). Pendant longtemps, la méthode des éléments finis a surtout été appliquée sur ces maillages car ils sont plus faciles à générer, et à adapter à des formes de domaines variées. En plus, les discrétisations géométriques respectent mieux la forme de la frontière. L'algorithme de raffinement utilisé dans le cadre de ce travail est celui de Delaunay [Murphy *et al.*, 2001]. Ce dernier permet de ne générer que des maillages triangulaires et tétraédriques [Shewchuk, 2012]. En premier lieu, une triangulation de Delaunay (en deux dimensions ou plus) est réalisée, puis raffinée en insérant de nouveaux sommets pour éliminer les éléments trop fins ou trop gros, tout en maintenant les propriétés de Delaunay du maillage. La triangulation de Delaunay permet d'éviter les arêtes courtes et la présence d'éléments trop fins.

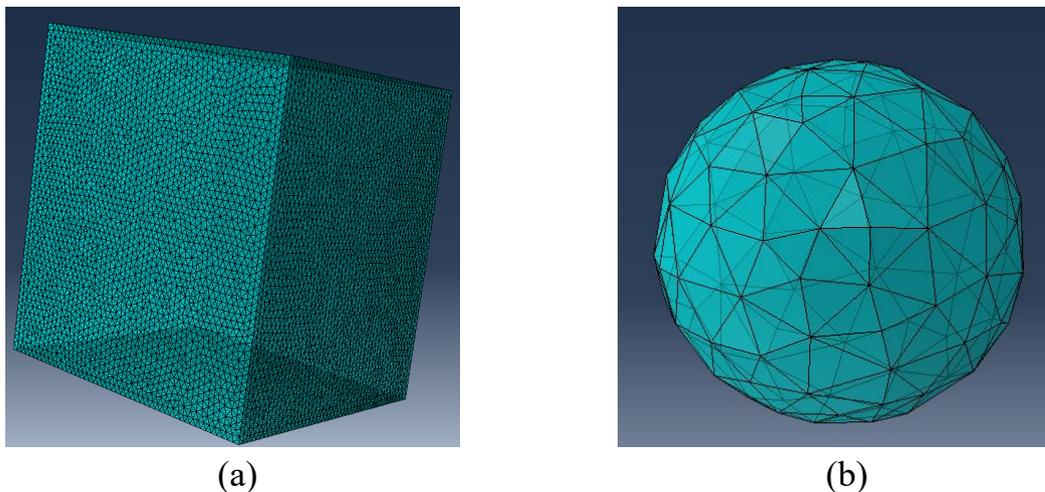


Figure 3.10 – Maillage d'une microstructure virtuelle avec des éléments tétraédriques. (a) : Matrice. (b) : Inclusion.

Les microstructures réelles d'EPDM sont fournies sous forme d'images 3D, constituées de voxels. On a alors utilisé un logiciel S2M-3D développé à l'Institut Pprime permettant de convertir les voxels en éléments hexaédriques (voir Figure 3.11). Les entités géométriques ont ensuite été créées dans le logiciel CAO Abaqus/CAE de façon quasi-automatique à l'aide d'un script programmé en langage Python dans le cadre de la thèse.

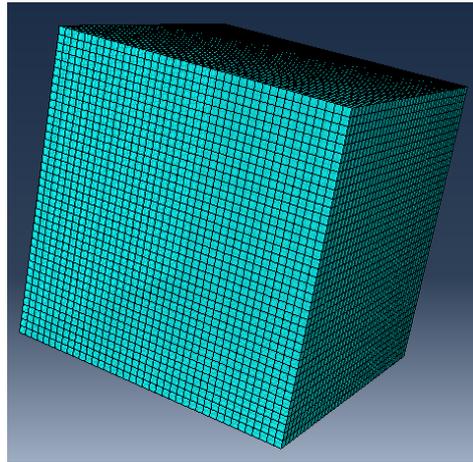


Figure 3.11 – Matrice d'EPDM maillée avec des éléments hexaédriques.

3.3.4 Calcul des tenseurs $\nabla_x E^0(x)$ et $\chi^0(y, \omega)$

3.3.4.1 Calcul du tenseur $\nabla_x E^0(x)$

Dans cette partie du chapitre, on propose une méthode de calcul visant à déterminer le second gradient du déplacement $\nabla_x E^0(x)$ impliqué dans l'expression (3.9) de l'énergie. On adopte la représentation matricielle de Voigt pour représenter le tenseur des déformations. Le tenseur des déformations, ici noté E dans un souci d'allègement des notations, est alors représenté par un vecteur de dimension six :

$$\{E\} = \left\{ \begin{array}{l} E_1 = E_{11} \\ E_2 = E_{22} \\ E_3 = E_{33} \\ E_4 = \sqrt{2}E_{12} \\ E_5 = \sqrt{2}E_{23} \\ E_6 = \sqrt{2}E_{13} \end{array} \right\} = [B] \cdot \{U\}$$

où $\{U\}$ représente le vecteur des déplacements.

Cette représentation est associée à la base $(b_1 \dots b_6)$ définie par :

$$\begin{cases} b_1 = e_1 \otimes e_1, & b_2 = e_2 \otimes e_2, & b_3 = e_3 \otimes e_3, \\ b_4 = \sqrt{2}e_1 \otimes e_2, & b_5 = \sqrt{2}e_2 \otimes e_3, & b_6 = \sqrt{2}e_1 \otimes e_3 \end{cases} \quad (3.12)$$

où e_1, e_2, e_3 sont les vecteurs de la base cartésienne dans laquelle sont représentées les composantes E_{ij} du tenseur des déformations. La quantité $[B]$ représente la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation dans le cas d'une discrétisation par la méthode des éléments finis. Dans (3.12), l'opérateur \otimes représente le produit tensoriel symétrisé de deux vecteurs $u \otimes v = (u \otimes v + v \otimes u)/2$.

Assez naturellement, on peut étendre cette représentation pour le tenseur gradient des déformations noté ici ∇E . Rappelons que ce dernier implique 18 composantes indépendantes. La base associée est notée (c_1, \dots, c_{18}) et ses éléments sont définis par :

$$\begin{cases} c_1 = b_1 \otimes e_1, & c_7 = b_1 \otimes e_2, & c_{13} = b_1 \otimes e_3, \\ c_2 = b_2 \otimes e_1, & c_8 = b_2 \otimes e_2, & c_{14} = b_2 \otimes e_3 \\ c_3 = b_3 \otimes e_1, & c_9 = b_3 \otimes e_2, & c_{15} = b_3 \otimes e_3, \\ c_4 = b_4 \otimes e_1, & c_{10} = b_4 \otimes e_2, & c_{16} = b_4 \otimes e_3 \\ c_5 = b_5 \otimes e_1, & c_{11} = b_5 \otimes e_2, & c_{17} = b_5 \otimes e_3, \\ c_6 = b_6 \otimes e_1, & c_{12} = b_6 \otimes e_2, & c_{18} = b_6 \otimes e_3 \end{cases}$$

Le tenseur gradient des déformations ∇E dans la base (c_1, \dots, c_{18}) est alors représenté par :

$$\nabla E = [B].[E] = [\nabla_1(E), \nabla_2(E), \nabla_3(E)]$$

où $\nabla_1(E), \nabla_2(E)$ et $\nabla_3(E)$ sont des vecteurs colonnes de dimension 6 définis par :

$$\{\nabla_1(E)\} = \begin{Bmatrix} E_{11,1} \\ E_{22,1} \\ E_{33,1} \\ \sqrt{2}E_{12,1} \\ \sqrt{2}E_{23,1} \\ \sqrt{2}E_{13,1} \end{Bmatrix}, \quad \{\nabla_2(E)\} = \begin{Bmatrix} E_{11,2} \\ E_{22,2} \\ E_{33,2} \\ \sqrt{2}E_{12,2} \\ \sqrt{2}E_{23,2} \\ \sqrt{2}E_{13,2} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\nabla_3(E)\} = \begin{Bmatrix} E_{11,3} \\ E_{22,3} \\ E_{33,3} \\ \sqrt{2}E_{12,3} \\ \sqrt{2}E_{23,3} \\ \sqrt{2}E_{13,3} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

La représentation précédente a été implémentée dans FoXtroT dans le cadre de ce travail de thèse.

3.3.4.2 Calcul du tenseur $\chi^0(y, \omega)$

Dans l'équation (3.9) donnant l'expression de l'énergie, on a besoin de déterminer les trois tenseurs $\mathbb{A}^{(0,0)}$, $\mathbb{B}^{(0,1)}$ et $\mathbb{C}^{(0,0)}$. Ces derniers (voir le système (3.10)) demandent le calcul de deux autres tenseurs $\nabla_y \chi^0(y, \omega)$ et son primitif $\chi^0(y, \omega)$ tels que la moyenne $\langle \nabla_y \chi^0(y, \omega) \rangle_Y = \mathbb{1}$.

$\langle \nabla_y \chi^0(y, \omega) \rangle_Y$ est un tenseur d'ordre 4 et s'écrit comme une combinaison linéaire de trois tenseurs, soit en composantes :

$$\langle \nabla_y \chi^0(y, \omega)_{ijkl} \rangle = \alpha_1 \zeta_{ijkl}^{(2)} + \alpha_2 \zeta_{ijkl}^{(2)} + \alpha_3 \zeta_{ijkl}^{(3)}$$

où α_1 , α_2 et α_3 sont des constantes à déterminer et $[\zeta^{(1)}]$, $[\zeta^{(2)}]$ et $[\zeta^{(3)}]$ sont trois tenseurs isotropes de rang 4. Pour les détails du calcul (Voir **ANNEXE**).

On a choisi de calculer les composantes du tenseur $\chi^0(y, \omega)$ à partir du tenseur $\nabla_y \chi^0(y, \omega)$ en faisant une sommation sur le quatrième et dernier indice selon l'expression suivante :

$$\chi^0(y, \omega)_{ijk} = \int (\nabla_y \chi^0(y, \omega))_{ijkl} = \sum_{l=1}^3 (\nabla_y \chi^0(y, \omega))_{ijkl} \quad (3.14)$$

3.3.5 Bilan

Avant de finir ce chapitre par la présentation des simulations numériques et de leurs résultats, on expose ici les étapes nécessaires à la détermination de la valeur de l'énergie totale (voir équations (3.9) et (3.10)) du modèle proposé. Pour une première approche, $\mathbb{D}^{(0,0)}$ n'est pas encore pris en compte dans le calcul. L'algorithme, dont les étapes principales sont récapitulées ci-après, a été implémenté en créant des scripts en Python dans ParaView et plus précisément dans le module Programmable Filter. Ce filtre est connecté aux sources actives. Les sources sont des données dans des fichiers de formats .vtk, .pvtu, et material.vtk contenant respectivement les champs mécaniques générés par le solveur éléments finis FoXtroT et la position des deux phases présentes dans les microstructures étudiées. Ces sources deviennent des entrées pour le filtre qui les manipule. Pour exécuter ces scripts Python sur le serveur ParaView, on utilise (chemin complet des sources/nom_script.py).

Algorithm : Calcul $W^{(\eta)}(u) \leftarrow W^{(0)} + \eta W^{(1)}$

- 1: Génération des images 3D ;
 - 2: Caractérisation morphologique :
 - Détermination de l_0 et l_1 ;
 - Construction de V.E.M.R0 et V.E.M.R1 à partir de l_0 et l_1 respectivement ;
 - 3: Maillage ;
 - 4: Calcul :
 - $E^0(x)$, et $E^1(x)$ par moyenne volumique des champs obtenus par simulation en champs complets sur V.E.M.R0 et V.E.M.R1, respectivement ;
 - $\nabla_x E^0(x) \leftarrow$ paragraphe (3.3.4.1) et recours à une moyenne pondérée sur V.E.M.R0 ;
 - $\langle (\nabla_y \chi^0(y, \omega))_{ijkl} \rangle_Y \leftarrow \mathbb{1}$;
 - $(\chi^0(y, \omega))_{ijk} \leftarrow$ Eq. (3.14) ;
 - $W^{(0)} \left(\mathbb{A}^{(0,0)} \right) \leftarrow$ Eq. (2.17) ;
 - $\eta W^{(1)} \left(\mathbb{B}^{(0,1)}, \mathbb{C}^{(0,0)} \right) \leftarrow$ Eq. (2.21) ;
-

3.3.6 Résultats numériques et discussion

Dans cette partie, on s'intéresse à la mise en place du fuseau de Hill, qualifié d'énergétique, puisque l'on trace l'évolution de l'énergie élastique totale en fonction de la fraction volumique d'inclusions.

L'énergie élastique totale est évaluée à différentes fractions volumiques dans le cas 3D.

Pour les deux types des microstructures et pour chaque fraction volumique investiguée, les modules d'Young des inclusions et de la matrice sont égaux respectivement à 100 GPa et 1 GPa (contraste 100). Le coefficient de poisson pour les deux phases est 0.3. Les microstructures sont soumises à une traction unitaire avec des conditions aux limites périodiques.

La méthodologie est un peu différente pour les deux types de microstructures. Pour le matériau virtuel, pour chaque fraction volumique, 10 réalisations ont été générées selon le processus stochastique supposé stationnaire et ergodique décrit dans le paragraphe (3.3.1). Pour chaque réalisation, les longueurs caractéristiques l_0 et l_1 ont été déterminées grâce à l'analyse des covariogrammes comme expliqué dans le paragraphe (3.3.2). Puis, une moyenne arithmétique sur les 10 valeurs résultantes de l_0 , respectivement l_1 , a été utilisée pour définir la taille de V.E.M.R0, respectivement V.E.M.R1. Les deux volumes ont été ensuite générés numériquement et maillés avec des éléments tétraédriques linéaires à 4 noeuds. Les tenseurs $(E^0(x), \nabla_x E^0(x))$, respectivement $E^1(x)$, ont été calculés à partir d'une simulation en champs complets sur V.E.M.R0, respectivement V.E.M.R1. Enfin, l'énergie a été calculée selon l'équation (3.9). Ce travail a été réalisé pour 10 fractions volumiques d'inclusions différentes. Cela représente un total de 100 images analysées pour la détermination de l_0 et l_1 et 10 calculs EF sur chacun des volumes V.E.M.R0 et V.E.M.R1.

Les énergies résultantes sont comparées (voir Table 3.2) aux valeurs obtenues par les modèles de Voigt et de Reuss définis par :

$$\begin{cases} W^V = \frac{1}{2} E : \mathbb{C}^V : E \\ W^R = \frac{1}{2} E : \mathbb{C}^R : E \end{cases} \quad (3.15)$$

où le tenseur de déformation macroscopique E est la moyenne d'ensemble sur les 10 réalisations des tenseurs de déformation obtenus par moyenne volumique des champs de déformation calculés par champs complets sur chacune des 10 réalisations.

Enfin, les valeurs d'énergie qualifiées de "champs complets" dans la Table 3.2 sont les moyennes arithmétiques sur les 10 réalisations des valeurs d'énergie obtenues par champs complets sur chacune des réalisations.

Fraction volumique d'inclusions	Énergie (Joule)			
	Reuss	Modèle proposé	Voigt	Champs Complets
0,0027	784,45	785,52	794,10	789,21
0,0035	784,93	786,65	795,53	791,23
0,0048	784,99,	787,3	797,24	792,65
0,0058	785,53	788,59	799,12	794,12
0,0067	786,42,50	791,42	801,36	796,34
0,0079	787,50	793,41	804,63	798,68
0,0095	788,11	795,02	807,00	802,12
0,0102	790,63	798,32	810,02	804,38
0,0112	791,8	800,86	812,02	808,12
0,0121	793,42	809,16	815,01	811,53

Table 3.2 – Microstructures virtuelles. Valeurs de l'énergie totale pour différentes fractions volumiques d'inclusions. Les valeurs du modèle non-local proposé sont comparées aux bornes de Voigt et Reuss et enfin aux valeurs obtenues par champs complets.

Pour ce qui est de l'EPDM, à chaque instant de la phase de décompression, la fraction volumique mais aussi la morphologie des inclusions est différente, contrairement aux microstructures virtuelles pour lesquelles cette dernière est identique quelle que soit la fraction volumique. Cela introduit une complexité supplémentaire. Pour chaque fraction volumique, c'est-à-dire pour chaque image acquise à un instant donné de la décompression, les longueurs caractéristiques l_0 et l_1 ont été déduites grâce à l'analyse des covariogrammes (voir paragraphe (3.3.2)). Ensuite, 15 réalisations de V.E.M.R0 et V.E.M.R1 ont été extraites aléatoirement à partir de cette image. Elles ont été maillées en convertissant les maillages voxels en maillages tétraédriques (voir paragraphe (3.3.3)). Les tenseurs $(E^0(x), \nabla_x E^0(x))$, respectivement $E^1(x)$, ont été calculés comme moyennes d'ensemble de $(E^0(x), \nabla_x E^0(x))$, respectivement $E^1(x)$, obtenus à partir des 15 réalisations de V.E.M.R0, respectivement V.E.M.R1. Enfin, l'énergie a été calculée selon l'équation (3.9). Ce travail a été réalisé pour 8 fractions volumiques d'inclusions différentes. Cela représente un total de 8 images analysées pour la détermination de l_0 et l_1 , et 120 calculs EF sur chacun des volumes V.E.M.R0 et V.E.M.R1.

De même que pour les microstructures virtuelles, les résultats pour l'EPDM sont comparés aux bornes de Voigt et Reuss dans la Table 3.3 en fonction de la fraction volumique d'inclusions. Pour chaque fraction, la déformation macroscopique E impliquée dans l'équation (3.15) est obtenue par champs complets sur le plus gros volume permettant de faire passer la simulation avec les capacités de calcul disponibles. En effet, il n'a pas été possible de mener les calculs sur les volumes complets (images 3D complètes) en raison du trop grand nombre de degrés

de liberté. A titre d'illustration, la microstructure complète contenant une fraction volumique d'inclusions de 0.050 compte 158.340.421 éléments.

Fraction volumique d'inclusions	Énergie (MegaJoule)		
	Reuss	Modèle proposé	Voigt
0,0285	428,57	857,14	1857,14
0,0357	571,42	1142,85	2285,714
0,050	580,50,	1428,57	2857,14
0,0642	857,142	1714,28	3714,28
0,0821	1000,24	2428,57	4571,42
0,0964	1423,57	2857,14	5000,24
0,1178	1714,28	4000,00	6571,42
0.1521	3714,28	5428,57	8324,14

Table 3.3 – Microstructures réelles d'EPDM. Valeurs de l'énergie totale pour différentes fractions volumiques d'inclusions. Les valeurs du modèle non-local proposé sont comparées aux bornes de Voigt et Reuss.

La figure 3.12 représente l'énergie élastique donnée par l'équation (3.9) en fonction de la fraction volumique d'inclusions pour la microstructure virtuelle (figure 3.12 a)) et celle de l'EPDM (figure 3.12 b)). Les résultats sont comparés aux bornes de Voigt et de Reuss. Les valeurs obtenues par champs complets sur la microstructure complète sont également présentées sur la figure (3.12 a)) pour le matériau virtuel. Pour les deux microstructures les valeurs simulées de l'énergie se situent entre les bornes. Elles se rapprochent de la borne inférieure avec la diminution de la fraction volumique d'inclusions. Cela peut s'expliquer par le fait que ces résultats ont été obtenus pour une correction au premier ordre η^1 , conduisant à une sous-estimation. Enfin, le modèle permet de réduire le temps de calcul puisque les calculs en champs complets sont à réaliser sur des volumes de taille réduite pour la détermination des déformations macroscopiques.

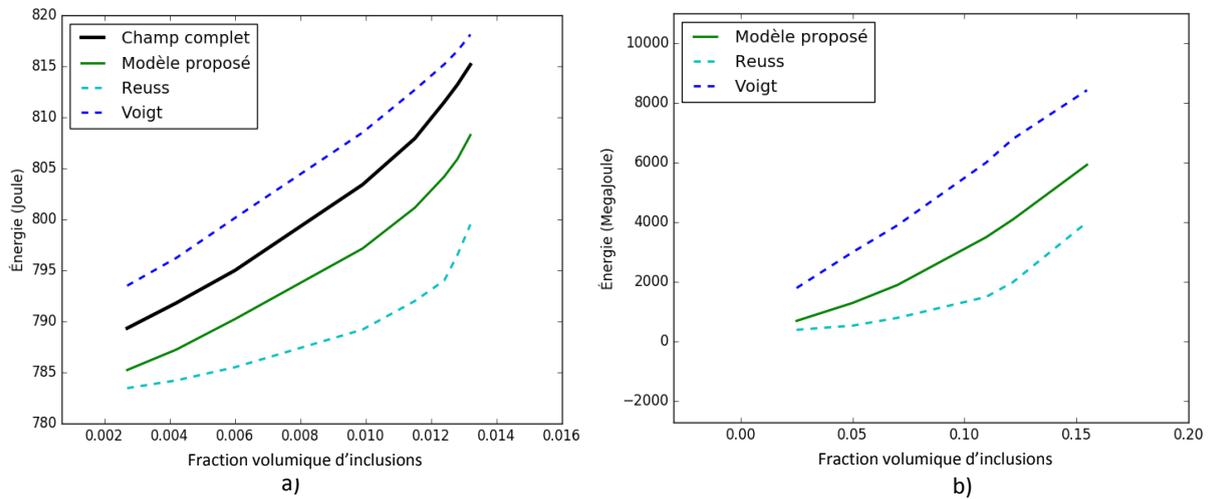


Figure 3.12 – Fuseau de Hill énergétique a) : Matériau virtuel, b) : Matériau synthétique.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté la mise en oeuvre numérique du modèle pour deux types de microstructures différentes par leur morphologie et leur mode d'obtention. Pour chacune, une large gamme de fractions volumiques a été investiguée afin de reconstruire un fuseau de Hill "énergétique". Cette phase de la thèse a donné lieu au développement ou enrichissement de plusieurs outils numériques pour la génération, les mesures morphologiques, ou encore le maillage des microstructures, en plus de la mise en oeuvre de l'algorithme de calcul de l'énergie à proprement parlé. Le modèle non-local, dans sa version telle que proposée dans le chapitre 2, requiert le calcul en champs complets de deux tenseurs de déformation macroscopiques E^0 et E^1 sur deux volumes élémentaires morphologiquement représentatifs V.E.M.R0 et V.E.M.R1 dont les tailles l_0 et l_1 peuvent être vues comme des longueurs caractéristiques du modèle. Ces longueurs sont véritablement connectées à l'organisation microstructurale puisqu'elles correspondent aux distances "d'influence" des inclusions à l'origine du comportement non-local.

Chapitre 4

Régularisation au sens de la Γ -convergence

Le chapitre précédent nous a permis d'obtenir un modèle non-local avec second gradient de déplacement. Toutefois, la mise en oeuvre de ce modèle nécessite une étape de calcul en champs complets sur deux V.E.M.R afin de déterminer certaines des grandeurs impliquées. L'objectif est ici de s'affranchir de cette étape pour rendre le modèle ultérieurement utilisable en calcul de structure. Ce chapitre, préparatoire au chapitre 5, a donc pour objectif de fournir un modèle déterministe, non-local, asymptotique et équivalent du point de vue variationnel. La méthode utilisée pour la transition vers la limite est la Γ -convergence dans le cas stochastique. D'un point de vue mathématique, il s'agit de faire l'étude asymptotique variationnelle de $W^{(\eta)}$ lorsque η tend vers 0 afin d'obtenir un modèle homogène. Nous tentons ainsi d'obtenir par une analyse asymptotique un modèle similaire à ceux obtenus dans le cadre aléatoire par [Nait-ali, 2017] et [Michaille et al., 2011], et périodique par [Bellieud et Bouchitté, 1998].

4.1 Introduction

D'un point de vue macroscopique, il est naturel d'essayer d'établir les propriétés effectives d'un milieu hétérogène afin d'étudier la réponse d'une structure. Il est également intéressant de pouvoir adopter la démarche inverse afin de faire une analyse locale à l'échelle des hétérogénéités. Dans ce contexte, l'introduction d'un petit paramètre η est essentielle puisqu'il permet de caractériser ces hétérogénéités et en même temps de déterminer les propriétés effectives via une transition d'échelle.

Plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature pour le passage à la limite sur ce petit paramètre. Elles fournissent en général des modèles simples équivalents. Citons les méthodes variationnelles avec l'utilisation des concepts de Γ -convergence. Cette notion a été introduite par [De Giorgi et Franzoni, 1975] [Mosco, 1969]... Dans le cadre de cette thèse, on se réfère au livre récent de Dal Maso [Braides, 2002] et on s'intéresse principalement aux applications aux comportements asymptotiques des problèmes minimaux pour des fonctions intégrales définies sur des espaces de Sobolev.

Dans le premier paragraphe, on commence par exposer la notion de compacité. Les deux paragraphes suivants sont consacrés à la vérification de l'existence des limites supérieure et inférieure de l'énergie $W^{(\eta)}$. Enfin, on présente les développements conduisant à l'obtention du modèle asymptotique homogénéisé.

4.2 Compacité

Comme énoncé dans le chapitre 1, afin d'obtenir l'existence d'un champ de déplacement limite, nous devons satisfaire l'hypothèse de compacité.

Lemme 4.2.1 (Compacité). *Soit $(u^\eta(x, \omega))_{\eta>0}$ de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ une suite bornée, i.e., satisfaisant pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega_p$, $\sup_{\eta>0} W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega)) < +\infty$. Alors, pour P -presque tout $\omega \in \Omega_p$, il existe une sous-suite pouvant dépendre de ω et un couple $(u, v) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ pouvant également dépendre de ω tel que :*

$$u^\eta(x, \omega) \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad (4.1)$$

$$\chi\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right)u^\eta(x, \omega) \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad (4.2)$$

où χ représente un tenseur caractéristique.

Pour la démonstration des propriétés de compacité, le lecteur pourra se référer à la thèse de [Nait-Ali, 2012] et aux travaux de [Attouch et al., 2014].

Autrement dit 4.2.1. *En l'absence de chargement, (4.1) et (4.2) seront vérifiées sous la seule condition $\chi(\omega, \frac{x}{\eta}) > 0$.*

Pour $\omega \in \Omega_p$ fixé, on introduit la notion suivante pour $(u^\eta)_{\eta>0}$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. On notera

$$u^\eta(x, \omega) \rightharpoonup (u, v) \iff \begin{cases} u^\eta(x, \omega) \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ \chi\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right)u^\eta(x, \omega) \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (4.3)$$

Autrement dit 4.2.2. *On obtient deux champs limites u et v , le premier correspond au champ de déplacement macroscopique de tout point du domaine Ω , et v est une variable traduisant le champ de déplacement virtuel des inclusions, qualifié aussi d'effet mémoire des inclusions.*

Autrement dit 4.2.3. *Afin d'avoir ce résultat, il nous faut avoir un chargement volumique ainsi qu'une condition aux limites du type Dirichlet. Cette condition nous permet également d'obtenir l'existence et l'unicité de ce couple de solutions dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ (voir [Nait-ali, 2017], [Michaille et al., 2011]).*

Théorème 4.2.1. *La suite aléatoire de fonctionnelles $W^{(\eta)}(u^\eta(\omega))$ Γ -converge presque sûrement vers la fonctionnelle déterministe $W^{hom}(u, v)$ quand $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ est muni de la topologie faible suggérée par le Lemme 4.2.1.*

Rappelons que l'on cherche à fournir un modèle déterministe non-local d'un matériau composite présentant une distribution aléatoire d'inclusions dans une matrice élastique. Pour démontrer le théorème précédent, on procède en deux étapes : on établit la Γ -limite-sup puis la

Γ -limite-inf. D'un point de vue mathématique, il s'agit de faire l'étude asymptotique variationnelle de l'énergie $W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega))$ lorsque η tend vers 0 afin d'obtenir un modèle homogène. Nous proposons en fait de majorer et minorer notre énergie par deux quantités énergétiques déterministes. Cela conduit à encadrer la Γ -limite de la fonctionnelle $W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega))$ par deux bornes "limite-sup" et "limite-inf". Plus précisément, nous établissons dans les deux sous-sections qui suivent la double estimation suivante :

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}(v^\eta(x, \omega)) \geq W^{hom}(u, v) \geq \limsup_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega)) \quad (4.4)$$

Autrement dit 4.2.4. *En vérifiant les deux inégalités données par l'équation (4.4), on aura l'égalité des énergies limites avec $W^{hom}(u, v)$.*

4.3 Estimation de la borne variationnelle de la Γ -limite supérieure

Dans cette partie, on va établir la borne supérieure qui permet de déterminer les bornes supérieures des coefficients homogénéisés du modèle obtenu au chapitre 2.

Soit \mathcal{A} la sigma-algèbre définie dans le chapitre 1.

Proposition 4.3.1. *Il existe un ensemble $\Omega_p \in \mathcal{A}$ de probabilité 1 tel que pour tout couple $(u, v) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et tout $\omega \in \Omega_p$ il existe une suite $(u^\eta(x, \omega))_{\eta > 0}$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ vérifiant :*

$$\begin{aligned} u^\eta(x, \omega) &\rightharpoonup (u, v) \\ W^{hom}(u, v) &\geq \limsup_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega)) \end{aligned}$$

Etant donné que le champ de déplacement est exprimé sous la forme d'un développement en puissance de η donné par :

$$u^\eta(x, \omega) = u^0(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \eta^1 u^1(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \eta^2 u^2(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \eta^3 u^3(x, \frac{x}{\eta}, \omega) + \dots$$

il est clair que la suite $((u^\eta(x, \omega); \eta \rightarrow 0))$ converge vers $u^0(x, \frac{x}{\eta}, \omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Dans tout ce qui suit, cette limite sera notée u .

Démontrons le théorème à savoir la Γ -convergence de la suite de fonctionnelles $W^{(\eta)}, \eta \rightarrow 0$ où

$$W^{(\eta)}(u) = \int_{\Omega} f(\frac{x}{\eta}, \text{grad}(u)) dx$$

Les fonctionnelles étant uniformément coercives sur $H^1(\Omega)$, les suites minimisantes correspondantes sont bornées dans $H^1(\Omega)$ et donc relativement compactes pour $\tau =$ topologie forte de $L^2(\Omega)$ (on pourrait aussi bien prendre la topologie faible de $H^1(\Omega)$). Il s'agit donc de montrer que

$$W^{hom} = \tau - \lim_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}$$

Grâce à l'ergodicité et à ses propriétés permettant d'utiliser les hypothèses du cas périodique, on peut établir le résultat qui suit.

Pour tout $z \in \mathbb{R}^3$, introduisons $w_z \in H^1(\mathbb{R}^3)$ une solution du problème de minimisation :

$$\begin{cases} w_z \in H^1(Y) \\ W \text{ nY - ergodique} \\ \int_Y f(y, \text{grad}(w_z(y) + z)) dy \end{cases} \quad (4.5)$$

Rappelons que la valeur de ce minimum est précisément la grandeur notée f^{hom} . Par conséquent

$$f^{hom}(z) = \int_Y f(y, \text{grad}(w_z(y) + z)) dy \quad (4.6)$$

et w_z satisfait l'équation d'Euler :

$$- \operatorname{div} \partial f(y, \operatorname{grad}(w_z(y) + z)) = 0 \quad (4.7)$$

où $\partial f(y, \cdot)$ désigne le gradient de la fonction convexe continue $f(y, \cdot)$.

Etant donnée u affine de pente $z \in \mathbb{R}^N$, i.e. $u(x) = \langle x, z \rangle + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), prenons $u^\eta(x, \omega) = u(x) + \eta w_z(\frac{x}{\eta})$. Il est clair que la suite $u^\eta(x, \omega); \eta \rightarrow 0$ converge vers u dans $L^2(\Omega)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega)) &= \int_Y f(y, \operatorname{grad}(w_z(y) + z)) dy \\ &= \int_Y f\left(\frac{x}{\eta}, \operatorname{grad}\left(w_z\left(\frac{x}{\eta}\right) + z\right)\right) dy \end{aligned} \quad (4.8)$$

La fonction $h(y) = f(y, \operatorname{grad}(w_z(y) + z))$ étant Y -ergodique, la suite de fonctions $h^\eta; \eta \rightarrow 0$ donnée par $h^\eta = h(\frac{x}{\eta})$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers la valeur moyenne de h . Par conséquent,

$$W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega)) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \int_\Omega dx \int_Y f(y, \operatorname{grad}(w_z(y) + z)) dy = \int_\Omega f^{hom}(z) dx$$

Cette dernière intégrale étant égale à $\int_\Omega f^{hom}(\operatorname{grad} u) dx$, soit

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega)) = W^{hom}(u)$$

,

on obtient la Γ –limite supérieure suivante :

$$\Gamma - \limsup W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega)) = W^{hom}(u, v) \quad (4.9)$$

4.4 Estimation de la borne variationnelle de la Γ -limite inférieure

Cette partie est consacrée à l'établissement de la limite inférieure qui permet de déterminer les bornes inférieures des coefficients homogénéisés du modèle obtenu au chapitre 2. Il faut montrer que pour toute suite $v^\eta \xrightarrow[\eta \rightarrow 0]{} u$, on a :

$$\Gamma - \liminf_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}(v^\eta(x, \omega)) \geq W^{hom}(u, v)$$

L'idée consiste à comparer $W^{(\eta)}(v^\eta(x, \omega))$ à $W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega))$ via une égalité de convexité :

$$W^{(\eta)}(v^\eta(x, \omega)) \geq W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega)) + R^{(\eta)}$$

puis à montrer que $\lim_{\eta \rightarrow 0} R^{(\eta)} = 0$. Il s'en suivra :

$$\Gamma - \liminf_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}(v^\eta(x, \omega)) \geq \lim_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega)) = W^{hom}(u, v)$$

On notera que ceci revient bien à montrer que la suite $u^\eta(x, \omega), \eta \rightarrow 0$ réalise le min de $\lim_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega))$ parmi toutes les suites convergeant vers u . Pour ne pas avoir à tenir compte de termes de bord dans les intégrations par parties, introduisons $\varphi \in D(\Omega)$ avec $0 \leq \varphi \leq 1$. On fera ensuite tendre φ vers 1.

$$\begin{aligned} W^{(\eta)}(v^\eta(x, \omega)) &= \int_{\Omega} f\left(\frac{x}{\eta}, \text{grad } v^\eta(x, \omega)\right) dx \geq \int_{\Omega} \varphi f\left(\frac{x}{\eta}, \text{grad } v^\eta(x, \omega)\right) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \varphi f\left(\frac{x}{\eta}, \text{grad } u^\eta(x, \omega)\right) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \varphi \langle \partial f\left(\frac{x}{\eta}, \text{grad } u^\eta(x, \omega)\right), \text{grad}(v^\eta(x, \omega) - u^\eta(x, \omega)) \rangle dx \end{aligned} \tag{4.10}$$

où $\langle . \rangle$ désigne un opérateur différentiel.

D'où

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}(v^\eta(x, \omega)) \geq \int_{\Omega} \varphi f^{hom}(grad u) dx + \liminf_{\eta \rightarrow 0} R^{(\eta)}$$

avec

$$R^{(\eta)} = \int_{\Omega} \varphi \langle \partial f(\frac{x}{\eta}, grad u^\eta(x, \omega)), grad(v^\eta(x, \omega) - u^\eta(x, \omega)) \rangle dx$$

Pour passer à la limite sur $R^{(\eta)}$, il est nécessaire de passer à la limite sur le produit de deux suites faiblement convergentes dans $L^2(\Omega)$. Cette difficulté se rencontre dans tous les problèmes d'homogénéisation. On peut la lever soit en utilisant des résultats du type compacité par compensation (cf [Murat, 1978], [Tartar, 1977]), soit ici en faisant tout simplement une intégration par parties.

Nous allons utiliser le fait que $u^\eta(x, \omega)$ est construite à partir de la solution d'un problème variationnel et vérifie

$$-div \partial f(\frac{x}{\eta}, grad u^\eta(x, \omega)) = 0 \quad (4.11)$$

En effet ceci équivaut à $-div \partial f(\frac{x}{\eta}, z + grad w_z(\frac{x}{\eta})) = 0$ dans Ω et résulte bien de (4.7) et de la nY -ergodicité de w_z .

En intégrant par parties $R^{(\eta)}$ et en tenant compte de (4.11), on obtient :

$$R^{(\eta)} = - \int_{\Omega} (v^\eta(x, \omega) - u^\eta(x, \omega)) \langle \partial f(\frac{x}{\eta}, grad u^\eta(x, \omega)), grad \varphi \rangle dx$$

D'où, tenant-compte de la convergence forte dans $L^2(\Omega)$ de la suite $(v^\eta(x, \omega) - u^\eta(x, \omega), \eta \rightarrow 0)$ vers zéro ainsi que des bornes dans $L^2(\Omega)$ de la suite $\{\partial f(\frac{x}{\eta}, grad u^\eta(x, \omega)) \rightarrow 0\}$, on obtient $\lim_{\eta \rightarrow 0} R^{(\eta)} = 0$. Finalement,

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}(v^\eta(x, \omega)) \geq \int_{\Omega} \varphi f^{hom}(grad u) dx$$

et, faisant tendre φ vers 1, on obtient le résultat.

On passe à présent de la fonction u affine à la fonction u affine par morceaux en utilisant le caractère local des fonctionnelles différentes $W^{(\eta)}$.

Si $\text{grad } u = z_1$ sur Ω_1 et $\text{grad } u = z_2$ sur Ω_2 , on est tenté de prendre

$$u^\eta(x, \omega) = \begin{cases} u_1^\eta(x, \omega) = u(x, \omega) + \eta w_{z_1}\left(\frac{x}{\eta}\right) \text{ sur } \Omega_1 \\ u_2^\eta(x, \omega) = u(x, \omega) + \eta w_{z_2}\left(\frac{x}{\eta}\right) \text{ sur } \Omega_2 \end{cases} \quad (4.12)$$

Mais les deux fonctions $u_1^\eta(x, \omega)$ et $u_2^\eta(x, \omega)$ ne se raccordent pas sur Σ , la frontière commune de Ω_1 et Ω_2 (voir Figure 4.1). On recolle alors de façon continue les deux fonctions :

$$u_\delta^\eta(x, \omega) = \varphi_\delta u_1^\eta(x, \omega) + (1 - \varphi_\delta) u_2^\eta(x, \omega) \text{ où } \varphi_\delta(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \text{dist}(x, \Sigma) \leq \delta \\ 0 \text{ si } \text{dist}(x, \Sigma) \geq 2\delta \end{cases} \quad (4.13)$$

Avec ($0 \leq \varphi_\delta \leq 1$) et tenant compte du fait que le saut entre $u_1^\eta(x, \omega)$ et $u_2^\eta(x, \omega)$ est de l'ordre de η sur Σ , on montre qu'il existe un $\delta(\eta)$ tel que la suite $u^\eta(x, \omega) = u_{\delta(\eta)}^\eta(x, \omega)$ réalise $u^\eta(x, \omega) \rightharpoonup u$, $W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega)) \rightarrow W^{\text{hom}}(u, v)$ et, pour tout $v^\eta(x, \omega) \rightharpoonup u$, $\liminf_{\eta \rightarrow 0} W^{(\eta)}(v^\eta(x, \omega)) \geq W^{\text{hom}}(u, v)$.

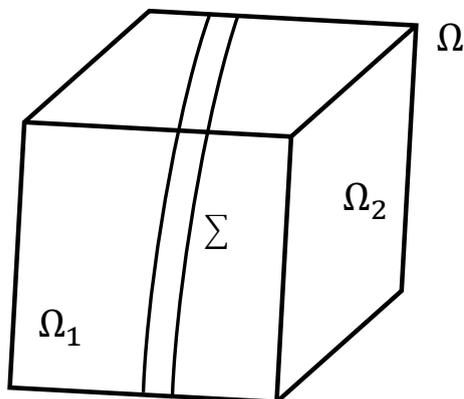


Figure 4.1 – Schéma représentant la frontière commune Σ de deux domaine Ω_1 et Ω_2 .

On obtient ainsi la Γ – limite inférieure suivante :

$$\Gamma - \liminf W^{(\eta)}(u^\eta(x, \omega)) \geq W^{hom}(u, v) \quad (4.14)$$

Au final, avec (4.9) et (4.14), on a l'égalité des énergies limites avec $W^{hom}(u, v)$.

4.5 Calcul de $W^{hom}(u, v)$

L'objectif de cette section est de calculer la Γ -limite de l'énergie complète (2.23) du modèle établi au chapitre 2 que l'on peut ré-écrire de manière synthétique sous une forme additive de 4 termes :

$$W^{(\eta)}(u^\eta) = W_\eta^{(0)}(\mathbb{A}^{(0,0)}) + W_\eta^{(1)}(\mathbb{B}^{(0,1)}) + W_\eta^{(1)}(\mathbb{C}^{(0,0)}) + W_\eta^{(1)}(\mathbb{D}^{(0,0)}) \quad (4.15)$$

A cet effet, chacun des termes va être traité séparément. On fera ensuite la somme des résultats obtenus.

Étude du premier terme : terme avec $\mathbb{A}^{(0,0)}$ avec $\eta \in]0, 1[$

Nous reprenons l'expression (2.16) de l'énergie à l'ordre 0 et la travaillons en supposant la même sensibilité de toutes les grandeurs au paramètre η :

$$\begin{aligned} W_\eta^{(0)}(\mathbb{A}^{(0,0)}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \times Y} \varepsilon_x(u^0) : [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \varepsilon_x(u^0) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : \frac{1}{\eta} [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \frac{1}{\eta} \mathbb{C}(x, \omega) : \frac{1}{\eta} [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(u^0) \frac{1}{\eta} dx \\ &= \frac{1}{\eta^4} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(u^0) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(u^0) dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

Maintenant, on applique le processus additif, défini dans le chapitre 1 et rappelé ci-dessous par le système (4.17) :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{A_k}(\omega)}{|A_k|} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{S_{A_\eta}(\omega)}{|A_\eta|} = \begin{cases} E(S_{[0,1]^3}) & \text{si le s.d.a est ergodique,} \\ E^F(S_{[0,1]^3}) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.17)$$

où le processus S est dans notre cas l'énergie. Dans la définition (4.17), on a $k \rightarrow \infty$, et dans notre étude on a $\eta \rightarrow 0$. Donc, on fait le changement de variable suivant : $k = \frac{1}{\eta}$.

En utilisant le processus (4.17) et le fait que $|A_k| \rightarrow A_k = \frac{2}{k^2}$, $|A_\eta| \rightarrow A_\eta = 2\eta^2$, on déduit depuis l'équation (4.16) l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \liminf_{\eta \rightarrow 0} W_\eta^{(0)}(\mathbb{A}^{(0,0)}) &\geq \liminf_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(u^0) dx \right] \\ &\geq E(S_{[0,1]^3}) \end{aligned}$$

avec :

$$S_{[0,1]^3} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(u^0) dx$$

et où γ désigne une variable muette. La suite consiste à appliquer la limite $\gamma \rightarrow 0$. Cela revient à faire tendre la taille du V.E.R. vers 0, ce qui va terminer la transition d'échelle. En utilisant alors les résultats consignés dans le système ci-dessous :

$$\begin{cases} \lim_{\eta \rightarrow 0}(\eta) = 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow 0}(\varepsilon_x(u^0)) = \varepsilon_x(u) \text{ (voir l'équation (2.12) à l'ordre 1 : } E(x) = E^0(x) + \eta E^1(x)) \\ \lim_{\gamma \rightarrow 0} E(\beta_\gamma) = E(\beta) \text{ où } E \text{ est l'espérance mathématique} \\ \beta : \text{fonction quelconque} \end{cases} \quad (4.18)$$

il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \liminf_{\eta \rightarrow 0} W_\eta^{(0)}(\mathbb{A}^{(0,0)}) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[E \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(u^0) dx \right) \right] \\ &= E \left[\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(u^0) dx \right) \right] \\ &= E \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \nabla_x \chi^0(x, \omega) : \mathbb{C}(x, \omega) : \nabla_x \chi^0(x, \omega) : \varepsilon_x(u) dx \right) \end{aligned}$$

Remarque 4.5.1. *L'énergie totale de la microstructure est constituée de deux parties, une première contribution due à la matrice et la seconde aux inclusions. A ce stade on peut appliquer la linéarité de l'espérance mathématique $E(a\beta^1 + b\beta^2) = a E(\beta^1) + b E(\beta^2)$.*

En tenant compte de la remarque précédente, la nouvelle forme de l'énergie homogénéisée à l'ordre 0 est donnée par :

$$\begin{aligned} W_{hom}^{(0)}(\mathbb{A}^{(0,0)}) &= \frac{1}{2} E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u - v) : \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^m(x, \omega) : \mathbb{1}_4 : \varepsilon_x(u - v) dx \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \Theta_1 : \mathbb{C}^i(x, \omega) : \Theta_1 : \varepsilon_x(v) dx \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} m \text{ et } i : \text{deux exposants représentant respectivement les deux phases matrice et inclusions} \\ v : \text{variable correspondant au champ de déplacement virtuel des inclusions} \\ \nabla_x \chi^0(x, \omega) \rightarrow E \left(\int_{\Omega} \nabla_x \chi^0(x, \omega) \right) = \Theta_1 \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Dans l'équation précédente, le terme $\varepsilon_x(u - v)$ représente la contribution de la matrice à la déformation totale et le terme $\varepsilon_x(v)$ celle des inclusions. L'apparition de ces termes vient de la compacité et reflète une certaine forme de non localité.

Le tenseur Θ_1 est un tenseur d'ordre 4 qui dans le cas général peut être anisotrope. Dans le cas isotrope, on a $\Theta_1 = \theta_1 \cdot \mathbb{1}_4$ avec θ_1 la fraction volumique asymptotique de la phase 1 dans le V.E.R et $\mathbb{1}_4$ le tenseur identité d'ordre 4 (noté ici $\mathbb{1}_4$ plutôt que $\mathbb{1}$ pour précisément signifier l'ordre). Ainsi, l'énergie homogénéisée à l'ordre 0 devient :

$$\begin{aligned} W_{hom}^{(0)}(\mathbb{A}^{(0,0)}) &= \frac{1}{2} E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u - v) : \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) : \varepsilon_x(u - v) dx \right) \\ &+ \frac{1}{2} \theta_1^2 E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_0^i(x, \omega) : \varepsilon_x(v) dx \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

où l'on a posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) = \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^m(x, \omega) : \mathbb{1}_4 \\ \tilde{\mathbb{C}}_0^i(x, \omega) = \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^i(x, \omega) : \mathbb{1}_4 \end{array} \right.$$

Étude du deuxième terme : terme avec $\mathbb{B}^{(0,1)}$ avec $\eta \in]0, 1[$

On s'intéresse à présent à la première intégrale de (2.20). Le début du traitement est identique. On retravaille l'expression en supposant que toutes les grandeurs ont la même sensibilité au paramètre η . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
W_\eta^{(1)}(\mathbb{B}^{(0,1)}) &= \int_{\Omega \times Y} \varepsilon_x(u^0) : [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \varepsilon_x(U^1) dx dy \\
&= \frac{1}{\eta^4} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(U^1) dx \\
&\geq \frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(U^1) dx
\end{aligned} \tag{4.21}$$

En utilisant le processus (4.17), on obtient depuis l'équation (4.21) l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\liminf_{\eta \rightarrow 0} W_\eta^{(1)}(\mathbb{B}^{(0,1)}) &\geq \liminf_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(U^1) dx \right] \\
&\geq E(S_{[0,1]^3})
\end{aligned}$$

avec :

$$S_{[0,1]^3} = \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(U^1) dx$$

L'idée est alors d'exprimer $\varepsilon_x(U^1) = E^1(x)$ en fonction de $\varepsilon_x(U^0)$. Avec $E(x) = E^0(x) + \gamma E^1(x)$ et en utilisant le développement de U au premier ordre (voir (2.12)), on a :

$$\varepsilon_x(U^1) = \frac{\varepsilon_x(U^0 + \gamma U^1) - \varepsilon_x(U^0)}{\gamma}$$

et par suite,

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} (\varepsilon_x(U^1)) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon_x(U^0 + \gamma U^1) - \varepsilon_x(U^0)}{\gamma} \right) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon_x(U^0 + \gamma) - \varepsilon_x(U^0)}{\gamma} \right) \\ &= \nabla_x \varepsilon(U^0) \cdot dQ \end{aligned}$$

où "·" désigne le produit contracté simple et $dQ = dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + dx_3 e_3$.

En appliquant la limite $\gamma \rightarrow 0$ et en utilisant les résultats consignés dans le système (4.18) puis enfin le fait que $\lim_{\gamma \rightarrow 0} U^\gamma = U^0 = u$, il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \liminf_{\eta \rightarrow 0} W_\eta^{(1)}(\mathbb{B}^{(0,1)}) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(U^1) dx \right) \right] \\ &= E \left[\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \varepsilon_x(U^1) dx \right) \right] \\ &= E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \nabla_x \chi^0(x, \omega) : \mathbb{C}(x, \omega) : \nabla_x \chi^0(x, \omega) : \left(\nabla_x \varepsilon_x(u) \cdot dQ \right) dx \right) \end{aligned}$$

En utilisant la **Remarque 4.5.1**, on obtient :

$$\begin{aligned} W_{hom}^{(1)}(\mathbb{B}^{(0,1)}) &= E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u - v) : \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^m(x, \omega) : \mathbb{1}_4 : \left(\nabla_x \varepsilon_x(u - v) \cdot dQ \right) dx \right) \\ &\quad + E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \Theta_1 : \mathbb{C}^i(x, \omega) : \Theta_1 : \left(\nabla_x \varepsilon_x(v) \cdot dQ \right) dx \right) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dans le cas isotrope, l'équation (4.22) devient :

$$W_{hom}^{(1)}(\mathbb{B}^{(0,1)}) = E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u-v) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u-v) dx \right) \\ + \theta_1^2 E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_1^i(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(v) dx \right)$$

avec :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) = \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^m(x, \omega) : \mathbb{1}_4. dQ \\ \tilde{\mathbb{C}}_1^i(x, \omega) = \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^i(x, \omega) : \mathbb{1}_4. dQ \end{cases}$$

Étude du troisième terme : terme avec $\mathbb{C}^{(0,0)}$ avec $\eta \in]0, 1[$

Passons maintenant à la deuxième intégrale de (2.20). Le traitement est identique à celui du terme d'ordre 0.

On commence par retravailler l'expression en supposant que toutes les grandeurs impliquées ont la même sensibilité au paramètre η . On obtient :

$$W_{\eta}^{(1)}(\mathbb{C}^{(0,0)}) = \int_{\Omega \times Y} \varepsilon_x(u^0) : [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : \chi^0(y, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx dy \\ = \frac{1}{\eta^4} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \chi^0(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx \quad (4.23) \\ \geq \frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \chi^0(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx$$

Puis, avec le processus (4.17) :

$$\begin{aligned} \liminf_{\eta \rightarrow 0} W_{\eta}^{(1)}(\mathbb{C}^{(0,0)}) &\geq \liminf_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \chi^0(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx \right] \\ &\geq E(S_{[0,1]^3}) \end{aligned}$$

avec, cette fois :

$$S_{[0,1]^3} = \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \chi^0(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx$$

En appliquant la limite $\gamma \rightarrow 0$ et en utilisant les résultats consignés dans le système (4.18), on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \liminf_{\eta \rightarrow 0} W_{\eta}^{(0)}(\mathbb{C}^{(0,0)}) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \chi^0(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx \right) \right] \\ &= E \left[\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \chi^0(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx \right) \right] \\ &= E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : \nabla_x \chi^0(x, \omega) : \mathbb{C}(x, \omega) : \chi^0(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx \right) \end{aligned}$$

En utilisant la **Remarque 4.5.1**, on obtient :

$$\begin{aligned} W_{hom}^{(1)}(\mathbb{C}^{(0,0)}) &= E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u - v) : \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^m(x, \omega) : \mathbb{1}_3 : \nabla_x \varepsilon_x(u - v) dx \right) \\ &\quad + E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \Theta_1 : \mathbb{C}^i(x, \omega) : \Theta_2 : \nabla_x \varepsilon_x(v) dx \right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

avec :

$$\chi^0(x, \omega) \rightarrow E\left(\int_{\Omega} \chi^0(x, \omega) dx\right) = E\left(\int_{\Omega} \left(\int \nabla_x \chi^0(x, \omega)\right) dx\right) = \Theta_2$$

où la seconde intégrale dans le troisième terme désigne la primitive. Θ_2 est un tenseur d'ordre 3 qui dans le cas général peut être anisotrope. Dans le cas isotrope, on a $\Theta_2 = \theta_2 \cdot \mathbb{1}_3$ avec θ_2 la fraction volumique asymptotique de la phase 1, cette fois dans le V.E.M.R0 et $\mathbb{1}_3$ le tenseur identité d'ordre 3. Ainsi, $W_{hom}^{(1)}(\mathbb{C}^{(0,0)})$ devient

$$W_{hom}^{(1)}(\mathbb{C}^{(0,0)}) = E\left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u - v) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u - v) dx\right) \\ + \theta_1 \theta_2 E\left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_2^i(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(v) dx\right)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) = \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^m(x, \omega) : \mathbb{1}_3 \\ \tilde{\mathbb{C}}_2^i(x, \omega) = \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^i(x, \omega) : \mathbb{1}_3 \end{cases}$$

Étude du quatrième terme : terme avec $\mathbb{D}^{(0,0)}$ avec $\eta \in]0, 1[$

Il s'agit d'étudier la troisième intégrale de (2.20). Le traitement est analogue. On retravaille l'expression en supposant que toutes les grandeurs ont la même sensibilité au paramètre η et on obtient :

$$W_{\eta}^{(1)}(\mathbb{D}^{(0,0)}) = \int_{\Omega \times Y} \varepsilon_x(u^0) : [\mathbb{1} + \nabla_y \chi^0(y, \omega)] : \mathbb{C}\left(\frac{x}{\eta}, \omega\right) : \nabla_y \chi^1(y, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx dy \\ = \frac{1}{\eta^4} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \nabla_x \chi^1(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx \\ \geq \frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \nabla_x \chi^1(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx$$

Puis, avec le processus (4.17) :

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0} W_{\eta}^{(1)}(\mathbb{D}^{(0,0)}) \geq \liminf_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\eta^2} \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\eta \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \nabla_x \chi^1(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx \right]$$

avec :

$$S_{[0,1]^3} = \int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \nabla_x \chi^1(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx$$

En appliquant la limite $\gamma \rightarrow 0$ et en utilisant le système (4.18), on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \liminf_{\eta \rightarrow 0} W_{\eta}^{(0)}(\mathbb{D}^{(0,0)}) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \nabla_x \chi^1(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx \right) \right] \\ &= E \left[\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : [\gamma \cdot \mathbb{1} + \nabla_x \chi^0(x, \omega)] : \mathbb{C}(x, \omega) : \nabla_x \chi^1(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx \right) \right] \\ &= E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u^0) : \nabla_x \chi^0(x, \omega) : \mathbb{C}(x, \omega) : \nabla_x \chi^1(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u^0) dx \right) \end{aligned}$$

En utilisant la **Remarque 4.5.1**, il vient :

$$\begin{aligned} W_{hom}^{(1)}(\mathbb{D}^{(0,0)}) &= E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u-v) : \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^m(x, \omega) : \mathbb{1}_5 : \nabla_x \varepsilon_x(u-v) dx \right) \\ &\quad + E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \Theta_1 : \mathbb{C}^i(x, \omega) : \Theta_3 : \nabla_x \varepsilon_x(v) dx \right) \end{aligned} \tag{4.25}$$

avec :

$$\nabla_x \chi^1(x, \omega) \rightarrow E \left(\int \nabla_x \chi^1(x, \omega) dx \right) = \Theta_3$$

Θ_3 est un tenseur d'ordre 5 qui dans le cas général peut être anisotrope. Dans le cas isotrope, on a $\Theta_3 = \theta_3 \cdot \mathbb{1}_5$ avec Θ_3 la fraction volumique asymptotique de la phase 1 dans le V.E.M.R1 et $\mathbb{1}_5$ le tenseur identité d'ordre 5. Ainsi, $W_{hom}^{(1)}(\mathbb{D}^{(0,0)})$ devient :

$$W_{hom}^{(1)}(\mathbb{D}^{(0,0)}) = E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u-v) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u-v) dx \right) + \theta_1 \theta_3 E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_3^i(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(v) dx \right)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) = \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^m(x, \omega) : \mathbb{1}_5 \\ \tilde{\mathbb{C}}_3^i(x, \omega) = \mathbb{1}_4 : \mathbb{C}^i(x, \omega) : \mathbb{1}_5 \end{cases}$$

Γ -limite de l'énergie complète

En sommant les expressions de $W_{hom}^{(0)}(\mathbb{A}^{(0,0)})$, $W_{hom}^{(1)}(\mathbb{B}^{(0,1)})$, $W_{hom}^{(1)}(\mathbb{C}^{(0,0)})$ et de $W_{hom}^{(1)}(\mathbb{D}^{(0,0)})$ issues de l'étude asymptotique variationnelle au sens de la Γ -limite, $W_{hom}(u, v)$ est finalement obtenue sous la forme :

$$\begin{aligned} W_{hom}(u, v) &= W_{hom}^{(0)}(u, v) + W_{hom}^{(1)}(u, v) \\ &= \frac{1}{2} E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u-v) : \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) : \varepsilon_x(u-v) dx \right) + \frac{1}{2} \theta_1^2 E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_0^i(x, \omega) : \varepsilon_x(v) dx \right) \\ &+ E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u-v) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u-v) dx \right) + \theta_1^2 E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_1^i(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(v) dx \right) \\ &+ E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u-v) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u-v) dx \right) + \theta_1 \theta_2 E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_2^i(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(v) dx \right) \\ &+ E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(u-v) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(u-v) dx \right) + \theta_1 \theta_3 E \left(\int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_3^i(x, \omega) : \nabla_x \varepsilon_x(v) dx \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Il est clair que dans le cas où la non-localité est très faible, $W_{hom}^{(1)}(u, v)$ est négligeable. Nous conservons ici ce terme afin de pouvoir obtenir la valeur de $\nabla_x \varepsilon_x(\cdot)$ dans le cas de forts gradients.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une analyse asymptotique de l'énergie $W^{(\eta)}$ a permis d'aboutir à un modèle macroscopique, déterministe et non-local d'un matériau constitué d'une distribution aléatoire d'inclusions dans une matrice élastique, tout en gardant un lien fort avec la microstructure. La non-localité s'exprime non seulement par la présence du gradient du tenseur de déformation apparu au chapitre 2 mais aussi désormais à travers le champ de déplacement virtuel des inclusions représenté par la variable v . Le lien fort avec la microstructure du matériau hétérogène étudié s'exprime quant à elle à travers la présence du paramètre stochastique ω , mais aussi celle des fractions asymptotiques θ_1 , θ_2 et θ_3 de la phase inclusionnaire dans le matériau, le volume V.E.M.R0, et le volume V.E.M.R1, respectivement. D'un point de vue mécanique, cette énergie permet d'obtenir les limites supérieures et inférieures des coefficients homogénéisés. Le modèle obtenu peut désormais être utilisé dans un code de simulation EF sous réserve d'en réaliser la formulation variationnelle et de définir un élément fini non-local enrichi approprié. Il s'agit de l'objectif du cinquième et dernier chapitre de cette thèse. Tout le développement est fait ici en négligeant les forces volumiques. Quand ces dernières sont présentes, la densité d'énergie reste inchangée.

Chapitre 5

Formulation variationnelle et développement d'un élément fini non-local enrichi

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place les ingrédients nécessaires à l'implémentation du modèle non-local proposé au sein d'un code de calcul de structure. Ainsi, on établit la formulation variationnelle du modèle et on propose un élément fini non-local enrichi par des interpolations de type Hermite permettant de prendre en compte les effets non-locaux. Cet élément est implémenté dans le code de simulation interne FoXtroT.

5.1 Introduction

Dans la littérature, il existe une large famille d'éléments finis enrichis, citons l'exemple des nombreuses et différentes formulations mixtes dans le cadre de l'élasticité linéaire. Dans ce type de formulation, non seulement les déplacements mais aussi les contraintes et/ou les déformations sont des inconnues. Parmi les formulations mixtes les plus populaires, on trouve les formulations d'Hellinger-Reissner [Reissner, 1950] et de Hu-Washizu [Hai-Chang, 1955][Washizu, 1955]. Il y a deux raisons d'utiliser une formulation mixte pour l'élasticité. La première est de calculer plus précisément la variable d'intérêt, contrainte, déformation ou pression, et la deuxième raison est d'atténuer l'effet de blocage dans le régime presque incompressible. La relation étroite entre les formulations d'Hellinger-Reissner et de Hu-Washizu, qui conduit sous certaines conditions à une équivalence des méthodes, est examinée dans [Djoko *et al.*, 2006]. On trouve aussi un autre type d'élément fini enrichi, celui qui est fondé sur les interpolations d'Hermite et qui sera retenu dans cette thèse.

On va suivre dans ce chapitre une progression analogue à celle du chapitre 3. On va tout d'abord s'intéresser à la résolution du problème d'ordre 0 dont l'énergie est désormais $W_{hom}^{(0)}$ et fait apparaître une première source de non-localité liée au champ de déplacement virtuel des inclusions représenté par la variable v . La formulation variationnelle de l'énergie à l'ordre 0 est donc abordée en se basant sur un élément fini non-local enrichi pour prendre en compte le champ v en plus du champ u . Cet élément reste néanmoins fondé sur une interpolation classique de type Lagrange. Le modèle est testé sur un cas 3D. Puis, on s'attache au traitement de l'énergie homogénéisée à l'ordre 1, $W_{hom}^{(1)}$, impliquant les gradients des tenseurs de déformation. Cela nous conduit à enrichir l'élément par des interpolations d'Hermite permettant de prendre en compte les informations liées aux degrés de liberté correspondant à la dérivée des champs de déplacement. Cet élément est détaillé dans un paragraphe dédié et on termine le chapitre par la représentation matricielle du problème associé à l'énergie complète $W_{hom}(u, v)$.

5.2 Formulation variationnelle du problème

Dans cette section, on traite successivement chacune des énergies $W_{hom}^{(0)}(u, v)$ et $W_{hom}^{(1)}(u, v) = W_{hom}^{(1)}(\mathbb{B}^{(0,1)}) + W_{hom}^{(1)}(\mathbb{C}^{(0,0)}) + W_{hom}^{(1)}(\mathbb{D}^{(0,0)})$ composant l'énergie $W_{hom}(u, v)$ donnée par (4.26). Pour alléger les écritures, le gradient ∇_x sera noté ∇ et on ne fera plus figurer les parenthèses

associées à l'espérance. L'espérance E portera sur la totalité de l'intégrale qui lui succède.

5.2.1 Problème d'ordre 0

5.2.1.1 Représentation matricielle

L'énergie à l'ordre 0 (voir (4.20)) trouvée à l'issue du passage à la Γ -limite dans le chapitre précédent et rappelée ci-dessous :

$$W_{hom}^{(0)}(u, v) = \frac{1}{2}E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u - v) : \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) : \varepsilon_x(u - v) dx + \frac{1}{2}\theta_1^2 E \int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_0^i(x, \omega) : \varepsilon_x(v) dx \quad (5.1)$$

Considérant la linéarité de la déformation, on obtient :

$$\varepsilon_x(u - v) = \varepsilon_x(u) - \varepsilon_x(v) \quad (5.2)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x(u - v) : \text{Contribution de la matrice à la déformation totale} \\ \quad (\text{implicitement due aux effets des inclusions sur la matrice}) \\ \varepsilon_x(u) : \text{Déformation totale (incluant les contributions de la matrice et des inclusions)} \\ \varepsilon_x(v) : \text{Contribution des inclusions} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

En injectant l'équation (5.2) dans (5.1) et en continuant le développement, nous obtenons la forme suivante :

$$\begin{aligned}
W_{hom}^{(0)}(u, v) &= \frac{1}{2}E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) : \varepsilon_x(u) dx - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) : \varepsilon_x(v) dx \\
&\quad + \frac{1}{2}E \int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : (\tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) + \theta_1^2 \tilde{\mathbb{C}}_0^i(x, \omega)) : \varepsilon_x(v) dx
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Pour la résolution d'un problème mécanique, la discrétisation du Principe des Travaux Virtuels consiste à utiliser une approximation pour exprimer les champs u et v . Par simplicité pour l'implémentation, elle sera ici choisie identique pour les deux champs afin d'obtenir une représentation matricielle symétrique.

Calculons les variations, c'est à dire les dérivées de Gâteaux, respectivement par rapport aux déplacements u et v de la fonction (5.4) :

$$\begin{aligned}
\delta_u W_{hom}^{(0)}(v, u) &= E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta u^*) : \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) : \varepsilon_x(u) dx - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta u^*) : \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) : \varepsilon_x(v) dx = 0 \\
\delta_v W_{hom}^{(0)}(v, u) &= -E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\delta v^*) dx + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta v^*) : (\tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) + \theta_1^2 \tilde{\mathbb{C}}_0^i(x, \omega)) : \varepsilon_x(v) dx = 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Les champs virtuels projetés sont désignés par δu^* et δv^* . Dans ce qui suit, les vecteurs contenant les degrés de liberté nodaux pour les champs de déplacement u et v sont notés par d_u et d_v . Les champs discrétisés et leurs variations sont obtenus par :

$$\begin{array}{llll}
u_h = \mathbb{N}d_u & \varepsilon(u_h) = \mathbb{B}d_u & v_h = \mathbb{N}d_v & \varepsilon(v_h) = \mathbb{B}d_v \\
\delta u_h = \mathbb{N}\delta d_u & \delta \varepsilon(u_h) = \mathbb{B}\delta d_u & \delta v_h = \mathbb{N}\delta d_v & \delta \varepsilon(v_h) = \mathbb{B}\delta d_v
\end{array}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbb{N} : \text{matrice contenant les fonctions d'interpolation} \\ \mathbb{B} : \text{matrice contenant les dérivées des fonctions d'interpolation.} \end{cases}$$

En utilisant les matrices des dérivées des fonctions d'interpolation, les équations (5.5) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\delta_u W_{hom}^{(0)}(v_h, u_h) &= \delta d_u^T \left(E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) \mathbb{B}_u dx du - E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) \mathbb{B}_v dx dv \right) \\ \delta_v W_{hom}^{(0)}(v_h, u_h) &= \delta d_v^T \left(-E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) \mathbb{B}_v dx du + E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T (\tilde{\mathbb{C}}_0^m(x, \omega) + \theta_1^2 \tilde{\mathbb{C}}_0^i(x, \omega)) \mathbb{B}_v dx dv \right)\end{aligned}\quad (5.6)$$

Enfin, la représentation matricielle du problème à résoudre est de la forme :

$$\Leftrightarrow \sum \begin{bmatrix} \delta d_u \\ \delta d_v \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} K_{uu}^0 & K_{uv}^0 \\ K_{vu}^0 & K_{vv}^0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} d_u \\ d_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \end{bmatrix} = 0$$

où r_u et r_v dénotent les deux vecteurs résidus et K_{uu}^0 , K_{uv}^0 , K_{vu}^0 et K_{vv}^0 représentent les matrices de raideur à l'ordre 0.

Le modèle correspondant à la seule énergie $W_{hom}^{(0)}$ a été implémenté dans le code EF FoXtroT. A cet effet, on a développé un élément fini enrichi pour prendre en compte le champ v en gardant une interpolation classique de type Lagrange. A noter que cet élément présente un caractère non-local en raison du terme $\varepsilon_x(u - v)$. Un premier test numérique est proposé dans le paragraphe suivant.

5.2.1.2 Test du modèle à l'ordre 0

On souhaite ici tester le modèle correspondant à l'énergie $W_{hom}^{(0)}$. A cet effet, nous avons construit une microstructure virtuelle sans inclusions physiquement présentes mais dont les effets sont pris en compte grâce au champ v . La microstructure d'étude est soumise à un essai de traction unitaire. Les conditions aux limites sont périodiques et sont seulement appliquées sur les degrés de liberté liés au champ u . En effet, tous les degrés de liberté pour le champ v liés aux inclusions sont libres. Pour les paramètres matériaux, les modules d'Young des inclusions

et de la matrice sont respectivement égaux à $10000GPa$ et $100GPa$ (contraste de 100). Le coefficient de poisson pour les deux phases est 0.3

Pour chaque fraction volumique asymptotique θ_1 de la phase dure (voire Table 5.1), on a déterminé la valeur de la déformation axiale. Les résultats sont également reportés sur la Figure 5.1. On remarque que la déformation axiale macroscopique obtenue est bien une fonction décroissante de la fraction volumique asymptotique θ_1 de la phase renforçante.

Fraction volumique asymptotique θ_1	Déformation axiale
0.1	0.15
0.2	0.12
0.3	0.11
0.4	0.105882
0.5	0.103846
0.6	0.102703
0.8	0.101538
0.9	0.10122

Table 5.1 – Valeurs de la déformation axiale macroscopique en fonction de la fraction volumique asymptotique θ_1 d'inclusions.

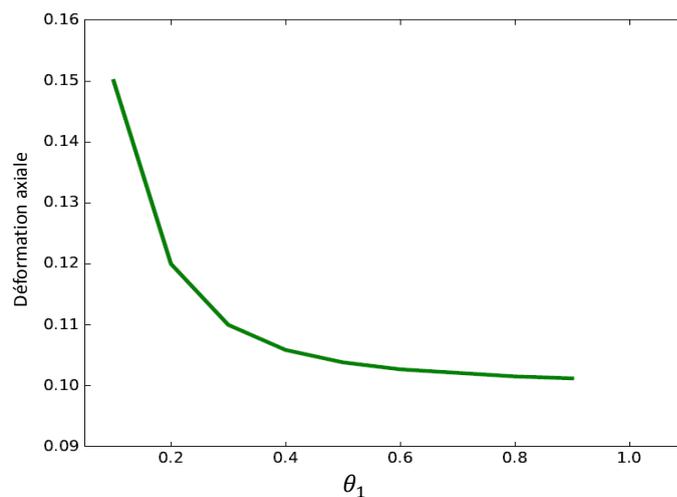


Figure 5.1 – Evolution de la déformation axiale macroscopique en fonction de la fraction volumique asymptotique θ_1 d'inclusions.

5.2.2 Représentation matricielle du problème d'ordre 1

Le but de cette section est de traiter l'énergie à l'ordre 1 correspondant aux trois dernières lignes de (4.26) déterminée dans le chapitre 4 suite à la régularisation au sens de la Γ -limite. L'expression de $W_{hom}^{(1)}(u, v)$ est donnée ci-dessous pour mémoire :

$$\begin{aligned}
W_{hom}^{(1)}(u, v) = & E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u - v) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \nabla \varepsilon_x(u - v) dx + \theta_1^2 \cdot E \int_{\Omega} \left(\varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_1^i(x, \omega) : \nabla \varepsilon_x(v) dx \right. \\
& + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u - v) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \nabla \varepsilon_x(u - v) dx + \theta_1 \theta_2 \cdot E \int_{\Omega} \left(\varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_2^i(x, \omega) : \nabla \varepsilon_x(v) dx \right. \\
& \left. + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u - v) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \nabla \varepsilon_x(u - v) dx + \theta_1 \theta_3 \cdot E \int_{\Omega} \left(\varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_3^i(x, \omega) : \nabla \varepsilon_x(v) dx \right. \right. \\
& \left. \left. \right. \right.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Nous exprimons l'influence du gradient de déformation de la matrice en se basant sur la même hypothèse de la linéarité de la déformation que pour l'ordre 0 (equation 5.2) :

$$\nabla \varepsilon_x(u - v) = \nabla \varepsilon_x(u) - \nabla \varepsilon_x(v) \tag{5.8}$$

Dans ce travail, les fonctions d'interpolation géométrique sont des polynômes dans une base cubique incomplète. On considère de plus que les composantes hors diagonales du tenseur de gradient des déformations sont nulles. Cela permet d'écrire :

$$\nabla \varepsilon_x(u) = \varepsilon_x(\partial u) \tag{5.9}$$

En introduisant (5.8) et (5.9) dans (5.7) et après développement, on obtient :

$$\begin{aligned}
W_{hom}^{(1)}(u, v) = & E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial v) dx \\
& - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : (\tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) + \theta_1^2 \tilde{\mathbb{C}}_1^i(x, \omega)) : \varepsilon_x(\partial v) dx \\
& + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial v) dx \\
& - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : (\tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) + \theta_1 \theta_2 \tilde{\mathbb{C}}_2^i(x, \omega)) : \varepsilon_x(\partial v) dx \\
& + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial v) dx \\
& - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : (\tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) + \theta_1 \theta_3 \tilde{\mathbb{C}}_3^i(x, \omega)) : \varepsilon_x(\partial v) dx
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Dans l'équation (5.10), on a quatre variables inconnues/degrés de liberté $(u, v, \partial u, \partial v)$. On calcule la variation par rapport à chaque variable représentant un degré de liberté comme cela a été fait pour l'énergie $W_{hom}^{(0)}(u, v)$. Cela conduit à quatre expressions qui seront ensuite sommées pour obtenir la dérivée de Gâteaux de $W_{hom}^{(1)}(u, v)$.

On calcule donc la dérivée de Gâteaux par rapport à la variable u :

$$\begin{aligned}
\delta_u W_{hom}^{(1)}(\partial v, v, \partial u, u) = & E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta u^*) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta u^*) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial v) dx \\
& + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta u^*) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta u^*) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial v) dx \\
& + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta u^*) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta u^*) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial v) dx = 0
\end{aligned}$$

Puis, la dérivée par rapport à la variable ∂u :

$$\begin{aligned}
\delta_{\partial u} W_{hom}^{(1)}(\partial v, v, \partial u, u) &= E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\delta \partial u^*) dx - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\delta \partial u^*) dx \\
&+ E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\delta \partial u^*) dx - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\delta \partial u^*) dx \\
&+ E \int_{\Omega} \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\delta \partial u^*) dx - E \int_{\Omega} \varepsilon_x(v) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\delta \partial u^*) dx = 0
\end{aligned}$$

La dérivée par rapport à la variable v est donnée par :

$$\begin{aligned}
\delta_v W_{hom}^{(1)}(\partial v, v, \partial u, u) &= -E \int_V \varepsilon_x(\delta v^*) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta v^*) : (\tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) + \theta_1^2 \tilde{\mathbb{C}}_1^i(x, \omega)) : \varepsilon_x(\partial v) dx \\
&- E \int_V \varepsilon_x(\delta v^*) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta v^*) : (\tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) + \theta_1 \theta_2 \tilde{\mathbb{C}}_2^i(x, \omega)) : \varepsilon_x(\partial v) dx \\
&- E \int_V \varepsilon_x(\delta v^*) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\partial u) dx + E \int_{\Omega} \varepsilon_x(\delta v^*) : (\tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) + \theta_1 \theta_3 \tilde{\mathbb{C}}_3^i(x, \omega)) : \varepsilon_x(\partial v) dx = 0
\end{aligned}$$

Enfin, la dérivée par rapport à la variable ∂v :

$$\begin{aligned}
\delta_{\partial v} W_{hom}^{(1)}(\partial v, v, \partial u, u) &= -E \int_V \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\delta \partial v^*) dx + E \int_V \varepsilon_x(v) : (\tilde{\mathbb{C}}_1^m(x, \omega) + \theta_1^2 \tilde{\mathbb{C}}_1^i(x, \omega)) : \varepsilon_x(\delta \partial v^*) dx \\
&- E \int_V \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\delta \partial v^*) dx + E \int_V \varepsilon_x(v) : (\tilde{\mathbb{C}}_2^m(x, \omega) + \theta_1 \theta_2 \tilde{\mathbb{C}}_2^i(x, \omega)) : \varepsilon_x(\delta \partial v^*) dx \\
&- E \int_V \varepsilon_x(u) : \tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) : \varepsilon_x(\delta \partial v^*) dx + E \int_V \varepsilon_x(v) : (\tilde{\mathbb{C}}_3^m(x, \omega) + \theta_1 \theta_3 \tilde{\mathbb{C}}_3^i(x, \omega)) : \varepsilon_x(\delta \partial v^*) dx = 0
\end{aligned}$$

La somme des ces quatre dérivées nous donne la dérivée de Gâteaux de l'énergie $W_{hom}^{(1)}(u, v)$.

On doit donc résoudre l'équation d'équilibre :

$$\begin{aligned}
\delta W_{hom}^{(1)}(\partial v, v, \partial u, u)(\delta \partial v^*, \delta v^*, \delta \partial u^*, \delta u^*) &= \delta_u W_{hom}^{(1)}(\partial v, v, \partial u, u) + \delta_{\partial u} W_{hom}^{(1)}(\partial v, v, \partial u, u) \\
&+ \delta_v W_{hom}^{(1)}(\partial v, v, \partial u, u) + \delta_{\partial v} W_{hom}^{(1)}(\partial v, v, \partial u, u) = 0
\end{aligned}$$

Les champs virtuels projetés sont désignés par δu^* , δv^* , $\delta \partial u^*$ et $\delta \partial v^*$. Dans ce qui suit, les vecteurs contenant les degrés de liberté nodaux pour les champs de déplacement u et v et leurs dérivées respectives ∂u et ∂v sont notés par d_u , d_v , $d_{\partial u}$ et $d_{\partial v}$. En utilisant les matrices des dérivées des fonctions d'interpolation \mathbb{B} , chacun des termes de l'équation ci-dessus peuvent être écrits comme suit :

$$\begin{aligned} \delta_u W_{hom}^{(1)}(\partial v_h, v_h, \partial u_h, u_h) &= \delta d_u^T \left(E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_1^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_{\partial u} - E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_1^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_{\partial v} \right) \\ &+ \delta d_u^T \left(E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_2^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_{\partial u} - E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_2^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_{\partial v} \right) \\ &+ \delta d_u^T \left(E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_3^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_{\partial u} - E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_3^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_{\partial v} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{\partial u} W_{hom}^{(1)}(\partial v_h, v_h, \partial u_h, u_h) &= \delta d_{\partial u}^T \left(E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_1^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_u - E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T \tilde{\mathcal{C}}_1^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_v \right) \\ &+ \delta d_{\partial u}^T \left(E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_2^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_u - E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T \tilde{\mathcal{C}}_2^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_v \right) \\ &+ \delta d_{\partial u}^T \left(E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_3^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_u - E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T \tilde{\mathcal{C}}_3^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_v \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_v W_{hom}^{(1)}(\partial v_h, v_h, \partial u_h, u_h) &= \delta d_v^T \left(-E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T \tilde{\mathcal{C}}_1^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_{\partial u} + E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T (\tilde{\mathcal{C}}_1^m(x, \omega) + \theta_1^2 \tilde{\mathcal{C}}_1^i(x, \omega)) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_{\partial v} \right) \\ &+ \delta d_v^T \left(-E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T \tilde{\mathcal{C}}_2^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_{\partial u} + E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T (\tilde{\mathcal{C}}_2^m(x, \omega) + \theta_1 \theta_2 \tilde{\mathcal{C}}_2^i(x, \omega)) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_{\partial v} \right) \\ &+ \delta d_v^T \left(-E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T \tilde{\mathcal{C}}_3^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial u} dx d_{\partial u} + E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T (\tilde{\mathcal{C}}_3^m(x, \omega) + \theta_1 \theta_3 \tilde{\mathcal{C}}_3^i(x, \omega)) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_{\partial v} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{\partial v} W_{hom}^{(1)}(\partial v_h, v_h, \partial u_h, u_h) &= \delta d_{\partial v}^T \left(-E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_1^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_u + E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T (\tilde{\mathcal{C}}_1^m(x, \omega) + \theta_1^2 \tilde{\mathcal{C}}_1^i(x, \omega)) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_v \right) \\ &+ \delta d_{\partial v}^T \left(-E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_2^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_u + E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T (\tilde{\mathcal{C}}_2^m(x, \omega) + \theta_1 \theta_2 \tilde{\mathcal{C}}_2^i(x, \omega)) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_v \right) \\ &+ \delta d_{\partial v}^T \left(-E \int_{\Omega} \mathbb{B}_u^T \tilde{\mathcal{C}}_3^m(x, \omega) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_u + E \int_{\Omega} \mathbb{B}_v^T (\tilde{\mathcal{C}}_3^m(x, \omega) + \theta_1 \theta_3 \tilde{\mathcal{C}}_3^i(x, \omega)) \mathbb{B}_{\partial v} dx d_v \right) \end{aligned}$$

La représentation matricielle du problème à résoudre est :

$$\hookrightarrow \sum \begin{bmatrix} \delta d_u \\ \delta d_v \\ \delta d_{\partial u} \\ \delta d_{\partial v} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{uu}^1 & K_{uv}^1 & K_{u\partial u}^1 & K_{u\partial v}^1 \\ K_{vu}^1 & K_{vv}^1 & K_{v\partial u}^1 & K_{v\partial v}^1 \\ K_{\partial uu}^1 & K_{\partial uv}^1 & K_{\partial u\partial u}^1 & K_{\partial u\partial v}^1 \\ K_{\partial vu}^1 & K_{\partial vv}^1 & K_{\partial v\partial u}^1 & K_{\partial v\partial v}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_u \\ d_v \\ d_{\partial u} \\ d_{\partial v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_{\partial u} \\ r_{\partial v} \end{bmatrix} = 0$$

Où r_u , r_v , $r_{\partial u}$ et $r_{\partial v}$ dénotent les quatre vecteurs résidus. $K_{uu}^1 = K_{vv}^1 = K_{uv}^1 = K_{vu}^1 = K_{\partial u\partial u}^1 = K_{\partial v\partial v}^1 = K_{\partial u\partial v}^1 = K_{\partial v\partial u}^1 = 0$.

On remarque que par rapport à la formulation variationnelle de l'énergie à l'ordre 0, la formulation à l'ordre 1 comporte les vecteurs des deux dérivées des degrés de liberté nodaux $d_{\partial u}$ et $d_{\partial v}$. Donc, pour résoudre le problème, on souhaite développer un nouvel élément fini non-local en utilisant des fonctions d'interpolation de type Hermite. C'est l'objet du paragraphe suivant.

5.3 Élément fini non-local de type Hermite

5.3.1 Interpolation d'Hermite

La méthode d'interpolation la plus simple consiste à utiliser les polynômes de Lagrange. Les fonctions de base valent 1 à un noeud du maillage et 0 à tous les autres. La fonction de base i est alors la fonction valant 1 au noeud i et 0 sur les autres noeuds et qui est polynomiale sur chaque élément. Il y a autant de fonctions de base par élément que de nombre de noeuds. D'autres solutions peuvent exister pour les fonctions de base. Par exemple, les éléments finis d'Hermite implémentés dans ce travail de thèse ont la particularité d'avoir deux fonctions de base associées à chaque noeud. La valeur de la solution est alors ajustée avec la première fonction alors que la deuxième permet d'ajuster la valeur de sa dérivée. Ce type de fonctions de base peut avoir un intérêt pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles (telles que les équations des Milieux Continus du second gradient). En effet, l'interpolation d'Hermite consiste à chercher un polynôme qui non seulement prend des valeurs fixées en des abscisses données, mais dont également la dérivée, donc la pente de la courbe, prend une valeur imposée

en chacun de ces points. Naturellement, il faut pour cela un polynôme de degré supérieur au polynôme de Lagrange. On peut aussi imposer la valeur des dérivées secondes, troisième, etc en chaque point. Pour plus des détails (voir [Gillette, 2014] et [Gillette et Kloefkorn, 2019]). Pour voir comment ajouter des contraintes sur les dérivées aux noeuds, prenons l'exemple le plus simple d'un élément linéaire unidimensionnel (voir Figure 5.2). En effet un élément 1D représente une arête d'un élément 3D. Ensuite, on illustre l'élément 3D implémenté dans ce travail de thèse.

5.3.2 Élément de type Hermite d'une barre unidimensionnelle

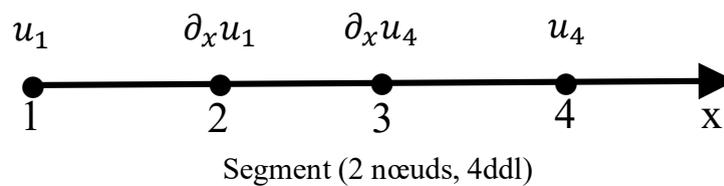


Figure 5.2 – Élément de type Hermite d'une barre unidimensionnelle.

Dans une base cubique d'Hermite, les fonctions de forme ont la propriété les reliant à la géométrie du graphe :

$$u = u(0)\psi_1 + u'(0)\psi_2 - u'(1)\psi_3 + u(1)\psi_4, \quad \forall u \in P_3([0, 1]). \quad (5.11)$$

où u représente le champ approximé, u' est sa dérivée et P_3 dénote l'espace des monômes pour une variable avec trois degrés de liberté au maximum. Les fonctions de forme ψ sont données par :

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 - 3x^2 + 2x^3 \\ x - 2x^2 + x^3 \\ x^2 - x^3 \\ 3x^2 - 2x^3 \end{bmatrix}$$

5.3.3 Élément tridimensionnel de type Hermite

La Figure 5.3 présente un élément tridimensionnel de type Hermite à 32 noeuds dans une base cubique incomplète définie ci-après [Gillette, 2014] :

$$P_3(I^3) = base \left\{ \underbrace{1, x, y, z}_{\text{linéaire}}, \underbrace{x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz}_{\text{quadratique}}, \underbrace{x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, xy^2, y^2z, xz^2, yz^2, xyz}_{\text{cubique}} \right\}$$

$$S_3(I^3) = P_3(I^3) \cup base \left\{ \underbrace{x^3y, x^3z, y^3z, xy^3, xz^3, yz^3, x^2yz, xy^2z, xyz^2, x^3yz, xy^3z, xyz^3}_{\text{cubique superlinéaire}} \right\}$$

- $P_3(I^3)$ est l'espace de monômes pour trois variables avec trois degrés de liberté au maximum.
- $S_3(I^3)$ est l'espace de monômes pour trois variables avec 3 degrés de liberté super-linéaires au maximum pour chacune.

Les équations précédentes sont associées au repère (x, y, z) de la figure 5.3. Ainsi, x désigne désormais la première direction de ce repère et non plus la variable d'espace macroscopique utilisée dans les développements théoriques.

Cet élément a été implémenté dans la thèse. Il présente un nombre variable de degrés de liberté pour chaque noeud. Les 8 premiers noeuds sont situés aux sommets et sont utilisés pour calculer les champs de déplacement (U et V) dans les trois directions x , y et z (voir le premier vecteur de (5.12)). Chaque noeud des 24 autres noeuds donne l'information sur les dérivées

des champs de déplacement (∂U et ∂V) selon une seule direction (voir le deuxième vecteur de (5.12)).

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} U_{x,x} \\ U_{y,y} \\ U_{z,z} \\ V_{x,x} \\ V_{y,y} \\ V_{z,z} \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

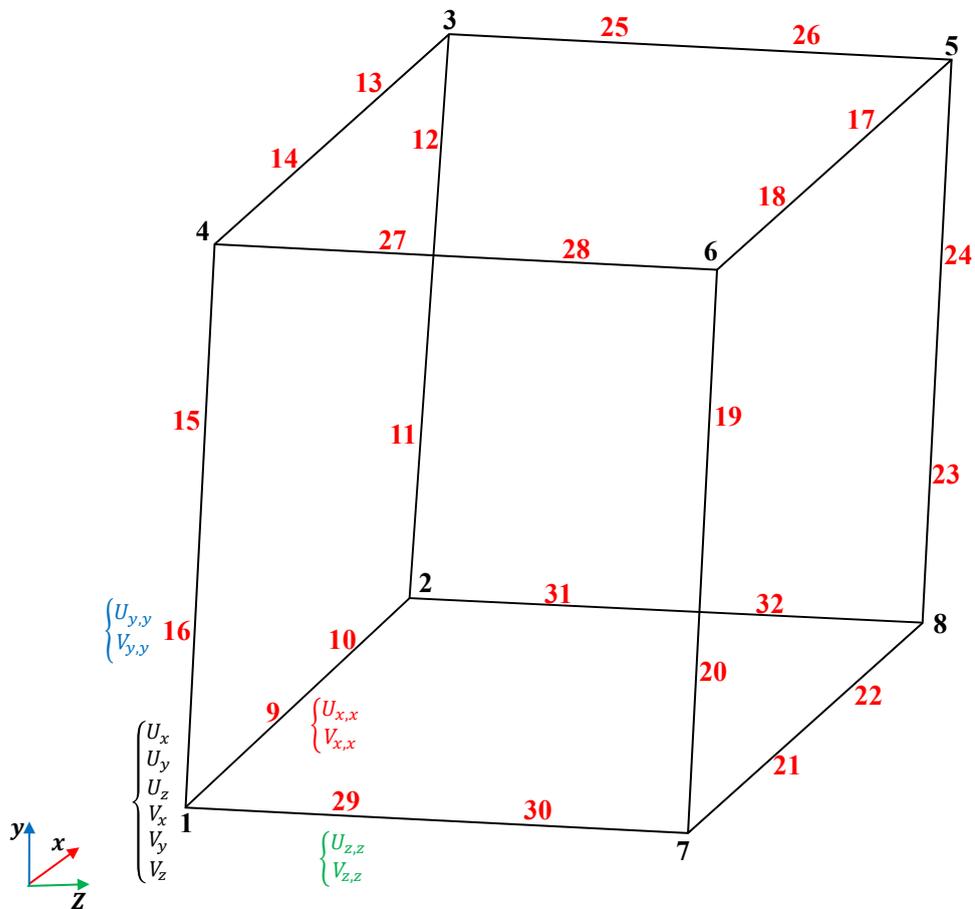


Figure 5.3 – Élément tridimensionnel de type Hermite dans une base cubique incomplète.

RÈGLES D'ASSEMBLAGE

De manière à standardiser les opérations d'assemblage, définissons pour chaque élément la table de LOCALisation Élémentaire LOCE qui donne la position de chaque terme de u_n dans U_n donc également la position de chaque terme de $\langle \delta u_n \rangle$ dans $\langle \delta U_n \rangle$. Dans le cas où il n'y a qu'un degré de liberté par noeud, cette table est identique à la table de connectivité CONEC. La dimension de la table LOCE est égale au nombre de degrés de liberté de l'élément.

La technique utilisée pour construire LOCE de l'élément d'Hermite est de stocker le nombre de Degrés de Liberté de chaque noeud dans une table d'indexation DLNC. En pratique, pour des raison d'efficacité, cette table est organisée de manière « cumulative » : DLNC ($I+1$) représente la somme des nombres de degrés de liberté des noeuds $1, 2, \dots, I-1, I$. La table DLNC est de dimension $n+1$ (n étant le nombre de noeuds total). Le nombre de degrés de liberté du noeud I est par conséquent :

$$DLNC(I+1) - DLNC(I)$$

5.4 Représentation matricielle du problème complet

Le système matriciel associé au problème complet est obtenu grâce aux développements effectués pour les ordres 0 et 1 dans les paragraphes 5.2.1 et 5.2.2. On obtient :

$$\hookrightarrow \sum \begin{bmatrix} \delta d_u \\ \delta d_v \\ \delta d_{\partial u} \\ \delta d_{\partial v} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{uu}^0 & K_{uv}^0 & K_{u\partial u}^1 & K_{u\partial v}^1 \\ K_{vu}^0 & K_{vv}^0 & K_{v\partial u}^1 & K_{v\partial v}^1 \\ K_{\partial uu}^1 & K_{\partial uv}^1 & 0 & 0 \\ K_{\partial vu}^1 & K_{\partial vv}^1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_u \\ d_v \\ d_{\partial u} \\ d_{\partial v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_{\partial u} \\ r_{\partial v} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.13)$$

Les blocs K_{uu}^0 , K_{vv}^0 , K_{uv}^0 et K_{vu}^0 sont issus de la formulation variationnelle à l'ordre 0 de η . Les blocs $K_{u\partial u}^1$, $K_{u\partial v}^1$, $K_{v\partial u}^1$, $K_{v\partial v}^1$, $K_{\partial uu}^1$, $K_{\partial uv}^1$, $K_{\partial vu}^1$ et $K_{\partial vv}^1$ présentant un couplage entre un champ de déplacement et un champ dérivé sont calculés à l'ordre 1 de η . Enfin, les blocs qui présentent les couplages entre deux champs dérivés sont nuls. Le vecteur des inconnues est donné par le vecteur ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \\ U_{x,x} \\ U_{y,y} \\ U_{z,z} \\ V_{x,x} \\ V_{y,y} \\ V_{z,z} \end{pmatrix}$$

Les fonctions de base utilisées (Voir **ANNEXE**) sont les mêmes pour les champs u et v . Donc si on considère par exemple un noeud de sommet noté i et le triplet (j, k, l) représentant les trois noeuds liés au noeud i , on peut définir les deux systèmes suivants :

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} & 0 & 0 & N_{i,z} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} & N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} & 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} N_{j,x} & 0 & 0 & N_{j,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,y} & 0 & 0 & N_{k,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{l,z} & 0 & 0 & N_{l,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial U_x \\ \partial U_y \\ \partial U_z \\ \partial V_x \\ \partial V_y \\ \partial V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_x \varepsilon_{xx} \\ \nabla_y \varepsilon_{yy} \\ \nabla_z \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ j = 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22 \\ k = 16, 15, 11, 12, 19, 20, 23, 24 \\ l = 29, 30, 31, 32, 25, 26, 27, 28 \end{cases}$$

L'élément fini présenté a été implémenté dans FoXtroT en construisant les fonctions d'interpolation d'Hermite, en développant le système matriciel élémentaire (équation 5.13) et la gestion de la table de connectivité, ainsi que la lecture de ce type d'élément au niveau du maillage éléments finis. Il se trouve actuellement en cours de test.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, et selon une démarche progressive, la formulation variationnelle de l'énergie à l'ordre 0 a tout d'abord été établie et un premier élément non-local enrichi pour tenir compte du champ de déplacement virtuel lié aux inclusions a été implémenté dans FoXtroT. Un test numérique tridimensionnel a été réalisé avec cet élément et fournit des résultats encourageants. La formulation variationnelle de l'énergie à l'ordre 1 a conduit au développement d'une nouvel élément non-local enrichi permettant non seulement de traiter le champ associé aux inclusions précité mais également les seconds gradients de déplacement. Contrairement au premier, ce nouvel élément n'utilise pas une interpolation de type Lagrange mais de type Hermite. A notre connaissance, ce travail n'avait jamais été réalisé.

Conclusion générale & Perspectives

La modélisation des matériaux hétérogènes à fort gradient de propriétés et présentant une distribution aléatoire d'inclusions conduit à un large domaine d'applications potentielles et à de multiples difficultés tant du point de vue mathématique que mécanique. Ces difficultés sont d'autant plus grandes dans un cadre stochastique. Les structures et/ou distributions des inclusions peuvent donner lieu à des comportements non-locaux difficiles à retranscrire à l'échelle macroscopique. Afin de prendre en compte les phénomènes non-locaux dans un modèle macroscopique en gardant une connexion la plus forte possible avec la microstructure, nous avons choisi de procéder par homogénéisation. Les matériaux étudiés dans ce travail sont constitués d'inclusions convexes aléatoirement réparties dans une matrice selon un processus stochastique ponctuel. Les deux phases sont considérées élastiques linéaires. La démarche s'est articulée autour de trois grandes parties. Revenons ci-après sur les principaux résultats de chacune.

Dans un premiers temps, et en combinant la méthode des développements asymptotiques avec une approche énergétique, nous avons proposé une première version de modélisation non-locale qui fait apparaître le second gradient de déplacement. L'énergie de déformation macroscopique est obtenue de manière additive entre une partie classique, émanant de la contribution locale des champs, et une partie non-locale. L'expression implique trois tenseurs d'élasticité homogénéisés fonctions du paramètre de distribution stochastique et des propriétés des phases. Ces tenseurs présentent de plus un certain caractère « non-local » à l'échelle microscopique (via le gradient du tenseur caractéristique) qui s'ajoute à la non-localité prise en compte par la présence dans l'expression de l'énergie du second gradient de déplacement macroscopique. La mise en oeuvre numérique du modèle obtenu a été réalisée selon une approche progressive des difficultés. Tout d'abord, on a évalué la partie locale du modèle sur le cas d'une barre composite unidimensionnelle. Les estimations ont été confrontées avec succès aux bornes classiques de Voigt, Reuss et d'Hashin et Shtrikman pour un large éventail de fractions volumiques. En second lieu, la mise en oeuvre du modèle complet, incluant les termes non-locaux, a été réalisée

en 3D. On a utilisé comme supports deux types de microstructures de complexité morphologique croissante. Les premières sont des microstructures virtuelles générées numériquement à partir d'un même motif simple distribué aléatoirement, ce dernier étant composé d'une grande inclusion entourée par six petites inclusions identiques. Les deuxièmes sont des microstructures d'Ethylène-Propylène-Diène Monomère (EPDM) endommagées par décompression d'hydrogène et reconstruites à partir d'images obtenues par tomographie dans [Castagnet *et al.*, 2018]. Les inclusions ne sont plus sphériques et se présentent sous forme de clusters de structures plus complexes que dans le premier cas. Il est à noter que la mise en oeuvre numérique du modèle (avant passage à la limite sur le paramètre d'hétérogénéité η) oblige au calcul en champs complets des déformations macroscopiques aux ordres 0 et 1 sur deux volumes élémentaires V.E.M.R0 et V.E.M.R1. Les tailles de ces volumes correspondent à deux longueurs caractéristiques l_0 et l_1 identifiables grâce au covariogramme de la microstructure étudiée et ayant par suite un lien explicite avec cette dernière. Enfin, on précise que cette première partie du travail a donné lieu à de multiples développements numériques de différentes natures, pour la génération/reconstruction des microstructures, leur analyse morphologique, leur maillage, les calculs en champs complets et leur post-traitement, en plus du codage de l'algorithme de résolution du modèle à proprement parlé.

Dans un second temps, nous avons cherché à nous affranchir de la phase de calcul en champs complets requise par le modèle précédent afin d'en obtenir une seconde version adaptée au calcul de structure. A cet effet, nous avons opéré une seconde transition d'échelle visant à passer à la limite sur le paramètre η et utilisant la notion de Γ -convergence. Cela nous a permis de proposer une nouvelle formulation, macroscopique, non-locale et déterministe, toujours richement connectée à la microstructure. La non-localité s'exprime désormais non seulement par le second gradient de déplacement mais aussi à travers la présence du champ de déplacement virtuel (mémoire) des inclusions ν . Le lien fort avec la microstructure s'exprime toujours à travers la présence du paramètre stochastique ω et des propriétés des phases, mais aussi à travers celle des fractions asymptotiques θ_1 , θ_2 et θ_3 de la phase inclusionnaire dans le matériau, le premier volume V.E.M.R0 de taille l_0 , et le second volume V.E.M.R1 de taille l_1 , respectivement. Enfin, les paramètres θ_1 , θ_2 et θ_3 pourraient être remplacés par des tenseurs dans des configurations anisotropes.

La dernière partie a été consacrée à la mise en place de la formulation variationnelle du modèle et à l'élaboration d'un élément fini non-local enrichi pour mener à bien de futurs calculs de structure. La démarche a été progressive avec tout d'abord le développement d'un premier élément enrichi pour prendre en compte le déplacement virtuel lié aux inclusions mais restant

fondé sur une interpolation de Lagrange. Implémenté dans le code interne FoXtroT, il a permis une première simulation 3D encourageante de l'énergie effective à l'ordre 0. Puis, afin de traiter le modèle complet incluant les termes non-locaux, un nouvel élément enrichi a été développé et implémenté dans FoXtroT. Il s'agit d'un élément de type Hermite permettant de traiter le champ mémoire des inclusions mais également le second gradient de déplacement. Il est actuellement en cours de test.

En ce qui concerne les perspectives possibles, j'en mettrais plus particulièrement deux en avant :

La première concerne la partie homogénéisation. Le modèle régularisé proposé dans le présent travail est élaboré dans le cadre de l'élasticité linéaire pour des milieux aléatoires. Ce modèle homogénéisé et non-local est fondé sur le second gradient de déplacement. La démarche pourrait être généralisée pour la modélisation de l'endommagement. On souhaite ainsi continuer les travaux et développer un modèle d'endommagement régularisé basé sur le gradient de la variable d'endommagement $\nabla\alpha$ et le confronter aux modèles du type second gradient d'endommagement, et/ou phase-field très en vogue en ce moment.

La deuxième perspective est tournée vers les simulations par éléments finis. En effet, concernant l'élément non-local enrichi de type Hermite, les développements présentés jusqu'à maintenant nécessitent des tests complémentaires pour rendre l'élément pleinement opérationnel et pouvoir l'utiliser pour mieux comprendre les phénomènes en jeu. Tout d'abord, l'élément d'Hermite contient des inconnues de types différents, des déplacements et leurs dérivées. Une étude de convergence sera envisagée et on pourra étudier différentes configurations pour appréhender l'interaction des deux échelles et leurs effets sur les résultats. Ensuite, dans le présent travail, seuls deux termes sur trois de l'énergie à l'ordre 1 sont implémentés. Il faudra donc rajouter le dernier terme puis effectuer une analyse visant à trouver un compromis raisonnable entre temps de calcul et précision de la valeur de l'énergie.

Chapitre 6

ANNEXE

6.1 Tenseurs Isotropes

Les tenseurs qui décrivent les propriétés des milieux isotropes, qu'on appelle tenseurs isotropes, doivent être invariants par une rotation quelconque des axes du repère. Par exemple un scalaire est un tenseur isotrope de rang 0. Il est possible de trouver les tenseurs isotropes d'autres rangs. On montre qu'il n'y a pas un tenseur isotrope d'ordre 1. A un facteur multiplicatif près, il y a un seul tenseur isotrope d'ordre 2 : c'est le tenseur identité noté $[\delta]$ dont les composantes sont définies par :

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.1)$$

Il y a également un seul tenseur isotrope d'ordre 3 : c'est le tenseur de Levy-civita noté $[\varepsilon]$ et défini par :

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha\beta\gamma \text{ est une permutation circulaire de } 123 \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\gamma \text{ est une permutation circulaire de } 321 \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux} \end{cases} \quad (6.2)$$

[Jeffreys, 1973] ont pu montrer que les tenseurs isotropes de rang supérieur peuvent s'exprimer comme des produits extérieurs de $[\delta]$ et $[\varepsilon]$.

Par exemple, pour former un tenseur isotrope de rang 4, il faut faire le produit extérieur de deux tenseurs $[\delta]$ (qui sont de rang 2). Si on note ce produit $[\zeta]_{\alpha\beta\gamma\delta}$, on voit qu'il n'y a que trois produits différents (que l'on nomme $[\zeta^{(1)}]$, $[\zeta^{(2)}]$ et $[\zeta^{(3)}]$), à savoir :

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= [\delta]_{\alpha\beta} [\delta]_{\gamma\delta} \\ \zeta^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= [\delta]_{\alpha\gamma} [\delta]_{\beta\delta} \\ \zeta^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= [\delta]_{\alpha\delta} [\delta]_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ce sont les trois seuls tenseurs isotropes de rang 4.

6.2 Moyenne d'un tenseur de rang 4

Nous avons vu qu'il y a trois tenseurs isotropes de rang 4 : $[\zeta^{(1)}]$, $[\zeta^{(2)}]$ et $[\zeta^{(3)}]$. La moyenne d'un tenseur d'ordre $[P]_{ijkl}$ de rang 4 s'écrit donc comme une combinaison linéaire de ces trois tenseurs, soit

$$\langle P_{ijkl} \rangle = \alpha_1 \zeta_{ijkl}^{(1)} + \alpha_2 \zeta_{ijkl}^{(2)} + \alpha_3 \zeta_{ijkl}^{(3)} \quad (6.4)$$

où α_1 , α_2 et α_3 sont des constantes à déterminer. On multiplie les deux membres de cette égalité successivement par ζ_{ijkl}^1 , ζ_{ijkl}^2 et ζ_{ijkl}^3 . Compte tenu des définitions des tenseurs $[\zeta]$, on en déduit le système d'équations suivants :

$$\begin{aligned} \langle P_{ijkl} \rangle \zeta_{ijkl}^{(1)} &= 9\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ \langle P_{ijkl} \rangle \zeta_{ijkl}^{(2)} &= 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ \langle P_{ijkl} \rangle \zeta_{ijkl}^{(3)} &= 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Les tenseurs $[\zeta]$ sont invariants par rotation. On peut les rentrer dans la moyenne dans les nombres de gauche. On obtient alors des scalaires. On peut ainsi supprimer le signe $\langle \cdot \rangle$ et on obtient un système d'équations linéaires dont la résolution donne :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{30} \left(4\zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} - \zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} - \zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} \right) P_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{30} \left(-\zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} + 4\zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} - \zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} \right) P_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ \alpha_3 &= \frac{1}{30} \left(-\zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} - \zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} + \zeta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(3)} \right) P_{\alpha\beta\gamma\delta} \end{aligned} \quad (6.6)$$

6.3 Rappels sur les vecteurs

On considère un espace vectoriel de dimension 3. Sa base orthonormée (directe) est notée $\{\vec{e}_i\}$.

Pour un vecteur \vec{u} quelconque, et en utilisant la convention d'Einstein, l'indice répété est sommé :

$$\vec{u} = u_i \vec{e}_i \quad (6.7)$$

Distinguons à ce niveau l'écriture intrinsèque \vec{u} et la notation indicielle u_i qui dépend de la base choisie. Cela prend toute son importance au niveau du principe d'objectivité (traité après). On utilise le produit scalaire canonique ; δ_{ij} est l'indice de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 si non.

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (6.8)$$

En utilisant (6.7) et (6.8), il vient :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{e}_i &= u_j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i \\ &= u_j \delta_{ij} \\ &= u_i \end{aligned} \quad (6.9)$$

Avec une démonstration équivalente, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i \quad (6.10)$$

En utilisant (6.7) et (6.9), on obtient le théorème de décomposition orthogonale :

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_i \quad (6.11)$$

Rappelons que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. La norme euclidienne naturelle est définie comme suit,

sa valeur représente la longueur du vecteur :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_i u_i} \quad (6.12)$$

Le produit vectoriel se définit comme :

$$\begin{aligned} \vec{e}_j \wedge \vec{e}_k &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= \varepsilon_{ijk} u_j v_k \vec{e}_i \end{aligned} \quad (6.13)$$

où ε_{ijk} est le symbole de permutation circulaire (de Levi-Civita) défini par (6.2).

On rappelle la relation $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Combiné avec le produit vectoriel, on définit le produit mixte dont on rappelle quelques propriétés :

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \\ &= \det([\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Cette valeur correspond au volume du parallélépipède généré par les trois vecteurs.

6.4 Objectivité et pertinence de la notation d'Einstein

Le principe d'objectivité stipule qu'un phénomène physique ne peut pas dépendre de la base choisie (purement mathématique, elle n'a pas de sens physique). Par exemple \vec{u} est une grandeur objective, mais u_i (un seul terme) ne l'est pas.

La convention d'Einstein est de sommer l'indice répété. Nous allons montrer qu'un terme ainsi constitué est forcément objectif (c'est le réel intérêt, souvent méconnu, de la convention...). Par exemple sur une sommation de composantes, comme dans le cas du produit scalaire, on montre l'invariance du résultat par rapport à la base. Considérons le calcul de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans deux bases différentes (matrice de passage notée P) :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= u_i v_i \\
&= P_{ik} U_k P_{il} V_l \\
&= P_{ki}^T P_{il} U_k V_l \\
&= \delta_{kl} U_k V_l \\
&= U_k V_k
\end{aligned}$$

Le même calcul, quelque soit la base, donne le même résultat. Le produit scalaire est un invariant. Une grandeur physique pouvant être décrite en fonction d'un produit scalaire, par exemple le travail d'une force $dW = f \cdot dl = f_i dl_i$, ne dépend pas de la base choisie.

6.5 Tenseurs du second ordre

6.5.1 Qu'est ce qu'un tenseur ?

Souvent posée par les étudiants, cette question n'a rien d'évident pour les tenseurs du premier ordre (vecteurs) et du second ordre, qui sont souvent assimilés à leur matrice de composantes. La définition la plus simple est à mon sens celle trouvée dans Wikipédia :

Une application linéaire f d'un espace E vers un espace F est décrite par une matrice M dont les coefficients dépendent de la base de E et de celle de F . Le tenseur représente l'ensemble des représentations de f dans toutes les bases.

Donc un vecteur \vec{u} est l'ensemble des matrices $u_i(1,3)$ ou $(3,1)$ dans toutes les bases. Un tenseur du second ordre σ , est l'ensemble des matrices $\sigma_{ij}(3,3)$ ou $(1,9)$ ou $(9,1)$ dans toutes les bases.

On retient donc que le mot tenseur est associé à une représentation intrinsèque et que l'ordre n représente le nombre d'indices ; on a donc en général 3^n composantes dans un espace de dimension 3.

Les tenseurs furent inventés dans les années 1900 par Voigt et Levi-Civita ; certains prémisses

se trouvent dans les travaux d'Hamilton (1846). L'analyse tensorielle a été utilisée par Einstein vers 1915, ce qui lui a permis de réaliser la théorie de la relativité. Rappelons que, lorsque la base n'est pas orthonormée, les choses sont nettement plus compliquées, il faut alors distinguer les tenseurs covariants et contravariants, et utiliser le tenseur métrique.

6.5.2 Produit tensoriel et base canonique

On définit le produit tensoriel comme l'opérateur permettant de passer de tenseurs d'ordre n et m à un tenseur d'ordre $n + m$. Un vecteur est un tenseur d'ordre 1. L'espace des tenseurs du second ordre se nomme \mathcal{L}^2 .

$$\otimes : (\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow \vec{u} \otimes \vec{v}$$

La base canonique $\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\}$ est définie depuis la base canonique des vecteurs ; elle possède 9 composantes. Un tenseur du second ordre, σ , possède donc 9 composantes sur cette base. On reconnaît dans ce qui suit le théorème de décomposition orthogonale appliqué aux tenseurs :

$$\sigma = \sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

Les composantes σ_{ij} sont généralement représentées sous forme de matrices 3×3 . On utilise essentiellement des tenseurs symétriques. Ils ne possèdent que 6 composantes indépendantes dans la base canonique. Leur matrice représentative est symétrique.

$$\sigma \in \mathcal{L}^{2s} \iff \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Les composantes du produit tensoriel $\vec{u} \otimes \vec{v}$ s'obtiennent comme le résultat du produit colonne-ligne (à condition que les deux vecteurs soient exprimés dans la même base).

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \otimes \vec{v} &= u_i \vec{e}_i \otimes v_j \vec{e}_j \\
 &= u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\
 [\vec{u} \otimes \vec{v}]_{ij} &= u_i v_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

6.5.3 Produit simple ou contraction d'indice pour les tenseurs du premier et second ordre

L'opérateur "·" est une extension du produit scalaire des vecteurs. Défini comme la contraction sur l'indice proche, il permet d'identifier le produit ligne-colonne au niveau du calcul matriciel, que ce soit pour un produit tenseur-vecteur :

$$\begin{aligned}
 \sigma \cdot \vec{n} &= \sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \cdot n_k \vec{e}_k \\
 &\stackrel{def}{=} \sigma_{ij} n_k \vec{e}_i (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) \\
 &= \sigma_{ij} n_k \delta_{jk} \vec{e}_i \\
 &= \sigma_{ij} n_j \vec{e}_i \\
 [\sigma \cdot \vec{n}]_i &= \sigma_{ij} n_j
 \end{aligned}$$

ou pour un produit tenseur-tenseur, dont les composantes correspondent au produit ligne-colonne entre deux matrices.

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot \varepsilon &= \sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \cdot \varepsilon_{kl} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \\
&\stackrel{def}{=} \sigma_{ij} \varepsilon_{kl} \vec{e}_i \otimes (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) \vec{e}_l \\
&= \sigma_{ij} \varepsilon_{kl} \delta_{jk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_l \\
&= \sigma_{ik} \varepsilon_{kl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_l \\
[\sigma \cdot \varepsilon]_{il} &= \sigma_{ik} \varepsilon_{kl}
\end{aligned}$$

6.5.4 Double contraction

Cette opération est notée ":", on contracte les deux indices proches. Sur des tenseurs du second ordre, on obtient un scalaire. Concernant deux paires d'indices, l'opérateur est intrinsèque. Sur les termes de la base :

$$\begin{aligned}
\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j : \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l &\stackrel{def}{=} (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_l) \\
&= \delta_{jk} \delta_{il}
\end{aligned}$$

Sur deux tenseurs du second ordre :

$$\begin{aligned}
\sigma : \varepsilon &= \sigma_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) : \varepsilon_{kl} (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) \\
&= \sigma_{ij} \varepsilon_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} \\
&= \sigma_{ij} \varepsilon_{ji}
\end{aligned}$$

Si les tenseurs sont symétriques :

$$\sigma : \varepsilon = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

6.6 Tenseurs d'ordre supérieur et en particulier du quatrième ordre

6.6.1 Tenseur d'ordre n

On généralise la notion. Un tenseur d'ordre n est noté $T_{ijklm\dots}$ et possède n indices, variant de 1 à 3 en trois dimensions. La base canonique est construite à l'aide de l'opérateur \otimes ; pour les tenseurs du quatrième ordre, la base est :

$$\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l\}$$

Elle possède 3^n composantes (soit ici 81) composantes. Les opérations de contraction suivant la règle d'Einstein sont toujours objectives. La contraction "." ou ":" s'entend toujours sur les indices proches. Par exemple, pour deux tenseurs du 4ème ordre :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} : \mathbb{B} &= A_{ijkl} B_{pqrs} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) : (\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes \vec{e}_r \otimes \vec{e}_s) \\ &= A_{ijkl} B_{pqrs} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \otimes (\vec{e}_r \otimes \vec{e}_s) (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_q) (\vec{e}_l \cdot \vec{e}_p) \\ &= A_{ijkl} B_{pqrs} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \otimes (\vec{e}_r \otimes \vec{e}_s) \delta_{kq} \delta_{lp} \\ [\mathbb{A} : \mathbb{B}]_{ijrs} &= A_{ijkl} B_{lkrs} \end{aligned}$$

Montrons qu'une contraction sur deux indices est indépendante du repère :

$$\begin{aligned} A_{ijkk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j &= A_{ijkl} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l \\ &= A_{ijkl} P_{ip} \vec{E}_p \otimes P_{jq} \vec{E}_q (P_{kr} \vec{E}_r \cdot P_{ls} \vec{E}_s) \\ &= A_{ijkl} P_{ip} \vec{E}_p \otimes P_{jq} \vec{E}_q (P_{kr} P_{ls} \delta_{rs}) \\ &= A_{ijkl} P_{ip} \vec{E}_p \otimes P_{jq} \vec{E}_q (P_{kr} P_{rl}^T) \\ &= A_{ijkl} P_{ip} \vec{E}_p \otimes P_{jq} \vec{E}_q \delta_{kl} \\ &= A_{ijkk} P_{ip} \vec{E}_p \otimes P_{jq} \vec{E}_q \end{aligned}$$

On obtient bien le même tenseur du second ordre, exprimé dans la nouvelle base $\{\vec{E}_i\}$ (matrice de passage notée P), l'opération de contraction restant la même.

6.6.2 Base minimale

La base canonique comprend 81 termes. Les petites symétries de \mathbb{C} font penser à utiliser une base issue de la base des tenseurs symétriques du second ordre $\{\vec{E}_i\}$. Formons la base $\{\vec{E}_i \otimes \vec{E}_j\}$. Elles possèdent $6 \times 6 = 36$ termes et respectent implicitement les petites symétries. Écrivons le tenseur \mathbb{C} dans cette base. Par rapport aux composantes en base canonique, nous avons vérifié quelques termes à titre d'exercice :

$$\mathbb{C} \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1131} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2231} & \sqrt{2}C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3331} & \sqrt{2}C_{3312} \\ \sqrt{2}C_{2311} & \sqrt{2}C_{2322} & \sqrt{2}C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2331} & 2C_{2312} \\ \sqrt{2}C_{3111} & \sqrt{2}C_{3122} & \sqrt{2}C_{3133} & 2C_{3123} & 2C_{3131} & 2C_{3112} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & \sqrt{2}C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1231} & 2C_{1212} \end{bmatrix}$$

La grande symétrie implique que cette matrice est symétrique ; nous avons alors 21 composantes indépendantes. À l'aide de l'expression de σ , la loi d'élasticité linéaire se met alors sous la forme matricielle suivante (toujours par rapport aux composantes en base canonique) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1131} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2231} & \sqrt{2}C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3331} & \sqrt{2}C_{3312} \\ \sqrt{2}C_{2311} & \sqrt{2}C_{2322} & \sqrt{2}C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2331} & 2C_{2312} \\ \sqrt{2}C_{3111} & \sqrt{2}C_{3122} & \sqrt{2}C_{3133} & 2C_{3123} & 2C_{3131} & 2C_{3112} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & \sqrt{2}C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1231} & 2C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

On vérifie que l'on retrouve bien le résultat du calcul indiciel par exemple :

$$\sigma_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + \dots + 2C_{1123}\varepsilon_{23} + 2C_{1132}\varepsilon_{32} + \dots$$

$$\sigma_{23} = C_{2311}\varepsilon_{11} + \dots + 2C_{2323}\varepsilon_{23} + 2C_{2332}\varepsilon_{32} + \dots$$

La matrice représentée \mathbb{C} et est bien issue d'une base de tenseurs. Le tenseur des souplesses, \mathbb{S} est tel que :

$$\varepsilon = \mathbb{S} : \sigma$$

Il s'agit de l'inverse de \mathbb{C} :

$$\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$$

6.6.3 Ecriture de Voigt

On la trouve encore beaucoup. Il faut un jeu de coefficients 2 bien placés pour retrouver les équations du calcul indiciel. On utilise :

$$\sigma_I = C_{IJ}\varepsilon_J$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

L'écriture est séduisante d'autant que le terme $2\varepsilon_{12} = \gamma_{12}$ qui représente le glissement de l'angle $(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2})$. Toutefois, dans le cas général, il n'est pas toujours possible de calculer l'inverse des tenseurs, ni la norme, ni les projections.

6.7 Rappels sur les opérateurs différentiels

Nous rappelons ici la définition des différents opérateurs différentiels que l'on peut appliquer à un champ vectoriel. Les définitions sont données pour un champ vectoriel dans l'espace, mais s'étendent de façon naturelle aux champs planaires par exemple.

On peut classer ces opérateurs d'après l'ordre (premier ou second) de leurs dérivées, ainsi que par la variable (temps ou espace) par rapport à laquelle on dérive.

La base est ici notée $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.

6.7.1 Dérivées par rapport au temps

Ces dérivées sont simples et intuitives.

Opérateurs du premier ordre

Dériver une fois par rapport au temps transforme une position en vitesse, une vitesse en accélération.

$$P_{,t} = \frac{\partial P}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial t} \\ \frac{\partial P_y}{\partial t} \\ \frac{\partial P_z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = V, \quad V_{,t} = \frac{\partial V}{\partial t} = a$$

Opérateurs du second ordre

L'accélération est la dérivée seconde de la position par rapport au temps : $p_{,tt} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a$.

6.7.2 Dérivées par rapport à l'espace

6.7.2.1 Opérateurs du premier ordre

Ces opérateurs utilisent les dérivées premières du champ vectoriel. On peut dériver chacune des composantes d'un champ vectoriel par rapport à n'importe laquelle des directions. On a donc, en trois dimensions, 9 dérivées spatiales premières pour un champ vectoriel v :

$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial j}, \quad (i, j) \in (x, y, z)$$

Parmi ces dérivées et leurs combinaisons, il en est trois particulières qui ont des interprétations précises.

— Le gradient d'un champ scalaire s est un vecteur défini par :

$$\text{grad } s = \begin{bmatrix} s_{,x} \\ s_{,y} \\ s_{,z} \end{bmatrix}$$

Ce vecteur n'est autre qu'une extension de la classique dérivée d'une fonction à un espace de dimension supérieure. Il indique donc la pente locale de la fonction, le vecteur obtenu étant dirigé le long de la plus grande pente au champ s .

Par extension, on définit le gradient d'un champ vectoriel v comme la matrice 3×3 dont chaque ligne contient le gradient de la composante associée de v :

$$\text{grad } v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

— La divergence d'un champ vectoriel v est un scalaire défini par :

$$\text{div } v = v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z}$$

Sommant les dérivées des composantes de v dans les trois directions, il peut s'interpréter

comme un terme de mesure locale de la dilatation du champ. Si on considère en effet un petit cube centré autour d'un point, le terme $v_{i,i}$ mesure comment les faces alignées avec l'axe i se sont déplacées dans la direction i . La divergence est une somme sur les trois directions de ces dilatations locales.

Par extension, on définit la divergence d'un tenseur d'ordre 2 α (matrice 3×3) comme le vecteur de taille 3 dont chaque composante est la divergence de la ligne correspondante de la matrice :

$$\operatorname{div} \begin{bmatrix} \alpha_{1x} & \alpha_{1y} & \alpha_{1z} \\ \alpha_{2x} & \alpha_{2y} & \alpha_{2z} \\ \alpha_{3x} & \alpha_{3y} & \alpha_{3z} \end{bmatrix} = \operatorname{div} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{div}(\alpha_1) \\ \operatorname{div}(\alpha_2) \\ \operatorname{div}(\alpha_3) \end{bmatrix}$$

6.7.2.2 Opérateur Nabla

L'opérateur nabla (∇) est pratique lorsqu'il s'agit d'écrire des dérivées premières. ∇ est un vecteur de coordonnées $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T$. Les opérateurs précédents sont alors exprimés simplement par :

- $\operatorname{grad} s = \nabla s$
- $\operatorname{div} v = \nabla \cdot v$ où \cdot représente le produit scalaire ou le produit vectoriel selon si v est un champ tensoriel d'ordre 1 ou 2.

6.8 Quelques mots sur la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est maintenant très répandue en industrie, en particulier dans les secteurs de l'aéronautique, du spatial, de l'automobile, du naval et du nucléaire pour des applications en mécanique des solides et fluides et les interactions fluide-structure. La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation par éléments finis des fonctions inconnues u pour discrétiser une forme intégrale, puis à résoudre le système d'équations algébriques ainsi obtenu. On se réfère aux livres de [Dhatt *et al.*, 2005], [Zienkiewicz *et al.*, 1977] et [Zienkiewicz *et Taylor*, 2005] pour une introduction complète sur ce sujet. Cette méthode multidisciplinaire présente de multiples facettes :

- La compréhension du problème physique étudié et la connaissance intuitive de la nature de la solution cherchée.
- La représentation géométrique d'un domaine et l'approximation par éléments finis.
- La modélisation mathématique du comportement d'un système physique sous la forme d'écriture faibles, appelées aussi formes intégrales ou variationnelles.
- La construction d'un modèle discret ou algébrique associé à une écriture faible et basé sur une discrétisation par éléments finis.
- La présentation des différentes méthodes numériques utilisées pour assembler et résoudre le système algébrique global représentant le comportement stationnaire ou non, linéaire ou non d'un système physique.
- Les techniques d'organisation matricielle des données.
- Les méthodes d'intégration numérique de fonctions de plusieurs variables, de résolution de systèmes d'équations algébriques et différentielles, linéaires et non linéaires.

Il existe un certain nombre de logiciels basés sur la méthode des éléments finis qui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques variés issus de la mécanique des solides déformables, de la mécanique des fluides compressibles ou non, de la thermique, de l'électromagnétique, etc. Parmi ceux-ci, on peut notamment citer NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, CASTEM.

L'utilisation concrète d'un logiciel de modélisation implique un certain savoir faire et une expertise adaptée au problème traité. De plus, la quantité des données à analyser lors de la phase de post-traitement dépend de la complexité du problème étudié et seule une connaissance solide des phénomènes physiques mis en jeu permettra d'isoler l'essentiel de la masse d'informations fournies par le logiciel.

Etapes caractéristiques d'un programme par éléments finis :

Tout programme basé sur la méthode des éléments finis inclut un certain nombre de blocs fonctionnels caractéristiques destinés à :

- 1) La lecture, la vérification et l'organisation des données décrivant le maillage (noeuds et éléments), les paramètres physiques (conductivités, modules d'élasticité, etc), les sollicitations et conditions aux limites ;
- 2) La construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis l'assemblage pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations ;

- 3) La résolution du système d'équations après la prise en compte des conditions aux limites et des conditions initiales dans le cas d'un problème instationnaire ;
- 4) La visualisation des résultats et le calcul éventuel de variables additionnelles (flux, contraintes, réactions, etc).

Lecture, vérification, organization des données

- Coordonnées des noeuds.
- Connectivités des éléments.
- Paramètres physiques.
- Sollicitations.
- Conditions aux limites.

Construction de la matrice globale $[K]$ et du vecteur global $\{F\}$

- Extraire les informations liées à l'élément fini.
- Construire la matrice et le vecteur élémentaires $[k]$ et $\{f\}$.
- Assembler $[k]$ et $\{f\}$ dans $[K]$ et $\{F\}$.

Résolution du système d'équations $[K]\{U\} = \{F\}$

- Modifier $[K]$ et $\{F\}$ pour les conditions aux limites.
- Résolution du système linéaire par méthode directe ou itérative.

Post-traitement des résultats

- Calculer les variables additionnelles : exemple $W = \{U\}^T [K] \{U\}$.
- Visualiser et imprimer les résultats.

6.9 Quelques mots sur le solveur élément fini FoXtroT

Ce code a permis de mettre en oeuvre les deux versions du modèle développé durant la thèse.

Il s'agit d'un solveur de calcul élément fini développé dans l'équipe Endommagement et Durabilité de l'institut Pprime. L'objectif du code de calcul est de mettre en place un espace de développement permettant d'implémenter de nouvelles approches numériques ou de modélisation dans les thématiques scientifiques de l'équipe. Il permet ainsi d'implémenter de nouveaux

éléments finis et nouvelles lois de comportement matériaux, et de traiter des problèmes à grands nombres de degrés de liberté dans un cadre non-linéaire (calcul en plasticité cristalline, couplages multiphysiques).

FoXtroT est écrit en C++ et en fortran. Le code utilise l'interopérabilité C/fortran pour passer les informations entre les deux langages, permettant une meilleure portabilité du code sur différentes architectures. La résolution locale (élémentaire) se fait généralement au niveau du code fortran, alors que la résolution globale (maillage) se fait en C++. Le code utilise le parallélisme MPI pour décomposer le maillage entre les différents processus et résoudre le système linéaire, interfacé avec le solveur linéaire MUMPS¹. Il utilise aussi les outils et bibliothèques numériques pour le développement. Le code définit par ailleurs ses propres éléments finis : éléments 3D isoparamétriques hexaèdres et tétraèdres, intégration pleine ou réduite, interpolation quadratique ou linéaire.

6.10 Fonctions de base pour l'élément d'Hermite dans une base cubique incomplète

On fournit ici le détail des fonctions de base utilisées pour l'élément d'Hermite développé au paragraphe 5.2.3 de la thèse.

1. <http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS/>

$$[\Psi^3] = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \\ \Psi_7 \\ \Psi_8 \\ \Psi_9 \\ \Psi_{10} \\ \Psi_{11} \\ \Psi_{12} \\ \Psi_{13} \\ \Psi_{14} \\ \Psi_{15} \\ \Psi_{16} \\ \Psi_{17} \\ \Psi_{18} \\ \Psi_{19} \\ \Psi_{20} \\ \Psi_{21} \\ \Psi_{22} \\ \Psi_{23} \\ \Psi_{24} \\ \Psi_{25} \\ \Psi_{26} \\ \Psi_{27} \\ \Psi_{28} \\ \Psi_{29} \\ \Psi_{30} \\ \Psi_{31} \\ \Psi_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-x)(1-y)(1-z)(-2+x+x^2+y+y^2+z+z^2) \\ -(1-x)(1-y)(z+1)(-2+x+x^2+y+y^2-z+z^2) \\ -(1-x)(y+1)(1-z)(-2+x+x^2-y+y^2+z+z^2) \\ -(1-x)(y+1)(z+1)(-2+x+x^2-y+y^2-z+z^2) \\ -(x+1)(1-y)(1-z)(-2-x+x^2+y+y^2+z+z^2) \\ -(x+1)(1-y)(z+1)(-2-x+x^2+y+y^2-z+z^2) \\ -(x+1)(y+1)(1-z)(-2-x+x^2-y+y^2+z+z^2) \\ -(x+1)(y+1)(z+1)(-2-x+x^2-y+y^2-z+z^2) \\ (1-x)(1-y)(1-z)^2(z+1) \\ (1-x)(1-y)(1-z)(z+1)^2 \\ (1-x)(1-y)^2(y+1)(1-z) \\ (1-x)(1-y)^2(y+1)(z+1) \\ (1-x)(1-y)(y+1)^2(1-z) \\ (1-x)(1-y)(y+1)^2(z+1) \\ (1-x)(y+1)(1-z)^2(z+1) \\ (1-x)(y+1)(1-z)(z+1)^2 \\ (1-x)^2(x+1)(1-y)(1-z) \\ (1-x)^2(x+1)(1-y)(z+1) \\ (1-x)^2(x+1)(y+1)(1-z) \\ (1-x)^2(x+1)(y+1)(z+1) \\ (1-x)(x+1)^2(1-y)(1-z) \\ (1-x)(x+1)^2(1-y)(z+1) \\ (1-x)(x+1)^2(y+1)(1-z) \\ (1-x)(x+1)^2(y+1)(z+1) \\ (x+1)(1-y)(1-z)^2(z+1) \\ (x+1)(1-y)(1-z)(z+1)^2 \\ (x+1)(1-y)^2(y+1)(1-z) \\ (x+1)(1-y)^2(y+1)(z+1) \\ (x+1)(1-y)(y+1)^2(1-z) \\ (x+1)(1-y)(y+1)^2(z+1) \\ (x+1)(y+1)(1-z)^2(z+1) \\ (x+1)(y+1)(1-z)(z+1)^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{16}$$

Pour les 32 fonctions de bases ci-dessus, voir ([Gillette, 2014] et [Gillette et Kloefkorn, 2019]).

Liste des tableaux

3.1	Valeurs du module élastique effectif E^{hom} du modèle proposé pour différentes fractions de la phase 1. Les valeurs correspondantes des bornes de Voigt, Reuss et Hashin-Shtrikman sont rajoutées pour comparaison.	71
3.2	Microstructures virtuelles. Valeurs de l'énergie totale pour différentes fractions volumiques d'inclusions. Les valeurs du modèle non-local proposé sont comparées aux bornes de Voigt et Reuss et enfin aux valeurs obtenues par champs complets.	89
3.3	Microstructures réelles d'EPDM. Valeurs de l'énergie totale pour différentes fractions volumiques d'inclusions. Les valeurs du modèle non-local proposé sont comparées aux bornes de Voigt et Reuss.	90
5.1	Valeurs de la déformation axiale macroscopique en fonction de la fraction volumique asymptotique θ_1 d'inclusions.	121

Table des figures

1	Principe d'homogénéisation.	1
1.1	Schéma représentatif d'un système fortement mélangeant [Nait-Ali, 2012].	18
1.2	Profil de déformation obtenu analytiquement avec le modèle non-local intégral ([Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987]).	37
1.3	Structure (S) aléatoirement fibrée [Michaille <i>et al.</i> , 2011] et [Nait-ali, 2017].	38
2.1	Principe de la technique d'homogénéisation par développement asymptotique.	46
2.2	Représentation de l'ensemble A	49
2.3	Représentation de la non rareté de la distribution d'inclusions.	50
2.4	Distribution dans le cas d'un échiquier aléatoire.	51
3.1	Barre composite utilisée pour l'analyse monodimensionnelle.	68
3.2	Fuseau de Hill. Comparaison du modèle proposé avec les bornes classiques.	72
3.3	Exemple de microstructure virtuelle (modèle CAO) et motif utilisé pour la génération.	74
3.4	Exemple d'une microstructure réelle d'EPDM contenant des cavités.	75
3.5	Schéma général des étapes de traitement d'images.	76
3.6	(a) : Image réelle avant binarisation. (b) : Image réelle après binarisation.	77
3.7	Exemple de covariogramme et principales propriétés.	79
3.8	Microstructures virtuelles générées par un processus stochastique. a-d) : Exemples de réalisations pour deux fractions volumiques d'inclusions (0.0035 & 0.0112), b-e) et c-f) : Longueurs caractéristiques correspondantes l_0 et l_1 définissant respectivement la taille des premier et deuxième volumes (V.E.M.R0 et V.E.M.R1).	81
3.9	Microstructures réelles d'EPDM contenant des cavités. a-d) : Images issues de tomographie après traitement pour deux fractions volumiques (0.0285 & 0.1521), b-e) et c-f) : Longueurs caractéristiques correspondantes l_0 et l_1 définissant respectivement la taille des premier et deuxième volumes (V.E.M.R0 et V.E.M.R1).	82

3.10	Maillage d'une microstructure virtuelle avec des éléments tétraédriques. (a) : Matrice. (b) : Inclusion.	83
3.11	Matrice d'EPDM maillée avec des éléments hexaédriques.	84
3.12	Fuseau de Hill énergétique a) : Matériau virtuel, b) : Matériau synthétique. . .	91
4.1	Schéma représentant la frontière commune Σ de deux domaine Ω_1 et Ω_2 . . .	102
5.1	Evolution de la déformation axiale macroscopique en fonction de la fraction volumique asymptotique θ_1 d'inclusions.	121
5.2	Élément de type Hermite d'une barre unidimensionnelle.	127
5.3	Élément tridimensionnel de type Hermite dans une base cubique incomplète. .	129

Bibliographie

- [FoX, 2018] (2018). *FoXTRoT sourcesup.renater.fr/foxtrot/html/*.
- [Aboudi, 2013] Aboudi, J. (2013). *Mechanics of composite materials : a unified micromechanical approach*, volume 29. Elsevier.
- [Affdl et Kardos, 1976] Affdl, J. H. et Kardos, J. (1976). The halpin-tsai equations : a review. *Polymer Engineering & Science*, 16(5):344–352.
- [Aifantis, 1984] Aifantis, E. C. (1984). On the microstructural origin of certain inelastic models. *Journal of Engineering Materials and technology*, 106(4):326–330.
- [Askes et Sluys, 2002] Askes, H. et Sluys, L. (2002). Explicit and implicit gradient series in damage mechanics. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 21(3):379–390.
- [Attouch et al., 2014] Attouch, H., Buttazzo, G. et Michaille, G. (2014). *Variational analysis in Sobolev and BV spaces : applications to PDEs and optimization*. SIAM.
- [Azdine et al., 2015] Azdine, N.-A., Ousseynou, K.-d. et Sylvie, C. (2015). Catching the time evolution of microstructure morphology from dynamic covariograms. *Comptes Rendus Mécanique*, 343(4):301–306.
- [Bazant, 2004] Bazant, Z. P. (2004). *Introduction aux effets d'échelle sur la résistance des structures*. Lavoisier.
- [Bažant et al., 1984] Bažant, Z. P., Belytschko, T. B. et Chang, T.-P. (1984). Continuum theory for strain-softening. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(12):1666–1692.
- [Bažant et Lin, 1988] Bažant, Z. P. et Lin, F.-B. (1988). Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. *Journal of Structural Engineering*, 114(11):2493–2510.
- [Bažant et Ožbolt, 1990] Bažant, Z. P. et Ožbolt, J. (1990). Nonlocal microplane model for fracture, damage, and size effect in structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(11): 2485–2505.
- [Bazant et Pijaudier-Cabot, 1988] Bazant, Z. P. et Pijaudier-Cabot, G. (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of applied mechanics*, 55(2):287–293.

- [Bažant et Pijaudier-Cabot, 1989] Bažant, Z. P. et Pijaudier-Cabot, G. (1989). Measurement of characteristic length of nonlocal continuum. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(4): 755–767.
- [Bellieud et Bouchitté, 1998] Bellieud, M. et Bouchitté, G. (1998). Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. non local effects. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 26(3):407–436.
- [Benallal et Marigo, 2006] Benallal, A. et Marigo, J.-J. (2006). Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 15(1):S283.
- [Benveniste, 1987] Benveniste, Y. (1987). A new approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of materials*, 6(2):147–157.
- [Birkhoff, 1942] Birkhoff, G. D. (1942). What is the ergodic theorem? *The American Mathematical Monthly*, 49(4):222–226.
- [Bornert *et al.*, 2001] Bornert, M., Bretheau, T. et Gilormini, P. (2001). Homogénéisation en mécanique des matériaux. vol. 1, matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques.
- [Braides, 2002] Braides, A. (2002). *Gamma-convergence for Beginners*, volume 22. Clarendon Press.
- [Castagnet *et al.*, 2018] Castagnet, S., Mellier, D., Nait-Ali, A. et Benoit, G. (2018). In-situ x-ray computed tomography of decompression failure in a rubber exposed to high-pressure gas. *Polymer Testing*, 70:255–262.
- [Castañeda et Willis, 1995] Castañeda, P. P. et Willis, J. R. (1995). The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(12):1919–1951.
- [Chabi et Michaille, 1994] Chabi, E. et Michaille, G. (1994). Ergodic theory and application to nonconvex homogenization. *Set-Valued Analysis*, 2(1-2):117–134.
- [Christensen et Lo, 1979] Christensen, R. et Lo, K. (1979). Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4):315–330.
- [Dasgupta *et al.*, 1996] Dasgupta, A., Agarwal, R. et Bhandarkar, S. (1996). Three-dimensional modeling of woven-fabric composites for effective thermo-mechanical and thermal properties. *Composites science and technology*, 56(3):209–223.
- [de Borst, 2002] de Borst, R. (2002). Fracture in quasi-brittle materials : a review of continuum damage-based approaches. *Engineering fracture mechanics*, 69(2):95–112.

- [De Borst et Mühlhaus, 1992] De Borst, R. et Mühlhaus, H.-B. (1992). Gradient-dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(3):521–539.
- [de Borst *et al.*, 1993] de Borst, R. R., Van Den Boogaard, A., Sluys, L. et Van den Bogert, P. (1993). Computational issues in time-dependent deformation and fracture of concrete.
- [De Giorgi et Franzoni, 1975] De Giorgi, E. et Franzoni, T. (1975). Su un tipo di convergenza variazionale. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti*, 58(6):842–850.
- [DEGIORGI, 1975] DEGIORGI, E. (1975). Su un tipo di convergenza variazionale. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.(8)*, 58:842–850.
- [Desmorat *et al.*, 2007] Desmorat, R., Gatuingt, F. et Ragueneau, F. (2007). Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(10):1539–1560.
- [Dhatt *et al.*, 2005] Dhatt, G., Touzot, G. et Lefrançois, E. (2005). *Méthode des éléments finis*. Lavoisier.
- [Di Luzio, 2007] Di Luzio, G. (2007). A symmetric over-nonlocal microplane model m4 for fracture in concrete. *International journal of solids and structures*, 44(13):4418–4441.
- [Dirrenberger *et al.*, 2014] Dirrenberger, J., Forest, S. et Jeulin, D. (2014). Towards gigantic rve sizes for 3d stochastic fibrous networks. *International Journal of Solids and Structures*, 51(2):359–376.
- [Djoko *et al.*, 2006] Djoko, J., Lamichhane, B., Reddy, B. et Wohlmuth, B. (2006). Conditions for equivalence between the hu–washizu and related formulations, and computational behavior in the incompressible limit. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(33-36):4161–4178.
- [Dufour *et al.*, 2008] Dufour, F., Pijaudier-Cabot, G., Choinska, M. et Huerta, A. (2008). Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models. *Computers & Concrete*, 5(4):375–388.
- [Eringen et Edelen, 1972] Eringen, A. C. et Edelen, D. (1972). On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10(3):233–248.
- [Eshelby, 1957] Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 241(1226):376–396.
- [Fleck et Hutchinson, 1993] Fleck, N. et Hutchinson, J. (1993). A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(12):1825–1857.

- [Forest, 2006] Forest, S. (2006). *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Presses des MINES.
- [Forest et al., 2000] Forest, S., Cardona, J.-M. et Sievert, R. (2000). Thermoelasticity of second-grade media. *In Continuum Thermomechanics*, pages 163–176. Springer.
- [Fouchal et al., 2009] Fouchal, F., Lebon, F. et Titeux, I. (2009). Contribution to the modelling of interfaces in masonry construction. *Construction and Building Materials*, 23(6):2428–2441.
- [Francfort, 1983] Francfort, G. A. (1983). Homogenization and linear thermoelasticity. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 14(4):696–708.
- [Frémond, 2013] Frémond, M. (2013). *Non-smooth thermomechanics*. Springer Science & Business Media.
- [Geers et al., 1996] Geers, M., Peijs, T., Brekelmans, W. et De Borst, R. (1996). Experimental monitoring of strain localization and failure behaviour of composite materials. *Composites Science and Technology*, 56(11):1283–1290.
- [Gillette, 2014] Gillette, A. (2014). Hermite and bernstein style basis functions for cubic serendipity spaces on squares and cubes. *In Approximation Theory XIV : San Antonio 2013*, pages 103–121. Springer.
- [Gillette et Kloefkorn, 2019] Gillette, A. et Kloefkorn, T. (2019). Trimmed serendipity finite element differential forms. *Mathematics of Computation*, 88(316):583–606.
- [Gloria et Otto, 2012] Gloria, A. et Otto, F. (2012). An optimal error estimate in stochastic homogenization of discrete elliptic equations. *The annals of applied probability*, pages 1–28.
- [Gloria et al., 2011] Gloria, A., Otto, F. et al. (2011). An optimal variance estimate in stochastic homogenization of discrete elliptic equations. *The annals of probability*, 39(3):779–856.
- [Green et Rivlin, 1964] Green, A. E. et Rivlin, R. S. (1964). Multipolar continuum mechanics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17:113–147.
- [Hai-Chang, 1955] Hai-Chang, H. (1955). On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity. *Scientia Sinica*, 4(1):33–42.
- [Hashin, 1962] Hashin, Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, 29(1):143–150.
- [Hashin, 1983] Hashin, Z. (1983). Analysis of composite materials—a survey. *Journal of Applied Mechanics*, 50(3):481–505.
- [Hashin et Rosen, 1964] Hashin, Z. et Rosen, B. W. (1964). The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *Journal of applied mechanics*, 31(2):223–232.

- [Hashin et Shtrikman, 1962] Hashin, Z. et Shtrikman, S. (1962). A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *Journal of applied Physics*, 33(10):3125–3131.
- [Hill, 1965] Hill, R. (1965). Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(2):89–101.
- [Hill, 1967] Hill, R. (1967). The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(2):79–95.
- [Hori et Nemat-Nasser, 1993] Hori, M. et Nemat-Nasser, S. (1993). Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites. *Mechanics of Materials*, 14(3):189–206.
- [Huang *et al.*, 1997] Huang, Y., Zhang, L., Guo, T. et Hwang, K.-C. (1997). Mixed mode near-tip fields for cracks in materials with strain-gradient effects. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(3):439–465.
- [Hutchinson et Fleck, 1997] Hutchinson, J. et Fleck, N. (1997). Strain gradient plasticity. In *Advances in applied mechanics*, volume 33, pages 295–361. Academic.
- [Jason, 2004] Jason, L. (2004). *Relation endommagement perméabilité pour les bétons : application aux calculs de structures*. Thèse de doctorat, Nantes.
- [Jeffreys, 1973] Jeffreys, H. (1973). On isotropic tensors. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 73, pages 173–176. Cambridge University Press.
- [Jeulin, 2000] Jeulin, D. (2000). Random texture models for material structures. *Statistics and Computing*, 10(2):121–132.
- [Jeulin, 2012] Jeulin, D. (2012). Morphology and effective properties of multi-scale random sets : A review. *Comptes Rendus Mécanique*, 340(4-5):219–229.
- [Jirásek et Rolshoven, 2003] Jirásek, M. et Rolshoven, S. (2003). Comparison of integral-type nonlocal plasticity models for strain-softening materials. *International Journal of Engineering Science*, 41(13-14):1553–1602.
- [Jirásek et Zimmermann, 1998] Jirásek, M. et Zimmermann, T. (1998). Rotating crack model with transition to scalar damage. *Journal of engineering mechanics*, 124(3):277–284.
- [Kanit *et al.*, 2003] Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V. et Jeulin, D. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of solids and structures*, 40(13-14):3647–3679.
- [Kanit *et al.*, 2006] Kanit, T., N'Guyen, F., Forest, S., Jeulin, D., Reed, M. et Singleton, S. (2006). Apparent and effective physical properties of heterogeneous materials : representativity of samples of two materials from food industry. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(33-36):3960–3982.

- [Krengel, 1985] Krengel, U. (1985). De Gruyter studies in mathematics : Vol. 6. *Ergodic theorems*.
- [Kröner, 1958] Kröner, E. (1958). Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls. *Zeitschrift für Physik*, 151(4):504–518.
- [Kröner, 1967] Kröner, E. (1967). Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *International Journal of Solids and Structures*, 3(5):731–742.
- [Krumhansl, 1968] Krumhansl, J. (1968). Some considerations of the relation between solid state physics and generalized continuum mechanics. In *Mechanics of generalized continua*, pages 298–311. Springer.
- [Laniel et al., 2007] Laniel, R., Alart, P. et Pagano, S. (2007). Consistent thermodynamic modelling of wire-reinforced geomaterials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 26(5): 854–871.
- [Laniel et al., 2008] Laniel, R., Alart, P. et Pagano, S. (2008). Discrete element investigations of wire-reinforced geomaterial in a three-dimensional modeling. *Computational Mechanics*, 42(1):67–76.
- [Lantuéjoul, 2002] Lantuéjoul, C. (2002). *Geostatistical simulation : models and algorithms*. Springer, Berlin, Germany.
- [Lasry et Belytschko, 1988] Lasry, D. et Belytschko, T. (1988). Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6):581–597.
- [Leblond et al., 1994] Leblond, J., Perrin, G. et Devaux, J. (1994). Bifurcation effects in ductile metals with nonlocal damage. *Journal of Applied Mechanics*, 61(2):236–242.
- [Lielens et al., 1998] Lielens, G., Pirotte, P., Couniot, A., Dupret, F. et Keunings, R. (1998). Prediction of thermo-mechanical properties for compression moulded composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 29(1-2):63–70.
- [Liu et al., 2003] Liu, B., Qiu, X., Huang, Y., Hwang, K., Li, M. et Liu, C. (2003). The size effect on void growth in ductile materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(7):1171–1187.
- [Luciano et Barbero, 1994] Luciano, R. et Barbero, E. (1994). Formulas for the stiffness of composites with periodic microstructure. *International Journal of Solids and Structures*, 31(21):2933–2944.
- [Madi, 2006] Madi, K. (2006). *Influence de la morphologie tridimensionnelle des phases sur le comportement mécanique de réfractaires électrofondus*. Thèse de doctorat, Paris, ENMP.
- [Mandel, 1964] Mandel, J. (1964). Contribution théorique à l'étude de l'écroutissage et des lois de l'écoulement plastique. In *Applied Mechanics*, pages 502–509. Springer.

- [Michaille *et al.*, 1998] Michaille, G., Michel, J. et Piccinini, L. (1998). Large deviations estimates for epigraphical superadditive processes in stochastic homogenization. *Préprint*, (220).
- [Michaille *et al.*, 2011] Michaille, G., Nait-Ali, A. et Pagano, S. (2011). Macroscopic behavior of a randomly fibered medium. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 96(3):230–252.
- [Mikkelsen, 1999] Mikkelsen, L. P. (1999). Necking in rectangular tensile bars approximated by a 2-d gradient dependent plasticity model. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 18(5):805–818.
- [Mindlin, 1964] Mindlin, R. D. (1964). Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1):51–78.
- [Mindlin, 1965] Mindlin, R. D. (1965). Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1(4):417–438.
- [Mindlin et Eshel, 1968] Mindlin, R. D. et Eshel, N. (1968). On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4(1):109–124.
- [Monchiet et Bonnet, 2013] Monchiet, V. et Bonnet, G. (2013). A gurson-type model accounting for void size effects. *International Journal of Solids and Structures*, 50(2):320–327.
- [Moravec et Roman, 2009] Moravec, F. et Roman, S. (2009). Numerical computing of elastic homogenized coefficients for periodic fibrous tissue. *Applied and Computational Mechanics*, 3:141–152.
- [Mori et Tanaka, 1973] Mori, T. et Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*, 21(5):571–574.
- [Mosco, 1969] Mosco, U. (1969). Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. *Advances in Mathematics*, 3(4):510–585.
- [Moulinec, 1994] Moulinec, H. (1994). A fast numerical method for computing the linear and nonlinear mechanical properties of composites. *C. R Acad. Sci. Paris*, 318:1417–1423.
- [Moulinec et Suquet, 1998] Moulinec, H. et Suquet, P. (1998). A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157(1-2):69–94.
- [Moulinec et Suquet, 2003] Moulinec, H. et Suquet, P. (2003). Comparison of fft-based methods for computing the response of composites with highly contrasted mechanical properties. *Physica B : Condensed Matter*, 338(1-4):58–60.
- [Mura, 1987] Mura, T. (1987). General theory of eigenstrains. *In Micromechanics of defects in solids*, pages 1–73. Springer.

- [Murat, 1978] Murat, F. (1978). Compacité par compensation. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 5(3):489–507.
- [Murphy et al., 2001] Murphy, M., Mount, D. M. et Gable, C. W. (2001). A point-placement strategy for conforming delaunay tetrahedralization. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 11(06):669–682.
- [Nait-Ali, 2012] Nait-Ali, A. (2012). *Matériaux aléatoirement renforcés de type Texsol : modélisation variationnelle par homogénéisation stochastique*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc.
- [Nait-ali, 2017] Nait-ali, A. (2017). Nonlocal modeling of a randomly distributed and aligned long-fiber composite material. *Comptes Rendus Mécanique*, 345(3):192–207.
- [Nait-ali, 2018] Nait-ali, A. (2018). Stochastic homogenization of reinforced polymer with very small carbon inclusions. *Comptes Rendus Mécanique*, 346(12):1192–1198.
- [Nasution et al., 2014] Nasution, M. R. E., Watanabe, N., Kondo, A. et Yudhanto, A. (2014). Thermomechanical properties and stress analysis of 3-d textile composites by asymptotic expansion homogenization method. *Composites Part B : Engineering*, 60:378–391.
- [Nguyen et Zessin, 1979] Nguyen, X. X. et Zessin, H. (1979). Ergodic theorems for spatial processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 48(2):133–158.
- [Nix et Gao, 1998] Nix, W. D. et Gao, H. (1998). Indentation size effects in crystalline materials : a law for strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(3):411–425.
- [Ožbolt et Bažant, 1992] Ožbolt, J. et Bažant, Z. P. (1992). Microplane model for cyclic triaxial behavior of concrete. *Journal of engineering mechanics*, 118(7):1365–1386.
- [Peerlings et al., 2001] Peerlings, R., Geers, M., De Borst, R. et Brekelmans, W. (2001). A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38(44-45):7723–7746.
- [Peerlings et al., 1996a] Peerlings, R. d., De Borst, R., Brekelmans, W. d. et De Vree, J. (1996a). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for numerical methods in engineering*, 39(19):3391–3403.
- [Peerlings et al., 1996b] Peerlings, R. d., De Borst, R., Brekelmans, W. d., De Vree, J. et Spee, I. (1996b). Some observations on localisation in non-local and gradient damage models.
- [Peerlings, 1999] Peerlings, R. H. J. (1999). *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven.

- [Pelissou *et al.*, 2009] Pelissou, C., Baccou, J., Monerie, Y. et Perales, F. (2009). Determination of the size of the representative volume element for random quasi-brittle composites. *International Journal of Solids and Structures*, 46(14-15):2842–2855.
- [Pham, 2010] Pham, K. (2010). *Construction et analyse de modèles d'endommagement à gradient*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Pham *et al.*, 2011] Pham, K., Amor, H., Marigo, J.-J. et Maurini, C. (2011). Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture. *International Journal of Damage Mechanics*, 20(4):618–652.
- [Pham et Marigo, 2013] Pham, K. et Marigo, J.-J. (2013). From the onset of damage to rupture : construction of responses with damage localization for a general class of gradient damage models. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25(2-4):147–171.
- [Pijaudier-Cabot et Bažant, 1987] Pijaudier-Cabot, G. et Bažant, Z. P. (1987). Nonlocal damage theory. *Journal of engineering mechanics*, 113(10):1512–1533.
- [Poincaré, 1890] Poincaré, H. (1890). Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta mathematica*, 13(1):A3–A270.
- [Reissner, 1950] Reissner, E. (1950). On a variational theorem in elasticity. *J Math Phys.*, 1950, 29:95.
- [Reuss, 1929] Reuss, A. (1929). Calculation of the flow limits of mixed crystals on the basis of the plasticity of monocrystals. *Z. Angew. Math. Mech*, 9:49–58.
- [Rodríguez-Ferran *et al.*, 2005] Rodríguez-Ferran, A., Morata, I. et Huerta, A. (2005). A new damage model based on non-local displacements. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29(5):473–493.
- [Sab, 1992] Sab, K. (1992). On the homogenization and the simulation of random materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, (5):585–607.
- [Shewchuk, 2012] Shewchuk, J. R. (2012). Unstructured mesh generation. *Combinatorial Scientific Computing*, 12(257):2.
- [Strömberg et Ristinmaa, 1996] Strömberg, L. et Ristinmaa, M. (1996). Fe-formulation of a nonlocal plasticity theory. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 136(1-2):127–144.
- [Suquet, 1982] Suquet, P. (1982). Plasticité et homogénéisation, these d'etat, univ. *Pierre et Marie Curie*.
- [Tartar, 1977] Tartar, L. (1977). Cours peccot au collège de france. *Manuscript, (unpublished)*.
- [Torquato, 1982] Torquato, S. (1982). *Random heterogeneous materials*. Springer, New York, USA.

- [Toupin, 1962] Toupin, R. A. (1962). Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11(1):385–414.
- [Toupin, 1964] Toupin, R. A. (1964). Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17(2):85–112.
- [Tran et al., 2012] Tran, T.-H., Monchiet, V. et Bonnet, G. (2012). A micromechanics-based approach for the derivation of constitutive elastic coefficients of strain-gradient media. *International Journal of Solids and Structures*, 49(5):783–792.
- [Trinh, 2011] Trinh, D.-K. (2011). *Méthodes d'homogénéisation d'ordre supérieur pour les matériaux architecturés*. Thèse de doctorat.
- [Voigt, 1889] Voigt, W. (1889). Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitätsconstanten isotroper körper. *Annalen der physik*, 274(12):573–587.
- [Washizu, 1955] Washizu, K. (1955). On the variational principles of elasticity and plasticity. Rapport technique, MASSACHUSETTS INST OF TECH CAMBRIDGE AEROELASTIC AND STRUCTURES RESEARCH LAB.
- [Wei et Hutchinson, 1997] Wei, Y. et Hutchinson, J. W. (1997). Steady-state crack growth and work of fracture for solids characterized by strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(8):1253–1273.
- [Wen et al., 2005] Wen, J., Huang, Y., Hwang, K., Liu, C. et Li, M. (2005). The modified gurson model accounting for the void size effect. *International Journal of Plasticity*, 21(2): 381–395.
- [Xia et Hutchinson, 1996] Xia, Z. C. et Hutchinson, J. W. (1996). Crack tip fields in strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(10):1621–1648.
- [Zaoui, 1997] Zaoui, A. (1997). Structural morphology and constitutive behaviour of microheterogeneous materials. *In Continuum micromechanics*, pages 291–347. Springer.
- [Zienkiewicz et Taylor, 2005] Zienkiewicz, O. C. et Taylor, R. L. (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier.
- [Zienkiewicz et al., 1977] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Nithiarasu, P. et Zhu, J. (1977). *The finite element method*, volume 3. McGraw-hill London.

Modélisation non-locale et stochastique de matériaux à fort gradient de propriétés par développement asymptotique

Le but est de proposer un modèle macroscopique, déterministe et non-local, construit par transition d'échelle pour des matériaux hétérogènes à fort gradient de propriétés, constitués d'inclusions distribuées dans une matrice élastique suivant un processus stochastique ergodique. La méthode des développements asymptotiques, ici étendue dans un cadre aléatoire, est combinée avec une approche énergétique pour faire apparaître le second gradient de déplacement dans l'expression de l'énergie de déformation. Un premier modèle est ainsi obtenu et implique trois tenseurs d'élasticité homogénéisés fonctions du paramètre stochastique et des propriétés des phases. Contrairement à la littérature, il fait intervenir deux longueurs caractéristiques fortement reliées à la microstructure. La mise en œuvre numérique est réalisée pour deux types de microstructures tridimensionnelles de complexité morphologique croissante. Les premières sont virtuelles générées à partir d'un motif simple (une inclusion entourée de six petites) distribué aléatoirement. Les secondes sont des microstructures réelles d'Ethylène-Propylène-Diène Monomère obtenues par tomographie, contenant des clusters d'inclusions de structures complexes.

Une seconde transition d'échelle à l'aide d'outils d'homogénéisation variationnelle stochastique dans le cas ergodique est réalisée afin d'obtenir un modèle homogène, exploitable en calculs de structures. Le passage à la limite sur le paramètre d'hétérogénéité émanant du développement asymptotique précédent est ainsi effectué par la méthode de Γ -convergence avec pour objectif de conserver un maximum d'information microstructurale. In fine, le modèle obtenu est macroscopique, non-local, déterministe et richement connecté à la microstructure. La non-localité s'exprime non seulement par le second gradient de déplacement mais aussi par la présence du champ de déplacement virtuel (mémoire) des inclusions. Le lien fort avec la microstructure s'exprime toujours par la présence du paramètre stochastique et des propriétés des phases, mais aussi par celle des fractions asymptotiques de la phase inclusionnaire dans le matériau et dans les volumes morphologiques définis par les longueurs caractéristiques intervenant dans le modèle.

Pour une future utilisation pratique du modèle, un élément fini non-local et enrichi avec des interpolations de type Hermite est implémenté dans le solveur élément fini FoXtroT de l'Institut Pprime. Il prend en compte le champ de déplacement virtuel (mémoire) des inclusions et les gradients des champs de déplacement macroscopique et virtuel. Les premiers résultats sur cet aspect inédit sont encourageants.

Mots clés : Composites, Déformations (mécanique) ; Développements asymptotiques ; Gradient conjugué, Méthode du ; Méthodes d'homogénéisation numérique ; Microstructure (physique) ; Milieux hétérogènes ; Processus stochastiques ; Simulation par ordinateur ; Théorie ergodique ; Phénomène non-local ; Théorie du second gradient.

Non-local and stochastic modeling of materials with high property gradients by asymptotic development

The aim is to propose a macroscopic, deterministic and non-local model, built by scale transition for heterogeneous materials with high property gradients and made of inclusions distributed in an elastic matrix according to a stochastic ergodic process. The method of asymptotic expansions, here extended to the random case, is combined with an energetic approach to reveal the second displacement gradient in the strain energy expression. A first model is thus obtained and involves three homogenized elasticity tensors functions of the stochastic parameter and of the phase properties. As opposed to the literature, it involves also two characteristic lengths strongly linked to the microstructure. The numerical solving is performed for two types of three-dimensional microstructures with increasing morphological complexity. The first ones are virtual and generated from a simple pattern (one inclusion circled by six small ones) randomly distributed. The second are real microstructures of Ethylène-Propylène-Diène Monomère obtained by tomography, containing clusters of inclusions with complex structures.

A second scale transition using stochastic variational homogenization tools in the ergodic case is performed in order to derive a homogeneous model, usable for structural calculations. The transition to the limit on the heterogeneity parameter coming from the previous asymptotic expansion is performed with the Γ -convergence method aiming at keeping a strong microstructural content. In fine, the model is macroscopic, non-local, deterministic and strongly connected to the microstructure. Non-local effects are now accounted for by the second displacement gradient but also by the virtual (memory) displacement field of the inclusions. The link with microstructure is still manifest through the stochastic parameter and phase properties, but also by the asymptotic fractions of the inclusion phase in the material and in the morphological volumes defined by the characteristic lengths involved in the model.

For further model practical use, a non-local finite element enriched with Hermit-type interpolations is implemented in FoXtroT, the finite element solver of the Pprime Institute. This element takes into account the virtual (memory) displacement field of the inclusions as well as the gradients of the macroscopic and virtual displacement fields. The first numerical results on this aspect, to our knowledge never discussed in the literature, are promising.

Keywords: Composite materials; Deformations (Mechanics); Asymptotic expansions; Conjugate gradient methods; Microstructure; Inhomogeneous materials; Stochastic processes; Computer simulation; Ergodic theory.

