



**HAL**  
open science

# Développement de méthodes d'identification des propriétés thermo-physiques de matériaux semi-transparents

Yang Liu

► **To cite this version:**

Yang Liu. Développement de méthodes d'identification des propriétés thermo-physiques de matériaux semi-transparents. Autre. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, 2019. Français. NNT : 2019ESMA0019 . tel-02860060

**HAL Id: tel-02860060**

**<https://theses.hal.science/tel-02860060v1>**

Submitted on 8 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

Pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE  
MECANIQUE ET D'AEROTECHNIQUE**

(Diplôme National - Arrêté du 26 Mai 2016)

**École doctorale :**

**Sciences et ingénierie des matériaux, mécanique, énergétique**

**Secteur de Recherche : Énergie, Thermique, Combustion**

Présentée par

**Yang LIU**

\*\*\*\*\*

**Développement de méthodes d'identification des propriétés  
thermo-physiques des matériaux semi-transparentes**

\*\*\*\*\*

**Directeur de thèse : Didier SAURY**

**Co-encadrant : Yann BILLAUD**

\*\*\*\*\*

Soutenue le 11 décembre 2019

devant la Commission d'Examen

\*\*\*\*\*

## JURY

Mme Agnès DELMAS	Maître de Conférences, INSA de Lyon	
M. Manuel GIRAULT	Chargé de recherche, CNRS-PPRIME	
M. Philippe LE MASSON	Professeur, Univ. Bretagne Sud	Rapporteur
M. Christophe LE NILIOT	Professeur, Univ. Aix-Marseille	Rapporteur
M. Denis LEMONNIER	Directeur de recherche, CNRS-PPRIME	
M. Benoit ROUSSEAU	Directeur de recherche, CNRS-LTEN Nantes	
M. Yann BILLAUD	Maître de Conférences, IUT GTE Univ. Poitiers	
M. Didier SAURY	Professeur, ISAE-ENSMA	

---

# Remerciements

Je commencerai ce mémoire par adresser un grand merci à toutes les personnes sans qui ce travail de thèse n'aurait pas pu aboutir. Je remercie tout d'abord MM Yves Gervais et Didier Saury de m'avoir accueilli au sein de l'équipe de COST (Convection, Optimisation, Systèmes Thermiques) de l'Institut Prime.

Un grand merci également à MM Didier Saury et Yann Billaud, qui ont été très savants et toujours très responsables et sympathiques pendant ces trois années. Votre guide et votre encadrement pour ce travail m'ont fourni une grande passion et courage pour avancer et résoudre des problèmes dans les moments difficiles. Je remercie grandement Denis Lemonnier pour les précieux conseils qu'il m'a prodigués concernant le rayonnement. Je veux aussi donner mes grands remerciements à Manuel Girault pour ses conseils, soutiens et patience indispensables sur la réduction du modèle par la méthode modale d'identification.

J'adresse de chaleureux remerciements aux membres du jury, Mme Agnes Delmas et MM Christophe Le Niliot, Philippe Le Masson, Benoit Rousseau, Manuel Girault, Denis Lemonnier, Yann Billaud et Didier Saury, qui ont pris le temps de lire ce mémoire ainsi que de venir évaluer la soutenance de cette thèse. Vos remarques et votre expertise m'ont apporté un éclairage extérieur très précieux sur ces travaux ainsi que des idées intéressantes sur de futures perspectives pour ce travail.

Je veux également remercier grandement Yann, Christophe, Cyril, André, Catherine pour leurs connaissances techniques et leur expérience dans la réalisation de l'étude expérimentale. Merci à Catherine Lavallade pour son soutien administratif sans pareil.

Je tiens à remercier en particulier les chercheurs/enseignants thermiques de COST pour leur soutien professionnel, sans ordre de préférence et de façon sûrement non-exhaustive, j'adresse ces mots à Vincent Ayel, Adel Benselama, Yves Bertin, Yann Billaud, Dominique Couton, Eva Dorignac, Matthieu Fenot, Manuel Girault, Gildas Lalizel, Denis Lemonnier, Florian Moreau, Frédéric Plourde, Didier Saury, Etienne Videcoq.

---

Je tiens à remercier chaleureusement toutes celles et ceux qui m'ont accompagné et aidé dans ces années. Sans ordre de préférence et de façon sûrement non-exhaustive, j'adresse ces mots à Alexandre, Amal, Bach, Bo, Dimitri, Elissa, Romain, Mickael, Clément, Fang, Filippo, Flavio, Ge, Hang, Louis, Nicolas, Paul, Ruiying, Shuiran, Stella, Soizic, Tandi, Thibault, Tung, Wei, Wen, Xiaodong, Xiaoyu, Xiaowen, Yanxuan, Ying, Yifei, Yu, Yujun, Yuyao, Ze, etc...

Je donne aussi mes grand remerciements à Civil Aviation University of China (CAUC) et China Scholarship Council (CSC) pour leur soutien financier. Merci également à mes collègues à CAUC pour leur soutien administratif.

Enfin et surtout, j'adresse toute ma gratitude envers mes parents et toute ma famille sur qui j'ai toujours pu compter et qui ont toujours apporté leur soutien dans ma vie.

# Table des matières

Table des matières	v
Nomenclature	vii
Introduction générale	1
<b>1 Modélisations directes du problème étudié</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Modèle direct 1D instationnaire conducto-radiatif . . . . .	13
1.3 Résolution du modèle direct 1D . . . . .	18
1.4 Validation du modèle direct 1D . . . . .	30
1.5 Modèle direct 2D axisymétrique . . . . .	37
1.6 Résolution du modèle direct 2D axisymétrique . . . . .	40
1.7 Validation du modèle direct 2D axisymétrique . . . . .	55
1.8 Conclusion . . . . .	61
<b>2 Dispositif expérimental et modèle d'identification basé sur PSO</b>	<b>63</b>
2.1 Introduction . . . . .	64
2.2 Algorithme PSO . . . . .	77
2.3 Test de performance de l'algorithme PSO . . . . .	82
2.4 Test de robustesse de l'algorithme PSO . . . . .	84
2.5 Application . . . . .	85
2.6 Conclusion . . . . .	88
<b>3 Modèle réduit d'identification basé sur un réseau de neurones</b>	<b>89</b>
3.1 Introduction . . . . .	90
3.2 Histoire du réseau de neurones artificiels . . . . .	91
3.3 Étude de sensibilité . . . . .	94
3.4 Construction du modèle réduit d'identification basé sur un réseau de neurones . . . . .	98
3.5 Test de robustesse . . . . .	106
3.6 Étude statistique . . . . .	110
3.7 Application . . . . .	111
3.8 Conclusion . . . . .	115

<b>4</b>	<b>Modèle réduit basé sur la méthode d'identification modale (MIM)</b>	<b>117</b>
4.1	Introduction . . . . .	118
4.2	Méthode d'identification modale (MIM) . . . . .	118
4.3	Modèle réduit non-linéaire . . . . .	120
4.4	Modèle réduit linéaire paramétrique . . . . .	128
4.5	Conclusion . . . . .	140
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>154</b>
	<b>Liste des figures</b>	<b>155</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>163</b>
<b>A</b>	<b>Algorithme de rétropropagation du gradient</b>	<b>I</b>
A.1	Introduction . . . . .	I
A.2	Principe de fonctionnement . . . . .	II
A.3	Avantages et inconvénients . . . . .	IX

# Nomenclature

## *Symboles latins*

$A$	paramètre réel dans la fonction objectif Rastrigin	(-)
$b_i^{(l)}$	valeur du biais lié au $i^{\text{ème}}$ neurone situé sur la $l^{\text{ème}}$ couche	(-)
$Bi_r$	nombre de Biot suivant $r$	(-)
$Bi_z$	nombre de Biot suivant $z$	(-)
$c_0$	vitesse de la lumière dans le vide	$m \cdot s^{-1}$
$c_1$	facteur de connaissance cognitive	(-)
$c_2$	facteur de connaissance sociale	(-)
$C_p$	capacité thermique massique	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
$d$	raison de suite géométrique	(-)
$dp$	dimension de l'espace où les particules se situent	(-)
$d_k(I)$	sortie attendue du vecteur d'entrée $\vec{x}(I)$ (ANN)	(-)
$D(x, \Omega)$	terme de renforcement par le rayonnement suivant $\Omega$	$W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$
$e$	épaisseur du mur (1D)	$m$
$E$	erreur totale quadratique moyenne de tous les ensembles de données d'entraînement	(-)
$E(I)$	erreur totale correspondant au $I^{\text{ème}}$ ensemble de donnée d'entraînement	(-)
$f_c$	fréquence du caméra infrarouge	$Hz$
$G(x, t)$	rayonnement incident $\Omega$	$W \cdot m^{-2}$
$h$	coefficient de convection	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
$h_e$	rayon-hauteur rapport	(-)
$h_P$	constante de Planck	$J \cdot s$
$h_i^{(l)}$	sortie de la fonction d'activation	(-)
$H$	hauteur du cylindre	$m$
$I$	intensité du bruit (ANN)	$K$
$I_{PSO}$	intensité du bruit (PSO)	%
$J(\beta)$	fonction objectif	(-)
$k_B$	constante de Boltzmann	$J \cdot K^{-1}$
$L(x, \Omega)$	luminance au point $x$ dans la direction $\Omega$	$W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$
$L^0(T)$	luminance de corps noir à la température locale	$W \cdot m^{-2}$

$L_{\eta}^0(T)$	luminance spectrale (en fonction du nombre d'onde) de corps noir à la température locale	$W \cdot m^{-2}$
$L_{\nu}$	luminance spectrale (en fonction de la fréquence)	$W \cdot m^{-2}$
$L_{\eta}$	luminance spectrale (en fonction du nombre d'onde)	$W \cdot m^{-2}$
$L_{\eta}^s(T_s)$	luminance spectrale du source (en fonction du nombre d'onde)	$W \cdot m^{-2}$
$m$	ordre du modèle réduit	(-)
$m_{PSO}$	nombre total des particules	(-)
$n$	indice de réfraction	(-)
$\vec{n}$	vecteur normal	(-)
$net_i^{(l)}$	entrée de la fonction d'activation	(-)
$N_{cr}$	nombre de Planck	(-)
$N_m$	nombre des mailles suivant l'axe $x$ (1D)	(-)
$N_c$	nombre d'itérations temporelle critique	(-)
$N_{cp}$	nombre des couples $(\lambda, \kappa)$ utilisés dans la construction des modèles réduits linéaires (MIM)	(-)
$N_{\beta}$	nombre des vecteurs des quantités (paramétrant le modèle réduit) utilisés dans la construction des modèles réduits (MIM)	(-)
$N_{PSO}$	nombre des itérations dans l'algorithme PSO	(-)
$N_t$	nombre de pas de temps total	(-)
$N_{test}$	nombre total des ensembles de données de test	(-)
$N_{train}$	nombre total des ensembles de données d'entraînement	(-)
$N_x$	nombre des nœuds suivant l'axe $x$ (1D)	(-)
$N_r$	nombre des nœuds suivant l'axe $r$ (2D-axisymétrique)	(-)
$N_z$	nombre des nœuds suivant l'axe $z$ (2D-axisymétrique)	(-)
$p_{ik}(t)$	la meilleure position locale de la particule $i$ dans la $k^{ème}$ dimension à l'instant $t$	(-)
$p_{gk}(t)$	la meilleure position globale de toutes particules dans la $k^{ème}$ dimension à l'instant $t$	(-)
$q_0''$	densité de chaleur imposée à la face avant (2D-axisymétrique)	$J \cdot m^{-2}$
$q_{0c}''$	densité de chaleur créneau imposée à la face avant (quadripôle)	$J \cdot m^{-2}$
$q_{0d}''$	densité de chaleur Dirac imposée à la face avant (quadripôle)	$J \cdot m^{-2}$
$q''$	densité de flux	$W \cdot m^{-2}$
$q_c''$	densité de flux conductif	$W \cdot m^{-2}$
$q_r''$	densité de flux radiatif	$W \cdot m^{-2}$
$r_{laser}$	rayon de flux imposé	$m$
$r_1$	valeur aléatoire uniforme (PSO)	(-)
$r_2$	valeur aléatoire uniforme (PSO)	(-)

---

$R$	rayon du cylindre	$m$
$s_l$	nombre des neurones situés sur $l^{\text{ième}}$ couche cachée	(-)
$s_s$	nombre des neurones situés sur la couche de sortie	(-)
$S_n$	surface nord du volume contrôlé	$m^2$
$S_s$	surface sud du volume contrôlé	$m^2$
$S_e$	surface est volume contrôlé	$m^2$
$S_w$	surface ouest du volume contrôlé	$m^2$
$S_\beta$	sensibilité des paramètres à identifier	$K$
$t_c$	temps de calcul	$s$
$t_p$	durée de flux imposé	$s$
$t_{ref}$	temps de référence	$s$
$t_s$	temps de simulation	$s$
$t_{0.5}$	temps de demi-montrée	$s$
$T(x, t)$	température au point $x$ à l'instant $t$	$K$
$T_{ini}$	température initiale	$K$
$T_{exp}$	température obtenue par l'expérience	$K$
$T_{num}$	température obtenue par la simulation numérique	$K$
$T_\infty$	température d'environnement	$K$
$T_p$	température à la paroi du mur (1D)	$K$
$T_r$	réflectivité à l'interface entre l'échantillon et l'air	(-)
$R_e$	transmittivité à l'interface entre l'échantillon et l'air	(-)
$x_{ik}(t)$	position de la particule $i$ dans la $k^{\text{ème}}$ dimension à l'instant $t$	(-)
$(x_k)_{min}$	position inférieure pour toutes les particules	(-)
$(x_k)_{max}$	position supérieure pour toutes les particules	(-)
$X_i(t)$	position de la particule $i$ à l'instant $t$	(-)
$y_k(I)$	sortie du $k^{\text{ième}}$ neurone situé sur la couche de sortie du vecteur d'entrée $\vec{x}(I)$ (ANN)	(-)
$Y(t)$	vecteurs de sortie (MIM)	(-)
$Y^{data}(t)$	vecteurs de sortie à la phase de génération (MIM)	(-)
$v_{ik}(t)$	vitesse de la particule $i$ dans la $k^{\text{ème}}$ dimension à l'instant $t$	(-)
$(v_k)_{min}$	vitesse inférieure pour toutes les particules	(-)
$(v_k)_{max}$	vitesse supérieure pour toutes les particules	(-)
$V_i(t)$	vitesse de la particule $i$ à l'instant $t$	(-)
$W_{ij}^{(l)}$	poids de connexion reliant le $j^{\text{ème}}$ neurone dans la $(l-1)^{\text{ième}}$ couche du réseau de neurones de type retropropagation du gradient et le $i^{\text{ème}}$ neurone dans la $l^{\text{ième}}$ couche	(-)

*Symboles grecs*

$\alpha$	diffusivité thermique (1D, 2D-axisymétrique)	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\alpha$	taux d'apprentissage pendant l'entraînement (ANN)	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\beta$	paramètres à identifier	unité des $\beta$
$\beta^*$	valeurs réelles de $\beta$	unité des $\beta$
$\hat{\beta}$	valeurs identifiées de $\beta$	unité des $\beta$
$\beta^{data}$	paramètres à identifier à la phase de génération (MIM)	unité des $\beta$
$\gamma_\beta$	la zone de valeurs la plus fréquente des $\beta$	unité des $\beta$
$\epsilon_\beta$	erreur d'estimation moyenne des $\beta$	unité des $\beta$
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$
$\sigma_Y(m)$	écart quadratique moyen	$K$
$\sigma_\beta$	écart type des $\beta$	unité des $\beta$
$\mu_\beta$	valeur d'espérance (moyenne) des $\beta$	unité des $\beta$
$\Delta$	écart sur une grandeur	(-)
$\Delta t$	pas temporel	$s$
$\Delta t_i$	pas temporel initial	$s$
$\Delta t_f$	pas temporel final	$s$
$\Delta t_1$	pas temporel d'échantillonnage de stratégie 1	$s$
$\Delta t_2$	pas temporel d'échantillonnage de stratégie 2	$s$
$\Delta t_{adi}$	pas temporel adimensionné	(-)
$\Delta x$	pas spatial suivant l'axe $x$ (1D)	$m$
$\Delta r$	pas spatial suivant l'axe $r$ (2D-axisymétrique)	$m$
$\Delta z$	pas spatial suivant l'axe $z$ (2D-axisymétrique)	$m$
$\Delta V$	volume contrôlé (2D-axisymétrique)	$m^{-3}$
$\lambda$	conductivité thermique	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
$\lambda_c$	longueur d'onde centré du caméra infrarouge	$\mu m$
$\kappa$	coefficient d'absorption moyen/effectif	$m^{-1}$
$\kappa_d$	coefficient de diffusion moyen/effectif	$m^{-1}$
$\kappa_e$	coefficient d'extinction (atténuation) moyen/effectif	$m^{-1}$
$\kappa_\eta$	coefficient d'absorption spectral	$m^{-1}$
$\eta$	nombre d'onde	$cm^{-1}$
$\nu$	fréquence du rayonnement	$s^{-1}$ ou $Hz$
$\rho$	masse volumique	$kg \cdot m^{-3}$
$\rho_\eta$	réflectivité spectrale	(-)

---

$\Theta$	vecteurs des paramètres fixés du modèle réduit	(-)
$\theta$	angle d'azimut dans les coordonnées cylindriques	◦
$\theta_i$	angle entre le rayonnement incident et la normale	◦
$\psi$	colatitude dans les coordonnées sphériques	◦
$\phi$	longitude dans les coordonnées sphériques	◦
$\Phi$	fonction de phase	(-)
$\phi_k^{(T/G)}$	fonctions propres spatiales	(-)
$\varphi(t)$	vecteurs des chargements thermiques	(-)
$\varphi^{data}(t)$	vecteurs des chargements thermiques à la phase de génération	(-)
$\tau$	épaisseur optique	(-)
$\tau_\eta$	transmittivité spectrale	(-)
$\omega$	poids d'inertie (PSO)	(-)
$\omega_{min}$	poids d'inertie minimal (PSO)	(-)
$\omega_{max}$	poids d'inertie maximal (PSO)	(-)
$\Omega$	direction de propagation du rayonnement	(-)
$\pi$	constante d'Archimède	(-)

### *Indices*

n	nord/north (2D-axisymétrique)
s	sud/south (2D-axisymétrique)
w	ouest/west (2D-axisymétrique)
e	est/east (2D-axisymétrique)
c	conductif (densité de flux)
r	radiatif (densité de flux)
T	conduction (MIM)
G	rayonnement (MIM)
x	axe $x$ (1D)
r	axe $r$ (2D-axisymétrique)
z	axe $z$ (2D-axisymétrique)
P	nœud au central du volume contrôlé étudié
N	nœud au central du volume contrôlé nord
S	nœud au central du volume contrôlé sud
W	nœud au central du volume contrôlé ouest
E	nœud au central du volume contrôlé est
train	phase d'entraînement (ANN)
test	phase de test (ANN)

### *Exposants*



---

n instant  
' grandeur physique adimensionné  
T conduction (MIM)  
G rayonnement (MIM)

*Sigles et abréviations*

ANN Artificial Neural Network (réseau de neurones artificiels)  
CNN Convolutional Neural Network (réseau de neurones convolutif)  
cv volume contrôlé  
EDP Equation aux Dérivées Partielles  
ETR Equation de Transfert Radiatif  
MD Modèle Direct  
MDF Méthode des Différences Finies  
MIM Méthode d'Identification Modale  
MR Modèle Réduit  
MVF Méthode des Volumes Finies  
PMMA Poly Methyl Methacrylate (polyméthacrylate de méthyle)  
PSO Particle Swarm Optimization (optimisation par essaims particulaires)



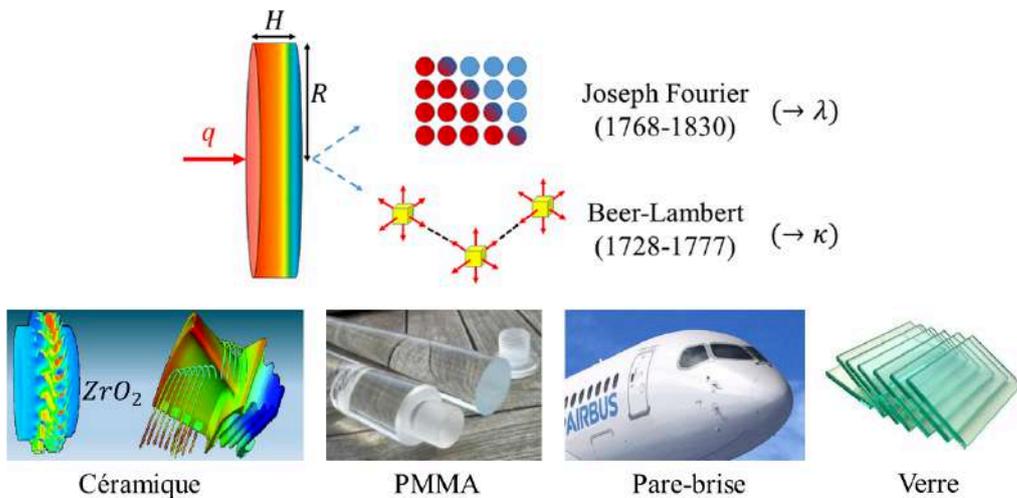
# Introduction générale

Le but de cette thèse consiste à identifier simultanément les propriétés thermophysiques relatives au transport et à la diffusion de l'énergie thermique au sein de milieux semi-transparents solides. Dans ce contexte, la présente introduction a pour objectif de définir ce qu'est un milieu semi-transparent, de présenter les mécanismes relatifs aux transferts de chaleur qui œuvrent au sein de ces milieux et enfin de discuter des différentes méthodes d'identification des propriétés qui permettent de quantifier ces transferts.

Un milieu semi-transparent, généralement abrégé par l'acronyme MST est susceptible, en plus de potentiellement réfléchir une partie du rayonnement incident à sa surface, d'absorber, de diffuser ou de transmettre une partie du rayonnement qui pénètre dans le milieu, ainsi que d'émettre du rayonnement en fonction de la température locale. Selon la pénétration des photons au sein du milieu avant d'être absorbés ou diffusés, les milieux peuvent se caractériser en trois catégories, les milieux opaques, les milieux transparents et les milieux semi-transparents. Si la pénétration est nulle (ou négligeable) devant les dimensions du milieu étudié, le milieu est dit opaque et le mode de transfert de chaleur dominant est la conduction. Inversement, dans le cas où les photons peuvent traverser le milieu sans être absorbés, le milieu est considéré comme transparent. Entre ces deux cas particuliers se situe la problématique des milieux semi-transparents. De plus, la distance à laquelle se produit la majeure partie de l'interaction onde-matière (i.e. absorption, diffusion) permet de qualifier le milieu d'optiquement épais en cas d'absorption/diffusion sur de faibles épaisseurs par rapport à celle de l'échantillon ou d'optiquement mince en cas de plus faibles interactions sur le chemin optique. Une étude de la propagation du rayonnement à l'intérieur de la matière, inutile pour les matériaux opaques ou transparents, est donc indispensable dans le cas d'un MST.

Les milieux semi-transparents solides sont donc caractérisés par leur mécanisme de transfert de chaleur interne couplé. D'une part, la chaleur est transférée par conduction, dont le principe repose sur la transmission de proche en proche de la vibration des atomes ou molécules qui constituent le réseau de la matière solide. Dans ce cas, le paramètre caractéristique lié à ce phénomène est la conductivité thermique  $\lambda$  qui s'exprime en  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ . Les milieux caractérisés par une conductivité thermique

faible sont considérés comme des milieux thermiquement isolants, tandis que les milieux caractérisés par une conductivité thermique élevée sont considérés comme des milieux conducteurs. Il est à noter que cette grandeur macroscopique dépend fortement de l'homogénéité du milieu, de la température et d'autres facteurs (Yang and Tao [2006]). D'autre part, la chaleur est également transférée par rayonnement dont le principe repose sur la propagation d'ondes électromagnétiques. Cette fois-ci, le paramètre caractéristique est le coefficient d'extinction  $\kappa_e$  qui s'exprime en  $m^{-1}$ . En effet, le rayonnement interagit avec le milieu qu'il traverse, qui plus est en fonction de la longueur d'onde du rayonnement. En plus de la réflexion qui peut survenir à l'interface, le rayonnement incident peut être absorbé et diffusé (i.e. dévié dans une autre direction). Le coefficient d'extinction est donc défini comme la somme du coefficient d'absorption et du coefficient de diffusion (Lemonnier [2015-2016]). Dans le contexte de cette thèse, le milieu semi-transparent étudié est considéré comme absorbant, émettant et non diffusant. Ainsi, le coefficient d'extinction se réduit seul au coefficient d'absorption. Compte tenu de la nature ondulatoire du rayonnement, le coefficient d'absorption est une fonction de la longueur d'onde. Une distribution spectrale est donc souvent utilisée pour décrire l'absorption du rayonnement par les milieux semi-transparentes. Pour des raisons de simplicité, cette caractérisation spectrale du coefficient d'absorption n'est pas prise en compte dans le présent travail. Par conséquent, un coefficient d'absorption moyen, qualifié également d'effectif,  $\kappa$ , est utilisé pour représenter le comportement spectral du coefficient d'absorption. Les propriétés thermo-physiques à identifier, relatives au transfert de chaleur au sein des milieux semi-transparentes, sont donc la conductivité thermique  $\lambda$  et le coefficient d'absorption effectif  $\kappa$ . Les matériaux semi-transparentes sont largement utilisés dans tous les secteurs de l'industrie ainsi que celui des transports (cf. Fig. 1). Ainsi la céramique est souvent utilisée comme revêtement isolant thermique autour de certaines pièces métalliques dans les moteurs d'avions (aubes par exemple, Wang et al. [2000], Wang et al. [2002]), le PMMA ou le verre sont quant à eux utilisés comme pare-brise et/ou fenêtre.



**Fig. 1.** Mécanisme de transfert de chaleur au sein de matériaux semi-transparent et ses applications dans les secteurs de l'industrie et des transports

---

L'étude de la propagation du rayonnement dans un MST est un problème relativement complexe, que ce soit d'un point de vue physique ou mathématique. Les techniques expérimentales utilisées à l'heure actuelle pour déterminer les propriétés de tels milieux sont difficiles à mettre en oeuvre et les techniques d'inversion encore difficiles à appliquer car la résolution numérique des équations reste accessible, i.e. dans des temps raisonnables, pour des configurations géométriques particulières et avec des hypothèses simplificatrices difficiles à reproduire expérimentalement. Ce travail de développement d'outils de caractérisation de propriétés de matériaux semi-transparents repose sur la méthode Flash proposée par J. Parker en 1961 (Parker et al. [1961]). Initialement, la méthode flash permet de mesurer la diffusivité thermique d'un matériau opaque, homogène et isotrope. Son principe est de mesurer l'évolution temporelle de la température en face arrière d'un échantillon isolé dont la face avant est soumise à une excitation thermique de type impulsionnel. L'échantillon étant isolé de l'environnement, et selon le principe de conservation de l'énergie, la température de la face arrière converge vers une valeur limite. La diffusivité thermique de l'échantillon peut être déterminée à partir de l'épaisseur de l'échantillon et du temps de demi-montée (i.e. instant où la température de la face arrière atteint la moitié de la température limite, Milosoevic [2008]). Une fois la diffusivité thermique  $\alpha$  obtenue, la conductivité thermique  $\lambda$  peut être calculée facilement en connaissant la capacité thermique volumique ( $\rho \cdot C_p$ ). En plus de la méthode flash, il existe également de nombreuses autres méthodes pour estimer la conductivité thermique telles que la méthode de la plaque chaude gardée (NF X 10-021) utilisée en régime permanent, les méthodes utilisées en régime transitoire comme la méthode de hot disk (Gustafsson [1991]), la méthode du fil chaud (Nagazaka and Nagashima [1981]), la méthode des sondes thermique (ou plan chaud, Zhang and Degiovanni [1993]), la méthode de ruban chaud (Hammerschmidt [2003]), etc. Les conseils concernant le choix de ces méthodes pour estimer la conductivité thermique  $\lambda$  en fonction de la gamme de  $\lambda$  sont proposés par Yves JANNOT (Jannot [2011]). Cependant, pour des matériaux semi-transparents, la relation température/diffusion thermique n'est plus vraie à cause des effets radiatifs. La conductivité thermique d'un milieu semi-transparent peut être considérée en première approximation comme la contribution couplée des transferts dûs à la conduction, et aux effets radiatifs. Cela rend la détermination expérimentale de la conductivité thermique d'un milieu semi-transparent plus difficile.

Le présent travail présente et compare plusieurs stratégies permettant l'identification simultanée des propriétés de transport de chaleur par conduction et rayonnement au sein de matériaux semi-transparents en combinant la méthode flash et la simulation numérique directe du problème conducto-radiatif couplé. Quelle que soit la stratégie, le principe consiste à ajuster les valeurs des paramètres à identifier de sorte à compenser les différences entre la simulation numérique directe et les données expérimentales (Ruffio [2004]). Par rapport aux mesures expérimentales mentionnées précédemment, cette

stratégie permet de choisir librement le type et le nombre de paramètres à identifier. Les paramètres à identifier sont souvent une partie des propriétés thermo-physiques mais peuvent également concerner des paramètres relatifs à l'excitation (problème inverse de type conditions aux limites) ou autres. De plus, hormis les cas où les paramètres sont fortement corrélés entre eux ou bien les cas pour lesquels la température est faiblement sensible aux paramètres, l'identification simultanée de plusieurs paramètres est possible.

Dans un premier temps, il s'agit donc de résoudre ici un problème conducto-radiatif couplé. Pour la résolution des équations couplées, une méthode purement analytique n'existe pas à cause de la complexité du problème étudié. Cependant, une méthode semi-analytique est peut-être disponible, comme la méthode quadripôle thermique (Maillet et al. [2000]). Outre les méthodes semi-analytiques, les méthodes numériques aussi jouent un rôle important. Dans un premier temps, les méthodes numériques basées sur les formulations mathématiques, comme la méthode zonale (Tan and Lallemand [1989]), la méthode des multi-flux (Heinemann et al. [1996]), la méthode des différences finies (André and Degiovanni [1995]), etc., ont été proposées. Ensuite, avec le développement des calculs numériques, des méthodes numériques comme la méthode des ordonnées discrètes (Liu and Tan [2001]) et la méthode de Monte Carlo ont été utilisées (Le Foll et al. [2013]). Parmi ces méthodes, la méthode zonale, la méthode des ordonnées discrètes et la méthode de Monte Carlo sont basées sur le principe du "lancer du rayon" (ray-tracing) et conviennent à la résolution de problèmes des configurations complexes. Cependant, à cause du nombre important de rayons requis, le temps de calcul est très élevé et ces méthodes ne sont donc pas adaptées à la résolution rapide de problèmes couplés (Tan et al. [2009]). Pour résoudre ce problème de temps de calcul, Ghannam [2012] a utilisé la technique de calcul parallèle (GPU) pour la résolution rapide des facteurs de transferts radiatifs en milieu semi-transparent 3D non gris.

Dans le cas présent, le système étudié correspond à un modèle direct conducto-radiatif 2D axisymétrique soumis à un flux imposé localisé en espace et en temps et sujet à un refroidissement convectif (cf. Chapitre 1). La sortie du modèle utilisé pour résoudre le problème inverse correspond à l'évolution de la température à la face avant, i.e. la face où le flux est imposé. Cette évolution de la température est enregistrée par une caméra infrarouge dont la fréquence d'acquisition est réglée à 50  $Hz$ . On notera que d'un point de vue expérimental un grand soin est apporté pour conserver le plus possible le caractère axisymétrique, et ce afin de simplifier la complexité mathématique et numérique du modèle et ainsi réduire le temps de résolution du problème direct. Ce temps de calcul est crucial car il conditionne la vitesse du processus d'identification. Le système de coordonnées axisymétriques est compatible avec des échantillons de formes cylindriques, l'enjeu réside dans la façon d'exciter l'échantillon. Pour résoudre des équations conducto-radiatives couplées, l'approximation P1 (Modest [2013]) est utilisée pour simplifier l'équation de transfert radiatif en considérant son adaptation

---

aux milieux optiquement épais correspondant au cas étudié ici. Par la suite, les équations couplées continues sont discrétisées par la méthode des volumes finis (Li [2005]) puis adimensionnées. Finalement, les équations couplées discrètes adimensionnées sont résolues par l'algorithme de Thomas (Datta [2010]) : une procédure itérative par balayages successifs, efficace et classique pour ce type de problèmes couplés, permettant ainsi d'atteindre un bon équilibre entre la précision et le temps de calcul.

Au delà de la construction du modèle direct, l'objectif de cette thèse est de chercher et d'explorer de nouvelles stratégies pour améliorer l'identification des propriétés thermo-physiques de milieux semi-transparents. Nous rappelons qu'un aspect important des méthodes inverses évoquées ci-dessus est la procédure qui consiste à ajuster les paramètres, ce qui peut être réalisé par des méthodes déterministes parmi lesquelles les méthodes de type descente de gradient (dérivée première) et de type Newton (dérivée seconde) sont les plus utilisées. Les méthodes de type Newton adaptées aux problèmes thermiques incluent la méthode de Gauss-Newton, la méthode de Levenberg Marquardt, la méthode du gradient conjugué, etc. Par exemple, Li [1999] a utilisé la méthode du gradient conjugué pour estimer simultanément l'épaisseur optique, l'albédo de diffusion, le nombre de Planck et la phase de diffusion pour un problème inverse conducto-radiatif 1D en régime stationnaire. Park and Yoon [2000] ont utilisé la méthode du gradient conjugué pour estimer simultanément le coefficient d'absorption et le coefficient de diffusion pour un problème inverse conducto-radiatif 3D en régime stationnaire. Daouas et al. [2008] ont réalisé l'estimation simultanée la conductivité thermique, la capacité thermique, le coefficient d'absorption et le coefficient de transfert de chaleur d'une cellule cylindrique à fil chaud par la méthode de Levenberg Marquardt. Dans un premier temps, nous avons remplacé ces méthodes classiquement utilisées par une méthode de type évolutionnaire (cf. Chapitre 2), l'algorithme d'optimisation par essais particuliers (ou Particle Swarm Optimization, PSO). L'algorithme PSO, proposé en 1995 (Eberhart [1995]), repose sur l'idée d'une recherche de région optimale dans un espace complexe au moyen de l'interaction et la collaboration entre les particules représentant chacune une solution potentielle dans l'espace des solutions. Par rapport aux méthodes de type descente de gradient traditionnelles pour lesquelles la performance dépend largement de la position initiale (convergence très rapide pour une position initiale bien choisie et convergence très lente ou blocage dans les minimums locaux pour une position initiale mal choisie), l'algorithme PSO présente des avantages comme une vitesse de convergence plus rapide mais surtout une capacité de recherche globale l'empêchant de tomber dans un minimum local (Divband [2010]). Compte tenu de ces avantages, l'algorithme PSO ainsi que sa version optimisée ont été appliqués pour résoudre des problèmes inverses, par exemple, Chopade et al. [2011] ont utilisé l'algorithme PSO pour l'estimation du coefficient d'extinction et de l'albédo de diffusion dans un problème de transfert de chaleur conducto-radiatif transitoire 1D. Zhang et al. [2015] ont développé un algorithme amélioré d'optimisation quantique par essais particu-

lares (IQPSO) afin d'augmenter l'efficacité et la précision de l'algorithme QPSO. Pour montrer la performance de l'algorithme IQPSO proposé, le nombre de Planck du milieu de changement de phase semi-transparent unidimensionnel est estimé en mesurant les températures transitoires. Wei et al. [2018] ont proposé un algorithme hybride d'optimisation par essais particuliers stochastique (SPSO) et de programmation quadratique séquentielle (SQP) pour estimer simultanément le coefficient d'absorption dépendant de l'espace et le coefficient de diffusion d'un milieu semi-transparent 1D. Qi et al. [2015] ont développé un algorithme d'optimisation par essais particuliers de type simplex Bare-Bones basé sur le clustering K-means (KSM-BBPSO) et un algorithme optimisé hybride simplex d'optimisation par essais particuliers basé sur le clustering K-means (KSM-PSO). Ensuite, le nombre de Planck, l'albédo de diffusion et l'émissivité d'un milieu semi-transparent 1D homogène sont estimés simultanément pour la performance de ces algorithmes développés. De plus, Udayraj et al. [2015] ont comparé l'algorithme de colonies de fourmis (ACO), l'algorithme "coucous" (CS) et l'algorithme PSO pour les problèmes inverses de l'estimation des flux de chaleur. Parmi les autres méthodes d'optimisation, on citera Das et al. [2008] qui ont utilisé la méthode de Lattice Boltzmann et la méthode des volumes finis couplées avec l'algorithme génétique pour l'estimation de plusieurs paramètres dans un problème de transfert de chaleur conducto-radiatif transitoire 1D. Chopade et al. [2013] ont appliqué l'algorithme à évolution différentielle (Rahnamayan et al. [2008]) pour l'analyse inverse d'un problème de transfert de chaleur conducto-radiatif transitoire 1D. La plupart des problèmes inverses conducto-radiatifs étudiés ci-dessus sont unidimensionnels et il existe peu d'étude sur la configuration 2D-axisymétrique. Les résultats finaux montrent que le couplage entre la simulation directe et l'algorithme PSO présente une grande robustesse et une bonne efficacité pour la résolution du présent problème.

La stratégie qui consiste à ajuster les paramètres recherchés à l'aide d'un algorithme évolutionnaire de type PSO pour minimiser l'écart entre les résultats issus de simulations et les données expérimentales a porté ses fruits mais occasionne des temps de calculs conséquents, pas toujours compatibles avec une utilisation dans un concept de contrôle de fabrication, par exemple. C'est pourquoi, il a été envisagé une nouvelle stratégie permettant une identification au moins aussi précise que les méthodes développées jusqu'à présent, pour des temps de calcul moindres. La nouvelle stratégie proposée ici s'appuie sur un modèle réduit d'identification basé sur un réseau de neurones artificiels multi-couches. Un réseau de neurones peut être considéré comme une boîte noire, qui, pour un jeu de données d'entrée, renvoie un jeu de données de sortie correspondant, en fonction de la relation apprise au préalable entre les données d'entrée et de sortie. En raison de leur forte capacité d'auto-apprentissage, d'imitation et de prédiction, les réseaux de neurones artificiels ont le potentiel de rivaliser avec les méthodes inverses traditionnelles et devenir une méthode alternative de résolution de tels problèmes. Concernant les problèmes inverses en thermique, on peut observer une augmentation du nombre de travaux. Parmi ces problèmes, la reconstruction des

---

conditions aux limites a été étudiée. Deng et al. [2005] ont développé une méthode d'estimation du flux de chaleur transmis à une pièce basée sur des mesures de température interne et un réseau de neurones multicouches. Deng and Hwang [2006] ont utilisé un réseau de neurones analogique Hopfield en temps continu pour calculer la distribution de la température de manière directe dans le but d'identifier les conditions aux limites inconnues. Ponce [2016] a développé un algorithme de réseau de neurones amélioré et l'a appliqué à un problème radiatif inverse pour estimer simultanément la fonction de distribution granulométrique et la constante optique de milieux particuliers. De façon plus générale, les problèmes inverses en thermique incluent la conception d'expérience (Bélanger and Gosselin [2009]) ainsi que l'identification des propriétés thermophysiques des matériaux, qui font également l'objet d'études. Grieu et al. [2011] ont proposé un outil basé sur l'intelligence artificielle pour estimer la diffusivité thermique de matériaux de construction à partir des réponses à une excitation aléatoire. Maneesh and Pradeep [2014] ont utilisé un réseau de neurones artificiels pour estimer simultanément les conductivités thermiques d'un composite constitué d'une feuille d'aluminium et d'une couche adhésive. Yilmaz et al. [2014] ont présenté un modèle de réseau de neurones artificiels permettant de prédire les propriétés thermodynamiques et thermophysiques du CO<sub>2</sub>. Cependant, l'utilisation de réseaux de neurones artificiels destinés à l'identification de propriétés thermo-physiques de matériaux semi-transparents n'a pas encore été étudiée.

Dans ce contexte, un modèle d'identification basé sur un réseau de neurones artificiels multicouches (cf. Chapitre 3) entraîné par un modèle direct de résolution des transferts conducto-radiatifs 2D axisymétrique est développé pour identifier simultanément la conductivité thermique  $\lambda$  et le coefficient d'absorption effectif  $\kappa$  de milieux semi-transparents. Une distribution Gaussienne des paramètres à identifier, paramétrée selon les attendus a priori du matériau à caractériser, est utilisée pour générer des données simulées qui sont utilisées comme données d'entraînement. Cette stratégie a permis, comparativement à un entraînement avec des données générées via une distribution purement aléatoire des paramètres, d'améliorer les performances d'identification du réseau. Les réseaux de neurones utilisés à des fins d'identification souffrent des mêmes limitations que les méthodes traditionnelles, à savoir qu'ils sont capables d'identifier des paramètres tant que la sensibilité des paramètres est suffisante et que les sensibilités ne sont pas corrélées. L'identification des paramètres par un réseau de neurones préalablement entraîné est quasi instantanée et constitue une approche originale qui intègre la phase d'identification (modèle réduit d'identification). Un réseau de neurones entraîné sur une gamme suffisamment étendue est réutilisable pour un grand nombre de matériaux, ce qui peut largement réduire le temps d'identification par rapport aux méthodes inverses traditionnelles. De plus, la rapidité de calculs qu'offre cette approche a permis d'identifier les configurations, en termes de conductivité et de coefficient d'absorption (via le nombre de Planck), pour lesquelles les effets conductifs et

radiatifs sont indiscernables.

Cette méthode est appliquée sur un échantillon de PMMA à l'aide du banc d'essais développé au sein de l'équipe. Les résultats de l'identification sont comparés à des valeurs de la littérature ainsi qu'à des mesures effectuées à l'aide d'un spectromètre récemment acquis par l'équipe (cf. Chapitre 2). L'estimation du coefficient d'absorption moyen de plusieurs échantillons semi-transparents de PMMA est ainsi réalisée au moyen d'un spectromètre à transformée de Fourier (BRUKER VERTEX V70v). Les distributions spectrales de la transmissivité et de la réflectivité de l'échantillon sont tout d'abord mesurées. En se basant sur ces résultats, la distribution spectrale du coefficient d'absorption est ensuite obtenue en fonction du modèle de réflexions internes utilisé. Finalement, le coefficient d'absorption moyen est calculé en considérant la moyenne des résultats obtenus par l'approximation de Planck (adaptée aux milieux optiquement minces, Collin-Zahn [2010]) et par l'approximation de Rosseland (adaptée aux milieux optiquement épais, Collin-Zahn [2010]). Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats issus de l'estimation par réseaux de neurones.

Finalement, l'exploration d'une identification des propriétés thermo-physiques à l'aide d'un modèle d'ordre faible s'appuyant sur des considérations physiques est partiellement réalisée (cf. Chapitre 4). Ce modèle réduit permet de prédire, pour une condition aux limites de type flux imposé, l'évolution de la température au point central de la face avant, sortie qui est choisie comme observable dans les travaux d'identification présentés précédemment. D'une part, le développement d'un modèle d'ordre faible permet de réduire le temps de calcul et donc, quelle que soit la méthode d'identification (i.e. déterministe ou stochastique), d'accélérer l'identification (Park and Cho [1996], Park et al. [1999], Scott Larson and Jones [2008]). D'autre part, un modèle d'ordre faible peut être plus facile à dériver, rendant le calcul des dérivées partielles, opérations essentielles dans le cadre d'une méthode basée sur la descente de gradient, analytique et donc bien plus rapide. Dans un premier temps, un modèle d'ordre faible non-linéaire relatif à un matériau donné ( $\lambda$ ,  $\kappa$  fixés) est construit par la méthode d'identification modale (MIM, Girault et al. [2011]) et testé. Dans ce cas, les effets non-linéaires dus au rayonnement sont pris en compte pour la construction des équations du modèle d'ordre faible. Cependant, les données numériques utilisées dans la phase de construction présentant peu d'effets non-linéaires (en raison des faibles niveaux et écarts de température considérés) l'identification des paramètres du modèle réduit relatifs aux non-linéarités s'est avéré ne pas être pertinente, occasionnant une dérive des prédictions du modèle non linéaire. Ce constat nous a conduit à développer un modèle linéaire d'ordre faible paramétrique. Dans un second temps donc, la construction et les tests de validation d'un modèle linéaire d'ordre faible sont présentés. Contrairement au modèle d'ordre faible non-linéaire, le modèle linéaire est explicitement paramétré par  $\lambda$  et  $\kappa$ . Les résultats de la phase de construction et de la phase de test montrent que le modèle

---

réduit peut reproduire le comportement du modèle direct pour différents signaux de flux imposé et pour une large gamme de couples  $[\lambda, \kappa]$ . Un tel modèle peut donc être utilisé pour la résolution du problème inverse visant à l'estimation de  $\lambda$  et  $\kappa$  à partir de la connaissance de l'évolution de la température au centre de la face avant.



# Chapitre 1

## Modélisations directes du problème étudié

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>Modèle direct 1D instationnaire conducto-radiatif</b>	<b>13</b>
1.2.1	L'approximation P1	14
1.2.2	Système couplé conducto-radiatif instationnaire	17
<b>1.3</b>	<b>Résolution du modèle direct 1D</b>	<b>18</b>
1.3.1	Adimensionnement	18
1.3.2	Méthode des différences finies	19
1.3.3	Méthode des volumes finis	22
1.3.4	Méthode de quadripôle thermique	23
<b>1.4</b>	<b>Validation du modèle direct 1D</b>	<b>30</b>
1.4.1	Cas 1 : $N_{cr} = 10$ , $\tau = 1$	32
1.4.2	Cas 2 : $N_{cr} = 1$ , $\tau = 1$	33
1.4.3	Cas 3 : $N_{cr} = 0.1$ , $\tau = 1$	34
1.4.4	Cas 4 : $N_{cr} = 0.01$ , $\tau = 1$	35
<b>1.5</b>	<b>Modèle direct 2D axisymétrique</b>	<b>37</b>
1.5.1	Equations conducto-radiatives couplées	37
1.5.2	Conditions initiales	38
1.5.3	Conditions aux limites	38
1.5.4	Distribution des maillages	39
<b>1.6</b>	<b>Résolution du modèle direct 2D axisymétrique</b>	<b>40</b>
1.6.1	Méthode des volumes finis	40
1.6.2	Application au problème étudié	40
1.6.3	Résolution de la partie conductive	43
1.6.4	Résolution de la partie radiative	51
<b>1.7</b>	<b>Validation du modèle direct 2D axisymétrique</b>	<b>55</b>
1.7.1	Densité de chaleur imposée de type créneau	56
1.7.2	Densité de chaleur imposée de type Dirac	57

1.7.3 Maillage temporel variable . . . . . 58

**1.8 Conclusion . . . . . 61**

---

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, un modèle direct 1D instationnaire décrivant le transfert de chaleur au sein du milieu semi-transparent avec conditions aux limites de type température imposée est tout d'abord développé et validé. En se basant sur ce modèle direct 1D, un modèle direct de simulation prenant en compte le couplage des transferts conducto-radiatifs dans une configuration 2D axisymétrique et de conditions aux limites de type flux imposé avec refroidissement convectif, est alors présenté et validé. Ensuite, la méthode de quadripôle thermique est appliquée à 3 modèles différents dans une configuration 1D. Parmi ces 3 modèles, le 2<sup>ème</sup> modèle absorbant, émettant, non diffusant est utilisé comme une référence de validation du modèle direct conducto-radiatif 2D axisymétrique. Finalement, une amélioration du modèle direct (dans le cas où l'on impose une densité de chaleur de type Dirac) est réalisée en utilisant un maillage temporel variable pour réduire le temps de calcul.

## 1.2 Modèle direct 1D instationnaire conducto-radiatif

Nous savons que le transfert de chaleur au sein des matériaux opaques n'est réalisé que par la conduction alors que pour les matériaux semi-transparentes, deux modes de transfert de la chaleur existent en même temps : la conduction et le rayonnement. Donc il est nécessaire de prendre en compte le couplage entre ces deux modes de transfert de chaleur pour modéliser ou déterminer correctement le comportement ou les propriétés de matériaux semi-transparentes. La difficulté de la prise en compte du couplage tient au fait que l'équation de la chaleur est très fortement couplée à l'équation du transfert radiatif. De plus, il n'existe pas de solution analytique à ce problème thermique. Dans ce chapitre, nous verrons une résolution numérique des équations couplées conduction-rayonnement par la méthode P1 et par la méthode des volumes finis.

Tout d'abord, nous présenterons ici un modèle pouvant décrire le transfert de chaleur par conduction et rayonnement au sein d'un milieu semi-transparent homogène, isotrope, absorbant, émettant, non diffusant et gris. L'approximation P1 est utilisée pour simplifier l'équation de transfert radiatif. Le modèle complet est décrit sous forme adimensionnelle et fait intervenir deux paramètres : l'épaisseur optique  $\tau$  du mur et un nombre caractéristique de l'importance relative du rayonnement et de la conduction (nombre de Planck :  $N_{cr}$ ). En outre, des équations couplées sont discrétisées respectivement par la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis puis résolues par l'algorithme de Thomas (Datta [2010], Ford [2015]) selon un processus itératif.

### Hypothèses et paramètres principaux

La mise en œuvre des hypothèses ci-dessous nous permet de simplifier le problème étudié :

- L'objet étudié ici est un mur fini dont le milieu interne est fait d'un matériau semi-transparent solide, homogène, isotrope, absorbant, émettant, non diffusant

et gris (ses propriétés radiatives sont supposées constantes sur tout le spectre). La paroi avant et la paroi arrière du mur sont supposées comme noires.

- Deux températures différentes sont imposées respectivement à la paroi avant et à la paroi arrière du mur. En effet, les grandeurs physiques adimensionnés sont utilisées ici pour simplifier les équations.
- La convection entre les parois du mur et l'air ambiant est négligée.
- A l'instant initial, le mur est isotherme et en équilibre thermique avec l'environnement.
- Le transfert de chaleur au sein du mur est unidimensionnel.

Les paramètres principaux intervenants dans problème étudié ainsi que leurs unités et symboles correspondants sont rappelés dans le Tableau 1.1 ci-dessous :

Paramètre	Définition et unité
$e$	épaisseur du mur [ $m$ ]
$N_x$	nombre de nœuds suivant l'axe principal du mur
$N_m$	nombre de mailles suivant l'axe principal du mur
$N_t$	nombre de pas de temps total
$t_s$	temps de simulation [ $s$ ]
$\Delta x$	pas spatial [ $m$ ]
$\Delta t$	pas temporel [ $s$ ]
$\tau$	épaisseur optique
$N_{cr}$	nombre de Planck : $\lambda \cdot \kappa / (4n^2 \cdot \sigma \cdot T_{ini}^3)$
$T'_1$	température adimensionnée imposée en face avant du mur
$T'_2$	température adimensionnée imposée en face arrière du mur
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann [ $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ ]

TABLEAU 1.1 – Paramètres importants intervenant dans le modèle direct 1D

Ensuite, nous verrons tout d'abord la simplification de l'équation de transfert radiatif par l'approximation P1. Après, nous présenterons la discrétisation des équations conducto-radiatives par la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis. Finalement, nous parlerons de la résolution itérative de système d'équation par l'algorithme de Thomas.

### 1.2.1 L'approximation P1

Nous prenons un exemple de milieu absorbant, émettant mais non diffusant pour expliquer la mise en œuvre de la méthode P1 (Lemonnier [2015-2016]). Nous rappelons tout d'abord l'expression générale de l'équation de transfert radiatif (ETR) :

$$div(\Omega \cdot L) + \kappa_e \cdot L = \kappa \cdot L^0(T) + \kappa_d \cdot D \quad (1.1)$$

Avec

- $L(x, \Omega)$  est la luminance au point  $x$  dans la direction  $\Omega$ .
- $L^0(T)$  est la luminance de corps noir à la température locale  $T(x)$ .
- $\kappa$  et  $\kappa_d$  sont respectivement le coefficient d'absorption moyen et le coefficient de diffusion moyen du milieu,  $\kappa_e = \kappa + \kappa_d$  est le coefficient d'extinction (atténuation) moyen.
- $D$  est le terme de renforcement par diffusion du rayonnement suivant  $\Omega$ . Il intègre la contribution de toutes les autres directions, pondérées par la fonction de phase  $\Phi$  :

$$D(x, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} L(x, \Omega') \cdot \Phi(\Omega', \Omega) d\Omega' \quad (1.2)$$

Nous supposons que toutes ces grandeurs sont considérées comme des grandeurs monochromatiques. Pour un milieu non diffusant, l'équation de transfert radiatif se réduit alors à :

$$\text{div}(\Omega \cdot L) + \kappa \cdot L = \kappa \cdot L^0(T) \quad (1.3)$$

Pour résoudre cette équation, la méthode des harmoniques sphériques sera tout d'abord appliquée. L'idée consiste à décomposer la luminance sur une base de fonctions orthogonales (développement en série de Fourier généralisé) en posant :

$$L(x, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l L_l^m(x) \cdot Y_l^m(\Omega) \quad (1.4)$$

Où  $Y_l^m(\Omega)$  sont les harmoniques sphériques définies par :

$$Y_l^m(\Omega) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \cdot \left[ \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{im\phi} \cdot P_l^{|m|}(\cos\psi) \quad (1.5)$$

Nous remarquons que  $\psi$  et  $\phi$  sont les angles polaires caractérisant  $\Omega$  dans le repère local attaché au point courant et  $P_l^{|m|}$  les polynômes de Legendre associés. L'intérêt de cette décomposition est de remplacer la luminance inconnue  $L(x, \Omega)$  par les coefficients  $L_l^m(x)$  qui ne dépendent pas de la direction.

Pour la suite, il suffit de remplacer  $L$  par son développement dans l'équation de transfert radiatif réduit, et puis multiplier l'équation résultante successivement par chacune des fonctions  $Y_l^m$ , et ensuite intégrer le résultat sur toutes les directions. L'orthogonalité des harmoniques sphériques nous permet d'obtenir autant d'équations aux dérivées partielles que d'inconnues  $L_l^m$ , c'est-à-dire un nombre infini. Ainsi, en pratique, le développement est tronqué en supprimant les termes dont l'ordre est supérieur à 1 et nous avons :

$$L(x, \Omega) \approx L_0^0(x) \cdot Y_0^0(\Omega) + L_1^{-1}(x) \cdot Y_1^{-1}(\Omega) + L_1^0(x) \cdot Y_1^0(\Omega) + L_1^1(x) \cdot Y_1^1(\Omega) \quad (1.6)$$

Puisque  $P_0^0(\cos\psi)=1$ ,  $P_1^0(\cos\psi) = \cos\psi$  et  $P_1^1(\cos\psi) = \sin\psi$ , la luminance peut encore s'écrire :

$$L(x, \Omega) \approx L_0^0(x) + \frac{L_1^{-1}(x)}{\sqrt{2}} \cdot e^{-i\phi} \cdot \sin\psi + L_1^0(x) \cdot \cos\psi - \frac{L_1^1(x)}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\phi} \cdot \sin\psi \quad (1.7)$$

Cette approximation présentée ci-dessus s'appelle l'approximation P1. Il existe quatre fonctions inconnues dans cette approximation qui sont respectivement  $L_0^0$ ,  $L_1^0$ ,  $L_1^{-1}$  et  $L_1^1$ . Puisque  $e^{i\phi} = \cos\phi + i \cdot \sin\phi$ , ce développement peut être également exprimé sous forme suivante :

$$L(x, \Omega) \approx a(x) + b(x) \cdot \Omega \quad (1.8)$$

Nous remarquons que  $a(x)$  est un scalaire qui est égale à  $L_0^0(x)$ ,  $b(x)$  et  $\Omega$  sont deux vecteurs qui sont définis comme :

$$b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ b_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1^{-1}(x) - L_1^1(x)}{\sqrt{2}} \\ -i \cdot \frac{L_1^{-1}(x) + L_1^1(x)}{\sqrt{2}} \\ L_1^0(x) \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mu \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\psi \cdot \cos\phi \\ \sin\psi \cdot \sin\phi \\ \cos\psi \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

En intégrant  $L$ , puis  $\Omega \cdot L$ , sur toutes les directions de l'espace, nous obtenons :

$$a(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} L(x, \Omega) d\Omega = \frac{G(x)}{4\pi} \quad (1.11)$$

$$b(x) = \frac{3}{4\pi} \int_0^{4\pi} L(x, \Omega) \cdot \Omega d\Omega = \frac{3}{4\pi} \cdot q_r''(x) \quad (1.12)$$

Avec  $\int_0^{4\pi} d\Omega = 4\pi$ ,  $\int_0^{4\pi} \Omega d\Omega = 0$  et  $\int_0^{4\pi} \Omega \cdot \Omega d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta$ , où  $\delta$  est le tenseur unité :  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ,  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ . Nous savons que  $G$  est le rayonnement incident et  $q_r''$  est la densité de flux radiatif, si nous intégrons l'équation de transfert radiatif présentée au début (1.3) sur toutes les directions en multipliant par  $\Omega$ , nous avons alors :

$$\int_0^{4\pi} \Omega \cdot \text{div}(\Omega \cdot L) d\Omega + \int_0^{4\pi} \Omega \cdot \kappa \cdot L d\Omega = \int_0^{4\pi} \Omega \cdot \kappa \cdot L^0(T) d\Omega \quad (1.13)$$

Puisque  $L^0(T)$  est indépendant de la direction, l'intégration est ainsi égale à 0. Pour un milieu homogène et isotrope,  $\kappa$  est constant et on rappelle que  $q_r''(x) = \int_0^{4\pi} L(x, \Omega) \cdot \Omega d\Omega$ , ce qui nous donne :

$$\int_0^{4\pi} \Omega \cdot \text{div}(\Omega \cdot L) d\Omega + \kappa \cdot q_r'' = 0 \quad (1.14)$$

De plus, comme la luminance  $L$  est approchée par  $\frac{1}{4\pi} \cdot (G + 3\Omega \cdot q_r'')$ , il vient :

$$\operatorname{div}(\Omega \cdot L) = \frac{1}{4\pi} \cdot \operatorname{div}(\Omega \cdot G) + \frac{3}{4\pi} \cdot \operatorname{div}[\Omega \cdot (\Omega \cdot q_r'')] \quad (1.15)$$

Et puis, une intégration de l'équation ci-dessus sur toutes les directions en multipliant par  $\Omega$  nous donne :

$$\int_0^{4\pi} \Omega \cdot \operatorname{div}(\Omega \cdot L) \, d\Omega = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G) \quad (1.16)$$

Donc

$$q_r'' = -\frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G) \quad (1.17)$$

Nous savons que le transfert radiatif au sein d'un milieu semi-transparent se caractérise par un champ de densité de flux radiatif  $q_r''$ , la relation suivante exprime l'équilibre entre les flux radiatifs reçus et émis :

$$-\operatorname{div}(q_r'') = \kappa \cdot [G - 4\pi \cdot L^0(T)] \quad (1.18)$$

En remplaçant  $q_r''$  par  $-\frac{1}{3\kappa} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G)$ , nous obtenons alors :

$$\operatorname{div}\left[-\frac{1}{3\kappa} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G)\right] = \kappa \cdot [4\pi \cdot L^0(T) - G] \quad (1.19)$$

Lorsque  $\kappa$  est indépendant de  $x$  (milieu homogène), l'équation au-dessus devient :

$$\operatorname{div}\left[\overrightarrow{\operatorname{grad}}(G)\right] - 3\kappa^2 \cdot G = -12\pi \cdot \kappa^2 \cdot L^0(T) \quad (1.20)$$

C'est une équation dont la résolution nous fournit le champ de rayonnement incident dans tout le domaine. Une fois  $G$  connu, nous pouvons calculer la densité de flux radiatif  $q_r''$  ainsi que le champ de sources radiatives  $-\operatorname{div}(q_r'')$ . Cette équation peut également s'écrire comme :

$$0 = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - 3\kappa^2 \cdot (G - 4n^2 \cdot \sigma \cdot T^4) \quad (1.21)$$

### 1.2.2 Système couplé conducto-radiatif instationnaire

Après la simplification de l'équation de transfert radiatif par la méthode P1, la propagation de la chaleur à travers le mur (1D) peut être décrite par les deux équations aux dérivées partielles couplées suivantes :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{\rho \cdot C_p} \cdot (G - 4n^2 \cdot \sigma \cdot T^4) \quad (1.22)$$

$$0 = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - 3\kappa^2 \cdot (G - 4n^2 \cdot \sigma \cdot T^4) \quad (1.23)$$

On rappelle que  $T$  est la température,  $G$  est le rayonnement incident,  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann et  $n$  est l'indice de réfraction du milieu.

### Conditions initiales

La condition initiale du modèle est :

$$\forall x, \quad T(x, t = 0) = T_{ini} \quad (1.24)$$

### Conditions aux limites

Les conditions aux limites du modèle sont :

$$\forall t, x = 0 : \quad T = T_{p1}, \quad -\frac{2}{3} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} + \kappa \cdot G = 4\kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T_{p1}^4 \quad (1.25)$$

$$\forall t, x = e : \quad T = T_{p2}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} + \kappa \cdot G = 4\kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T_{p2}^4 \quad (1.26)$$

## 1.3 Résolution du modèle direct 1D

### 1.3.1 Adimensionnement

Avant la résolution des équations conducto-radiatives couplées, un adimensionnement des paramètres est mis en œuvre pour simplifier la résolution.

La densité de flux thermique locale  $q''$  traversant le mur est exprimée comme la somme de la densité de flux conductif  $q_c''$  et la densité de flux radiatif  $q_r''$  :

$$q''(x, t) = q_c''(x, t) + q_r''(x, t) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{3\kappa} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \quad (1.27)$$

Les grandeurs adimensionnelles suivantes sont introduites pour simplifier les équations aux dérivées partielles ainsi que les conditions aux limites et la condition initiale :

$$x' = \frac{x}{e}, \quad t' = \frac{\alpha \cdot t}{e^2}, \quad T' = \frac{T}{T_{ini}}, \quad G' = \frac{G}{4n^2 \cdot \sigma \cdot T_{ini}^4} \quad (1.28)$$

La température initiale  $T_{ini}$  pilotant l'émission radiative peut être choisie entre  $T_{p1}$  et  $T_{p2}$  ou comme l'une ou l'autre de ces deux températures. Les deux équations aux dérivées partielles s'écrivent ainsi :

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{4\kappa \cdot e^2 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T_{ini}^3}{\lambda} \cdot (G' - T'^4) \quad (1.29)$$

$$0 = \frac{\partial^2 G'}{\partial x'^2} - 3(\kappa \cdot e)^2 \cdot (G' - T'^4) \quad (1.30)$$

Soit encore :

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\tau^2}{N_{cr}} \cdot (G' - T'^4) \quad (1.31)$$

$$0 = \frac{\partial^2 G'}{\partial x'^2} - 3\tau^2 \cdot (G' - T'^4) \quad (1.32)$$

avec

$$N_{cr} = \frac{\lambda \cdot \kappa}{4n^2 \cdot \sigma \cdot T_{ini}^3}, \quad \tau = \kappa \cdot e \quad (1.33)$$

Les conditions aux limites et la condition initiale deviennent :

$$\forall t', x' = 0 : \quad T' = T'_{p1}, \quad -\frac{2}{3\tau} \cdot \frac{\partial G'}{\partial x'} + G' = T'_{p1}{}^4 \quad (1.34)$$

$$\forall t', x' = 1 : \quad T' = T'_{p2}, \quad \frac{2}{3\tau} \cdot \frac{\partial G'}{\partial x'} + G' = T'_{p2}{}^4 \quad (1.35)$$

$$\forall (x', t'), t' = 0 : \quad T'(x', t') = T'_{p1} \quad (1.36)$$

La densité de flux thermique locale adimensionnée s'exprime ainsi :

$$(q'')'(x', t') = \frac{q''(x, t)}{\lambda \cdot \frac{T_{ini}}{e}} = (q'')'_c(x', t') + (q'')'_r(x', t') = -\lambda \cdot \frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{1}{3N_{cr}} \cdot \frac{\partial G'}{\partial x'} \quad (1.37)$$

Rappelons que  $N_{cr}$  représente l'importance relative de la conduction et du rayonnement dans le transfert de chaleur. Si  $N_{cr}$  tend vers infini, le transfert de chaleur dans le mur est purement conductif. Inversement, si  $N_{cr}$  tend vers zéro, le transfert est purement radiatif. Ceci peut être exprimé d'une façon plus générale :

- Si  $N_{cr} \gg 1$  : la conduction domine.
- Si  $N_{cr} \ll 1$  : le rayonnement domine.
- Si  $N_{cr} \approx 1$  : la conduction et le rayonnement sont équivalents.

### 1.3.2 Méthode des différences finies

Tout d'abord, nous utilisons la méthode des différences finies pour résoudre le problème couplé décrit plus haut. Pour cela, un schéma temporel implicite d'ordre 1 et un schéma spatial centré d'ordre 2 sont choisis. L'équation de la chaleur adimensionnelle (1.68) se discrétise en :

$$T'_{i,n} - T'_{i,n-1} = \frac{\Delta t'}{(\Delta x')^2} \cdot (T'_{i+1,n} - 2T'_{i,n} + T'_{i-1,n}) + \frac{\tau^2 \cdot \Delta t'}{N_{cr}} \cdot \left[ \overline{G'_{i,n}} - 4\overline{T'_{i,n}}{}^3 \cdot T'_{i,n} + 3\overline{T'_{i,n}}{}^4 \right] \quad (1.38)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$-r \cdot T'_{i+1,n} + \left[ 1 + 2r + 4s \cdot \overline{T'_{i,n}}{}^3 \right] \cdot T'_{i,n} - r \cdot T'_{i-1,n} = T'_{i,n-1} + s \cdot (3\overline{T'_{i,n}}{}^4 + \overline{G'_{i,n}}) \quad (1.39)$$

avec

$$r = \frac{\Delta t'}{(\Delta x')^2}, \quad s = \frac{\tau^2 \cdot \Delta t'}{N_{cr}} \quad (1.40)$$

Ici,  $\overline{G}'_{i,n}$  et  $\overline{T}'_{i,n}$  représentent une estimation des quantités  $G$  et  $T$  au temps  $n$  en se basant sur leurs valeurs aux temps précédents. Ce qui peut être exprimé à l'ordre 1 :

$$\overline{G}'_{i,n} = G'_{i,n-1}, \quad \overline{T}'_{i,n} = T'_{i,n-1} \quad (1.41)$$

Ou à l'ordre 2 :

$$\overline{G}'_{i,n} = 2G'_{i,n-1} - G'_{i,n-2}, \quad \overline{T}'_{i,n} = 2T'_{i,n-1} - T'_{i,n-2} \quad (1.42)$$

Les conditions aux limites et la condition initiale sont :

$$\forall t', x' = 0 : \quad T'_{1,n} = T'_{p1} \quad (1.43)$$

$$\forall t', x' = 1 : \quad T'_{N_x,n} = T'_{p2} \quad (1.44)$$

$$\forall x', t' = 0 : \quad T'_{i,0} = T'_{p1} \quad (1.45)$$

Le problème se ramène ainsi, à chaque pas de temps, à la résolution d'un système tri-diagonal de la forme suivante :

$$A_i \cdot T'_{i+1,n} + B_i \cdot T'_{i,n} + C_i \cdot T'_{i-1,n} = D_i \quad (1.46)$$

Pour  $2 \leq i \leq N_x - 1$  :

$$A_i = C_i = -r, \quad B_i = 1 + 2r + 4s \cdot \overline{T}'_{i,n}{}^3, \quad D_i = T'_{i,n-1} + s \cdot (3\overline{T}'_{i,n}{}^4 + \overline{G}'_{i,n}) \quad (1.47)$$

Pour  $i = 1$  et  $i = N_x$  :

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 1, \quad C_1 = 0, \quad D_1 = T'_{p1} \quad (1.48)$$

$$A_{N_x} = 0, \quad B_{N_x} = 1, \quad C_{N_x} = 0, \quad D_{N_x} = T'_{p2} \quad (1.49)$$

Au sein du même pas de temps, une fois la température obtenue, nous pouvons calculer le rayonnement incident par l'équation discrétisée suivante :

$$0 = \frac{1}{(\Delta x')^2} \cdot (2G'_{i+1,n} - 2G'_{i,n} + G'_{i-1,n}) - 3\tau^2 \cdot [G'_{i,n} - T'_{i,n}] \quad (1.50)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$-G'_{i+1,n} + (2 + 3\chi^2) \cdot G'_{i,n} - G'_{i-1,n} = 3\chi^2 \cdot T'_{i,n}{}^4 \quad (1.51)$$

avec

$$\chi = \tau \cdot \Delta x' = \frac{N_{cr} \cdot s}{r} \quad (1.52)$$

Les conditions aux limites discrétisées sont :

$$\forall t', x' = 0 : \quad G'_{1,n} - G'_{2,n} + \frac{3\chi}{2} \cdot G'_{1,n} = \frac{3\chi}{2} \cdot T_{p1}'^4 \quad (1.53)$$

$$\forall t', x' = 1 : \quad G'_{N_x,n} - G'_{N_x-1,n} + \frac{3\chi}{2} \cdot G'_{N_x,n} = \frac{3\chi}{2} \cdot T_{p2}'^4 \quad (1.54)$$

ou encore :

$$\left(1 + \frac{3\chi}{2}\right) \cdot G'_{1,n} - G'_{2,n} = \frac{3\chi}{2} \cdot T_{p1}'^4 \quad (1.55)$$

$$-G'_{N_x-1,n} + \left(1 + \frac{3\chi}{2}\right) \cdot G'_{N_x,n} = \frac{3\chi}{2} \cdot T_{p2}'^4 \quad (1.56)$$

Comme précédemment, nous retrouvons un système tridiagonal de la forme :

$$a_i \cdot G'_{i+1,n} + b_i \cdot G'_{i,n} + c_i \cdot G'_{i-1,n} = d_i \quad (1.57)$$

Pour  $2 \leq i \leq N_x - 1$  :

$$a_i = c_i = -1, \quad b_i = 2 + 3\beta^2, \quad d_i = 3\chi^2 \cdot T_{i,n}'^4 \quad (1.58)$$

Pour  $i = 1$  et  $i = N_x$  :

$$a_1 = -1, \quad b_1 = 1 + \frac{3\chi}{2}, \quad c_1 = 0, \quad d_1 = \frac{3\chi}{2} \cdot T_{p1}'^4 \quad (1.59)$$

$$a_{N_x} = 0, \quad b_{N_x} = 1 + \frac{3\chi}{2}, \quad c_{N_x} = -1, \quad d_{N_x} = \frac{3\chi}{2} \cdot T_{p2}'^4 \quad (1.60)$$

La résolution des systèmes tri-diagonaux peut être réalisée par un algorithme de Thomas (Datta [2010], Ford [2015] : 171-174). Considérons un système tri-diagonal contenant  $n$  variables inconnues :

$$a_i \cdot x_{i+1} + b_i \cdot x_i + c_i \cdot x_{i-1} = d_i \quad (1.61)$$

avec  $a_n = c_1 = 0$ , ce système tri-diagonal peut être également écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ c_2 & b_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & b_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & c_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

La solution du système ci-dessus peut être obtenue par les itérations suivantes :

**Première étape :** calculer les coefficients  $a'_i$  et  $d'_i$  :

$$a'_i = \begin{cases} \frac{a_i}{b_i}, & i = 1 \\ \frac{a_i}{b_i - c_i \cdot a'_{i-1}}, & i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases} \quad (1.63)$$

$$d'_i = \begin{cases} \frac{d_i}{b_i}, & i = 1 \\ \frac{d_i - c_i \cdot d'_{i-1}}{b_i - c_i \cdot a'_{i-1}}, & i = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (1.64)$$

**Deuxième étape :** calculer la solution finale :

$$x_n = d'_n, \quad x_i = d'_i - a'_i \cdot x_{i+1}, \quad i = n-1, \dots, 1 \quad (1.65)$$

### 1.3.3 Méthode des volumes finis

Nous avons vu précédemment une résolution des équations couplées par la méthode des différences finies. Nous rappelons que cette résolution est réalisée à l'aide d'un schéma implicite, inconditionnellement stable. Cependant, il y a un terme en  $T^4$  (température à la puissance 4) apparaissant dans les équations couplées. Le schéma étant implicite, à chaque itération les températures discrètes inconnues  $(T_i^n)^4$  et  $T_i^n$  existent dans une même équation en même temps. Pour résoudre ce problème, nous utilisons une approximation basée sur un développement limité, qui est définie comme :

$$\bar{G}_{i,n} = G_{i,n-1}, \quad \bar{T}_{i,n} = T_{i,n-1} \quad (\text{à l'ordre 1}) \quad (1.66)$$

$$\bar{G}_{i,n} = 2G_{i,n-1} - G_{i,n-2}, \quad \bar{T}_{i,n} = 2T_{i,n-1} - T_{i,n-2} \quad (\text{à l'ordre 2}) \quad (1.67)$$

Nous notons que les erreurs venant de cette approximation sont inévitables même si nous utilisons une approximation à l'ordre 2. Par conséquent, pour améliorer la précision de nos calculs nous choisissons de développer un code basé sur la méthode des volumes finis dont le schéma temporel est cette fois-ci explicite. Nous rappelons ici que les équations couplées adimensionnées sont :

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\tau^2}{N_{cr}} \cdot (G' - T'^4) \quad (1.68)$$

$$0 = \frac{\partial^2 G'}{\partial x'^2} - 3\tau^2 \cdot (G' - T'^4) \quad (1.69)$$

La résolution de la deuxième équation est inchangée par rapport au précédent. Pour la première équation :

$$\frac{T'_{i,n+1} - T'_{i,n}}{\Delta t'} = \frac{1}{\Delta x'} \cdot \left[ \frac{T'_{i+1,n} - T'_{i,n}}{\Delta x'} - \frac{T'_{i,n} - T'_{i-1,n}}{\Delta x'} \right] + \frac{\tau^2}{N_{cr}} \cdot (G' - T'^4) \quad (1.70)$$

$$T'_{i,n+1} - T'_{i,n} = r \cdot [T'_{i+1,n} - 2T'_{i,n} + T'_{i-1,n}] + s \cdot (G' - T'^4) \quad (1.71)$$

$$r = \frac{\Delta t'}{(\Delta x')^2}, \quad s = \frac{\tau^2 \cdot \Delta t'}{N_{cr}} \quad (1.72)$$

Les températures discrètes sont données par :

Pour  $3 \leq i \leq N_{x-2}$  :

$$\begin{aligned} -r \cdot T'_{i+1,n} + [-1 + 2r + 4s \cdot (T'_{i,n})^3] \cdot T'_{i,n} - r \cdot T'_{i-1,n} = \\ -r \cdot T'_{i,n+1} + s \cdot [3(T'_{i+1,n})^4 + G'_{i,n}] \end{aligned} \quad (1.73)$$

Pour  $i = 2$  :

$$-r \cdot T'_{3,n} + [-1 + 3r + 4s \cdot (T'_{2,n})^3] \cdot T'_{2,n} - 2r \cdot T'_{1,n} = -T'_{2,n+1} + s \cdot [3(T'_{2,n})^4 + G'_{2,n}] \quad (1.74)$$

Pour  $i = N_{x-1}$  :

$$\begin{aligned} -2r \cdot T'_{N_x,n} + [-1 + 3r + 4s \cdot (T'_{N_{x-1},n})^3] \cdot T'_{N_{x-1},n} - r \cdot T'_{N_{x-2},n} = \\ -T'_{N_{x-1},n+1} + s \cdot [3(T'_{N_{x-1},n})^4 + G'_{N_{x-1},n}] \end{aligned} \quad (1.75)$$

Pour  $i = 1$  et  $i = N_x$  (Conditions aux limites, cas particulier  $T_{p2} = 0.5 \cdot T_{p1}$ ) :

$$T'_{1,n} = 1, \quad T'_{N_x,n} = 0.5 \quad (1.76)$$

### 1.3.4 Méthode de quadripôle thermique

La méthode de quadripôle thermique est une méthode de représentation du système linéaire, basée sur une matrice qui lie certaines transformations de la température et du flux d'un profil du milieu considéré à celles d'un autre profil. Pour un problème de transfert de chaleur transitoire, cette transformation peut être une transformation de Laplace. De plus, ces profils choisis peuvent correspondre à n'importe quelle position du milieu, ce qui nous permet de calculer la température et le flux au sein du milieu. Par exemple, dans le cas où l'évolution de la température et du flux à la face avant sont connus, la température et le flux à la face médiane du milieu peuvent être calculés dans le domaine de Laplace. Et puis une transformation inverse de Laplace peut être appliquée pour obtenir l'évolution temporelle de la température et du flux à la face médiane dans le domaine réel.

La mise en œuvre d'une transformation inverse de Laplace peut être réalisée par plusieurs méthodes (Davies and Martin [1979]). Parmi ces méthodes, une méthode simple qui s'appelle la méthode de Gaver-Stehfest est brièvement présentée ici. Nous supposons que  $f(t)$  est une fonction quelconque et  $F$  est sa transformation de Laplace. D'après un calcul mathématique complexe (Stehfest [1970]), Stehfest a trouvé la relation suivante :

$$f(t) = \frac{\ln(2)}{t} \cdot \sum_{i=1}^N V_i \cdot F\left(\frac{i \cdot \ln(2)}{t}\right) \quad (1.77)$$

$N$  est un entier qui dépend de la précision du point flottant de l'ordinateur. La plupart du temps,  $N = 10$ . Pour un calcul plus précis,  $N = 20$ . Les valeurs des paramètres  $V_i$  sont données dans le Tableau 1.2 (Maillet et al. [2000]) :

$N = 10$	$N = 20$
$V_1 = 1/12$	$V_1 = -5.5115 \cdot 10^{-6}, \quad V_2 = 1.5239 \cdot 10^{-1}$
$V_2 = -385/12$	$V_3 = -1.1747 \cdot 10^2, \quad V_4 = 1.7342 \cdot 10^4$
$V_3 = 1279$	$V_5 = -9.2281 \cdot 10^5, \quad V_6 = 2.3774 \cdot 10^7$
$V_4 = -46871/3$	$V_7 = -3.4942 \cdot 10^8, \quad V_8 = 3.2414 \cdot 10^9$
$V_5 = 505465/6$	$V_9 = -2.0277 \cdot 10^{10}, \quad V_{10} = 8.9465 \cdot 10^{10}$
$V_6 = -473915/2$	$V_{11} = -2.8702 \cdot 10^{11}, \quad V_{12} = 6.8299 \cdot 10^{11}$
$V_7 = 1127735/3$	$V_{13} = -1.2191 \cdot 10^{12}, \quad V_{14} = 1.6376 \cdot 10^{12}$
$V_8 = -1020215/3$	$V_{15} = -1.6472 \cdot 10^{12}, \quad V_{16} = 1.2219 \cdot 10^{12}$
$V_9 = 328125/2$	$V_{17} = -6.4881 \cdot 10^{11}, \quad V_{18} = 2.3332 \cdot 10^{11}$
$V_{10} = -65625/2$	$V_{19} = -5.0914 \cdot 10^{10}, \quad V_{20} = 5.0914 \cdot 10^9$

TABLEAU 1.2 – Valeurs des paramètres  $V_i$ ,  $i \in [1, N]$  pour  $N = 10$  et  $N = 20$  (d'après Maillet et al. [2000])

Les 3 modèles 1D présentés ci-dessous (modèle 1 : purement diffusant, modèle 2 : absorbant émettant non diffusant, modèle 3 : absorbant émettant diffusant) sont déjà étudiés par André and Degiovanni [1998] en utilisant la méthode de quadripôle thermique. Dans la contexte de cette thèse, ces travaux ont été répétés afin de mieux comprendre la mise en œuvre de cette méthode. En fait, la seule différence entre les résultats obtenus ici et ceux de la référence (André and Degiovanni [1998]) est le choix de la méthode de transformation inverse de Laplace. Nous avons choisi ici la méthode proposée par Hoog (De Hoog et al. [1982]). Cependant, la méthode utilisée dans la référence correspond à la méthode de Gaver-Stehfest avec  $N = 10$ .

Pour ces 3 modèles, afin d'obtenir une solution analytique, une hypothèse de transfert radiatif a été faite en supposant que le milieu semi-transparent est dans un état où les perturbations par rapport à un état d'équilibre radiatif sont faibles. De plus, l'approximation à deux flux et la technique de substitution du noyau (Maillet et al. [2000]) ont été appliquées afin de simplifier l'équation de transfert radiatif. Plus de détails concernant ces 3 modèles peuvent être trouvés dans Maillet et al. [2000]. Il faut mentionner que le modèle absorbant, émettant, non diffusant et 1D (deuxième modèle dans Maillet et al. [2000]) est utilisé pour valider le modèle 2D axisymétrique (voir la section 1.7) à cause d'un manque de références pour la configuration 2D axisymétrique.

**Modèle 1 : purement diffusant**

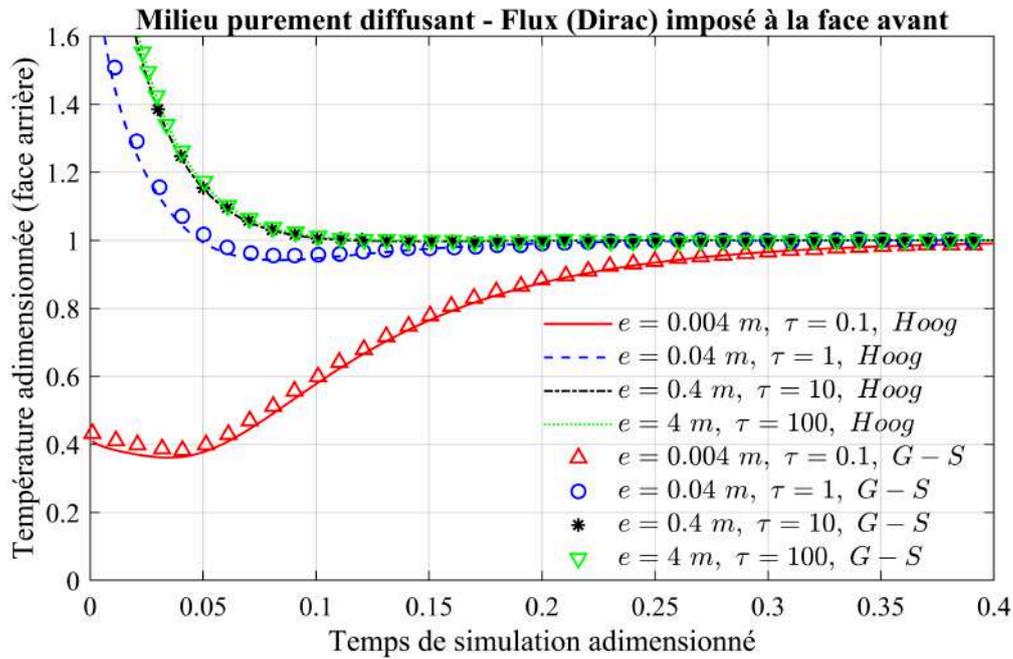
Nous considérons un mur solide, fini, homogène, isotrope, purement diffusant et gris dont toutes les parois sont supposées noires. A l'instant initial, le milieu est considéré comme isotherme et à l'équilibre avec l'environnement. La convection entre les faces avant/arrière et l'air est négligée. Le transfert de chaleur au sein du milieu est considéré comme unidirectionnel.

Le Tableau 1.3 présente les définitions et les valeurs des propriétés thermo-physiques du milieu, des paramètres intervenants dans les conditions aux limites ainsi que des paramètres numériques du modèle.

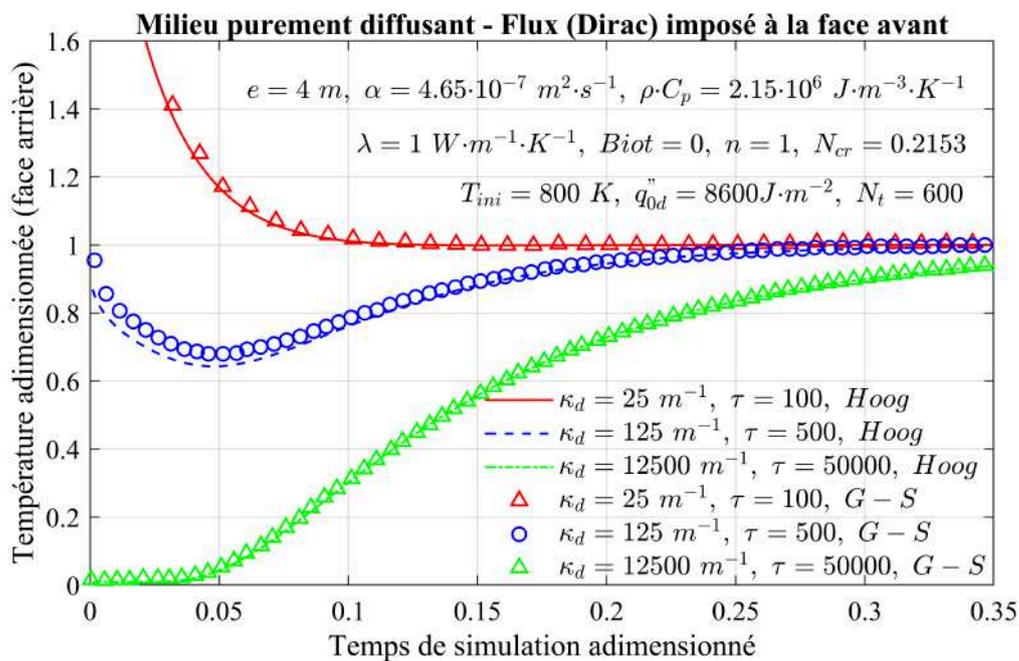
Paramètre	Définition et unité	Valeur
$e$	épaisseur du mur [ $m$ ]	0.004, 4
$\lambda$	conductivité thermique [ $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ]	1
$\rho \cdot C_p$	capacité thermique volumique [ $J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$ ]	$2.15 \cdot 10^6$
$\alpha$	diffusivité thermique [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ]	$4.65 \cdot 10^{-7}$
$n$	indice de réfraction	1
$\kappa_d$	coefficient de diffusion moyen [ $m^{-1}$ ]	$25-2.5 \cdot 10^4$
$\tau$	épaisseur optique	$0.1-5 \cdot 10^4$
$N_{cr}$	nombre de Planck : $\lambda \cdot \kappa_d / (4n^2 \cdot \sigma \cdot T_0^3)$	0.2153
$T_{ini}$	température initiale (référence) [ $K$ ]	800
$q_{0d}''$	densité de chaleur de type Dirac imposée à la face avant [ $J \cdot m^{-2}$ ]	8600
$Biot$	nombre de Biot : $h \cdot V / S / \lambda$	0
$t_c$	temps de calcul [ $s$ ]	0.08, 0.07
$t_{ref}$	temps de référence : $e^2 / \alpha$	34.41, $34.41 \cdot 10^6$
$N_t$	nombre d'itérations temporelles	600
$dt'$	pas du temps adimensionné	0.001

TABLEAU 1.3 – Paramètres importants intervenant dans le modèle 1

Les comparaisons de l'évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu purement diffusant avec une densité de chaleur impulsionnelle de type Dirac imposée à la face avant, pour différentes valeurs de l'épaisseur  $e$  et de coefficient de diffusion  $\kappa_d$  sont présentées sur les Fig. 1.1 et Fig. 1.2. Les résultats montrent un relativement bon accord par rapport à la référence sauf pour les instants initiaux, ce qui peut être causée par le choix de la méthode de transformation inverse de Laplace (algorithme de de Hoog versus celui de Gaver-Stehfest [G-S]).



**Fig. 1.1.** Évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu purement diffusant avec une densité de chaleur impulsive de type Dirac imposée à la face avant du milieu (pour différentes épaisseurs  $e$  et épaisseurs optiques  $\tau$ )



**Fig. 1.2.** Évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu purement diffusant avec une densité de chaleur impulsive de type Dirac imposée à la face avant du milieu (pour différentes valeurs de coefficient de diffusion  $\kappa_d$  et épaisseurs optiques  $\tau$ )

**Modèle 2 : absorbant, émettant et non diffusant**

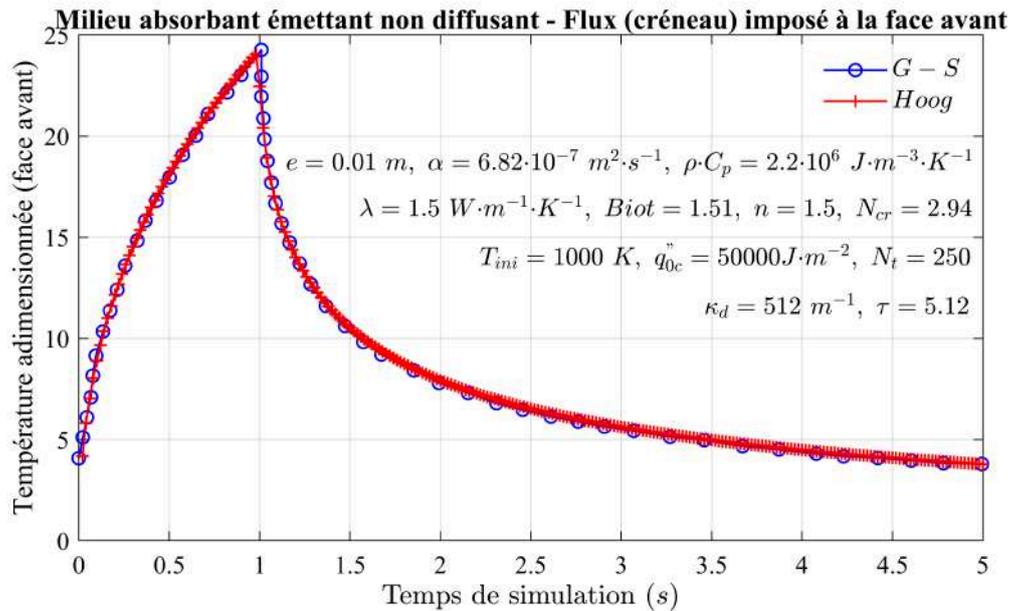
Nous considérons un mur solide, fini, homogène, isotrope, absorbant, émettant, non diffusant et gris dont toutes les parois sont supposées noires. A l'instant initial, le milieu est considéré comme isotherme et à l'équilibre avec l'environnement. La convection entre les faces avant/arrière et l'air est pris en compte au cas 1 et négligée au cas 2. Le transfert de chaleur au sein du milieu est considéré comme unidirectionnel.

Les définitions et les valeurs des propriétés thermo-physiques du milieu, des paramètres intervenant dans les conditions aux limites ainsi que des paramètres numériques du modèle sont présentés dans le Tableau 1.4.

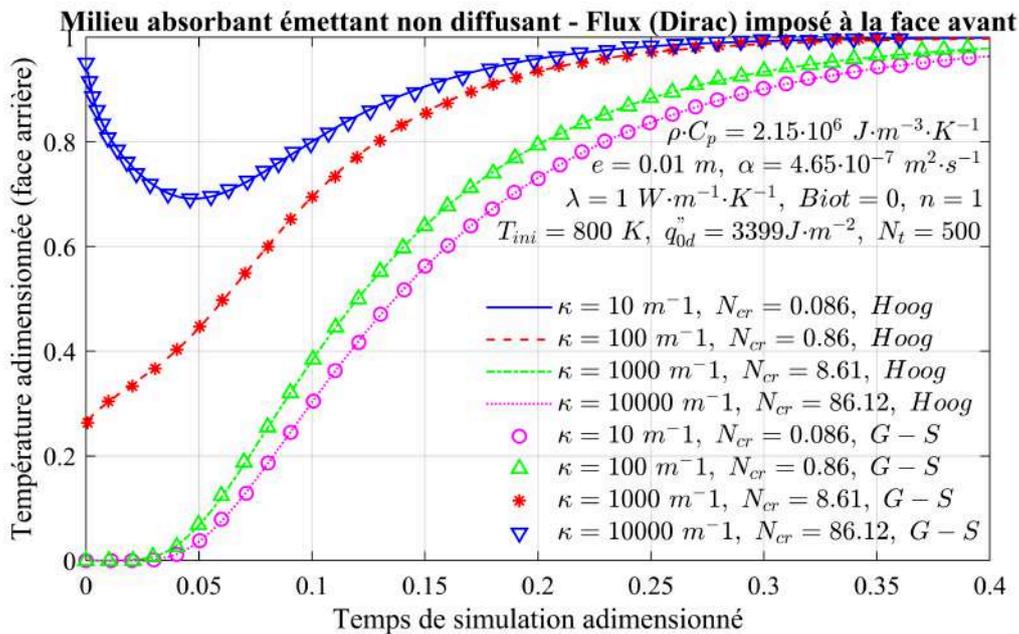
Paramètre	Définition et unité	Valeur
$e$	épaisseur du mur [ $m$ ]	0.01
$\lambda$	conductivité thermique [ $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ]	1.5, 1
$\rho \cdot C_p$	capacité thermique volumique [ $J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$ ]	$2.2 \cdot 10^6$ , $2.15 \cdot 10^6$
$\alpha$	diffusivité thermique [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ]	$6.82 \cdot 10^{-7}$ , $4.65 \cdot 10^{-7}$
$n$	indice de réfraction	1.5, 1
$\kappa$	coefficient d'absorption moyen [ $m^{-1}$ ]	512, $10 \cdot 10^4$
$\tau$	épaisseur optique	5.12, 0.1-100
$N_{cr}$	nombre de Planck : $\lambda \cdot \kappa_a / (4n^2 \cdot \sigma \cdot T_0^3)$	2.94, 0.086-86.12
$T_{ini}$	température initiale (référence) [ $K$ ]	1000, 800
$q''_{0d}$	densité de chaleur de type Dirac imposée à la face avant [ $J \cdot m^{-2}$ ]	3399
$q''_{0c}$	densité de chaleur de type Créneau imposée à la face avant [ $J \cdot m^{-2}$ ]	$5 \cdot 10^4$
$Biot$	nombre de Biot : $h \cdot V / S / \lambda$	1.51, 0
$t_c$	temps de calcul [ $s$ ]	1.1, 2.5
$t_{ref}$	temps de référence : $e^2 / \alpha$	146.67
$N_t$	nombre d'itérations temporelles	250, 500

TABLEAU 1.4 – Paramètres importants intervenant dans le modèle 2

Les comparaisons de l'évolution de la température adimensionnée à la face avant et à la face arrière d'un milieu absorbant, émettant et non diffusant avec une densité de chaleur impulsive de type créneau et/ou Dirac imposée en face avant sont présentées sur la Fig. 1.3 et la Fig. 1.4 (avec différentes valeurs de coefficient d'absorption  $\kappa$ ). Les résultats montrent un bon accord par rapport à la référence, quel que soit l'algorithme d'inversion utilisé : celui de de Hoog ou celui de Gaver-Stehfest [G-S].



**Fig. 1.3.** Évolution de la température adimensionnée à la face avant d'un milieu absorbant, émettant, non diffusant avec une densité de chaleur de type Créneau (durée=1s) imposée à la face avant du milieu



**Fig. 1.4.** Évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu absorbant, émettant, non diffusant avec une densité de chaleur de type Dirac imposée à la face avant du milieu

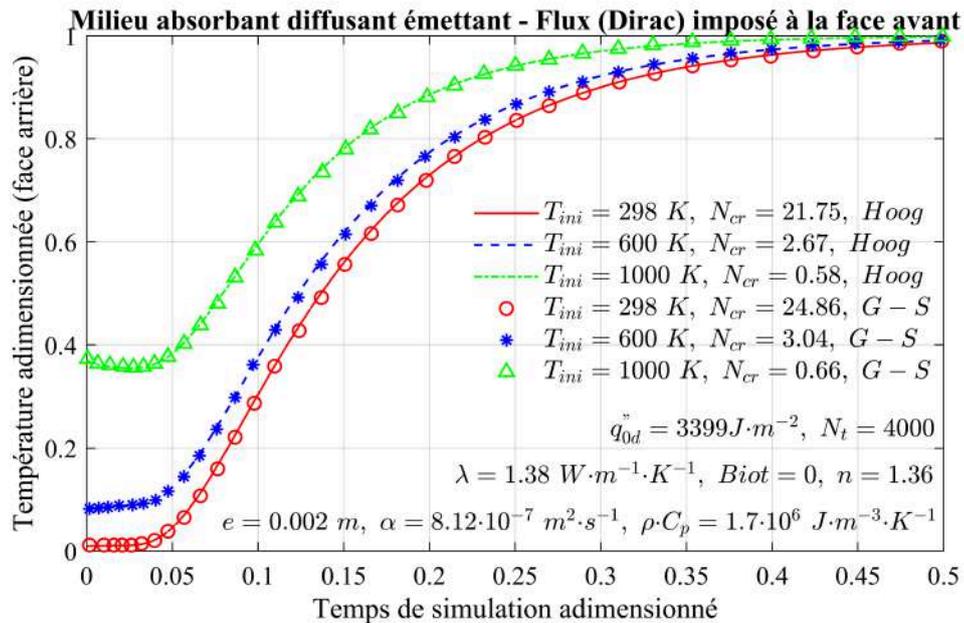
### Modèle 3 : absorbant, émettant et diffusant

Nous considérons un mur solide, fini, homogène, isotrope, absorbant, émettant, diffusant et gris dont toutes les parois sont supposées noires. A l'instant initial, le milieu est considéré comme isotherme et à l'équilibre avec l'environnement. La convection entre les faces avant/arrière et l'air est négligée. Le transfert de chaleur au sein du

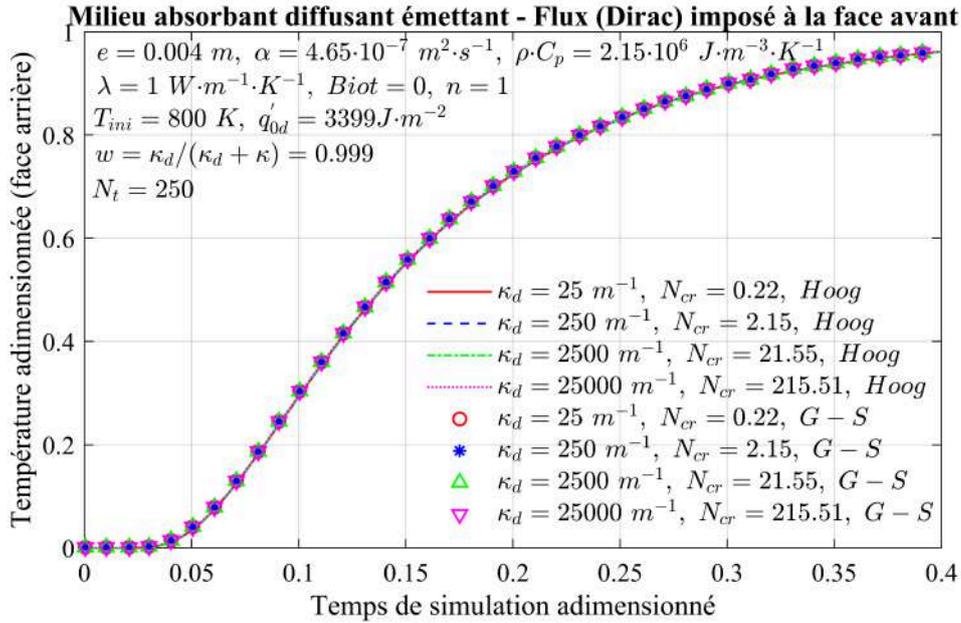
milieu est considéré comme unidirectionnel. Les définitions et les valeurs des propriétés thermo-physiques du milieu, des paramètres intervenant dans les conditions aux limites ainsi que des paramètres numériques du modèle sont présentés dans le Tableau 1.5.

Paramètre	Définition et unité	Valeur
$e$	épaisseur du mur [m]	0.002, 0.004
$\lambda$	conductivité thermique [ $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ]	1.38, 1
$\rho \cdot C_p$	capacité thermique volumique [ $J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$ ]	$1.7 \cdot 10^6$ , $2.15 \cdot 10^6$
$\alpha$	diffusivité thermique [ $m^2 \cdot s^{-1}$ ]	$8.12 \cdot 10^{-7}$ , $4.65 \cdot 10^{-7}$
$n$	indice de réfraction	1.36, 1
$\kappa_d$	coefficient de diffusion moyen [ $m^{-1}$ ]	25, 250, 2500, 25000
$\tau$	épaisseur optique	0.10, 1.00, 10.01, 100.10
$N_{cr}$	nombre de Planck : $\lambda \cdot \kappa_a / (4n^2 \cdot \sigma \cdot T_0^3)$	0.22, 2.15, 21.55, 215.51
$T_{ini}$	température initiale (référence) [K]	298, 600, 1000
$q_{0d}''$	densité de chaleur de type Dirac imposée à la face avant [ $J \cdot m^{-2}$ ]	3399
$Biot$	nombre de Biot : $h \cdot V / S / \lambda$	0
$t_c$	temps de calcul [s]	4.6, 4.8
$t_{ref}$	temps de référence : $e^2 / \alpha$	4.93, 34.4
$N_t$	nombre d'itérations temporelles	4000, 250

TABLEAU 1.5 – Paramètres importants intervenant dans le modèle 3



**Fig. 1.5.** Évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu absorbant, émettant, diffusant et gris avec une densité de chaleur impulsive de type Dirac imposée à la face avant du milieu en négligeant la convection pour différentes valeurs de température initiale  $T_{ini}$  et différentes valeurs du nombre de Planck  $N_{cr}$



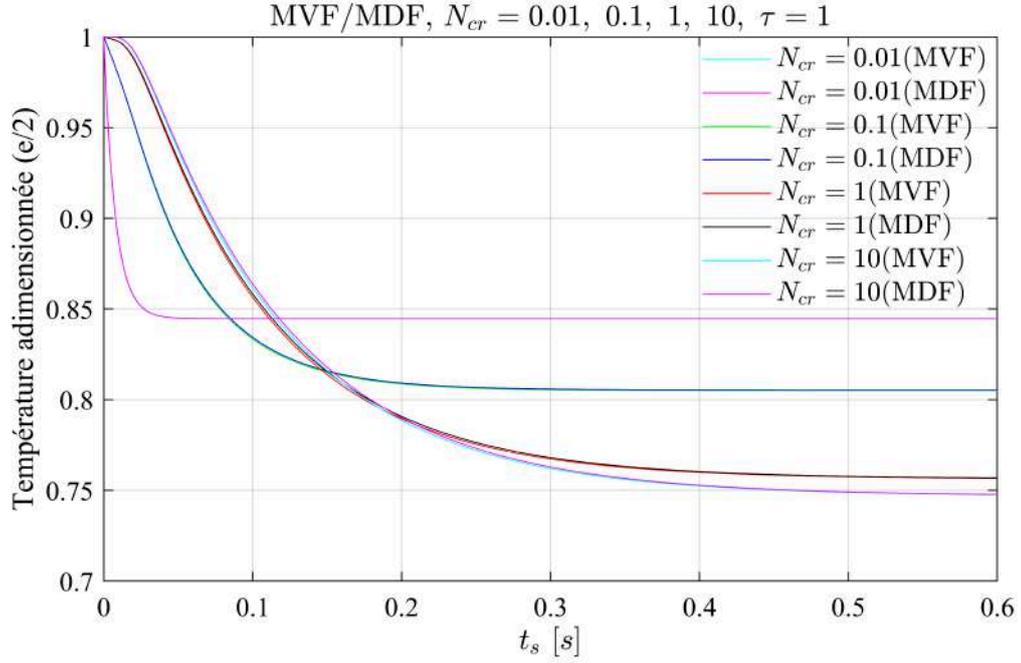
**Fig. 1.6.** Évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu absorbant, émettant, diffusant et gris avec une densité de chaleur impulsionnelle de type Dirac imposée à la face avant du milieu en négligeant la convection (pour différentes valeurs de coefficient de diffusion  $\kappa_d$  et différentes valeurs du nombre de Planck  $N_{cr}$ )

Les comparaisons de l'évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu absorbant, émettant et diffusant avec une densité de chaleur impulsionnelle de type Dirac imposée à la face avant, pour différentes valeurs de température initiale  $T_{ini}$  et de coefficient de diffusion  $\kappa_d$  sont présentées sur la Fig. 1.5 et la Fig. 1.6. Les résultats montrent un relativement bon accord par rapport à la référence, quel que soit l'algorithme d'inversion utilisé : celui de de Hoog ou celui de Gaver-Stehfest [G-S].

## 1.4 Validation du modèle direct 1D

L'objectif est ici de valider les résultats numériques obtenus par la méthode des volumes finis (MVF) et la méthode des différences finies (MDF) via des résultats obtenus à partir d'un modèle semi-analytique exact (Modest [2013] : pp. 728-729). Ces résultats de référence sont donnés sous la forme de distributions de la température au sein du milieu en régime permanent pour les différents cas étudiés. Ainsi, il faut s'assurer que la durée totale de simulation soit suffisante pour que la solution obtenue ait atteint le régime permanent.

D'après la Fig. 1.7, nous trouvons que pour les différents cas étudiés, un temps de simulation de 0.6 s peut être toujours suffisant pour que le système atteigne le régime permanent. Pour augmenter l'efficacité du code, nous changeons la durée totale de simulation de 1 s à 0.6 s et le nombre d'itérations temporelles de 120000 à 72000 permettant un gain en terme de temps de calcul de 20%. De plus, les paramètres importants intervenant dans la validation du modèle direct 1D sont rappelés dans le Tableau 1.6.



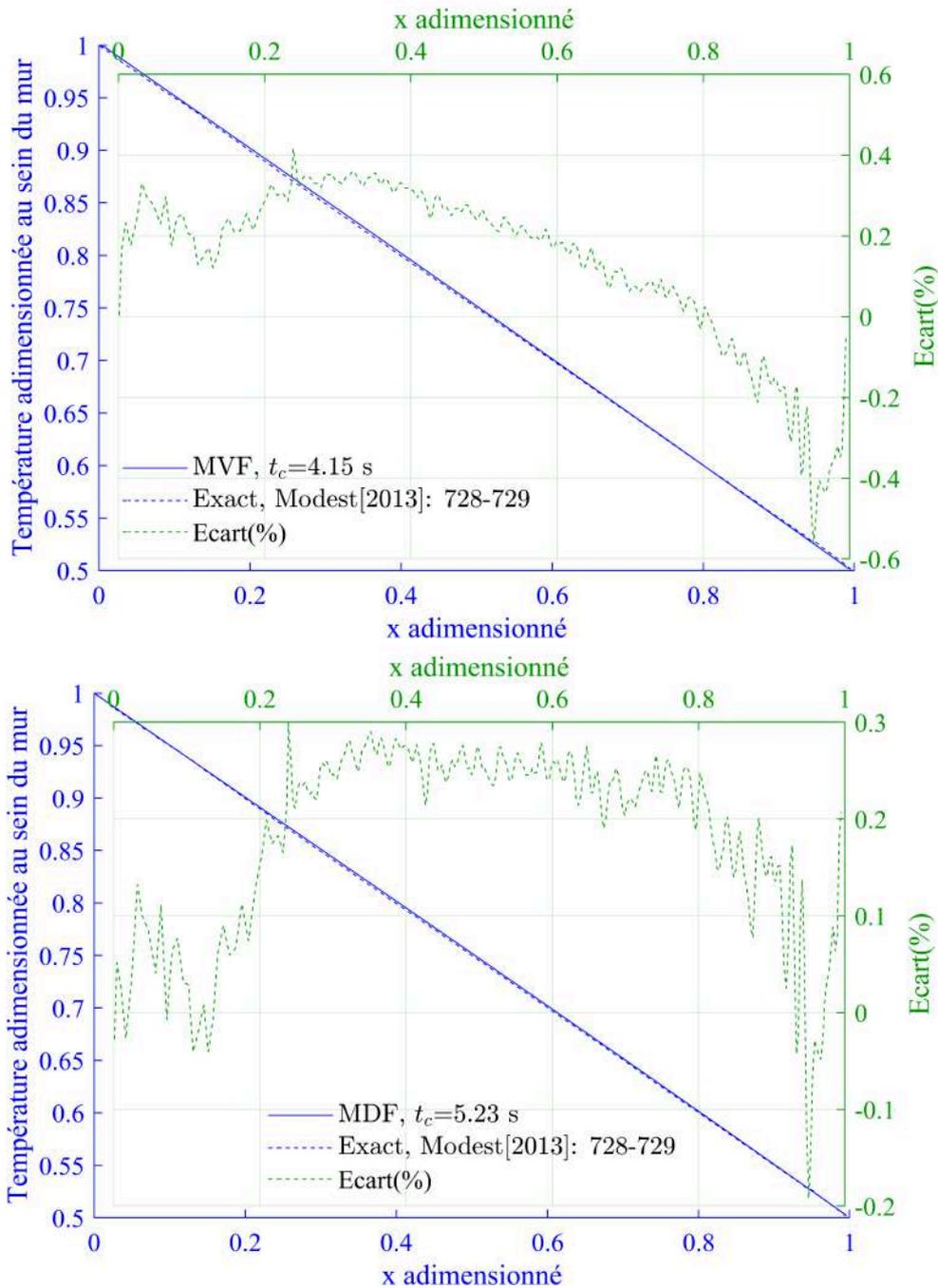
**Fig. 1.7.** Evolution de la température adimensionnée au centre du domaine ( $x = e/2$ ) en fonction du temps

Paramètre	Définition et unité	Valeur
$e$	épaisseur du mur [m]	1
$N_x$	nombre des nœuds suivant $x$	121
$N_m$	nombre des mailles suivant $x$	120
$N_t$	nombre d'itérations temporelles	72000
$t_s$	temps de simulation [s]	0.6
$\Delta x$	pas spatial [m]	0.0071
$\Delta t$	pas temporel [s]	$2.2 \cdot 10^{-5}$
$\tau$	épaisseur optique	1
$N_{cr}$	nombre de Planck : $\lambda \cdot \kappa_a / (4n^2 \cdot \sigma \cdot T_0^3)$	10, 1, 0.1, 0.01
$T_1'$	température adimensionnée imposée à la face avant	1
$T_2'$	température adimensionnée imposée à la face arrière	0.5
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann [ $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ ]	$5.67 \cdot 10^{-8}$

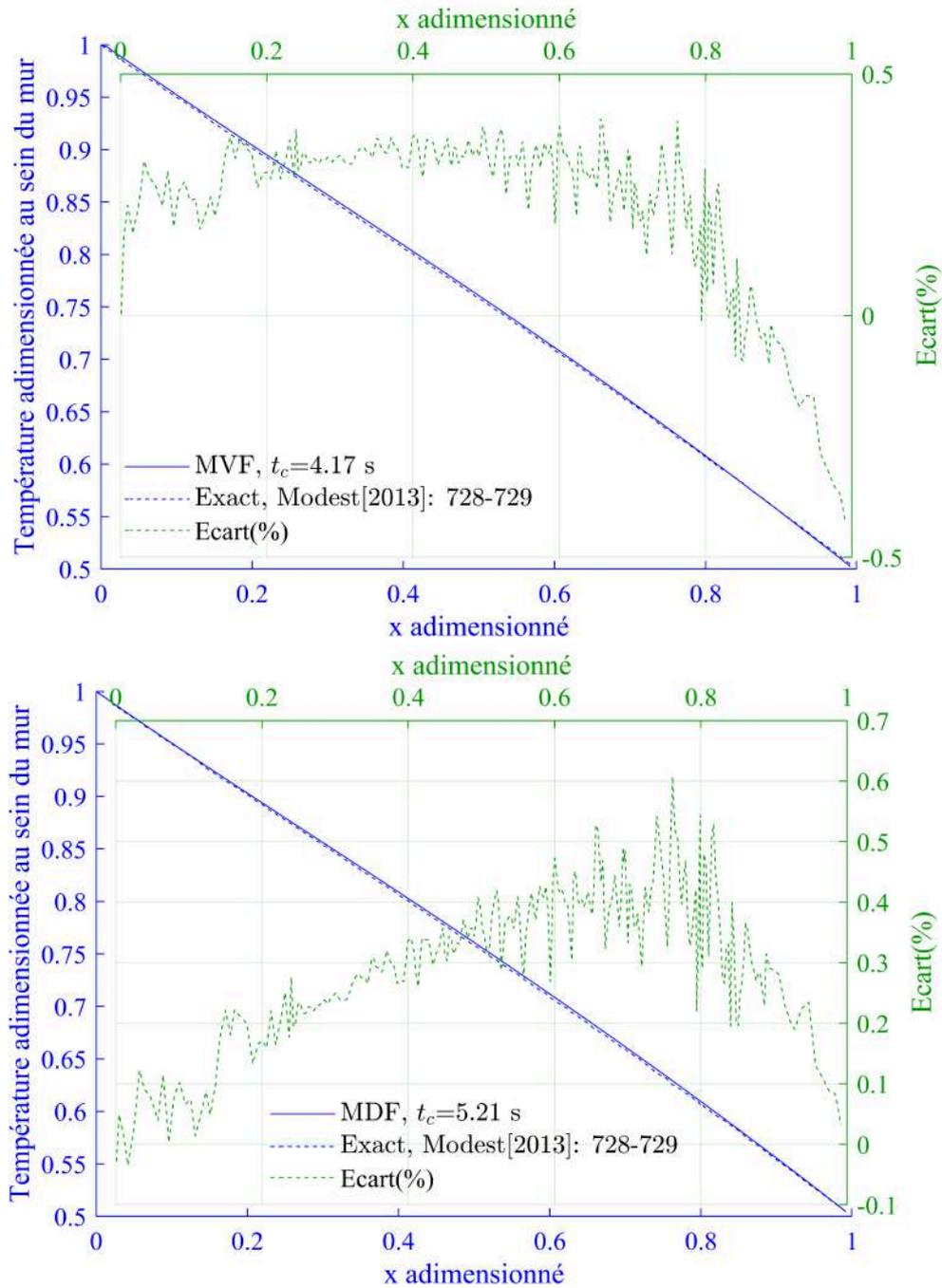
TABLEAU 1.6 – Paramètres importants intervenant dans la validation du modèle direct 1D

La distribution spatiale de la température adimensionnée au sein du mur (calculée par la méthode des volumes finis et la méthode des différences finies) ainsi que la comparaison avec le résultat de référence sont représentées sur les figures suivantes (Fig. 1.8 à Fig. 1.11) selon différents modes de transfert de chaleur ( $N_{cr} = 10, 1, 0.1, 0.01$ ).

### 1.4.1 Cas 1 : $N_{cr} = 10, \tau = 1$

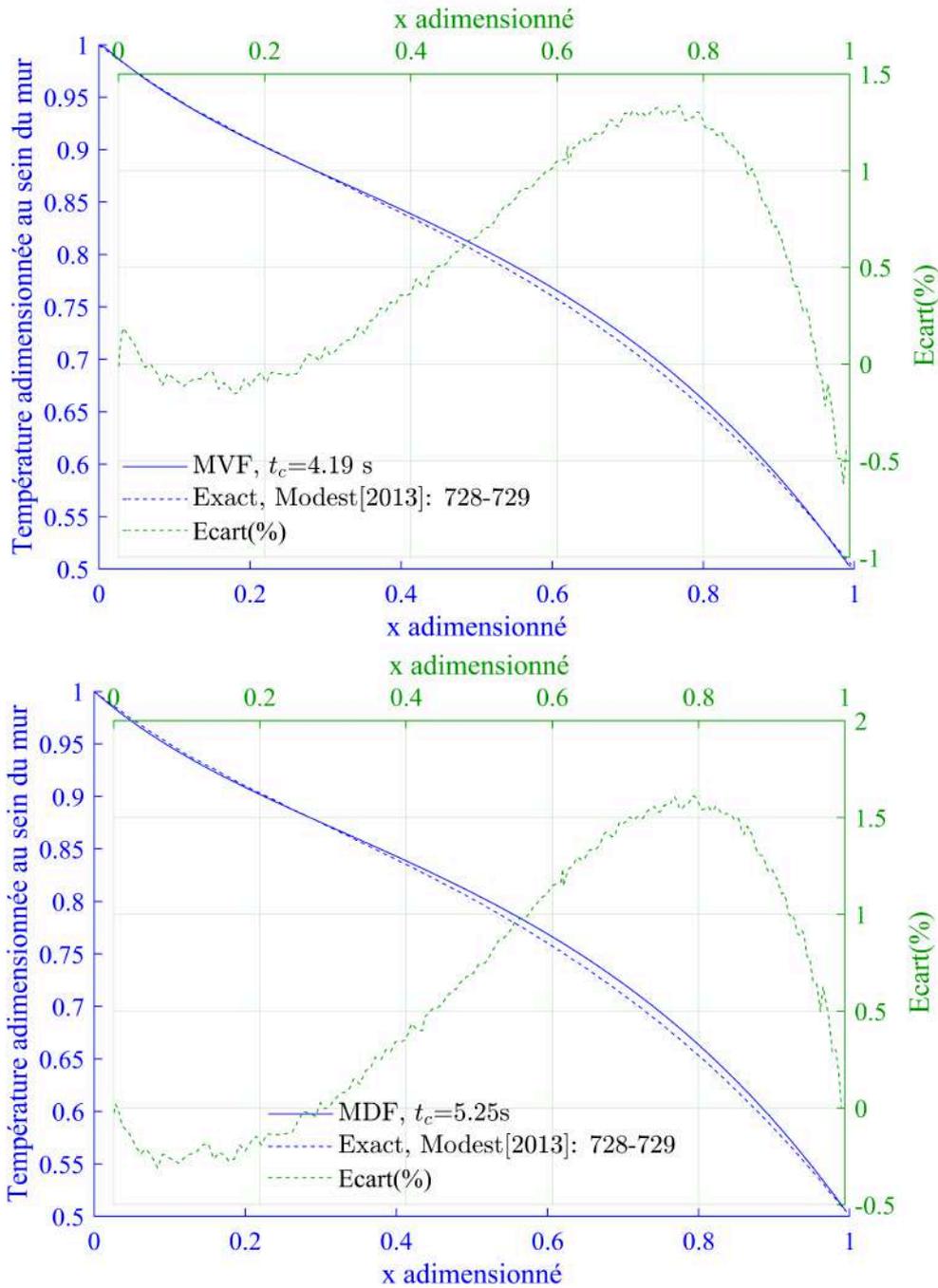


**Fig. 1.8.** Distribution spatiale de la température adimensionnée dans le domaine à  $t = 0.6s$  calculée par la MVF et la MDF. Comparaison et calcul de l'écart par rapport au résultat de référence ( $N_{cr} = 10, \tau = 1$ )

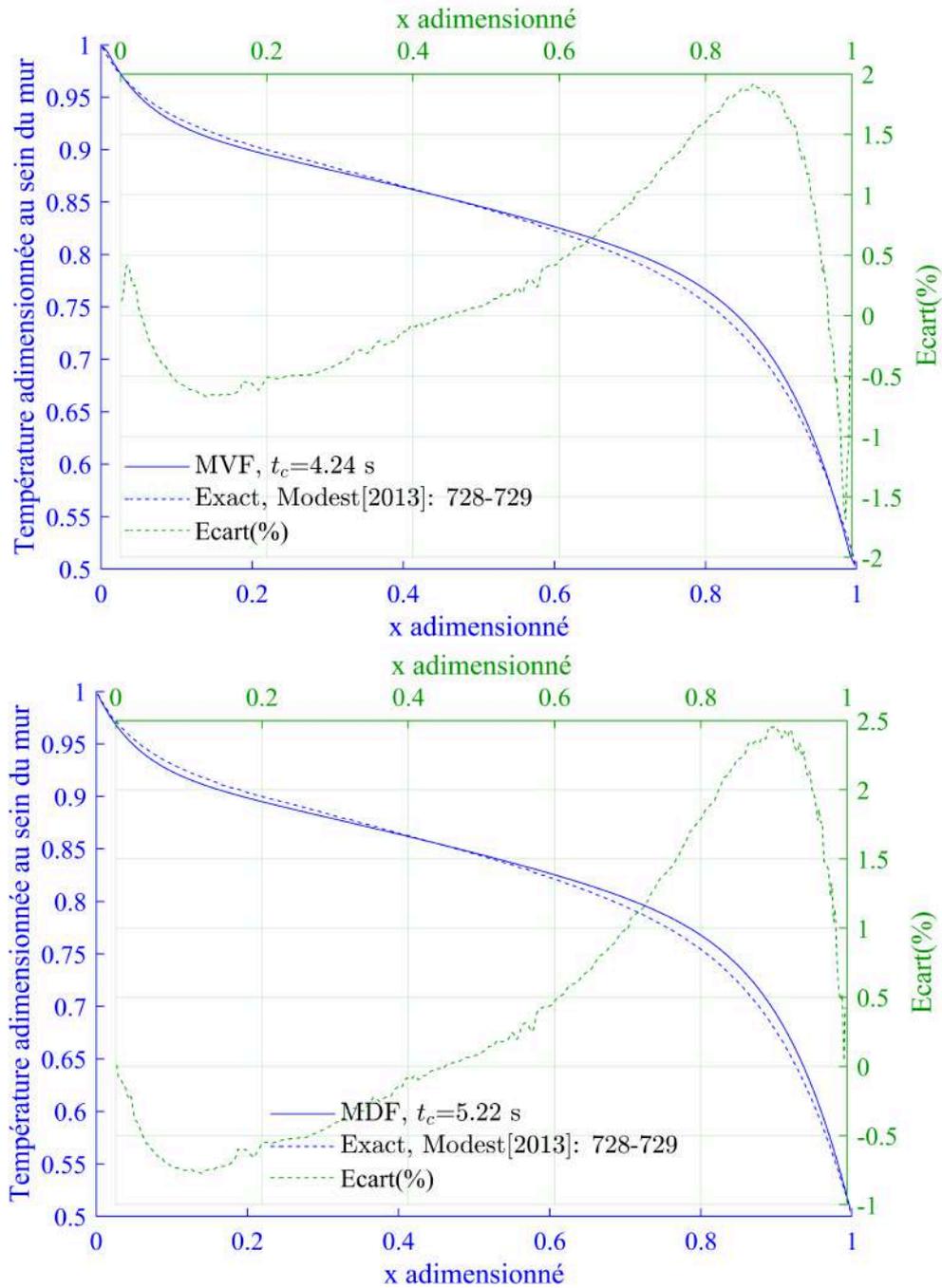
1.4.2 Cas 2 :  $N_{cr} = 1$ ,  $\tau = 1$ 

**Fig. 1.9.** Distribution spatiale de la température adimensionnée dans le domaine à  $t = 0.6s$  calculée par la MVF et la MDF. Comparaison et calcul de l'écart par rapport au résultat de référence ( $N_{cr} = 1, \tau = 1$ )

1.4.3 Cas 3 :  $N_{cr} = 0.1$ ,  $\tau = 1$

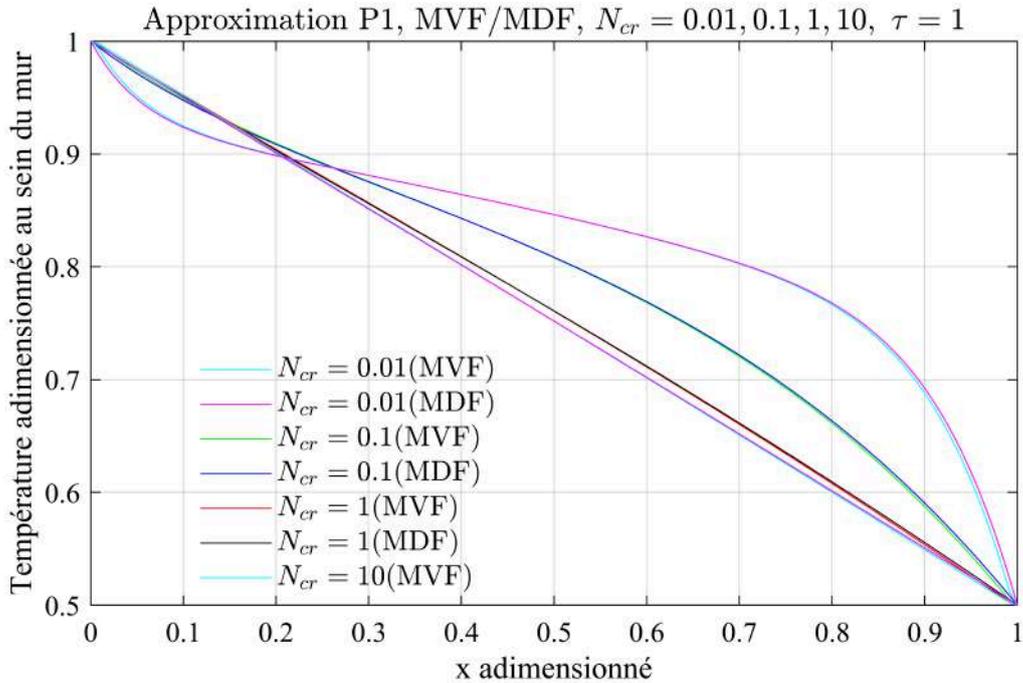


**Fig. 1.10.** Distribution spatiale de la température adimensionnée dans le domaine à  $t = 0.6s$  calculée par la MVF et la MDF. Comparaison et calcul de l'écart par rapport au résultat de référence ( $N_{cr} = 0.1, \tau = 1$ )

1.4.4 Cas 4 :  $N_{cr} = 0.01$ ,  $\tau = 1$ 

**Fig. 1.11.** Distribution spatiale de la température adimensionnée dans le domaine à  $t = 0.6s$  calculée par la MVF et la MDF. Comparaison et calcul de l'écart par rapport au résultat de référence ( $N_{cr} = 0.01, \tau = 1$ )

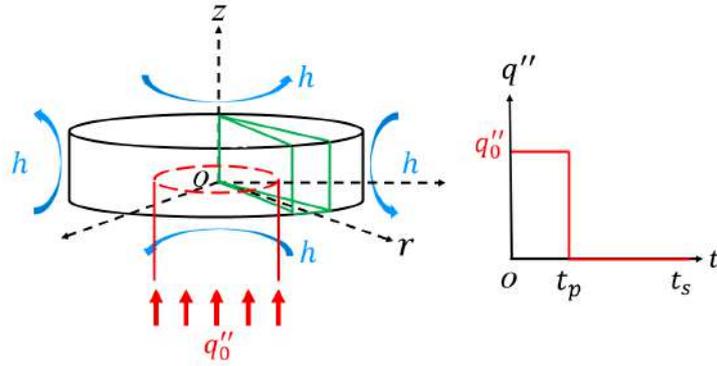
D'après les figures (Fig. 1.8 à Fig. 1.11) ci-dessus, nous pouvons dire que le couplage des modèles est validé dans la mesure où l'écart avec les résultats de référence n'excède pas 2.5% sur l'ensemble de la gamme de paramètres étudiée. L'écart maximum est obtenu dans le cas où  $N_{cr}$  tend vers 0. Dans ce cas, le rayonnement domine ce qui nous laisse penser que ces écarts proviennent de l'approximation P1. Les différents cas validés ci-dessus sont rassemblés dans la Fig. 1.12.



**Fig. 1.12.** Distribution spatiale de la température adimensionnée dans le domaine à  $t = 0.6s$  calculée par la MVF et la MDF pour différentes valeurs du nombre de Planck  $N_{cr}$

## 1.5 Modèle direct 2D axisymétrique

Nous considérons un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  constitué d'un matériau solide, homogène, isotrope, semi-transparent (absorbant, émettant, non diffusant) et gris, initialement à l'équilibre thermique avec l'environnement. Toutes les parois sont supposées noires. A instant  $t = 0$ , une densité de chaleur localisée en espace est imposée sur la face avant ( $z = 0$ ) pendant une durée  $t_p$ . Le refroidissement via l'ensemble des parois du système est pris en compte ( $Biot_{r,z} \neq 0$ ). Les conditions aux limites étant symétriques selon l'axe de rotation de l'échantillon supposé cylindrique, nous avons choisi de modéliser les transferts de chaleur au sein du milieu dans le cadre d'une configuration 2D axisymétrique. Cette simplification du problème permet d'envisager une résolution du problème dans un temps de calcul compatible avec une étude d'identification. Cette configuration, réaliste mais exigeante en terme de maîtrise des conditions expérimentales, va servir de base pour de futures études. Ainsi, le système étudié correspond à une tranche (couleur verte) de cylindre (cf. Fig. 1.13).



**Fig. 1.13.** Représentation de la configuration 2D axisymétrique étudiée et des conditions aux limites

### 1.5.1 Equations conducto-radiatives couplées

Le problème physique traité peut être décrit par un ensemble d'équations aux dérivées partielles (EDP) qui prédisent l'évolution de la température et du rayonnement incident dans l'espace et dans le temps. La méthode P1 (adaptée aux milieux optiquement épais Modest [2013]) établit une relation entre le rayonnement incident et la température,

$$\kappa \cdot [G - 4 \cdot \pi \cdot L^0(T)] = -\text{div}(\vec{q}_r) = -\text{div}\left[-\frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \vec{\text{grad}}(G)\right] \quad (1.78)$$

Compte tenu de l'équation (1.78), les transferts de chaleur au sein de matériaux semi-transparentes peuvent être décrits par le couplage entre l'équation de bilan d'éner-

gie (1.79) et l'équation de transfert radiatif (ETR) (1.80) :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{q}_c + \vec{q}_r) \quad (1.79)$$

$$0 = \text{div}[\overrightarrow{\text{grad}}(G)] - 3 \cdot \kappa^2 \cdot (G - 4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4) \quad (1.80)$$

En coordonnées cylindriques, ces deux EDP couplées peuvent s'écrire comme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\kappa}{\rho \cdot C_p} \cdot (G - 4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4) \quad (1.81)$$

$$0 = \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right) - 3 \cdot \kappa^2 \cdot (G - 4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4) \quad (1.82)$$

D'après l'hypothèse liée à l'axisymétrie du problème, ces équations deviennent :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\kappa}{\rho \cdot C_p} \cdot (G - 4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4) \quad (1.83)$$

$$0 = \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right) - 3 \cdot \kappa^2 \cdot (G - 4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4) \quad (1.84)$$

### 1.5.2 Conditions initiales

En coordonnées cylindriques et selon l'hypothèse de 2D axisymétrie, les conditions initiales correspondent à :

$$\forall (r, z), \text{ à } t = 0 : T(r, z) = T_{ini} \quad (1.85)$$

### 1.5.3 Conditions aux limites

En coordonnées cylindriques et selon l'hypothèse de 2D axisymétrie, les conditions aux limites s'appliquant à  $T$  et  $G$  sont (Lemonnier [2015]) :

$$\forall (r, t), z = 0 : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) = \begin{cases} \frac{q_0''(r)}{t_p} - h \cdot (T - T_\infty), & 0 < t \leq t_p \\ -h \cdot (T - T_\infty), & t > t_p \end{cases} \\ -\frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \quad (1.86)$$

Où  $q_0''(r) = 0$  si  $r > r_{laser}$ .

$$\forall (r, t), z = H : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) = h \cdot (T - T_\infty) \\ \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \quad (1.87)$$

$$\forall (z, t), r = 0 : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \\ -\frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.88)$$

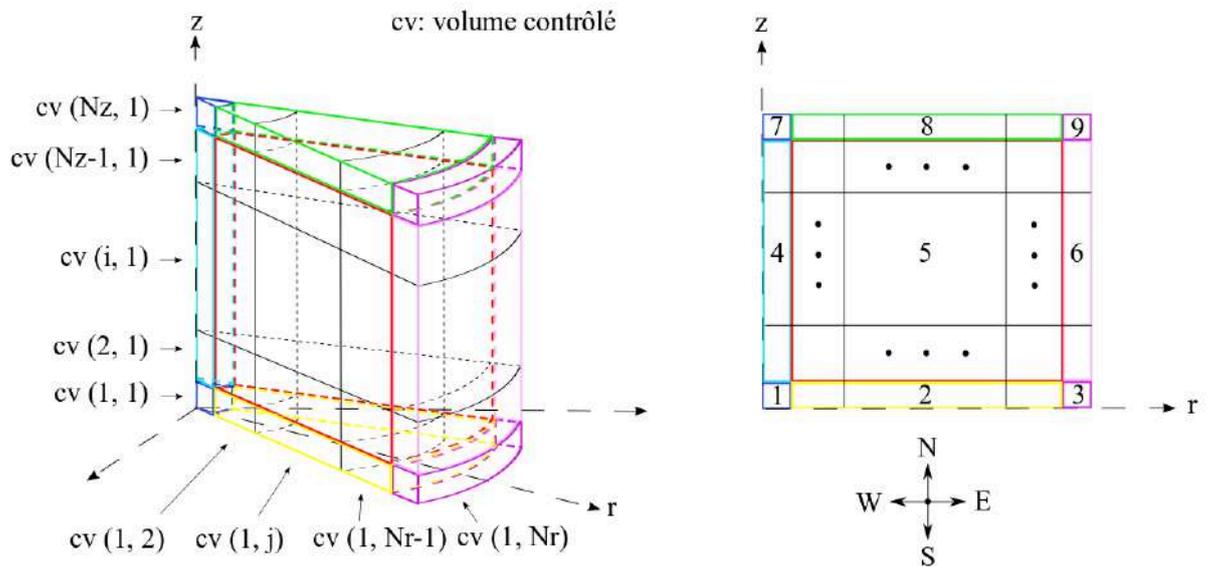
$$\forall (z, t), r = R : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) = h \cdot (T - T_\infty) \\ \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \quad (1.89)$$

#### 1.5.4 Distribution des maillages

Selon les différents types de conditions aux limites, une tranche de cylindre est divisée en 9 parties qui sont représentées par des couleurs différentes (cf. Fig. 1.14).

- Zone n°1 (intersection bleu-jaune), n°2 (jaune), n°3 (intersection jaune-violet)
- Zone n°4 (intersection bleu-rouge), n°5 (rouge), n°6 (intersection rouge-violet)
- Zone n°7 (intersection bleu-vert), n°8 (vert), n°9 (intersection vert-violet)

Les parties n°1, n°3, n°7 et n°9 ne contiennent qu'un seul volume de contrôle. Les autres parties du domaine contiennent plusieurs volumes contrôlés. Les nœuds se situent au centre de chaque volume de contrôle. La distribution des nœuds dans le plan vertical  $r - z$  et dans le plan horizontal  $r - \theta$  sont illustrées dans la Fig. 1.15 et la Fig. 1.16.



**Fig. 1.14.** Représentation du maillage, des volumes de contrôle et des indices utilisés dans le domaine de calcul

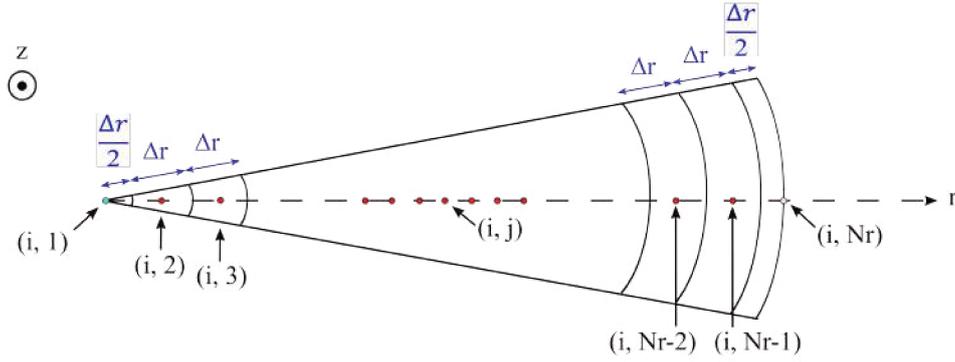


Fig. 1.15. Distribution des nœuds et des volumes de contrôle dans le plan horizontal  $r - \theta$

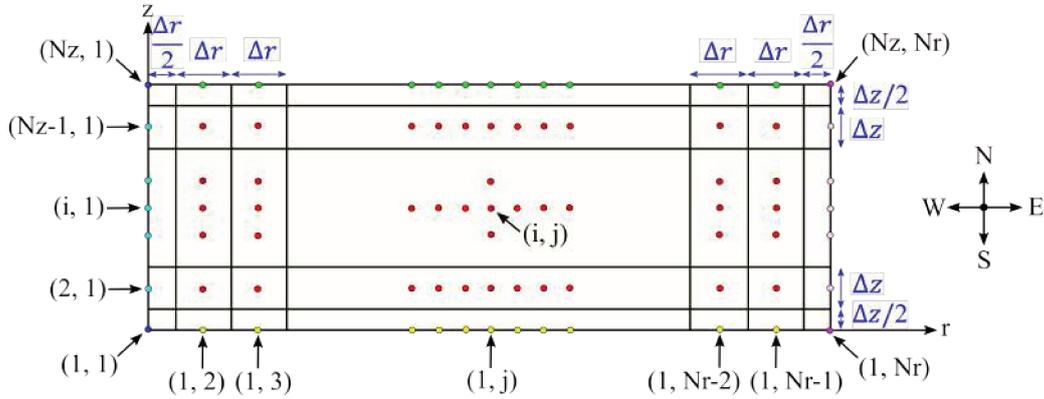


Fig. 1.16. Distribution des nœuds et des volumes de contrôle dans le plan vertical  $r - z$

## 1.6 Résolution du modèle direct 2D axisymétrique

### 1.6.1 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis consiste à intégrer, sur des volumes de contrôle, les équations. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation, elle est de ce fait très utilisée en mécanique des fluides (Li [2005] : 10-13).

### 1.6.2 Application au problème étudié

L'équation (1.79) peut être aussi écrite sous la forme suivante :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{q}_c + \vec{q}_r) = -\left[ \text{div}(\vec{q}_c) + \text{div}(\vec{q}_r) \right] \quad (1.90)$$

D'après respectivement la loi de Fourier et la méthode P1, on peut exprimer les flux conductif et radiatif selon les expressions suivantes :

$$\vec{q}_c = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (1.91)$$

$$\vec{q}_r = -\frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(G) \quad (1.92)$$

Alors

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} \left[ \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right] + \text{div} \left[ \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(G) \right] \quad (1.93)$$

Nous appliquons une intégration temporelle et une intégration volumique à l'équation (1.93) (Jia [2016]) :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt &= \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint \text{div} \left[ \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right] \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt}_{(1)} + \\ &\quad \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint \text{div} \left[ \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(G) \right] \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt}_{(2)} \end{aligned} \quad (1.94)$$

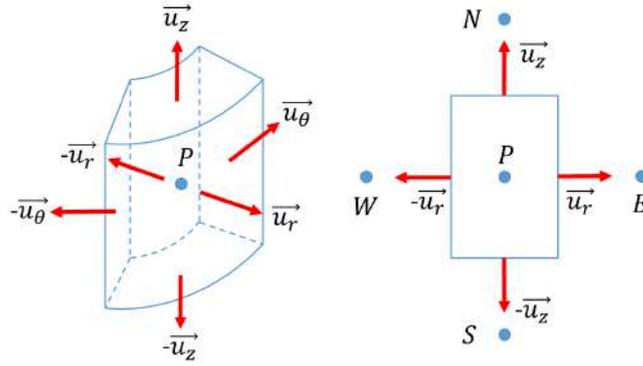
Nous introduisons ici l'angle d'azimut  $\theta$  par cohérence de définition du volume de contrôle, mais cela ne contredit pas l'hypothèse 2D axisymétrique : en fait,  $\theta$  est éliminé dans les équations suivantes. D'après la formule de Green-Ostrogradski, et compte tenu du repère utilisé (cf. Fig.1.17), (1) et (2) dans l'équation (1.94) deviennent respectivement :

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint \text{div} \left[ \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right] \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left( \left[ \lambda_n \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n \cdot \vec{u}_z \right] \cdot \vec{u}_z \cdot S_n + \left[ \lambda_s \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \cdot \vec{u}_z \right] \cdot (-\vec{u}_z) \cdot S_s \right) dt \\ &\quad + \int_t^{t+\Delta t} \left( \left[ \lambda_e \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e \cdot \vec{u}_r \right] \cdot \vec{u}_r \cdot S_e + \left[ \lambda_w \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \cdot \vec{u}_r \right] \cdot (-\vec{u}_r) \cdot S_w \right) dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left( \lambda \cdot \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right] \cdot S_n + \lambda \cdot \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e \cdot S_e - \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \cdot S_w \right] \right) dt \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint \text{div} \left[ \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(G) \right] \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left( \left[ \left( \frac{1}{3 \cdot \kappa} \right)_n \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_n \cdot \vec{u}_z \right] \cdot \vec{u}_z \cdot S_n + \left[ \left( \frac{1}{3 \cdot \kappa} \right)_s \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_s \cdot \vec{u}_z \right] \cdot (-\vec{u}_z) \cdot S_s \right) dt \\ &\quad + \int_t^{t+\Delta t} \left( \left[ \left( \frac{1}{3 \cdot \kappa} \right)_e \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_e \cdot \vec{u}_r \right] \cdot \vec{u}_r \cdot S_e + \left[ \left( \frac{1}{3 \cdot \kappa} \right)_w \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_w \cdot \vec{u}_r \right] \cdot (-\vec{u}_r) \cdot S_w \right) dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_n - \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_s \right] \cdot S_n + \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_e \cdot S_e - \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_w \cdot S_w \right] \right) dt \end{aligned} \quad (1.96)$$

De plus, le terme instationnaire dans l'équation (1.94) peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt &\approx \iiint \left( \left[ \int_t^{t+\Delta t} \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \right] \right) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \\ &\approx \iiint \left( \left[ \int_t^{t+\Delta t} \rho \cdot C_p \cdot \frac{T_P^{n+1} - T_P^n}{\Delta t} \cdot dt \right] \right) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz = \rho \cdot C_p \cdot (T_P^{n+1} - T_P^n) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (1.97)$$



**Fig. 1.17.** Illustration d'un volume de contrôle, du repère et des notations utilisées

Donc l'équation (1.94) devient :

$$\begin{aligned}
 \rho \cdot C_p \cdot (T_P^{n+1} - T_P^n) \cdot \Delta V &= \int_t^{t+\Delta t} \left( \lambda \cdot \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n - \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s \right] \cdot S_n \right) dt \\
 &+ \int_t^{t+\Delta t} \left( \lambda \cdot \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e \cdot S_e - \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \cdot S_w \right] \right) dt \\
 &+ \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_n - \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_s \right] \cdot S_n \right) dt \\
 &+ \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_e \cdot S_e - \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_w \cdot S_w \right] \right) dt
 \end{aligned} \tag{1.98}$$

Ici, un schéma centré d'ordre 2 est utilisé pour l'approximation des dérivées premières de  $T$  et  $G$  apparues dans l'équation (1.94) :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_n = \frac{T_N - T_P}{\Delta z}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s = \frac{T_P - T_S}{\Delta z}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e = \frac{T_E - T_P}{\Delta r}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w = \frac{T_P - T_W}{\Delta r} \tag{1.99}$$

$$\left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_n = \frac{G_N - G_P}{\Delta z}, \quad \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_s = \frac{G_P - G_S}{\Delta z}, \quad \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_e = \frac{G_E - G_P}{\Delta r}, \quad \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_w = \frac{G_P - G_W}{\Delta r} \tag{1.100}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \rho \cdot C_p \cdot (T_P^{n+1} - T_P^n) \cdot \Delta V &= \int_t^{t+\Delta t} \left( \lambda \cdot \left[ \frac{T_N - T_P}{\Delta z} - \frac{T_P - T_S}{\Delta z} \right] \cdot S_n \right) dt \\
 &+ \int_t^{t+\Delta t} \left( \lambda \cdot \left[ \frac{T_E - T_P}{\Delta r} \cdot S_e - \frac{T_P - T_W}{\Delta r} \cdot S_w \right] \right) dt \\
 &+ \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left[ \frac{G_N - G_P}{\Delta z} - \frac{G_P - G_S}{\Delta z} \right] \cdot S_n \right) dt \\
 &+ \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left[ \frac{G_E - G_P}{\Delta r} \cdot S_e - \frac{G_P - G_W}{\Delta r} \cdot S_w \right] \right) dt
 \end{aligned} \tag{1.101}$$

Compte tenu des Fig. 1.15, Fig. 1.16 et Fig. 1.17, l'expression des différentes surfaces délimitant le volume de contrôle sont calculées et affichées dans le Tableau 1.7.

$i = 1$ ou $i = N_z$			
Surface	$j = 1$	$2 \leq j \leq N_r - 1$	$j = N_r$
$S_n = S_s$	$\frac{(\Delta r)^2 \cdot \Delta \theta}{8}$	$(j - 1) \cdot (\Delta r)^2 \cdot \Delta \theta$	$(N_r - 1) \cdot (\Delta r)^2 \cdot \Delta \theta$
$S_e$	$\frac{\Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z}{4}$	$\left(j - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \frac{\Delta z}{2}$	$(N_r - 1) \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \frac{\Delta z}{2}$
$S_w$	0	$\left(j - \frac{3}{2}\right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \frac{\Delta z}{2}$	$\left(N_r - \frac{3}{2}\right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \frac{\Delta z}{2}$

$2 \leq i \leq N_z - 1$			
Surface	$j = 1$	$2 \leq j \leq N_r - 1$	$j = N_r$
$S_n = S_s$	$\frac{(\Delta r)^2 \cdot \Delta \theta}{8}$	$(j - 1) \cdot (\Delta r)^2 \cdot \Delta \theta$	$(N_r - 1) \cdot (\Delta r)^2 \cdot \Delta \theta$
$S_e$	$\frac{\Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z}{2}$	$\left(j - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z$	$(N_r - 1) \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z$
$S_w$	0	$\left(j - \frac{3}{2}\right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z$	$\left(N_r - \frac{3}{2}\right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta \cdot \Delta z$

TABLEAU 1.7 – Expressions de différentes surfaces d'un volume de contrôle selon leurs directions

### 1.6.3 Résolution de la partie conductive

#### Equation principale

Pour calculer les intégrations apparues dans l'équation (1.101), il faut approcher l'évolution de la température et du rayonnement incident aux différents nœuds selon le temps. La forme générale de la température moyenne approchée pendant  $\Delta t$  peut s'écrire comme (Li [2005] : 118-120) :

$$\overline{T_P} = \eta \cdot T_P^{n+1} + (1 - \eta) \cdot T_P^n, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (1.102)$$

Pour un nœud quelconque  $P$ ,  $T_P^n$  représente sa température à l'instant  $t$  et  $T_P^{n+1}$  représente sa température à l'instant  $t + \Delta t$ . En général, il existe 3 schémas selon des différentes valeurs de  $\eta$  :

- $\eta = 0$ , celui-ci correspond à un schéma explicite.
- $\eta = 1$ , celui-ci correspond à un schéma implicite.
- $0 \leq \eta \leq 1$ , celui-ci correspond à un schéma Crank-Nicolson (schéma C-N).

Ici, nous choisissons  $\eta = 1$ . Donc l'intégration de la température d'un nœud quel-

conque devient :

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{T_P} dt = \int_t^{t+\Delta t} [\eta \cdot T_P^{n+1} + (1 - \eta) \cdot T_P^n] dt = T_P^{n+1} \cdot \Delta t \quad (1.103)$$

En appliquant cette nouvelle approximation d'intégration à l'équation (1.101), nous avons :

$$\begin{aligned} \rho \cdot C_p (T_P^{n+1} - T_P^n) \cdot \Delta V &= \frac{\lambda \cdot S_n \cdot \Delta t}{\Delta z} \cdot [(T_N^{n+1} - T_P^{n+1}) - (T_P^{n+1} - T_S^{n+1})] \\ &+ \frac{\lambda \cdot \Delta t}{\Delta r} \cdot [(T_E^{n+1} - T_P^{n+1}) \cdot S_e - (T_P^{n+1} - T_W^{n+1}) \cdot S_w] \\ &+ \frac{S_n \cdot \Delta t}{3 \cdot \kappa \cdot \Delta z} \cdot [(G_N^{n+1} - G_P^{n+1}) - (G_P^{n+1} - G_S^{n+1})] \\ &+ \frac{\Delta t}{3 \cdot \kappa \cdot \Delta r} \cdot [(G_E^{n+1} - G_P^{n+1}) \cdot S_e - (G_P^{n+1} - G_W^{n+1}) \cdot S_w] \end{aligned} \quad (1.104)$$

Puisque le problème étudié contient un couplage conducto-radiatif, la résolution itérative (Li [2001]) du couplage de l'équation d'énergie et de l'ETR est réalisée en deux étapes successives :

- résoudre la partie conductive en supposant que le rayonnement incident est connu (*e.g.*  $G_P^{n+1} = G_P^n$ ),
- résoudre la partie radiative en utilisant les résultats obtenus dans la partie conductive. Pour chaque étape, la résolution est effectuée par balayage d'«ouest» en «est» (i.e. dans le sens des  $j$  positifs) et du «sud» vers le «nord» (i.e. dans le sens des  $i$  positifs).

Rappelons qu'il existe 9 parties de volumes contrôlés dans une tranche de cylindre, pour lesquelles une série de résolutions basant sur l'équation principale (1.104) sera mise en œuvre pour la suite.

### Système tri-diagonal : partie n°5

La résolution de la partie n°5 est implémentée dans un premier temps parce qu'aucune condition aux limites n'est liée à cette partie. D'après le Tableau 1.7, l'équation (1.104) peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \rho \cdot C_p \frac{(T_P^{n+1} - T_P^n) \cdot (j - 1)}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\Delta z^2} \cdot [(T_N^{n+1} - T_P^{n+1}) - (T_P^{n+1} - T_S^{n+1})] \cdot (j - 1) \\ &+ \frac{\lambda}{\Delta r^2} \cdot [(T_E^{n+1} - T_P^{n+1}) \cdot (j - \frac{1}{2}) - (T_P^{n+1} - T_W^{n+1}) \cdot (j - \frac{3}{2})] \\ &+ \frac{1}{3 \cdot \kappa \cdot \Delta z^2} \cdot [(G_N^{n+1} - G_P^{n+1}) - (G_P^{n+1} - G_S^{n+1})] \cdot (j - 1) \\ &+ \frac{1}{3 \cdot \kappa \cdot \Delta r^2} \cdot [(G_E^{n+1} - G_P^{n+1}) \cdot (j - \frac{1}{2}) - (G_P^{n+1} - G_W^{n+1}) \cdot (j - \frac{3}{2})] \end{aligned} \quad (1.105)$$

Un adimensionnement de l'équation (1.105) est mis en œuvre en utilisant des variables adimensionnelles définies ci-dessous et nous obtenons ( $h_e = R/H$ ) :

$$z' = \frac{z}{H}, \quad r' = \frac{r}{R}, \quad t' = \frac{\alpha t}{H^2}, \quad T' = \frac{T}{T_{ini}}, \quad G' = \frac{G}{4 \cdot n^2 \cdot \sigma T_{ini}^4}, \quad (q_0'')' = \frac{q_0'' \cdot H}{t_p \cdot \lambda \cdot T_{ini}} \quad (1.106)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{j-1}{(\Delta z')^2} + \frac{j-1}{(\Delta z')^2} + \frac{j-\frac{1}{2}}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} + \frac{j-\frac{3}{2}}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} + \frac{j-1}{\Delta t'} \right] \cdot T_P'^{n+1} &= \frac{j-1}{(\Delta z')^2} \cdot T_N'^{n+1} \\ &+ \frac{j-1}{(\Delta z')^2} \cdot T_S'^{n+1} + \frac{j-\frac{1}{2}}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} \cdot T_E'^{n+1} + \frac{j-\frac{3}{2}}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} \cdot T_W'^{n+1} + \frac{j-1}{(\Delta t')} \cdot T_P'^n \\ &+ \frac{j-1}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_N'^n - 2 \cdot G_P'^n + G_S'^n}{(\Delta z')^2} + \frac{j-\frac{1}{2}}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_E'^n - G_P'^n}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} - \frac{j-\frac{3}{2}}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_P'^n - G_W'^n}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} \end{aligned} \quad (1.107)$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{j-1}{(\Delta z')^2}, \quad a_S = \frac{j-1}{(\Delta z')^2}, \quad a_E = \frac{j-\frac{1}{2}}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_W = \frac{j-\frac{3}{2}}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_P^0 = \frac{j-1}{\Delta t'} \\ G_P^0 &= \frac{j-1}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_N'^n - 2 \cdot G_P'^n + G_S'^n}{(\Delta z')^2} + \frac{j-\frac{1}{2}}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_E'^n - G_P'^n}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} - \frac{j-\frac{3}{2}}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_P'^n - G_W'^n}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} \\ P^0 &= a_P^0 \cdot T_P'^n, \quad a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0, \quad CL = 0, \quad b = P^0 + G_P^0 + CL \end{aligned} \quad (1.108)$$

Alors le système diagonal pour la partie n°5 devient :

$$a_P \cdot T_P'^{n+1} = a_N \cdot T_N'^{n+1} + a_S \cdot T_S'^{n+1} + a_E \cdot T_E'^{n+1} + a_W \cdot T_W'^{n+1} + b \quad (1.109)$$

Dans le but de faciliter la résolution, le système ci-dessus est transformé en un système tri-diagonal (Li [2005] : 110) en supposant que  $T_N'^{n+1} \approx T_N'^n$ ,  $T_S'^{n+1} \approx T_S'^n$ . Finalement, nous obtenons le système tri-diagonal pour la partie n°5 :

$$-a_E \cdot T_E'^{n+1} + a_P \cdot T_P'^{n+1} - a_W \cdot T_W'^{n+1} = a_N \cdot T_N'^n + a_S \cdot T_S'^n + b \quad (1.110)$$

La résolution d'un système tri-diagonal est réalisée par l'algorithme de Thomas (Datta [2010], Ford [2015] : 171-174).

## Système tri-diagonal : partie n°1

Pour la partie n°1, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = 0 : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) = \begin{cases} \frac{q_0''(r)}{t_p} - h \cdot (T - T_\infty), & 0 < t \leq t_p \\ -h \cdot (T - T_\infty), & t > t_p \end{cases} \\ -\frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \quad (1.111)$$

$$\forall (z, t), r = 0 : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \\ -\frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.112)$$

Comme le transfert de chaleur au sein du milieu est axisymétrique, alors

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w = \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_w = 0 \quad (1.113)$$

De plus,

$$\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s = \begin{cases} -\frac{q_0''(r)}{t_p \cdot \lambda} - \frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot \left[ G_P^{n+1} - 4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot (T_P^{n+1})^4 \right] + \frac{h}{\lambda} \cdot (T_P^{n+1} - T_\infty), & 0 < t \leq t_p \\ -\frac{1}{2 \cdot \lambda} \cdot \left[ G_P^{n+1} - 4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot (T_P^{n+1})^4 \right] + \frac{h}{\lambda} \cdot (T_P^{n+1} - T_\infty), & t > t_p \end{cases} \quad (1.114)$$

$$\left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_s = \frac{3 \cdot \kappa}{2} \cdot \left[ G_P^{n+1} - 4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot (T_P^{n+1})^4 \right] \quad (1.115)$$

En remplaçant les termes  $\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w$ ,  $\left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_w$ ,  $\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_s$ ,  $\left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_s$  dans l'équation (1.98) par l'équation (1.113), (1.114) et (1.115) et en appliquant les mêmes procédures de simplifications utilisées avant (Li [2005] : 27-28), nous obtenons finalement le système tri-diagonal pour la partie n°1 :

$$-a_E \cdot T_E'^{n+1} + a_P \cdot T_P'^{n+1} - a_W \cdot T_W'^{n+1} = a_N \cdot T_N'^n + a_S \cdot T_S'^n + b \quad (1.116)$$

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{1}{8 \cdot (\Delta z')^2}, \quad a_S = 0, \quad a_E = \frac{1}{4 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_W = 0, \quad a_P^0 = \frac{1}{16 \cdot \Delta t'} \\ a_{CL} &= \frac{Biot_z}{8 \cdot \Delta z'}, \quad G_P^0 = \frac{1}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \left[ \frac{G_N'^n - G_P'^n}{8 \cdot (\Delta z')^2} + \frac{G_E'^n - G_P'^n}{4 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} \right], \\ P^0 &= a_P^0 \cdot T_P'^n, \quad CL = \frac{(q_0'')'}{8 \cdot \Delta z'} + \frac{Biot_z}{8 \cdot \Delta z'} \cdot T_\infty', \quad Biot_z = \frac{h \cdot H}{\lambda}, \\ a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 + a_{CL}, \quad b = P^0 + G_P^0 + CL \end{aligned} \quad (1.117)$$

**Système tri-diagonal : partie n°2**

Pour la partie n°2, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = 0 : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) = \begin{cases} \frac{q_0''(r)}{t_p} - h \cdot (T - T_\infty), & 0 < t \leq t_p \\ -h \cdot (T - T_\infty), & t > t_p \end{cases} \\ -\frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \quad (1.118)$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°2 est :

$$\begin{aligned} -a_E \cdot T_E'^{n+1} + a_P \cdot T_P'^{n+1} - a_W \cdot T_W'^{n+1} &= a_N \cdot T_N'^n + a_S \cdot T_S'^n + b & (1.119) \\ a_N &= \frac{j-1}{(\Delta z')^2}, \quad a_S = 0, \quad a_E = \frac{j-\frac{1}{2}}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_W = \frac{j-\frac{3}{2}}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_P^0 = \frac{j-1}{2 \cdot \Delta t'} \\ P^0 &= a_P^0 \cdot T_P'^n, \quad G_P^0 = \frac{j-1}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_N'^n - G_P'^n}{(\Delta z')^2} + \frac{j-\frac{1}{2}}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_E'^n - G_P'^n}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} - \frac{j-\frac{3}{2}}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_P'^n - G_W'^n}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} \\ a_{CL} &= \frac{Biot_z}{\Delta z'} \cdot (j-1), \quad CL = \frac{(q_0'')' \cdot (j-1)}{\Delta z'} + \frac{Biot_z}{\Delta z'} \cdot (j-1) \cdot T_\infty', \quad Biot_z = \frac{h \cdot H}{\lambda}, \\ a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 + a_{CL}, \quad b = P^0 + G_P^0 + CL & (1.120) \end{aligned}$$

**Système tri-diagonal : partie n°3**

Pour la partie n°3, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = 0 : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) = \begin{cases} \frac{q_0''(r)}{t_p} - h \cdot (T - T_\infty), & 0 < t \leq t_p \\ -h \cdot (T - T_\infty), & t > t_p \end{cases} \\ -\frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \quad (1.121)$$

$$\forall (z, t), r = R : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) = h \cdot (T - T_\infty) \\ \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \quad (1.122)$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°3 est :

$$-a_E \cdot T_E'^{n+1} + a_P \cdot T_P'^{n+1} - a_W \cdot T_W'^{n+1} = a_N \cdot T_N'^n + a_S \cdot T_S'^n + b \quad (1.123)$$

$$\begin{aligned}
 a_N &= \frac{N_r - 1}{(\Delta z')^2}, \quad a_S = 0, \quad a_E = 0, \quad a_W = \frac{N_r - \frac{3}{2}}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_P^0 = \frac{N_r - 1}{2 \cdot \Delta t'} \\
 P^0 &= a_P^0 \cdot T_P'^n, \quad a_{CL} = \frac{Biot_z}{\Delta z'} \cdot (N_r - 1) + \frac{Biot_r}{2 \cdot \Delta r' \cdot h_e^2} \cdot (N_r - 1), \quad Biot_z = \frac{h \cdot H}{\lambda} \\
 Biot_r &= \frac{h \cdot R}{\lambda}, \quad G_P^0 = \frac{N_r - 1}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_N'^n - G_P'^n}{(\Delta z')^2} - \frac{N_r - \frac{3}{2}}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_P'^n - G_W'^n}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} \\
 CL &= \frac{(q_0'')' \cdot (N_r - 1)}{\Delta z'} + \frac{Biot_z}{\Delta z'} \cdot (N_r - 1) \cdot T_\infty' + \frac{Biot_r}{2 \cdot \Delta r' \cdot h_e^2} \cdot (N_r - 1) \cdot T_\infty' \\
 a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 + a_{CL}, \quad b = P^0 + G_P^0 + CL
 \end{aligned} \tag{1.124}$$

### Système tri-diagonal : partie n°4

Pour la partie n°4, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (z, t), \quad r = 0 : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \\ -\frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \end{cases} \tag{1.125}$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°4 est :

$$-a_E \cdot T_E'^{n+1} + a_P \cdot T_P'^{n+1} - a_W \cdot T_W'^{n+1} = a_N \cdot T_N'^n + a_S \cdot T_S'^n + b \tag{1.126}$$

$$\begin{aligned}
 a_N &= \frac{1}{8 \cdot (\Delta z')^2}, \quad a_S = \frac{1}{8 \cdot (\Delta z')^2}, \quad a_E = \frac{1}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_W = 0, \\
 a_P^0 &= \frac{1}{8 \cdot \Delta t'}, \quad P^0 = a_P^0 \cdot T_P'^n, \quad CL = 0, \\
 G_P^0 &= \frac{1}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \left[ \frac{G_N'^n - G_P'^n}{8 \cdot (\Delta z')^2} - \frac{G_P'^n - G_S'^n}{8 \cdot (\Delta z')^2} + \frac{G_E'^n - G_P'^n}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} \right] \\
 a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0, \quad b = P^0 + G_P^0 + CL
 \end{aligned} \tag{1.127}$$

### Système tri-diagonal : partie n°6

Pour la partie n°6, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (z, t), \quad r = R : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) = h \cdot (T - T_\infty) \\ \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \tag{1.128}$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°6 est :

$$-a_E \cdot T_E'^{n+1} + a_P \cdot T_P'^{n+1} - a_W \cdot T_W'^{n+1} = a_N \cdot T_N'^n + a_S \cdot T_S'^n + b \tag{1.129}$$

$$\begin{aligned}
 a_N &= \frac{N_r - 1}{(\Delta z')^2}, \quad a_S = \frac{N_r - 1}{(\Delta z')^2}, \quad a_E = 0, \quad a_W = \frac{N_r - \frac{3}{2}}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_P^0 = \frac{N_r - 1}{\Delta t'} \\
 P^0 &= a_P^0 \cdot T_P'^n, \quad G_P^0 = \frac{N_r - 1}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_N'^n - G_P'^n}{(\Delta z')^2} - \frac{N_r - 1}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_P'^n - G_S'^n}{(\Delta z')^2} - \frac{N_r - \frac{3}{2}}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_P'^n - G_W'^n}{h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} \\
 a_{CL} &= \frac{Biot_r}{\Delta r' \cdot h_e^2} \cdot (N_r - 1), \quad CL = \frac{Biot_r}{\Delta r' \cdot h_e^2} \cdot (N_r - 1) \cdot T'_\infty, \quad Biot_r = \frac{h \cdot R}{\lambda}, \\
 a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 + a_{CL}, \quad b = P^0 + G_P^0 + CL
 \end{aligned} \tag{1.130}$$

### Système tri-diagonal : partie n°7

Pour la partie n°7, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = H : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) = h \cdot (T - T_\infty) \\ \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \tag{1.131}$$

$$\forall (z, t), r = 0 : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \\ -\frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \end{cases} \tag{1.132}$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°7 est :

$$-a_E \cdot T_E'^{n+1} + a_P \cdot T_P'^{n+1} - a_W \cdot T_W'^{n+1} = a_N \cdot T_N'^n + a_S \cdot T_S'^n + b \tag{1.133}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 a_N &= 0, \quad a_S = \frac{1}{8 \cdot (\Delta z')^2}, \quad a_E = \frac{1}{4 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_W = 0, \quad a_P^0 = \frac{1}{16 \cdot \Delta t'} \\
 a_{CL} &= \frac{Biot_z}{8 \cdot \Delta z'}, \quad G_P^0 = \frac{1}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \left[ \frac{G_S'^n - G_P'^n}{8 \cdot (\Delta z')^2} + \frac{G_E'^n - G_P'^n}{4 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} \right], \\
 P^0 &= a_P^0 \cdot T_P'^n, \quad CL = \frac{Biot_z}{8 \cdot \Delta z'} \cdot T'_\infty, \quad Biot_z = \frac{h \cdot H}{\lambda}, \\
 a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 + a_{CL}, \quad b = P^0 + G_P^0 + CL
 \end{aligned} \tag{1.134}$$

### Système tri-diagonal : partie n°8

Pour la partie n°8, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = H : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) = h \cdot (T - T_\infty) \\ \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \tag{1.135}$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°8 est :

$$\begin{aligned}
 -a_E \cdot T_E'^{n+1} + a_P \cdot T_P'^{n+1} - a_W \cdot T_W'^{n+1} &= a_N \cdot T_N'^n + a_S \cdot T_S'^n + b & (1.136) \\
 a_N = 0, \quad a_S &= \frac{j-1}{(\Delta z')^2}, \quad a_E = \frac{j-\frac{1}{2}}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_W = \frac{j-\frac{3}{2}}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_P^0 = \frac{j-1}{2 \cdot \Delta t'} \\
 P^0 = a_P^0 \cdot T_P'^n, \quad G_P^0 &= \frac{j-1}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_S'^n - G_P'^n}{(\Delta z')^2} + \frac{j-\frac{1}{2}}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_E'^n - G_P'^n}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} - \frac{j-\frac{3}{2}}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_P'^n - G_W'^n}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} \\
 a_{CL} &= \frac{Biot_z}{\Delta z'} \cdot (j-1), \quad CL = \frac{Biot_z}{\Delta z'} \cdot (j-1) \cdot T'_\infty, \quad Biot_z = \frac{h \cdot H}{\lambda}, \\
 a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 + a_{CL}, \quad b = P^0 + G_P^0 + CL & (1.137)
 \end{aligned}$$

### Système tri-diagonal : partie n°9

Pour la partie n°9, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = H : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) = h \cdot (T - T_\infty) \\ \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \quad (1.138)$$

$$\forall (z, t), r = R : \begin{cases} -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) = h \cdot (T - T_\infty) \\ \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \quad (1.139)$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°9 est :

$$\begin{aligned}
 -a_E \cdot T_E'^{n+1} + a_P \cdot T_P'^{n+1} - a_W \cdot T_W'^{n+1} &= a_N \cdot T_N'^n + a_S \cdot T_S'^n + b & (1.140) \\
 a_N = 0, \quad a_S &= \frac{N_r - 1}{(\Delta z')^2}, \quad a_E = 0, \quad a_W = \frac{N_r - \frac{3}{2}}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_P^0 = \frac{N_r - 1}{2 \cdot \Delta t'} \\
 P^0 = a_P^0 \cdot T_P'^n, \quad a_{CL} &= \frac{Biot_z}{\Delta z'} \cdot (N_r - 1) + \frac{Biot_r}{2 \cdot \Delta r' \cdot h_e^2} \cdot (N_r - 1), \quad Biot_z = \frac{h \cdot H}{\lambda} \\
 Biot_r &= \frac{h \cdot R}{\lambda}, \quad G_P^0 = \frac{N_r - 1}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_S'^n - G_P'^n}{(\Delta z')^2} - \frac{N_r - \frac{3}{2}}{3 \cdot N_{cr}} \cdot \frac{G_P'^n - G_W'^n}{2 \cdot h_e^2 \cdot (\Delta r')^2} & (1.141) \\
 CL &= \frac{Biot_z}{\Delta z'} \cdot (N_r - 1) \cdot T'_\infty + \frac{Biot_r}{2 \cdot \Delta r' \cdot h_e^2} \cdot (N_r - 1) \cdot T'_\infty \\
 a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 + a_{CL}, \quad b = P^0 + G_P^0 + CL
 \end{aligned}$$

### 1.6.4 Résolution de la partie radiative

#### Equation principale

Nous rappelons que le transfert de chaleur radiatif au sein du milieu est décrit par l'ETR :

$$\operatorname{div}[\overrightarrow{\operatorname{grad}}(G)] - 3 \cdot \kappa^2 \cdot (G - 4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4) = 0 \quad (1.142)$$

En appliquant une intégration temporelle et une intégration volumique, l'équation (1.142) devient :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint \operatorname{div}[\overrightarrow{\operatorname{grad}}(G)] \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt - 3 \cdot \kappa^2 \cdot \int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint G \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt \\ + 12 \cdot \kappa^2 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot \int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint T^4 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (1.143)$$

Selon la formule de Green-Ostrogradski, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_e \cdot S_e - \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_w \cdot S_w + \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_n \cdot S_n - \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_s \cdot S_s \right] dt - 3 \cdot \kappa^2 \cdot \\ \int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint G \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt + 12 \cdot \kappa^2 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot \int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint T^4 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (1.144)$$

Le terme  $T^4$  est sorti de l'intégration car il est déjà obtenu, donc l'équation devient :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_e \cdot S_e - \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_w \cdot S_w + \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_n \cdot S_n - \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_s \cdot S_s \right] dt \\ + 12 \cdot \kappa^2 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \Delta V \cdot \Delta t - 3 \cdot \kappa^2 \cdot \int_t^{t+\Delta t} \left( \iiint G \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (1.145)$$

Ici, le rayonnement incident  $G$  est supposé comme constant pendant  $\Delta t$ , celle-ci aura besoin un maillage assez fine, alors l'équation (1.142) finalement devient :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_e \cdot S_e - \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)_w \cdot S_w + \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_n \cdot S_n - \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_s \cdot S_s \right] dt \\ - 3 \cdot \kappa^2 \cdot (G - 4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4) \cdot \Delta V \cdot \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (1.146)$$

Pour la suite, nous allons suivre les mêmes procédures utilisées dans la résolution de la partie conductive.

#### Système tri-diagonal : partie n°5

Nous commençons par la partie n°5 car aucune condition aux limites n'est liée à cette partie. Le système tri-diagonal pour la partie n°5 est :

$$-a_E \cdot G_E'^{n+1} + a_P \cdot G_P'^{n+1} - a_W \cdot G_W'^{n+1} = a_N \cdot G_N'^n + a_S \cdot G_S'^n + B \quad (1.147)$$

$$\begin{aligned}
 a_N &= \frac{(j-1) \cdot h_e^2}{(\Delta z')^2}, \quad a_S = \frac{(j-1) \cdot h_e^2}{(\Delta z')^2}, \quad a_E = \frac{j - \frac{1}{2}}{(\Delta r')^2}, \quad a_W = \frac{j - \frac{3}{2}}{(\Delta r')^2}, \quad a_{CL} = 0 \\
 a_b &= 3 \cdot \tau^2 \cdot h_e^2 \cdot (j-1), \quad a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_{CL} + a_b \\
 CL &= a_{CL} \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad b = a_b \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad B = b + CL
 \end{aligned} \tag{1.148}$$

### Système tri-diagonal : partie n°1

Pour la partie n°1, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = 0 : -\frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \tag{1.149}$$

$$\forall (z, t), r = 0 : -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \tag{1.150}$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°1 est :

$$-a_E \cdot G_E'^{n+1} + a_P \cdot G_P'^{n+1} - a_W \cdot G_W'^{n+1} = a_N \cdot G_N'^n + a_S \cdot G_S'^n + B \tag{1.151}$$

$$\begin{aligned}
 a_N &= \frac{h_e^2}{8 \cdot (\Delta z')^2}, \quad a_S = 0, \quad a_E = \frac{1}{4 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_W = 0, \quad a_{CL} = \frac{3 \cdot \tau \cdot h_e^2}{16 \cdot \Delta z'} \\
 a_b &= \frac{3 \cdot \tau^2 \cdot h_e^2}{16}, \quad a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_{CL} + a_b \\
 CL &= a_{CL} \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad b = a_b \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad B = b + CL
 \end{aligned} \tag{1.152}$$

### Système tri-diagonal : partie n°2

Pour la partie n°2, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = 0 : -\frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \tag{1.153}$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°2 est :

$$-a_E \cdot G_E'^{n+1} + a_P \cdot G_P'^{n+1} - a_W \cdot G_W'^{n+1} = a_N \cdot G_N'^n + a_S \cdot G_S'^n + B \tag{1.154}$$

$$\begin{aligned}
 a_N &= \frac{(j-1) \cdot h_e^2}{(\Delta z')^2}, \quad a_S = 0, \quad a_E = \frac{j - \frac{1}{2}}{2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_W = \frac{j - \frac{3}{2}}{2 \cdot (\Delta r')^2}, \\
 a_{CL} &= \frac{3 \cdot \tau \cdot h_e^2 \cdot (j-1)}{2 \cdot \Delta z'}, \quad a_b = \frac{3 \cdot \tau^2 \cdot h_e^2 \cdot (j-1)}{2}, \\
 a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_{CL} + a_b \\
 CL &= a_{CL} \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad b = a_b \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad B = b + CL
 \end{aligned} \tag{1.155}$$

**Système tri-diagonal : partie n°3**

Pour la partie n°3, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = 0 : -\frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (1.156)$$

$$\forall (z, t), r = R : \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (1.157)$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°3 est :

$$-a_E \cdot G_E'^{n+1} + a_P \cdot G_P'^{n+1} - a_W \cdot G_W'^{n+1} = a_N \cdot G_N'^n + a_S \cdot G_S'^n + B \quad (1.158)$$

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{(N_r - 1) \cdot h_e^2}{(\Delta z')^2}, \quad a_S = 0, \quad a_E = 0, \quad a_W = \frac{N_r - \frac{3}{2}}{2 \cdot (\Delta r')^2}, \\ a_{CL} &= \frac{3 \cdot \tau \cdot h_e^2 \cdot (N_r - 1)}{2 \cdot \Delta z'} + \frac{3 \cdot \tau \cdot h_e \cdot (N_r - 1)}{4 \cdot \Delta r'}, \quad a_b = \frac{3 \cdot \tau^2 \cdot h_e^2 \cdot (N_r - 1)}{2} \\ a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_{CL} + a_b \\ CL &= a_{CL} \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad b = a_b \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad B = b + CL \end{aligned} \quad (1.159)$$

**Système tri-diagonal : partie n°4**

Pour la partie n°4, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (z, t), r = 0 : -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.160)$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°4 est :

$$-a_E \cdot G_E'^{n+1} + a_P \cdot G_P'^{n+1} - a_W \cdot G_W'^{n+1} = a_N \cdot G_N'^n + a_S \cdot G_S'^n + B \quad (1.161)$$

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{h_e^2}{8 \cdot (\Delta z')^2}, \quad a_S = \frac{h_e^2}{8 \cdot (\Delta z')^2}, \quad a_E = \frac{1}{2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_W = 0, \quad a_{CL} = 0 \\ a_b &= \frac{3 \cdot \tau^2 \cdot h_e^2}{8}, \quad a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_{CL} + a_b \\ CL &= a_{CL} \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad b = a_b \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad B = b + CL \end{aligned} \quad (1.162)$$

**Système tri-diagonal : partie n°6**

Pour la partie n°6, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (z, t), r = R : \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (1.163)$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°6 est :

$$-a_E \cdot G_E'^{n+1} + a_P \cdot G_P'^{n+1} - a_W \cdot G_W'^{n+1} = a_N \cdot G_N'^n + a_S \cdot G_S'^n + B \quad (1.164)$$

$$a_N = \frac{(N_r - 1) \cdot h_e^2}{(\Delta z')^2}, \quad a_S = \frac{(N_r - 1) \cdot h_e^2}{(\Delta z')^2}, \quad a_E = 0, \quad a_W = \frac{N_r - \frac{3}{2}}{(\Delta r')^2},$$

$$a_{CL} = \frac{3 \cdot \tau \cdot h_e \cdot (N_r - 1)}{2 \cdot \Delta r'}, \quad a_b = 3 \cdot \tau^2 \cdot h_e^2 \cdot (N_r - 1) \quad (1.165)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_{CL} + a_b$$

$$CL = a_{CL} \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad b = a_b \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad B = b + CL$$

### Système tri-diagonal : partie n°7

Pour la partie n°7, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = H : \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (1.166)$$

$$\forall (z, t), r = 0 : -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.167)$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°7 est :

$$-a_E \cdot G_E'^{n+1} + a_P \cdot G_P'^{n+1} - a_W \cdot G_W'^{n+1} = a_N \cdot G_N'^n + a_S \cdot G_S'^n + B \quad (1.168)$$

$$a_N = 0, \quad a_S = \frac{h_e^2}{8 \cdot (\Delta z')^2}, \quad a_E = \frac{1}{4 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_W = 0, \quad a_{CL} = \frac{3 \cdot \tau \cdot h_e^2}{16 \cdot \Delta z'}$$

$$a_b = \frac{3 \cdot \tau^2 \cdot h_e^2}{16}, \quad a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_{CL} + a_b \quad (1.169)$$

$$CL = a_{CL} \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad b = a_b \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad B = b + CL$$

### Système tri-diagonal : partie n°8

Pour la partie n°8, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = H : \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (1.170)$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°8 est :

$$-a_E \cdot G_E'^{n+1} + a_P \cdot G_P'^{n+1} - a_W \cdot G_W'^{n+1} = a_N \cdot G_N'^n + a_S \cdot G_S'^n + B \quad (1.171)$$

$$\begin{aligned}
 a_N = 0, \quad a_S &= \frac{(j-1) \cdot h_e^2}{(\Delta z')^2}, \quad a_E = \frac{j - \frac{1}{2}}{2 \cdot (\Delta r')^2}, \quad a_W = \frac{j - \frac{3}{2}}{2 \cdot (\Delta r')^2} \\
 a_{CL} &= \frac{3 \cdot \tau \cdot h_e^2 \cdot (j-1)}{2 \Delta z'}, \quad a_b = \frac{3 \cdot \tau^2 \cdot h_e^2 \cdot (j-1)}{2} \\
 a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_{CL} + a_b \\
 CL &= a_{CL} \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad b = a_b \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad B = b + CL
 \end{aligned} \tag{1.172}$$

### Système tri-diagonal : partie n°9

Pour la partie n°9, les conditions aux limites ci-dessous sont considérées :

$$\forall (r, t), z = H : \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \tag{1.173}$$

$$\forall (z, t), r = R : \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \kappa \cdot G = 4 \cdot \kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \tag{1.174}$$

Le système tri-diagonal pour la partie n°9 est :

$$-a_E \cdot G_E'^{n+1} + a_P \cdot G_P'^{n+1} - a_W \cdot G_W'^{n+1} = a_N \cdot G_N'^n + a_S \cdot G_S'^n + B \tag{1.175}$$

$$\begin{aligned}
 a_N = 0, \quad a_S &= \frac{(N_r - 1) \cdot h_e^2}{(\Delta z')^2}, \quad a_E = 0, \quad a_W = \frac{N_r - \frac{3}{2}}{2 \cdot (\Delta r')^2}, \\
 a_{CL} &= \frac{3 \cdot \tau \cdot h_e^2 \cdot (N_r - 1)}{2 \cdot \Delta z'} + \frac{3 \cdot \tau \cdot h_e \cdot (N_r - 1)}{4 \cdot \Delta r'}, \quad a_b = \frac{3 \cdot \tau^2 \cdot h_e^2 \cdot (N_r - 1)}{2} \\
 a_P &= a_N + a_S + a_E + a_W + a_{CL} + a_b \\
 CL &= a_{CL} \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad b = a_b \cdot (T_P'^{n+1})^4, \quad B = b + CL
 \end{aligned} \tag{1.176}$$

Pour la résolution des parties conductive et radiative, le critère de convergence, pour chaque itération temporelle, est :

$$\max |T'^{\text{nouvelle}} - T'^{\text{ancienne}}| < 10^{-4}, \quad \max |G'^{\text{nouveau}} - G'^{\text{ancien}}| < 10^{-4} \tag{1.177}$$

Où  $(T'^{\text{nouvelle}}, G'^{\text{nouveau}})$  et  $(T'^{\text{ancienne}}, G'^{\text{ancien}})$  représentent respectivement les résultats de deux calculs consécutifs au cours de la même itération temporelle.

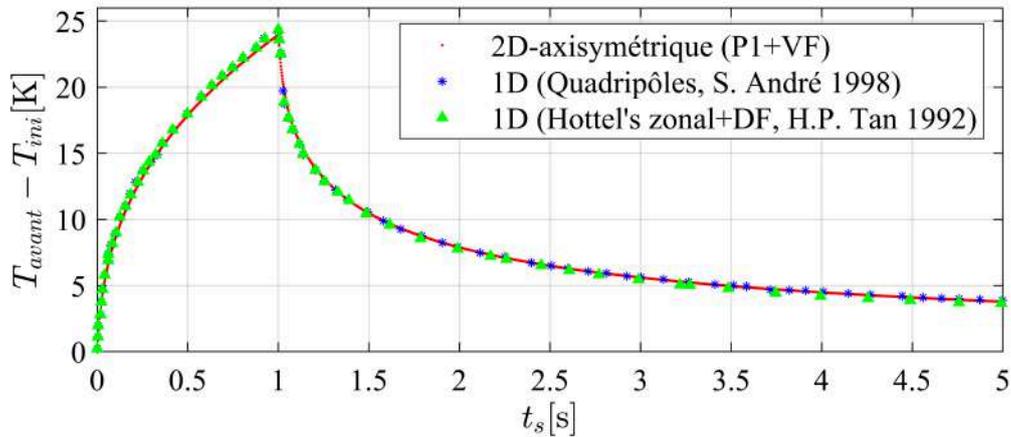
## 1.7 Validation du modèle direct 2D axisymétrique

En se basant sur le modèle physique et les méthodes mentionnées ci-dessus, un code de calcul destiné à la résolution numérique des équations de transfert conducto-radiatif instationnaire est développé en langage C. Etant donné qu'il n'existe pas, à notre connaissance, de résultats de référence pour la configuration 2D axisymétrique, la validation de ce modèle est effectuée en utilisant des données de référence 1D (André and Degiovanni [1998], Tan et al. [1992]) sur un cas dégénéré quasi-1D.

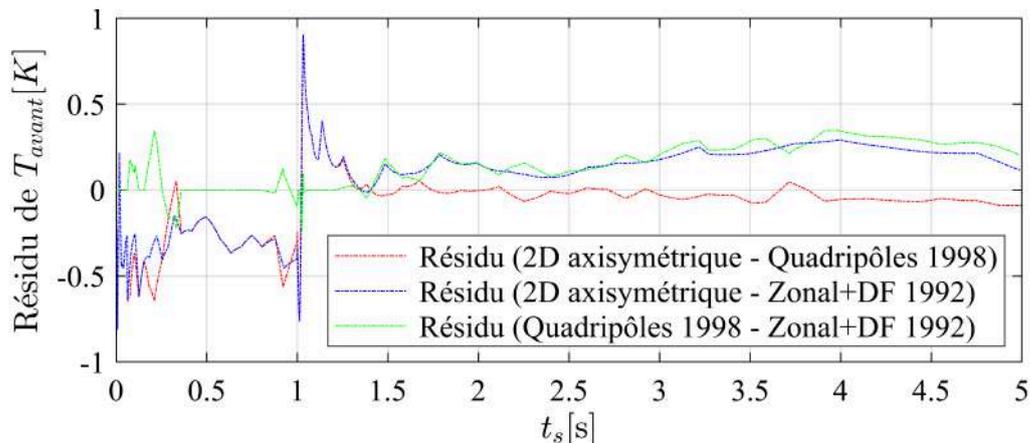
### 1.7.1 Densité de chaleur imposée de type créneau

Dans ce cas, le rapport entre le rayon  $R$  et la hauteur  $H$  est fixé à  $h_e = R/H = 5$  afin de s'approcher au maximum d'une situation 1D, tout en préservant un nombre et un rapport de taille de mailles raisonnable. La convection entre les parois (avant (c. à d.  $z = 0$ ), arrière (c. à d.  $z = H$ )) et l'air ambiant est considérée et l'intégralité de la face avant est soumise à une densité de chaleur constante pendant une durée de 1 seconde.

La Fig. 1.18 (Liu et al. [2018]) présente la comparaison entre les données de référence et celles obtenues par notre modèle 2D axisymétrique en face avant de l'échantillon. Les résultats montrent le bon accord par rapport aux données de référence et le modèle 2D axisymétrique avec une densité de chaleur imposée de type créneau est donc validé.



**Fig. 1.18.** Evolution temporelle de l'augmentation de température en face avant dans le cas où  $N_z = 51$ ,  $N_r = 251$ ,  $N_t = 1.25 \cdot 10^6$ ,  $n = 1.5$ ,  $\lambda = 1.5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho C_p = 2.2 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\kappa = 512 \text{ m}^{-1}$ ,  $T_{ini} = 1000 \text{ K}$ ,  $q_0'' = 5 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $R = 0.05 \text{ m}$ ,  $H = 0.01 \text{ m}$ ,  $t_s = 5 \text{ s}$ ,  $t_p = 1 \text{ s}$ ,  $Bi_r = 0$ ,  $Bi_z = 1.51$



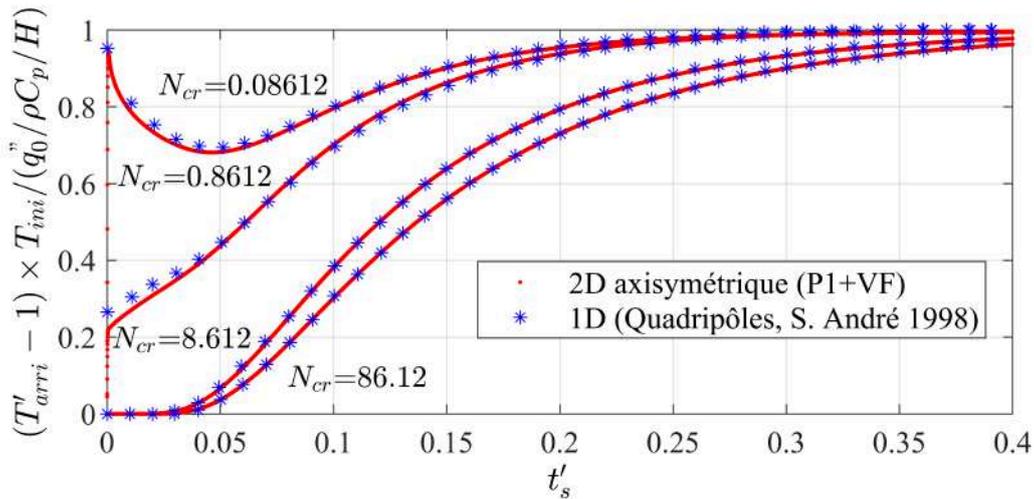
**Fig. 1.19.** Evolution temporelle des résidus de température en face avant dans le cas où  $N_z = 51$ ,  $N_r = 251$ ,  $N_t = 1.25 \cdot 10^6$ ,  $n = 1.5$ ,  $\lambda = 1.5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho C_p = 2.2 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\kappa = 512 \text{ m}^{-1}$ ,  $T_{ini} = 1000 \text{ K}$ ,  $q_0'' = 5 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $R = 0.05 \text{ m}$ ,  $H = 0.01 \text{ m}$ ,  $t_s = 5 \text{ s}$ ,  $t_p = 1 \text{ s}$ ,  $Bi_r = 0$ ,  $Bi_z = 1.51$

La Fig. 1.19 présente une évolution temporelle des résidus de température en face avant entre les 3 modèles (2D-axisymétrique, Quadripôle (S. André, 1998) et Zonal+DF

(H.P. Tan, 1992)). Les données de références sont obtenues en prenant des points sur des courbes par le logiciel WebPlotDigitizer. Nous voyons que la valeur du résidu est dans l'intervalle  $[-0.5, 0.5]$  pendant l'excitation thermique, et puis elle beaucoup diminue dans la phase de relaxation. Ces valeurs correspondent à une faible amplitude du résidu par rapport à l'augmentation de température en face avant. Les "fluctuations" de résidu peuvent être causées par des erreurs de prélèvement des points, surtout visible dans les zones de grandes pentes.

### 1.7.2 Densité de chaleur imposée de type Dirac

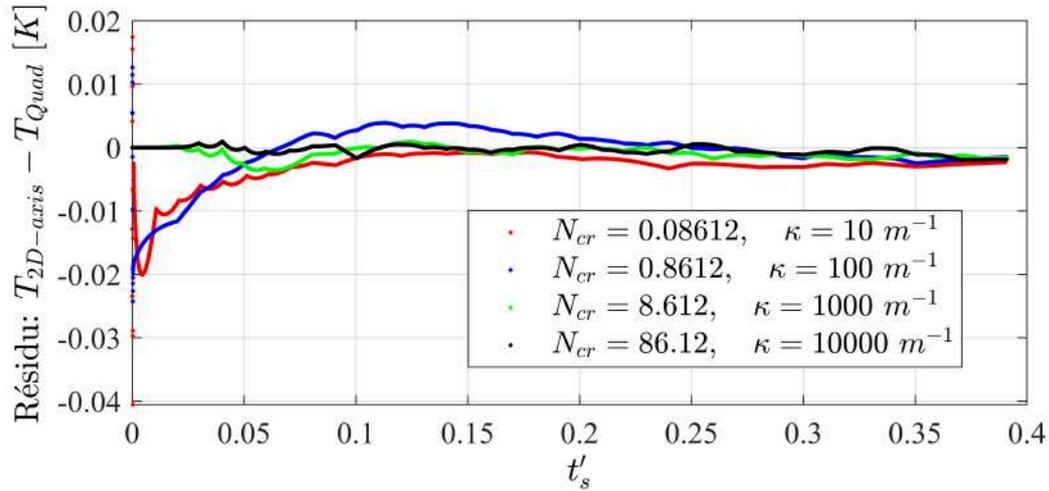
La comparaison porte cette fois-ci sur l'évolution de l'augmentation de la température en face arrière, ce qui constitue un critère de comparaison plus contraignant que précédemment. De plus, l'excitation est quasiment impulsionnelle ( $t_p = 0.001$  s), nécessitant l'utilisation d'un pas de temps de ( $10^{-6}$  s) (comparé à  $10^{-4}$  s) dans le cas impliquant une excitation de type créneau). Cette excitation implique une nouvelle fois l'ensemble de la face avant, et, contrairement au cas précédant aucune convection n'est considérée. Comme discuté plus haut, l'observation se faisant au niveau de la face arrière, le caractère monodimensionnel est plus prononcé, nous imposant un rapport rayon sur hauteur  $h_e = R/H = 10$ .



**Fig. 1.20.** Evolution temporelle de l'augmentation de température en face arrière dans le cas où  $N_z = 51$ ,  $N_r = 201$ ,  $N_t = 8 \cdot 10^7$ ,  $n = 1.0$ ,  $\lambda = 1.0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho C_p = 2.15 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\kappa = 10, 10^2, 10^3, 10^4 \text{ m}^{-1}$ ,  $T_{ini} = 800 \text{ K}$ ,  $q_0'' = 8600 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $R = 0.1 \text{ m}$ ,  $H = 0.01 \text{ m}$ ,  $t_s = 100 \text{ s}$ ,  $t_p = 0.001 \text{ s}$ ,  $Bi_r = Bi_z = 0$

La Fig. 1.20 (Liu et al. [2018]) représente une série de comparaisons entre les données de référence et celles issues du présent modèle. Le modèle est testé pour différentes combinaisons de paramètres représentatifs de l'importance relative du rayonnement vis-à-vis de la conduction ( $N_{cr} = 0.08612; 0.8612; 8.612; 86.12$ ). La Fig. 1.21 présente une évolution temporelle des résidus de température en face arrière pour différentes valeurs de  $\kappa$ . Pour  $\kappa = 10$  et  $100 \text{ m}^{-1}$ , les faibles différences entre le cas 2D axisymétrique dégénéré et la référence sont observées aux premiers instants, ce qui peut être attribué

aux différentes méthodes utilisées dans la résolution directe (l'approximation P1 pour 2D axisymétrique et la méthode à deux flux pour la référence). Pour  $\kappa = 1000$  et  $10000 \text{ m}^{-1}$ , les résultats démontrent cependant un très bon accord entre le cas 2D axisymétrique dégénéré et le modèle 1D. Le modèle 2D axisymétrique avec une densité de chaleur imposée de type Dirac est donc validé.



**Fig. 1.21.** Evolution temporelle des résidus de température en face arrière dans le cas où  $N_z = 51$ ,  $N_r = 201$ ,  $N_t = 8 \cdot 10^7$ ,  $n = 1.0$ ,  $\lambda = 1.0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho C_p = 2.15 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\kappa = 10, 10^2, 10^3, 10^4 \text{ m}^{-1}$ ,  $T_{ini} = 800 \text{ K}$ ,  $q_0'' = 8600 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $R = 0.1 \text{ m}$ ,  $H = 0.01 \text{ m}$ ,  $t_s = 100 \text{ s}$ ,  $t_p = 0.001 \text{ s}$ ,  $Bi_r = Bi_z = 0$

### 1.7.3 Maillage temporel variable

Compte tenu des résultats précédents, et particulièrement dans le cas où une densité de chaleur de type Dirac est imposée, une version du code dans laquelle le pas de temps est variable a été développé. Etant donné la durée d'excitation de l'échantillon ( $10^{-3} \text{ s}$ ), le pas de temps doit être choisi en conséquence. Une étude préalable a montré qu'une valeur du pas de temps  $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$  était optimale (en termes de précision/temps de calculs) pour décrire les phénomènes durant cette phase où les gradients (de température et de luminance) peuvent être localement très importants. Un maillage temporel fin augmente la précision des calculs, mais peut engendrer des temps de calcul prohibitifs. On constate alors qu'au-delà d'un certain temps après la phase d'excitation, le matériau se «relaxe» (i.e. la quantité d'énergie injectée dans le système se distribue), en raison d'une homogénéisation de la température et de la luminance qui conduit le système vers un régime stationnaire. Durant cette phase, les gradients tendent à diminuer. Une valeur faible du pas de temps n'est alors plus pertinente. Par conséquent, une stratégie basée sur un maillage temporel avec un pas de temps variable est proposée ici,

$$\Delta t(n) = \begin{cases} \Delta t_i, & 1 \leq n \leq N_c \\ \Delta t_i \cdot d^{n-N_c}, & N_c \leq n \leq N_t \end{cases} \quad (1.178)$$

Où  $N_c$  est le nombre d'itérations temporelles critique supérieur au-delà duquel le

pas de temps augmente,  $d$  est la raison de suite géométrique qui peut être calculée par les équations suivantes en supposant la valeur du premier pas  $\Delta t_i$  et du dernier pas  $\Delta t_f$ , la durée de simulation  $t_s$  et  $N_c$  fixés :

$$\begin{cases} \Delta t_f = \Delta t_i \cdot d^{N_c - 1} \\ t_s - \Delta t_i \cdot (N_c - 1) = \frac{\Delta t_i - \Delta t_f \cdot d}{1 - d} \end{cases} \quad (1.179)$$

Le Tableau 1.8 présente une comparaison en terme de temps de calcul,  $t_{cpu}$ , entre une version du code à pas de temps constant et une version du code à pas de temps variable, pour différentes valeurs des paramètres  $\Delta t_f$  et  $N_c$ . La configuration correspond à  $N_z = 51$ ,  $N_r = 201$ ,  $n = 1.0$ ,  $\lambda = 1.0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho \cdot C_p = 2.15 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$ ,  $T_{ini} = 800 \text{ K}$ ,  $q_0'' = 8600 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $R = 0.1 \text{ m}$ ,  $H = 0.01 \text{ m}$ ,  $t_s = 80 \text{ s}$ ,  $t_p = 0.001 \text{ s}$ ,  $Bi_r = Bi_z = 0$ ,  $t_{cpu}(\Delta t \text{ constant}) = 70300 \text{ s}$ . L'erreur relative est définie comme la valeur moyenne de la somme des carrés des écarts aux données de référence en 1D (André and Degiovanni [1998]).

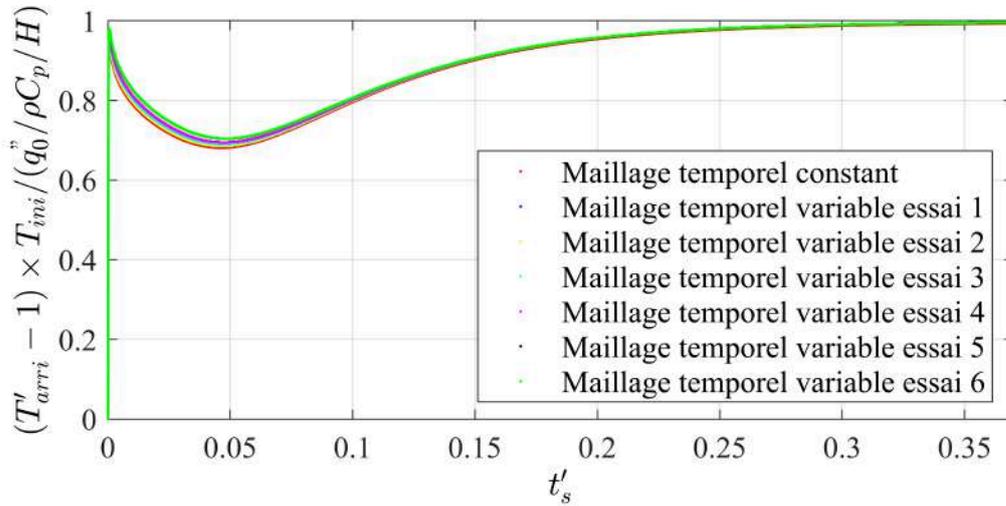
D'après le Tableau 1.8, les différents essais conduisent à une valeur optimum de  $N_c$  qui correspond à une durée critique durant laquelle un pas de temps de  $10^{-6} \text{ s}$  est nécessaire. Au-delà de cette durée ( $N_c \cdot \Delta t_i$ ), le pas de temps peut augmenter selon la suite géométrique définie par l'équation (1.178). Le jeu de paramètres numérique correspondant à l'essai 6 permet ainsi un gain en temps de calcul de 98.41%.

Essai	1	2	3	4	5	6
$\Delta t_i$	$10^{-6} \text{ s}$	$10^{-6} \text{ s}$	$10^{-6} \text{ s}$	$10^{-6} \text{ s}$	$10^{-6} \text{ s}$	$10^{-6} \text{ s}$
$\Delta t_f$	$10^{-5} \text{ s}$	$10^{-5} \text{ s}$	$10^{-4} \text{ s}$	$2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$
$N_c$	$2 \cdot 10^7$	$10^7$	$10^4$	$10^4$	$10^4$	$10^3$
$N_t$	35350569	27849499	3729849	2139552	1211179	1202179
$\ln(d)$	$1.500 \cdot 10^{-7}$	$1.290 \cdot 10^{-7}$	$1.238 \cdot 10^{-6}$	$2.488 \cdot 10^{-6}$	$4.988 \cdot 10^{-6}$	$4.988 \cdot 10^{-6}$
$t_{cpu}(\Delta t_{variable})$	32700s	25798s	3457s	1989s	1123s	1118s
Accélération	53.49%	63.30%	95.08%	97.17%	98.40%	98.41%
Erreur relative	0.0209437	0.0209437	0.0209440	0.0209443	0.0209449	0.0209449

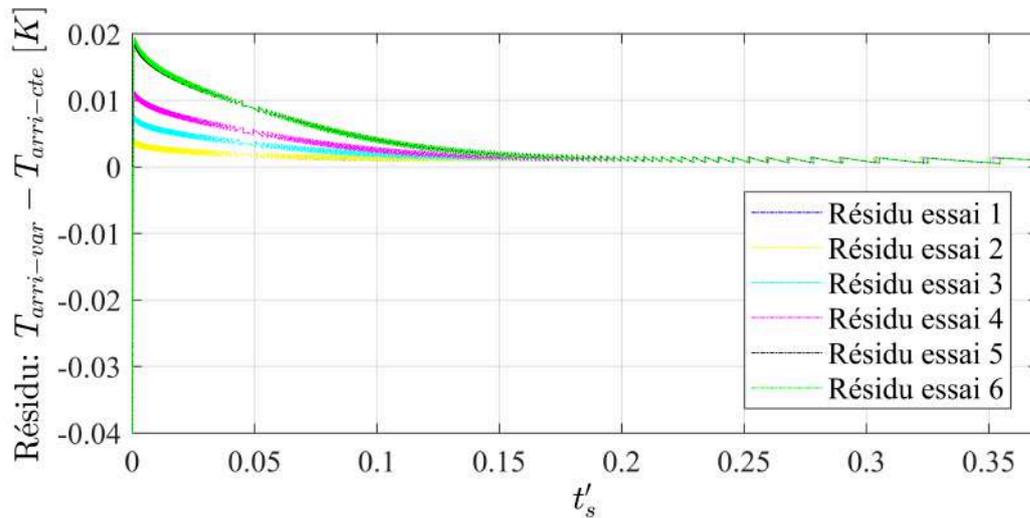
TABLEAU 1.8 – Comparaison des temps de calcul  $t_{cpu}$  entre le maillage temporel à pas de temps constant et le maillage temporel à pas de temps variable

La Fig. 1.22 et la Fig. 1.23 représentent respectivement l'évolution temporelle de l'augmentation de température et l'évolution temporelle des résidus de température en face arrière de l'essai 1 à 6. Au fur et à mesure de la diminution de  $\Delta t_f$  et  $N_c$ , la précision du maillage temporel variable diminue mais les résidus entre les maillages temporels variables et le maillage temporel constant restent dans un intervalle relativement petit.

De plus, ces erreurs sont concentrées dans la phase initiale (de 0 à 0.1 s), ce qui demeure raisonnable car le gradient de flux thermique dans cette zone temporelle critique est important et l'exigence sur la "densité" du maillage est donc élevée.



**Fig. 1.22.** Evolution temporelle de l'augmentation de température en face arrière des essais 1 à 6 dans le cas où  $N_z = 51$ ,  $N_r = 201$ ,  $n = 1.0$ ,  $\lambda = 1.0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\rho C_p = 2.15 \cdot 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$ ,  $T_{ini} = 800 \text{ K}$ ,  $q''_0 = 8600 \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}$ ,  $R = 0.1 \text{ m}$ ,  $H = 0.01 \text{ m}$ ,  $t_s = 80 \text{ s}$ ,  $t_p = 0.001 \text{ s}$ ,  $Bi_r = Bi_z = 0$



**Fig. 1.23.** Evolution temporelle des résidus de température en face arrière des essais 1 à 6 dans le cas où  $N_z = 51$ ,  $N_r = 201$ ,  $n = 1.0$ ,  $\lambda = 1.0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\rho C_p = 2.15 \cdot 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$ ,  $T_{ini} = 800 \text{ K}$ ,  $q''_0 = 8600 \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}$ ,  $R = 0.1 \text{ m}$ ,  $H = 0.01 \text{ m}$ ,  $t_s = 80 \text{ s}$ ,  $t_p = 0.001 \text{ s}$ ,  $Bi_r = Bi_z = 0$

## 1.8 Conclusion

Dans un premier temps, un modèle direct de simulation prenant en compte le couplage des transferts conducto-radiatifs dans une configuration 1D avec des conditions aux limites de type température imposée sans considérer les effets de la convection, est présenté et validé. Tout d'abord, l'approximation P1 est utilisée pour simplifier l'équation de transfert radiatif. Ensuite, la méthode des volumes finis et la méthode des différences finies sont respectivement appliquées pour résoudre des équations couplées. Finalement, les distributions de la température dans le domaine en régime permanent dans différents cas ( $N_{cr} = 0.01, 0.1, 1, 10$  et  $\tau = 1$ ), obtenues par la méthode des volumes finis et la méthode des différences finies, sont comparées à la littérature et puis validées. Ce travail de modélisation directe 1D est considéré comme une étude préliminaire pour l'étude du cas plus complexe (modèle direct conducto-radiatif 2D axisymétrique).

En même temps, la méthode de quadripôle thermique appliquée à 3 modèles différents est présentée. Ces études sont mises en œuvre dans la configuration 1D avec flux imposée à la face avant. Parmi ces 3 modèles, le 2<sup>ème</sup> modèle absorbant, émettant, non diffusant est utilisé comme une référence de validation du modèle conducto-radiatif 2D axisymétrique. En fait, ces travaux (1D) ont été faits par d'autres auteurs et notre intention initiale est de les répéter pour mieux comprendre cette méthode afin de l'appliquer à résoudre le problème 2D axisymétrique. Cependant, certaines difficultés mathématiques nous ont empêché de le mettre en œuvre. Néanmoins, nous donnons encore une brève introduction à cette méthode et à ces travaux ici.

Finalement, un modèle direct de simulation prenant en compte le couplage des transferts conducto-radiatifs dans une configuration 2D axisymétrique soumis à des conditions aux limites de type flux imposé avec refroidissement convectif, est présenté et validé. La résolution couplée de l'équation de transfert radiatif (approximation P1) et de l'équation de la chaleur selon un processus itératif permet la résolution de ce problème couplé dans une configuration de type «méthode flash». Une version améliorée du modèle (pas de temps variable) est présentée à la fin et discutée, notamment en termes de temps de calcul. Ce travail de modélisation directe est destiné à être couplé avec une méthode d'identification de type évolutionnaire dans le but de caractériser simultanément la conductivité thermique  $\lambda$  et le coefficient d'absorption  $\kappa$  de matériaux semi-transparents.



# Chapitre 2

## Dispositif expérimental et modèle d'identification basé sur PSO

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>64</b>
2.1.1	Méthode flash	64
2.1.2	Détermination du coefficient d'atténuation moyen	66
<b>2.2</b>	<b>Algorithme PSO</b>	<b>77</b>
2.2.1	Procédure principale de l'algorithme PSO	78
2.2.2	Paramètres importants de l'algorithme PSO	79
<b>2.3</b>	<b>Test de performance de l'algorithme PSO</b>	<b>82</b>
2.3.1	Fonction objectif	82
2.3.2	Problème d'optimisation 1D et 2D	83
<b>2.4</b>	<b>Test de robustesse de l'algorithme PSO</b>	<b>84</b>
<b>2.5</b>	<b>Application</b>	<b>85</b>
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>88</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, la méthode flash ainsi qu'un dispositif expérimental basé sur la méthode flash sont tout d'abord brièvement introduits. Ensuite, un modèle d'identification basé sur l'algorithme d'optimisation par essais particuliers (PSO) est développé pour identifier simultanément la conductivité thermique et le coefficient d'absorption moyen du matériau semi-transparent. Finalement, ce modèle d'identification basé sur l'algorithme PSO est appliqué à un échantillon réel de PMMA pour montrer sa capacité à résoudre des problèmes réels.

L'idée principale de l'identification est d'ajuster des paramètres à identifier  $\beta$  dans un domaine pour compenser les différences entre le modèle direct ( $T(z = 0, r = 0, t)$ ) et la réalité  $T_{exp}(z = 0, r = 0, t)$  (cf. Fig. 2.1 ci-dessous). Ici, la minimisation de la fonction objectif est réalisée par un algorithme stochastique (PSO).

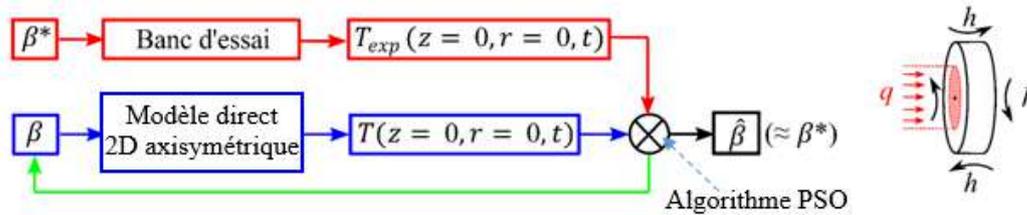


Fig. 2.1. Idée principale de l'identification par l'algorithme PSO

### 2.1.1 Méthode flash

La méthode flash a été proposée par Parker en 1961 (Parker et al. [1961]). Il s'agit d'une méthode associée à un dispositif expérimental permettant d'estimer la diffusivité thermique d'un matériau opaque, homogène et isotrope. Le principe est alors de déposer une quantité d'énergie de manière impulsionnelle sur la face avant d'un échantillon homogène parfaitement isolé de l'environnement. L'évolution de la température en face arrière est mesurée par un thermocouple ou une caméra infra-rouge. Si l'énergie posée est répartie uniformément sur la face avant, alors le transfert de la chaleur dans l'échantillon doit être monodimensionnel. Du fait de l'hypothèse d'isolation, l'énergie déposée se conserve et la température du matériau converge vers une valeur limite. Dans ce cas-là, la diffusivité thermique du matériau peut être calculée par la relation suivante (Milosoevic [2008]) :

$$\alpha = 0.139 \frac{e^2}{t_{0.5}} \quad (2.1)$$

Avec

- $\alpha$  : la diffusivité thermique du matériau
- $e$  : l'épaisseur de l'échantillon

- $t_{0,5}$  : le temps de demi-montée, c'est l'instant où la température de la face arrière devient la moitié de la température limite

Cette méthode a été améliorée progressivement au cours des années suivantes et de nombreuses versions sont apparues. Aujourd'hui, l'expression «méthode flash» représente une classe de méthodes basées sur le principe d'une excitation thermique par rayonnement.

La Fig. 2.2 et la Fig. 2.3 présentent respectivement une photo du banc d'essai utilisé et le schéma de principe de la méthode flash. L'excitation thermique localisée est fournie par un laser CO<sub>2</sub> (GEM-100L-Coherent) dont le signal est centré sur la longueur d'onde de  $10.6 \mu\text{m}$ . Une interface LabVIEW permet de contrôler à la fois la durée et l'émission de puissance du laser et d'assurer la synchronisation entre le laser et la caméra infrarouge. La fréquence d'acquisition de la caméra infrarouge (FLIR SC 7000) est réglée sur  $50 \text{ Hz}$ . Dans un premier temps, la caméra infrarouge est placée en face de l'échantillon pour mieux capturer l'évolution de la température au point central à la face avant. L'angle de déviation de l'échantillon par rapport au faisceau laser est considéré comme petit.

Les sources d'erreur possibles de ce banc d'essai, qui peuvent influencer la précision de mesure expérimentale sont, par exemple, la position et l'angle relatifs de l'échantillon par rapport au laser CO<sub>2</sub>, le temps de refroidissement de l'échantillon après chaque expérience (avant de commencer l'expérience suivante), l'uniformité du revêtement de surface de l'échantillon exposé au laser, le transfert de chaleur au contact du support fixe avec l'échantillon, etc. Des précautions ont été prises afin d'en limiter les effets.

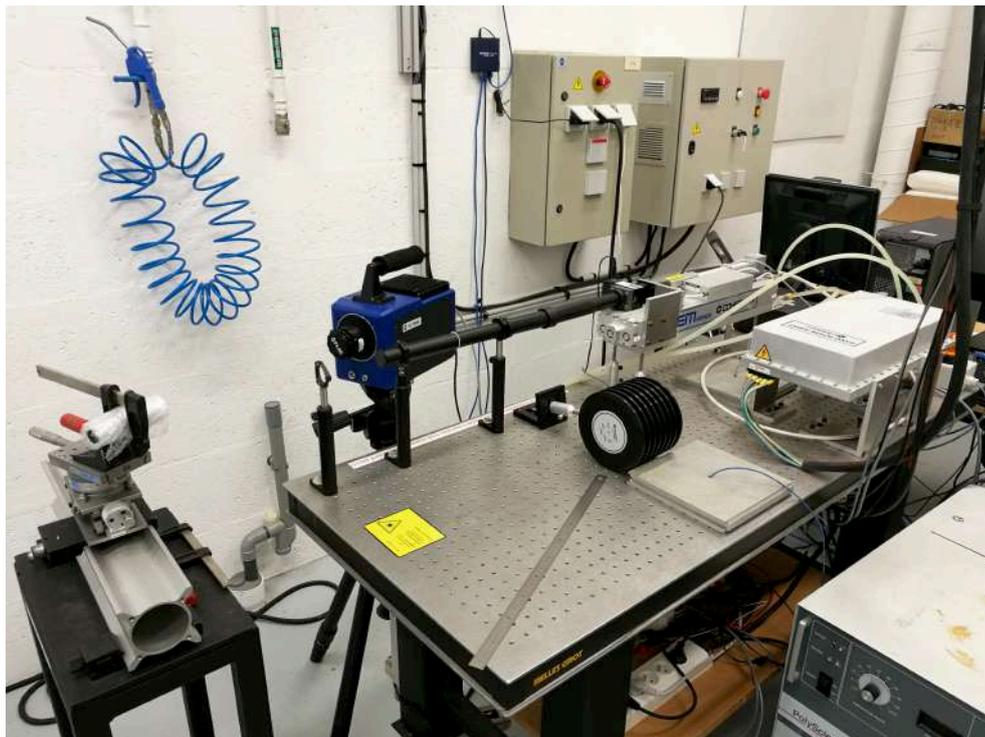


Fig. 2.2. Photographie du banc d'essai

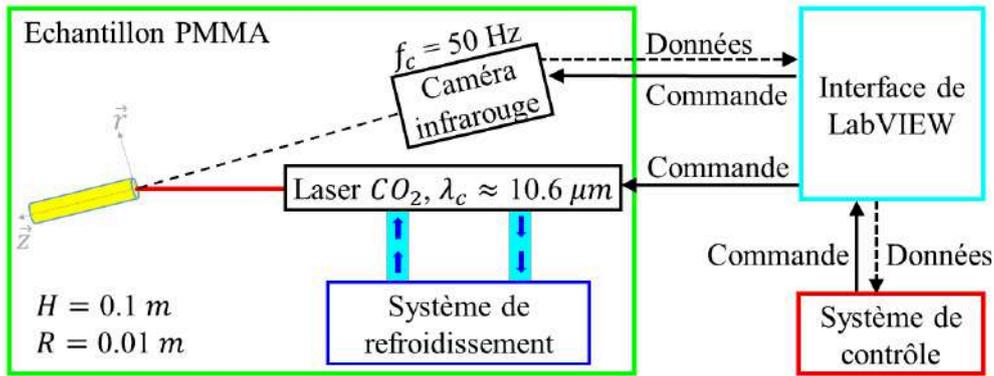


Fig. 2.3. Schéma de l'expérience basé sur le principe de la méthode flash

### 2.1.2 Détermination du coefficient d'atténuation moyen

Cette partie concerne la détermination du coefficient d'extinction moyen  $\kappa$  d'échantillons cylindriques de PMMA au moyen d'un spectromètre à Transformée de Fourier "BRUKER VERTEX V70v" de la marque Bruker (cf. Fig. 2.4).

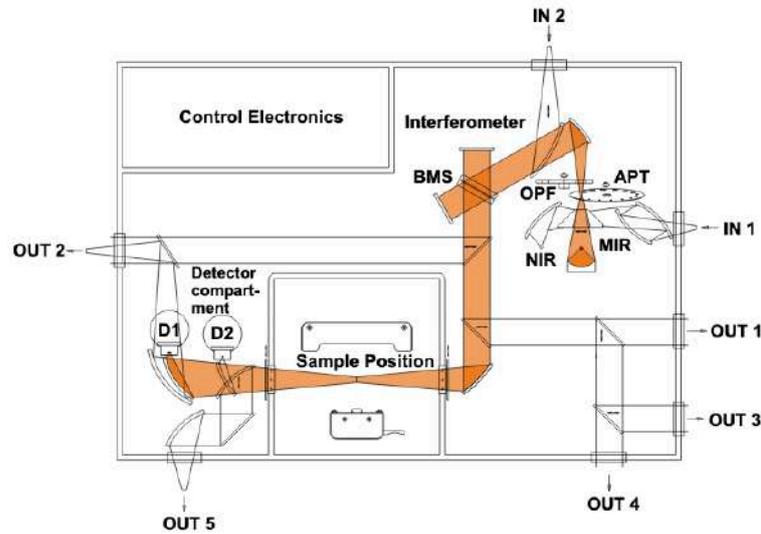


Fig. 2.4. Spectromètre à Transformée de Fourier "BRUKER VERTEX V70v"

#### Principes de mesures

Dans ce dispositif, le rayonnement infra-rouge est émis par une source (ici, un élément de carbure de silicium (SiC Globar)), puis dirigé vers un interféromètre de type Michelson qui module alors l'onde électromagnétique à l'aide d'un dispositif de miroirs fixes et mobiles qui permet, par interférence, de bloquer ou transmettre certaines longueurs d'onde de manière périodique (i.e. la période du miroir mobile). Le rayonnement est ensuite dirigé vers l'échantillon, et le signal transmis ou réfléchi est mesuré par un détecteur (cf. Fig. 2.5). Le signal mesuré, correspondant à un interferogramme (i.e. le rayonnement transmis ou réfléchi en fonction de la position du miroir), est ensuite traité par un algorithme de Transformée de Fourier discrète, pour produire le spectre de transmission ou de réflexion (i.e. le rayonnement transmis ou réfléchi en fonction de la longueur d'onde). Les coefficients de transmission  $\tau_\eta$  et de réflexion  $\rho_\eta$  spectrales ainsi obtenus sont traités pour déterminer le coefficient d'absorption spectral, puis le coefficient d'absorption effectif. Ces estimations sont par la suite comparées aux estimations réalisées au moyen des méthodes développées dans le cadre de ce travail de

thèse, à savoir celle basée sur la méthode PSO (Chapitre 2) et celle basée sur le réseau de neurones artificiels (Chapitre 3).



**Fig. 2.5.** Principe de fonctionnement du spectromètre à Transformée de Fourier "BRUKER VERTEX V70v" de la marque Bruker

La Fig. 2.6 présente les échantillons testés, dont les surfaces avant et arrière ont été polies au moyen de surfaces abrasives de plus en plus fines (selon la nomenclature CAMI : 240, 360 puis 600). La dernière étape a consisté en un polissage circulaire avec une crème à base d'Oxyde de Cérium (1000). L'épaisseur de chaque échantillon est indiquée dans le Tableau 2.1.



**Fig. 2.6.** Épaisseur des échantillons cylindriques de PMMA étudiés

Échantillon	n°1	n°2	n°3
Épaisseur, $H$ [mm]	$3.515 \pm 0.01$	$3.640 \pm 0.01$	$5.205 \pm 0.01$

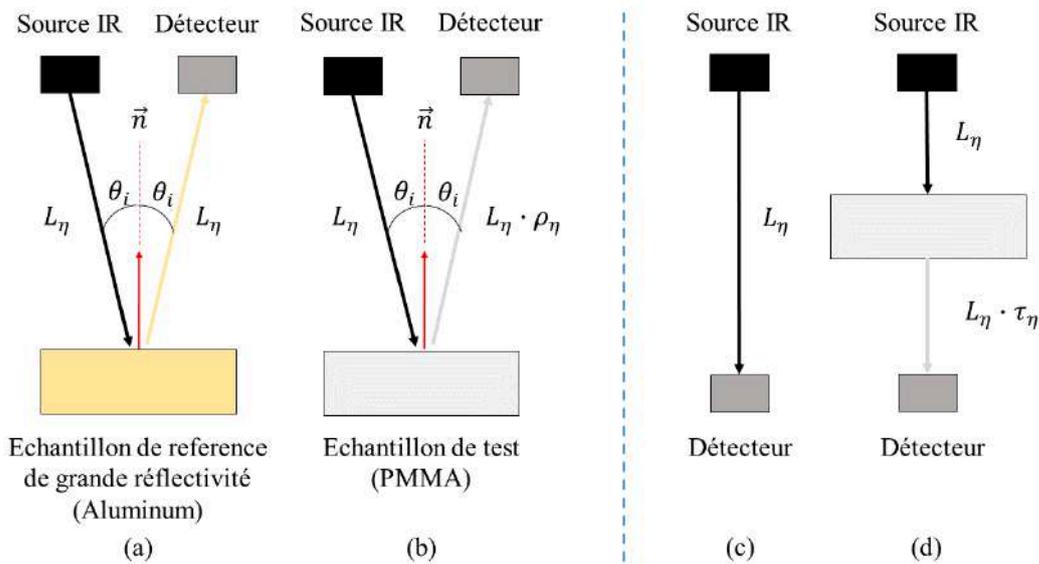
TABLEAU 2.1 – Echantillon cylindrique de PMMA (a) n°1, (b) n°2 et (c) n°3

L'estimation de la transmittivité et de la réflectivité repose sur la mesure d'un signal de référence correspondant à l'interférogramme mesuré sans échantillon (dans le cas de la mesure de la transmittivité) ou avec un échantillon de référence (en aluminium, dans le cas de la mesure de la réflectivité), lequel est également traité par Transformée de Fourier. Le ratio des signaux obtenus avec échantillon, en transmission et en réflexion, avec le signal de référence permet de déterminer les transmittivité et réflectivité spectrales. On notera que les signaux correspondant aux mesures réalisées avec échantillons

ne correspondant pas nécessairement aux mêmes valeurs discrètes de nombre d'onde que le signal de référence. On a alors recours à une projection, par interpolation linéaire, des mesures sur un vecteur commun. L'erreur introduite par l'interpolation sur des signaux aussi irréguliers est visualisée en traçant, pour chaque mesure, le signal brut et le signal interpolé (cf. Fig. 2.10 à la Fig. 2.15). L'interprétation des mesures effectuées pour les échantillons de PMMA étudiés est présentée ci-dessous.

### Approximation au premier ordre

En première approximation, le coefficient d'absorption peut être déterminé en considérant la réflexion du rayonnement incident à la surface de l'échantillon ainsi que la transmission du rayonnement dans l'échantillon, telles qu'illustrées par la Fig. 2.7. On notera que dans le cas de la réflectivité, l'angle que font respectivement le rayonnement incident et le rayonnement réfléchi mesurés par rapport à la normale à l'échantillon correspond à  $\theta_i=11^\circ$ . Par la suite, nous considérerons que le matériau se comporte de la même façon vis-à-vis d'un rayonnement d'incidence nulle, i.e.  $\theta_i=0^\circ$ .



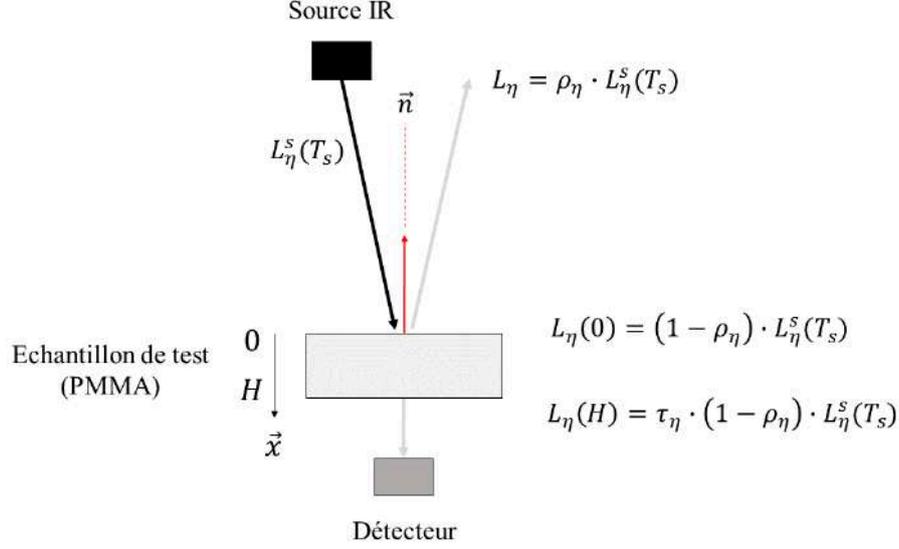
**Fig. 2.7.** Approximation à l'ordre 1 du principe de mesure de la réflectivité spectrale (a)-(b) et de la transmittivité spectrale (c)-(d). (a) Mesure du signal de référence correspondant à une réflexion avec un échantillon de référence de grande réflectivité (ici de l'aluminium). (b) Mesure du signal réfléchi par l'échantillon de test. (c) Mesure du signal de référence correspondant à un essai sans échantillon. (d) Mesure du signal atténué par l'échantillon de test

La loi d'atténuation exponentielle du rayonnement (i.e. loi de Beer-Lambert) permet d'exprimer la transmittivité  $\tau_\eta$  en fonction de l'épaisseur de l'échantillon  $H$  et de l'intensité du rayonnement pénétrant  $L_\eta(x)$  et transmis  $L_\eta(H)$  comme :

$$L_\eta(x) = L_\eta(0) \cdot e^{-\kappa_\eta \cdot x} \Rightarrow \frac{L_\eta(H)}{L_\eta(0)} = \tau_\eta = e^{-\kappa_\eta \cdot H} \quad (2.2)$$

Ici le rayonnement pénétrant à la surface de l'échantillon peut s'exprimer comme

$L_\eta(0) = (1 - \rho_\eta) \cdot L_\eta^s(T_s)$  (cf. Fig. 2.8), avec  $\rho_\eta$  la réflectivité spectrale déterminée par l'expérience relative à la réflectivité. L'intensité radiative à l'abscisse  $x = H$ , peut ainsi s'exprimer comme  $L_\eta(H) = \tau_\eta \cdot L_\eta(0) = \tau_\eta \cdot (1 - \rho_\eta) \cdot L_\eta^s(T_s)$  où  $L_\eta^s(T_s)$  est la luminance spectrale correspondant à la source IR du spectromètre.



**Fig. 2.8.** Bilan d'énergie radiative sur un échantillon d'épaisseur  $H$  soumis au rayonnement émis par la source IR du spectromètre  $L_\eta^s(T_s)$ . La part du rayonnement incident qui est réfléchi et transmis se déduit respectivement à partir de la réflectivité et de la transmittivité spectrales du matériau,  $\rho_\eta$  et  $\tau_\eta$

$$e^{-\kappa_\eta \cdot H} = \frac{L_\eta(H)}{L_\eta(0)} = \frac{\tau_\eta \cdot (1 - \rho_\eta) \cdot L_\eta^s(T_s)}{(1 - \rho_\eta) \cdot L_\eta^s(T_s)} \quad (2.3)$$

L'expérience en transmittivité intègre le phénomène de réflexion, car on compare le signal reçu sans échantillon avec le signal reçu avec échantillon. Le différentiel de signal, pour chaque nombre d'onde, est dû principalement à l'atténuation (absorption+diffusion) dans le matériau mais également à la réflexion. En réalité on mesure  $\tau_\eta^*$  qui correspond en première approximation au produit  $\tau_\eta \cdot (1 - \rho_\eta)$ . Ainsi,

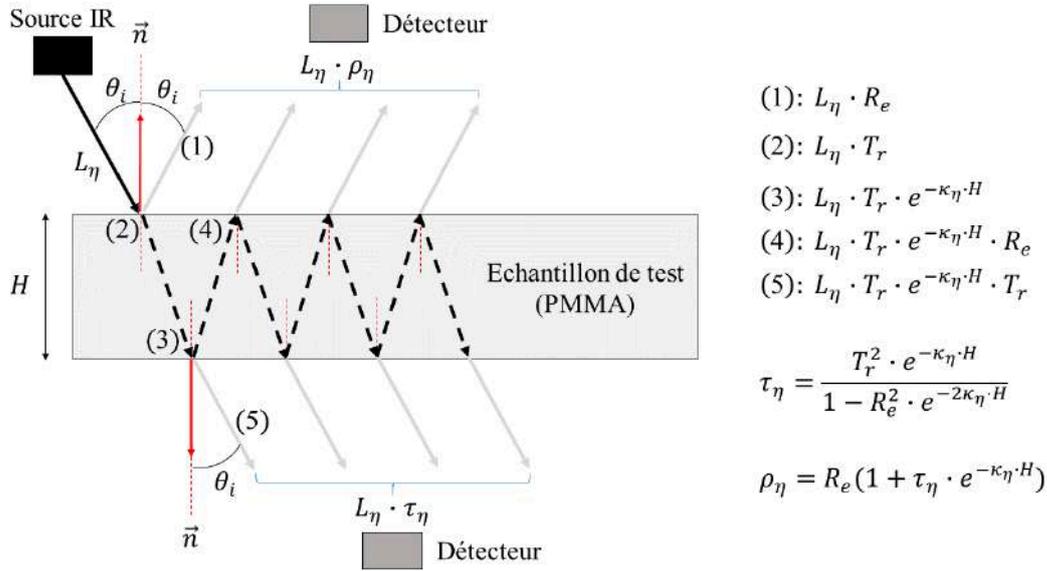
$$e^{-\kappa_\eta \cdot H} = \frac{\tau_\eta^* \cdot L_\eta^s(T_s)}{(1 - \rho_\eta) \cdot L_\eta^s(T_s)} \Rightarrow \kappa_\eta = -\frac{1}{H} \cdot \ln \frac{\tau_\eta^*}{1 - \rho_\eta} \quad (2.4)$$

Le modèle présenté ici ne tient pas compte de la réflexion qui survient à la sortie de l'échantillon (i.e. à  $x = H$ ). La partie suivante présente un modèle permettant de mieux décrire les phénomènes radiatifs qui ont lieu au sein de l'échantillon.

### Approximation au second ordre

D'après les travaux réalisés par Boulet et al. [2014] et collaborateurs, un modèle plus détaillé est utilisé pour mieux décrire la réflexion et la transmission au sein de

l'échantillon testé. Les chemins de réflexion et de transmission, modélisés au moyen de l'approximation qualifiée de second ordre, sont schématisés sur la Fig. 2.9.



**Fig. 2.9.** Approximation à l'ordre 2 décrivant les réflexions et les transmissions qui ont lieu au sein d'un échantillon soumis à une source IR. Le rayonnement sortant par la face supérieure de l'échantillon ( $x = 0$ ) est mesuré lors de l'expérience en réflectivité. Le rayonnement sortant par la face inférieure de l'échantillon ( $x = H$ ) est mesuré lors de l'expérience en transmittivité

La réflectivité et la transmittivité à l'interface entre l'échantillon et l'air sont respectivement notées  $R_e$  et  $T_r = 1 - R_e$ . La réflectivité spectrale  $\rho_\eta$  et la transmissivité spectrale  $\tau_\eta$  de l'échantillon sont obtenus en divisant respectivement l'intensité réfléchie et transmise par l'intensité incidente (Boulet et al. [2014]).

$$\tau_\eta = \frac{L_\eta \cdot \tau_\eta}{L_\eta} = \frac{T_r^2 \cdot e^{-\kappa_\eta \cdot H}}{1 - R_e^2 \cdot e^{-2\kappa_\eta \cdot H}} \quad (2.5)$$

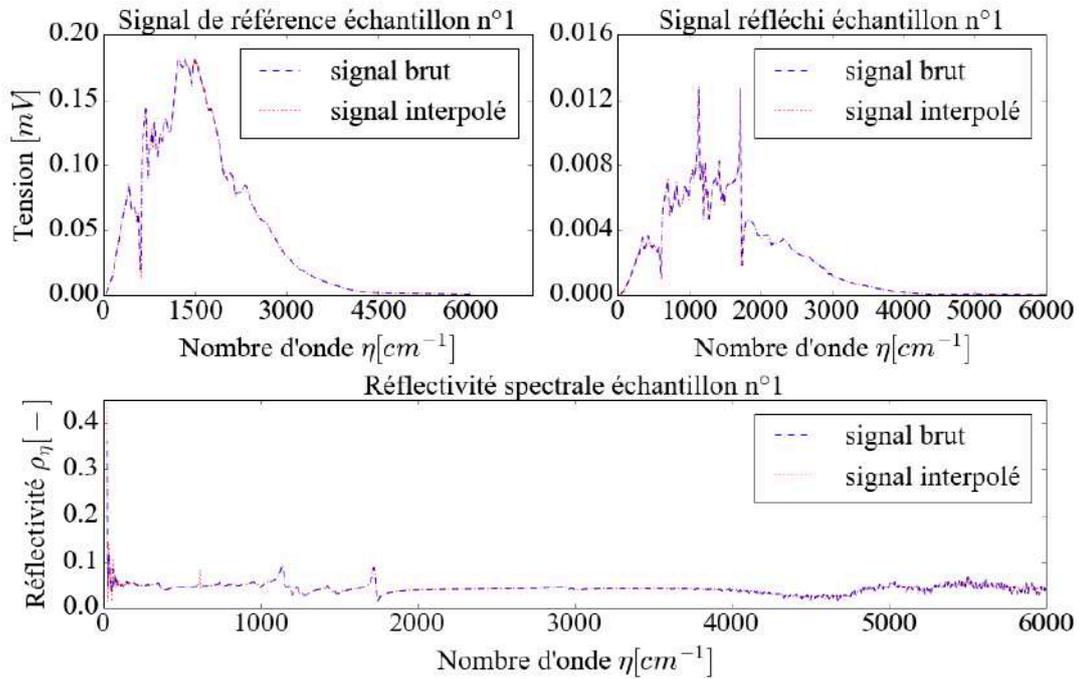
$$\rho_\eta = \frac{L_\eta \cdot \rho_\eta}{L_\eta} = R_e \cdot (1 + \tau_\eta \cdot e^{-\kappa_\eta \cdot H}) \quad (2.6)$$

Les expressions précédentes sont combinées pour exprimer le coefficient d'absorption effectif spectral  $\kappa_\eta$  :

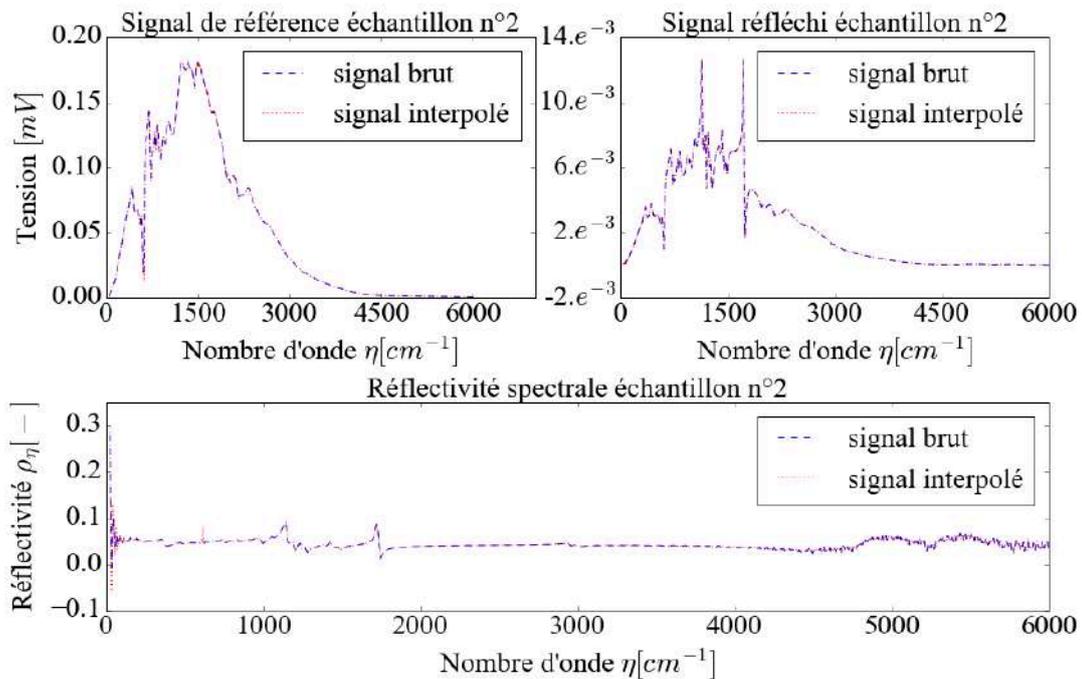
$$\left(1 - \frac{\rho_\eta}{1 + \tau_\eta \cdot e^{-\kappa_\eta \cdot H}}\right)^2 \cdot e^{-\kappa_\eta \cdot H} = \tau \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho_\eta}{1 + \tau_\eta \cdot e^{-\kappa_\eta \cdot H}}\right)^2 \cdot e^{-2\kappa_\eta \cdot H}\right] \quad (2.7)$$

La résolution de cette équation non linéaire est effectuée pour chaque valeur de nombre d'onde  $\eta$  (i.e. pour chaque couple  $\rho_\eta$  et  $\tau_\eta$  déterminé expérimentalement) à l'aide de la fonction "fsolve" de Matlab.

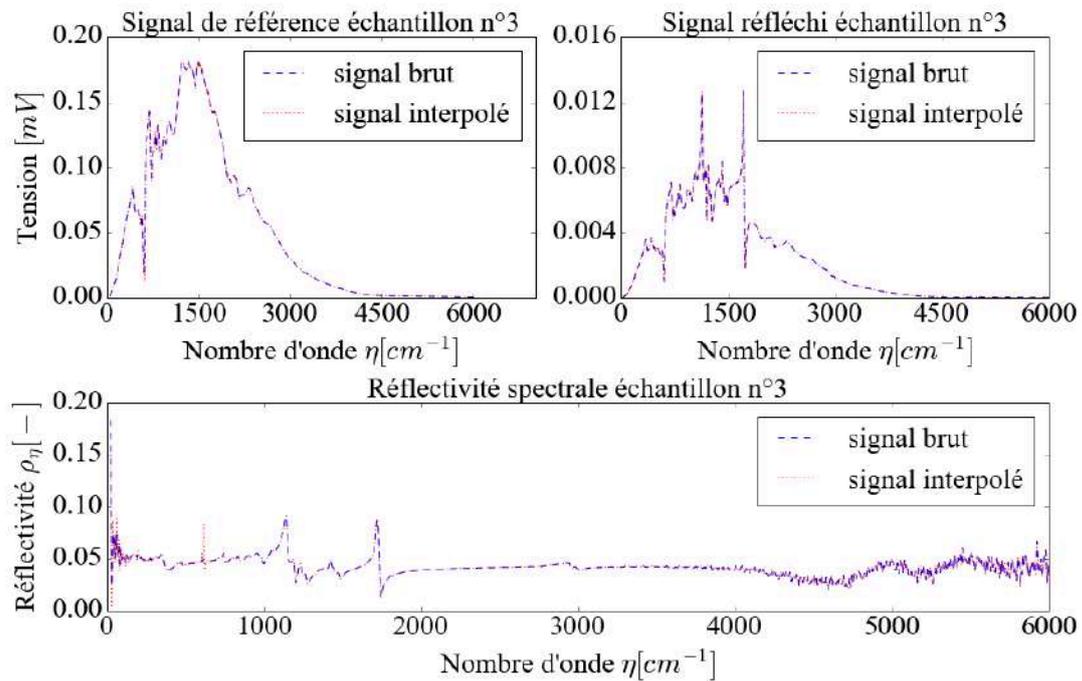
## Résultats expérimentaux



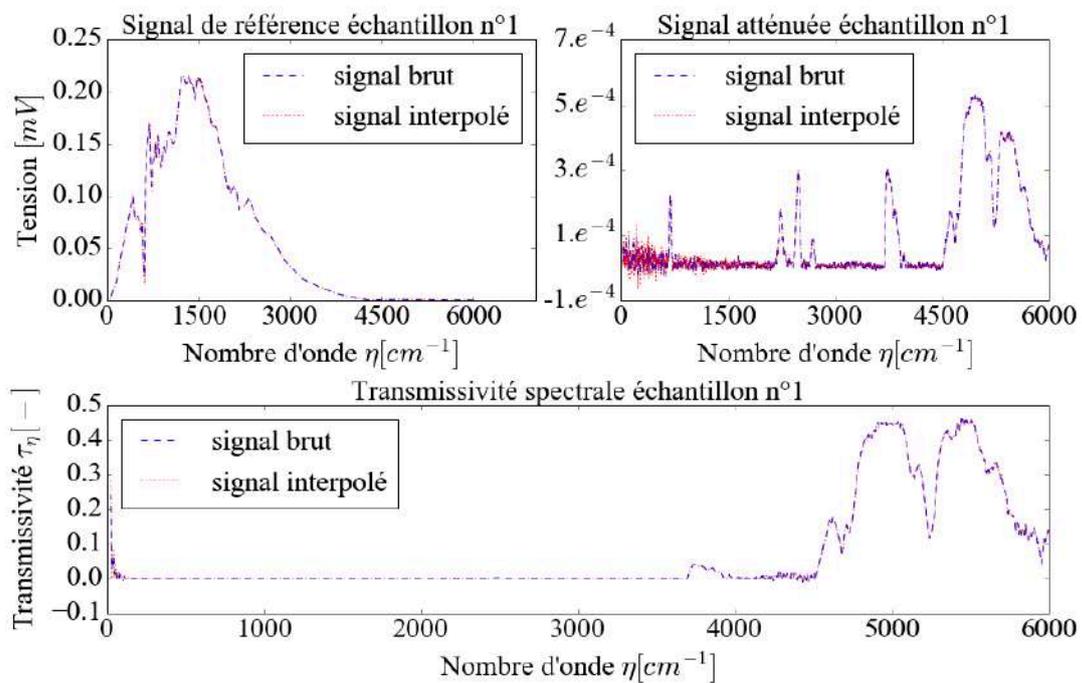
**Fig. 2.10.** Réflectivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interposant l'échantillon n°1 entre la source et le capteur par le signal de référence



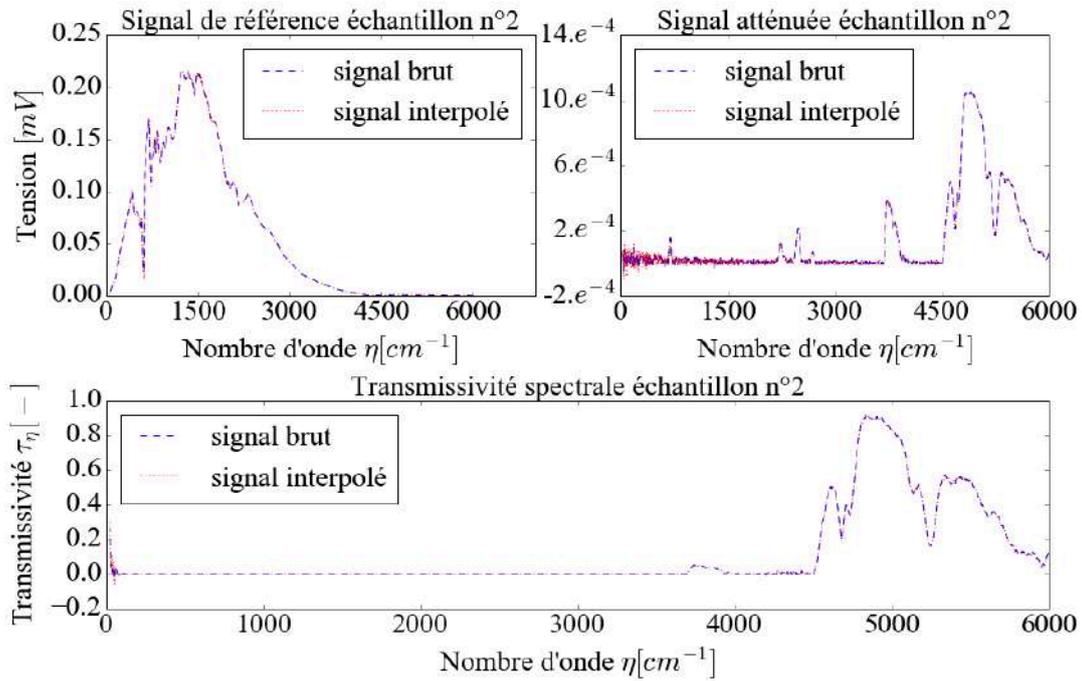
**Fig. 2.11.** Réflectivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interposant l'échantillon n°2 entre la source et le capteur par le signal de référence



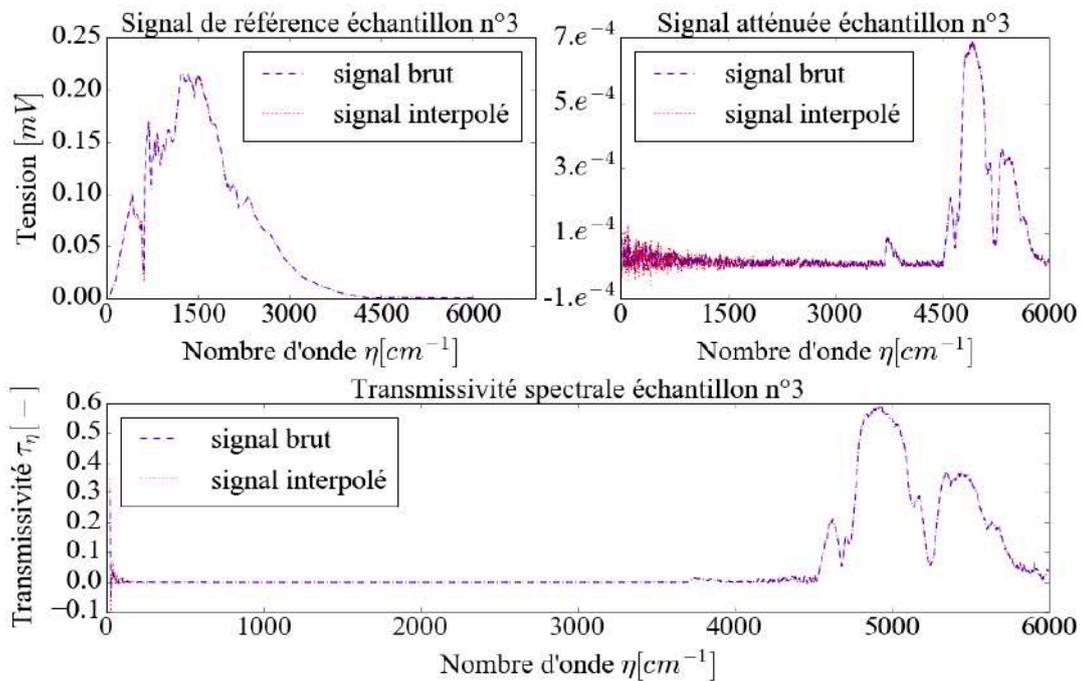
**Fig. 2.12.** Réflectivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interposant l'échantillon n°3 entre la source et le capteur par le signal de référence



**Fig. 2.13.** Transmissivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interposant l'échantillon n°1 entre la source et le capteur par le signal de référence



**Fig. 2.14.** Transmissivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interpolant l'échantillon n°2 entre la source et le capteur par le signal de référence



**Fig. 2.15.** Transmissivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interpolant l'échantillon n°3 entre la source et le capteur par le signal de référence

Les résultats expérimentaux sont présentés ici par une série de figures. Les réflectivités spectrales obtenues en divisant le signal reçu par le capteur en interposant 3 échantillons entre la source et le capteur par le signal de référence sont présentés sur les Fig. 2.10 - 2.12. Les transmittivités spectrales obtenues en divisant le signal reçu par le capteur en interposant 3 échantillons entre la source et le capteur par le signal de référence sont présentés sur les Fig. 2.13 - 2.15. Nous remarquons que la différence entre le signal de référence en réflectivité (Fig. 2.10) et en transmittivité (Fig. 2.13), donne une indication sur la réflectivité spectrale du matériau de référence. Non démontré ici, il semblerait que le matériau pris comme référence pour la réflectivité soit de type gris, avec  $\rho_{ref} \approx 0.18/0.22 = 0.82$  (valeurs correspondant aux maximums des signaux ( $\eta \sim 1000 \text{ cm}^{-1}$ )).

D'après ces figures, nous trouvons que les réflectivités spectrales des échantillons de PMMA sont faibles ( $\approx 0.05$ ) avec des fluctuations très faibles. Pour les transmittivités, elles sont presque nulles dans l'intervalle où le nombre d'onde est inférieur à  $4500 \text{ cm}^{-1}$ . Les transmittivités sont plus grandes ( $\approx 0.4-0.8$ ) dans l'intervalle où le nombre d'onde est entre  $4500 \text{ cm}^{-1}$  et  $6000 \text{ cm}^{-1}$ . Le pic des transmittivités se produit lorsque le nombre d'onde est  $5000 \text{ cm}^{-1}$ .

### Calcul du coefficient d'atténuation moyen

La distribution de l'intensité radiative, en fonction de la fréquence, est donnée par la loi de Planck :

$$L_\nu(T) = \frac{2 \cdot h_P \cdot \nu^3 \cdot n^2}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h_P \cdot \nu}{k_B \cdot T}} - 1} \quad (2.8)$$

Où

- $\nu$  est la fréquence du rayonnement en [ $s^{-1}$ ] ou [ $Hz$ ]
- $T$  est la température du corps noir en [ $K$ ], ici  $T \in [293; 373]$
- $k_B = 1.38064852 \cdot 10^{-23}$  est la constante de Boltzmann en [ $J \cdot K^{-1}$ ]
- $h_P = 6.62607015 \cdot 10^{-34}$  est la constante de Planck en [ $J \cdot s$ ]
- $c_0 = 299792458$  est la vitesse de la lumière dans le vide en [ $m \cdot s^{-1}$ ]
- $n = 1.49$  est l'indice du milieu [-] (PMMA)

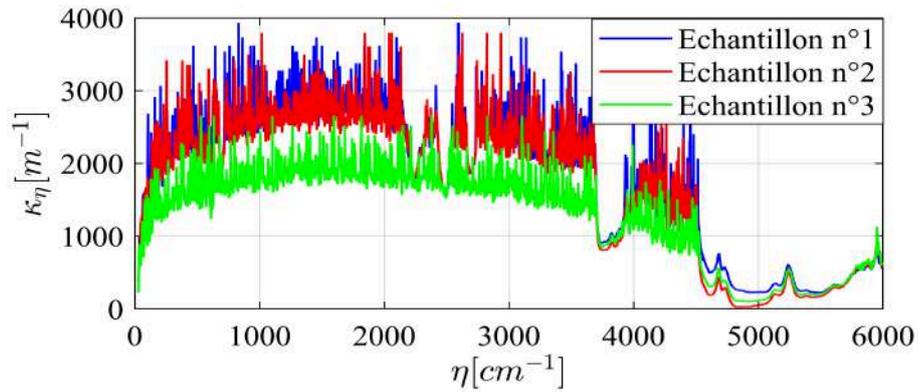
#### Remarque

Les données issues du spectromètre sont exprimées en nombre d'onde, i.e. [ $cm^{-1}$ ]. Ainsi, la relation entre la fréquence  $\nu$  en [ $s^{-1}$ ] et le nombre d'onde  $\eta$  en [ $cm^{-1}$ ] s'écrit  $\nu = \eta \cdot c_0 / n \cdot 10^2$ . Finalement,  $L_\nu$  s'exprime en [ $J \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$ ].

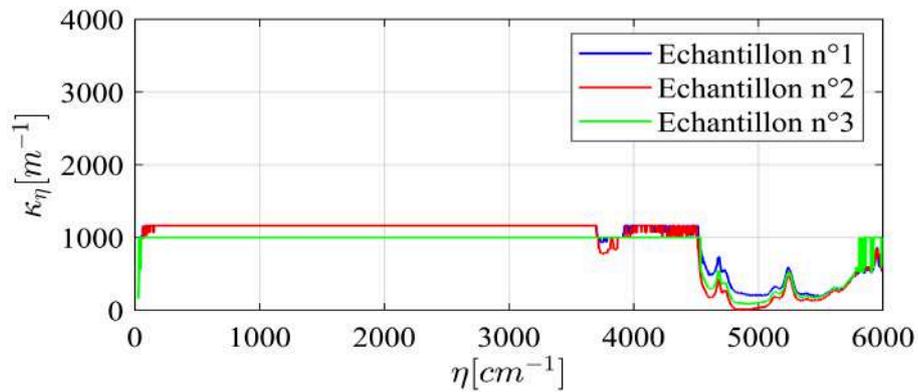
Selon la relation entre la fréquence  $\nu$  et le nombre d'onde  $\eta$ , la loi de Planck peut aussi s'écrire comme :

$$L_\eta(T) = \frac{2 \cdot h_P \cdot c_0^2 \cdot \eta^3}{n^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h_P \cdot c_0 \cdot \eta}{n \cdot k_B \cdot T}} - 1} \quad (2.9)$$

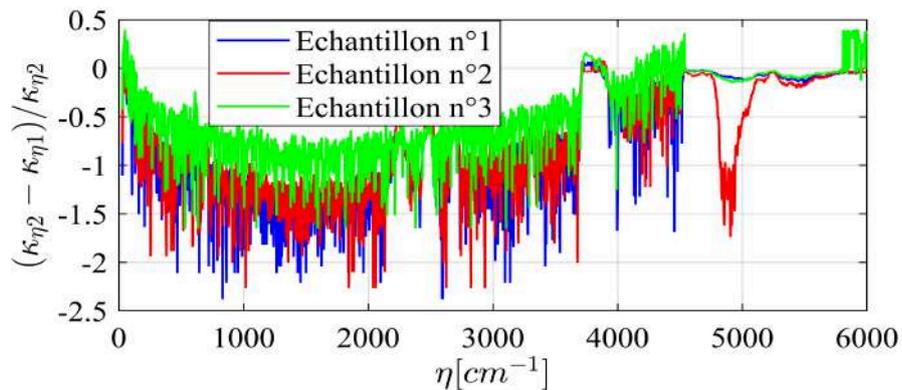
Où  $L_\eta$  s'exprime en [ $W \cdot m^{-1} \cdot sr^{-1}$ ]. La distribution spectrale des coefficients d'atténuation  $\kappa_\eta$  estimée pour chacun des 3 échantillons étudiés sous 2 approximations ainsi que l'écart sont présentés sur les Fig. 2.16 - 2.18.



**Fig. 2.16.** Distributions de coefficient d'atténuation des 3 échantillons en fonction du nombre d'onde (approximation au premier ordre :  $\kappa_{\eta 1}$ )



**Fig. 2.17.** Distributions de coefficient d'atténuation des 3 échantillons en fonction du nombre d'onde (approximation au second ordre :  $\kappa_{\eta 2}$ )



**Fig. 2.18.** Ecart des distributions de coefficient d'atténuation des 3 échantillons sous 2 approximations en fonction du nombre d'onde ( $\kappa_{\eta 1}$  : approximation au premier ordre,  $\kappa_{\eta 2}$  : approximation au second ordre)

D'après les figures ci-dessus, nous observons que les distributions de coefficient d'atténuation des 3 échantillons en fonction du nombre d'onde obtenues par l'approximation au premier ordre ont beaucoup de fluctuations dans l'intervalle où le nombre d'onde  $\eta$

est entre  $200 \text{ cm}^{-1}$  et  $4500 \text{ cm}^{-1}$ . Cependant, les valeurs obtenues par l'approximation au second ordre sont constantes dans cette intervalle, cela peut être dû à l'utilisation d'un échantillon relativement épais. Dans ce cas, suivant la puissance de la source et la longueur d'onde considérée, le signal transmis est trop faible pour être détecté. De plus, si l'épaisseur  $H$  de l'échantillon n'est pas assez faible, la valeur de  $e^{-\kappa_\eta H}$  peut être très petite et nous sommes donc confrontés au risque de divergence dans le calcul. Afin d'éviter ce problème, nous devons utiliser des échantillons plus minces, mais compte tenu de la nature fragile du PMMA, cet objectif est difficile à mettre en œuvre dans la pratique. De plus, au fur et à mesure que l'épaisseur de l'échantillon augmente, la différence entre les deux approximations diminue également. Cela est dû au fait que plus l'échantillon est épais, plus rapidement l'énergie décroît après plusieurs réflexions et moins l'énergie est transmise à travers l'échantillon en conséquence. Dans la suite, l'approximation au second ordre sera tout de même utilisée pour calculer le coefficient d'atténuation moyen  $\kappa$ .

Le coefficient d'atténuation moyen  $\kappa$  peut être calculé de 2 manières. Une première approche consiste à utiliser la moyenne de Planck (adaptée aux milieux optiquement minces), une seconde la moyenne selon Rosseland (adaptée aux milieux optiquement épais).

- Selon Planck, le coefficient d'atténuation moyen  $\kappa$  se définit comme (Collin-Zahn [2010]) :

$$\kappa_{Planck} = \frac{\int \kappa_\eta L_\eta^0 d\eta}{\int L_\eta^0 d\eta} = \frac{\int \kappa_\eta L_\eta^0 d\eta}{\frac{n^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{\pi}} \quad (2.10)$$

- Pour Rosseland, le coefficient d'atténuation moyen  $\kappa$  se définit comme (Collin-Zahn [2010]) :

$$\kappa_{Rosseland} = \frac{\int \frac{dL_\eta^0(T)}{dT} d\eta}{\int \frac{1}{\kappa_\eta} \cdot \frac{dL_\eta^0(T)}{dT} d\eta} = \frac{\frac{2 \cdot \sigma \cdot n^5 \cdot T^5 \cdot k_B}{\pi \cdot h_P^2 \cdot c_0^3}}{\int \frac{1}{\kappa_\eta} \cdot \eta^4 \cdot \frac{e^{\frac{h_P \cdot c_0 \cdot \eta}{k_B \cdot T \cdot n}}}{\left(e^{\frac{h_P \cdot c_0 \cdot \eta}{k_B \cdot T \cdot n}} - 1\right)^2} d\eta} \quad (2.11)$$

Les valeurs estimées du coefficient d'atténuation moyen  $\kappa$  selon les 2 approches sont résumées dans le Tableau 2.2 suivant :

Échantillon	$\kappa_{Planck}$	$\kappa_{Rosseland}$	$\sqrt{\kappa_{Planck} \cdot \kappa_{Rosseland}}$
n°1	$1161.5 \text{ m}^{-1}$	$1158.7 \text{ m}^{-1}$	$1160.1 \text{ m}^{-1}$
n°2	$1161.2 \text{ m}^{-1}$	$1137.9 \text{ m}^{-1}$	$1149.5 \text{ m}^{-1}$
n°3	$999.8 \text{ m}^{-1}$	$996.1 \text{ m}^{-1}$	$997.9 \text{ m}^{-1}$

TABLEAU 2.2 – Valeurs du coefficient d'atténuation moyen  $\kappa$  des échantillons de PMMA

Ces calculs, réalisés par intégration numérique, conduisent à une valeur moyenne :  $\kappa = (1160.1 + 1149.5 + 997.9)/3 = 1102.5 \text{ m}^{-1}$  ( $T = 298 \text{ K}$ ), ce qui est dans la gamme de référence dans la littérature ( $\kappa \in [528; 54350] \text{ m}^{-1}$ , Boulet et al. [2014]). Ce résultat est basé sur les hypothèses suivantes :

- que le rayonnement réfléchi est spéculaire ;
- que le rayonnement réfléchi avec une incidence de  $11^\circ$  est égal au rayonnement réfléchi avec une incidence de  $0^\circ$ . Cette hypothèse pourra être vérifiée, ou corrigée, par une étude menée en faisant varier l'incidence du rayonnement, de  $13$  à  $85^\circ$  degrés.

Dans cette section, la détermination du coefficient d'atténuation moyen de PMMA est mise en œuvre sur 3 échantillons d'épaisseurs différentes. Tout d'abord, les approximations décrivant la réflexion et la transmission au sein du milieu sont introduites. Ensuite, les distributions spectrales de la réflectivité et de la transmittivité des échantillons sont obtenues en se basant sur ces approximations et les mesures expérimentales. Finalement, les coefficients d'atténuations moyens des 3 échantillons sont respectivement déterminés en utilisant le modèle de Planck et le modèle de Rosseland. Les valeurs du coefficient d'atténuation moyen obtenues pour un même échantillon par les différents modèles sont du même ordre de grandeur. Ces valeurs dépendent peu de l'échantillon considéré.

## 2.2 Algorithme PSO

L'algorithme d'optimisation par essais particuliers (PSO) est une méthode d'optimisation globale qui consiste à chercher la région optimale dans un espace complexe par l'interaction et la collaboration d'individus aussi appelés particules. Cette méthode a été développée en 1995 par Eberhart, E. C. et Kennedy, J. pour résoudre des problèmes continus non linéaires et des problèmes d'optimisation discrets (Eberhart [1995]). Cet algorithme s'inspire notamment de la façon dont certains animaux (par exemple, un groupe d'oiseaux) communiquent, partagent leurs informations pour trouver des aliments.

Pour illustrer le fonctionnement de ce type d'algorithme, imaginons la situation suivante. Dans un espace quelconque au-dessus de la mer, il existe un unique point où se situent des aliments que des oiseaux recherchent. Nous supposons que la distance entre ce point et chaque oiseau est connue mais aucun oiseau ne connaît les coordonnées exactes de ce point. La question est alors, comment les oiseaux doivent-ils agir pour trouver des aliments le plus vite possible ? Tout d'abord, il faut trouver l'oiseau qui est le plus proche des aliments, et définir la région à côté de lui comme étant la nouvelle région où il faut prospecter. Par la suite, chaque oiseau doit déterminer une nouvelle trajectoire en fonction de sa propre expérience ainsi que des informations fournies par les autres oiseaux. Au fur et à mesure de l'augmentation du temps de recherche, la

nouvelle région à chercher deviendra de plus en plus petite. Finalement, la cible sera trouvée après un certain nombre d'itérations

### 2.2.1 Procédure principale de l'algorithme PSO

Dans le cas de l'algorithme PSO, ce sont les particules qui jouent le rôle principal, en effet, chaque particule se déplace selon une certaine direction et une certaine vitesse dans l'espace. La direction et la vitesse d'avancement sont ajustées selon l'expérience des particules elles-mêmes ainsi que des informations fournies par les autres. La procédure principale de l'algorithme PSO est illustrée par la Fig. 2.19.

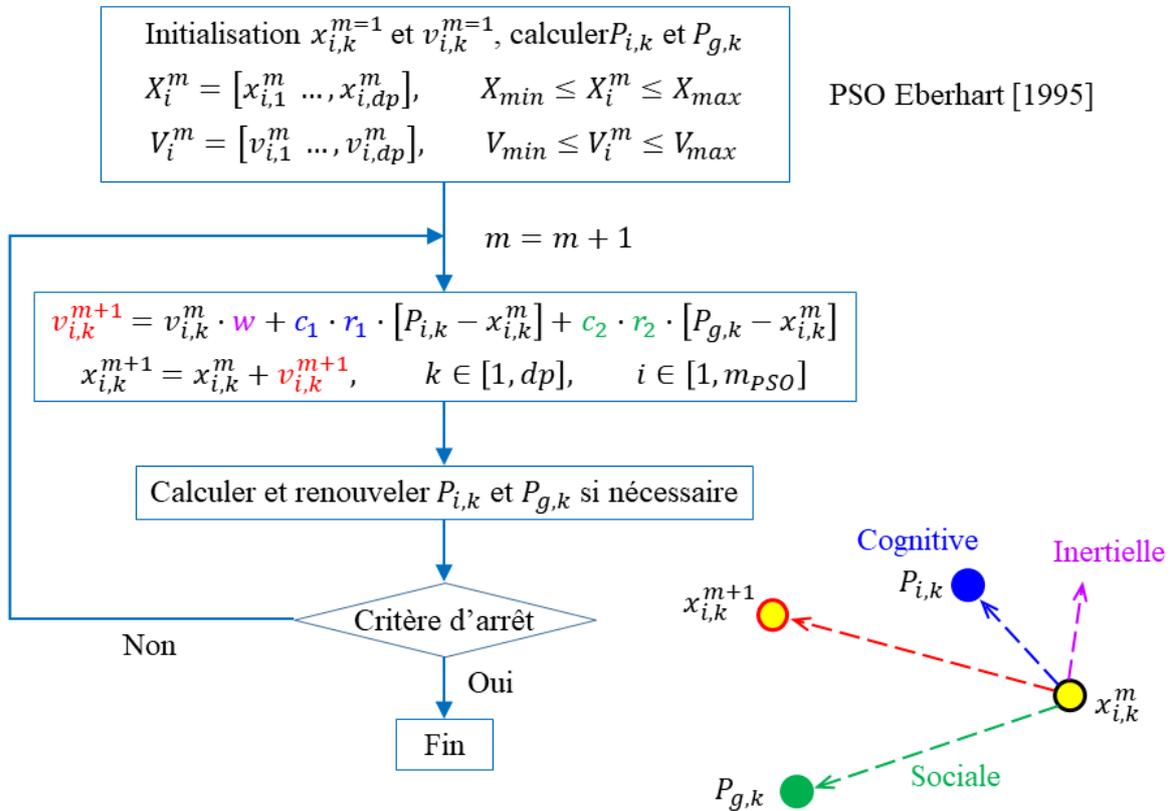


Fig. 2.19. Procédure principale de l'algorithme PSO

Dans un espace bidimensionnel, la position des particules est la solution du problème à optimiser. Plus généralement, supposons que la dimension de l'espace où les particules se situent est  $dp$ , le nombre total des particules est  $m_{PSO}$ , ainsi la position de la particule  $i$  à l'instant  $m$  est  $X_i^m = (x_{i,1}^m, x_{i,2}^m, \dots, x_{i,dp}^m)$ . La vitesse de la particule  $i$  à l'instant  $m$  est  $V_i^m = (v_{i,1}^m, v_{i,2}^m, \dots, v_{i,dp}^m)$ . Pour la mise en œuvre de cette méthode, nous initialisons les positions et les vitesses des particules de façon aléatoire. Par la suite, à chaque itération  $m$ , chacune des particules renouvellera sa position et sa vitesse selon la contribution inertielle liée au poids d'inertie  $w$ , la contribution cognitive liée à la meilleure position locale  $p_{i,k}^m$  et la contribution sociale liée à la meilleure position globale  $p_{g,k}^m$ . La meilleure position locale est la meilleure position trouvée par la parti-

cule elle-même jusqu'à maintenant alors que la meilleure position globale correspond à celle trouvée par l'ensemble des particules. À l'instant  $m + 1$ , la nouvelle position et la nouvelle vitesse de la particule  $i$  peuvent s'écrire :

$$v_{i,k}^{m+1} = v_{i,k}^m \cdot w + c_1 \cdot r_1 \cdot [p_{i,k}^m - x_{i,k}^m] + c_2 \cdot r_2 \cdot [p_{g,k}^m - x_{i,k}^m] \quad (2.12)$$

$$x_{i,k}^{m+1} = x_{i,k}^m + v_{i,k}^{m+1}, \quad k \in [1, dp] \quad (2.13)$$

A la fin de chaque itération, la meilleure position locale et la meilleure position globale sont renouvelées si nécessaire. Si la critère d'arrêt est satisfait, l'algorithme s'arrête, si non les étapes ci-dessus recommencent. Nous remarquons que  $w$  est le poids d'inertie des particules qui représente la capacité de recherche des particules dans l'espace. Si  $w$  est grand, alors l'algorithme tend vers une recherche globale. Inversement, si  $w$  est petit, alors l'algorithme tend vers une recherche locale. Pour assurer que la transition de la recherche globale à la recherche locale de l'algorithme soit stable, nous prenons une valeur grande au début ( $w=0.9$ ). Au fur et à mesure des itérations, cette valeur diminuera de façon linéaire jusqu'à atteindre une valeur de 0.4 à la fin de la recherche. De plus,  $c_1$  et  $c_2$  sont deux facteurs de connaissance permettant de pondérer les composantes cognitives et sociales. Usuellement, leurs valeurs sont prises entre 1.4 et 2,  $r_1$  et  $r_2$  étant deux valeurs aléatoires uniformes dans l'intervalle  $[0, 1]$ . En outre, chaque composante de la vitesse est limitée par une vitesse maximale. Nous notons ici que le premier terme du membre de droite dans la formule 2.12 représente la vitesse de la particule à l'instant antérieure. Le deuxième terme est associé à la connaissance de la particule elle-même. Le troisième terme est associé à l'activité sociale de la particule au sein du groupe. Concernant le dernier terme, un poids élevé correspond à un groupe d'individus où la communication et la coopération sont valorisées.

## 2.2.2 Paramètres importants de l'algorithme PSO

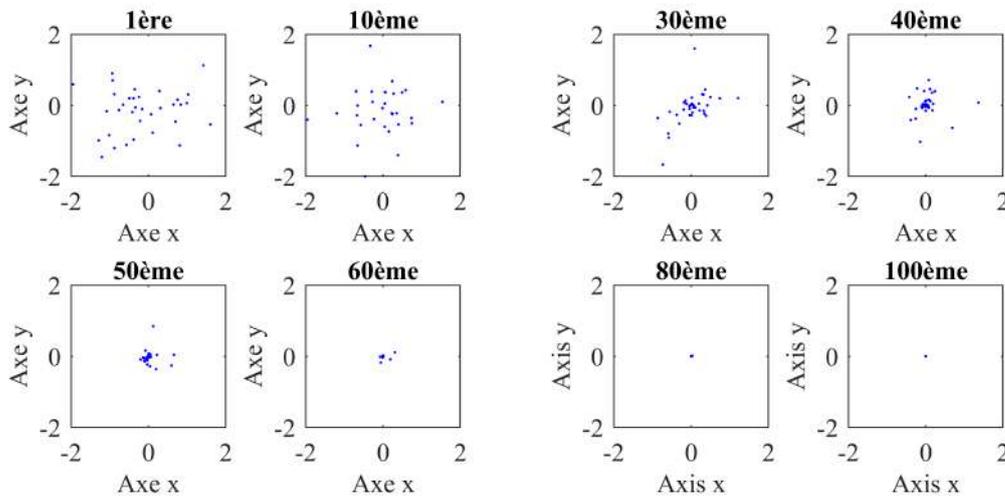
### Première application

Pour mieux comprendre cet algorithme, prenons l'exemple suivant : un espace bidimensionnel dont les coordonnées varient de -2 à 2 est pris comme espace de recherche. La fonction objectif de test utilisée ici, i.e. que l'on cherche à minimiser, est la fonction quadratique :

$$J_{test}(\beta) = \sum_{i=1}^{dp} (\hat{\beta}_i - \beta_i)^2 \quad (2.14)$$

Où  $\hat{\beta}_i$  est la valeur estimée du paramètre (ici la position des particules),  $\beta_i$  est la valeur exacte du paramètre à estimer, ici  $\beta_1 = x = 0$  et  $\beta_2 = y = 0$ . Il existe d'autres fonctions objectif fréquemment utilisées pour évaluer les performances de ce type d'algorithmes. Certaines de ces fonctions sont discutées par la suite. Le nombre de particules et le nombre d'itérations temporelles sont fixés respectivement à 40 et

100. De plus,  $c_1$  et  $c_2$  sont égaux à 1.4 et  $w$  diminue linéairement de 0.9 jusqu'à 0.4. La position des particules à différentes itérations est représentée dans la Fig. 2.20.



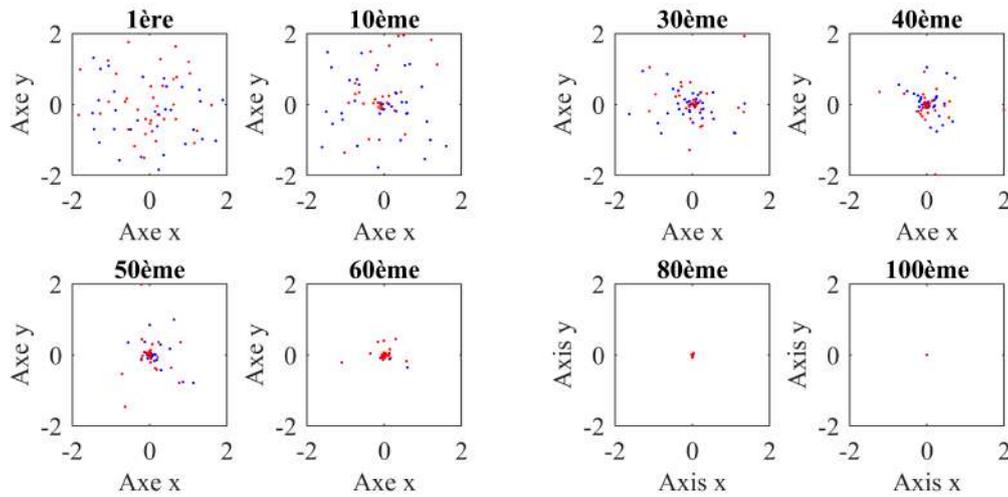
**Fig. 2.20.** Évolution de la position des particules dans l'espace bidimensionnel. La fonction objectif correspond ici à l'erreur quadratique

### Facteurs de connaissance

Pour étudier l'influence du changement des facteurs de connaissance sur le résultat final, nous changeons la valeur de  $c_1$  et  $c_2$  de 1.4 (points bleus) à 1.8 (points rouges). Nous constatons alors que la vitesse de convergence des particules diminue à partir de la 50<sup>ème</sup> itération (cf. Fig. 2.21). On comprend mieux comment ces facteurs jouent un rôle vis à vis de la vitesse de convergence et quant à leur capacité à prospecter dans l'ensemble du domaine. D'une part, plus grande est la valeur de ces facteurs d'étude, plus vite et plus loin les particules se déplacent dans l'espace. Dans ce cas, à chaque itération, la capacité de recherche des particules devient plus forte. Nous savons qu'au début, l'algorithme tend vers une recherche globale, pendant cette période, le changement des facteurs d'étude affecte peu l'évolution du résultat. En revanche, une augmentation de la capacité de déplacement des particules peut causer la divergence de la solution notamment en fin de recherche, où de petits déplacements sont préférables. L'algorithme tendant progressivement vers une recherche locale, nous observons à mi-parcours ( $\sim 50^{\text{ème}}$  itération), que les particules rouges ( $c_1 = c_2 = 1.8$ ) convergent moins vite vers la solution que les particules bleues ( $c_1 = c_2 = 1.4$ ).

### Poids d'inertie

L'influence du poids d'inertie  $w$  est ici discutée. Quand ce poids d'inertie est grand, l'algorithme PSO est encouragé à pratiquer une recherche globale. Inversement, quand ce poids d'inertie est petit, l'algorithme tend vers une recherche locale. Pour un problème étudié simple, un poids d'inertie avec une valeur fixée peut être suffisant. Mais



**Fig. 2.21.** Évolution de la position des particules dans l'espace bidimensionnel avec des différents facteurs de connaissance. La fonction objectif correspond ici à la fonction quadratique

en pratique le poids d'inertie est souvent choisi comme un paramètre variant. En général, il existe deux façons d'adaptation pour  $w$  : soit il diminue de façon linéaire ou non-linéaire avec le nombre d'itérations, soit il s'adapte automatiquement. Pour plus de détails, les différents types de modes usuellement utilisés pour  $w$  sont présentés au-dessous.

Il existe plusieurs modes de variation du poids d'inertie  $w$  adapté à l'algorithme PSO. On peut rencontrer le mode de diminution linéaire classique, le mode de diminution linéaire différentielle, le mode de diminution non linéaire dynamique (exponentielle) ou encore le mode d'ajustement aléatoire dynamique.

#### Diminution linéaire classique

Pour ce mode, le poids d'inertie de la  $i^{\text{ème}}$  itération peut s'écrire comme (Shi and Eberhart [1998]) :

$$w = w_{max} - \frac{w_{max} - w_{min}}{N_{PSO}} \cdot i \quad (2.15)$$

Avec  $w_{max}$  et  $w_{min}$  les valeurs maximale et minimale de  $w$ ,  $N_{PSO}$  étant le nombre total d'itérations.

#### Diminution linéaire différentielle

Pour ce mode, le poids d'inertie de la  $i^{\text{ème}}$  itération peut s'écrire comme (Hu and Zeng [2007]) :

$$w = w_{max} - \frac{w_{max} - w_{min}}{N_{PSO}^2} \cdot i^2 \quad (2.16)$$

Avec  $w_{max}$  et  $w_{min}$  les valeurs maximale et minimale de  $w$ ,  $N_{PSO}$  étant le nombre total d'itérations.

#### Diminution non linéaire dynamique (exponentielle)

Pour ce mode, le poids d'inertie de la  $i^{\text{ème}}$  itération peut s'écrire comme :

$$w = (w_{max} - w_{min} - d_1) \cdot \exp\left(\frac{1}{1 + d_2 \cdot i / N_{PSO}}\right) \quad (2.17)$$

Avec  $w_{max}$  et  $w_{min}$  les valeurs maximale et minimale de  $w$ ,  $N_{PSO}$  étant le nombre total d'itérations.  $d_1$  et  $d_2$  sont deux facteurs de contrôle. Après de nombreux tests, la performance de l'algorithme peut être grandement augmentée quand  $d_1 = 0.2$  et  $d_2 = 7$ .

### Ajustement aléatoire dynamique

A l'opposé de la stratégie qui consiste à diminuer le poids avec l'augmentation du nombre d'itérations, certains chercheurs pensent que ce poids d'inertie doit être une série de nombres aléatoires. Pour les problèmes d'optimisation où la fonction objectif varie beaucoup, Eberhart propose le mode d'ajustement aléatoire dynamique suivante :

$$w = \frac{0.5 + rand(0, 1)}{2} \quad (2.18)$$

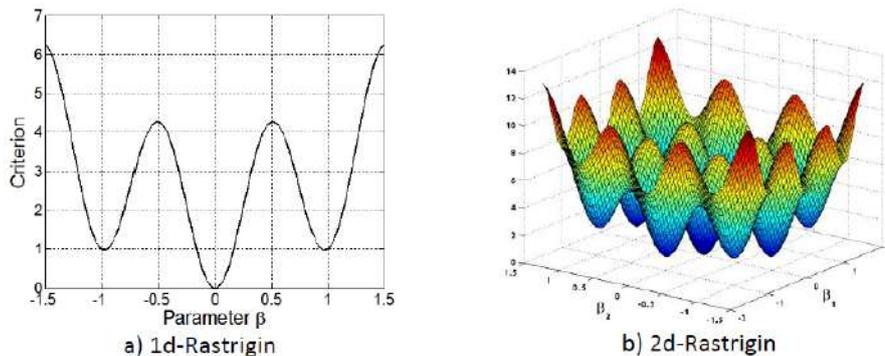
Avec  $rand(0, 1)$  qui correspond à un nombre aléatoire uniforme compris entre 0 et 1. Un grand nombre de tests montrent que ce mode d'ajustement aléatoire dynamique permet de converger rapidement pour des cas fortement non linéaires (Eberhart and Shi [2001]).

## 2.3 Test de performance de l'algorithme PSO

### 2.3.1 Fonction objectif

En plus de la fonction quadratique précédemment utilisée (eq. 2.14), il existe d'autres fonctions objectif fréquemment utilisées dans l'algorithme PSO. Par exemple, la fonction dite de Rastrigin, est l'une des fonctions de test les plus célèbres servant à évaluer l'efficacité des algorithmes. Généralement, la fonction de Rastrigin est définie comme (Ruffio et al. [2011]) :

$$J(\beta) = A \cdot dp + \sum_{i=1}^{dp} [\beta_i^2 - A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \beta_i)] \quad (2.19)$$



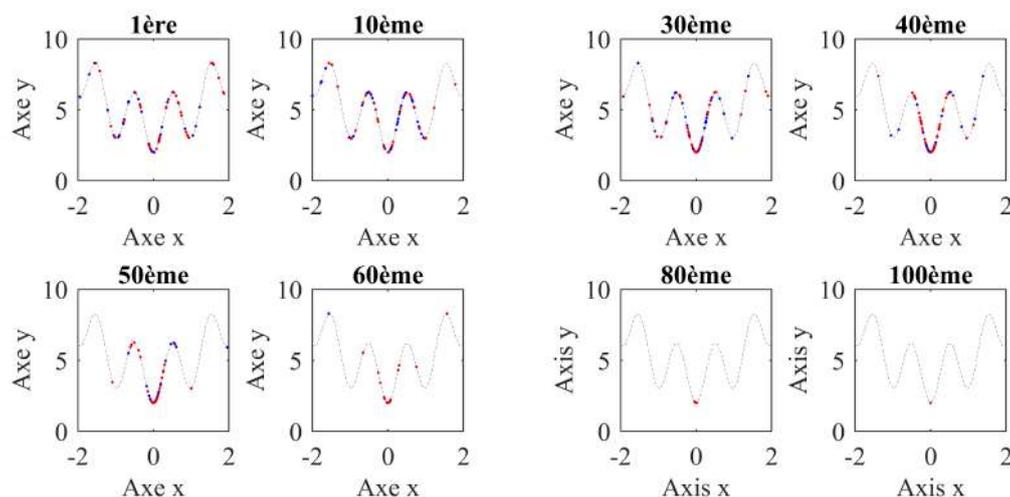
**Fig. 2.22.** Fonction de Rastrigin (1D et 2D)

Où  $A$  est un paramètre réel,  $dp$  est un entier positif correspondant à la dimension du problème étudié. Pour l'exemple présenté au-dessus,  $\beta_i \in [-2; 2]$ ,  $A=2$  et  $dp=2$ . Nous

pouvons voir que dans le cas de la fonction de Rastrigin-1D, il existe plusieurs points minimaux locaux mais uniquement un point minimal global. En d'autres termes cette fonction est intéressante en raison des nombreux "pièges" qu'elle présente. Ceci est également le cas pour les versions multidimensionnelles de cette fonction, i.e. 2D-Rastrigin, 3D-Rastrigin, etc. Certains algorithmes d'optimisation, une fois atteint un minimum local, n'évoluent plus. Dans ce cas-là, le point trouvé n'est pas le minimal global. C'est pourquoi la fonction de Rastrigin est un moyen élégant d'évaluer les capacités d'un algorithme d'optimisation.

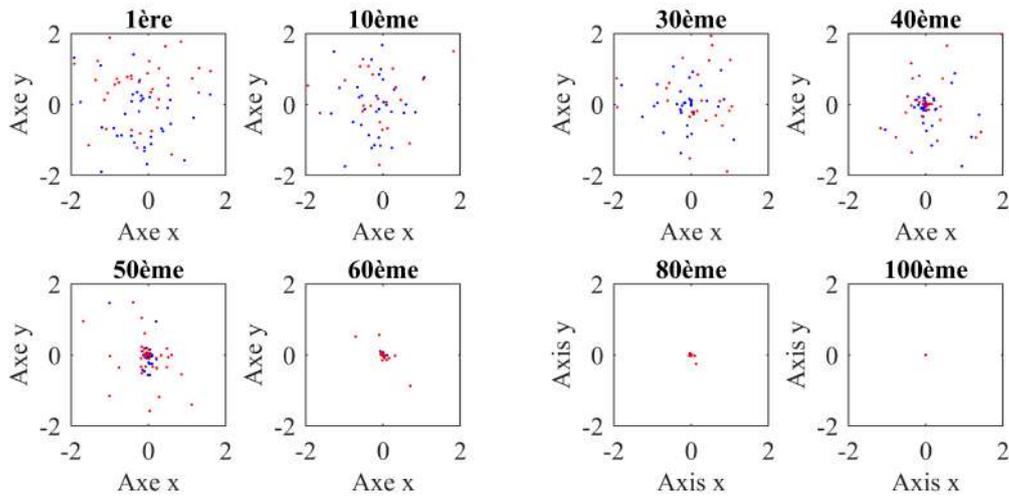
### 2.3.2 Problème d'optimisation 1D et 2D

Par la suite, nous présentons les résultats obtenus par l'algorithme PSO en considérant la fonction de Rastrigin-1D. Par rapport au cas étudié au paragraphe précédent, nous changeons uniquement la fonction objectif et la dimension du problème étudié. D'après la Fig. 2.23, nous trouvons que l'évolution des particules dans l'espace est similaire à ce que nous avons vu précédemment dans le cas de la fonction quadratique. Les particules sont distribuées dans l'intervalle  $[-2; 2]$  aléatoirement à la première itération. Ensuite, les particules se déplacent progressivement vers le point minimal global, position qu'elles occupent à la fin de l'évaluation. En conclusion, l'algorithme PSO permet de trouver le point optimal global dans des problèmes complexes, où il existe un grand nombre de minima locaux.



**Fig. 2.23.** Évolution de la position des particules dans l'espace des solutions. La fonction objectif correspond ici à la fonction Rastrigin-1D

De la même façon, nous avons évalué la capacité de notre algorithme PSO à trouver l'optimum global de la fonction Rastrigin-2D (cf. Fig. 2.24). Cet exercice a permis d'une part de valider l'algorithme PSO développé, et d'autre part, de se familiariser avec les paramètres de celui-ci.



**Fig. 2.24.** Évolution de la position des particules dans l'espace des solutions. La fonction objectif correspond ici à la fonction Rastrigin-2D

## 2.4 Test de robustesse de l'algorithme PSO

Dans cette partie, la conductivité thermique  $\lambda$  et le coefficient d'absorption  $\kappa$  de matériaux semi-transparents seront simultanément estimés à l'aide d'un algorithme PSO. Cet algorithme de type évolutif a été choisi en raison de la nature non linéaire et fortement couplée du problème. Par conséquent, un code basé sur l'algorithme PSO a été spécifiquement implémenté. On rappelle qu'il consiste à rechercher la région optimale dans un espace complexe grâce à l'interaction et à la collaboration d'individus, appelés aussi particules. Plus spécifiquement, les particules sont projetées dans un domaine et localisées par des coordonnées qui représentent les inconnus à identifier, ici  $\lambda$  et  $\kappa$ . De plus, le comportement de chaque particule est évalué par une fonction objectif, ou fonction coût, qui mesure la distance de la particule à la région optimale.

Dans ce travail, la fonction coût est définie comme la somme des distances élevées au carré entre les températures mesurées et simulées (norme L2, Ruffio [2004]). Notez que lors de chaque itération PSO, la position et la vitesse de la particule sont mises à jour sur la base des informations fournies par la particule elle-même ainsi que celles de ses voisines, tel qu'exprimé par les équations 2.12 et 2.13 (Eberhart [1995]). Ici,  $k=1$  correspond à l'estimation de  $\lambda$  et  $k=2$  correspond à l'estimation de  $\kappa$ . De plus, pour éviter les problèmes numériques, la position et la vitesse de chaque particule sont limitées dans une gamme spécifique  $(x_k)_{min} \leq x_{ik}^m \leq (x_k)_{max}$  et  $(v_k)_{min} \leq v_{ik}^m \leq (v_k)_{max}$  où  $(v_k)_{min} = -(v_k)_{max} = 0.1 \cdot [(x_k)_{max} - (x_k)_{min}]$ . Dans ce travail, la valeur du poids d'inertie  $w$  est définie aléatoirement comme  $w = [0.5 + rand(0, 1)]/2$  (Eberhart and Shi [2001], avec  $rand(0, 1)$  correspondant à un nombre aléatoire uniforme entre 0 et 1) et ce dans le but d'éviter que l'algorithme ne soit piégé dans un extremum local.

Compte tenu de la complexité relative du phénomène physique étudié (non linéaire et fortement couplé), la stratégie dite de "crime inverse" est appliquée pour évaluer la robustesse de l'algorithme PSO. Afin de reproduire les conditions expérimentales, un

bruit aléatoire est ajouté aux données synthétiques.

$$(T_{num} - T_{ini})_{bruité} = (T_{num} - T_{ini}) + rand(0, 1) \cdot (T_{num} - T_{ini}) \cdot I_{PSO} \quad (2.20)$$

Où  $I_{PSO}$  représente l'intensité du bruit. Dans le présent problème, la réponse en température au centre de la surface exposée à l'excitation thermique, i.e.  $T(r = 0, z = 0, t)$ , est utilisée pour l'identification. La configuration de la simulation est la même que celle utilisée pour valider le modèle direct, sauf que la densité de chaleur imposée est localisée autour du point central de la face avant ( $r_{laser}=0.2 \text{ mm}$ ,  $R=5 \text{ cm}$ ) afin de reproduire les conditions expérimentales. Le Tableau 2.3 présente les résultats du processus d'identification en termes de valeurs des paramètres identifiés, d'erreurs commises et de temps de calcul, en fonction du bruit ajouté  $I$ .

Valeur exacte : $\lambda=1.5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , $\kappa=512 \text{ m}^{-1}$		
Nombre de particules : 10, nombre d'itérations : 50		
Domaine de recherche : $(x_\lambda)_{min}=0.1$ , $(x_\lambda)_{max}=50$ , $(x_\kappa)_{min}=1$ , $(x_\kappa)_{max}=5000$		
$I_{PSO}$	Résultats d'estimation	Erreurs d'estimation
5%	(1.4997, 508.1102)	(0.0020%, 0.7597%)
10%	(1.4993, 504.1808)	(0.0467%, 1.5272%)
20%	(1.4987, 496.7048)	(0.0867%, 2.9873%)
30%	(1.4980, 489.0850)	(0.1333%, 4.4756%)
40%	(1.4973, 481.6398)	(0.1800%, 5.9297%)
50%	(1.4967, 474.2232)	(0.2200%, 7.3783%)

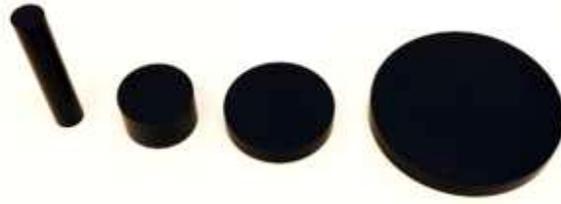
TABLEAU 2.3 – Valeurs estimées de la conductivité thermique et du coefficient d'absorption pour différents niveaux d'intensité de bruit ajoutée au signal simulé

Les résultats présentés dans le Tableau 2.3 montrent que l'algorithme PSO peut toujours produire des résultats d'estimation précis même pour une intensité de bruit relativement importante (jusqu'à 50%).

## 2.5 Application

Dans cette partie, la confrontation avec des données expérimentales est réalisée pour montrer l'efficacité de cette méthode pour résoudre des problèmes pratiques. Le modèle direct 2D-axisymétrique (un créneau de chaleur imposé à la face avant + convection entre la paroi latérale et l'air négligée) résolu par la méthode des volumes finis, est couplé avec l'algorithme PSO pour identifier simultanément des propriétés thermo-physiques (la conductivité thermique et le coefficient d'absorption effectif) d'un matériau semi-transparent (Fig. 2.1). Le matériau semi-transparent étudié dans cette partie est le polyméthacrylate de méthyle (PMMA), largement utilisé dans les secteurs de l'aéronautique et de l'industrie. L'échantillon testé est cylindrique, avec un rayon et

une hauteur de  $1 \pm 0.01 \text{ cm}$  et  $10 \pm 0.01 \text{ cm}$ , respectivement (Fig. 2.25). Toutes les surfaces de l'échantillon sont recouvertes d'une peinture noire à haute température.



**Fig. 2.25.** Echantillon de PMMA utilisé dans l'application du modèle d'identification basé sur l'algorithme PSO (premier à gauche)

Au cours de l'essai, la surface latérale de l'échantillon est enveloppée d'un matériau isolant thermique pour réduire la dissipation provoquée par la conduction thermique entre l'échantillon et le support métallique. La température ambiante est  $23.5^\circ\text{C}$ . De plus, une densité de chaleur thermique incidente est imposée au centre de la face avant de l'échantillon pour une durée de 1 seconde. La densité de ce chaleur imposée ( $168 \text{ kJ}\cdot\text{m}^{-2}$ ) est identifiée par une expérience préliminaire menée sur un échantillon opaque aux propriétés thermo-physiques bien connues. Le temps d'application du laser est fixé à 1 seconde car un temps d'application plus court signifie un pas de temps plus fin, c'est-à-dire un temps de calcul plus long. Néanmoins, les résultats expérimentaux montrent que l'énergie du laser d'une seconde augmente considérablement la température au centre de la face avant de l'échantillon. Il en résulte que la température au centre de la face avant de l'échantillon augmente plus que la limite supérieure que la caméra infrarouge peut capturer. Nous n'avons donc reçu que les données de variation de température à partir de  $3.3 \text{ s}$  jusqu'à la fin ( $11.3 \text{ s}$ ) (Fig. 2.28), car elles se trouvent dans la plage de capture de la caméra infrarouge ( $<373 \text{ K}$ ). En fait, cette période correspond à la phase de relaxation de la température.

Les domaines initiaux de recherche sont  $\lambda \in [0.1, 2]$  en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et  $\kappa \in [200, 5000]$  en  $\text{m}^{-1}$ . Enfin, la conductivité thermique effective et le coefficient d'absorption effectif estimés du PMMA sont respectivement de  $0.179 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et  $609 \text{ m}^{-1}$ , ce qui montre une bonne précision par rapport aux valeurs de littérature ( $\lambda = 0.1889 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , Assael et al. [2008],  $\kappa \in [528; 54350] \text{ m}^{-1}$ , Boulet et al. [2014]). L'évolution des paramètres identifiés  $\hat{\beta} = (\hat{\lambda}, \hat{\kappa})$  et de la fonction objectif  $J(\beta)$  au fur et à mesure des itérations sont représentées dans la Fig. 2.26 et la Fig. 2.27. La Fig. 2.28 représente l'évolution de la température réelle (courbe rouge) et simulée (courbe bleue) au point central de la face, obtenues à partir des mesures expérimentales et des signaux reconstruits à partir du modèle et des paramètres  $(\lambda, \kappa)$  estimés. Le nombre d'itérations est limité à 50 afin d'assurer la convergence des résultats et le temps total d'estimation correspondant est d'environ 48 heures.

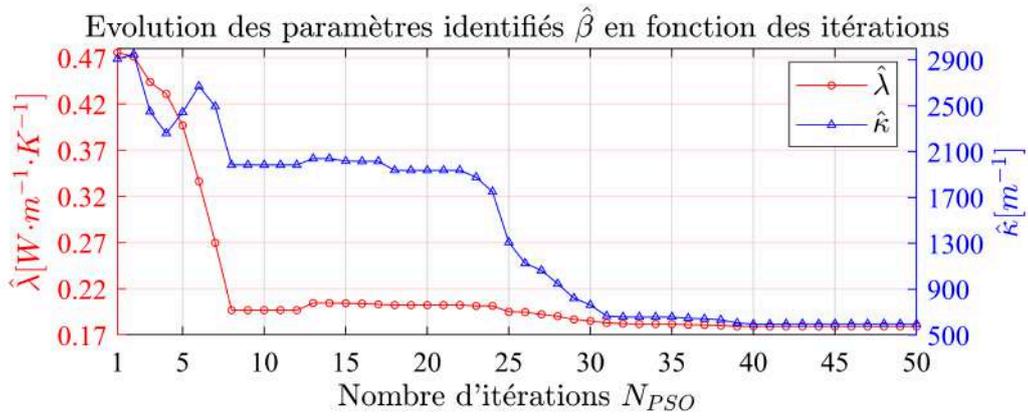


Fig. 2.26. Évolution des paramètres identifiés  $\hat{\beta} = (\hat{\lambda}, \hat{\kappa})$  au fur et à mesure des itérations

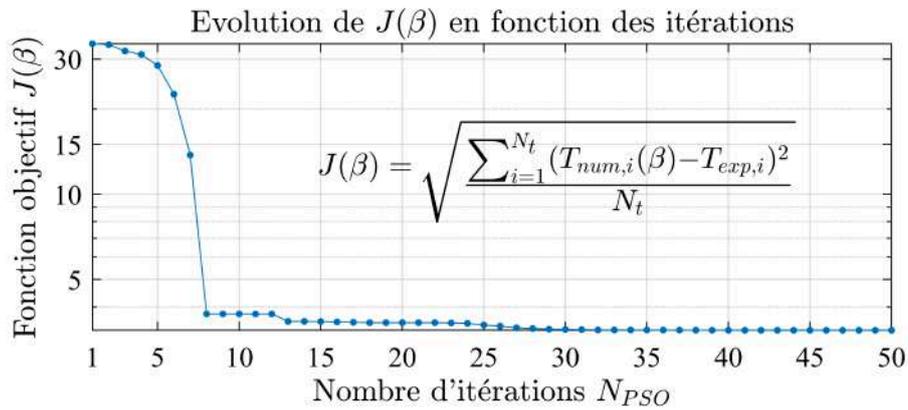


Fig. 2.27. Évolution et de la fonction objectif  $J(\beta)$  au fur et à mesure des itérations

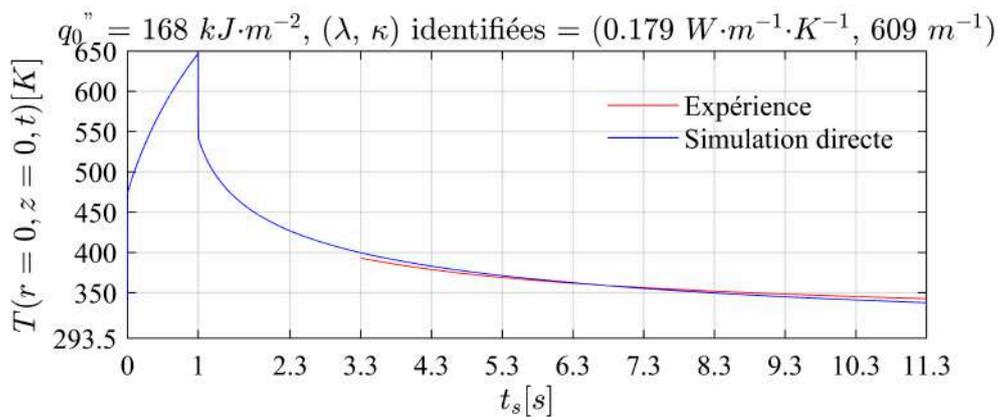


Fig. 2.28. Évolution de la température réelle et simulée au point central de la face avant obtenues à partir des mesures expérimentales et des signaux reconstruits à partir du modèle et des paramètres  $(\lambda, \kappa)$  estimés.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle d'identification basé sur le couplage entre un algorithme d'identification de type PSO et un modèle direct 2D axisymétrique conducto-radiatif instationnaire est proposé et testé. Tout d'abord, l'algorithme PSO ainsi que les paramètres les plus importants sont présentés. Une série de tests utilisant la stratégie de "crime inverse" est réalisée et montre que ce type d'algorithme évolutif associé aux méthodes P1 et volumes finis permet d'identifier simultanément la conductivité thermique et le coefficient d'absorption de matériaux semi-transparents de type PMMA. Enfin, une estimation des propriétés thermo-physiques d'un échantillon réel de PMMA est réalisée. Les résultats de l'estimation sont en bon accord avec ceux obtenus par différentes méthodes. Cependant, le temps de calcul de cette méthode est environ 48 heures pour 50 itérations (les paramètres identifiés convergent à partir de la 25<sup>ème</sup> itération). Dans les chapitres suivants, nous allons essayer de développer un modèle d'identification basé sur le réseau de neurones et de construire un modèle direct d'ordre faible réalisé par la méthode d'identification modale (MIM, Girault et al. [2011]) afin de rendre l'identification plus efficace. En outre, une série d'ajustements sur le banc d'essai, notamment la modification de la taille de l'échantillon et de son angle par rapport au faisceau laser, l'ajout d'une lentille entre l'échantillon et le laser afin de faire légèrement diverger le faisceau laser et de régler l'élévation de la température sur la face avant de l'échantillon dans la plage de mesure de la caméra infrarouge, sera mise en œuvre dans le chapitre suivant pour réduire les sources d'erreurs.

# Chapitre 3

## Modèle réduit d'identification basé sur un réseau de neurones

### Sommaire

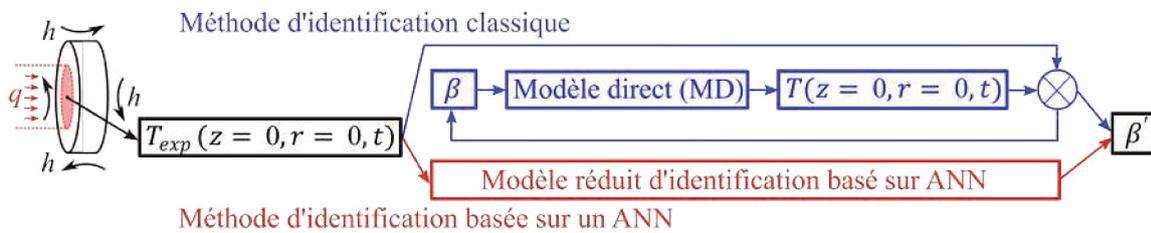
---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
<b>3.2</b>	<b>Histoire du réseau de neurones artificiels</b>	<b>91</b>
<b>3.3</b>	<b>Étude de sensibilité</b>	<b>94</b>
<b>3.4</b>	<b>Construction du modèle réduit d'identification basé sur un réseau de neurones</b>	<b>98</b>
3.4.1	Étapes principales de la construction	98
3.4.2	Génération des données d'entraînement/test	99
3.4.3	Construction et entraînement du réseau de neurones	101
3.4.4	Test de performance du réseau de neurones	103
<b>3.5</b>	<b>Test de robustesse</b>	<b>106</b>
<b>3.6</b>	<b>Étude statistique</b>	<b>110</b>
<b>3.7</b>	<b>Application</b>	<b>111</b>
<b>3.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>115</b>

---

### 3.1 Introduction

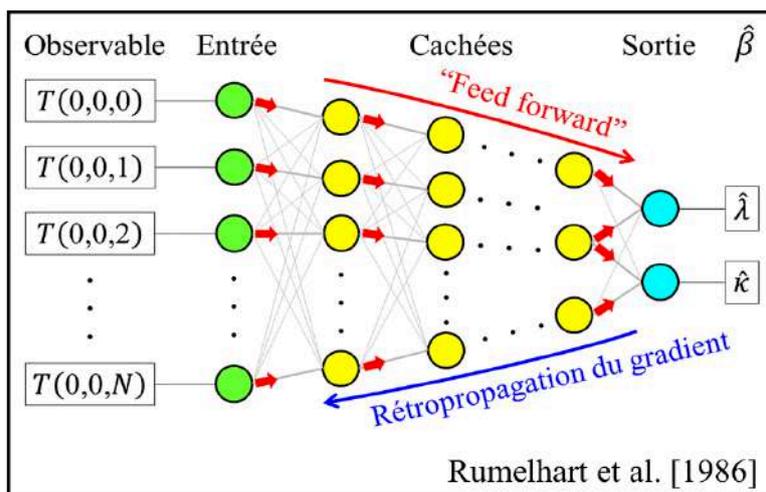
Nous rappelons que les matériaux semi-transparents sont largement utilisés dans tous les secteurs de l'industrie ainsi que celui des transports, tels que les revêtements utilisés comme isolants thermiques autour de certaines pièces métalliques dans les moteurs d'avions (Wang et al. [2000], Wang et al. [2002]), les fenêtres de cockpit ou les pare-brises, ou encore les matériaux composites utilisés pour la construction des avions. L'identification des propriétés thermo-physiques de tels matériaux est généralement réalisée par des méthodes inverses consistant à minimiser la différence entre les données de simulation et les données expérimentales (Ruffio [2004]). En raison de leur forte capacité d'auto-apprentissage, d'imitation et de prédiction, les réseaux de neurones artificiels ont le potentiel de rivaliser avec les méthodes inverses traditionnelles et devenir une méthode alternative de résolution de tels problèmes. La comparaison entre le principe de ce modèle réduit d'identification de propriétés thermo-physiques et le principe des méthodes d'identification classiques est présentée par la Fig. 3.1. Comparée aux méthodes classiques utilisant un algorithme basé sur une méthode de descente de gradient ou un algorithme de type évolutif (Eberhart [1995]) pour minimiser la fonction "objectif" (cf. Fig. 3.1), cette nouvelle approche consiste à établir une relation entre les données d'entrée (observables, ici  $T(0, 0, t)$ ) et de sortie (paramètres à identifier, ici  $\beta = (\lambda, \kappa)$ ) via un réseau de neurones artificiels (ANN).



**Fig. 3.1.** Comparaison entre le principe des méthodes d'identification classiques et le principe de la méthode d'identification basée sur un réseau de neurones

Un réseau de neurones peut être considéré comme une boîte noire. Pour un jeu de données d'entrée, il renvoie un jeu de données de sortie correspondant, comme illustré sur la Fig. 3.2 ci-dessous. Dans notre cas, les observables sont choisies comme entrée et les paramètres à identifier sont choisis comme sortie. Evidemment, un réseau de neurones ne fonctionne que quand il est suffisamment bien entraîné via ce que l'on nomme ici les «données d'entraînement». Ces données d'entraînement sont générées par le modèle direct, qui doit reproduire le plus fidèlement possible le phénomène étudié. Cette phase de construction, ou d'entraînement du modèle réduit et donc la résolution du modèle direct, est cruciale car cela va conditionner les performances du réseau de neurones. Dans ce chapitre, un modèle d'identification basé sur un réseau de neurones artificiels multicouches entraîné par un modèle direct de résolution des transferts conducto-radiatifs 2D axisymétrique est développé pour identifier simultanément la conductivité thermique  $\lambda$  et le coefficient d'absorption effectif  $\kappa$  de milieux

semi-transparents.

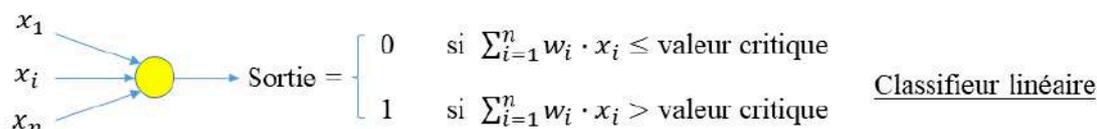


**Fig. 3.2.** Illustration du principe d'identification de paramètres par réseau de neurones entraîné par la méthode de rétropropagation du gradient

### 3.2 Histoire du réseau de neurones artificiels

Ces dernières années, avec l'apparition et les progrès du "machine learning", de nombreux problèmes jusque là insolubles par les méthodes traditionnelles, ont été résolus. Cette approche a également permis d'apporter de nouvelles solutions, souvent de manière plus précise et rapide. En tant que branche importante du "machine learning", le réseau de neurones artificiels (ANN) joue un rôle important dans de nombreux domaines, tels que la reconnaissance des formes, la classification des images, l'ajustement de systèmes complexes, etc.

L'histoire des réseaux de neurones artificiels remonte aux années 1950 et 1960 (McCulloch and Pitts [1943]). Inspiré par les travaux antérieurs de Warren S. McCulloch et de Walter Pitts, Frank Rosenblatt développa un neurone artificiel appelé perceptron (Rosenblatt [1958]). Un perceptron accepte plusieurs entrées binaires et produit une sortie binaire en comparant les entrées pondérées à la condition de seuil (cf. Fig.3.3). En 1969, Marvin Minsky et Seymour Papert ont écrit un livre intitulé "Perceptrons" dans lequel ils soulignent un inconvénient majeur du perceptron, à savoir qu'il était incapable de reproduire la fonction exclusive (ou XOR), qui est non linéaire (Minsky and Papert [1969]).

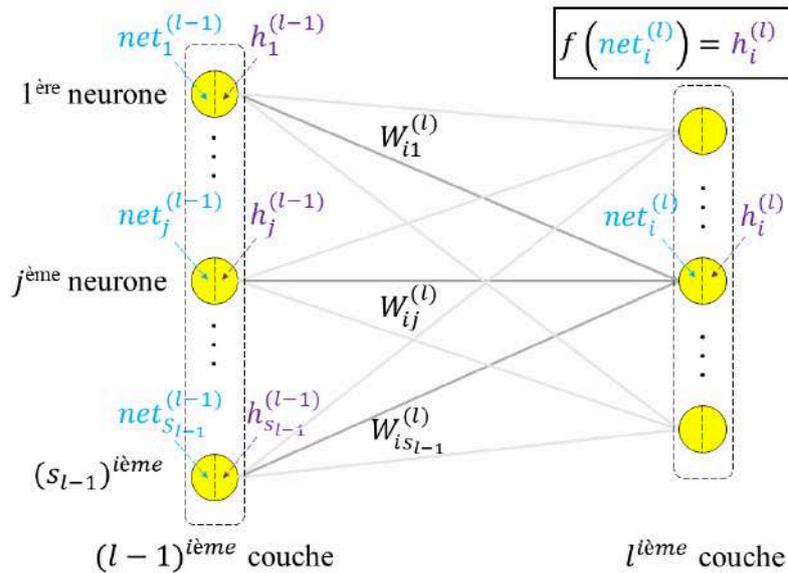


**Fig. 3.3.** Idée principale du perceptron

En 1974, Paul J. Werbos a proposé, dans le cadre de son travail de recherche de doctorat à l'Université de Harvard, le célèbre algorithme d'entraînement de réseau basé la rétropropagation du gradient de l'erreur (Werbos [1974]). Sur la base des travaux de Paul J. Werbos, les chercheurs Geoffrey E. Hinton, David E. Rumelhart et Ronald J. Williams ont publié en 1986 dans la revue Nature un article intitulé "Learning representations by back-propagation errors" (Rumelhart et al. [1986]). Dans cet article, ils montrent que l'algorithme de rétropropagation du gradient a la capacité d'apprendre aux neurones situés sur les couches cachées du réseau, des représentations internes capables de résoudre des problèmes complexes. La possibilité d'empiler ainsi les couches permet aux réseaux de neurones de compenser la faiblesse du perceptron et de pouvoir apprendre et reproduire des fonctions non linéaires. L'idée principale de l'algorithme de rétropropagation du gradient est brièvement expliquée par la Fig. 3.4, où

1.  $E$  représente l'erreur totale quadratique moyenne de tous les ensembles de données d'entraînement et  $E(I)$  représente l'erreur totale correspondant au  $I^{\text{ième}}$  ensemble de donnée d'entraînement ;
2.  $N_{train}$  représente le nombre total des ensembles de données d'entraînement ;
3.  $s_s$  représente le nombre des neurones situés sur la couche de sortie ;
4.  $y_k(I)$  et  $d_k(I)$  représentent respectivement la sortie du  $k^{\text{ième}}$  neurone situé sur la couche de sortie et la sortie attendue, correspondant au  $I^{\text{ème}}$  ensemble de donnée d'entraînement ;
5.  $\alpha$  représente le taux d'apprentissage pendant l'entraînement ; Plus la valeur de ce paramètre est grande, plus la convergence est rapide. Inversement, plus sa valeur est petite, plus la précision d'apprentissage est élevée.
6.  $W_{ij}^{(l)}$  et  $W_{ij}^{(l)'}$  représentent respectivement la valeur du poids connectant le  $j^{\text{ème}}$  neurone situé sur la  $(l - 1)^{\text{ième}}$  couche et le  $i^{\text{ème}}$  neurone situé sur la  $l^{\text{ième}}$  couche à l'itération actuelle et à l'itération prochaine.
7.  $b_i^{(l)}$  et  $b_i^{(l)'}$  représentent respectivement la valeur du biais lié au  $i^{\text{ème}}$  neurone situé sur la  $l^{\text{ième}}$  couche à l'itération actuelle et à l'itération prochaine ;
8.  $f(x)$  représente la fonction d'activation de type sigmoïde. Pour le  $i^{\text{ème}}$  neurone situé sur la  $l^{\text{ième}}$  couche,  $net_i^{(l)} = \sum W_{ij}^{(l)} \cdot h_j^{(l-1)} + b_i^{(l)}$  et  $h_i^{(l)} = f(net_i^{(l)})$  sont respectivement l'entrée et la sortie de cette fonction d'activation. Un neurone configuré avec telle type de fonction d'activation est comme un perceptron lisse, c'est-à-dire que pour les petits changements de poids et de biais, le neurone peut générer un petit changement de sortie en conséquence.

Selon les formulations apparues en bas de la Fig. 3.4, les poids et les biais sont renouvelés pendant chaque itération jusqu'au moment où l'erreur totale quadratique moyenne  $E$  soit suffisamment petite. Plus de détails sont présentés dans Annexe A.



$$E = \frac{1}{N_{train}} \sum_{i=1}^{N_{train}} E(I) = \frac{1}{N_{train}} \sum_{i=1}^{N_{train}} \sum_{k=1}^{s_s} \frac{(y_k(I) - d_k(I))^2}{2}$$

$$W_{ij}^{(l)'} = W_{ij}^{(l)} - \alpha \frac{\partial E(I)}{\partial W_{ij}^{(l)}}, \quad b_i^{(l)'} = b_i^{(l)} - \alpha \frac{\partial E(I)}{\partial b_i^{(l)}}$$

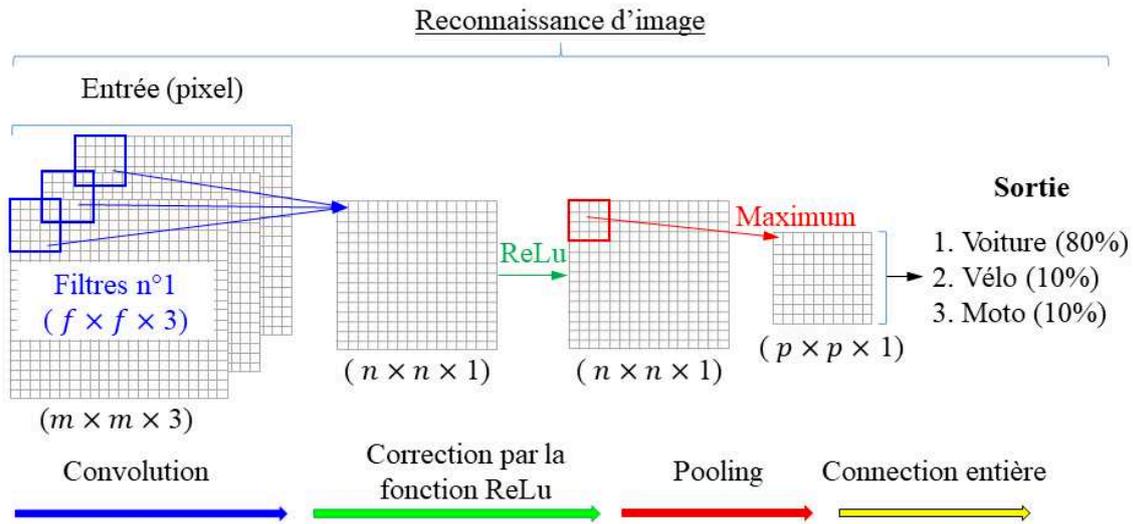
$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \in ]0, 1[, \quad x \in ]-\infty, +\infty[$$

$l = L$ : couche de sortie	$\frac{\partial E(I)}{\partial W_{kj}^{(L)}} = \delta_k^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)}, \quad \frac{\partial E(I)}{\partial b_k^{(L)}} = \delta_k^{(L)}$ $\delta_k^{(L)} = (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x) \Big _{x=net_k^{(L)}} \cdot h_j^{(L-1)}$
$2 \leq l \leq L - 1$ : couche cachée	$\frac{\partial E(I)}{\partial W_{ji}^{(l)}} = \delta_j^{(l)} \cdot h_i^{(l-1)}, \quad \frac{\partial E(I)}{\partial b_j^{(l)}} = \delta_j^{(l)}$ $\delta_j^{(l)} = \sum_{k=1}^{k=n} \delta_k^{(l+1)} \cdot W_{kj}^{(l+1)} \cdot f'(x) \Big _{x=net_j^{(l)}}$

**Fig. 3.4.** Idée principale de l'algorithme de rétropropagation du gradient

En 1989, Yann LeCun a proposé les réseaux de neurones convolutif (CNN) pour la reconnaissance d'images (LeCun et al. [1989]). Les réseaux de neurones convolutifs se composent généralement d'une couche d'entrée, d'une couche convolutionnelle, d'une couche de regroupement (pooling), d'une couche entièrement connectée et d'une couche de sortie (cf Fig. 3.5). La fonction de la couche convolutionnelle est d'extraire les caractères des données d'entrée, et les caractères en sortie sont ensuite transmis à la couche de regroupement pour le filtrage des informations. La couche entièrement connectée est équivalente à une couche cachée et son rôle est de combiner de manière non linéaire

les caractéristiques extraites pour obtenir la sortie. Par la suite, le développement des réseaux de neurones s'est progressivement ralenti jusqu'à quasiment disparaître en raison de certains défauts tels que la lenteur du processus d'entraînement, le problème de sur-apprentissage dû au manque d'échantillons d'entraînement, etc.



**Fig. 3.5.** Idée principale du réseau de neurones de type convolutif

En 2006, Geoffrey E. Hinton et Ruslan Salakhutdinov ont publié dans la revue Science l'article "Reducing the dimensionality of data with neural network" (Hinton and Salakhutdinov [2006]). Dans cet article, ils proposent une étape préalable d'entraînement non supervisée qui consiste à traiter chaque ensemble voisin de deux couches comme une machine de Boltzmann restreinte (i.e. on considère les neurones d'une même couche indépendants) de sorte à obtenir une solution acceptable (i.e. des poids proches de la solution finale). Une fois les poids initialisés, la technique de rétropropagation est utilisée pour affiner les résultats. Cet article marque le début d'une ère nouvelle dans l'histoire du réseau de neurones et sonne la naissance de l'apprentissage profond. En 2012, l'équipe de Hinton a remporté le championnat du concours Imagenet avec une bien meilleure note que la deuxième place. La vague de l'apprentissage profond a ainsi commencé et se poursuit jusqu'à présent.

### 3.3 Étude de sensibilité

Un paramètre qualifié de sensible peut être relativement facile à identifier car sa variation affecte de manière significative l'observable du système étudié. En cas de problème instationnaire, comme dans le cas présent, la sensibilité des paramètres peut varier dans le temps. Deux paramètres présentant la même évolution de sensibilité, qualifiés de "corrélés", sont difficiles à identifier simultanément car leurs effets sur l'observable sont similaires. Pour les problèmes d'identification de paramètres, l'analyse de

sensibilité est essentielle car elle contribue à la détection des corrélations potentielles entre les paramètres et au choix du meilleur intervalle de temps pour l'identification de ces paramètres. La sensibilité réduite de la conductivité thermique  $\lambda$ , du coefficient d'absorption  $\kappa$  et de la densité de chaleur imposée  $q_0''$  sont définies comme suit :

$$S_\lambda = \lambda \cdot \frac{\partial T(0, 0, t)}{\partial \lambda} \quad S_\kappa = \kappa \cdot \frac{\partial T(0, 0, t)}{\partial \kappa} \quad S_{q_0''} = q_0'' \cdot \frac{\partial T(0, 0, t)}{\partial q_0''} \quad (3.1)$$

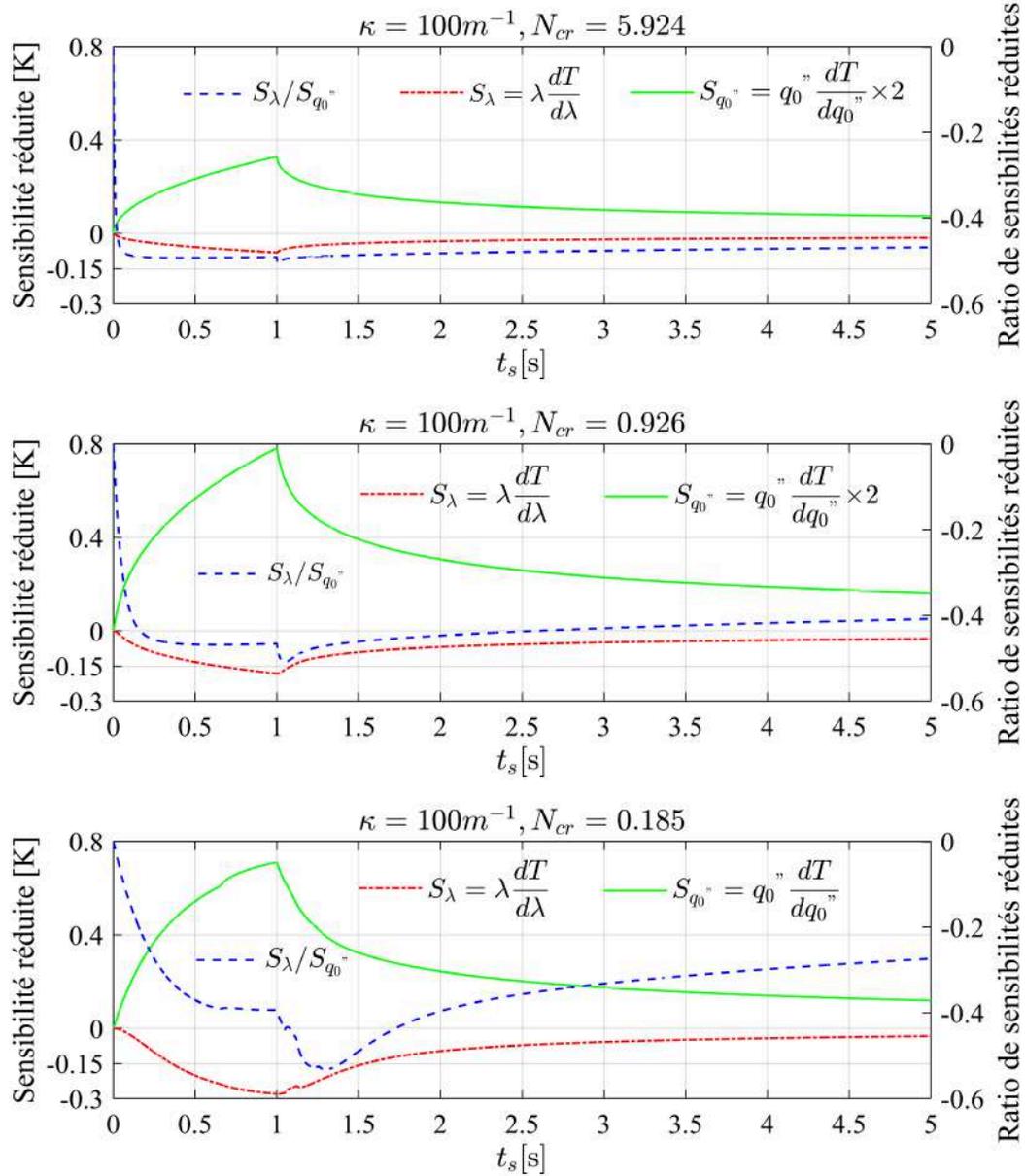
Où  $T(0, 0, t)$  représente  $T(r = 0, z = 0, t)$  qui correspond à l'évolution de la température au niveau du point central de la face avant. Cette température est choisie comme observable par la suite. Un nombre adimensionnel, appelé nombre de Planck,  $N_{cr} = \lambda \cdot \kappa / (4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T_{ini}^3)$  est introduit pour quantifier l'importance relative entre les effets dus à la conduction et ceux dus au rayonnement au sein du milieu semi-transparent. Dans cette partie, plusieurs cas différents sont étudiés pour évaluer l'influence des paramètres sur  $T(0, 0, t)$  dans un mode dominé par le rayonnement ( $N_{cr} \ll 1$ ), un mode où les effets conductifs et radiatifs sont équivalents ( $N_{cr} \approx 1$ ) et un mode dominé par la conduction ( $N_{cr} \gg 1$ ). Compte tenu des difficultés rencontrées pour identifier simultanément l'ensemble des paramètres ( $\lambda, \kappa, q_0''$ ) et de l'intérêt de comparer la valeur identifiée de  $\lambda$  avec différentes stratégies, deux stratégies d'identification sont proposées et étudiées pour chaque mode de transfert de chaleur. La première stratégie consiste à identifier ( $\lambda, q_0''$ ) avec  $\kappa$  considéré comme connu. La deuxième stratégie consiste à identifier ( $\lambda, \kappa$ ) avec  $q_0''$  considéré comme connu. Le Tableau 3.1 présente les valeurs des paramètres pour les deux stratégies dans les trois modes de transfert de chaleur considérés. Les valeurs de conductivité thermique ont été choisies pour correspondre respectivement à l'air et aux matériaux semi-transparentes usuels tels que le PMMA et le verre.

	$\lambda [W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}], \quad \kappa [m^{-1}], \quad q_0'' [kJ \cdot m^{-2}]$	
$N_{cr}$	Stratégie ( $\lambda, q_0''$ ) : $\kappa=100$	Stratégie ( $\lambda, \kappa$ ) : $q_0''=50$
0.185	$(\lambda, q_0'')=(0.025, 50)$	$(\lambda, \kappa)=(0.025, 100)$
0.926	$(\lambda, q_0'')=(0.125, 50)$	$(\lambda, \kappa)=(0.125, 100)$
5.924	$(\lambda, q_0'')=(0.800, 50)$	$(\lambda, \kappa)=(0.800, 100)$

TABLEAU 3.1 – Valeurs des paramètres associés à chaque stratégie, pour les trois modes de transfert de chaleur étudiés, dans le cadre de l'étude de sensibilité réduite

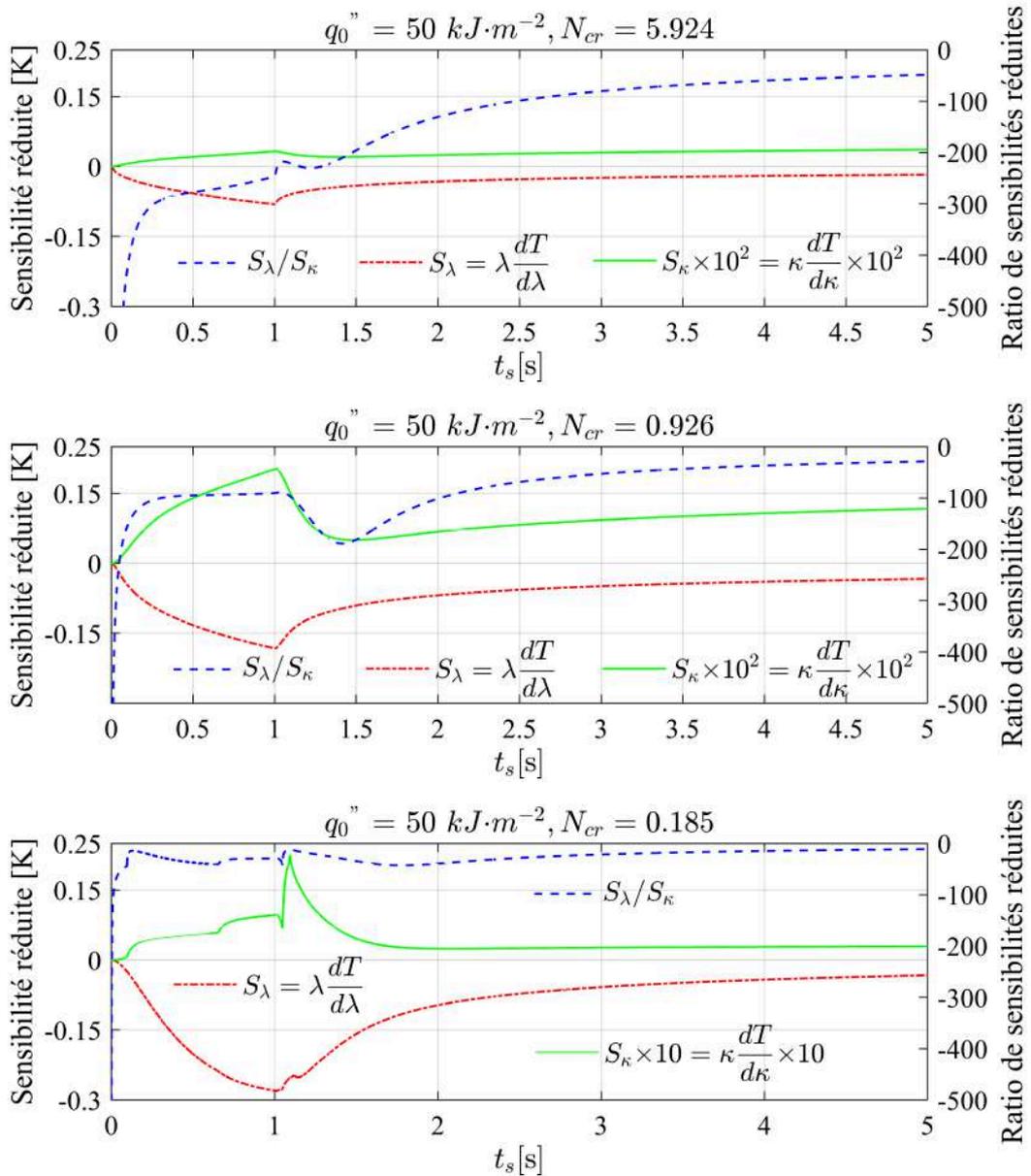
La Fig. 3.6 et la Fig. 3.7 présentent respectivement l'évolution de la sensibilité réduite aux paramètres ( $\lambda, \kappa, q_0''$ ) de la température au centre de la face avant, pour les deux stratégies et pour les trois modes de transfert de chaleur. Cet emplacement a été choisi au préalable comme observable en raison de son accessibilité expérimentale ainsi que de son exposition directe à l'excitation, ce qui le rend plus sensible par rapport à un autre emplacement dans le domaine (par exemple, en face arrière). En outre, pour faciliter la comparaison, certains facteurs d'échelle sont appliqués à l'évolution des sensibilités réduites. De plus, l'évolution des rapports de sensibilité réduite ( $S_\lambda/S_{q_0''}$ ) et ( $S_\lambda/S_\kappa$ ) est également tracée pour mettre en évidence les corrélations potentielles

entre les paramètres.



**Fig. 3.6.** Évolution de la sensibilité réduite (obtenue grâce au modèle 2D axisymétrique) de la température centrale de la face avant à la conductivité thermique  $\lambda$  et à la densité de chaleur imposée  $q_0''$  (axe gauche) et évolution du rapport des sensibilités réduites (axe droit) dans le cas de la stratégie  $(\lambda, q_0'')$  pour différentes valeurs de  $N_{cr}$

D'après la Fig. 3.6, la conductivité thermique  $\lambda$  et la densité de chaleur imposée  $q_0''$  étant corrélée de 2.5 à 5 s (rapport des sensibilités réduites quasi-constant), le meilleur intervalle de temps pour l'identification de la stratégie  $(\lambda, q_0'')$  est  $[0, 2.5$  s]. Entre 0 et 2.5 s, le rapport des sensibilités réduites  $S_\lambda/S_{q_0''}$  évolue dans le temps, ce qui prouve la faisabilité théorique de l'identification simultanée de  $\lambda$  et de  $q_0''$ .



**Fig. 3.7.** Évolution de la sensibilité réduite de la température centrale de la face avant à la conductivité thermique  $\lambda$  et au coefficient d'absorption  $\kappa$  (axe gauche) et évolution du rapport des sensibilités réduites (axe droit) en cas de stratégie  $(\lambda, \kappa)$  pour différentes valeurs de  $N_{cr}$

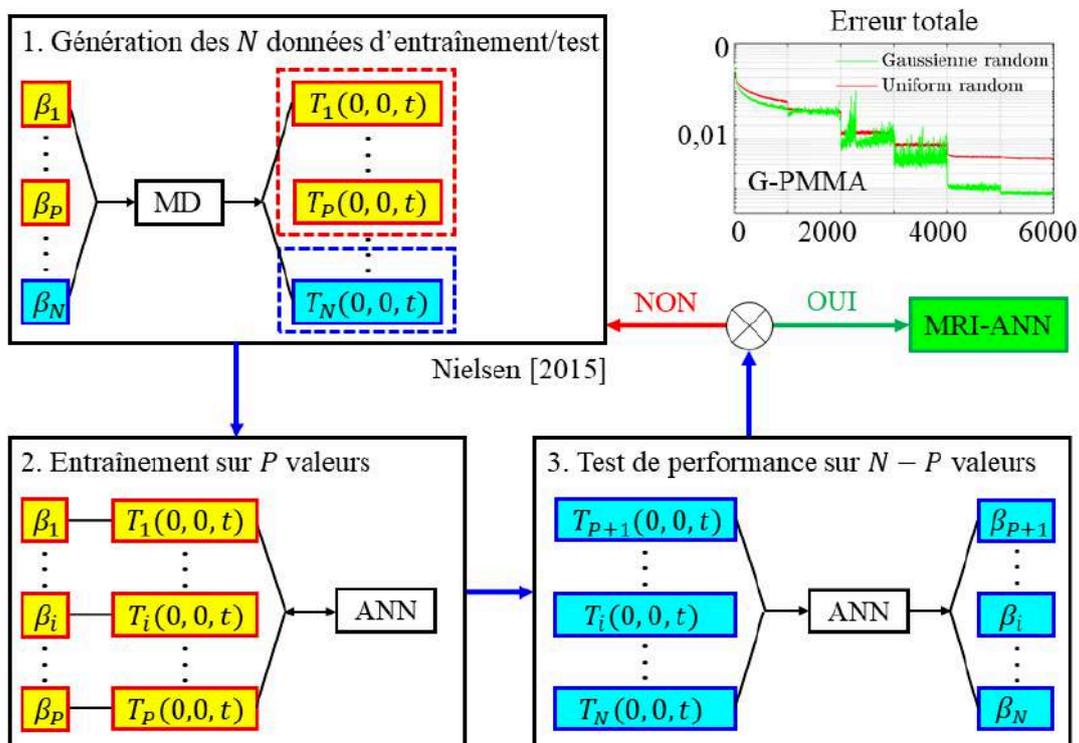
De même, l'intervalle de temps optimal pour l'identification de la stratégie  $(\lambda, \kappa)$  est de  $[0, 2.5 \text{ s}]$ , quel que soit le mode de transfert de chaleur (Fig. 3.7). La présente analyse prouve également la faisabilité d'identifier simultanément  $(\lambda, \kappa)$ . Cependant, on observe que le coefficient d'absorption moyen  $\kappa$  a une sensibilité réduite très faible par rapport à  $\lambda$ , quels que soient les modes de transfert de chaleur, ce qui complique l'identification précise de  $\kappa$ . Cependant, cela laisse également penser que  $\forall \kappa$ , l'identification de  $\lambda$  reste possible. De plus, les effets cumulés de l'augmentation de la corrélation entre les paramètres avec l'augmentation des effets radiatifs (Fig. 3.7) et la sensibilité réduite relativement faible de l'observable au coefficient d'absorption  $\kappa$ , expliquent les difficultés rencontrées pour estimer  $\lambda$  cette variable pour des matériaux où le rayonnement joue un rôle important.

Ces observations sont en accord avec celles établies par des travaux antérieurs (Menashe and Wakeham [1982], Schick et al. [2012]) qui mettent en évidence l'effet des transferts radiatifs dans les expériences de type flash pour ce type de matériaux. La présente étude de sensibilité réduite sera utile pour l'interprétation des résultats présentés dans la partie test de performance.

### 3.4 Construction du modèle réduit d'identification basé sur un réseau de neurones

#### 3.4.1 Étapes principales de la construction

Dans cette partie, un modèle réduit d'identification original basé sur un réseau de neurones artificiels multicouches est présenté. Le but est d'identifier simultanément la conductivité thermique  $\lambda$  et le coefficient d'absorption moyen  $\kappa$  de matériaux semi-transparents homogènes et isotropes. L'étude de sensibilité a démontré la faisabilité théorique. La construction de ce nouveau modèle réduit d'identification de propriétés thermo-physiques est présentée par la Fig. 3.8.



**Fig. 3.8.** Étapes principales de construction du modèle réduit d'identification basé sur un réseau de neurones

La construction du réseau de neurones est réalisée selon trois étapes :

- Etape 1. Génération des données d'entraînement et des données de test,
- Etape 2. Entraînement du réseau de neurones,

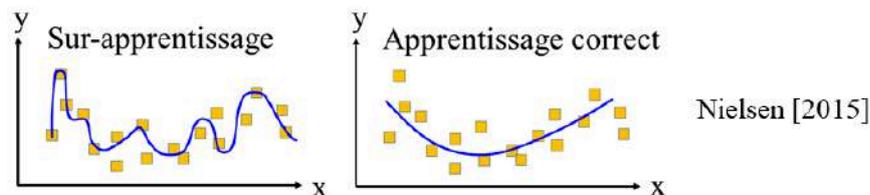
Etape 3. Test de performance du réseau de neurones.

Si le test de performance est validé, un modèle d'identification basé sur un réseau de neurones est obtenu. Dans le cas contraire, d'avantage de données d'entraînement doivent être générées. Afin de ne pas avoir à générer trop de données, une possibilité peut consister à utiliser une distribution adaptée de jeux de données. Dans la suite, ces trois étapes seront discutées en détails.

### 3.4.2 Génération des données d'entraînement/test

Compte tenu de la complexité du problème direct (non-linéarité, équations couplées fortes, etc.), un grand nombre de données d'entraînement est nécessaire. Se pose également la question de la distribution de ces données, un manque de diversité des données d'entraînement pouvant conduire au phénomène de sur-apprentissage (cf Fig. 3.9). L'ensemble des données d'entraînement/test est défini comme la combinaison des résultats de la résolution directe  $T(r = 0, z = 0, t)$  et des paramètres à identifier  $\beta = (\lambda, \kappa)$  ou  $(\lambda, q_0'')$ . Pour construire la base de données, les paramètres à identifier  $\beta$  sont générés dans une gamme  $[\beta_{min}, \beta_{max}]$  qui doit être suffisamment large pour garantir la diversité des échantillons d'entraînement. Pour chaque paire de paramètres (par exemple,  $(\lambda_1, \kappa_1), \dots, (\lambda_N, \kappa_N)$ ), l'évolution de la température au point central de la face avant  $T(r = 0, z = 0, t)$  est obtenue par simulation directe basée sur la méthode P1 et la méthode des volumes finies (modèle 2D axisymétrique).

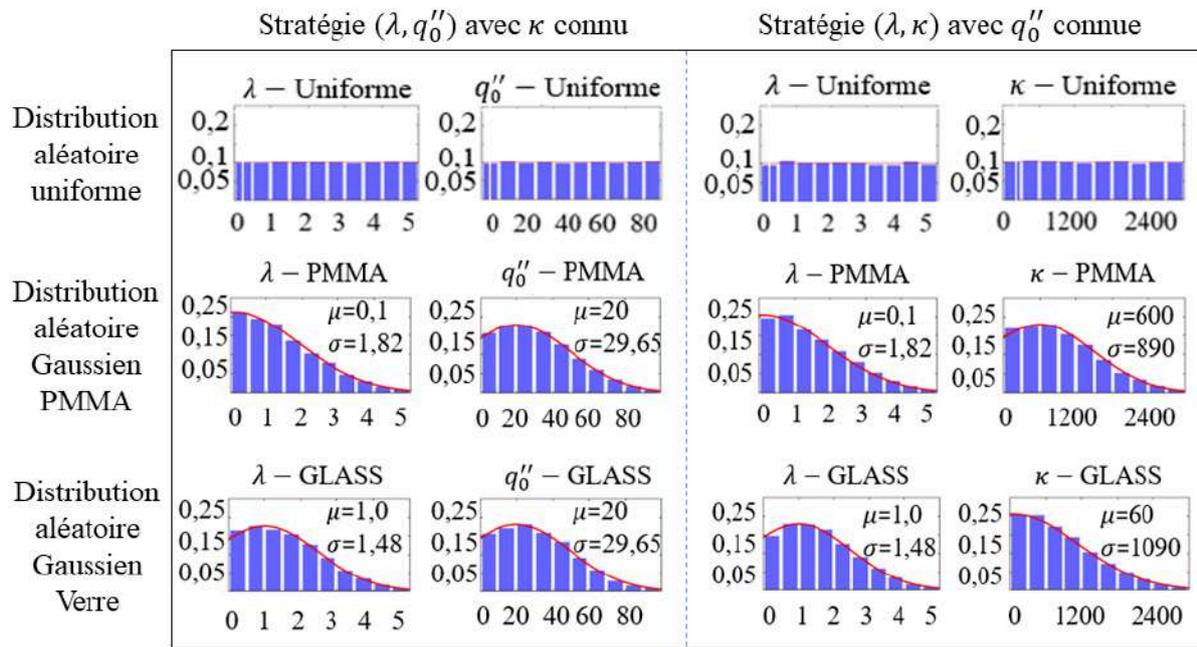
Dans ce travail, l'entraînement du réseau de neurones est effectué à l'aide d'un ensemble de 5000 échantillons de données. Le test de performance est quant à lui réalisé à l'aide de 1000 échantillons. Afin d'étudier l'influence de la distribution des paramètres sur l'efficacité de l'entraînement du réseau de neurones, trois types de bases de données distincts sont générés. Nous rappelons que l'une des deux stratégies correspond au cas où le coefficient d'absorption moyen  $\kappa$  est supposé connu pour identifier simultanément la conductivité thermique  $\lambda$  et la densité de chaleur  $q_0''$ . L'autre stratégie correspond au cas où la densité de chaleur  $q_0''$  est supposée connue pour identifier simultanément la conductivité thermique  $\lambda$  et le coefficient d'absorption moyen  $\kappa$ .



**Fig. 3.9.** *Sur-apprentissage causé par un manque de diversité de données d'entraînement*

La première base de données, considérée comme base de référence, est générée selon une distribution aléatoire uniforme. La deuxième et la troisième bases de données sont

générées selon une distribution aléatoire Gaussienne. Ces bases de données sont nommées en fonction des valeurs de l'espérance correspondant à l'échantillon à analyser. Ici, la distribution de la base de données  $\lambda$ -PMMA et la distribution de la base de données  $\lambda$ -Verre sont construites compte tenu des espérances et des écarts types présentés dans la Fig. 3.10. Les valeurs de l'espérance et de l'écart type résumées dans le Tableau 3.2 représentent respectivement la valeur la plus probable et le niveau d'incertitude (e.g. faible, modéré, élevé) correspondant à l'échantillon étudié. Ces considérations peuvent être vues comme une connaissance a priori et son niveau de confiance des propriétés du matériau, concepts associés aux approches bayésiennes (Mota et al. [2010]).



**Fig. 3.10.** Histogramme des paramètres  $(\lambda, q_0'')$  et  $(\lambda, \kappa)$  générés par 3 types de distribution aléatoire pour les matériaux semi-transparents de type PMMA et Verre dans le contexte de 2 stratégies

Identification $(\lambda[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}], q_0'' [kJ \cdot m^{-2}])$ avec $\kappa=100 m^{-1}$ connu		
PMMA	$(\mu_\lambda, \mu_{q_0''})=(0.1, 20)$	$(\sigma_\lambda, \sigma_{q_0''})=(1.82, 29.65)$
GLASS	$(\mu_\lambda, \mu_{q_0''})=(1.0, 20)$	$(\sigma_\lambda, \sigma_{q_0''})=(1.48, 29.65)$
Identification $(\lambda[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}], \kappa[m^{-1}])$ avec $q_0''=50 kJ \cdot m^{-2}$ connu		
PMMA	$(\mu_\lambda, \mu_\kappa)=(0.1, 600)$	$(\sigma_\lambda, \sigma_\kappa)=(1.82, 890)$
GLASS	$(\mu_\lambda, \mu_\kappa)=(1.0, 60)$	$(\sigma_\lambda, \sigma_\kappa)=(1.48, 1090)$

TABLEAU 3.2 – Valeurs de l'espérance et de l'écart type des distributions aléatoires Gaussiennes pour les matériaux semi-transparents de type PMMA et Verre dans le contexte de 2 stratégies

Dans le cas de l'identification de  $(\lambda, q_0'')$  avec  $\kappa=100 m^{-1}$  connu, quel que soit le type d'échantillon étudié, les valeurs de la densité chaleur imposée  $q_0''$  sont générées selon une distribution aléatoire Gaussienne dont l'espérance et l'écart-type sont respectivement fixés à  $\mu_{q_0''}=20 kJ \cdot m^{-2}$  et  $\sigma_{q_0''}=29.65 kJ \cdot m^{-2}$ .

Dans le cas de l'identification de  $(\lambda, \kappa)$  avec  $q_0'' = 50 \text{ kJ}\cdot\text{m}^{-2}$  connu, les mêmes paramètres que précédemment sont utilisés pour la fonction de distribution de  $\lambda$ . Deux distributions aléatoires gaussiennes sont utilisées pour le coefficient d'absorption moyen  $\kappa$ . La première distribution est générée avec  $\mu_\kappa = 600 \text{ m}^{-1}$  et  $\sigma_\kappa = 890 \text{ m}^{-1}$ , appelée par la suite distribution  $\kappa$ -PMMA. La deuxième distribution est générée avec  $\mu_\kappa = 60 \text{ m}^{-1}$  et  $\sigma_\kappa = 1090 \text{ m}^{-1}$ , appelée par la suite distribution  $\kappa$ -Verre. Le nombre d'échantillons statistiques (ici 5000 + 1000) est suffisant car les histogrammes correspondent bien aux courbes de distribution analytique.

### 3.4.3 Construction et entraînement du réseau de neurones

Le réseau de neurones artificiels multicouches est entraîné à l'aide d'un algorithme de type "rétro-propagation de gradient". La couche d'entrée contient 100 neurones correspondant chacun à la température à un instant donné au centre de la face avant  $T(z = 0, r = 0, t)$ . Les paramètres à identifier  $\beta$  correspondent aux neurones de sortie du réseau. Le nombre de couches cachées ainsi que les fonctions d'activation sont choisis par essai-erreur jusqu'à trouver l'ensemble optimal de paramètres permettant de capturer la physique du phénomène étudié. Pour ce problème thermique non linéaire et fortement couplé, un réseau de neurones composé d'une couche d'entrée, de six couches cachées et d'une couche de sortie a été choisi (Fig. 3.11).

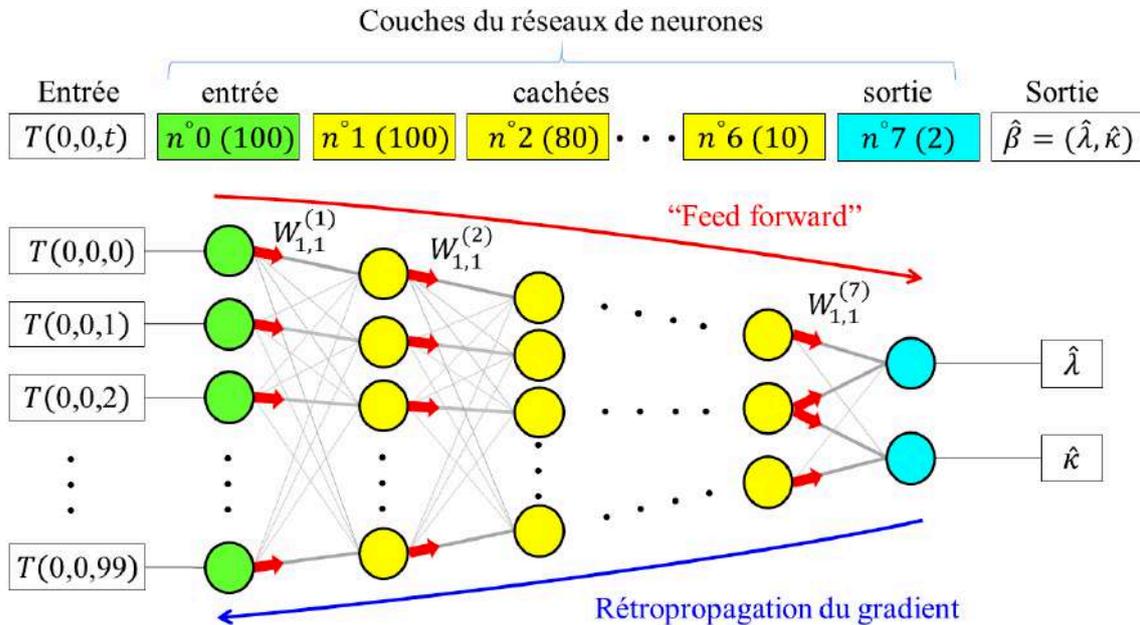
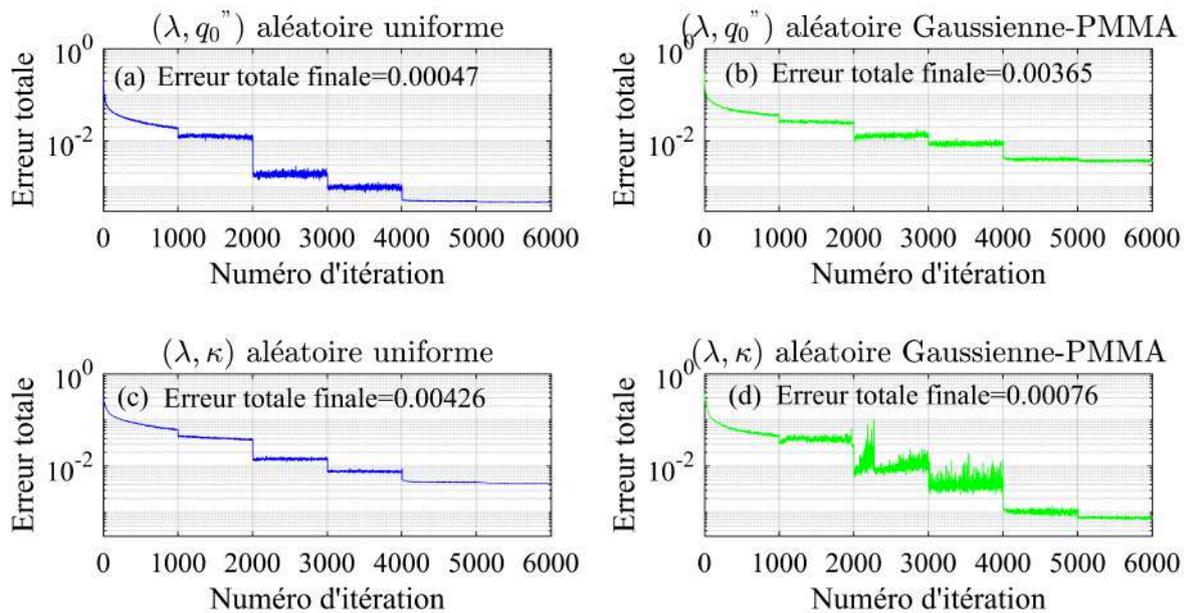


Fig. 3.11. Structure du réseau de neurones utilisé

En outre, le nombre de neurones dans chacune des couches cachées dépend de la profondeur de la couche. Ce nombre diminue en fonction de la profondeur de la couche selon la répartition : 100-80-60-40-20-10. Nous avons également essayé d'autres types de répartition, par exemple, 100-100-100-100-100-100, etc. Pour notre problème, ces autres mode de répartition n'ont pas amélioré la précision du réseau de neurones mais ont

augmenté le temps de l'entraînement. La fonction sigmoïde est choisie comme fonction d'activation pour les neurones situés sur les couches cachées et une fonction linéaire est choisie pour les neurones situés sur les couches d'entrée et de sortie. De plus, le taux d'apprentissage, qui agit à la manière d'un paramètre de relaxation dans la mise à jour des paramètres du modèle d'identification (poids des connections et biais des neurones), est l'un des hyper-paramètres les plus importants dans ce type d'approche. Celui-ci est défini de manière à diminuer au cours de l'entraînement (de  $10^{-2}$  à  $5 \cdot 10^{-5}$  équirépartis sur 6 paliers). Cela permet d'accélérer la convergence au début et d'améliorer la précision à la fin (Nielsen [2015]). Le nombre maximal d'itérations pour chaque palier est fixée à 1000.



**Fig. 3.12.** Evolution de l'erreur totale dans le cas de la stratégie  $(\lambda, q_0'')$  avec (a) une distribution aléatoire uniforme et (b) une distribution aléatoire Gaussienne-PMMA, et dans le cas de la stratégie  $(\lambda, \kappa)$  avec (c) une distribution aléatoire uniforme et (d) une distribution aléatoire Gaussienne-PMMA

La Fig. 3.12 montre l'évolution de l'erreur totale au cours du processus d'entraînement pour les deux stratégies distinctes (les 2 problèmes d'estimation  $(\lambda, q_0'')$  et  $(\lambda, \kappa)$ ). L'erreur totale est calculée en faisant la somme des résidus entre les prédictions et les valeurs réelles des paramètres élevées au carré, pour l'ensemble des données d'apprentissage. On trace ainsi l'évolution de ce résidu à l'issue de chaque séquence d'entraînement, une "itération" correspondant à l'entraînement du réseau avec l'intégralité des données d'entraînement (ici 5000). On notera que les prédictions et les valeurs réelles sont toutes deux normalisées selon la cote Z (Z-Score en anglais) telles que  $\beta' = (\beta - \mu_\beta) / \sigma_\beta$ . Le résidu total correspond ainsi à la somme des résidus entre les prédictions et les valeurs réelles (elles aussi normalisées de la sorte) des paramètres à estimer. Quelle que soit la stratégie, l'erreur totale diminue avec le nombre d'itérations. Les diminutions graduelles observées de l'erreur totale sont dues au changement du taux d'apprentis-

sage lequel survient avec une période de 1000 itérations, tel que défini dans la procédure d'entraînement. Pour la stratégie  $(\lambda, q_0'')$ , une distribution aléatoire uniforme des données d'entraînement conduit à une erreur totale finale de  $4.7 \cdot 10^{-4}$ , tandis qu'une distribution aléatoire Gaussienne-PMMA pour les données d'entraînement conduit à une erreur totale finale de  $3.7 \cdot 10^{-3}$ . Pour la stratégie  $(\lambda, \kappa)$ , les mêmes distributions conduisent aux erreurs totales finales de  $4.3 \cdot 10^{-3}$  et  $7.6 \cdot 10^{-4}$ , respectivement. Pour finir, on précisera que la même technique de normalisation Z-Score (Latha and Thanagasamy [2011], cf. Fig. 3.13) est appliquée à l'ensemble des données d'entraînement, en l'occurrence les signaux de température,  $T(0, 0, t)' = (T(0, 0, t) - \mu_{T(0,0,t)}) / \sigma_{T(0,0,t)}$ , afin d'améliorer l'efficacité du réseau. L'ordre de grandeur du temps de calcul nécessaire à l'entraînement d'un réseau est de 10 h, dans les conditions évoquées précédemment.

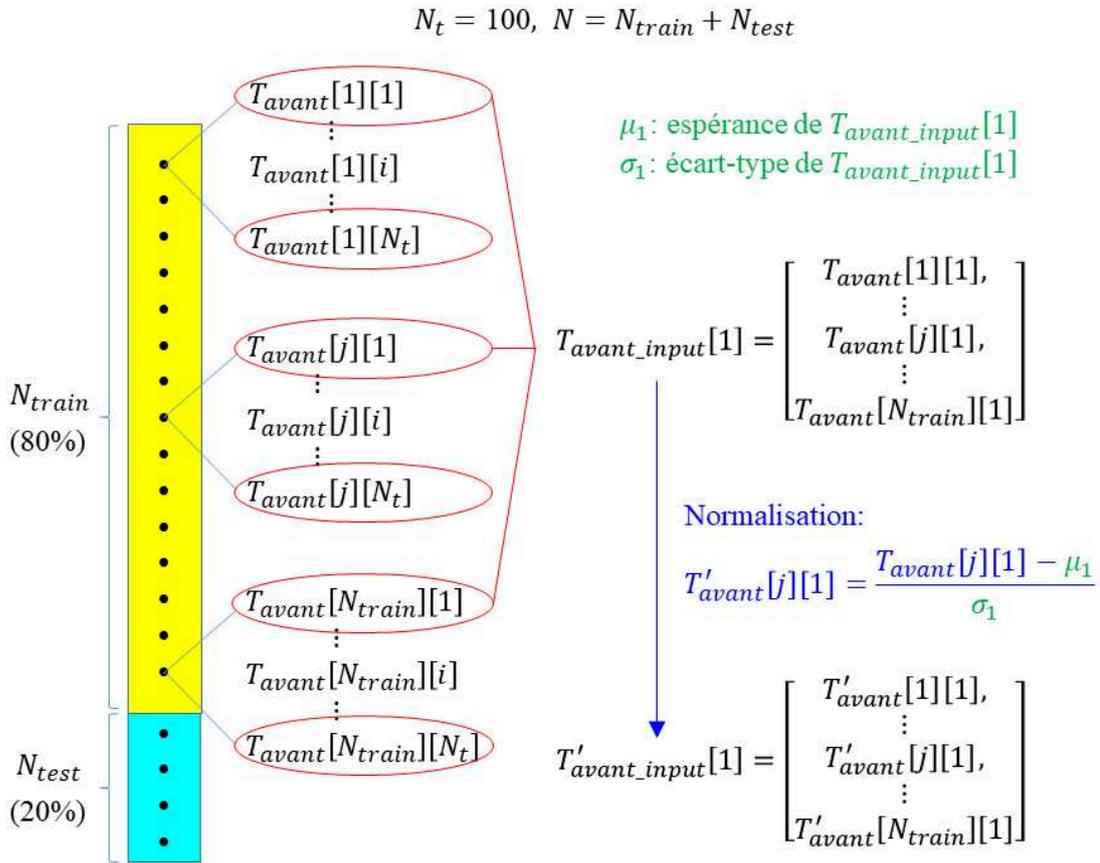


Fig. 3.13. Technique de normalisation des données

### 3.4.4 Test de performance du réseau de neurones

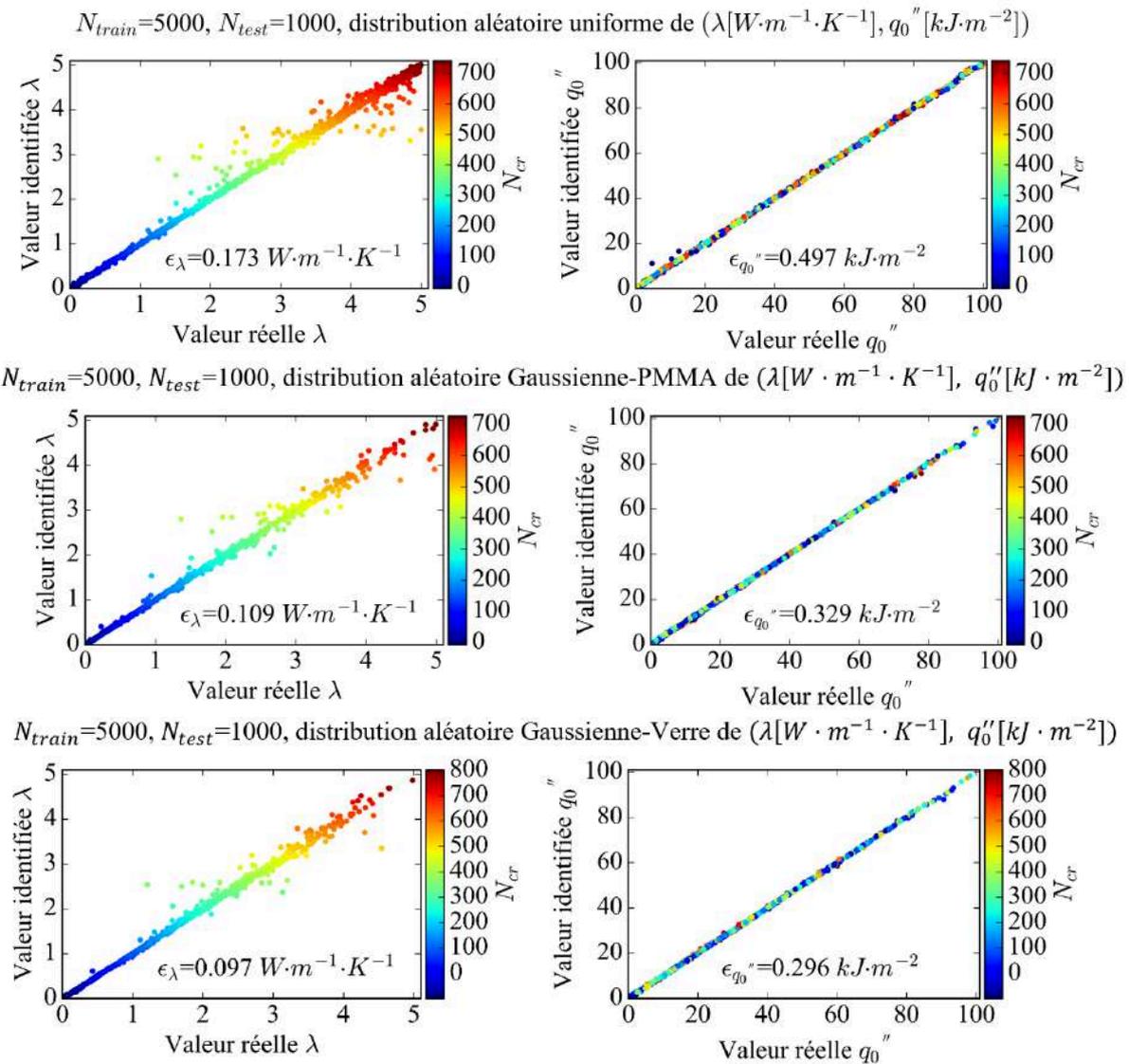
Dans cette partie, les tests de performance du réseau de neurones pour les 2 problèmes d'estimations différentes sont mis en œuvre. L'erreur d'estimation moyenne  $\epsilon_\beta$

de chaque paramètre  $\beta = [\lambda, \kappa, q_0'']$  est définie par :

$$\epsilon_\beta = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N_{test}} (\beta_i' - \beta_i)^2\right) / N_{test}} \quad (3.2)$$

### Influence de la distribution des données d'entraînement sur l'identification de $(\lambda, q_0'')$

La Fig. 3.14 présente la comparaison entre les valeurs prédites et les valeurs réelles pour l'ensemble des données de tests (ces données ne sont pas utilisées dans le processus d'entraînement) dans le contexte de la stratégie  $(\lambda, q_0'')$  et pour les 3 types de distribution aléatoire différentes (uniforme, Gaussienne-PMMA et Gaussienne-Verre).



**Fig. 3.14.** Résultats des tests de performance dans le contexte de la stratégie  $(\lambda, q_0'')$  avec le modèle réduit d'identification entraîné par 3 distributions aléatoires différentes (uniforme, Gaussienne-PMMA et Gaussienne-Verre). Comparaison entre les valeurs prédites et les valeurs réelles de  $\lambda$  (à gauche) et de  $q_0''$  (à droite). Les points sont colorés en fonction des valeurs du nombre de Planck  $N_{cr}$  dans la gamme  $[0, 1000]$

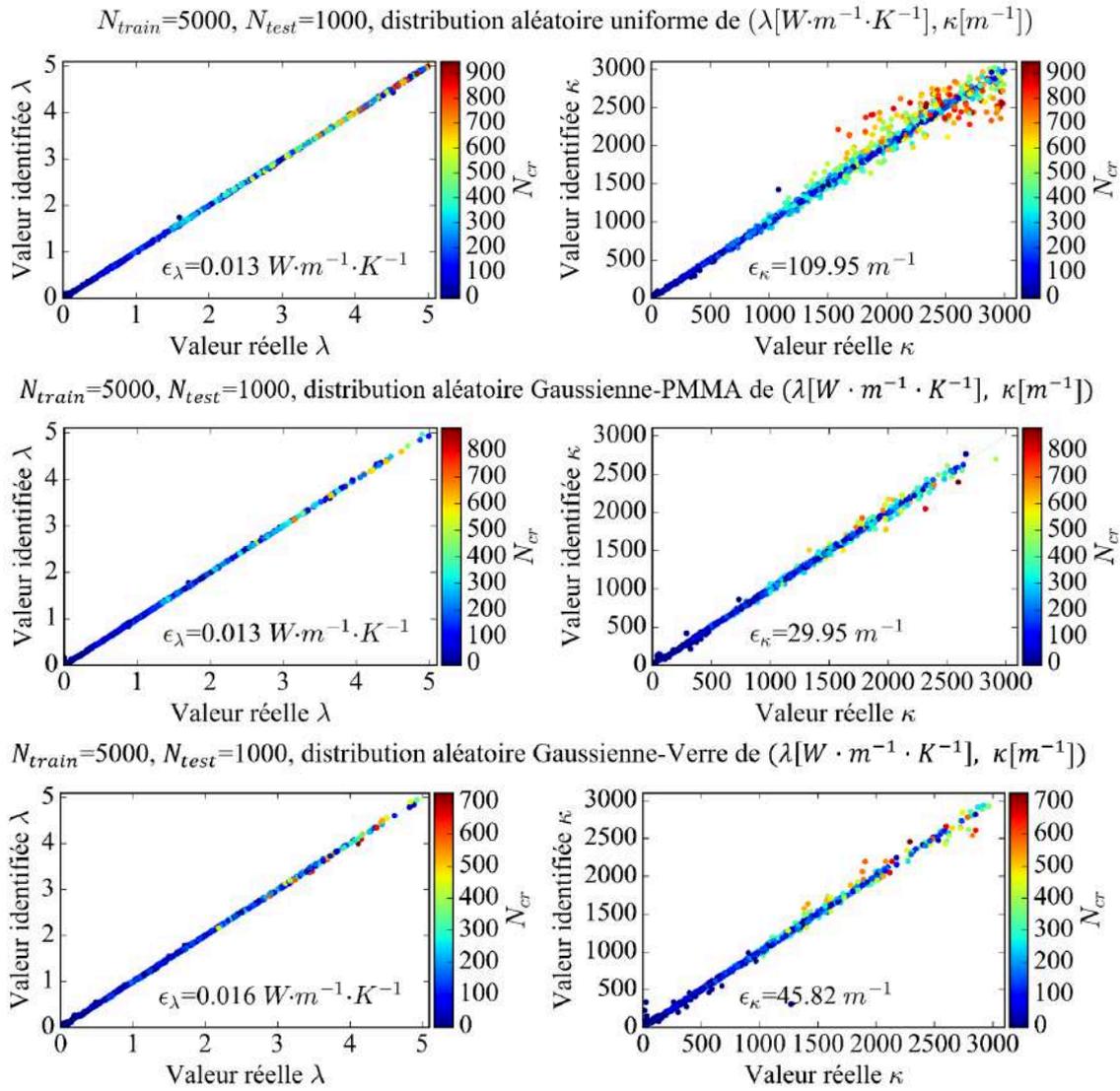
Quel que soit le type de distribution des données d'entraînement, il est observé que les valeurs prédites de la densité d'énergie imposée  $q_0''$  sont en très bon accord avec les valeurs réelles, la grande majorité des points se trouvant sur la diagonale du graphe de parité. La prédiction de la densité d'énergie imposée  $q_0''$  peut être qualifiée de robuste en théorie. Cependant, une dispersion est observée pour les points du diagramme de parité de la conductivité thermique  $\lambda$ , en particulier pour les valeurs situées dans la partie supérieure de la plage, typiquement pour  $\lambda > 3 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , quelle que soit la distribution utilisée.

Ces dispersions peuvent être expliquées à l'aide de l'étude de sensibilité et du type de distribution des données d'entraînement. D'une part, les valeurs moyennes de la sensibilité de la réponse en température à la densité d'énergie imposée  $q_0''$ , quel que soit le mode de transfert de chaleur, sont presque deux fois plus grandes que la sensibilité de la réponse en température à la conductivité thermique  $\lambda$ . Cette observation explique en partie la meilleure identification de la densité d'énergie imposée  $q_0''$  par rapport à l'identification de la conductivité thermique  $\lambda$ . Quelle que soit la distribution Gaussienne utilisée pour la génération des données d'entraînement et de test,  $\lambda$ -PMMA (avec  $\mu_\lambda=0.1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ) ou  $\lambda$ -Verre (avec  $\mu_\lambda=1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ), les dispersions observées sont assez similaires. D'autre part, selon la distribution aléatoire Gaussienne de  $\lambda$  présentée à La Fig. 3.10, il existe moins de données d'entraînement dans la seconde moitié de l'intervalle que dans la première moitié. Ainsi, le réseau de neurones n'est pas suffisamment entraîné dans la plage correspondant aux valeurs supérieures de  $\lambda$ , ce qui entraîne une réduction de la précision de l'identification.

#### **Influence de la distribution des données d'entraînement sur l'identification de $(\lambda, \kappa)$**

La Fig. 3.15 présente la comparaison entre les valeurs prédites et les valeurs réelles pour l'ensemble des données de tests (ces données ne sont pas utilisés dans le processus d'entraînement) dans le contexte de la stratégie  $(\lambda, \kappa)$  et pour les 3 types de distributions aléatoires différentes (uniforme, Gaussienne-PMMA et Gaussienne-Verre) mentionnées ci-dessus.

Contrairement au cas précédent, les valeurs prédites de la conductivité thermique  $\lambda$  ont une grande précision, quelle que soit la distribution des données d'entraînement et des données de test utilisée. Une certaine dispersion apparaît dans l'estimation du coefficient d'absorption moyen  $\kappa$ , sur toute la gamme et en particulier lors de l'utilisation de la distribution aléatoire uniforme. Ces dispersions peuvent, encore une fois, être expliquées avec l'analyse de sensibilité qui révèle une faible sensibilité de l'observable au coefficient d'absorption  $\kappa$  par rapport aux autres paramètres  $(\lambda, q_0'')$ . Il convient de noter que la dispersion diminue considérablement lors de l'entraînement des réseaux avec une distribution non uniforme, par exemple les distributions Gaussiennes utilisées ici. Ces distributions non uniformes augmentent le nombre d'échantillons d'entraînement dans la région d'intérêt, ce qui contribue à améliorer les performances d'identification.

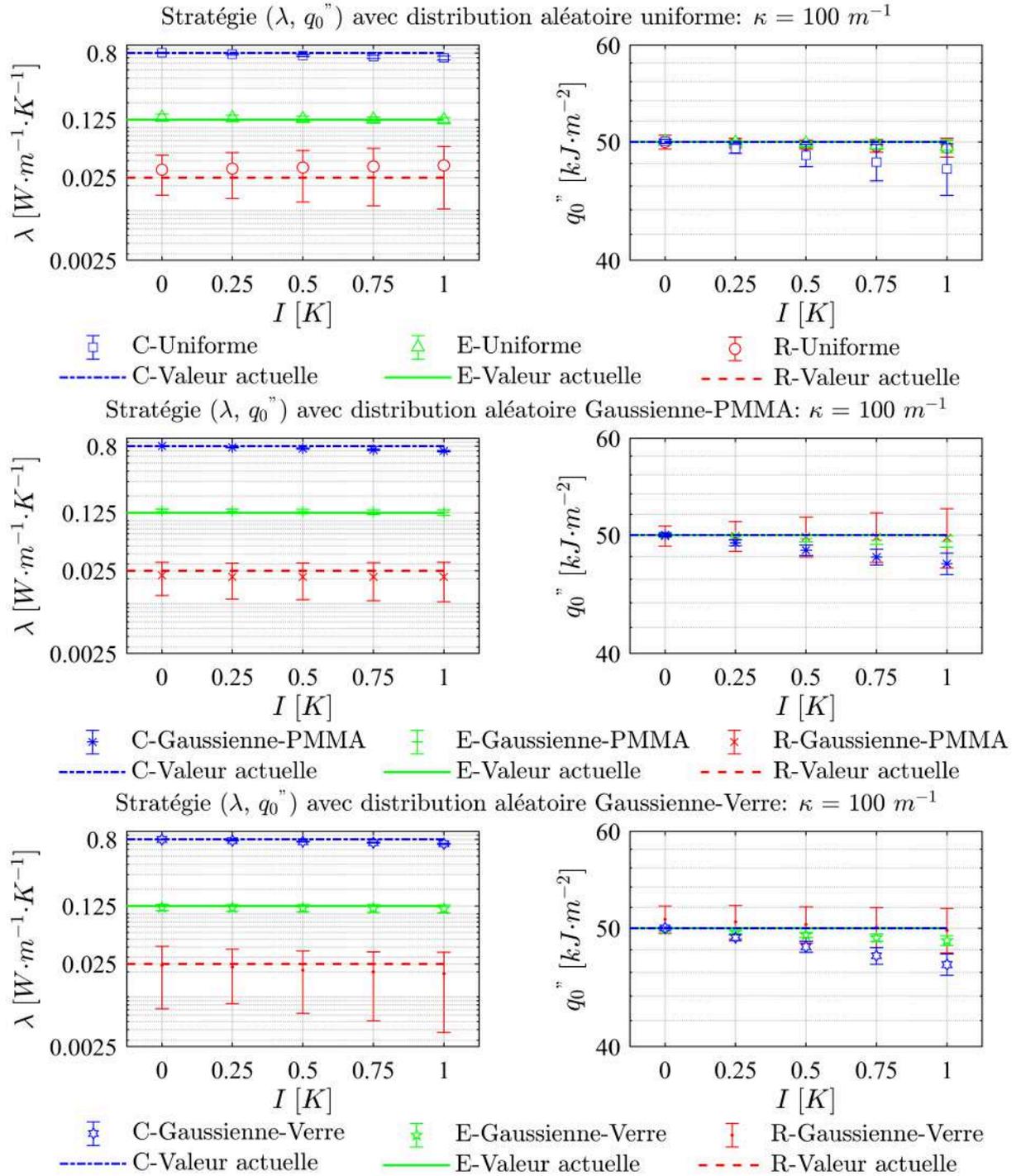


**Fig. 3.15.** Résultats des tests de performance dans le contexte de la stratégie  $(\lambda, \kappa)$  avec le modèle réduit d'identification entraîné par 3 distributions aléatoires différentes (uniforme, Gaussienne-PMMA et Gaussienne-Verre). Comparaison entre les valeurs prédites et les valeurs réelles de  $\lambda$  (à gauche) et de  $\kappa$  (à droite). Les points sont colorés en fonction des valeurs du nombre de Planck  $N_{cr}$  dans la gamme  $[0, 1000]$

### 3.5 Test de robustesse

Avant de confronter la présente méthode d'identification aux données expérimentales, une série de tests d'identification est réalisée au moyen de données synthétiques bruitées. Cet exercice théorique est crucial car il permet d'évaluer la cohérence, les performances et la robustesse de toute méthode d'identification. Ici, les données expérimentales sont simulées en utilisant le modèle direct, elles sont appelées ci-après "données synthétiques". Afin de reproduire les conditions expérimentales, un bruit aléatoire de distribution uniforme pour 5 intensités distinctes  $I = [0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 K]$  est ajouté aux données synthétiques afin d'évaluer la robustesse du modèle réduit d'identification. Ce niveau de bruit est largement au dessus de ce que peut fournir une caméra infrarouge. Pour chaque type de distribution (uniforme, Gaussienne-PMMA et

Gaussienne-verre) et chaque stratégie (identification de  $(\lambda, q_0'')$  et de  $(\lambda, \kappa)$ ), 5 réseaux de neurones artificiels sont entraînés et utilisés de manière indépendante pour calculer la moyenne des prédictions ainsi que leurs niveaux de confiance (chaque réseau de neurones pour toutes les 5 intensités de bruit). Pour chaque niveau de bruit  $I$ , les valeurs supérieure et inférieure de la barre d'erreur sont calculées comme  $(\mu_{min}, \mu_{max}) = \mu \pm \sigma$ , où  $\mu$  représente la moyenne des résultats de la prédiction et  $\sigma$  l'écart type.



**Fig. 3.16.** Test de robustesse concernant la stratégie d'estimation  $(\lambda, q_0'')$  avec 5 ANN entraînés selon 3 distributions différentes et pour 3 régimes de transfert de chaleur : dominé par la conduction (C), équivalent conduction / rayonnement (E) et dominé par le rayonnement (R)

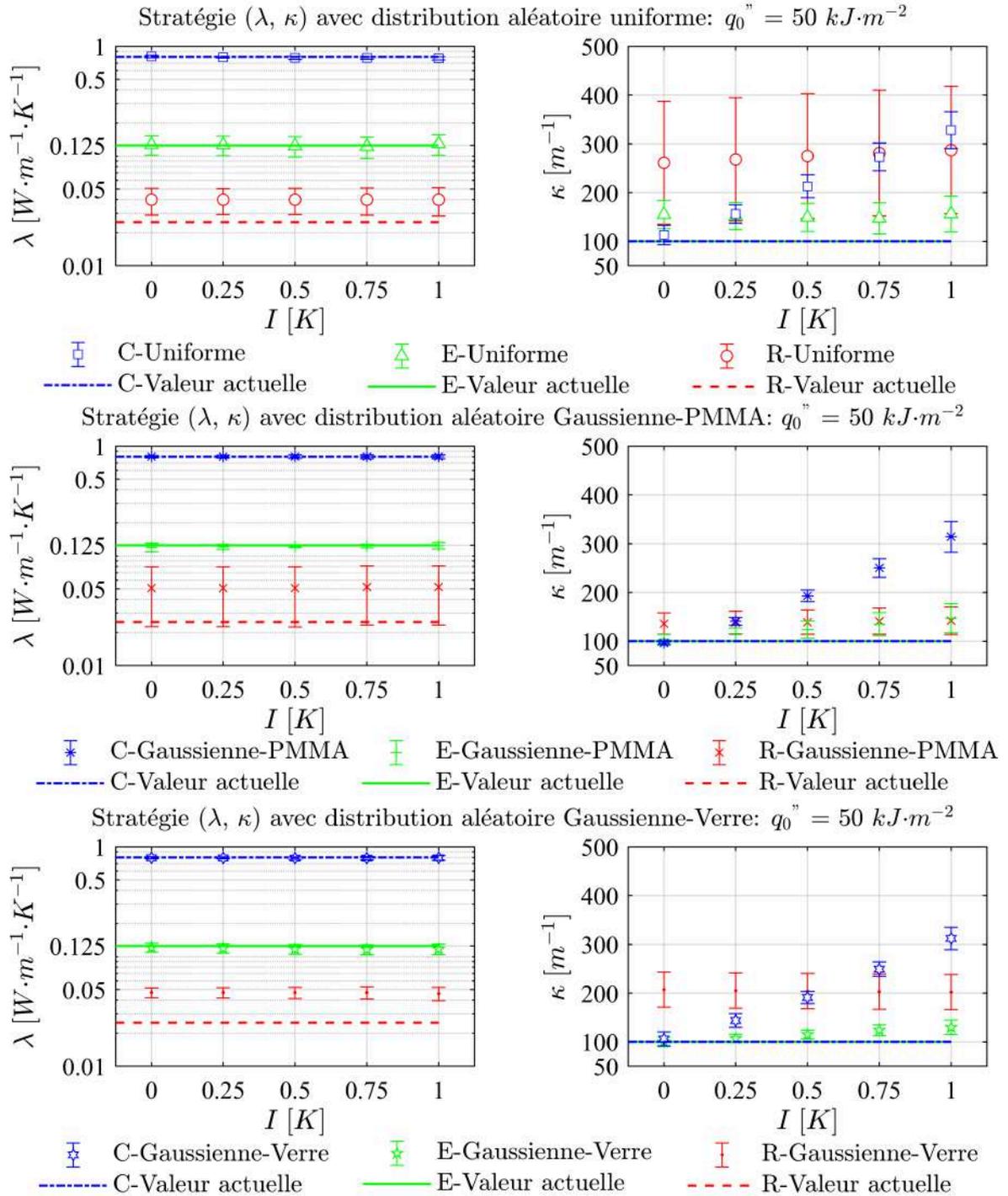
Les résultats des tests de robustesse des deux stratégies d'estimation, en régime dominé par le rayonnement (abréviation : R pour  $N_{cr}=0.185$ ), en régime conduction et rayonnement équivalents (E pour  $N_{cr}=0.926$ ) et en régime dominé par la conduction (C pour  $N_{cr}=5.924$ ), les mêmes cas que dans le Tableau 3.1, sont respectivement présentés à la Fig. 3.16 et à la Fig. 3.17 en fonction de l'intensité du bruit ajouté.

Selon la Fig. 3.16 identification de  $(\lambda, q_0'')$  avec  $\kappa$  connu, la précision de l'estimation de la conductivité thermique dans le mode conductif (C) et le mode équivalent (E) n'est pas beaucoup affectée par l'utilisation d'une distribution Gaussienne pendant la phase d'entraînement, la prédiction étant déjà effectuée avec un haut niveau de précision. Cependant, en mode radiatif (R), la mauvaise estimation de la conductivité thermique  $\lambda$  par les réseaux de neurones entraînés avec les données générées au moyen d'une distribution uniforme (dont l'espérance  $0.031 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ) est grandement améliorée lors de l'utilisation d'une distribution Gaussienne, en particulier avec la distribution  $\lambda$ -PMMA dont l'espérance ( $0.022 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ) est du même ordre de grandeur que celui visé ( $0.025 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ).

Dans le cas de l'entraînement par la distribution de type  $\lambda$ -Verre, dont la valeur d'espérance de la base de données d'entraînement est  $\mu_\lambda=1 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ , l'amélioration est moins importante mais permet néanmoins de prédire correctement la conductivité thermique  $\lambda$ . L'estimation de la conductivité thermique  $\lambda$  présente un niveau de sensibilité relativement faible à l'intensité du bruit, à l'exception des cas où le rayonnement domine (R) dont la dispersion des estimations augmente. L'estimation de la densité d'excitation thermique  $q_0''$  présente également un niveau de sensibilité relativement faible à l'intensité du bruit, à l'exception des cas où la conduction domine (C) pour lesquels les valeurs estimées diminuent avec le niveau de bruit, par rapport à la valeur cible. Par ailleurs, l'erreur relative sur l'estimation de  $q_0''$  ne dépasse pas 6%, quels que soient la distribution et le mode de transfert de chaleur dominant.

Le résultat de l'évaluation de la robustesse pour la stratégie  $(\lambda, \kappa)$  est présenté à la Fig. 3.17. Encore une fois, la conductivité thermique  $\lambda$  est assez bien estimée dans le mode dominé par la conduction (C) et le mode où la conduction et le rayonnement sont équivalents (E). En particulier, l'erreur de prédiction maximale dans le mode dominé par la conduction est d'environ 3% lors de l'utilisation des données d'entraînement de distribution aléatoire uniforme. Cette erreur diminue à 1.5% lorsque les données d'entraînement sont distribuées de manière aléatoire selon la distribution Gaussienne-Verre, puis à 0.2% lorsque les données d'entraînement suivent la distribution aléatoire Gaussienne-PMMA. De plus, son estimation n'est pas affectée par l'intensité du bruit, alors que l'erreur d'estimation du coefficient d'absorption moyen  $\kappa$  peut augmenter avec l'intensité du bruit. Ceci est particulièrement évident dans le mode dominé par la conduction (C) où l'erreur d'estimation augmente presque d'un facteur 3 avec l'augmentation de l'intensité du bruit de 0 à 1K, quelle que soit la distribution utilisée pour l'entraînement. Pour les régimes où la conduction et le rayonnement agissent de manière équivalente (E) et le régime dominé par le rayonnement (R), l'utilisation d'une

distribution Gaussienne, quelle qu'elle soit, améliore considérablement l'estimation.



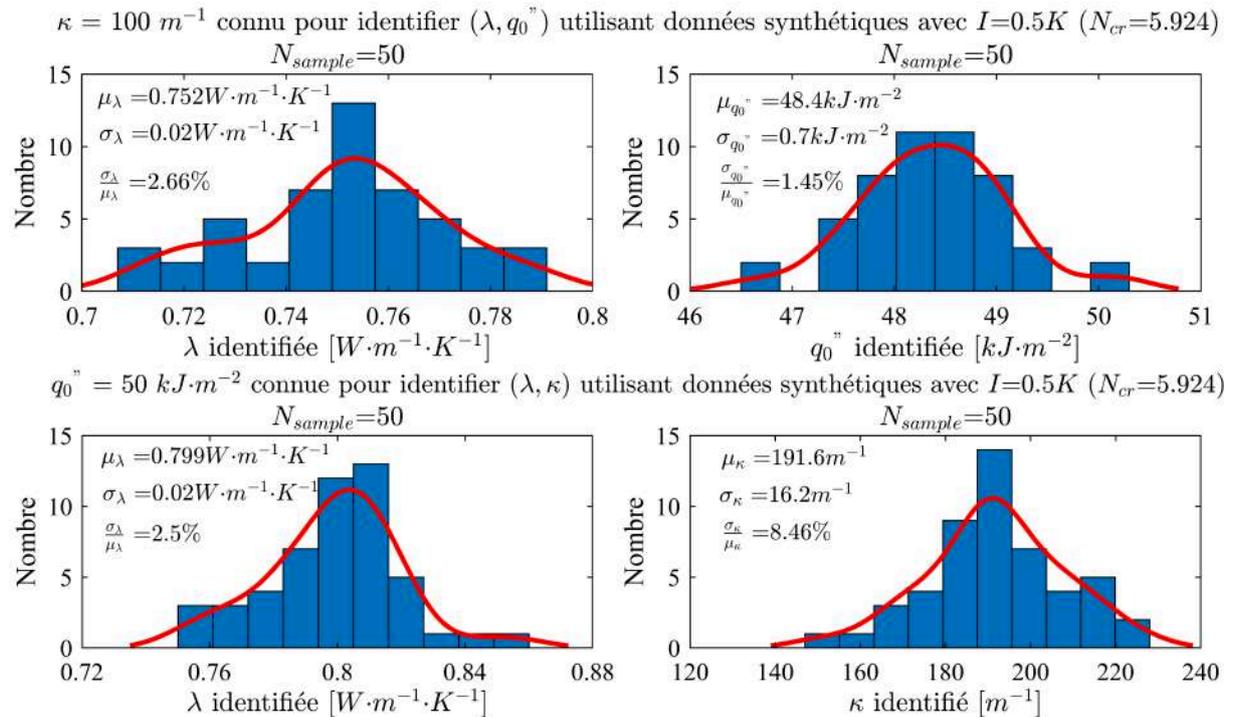
**Fig. 3.17.** Test de robustesse concernant la stratégie d'estimation  $(\lambda, \kappa)$  avec 5 ANN entraînés selon 3 distributions différentes et pour 3 régimes de transfert de chaleur : dominé par la conduction (C), équivalent conduction / rayonnement (E) et dominé par le rayonnement (R)

Quelle que soit la stratégie choisie, l'effet du bruit sur l'estimation peut être minimisé en effectuant la moyenne de plusieurs estimations statistiquement indépendantes. La section suivante est consacrée à l'analyse statistique de la distribution d'estimations.

### 3.6 Étude statistique

Les limites du modèle réduit neuronal pour estimer correctement certains paramètres dans certaines conditions sont révélées par la dispersion des résultats de l'estimation, en fonction de l'ensemble de données utilisé pour l'entraînement. Cependant, ces estimations sont néanmoins pertinentes et contiennent certains éléments de la solution. Afin de préparer l'interprétation de l'estimation expérimentale, l'analyse théorique précédente est approfondie afin de définir une méthodologie d'analyse. Avant d'appliquer les données expérimentales, certains tests sont effectués sur un ensemble de données synthétiques bruitées (avec un niveau de bruit modéré  $I=0.5 K$ ) obéissant à une distribution aléatoire uniforme entre  $-0.25 K$  et  $0.25 K$ . Dans ces tests, 100 modèles réduits d'identification différents sont construits puis utilisés (50 pour la stratégie  $(\lambda, q_0'')$  et 50 pour la stratégie  $(\lambda, \kappa)$ ) dans le cas du régime dominé par la conduction (C) pour lequel  $N_{cr}=5.924$  correspondant au jeu de paramètres  $\lambda=0.8 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ,  $\kappa=100 m^{-1}$  et  $q_0''=50 kJ \cdot m^{-2}$  (cf. Tableau 3.1). Ce cas a été choisi pour sa relative similarité avec le cas expérimental.

La Fig. 3.18 présente la distribution des paramètres identifiés dans les deux stratégies et les valeurs correspondantes des espérances  $\mu$  et des écarts types  $\sigma$ . On peut observer que chaque paramètre identifié ( $\lambda$ ,  $\kappa$  et  $q_0''$ ) obéit à une distribution de type Gaussien. De plus, pour chaque paramètre identifié, les écarts-types  $\sigma$  sont toujours inférieurs à 10% de la valeur de l'espérance  $\mu$ , ce qui correspond à un degré de dispersion des données très faible.

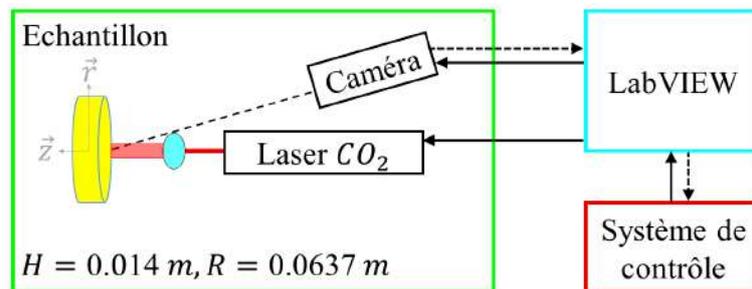


**Fig. 3.18.** Distributions des données synthétiques identifiées  $(\lambda, q_0'')$  et  $(\lambda, \kappa)$  avec les données synthétiques bruitées (intensité  $I=0.5 K$ ) dans un régime dominé par la conduction,  $N_{cr}=5.924$

Cet exercice, effectué dans une configuration représentative de l'application expérimentale, montre que la dispersion de l'estimation apparaît en raison de la complexité du système étudié. La dispersion des estimations est accentuée par le bruit des données d'entrée qui est lié à la fois au système d'acquisition et à l'excitation. Les résultats obtenus dans le cadre de cette expérience numérique sont utilisés pour faciliter l'interprétation des résultats obtenus à partir de données expérimentales réelles.

### 3.7 Application

Après les phases d'entraînement et de test de faisabilité, les données expérimentales enregistrées au cours d'une expérimentation de type flash sont utilisées comme entrée du modèle réduit d'identification afin d'évaluer son efficacité pour la résolution de problèmes pratiques. Par rapport au banc d'essai utilisé dans le Chapitre 2 (cf. la Fig. 2.2), l'échantillon est placé en face du laser et son rayon est plus grand pour minimiser l'influence de l'incidence du laser. De plus, une lentille est placée entre l'échantillon et le laser afin de légèrement faire diverger le faisceau laser et de s'assurer que l'augmentation de la température reste au-dessous de la limite supérieure que la caméra infrarouge peut capturer. (cf. la Fig. 3.19)



**Fig. 3.19.** Schéma de principe du banc d'essai amélioré

L'échantillon semi-transparent étudié est constitué de polyméthacrylate de méthyle ou PMMA. L'échantillon testé est cylindrique, de rayon  $R = 6.37 \pm 0.01 \text{ cm}$  et d'épaisseur  $e = 1.4 \pm 0.01 \text{ cm}$ . Toutes les faces de l'échantillon sont couvertes d'une peinture haute température de couleur noire supposée parfaitement absorbante. La durée d'excitation du laser est de 1 s. La distribution spatiale de la densité de chaleur incident est déduite de la cartographie de la température de la face exposée de l'échantillon correspondant à la première image, immédiatement après le début de l'excitation, c'est-à-dire à  $0 < t < 0.02 \text{ s}$ . La distribution spatiale de la densité de chaleur observée est de type Gaussien. Cette dernière est transformée en une distribution de type créneau en conservant l'énergie d'excitation. Ainsi, le rayon équivalent correspondant à la densité de chaleur imposée homogène tel que défini dans le modèle direct est calculé comme suit :

$$r_{\text{équi}} = \frac{1}{\Gamma_{\text{max}}} \cdot \left[ \int_0^R \Gamma(r) \, dr \right] \quad (3.3)$$

Avec

$$\Gamma(r) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} [T(r, \theta, z = 0, t = 0) - T_{ini}] d\theta \quad (3.4)$$

Le coefficient d'absorption effectif du matériau est déterminé à partir de mesures réalisées à l'aide d'un spectromètre à transformée de Fourier "BRUKER VERTEX V70v" sous vide partiel (env. 2 mbar). Les distributions spectrales de la transmissivité et de la réflectivité de l'échantillon sont mesurées à température ambiante sur une plage de longueurs d'onde comprises entre 1,66  $\mu m$  à 200  $\mu m$ . Les réflectivités spectrales sont mesurées à une incidence de 11° par rapport à la normale. Selon le modèle de réflexions internes multiples utilisé (Boulet et al. [2014]), la valeur du coefficient d'absorption moyen  $\kappa$  est calculée en considérant la moyenne des approximations de Planck et de Rosseland,  $\kappa = 1102.5 m^{-1}$ . Plus de détails sont donnés dans la partie «Détermination du coefficient d'atténuation moyen de PMMA» (cf. Chapitre 2).

Pour les deux stratégies, c'est-à-dire la stratégie  $(\lambda, q_0'')$  et la stratégie  $(\lambda, \kappa)$ , les estimations sont effectuées à l'aide de 50 réseaux de neurones artificiels indépendamment entraînés à partir de données générées avec la distribution aléatoire Gaussienne-PMMA pour  $(\lambda, \kappa)$  mais avec la distribution uniforme pour  $(\lambda, q_0'')$  étudiées précédemment. Comme dans le cas de l'étude portant sur des données synthétiques, la distribution des paramètres estimés  $(\lambda, q_0'')$  est de type Gaussien. L'espérance et l'écart type correspondant à chaque distribution sont indiqués dans le Tableau 3.3. L'estimation est également réalisée pour la stratégie  $(\lambda, \kappa)$ , selon le même protocole. Les mêmes observations sont faites et le même traitement est effectué concernant le calcul de l'estimation globale (Tableau 3.3).

$\lambda [W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}], \quad \kappa [m^{-1}], \quad q_0'' [kJ \cdot m^{-2}]$		
$(N_{cr})_{supposé} = \frac{\lambda \cdot \kappa}{4n^2 \cdot \sigma \cdot T_{ini}^3} = 15.12, \quad \text{avec } \lambda=0.1889, \kappa=1102.5, n=1.5, T_{ini}=300 K$		
Critères de sélection	Stratégie $(\lambda, q_0'') : \kappa=1102.5$	Stratégie $(\lambda, \kappa) : q_0''=15$
(0) : sans sélection	$(\mu_\lambda, \sigma_\lambda)=(0.081, 0.041)$ $(\mu_{q_0''}, \sigma_{q_0''})=(10.35, 1.90)$ $(N_{cr})_{estimé} = 6.48$	$(\mu_\lambda, \sigma_\lambda)=(0.230, 0.134)$ $(\mu_\kappa, \sigma_\kappa)=(3294, 304)$ $(N_{cr})_{estimé} = 54.99$
(1) : $\gamma \pm 0.6745\sigma$	$(\gamma_\lambda, \sigma_\lambda)=(0.092, 0.014)$ $(\gamma_{q_0''}, \sigma_{q_0''})=(11.10, 0.68)$ $(N_{cr})_{estimé} = 7.36$	$(\gamma_\lambda, \sigma_\lambda)=(0.187, 0.047)$ $(\gamma_\kappa, \sigma_\kappa)=(3556, 106)$ $(N_{cr})_{estimé} = 48.26$

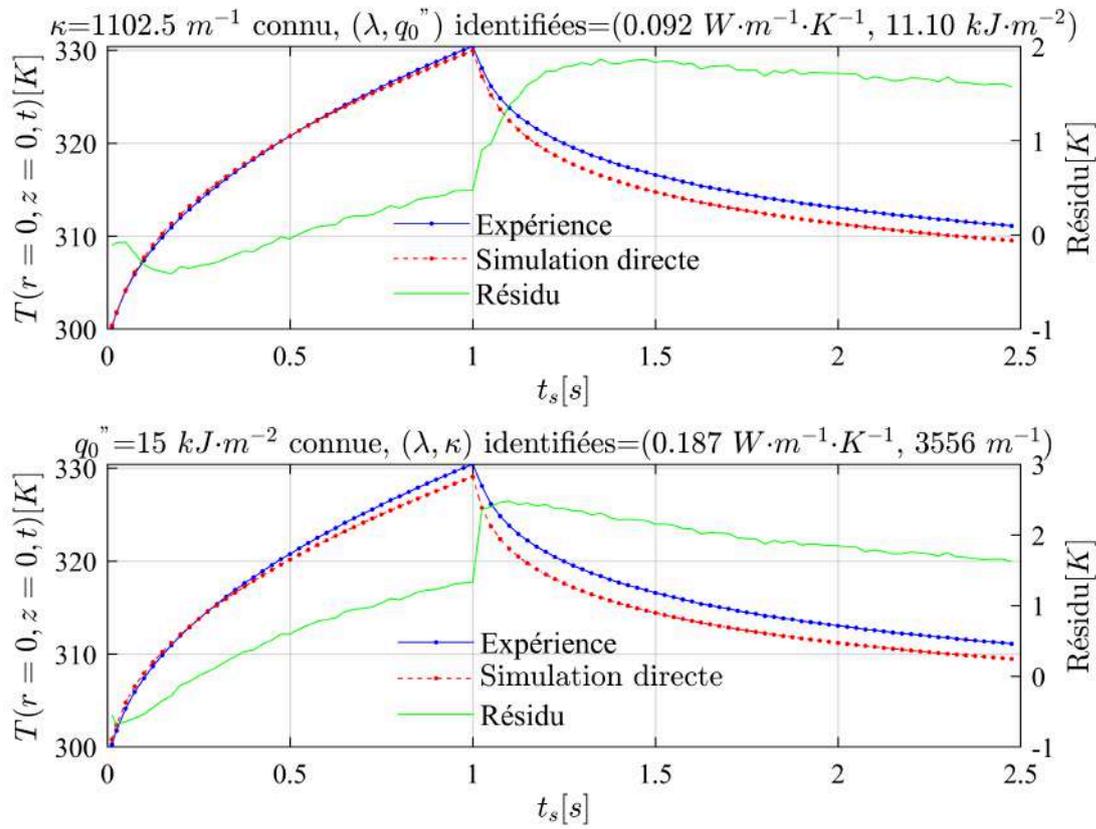
TABLEAU 3.3 – Espérance  $\mu$ , la zone de valeurs la plus fréquente  $\gamma$  et écart-type  $\sigma$  des paramètres identifiés selon la stratégie  $(\lambda, q_0'')$  et  $(\lambda, \kappa)$ , sans (critère (0)) et avec sélection (critère (1))

Dans un premier temps, les données estimées sont analysées sans traitement (critère de sélection 0 du Tableau 3.3). Pour l'estimation du coefficient d'absorption moyen  $\kappa$ , dans le cas de la stratégie  $(\lambda, \kappa)$ , on constate que l'écart type  $\sigma_\kappa$  est inférieur à 10% à

la valeur moyenne  $\mu_\kappa$ . Ce niveau d'incertitude peut être considéré comme acceptable compte tenu du caractère expérimental de l'exercice. La valeur estimée du coefficient d'absorption est  $\mu_\kappa=3294 \text{ m}^{-1}$ , qui est du même ordre de grandeur que la valeur de  $1102.5 \text{ m}^{-1}$  estimée à l'aide du spectromètre. Compte tenu de la faible sensibilité de l'observable vis à vis du coefficient d'absorption (par rapport à la conductivité  $\lambda$ ), cette estimation est supposée cohérente avec les propriétés physiques du présent échantillon. En ce qui concerne la densité d'énergie imposée  $q_0''$ , en cas de stratégie  $(\lambda, q_0'')$ , l'écart type  $\sigma_{q_0''}$  correspond à environ 18% de la valeur moyenne  $\mu_{q_0''}$ . La valeur estimée de la densité d'énergie imposée  $\mu_{q_0''} = 10.35 \text{ kJ}\cdot\text{m}^{-2}$  est également cohérente avec le réglage du laser utilisé pour produire l'excitation thermique ( $15 \text{ kJ}\cdot\text{m}^{-2}$ ). Pour l'estimation de la conductivité thermique, l'écart type  $\sigma_\lambda$  correspond à environ 50% de la valeur de l'espérance  $\mu_\lambda$ . Ce niveau d'incertitude révèle une dispersion relativement importante dans l'estimation de la conductivité thermique. Étant donné que la valeur moyenne  $\mu_\lambda$  n'est pas représentative de la valeur cible  $\lambda = 0.1889 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  (Assael et al. [2008]), un autre critère de sélection (critère de sélection 1 du Tableau 3.3) des données estimées est donc proposé afin d'affiner l'estimation.

La gamme de sélection du critère 1 est choisie comme suit :  $\gamma \pm 0.6745\sigma$ , où  $\gamma$  et  $\sigma$  représentent respectivement la zone de valeurs la plus fréquente et l'écart type des valeurs estimées. Le coefficient 0.6745 permet une sélection de 50% des estimations les plus crédibles, i.e. proche de l'espérance dans le cas d'une distribution de type Gaussienne. Le Tableau 3.3 présente les valeurs moyennes et les écarts types des paramètres identifiés à l'aide des données brutes (critère de sélection 0) et filtrées (critère de sélection 1). La conductivité thermique estimée  $\mu_\lambda$  à l'aide de la stratégie  $(\lambda, \kappa)$  et avec le critère de sélection 1 ( $0.187 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ) est en très bon accord par rapport à la valeur de référence  $\lambda = 0.1889 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  (Assael et al. [2008]). Pour la stratégie  $(\lambda, q_0'')$ , la valeur moyenne de la conductivité thermique estimée est  $\mu_\lambda = 0.092 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  avec le critère de sélection 1, qui est également du même ordre de grandeur que la valeur de référence. Par ailleurs, les valeurs estimées de la densité d'énergie imposée et du coefficient d'absorption sont peu affectées par la sélection des données, en effet les estimations réalisées sans (critère (0), cf. Tableau 3.3) et avec sélection (critère (1), cf. Tableau 3.3) sont très proches.

La Fig. 3.20 présente la comparaison entre les données expérimentales et les résultats de la simulation directe obtenus en utilisant les paramètres identifiés. Par commodité, les résidus entre les deux signaux ( $T_{exp} - T_{num}$ ) sont également représentés sur un axe vertical secondaire. Il est observé que pour les deux stratégies, la plupart des écarts apparaissent au cours de la période de relaxation (de 1 à 2.5 s). Le résidu maximal représente environ 6% de l'augmentation de température maximale ( $\Delta T_{max} = T(t = 1s) - T_0$ ) pour la stratégie  $(\lambda, q_0'')$  et la stratégie  $(\lambda, \kappa)$ , respectivement. En outre, le résidu moyen pour les 2 stratégies est relativement faible, avec une valeur de  $1 \text{ K}$  (environ 3% de  $\Delta T_{max}$ ).



**Fig. 3.20.** Évolution de la température réelle et simulée au point central. Evolution du résidu entre les mesures expérimentales et les signaux reconstruit à partir du modèle et des paramètres estimés à l'aide des stratégies  $(\lambda, q_0'')$  en haut et  $(\lambda, \kappa)$  en bas

La simulation directe utilisant les paramètres identifiés dans les deux stratégies rend compte de la complexité de l'expérience et du couplage fort entre les transferts de chaleur par conduction et par rayonnement. Les explications possibles des écarts observés peuvent être dues à :

1. L'approximation des conditions aux limites. Dans ce travail, la distribution de la densité de chaleur imposée de type Gaussienne observée est approchée par une distribution de type créneau. Une meilleure description de l'excitation dans le modèle direct permettrait certainement d'améliorer l'identification ;
2. Les erreurs de réglage du dispositif expérimental entraînant une densité de chaleur imposée non symétrique et un alignement axial imparfait ;
3. L'estimation imprécise du coefficient d'absorption moyen  $\kappa$  connu a priori dans le cas de la stratégie  $(\lambda, q_0'')$  ;
4. L'observable choisi, ici l'évolution de la température au point central de la face avant, qui peut être pauvre en terme d'information. Cette faiblesse peut être surmontée en exploitant des données de dimension supérieure, telles que des évolutions de température 1D (ici radiale) ou 2D, pouvant être traitées (intégration, convolution, etc.).
5. Le choix de l'architecture du réseau de neurones artificiels (deep feedforward dans ce travail). Il pourrait être intéressant d'investiguer d'autres type de réseaux

comme les réseaux de neurones récurrents qui permettent de traiter de manière efficace les séries temporelles ou encore les réseaux de neurones convolutifs qui permettent de traiter des champs 2D comme des images, dans notre cas des champs de température.

La liste non exhaustive ci-dessus constitue les limitations de la présente méthode ainsi que ses perspectives. Le modèle réduit d'identification présenté ici est une alternative aux algorithmes évolutionnaires (par exemple, algorithme d'optimisation par essaims particules (Chopade et al. [2011]), algorithme génétique (Haupt and Haupt [2004]), algorithme à évolution différentielle (Chopade et al. [2013])) pour résoudre des problèmes inverses dont l'espace des solutions est très grand et complexe. Contrairement aux algorithmes évolutifs qui ajustent les paramètres à identifier pour compenser les différences entre la prédiction du modèle mathématique et l'expérience, la présente méthode d'identification (basée sur les réseaux de neurones) permet de capturer les relations internes entre l'observable (entrée) et les paramètres à identifier (sortie). Alors que les algorithmes évolutionnaires identifient des paramètres effectifs, le présent modèle d'identification, qui confronte les données expérimentales une seule fois après l'entraînement, est entraîné à identifier des données réelles. En un sens, les données identifiées au moyen de l'ANN sont plus proches des paramètres réels, si le modèle est adapté au phénomène étudié. Sinon, les valeurs identifiées génèrent une simulation qui ne correspond pas au signal expérimental, ce qui permet de détecter toute incohérence entre le phénomène étudié et le modèle mathématique utilisé. Comparé aux méthodes évolutionnaires, la présente méthode fournit un indicateur nécessaire pour vérifier la compatibilité entre le modèle et l'expérience, et donc la pertinence des valeurs identifiées.

### 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle réduit d'identification basé sur un réseau de neurones artificiels multicouches est proposé et testé. Ce modèle réduit d'identification est entraîné au moyen de données générées à l'aide d'un modèle de transfert de chaleur conducto-radiatif 2D axisymétrique et instationnaire. L'étude de sensibilité réalisée sur le modèle direct, ainsi que les contraintes expérimentales, nous ont incités à envisager 2 stratégies distinctes : (i) une estimation simultanée de la conductivité thermique et de la densité de chaleur imposée avec le coefficient d'absorption moyen connu a priori, appelé  $(\lambda, q_0'')$ , et (ii) une estimation simultanée de la conductivité thermique et du coefficient d'absorption moyen avec la densité de chaleur imposée connue à priori, appelée stratégie  $(\lambda, \kappa)$ . Pour les deux stratégies, la complexité des problèmes inverses conduit à une architecture de réseau de neurones relativement profonde et à une optimisation des données d'entraînement. D'une part, afin d'améliorer la précision de l'identification finale, l'utilisation d'une distribution de données aléatoire Gaussienne pour entraîner les réseaux de neurones artificiels est recommandée pour la stratégie  $(\lambda, \kappa)$ , avec  $q_0''$

connue. D'autre part, l'utilisation d'une distribution de données aléatoire uniforme est recommandée pour la stratégie  $(\lambda, q_0'')$ , avec  $\kappa$  connu. Les comportements mentionnés ci-dessus sont observés quel que soit le mode de transfert de chaleur dominant étudié. Le modèle d'identification est évalué en fonction de sa capacité à retrouver les paramètres utilisés pour calculer l'évolution temporelle de la température au point central de la face exposée du domaine, pour différents niveaux de bruit ajoutés. Les tests effectués ont mis l'accent sur l'importance de la distribution des données d'entraînement sur la qualité de la prévision, ainsi que sur la robustesse relative au bruit ajouté aux données d'entrée. Les résultats obtenus ont permis de s'assurer de la pertinence de la méthode globale. Conformément à l'étude de sensibilité et au test de robustesse, l'exercice révèle un léger avantage dans l'utilisation de la stratégie  $(\lambda, \kappa)$  plutôt que de la stratégie  $(\lambda, q_0'')$  afin d'estimer la conductivité thermique. De plus, l'estimation est relativement précise dans les cas où la conduction domine (C) et dans les cas où les effets conductif et radiatif sont équivalents (E), quelle que soit la stratégie. Dans tous les cas, les matériaux pour lesquels le rayonnement est dominant (R) sont le plus sujets aux erreurs d'estimation (surtout pour l'estimation de  $\lambda$ ).

Sur cette base, le modèle d'identification est appliqué à des données recueillies lors d'une expérience de type flash réalisée sur un échantillon cylindrique réel constitué de PMMA. Les deux stratégies sont évaluées grâce à 50 réseaux entraînés de manière indépendante avec une distribution aléatoire Gaussienne-PMMA (stratégie  $(\lambda, \kappa)$ ) et une distribution aléatoire uniforme (stratégie  $(\lambda, q_0'')$ ). Lorsque l'intensité de la densité de chaleur imposée est connue a priori, la valeur estimée de la conductivité thermique  $\lambda$  est en bon accord avec les valeurs de la littérature. La valeur estimée du coefficient d'absorption moyen  $\kappa$  est du même ordre de grandeur que la valeur obtenue en utilisant une mesure spectroscopique. La valeur estimée du coefficient d'absorption moyen  $\kappa$  est considérée comme cohérente compte tenu de la faible sensibilité de l'observable vis à vis de ce paramètre, comparativement aux autres. Les différences observées entre les valeurs identifiées et les valeurs de référence peuvent être expliquées par la divergence entre l'expérience et le modèle direct. D'un point de vue du temps de calcul, le temps lié à l'identification basée sur un réseau de neurones artificiels multicouches se compose de deux parties : le temps de l'entraînement et le temps de test et/ou le temps d'utilisation). Pour notre problème étudié, le temps de l'entraînement est d'environ 10 heures et le test est presque instantané, ce qui est beaucoup plus rapide par rapport à l'identification basée sur le couplage entre un algorithme d'identification de type PSO et un modèle direct dont le temps de calcul est d'environ 48 heures.

Dans le chapitre suivant, nous allons développer un modèle d'ordre faible afin de réduire le temps de calcul du modèle direct. En considérant l'importance de raccourcir le temps de simulation, ce modèle d'ordre faible sera très utile pour générer des données d'entraînement pour le modèle d'identification basé sur réseau de neurones ou s'il est couplé avec l'algorithme PSO (Chapitre 2).

# Chapitre 4

## Modèle réduit basé sur la méthode d'identification modale (MIM)

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>118</b>
<b>4.2</b>	<b>Méthode d'identification modale (MIM)</b>	<b>118</b>
<b>4.3</b>	<b>Modèle réduit non-linéaire</b>	<b>120</b>
4.3.1	Structure d'équations	120
4.3.2	Données de construction et de test	121
4.3.3	Résultats et analyses	127
<b>4.4</b>	<b>Modèle réduit linéaire paramétrique</b>	<b>128</b>
4.4.1	Structure d'équations	129
4.4.2	Données de construction et de test	134
4.4.3	Résultats et analyses	139
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>140</b>

---

## 4.1 Introduction

Le but de cette partie est de construire un modèle réduit (MR) du modèle direct conducto-radiatif de référence (aussi appelé modèle détaillé - MD) à l'aide de la méthode d'identification modale (MIM). Un modèle réduit (appelé également modèle d'ordre réduit ou modèle d'ordre faible) est composé d'un petit nombre de degrés de liberté, notamment par rapport aux modèles classiques issus d'une discrétisation spatiale des équations du problème. Un modèle réduit permet donc de réduire le temps de calcul par rapport au modèle de référence, pour des simulations directes comme pour la résolution de problèmes inverses. Dans un premier temps, la méthode d'identification modale est brièvement introduite. Ensuite, un modèle réduit non-linéaire est construit. Pour ce modèle non-linéaire, un matériau est choisi ( $\lambda, \kappa$  fixés), une condition aux limites de type flux imposé est choisie comme entrée et l'évolution de la température au point central de la face avant est choisie comme sortie. Ce modèle réduit non-linéaire est ensuite testé en utilisant des données générées par le modèle de référence pour différentes conditions aux limites. Dans un second temps, un modèle réduit paramétrique linéaire est construit. Pour ce modèle, la conductivité thermique  $\lambda$  et le coefficient d'absorption effectif  $\kappa$  sont des paramètres explicites, une condition aux limites de type flux imposé est choisie comme entrée et l'évolution de la température au point central de la face avant est choisie comme sortie. Finalement, ce modèle réduit paramétrique linéaire est testé en utilisant des données générées par le modèle détaillé pour d'autres valeurs de  $\lambda$  et  $\kappa$ , d'abord avec le signal de densité de flux utilisé pour l'identification, ensuite avec un signal de flux différent.

## 4.2 Méthode d'identification modale (MIM)

La méthode d'identification modale (MIM, Girault et al. [2011]) comprend trois grandes étapes :

- Définir une structure d'équations pour le modèle réduit à partir des équations de conservation locales. Cette étape peut être réalisée à partir d'une projection de Galerkin. Pour un problème décrit par des équations différentielles du premier ordre en temps, la forme générale du modèle réduit s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = f(a(t), U(t), \beta, \Theta) \\ Y(t) = H \cdot a(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Où

$a(t) = [a_1(t), \dots, a_i(t), \dots, a_m(t)]^T \in R^m$  : vecteur d'état, de petite taille  $m$

$U(t)$  : vecteur des chargements thermiques (i.e. CL, sources)

$\beta$  : vecteur des quantités paramétrant le modèle réduit (e.g.,  $\lambda, \kappa$ ), celles-ci pouvant prendre différentes valeurs dans une gamme pré-définie

$\Theta$  : vecteur des paramètres fixes du modèle réduit  
 $Y(t) \in R^q$  : vecteur de sortie (i.e., réponses en température)  
 $H \in R^{q \times m}$  : matrice de sortie

- Générer des données numériques ou expérimentales  $Y^{data}(t)$  pour un jeu de signaux d'excitation connus  $U^{data}(t)$  et / ou pour des jeux de valeurs des paramètres  $\beta^{data}$  caractéristiques du comportement du système.
- Identifier les paramètres fixes du modèle réduit : vecteur  $\Theta$  et matrice  $H$ . Cette identification est réalisée à travers la minimisation d'une fonction-objectif basée sur l'écart quadratique entre les données  $Y^{data}(U^{data}(t), \beta^{data})$  et les sorties  $Y(\Theta, H, U^{data}(t), \beta^{data})$  du modèle réduit. La Fig 4.1 schématise, pour un ordre  $m$  donné, la procédure d'optimisation itérative permettant l'identification des paramètres fixes du modèle réduit. Cette procédure d'identification est d'abord réalisée pour  $m = 1$ , puis de nouveaux modèles sont construits pour  $m = 2$ ,  $m = 3$ , etc. jusqu'à obtention d'un modèle réduit avec une précision satisfaisante.

La méthode d'identification modale consiste donc à ajuster les paramètres constitutifs du modèle réduit grâce à des techniques d'optimisation, de manière à ce que le modèle réduit reproduise au mieux des données entrées-sorties caractéristiques du système.

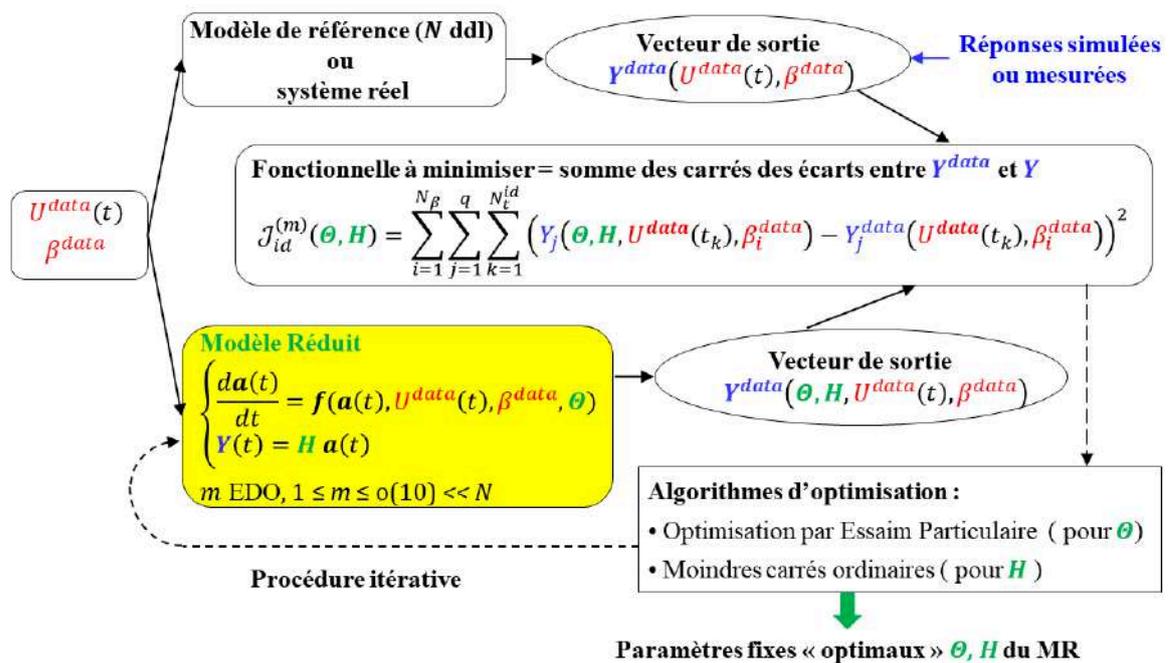


Fig. 4.1. Identification des paramètres fixes du modèle réduit selon une procédure d'optimisation itérative, pour un ordre  $m$  donné

## 4.3 Modèle réduit non-linéaire

### 4.3.1 Structure d'équations

Dans un premier temps, nous allons déterminer un modèle réduit permettant de calculer la température  $T(x, t)$  au sein du milieu quelle que soit l'excitation thermique  $\varphi(t)$ . La formulation d'un modèle réduit couplé conduction–rayonnement est obtenue à partir des projections de Galerkin de l'équation de l'énergie et de l'équation de transfert radiatif. On considère les approximations suivantes du champ de température  $T(x, t)$  et du champ de densité de flux radiatif incident  $G(x, t)$  :

$$T(x, t) \approx \sum_{i=1}^{m_T} \phi_i^{(T)}(x) \cdot a_i^{(T)}(t) \quad (4.2)$$

$$G(x, t) \approx \sum_{i=1}^{m_G} \phi_i^{(G)}(x) \cdot a_i^{(G)}(t) \quad (4.3)$$

où les  $\phi_i^{(T)}(x), i \in [1, m_T]$  et les  $\phi_i^{(G)}(x), i \in [1, m_G]$  sont des troncatures de bases orthonormées de  $L_2(\Omega)$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tel que  $\langle f, g \rangle = \int f g d\Omega$ .

Les résidus de l'équation de l'énergie et de l'équation de transfert radiatif sont définis comme :

$$R_E(x, t) = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} \left[ \lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T(x, t)) \right] - \operatorname{div} \left[ \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G(x, t)) \right] \quad (4.4)$$

$$R_G(x, t) = \operatorname{div} \left[ \frac{1}{3 \kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G(x, t)) \right] - \kappa \cdot [G(x, t) - 4 \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4(x, t)] \quad (4.5)$$

Les projections de Galerkin de l'équation de l'énergie et de l'équation de transfert radiatif sur les fonctions propres spatiales  $\phi_k^{(T)}(x) (k = 1 \dots m_T)$  et  $\phi_k^{(G)}(x) (k = 1 \dots m_G)$  s'écrivent :

$$\langle R_E(x, t), \phi_k^{(T)}(x) \rangle = \int R_E(x, t) \cdot \phi_k^{(T)}(x) d\Omega = 0, \quad \forall k \in [1, m_T] \quad (4.6)$$

$$\langle R_G(x, t), \phi_k^{(G)}(x) \rangle = \int R_G(x, t) \cdot \phi_k^{(G)}(x) d\Omega = 0, \quad \forall k \in [1, m_G] \quad (4.7)$$

Les étapes suivantes sont alors effectuées :

- Intégration par parties des termes de diffusion ;
- Introduction des conditions aux limites ;
- Expression de  $a^{(G)}(t)$  en fonction de  $a^{(T)}(t)$  à partir de l'équation (4.7) ;
- Introduction de l'expression de  $a^{(G)}(t)$  dans l'équation (4.6).

On obtient alors :

$$\frac{dX(t)}{dt} = D \cdot X(t) + Q \cdot \prod_{(4)}(X(t)) + V_\varphi \cdot \varphi(t) + V_{T_\infty} \quad (4.8)$$

où  $X(t) \in \mathbb{R}^{m_T}$  apparaît suite à un changement de variable sur  $a^{(T)}(t) \in \mathbb{R}^{m_T}$  et  $D \in \mathbb{R}^{m_T \times m_T}$  est diagonale.

Le vecteur des non-linéarités  $\Pi_{(4)}(X(t))$ , de taille  $m_T(m_T+1)(m_T+2)(m_T+3)/24$ , a pour composantes les  $X_i \cdot X_j \cdot X_l \cdot X_n$ ,  $i \in [1, m_T]$ ,  $j \in [i, m_T]$ ,  $l \in [j, m_T]$ ,  $n \in [l, m_T]$ .

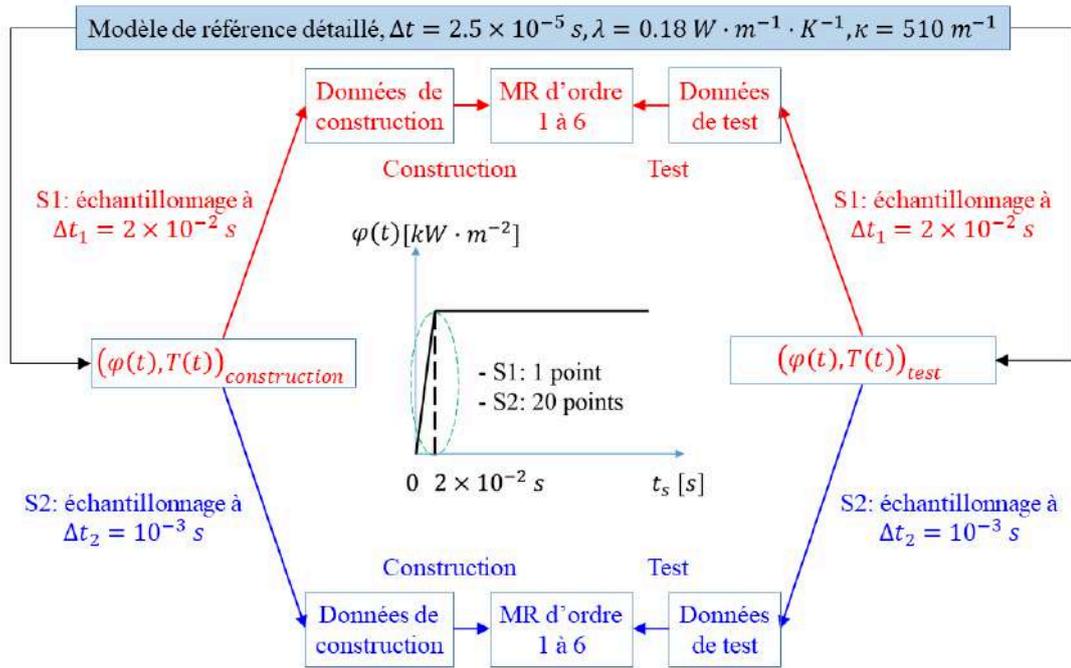
Les observables en température s'expriment en fonction de  $X^{(T)}(t) \in \mathbb{R}^{m_T}$  :

$$Y(t) = H \cdot X^{(T)}(t) \quad (4.9)$$

Les paramètres fixes du MR à identifier sont les composantes de  $D, Q, V_\varphi, V_{T_\infty}$  et  $H$ .

### 4.3.2 Données de construction et de test

La Fig 4.2 nous présente l'idée principale de la génération des données de construction et des données de test du modèle réduit d'ordre faible pour  $\varphi(t)$  par la méthode d'identification modale. Le vecteur d'entrée  $U(t)$  défini à la section 4.2 se réduit donc ici à la densité de flux  $\varphi(t)$ .



**Fig. 4.2.** Génération des données de construction et de test des modèles réduits obtenus par la méthode d'identification modale

Le matériau semi-transparent considéré correspond à  $\lambda=0.18 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$  et  $\kappa=510 m^{-1}$ . Les données en température sont obtenues par la simulation directe utilisant le modèle direct (MD) pour un pas de temps égal à  $2.5 \times 10^{-5} s$ . Ces données sont échantillonnées de deux manières, à  $2 \times 10^{-2} s$  (stratégie 1, S1) et  $10^{-3} s$  (stratégie 2, S2). Les densités de flux de chaleur appliquées sont échantillonnées de la même façon. Pour la

construction du modèle réduit, la densité de flux de chaleur correspond à une succession de créneaux (cf. Fig 4.3-a). Les créneaux de densité de flux de chaleur correspondent à des rampes d'une durée de  $2 \times 10^{-2}$  s. Ainsi pour l'échantillonnage à  $2 \times 10^{-2}$  s (S1) on passe directement de la valeur d'un créneau à la valeur du créneau suivant. Cependant, pour l'échantillonnage à  $10^{-3}$  s (S2), on a vraiment une rampe de 20 valeurs sur  $2 \times 10^{-2}$  s pour la densité de flux.

Dans cette section, on remplace  $m_T$  par  $m$ .

Pour chaque série de données (échantillonnage à  $2 \times 10^{-2}$  s et  $10^{-3}$  s), une série de 6 modèles réduits (MR) d'ordre 1 à 6 (i.e.  $m = 6$ ) est construite. Les MR identifiés à partir des données entrées-sorties sont testés (phase de validation) avec 4 signaux différents de densité de flux (cf. Fig 4.5-a) et les températures correspondantes sont comparées à celles obtenues avec le MD. Les données entrées-sorties de test sont échantillonnées de la même manière que les données de construction  $2 \times 10^{-2}$  s (S1) et  $10^{-3}$  s (S2). Pour les tests, le pas de temps du calcul des MR est le même que celui utilisé pour la construction des MR (par exemple, les MR construits avec les données échantillonnées à  $2 \times 10^{-2}$  s sont testés avec un pas de temps de  $2 \times 10^{-2}$  s). Nous avons donc, pour chaque échantillonnage, une figure pour l'identification des MR (phase de construction) et une figure pour les 4 tests (phase de validation). La Fig 4.3 et la Fig 4.4 correspondent à la phase d'identification pour les 2 stratégies d'échantillonnage. La température du MR d'ordre 6 est tracée et comparée à celle issue du MD. La Fig 4.5 et la Fig 4.6 correspondent à la phase de validation pour les 2 stratégies d'échantillonnage. La température du MR d'ordre 5 est tracée et comparée à celle issue du MD.

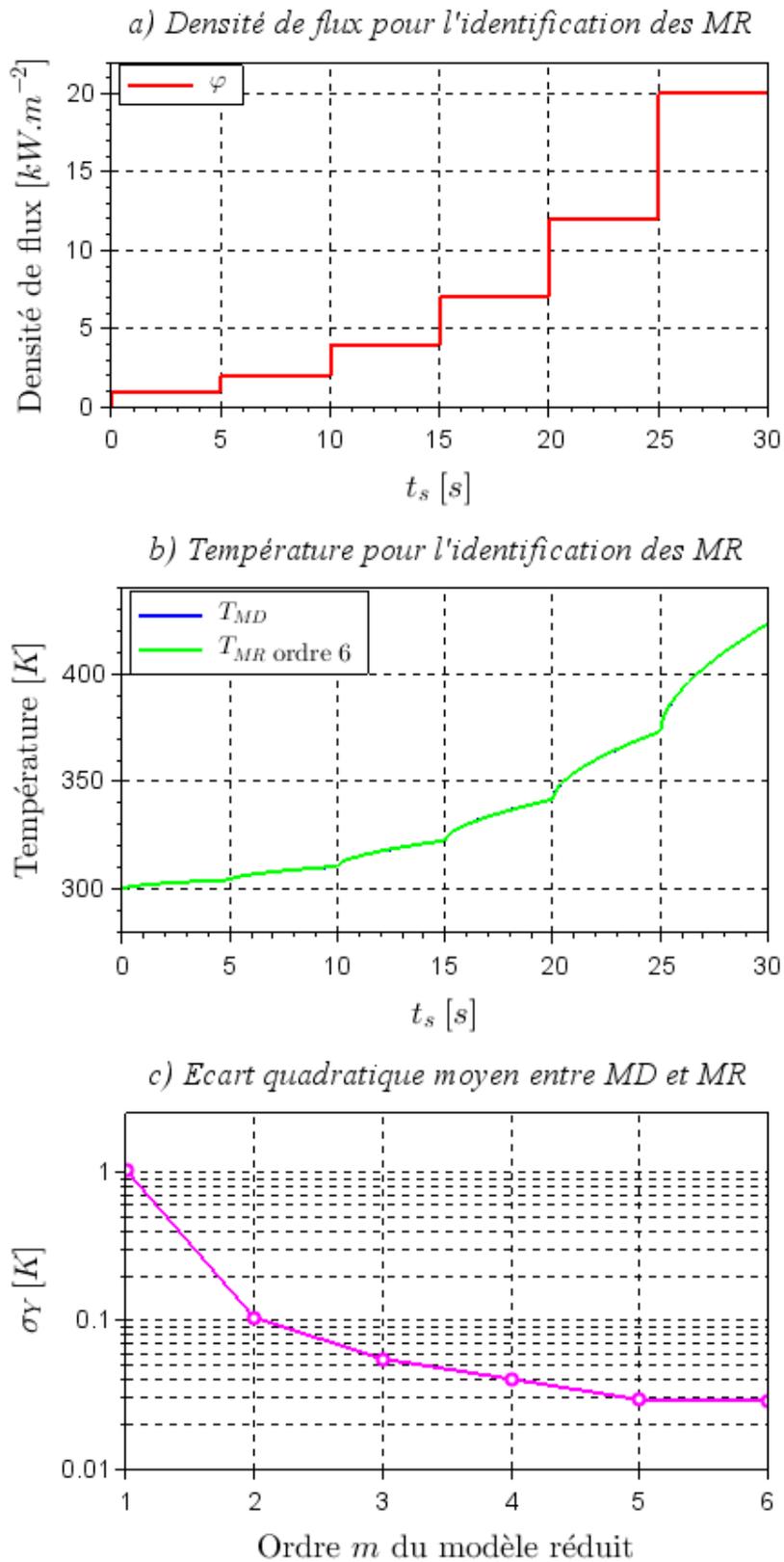


Fig. 4.3. Construction du MR non-linéaire avec échantillonnage à  $\Delta t_1 = 2 \times 10^{-2} s$

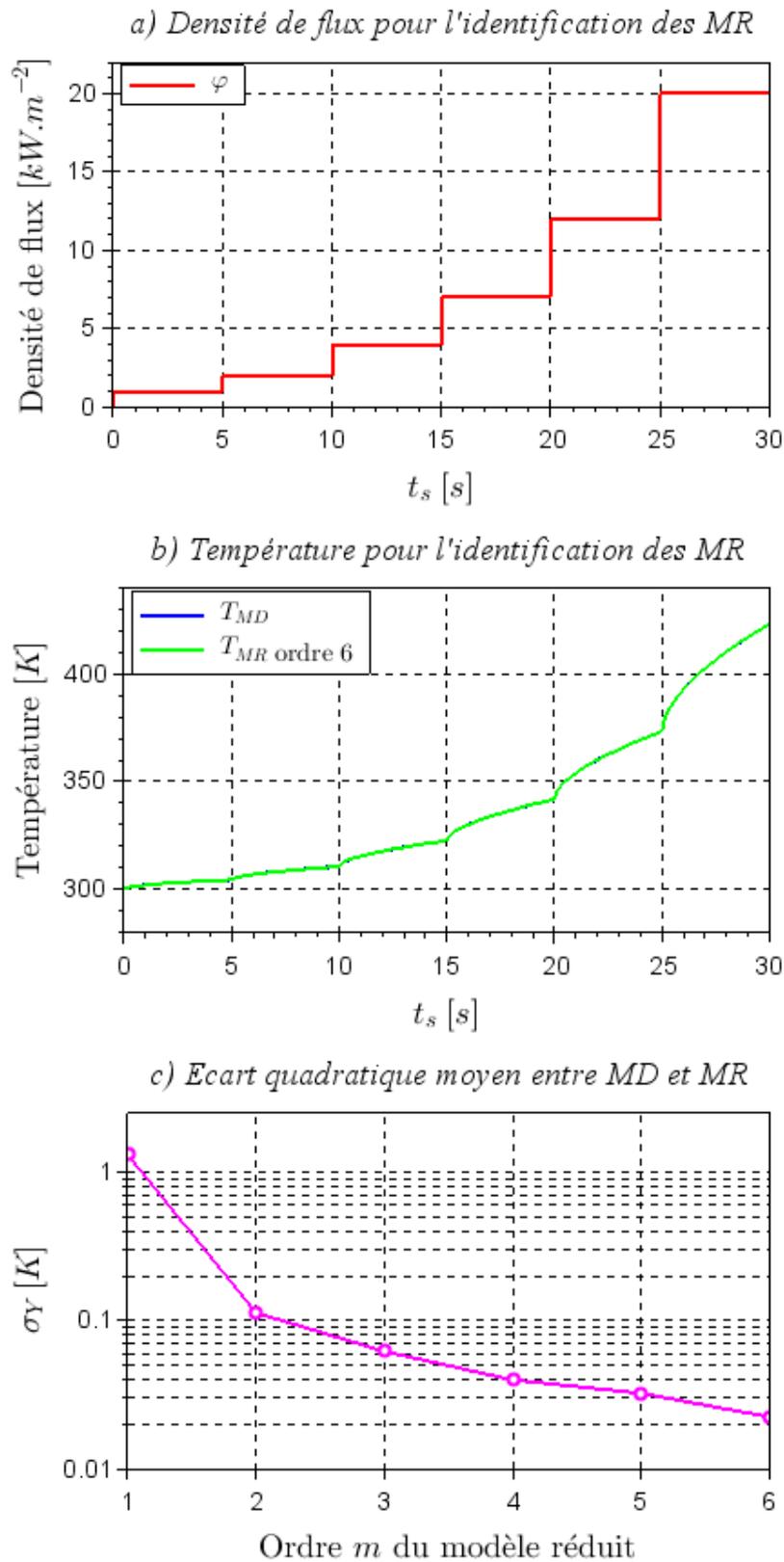


Fig. 4.4. Construction du MR non-linéaire avec échantillonnage à  $\Delta t_2 = 10^{-3}s$

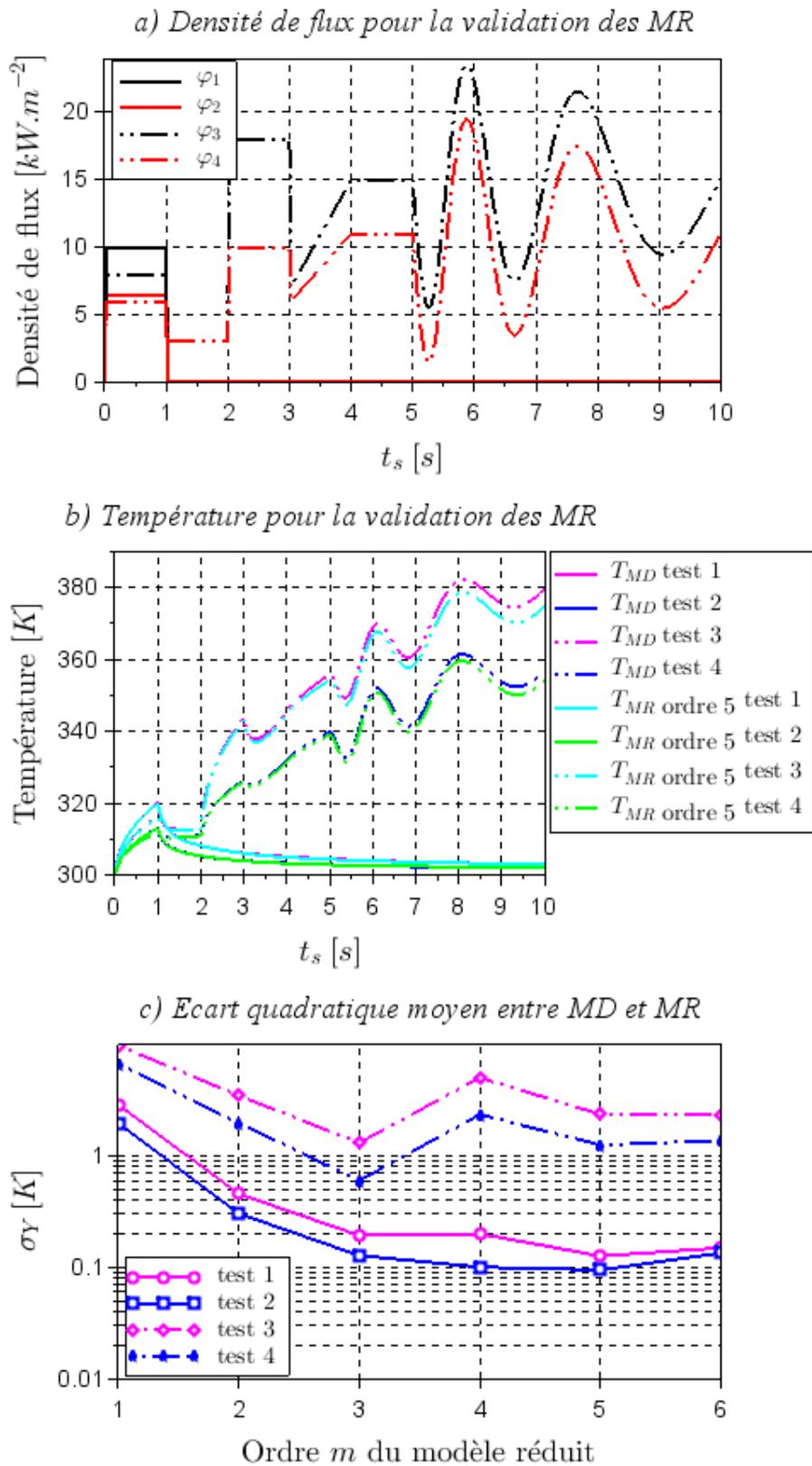


Fig. 4.5. Test du MR non-linéaire avec échantillonnage à  $\Delta t_1 = 2 \times 10^{-2} s$

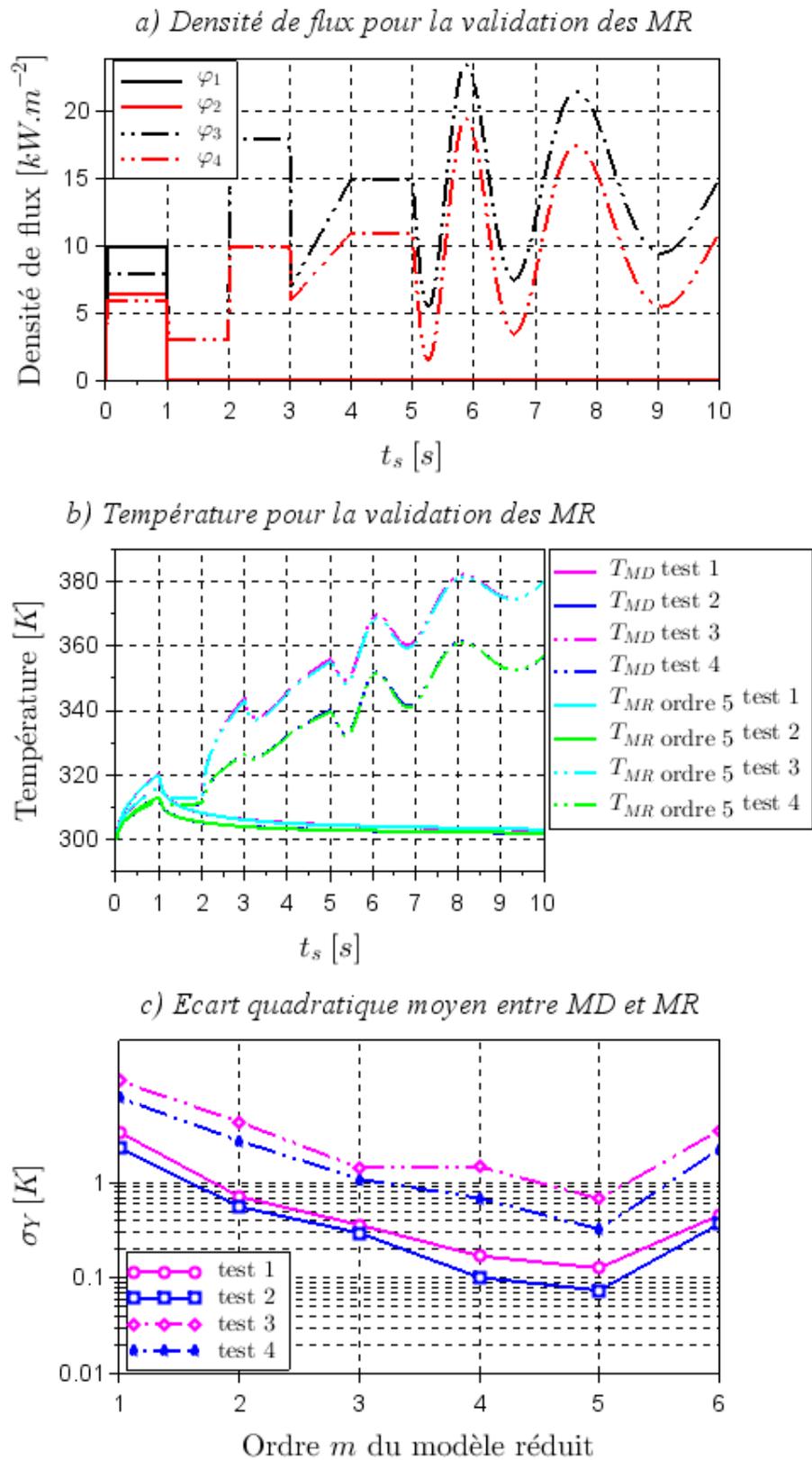


Fig. 4.6. Test du MR non-linéaire avec échantillonnage à  $\Delta t_2 = 10^{-3}s$

### 4.3.3 Résultats et analyses

#### Analyse des résultats de la construction du MR

Pour les 2 échantillonnages de la phase de construction, la réponse en température des MR approche de mieux en mieux la température obtenue par le modèle détaillé de référence lorsque l'ordre  $m$  du MR augmente. Cela est vrai pour l'écart quadratique moyen  $\sigma_Y(m)$  défini ci-après ainsi que pour les pics d'erreur situés au début de chaque créneau.

$$\sigma_Y(m) = \sqrt{\frac{1}{N_{tps}} \cdot \sum_{j=1}^{N_{tps}} (T^{MD}(t_j) - T^{MR(m)}(t_j))^2} \quad (4.10)$$

#### Analyse des résultats du test du MR

Les MR construits par des données échantillonnées à  $10^{-3}$  s ont de meilleures performances sur les cas de tests que ceux construits par des données échantillonnées à  $2 \times 10^{-2}$  s. C'est sans doute dû au fait que le signal de densité de flux utilisé dans le MD original et le signal de température résultant sont mieux décrits par l'échantillonnage à plus haute fréquence, permettant ainsi d'identifier des MR plus proches du comportement réel du MD. De plus, nous rappelons que les rampes de densité de flux d'une durée de  $2 \times 10^{-2}$  s sont décrites par 20 valeurs dans les données échantillonnées à  $10^{-3}$  s. Cela doit certainement améliorer la capacité des MR à reproduire le comportement du MD pour les cas-tests.

Les variations de densité de flux dans les cas-tests 1 et 3 sont plus élevées que dans les signaux utilisés pour la construction des MR. De plus, pour le cas-test 3, la densité de flux dépasse à certains instants la valeur maximale de densité de flux ( $20 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$ ) utilisée dans la construction. Les cas-tests 2 et 4 sont similaires aux cas-tests 1 et 3 respectivement, mais leur variations de densité de flux sont dans la gamme de variations utilisée pour la construction des MR. De plus, dans le cas-test 4, la densité de flux ne dépasse jamais la valeur maximale de densité de flux ( $20 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$ ) utilisée dans la construction. Les résultats du cas-test 2 sont donc logiquement meilleurs que ceux du cas-test 1. De façon similaire, les résultats du cas-test 4 sont meilleurs que ceux du cas-test 3. Les résultats sont meilleurs dans les cas-tests 1 et 2 (créneaux de 1 s puis densité de flux nulle pendant les 9 s restantes) que dans les cas-tests 3 et 4 (une série de créneaux suivie d'une rampe, d'un plateau et d'une sinusoïde). Ce n'est pas vraiment surprenant puisque le signal utilisé pour la construction ne contient que des créneaux et donc pas de rampe douce et pas de sinusoïde. On remarque d'ailleurs que pour les cas-tests 3 et 4, les écarts instantanés entre MD et MR augmentent sensiblement à partir de  $t = 3$  s (début de la séquence rampe + sinusoïde).

Pour un ordre  $m$  donné, les valeurs des écarts quadratiques moyens  $\sigma_Y(m)$  sont toujours supérieures à celles obtenues pour la construction des MR. Ce n'est pas anormal, c'est même assez classique dans le cas de modèles réduits non-linéaires, mais la

différence est ici importante. Par exemple, avec les données échantillonnées à  $10^{-3}$  s, on a pour le MR d'ordre 5 sur le cas-test 4, un facteur 10 sur  $\sigma_Y$  par rapport à la phase de construction :  $\sigma_Y$  (test 4,  $m = 5$ )  $\approx 0.3 K$  contre  $\sigma_Y$  (construction,  $m = 5$ )  $\approx 0.03 K$ .

Contrairement à la phase de construction pour laquelle  $\sigma_Y(m)$  décroît de façon monotone avec  $m$ , on observe que pour les cas-tests,  $\sigma_Y$  peut devenir plus élevé pour un certain ordre par rapport à l'ordre précédent. C'est vrai en particulier pour les MR construits avec les données échantillonnées à  $2 \times 10^{-2}$  s et notamment pour les cas-tests les plus difficiles (3 et 4) pour lesquels le MR d'ordre 3 donne les meilleurs résultats (cependant peu satisfaisants) alors que les MR d'ordre supérieur sont moins bons. Pour les MR construits avec les données échantillonnées à  $10^{-3}$  s, on observe une tendance similaire à celle observée pour la phase de construction jusqu'à l'ordre 5 mais le MR d'ordre 6 est moins bon, non seulement que le MR d'ordre 5, mais aussi que le MR d'ordre 4 et même que le MR d'ordre 3. Ce type de comportement ne se rencontre quasiment jamais pour les problèmes linéaires mais n'est pas rare pour les problèmes non-linéaires, en particulier lorsque les données entrées-sorties utilisées pour la construction des MR ne sont pas exactement celles générées avec le MD d'origine (sous-échantillonnage). Pour l'échantillonnage à  $10^{-3}$  s, les tests permettent de valider le modèle d'ordre 5 mais pas le modèle d'ordre 6.

Dans l'équation (4.8) du modèle réduit, le terme non-linéaire associé au rayonnement est  $Q \cdot \Pi_{(4)}(X(t))$ . La matrice  $Q \in R^{m \times m} \Pi$  où  $m_{\Pi} = m(m+1)(m+2)(m+3)/24$ , contient la grande majorité des paramètres fixes du MR. Or il s'avère que pour le matériau considéré, les niveaux de température atteints et l'observable choisi, le caractère non-linéaire du problème est très peu mis en évidence. Les données utilisées pour la construction du MR ne contenant donc que très peu d'effets non-linéaires, elles ne permettent pas une identification correcte des paramètres fixes du MR relatifs aux non-linéarités. Les valeurs des composantes de  $Q$  identifiées peuvent en fait générer des contributions non-linéaires dont les effets vont se compenser pour les données de construction mais pas pour certains cas-tests.

Compte-tenu des faibles non-linéarités mises en jeu pour la gamme de matériaux considérés, nous allons maintenant développer un modèle réduit linéaire. De plus, puisque l'objectif à long terme est d'utiliser un tel modèle réduit pour l'estimation de la conductivité thermique  $\lambda$  et du coefficient d'absorption moyen  $\kappa$ , nous allons proposer un modèle réduit explicitement paramétré par  $\lambda$  et  $\kappa$ .

## 4.4 Modèle réduit linéaire paramétrique

Dans un premier temps, nous rappelons les équations et les conditions aux limites : Equation de l'énergie ( $\forall x \in \Omega, \forall t \in [0, t_s]$ ) :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \text{div} \left[ \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T(x, t)) \right] + \text{div} \left[ \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(G(x, t)) \right] \quad (4.11)$$

Equation de transfert radiatif (ETR) ( $\forall x \in \Omega, \forall t \in [0, t_s]$ ) :

$$\operatorname{div} \left[ \frac{1}{3\kappa} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G(x, t)) \right] = \kappa \cdot [G(x, t) - 4n^2 \cdot \sigma \cdot T^4(x, t)] \quad (4.12)$$

Condition aux limites thermique ( $\forall x \in \Gamma, \forall t \in [0, t_s]$ ) :

$$\lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T(x, t)) \cdot \vec{n} + \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G(x, t)) \cdot \vec{n} = \gamma(x) \cdot \varphi(t) + h(x) \cdot [T_\infty - T(x, t)] \quad (4.13)$$

Condition aux limites radiative ( $\forall x \in \Gamma, \forall t \in [0, t_s]$ ) :

$$\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G(x, t)) \cdot \vec{n} + \kappa \cdot G(x, t) = 4\kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T^4(x, t) \quad (4.14)$$

### 4.4.1 Structure d'équations

#### Linéarisation des équations

Nous faisons l'hypothèse de petites variations de température et de densité de flux incident autour d'un point de fonctionnement en régime permanent correspondant aux champs de température  $T_0(x)$  et de densité de flux incident  $G_0(x)$  obtenus avec une densité de flux imposée  $\varphi_0$  constante. Nous avons donc :

Equation de l'énergie en régime permanent :

$$0 = \operatorname{div} \left[ \lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T_0(x)) \right] + \operatorname{div} \left[ \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G_0(x)) \right] \quad (4.15)$$

Equation de transfert radiatif (ETR) en régime permanent :

$$\operatorname{div} \left[ \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G_0(x)) \right] = \kappa \cdot [G_0(x) - 4n^2 \cdot \sigma \cdot T_0^4(x)] \quad (4.16)$$

Condition aux limites thermique :

$$\lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T_0(x)) \cdot \vec{n} + \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G_0(x)) \cdot \vec{n} = \gamma(x) \cdot \varphi_0 + h(x) \cdot [T_\infty - T_0(x)] \quad (4.17)$$

Condition aux limites radiative :

$$\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G_0(x)) \cdot \vec{n} + \kappa \cdot G_0(x) = 4\kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T_0^4(x) \quad (4.18)$$

On considère de petites variations  $\delta T$  et  $\delta G$  autour de  $T_0$  et  $G_0$ . Les champs de  $T$  et  $G$  s'écrivent donc :

$$T(x, t) = T_0(x) + \delta T(x, t) \quad (4.19)$$

$$G(x, t) = G_0(x) + \delta G(x, t) \quad (4.20)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \delta \varphi(t) \quad (4.21)$$

En introduisant (4.19) et (4.20) dans l'équation de l'énergie, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial \delta T(x, t)}{\partial t} &= \operatorname{div} \left[ \lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T_0(x)) \right] + \operatorname{div} \left[ \lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta T(x, t)) \right] \\ &+ \operatorname{div} \left[ \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G_0(x)) \right] + \operatorname{div} \left[ \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta G(x, t)) \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

En soustrayant l'équation de l'énergie (4.16) à (4.22), nous obtenons l'équation de l'énergie relative aux variations  $\delta T(x, t)$  et  $\delta G(x, t)$  :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial \delta T(x, t)}{\partial t} = \operatorname{div} \left[ \lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta T(x, t)) \right] + \operatorname{div} \left[ \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta G(x, t)) \right] \quad (4.23)$$

En introduisant (4.19) et (4.20) dans l'équation de transfert radiatif, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \left[ \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(G_0(x)) \right] + \operatorname{div} \left[ \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta G(x, t)) \right] \\ &= \kappa \cdot \left[ G_0(x) + \delta G(x, t) - 4n^2 \cdot \sigma \cdot (T_0(x) + \delta T(x, t))^4 \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

En soustrayant (4.16) à (4.24) et en négligeant les termes de degré supérieur à 1 dans (4.24) d'après l'hypothèse de petites variations de  $\delta T(x, t)$ , nous obtenons l'équation de transfert radiatif linéarisée relative aux variations  $\delta T(x, t)$  et  $\delta G(x, t)$  :

$$\operatorname{div} \left[ \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta G(x, t)) \right] = \kappa \cdot \left[ \delta G(x, t) - 16n^2 \cdot \sigma \cdot T_0^3(x) \cdot \delta T(x, t) \right] \quad (4.25)$$

Une telle linéarisation est justifiée même pour  $T_0 = 300 \text{ K}$  et des variations de température  $\delta T$  de l'ordre de  $30 \text{ K}$ . En effet, pour ces valeurs, la comparaison des termes en  $\delta T$  et en  $(\delta T)^2$  dans le développement de  $(T_0(x) + \delta T(x, t))^4$  par la formule du binôme de Newton donne  $4 \cdot T_0^3(x) \cdot \delta T(x, t) = 3.24 \times 10^9 \text{ K}^4$  et  $6 \cdot T_0^2(x) \cdot (\delta T(x, t))^2 = 4.86 \times 10^8 \text{ K}^4$ .

En soustrayant (4.17) à (4.13) avec (4.19), (4.20) et (4.21), nous obtenons la condition aux limite thermique pour  $\delta T(x, t)$  et  $\delta G(x, t)$  :

$$\lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta T(x, t)) \cdot \vec{n} + \frac{1}{3\kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta G(x, t)) \cdot \vec{n} = \gamma(x) \cdot \delta \varphi(t) + h(x) \cdot \delta T(x, t) \quad (4.26)$$

En soustrayant (4.18) à (4.14) avec (4.19) et (4.20) et en négligeant les termes de degré supérieur à 1, nous obtenons la condition aux limite radiative linéarisée pour  $\delta T(x, t)$  et  $\delta G(x, t)$  :

$$\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta G(x, t)) \cdot \vec{n} + \kappa \cdot \delta G(x, t) = 16\kappa \cdot n^2 \cdot \sigma \cdot T_0^3(x) \cdot \delta T(x, t) \quad (4.27)$$

A l'instant initial, on suppose être au point de fonctionnement correspondant à  $\delta \varphi = 0$ , on a donc :

$$\delta T(x, t = 0) = 0 \quad (4.28)$$

### Approximation des champs

On considère les approximations suivantes du champ de température  $T(x, t)$  et du champ de densité de flux radiatif incident  $G(x, t)$  :

$$\delta T(x, t) \approx \sum_{i=1}^{m_T} \phi_i^{(T)}(x) \cdot a_i^{(T)}(t) \quad (4.29)$$

$$\delta G(x, t) \approx \sum_{i=1}^{m_G} \phi_i^{(G)}(x) \cdot a_i^{(G)}(t) \quad (4.30)$$

où les  $\phi_i^{(T)}(x), i \in [1, m_T]$  et les  $\phi_i^{(G)}(x), i \in [1, m_G]$  sont des troncatures de bases orthonormées de  $L_2(\Omega)$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tel que  $\langle f, g \rangle = \int f g d\Omega$ .

### Projection de Galerkin des équations linéarisées

Les résidus de l'équation de l'énergie (4.23) et de l'équation de transfert radiatif (4.25) sont définis comme :

$$R_E(x, t) = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial \delta T}{\partial t} - \operatorname{div} \left[ \lambda \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta T(x, t)) \right] - \operatorname{div} \left[ \frac{1}{3 \cdot \kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta G(x, t)) \right] \quad (4.31)$$

$$R_G(x, t) = \operatorname{div} \left[ \frac{1}{3 \kappa} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\delta G(x, t)) \right] - \kappa \cdot \left[ \delta G(x, t) - 16 n^2 \cdot \sigma \cdot T_0^3(x) \cdot \delta T(x, t) \right] \quad (4.32)$$

Les projections de Galerkin de l'équation de l'énergie et de l'équation de transfert radiatif sur les fonctions propres spatiales  $\phi_k^{(T)}(x) (k = 1 \dots m_T)$  et  $\phi_k^{(G)}(x) (k = 1 \dots m_G)$  s'écrivent :

$$\langle R_E(x, t), \phi_k^{(T)}(x) \rangle = \int R_E(x, t) \cdot \phi_k^{(T)}(x) d\Omega = 0, \quad \forall k \in [1, m_T] \quad (4.33)$$

$$\langle R_G(x, t), \phi_k^{(G)}(x) \rangle = \int R_G(x, t) \cdot \phi_k^{(G)}(x) d\Omega = 0, \quad \forall k \in [1, m_G] \quad (4.34)$$

En intégrant par parties les termes de diffusion et en introduisant la condition aux limites thermique, l'équation (4.33) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d a_k^{(T)}(t)}{d t} &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{m_T} (M_{Td})_{ki} \cdot a_i^{(T)}(t) + \sum_{i=1}^{m_T} (M_{Th})_{ki} \cdot a_i^{(T)}(t) \\ &+ \frac{1}{\kappa} \cdot \sum_{i=1}^{m_G} (M_{TG})_{ki} \cdot a_i^{(G)}(t) + V_k \cdot \delta \varphi(t), \quad \forall k \in [1, m_T] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Où :  $\forall k \in [1, m_T], \forall i \in [1, m_T]$  :

$$(M_{Td})_{ki} = -\frac{1}{\rho \cdot C_p} \cdot \int \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi_i^{(T)}(x)) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi_k^{(T)}(x)) d\Omega \quad (4.36)$$

$$(M_{Th})_{ki} = -\frac{1}{\rho \cdot C_p} \cdot \int h(x) \cdot \phi_i^{(T)}(x) \cdot \phi_k^{(T)}(x) d\Gamma \quad (4.37)$$

$\forall k \in [1, m_T], \forall i \in [1, m_G] :$

$$(M_{TG})_{ki} = -\frac{1}{3\rho \cdot C_p} \cdot \int \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_i^{(G)}(x)) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_k^{(T)}(x)) d\Omega \quad (4.38)$$

Ainsi que  $\forall k \in [1, m_T] :$

$$V_k = \frac{1}{\rho \cdot C_p} \cdot \int \gamma(x) \cdot \phi_k^{(T)}(x) d\Gamma \quad (4.39)$$

L'équation (4.35) s'écrit sous forme matricielle :

$$\frac{da^{(T)}(t)}{dt} = (\lambda \cdot M_{Td} + M_{Th}) \cdot a^{(T)}(t) + \frac{1}{\kappa} \cdot M_{TG} \cdot a^{(G)}(t) + V \cdot \delta\varphi(t) \quad (4.40)$$

De la même façon, en intégrant par parties le terme de diffusion et en introduisant la condition aux limites radiative, l'équation (4.34) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa} \cdot \sum_{i=1}^{m_G} (M_{G0})_{ki} \cdot a_i^{(G)}(t) + \kappa \cdot a_k^{(G)}(t) + \sum_{i=1}^{m_G} (M_{G2})_{ki} \cdot a_i^{(G)}(t) \\ &= \kappa \cdot \sum_{i=1}^{m_T} (M_{GT1})_{ki} \cdot a_i^{(T)}(t) + \sum_{i=1}^{m_T} (M_{GT2})_{ki} \cdot a_i^{(T)}(t), \quad \forall k \in [1, m_G] \end{aligned} \quad (4.41)$$

Où  $\forall k \in [1, m_G], \forall i \in [1, m_G] :$

$$(M_{G0})_{ki} = \frac{1}{3} \cdot \int \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_i^{(G)}(x)) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_k^{(G)}(x)) d\Omega \quad (4.42)$$

$$(M_{G2})_{ki} = \frac{1}{2} \cdot \int \phi_i^{(G)}(x) \cdot \phi_k^{(G)}(x) d\Gamma \quad (4.43)$$

Et  $\forall k \in [1, m_G], \forall i \in [1, m_T] :$

$$(M_{GT1})_{ki} = 16 \int n^2 \cdot \sigma \cdot T_0^3(x) \cdot \phi_i^{(T)}(x) \cdot \phi_k^{(G)}(x) d\Omega \quad (4.44)$$

$$(M_{GT2})_{ki} = 8 \int n^2 \cdot \sigma \cdot T_0^3(x) \cdot \phi_i^{(T)}(x) \cdot \phi_k^{(G)}(x) d\Gamma \quad (4.45)$$

L'équation (4.41) s'écrit sous forme matricielle :

$$\left( \frac{1}{\kappa} \cdot M_{G0} + \kappa \cdot I_{m_G} + M_{G2} \right) \cdot a^{(G)}(t) = (\kappa \cdot M_{GT1} + M_{GT2}) \cdot a^{(T)}(t) \quad (4.46)$$

Où  $I_{m_G}$  est la matrice identité de dimensions  $m_G \times m_G$ .

### Changement de variables

Les matrices  $M_{Td}$  et  $M_{G0}$  étant symétriques, elles sont diagonalisables, à valeurs propres réelles. Soient  $D_T$  et  $D_G$  les matrices diagonales dont les composantes sont respectivement les valeurs propres de  $M_{Td}$  et  $M_{G0}$ , et  $P_T$  et  $P_G$  les matrices dont les colonnes sont des vecteurs propres (orthonormés) de  $M_{Td}$  et  $M_{G0}$  respectivement. On

effectue les changements de variables suivants :

$$a^{(T)}(t) = P_T \cdot X^T(t) \quad (4.47)$$

$$a^{(G)}(t) = P_G \cdot X^G(t) \quad (4.48)$$

En introduisant (4.47) et (4.48) dans les équations (4.40) et (4.46), on obtient :

$$\frac{dX^{(T)}(t)}{dt} = (\lambda \cdot D_T + S_T) \cdot X^{(T)}(t) + \frac{1}{\kappa} \cdot A_{TG} \cdot X^{(G)}(t) + B \cdot \delta\varphi(t) \quad (4.49)$$

Et :

$$\left( \frac{1}{\kappa} \cdot D_G + \kappa \cdot I_{m_G} + S_G \right) \cdot X^{(G)}(t) = (\kappa \cdot A_{GT1} + A_{GT2}) \cdot X^{(T)}(t) \quad (4.50)$$

Avec :

$$D_T = [P_T]^T \cdot M_{Td} \cdot P_T \quad (4.51)$$

$$S_T = [P_T]^T \cdot M_{th} \cdot P_T \quad (4.52)$$

$$A_{TG} = [P_T]^T \cdot M_{TG} \cdot P_G \quad (4.53)$$

$$B = [P_T]^T \cdot V \quad (4.54)$$

$$D_G = [P_G]^T \cdot M_{G0} \cdot P_G \quad (4.55)$$

$$S_G = [P_G]^T \cdot M_{G2} \cdot P_G \quad (4.56)$$

$$A_{GT1} = [P_G]^T \cdot M_{GT1} \cdot P_T \quad (4.57)$$

$$A_{GT2} = [P_G]^T \cdot M_{GT2} \cdot P_T \quad (4.58)$$

## Observables

Nous considérons un nombre  $q$  d'observables  $Y_j$  en température en des positions spécifiques  $x_j$  avec  $j = 1, \dots, q$ . D'après (4.29), on a :

$$Y_j(t) = \delta T(x_j, t) = \sum_{i=1}^{m_T} \phi_i^{(T)}(x_j) \cdot a_i^{(T)}(t) \quad (4.59)$$

Nous posons :

$$C_{ji} = \phi_i^{(T)}(x_j), \quad \forall j \in [1, q], \quad \forall i \in [1, m_T] \quad (4.60)$$

Alors

$$Y_j(t) = \delta T(x_j, t) = \sum_{i=1}^{m_T} C_{ji} \cdot a_i^{(T)}(t), \quad \forall j \in [1, q] \quad (4.61)$$

Sous forme matricielle :

$$Y(t) = C \cdot a^{(T)}(t) \quad (4.62)$$

Avec le changement de variable (4.47) et en posant  $H = C \cdot P_T$ , nous obtenons :

$$Y(t) = C \cdot P_T \cdot X^{(T)}(t) = H \cdot X^{(T)}(t) \quad (4.63)$$

### Formulation finale

Le modèle réduit d'ordre faible linéaire paramétré par  $\lambda$  et  $\kappa$  est finalement composé de 3 équations :

L'équation correspondant à l'équation de l'énergie :

$$\frac{dX^{(T)}(t)}{dt} = (\lambda \cdot D_T + S_T) \cdot X^{(T)}(t) + \frac{1}{\kappa} \cdot A_{TG} \cdot X^{(G)}(t) + B \cdot \delta\varphi(t) \quad (4.64)$$

L'équation correspondant à l'équation de transfert radiatif :

$$\left( \frac{1}{\kappa} \cdot D_G + \kappa \cdot I_{m_G} + S_G \right) \cdot X^{(G)}(t) = (\kappa \cdot A_{GT1} + A_{GT2}) \cdot X^{(T)}(t) \quad (4.65)$$

L'équation d'observation :

$$Y(t) = H \cdot X^{(T)}(t) \quad (4.66)$$

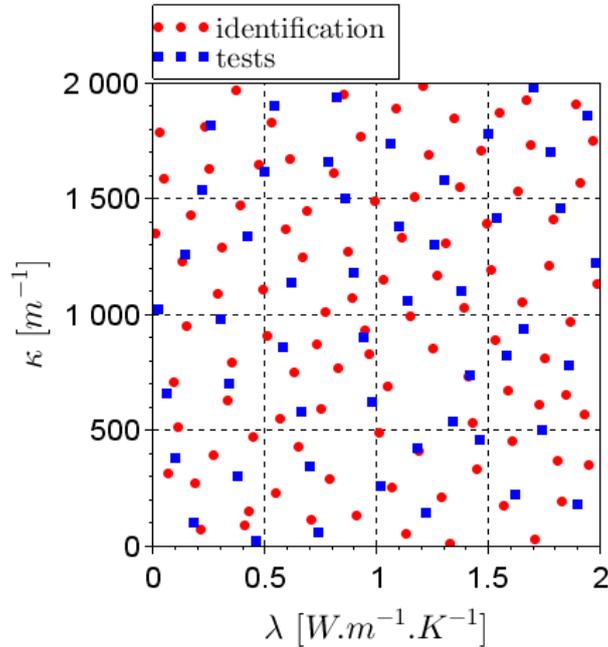
#### 4.4.2 Données de construction et de test

Au lieu d'un maillage cartésien de l'espace  $(\lambda, \kappa)$  choisi, une approche IHS (Improved Hypercube Sampling, Beachkofski and Grandhi [2002]) a été employée afin de couvrir l'espace avec un nombre limité de couples  $(\lambda, \kappa)$ . Avec la méthode IHS, les coordonnées dans l'espace des paramètres sont régulièrement espacées mais l'ensemble est formé de telle sorte qu'il n'existe pas de couples qui partagent une même valeur de  $\lambda$  ou de  $\kappa$ . Les gammes de valeurs choisies ici sont  $\lambda \in ]0, 2[ \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $\kappa \in ]0, 2000[ \text{ m}^{-1}$ .

Pour l'identification des modèles réduits, un premier ensemble de 100 couples  $(\lambda, \kappa)$  a été généré par IHS (cf. Fig 4.7, points rouges). Les valeurs de  $\lambda$  s'échelonnent de 0.01 à 1.99 par pas de 0.02. Celles de  $\kappa$  s'échelonnent de 10 à 1990 par pas de 20. Le signal de densité de flux de chaleur employé pour la construction des MR est un créneau ( $5 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$  pendant 1 s) présenté sur la Fig 4.8-a. Les données en température (cf. Fig 4.8-c) sont obtenues par la simulation directe utilisant le modèle détaillé (MD) avec un pas de temps égal à  $2.5 \times 10^{-5} \text{ s}$ . Dans la procédure d'identification des MR, la densité de flux et la température résultante sont échantillonnées à  $2.5 \times 10^{-2} \text{ s}$ . Une série de 6 modèles réduits (MR) d'ordre 1 à 6 (i.e.  $m_T = m_G = m = 1$  à 6) est construite à partir des ces données.

Les MR identifiés sont ensuite testés (phase de validation). Pour cela, un second ensemble de 50 couples  $(\lambda, \kappa)$  a été généré par IHS (cf. Fig 4.7, points bleus). Les valeurs de  $\lambda$  s'échelonnent de 0.02 à 1.98 par pas de 0.04. Celles de  $\kappa$  s'échelonnent de 20 à 1980 par pas de 40. Deux densités de flux de type créneau sont employées pour les tests : d'une part le signal utilisé pour la construction des MR (cf. Fig 4.9-a,  $\delta\varphi^{test1}(t)$ ), d'autre part un signal différent composé d'un créneau de  $10 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$  pendant 0.75 s (cf.

Fig 4.10-a,  $\delta\varphi^{test2}(t)$ ). Les températures correspondantes (cf. Fig 4.9-c et cf. Fig 4.10-c) sont calculées avec le modèle détaillé (MD) pour un pas de temps égal à  $2.5 \times 10^{-5}$  s. L'échantillonnage des données entrées-sorties et le pas de temps de calcul pour les tests sont les mêmes que pour la phase d'identification :  $2.5 \times 10^{-5}$  s.



**Fig. 4.7.** *Distribution spatiale des 100 couples  $(\lambda, \kappa)$  pour l'identification et 50 couples  $(\lambda, \kappa)$  pour la validation*

Les résultats sont présentés sur quatre figures. La Fig 4.8 correspond à l'identification des MR (phase de construction), la Fig 4.9 au premier test (phase de validation utilisant le même flux que pour l'identification) et la Fig 4.10 au second test (phase de validation utilisant l'autre flux). La Fig 4.11 correspond à l'évolution de l'écart quadratique moyen  $\sigma_Y(m)$  entre le modèle détaillé (MD) et le modèle réduit (MR) pour la phase de construction et la phase de validation.

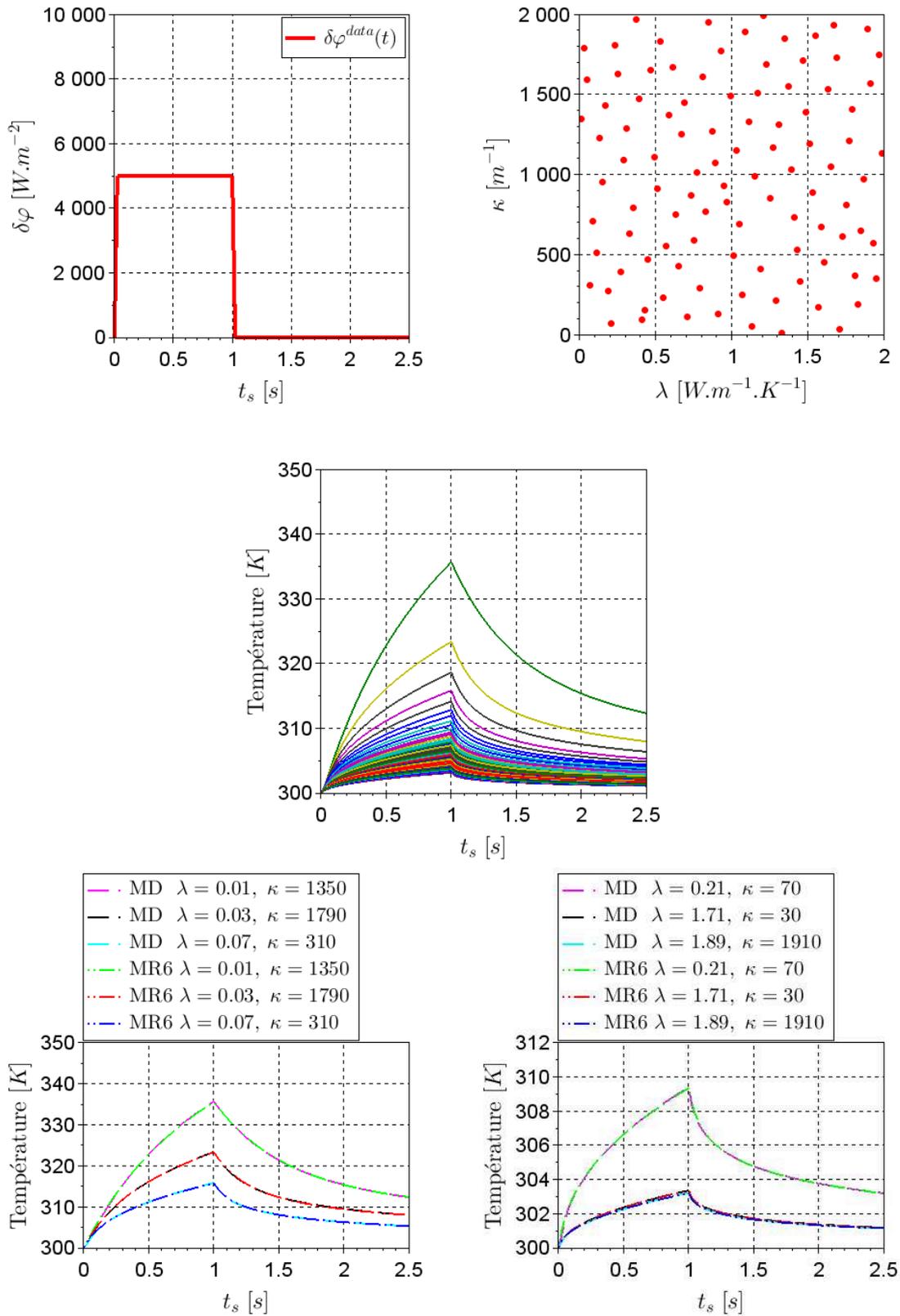
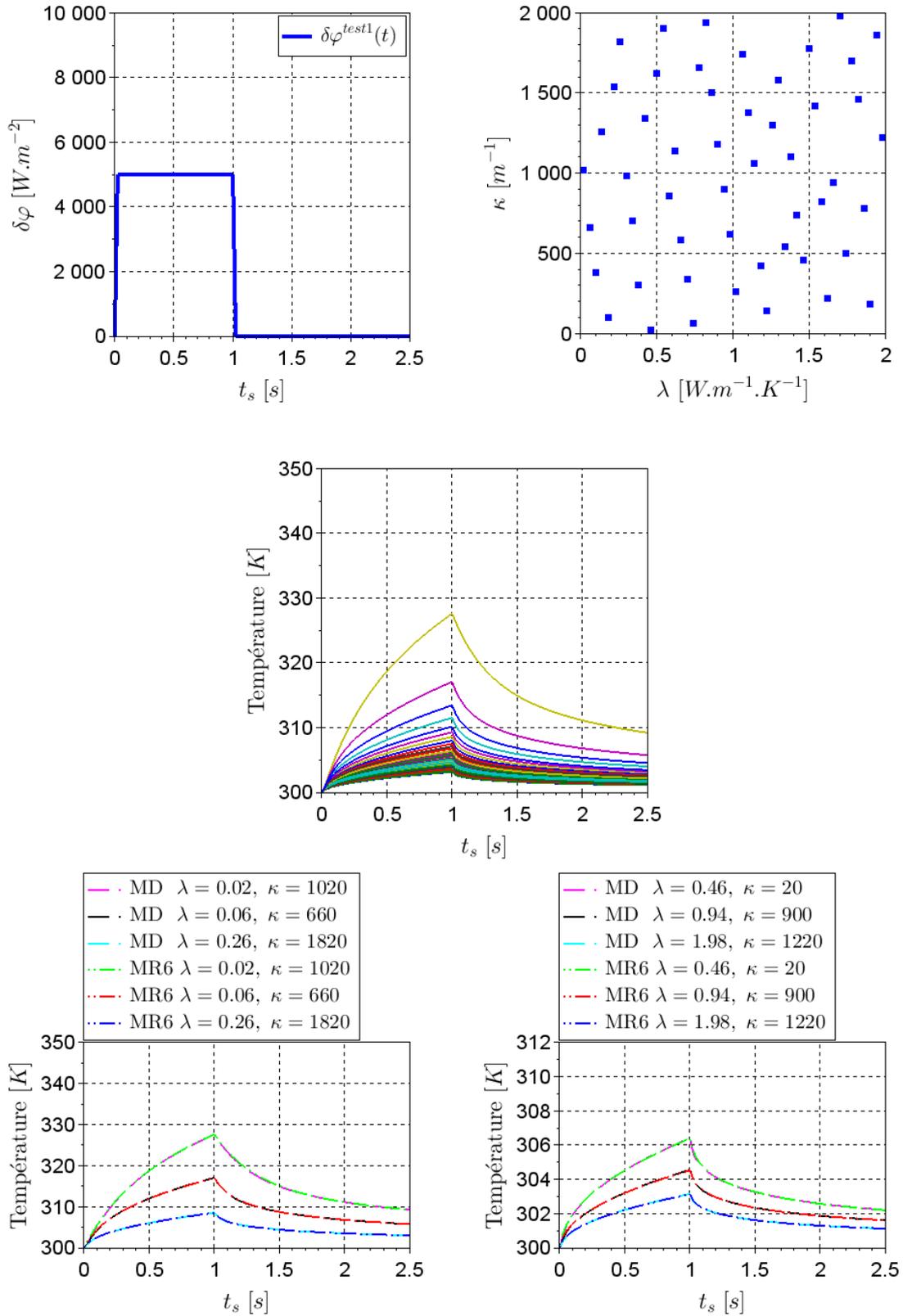
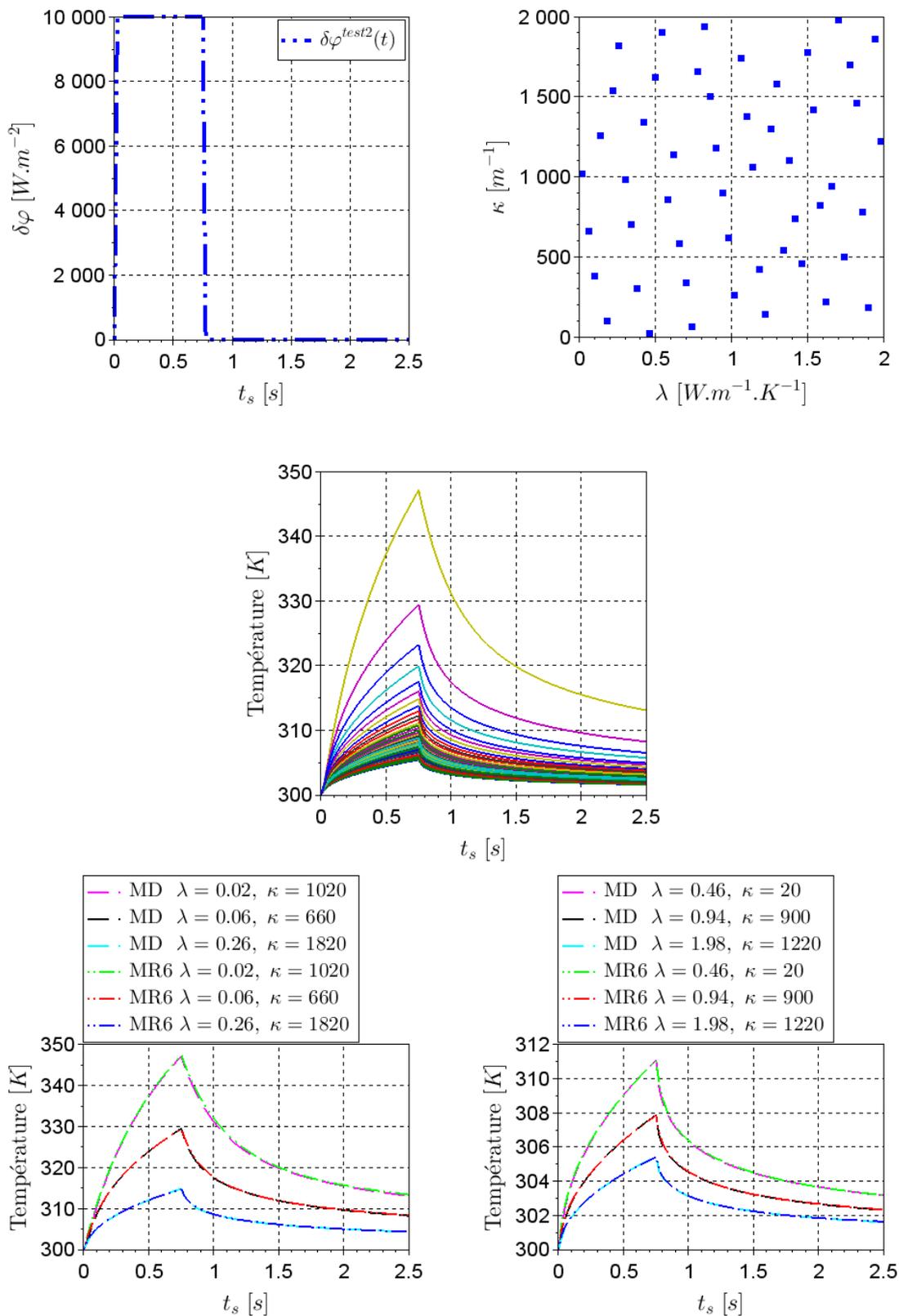


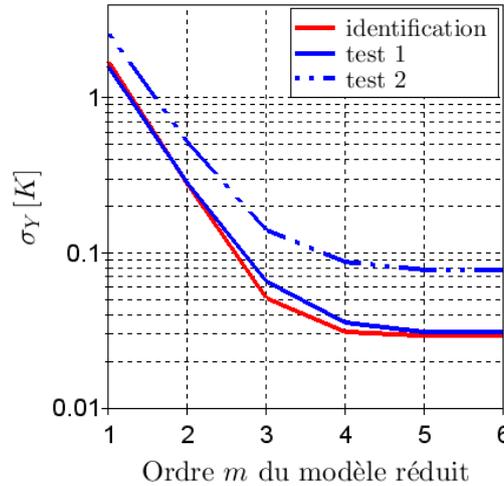
Fig. 4.8. Construction des MR linéaires paramétriques avec échantillonnage à  $2.5 \times 10^{-2} s$



**Fig. 4.9.** Test des MR linéaires paramétriques avec échantillonnage à  $2.5 \times 10^{-2}$  s et  $\delta\varphi$  test 1 (même flux que pour l'identification)



**Fig. 4.10.** Test des MR linéaires paramétriques avec échantillonnage à  $2.5 \times 10^{-2} s$  et  $\delta\varphi$  test 2 (différent du flux utilisé pour l'identification)



**Fig. 4.11.** Evolution de l'écart quadratique moyen  $\sigma_Y(m)$  entre le modèle détaillé (MD) et le modèle réduit (MR) pour la phase de construction et la phase de validation

### 4.4.3 Résultats et analyses

#### Analyse des résultats de la construction du MR

Pour la phase de construction, la réponse en température des MR approche de mieux en mieux la température obtenue par le modèle détaillé lorsque l'ordre  $m$  du MR augmente. Cela est vrai pour l'écart quadratique moyen  $\sigma_Y(m)$  (cf. Fig 4.11) calculé sur les  $N_{cp} = 100$  couples  $(\lambda, \kappa)$ .

$$\sigma_Y(m) = \sqrt{\frac{1}{N_{tps} \cdot N_{cp}} \cdot \sum_{i=1}^{N_{cp}} \sum_{j=1}^{N_{tps}} (T^{MD}((\lambda, \kappa)_i, t_j) - T^{MR(m)}((\lambda, \kappa)_i, t_j))^2} \quad (4.67)$$

#### Analyse des résultats du test du MR

Pour la phase de validation utilisant les 50 couples  $(\lambda, \kappa)$ , la réponse en température des MR approche également de mieux en mieux la température obtenue par le modèle détaillé de référence lorsque l'ordre  $m$  du MR augmente. Lorsque le flux-test est celui utilisé pour la construction des MR, les valeurs de  $\sigma_Y(m)$  sont très proches de celles obtenues lors de la phase de construction, ce qui montre la robustesse des MR pour d'autres valeurs de  $(\lambda, \kappa)$ . En particulier, pour  $m = 6$ , on a  $\sigma_Y \approx 0.03 K$ . Pour le second flux-test, différent de celui utilisé pour la construction, les valeurs de  $\sigma_Y(m)$  sont un peu plus élevées que celles obtenues lors de la phase de construction. Par exemple, pour  $m = 6$ , on a  $\sigma_Y \approx 0.08 K$ . Ceci peut s'expliquer par les variations de température atteintes pour ce second test : presque 50 K au maximum (cf. Fig 4.10-c) contre moins de 30 K pour le test 1 (Fig 4.9-c). Pour de telles augmentations de température, la linéarisation des transferts de chaleur n'est plus totalement valide : le terme en  $(\delta T)^2$  n'est plus négligeable devant le terme en  $\delta T$ . Ce second test montre cependant la

robustesse des MR linéaires même lorsqu'ils sont poussés à leur limite.

Pour les deux tests et pour tous les MR, on remarque que pour l'un des couples  $(\lambda, \kappa)$ , l'écart de température entre le modèle détaillé et le modèle réduit est plus élevé que pour les autres couples. Il s'agit des courbes correspondent au couple  $(\lambda = 0.02, \kappa = 1020)$ . Plus la conductivité thermique est petite, plus l'élévation de la température au point central de la face avant est importante. Pour les très faibles conductivités thermiques (0.01, 0.02 ou 0.03  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$  par exemple), un petit changement de la valeur de  $\lambda$  engendre des variations de température plus importantes que pour des conductivités thermiques plus élevées (proches de 2  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ). Afin d'améliorer la qualité des MR pour les faibles valeurs de  $\lambda$ , il faudrait ajouter des données pour d'autres faibles valeurs de  $\lambda$  dans la phase de construction du modèle réduit.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode d'identification modale (MIM), permettant la construction de modèles réduits à partir de données entrées-sorties grâce à des techniques d'optimisation, a été brièvement présentée.

Dans un premier temps, des modèles réduits non-linéaires d'ordre 1 à 6 ont tout d'abord été construits. La densité de flux de chaleur appliquée est l'entrée du modèle réduit et l'évolution de la température au point central de la face avant est choisie comme sortie. Dans la phase de construction, une succession de créneaux est employée et la réponse en température est obtenue par simulation directe avec le modèle détaillé. Toutes ces données sont échantillonnées de deux manières, à  $2 \times 10^{-2}$  s et  $10^{-3}$  s, afin de réduire le temps de construction. Les résultats montrent que pour la construction, la réponse en température des modèles réduits approche de mieux en mieux la température calculée par le modèle détaillé lorsque l'ordre  $m$  du modèle réduit augmente. Les modèles réduits construits avec l'échantillonnage plus fin correspondent à un écart quadratique moyen entre MD et MR plus petit.

Dans la phase de test (validation), les modèles réduits construits sont testés avec 4 signaux différents de densité de flux et les températures correspondantes sont comparées à celles obtenues par le modèle détaillé. Ces données de tests sont échantillonnées de la même manière que les données de construction. Les résultats montrent que les modèles réduits construits à partir des données les plus finement échantillonnées ont de meilleures performances. De plus, les résultats sont meilleurs pour les cas-tests avec des variations de densité de flux dans la gamme utilisée pour la construction des MR. Contrairement à la phase de construction pour laquelle l'écart quadratique moyen  $\sigma_Y$  décroît avec  $m$ , on observe que pour les cas-tests,  $\sigma_Y$  peut devenir plus élevé pour un certain ordre par rapport à l'ordre précédent. On observe en particulier ce phénomène pour les modèles réduits construits à partir des données les moins finement échantillonnées et notamment pour les cas-tests les plus difficiles.

On remarque cependant que pour le matériau considéré, les niveaux de température atteints et l'observable choisi, le caractère non-linéaire du problème est très peu mis en évidence. Les données utilisées pour la construction du MR ne contenant donc que très peu d'effets non-linéaires, elles ne permettent pas une identification correcte des paramètres fixes du MR relatifs aux non-linéarités.

Dans un second temps, compte-tenu des faibles non-linéarités mises en jeu pour la gamme de matériaux considérés, des modèles réduits linéaires basés sur les équations locales linéarisées ont été développés. L'objectif étant d'utiliser ces modèles réduits pour l'estimation de la conductivité thermique  $\lambda$  et du coefficient d'absorption moyen  $\kappa$ , ils sont explicitement paramétrés par  $\lambda$  et  $\kappa$ .

Deux ensembles de couples  $(\lambda, \kappa)$  dans une gamme pré-définie sont générés par une méthode de type Improved Hypercube Sampling. Un premier ensemble de 100 couples est utilisé pour la phase de construction des modèles réduits et un second ensemble de 50 autres couples est employé pour la phase de validation.

Dans la phase de construction, la densité de flux de chaleur correspond à un créneau de flux. Dans la phase de validation, deux signaux de flux sont utilisés : d'une part le flux employé pour la construction des MR, d'autre part un créneau d'amplitude et de durée différentes. Les résultats montrent que dans les 2 phases (construction et validation), la réponse en température des modèles réduits approche de mieux en mieux la température obtenue par le modèle détaillé lorsque l'ordre  $m$  du modèle réduit augmente. L'écart quadratique moyen entre MD et MR est du même ordre de grandeur pour les 2 phases, montrant la robustesse des MR identifiés. Le second test correspond à des élévations de température maximales aux limites de validité de l'hypothèse de linéarité des transferts.

L'une des perspectives est d'utiliser les MR linéaires paramétriques pour l'estimation des propriétés thermo-physiques  $(\lambda, \kappa)$  à travers la résolution d'un problème inverse, soit par une méthode globale stochastique comme par exemple un algorithme PSO (Chapitre 2), soit par une méthode locale déterministe, de type gradient par exemple (les MR étant dérivables analytiquement par rapport aux paramètres explicites  $\lambda$  et  $\kappa$ ). Les temps de calcul des MR étant considérablement plus faibles que celui du modèle détaillé (facteur  $10^6$  avec un pas de temps 1000 fois plus grand pour les MR, soit un facteur 1000 à pas de temps équivalent), le processus d'estimation sera accéléré dans les deux cas.



# Conclusion générale et perspectives

## Conclusion générale

Le présent document rassemble une série d'études dédiées au développement de méthodes d'identification des propriétés thermo-physiques de matériaux semi-transparents. Le manuscrit de thèse est structuré autour de 4 chapitres. Le chapitre 1 concerne le développement de modèles permettant de simuler le comportement thermique instationnaire de matériaux semi transparents soumis à un flux de chaleur localisé en temps (1D) puis en temps ainsi qu'en espace (2D axisymétrique). Le chapitre 2 présente ensuite le développement d'un modèle d'identification qui couple la simulation direct 2D axisymétrique avec un algorithme d'optimisation par essaims particulaires (PSO). Le chapitre 3 présente le développement, l'entraînement et la validation d'un modèle réduit d'identification basé sur un réseau de neurones. Enfin, le chapitre 4 propose deux modèles réduits (une version linéaire et une version non linéaire) d'ordre faible basés sur la méthode d'identification modale (MIM).

Dans le chapitre 1, des modèles 1D puis 2D axisymétrique développés pour décrire le transfert de chaleur au sein d'un milieu semi-transparent homogène, isotrope, absorbant, émettant, non diffusant et gris, sont présentés et validés. Les conditions aux limites mixtes, i.e. prenant au compte un flux imposé localisé en espace et en temps ainsi qu'un refroidissement convectif et radiatif linéarisé, permettent de simuler une expérience de type Flash 3D. Le traitement des transferts radiatifs au sein du milieu est effectué via l'approximation P1 qui consiste à exprimer la luminance sur la base des polynômes de Legendre et de ne conserver que les 2 premiers termes. L'équation de transfert radiatif (ETR) peut ainsi se simplifier en une équation de transport pour la densité d'énergie radiative (de manière analogue à l'équation de la chaleur), qui ne dépend alors plus de la direction de propagation, simplifiant grandement la résolution du problème. L'équation qui régit le transport de cette densité d'énergie correspond dans ce cas à une équation de diffusion (au sens de diffusion de la chaleur mais en aucun cas de diffusion du rayonnement par une particule...). Dans le cas du modèle 1D, la discrétisation du problème conducto-radiatif est effectuée avec la méthode des différences finies puis par la méthode des volumes finis. Dans le cas de la configuration 2D axisymétrique, la discrétisation est effectuée par la méthode des volumes finis uniquement. L'évolution de la température au sein du milieu est comparée avec succès

avec des résultats issus de la littérature et des résultats obtenus par la méthode des quadripôles thermiques. Une fois validée, la méthode de résolution numérique est optimisée en introduisant un pas de temps variables de façon à réduire le temps de calcul.

Dans le chapitre 2, un modèle d'identification est développé en couplant la résolution numérique basée sur le modèle direct 2D axisymétrique conducto-radiatif instationnaire avec une méthode d'estimation basée sur un algorithme d'optimisation par essais particuliers (PSO). Tout d'abord, une méthode d'estimation du coefficient d'atténuation moyen est mise en œuvre sur 3 échantillons d'épaisseurs différentes constitués de PMMA. Deux modèles de comportement décrivant les réflexions internes au sein du milieu sont considérés pour déterminer la transmittivité spectrale. Quel que soit le modèle considéré, les calculs dépendent des distributions spectrales de la réflectivité et de la transmittivité des échantillons qui sont mesurées sous vide par un spectromètre à Transformée de Fourier. Le coefficient d'atténuation moyen est déterminé en utilisant le modèle de Planck et le modèle de Rosseland qui donnent sensiblement le même résultat. La valeur des coefficients d'atténuation moyen des 3 échantillons sont sensiblement égales, quelle que soit la définition du coefficient moyen (moyenne de Planck ou Rosseland) et de l'épaisseur de l'échantillon. Ensuite, le principe de fonctionnement de l'algorithme, ainsi que ses paramètres les plus importants, sont présentés. Une série de tests utilisant des données synthétiques bruitées (obtenues en ajoutant différents niveaux de bruits aux données simulées), est mise en œuvre pour montrer la faisabilité et la robustesse de la méthode. Finalement, le modèle d'identification est appliqué aux données expérimentales basées sur la méthode flash pour prouver sa capacité à résoudre des problèmes pratiques.

Dans le chapitre 3, un modèle réduit d'identification basé sur l'utilisation d'un réseau de neurones artificiels multicouches est construit à l'aide de données générées par le modèle direct 2D axisymétrique instationnaire présenté au chapitre 1. L'évolution temporelle de la température au point central de la face avant (face exposée à l'excitation) est choisie comme observable et constitue les données d'entrée du réseau de neurones. Les propriétés thermo-physiques à identifier simultanément, i.e. la conductivité thermique et le coefficient d'absorption effectif, correspondent aux valeurs de sortie de ce même réseau. Une étude numérique est menée dans le but d'optimiser les données d'entraînement. Cette étude a consisté à générer des bases de données en considérant 2 stratégies (identification de  $\lambda$  et  $\kappa$  connaissant l'énergie d'excitation  $q_0''$  et identification de  $\lambda$  et  $q_0''$  connaissant  $\kappa$ ) pour lesquelles plusieurs distributions des paramètres sont considérées. Les résultats montrent que, quelle que soit la stratégie, l'utilisation de distributions Gaussiennes est à privilégier, la valeur de l'espérance devant être choisie en fonction de la nature du matériau et la valeur de l'écart type suffisamment grande pour que les données d'entraînement soit le plus varié possible, permettant un entraînement optimum. Enfin, des données synthétiques avec différents niveaux de bruit sont utilisées

---

pour démontrer la faisabilité, la robustesse ainsi que les limitations de cette approche, notamment pour les matériaux dont le transfert de chaleur est dominé par le rayonnement. La méthode est appliquée à des mesures réalisées dans le cadre d'une expérience de type Flash sur un échantillon cylindrique de PMMA. Les résultats montrent que l'utilisation de réseaux de neurones est une stratégie pertinente pour l'identification des propriétés thermo-physiques de matériaux semi-transparents tels que le PMMA ou encore le verre à des températures proches de l'ambiante, en termes de précision et de temps de calcul.

Dans le chapitre 4, un modèle d'ordre faible basé sur la réduction du modèle physique et sur l'identification des coefficients à l'aide de données générées par le modèle direct 2D-axisymétrique, est présenté. Le modèle réduit est obtenu par la méthode d'identification modale (MIM, Girault et al. [2011]) développée par Manuel Girault au sein de l'équipe COST du département de recherche FTC de l'institut Pprime. La conductivité thermique  $\lambda$  et le coefficient d'absorption moyen  $\kappa$  ainsi que le flux de chaleur imposé  $q_0''(t)$  sont choisis comme les entrées du modèle réduit, la sortie correspondant à l'évolution de la température au point central de la face avant. Une première version du modèle réduit est développée et prend en compte les effets non linéaires du rayonnement. Malheureusement, il s'avère que les niveaux de température considérées ne permettent pas de générer suffisamment d'effets non linéaires permettant d'identifier correctement les coefficients associés aux termes non linéaires. Ce phénomène se traduisant notamment par une dérive des prédictions dudit modèle lorsque celui-ci est testé pour des excitations originales (i.e. différentes de celles qui ont servi à la construction du modèle réduit). Pour remédier à ce problème, un modèle réduit linéaire est développé et permet de reproduire fidèlement l'évolution de la température au point central, pour une grande variété de combinaison de conductivités thermiques et de coefficients d'absorption et ce pour des excitations pouvant être de nature (en termes de niveau d'énergie et de distribution temporelle) différente de celle qui a servi à la construction. Cette version du modèle réduit, dont le temps de calcul est de l'ordre de la milliseconde, peut ainsi être utilisé à des fins d'identification de propriétés. Deux stratégies peuvent ainsi être envisagées, un couplage du modèle avec un algorithme stochastique d'estimation (e.g. évolutionnaire comme PSO) ou bien de tirer partie du caractère dérivable de la formulation mathématique du modèle pour envisager une identification analytique.

## Perspectives

Les perspectives de cette étude peuvent être regroupées selon 3 axes, à savoir i) l'enrichissement du modèle direct pour décrire plus finement toute la richesse de l'expérience, ii) l'étude de nouvelles stratégies d'identification par réseaux de neurones et enfin iii) l'application du modèle réduit d'ordre faible pour l'identification.

i) L'extension du modèle direct pour améliorer la description de l'expérience Flash peut s'organiser selon 3 aspects :

- L'extension du modèle direct à la configuration 3D pour traiter les problèmes liés à l'éventuelle dissymétrie de l'excitation, l'erreur de visée dans le cas d'échantillon cylindrique. Cette extension permettant de traiter le cas d'échantillons non cylindriques
- La prise en compte du phénomène de diffusion, c'est-à-dire l'extension du modèle direct au cas d'un milieu semi-transparent absorbant, émettant et diffusant.
- La prise en compte de la distribution spectrale du coefficient d'absorption (ou coefficient d'atténuation).

ii) L'amélioration du modèle réduit d'identification basé sur un réseau de neurones concerne 2 aspects :

- Le choix de l'observable, c'est-à-dire la nature des données d'entrée du réseau de neurones. Par exemple, l'évolution de la température à la face arrière permettrait peut-être de mieux capturer les effets radiatifs en les décorrélant des effets conductifs. Également, considérer l'évolution de la température sur une partie du domaine (plutôt qu'en un point) permettrait d'enrichir les données et donc d'améliorer l'estimation. Il pourrait être intéressant d'intégrer ou de projeter le signal sur des bases orthogonales adaptées pour diminuer le volume de données à traiter tout en conservant la richesse de ce dernier.
- Le choix du type de réseau de neurones. Par exemple les réseaux de neurones récurrents sont particulièrement bien adaptés pour l'analyse de séries temporelles. Également, l'application de réseaux de neurones convolutifs peut être envisagée.

iii) Le modèle réduit basé sur le principe de la méthode d'identification modale peut être exploité de plusieurs façons :

- Le modèle réduit peut être couplé à l'algorithme d'optimisation PSO (ou tout autre algorithme de recherche stochastique) pour comparer les résultats d'identification à ceux précédemment trouvés.
- Le modèle réduit étant dérivable, au moins dans sa version linéaire, la recherche du minimum de la fonction coût est techniquement possible de manière analytique.
- L'application du modèle réduit non linéaire à des échantillons réels de PMMA placés dans un environnement à température élevée de façon à exacerber les effets non linéaires dus au rayonnement. Au niveau des conditions aux limites, la linéarisation du terme traduisant l'échange radiatif ne serait alors plus raisonnable.

# Bibliographie

- S. André and A. Degiovanni. A theoretical study of the transient coupled conduction and radiation heat transfer in glass : phonic diffusivity measurements by the flash technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38 :3401–3412, 1995. [4](#)
- S. André and S. Degiovanni. A new way of solving transient radiative-conductive heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer*, 120 :943–955, 1998. [24](#), [55](#), [59](#)
- M. J. Assael, K.D. Antoniadis, and J.T. Wu. New measurements of the thermal conductivity of pmma, bk7, and pyrex 7740 up to 450 k. *International Journal of Thermophysics*, 29 :1257–1266, 2008. [86](#), [113](#)
- H. Azami and M.R. Mosavi. Classification of gps satellites using improved backpropagation training algorithms. *Wireless Pers Commun*, 71 :789–803, 2013. [IX](#)
- B. Beachkofski and R. Grandhi. Improved distributed hypercube sampling. *43rd AIAA ASME ASCE AHS ASC Struct. Struct. Dyn. Mater. Conf. 2002*, page 1274, 2002. [134](#)
- S. Bélanger and L. Gosselin. Utilization of artificial neural networks in the context of materials selection for thermofluid design. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 55 :825–844, 2009. [7](#)
- P. Boulet, J. Gérardin, Z. Acem, G. Parent, A. Collin, Y. Pizzo, and B. Porterie. Optical and radiative properties of clear pmma samples exposed to a radiant heat flux. *International Journal of Thermal Sciences*, 82 :1–8, 2014. [69](#), [70](#), [77](#), [86](#), [112](#)
- Ramchandra P. Chopade, E. Agnihotri, A.K. Singh, A. Kumar, R. Uppaluri, Subhash C. Mishra, and P. Mahanta. Application of a particle swarm algorithm for parameter retrieval in a transient conduction-radiation problem. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 59 :672–692, 2011. [5](#), [115](#)
- Ramchandra P. Chopade, V. Mohan, R. Mayank, Ramgopal V.S. Uppaluri, and Subhash C. Mishra. Simultaneous retrieval of parameters in a transient conduction-radiation problem using a differential evolution algorithm. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 63 :373–395, 2013. [6](#), [115](#)

- S. Collin-Zahn. *Notions sur les processus de rayonnement et les diagnostics spectroscopiques en astrophysique*. LUTH, Observatoire de Paris, Section de Meudon, 2010. 8, 76
- N. Daouas, A. Fguiri, and Radhouani M.S. Solution of a coupled inverse heat conduction-radiation problem for the study of radiation effects on the transient hot wire measurements. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 32 :1766–1778, 2008. 5
- R. Das, S.C. Mishra, and R. Uppaluri. Multiparameter estimation in a transient conduction-radiation problem using the lattice boltzmann method and the finite volume method coupled with the genetic algorithms. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 53 :1321–1338, 2008. 6
- B.N. Datta. *Numerical Linear Algebra and Applications*. SIAM, 2010. 5, 13, 21, 45
- J. Davies and B. Martin. Numerical inversion of the laplace transform : A survey and comparison of methods. *Journal of Computational Physics*, 33 :1–32, 1979. 23
- F.R. De Hoog, J.H. Knight, and A.N. Stokes. An improved method for numerical inversion of laplace transforms. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3 :357–366, 1982. 24
- H. Deng, S. Guessasma, G. Montavon, H. Liao, C. Coddet, D. Benkrid, and S. Abouddi. Combination of inverse and neural network methods to estimate heat flux. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 47 :593–607, 2005. 7
- S. Deng and Y. Hwang. Applying neural networks to the solution of forward and inverse heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49 :4732–4750, 2006. 7
- M. Divband. A comparison of particle swarm optimization and gradient descent in training wavelet neural network to predict dgps corrections. *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*, 2010. 5
- R.C. Eberhart. Particle swarm optimization. *Proceedings of IEEE International Conference*, pages 1942–1948, 1995. 5, 77, 84, 90
- R.C. Eberhart and Y.H. Shi. Tracking and optimization dynamic systems with particle swarm. *Proceedings of 2001 Congress on Evolutionary Computation*, pages 94–100, 2001. 82, 84
- W. Ford. *Numerical Linear Algebra with Applications Using MATLAB*. Elsevier, 2015. 13, 21, 45

- 
- B. Ghannam. Modélisation ultra-rapide des transferts de chaleur par rayonnement et par conduction et exemple d'application. *Ph.D. Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2012. 4
- M. Girault, D. Petit, and E. Videcoq. Identification of low-order models and their use for solving inverse boundary problems. *Thermal Measurements and Inverse Techniques, éditeur H.R.B Orlande et al.*, pages 457–506, 2011. 8, 88, 118, 145
- S. Grieu, O. Faugeroux, A. Traore, B. Claudet, and J.L. Bodnar. Utilisation de l'intelligence artificielle pour la caractérisation de matériaux. *Congrès National de Thermographie THERMOGRAM*, 2011. 7
- S.E. Gustafsson. Transient plane source techniques for thermal conductivity and thermal diffusivity measurements of solid materials. *Review of Scientific Instruments*, 62 :797–804, 1991. 3
- U. Hammerschmidt. A new pulse hot strip sensor for measuring thermal conductivity and thermal diffusivity of solids. *International Journal of Thermophysics*, 24 :675–682, 2003. 3
- R.L. Haupt and S.E. Haupt. *Practical genetic algorithms*. John Wiley and Sons, Inc. Publication, 2004. 115
- U. Heinemann, R. Caps, and J. Fricke. Radiation-conduction interaction : an investigation on silica aerogels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39 : 2115–2130, 1996. 4
- G.E. Hinton and R.R. Salakhutdinov. Reducing the dimensionality of data with neural networks. *Science*, 313 :504–507, 2006. 94
- J.G. Hu, G.M. Zhou, and X.J. Xu. Using an improved backpropagation neural network to study spatial distribution of sunshine illumination from sensor network data. *Ecological Modelling*, 266 :86–96, 2013. IX
- J.X. Hu and J.C. Zeng. A adjustment strategies of the inertia weight of the particle swarm optimization. *Computer engineer*, 2007. 81
- Y. Jannot. *Théorie et pratique de la métrologie thermique*. LEMTA, 2011. 3
- X.X. Jia. Numerical method for three-dimensional heat conduction in cylindrical and spherical coordinates. *Proceedings of the 2016 International Conference on Computer Engineering, Information Science and Application Technology (ICCIA)*, 2016. 41
- L. Latha and S. Thangasamy. Efficient approach to normalization of multimodal biometric scores. *International Journal of Computer Applications*, 32 :57–64, 2011. 103

- S. Le Foll, F. André, A. Delmas, J.M. Bouilly, and Y. Aspa. Identification of temperature and radiative properties in semi-transparent media using high temperature spectral directional emission, application to carbon felt. *7th International Symposium on Radiative Transfer, RAD-13, poster*, 2013. 4
- Y. LeCun, B. Boser, J.S. Denker, D. Henderson, R.E. Howard, W. Hubbard, and L.D. Jackel. Backpropagation applied to handwritten zip code recognition. *Neural Computation*, 1 :541–551, 1989. 93
- D. Lemonnier. *Modèle de couplage conduction-rayonnement en milieu solide semi-transparent*. 2015. 38
- D. Lemonnier. *Méthodes P1, des ordonnées discrètes et de Monte-Carlo appliquées au transfert radiatif. ISAE-ENSMA Master TAT*. 2015-2016. 2, 14
- C.H. Li and S.C. Park. An efficient document classification model using an improved-back propagation neural network and singular value decomposition. *Expert Systems with Applications*, 36 :3208–3215, 2009. IX
- H.Y. Li. Estimation of thermal properties in combined conduction and radiation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42 :565–572, 1999. 5
- L.H. Li. Transient radiation and conduction in a two-dimensional participating cylinder subjected to a pulse irradiation. *Journal of Heat Transfer*, 40 :877–889, 2001. 44
- P.F. Li, J. Wang, and J.F. Jing. Application of improved backpropagation algorithm in color difference detection of fabric. *COLOR research and application*, 40 :311–317, 2015. X
- R.X. Li. *Finite Volume Method Basis*. Presses National Defense Industry, 2005. 5, 40, 43, 45, 46
- L.H. Liu and H.P. Tan. Inverse radiation problem of sources and emissivities in one-dimensional semitransparent media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44 :63–72, 2001. 4
- Y. Liu, Y. Billaud, D. Saury, and D. Lemonnier. Résolution de problèmes conducto-radiatifs instationnaires en 2d axisymétrique pour l'identification de propriétés thermophysiques de matériaux semi-transparents. *26ème Congrès Français de Thermique et Sciences de l'Information, 29 Mai-1 Juin, Pau, France, (2018)*, 2018. 56, 57
- D. Maillet, S. André, J.C. Batsale, A. Degiovanni, and C. Moyne. *Thermal Quadrupoles : Solving the Heat Equation through Integral Transforms*. Wiley-Blackwell, 2000. 4, 24, 163

- 
- V. Maneesh and M.K. Pradeep. An inverse method to estimate the principal thermal conductivities of composite material. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 5 :810–813, 2014. 7
- W.S. McCulloch and W. Pitts. A logical calculus of ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5 :115–133, 1943. 91
- J. Menashe and W.A. Wakeham. Effect of absorption of radiation on thermal conductivity measurements by the transient hot-wire technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 25 :661–673, 1982. 98
- N. Milosoevic. Mesure de la diffusivité thermique et de la résistance de contact thermique des couches minces sur des substrats par la méthode impulsionnelle. *Ph.D. Thèse, Institut National des Sciences Appliquée de Lyon*, page 28, 2008. 3, 64
- M. Minsky and S. Papert. *Perceptrons*. MIT Press, 1969. 91
- M.F. Modest. *Radiative Heat Transfer (Third Edition)*. Academic Press, 2013. 4, 30, 37
- C. Mota, H. Orlande, M. De Carvalho, V. Kolehmainen, and J. Kaipio. Bayesian estimation of temperature-dependent thermophysical properties and transient boundary heat flux. *Heat Transfer Engineering*, 31 :570–580, 2010. 100
- Y. Nagazaka and A. Nagashima. Simultaneous measurement of the thermal conductivity and the thermal diffusivity of liquids by the transient hot-wire method. *Review of Scientific Instruments*, 52 :229–232, 1981. 3
- S. Nandy, P.P. Sarkar, and A. Das. An improved gauss-newtons method based back-propagation algorithm for fast convergence. *International Journal of Computer Applications*, 39 :1–7, 2012. IX
- M. Nielsen. *Neural Networks and Deep Learning*. Determination Press, 2015. 102, V
- H.M. Park and D.H. Cho. Low dimensional modeling of flow reactors. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39 :3311–3323, 1996. 8
- H.M. Park and T.Y. Yoon. Solution of the inverse radiation problem using a conjugate-gradient method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43 :1767–1776, 2000. 5
- H.M. Park, T.H. Kim, and J.H. Lee. Dynamic simulation of thermal radiation in participating media by means of mode reduction. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 62 :141–166, 1999. 8
- W.J. Parker, R.J. Jenkins, C.P. Butler, and G.L. Abbott. Method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity. *Journal of Applied Physics*, 32 :1679–1684, 1961. 3, 64

- P. Ponce. New applications of artificial intelligence. *IntechOpen Press*, pages 124–143, 2016. 7
- H. Qi, C.Y. Niu, S. Gong, Y.T. Ren, and L.M. Ruan. Application of the hybrid particle swarm optimization algorithms for simultaneous estimation of multi-parameters in a transient conduction-radiation problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 83 :428–440, 2015. 6
- Z.C. Qiu, R.L. Zhang, W.M. Zhang, and L.X. Li. Quantitative identification of microcracks through magnetic flux leakage testing based on improved back-propagation neural network. *Insight : Non-Destructive Testing and Condition Monitoring*, 61 : 90–94, 2019. IX
- Z.X. Qu, W.Q. Mao, K.Q. Zhang, W.Y. Zhang, and Z.P. Li. Multi-step wind speed forecasting based on a hybrid decomposition technique and an improved back-propagation neural network. *Renewable Energy*, 133 :919–929, 2019. X
- S. Rahnamayan, H.R. Tizhoosh, and M.M.A. Salama. Opposition-based differential evolution. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 12 :64–79, 2008. 6
- F. Rosenblatt. The perceptron : a probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*, 65 :386–408, 1958. 91
- E. Ruffio. Estimation of parameters and boundary conditions in unsteady conduction for anisotropic materials. *Ph.D. thèse, ISAE-ENSMA*, 2004. 3, 84, 90
- E. Ruffio, D. Saury, D. Petit, and M. Girault. Tutorial 2 : Zero-order optimization algorithms. *Eurotherm Seminar numéro 94 Thermal Measurements and Inverse Techniques, Advanced Spring School, METTI 5, Roscoff, France, June 13-18, (2011)*, 2011. 82
- D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, and R.J. Williams. Learning representations by back-propagating errors. *Nature*, 323 :533–536, 1986. 92, I
- J. Schick, B. Remy, A. Degiovanni, F. Demeurie, J. Meulemans, and P. Lombard. Measurement of thermal conductivity of liquids at high temperature. *Journal of Physics : Conference Series 395*, 2012. 98
- R. Scott Larson and Matthew R. Jones. Reduced-order modeling of time-dependent reflectance profiles from purely scattering media. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 109 :201–209, 2008. 8
- Y.H. Shi and R.C. Eberhart. A modified particle swarm optimizer, proc ieee int conf on evolutionary computation. *Proceedings of IEEE International Conference Evolutionary Computation*, pages 69–73, 1998. 81

- 
- H. Stehfest. Numerical inversion of laplace transforms. *Commun. ACM*, 13 :47–49, 1970. 23
- H.P. Tan and M. Lallemand. Transient radiative-conductive heat transfer in flat glasses submitted to temperature, flux and mixed boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 32 :795–810, 1989. 4
- H.P. Tan, B. Maestre, and M. Lallemand. Transient and steady-state combined heat transfer in semi-transparent materials subjected to a pulse or a step irradiation. *Journal of Heat Transfer*, 113 :166–173, 1992. 55
- H.P. Tan, L.H. Liu, and H.L. Yi. Recent progress in computational thermal radiative transfer. *Chinese Sci Bull*, 54 :2627–2637, 2009. 4
- Udayraj, K. Mulani, P. Talukdar, A. Das, and R. Alagirusamy. Performance analysis and feasibility study of ant colony optimization, particle swarm optimization and cuckoo search algorithms for inverse heat transfer problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 89 :359–378, 2015. 6
- P.Y. Wang, H.P. Tan, L.H. Liu, and J.F. Luo. Heat transfer in translucent thermal barrier coatings of turbine engine. *Journal of Aerospace Power*, 15 :268–273, 2000. 2, 90
- P.Y. Wang, H.E. Cheng, and H.P. Tan. Transient thermal analysis for semi-transparent composite thermal barrier coatings. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 36 :180–184, 2002. 2, 90
- L.Y. Wei, H. Qi, Y.T. Ren, J.P. Sun, S. Wen, and L.M. Ruan. Application of hybrid spso-sqp algorithm for simultaneous estimation of space-dependent absorption coefficient and scattering coefficient fields in participating media. *International Journal of Thermal Sciences*, 124 :424–432, 2018. 6
- P.J. Werbos. Beyond regression : New tools for prediction and analysis in the behavioral sciences. *Ph.D. Thèse, Harvard University*, 1974. 92
- S.M. Yang and W.Q. Tao. *Heat Transfer (Fourth Edition)*. Higher Education Press, 2006. 2
- F. Yilmaz, A. Ozdemir, A.S. Sahin, and R. Selbas. Prediction of thermodynamic and thermophysical properties of carbon dioxide. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 28 :491–498, 2014. 7
- B. Zhang, H. Qi, S.C. Sun, L.M. Ruan, and H.P. Tan. Solving inverse problems of radiative heat transfer and phase change in semi-transparent medium by using improved quantum particle swarm optimization. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 85 :300–310, 2015. 5

- C.W. Zhang, S.R. Chen, H.B. Gao, K.J. Xu, and M.Y. Yang. State of charge estimation of power battery using improved back propagation neural network. *Batteries*, 4 :1–12, 2018. [X](#)
- X. Zhang and A. Degiovanni. Mesure de l'effusivité thermique de matériaux solides et homogènes par une méthode de sonde plane. *Journal de Physics III*, 6 :1243–1265, 1993. [3](#)

# Liste des figures

1	<i>Mécanisme de transfert de chaleur au sein de matériaux semi-transparent et ses applications dans les secteurs de l'industrie et des transports . . .</i>	2
1.1	<i>Évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu purement diffusant avec une densité de chaleur impulsionnelle de type Dirac imposée à la face avant du milieu (pour différentes épaisseurs <math>e</math> et épaisseurs optiques <math>\tau</math>) . . . . .</i>	26
1.2	<i>Évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu purement diffusant avec une densité de chaleur impulsionnelle de type Dirac imposée à la face avant du milieu (pour différentes valeurs de coefficient de diffusion <math>\kappa_d</math> et épaisseurs optiques <math>\tau</math>) . . . . .</i>	26
1.3	<i>Évolution de la température adimensionnée à la face avant d'un milieu absorbant, émettant, non diffusant avec une densité de chaleur de type Créneau (durée=1s) imposée à la face avant du milieu . . . . .</i>	28
1.4	<i>Évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu absorbant, émettant, non diffusant avec une densité de chaleur de type Dirac imposée à la face avant du milieu . . . . .</i>	28
1.5	<i>Évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu absorbant, émettant, diffusant et gris avec une densité de chaleur impulsionnelle de type Dirac imposée à la face avant du milieu en négligeant la convection (pour différentes valeurs de température initiale <math>T_{ini}</math> et différentes valeurs du nombre de Planck <math>N_{cr}</math>) . . . . .</i>	29
1.6	<i>Évolution de la température adimensionnée à la face arrière d'un milieu absorbant, émettant, diffusant et gris avec une densité de chaleur impulsionnelle de type Dirac imposée à la face avant du milieu en négligeant la convection (pour différentes valeurs de coefficient de diffusion <math>\kappa_d</math> et différentes valeurs du nombre de Planck <math>N_{cr}</math>) . . . . .</i>	30
1.7	<i>Evolution de la température adimensionnée au centre du domaine (<math>x = e/2</math>) en fonction du temps . . . . .</i>	31
1.8	<i>Distribution spatiale de la température adimensionnée dans le domaine à <math>t = 0.6s</math> calculée par la MVF et la MDF. Comparaison et calcul de l'écart par rapport au résultat de référence (<math>N_{cr} = 10, \tau = 1</math>) . . . . .</i>	32

1.9	<i>Distribution spatiale de la température adimensionnée dans le domaine à <math>t = 0.6s</math> calculée par la MVF et la MDF. Comparaison et calcul de l'écart par rapport au résultat de référence (<math>N_{cr} = 1, \tau = 1</math>) . . . . .</i>	33
1.10	<i>Distribution spatiale de la température adimensionnée dans le domaine à <math>t = 0.6s</math> calculée par la MVF et la MDF. Comparaison et calcul de l'écart par rapport au résultat de référence (<math>N_{cr} = 0.1, \tau = 1</math>) . . . . .</i>	34
1.11	<i>Distribution spatiale de la température adimensionnée dans le domaine à <math>t = 0.6s</math> calculée par la MVF et la MDF. Comparaison et calcul de l'écart par rapport au résultat de référence (<math>N_{cr} = 0.01, \tau = 1</math>) . . . . .</i>	35
1.12	<i>Distribution spatiale de la température adimensionnée dans le domaine à <math>t = 0.6s</math> calculée par la MVF et la MDF pour différentes valeurs du nombre de Planck <math>N_{cr}</math> . . . . .</i>	36
1.13	<i>Représentation de la configuration 2D axisymétrique étudiée et des conditions aux limites . . . . .</i>	37
1.14	<i>Représentation du maillage, des volumes de contrôle et des indices utilisés dans le domaine de calcul . . . . .</i>	39
1.15	<i>Distribution des nœuds et des volumes de contrôle dans le plan horizontal <math>r - \theta</math> . . . . .</i>	40
1.16	<i>Distribution des nœuds et des volumes de contrôle dans le plan vertical <math>r - z</math> . . . . .</i>	40
1.17	<i>Illustration d'un volume de contrôle, du repère et des notations utilisées</i>	42
1.18	<i>Evolution temporelle de l'augmentation de température en face avant dans le cas où <math>N_z = 51, N_r = 251, N_t = 1.25 \cdot 10^6, n = 1.5, \lambda = 1.5 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}, \rho C_p = 2.2 \cdot 10^6 J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}, \kappa = 512 m^{-1}, T_{ini} = 1000 K, q_0'' = 5 \cdot 10^4 J \cdot m^{-2}, R = 0.05 m, H = 0.01 m, t_s = 5 s, t_p = 1 s, Bi_r = 0, Bi_z = 1.51</math> . . . . .</i>	56
1.19	<i>Evolution temporelle des résidus de température en face avant dans le cas où <math>N_z = 51, N_r = 251, N_t = 1.25 \cdot 10^6, n = 1.5, \lambda = 1.5 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}, \rho C_p = 2.2 \cdot 10^6 J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}, \kappa = 512 m^{-1}, T_{ini} = 1000 K, q_0'' = 5 \cdot 10^4 J \cdot m^{-2}, R = 0.05 m, H = 0.01 m, t_s = 5 s, t_p = 1 s, Bi_r = 0, Bi_z = 1.51</math> . . . . .</i>	56
1.20	<i>Evolution temporelle de l'augmentation de température en face arrière dans le cas où <math>N_z = 51, N_r = 201, N_t = 8 \cdot 10^7, n = 1.0, \lambda = 1.0 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}, \rho C_p = 2.15 \cdot 10^6 J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}, \kappa = 10, 10^2, 10^3, 10^4 m^{-1}, T_{ini} = 800 K, q_0'' = 8600 J \cdot m^{-2}, R = 0.1 m, H = 0.01 m, t_s = 100 s, t_p = 0.001 s, Bi_r = Bi_z = 0</math> . . . . .</i>	57
1.21	<i>Evolution temporelle des résidus de température en face arrière dans le cas où <math>N_z = 51, N_r = 201, N_t = 8 \cdot 10^7, n = 1.0, \lambda = 1.0 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}, \rho C_p = 2.15 \cdot 10^6 J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}, \kappa = 10, 10^2, 10^3, 10^4 m^{-1}, T_{ini} = 800 K, q_0'' = 8600 J \cdot m^{-2}, R = 0.1 m, H = 0.01 m, t_s = 100 s, t_p = 0.001 s, Bi_r = Bi_z = 0</math> . . . . .</i>	58

1.22	<i>Evolution temporelle de l'augmentation de température en face arrière des essais 1 à 6 dans le cas où <math>N_z = 51</math>, <math>N_r = 201</math>, <math>n = 1.0</math>, <math>\lambda = 1.0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}</math>, <math>\rho C_p = 2.15\cdot 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}</math>, <math>\kappa = 10 \text{ m}^{-1}</math>, <math>T_{ini} = 800 \text{ K}</math>, <math>q_0'' = 8600 \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}</math>, <math>R = 0.1 \text{ m}</math>, <math>H = 0.01 \text{ m}</math>, <math>t_s = 80 \text{ s}</math>, <math>t_p = 0.001 \text{ s}</math>, <math>Bi_r = Bi_z = 0</math></i>	60
1.23	<i>Evolution temporelle des résidus de température en face arrière des essais 1 à 6 dans le cas où <math>N_z = 51</math>, <math>N_r = 201</math>, <math>n = 1.0</math>, <math>\lambda = 1.0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}</math>, <math>\rho C_p = 2.15\cdot 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}</math>, <math>\kappa = 10 \text{ m}^{-1}</math>, <math>T_{ini} = 800 \text{ K}</math>, <math>q_0'' = 8600 \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}</math>, <math>R = 0.1 \text{ m}</math>, <math>H = 0.01 \text{ m}</math>, <math>t_s = 80 \text{ s}</math>, <math>t_p = 0.001 \text{ s}</math>, <math>Bi_r = Bi_z = 0</math></i>	60
2.1	<i>Idée principale de l'identification par l'algorithme PSO</i>	64
2.2	<i>Photographie du banc d'essai</i>	65
2.3	<i>Schéma de l'expérience basé sur le principe de la méthode flash</i>	66
2.4	<i>Spectromètre à Transformée de Fourier "BRUKER VERTEX V70v"</i>	66
2.5	<i>Principe de fonctionnement du spectromètre à Transformée de Fourier "BRUKER VERTEX V70v" de la marque Bruker</i>	67
2.6	<i>Épaisseur des échantillons cylindriques de PMMA étudiés</i>	67
2.7	<i>Approximation à l'ordre 1 du principe de mesure de la réflectivité spectrale (a)-(b) et de la transmittivité spectrale (c)-(d). (a) Mesure du signal de référence correspondant à une réflexion avec un échantillon de référence de grande réflectivité (ici de l'aluminium). (b) Mesure du signal réfléchi par l'échantillon de test. (c) Mesure du signal de référence correspondant à un essai sans échantillon. (d) Mesure du signal atténué par l'échantillon de test</i>	68
2.8	<i>Bilan d'énergie radiative sur un échantillon d'épaisseur <math>H</math> soumis au rayonnement émis par la source IR du spectromètre <math>L_\eta^s(T_s)</math>. La part du rayonnement incident qui est réfléchi et transmis se déduit respectivement à partir de la réflectivité et de la transmittivité spectrales du matériau, <math>\rho_\eta</math> et <math>\tau_\eta</math></i>	69
2.9	<i>Approximation à l'ordre 2 décrivant les réflexions et les transmissions qui ont lieu au sein d'un échantillon soumis à une source IR. Le rayonnement sortant par la face supérieure de l'échantillon (<math>x = 0</math>) est mesuré lors de l'expérience en réflectivité. Le rayonnement sortant par la face inférieure de l'échantillon (<math>x = H</math>) est mesuré lors de l'expérience en transmittivité</i>	70
2.10	<i>Réflectivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interposant l'échantillon n°1 entre la source et le capteur par le signal de référence</i>	71
2.11	<i>Réflectivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interposant l'échantillon n°2 entre la source et le capteur par le signal de référence</i>	71

2.12	<i>Réflexivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interposant l'échantillon n°3 entre la source et le capteur par le signal de référence</i> . . . . .	72
2.13	<i>Transmittivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interposant l'échantillon n°1 entre la source et le capteur par le signal de référence</i> . . . . .	72
2.14	<i>Transmittivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interposant l'échantillon n°2 entre la source et le capteur par le signal de référence</i> . . . . .	73
2.15	<i>Transmittivité spectrale obtenue en divisant le signal reçu par le capteur en interposant l'échantillon n°3 entre la source et le capteur par le signal de référence</i> . . . . .	73
2.16	<i>Distributions de coefficient d'atténuation des 3 échantillons en fonction du nombre d'onde (approximation au premier ordre : <math>\kappa_{\eta 1}</math>)</i> . . . . .	75
2.17	<i>Distributions de coefficient d'atténuation des 3 échantillons en fonction du nombre d'onde (approximation au second ordre : <math>\kappa_{\eta 2}</math>)</i> . . . . .	75
2.18	<i>Ecart des distributions de coefficient d'atténuation des 3 échantillons sous 2 approximations en fonction du nombre d'onde (<math>\kappa_{\eta 1}</math> : approximation au premier ordre, <math>\kappa_{\eta 2}</math> : approximation au second ordre)</i> . . . . .	75
2.19	<i>Procédure principale de l'algorithme PSO</i> . . . . .	78
2.20	<i>Évolution de la position des particules dans l'espace bidimensionnel. La fonction objectif correspond ici à l'erreur quadratique</i> . . . . .	80
2.21	<i>Évolution de la position des particules dans l'espace bidimensionnel avec des différents facteurs de connaissance. La fonction objectif correspond ici à la fonction quadratique</i> . . . . .	81
2.22	<i>Fonction de Rastrigin (1D et 2D)</i> . . . . .	82
2.23	<i>Évolution de la position des particules dans l'espace des solutions. La fonction objectif correspond ici à la fonction Rastrigin-1D</i> . . . . .	83
2.24	<i>Évolution de la position des particules dans l'espace des solutions. La fonction objectif correspond ici à la fonction Rastrigin-2D</i> . . . . .	84
2.25	<i>Echantillon de PMMA utilisé dans l'application du modèle d'identification basé sur l'algorithme PSO (premier à gauche)</i> . . . . .	86
2.26	<i>Évolution des paramètres identifiés <math>\hat{\beta} = (\hat{\lambda}, \hat{\kappa})</math> au fur et à mesure des itérations</i> . . . . .	87
2.27	<i>Évolution et de la fonction objectif <math>J(\beta)</math> au fur et à mesure des itérations</i> . . . . .	87
2.28	<i>Évolution de la température réelle et simulée au point central de la face avant obtenues à partir des mesures expérimentales et des signaux reconstruits à partir du modèle et des paramètres <math>(\lambda, \kappa)</math> estimés.</i> . . . . .	87
3.1	<i>Comparaison entre le principe des méthodes d'identification classiques et le principe de la méthode d'identification basée sur un réseau de neurones</i> . . . . .	90

3.2	<i>Illustration du principe d'identification de paramètres par réseau de neurones entraîné par la méthode de rétropropagation du gradient . . .</i>	91
3.3	<i>Idee principale du perceptron . . . . .</i>	91
3.4	<i>Idee principale de l'algorithme de rétropropagation du gradient . . . . .</i>	93
3.5	<i>Idee principale du réseau de neurones de type convolutif . . . . .</i>	94
3.6	<i>Évolution de la sensibilité réduite (obtenue grâce au modèle 2D axisymétrique) de la température centrale de la face avant à la conductivité thermique <math>\lambda</math> et à la densité de chaleur imposée <math>q_0''</math> (axe gauche) et évolution du rapport des sensibilités réduites (axe droit) dans le cas de la stratégie <math>(\lambda, q_0'')</math> pour différentes valeurs de <math>N_{cr}</math> . . . . .</i>	96
3.7	<i>Évolution de la sensibilité réduite de la température centrale de la face avant à la conductivité thermique <math>\lambda</math> et au coefficient d'absorption <math>\kappa</math> (axe gauche) et évolution du rapport des sensibilités réduites (axe droit) en cas de stratégie <math>(\lambda, \kappa)</math> pour différentes valeurs de <math>N_{cr}</math> . . . . .</i>	97
3.8	<i>Étapes principales de construction du modèle réduit d'identification basé sur un réseau de neurones . . . . .</i>	98
3.9	<i>Sur-apprentissage causé par un manque de diversité de données d'entraînement . . . . .</i>	99
3.10	<i>Histogramme des paramètres <math>(\lambda, q_0'')</math> et <math>(\lambda, \kappa)</math> générés par 3 types de distribution aléatoire pour les matériaux semi-transparents de type PMMA et Verre dans le contexte de 2 stratégies . . . . .</i>	100
3.11	<i>Structure du réseau de neurones utilisé . . . . .</i>	101
3.12	<i>Evolution de l'erreur totale dans le cas de la stratégie <math>(\lambda, q_0'')</math> avec (a) une distribution aléatoire uniforme et (b) une distribution aléatoire Gaussienne-PMMA, et dans le cas de la stratégie <math>(\lambda, \kappa)</math> avec (c) une distribution aléatoire uniforme et (d) une distribution aléatoire Gaussienne-PMMA . . . . .</i>	102
3.13	<i>Technique de normalisation des données . . . . .</i>	103
3.14	<i>Résultats des tests de performance dans le contexte de la stratégie <math>(\lambda, q_0'')</math> avec le modèle réduit d'identification entraîné par 3 distributions aléatoires différentes (uniforme, Gaussienne-PMMA et Gaussienne-Verre). Comparaison entre les valeurs prédites et les valeurs réelles de <math>\lambda</math> (à gauche) et de <math>q_0''</math> (à droite). Les points sont colorés en fonction des valeurs du nombre de Planck <math>N_{cr}</math> dans la gamme <math>[0, 1000]</math> . . . . .</i>	104
3.15	<i>Résultats des tests de performance dans le contexte de la stratégie <math>(\lambda, \kappa)</math> avec le modèle réduit d'identification entraîné par 3 distributions aléatoires différentes (uniforme, Gaussienne-PMMA et Gaussienne-Verre). Comparaison entre les valeurs prédites et les valeurs réelles de <math>\lambda</math> (à gauche) et de <math>\kappa</math> (à droite). Les points sont colorés en fonction des valeurs du nombre de Planck <math>N_{cr}</math> dans la gamme <math>[0, 1000]</math> . . . . .</i>	106

3.16	<i>Test de robustesse concernant la stratégie d'estimation <math>(\lambda, q_0'')</math> avec 5 ANN entraînés selon 3 distributions différentes et pour 3 régimes de transfert de chaleur : dominé par la conduction (C), équivalent conduction / rayonnement (E) et dominé par le rayonnement (R) . . . . .</i>	107
3.17	<i>Test de robustesse concernant la stratégie d'estimation <math>(\lambda, \kappa)</math> avec 5 ANN entraînés selon 3 distributions différentes et pour 3 régimes de transfert de chaleur : dominé par la conduction (C), équivalent conduction / rayonnement (E) et dominé par le rayonnement (R) . . . . .</i>	109
3.18	<i>Distributions des données synthétiques identifiées <math>(\lambda, q_0'')</math> et <math>(\lambda, \kappa)</math> avec les données synthétiques bruitées (intensité <math>I=0.5 K</math>) dans un régime dominé par la conduction, <math>N_{cr}=5.924</math> . . . . .</i>	110
3.19	<i>Schéma de principe du banc d'essai amélioré . . . . .</i>	111
3.20	<i>Évolution de la température réelle et simulée au point central. Evolution du résidu entre les mesures expérimentales et les signaux reconstruit à partir du modèle et des paramètres estimés à l'aide des stratégies <math>(\lambda, q_0'')</math> en haut et <math>(\lambda, \kappa)</math> en bas . . . . .</i>	114
4.1	<i>Identification des paramètres fixes du modèle réduit selon une procédure d'optimisation itérative, pour un ordre <math>m</math> donné . . . . .</i>	119
4.2	<i>Génération des données de construction et de test des modèles réduits obtenus par la méthode d'identification modale . . . . .</i>	121
4.3	<i>Construction du MR non-linéaire avec échantillonnage à <math>\Delta t_1 = 2 \times 10^{-2} s</math></i>	123
4.4	<i>Construction du MR non-linéaire avec échantillonnage à <math>\Delta t_2 = 10^{-3} s</math> .</i>	124
4.5	<i>Test du MR non-linéaire avec échantillonnage à <math>\Delta t_1 = 2 \times 10^{-2} s</math> . . . . .</i>	125
4.6	<i>Test du MR non-linéaire avec échantillonnage à <math>\Delta t_2 = 10^{-3} s</math> . . . . .</i>	126
4.7	<i>Distribution spatiale des 100 couples <math>(\lambda, \kappa)</math> pour l'identification et 50 couples <math>(\lambda, \kappa)</math> pour la validation . . . . .</i>	135
4.8	<i>Construction des MR linéaires paramétriques avec échantillonnage à <math>2.5 \times 10^{-2} s</math> . . . . .</i>	136
4.9	<i>Test des MR linéaires paramétriques avec échantillonnage à <math>2.5 \times 10^{-2} s</math> et <math>\delta\varphi</math> test 1 (même flux que pour l'identification) . . . . .</i>	137
4.10	<i>Test des MR linéaires paramétriques avec échantillonnage à <math>2.5 \times 10^{-2} s</math> et <math>\delta\varphi</math> test 2 (différent du flux utilisé pour l'identification) . . . . .</i>	138
4.11	<i>Evolution de l'écart quadratique moyen <math>\sigma_Y(m)</math> entre le modèle détaillé (MD) et le modèle réduit (MR) pour la phase de construction et la phase de validation . . . . .</i>	139
A.1	<i>Structure du réseau de neurones de type rétropropagation du gradient utilisé comportant 8 couches (1 couche d'entrée, 1 couche de sortie et 6 couches cachées). Le nombre de neuronne de chaque couche est indiqué entre parenthèse (par exemple, la couche d'entrée et la première couche cachée comportent chacune 100 neurones) . . . . .</i>	II

A.2 *Schéma illustrant les paramètres du réseau de neurones artificiels* . . . IV



# Liste des tableaux

1.1	Paramètres importants intervenant dans le modèle direct 1D . . . . .	14
1.2	Valeurs des paramètres $V_i$ , $i \in [1, N]$ pour $N = 10$ et $N = 20$ (d'après Maillet et al. [2000]) . . . . .	24
1.3	Paramètres importants intervenant dans le modèle 1 . . . . .	25
1.4	Paramètres importants intervenant dans le modèle 2 . . . . .	27
1.5	Paramètres importants intervenant dans le modèle 3 . . . . .	29
1.6	Paramètres importants intervenant dans la validation du modèle direct 1D . . . . .	31
1.7	Expressions de différentes surfaces d'un volume de contrôle selon leurs directions . . . . .	43
1.8	Comparaison des temps de calcul $t_{cpu}$ entre le maillage temporel à pas de temps constant et le maillage temporel à pas de temps variable . . . . .	59
2.1	Echantillon cylindrique de PMMA (a) n°1, (b) n°2 et (c) n°3 . . . . .	67
2.2	Valeurs du coefficient d'atténuation moyen $\kappa$ des échantillons de PMMA . . . . .	76
2.3	Valeurs estimées de la conductivité thermique et du coefficient d'absorption pour différents niveaux d'intensité de bruit ajoutée au signal simulé . . . . .	85
3.1	Valeurs des paramètres associés à chaque stratégie, pour les trois modes de transfert de chaleur étudiés, dans le cadre de l'étude de sensibilité réduite . . . . .	95
3.2	Valeurs de l'espérance et de l'écart type des distributions aléatoires Gaussiennes pour les matériaux semi-transparentes de type PMMA et Verre dans le contexte de 2 stratégies . . . . .	100
3.3	Espérance $\mu$ , la zone de valeurs la plus fréquente $\gamma$ et écart-type $\sigma$ des paramètres identifiés selon la stratégie $(\lambda, q_0'')$ et $(\lambda, \kappa)$ , sans (critère (0)) et avec sélection (critère (1)) . . . . .	112



# Annexe A

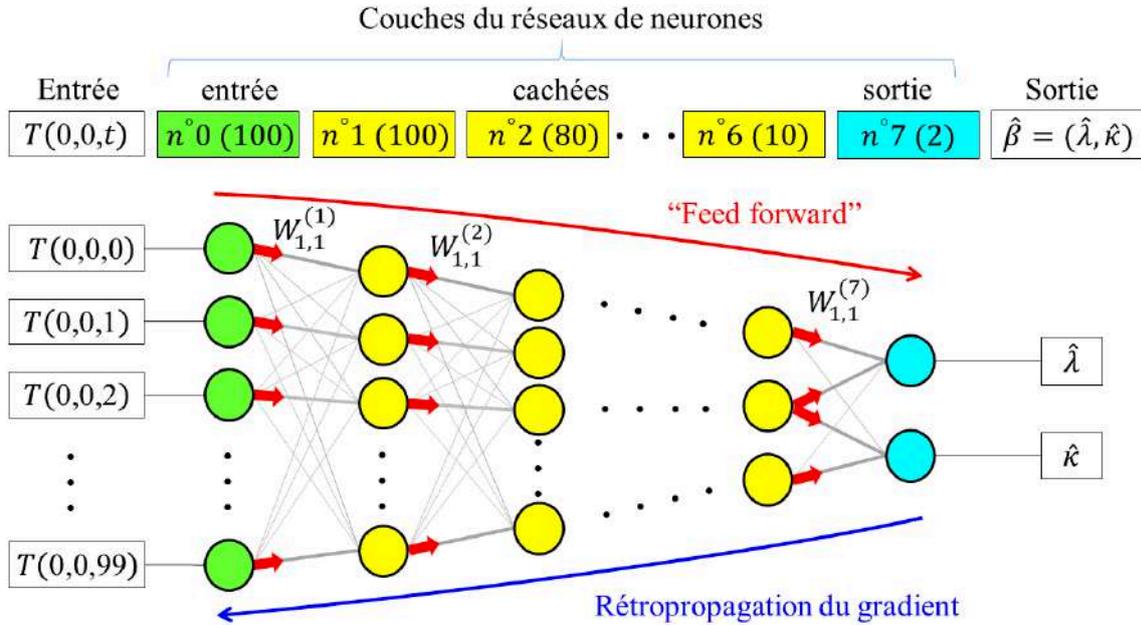
## Algorithme de rétropropagation du gradient

### A.1 Introduction

Pour un système étudié, le réseau de neurones artificiels n'a pas besoin de déterminer à l'avance la relation mathématique entre l'entrée et la sortie. Un apprentissage automatique des règles de liaison entrée/sortie permet d'obtenir une valeur de sortie proche de la valeur attendue (pour une valeur d'entrée connue). L'algorithme d'apprentissage constitue donc le coeur du réseau de neurone artificiel (ANN). Parmi les algorithmes, on peut citer l'algorithme de rétropropagation du gradient (l'algorithme BP), proposé par Geoffrey E. Hinton, David E. Rumelhart et Ronald J. Williams en 1986 (Rumelhart et al. [1986]), qui est actuellement l'algorithme le plus utilisé. Un réseau de neurones de type rétropropagation du gradient peut résoudre des problèmes qui ne peuvent pas être résolus par des perceptrons simples, tels que des problèmes non-linéaires. D'un point de vue structurel, un réseau de neurones de type BP est composé d'une couche d'entrée, de couches cachées et d'une couche de sortie (cf. Fig. A.1). En substance, l'algorithme BP prend l'erreur quadratique moyenne entre la valeur de sortie réelle et la valeur de sortie du réseau comme fonction objectif et utilise la méthode de descente de gradient pour minimiser cette fonction objectif.

L'algorithme BP comprend deux processus : (i) la propagation directe des signaux et (ii) la propagation inverse des erreurs (cf. Fig. A.1). L'idée principale du réseau de neurones de type BP est d'utiliser l'erreur de la couche suivante ( $l+1$ ) pour estimer l'erreur de la couche considérée, le calcul d'erreur est alors reproduit aux couches précédentes afin d'obtenir les estimations d'erreur de toutes les couches (rétropropagation du calcul d'erreur). Ici, l'estimation d'erreur peut être considérée comme une dérivée partielle. Les poids de connexion ( $W_{i,j}^{(l)}$ ) et le biais ( $b_i^{(l)}$ ) de chaque couche sont ajustés en fonction de cette dérivée partielle et puis les poids de connexion et biais ajustés sont utilisés pour recalculer l'erreur de la couche de sortie jusqu'à ce que l'erreur réponde aux exigences ou que le nombre d'itérations dépasse la valeur maximale définie.

Par conséquent, le principe d'apprentissage du réseau de neurones de type BP utilise une méthode de descente de gradient pour ajuster continuellement les poids de connexion et les biais du réseau par rétropropagation afin de minimiser l'erreur quadratique moyenne. L'avantage du réseau de neurones de type BP est qu'il peut apprendre et stocker un grand nombre d'informations entre l'entrée et la sortie sans avoir défini ces informations a priori. Par la suite, nous allons présenter plus précisément comment le réseau de neurones de type BP fonctionne.



**Fig. A.1.** Structure du réseau de neurones de type rétropropagation du gradient utilisé comportant 8 couches (1 couche d'entrée, 1 couche de sortie et 6 couches cachées). Le nombre de neurone de chaque couche est indiqué entre parenthèse (par exemple, la couche d'entrée et la première couche cachée comportent chacune 100 neurones)

## A.2 Principe de fonctionnement

Supposons qu'un réseau de neurones se compose de  $L (L \geq 3)$  couches de neurones, où la première couche ( $l = 1$ ) est appelée la couche d'entrée, la dernière couche ( $l = L$ ) est appelée la couche de sortie et les couches intermédiaires ( $2 \leq l \leq L - 1$ ) sont appelées les couches cachées. Le nombre de neurones dans chaque couche  $s_l$  est quant à lui supérieur ou égal à 1 ( $s_l \geq 1$ ).

### A.2.1 Ensemble de données d'entraînement

Afin d'entraîner un réseau de neurones, plusieurs ensembles de données d'entraînement sont nécessaires. Chaque ensemble de données d'entraînement  $X(I)$  est composé d'un vecteur d'entrée  $\vec{x}(I)$  et d'un vecteur de sortie  $\vec{y}(I)$ . Pour le problème étudié, le vecteur d'entrée  $\vec{x}(I)$  correspond à l'évolution de la température au point central à la face avant  $T(0,0,t)$  et la vecteur de sortie  $\vec{y}(I)$  correspond aux paramètres à identi-

fier  $\beta = (\lambda, \kappa)$  (cf. Fig. A.1). Le nombre d'ensembles de données d'entraînement est noté  $N_{train}$ . Pour chaque ensemble de données d'entraînement  $X(I)$ , la dimension du vecteur d'entrée est supposée  $m$  (fixé ici par le nombre de pas de temps choisi) et la dimension du vecteur de sortie est supposée  $n$  (dans notre cas,  $n=2$ ). Alors la totalité  $X$  des ensembles de données d'entraînement peut s'écrire comme :

$$X = [X(1), \dots, X(I), \dots, X(N_{train})] \quad (\text{A.1})$$

Mentionnons à ce stade que chaque ensemble de données d'entraînement  $X(I)$  est composé de l'entrée  $\vec{x}(I)$  et de la sortie  $\vec{y}(I)$  du réseau de neurones. Ainsi,

$$X(I) = [\vec{x}(I); \vec{y}(I)] \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\vec{x}(I) = [x_1(I), \dots, x_i(I), \dots, x_m(I)] \quad (\text{A.3})$$

et

$$\vec{y}(I) = [y_1(I), \dots, y_k(I), \dots, y_n(I)] \quad (\text{A.4})$$

### A.2.2 Fonction d'erreur

Soit  $\vec{d}(I)$ , la sortie attendue du vecteur d'entrée  $\vec{x}(I)$  est :

$$\vec{d}(I) = [d_1(I), \dots, d_k(I), \dots, d_n(I)] \quad (\text{A.5})$$

Alors la fonction d'erreur totale d'un ensemble de données d'entraînement  $X(I)$  s'écrit :

$$E(I) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n [y_k(I) - d_k(I)]^2 \quad (\text{A.6})$$

Alors la fonction d'erreur totale quadratique moyenne de tous les ensembles de données d'entraînement  $E$  s'écrit donc :

$$E = \frac{1}{N_{train}} \cdot \sum_{I=1}^{N_{train}} E(I) = \frac{1}{2N_{train}} \cdot \sum_{I=1}^{N_{train}} \sum_{k=1}^n [y_k(I) - d_k(I)]^2 \quad (\text{A.7})$$

On notera que la présence du coefficient  $\frac{1}{2}$  est purement "esthétique", cela permet de simplifier l'équation (A.14) et les suivantes.

### A.2.3 Fonction d'activation, poids de connexion et biais

Pour la suite, les paramètres de l'algorithme de rétropropagation sont définis et notés de la façon suivante :

1.  $W_{ij}^{(l)}$  : le poids de connexion reliant le  $j^{\text{ème}}$  neurone dans la  $(l-1)^{\text{ème}}$  couche du réseau de neurones de type BP et le  $i^{\text{ème}}$  neurone dans la  $l^{\text{ème}}$  couche ;

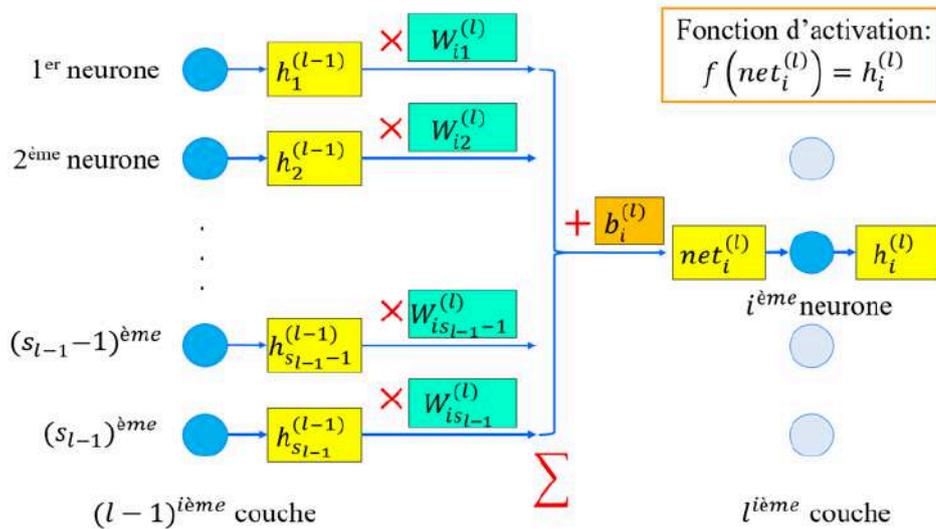
2.  $b_i^{(l)}$  : le biais du  $i^{\text{ème}}$  neurone dans la  $l^{\text{ème}}$  couche ;
3.  $s_l$  : le nombre de neurones dans la  $l^{\text{ème}}$  couche ;
4.  $h^{(l)}$  : l'ensemble de sortie de chaque neurone dans la  $l^{\text{ème}}$  couche définit par :

$$h^{(l)} = [h_1(l), \dots, h_j(l), \dots, h_{s_l}(l)] \quad (\text{A.8})$$

5.  $net_i^{(l)}$  : l'entrée du  $i^{\text{ème}}$  neurone dans la  $l^{\text{ème}}$  couche (cf. Fig. A.2), caractérisée par :

$$net_i^{(l)} = \sum_{j=1}^{s_{l-1}} W_{ij}^{(l)} \cdot h_j^{(l-1)} + b_i^{(l)} \quad (\text{A.9})$$

• **Algorithme de rétro-propagation du gradient (Paul J. Werbos, 1974)**



**Fig. A.2.** Schéma illustrant les paramètres du réseau de neurones artificiels

Pour le  $i^{\text{ème}}$  neurone dans la  $l^{\text{ème}}$  couche, la fonction d'activation  $f$  permet de relier l'entrée  $net_i^{(l)}$ , la sortie  $h_i^{(l)}$  du neurone considéré. Ainsi,

$$h_i^{(l)} = f(net_i^{(l)}), \quad i \in [1, s_l] \quad (\text{A.10})$$

Il est d'usage d'utiliser la fonction Sigmoïde (également connue sous le nom de fonction Logistique) comme fonction d'activation pour les réseaux de neurones de type BP. Cette fonction Sigmoïde est définie par :

$$\text{Sigmoïde : } f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad x \in ]-\infty, +\infty[, \quad f(x) \in ]0, 1[, \quad f'(x) = f(x) \cdot (1 - f(x)) \quad (\text{A.11})$$

Une fonction non-linéaire est souvent choisie comme fonction d'activation du réseau de neurones de type BP, puisque la composition de fonctions linéaires est toujours une fonction linéaire. Ainsi, elle n'est pas adaptée aux besoins du réseau de neurones pour résoudre un problème non-linéaire.

### A.2.4 Renouvellement des poids de connexion $W_{ij}^{(l)}$ et des biais $b_i^{(l)}$

Dans le processus d'analyse des données d'entraînement et d'établissement de la relation entre l'entrée et la sortie, les poids de connexion et les biais sont renouvelés par l'algorithme BP lors de chaque itération comme suit :

$$W_{ij}^{(l)'} = W_{ij}^{(l)} - \alpha \cdot \frac{\partial E(I)}{\partial W_{ij}^{(l)}} \quad (\text{A.12})$$

$$b_i^{(l)'} = b_i^{(l)} - \alpha \cdot \frac{\partial E(I)}{\partial b_i^{(l)}} \quad (\text{A.13})$$

Avec  $\alpha$  est le coefficient d'apprentissage. Les expressions détaillées de l'équation (A.12) et de l'équation (A.13) sont données ci-dessous (Nielsen [2015]) :

**Pour la couche de sortie ( $l = L$ ) :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(I)}{\partial W_{kj}^{(L)}} &= \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I))^2 \right]}{\partial W_{kj}^{(L)}} = \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} (y_k(I) - d_k(I))^2 \right]}{\partial W_{kj}^{(L)}} \\ &= (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial [\bar{y}_k(I)]}{\partial W_{kj}^{(L)}} = (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial [f(\text{net}_k^{(L)})]}{\partial W_{kj}^{(L)}} \\ &= (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial [f(\sum_{j=1}^{s_{L-1}} W_{kj}^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)} + b_k^{(L)})]}{\partial W_{kj}^{(L)}} \quad (\text{A.14}) \\ &= (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot \frac{\partial [\sum_{j=1}^{s_{L-1}} W_{kj}^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)} + b_k^{(L)}]}{\partial W_{kj}^{(L)}} \\ &= (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot h_j^{(L-1)} \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\frac{\partial E(I)}{\partial W_{kj}^{(L)}} = (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot h_j^{(L-1)}} \quad (\text{A.15})$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E(I)}{\partial b_k^{(L)}} &= \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I))^2 \right]}{\partial b_k^{(L)}} = \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} (y_k(I) - d_k(I))^2 \right]}{\partial b_k^{(L)}} \\
 &= (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial [\vec{y}_k(I)]}{\partial b_k^{(L)}} = (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial [f(\text{net}_k^{(L)})]}{\partial b_k^{(L)}} \\
 &= (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial [f(\sum_{j=1}^{s_L-1} W_{kj}^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)} + b_k^{(L)})]}{\partial b_k^{(L)}} \tag{A.16} \\
 &= (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot \frac{\partial [\sum_{j=1}^{s_L-1} W_{kj}^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)} + b_k^{(L)}]}{\partial b_k^{(L)}} \\
 &= (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}}
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\frac{\partial E(I)}{\partial b_k^{(L)}} = (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}}} \tag{A.17}$$

Pour les couches cachées ( $2 \leq l \leq L - 1$ ) :

Nous considérons tout d'abord le cas de la dernière couche cachée ( $(L - 1)$ <sup>ième</sup>) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(I)}{\partial W_{ji}^{(L-1)}} &= \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \right]}{\partial W_{ji}^{(L-1)}} \\
&= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial y_k(I)}{\partial W_{ji}^{(L-1)}} \\
&= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial [f(\text{net}_k^{(L)})]}{\partial W_{ji}^{(L-1)}} \\
&= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial [f(\sum_{j=1}^{s_{L-1}} W_{kj}^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)} + b_k^{(L)})]}{\partial W_{ji}^{(L-1)}} \\
&= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot \frac{\partial [\sum_{j=1}^{s_{L-1}} W_{kj}^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)} + b_k^{(L)}]}{\partial W_{ji}^{(L-1)}} \quad (\text{A.18}) \\
&= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot \frac{\partial [W_{kj}^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)}]}{\partial W_{ji}^{(L-1)}} \\
&= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot W_{kj}^{(L)} \cdot \frac{\partial [f(\text{net}_j^{(L-1)})]}{\partial W_{ji}^{(L-1)}} \\
&= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot W_{kj}^{(L)} \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_j^{(L-1)}} \\
&\quad \cdot \frac{\partial [\sum_{j=1}^{s_{L-1}} W_{ji}^{(L-1)} \cdot h_i^{(L-2)} + b_j^{(L-1)}]}{\partial W_{ji}^{(L-1)}}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\frac{\partial E(I)}{\partial W_{ji}^{(L-1)}} = \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot W_{kj}^{(L)} \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_j^{(L-1)}} \cdot h_i^{(L-2)}} \quad (\text{A.19})$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E(I)}{\partial b_j^{(L-1)}} &= \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \right]}{\partial b_j^{(L-1)}} \\
 &= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial y_k(I)}{\partial b_j^{(L-1)}} \\
 &= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial [f(\text{net}_k^{(L)})]}{\partial b_j^{(L-1)}} \\
 &= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot \frac{\partial [f(\sum_{j=1}^{s_{L-1}} W_{kj}^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)} + b_k^{(L)})]}{\partial b_j^{(L-1)}} \\
 &= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot \frac{\partial [\sum_{j=1}^{s_{L-1}} W_{kj}^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)} + b_k^{(L)}]}{\partial b_j^{(L-1)}} \quad (\text{A.20}) \\
 &= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot \frac{\partial [W_{kj}^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)}]}{\partial b_j^{(L-1)}} \\
 &= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot W_{kj}^{(L)} \cdot \frac{\partial [f(\text{net}_j^{(L-1)})]}{\partial b_j^{(L-1)}} \\
 &= \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot W_{kj}^{(L)} \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_j^{(L-1)}} \\
 &\quad \cdot \frac{\partial [\sum_{j=1}^{s_{L-1}} W_{ji}^{(L-1)} \cdot h_i^{(L-2)} + b_j^{(L-1)}]}{\partial b_j^{(L-1)}}
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\frac{\partial E(I)}{\partial b_j^{(L-1)}} = \sum_{k=1}^n (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot W_{kj}^{(L)} \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_j^{(L-1)}}} \quad (\text{A.21})$$

Si on pose :

$$\boxed{\delta_k^{(L)} = (y_k(I) - d_k(I)) \cdot f'(x)|_{x=\text{net}_k^{(L)}} \cdot h_j^{(L-1)}} \quad (\text{A.22})$$

Alors la dérivée partielle de la fonction d'erreur  $E(I)$  par rapport le poids de connexion et le biais pour la couche de sortie devient :

$$\boxed{\frac{\partial E(I)}{\partial W_{kj}^{(L)}} = \delta_k^{(L)} \cdot h_j^{(L-1)}, \quad \frac{\partial E(I)}{\partial b_k^{(L)}} = \delta_k^{(L)}} \quad (\text{A.23})$$

Si on pose :

$$\delta_j^{(L-1)} = \sum_{k=1}^n \delta_k^{(L)} \cdot W_{kj}^{(L)} \cdot f'(x)|_{x=net_j^{(L-1)}} \quad (\text{A.24})$$

Alors la dérivée partielle de la fonction d'erreur  $E(I)$  par rapport le poids de connexion et le biais pour la couche de cachée ( $l = L - 1$ ) devient :

$$\frac{\partial E(I)}{\partial W_{ji}^{(L-1)}} = \delta_j^{(L-1)} \cdot h_i^{(L-2)}, \quad \frac{\partial E(I)}{\partial b_j^{(L-1)}} = \delta_j^{(L-1)} \quad (\text{A.25})$$

De même, la dérivée partielle de la fonction d'erreur  $E(I)$  par rapport le poids de connexion et le biais pour toute couche cachée ( $2 \leq l \leq L - 1$ ) devient :

$$\boxed{\frac{\partial E(I)}{\partial W_{ji}^{(L)}} = \delta_j^{(l)} \cdot h_j^{(l-1)}, \quad \frac{\partial E(I)}{\partial b_j^{(l)}} = \delta_j^{(l)}} \quad (\text{A.26})$$

Avec

$$\boxed{\delta_j^{(l)} = \sum_{k=1}^n \delta_k^{(l+1)} \cdot W_{kj}^{(l+1)} \cdot f'(x)|_{x=net_j^{(l)}}} \quad (\text{A.27})$$

## A.3 Avantages et inconvénients

L'avantage du réseau de neurones de type BP est sa forte capacité à résoudre des problèmes non-linéaires et sa structure flexible. Le nombre de couches cachées et de neurones dans chaque couche peuvent être fixés arbitrairement en fonction de la situation spécifique et la performance du réseau peut varier en fonction de la structure. Mais le réseau de neurones de type BP a également quelques défauts majeurs :

1. L'apprentissage est relativement lent, même un problème simple nécessite généralement des centaines ou des milliers fois d'apprentissage pour produire des résultats satisfaisants ;
2. L'utilisation d'une méthode de descente de gradient pour trouver la valeur minimale de la fonction objectif le rend sensible aux minima locaux ;
3. Il n'y a pas règles/méthodes clairement identifiées pour la définir le nombre de couches et de neurones constitutifs ;

Pour les inconvénients mentionnés ci-dessus, de nombreuses mesures d'amélioration ont été proposées. On peut notamment citer des mesures d'amélioration consistant à accélérer la vitesse de convergence du réseau (i) en utilisant la méthode de Gauss-Newton (Nandy et al. [2012]), (ii) en calculant les effets dans la phase d'entraînement pour ajuster le taux d'apprentissage (Li and Park [2009]), (iii) par un entraînement en groupe et une optimisation combinatoire (Hu et al. [2013]) ou encore (iv) par l'utilisation d'autres algorithmes (Azami and Mosavi [2013]). D'autre part, l'idée principale de ces améliorations est d'éviter de tomber dans les minima locaux en couplant le réseau de neurones avec un algorithme évolutionnaire (algorithme génétique (Qiu et al. [2019]),

algorithme PSO (Zhang et al. [2018]), algorithme de pollinisation des fleurs (Qu et al. [2019])...) associé (ou non) avec un algorithme de type Levenberg–Marquardt (Li et al. [2015]).

## Résumé

Ce travail consiste au développement de méthodes de caractérisation des propriétés thermo-physiques de matériaux semi-transparents. Tout d'abord, un modèle direct conducto-radiatif 2D axisymétrique instationnaire est développé. Il est destiné à modéliser une expérience de type «méthode flash» dans laquelle l'excitation est localisée à la fois en espace et en temps. Les transferts radiatifs au sein du matériau, caractérisé par le coefficient d'absorption moyen, sont modélisés à l'aide de la méthode P1. L'équation de transfert radiatif considérée ainsi que le bilan d'énergie sont résolus par la méthode des volumes finis.

Un modèle d'identification couplant les résultats issus de simulations directes et des données expérimentales via un algorithme évolutionnaire de type optimisation par essaims particulaires (PSO) est développé pour identifier simultanément la conductivité thermique et le coefficient d'absorption moyen de données synthétiques et d'un échantillon de polyméthyl méthacrylate (PMMA). Par la suite, un modèle d'identification basé sur un réseau de neurones artificiels multicouche est proposé et testé. Les phases d'entraînement et de test de ce réseau sont réalisées en utilisant une base des données générées par le modèle direct. Des données synthétiques avec différents niveaux de bruit et/ou des données expérimentales sont utilisées pour démontrer respectivement la robustesse et la faisabilité de cette approche pour résoudre les problèmes pratiques. L'originalité de la méthode réside dans le fait que celle-ci permet d'obtenir directement les propriétés du matériau à partir d'un thermogramme. Des pistes sont évoquées pour améliorer le processus d'identification.

En parallèle, un modèle réduit d'ordre faible est construit en s'appuyant sur une méthode d'identification modale (MIM) et du modèle direct 2D axisymétrique conducto-radiatif. Ceci permet notamment de réduire le temps de calcul et d'augmenter l'efficacité de l'identification via le modèle réduit construit. Ce modèle réduit a été testé en terme de robustesse vis-à-vis des conditions expérimentales. Le développement d'un modèle paramétrique est en cours pour une utilisation en terme d'identification avec une approche plus classique.

**Mots clés :** Transfert de chaleur / Conduction-Rayonnement / 2D axisymétrique / régime instationnaire / Propriétés thermo-physiques / Méthode flash / Algorithme évolutionnaire (PSO) / Réseau de neurones artificiel multicouche / Réduction du modèle (MIM)

## Abstract

This work involves the development of methods for characterizing the thermo-physical properties of semi-transparent materials. First of all, an unsteady axisymmetric 2D conductive-radiative direct model is developed. It is intended to model a “flash method” type experiment in which the excitation is localized in both space and time. The radiative heat transfers within the material, characterized by the average absorption coefficient, are modeled by using the P1 method. The radiative heat transfer equation considered and the energy equation are solved by the finite volume method.

An identification model coupling results from direct simulations and experimental data using an evolutionary particle swarm algorithm (PSO) algorithm is developed to simultaneously identify the thermal conductivity and the average absorption coefficient of the synthetic data and a sample of polymethyl methacrylate (PMMA). Subsequently, an identification model based on a multilayer artificial neural network is proposed and tested. The training and test phases of this neural network are performed using a database generated by the direct model. Synthetic data with different noise levels and/or experimental data are used to demonstrate respectively the robustness and feasibility of this approach to solve practical problems. The originality of the method lies in the fact that this method makes it possible to directly obtain the properties of the material from a thermogram. Elements are mentioned to improve the identification process.

In parallel, a low-order reduced model is constructed based on a modal identification method (MIM) and the conducto-radiative 2D axisymmetric direct model. This in particular makes it possible to reduce the calculation time and to increase the efficiency of the identification via the reduced model built. This reduced model has been tested in terms of robustness with respect to experimental conditions. The development of a parametric model is underway for use in terms of identification with a more traditional approach.

**Key words :** Heat transfer / Conduction–Radiation / unsteady regime / 2D axisymmetric / Thermo–physical properties / Flash method / Evolutionary algorithm (PSO) / Multilayer artificial neural network / Model reduction (MIM)