HAL
open science

Définition d'une méthodologie d'estimation de fiabilité et de qualification de systèmes mécanique en phase de développement

Koffisse Rodrigue Sohoin

To cite this version:

Koffisse Rodrigue Sohoin. Définition d'une méthodologie d'estimation de fiabilité et de qualification de systèmes mécanique en phase de développement. Autre. Université d'Angers, 2020. Français. NNT : 2020ANGE0001 . tel-02862181

HAL Id: tel-02862181

https://theses.hal.science/tel-02862181

Submitted on 9 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE D'ANGERS
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 602
Sciences pour l'Ingénieur
Spécialité : Génie Industriel

Par
Koffisse Rodrigue SOHOIN

Définition d'une méthodologie d'estimation de fiabilité et de qualification de systèmes mécanique en phase de développement

Thèse présentée et soutenue à « Angers », le « 22/01/2020 »
Unité de recherche : Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS), POLYTECH Angers
Laboratoire de Mécanique de Normandie (LMN), INSA Rouen
Faurecia Automotive Seating, Caligny
Thèse N° : 139334

Rapporteurs avant soutenance :

Mohamed ICHCHOU, Professeur, Ecole Centrale de Lyon

Léo GERVILLE-REACHE, Maître de Conférences, HdR, Université de Bordeaux

Composition du Jury :

Président :
Bruno CASTANIER, Professeur, Université d'Angers

Examinateurs :
Mihaela BARREAU, Maître de Conférences, HdR, Université d'Angers

Djelali ATTAF, Docteur, R&D Quality Manager, FAURECIA

Directeur de thèse :
Fabrice GUERIN, Professeur, Université d'Angers

Co-directeur de thèse :
Abdelkhalak EL HAMI, Professeur, INSA de Rouen

Co-encadrant de Thèse :
Hassen RIAHI, Maître de conférences, Université d'Angers

Dédicaces :

A ma chérie Believer,

A ma fille adorée Naomie,

Et à mes chers parents.

« *Most people say that it is the intellect which makes a great scientist. They are wrong : it is character*. »

Albert Einstein

L'auteur du présent document vous autorise à le partager, reproduire, distribuer et communiquer selon les conditions suivantes :

- Vous devez le citer en l'attribuant de la manière indiquée par l'auteur (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'il approuve votre utilisation de l'œuvre).
- Vous n'avez pas le droit d'utiliser ce document à des fins commerciales.
- Vous n'avez pas le droit de le modifier, de le transformer ou de l'adapter.

Consulter la licence creative commons complète en français :
http://creativecommons.org/licences/by-nc-nd/2.0/fr/

Ces conditions d'utilisation (attribution, pas d'utilisation commerciale, pas de modification) sont symbolisées par les icônes positionnées en pied de page.

REMERCIEMENTS

« Un mot de remerciement peut souvent accomplir ce qui autrement était impossible. »

B.C. Forbes

Le présent manuscrit est le fruit d'un travail de thèse mené dans le cadre d'un partenariat entre la société Faurecia Automotive Seating (FSA) site de Caligny, le Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS EA7315 - ISTIA) et le Laboratoire de Mécanique de Normandie (LMN EA3828 - INSA Rouen).

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de thèse Monsieur Fabrice GUERIN, que j'ai eu la chance de connaitre depuis mon stage de fin d'étude d'ingénieur Génie industriel (au moment où j'ai commencé à découvrir le domaine de la fiabilité) et qui m'as transmis cette passion pour l'ingénierie de la fiabilité. Je tiens à lui témoigner toutes mes gratitudes pour l'encadrement, les orientations scientifiques et techniques qu'il a sues me prodiguer tout au long de ce travail de thèse.

Je tiens à remercier l'entreprise FAURECIA qui a investi dans cette thèse et particulièrement, mes encadrants industriels Monsieur Djelali ATTAF et Madame Sandra BIDET, pour leurs prodigieux conseils et tout ce qu'ils m'ont permis d'apprendre à leurs côtés, tant sur le plan technique que professionnel.
Mes remerciements vont également à Monsieur Abdelkhalak EL HAMI, pour avoir co-dirige cette thèse de doctorat. Je lui suis reconnaissant pour le bon accueil qui m'a été réservé à l'INSA-Rouen, et pour ses conseils qui ont énormément contribu2 à l'aboutissement de ce travail.

Je voudrais particulièrement remercier mon co-encadrant Monsieur Hassen RIAHI, qui a toujours été présent pour répondre à mes questions, apporter un regard critique constructif et éclairé sur mon travail, et qui a également contribué énormément à la correction de mon manuscrit. J'ai beaucoup appris en travaillant avec lui.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur Léo GERVILLE-REACHE, et à Monsieur Mohamed ICHCHOU, pour avoir accepté de rapporter ce travail de recherche ainsi qu'au président du Jury monsieur Bruno CASTANIER et à Madame Mihaela BARREAU pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux en participation à ma soutenance de thèse entant qu'examinateurs.

Je souhaite aussi remercier très sincèrement tout le Personnel du LARIS, pour l'accueil chaleureux et pour leurs disponibilités qui ont rendu très agréables toutes ces années passées au sein du LARIS.

Je fais un clin d'œil spécial à mes collègues doctorants en particulier à Nadare et Khaoula, pour tous les bons moments de partage et pour tous leurs soutiens.

J'adresse à présent, mes chaleureux remerciements à ma très chère épouse Believer, pour son amour, sa patience, et son soutien sans faille tout au long de ces années. Mes gratitudes à mes parents qui m'ont toujours fait confiance et soutenu tout au long de mon parcours académique avec le peu de moyens dont ils disposaient.

Pour finir, je souhaite remercier tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué d'une manière ou d'une autre à la réussite de cette épreuve longue et difficile.

Table des matières

Table des matières 12

Table des figures 13

Liste des tableaux 17

Nomenclature 19

1 Introduction générale 21

1.1 Contexte 22

1.2 Problématique de l'estimation de fiabilité en phase de développement 23

1.3 Objectifs de la thèse 26

1.4 Organisation du document 29

2 Notions générales sur la fiabilité 31

2.1 Introduction 34

2.2 Caractérisation de la fiabilité 35

2.2.1 Mesures associées à la fiabilité 35

2.2.1.1 Fonction de fiabilité 35

2.2.1.2 Fonction de répartition et fonction de densité 36

2.2.1.3 Taux de défaillance instantané 36

2.2.1.4 MTTF 37

2.2.2 Principales lois de distributions utilisées en fiabilité 37

2.2.2.1 Loi normale 37

2.2.2.2 Loi LogNormale 38

2.2.2.3 Loi Weibull 38

2.2.2.4 La loi de Birnbaum-Saunders 39

2.2.2.5 La loi du Khi-deux 40

2.2.3 Théorie de l'estimation 41

2.2.3.1 Estimateur ponctuel 41

2.2.3.2 L'estimation par Maximum de Vraisemblance 42

2.2.3.3 Classification des méthodes d'estimation de fiabilité 44

2.2.4 Fiabilité dans le cycle de vie d'un produit 45
2.2.4.1 Courbe en baignoire 45
2.2.4.2 Cycle de vie d'un système mécanique 45
2.2.4.3 Fiabilité dans le cycle de développement d'un produit 46
2.2.5 Particularité de la fiabilité mécanique 47
2.2.5.1 Mécanismes de défaillance des composants mécaniques . . . 47
2.2.5.2 Modèle de fiabilité de composants mécaniques standards . . 48
2.2.5.3 Fiabilité de composants mécaniques spécifiques : Méthode R-C 49
2.3 Fiabilité prévisionnelle par couplage mécano-probabiliste 51
2.3.1 Modélisation probabiliste de l'incertain 52
2.3.1.1 Types d'incertitudes 52
2.3.1.2 Modèles probabilistes 53
2.3.1.3 Transformation isoprobabiliste 54
2.3.1.4 Propagation de l'incertitude 57
2.3.2 Formulation mathématique du problème de fiabilité 58
2.3.2.1 Fonction d'état limite 58
2.3.2.2 Expression de la probabilité de défaillance 59
2.3.3 Notion d'indice de fiabilité 60
2.3.3.1 Indice de Rjanitzyne-Cornell 60
2.3.3.2 L'indice de Hasofer et Lind 61
2.3.3.3 Recherche du point de conception 62
2.3.4 Calcul de la probabilité de défaillance 63
2.3.4.1 Simulations Monte-Carlo 64
2.3.4.2 First and Second Order Reliability Method (FORM/SORM) . 66
2.3.4.3 Méthode de surface de réponse quadratique 70
2.4 Fiabilité expérimentale par les essais 72
2.4.1 Les types d'essais 72
2.4.1.1 Les essais de robustesse 72
2.4.1.2 Les essais d'estimation de la fiabilité 73
2.4.1.3 Les essais de déverminage 73
2.4.2 Estimation de la fiabilité par les essais accélérés 74
2.4.2.1 Plan d'essais accélérés 75
2.4.2.2 Modèles Standards de Vie Accélérée 76
2.4.2.3 Modèles d'accélération courants 79
2.4.3 Essais bayésiens 81
2.4.3.1 Objectif des essais bayésiens 81
2.4.3.2 Principe des essais bayésiens 81
2.5 Conclusion 83

3 Méthodologie d'estimation de fiabilité et de qualification en phase de développe-

ment **85**
3.1 Introduction 87
3.2 Estimation numérique de la fiabilité prévisionnelle 88
3.2.1 Méthode de développement en polynômes de chaos (DCP) 88
3.2.2 Méthode de décomposition de la dimension (MDD) 91
3.2.3 Étude comparative 94
3.3 Estimation de fiabilité par couplage RETEX-Numérique 98
3.3.1 Position du problème 98
3.3.2 Méthode basée sur un facteur de similitude 98
3.3.2.1 Définition d'un facteur de similitude 98
3.3.2.2 Estimation de fiabilité pour une nouvelle conception 100
3.4 Méthode basée sur une fonction de transfert temporel 103
3.4.1 Principe de la fonction de transfert 103
3.4.2 Construction de la fonction de transfert 106
3.4.2.1 Discrétisation du domaine de la fiabilité 106
3.4.2.2 Durées de vie expérimentale et numérique de la conception de référence 106
3.4.2.3 Fonction de transfert temporel de la conception de référence . 107
3.4.3 Construction de la distribution des durées de vie et estimation de fiabilité 108
3.5 Amélioration par actualisation Bayésienne inverse 111
3.5.1 L'approche Bayésienne inverse 111
3.5.2 Actualisation Bayésienne par Markov Chain Monte Carlo 112
3.5.3 L'algorithme de Metropolis-Hastings (MH) 113
3.5.4 Réglage paramétrique de l'algorithme $MCMC-HS$ 115
3.6 Qualification en phase de développement 116
3.6.1 Plan de démonstration 116
3.6.1.1 Plan de démonstration classique 116
3.6.1.2 Plan de démonstration Bayésien 117
3.6.2 Estimation Bayésienne de fiabilité 119
3.6.2.1 Principe de l'approche Bayésienne 119
3.6.2.2 Détermination des estimateurs Bayésiens 121
3.6.2.3 Détermination de la distribution a priori à partir d'informations disponibles 123
3.6.3 Estimation Bayésienne avec pondération de l'a priori 124
3.6.3.1 Principe de détermination du facteur de pondération 125
3.6.3.2 Utilisation du facteur de pondération 126
3.6.3.3 Estimation de la distribution a posteriori pondérée 126
3.7 Conclusion 127

4 Application à un composant mécanique automobile **129**

4.1 Introduction 131
4.2 Mécanisme d'endommagement du verrou 132
4.2.1 Définition du dommage par fatigue 132
4.2.2 Les phases de l'endommagement par fatigue 134
4.2.3 Calcul de durée de vie en fatigue 135
4.2.3.1 Approche $S-N$: Diagramme d'endurance de Wöhler 135
4.2.3.2 Approche $\varepsilon-N$: Diagramme de Manson-Coffin 137
4.3 Fiabilité expérimentale par analyse du RETEX 142
4.3.1 Présentation des résultats d'essais accélérés 143
4.3.2 Choix du modèle de durée de vie accélérée 143
4.3.3 Loi d'accélération et fiabilité expérimentale 146
4.4 Fiabilité prévisionnelle par simulation numérique 149
4.4.1 Modèle mécanique déterministe 149
4.4.1.1 Modèle élastoplastique et modèle de fatigue oligocyclique . . 150
4.4.1.2 Identification des paramètres du modèle de fatigue 152
4.4.2 Modèle mécano-probabiliste 153
4.4.2.1 Construction du modèle de substitution 154
4.4.2.2 Moments statistiques et analyse de fiabilité 155
4.5 Analyse de fiabilité du nouveau développement 158
4.5.1 Fiabilité prévisionnelle du nouveau développement 159
4.5.2 Estimation basée sur le facteur de similitude 163
4.5.3 Estimation basée sur la fonction de transfert temporel 166
4.5.4 Amélioration de l'estimation de la fiabilité par actualisation inverse des paramètres de conception 170
4.6 Plan de qualification du nouveau mécanisme 178
4.6.1 Plan de démonstration classique et Bayésien 178
4.6.2 Estimation Bayésienne de fiabilité après essais 180
4.7 Conclusion 182

5 Conclusions et perspectives 185
5.1 Introduction 186
5.2 Propositions et résultats obtenus 186
5.3 Perspectives 189

Bibliographie 191

Table des figures

1.1 Les Différents types de mécanismes de siège automobile chez FAURECIA . . . 22
1.2 Fiabilité en conception dans le processus de développement 24
1.3 Organigramme de la méthodologie proposée 28

2.1 (a) Fonction de fiabilité et (b) fonction de répartition 36
2.2 Fonction de taux de défaillance pour différentes distributions 40
2.3 Courbe en baignoire 45
2.4 Cycle de vie d'un système mécanique 46
2.5 Cycle de fiabilisation d'un produit 47
2.6 Méthode contrainte résistance probabiliste : Diagramme de Warmer 50
2.7 Illustration du couplage mécano-probabiliste 51
2.8 Finalités de la propagation d'incertitudes 57
2.9 Notions de surface d'état limite, de domaine de défaillance et de domaine de sécurité 59
2.10 probabilité de défaillance 59
2.11 Représentation de l'Indice de Cornel 60
2.12 Représentation de indice de Hasofer Lind 62
2.13 Illustration de l'algorithme HLRF (Diop, 2015) 63
2.14 Tirage aléatoire d'un nombre u^r uniformément distribué entre 0 et 1 65
2.15 Illustration de la méthode de simulations de Monte-Carlo 66
2.16 (a) Surface d'état limite et point de conception dans l'espace physique aléatoire, (b) Approximations $FORM$ et $SORM$ dans l'espace aléatoire standard 67
2.17 Profil d'essai sous stress constant 75
2.18 Profil d'essai sous stress échelonné 76
2.19 Profil d'essai sous stress cyclique 76
2.20 Principe des modèles SVA 77
2.21 Définition du modèle de régression 77
2.22 Principe des essais accélérés 80
2.23 Principe des essais bayésiens 82

3.1 Comparaison de l'uniformité du remplissage spatial des nombres pseudo-aléatoires, de l'échantillonnage de l'hypercube latin et de la séquence de Sobol 90

3.2 L'économie $card(\Im_N^{p,i})/card(\Im_n^p)$ par rapport au nombre de variables aléatoires pour un PC de degré $p = 8$ . . . 90
3.3 Plan d'expériences (a) $n = 1, s = 1$, (b) $n = 2, s = 1$, (c) $n = 2, s = 2$ (d) Points d'intégration Gauss-Hermite . . . 94
3.4 (a) Tuyau fissuré, (b) Loi de comportement de Rambreg-Osgood . . . 95
3.5 Conditions de chargement et maillage . . . 96
3.6 Réponse mécanique J, (a) densité de probabilité, (b) fonction de répartition . . . 97
3.7 Représentation de la fiabilité numérique et expérimentale sur le graphe fonctionnelle LogNormale . . . 99
3.8 Procédure d'utilisation du facteur de similitude . . . 101
3.9 Linéarité des versions de mécanismes . . . 102
3.10 (a) Principe des essais accélérés, (b) Définition de la fonction de transfert temporel 104
3.11 Procédure d'estimation de fiabilité pour une nouvelle conception . . . 105
3.12 Durées de vie $t^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}(i)$ et $t^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}(i)$ pour une même fiabilité $D_R(i)$ . . . 107
3.13 Obtention de durées de vie $t^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}(i)$ à partir de la FTT et de $t^{num}_{\mathcal{D}_{up}}(i)$ . . . 109
3.14 Principe de détermination du facteur de pondération . . . 125

4.1 Localisation du verrou de commande sur le siège auto . . . 131
4.2 Verrou de commande : Version $\mathcal{D}_{ref}$ . . . 131
4.3 cycle et histoire de chargement . . . 133
4.4 Types de cycle de chargement . . . 133
4.5 Évolution de l'endommagement en fatigue . . . 134
4.6 La courbe de Wöhler . . . 135
4.7 Variabilité de la courbe S-N . . . 137
4.8 Courbe de Manson-Coffin-Basquin . . . 138
4.9 Méthode des 4 points . . . 139
4.10 Essais accélérés sur verrou de commande $\mathcal{D}_{ref}$ . . . 142
4.11 Représentation des durées de vies accélérées en condition nominale . . . 147
4.12 Loi d'accélération . . . 148
4.13 Fiabilité expérimentale de la version de référence $\mathcal{D}_{ref}$ du mécanisme . . . 148
4.14 (a) Esquisse de $\mathcal{D}_{ref}$, (b) Cycles de chargement subis par le mécanisme . . . 150
4.15 Modèle éléments finis 3D de la conception de référence $\mathcal{D}_{ref}$ . . . 150
4.16 (a) Loi de Ramberg-Osgood, (b) Modèle Coffin-Manson-Morrow . . . 151
4.17 Processus de calcul de la durée de vie en fatigue N_f . . . 153
4.18 Technique de méta-modélisation . . . 155
4.19 Évaluation de la précision du modèle de substitution pour la conception de référence $\mathcal{D}_{ref}$ . . . 156
4.20 Densité de probabilité de la durée de vie en fatigue N_f de $\mathcal{D}_{ref}$ . . . 157
4.21 Comparaison des fonctions de fiabilité expérimentale et numérique du mécanisme de référence $\mathcal{D}_{ref}$ . . . 158

4.22 Nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ du mécanisme 159
4.23 (a) Esquisse de la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$, (b) Chargement appliqué à la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$ 160
4.24 Modèle éléments finis 3D de la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$ 160
4.25 Évaluation de l'exactitude du modèle de substitution pour $\mathcal{D}_{up}$ 161
4.26 Fonction de densité de probabilité de la durée de vie en fatigue N_f pour $\mathcal{D}_{up}$ . . 162
4.27 Fonction de fiabilité numérique obtenue pour $\mathcal{D}_{up}$ 162
4.28 Linéarité entre les modèles mécaniques $\mathcal{M}^{ref}$ et $\mathcal{M}^{up}$ 163
4.29 Courbe de fiabilité estimée de $\mathcal{D}_{up}$ comparée à la courbe numérique et points expérimentaux 165
4.30 Comparaison des modèles de régression utilisés pour construire la fonction de transfert temporel 167
4.31 Comparaison de *fiabilité expérimentale* estimée et de fiabilité numérique de $\mathcal{D}_{up}$ 168
4.32 Comparaison de la fonction de fiabilité obtenue par l'approche FTT proposée et des résultats d'essais réalisés sur la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$ 169
4.33 Comparaison des résultats des deux approches d'estimation proposées 169
4.34 Évolution du taux d'acceptation en fonction du facteur d'échelle 171
4.35 Algorithme M-H avec une variance trop large variance (s=10) 172
4.36 Algorithme M-H avec une variance trop petite variance (s=0.005) 172
4.37 Algorithme M-H avec une variance raisonnable (s=0.55) 173
4.38 Algorithme M-H avec (s=0.55) et une taille d'échantillon de $N = 10^5$ 173
4.39 Comparaison des densités a priori et actualisées des paramètres d'entrée de $\mathcal{D}_{ref}$ 174
4.40 Comparaison de la fiabilité numérique actualisée et a priori pour la conception $\mathcal{D}_{ref}$ 175
4.41 Comparaison de la fiabilité numérique actualisée et a priori pour la conception $\mathcal{D}_{up}$ 176
4.42 Comparaison de la fiabilité numérique actualisée et celles obtenues par méthodes FS et FTT pour la conception $\mathcal{D}_{up}$ 177
4.43 Estimation de la fiabilité de $\mathcal{D}_{up}$ par approche Bayésienne classique 181
4.44 Estimation de la fiabilité de $\mathcal{D}_{up}$ par approche Bayésienne avec pondération . . 182

Liste des tableaux

3.1 Caractéristiques statistiques des paramètres incertains 96
3.2 Estimations des moments statistiques 96

4.1 Modèles mathématiques de courbe S-N 137
4.2 Résultats des essais accélérés sur le mécanisme $\mathcal{D}_{ref}$ 143
4.3 Moments statistiques distribution LogNormale des résultats d'essais 144
4.4 Résultats du Test de Ratio de vraisemblance 144
4.5 Paramètres du modèle d'accélération et de la répartition de la durée de vie en fatigue du modèle de référence 146
4.6 Paramètres matériau du mécanisme 151
4.7 Type de distribution et caractéristiques statistiques des paramètres incertains du modèle de référence 154
4.8 Moments statistiques de la durée de vie en fatigue de la conception de référence 156
4.9 Paramètres de la distribution numérique des durées de vie de $\mathcal{D}_{ref}$ 157
4.10 Paramètres incertains de la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$ 160
4.11 Moments statistiques de la durée de vie numérique pour la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$ 161
4.12 Paramètres de la distribution de durées de vie numérique pour $\mathcal{D}_{up}$ 161
4.13 Moments statistiques des durées de vie expérimentales de la version $\mathcal{D}_{ref}$ du mécanisme 164
4.14 Moments statistiques des durées de vie numériques versions $\mathcal{D}_{ref}$ et $\mathcal{D}_{up}$ du mécanisme 164
4.15 Paramètres de la distribution de durées de vie numérique pour la nouvelle version 164
4.16 Paramètres de la distribution de durées de vie numérique pour la version de référence 164
4.17 Paramètres de la distribution de durées de vie estimées pour la nouvelle version 165
4.18 Estimations des paramètres de la fonction de transfert temporel 166
4.19 Paramètres estimés par la méthode FTT de la distribution LogNormale de durées de vie *expérimentale* de la nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ 168
4.20 Calcul des distances de Kolmogorov-Smirnov 170
4.21 caption 174

4.22 Moments statistiques actualisés de la durée de vie numérique pour $\mathcal{D}_{ref}$ 175
4.23 Paramètres actualisés de la distribution de durées de vie numérique pour $\mathcal{D}_{ref}$. 175
4.24 Moments statistiques actualisés de la durée de vie numérique pour $\mathcal{D}_{up}$ 175
4.25 Paramètres actualisés de la distribution de durées de vie numérique pour $\mathcal{D}_{up}$. 176
4.26 Comparaison des distances de Kolmogorov-Smirnov après actualisation 177
4.27 Plan démonstration zéro défaillance : nombre d'essais à réaliser pendant t_{essai} . 179
4.28 Information sur la fiabilité R_{demo} à t_{demo} 179
4.29 Résultats par approche Bayésienne classique 181
4.30 Résultats par approche Bayésienne avec pondération 182

Nomenclature

Acronyms / Abbreviations

FAS FAURECIA Automotive Seating

FMDS Fiabilité, Maintenabilité, Disponibilité, Sécurité

FORM First Order Reliability Method

FORM Second Order Reliability Method

FS Facteur de Similitude

FTT Fonction de Transfert Temporel

MCMC Markov Chain Monte-Carlo

MCS Monte-Carlo Simulations

MDD Méthode de Décomposition de la Dimension

MEF Méthode des éléments finis

MH Metropolis-Hastings

MV Maximum de Vraisemblance

P_f Probabilité De Défaillance

PCE Polynomial Chaos Expansion

RAMS Reliability, Availability, Maintainability, Safety

RETEX Retour d'expériences

SdF Sûreté de Fonctionnement

SRQ Surface de Réponse Quadratique

SVA Standards de Vie Accélérée

SVM Support Vector Machine

1

Introduction générale

« *The science of today is the technology of tomorrow*. »

Edward Teller

Contents

1.1 Contexte 22
1.2 Problématique de l'estimation de fiabilité en phase de développement . . 23
1.3 Objectifs de la thèse 26
1.4 Organisation du document 29

1.1 Contexte

En commençant cette introduction générale, notons que l'origine des travaux relatifs à cette thèse émane d'un besoin industriel exprimé par la société FAURECIA Automotive Seating (*FAS*) du site de Caligny. *FAS* est un équipementier automobile d'envergure internationale qui conçoit, développe et fabrique l'ensemble des composants du siège automobile comme les armatures, les mécanismes ou les moteurs. Il assemble également des sièges complets avant et arrière. Les mécanismes (figure 1.1) ont pour but d'assurer le réglage du siège et sont répartis en trois principaux types de produits génériques à savoir les glissières, permettant de faire coulisser le siège ; les articulations, permettant de régler l'inclinaison du dossier et les poignées à pompage, permettant de régler la hauteur du siège. A noter qu'un siège représente 5% du coût global d'un véhicule. FAURECIA est premier mondial des mécanismes et structures de sièges et troisième mondial des sièges complets.

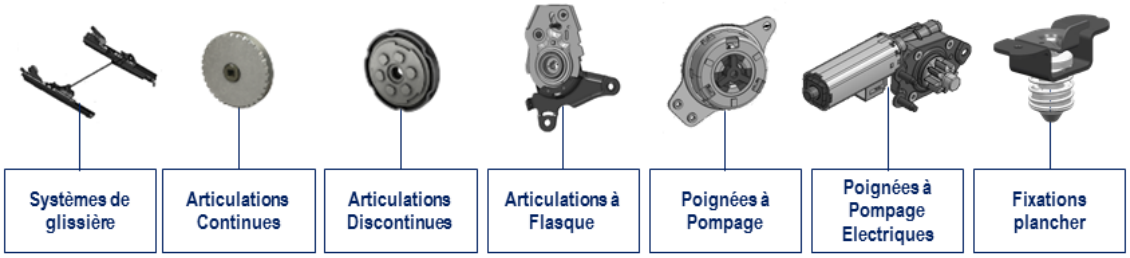


Fig. 1.1. Les Différents types de mécanismes de siège automobile chez FAURECIA

L'automobile est un secteur très concurrentiel pour les équipementiers. De plus, afin de garantir la sécurité des clients finaux (les automobilistes), les réglementations en matière de sécurité et de sûreté de fonctionnement sont de plus en plus exigeantes aux regards de la complexité des fonctions à assurer et des environnements de fonctionnement. Dans ce contexte, pour garder sa part de marché et l'étendre à d'autres partenaires, il devient incontournable pour l'équipementier d'assurer et de prouver *la qualité dans le temps* de ses produits. Cette notion de qualité dans le temps ou dans la durée, sous entend la fiabilité du produit.

En effet, il est largement reconnu aujourd'hui, en particulier dans l'industrie automobile, que la fiabilité est l'un des paramètres les plus importants qui caractérisent la performance des produits. On admet donc que, les produits ayant le plus haut niveau de fiabilité sont les plus disponibles et les plus sûrs. Pour ces raisons, les clients sont de plus en plus intéressés par des produits de haut niveau de fiabilité, et les fabricants sont contraints de recourir à des méthodes et outils efficaces de prévision, d'estimation et de démonstration de fiabilité.

La particularité de FAURECIA se situe dans la diversité de ses produits avec un fort aspect d'innovation. Ceci rend difficile la standardisation d'une démarche de fiabilité englobant toute la diversité de produits. En effet, FAURECIA a une organisation particulière de son processus de conception dans le sens où il y a deux phases de conception : la phase innovation où sont développés des produits dits « génériques » et une phase programme où les génériques sont

adaptés et deviennent des « applicatifs ». Les génériques sont donc des concepts innovants de mécanismes pouvant être utilisés pour plusieurs cahiers des charges et/ou plusieurs clients. Pour le service mécanisme, il n'existe que quelques références génériques de chaque type de produit. En revanche, il existe un grand nombre d'applicatifs de chaque référence. Par exemple, pour une glissière le profil est générique en revanche les accroches avec le siège, ou le planché véhicule peuvent être différents selon les applicatifs.

Dans ce contexte, l'estimation de la fiabilité de nouveaux produits, au début du processus de développement (Phase innovation), présente un grand intérêt. Elle aidera l'équipementier à améliorer la fiabilité de ses produits avant d'atteindre le marché et, par conséquent, à faire face efficacement à la concurrence. En effet, à ce stade, au tout début du cycle de vie du produit, les ingénieurs ont encore une grande marge de manœuvre pour revoir la conception. Dans le cas contraire, où ces modifications sont apportées durant des étapes plus avancées du cycle de vie du produit (Phase programme), cela pourrait engendrer d'énormes pertes de temps et entraîner des coûts supplémentaires. Il est alors nécessaire pour FAURECIA de mettre en place, une démarche de fiabilité propre à ses réalités et qui englobe des méthodes et outils efficaces d'estimation et de démonstration de fiabilité s'intégrant au plus tôt dans l'étude de conception des produits. C'est ce contexte qui motive la présente thèse de doctorat.

1.2 Problématique de l'estimation de fiabilité en phase de développement

Par le passé, on note lors du processus de développement de produits, l'introduction tardive d'une démarche de formalisation de la fiabilité future des produits. Les essais de fiabilité ne viennent que comme une validation finale du produit conçu. Autrement dit, une estimation de la fiabilité du produit n'est disponible qu'après avoir déroulé tout le processus de conception. Dans le cas où le niveau de cette fiabilité n'est pas satisfaisant, il faut réitérer toutes les étapes de ce processus jusqu'à l'atteinte du niveau requis. Cette manière traditionnelle de faire ne permet plus aujourd'hui aux entreprises, de faire face efficacement aux nouvelles exigences des clients et la tendance est l'intégration d'une démarche de fiabilité au plus tôt dans le processus de développement (figure 1.2).

En mécanique, les trois dernières décennies ont vu l'émergence de méthodes de calcul probabiliste (Schuëller and Stix, 1987) qui pourraient constituer une alternative intéressante pour résoudre le problème d'estimation de la fiabilité en phase de développement. En plus de l'estimation de la fiabilité, ces méthodes permettent aussi d'effectuer des analyses de sensibilité, ou encore des analyses de tendance centrale. Brièvement, et dans le contexte d'estimation de la fiabilité, ces méthodes nécessitent d'abord la modélisation des différentes sources d'incertitudes, ensuite le développement d'un modèle physique, explicite ou implicite, permettant de décrire avec précision le mode de défaillance auquel est soumis le composant mécanique, enfin

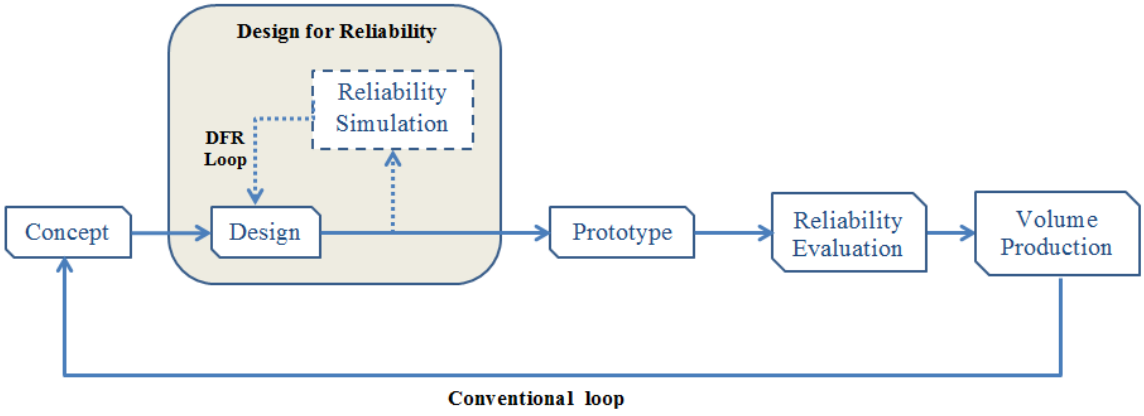


Fig. 1.2. Fiabilité en conception dans le processus de développement

l'estimation de fiabilité est obtenue en utilisant une stratégie de couplage mécano-probabiliste permettant la propagation des incertitudes à travers le modèle physique.

Malheureusement, la plupart de ces approches d'évaluation de la fiabilité sont inefficaces pour le traitement de problèmes d'ingénierie, principalement parce que, d'une part, la simulation des modèles mécaniques demandent des simplifications au niveau de la modélisation et d'important temps de calcul puisqu'ils sont souvent disponibles sous forme implicite (par exemple, le modèle éléments finis) ; d'autre part le nombre de paramètres incertains pourrait être très élevé ce qui induirait une évolution exponentielle du nombre d'appels du modèle mécanique (Caflisch et al., 1997). De plus, le temps de calcul est sensible au niveau de fiabilité cible. En effet, plus le niveau de fiabilité cible est élevé (moins la probabilité de défaillance de la cible est faible), ce qui est le cas des composants automobiles, plus le temps de calcul est élevé pour obtenir des résultats précis. L'utilisation des approches fiabilistes nécessite souvent de faire certaines hypothèses, par exemple, sur le type de distribution des paramètres incertains (normale, uniforme, ...) et/ou sur les paramètres statistiques (moyenne, écart-type, ...) associés, puisque les informations ne sont pas souvent disponibles. Ceci peut expliquer l'écart significatif souvent observé entre les estimations obtenues par ces méthodes fiabilistes et la fiabilité réelle du produit. Par conséquent, la seule utilisation d'approches numériques *brutes* pour réaliser une analyse de fiabilité au cours d'un processus de qualification de produits peut conduire à des résultats erronés.

Dans le même temps, une analyse de fiabilité basée sur des données expérimentales limitées (pour raisons de coûts) n'est pas une tâche triviale, et réaliser des essais supplémentaires, chaque fois que l'on a de nouveaux produits, ne serait pas non plus la meilleure solution. Heureusement, les composants mécaniques sont principalement évolutifs et non révolutionnaires, en particulier pour l'industrie automobile. En effet, pour un produit donné, les nouvelles versions ont souvent la même structure que le modèle de référence, et seules quelques petites modifications sont effectuées. Ainsi, l'estimation de la fiabilité au début du processus de développement du produit peut être bien traitée, si l'on est en mesure d'intégrer les données disponibles sur des produits similaires ou des versions antérieures, comme information préalable.

Dans ce contexte, les approches bayésiennes, qui combinent des données expérimentales et numériques de fiabilité, ont suscité un grand intérêt dans la littérature. Un type d'approches bayésiennes consiste d'abord à attribuer une distribution a priori à la probabilité de défaillance ou aux paramètres de la distribution de durées de vie en fonction des connaissances existantes sur le produit, puis à mettre à jour cette distribution lorsque de nouvelles informations sont disponibles (Martz and Waller, 1982). Par exemple, pour améliorer la précision de l'estimation de distribution de durées de vie d'un composant automobile (Joint) tout en réduisant le nombre de d'essais, (Guerin and Hambli, 2007) ont proposé une estimation bayésienne des paramètres de la loi de distribution (LogNormale) en incorporant comme connaissances a priori, des résultats obtenus par calcul éléments finis (durée de vie moyenne en fatigue mécanique) et avis d'expert (variance). Une telle approche ne peut être utilisée que lorsque des informations pertinentes sont disponibles pour construire la distribution a priori. Le deuxième type d'approches (Kiureghian, 1989) consiste tout d'abord à caractériser les réponses (par exemple le niveau de contrainte) du modèle constitutif (c'est-à-dire le modèle mécanique) à travers une propagation des incertitudes associées aux paramètres d'entrée. Ensuite, les données fournies au moyen d'essais sur les paramètres d'entrée sont utilisées pour mettre à jour leur distribution respective et, par conséquent, mettre à jour l'estimation de fiabilité. Malheureusement, cette dernière approche souffre d'un manque de cohérence, puisqu'elle n'utilise pas les données des essais de fiabilité. Pour cette raison (Zhang and Mahadevan, 2001) ont développé une approche originale capable d'utiliser les données d'essais de fiabilité en conjonction avec les méthodes fiabilistes. Malgré que, les auteurs aient démontré son efficacité que sur des exemples académiques ; cette méthode pourrait être étendue facilement à des problèmes pratiques d'ingénierie.

(Guida and Pulcini, 2002 ; Guida et al., 2009) ont proposé une procédure bayésienne pour l'estimation de la fiabilité de nouveaux composants automobiles améliorés, en utilisant à la fois des données de défaillance relatives à des versions précédentes et des informations préalables sur le processus technique utilisé pour la modification du produit lui-même au lieu de données nécessitant des essais de fiabilité supplémentaires. En effet, dans le cadre d'une amélioration de produits, l'objectif principal des concepteurs est d'éviter les modes de défaillance critiques observés dans les versions précédentes, à travers des modifications. Si de telles modifications sont efficaces, on peut éliminer la plupart des défauts de la conception précédente et, par conséquent, réduire la probabilité de défaillance associée à la nouvelle conception. L'efficacité des modifications de conception est mesurée au moyen d'un facteur d'amélioration défini comme étant le rapport entre la nouvelle probabilité moyenne de défaillance du modèle amélioré et la probabilité de défaillance du modèle de référence. Ces facteurs sont ensuite représentés par des variables aléatoires pour capturer les incertitudes sur l'efficacité des modifications de conception. Cette approche prend également en compte l'effet des conditions de travail et la réduction des coûts. Avec une application sur un sous-système amélioré utilisé dans un modèle de voiture déjà commercialisé, les auteurs ont démontré que l'approche fournit une estimation plus précise de la probabilité de défaillance.

L'utilisation conjointe du calcul bayésien et de l'inférence floue est également étudiée en vue d'analyse de fiabilité en phase de développement. Dans ce contexte, (Yadav et al., 2003) ont développé une approche capable de prendre en compte des informations qualitatives telles que le jugement d'ingénieurs, l'avis d'experts, les conditions d'exploitation et environnementale. En effet, au début du processus de développement de nouveaux produits, peu ou pas d'informations quantitatives sont disponibles, en particulier pour l'analyse de fiabilité. En utilisant le système d'inférence floue, différents types d'informations qualitatives peuvent être abordées et intégrées à l'approche bayésienne pour améliorer sa capacité. La distribution a priori de la probabilité de défaillance est modélisée par la distribution de Weibull où ses paramètres sont estimés à partir des données de garantie d'anciens produits similaires, puis elle est mise à jour via le système d'inférence floue. L'applicabilité de cette approche aux problèmes d'ingénierie a été illustrée, à travers l'analyse de fiabilité d'un système amélioré de direction automobile, pour lequel des informations qualitatives et des données d'essais de fiabilité sont disponibles. Cette même dernière idée a été reprise par (Liu et al., 2013) et améliorée par l'intégration d'un réseau de neurones artificiel qui fournit une cartographie précise entre les entrées et les sorties, lorsque des modèles explicites et implicites ne sont pas disponibles. Cette approche est très utile pour effectuer des analyses de fiabilité sur des systèmes non linéaires complexes, tels que ceux rencontrés dans l'industrie automobile.

1.3 Objectifs de la thèse

On retient de ce qui précède que l'estimation de la fiabilité en phase de développement reste un problème difficile, principalement en raison du manque de données disponibles et du coût élevé des campagnes d'essais, et nécessite de toujours chercher à développer des méthodologies adaptées au contexte. En effet, les approches expérimentales nécessitent des prototypes et des équipements de tests et peuvent devenir coûteux, notamment dans un contexte d'innovation intense, où chaque nouveau développement peut parfois remettre en question les moyens de test existants. Par conséquent, il est clair que lorsque les méthodes basées sur la simulation numérique sont suffisamment efficaces et pertinentes, elles peuvent constituer une alternative intéressante. En effet, les solutions numériques offrent de nombreuses possibilités et avantages. Elles fournissent une estimation de la fiabilité plus tôt dans le processus de développement à faible coût et permettent d'étudier plusieurs solutions de conception pour en choisir une meilleure. Cependant, à cause des simplifications et hypothèses dont elles sont sujettes, elles restent limitées pour des applications industrielles.

Dans l'industrie automobile, au sein d'une même famille de produits mécaniques, les produits présentent de grandes similitudes d'une version à l'autre car les nouveaux développements sont des adaptations de précédentes pour répondre aux nouvelles spécifications des clients ou proposer des produits innovants sur le marché. Pour l'équipementier *FAS*, l'estimation de fiabilité des versions de mécanismes, au cas par cas, indépendamment des versions antérieures, est une

approche inopportune et coûteuse qui ne permet pas de répondre rapidement aux exigences de fiabilité. L'objectif de *FAS* est donc de standardiser une démarche efficace d'estimation de fiabilité, pouvant englober toute la diversité des versions, et s'intégrant au plus tôt dans l'étude de conception des produits. Pour ce faire, aux vues des difficultés relevées précédemment, le travail de thèse vise au développement d'une méthodologie pour l'estimation de fiabilité combinant approches numériques et retour d'expérience existant pour améliorer l'estimation de fiabilité en phase de développement de sous ensembles mécaniques développés par *FAS*. Comme illustré sur la figure 1.3, la méthodologie envisagée se subdivise en plusieurs phases.

La première phase des travaux de la thèse sera la construction de distribution de fiabilité d'un mécanisme de référence sélectionné pour l'étude en exploitant le Retour d'expériences ($RETEX$) dont dispose $FAURECIA$. Ce $RETEX$ est essentiellement constitué de résultats d'essais de plusieurs natures. Selon le but particulier visé par l'essai, on peut distinguer les essais de sûreté, les essais fonctionnels, et les essais de durabilité ou d'endurance. Il existe aussi des essais accélérés réalisés dans le cadre de projet d'étude de fiabilité sur certains mécanismes.

Parallèlement à la construction des modèles de fiabilité basée sur le $RETEX$, la deuxième phase consiste au développement de l'analyse de la fiabilité prévisionnelle par simulation numérique permettant d'étudier l'influence des différents paramètres de conception qui peuvent représenter la géométrie, les propriétés des matériaux et le chargement. Généralement les structures mécaniques sont dimensionnées dans un contexte déterministe, mais dans la réalité les paramètres de conception ne sont pas parfaitement connus et il est plus judicieux de les modéliser par des variables aléatoires afin de tenir compte de l'incertitude inhérente à chacun d'eux. Le modèle numérique envisagé sera donc un modèle mécano-probabiliste. Il sera alors possible en définissant des critères de résistance, d'établir une ou plusieurs fonctions de performance du sous-ensemble mécanique et obtenir une estimation prévisionnelle de sa fiabilité.

Dans la troisième phase, il s'agira de réaliser pour ce mécanisme de référence, une analyse comparative des fonctions de fiabilité expérimentale (obtenue à partir du $RETEX$) et celle obtenue à partir du modèle numérique mécano-probabiliste. En effet, à cause d'un certain nombre de simplifications nécessaires dans la modélisation numérique (au niveau de la géométrie, des caractéristiques matériaux, des chargements, des conditions limites, choix de maillage, etc...), un écart est induit entre la fonction de fiabilité prévisionnelle (numérique) et la fonction de fiabilité expérimentale. La quatrième phase, une des plus importantes de la méthodologie, consistera donc à définir une méthode de passage entre les deux fonctions de fiabilité. Ensuite, dans le cadre de développement d'un mécanisme similaire au mécanisme de référence, on réalisera dans un premier temps une analyse pour juger de la similarité des deux versions de mécanismes ; c'est la cinquième phase. Si les deux mécanismes sont jugés similaires, on procède donc à la construction de la loi de fiabilité numérique prévisionnelle pour la nouvelle version de mécanisme (sixième phase), et enfin en septième phase, grâce à la méthode de passage entre fiabilité expérimentale et numérique précédemment définie, on peut déterminer une estimation

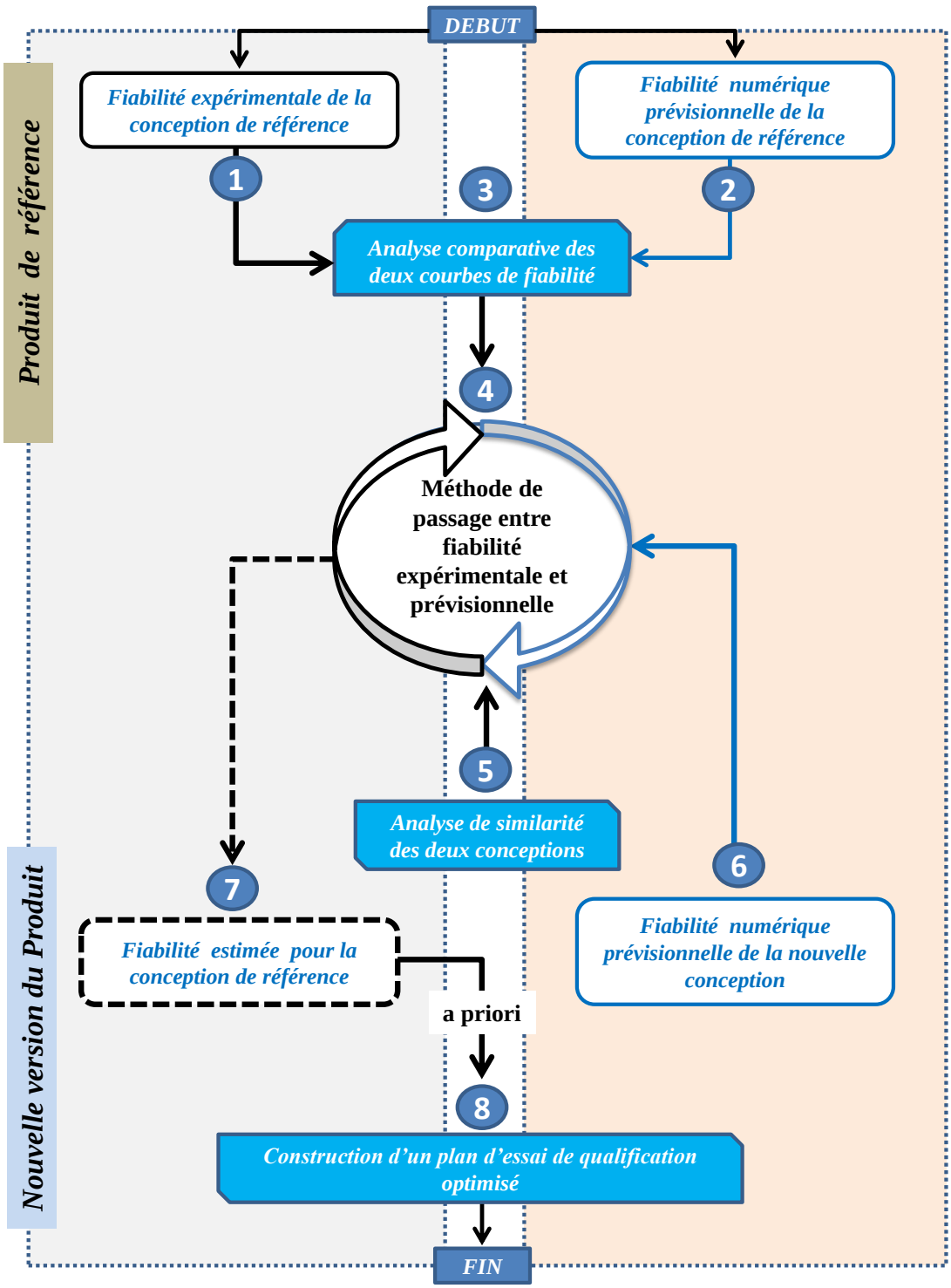


Fig. 1.3. Organigramme de la méthodologie proposée

de la *fiabilité expérimentale* pour la nouvelle version du mécanisme. Notons qu'à ce stade, cette appellation est abusive pour la nouvelle version de mécanisme, car il ne s'agit pas de la vraie fonction de fiabilité obtenue par analyse de résultats d'essais, mais plutôt d'une estimation intégrant la fonction de fiabilité numérique et le retour d'expérience existant sur le mécanisme de référence. Nous désignerons donc cette estimation par fonction de fiabilité a priori associée au

nouveau développement.

Pour finir, les travaux de thèse visent également à développer une méthode de qualification du nouveau développement utilisant une démarche bayésienne pour augmenter la qualité d'estimation dans un contexte de faibles tailles d'échantillon, permettant ainsi l'optimisation des coûts d'essais.

1.4 Organisation du document

Dans le présent chapitre, **chapitre** 1, ont été exposé le contexte dans lequel se situe ce travail de thèse, la problématique à résoudre ainsi que les objectifs visés. Le **chapitre** 2 est une synthèse bibliographique présentant les notions générales de la fiabilité. Dans ce chapitre, nous avons eu à définir les différentes caractéristiques de la fiabilité, à situer la fiabilité dans les différentes phases du cycle de développement de produits. Les méthodes d'estimation de fiabilité tout au long du cycle de développement ont été exposées avec un accent particulier sur l'estimation prévisionnelle de fiabilité par couplage mécano-probabiliste. Le **chapitre** 3 est consacré à la présentation de la méthodologie proposée dans le cadre de ce travail de thèse. Il détaille une technique de couplage mécano-probabiliste basée sur un méta-modèle pour l'estimation prévisionnelle de fiabilité, puis une méthode d'intégration du retour d'expérience existant dans l'estimation de fiabilité d'un nouveau développement. Le **chapitre** 4 présente une application de la méthodologie sur un composant mécanique automobile sollicité en fatigue mécanique. Il est composé d'une partie sur l'analyse du retour d'expérience qui est disponible sous forme de résultats d'essais accélérés, une partie sur l'analyse de modèles mécaniques déterministes (Calcul éléments finis), une partie sur l'estimation prévisionnelle de fiabilité, une partie sur l'estimation de fiabilité de la nouvelle conception et une démarche d'optimisation de la qualification. Pour finir, le **chapitre** 5, expose les conclusions générales ainsi que les différentes perspectives relatives à ce travail de thèse.

2

Notions générales sur la fiabilité

« *I like to learn. That's an art and a science.* »

Katherine Johnson

Contents

2.1 Introduction **34**

2.2 Caractérisation de la fiabilité **35**

2.2.1 Mesures associées à la fiabilité 35

2.2.1.1 Fonction de fiabilité 35

2.2.1.2 Fonction de répartition et fonction de densité 36

2.2.1.3 Taux de défaillance instantané 36

2.2.1.4 MTTF 37

2.2.2 Principales lois de distributions utilisées en fiabilité 37

2.2.2.1 Loi normale 37

2.2.2.2 Loi LogNormale 38

2.2.2.3 Loi Weibull 38

2.2.2.4 La loi de Birnbaum-Saunders 39

2.2.2.5 La loi du Khi-deux 40

2.2.3 Théorie de l'estimation 41

2.2.3.1 Estimateur ponctuel 41

2.2.3.2 L'estimation par Maximum de Vraisemblance 42

2.2.3.3 Classification des méthodes d'estimation de fiabilité 44
2.2.4 Fiabilité dans le cycle de vie d'un produit 45
2.2.4.1 Courbe en baignoire 45
2.2.4.2 Cycle de vie d'un système mécanique 45
2.2.4.3 Fiabilité dans le cycle de développement d'un produit . . . 46
2.2.5 Particularité de la fiabilité mécanique 47
2.2.5.1 Mécanismes de défaillance des composants mécaniques . . 47
2.2.5.2 Modèle de fiabilité de composants mécaniques standards . 48
2.2.5.3 Fiabilité de composants mécaniques spécifiques : Méthode R-C 49
2.3 Fiabilité prévisionnelle par couplage mécano-probabiliste 51
2.3.1 Modélisation probabiliste de l'incertain 52
2.3.1.1 Types d'incertitudes 52
2.3.1.2 Modèles probabilistes 53
2.3.1.3 Transformation isoprobabiliste 54
2.3.1.4 Propagation de l'incertitude 57
2.3.2 Formulation mathématique du problème de fiabilité 58
2.3.2.1 Fonction d'état limite 58
2.3.2.2 Expression de la probabilité de défaillance 59
2.3.3 Notion d'indice de fiabilité 60
2.3.3.1 Indice de Rjanitzyne-Cornell 60
2.3.3.2 L'indice de Hasofer et Lind 61
2.3.3.3 Recherche du point de conception 62
2.3.4 Calcul de la probabilité de défaillance 63
2.3.4.1 Simulations Monte-Carlo 64
2.3.4.2 First and Second Order Reliability Method (FORM/SORM) 66
2.3.4.3 Méthode de surface de réponse quadratique 70
2.4 Fiabilité expérimentale par les essais 72
2.4.1 Les types d'essais 72
2.4.1.1 Les essais de robustesse 72
2.4.1.2 Les essais d'estimation de la fiabilité 73
2.4.1.3 Les essais de déverminage 73
2.4.2 Estimation de la fiabilité par les essais accélérés 74
2.4.2.1 Plan d'essais accélérés 75
2.4.2.2 Modèles Standards de Vie Accélérée 76
2.4.2.3 Modèles d'accélération courants 79
2.4.3 Essais bayésiens 81
2.4.3.1 Objectif des essais bayésiens 81

2.4.3.2 Principe des essais bayésiens 81
2.5 Conclusion 83

2.1 Introduction

La notion de fiabilité devient incontournable dans presque tous les secteurs d'activités, notamment l'aéronautique, le ferroviaire, l'automobile et les systèmes d'informations. Dans ces secteurs, les systèmes développés sont de plus en plus complexes et doivent fonctionner dans des environnent très contraignants. En effet, dans le contexte industriel actuel, les besoins évoluent très rapidement, la concurrence plus rude avec des clients de plus en plus exigeants en matière de fiabilité et de sécurité, exigences auxquelles les industriels doivent répondre pour rester concurrentiels. Qu'est ce donc la fiabilité ? quelles sont ses caractéristiques et quelles sont les méthodes d'évaluations ? C'est ce qui fait l'objet de ce chapitre bibliographique.

Il serait inapproprié d'introduire la fiabilité sans au préalable définir la sûreté de fonctionnement. La sûreté de fonctionnement (SdF), est l'ensemble des outils et méthodes qui permettent d'analyser, de caractériser, d'évaluer, de quantifier, de prévoir et de maîtriser les défaillances des systèmes.

Par défaillance, on sous-entend, la cessation de l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise.

On rencontre dans la littérature, plusieurs propositions de définition de la sûreté de fonctionnement. Elle se définit comme ; la science des défaillances (Villemeur, 1988) ; la confiance justifiée dans le service délivré (Arlat and Laprie, 1995) ; ou encore le maintien de la qualité dans le temps (Mortureux, 2001).

La (SdF) se caractérise par la mise en place d'un processus d'étude intégré aux différentes phases de développement du système et se décrit généralement sous l'acronyme $FMDS$ (d'après la définition dans (Fournier, 1993)) qui rappelle ses quatre grandeurs caractéristiques que sont la fiabilité, la maintenabilité, la disponibilité et la sécurité ou en anglais *RAMS* (Reliability, Availability, Maintainability, Safety). On peut définir ces termes comme suit :

— ***La fiabilité*** est l'aptitude d'une entité à accomplir les fonctions requises dans des conditions données pendant une durée donnée.

— ***La disponibilité*** est l'aptitude d'une entité à être en état d'accomplir les fonctions requises dans les conditions données et à un instant donné.

— ***La maintenabilité*** est l'aptitude d'une entité à être maintenue ou rétablie dans un état dans lequel elle peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est réalisée dans des conditions données avec des procédures et des moyens prescrits.

— ***La sécurité*** est l'aptitude d'une entité à éviter de faire apparaître, dans des conditions données, des événements critiques ou catastrophiques.

On peut ressortir de là que la fiabilité d'un système ou d'une entité, est une grandeur qui permet de juger de la performance dudit système dans le temps.

L'analyse de fiabilité recouvre de multiples aspects : l'analyse de défaillance des systèmes, la fiabilité prévisionnelle, les banques de données de fiabilité, les essais de fiabilité, la fiabilité opérationnelle, les méthodes prévisionnelles de fiabilité et de sécurité, l'assurance de la fiabilité et de la qualité (Villemeur, 1988).

Dans le domaine de la mécanique, l'analyse de la fiabilité est un outil très important pour caractériser le comportement du produit dans les différentes phases de vie, mesurer l'impact des modifications de conception sur l'intégrité du produit, qualifier un nouveau produit et améliorer ses performances tout au long de sa mission (Tebbi, 2005).

Ainsi, il est important pour les concepteurs, de veiller tout au long du processus de développement d'un système, à la croissance de fiabilité, afin d'atteindre les objectifs escomptés de fiabilité. La croissance de fiabilité se définit comme un ensemble de moyens à déployer afin de respecter les engagements de fiabilité contractuels imposés par le client et ce, dès la phase d'offre ou d'avant-projet. L'objectif est que le système soit mature lors de la mise en service opérationnel et que le déverminage ait été idéalement effectué avant livraison chez le client.

2.2 Caractérisation de la fiabilité

2.2.1 Mesures associées à la fiabilité

2.2.1.1 Fonction de fiabilité

La fiabilité ou fonction de survie (figure 2.1) est une caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité qu'il accomplisse une fonction requise, dans des conditions données pendant une durée donnée. En terme mathématique, elle est représentée par la fonction $R(t)$ qui est la probabilité que le dispositif soit non défaillant sur l'intervalle de temps $[0, \ t]$, en supposant qu'il n'est pas défaillant à l'instant $t = 0$. Soit T la variable aléatoire non négative représentant le temps de bon fonctionnement du dispositif. T peut être continue ou discrète. La fonction de fiabilité s'écrit donc :

$$R(t) = Prob\,(T \geq t) \tag{2.1}$$

$R(t)$ est une fonction décroissante sur l'intervalle $[0, \ +\infty]$ avec $R(0) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} R(t) = 0$

La variable temps peut prendre plusieurs sens en fonction du type de problème étudié. Elle peut désigner par exemple, le nombre de cycles de verrouillage - déverrouillage d'une articulation de siège automobile, le nombre de tours pour un moteur, ou le nombre de kilomètres (distance parcourue) pour une voiture, etc...

De la fonction de fiabilité, nous définissons dans les paragraphes suivants, quelques autres caractéristiques de la fiabilité.

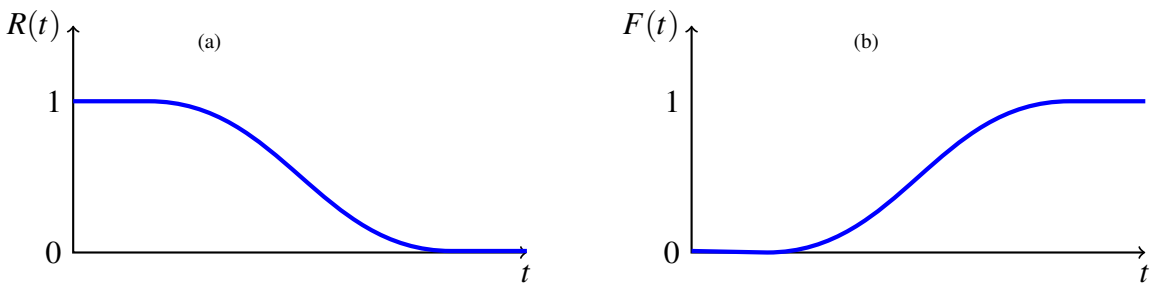


Fig. 2.1. (a) Fonction de fiabilité et (b) fonction de répartition

2.2.1.2 Fonction de répartition et fonction de densité

Le complément de la fiabilité, appelé fonction cumulée de défaillance ou fonction de répartition des temps de défaillance (figure 2.1), est défini par :

$$F(t) = 1 - R(t) \tag{2.2}$$

La dérivée de la fonction de répartition par rapport au temps, permet de définir une nouvelle fonction $f(t)$ appelée fonction de densité :

$$f(t) = dF(t)/dt = -dR(t)/dt \tag{2.3}$$

$f(t).dt$ représente la probabilité instantanée de défaillance à un temps spécifique t.

2.2.1.3 Taux de défaillance instantané

Le taux de défaillance $\lambda(t)$ ou encore taux de panne, représente la probabilité conditionnelle, divisée par dt, de défaillance du matériel dans l'intervalle de temps $[t, \ \ t+dt]$, sachant que ce matériel a survécu jusqu'à l'instant t :

$$\lambda(t) = \frac{-dR(t)/dt}{R(t)} = f(t)/R(t) \tag{2.4}$$

On en déduit l'expression suivante de la fiabilité :

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\nu).d\nu} \tag{2.5}$$

Dans le cas où le taux de défaillance λ est constant, on a alors une loi de survie exponentielle, c'est à dire $R(t) = e^{-\lambda t}$.

Terminons cette partie par la définition d'une autre caractéristique qui est le temps moyen de fonctionnement.

2.2.1.4 MTTF

Le temps moyen de fonctionnement jusqu'à la première défaillance que l'on désigne en anglais $MTTF$ (Mean Time To Failure) est défini par l'expression suivante :

$$MTTF = \int_0^{\infty} t.f(t).dt \tag{2.6}$$

On démontre grâce à l'équation (2.3) et une intégration par partie de l'équation (2.6), l'expression suivante du MTTF :

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t).dt \tag{2.7}$$

2.2.2 Principales lois de distributions utilisées en fiabilité

Dans les études de fiabilité, de nombreuses lois statistiques sont utilisées pour analyser les données de durée de vie. Il a été vérifié que dans la démarche fréquentielle ou classique que nous expliciterons par la suite, plus de quatre-vingt-dix pour cents des études probabilistes de fiabilité utilisent la loi exponentielle, la loi normale, la loi LogNormale, la loi de Weibull à deux paramètres, la loi bêta, la loi Gamma et la loi uniforme. Dans le cadre de cette thèse nous nous intéresserons aux lois les plus utilisées en fiabilité mécanique à savoir ; la loi normale, la loi LogNormale, la loi Weibull et la loi de Birnbaum-Saunders qui sont des lois à taux de défaillance variable contrairement à la loi exponentielle qui est une distribution à taux de défaillance constant. Pour finir, la loi Khi-deux beaucoup plus utilisée pour estimer les intervalles de confiance est présentée.

2.2.2.1 Loi normale

La loi normale (ou de Laplace-Gauss) est la plus répandue et la plus utilisée des lois de probabilités usuelles. Lorsqu'une variable est le résultat de la multiplication d'un grand nombre de petits facteurs indépendants, elle peut être modélisée par une loi normale. Ceci vaut à la loi normale, l'appellation de loi des grands nombres.

Pour une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, on définit la fonction de densité par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{2.8}$$

Et sa fonction de répartition par :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x).dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.dx = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{2.9}$$

Où ϕ et Φ représentent respectivement la fonction de densité et la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

En fiabilité, la distribution normale est utilisée pour représenter la distribution des durées de vie de dispositifs en fin de vie (usure) (Chapouille, 1980) car le taux de défaillance $\lambda(t) = f(t)/R(t)$ est toujours croissant (figure 2.2). Le même auteur suggère l'utilisation de la distribution normale que dans le cas où la moyenne des durées de vie est supérieure à trois fois l'écart-type, ceci afin de réduire jusqu'à 0.1% la probabilité théorique de trouver une durée de vie négative.

2.2.2.2 Loi LogNormale

La loi LogNormale aussi appelée loi de Galton est souvent utilisée en fiabilité pour modéliser la défaillance par fatigue. En effet, elle est basée sur le modèle de dommage cumulatif. C'est à dire, la quantité de dégradation d'un instant à l'autre est un petit multiple aléatoire de la quantité totale des dégradations déjà présentes (Ammar, 2013). Notons que lorsqu'une variable t est distribuée suivant une loi LogNormale, son logarithme népérien $ln(t)$ est distribué suivant une loi normale. Lorsqu'elle est définie par les paramètres μ_{LN} et σ_{LN}, l'expression de sa fonction de survie est la suivante :

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{ln(t) - \mu_{LN}}{\sigma_{LN}}\right) \tag{2.10}$$

μ_{LN} représente le paramètre d'échelle et σ_{LN} le paramètre de forme.

La fonction de densité d'une distribution LogNormale est la suivante :

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma_{LN}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(t)-\mu_{LN}}{\sigma_{LN}}\right)^2} \tag{2.11}$$

Sa fonction de répartition $F(t)$ s'obtient par :

$$F(t) = 1 - R(t) = \int_0^t \frac{1}{x\sigma_{LN}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(x)-\mu_{LN}}{\sigma_{LN}}\right)^2} dx \tag{2.12}$$

La loi LogNormale peut être utile dans la modélisation de données asymétriques vers la droite. On peut remarquer comme représenté sur la figure 2.2, que le taux de défaillance obtenu par distribution LogNormale, croît rapidement vers un maximum, puis décroît.

2.2.2.3 Loi Weibull

Elle est très utilisée pour évaluer la mortalité infantile ou le vieillissement des matériels. Elle concerne les matériels dont les taux de défaillance évoluent comme une fonction puissance du temps. La fonction de survie d'une loi Weibull de paramètre η, β, et γ est définie par :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}} \tag{2.13}$$

Où $(\eta > 0)$ est le paramètre d'échelle ; $(\beta >)$ est le paramètre de forme et γ le paramètre de position.

Pour une loi Weibull à deux paramètres (plus usuelle), $\gamma = 0$. On en déduit le taux de défaillance $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \tag{2.14}$$

Interprétation du taux de défaillance(voir figure 2.2) :

— Quand $\beta > 1$, le taux de défaillance est croissant et traduit donc un comportement de vieillissement du système.

— Quand $\beta < 1$, le taux de défaillance est décroissant. Ceci modélise un système dans sa phase de mortalité infantile.

— Quand $\beta = 1$, le taux de défaillance devient constant. On retrouve alors le cas d'un modèle exponentiel des durées de vie qui en réalité, n'est qu'un cas particulier du modèle de Weibull.

L'expression de la vitesse du vieillissement est obtenue par la dérivée du taux de défaillance. On remarque donc que dans le cas de vieillissement du système, le vieillissement s'accélère quand $\beta > 2$ (Bousquet, 2006).

2.2.2.4 La loi de Birnbaum-Saunders

Cette loi à deux paramètres (α et β), a été proposée par Birnbaum et Saunders (Birnbaum and Saunders, 1969a,b) pour caractériser la distribution des temps de défaillances dues à la propagation de fissure par fatigue.

Dans le cas d'une variable aléatoire non négative T représentant les instants de défaillance, cette distribution est obtenue en tenant compte des caractéristiques de base du processus de fatigue. La densité de probabilité d'une loi Birnbaum et Saunders est donnée par la formule :

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha^2\beta t^2}\right)\frac{t^2-\beta^2}{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\beta}{t}-2\right)\right] \tag{2.15}$$

Avec $t > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

La fonction de fiabilité s'écrit :

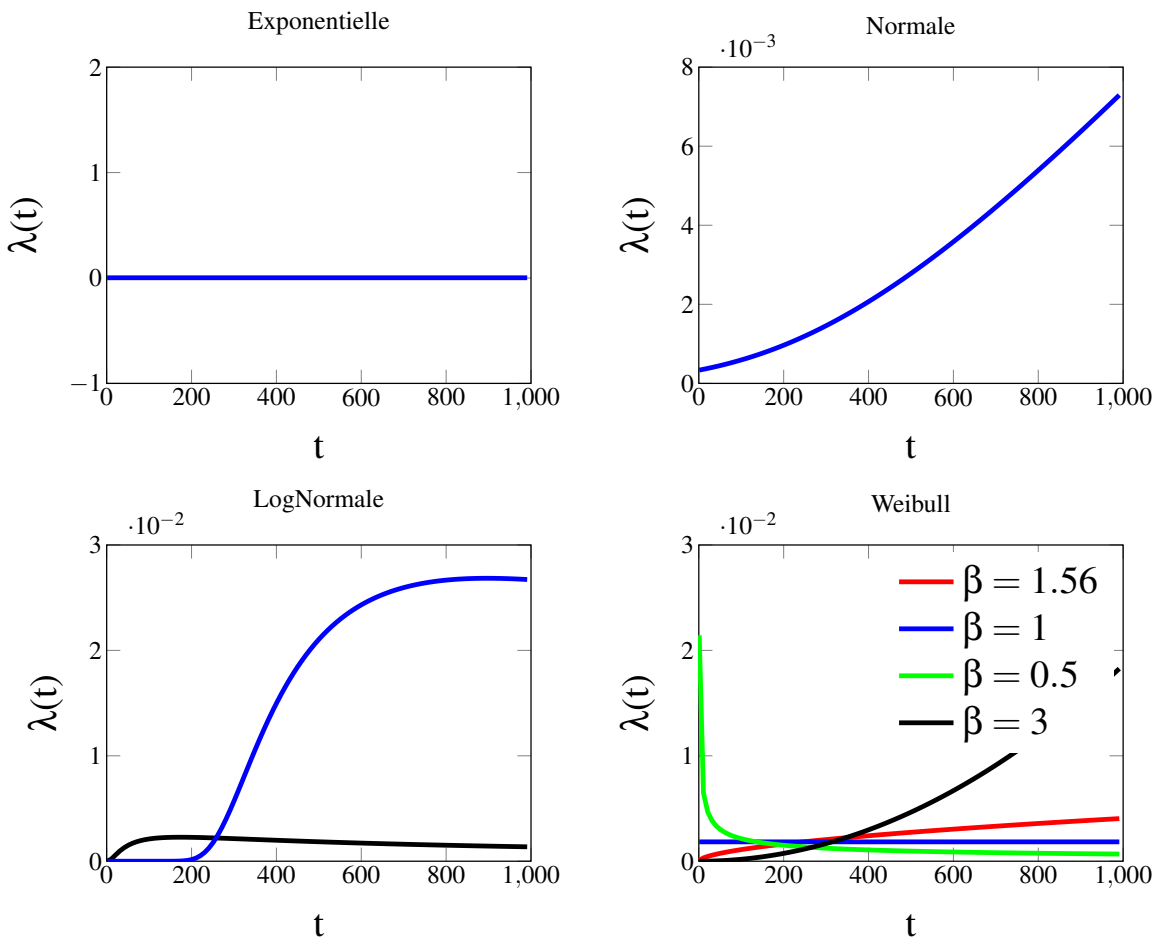


Fig. 2.2. Fonction de taux de défaillance pour différentes distributions

$$R(t) = 1 - \Phi\left\{\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}, \alpha > 0, \beta > 0 \tag{2.16}$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2.2.2.5 La loi du Khi-deux

Contrairement aux lois précédentes, la loi du Khi-deux, ne sert pas à modéliser directement la fiabilité, mais essentiellement au calcul des limites de confiance lors des estimations par intervalle de confiance (Tebbi, 2005). Cette loi est caractérisée par un paramètre $\nu \in \mathbb{N}$ appelé *degrés de liberté*.

La fonction densité de probabilité d'une loi de Khi-deux à ν degrés de liberté s'écrit :

$$f_\nu(t) = \frac{2^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}.e^{-\frac{t}{2}}.t^{\frac{\nu}{2}-1} \tag{2.17}$$

Dans cette formule, Γ est la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du \tag{2.18}$$

Lors de l'analyse de la distribution d'observations données qui peuvent être par exemple dans le cas de ce travail de thèse, des temps de défaillance obtenus par essais ; une fois la classe de loi choisie, il est nécessaire d'estimer les paramètres de la loi de distribution. Pour poser quelques bases de la démarche statistique généralement utilisée, nous présentons brièvement dans la section suivante, la théorie de l'estimation.

2.2.3 Théorie de l'estimation

En statistique quand on parle d'estimation d'un paramètre, ceci consiste à déterminer ce qu'on appelle l'estimateur ponctuel ainsi qu'un intervalle de confiance associé. Après avoir défini l'estimateur ponctuel, nous présentons, la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance (MV) Le Cam (1990) qui permet de déterminer en même temps que les estimateurs ponctuels, la matrice variance covariance qui rend possible la construction des intervalle de confiance.

2.2.3.1 Estimateur ponctuel

On s'intéresse à une caractéristique X d'une population dont la loi appartient à une famille paramétrique de lois dépendantes d'un paramètre réel inconnu $\theta \in \Theta \subset R_p, p \geq 1$. Pour une variable continue X, on note $f_\theta(x)$ la densité de la loi de X au point x. On considère un sondage de taille n de la population (l'observation de X sur n individus), noté $(x_1, ..., x_n)$. Soit, $X = (X_1, ..., X_n)$ l'échantillon aléatoire associé à ce sondage, dont une réalisation particulière est $(x_1, ..., x_n)$. On appelle statistique toute Variable Aléatoire (V.A.) qui dépend de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$ mais qui ne dépend pas du paramètre inconnu θ. On peut citer par exemple la moyenne empirique $\bar{X}_n$ ou encore $\sum_{j=1}^{n} X_j$.

Soit g_n une application sur Θ. On appelle estimateur ponctuel de $g(\theta)$ toute statistique T prenant ses valeurs dans $g(\Theta)$. Ici on utilise l'indice n pour souligner la dépendance de l'estimateur à la taille de léchantillon X. Si l'on considère un échantillon simple suivant une loi normale,

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R}^+ \tag{2.19}$$

on peut inférer sur les valeurs de l'espérance σ et de la variance σ^2, de la fonction de répartition de la loi normale : $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

On détermine donc l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ grâce à la moyenne empirique comme estimateur de l'espérance et la variance empirique comme estimateur de la variance.

2.2.3.2 L'estimation par Maximum de Vraisemblance

Considérons n matériels identiques mis en essai, sur lesquels on observe k défaillances aux instants $(t_1, t_2, ..., t_k)$ et $(n-k)$ censures à l'instant t_c. On suppose que ces occurrences sont indépendantes. Si f et R représentent respectivement les fonctions de densité et de fiabilité de paramètres $\theta = (\theta_1, ..., \theta_r)$, on définit la fonction de vraisemblance par le produit des probabilités de chaque occurrence :

$$\mathcal{L}(t,\theta) = \left(\prod_{j=1}^{k} f(t_j,\theta)\right) R(t_c,\theta)^{n-k} \tag{2.20}$$

L'estimateur du MV $\hat{\theta}$ est la valeur de θ qui permet de maximiser la fonction de vraisemblance Nikulin et al. (2007a) :

$$\hat{\theta} = argmax(\mathcal{L}(t,\theta)) \tag{2.21}$$

Pour des raisons de simplicité, on préfère généralement maximiser la log-vraisemblance $ln\mathcal{L}(t,\theta)$ par rapport à θ sans altérer le point de maximisation de la fonction. Si la fonction de log-vraisemblance est dérivable par rapport à θ alors l'estimateur du MV vérifie :

$$\left(\frac{\partial ln\mathcal{L}(T,\theta)}{\partial\theta}\right)^T = \left(\frac{\partial ln\mathcal{L}(T,\theta)}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial ln\mathcal{L}(T,\theta)}{\partial\theta_2}\right)^T = 0 \tag{2.22}$$

Dans la méthode de détermination des intervalles de confiance, on utilise l'information de Fisher sous l'hypothèse de normalité Nikulin et al. (2007b). Elle est définie comme la matrice des dérivées d'ordre deux de la log-vraisemblance calculée pour $\theta = \hat{\theta}$ qui satisfait l'équation (2.22). Elle est alors définie comme la matrice de covariance :

$$I(\theta_i\theta_j) = E_a\left[\left(\frac{\partial ln\mathcal{L}(T,\theta)}{\partial\theta_1}\right)\left(\frac{\partial ln\mathcal{L}(T,\theta)}{\partial\theta_2}\right)\right] \tag{2.23}$$

On suppose que $\psi(\theta)$ est le vecteur d'estimateur de $E(T)$ avec $T = (T_1, ..., T_n)^T$, de matrice de covariance cov_θ. Si la matrice d'information de Fisher $I(\theta)$ est définie positive, la borne de Cramer-Rao impose :

$$cov_\theta(T) \geq \left(\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial\theta}\right)[I(\theta)]^{-1}\left(\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial\theta}\right)^T \tag{2.24}$$

Où : $\frac{\partial\psi(\theta)}{\partial\theta}$ est une matrice qui a le ij^{eme} élément donné par $\frac{\partial\psi_i(\theta)}{\partial\theta_j}$.

D'après Fisher, si T est un estimateur sans biais de θ, c'est à dire que $\psi(\theta) = \theta$, alors l'inéquation (2.24) est simplifiée par :

$$cov_\theta(T) \geq I(\theta)^{-1} \tag{2.25}$$

La variance de $\hat{\theta}$, $Var(\hat{\theta})$ est calculée par la matrice de Fisher qui s'écrit, si la log-vraisemblance $L_i(t_i, \theta_i)$ est dérivable d'ordre deux, telle que :

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1 \partial \theta_r} \\ -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \ddots & & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_2 \partial \theta_r} \\ \dots & & \ddots & \dots \\ -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_r \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_r \partial \theta_2} & \dots & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_r^2} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

La matrice inverse de Fisher représente la matrice estimée de Variance Covariance

$$\hat{\Sigma}\hat{F}^{-1} = \begin{bmatrix} Var(\hat{\theta}_1) & Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \dots & Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_r) \\ Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \ddots & & Cov(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_r) \\ \dots & & \ddots & \dots \\ Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_r) & Cov(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_r) & \dots & Var(\hat{\theta}_r) \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

La construction des intervalles de confiance se base sur l'hypothèse de normalité de distribution d'un paramètre, issue du fait que les évaluations de MV sont asymptotiquement normales. Ainsi, pour un paramètre θ dont l'estimateur de MV à partir d'une grande taille d'échantillon est $\hat{\theta}$, on a :

$$z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}}} \tag{2.28}$$

avec :

$$P(x \leq z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{2.29}$$

Pour un niveau de confiance α donné, on peut encadrer z par :

$$P(z_{min} < z < z_{max}) = \alpha \tag{2.30}$$

Soit, à partir de l'équation (2.29) :

$$P\left(-\omega_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}}} < \omega_{1-\alpha/2}\right) = \alpha \tag{2.31}$$

avec ω_α définit par $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

On obtient donc les limites de confiance de $\hat{\theta}$ pour un niveau de confiance α donné en simplifiant l'équation (2.31) :

$$\hat{\theta} - \omega_{1-\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{\theta})} < \hat{\theta} < \hat{\theta} + \omega_{1-\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{\theta})} = \alpha \tag{2.32}$$

2.2.3.3 Classification des méthodes d'estimation de fiabilité

Les méthodes d'estimation peuvent être classées selon deux grandes considérations. Une première classification peut être opérée selon la connaissance ou non d'une loi paramétrique pour décrire la courbe de fiabilité et une deuxième classification suivant la démarche statistique engagée.

a) Classification selon la connaissance sur la loi paramétrique

On distingue les méthodes suivantes :

— ***Méthodes non-paramétriques*** : elles n'émettent aucune hypothèse sur l'existence d'une loi de distribution (caractérisée par un ou plusieurs paramètres), pour approcher la courbe de fiabilité. Elles consistent essentiellement à construire de manière empirique des courbes de fiabilité, sous forme d' *escalier*. Elles sont très utiles lorsqu'aucune distribution ne décrit de manière satisfaisante les données de durées de vie, cependant ce sont des méthodes de faible précision.

— ***Méthodes paramétriques*** : elles font l'hypothèse d'une loi continue, dépendante de certains paramètres et qui approche la courbe de fiabilité (par régression ou maximum de vraisemblance par exemple). Elles sont plus précises que les méthodes non-paramétriques mais pour cela il faut au préalable connaître et bien définir une loi de distribution des données.

b) Classification selon la démarche statistique

On distingue ici les méthodes dites « fréquentielles » et les méthodes dites « Bayésiennes ».

La démarche fréquentielle ou classique s'appuie sur un retour d'expérience de faits observés. Elle est basée sur la notion de probabilité objective (Usureau, 2001). La probabilité d'occurrence d'un événement est approchée sa fréquence. La démarche fréquentielle se heurte à certaines limites et difficultés (Guerin, 2005) comme, la nécessité d'avoir un échantillon suffisamment grand pour réduire l'intervalle de confiance sur les estimateurs ; la complexité mathématique, une forte sensibilité aux données fortement censurées. La méthode du Maximum de Vraisemblance est de type fréquentiel.

Prendre en compte à la fois le retour d'expérience objectif et les connaissances « a priori » plus subjectives (avis d'expert, etc...) pour évaluer la probabilité des événements dans le futur, est la caractéristique de la démarche bayésienne. Les techniques bayésiennes permettent de lever certaines limites et difficultés rencontrées avec les techniques fréquentielles, notamment :

— Elles sont utilisées pour réduire la taille des essais à réaliser,

— Elles améliorent l'estimation des paramètres de la fiabilité du produit par l'intégration du passé (données disponibles sur le produit concerné), surtout lorsque la connaissance a

priori est très informative.

— Elles permettent de traiter le cas « zéro » défaillance observée.

2.2.4 Fiabilité dans le cycle de vie d'un produit

2.2.4.1 Courbe en baignoire

La courbe en baignoire représente l'évolution du taux de défaillance en fonction du temps le long du cycle de vie du matériel. Elle permet de diviser le cycle de vie en trois phases principales : la phase de jeunesse, la phase de vie utile et la phase de vieillissement. Le positionnement dans l'une des trois différentes phases de la courbe en baignoire est lié à la valeur du paramètre de forme de la loi de Weibull (voir sous section 2.2.2.3).

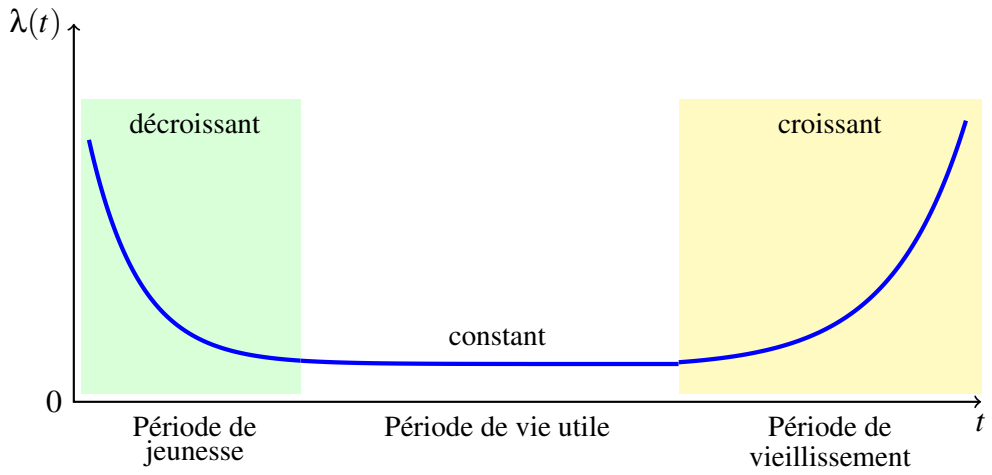


Fig. 2.3. Courbe en baignoire

L'allure de la courbe en baignoire peut changer selon le type de produit (électronique, informatique ou mécanique) (O'Connor, 1987). Le cycle de vie des composants électroniques est représenté de la même manière que la courbe en baignoire présentée sur la figure 2.3. Dans ce cas, la phase de jeunesse où l'on observe une décroissance rapide du taux de défaillance représente la période de déverminage ou d'élimination des défauts de conception ou de fabrication du produit. Ensuite dans la deuxième phase, on observe un taux de défaillance constant qui signifie que la fréquence des défaillances (qui ont un caractère aléatoire) est indépendante de l'âge du produit. C'est généralement dans cette phase que les études de fiabilité prévisionnelle sont réalisées (Estimation du paramètre λ du modèle exponentiel de fiabilité). Pour finir, dans la phase de vieillissement, le taux de défaillance croît au fil du temps. L'on est alors en présence des phénomène d'usure, de corrosion, fatigue etc...

2.2.4.2 Cycle de vie d'un système mécanique

La particularité du cycle de vie d'un système mécanique (figure 2.4) est l'inexistence de la phase de durée de vie utile. Il comporte deux phases :

— La première et la plus courte, définit la période de mortalité infantile. Elle est caractérisée par une décroissance du taux de défaillance dues généralement aux améliorations des propriétés internes et surfaciques (traitement thermique, rodage etc...). Les lois de probabilité utilisées pour cette phase sont la loi de Weibull ($\beta < 1$) et la loi LogNormale ($\sigma > 1$).

— La deuxième phase et la plus longue, est la période de vieillissement du système, modélisée par un taux de défaillance croissant au cours du temps caractéristique des phénomènes de corrosion, d'usure, de déformation, de fatigue etc... Les lois de probabilité utilisées pour cette phase sont la loi de Weibull ($\beta > 1$) et la loi LogNormale ($\sigma < 1$).

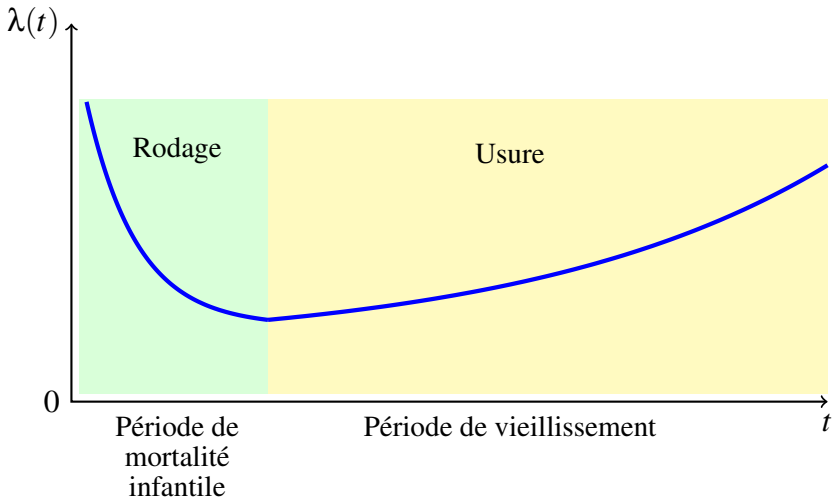


Fig. 2.4. Cycle de vie d'un système mécanique

Contrairement aux composants électroniques, les calculs de la fiabilité pour des composants mécaniques se font essentiellement dans la période de vieillissement, en utilisant des lois de probabilité dont le taux de défaillance est fonction du temps telles que la loi LogNormale, Weibull, etc...(Tebbi, 2005).

2.2.4.3 Fiabilité dans le cycle de développement d'un produit

En fonction du niveau où l'on se situe dans le cycle de développement du produit, on distingue trois catégories d'étude de fiabilité :

— La fiabilité prévisionnelle (dès le début du projet) ;

— La fiabilité expérimentale (développement, maturité, production) ;

— La fiabilité opérationnelle (en exploitation, données du retour d'expériences).

La figure 2.5, permet de situer dans le cycle de développement du produit, chaque type d'étude de fiabilité ainsi que les méthodes et outils associés :

Comme le montre la figure 2.5, la fiabilité prévisionnelle, fait appel d'une part à des méthodes dites qualitatives comme l'Analyse des Risques Préliminaires (*APR*), l'Analyse des Modes de

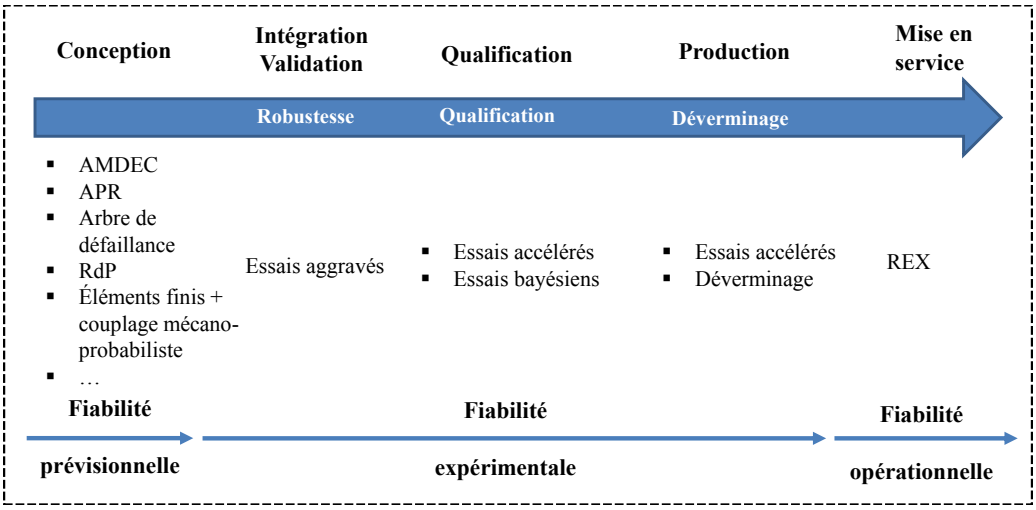


Fig. 2.5. Cycle de fiabilisation d'un produit

Défaillances, de leurs Effet et Criticité (*AMDEC*) etc..., et d'autre part à des méthodes quantitatives comme les Arbres de Défaillances, les diagrammes de fiabilité etc... Dans le cas de systèmes complexes, des méthodes de modélisation comme les réseaux de pétri *(RdP)* ou les chaînes de Markov sont utilisées. Il faut noter qu'en mécanique, l'estimation de fiabilité prévisionnelle en phase de conception est généralement obtenue par des méthodes de couplage mécano-probabiliste faisant appels aux calculs par éléments finis.

L'étude de la fiabilité expérimentale donne lieu à la mise en œuvre de trois types d'essais de fiabilité que nous détaillons dans la suite. Ce sont les essais de robustesse ou essais aggravés (sur les premiers prototypes), les essais d'estimation de la fiabilité (lorsque le produit est mature) et les essais de déverminage (lors de la production).

La fiabilité opérationnelle quant à elle, s'appuie sur les données obtenues du retour d'expérience. Ce dernier est généralement basé sur la collecte et la gestion de faits techniques, observés pendant toute la durée de vie du système, de sa mise en service jusqu'à sa désintégration (Mihalache, 2007).

2.2.5 Particularité de la fiabilité mécanique

Pour mener à bien une étude de fiabilité, il est important d'identifier en fonction du profil de mission du produit, les différents modes de défaillance associés. En mécanique, les défaillances des composants ont des origines variées, dont les plus fréquentes sont détaillées ci-après.

2.2.5.1 Mécanismes de défaillance des composants mécaniques

Les composants mécaniques sont caractérisés par des mécanismes de dégradation souvent complexes, d'origines variées (fatigue, fluage, fissuration, usure, corrosion/oxydation, désagrégation) (Mihalache, 2007) :

— La fatigue consiste en la dégradation ou la modification des propriétés mécaniques des matériaux, suite à l'application répétée d'un chargement cyclique ou d'une vibration, conduisant à une rupture.

— Le fluage est un mécanisme de dégradation lié au chargement et à la température conduisant à une déformation du matériau (allongement ou élongation). Ce mécanisme devient prépondérant dès que la température du matériau dépasse le tiers de la température de fusion (exprimée en ° K).

— L'usure est liée au frottement entre deux pièces mécaniques provoquant l'augmentation du jeu entre elles (élimination de matière). Exemple : les pneus, les roulements.

— La plupart des métaux sont détériorés par l'interaction avec l'oxygène (la corrosion ou l'oxydation).

Dans la suite de cette thèse, nous nous intéressons à la fatigue mécanique qui est la plus importante source de défaillance pour les composants mécaniques.

2.2.5.2 Modèle de fiabilité de composants mécaniques standards

L'une des méthodes classique d'estimation de fiabilité mécanique est l'utilisation des recueils de données qui constituent de recommandations ou de règles établies grâce à un processus d'expertise.

En électronique, un domaine où le calcul de fiabilité est pratiqué depuis de nombreuses années, les bases de données de fiabilité sont disponibles et nombreuses (à l'instar de la norme *MIL-HDBK-217-F* et du guide méthodologique de fiabilité *FIDES*) ce qui n'est pas le cas en mécanique, où l'utilisation des recueils est plus récente (Demri, 2009).

En mécanique, les recueils de données peuvent être utilisés pour étudier la fiabilité d'un composant mécanique standard. On peut énumérer comme recueils de données mécaniques, *AVCO*, *NPRD*, *NSWC*, *EIREDA*, etc...dont une bonne synthèse est réalisée dans (Tebbi, 2005) :

— ***AVCO*** : c'est un manuel américain très ancien regroupant des tables de données de fiabilité comme des durées de vie moyennes des taux de défaillance génériques sous forme de nombre de défaillances par million d'heures et par million de cycles en fonction des conditions d'environnement.

— ***NPRD*** : c'est un rapport du centre RAC (Reliability Analysis Center), très utilisé pour évaluer la fiabilité des composants et dispositifs non électronique.

— ***NSWC*** : c'est un catalogue publié par la Marine des États-Unis (Naval Surface Warfare Center), il fournit des modèles de taux de défaillance, supposés constants, pour des classes fondamentales de composants mécaniques tels que les ressorts, les moteurs, les freins, les embrayages, etc.

— ***EIREDA*** (European Reliability Industry Data Handbook) : donne des taux de défaillance, supposés constants, pour des produits mécaniques et électroniques en fonctionnement et en sollicitation, à l'usage des centrales nucléaires.

— ***FARADA*** (Failure Rate Data) fournit des données de fiabilité pour des composants de toutes natures : une estimation des taux de défaillance, nombre de pannes observées, type de pièce, mode d'utilisation, etc.

Dans le cas d'un composant mécanique spécifique, les méthodes probabilistes comme la méthode résistance-contrainte seront plus adaptées pour estimer la fiabilité de ce composant.

2.2.5.3 Fiabilité de composants mécaniques spécifiques : Méthode R-C

De manière générale, le dimensionnement de structures se fait en considérant un mode de défaillance donné. Il est basé sur l'établissement d'une relation mécanique caractérisant son état en fonction des variables de la structure. Cette relation mécanique est composée de deux termes :

1. un premier terme noté C donnant l'état de sollicitation de la structure (efforts internes s'exerçant dans la structure) en fonction d'un mode de ruine donné (statique, fatigue, etc...),
2. et un deuxième noté R caractérisant la résistance à cette sollicitation ou contrainte exercée.

Deux démarches de dimensionnement se distinguent : l'approche déterministe et l'approche probabiliste encore appelée la méthode résistance-contrainte $(R-C)$.

Le principe de l'approche déterministe est basé sur l'utilisation d'un coefficient de sécurité K (imposé par des normes) qui intègre toutes les incertitudes et marges de sécurité. Le coefficient de sécurité K se calcule comme suit :

$$K = \frac{R}{C} \tag{2.33}$$

Ensuite, pour valider la conception on vérifie si le coefficient K calculé reste supérieur à un coefficient de sécurité seuil préalablement fixé. Cette approche conduit généralement d'une part à un surdimensionnement de la structure (K grand pour réduire les risques), et d'autre part à une augmentation du risque de ruine ou de défaillance, lorsqu'on cherche à réduire K sans maîtriser son évaluation.

Pour intégrer de manière plus adéquate les incertitudes relatives aux variables de conception, la méthode probabiliste d'évaluation de la fiabilité a été développée depuis de nombreuses années (Mayer, 1926).

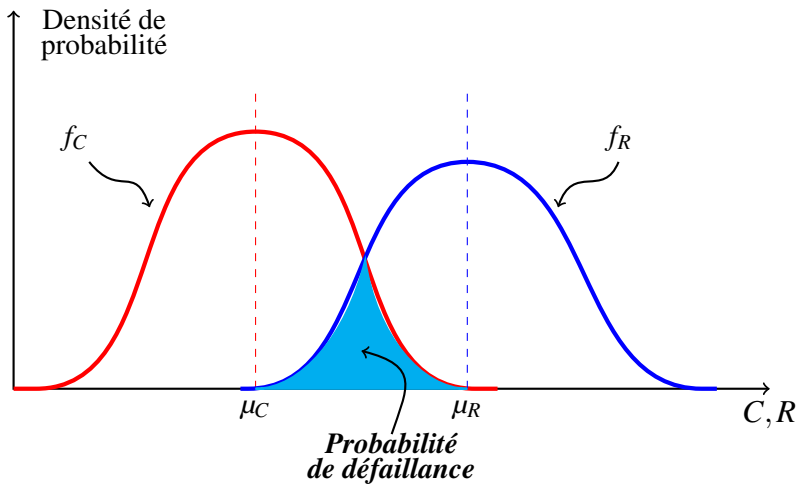


Fig. 2.6. Méthode contrainte résistance probabiliste : Diagramme de Warmer

Dans une démarche probabiliste, les variables du problème mécanique à savoir R et C ne sont pas déterministes. Elles sont considérées comme des variables aléatoires avec des lois de distributions associées (figure 2.6). La figure 2.6 prend l'appellation de diagramme de Warmer. La probabilité de défaillance P_f est estimée à partir de ces deux variables aléatoires, comme la probabilité que la résistance soit inférieure à la contrainte appliquée durant la durée de vie du système. D'un point de vue mathématique P_f est calculée à partir de la relation suivante :

$$P_f = Prob\,(R \leq C) \tag{2.34}$$

$$P_f = \int\int_{\{(R,S)|r\leq c\}} f_{R,S}(r,c)drdc \tag{2.35}$$

Où $f_{R,S}$, représente la densité de distribution conjointe des variables R et S.

Dans le cas où les deux variables sont indépendantes l'expression de P_f devient :

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{r=0}^{c} f_R(r)dr \right) f_C(c)dc \tag{2.36}$$

ou

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{c=0}^{r} f_C(c)dr \right) f_R(r)dr \tag{2.37}$$

Avec f_R, et f_C les densités de distribution respectives des variables R et S.

Selon les cas, l'intégrale peut s'avérer plus ou moins complexe à évaluer. Plusieurs méthodes d'évaluation existent et seront présentées dans la section suivante, où nous abordons l'estimation de fiabilité mécanique prévisionnelle dans un cadre plus globale qu'est le couplage mécano-

probabiliste.

2.3 Fiabilité prévisionnelle par couplage mécano-probabiliste

Une analyse de fiabilité en mécanique porte essentiellement sur le calcul de probabilité de défaillance ou de ruine d'un système mécanique vis-à-vis d'un critère de défaillance qui prend en considération les incertitudes sur les paramètres de conception dudit système. Le fait d'inclure les incertitudes comme des variables aléatoires permet de modéliser le risque comme une probabilité de défaillance. Cette approche est plus fine qu'une approche déterministe où les grandeurs sont fixées à des valeurs nominales (Lemaitre, 2014).

Le concept de critère de défaillance peut être défini comme la confrontation de deux quantités fondamentales désignées respectivement par la « Capacité » et la « Demande » du système (Riahi, 2013).

Avant de présenter les différentes méthodes, il nous convient de rappeler certaines notions de base relatives au couplage mécano-probabiliste (figure 2.7).

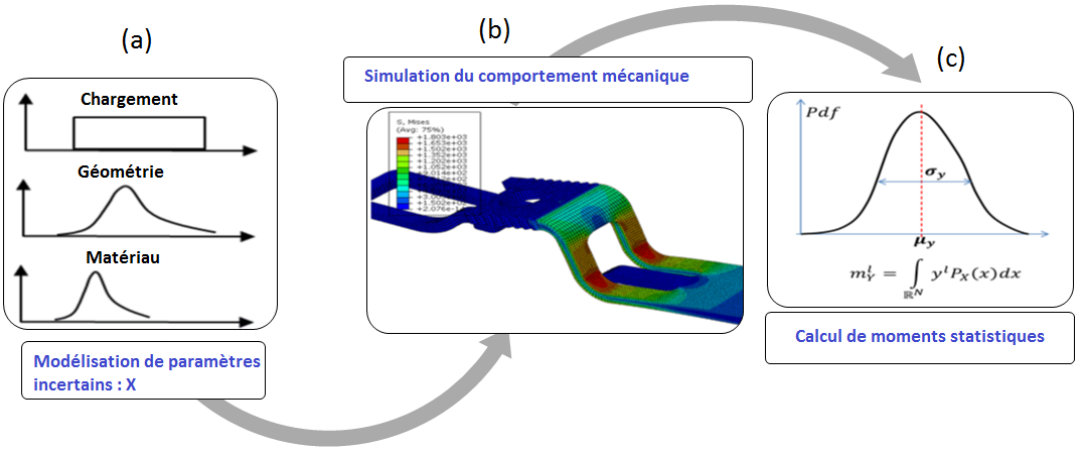


Fig. 2.7. Illustration du couplage mécano-probabiliste

En effet, généralement en mécanique, l'analyse prévisionnelle de la fiabilité nécessite la construction d'un modèle dit mécano-fiabiliste. On appelle modèle mécano-fiabiliste, le modèle qui associe une procédure de calcul mécanique et une procédure de calcul fiabiliste (Lemaire, 2005).

Le calcul mécanique est généralement réalisé par la méthode des éléments finis (MEF). La MEF Oudin (2008) est une méthode de résolution par discrétisation de problèmes physiques (qu'on peut décrire par des équations aux dérivées partielles sur un domaine spatial). En résumé, les étapes suivantes sont nécessaires :

— Le maillage qui consiste en un découpage du modèle spatial en éléments finis ;

— Écriture de l'équation aux dérivées partielles (simplifiée) sur chaque élément fini ;

— Rassemblement des expressions des équations aux dérivées partielles locales pour appliquer les conditions aux limites du problème.

Il faut noter que chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice ce qui permet d'obtenir après rassemblement une matrice globale. La résolution de ce système global donne la solution approchée au problème. Cette résolution peut demander d'énormes efforts de calculs en fonction de la nature du problème. Dans la pratique, les ingénieurs calculs utilisent des logiciels de calcul comme Cast3m, Abaqus, Ansys, etc...

Le couplage de modèles mécaniques et des approches probabilistes a gagner beaucoup d'intérêt dans la littérature au cours des dernières années (Sudret, 2012).

Ces méthodes cherchent à estimer la probabilité de défaillance de la structure en tenant compte de la variabilité des paramètres tels que la géométrie des structures, les propriétés des matériaux et le chargement. Elles sont structurées en trois principales phases : la modélisation des sources d'incertitudes (figure 2.7 (a)), l'analyse du comportement de la structure au travers d'un modèle mécanique (figure 2.7 (b)), et la propagation des incertitudes ou la quantification de l'effet des incertitudes sur les réponses du modèle mécanique (figure 2.7 (c)).

Cette section est essentiellement inspirée des travaux de thèses de (Gille-Genest, 1999) (Dubourg, 2011) et les références (Ditlevsen and Madsen, 1996), (Lemaire, 2005), (Lemaitre, 2014), (Sudret, 2012), (El Hami and Radi, 2011).

2.3.1 Modélisation probabiliste de l'incertain

L'intérêt de l'analyse probabiliste des structures, est la prise en compte de la variabilité des paramètres incertains tels que, les propriétés des matériaux constitutifs, les dimensions géométriques et les sollicitations appliquées.

Les sources d'incertitudes peuvent être diverses. En mécanique, on peut avoir des incertitudes d'ordre statistique et des incertitudes épistémiques.

La modélisation des différentes sources d'incertitudes est une étape capitale quand on veut mener des analyses probabilistes. Cela fait appel principalement à des méthodes statistiques pour le choix du modèle probabiliste adéquat (variable ou processus aléatoire), ainsi que leurs paramètres (moments statistiques, auto-corrélation).

2.3.1.1 Types d'incertitudes

Dans la littérature on rencontre deux types d'incertitudes qui impactent l'activité de modélisation au cours du processus de conception de systèmes mécaniques ainsi que l'évaluation de leur fiabilité (Oberkampf et al., 2001) : les variabilités intrinsèques ou incertitudes aléatoires et les incertitudes épistémiques ou résultant d'un manque de connaissance.

Nous reprenons dans les paragraphes suivants, la description proposée par (Hähnel, 2007) sur ces différents types d'incertitudes :

a) Incertitudes aléatoires

Décrivent les variations inhérentes à la nature même des paramètres ou des phénomènes considérés. De manière générale, ce type d'incertitude peut être décrit par une quantité distribuée, définie sur un intervalle de valeurs possibles. Ces variabilités intrinsèques sont par exemple observées au niveau :

— des propriétés géométriques des systèmes mécaniques issues des procédé de fabrication (e.g. diamètre ou longueur d'un axe) ;

— des durées et des amplitudes de sollicitation dues à l'environnement (e.g. températures, profil de la chaussée) ;

— des propriétés de matériaux non uniformes (e.g. module de Young).

Ces incertitudes aléatoires sont donc également dénommées incertitudes irréductibles dans la mesure où même si l'on dispose d'une connaissance complète du paramètre, celui-ci ne peut tout simplement pas être caractérisé de manière déterministe.

b) Incertitudes épistémiques

Elles modélisent un manque de connaissance, ou une incomplétude de l'information sur les caractéristiques du système mécanique en cours de conception donnant lieu à la définition de modèles mathématiques qui idéalisent de manière inexacte les paramètres ou les phénomènes physiques.

Ces incertitudes sont également appelées incertitudes réductibles ou subjectives. En particulier, elles peuvent être réduites en utilisant des modèles plus fins et/ou en collectant des données en nombre plus important et plus précises.

2.3.1.2 Modèles probabilistes

Soit un ensemble Ω muni d'une probabilité P. On appelle variable aléatoire, $V(\omega)$ une fonction de l'aléa $\omega \in \Omega$. Fixer ω revient à tirer une réalisation de cette variable aléatoire $v = V(\omega = \omega_0)$ (Lemaire, 2005).

On considère à présent une fonction $V(x,t,\omega)$ de l'espace du temps et de l'aléa. Une réalisation $V(x,t,\omega_0)$ est une trajectoire de cette fonction pour un aléa fixé. Le terme processus stochastique (ou processus aléatoire) désigne une telle fonction. Elle peut être indexée uniquement sur le temps (exemple : l'accélération d'un séisme en un point) ou sur l'espace (exemple : la répartition spatiale d'un module d'élasticité).

Le choix de l'un de ces deux modèles est dicté d'une part, par la nature physique du paramètre incertain à modéliser (à titre d'exemple, pour les paramètres à valeurs positives, le choix d'une loi normale peut être problématique puisqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$) ; d'autre part du degré de réalisme qu'on veut apporter à nos analyses. Par exemple, si on veut prendre en compte la dépendance de la variabilité du module d'élasticité de la position (x) le long d'une poutre, un modèle

probabiliste de type processus aléatoire sera le plus adéquat, sinon un modèle probabiliste de type variable aléatoire sera suffisant.

2.3.1.3 Transformation isoprobabiliste

Souvent, la résolution d'un problème probabiliste dans l'espace physique (Domaine de définition réel des paramètres incertains) n'est pas triviale. Pour cette raison on lui préfère, une résolution dans un espace standard dans lequel les paramètres incertains sont représentés par des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes.

Cela est dû principalement aux caractéristiques mathématiques de ces dernières, qui rend plus facile la manipulation du calcul probabiliste.

Le passage de l'espace physique à l'espace standard se fait, à l'aide de transformations isoprobabilistes. Les plus connues sont celles développées par Nataf et Rosenblatt.

a) Cas des variables indépendantes

Si les variables X_i sont indépendantes et si les fonctions de distributions sont connues, la transformation **T** la plus simple consiste à transformer séparément chaque variable X_i en une variable U_i normale centrée réduite par :

$$u_i = T_i(x_i) \tag{2.38}$$

$$T : u_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \tag{2.39}$$

$$T^{-1} : x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i)) \tag{2.40}$$

Où F_{X_i} est la fonction de distribution de la variable X_i.

Dans le cas particulier où la variable X_i suit une loi gaussienne $N(\mu_{X_i}, \sigma_{X_i})$ la transformation **T** est :

$$T : u_i = \frac{x_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \tag{2.41}$$

Il s'agit d'une transformation linéaire qui associe une loi Gaussienne pour x_i à une loi Gaussienne (de moyenne nulle et de variance unitaire $N(0,1)$) pour u_i.
Si la variable X_i suit une loi LogNormale $LN(\mu_{X_i}, \sigma_{X_i})$, $ln(X_i)$ suit une loi normale de paramètres (λ, ζ), avec :

$$\lambda_{X_i} = ln(m_{X_i}\sqrt{1+(\frac{\sigma_{X_i}}{m_{X_i}})^2}) \tag{2.42}$$

Et

$$\zeta_{X_i} = \sqrt{\ln(1+(\frac{\sigma_{X_i}}{m_{X_i}})^2)} \tag{2.43}$$

On se ramène ainsi au cas d'une variable gaussienne. La transformation **T** est alors :

$$T : u_i = \frac{\ln(x_i) - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \tag{2.44}$$

Si les variables X_i suivent des lois quelconques de fonction de répartition $F_{X_i}(x_i)$, il est possible de trouver la transformation T en écrivant l'égalité des probabilités pour les variables x_i et u_i :

$$\Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i) \tag{2.45}$$

On a donc :

$$T : u_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \tag{2.46}$$

On note que si F_{X_i} est inversible pour toute valeur de x_i, la transformation inverse est définie par :

$$T^{-1} : x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i)) \tag{2.47}$$

Dans le cas où les variables sont dépendantes, les transformations de Rosenblatt ou de Nataf peuvent être utilisées.

b) Transformation de Rosenblatt

La transformation de Rosenblatt (Rosenblatt, 1952) est utilisable lorsque la fonction de répartition conjointe et la fonction de densité conjointe des variables sont connues. On considère aussi dans cette transformation, que toutes les fonctions de répartition sont absolument continues (Ditlevsen and Madsen, 1996). Elle est obtenue par la forme récursive suivante :

$$\begin{cases} u_1 = & \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_1)) \\ u_2 = & \Phi^{-1}(F_{X_2}(x_2|x_1)) \\ \dots & \\ u_i = & \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i|(x_1 \dots x_{i-1})) \\ \dots & \\ u_n = & \Phi^{-1}(F_{X_n}(x_n|(x_1 \dots x_{n-1})) \end{cases} \tag{2.48}$$

où $F_{X_i}(x_i|(x_1 \dots x_{i-1})$ est la fonction de répartition de X_i conditionnellement à $X_1 = x_1, ..., X_{i-1} = x_{i-1}$.

Cette définition de la transformation de Rosenblatt requiert la connaissance de la densité conjointe. Or en pratique, on ne connaît généralement que les moyennes, les écart-types et parfois une matrice de covariances, ainsi que les densités marginales des variables aléatoires (Nguyen, 2007).

c) Transformation de Nataf

La transformation de Nataf (Nataf, 1962) ne nécessite que la connaissance des moyennes m_{X_i}, des écarts-types σ_{X_i}, de la matrice de corrélation $\rho_{X_iX_j} = \rho_{ij}$ et des distributions marginales de X_i.

Connaissant les distributions marginales des composantes X_i de X, soit $F_{X_i}(X_i)$ pour la fonction de répartition, on définit d'abord les variables normales centrées unitaires $\hat{U} = (\hat{U}_1, ..., \hat{U}_2)$, lesquelles sont corrélées deux à deux :

$$\hat{u}_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)), i = 1,2 \tag{2.49}$$

Les corrélations ρ_{ij} des variables sont obtenues par l'équation suivante :

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{x_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}})(\frac{x_j - m_{X_j}}{\sigma_{X_j}})\phi_2(\hat{u}_i, \hat{u}_j, \rho_{ij}^*) d\hat{u}_i d\hat{u}_j \tag{2.50}$$

ϕ_2 est la densité conjointe d'un vecteur gaussien de dimension 2, de composantes centrées réduites et de coefficient de corrélation fictif ρ_{ij}^*.

La transformation en variables indépendantes s'écrit alors :

$$u_i = T_i(x_j) = \sum_j \Gamma_{0,ij}\hat{u}_j = \sum_j \Gamma_{0,ij}\Phi{-}1(F_{X_j}(x_j)) \tag{2.51}$$

Où $[\Gamma_0]$ est l'inverse de la matrice triangulaire inférieure de la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation $[\rho]$.

2.3.1.4 Propagation de l'incertitude

Soit le modèle numérique constitué d'un ensemble de variables d'entrée représentées par le vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_p)$ et d'une fonction mathématique (a priori inconnue) qui fait correspondre à ces entrées un ensemble de variables aléatoires de sortie Y.

Si l'on fait l'hypothèse que la variable de sortie Y est un scalaire, on peut écrire le modèle comme suit :

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \\ X \quad & \mapsto Y = f(X) \end{aligned} \tag{2.52}$$

Une fois que le modèle probabiliste utilisé pour représenter la variabilité des paramètres incertains $(X_1, ..., X_p)$ est identifié, l'étape suivante du calcul probabiliste sera d'évaluer l'effet de ces incertitudes sur la variabilité des paramètres de sortie du modèle mécanique. Dans le vocabulaire du calcul probabiliste, cette étape est désignée par "propagation d'incertitudes". Généralement, cette dernière peut avoir trois finalités (Figure 2.8) : l'analyse de tendance centrale, l'analyse de sensibilité, l'analyse de fiabilité. Dans la suite nous développons que la finalité analyse de fiabilité.

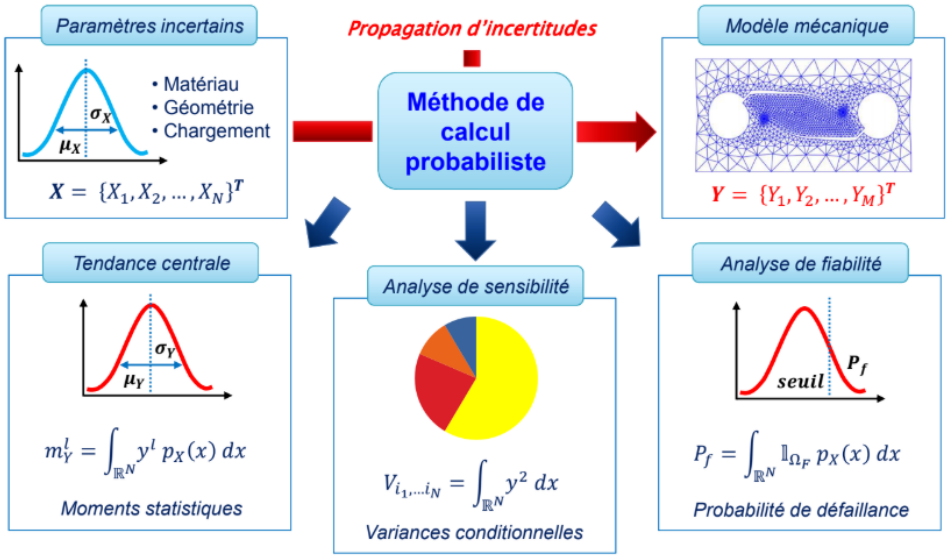


Fig. 2.8. Finalités de la propagation d'incertitudes

Pour effectuer de la propagation d'incertitudes, on aura besoin d'une stratégie de couplage. Elle peut être soit intrusive, soit non-intrusive :

— ***Méthodes intrusives*** : Dans ce cas, on est contraint de manipuler les équations gouvernant le comportement mécanique pour introduire l'aléa associé aux paramètres incertains. On fait appel le plus souvent à des développements en série entières. La méthode intrusive demande beaucoup d'hypothèses et de développement théorique.

— ***Méthodes non-intrusives*** : Elle ne nécessite que la connaissance d'un échantillon (fini) de couples entrées-sorties du modèle et ne fait aucune hypothèse structurelle sur f. Dans ce cas, le modèle mécanique est considéré comme une "boite noire" et la propagation d'incertitudes est effectuée par la simulation de ce dernier (calcul déterministe) en un nombre fini de points échantillonnés dans l'espace de variabilité des paramètres incertains. Ensuite, un post-traitement statistique est effectué sur les réponses du modèle mécanique pour obtenir une estimation de la probabilité de défaillance dans le cas où on visait des analyses de fiabilité. Les méthodes non-intrusives sont les plus utilisées lorsque le modèle mécanique est sous forme implicite.

Avant d'aborder les méthodes d'estimations de fiabilité, il nous convient de poser certaines bases de la formulation mathématique du problème de fiabilité.

2.3.2 Formulation mathématique du problème de fiabilité

Plusieurs phénomènes physiques peuvent être à l'origine d'une défaillance. On peut citer par exemple, la fatigue, le fluage, la présence de fissures, la plastification etc... Dans l'analyse de fiabilité des structures, la performance du système est mathématiquement décrite par un critère de défaillance qui dépend de la réponse mécanique (aléatoire) du système, d'éventuels paramètres déterministes additionnels (par exemple, un seuil codifié) ou des variables aléatoires (par exemple, une résistance incertaine).

L'insatisfaction à ce critère de défaillance, provoque un mode de défaillance de la structure. La modélisation probabiliste d'un mode de défaillance se fait par la définition d'une fonction G appelée fonction d'état limite ou fonction de performance.

2.3.2.1 Fonction d'état limite

Elle est définie comme une fonction des variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, qui représentent les paramètres incertains $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, souvent rassemblés dans le vecteur aléatoire $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}^T$ par soucis de simplicité. La fonction $G(X)$ est par construction une variable aléatoire qui permet de définir en fonction de ses valeurs, l'état de fonctionnement de la structure. Ainsi, l'espace aléatoire peut être divisé en deux régions :

— ***le domaine de défaillance***, $\Omega_F = \{x \in \mathcal{D}_X | G(x) \leq 0\}$. On parle d'état de défaillance de la structure ;

— ***le domaine de sécurité***, $\Omega_S = \{x \in \mathcal{D}_X | G(x) > 0\}$. On dit aussi que la structure est en état de bon fonctionnement.

L'ensemble des points $\Gamma = \{x \in \mathcal{D}_X | G(x) = 0\}$ représente la *surface de l'état limite* qui est la frontière entre les domaines de défaillance et de sécurité.

En mécanique de structures et en particulier en génie civil, on distingue deux typologies d'état limite :

— ***ELS*** (État Limite de Service) qui permet de vérifier que les déformations ne gênent pas le bon fonctionnement du système,

— ***ELU*** (État Limite Ultime) pour vérifier qu'il n'y a pas de dégradations irréversibles.

La figure 2.9, illustre schématiquement ces concepts dans le cas d'un espace aléatoire bidimensionnel.

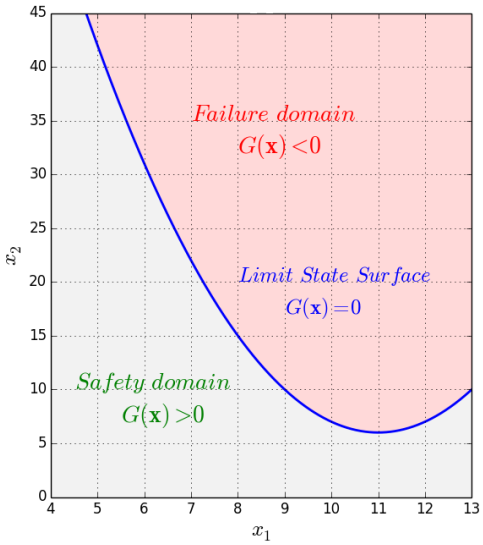


Fig. 2.9. Notions de surface d'état limite, de domaine de défaillance et de domaine de sécurité

2.3.2.2 Expression de la probabilité de défaillance

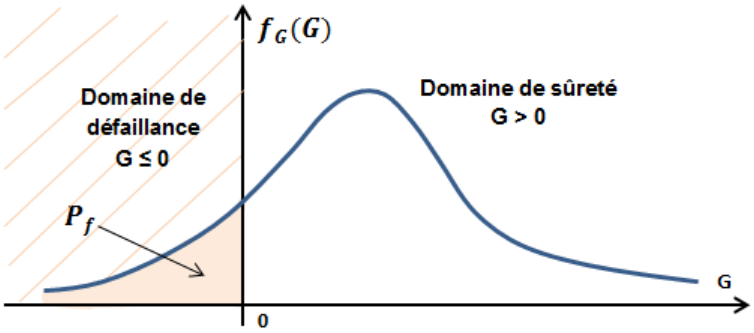


Fig. 2.10. probabilité de défaillance

A partir de la construction de la fonction d'état limite, la probabilité de défaillance P_f (Figure 2.10), qui est par définition complémentaire de la fiabilité R, i.e. $R = 1 - P_f$, s'obtient comme suit :

$$P_f = Prob\,[G(x \leq 0)] = \int_{G(x \leq 0)} p_X(x)dx \tag{2.53}$$

où p_X est la densité de probabilité conjointe du vecteur aléatoire X. On constate donc que, l'estimation de la probabilité de défaillance P_f n'est autre que le calcul d'une intégrale multidimensionnelle.

Outre, la probabilité de défaillance, une autre mesure de la performance ou de la sécurité d'une structure mécanique est l'indice de fiabilité que nous abordons ci-après.

2.3.3 Notion d'indice de fiabilité

La notion d'indice de fiabilité est introduite dans les années 1950 par Rjanitzyne. Les deux indices de fiabilité les plus utilisées en fiabilité des structures sont l'indice de de *Rjanitzyne-Cornell* et l'indice de *Hasofer et Lind*.

2.3.3.1 Indice de Rjanitzyne-Cornell

Il est obtenu à partir de la moyenne et de l'écart type de la fonction de performance G :

$$\beta_c = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \tag{2.54}$$

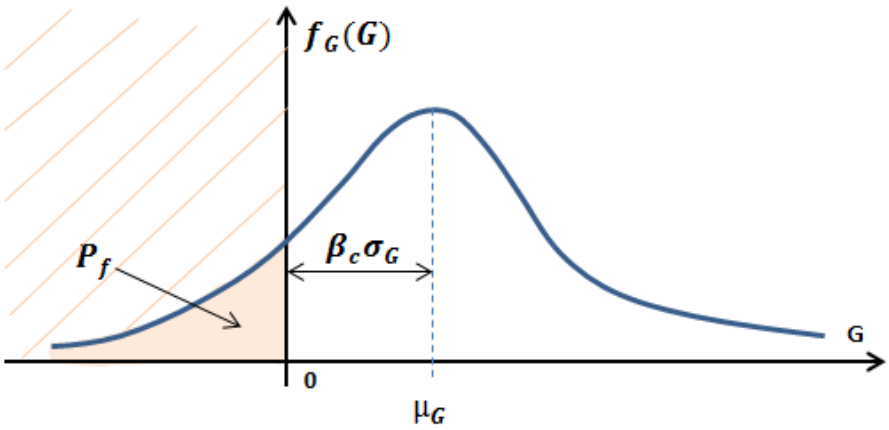


Fig. 2.11. Représentation de l'Indice de Cornel

Comme représenté sur la figure 2.11, l'écart entre le point moyen μ_G et l'état limite $(G = 0)$ est mesuré par β_c fois l'écart type σ_G.

Pour différentes expressions du même état limite, l'indice β_c conduit à différentes valeurs. C'est son inconvénient. On peut illustrer cela à travers l'exemple suivant :

1. ***Première expression de l'état limite G(r,s)=r-c=0***
   Dans ce cas l'indice est :

$$\beta_c = \frac{m_r - m_c}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_r^2}} \tag{2.55}$$

2. ***Deuxième expression de l'état limite G(r,s)=1-c/r=0***
   L'indice devient :

$$\beta_c = \frac{m_s}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{m_s}\right)^2 + \sigma_s^2 \left(\frac{m_r}{m_s}\right)^2}} \tag{2.56}$$

L'indice de *Hasofer et Lind* présenté ci-dessous permet de lever cette difficulté.

2.3.3.2 L'indice de Hasofer et Lind

La proposition faite par *Hasofer et Lind* est de ramener les variables physiques dans un nouvel espace des variables aléatoires centrées réduites et statistiquement indépendantes (espace aléatoire standard). C'est la transformation isoprobabiliste que nous avons abordé plus haut dans la section 2.3.1.3. En résumé, pour une variable aléatoire gaussienne x de moyenne μ_X et d'écart type σ_X dans l'espace physique, son image dans l'espace standard est $u = (x - \mu_X)/\sigma_X$.

Pour une variable aléatoire indépendante mais de loi quelconque, elle s'obtient à partir de l'égalité des fonctions de répartition.

En lui appliquant la transformation isoprobabiliste $T : X \to U$, la fonction d'état limite $G(X)$ devient :

$$H(U) = G \circ T(U) \tag{2.57}$$

La probabilité de défaillance P_f est alors égale à :

$$P_f = Prob\,(H(U) \leq 0) \tag{2.58}$$

soit :

$$P_f = \int_{H(u)\leq 0} \Phi_m(u)du \tag{2.59}$$

Φ_m est la densité multi-normale centrée réduite. L'indice de fiabilité est défini comme étant la distance euclidienne de l'origine O de l'espace normal standard à la surface d'état limite $H(u) = 0$ au point P^* le plus proche de l'origine.

Il faut donc résoudre le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\begin{aligned} \beta_{HL} = & \quad distance(O, H(u) = 0) \\ = & \quad \underbrace{min}_{H(u)\leq 0} \sqrt{\{u\}^T . \{u\}} \end{aligned} \tag{2.60}$$

Par convention, l'indice β_{HL} est compté positif si le point origine O appartient au domaine de sûreté et négatif sinon.

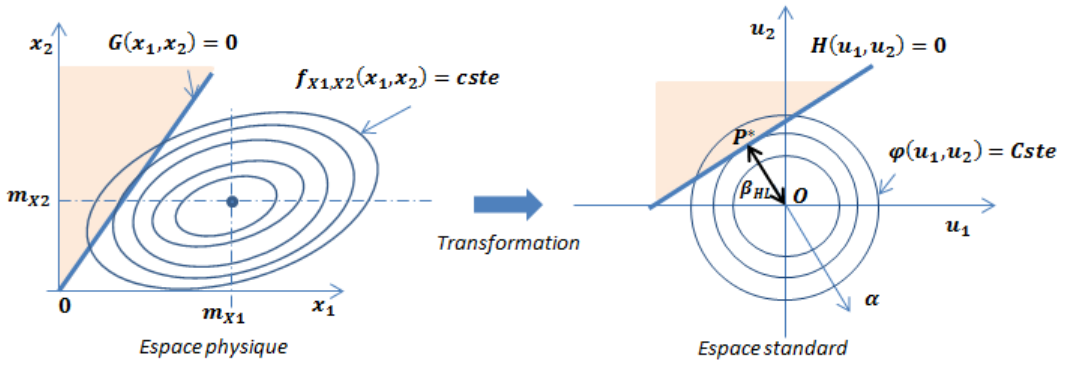


Fig. 2.12. Représentation de indice de Hasofer Lind

Soient u^* le vecteur solution du problème et P^* le point de la surface d'état limite tel que $OP^* = u^*$. P^* est appelé le point de conception ou point de défaillance le plus probable *(MPFP : Most Probable Failure Point)*. Par ailleurs :

$$u^* = -\beta_{HL}\alpha \tag{2.61}$$

α est le vecteur normal à la surface $H(u) = 0$ au point u^*, soit son gradient normalisé. La valeur α_i représente l'influence de la variable aléatoire U_i sur l'état limite et une approximation de l'influence de la variable physique X_i qui lui est associée.

2.3.3.3 Recherche du point de conception

Afin de déterminer le point de conception, il faut résoudre le problème de minimisation sous contraintes. Dans le cas d'analyse de fiabilité, on fait appel à l'algorithme d'optimisation du premier ordre de Hasofer-lind-Rackwitz-Fiessler (*HL-RF*) (Rackwitz and Flessler, 1978 ; Rackwitz, 1976) est une amélioration de l'algorithme de *Hasofer-lind*, qui suppose gaussiennes et non corrélées les variables de base. Le principe de cet algorithme est illustré par la figure 2.13.

On peut le résumer par les étapes suivantes (Lemaire, 2005) :

1. Choisir le point de départ $\{u\}^0$, généralement l'origine du repère $(k = 0)$;
2. Évaluer la fonction d'état limite $H(u^{(k)})$;
3. Ensuite, calculer le gradient de l'état limite $\{\nabla H(u)\}^{(k)}$ et sa norme $\left\|\{\nabla H(u)\}^{(k)}\right\|$, puis on en déduire le vecteur des cosinus directeur à l'itération k $\{\alpha\}^k$ par :

$$\{\alpha\}^k = \frac{\{\nabla H(u)\}^{(k)}}{\left\|\{\nabla H(u)\}^{(k)}\right\|} \tag{2.62}$$

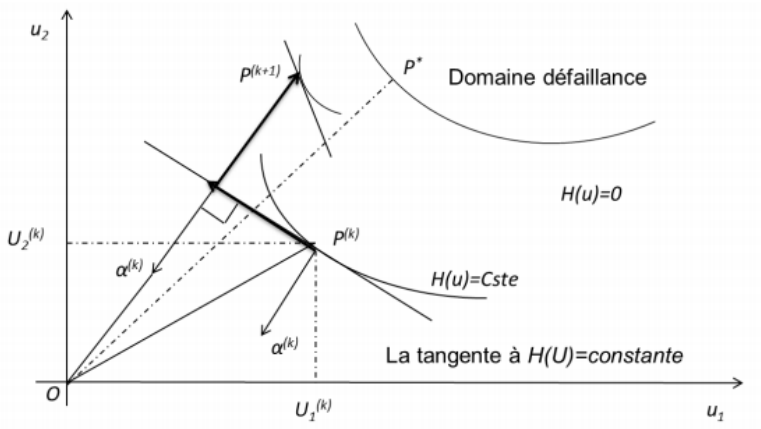


Fig. 2.13. Illustration de l'algorithme HLRF (Diop, 2015)

4. Calculer β_k comme suit :

$$\beta^{(k)} = -(\langle u \rangle^{(k)} \alpha^{(k)}) + \frac{\{\nabla H(u)\}^{(k)}}{\left\| \{\nabla H(u)\}^{(k)} \right\|} \tag{2.63}$$

5. Calculer $\{u\}^{(k+1)}$ avec la relation :

$$u^{(k+1)} = -\beta^{(k)} \alpha^{(k)} \tag{2.64}$$

6. Si $\left\| \{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)} \right\| \leq \varepsilon$, la convergence est atteinte, on arrête le calcul itératif, sinon on incrémente k : $k = k+1$ et on passe à l'étape 2.

2.3.4 Calcul de la probabilité de défaillance

Comme nous l'avons précédemment établi, l'évaluation de la probabilité de défaillance, revient à calculer l'intégrale multidimensionnelle (voir équation (2.53)). Cette intégrale peut savérer très complexe à calculer. En effet, l'intégrante n'est pas toujours connue de manière explicite, et la frontière du domaine d'intégration $G(X \leq 0)$ est souvent non linéaire.

Les méthodes de calcul peuvent être regroupées en diverses catégories :

— ***Calcul formel*** (analytique) ou numérique (quadrature) ;

— ***Les méthodes de simulation*** pour évaluer P_f sur l'intégralité du domaine de défaillance Ω_F : simulations de Monte-Carlo, tirages d'importance, tirages conditionnés ;

— ***Les méthodes d'approximation***, qui consiste en une idéalisation du domaine de défaillance Ω_F permettant le calcul d'une valeur approchée de P_f à partir d'un indice de fiabilité β : la méthode $FORM$ et méthode $SORM$, etc... ;

— ***Les méta-modèles*** : les méthodes de surface de réponse quadratique par exemple.

Un calcul analytique n'est en réalité envisageable que dans de cas simples. Pour contourner cette difficulté, des méthodes numériques sont les plus utilisées. Leur efficacité dépendra principalement de la complexité de la fonction d'état limite G (explicite ou implicite) et de la dimension n du problème (le nombre de paramètres incertains). Notons aussi que, le calcul par intégration numérique peut être délicat, surtout dans le cas où P_f est du même ordre de grandeur que celui des erreurs numériques.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques méthodes de calcul de la probabilité de défaillance P_f.

2.3.4.1 Simulations Monte-Carlo

La méthode de simulations de Monte-Carlo (*MCS*) (Metropolis and Ulam, 1949) est la plus populaire des méthodes d'estimation de probabilité de défaillance. Pour évaluer l'intégrale P_f donnée par l'équation (2.53) on introduit la fonction indicatrice de défaillance $\mathbb{I}_{\Omega_F}$ définie par :

$$\mathbb{I}_{\Omega_F}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad G(X) \leq 0 \\ 0 & si \quad G(X) > 0 \end{cases} \tag{2.65}$$

Le principe de base de la méthode *MCS* consiste à interpréter la probabilité de défaillance P_f comme l'espérance mathématique de la fonction indicatrice $\mathbb{I}_{\Omega_F}$. C'est à dire :

$$\begin{aligned} P_f &= \int_D \mathbb{I}_{\Omega_F}(x) p_X(x) dx \\ P_f &= \mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\Omega_F}(x)\right] \end{aligned} \tag{2.66}$$

où, p_X est la densité conjointe de probabilité du vecteur aléatoire X.

Les principales étapes d'implémentation de la méthode de simulations Monte-Carlo sont les suivantes :

— ***Étape*** 1 ***:*** Soit le vecteur aléatoire de conception $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$. La fonction de répartition F_{X_i} de chacune des variables X_i étant connue, l'échantillon $x^r = (x_1^r, x_2^r, ..., x_n^r)$, réalisation du vecteur aléatoire X, est obtenu en calculant chaque x_i^r par :

$$x_i^r = F_{X_i}^{-1}(u^r) \tag{2.67}$$

Où u^r est un tirage aléatoire d'un nombre uniformément distribué entre 0 et 1 (figure 2.14).

— ***Étape*** 2 ***:*** Évaluation de la fonction indicatrice de défaillance, $\mathbb{I}_{\Omega_F}$, pour chaque échantillon.

— ***Étape*** 3 ***:*** Calcul d'un estimateur $\hat{P}_f$ de la probabilité de défaillance P_f après M simulations des étapes $1-2$, par la moyenne empirique :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} \mathbb{I}_{\Omega_F}(x^k) \tag{2.68}$$

dont la variance est donnée par :

$$var[\hat{P}_f] = \frac{1}{M}\hat{P}_f\left(1-\hat{P}_f\right) \tag{2.69}$$

et le coefficient de variation par :

$$CV_{MCS} = \sqrt{var[\hat{P}_f]/\hat{P}_f} = \frac{1}{M}\hat{P}_f\left(1-\hat{P}_f\right) \tag{2.70}$$

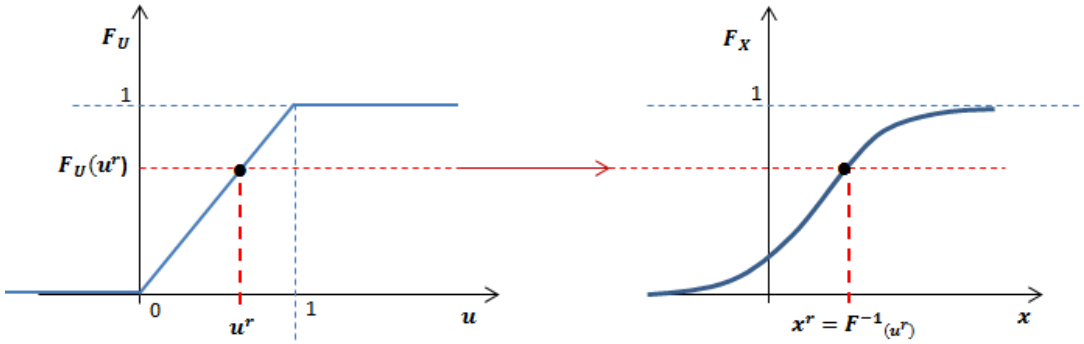


Fig. 2.14. Tirage aléatoire d'un nombre u^r uniformément distribué entre 0 *et* 1

Il est important de noter que $\hat{P}_f$ est un estimateur sans biais de P_f, et le taux de convergence (i.e le coefficient de variation) des simulations de Monte-Carlo, défini au sens des moindres carrés, est indépendant de la dimension n du vecteur aléatoire X. Malheureusement, l'expérience a montré que la méthode de simulations de Monte-Carlo devient inutilisable pour calculer la probabilité de défaillance d'ordre élevé, principalement en raison de sa convergence lente (en $\sqrt{M}$). En pratique, il faut un nombre important de simulations pour obtenir une bonne approximation de la probabilité de défaillance (le résultat est exact lorsque le nombre de tirage M tend vers l'infini) ; entre 10^{p+2} et 10^{p+3} pour obtenir une probabilité de 10^{-p} pour un niveau de confiance de 95% et une erreur admise de 20% sur les résultats. Par exemple, pour estimer une probabilité de défaillance de 10^{-6}, qui est souvent le niveau cible pour les composants automobiles, avec un coefficient de variation Δ_{MCS} de 5%, plus de 4.10^8 évaluations de l'intégrante de l'équation (2.53) devraient être effectuées.

Pour illustration, sur la figure 2.9 (b), les points noirs sont dans le domaine de sécurité ou de non-défaillance (tels que $G(x) > 0$) et les croix rouges sont dans le domaine de défaillance (tel que $G(x) < 0$). Comme on peut le voir, puisque la défaillance simulée est un événement rare (i.e. $P_f < 10^{-3}$), seul un des 10^3 tirages appartient au domaine de défaillance.

Ainsi, la méthode de Monte-Carlo reste un outil efficace lorsque, d'une part, la probabilité de défaillance P_f à estimer n'est pas trop faible et d'autre part, lorsque la fonction d'état limite G est explicitement connue. En effet, dans le cas où G est représentée par un modèle implicite

(code éléments finis par exemple) nécessitant des temps de calcul conséquents, le coût de calcul nécessaire à une bonne approximation du p_f par la méthode *MCS* devient insupportable.

La convergence des simulations de Monte-Carlo peut être améliorée si la répartition des points de simulation dans l'espace aléatoire est plus uniforme. On peut citer dans ce sens, des méthodes de tirages Hyper-cube latin (McKay et al., 1979) et les séquences quasi-Monte-carlo (Niederreiter, 1992).

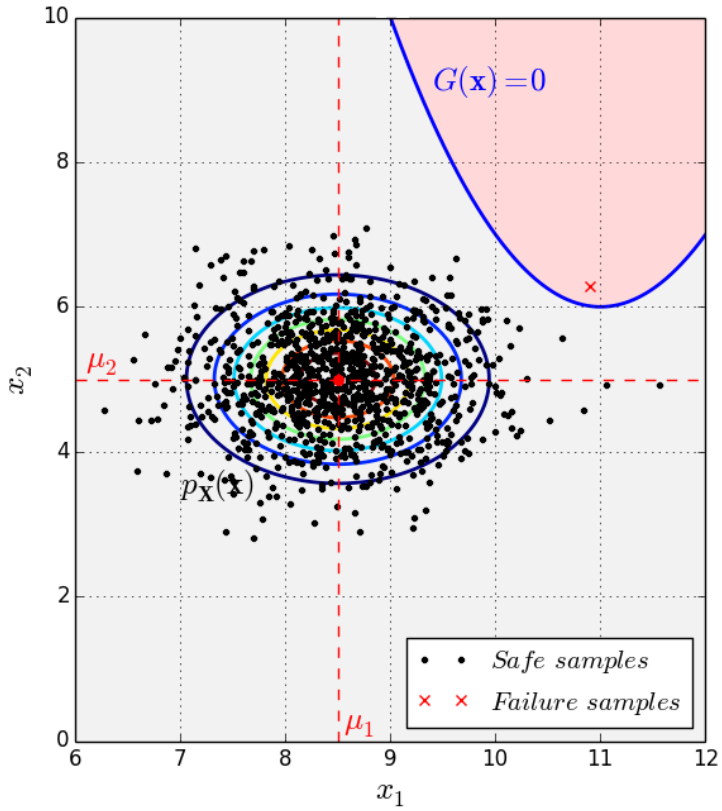


Fig. 2.15. Illustration de la méthode de simulations de Monte-Carlo

Pour surmonter l'inefficacité des méthodes de simulations dans le traitement de problèmes réels plus complexes, des méthodes d'approximation ont été proposées dans la littérature (Madsen et al., 1986). Nous nous intéressons dans ce qui suit aux méthodes d'approximations de premier ordre (*FORM*) et de deuxième ordre (*SORM*).

2.3.4.2 First and Second Order Reliability Method (FORM/SORM)

L'idée principale est de calculer la probabilité de défaillance au moyen d'un nombre limité d'évaluations de la fonction d'état limite G en contournant le calcul de l'intégrale multidimensionnelle dans l'équation (2.53).

a) First Order Reliability Method (FORM)

Pour appliquer la méthode *FORM*, le problème de fiabilité est réécrit dans l'espace aléatoire standard, où le vecteur aléatoire $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}^T$ est écrit en fonction de variables aléa-

toires normales standard $U = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^T$, au moyen de la transformation isoprobabiliste $X = T(U)$ (voir figure 2.16 (a)).

Dans le cas général, où les composantes du vecteur aléatoire X sont dépendantes, la transformation de Rosenblatt ou celle de Nataf (Ditlevsen and Madsen, 1996) sont utilisées.

Par conséquent, la probabilité de défaillance dans l'équation (2.53) est récrite comme suit :

$$P_f = \int_{G(x \leq 0)} p_X(x)dx = \int_{H(u) \leq 0} \varphi_U(u)du \tag{2.71}$$

Où $H(U) \equiv G \circ T(U) = G(X)$ est la fonction d'état limite dans l'espace aléatoire standard et φ_U est la fonction de densité de probabilité multinormale standard.

L'idée de la méthode $FORM$ est de substituer, dans l'espace aléatoire standard, la fonction d'état limite H par un hyperplan qui lui est tangent (notons le Z), au point de défaillance le plus probable P^*, qui est défini comme le point de la surface d'état limite le plus proche de l'origine de l'espace aléatoire standard (voir figure 2.16 (b)). Il est obtenu en résolvant le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\begin{cases} \|u^*\| = \min\limits_{u \in \mathbb{R}^n} \|u\| \\ subject\ to\ H(u) = 0 \end{cases} \tag{2.72}$$

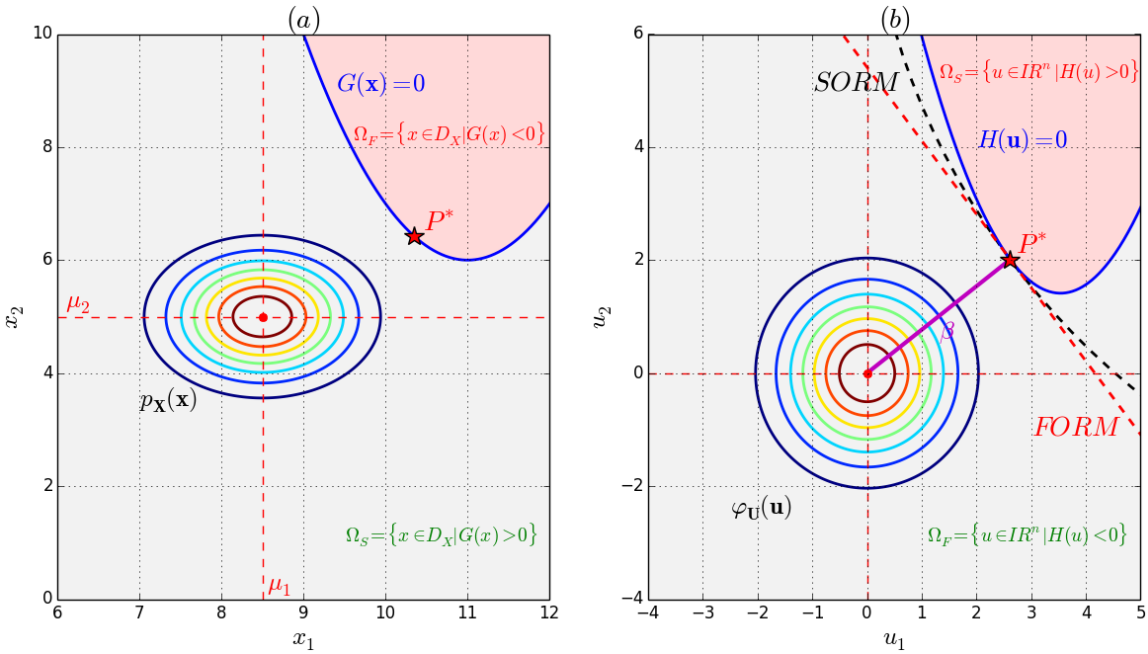


Fig. 2.16. (a) Surface d'état limite et point de conception dans l'espace physique aléatoire, (b) Approximations FORM et SORM dans l'espace aléatoire standard

Une fois les coordonnées $u^* = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}^T$ du point de défaillance le plus probable P^* trouvées, l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind est calculé par :

$$\beta_{HL} = \|u^*\| \tag{2.73}$$

Ensuite, l'approximation de premier ordre de la probabilité de défaillance s'obtient par :

$$P_f \approx P_{f,FORM} = \Phi(-\beta_{HL}) \tag{2.74}$$

Un des inconvénients majeurs de la méthode $FORM$ est la difficulté à estimer l'erreur de calcul de la probabilité de défaillance. Une solution de validation est alors de faire appel aux simulations de Monte-Carlo. Le nombre de calculs nécessaires dépend directement du nombre de variables aléatoires du problème.

L'équation de l'hyperplan Z, peut s'écrire comme suit :

$$z(u) = \alpha^T u + \beta_{HL} \tag{2.75}$$

Où α, représente le vecteur des cosinus directeur α_i (dont la valeur varie entre -1 et 1) associé à U_i.

A l'issue de la méthode $FORM$, on obtient donc en plus d'une estimation de la probabilité de défaillance P_f, le point de de défaillance le plus probable P^* dans l'espace normé et potentiellement la sensibilité de la probabilité de défaillance aux différents aléas du problème grâce aux cosinus directeurs obtenus à partir de l'équation (2.76) :

$$\alpha_i = -\frac{1}{\beta_{hl}} u_i^* \tag{2.76}$$

Si le cosinus directeur d'une variable aléatoire U_i est positif, la variable est dite de résistance, et si le cosinus directeur est négatif, la variable est dite de sollicitation.

L'approximation $FORM$ est souvent satisfaisante, surtout pour les valeurs élevées de l'indice de fiabilité, à condition que le point de défaillance le plus probable P^* soit bien identifié.

La précision de la méthode $FORM$ dépend fortement de la courbure de la surface d'état limite au point de conception et donc de la non linéarité de la fonction $H(u) = 0$. Si la surface d'état limite est :

— convexe alors $P_{f_{FORM}} > P_f$, on surestime P_f ;

— concave alors $P_{f_{FORM}} < P_f$, on sous-estime P_f ;

Il est clair à partir de la figure 2.16 (b) que l'approximation $FORM$ est exacte que lorsque la fonction d'état limite réelle est linéaire. Malheureusement, cette situation est rarement rencon-

trée dans les problèmes réels. Pour cette raison, la méthode de fiabilité du second ordre a été développée.

b) Second Order Reliability Method (SORM)

La méthode *SORM* , schématiquement représenté sur la figure 2.16 (b), cherche à mieux approcher la surface d'état limite, en utilisant une surface quadratique au lieu d'un hyperplan, ce qui convient pour réduire l'erreur qu'on peut commettre sur l'estimation de la probabilité de défaillance.

D'après Breitung (Breitung, 1984), l'estimation *SORM* de la probabilité de défaillance écrit :

$$\begin{aligned} P_f \approx P_{f,SORM} &= \Phi(-\beta_{HL}) \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\beta_{HL}.\kappa_i}} \\ &= P_{f,FORM} \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\beta_{HL}.\kappa_i}} \end{aligned} \tag{2.77}$$

où $\kappa_i, i \in 1,\ldots,(n-1)$ sont les courbures principales de la fonction d'état limite au point de défaillance le plus probable P^*.

Comme on peut le voir de l'équation (2.77), *SORM* améliore simplement l'estimation de la probabilité de défaillance donnée par $FORM$, à travers une pondération par un facteur de correction $\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{HL}.\kappa_i}}$ incluant des informations sur la courbure de la fonction d'état limite. On note que ces courbures sont prises comme des quantités positives pour la fonction d'état limite convexe.

Cette approximation (Equation (2.77)) est appelée formule de ***Breitung*** (Breitung, Karl, 1984). On parle aussi de méthode « *FORM asymptotique* ». Dans le même contexte, ***Tvedt*** (Tvedt, 1983) propose une autre forme de correction :

$$P_{f,SORM,Tvedt} = T_1 + T_2 + T_3 \tag{2.78}$$

Avec :

$$\begin{aligned} T_1 &= \Phi(-\beta_{HL}) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1+k_i\beta_{HL}}} \\ T_2 &= [\beta_{HL}\Phi(-\beta_{HL}) - \phi(-\beta_{HL})] \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1+k_i\beta_{HL}}} - \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1+k_i(1+\beta_{HL})}} \right) \\ T_2 &= (1+\beta)\,[\beta_{HL}\Phi(-\beta_{HL}) - \phi(-\beta_{HL})] \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1+k_i\beta_{HL}}} - \Re \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1+k_i(j+\beta_{HL})}} \right) \end{aligned} \tag{2.79}$$

Breitung (Breitung, 1984) a montré que l'approximation donnée par *SORM* est exacte pour des valeurs élevées de l'indice de fiabilité, car elle tend vers la valeur exacte de la probabilité de défaillance lorsque l'indice de fiabilité est infini. Cependant, *SORM* devient inefficace lorsque la dimension du problème de fiabilité n est élevée. Ceci est principalement dû au calcul des $(n-1)$ courbures, qui nécessitent l'évaluation des dérivées du second ordre de la fonction d'état limite par rapport aux variables aléatoires. Cela pourrait induire un coût de calcul insupportable, en particulier pour des fonctions d'état limite implicites, où les dérivées du second ordre sont calculées au moyen d'une méthode de différences finies. Pour cette raison, seule l'analyse $FORM$ est souvent réalisée pour des problèmes d'ingénierie.

L'effort de calcul majeur, lorsqu'on utilise des approximations $FORM$ et *SORM*, est induit par la procédure de recherche du point de défaillance le plus probable $P*$. En effet, pour résoudre le problème d'optimisation sous contrainte défini par l'équation (2.72), des techniques de calcul basée sur une projection de gradient sont souvent utilisées (Liu and Der Kiureghian, 1991), comme l'algorithme bien connu de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiesser $(HLRF)$ (Rackwitz and Flessler, 1978), qui nécessitent le calcul des dérivées du premier ordre de la fonction d'état limite par rapport aux variables aléatoires à chaque itération, jusqu'à ce que la convergence soit obtenue. Malheureusement, l'algorithme $HLRF$ est inefficace pour les problèmes où la fonction d'état limite est bruitée ou fortement non linéaire, puisque la convergence est obtenue après un grand nombre d'itérations et par conséquent un grand nombre d'évaluations de la fonction d'état limite.

2.3.4.3 Méthode de surface de réponse quadratique

La méthode de Surface de Réponse Quadratique *(SRQ)* offre une bonne alternative pour réduire le coût de calcul par rapport aux méthodes classiques présentées précédemment, tout en conservant une bonne capacité prédictive (Bereriche, 2010).

a) Principe de la méthode de SRQ

La méthode SRQ cherche à substituer la fonction d'état limite $H(u)$ implicite par une autre fonction explicite $\tilde{H}(u)$ obtenue par approximation polynomiale quadratique.

La surface de réponse (SR) est dite (El Hami and Radi, 2011) :

— Globale si elle simule le phénomène mécanique sur l'ensemble du domaine de variation des paramètres entrant en jeu appelés facteurs,

— Locale si elle est construite dans un sous-domaine particulier.

Les méthodes *SRQ* diffèrent, soit par les termes retenus dans la formulation de l'approximation polynomiale quadratique (avec ou sans termes croisés), soit par le critère de convergence adopté, soit par le type de plan d'expériences (i.e. les points d'expérimentation utilisés dans la régression) (Riahi, 2013).

Le plan d'expériences dont le choix doit être judicieusement étudié, permettra de générer un jeu de réalisations de la réponse du modèle mécanique étudié en combinant différents niveaux des variables aléatoires de base. Ces points, serviront ensuite à évaluer la fonction d'état limite. Généralement, les points d'expérimentation sont générés autour du point moyen (c'est à dire autour des valeurs moyennes des variables aléatoires de base).

b) Formulation mathématique de la méthode de *SRQ*

L'expression d'une surface quadratique sous sa forme complète est donnée par :

$$\tilde{H}(u) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j \tag{2.80}$$

Où les a_i, a_{ij} sont les coefficients du polynôme, et u_i les composantes du vecteur u.

Sous forme matricielle, l'équation 2.80 devient :

$$\tilde{H}(u) = \left[\ldots (u_i^p u_j^q)_k \ldots \right] \{ \ldots a_k \ldots \}^T \tilde{H}(u) = [Z] \{a\} \tag{2.81}$$

telles que $p+q \in \{0,1,2\}$; i, $j = 1 \ldots n$; $k = 1, \ldots, l$.

Une surface de réponse par plan d'expériences passe par les deux étapes suivantes :

1. On recherche une surface de réponse approchée, $\tilde{H}^{(k+1)}(u)$, par une méthode de régression en utilisant le résultat d'un plan d'expériences autour de la k^{ime} approximation du point de défaillance le plus probable $P^{*(k)}$.
2. On recherche le nouveau point $P^{*(k+1)}$ par une méthode d'optimisation (par exemple l'algorithme *HLRF*) en se basant sur la nouvelle surface de réponse (approchée a l'étape 1).

Les deux étapes seront ensuite itérées jusqu'à convergence vers le point de défaillance le plus probable.

c) Calcul des coefficients d'une SRQ

Dans un plan d'expériences constitué de n_e expériences, l'ensemble des n_e évaluations de la fonction d'état limite, décrites par l'équation (2.81), peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\left\{ H(u^{(r)}) \right\} = \left\{ z^{(r)} \right\} \{a\} \qquad ; \qquad r = 1, \ldots, n_e \tag{2.82}$$

$\left\{ z^{(r)} \right\}$ est une matrice de dimension $n_e \times l$.

Par la méthode des moindres carrées, on déduit, un estimateur $\{\hat{a}\}$ des n_e coefficients $\{a\}$:

$$Min \sum_{r=1}^{n_e} (\tilde{H}(u^{(r)}) - H(u^{(r)})^2 \tag{2.83}$$

Et on obtient :

$$\{\hat{a}\} = ([Z]^T [Z])^{-1} [Z]^T \left\{ H(u^{(r)} \right\} \tag{2.84}$$

Bien que l'approximation polynomiale quadratique soit construite à chaque itération de l'algorithme d'optimisation, la méthode reste efficace par rapport aux simulations de Monte-Carlo ou à l'utilisation brute de la méthode $FORM$.

Dans les dernières années, les techniques de méta-modélisation ont connu une grande avancée, et d'autres approches ont été développées, telles que celles basées sur le développement en chaos polynomial (PCE), la méthode de collocation (Bressolette et al., 2010 ; Riahi et al., 2010, 2011), la méthode Support Vector Machine (SVM) (Tipping, 2001 ; Rocco and Moreno, 2002 ; Bichon et al., 2011), le krigeage (Bichon et al., 2011 ; Zhang et al., 2015), les réseaux de neurones (Hurtado and Alvarez, 2001) et la méthode de décomposition de la dimension (MDD) (Xu and Rahman, 2005).

Après avoir présenté différentes méthodes d'estimation prévisionnelle de fiabilité mécanique, en gardant la logique de la fiabilité dans le cycle de développement de produits, nous abordons à présent, la fiabilité expérimentale, ou encore l'estimation de fiabilité basée sur les essais.

2.4 Fiabilité expérimentale par les essais

Cette partie reprend les notions essentielles rencontrées en essais de fiabilité et se base essentiellement sur les références suivantes : (Guerin, 2005 ; Tebbi, 2005 ; Beaumont, 2013 ; Voiculescu, 2009 ; Fatemi, 2012 ; Augé, 1998 ; Laronde, 2011).

L'étude de la fiabilité expérimentale donne lieu à la mise en œuvre de trois types d'essais de fiabilité que nous détaillons dans les sections suivantes : Ce sont les essais de robustesse ou essais aggravés (sur les premiers prototypes), les essais d'estimation de la fiabilité (lorsque le produit est mature) et les essais de déverminage (lors de la production).

2.4.1 Les types d'essais

2.4.1.1 Les essais de robustesse

Les essais dits de robustesse ou essais aggravés sont réalisés sur les premiers prototypes pour connaître les faiblesses et les marges de conception, en les soumettant à des sollicitations éche-

lonnées (climatiques, vibratoires, électriques, etc...) c'est à dire des sollicitations dont on augmente les niveaux jusqu'à apparition d'une défaillance.

Selon (CETIM, 2005), « les essais aggravés consistent à soumettre une entité matérielle de conception nouvelle (pièce, composant, assemblage, etc...), à des contraintes d'environnement et/ou de fonctionnement sous des niveaux croissants pouvant atteindre les limites de résistance des technologies, à évaluer les marges de fonctionnement et à déceler rapidement, pour pouvoir les corriger, les défauts inhérents à la conception (produit et/ou procédés qui réduisent ces marges à des valeurs inacceptables) »

Les essais aggravés sont en général préconisés pour trois catégories de produit ou système :

1. Les nouveaux systèmes (en particulier lorsque ceux-ci revêtent un caractère complexe et/ou innovant) ;
2. Les systèmes soumis à de lourdes contraintes sécuritaires ;
3. Les systèmes évoluant dans des environnements sévères et/ou difficiles à quantifier.

Les essais aggravés permettent d'améliorer :

— la robustesse du système par l'amélioration des marges de fonctionnement ;
— le processus de maturation rendant par définition le système d'avantage « mâture ».

De nombreux essais aggravés existent comme : *STRIFE* (STRess for LIFE) (McLean, 1993), *ESS* (Environmental Stress Screen) (Kececioglu and Sun, 1999), *HALT* (McLean, 2009).

2.4.1.2 Les essais d'estimation de la fiabilité

Ce sont des essais menés en phase de maturité du produit pour estimer sa fiabilité. Ils consistent à vérifier que les objectifs de fiabilité sont respectés en reproduisant les conditions d'utilisation du produit (cycle de marche/arrêt, température, humidité, etc...).

Pour cela, on dispose de deux stratégies d'essai :

1. les essais de détermination consistant à déterminer la valeur d'une caractéristique (MTTF, probabilité de défaillance, etc...) ou les paramètres de la loi de mortalité d'un système ;
2. les essais de démonstration permettant de montrer si la valeur d'une caractéristique de fiabilité d'un système est conforme ou non aux objectifs fixés.

2.4.1.3 Les essais de déverminage

Le principe de ces essais consiste à soumettre les produits sortant de fabrication à des sollicitations d'environnement (climatiques, vibratoires, etc...) pendant une durée donnée de manière à faire apparaître les défauts de jeunesse qui peuvent être de différentes natures :

— composants faibles ;
— défauts de fabrication ;
— faiblesses de conception (produits nouveaux) si elles n'ont pas été éliminées auparavant.

A l'issue de l'opération de déverminage, tous les produits de la production triée se trouvent dans la période utile. Il existe de nombreuses techniques d'essai de déverminage (McLean, 2009 ; Kececioglu and Sun, 2003) dont : Burn in, ESS (environmental stress screening), HASS (Highly Accelerated Stress Screen), HASA (Highly Accelerated Stress Audit) .

2.4.2 Estimation de la fiabilité par les essais accélérés

Le but des essais accélérés et de réduire les durées des campagnes d'essais. Plusieurs chercheurs ont travaillé à la mise en place de ces types d'essais. On peut citer les références suivantes (Nelson, 1990), (O'Connor, 2003), (Caruso and Dasgupta, 1998), (Vassilious and Mettas, 2001),(Guérin et al., 2004).

Le principe de ces essais est de sévériser les conditions d'essais, c'est à dire en testant les unités à des niveaux de stress ou sollicitation plus élevés (température élevée, tension électrique élevée, humidité élevée, contrainte mécanique élevée etc...) qu'en conditions nominales ce qui permet de mettre plus rapidement en évidence les défaillances du système.

Les essais accélérés peuvent s'appliquer à toutes les catégories de matériels en employant différents types de stress (mécaniques, électriques, climatiques ...) les plus adaptées vis à vis des modes de défaillance attendus sur ces matériels (Fatemi, 2012) :

— ***Contraintes mécaniques*** : torsion, flexion, flexion rotative, chocs mécaniques, vibrations, vibrations acoustiques, traction/compression, etc. La fatigue est le mode de dégradation le plus communément utilisé pour les composants mécaniques ;
— ***Contraintes électriques*** : cela inclue la tension, l'intensité du courant, la fréquence, choc électrique etc... La tension est le stress électrique le plus communément utilisé puisqu'il génère rapidement des défaillances ;
— ***Contraintes climatiques*** (ou environnementales) : la température et les cycles thermiques sont les stress les plus couramment utilisés. Il est nécessaire d'appliquer des niveaux appropriés pour conserver les modes de défaillance d'origine. D'autres stress peuvent être appliqués comme les ultraviolets, le brouillard salin, la poussière, l'humidité, etc...
— ***Contraintes spécifiques au matériel***.

Il existe plusieurs types d'essais accélérés :

1. Les essais de robustesse : les essais ***HALT*** pour (Highly Accelerated Life Test) ;
2. Les essais d'estimation : les essais accélérés ***ALT*** (Accelerated Life Test) ;
3. Les essais de déverminage : les essais ***HASS*** (Highly Accelerated Stress Screen).

2.4.2.1 Plan d'essais accélérés

A partir des travaux de (Pham, 2003), (Nelson, 1990), (Vassilious and Mettas, 2001), (Meeker and Escobar, 2014), on résume comme suit, les paramètres dont dépend la définition d'un plan d'essais accélérés :

— ***Les stress d'accélération et les limites opérationnelles*** (les limites sont obtenues par des essais aggravés). Les stress peuvent être de toute nature (mécanique, électrique, climatique, etc...) et leurs durées de manifestation de tout ordre (constante, échelonnée, progressive, cyclique ou aléatoire). Le nombre et les niveaux des stress appliqués sont choisis en fonction du produit étudié avec la conservation du mécanisme de défaillance d'origine tout en accélérant suffisamment l'essai ;

— ***Les modes et mécanismes de défaillance*** : dans un essai accéléré, les mécanismes d'endommagement provoqués doivent être représentatifs des conditions normales d'emploi. Chaque mode de défaillance peut être provoqué par un ou plusieurs types de contraintes ;

— ***Le nombre de dispositifs testés à chaque niveau de contrainte***, donnant la précision des estimations ;

— ***Un modèle de vie accélérée***, qui relie la durée de vie sous les conditions accélérées à celles sous les conditions normales d'utilisation.

On rencontre plusieurs profils de stress :

a) Le chargement constant (indépendant du temps)

On soumet chaque composant à un niveau de contrainte constant supérieur à la normale.

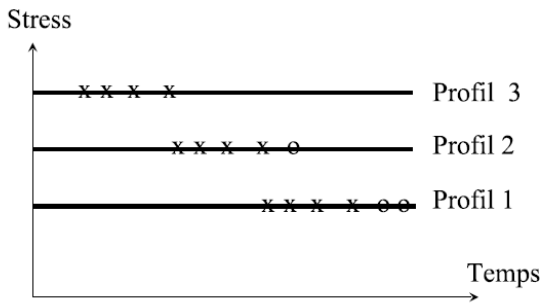


Fig. 2.17. Profil d'essai sous stress constant

b) Le chargement variable (en fonction du temps)

La contrainte choisie, évolue en fonction du temps. Elle peut être augmentée d'une manière échelonnée, progressive, cyclique ou aléatoire etc...

— La contrainte échelonnée : la contrainte est appliquée de manière échelonnée par des niveaux croissants ou décroissants dans le temps (par paliers) jusqu'à l'apparition d'une défaillance,

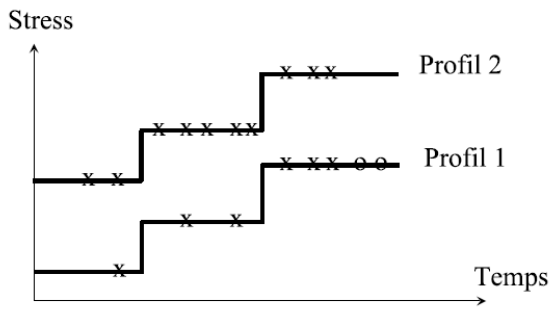


Fig. 2.18. Profil d'essai sous stress échelonné

— La contrainte progressive : la contrainte est augmentée de manière linéaire dans le temps (croissance linéaire).

— La contrainte cyclique : la contrainte est appliquée selon une amplitude et une fréquence données.

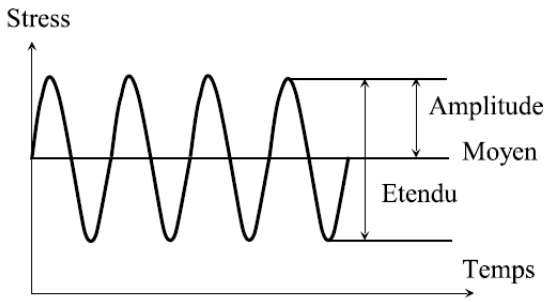


Fig. 2.19. Profil d'essai sous stress cyclique

— La contrainte aléatoire : la sollicitation suit un profil aléatoire (couramment utilisée en vibration).

2.4.2.2 Modèles Standards de Vie Accélérée

Les *SVA* définis par Bagdonavicius et Nikulin ((Nikulin et al., 2007b),(Bagdonavičius et al., 2000), (Tebbi, 2005), (Voiculescu, 2009)) sont des modèles basés sur une fonction de transfert et qui permettent d'obtenir les fonctions de fiabilité à partir de résultats d'essais effectués à des niveaux de contraintes plus élevés que les conditions nominales d'utilisation (cf. figure 2.20). Cela permet a priori de réduire la durée de l'essai (d'où son "accélération"). On considère un ensemble de contraintes, pour lequel on dit que plus la contrainte augmente, plus la fiabilité devient faible. L'objectif des essais accélérés Dodson and Schwab (2006) est de déterminer l'évolution de la fonction de fiabilité en fonction de l'évolution de la contrainte. On suppose que la durée de vie T_s d'un produit sous le stress S est une variable aléatoire de fonction de fiabilité :

$$R_S(t) = Prob(T_S > t), t > 0 \tag{2.85}$$

Soit R_{S_0} la fiabilité au niveau d'effort nominal S_0, et R_S la fiabilité sous un stress constant S, le modèle *SVA* décrit :

$$R_S(t) = R_{S_0}(r(S).t) \tag{2.86}$$

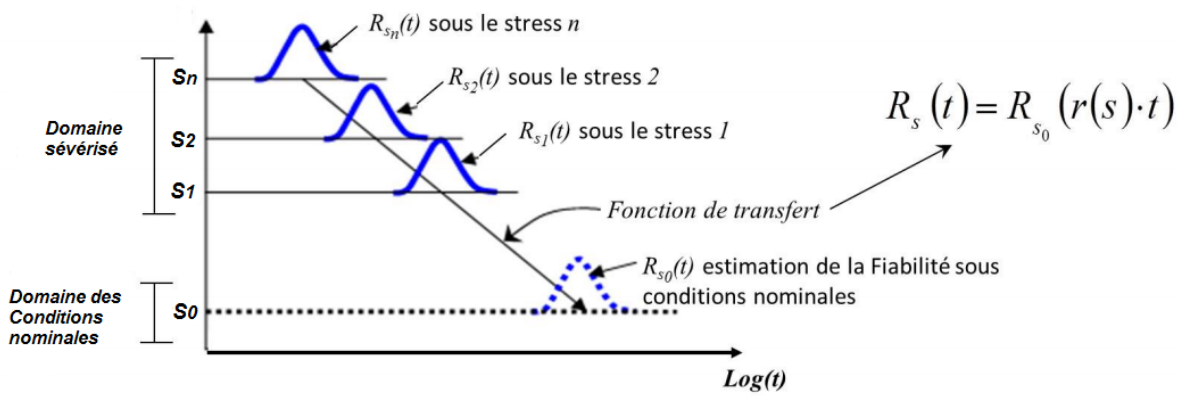


Fig. 2.20. Principe des modèles SVA

Où r représente la fonction de transfert où encore loi d'accélération (voir figure 2.20) et $r(S_0) = 1$. Si la fonction de transfert est complètement inconnue, il devient impossible d'estimer la fiabilité sous conditions nominales. C'est pourquoi r est choisie dans une certaine classe de fonction (e.g. Arrhenius, Eyring (Voiculescu, 2009), (Tebbi, 2005)). Pour l'analyse de la durée de vie le modèle log-linéaire est souvent choisi pour définir le modèle de régression

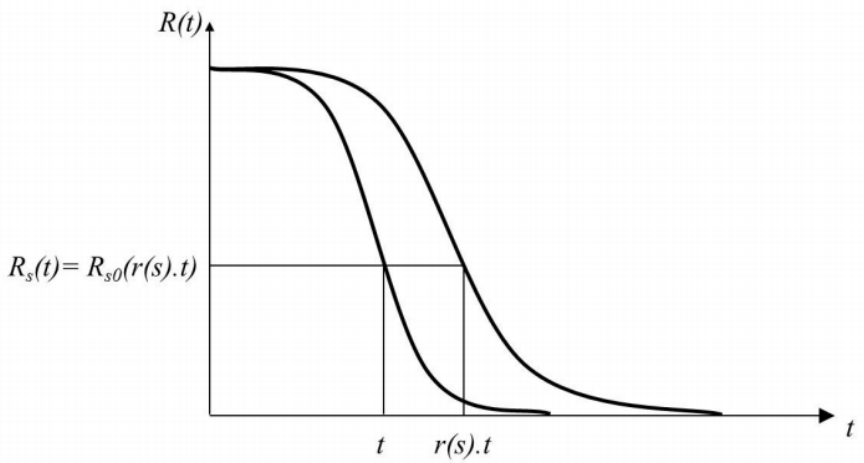


Fig. 2.21. Définition du modèle de régression

Considérons un plan d'essai classique (Nelson, 1990) consistant à utiliser plusieurs niveaux de contraintes constantes $S_1, S_2, ..., S_k$ avec $S_1 < S_2 < \ < S_k$ et soit $S_0 (S_0 < S_1)$ la contrainte usuelle qui ne sera pas utilisée dans la construction du plan d'essai. On considère r dans une certaine classe de fonctions. Nikulin et Bagdonavicius considèrent une forme exponentielle. Si le modèle (équation (2.87)) est vérifié sur l'ensemble des contraintes considérées, alors pour

tout S_1, S_2 appartenant à cet ensemble :

$$R_{S_2}(t) = R_{S_1}(\rho(S_1, S_2).t) \tag{2.87}$$

où $\rho(S_1, S_2) = \frac{r(S_2)}{r(S_1)}$

Supposons une contrainte (stress) unidimensionnelle S appartenant à l'ensemble considéré. Le taux de changement d'échelle est déterminé par la dérivée :

$$\delta(S) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\rho(S, S+\Delta S) - \rho(S,S)}{\Delta_S} = \frac{dlog(r(S))}{dS} \tag{2.88}$$

On a donc pour tout S de l'ensemble :

$$r(S) = e^{\int_{S_0}^{S} \delta(\nu) d\nu} \tag{2.89}$$

Supposons que $\delta(S)$ soit proportionnelle à une fonction connue $u(S)$ de la contrainte :

$$\delta(S) = \beta_1 u(S), \beta_1 > 0 \tag{2.90}$$

Alors,

$$r(S) = e^{\beta_0 + \beta_1 z(S)} \tag{2.91}$$

où $z(S)$ est une fonction primitive de $u(S)$, β_0 et β_1 sont des paramètres inconnus. Dans le cas particulier de $\delta(S) = \beta_1/S$, alors on a :

$$r(S) = e^{\beta_0 + \beta_1 log(S)} = \alpha S^{\beta_1}, \tag{2.92}$$

avec $\alpha = e^{\beta_0}$. Ce modèle correspond au modèle de puissance inverse de Basquin. Ainsi, l'équation (2.87) s'écrit :

$$R_S(t) = R_{S_0}(e^{\beta^T z} t) \tag{2.93}$$

Où $\beta = (\beta_0, ..., \beta_m)^T$ est le vecteur de paramètres et $z = (z_0, ..., z_m)$ le vecteur de primitives (avec $z_0 = 1$) de $u_1, ..., u_m$, avec $\delta(s) = \beta_1 u_1(s) + \cdots + \beta_m u_m(s)$. On trouve dans la littérature de nombreuses applications des modèles *SVA*, principalement dans l'électronique (Caruso and Dasgupta, 1998),(Nelson, 1990) mais beaucoup moins en mécanique.

2.4.2.3 Modèles d'accélération courants

Plusieurs modèles d'accélération, définis pour chaque type de composants et matériaux existent dans la littérature (Nelson, 1990). Dans les paragraphes suivants sont présentés quelques modèles d'accélération les plus utilisés pour des stress à profil constants.

a) Modèle d'Arrhenius

Il est utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température (en particulier : diélectrique, semi-conducteur, batterie, lubrifiant et graisse, plastique et filament de lampe incandescente). La loi d'Arrhenius modélise la durée de vie τ du produit comme fonction de la température T :

$$\tau = Ae^{(\frac{B}{T})} \tag{2.94}$$

Avec : A et B des constantes positives, et T la température absolue.

b) Modèle de Peck

Ce modèle est utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température T et à l'humidité H (en particulier : composants électriques, conducteur aluminium et composants mécaniques soumis à la rupture). Le modèle de Peck est définie par :

$$\tau = A(H)^{-m}e^{(\frac{E_a}{kT})} \tag{2.95}$$

Avec : A et m les paramètres de la loi d'accélération de Peck, T la température, H l'humidité, k la constante de Boltzmann $(8.617110^{-5}eV/K)$ et E_a (en eV) l'énergie d'activation.

c) Modèle puissance inverse

Le modèle de puissance inverse convient au cas où le mécanisme d'endommagement est sensible à un stress particulier (par exemple : diélectrique, roulement à billes ou rouleaux, composants optoélectroniques, composants mécaniques soumis à la fatigue et filament de lampe incandescente).

La loi de puissance inverse décrit la cinétique d'une dégradation sous stress constant V, et la durée de vie est donnée par l'équation :

$$\tau = (\frac{A}{V})^{\gamma} \tag{2.96}$$

Avec : A et γ les constances du modèle, V un stress constant.

Le modèle de Basquin (très utilisé pour la fatigue) est un modèle puissance inverse.

d) Modèle d'Eyring

Ce dernier est utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température T et un stress V (en particulier : composants électriques, conducteur aluminium et composants mécaniques soumis à la rupture). Le modèle d'Eyring est défini par :

$$\tau = (\frac{A}{T})e^{(\frac{B}{kT})}e^{(V(C+\frac{D}{kT}))} \tag{2.97}$$

Avec : T la température absolue, V un stress donné, k : $8.617110^{-5}eV/K$ (constante de Boltzmann) ; A, B, C et D les paramètres du modèle.

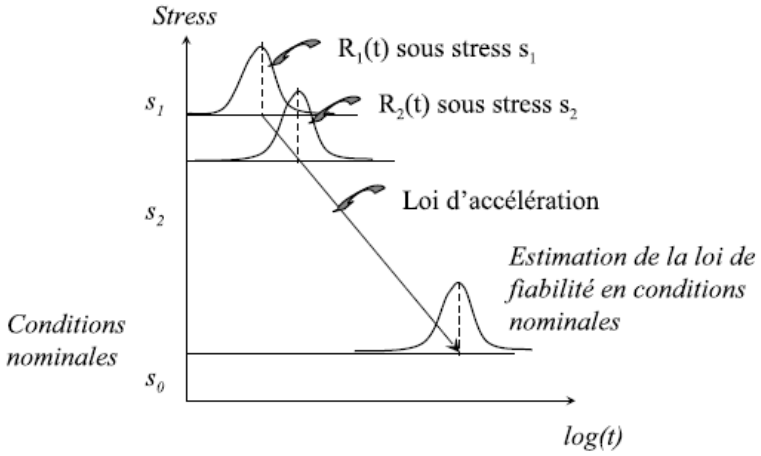


Fig. 2.22. Principe des essais accélérés

Pour finir on peut résumer le principe d'un plan d'essai accéléré (Figure 2.22) comme suit :

— On réalise des essais accélérés qui consistent à solliciter les composants à différents niveaux accélérés de stress s_i (plus sévères qu'en conditions nominales s_0) ;

— On fait l'hypothèse que la distribution des temps de défaillance est identique aux différents niveaux de stress (y compris dans les conditions nominales) et que le paramètre de forme de la distribution soit le même pour tous les niveaux de stress ;

— On choisit un modèle d'accélération adapté à la nature du problème du mécanisme d'endommagement et dont les résultats d'essais à différents niveau de stress permettent de déterminer les paramètres ;

— Ainsi, il est possible de construire la fonction de fiabilité dans les conditions sévérisées $R_s(t)$ et à l'aide de la loi d'accélération (Facteur d'accélération FA), de déduire la fiabilité dans les conditions nominales $R_{s_0}(t)$:

$$R_s(t) = R_{s_0}(FA.t) \tag{2.98}$$

Les essais accélérés permettent de réduire les durées des essais. Dans la section suivante nous présenterons les essais de type bayésiens dont l'objectif et l'intérêt est d'améliorer la qualité d'estimation des paramètres de fiabilité dans un contexte de faible taille d'échantillon.

2.4.3 Essais bayésiens

Les essais accélérés permettent de précipiter plus rapidement la défaillance des composants réduisant ainsi les longues durées que peuvent nécessiter certains essais, surtout pour des produits avec des niveaux de fiabilité élevés. Cependant, il reste la problématique de la taille d'échantillon nécessaire à investir dans les essais pour une bonne estimation des paramètres de fiabilité.

2.4.3.1 Objectif des essais bayésiens

En effet, les prototypes sur lesquels sont souvent effectués les essais d'estimation prennent une proportion importante dans le coût de développement des produits et les industriels cherchent un meilleur compromis entre investissement et qualité d'estimation de fiabilité. Pour apporter une solution à la problématique posée, certains chercheurs ont proposé et développé une méthodologie d'essai s'inspirant du domaine médical et basée sur l'inférence bayésienne.

Les principaux travaux sur l'inférence bayésienne en fiabilité se retrouvent essentiellement dans les références suivantes : (Ringler, 1979 ; Procaccia et al., 1992 ; Procaccia and Morilhat, 1996 ; Lannoy et al., 1994 ; Lannoy and Procaccia, 2001 ; Sander and Badoux, 1991 ; Ross, 2003) etc... Parmi les travaux récents, nous pouvons énumérer les travaux de (Guerin, 2005 ; Guérin et al., 2010 ; Usureau, 2001 ; Bousquet, 2006) qui ont une forte contribution dans le développement des techniques des essais bayésiens et sur lesquels se repose principalement cette partie de notre document.

2.4.3.2 Principe des essais bayésiens

Supposons que l'on souhaite estimer la distribution de la durée de vie d'un composant industriel donné. On désigne par $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un échantillon de résultats d'essais où x_i correspond à une durée de vie du composant. On suppose que cet échantillon est issu d'une loi de distribution dont les paramètres représentés par le vecteur θ sont inconnus. On désigne par $f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)$, la fonction de vraisemblance de la réalisation X.

Soit $g(\theta)$ la densité de probabilité de θ connue à partir des avis d'experts, du retour d'expérience (essais sur produits similaires) ou de bases de données de fiabilité. On appelle $g(\theta)$ la densité de probabilité a priori de θ. Elle modélise une connaissance a priori ou une information subjective sur le vecteur des paramètres inconnus θ.

L'approche bayésienne cherche à améliorer l'estimation de θ en combinant cette connaissance à priori avec la fonction de vraisemblance (connaissance objective) obtenue par les essais au travers du *théorème de Bayes* (figure 2.23).

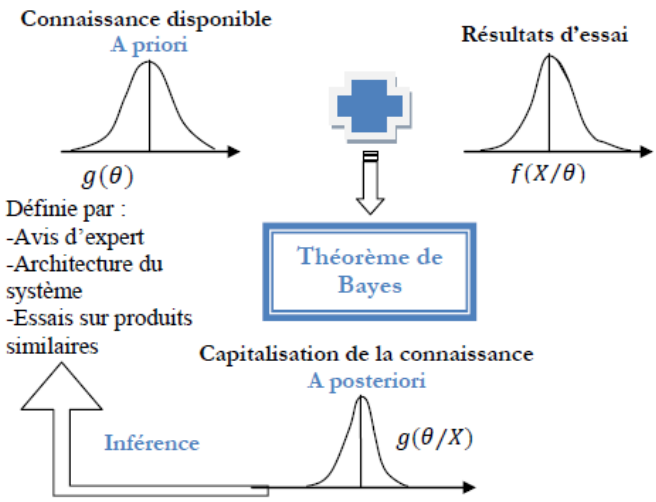


Fig. 2.23. Principe des essais bayésiens

La fonction de densité de probabilité résultante notée ici $g(\theta/X)$ est appelée densité à posteriori de θ. Elle est obtenue par l'équation :

$$g(\theta|X) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta).g(\theta)}{\int_{D(\theta)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta).g(\theta).d\theta} \tag{2.99}$$

A partir de la densité à priorité de θ, on peut déduire les densités de chaque paramètre θ_i :

$$g(\theta_i) = \int_{j=1,\ldots,n,j\neq i} \ldots \int g(\theta|X).d\theta_j \tag{2.100}$$

Ensuite, il sera possible de déterminer les estimateurs ponctuels du paramètre θ_i qui correspond au moment d'ordre 1 (équation (2.101)) et sa variance qui correspond au moment centré d'ordre 2 (équation (2.102)) :

$$\hat{\theta}_i = \int_{D(\theta_i)} \theta_i g_i(\theta_i).d\theta_i \tag{2.101}$$

$$g(\theta_i) = \int_{D(\theta_i)} \left(\theta_i - \hat{\theta}_i\right)^2 g_i(\theta_i).d\theta_i \tag{2.102}$$

On pourra également définir l'intervalle de confiance bilatérale symétrique au niveau de confiance $1-\alpha$ tel que :

$$Prob\left(\theta_i^{inf} \leq \hat{\theta}_i \leq \theta_i^{sup}\right) = 1-\alpha \tag{2.103}$$

Où les bornes θ_i^{inf} et θ_i^{sup} sont obtenues en résolvant les équations suivantes :

$$\int_{D(\theta_i)}^{\theta_i^{inf}} g_i(\theta_i).d\theta_i = \alpha/2 \tag{2.104}$$

$$\int_{D(\theta_i)}^{\theta_i^{sup}} g_i(\theta_i).d\theta_i = 1-\alpha/2 \tag{2.105}$$

La figure suivante (figure 2.23) résume l'application de l'inférence bayésienne pour l'estimation de la fiabilité.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre bibliographique, nous avons abordé les différentes notions relatives à la fiabilité. Nous avons situé la fiabilité aussi bien dans les différentes phases du cycle de développement de produits, que dans le cycle de vie de produits. On comprend ainsi, le grand intérêt que les industriels qui conçoivent les produits et les clients ou utilisateurs finaux portent à la fiabilité. En effet, pour l'un, un produit fiable garantie une bonne performance en fonctionnement et donc une réduction de retour clients ; et pour l'autre, un produit fiable réduit les coûts de maintenance, et garantie un allongement de durée de vie. En résumé, un produit fiable assure une sécurité et une bonne qualité sur la durée.

Nous avons ensuite présenté, les méthodes d'estimation de fiabilité prévisionnelle, en partant des plus classiques aux plus avancées, en relevant les limites des unes et des autres. Dans le même contexte, une part importante a été accordée au couplage mécano-probabiliste. En effet, comme nous l'avons relevé, en mécanique, les bases de données de fiabilité sont très limitées et portent sur des composants très spécifiques, contrairement aux composants électroniques. Lorsqu'il ne s'agit plus de composants standard, les formes des structures mécaniques sont très variables et nécessitent une évaluation particulière de fiabilité.

Le couplage mécano-probabiliste semble une alternative intéressante pour étudier la fiabilité en conception. Il permet, l'étude de la fiabilité prévisionnelle d'une structure mécanique au regard d'une performance attendue, en tenant compte de la variabilité des différents paramètres de conception de la structure (matériaux, géométrie, chargement) et de l'effet de cette variabilité sur la réponse du modèle mécanique. Lorsque les modèles mécaniques sont très complexes, ce qui est souvent le cas, nous avons montré l'intérêt de recourir aux méta-modèles encore appelés modèles de substitution.

Pour finir, dans un premier temps, les méthodes d'estimation de fiabilité par essais ont été présentées, avec un accent sur les essais accélérés qui permettent de réduire les durées de campagnes d'essais, et les méthodes bayésiennes qui elles permettent de réduire les nombres d'essais à réaliser.

La problématique d'estimation de fiabilité est donc d'un grand intérêt et la tendance est l'amé-

lioration de la qualité d'estimation tout en optimisant les coûts inhérents. Dans le cas de développement de nouveaux produits, l'autre défi est d'obtenir cette estimation au plus tôt dans la phase de développement, avant d'anticiper les améliorations si nécessaires. Les approches purement numériques et purement expérimentales sont limitées dans ce contexte.

Dans la suite de ce manuscrit, nous proposons donc une méthodologie pour répondre à la problématique d'estimation de fiabilité au plutôt dans la phase de développement d'un nouveau produit. Les notions abordées dans ce chapitre bibliographique, à l'instar de la fiabilité prévisionnelle mécanique, les essais accélérés et les essais bayésiens, constituent des ingrédients pour la méthodologie envisagée.

3

Méthodologie d'estimation de fiabilité et de qualification en phase de développement

« *Everything is theoretically impossible, until it is done.* »

Robert A. Heinlein

Contents

3.1 Introduction **87**

3.2 Estimation numérique de la fiabilité prévisionnelle **88**

3.2.1 Méthode de développement en polynômes de chaos (DCP) 88

3.2.2 Méthode de décomposition de la dimension (MDD) 91

3.2.3 Étude comparative 94

3.3 Estimation de fiabilité par couplage RETEX-Numérique **98**

3.3.1 Position du problème 98

3.3.2 Méthode basée sur un facteur de similitude 98

3.3.2.1 Définition d'un facteur de similitude 98

3.3.2.2 Estimation de fiabilité pour une nouvelle conception 100

3.4 Méthode basée sur une fonction de transfert temporel **103**

3.4.1 Principe de la fonction de transfert 103

3.4.2 Construction de la fonction de transfert 106
3.4.2.1 Discrétisation du domaine de la fiabilité 106
3.4.2.2 Durées de vie expérimentale et numérique de la conception de référence 106
3.4.2.3 Fonction de transfert temporel de la conception de référence 107
3.4.3 Construction de la distribution des durées de vie et estimation de fiabilité 108
3.5 Amélioration par actualisation Bayésienne inverse 111
3.5.1 L'approche Bayésienne inverse 111
3.5.2 Actualisation Bayésienne par Markov Chain Monte Carlo 112
3.5.3 L'algorithme de Metropolis-Hastings (MH) 113
3.5.4 Réglage paramétrique de l'algorithme $MCMC-HS$ 115
3.6 Qualification en phase de développement 116
3.6.1 Plan de démonstration 116
3.6.1.1 Plan de démonstration classique 116
3.6.1.2 Plan de démonstration Bayésien 117
3.6.2 Estimation Bayésienne de fiabilité 119
3.6.2.1 Principe de l'approche Bayésienne 119
3.6.2.2 Détermination des estimateurs Bayésiens 121
3.6.2.3 Détermination de la distribution a priori à partir d'informations disponibles 123
3.6.3 Estimation Bayésienne avec pondération de l'a priori 124
3.6.3.1 Principe de détermination du facteur de pondération 125
3.6.3.2 Utilisation du facteur de pondération 126
3.6.3.3 Estimation de la distribution a posteriori pondérée 126
3.7 Conclusion 127

3.1 Introduction

Il est largement reconnu aujourd'hui et en particulier dans l'industrie automobile, que la fiabilité est l'un des paramètres les plus importants qui caractérisent la performance des produits. En effet, la fiabilité traduit l'aptitude du produit à fonctionner sans défaillance dans des conditions données et sur une durée donnée. Les produits ayant le plus haut niveau de fiabilité sont susceptibles d'être plus sûrs et dans une mesure plus disponibles. Pour ces raisons, les clients sont de plus en plus intéressés par des produits très fiables, et les industriels sont contraints de fournir le niveau de fiabilité associé à leurs produits au même niveau que leurs prix. Dans ce contexte, l'estimation de la fiabilité des nouveaux produits, au début de leur cycle de vie, présente un grand intérêt. Elle aide les industriels à améliorer la fiabilité de leurs produits avant qu'ils atteignent le marché et, par conséquent, à faire face efficacement à la concurrence. En effet, à ce stade de développement, les ingénieurs ont encore une grande marge de manœuvre pour revoir la conception. Dans le cas contraire, les modifications apportées aux stades ultérieures du cycle de vie des produits pourraient prendre du temps et entraîner des coûts supplémentaires.

Dans le cas des composants automobiles, l'évaluation de la fiabilité mécanique est généralement basée sur l'analyse statistique des données, qui sont issues d'essais dans le cas d'un nouveau produit, tels que les essais accélérés (Escobar and Meeker, 2006) ; ou des données collectées pendant le cycle de vie d'anciennes versions dans le cas de développement de versions améliorées d'un produit existant. Dans les deux cas, l'estimation de la fiabilité en phase de développement, reste un problème difficile, principalement en raison du coût élevé du processus de tests d'une part, et d'autre part, du manque et/ou de la qualité insuffisante de données disponibles.

Dans la phase de développement d'un produit, l'analyse de fiabilité mécanique par des méthodes de simulation numérique, est de plus en plus appréciée dans l'industrie automobile. Ceci, en raison des différentes possibilités qu'elles offrent. Cependant, ces méthodes numériques ne permettent pas à elles seules, une validation suffisante et réaliste de la fiabilité future du produit. Par ailleurs, les concepteurs automobiles disposent très souvent, d'un retour d'expérience (notamment issu d'essais) suffisant sur la fiabilité de leurs développements antérieurs. Aussi, dans un contexte où les produits présentent des similarités importantes, l'exploitation du retour d'expérience est opportune.

Au regard des difficultés exposées ci-dessus, il est plus que nécessaire, d'exploiter d'autres voies de solutions afin de proposer une méthodologie plus adaptée à la problématique d'estimation de fiabilité mécanique en phase de développement. Nous proposons deux approches que nous décrivons brièvement dans un premier temps du plus simple au plus complexe avant de les détailler plus tard.

La première approche repose sur l'analyse de similitude entre la fiabilité prévisionnelle obtenue par une méthode numérique et la fiabilité expérimentale. L'idée est d'établir un facteur permettant de quantifier le degré de similitude entre ces deux distributions, pour une version

de référence $\mathcal{D}_{ref}$ d'un produit donné. Ensuite, ce facteur peut être utilisé dans des conditions données pour améliorer l'usage direct des résultats de la méthode numérique d'estimation de fiabilité dans le cadre de développement d'une nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$.

La deuxième proposition consiste à combiner l'analyse de fiabilité numérique et le principe de la fonction de transfert temporel (FTT), inspiré de l'analyse des essais accélérés (Nelson, 1990 ; Bagdonavicius and Nikulin, 2001). La FTT dans notre contexte est une fonction associée au design de référence $\mathcal{D}_{ref}$, et permettant le passage d'une fiabilité prévisionnelle numérique à la fiabilité expérimentale et vice-versa. Ainsi, pour une nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ du produit, sa fonction de fiabilité escomptée est estimée en utilisant la FTT et sa fonction de fiabilité numérique.

Nous noterons par la suite par *fiabilité expérimentale*, celle estimée par notre méthodologie, pour la distinguer de la fiabilité expérimentale basée sur de vrais essais.

Dans les deux approches proposées, nous faisons recourt à un modèle mécanique pour calculer numériquement les durées de vie et en déduire la fiabilité prévisionnelle. Nous détaillons dans la section suivante le choix de la méthode d'estimation numérique de fiabilité prévisionnelle.

3.2 Estimation numérique de la fiabilité prévisionnelle

Les stratégies classiques de couplage mécano-probabiliste, telles que celles présentées dans le chapitre 2, souffrent d'inefficacité lors du traitement de problèmes d'ingénierie pour lesquels, d'une part, le modèle mécanique est le plus souvent disponible sous une forme implicite complexe, et d'autre part, le nombre de paramètres incertains peut être très élevé induisant une monté exponentielle du nombre d'appels au modèle mécaniques lors du calcul probabiliste. Pour pallier à ce problème, l'idée est d'utiliser des stratégies de couplage basées sur la technique de méta-modélisation, dont l'efficacité a été approuvée (Boyd, 1989). Dans ce qui suit, on explorera deux d'entre elles à savoir, la méthode de développement en polynômes de chaos (DCP) (Ghanem and Spanos, 1990) et la méthode de décomposition de la dimension (MDD) (Rabitz and Ali, 1999).

3.2.1 Méthode de développement en polynômes de chaos (DCP)

Considérons un modèle mécanique, représenté mathématiquement par la fonction $y = \mathcal{M}(x)$, où certains de ses paramètres d'entrée, rassemblés dans le vecteur n-dimensionnel $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^T$ sont incertains, et soit $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}^T$ un vecteur aléatoire associé à x, qui est entièrement décrit par sa fonction de densité de probabilité conjointe f_X. Sous cette condition, il est clair que la réponse y (qui peut représenter par exemple, une contrainte mécanique, un déplacement ou une durée de vie en fatigue ...) fournie par le modèle $\mathcal{M}$ est une quantité aléatoire, avec Y le modèle probabiliste (variable aléatoire) associé. L'approximation polynomiale d'ordre p de la réponse Y, donnée par la méthode DCP, peut être écrite dans l'espace aléatoire standard, comme :

$$Y \approx \hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{M}} \circ T(U) = \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha \psi_\alpha(U) \tag{3.1}$$

avec $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ des multi-index, et a_α des coefficients déterministes inconnus,

$U = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^T$ est la variable gaussienne standard n-dimensionnelle associée à la variable aléatoire n-dimensionnelle $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}^T$, obtenue grâce à la transformation probabiliste T. Les ψ_α sont des polynômes multivariés.

Puisque le méta-modèle *DCP* est écrit dans l'espace aléatoire standard, c'est-à-dire que l'approximation polynomiale $\hat{\mathcal{M}}$ est une fonction de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, les polynômes multivariés ψ_α peuvent être facilement obtenus par tensorisation de N polynômes d'Hermite orthonormés uni-variés $\{H_{\alpha_k}\}_{k=1}^n$:

$$\psi_\alpha(u) = H_{\alpha_1}(u_1) \times \cdots \times H_{\alpha_n}(u_n) \tag{3.2}$$

En exploitant l'orthonormalité de la base polynomiale tronquée $\{\psi_\alpha, |\alpha| \leq p\}$, les coefficients inconnus a_α peuvent être calculés par des méthodes de projection spectrale telles que, les techniques de simulation ou de quadrature. Ici, la méthode de régression basée sur un plan d'expérience efficace est utilisée. Les estimations des a_α sont calculées par la minimisation de l'erreur quadratique moyenne du méta-modèle $\hat{\mathcal{M}}$ de la réponse mécanique y.

Le problème de régression peut être posé comme suit :

$$\textit{Trouver} \;\; \hat{a} \;\; \textit{qui} \;\; \textit{minimise} \;\; E\left[(a^T \psi_\alpha(U) - \mathcal{M}(U))^2\right] \tag{3.3}$$

où $E[.]$ désigne l'espérance mathématique.

Le taux de convergence des estimateurs des coefficients inconnus peut être amélioré en utilisant des suites à discrépance faible telles que celles de *Sobol* (Dai and Wang, 2009), qui donnent une meilleure uniformité du remplissage de l'espace que les nombres pseudo-aléatoires ou l'échantillonnage hypercube latin (figure 3.1).

Soit $\Im_n^p = \{\alpha \in n^n \;\; tel \;\; que \;\; |\alpha| \leq p\}$ un ensemble d'index associé à un PC de degré p, avec $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Par conséquent, le nombre de termes dans le *DCP* est :

$$card(\Im_n^p) = \binom{n+p}{p} = \frac{(n+p)!}{n!p!}. \tag{3.4}$$

Il est clair que le nombre d'appels au modèle mécanique implicite, nécessaire pour construire le *DCP*, peut s'avérer prohibitif, puisque le nombre de termes du *DCP* est à croissance polynomiale avec le nombre de paramètres d'entrée incertains n, et l'ordre ou le degré p du *DCP*. Pour

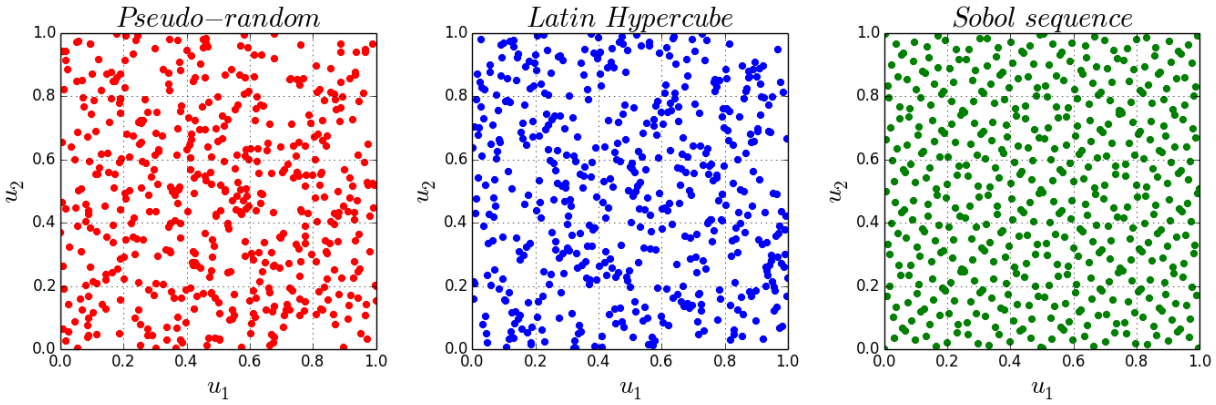


Fig. 3.1. Comparaison de l'uniformité du remplissage spatial des nombres pseudo-aléatoires, de l'échantillonnage de l'hypercube latin et de la séquence de Sobol

contourner ce problème, une stratégie de troncature efficace, qui vise à conserver les termes du *DCP* associés à l'interaction d'ordre faible (Blatman, 2009), est employée. En effet, les pratiques d'ingénierie ont montré que souvent les interactions d'ordre élevé $(i.e > 3)$ n'ont pas d'effets significatifs sur les réponses du modèle mécanique.

Soit i l'ordre maximum des interactions conservées, selon (An and Owen, 2001), le nombre de termes du méta-modèle *DCP* est $card(\Im_n^{p,i})$, avec $\Im_n^{p,i} = \left\{\alpha \in n^n \ de \ sorte \ que \ |\alpha| \leq p \ et \ \sum_{k=1}^{n} I_{\alpha_k > 0} \leq i\right\}$. Il est clair que, si les interactions d'ordre élevé ont un effet faible, l'économie définie comme le rapport de $card(\Im_n^{p,i})$ à $card(\Im_n^{p})$ peut être très significative comme le montre la figure 3.2.

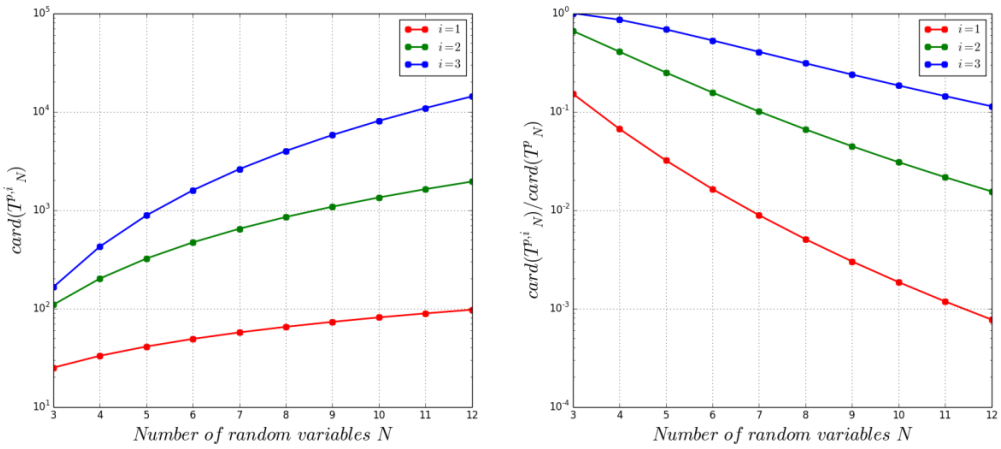


Fig. 3.2. L'économie $card(\Im_N^{p,i})/card(\Im_n^{p})$ par rapport au nombre de variables aléatoires pour un PC de degré $p = 8$

Une fois les estimateurs $\hat{a}_\alpha$ des coefficients inconnus sont obtenus, les moments statistiques tels que la moyenne $\mu_Y^{p,i}$ et la variance $V_Y^{p,i}$ de Y peuvent être calculés analytiquement (Blatman, 2009), comme suit :

$$\mu_Y^{p,i} = \hat{a}_0 \tag{3.5}$$

$$V_Y^{p,i} = \sum_{|\alpha| \leq p} \hat{a}_\alpha^2 \tag{3.6}$$

Notons que les moments statistiques d'ordre supérieur, tels que l'asymétrie et l'aplatissement, peuvent être facilement obtenus de la même manière.

La fonction de densité de probabilité f_Y de la réponse mécanique peut être obtenue par une technique basée sur les moments (Pearson, 1963) en utilisant les estimateurs des quatre premiers moments statistiques, ou en effectuant des simulations de Monte-Carlo sur le méta-modèle *DCP*.

En plus, des analyses de sensibilités basées sur la décomposition de la variance peuvent être effectuées sans efforts de calcul supplémentaires. En effet, les indices de sensibilité de Sobol (Sobol, 1993) peuvent être obtenus via un post-traitement sur les coefficients du *DCP*.

Soit $\Im_k$ l'ensemble des indices $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ tels que seuls les composants α_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$ sont non nuls, les indices de sensibilité de Sobol du premier ordre (Sudret, 2008), associés au k^{th} variable aléatoire, sont les suivants :

$$S_{1,k}^{p,i} = \frac{1}{V_Y^{p,i}} \sum_{\alpha \in \Im_k} \hat{a}_\alpha^2 \tag{3.7}$$

Les indices de sensibilité totaux de Sobol sont donnés par :

$$S_{T,k}^{p,i} = \frac{1}{V_Y^{p,i}} \sum_{\alpha \in \Im_k^T} \hat{a}_\alpha^2 \tag{3.8}$$

où $\Im_k^T$ désigne l'ensemble de tous les indices $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ avec un k^{th} composant non nul.

3.2.2 Méthode de décomposition de la dimension (MDD)

L'idée clé de la méthode de décomposition de la dimension est de construire une surface de réponse pour approximer une relation de type entrée-sortie. Cette approche consiste à discrétiser une fonction multidimensionnelle en un ensemble de sommes finies et hiérarchiques de fonctions simples des variables aléatoires de base. Dans la suite, les formulations mathématiques sont développées dans l'espace aléatoire standard.

Considérons à nouveau le modèle mathématique $\mathcal{M}$ représentatif du modèle mécanique à étudier. Soit $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}^T$, le vecteur n-dimensionnel représentant les paramètres incertains dans l'espace aléatoire standard. Selon la méthode de décomposition de la dimension, la réponse y peut être décomposée en fonctions élémentaires, comme suit :

$$y = \mathcal{M}(u) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} y_k(u_k) + \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2>k_1}^{n} y_{k_1,k_2}(u_{k_1}, u_{k_2}) + \cdots + y_{k_1,\cdots,k_n}(u_{k_1}, \cdots, x_{k_n}) \tag{3.9}$$

avec y_0 est une constante réelle, obtenue comme réponse en évaluant le modèle $\mathcal{M}$ à un point de référence spécifique $u^r = \{u_1^r, u_2^r, \ldots, u_n^r\}^T$ (par exemple le point moyen). y_k, y_{k_1,k_2} et $y_{k_1,\cdots,k_n}$ sont respectivement des fonctions unidimensionnelles, bidimensionnelles et n-dimensionnelles. Il est à noter que ce développement n'est valide que pour des variables aléatoires indépendantes, et peut être facilement étendue au cas de réponse non-scalaire $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}^T, m > 1$.

Pour une mise en œuvre pratique, le développement ci-dessus doit être tronqué et seuls les composants d'ordre faible doivent être pris en compte. Par conséquent, l'approximation s-dimensionnelle $\hat{y}_s$ de la réponse y est la suivante :

$$y \cong \tilde{y}_s = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_{n-s+i-1}^{i} \sum_{k_1=1}^{n-s+i-1} \cdots \sum_{k_{s-i}=k_{s-i-1}-1}^{n} y_{k_1,\cdots,k_{s-i}}(\tilde{u}) \tag{3.10}$$

avec $y_{k_1,\cdots,k_{s-i}}$ des fonctions à $(s-i)$ variables représentant la contribution d'ordre $(s-i)$ parmi les paramètres $u_{k_1}, \ldots, u_{s-i}$ rassemblés dans le vecteur $\tilde{u}$.

Dans le cas où l'effet des interactions d'ordre élevé est faible, il est clair à partir de l'équation (3.10) que la méthode de décomposition de la dimension peut être très efficace pour approcher des modèles implicites coûteux en temps de calcul. En effet, dans la littérature, on distingue deux usages : la réduction de la dimension des intégrales multidimensionnelles telles que celles rencontrées dans les calculs de moments statistiques d'une quantité aléatoire, ou encore la construction de surface de réponse de modèles non connus sous forme explicite.

Par définition, le moment statistique d'ordre l de la variable aléatoire Y représentant la variabilité de la réponse y induite par les paramètres incertains du modèle $\mathcal{M}$, s'écrit :

$$m_Y^l \cong \mathbb{E}[Y^l] = \int_{\Omega_Y} y^l p_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^l(u) \varphi_U(u) du \tag{3.11}$$

où $\mathbb{E}[.]$ désigne l'espérance mathématique et φ_U est la fonction de densité de probabilité multinormale standard.

L'évaluation de l'intégrale (3.11), en utilisant des algorithmes de calcul traditionnels tels que les règles de quadratures, n'est pas une tâche triviale, en particulier dans le cas d'intégrante implicite et d'intégration de dimension élevée. En remplaçant, l'intégrante dans l'équation (3.11) par son approximation donnée par la méthode de décomposition de la dimension, basée sur l'équation (3.10), le moment statistique m_Y^l d'ordre l est réécrit comme suit :

$$m_Y^l \cong \sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_{n-s+i-1}^i \sum_{k_1=1}^{n-s+i-1} \cdots \sum_{k_{s-i}=k_{s-i-1}-1}^{n} \mathbb{E}\left[y_{k_1,\cdots,k_{s-i}}^l(\tilde{u})\right] \tag{3.12}$$

Le terme d'espérance $\mathbb{E}\left[y_{k_1,\cdots,k_{s-i}}^l(\tilde{u})\right]$ dans l'équation ci-dessus, a l'expression suivante :

$$\mathbb{E}\left[y_{k_1,\cdots,k_{s-i}}^l(\tilde{u})\right] = \int_{\mathbb{R}^{(s-i)}} y_{k_1,\cdots,k_{s-i}}^l(\tilde{u}) \varphi_{\tilde{U}}(\tilde{u}) d\tilde{u} \tag{3.13}$$

avec $\varphi_{\tilde{u}}$, la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire normale $(s-i)$-dimensionnelle $\tilde{U} = \{U_{k_1}, \ldots, U_{k_{si}}\}^T$.

Maintenant, à partir des équations (3.12) et (3.13), il est clair que le calcul du moment statistique m_Y^l est réduit à l'évaluation d'un ensemble d'intégrales de dimension $(s-i)$ au plus, au lieu de dimension n, plus fastidieux. Ces intégrales élémentaires peuvent être calculées avec précision et efficacité par quadrature de Gauss. Afin d'avoir une image complète de la variabilité de la réponse y, sa fonction de densité de probabilité p_Y peut être facilement construite en utilisant une technique basée sur les moments statistiques (Pearson and Tukey, 1965). Notez que l'utilisation d'une telle technique nécessite un niveau de précision élevé sur les estimateurs des quatre premiers moments statistiques de la quantité aléatoire, à savoir la moyenne, l'écart-type, l'asymétrie et l'aplatissement.

Dans le développement précédent, l'approximation donnée par la méthode de décomposition de la dimension est utilisée implicitement pour réduire la dimension des intégrales. Autrement dit, sans vraiment construire la surface de réponse. Il ressort de l'équation 3.10 qu'une formulation analytique de la réponse du modèle est obtenue si et seulement si les fonctions composantes $y_{k_1,\ldots,k_{s-i}}$, dérivées par le processus de décomposition, sont connues. Ce problème peut être facilement résolu en les considérant comme des fonctions de forme. En effet, les fonctions composantes peuvent être simplement construites par projection sur une base polynomiale. Dans ce travail, l'interpolation polynomiale est basée sur la base de Lagrange, comme suit :

$$y_{k_1,\ldots,k_{s-i}}(u_{k_1},\ldots,u_{k_{s-i}}) = \sum_{j_1=1}^{N} \cdots \sum_{j_{s-i}=1}^{N} \mathcal{M}(u_{k_1}^{j_1},\ldots,u_{k_{s-i}}^{J_{s-i}}) \times l_{j_1}(u_{k_1}) \times \cdots \times l_{j_{s-i}}(u_{k_{s-i}}) \tag{3.14}$$

où $l_{j_{s-i}}(u_{k_{s-i}})$ sont des polynômes de Lagrange unidimensionnels construits autour d'un ensemble de points expérimentaux $u_{k_{s-i}}^{j_{s-i}}, 1 \leq j_{s-i} \leq N$, $\mathcal{M}(u_{k_1}^{j_1},\ldots,u_{k_{s-i}}^{J_{s-i}})$ sont des coefficients réels.

Une étape supplémentaire nécessaire avant la construction de l'approximation polynomiale, est de construire un plan d'expérience approprié. Les composantes du plan d'expérience peuvent être choisies comme les points d'intégration de Gauss-Hermite, utilisés précédemment dans le calcul de l'espérance dans l'équation (3.13), ou des points répartis uniformément autour d'un

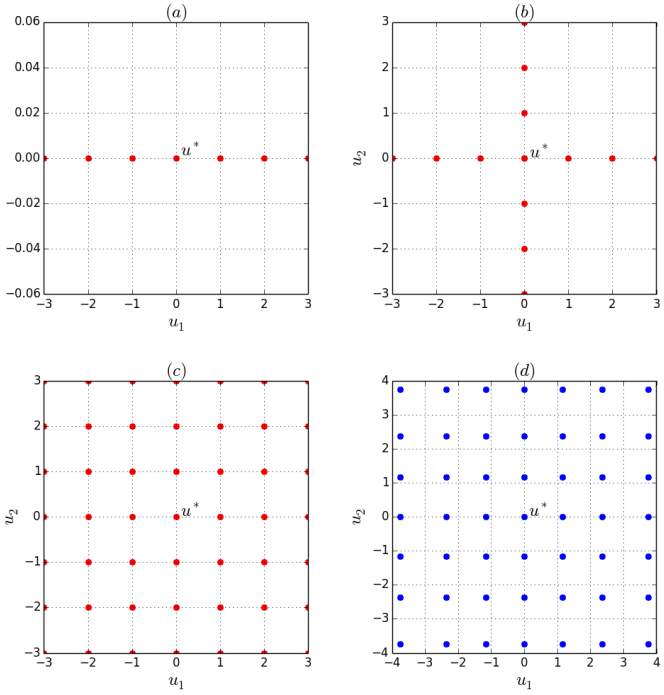


Fig. 3.3. Plan d'expériences (a) $n = 1$, $s = 1$, (b) $n = 2$, $s = 1$, (c) $n = 2$, $s = 2$ (d) Points d'intégration Gauss-Hermite

point de référence $u^r = \{u_1^r, u_2^r, \ldots, u_n^r\}^T$, obtenus par la formule récursive suivante (Xu and Rahman, 2005) :

$$\left\{u_k^j\right\}_{j=1}^N = \left\{u_k^r - \frac{N-1}{2\delta_k}, u_k^r - \frac{N-3}{2\delta_k}, \ldots, u_k^r, \ldots, u_k^r + \frac{N-3}{2\delta_k}, u_k^r + \frac{N-1}{2\delta_k}\right\} \tag{3.15}$$

où u_k^r est la coordonnée du point de référence dans la direction k de l'espace aléatoire et δ_k est une perturbation qui contrôle la distance entre les points du plan d'expérience.

Le choix approprié du point de référence est d'une grande importance pour avoir une interpolation précise. Il a été démontré que le point moyen donne de bons résultats lorsqu'il s'agit de l'analyse des moments statistiques. Dans le cas de l'analyse de fiabilité, le point de défaillance le plus probable P^* est le meilleur candidat. Cependant, une analyse FORM doit être effectuée pour calculer ses coordonnées, ce qui augmente probablement le temps de calcul. La figure 3.3 montre une comparaison de plans expérimentaux obtenus par la formule récursive (équation (3.15)) pour différentes dimensions n et ordre de décomposition s, et les points d'intégration de Gauss-Hermite.

3.2.3 Étude comparative

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'évaluation de la précision et l'efficacité des deux approches de construction de méta-modèle présentées précédemment, pour effectuer de la propagation d'incertitudes à travers un modèle mécanique. Nous considérons un tuyau fissuré sol-

licité par une pression interne $P = 15.5$ MPa et une traction axiale $\sigma_t = 100$ MPa, comme il est montré sur la figure 3.4(a). Le tuyau de longueur $L = 1000$ mm, a un rayon interne $R_i = 393.5$ mm, et une épaisseur $t = 62.5$ mm. Il contient une fissure circonférentielle de longueur initiale $a = 15$ mm.

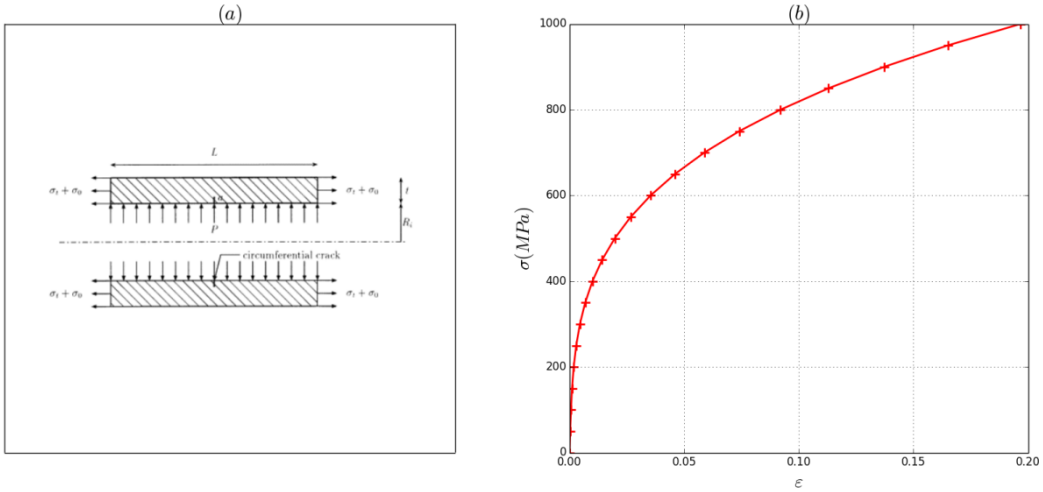


Fig. 3.4. (a) Tuyau fissuré, (b) Loi de comportement de Rambreg-Osgood

Compte tenu des conditions aux limites, aux extrémités du tuyau, la pression interne P induit des efforts de traction longitudinale, en plus de la traction axiale σ_t. La pression σ_0 due aux effets de bord s'écrit :

$$\sigma_0 = \frac{R_i^2}{(R_i - t)^2 - R_i^2} P \tag{3.16}$$

Le tuyau est fabriqué en acier dont le comportement suit la loi de Ramberg-Osgood :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma_y}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^n \tag{3.17}$$

où σ et ε désignent respectivement la contrainte et la déformation, E le module de Young, σ_y la limite élastique, n le coefficient d'écrouissage et α le coefficient de la loi de Ramberg-Osgood. La courbe contrainte-déformation associée à cette loi de comportement est donnée par la figure 3.4 (b).

Plusieurs méthodes ont été développées afin de caractériser la singularité du champ de contraintes au voisinage de la pointe de la fissure. Les facteurs d'intensité de contraintes sont souvent utilisés lorsque le comportement du matériau constitutif est élastique. Dans le cas où le matériau exhibe un comportement élastoplastique, on fait appel à l'intégrale J dont l'évaluation est basée sur le calcul du taux de restitution d'énergie. La propagation de fissures est observée lorsque l'intégrale J dépasse la ténacité du matériau J_{I_c}. Malheureusement, dans le cas de problèmes d'ingénierie, pour lesquels la géométrie des structures et les conditions de chargement sont com-

plexes, l'évaluation de l'intégrale J n'est possible qu'à l'aide d'approches numériques. Dans ce contexte, un modèle éléments finis est développé sur le logiciel Cast3m afin d'évaluer le comportement du tuyau fissuré. En raison de la symétrie du tuyau (i.e. problème axisymétrique), seul le quart de la géométrie est modélisé. Le maillage est composé de 709 éléments quadratiques et de 1553 nœuds. La figure 3.5 illustre le maillage et les conditions de chargement.

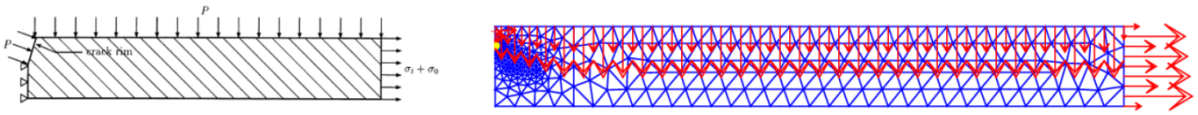


Fig. 3.5. Conditions de chargement et maillage

Dans un premier temps nous nous intéressons à l'étude de l'effet de l'incertitude qui entache le module de Young E, la limite élastique σ_y et les deux paramètres n et α de la loi de Ramberg-Osgood, sur la variabilité de la réponse mécanique représentée par l'intégrale J. Les paramètres incertains sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes dont le type et les caractéristiques statistiques sont donnés dans le tableau 3.1.

TABLE *3.1 Caractéristiques statistiques des paramètres incertains*

Paramètre	**Distribution**	μ	σ
E	lognormale	175500 MPa	1000 MPa
σ_y	lognormale	259.5 MPa	10 MPa
n	normale	3.5	0.1
α	normale	1.15	0.15

TABLE *3.2 Estimations des moments statistiques*

Méthode			**Moments statistiques**				**Nombre d'appels au MEF**
			μ	σ	δ	κ	
DCP	p=1, q=2		28.212	2.093	0	3	16
	p=2, q=3		28.161	1.960	0.253	3.093	81
MDD	p=1	q=2	28.145	1.969	-0.048	0.353	9
		q=3	28.146	1.967	-0.002	1.596	13
		q=4	28.152	1.967	0.003	1.606	17
		q=5	28.158	1.965	-0.002	1,612	21
		q=6	28.160	1.963	0.005	1.609	25
	p=2	q=2	28.144	1.964	0.210	1.946	33
		q=3	28.161	1.961	0.255	3.092	67
SMC			28.162	1.962	0.254	3.091	10000

Les quatre premiers moments statistiques de la réponse mécanique sont calculés par différentes approches : la méthode du Développement en Chaos Polynômial (*DCP*) et la Méthode de Décomposition de la Dimension (*MDD*). Les estimations sont comparées à celles obtenues par 10000 Simulations de Monte-Carlo (*SMC*) effectuées directement sur le modèle éléments finis. On note que, les coefficients du *DCP* sont calculés par quadrature de Gauss-Hermite, dont le

nombre de points d'intégration $q = p + 1$ est choisi automatiquement en fonction de l'ordre p du *DCP*. Quant aux intégrales élémentaires résultantes de l'approche *MDD* elles sont calculées aussi par quadrature de Gauss-Hermite dont l'ordre q est pris comme variable afin d'étudier son effet sur la précision des estimations.

Les résultats donnés dans le tableau 3.2 montrent que la méthode *DCP* d'ordre 2 et la méthode *MDD* aussi d'ordre 2 donnent des estimations précises des quatre premiers moments statistiques puisque l'écart avec les résultats des Simulation de Monte-Carlo est très faible pour une précision $\varepsilon = 10^{-3}$. On constate aussi que la méthode *MDD* est la plus efficace puisque la convergence est atteinte au bout de 67 appels au modèle éléments finis contre 81 appels pour la méthode *DCP*. En plus de sa facilité d'implémentation, la méthode *MDD* offre le meilleur compromis entre précision et efficacité, par conséquent elle sera utilisée dans la suite de ce travail pour faire de la propagation d'incertitudes. En plus de l'estimation des moments statistiques, la densité de probabilité de la réponse mécanique est construite en utilisant une méthode de moments, et est comparée à celle obtenue par les simulations de Monte-Carlo.

La figure 3.6 (a) montre que les résultats obtenus par les deux méthodes sont en bon accords. La densité de probabilité donne plus d'informations, que les moments statistiques, sur la variabilité de la réponse mécanique puisque pour chaque scénario possible elle donne sa probabilité d'occurrence. L'intégration de la densité de probabilité donne la fonction de répartition de la réponse mécanique. Cette dernière peut être interprétée comme l'évolution de la probabilité de défaillance vis-à-vis d'un état-limite $G(X) = J_{I_c} - J(E, \sigma_y, n, \alpha)$, où J_{I_c} est la ténacité du matériau, prise ici comme déterministe.

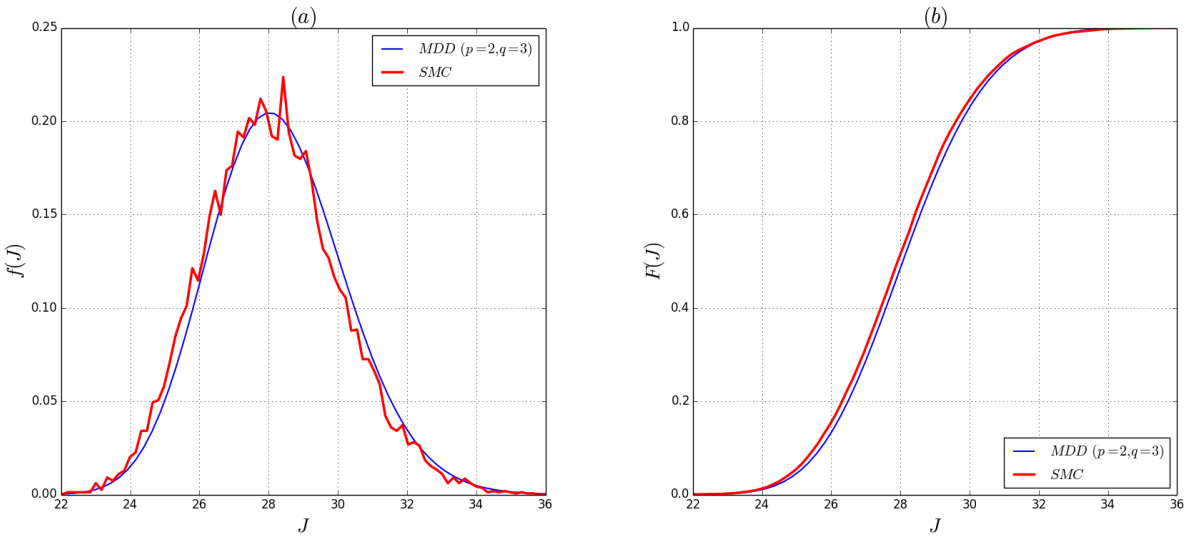


Fig. 3.6. Réponse mécanique J, (a) densité de probabilité, (b) fonction de répartition

3.3 Estimation de fiabilité par couplage RETEX-Numérique

3.3.1 Position du problème

Soit un design $\mathcal{D}_{ref}$ dont on connaît la fonction de fiabilité expérimentale $R^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}(t)$ construite à partir de données de retour d'expérience ($RETEX$), ainsi que la fonction de fiabilité numérique $R^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}(t)$ obtenue par une méthode de couplage mécano-probabiliste.

La question qui se pose est la suivante : comment utiliser les deux fonctions $R^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}(t)$ et $R^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}(t)$ comme a priori pour déterminer la fonction de fiabilité expérimentale $R^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}(t)$ d'une nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ de la version de référence $\mathcal{D}_{ref}$. Afin de répondre à cette question, deux méthodes seront développées dans la suite ; la première basée sur la définition d'un facteur de similitude (FS) et la deuxième faisant appel à la construction d'une fonction de transfert temporel (FTT).

3.3.2 Méthode basée sur un facteur de similitude

En procédant à une analyse comparative de la fonction prévisionnelle (numérique) de fiabilité avec la fonction de fiabilité obtenue par retour d'expérience, il arrive généralement qu'on observe un écart entre les deux fonctions de fiabilité. En effet, le but de la simulation numérique en ingénierie est de disposer d'une première solution, afin d'optimiser si nécessaire les conceptions avant la phase de prototypage. Il n'est pas question ici de construire une solution exacte de la fiabilité attendue du mécanisme. Par ailleurs, lors de la simulation numérique, plusieurs hypothèses simplificatrices sont implicitement utilisées. Elles peuvent concerner la géométrie, les caractéristiques matériaux, ainsi que les chargements et les conditions limites. On note aussi que les influences du procédé de mise en forme des pièces ne sont pas souvent prises en compte dans les modèles.

En supposant que les conditions de simulation du modèle mécanique sont bien contrôlées, on peut déduire que l'écart observé entre la fiabilité numérique et celle de référence obtenue à partir du retour d'expérience ($RETEX$), est dû essentiellement au manque d'informations sur le matériau et les simplifications opérées dans la modélisation. La méthodologie vise donc à proposer une manière d'utiliser néanmoins ces résultats numériques pour une première estimation de fiabilité de nouveaux mécanismes (nouvelles version d'un mécanisme de référence existant) en développement. Pour ce faire, nous nous proposons dans la section suivante, d'établir un facteur de similitude entre la fiabilité numérique et expérimentale.

3.3.2.1 Définition d'un facteur de similitude

Par définition, d'un point de vue géométrique, la similitude est une transformation isomorphe dans laquelle le rapport de similitude ou facteur de similitude, est une constante, une relation, etc... qui permet de mesurer le degré de similitude entre deux grandeurs et de retrouver une grandeur à partir de la connaissance de ce facteur.

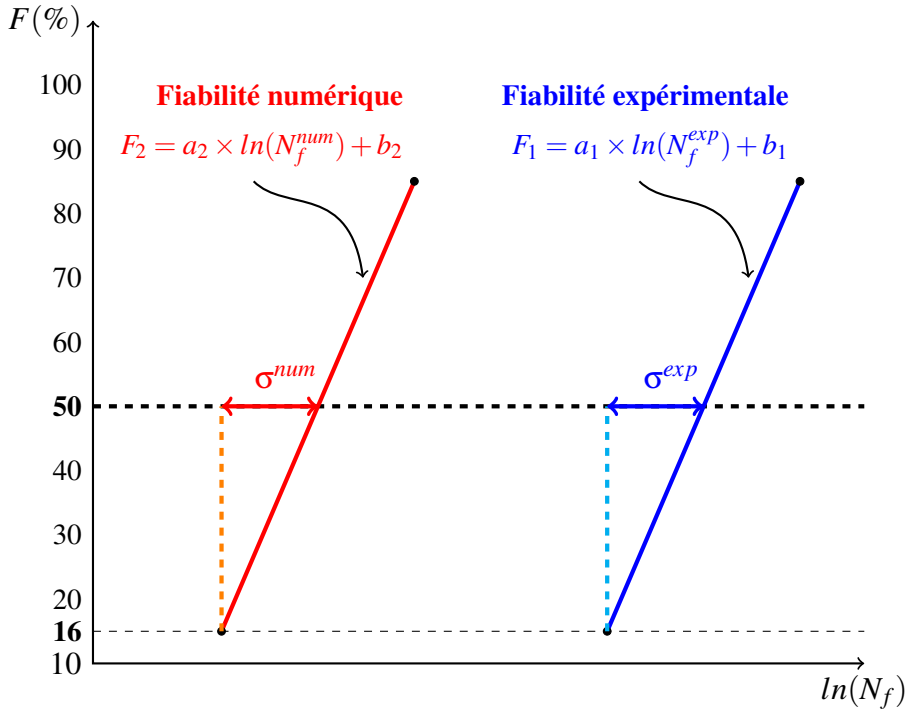


Fig. 3.7. Représentation de la fiabilité numérique et expérimentale sur le graphe fonctionnelle LogNormale

Dans cette étude, les durées de vie des produits sont supposées distribuées suivant une loi LogNormale (μ, σ), où μ désigne le facteur d'échelle et σ le facteur de forme. On s'intéresse dans un premier temps à la version de référence $\mathcal{D}_{ref}$ d'un produit donné. Supposons, qu'on représente sur le graphe fonctionnel de la distribution LogNormale, les courbes de fiabilité expérimentale et numérique (figure 3.7) associées à $\mathcal{D}_{ref}$. Sur ce graphe, les distributions expérimentale et numérique sont représentées par des droites d'équations respectives :

$$F_1 = a_1 \times ln(N_f^{exp}) + b_1 \tag{3.18}$$

et

$$F_2 = a_2 \times ln(N_f^{num}) + b_2 \tag{3.19}$$

où, N_f^{exp} et N_f^{num} représentent respectivement la durée de vie expérimentale et numérique.

Il faut noter que la position relative des deux droites F_1 et F_2 sur la figure 3.7 est juste illustrative. On peut avoir le cas où F_1 est positionnée avant F_2.

Pour chacune des droites, l'abscisse correspondant à l'ordonnée $F = 50\%$ correspond à la valeur du paramètre μ. Notons, que la valeur médiane de durée de vie s'obtient par $\exp(\mu)$.

Si $a_1 \approx a_2$, cela suppose que les deux droites sont parallèles. C'est le cas où les paramètres de forme des deux distributions LogNormales (expérimentale et numérique) sont identiques. On

aura alors qu'un décalage horizontal entre les deux droites fonctionnelles. Par conséquent, la similitude entre les deux droites se résume dans le rapport des abscisses, images d'une même valeur donnée (F_i) de l'ordonnée, par chacune des deux droites.

On sait que pour $(F = 50\%)$, l'abscisse pour chacune des droites, correspond au paramètre d'échelle μ de la distribution LogNormale qu'elle représente. On peut donc établir le facteur de similitude comme suit :

$$F_S = \frac{\mu^{num}}{\mu^{exp}} \tag{3.20}$$

Hypothèse : On peut considérer que ce facteur de similitude reste constant d'une version de mécanisme à l'autre. En effet, pour chaque conception, les hypothèses et les approximations faites lors des simulations numériques de fiabilité, sont de mêmes natures et aux mêmes niveaux, car les conceptions sont souvent semblables.

Ainsi, il sera envisageable de déterminer une première estimation de la distribution du retour d'expérience (fiabilité expérimentale) pour une nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ du produit à partir de la connaissance de la loi de fiabilité numérique obtenue par simulation et en appliquant le facteur de similitude. C'est ce qui fera l'objet de la section suivante.

3.3.2.2 Estimation de fiabilité pour une nouvelle conception

a) Processus d'estimation

Pour une nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$, on ne dispose que du modèle mécanique. La simulation numérique permet d'avoir une première estimation de fiabilité. Cette solution étant obtenue à partir d'hypothèses simplificatrices, quasiment identiques à celles de la version de référence, il est possible de déterminer la fiabilité expérimentale, en utilisant le coefficient de similitude, qui sera confirmée par des essais ultérieurs.

Le but de l'utilisation du facteur de similitude établi précédemment, est de pouvoir atténuer les effets d'une solution numérique peu précise sur l'estimation de fiabilité de la nouvelle conception, en intégrant la connaissance expérimentale disponible sur la conception de référence $\mathcal{D}_{ref}$.

A partir de ce qui précède, les étapes de la procédure d'estimation de fiabilité pour une nouvelle conception peuvent se résumer comme suit (figure 3.8) :

— Définir le facteur de similitude sur la version $\mathcal{D}_{ref}$ du mécanisme,
— Estimer par simulation numérique la fiabilité pour la version $\mathcal{D}_{up}$,
— Appliquer le facteur de similitude pour obtenir l'estimation du $RETEX$ (fiabilité expérimentale) pour la version $\mathcal{D}_{up}$.

Une étape intermédiaire, peut s'avérer nécessaire entre l'étape 2 et 3. En effet, nous avons supposé que le facteur de similitude reste identique et transposable sur les versions ultérieures

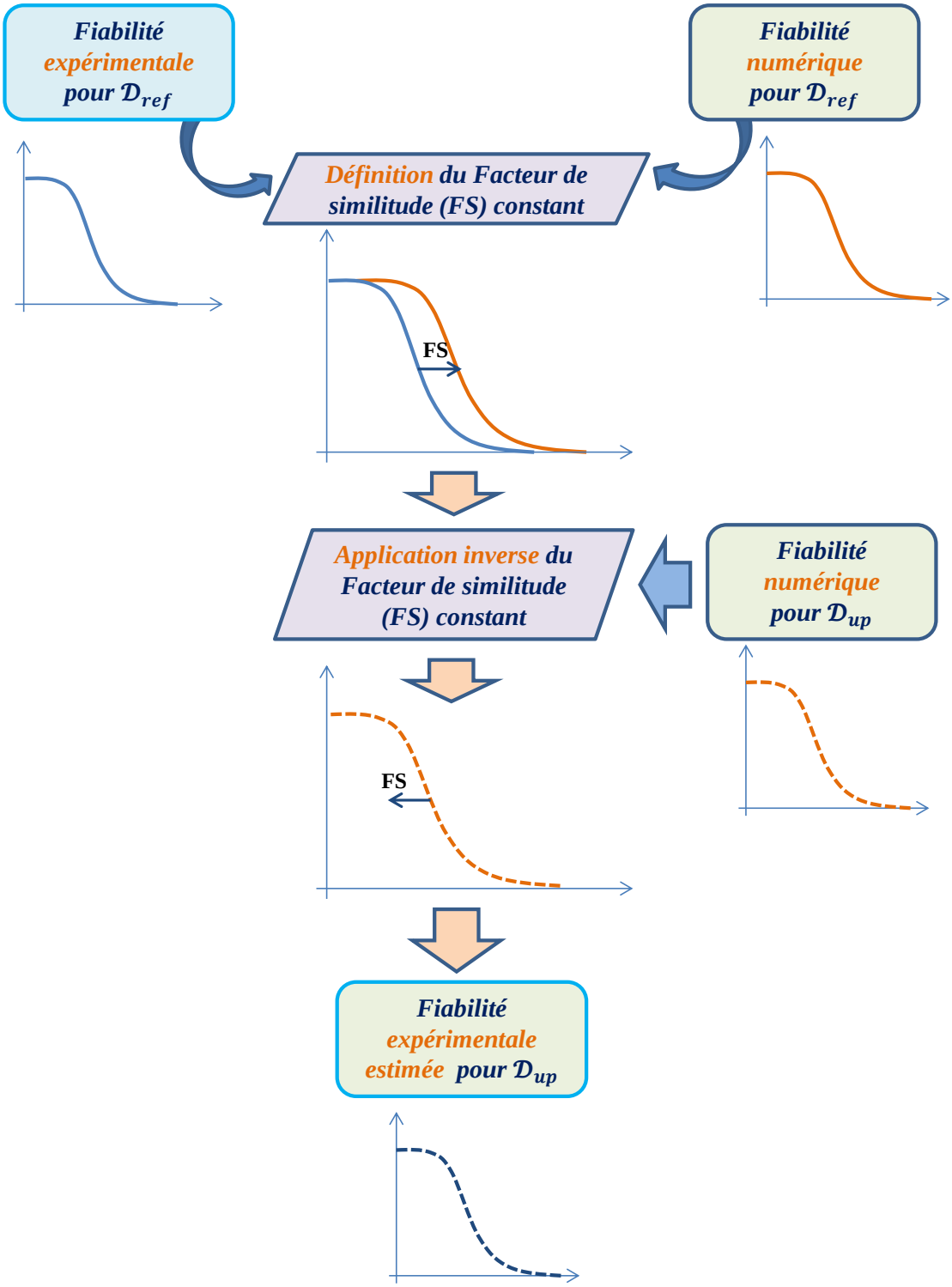


Fig. 3.8. Procédure d'utilisation du facteur de similitude

du produit, à cause de la similarité des conceptions. Dans ce qui suit, nous proposons une démarche permettant de valider cette hypothèse. Elle est basée sur l'étude de linéarité entre les versions.

b) Linéarité entre les deux conceptions $\mathcal{M}^{ref}$ et $\mathcal{M}^{up}$

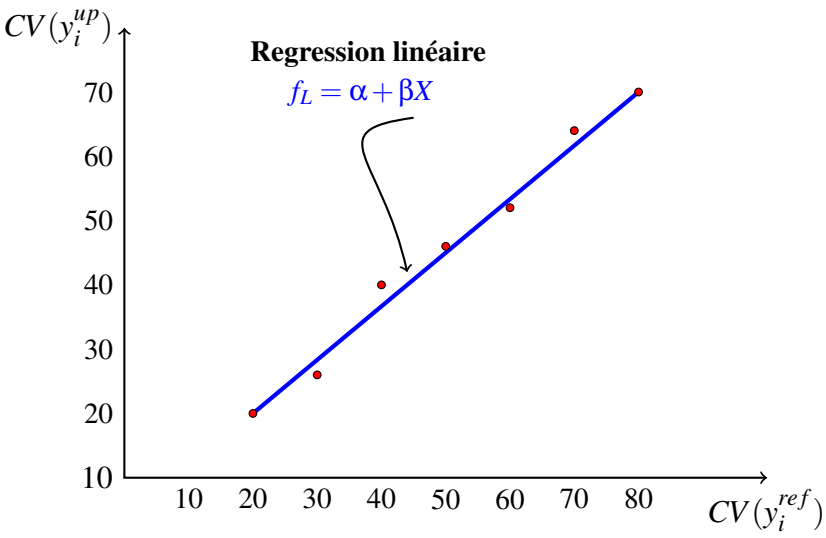


Fig. 3.9. Linéarité des versions de mécanismes

Considérons à nouveau le modèle mécanique $\mathcal{M}$, dont la réponse est représentée mathématiquement par la fonction : $y = \mathcal{M}(x)$, où $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^T$ est un vecteur aléatoire n-dimensionnel de l'espace physique, regroupant les paramètres d'entrée incertains du modèle mécanique. Chaque paramètre x_i est défini par une valeur moyenne m_{x_i} et un coefficient de variation CV_{x_i}

Pour la version de référence, le modèle mécanique $\mathcal{M}^{ref}$ associé s'écrit :

$$y^{ref} = \mathcal{M}^{ref}(x^{ref}) \tag{3.21}$$

De même pour la nouvelle version, on a le modèle mécanique $\mathcal{M}^{up}$ décrit par :

$$y^{up} = \mathcal{M}^{up}(x^{up}) \tag{3.22}$$

La procédure d'étude de linéarité, consiste à introduire des niveaux de perturbation (coefficients de variation) identiques sur les paramètres d'entrée aléatoires des deux modèles mécano-probabilistes $\mathcal{M}^{ref}$ et $\mathcal{M}^{up}$, puis calculer les coefficients de variation $CV(y)$ de la réponse y pour chaque niveau de perturbation et pour chaque modèle. Ensuite on représente sur un graphique l'ensemble de points $\left\{CV(y_i^{ref}),\ \ CV(y_i^{up})\right\}$; $i = 1, 2, ..., P$ où i correspond à un niveau de perturbation, et P, le nombre total de niveaux.

Pour déterminer la linéarité des deux versions $\mathcal{M}^{ref}$ et $\mathcal{M}^{up}$, on ajuste l'ensemble des points de la figure 3.9 par une fonction linéaire :

$$f_L = \alpha + \beta X \tag{3.23}$$

En fonction de la valeur de la pente β on jugera de la linéarité des deux versions : si β est proche

de 1, cela suppose que les deux versions de mécanisme conservent presque la même sensibilité aux perturbations (i.e variabilités) sur les paramètres d'entrée de leur modèle numérique. On peut ainsi valider l'hypothèse de constance du facteur de similitude.

c) Estimation de la fiabilité

Une fois, la constance du facteur de similitude vérifiée et validée, on pourra donc obtenir une estimation de la *fiabilité expérimentale* du nouveau développement, à partir de la fiabilité numérique basée sur la méthode de couplage mécano-probabiliste et le facteur de similitude.

En effet, la constance du facteur de similitude entre les versions revient à écrire :

$$F_S = \frac{\mu^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}}{\mu^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}} = \frac{\mu^{num}_{\mathcal{D}_{up}}}{\mu^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}} \tag{3.24}$$

Le paramètre d'échelle $\mu^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}$ de la distribution LogNormale des durées de vie de la nouvelle conception s'obtient facilement par :

$$\mu^{exp}_{\mathcal{D}_{up}} = \frac{\mu^{num}_{\mathcal{D}_{up}}}{F_S} \tag{3.25}$$

La constance du facteur de similitude supposant par le même biais, la constance du paramètre de forme de la distribution LogNormale. On peut donc en déduire que le paramètre de forme de la distribution des durées de vie de la nouvelle conception est identique à celui de la distribution de durées de vie de la conception de référence :

$$\sigma^{exp}_{\mathcal{D}_{up}} = \sigma^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}} \tag{3.26}$$

Une estimation de la fonction de fiabilité expérimentale $R^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}$ du nouveau développement s'obtient finalement par :

$$\hat{R}^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}(N) = 1 - \Phi\left(\frac{ln(N) - \mu^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}}{\sigma^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}}\right) \tag{3.27}$$

3.4 Méthode basée sur une fonction de transfert temporel

3.4.1 Principe de la fonction de transfert

Au cours du processus de qualification de produits, une approche basée sur les essais accélérés (Nelson, 1990) est souvent utilisée pour l'estimation de fiabilité. Brièvement, la technique des essais accélérés (figure 3.10 (a)), vise à réduire la durée d'essai nécessaire pour observer la

défaillance des organes testés, en appliquant des niveaux de contraintes beaucoup plus sévères que celles endurées dans les conditions de fonctionnement normales.

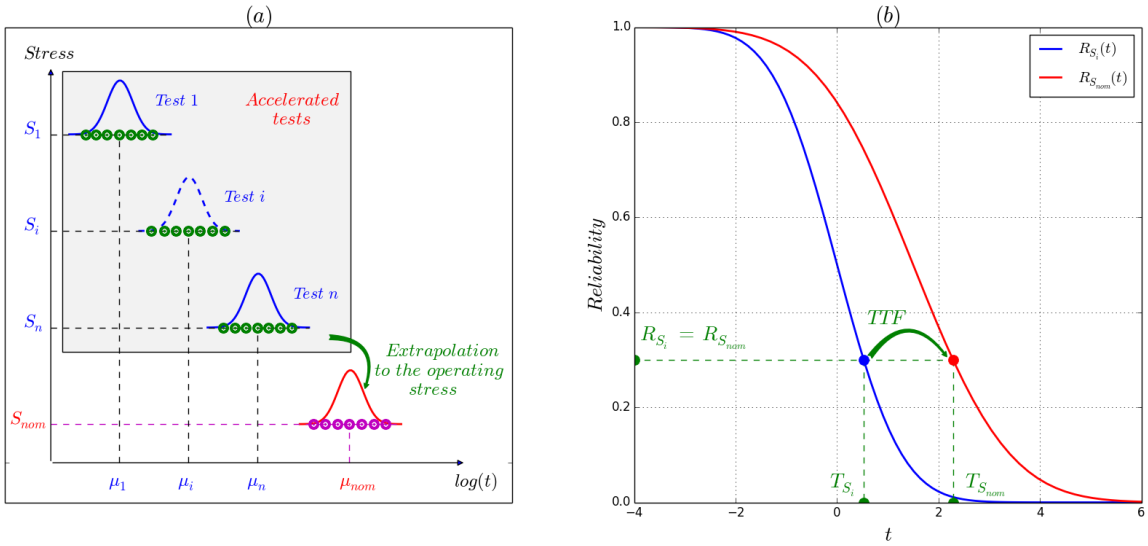


Fig. 3.10. (a) Principe des essais accélérés, (b) Définition de la fonction de transfert temporel

Les durées de vie observées lors de ces essais accélérés sont ensuite utilisées pour construire la fonction de fiabilité $R_{S_i}(t)$ associée aux conditions de chargement accélérées. Enfin, au moyen d'une fonction de transfert, également appelée loi d'accélération, la fonction de fiabilité $R_{S_i}(t)$ est extrapolée pour obtenir la *vraie* fonction de fiabilité $R_{S_{nom}}(t)$, associée aux conditions de fonctionnement normales (voir figure 3.10 (b)). Pour des raisons pratiques, il est supposé (Nikulin et al., 2010) que les temps de défaillance observés à différents niveaux de contraintes sont linéairement dépendants, et que la transformation de l'échelle de temps est constante, c'est-à-dire que nous avons une véritable accélération linéaire. Par conséquent, la fonction de fiabilité dans les conditions accélérées $R_{S_i}(t)$ peut être liée à la fonction de fiabilité dans les conditions normales $R_{S_{nom}}(t)$ comme suit :

$$R_{S_i}(t) = R_{S_{nom}}(FTT(t)) \tag{3.28}$$

où FTT est la fonction de transfert temporel.

La méthodologie proposée dans cette section s'inspire du principe du FTT. Considérons la conception de référence $\mathcal{D}_{ref}$ et $h(t)$ la fonction de transfert temporel associée, qui mesure en quelque sorte l'écart entre la fonction de fiabilité expérimentale $R^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}(t)$ et la fonction de fiabilité numérique $R^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}(t)$. Notons que, les deux fonctions de fiabilité $R^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}(t)$ et $R^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}(t)$ correspondent aux conditions normales de fonctionnement du composant.

Maintenant, considérons une nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$, de la conception de référence $\mathcal{D}_{ref}$, pour laquelle, la fonction de fiabilité numérique $R^{num}_{\mathcal{D}_{up}}(t)$ peut être calculée.

hypothèse : On suppose que seules quelques modifications sont effectuées sur $\mathcal{D}_{ref}$ pour conce-

voir la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$. Les matériaux ainsi que le procédé de fabrication sont considérés identiques entre les deux versions. Les conceptions étant similaires, et de plus, les mêmes niveaux de simplifications étant opérés sur leurs modèles numériques, la fonction de transfert temporel $h(t)$ est conservée, c'est à dire valable pour les deux versions de mécanismes.

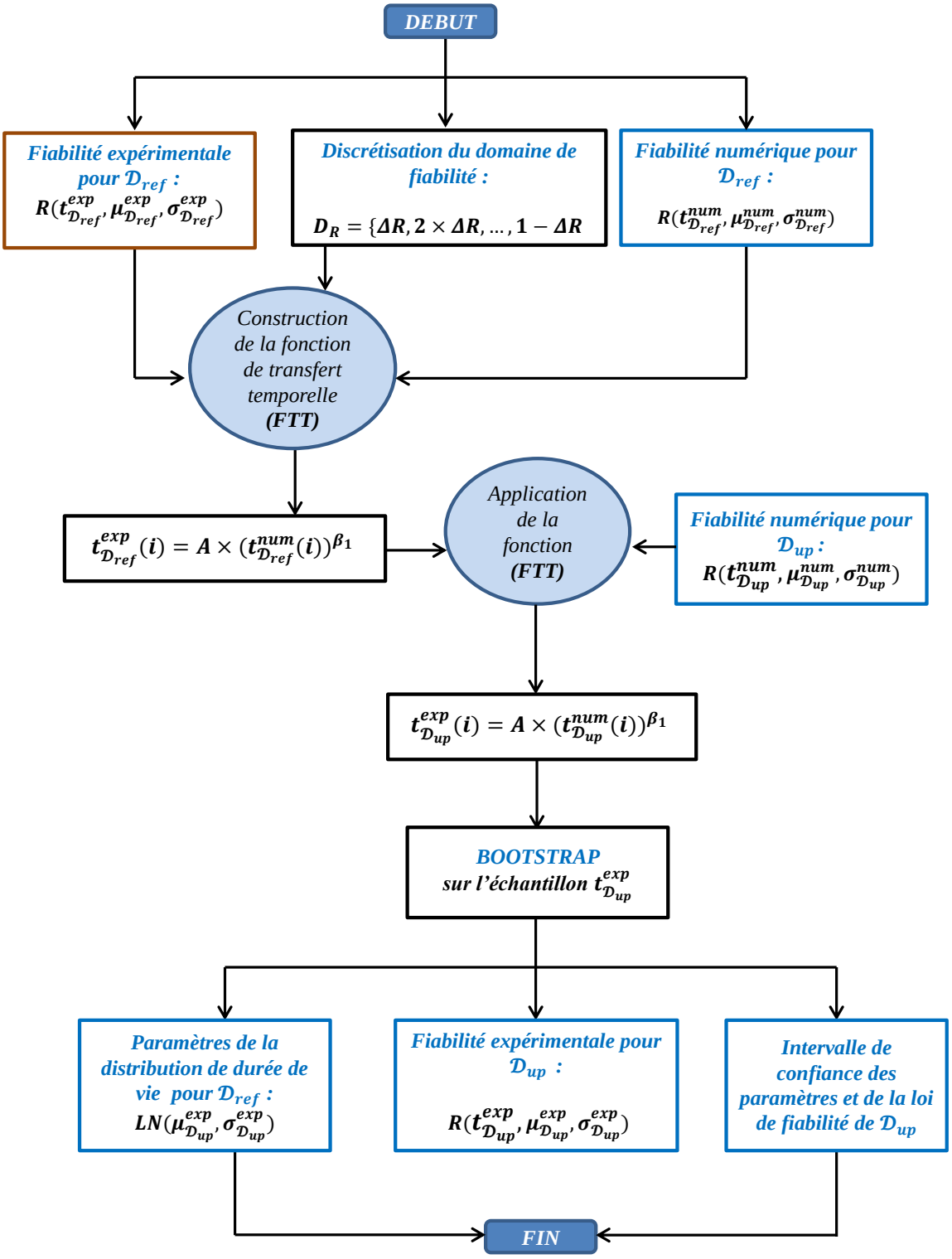


Fig. 3.11. Procédure d'estimation de fiabilité pour une nouvelle conception

Par conséquent, la fonction de fiabilité expérimentale $R^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}(t)$ de la nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$, peut

être approchée comme suit :

$$\hat{R}^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}(t) = R^{num}_{\mathcal{D}_{up}}(h(t)) = R^{num}_{\mathcal{D}_{up}} \circ h(t) \tag{3.29}$$

La procédure suivie par la méthodologie est représentée sur le diagramme de la figure 3.11 et détaillée dans les paragraphes suivants.

3.4.2 Construction de la fonction de transfert

Les étapes suivantes décrivent en détail la procédure proposée pour construire la fonction de transfert temporel $h(t)$ et l'approximation de la fonction de fiabilité de la nouvelle conception.

3.4.2.1 Discrétisation du domaine de la fiabilité

Soit $[0,1]$ l'intervalle contenant l'ensemble des valeurs possibles de la fonction de fiabilité et Δ_R un incrément de pas utilisé pour discrétiser le domaine de la fiabilité. On fixe, Δ_R de sorte à obtenir une taille d'échantillon n_R suffisamment grande (au moins $n_R = 30$), n_R étant obtenu par :

$$n_R = \frac{1-\Delta_R}{\Delta_R} \tag{3.30}$$

On suppose que la durée de vie t est strictement positive et modélisée comme une distribution LogNormale. Ainsi, pour éviter une valeur de t nulle ou infinie en utilisant la fonction de distribution inverse, les bornes $R = 0$ et $R = 1$ sont exclues. Les points d'échantillonnage dans $]0,1[$ sont obtenus selon la formule récursive suivante :

$$D_R = \{\Delta R,\ 2\times\Delta R, \ldots,\ 1-\Delta R\} \tag{3.31}$$

3.4.2.2 Durées de vie expérimentale et numérique de la conception de référence

Soit $(\mu^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}, \sigma^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}})$ les paramètres de la la distribution LogNormale de durées de vie, obtenus à partir de l'expérimentale et $(\mu^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}, \sigma^{num}_{\mathcal{D}_{ref}})$, les paramètres de la distribution LogNormale de durées de vies, obtenus à partir du modèle numérique mécano-probabiliste, pour la conception de référence $\mathcal{D}_{ref}$.

Pour une valeur donnée $D_R(i) \in D_R, i = 1,\ldots,n_R$ de la fonction de fiabilité, la durée de vie expérimentale $t^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}$ et numérique $t^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}$ correspondantes (figure 3.12) s'obtiennent respectivement par :

$$t^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}(i) = \exp\left[\Phi^{-1}(1-D_R(i)) \times \sigma^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}} + \mu^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}\right] \tag{3.32}$$

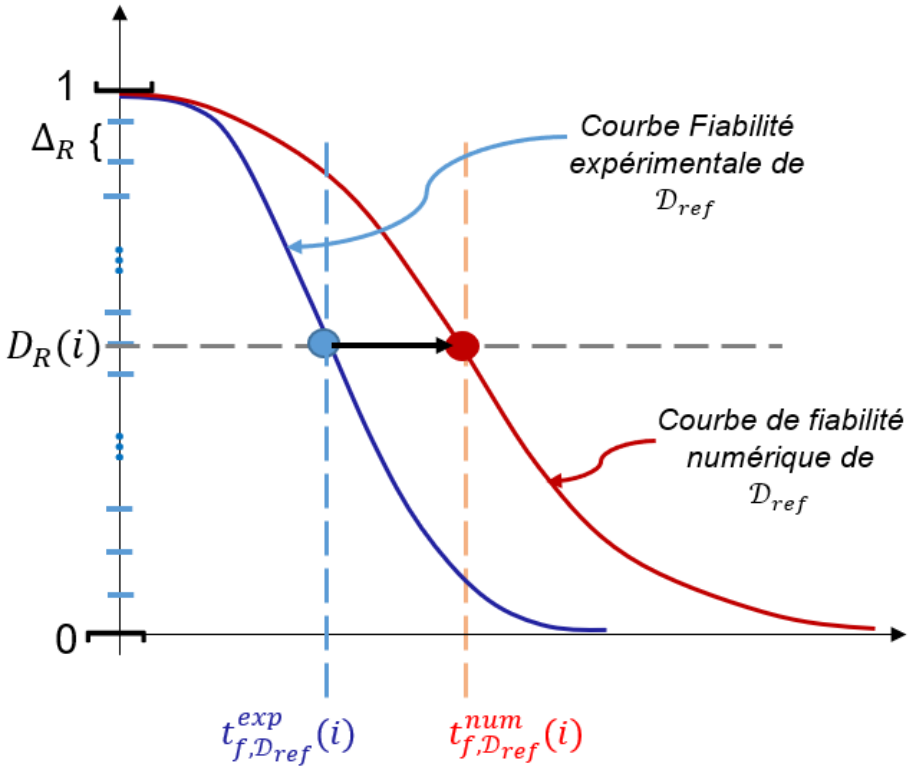


Fig. 3.12. Durées de vie $t^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}(i)$ et $t^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}(i)$ pour une même fiabilité $D_R(i)$

et

$$t^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}(i) = \exp\left[\Phi^{-1}(1 - D_R(i)) \times \sigma^{num}_{\mathcal{D}_{ref}} + \mu^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}\right] \tag{3.33}$$

où Φ indique la fonction de répartition de la distribution normale standard.

3.4.2.3 Fonction de transfert temporel de la conception de référence

Comme nous l'avons explicité plus haut, la fonction de transfert temporel $h(t)$ représente la relation entre les fonctions de fiabilité expérimentale et numérique. Il s'agit à présent de définir la forme de la fonction $h(t)$. Dans le cadre de cette étude, la loi paramétrique puissance bien connue est utilisée pour modéliser la fonction $h(t)$. Cette loi est particulièrement utilisée lorsque le processus d'endommagement est sensible à des conditions de chargement particulières, telles que la fatigue. Elle s'écrit comme suit :

$$h(t) = A \times t^{B_1}, \forall t > 0 \tag{3.34}$$

où A et B_1 sont deux paramètres à déterminer.

Supposant que la durée de vie numérique t^{num} est connue. En appliquant le logarithme aux deux membres de l'équation 3.34, et en notant $B_0 = ln(A)$, la durée de vie expérimentale associée

t^{exp} peut être dérivée comme suit :

$$ln(t^{exp}) = ln\left(h(t^{num})\right) = B_0 + B_1 \times ln(t^{num}) \tag{3.35}$$

Pour déterminer les paramètres B_0 et B_1, on procède à une analyse de régression basée sur l'ensemble des points $\left\{t^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}(i),\ t^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}(i)\right\}_{i=1}^{n}$ associé à l'échantillon de fiabilité $D_R = \{\Delta R, 2\times\Delta R, \ldots, i\times\Delta R, \ldots, 1-\Delta R\}$ précédemment défini :

$$B_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(ln(t^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}(i)) - \mu^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}\right)\times\left(ln(t^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}(i)) - \mu^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(ln(t^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}(i)) - \mu^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}\right)^2} \tag{3.36}$$

$$B_0 = \mu^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}} - \beta_1 \times \mu^{num}_{\mathcal{D}_{ref}} \tag{3.37}$$

où $\mu^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}$ et $\mu^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}$ sont respectivement les valeurs moyennes des distributions expérimentales et numériques :

$$\mu^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(t^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}(i)\right) \tag{3.38}$$

$$\mu^{num}_{\mathcal{D}_{ref}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\left(t^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}(i)\right) \tag{3.39}$$

3.4.3 Construction de la distribution des durées de vie et estimation de fiabilité

A partir de la fonction de fiabilité numérique de la nouvelle conception, un ensemble de durées de vie numériques est obtenu en effectuant une analyse de fiabilité inverse basée sur l'échantillon de fiabilité $D_R = \{\Delta R, 2\times\Delta R, \ldots, i\times\Delta R, \ldots, 1-\Delta R\}$:

$$t^{num}_{\mathcal{D}_{up}}(i) = \exp\left[\Phi^{-1}(1 - D_R(i)) \times \sigma^{num}_{\mathcal{D}_{up}} + \mu^{num}_{\mathcal{D}_{up}}\right] \tag{3.40}$$

A présent, puisque la fonction de transfert temporel reste la même pour les deux conceptions, la durée de vie expérimentale de la nouvelle conception peut être obtenue par :

$$t^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}(i) = A \times \left(t^{num}_{\mathcal{D}_{up}}(i)\right)^{\beta_1} \tag{3.41}$$

En évaluant $t^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}(i)$ pour chaque $D_R(i) \in D_R, i = 1, \ldots, n_R$, on obtient un échantillon de durées de vie *expérimentales* $t^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}$ pour la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$ (figure 3.13).

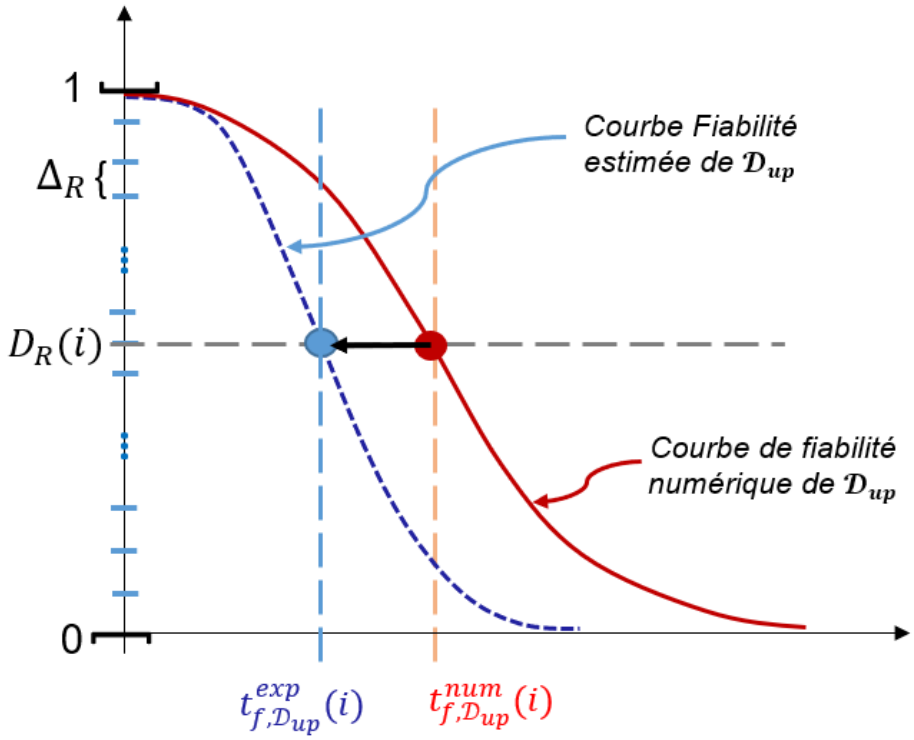


Fig. 3.13. Obtention de durées de vie $t^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}(i)$ à partir de la FTT et de $t^{num}_{\mathcal{D}_{up}}(i)$

Une fois cet échantillon obtenu, une distribution LogNormale peut y être ajustée et ses paramètres estimés. Pour construire l'intervalle de confiance sur les paramètres de cette distribution LogNormale ainsi que l'intervalle de confiance sur la fonction de fiabilité estimée par la méthode FTT pour $\mathcal{D}_{up}$, en prenant en compte les incertitudes sur les paramètres de la fonction de transfert, la méthode de Bootstrap (Efron and Tibshirani, 1994) est utilisée. Cette méthode numérique, basée sur la technique de ré-échantillonnage d'une population a priori, est largement utilisée pour de nombreux problèmes statistiques tels que les tests d'hypothèse et l'estimation des intervalles de confiance. Elle fournit les estimateurs ponctuels des paramètres de distribution ainsi que les intervalles de confiance associés. De plus, les intervalles de confiance de la fonction de fiabilité peuvent également être déduits.

Le processus est le suivant. Soit, $\mathcal{B}$, le nombre total d'itérations Bootstrap ; $t^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}$, et $t^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}$ les deux échantillons de durées de vie expérimentales et numériques de $\mathcal{D}_{ref}$ obtenus précédemment à partir de l'échantillon de fiabilité D_R. A chaque itération Bootstrap k, on génére aléatoirement grâce à une technique d'échantillonnage avec remise, un nouvel échantillon Bootstrap pour $t^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}$ et un nouvel échantillon Bootstrap aussi pour $t^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}$. Par conséquent, il est clair que le Bootstrap a la même taille que l'échantillon d'apprentissage, c'est-à-dire n points. Certains points parmi eux sont redondants et d'autres ne sont pas sélectionnés. Ces deux échantillons Bootstrap, sont utilisés pour estimer les paramètres A^k et B^k_1 de la fonction de transfert temporel, l'échantillon de durées de vie *expérimentales* $\left\{t^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}\right\}^k$ pour la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$, les paramètres (μ_k, σ_k) de la loi LogNormale associée, et la fonction de fiabilité *expérimentale* pour $\mathcal{D}_{up}$.

A chaque itération Bootstrap k, les estimateurs des paramètres (μ_k, σ_k) de la distribution LogNormale de durées de vie sont obtenus par la méthode de maximum de vraisemblance :

$$\widehat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(t_i) \tag{3.42}$$

$$\widehat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (ln(t_i) - \widehat{\mu}_k)^2 \tag{3.43}$$

Lorsque tous les $\mathcal{B}$ échantillons *Bootstrap* sont évalués, un ensemble de valeurs $\mathcal{B}$ de chacun des paramètres de distribution de durée de vie LogNormale $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\sigma}$ sont obtenues, et rassemblées, respectivement dans les échantillons $\Xi_{\mathcal{B}} = \{\widehat{\mu}_k\}_{k=1}^{\mathcal{B}}$ et $\Sigma_{\mathcal{B}} = \{\widehat{\sigma}_k\}_{k=1}^{\mathcal{B}}$. Après avoir trié les composants de ces échantillons dans l'ordre croissant, les valeurs moyennes associées à $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\sigma}$ correspondent au quantile d'ordre 0.5, soit respectivement le composant de rang $0.5 \times \mathcal{B}$ de $\Xi_{\mathcal{B}}$ et $\Sigma_{\mathcal{B}}$:

$$\widehat{\mu}_{\mathcal{D}_{up}}^{exp} = \Xi_{\mathcal{B}(0.5\times\mathcal{B})} \tag{3.44}$$

$$\widehat{\sigma}_{\mathcal{D}_{up}}^{exp} = \Sigma_{\mathcal{B}(0.5\times\mathcal{B})} \tag{3.45}$$

Considérons un intervalle de confiance cible $\delta \times 100\%$. Dans le cas d'une distribution symétrique des paramètres, les bornes inférieure et supérieure correspondantes sont respectivement les quantiles d'ordre $(1-\delta)/2$ et $(1+\delta)/2$ de la distribution Bootstrap. Par exemple, si nous nous intéressons au paramètre $\widehat{\mu}_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}$, les limites inférieure et supérieure associées sont données par :

$$\widehat{\mu}_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}(lower) = \Xi_{\mathcal{B}(\frac{1-\delta}{2}\times\mathcal{B})} \tag{3.46}$$

$$\widehat{\mu}_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}(upper) = \Xi_{\mathcal{B}(\frac{1+\delta}{2}\times\mathcal{B})} \tag{3.47}$$

Notons que l'intervalle de confiance de l'estimateur $\widehat{\sigma}_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}$ et enfin les bornes de confiance pour la distribution de fiabilité sont construites de la même manière. En effet, pour une durée de vie t_i, la fiabilité est calculée pour chaque valeur $\Xi_{\mathcal{B}}(k)$ et $\Sigma_{\mathcal{B}}(k)$, comme suit :

$$R_i^k = 1 - \Phi\left(\frac{ln(t_i) - \Xi_{\mathcal{B}}(k)}{\Sigma_{\mathcal{B}}(k)}\right) \tag{3.48}$$

Les $\mathcal{B}$ valeurs $\left\{R_i^k\right\}_{k=1}^{\mathcal{B}}$ obtenues, sont ensuite rangées par ordre croissant et les quantiles d'ordre

$(1-\delta)/2$ et $(1+\delta)/2$ sont respectivement retenus comme valeurs minimale et maximale de la fiabilité pour la durée de vie t_i. Les courbes des limites inférieure et supérieure de la fonction de fiabilité estimée pour la nouvelle conception sont obtenues en répétant le processus ci-dessus pour toutes les durées de vie t_i $(i = 1, ..., \mathcal{B})$.

Notons qu'à la fin de l'application de la méthode Bootstrap, les intervalles de confiance sur les paramètres A et B_1 de la fonction de transfert sont aussi facilement calculés comme pour les paramètres de la distribution LogNormale, à partir des quantiles d'ordre $(1-\delta)/2$ et $(1+\delta)/2$.

Nous avons relevé en introduisant les deux méthodologies proposées, la méconnaissance dont fait souvent objet la distribution des paramètres incertains du modèle mécano-probabiliste, notamment les paramètres matériaux. Cette méconnaissance participe énormément à l'imprécision des résultats de simulations de fiabilité prévisionnelle. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à une approche d'amélioration des résultats de simulations, par actualisation Bayésienne inverse des paramètres d'entrée à partir de la connaissance de durées de vie expérimentale du mécanisme.

3.5 Amélioration par actualisation Bayésienne inverse

Dans la littérature on note deux manières différentes d'aborder le problème d'actualisation : *l'actualisation-directe* et *l'actualisation-inverse*. La première approche consiste à améliorer directement la prédiction du modèle, c'est-à-dire à actualiser la réponse du modèle à partir d'observations données, et la seconde approche considérée comme un problème stochastique inverse ou encore comme une approche bayésienne inverse, consiste à améliorer la connaissance des paramètres d'entrée. Dans un problème stochastique inverse, la description probabiliste de la variable aléatoire est actualisée conditionnellement aux observations de la réponse du système et selon l'hypothèse de l'état de la structure et de la relation avec les observations. De nombreuses approches sont disponibles pour l'analyse inverse des paramètres d'entrée du modèle. L'approche probabiliste bayésienne parait robuste pour actualiser les paramètres d'entrée (Tang, 1971 ; Beck and Au, 2002 ; Zhang et al., 2010 ; Wang et al., 2010), et propose une procédure pour actualiser la fonction de distribution de probabilité des paramètres d'entrée sous condition de disponibilité de données observées (Miranda et al., 2009).

3.5.1 L'approche Bayésienne inverse

Considérons un modèle mécanique $\mathcal{M}$ défini par la fonction mathématique $y = \mathcal{M}(x)$. Ici, y est un scalaire représentant la réponse du modèle $\mathcal{M}$ qui dépend d'un ensemble de paramètres d'entrée incertains rassemblés dans le vecteur n-dimensionnel $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^T$. Soit $\tilde{x}$ la *vraie* valeur des paramètres d'entrée et y_{exp} la valeur de mesure (ou expérimentale) de la réponse du système mécanique. Habituellement x n'est pas bien connu et le modèle numérique $\mathcal{M}$ est imparfait. Par conséquent, la relation entre la réponse expérimentale et le modèle s'écrit :

$$\mathcal{M}(\tilde{x}) = y_{exp} + e \tag{3.49}$$

où e est une réalisation d'une variable globale ε qui inclut une erreur de mesure ainsi qu'une erreur due à l'imperfection du modèle. ε est supposé être une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2.

A condition que $\tilde{x}$ soit connu, l'équation ci-dessus peut être interprétée comme le fait que e est une réalisation d'une variable aléatoire gaussienne de moyenne $\mathcal{M}(\tilde{x}) - y_{exp}$ et d'écart-type σ.

La vraisemblance des données expérimentales (correspondant à la réponse du système mécanique) de taille N, sachant $\tilde{x}$, est la suivante :

$$L(y_1, \ldots, y_N|\tilde{x}) \propto \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(y_j - \mathcal{M}(\tilde{x})\right)^2}{\sigma^2}\right] \tag{3.50}$$

Posons p_X, la distribution a priori de x. La fonction de densité de probabilité *a posteriori* résultante (PDF), notée f_X, s'écrit selon le théorème de Bayes (O'Hagan and Forster, 2004) :

$$f_X\left(\tilde{x}|y_j\right) \equiv f_X(\tilde{x}) = c.p_X(\tilde{x}).L\left(y_j|\tilde{x}\right) \tag{3.51}$$

où c est une constante de normalisation.

A des fins de calcul, il peut être utile de transformer d'abord le vecteur aléatoire d'entrée X en un vecteur normal standard U via une transformation isoprobabiliste $X = \mathcal{T}(U)$ telle que la transformation de Nataf ou Rosenblatt (Ditlevsen and Madsen, 1996).

3.5.2 Actualisation Bayésienne par Markov Chain Monte Carlo

Lorsque la distribution a posteriori (équation (3.51)) n'a pas de forme explicite, ce qui est très récurrent, elle peut être estimée par des techniques d'échantillonnage. La simulation de Monte-Carlo par Chaînes de Markov (*MCMC*) est l'une des méthodes les plus utilisées. *MCMC* est une technique d'échantillonnage efficace qui peut générer des échantillons d'une distribution a posteriori (Beck and Au, 2002) basée sur la construction d'une chaîne de Markov ergodique qui converge rapidement vers sa distribution stationnaire qui est la fonction de densité de probabilité a posteriori recherchée ou une fonction de celle-ci.

Cette approche est très générale et facile à implémenter. Cependant, l'algorithme *MCMC* est une procédure très exigeante, car il faut évaluer la réponse du système pour chaque nouveau échantillon proposé. L'évaluation commence avec des échantillons utilisés comme entrée dans le modèle direct $\mathcal{M}$; Une fois que la réponse pour chaque échantillon est calculée, les mesures prédites sont comparées avec des données réelles, ce qui entraîne en outre une mesure de diffé-

rence entrant dans la fonction de vraisemblance. De cette manière, un échantillon a posteriori est obtenu et le processus est répété à nouveau pour l'échantillon suivant.

La caractéristique distinctive de *MCMC* est que les échantillons aléatoires sont corrélés, tandis que dans les méthodes de *Monte-Carlo* conventionnelles, ces échantillons sont statistiquement indépendants. Les méthodes *MCMC* simulent une chaîne de Markov homogène en temps discret : en considérant une fonction de densité de probabilité $f_X(x)$, les réalisations x_i sont générées séquentiellement, à partir d'une valeur arbitraire x_0, de telle sorte que x_{i+1} soit indépendant de x_{i-1}, x_{i-2}, x_0. Les diverses propriétés des méthodes *MCMC* permettent d'assurer la convergence d'une chaîne de Markov à partir de n'importe quel point de départ x_0 en un nombre fini d'itérations (O'Hagan and Forster, 2004).

Il existe de nombreux types d'algorithmes *MCMC*. Les deux plus basiques et largement utilisés sont l'algorithme de Metropolis-Hastings (*MH*) (Metropolis et al., 1953 ; Hastings, 1970) et l'échantillonneur de Gibbs. La méthode d'échantillonnage de Gibbs peut être considérée comme un cas particulier de *MH* (Gelfand and Smith, 1990), où les actualisations sont les distributions conditionnelles complètes de chaque paramètre connaissant le reste des paramètres. L'algorithme Metropolis-Hastings est connu pour son efficacité à mettre en oeuvre l'échantillonnage *MCMC*.

3.5.3 L'algorithme de Metropolis-Hastings (*MH*)

L'algorithme de *MH* a été largement utilisé en physique, puis, (Muller and Kuhn, 1993) et (Tierney, 1994) ont exposé la valeur de cet algorithme aux statisticiens. Cet algorithme peut générer des échantillons à partir de toute densité de probabilité (*distribution cible*) f_X des paramètres incertains X nécessitant seulement que cette densité puisse être calculée à X.

L'algorithme de *MH* est une méthode d'échantillonnage interactif qui fournit un moyen de générer une chaîne de Markov $X_0, X_1, \ldots, X_i, X_{i+1}, \ldots$ ayant comme distribution stationnaire, la distribution cible. La transition entre x_i et x_{i+1} s'écrit :

$$\begin{cases} x_{i+1} \propto q(x|x_i) \ avec\ la\ probabilite\ \alpha(x_i, x_p) \\ \qquad x_i \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad sinon \end{cases} \tag{3.52}$$

où $q(x_p|x_i)$ est la *distribution de transition ou de proposition* et $\alpha(x_i, x_p)$, la *probabilité d'acceptation* :

$$\alpha(x_i, x_p) = min\left\{1, \frac{f_X(x_p)q(x_i|x_p)}{f_X(x_i)q(x_p|x_i)}\right\} \tag{3.53}$$

La distribution de proposition q est généralement construite en générant le candidat x_p par ajout d'un incrément de variable aléatoire ε à x_i, c'est à dire $x_p = x_i + \varepsilon$. ε est une variable

aléatoire gaussienne de moyenne nulle ou une variable aléatoire uniforme. Cette implémentation est appelée algorithme Random Walk Metropolis (RWM) (Metropolis et al., 1953). Dans ce cas particulier, la distribution de proposition $q(x_p|x_i) = q(x_p - x_i)$. En raison de la symétrie, c'est-à-dire $q(x_p - x_i) = q(x_i - x_p)$, la probabilité d'acceptation définie par l'équation (3.53) se simplifie comme suit :

$$\alpha(x_i, x_p) = min\left\{1, \frac{f_X(x_p)}{f_X(x_i)}\right\} \tag{3.54}$$

Les équations (3.52)-(3.54) permettent de tirer des échantillons à partir de n'importe quelle distribution à condition qu'une expression algorithmique (c'est-à-dire pas nécessairement analytique) pour f_X soit disponible.

Afin de simuler l'équation d'actualisation Bayésienne indirecte, un algorithme Metropolis-Hastings en cascade est utilisé, comme proposé par Tarantola (2005). L'algorithme proposé est décrit ci-dessous :

1. $i = 0$, initialiser la chaîne dans l'espace normal standard U à u_0 (de façon déterministe ou aléatoire) ; tant que $i \leq K$.
2. générer un incrément aléatoire ε, calculer $u_p = u_i + \varepsilon$ et évaluer $x_p = T(u_p)$; où $T(.)$ représente une transformation isoprobabiliste.
3. évaluer la probabilité d'acceptation a priori : $\alpha_p(x_i, x_p) = min\left\{1, \frac{p_X(x_p)}{p_X(x_i)}\right\}$.
4. calculer un échantillon $u_p \sim U_{[0,1]}$:
   — si $u_p < \alpha_p(x_i, x_p)$ (acceptation), passer à l'étape 5,
   — sinon aller à l'étape 2 (rejet).
5. évaluer la probabilité d'acceptation de la vraisemblance : $\alpha_L(x_i, x_p) = min\left\{1, \frac{L(x_p)}{L(x_i)}\right\}$ où $L(.)$ fait référence à la fonction de vraisemblance. Notons qu'une évaluation de la réponse du modèle $\mathcal{M}$ est requise.
6. calculer un échantillon $u_L \sim U_{[0,1]}$
   — si $u_L < \alpha_L(x_i, x_p)$ (acceptation) alors $x_{i+1} \longleftarrow x_p$, $u_{i+1} \longleftarrow u_i$ et $i \longleftarrow i+1$,
   — sinon aller à l'étape 2 (rejet).

En utilisant l'algorithme ci-dessus, les K réalisations du vecteur aléatoire X avec la fonction de densité de probabilité a posteriori f_X sont générées. Notez que $MCMC$ a été initialement conçu pour simuler des variables aléatoires scalaires et par extension des vecteurs aléatoires avec des composants indépendants. Son utilisation dans l'espace-U avec la transformation isoprobabiliste inverse directe est nécessaire pour obtenir des échantillons de variables aléatoires corrélées X. Ces échantillons permettent de définir un modèle probabiliste actualisé qui peut être couplé au modèle mécanique $\mathcal{M}$.

3.5.4 Réglage paramétrique de l'algorithme $MCMC - HS$

Bien que cet algorithme soit puissant en théorie, en pratique son efficacité et sa précision dépendent fortement de la sélection des paramètres de réglage et de la sélection de la fonction du noyau. Les paramètres de réglage englobent le *taux d'acceptation* (le pourcentage de fois qu'un déplacement vers un nouveau point est effectué) et le *facteur d'échelle* (l'étalement de la densité de génération de candidats). Le taux d'acceptation est étroitement lié à l'efficacité d'échantillonnage d'une chaîne Metropolis et le paramètre d'échelle de la distribution de proposition contrôle efficacement la probabilité d'acceptation.

Pour un algorithme Metropolis à marche aléatoire, un taux d'acceptation élevé signifie que la plupart des nouveaux échantillons se réalisent juste autour du point actuel. Leur acceptation fréquente signifie que la chaîne de Markov se déplace plutôt lentement et n'explore pas complètement l'espace des paramètres. D'un autre côté, un taux d'acceptation faible signifie que les échantillons proposés sont souvent rejetés ; par conséquent, la chaîne ne bouge pas beaucoup. Un échantillonneur Metropolis efficace a un taux d'acceptation ni trop élevé ni trop faible. (Roberts et al., 1997) ont montré que si les densités cibles et de proposition sont normales, la probabilité d'acceptation optimale pour la chaîne de Markov devrait être d'environ 0.45 et asymptotiquement de 0.234 dans un problème unidimensionnel ; le taux d'acceptation optimal étant d'environ 0.25 pour des dimensions d'à peu près 6. En raison de la nature des simulations stochastiques, il est impossible d'affiner un ensemble de variables de sorte que la chaîne Metropolis ait exactement le taux d'acceptation souhaité. Par conséquent, (Roberts and Rosenthal, 2001) ont démontré empiriquement qu'un taux d'acceptation entre 0.15 et 0.5 est d'au moins 80% efficace, et qu'il n'y a donc pas besoin d'affiner les algorithmes pour atteindre la probabilité d'acceptation située dans la petite tolérance des valeurs optimales. (Gelman et al., 2004) de leur côté ont suggéré que la simulation de la chaîne de Markov est plus efficace lorsque le taux d'acceptation est compris entre 0.20 et 0.40. Pour (Droesbeke and Fine, 2002), l'ajustement du paramètre d'échelle peut être effectué avec quelques échantillonnages afin d'obtenir un taux d'acceptation compris entre 0.25 et 0.5.

Bien que la sélection du noyau de transition puisse affecter les performances de l'échantillonneur (Gelman et al., 2004), le choix du noyau est moins important que les paramètres de réglage. En général, la construction de bons noyaux de transition nécessite plusieurs passages de l'algorithme dans une approche d'essai et erreur, jusqu'à ce que l'on soit satisfait des qualités mixtes de l'échantillonneur. Ce processus peut prendre beaucoup de temps et les choix faits pour un problème ne sont pas susceptibles de se généraliser à d'autres problèmes même lorsque le même modèle est utilisé.

Il est également important de s'assurer que la chaîne de Markov simulée de taille K obtenue par l'algorithme de Metropolis-Hastings est susceptible d'être générée par la fonction de densité de probabilité d'intérêt f_X. Plusieurs classes de méthodes de surveillance assurent le contrôle de la convergence (voir les détails dans (Brooks and Roberts, 1998)). En particulier, une méthode

consiste à éliminer, les premiers échantillons n_0 qui correspondent à la période de d'instabilité ou de chauffe (burn-in).

3.6 Qualification en phase de développement

La qualification d'un produit vise à vérifier, avec un niveau de confiance donné, l'atteinte des objectifs de performance du produit à travers un plan d'essais judicieusement défini.

Le défi est d'optimiser au mieux les coûts d'essais tout en garantissant une prise de décision fiable. On cherche donc à réduire d'une part, le nombre d'essais à réaliser, et d'autre part la durée de ces campagnes d'essais. Pour le deuxième objectif, les essais accélérés, comme nous les avons exposés, sont les plus souvent utilisés. Pour le premier objectif, on a recourt aux essais bayésiens, qui consistent à intégrer la connaissance a priori existante sur le produit.

Généralement, les essais de qualification prennent l'appellation d'essais de démonstration. Nous présentons ici, dans un premier temps, la démarche de définition de plan de démonstration de fiabilité utilisé pour montrer si la fiabilité du mécanisme étudié est conforme ou non à l'objectif fixé et dans un deuxième temps, l'estimation Bayésienne de fiabilité utilisée pour déterminer les paramètres de la loi de distribution de durée de vie du mécanisme.

3.6.1 Plan de démonstration

Il consiste à définir les paramètres d'un plan (taille d'échantillon et/ou temps d'essai) permettant de garantir un niveau de fiabilité exigé (exprimé en termes de probabilité p de défaillance) aux niveaux de risque client α (plan unilatéral) et, si nécessaire, fournisseur β (plan bilatéral).

3.6.1.1 Plan de démonstration classique

L'objectif est de déterminer le meilleur plan de démonstration associé au produit. Dans tous les cas, la méthode d'essai zéro défaillance est envisagée en premier lieu (Gerville-Réache and Couallier, 2009). L'essai est déterminé de telle sorte que l'on vérifie :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k} (1 - R_{essai})^j R_{essai}^{n-j} \leq \alpha \tag{3.55}$$

avec α le risque, k le nombre de défaillances observées, n la taille d'échantillon et R_{essai} est la fiabilité correspondant au temps d'essai nécessaire t_{essai}.

Dans le cas d'un essai à zéro défaillance, donc $k = 0$, l'équation (3.55) devient :

$$R_{essai}^{n} \leq \alpha \tag{3.56}$$

Si la distribution des durées de vie est une loi LogNormale, la fiabilité à démontrer R_{demo} au temps t_{demo}, s'écrit :

$$R_{demo} = 1 - \Phi\left(\frac{ln\left(t_{demo}\right) - \mu_{LN}}{\sigma_{LN}}\right) \tag{3.57}$$

L'équation (3.56), devient donc :

$$R_{essai}^{n} = \left[1 - \Phi\left(\frac{ln(t_{essai}) - \mu_{LN}}{\sigma_{LN}}\right)\right]^{n} \leq \alpha \tag{3.58}$$

Généralement, le paramètre de forme σ_{LN} est connu à partir du retour d'expériences. En connaissant donc R_{demo} et t_{demo}, le paramètre d'échelle μ_{LN} peut se déduire facilement de l'équation (3.57) comme suit :

$$\mu_{LN} = ln\left(t_{demo}\right) - \Phi^{-1}\left(1 - R_{demo}\right) \times \sigma_{LN} \tag{3.59}$$

Dans le cas d'un nouveau produit, la difficulté réside évidement dans la connaissance des paramètres de la loi de distribution de fiabilité. Dans ce contexte, la méthodologie que nous avons proposée plus haut pourra servir d'alternative pour obtenir une estimation de ces paramètres.

A partir de l'équation (3.58), deux cas de configurations sont possibles : Soit on fixe la durée de l'essai t_{essai}, puis on déduit le nombre d'essais nécessaire à réaliser n (la taille d'échantillon à tester) ; soit on fixe le nombre d'essais et on déduit la durée nécessaire t_{essai} de l'essai à réaliser.

Un compromis est donc à trouver pour conserver des coûts et durée d'essai moindres. Néanmoins, le plan d'essai n'est souvent pas soutenable du point de vue industriel (échantillon trop large ou temps d'essai trop long). Il est envisageable de recourir alors à un plan d'essai Bayésien, si n trop grand.

3.6.1.2 Plan de démonstration Bayésien

Intéressons nous à présent à la définition d'un plan de démonstration Bayésien. Dans le cas binomial on a :

$$P\left[X = k\right] = C_n^k R^k (1 - R)^{n-k} \tag{3.60}$$

Le nombre d'essais n est connu et la fiabilité R est le paramètre inconnu qui caractérise la distribution de X et auquel nous allons attribuer une densité de probabilité a priori $g(R)$. La distribution de R est de la famille des fonctions Bêta :

$$g(R) = \frac{R^{\alpha_0}(1 - R)^{\alpha_0}}{B(\alpha_0 + 1, \beta_0 + 1)}, 0 \leq R \leq 1 \tag{3.61}$$

avec :

$$Beta(\alpha_0+1,\beta_0+1)=\int_0^1 R^{\alpha_0}(1-R)^{\beta_0}dR=\frac{\Gamma(\alpha_0+1)\Gamma(\beta_0+1)}{\Gamma(\alpha_0+\beta_0+2)} \tag{3.62}$$

α_0 et β_0 sont deux paramètres réels positifs.

Après inclusion des résultats d'essais n, X par l'intermédiaire du théorème de Bayes, la distribution a posteriori de R est de même nature, avec les paramètres α' et β' :

$$\begin{cases} \alpha' &= \alpha_0+x \\ \beta' &= \beta_0+n-x \end{cases}$$

ce qui montre que α_0 s'interprète comme un nombre de succès a priori et β_0 comme un nombre d'échecs a priori.

Il est donc plus commode de réécrire les fonctions Bêta pour faire apparaître cette propriété en effectuant le changement de paramétrage correspondant :

$$a\ \ priori\begin{cases} \alpha_0 &= x_0 \\ \beta_0 &= n_0-x_0 \end{cases}$$

$$a\ \ posteriori\begin{cases} \alpha' &= x_0+x \\ \beta' &= n_0+n-x_0-x \end{cases}$$

Avec ces nouveaux paramètres le formalisme devient (en écrivant x et n au lieu de x_0 et n_0 ou bien x_0+x, n_0+n pour alléger les notations)

$$g(R|n,x)=\frac{R^{\alpha'}(1-R^{\alpha'})}{Beta(\alpha'+1,\beta'+1)} \tag{3.63}$$

Par conséquent la différence entre ce modèle Bayésien et le modèle binomial classique est simplement que le premier utilise à la fois des données subjectives et objectives alors que le second n'utilise que les données objectives. Cette identité justifie évidemment le choix d'une fonction Bêta comme densité de probabilité a priori de R.

La construction d'un plan Bayésien consiste à déterminer la taille d'échantillon n, en fixant le nombre de défaillances à observer x à 0, en résolvant l'équation suivante :

$$\int_0^{R_{min}} Beta(\alpha_0+x+1,\beta_0+n-x+1)dR=\frac{\alpha}{2} \tag{3.64}$$

avec α_0 et β_0 les paramètres de la distribution a priori, x le nombre de défaillances à observer

(souvent $x = 0$) et n taille d'échantillon.

La définition de la distribution a priori se fait généralement à partir de plusieurs sources d'information (Résultats d'essais sur systèmes antérieurs, $RETEX$, avis d'experts). Notre méthodologie peut aussi servir dans ce cadre.

Considérons le cas où l'information est donnée par un expert. Il nous donne un intervalle : $R \in [R_{min}, R_{max}]$. Cet intervalle est fourni pour un niveau de confiance donné $(1-\alpha)$. On peut déterminer les paramètres de la loi a priori par la méthode des moments :

$$\begin{cases} \alpha_0 &= \frac{E^2[R]}{\sigma^2[R]}(1-E[R]) - E[R] \\ \beta_0 &= \frac{E[R]}{\sigma^2[R]}(1-E[R])^2 + E[R] - 1 \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} E[R] &= \frac{R_{min}+R_{max}}{2} \\ \sigma^2[R] &= \frac{(R_{max}-R_{min})^2}{2} \end{cases}$$

3.6.2 Estimation Bayésienne de fiabilité

L'estimation de fiabilité consiste généralement à caractériser à partir de données expérimentales, les paramètres du modèle de fiabilité associée à la distribution de durées de vie d'un composant donné. Sur le plan statistique cela nécessite un volume de données conséquent pour garantir la qualité d'estimation. Dans la pratique, cet aspect est contraignant pour les industriels qui eux cherchent, comme nous venons de le voir dans la définition du plan de démonstration, à minimiser les coûts d'essais. La tendance est donc de recourir à des approches Bayésiennes.

3.6.2.1 Principe de l'approche Bayésienne

L'approche Bayésienne est une démarche se basant sur l'exploitation du retour d'expériences et/ou de connaissances a priori sur les paramètres à estimer, qui sont alors considérés comme des variables aléatoires.

Dans le cas d'une distribution LogNormale à deux paramètres (μ, σ), la fonction de densité de probabilité s'écrit avec $\theta = 1/\sigma^2$:

$$g(x/\mu, \theta) = \frac{\theta^{1/2}}{x\sqrt{2\pi}} \exp^{-\theta(x-\mu)^2} \tag{3.65}$$

Pour un échantillon d'observations $x = \{x_i\}$ de taille n, la vraisemblance est donc donnée par :

$$L(x/\mu, \theta) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i/\mu, \theta) = \frac{\theta^{n/2}}{(\prod_{i=1}^{n} x_i)(\sqrt{2\pi})^n} \exp^{-(1/2)\theta \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \tag{3.66}$$

Soit $f(\mu)$ la distribution a priori du paramètre μ et $f'(\theta)$ la distribution a priori du paramètre θ. D'après le principe Bayésien, la distribution a posteriori $f(\mu,\theta/x)$ de μ et θ obtenue à partir x et les fonctions distributions a priori $f(\mu)$ et $f'(\theta)$ est donnée par :

$$f(\mu,\theta/x) = \frac{L(x/\mu,\theta).f(\mu).f'(\theta)}{\int_{D(\mu)}\int_{D(\theta)} L(x/\mu,\theta).f(\mu).f'(\theta).d\mu.d\theta} \tag{3.67}$$

Dans le cas où aucune connaissance n'est disponible sur μ et θ, la densité uniforme non informative est utilisée pour définir la fonction de densité de probabilité a priori $f(\mu)$ et $f'(\theta)$: $f(\mu) = 1/2K$ sur l'intervalle $]-K,+K[$ et $f'(\theta) = 1/K'$ sur l'intervalle $]0,+K'[$.

Par conséquent, la fonction de densité de probabilité à posteriori s'écrit :

$$f(\mu,\theta/x) = \frac{L(x/\mu,\theta).f(\mu).f'(\theta)}{\int_{-K}^{+K}\int_{0}^{+K'} L(x/\mu,\theta).f(\mu).f'(\theta).d\mu.d\theta} \tag{3.68}$$

Avec K, $K' \to \infty$.

soit :

$$f(\mu,\theta/x) = \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right]^{(n+1)/2}\theta^{n/2}e^{(-1/2)\theta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}e^{(-1/2)\theta n(\mu-\overline{x})^2}}{2^{(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \tag{3.69}$$

On démontre que $f(\mu,\theta/x)$ est une combinaison des distributions Gamma et Normale :

$$f(\mu,\theta/x) = \underbrace{\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-b\theta}}_{G(a,b)}\underbrace{\sqrt{\frac{n\theta}{2\pi}}e^{-(n\theta/2)(\mu-c)^2}}_{N[c,\frac{1}{\sqrt{\theta(2a-1)}}]} \tag{3.70}$$

avec :

$$a = \frac{n+1}{2} \tag{3.71}$$

$$b = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \tag{3.72}$$

$$c = \overline{x} \tag{3.73}$$

A partir de la méthodologie d'estimation de fiabilité en phase de développement que nous avons proposée, il est possible de construire une connaissance a priori sur les paramètres μ et θ de la loi de fiabilité.

Dans ce cas, on choisit l'équation (3.70) comme la distribution a priori. La distribution a posteriori s'écrit alors :

$$\begin{aligned} f(\mu,\theta/x) = & \frac{\theta^{(n-1/2+a)} e^{-\left[(1/2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+b\right]\theta}}{\sqrt{2\pi\Gamma(\frac{n}{2}+a)}} \times e^{-(1/2)\theta(n+2a-1)(\mu-M)^2} \\ & \times\theta^{-(1/2)\theta\left[\bar{x}^2+(2a-1)c^2-(n\bar{x}+(2a-1)c)^2/n+2a-1\right]} \times \sqrt{n+2a-1}(\frac{n}{2}+a) \\ & \times\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1} n(x_i-\bar{x})^2+b+\frac{n(2a-1)(\bar{x}-c)^2}{n+2a-1}\right] \end{aligned} \tag{3.74}$$

où $M = n\bar{x}+(2a-1)c/n+2a-1$.

$f(\mu,\theta/x)$ est une combinaison de distributions Gamma et Normale :

$$f(\mu,\theta/x) = \underbrace{\frac{b'^a}{\Gamma(a')}\theta^{a'-1}e^{-b'\theta}}_{G(a',b')}\underbrace{\sqrt{\frac{(2a'-1)\theta}{2\pi}}e^{-(n\theta/2)(\mu-c')^2}}_{N\left[c',\frac{1}{\sqrt{\theta(2a'-1)}}\right]} \tag{3.75}$$

$$a' = \frac{n}{2}+a \tag{3.76}$$

$$b' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+b+\frac{n(2a-1)(\bar{x}-c)^2}{2(n+2a-1)} \tag{3.77}$$

$$c' = M = \frac{n\bar{x}+(2a-1)c}{n+2a-1} \tag{3.78}$$

3.6.2.2 Détermination des estimateurs Bayésiens

Une fois la distribution à posteriori définie, les estimateurs des paramètres μ et θ peuvent s'obtenir en utilisant les distributions marginales associées à μ et θ. La distribution marginale du paramètre θ s'écrit :

$$f(\theta/x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu,\theta/x)d\mu \tag{3.79}$$

$$f(\theta/x) = G(a',b')\int_{-\infty}^{+\infty} N\left[c',\frac{1}{\theta(2a'-1)}\right]d\mu \tag{3.80}$$

$$f(\theta/x) = \frac{b'^a\theta^{a'-1}e^{-b'\theta}}{\Gamma(a')} = G(a',b') \tag{3.81}$$

L'estimateur ponctuel de θ est défini par le mode de $f(\theta/x)$:

$$\hat{\theta} = \frac{a'-1}{b'} \tag{3.82}$$

L'estimateur ponctuel de la variance est obtenu par :

$$\hat{s}^2 = \frac{b'}{a'-1} \tag{3.83}$$

L'intervalle de confiance bilatéral (défini par θ_{min} et θ_{min}) est calculé de sorte que :

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma}{2} = \displaystyle\int_0^{\theta_{min}} f(\theta/x)d\theta \Rightarrow \theta_{min} \\ 1-\dfrac{\gamma}{2} = \displaystyle\int_0^{\theta_{max}} f(\theta/x)d\theta \Rightarrow \theta_{max} \end{cases} \tag{3.84}$$

où $1-\frac{\gamma}{2}$ un niveau de confiance donné.

La distribution marginale de μ s'écrit :

$$f(\mu/x) = \int_0^{+\infty} f(\mu,\theta/x)d\theta \tag{3.85}$$

$$f(\mu/x) = \frac{b^a\sqrt{2a-1}}{\alpha^{a+1/2}\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)} \tag{3.86}$$

avec $\alpha = b + \frac{1}{2}(2a-1)(\mu-c)^2$.

L'estimateur ponctuel de μ est défini par le mode de $f(\mu/x)$:

$$\hat{\mu} = c' \tag{3.87}$$

L'intervalle de confiance bilatéral (défini par μ_{min} et μ_{min}) est calculé de sorte que :

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma}{2} = \displaystyle\int_0^{\mu_{min}} f(\mu/x)d\mu \Rightarrow \theta_{min} \\ 1-\dfrac{\gamma}{2} = \displaystyle\int_0^{\mu_{max}} f(\mu/x)d\mu \Rightarrow \theta_{max} \end{cases} \tag{3.88}$$

où $1-\frac{\gamma}{2}$ un niveau de confiance donné.

Dans le cas où il n'y a aucune connaissance disponible, les estimateurs ponctuels de la moyenne et de la variance sont définis par les relations suivantes :

$$\hat{\mu} = c = \overline{x} \tag{3.89}$$

$$\hat{s}^2 = \frac{b}{a-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1} \tag{3.90}$$

avec a, b, c définis par l'équation (3.70).

Dans le cas, où une connaissance a priori est disponible, les estimateurs ponctuels de la moyenne et de la variance sont définis par :

$$\hat{\mu} = c' = \frac{n\overline{x} + (2a-1)c}{n+2a-1} \tag{3.91}$$

$$\hat{s}^2 = \frac{b'}{a'-1} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + b + \frac{n(2a-1)(\overline{x}-c)^2}{2(n+2a-1)}}{\frac{n}{2} + a - 1} \tag{3.92}$$

où a, b, c sont les paramètres de la distribution a priori et Avec a', b', c' les paramètres de la distribution à posteriori.

3.6.2.3 Détermination de la distribution a priori à partir d'informations disponibles

La connaissance a priori est donnée par une estimation de la moyenne μ et un intervalle supposé contenir l'inverse de la variance : $\left[\theta_{min} = \frac{1}{s_{max}^2}, \theta_{max} = \frac{1}{s_{min}^2}\right]$.

La distribution a priori est définie par l'équation (3.70) avec les paramètres inconnus a, b, c.

Calcul de a et b par la méthode des moments :

La distribution marginale de θ s'écrit :

$$f(\theta/x) = \frac{b^a \theta^{a-1} e^{-b\theta}}{\Gamma(a)} = G(a,b) \tag{3.93}$$

L'intervalle $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ définit une distribution uniforme dont la moyenne et la variance sont :

$$E(\theta) = \frac{\theta_{min} + \theta_{max}}{2} \tag{3.94}$$

et

$$V(\theta) = \frac{(\theta_{max} - \theta_{min})^2}{12} \tag{3.95}$$

La moyenne et la variance d'une distribution Gamma $G(a,b)$ sont données par :

$$E'(\theta) = \frac{a}{b} \tag{3.96}$$

et

$$V'(\theta) = \frac{a}{b^2} \tag{3.97}$$

En égalisant les moyennes et les variances ($E(\theta) = E'(\theta)$ et $V(\theta) = V'(\theta)$), les valeurs des paramètres a et b se déduisent et on obtient :

$$a = \frac{3(\theta_{min} + \theta_{max})^2}{(\theta_{max} - \theta_{min})^2} \tag{3.98}$$

et

$$b = \frac{6(\theta_{min} + \theta_{max})}{(\theta_{max} - \theta_{min})^2} \tag{3.99}$$

Calcul de c

La distribution marginale de μ s'écrit :

$$f(\mu/x) = \frac{b^a\sqrt{2a-1}}{\alpha^{a+1/2}\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)} \tag{3.100}$$

avec $\alpha = b + \frac{1}{2}(2a-1)(\mu - c)^2$.

Cette distribution est symétrique autour de la valeur de c. a et b sont aussi définis, donc la valeur de c est donnée par :

$$c = \mu \tag{3.101}$$

3.6.3 Estimation Bayésienne avec pondération de l'a priori

Dans l'approche Bayésienne classique (voir l'équation (3.67)), les informations contenues dans la vraisemblance et dans la connaissance a priori sont considérées avec le même poids. Pour les cas où l'une des deux serait trop informative, on observe que l'autre ne compte plus. Il est tout de même nécessaire de vérifier la cohérence de l'a priori et des résultats de l'essai, en donnant un poids à l'a priori.

Usureau (2001) a présenté une approche qui permet de pondérer la connaissance a priori en fonction du degré de compatibilité entre l'a priori et la vraisemblance. L'approche est basée

sur la détermination d'un facteur K_p de pondération normalisé compris entre 0 et 1. Elle compare l'information a priori qu'on a pour chaque paramètre avec l'information contenue par la vraisemblance définie par les fonctions marginales (Équations (3.85) et (3.79)).

Dans le cadre de cette thèse, ce facteur peut permettre de mesurer la similitude entre la distribution a priori construite à partir de notre méthodologie d'estimation en phase de développement, et la fonction de vraisemblance représentant, les données réelles observées au moment de la phase d'essais sur le produit, afin de ne pas biaiser les résultats de l'analyse de fiabilité.

3.6.3.1 Principe de détermination du facteur de pondération

Soit $C(\zeta)$, le produit de convolution entre l'a priori $f(\theta)$ et la vraisemblance $L(\theta/X)$:

$$C(\zeta) = \int_{D(\theta)} f(\theta - \zeta) L(\theta/X) d\theta \tag{3.102}$$

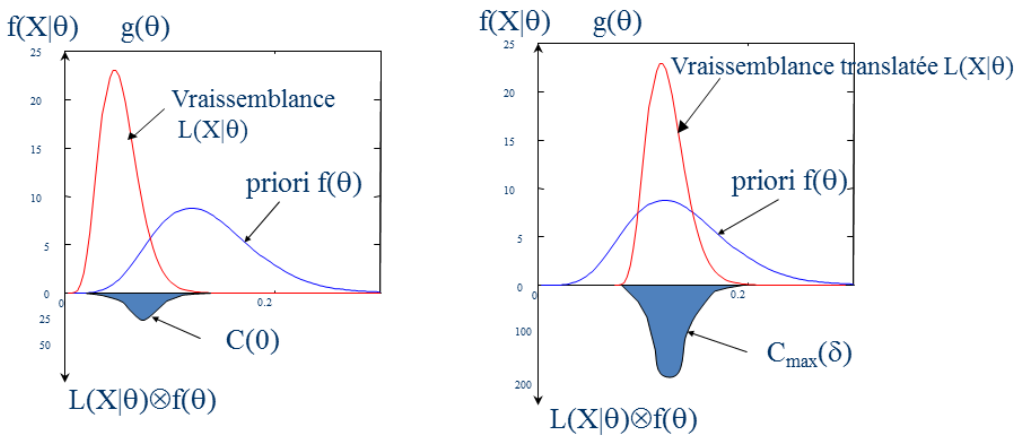


Fig. 3.14. Principe de détermination du facteur de pondération

Comme illustré sur la figure 3.14, plus les deux fonctions $f(\theta)$ et $L(\theta/X)$ se recoupent, plus $C(\zeta)$ est élevée ; et moins elles se recoupent, plus $C(\zeta)$ est faible. On déduit donc que $C(\zeta)$ évolue avec la similitude entre la distribution a priori $f(\theta)$ et la vraisemblance $L(\theta/X)$

Afin d'établir le facteur de pondération K_p, on cherche une valeur cohérente avec $C(\zeta)$ qui évolue uniquement entre 0 et 1. La solution consiste à normaliser $C(\zeta)$. Le facteur K_p est donc obtenu par :

$$K_p = \frac{C(0)}{C_{max}(\zeta)} \tag{3.103}$$

avec :

$C(0)$ obtenue pour $\zeta = 0$

$C_{max}(\zeta)$ représente la valeur maximale de $C(\zeta)$, correspondant au maximum de l'aire qui se

trouve sous la courbe produit des deux fonctions $f(\theta)$ et $L(\theta/X)$ quand on fait glisser les deux courbes l'une sur l'autre (voir figure 3.14).

3.6.3.2 Utilisation du facteur de pondération

La première utilité du facteur K_p est de permettre de statuer sur la pertinence de l'a priori. La deuxième utilité de K_p est de pondérer l'a priori, quel que soit son état, afin d'améliorer sa compatibilité avec la vraisemblance :

— Plus K_p sera proche de 1 et plus la connaissance a priori originale sera intégrée, permettant ainsi d'exploiter au mieux l'un des intérêts des méthodes Bayésiennes, à savoir de réaliser des gains considérables sur les plans d'essais de Sécurité/Fiabilité.

— Plus K_p sera proche de 0, moins la connaissance a priori initiale sera intégrée dans l'inférence Bayésienne, évitant ainsi de prendre des décisions pouvant être lourdes de conséquences sur le plan de la Sécurité ou sur le plan économique, ceci sur la base de résultats faux.

On peut caractériser la force d'une connaissance a priori par le ratio suivant :

$$\varphi = \frac{Var(\theta)}{E(\theta)} \tag{3.104}$$

où $Var(\theta)$ est la variance et $E(\theta)$, la moyenne du paramètre θ.

On parlera donc de a priori fort si φ est faible, et de a priori faible si φ est élevé. A espérance égale, on déduit donc que c'est la variance qui donne le poids à une distribution par rapport à une autre.

Ainsi pour faire la pondération, on ne modifiera pas le mode de la distribution a priori, mais la variance sera $1/K_p$ fois plus grande. On aboutit donc à un a priori pondéré.

3.6.3.3 Estimation de la distribution a posteriori pondérée

A partir de la méthodologie d'estimation développée dans la thèse, nous pouvons obtenir un intervalle de confiance sur les paramètres (μ, σ) de loi de fiabilité : $\mu \in [\mu_{min}, \mu_{max}]$ et $\sigma \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$.

Soit $\theta = 1/\sigma^2$, et $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}] = \left[\frac{1}{\sigma^2_{max}}, \frac{1}{\sigma^2_{min}}\right]$ On suppose que le paramètre θ est distribué suivant une loi Gamma de paramètres (a_0, b_0) : $G(a_0, b_0)$.

Comme nous l'avons déjà établi, il est facile de déduire la valeur des paramètres (a_0, b_0) à partir de la méthode des moments.

On s'intéresse maintenant à la pondération de la distribution a priori. A partir de la démarche d'utilisation du facteur K_p, l'espérance de θ ne change pas, mais seulement sa variance. La

pondération de la distribution a priori du paramètre θ par le facteur K_p donne donc une nouvelle distribution Gamma de paramètres (a'_0, b'_0) qui peuvent être déduits des équations des moments d'ordre 1 et 2 :

$$\begin{cases} a_0 b_0 &= a'_0 b'_0 \\ a_0 b_0^2 &= K a'_0 b_0'^2 \end{cases}$$

Dans le cas de lois plus complexes, une résolution numérique est nécessaire.

La nouvelle distribution a priori est alors utilisée dans l'inférence Bayésienne permettant d'estimer les paramètres a posteriori.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle méthodologie, combinant une technique efficace de méta-modélisation permettant de substituer le modèle mécano-probabiliste implicite, et deux approches différentes d'intégration du retour d'expérience existant, pour traiter la problématique d'estimation de fiabilité de nouveaux produits, au plus tôt dans la phase de développement.

La technique de méta-modélisation appelée *MDD*, est basée sur la méthode de décomposition dimensionnelle et la projection sur une base polynomiale de Lagrange. Son efficacité et précision ont été comparées par rapport à celles de la technique de méta-modélisation basée sur développement en polynômes de chaos.

Deux approches d'intégration du retour d'expériences sont proposées : La première est basée sur un facteur de similitude entre la loi de fiabilité expérimentale connue d'un produit de référence et la loi de fiabilité prévisionnelle obtenue numériquement. La deuxième approche proposée est basée sur une fonction de transfert temporel entre la fiabilité expérimentale et prévisionnelle. Elle permet de lever une limite de la première approche en constituant une approche moins restrictive. En effet, la première approche basée sur le facteur de similitude repose sur l'hypothèse de constance de facteur de forme entre la loi de fiabilité expérimentale et prévisionnelle (numérique), ce qui n'est pas toujours vrai.

Un autre point crucial de la méthodologie est l'étude objective de similarité entre une version de référence et une nouvelle version d'un produit donné. En effet, cette étape est importante pour pouvoir transposer le facteur de similitude ou la fonction de transfert temporel de la version de référence à la nouvelle version. Nous avons proposé une méthode d'analyse de similarité basée sur l'étude de linéarité entre les sensibilités des modèles des deux versions aux perturbations de leurs paramètres d'entrée.

L'estimation prévisionnelle de fiabilité dans le cadre de notre méthodologie est basée sur un couplage mécano-probabiliste, qui nécessite une connaissance préalable des distributions des

paramètres d'entrée du modèle, notamment les paramètres matériaux. Dans la réalité, ces distributions sont souvent méconnues et peuvent participer énormément à l'erreur observée sur l'estimation prévisionnelle de fiabilité. Nous avons donc proposé l'utilisation d'une méthode d'identification inverse probabiliste pour recaractériser la distribution des paramètres d'entrée à partir de la distribution expérimentale de durées de vie existante sur le produit de référence, ce qui permettra d'améliorer l'estimation prévisionnelle de fiabilité par simulations numériques.

Pour finir, nous avons abordé la qualification en phase de développement. La méthodologie proposée, nous permet en effet de construire une connaissance a priori sur les paramètres de fiabilité d'une nouvelle conception. Cette connaissance est ensuite intégrée dans une démarche de qualification Bayésienne pour réduire les tailles d'échantillons nécessaires à réaliser dans la phase de qualification. A ce niveau, les approches de calculs de plan de démonstration largement utilisées dans le domaine de la fiabilité sont présentées. Pour l'estimation de fiabilité dans un contexte Bayésien, nous avons aussi introduit la notion de pondération de l'a priori qui devra permettre de vérifier la cohérence de la connaissance a priori construite par notre méthodologie avec la vraisemblance issue de vrais essais, afin de ne pas biaiser les résultats.

Dans le chapitre suivant, nous allons évaluer l'efficacité de la méthodologie au travers de l'analyse de fiabilité de deux versions de conception d'un composant mécanique automobile.

4

Application à un composant mécanique automobile

« *Science is about knowing ; engineering is about doing.* »

Henry Petroski

Contents

4.1 Introduction **131**

4.2 Mécanisme d'endommagement du verrou **132**

4.2.1 Définition du dommage par fatigue 132

4.2.2 Les phases de l'endommagement par fatigue 134

4.2.3 Calcul de durée de vie en fatigue 135

4.2.3.1 Approche $S-N$: Diagramme d'endurance de Wöhler . . . 135

4.2.3.2 Approche $\varepsilon-N$: Diagramme de Manson-Coffin 137

4.3 Fiabilité expérimentale par analyse du RETEX **142**

4.3.1 Présentation des résultats d'essais accélérés 143

4.3.2 Choix du modèle de durée de vie accélérée 143

4.3.3 Loi d'accélération et fiabilité expérimentale 146

4.4 Fiabilité prévisionnelle par simulation numérique **149**

4.4.1 Modèle mécanique déterministe 149

4.4.1.1 Modèle élastoplastique et modèle de fatigue oligocyclique . 150

4.4.1.2 Identification des paramètres du modèle de fatigue 152
4.4.2 Modèle mécano-probabiliste 153
4.4.2.1 Construction du modèle de substitution 154
4.4.2.2 Moments statistiques et analyse de fiabilité 155
4.5 Analyse de fiabilité du nouveau développement 158
4.5.1 Fiabilité prévisionnelle du nouveau développement 159
4.5.2 Estimation basée sur le facteur de similitude 163
4.5.3 Estimation basée sur la fonction de transfert temporel 166
4.5.4 Amélioration de l'estimation de la fiabilité par actualisation inverse des paramètres de conception 170
4.6 Plan de qualification du nouveau mécanisme 178
4.6.1 Plan de démonstration classique et Bayésien 178
4.6.2 Estimation Bayésienne de fiabilité après essais 180
4.7 Conclusion 182

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons détaillé la méthodologie que nous proposons pour l'estimation de fiabilité en phase de développement. Dans le présent chapitre, nous nous intéressons à un cas d'application. Le contexte est le suivant : nous disposons de retour d'expérience sur une version de référence d'un composant mécanique automobile. Dans le cadre de la conception d'une nouvelle version qui a nécessité des modifications dans le but d'adapter le mécanisme à l'exigence client. On cherche donc à avoir une première estimation de la fiabilité de la nouvelle version dans la phase de conception, ensuite à définir un plan d'essai à réaliser pour la qualification réelle du mécanisme.

Le mécanisme est un verrou utilisé pour verrouiller et déverrouiller le coulissement avant ou arrière d'un siège automobile. Il est logé dans le sous-ensemble du siège appelé glissière (Encadré sur la figure 4.1).

Fig. 4.1. Localisation du verrou de commande sur le siège auto

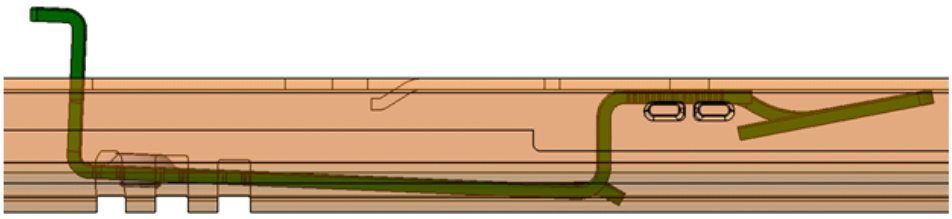


Fig. 4.2. Verrou de commande : Version $\mathcal{D}_{ref}$

Nous précisons que la méthodologie envisagée dans le cadre de ce travail n'est pas dédiée à ce composant mécanique, mais plutôt vise une approche générique indépendante de la famille de mécanisme.

La version de référence $\mathcal{D}_{ref}$ du mécanisme est représentée sur la figure 4.2.

Une analyse de fiabilité d'un produit, est nécessairement associée à un mode de défaillance donné, qu'il convient de bien connaître afin de proposer un essai représentatif. Le mécanisme

étudié subit des cycles répétitifs de verrouillage-déverrouillage qui le conduisent à une rupture par fatigue mécanique.

Dans un premier temps, nous allons donc nous intéresser au phénomène de l'endommagement par fatigue avant d'enchaîner avec l'analyse du retour d'expérience existant pour en déduire la loi de fiabilité expérimentale du mécanisme $\mathcal{D}_{ref}$. Ensuite, afin de construire la distribution de durées de vie et la loi de fiabilité prévisionnelle par simulations numérique, nous avons étudié le modèle numérique mécanique déterministe du mécanisme. L'étape suivante est l'application des deux approches d'estimation de fiabilité dans le cadre d'un nouveau développement (nouvelle version) $\mathcal{D}_{up}$.

Pour finir, nous aborderons la définition de plan de qualification (démonstration de fiabilité) et l'estimation Bayésienne de fiabilité en prenant pour connaissance a priori la loi de fiabilité obtenue par l'approche proposée.

4.2 Mécanisme d'endommagement du verrou

4.2.1 Définition du dommage par fatigue

On rencontre plusieurs définitions dans la littérature. D'après (Jiang, 1994), la fatigue des pièces métalliques est définie par l'apparition de fissures macroscopiques et leur propagation, sous des charges répétées. (Herbland, 2009) définie la fatigue comme un phénomène par lequel une structure rompt après avoir subi une succession de chargements qui se répètent dans le temps. Pour (Kececioglu et al., 1998), on appelle dommage par fatigue la modification des caractéristiques d'un matériau, tenant essentiellement à la formation de fissures et résultant de l'application de cycles de contrainte conduisant à une rupture.

En fatigue, un cycle de chargement ou de contrainte est défini par (voir figure 4.3) :

— une contrainte maximale, σ_{max} et une contrainte minimale, σ_{min},

— une contrainte moyenne σ_m,

— une amplitude de contrainte σ_a,

— une étendue de variation de contrainte $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$,

— un rapport de charge $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$, qui permet de caractériser les différents types de cycles.

Un cycle de chargement est dit purement alterné lorsque $R = -1$, alterné lorsque $R < 0$ et répété lorsque $R > 0$. Ces différents types de chargement sont représentés sur la figure 4.4.

En fatigue, le chargement en un point donné correspond à la valeur de la réponse de la structure en ce point. Cette valeur est par exemple une contrainte ou une déformation. On désigne par histoire de chargement l'évolution du chargement au cours temps (figure 4.3).

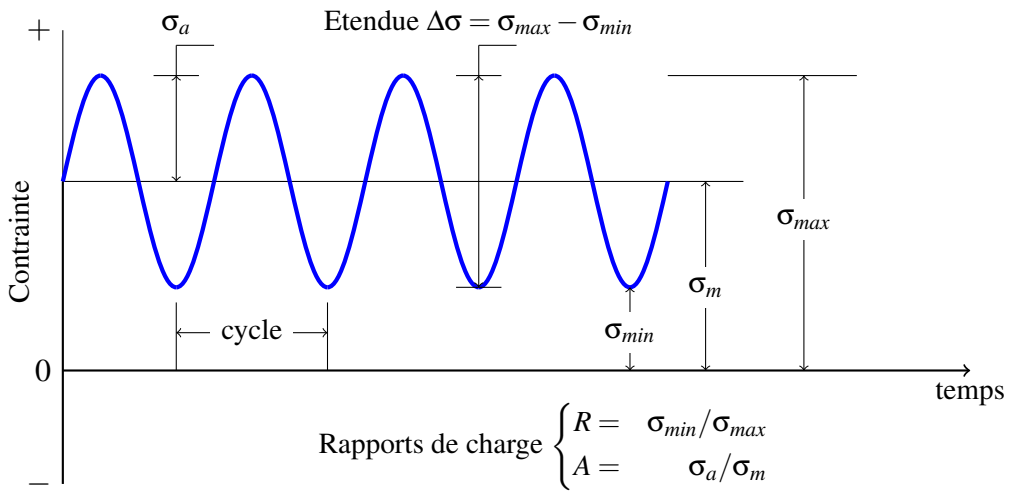
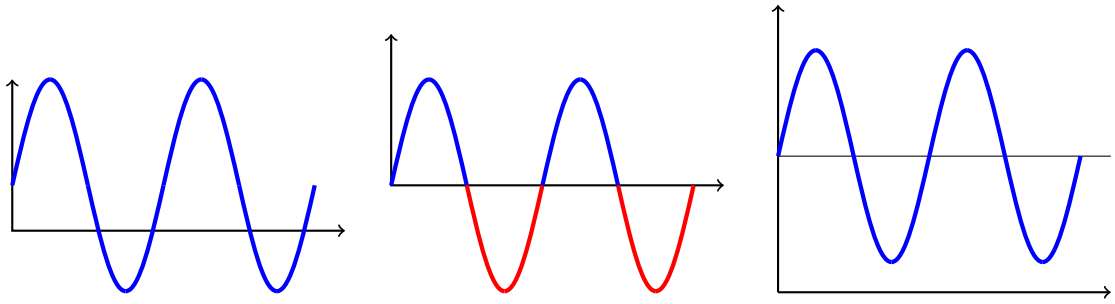


Fig. 4.3. cycle et histoire de chargement



(a) Contraintes alternées

(b) Contraintes alternées symétriques $(R = -1)$

(c) Contraintes alternées symétriques $(R > 0)$

Fig. 4.4. Types de cycle de chargement

Les différents types de chargement que l'on rencontre sont les suivants :

— ***Amplitude constante et chargement proportionnel*** : C'est le cas classique de chargement. Les exemples d'un chargement à amplitude constante sont les cas de chargement purement alterné $(R = -1)$ ou de chargement à ratio nul. Le chargement est dit proportionnel lorsque les principaux axes des contraintes ne changent pas au cours du temps.

— ***Amplitude constante et chargement non-proportionnel*** : Dans ce cas les principaux axes de déformation ou de contraintes peuvent changer au cours du temps. C'est par exemple le cas où on alterne entre un chargement de flexion et de torsion ; le cas où on superpose un chargement alterné à un chargement statique.

— ***Amplitude non constante et chargement proportionnel*** : C'est le cas où le ratio de contrainte varie au cours du temps. On a un historique de chargement à amplitude de contrainte variable. On utilise des méthodes de comptage de cycles pour analyser ce type de fatigue. La méthode de comptage la plus connue est celle du Rain-flow que nous détaillerons plus tard.

— ***Amplitude non constante et chargement non-proportionnel*** : C'est le cas le plus général.

Il est similaire au précédent sauf que les axes principaux de déformation ou de contrainte changent au cours du temps. L'analyse de ce type de chargement nécessite des méthodes plus avancées de comptage à l'exemple de la méthode de pas de pics indépendants ou la méthode des plans critiques multi-axiaux.

4.2.2 Les phases de l'endommagement par fatigue

Le phénomène de l'endommagement par fatigue se scinde principalement en trois différentes phases dont chacune participe à la rupture finale de la pièce :

— La première phase : c'est la phase d'***amorçage*** ou d'initiation de la fissure longue (ou macroscopique) et peut représenter 80 à 90% de la durée de vie totale ;

— La deuxième phase : concerne la ***propagation*** de la fissure à l'échelle macroscopique en fonction du temps et selon une certaine vitesse jusqu'à une longueur critique ;

— Et la troisième phase : est celle de la ***rupture*** finale brutale de la pièce.

On peut encore décomposer la première phase en une phase de fissuration microscopique (fissure courte), de propagation de cette fissure à l'échelle microscopique, qui se termine par l'amorce de la fissure macroscopique. La figure 4.5 représente une évolution de l'endommagement par fatigue au niveau microscopique et macroscopique :

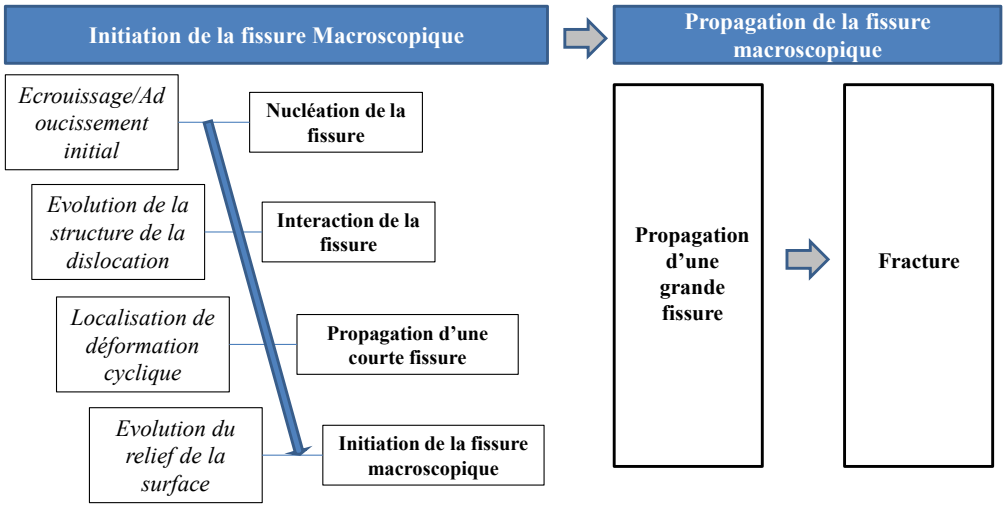


Fig. 4.5. Évolution de l'endommagement en fatigue

On exprime généralement la durée de vie totale d'une structure soumise à la fatigue comme la somme de deux composantes :

$$N_f = N_a + N_p \tag{4.1}$$

avec : N_a, le nombre de cycles requis pour amorcer une fissure à l'échelle macroscopique (0.1 à $1mm$). Il correspond à la période entre le premier cycle et la détection d'une fissure macrosco-

pique propageant. N_p, est le nombre de cycles requis pour propager cette fissure jusqu'à rupture de la structure.

En fatigue, les méthodes de prévision de durée de vie peuvent être regroupées en trois grandes catégories :

— Méthodes basées sur la courbe de Wöhler : *Approche S-N*,

— Méthodes basées sur la déformation locale : *Approche* $\varepsilon - N$,

— Méthodes basées sur la mécanique linéaire de la rupture : *Approche* $\Delta K - N$, K étant le facteur d'intensité de contrainte.

4.2.3 Calcul de durée de vie en fatigue

4.2.3.1 Approche $S - N$: Diagramme d'endurance de Wöhler

La courbe *S-N (Stress - Number of cycles)*, encore appelée diagramme de Wöhler (figure 4.6), traduit l'évolution des nombres de cycles à rupture N en fonction de l'amplitude de la contrainte appliquée σ_a et ce pour une contrainte moyenne σ_m donnée :

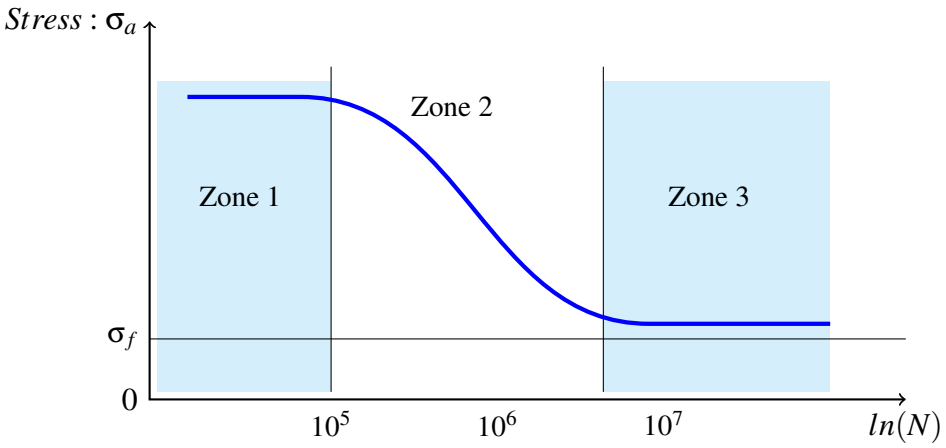


Fig. 4.6. La courbe de Wöhler

La courbe $S - N$ est obtenue expérimentalement en soumettant successivement un échantillon d'éprouvettes à des cycles de contraintes périodiques (généralement sinusoïdaux) d'amplitudes différentes, et en notant le nombre de cycles N au bout duquel la rupture se produit. Elle délimite deux régions : celle de rupture (au-dessus de la courbe) et de non rupture (en dessous de la courbe).

En fonction des nombres de cycles on distingue trois principaux domaines de fatigue :

1. ***le domaine de fatigue plastique olygocyclique***, ou encore de faibles durées de vie *(LCF : Low Cycle Fatigue)* considéré en général pour des nombres de cycles entre 0 et 10^4 ou (50.10^4) cycles pour les aciers doux. Ce domaine correspond aux contraintes les plus grandes (supérieures à la limite élastique du matériau) induisant de grandes déformations

plastiques macroscopiques (la rupture survient après un certain nombre de cycles et est précédée d'une déformation plastique notable).

2. ***le domaine de fatigue polycyclique*** encore appelé d'endurance limitée, ou de fatigue à grand nombre de cycles *(HCF : High Cycle Fatigue)* pour des chargements qui aboutissent à des durées de vie entre 10^4 et 10^7) cycles en général. Plus on va tendre vers des grandes durées de vie, plus basses seront les déformations plastiques et on peut tendre vers un comportement macroscopique purement élastique.
3. ***le domaine d'endurance illimitée***, dans lequel $N > 10^7$ cycles en général. La courbe présente alors une asymptote horizontale dont la valeur représente la limite de fatigue σ_f.

On note que la limite entre le domaine *HCF* et *LCF* correspond à la plastification macroscopique de la structure. Dans la littérature, on trouve de récents travaux qui traitent de la fatigue pour des durées de vie atteignant plus de 10^9 cycles, on parle de *fatigue gigacyclique* (Sonsino, 2007 ; Shiozawa et al., 2009).

La courbe de Wöhler encore appelée courbe $S-N$ ou courbe de résistance en fatigue peut-être modélisée par différentes lois analytiques, soit dans un domaine particulier, soit dans son ensemble. Les principaux modèles sont reportés dans le tableau 4.1 avec :

— σ_a, l'amplitude de contrainte ;

— N, le Nombre de cycle à rupture ;

— σ_D, la limite de fatigue conventionnelle ;

— σ_u, la contrainte ultime à rupture en traction quasi-statique ;

— Et A, B, C, a, b sont des constantes définies expérimentalement.

En pratique, la courbe de Wöhler est généralement donnée pour une probabilité de rupture $p = 0.5$. En effet, pour un chargement uni-axial d'amplitude constante, la courbe de Wöhler porte l'amplitude de contrainte σ_a pour laquelle il y a une probabilité de rupture de 50% en fonction du nombre de cycles à rupture N (Herbland, 2009).

Des chercheurs comme (Shigley, 1972 ; Lalanne, 1999 ; Bompas-Smith, 1973) ont montré qu'à une amplitude de contrainte donnée, on observe une distribution LogNormale des nombres de cycles à défaillance, et qu'à un nombre de cycles donné la contrainte d'amplitude suit une loi normale (figure 4.7).

D'après la littérature, notamment (Jakubczak et al., 2005), l'écart-type de la distribution des contraintes varie selon la géométrie du système et son coefficient de variation varie de 5% à 10% pour les systèmes non soudés et de 10% à 20% pour les assemblages soudés. En ce qui concerne la distribution LogNormale des nombres de cycles à la rupture, son écart-type est supposé constant quel que soit le niveau de contrainte.

TABLE *4.1 Modèles mathématiques de courbe S-N*

Nom de modèle	Domaines modélisés	Formule
Wöhler (1870)	Fatigue oligocyclique, endurance limitée et illimitée	$\sigma_a = a - b.ln(N)$ avec $a, b > 0$
Basquin (1910)	Endurance limitée	$ln(\sigma_a) = a - b.ln(N)$ avec $a, b > 0$
Stromeyer (1914)	Endurance limitée et illimitée	$ln(\sigma_a - \sigma_D) = a - b.ln(N)$ avec $a, b > 0$
Palmgreen (1924)	Endurance limitée et illimitée	$\sigma_a = \sigma_D + (\frac{C}{A+N_r})^{\frac{1}{b}}$
Bastenaire	Fatigue oligocyclique, endurance limitée et illimitée	$N = \frac{A}{\sigma_a - \sigma_D}.\exp\left[-\left(\frac{\sigma_a - \sigma_D}{B}\right)^C\right]$
Weibull (1949)	Fatigue oligocyclique, endurance limitée et illimitée	$\frac{\sigma_a - \sigma_D}{\sigma_u - \sigma_D} = \left(\frac{C}{A+N_r}\right)^{\frac{1}{b}}$
Corson (1949)	Fatigue oligocyclique, endurance limitée et illimitée	$(\sigma_a - \sigma_D)A^{(\sigma_a - \sigma_D)} = \frac{C}{N_r}$

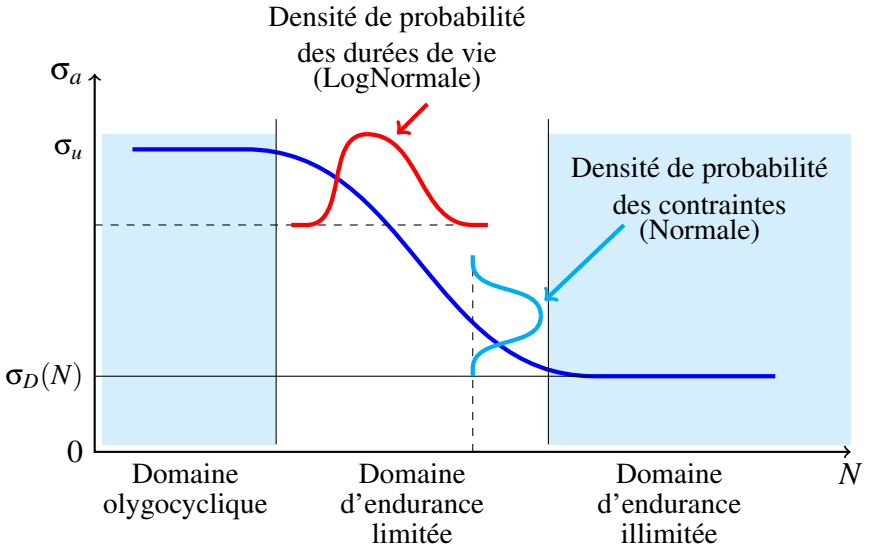


Fig. 4.7. Variabilité de la courbe S-N

4.2.3.2 Approche $\varepsilon - N$: Diagramme de Manson-Coffin

Alors que pour la fatigue à grand nombre de cycles la durée de vie est gouvernée par des amplitudes de contrainte et des contraintes moyennes, la durée de vie en fatigue oligocyclique *(LCF)* ou de faibles durées de vie dépend des amplitudes de déformation. Dans le domaine de la fatigue oligocyclique, une déformation plastique significative se produit à chaque cycle, c'est pour cette raison que les modèles de fatigue *LCF* utilisent la courbe déformation-durée de vie de *Manson-Coffin-Basquin* (figure 4.8), représentée par l'équation :

$$\Delta_{\varepsilon_t} = \Delta_{\varepsilon_e} + \Delta_{\varepsilon_p} = \frac{\sigma'_f}{E}(2N_f)^b + \varepsilon'_f(2N_f)^c \tag{4.2}$$

où :

— Δ_{ε_t} est l'amplitude de la déformation totale constituée par deux contributions Δ_{ε_e} et Δ_{ε_p} ;

— Δ_{ε_e} est l'amplitude de la déformation élastique ;

— Δ_{ε_p} est l'amplitude de la déformation plastique ;

— σ'_f est le coefficient de résistance à la fatigue ;

— ε'_f est le coefficient de ductilité à la fatigue ;

— b est l'exposant de Basquin ou exposant de la résistance à la fatigue ;

— c est l'exposant de Coffin ou exposant de ductilité à la fatigue ;

— E est le module de Young du matériau ;

— N_f représente le nombre de d'interversions (reversals en anglais) ou de changement de signe. Dans le cas d'un chargement à amplitude constante, $2N_f$ représente un cycle de chargement.

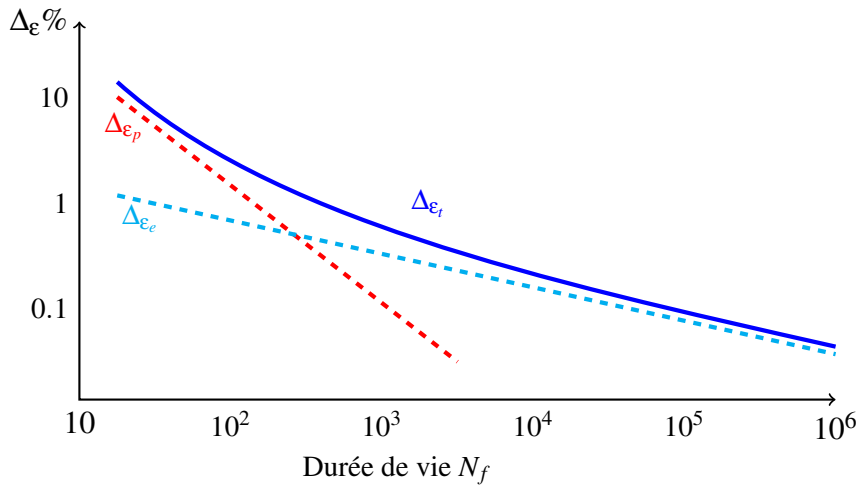


Fig. 4.8. Courbe de Manson-Coffin-Basquin

Pour modéliser le diagramme de résistance $\varepsilon - N$, on sépare les déformations totale (ε_t), élastique (ε_e) et plastique (ε_p) comme représenté sur la figure 4.8. On peut décrire chaque droite par les équations suivantes :

$$\Delta_{\varepsilon_e} = A \times N_f^{-a} \tag{4.3}$$

$$\Delta_{\varepsilon_p} = B \times N_f^{-b} \tag{4.4}$$

$$\Delta_{\varepsilon_t} = A \times N_f^{-a} + B \times N_f^{-b} \tag{4.5}$$

où a, b définis plus haut et A, B, respectivement, le coefficient élastique et le coefficient plastique, sont des paramètres qui dépendent du matériau. En général a est voisin de 0.5 et b voisin de 0.12).

Remarque : sur le diagramme *Manson-Coffin*, pour les faibles nombres de cycles, c'est la déformation plastique qui prédomine, alors que pour les nombres de cycles plus élevées, c'est principalement de la déformation élastique que dépend la durée de vie. Cela indique que l'on se rapproche de la fatigue *HCF*.

Différentes méthodes d'approximation des courbes de *Manson-Coffin* existent. Ces méthodes consistent à déduire la courbe de *Manson-Coffin* d'un matériau donné à l'aide de ses caractéristiques déterminées à partir d'un essai de traction monotone. Nous présentons ci-après, quelques unes de ces méthodes.

La méthode des 4 points

Dans cette méthode proposée par Manson (1965), la relation $\Delta\varepsilon - N_f$ est formulée comme ci-après :

$$\Delta\varepsilon_t = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p = \underbrace{C_e N_f^b}_{Elastique} + \underbrace{C_p N_f^c}_{Plastique} \tag{4.6}$$

Sur une échelle bi-logarithmique, les droites élastiques et plastiques sont déterminées à l'aide des coordonnées de 4 points (figure 4.9) dont deux pour déterminer la droite élastique, et les deux autres pour déterminer la droite plastique, d'où le nom de méthode des 4 points.

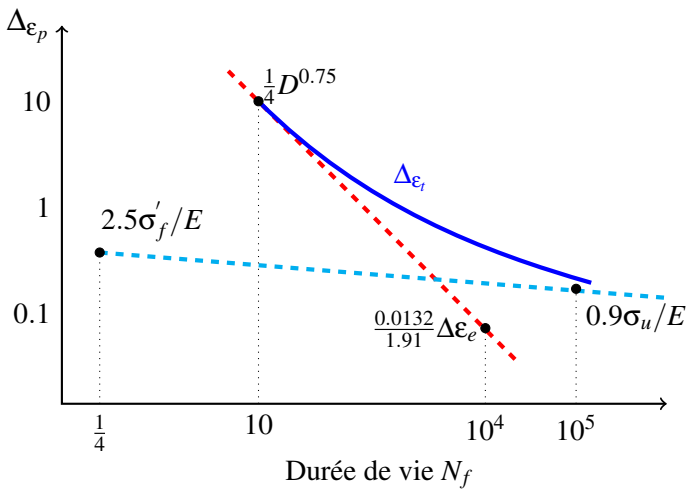


Fig. 4.9. Méthode des 4 points

La droite élastique est définie par les couples de points :

$$\left(N_f = 1/4 \quad , \quad \Delta\varepsilon_e = \frac{\sigma_f^{'}}{E}\right) \quad et \quad \left(N_f = 10^5 \quad , \quad \Delta\varepsilon_e = 0.9\frac{\sigma_u}{E}\right) \tag{4.7}$$

Pour la droite plastique :

$$\left(N_f = 10 \quad , \quad \Delta\varepsilon_p = \frac{1}{4}D^{0.75}\right) \quad et \quad \left(N_f = 10^4 \quad , \quad \Delta\varepsilon_p = \frac{0.0132}{1.91}\Delta\varepsilon_e\right) \tag{4.8}$$

où D est la ductilité en traction et σ_u, la contrainte ultime.

La méthode des pentes universelles :

Elle est l'une des premières méthodes proposées par Manson (1965) pour estimer de manière simple, les deux droites (élastique et plastique) du modèle de fatigue. Dans cette méthode, les deux droites sont construites en considérant que quel que soit le matériau, leurs pentes restent constantes.

— Pour la droite élastique, la pente est fixée à $b = -0.12$ et on donne les coordonnées d'un point de la droite comme suit :

$$N_f = 1; \qquad \Delta\varepsilon_{el} = 3.5\frac{\sigma_u}{E} \tag{4.9}$$

— Pour la droite plastique, la pente $c = -0.6$ et on donne les coordonnées d'un point de la droite par :

$$N_f = 1; \qquad \Delta\varepsilon_p = D^{0.6} \tag{4.10}$$

On a finalement l'équation :

$$\Delta\varepsilon_t = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p = \underbrace{3.5\frac{\sigma_u}{E}N_f^{-0.12}}_{Elastique} + \underbrace{\sigma_f^{0.6}N_f^{-0.6}}_{Plastique} \tag{4.11}$$

avec σ_u, la résistance mécanique à la traction.

La méthode de Mitchell

Il est généralement admis que la pente de la droite plastique de la courbe de fatigue $\varepsilon - N_f$ est presque constante pour tous les matériaux. Cependant, la pente de la droite élastique présente une variabilité considérable et dépend du matériau. Mitchell (1978) a alors proposé une méthode pour estimer la pente de la droite élastique à partir de la résistance à la traction du matériau (R_m).

$$\Delta\varepsilon_t = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p = \underbrace{\frac{R_m + 345}{E}(2N_f)^{-\frac{1}{6}log[\frac{2(\sigma_B+345)}{\sigma_B}]}}_{Elastique} + \underbrace{\varepsilon_f^{'}(2N_f)^{-0.6}}_{Plastique} \tag{4.12}$$

avec :

$$\varepsilon_f^{'} = ln\left[\frac{100}{100 - RA}\right] \tag{4.13}$$

où RA est le coefficient de striction ou facteur de réduction de section après la rupture en traction.

Méthode des pentes universelles modifiée

Dans la version originale de la méthode des pentes universelles, méthode très simple d'utilisation, les pentes **c** et **b** sont fixées respectivement à -0.6 et -0.12 pour tous les matériaux. Cependant, elle tend à produire des résultats très conservatifs dans le domaine de grands nombre de cycles. Pour palier à cela, une nouvelle modification fut proposée par Muralidharan et Manson (Muralidharan and Manson, 1988) :

$$\Delta\varepsilon_t = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p = \underbrace{1.17(\frac{R_m}{E})^{0.832}N_f^{-0.09}}_{Elastique} + \underbrace{0.0266\varepsilon_f^{0.155}(\frac{R_m}{E})^{-0.53}N_f^{-0.56}}_{Plastique} \tag{4.14}$$

Uniform material Law's method

Cette méthode fut proposée par Baumel et Seeger (Baumel Jr and Seeger, 1990). Elle trouve son intérêt dans le fait que la résistance à la traction du matériau (R_m) est la seule caractéristique nécessaire pour estimer les paramètres de la courbe de fatigue, ce qui n'est pas forcément le cas des autres méthodes qui peuvent nécessiter en plus, la connaissance du coefficient de striction (RA) où le coefficient de ductilité du matériau. Pour les aciers :

$$\Delta\varepsilon_t = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_p = \underbrace{1.5\frac{\sigma_u}{E}(2N_f)^{-0.087}}_{Elastique} + \underbrace{0.59\psi(2N_f)^{-0.58}}_{Plastique} \tag{4.15}$$

avec :

$\frac{\sigma_u}{E} \leq 0.003, \Rightarrow \psi = 1$

$\frac{\sigma_u}{E} > 0.003, \Rightarrow \psi = 1.375 - 125\frac{\sigma_B}{E}$

Roessle-Fatemi's method (2000)

Roessle et Fatemi (Roessle and Fatemi, 2000) ont proposé une méthode basée sur la dureté du matériau. Dans cette approche, les valeurs des pentes à savoir **b** et **c** sont gardées constantes ($b = -0.09, \quad c = -0.56$) tandis que les coefficients σ'_f et ε'_f sont décrits comme des fonctions de la dureté de Brinel (BHN) :

$$\sigma'_f = 4.25BHN + 225 \tag{4.16}$$

où :

$$\sigma'_f = 1.0425R_m + 345 \tag{4.17}$$

$$\varepsilon'_f = \frac{1}{E}(0.32BHN^2 - 487BHN + 191000) \tag{4.18}$$

4.3 Fiabilité expérimentale par analyse du RETEX

Dans cette section, nous étudions la fiabilité expérimentale du mécanisme de référence $\mathcal{D}_{ref}$ illustré par la figure 4.10 en exploitation le retour d'expériences disponible sur ce dernier.

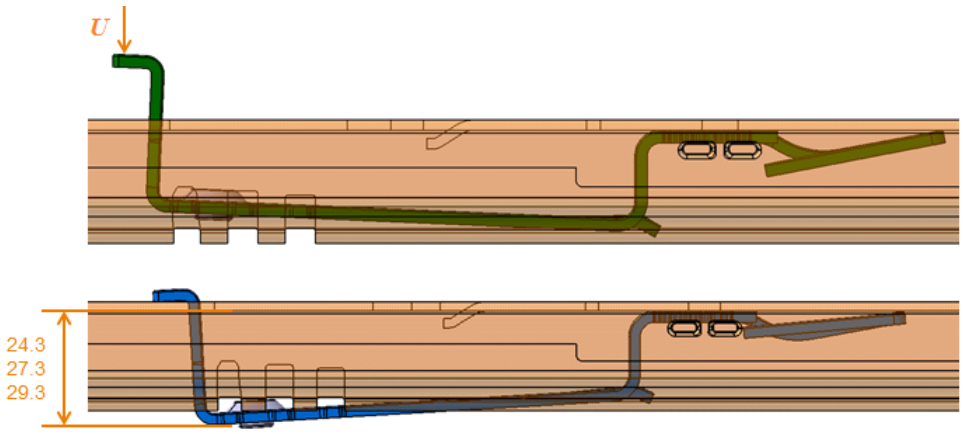


Fig. 4.10. Essais accélérés sur verrou de commande $\mathcal{D}_{ref}$

Par « retour d'expérience » (RETEX), on désigne toutes les informations disponibles et issues de l'expertise, de l'exploitation, ou d'essais sur un produit. Dans le cadre de cette application, le RETEX est essentiellement constitué par des essais d'endurance fatigue. Lorsqu'on étudie la fatigue d'un composant mécanique, les essais de fatigue nécessitent de longues durées de test pour voir apparaître les modes de défaillances attendues. Pour optimiser ces essais, les ingénieurs ont eu recours à des essais accélérés qui consistent à sévériser les conditions de test afin de précipiter les instants de défaillances.

4.3.1 Présentation des résultats d'essais accélérés

Dans le cadre des essais accélérés, le terme « stress » désigne le chargement imposé qui peut être de diverses natures (mécanique, thermique, électrique, etc...). En laboratoire, on pilote la plupart des essais de fatigue, soit par contrainte imposée (le cas de la fatigue à grandes durées de vie), soit par déformation imposée (le cas de la fatigue à faibles durées de vie). Ceci peut nécessiter des équipements dédiés, raison pour laquelle, en pratique, pour les composants mécaniques, l'équipementier FAURECIA utilise, généralement des chargements usuels (c'est à dire les plus facilement accessibles) comme un effort, un couple mécanique ou un déplacement. Par conséquent, dans le présent cas d'application, le chargement correspond à des niveaux de courses (des déplacements) de déverrouillage.

Ici, trois différents niveaux de déplacement sévères (i.e supérieur au déplacement en condition d'utilisation nominale) $\{u_j\}_{j=1}^{k=3}$ sont utilisés (Figure 4.10). Pour chaque niveau u_j, quatre à cinq composants ont été testés.

Les essais accélérés de fatigue réalisés sur le verrou ont pour but l'estimation de la distribution des durées de vie. Les résultats des essais, sont donnés dans le tableau 4.2.

TABLE *4.2 Résultats des essais accélérés sur le mécanisme $\mathcal{D}_{ref}$*

	Niveau de Stress 1	**Niveau de Stress 2**	**Niveau de Stress 3**
	$u_1 = 29.3\ mm$	$u_2 = 27.3\ mm$	$u_3 = 24.3\ mm$
N_f(cycles)	9088	12797	27305
	9909	16845	31457
	8883	13177	26580
	8358	14252	23759
	8899		24275
	9936		

Pour analyser les essais accélérés de fatigue, deux caractéristiques importantes doivent être définies : Un modèle mathématique qui ajuste la *distribution des durées de vie* pour chaque niveau de stress, et un *modèle d'accélération* qui décrit la relation entre le niveau de stress et la durée de vie en fatigue.

4.3.2 Choix du modèle de durée de vie accélérée

Le modèle de durée de vie accélérée inclut la loi de distribution de durée de vie et la loi d'accélération. Pour le choix de la loi de distribution, comme nous l'avons déjà souligné dans le chapitre 2, en fatigue, une loi LogNormale est généralement admise pour la distribution des durées de vie.

On peut alors calculer pour chaque niveau de stress, les paramètres $(\mu_{Ln}^j, \sigma_{Ln}^j)$ de la distribution LogNormale. Les résultats sont donnés dans le tableau 4.3.

TABLE *4.3 Moments statistiques distribution LogNormale des résultats d'essais*

Moments statistiques	**Stress** u_1	**Stress** u_2	**Stress** u_3
μ_{Ln}^j	9.123	9.560	10.186
σ_{Ln}^j	0.068	0.123	0.112

Une hypothèse sur laquelle se base l'analyse des essais accélérés est la constance du facteur de forme σ_{Ln}^j. Comme on peut le remarquer, les résultats du tableau 4.3 montrent que cette hypothèse n'est généralement pas vérifiée dans la réalité.

Pour déterminer une valeur du paramètre de forme σ_{Ln} constante pour tous les niveaux de stress, on procède au calcul d'une valeur équivalente en pondérant chaque paramètre d'échelle par la taille d'échantillon testé à ce niveau de stress. On obtient donc la formule :

$$\sigma_{Ln} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(n_j \times \sigma_{LN}^j\right)}{\sum_{j=1}^{k} n_j} \tag{4.19}$$

Pour vérifier la constance du paramètre de forme quelque soit le niveau de stress, on utilise le test de ratio de la vraisemblance (Likelihood Ratio). Pour ce faire, la log-vraisemblance L_j est calculée pour chaque niveau de stress j, ensuite la log-vraisemblance L_0 est estimée en considérant tous les niveaux de stress. Les L_j sont calculés à partir des paramètres estimés dans le tableau 4.3 et L_O est obtenue en utilisant pour chaque niveau de stress j, le paramètre μ_{Ln}^j estimé dans le tableau 4.3 et le paramètre de forme σ_{Ln} obtenu par l'équation 4.19.

On calcule ensuite la statistique $T = 2*(\sum_{j=1}^{k} L_j - L_0)$ qu'on compare au quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi du χ^2 à $k-1$ degrés de liberté, avec α le risque d'erreur :

— si $\mathrm{T} \leq \chi^2(1-\alpha, k-1)$, l'hypothèse de constance est vérifiée ;

— si $T > \chi^2(1-\alpha, k-1)$, l'hypothèse de constance est refusée.

Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 4.4 et montrent que l'hypothèse de la constance du facteur de forme avec une valeur de $\sigma_{Ln} = 0.09725$ pour chaque niveau de stress est validée.

TABLE *4.4 Résultats du Test de Ratio de vraisemblance*

L_1	L_2	L_3	L_0	σ_{Ln}	α	**T**	χ^2
-46.567	-35.042	-46.608	-129.002	0.09725	10%	1.568	4.605

A présent nous nous intéressons au choix de la loi d'accélération. La loi puissance inverse, plus courante en mécanique est choisie a priori. Cette loi décrit la cinétique de la dégradation en fonction du niveau de stress constant. On a la formulation suivante :

$$N_f(S) = \frac{1}{K \times S^{\gamma_1}} \tag{4.20}$$

où S est le niveau de stress, et K et γ_1 sont des paramètres à déterminer.

Maintenant, en appliquant le logarithme sur les deux membres de l'équation 4.20, on obtient la relation linéaire suivante :

$$\mu_{N_f}(S) = ln\left(N_f(S)\right) = \gamma_0 - \gamma_1 \times ln(S) \tag{4.21}$$

où $\gamma_0 = -ln(k)$ et $\mu_{N_f}(S)$ représente le paramètre d'échelle de la distribution LogNormale au niveau de stress S.

Pour estimer les paramètres du modèle d'accélération ainsi que le paramètre de forme de la distribution LogNormale, la méthode de maximum de vraisemblance peut être utilisée. Comme nous avons déjà estimé le paramètre de forme $\sigma_L N$, et pouvant disposer de trois équations linéaires indépendantes, nous avons choisi pour simplifier d'utiliser une méthode de moindre carrés pour estimer les paramètres γ_0 et γ_1 de la loi d'accélération. En effet, en écrivant l'équation pour les 3 niveaux de déplacement $\left\{u_j\right\}_{j=1}^{k=3}$, on obtient un système d'équations, qui permet de déterminer facilement une estimation des paramètres γ_0 et γ_1 :

$$\begin{cases} \mu_{N_f}(u_1) & = & \gamma_0 - \gamma_1 \times ln(u_1) \\ \mu_{N_f}(u_2) & = & \gamma_0 - \gamma_1 \times ln(u_2) \\ \mu_{N_f}(u_3) & = & \gamma_0 - \gamma_1 \times ln(u_3) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \mu_{N_f}(u_1) \\ \mu_{N_f}(u_2) \\ \mu_{N_f}(u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -ln(u_1) \\ 1 & -ln(u_2) \\ 1 & -ln(u_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

En posant $Y_f = \begin{pmatrix} \mu_{N_f}(u_1) \\ \mu_{N_f}(u_2) \\ \mu_{N_f}(u_3) \end{pmatrix}$, $M_f = \begin{pmatrix} 1 & -ln(u_1) \\ 1 & -ln(u_2) \\ 1 & -ln(u_3) \end{pmatrix}$ et $\Gamma_f = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$, on obtient la solution suivante :

$$\Gamma = \left(\left(M_f^T M_f\right)^{-1} . M_f^T\right) . Y_f \tag{4.23}$$

Une fois les paramètres du modèle d'accélération déterminés, il devient possible de déterminer les paramètres de la distribution de durées de vies correspondant aux conditions de fonctionnement nominal du mécanisme. Soit u_0 le niveau de déplacement nominal, le paramètre d'échelle de la distribution LogNormale pour ce niveau de stress, s'obtient par :

$$\mu_{N_f}(u_0) = \gamma_0 - \gamma_1 \times ln(u_0) \tag{4.24}$$

La durée de vie médiane est estimée par $\exp\left(\mu_{N_f}(u_0)\right)$ et on en déduit la fonction de répartition de la distribution LogNormale sous la forme suivante :

$$F\left(N_f/\mu_{N_f}(u_0), \sigma_{Ln}\right) = \Phi\left(\frac{ln(N_f) - \mu_{N_f}(u_0)}{\sigma_{LN}}\right) \tag{4.25}$$

où Φ est la fonction de répartition de la distribution normale standard.

La loi de fiabilité est finalement construite à partir de la fonction de répartition par :

$$R\left(N_f/\mu_{N_f}(u_0), \sigma_{Ln}\right) = 1 - F\left(N_f/\mu_{N_f}(u_0), \sigma_{Ln}\right) \tag{4.26}$$

4.3.3 Loi d'accélération et fiabilité expérimentale

Les estimateurs des paramètres du modèle d'accélération $(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1)$ et de la loi de distribution de durées de vie $(\hat{\mu}_{ref}^{exp}, \hat{\sigma}_{ref}^{exp})$ ainsi que la durée de vie médiane $\hat{N}_{f,0}^{exp}$ sont reportés dans le tableau 4.5).

TABLE *4.5 Paramètres du modèle d'accélération et de la répartition de la durée de vie en fatigue du modèle de référence*

stress u_0	$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\mu}_{ref}^{exp}$	$\hat{\sigma}_{ref}^{exp}$	$\hat{N}_{f,0}^{exp}$
22.3	28.236	-5.654	10.681	0.09725	43525

Pour valider à la fois la distribution des durées de vie et la loi d'accélération, on convertit tous les temps de défaillance dans les mêmes conditions et on vérifie ensuite que les points se retrouvent alignés sur la feuille fonctionnelle de la loi de distribution choisie (ici la loi LogNormale).

Nous choisissons de transformer les données de durées de vies obtenues sous conditions u_1, u_2 et u_3 en données équivalentes sous conditions nominales u_0. Pour ce faire, il faut calculer ce qu'on appelle facteur d'accélération d'un niveau de stress à l'autre. Par exemple entre le niveau u_i et u_0, ce facteur s'obtiendra par la formule :

$$FA_{u_i->u_0} = \frac{N_f(u_i)}{N_f(u_0)} = \left(\frac{u_0}{u_i}\right)^{\gamma_1} \tag{4.27}$$

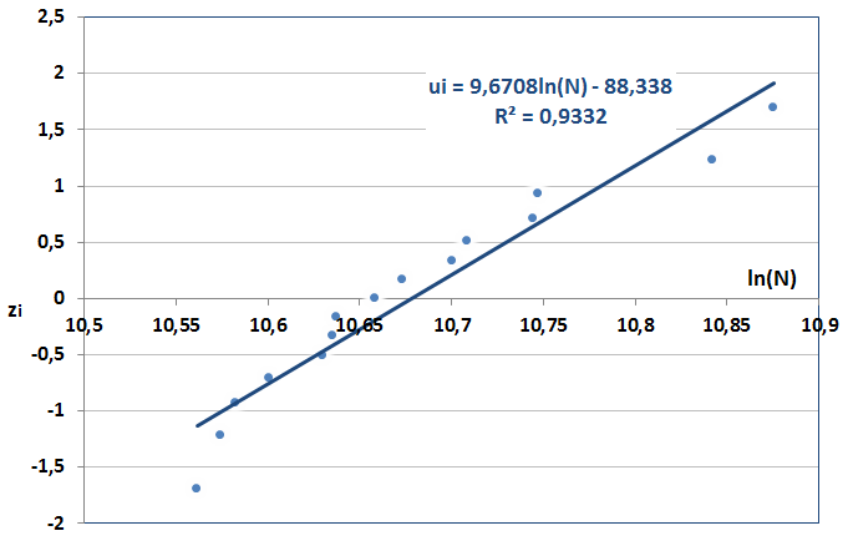


Fig. 4.11. Représentation des durées de vies accélérées en condition nominale

La figure 4.11 représente les données converties sur le graphe fonctionnel de la loi LogNormale avec :

$$Z_i = \Phi^{-1}(f_i) \tag{4.28}$$

où, Φ est la fonction de répartition de la loi normale standard et f_i une fréquence cumulée obtenue par la méthode des rangs médians.

La régression linéaire (Figure 4.11) donne un coefficient de détermination de 0.93 et un coefficient de corrélation linéaire de $\rho = 0.966$.

Pour accepter la linéarité nous procédons à un test de Student. Pour ce faire, nous calculons la statistique $T_l = \frac{r\sqrt{n_t-2}}{1-r^2}$ qui sera ensuite comparée à $t_\alpha(n_t-2)$ qui représente le quantile d'ordre α de la loi de Student avec $n_t - 2$ degré de liberté.

— Si $T_l \geq t_\alpha(n_t-2)$, la linéarité est validée ;

— si $T < t_\alpha(n_t-2)$, l'hypothèse de la linéarité est rejetée.

Ici $n_t = 15$ (nombre total de points) et le risque $\alpha = 0.1$. Nous obtenons $T_l = 13.473$ et $t_\alpha(n_t - 2) = 1.77$, ce qui permet de valider la linéarité des points et par conséquent le modèle de vie accéléré (Loi d'accélération plus loi de distribution des durées de vie).

Nous avons pu ainsi analyser les résultats d'essais et déduire le modèle de vie accélérée pour le mécanisme de référence $\mathcal{D}_{ref}$.

La figure 4.12 représente la loi d'accélération du mécanisme de référence $\mathcal{D}_{ref}$ et la fonction de fiabilité expérimentale du mécanisme de référence ainsi que ses bornes de confiance de $1-\alpha = 95\%$ sont représentées sur la figure 4.13.

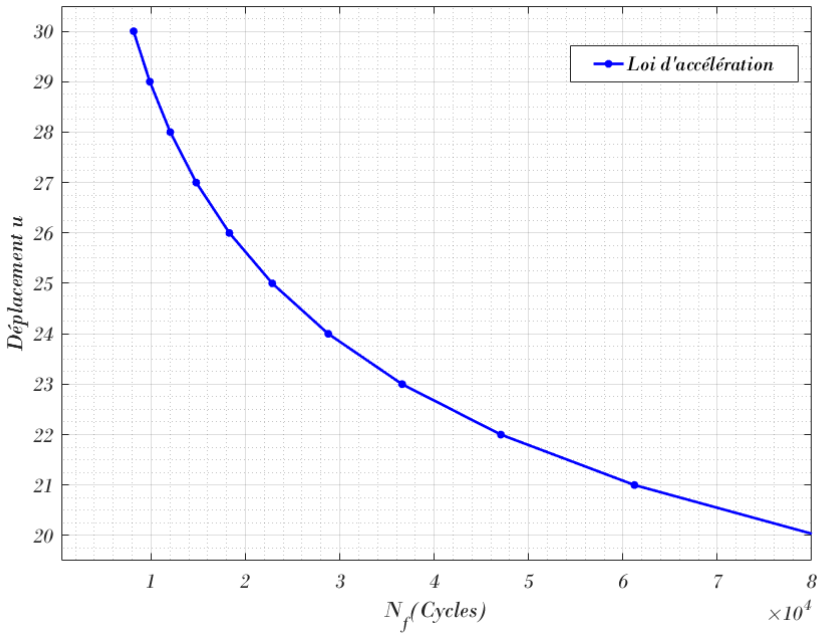


Fig. 4.12. Loi d'accélération

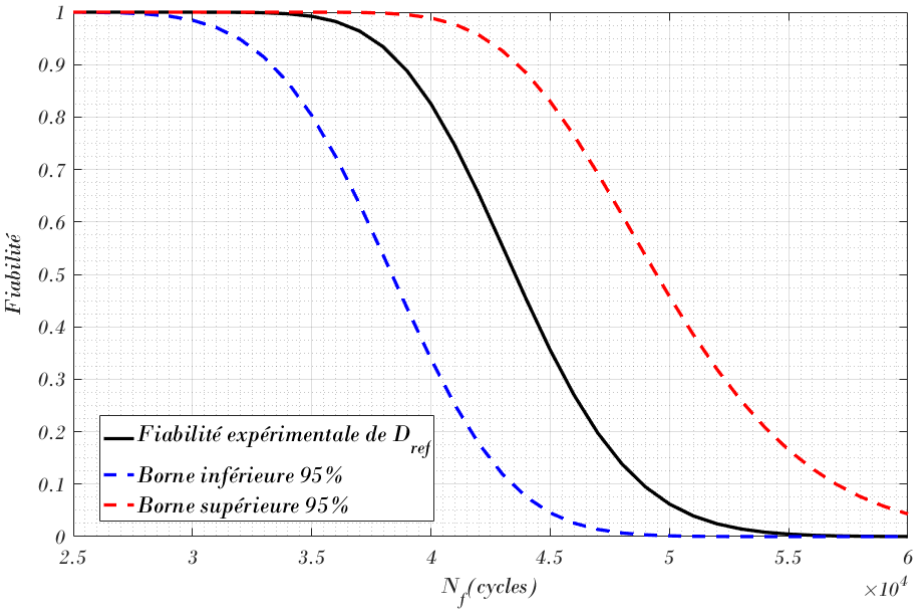


Fig. 4.13. Fiabilité expérimentale de la version de référence $\mathcal{D}_{ref}$ du mécanisme

Les bornes sont construites par :

$$\frac{\hat{R}}{\hat{R}+(1-\hat{R})e^{\frac{u_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\hat{R})}}{\hat{R}(1-\hat{R})}}} \leq R_{1-\alpha} \leq \frac{\hat{R}}{\hat{R}+(1-\hat{R})e^{-\frac{u_{1-\alpha/2}\sqrt{V(\hat{R})}}{\hat{R}(1-\hat{R})}}} \tag{4.29}$$

Où $\hat{R}$ est un estimateur ponctuel de la fonction de fiabilité R, fonction des paramètres de la loi d'accélération γ_0, γ_1 et du paramètre de forme σ_{ref}^{exp} de la loi de distribution de durées de vie. $Var(\hat{R})$ est la variance de $\hat{R}$ obtenue en fonction des variances des paramètres du modèle

d'accélération regroupés dans le vecteur $\vartheta = (\gamma_0, \gamma_1, \sigma_{ref}^{exp})$ par la méthode suivante :

$$V(\hat{R}) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial R(\vartheta)}{\partial \vartheta_i} \right)^2_{\hat{\vartheta}} Var(\hat{\vartheta}_i) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1, j \neq i}^{r} \left(\frac{\partial R(\vartheta)}{\partial \vartheta_i} \right)_{\hat{\vartheta}} \left(\frac{\partial R(\vartheta)}{\partial \vartheta_j} \right)_{\hat{\vartheta}} Cov(\hat{\vartheta}_i \hat{\vartheta}_j) \tag{4.30}$$

Ces variances sont obtenues de la matrice de covariance déduite elle même de la matrice de Fisher présentée dans la section 2.2.3.2. Dans notre cas d'application, les coefficients de la matrice de Fisher sont calculés par méthode des différences finies et non par maximum de vraisemblance.

4.4 Fiabilité prévisionnelle par simulation numérique

En parallèle de l'analyse de fiabilité expérimentale du mécanisme de référence, nous nous proposons de réaliser par simulation numérique l'étude de la fiabilité prévisionnelle. Cela passe par la construction d'un modèle mécano-probabiliste. L'étude est réalisée en deux étapes : La première concerne la mise en place du modèle numérique mécanique déterministe et la deuxième étape concerne la propagation des incertitudes inhérentes aux paramètres du modèle mécanique, permettant ainsi d'aboutir à la loi de fiabilité prévisionnelle.

4.4.1 Modèle mécanique déterministe

Une esquisse illustrant le chargement du mécanisme est donnée sur la figure 4.14. Le chargement consiste à l'application d'un déplacement verticale U sur la petite tête située au côté supérieur droit. En première étape, la précontrainte induite par l'insertion du mécanisme dans son environnement de fonctionnement qui est la glissière du siège automobile, est simulée par le pré-chargement u_p correspondant à la position de verrouillage. En deuxième étape, le chargement est poursuivi jusqu'à un niveau de déplacement maximal u_c correspondant à la position de déverrouillage du mécanisme. Le chargement cyclique (figure 4.14 (b)) est donc réalisé entre les positions u_p - u_c. Un cycle de chargement part de u_p monte à u_c et revient à u_p.

Pour estimer numériquement la réponse mécanique du composant automobile aux sollicitations appliquées (déplacements), un modèle éléments finis 3D du mécanisme de référence $\mathcal{D}_{ref}$ a été développé en utilisant le code de calcul Abaqus (Abaqus, 2013) (figure 4.15).

Le modèle éléments finis, nécessite de connaître au préalable, les propriétés du matériau constitutif du mécanisme. Une fois la réponse mécanique (contrainte ou déformation) obtenue, un modèle de fatigue sera utilisée pour prédire la durée de vie du mécanisme. Dans ce contexte, nous présentons ci-après la loi de comportement du matériau ainsi que le modèle de fatigue utilisé.

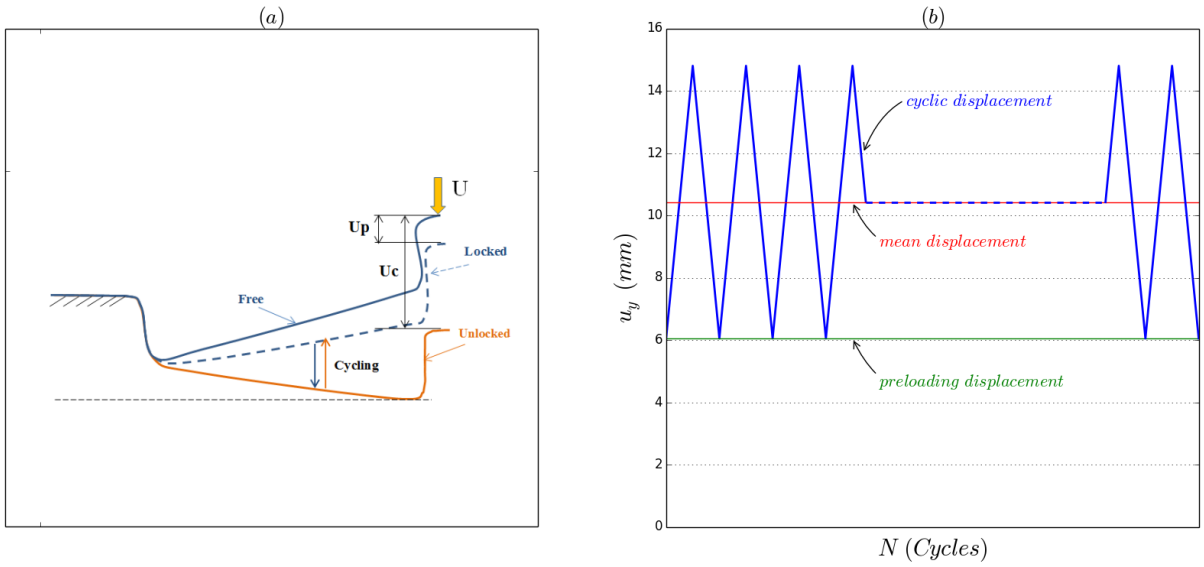


Fig. 4.14. (a) Esquisse de $\mathcal{D}_{ref}$, (b) Cycles de chargement subis par le mécanisme

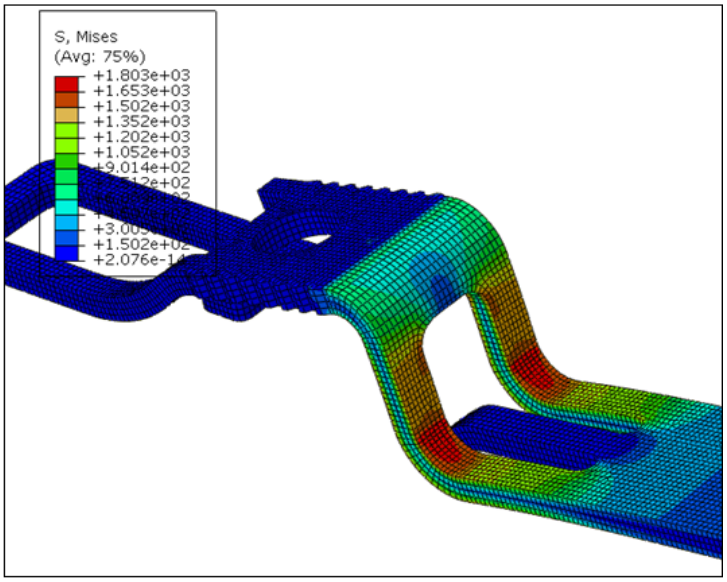


Fig. 4.15. Modèle éléments finis 3D de la conception de référence $\mathcal{D}_{ref}$

4.4.1.1 Modèle élastoplastique et modèle de fatigue oligocyclique

Sur la base de la distribution expérimentale des durées de vie en condition nominale (moyenne $< 50.10^3$ cycles), obtenues précédemment par les essais accélérés, il apparaît que la défaillance du mécanisme survient dans le domaine des faibles durées de vie ou encore fatigue oligocyclique. Par conséquent, un modèle élastoplastique est utilisé pour modéliser le comportement du matériau.

Le comportement mécanique élastoplastique du matériau constitutif est décrit par une loi bien connue, celle de Ramberg-Osgood (Ramberg and Osgood, 1943), et représentée sur la figure 4.16 (a). La relation entre la contrainte σ et la déformation ε s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}(1+K) \tag{4.31}$$

où K et n sont des constantes à déterminer et qui sont propres au matériau considéré.

La loi de comportement a été donc obtenue à partir d'informations disponibles sur les propriétés de traction du matériau à savoir le module de Young (E), le coefficient de poisson (ν), la limite élastique (R_e), la résistance à la traction (R_m), résumées dans le tableau 4.6.

TABLE *4.6 Paramètres matériau du mécanisme*

E	ν	R_e	R_m
210 GPa	0.3	1468 MPa	1535 MPa

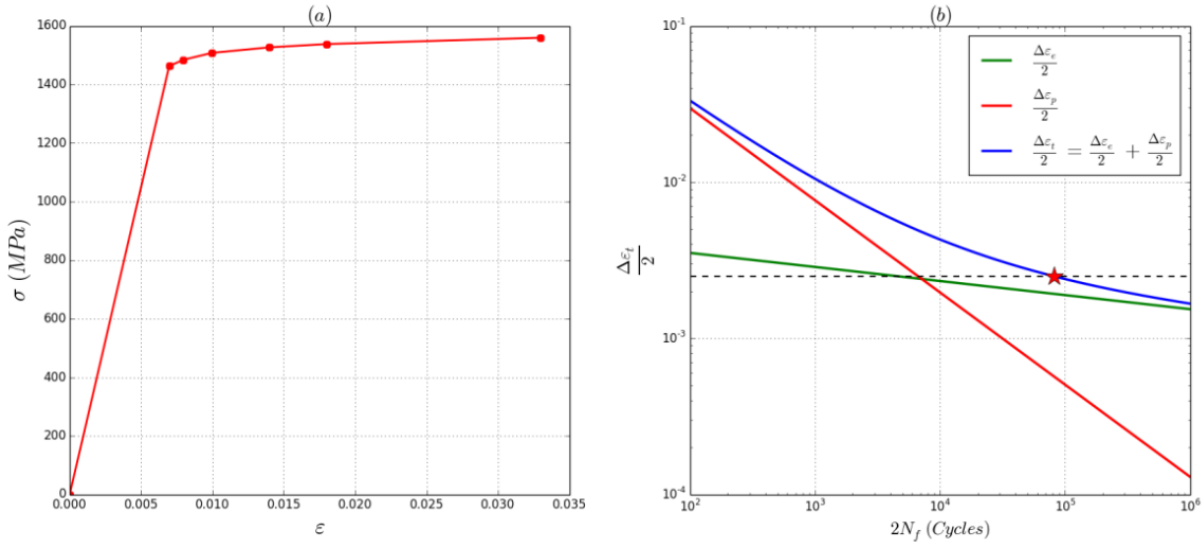


Fig. 4.16. (a) Loi de Ramberg-Osgood, (b) Modèle Coffin-Manson-Morrow

Le modèle de fatigue de *Coffin-Manson-Morrow* Ince and Glinka (2011) (figure 4.16 (a)) est utilisé pour prédire le nombre de cycles à la défaillance (rupture par fatigue mécanique). Ce modèle (équation 4.32) est une correction du modèle classique de Manson-Coffin (équation 4.2), et permet de prendre en compte l'effet d'une contrainte moyenne non nulle σ_m, car en réalité, le mécanisme est soumis à des chargements cycliques non purement alternés à cause de la mise en position de verrouillage (pré-chargement u_p).

On note que la correction de la contrainte moyenne a été incluse seulement dans le terme élastique du modèle de de fatigue comme montré dans l'équation 4.32. Le modèle de fatigue de *Coffin-Manson-Morrow* suppose donc que la contrainte moyenne a un effet significatif sur de longues durées de vie, là où la déformation élastique est prédominante. En effet, il est généralement admis que l'effet de la contrainte moyenne se retrouve compensé par la présence de déformation plastique importante.

$$\frac{\Delta\varepsilon_t}{2} = \frac{\sigma_f^{'} - \sigma_m}{E}(2N_f)^b + \varepsilon_f^{'}(2N_f)^c \tag{4.32}$$

On rappelle que $\Delta\varepsilon_e$ est la déformation élastique, $\Delta\varepsilon_p$ représente la déformation plastique, $\sigma_f^{'}$ est le coefficient de résistance à la fatigue, $\varepsilon_f^{'}$ est le coefficient de ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue, c est l'exposant de la ductilité à la fatigue, E est le module de Young. Nous notons aussi que ce modèle bien que utilisable comme loi d'accélération, n'a pas été choisi pour l'analyse de fiabilité expérimentale basée sur les essais accélérés (section 4.3.3), car nécessiterait au niveau des essais une instrumentation plus complexe pour mesurer les déformations, d'où l'utilisation du modèle puissance inverse (équation 4.20) qui permettait de relier directement les déplacements aux durées de vie.

4.4.1.2 Identification des paramètres du modèle de fatigue

L'identification des paramètres du modèle de fatigue *Coffin-Manson* est d'un intérêt particulier, car elle peut considérablement affecter la qualité de prédiction de durées de vie. Cependant, les essais nécessaires à ce travail d'identification peuvent s'avérer coûteux. Par ailleurs, ils sont réalisés sur des éprouvettes en laboratoire et ne sont pas toujours adaptés à l'estimation de durées de vie sur des composants mécaniques, qui généralement présentent des géométries et des modes de sollicitation plus complexes. Aussi, plusieurs auteurs ont investigué pour proposer des méthodes permettant une approximation moins coûteuse et acceptable des paramètres du modèle de fatigue *Coffin-Manson*.

Dans la section 4.2.3.2, nous avons présenté quelques méthodes d'approximations de la courbe de fatigue *Coffin-Manson*. Meggiolaro and Castro (2004) ont réalisé une analyse statistique sur les estimations de durées de vie obtenues par ces différentes méthodes, et ont proposé ensuite une méthode dite *des médianes* dans laquelle, des valeurs constantes sont attribuées aux paramètres b et c relatifs aux pentes, au coefficient $\varepsilon_f^{'}$ et au rapport $\frac{\sigma_f^{'}}{E}$. On a donc pour les aciers :

$$\frac{\sigma_f^{'}}{R_m} = 1.5; \qquad \varepsilon_f^{'} = 0.45; \qquad b = -0.09; \qquad c = -0.59 \tag{4.33}$$

L'usage d'une méthode d'approximation du modèle de fatigue n'est admissible que dans les toutes premières phase de conception, autrement toutes les propriétés devront être obtenues par des essais réels.

Dans le cadre de notre étude, nous opterons pour la méthode proposée par Meggiolaro and Castro (2004), pour l'identification des paramètres du modèle de fatigue. En effet, nous ne disposons pas assez d'informations sur les propriétés matériaux du mécanisme et dans un soucis de limiter le nombre de paramètres inconnus et de simplifier le modèle, cette méthode est la plus adaptée. En plus, les auteurs l'ont testé sur 724 nuances d'acier et en ont obtenu des résultats

satisfaisants.

Comme illustré sur la figure 4.17, une fois le modèle de fatigue connu, il est couplé au modèle mécanique et, la durée de vie en fatigue N_f est obtenue en résolvant numériquement l'équation 4.32, dans laquelle l'amplitude de déformation totale $\Delta\varepsilon_t/2$ est donnée par le modèle éléments finis.

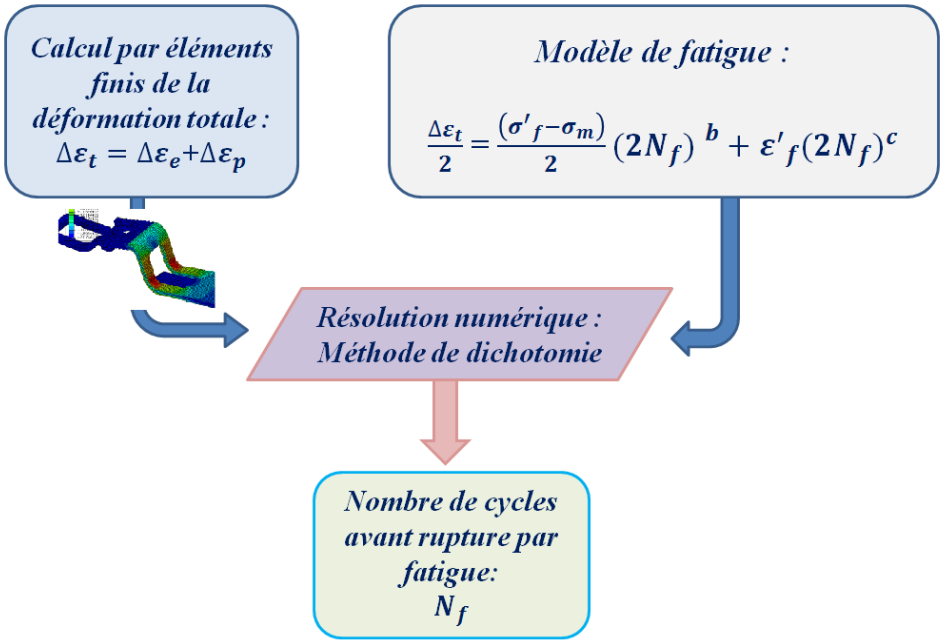


Fig. 4.17. Processus de calcul de la durée de vie en fatigue N_f

4.4.2 Modèle mécano-probabiliste

L'approche mécano-probabiliste permet d'étudier l'influence de la variabilité des différents paramètres de conception à savoir : *les propriétés des matériaux*, *la géométrie*, et *le chargement*. Généralement les composants ou les structures mécaniques sont dimensionnés dans un contexte déterministe, mais dans la réalité les paramètres de conception sont entachés d'incertitudes et il est plus judicieux de les modéliser par des variables aléatoires afin de tenir compte de cette incertitude inhérente à chacun d'eux.

Pour le mécanisme $\mathcal{D}_{ref}$ les paramètres considérés incertains se résument aux éléments suivants : module d'élasticité E, coefficient de résistance à la fatigue σ'_f, exposant de résistance à la fatigue b, déplacement u_c. Ils sont modélisés par des distributions LogNormales indépendantes, où les caractéristiques statistiques (i.e. la valeur moyenne et l'écart-type) sont données dans la table 4.7. Les écart-types sont obtenus à partir de coefficient de variation qui sont de l'ordre de 1% (avis ingénieurs) pour les paramètres E, σ'_f, b et u_c. Les paramètres ε'_f et c sont considérés constants. En effet, ils modélisent la partie des faibles durée de vie (fatigue oligocyclique) sur la courbe de fatigue où les variabilités sont moins importants que sur la partie des grands nombres de cycles (fatigue polycyclique). Le paramètre u_p qui correspond à la mise

en position de pré-chargement (verrouillage de la glissière) et mieux maîtrisé que u_p (position déverrouillage de la glissière) est aussi considéré constant. Pour chaque paramètre aléatoire dans le tableau 4.7, l'écart type est donc obtenu simplement en multipliant la moyenne par le coefficient de variation.

TABLE *4.7 Type de distribution et caractéristiques statistiques des paramètres incertains du modèle de référence*

Paramètres	**Distribution**	**Moyenne**	**Écart-type**
E(GPa)	LogNormale	210	2.1
$\sigma'_f(MPa)$	LogNormale	2339.724	23.39
ε'_f	Constant	0.45	-
b	LogNormale	0.09	9.10^{-4}
c	Constant	0.59	-
$u_p(mm)$	Constant	4.15	-
$u_c(mm)$	LogNormale	14.8	0.148

Ainsi, contrairement au modèle mécanique déterministe, grâce à la propagation d'incertitudes ; la réponse du modèle mécano-probabiliste pourra être obtenue sous forme de densité de distribution dont les moments statistiques peuvent être calculés : il s'agit d'analyse de tendance centrale présentée dans la section 2.3.1.4.

Pour construire cette densité, la démarche classique consiste à générer plusieurs fois, une réalisation des paramètres d'entrée du modèle mécanique et à exécuter pour chacune des réalisations, le modèle mécanique pour obtenir un échantillon suffisant de réponses. Puisque le modèle mécanique est disponible sous forme implicite (i.e. modèle éléments finis), cette démarche classique nécessiterait un temps de calcul prohibitif. Comme alternatif, le modèle mécanique ne sera pas directement utilisé pour réaliser la propagation d'incertitudes, mais sera remplacé par un modèle de substitution plus efficient.

4.4.2.1 Construction du modèle de substitution

Le modèle de substitution ou méta-modèle est construit à partir de la méthode de décomposition dimensionnelle (MDD) présentée dans le chapitre 3 (Section 3.2.2). Elle nous permet de construire la surface de réponse du modèle mécano-probabiliste du mécanisme $\mathcal{D}_{ref}$. La figure 4.18 illustre la procédure suivie. En amont du modèle-mécanique, un plan d'expérience décrivant l'espace aléatoire des paramètres incertains du modèle est nécessaire.

Les caractéristiques du plan d'expérience sont fonction de l'ordre s de la décomposition ainsi que du nombre de points expérimentaux dans chaque direction de l'espace aléatoire.

Dans cette application, la réponse du modèle mécanique, définie comme la durée de vie en fatigue N_f, est représentée par une approximation polynomiale $\hat{N}_f(E, \sigma'_f, b, u_c)$, basée sur une décomposition unidimensionnelle $(s = 1)$ avec 7 points expérimentaux dans chaque direction

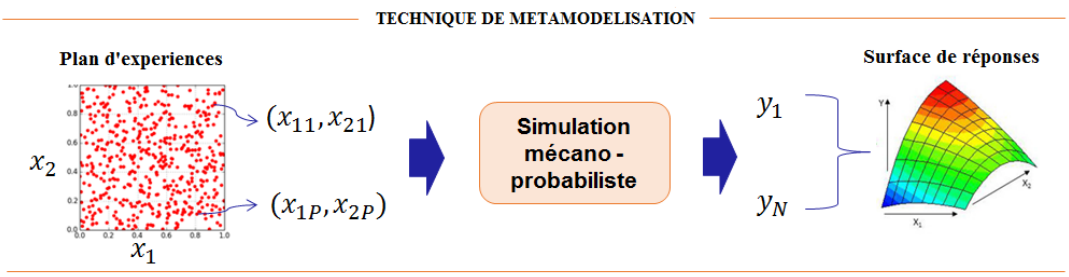


Fig. 4.18. Technique de méta-modélisation

de l'espace aléatoire. Les points expérimentaux sont répartis uniformément autour d'un point de référence u^r, grâce à la formule définie par l'équation 3.15.

Le point moyen correspondant aux valeurs moyennes des paramètres incertains, est pris comme point de référence autour duquel est construit le plan d'expérience. Le plan d'expérience est composé de 7 points dans chaque direction donnant au total 25 points. En effet, on calcule un seul point moyen parmi les 4, d'où les $25 = 7 \times 4 - 3$. pour l'ensemble des quatre paramètres incertains. Ainsi seulement 25 évaluations du modèle mécanique ou calculs éléments finis sont nécessaires pour construire le modèle de substitution. Il faut noter que le plan expérimental est d'abord construit dans l'espace aléatoire standard puis ramené dans l'espace aléatoire physique grâce à une transformation isoprobabiliste.

Afin d'évaluer la précision du modèle de substitution obtenu, l'approximation polynomiale est tracée en fonction des paramètres incertains $E, \sigma_f^{'}, b$ et u_c (figure 4.19). A chaque fois, un seul paramètre est pris comme grandeur variable et les autres paramètres restants sont fixés à leurs valeurs moyennes respectives.

Il est important de noter que les points expérimentaux utilisés pour évaluer la précision de l'approximation polynomiale sont différents de ceux utilisés dans la construction du modèle de substitution. Ils sont échantillonnés en divisant équitablement l'intervalle $[\mu_i \pm 3\sigma_i]$ par le nombre de points voulu, soit 5 dans cette application. μ_i et σ_i représentent respectivement la moyenne et l'écart type du i^{ieme} paramètre incertain. Comme le montre la figure 4.19, l'approximation obtenue correspond bien au modèle mécanique exact, car elle passe par les réponses obtenus directement par le modèle éléments finis.

4.4.2.2 Moments statistiques et analyse de fiabilité

Dans la partie précédente, nous avons construit une approximation polynomiale de la réponse du modèle mécano-probabiliste implicite. Cette approximation permet de réaliser à moindre coût une analyse de tendance centrale et une analyse de fiabilité. En effet, lorsqu'on dispose d'une approximation explicite de la réponse du modèle, des simulations de *Monte-Carlo* peuvent y être appliquées pour réaliser efficacement une analyse de tendance centrale. Cette procédure est efficace car elle ne nécessite aucun calcul éléments finis supplémentaire. Cette combinaison per-

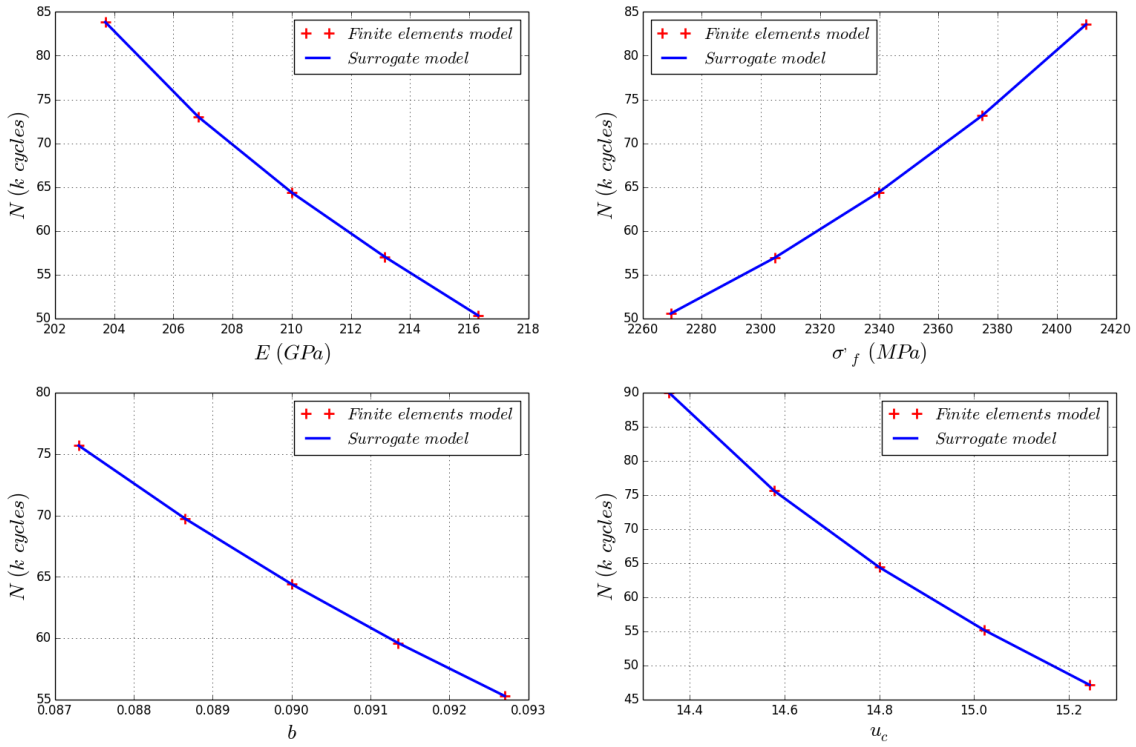


Fig. 4.19. Évaluation de la précision du modèle de substitution pour la conception de référence $\mathcal{D}_{ref}$

met en effet de générer à moindre coût un nombre suffisamment grand de réponses du modèle à partir desquelles, on peut déduire la densité de distribution, et aussi calculer les quatre moments statistiques.

Ainsi, sur la base 10^5 simulations de *Monte-Carlo*, les quatre premiers moments statistiques à savoir, la moyenne, l'écart-type, le coefficient de symétrie et le coefficient d'aplatissement de la durée de vie en fatigue sont calculés (voir tableau 4.8).

TABLE *4.8 Moments statistiques de la durée de vie en fatigue de la conception de référence*

Moyenne	**Écart type**	**Asymétrie**	**Kurtosis**	**CV**
65546.68	10826.76	0.178	3.078	16.5%

A partir de l'échantillon de durées de vie en fatigue obtenu par les simulations *Monte-Carlo*, un histogramme (non représenté) peut être construit. Ensuite, comme représenté sur la figure 4.20, une première estimation (non paramétrique) de la fonction de densité de probabilité de la durée de vie en fatigue est obtenue en faisant un lissage par noyau Gaussien sur l'histogramme. Cette fonction de densité est ensuite comparée à la fonction densité de la loi normale et celle de la loi LogNormale toutes deux résultats d'une estimation paramétrique. On peut ainsi remarquer sur la figure 4.20, que la distribution des durées de vie obtenue par simulations *Monte-Carlo* peut être approchée par une loi normale aussi bien que par une loi LogNormale. Ces dernières sont plus simples à utiliser (une formulation analytique étant déjà disponible) pour construire une loi de fiabilité correspondante.

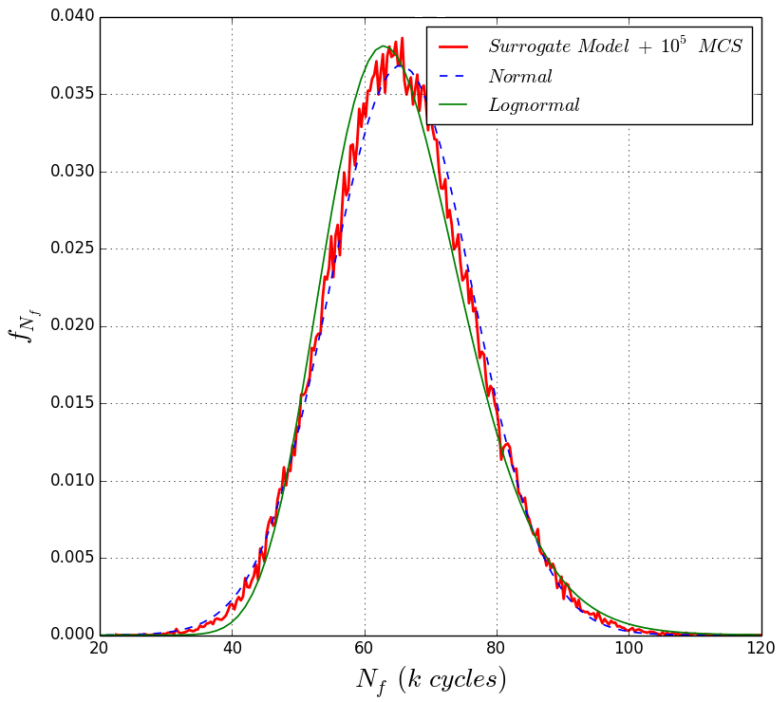


Fig. 4.20. Densité de probabilité de la durée de vie en fatigue N_f de $\mathcal{D}_{ref}$

Considérant une distribution LogNormale, le paramètre d'échelle $\hat{\mu}_{ref}^{num}$ et le paramètre de forme $\hat{\sigma}_{ref}^{num}$ du modèle LogNormale équivalent à la distribution prévisionnelle (numérique) de la durée de vie en fatigue du mécanisme de référence sont calculés et reportés dans le tableau 4.9.

TABLE *4.9 Paramètres de la distribution numérique des durées de vie de $\mathcal{D}_{ref}$*

Distribution	$\hat{\mu}_{ref}^{num}$	$\hat{\sigma}_{ref}^{num}$
LogNormale	11.08	0.164

Une fois ces paramètres obtenus, la fonction de fiabilité numérique $R_{\mathcal{D}_{ref}}^{num}$ est construite et représentée sur la figure 4.21. Elle est comparée sur la même figure avec la loi de fiabilité expérimentale $R_{\mathcal{D}_{ref}}^{exp}$ que nous avons construite précédemment à partir du retour d'expériences constitué de résultats d'essais accélérés.

On remarque sur la figure 4.21, un écart considérable entre les deux lois de fiabilité. En effet, les simplifications que nécessitent les modèles numériques mécaniques (au niveau de la forme ainsi que des conditions limites), la non prise en compte de l'état de surface réel, la méconnaissance de certains paramètres matériaux ainsi que la variabilité des paramètres de chargement réels peuvent conduire à des résultats numériques incohérents avec les performances réelles des mécanismes. Une autre source d'erreurs participant à cet écart, est la modélisation des distributions des paramètres incertains et les caractéristiques statistiques associées qui doivent être obtenues par analyse statistique sur des données suffisamment larges, afin de pouvoir représenter la véritable variabilité des paramètres incertains. Or ce n'est pas souvent le cas, comme dans notre application où, les coefficients de variation des paramètres incertains sont obtenus par avis

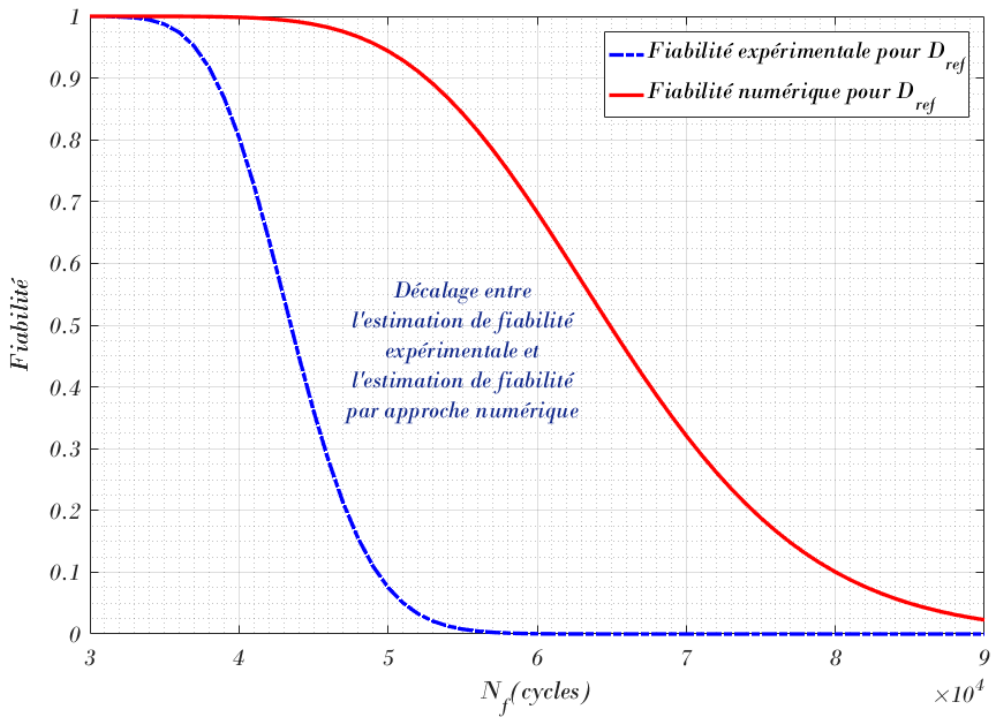


Fig. 4.21. Comparaison des fonctions de fiabilité expérimentale et numérique du mécanisme de référence $\mathcal{D}_{ref}$

d'ingénieurs ainsi que le choix des distributions.

Nous allons maintenant déployer la méthodologie d'estimation de fiabilité que nous avons proposé dans le chapitre précédent, pour améliorer l'estimation de fiabilité en phase de conception d'une nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ du mécanisme.

4.5 Analyse de fiabilité du nouveau développement

Le nouveau développement $\mathcal{D}_{up}$ est une version modifiée de la conception de référence $\mathcal{D}_{ref}$ pour répondre à de nouvelles exigences clients. $\mathcal{D}_{up}$ est représentée sur la figure 4.22 et à titre de comparaison, au dessus de la version de référence $\mathcal{D}_{ref}$. Il est donc nécessaire d'évaluer l'effet des modifications, sur la fiabilité de la nouvelle conception.

L'idée est d'utiliser les résultats de l'analyse de fiabilité réalisée sur des conceptions précédentes et similaires, en tant que connaissances préalables dans la démarche d'estimation en phase de développement, de la fiabilité de la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$.

Puisque les modifications ne sont pas significatives, la fonction de transfert temporel devrait être la même pour les deux conceptions. En d'autres termes, la fonction de transfert temporel est plutôt liée au produit et invariante par rapport au design. Ainsi, une approximation de la *fiabilité réelle* ou fiabilité expérimentale, peut être obtenue en appliquant la fonction de transfert temporel aux résultats de l'analyse de fiabilité numérique réalisée sur le modèle mécano-probabiliste de $\mathcal{D}_{up}$. La fiabilité numérique étant obtenue par Simulations de *Monte-Carlo* sur le modèle de

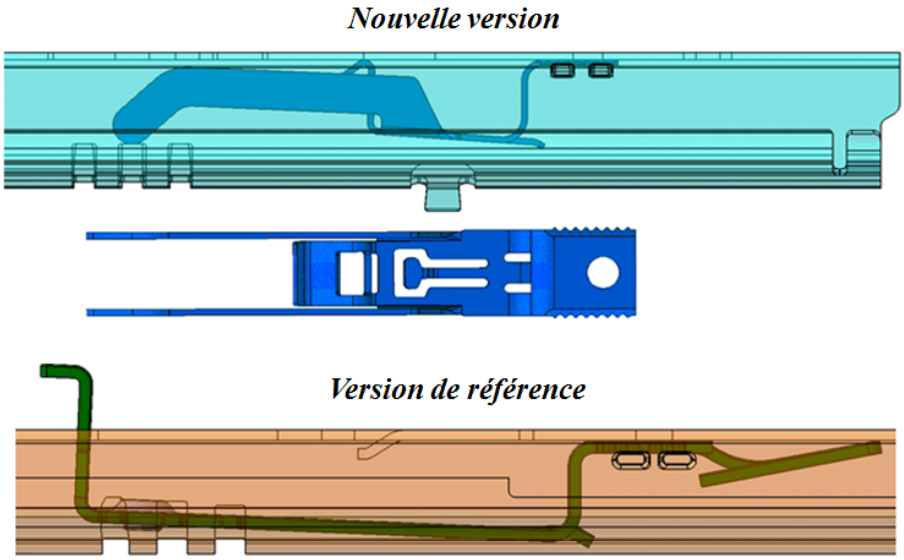


Fig. 4.22. Nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ du mécanisme

substitution construit par la méthode de décomposition dimensionnelle.

4.5.1 Fiabilité prévisionnelle du nouveau développement

Pour obtenir une estimation numérique de la loi de fiabilité, un modèle éléments finis 3D du mécanisme $\mathcal{D}_{up}$ est développé sur le logiciel Abaqus, avec les mêmes hypothèses sur les conditions aux limites que pour la conception de référence. Il est important de noter que la conception $\mathcal{D}_{up}$ est réalisée avec le même matériau que le modèle de référence. Aussi, la même loi de comportement de *Ramberg-Osgood* ainsi que le même modèle de fatigue de *Coffin-Manson-Morrow* précédemment définis, seront utilisés. Cependant, les conditions de chargement ont été un peu modifiées, notamment le déplacement de mise en position de verrouillage (pré-chargement) u_p et le déplacement de déverrouillage u_c (figure 4.23 (a)). De plus, comme représenté schématiquement sur la figure 4.23 (b), un modèle à ressort est pris en compte dans l'analyse par éléments finis pour reproduire les conditions réelles de fonctionnement du mécanisme. Une image du modèle éléments finis est représentée sur la figure 4.24.

Le modèle mécanique déterministe est ensuite couplé à un modèle probabiliste représentant les paramètres matériaux et chargement par des variable aléatoires distribuées suivant une loi LogNormale.

Les paramètres d'entrée du modèle mécano-probabiliste de la nouvelle conception sont renseignés dans le tableau 4.10, où u_c et u_p représentent respectivement, le déplacement de précontrainte et le déplacement maximal du cycle de chargement ; K la raideur de ressort.

Pour les mêmes raisons de coûts de calculs, nous avons ensuite construit le modèle de substitution par la méthode de décomposition dimensionnelle avec un ordre $s = 1$ et les polynômes de Lagrange construit sur le même plan d'expérience que pour le modèle de référence.

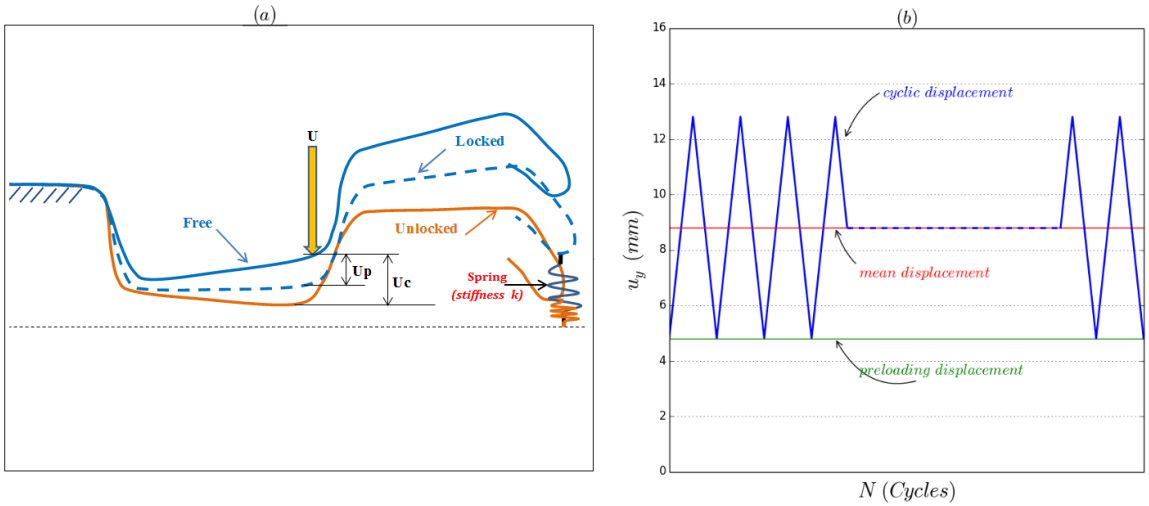


Fig. 4.23. (a) Esquisse de la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$, (b) Chargement appliqué à la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$

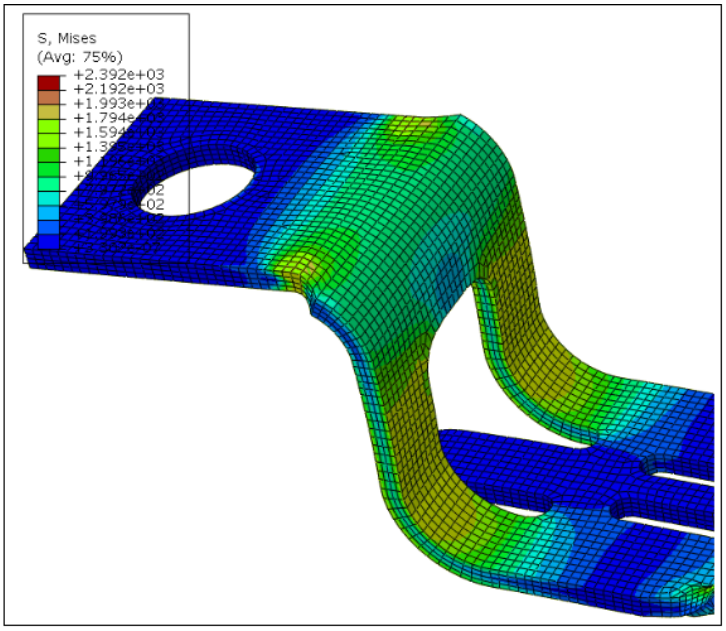


Fig. 4.24. Modèle éléments finis 3D de la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$

TABLE *4.10 Paramètres incertains de la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$*

Paramètre	Distribution	Moyenne	Écart-type
$E(GPa)$	LogNormale	210	2.1
$\sigma'_f(MPa)$	LogNormale	2339.72	23.3972
ε'_f	Constant	0.45	-
b	LogNormale	0.09	0.0009
c	Constant	0.59	-
$u_p(mm)$	Constant	4.8	-
$u_c(mm)$	LogNormale	8	0.08
$k(N/mm)$	Constant	3.359	-

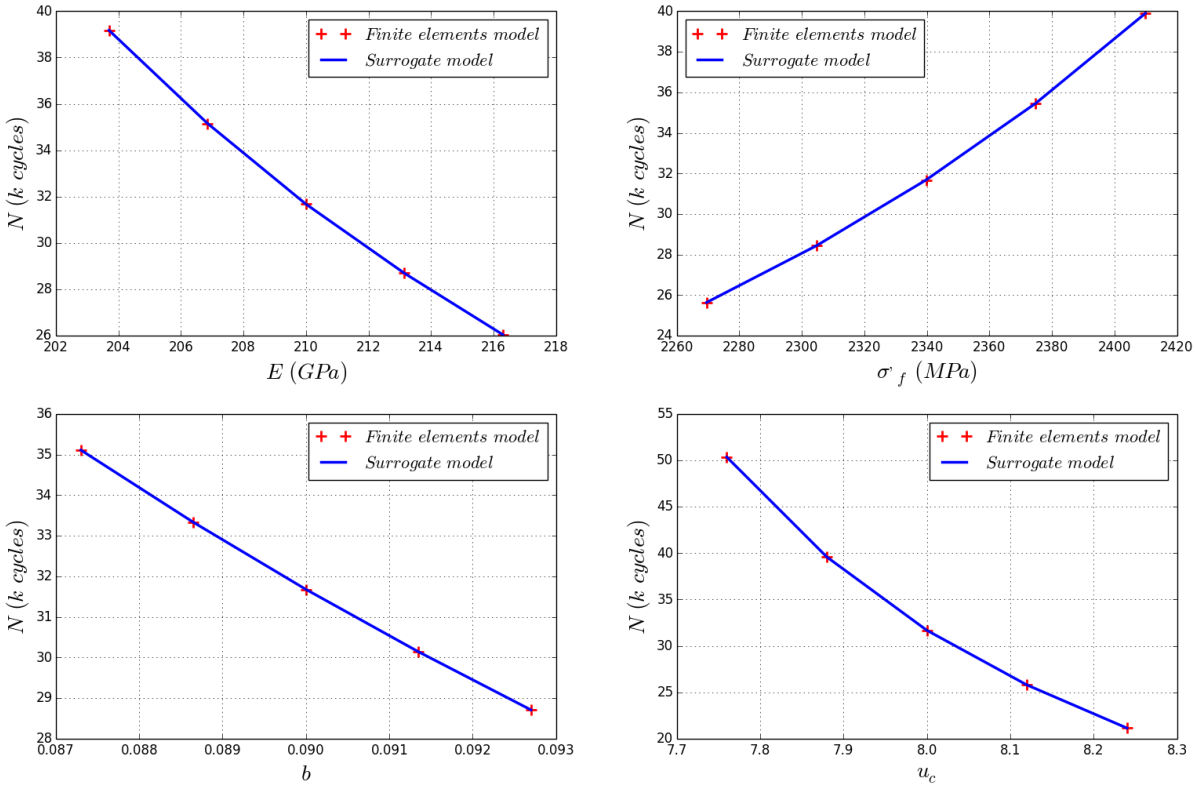


Fig. 4.25. Évaluation de l'exactitude du modèle de substitution pour $\mathcal{D}_{up}$

Comme on peut le voir sur la figure 4.25, l'approximation polynomiale construite par la méthode de décomposition dimensionnelle (MDD) reproduit très bien le comportement du composant mécanique représenté ici par un modèle d'éléments finis. Elle peut donc être utilisée pour effectuer une analyse de fiabilité.

Les quatre premiers moments statistiques (tableau 4.11) de la durée de vie en fatigue N_f sont calculés à l'aide de 10^5 simulations de *Monte-Carlo* sur le modèle de substitution. La densité de probabilité est aussi construite (figure 4.26) et les paramètres $\hat{\mu}_{up}^{num}$ et $\hat{\sigma}_{up}^{num}$ de la distribution LogNormale équivalente sont également estimés (tableau 4.12).

Finalement, la fonction de fiabilité numérique de la nouvelle conception est déduite et représentée sur la figure 4.27.

TABLE *4.11 Moments statistiques de la durée de vie numérique pour la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$*

Moyenne	**Écart-type**	**Asymétrie**	**Kurtosis**	**CV**
32382.93	5751.87	0.335	3.249	17.8%

TABLE *4.12 Paramètres de la distribution de durées de vie numérique pour $\mathcal{D}_{up}$*

Distribution	$\hat{\mu}_{up}^{num}$	$\hat{\sigma}_{up}^{num}$
LogNormale	10.370	0.176

Nous allons à présent utiliser les approches proposées dans le chapitre précédent, pour obtenir

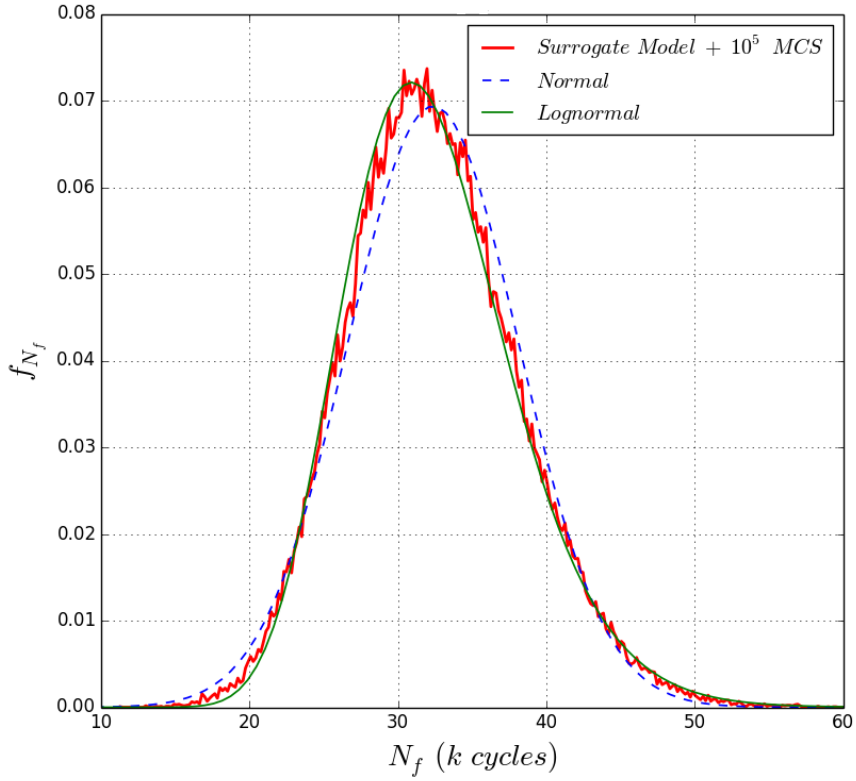


Fig. 4.26. Fonction de densité de probabilité de la durée de vie en fatigue N_f pour $\mathcal{D}_{up}$

une estimation de la fiabilité de la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$, à partir du modèle numérique et du retour d'expérience existant sur la version de référence $\mathcal{D}_{ref}$.

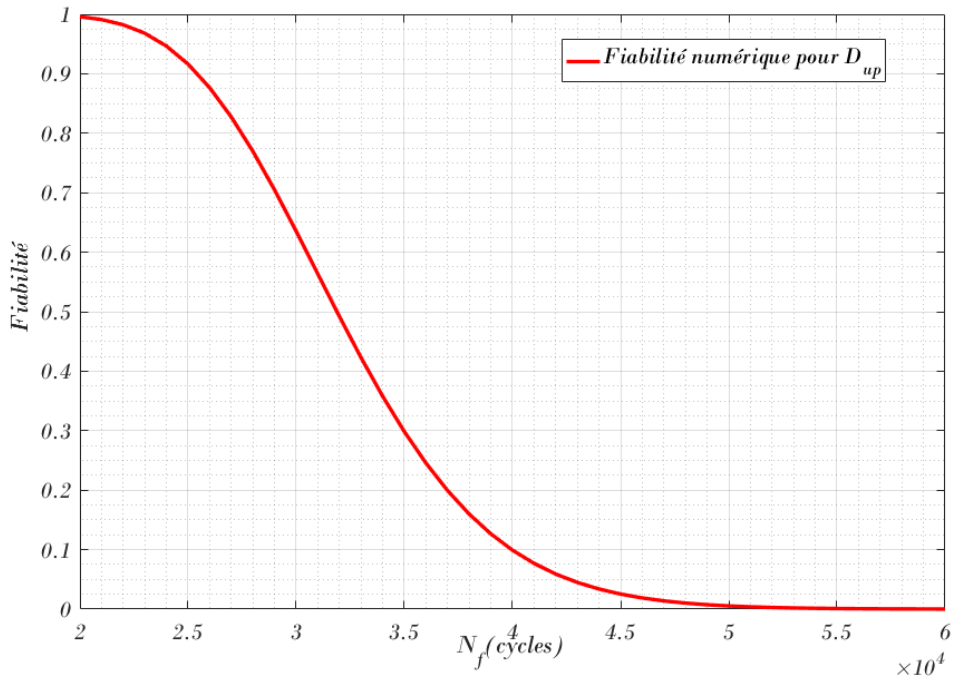


Fig. 4.27. Fonction de fiabilité numérique obtenue pour $\mathcal{D}_{up}$

4.5.2 Estimation basée sur le facteur de similitude

Nous présentons brièvement, les résultats obtenus par la première méthodologie basée sur le facteur de similitude. Comme nous l'avons explicité, cette méthode se base sur l'hypothèse de constance de forme entre la distribution de durées de vie expérimentale et la distribution de durées de vie numérique. Nous procédons premièrement à la vérification de cette hypothèse.

Pour ce faire, nous avons défini $P = 5$ niveaux de perturbations (coefficients de variation) sur les paramètres d'entrée aléatoires des deux modèles mécano-probabilistes $\mathcal{M}^{ref}$ et $\mathcal{M}^{up}$. Ensuite nous avons calculé les coefficients de variation de la réponse y pour chaque niveau de perturbation et pour chaque modèle.

Nous avons donc obtenu un ensemble de points $\left\{CV(y_i^{ref}),\ \ CV(y_i^{up})\right\}$; $i = 1, 2, ..., 5$, représentés sur le graphique (figure 4.28).

La régression linéaire sur ces points a donné comme pente $\beta_L = 1.0796$ qui est donc proche de 1 et comme ordonnée à l'origine $\alpha_L = -0.0502$ proche de 0. Cela signifie que les deux modèles mécano-probabilistes $\mathcal{M}^{ref}$ et $\mathcal{M}^{up}$ ont pratiquement les mêmes sensibilités aux perturbations ou variabilités de leurs paramètres d'entrée. On déduit donc qu'il existe une linéarité entre les deux versions du mécanisme, et par conséquent la constance du facteur de similitude est vérifiée.

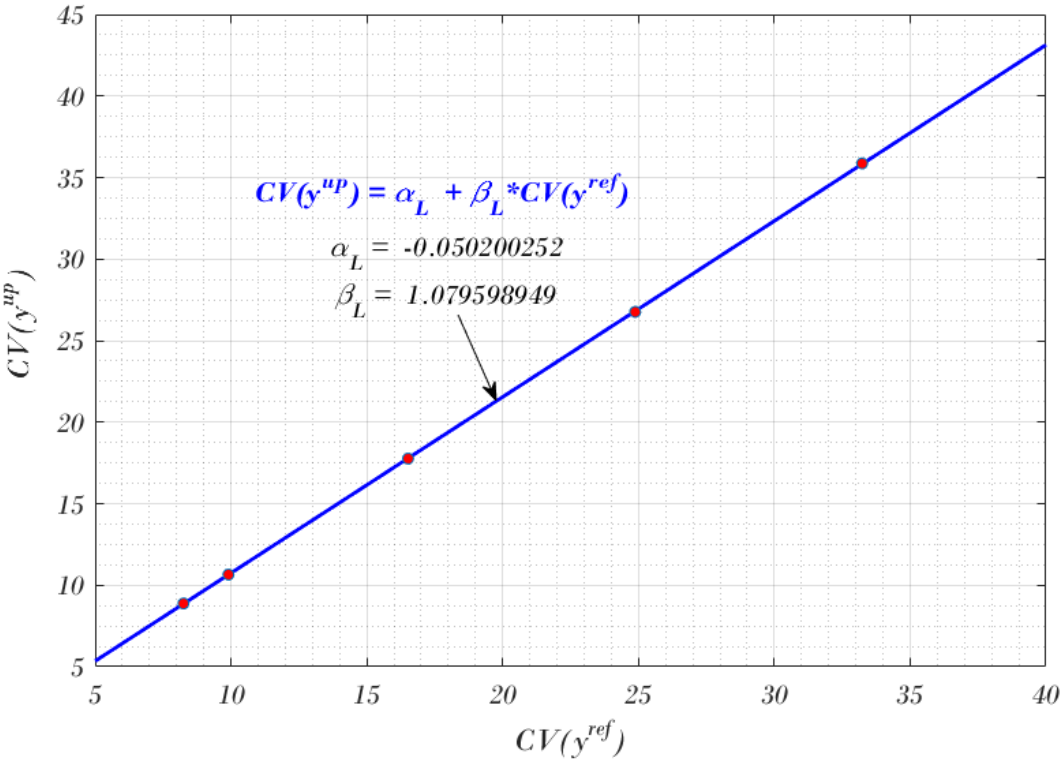


Fig. 4.28. Linéarité entre les modèles mécaniques $\mathcal{M}^{ref}$ et $\mathcal{M}^{up}$

Pour rappel, les résultats relatifs aux premiers moments et coefficient de variations de la durée de vie expérimentale de la version de référence $\mathcal{D}_{ref}$ sont reportés dans le tableau 4.13. On note qu'il existe des relations équivalentes permettant d'obtenir les paramètres μ_{LN} et σ_{LN} d'une

loi LogNormale à partir des moments statistiques, notamment la moyenne $\hat{m}_y$ et l'écart-type $\hat{s}_y$, soit le coefficient de variation donné par $\hat{CV}_y = \hat{s}_y/\hat{m}_y$. Les paramètres de la distribution LogNormale associée sont obtenus par :

$$\mu_{LN} = ln(\hat{m}_y) - \frac{1}{2}\left(1 + \hat{CV}_y^2\right) \tag{4.34}$$

$$\sigma_{LN} = \sqrt{ln(1 + \hat{CV}_y^2)} \tag{4.35}$$

A partir de l'équation (4.35), on peut déduire que si le paramètre de forme σ_{LN} de la distribution LogNormale est constant, alors le coefficient de variation $\hat{CV}_y$ l'est autant. Les résultats obtenus par simulations numériques pour les deux versions $\mathcal{D}_{ref}$ et $\mathcal{D}_{up}$ doivent donc avoir des coefficients de variation de même ordre ou très proches du coefficient de variation expérimentale pour conserver la constance du facteur de forme de la distribution Lognormale. Finalement, les valeurs les plus proches sont ceux données dans le tableau 4.14.

TABLE *4.13 Moments statistiques des durées de vie expérimentales de la version $\mathcal{D}_{ref}$ du mécanisme*

Moyenne	**Écart-type**	**Coef. de variation**
43480	4128	9.79%

TABLE *4.14 Moments statistiques des durées de vie numériques versions $\mathcal{D}_{ref}$ et $\mathcal{D}_{up}$ du mécanisme*

Versions	**Moyenne**	**Écart-type**	**Coef. de variation**
$\mathcal{D}_{ref}$	64811.522	6420.114	9.906%
$\mathcal{D}_{up}$	31914.478	3399.560	10.652%

Les paramètres de la distribution LogNormale des durées de vie numériques correspondants aux moments statiques du tableau 4.14 sont calculés dans le tableau 4.16 pour la version de référence et dans le tableau 4.15 pour la nouvelle version du mécanisme. Les résultats obtenus pour le paramètre de forme sont respectivement très légèrement supérieur et inférieur au paramètre de forme de la distribution LogNormale des durées de vie expérimentale ($\widehat{\sigma}^{exp}_{\mathcal{D}_{up}} = 0.09725$), mais restent du même ordre pour considérer la constance du paramètre de forme.

TABLE *4.15 Paramètres de la distribution de durées de vie numérique pour la nouvelle version*

Distribution	$\widehat{\mu}^{num}_{\mathcal{D}_{up}}$	$\widehat{\sigma}^{num}_{\mathcal{D}_{up}}$
LogNormale	10.365	0.106

TABLE *4.16 Paramètres de la distribution de durées de vie numérique pour la version de référence*

Distribution	$\widehat{\mu}^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}$	$\widehat{\sigma}^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}$
LogNormale	11.074	0.099

Ensuite, en appliquant sur la version de référence, la procédure de calcul du facteur de similitude ($FS = \mu^{num}_{\mathcal{D}_{ref}}/\mu^{exp}_{\mathcal{D}_{ref}}$), nous avons calculé le facteur de similitude FS. La similarité et la constance du facteur de similitude entre les deux versions du mécanisme étant précédemment vérifiées, une estimation de la fiabilité de la nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ du mécanisme est simplement déduite. Les paramètres de la distribution de durées de vie sont donnés dans le tableau 4.15 et la figure 4.29 compare la fonction de fiabilité ainsi obtenue par la méthodologie, avec la fiabilité numérique et quelques points expérimentaux (obtenus à partir de la fonction de répartition empirique) issus d'essais réels sur des prototypes de $\mathcal{D}_{up}$.

TABLE *4.17 Paramètres de la distribution de durées de vie estimées pour la nouvelle version*

FS	**Distribution**	$\widehat{\mu}^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}$	$\widehat{\sigma}^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}$
1.0196	*LogNormale*	10.1655	0.09725

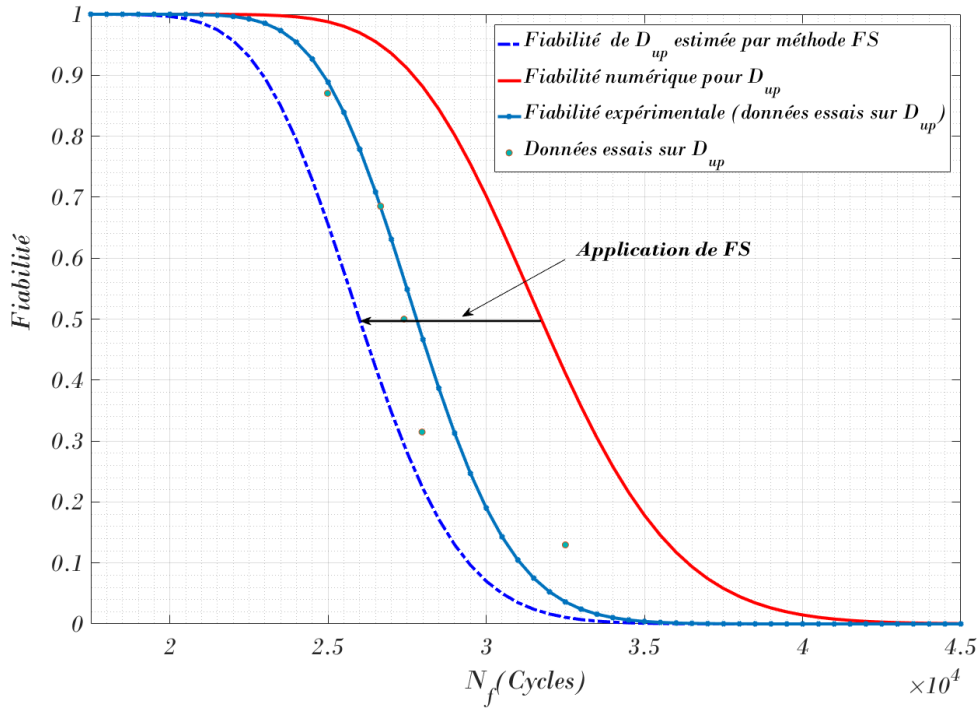


Fig. 4.29. Courbe de fiabilité estimée de $\mathcal{D}_{up}$ comparée à la courbe numérique et points expérimentaux

On note donc une amélioration de l'estimation par rapport à la méthode numérique pure, ce qui est un résultat très intéressant, même si en comparant la courbe de fiabilité estimée aux quelques points expérimentaux réels, un écart plus ou moins important est observé vers les queues de distribution.

La limite de la méthode FS est l'hypothèse de conservation du facteur de similitude d'une version à l'autre. Cela suppose, comme nous l'avons expliqué plus haut, que les coefficients de variation des durées de vies simulées pour $\mathcal{D}_{ref}$ et $\mathcal{D}_{up}$ doivent être identiques. Or le coefficient de variation est donné par la variabilité des paramètres d'entrée c'est à dire leurs coefficients de variations. On est donc amené à simuler plusieurs fois les modèles numériques avec à chaque

fois un niveau de coefficient de variation arbitraire sur les paramètres d'entrée, jusqu'à approcher cette égalité. Dans la réalité, les coefficients de variation des paramètres d'entrée du modèles sont donnés par expertises d'ingénieurs ou déterminés par des essais de caractérisations. Par conséquent, le fait de les attribuer arbitrairement n'est pas très réaliste. Il est donc nécessaire que la méthodologie d'estimation soit plus générale et indépendante de cette contrainte de constance de coefficients de variation.

4.5.3 Estimation basée sur la fonction de transfert temporel

Cette méthodologie passe par la construction d'une fonction de transfert temporel entre la loi de fiabilité expérimentale et numérique du mécanisme de référence. Nous suivons la procédure proposée dans le chapitre 3 pour la construction de cette fonction de transfert qui est définie comme une relation entre les deux fonctions de fiabilité.

Pour ce faire, prenons la version de référence $\mathcal{D}_{ref}$. Nous avons choisi ici un pas pour discrétiser le domaine de fiabilité $\Delta_R = 0.125$ ce qui permet d'obtenir un échantillon D_R composé de $n_R = 79$ points.

Soient $N^{exp}_{f,\mathcal{D}_{ref}}(i)$ et $N^{num}_{f,\mathcal{D}_{ref}}(i)$ les estimations expérimentales et numériques de la durée de vie en fatigue associées aux niveaux de fiabilité $D_R(i) \in D_R, i = 1,\ldots,n_R$ la fonction de transfert temporel $h(t)$ s'écrit comme suit :

$$N^{exp}_{f,\mathcal{D}_{ref}}(i) = h\left(N^{num}_{f,\mathcal{D}_{ref}}(i)\right) = A \times \left(N^{num}_{f,\mathcal{D}_{ref}}(i)\right)^{\beta_1} \tag{4.36}$$

Les paramètres A et β_1 de la fonction de transfert (voir tableau 4.18) ont été calculés par régression sur le jeu de données $\left(N^{exp}_{f,\mathcal{D}_{ref}}(i), N^{num}_{f,\mathcal{D}_{ref}}(i)\right)$. La loi puissance est comparée aux approximations polynomiales linéaires et d'ordre 2, et ajuste mieux les points de régression comme le montre la figure 4.30.

TABLE *4.18 Estimations des paramètres de la fonction de transfert temporel*

Linéaire	**Polynôme d'ordre** 2	**Loi puissance**		
R^2	R^2	R^2	$\hat{A}$	$\hat{\beta}_1$
0.9984	0.9914	1	61.198	0.593

Pour 95% de confiance, l'intervalle de confiance sur les paramètres $\hat{A}$ et $\hat{\beta}_1$ de la fonction de transfert est construit par la méthode de ré-échantillonnage Bootstrap (section 3.4.3) sur $N^{exp}_{f,\mathcal{D}_{ref}}$ et $N^{num}_{f,\mathcal{D}_{ref}}$: $\hat{A} \in [15.433, \quad 195.145]$ et $\hat{\beta}_1 \in [0.4875, \quad 0.7158]$.

Nous avons précédemment montré dans le cadre de l'application de la méthodologie d'estimation par facteur de similitude, la linéarité des deux versions de mécanismes. En effet, cette étude de linéarité est un moyen objectif de confirmer la similarité supposée des deux versions de mécanisme. En réalité, les mécanismes sont des produits d'une même famille, conçus pour répondre

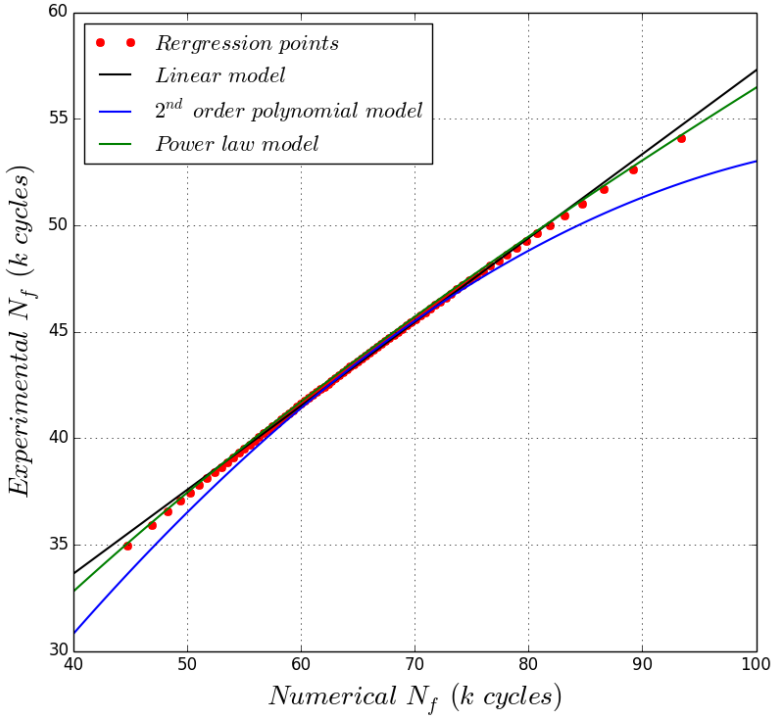


Fig. 4.30. Comparaison des modèles de régression utilisés pour construire la fonction de transfert temporel

à une même fonction, sans oublier que les matériaux restent identiques. Aussi, la fonction de transfert obtenue à partir du mécanisme de référence, est considérée identique sur la nouvelle version du mécanisme.

Par conséquent, pour obtenir une estimation *expérimentale* de la durée de vie de la nouvelle conception, il suffit de déterminer par approche numérique la durée de vie et de déduire l'estimation *expérimentale* grâce à la fonction de transfert temporel.

Nous avons donc, pour chaque niveau de fiabilité $D_R(i) \in D_R, i = 1, \ldots, n$, généré à partir de la loi de fiabilité numérique de la nouvelle conception, la durée de vie correspondante $N^{num}_{f,\mathcal{D}_{up}}(i)$, et en déduire par la fonction de transfert temporel, la durée de vie *expérimentale* $N^{exp}_{f,\mathcal{D}_{up}}(i)$ associée :

$$N^{exp}_{f,\mathcal{D}_{up}}(i) = A \times \left(N^{num}_{f,\mathcal{D}_{up}}(i)\right)^{\beta_1} \tag{4.37}$$

Cette dernière procédure est couplée avec la technique de ré-échantillonnage Bootstrap présentée dans la section 3.4.3 permettant d'obtenir les estimateurs ponctuels $\hat{\mu}^{exp}_{up}$ et $\hat{\sigma}^{exp}_{up}$ des paramètres de la distribution LogNormale des durées de vie de la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$ ainsi que leurs intervalles de confiance à 95% (tableau 4.19).

Une fois que les paramètres de la distribution LogNormale de durée vie *expérimentale* de la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$ sont estimés, la loi de fiabilité *expérimentale* $R^{exp}_{\mathcal{D}_{up}}$ est construite. Elle est premièrement comparée à la loi de fiabilité numérique sur la figure 4.31.

TABLE *4.19 Paramètres estimés par la méthode FTT de la distribution LogNormale de durées de vie expérimentale de la nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$*

$\widehat{\mu}_{up}^{exp}$			$\widehat{\sigma}_{up}^{exp}$		
Inférieure	*Médiane*	*Supérieure*	*Inférieure*	*Médiane*	*Supérieure*
10.237	10.261	10.283	0.085	0.0986	0.113

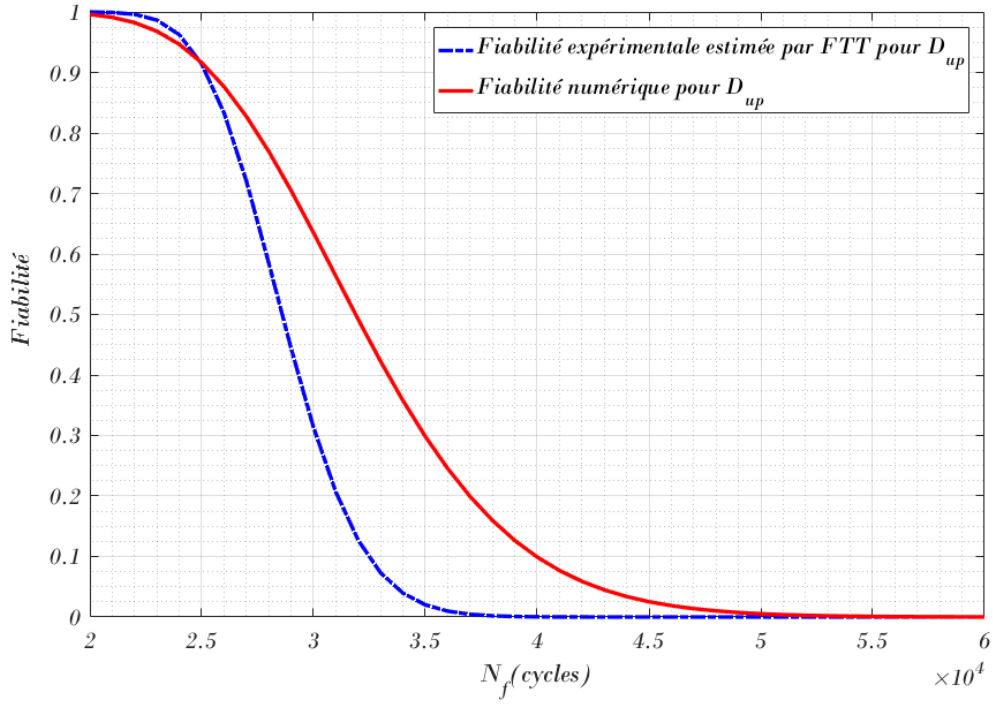


Fig. 4.31. Comparaison de fiabilité expérimentale estimée et de fiabilité numérique de $\mathcal{D}_{up}$

On observe sur la figure 4.31 que pour des niveaux de fiabilité élevés (i.e ~ 1), un petit écart est observé entre les estimations expérimentales et numériques. Cependant, cet écart est plus significatif dans la partie centrale. Ceci est principalement dû aux hypothèses retenues dans les calculs éléments finis et dans la modélisation de la variabilité des paramètres incertains.

La figure 4.32 compare les résultats provenant de quelques essais réels, réalisés sur des prototypes de la nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$, avec la fonction de fiabilité obtenue par l'approche FTT proposée. Le résultat montre une bonne approximation en particulier pour les niveaux de fiabilité élevés et faibles puisque ceux-ci sont proches de la courbe médiane et appartiennent à l'intervalle de confiance de 95%.

Nous allons à présent comparer les résultats obtenus par les deux approches proposées pour l'estimation de fiabilité en phase de développement, à savoir celle basée sur un facteur de similitude (FS) et celle basée sur une Fonction de Transfert Temporel (FTT). Une comparaison graphique est premièrement obtenue (figure 4.33). Les deux approches donnent des résultats nettement meilleurs que la seule estimation numérique. Cependant, l'approche basée sur le facteur de similitude est plus conservatrice, comparée aux données expérimentales. La zone des valeurs de fiabilité élevées est d'un grand intérêt car correspond aux niveaux de fiabilité provenant des

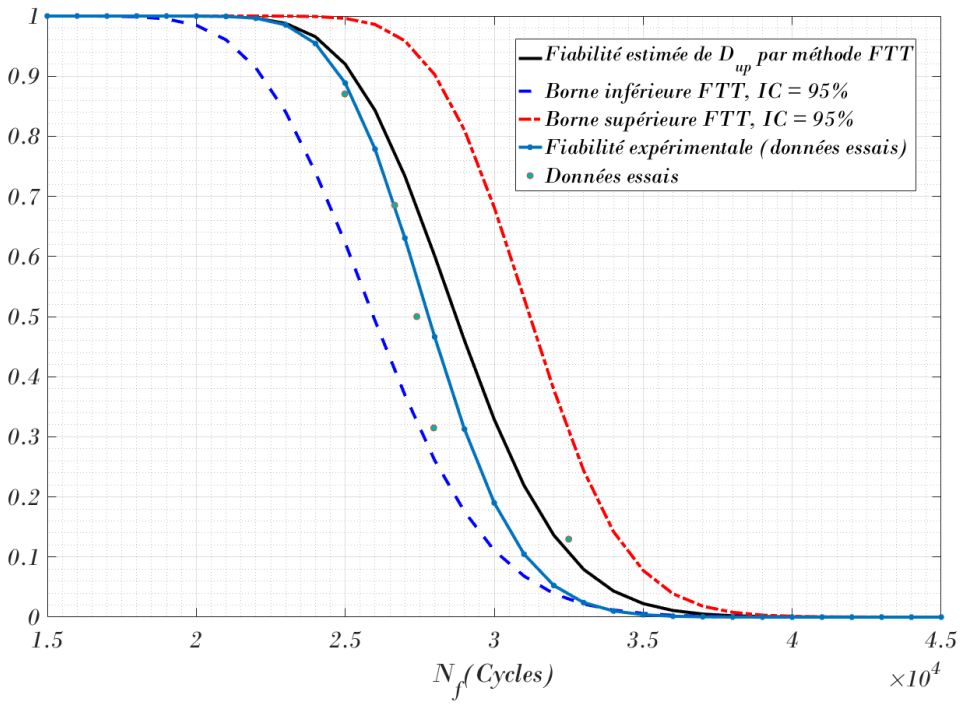


Fig. 4.32. Comparaison de la fonction de fiabilité obtenue par l'approche FTT proposée et des résultats d'essais réalisés sur la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$

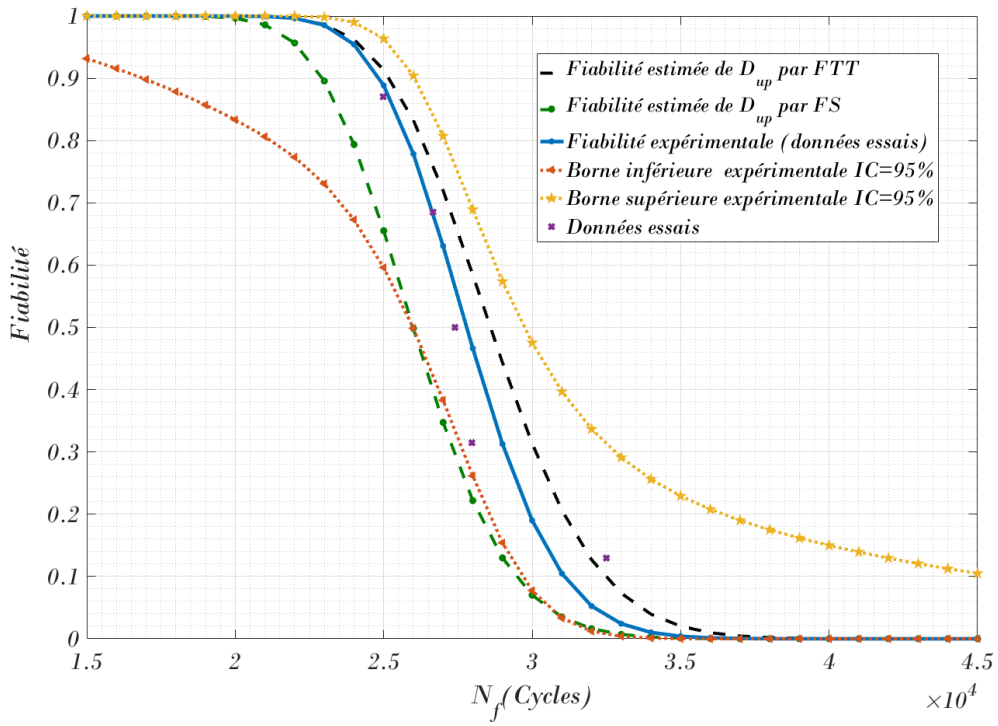


Fig. 4.33. Comparaison des résultats des deux approches d'estimation proposées

exigences clients, soit entre 70% et 100%. La courbe de fiabilité estimée par la méthode basée sur la fonction de transfert temporel, permet donc une précise de décision plus judicieuse, vu qu'elle donne une meilleure estimation dans cette zone.

Pour juger plus objectivement de la précision des deux approches, nous nous basons sur une

distance D_{KS} particulière dite de Kolmogorov-Smirnov qui permet de mesurer l'adéquation de la fonction de répartition empirique $\hat{F}$ des résultats d'essais réalisés sur le nouveau design et les fonction de répartition F obtenues par les deux approches proposées. Pour obtenir cette distance D_{SK}, on calcule la différence entre $\hat{F}$ et F aux points X_i et on cherche le maximum selon la formule :

$$D_{KS}(F,\hat{F}) = \max_{i=1,\dots,n} \{|F(X_i) - \frac{i}{n}|, |F(X_i) - \frac{i-1}{n}|\} \tag{4.38}$$

Les résultats sont reportés dans le tableau 4.20 et donnent respectivement comme distance maximale de Kolmogorov-Smirnov $D_{KS}^{FS} = 0.403$ pour la méthode FS et $D_{KS}^{FTT} = 0.389$ pour la méthode FTT.

TABLE *4.20 Calcul des distances de Kolmogorov-Smirnov*

Méthode	**Calcul des écarts**					
Essais	i	1	2	3	4	5
	X_i	24983	26660	27400	27970	32500
	$\frac{i}{n}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1
	$\frac{i-1}{n}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
FS	$F(X_i)$	0.342	0.603	0.706	0.775	0.989
	$\lvert F(X_i) - \frac{i}{n}\rvert$	0.142	0.203	0.106	0.025	0.011
	$\lvert F(X_i) - \frac{i-1}{n}\rvert$	0.342	0.403	0.306	0.175	0.189
FTT	$F(X_i)$	0.085	0.239	0.332	0.411	0.903
	$\lvert F(X_i) - \frac{i}{n}\rvert$	0.115	0.161	0.268	0.389	0.097
	$\lvert F(X_i) - \frac{i-1}{n}\rvert$	0.085	0.039	0.067	0.189	0.103

Pour conclure sur la meilleure méthode, les deux distances D_{KS}^{FS} et D_{KS}^{FS} sont comparées à la distance critique $D_{KS}^{c} = 0.565$ donnée par la table de Kolmogorov-Smirnov pour $n = 5$ au seuil $\alpha = 0.05$. On a $D_{SK}^{FS} < D_{SK}^{FTT} < D_{SK}^{c}$, ce qui donne la méthode basée sur la fonction de transfert FTT meilleure que celle basée sur le Facteur de similitude FS.

4.5.4 Amélioration de l'estimation de la fiabilité par actualisation inverse des paramètres de conception

Les paramètres matériaux du modèle mécano-probabiliste développé pour l'estimation de fiabilité numérique, sont définis à partir d'avis d'ingénieurs et d'une recherche bibliographique. Nous avons donc pensé à réaliser une identification inverse des distributions de ces paramètres, grâce à une méthode d'actualisation inverse basée sur une technique d'échantillonnage *Monte-Carlo-Markov-Chain* (*MCMC*) que nous avons présenté au chapitre 3.

Nous nous proposons d'utiliser comme donnée observable, la distribution expérimentale de durées de vie obtenue de l'analyse du RETEX, à savoir les essais accélérés réalisés sur la version de référence du mécanisme $\mathcal{D}_{ref}$.

Afin de simuler l'équation d'actualisation Bayésienne indirecte, l'algorithme Metropolis-Hastings (M-H) en cascade est utilisé. La distribution de proposition est supposée normale multivariée avec une moyenne définie à chaque fois, comme point courant de la chaîne de Markov et la matrice de covariance est égale à $s \times Cu$, où s est un facteur d'échelle et Cu est la matrice de covariance de la distribution a priori de X.

La distribution normale multivariée est choisie pour ses bonnes propriétés de convergence dans l'inférence bayésienne Draper and Krnjajic (2006).

Le choix du facteur d'échelle s lors du paramétrage de l'algorithme M-H à marche aléatoire est important. Comme le montrent les figures 4.35 et 4.36, plus s est faible, plus le déplacement de la chaîne est lent, signifiant qu'elle n'exploite pas totalement l'espace des paramètres ; et plus s est grande, plus les échantillons proposés sont rejetés. La figure 4.37 correspond à un compromis acceptable .

Pour aider à mieux définir le facteur d'échelle s, on peut aussi simuler d'abord les chaînes de markov avec une taille d'échantillon de 10^4 par exemple, pour différents facteurs d'échelle et calculer à chaque fois le taux d'acceptation correspondant. La courbe d'efficacité (figure 4.34) ainsi obtenue, montre que le facteur d'échelle s fixé à 0.55 permet à la chaîne de Markov d'atteindre un taux d'acceptation de 0.25, ce qui se situe bien dans l'intervalle de 0.2 à 0.4 recommandé par (Gelman et al., 2004).

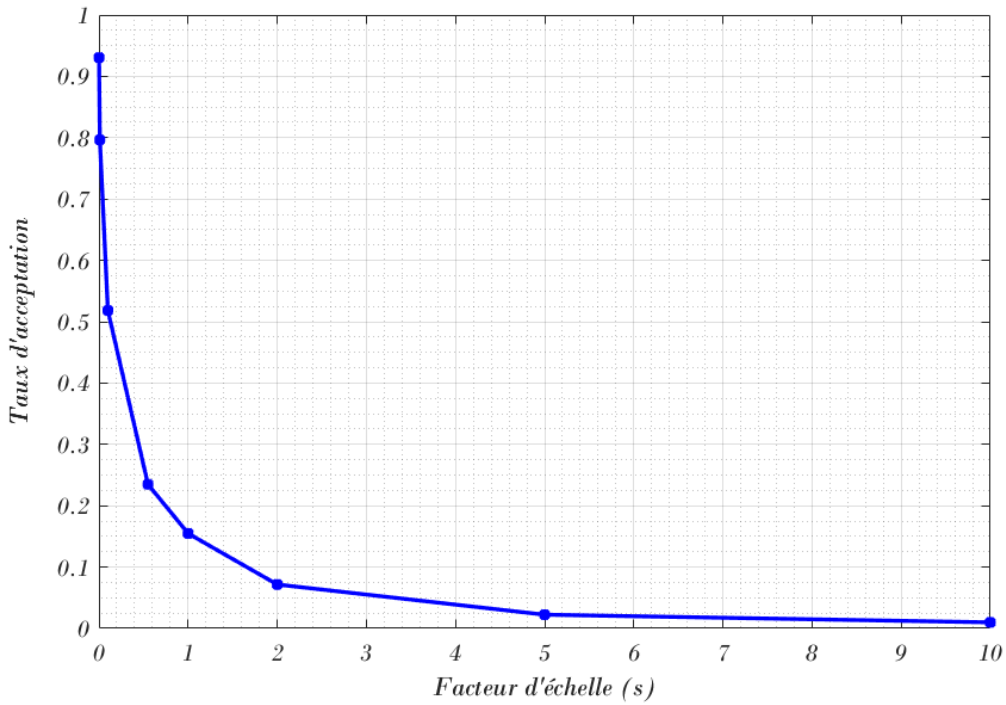


Fig. 4.34. Évolution du taux d'acceptation en fonction du facteur d'échelle

Sur la base du paramétrage sélectionné, l'actualisation inverse des paramètres d'entrée du modèle mécano-probabiliste correspondant aux propriétés matériaux et au déplacement, est réalisée. La taille des chaînes de markov *MCMC* générées est de 10^5. Sur la figure 4.38, on remarque

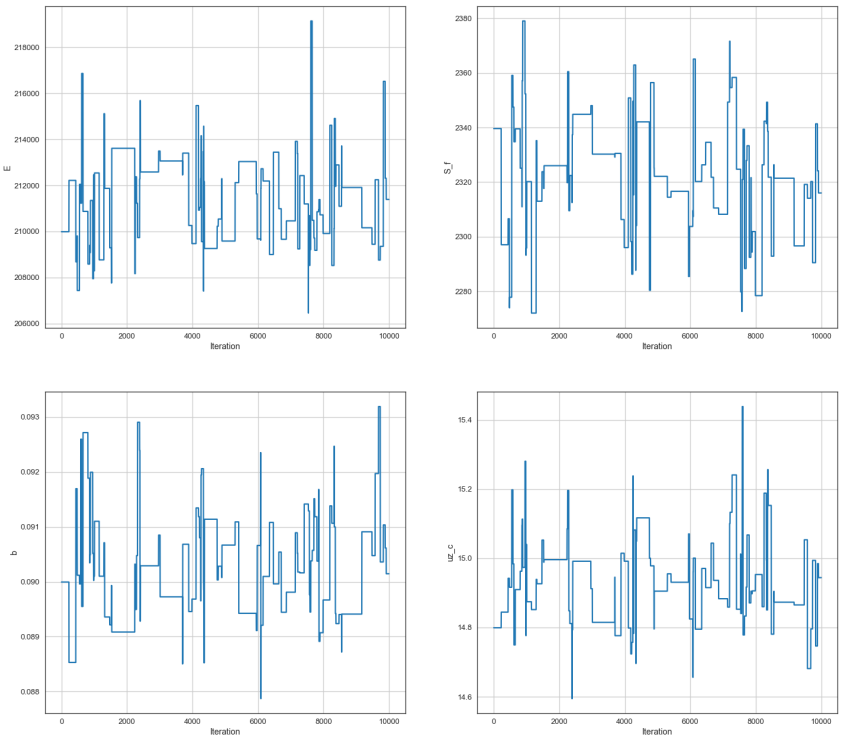


Fig. 4.35. Algorithme M-H avec une variance trop large variance (s=10)

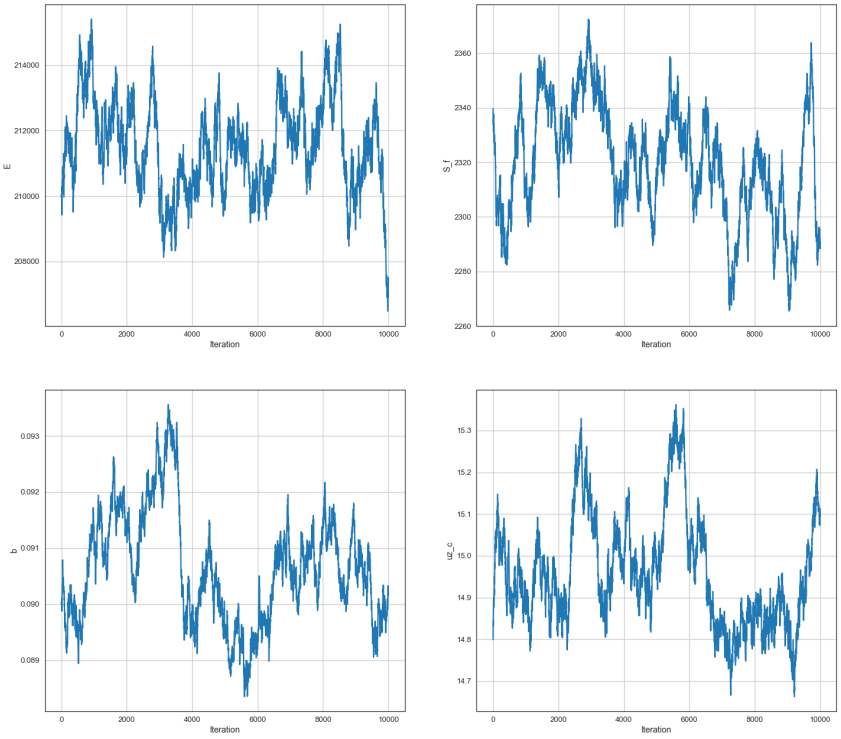


Fig. 4.36. Algorithme M-H avec une variance trop petite variance (s=0.005)

que la période de Burn-in dans les chaînes de Markov obtenues, n'est pas prépondérante. Par conséquent, il n'y aura pas d'échantillon de burn-in à éliminer.

Les échantillons *MCMC* sont ensuite ajustés par une densité de probabilité LogNormale et comparées aux densités a priori (figure 4.39). Le tableau 4.21 contient les moments statistiques

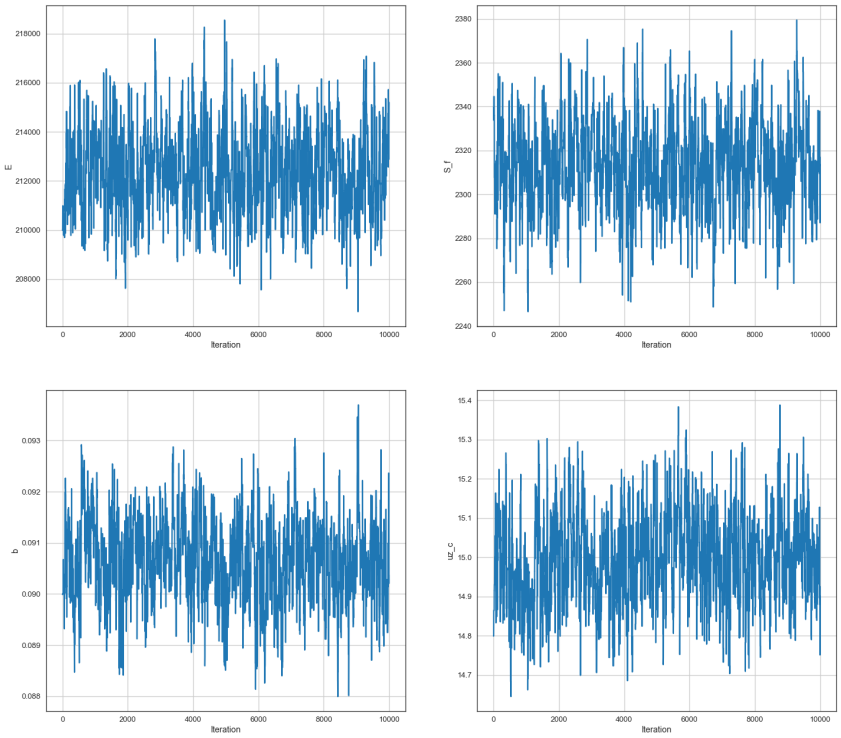


Fig. 4.37. Algorithme M-H avec une variance raisonnable (s=0.55)

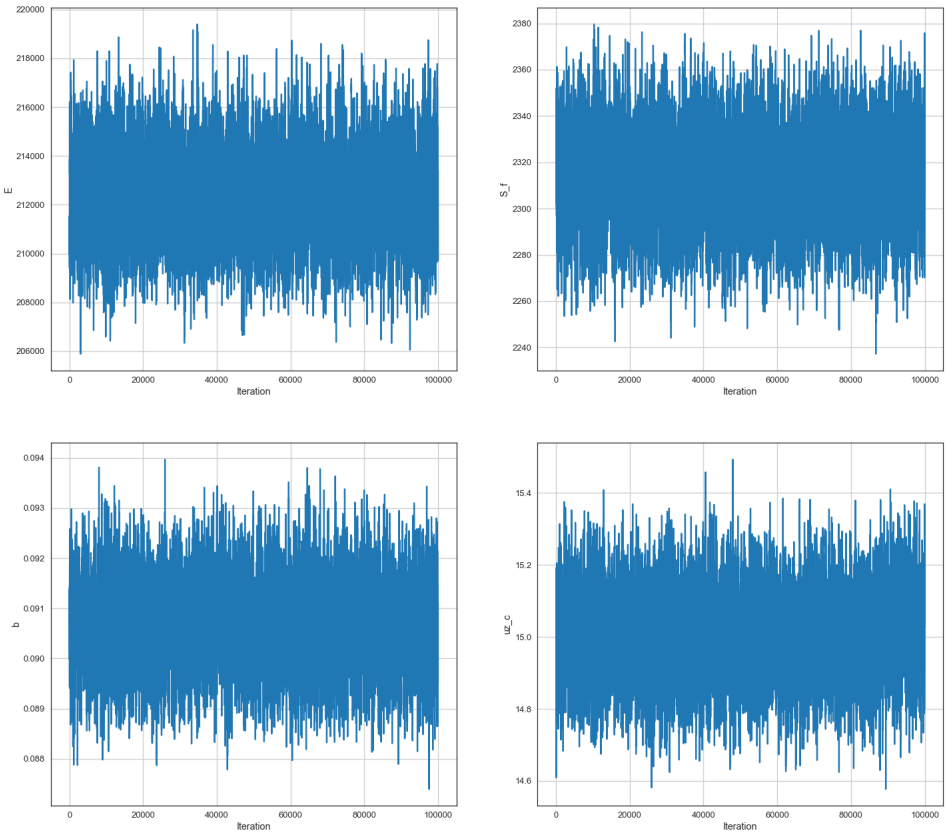


Fig. 4.38. Algorithme M-H avec (s=0.55) et une taille d'échantillon de $N = 10^5$

obtenus à l'issue de l'actualisation des paramètres d'entrée du modèle mécano-probabiliste pour la version de référence $\mathcal{D}_{ref}$ du mécanisme.

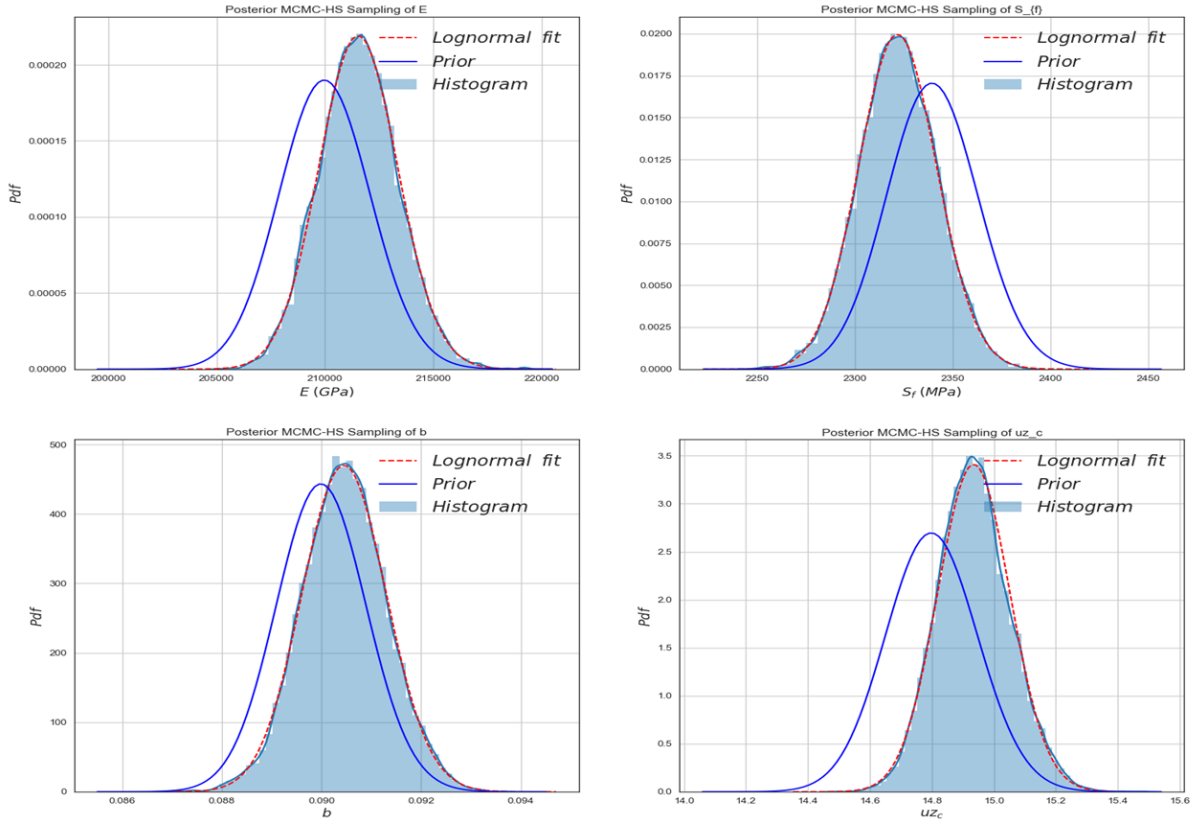


Fig. 4.39. Comparaison des densités a priori et actualisées des paramètres d'entrée de $\mathcal{D}_{ref}$

TABLE *4.21*
Résultats de l'actualisation inverse des paramètres du modèle mécano-probabiliste de $\mathcal{D}_{ref}$

Paramètre	**Distribution**	**Moyenne**	**Écart-type**
E(GPa)	LogNormale	212.0664	1.7897
$\sigma'_f(MPa)$	LogNormale	2313.3602	17.2266
ε'_f	Constant	0.45	-
b	LogNormale	0.0906	$7.9001.10^{-4}$
c	Constant	0.59	-
$u_p(mm)$	Constant	4.15	-
$u_c(mm)$	LogNormale	14.9990	0.1151

Une fois les nouvelles distributions des paramètres obtenues, elles sont ensuite utilisées pour refaire l'analyse de fiabilité prévisionnelle par couplage mécano-probabiliste et toujours grâce à la construction du méta-modèle de substitution par la méthode de décomposition de la dimension suivie des simulations *Monte-Carlo*.

Les moments statistiques de la durée de vie de la conception de référence $\mathcal{D}_{ref}$, obtenus après actualisation sont reportés dans le tableau 4.22 et les paramètres de la distribution de durée de vie, reportés dans le tableau 4.23.

La courbe de fiabilité numérique après actualisation pour la conception de référence $\mathcal{D}_{ref}$ est construite et représentée sur la figure 4.40. Elle y est comparée avec la courbe de fiabilité numé-

TABLE *4.22 Moments statistiques actualisés de la durée de vie numérique pour $\mathcal{D}_{ref}$*

Moyenne	Écart-type	Asymétrie	Kurtosis	CV
46283.578	5623.509	0.138	3.042	12.15%

TABLE *4.23 Paramètres actualisés de la distribution de durées de vie numérique pour $\mathcal{D}_{ref}$*

Distribution	$\widehat{\mu}^{numAc}_{\mathcal{D}_{ref}}$	$\widehat{\sigma}^{numAc}_{\mathcal{D}_{ref}}$
LogNormale	10.742	0.121

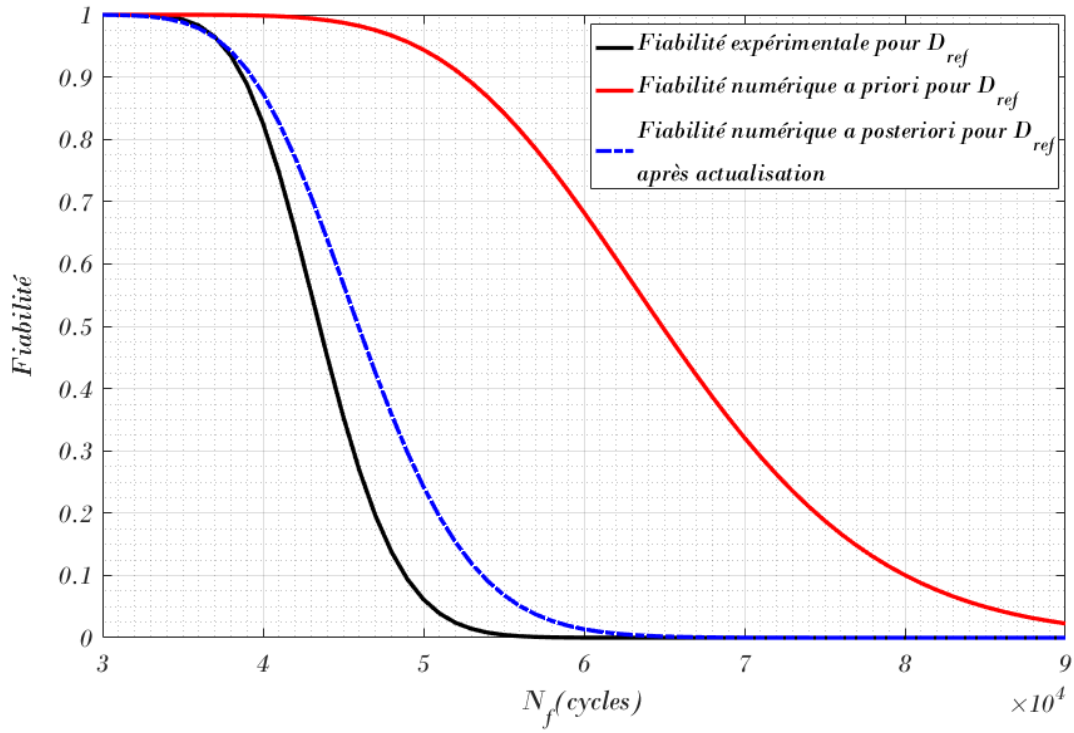


Fig. 4.40. Comparaison de la fiabilité numérique actualisée et a priori pour la conception $\mathcal{D}_{ref}$

rique a priori de $\mathcal{D}_{ref}$. On constate une amélioration importante de l'estimation prévisionnelle de fiabilité.

Les paramètres matériaux étant identiques pour les deux versions du mécanisme, nous réalisons à nouveau l'estimation de la courbe de fiabilité numérique de la nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ en utilisant les distributions actualisées des paramètres d'entrée (paramètres matériaux) du modèle mécano-probabiliste.

Les moments statistiques et les paramètres de distribution de la durée de vie sont respectivement reportés dans les tableaux 4.24 et 4.25.

TABLE *4.24 Moments statistiques actualisés de la durée de vie numérique pour $\mathcal{D}_{up}$*

Moyenne	Écart-type	Asymétrie	Kurtosis	CV
27245.086	4220.100	0.402	3.384	15.489%

TABLE *4.25 Paramètres actualisés de la distribution de durées de vie numérique pour $\mathcal{D}_{up}$*

Distribution	$\widehat{\mu}^{numAc}_{\mathcal{D}_{up}}$	$\widehat{\sigma}^{numAc}_{\mathcal{D}_{up}}$
LogNormale	10.2126	0.154

Pour finir, la loi de fiabilité numérique actualisée de la conception $\mathcal{D}_{up}$ est construite sur la figure 4.41. Sur cette même figure, la loi de fiabilité numérique construite a priori ainsi que les résultats des quelques essais réalisés sur la nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ du mécanisme, sont comparés à la loi de fiabilité actualisée. On remarque donc, une amélioration importante de la qualité d'estimation de la fiabilité prévisionnelle de $\mathcal{D}_{up}$, en intégrant de la connaissance existante sur le mécanisme de référence $\mathcal{D}_{ref}$, par l'intermédiaire de l'identification inverse des distributions des paramètres matériaux en entrée du modèle mécano-probabiliste.

Ensuite sur la figure 4.42, en comparant la loi de fiabilité numérique actualisée de $\mathcal{D}_{up}$ obtenue avec l'approche d'actualisation inverse, avec les lois de fiabilité *expérimentales* estimées par l'approche basée sur le facteur de similitude et celle basée sur la fonction de transfert temporel, on peut conclure que les trois approches permettent d'obtenir, une meilleure estimation de fiabilité qu'une estimation numérique pure. Plus particulièrement dans la zone d'intérêt qui est la zone de fiabilité située entre 70% et 100%, la méthode FTT donne une meilleure estimation de fiabilité. Ce résultat montre en même temps l'intérêt de la méthodologie d'estimation de fiabilité que nous avons proposée, dans la mesure où cette dernière se passe d'une bonne connaissance des distributions des paramètres d'entrée, et constitue donc une solution intéressante pour l'estimation de la fiabilité dès la phase de conception.

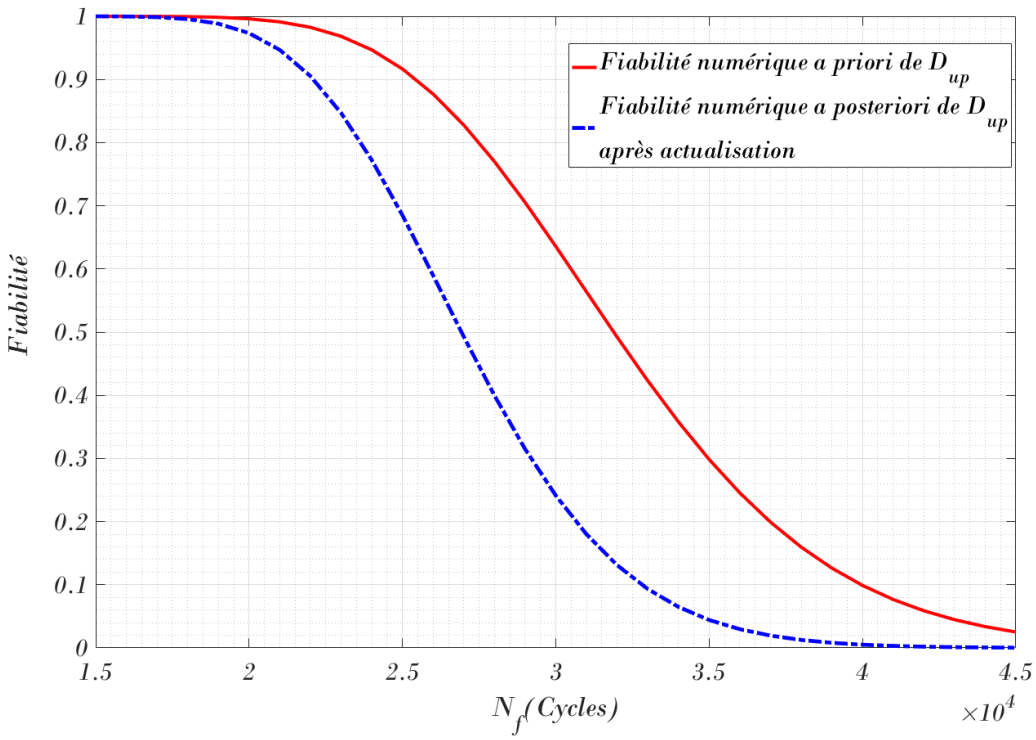


Fig. 4.41. Comparaison de la fiabilité numérique actualisée et a priori pour la conception $\mathcal{D}_{up}$

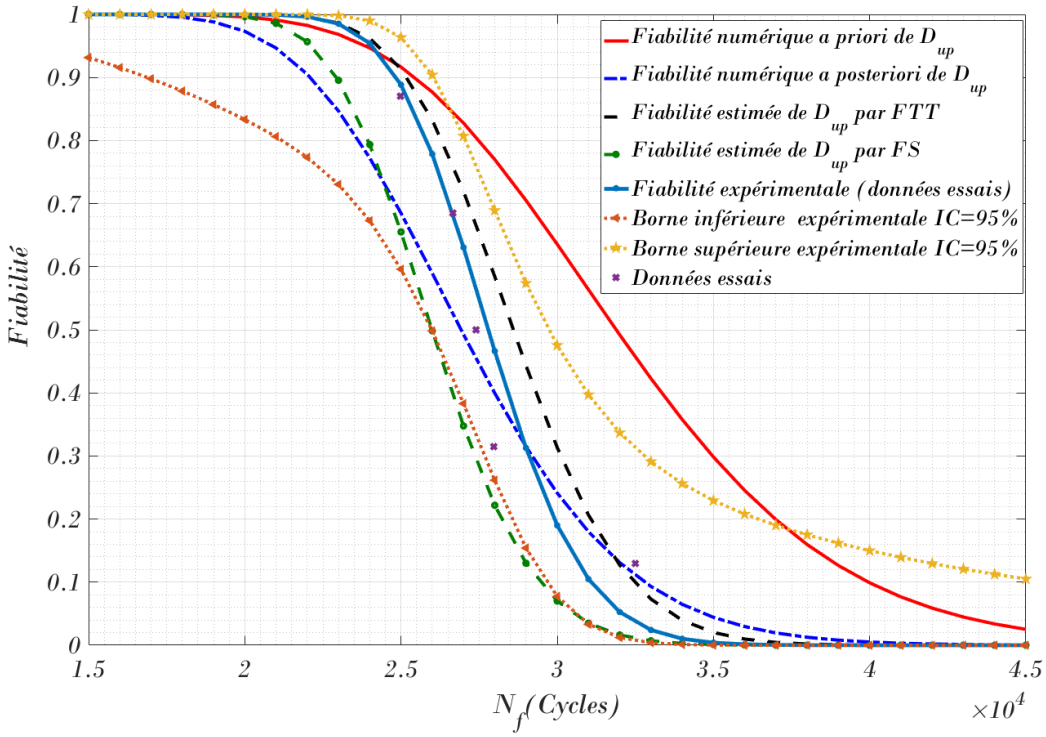


Fig. 4.42. Comparaison de la fiabilité numérique actualisée et celles obtenues par méthodes FS et FTT pour la conception $\mathcal{D}_{up}$

Pour une comparaison plus objective, nous avons calculé et reporté dans le tableau 4.26 les distances de Kolmogorov-Smirnov des trois méthodes par rapport aux données essais. En considérant toutes la plage de niveaux de fiabilité $[0,1]$, nous obtenons respectivement comme distance maximale de Kolmogorov-Smirnov $D_{KS}^{FS} = 0.403$ pour la méthode FS et $D_{KS}^{FTT} = 0.389$ pour la méthode FTT et $D_{KS}^{Actu} = 0.316$ pour la méthode d'actualisation inverse. A partir de ces distances, on peut déduire que la méthode d'actualisation inverse donne une meilleure estimation globale, suivie par la méthode FTT.

TABLE *4.26 Comparaison des distances de Kolmogorov-Smirnov après actualisation*

Méthode	**Calcul des écarts**					
Essais	i	1	2	3	4	5
	X_i	24983	26660	27400	27970	32500
	$\frac{i}{n}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1
	$\frac{i-1}{n}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
FS	$F(X_i)$	0.342	0.603	0.706	0.775	0.989
	$\lvert F(X_i) - \frac{i}{n}\rvert$	0.142	0.203	0.106	0.025	0.011
	$\lvert F(X_i) - \frac{i-1}{n}\rvert$	0.342	0.403	0.306	0.175	0.189
FTT	$F(X_i)$	0.085	0.239	0.332	0.411	0.903
	$\lvert F(X_i) - \frac{i}{n}\rvert$	0.115	0.161	0.268	0.389	0.097
	$\lvert F(X_i) - \frac{i-1}{n}\rvert$	0.085	0.039	0.067	0.189	0.103
Actualisation	$F(X_i)$	0.313	0.474	0.545	0.598	0.889
	$\lvert F(X_i) - \frac{i}{n}\rvert$	0.113	0.074	0.055	0.202	0.111
	$\lvert F(X_i) - \frac{i-1}{n}\rvert$	0.316	0.275	0.145	0.002	0.089

4.6 Plan de qualification du nouveau mécanisme

Pour terminer cette application, nous nous intéressons à la qualification (démonstration de fiabilité) de la nouvelle version de mécanisme $\mathcal{D}_{up}$. Comme nous l'avons présenté dans le chapitre précédent, un plan de qualification cherche à définir la taille d'échantillon et/ou le temps d'essai nécessaire pour garantir un niveau de fiabilité exigé avec un niveau de risque donné.

On se propose de définir un plan de démonstration de la fiabilité de la nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ du mécanisme que nous étudions. Dans un premier temps, le plan de démonstration classique sera comparé à un plan de démonstration Bayésien. Ensuite en prenant comme vraisemblance les quelques essais réalisés sur le mécanisme $\mathcal{D}_{up}$, la loi de fiabilité Bayésienne sera aussi étudiée.

4.6.1 Plan de démonstration classique et Bayésien

Les données d'entrée sont les suivantes :

— On opte pour un plan à zéro défaillance ($k = 0$),

— On cherche à démontrer un niveau de fiabilité de $R_{demo} = 0.95$ pour une durée de vie $t_{demo} = 24000$ cycles.

— Le risque client est fixé à $\alpha = 5\%$

La distribution des durées de vie est une loi LogNormale de paramètres (μ_{LN}, σ_{LN}).

On s'intéresse premièrement au cas d'un plan de démonstration classique. Dans ce cas, le paramètre de forme σ_{LN} étant généralement déduit du retour d'expérience sur des produits similaires, il serait dans notre cas égal au paramètre de forme de la distribution LogNormale expérimentale de la version de référence, soit $\sigma_{LN} = 0.09725$.

Pour le plan de démonstration classique, en fixant la durée de l'essai (t_{essai}), la taille d'échantillon nécessaire n s'obtient par :

$$n \geq \frac{ln(\alpha)}{ln(R_{essai})} \tag{4.39}$$

où R_{essai} est le niveau de fiabilité correspondant à (t_{essai}.

Connaissant aussi la fiabilité à démontrer R_{demo} et la durée de vie à démontrer t_{demo}, on peut donc calculer le paramètre d'échelle μ_{LN} à partir de l'écriture de R_{demo} en fonction de la fonction de répartition d'une distribution LogNormale :

$$1 - R_{demo} = \Phi\left(\frac{ln\left(t_{demo}\right) - \mu_{LN}}{\sigma_{LN}}\right) \tag{4.40}$$

soit :

$$\mu_{LN} = ln\left(t_{demo}\right) - \sigma_{LN} \times \Phi^{-1}\left(1 - R_{demo}\right) \tag{4.41}$$

Ensuite, le niveau de fiabilité R_{essai} dans l'équation 4.39 est calculé par l'équation 4.42 et la taille d'échantillon n obtenue.

$$R_{essai} = 1 - \Phi\left(\frac{ln\left(t_{essai}\right) - \mu_{LN}}{\sigma_{LN}}\right) \tag{4.42}$$

Le tableau 4.27 récapitule les résultats pour différents t_{essai} fixés, sans défaillance.

TABLE *4.27 Plan démonstration zéro défaillance : nombre d'essais à réaliser pendant t_{essai}*

$t_{essai}(cycles)$	R_{essai}	n
22500	0.9895	285
25000	0.8897	26
27500	0.5967	6
30000	0.2579	3

Étudions à présent le plan de démonstration Bayésien. Les mêmes données d'entrée que précédemment sont utilisées. A partir de la méthodologie d'estimation de fiabilité en phase de développement, que ce soit celle basée sur le facteur de similitude ou celle basée sur la fonction de transfert temporel, nous avons une première estimation de la fiabilité R_{demo} pour un nombre de cycles à démontrer t_{demo}. L'information est donnée par une valeur médiane et un intervalle de confiance à 95%. Pour $t_{demo} = 24000$, les niveaux de fiabilité obtenus par la méthode basée sur la fonction de transfert, sont contenus dans le tableau 4.28.

TABLE *4.28 Information sur la fiabilité R_{demo} à t_{demo}*

t_{demo}	R_{demo}^{min}	R_{demo}^{moy}	R_{demo}^{max}
24000	0.9230	0.9610	0.9807

La fiabilité R est supposée être distribuée suivant une loi $Beta(\alpha_0, \beta_0)$. Par la méthode des moments, nous déduisons donc à partir de l'intervalle de confiance $\left[R_{demo}^{min}, R_{demo}^{min}\right]$, les paramètres (α_0, β_0). On obtient :

$$\begin{cases} \alpha_0 &= 112.1854 \\ \beta_0 &= 12.2559 \end{cases}$$

La taille d'échantillon n pour un plan à zéro défaillance se déduit en résolvant l'équation :

$$\int_0^{R_{demo}^{min}} Beta\left(\alpha_0 + 1, \beta_0 + n + 1\right) dR = \frac{\alpha}{2} \tag{4.43}$$

Nous obtenons donc un échantillon de $n = 9$ composants à tester chacun pendant 24000 Cycles sans défaillance. Comparé au plan de démonstration classique, on note une diminution de la taille d'échantillon. Par exemple, le plan classique nécessiterait $n = 26$ composants à tester sans défaillance pendant 25000 cycles.

Dans le cadre de ce travail, à cause de certaines contraintes, ce plan d'essai n'a pas pu être déployé. Par contre, dés la disponibilité des premiers prototypes du nouveau mécanisme $\mathcal{D}_{up}$, un certain nombre d'essais ont été conduits par FAURECIA. Cette dernière étant très intéressée par la courbe de fiabilité expérimentale de $\mathcal{D}_{up}$, nous avons alors dans un esprit de réduction de coûts, identifié et retenu parmi ces essais, ceux qui pourront servir à construire une estimation de la loi de fiabilité expérimentale du mécanisme $\mathcal{D}_{up}$. Ce sont ces essais qui constituent les points expérimentaux que nous avons utilisés dans les sections 4.5.2 et 4.5.3 pour comparer les résultats obtenus par les deux méthodologies FS et FTT que nous avons développées. Ces essais étant en faible quantité, une approche Bayésienne a donc été utilisée dans ce cens. C'est ce qui fera l'objet de ce qui suit.

4.6.2 Estimation Bayésienne de fiabilité après essais

Une fois des résultats d'essais sont disponibles, il est possible de procéder à l'estimation expérimentale de la courbe de fiabilité. Pour obtenir une meilleure estimation, il est nécessaire d'avoir réalisé suffisamment d'essais. Cependant, dans un soucis d'optimisation de coûts d'essais, les industriels ont tendance à limiter autant que possible la taille d'échantillon à tester. Comme nous l'avons déjà présenté, une méthode d'estimation Bayésienne peut s'avérer fort utile lorsque utilisée avec considération de la compatibilité de l'information disponible a priori. Dans le cas de la nouvelle version du mécanisme étudiée $\mathcal{D}_{up}$, nous nous proposons de réaliser une estimation Bayésienne de la loi de fiabilité en utilisant le résultat obtenu par notre méthodologie d'estimation de fiabilité en phase de conception basée sur la fonction de transfert temporel et la vraisemblance constituée des quelques essais réalisés par les ingénieurs projets.

Premièrement, nous étudions l'estimation Bayésienne classique présentée dans la section 3.6.2. Comme information a priori, nous considérons la valeur médiane du paramètre μ et l'intervalle de confiance du paramètre σ estimés par la méthode FTT (voir tableau 4.19). Les paramètres a, b, c de la fonction de densité conjointe a priori (équation (3.70)) sont calculés respectivement par les équations 3.98, 3.99, et 3.101. Ensuite les paramètres a', b', c' de la fonction de densité conjointe a posteriori (équation 3.75) sont aussi calculés respectivement par les équations 3.76, 3.77, et 3.78. Nous obtenons comme résultats, $a = 39.5730$, $b = 0.3617$, $c = 10.2326$ et $a' = 42.0730$, $b' = 0.3826$, $c' = 10.2598$.

Les estimateurs Bayésiens $\left(\widehat{\mu}^{BC}_{\mathcal{D}_{up}}, \widehat{\sigma}^{BC}_{\mathcal{D}_{up}}\right)$ des paramètres de la distribution de durées de vie sont obtenus à partir des équations 3.91 et 3.92, et les bornes correspondants à un intervalle de confiance 95% sont calculés et reportés dans le tableau 4.29.

TABLE *4.29 Résultats par approche Bayésienne classique*

Distribution	$\widehat{\mu}^{BC}_{\mathcal{D}_{up}}$			$\widehat{\sigma}^{BC}_{\mathcal{D}_{up}}$		
LogNormale	*Min*	*Moy*	*Max*	*Min*	*Moy*	*Max*
	10.2390	10.2598	10.2806	0.0829	0.0965	0.1123

La figure 4.43 compare la courbe de fiabilité Bayésienne avec l'estimation a priori et la vraisemblance.

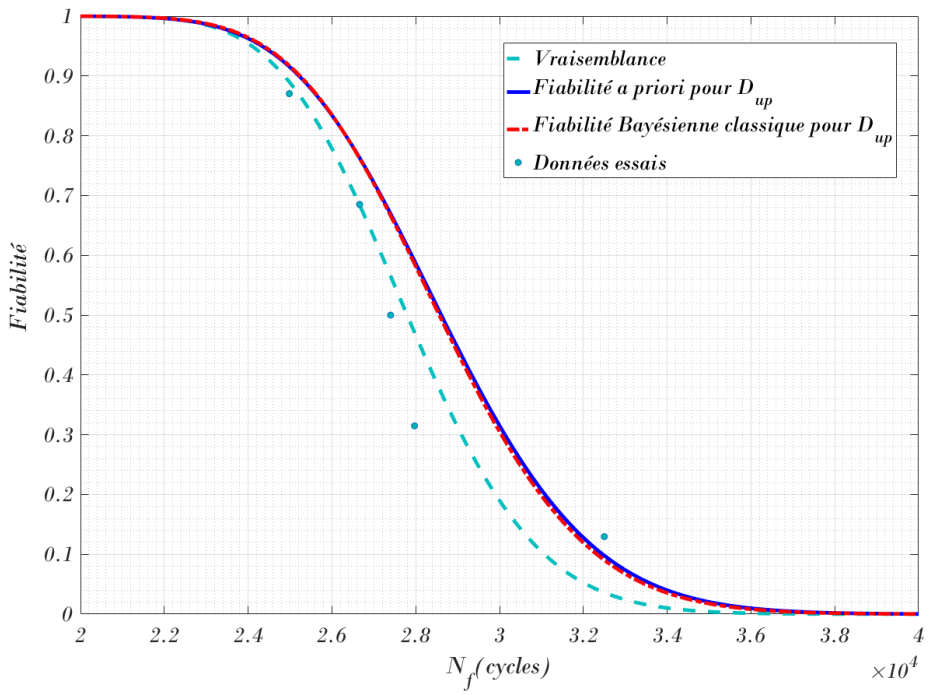


Fig. 4.43. Estimation de la fiabilité de $\mathcal{D}_{up}$ par approche Bayésienne classique

Une étude de compatibilité de l'a priori permet de limiter le biais dans l'estimation Bayésienne, en pondérant l'information a priori en fonction de son degré de compatibilité avec la vraisemblance. Ainsi, l'estimation Bayésienne avec pondération de l'a priori présentée dans la section 3.6.3 a aussi été réalisée.

Le coefficient de pondération obtenu par calcul numérique à partir de l'équation 3.103 est de $k_p = 0.9547$. Ce coefficient très proche de 1 signifie une forte compatibilité entre l'a priori donnée par la méthodologie d'estimation de fiabilité que nous avons proposée, et la vraisemblance donnée par les quelques essais. Dans ce cas l'a priori prend un poids très important, c'est à dire il est totalement intégré dans l'actualisation Bayésienne. Par conséquent, la courbe de fiabilité obtenue reste très proche de la courbe de fiabilité a priori (figure 4.44).

Une autre interprétation du coefficient K_p élevé, est donc la cohérence des résultats obtenus par la méthodologie d'estimation de fiabilité proposée, avec les essais réels.

Comme on peut le remarquer, les résultats obtenus sur l'estimation des paramètres $\left(\widehat{\mu}^{BP}_{\mathcal{D}_{up}}, \widehat{\sigma}^{BP}_{\mathcal{D}_{up}}\right)$

de la distribution LogNormale après pondération (tableau 4.30) et les bornes de confiance à 95%, sont pratiquement égaux à ceux obtenus précédemment par la méthode Bayésienne classique.

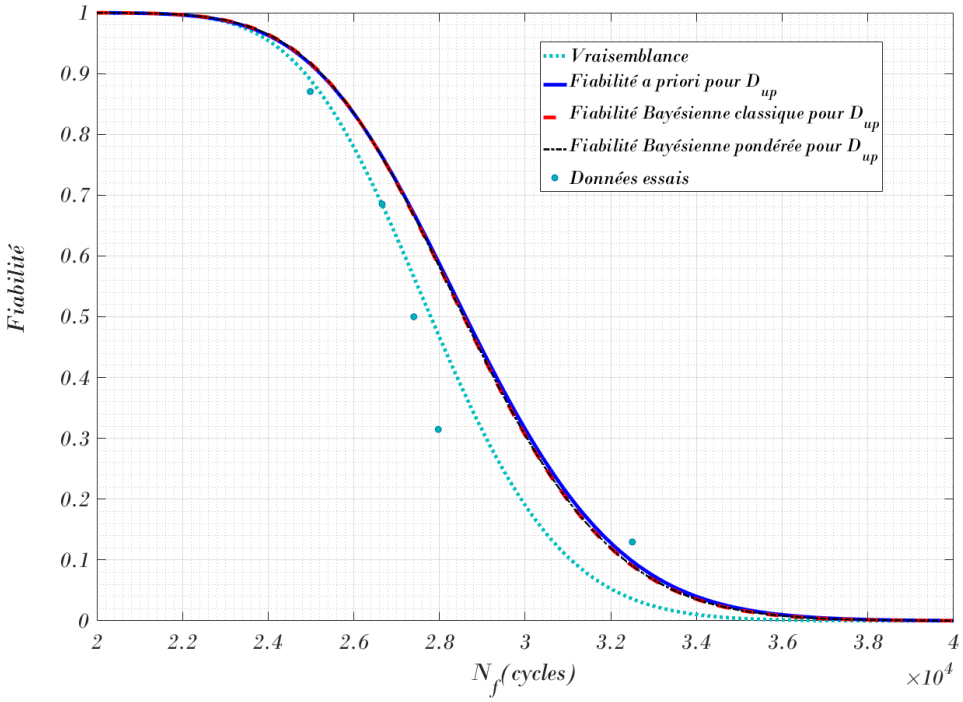


Fig. 4.44. Estimation de la fiabilité de $\mathcal{D}_{up}$ par approche Bayésienne avec pondération

TABLE *4.30 Résultats par approche Bayésienne avec pondération*

Distribution	$\widehat{\mu}^{BP}_{\mathcal{D}_{up}}$			$\widehat{\sigma}^{BP}_{\mathcal{D}_{up}}$		
LogNormale	*Min*	*Moy*	*Max*	*Min*	*Moy*	*Max*
	10.2368	10.2583	10.2798	0.0836	0.0977	0.1141

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une étude de cas pour tester les capacités de la méthodologie d'estimation de fiabilité en phase de développement que nous avons développée. L'application porte sur un mécanisme de verrouillage/déverrouillage de coulissement longitudinal d'une glissière de siège automobile. Le retour d'expérience existant sur la version de référence $\mathcal{D}_{ref}$ du mécanisme est constitué de résultats d'essais accélérés, et nous a permis grâce à un modèle de durée de vie accélérée, de construire dans un premier temps une loi de fiabilité expérimentale de référence.

Le principe de base de la méthodologie d'estimation de fiabilité proposée, est la combinaison de retour d'expérience avec une méthode d'estimation prévisionnelle (numérique) de fiabilité. Aussi, pour obtenir les lois de fiabilité numériques pour la version de référence et la nouvelle version du mécanisme, leurs modèles numériques mécano-probabilistes ont été développés. Ceci à nécessiter d'une part, la construction de modèles éléments finis 3D déterministes, et d'autres

part la modélisation des paramètres de conceptions incertains (notamment les paramètres matériaux et chargement) par des distributions statistiques. Ensuite, nous avons construit un modèle de substitution (méta-modèle) du modèle mécano-probabiliste initial implicite (constitué d'un modèle éléments finis), afin de réduire les temps de calculs nécessaires. Ce modèle de substitution est construit en utilisant la méthode de décomposition dimensionnelle et la projection sur une base polynomiale de Lagrange.

Les résultats ont montré que l'utilisation de la technique de méta-modélisation pour la propagation de l'incertitude à travers un modèle mécanique contribue significativement à l'efficacité de l'approche proposée, puisque seulement 25 calculs éléments finis pour chaque version du mécanisme sont nécessaires, pour obtenir un modèle de substitution capable de reproduire avec précision le comportement mécanique réel. Ceci est principalement dû à la structure de l'approximation polynomiale donnée par la méthode de décomposition dimensionnelle, où les interactions d'ordre élevé mais à effet faible sont automatiquement omises. En effet, une simple décomposition unidimensionnelle a été suffisante pour bien reproduire le comportement non linéaire du composant mécanique. Par la suite, pour chaque version du mécanisme, la distribution de la durée de vie en fatigue est obtenue en réalisant des simulations de *Monte-Carlo* sur le modèle de substitution correspondant.

Pour la première approche proposée, l'utilisation du facteur de similitude est fortement lié à l'hypothèse de constance de facteur de forme des distributions, ce qui ne permet pas une généralisation. Les résultats obtenus montrent tout de même une meilleure estimation de fiabilité par rapport aux résultats purement numériques, et sont plus acceptables comparés aux quelques résultats issus d'essais réels. En ce qui concerne la deuxième approche, nous avons montré sur l'application, que la loi puissance est bien adaptée pour construire la fonction de transfert temporel entre les courbes de fiabilités expérimentale et numérique. La fonction de *fiabilité expérimentale* estimée pour la nouvelle conception grâce à cette méthodologie, est proche des résultats expérimentaux.

L'écart observé entre fiabilité numérique et expérimentale, peut être principalement dû aux hypothèses faites sur les modèles probabilistes (c'est-à-dire le type de distribution et caractéristiques statistiques des variables aléatoires) représentant la variabilité des paramètres d'entrée incertains. Nous avons implémenté une méthode d'identification inverse des distributions des paramètres incertains du modèle mécano-probabiliste. La démarche basée sur une technique d'échantillonnage Monte-Carlo-Markov-Chain ($MCMC$), a consisté à redéterminer à partir de résultats expérimentaux de durées de vie du mécanisme de référence $\mathcal{D}_{ref}$, les paramètres d'entrée du modèle mécanique correspondant, notamment les paramètres matériaux. Ensuite ces nouvelles distributions son utilisées pour reconstruire les lois de fiabilité numériques pour les deux versions $\mathcal{D}_{up}$ et $\mathcal{D}_{ref}$ du mécanisme. Les résultats montrent une nette amélioration de l'estimation prévisionnelle de la fiabilité.

En résumé, les résultats sont encourageants, et l'approche globale proposée offre une alternative

intéressante pour réaliser des estimations de fiabilité en phase de développement.

Pour finir, nous avons utilisé les résultats obtenus par la méthodologie développée comme une connaissance a priori pour améliorer dans un premier temps, le plan de démonstration classique (réduction de taille d'échantillon à tester). Ensuite, cette connaissance a priori est couplée aux premiers essais réalisés sur le mécanisme pour l'estimation Bayésienne (classique et pondérée) de la fonction de fiabilité.

5

Conclusions et perspectives

« *Strive not to be a success, but rather to be of value.* »

Albert Einstein

Contents

5.1 Introduction 186
5.2 Propositions et résultats obtenus 186
5.3 Perspectives 189

5.1 Introduction

Ce chapitre vient clore les travaux de thèses présentés dans ce manuscrit. La problématique traitée est un axe de recherche important dans le monde de l'ingénierie de la fiabilité. Intitulée méthodologie d'estimation de fiabilité et de qualification de systèmes mécaniques en phase de développement, elle visait à proposer des solutions pour répondre aux difficultés suivantes, exprimées plus spécifiquement par l'équipementier FAURECIA :

— Comment capitaliser le retour d'expérience existant dans le cadre développements de de nouveaux produits ?

— Comment obtenir au plus tôt dans la phase de développement une estimation de fiabilité garantissant une bonne prise de décision quant à la tenue du produit en conditions clientèles ?

— Et pour finir, comment optimiser la démarche de qualification du produit ?

Dans un cadre plus générale, pour tout industriel, face aux exigences accrues de fiabilité et sûreté, la problématique d'estimation de fiabilité est d'un grand intérêt. La tendance est l'amélioration de la qualité d'estimation tout en optimisant les coûts inhérents. Dans le cas de développement de nouveaux produits, l'autre défi est d'obtenir cette estimation au plus tôt dans la phase de développement, afin d'anticiper les améliorations si nécessaire. Les approches purement numériques et purement expérimentales sont limitées dans ce contexte. Nous avons donc proposé une méthodologie combinant le retour d'expérience existant sur un produit de référence, pour répondre à la problématique d'estimation de fiabilité au plus tôt dans la phase de développement d'un nouveau produit similaire.

Nous résumons ici dans un premier temps, les approches proposées dans le cadre de la méthodologie, ainsi que les résultats obtenus. Dans un second temps, pour aller plus loin dans l'amélioration de la méthodologie, nous proposons en perspectives quelques axes.

5.2 Propositions et résultats obtenus

La méthodologie d'estimation de fiabilité développée est constituée de trois grandes parties. La première est la construction de loi de fiabilité de référence à partir d'une analyse du retour d'expérience existant. La deuxième partie est l'estimation de fiabilité prévisionnelle à partir de modèles numériques basés sur un couplage mécano-probabiliste. Enfin la troisième partie et le coeur de la méthodologie concerne l'intégration du retour d'expérience dans l'approche numérique pour déterminer une première estimation de la *fiabilité expérimentale* d'un nouveau développement.

Le type d'analyse du retour d'expérience dépend de la nature des données. Dans le cadre de ce travail, il était constitué de résultats d'essais accélérés. Un modèle de durée de vie accélérée

basé sur une loi d'accélération puissance inverse et une loi de distribution LogNormale a été proposé et validé. Nous avons pu ainsi déduire une loi de fiabilité expérimentale en condition normale de fonctionnement du mécanisme de référence $\mathcal{D}_{ref}$.

L'estimation de fiabilité prévisionnelle, a nécessité le développement de modèles éléments finis $3D$. Ces modèles sont ensuite couplés à un modèle probabiliste représentant les paramètres incertains par des variables aléatoires dont les caractéristiques statistiques sont identifiées en se basant sur le jugement des ingénieurs et la nature physique des paramètres incertains. Les méthodes classiques de propagation d'incertitudes n'étant pas adaptées pour construire les distributions de durées de vie, nous avons eu à construire un méta-modèle ou modèle de substitution, grâce à la méthode de décomposition dimensionnelle. Cette technique de méta-modélisation a permis d'obtenir à un coût de calcul réduit, une surface de réponse approximant avec une grande précision le comportement du modèle mécanique. Le modèle de substitution couplé aux simulations de $Monte-Carlo$ a permis ensuite d'obtenir facilement la distribution des durées de vie et par déduction les lois de fiabilité numériques des mécanismes étudiés.

Pour obtenir une approximation de la *fiabilité expérimentale* de la nouvelle conception $\mathcal{D}_{up}$, deux approches ont été utilisées : La première basée sur un facteur de similitude entre la fiabilité numérique (ou prévisionnelle) et la fiabilité expérimentale ; la deuxième basée sur une fonction de transfert temporel entre la fiabilité numérique et la fiabilité expérimentale. Une fois le facteur de similitude ou la fonction de transfert obtenus à partir de la version de référence $\mathcal{D}_{ref}$ du mécanisme, la *fiabilité expérimentale* attendue pour toute nouvelle version $\mathcal{D}_{up}$ du même mécanisme est facilement déduite en appliquant le facteur de similitude ou la fonction de transfert temporel à la fiabilité numérique de cette nouvelle version.

La première approche est fortement liée à l'hypothèse de conservation du facteur de forme de la loi de fiabilité expérimentale et celui de la fiabilité numérique. cette hypothèse n'est pas toujours vérifiable dans la réalité. La deuxième approche basée sur une fonction de transfert temporel, a permis de passer outre cette hypothèse, en offrant une méthode plus généralisable.

La version de référence, et la nouvelle version d'un même type de produit sont considérées a priori de manière subjective comme deux produits similaires. C'est sur cette base que le facteur de similitude ou la fonction de transfert construits à partir de la version de référence, peuvent être transposés sur la nouvelle version. Pour apprécier plus objectivement, la similarité entre les deux versions, nous avons proposé une méthode basée sur l'étude de linéarité entre les sensibilités des modèles mécano-probabilistes des deux versions, aux perturbations de leurs paramètres d'entrée.

Les deux approches ont finalement été testées sur un cas d'application industriel. Le produit étudié est un mécanisme automobile utilisé pour le verrouillage et déverrouillage du coulissement longitudinal d'une glissière automobile. Les résultats obtenus, nous donnent une estimation de fiabilité plus réaliste en début de phase de développement, qu'une estimation purement numérique n'intégrant pas de retour d'expérience existant. Ce résultat est très intéressant, car montre

qu'on peut construire à partir d'un modèle numérique de référence, imparfait et probablement entaché d'erreurs dues aux hypothèses simplificatrices, une information (facteur de similitude, fonction de transfert temporel) qui intégrée dans l'étude de fiabilité prévisionnelle de nouveaux développements, peut s'avérer fort utile à l'amélioration des estimations. Pour un industriel c'est ce qui est recherché : prédire tôt, à moindre coût, avec une précision acceptable.

Nous avons aussi montré, grâce à une technique d'identification inverse probabiliste des paramètres d'entrée des modèles mécano-probabilistes, qu'on peut améliorer énormément la qualité d'estimation prévisionnelle de la fiabilité. En effet l'une des sources principales d'erreurs dans l'estimation de fiabilité par les méthodes numériques mécano-probabiliste, est la méconnaissance de la distribution des paramètres d'entrée. Plus particulièrement dans notre cas, les paramètres matériaux étaient difficilement accessibles. La technique d'échantillonnage Monte-Carlo-Markov-Chain ($MCMC$) basée sur l'algorithme Metropolis-Hastings, nous a permis de reconstruire ces distributions à partir du retour d'expérience existant qui est la distribution expérimentale de durées de vie du mécanisme $\mathcal{D}_{ref}$.

La dernière partie des travaux, portant sur l'optimisation de la démarche de qualification du nouveau développement $\mathcal{D}_{up}$, n'a pu être abordée que sommairement. Nous nous sommes limiter au plan de démonstration d'un objectif de fiabilité, par une démarche connue qui consiste soit, à déterminer la taille d'échantillons en fixant la durée d'essais et le nombre de défaillances acceptable, soit à déterminer la durée d'essais en fixant un nombre d'essais et un nombre de défaillances acceptables. L'utilisation d'une telle démarche dans un cadre Bayésien faisant appel à une connaissance existante a été possible, grâce à la méthodologie d'estimation de fiabilité que nous avons proposé, qui a donc permis de construire cette connaissance a priori nécessaire. On constate avec cet apport d'information, une réduction de la taille d'échantillon à tester. Dans le même contexte, l'estimation Bayésienne de fiabilité a été réalisée dès alors qu'on dispose de quelques résultats d'essais. L'approche Bayésienne classique ainsi qu'une approche Bayésien incluant une pondération de l'information a priori en fonction de sa compatibilité avec la vraisemblance (les résultats d' essais) ont été implémentées. Dans notre cas d'application, l'écart entre les résultats obtenus n'est pas significatif, puisque la compatibilité entre l'a priori (donnée par la méthodologie proposée) et la vraisemblance (les essais) étant trouvée très grande (Proche de 1). Néanmoins, ceci montre que la fiabilité estimée par notre méthodologie est en bon accord avec la vraie fiabilité expérimentale du mécanisme $\mathcal{D}_{up}$.

Les travaux de cette thèse ont fait l'objet des publications et communications suivantes :

— Proceedings of the 51st ESReDA Seminar, Clermont-Ferrand, France, October 20th 21st, 2016 : *Reliability assessment of automotive components under fatigue using numericalsimulation and accelerated testing.*

— Journée des Doctorants (EDSTIM), Nantes Avril 2017 : *Méthodologie destimation de fiabilité de systèmes mécaniques en phase de développement.(Premier Prix, meilleur Poster Scientifique JDOC 2017).*

— Séminaire Doctoral International Francophone, Mai 17-18, 2017, Angers ISTIA : *Méthodologie destimation de fiabilité de systèmes mécaniques en phase de développement.*
— Conférence QUALITA 2017 : *Reliability assessment of mechanical product using numerical simulation and a similarity factor.*
— Journée d'Etude et Exposition SIA fiabilité qualité-sécurité : *Integration of the feedback experience in the reliability estimation of new designs : Approach based on a similarity factor.*
— Article soumis à Reliability Engineering and System Safety, International Journal et en cours de révision : *A novel approach based on meta-modeling technique and time transformation function for reliability analysis of upgraded automotive components.*

5.3 Perspectives

En perspectives, d'autres travaux pourraient être envisagés en vue de l'amélioration de la méthodologie proposée.

Un axe d'amélioration concerne la modélisation probabiliste des paramètres d'entrée des modèles mécano-probabilistes. En effet les types de distributions et les valeurs des paramètres statistiques devraient découler d'une analyse de données suffisantes, et validés par des tests statistiques ; ce qui n'a pas été le cas.

L'approche proposée pour étudier objectivement la similarité entre deux versions d'un mécanisme, attribue arbitrairement des coefficients de variations (appelés niveaux de perturbation) sur les paramètres d'entrée des modèles mécano-probabilistes. Cette pratique n'est pas réaliste. Une étude plus approfondie sera nécessaire pour obtenir une approche plus pertinente.

Nous n'avons pu réaliser qu'un cas d'application au cours des travaux de la thèse. D'autres cas d'applications devront être réalisés, pour d'une part explorer au mieux la capacité de la méthodologie, et d'autre part définir ses limites.

Enfin, l'optimisation d'un plan d'essais Bayésiens accélérés dans un contexte de qualification pourra être envisagée. En effet, dans le cadre d'un nouveau développement de produit, la fonction de transfert temporel (FTT) entre fiabilité prévisionnelle (numérique) et fiabilité expérimentale d'une version similaire de référence, transposable sur le nouveau produit, peut être construite comme nous l'avons montré. Ensuite, sur le nouveau produit, pour un niveau d'essai accéléré donné, la distribution de durées de vie peut être estimée premièrement par une approche numérique, puis ajustée grâce à la fonction de transformation pour déduire une distribution de durées de vie expérimentale équivalente. En procédant ainsi pour tous les niveaux de stress, on obtient les distributions de durées de vie expérimentales associées, ce qui permet d'estimer les paramètres de la loi d'accélération. Ces connaissances ainsi construites, serviront ensuite comme information a priori dans l'optimisation Bayésienne d'un plan accéléré de qualification (réduction du nombre et durées des essais).

Bibliographie

Abaqus, A. (2013). 6.13 analysis user's manual. *SIMULIA, Providence, IR*. 149

Ammar, G. (2013). *Éléments d'analyse de la fiabilité et du contrôle de qualité : statistiques appliquées par l'exemple*. Lavoisier. 38

An, J. and Owen, A. (2001). Quasi-regression. *Journal of complexity*, 17(4) :588–607. 90

Arlat, J. and Laprie, J.-C. (1995). *Guide de la sûreté de fonctionnement*. Cépaduès-Editions. 34

Augé, J.-C. (1998). *Utilisation d'un modèle à hasard proportionnel pour estimer la fiabilité de composants mécaniques : Modélisation de l'influence de l'environnement sur la fiabilité de vérins hydrauliques et pneumatiques. Application aux essais accélérés*. PhD thesis. 72

Bagdonavičius, V., Gerville-Réache, L., Nikoulina, V., and Nikulin, M. (2000). Expériences accélérées : analyse statistique du modèle standard de vie accélérée. *Revue de statistique appliquée*, 48(3) :5–38. 76

Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (2001). Mathematical models in the theory of accelerated experiments. *Mathematics and the 21st Century, World Scientific, Singapore*, pages 271–303. doi :https://doi.org/10.1142/9789812810243_0020 . 88

Baumel Jr, A. and Seeger, T. (1990). Materials data for cyclic loading. Supplement 1. *Elsevier Science Publishers, P. O. Box 211, 1000 AE Amsterdam, The Netherlands, 1990*. 141

Beaumont, P. (2013). *Optimisation des plans d'essais accélérés Application à la tenue en fatigue de pièces métalliques de liaison au sol*. PhD thesis, Université d'Angers. 72

Beck, J. L. and Au, S.-K. (2002). Bayesian updating of structural models and reliability using markov chain monte carlo simulation. *Journal of engineering mechanics*, 128(4) :380–391. 111, 112

Bereriche, Y. (2010). Contribution de l'approche contrainte/résistance à l'évaluation de la fiabilité des structures. 70

Bichon, B. J., McFarland, J. M., and Mahadevan, S. (2011). Efficient surrogate models for reliability analysis of systems with multiple failure modes. *Reliability Engineering & System Safety*, 96(10) :1386–1395. doi :https://doi.org/10.1016/j.ress.2011.05.008 . 72

Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969a). Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal of Applied Probability*, 6(2) :328–347. 39

Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969b). A new family of life distributions. *Journal of applied probability*, 6(2) :319–327. 39

Blatman, G. (2009). *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. PhD thesis, Clermont-Ferrand 2. 90

Bompas-Smith, J. H. (1973). Mechanical survival. 136

Bousquet, N. (2006). *Analyse bayésienne de la durée de vie de composants industriels*. PhD thesis, Paris 11. 39, 81

Boyd, J. P. (1989). Chebyshev 8 fourier spectral methods springer-verlag. *New York*. 88

Breitung, K. (1984). Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(3) :357–366. doi :https://doi.org/10.1016/0047-259X(89)90089-4 . 69, 70

Breitung, Karl (1984). Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(3) :357–366. 69

Bressolette, P., Fogli, M., and Chauvière, C. (2010). A stochastic collocation method for large classes of mechanical problems with uncertain parameters. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25(2) :255–270. doi :https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2010.01.002 . 72

Brooks, S. P. and Roberts, G. O. (1998). Assessing convergence of markov chain monte carlo algorithms. *Statistics and Computing*, 8(4) :319–335. 115

Caflisch, R. E., Morokoff, W. J., and Owen, A. B. (1997). *Valuation of mortgage backed securities using Brownian bridges to reduce effective dimension*. Department of Mathematics, University of California, Los Angeles. 24

Caruso, H. and Dasgupta, A. (1998). A fundamental overview of accelerated-testing analytic models. In *Reliability and Maintainability Symposium, 1998. Proceedings., Annual*, pages 389–393. 74, 78

CETIM (2005). *Management de la fiabilité dans les projets : un enjeu stratégique*. Centre techniques des industries mécaniques, Senlis. 73

Chapouille, P. (1980). *Fiabilité. maintenabilité*. Ed. Techniques Ingénieur. 38

Dai, H. and Wang, W. (2009). Application of low-discrepancy sampling method in structural reliability analysis. *Structural Safety*, 31(1) :55–64. 89

Demri, A. (2009). *Reliability estimation of mechatronic systems using functional and dysfunctional analysis*. Theses, Université d'Angers. 48

Diop, K. (2015). Estimation de la fiabilité d'un palier fluide. 13, 63

Ditlevsen, O. and Madsen, H. O. (1996). *Structural reliability methods*, volume 178. Wiley New York. 52, 55, 67, 112

Dodson, B. and Schwab, H. (2006). *Accelerated testing : a practitioner's guide to accelerated and reliability testing*. SAE international Warrendale, PA. 76

Draper, D. and Krnjajic, M. (2006). Bayesian model specification. In *Presentation at eighth Valencia/ISBA world meeting on Bayesian statistics*. 171

Droesbeke, J.-J. and Fine, J. (2002). *Méthodes bayésiennes en statistique*. Editions TECHNIP. Google-Books-ID : qiosz4QkoJYC. 115

Dubourg, V. (2011). *Méta-modèles adaptatifs pour l'analyse de fiabilité et l'optimisation sous contrainte fiabiliste*. PhD thesis, Clermont-Ferrand 2. 52

Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1994). *An introduction to the bootstrap*. CRC press. 109

El Hami, A. and Radi, B. (2011). *Fiabilité et optimisation des systèmes : théorie et applications, cours et exercices corrigés*. Ellipses. 52, 70

Escobar, L. A. and Meeker, W. Q. (2006). A review of accelerated test models. *Statistical science*, pages 552–577. doi :https://doi.org/10.1214/088342306000000321 . 87

Fatemi, S. Z. (2012). *Planification des essais accélérés : optimisation, robustesse et analyse*. PhD thesis, Université d'Angers. 72, 74

Fournier, J.-P. (1993). *Fiabilité du logiciel : concepts, modélisations, perspectives*. Hermès. 34

Gelfand, A. E. and Smith, A. F. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American statistical association*, 85(410) :398–409. 113

Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., and Rubin, D. B. (2004). *Bayesian data analysis. Texts in statistical science series*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL,. 115, 171

Gerville-Réache, L. and Couallier, V. (2009). Une approche de la démonstration de fiabilité système à partir de tests sur composants unitaires : cas d'un système en série avec lois de weibull. In *41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux*. 116

Ghanem, R. and Spanos, P. D. (1990). Polynomial chaos in stochastic finite elements. *Journal of Applied Mechanics*, 57(1) :197–202. 88

Gille-Genest, A. (1999). *Utilisation des méthodes numériques probabilistes dans les applications au domaine de la fiabilité des structures*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France. 52

Guerin, F. (2005). *HDR Fabrice GUERIN*. PhD thesis, Université d'Angers. 44, 72, 81

Guerin, F. and Hambli, R. (2007). Lifetime distribution estimation of boot seals in automotive applications by bayesian method. *Journal of Mechanical Design*, 129(3) :275–282. 25

Guida, M. and Pulcini, G. (2002). Automotive reliability inference based on past data and technical knowledge. *Reliability Engineering & System Safety*, 76(2) :129–137. doi :https://doi.org/10.1016/S0951-8320(01)00132-6 . 25

Guida, M., Pulcini, G., and Vianello, M. (2009). Early inference on reliability of upgraded automotive components by using past data and technical information. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(5) :1604–1618. doi :https://doi.org/10.1016/j.jspi.2007.08.008 . 25

Guérin, F., Barreau, M., Demri, A., Cloupet, S., Hersant, J., and Hambli, R. (2010). Bayesian estimation of degradation model defined by a Wiener process. In *Mathematical and Statistical Models and Methods in Reliability*, pages 345–357. Springer. 81

Guérin, F., Dumon, B., and Lantieri, P. (2004). Accelerated life testing on repairable systems. In *Reliability and Maintainability, 2004 Annual Symposium-RAMS*, pages 340–345. IEEE. 74

Hastings, W. K. (1970). Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1) :97–109. 113

Herbland, T. (2009). *Une méthode de correction élastoplastique pour le calcul en fatigue des zones de concentration de contraintes sous chargement cyclique multiaxial non proportionnel*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. 132, 136

Hurtado, J. E. and Alvarez, D. A. (2001). Neural-network-based reliability analysis : a comparative study. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(1) :113–132. doi :https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00248-1 . 72

Hähnel, A. (2007). *Approche mécano-probabiliste système en conception pour la fiabilité. Application au développement de systèmes mécaniques de l'automobile*. PhD thesis, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II. 52

Ince, A. and Glinka, G. (2011). A modification of morrow and smith watson topper mean stress correction models. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 34(11) :854–867. 151

Jakubczak, H., Sobczykiewicz, W., and Glinka, G. (2005). Fatigue reliability of structural components. *International Journal of Materials and Product Technology*, 25(1-3) :64–83. 136

Jiang, L. (1994). *Calcul en fatigue des ouvrages métalliques par la mécanique de la rupture (approche probabiliste)*. phdthesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 132

Kececioglu, D. and Sun, F.-b. (1999). Environmental stress screening : Its quantification. *Optimization and Management, Prentice-Hall*. 73

Kececioglu, D. and Sun, F.-B. (2003). *Environmental Stress Screening : Its Quantification, Optimization and Management*. DEStech Publications, Inc. 74

Kececioglu, D. B., Jiang, M.-X., and Sun, F.-B. (1998). A unified approach to random-fatigue reliability quantification under random loading. In *Reliability and Maintainability Symposium, 1998. Proceedings., Annual*, pages 308–313. IEEE. 132

Kiureghian, A. D. (1989). Measures of structural safety under imperfect states of knowledge. *Journal of Structural Engineering*, 115(5) :1119–1140. doi :https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1989)115:5(1119) . 25

Lalanne, C. (1999). Vibrations et chocs mécaniques, Tome 4 : Dommage par fatigue. *Hermes Science Publications, Paris*, 27 :29–30. 136

Lannoy, A. and Procaccia, H. (2001). *L'utilisation du jugement d'expert en sûreté de fonctionnement*. Technique & Documentation. 81

Lannoy, A., Procaccia, H., Roussel, J.-G., and Bertrand, Y. (1994). *Méthodes avancées d'analyse des bases de données du retour d'expérience industriel*. Eyrolles. 81

Laronde, R. (2011). *Fiabilité et durabilité d'un système complexe dédié aux énergies renouvelables-Application à un système photovoltaïque*. PhD thesis, Université d'Angers. 72

Le Cam, L. (1990). Maximum likelihood : an introduction. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, pages 153–171. 41

Lemaire, M. (2005). *Fiabilité des structures : couplage mécano-fiabiliste statique LEMAIRE Maurice, CHATEAUNEUF Alaa, MITTEAU Jean-Claude*. Librairie Lavoisier. 51, 52, 53, 62

Lemaitre, P. (2014). *Analyse de sensibilité en fiabilité des structures*. PhD thesis, Bordeaux. 51, 52

Liu, P.-L. and Der Kiureghian, A. (1991). Optimization algorithms for structural reliability. *Structural safety*, 9(3) :161–177. doi :https://doi.org/10.1016/0167-4730(91)90041-7 . 70

Liu, Y., Huang, H.-Z., and Ling, D. (2013). Reliability prediction for evolutionary product in the conceptual design phase using neural network-based fuzzy synthetic assessment. *International Journal of Systems Science*, 44(3) :545–555. doi :https://doi.org/10.1080/00207721.2011.617887 . 26

Madsen, H., Krenk, S., and Lind, N. (1986). Methods of structural safety,prentice-hall, inc. 66

Manson, S. S. (1965). Fatigue : a complex subject-some simple approximations. *Experimental mechanics*, 5(4) :193–226. 139, 140

Martz, H. F. and Waller, R. (1982). Bayesian reliability analysis. *JOHN WILEY & SONS, INC., 605 THIRD AVE., NEW YORK, NY 10158, 1982, 704*. 25

Mayer, M. (1926). *Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkräften anstatt nach zulässigen Spannungen*. Springer. 49

McKay, M. D., Beckman, R. J., and Conover, W. J. (1979). Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2) :239–245. 66

McLean, H. W. (1993). *Le rôle des essais dans la maîtrise dela fiabilité*. Ed ASTE. 73

McLean, H. W. (2009). *HALT, HASS, and HASA explained : accelerated reliability techniques*. ASQ Quality press. 73, 74

Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (2014). *Statistical methods for reliability data*. John Wiley & Sons. 75

Meggiolaro, M. A. and Castro, J. T. P. (2004). Statistical evaluation of strain-life fatigue crack initiation predictions. *International Journal of Fatigue*, 26(5) :463–476. 152

Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., and Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6) :1087–1092. 113, 114

Metropolis, N. and Ulam, S. (1949). The monte carlo method. *Journal of the American statistical association*, 44(247) :335–341. doi :https://doi.org/10.2307/2280232 . 64

Mihalache, A. G. (2007). *Modélisation et évaluation de la fiabilité des systèmes mécatroniques : application sur système embarqué*. PhD thesis, Université d'Angers. 47

Miranda, T., Gomes Correia, A., and Ribeiro e Sousa, L. (2009). Bayesian methodology for updating geomechanical parameters and uncertainty quantification. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 46(7) :1144–1153. 111

Mitchell, M. R. (1978). Fatigue and microstructure. *ASM, Materials Park, OH*, pages 385–438. 140

Mortureux, Y. (2001). La sûreté de fonctionnement : méthodes pour maîtriser les risques. *Techniques de l'ingénieur. Sécurité et gestion des risques*, (AG4670) :AG4670–1. 34

Muller, M. J. and Kuhn, S. (1993). Participatory design. *Commun. ACM*, 36(6) :24–28. 113

Muralidharan, U. and Manson, S. S. (1988). The modified equation with universal exponents to evaluate the fatigue characteristics of metals. *Journal of engineening for industry. Transactions of the ASME. Series B*, (4) :87–92. 141

Nataf, A. (1962). Statistique mathematique-determination des distributions de probabilites dont les marges sont donnees. 255(1) :42. 56

Nelson, W. B. (1990). *Accelerated testing statistical models, test plans, and data analysis*, volume 344. John Wiley & Sons. doi :https://doi.org/10.1002/9780470316795 . 74, 75, 77, 78, 79, 88, 103

Nguyen, X. S. (2007). Algorithmes probabilistes appliqués à la durabilité et à la mécanique des ouvrages de Génie Civil. 56

Niederreiter, H. (1992). *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, volume 63. Siam. 66

Nikulin, M., Gerville-Réache, L., and Couallier, V. (2007a). *«Statistique des essais accélérés» by M. Nikulin, L. Gerville-Reache, V. Couallier*. HERMES : London. 42

Nikulin, M., Gerville-Réache, L., and Couallier, V. (2007b). *«Statistique des essais accélérés» by M. Nikulin, L. Gerville-Reache, V. Couallier*. HERMES : London. 42, 76

Nikulin, M. S., Limnios, N., Balakrishnan, N., Kahle, W., and Huber-Carol, C. (2010). Advances in degradation modeling : applications to reliability. *Survival Analysis, and Finance, Series : Statistics for Industry and Technology, Ed Birkhäuser*. doi :https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4924-1 . 104

Oberkampf, W. L., Helton, J. C., and Sentz, K. (2001). Mathematical representation of uncertainty. In *AIAA Non-Deterministic Approaches Forum*, pages 16–19. 52

O'Connor, P. (2003). Testing for Reliability. *Quality and Reliability Engineering International*, 19(1) :73–84. 74

O'Connor, P. D. T. (1987). Introduction to reliability engineering. E. E. Lewis, Wiley, New York, 1987. No. of pages 400. Price : č52.75 (U.K.). *Quality and Reliability Engineering International*, 3(4) :290–291. 45

O'Hagan, A. and Forster, J. J. (2004). *Kendall's Advanced Theory of Statistics, volume 2B : Bayesian Inference, second edition*, volume 2B. Arnold. 112, 113

Oudin, H. (2008). *Méthode des éléments finis*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes (ECN). 51

Pearson, E. S. (1963). Some problems arising in approximating to probability distributions, using moments. *Biometrika*, 50(1/2) :95–112. 91

Pearson, E. S. and Tukey, M. (1965). Distributions whose first moments are known. *Biometrika*, 6 :127–137. 93

Pham, H., editor (2003). *Handbook of Reliability Engineering*. Springer-Verlag, London. 75

Procaccia, H., Clarotti, C. A., Piepszownik, L., and Lucenet, G. (1992). *Fiabilité des équipements et théorie de la décision statistique fréquentielle et bayésienne*. Eyrolles. 81

Procaccia, H. and Morilhat, P. (1996). *Fiabilité des structures des installations industrielles : théorie et applications de la mécanique probabiliste*. Éd. Eyrolles. 81

Rabitz, H. and Ali, . F. (1999). General foundations of high-dimensional model representations. *Journal of Mathematical Chemistry*, 25(2) :197–233. doi :https://doi.org/10.1023/A:1019188517934 . 88

Rackwitz, R. (1976). *Practical Probabalistic Approach to Design : By R. Rackwitz*. Technical University of Munich, Institut fur Bauingenieurwesen III. 62

Rackwitz, R. and Flessler, B. (1978). Structural reliability under combined random load sequences. *Computers & Structures*, 9(5) :489–494. doi :https://doi.org/10.1016/0045-7949(78)90046-9 . 62, 70

Ramberg, W. and Osgood, W. R. (1943). Description of stress-strain curves by three parameters. *National Advisory Committee for Aeronautics ; NACA Technical Note 902*. 150

Riahi, H. (2013). *Analyse de structures à dimension stochastique élevée : application aux toitures bois sous sollicitation sismique*. PhD thesis, Clermont-Ferrand 2. 51, 70

Riahi, H., Bressolette, P., and Chateauneuf, A. (2010). Random fatigue crack growth in mixed mode by stochastic collocation method. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(16) :3292–3309. doi :https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.07.015 . 72

Riahi, H., Bressolette, P., Chateauneuf, A., Bouraoui, C., and Fathallah, R. (2011). Reliability analysis and inspection updating by stochastic response surface of fatigue cracks in mixed mode. *Engineering Structures*, 33(12) :3392–3401. doi :https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.07.003 . 72

Ringler, J. (1979). Réduction des coûts d'essais de fiabilité par la pratique des techniques bayesiennes. *Revue de Statistique Appliquée*, 27(2) :55–68. 81

Roberts, G. O., Gelman, A., and Gilks, W. R. (1997). Weak convergence and optimal scaling of random walk metropolis algorithms. *Ann. Appl. Probab.*, 7(1) :110–120. 115

Roberts, G. O. and Rosenthal, J. S. (2001). Optimal scaling for various metropolis-hastings algorithms. *Statist. Sci.*, 16(4) :351–367. 115

Rocco, C. M. and Moreno, J. A. (2002). Fast monte carlo reliability evaluation using support vector machine. *Reliability Engineering & System Safety*, 76(3) :237–243. doi :https://doi.org/10.1016/S0951-8320(02)00015-7 . 72

Roessle, M. L. and Fatemi, A. (2000). Strain-controlled fatigue properties of steels and some simple approximations. *International journal of fatigue*, 22(6) :495–511. doi :https://doi.org/10.1016/S0142-1123(00)00026-8 . 142

Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a Multivariate Transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(3) :470–472. 55

Ross, T. D. (2003). Accurate confidence intervals for binomial proportion and Poisson rate estimation. *Computers in biology and medicine*, 33(6) :509–531. 81

Sander, P. and Badoux, R. (1991). Bayesian methods in reliability. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 92 :39225. 81

Schuëller, G. I. and Stix, R. (1987). A critical appraisal of methods to determine failure probabilities. *Structural Safety*, 4(4) :293–309. doi :https://doi.org/10.1016/0167-4730(87)90004-X . 23

Shigley, J. E. (1972). *Mechanical engineering design*. McGraw-Hill Companies. 136

Shiozawa, K., Hasegawa, T., Kashiwagi, Y., and Lu, L. (2009). Very high cycle fatigue properties of bearing steel under axial loading condition. *International Journal of Fatigue*, 31(5) :880–888. 136

Sobol, I. M. (1993). Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical modelling and computational experiments*, 1(4) :407–414. 91

Sonsino, C. M. (2007). Course of SN-curves especially in the high-cycle fatigue regime with regard to component design and safety. *International Journal of Fatigue*, 29(12) :2246–2258. 136

Sudret, B. (2008). Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(7) :964–979. 91

Sudret, B. (2012). Meta-models for structural reliability and uncertainty quantification. *arXiv preprint arXiv :1203.2062*. 52

Tang, W. H. (1971). A bayesian evaluation of information for foundation engineering design. In *Geotechnical Safety and Reliability*, pages 214–214. 111

Tarantola, A. (2005). *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*, volume 89 of *Other Titles in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics. 114

Tebbi, O. (2005). *Estimation des lois de fiabilité en mécanique par les essais accélérés*. PhD thesis, Université d'Angers. 35, 40, 46, 48, 72, 76, 77

Tierney, L. (1994). Markov chains for exploring posterior distributions. *The Annals of Statistics*, 22(4) :1701–1728. 113

Tipping, M. E. (2001). Sparse bayesian learning and the relevance vector machine. *Journal of machine learning research*, 1 :211–244. doi :https://doi.org/10.1162/15324430152748236 . 72

Tvedt, L. (1983). Two second-order approximations to the failure probability. *Veritas Report RDIV/20-004083*. 69

Usureau, E. (2001). *Application des méthodes bayésiennes pour l'optimisation des coûts de développement des produits nouveaux*. PhD thesis, Angers. 44, 81, 124

Vassilious, A. and Mettas, A. (2001). Understanding accelerated life-testing analysis. In *Proc. Annnual Reliability and Maintainability Symposium, USA*. Citeseer. 74, 75

Villemeur, A. (1988). *Sûreté de fonctionnement des systèmes industriels : fiabilité, facteurs humains, informatisation*. Eyrolles. 34, 35

Voiculescu, S. (2009). *Fiabilité des systèmes embarqués*. PhD thesis, Université d'Angers. 72, 76, 77

Wang, Y., Au, S.-K., and Cao, Z. (2010). Bayesian approach for probabilistic characterization of sand friction angles. *Engineering Geology*, 114(3) :354–363. 111

Xu, H. and Rahman, S. (2005). Decomposition methods for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 20(3) :239–250. doi :https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2010.09.005 . 72, 94

Yadav, O. P., Singh, N., Goel, P. S., and Itabashi-Campbell, R. (2003). A framework for reliability prediction during product development process incorporating engineering judgments. *Quality Engineering*, 15(4) :649–662. doi :https://doi.org/10.1081/QEN-120018396 . 26

Zhang, L., Lu, Z., and Wang, P. (2015). Efficient structural reliability analysis method based on advanced kriging model. *Applied Mathematical Modelling*, 39(2) :781–793. doi :https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.07.008 . 72

Zhang, L. L., Zhang, J., Zhang, L. M., and Tang, W. H. (2010). Back analysis of slope failure with markov chain monte carlo simulation. *Computers and Geotechnics*, 37(7) :905–912. 111

Zhang, R. and Mahadevan, S. (2001). Integration of computation and testing for reliability estimation. *Reliability Engineering & System Safety*, 74(1) :13–21. doi :https://doi.org/10.1016/S0951-8320(01)00008-4 . 25

RÉSUMÉ

Pour garantir la tenue en conditions clientèles, l'estimation de fiabilité est indispensable dans toutes les phases de développement des produits. Cette tâche peut s'avérer lente et coûteuse en l'absence d'une démarche optimisée, surtout dans un contexte où les produits sont divers.
Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans une démarche d'optimisation de la procédure d'estimation et de qualification de fiabilité lors des phases de développement de sous-ensembles mécaniques développés par la société FAURECIA.
Pour disposer d'une estimation réaliste dès la phase de conception, la méthodologie proposée intègre le retour d'expérience (RETEX) existant sur des produits de référence dans l'estimation prévisionnelle de fiabilité de nouvelles conceptions, cette dernière étant traditionnellement réalisée via méthodes numériques mécano-fiabilistes.
L'intégration du RETEX est réalisée par deux approches proposées. L'une utilisant un facteur de similitude entre fiabilité expérimentale et numérique, et l'autre utilisant une fonction de transfert temporel entre fiabilité expérimentale et numérique.
La méthodologie proposée permet de construire une meilleure loi de fiabilité prévisionnelle, pour une nouvelle conception au plus tôt dans le processus de développement, avant même la phase de fabrication de prototypes. Ceci permet d'anticiper sur la performance du nouveau produit afin d'opérer des modifications si nécessaires, ou encore de construire ainsi une information a priori, qui sera ensuite importante dans une démarche d'optimisation de plan de qualification Bayésienne de la fiabilité du nouveau produit.

mots-clés : Fiabilité mécanique, Simulation mécano-probabiliste, Méta-modélisation, Facteur de similitude, Fonction de transfert, Phase de développement.

ABSTRACT

In order to guarantee performance under customer conditions, reliability estimation is essential in all phases of product development. This task can be long and costly in the absence of an optimized approach, especially in a context where products are various.
The work of this thesis is part of an optimization of the procedure of estimation and qualification of reliability during the development phases of mechanical subassemblies developed by FAURECIA company.
To obtain a realistic estimate at the design phase, the proposed methodology incorporates the existing data (RETEX) on reference products in the predictive reliability estimation of new designs, the latter being traditionally carried out using numerical structural reliability methods. The integration of RETEX is performed by two proposed approaches. One using a similarity factor between experimental and numerical reliability, and the other using a time transfer function between experimental and numerical reliability.
The proposed methodology allows building a better predictive reliability function, for a new design at the earliest stage of the development process, even before the prototype manufacturing phase. This makes it possible to anticipate the performance of the new product in order to make modifications if necessary, or to build prior information that will be important in a Bayesian reliability qualification plan optimization for the new product.

keywords : Mechanical reliability, Mechano-probabilistic simulation, Meta-modeling, Similarity factor, Transfer function, Design stage.

université angers

Présidence de l'université
40 rue de rennes – BP 73532
49035 Angers cedex
Tél. 02 41 96 23 23 | Fax 02 41 96 23 00

ENGAGEMENT DE NON PLAGIAT

Je, soussigné(e) Sohoin Koffisse Rodrigue
déclare être pleinement conscient(e) que le plagiat de documents ou d'une partie d'un document publiée sur toutes formes de support, y compris l'internet, constitue une violation des droits d'auteur ainsi qu'une fraude caractérisée.
En conséquence, je m'engage à citer toutes les sources que j'ai utilisées pour écrire ce rapport ou mémoire.

signé par l'étudiant(e) le **31** / **12** / **2018**

Cet engagement de non plagiat doit être signé et joint à tous les rapports, dossiers, mémoires.

Présidence de l'université
40 rue de rennes – BP 73532
49035 Angers cedex
Tél. 02 41 96 23 23 | Fax 02 41 96 23 00

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / SCIENCES POUR L'INGENIEUR

université angers

Titre : Définition d'une méthodologie d'estimation de fiabilité et de qualification de systèmes mécanique en phase de développement

Mots clés : Fiabilité mécanique, Simulation mécano-probabiliste, Méta-modélisation, Facteur de similitude, Fonction de transfert, Phase de développement.

Résumé : Pour garantir la tenue en conditions clientèles, l'estimation de fiabilité est indispensable dans toutes les phases de développement des produits. Cette tâche peut s'avérer lente et coûteuse en l'absence d'une démarche optimisée, surtout dans un contexte où les produits sont divers.
Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans une démarche d'optimisation de la procédure d'estimation et de qualification de fiabilité lors des phases de développement de sous-ensembles mécaniques développés par la société FAURECIA.
Pour disposer d'une estimation réaliste dès la phase de conception, la méthodologie proposée intègre le retour d'expérience (RETEX) existant sur des produits de référence dans l'estimation prévisionnelle de fiabilité de nouvelles conceptions, cette dernière étant traditionnellement réalisée via méthodes numériques mécano-fiabilistes.
L'intégration du RETEX est réalisée par deux approches proposées. L'une utilisant un facteur de similitude entre fiabilité expérimentale et numérique, et l'autre utilisant une fonction de transfert temporel entre fiabilité expérimentale et numérique.
La méthodologie proposée permet de construire une meilleure loi de fiabilité prévisionnelle, pour une nouvelle conception au plus tôt dans le processus de développement, avant même la phase de fabrication de prototypes. Ceci permet d'anticiper sur la performance du nouveau produit afin d'opérer des modifications si nécessaires, ou encore de construire ainsi une information a priori, qui sera ensuite importante dans une démarche d'optimisation de plan de qualification Bayésienne de la fiabilité du nouveau produit.

Title : Definition of a methodology for reliability estimation and qualification of mechanical systems in the development stage

Keywords : Mechanical reliability, Mechano-probabilistic simulation, Meta-modeling, Similarity factor, Transfer function, Design stage.

Abstract : In order to guarantee performance under customer conditions, reliability estimation is essential in all phases of product development. This task can be long and costly in the absence of an optimized approach, especially in a context where products are various.
The work of this thesis is part of an optimization of the procedure of estimation and qualification of reliability during the development phases of mechanical subassemblies developed by FAURECIA company.
To obtain a realistic estimate at the design phase, the proposed methodology incorporates the existing data (RETEX) on reference products in the predictive reliability estimation of new designs, the latter being traditionally carried out using numerical structural reliability methods. The integration of RETEX is performed by two proposed approaches. One using a similarity factor between experimental and numerical reliability, and the other using a time transfer function between experimental and numerical reliability.
The proposed methodology allows building a better predictive reliability function, for a new design at the earliest stage of the development process, even before the prototype manufacturing phase. This makes it possible to anticipate the performance of the new product in order to make modifications if necessary, or to build prior information that will be important in a Bayesian reliability qualification plan optimization for the new product.