



HAL
open science

Estimation et Commande à Structure Variable des Systèmes de Dimension Infinie

Olfa Khélia Boubaker

► **To cite this version:**

Olfa Khélia Boubaker. Estimation et Commande à Structure Variable des Systèmes de Dimension Infinie. Automatique / Robotique. Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT), 2000. Français. NNT: . tel-02863772

HAL Id: tel-02863772

<https://theses.hal.science/tel-02863772v1>

Submitted on 10 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DES SCIENCES DES TECHNIQUES ET DE MEDECINE DE TUNIS

ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TUNIS

Thèse de Doctorat

spécialité:

Génie Electrique

de

OLFA KHELIA épouse BOUBAKER

Maître es-sciences

**Estimation et Commande
A Structure Variable
des Systèmes de Dimension Infinie**

Soutenue le 19 février 2000 devant le jury composé de:

MM.	Mohamed Benrejeb	Président
	Nacer Benhadj Braiek	Rapporteur
	Pierre Borne	Rapporteur
	Jacques Bernussou	Examineur
	Mekki Ksouri	Directeur de Thèse
	Jean Pierre Babary	Co-directeur de thèse

Cette thèse a été préparée au Laboratoire d'Analyse et Commande des Systèmes à l'école Nationale d'ingénieurs de Tunis en collaboration avec le Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du Centre National de Recherche Scientifique de Toulouse.

NOMENCLATURE

1. VARIABLES BIOLOGIQUES

Modèle du bioréacteur monosubstrat

k_1	Coefficient de rendement
k_c	Constante de saturation
k_d	Coefficient de mortalité
L	Longueur de la colonne
$S(z,t)$	Concentration du substrat
$X_a(z,t)$	Concentration de biomasse
$\$$	Section du biofilre
μ	Taux spécifique de croissance

Modèle du bioréacteur de dénitrification

F	Débit d'alimentation en substrat
k_d	Coefficient de mortalité de la biomasse
K_1	Constante de saturation du nitrate
K_2	Constante de saturation du nitrite
K_3	Constante de saturation de l'éthanol
$S_1(z,t)$	Concentration de nitrate
$S_2(z,t)$	Concentration de nitrite
$S_3(z,t)$	Concentration d'éthanol
$X_a(z,t)$	Concentration de biomasse
y_{h1}	Rendement de la biomasse (dénitratation)
y_{h2}	Rendement de la biomasse (dénitritation)
$\$$	Section du biofiltre
η_g	Facteur de correction de la croissance anaérobique
ε	Porosité du biofiltre
μ_1	Taux spécifique de croissance (dénitratation)
μ_2	Taux spécifique de croissance (dénitritation)

2. VARIABLES MATHÉMATIQUES ET PARAMÉTRIQUES

Lettres latines

A	Matrice dynamique du système d'erreur d'observation
A_m	Matrice d'état du modèle linéaire du moteur à courant continu
A_h	Matrice d'état du bloc retard
a	Scalaire
a_i	Scalaire, partitions de la matrice A
B	Matrice du système d'erreur d'observation
B_m	Vecteur de gains de commande du modèle linéaire du moteur
B_h	Vecteur de gains de commande du bloc retard
b	Scalaire

NOMENCLATURE

b_i	Scalars, partitions de la matrice A
C	Matrice de sortie du système d'erreur d'observation
$C(z, t)$	Vecteur ou matrice de sortie d'un système de dimension infinie
C_m	Vecteur de sortie du modèle linéaire du moteur à courant continu
C_h	Vecteur de sortie du bloc retard
$c(x, t)$	Vecteur ou matrice de sortie d'un système de dimension finie
E	Opérateur différentiel sur le vecteur d'état $X(z, t)$
e	Erreur d'état
F	Opérateur différentiel sur le vecteur d'état $X(z, t)$
$f(x, t)$	Champ de vecteurs non linéaires
$g(x, t)$	Vecteur ou matrice de gains de commande
G	Opérateur différentiel sur le vecteur d'état $X(z, t)$
$G(p)$	Fonction de transfert du système à retard
$G_0(p)$	Fonction de transfert du modèle linéaire à retard du moteur
H	Matrice du système d'erreur d'estimation résultant d'un développement au premier ordre du paramètre μ
h	retard
$h_i(X, z, t)$	Fonction non linéaire de l'état $X(z, t)$
I	Matrice identité
I_σ	Matrice définissant les termes de commutation
k_1, k_2, k_3, k_4	Scalars définissant des paramètres du système de dénitrification
K	Vecteur du système d'erreur d'estimation résultant d'un développement au premier ordre du paramètre μ
K_m	Gain de la fonction de transfert du moteur
$L_j(z)$	Polynômes d'interpolation de Lagrange de degré $(N + 1)$
$l_{i,j}$	$l_{i,j} = \left. \frac{dL_j(z)}{dz} \right _{z=z_i}$
M	Gain, vecteur ou matrice de gains de commutation de la commande à structure variable
M_g	Matrice de gains de commutation de l'observateur à structure variable
M_1	Matrice de gains de l'observateur
M_s	Matrice de gains de commutation de l'observateur à structure variable relative au substrat
M_x	Matrice de gains de commutation de l'observateur à structure variable relative à la biomasse
N	Nombre de points de collocation
p	Paramètre de réglage de la position des points de collocation
p	Opérateur de Laplace
P	Polynôme
P_N	Polynôme d'ordre N
P'	$P' = \frac{dP}{dt}$
\Re	Ensemble des réels

NOMENCLATURE

R, R_0, R_1, R_i	Résidus
r	Degré relatif
r_i	Degrés relatifs du système multivariable découplé
s	Vecteur d'état de la concentration du substrat en dimension finie
s_1	Vecteur d'état de la concentration de nitrate en dimension finie
s_2	Vecteur d'état de la concentration de nitrite en dimension finie
s_3	Vecteur d'état de la concentration d'éthanol en dimension finie
T	Domaine temporel
T_m	Constante de temps de la fonction de transfert du moteur
ΔT	Période d'échantillonnage
t	Variable temporelle
t_0	Temps initial
u	Variable ou vecteur de commande
u_h	Variable de commande du bloc retard
u_{eq}	Variable ou vecteur de commande équivalente
Δu	Composante ou vecteur de composantes haute fréquence de la commande à structure variable
$v(t)$	Perturbation extérieure, scalaire ou vecteur selon le contexte
v	Nouvelle entrée ou vecteur de nouvelles entrées
w_i	Fonctions de pondération
$X(z, t)$	Variable ou vecteur de variables d'état en dimension infinie
$x(t)$	Variable ou vecteur de variables d'état en dimension finie
x_a	Vecteur d'état de la concentration de biomasse en dimension finie
Y_L	Variable, vecteur ou matrice de sortie du système de dimension infinie à $z = L$
y	Variable, vecteur ou matrice de sortie d'un système de dimension finie
y_d	Sortie désirée
y_c	Consigne
z	Variable spatiale

Lettres grecques

α_{ii}	Partitions de la matrice A
β_{ii}	Partitions de la matrice A
ε	Porosité
δ	Fonction de Dirac
ϕ, ϕ_i	Largeur de la bande de linéarisation de la fonction saturation
$\varphi(z)$	Fonction de base de la méthode des résidus pondérés
γ	Gain ou vecteur de gains adaptatifs de l'estimateur de paramètres
η	Vecteur d'état exprimé dans une forme canonique de commandabilité
Γ	Gain ou vecteur de gains adaptatifs de l'estimateur de paramètres
λ	Valeurs propres
π	Produit des valeurs propres
Π	Borne supérieure de l'incertitude sur le gain de commande ou sur la matrice de commande

NOMENCLATURE

$\bar{\omega}$	Borne supérieure de l'incertitude sur la perturbation extérieure
θ	Vecteur de paramètres non mesurables
Θ	Borne supérieure de l'incertitude sur la matrice dynamique
ρ	Somme des valeurs propres
σ	Surface de glissement
τ	Fonction non linéaire de l'état, de la commande et des dérivées de la commande
ω	Matrice du système d'erreur d'observation
Ω	Domaine spatial
$\psi(z,t)$	Fonction de la méthode des résidus pondérés satisfaisant les conditions aux limites
ζ	Borne supérieure d'une fonction variable dans le temps

Caractères spéciaux

$\$$	Variables estimées de \bullet
$\tilde{\bullet}$	Variables d'erreur de \bullet
\bullet^*	Variables exprimées dans un espace transformé
$\Delta \bullet$	Incertitudes sur \bullet

Indices

h	Variable du bloc retard
m	Variable du moteur à courant continu
max	Variable maximale de la variable nominale
in	Condition aux limites
0	variable initiale

Opérateur

∂	Opérateur différentiel
$\langle \bullet \bullet \rangle$	Produit scalaire de deux vecteurs
$\nabla \bullet$	Gradient de \bullet

3. ABREVIATIONS

N	Equivalent Azote
DCO	Demande chimique en oxygène
COT	Carbone organique total
VSS	Volatile solid suspension

INTRODUCTION

Au cours des dernières décennies, le développement de l'industrie a fait apparaître de nouveaux procédés industriels permettant d'exploiter des micro-organismes (bactéries, levures...), des cellules végétales ou des cellules animales. Dans ce domaine biotechnologique très vaste, de nombreuses applications peuvent être envisagées; citons par exemple le traitement biologique des eaux résiduaires urbaines ou industrielles, ou des eaux à potabiliser.

Les procédés biotechnologiques sont très complexes. Leur comportement est en général modélisé par des systèmes d'équations différentielles non linéaires et non stationnaires. Ils contiennent des paramètres susceptibles de varier dans le temps de façon plus ou moins imprévisible. Des perturbations externes peuvent aussi agir rapidement de façon à modifier le fonctionnement interne du procédé. Le caractère fortement non linéaire et non stationnaire, et les variations paramétriques proviennent essentiellement du fait que les phénomènes biologiques dépendent du comportement de micro-organismes vivants dont la croissance et la mortalité sont des phénomènes difficiles à modéliser. Il est important de noter que la plupart de ces procédés sont à caractère réparti. Dans la plupart des cas, un certain nombre de variables d'état et de paramètres ne sont pas mesurables en ligne.

Depuis les années 70 il a été montré que la stabilisation des systèmes caractérisés par des non stationnarités et de fortes non linéarités par des bouclages réguliers et continus se fait au détriment des performances du système. De nombreux chercheurs se sont donc intéressés à développer des techniques de stabilisation discontinues. Dans ce contexte les systèmes à structure variable par modes glissants ont été introduits en Ex-Union Soviétique par le Professeur russe Emelyanov [Emelyanov, 1967] et développés grâce aux travaux du mathématicien russe Fillipov [Fillipov, 1961, 1979, 1988] sur les équations différentielles ordinaires à second membre discontinu.

Le principe de base d'un système à structure variable consiste à amener le point représentatif de l'évolution du système sur une hypersurface de l'espace d'état grâce à une loi de commande discontinue. Le système est dit alors en régime glissant lorsque ce point atteint l'hypersurface, dite surface de glissement. Sur cette hypersurface le système devient insensible aux erreurs de modélisation, aux variations paramétriques et aux perturbations extérieures.

Une bibliographie abondante a été développée sur la théorie des systèmes à structure variable. On peut citer les livres d'Emelyanov [Emelyanov, 1967], d'Itkis [Itkis, 1976], d'Utkin [Utkin, 1978, 1992] de Buhler [Buhler, 1986], de Slotine [Slotine & Li, 1991], et les volumes de Zinober [Zinober, 1990], de Young [Young, 1993]. Mais, malgré sa maturité, cette théorie reste encore un thème ouvert à la recherche pour certaines classes de systèmes non linéaires, en particulier celles des systèmes de dimension infinie. Ce manque de développement est certainement du à l'absence d'une théorie des équations différentielles partielles à second membre discontinu.

Notre contribution est relative à l'étude de stratégies de commande à structure variable pour la classe des systèmes de dimension infinie. On s'intéresse en particulier à la classe des systèmes à paramètres répartis représentés par des équations aux dérivées partielles non linéaires et non stationnaires de type hyperbolique.

L'analyse et la résolution des systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles est complexe. Bien qu'assez largement développées dans la littérature [Lions, 1971] [Curtain & Pritchard, 1978] [El Jaï & Pritchard, 1986] [El Jaï & Amouroux, 1990] [Pazy, 1983], les solutions analytiques ne peuvent exister que pour le cas de problèmes très particuliers. Il peut être très difficile de résoudre ce type de problème dans le cas d'ordinateurs pas très puissants.

Dans le domaine de l'automatique en particulier, une solution consiste à réduire la dimension du modèle original de dimension infinie en un modèle de dimension finie et il est alors possible dans ce cas d'appliquer toutes les méthodes de la théorie des systèmes à paramètres localisés (propriétés de stabilité, d'observabilité ou de commandabilité). On oublie ainsi l'influence de la méthode d'approximation sur la solution, en particulier sur les propriétés dynamiques du système et qu'il devient difficile de connaître la relation entre le système à paramètres répartis et sa version discréditée une fois l'approximation effectuée. Pour ces raisons nous envisagerons de traiter le problème de commande selon deux approches. La première approche consiste à transformer le système à paramètres répartis en un système à paramètres localisés par l'une des méthodes de résidus pondérés: la méthode de collocation orthogonale. Le système réduit est représenté par des équations différentielles ordinaires. Il sera utilisé pour la synthèse de la loi de commande à structure variable de dimension finie. La seconde approche consiste à montrer qu'il est possible de conserver la nature distribuée du système et de concevoir la loi de commande à structure variable sur la base du système de dimension infinie.

La mise en oeuvre d'un système automatisé efficace exige la disponibilité d'informations en temps réel sur les états du système commandé. Cependant pour les procédés biotechnologiques, il est difficile de pouvoir mesurer toutes ces variables. Les difficultés rencontrées proviennent soit de la dynamique du système étudié soit des techniques de mesure en ligne utilisées (capteurs non commercialisés, ou très coûteux, ou trop lents...). Etant donné que les modèles des procédés biotechnologiques présentent des fortes non linéarités, il est judicieux de recourir aux techniques d'observation non linéaires. Cependant, ce n'est souvent pas suffisant et il faut effectuer une estimation conjointe simultanée de l'évolution des états et des paramètres. La méthode d'estimation la plus utilisée consiste à augmenter le vecteur d'état par le vecteur de paramètres et de mettre en oeuvre un filtre de Kalman étendu. Cette méthode peut conduire à des estimateurs biaisés et même divergents si l'initialisation est mal conditionnée [Ljung, 1979]. Une autre solution proposée est celle de l'observateur / estimateur asymptotique [Bastin & Dochain, 1990]. Cette méthode n'est pas efficace pour les systèmes lents. Pour ces raisons nous développerons un estimateur non linéaire basé sur la théorie des systèmes à structure variable qui permet de s'affranchir de tous les problèmes énoncés précédemment. Cette approche a été principalement développée par Slotine [Slotine et al., 1986, 1987][De Wit & Slotine, 1991]. Elle présente l'avantage d'assurer simultanément simplicité et performances de l'algorithme de l'estimation. L'avantage majeur de cette approche est la garantie de la stabilité, de la rapidité de convergence et de la robustesse de l'algorithme.

Bien que les techniques de commande à structure variable présentent des avantages incontestables, une étude bibliographique a montré que dans le cas des

bioprocédés ces techniques étaient rarement appliquées. Cette position des automaticiens envers les techniques de commande à structure variable quand il s'agit de contrôler des procédés biologiques est due d'une part au caractère réparti de certains de ces procédés et d'autre part à un inconvénient majeur de cette technique: l'apparition d'oscillations résiduelles (broutement) au niveau des variables contrôlées et au fait que ce type de procédés caractérisés par des dynamiques lentes ne peut pas supporter des entrées de commande discontinues et énergétiques pouvant entraîner une fatigue prématurée des actionneurs. Inspiré des travaux de Fliess [Fliess, 1990] qui a permis, par introduction de l'algèbre différentielle, de résoudre le problème de broutement pour des systèmes non dégénérés fonctionnant en régime glissant, nous proposons une nouvelle version de la commande à structure variable par mode glissant. Celle-ci est obtenue grâce à une augmentation de l'ordre du système contrôlé par introduction d'une forme canonique de commandabilité modifiée de la forme classique. Cette nouvelle approche permettra de lisser les variables d'entrées et de résoudre le problème de broutement par application des discontinuités sur les dérivées des variables de commande et non plus sur les variables de commande elles mêmes.

Enfin, il faut signaler que les quelques travaux qui traitent du problème de commande à structure variable des bioprocédés à gradient spatial se limitent à des études de commande monovariante [Damak, 1994][Bourrel, 1996][Bourrel & Babary, 1998]. Les biochimistes pensent par contre que l'on pourrait mieux maîtriser le fonctionnement de tels systèmes si l'on pouvait agir à la fois sur plusieurs variables d'entrée et plusieurs variables de sortie. Notre contribution dans le domaine de l'automatique des procédés biotechnologiques consiste en la conception de lois de commande robustes à structure variable monovariante et multivariante permettant une optimisation du fonctionnement des procédés biologiques de dimension infinie. Cette étude s'inscrit dans le cadre d'une collaboration LACS (Tunis)/ LAAS (Toulouse) axée sur le développement et l'optimisation du fonctionnement de procédés biotechnologiques. Dans le cadre de cette étude deux types de procédés seront considérés.

Ce mémoire est articulé autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la description des systèmes à paramètres répartis modélisés par des équations aux dérivées partielles et à la présentation des différentes méthodes d'approximation fonctionnelle utilisées pour la réduction des systèmes de dimension infinie. En particulier la méthode de collocation orthogonale, l'une des méthodes des résidus pondérés sera développée en détail. L'intérêt de l'application de cette méthode est montré en simulation sur des exemples numériques de procédés.

Le second chapitre est consacré au problème d'estimation à structure variable des systèmes non linéaires et non stationnaires. On rappellera tout d'abord le principe des observateurs non linéaires ensuite on développera un observateur d'état et un estimateur paramétrique adaptatif basés sur la théorie des systèmes à structure variable. On illustrera enfin à travers un exemple numérique et des résultats de simulation la mise en oeuvre et les performances des observateurs d'état et des estimateurs de paramètres à structure variable.

Le troisième chapitre de ce manuscrit traite le problème de la commande à structure variable des systèmes non linéaires. Il est divisé en deux parties. La première partie traite de la commande à structure variable des systèmes de dimension finie. La seconde partie est consacrée à la commande à structure variable des systèmes de dimension infinie. Dans la première partie de ce chapitre, on rappelle les concepts classiques des systèmes à structure variable puis on présente notre contribution dans ce domaine. La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la commande à structure variable des systèmes à paramètres répartis basée sur le modèle non linéaire à paramètres répartis. Nous formulerons et nous résoudrons le problème de commande dans les deux cas monovariante et multivariante, pour une classe particulière des systèmes de dimension infinie.

Le quatrième chapitre concerne la régulation des procédés biotechnologiques. Ce chapitre est divisé en deux parties. La première partie traite du problème de la commande d'un procédé de fermentation à lit fixe monosubstrat. L'objectif de cette première partie est de combiner un algorithme d'observation / estimation à structure variable adaptatif avec plusieurs schémas de commande à structure variable afin de réguler la concentration du substrat résiduel en sortie du biofiltre. La seconde partie de ce chapitre traite du problème de la commande d'une unité pilote de dénitrification par biofiltration, d'eaux à potabiliser installée à l'INSAT à Toulouse. L'objectif de cette seconde partie est d'optimiser le fonctionnement du procédé de dénitrification par mise en oeuvre d'une commande multivariante afin de réguler à la fois la somme des concentrations des produits nitrés et la concentration de l'éthanol en sortie du biofiltre. Une étude comparative sera établie entre des résultats déjà obtenus par la commande monovariante et aussi entre plusieurs schémas de commande à structure variable multivariante.

Tous les algorithmes développés dans ce manuscrit seront validés par des résultats de simulation. Les performances des différentes techniques seront évaluées suivant des critères de robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations extérieures, de convergence du régime transitoire vers un état stationnaire, de précision de régulation et de rapidité. Ce manuscrit se termine par une conclusion générale.

CHAPITRE 1

**MODELISATION ET SIMULATION
DES SYSTEMES A PARAMETRES REPARTIS**

1. INTRODUCTION

La théorie des systèmes à paramètres répartis concerne plusieurs domaines scientifiques tels que la physique, la thermique, la mécanique, l'électricité, la télécommunication, la géologie, la biologie, la biotechnologie...

Parmi les nombreux phénomènes physiques qui sont modélisés par cette classe de systèmes et qui touchent en particulier aux sciences de l'ingénieur on peut citer:

- Dans le domaine de la thermique: l'étude des propriétés isolantes des matériaux.
- Dans les domaines de la mécanique des fluides et l'aérodynamique: l'étude des échanges de chaleur dans les réacteurs nucléaires.
- Dans le domaine de la biologie: l'étude de la migration d'une population bactériologique dans un milieu organique.
- Dans le domaine de la biotechnologie: l'étude d'une classe de bioréacteurs à lit fixe utilisés pour la dépollution des eaux, la production de levures ou la fabrication des antibiotiques...

Les **systèmes à paramètres répartis** dénommés aussi **systèmes à paramètres distribués** peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles, des équations intégrales ou des équations intégro-différentielles. Dans cette étude, nous ne nous intéressons qu'aux processus physiques modélisés par des **équations aux dérivées partielles**. Ce chapitre ne concerne pas non plus l'écriture des bilans qui conduisent à représenter les phénomènes par des équations aux dérivées partielles. Nous renvoyons pour cela le lecteur aux multiples ouvrages spécialisés. Nous supposons donc que ces équations sont déjà écrites et représentent convenablement les phénomènes qu'elles sont supposées représenter.

L'analyse et la résolution des systèmes à paramètres modélisés par des équations aux dérivées partielles est complexe. Bien qu'assez largement développées dans la littérature [Lions, 1971] [Curtain & Pritchard, 1978] [El Jaï & Pritchard, 1986] [El Jaï & Amouroux, 1990] [Pazy, 1983], les solutions analytiques ne peuvent pas toujours être établies hormis les cas de problèmes très simples ou de géométrie bien particulières. Il ne faut pas non plus espérer résoudre le problème à l'aide d'un ordinateur car celui-ci est d'une part limité à plus d'un titre: en place mémoire, en précision, en durée de fonctionnement... d'autre part le caractère réparti peut conduire à des singularités ou difficultés mathématiques [Jha *et al.*, 1986].

Dans le domaine de l'automatique en particulier, le caractère réparti est rarement retenu pour plusieurs raisons. En effet, pour des fins de simulation ou de commande, il est toujours difficile de dégager des propriétés de stabilité, d'observabilité ou de commandabilité sur les systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles le plus souvent non stationnaires et non linéaires. De plus lors d'une mise en oeuvre expérimentale, deux contraintes s'imposent: d'une part le nombre fini de capteurs et d'actionneurs et d'autre part la structure mathématique de la commande de dimension finie.

De ce fait une réduction du modèle de **dimension infinie** en un modèle de **dimension finie** est indispensable et il est alors possible dans ce cas d'appliquer toutes

les méthodes de la théorie des **systèmes à paramètres localisés**. Cependant dès que l'on arrive à l'exploitation numérique on est amené à réfléchir sur le choix de la méthode d'approximation et sur le choix de l'instant de l'approximation. Certains chercheurs pensent qu'une approximation établie dès le début de l'étude permet d'utiliser au mieux la connaissance du processus et d'avoir des algorithmes moins complexes. Si cela est fort intéressant, un point reste cependant oublié à savoir l'influence de la méthode d'approximation sur la solution, en particulier sur les propriétés dynamiques du système. De plus, on oublie aussi qu'il est toujours difficile de connaître la relation entre le système à paramètres répartis et sa version discrétisée une fois l'approximation effectuée. Peu d'études traitent de ce problème.

Après avoir effectué une description des systèmes à paramètres répartis modélisés par des équations aux dérivées partielles, nous présenterons dans la troisième partie de ce chapitre un aperçu des différentes méthodes d'approximation. La quatrième partie sera consacrée aux **méthodes des résidus pondérés**, en développant particulièrement la **méthode de collocation orthogonale** dans le cinquième paragraphe. La représentation d'état des systèmes réduits par la méthode de collocation orthogonale est introduite dans le sixième paragraphe. L'intérêt de l'application de cette méthode est montré en simulation sur trois exemples numériques de procédés dans la dernière partie.

2. MODELISATION DES SYSTEMES A PARAMETRES REPARTIS

Les équations aux dérivées partielles sont des équations différentielles mettant en jeu plusieurs variables indépendantes. Les équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en pratique sont rarement d'ordre élevé, le plus souvent d'ordre deux ou un. Aussi c'est sur les équations d'ordre deux que se base leur classification générale [Le Pourhiet, 1988].

Afin de simplifier l'exposé des méthodes sans en détruire leur généralité, considérons la classe des procédés d'ordre 2, dont la solution X est fonction de deux variables indépendantes: une variable d'espace z et la variable temporelle t et dont le modèle mathématique est le suivant:

$$a \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + 2b \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial t} + c \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + [\dots] = 0 \quad (1.1)$$

Les coefficients a , c , b et les termes entre crochets dépendent de X , z , t , et des dérivées premières de X .

Par analogie avec l'équation des coniques [Le Pourhiet, 1988], l'équation (1.1) est dite:

- parabolique si $b^2 - ac > 0$
- elliptique si $b^2 - ac < 0$
- hyperbolique si $b^2 - ac = 0$

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la classe particulière des **systèmes non linéaires** et **non stationnaires**, assez largement répandue dans les domaines de sciences

de l'ingénieur pour laquelle les trois coefficients a , b et c sont tous nuls. L'équation ne dépend plus que des dérivées premières de X : c'est l'équation hyperbolique d'ordre 1.

On considère donc la classe définie par l'équation d'état suivante :

$$\frac{\partial X(z,t)}{\partial t} = E[X(z,t)] + F(z)u(z,t) \quad (1.2)$$

sur un domaine spatial ouvert $\Omega \subset \mathfrak{R}$ et un domaine temporel $T \subset \mathfrak{R}$

On définit l'état initial

$$X_0 = X(z, t_0). \quad (1.3)$$

Des conditions aux limites doivent être fixées sur la frontière de Ω :

$$G[X(z,t)] = u_1(z', t) \quad z' \in \text{Fr}(\Omega) \quad (1.4)$$

E , F , G sont des opérateurs matriciels différentiels sur le vecteur d'état X ; $u(z,t)$ et $u_1(z', t)$ sont des entrées ou des variables de commande du système.

On distingue plusieurs classes de commande et plusieurs classes d'observation [El Jaï & Pritchard, 1986] des systèmes à paramètres répartis, et bien qu'il existe une théorie de la commande de ce type de système [El Jaï & Amouroux, 1990], les méthodes qui en découlent sont généralement d'une mise en oeuvre difficile, voire impossible. Une solution consiste donc à ramener le problème de commande ou d'observation de dimension infinie modélisé par des équations différentielles partielles en un problème de dimension finie modélisé par des équations différentielles ordinaires en utilisant l'une des méthodes d'approximation que nous présenterons dans le paragraphe suivant.

3. LES METHODES D'APPROXIMATION

Les méthodes d'approximation fonctionnelle peuvent être divisées en deux grandes classes [Le Pourhiet, 1988] à savoir les **méthodes d'approximation des équations** et les **méthodes d'approximation de la solution**.

Les méthodes d'approximation des équations appelées aussi **méthode de différences finies** sont très utilisées dans la réduction des systèmes [Sibony & Mardon, 1982], [Le Pourhiet, 1988]. Le principe de ces méthodes repose sur l'approximation des dérivées par des différences finies en utilisant des développements en série de Taylor. Ces méthodes conduisent à une solution très précise mais au prix d'une dimension relativement élevée du modèle approché. Les méthodes d'approximation de la solution permettent d'adopter des modèles de solutions approchées de dimension réduite dont la solution est suffisamment précise.

Dans ce chapitre, nous ne traiterons pas les méthodes d'approximation d'équations pour lesquelles de très nombreux ouvrages ont été écrits [Le Pourhiet, 1988] [Villadsen. &

Michelsen, 1972]. Par contre nous nous intéresserons dans ce qui suit à l'une des méthodes d'approximation de la solution à savoir la méthode des résidus pondérés.

4. LA METHODE DES RESIDUS PONDERES

La méthode des résidus pondérés [Finlayson, 1972] [Babary *et al.*,1996] consiste à déterminer pour l'équation (1.2) une solution approchée de la forme

$$X(z, t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)\varphi_i(z) + \psi(z, t) \quad (1.5)$$

$\varphi_i(z)$ sont des fonctions choisies à priori. $\psi(z, t)$ doit satisfaire les conditions aux limites (1.4) de l'équation (1.2). En substituant l'expression (1.5) dans l'équation (1.2), dans la condition initiale (1.3) et dans les conditions aux limites (1.4) on peut définir les résidus suivants:

◆ Résidu sur l'équation

$$R(X) = \frac{\partial X}{\partial t} - E[X] - Fu \quad (1.6)$$

◆ Résidu sur la condition initiale

$$R_0(X) = X_0 - x_0 \quad (1.7)$$

◆ Résidu sur les conditions aux limites

$$R_1(X) = G[X] - u_1 \quad (1.8)$$

La méthode des résidus pondérés consiste à minimiser le résidu défini en (1.6), ce qui revient à projeter ce résidu en N fonctions de pondérations $w_i(z)$ et à annuler ces projections tel que:

$$\langle R(X) | w_i(z) \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} R(x)w_i(z)d\Omega = 0 \quad i = 1,2,\dots,N \quad (1.9)$$

Un système de N équations est ainsi obtenu permettant de calculer les coefficients x_i de l'expression (1.5). Selon le choix des fonctions de pondération $w_i(z)$ on obtient plusieurs classes de méthodes des résidus pondérés [Babary *et al.*,1996] que nous avons classées dans le tableau suivant:

Méthodes	Méthode des Moindres carrées	Méthode de Galerkin	Méthode de collocation par sous-domaines	Méthode de collocation orthogonale
Fonction de pondération	$w_i = \frac{\partial R(X)}{\partial x_i}$ $i = 1, 2, \dots, N$	$w_i = \frac{\partial R(X)}{\partial \dot{x}_i}$ $i = 1, 2, \dots, N$	$w_i = \begin{cases} \text{const sur } \Omega_i \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$ $i = 1, 2, \dots, N$	$w_i = \delta(z - z_i)$ $i = 1, 2, \dots, N$

Tableau 1.1: Classification des méthodes des résidus pondérés

Dans le tableau 1.1, $(\Omega_i, i = 1, \dots, N)$ sont des sous-domaines de Ω et δ est la fonction de Dirac.

Toutes les méthodes des résidus pondérés sont largement utilisées dans les domaines de sciences de l'ingénieur. Cependant la méthode de **collocation orthogonale** est souvent préférée aux autres pour plusieurs raisons que nous évoquerons dans le paragraphe suivant.

Une étude comparative des différentes méthodes [Villadsen. & Michelsen 1978] a montré que la méthode de Galerkin permet de donner la meilleure approximation. Cependant avec un choix optimal des points de collocation, la méthode de collocation peut donner des résultats comparables.

5. LA METHODE DE COLLOCATION ORTHOGONALE

La méthode de collocation orthogonale [Villadsen. & Michelsen, 1978][Finlayson, 1971] [Babary *et al.*, 1996] est l'une des méthodes des résidus pondérés la plus utilisée pour plusieurs raisons. En effet, d'une part l'établissement du système différentiel ordinaire s'effectue **sans calcul d'intégrales** grâce au choix de la fonction de Dirac. D'autre part, la **nature des variables d'état** est **conservée** contrairement aux autres méthodes. De plus, il a été montré que **les bilans de masse et de chaleur** sont **conservés** dans la transformation [Cho & Joseph, 1983]. Cette méthode est simple à mettre en oeuvre par rapport aux autres méthodes mais elle exige que certaines règles soient respectées, elle peut même conduire à de très mauvais résultats si certaines précautions ne sont pas prises [Villadsen. & Michelsen, 1978].

5.1. MISE EN OEUVRE

La méthode de collocation orthogonale permet de déterminer une solution approchée de l'équation (1.2) sous la forme:

$$X(z, t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) \varphi_i(z) \quad (1.10)$$

où x_i est la valeur de X aux $(N+2)$ points de collocation et les φ_i sont des fonctions de base évaluées aux points de collocation.

L'utilisation de la méthode de collocation orthogonale nécessite le choix des paramètres suivants:

- les fonctions de base φ_i ,
- le nombre des points de collocation N ,
- la position des points de collocation

La méthode de collocation est dite méthode de collocation orthogonale lorsque les points de collocation sont confondus avec les points d'interpolation [Villadsen. & Michelsen, 1978] .

5.2. CHOIX DES FONCTIONS DE BASE

De nombreuses classes de fonctions de base ont été considérées dans l'application de la méthode de collocation orthogonale. Afin d'éviter des problèmes numériques de matrices mal conditionnées, il est préférable de considérer des fonctions polynomiales $\varphi_i(z)$ [Sibony, 1982] du fait que ces fonctions sont dérivables, intégrables et forment un espace vectoriel. Pour des raisons de simplification des calculs, il est même plus intéressant de choisir des polynômes orthogonaux sur Ω tel que les polynômes de Tchebychev, Legendre, Leguerre, Hermite et Jacobi [Finlayson, 1972] vérifiant la relation d'orthogonalité suivante:

$$\int_{\Omega} \varphi_i(z)\varphi_j(z)d\Omega = R_i^2\delta_{ij} \quad (1.11)$$

Dans la littérature, la plupart des travaux font appel aux **polynômes de Lagrange** vue leur propriétés intéressantes. En effet il a été montré par des exemples numériques qu'une bonne approximation facile à mettre en oeuvre est obtenue en utilisant les polynômes de Lagrange avec un **nombre très limité de points de collocation** [Villadsen. & Michelsen, 1978] [Wong, 1980] [Wysocki, 1983].

Les polynômes d'interpolation de Lagrange $L_i(z)$ de degré $(N + 1)$ définis à l'aide de $(N + 2)$ points d'interpolation z_i sont donnés par:

$$\left. \begin{aligned} L_i(z) &= \frac{P_{n+2}(z)}{(z-z_i)P'_{n+2}(z_i)} \\ P_{n+2}(z) &= (z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{n+1}) \\ P'_{n+2}(z_i) &= \frac{d}{dz}(P_{n+2}(z)) \end{aligned} \right| \quad (1.12)$$

Les polynômes $L_j(z)$ doivent vérifier la propriété suivante:

$$\begin{aligned} L_j(z_i) &= 1 & \text{si } j = i \\ L_j(z_i) &= 0 & \text{si } j \neq i \end{aligned} \quad (1.13)$$

On peut vérifier qu'en chaque point d'interpolation z_j :

$$\varphi_i(z_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 0, 1, \dots, N + 1 \quad (1.14)$$

d'où

$$X(z_j, t) = x_i(t), \quad j = 0, 1, \dots, N + 1 \quad (1.15)$$

Les fonctions $x_i(t)$ représentent donc les valeurs de la solution approximée aux points d'interpolation z_i .

5.3. DETERMINATION DU NOMBRE DE POINTS DE COLLOCATION

Le choix du nombre de points de collocation N est un problème important car il détermine d'une part l'ordre du système et par conséquent le nombre d'équations à résoudre; d'autre part il influe énormément sur la précision de la solution obtenue. Ce choix dépend de plusieurs facteurs relatifs au modèle tel que la dynamique, la dimension du domaine spatial et des capteurs, les non-linéarités du modèle...

Une corrélation quantitative a été établie par [Srivastava, 1985] entre le nombre de points de collocation nécessaires et la précision souhaitée et un paramètre de réduction d'ordre (Order Reduction Parameter) obtenu à partir d'un développement en série de la solution en régime permanent du modèle étudié. Cependant, on peut affirmer que vu l'importance des calculs nécessaires et la complexité des modèles à approximer, ce type de critère ne présente qu'un intérêt théorique et que d'une façon générale le nombre de points de collocation dépend de l'application. Il faut dans tous les cas chercher à résoudre un compromis entre la précision de la solution et la complexité du modèle. Il est préférable sur le plan numérique de faire varier la **position des points de collocation** plutôt que d'augmenter le **nombre de points**.

5.4. DETERMINATION DE LA POSITION DES POINTS DE COLLOCATION

Le choix de la position des points de collocation est un problème très important; en effet ce choix influe énormément sur la précision de la solution. Il a été montré que les **positions optimales des points de collocation** sont les **zéros de polynômes orthogonaux** [Villadsen. & Michelsen, 1978].

Il est à noter que les meilleures approximations ont été obtenues avec les **polynômes de Jacobi** [Michelsen & Villadsen, 1972] vérifiant la relation d'orthogonalité suivante:

$$\int_0^1 z^p (1-z)^q z^k P_N^{(p,q)}(z) dz = 0 \quad (1.16)$$

$k = 0, 1, \dots, N - 1$

Les paramètres p et q sont des paramètres de réglage en vue d'obtenir la meilleure solution mais il n'existe pas de méthode précise pour déterminer la valeur de ces deux

paramètres. Des études expérimentales ont montré qu'il est préférable de placer les points de collocation dans les zones où les non-linéarités sont les plus accentuées.

Dans ce qui suit les points de collocation internes seront considérés comme étant les zéros du polynôme de Jacobi noté $P_N^{(p,q)}$ (Villadsen and Michelsen, 1978) défini par:

$$P_N^{(p,q)}(z) = \sum_{i=0}^N (-1)^{N-i} \gamma_i z^i$$

$$\gamma_i = \frac{N-i+1}{i} \frac{N+i+p+q}{i+q} \gamma_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.17)$$

$$\gamma_0 = 1; \quad p \text{ et } q > -1$$

Le tableau 1.2 explique l'influence du couple de paramètres (p,q) sur la position des points de collocation.

p	q	Remarques	Position des points de collocation pour $N = 5$
0	0	Distribution uniforme de zéros.	$z_0 = 0, z_1 = 0.0469, z_2 = 0.2308, z_3 = 0.9531, z_4 = 0.7692, z_5 = 0.9531, z_6 = 1.000.$
1	1	Position symétrique de zéros.	$z_0 = 0, z_1 = 0.0849, z_2 = 0.2656, z_3 = 0.500, z_4 = 0.7344, z_5 = 0.9151, z_6 = 1.000$
1	-0.5	Variables symétriques en espace.	$z_0 = 0, z_1 = 0.0186, z_2 = 0.1596, z_3 = 0.4005, z_4 = 0.6712, z_5 = 0.8928, z_6 = 1.000$
petit	>1	Davantage de zéros du coté de $z = z_{N+1}$.	$z_0 = 0, z_1 = 0.2797, z_2 = 0.4987, z_3 = 0.7063, z_4 = 0.08734, z_5 = 0.09752, z_6 = 1.000.$
>1	petit	Davantage de zéros du coté de $z = z_0$.	$z_0 = 0, z_1 = 0.0248, z_2 = 0.1266, z_3 = 0.2937, z_4 = 0.5013, z_5 = 0.7203, z_6 = 1.000.$

Tableau 1.2: Position des points de collocation

5.5. MISE EN OEUVRE DE LA METHODE

Par utilisation de la méthode de collocation orthogonale, chaque variable d'état $X(z, t)$, est approximée en une somme finie de produits de fonctions dépendants l'une de la variable d'espace z et l'autre de la variable temporelle t comme suit:

$$X(z, t) = \sum_{i=0}^{N+1} L_i(z) x_i(t) \quad (1.18)$$

$$x_i(t) = X(z = z_i, t)$$

en un nombre fini de points de collocation z_i définis comme suit::

$$z_0 = 0 < z_1 < \dots < z_{N+1} = 1, \quad (1.19)$$

qui sont les points d'interpolation des polynômes d'interpolation de Lagrange L_i définis par (1.12). Ces points sont considérés comme étant les zéros du polynôme de Jacobi noté $P_N^{(p,q)}$ et défini par (1.17).

Les dérivées temporelles et spatiales au points z_i peuvent être exprimées comme suit:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial X(z, t)}{\partial t} \right|_{z=z_i} &= \frac{dx_i(t)}{dt} \\ \left. \frac{\partial X(z, t)}{\partial z} \right|_{z=z_i} &= \sum_{j=0}^{N+1} l_{i,j} x_j(t) \quad \text{où} \quad l_{i,j} = \left. \frac{dL_j(z)}{dz} \right|_{z=z_i} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Une fois les points de collocation z_i et les coefficients $l_{i,j}$ calculés, un modèle d'ordre réduit est obtenu en substituant les approximations (1.20) dans le système aux dérivées partielles (1.18). Ce modèle réduit est exprimé en terme d'équations différentielles ordinaires localisées en chaque point de collocation.

Malgré la réduction d'ordre introduite sur le modèle de dimension infinie, la dimension du système reste toujours importante. Sa mise sous forme d'une représentation d'état ou plus particulièrement sous une forme canonique est recommandée. Cette opération, facilitera d'une part son intégration sur calculateur numérique; d'autre part elle permettra d'aborder les études d'estimation et de commande. Nous consacrerons pour cette raison le prochain paragraphe à la représentation d'état du système représenté par des équations différentielles ordinaires.

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous présenterons trois exemples d'application pour illustrer la mise en oeuvre et les performances de la méthode de collocation orthogonale.

6. REPRESENTATION D'ETAT DU SYSTEME REDUIT

Considérons le système non stationnaire et non linéaire à m entrées, dont l'espace d'état x est de dimension n , obtenu après approximation par la méthode de collocation orthogonale et décrit par la représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = f(x, t, u) \quad (1.21)$$

La forme la plus répandue de la représentation (1.21) est celle qui permet de représenter des **systèmes linéaires en la commande**. Pour le cas des systèmes qui sont linéaires en u il est recommandé d'écrire ce système différentiel ordinaire sous la forme suivante:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (1.22)$$

où f et g , représentent un champ de vecteurs généralement non linéaires. f est une matrice d'état de dimension $(n \times n)$ et g est une matrice de commande de dimension $(n \times m)$. Dans ce qui suit, la classe des systèmes considérés est celle des systèmes non linéaires et non stationnaires dont le nombre d'entrées m est égal au nombre de sorties et représentés par l'équation (1.22). La représentation entrée-sortie du système est considérée par addition d'une fonction de sortie de dimension m décrite comme suit:

$$y = c(x, t) \quad (1.23)$$

En vue d'une étude de commande ou d'estimation, Le système (1.22) est souvent écrit sous l'une des formes canoniques possibles. On trouvera plus de détails à ce propos dans [Isidori, 1989][Borne *et al.*, 1993][Fossard & Normand-Cyrot, 1993]. Nous ne citerons dans ce chapitre que les représentations qui seront utilisées par la suite.

Dans le cas multivariable, il est toujours intéressant de découpler le système multivariable en des sous-systèmes monovariables. Dans ce sens plusieurs travaux ont été publiés dans [Isidori, 1989][Borne *et al.*, 1993][Fossard & Normand-Cyrot, 1993].

Une des représentations intéressantes est la représentation canonique de commandabilité. Celle-ci est basée sur la notion de degré relatif du système. Le degré relatif d'un système est égal au nombre de fois que l'on dérive la sortie y jusqu'à faire apparaître d'une façon explicite la commande u . La représentation du système sous la forme canonique de commandabilité est donnée par la proposition suivante (voir annexe 1):

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{ik} = \eta_{i, k+1} & \text{si } k = 1, \dots, r_i - 1 \\ \dot{\eta}_{i, r_i} = f(\eta, t) + g(\eta, t)u & i = 1, \dots, m \\ y_i = \eta_{i1} \end{cases} \quad (1.24)$$

où les indices r_i sont les degrés relatifs du système découpé.

Si le système considéré est commandable et observable alors on a

$$\sum_{i=1}^m r_i = n,$$

sinon le système découpé est de dimension inférieure à celle du système initial et on a

$$\sum_{i=1}^m r_i \leq n.$$

Dans le cas où le système découpé est de dimension inférieure à celle du système initial, il faut étudier la partie du processus non observable par ce modèle [Isidori, 1989]. Dans le cas où la matrice g est non inversible, on ne peut pas trouver un

bouclage statique pour le système. Dans certains travaux [Isidori, 1989] [Fossard & Normand-Cyrot, 1993][Niejmeijer & Van Der Shaft, 1990], une solution à ce problème consiste à mettre en oeuvre un **bouclage dynamique**. Pour ce faire et pour d'autres raisons que nous détaillerons dans les prochains chapitres, nous proposerons une **forme canonique modifiée** [Boubaker *et al.*, 1998a]. Cette représentation est donnée par la proposition suivante:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{ik} = \eta_{ik+1} & sik = 1, \dots, r_i \\ \dot{\eta}_{ir_i+1} = \tau_i(\eta, u, \dot{u}) & i = 1, \dots, m \\ y_i = \eta_{i1} \end{cases} \quad (1.25)$$

où τ_i est une fonction non linéaire de ses arguments.

Bien que le système (1.25) obtenu est d'ordre augmenté par rapport au système (1.22) de départ, cette représentation présente principalement deux avantages; d'une part une **inversion de la matrice de commandabilité n'est plus** nécessaire lors du calcul de la commande. D'autre part **les problèmes de commutation de la variable de commande** ainsi que **les problèmes de broutement** qui apparaissent lors d'une implantation d'une **technique de commande à structure variable** seront **résolus**.

7. APPLICATIONS

7.1. APPROXIMATION D'UN SYSTEME LINEAIRE A RETARD

Les fonctions de transfert des **systèmes linéaires avec retard à l'entrée** ont été toujours source de problèmes. La détérioration des performances de ces systèmes est généralement due à l'estimation et l'approximation d'un **retard inconnu** lorsque les autres paramètres du système sont aussi inconnus [Nihtila *et al.*, 1994][Boubaker *et al.*, 1997b]. Nous présentons dans ce paragraphe une **technique de séparation** du bloc retard par rapport au bloc linéaire en vue de résoudre le problème de l'identification. Le bloc retard peut être décrit dans ce cas par une équation différentielle partielle puis approximé par la méthode de collocation orthogonale. Seuls les problèmes de l'approximation seront présentés dans ce paragraphe; plus de détails à propos du problème de l'identification sont présentés dans [Nihtila *et al.*, 1994] et à propos du problème de la commande [Boubaker *et al.*, 1997b].

Considérons le système linéaire à retard représenté par la représentation d'état suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x(t) + B_1 u(t-h) \\ y(t) &= C_1^T x(t) \end{aligned} \quad (1.26)$$

où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ est le vecteur de commande, A_1 , B_1 , C_1 sont des matrices avec des dimensions appropriées. Le retard h est une constante non négative.

Le système (1.26) peut être représenté par la figure 1.1.

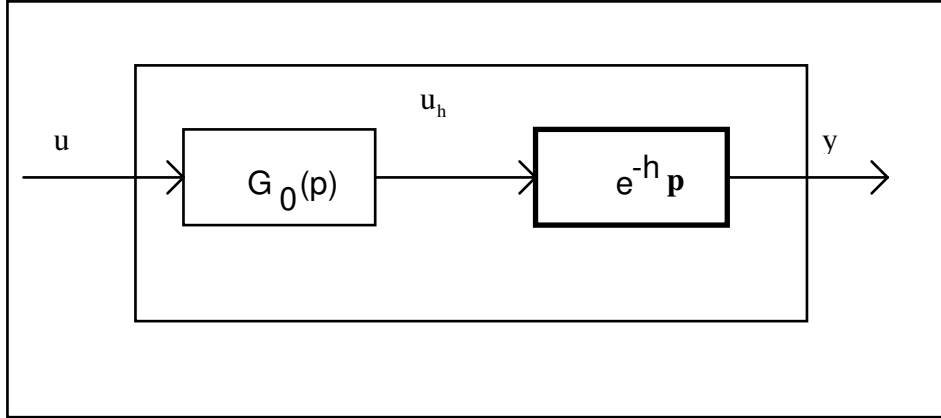


Figure 1.1: Schéma bloc du système global

où $G(p)$ est la fonction de transfert du système (1.26) définie par:

$$G(p) = G_0(p)e^{-hp} \quad (1.27)$$

Le bloc retard du système (1.26) est équivalent à un système à paramètres répartis [Gould, 1969] décrit par l'équation aux dérivées partielles suivantes:

$$\frac{\partial X(z,t)}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{\partial X(z,t)}{\partial z}; \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (1.28)$$

avec la condition aux limites suivante:

$$X(0,t) = u_h(t), \quad (1.29)$$

et l'équation de sortie suivante:

$$y(t) = X(1,t) \quad (1.30)$$

Pour approximer le retard, la méthode de collocation orthogonale a été appliquée. Le système aux dérivées partielles est transformé en un système de $(N+1)$ équations différentielles ordinaires dans la représentation d'état suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{h} [A_h x - B_h u_h] \\ y &= C_h x \end{aligned} \quad (1.31)$$

avec

$$x = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_{N+1}(t)]$$

$$A_{h_{ij}} = 1, i, j = 1, 2, \dots, (N+1);$$

$$B_{h_{ij}} = 1, i, j = 1, 2, \dots, (N+1);$$

$$C_h = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

Les coefficients l_{ij} sont données par l'expression (1.20).

Dans le but de comparer le modèle approximé par la méthode de collocation orthogonale au système réel, une simulation de la réponse indicielle du modèle réel et de sa version approximée a été élaborée avec les valeurs numériques suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C_1 = (0 \quad 1); \quad h = 0.5.$$

Les points de collocation $z_i, (i=1, 2, \dots, N+1)$ choisis sont les zéros de polynômes de Jacobi $P_N^{(p,q)}$ définis par (1.17).

Les simulations présentées sur la figure 1.2 montrent la variation de l'erreur d'approximation dans le cas où le nombre de points de collocation est fixe ($N=4$) alors que la position des points de collocation varie (p et q variables). Sur la figure 1.3 la variation de l'erreur d'approximation est présentée pour le paramètre N variable et les paramètres p et q constants.

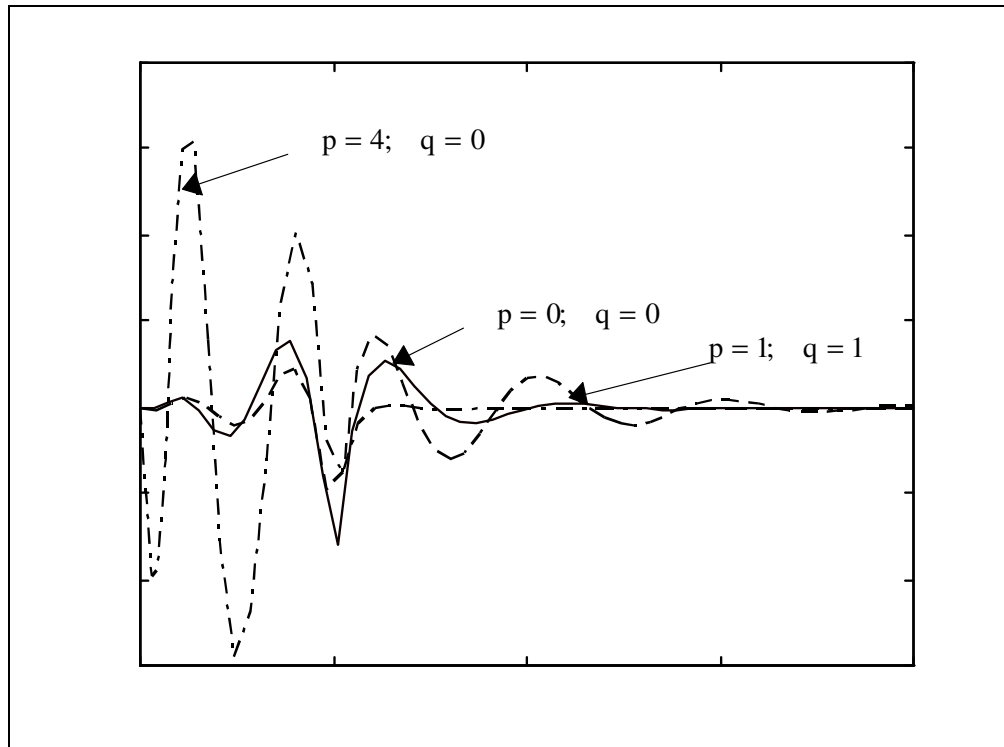


Figure 1.2. Erreur d'approximation ($N=4$)

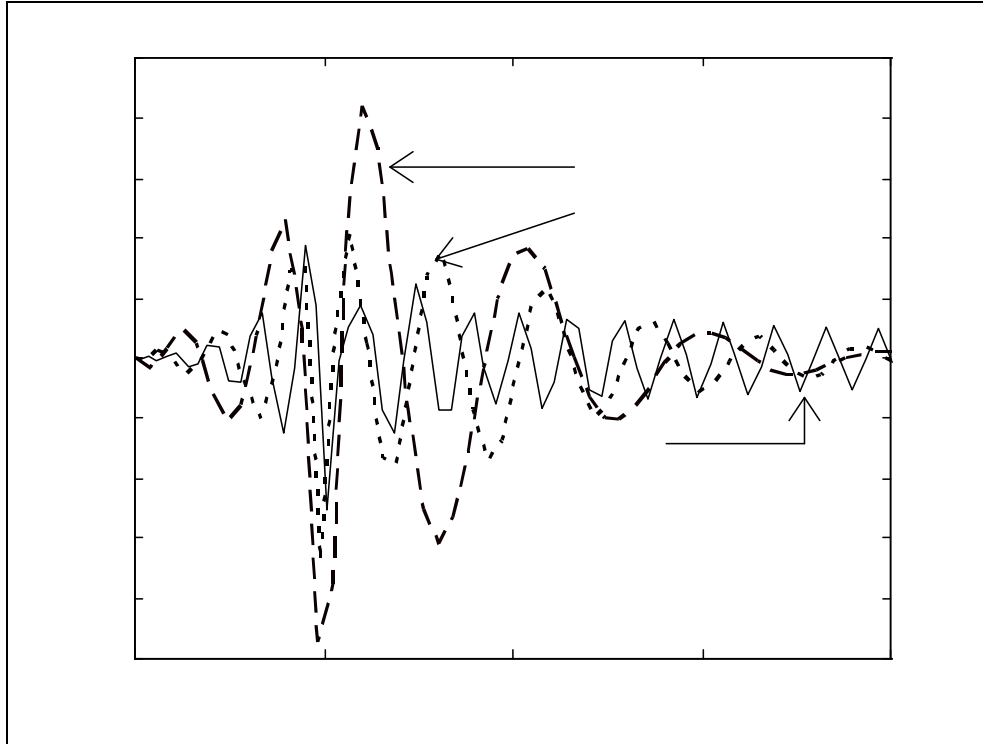


Figure 1.3. Erreur d'approximation ($p = 1, q = 1$)

Les résultats de simulation permettent de justifier la validité de la méthode de collocation orthogonale et de montrer l'influence des trois paramètres p , q et N sur la précision d'approximation. On peut constater qu'une augmentation du nombre de points de collocation améliore la précision de l'approximation mais au prix d'un modèle d'ordre plus élevé. Cette amélioration peut être assurée sans augmentation de l'ordre du système par un changement de la position des points de collocation dans les zones où les non linéarités sont les plus prononcées.

Pour assurer un compromis entre la complexité du modèle et la précision de l'approximation, nous avons opté pour les valeurs numériques suivantes:

$$N = 4, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

Dans ce cas, les points de collocation obtenus sont les suivants:

$$z_0 = 0; \quad z_1 = 0.0694; \quad z_2 = 0.3300; \quad z_3 = 0.6700, \quad z_4 = 0.9306; \quad z_5 = 1$$

et les matrices A_h , B_h et C_h sont donnés par:

$$A_h = \begin{pmatrix} 6.6640 & 2.8405 & -1.2325 & 1.1613 & -0.6550 \\ -5.1848 & 0.7688 & 2.9413 & -2.2497 & 1.2291 \\ 2.2497 & -2.9413 & -0.7688 & 5.1848 & -2.4952 \\ -1.1613 & 1.2325 & -2.8405 & -6.6640 & 8.7783 \\ 1.7631 & -1.8126 & 3.6799 & -23.6304 & 21.000 \end{pmatrix}; \quad B_h = \begin{pmatrix} -8.7783 \\ 2.4952 \\ -1.2291 \\ 0.6550 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C_h = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

La figure 1.4 montre dans ce cas une superposition de la réponse indicielle en boucle ouverte du modèle global réel (1.26) et de son modèle approché.

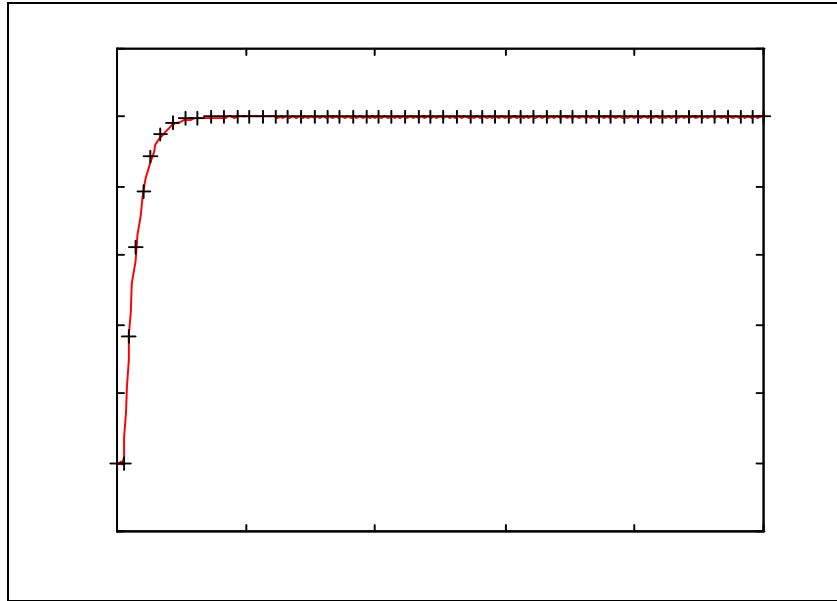


Figure 1.4. Réponse indicielle en boucle ouverte ($N = 4$, $p = 0$, $q = 0$)

Dans le cas où le retard n'est pas connu a priori, il peut être calculé en utilisant une méthode d'identification comme celle est présentée dans [Nihtila *et al.*, 1994].

7.2. APPROXIMATION D'UN MODELE DE BIOREACTEUR A LIT FIXE MONOSUBSTRAT

Considérons pour cette étude le modèle dynamique des bioréacteurs à lit fixe à deux réactions [Bastin & Dochain, 1990][Babary & Damak, 1993][Tali Maamar *et al.*, 1993]. On trouvera plus de détails à propos de ce modèle dans le dernier chapitre.

Le système est décrit comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_a(z,t)}{\partial t} = [\mu(X_a, S) - k_d] X_a(z,t) \\ \frac{\partial S(z,t)}{\partial t} = -u \frac{\partial S(z,t)}{\partial z} - k_1 \mu(X_a, S) X_a(z,t) \\ 0 < z \leq 1 \end{array} \right. \quad (1.32)$$

avec la condition aux limites suivante:

$$S(z = 0, t) = s_{in}(t) \quad (1.33)$$

et les conditions initiales suivantes:

$$S(z, t = 0) = s_0(z); \quad X_a(z, t = 0) = x_{a_0}(z) \quad (1.34)$$

X_a et S sont respectivement la concentration de biomasse et la concentration du substrat. z est la variable d'espace ($0 \leq z \leq 1$) et t est la variable de temps. La variable d'entrée u est la vitesse superficielle d'alimentation en substrat (débit d'alimentation/section du biofiltre) alors que la variable de sortie est la concentration du substrat. s_{in} est la concentration d'alimentation (à $z = 0$). Les paramètres k_1 et k_d représentent respectivement le coefficient de rendement et le coefficient de mortalité des micro-organismes.

Le taux spécifique de croissance μ est une fonction non linéaire de la concentration de biomasse X_a et de la concentration du substrat S . Dans la littérature plusieurs modèles existent [Bastin & Dochain, 1990]. Nous considérerons le **modèle de Contois** [Contois, 1959] défini par:

$$\mu = \mu_{\max} \frac{S}{k_c X_a + S} \quad (1.35)$$

μ_{\max} et k_c représentent respectivement le taux spécifique de croissance maximal et la constante de saturation.

Ce modèle du bioréacteur est un cas particulier des modèles plus complets de procédés biotechnologiques tels que processus de traitement biologique de l'eau ou processus industriels de fermentation.

En appliquant la méthode de collocation pour le système (1.32) (1.33) (1.34), $2(N+1)$ équations différentielles ordinaires sont obtenues sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{dx_{a_i}}{dt} = [\mu_i - k_d] x_{a_i} \\ \frac{ds_i}{dt} = -u \sum_{j=1}^{N+1} l_{i,j} s_j - u l_{i,0} s_{in} - k_1 \mu_i x_{a_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1) \quad (1.36)$$

Dans son article [Wysocki, 1983] a confirmé qu'un nombre de points de collocation égal à trois ou quatre est suffisant pour simuler ce type de bioréacteurs. En particulier pour le même modèle [Tali Maamar *et al.*, 1993] a testé différentes solutions pour le nombre et la position des points de collocation. A priori 4 points de collocation suffisent pour obtenir une bonne précision, néanmoins il faudrait les placer plus près de la limite $z = 1$ ce qui revient à choisir $0 \leq p < q$.

L'évolution des variables d'état du modèle approché dans le cas d'un choix optimal du triplet (N, p, q) et correspondant à un compromis entre un bon comportement transitoire et une bonne précision en régime permanent est montré sur les figures 1.5 et 1.6.

Le choix optimal du triplet (N, p, q) correspond aux paramètres:

$$N = 4, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

Les points de collocation sont alors placés dans les positions suivantes:

$$[0 \quad 0.312 \quad 0.579 \quad 0.813 \quad 0.963 \quad 1].$$

Les valeurs numériques du modèle sont celles d'un réacteur pilote de digestion anaerobique [Guiot, 1988] données par:

$$A = 0.02\text{m}^2, \quad H = 1\text{m}, \quad k_d = 0.05\text{h}^{-1}, \quad k_l = 0.4; \quad \mu_{\max} = 0.35\text{h}^{-1}; \quad k_c = 0.4.$$

Les valeurs initiales (à $t = 0$) des variables d'état correspondent à un profil permanent établi avec une concentration en substrat $S_{\text{in}} = 5\text{g/l}$ et une vitesse d'alimentation $u = 0.1\text{m/h}$.

Aux points de collocation les conditions initiales correspondent donc aux valeurs suivantes:

$$s(t = 0) = [1.96 \quad 0.88 \quad 0.44 \quad 0.28 \quad 0.25]^T \text{ in g.COD/l}$$

$$x(t = 0) = [29.4 \quad 13.2 \quad 6.55 \quad 4.18 \quad 3.73]^T \text{ in g.VSS/l.}$$

Un échelon positif du débit d'alimentation $u = 0.125\text{m/h}$ a été appliqué à $t = 8\text{h}$. Une fois le choix optimal du triplet (N, p, q) fixé, le modèle réduit (1.36) est bien défini.

Les expressions des coefficients $l_{i,j}$ correspondants sont déterminés.

$$[l_{i,j}]_{i,j=1,\dots,5} = \begin{bmatrix} -5.5325 & 11.9772 & -13.9565 & 21.3633 & -13.4287 \\ -1.1731 & -3.7785 & 9.3481 & -11.3332 & 6.8653 \\ 0.2857 & -1.9540 & -4.5175 & 13.2729 & -7.0638 \\ -0.1106 & 0.5990 & -3.3560 & -14.9715 & 17.8293 \\ 0.1574 & -0.8215 & 4.0436 & -40.3652 & 37.0000 \end{bmatrix}$$

$$[l_{i,0}]_{i=1,\dots,5} = \begin{bmatrix} -0.4228 \\ 0.0713 \\ -0.0232 \\ 0.0099 \\ -0.0143 \end{bmatrix}.$$

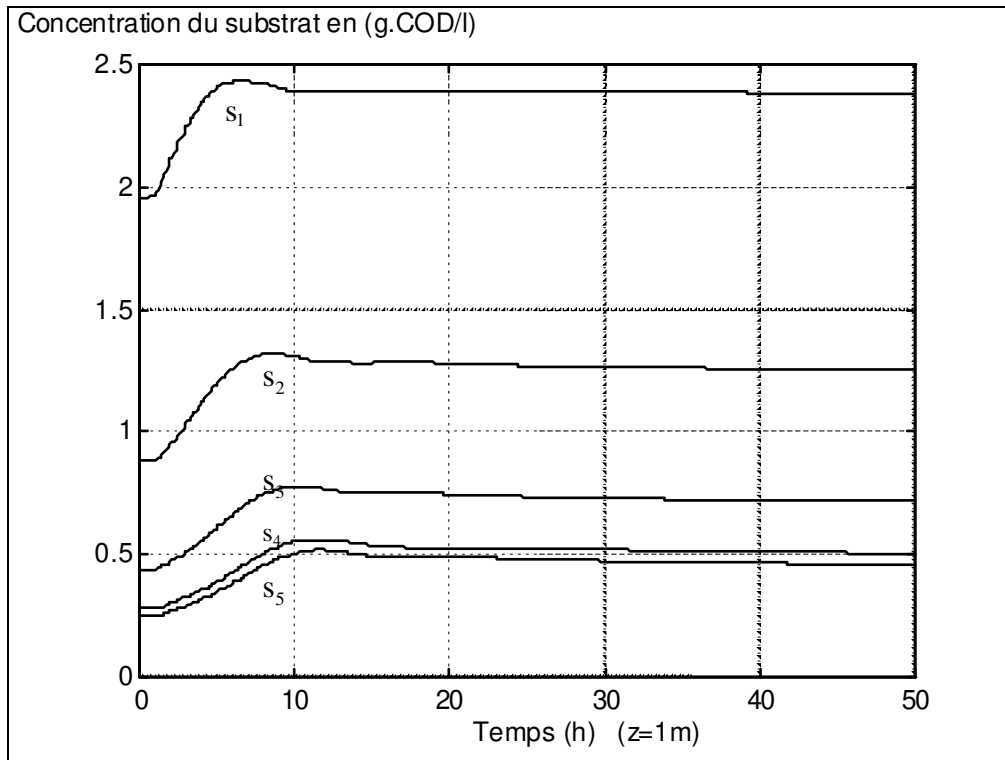


Figure 1.5. Evolution des concentrations de substrat aux points de collocation à z=1m

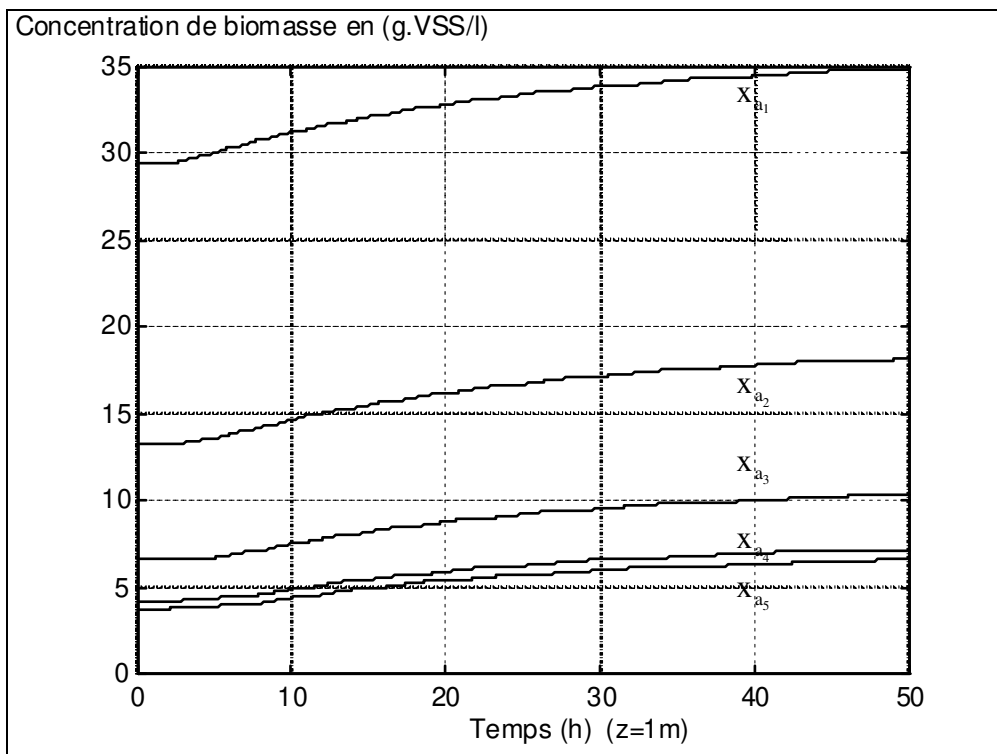


Figure 1.6 . Evolution des concentrations de biomasse aux points de collocation à z=1m

Sur chacune des figures 1.7 et 1.8 sont présentés respectivement les profils spatiaux des concentrations de substrat et de biomasse et à t = 10h .

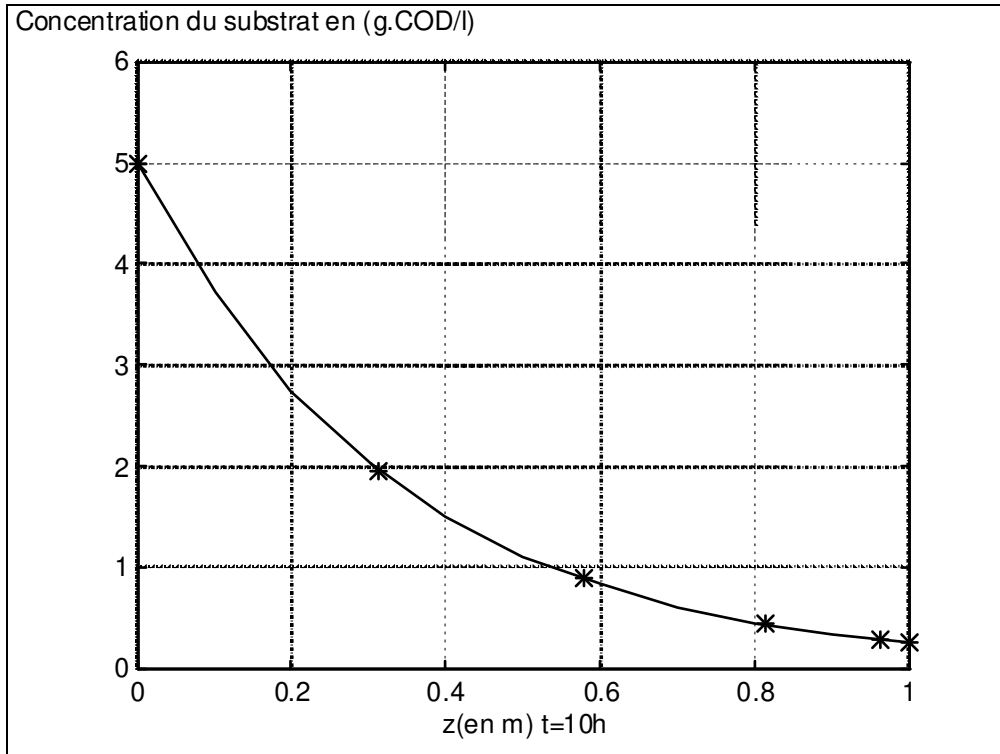


Figure 1.7. Profil spatial de la concentration de substrat à t = 10h

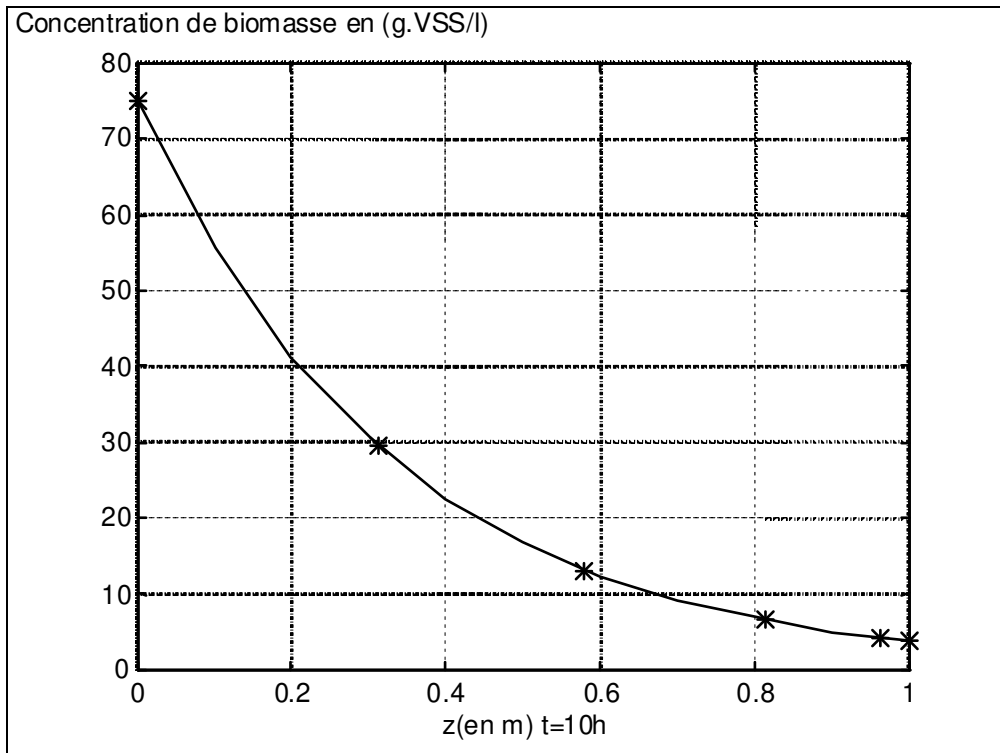


Figure 1.7. Profil spatial de la concentration de biomasse à t = 10h

7. 3. APPROXIMATION D'UN MODELE DYNAMIQUE D'UN BIOREACTEUR DE DENITRIFICATION

Il s'agit d'un procédé de traitement biologique des eaux à potabiliser. Les réactions biologiques concernent essentiellement l'élimination des nitrates et des nitrites [Jacob *et al.*, 1996], [Julien *et al.*, 1996]. Le modèle global qui décrit le comportement dynamique du procédé de dénitrification est formé par un système à paramètres répartis représenté par des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique. Plus de détails à ce propos sont donnés dans le dernier chapitre. Le modèle mathématique peut être décrit comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial S_1(z,t)}{\partial t} = -\frac{F}{\xi \epsilon} \frac{\partial S_1(z,t)}{\partial z} - \frac{1-Y_{h_1}}{1.14Y_{h_1}\epsilon} \mu_1(S_1, S_3) X_a(z,t) \\
 \frac{\partial S_2(z,t)}{\partial t} = -\frac{F}{\xi \epsilon} \frac{\partial S_2(z,t)}{\partial z} + \frac{1-Y_{h_1}}{1.14Y_{h_1}\epsilon} \mu_1(S_1, S_3) X_a(z,t) - \frac{1-Y_{h_2}}{1.71Y_{h_2}\epsilon} \mu_2(S_2, S_3) X_a(z,t) \\
 \frac{\partial S_3(z,t)}{\partial t} = -\frac{F}{\xi \epsilon} \frac{\partial S_3(z,t)}{\partial z} - \frac{1}{Y_{h_1}\epsilon} \mu_1(S_1, S_3) X_a(z,t) - \frac{1}{Y_{h_2}\epsilon} \mu_2(S_2, S_3) X_a(z,t) \\
 \frac{\partial X_a(z,t)}{\partial t} = (\mu_1(S_1, S_3) + \mu_2(S_2, S_3) - k_d(S_1, S_2, S_3, X_a)) X_a(z,t) \\
 k_d = (\mu_1(S_1, S_3) + \mu_2(S_2, S_3)) \frac{X_a(z,t)}{X_{a,max}}
 \end{array} \right. \quad (1.37)$$

pour $0 < z \leq L$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S_1(z=0, t) = S_{1,in}(t) \\
 S_2(z=0, t) = S_{2,in}(t) \\
 S_3(z=0, t) = S_{3,in}(t) \\
 X_a(z=0, t) = X_{a,in}(t)
 \end{array} \right. \quad (1.38)$$

et les conditions initiales suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S_1(z, t=0) = S_{1,0}(z) \\
 S_2(z, t=0) = S_{2,0}(z) \\
 S_3(z, t=0) = S_{3,0}(z) \\
 X_a(z, t=0) = X_{a,0}(z)
 \end{array} \right. \quad (1.39)$$

Dans les équations précédentes on a:

$S_1(z, t)$: concentration de nitrate

$S_2(z, t)$: concentration de nitrite

$S_3(z, t)$: concentration d'éthanol
 $X_a(z, t)$: concentration de biomasse active
 $X_{a_{max}}$: concentration de biomasse maximale
 ε : porosité du biofiltre
 k_d : coefficient de mortalité de la biomasse
 μ_1 : taux spécifique de croissance (dénitratation)
 μ_2 : taux spécifique de croissance (dénitritation)
 F : débit d'alimentation en substrats
 $\$$: section du biofiltre
 y_{h_1} : rendement de la biomasse (dénitratation)
 y_{h_2} : rendement de la biomasse (dénitritation)

Les taux spécifiques de croissance sont décrits par le modèle de **MONOD** [Monod, 1949] avec limitation par deux substrats:

$$\begin{cases} \mu_1(S_1, S_3) = \eta_g \mu_{1_{max}} \frac{S_1}{S_1 + K_1} \frac{S_3}{S_3 + K_3} \\ \mu_2(S_2, S_3) = \eta_g \mu_{2_{max}} \frac{S_2}{S_2 + K_2} \frac{S_3}{S_3 + K_3} \end{cases} \quad (1.40)$$

avec

η_g : facteur de correction de la croissance anaérobique
 $\mu_{1_{max}}$: taux de croissance maximum de la biomasse (dénitratation)
 $\mu_{2_{max}}$: taux de croissance maximum de la biomasse (dénitritation)
 K_1 : constante de saturation de nitrate
 K_2 : constante de saturation de nitrite
 K_3 : constante de saturation de l'éthanol

La méthode de collocation orthogonale est utilisée pour transformer le système aux dérivées partielles en un système aux dérivées ordinaires et par suite déterminer une solution approchée des variables d'état du système (1.37) sous la forme d'une somme finie de produits de fonctions dépendants l'une de la variable d'espace z et l'autre de la variable de temps tel que:

$$\begin{aligned} S_m(z, t) &= \sum_{i=0}^{N+1} L_i(z) s_m(z = z_i, t) \quad \text{pour } m = 1, 2, 3 \\ X_a(z, t) &= \sum_{i=0}^{N+1} L_i(z) x_a(z = z_i, t) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ces fonctions sont évaluées aux $(N+2)$ points d'interpolation qui sont choisis dans l'intervalle de l'espace $[0, L]$ et tels que:

$$z_0 \langle z_1 \langle \dots \langle z_{n+1} = 1, \quad (1.42)$$

A partir de l'équation (1.38), (1.39) et (1.40), en posant:

$$k_1 = \frac{1 - Y_{h_1}}{1.14 Y_{h_1} \varepsilon}; \quad k_2 = \frac{1 - Y_{h_2}}{1.71 Y_{h_2} \varepsilon}; \quad k_3 = \frac{1}{Y_{h_1} \varepsilon}; \quad k_4 = \frac{1}{Y_{h_2} \varepsilon}$$

et par utilisation de la méthode de collocation orthogonale les $4(N+1)$ équations différentielles ordinaires suivantes peuvent être obtenues:

$$\forall i = 1, L, N + 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_{1_i}}{dt} = -\frac{F}{\$ \varepsilon} \sum_{j=1}^{N+1} l_{i,j} s_{1_j} - \frac{F}{\$ \varepsilon} l_{i,0} s_{1,in} - k_1 \mu_{1_i} x_{a_i} \\ \frac{ds_{2_i}}{dt} = -\frac{F}{\$ \varepsilon} \sum_{j=1}^{N+1} l_{i,j} s_{2_j} + k_1 \mu_{1_i} x_{a_i} - k_2 \mu_{2_i} x_{a_i} \\ \frac{ds_{3_i}}{dt} = -\frac{F}{\$ \varepsilon} \sum_{j=1}^{N+1} l_{i,j} s_{3_j} - \frac{F}{\$ \varepsilon} s_{3,in} l_{i,0} - k_3 \mu_{1_i} x_{a_i} - k_4 \mu_{2_i} x_{a_i} \\ \frac{dx_{a_i}}{dt} = (\mu_{1_i} + \mu_{2_i} - k_{d_i}) x_{a_i} \quad \text{avec} \quad k_{d_i} = (\mu_{1_i} + \mu_{2_i}) \frac{x_{a_i}}{X_{a,max}} \end{array} \right.$$

(1.43)

avec les conditions initiales suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{1_i}(t=0) = s_{1_i,0} \\ s_{2_i}(t=0) = s_{2_i,0} \\ s_{3_i}(t=0) = s_{3_i,0} \\ x_{a_i}(t=0) = x_{a_i,0} \end{array} \right.$$

(1.44)

Pour les simulations numériques l'étude de l'influence des trois paramètres de l'approximation p , q et N sur la précision et la stabilité de l'approximation est primordiale. Les valeurs de ces paramètres ont été sélectionnées pour un minimum d'erreur entre les résultats numériques et par comparaison avec les résultats de Jacob [Jacob *et al.*, 1996]. Le cas optimal correspond aux valeurs suivantes:

$$N = 4; \quad p = 1; \quad q = 1$$

Le procédé de dénitrification qui a fait l'objet de cette étude est un biofiltre cylindrique de type ascendant pour le liquide de hauteur $L = 2.1\text{m}$ et de section $\$ = 0.0036\text{m}^2$. Les paramètres du procédé sont les suivants:

$$\varepsilon = 0.52; \quad \eta_g = 0.8; \quad y_{h_1} = 0.56; \quad y_{h_2} = 0.54; \quad X_{a,max} = 800\text{g[DCO]}/\text{m}^3;$$

$$\mu_{1,max} = 0.32\text{h}^{-1}; \quad \mu_{2,max} = 0.36\text{h}^{-1}; \quad K_1 = 1.5\text{g[N]}/\text{m}^3; \quad K_2 = 1\text{g[N]}/\text{m}^3; \quad K_3 = 40\text{g[N]}/\text{m}^3;$$

On négligera pour toutes les simulations la durée de remplissage dans le réacteur. Les conditions initiales sont donc les suivantes:

$$\begin{cases} S_1(z, t = 0) = 16.93\text{g}[\text{N}] / \text{m}^3 \\ S_2(z, t = 0) = 0\text{g}[\text{N}] / \text{m}^3 \\ S_3(z, t = 0) = 101.5\text{g}[\text{DCO}] / \text{m}^3 \\ X_a(z, t = 0) = X_{a_{\max}} \end{cases}$$

Les points de collocation sont alors placés dans les positions suivantes:

$$[0 \quad 0.2467 \quad 0.7505 \quad 1.3495 \quad 1.8533 \quad 2.1000]$$

Les valeurs des coefficients $l_{i,j}$ correspondants sont données par:

$$[l_{i,j}]_{i,j=1,\dots,5} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 2.4033 & -1.0979 & 0.6224 & -0.2265 \\ -1.6393 & 0.0000 & 1.6695 & -0.7489 & 0.2569 \\ 0.7489 & -1.6695 & 0.0000 & 1.6393 & -0.4619 \\ -0.6224 & 1.0979 & -2.4033 & 0.0000 & 1.7013 \\ 1.2856 & -2.1378 & 3.8440 & -9.6585 & 7.1429 \end{bmatrix}$$

$$[l_{i,0}]_{i=1,\dots,5} = \begin{bmatrix} -1.7013 \\ 0.4619 \\ -0.2569 \\ 0.2265 \\ -0.4762 \end{bmatrix}.$$

Les figures 1.9 et 1.10 montrent respectivement le comportement temporel et le comportement spatial du système en boucle ouverte pour une vitesse d'écoulement du fluide $u = \frac{F}{S} = 4\text{m} / \text{h}$.

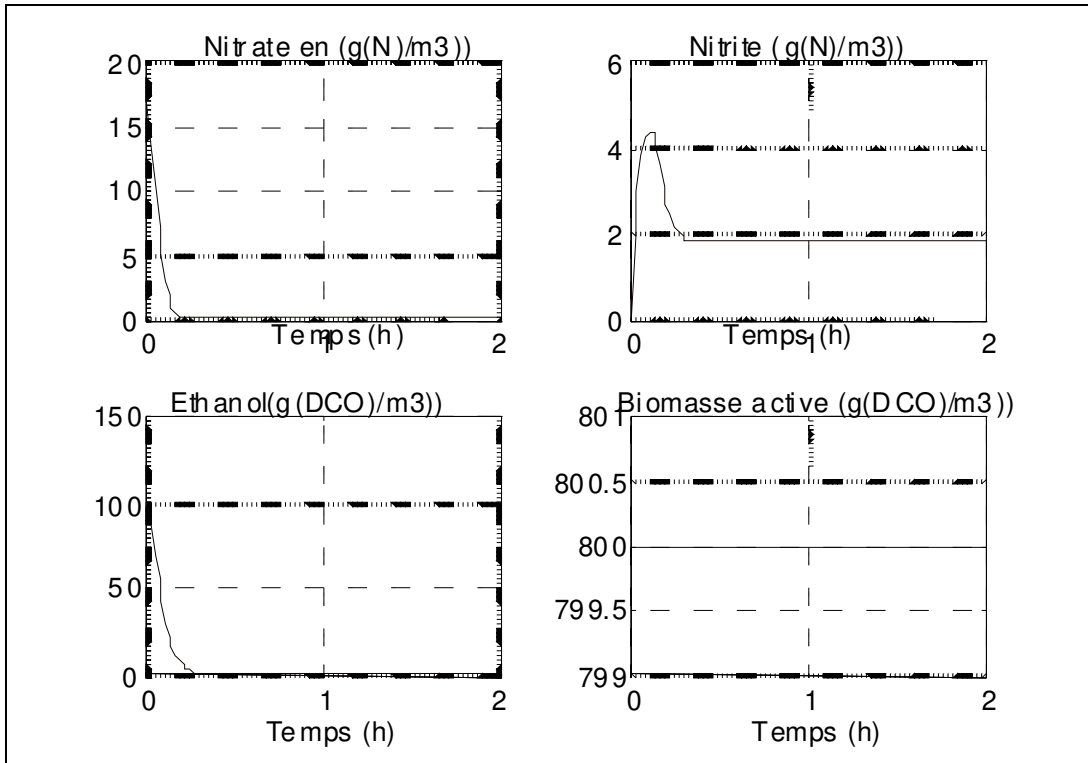


Figure 1.9. Simulation temporelle du procédé

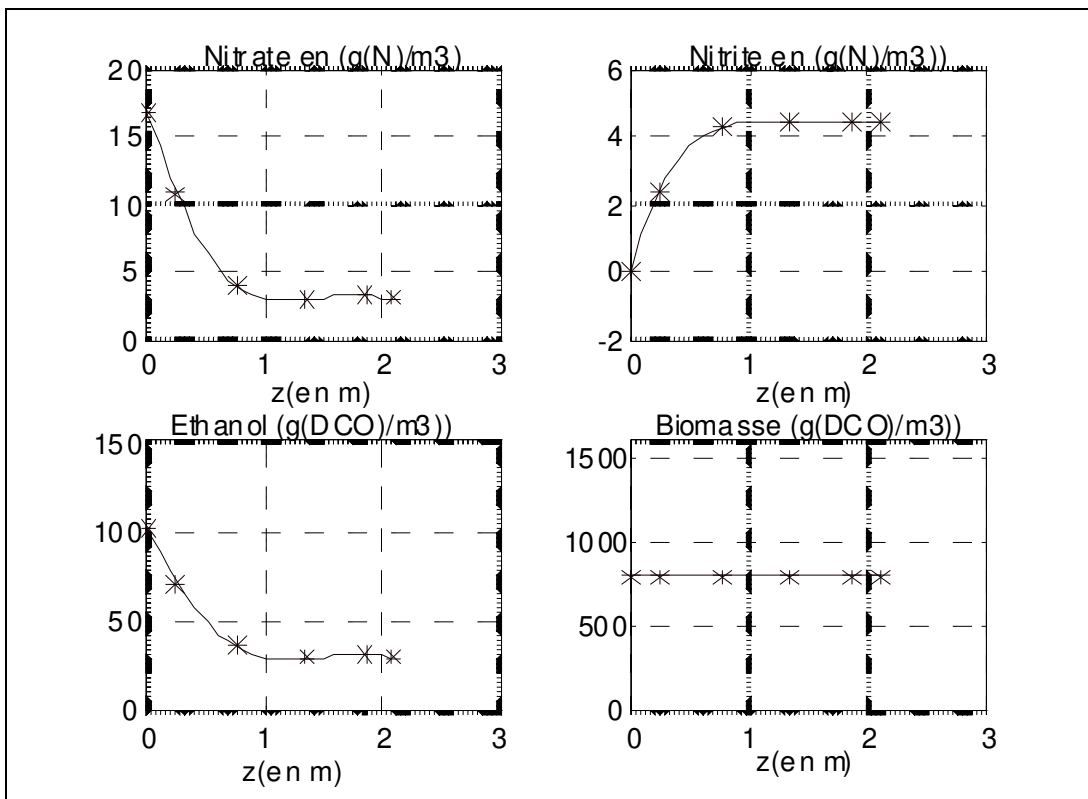


Figure 1.10. Simulation spatiale du procédé

8. CONCLUSION

L'étude présentée dans ce chapitre traite de la modélisation et la simulation des systèmes à paramètres répartis représentés par des équations aux dérivées partielles. Bien que la théorie de ce type de systèmes commence à être bien développée, la plupart des résultats ne s'appliquent qu'aux systèmes linéaires ou à quelques cas de problèmes non linéaires très simples ou de géométrie bien particulière. Or les systèmes à paramètres répartis peuvent être approximés par des systèmes différentiels ordinaires de dimension finie. Il était donc logique de contourner le problème posé par le caractère réparti en réduisant le modèle de dimension infinie en un modèle de dimension finie. Ce dernier est représenté par un système d'équations différentielles ordinaires obtenu par utilisation d'une méthode d'approximation fonctionnelle.

Plusieurs méthodes de réduction des modèles de dimension infinie ont été proposées. Particulièrement la méthode de collocation orthogonale permet d'obtenir de bons résultats avec un nombre d'équations à résoudre relativement faible et un temps de calcul moins élevé comparé à celui obtenu avec d'autres méthodes de discrétisation. Cependant il faut noter que cette méthode exige quelques précautions dans le choix de ses paramètres de réglage et peut même conduire à de mauvais résultats si ces précautions ne sont pas prises.

Bien que notre contribution ne concerne pas la partie modélisation et approximation fonctionnelle des systèmes à paramètres répartis nous avons vu qu'il est nécessaire de montrer à travers des exemples numériques la mise en œuvre de la méthode de collocation orthogonale. Des résultats de simulation ont montré les performances de cette méthode d'approximation ainsi que l'influence de ces paramètres de réglage sur la précision de la solution. Nous avons jugé que la partie modélisation est primordiale pour mener convenablement les étapes suivantes concernant essentiellement la commande des systèmes étudiés et bien évidemment l'estimation des états et des paramètres si ceux ci ne sont pas accessibles.

Notons qu'une étape de mise sous forme de représentation d'état ou sous forme canonique particulière du système réduit est nécessaire pour entamer les études de commande ou d'estimation. Dans ce sens notre contribution était d'introduire une forme canonique de commandabilité modifiée par rapport à la forme de commandabilité classique. Cette nouvelle représentation possède plusieurs avantages. En particulier l'inversion de la matrice de commandabilité n'est plus nécessaire lors du calcul de la commande. De plus tous les problèmes de commutation introduits par les techniques des systèmes à structure variable sont résolus. Les études concernant l'estimation et la commande à structure variable des systèmes à paramètres répartis feront l'objet des prochains chapitres.

CHAPITRE 2:

**OBSERVATION D'ETAT ET ESTIMATION PARAMETRIQUE
A STRUCTURE VARIABLE**

1. INTRODUCTION

La mise en oeuvre d'un système automatisé efficace exige la disponibilité d'informations en temps réel sur les états et les paramètres du système commandé. En général, il est difficile de pouvoir mesurer toutes ces variables. Les difficultés rencontrées proviennent essentiellement de la dynamique du système étudié et des techniques de mesure en ligne utilisées.

Concernant les difficultés causées par la dynamique des systèmes, notons que certains procédés sont caractérisés par des **dynamiques complexes variants dans le temps** et présentant de **fortes non linéarités**. Ces caractéristiques posent encore des problèmes au niveau de la modélisation. De plus, pour les systèmes à paramètres répartis le problème s'avère plus complexe du fait que les variables d'état dépendent aussi de la **variable d'espace**. La qualité de l'information va donc dépendre dans ce cas du nombre et aussi de l'emplacement **des capteurs**.

Concernant les difficultés causées par les techniques de mesure on peut noter d'une part des problèmes liés aux délais de traitement trop longs et d'autre part au manque de capteurs nécessaires pour l'instrumentation de certains processus et capables de fournir des informations directes, fiables et peu coûteuses. Dans ce contexte les techniques d'estimation appelées **capteurs logiques** apparaissent comme une alternative incontournable et prometteuse pour reconstruire les variables inaccessibles à partir du modèle du procédé et des mesures en ligne.

Lorsque le problème d'observation concerne des systèmes non linéaires, il est préférable de recourir aux **techniques d'observation non linéaires**. On peut citer dans ce contexte le **filtre de Kalman étendu** [Labarrere *et al.*, 1982], **l'observateur de Luenberger étendu** [Birk & Zeitz, 1988], qui ne sont que des versions modifiées et mieux adaptées du filtre de Kalman et de l'observateur de Luenberger initialement destinés pour résoudre des problèmes de filtrage linéaires. Bien que très utilisées dans la littérature, ces observateurs ne possèdent que des propriétés de stabilité et de convergence locales du fait qu'ils nécessitent un développement limité en séries de Taylor autour de l'état d'équilibre. Pour palier cet inconvénient des approches plus récentes ont été proposées permettant de garantir une stabilité globale. On peut citer dans ce sens les techniques d'estimation adaptatives [Dochain & Bastin, 1984] et **l'observateur asymptotique** [Bastin & Dochain, 1990].

Si le problème à résoudre exige simultanément la reconstitution de l'évolution des états et des paramètres, une **estimation conjointe** est indispensable. Dans la littérature quelques solutions ont été proposées. La méthode d'estimation la plus utilisée consiste à augmenter le vecteur d'état par le vecteur de paramètres et de mettre en oeuvre un **filtre de Kalman étendu**. Cependant bien que très populaire, cette méthode ne garantit pas la convergence a priori des variables estimées; elle peut conduire à des estimateurs biaisés et même divergents si l'initialisation est mal conditionnée [Ljung, 1979].

Une autre solution proposée est celle de l'observateur / estimateur asymptotique [Bastin & Dochain, 1990]. Cette méthode présente un compromis entre la simplicité de la synthèse de l'algorithme et les performances de la méthode. Néanmoins, la vitesse de convergence de l'erreur d'observation d'état est imposée par la dynamique du régime permanent du système à estimer. Cet aspect présente un inconvénient pour les systèmes lents pour lesquels il est impossible d'accélérer le régime transitoire de l'estimateur à travers un paramètre de synthèse de l'algorithme. Pour remédier aux limitations des deux dernières méthodes une solution a été introduite par [Zeng *et al.*, 1993a]. Il s'agit d'un schéma de filtrage et d'estimation conjoint qui assure une bonne convergence et une bonne robustesse. Des conditions nécessaires de stabilité de l'observateur / estimateur conjoint ont été récemment établies par [Ben Youssef *et al.*, 1996] et ont montré que si la condition d'excitation persistante est satisfaite uniquement sur le vecteur d'état et non pas sur la matrice de sensibilité paramétrique le système d'erreur est uniformément stable et l'estimation des paramètres est biaisé.

Suites aux constatations déjà faites sur les techniques d'observation et d'estimation non linéaires classiques et récentes, nous développerons dans ce chapitre un estimateur non linéaire basé sur la théorie des systèmes à structure variable qui permet de s'affranchir de tous les problèmes énoncés précédemment. Cette approche est assez récente. Introduite par [Drakunov, 1983], cette technique a été principalement développée par Slotine [Slotine *et al.*, 1986,1987][De Wit & Slotine, 1991]. Elle présente l'avantage d'assurer simultanément simplicité et performances de l'algorithme de l'estimation. L'avantage majeur de cette approche est la garantie de la stabilité, de la rapidité de convergence et de la robustesse de l'algorithme.

On rappelle que les modèles considérés sont des systèmes à paramètres répartis représentés par des équations aux dérivées partielles. Ces systèmes sont transformés par la méthode de collocation orthogonale présentée dans le premier chapitre en des systèmes à paramètres localisés représentés par des équations différentielles ordinaires non linéaires et non stationnaires. Ce chapitre traite donc de l'estimation à structure variable des systèmes non linéaires et non stationnaire. Il est organisé comme suit : le second paragraphe rappelle le principe des observateurs non linéaires; dans le troisième paragraphe, le formalisme standard des systèmes à structure variable est présenté; l'observation d'état et l'estimation paramétrique à structure variable sont simultanément introduites au quatrième et au cinquième paragraphe; le dernier paragraphe illustre à travers un exemple numérique et des résultats de simulation la mise en oeuvre et les performances des observateurs d'état et des estimateurs à structure variable.

2. PRINCIPE DE BASE DES OBSERVATEURS D'ETAT ET DES ESTIMATEURS PARAMETRIQUES NON LINEAIRES

Comme nous l'avons déjà énoncé, l'objectif des techniques d'observation d'état et estimation paramétriques non linéaires est de reconstruire l'évolution des variables d'état et des paramètres non mesurables à partir des mesures en ligne, des variables d'état mesurables et d'un modèle du procédé non linéaire. Si le modèle présente des fortes non linéarités, il n'est pas judicieux d'utiliser des techniques d'observation linéaires car celles ci ne seront valables que dans un domaine restreint de linéarisation

du système. Ainsi pour mieux tenir compte de la complexité des modèles nous avons opté pour des techniques d'observation d'état et d'estimation paramétrique non linéaires.

Pour ce type d'observateur le vecteur d'état estimé est reconstruit à partir du modèle d'état non linéaire. L'ajustement paramétrique est réalisé à partir de l'erreur entre la sortie du procédé et la sortie de l'observateur.

Considérons le système non stationnaire et non linéaire décrit par la représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = f(x, \theta, u, t) \quad (2.1)$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathcal{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $\theta \in \mathcal{R}^p$ est un vecteur de paramètres supposé partiellement connu.

La représentation entrée-sortie du système est considérée par addition d'une fonction de sortie de dimension m décrite comme suit:

$$y = c(x, t) \quad (2.2)$$

Le type d'observateur / estimateur non linéaire que nous considérons peut être représenté par la figure 2.1. L'algorithme d'estimation réalise simultanément un réajustement simultané des gains d'observation M_0 et des paramètres estimés $\hat{\theta}$ à partir des signaux d'entrée u , du signaux de sortie y et du modèle non linéaire.

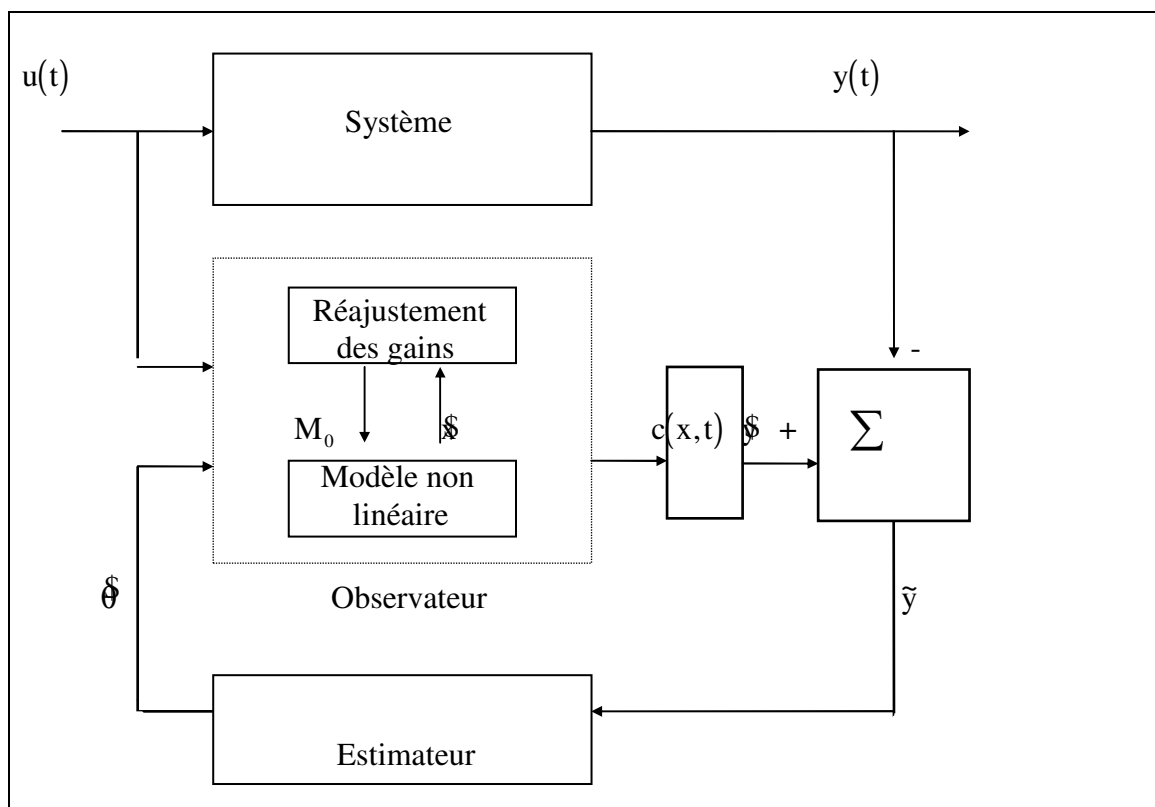


Figure 2.1. Schéma de l'observateur / estimateur non linéaire

Le vecteur d'état estimé \hat{x} est reconstruit à partir du modèle d'état non linéaire. L'ajustement paramétrique est réalisé à partir de l'erreur d'observation entre la sortie du procédé y et la sortie de l'observateur \hat{y} définie par:

$$\tilde{y} = \hat{y} - y = c(\hat{x}, t) - y \quad (2.3)$$

On définit le vecteur d'erreur d'état par:

$$\tilde{x} = \hat{x} - x \quad (2.4)$$

Le problème d'observation revient à trouver un observateur pour le système (2.1) de la forme:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, \hat{\theta}, \tilde{y}, u, t) \quad (2.5)$$

tel que la dynamique du système d'erreur donnée par:

$$\dot{\tilde{x}} = \hat{f}(\hat{x}, \hat{\theta}, \tilde{y}, u, t) - f(x, \theta, u, t) \quad (2.6)$$

soit stable asymptotiquement..

La stabilisation de l'observation d'état est généralement ramenée à une stratégie de placement de pôles du système d'erreur (2.6). L'établissement de la stabilité d'un schéma d'observation n'est pas toujours réalisable. Le filtre de Kalman illustre bien cette difficulté. Le problème s'avère plus délicat lorsqu'il s'agit d'un problème d'observation et d'estimation conjoint.

3. FORMALISME STANDARD DES SYSTEMES A STRUCTURE VARIABLE

La théorie des systèmes à structure variable est une théorie relativement récente introduite en ex-Union Soviétique dans les années 60 par [Emelyanov, 1967]. Cependant jusqu'aux années 80, cette théorie n'a vraiment pas attiré l'attention des chercheurs. Les raisons semblent être les suivantes: tout d'abord sa propriété de robustesse n'a été reconnue que récemment. De plus l'introduction des commutations haute fréquence a été toujours considérée comme un point faible de cette technique. Après les années 80 et avec les travaux de [Fillipov, 1961,1979] et [Utkin, 1977] le développement de cette théorie a été accéléré essentiellement pour des objectifs de commande que nous développerons dans le prochain chapitre. Une bibliographie abondante a été développée dans ce sens . Les extensions aux problèmes d'observation n'ont été que récemment introduites par [Drakunov, 1983] puis développées par [Slotine *et al.*, 1986, 1987], [Walcott & Zak, 1986] [Walcott *et al.*, 1987], [Misawa & Hedrick, 1989]. On ne peut citer dans ce sens qu'un nombre limité de travaux. Le présent chapitre se propose de généraliser les observateurs à structure variable dans le

cas des systèmes non linéaires et non stationnaires en présentant une extension au cas de l'observation / estimation conjointe à structure variable.

3.1. PRINCIPE DE BASE DES SYSTEMES A STRUCTURE VARIABLE

Le principe des systèmes à structure variable est fondé sur la théorie des équations différentielles à second membre discontinu [Fillipov, 1961, 1979]. Pour de tels systèmes le modèle peut commuter entre deux ou plusieurs structures avec une fréquence de commutation théoriquement infinie. Les commutations sont introduites par des fonctions non linéaires telles que les fonctions signe, hysteresis, saturation... L'objectif d'une telle approche est de maintenir l'état représentatif du système sur une variété différentiable σ de dimension inférieure à la dimension du système et définie préalablement. σ est appelée **surface glissante**. Sur cette surface glissante, la dynamique du système ainsi que sa stabilité ne dépendent plus que des paramètres de cette hypersurface ce qui explique la propriété de robustesse vis-à-vis des perturbations et variations paramétriques.

3.2. MODE GLISSANT ET CONDITION DE GLISSEMENT

Plusieurs travaux se sont intéressés au problème de l'existence et de l'unicité de la solution décrivant l'état du système sur la surface glissante σ . Pour cela on suppose que le glissement s'effectue dans un voisinage tubulaire de la surface σ puis on le fait tendre vers la surface glissante. Dans ce contexte on peut citer deux principales approches L'approche de Fillipov [Fillipov, 1961] et l'approche d'Utkin [Utkin, 1977]. Nous ne présenterons dans ce chapitre que les conditions de glissement qui assurent la stabilité du système en mode glissant relatives à chacune de ces deux approches. Plus de détails à ce propos seront donnés dans le prochain chapitre.

La condition de l'existence d'une solution en mode glissant énoncé par Fillipov [Fillipov, 1961] est donnée par la relation suivante:

$$\sigma \dot{\sigma} < 0 \quad (2.7)$$

Cette condition assure l'attractivité de la surface glissante pour les trajectoires dans l'espace d'état. Cette condition a été exprimée par [Hung *et al.*, 1993] sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &> 0 \quad \text{si} \quad \sigma < 0 \\ \dot{\sigma} &< 0 \quad \text{si} \quad \sigma > 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

La condition de glissement énoncée par Utkin [Utkin, 1992] correspond à un régime glissant idéal; elle est exprimée par la condition d'invariance suivante:

$$\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\sigma} = 0 \quad (2.9)$$

Cette dernière approche permet de déterminer la dynamique du système équivalent en régime glissant idéal.

En particulier pour la détermination du domaine de glissement et de la stabilité du système en mode glissant une extension des résultats de Lyapunov [Lyapunov, 1992] concernant la stabilité des systèmes non linéaires a été proposée par Utkin [Utkin, 1992].

3.3. CARACTERISTIQUES D'UN SYSTEME A STRUCTURE VARIABLE

La réponse d'un système à structure variable est caractérisée par deux propriétés importantes: sa robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures et des variations paramétriques et par un phénomène de broutement qui accompagne en général la réponse en mode glissant.

La robustesse absolue ou l'invariance du mode glissant est prouvée si le système satisfait des conditions géométriques bien particulières [Drazenovic, 1969], [Sira Raminez, 1988]. Si le système ne satisfait pas ces conditions, la robustesse peut être assurée par la considération des bornes supérieures des incertitudes paramétriques et des perturbations extérieures [Slotine *et al.*, 1987].

Bien que l'application des techniques de systèmes à structure variable possède des avantages incontestables, celle-ci a été limitée par l'apparition des oscillations à haute fréquence en mode glissant. Ces oscillations sont principalement dues à l'imperfection des éléments de commutation (seuil, hysteresis, retard) et aux petites constantes de temps non modélisées introduites par exemple par les capteurs et les actionneurs. Plusieurs travaux de recherche ont abordé le problème du broutement. Dans le cas des observateurs à structure variable on peut considérer que l'approche continue [Slotine *et al.*, 1987], [Babary & Damak, 1993], [Chen & Moskwa, 1997] est la plus classique et la plus utilisée des méthodes.

4. OBSERVATEUR A STRUCTURE VARIABLE

Un observateur d'état à structure variable est un observateur dont le principe de base est celui d'un observateur non linéaire et dont la dynamique du système d'erreur est déterminée par l'application de la théorie des systèmes à structure variable.

Les observateurs à structure variable ont été initialement introduits par [Drakunov, 1983] puis développés par [Slotine *et al.*, 1986, 1987], [Walcott & Zak, 1986, 1987] [Misawa & Hedrick, 1989]. Ces observateurs sont caractérisés par un bon comportement transitoire et une robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations extérieures.

4.1. PRINCIPE THEORIQUE

Considérons le système non stationnaire et non linéaire décrit par la représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.10)$$

où $x \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathfrak{R}^m$ est le vecteur d'entrée.
La sortie du système est de dimension m et décrite comme suit:

$$y = c(x, t) \quad (2.11)$$

Le principe d'un observateur à structure variable consiste à définir dans l'espace de phase une **surface de glissement** σ dépendant de l'erreur d'observation définie par:

$$\sigma = \tilde{y} = \mathfrak{S} - y \quad (2.12)$$

et à déterminer les conditions qui rendent cette surface attractive [De Wit & Slotine, 1991]. Le point représentatif du système d'erreur atteint la surface de glissement en un temps fini. Il \tilde{y} est maintenu grâce à une fonction de commutation qui gouverne la structure du système d'erreur.

Un observateur à structure variable est obtenu en considérant un estimateur classique tel que le **filtre de Kalman étendu** [Labarrere *et al.*, 1982], ou l'**observateur de Luenberger étendu** [Birk & Zeitz, 1988] et en lui rajoutant des termes de commutation. L'observateur d'état à structure variable peut être donc donné par la proposition suivante:

$$\dot{\mathfrak{S}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{S}, u, t) - M_1 \tilde{y} - M_g I_\sigma \quad (2.13)$$

où \mathfrak{S} et \tilde{y} représentent respectivement l'estimée de x et l'erreur d'observation définie par la relation (2.3). M_1 représente une matrice de gains d'estimation de dimension $n \times m$ déterminée avec un observateur classique; par contre M_g représente une matrice de gains de dimension $n \times m$ de l'observateur à structure variable défini de façon à assurer l'attractivité de la surface de glissement σ . I_σ est un vecteur représentant les termes de commutation:

$$I_\sigma = [\text{sgn}(\sigma_1) \quad \text{sgn}(\sigma_2) \quad \dots \quad \text{sgn}(\sigma_m)] \quad (2.14)$$

sgn étant la fonction signe définie par:

$$\text{sgn}(\sigma_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_i > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma_i = 0 \\ -1 & \text{si } \sigma_i < 0 \end{cases} \quad i = 1, L, m \quad (2.15)$$

La dynamique de l'erreur d'observation entre les systèmes (2.10) et (2.13) est donnée par:

$$\dot{\mathfrak{S}} = \mathfrak{f}(\mathfrak{S}, u, t) - f(x, u, t) - M_1 \tilde{y} - M_g I_\sigma \quad (2.16)$$

où l'erreur sur le vecteur d'état est définie par:

$$\tilde{x} = \hat{x} - x \quad (2.17)$$

Posons

$$\Delta f = \hat{f}(\hat{x}, u, t) - f(x, u, t) \quad (2.18)$$

où Δf est une fonction qui dépend des erreurs de modélisation; elle est bornée par une fonction variable dans le temps. L'équation (2.16) peut donc s'écrire ainsi:

$$\dot{\tilde{x}} = \Delta f - M_1 \tilde{y} - M_g I_\sigma \quad (2.19)$$

La condition de glissement énoncée par Phillipov et appliquée au cas des observateurs d'état à structure variable par [Slotine *et al.*, 1987] est la suivante:

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i = \tilde{y}_i \dot{\tilde{y}}_i < 0 \quad (2.20)$$

Les gains de commutation M_g doivent être choisis assez grands pour satisfaire les conditions de robustesse. La matrice de gains M_1 intervient dans la phase d'atteinte de la surface de glissement en augmentant le domaine d'attraction; une fois que le système atteint la surface de glissement cette matrice de gains n'a plus d'influence et c'est aux termes de commutations $M_g I_\sigma$ de garantir l'attractivité de la surface de glissement:

$$\sigma = \tilde{y} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\sigma} = \dot{\tilde{y}} = 0 \quad (2.21)$$

Sous cette contrainte l'ordre de la dynamique d'erreur a été réduit de la dimension n avant l'atteinte de la surface de glissement à la dimension $(n-m)$ en mode glissant.

4.2. PHENOMENE DE BROUTEMENT

Comme il a été mentionné dans le paragraphe précédent, il est impossible de mettre en oeuvre des relais idéaux avec une fréquence de commutation infinie. Ceci est à l'origine de l'apparition du phénomène de broutement qui se manifeste sous forme d'oscillations à haute fréquence au niveau des variables observées. Pour réduire ces oscillations la plus classique des solutions proposées [Slotine & Sastry, 1983] est de remplacer la fonction discontinue en x par une fonction continue en x située à l'intérieur d'une bande étroite au voisinage de la surface de glissement. la fonction sign peut être donc remplacée par la fonction saturation donnée par la relation suivante [Slotine & Sastry, 1983]

$$\text{sat}\left(\frac{\sigma_i}{\phi_i}\right) = \begin{cases} \frac{\sigma_i}{\phi_i} & \text{si } \left|\frac{\sigma_i}{\phi_i}\right| \leq 1 \\ \text{sgn}(\sigma_i) & \text{si } \left|\frac{\sigma_i}{\phi_i}\right| > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.22)$$

ou par la fonction $\text{cont}(\sigma_i)$ selon la relation suivante [Harashima *et al.*, 1986]:

$$\text{cont}(\sigma_i) = \begin{cases} \frac{\sigma_i}{|\sigma_i|} & \text{ou } \frac{\sigma_i}{|\sigma_i + \delta_i|} \text{ si } \left| \frac{\sigma_i}{\phi_i} \right| \leq 1 \\ \text{sgn}(\sigma_i) & \text{si } \left| \frac{\sigma_i}{\phi_i} \right| > 1 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.23)$$

5. OBSERVATEUR / ESTIMATEUR CONJOINT A STRUCTURE VARIABLE

Dans le paragraphe précédent, le problème était de reconstruire les variables d'état non mesurables dans la classe de systèmes non linéaires et non stationnaires. Nous avons donc supposé que tous les paramètres du système étaient connus et constants. Cependant l'hypothèse selon laquelle les paramètres sont connus et constants est valable pour un grand nombre de procédés (robotique, électrique...), mais reste très restrictive pour d'autres (biotechnologique par exemple). Pour cette raison il est indispensable de résoudre le problème de l'observation et de l'estimation conjointe dans cette classe particulière des systèmes non linéaires.

Dans ce sens on distingue deux niveaux d'estimation paramétrique, à savoir l'estimation paramétrique dans la classe des systèmes non linéaires **linéairement paramétrés** pour laquelle les paramètres sont constants et la classe des systèmes non linéaires **non linéairement paramétrés** pour laquelle les paramètres possèdent une structure non linéaire variable dans le temps.

Concernant les systèmes non linéaires **linéairement paramétrés**, dans la plupart des travaux on transforme le système non linéaire en une forme canonique observable pour la synthèse de l'observateur [Bastin & Gevers, 1988] [Zeng *et al.*, 1993b]. Cependant lorsque les systèmes sont à fortes non linéarités cette transformation s'avère très délicate. La méthode d'estimation la plus utilisée pour cette classe particulière de systèmes consiste à augmenter le vecteur d'état avec le vecteur de paramètres et de concevoir un filtre de Kalman étendu.

Pour la classe des systèmes non linéaires **non linéairement paramétrés** les solutions proposées sont moins nombreuses [Zeng *et al.*, 93c] [Boubaker & Babary, 1998e]. Cette méthode permet d'estimer les états, les paramètres variables dans le temps et aussi les paramètres constants des systèmes non linéaires. Nous proposons d'étendre cette approche pour construire un estimateur simultané des états et des paramètres à structure variable [Babary & Damak, 1993], [Boubaker *et al.*, 1998d].

Considérons la classe des systèmes non linéaires et non stationnaires non linéairement paramétrés décrits par la représentation suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, \theta, t) \\ y &= c(x, t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Un estimateur à structure variable peut être obtenu en considérant une procédure d'observation / estimation conjointe [Zeng & al., 1993c] et en rajoutant à l'observateur les termes de commutation comme suit:

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, u, \theta, t) - M_1 \tilde{y} - M_g I_\sigma \quad (2.25)$$

L'estimation des paramètres est corrélée à l'erreur d'estimation des variables mesurées. Nous pouvons donc proposer une loi d'ajustement paramétrique de la forme suivante:

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma(t) \tilde{y} - M_\theta I_\sigma \quad (2.26)$$

où γ et M_θ représentent des matrices de gains à déterminer. γ est calculée de façon à assurer une convergence asymptotique du système d'erreur vers zéro lorsque les gains de commutations M_1 de la relation (2.25) et M_θ de la relation (2.26) sont tous nuls. La matrice M_θ peut être déterminée par un choix de la dynamique du système d'erreur en mode glissant par une procédure de placement de pôles.

Toutes les remarques énoncées dans le paragraphe précédent concernant les conditions de glissement, la garantie de la robustesse, la réduction du broutement et la réduction de l'ordre du système pour un observateur à structure variable en mode glissant restent valables pour un estimateur conjoint à structure variable.

6. EXEMPLE

6.1. MODELE MATHEMATIQUE

On considère le modèle mathématique traité dans le deuxième exemple du premier chapitre [Boubaker & Babary, 1998] de ce mémoire:

$$\forall i = 1, 2, \dots, N+1 \quad \begin{cases} \frac{dx_{ai}}{dt} = [\mu_i - k_d] x_{ai} = f_x \\ \frac{ds_i}{dt} = -u \sum_{j=1}^{N+1} l_{i,j} s_j - u l_{i,0} s_{in} - k_1 \mu_i x_{ai} = f_s \end{cases} \quad (2.27)$$

où s_{in} est une condition aux limites et μ_i un paramètre non linéaire exprimé par :

$$\mu_i(\theta, x_a, s) = \mu_{\max_i} \frac{s_i}{k_{c_i} x_{a_i} + s_i} \quad (2.28)$$

avec

$$\theta_i = [\mu_{\max_i} \quad k_{c_i}]^T \quad (2.29)$$

θ est dans ce cas un vecteur de dimension $2(N+1)$.

La sortie du système est définie par:

$$y = [s_1, s_2, \dots, s_{N+1}] \quad (2.30)$$

6.2. FORMULATION DU PROBLEME

- u est une variable d'entrée du système supposée constante.
- Le vecteur s représente les variables d'état mesurables
 $s = [s_1, s_2, \dots, s_{N+1}]$.
- Le vecteur x_a représente les variables d'état non mesurables
 $x_a = [x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_{N+1}}]$.
- Les paramètres k_1 et k_d sont supposés connus.
- La condition initiale s_0 est supposée connue.
- Le vecteur de paramètres $\theta_i = [\mu_{\max_i} \quad k_{c_i}]^T$ est supposé partiellement connu tel que μ_{\max_i} est inconnu et k_{c_i} est connu.

Le modèle (2.27) est non stationnaire et non linéaire. Une procédure d'observation / estimation conjointe de l'état et des paramètres à structure variable peut être une solution efficace pour résoudre le problème d'estimation.

6.3. SIMULATION DU PROCEDE

Afin de simuler le comportement du processus modélisé par les équations (2.27) à (2.30), les équations différentielles ont été intégrées par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 à pas fixe égal à 6 mn. Les valeurs des variables mesurées générées par tous les algorithmes d'observation ou d'estimation développés dans ce chapitre sont acquises avec une période d'échantillonnage $\Delta T = 30\text{mn}$. Dans toutes les simulations la robustesse des algorithmes d'observation ou d'estimation est testée en ajoutant des sauts abrupts soit sur les valeurs réelles des paramètres soit sur la variable d'entrée u .

Les conditions initiales ainsi que les paramètres du modèle et leurs variations sont répertoriés dans le tableau 2.1.

Paramètres	Valeurs à $t = 0$	Variations
k_1	0.4	
k_d	0.05	
μ_m	0.35	+43% à $t = 30\text{h}$
k_c	0.4	+50% à $t = 40\text{h}$

s_0	5	
u	0.1	+25% à $t = 10h$ -25% à $t = 20h$ +25% à $t = 30h$
s	$[196 \ 0.88 \ 0.44 \ 0.28 \ 0.25]^T$	
x	$[29.4 \ 13.2 \ 6.55 \ 4.18 \ 3.73]^T$	

Tableau 2.1. Paramètres et conditions initiales du modèle

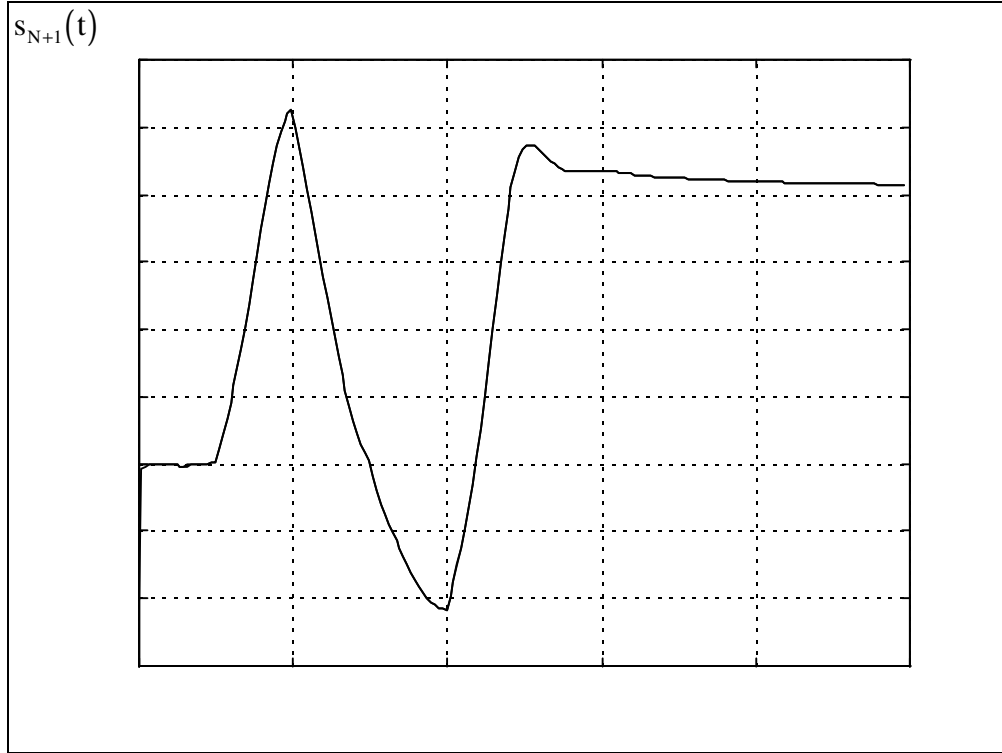
Les valeurs des coefficients $l_{i,j}$ dans le modèle (2.27) sont les suivantes:

$$[l_{i,j}]_{i,j=1,\dots,5} = \begin{bmatrix} -5.5325 & 11.9772 & -13.9565 & 21.3633 & -13.4287 \\ -1.1731 & -3.7785 & 9.3481 & -11.3332 & 6.8653 \\ 0.2857 & -1.9540 & -4.5175 & 13.2729 & -7.0638 \\ -0.1106 & 0.5990 & -3.3560 & -14.9715 & 17.8293 \\ 0.1574 & -0.8215 & 4.0436 & -40.3652 & 37.0000 \end{bmatrix}$$

$$[l_{i,0}]_{i=1,\dots,5} = \begin{bmatrix} -0.4228 \\ 0.0713 \\ -0.0232 \\ 0.0099 \\ -0.0143 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs numériques des paramètres du modèle ainsi que les conditions initiales seront identiques pour tous les résultats de simulation dans ce chapitre. On représentera dans toutes les simulations l'évolution des variables réelles et estimées de façon à pouvoir juger la convergence, la rapidité et la robustesse de l'estimateur.

L'évolution de la seule mesure disponible, en sortie du réacteur, est représentée sur la figure 2.2. Ce profil temporel servira de référence pour l'ensemble des simulations effectuées dans ce chapitre.

Figure 2.2: Evolution de y_{N+1}

6.4. PROCEDURE D'ESTIMATION

L'observateur / estimateur conjoint à structure variable correspondant au système modélisé par les équations (2.27) à (2.30) est donné par la proposition suivante [Boubaker *et al.*, 1998d]:

$$\forall i = 1, 2, \dots, N+1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d \hat{x}_{a_i}}{dt} = \left[\hat{\mu}_i - k_d \right] \hat{x}_{a_i} - \alpha_i^T \tilde{\xi}_i - M_{x_i} \text{sat}(\tilde{\xi}_i) \\ \frac{d \hat{s}_{a_i}}{dt} = -u \sum_{j=1}^{N+1} l_{i,j} \hat{s}_j - u l_{i,0} s_{in} - k_1 \hat{\mu}_i \hat{x}_{a_i} - \beta_i^T \tilde{\xi}_i - M_{s_i} \text{sat}(\tilde{\xi}_i) \\ \frac{d \hat{\theta}_i}{dt} = \gamma_i(t) \tilde{\xi}_i - M_{\theta_i} \text{sat}(\tilde{\xi}_i) \\ \hat{\mu}_i = \mu_i \left(\hat{\theta}_i, \hat{x}_{a_i}, s_i \right) = \mu_{\max_i} \frac{\$ _i}{k_{c_i} \$ _{a_i} + \$ _i} \\ \hat{\Theta}_i = \left[\mu_{\max_i} \quad k_{c_i} \right]^T \\ \$ = [\$ _1, \$ _2, \dots, \$ _{N+1}] \end{array} \right. \quad (2.31)$$

où \hat{x}_{a_i} , \hat{s}_i , $\hat{\Theta}_i$ et $\hat{\mu}_i$ sont respectivement les estimés de x_{a_i} , s_i , θ_i et μ_i , sat étant la fonction saturation définie par la relation (2.22) et utilisée pour réduire le problème de broutement. L'erreur d'observation $\tilde{\xi}_i$ est définie par:

$$\tilde{\xi}_i = \hat{s}_i - s_i \quad (2.32)$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, M_{x_i}, M_{s_i}, M_{\theta_i}$ sont les gains à déterminer. Les gains α_i et β_i sont à déterminer dans le cadre d'un problème standard d'observation.

6.5. OBSERVATEUR DE LUENBERGER ETENDU [Boubaker & Babary, 1998]

◆ Procédure d'observation

L'observateur de Luenberger étendu correspondant au système (2.31) est obtenu en posant:

$$M_{x_i} = 0, M_{s_i} = 0, \gamma_i = 0 \text{ et } M_{\theta_i} = 0.$$

Dans ce cas on obtient le système suivant:

$$\forall i = 1, 2, \dots, N+1$$

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}_{a_i}}{dt} = \left[\hat{\mu}_i - k_d \right] \hat{x}_{a_i} - \alpha_i^T \tilde{\xi}_i \\ \frac{d\hat{s}_i}{dt} = -u \sum_{j=1}^{N+1} l_{i,j} \hat{s}_i - u l_{i,0} s_{in} - k_1 \hat{\mu}_i \hat{x}_{a_i} - \beta_i^T \tilde{\xi}_i \end{cases} \quad (2.33)$$

avec

$$\hat{\mu}_i = \mu \left(\hat{\theta}_i, \hat{x}_i, s_i \right) = \mu_{\max_i} \frac{\$}_i}{k_{c_i} \$}_{a_i} + \$}_i \quad (2.34)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \left[\mu_{\max_i} \quad k_{c_i} \right]^T \quad (2.35)$$

La procédure d'estimation consiste à déterminer les gains α_i et β_i de façon à assurer que:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{a_i} &= \hat{x}_{a_i} - x_{a_i} \rightarrow 0 \\ \tilde{\mu}_i &= \hat{\mu}_i - \mu_i \rightarrow 0 \\ \tilde{\xi}_i &= \hat{s}_i - s_i \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.36)$$

En développant l'expression de μ au premier ordre, on obtient l'expression de l'erreur suivante

$$\tilde{\mu}_i = \hat{\mu}_i - \mu_i = H_i^T \tilde{\theta}_i + K_i \tilde{x}_{a_i} \quad (2.37)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_i &= \hat{\theta}_i - \theta_i \in \mathfrak{R}^2 \\ H_i &= \left. \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right|_{\theta_i, \hat{x}_{a_i}, s_i} = \left[\begin{array}{cc} s_i & -\mu_{\max_i} \frac{x_{a_i} s_i}{(k_{c_i} \hat{x}_{a_i} + s_i)^2} \end{array} \right] \\ K_i &= \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_a} \right|_{\theta_i, \hat{x}_{a_i}, s_i} = -\mu_{\max_i} \frac{k_c s_i}{\left(\hat{k}_{c_i} \hat{x}_{a_i} + s_i \right)^2}\end{aligned}\quad (2.38)$$

En retranchant (2.33) de (2.27) on obtient le système d'erreur suivant:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = a_i \tilde{x}_{a_i} - \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{ij} \tilde{\xi}_j + \hat{x}_{a_i} H_i^T \tilde{\theta}_i \\ \frac{d\tilde{\xi}_i}{dt} = b_i \tilde{x}_{a_i} - \sum_{j=1}^{N+1} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \tilde{\xi}_j - k_l \hat{x}_{a_i} H_i^T \tilde{\theta}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1) \quad (2.39)$$

où

$$\begin{aligned}a_i &\stackrel{\Delta}{=} \mu_i + K_i \hat{x}_{a_i} - k_d \\ b_i &\stackrel{\Delta}{=} -k_l \left(\mu_i + K_i \hat{x}_{a_i} \right) = -k_l (a_i + k_d)\end{aligned}\quad (2.40)$$

◆ Estimation de l'état par placement de pôles

Définissons le vecteur d'erreur suivant:

$$s = \left[\tilde{x}_{a_1}, \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{x}_{a_{N+1}}, \tilde{\xi}_{N+1} \right] \quad (2.41)$$

Le système d'erreur (2.39) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{dt} &= A\tilde{x} + B\omega\tilde{\theta} \\ \tilde{x} &= Cx\end{aligned}\quad (2.42)$$

ω est une matrice de dimension $(N+1) \cdot [2(N+1)]$:

$$\omega = \begin{bmatrix} \hat{x}_{a_1} H_1^T & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \hat{x}_{a_2} H_2^T & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \hat{x}_{a_{N+1}} H_{N+1}^T \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

ω est bornée. B et C sont respectivement des matrices de dimension $(2N+2).(N+1)$ et $(N+1).(2N+2)$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\tilde{\theta}^T = [\tilde{\theta}_1^T \quad \tilde{\theta}_2^T \quad L \quad \tilde{\theta}_{N+1}^T] \quad (2.45)$$

Les gains α_i et β_i doivent assurer la stabilité locale de la matrice dynamique d'erreur A . On se propose de choisir la matrice A diagonale pour simplifier les calculs [Boubaker *et al.*, 1998e] ce qui est équivalent à:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= 0 \\ u_{i,j} + \beta_{ij} &= 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N+1; i \neq j) \end{aligned} \quad (2.46)$$

La matrice A sera structurée comme suit:

$$A = \text{diag}[A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_i \quad \dots \quad A_{N+1}] \quad (2.47)$$

avec

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & -\alpha_{ii} \\ b_i & -(u_{ii} + \beta_{ii}) \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, N+1 \quad (2.48)$$

Le polynôme caractéristique de A_i est donné par

$$P_i(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a_i - u_{ii} - \beta_{ii}) + b_i \alpha_{ii} - a_i(u_{ii} + \beta_{ii}) \quad (2.49)$$

Les valeurs propres de la matrice A doivent assurer les conditions nécessaires suivantes:

$$\begin{aligned} \rho_i &= a_i - u_{ii} - \beta_{ii} < 0 && \text{(somme des valeurs propres)} \\ \pi_i &= b_i \alpha_{ii} - a_i(u_{ii} + \beta_{ii}) > 0 && \text{(produit des valeurs propres)} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Les expressions de σ_i et π_i permettent de déduire celles des gains α_{ii} et β_{ii} :

$$\alpha_{ii} = -\frac{-\pi_i - a_i \rho_i + a_i^2}{k_1(a_i + k_d)} \quad i = 1, 2, \dots, N+1 \quad (2.51)$$

$$\beta_{ii} = a_i - u l_{i,i} - \rho_i \quad i = 1, 2, \dots, N+1 \quad (2.52)$$

Ces conditions nécessaires ont été déjà établi par [Babary & Damak, 1993] en considérant que le vecteur de paramètres est constant par morceaux. Dans notre cas on suppose que cette condition est restrictive et que la matrice A est une matrice non stationnaire; la condition de négativité de la partie réelle des valeurs propres n'est donc plus une condition suffisante. La norme de la matrice $\frac{dA}{dt}$ doit être absolument bornée

[Rosenbrock, 1963]. La démonstration de la stabilité est donnée en annexe (annexe 2) et dans [Boubaker & Babary, 1998] dans le cas du modèle de Monod.

En tenant compte des suppositions (2.46) la formulation de la représentation d'état du modèle (2.33) est simplifiée:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}_{a_i}}{dt} = \left[\hat{\mu}_i - k_d \right] \hat{x}_{a_i} - \alpha_{ii} (\hat{s}_i - s_i) \\ \frac{d\hat{s}_i}{dt} = -(u l_{i,i} + \beta_{ii}) \hat{s}_i - u l_{i,0} s_{in} - k_1 \hat{\mu}_i \hat{x}_{a_i} + \sum_{j=1}^{N+1} \beta_{ij} s_j \end{cases} \quad (2.53)$$

$(i = 1, 2, \dots, N+1)$

De même, en considérant de plus les relations (2.51) et (2.52), le système d'erreur (2.39) devient:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = a_i \tilde{x}_{a_i} - \alpha_{ii} \tilde{s}_i + \hat{x}_i H_i^T \tilde{\theta}_i \\ \frac{d\tilde{s}_i}{dt} = b_i \tilde{x}_{a_i} - (a_i - \rho_i) \tilde{s}_i - k_1 \hat{x}_i H_i^T \tilde{\theta}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1) \quad (2.54)$$

Dans le modèle de l'estimateur la seule variable inconnue est μ_i . Un estimateur de paramètre s'avère nécessaire dans ce cas.

6.6. OBSERVATION/ESTIMATION [Boubaker & Babary, 1998e]

◆ Procédure d'estimation

La résolution du problème de l'estimation d'état du modèle nécessite la connaissance de l'estimée du paramètre μ qui dépend du vecteur de paramètres θ .

Posant $\omega_i = \hat{x}_{a_i} H_i$, le système (2.54) peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = a_i \tilde{x}_{a_i} - \alpha_{ii} \tilde{\xi}_i + \omega_i^T \tilde{\theta}_i \\ \frac{d\tilde{\xi}_i}{dt} = b_i \tilde{x}_{a_i} - (a_i - \rho_i) \tilde{\xi}_i - k_1 \omega_i^T \tilde{\theta}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1) \quad (2.55)$$

L'estimation des paramètres dépend de l'erreur d'estimation $\tilde{\xi}$ qu'on exprime selon la proposition suivante:

$$\frac{d\hat{\theta}_i}{dt} = \gamma_i(t) \tilde{\xi}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N+1) \quad (2.56)$$

où le vecteur de gain γ_i doit être déterminé.

Une solution consiste à calculer γ_i de façon à assurer que le vecteur d'erreur $[\tilde{x}_{a_i} \quad \tilde{\xi}_i \quad \tilde{\mu}_i]$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini (stabilité asymptotique), avec

$$\tilde{\mu}_i = \hat{\mu}_i - \mu_i.$$

Dans ce cas le système d'erreur peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{a_i} \\ \tilde{\xi}_i \\ \tilde{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & -\alpha_{ii} & \omega_i \\ b_i & -(a_i - \rho_i) & -k_1 \omega_i \\ 0 & \gamma_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{a_i} \\ \tilde{\xi}_i \\ \tilde{\theta}_i \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

pour lequel le polynôme caractéristique s'écrit comme suit

$$P_i(\lambda) = \lambda^3 - \rho_i \lambda^2 + (k_1 \gamma_i \omega_i + \pi_i) \lambda + k_1 k_d \gamma_i \omega_i \quad (2.58)$$

Ce polynôme possède des racines à partie réelle négative si:

$$k_1 k_d \gamma_i \omega_i > 0 \quad (2.59)$$

$$-\rho_i (k_1 \gamma_i \omega_i + \pi_i) - k_1 k_d \gamma_i \omega_i > 0 \quad (2.60)$$

Dans (2.59), ω_i peut être positif ou négatif; si on choisit

$$\gamma_i(t) = \Gamma_i \omega_i(t) = \Gamma_i \omega_{a_i} H_i \quad (2.61)$$

avec Γ_i positive, alors la condition (2.59) est toujours vérifiée.

Un gain adaptatif donné par $\Gamma_i = \frac{1}{\omega_i^2}$, permet d'assurer un polynôme caractéristique à coefficients constants :

$$P_i(\lambda) = \lambda^3 - \rho_i \lambda^2 + (k_1 + \pi_i) \lambda + k_1 k_d \quad (2.62)$$

Alors la condition (2.60) devient

$$-\rho_i(k_1 + \pi_i) - k_1 k_d > 0 \quad (2.63)$$

La relation (2.63) est vérifiée en choisissant $\sigma_i < -k_d$. La stabilité asymptotique est assurée si, de plus, la dérivée de la matrice dynamique d'erreur est bornée; ceci implique que x_i existe $\forall t \geq 0$.

Remarque:

Les résultats précédents dépendent de la structure de $\mu_i(x_{a_i}, s_i, \theta)$, $K_i(x_{a_i}, s_i, \theta)$ et $H_i(x_{a_i}, s_i, \theta_i)$. Ces valeurs doivent être substituées par les valeurs correspondantes de leurs estimées $\hat{\mu}_i(\hat{x}_{a_i}, s_i, \hat{\theta}_i)$, $\hat{K}_i(\hat{x}_{a_i}, s_i, \hat{\theta}_i)$ et $\hat{H}_i(\hat{x}_{a_i}, s_i, \hat{\theta}_i)$. Ces substitutions sont justifiées par le théorème de L_2 -robustesse de [Zeng *et al.*, 1993b].

◆ Synthèse de l'estimateur

L'objectif de l'estimateur utilisé est de reconstruire le vecteur d'état suivant $[x_a \ s]$, le vecteur de paramètre constant μ_{\max} ainsi que le vecteur de paramètre non stationnaire μ .

L'utilisation de l'estimateur a nécessité le choix des paramètres ainsi que les conditions initiales répertoriés dans le tableau 2.2. Les matrices de gains qui ne figurent pas sur ce tableau sont des gains adaptatifs.

Paramètres		Valeurs
Produit des valeurs propres	π_i	$-5.05 \quad \forall i = 1, \dots, 5$
Somme des valeurs propres	ρ_i	$0.25 \quad \forall i = 1, \dots, 5$
Condition initiale sur l'état observé x_a	$\hat{x}_{a_i}(0)$	$1.15x_{a_i}(0)$ si $i = 1, 2, 3$ $0.8x_{a_i}(0)$ si $i = 4, 5$
Condition initiale sur l'état observé s	$\hat{s}_i(0)$	$1.3x_{a_i}(0)$ si $i = 1, 2, 3$ $0.6x_{a_i}(0)$ si $i = 4, 5$
Condition initiale sur l'estimée du paramètre k_c	$\hat{k}_{c_i}(0)$	$0.3 \quad \forall i = 1, \dots, 5$
Condition initiale sur l'estimée du paramètre μ_{\max}	$\hat{\mu}_{\max_i}(0)$	$0.22 \quad \forall i = 1, \dots, 5$

Tableau 2.2. Synthèse de l'observateur / estimateur conjoint

◆ Résultats et discussion

Les résultats obtenus par simulation de l'observateur / estimateur conjoint sur le modèle représenté par les équations (2.27) à (2.30) sont illustrés par les figures (2.3), (2.4) et (2.5).

L'évolution de l'état $x_{a_{N+1}}$ (en sortie du réacteur) et de sa valeur observée est représentée sur la figure (2.3). On constate que l'erreur d'initialisation sur cette variable a été annulée au bout d'une phase assez longue égale à 70h. La convergence de l'estimateur de x_a est plus longue comparé à celle de s .

L'évolution du paramètre constant $\mu_{\max_{N+1}}$, du paramètre variant dans le temps μ_{N+1} et de leurs estimées est respectivement représentée sur les figures (2.4) et (2.5). On peut constater une différence entre la rapidité de la convergence des deux estimées.

Après chaque phase transitoire d'initialisation l'estimation des paramètres constants et des paramètres variables devient correcte. A la suite d'une perturbation sur la variable d'entrée ou sur les paramètres constants du système les estimées des variables d'états et des paramètres sont légèrement écartées des valeurs réelles. La convergence est toujours assurée et l'erreur d'estimation s'annule au bout d'un temps relativement court. L'observateur est assez robuste aux variations paramétriques et aux perturbations.

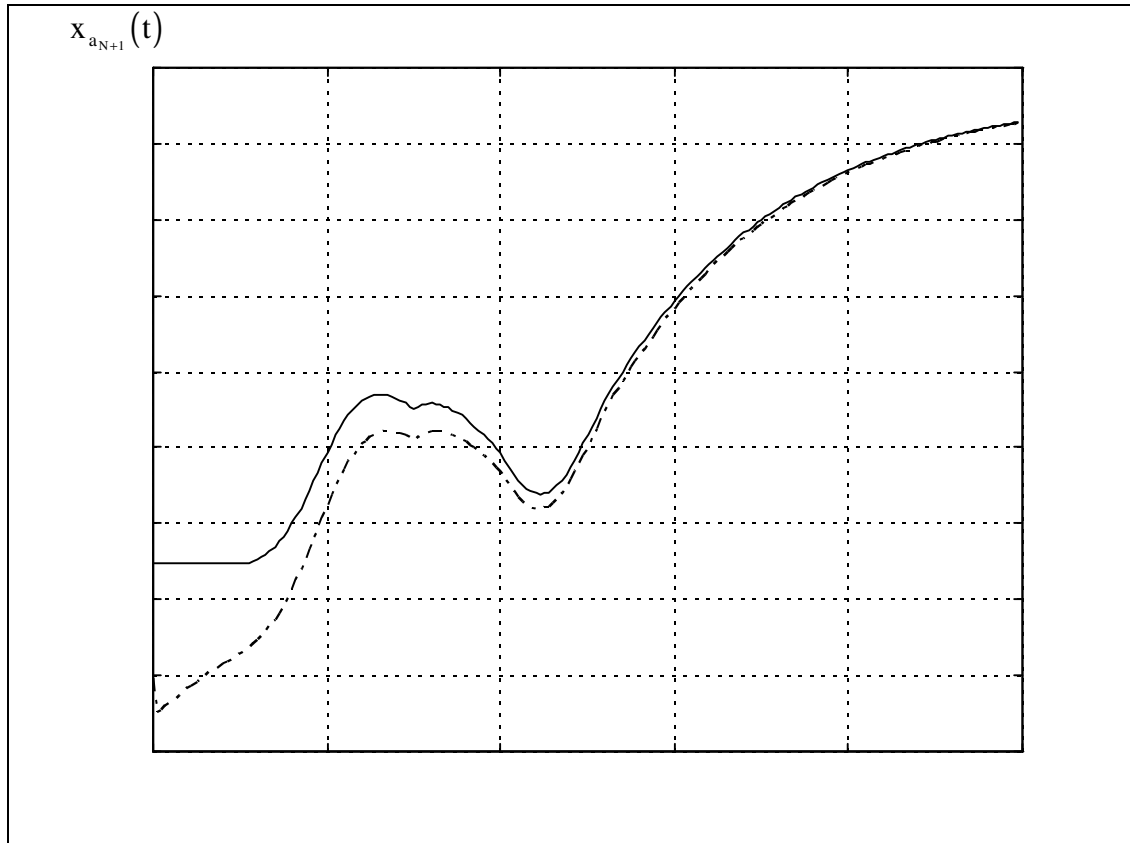


Figure 2.3: Observateur / Estimateur conjoint: évolution de $x_{a_{N+1}}$
- valeur réelle, -- valeur estimée.

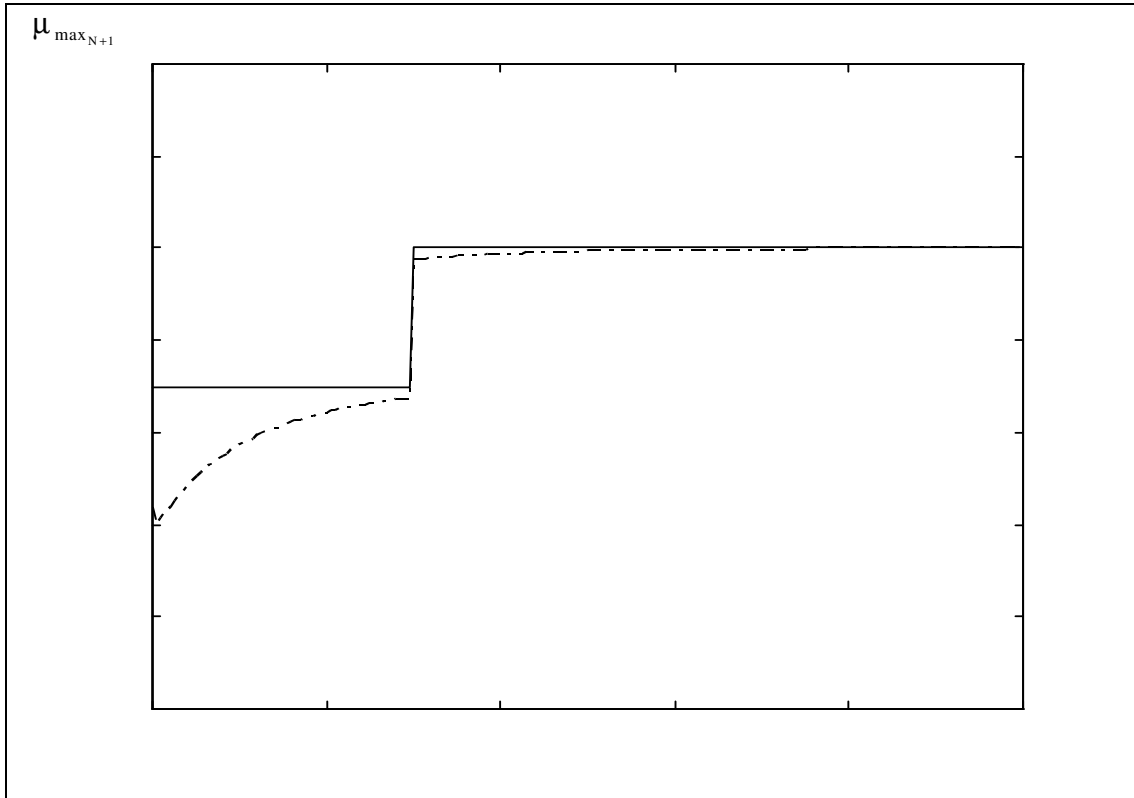


Figure 2.4: Observateur / Estimateur conjoint: évolution de $\mu_{\max_{N+1}}$
- valeur réelle, -- valeur estimée.

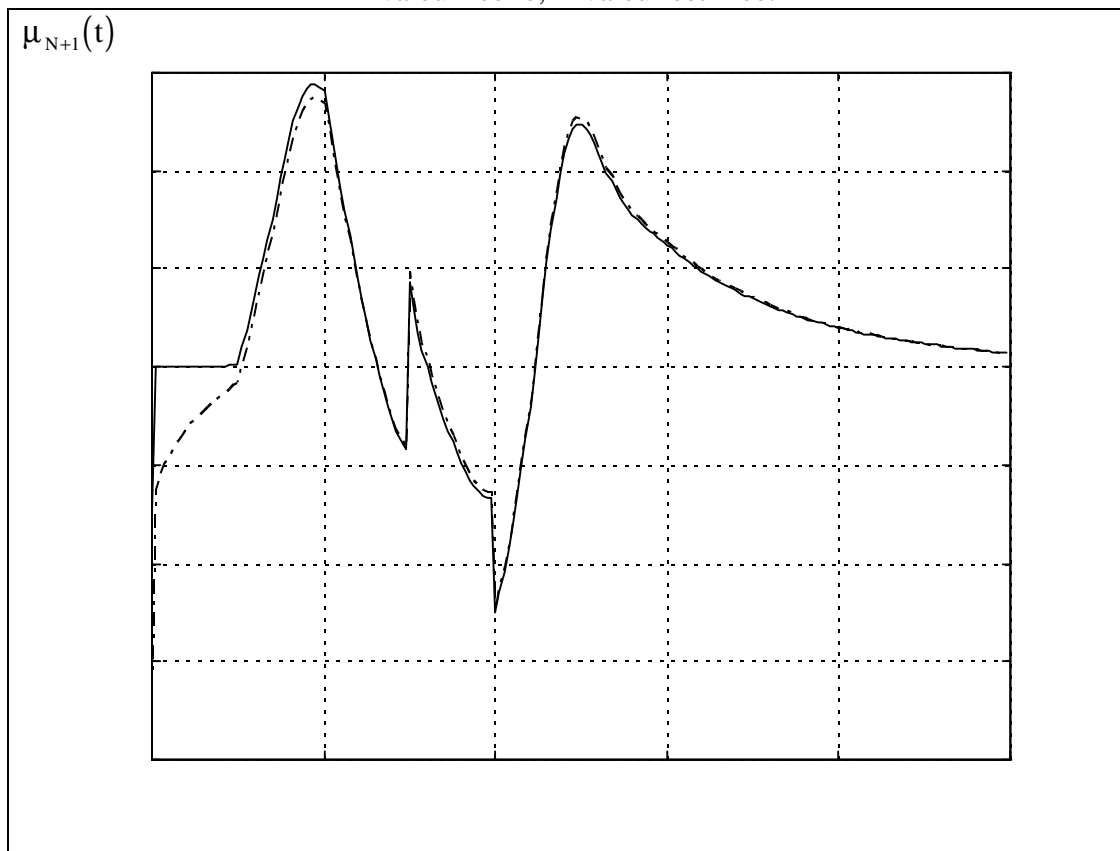


Figure 2.5: Observateur / Estimateur conjoint: Evolution de μ_{N+1}
- valeur réelle, -- valeur estimée.

6.7. OBSERVATEUR D'ETAT A STRUCTURE VARIABLE

◆ Principe de l'observation d'état

La structure de l'observateur d'état à structure variable du système (2.27) est donnée par:

$$\forall i = 1, 2, \dots, N+1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{x}_{a_i}}{dt} = f_{x_i} - \alpha_i^T \tilde{\xi}_i - M_{x_i} \text{sat}(\tilde{\xi}_i) \\ \frac{d\hat{s}_i}{dt} = f_{s_i} - \beta_i^T \tilde{\xi}_i - M_{s_i} \text{sat}(\tilde{\xi}_i) \\ \mathcal{S} = [\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{N+1}] \end{array} \right. \quad (2.64)$$

avec

$$f_{x_i} = \left[\hat{\mu}_i - k_d \right] \hat{x}_{a_i}$$

$$f_{s_i} = -u \sum_{j=1}^{N+1} l_{i,j} s_j - u l_{i,0} s_{in} - k_1 \mu_i \hat{x}_{a_i}$$

On définit la surface de glissement suivante

$$\sigma = \tilde{\xi} = \mathcal{S} - s \quad (2.65)$$

Le système d'erreur d'observation entre (2.27) et (2.64) est donné par:

$$\forall i = 1, 2, \dots, N+1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = \Delta f_{x_i} - \sum_{j=0}^{N+1} \alpha_{ij} \tilde{\xi}_j - M_{x_i} \text{sat}(\tilde{\xi}_i) \\ \frac{d\tilde{s}_i}{dt} = \Delta f_{s_i} - \sum_{j=0}^{N+1} \beta_{ij} \tilde{\xi}_j - M_{s_i} \text{sat}(\tilde{\xi}_i) \\ \mathcal{S} = [\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{N+1}] \end{array} \right. \quad (2.66)$$

avec

$$\Delta f_{x_i} = f_{x_i} - f_{x_i}^{\mathcal{S}}$$

$$\Delta f_{s_i} = f_{s_i} - f_{s_i}^{\mathcal{S}}$$

La condition de glissement (2.20) est assurée si l'inégalité suivante est assurée

$$M_{s_i} \rangle \max \left| \Delta f_{s_i} - \sum_{j=0}^{N+1} \beta_{ij} \tilde{s} \right| \quad (2.67)$$

La dynamique du système (2.66) est réduite sur la surface glissante, elle est donnée par

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = \Delta f_{x_i} - \frac{M_{x_i}}{M_{s_i}} \Delta f_{s_i} \\ \tilde{s}_i = 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

soit donc

$$\frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = \left[-k_d + (\beta_i - \tilde{\mu}_i) \left(1 + k_1 \frac{M_{x_i}}{M_{s_i}} \right) \right] \tilde{x}_{a_i} + \tilde{\mu}_i \left(1 + k_1 \frac{M_{x_i}}{M_{s_i}} \right) \quad (2.69)$$

La convergence du système d'erreur en mode glissant peut être assurée en posant par exemple:

$$M_{x_i} = -\frac{-K_{s_i}}{k_1} \quad (2.70)$$

◆ Résultats et commentaires

Les résultats obtenus en utilisant l'observateur à structure variable sur le modèle représenté par les équations (2.27) à (2.30) sont illustrés par les figures (2.6) et (2.7).

L'évolution de l'état $x_{a_{N+1}}$ et de sa valeur observée est représentée sur la figure (2.6). On constate que en dépit des perturbations, l'erreur d'initialisation sur cette variable a été annulée au bout d'une phase plus courte que celle obtenue avec l'observateur / estimateur conjoint. La durée de cette phase est inférieure à 50h. Après cette phase l'observateur devient capable de reconstruire l'évolution des variables non mesurables.

L'évolution du paramètre variant dans le temps μ_{N+1} et de son estimé est représentée sur la figure (2.7). On peut constater que l'observateur d'état à structure variable est insensible aux variations paramétriques et aux perturbations extérieures du fait que l'erreur d'observation n'est pas influencée par les perturbations d'où la robustesse de ce type d'observateur.

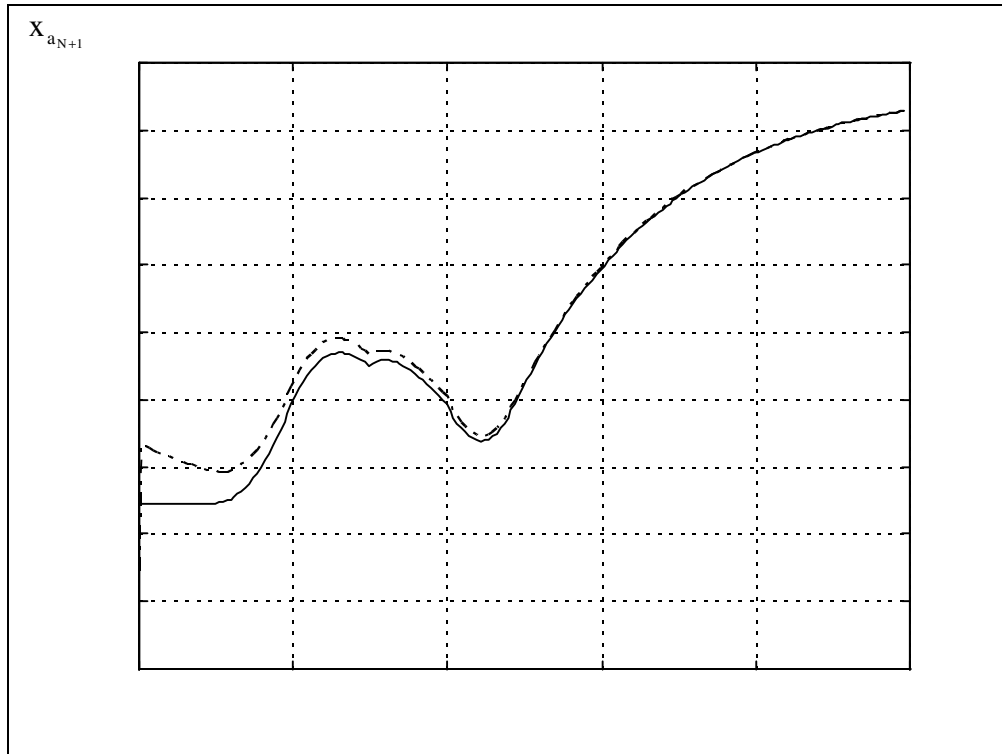


Figure 2.6: Observateur à structure variable: évolution de x_{aN+1}
- valeur réelle, -- valeur estimée.

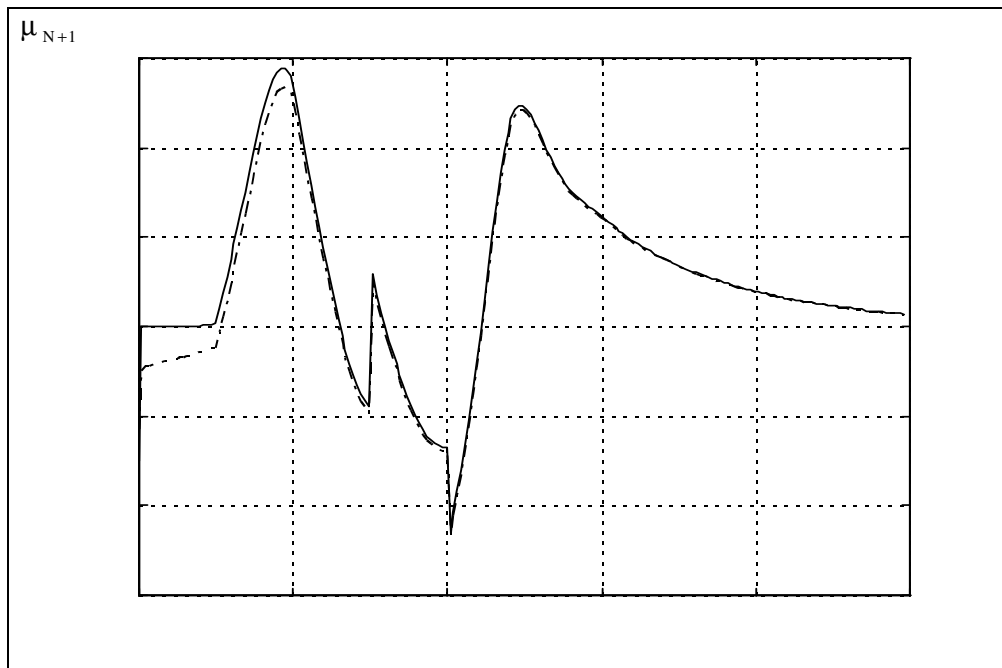


Figure 2.7: Observateur à structure variable: évolution de μ_{N+1}
- valeur réelle, -- valeur estimée.

6.8. OBSERVATEUR/ESTIMATEUR A STRUCTURE VARIABLE

◆ Procédure d'estimation

On considère à présent l'observateur / estimateur à structure variable représenté par le système (2.31). Pour ce dernier le système d'erreur global peut s'écrire:

$$\forall i = 1, 2, \dots, N+1$$

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = a_i \tilde{x}_{a_i} - \alpha_{ii} \tilde{\xi}_i + \omega_i^T \tilde{\theta}_i - M_{x_i} \text{sat}(\tilde{\xi}_i) \\ \frac{d\tilde{s}_i}{dt} = b_i \tilde{x}_{a_i} - (a_i - \rho_i) \tilde{\xi}_i - k_1 \omega_i^T \tilde{\theta}_i - M_{s_i} \text{sat}(\tilde{\xi}_i) \\ \frac{d\hat{\theta}_i}{dt} = \Gamma_i \omega_i \tilde{\xi}_i - M_{\theta_i} \text{sat}(\tilde{\xi}_i) \end{cases} \quad (2.71)$$

En mode glissant le système d'erreur d'ordre réduit s'exprime par:

$$\forall i = 1, 2, \dots, N+1$$

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = \left(a_i - \frac{M_{x_i}}{M_{s_i}} \right) \tilde{x}_{a_i} + \left(1 + k_1 \frac{M_{x_i}}{M_{s_i}} \right) \omega_i^T \tilde{\theta}_i \\ \frac{d\hat{\theta}_i}{dt} = -\frac{M_{\theta_i}}{M_{s_i}} \left(b_i \tilde{x}_{a_i} - k_1 \omega_i^T \tilde{\theta}_i \right) \\ \tilde{\xi}_i = 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

Le polynôme caractéristique de la dynamique d'erreur en mode glissant est donné par:

$$P_i(\lambda) = \lambda \left(\lambda^2 - \left(a_i - \frac{M_{x_i}}{M_{s_i}} b_i + \frac{k_1}{M_{s_i}} M_{\theta_i} \omega_i \right) \lambda - \frac{k_1 k_d}{M_{s_i}} M_{\theta_i} \omega_i \right) \quad (2.73)$$

Posant

$$M_{\theta_i} = -M_i \text{sgn}(\omega_i) \quad \text{avec} \quad M_i > 0 \quad (2.74)$$

En fixant les zéros du polynôme précédent, sachant que M_{s_i} est fixé par la relation (2.67) les gains M_{x_i} et M_{θ_i} peuvent être déduits comme suit:

$$\pi_i = -\frac{k_1 k_d}{M_{s_i}} M_{\theta_i} \omega_i \quad (2.75)$$

$$\rho_i = \left[a_i - \frac{M_{x_i}}{M_{s_i}} b_i + \frac{k_1}{M_{s_i}} M_{\theta_i} \omega_i \right] \quad (2.76)$$

◆ Résultats et commentaires

Les résultats obtenus par l'application de l'observateur / estimateur à structure variable sur le modèle représenté par les équations (2.27) à (2.30) sont illustrés par les figures (2.8), (2.9) et (2.10).

L'évolution de l'état $x_{a_{N+1}}$ et de sa valeur observée est représentée sur la figure (2.8). On constate que l'erreur d'initialisation sur cette variable a été annulée au bout d'une phase assez courte égale à 35h. Après cette phase l'observateur devient capable de reconstruire l'évolution des variables non mesurables.

L'évolution du paramètre constant $\mu_{\max_{N+1}}$ et du paramètre variant dans le temps μ_{N+1} et de leurs estimés est respectivement représentée sur les figures (2.9) et (2.10). On constate que la convergence de l'observateur / estimateur à structure variable est plus rapide en comparaison avec les résultats obtenus précédemment. En effet l'erreur d'initialisation est annulée au bout de 5h pour le paramètre $\mu_{\max_{N+1}}$ alors qu'elle est annulée au bout de 10h pour le second paramètre.

Après chaque phase transitoire d'initialisation l'estimation des paramètres constants et des paramètres variables devient correcte. L'observateur / estimateur à structure variable devient pratiquement insensible aux variations paramétriques et aux perturbations une fois que l'erreur d'observation s'est annulée.

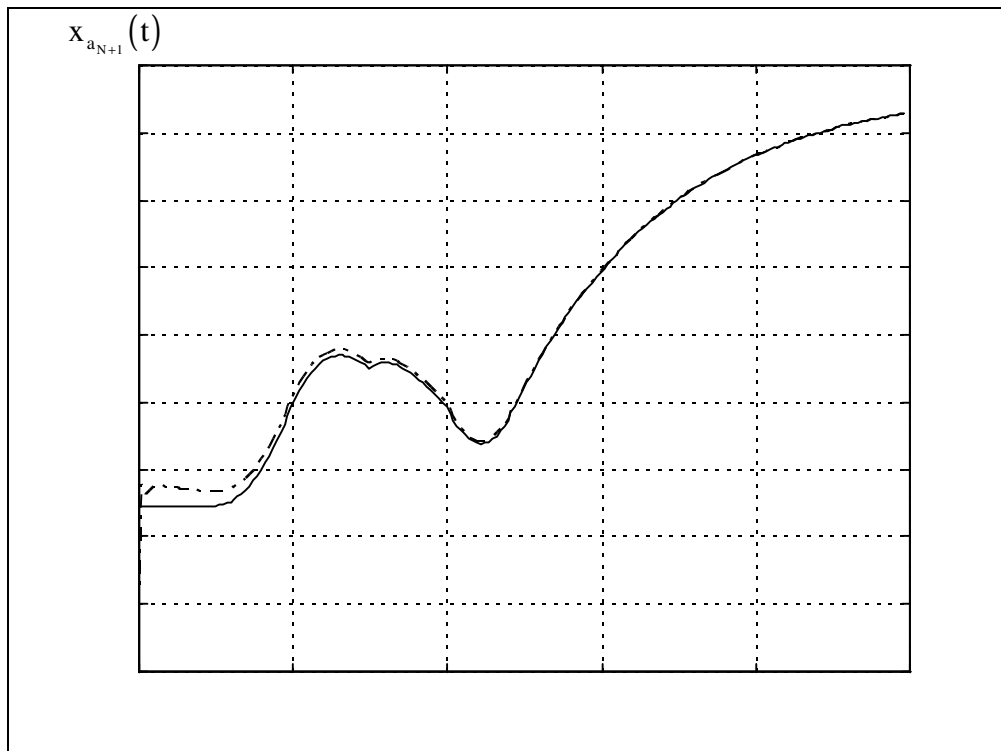


Figure 2.8: Observateur / Estimateur à structure variable: évolution de $x_{a_{N+1}}$
 - valeur réelle, -- valeur estimée

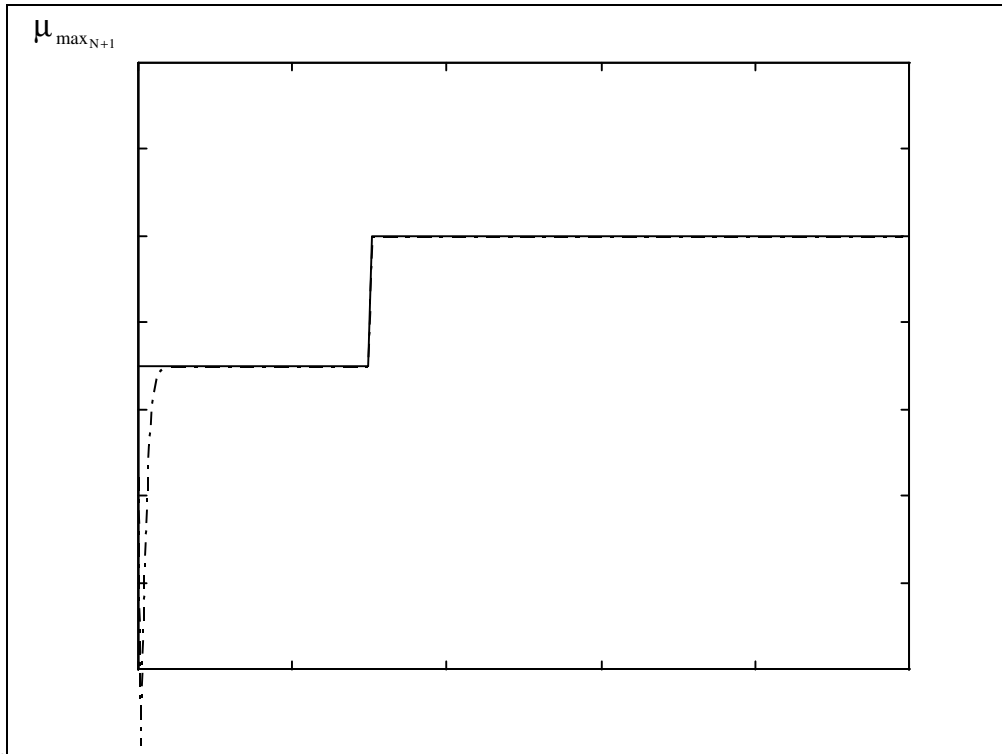


Figure 2.9: Observateur /Estimateur à structure variable: évolution de $\mu_{\max_{N+1}}$
- valeur réelle, -- valeur estimée.

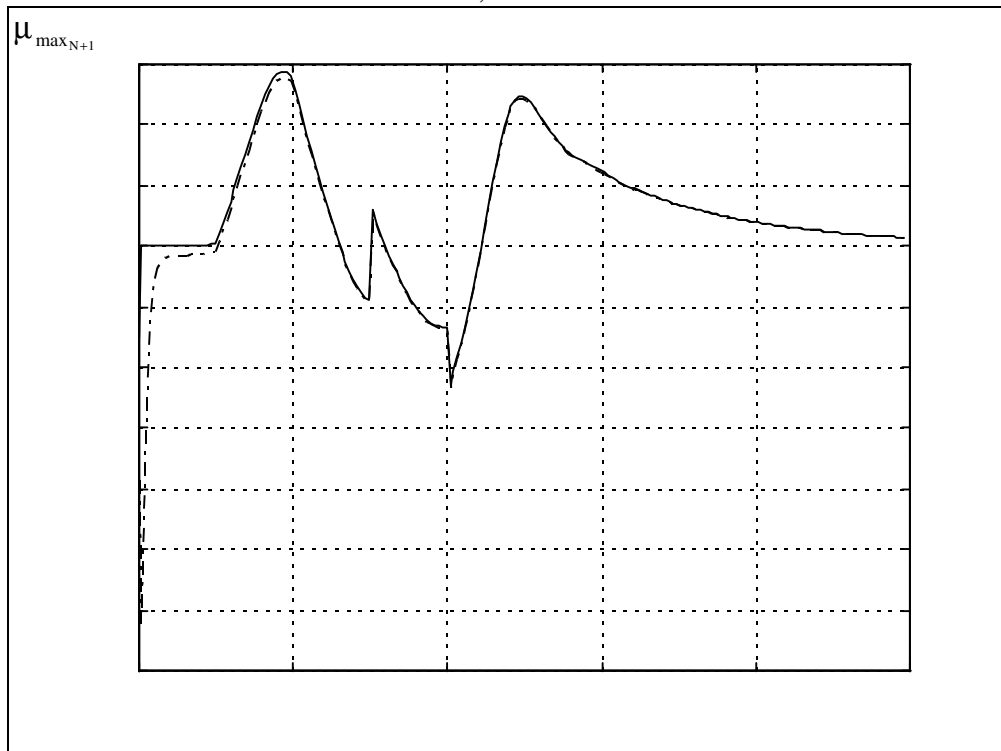


Figure 2.10: Observateur /Estimateur à structure variable: évolution de μ_{N+1}
- valeur réelle, -- valeur estimée.

6.9. COMPARAISON DES RESULTATS

Les deux algorithmes d'observation / estimation développés ont fait preuve de leur capacité à reconstruire l'évolution des variables d'état non mesurables, des paramètres variants dans le temps et aussi des paramètres constants. Compte tenu du caractère non linéaire et non stationnaire du modèle adopté nous jugeons que les résultats obtenus sont satisfaisants.

Quelques remarques comparatives sur le comportement dynamique et la synthèse des deux algorithmes sont présentés dans le tableau 2.3.

Algorithme	Preuve de stabilité	Rapidité de convergence	Précision	Paramètres de réglage	Robustesse
Observateur estimateur conjoint	a priori	+	++	moins nombreux	+
Observateur estimateur à structure variable	a priori	++	++	plus nombreux	++

Tableau 2.3. Comparaison des deux algorithmes d'observation / estimation

7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la résolution du problème de l'observation des états non mesurables et de l'estimation paramétrique des systèmes non linéaires non linéairement paramétrés. Nous avons développé pour résoudre ce problème un algorithme d'observation d'état à structure variable à gains adaptatifs. Une extension au problème de l'estimation paramétrique à structure variable a été élaborée.

Les algorithmes développés ont été testés sur un modèle non stationnaire présentant de fortes non linéarités. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux obtenus avec un observateur / estimateur conjoint. Vu la complexité du modèle utilisé nous estimons que les deux approches ont fourni des résultats satisfaisants. Cependant l'observateur / estimateur à structure variable a montré une meilleure rapidité de convergence et une totale invariance aux variations paramétriques et aux perturbations extérieures en mode glissant. En contre partie cet algorithme nécessite le réglage d'un nombre de paramètres plus élevé.

L'objectif de la mise en oeuvre des techniques d'observation et d'estimation développés dans ce chapitre est le contrôle des procédés. En effet, un minimum d'informations en ligne était indispensable pour la mise en oeuvre d'une loi de commande permettant d'assurer un suivi automatique efficace des procédés étudiés. Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons au problème de la commande. Les algorithmes de commande développés seront aussi basés sur la théorie des systèmes à

structure variable. Ce choix était motivé par les avantages incontestables de cette technique .

CHAPITRE 3

COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE

1. INTRODUCTION

Depuis les années 70 l'idée selon laquelle un système doit être absolument stabilisé par un bouclage régulier ou lisse a été abandonnée. En effet il a été montré que la stabilisation continue des systèmes caractérisés par des non stationnarités et de fortes non linéarités se fait au détriment des performances du système. De nombreux chercheurs se sont donc intéressés à développer des techniques de stabilisation discontinue. Dans ce contexte les systèmes à structure variable ont été développés. Cette théorie a été initialement introduite en Ex-Union Soviétique par le Professeur russe Emelyanov [Emelyanov, 1967]. Elle a été essentiellement développée grâce aux travaux du mathématicien russe Filippov [Filippov, 1961, 1979, 1988] sur les équations différentielles ordinaires à second membre discontinu.

Le développement de la théorie des systèmes à structure variable débouche sur une bibliographie abondante. Les livres d'Emelyanov [Emelyanov, 1967], d'Itkis [Itkis, 1976], d'Utkin [Utkin, 1978, 1992] de Buhler [Buhler, 1986], de Slotine [Slotine & Li, 1991], les volumes de Zinober [Zinober, 1990], de Young [Young, 1993] et les surveys d'Utkin [Utkin, 1977, 1983, 1987], de Decarlo [Decarlo et al., 1988] et de Hung [Hung et al., 1993] révèlent la richesse, le développement et la maturité de cette théorie.

Le principe de base d'un système à structure variable consiste à amener le point représentatif de l'évolution du système sur une hypersurface de l'espace de phase grâce à une loi de commande discontinue. Le système est dit alors en régime glissant lorsque ce point évolue sur cette hypersurface, dite surface de glissement. Sur cette hypersurface le système est de dimension réduite, son comportement ne dépend plus que de la dynamique de la surface de glissement; il devient donc insensible aux erreurs de modélisation, aux variations paramétriques et aux perturbations extérieures. La conception d'une loi de commande à structure variable s'effectue donc en deux étapes: Tout d'abord, commander le système de façon à l'amener au voisinage de la surface de glissement choisie préalablement, à partir d'une condition initiale, ensuite concevoir une loi de commande qui permet à l'état du système d'évoluer sur la surface de glissement.

Bien que la théorie des systèmes à structure variable ait gagné une popularité certaine grâce à sa maturité, sa simplicité et sa propriété de robustesse, son application a toujours été limitée par certaines contraintes. En particulier, la réduction de l'ordre du système sur la surface de glissement ne représente pas toujours un point fort de cette technique. En effet ce caractère ne permet pas dans le cas des systèmes de premier ordre de définir un mode de stabilisation. La commande à structure variable a toujours été caractérisée par des variables de commande discontinues et très énergétiques et par l'apparition d'oscillations résiduelles à haute fréquence au niveau des variables asservies, phénomène appelé broutement. Plusieurs travaux ont tenté de résoudre ce problème; les travaux de Fliess [Fliess, 1990] ont permis, par introduction de l'algèbre différentielle, de résoudre le problème pour des systèmes non dégénérés en introduisant des discontinuités sur des dérivées de commande. Par la suite, plusieurs approches ont été proposées [Sira-Ramirez, 1993], [Hajri et al., 1996], [Boubaker et al., 1998a,d]. Ces nouvelles approches ont été formulées pour des systèmes dégénérés de façons différentes. Cependant toutes conduisent à des commandes dynamiques par mode glissant tel que les discontinuités agissent sur les dérivées des variables de commande

et non plus sur les variables de commande elles mêmes. Ces nouvelles approches ont permis de lisser les variables d'entrée et de résoudre ainsi le problème du broutement.

L'application de la théorie des systèmes à structure variable reste cependant encore un thème ouvert à la recherche pour certaines classes de systèmes non linéaires, en particulier celles des systèmes de dimension infinie. Cette lacune est due à l'absence d'une théorie des équations différentielles partielles à second membre discontinu [Hung et al., 1993].

Ce chapitre apporte une contribution aux stratégies de commande à structure variable de la classe des systèmes de dimension infinie. On s'intéresse en particulier à la classe des systèmes à paramètres répartis représentés par des équations différentielles partielles non linéaires et non stationnaires de type hyperbolique. Nous envisagerons de traiter ce problème selon les deux approches présentées sur la figure (3.1). La première approche consiste à transformer le système à paramètres répartis en un système à paramètres localisés par la méthode de collocation orthogonale présentée au premier chapitre; le système réduit est alors représenté par des équations différentielles ordinaires. Il sera utilisé pour la synthèse de la loi de commande à structure variable. La seconde approche consiste à conserver la nature distribuée du système et à concevoir la loi de commande à structure variable sur la base du système de dimension infinie.

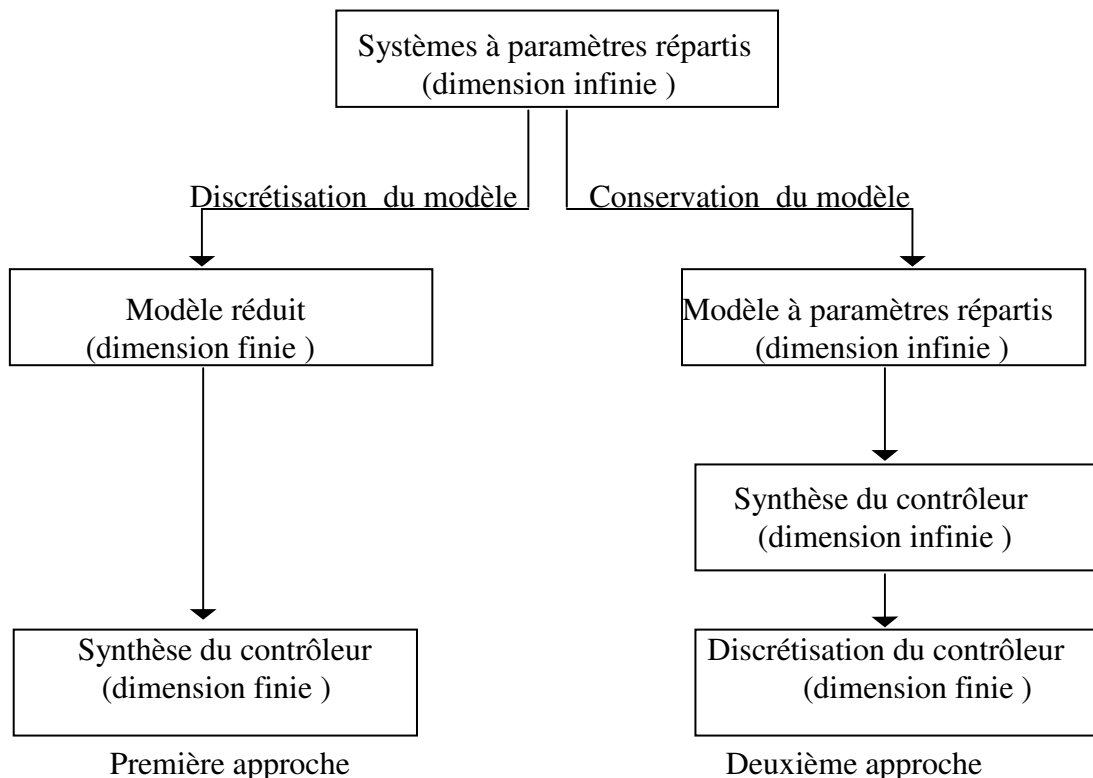


Figure 3.1. Commande des systèmes à paramètres répartis

Ce chapitre sera donc divisé en deux parties. La première concerne la commande à structure variable des systèmes de dimension finie. La seconde est relative à la commande à structure variable en dimension infinie.

Dans la première partie, on rappelle les concepts classiques des systèmes à structure variable dans les deux cas monovariante et multivariante. On présentera également notre contribution dans ce domaine qui permettra de s'affranchir aux restrictions imposées par les méthodes classiques.

La seconde partie de ce chapitre traite de la commande à structure variable des systèmes de dimension infinie. Dans ce cas on a noté l'absence de travaux qui traitent de cet aspect. Nous tenterons donc de formuler et de résoudre le problème dans les deux cas monovariante et multivariante pour une classe particulière de ces systèmes.

2. ETUDE DES SYSTEMES DE DIMENSION FINIE: CAS MONOVARIABLE

Dans le cas mono-entrée et sous certaines transformations énoncées dans le premier chapitre, un système de dimension finie, linéaire par rapport à l'entrée, peut être décrit par la représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u \quad (3.1)$$

où $x \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état; t est la fonction temps, $u: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ est la fonction d'entrée et f et g , représentent des champs de vecteurs généralement non linéaires définis dans \mathfrak{R}^n . f est une fonction discontinue par morceaux sur une variété différentiable σ de dimension $(n-1)$ et définie par:

$$\sigma = \{x \in \mathfrak{R}^n, \sigma(x) = 0\} \quad (3.2)$$

La commande à structure variable est obtenue en imposant à la fonction d'entrée u de vérifier la relation suivante:

$$u = \begin{cases} u^+(x,t) & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ u^-(x,t) & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Le système représenté par l'équation (3.1) n'est donc pas un système différentiel ordinaire. Il s'agit d'un système différentiel à second membre discontinu. Les conditions classiques de l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles ordinaires ne sont donc plus valables. Plusieurs chercheurs se sont intéressés au problème de l'existence de la solution de l'équation différentielle (3.1) aux points de discontinuités. Il existe trois principales approches pour résoudre ce problème. La première est celle Fillipov, pour laquelle on considère que la commutation est parfaite. La seconde est l'approche de la commande équivalente correspondant à un régime glissant idéal pour lequel le glissement est décrit en utilisant une condition d'invariance de la surface de glissement. Enfin, la troisième résulte d'une linéarisation exacte du système (3.1) et d'un retour d'état à structure variable. La condition sous laquelle l'état du système atteint la surface de glissement est appelée condition de glissement. Cette condition est fondamentale pour la synthèse de la loi de commande. La trajectoire d'état,

sous la condition de glissement, est appelée domaine d'atteignabilité. Nous rappellerons dans la suite les méthodes classiques énoncées ci dessous permettant de résoudre le problème de l'existence de la solution de l'équation différentielle (3.1) aux points de discontinuités. Nous présenterons également dans chaque cas la méthode de synthèse de la loi de commande des systèmes non linéaires.

2.1. Approche de Fillipov [Fillipov, 1961, 1979, 1988]

Selon la théorie de Filippov sur les systèmes dynamiques à second membre discontinu, les commutations du système (3.1) sont supposés parfaites [Fillipov, 1961]. La condition de l'existence d'une solution en mode glissant énoncée dans ce cas est donnée par la relation suivante:

$$\sigma \dot{\sigma} < 0 \quad (3.4)$$

Cette condition est globale; elle assure que la surface glissante est attractive pour les trajectoires dans l'espace d'état mais ne garantit pas un temps de glissement fini. Cette condition a été exprimée par [Hung et al., 1993] sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} > 0 & \text{ si } \sigma < 0 \\ \dot{\sigma} < 0 & \text{ si } \sigma > 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ainsi, un système à structure variable défini par la relation (3.1) et sous l'une des conditions de glissement précédentes peut être décrit au voisinage de $\sigma = 0$ par les deux structures suivantes :

$$\begin{cases} f^+ & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ f^- & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

D'après Fillipov, l'évolution du système en mode glissant idéal peut être obtenue par la moyenne géométrique des champs de vecteurs définis de chaque coté de la surface de glissement. La solution unique du système (3.1) est donnée par:

$$\begin{cases} x \in \sigma(x) \\ \dot{x} = f_0 = \delta f_0^+ + (1 - \delta) f_0^- \quad 0 \leq \delta \leq 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

où

$$f_0^+ = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} f^+ \quad \text{et} \quad f_0^- = \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} f^- \quad (3.8)$$

Le champ de vecteurs f_0 est tangentiel à la surface de glissement σ . Le paramètre δ est choisi de façon à assurer que:

$$\langle \nabla \sigma | f_0 \rangle = 0 \quad (3.9)$$

D'après la relation (3.7), la trajectoire d'état du système sur la surface de glissement σ est une combinaison convexe et unique des deux champs situés dans l'espace tangent de σ . Le concept géométrique de la méthode de Fillipov est illustré par la figure (3.2). La généralisation de cette approche dans le cas multivariable est exposée dans [Fillipov, 1979].

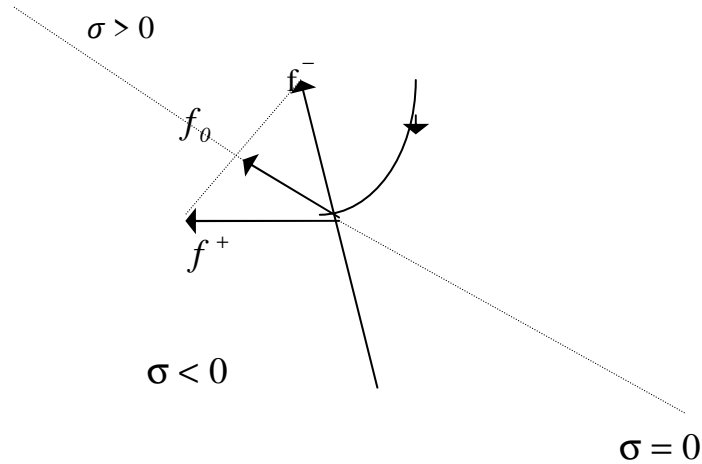


Figure 3.2: Le concept géométrique de Fillipov

2.2. Approche de la commande équivalente [Utkin, 1992]

La condition de glissement locale énoncée initialement par Utkin [Utkin, 1972] est exprimée par:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \dot{\sigma} < 0, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \dot{\sigma} > 0 \tag{3.10}$$

La condition de glissement énoncée plus tard par Utkin [Utkin, 1992] correspondant à un régime glissant idéal est exprimée par la condition d'invariance suivante:

$$\dot{\sigma}(x) = 0 \tag{3.11}$$

Cette dernière condition permet de déterminer la dynamique d'un système équivalent en régime glissant idéal au cours duquel le point représentatif de l'évolution du système ne quitte pas la surface de glissement. Un régime glissant idéal n'est garanti que si à chaque instant la condition suivante est vérifiée:

$$\dot{\sigma}(x) = 0 \tag{3.12}$$

D'après les relations (3.1) et (3.12) on peut écrire:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} [f(x, t) + g(x, t)u_{eq}] = 0 \tag{3.13}$$

d'où l'expression de la commande équivalente:

$$\mathbf{u}_{eq} = \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (3.14)$$

avec

$$\left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right] \neq 0 \quad (3.15)$$

La condition (3.15) est nécessaire pour l'existence du mode glissant. En substituant l'expression (3.14) dans l'équation (3.1) il résulte:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right]^{-1} \right] \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (3.16)$$

La solution du système (3.1) en mode glissant est donc donnée par la solution de l'équation (3.16).

Dans la pratique, le régime glissant idéal ne peut pas exister à cause des erreurs de modélisation; les trajectoires d'état vont rester donc dans un voisinage de la surface de glissement ce qui va caractériser le régime glissant par des oscillations d'autant plus importantes que la fréquence de commutation est faible. La commande effective est ainsi constituée de deux composantes:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} + \Delta \mathbf{u} \quad (3.17)$$

où \mathbf{u}_{eq} est une composante basse fréquence et $\Delta \mathbf{u}$ une composante haute fréquence qui permet d'assurer le glissement.

La robustesse est certainement l'une des propriétés les plus intéressantes de la commande à structure variable. Pour conserver cette propriété la solution souvent choisie pour la composante haute fréquence est:

$$\Delta \mathbf{u} = -M \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (3.18)$$

où

sign représente la fonction signe définie par:

$$\operatorname{sgn}(\sigma(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\mathbf{x}) > 0 \\ 0 & \text{si } \sigma(\mathbf{x}) = 0 \\ -1 & \text{si } \sigma(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

- **Robustesse**

La propriété de robustesse des systèmes à structure variable concerne essentiellement deux types de perturbations, à savoir les perturbations externes et les variations éventuelles des paramètres du système. En particulier pour un système dynamique donné par la représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = f(x, t) + \Delta f(x, p, t) + (g(x, t) + \Delta g(x, p, t))u + v(x, p, t) \quad (3.20)$$

où p est un vecteur de paramètres incertains, $\Delta f, \Delta g$ les erreurs dues aux variations paramétriques et v est une perturbation extérieure, l'invariance est garantie s'il existe $\Delta \bar{f}, \Delta \bar{g}, \Delta \bar{v}$ tels que les conditions suivantes sont assurées:

$$\begin{aligned} \Delta f(x, p, t) &= g(x, t) \Delta \bar{f}(x, p, t) \\ \Delta g(x, p, t) &= g(x, t) \Delta \bar{g}(x, p, t) \\ \Delta v(x, p, t) &= g(x, t) \Delta \bar{v}(x, p, t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ces résultats sont inspirés des travaux de [Drazenovic, 1969]. La démonstration dans le cas multivariable est donnée dans [Boubaker, 1995c]. Du point de vue géométrique, ces conditions d'invariance expriment le fait que les perturbations qu'elles soient internes ou externes, ne peuvent être rejetées que si elles appartiennent à l'espace engendré par la base $g(x, t)$. On peut constater que ces contraintes sont très restrictives et ne peuvent pas prendre en compte un grand nombre de systèmes.

- **Phénomène de broutement**

Dans la pratique il est impossible d'utiliser des relais idéaux avec une fréquence de commutation infinie. Ceci est dû à l'imperfection des organes de commutation (hystérésis, retard...). Par ailleurs le glissement ne se produit pas sur la surface de glissement mais dans un voisinage de celle-ci. Ceci se manifeste au niveau de la variable asservie par un phénomène d'oscillations résiduelles autour de la trajectoire. Ce phénomène est d'autant plus sévère que la fréquence de commutation est faible. Dans la pratique les oscillations résiduelles ont un effet néfaste sur les structures mécaniques [Buhler, 1986]. Plusieurs solutions ont été proposées dans le cadre de l'approche de commande équivalente à structure variable pour surmonter ce problème. On peut citer dans ce sens la commande continue par morceaux dans une bande de la surface de glissement [Slotine & Lee, 1991], [Slotine & Sastry, 1983], [Sellami et al., 1997], le choix d'un secteur de glissement formé par deux surfaces de glissement [Xu et al., 1996] qui permet à l'état du système d'atteindre alternativement la première surface puis la seconde. Nous proposerons dans la suite une approche permettant de résoudre ce problème tout en conservant la propriété de robustesse non seulement pendant le régime glissant mais aussi pendant le mode d'atteignabilité. Cette approche se résume dans le choix d'une condition de glissement qui tient compte des non linéarités du système.

- **Réduction du broutement par l'approche de la commande continue**

Pour réduire les oscillations résiduelles, la plus classique des solutions proposées [Slotine & Sastry, 1983] est de remplacer la fonction discontinue en x par une fonction continue en x située à l'intérieur d'une bande étroite au voisinage de la surface de glissement. Ainsi pour la commande augmentée (3.17) la composante haute fréquence (3.18) peut être remplacée par la fonction saturation donnée par la relation suivante [Slotine & Sastry, 1983][Sellami et al., 1997]:

$$\Delta u = -M \text{sat}(\sigma(x)) \quad (3.22)$$

où sat est la fonction saturation continue donnée par la relation suivante:

$$\text{sat}\left(\frac{\sigma}{\phi}\right) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\phi} & \text{si } \left|\frac{\sigma}{\phi}\right| \leq 1 \\ \text{sgn}(\sigma) & \text{si } \left|\frac{\sigma}{\phi}\right| > 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

Une autre solution donnée par [Harashima et al., 1986] consiste à remplacer la fonction sat exprimée dans la relation (3.23) par la fonction $\text{cont}(\sigma)$ selon la relation suivante:

$$\text{cont}(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma}{|\sigma + \delta|} & \text{si } \left|\frac{\sigma}{\phi}\right| \leq 1 \\ \text{sgn}(\sigma) & \text{si } \left|\frac{\sigma}{\phi}\right| > 1 \end{cases} \quad (3.24)$$

Pour les deux propositions précédentes ϕ désigne la largeur de la bande à l'intérieur de laquelle la linéarisation est effectuée, δ étant un paramètre positif. Ces deux paramètres doivent être choisis aussi petits que possible pour éviter d'atténuer la robustesse du système. La mise en oeuvre d'une commande continue est très délicate car elle nécessite un compromis entre la robustesse et le reste des performances.

- **Réduction du broutement par introduction d'un secteur de glissement**

Pour éliminer le phénomène de broutement, [Xu et al., 1996] ont remplacé la notion de glissement sur surface par la notion de glissement dans un secteur. Pour cela ils ont défini deux surfaces de glissement $\sigma_1(x)$ et $\sigma_2(x)$ choisies linéaires et délimitant ce secteur. Les deux surfaces ainsi définies divisent l'espace d'état en trois régions qui sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \{e / \sigma_1(e) > 0 \text{ et } \sigma_2(e) > 0\} \\
 D_2 &= \{e / \sigma_1(e)\sigma_2(e) \leq 0\} \\
 D_3 &= \{e / \sigma_1(e) < 0 \text{ et } \sigma_2(e) < 0\}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

e étant l'erreur obtenue entre la valeur désirée et l'état x . La synthèse de la loi de commande de la méthode précédemment proposée conduit à une variable de commande formée de deux composantes: une composante basse fréquence u satisfaisant la condition de glissement (3.11) et une composante haute fréquence Δu . Cette dernière est définie par:

$$\Delta u = \begin{cases} M(x) \operatorname{sgn}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right), & x \in D_1 \cup D_3 \\ M(x) \operatorname{sgn}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}\right), & x \in D_2 \end{cases} \tag{3.26}$$

Plus de détails à propos de cette stratégie modifiée de commande à structure variable sont développés dans [Xu & al., 1996]. On démontre que cette méthode permet de lisser les variables de commande et d'éliminer les oscillations résiduelles sans perte de robustesse. Des extensions de cette méthode au cas multivariable ne sont pas encore établies.

Réduction du broutement par introduction d'une condition de glissement modifiée [Boubaker et al., 1996]

Nous avons remarqué que les extensions méthodologiques de la méthode de commande équivalente à structure variable ont concerné uniquement la résolution du problème de broutement. Elles ont donné cependant naissance à d'autres problèmes tels que, l'altération de la robustesse, la complexité de mise en oeuvre, la difficulté de l'extension au cas multivariable... Afin de palier à ces inconvénients nous présenterons dans la suite une approche différente de celles déjà proposées. Cette approche se présente sous la forme d'une équation différentielle qui spécifie la dynamique de la fonction de commutation $\sigma(x)$ et qui représente en même temps la condition de glissement.

La condition de glissement que nous proposons est choisie de telle manière qu'elle tient compte des non linéarités du système en imposant à la surface de glissement d'être solution de l'équation différentielle particulière suivante [Boubaker et al., 1996]:

$$\dot{\sigma} = -\mathbf{M}|\sigma(x)|^a \operatorname{sgn}(\sigma(x)), \quad 0 < a < 1 \tag{3.27}$$

Le choix des paramètres de cette équation permet de contrôler la dynamique du système. L'équation (3.27) garantit une convergence de la surface de glissement à partir d'un état

initial x_0 vers 0 en une durée de glissement finie. En intégrant l'équation (3.27) cette durée est obtenue:

$$T = \frac{1}{(1-a)M} x_0^{(1-a)} \quad (3.28)$$

Pour déterminer la loi de commande, calculons la dérivée de la fonction de commutation $\sigma(x)$ et égalisant le résultat à la relation (3.28):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x, t)u = -M|\sigma(x)|^a \operatorname{sgn}(\sigma(x)) \quad (3.29)$$

On obtient alors à partir de la relation précédente l'expression de la commande suivante:

$$u = - \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(x, t) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T f(x, t) + M|\sigma(x)|^a \operatorname{sgn}(\sigma(x)) \right] \quad (3.30)$$

La condition (3.15) est toujours valable pour l'existence du mode glissant. Nous pouvons remarquer que la loi de commande peut être mise sous sa forme la plus classique (3.17):

$$u = u_{eq} + \Delta u$$

avec

$$\begin{aligned} u_{eq} &= - \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(t, x) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T f(t, x) \right] \\ \Delta u &= - \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^T g(t, x) \right]^{-1} \left[M|\sigma(x)|^a \operatorname{sgn}(\sigma(x)) \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Le choix d'une condition de glissement de type (3.27) permet d'imposer une loi d'atteignabilité à la surface de glissement. Cette loi tient compte des non linéarités du système, elle est totalement indépendante des variations paramétriques et des perturbations extérieures. Ceci permet de garantir une robustesse non seulement en mode glissant mais aussi une robustesse pendant la phase d'atteignabilité. La loi de ralliement que nous imposons au système permet d'augmenter la vitesse d'atteignabilité quand l'état du système s'éloigne de la surface de glissement, il la réduit lorsque l'état s'approche de cette surface. Le résultat obtenu est le suivant: Une grande vitesse d'atteignabilité et pas de broutement. Le gain de commutation M doit être choisi de façon à rejeter les perturbations tout en tenant compte du choix du paramètre a . Nous présenterons dans la suite une étude comparative des performances de la méthode de commande à structure équivalente classique et de la méthode d'atteignabilité que nous venons de proposer à travers un exemple d'un procédé d'asservissement de position.

Exemple

Considérons l'exemple d'un moteur à courant continu muni de sa charge. Les détails de la modélisation sont donnés dans [Boubaker et al., 1995a]. Ce système peut être représenté par un modèle linéaire en représentation d'état:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_m x(t) + B_m u(t) \\ y(t) &= C_m^T x(t) \end{aligned} \tag{3.32}$$

avec

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{pmatrix}; \quad B_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{T_m} \end{pmatrix}; \quad C_m = (0 \quad 1) \tag{3.33}$$

où

$x = [x_1 \quad x_2]^T \in \mathfrak{R}^2$ est le vecteur d'état, x_1 et x_2 sont respectivement la position et la vitesse. $u \in \mathfrak{R}$ est la variable de commande. T_m est la constante électromécanique du moteur alors que K_m est le gain de sa fonction de transfert.

En réalité au cours du démarrage, le courant d'un moteur à courant continu n'est pas nul alors que l'arbre du moteur est encore à l'arrêt. Cette période est d'autant plus longue que l'inertie de la charge est plus grande. Ainsi pour être plus précis on peut considérer pour ce type de système soit un modèle linéaire avec une zone morte [Boubaker et al., 1996] représenté sur la figure (3.4), soit un modèle avec retard [Boubaker et al., 1997a b] représenté sur la figure (3.9). Dans les figures (3.4) et (3.9), $G_0(p)$ représente la fonction de transfert du système linéaire donné par la représentation d'état (3.32) et (3.33).

Cas d'un modèle non linéaire [Boubaker et al., 1996]

Le moteur muni de sa charge est schématisé sur la figure 3.4:

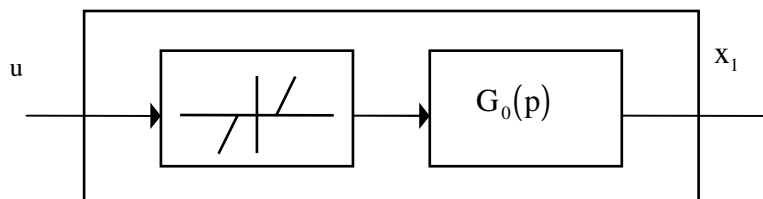


Figure 3.4. Modèle non linéaire du moteur muni de sa charge.

Définissons par e le vecteur d'erreur:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

où E est la consigne supposée constante. En choisissant une surface de glissement linéaire de la forme:

$$\sigma(e) = e_1 + c_2 e_2 = E - x_1 - c_2 x_2 \quad (3.35)$$

la dérivée de l'expression (3.35) par rapport au temps donne:

$$\dot{\sigma} = -\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 = -\dot{x}_1 - c_2 \left(-\frac{1}{T_m} x_2 + \frac{K_m}{T_m} u \right) \quad (3.36)$$

Afin d'établir une étude comparative entre les résultats obtenus avec la condition de glissement classique de Phillipov (3.4) et ceux obtenus avec la condition de glissement (3.27), on impose au système dans un premier temps la condition de glissement classique de type (3.4). La loi d'attractivité la plus utilisée pour satisfaire la condition de glissement de Phillipov (3.4) est décrite par:

$$\dot{\sigma} = -M \operatorname{sgn}(\sigma(x)) \quad (3.37)$$

En égalisant les conditions de glissement (3.37) et l'expression (3.36) on trouve l'expression de la loi de commande à structure classique suivante:

$$u = \frac{T_m}{c_2 K_m} \left(M \operatorname{sgn}(\sigma) - x_2 \left(1 - \frac{c_2}{T_m} \right) \right) \quad (3.38)$$

On impose au système dans un second temps la loi d'atteignabilité (3.27); la loi de commande obtenue est:

$$u = \frac{T_m}{c_2 K_m} \left(M |\sigma|^a \operatorname{sgn}(\sigma) - x_2 \left(1 - \frac{c_2}{T_m} \right) \right) \quad (3.39)$$

Sachant que les paramètres du système en régime nominal sont : $K_m = 1, T_m = 1s$. On applique au même modèle la loi de commande exprimée par la relation (3.38) puis celle exprimée par la relation (3.39) pour les paramètres $M = 1$ et $a = 0.01$. On peut observer sur les figures 3.5 à 3.8 une comparaison pour différents critères.

- Comparaison des temps de stabilisation et des variables de commande

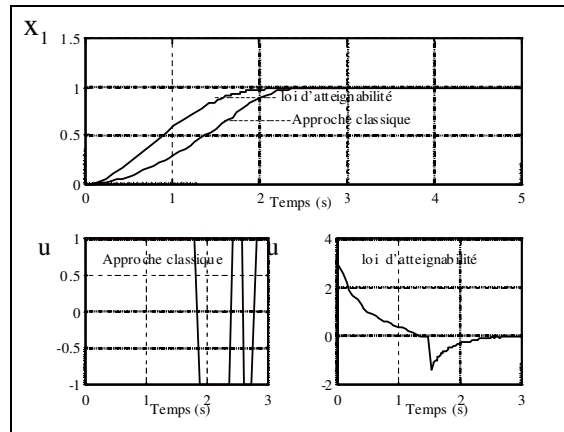


Figure 3.5. Evolution des variables de sortie et des variables de commande

Sur la figure 3.5 on remarque que la comparaison est profit de la loi d'atteignabilité; d'une part le temps de stabilisation obtenu par la loi d'atteignabilité est plus intéressant et d'autre part la loi de commande est parfaitement lisse.

- **Comparaison de la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques**

Pour illustrer la robustesse de la commande à structure variable pour les deux approches considérées ci dessus, supposons que le vecteur de paramètres incertains est le suivant:

$$p = [K_m \quad T_m]^T \quad (3.40)$$

Le modèle de variations paramétriques est donné par:

$$K_m(t) = 1 + 50\exp(-2t)\cos(t) \quad (3.41)$$

$$T_m(t) = 1 + 50\exp(-2t)\sin(t) \quad (3.42)$$

L'évolution des paramètres est rapide; sa valeur est dans un rapport de 50 par rapport aux paramètres nominaux.

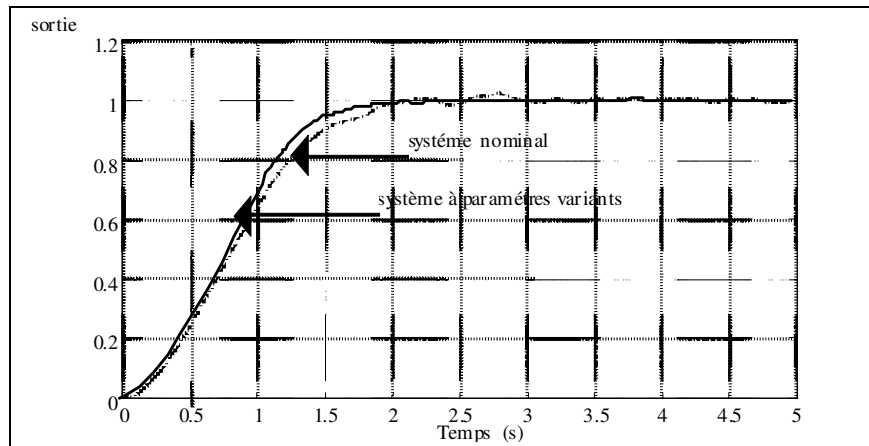


Figure 3.6. Invariance de l'approche d'atteignabilité vis-à-vis des variations paramétriques

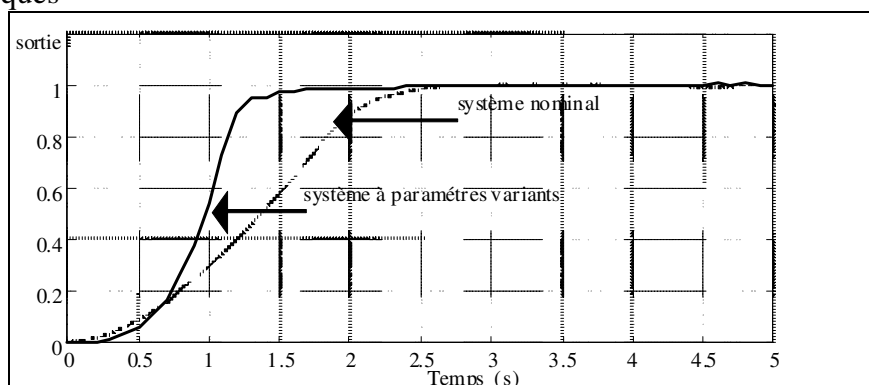


Figure 3.7. Robustesse de l'approche classique vis-à-vis des variations paramétriques

Sur la figure 3.6 on remarque que la réponse du système par une commande qui obéit à la loi d'atteignabilité est quasiment invariante alors que la réponse dans le cas d'une commande à structure variable classique est seulement robuste pendant le régime glissant; le mode d'atteignabilité est dans ce cas sensible aux variations paramétriques (figure 3.7).

- **Comparaison de la robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures.**

On se propose maintenant de comparer la robustesse des deux lois de commande considérées ci-dessus vis-à-vis de perturbations extérieures. On applique pour cela une perturbation maintenue sous forme d'un échelon $E = 0.5V$ appliqué pendant le régime transitoire à $t = 0.1$ s. Le résultat est donné sur la figure 3.8. L'analyse de ces courbes montre que les caractéristiques dynamiques du système sont meilleures (rapidité, dépassement).

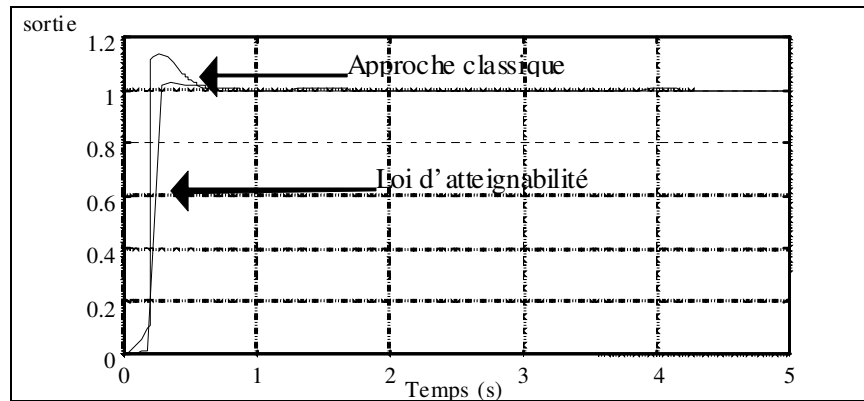


Figure 3.8. Robustesse des deux approches vis-à-vis des perturbations extérieures.

- **Cas d'un modèle à retard [Boubaker et al., 1997a b]**

Supposons que le moteur muni de sa charge peut être modélisé par le modèle à retard suivant (figure 3.9):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x(t) + B_1 u(t - h) \\ y(t) &= C_1^T x(t) \end{aligned} \quad (3.43)$$

où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathfrak{R}$ est le vecteur de commande, A_1, B_1, C_1 sont des matrices avec des dimensions appropriées. Le retard h est une constante inconnue non négative.

Pour résoudre le problème d'identification nous avons envisagé une technique de séparation du bloc retard par rapport au bloc linéaire [Boubaker et al., 1997b]. Le bloc retard a été décrit par une équation différentielle partielle puis approximé par la méthode de collocation orthogonale. Seul le problème de commande à structure variable du système sera présenté dans ce paragraphe; plus de détails à propos du problème de l'identification sont présentés dans [Nihtila et al., 1994] et le problème de l'approximation fonctionnelle du bloc retard est présenté au premier chapitre ou dans [Boubaker et al., 1997b].

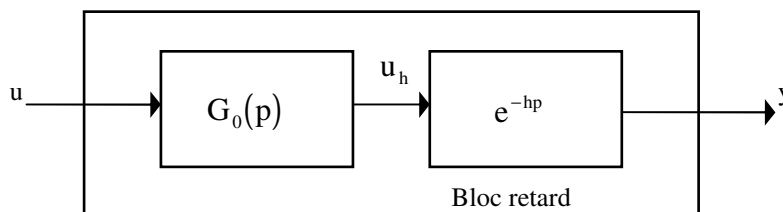


Figure 3.9. Fonction de transfert du modèle à retard

Le système aux dérivées partielles représentant le bloc retard a été transformé en un système différentiel ordinaire dans la représentation d'état suivante (Voir les détails de l'approximation au premier chapitre):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{h} [A_h x - B_h u_h] \\ y &= C_h x \end{aligned} \quad (3.44)$$

où

$$A_h = \begin{pmatrix} 6.6640 & 2.8405 & -1.2325 & 1.1613 & -0.6550 \\ -5.1848 & 0.7688 & 2.9413 & -2.2497 & 1.2291 \\ 2.2497 & -2.9413 & -0.7688 & 5.1848 & -2.4952 \\ -1.1613 & 1.2325 & -2.8405 & -6.6640 & 8.7783 \\ 1.7631 & -1.8126 & 3.6799 & -23.6304 & 21.000 \end{pmatrix}; \quad B_h = \begin{pmatrix} -8.7783 \\ 2.4952 \\ -1.2291 \\ 0.6550 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C_h = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

Le bloc retard étant approximé, la représentation d'état du système global peut être déduite.

Définissons alors le vecteur erreur par:

$$e = x_d - x \quad (3.45)$$

où x_d est l'état désiré.

En choisissant la surface de glissement suivante:

$$\sigma(e) = \dot{e} + e \quad (3.46)$$

La dérivée de la relation (3.46) donne:

$$\dot{\sigma}(e) = \ddot{e} + \dot{e} \quad (3.47)$$

La condition de glissement est celle représentée par la relation (3.27). En égalisant les relations (3.37) et (3.27), la loi de commande peut être aisément déduite. Nous pouvons remarquer sur les figures (3.10) et (3.11) que différents choix des paramètres M et a permettent d'influencer la dynamique du système.

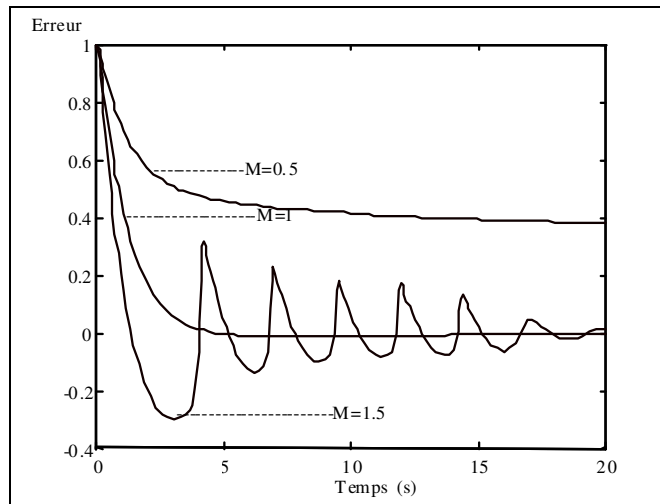


Figure 3.10. Effet de la variation du paramètre M sur la dynamique du système

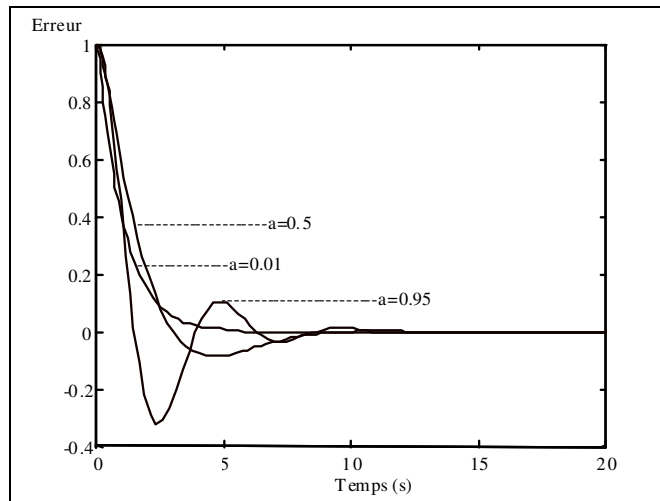


Figure 3.11. Effet de la variation du paramètre a sur la dynamique du système

Une étude comparative a été de même établie entre les résultats obtenus avec la condition de glissement classique (3.37) et ceux obtenus avec la condition de glissement (3.27). On peut remarquer sur la figure (3.12) l'allure de la variable de commande pour les deux lois.

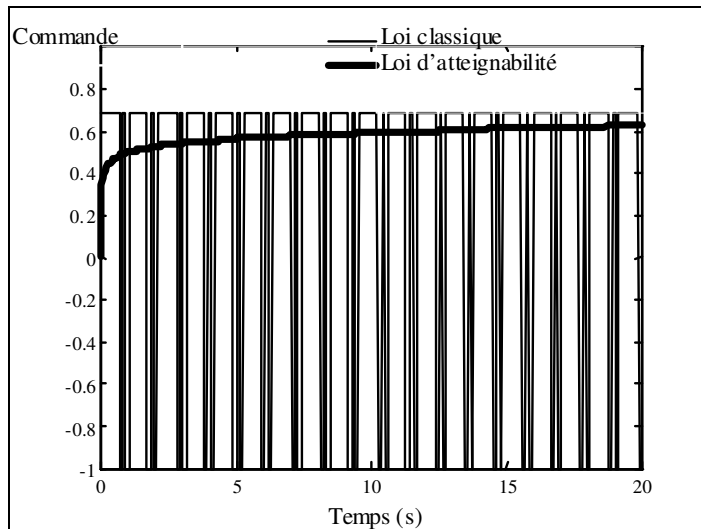


Figure 3.12. Comparaison de la variation des variables de commande

- **Comparaison de la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques**

Pour illustrer la robustesse de la commande à structure variable pour les deux approches considérées ci-dessus, ajoutons à chaque composante a_{ij} de la matrice A_1 une incertitude Δa_{ij} et à chaque composante b_{ij} du vecteur B une incertitude Δb_{ij} telles que:

$$\begin{cases} \Delta a_{ij} = 0.5a_{ij} \\ \Delta b_{ij} = 0.5b_{ij} \end{cases} \quad (3.48)$$

Les simulations présentées sur les figures (3.13) et (3.14) montrent la robustesse des deux approches vis-à-vis des variations paramétriques modélisées par les relations (3.48) avec une élimination du broutement pour l'approche d'atteignabilité.

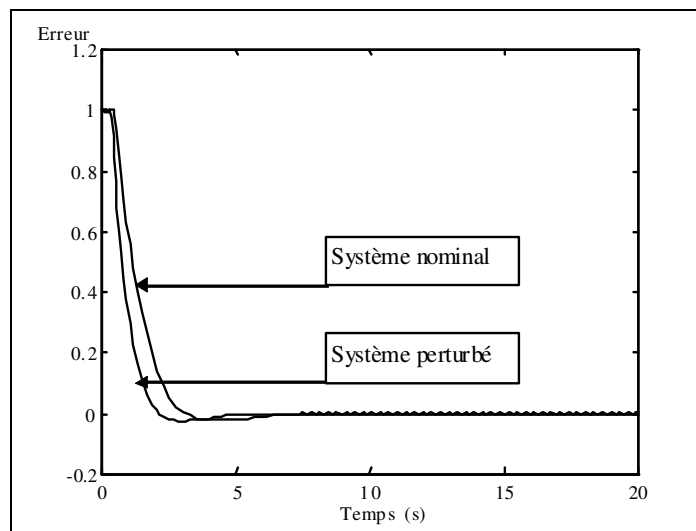


Figure 3.13. Evolution de la variable de sortie sous des variations paramétriques (cas d'une condition de glissement imposée par la loi d'atteignabilité).

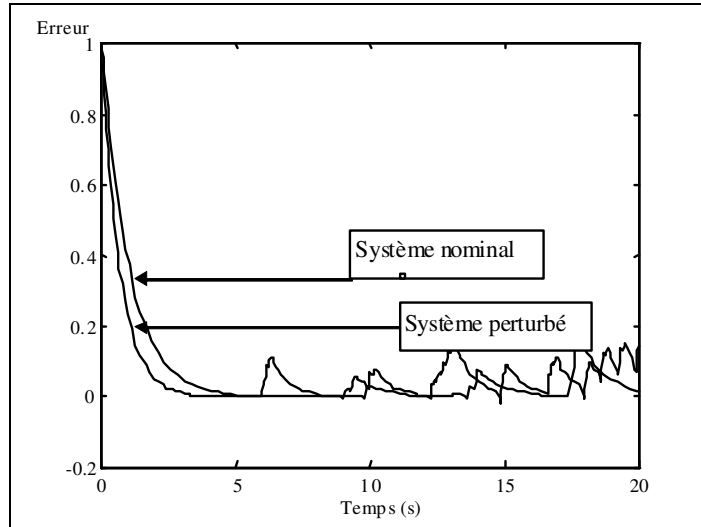


Figure 3.14. Evolution de la variable de sortie (cas d'une condition de glissement classique)

- **Comparaison de la robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures**

On se propose maintenant de comparer la robustesse de deux lois de commande vis-à-vis des perturbations extérieures. On applique une perturbation permanente vérifiant la relation suivante:

$$v(t) = \sin\left(20t + \frac{\pi}{3}\right) \tag{3.49}$$

Les résultats de simulation sont donnés par les figures (3.15) et (3.16).

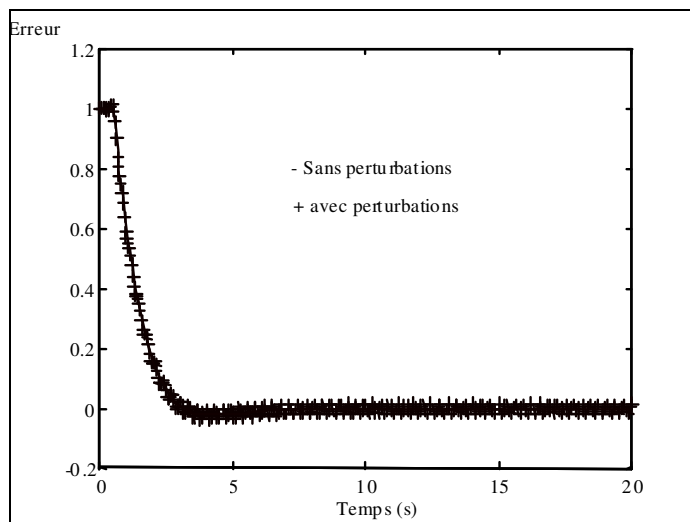


Figure 3.15. Evolution de la variable de sortie sous une perturbation extérieure (cas d'une condition de glissement imposée par la loi d'atteignabilité)

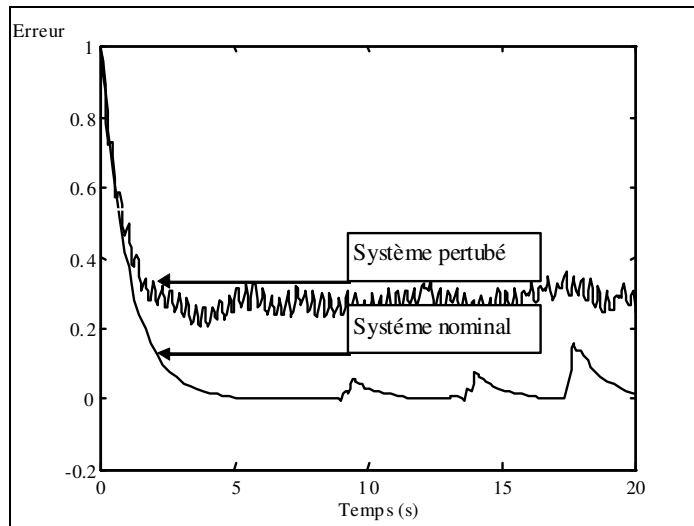


Figure 3.16. Evolution de la variable de sortie sous une perturbation extérieure (cas d'une condition de glissement classique)

Conclusion

En comparaison avec l'approche classique, la loi d'atteignabilité possède plusieurs avantages. En effet on a noté que l'introduction d'une loi de ralliement à la surface de glissement qui tient compte des non linéarités du modèle permet de lisser la variable de commande et par suite d'éliminer le phénomène de broutement. De plus, la robustesse n'est plus garantie que pendant le glissement mais aussi pendant la phase d'atteignabilité. Cette loi permet aussi d'améliorer les caractéristiques dynamiques du modèle en garantissant une meilleure rapidité et une meilleure précision.

2.3. Approche par bouclage linéarisant

On distingue deux types de linéarisation: une linéarisation exacte et une linéarisation numérique. La linéarisation exacte est courante par bouclage d'état statique alors que la linéarisation numérique conduit à des bouclages dynamiques.

linéarisation exacte par retour d'état statique à structure variable [Fernandez & Hedrick, 1987] [Slotine, 1984][Isidori, 1989] [Fossard & Normand-Cyrot, 1993]

Le problème de linéarisation exacte consiste à transformer un système non linéaire en un système linéaire de manière exacte [Isidori, 1989] [Fossard 1993] grâce à un retour d'état et un changement de variables.

Considérons un système non linéaire et non stationnaire, linéaire en entrée du type (3.1), auquel on rajoute une fonction de sortie décrite par:

$$y = c(x, t) \quad (3.50)$$

La transformation du système représenté par les relations (3.1) et (3.50) sous une forme canonique de commandabilité (voir annexe 1) est basée sur la notion de degré relatif. Le degré relatif d'un système est défini comme étant le nombre de fois que l'on dérive la sortie y pour faire apparaître de façon explicite la commande. Cette forme est représentée par:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i = \eta_{i+1} & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\eta}_n = \mathbf{f}^*(\eta, t) + \mathbf{g}^*(\eta, t)u \\ y_1 = \eta_1 \end{cases} \quad (3.51)$$

Si l'on considère le retour d'état statique suivant:

$$u = \frac{1}{g^*(\eta, t)}(v - f^*(\eta, t)) \quad (3.52)$$

où v définit une nouvelle entrée, le système (3.51) s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i = \eta_{i+1} & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\eta}_n = v \\ y_1 = \eta_1 \end{cases} \quad (3.53)$$

Considérons un bouclage à structure variable [Slotine, 1984] [Fernandez & Hedrick, 1987] pour lequel la surface de glissement est choisie sous la forme suivante:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n c_i \eta_i, \quad c_n = 1 \quad (3.54)$$

La surface de glissement précédente satisfait la condition de glissement (3.37):

$$\dot{\sigma} = -\mathbf{M} \operatorname{sgn}(\sigma)$$

En dérivant l'équation (3.54), on obtient la relation suivante:

$$\dot{\sigma} = \dot{\eta}_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_{i+1} \quad (3.55)$$

En combinant les deux dernières équations on obtient:

$$\dot{\eta}_n = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_{i+1} - \mathbf{M} \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (3.56)$$

En considérant le système (3.53) et la relation (3.56) on peut déduire l'expression de la nouvelle entrée:

$$v = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_{i+1} - M \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (3.57)$$

La relation (3.57) combinée à la relation (3.52) permet de définir le bouclage à structure variable suivant:

$$u = \frac{1}{g^*(\eta, t)} \left(-\sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_{i+1} - f^*(\eta, t) - M \operatorname{sgn}(\sigma) \right) \quad (3.58)$$

La loi de commande obtenue apparaît comme étant la somme de deux composantes où u_{eq} est la composante basse fréquence et Δu est la composante haute fréquence définies par:

$$\begin{cases} u_{\text{eq}} = \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_{i+1} + f^*(\eta, t)\right)}{g^*(\eta, t)} \\ \Delta u = \frac{-M \operatorname{sgn}(\sigma)}{g^*(\eta, t)} \end{cases} \quad (3.59)$$

Lorsque le régime glissant est atteint ($\sigma(\eta) = 0$ et $\dot{\sigma}(\eta) = 0$) la dynamique du système (3.1) devient celle d'un système linéaire d'ordre réduit; celle-ci est représentée comme suit:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i = \eta_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-2) \\ \dot{\eta}_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_i \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (3.60)$$

Robustesse

Afin de se conformer aux restrictions géométriques d'invariance (3.21), il est possible de considérer les perturbations bornées. Cette hypothèse va permettre d'estimer les gains de commutation de façon à rejeter les perturbations.

Sous des variations paramétriques et perturbations extérieures bornées, le système (3.51) peut être représenté sous la forme de commandabilité suivante:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i = \eta_{i+1} & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\eta}_n = \mathbf{f}^*(\eta, t) + \Delta \mathbf{f}^*(\eta, t) + [\mathbf{g}^*(\eta, t) + \Delta \mathbf{g}^*(\eta, t)]u + v \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (3.61)$$

Supposons que les variations paramétriques ne soient pas connues mais vérifient les conditions suivantes:

$$\begin{cases} |\Delta \mathbf{f}^*| \leq \Theta \\ |\Delta \mathbf{g}^*| \leq \Pi \end{cases} \quad (3.62)$$

On suppose que les perturbations extérieures sont aussi bornées:

$$v \leq \bar{\omega} \quad (3.63)$$

On impose au système une condition de glissement de type (3.4). Celle-ci peut être exprimée comme suit:

$$\sigma \mathcal{L} = \sigma \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_{i+1} + f^*(\eta, t) + \Delta f^*(\eta, t) + (\mathbf{g}^*(\eta, t) + \Delta \mathbf{g}^*(\eta, t))u + v(\eta, t) \right) < 0 \quad (3.64)$$

alors que le bouclage à structure variable défini par la relation (3.40) est le suivant:

$$u = [\mathbf{g}^*(\eta, t)]^{-1} \left(-\sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_{i+1} - f^*(\eta, t) - M \operatorname{sgn}(\sigma) \right)$$

Le gain de glissement qui assure la condition de glissement (3.64) pour le bouclage linéarisant à structure variable précédent doit vérifier la relation suivante:

$$M \rangle \sup_{\eta, t} \left| \frac{\Delta f^*(\eta, t) + \Delta g^*(\eta, t)u + v(\eta, t)}{1 - \frac{\Delta g^*(\eta, t)}{g^*(\eta, t)}} \right| \quad (3.65)$$

soit donc:

$$M \rangle \frac{\Theta + \Pi u + \varpi}{1 - \frac{\varpi}{|g^*(\eta, t)|}} \quad \text{avec} \quad \frac{\varpi}{|g^*(\eta, t)|} \ll 1 \quad (3.66)$$

Pour déterminer le gain de glissement M plusieurs solutions peuvent être envisagées. En particulier on peut envisager un gain adaptatif ou un gain constant.

Cas d'un gain adaptatif

Cette méthode nécessite un réajustement du gain M au cours du temps avec une période d'échantillonnage Δt . la condition (3.66) peut être remplacée dans ce cas par la proposition suivante:

$$M(t) \rangle \frac{\Theta + \Pi u(t - \Delta t) + \varpi}{1 - \frac{\varpi}{|g^*(\eta, t)|}} \quad \text{avec} \quad \frac{\varpi}{|g^*(\eta, t)|} \ll 1 \quad (3.67)$$

Cas d'un gain constant

Dans ce cas on peut supposer que la commande u est bornée, ce qui est d'ailleurs une condition physique nécessaire lors d'une implantation pratique. Si l'on pose donc que:

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \quad (3.68)$$

on peut affirmer que:

$$|\Delta f^*(\eta, t) + \Delta g^*(\eta, t)u + v(\eta, t)| \leq \zeta \quad (3.69)$$

Dans ce cas la condition (3.66) devient:

$$M \rangle \frac{\zeta}{1 - \varpi} \quad \text{avec} \quad \frac{\varpi}{|g^*(\eta, t)|} \leq \varpi \ll 1 \quad (3.70)$$

Phénomène de broutement

Pour résoudre le problème de broutement dans le cas des systèmes linéarisés exactement, plusieurs solutions ont été proposées. Des lois de commande avec actions intégrales sont souvent une bonne solution. Nous pouvons citer dans ce contexte l'approche introduite par [Chang, 1991] dans laquelle il a construit une condition de glissement du premier ordre plus une action intégrale ou l'approche développée par [Hajri et al., 1996] dans laquelle l'introduction des surfaces de même ordre que le système conduit à l'intégration de la variable de la commande et par suite l'élimination du broutement. Nous exposerons ces deux méthodes dans le cas multivariable. linéarisation numérique par retour d'état dynamique à structure variable

La linéarisation par retour d'état statique n'est réalisable que pour des systèmes dégénérés (qui ne contiennent pas de dérivées de l'entrée). Si l'expression (3.1) contient des dérivées de l'entrée, le type de linéarisation précédent ne s'applique plus. Pour ce type de problèmes Fliess [Fliess, 1990] a introduit la forme canonique de commande généralisée suivante:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i = \eta_{i+1} & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\eta}_n = \tau(\eta, u, \dot{u}, \dots, u^p) \\ y_1 = \eta_1 \end{cases} \quad (3.71)$$

La constante p correspond à l'ordre de dérivées maximal de l'entrée.

A partir de la forme canonique de commande généralisée (3.71) Fliess a introduit aussi le bouclage linéarisant suivant [Fliess & Messenger, 1990]:

$$\tau(\eta, u, \dot{u}, \dots, u^p) = \sum_{i=1}^n c_i \eta_i + \sum_{i=1}^p b_i v_i \quad (3.72)$$

où $v = [v_1 \ \dots \ v_p]$ est la nouvelle entrée.

La linéarisation ainsi obtenue permet d'obtenir une entrée u, correspondant à un instant t, au bouclage linéarisant (3.72) de sa forme canonique de commande généralisée (3.71) [Fliess & Messenger, 1990].

Considérons à nouveau un bouclage à structure variable pour lequel la surface de glissement est choisie linéaire de la forme (3.54) et une condition de glissement de type (3.37). En combinant la relation (3.72) avec l'expression (3.71) et la dérivée de l'expression (3.54) on peut déduire le bouclage linéarisant dynamique à structure variable suivant:

$$\tau(\eta, u, \dot{u}, \dots, u^p) = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_{i+1} - \mathbf{M} \operatorname{sgn}(\sigma(\eta)) \quad (3.73)$$

L'équation précédente où la variable u est l'inconnue, représente l'équation du régulateur à structure variable avec retour d'état dynamique.

La commande équivalente correspondant à un régime glissant idéal est définie par la solution de l'équation différentielle suivante [Sira-Raminez, 1992]:

$$\tau(\eta, u_{eq}, \dot{u}_{eq}, \dots, u_{eq}^{(p)}) = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_{i+1} \quad (3.74)$$

Lorsque le régime glissant est atteint ($\sigma(\eta) = 0$ et $\mathcal{L}(\eta) = 0$), la dynamique du système (3.71) devient celle d'un système linéaire d'ordre réduit représenté comme suit:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i = \eta_{i+1}, & i=1, \dots, (n-2) \\ \dot{\eta}_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_i \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (3.75)$$

Fliess a donc développé une méthodologie de stabilisation des systèmes non linéaires non dégénérés à l'aide d'une commande discontinue. Cette technique est particulièrement basée sur une représentation généralisée de l'état du système. Cette contribution a permis de stabiliser les systèmes de façon robuste par la plus haute des dérivées de l'entrée présente dans la représentation d'état généralisée. L'avantage d'une telle approche provient du fait que les commutations n'interviennent plus sur les variables d'entrée mais sur leurs dérivées d'ordre le plus élevé. Ceci se manifeste par des variables de commande caractérisées par des actions douces et par un régime glissant sans broutement. La généralisation de cette approche dans le cas multivariable est assurée par des techniques de découplage [Fliess & Messenger, 1990].

Proposition de la forme de commandabilité modifiée [Boubaker et al., 1998a d]

Considérons un système non linéaire qui peut être représenté sous la forme de commandabilité (3.51). Nous proposons dans ce qui suit d'augmenter l'ordre du système et de le représenter sous une forme canonique de commandabilité modifiée basée aussi sur la notion du degré relatif. On rappelle que le degré relatif d'un système est défini comme étant le nombre de fois que l'on dérive la sortie y pour faire apparaître de façon explicite la commande. La représentation du système sous la forme canonique modifiée que nous proposons est la suivante [Boubaker et al., 1998a d]:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i = \eta_{i+1} & i=1, \dots, r \\ \dot{\eta}_r = \mathbf{f}^*(\eta, t) + \mathbf{g}^*(\eta, t)u \\ \dot{\eta}_{r+1} = \tau(\eta, u, \dot{u}) \\ y_1 = \eta_1 \end{cases} \quad (3.76)$$

Dans la représentation précédente, la composante de l'état η_{r+1} apparaît comme une fonction non linéaire de l'état, de la variable de commande mais aussi de sa première dérivée. On a donc transformé le système initial représenté par le système (3.51) d'un système dégénéré en un système non dégénéré en faisant intervenir la première dérivée de l'entrée dans sa représentation d'état modifiée (3.76).

Choisissons une fonction de commutation linéaire de la forme:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{r+1} c_i \eta_i, \quad c_{r+1} = 1 \quad (3.77)$$

telle que les c_i ($i = 1, \dots, r, r+1$) définis dans (3.77) sont choisis de manière que $c_0 + c_1 p + \dots + c_{r-1} p^{r-1} + p^{r+1}$ soit un polynôme Hurwitz

La condition de glissement est choisie de telle manière que la surface de glissement soit, par exemple, solution de l'équation différentielle particulière (3.37). L'équation précédente garantit une convergence de la surface de glissement à partir d'un état initial x_0 vers 0 en une durée de glissement finie.

Exprimons la dérivée de la surface de glissement à partir de l'équation (3.77):

$$\dot{\sigma} = \dot{\eta}_{r+1} + \sum_{i=1}^r c_i \eta_{i+1} \quad (3.78)$$

et considérons la représentation d'état modifiée (3.76) combinée avec la condition de glissement (3.37). Nous pouvons déduire le bouclage dynamique à structure variable suivant:

$$\tau(\eta, u, \dot{u}) = -\sum_{i=1}^r c_i \eta_{i+1} - \mathbf{M} \operatorname{sgn}(\sigma(x)) \quad (3.79)$$

L'avantage d'un tel retour d'état dynamique vient du fait que les commutations n'interviennent plus sur la variable d'entrée mais sur sa première dérivée. Ce qui se manifeste par une variable de commande caractérisée par des actions douces et par un régime glissant sans broutement.

Afin de déterminer l'évolution des états et de la variable de commande il suffit de résoudre le système différentiel suivant par rapport à l'état η et à la variable de commande u :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i = \eta_{i+1} & i = 1, \dots, r \\ \eta_{r+1} = -\sum_{i=1}^r c_i \eta_{i+1} - \mathbf{M} \operatorname{sign}(\sigma(x)) \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (3.80)$$

Il s'agit d'un système différentiel ordinaire de $(r+1)$ équations à $(r+1)$ inconnues. Lorsque le régime glissant est atteint ($\sigma(\eta)=0$ et $\dot{\sigma}(\eta)=0$) la relation (3.78) est équivalente à:

$$\sum_{i=1}^{r+1} c_i \eta_i = 0, \quad c_{r+1} = 1 \quad (3.81)$$

En résolvant l'équation (3.81) pour η_{r+1} et en substituant le résultat dans (3.80) on peut déterminer l'équation d'état du système en mode glissant lorsque son modèle est décrit par sa forme canonique de commandabilité modifiée.

Cette solution est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_i = \eta_{i+1}, & i = 1, \dots, r-1 \\ \dot{\eta}_r = -\sum_{i=1}^r c_i \eta_i \end{cases} \quad (3.82)$$

Le système précédent est de dimension réduite par rapport au système donné par la forme canonique de commandabilité modifiée (3.76), cependant il est de même dimension que le système initial. Nous pouvons affirmer donc que l'introduction de la forme de commandabilité modifiée permet d'éviter la réduction de l'ordre sur la surface de glissement ce qui peut être considéré comme un avantage pour les systèmes dont le degré relatif est égal à un.

La commande équivalente correspondant à un régime glissant idéal ($\sigma(\eta)=0$ et $\dot{\sigma}(\eta)=0$) est définie par la solution de l'équation différentielle suivante:

$$\tau(\eta, u_{eq}, \dot{u}_{eq}) = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_{i+1} \quad (3.83)$$

Robustesse

Un système perturbé de la forme (3.76) peut être donné par la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \eta_{i+1} & i = 1, \dots, r \\ \dot{\eta}_r = \mathbf{f}^*(\eta, t) + \Delta \mathbf{f}^*(\eta, t) + [\mathbf{g}^*(\eta, t) + \Delta \mathbf{g}^*(\eta, t)]u + v \\ \dot{\eta}_{r+1} = \tau_i(\eta, u, \dot{u}) \\ y_1 = \eta_1 \end{cases} \quad (3.84)$$

Les perturbations considérées sont supposées bornées ainsi que leurs variations:

$$\begin{aligned}
 |\Delta f^*| \leq \Theta \quad \text{et} \quad \left| \frac{d}{dt} \Delta f^* \right| \leq \Theta' \\
 |\Delta g^*| \leq \Pi \quad \text{et} \quad \left| \frac{d}{dt} \Delta g^* \right| \leq \Pi'
 \end{aligned}
 \tag{3.85}$$

De plus on suppose bornées les perturbations externes ainsi que leurs dérivées:

$$v \leq \varpi \quad \text{et} \quad \left| \frac{d}{dt} v \right| \leq \varpi'
 \tag{3.86}$$

On impose au système la condition de glissement de Fillipov (3.4) alors que le bouclage dynamique à structure variable défini à partir du système nominal est déduit de la relation (3.79). Les gains de glissement sont ainsi aisément calculés de façon à contrebalancer une combinaison linéaire des perturbations et de certaines de leurs dérivées.

3. ETUDE DES SYSTEMES DE DIMENSION FINIE: CAS MULTIVARIABLE

Considérons le système non linéaire, à m entrées dont l'espace d'état x est de dimension n , décrit en la représentation d'état:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (3.87)$$

où $f \in \mathfrak{R}^n$ représente un champ de vecteurs généralement non linéaires. g est une matrice de dimension $n \times m$. u est le vecteur de commande défini dans \mathfrak{R}^m .

La commande à structure variable est obtenue en imposant à chacune des composantes u_i du vecteur de commande u d'obéir à la loi suivante:

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad i = 1, L, m \quad (3.88)$$

sur m surfaces de glissement désignées par:

$$\sigma_i = \{x / \sigma_i(x, t) = 0\} \quad i = 1, L, m \quad (3.89)$$

de dimensions $(n - 1)$.

3.1. Différents types de glissement

Pour un système de type (3.87) il y a m fonctions de commutations et $2^m - 1$ types de glissement qui peuvent se produire [Hung *et al.*, 1993]. Nous pouvons considérer que le glissement peut se produire sur une des m surfaces de glissement obéissant aux fonctions de commutations (3.88) ou aussi sur l'intersection des couples de surfaces de dimensions $(n - 2)$, ou sur l'intersection des triplets de surfaces de dimensions $(n - 3)$... ou enfin que le glissement se produit sur la surface représentant l'intersection de toutes les surfaces de glissement, de dimension $(n - m)$ et désignée par:

$$\sigma_E = \{x / \sigma(x, t) = 0\} \quad \sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap L \cap \sigma_m \quad (3.90)$$

Parmi les $2^m - 1$ possibilités de glissement citées ci-dessus nous en citerons trois:

- **Première possibilité: glissement sur un ordre fixé de surfaces de glissement**

L'état du système suit **un ordre fixé** de surfaces de glissement au cours de son évolution comme il est montré sur la figure (3.3a), par exemple on peut avoir l'évolution suivante:

$$x_0 \longrightarrow \sigma_1 \longrightarrow (\sigma_1 \cap \sigma_2) \longrightarrow (\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3) \longrightarrow \dots \longrightarrow \sigma_E$$

où x_0 est l'état initial.

Ce type de glissement est basé sur la théorie de la commande hiérarchisée dont le principe est de privilégier certaines surfaces de glissement par rapport à d'autres [Decarlo *et al.*, 1988]. Ce type de glissement est simple dans sa conception mais possède plusieurs inconvénients; en particulier il présente des problèmes au niveau de la résolution du système différentiel, il nécessite un long régime transitoire et des efforts de commutation considérables au niveau des variables de commande.

- **Deuxième possibilité: glissement sur une surface dont l'ordre est pré-défini**

L'état du système évolue et atteint **la surface de glissement** σ_E sur laquelle naît le mode glissant comme il est montré sur la figure (3.3b). Ce type de glissement est simple dans sa conception et garantit un régime transitoire plus rapide que l'approche précédente et des variables de commande lisses. Cependant il ne permet pas d'avoir de bonnes caractéristiques dynamiques.

- **Troisième possibilité: glissement sur une surface dont l'ordre est libre**

Ce type de glissement permet à l'état du système d'atteindre **la première surface** de glissement parmi les $2^m - 1$ surfaces possibles **à la première commutation** comme il est montré sur la figure (3.3c). Le choix de la surface de glissement et de son ordre est libre, il dépend de l'état initial du système. La solution du système en mode glissant est facile à déterminer. Ce type de glissement donne un régime transitoire encore plus rapide que l'approche précédente et des variables de commande lisses ainsi que d'excellentes caractéristiques dynamiques.

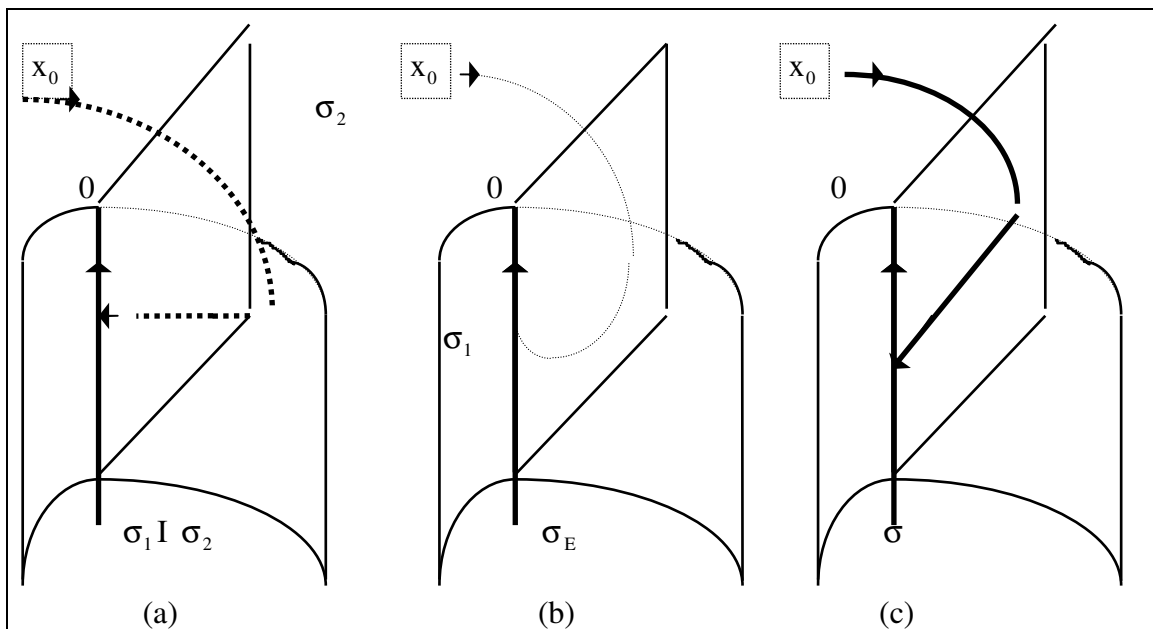


Figure 3.3: Différents types de glissement

3.1. Approche de Fillipov

La condition de glissement directe énoncée par Fillipov [Fillipov, 1961] est la suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i > 0 \quad \text{si} \quad \sigma_i < 0 \\ \dot{\sigma}_i < 0 \quad \text{si} \quad \sigma_i > 0 \end{aligned} \quad i = 1, L, m \quad (3.91)$$

Elle assure que la surface glissement est attractive pour les trajectoires d'état mais sont difficiles à appliquer dans le cas multivariable. De plus elle ne permet pas de garantir un temps de glissement fini. Ces conditions mènent en général au premier type de glissement énoncé dans le paragraphe précédent et représenté par la figure (3.3a).

La loi (3.91) doit permettre de déterminer la loi de commande à partir des m paires d'inégalités suivantes:

$$\dot{\sigma}_i(x) = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x} (\mathbf{f}(x,t) + \mathbf{g}(x,t)u) \begin{cases} > 0 & \text{si } \sigma_i < 0 \\ < 0 & \text{si } \sigma_i > 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.92)$$

La résolution des inéquations (3.92) revient à résoudre $2m$ inégalités à $2m$ inconnues. Les $2m$ inconnues sont les variables de commande u_i ($i = 1, L, m$), chacune possédant deux valeurs différentes pour deux conditions différentes. La résolution d'un tel système est très compliquée. C'est pourquoi d'ailleurs ce type de glissement est rarement retenu sur le plan pratique dans le cas multivariable.

3.2. Approche de la commande équivalente [Slotine & Li, 1991]

La méthode de la commande équivalente consiste à chercher un vecteur de commande $u_e(x)$

$$u_{eq}(x) = [u_{eq_1} \quad \dots \quad u_{eq_m}]^T \quad (3.93)$$

permettant d'assurer un régime glissant idéal au cours duquel le point représentatif de l'évolution du système ne quitte pas la surface de glissement définie par l'équation:

$$\sigma_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.94)$$

Un régime glissant idéal n'est garanti que si à chaque instant la condition suivante est vérifiée:

$$\dot{\sigma}_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.95)$$

ce qui revient à écrire que:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} [f(x, t) + g(x, t)u_{eq}] = 0 \quad i = 1, L, m \quad (3.96)$$

La commande équivalente est ainsi déduite:

$$u_{eq_i} = \left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} \right)^T g(t, x) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} \right)^T f(t, x) \right] \quad i = 1, L, m \quad (3.97)$$

avec

$$\left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} \right)^T g(t, x) \right] \neq 0 \quad (3.98)$$

En réalité la commande effective qui permet de satisfaire l'une des conditions de glissement est la suivante:

$$u_i = u_{eq_i} + \Delta u_i \quad i = 1, \dots, m \quad (3.99)$$

où u_{eq_i} est la composante basse fréquence et Δu_i est la composante haute fréquence définie par

$$\Delta u_i = -M_i \operatorname{sgn}(\sigma_i(x)) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.100)$$

Les gains M_i sont calculés de façon à satisfaire la condition de glissement et garantir la propriété de robustesse. Le calcul de ces gains sera exposé dans la suite.

Comme pour le cas monovariable, le phénomène de broutement reste toujours le point faible de cette technique. Nous développerons ci-après les approches les plus utilisées permettant de surmonter ce problème dans le cas multivariable.

◆ Approche de la commande continue

Pour réduire les oscillations, cette approche très classique se propose de remplacer la composante haute fréquence de la commande augmentée (3.97) par la fonction saturation donnée par la relation suivante [Slotine & Sastry, 1983]:

$$\Delta u_i = -M_i \operatorname{sat}(\sigma_i(x)) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.101)$$

où sat est la fonction continue donnée par la relation suivante:

$$\operatorname{sat}\left(\frac{\sigma_i}{\phi_i}\right) = \begin{cases} \frac{\sigma_i}{\phi_i} & \text{si } \left| \frac{\sigma_i}{\phi_i} \right| \leq 1 \\ \operatorname{sgn}(\sigma_i) & \text{si } \left| \frac{\sigma_i}{\phi_i} \right| > 1 \end{cases} \quad i = 1, L, m \quad (3.102)$$

Une autre solution a été donnée par [Harashima *et al.*,1986]. Elle consiste à remplacer la fonction sat dans la relation (3.97) par la fonction $\text{cont}(\sigma_i)$ selon la relation suivante:

$$\text{cont}(\sigma_i) = \begin{cases} \frac{\sigma_i}{|\sigma_i + \delta|} & \text{si } \left| \frac{\sigma_i}{\phi_i} \right| \leq 1 \\ \text{sign}(\sigma_i) & \text{si } \left| \frac{\sigma_i}{\phi_i} \right| > 1 \end{cases} \quad i = 1, L, m \quad (3.103)$$

Pour les deux propositions précédentes ϕ_i désigne la largeur de bande à l'intérieur de laquelle la linéarisation est effectuée. δ étant un paramètre positif. Ces deux paramètres doivent être choisis aussi petits que possible afin de conserver la robustesse du système.

◆ **Proposition d'une Condition de glissement modifiée** [Boubaker *et al.*, 1996]

Une extension des résultats énoncés dans le cas monovariable au cas multivariable est aisée. Considérons le système non linéaire, linéaire en entrées décrit par la représentation d'état (3.87). Choisissons dans un premier temps m surfaces de glissement choisies linéaires et découplées décrite comme suit:

$$\sigma_i(x) = c_i^T x = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.104)$$

La condition de glissement est choisie de telle manière que la surface de glissement soit solution de l'équation différentielle particulière suivante:

$$\dot{\sigma}_i = -\mathbf{M}_i |\sigma_i(x)|^a \text{sgn}(\sigma_i(x)) \quad 0 < a < 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.105)$$

L'équation (3.105) spécifie la dynamique de la fonction de commutation $\sigma_i(x)$ et représente en même temps la condition de glissement. Elle garantit une convergence de la surface de glissement à partir d'un état initial x_0 vers 0 en une durée de glissement finie. En intégrant l'équation (3.105) cette durée est obtenue:

$$T_i = \frac{1}{(1-a)\mathbf{M}_i} x_0^{(1-a)} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.106)$$

Pour déterminer la loi de commande calculons la dérivée de chaque composante de la fonction de commutation $\sigma(x)$ et égalisons le résultat avec la relation (3.105). On obtient:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial \sigma_i}{\partial x} g(x, t) u_i = -M_i |\sigma_i(x)|^a \text{sgn}(\sigma_i(x)) \quad i = 1, L, m \quad (3.107)$$

Résolvons l'équation (3.107) par rapport à u_i , la loi de commande suivante est obtenue:

$$u_i = - \left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} \right)^T g(x, t) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} \right)^T f(t, x) + M_i |\sigma_i(x)|^a \operatorname{sgn}(\sigma_i(x)) \right] \quad i = 1, L, m \quad (3.108)$$

La condition nécessaire pour l'existence du mode glissant est la suivante:

$$\left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} \right)^T g(x, t) \right] \neq 0 \quad i = 1, L, m \quad (3.109)$$

La loi de commande peut être alors mise sous sa forme la plus classique (3.99):

$$u_i = u_{eq_i} + \Delta u_i$$

avec

$$u_{eq_i} = - \left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} \right)^T g(x, t) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} \right)^T f(x, t) \right] \quad (3.110)$$

$$\Delta u_i = - \left[\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} \right)^T g(x, t) \right]^{-1} \left[M_i |\sigma_i(x)|^a \operatorname{sgn}(\sigma_i(x)) \right]$$

Le choix d'une condition de glissement de type (3.105) permet d'imposer une loi d'atteignabilité de la surface de glissement qui tient compte des non linéarités inhérentes au système. Dans le cas multivariable, cette loi a l'avantage de ne pas exiger une mise sous une forme canonique particulière du système non linéaire. Par contre le choix de m surfaces de glissement linéaires et découplées et une matrice de commandabilité g inversible sont des conditions nécessaires pour la synthèse de la loi de commande.

Une condition de glissement de type (3.105) permet à l'état du système d'atteindre la première surface de glissement parmi les $2^m - 1$ surfaces possibles à la première commutation (figure (3.3c)). La surface sur laquelle se produit le glissement dépend de l'état initial du système ce qui justifie d'ailleurs la qualité du régime transitoire (rapidité, précision, pas de saturation).

Par la loi d'atteignabilité les variables de commande sont lissées, ceci se justifie par le fait que la loi d'atteignabilité adoptée permet d'augmenter la vitesse de convergence à la surface de glissement quand l'état du système s'éloigne de la surface de glissement, il la réduit lorsque l'état s'approche de cette surface. Le phénomène de broutement est ainsi éliminé.

Un avantage majeur de cette approche est la garantie de la robustesse non seulement en mode glissant mais aussi pendant la phase d'atteignabilité. Ceci est dû au fait que la loi imposée ne garantit pas uniquement l'attractivité de la surface de glissement mais impose aussi une dynamique particulière au système pendant la phase d'atteignabilité qui est aussi indépendante des variations paramétriques et des perturbations extérieures.

3.3. Approche par bouclage linéarisant

- **Découplage par Linéarisation [Isidori, 1989], [Fossard & Normand-Cyrot, 1993], [Borne et al., 1993]**

Plusieurs auteurs se sont intéressés au problème de découplage des systèmes multivariables [Isidori, 1989], [Fossard & Normand-Cyrot, 1993], [Borne et al., 1993]. En particulier pour les systèmes à structure variable, le découplage des systèmes multivariables, en des sous-systèmes monovariables permet d'exploiter toutes les notions énoncées dans le cas monovariante [Slotine, 1984][Fernandez & Hedrick, 1987].

Considérons les systèmes multivariables représentés par les équations (3.87). La représentation entrée-sortie précédente est considérée par addition d'une fonction de sortie décrite par:

$$y = c(x, t) \quad (3.111)$$

Une des représentations intéressantes de ce système est la forme canonique de commandabilité suivante (voir annexe):

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{ik} = \eta_{i, k+1} & k = 1, \dots, r_i - 1 \\ \dot{\eta}_{i, r_i} = \mathbf{f}_i^*(\eta, t) + \mathbf{g}_i^*(\eta, t)u_i & i = 1, \dots, m \\ y_i = \eta_{i1} \end{cases} \quad (3.112)$$

où les indices r_i sont les degrés relatifs du système découplé.

Si le système considéré est commandable et observable alors on a

$$\sum_{i=1}^m r_i = n, \quad (3.113)$$

sinon le système découplé est de dimension inférieure à celle du système initial et on a

$$\sum_{i=1}^m r_i \leq n. \quad (3.114)$$

Dans le cas où le système découplé est de dimension inférieure à celle du système initial il faut étudier la partie du processus non observable par ce modèle [Isidori, 1989]. Dans le cas où la matrice g est non inversible, on ne peut pas trouver un bouclage statique pour le système. Si la matrice g est inversible la loi de commande qui permet de linéariser le système est:

$$u_i = [\mathbf{g}_i^*(\eta, t)]^{-1} (v_i - \mathbf{f}_i^*(\eta, t)) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.115)$$

où v_i représente l'une des m composantes d'un nouveau vecteur d'entrée v .

Bouclage à structure variable [Slotine, 1984][Fernandez & Hedrick, 1987],

Définissons m surfaces de glissement découplées $(\sigma_i, i = 1, \dots, m)$ définies par:

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^{r_i} c_{ik} \eta_{ik} = 0, \quad c_{ir_i} = 1, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.116)$$

les c_{ik} définis en (3.116) sont choisis tels que: $c_{i0} + c_{i1}p + \dots + c_{i(r_i-1)}p^{r_i-1} + p^{r_i}$ est un polynôme de Hurwitz. Considérons un bouclage à structure variable pour lequel la surface de glissement est choisie linéaire et satisfait la relation (3.116) en choisissant la condition de glissement suivante:

$$\dot{\sigma}_i = -M_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.117)$$

En dérivant l'équation (3.116) on obtient la relation suivante:

$$\dot{\sigma}_i = \dot{\eta}_{ir_i} + \sum_{k=1}^{r_i-1} c_{ik} \dot{\eta}_{ik+1} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.118)$$

En égalisant les équations (3.117) et (3.118) on obtient:

$$\dot{\eta}_{ir_i} = -\sum_{i=1}^{r_i-1} c_{ik} \eta_{ik+1} - M_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.119)$$

En considérant le système (3.112) et les relations (3.115), (3.117) et (3.118), l'expression de la nouvelle entrée est la suivante:

$$v_i = -\sum_{i=1}^{r_i-1} c_{ik} \eta_{ik+1} - M_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.120)$$

Cette dernière expression ainsi que la loi de commande (3.115) permettent de définir le bouclage à structure variable suivant:

$$u_i = [g^*(\eta, t)]^{-1} \left(-\sum_{i=1}^{r_i-1} c_{ik} \eta_{ik+1} - f_i^*(\eta, t) - M_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) \right) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.121)$$

La variable de commande u_i obtenue apparaît comme étant la somme de deux composantes où u_{eq_i} est la composante basse fréquence et Δu_i est la composante haute fréquence définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\text{eq}_i} = -[\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\eta}, t)]^{-1} \left(\sum_{i=1}^{r_i-1} c_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ik+1} + f_i^*(\boldsymbol{\eta}, t) \right) \\ \Delta \mathbf{u}_i = -[\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\eta}, t)]^{-1} [M_i \text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}_i)] \end{cases} \quad i = 1, L, m \quad (3.122)$$

Lorsque le régime glissant est atteint ($\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\eta}) = 0$ et $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\eta}) = 0$) la dynamique du système (3.112) devient celle d'un système d'ordre réduit. Celui-ci est représenté comme suit:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}_{ik} = \boldsymbol{\eta}_{ik+1}, \quad k = 1, \dots, r_i - 2 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_{ik} = -\sum_{i=1}^{r_i-1} c_{ik} \boldsymbol{\eta}_{ik}, \quad k = r_i - 1 \quad i = 1, \dots, m \\ y_i = \boldsymbol{\eta}_{i1} \end{cases} \quad (3.123)$$

- **Robustesse**

Nous considérerons dans ce paragraphe des perturbations bornées. Supposons aussi que le système perturbé du système nominal (3.112) peut être représenté sous la forme de commandabilité suivante:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}_{ik} = \boldsymbol{\eta}_{ik+1} \quad k = 1, \dots, r_i - 1 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_{ir_i} = [\mathbf{f}_i^*(\boldsymbol{\eta}, t) + \Delta \mathbf{f}_i^*(\boldsymbol{\eta}, t)] + [\mathbf{g}_i^*(\boldsymbol{\eta}, t) + \Delta \mathbf{g}_i^*(\boldsymbol{\eta}, t)] u_i + v_i \quad i = 1, \dots, m \\ y_i = \boldsymbol{\eta}_{i1} \end{cases} \quad (3.124)$$

Supposons que les variations paramétriques ne sont pas connues mais bornées:

$$\begin{cases} \left| \Delta \mathbf{f}_i^* \right| \leq \Theta_i \\ \left| \Delta \mathbf{g}_i^* \right| \leq \Pi_i \end{cases} \quad i = 1, L, m \quad (3.125)$$

On suppose de même que les perturbations extérieures sont aussi bornées:

$$v_i \leq \delta_i \quad i = 1, L, m \quad (3.126)$$

Si on considère que la condition de glissement est (3.91). celle-ci peut être exprimée comme suit:

$$\boldsymbol{\sigma}_i^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}_i = \boldsymbol{\sigma}_i^T \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i \boldsymbol{\eta}_{i+1} + \mathbf{f}_i^*(\boldsymbol{\eta}, t) + \Delta \mathbf{f}_i^*(\boldsymbol{\eta}, t) + (\mathbf{g}_i^*(\boldsymbol{\eta}, t) + \Delta \mathbf{g}_i^*(\boldsymbol{\eta}, t)) u_i + v_i(\boldsymbol{\eta}, t) \right) < 0 \quad (3.127)$$

alors que le bouclage à structure variable (3.121) défini à partir du système nominal est le suivant:

$$u_i = \left[\mathbf{g}_i^*(\eta, t) \right]^{-1} \left(- \sum_{i=1}^{n-1} c_i \eta_{i+1} - \mathbf{f}_i^*(\eta, t) - \mathbf{M}_i \operatorname{sgn}(\sigma_i) \right) \quad i = 1, \dots, m$$

Le gain de glissement assurant la condition de glissement (3.127) pour le bouclage linéarisant à structure variable (3.121) doit vérifier la relation suivante:

$$M_i \geq \sup_{\eta, t} \left| \frac{\Delta f_i^*(\eta, t) + \Delta g_i^*(\eta, t) u + v_i(\eta, t)}{1 - \frac{\Delta g_i^*(\eta, t)}{g_i^*(\eta, t)}} \right| \quad (3.128)$$

soit donc:

$$M_i \geq \frac{\Theta_i + \Pi_i u + v_i}{1 - \frac{\delta_i}{|g_i^*(\eta, t)|}} \quad \text{avec} \quad \frac{\delta_i}{|g_i^*(\eta, t)|} \ll 1 \quad (3.129)$$

Les gains de glissement M_i sont fonctions des variables de commande u_i . Plusieurs solutions peuvent être envisagées pour résoudre ce problème. En particulier on peut prévoir des gains adaptatifs ou des gains constants.

Choix des gains adaptatifs

Cette méthode nécessite un réajustement périodique des gains M_i . Si Δt est le pas d'échantillonnage, la condition (3.129) peut être remplacée par l'inégalité suivante:

$$M_i(t) \geq \frac{\Theta_i + \Pi_i u(t - \Delta t) + v_i}{1 - \frac{\delta_i}{|g_i^*(\eta, t)|}} \quad \text{avec} \quad \frac{\delta_i}{|g_i^*(\eta, t)|} \ll 1 \quad (3.130)$$

Choix des gains constants

Dans ce cas on peut supposer que chaque composante u_i est bornée, ce qui est d'ailleurs une condition physique nécessaire lors d'une mise en oeuvre sur site:

$$u_{\min_i} \leq u_i \leq u_{\max_i} \quad (3.131)$$

on peut affirmer que:

$$\left| \Delta f_i^*(\eta, t) + \Delta g_i^*(\eta, t) u + v_i(\eta, t) \right| \leq \zeta \quad (3.132)$$

La condition (3.129) devient:

$$M_i \gg \frac{\zeta}{1-\delta} \quad \text{avec} \quad \frac{\delta_i}{|g_i^*(\eta, t)|} \leq \delta \ll 1 \quad (3.133)$$

- **Phénomène de broutement**

Comme pour le cas monovariante, le phénomène de broutement reste toujours le point faible de cette technique. Nous exposons les approches les plus récentes permettant de surmonter ce problème dans le cas multivariante à savoir la commande avec correction intégrale. Cette approche [Chang, 1991] se propose de choisir une condition de glissement de premier ordre avec une action intégrale définie par:

$$\sigma_i^T \left(\dot{\sigma}_i + \mathbf{M}_i \int_0^t \sigma_i dt \right) \leq 0 \quad (3.134)$$

Une autre solution proposée par [Hajri et al., 1996] impose le choix de surfaces de glissement de même ordre que le système dans l'espace d'erreur de la sortie y par rapport à la valeur désirée y_d . Ces surfaces sont définies comme suit:

$$\sigma_i = \sum_{k=0}^{r_i} c_{ik} \left(y_i^{(k)} - y_{d_i}^{(k)} \right) \quad c_{i r_i} = 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.135)$$

En dérivant l'expression (3.135) on obtient la relation suivante :

$$\dot{\sigma}_i = \sum_{k=0}^{r_i} c_{ik} \left(y_i^{(k+1)} - y_{d_i}^{(k+1)} \right) \quad c_{i n} = 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.136)$$

En utilisant une condition de glissement proposée par [Chang, 1991] ou des surfaces de glissement selon l'approche de [Hajri et al., 1996], la loi de commande obtenue pour le système représenté par (3.112) est de la forme:

$$u_i = \left[\mathbf{g}_i^*(\eta, t) \right]^{-1} \left[-\mathbf{f}_i^*(\eta, t) + v_i + \Delta v_i \right] \quad i = 1, \dots, m \quad (3.137)$$

où

$$v_i = y_i^{r_i} \quad (3.138)$$

et

$$\Delta v_i = -M_i \int_0^t \text{sgn}(\sigma_i) \quad (3.139)$$

t est une durée finie au bout de laquelle l'état du système converge vers zéro.

Il est évident que l'intégration de la fonction signe dans les deux approches considérées ci-dessus permet de lisser les variables de commande et de résoudre le problème de broutement.

- **Linéarisation dynamique**

La commande dynamique à structure variable par introduction d'une forme canonique de commandabilité modifiée permettant d'augmenter l'ordre du système a fait ses preuves dans le cas monovisible. Une extension au cas multivariable sera développée dans ce paragraphe. Le problème sera traité pour des systèmes découplés pouvant être représentés dans une forme de commandabilité du type (3.91).

- **Proposition d'une forme de commandabilité modifiée**

Considérons un système non linéaire, linéaire en entrée qui peut être représenté selon la forme canonique de commandabilité (3.112). Nous proposons dans ce qui suit d'augmenter l'ordre du système et de le représenter sous une forme canonique de commandabilité modifiée basée aussi sur la notion de degré relatif. Cette représentation peut être donnée comme suit:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{ik} = \eta_{ik+1} & k = 1, \dots, r_i \\ \dot{\eta}_{ir_i} = \mathbf{f}_i^*(\eta, t) + \mathbf{g}_i^*(\eta, t)u_i \\ \dot{\eta}_{ir_i+1} = \tau_i(\eta, u_i, \dot{u}_i) \\ y_i = \eta_{i1} \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.140)$$

Dans la représentation précédente, la composante de l'état η_{ir_i+1} apparaît comme une fonction non linéaire de l'état, des variables de commande mais aussi de leurs premières dérivées. On a donc transformé le système initial représenté par les équations (3.112) d'un système dégénéré en un système non dégénéré en faisant intervenir les premières dérivées des variables d'entrée dans sa représentation d'état modifiée (3.140).

Choisissons m fonctions de commutation linéaires et totalement découplées de la forme:

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^{r_i+1} c_{ik} \eta_{ik}, \quad c_{ir_i+1} = 1, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.141)$$

telles que les c_i ($i = 1, \dots, m$) définis dans (3.141) sont choisis de manière à ce que $c_{i0} + c_{i1}p + \dots + c_{ir-1}p^{r-1} + p^{r_i+1}$ soit un polynôme de Hurwitz.

La condition de glissement est choisie de manière à ce que chacune des m surfaces de glissement soit solution de l'équation différentielle (3.117) suivante:

$$\dot{\sigma}_i = -\mathbf{M}_i \operatorname{sgn}(\sigma_i(x)) \quad i = 1, \dots, m$$

Ce choix est motivé par la garantie d'une durée de glissement finie.

- **Bouclage à structure variable et retour d'état dynamique**

Exprimons la dérivée de la surface de glissement à partir de l'équation (3.1141):

$$\dot{\sigma}_i = \dot{\eta}_{i\tau_i+1} + \sum_{k=1}^r c_{ik} \eta_{ik+1} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.142)$$

et considérons la représentation d'état (3.140) combinée avec la condition de glissement (3.30) nous pouvons déduire le bouclage dynamique à structure variable suivant:

$$\tau_i(\eta, u, \dot{u}) = - \sum_{k=1}^r c_{ik} \eta_{ik+1} - \mathbf{M}_i \operatorname{sgn}(\sigma_i(x)), \quad i = 1, \dots, m \quad (3.143)$$

L'avantage de ce retour d'état dynamique provient du fait que les commutations n'interviennent plus sur les variables d'entrée mais sur leurs premières dérivées. Ce qui se manifeste par des variables de commande caractérisées par des actions douces et par un régime glissant sans broutement.

La résolution du système différentiel suivant par rapport au vecteur d'état η et au vecteur de commande u permet de déterminer l'évolution des états, de la variable de commande ainsi que de la sortie du système.

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{ik} = \eta_{ik+1} & k = 1, \dots, r \\ \tau_i(\eta, u, \dot{u}) = - \sum_{k=1}^{r_i} c_{ik} \eta_{ik+1} - \mathbf{M}_i \operatorname{sgn}(\sigma_i(x)) & i = 1, \dots, m \\ y_i = \eta_{li} \end{cases} \quad (3.144)$$

Lorsque le régime glissant est atteint ($\sigma(\eta) = 0$ et $\dot{\sigma}(\eta) = 0$) la relation (3.141) est équivalente à:

$$\sum_{k=1}^{\tau_i+1} c_{ik} \eta_{ik} = 0 \quad c_{i\tau_i+1} = 1, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.145)$$

En résolvant l'équation (3.145) par rapport à $\eta_{i\tau_i+1}$ et en substituant le résultat dans (3.144) on peut déterminer l'équation d'état du système en mode glissant lorsque son modèle est décrit dans sa forme canonique de commandabilité modifiée. Cette solution est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{ik} = \eta_{ik+1} & i = 1, \dots, r-1 \\ \dot{\eta}_{ir} = - \sum_{k=1}^{r_i} c_{ik} \eta_{ik+1} & i = 1, \dots, m \\ y_i = \eta_{li} \end{cases} \quad (3.146)$$

Le système précédent est de même dimension que le système initial (3.91). Nous pouvons donc affirmer que l'introduction de la forme de commandabilité modifiée permet d'éviter la réduction de l'ordre sur les m surfaces de glissement ce qui représente un avantage de cette approche surtout pour les systèmes dont l'un au moins des degrés relatifs est égal à un. La commande équivalente correspondant à un régime glissant idéal ($\sigma(\eta) = 0$ et $\dot{\sigma}(\eta) = 0$) est définie par la solution de l'équation différentielle suivante:

$$\tau_i(\eta, u_{eq}, \dot{u}_{eq}) = - \sum_{k=1}^{r_i} c_{ik} \eta_{ik}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.147)$$

- **Robustesse**

Considérons le système perturbé donné par la représentation d'état suivante:

$$\forall i = 1, \dots, m : \begin{cases} \dot{\eta}_{ik} = \eta_{i,k+1} & k = 1, \dots, r_i \\ \dot{\eta}_{ir} = \mathbf{f}_i^*(\eta, t) + \Delta \mathbf{f}_i^*(\eta, t) + [\mathbf{g}_i^*(\eta, t) + \Delta \mathbf{g}_i^*(\eta, t)] u_i + v_i \\ \dot{\eta}_{i,r_i+1} = \tau_i(\eta, u, \dot{u}) \\ y_i = \eta_{i1} \end{cases} \quad (3.148)$$

Les perturbations considérées ainsi que leurs variations sont supposées bornées:

$$\begin{aligned} |\Delta \mathbf{f}_i^*| \leq \Theta_i \quad \text{et} \quad \left| \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{f}_i^* \right| \leq \Theta_i' \\ |\Delta \mathbf{g}_i^*| \leq \Pi_i \quad \text{et} \quad \left| \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{g}_i^* \right| \leq \Pi_i' \end{aligned} \quad (3.149)$$

De plus on suppose que les perturbations externes ainsi que leurs variations sont bornées:

$$v_i \leq \delta_i \quad \text{et} \quad \left| \frac{d}{dt} v_i \right| \leq \delta_i' \quad (3.150)$$

Si on considère la condition d'attractivité exprimée comme suit:

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i < 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.151)$$

alors le bouclage dynamique à structure variable défini à partir du système nominal est déduit de la relation (3.143):

$$\tau_i \eta, u, u = -k = 1 r c_i k \eta_{i,k+1} - \text{Misgn} \sigma_i x$$

Les gains de glissement peuvent être calculés de façon à contrebalancer une combinaison linéaire des perturbations et de certaines de leurs dérivées en assurant la

condition de glissement (3.151) pour le bouclage dynamique linéarisant à structure variable (3.143).

Interprétations

En s'inspirant des résultats obtenus par Fliess relatifs à l'introduction de discontinuités sur les dérivées d'ordre le plus élevé de la commande pour des systèmes non dégénérés, nous avons été amenés à augmenter l'ordre des systèmes non linéaires dégénérés par introduction d'une forme canonique de commandabilité modifiée. Cette nouvelle représentation nous a permis d'appliquer les commutations de la commande à structure variable sur la première dérivée de la commande et non plus sur la variable de commande elle-même. Ces systèmes dont nous avons augmenté l'ordre, pouvaient être contrôlés de manière classique par une commande à structure variable dont les commutations agissent sur la variable de commande elle-même ce qui n'est pas le cas pour les systèmes traités par Fliess [Fliess, 1991]. L'approche que nous avons proposée possède plusieurs avantages. D'une part les variables de commande sont caractérisées par des actions douces et donc un régime glissant sans broutement. D'autre part la propriété de robustesse est conservée. De même l'ordre du système est conservé sur la surface de glissement ce qui est un avantage majeur pour tous les systèmes dont le degré relatif est égal à un. Un exemple d'application de cette approche dans le cas monovisible sur un système à paramètres répartis non linéaire et non stationnaire est donné dans [Boubaker et al., 1998d]. Les détails de cet exemple sont aussi donnés dans le dernier chapitre de ce rapport.

Une extension des résultats obtenus dans le cas monovisible de la commande dynamique à structure variable a été élaborée pour des systèmes multivariables. L'augmentation de l'ordre du système commandé a permis de ne pas réduire l'ordre du système sur la surface de glissement; cet aspect est bénéfique pour des systèmes dont l'un au moins des degrés relatifs est égal à 1. De même les variables de commande sont caractérisées par des actions douces et la propriété de robustesse est conservée pour des variations paramétriques et des perturbations bornées. Le régime glissant est sans broutement. Un exemple d'application de cette approche dans le cas multivariable sur un système à paramètres répartis non linéaire et non stationnaire est donné dans [Boubaker et al., 1998a]. Les détails de cet exemple sont aussi donnés dans le dernier chapitre de ce rapport.

4. ETUDE DES SYSTEMES DE DIMENSION INFINIE

Comme il a été mentionné précédemment, il existe deux approches pour résoudre le problème de la commande des systèmes à paramètres répartis. Nous consacrerons ce paragraphe à l'approche basée sur la synthèse d'un régulateur à structure variable à paramètres répartis. Les raisons qui motivent notre intérêt à conserver la nature distribuée du système est liée à la volonté de conserver les propriétés dynamiques du système. Dans ce paragraphe nous ne prétendons pas faire une étude générale de tous les systèmes à paramètres répartis vue la complexité des développements. Nous allons tenter par contre de considérer une classe particulière de systèmes hyperboliques mais largement répandus dans le domaine de la biotechnologie. Nous traiterons dans un premier temps le cas monovariante puis dans un second temps le cas multivariante. Nous verrons dans ces deux cas les difficultés auxquelles nous sommes confrontés dans l'applicabilité de la théorie des systèmes à paramètres distribués lorsque certaines des variables de commande sont des conditions aux limites du modèle à paramètres répartis.

Considérons la classe des systèmes à paramètres répartis représentés par des systèmes formés par k équations à dérivées partielles de type hyperbolique et dont le modèle est le suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial t} &= -u_1 \frac{\partial X_i}{\partial z} + \mathbf{h}_i(X, z, t) & i=1, \dots, k \\ X(z, t) &= [X_1(z, t) \quad \dots \quad X_k(z, t)] & 0 < z \leq z_L \end{aligned} \quad (3.152)$$

définies sur un domaine spatial $\Omega \subset \mathfrak{R}$ et un domaine temporel $T \subset \mathfrak{R}$ avec les conditions initiales suivantes:

$$X_i(z, t_0) = X_{i,0} \quad i=1, \dots, k \quad (3.153)$$

et les conditions aux limites suivantes:

$$X_i(z=0, t) = X_{i,in} \quad i=1, \dots, k \quad (3.154)$$

4.1. CAS MONOVARIABLE

L'objectif consiste à concevoir des algorithmes de commande basés sur le modèle à paramètres répartis représenté par les équation (3.152) à (3.154). La loi de commande est de type commande à structure variable.

La variable de commande peut être soit:

- la variable $u_1(t)$ indépendante de la variable z .
- une des conditions aux limites $X_{b,in}(t)$, $b \in [1, \dots, k]$

La variable de sortie $Y(z=z_L, t)$ à réguler est:

$$\begin{aligned} Y(z = z_L, t) &= C^T X(z = z_L, t) \\ C^T &= [C_1 \quad \dots \quad C_k] \end{aligned} \quad (3.155)$$

La variable de commande est $u_1(t)$.

L'objectif de la commande est la régulation de la variable de sortie $Y(z = z_L, t)$ à une valeur désirée y_d supposée constante à $z = z_L$ telle que:

$$\begin{aligned} y_L = Y(z = z_L, t) &= C^T X(z = z_L, t) \\ C^T &= [C_1 \quad \dots \quad C_k] \end{aligned} \quad (3.156)$$

d'où

$$y_L = \sum_{i=1}^k C_i X_i(z = z_L, t) \quad (3.157)$$

La combinaison des différentes équations du système (3.152) et de la dérivée de l'équation de sortie (3.157) conduit à l'équation de la dynamique de la variable de sortie suivante:

$$\frac{dy_L}{dt} = -u_1(t) \sum_{i=1}^k C_i \frac{\partial X_i}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + \sum_{i=1}^k C_i h_i(X, z = z_L, t) \quad (3.158)$$

Définissons une surface de glissement par:

$$\sigma(X) = Y(z = z_L, t) - y_d \quad (3.159)$$

soit

$$\sigma(X) = y_L - y_d \quad (3.160)$$

Imposons à la surface de glissement (3.160) la condition de glissement suivante:

$$\dot{\sigma}(X) = -M \operatorname{sgn}(\sigma(X)) \quad (3.161)$$

En dérivant l'équation (3.160) et en l'égalisant à l'équation (3.161) on obtient:

$$\frac{dy_L}{dt} = -M \operatorname{sgn}(\sigma(X)) \quad (3.162)$$

C'est l'équation de la dynamique de la variable de sortie du système en boucle fermée. Par combinaison des équations (3.158) et (3.162) on obtient la loi de commande suivante:

$$u_1(t) = \frac{\sum_{i=1}^k C_i h_i(X, z = z_L, t) + M \operatorname{sgn}(\sigma(X))}{\sum_{i=1}^k C_i \frac{\partial X_i}{\partial z} \Big|_{z=z_L}} \quad (3.163)$$

Lors de la mise en oeuvre de la loi de commande en dimension infinie la discrétisation de l'algorithme de commande s'avère nécessaire. On rappelle que l'approximation des dérivées spatiales peut être élaborée par la méthode de collocation orthogonale présentée au premier chapitre suivant la relation suivante:

$$\frac{\partial X_i(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \sum_{j=0}^{N+1} l_{i,j} X_i(z_j, t) \quad \text{où} \quad l_{i,j} = \frac{dL_j(z)}{dz} \Big|_{z=z_i} \quad (3.164)$$

L_j étant les polynômes de Lagrange définis aux points de collocation **Erreur ! Signet non défini.**

D'après la relation (3.164) on peut écrire que:

$$\frac{\partial X_i(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z_L} = \Delta X_i(z = z_L, t) + b_{i,in} X_{i,in} \quad (3.165)$$

avec

$$\Delta X_i(z = z_L, t) = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{dL_j(z)}{dz} \Big|_{z=z_L} X_i(z_j, t) \quad \text{et} \quad b_{i,in} = \frac{dL_0(z)}{dz} \Big|_{z=z_L} X_{i,in} \quad (3.166)$$

l'algorithme de commande en dimension finie est donné par:

$$u_1(t) = \frac{\sum_{i=1}^k C_i h_i(X, z = z_L, t) + M \operatorname{sgn}(\sigma(X))}{\sum_{i=1}^k C_i [\Delta X_i(z = z_L, t) + b_{i,in} X_{i,in}]} \quad (3.167)$$

avec

$$\Delta X_i(z = z_L, t) + b_{i,in} X_{i,in} \neq 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (3.168)$$

La variable de commande est une commande aux limites $X_{b,in}$, $b \in [1, \dots, k]$

Rappelons que l'équation de la dynamique de la variable à réguler est celle définie par la relation (3.158). Celle ci peut s'écrire:

$$\frac{dy_L}{dt} = -u_1(t) \left[\sum_{i=1}^{b-1} C_i \frac{\partial X_i}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + \sum_{b+1}^k C_i \frac{\partial X_i}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + C_b \frac{\partial X_b}{\partial z} \Big|_{z=z_L} \right] + \sum_{i=1}^k C_i h_i(X, t, z = z_L)$$

(3.169)

Sachant que la variable $\frac{\partial X_b}{\partial z} \Big|_{z=z_L}$ peut s'écrire sous la forme (3.165) la relation (3.169)

devient:

$$\begin{aligned} \frac{dy_L}{dt} = & -u_1(t) \left[\sum_{i=1}^{b-1} C_i \frac{\partial X_i}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + \sum_{b+1}^k C_i \frac{\partial X_i}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + C_b [\Delta X_b(z = z_L, t) + b_{b,in} X_{b,in}] \right] \\ & + \sum_{i=1}^k C_i h_i(X, t, z = z_L) \end{aligned} \quad (3.170)$$

Etant donné que la variable de commande est l'une des conditions aux limites définie par:

$$u_2(t) = X_{b,in}, \quad b \in [1, \dots, k] \quad (3.171)$$

La loi de commande en dimension infinie est obtenue en combinant les relations (3.162), (3.170) et (3.171):

$$\begin{aligned} u_2(t) = & \frac{\sum_{i=1}^k C_i h_i(X, t, z = z_L)}{u_1(t) C_b b_{b,in}} - \frac{\left[\sum_{i=1}^{b-1} C_i \frac{\partial X_i}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + \sum_{b+1}^k C_i \frac{\partial X_i}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + C_b \Delta X_b(z = z_L, t) \right]}{C_b b_{b,in}} \\ & - \frac{M \operatorname{sgn}(\sigma(X))}{u_1(t) C_b b_{b,in}} \end{aligned} \quad (3.172)$$

On trouve dans le dernier chapitre de ce mémoire une validation des résultats développés dans ce paragraphe par un exemple qui traite le problème de la commande monovariante d'un système formé de quatre équations aux dérivées partielles, représentant le fonctionnement d'un procédé biofiltre de traitement de l'eau à potabiliser.

4.2. CAS MULTIVARIABLE

L'objectif de ce paragraphe est de proposer des algorithmes de commande multivariante basés sur le modèle à paramètres répartis représenté par les équations (3.152) à (3.154). La loi de commande est de type commande à structure variable.

Les hypothèses sont les suivantes:

les variables de commande sont la variable de commande $u_1(t)$ et $(k-1)$ commandes aux limites $u_i(t) = X_{b,in}$, $b \in [1, \dots, k]$, parmi les k conditions aux limites du système.

les variables de sortie $Y_i(z = z_L, t)$ à réguler sont:

$$Y_i(z = z_L, t) = C_i^T X(z = z_L, t) \quad i = 1, \dots, k \quad (3.173)$$

$$C_i^T = [C_{i1} \quad \dots \quad C_{ik}]$$

Les k variables de sortie y_{L_i} ($i = 1, \dots, k$) à réguler à des valeurs désirées y_{di} à $z = z_L$ sont définies comme suit:

$$y_{L_i} = Y_i(z = z_L, t) = C_i^T X(z = z_L, t) \quad i = 1, \dots, k \quad (3.174)$$

$$C_i^T = [C_{i1} \quad \dots \quad C_{ik}]$$

d'où

$$y_{L_i} = \sum_{j=1}^k C_{ij} X_j(z = z_L, t) \quad i = 1, \dots, k \quad (3.175)$$

La combinaison des différentes équations du système (3.152) et de l'équation de sortie (3.175) conduit à l'équation de la dynamique des variables de sortie suivantes:

$$\frac{dy_{L_i}}{dt} = -u_1(t) \sum_{j=1}^k C_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + \sum_{j=1}^k C_{ij} h_j(X, z = z_L, t) \quad i = 1, \dots, k \quad (3.176)$$

Définissons une surface de glissement par:

$$\sigma_i(X) = Y_i(z = z_L, t) - y_{di} \quad i = 1, \dots, k \quad (3.177)$$

soit

$$\sigma_i(X) = y_{L_i} - y_{di}, \quad i = 1, \dots, k \quad (3.178)$$

Imposons à la surface de glissement (3.178) la condition de glissement suivante:

$$\dot{\sigma}_i(X) = -M_i \operatorname{sgn}(\sigma_i(X)) \quad (3.179)$$

En dérivant l'équation (3.178) et en l'égalisant à l'équation (3.179) on obtient:

$$\frac{dy_{L_i}}{dt} = -M_i \operatorname{sgn}(\sigma_i(X)) \quad (3.180)$$

C'est l'équation de la dynamique des variables de sortie du système en boucle fermée. Par combinaison des équations (3.180) et (3.176) on obtient la loi de commande en dimension infinie de la première variable de commande suivante:

$$u_1(t) = \frac{\sum_{j=1}^k C_{1j} h_j(X, t, z = z_L) + M_1 \operatorname{sgn}(\sigma_1(X))}{\sum_{j=1}^k C_{1j} \frac{\partial X_j}{\partial z} \Big|_{z=z_L}} \quad (3.181)$$

Rappelons que l'équation de la dynamique de la variable à réguler est celle définie par la relation (3.176) . Celle ci peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \frac{dy_{L_i}}{dt} = -u_1(t) & \left[\sum_{j=1}^{b-1} C_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + \sum_{k+1}^k C_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + C_{ib} \frac{\partial X_b}{\partial z} \Big|_{z=z_L} \right] \\ & + \sum_{j=1}^k C_{ij} h_j(X, z = z_L, t) \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (3.182)$$

Sachant que la variable $\frac{\partial X_b}{\partial z} \Big|_{z=z_L}$ peut s'écrire sous la forme (3.165) la relation (3.182) devient:

$$\begin{aligned} \frac{dy_{L_i}}{dt} = -u_1(t) & \left[\sum_{j=1}^{b-1} C_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + \sum_{b+1}^k C_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + C_{ib} \left[\Delta X_b(z = z_L, t) + b_{b,in} X_{b,in} \right] \right] \\ & + \sum_{j=1}^k C_{ij} h_j(X, t, z = z_L) \end{aligned} \quad (3.183)$$

Etant donné que les autres variables de commande sont des conditions aux limites:

$$u_i(t) = X_{b,in}, \quad i = 1, \dots, k, \quad b \in [1, \dots, k] \quad (3.184)$$

La loi de commande en dimension infinie est obtenue en combinant les relations (3.183) et (3.184):

$$\begin{aligned} u_i(t) = & \frac{\sum_{j=1}^k C_{ij} h_j(X, t, z = z_L)}{u_1(t) C_{ib} b_{b,in}} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{b-1} C_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + \sum_{b+1}^k C_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + C_{ib} \Delta X_b(z = z_L, t) \right]}{C_{ib} b_{b,in}} \\ & + \frac{M_i \operatorname{sgn}(\sigma_i(X))}{u_1(t) C_{ib} b_{b,in}} \end{aligned} \quad (3.185)$$

Nous pouvons remarquer que l'expression des variables de commande $u_i(t)$ dépend de l'expression de la variable de commande $u_1(t)$.

On trouve dans [Boubaker et al., 1998b] une validation de ces résultats par un exemple qui traite le problème de la commande d'un système bivariable de quatre équations aux dérivées partielles. Ce même exemple sera traité en détail dans le dernier

chapitre de ce rapport. On montrera également dans cet exemple la robustesse d'une telle approche.

Nous avons développé dans ce paragraphe une approche basée sur la synthèse d'un régulateur à structure variable à paramètres répartis. Vue la complexité de la manipulation des systèmes de dimension infinie, les développements se sont limités à une classe bien particulière des systèmes à paramètres répartis très répandue dans le domaine de la biotechnologie.

5. CONCLUSION

Ce travail a permis de généraliser pour une classe particulière de systèmes à paramètres répartis non linéaires et non stationnaires des résultats permettant de résoudre le problème de la commande à structure variable dans les deux cas monovariante et multivariante.

Deux méthodes ont été envisagées. La première méthode consiste à transformer le système à paramètres répartis en un système à paramètres localisés par la méthode de collocation orthogonale présentée au premier chapitre. Le système de dimension finie obtenu est représenté par des équations différentielles ordinaires. Il est utilisé pour la synthèse d'une loi de commande à structure variable dans les deux cas monovariante et multivariante. Dans ce sens nous avons développé deux approches modifiées des systèmes à structure variable classiques. La première impose une condition de glissement particulière tenant compte des non linéarités du système. La seconde introduit une forme canonique de commande modifiée permettant d'augmenter l'ordre du système. Cette dernière approche nous a permis d'appliquer les discontinuités sur les premières dérivées des variables de commande. Ces deux approches nous ont permis de lisser les variables de commande et d'obtenir un régime glissant sans broutement tout en conservant les propriétés de robustesse. La seconde approche a la particularité de permettre de ne pas réduire l'ordre du système à paramètres localisés sur la surface de glissement ce qui est un avantage majeur pour certains types de système.

La seconde méthode nous a permis de réaliser la synthèse d'un régulateur à structure variable de dimension infinie tout en conservant la nature distribuée du système. Cette approche a l'avantage de formuler la loi de commande en fonction des éléments du modèle d'origine et de conserver ses propriétés dynamiques. La discrétisation ne se fait plus qu'au niveau du contrôleur lors de la mise en oeuvre de l'algorithme de commande. Une extension de ces résultats a été réalisée dans le cas multivariante. Nous estimons que les résultats que nous avons développés dans le cas multivariante seraient d'un intérêt particulier pour les biologistes afin de leur permettre de mieux maîtriser le fonctionnement de leurs processus.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons des applications des algorithmes de commande à structure variable que nous venons de développer. Ces applications concernent essentiellement le domaine de la biotechnologie. Ce choix est motivé par le caractère non linéaire et réparti de ce type de procédés d'une part et par l'intérêt que la communauté scientifique porte à ce type de problèmes faisant intervenir dans la modélisation des micro-organismes vivants.

CHAPITRE 4

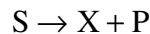
**ESTIMATION ET COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE:
APPLICATION AUX PROCEDES BIOTECHNOLOGIQUES**

1. INTRODUCTION

Au cours des dernières décennies, la biotechnologie a pris une place de plus en plus importante dans l'industrie. Elle englobe toutes les techniques industrielles permettant d'exploiter des micro-organismes (bactéries, levures...), des cellules végétales ou des cellules animales. Dans ce domaine très vaste de nombreuses applications ont été développées avec succès; citons par exemple les axes suivants:

- la production d'antibiotiques
- la production de produits agro-alimentaires (vin, fromage, arômes...)
- la production de produits chimiques (acides organiques, acides aminés...)
- le traitement biologique des eaux usées ou des eaux à potabiliser

Tous les procédés biotechnologiques nécessitent l'utilisation d'un bioréacteur, réservoir dans lequel se produisent les réactions biochimiques. Dans un tel réacteur le fonctionnement de base d'un bioprocédé peut être représenté comme suit:



où les micro-organismes vivants de concentration X , appelée aussi biomasse, se développent en consommant des nutriments (le substrat S). Les conditions physico-chimiques (température, $Ph...$) de la réaction doivent être favorables pour un bon rendement des réactions, dans les trois cas suivants:

- production d'un produit de synthèse (e.g. les antibiotiques)
- production de la biomasse (e.g. les levures)
- élimination de matières nocives (e.g. la dépollution).

La mise en oeuvre d'un procédé biotechnologique est très complexe. Elle nécessite une action pluridisciplinaire de biologistes, de chimistes, de technologues, de mathématiciens et d'automaticiens. Les premières recherches sur la modélisation et l'automatisation de ce type de procédés remontent à 1981 [Williams, 1981], [Villermoux, 1985]. Dans ce contexte, les réacteurs infiniment mélangés ont bénéficié du plus grand intérêt des chercheurs [Villermoux, 1985], [Dochain, 1986] [Roux, 1992] [Ben Youssef, 1996]. Ces procédés sont en général modélisés par des équations différentielles ordinaires non linéaires. Ce n'est que récemment que la tendance s'est orientée vers l'étude des réacteurs à lit fixe. Les réacteurs à lit fixe présentent plusieurs avantages comparés aux réacteurs infiniment mélangés. Ils permettent une meilleure

intégration dans l'environnement, une productivité accrue et une minimisation de la consommation d'énergie. Cependant, les réacteurs à lit fixe font apparaître un nombre de problèmes supplémentaires au niveau de la modélisation. Ils sont à gradient spatial de concentration: les variables d'état sont fonctions du temps et de l'espace. Ils ne peuvent donc être décrits que par des équations différentielles aux dérivées partielles.

La modélisation des réacteurs à lit fixe a fait l'objet d'un certain nombre de publications récentes dont les plus importantes sont les surveys de Jorgensen [Jorgensen, 1986, 1989]. Les modèles adoptés pour les réacteurs à lit fixe sont en général des systèmes d'équations différentielles non linéaires et non stationnaires aux dérivées partielles qui contiennent des paramètres susceptibles de varier dans le temps de façon plus ou moins imprévisible. En effet les phénomènes biologiques sont liés au comportement de micro-organismes vivants dont la croissance et la mortalité sont des phénomènes difficiles à modéliser; de plus un certain nombre de variables d'état et de paramètres ne sont pas mesurables. Des perturbations externes peuvent aussi modifier le fonctionnement interne du système.

Vu la complexité des modèles adoptés pour les réacteurs à lit fixe, le problème de surveillance et de contrôle de ces procédés est particulièrement difficile. Il est donc nécessaire de recourir aux techniques modernes de commande robuste. La commande à structure variable représente une technique de commande intéressante par sa robustesse, sa simplicité de mise en oeuvre et ses performances. Cependant, une étude bibliographique a montré que dans le cas des bioprocédés, les techniques de commande à structure variable étaient rarement appliquées alors que les techniques de commande adaptatives sont les plus populaires. Cette réticence des automaticiens envers les techniques de commande à structure variable quand il s'agit de contrôler des procédés biologiques est due à l'apparition d'oscillations résiduelles au niveau des variables contrôlées et au fait que ce type de procédés caractérisés par des dynamiques lentes ne peut pas supporter des entrées de commande discontinues et énergétiques. De plus il faut bien constater que les quelques travaux qui traitent du problème de commande à structure variable des réacteurs à gradient spatial se limitent à des études de commande monovariante [Damak, 1994][Bourrel, 1996][Babary & Bourrel, 1999]. Les biochimistes pensent par contre que l'on pourrait mieux maîtriser le fonctionnement de tels bioréacteurs si l'on pouvait agir à la fois sur plusieurs variables d'entrée et plusieurs variables de sortie.

Suite à l'ensemble des remarques faites précédemment sur les bioréacteurs, seul le cas de biofiltres à gradient spatial de concentration sera considéré. L'objectif de ce travail consiste en la conception de lois de commande à structure variable robuste monovariante et multivariante permettant une maîtrise totale du fonctionnement des procédés biologiques considérés. Cette étude s'inscrit dans le cadre d'une collaboration LACS (Tunis)/ LAAS (Toulouse) axée sur le développement et l'optimisation du fonctionnement de procédés biotechnologiques.

Dans le cadre de cette étude deux types de procédés seront considérés (procédé monosubstrat et procédé à plusieurs substrats). Ces deux exemples vont permettre d'illustrer l'efficacité des algorithmes d'approximation, d'estimation et de commande à structure variable que nous avons développés dans les chapitres précédents.

Ce chapitre est divisé en deux parties. La première traite du problème de la commande d'un procédé de fermentation à lit fixe monosubstrat. Dans cette étape, l'objectif est de combiner un algorithme d'observation / estimation à structure variable adaptatif avec plusieurs schémas de commande à structure variable afin de réguler la concentration du substrat résiduel en sortie du biofiltre [Boubaker *et al.*, 1998d].

La seconde partie de ce chapitre traite du problème de la commande d'un biofiltre de dénitrification d'eaux à potabiliser. Celui ci est extrait d'un modèle plus général donné par [Jacob, 1994] à partir d'une unité pilote installée à l'INSAT à Toulouse. A ce niveau l'objectif principal est de maîtriser le fonctionnement du procédé de dénitrification par implantation d'une commande multivariable afin de réguler à la fois la somme des concentrations des produits nitrés et la concentration de l'éthanol en sortie du biofiltre [Boubaker *et al.*, 1998a,b,c].

Notre contribution dans ce chapitre se situe donc à plusieurs niveaux. En particulier, les lois de commande sont aussi bien basées sur les modèles à paramètres localisés [Boubaker *et al.*, 1998 a,c] que sur le modèle à paramètres répartis [Boubaker *et al.*, 1998b]. Nous devons assurer dans les deux cas des variables de commande caractérisées par des actions douces et un régime glissant sans broutement apparent.

2.4. ESTIMATEUR A STRUCTURE VARIABLE

L'observateur d'état à structure variable de la concentration de biomasse x_a et de la concentration du substrat s combiné avec un estimateur du vecteur de paramètres inconnus peut être exprimé comme suit [Boubaker et al., 1998d]:

$$\forall i=1,2,\dots,N+1$$

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}_{a_i}}{dt} = \left[\hat{\mu}_i - k_d \right] \hat{x}_{a_i} - \alpha_i^T \tilde{s} - \mathbf{M}_{x_i} \text{sign}(\tilde{s}_i) \\ \frac{d\hat{s}_i}{dt} = -u \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{1}_{i,j} \hat{s}_j - u \mathbf{1}_{i,0} s_{in} - k_1 \hat{\mu}_i \hat{x}_{a_i} - \beta_i^T \tilde{s} - \mathbf{M}_{s_i} \text{sign}(\tilde{s}_i) \\ \frac{d\hat{\theta}_i}{dt} = \gamma_i \tilde{s}_i - \mathbf{M}_{\theta_i} \text{sign}(\tilde{s}_i) \end{cases} \quad (4.7)$$

où $\hat{x}_q, \hat{s}_i, \hat{\theta}_i$ et $\hat{\mu}_i$ sont respectivement les estimés de x_{a_i}, s_i, θ_i et μ_i . \tilde{s}_i est l'erreur d'estimation de la concentration du substrat en chaque point de collocation z_i :

$$\tilde{s} = [\tilde{s}_1 \quad \tilde{s}_2 \quad \dots \quad \tilde{s}_{N+1}] \quad \text{avec} \quad \tilde{s}_i = \hat{s}_i - s_i$$

α_i et β_i sont les vecteurs de gain d'observation définis par:

$$\begin{cases} \alpha_i^T = [\alpha_{i1} \quad \alpha_{i2} \quad \dots \quad \alpha_{iN+1}] \\ \beta_i^T = [\beta_{i1} \quad \beta_{i2} \quad \dots \quad \beta_{iN+1}] \end{cases}$$

Le modèle d'estimation du taux spécifique de croissance possède la même structure que celle du modèle:

$$\hat{\mu} = \mu \left(\hat{\theta}, \hat{x}_a, s \right) \quad (4.8)$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, **Erreur ! Signet non défini.** forment l'ensemble des vecteurs de gains d'estimation correspondants à déterminer de façon à assurer que:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{a_i} &= \hat{x}_{a_i} - x_{a_i} \rightarrow 0 \\ \tilde{\mu}_i &= \hat{\mu}_i - \mu_i \rightarrow 0 \\ \tilde{s}_i &= \hat{s}_i - s_i \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.9)$$

La détermination des gains α_i et β_i correspond à un problème standard d'observation. On envisage de déterminer ces deux paramètres à l'aide d'un observateur de Luenberger étendu alors que le paramètre γ_i sera déterminé par une procédure d'observation / estimation conjointe [Boubaker & Babary, 1998e]. Les gains $\mathbf{M}_{x_i}, \mathbf{M}_{s_i}, \mathbf{M}_{\theta_i}$ seront déterminés par une procédure de placement de pôles sur la surface de glissement du système équivalent réduit fonctionnant en régime glissant.

- **Observateur de Luenberger étendu [Boubaker & Babary, 1998e]**

L'observateur de Luenberger étendu relatif au système (4.7) est obtenu en posant pour celui-ci:

$$M_{x_i} = 0, \quad M_{s_i} = 0, \quad \gamma_i = 0 \quad \text{et} \quad M_{\theta_i} = 0 \quad (4.10)$$

Dans ce cas le système (4.7) devient:

$$\forall \quad i = 1, 2, \dots, N+1$$

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}_{a_i}}{dt} = [\hat{\mu}_i - k_d] \hat{x}_{a_i} - \alpha_i^T \tilde{s}_i \\ \frac{d\hat{s}_i}{dt} = -u \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{l}_{i,j} \hat{s}_j - u \mathbf{l}_{i,0} s_{in} - k_1 \hat{\mu}_i \hat{x}_{a_i} - \beta_i^T \tilde{s}_i \end{cases} \quad (4.11)$$

La procédure d'estimation consiste à déterminer les vecteurs de gains α_i et β_i de façon à assurer la condition (4.9).

Sans spécifier la structure du taux spécifique de croissance, le système d'erreur peut être déterminé aux points de collocation en développant l'expression de μ au premier degré de la série de Taylor [Zeng et al, 1993]:

$$\tilde{\mu}_i = \hat{\mu}_i - \mu_i = H_i^T \theta_i + K_i x_{a_i} \quad (4.12)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_i &= \hat{\theta}_i - \theta_i \in \mathfrak{R}^m \\ H_i &= \left. \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right|_{\theta_i, x_{a_i}, s_i} \in \mathfrak{R}^m \\ K_i &= \left. \frac{\partial \mu}{\partial x_a} \right|_{\theta_i, x_{a_i}, s_i} \in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (4.13)$$

m étant le nombre de paramètres du vecteur **Erreur ! Signet non défini..** En retranchant (4.11) de (4.5) on obtient le système d'erreur suivant:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = a_i \tilde{x}_{a_i} - \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_{ij} \tilde{s}_j + \hat{x}_{a_i} H_i^T \tilde{\theta}_i \\ \frac{d\tilde{s}_i}{dt} = b_i \tilde{x}_{a_i} - \sum_{j=1}^{N+1} (u \mathbf{l}_{i,j} + \beta_{ij}) \tilde{s}_j - k_1 \hat{x}_{a_i} H_i^T \tilde{\theta}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1) \quad (4.14)$$

où

$$\begin{aligned}
 a_i &= \mu_i + K_i \hat{x}_{a_i} - k_d \\
 b_i &= -k_1 (\mu_i + K_i \hat{x}_{a_i}) = -k_1 (a_i + k_d)
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Définissons le vecteur d'erreur suivant:

$$x = [\tilde{x}_{a_1}, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{x}_{a_{N+1}}, \tilde{s}_{N+1}]
 \tag{4.16}$$

Le système d'erreur (4.14) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x} + B\omega^T\tilde{\theta} \\ \tilde{x} = Cx \end{cases}
 \tag{4.17}$$

La matrice A est partitionnée en $(N+1)^2$ matrices A_{ij} de la forme:

$$\begin{aligned}
 A_{ii} &= \begin{pmatrix} a_i & -\alpha_{ii} \\ b_i & -(\alpha_{i,i} + \beta_{ii}) \end{pmatrix} & \text{si } i = j = 1, 2, \dots, N+1 \\
 A_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{ij} \\ 0 & -(\alpha_{i,j} + \beta_{ij}) \end{pmatrix} & \text{si } i \neq j (i, j = 1, 2, \dots, N+1)
 \end{aligned}$$

ω^T est une matrice de dimension $(N+1) \cdot [m(N+1)]$:

$$\omega^T = \begin{bmatrix} \hat{x}_{a_1} H_1^T & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \hat{x}_{a_2} H_2^T & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \hat{x}_{a_{N+1}} H_{N+1}^T \end{bmatrix}$$

B et C sont respectivement des matrices de dimension $(2N+2) \cdot (N+1)$ et $(N+1) \cdot (2N+2)$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\theta}^T = [\tilde{\theta}_1^T \quad \tilde{\theta}_2^T \quad \dots \quad \tilde{\theta}_{N+1}^T]$$

Les vecteurs de gains d'observation α_i et β_i doivent assurer la stabilité locale de la matrice dynamique d'erreur A.

Proposition:

Un choix approprié de α_{ij} et β_{ij} ($i \neq j$) conduit à une matrice A possédant une structure diagonale; on se propose de choisir la matrice A diagonale [Boubaker et al., 1998e] ce qui est équivalent à:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= 0 \\ u_{i,j} + \beta_{ij} &= 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N+1; i \neq j) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Choisir $\alpha_{ij} = 0$ ($i \neq j$) est compatible avec l'hypothèse que la concentration de biomasse aux points de collocation z_i dépend uniquement de la concentration du substrat en ce point. Choisir $u_{i,j} + \beta_{ij} = 0$ ($i \neq j$) correspond à l'absence de corrélation entre les différentes erreurs de concentration de substrat $\tilde{\xi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N+1$).

La matrice A est donc structurée comme suit:

$$A = \text{diag}[A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_i \quad \dots \quad A_{N+1}]$$

avec

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & -\alpha_{ii} \\ b_i & -(u_{i,i} + \beta_{ii}) \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1) \quad (4.19)$$

Avec une telle proposition, la stabilité asymptotique de l'équation (4.17) se réduit à l'étude de la stabilité de chaque block A_{ii} . L'équation (4.17) est un système lentement variable dans le temps; la démonstration de la stabilité peut être établie en considérant le théorème de Rosenbrock [Rosenbrock, 1963] suivant:

Soit $\dot{x} = \mathbf{A}(t)x$, où pour tout $t \geq t_0$ chaque élément $a_{ij}(t)$ de $\mathbf{A}(t)$ est différentiable et satisfait $|a_{ij}| \leq a$ et chaque valeur propre λ de A satisfait:

$$\text{Re } \lambda(A) \leq -\varepsilon < 0$$

Alors, il existe un $\delta > 0$ (indépendant de t) tel que si chaque $|\dot{a}_{ij}| \leq \delta$, le point $x = 0$ est asymptotiquement stable.

Le polynôme caractéristique de A_i est donné par

$$P_i(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a_i - u_{i,i} - \beta_{ii}) + b_i \alpha_{ii} - a_i(u_{i,i} + \beta_{ii}) \quad (4.20)$$

Les valeurs propres de la matrice A doivent vérifier les conditions nécessaires suivantes:

$$\begin{aligned}\rho_i &= a_i - u_{i,i} - \beta_{ii} < 0 && \text{(somme des valeurs propres)} \\ \pi_i &= b_i \alpha_{ii} - a_i (u_{i,i} + \beta_{ii}) > 0 && \text{(produit des valeurs propres)}\end{aligned}\quad (4.21)$$

Des expressions (4.21), il est alors possible de calculer les gains α_{ii} et β_{ii} en fonction des paramètres ρ_i et π_i choisis en fonction de la dynamique du procédé:

$$\alpha_{ii} = -\frac{\pi_i - a_i \rho_i + a_i^2}{k_1 (a_i + k_d)} \quad i = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (4.22)$$

$$\beta_{ii} = a_i - u_{i,i} - \rho_i \quad i = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (4.23)$$

Ces conditions nécessaires ont été déjà établies par [Babary & Damak, 1993] en considérant que le vecteur de paramètres est constant par morceaux. Dans notre cas on suppose que cette condition est restrictive et que la matrice A est une matrice non stationnaire; la condition de négativité de la partie réelle des valeurs propres n'est donc

plus une condition suffisante. La norme de la matrice $\frac{dA}{dt}$ doit être absolument bornée [Rosenbrock, 1963]. La démonstration de la stabilité est donnée en annexe et dans [Boubaker et al., 1998e] dans le cas du modèle de Monod. Notons que tous les modèles de taux spécifique de croissance [Bastin & Dochain, 1990] possédant les mêmes propriétés mathématiques de positivité, de continuité et de bornitude et par suite la stabilité asymptotique peut être toujours prouvée; cependant le modèle de Monod est le plus approprié pour la démonstration. La stabilité asymptotique est montrée en simulation dans la suite dans le cas du modèle de Contois.

En remplaçant les gains α_{ii} et β_{ii} par leurs expressions (4.22) et (4.23), la formulation de la représentation d'état du modèle (4.11) est simplifiée:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}_{a_i}}{dt} = [\hat{\mu}_i - k_d] \hat{x}_{a_i} - \alpha_{ii} (\hat{s}_i - s_i) \\ \frac{d\hat{s}_i}{dt} = -(u_{i,i} + \beta_{ii}) \hat{s}_i - u_{i,0} s_{in} - k_1 \hat{\mu}_i \hat{x}_{a_i} + \sum_{j=1}^{N+1} \beta_{ij} s_j \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (4.24)$$

Le système d'erreur devient

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = a_i \tilde{x}_{a_i} - \alpha_{ii} \tilde{s}_i + \hat{x}_i H_i^T \tilde{\theta}_i \\ \frac{d\tilde{s}_i}{dt} = b_i \tilde{x}_{a_i} - (a_i - \rho_i) \tilde{s}_i - k_1 \hat{x}_i H_i^T \tilde{\theta}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (4.25)$$

Dans le modèle de l'estimateur (4.25), la seule variable inconnue est le paramètre μ_i variant dans le temps, qui n'apparaît pas explicitement dans (4.25) et qui dépend lui-même du vecteur θ de paramètres constants inconnus. Un estimateur de paramètres s'avère donc nécessaire.

- **Observation / Estimation conjointe [Boubaker & Babary, 1998e]**

La résolution du problème d'estimation d'état du modèle nécessite la connaissance de l'estimé du paramètre μ qui dépend du vecteur de paramètres θ . Dans le deuxième chapitre nous avons traité le cas où μ dépend d'un seul paramètre inconnu. Dans ce qui suit nous traiterons un cas plus général et plus réaliste, celui pour lequel le taux spécifique de croissance dépend de m paramètres constants inconnus.

Soit $\omega_i = \hat{x}_{a_i} H_i$; le système d'erreur (4.25) peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = a_i \tilde{x}_{a_i} - \alpha_{ii} \tilde{\xi}_i + \omega_i^T \tilde{\theta}_i \\ \frac{d\tilde{\xi}_i}{dt} = b_i \tilde{x}_{a_i} - (a_i - \rho_i) \tilde{\xi}_i - k_1 \omega_i^T \tilde{\theta}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (4.26)$$

L'estimation du vecteur de paramètres θ dépend de l'erreur d'estimation $\tilde{\xi}$ qu'on exprime selon la proposition suivante:

$$\frac{d\hat{\theta}_i}{dt} = \gamma_i \tilde{\xi}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (4.27)$$

où le vecteur de gain γ doit être déterminé.

Une solution consiste à calculer γ_i de façon à ce que le vecteur d'erreur $[\tilde{x}_{a_i} \quad \tilde{\xi}_i \quad \tilde{\mu}_i]$ tende vers zéro quand t tend vers l'infini (stabilité asymptotique). Dans ce cas le système d'erreur peut s'écrire:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_a \\ \dot{\tilde{\xi}}_i \\ \dot{\tilde{\theta}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & -\alpha_{ii} & \omega_i^T \\ b_i & -(a_i - \rho_i) & -k_1 \omega_i^T \\ 0 & \gamma_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_a \\ \tilde{\xi}_i \\ \tilde{\theta}_i \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

pour lequel le polynôme caractéristique est donné par:

$$P_i(\lambda) = \lambda^{m-1} [\lambda^3 - \rho_i \lambda^2 + (k_1 \omega_i^T \gamma_i + \pi_i) \lambda + k_1 k_d \omega_i^T \gamma_i] \quad (4.29)$$

m étant le nombre de paramètre du vecteur θ_i . La stabilité asymptotique n'est plus assurée puisqu'il existe des valeurs propres nulles. Ce polynôme possède des racines à parties réelles négatives si:

$$k_1 k_d \omega_i^T \gamma_i > 0 \quad (4.30)$$

$$-\rho_i (k_1 \omega_i^T \gamma_i + \pi_i) - k_1 k_d \omega_i^T \gamma_i > 0 \quad (4.31)$$

La première condition est vérifiée si:

$$\gamma_i = \Gamma_i \omega_i(t) \quad (4.32)$$

où Γ_i est une matrice définie positive diagonale de gains adaptatifs, définie par:

$$\Gamma_i = \text{diag} \left[\frac{1}{\omega_{i1}^2} \quad \frac{1}{\omega_{i2}^2} \quad L \quad \frac{1}{\omega_{im}^2} \right] \quad (4.33)$$

Le polynôme caractéristique est dans ce cas à coefficients constants:

$$P_i(\lambda) = \lambda^{m-1} [\lambda^3 - \rho_i \lambda^2 + (mk_1 + \pi_i) \lambda + mk_1 k_d] \quad (4.34)$$

La condition (4.31) devient:

$$-\rho_i (mk_1 + \pi_i) - mk_1 k_d > 0 \quad (4.35)$$

ce qui exige un choix approprié des paramètres ρ_i et π_i .

On peut montrer que l'erreur d'estimation des concentrations tend vers zéro alors que

l'erreur d'estimation des paramètres $\hat{\theta}_i$ ne tend pas vers les valeurs correctes. Ceci est dû à la valeur propre nulle. Le paramètre $\hat{\mu}_i$ tend vers la valeur correcte μ_i . En effet:

$$\hat{x}_{ai} H_i^T \tilde{\theta}_i \rightarrow 0$$

$$\text{alors } \tilde{\mu}_i = \hat{\mu}_i - \mu_i = H_i^T \tilde{\theta}_i + K_i \tilde{x}_{ai} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Simulation et commentaires

Considérons par exemple, le taux spécifique de croissance donné par le modèle de Contois [Contois, 1959]:

$$\mu(\theta, X_a, S) = \mu_{\max} \frac{S}{k_c X_a + S} \quad (4.36)$$

où $\theta = [\mu_{\max} \quad k_c]^T$ est un vecteur de paramètres constants et inconnus; μ_{\max} étant le taux de croissance maximal et k_c est la constante de saturation. Dans ce cas:

$$\begin{aligned} \hat{H}_i^T &= \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \hat{\theta}} \Big|_{\theta, \hat{x}_{a_i}, s_i} = \left[\frac{s_i}{\hat{k}_{c_i} \hat{x}_{a_i} + s_i} \quad -\mu_{\max_i} \frac{\hat{x}_{a_i} s_i}{(\hat{k}_{c_i} \hat{x}_{a_i} + s_i)^2} \right] \\ \hat{K}_i &= \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \hat{x}} \Big|_{\theta, \hat{x}_{a_i}, s_i} = -\mu_{\max_i} \frac{\hat{k}_{c_i} s_i}{(\hat{k}_{c_i} \hat{x}_{a_i} + s_i)^2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Afin de simuler l'évolution du processus modélisé par les équations (4.5), les équations différentielles ont été intégrées par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 à pas fixe égal à 6 minutes. Les valeurs des variables mesurées générées par tous les algorithmes d'observation ou d'estimation développés dans ce chapitre sont acquises avec une période d'échantillonnage $\Delta T = 30$ minutes. Le choix optimal du triplet (N, p, q) dans l'application de la méthode de collocation orthogonale correspond aux paramètres:

$$N = 4, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

Les points de collocation sont alors placés aux positions suivantes:

$$[0.312 \quad 0.579 \quad 0.813 \quad 0.963 \quad 1].$$

Les valeurs numériques des caractéristiques du bioréacteur sont celles d'un réacteur pilote de digestion anaérobique [Guiot, 1988]:

Paramètres cinétiques:

$$\text{Coefficient de rendement: } k_1 = 0.4$$

$$\text{Coefficient de mortalité: } k_d = 0.05 \text{h}^{-1}$$

Paramètres biologiques:

$$\text{Taux spécifique de croissance maximal: } \mu_{\max} = 0.35 \text{h}^{-1}$$

$$\text{Constante de saturation: } k_c = 0.4$$

Les valeurs initiales (à $t = 0$) des variables d'état correspondent à un profil permanent établi avec une concentration en substrat $s_{in} = 5 \text{g/l}$ et une vitesse d'alimentation $u = 0.1 \text{m/h}$.

Aux points de collocation les conditions initiales correspondent donc aux valeurs suivantes:

$$s(0) = [1.96 \quad 0.88 \quad 0.44 \quad 0.28 \quad 0.25]^T \text{ en g.COD/l}$$

$$x_a(0) = [29.4 \quad 13.2 \quad 6.55 \quad 4.18 \quad 3.73]^T \text{ en g.VSS/l.}$$

La conception de l'estimateur a nécessité aussi le choix des paramètres suivants:

$$\text{Produit des valeurs propres: } \pi_i = 0.25 \quad \forall \quad i = 1, \dots, 5$$

$$\text{Somme des valeurs propres: } \rho_i = -5.05 \quad \forall \quad i = 1, \dots, 5$$

Les équations d'estimation ont été intégrées à partir des conditions initiales suivantes:

$$\hat{x}_{a_i}(0) = 1.15x_{a_i}(0), \quad \hat{s}_i(0) = 1.3s_i(0); \quad i = 1, 2, 3$$

$$\hat{x}_{a_i}(0) = 0.8x_{a_i}(0), \quad \hat{s}_i(0) = 0.6s_i(0); \quad i = 4, 5$$

$$\hat{\mu}_{\max}(0) = 0.22, \quad \hat{k}_c(0) = 0.3;$$

Pour tester la robustesse de l'estimateur vis-à-vis des erreurs de modélisation et des bruits, les simulations ont été effectuées en considérant des variations en échelon de la variable d'entrée u et des paramètres biologiques μ_{\max} et k_c comme indiqué dans le tableau (4.1).

temps(h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
paramètres											
u (m/h)	0.1	0.125	0.1	0.125							
μ_m (h-1)	0.35			0.5							
k_c	0.4				0.6						

Tableau 4.1: Variations paramétriques et perturbations extérieures.

De plus un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart type 0.01 a été ajouté aux mesures. Les résultats obtenus par simulation de l'observateur / estimateur conjoint relatif au modèle représenté par les équations (4.5) sont illustrés sur la figure (4.2). Après une phase transitoire de convergence l'observateur suit correctement l'évolution des variables d'état non mesurables. On constate que la convergence biaisée des paramètres constants μ_{\max} et k_c n'a pas détérioré l'estimation du paramètre variable dans le temps μ . Ce biais provient du fait que la solution de l'identification unique de ce paramètre et donc du taux spécifique de croissance (4.36) n'est pas unique. En effet il existe plusieurs couples (μ_{\max}, k_c) conduisant au même taux spécifique de croissance μ . Si par contre un seul paramètre est inconnu il existe une identification unique du taux spécifique de croissance et par suite la convergence paramétrique est assurée (voir l'exemple traité au second chapitre). Après chaque phase transitoire d'initialisation l'estimation du paramètre variable μ devient correcte. L'observateur / estimateur devient pratiquement insensible aux variations paramétriques et aux perturbations une fois que l'erreur d'observation s'est annulée.

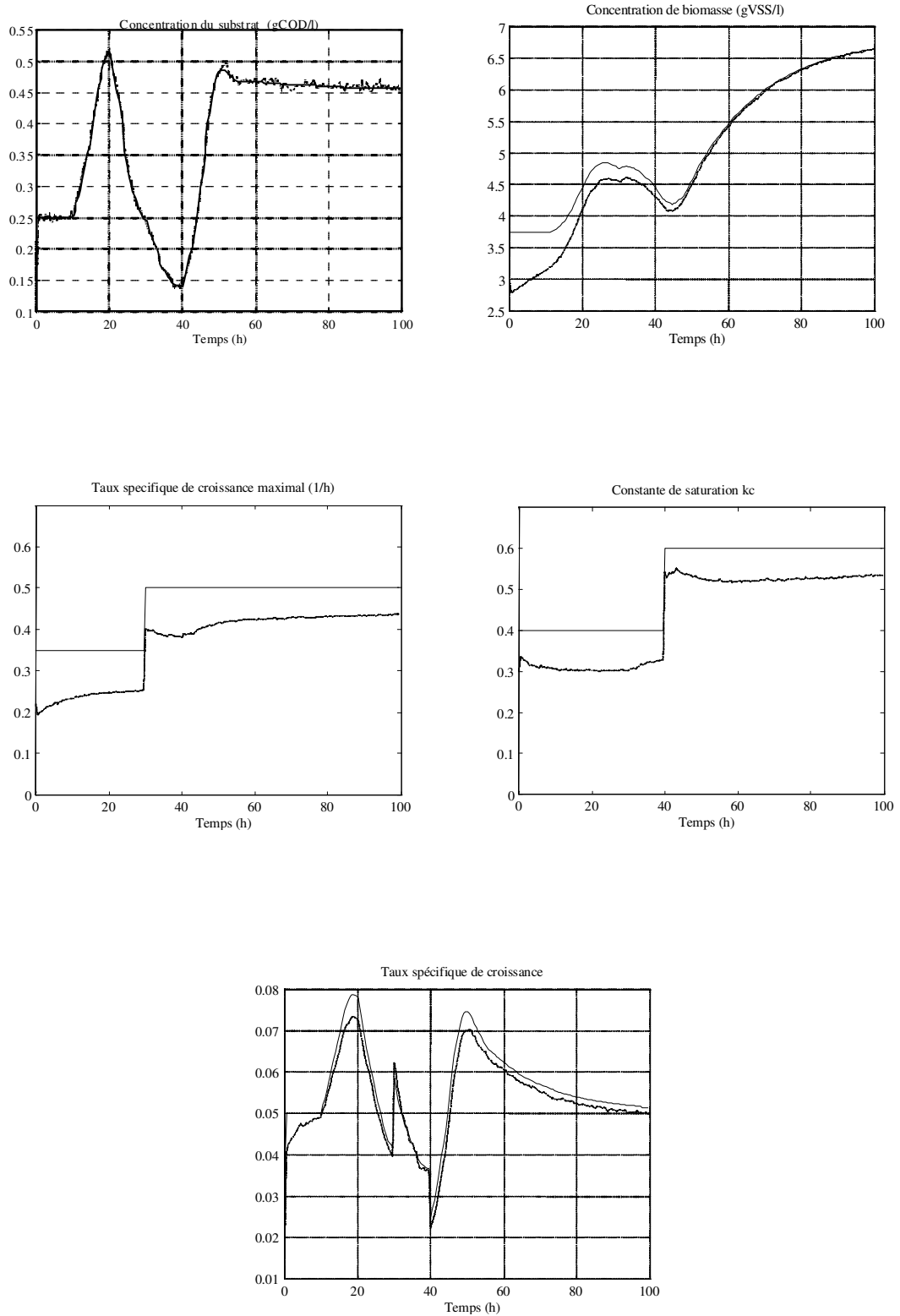


Figure 4.2: Evolution des variables d'état, des paramètres et de leurs estimés au point de collocation $z = 1.0$, - valeur réelle, -- valeur estimée

• **Observateur / estimateur à structure variable** [Boubaker *et al.*, 1998d]

Comparés à d'autres types d'observateurs non linéaires, les observateurs à structure variable sont connus pour leurs propriétés de mise en oeuvre facile et de robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation, des variations paramétriques et des perturbations extérieures. Devant la complexité du modèle adopté pour le bioréacteur, nous pensons qu'un estimateur à structure variable est la solution la plus efficace pour s'abstraire des difficultés dues aux non linéarités et non stationnarités inhérentes qui caractérisent le modèle du bioréacteur. La structure de l'observateur d'état à structure variable du système (4.5) est donnée par le système (4.7). Pour ce dernier le système d'erreur global peut s'écrire:

$$\forall i = 1, 2, \dots, N + 1$$

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = a_i \tilde{x}_{a_i} - \alpha_{ii} \tilde{\xi}_i + \omega_i^T \tilde{\theta}_i - M_{x_i} \operatorname{sgn}(\tilde{\xi}_i) \\ \frac{d\tilde{s}_i}{dt} = b_i \tilde{x}_{a_i} - (a_i - \rho_i) \tilde{\xi}_i - k_1 \omega_i^T \tilde{\theta}_i - M_{s_i} \operatorname{sgn}(\tilde{\xi}_i) \\ \frac{d\hat{\theta}_i}{dt} = \Gamma_i \omega_i \tilde{\xi}_i - M_{\theta_i} \operatorname{sgn}(\tilde{\xi}_i) \end{cases} \quad (4.38)$$

Les gains M_{x_i} , M_{s_i} et M_{θ_i} peuvent être calculés en plaçant les pôles du système dynamique d'erreur d'estimation sur l'hyperplan de glissement vérifiant la condition de glissement:

$$\tilde{\xi}_i \equiv 0, \quad \frac{d\tilde{\xi}_i}{dt} = 0 \quad (4.39)$$

On définit pour cela la surface de glissement suivante:

$$\tilde{s} = \hat{s} - s \quad (4.40)$$

La surface de glissement de dimension (N+1) est attractive si:

$$\tilde{\xi}_i \frac{d\tilde{\xi}_i}{dt} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N + 1) \quad (4.41)$$

L'inégalité précédente est vérifiée sous la condition suivante:

$$M_{s_i} > \max \left| b_i \tilde{x}_{a_i} - (a_i - \rho_i) \tilde{\xi}_i - k_1 \hat{x}_{a_i} H_i^T \tilde{\theta}_i \right| \quad (4.42)$$

Comme il a été mentionné au deuxième chapitre, en mode glissant la dynamique du système d'erreur d'estimation est de dimension réduite sur la surface de glissement; elle est donnée par:

$$\begin{cases} \forall i = 1, 2, \dots, N+1 \\ \frac{d\tilde{x}_{a_i}}{dt} = \left(a_i - \frac{M_{x_i}}{M_{s_i}} \right) \tilde{x}_{a_i} + \left(1 + k_1 \frac{M_{x_i}}{M_{s_i}} \right) \omega_i^T \theta_i^T \\ \frac{d\hat{\theta}_i}{dt} = -\frac{M_{\theta_i}}{M_{s_i}} \left(b_i \tilde{x}_{a_i} - k_1 \omega_i^T \tilde{\theta}_i \right) \\ \tilde{\xi}_i = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

Le polynôme caractéristique de la dynamique d'erreur en mode glissant s'écrit:

$$P_i(\lambda) = \lambda \left(\lambda^2 - \left(a_i - \frac{M_{x_i}}{M_{s_i}} b_i + \frac{k_1}{M_{s_i}} \sum_{k=1}^2 M_{\theta_{i_k}} \omega_{i_k} \right) \lambda - \frac{k_1 k_d}{M_{s_i}} \sum_{k=1}^2 M_{\theta_{i_k}} \omega_{i_k} \right) \quad (4.44)$$

Posant

$$M_{\theta_{i_k}} = -M_{i_k} \operatorname{sgn}(\omega_{i_k}) \quad \text{avec} \quad M_{i_k} > 0 \quad k = 1, 2 \quad (4.45)$$

En fixant les zéros du polynôme (4.44), sachant que M_{s_i} est fixé par la relation (4.42), les gains M_{x_i} et M_{θ_i} peuvent être déduits.

Simulation et commentaires

Les conditions opératoires précédentes de l'observateur / estimateur conjoint sont conservées. Les résultats obtenus par simulation de l'observateur / estimateur à structure variable relatif au modèle représenté par les équations (4.5) sont illustrés sur la figure (4.3). Nous pouvons constater sur la figure 4.3 que l'observateur / estimateur à structure variable est plus robuste vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations extérieures que l'observateur / estimateur sans structure variable. Une fois convergé, il devient pratiquement insensible aux perturbations. Cependant nous avons constaté que l'estimateur de paramètres a été très influencé par les bruits de mesure ce qui a nécessité l'adjonction d'un filtre de constante de temps $\tau_f = 0.1h$. Pour réduire le phénomène de broutement du aux termes de commutation, nous avons remplacé la fonction signe par la fonction saturation donnée par la relation suivante:

$$\operatorname{sat}\left(\frac{\tilde{\xi}_i}{\phi_i}\right) = \begin{cases} \frac{\tilde{\xi}_i}{\phi_i} & \text{si } \left| \frac{\tilde{\xi}_i}{\phi_i} \right| \leq 1 \\ \operatorname{sgn}(\tilde{\xi}_i) & \text{si } \left| \frac{\tilde{\xi}_i}{\phi_i} \right| > 1 \end{cases} \quad (i = 1, \dots, N+1) \quad (4.46)$$

$$\phi_i = 0.01 \quad \forall i = 1, \dots, N+1.$$

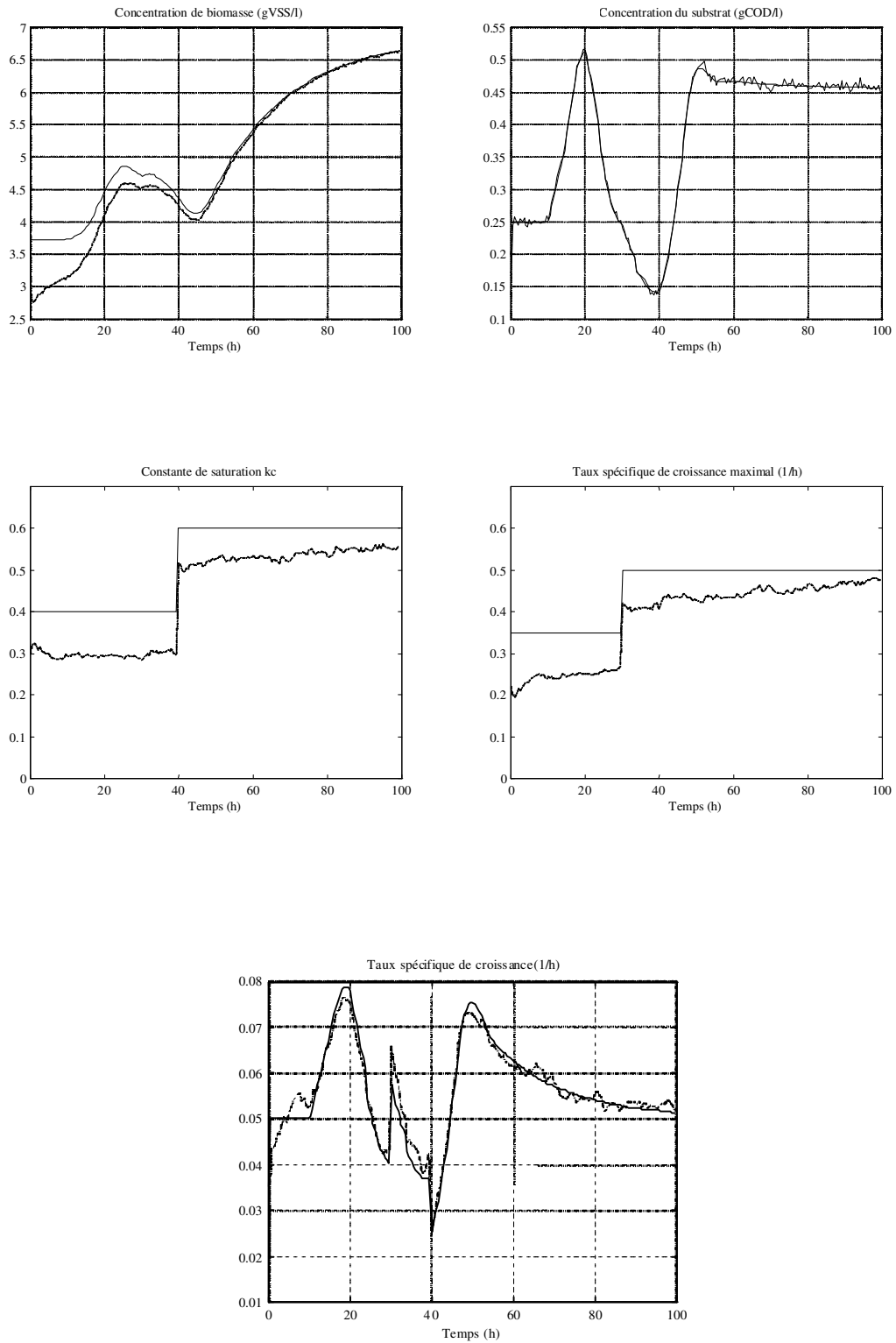


Figure 4.3: Evolution des variables d'état, des paramètres et de leurs estimés au point de collocation $z = 1.0$, - valeur réelle, -- valeur estimée

2.5. COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE

L'objectif de ce paragraphe est de combiner l'observateur à structure variable adaptatif avec plusieurs schémas de commande à structure variable et de comparer les résultats. Tous les algorithmes proposés dans ce paragraphe sont inspirés des techniques de commande développées au troisième chapitre.

◆ Commande à structure variable basée sur le modèle de dimension finie

On se propose dans une première étape de déterminer une commande sur la base du modèle du bioréacteur à paramètres localisés exprimé par le système (4.5).

• Approche de la commande équivalente augmentée

Le système à paramètres localisés (4.5) peut être décrit par la représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (4.47)$$

avec

$$x = \begin{bmatrix} x_{a_1} & s_1 & \cdots & x_{a_i} & s_i & \cdots & x_{a_{N+1}} & s_{N+1} \end{bmatrix}^T$$

$$f(x, t) = \begin{bmatrix} (\mu_1 - k_d) x_{a_1} & -k_1 \mu_1 x_{a_1} & \cdots & (\mu_{N+1} - k_d) x_{a_{N+1}} & -k_1 \mu_{N+1} x_{a_{N+1}} \end{bmatrix}$$

$$g(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{1}_{1,j} s_j + \mathbf{1}_{1,0} s_{in} \right) & \cdots & 0 & -\left(\sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{1}_{N+1,j} s_j + \mathbf{1}_{N+1,0} s_{in} \right) \end{bmatrix}$$

Choisissons une surface de glissement linéaire dans l'espace d'erreur entre la sortie y et sa valeur désirée y_d telle que:

$$\sigma(x) = c^T x - y_d \quad (4.48)$$

avec $c^T = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]$

La méthode de la commande équivalente consiste à chercher une commande équivalente $u_e(x)$ qui permet d'assurer un régime glissant idéal au cours duquel le point représentatif de l'évolution du système ne quitte pas la surface de glissement définie par l'équation:

$$\sigma(x) = 0 \quad (4.49)$$

Un régime glissant idéal n'est garanti que si à chaque instant la condition suivante est vérifiée:

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{d\sigma}{dx} \dot{x} = 0 \quad (4.50)$$

ce qui permet d'écrire à partir de (4.47) et (4.50):

$$\mathbf{u}_{eq} = \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \right] \quad (4.51)$$

d'où

$$\mathbf{u}_{eq} = \frac{-k_1 \boldsymbol{\mu}_{N+1} \mathbf{x}_{a_{N+1}}}{\left(\sum_{j=1}^{N+1} l_{N+1,j} s_j + l_{N+1,0} s_{in} \right)} \quad (4.52)$$

avec

$$\left(\sum_{j=1}^{N+1} l_{N+1,j} s_j + l_{N+1,0} s_{in} \right) \neq 0 \quad (4.53)$$

En réalité, la commande effective qui permet de satisfaire la condition de glissement (4.49) est la suivante:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} + \Delta \mathbf{u} \quad (4.54)$$

où \mathbf{u}_{eq} est une composante basse fréquence définie par la relation (4.52) et satisfaisant la condition (4.49) et $\Delta \mathbf{u}$ est la composante haute fréquence définie par:

$$\Delta \mathbf{u} = -M \text{sat}(\boldsymbol{\sigma}(x)) \quad (4.55)$$

$\text{sat}(\cdot)$ est la fonction continue donnée par la relation suivante:

$$\text{sat}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\phi}}\right) = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\phi}} & \text{si } \left| \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\phi}} \right| \leq 1 \\ \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}) & \text{si } \left| \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\phi}} \right| > 1 \end{cases} \quad (4.56)$$

On a donc d'après (4.52), (4.54) et (4.55) l'expression de la commande à structure variable suivante:

$$\mathbf{u} = \frac{-k_1 \boldsymbol{\mu}_{N+1} \mathbf{x}_{a_{N+1}}}{\left(\sum_{j=1}^{N+1} l_{N+1,j} s_j + l_{N+1,0} s_{in} \right)} - M \text{sat}(\boldsymbol{\sigma}(x)) \quad (4.57)$$

Le gain M est calculé de façon à satisfaire la condition de glissement et à contrebalancer les perturbations internes et externes (voir les développements au chapitre 3).

Etant données les hypothèses énoncées au paragraphe 2.3, les valeurs de $x_{a_{N+1}}$ et μ_{N+1} doivent être respectivement remplacées par leurs estimés $\hat{x}_{a_{N+1}}$ et $\hat{\mu}_{N+1}$. Ces valeurs sont obtenues à partir de l'algorithme d'observation / estimation à structure variable présenté au paragraphe 2.4. La loi de commande s'écrit donc:

$$u = \frac{-k_1 \hat{\mu}_{N+1} \hat{x}_{a_{N+1}}}{\left(\sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{I}_{N+1,j} s_j + \mathbf{I}_{N+1,0} s_{in} \right)} - \mathbf{M} \text{sat}(\sigma(x)) \quad (4.58)$$

Pour tester la robustesse de l'estimateur vis-à-vis des erreurs de modélisation et des bruits, les simulations ont été effectuées en considérant des variations brutales sur les paramètres biologiques μ_{\max} et k_c avec une variation de la consigne. Ces perturbations et ces variations sont répertoriées sur le tableau (4.2).

temps (h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
paramètres											
y_d		0.5				0.4					
μ_m (h^{-1})		0.35			0.5						
k_c		0.4				0.6					

Tableau 4.2: Variations paramétriques et variation de la consigne.

Le bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart type 0.01 ajouté aux mesures est conservé. Les conditions initiales ainsi que les paramètres du système réel et de l'algorithme d'observation / estimation à structure variable sont conservées. La largeur de la bande de linéarisation de la fonction saturation est $\phi = 0.05$, le gain de glissement M est choisi constant tel que $M = 0.1$. Les résultats obtenus par application de l'algorithme de commande à structure variable équivalente augmentée combiné avec un observateur / estimateur à structure variable sont illustrés sur la figure (4.4).

On peut constater sur la figure (4.4) une assez bonne régulation de la concentration du substrat à la sortie du bioréacteur aux différents paliers de consigne ainsi qu'une bonne poursuite. De légers retards apparaissent lors des changements de consigne. Malgré l'écart d'initialisation entre les variables réelles et les variables estimées les résultats obtenus montrent que l'algorithme d'estimation à structure variable adaptatif assure dans ce cas une bonne convergence des estimés de la concentration de biomasse et du taux spécifique avec une robustesse vis-à-vis des perturbations. On peut remarquer cependant une fluctuation du profil temporel de la commande avec des pics de courte durée lors des changements de consigne ou des perturbations. Ce phénomène doit être rattaché d'une part aux bruits de mesure et d'autre part au phénomène de broutement malgré l'utilisation de la fonction sat(.). Pour confirmer cette idée, nous avons effectué une simulation où les bruits de mesure sont nuls (figure (4.5)).

Il est certain que les performances de ce type de loi pourraient être améliorées en agissant sur la largeur de la bande de linéarisation de la fonction $\text{sat}(\cdot)$. Néanmoins, nous avons constaté que cela détériore la robustesse de la loi de commande vis-à-vis des perturbations et accentue l'erreur statique.

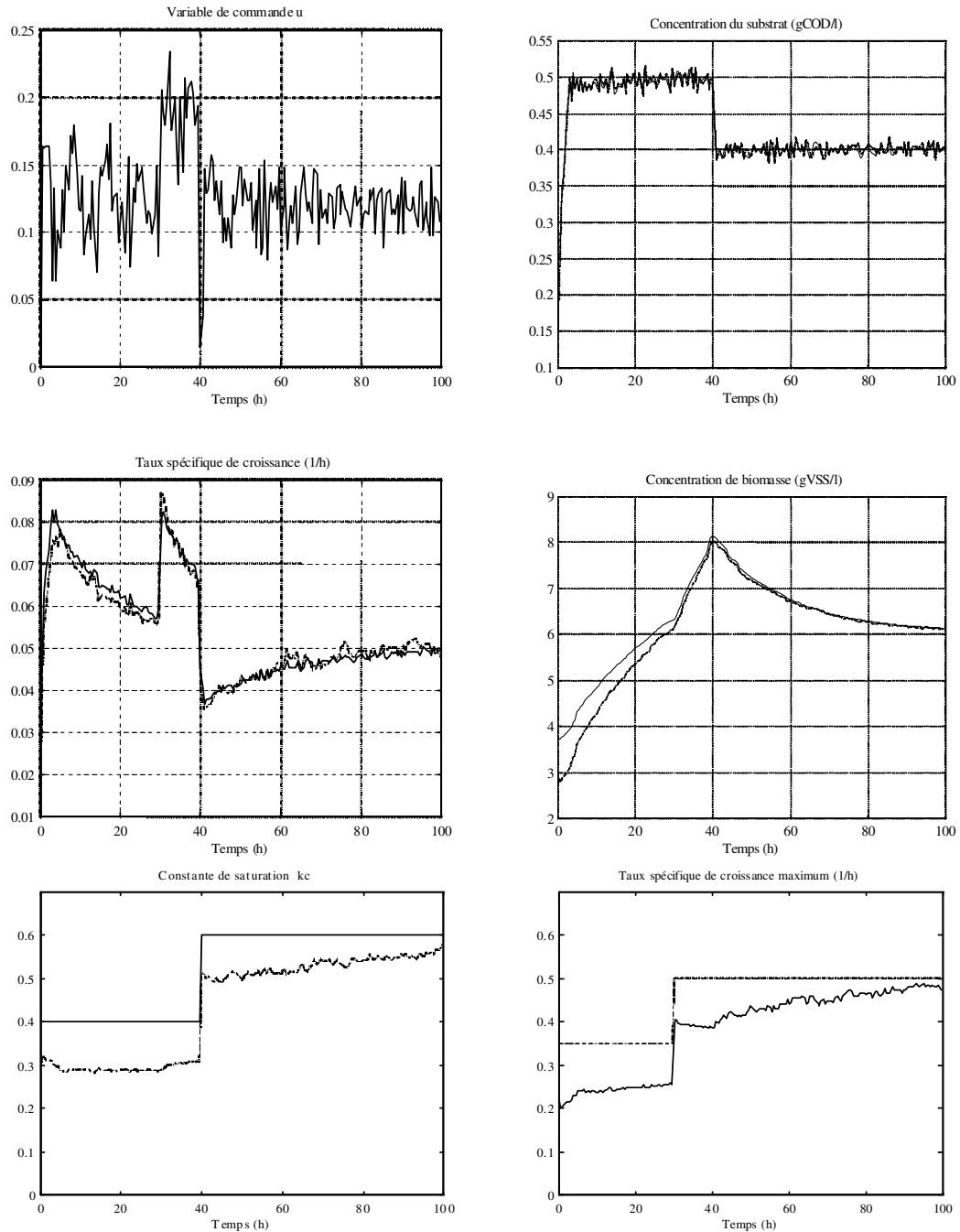


Figure 4.4. Régulation de la concentration du substrat: algorithme de commande à structure variable équivalente (cas des mesures bruitées); - valeur réelle, -- valeur estimée

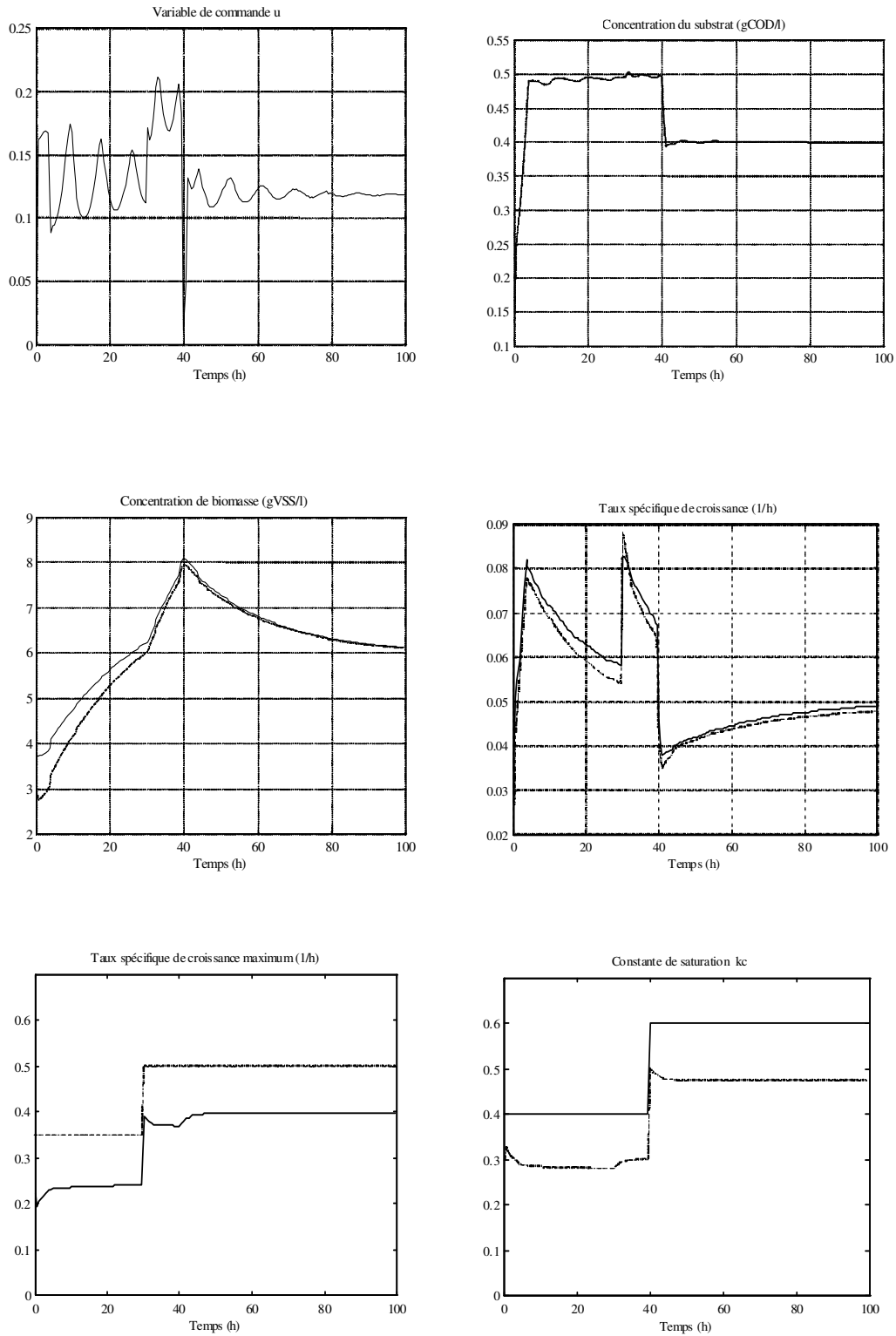


Figure 4.5. Régulation de la concentration du substrat: algorithme de commande à structure variable équivalente (cas des mesures non bruitées); - valeur réelle, -- valeur estimée

- **Approche de la commande dynamique à structure variable linéarisante**

Nous développerons dans ce qui suit un algorithme de commande à structure variable particulier inspiré des approches que nous avons proposées au troisième chapitre. Le système sera transformé sous une forme canonique de commandabilité modifiée permettant d'augmenter l'ordre du système et par suite d'introduire les discontinuités sur la première dérivée de la variable de commande. Une condition de glissement sur la surface de glissement tenant compte des non linéarités du système sera utilisée.

Considérons donc le système (4.5) à la sortie du réacteur ($z = z_{N+1}$) et posons pour simplifier la notation:

$$x_1 = x_{a_{N+1}}; \quad x_2 = s_{N+1}; \quad \mu = \mu_{N+1}(x_a, s); \quad l = l_{N+1, N+1}; \quad v = -\sum_{j=1}^N l_{N+1, j} s_j - l_{N+1, 0} s_{in}$$

En tenant compte des simplifications précédentes, le système (4.5) peut s'écrire à la sortie du réacteur ($z = z_{N+1}$) comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\mu - k_d) x_1 \\ \dot{x}_2 = -k_1 \mu x_1 + uv - \mu x_2 \end{cases} \quad (4.59)$$

Considérons la sortie suivante:

$$y = x_2 - y_d \quad (4.60)$$

y_d étant la sortie désirée.

Le système (4.47) peut être représenté sous la forme canonique de commandabilité modifiée que nous avons proposé dans le troisième chapitre comme suit:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = \tau(x_1, x_2, u, \dot{u}) \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (4.61)$$

τ est une fonction non linéaire des variables d'état, de la variable de commande et de sa première dérivée. Nous obtenons ainsi à partir de (4.59) la représentation suivante:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = x_2 \\ \dot{\eta}_2 = (v - \mathbf{1}x_2) \dot{u} + u^2 \left[(\mathbf{1})^2 \dot{x}_2 - \mathbf{1}Lvx_2 + v_1 \right] + u \left[v_2 + k_1 \mu x_1 \mathbf{1} + k_1 x_1 \mu_{x_2} (\mathbf{1}x_2 - v) \right] \\ \quad - k_1 x_1 \left[(\mu_{x_1} x_1 + \mu) (\mu - k_d) - k_1 x_1 \mu_{x_2} \mu \right] \end{cases} \quad (4.62)$$

avec:

$$L = \sum_{j=1}^N l_{N+1,j} l_{j,N+1}$$

$$\mu_{x_1} = \frac{\partial \mu}{\partial x_1}; \quad \mu_{x_2} = \frac{\partial \mu}{\partial x_2}$$

$$v_1 = \sum_{j=1}^N l_{N+1,j} \left(l_{j,0} S_{in} + \sum_{i=1}^N l_{j,i} s_i \right); \quad v_2 = \sum_{j=1}^N l_{N+1,j} (k_1 \mu x_j)$$

Choisissons la surface de glissement comme suit:

$$\sigma = \eta_2 + c_1 \eta_1 - c_1 \langle 0 \quad (4.63)$$

On impose à la surface de glissement définie dans (4.63) de vérifier la condition de glissement (proposée au troisième chapitre) suivante:

$$\dot{\sigma} = -M |\sigma|^a \operatorname{sgn}(\sigma) \quad 0 < a < 1 \quad (4.64)$$

En dérivant l'équation (4.63) et en égalisant le résultat à (4.64) l'équation différentielle suivante est obtenue:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -(v - \mathbf{1}x_2)^{-1} u^2 \left(\mathbf{1}^2 \dot{x}_2 - \mathbf{1}Lvx_2 + v_1 \right) + u \left(v_2 + k_1 \mathbf{1}\mu x_1 + (k_1 x_1 \mu_{x_2} + c_1) (\mathbf{1}x_2 - v) \right) \\ & - k_1 x_1 \left((\mu_{x_1} x_1 + \mu) (\mu - k_d) - k_1 x_1 \mu_{x_2} \mu \right) + \mathbf{M} |\sigma|^a \operatorname{sgn}(\sigma) - c_1 (k_1 \mu x_1 + u - uv) \end{aligned} \quad (4.65)$$

La résolution du système différentiel (4.62) combinée avec (4.65) permet de déterminer l'évolution des variables d'état et de la variable de commande.

Pour tester la robustesse du contrôleur obtenu vis-à-vis des erreurs de modélisation et des bruits, les simulations ont été effectuées en considérant les mêmes conditions opératoires. Le degré relatif du système est égal à un, il est donc possible d'obtenir une réponse du type premier ordre. On désire avoir une constante de temps égale à 1/4 heure; On choisit donc $c_1 = 4$. Le gain de glissement M est choisi constant $M = 1$ alors que le paramètre $a = 0.5$.

Les résultats obtenus par l'approche de la commande à structure variable dynamique sont illustrés sur la figure 4.6. On peut constater une parfaite régulation aux différents paliers de consigne et une bonne poursuite lors d'un changement de consigne. La variable de commande réagit très rapidement lors des perturbations et des variations de la consigne. La variable de commande présente une certaine fluctuation en présence de bruit. Ce phénomène doit être rattaché uniquement aux bruits de mesure. Pour confirmer cette idée, nous avons effectué une simulation où les bruits de mesure sont nuls (figure 4.7). En absence de bruit, et une fois toutes les perturbations atténuées, la loi de commande devient parfaitement lisse. Cette approche permet donc d'atteindre l'objectif souhaité en imposant la dynamique désirée tout en supprimant le phénomène de broutement et aussi sans perte de la propriété de robustesse. L'évolution de la concentration de biomasse et du taux spécifique de croissance et de leurs estimés sont parfaitement reconstruites aux différents instants.

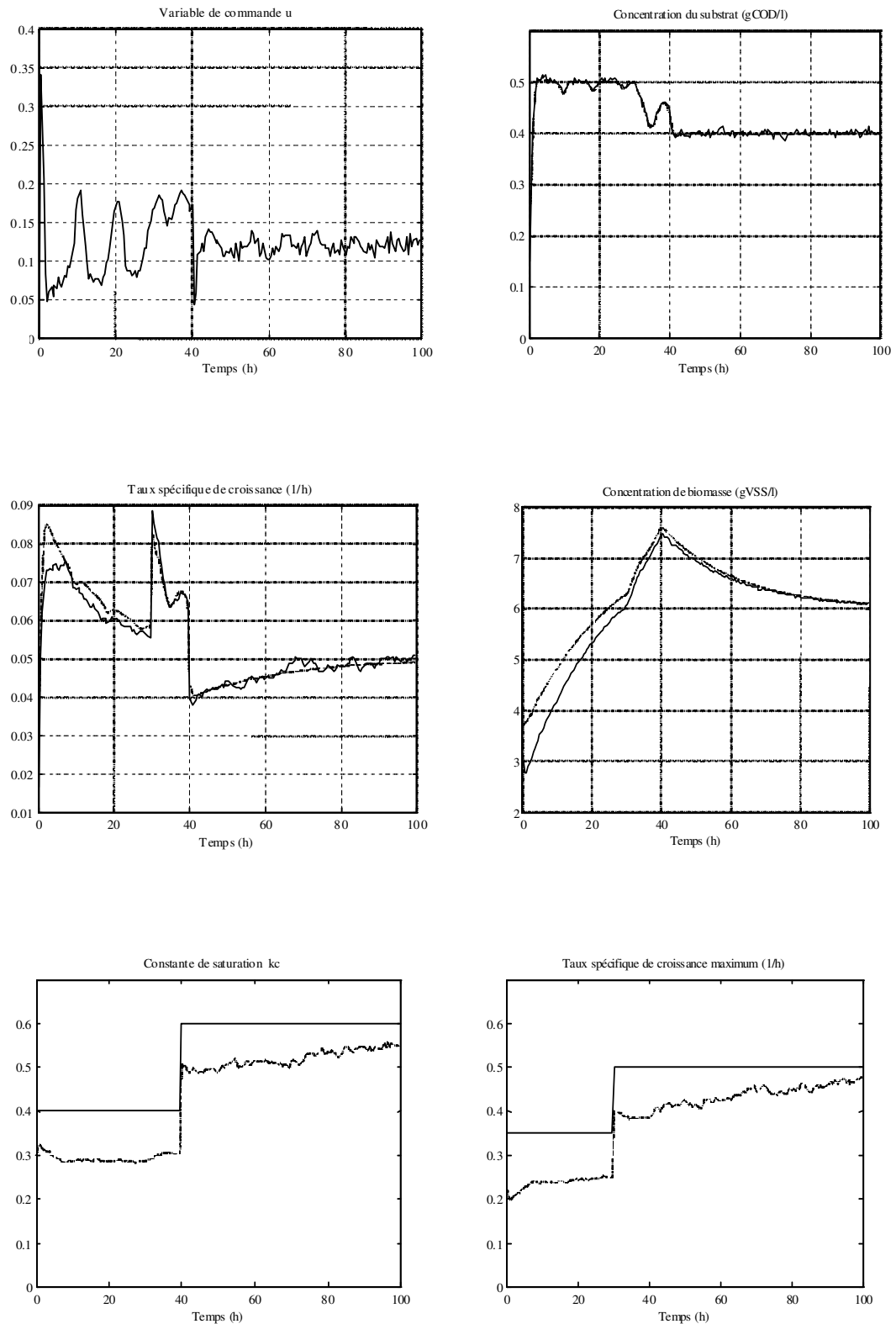


Figure 4.6. Régulation de la concentration du substrat: algorithme de commande à structure variable dynamique (cas des mesures bruitées); - valeur réelle, -- valeur estimée

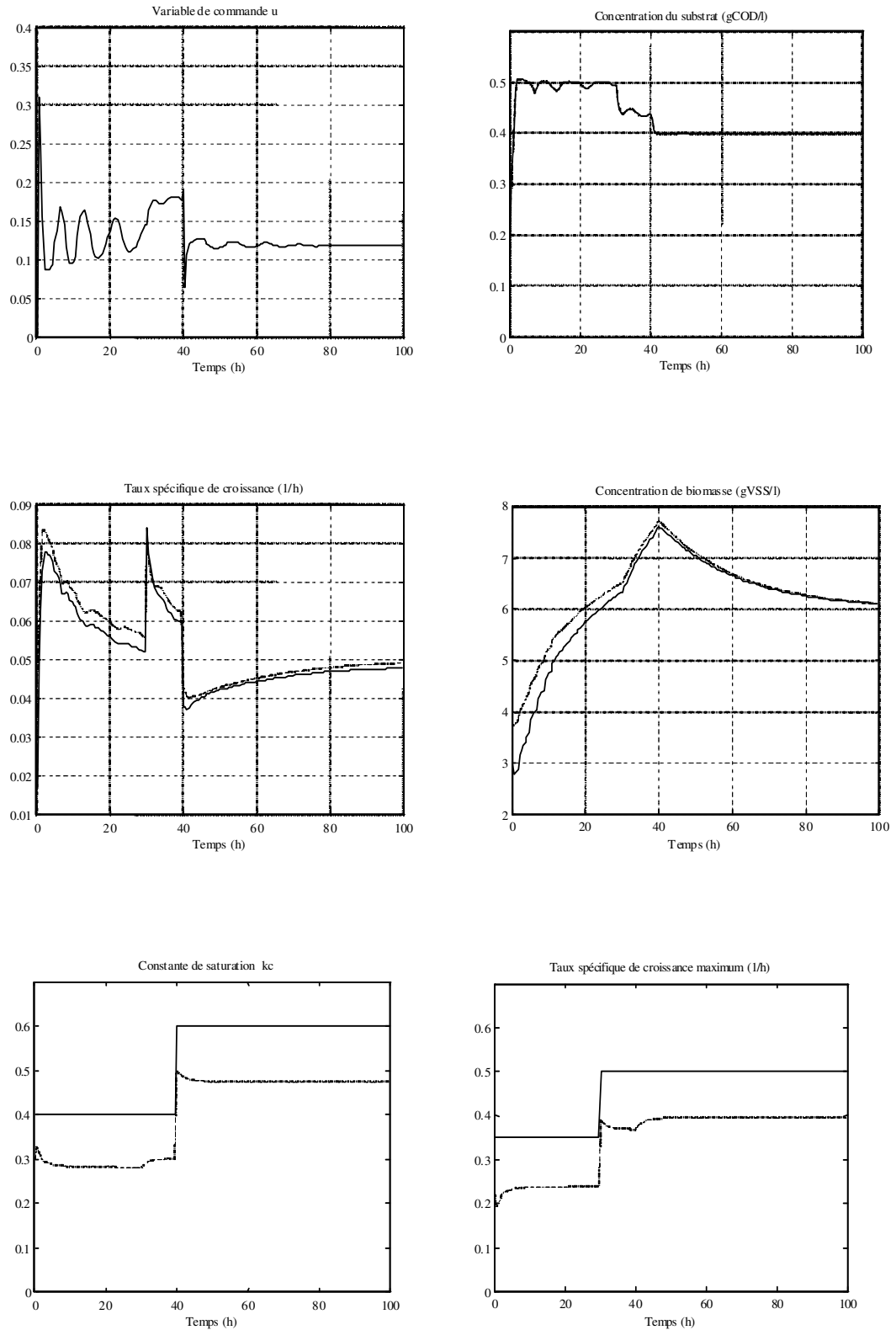


Figure 4.7. Régulation de la concentration du substrat: algorithme de commande à structure variable dynamique (cas des mesures non bruitées); - valeur réelle, -- valeur estimée

- **Commande à structure variable basée sur le modèle de dimension infinie**

Nous développerons dans ce paragraphe un algorithme de commande à structure variable basé sur le modèle de dimension infinie. Cette idée est motivée par la nécessité de conserver les propriétés dynamiques du modèle d'origine dans certaines situations.

L'objectif de la commande est la régulation de la variable de sortie y_L à une valeur désirée y_d à $z = 1$ telle que:

$$y_L = S(z = 1, t) \quad (4.66)$$

La combinaison des différentes équations du système (4.1) et de l'équation de sortie (4.66) conduit à l'équation de la dynamique de la variable de sortie suivante:

$$\frac{dy_L}{dt} = -u \frac{\partial S(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=1} - k_1 \mu(X_a, S) X_a(z = 1, t) \quad (4.67)$$

Définissons une surface de glissement par:

$$\sigma(X) = y(z = 1, t) - y_d \quad (4.68)$$

soit

$$\sigma(X) = y_L - y_d \quad (4.69)$$

Imposons à la surface de glissement (4.69) la condition de glissement suivante:

$$\dot{\sigma}(X) = -M \operatorname{sgn}(\sigma(X)) \quad (4.70)$$

En dérivant l'équation (4.69) et en l'égalisant à l'équation (4.70) on obtient:

$$\frac{dy_L}{dt} = -M \operatorname{sgn}(\sigma(X)) \quad (4.71)$$

C'est l'équation de la dynamique de la variable de sortie du système en boucle fermée. Par combinaison des équations (4.67) et (4.71) on obtient la loi de commande suivante:

$$u = \frac{-k_1 \mu(X_a, S) X_a(z = 1, t) + M \operatorname{sgn}(\sigma(X))}{\frac{\partial S(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=1}} \quad (4.72)$$

Lors de la mise en oeuvre de la loi de commande la discrétisation de l'algorithme de régulation (4.72) s'avère nécessaire.

On rappelle que l'approximation des dérivées spatiales peut être effectuée à l'aide de la méthode de collocation orthogonale présentée au premier chapitre selon la relation suivante:

$$\left. \frac{\partial S(z, t)}{\partial z} \right|_{z=z_i} = \sum_{j=0}^{N+1} l_{i,j} s_j(z_j, t) \quad \text{où} \quad l_{i,j} = \left. \frac{dL_j(z)}{dz} \right|_{z=z_i} \quad (4.73)$$

L_j étant les polynômes de Lagrange définis aux points de collocation z_j .

L'algorithme (4.72) devient alors:

$$u = \frac{-k_1 \mu_{N+1} x_{a_{N+1}} + Msat(\sigma(x))}{\left(\sum_{j=1}^{N+1} l_{N+1,j} s_j + l_{N+1,0} s_{in} \right)} \quad (4.74)$$

avec

$$\left(\sum_{j=1}^{N+1} l_{N+1,j} s_j + l_{N+1,0} s_{in} \right) \neq 0 \quad (4.75)$$

Pour tester la robustesse du contrôleur vis-à-vis des erreurs de modélisation et des bruits, les simulations ont été effectuées en considérant les mêmes conditions opératoires. La surface de glissement est d'ordre zéro, il n'est donc pas possible de définir le mode de stabilisation du système.

Les résultats obtenus par l'approche de la commande à structure variable basée sur le modèle de dimension infinie sont illustrés sur la figure 4.8. On peut remarquer dans ce cas que la variable de sortie et le taux spécifique de croissance sont très influencés par les bruits de mesure. Le profil temporel de la loi de commande fluctue assez nettement.

Les résultats obtenus en absence de bruit sont illustrés sur la figure 4.9. On peut remarquer que malgré l'utilisation de la fonction $\text{sat}(\cdot)$ le phénomène de broutement est encore observé. Différentes simulations montrent qu'une trop faible valeur du paramètre ϕ conduit à une variable de commande trop fluctuante alors qu'une valeur assez grande de ϕ est significative d'une erreur statique très importante (voir figure 4.10). Elle engendre même la détérioration de la propriété de robustesse.

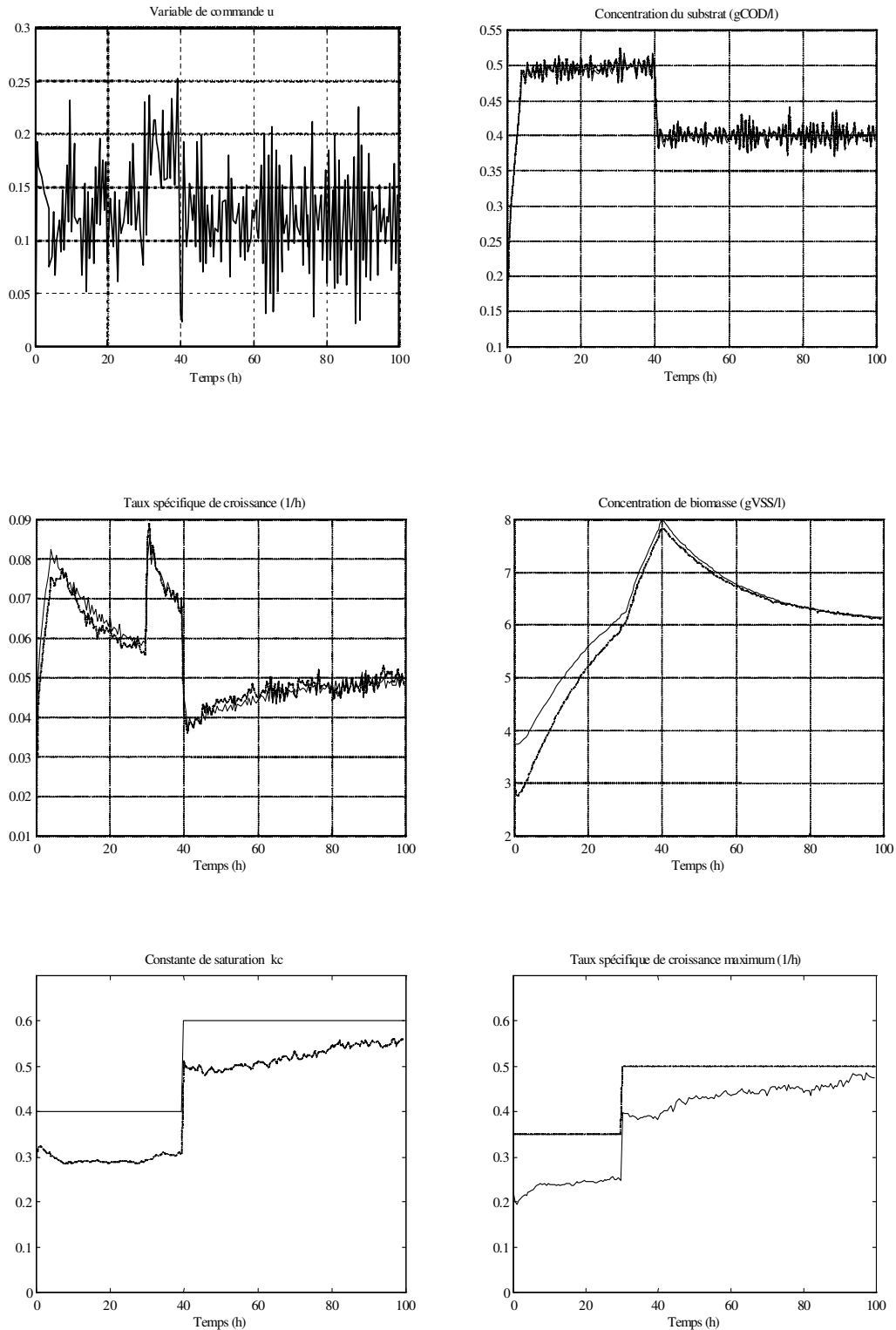


Figure 4.8. Régulation de la concentration du substrat: algorithme de commande à structure variable de dimension infini (cas des mesures bruitées); - valeur réelle, -- valeur estimée

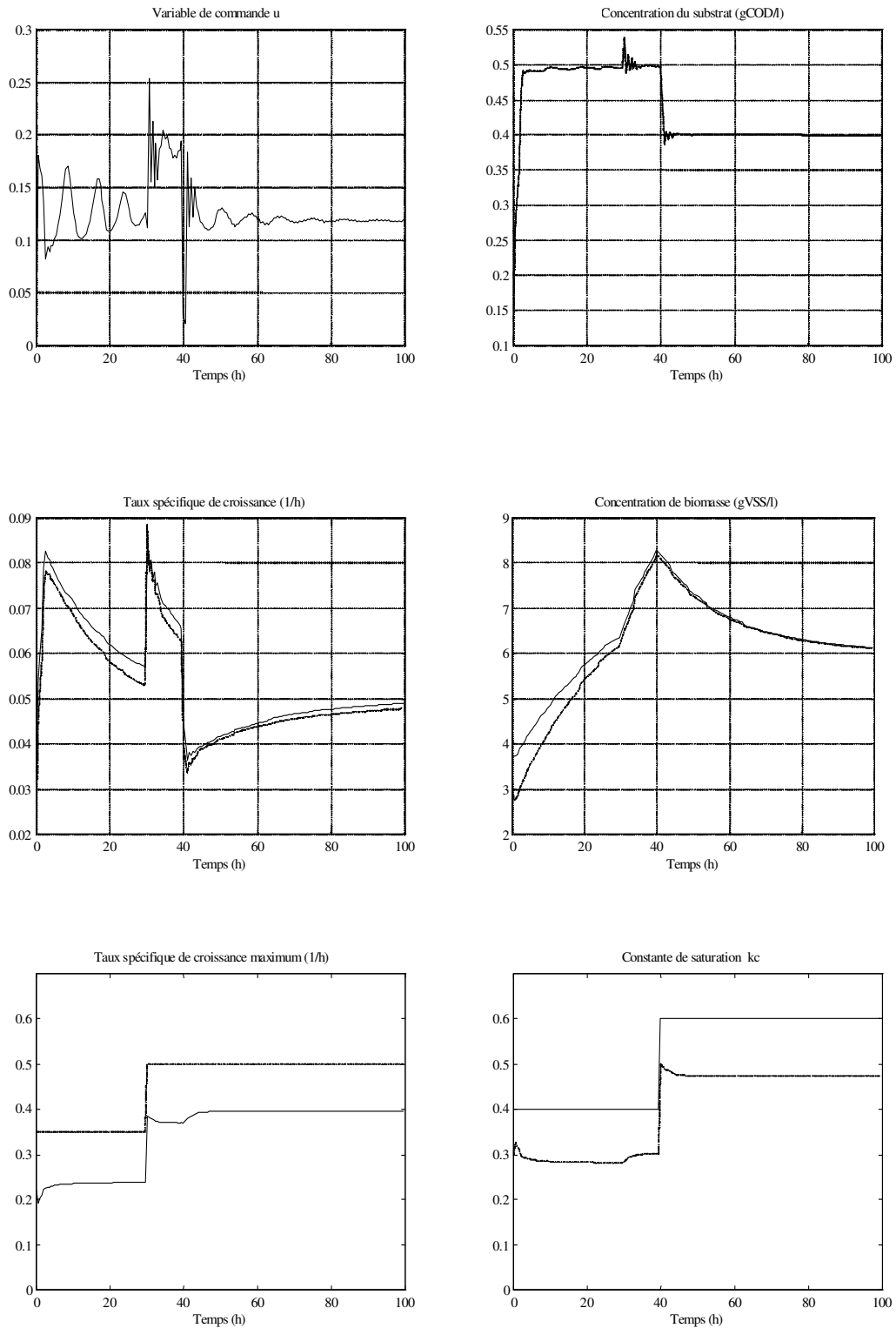


Figure 4.9. Régulation de la concentration du substrat: algorithme de commande à structure variable de dimension infini (cas des mesures non bruitées); - valeur réelle, -- valeur estimée

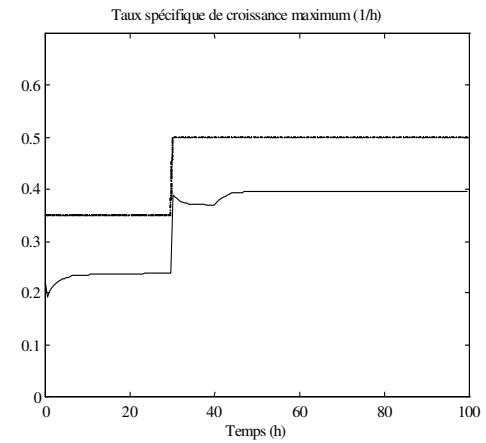
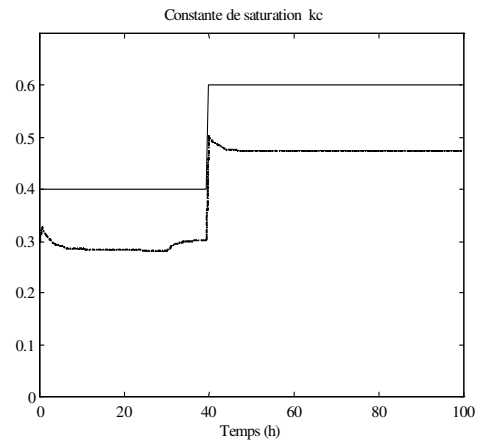
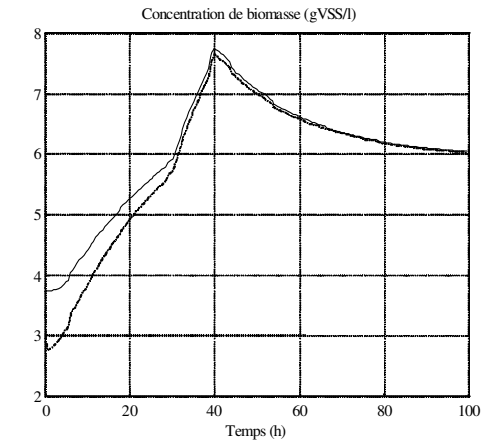
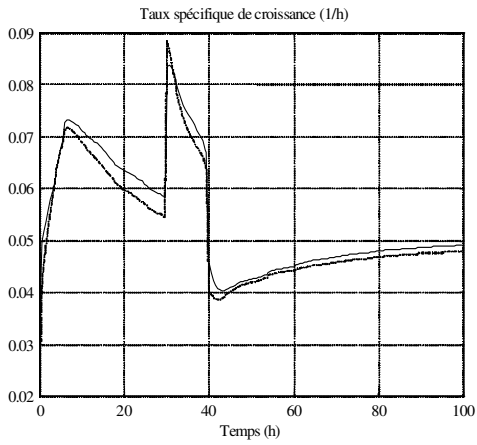
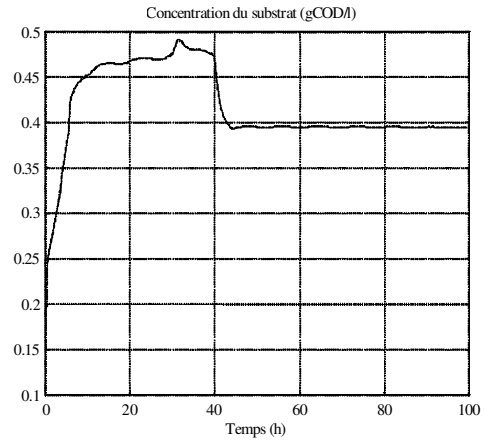
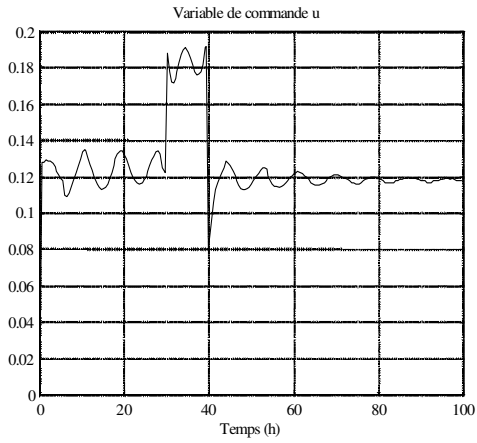


Figure 4.10. Régulation de la concentration du substrat: algorithme de commande à structure variable de dimension infinie (cas des mesures non bruitées); - valeur réelle, -- valeur estimée

- **Comparaison des performances des algorithmes de commande**

Afin de réguler la concentration du substrat à la sortie du bioréacteur nous avons développé dans ce paragraphe trois algorithmes de commande à structure variable que nous avons associés à l'algorithme d'observation / estimation à structure variable adaptatif. Les résultats de simulation obtenus par les différents algorithmes sont relativement satisfaisants. Ils ont permis de montrer que ce type de régulateur est robuste vis-à-vis des incertitudes, des variations paramétriques, des bruits de mesure et des perturbations extérieures.

En analysant les courbes présentant l'évolution du substrat (variable de sortie) nous pouvons déduire que la meilleure régulation obtenue est celle relative à la commande dynamique. De plus, l'augmentation de l'ordre du système par introduction d'une forme de commande modifiée a permis d'atteindre l'objectif désiré avec la dynamique désirée. Par contre pour la commande équivalente augmentée ou la commande de dimension infinie, la réduction de l'ordre du système sur la surface de glissement permet de stabiliser le système sur la consigne désirée mais ne peut pas définir la manière d'atteindre l'objectif. De plus l'utilisation de la fonction $\text{sat}(\cdot)$ utilisée pour réduire le broutement a donné naissance à d'autres problèmes tels que la complexité de la mise en oeuvre de la loi de commande, la recherche d'un compromis entre les différentes performances du système.

En observant le profil temporel de la variable de commande pour les différents algorithmes de commande nous pouvons affirmer que celui relatif à la commande dynamique est le moins fluctuant même en présence de bruits de mesure. Celui-ci devient parfaitement lisse en absence de bruits de mesure et lorsque les effets de toutes les variations et perturbations sont atténués. Ceci présente le principal avantage de la commande dynamique que nous avons proposé. Le régulateur de dimension infinie présente la commande la plus fluctuante. Pour ce dernier l'allure de la commande est très influencée par le paramètre de la fonction $\text{sat}(\cdot)$. En particulier, une trop faible valeur de ϕ ne permet pas de résoudre le problème de broutement et engendre une commande très fluctuante alors qu'une très grande valeur est synonyme d'une erreur statique importante.

Enfin nous avons constaté que la variation du taux spécifique de croissance maximal influence le paramètre cinétique de la réaction (taux spécifique de croissance), il modifie fortement la dynamique de croissance de biomasse et par conséquent modifie le point de fonctionnement du procédé; ceci est particulièrement observé pour le cas de la commande dynamique. Notons enfin que les profils temporels de la concentration de biomasse, du taux spécifique de croissance et des paramètres biologiques k_c et μ_{\max} ainsi que leurs estimés sont bien reconstruits par les différents algorithmes de commande. Une meilleure poursuite des variables estimées est néanmoins observée pour l'algorithme de commande dynamique.

3. ETUDE D'UN PROCEDE DE TRAITEMENT BIOLOGIQUE DES EAUX

Au cours des dernières décennies, la pollution des eaux de surface et des eaux de nappes est devenue importante. Cette pollution possède plusieurs origines: domestique, industrielle et agricole. Les principaux polluants dans l'eau sont les nitrates. A fortes concentrations, ceux-ci sont nocifs pour la santé. La récupération et l'épuration des eaux résiduaires urbaines ou à potabiliser sont devenues nécessaires. Nous nous limiterons dans cette étude au cas du traitement biologique des eaux à potabiliser. Pour ce dernier, la somme des concentrations en produits nitrés dans l'eau potabilisée est fixée par une norme internationale.

Face à la pression des nouvelles réglementations, les traiteurs d'eau s'orientent vers une meilleure intégration de leur environnement et une meilleure efficacité de leurs stations d'épuration. L'utilisation de la simulation basée sur des modèles mathématiques des biofiltres utilisés pour le traitement de l'eau permet de stimuler et d'accélérer la mise au point de nouveaux procédés, de prévoir leurs performances sous différentes conditions opératoires et d'optimiser leur fonctionnement. Elle permet de dimensionner et de réduire le nombre d'expérimentations assez coûteuses à mettre en oeuvre lors des développements des unités de traitement de l'eau. Elle permet également de développer des stratégies de contrôle et de commande dans l'optique d'une conduite automatique performante vis-à-vis des caractéristiques de fonctionnement désirées.

Cette étude s'inscrit donc dans le cadre d'une collaboration interdisciplinaire entre plusieurs groupes de recherche axée sur le développement des méthodes d'analyse fonctionnelle (modélisation, simulation, identification paramétrique) et de contrôle (estimation, commande) des procédés de traitement de l'eau à potabiliser. Dans l'eau, le principal polluant dans les nappes phréatiques est le nitrate. L'objectif est donc d'éliminer le nitrate par une réaction d'oxydo-réduction en ajoutant un produit carboné (par exemple l'éthanol) car l'eau en contient peu. L'expérience montre que la réaction produit un composé intermédiaire: le nitrite qui est encore plus nocif que le nitrate. L'opération consiste à maintenir la somme des produits nitrés dans l'eau à potabiliser (nitrate+nitrite) inférieure à une norme européenne en vigueur, à savoir $\leq 5.65\text{mg}[\text{N} / \text{l}]$.

Le modèle mathématique du biofiltre de dénitrification a été établi par les biologistes sur la base des réactions chimiques, du phénomène physique de filtration des matières en suspension et de la variation de l'espace disponible pour l'écoulement du liquide [Jacob, 1994]. Une unité pilote installée au Département de Génie de Procédés industriels à l'INSAT (Toulouse/France) a servi de support expérimental. Le modèle mathématique obtenu est un système à paramètres répartis représenté par quatre équations aux dérivées partielles. Ce modèle a la particularité d'être non linéaire et non stationnaire et contient des paramètres susceptibles de varier dans le temps de façon imprévisible; de plus des perturbations externes telles que la température ou la fluctuation de débit modifient le fonctionnement interne du procédé.

En conséquence, il faut concevoir et mettre en oeuvre des lois de commande robustes permettant de garantir une maîtrise totale du procédé de dénitrification. Des études de commande monovariante ont été déjà effectuées (commande par le débit d'alimentation et commande par concentration d'éthanol rajouté à l'entrée du bioréacteur)[Bourrel, 1996] [Babary & Bourrel, 1999].

Les biochimistes pensent que l'on pourrait mieux maîtriser le fonctionnement du bioréacteur si l'on agissait sur les deux variables à la fois. L'originalité de ce travail se situe donc dans la conception et la mise en oeuvre d'une commande multivariable permettant une meilleure conduite du procédé de dénitrification que celle de la commande monovariante.

Ce paragraphe sera organisé comme suit: on commencera tout d'abord par une présentation du biofiltre de dénitrification. Une description mathématique du bioréacteur sera ensuite établie. La formulation du problème ainsi que les hypothèses de travail seront présentées. Le problème de la commande à structure variable monovariante sera abordé; l'objectif est de montrer à travers des résultats de simulation que cette solution déjà proposée, mais par d'autres schémas de commande, est insuffisante pour une maîtrise totale du procédé de dénitrification et que l'approche multivariable s'avère nécessaire afin d'obtenir de meilleures performances. Dans un objectif d'améliorer le fonctionnement du bioprocédé en comparant plusieurs schémas de commande à structure variable nous proposerons trois approches différentes. Nous concluons par une évaluation et une comparaison des performances des différents algorithmes.

3.1. PRESENTATION DU BIOREACTEUR

Le procédé de dénitrification qui fait l'objet de notre étude est un réacteur cylindrique de type ascendant pour le liquide de longueur L et de diamètre ϕ (Figure 4.11).

Les micro-organismes fixés sur de la pouzzolane (roche volcanique poreuse) se développent en consommant le nitrate en faisant apparaître un produit intermédiaire le nitrite pour autant que les conditions opératoires soient favorables et que l'eau soit régulièrement alimentée en carbone organique et en oligo-éléments, source d'énergie nécessaire à la synthèse des constituants cellulaires des micro-organismes.

Huit points de mesure sont répartis sur la longueur du biofiltre pour suivre l'évolution des concentrations des produits nitrés et de l'éthanol. La température du pilote est régulée grâce à une double enveloppe où circule l'eau refroidie. Les variables d'entrée du système sont le débit d'alimentation et la concentration de l'éthanol à l'entrée du réacteur.

Figure 4.11: Unité pilote de dénitrification de l'eau à potabiliser

3.2. EQUATIONS DE MODELISATION

Le modèle mathématique du biofiltre de dénitrification a été établi par les biologistes sur la base des réactions chimiques et de la variation de l'espace disponible pour l'écoulement du liquide (porosité). Les équations de réaction sont basées sur le modèle de l'I.A.W.P.R.C. (International Association for Water Pollution Research Control) rebaptisé en 1991 par (I.A.W.Q International Association for Water Quality). Plus de détails à ce propos sont donnés dans [Jacob, 1994]. Sous certaines hypothèses [Jacob, 1994][Bourrel, 1996], le modèle global qui décrit le comportement dynamique du procédé de dénitrification peut être représenté par un système de quatre équations aux dérivées partielles de type hyperbolique. Cependant, il est souvent utile de chercher un modèle de dimension finie à partir du modèle de dimension infinie.

Modèle à paramètres répartis

Le modèle mathématique peut être décrit comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_1(z,t)}{\partial t} = -\frac{F}{\xi \varepsilon} \frac{\partial S_1(z,t)}{\partial z} - \frac{1-Y_{h_1}}{1.14Y_{h_1} \varepsilon} \mu_1(S_1, S_3) X_a(z,t) \\ \frac{\partial S_2(z,t)}{\partial t} = -\frac{F}{\xi \varepsilon} \frac{\partial S_2(z,t)}{\partial z} + \frac{1-Y_{h_1}}{1.14Y_{h_1} \varepsilon} \mu_1(S_1, S_3) X_a(z,t) - \frac{1-Y_{h_2}}{1.71Y_{h_2} \varepsilon} \mu_2(S_2, S_3) X_a(z,t) \\ \frac{\partial S_3(z,t)}{\partial t} = -\frac{F}{\xi \varepsilon} \frac{\partial S_3(z,t)}{\partial z} - \frac{1}{Y_{h_1} \varepsilon} \mu_1(S_1, S_3) X_a(z,t) - \frac{1}{Y_{h_2} \varepsilon} \mu_2(S_2, S_3) X_a(z,t) \\ \frac{\partial X_a(z,t)}{\partial t} = (\mu_1(S_1, S_3) + \mu_2(S_2, S_3) - k_d(S_1, S_2, S_3, X_a)) X_a(z,t) \\ k_d = (\mu_1(S_1, S_3) + \mu_2(S_2, S_3)) \frac{X_a(z,t)}{X_{a,max}} \end{array} \right.$$

(4.76a)

pour $0 < z \leq L$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1(z=0, t) = S_{1,in}(t) \\ S_2(z=0, t) = S_{2,in}(t) \\ S_3(z=0, t) = S_{3,in}(t) \\ X_a(z=0, t) = X_{a,in}(t) \end{array} \right. \quad (4.76b)$$

et les conditions initiales suivantes:

$$\begin{cases} S_1(z, t = 0) = S_{1,0}(z) \\ S_2(z, t = 0) = S_{2,0}(z) \\ S_3(z, t = 0) = S_{3,0}(z) \\ X_a(z, t = 0) = X_{a,0}(z) \end{cases} \quad (4.76c)$$

Dans les équations précédentes on a :

- $S_1(z, t)$: concentration de nitrate
- $S_2(z, t)$: concentration de nitrite
- $S_3(z, t)$: concentration d'éthanol
- $X_a(z, t)$: concentration de biomasse active
- $X_{a_{\max}}$: concentration de biomasse maximale
- ε : porosité du biofiltre
- k_d : coefficient de mortalité de la biomasse
- μ_1 : taux spécifique de croissance (dénitratation)
- μ_2 : taux spécifique de croissance (dénitritation)
- F : débit d'alimentation en substrats
- S : section du biofiltre
- y_{h_1} : rendement de la biomasse (dénitratation)
- y_{h_2} : rendement de la biomasse (dénitritation)

Les taux spécifiques de croissance sont décrits par le modèle de MONOD [Monod, 1949] avec limitation par deux substrats :

$$\begin{cases} \mu_1(S_1, S_3) = \eta_g \mu_{1_{\max}} \frac{S_1}{S_1 + K_1} \frac{S_3}{S_3 + K_3} \\ \mu_2(S_2, S_3) = \eta_g \mu_{2_{\max}} \frac{S_2}{S_2 + K_2} \frac{S_3}{S_3 + K_3} \end{cases} \quad (4.77)$$

avec

- η_g : facteur de correction de la croissance anaérobique
- $\mu_{1_{\max}}$: taux de croissance maximum de la biomasse (dénitratation)
- $\mu_{2_{\max}}$: taux de croissance maximum de la biomasse (dénitritation)
- K_1 : constante de saturation de nitrate
- K_2 : constante de saturation de nitrite
- K_3 : constante de saturation de l'éthanol

Modèle à paramètres localisés :

La méthode de collocation orthogonale est utilisée pour transformer le système aux dérivées partielles en un système aux dérivées ordinaires et par suite déterminer une solution approchée des variables d'état du système (4.76) sous la forme d'une somme finie de produits de fonctions dépendant l'une de la variable d'espace z et l'autre de la variable de temps telle que:

$$\begin{aligned} S_m(z, t) &= \sum_{i=0}^{N+1} L_i(z) s_m(z = z_i, t) \quad \text{pour } m = 1, 2, 3 \\ X_a(z, t) &= \sum_{i=0}^{N+1} L_i(z) x_a(z = z_i, t) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Ces fonctions sont évaluées aux $(N+2)$ points d'interpolation qui sont choisis dans l'intervalle de l'espace $[0, L]$ et tels que:

$$z_0 = 0 < z_1 < \dots < z_{N+1} = L. \quad (4.79)$$

En posant dans l'équation (4.76):

$$k_1 = \frac{1 - Y_{h_1}}{1.14 Y_{h_1} \varepsilon}; \quad k_2 = \frac{1 - Y_{h_2}}{1.71 Y_{h_2} \varepsilon}; \quad k_3 = \frac{1}{Y_{h_1} \varepsilon}; \quad k_4 = \frac{1}{Y_{h_2} \varepsilon}$$

et par utilisation de la méthode de collocation orthogonale les $4(N+1)$ équations différentielles ordinaires suivantes peuvent être obtenues:

$$\forall i = 1, L, N + 1$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{ds_{1_i}}{dt} &= -\frac{F}{\$ \varepsilon} \sum_{j=1}^{N+1} l_{i,j} s_{1_j} - \frac{F}{\$ \varepsilon} l_{i,0} S_{1,in} - k_1 \mu_{1_i} x_{a_i} \\ \frac{ds_{2_i}}{dt} &= -\frac{F}{\$ \varepsilon} \sum_{j=1}^{N+1} l_{i,j} s_{2_j} + k_1 \mu_{1_i} x_{a_i} - k_2 \mu_{2_i} x_{a_i} \\ \frac{ds_{3_i}}{dt} &= -\frac{F}{\$ \varepsilon} \sum_{j=1}^{N+1} l_{i,j} s_{3_j} - \frac{F}{\$ \varepsilon} S_{3,in} l_{i,0} - k_3 \mu_{1_i} x_{a_i} - k_4 \mu_{2_i} x_{a_i} \\ \frac{dx_{a_i}}{dt} &= (\mu_{1_i} + \mu_{2_i} - k_{d_i}) x_{a_i} \quad \text{avec } k_{d_i} = (\mu_{1_i} + \mu_{2_i}) \frac{x_{a_i}}{X_{a,max}} \end{aligned} \right. \quad (4.80a)$$

avec les conditions initiales suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} s_{1_i}(t = 0) &= s_{1_i,0} \\ s_{2_i}(t = 0) &= s_{2_i,0} \\ s_{3_i}(t = 0) &= s_{3_i,0} \\ x_{a_i}(t = 0) &= x_{a_i,0} \end{aligned} \right. \quad (4.80b)$$

les détails de l'approximation ont été donnés au premier chapitre accompagnés des calculs numériques et des résultats de simulation du modèle en boucle ouverte.

3.3. FORMULATION DU PROBLEME

Dans la suite nous tenons compte des hypothèses suivantes :

1. La commande est:

soit la vitesse d'alimentation en substrats $F(t)/S$ (cas monovariabile)

soit la concentration d'éthanol à l'entrée $S_{3,in}$ (cas monovariabile)

la vitesse d'alimentation en substrats $F(t)/S$ et la concentration d'éthanol à l'entrée $S_{3,in}$ à la fois (cas multivariabile).

2. Les variables de commande sont des fonctions continues par morceaux, positives et bornées.

3. la grandeur à réguler est soit:

la somme des concentrations résiduelles des produits nitrés (nitrite + nitrate) à la sortie du bioréacteur (cas monovariabile).

la somme des concentrations résiduelles des produits nitrés (nitrite + nitrate) à la sortie du bioréacteur et la concentration d'éthanol à la sortie du bioréacteur (cas multivariabile).

4. les concentrations S_1, S_2, S_3 et X_a sont toujours positives.

5. les concentrations de nitrate et de nitrite sont supposées mesurables en un certain nombre de points internes au réacteur et à la sortie.

Remarque:

En réalité, sur l'unité pilote il n'existe pas de capteurs permettant de mesurer les vitesses de réaction, la concentration de biomasse ainsi que la concentration d'éthanol. Il faut donc construire un observateur d'état et un estimateur de paramètres. Une procédure d'observation /estimation à structure variable peut être élaborée par analogie aux développements effectués pour le modèle monosubstrat.

Etant donné que notre objectif ici n'est pas de développer la théorie de l'estimation non linéaire, nous supposerons par la suite que la structure du modèle est entièrement connue.

Il est à signaler qu'un observateur de type asymptotique et un estimateur basé sur tout l'état ont été déjà élaborés par [Bourrel, 1996][Babary & Bourrel, 1999] pour le même modèle du bioréacteur de dénitrification.

3.4. COMMANDE MONOVARIABLE ET COMMANDE MULTIVARIABLE

Le premier objectif de cette étude est la régulation de la somme des concentrations des produits nitrés à la sortie du biofiltre à une valeur désirée fixée par une norme en vigueur. Cependant, il est toujours important pour l'industriel d'optimiser le rajout du composé carboné (éthanol): source de carbone nécessaire à la croissance des micro-organismes tout en assurant un compromis entre la qualité de l'eau à potabiliser et le coût de l'opération de dénitrification.

Des résultats ont été déjà obtenus dans le cas d'une commande linéarisante monovisible [Bourrel, 1996] et dans le cas d'une commande à structure variable monovisible par un schéma de commande équivalente augmentée à structure variable [Boubaker *et al.*, 1997a] [Babary & Bourrel, 1999]. Ces résultats sont encourageants en terme de régulation; cependant certains problèmes liés aux conditions expérimentales et aux contraintes économiques ont été soulevés lors de l'implantation sur site réel. En effet certaines contraintes n'étaient pas prises en considération lors des essais en simulation.

Suite à l'ensemble des remarques déjà faites nous proposerons dans ce paragraphe une comparaison entre les performances de la commande monovisible et celles de la commande multivisible. Nous utiliserons pour cette comparaison une technique de commande à structure variable linéarisante par retour d'état statique [Boubaker *et al.*, 1998c] différente de celles déjà établies dans [Bourrel, 1996] [Boubaker *et al.*, 1997a] [Babary & Bourrel, 1999]. Nous n'avons pas non plus utilisé cette technique pour le modèle monosubstrat. Nous proposerons dans un premier temps une régulation du pilote par le débit d'alimentation ensuite par la concentration d'éthanol rajoutée à l'entrée du bioréacteur. Nous soulèverons dans les deux cas les problèmes posés par une commande monovisible. Nous présenterons enfin l'intérêt d'une commande multivisible [Boubaker *et al.*, 1999].

Considérons le système (4.80) à la sortie du bioréacteur, on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_{1_{N+1}}}{dt} = -\frac{F}{\$E} \sum_{j=1}^{N+1} l_{N+1,j} S_{1_j} - \frac{F}{\$E} l_{N+1,0} S_{1,in} - k_1 \mu_{1_{N+1}} X_{a_{N+1}} \\ \frac{dS_{2_{N+1}}}{dt} = -\frac{F}{\$E} \sum_{j=1}^{N+1} l_{N+1,j} S_{2_j} + k_1 \mu_{1_{N+1}} X_{a_{N+1}} - k_2 \mu_{2_{N+1}} X_{a_{N+1}} \\ \frac{dS_{3_{N+1}}}{dt} = -\frac{F}{\$E} \sum_{j=1}^{N+1} l_{N+1,j} S_{3_j} - \frac{F}{\$E} S_{3,in} l_{N+1,0} - k_3 \mu_{1_{N+1}} X_{a_{N+1}} - k_4 \mu_{2_{N+1}} X_{a_{N+1}} \\ \frac{dX_{a_{N+1}}}{dt} = (\mu_{1_{N+1}} + \mu_{2_{N+1}} - k_{d_i}) X_{a_{N+1}} \\ k_{d_i} = (\mu_{1_{N+1}} + \mu_{2_{N+1}}) \frac{X_{a_{N+1}}}{X_{a_{max}}} \end{array} \right. \quad (4.81)$$

posons:

$$x_1 = S_{1_{N+1}}; \quad x_2 = S_{2_{N+1}}; \quad x_3 = S_{3_{N+1}}; \quad x_4 = X_{a_{N+1}}$$

$$\mu^1 = \mu_{1_{N+1}}; \quad \mu^2 = \mu_{2_{N+1}}$$

$$l = l_{N+1,N+1}; \quad l^0 = l_{N+1,0}; \quad k^d = k_{d_{N+1}}$$

$$v_1(t) = -\left(\sum_{j=1}^N l_{N+1,j} S_{1_j} + l_{N+1,0} S_{1,in} \right)$$

$$v_2(t) = -\left(\sum_{j=1}^N l_{N+1,j} S_{2_j} \right)$$

$$v_3(t) = -\left(\sum_{j=1}^N l_{N+1,j} S_{3_j} \right)$$

Nous obtenons alors le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\mathbf{F}}{\$E} v_1 - \frac{\mathbf{F}}{\$E} l x_1 - k_1 \mu^1 x_4 \\ \dot{x}_2 = \frac{\mathbf{F}}{\$E} v_2 - \frac{\mathbf{F}}{\$E} l x_2 + k_1 \mu^1 x_4 - k_2 \mu^2 x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{\mathbf{F}}{\$E} v_3 - \frac{\mathbf{F}}{\$E} l x_3 - \frac{\mathbf{F}}{\$E} S_{3,in} l^0 - k_3 \mu^1 x_4 - k_4 \mu^2 x_4 \\ \dot{x}_4 = (\mu^1 + \mu^2 - k^d) x_4 \end{cases} \quad (4.82)$$

Dans ce qui suit nous proposerons pour le système (4.82) une régulation de la variable de sortie par une commande monovariante puis par une commande multivariante.

◆ Commande à structure variable monovariante par retour d'état statique

Les résultats présentés dans ce paragraphe concernent la commande à structure variable monovariante. La variable de commande est soit **le débit d'alimentation** soit **la concentration d'éthanol rajoutée à l'entrée du bioréacteur**.

• Commande par le débit d'alimentation

Considérons pour le système (4.82) le débit d'alimentation comme variable de commande ou de façon équivalente la vitesse d'alimentation:

$$u_1 = F(t)/\$E \quad (4.83)$$

et comme variable de sortie la somme des concentrations de nitrate et de nitrite, soit:

$$y_1 = x_1 + x_2 \quad (4.84)$$

En considérant la variable d'entrée (4.83), la variable de sortie (4.84) et le système (4.82) on peut écrire par un changement de variable:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = u_1(v_1 + v_2) - u_1 l(x_1 + x_2) - k_2 \mu^2 x_4 \\ y_1 = \eta_1 \end{cases} \quad (4.85)$$

Définissons une surface de glissement définie par:

$$\sigma_1 = y_1 - y_{1d} = x_1 + x_2 - y_{1d} \quad (4.86)$$

où y_{1d} est la valeur désirée constante de la variable de sortie (4.84). Définissons aussi la condition de glissement suivante:

$$\dot{\sigma}_1 = -\mathbf{M}_1 \text{sat}(\sigma_1) \quad (4.87)$$

En dérivant l'équation (4.86) et en l'égalisant à (4.87) on obtient l'égalité suivante:

$$\frac{dy_1}{dt} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -\mathbf{M}_1 \text{sat}(\sigma_1) \quad (4.88)$$

En utilisant la forme canonique (4.85) et l'équation (4.88) on obtient la commande à structure variable suivante:

$$u_1 = \frac{k_2 \mu^2 x_4 - \mathbf{M}_1 \text{sat}(\sigma_1)}{(v_1 - l x_1 + v_2 - l x_2)} \quad (4.89)$$

Simulation et commentaires

Afin de simuler le fonctionnement du processus modélisé par les équations (4.81), les équations différentielles ont été intégrées par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 à pas fixe égal à 1 minute 30 secondes. Les valeurs des variables générées par tous les algorithmes développés dans ce chapitre sont acquises avec une période d'échantillonnage $\Delta T = 15$ minutes. Le choix optimal du triplet (N, p, q) dans l'application de la méthode de collocation orthogonale correspond aux paramètres:

$$N = 4, \quad p = 1, \quad q = 1.$$

Les points de collocation sont alors placés aux positions suivantes:

$$[0.01 \quad 0.36 \quad 0.64 \quad 0.88 \quad 1].$$

Les simulations ont été effectuées avec les valeurs initiales suivantes:

$$\begin{cases} S_{1i}(t=0) = 16.93 \text{g[N]} / \text{m}^3 \\ S_{2i}(t=0) = 0 \text{g[N]} / \text{m}^3 \\ S_{3i}(t=0) = 101.5 \text{g[DCO]} / \text{m}^3 \\ X_{ai}(t=0) = 625 \text{g[DCO]} / \text{m}^3 \end{cases} \quad i = 1, \dots, N+1$$

et les valeurs des paramètres suivantes:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 0.52; \quad \eta_g = 0.8; \quad X_{a_{\max}} = 675\text{g[DCO]}/\text{m}^3; \\ \mu_{1_{\max}} &= 0.32\text{h}^{-1}; \quad \mu_{2_{\max}} = 0.36\text{h}^{-1}; \\ K_1 &= 1.5\text{g[N]}/\text{m}^3; \quad K_2 = 1\text{g[N]}/\text{m}^3; \quad K_3 = 40\text{g[N]}/\text{m}^3; \\ y_{h_1} &= 0.56; \quad y_{h_2} = 0.54;\end{aligned}$$

Nous supposons que les deux variables de commande sont bornées:

$$\begin{aligned}u_{1_{\max}} &= 12; \quad u_{1_{\min}} = 2 \\ u_{2_{\max}} &= 185; \quad u_{2_{\min}} = 0\end{aligned}$$

Pour toutes les simulations de ce paragraphe et pendant la première heure, le système fonctionne en boucle ouverte; ensuite la loi de commande (4.89) est appliquée dans le but de réguler la somme des concentrations des produits nitrés à la sortie du bioréacteur à une valeur désirée. Les résultats obtenus par l'algorithme (4.89) sont illustrés sur les figures 4.12 à 4.14. L'évolution de la somme des concentrations des produits nitrés sur la figure 4.12 montre une bonne régulation aux différents paliers de consigne ainsi qu'une bonne poursuite de la consigne. Sur la figure 4.13 on simule à $t = 40\text{h}$ une augmentation de la pollution de l'eau en nitrate de $S_1(z, t = 40) = 16.93\text{g[N]}/\text{m}^3$ à $S_1(z, t = 40) = 22\text{g[N]}/\text{m}^3$. L'évolution de la somme des concentrations des produits nitrés sur cette figure montre que la variable de sortie n'est plus capable de converger vers la consigne qui est dans ce cas $y_{1d} = 4\text{[N]}/\text{m}^3$. Nous avons aussi observé ce même problème pour certaines variations paramétriques engendrant une augmentation de la concentration du nitrate dans l'eau. Ce phénomène doit être rattaché au fait que la concentration de l'éthanol à l'entrée du bioréacteur n'est pas suffisante pour la croissance des micro-organismes qui vont consommer les nitrates. l'arrêt de la croissance des micro-organismes est en effet observable sur la courbe de la concentration de biomasse par une saturation de cette courbe avant que celle-ci atteigne sa valeur maximale.

Pour confirmer notre hypothèse, on reprend la même simulation sur la figure 4.14 en augmentant la concentration de l'éthanol à l'entrée du bioréacteur de $S_{3,\text{in}}(t) = 101.5\text{g[N]}/\text{m}^3$ à $S_{3,\text{in}}(t) = 185\text{g[N]}/\text{m}^3$. Nous avons alors remarqué dans ce cas que la sortie converge bien vers la valeur désirée. Un abaque pourrait être envisagé dans le but de moduler la concentration de l'éthanol à l'entrée du bioréacteur en fonction de la perturbation sur la concentration du nitrate; cependant il faut noter sur la figure 4.14 que lorsque la régulation se rétablit, la qualité de l'eau se détériore puisque la concentration de l'éthanol n'est plus consommée en totalité et il en reste trop à la sortie du bioréacteur. Pour mieux contrôler la consommation de l'éthanol nous allons appliquer dans la suite une commande par la concentration de l'éthanol à l'entrée du bioréacteur.

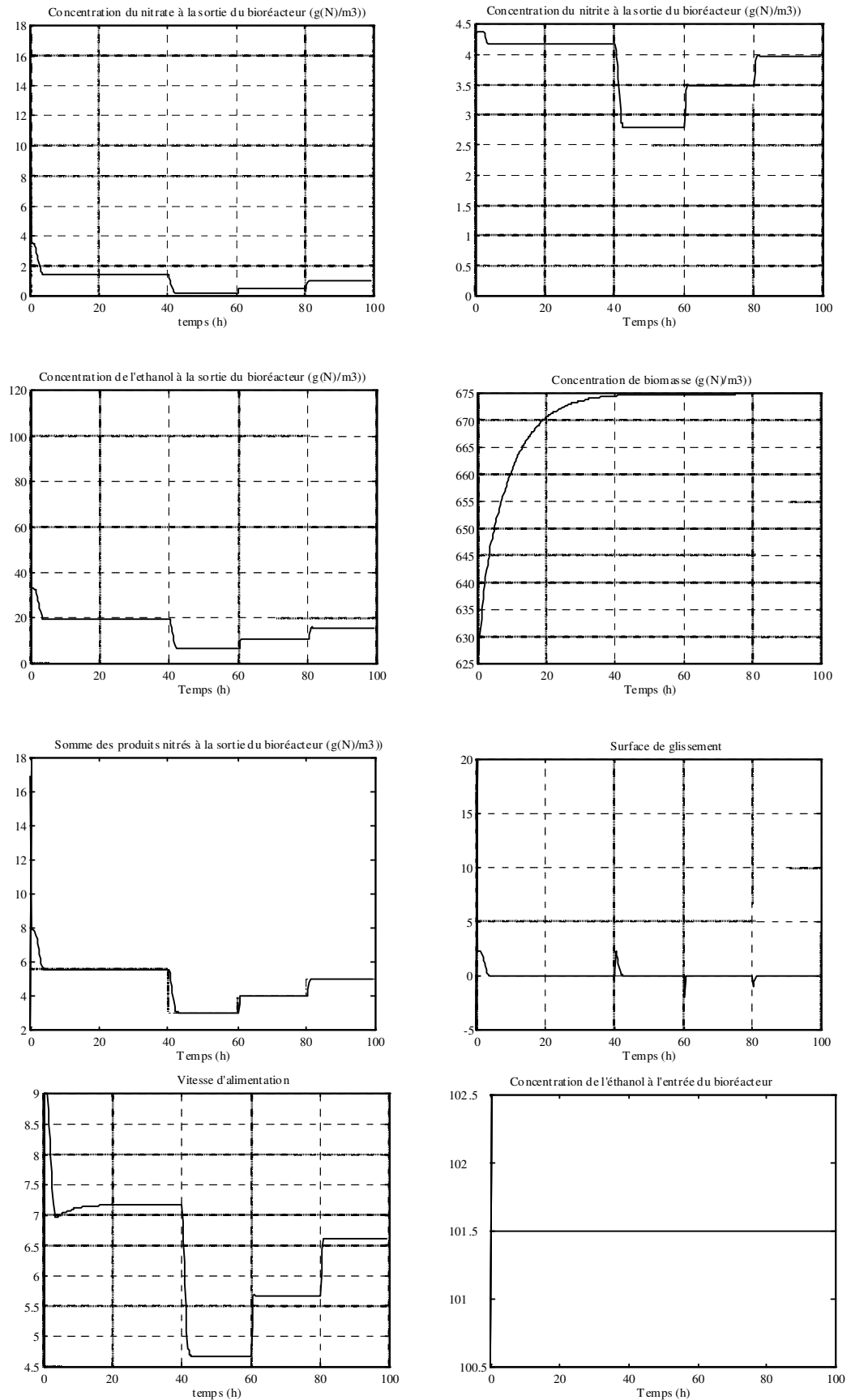


Figure 4.12. Régulation de la somme des concentrations des produits nitrés: algorithme de commande à structure variable par retour d'état statique monovariante par le débit d'alimentation

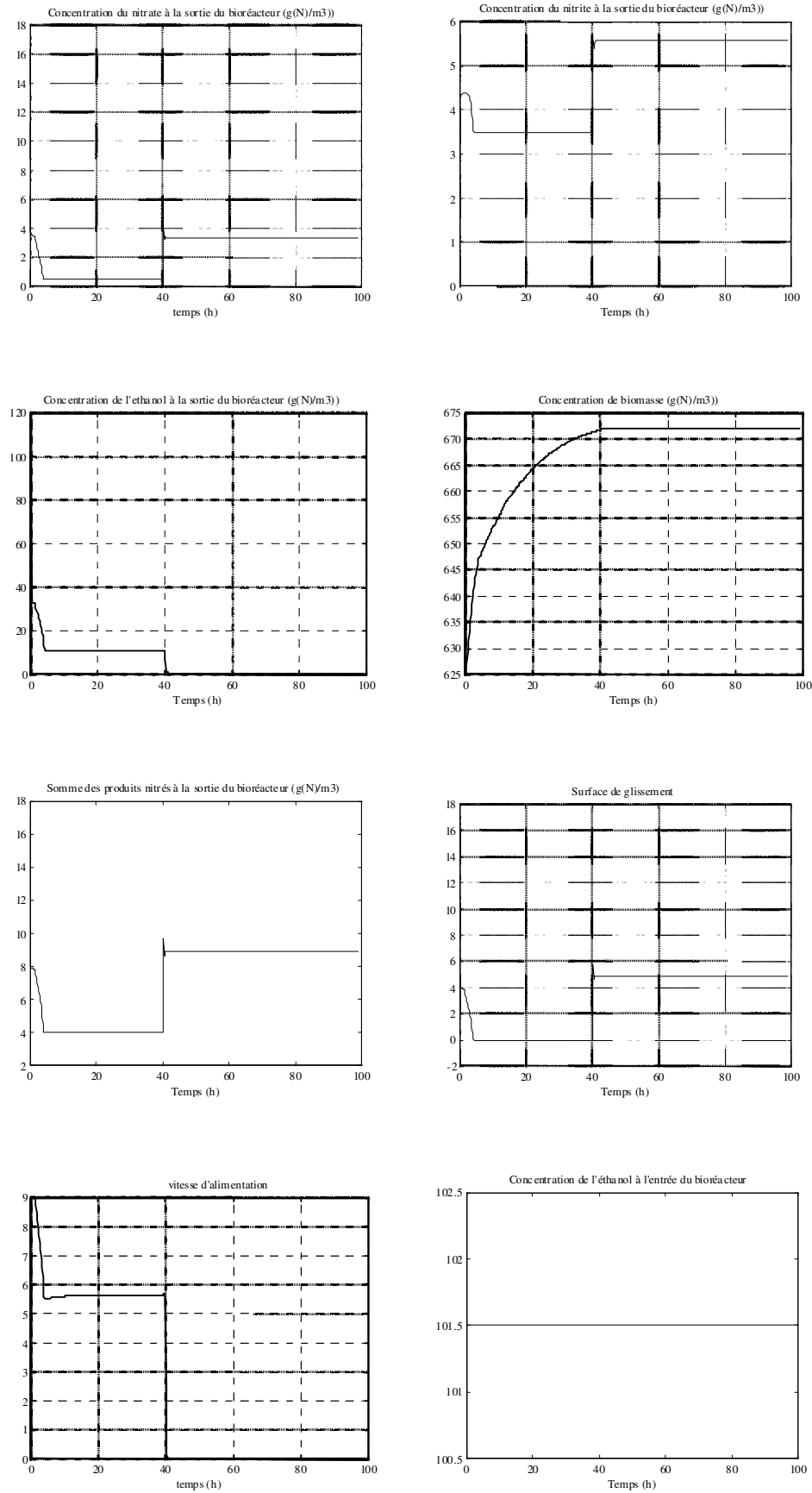


Figure 4.13. Robustesse de l'algorithme de commande à structure variable par retour d'état statique par le débit d'alimentation

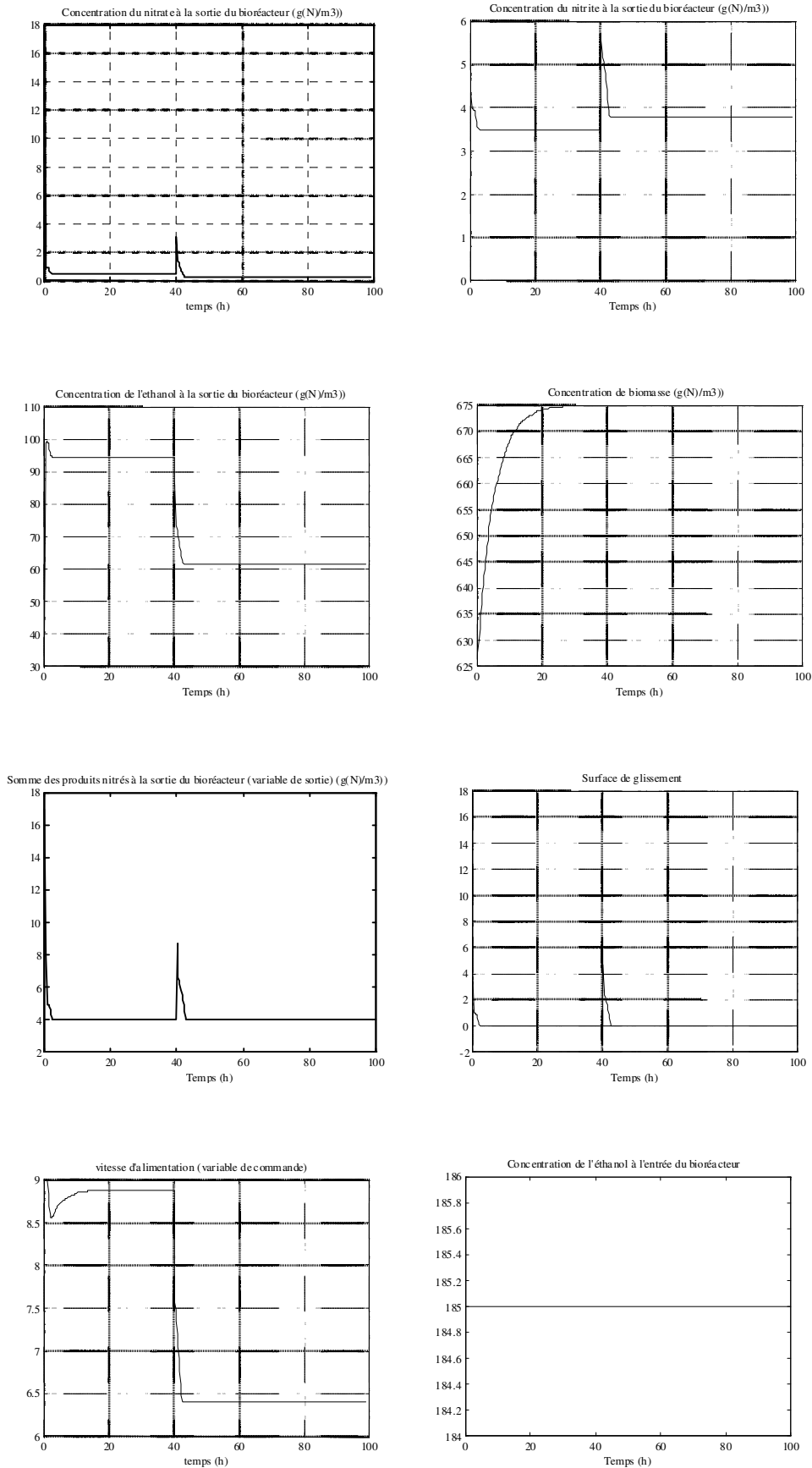


Figure 4.14. Robustesse de l'algorithme de commande à structure variable par retour d'état statique par le débit d'alimentation

- **Commande par la concentration d'éthanol rajoutée à l'entrée du bioréacteur**

Afin de surmonter les problèmes posés par la commande par le débit d'alimentation, considérons pour le système (4.82) la concentration d'éthanol rajoutée à l'entrée du bioréacteur comme variable de commande, soit:

$$u_2 = S_{3,\text{in}}(t) \quad (4.90)$$

La variable de sortie est toujours représentée par l'équation (4.84). La première remarque est que la variable u_2 n'apparaît pas dans l'équation (4.84). Posons alors:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \mu^1 x_4 \\ \varphi_2 = \mu^2 x_4 \end{cases} \quad (4.91)$$

La troisième équation de (4.82) peut s'écrire alors:

$$\mu^2 x_4 = \frac{1}{k_4} [u_1 v_3 - u_1 \mathbf{l}x_3 - u_1 u_2 \mathbf{l}^0 - k_3 \mu^1 x_4 - \dot{x}_3] \quad (4.92)$$

Dans ce cas le système (4.82) peut s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 v_1 - u_1 \mathbf{l}x_1 - k_1 \varphi^1 \\ \dot{x}_2 = u_1 \left((v_2 - \mathbf{l}x_2) - \frac{k_2}{k_4} (v_3 - \mathbf{l}x_3) \right) + \frac{k_2}{k_4} \dot{x}_3 + \left(k_1 + \frac{k_2 k_3}{k_4} \right) \varphi^1 + \frac{k_2}{k_4} u_1 \mathbf{l}^0 u_2 \\ \dot{x}_4 = \varphi^1 \left(1 - \frac{k_3}{k_4} \right) - \frac{1}{k_4} \dot{x}_3 + \frac{1}{k_4} u_1 [v_3 - \mathbf{l}x_3] - k^d x_4 - \frac{1}{k_4} u_1 u_2 \mathbf{l}^0 \end{cases} \quad (4.93)$$

Le système (4.93) peut être écrit sous la forme canonique de commandabilité suivante:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = u_1 \left((v_1 - \mathbf{l}x_1) + (v_2 - \mathbf{l}x_2) - \frac{k_2}{k_4} (v_3 - \mathbf{l}x_3) \right) + \frac{k_2}{k_4} \dot{x}_3 + \left(\frac{k_2 k_3}{k_4} \right) \varphi^1 + \frac{k_2}{k_4} u_1 \mathbf{l}^0 u_2 \\ y_1 = \eta_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \end{cases} \quad (4.94)$$

Conservons la surface de glissement définie par (4.86) et la condition de glissement définie par (4.87).

En dérivant l'équation (4.86) et en l'égalisant à (4.87) on obtient l'égalité (4.88). En utilisant la forme canonique (4.94) et l'équation (4.88) on obtient la commande à structure variable suivante:

$$u_2 = \frac{k_4}{k_2 \mathbf{I}^0} \left((v_1 - \mathbf{I}x_1) + (v_2 - \mathbf{I}x_2) - \frac{k_2}{k_4} (v_3 - \mathbf{I}x_3) \right) + \frac{k_3 \varphi^1}{u_1 \mathbf{I}^0} + \frac{k_3}{u_1 \mathbf{I}^0} \dot{x}_3 + \frac{k_4}{k_2 \mathbf{I}^0 u_1} \mathbf{M}_1 \text{sat}(\sigma_1) \quad (4.95)$$

Pour tester les performances de la commande à structure variable par la concentration d'éthanol et sa robustesse à des perturbations extérieures des simulations ont été effectuées en considérant les mêmes conditions opératoires de simulation que celles considérées pour la commande à structure variable par le débit d'alimentation.

Ainsi, pendant la première heure le système fonctionne en boucle ouverte ensuite la loi de commande (4.95) est appliquée dans le but de réguler la somme des concentrations des produits nitrés à la sortie du bioréacteur à une valeur désirée.

Les résultats obtenus par l'algorithme (4.89) sont illustrés sur les figures 4.15 à 4.17. L'évolution de la somme des concentrations des produits nitrés sur la figure 4.15 montre une bonne régulation aux différents paliers de consigne ainsi qu'une bonne poursuite de la consigne sauf pour la consigne $y_{1d} = 3[\text{N}]/\text{m}^3$. Dans ce cas la variation brusque de la consigne provoque des fluctuations de la variable de sortie et de la variable d'entrée; la consommation de l'éthanol devient importante (valeur non tolérée par le procédé réel) et la qualité de l'eau devient très médiocre (elle contient une importante quantité d'alcool).

Sur la figure 4.16 on simule à $t = 40\text{h}$ une augmentation de la pollution de l'eau en nitrate de $S_1(z, t = 40) = 16.93\text{g}[\text{N}]/\text{m}^3$ à $S_1(z, t = 40) = 22\text{g}[\text{N}]/\text{m}^3$. L'évolution de la somme des concentrations des produits nitrés sur cette figure montre que la variable de sortie n'est plus capable de converger vers la consigne qui est dans ce cas $y_{1d} = 4[\text{N}]/\text{m}^3$; la consommation de l'éthanol devient importante (valeur non tolérée par le procédé réel) et la qualité de l'eau devient très médiocre. Ce phénomène doit être rattaché au débit d'alimentation.

Pour confirmer notre hypothèse, on reprend la même simulation sur la figure 4.17 en diminuant la vitesse d'alimentation de $u_1 = 9\text{m}/\text{h}$ à $u_1 = 6\text{m}/\text{h}$. Nous avons alors remarqué dans ce cas que la sortie converge bien vers la valeur désirée. Un abaque pourrait être envisagée dans le but de moduler le débit d'alimentation en fonction de la perturbation sur la concentration du nitrate; cependant il faut noter sur la figure 4.17 que lorsque la régulation se rétabli, la qualité de l'eau se détériore puisque la concentration de l'éthanol n'est plus consommée en totalité et il en reste assez à la sortie du bioréacteur.

Il devient clair qu'il est impossible d'optimiser le fonctionnement du bioprocédé par une commande monovariante. Nous allons par suite tenter dans la suite d'appliquer une commande multivariante.

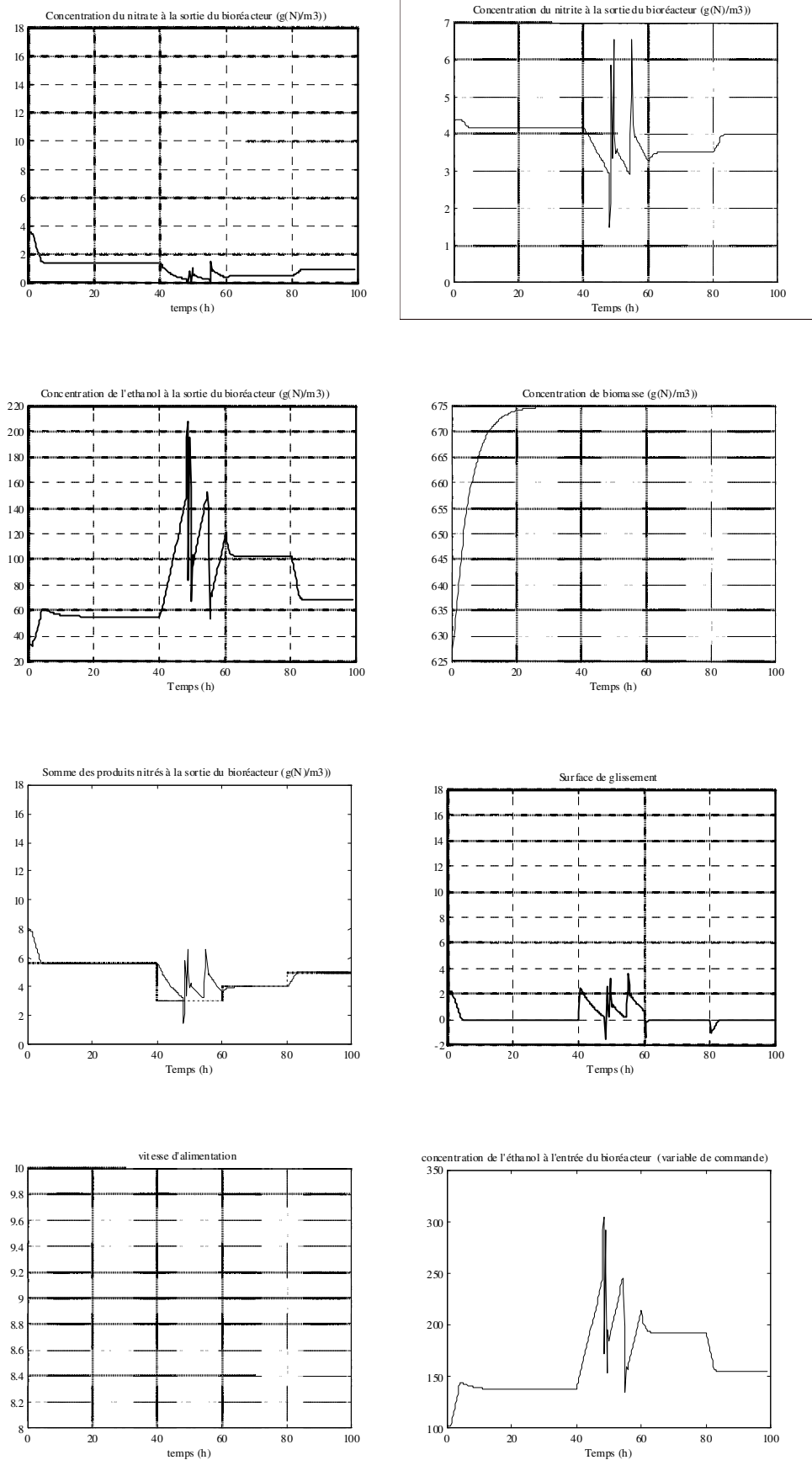


Figure 4.15. Régulation de la somme des concentrations des produits nitrés: algorithme de commande à structure variable par retour d'état statique monovariable par le débit d'alimentation

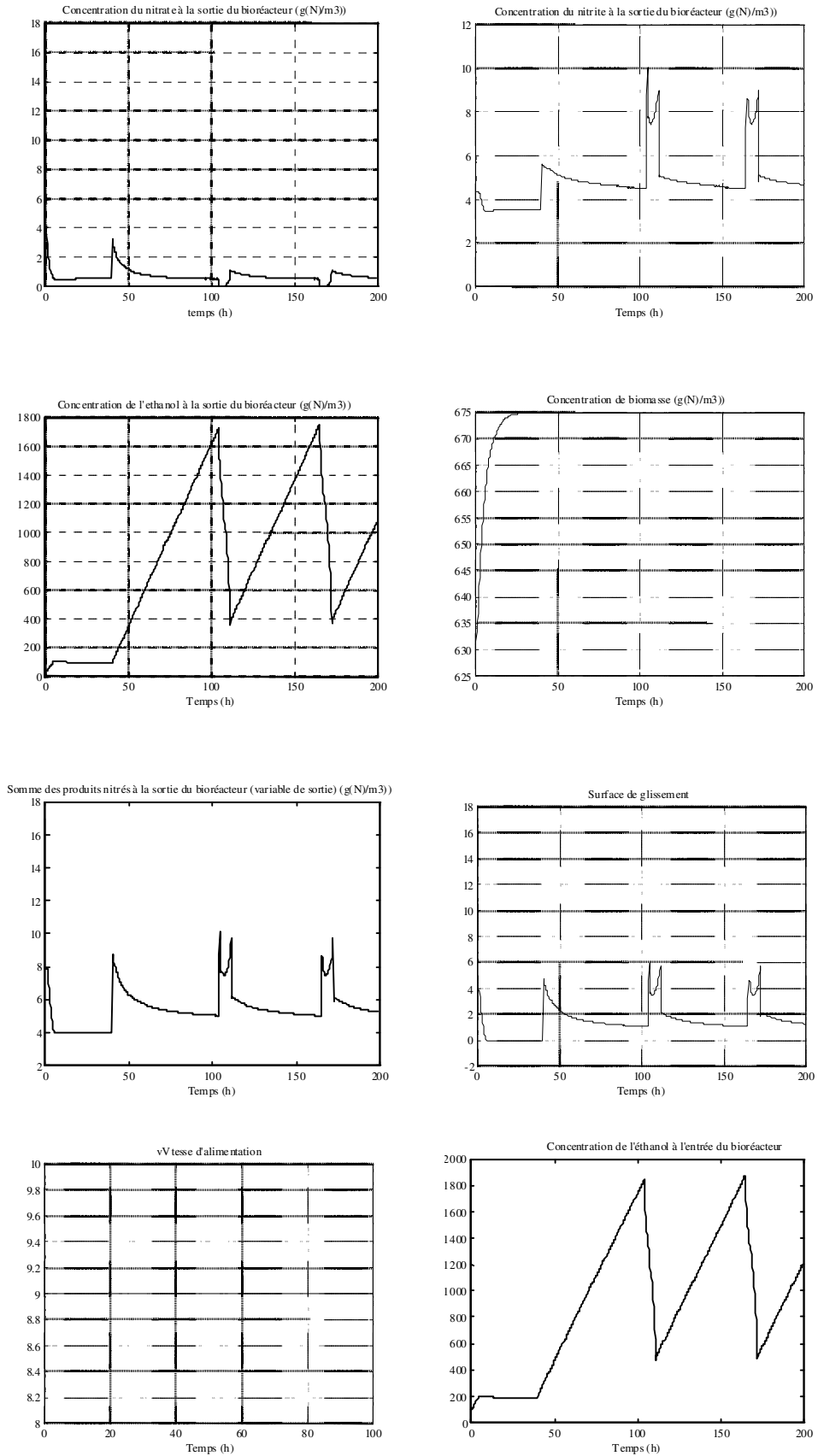


Figure 4.16. Robustesse de l'algorithme de commande à structure variable par retour d'état statique par la concentration d'éthanol aux perturbations extérieures

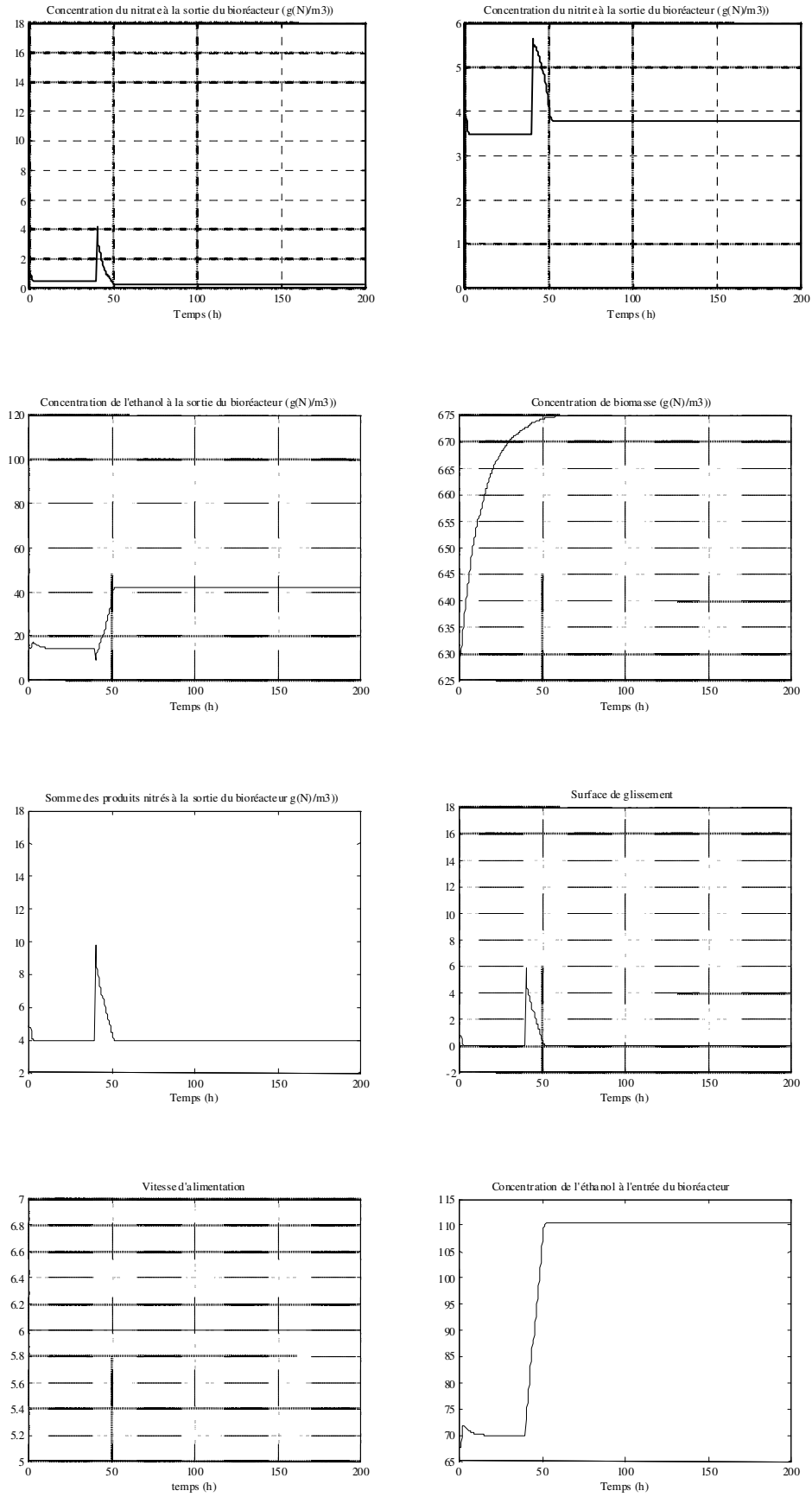


Figure 4.17. Robustesse de l'algorithme de commande à structure variable par retour d'état statique par la concentration d'éthanol aux perturbations extérieures

Les résultats présentés précédemment ont montré que sous certaines perturbations ou variations paramétriques engendrant une augmentation de la concentration du nitrate la commande monovariante par le débit d'alimentation ou par la concentration d'éthanol est incapable d'assurer une régulation de la somme des concentrations des produits nitrés; de plus une augmentation importante de la concentration de l'éthanol à l'entrée du bioréacteur est observée ce qui n'est pas apprécié de point de vue économique par les industriels et n'est pratiquement pas réalisable sur le site réel. Une autre conséquence de cette augmentation de la concentration de l'éthanol à l'entrée du bioréacteur est la détérioration de la qualité de l'eau puisqu'elle va contenir plus d'alcool. Par contre nous avons observé (figure 14 et 17) que si on accompagne la perturbation d'une variation de la deuxième variable d'entrée en plus de la variation de la variable de commande la régulation pourrait être assurée.

Nous allons tenter donc dans ce qui suit de calculer et d'implanter une commande multivariante à structure variable par retour d'état statique dans le but d'optimiser le fonctionnement de l'unité pilote.

Commande à structure variable multivariante par retour d'état statique

La première difficulté auquel nous sommes confrontés lors de l'implantation d'une commande multivariante est que les deux variables de commande u_1 exprimée par la relation (4.83) et u_2 exprimée par la relation (4.90) dans le système (4.81) sont couplées. Afin de découpler le système (4.81) nous avons pensé à introduire le vecteur de commande intermédiaire suivant:

$$U^T = [U_1 \quad U_2] = [u_1 \quad u_1 u_2] \quad (4.96)$$

Posons comme vecteur de sortie

$$y^T = [y_1 \quad y_2]$$

avec

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (4.97)$$

Le système (4.82) peut être ainsi exprimée sous la forme canonique suivante:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{11} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = U_1(v_1 + v_2) - U_1 \mathbf{1}(x_1 + x_2) - k_2 \mu^2 x_4 \\ y_1 = \eta_1 \\ \dot{\eta}_{21} = \dot{x}_3 = U_1 v_3 - U_1 \mathbf{1} x_3 - U_2 \mathbf{1}^0 - k_3 \mu^1 x_1 - k_4 \mu^2 x_4 \\ y_2 = \eta_2 \end{cases} \quad (4.98)$$

Définissons comme surface de glissement la différence entre les sorties du modèle et ses valeurs comme suit:

$$\sigma(x) = [\sigma_1 \quad \sigma_2]^T$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 - y_{1d} \\ \sigma_2 = x_3 - y_{2d} \end{cases} \quad (4.99)$$

Imposons aux surfaces de glissement les conditions de glissement suivantes:

$$\dot{\sigma}_i = -M_i \text{sat}(\sigma_i) \quad i = 1, 2 \quad (4.100)$$

Les lois de commande sont ainsi déduites à partir de (4.98), (4.99) et (4.100):

$$\begin{cases} U_1 = \frac{k_2 \mu^2 x_4 - M_1 \text{sat}(\sigma_1)}{(v_1 - l x_1 + v_2 - l x_2)} \\ U_2 = U_1 \frac{(v_3 - l x_3)}{l^0} - \frac{(k_3 \mu^1 + k_4 \mu^2) x_4}{l^0} + \frac{M_2 \text{sat}(\sigma_2)}{l^0} \end{cases} \quad (4.101)$$

On reprend les mêmes simulations que celles élaborées dans les cas monovariables avec les mêmes conditions opératoires de simulation. Sur la figure 4.18 on simule donc à $t = 40h$ une augmentation de la pollution de l'eau en nitrate de $S_1(z, t = 40) = 16.93g[N]/m^3$ à $S_1(z, t = 40) = 22g[N]/m^3$. L'évolution de la somme des concentrations des produits nitrés sur cette figure montre que la variable de sortie converge rapidement vers la consigne $y_{1d} = 4[N]/m^3$; la consommation de l'éthanol est régulée à la valeur désirée $y_{1d} = 25[DCO]/m^3$. La qualité de l'eau est donc améliorée.

Comparés aux résultats obtenus par une commande monovariante soit par le débit d'alimentation soit la concentration d'éthanol à l'entrée du bioréacteur la commande multivariante possède plusieurs avantages. D'une part, non seulement la somme des produits nitrés est régulé dans l'eau mais aussi la concentration de l'éthanol. D'autre part, la commande multivariante possède un intérêt économique puisqu'elle optimise la consommation de l'éthanol à l'entrée du bioréacteur tout en améliorant la qualité de l'eau.

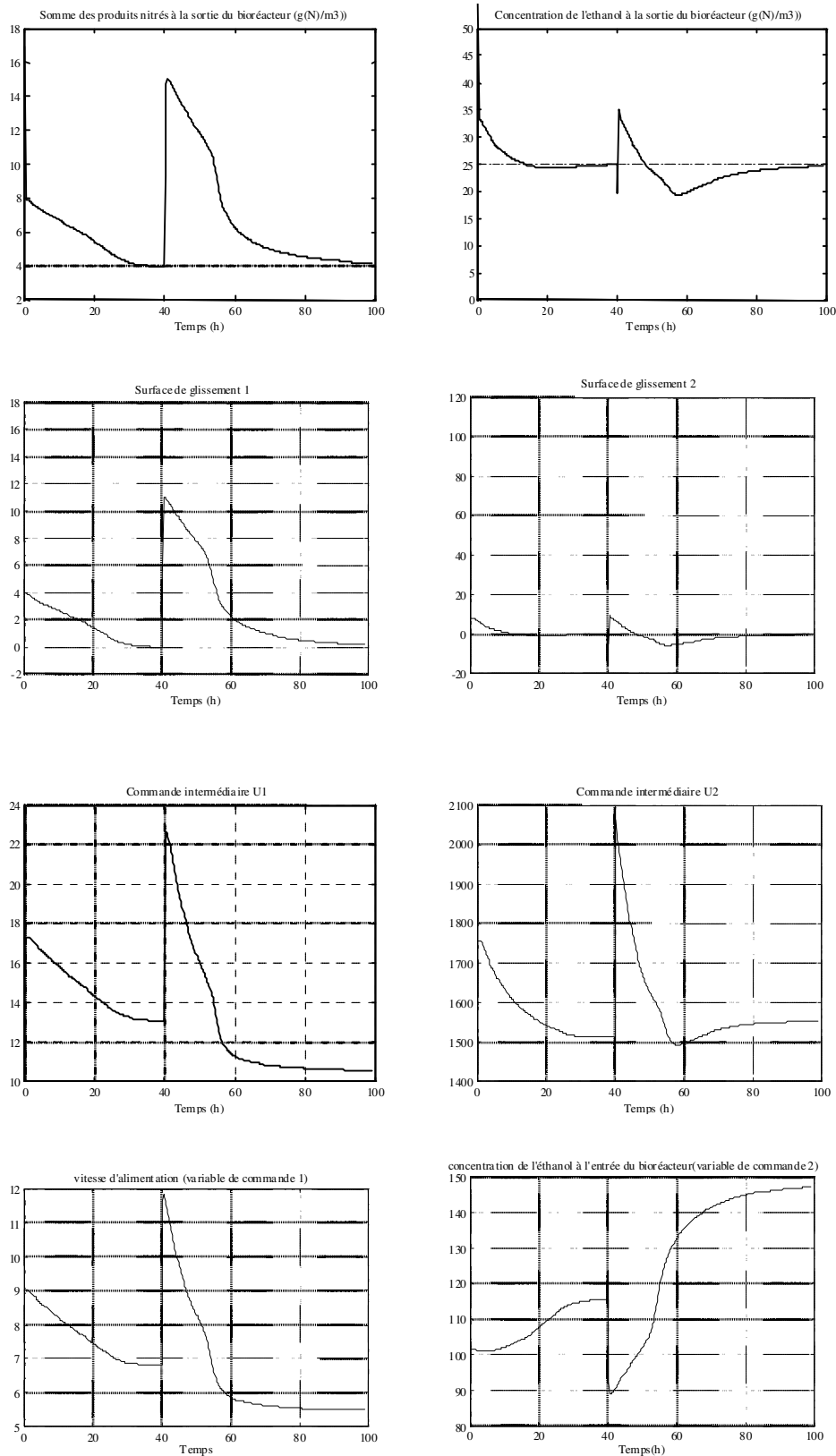


Figure 4.18. Robustesse de l'algorithme de commande à structure variable multivariable par retour d'état statique aux perturbations extérieures

3.5. ETUDE COMPARATIVE

Dans le paragraphe précédent nous avons montré que l'implantation d'une commande multivariable permet d'optimiser le fonctionnement du procédé de dénitrification en maîtrisant la consommation de l'éthanol à l'entrée du bioréacteur tout en améliorant la qualité de l'eau en présence de perturbations. Dans le but d'améliorer le fonctionnement du bioprocédé, nous allons proposer dans ce qui suit trois algorithmes de commande à structure variable multivariables avec découplage entrées/sorties. L'objectif est de comparer les performances de ces algorithmes et de distinguer le plus performant.

- **Commande à structure variable basée sur le modèle de dimension finie**

On se propose dans ce qui suit de déterminer deux lois de commande multivariables basées sur le modèle à paramètres localisés du bioréacteur de dénitrification (4.81). Les développements ont été publiés dans [Boubaker et al., 1998a].

Approche de la commande équivalente augmentée

Le modèle à paramètres localisés (4.81) peut être exprimé par la représentation d'état (4.47), soit:

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x, t) + \mathbf{g}(x, t)u$$

où

$$\mathbf{f}(x, t) = \begin{bmatrix} \vdots \\ k_1 \mu_{1_i} x_{ai} \\ (k_1 \mu_{1_i} - k_2 \mu_{2_i}) x_{ai} \\ -(k_3 \mu_{1_i} + k_4 \mu_{2_i}) x_{ai} \\ (\mu_{1_i} + \mu_{2_i} - k_{d_i}) x_{ai} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(x, t) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ -\left(\sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{1}_{N+1,j} S_{2_j} \right) & 0 \\ -\left(\sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{1}_{N+1,j} S_{1_j} + \mathbf{1}_{N+1,0} S_{1,in} \right) & 0 \\ -\left(\sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{1}_{N+1,j} S_{3_j} \right) & -\mathbf{1}_{N+1,0} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{x}^T = [s_{1_1} \quad s_{2_1} \quad s_{3_1} \quad x_{a_1} \quad \dots \quad \dots \quad s_{1_{N+1}} \quad s_{2_{N+1}} \quad s_{3_{N+1}} \quad x_{a_{N+1}}]$$

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_1 u_2]$$

u_1 et u_2 sont les variables de commande définies respectivement par les relations (4.83) et (4.90). Le vecteur de sortie du modèle est le suivant:

$$\begin{aligned}
 y^T &= [y_1 \quad y_2] \\
 \begin{cases} y_1 = s_{1_{N+1}} + s_{2_{N+1}} \\ y_2 = s_{3_{N+1}} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

La surface de glissement est définie comme étant la différence entre le vecteur de sortie

y et le vecteur des valeurs désirés $y_d = [y_{1_d} \quad y_{2_d}]^T$ comme suit:

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) &= [\sigma_1 \quad \sigma_2]^T \\
 \text{avec} \\
 \begin{cases} \sigma_1 = s_{1_{N+1}} + s_{2_{N+1}} - y_{1_d} \\ \sigma_2 = s_{3_{N+1}} - y_{2_d} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

La surface de glissement peut être exprimée ainsi:

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) &= P^T x - y_d \\
 \text{avec } P^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

Comme il a été mentionné précédemment, la commande à structure variable équivalente augmentée à structure variable consiste à trouver une commande de la forme (4.54).

Les calculs donnent:

$$\begin{aligned}
 \left[\left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^T g(x, t) \right] &= \begin{pmatrix} - \left(\sum_{j=1}^{N+1} l_{N+1,j} (s_{1_j} + s_{2_j}) + l_{N+1,0} s_{1,in} \right) & 0 \\ - \sum_{j=1}^{n+1} l_{N+1,j} s_{3_j} & -l_{N+1,0} \end{pmatrix} \\
 \left[\left(\frac{d\sigma}{dx} \right)^T f(x, t) \right] &= \begin{pmatrix} -k_2 \mu_{2_{N+1}} x_{a_{N+1}}(t) \\ - (k_3 \mu_{1_{N+1}} + k_4 \mu_{2_{N+1}}) x_{a_{N+1}}(t) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi la commande équivalente augmentée suivante:

$$u_{eq} = \begin{pmatrix} u_{1eq} & -u_{1eq} \frac{\left(\sum_{j=1}^{N+1} l_{N+1,j} s_{3_j} \right)}{l_{N+1,0}} - \frac{(k_3 \mu_{1_{N+1}} + k_4 \mu_{2_{N+1}}) x_{a_{N+1}}}{l_{N+1,0}} \end{pmatrix}^T \tag{4.104}$$

avec

$$u_{1eq} = \frac{-k_2 \mu_{2_{N+1}} x_{a_{N+1}}}{\left(\sum_{j=1}^{N+1} l_{N+1,j} s_{1_j} + s_{2_j} \right) + l_{N+1,0} s_{1,in}} \tag{4.105}$$

Simulations et commentaires:

Les simulations ont encore été effectuées avec les valeurs initiales suivantes:

$$\begin{cases} S_{1i}(t=0) = 16.93\text{g}[\text{N}] / \text{m}^3 \\ S_{2i}(t=0) = 0\text{g}[\text{N}] / \text{m}^3 \\ S_{3i}(t=0) = 101.5\text{g}[\text{DCO}] / \text{m}^3; \quad i = 1, \dots, N+1 \\ X_{a_i}(t=0) = 625\text{g}[\text{DCO}] / \text{m}^3 \end{cases}$$

et les valeurs des paramètres suivantes:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0.52; \quad \eta_g = 0.8; \quad X_{a_{\max}} = 675\text{g}[\text{DCO}] / \text{m}^3; \\ \mu_{1_{\max}} &= 0.36\text{h}^{-1}; \quad \mu_{2_{\max}} = 0.32\text{h}^{-1}; \\ K_1 &= 1.5\text{g}[\text{N}] / \text{m}^3; \quad K_2 = 1\text{g}[\text{N}] / \text{m}^3; \quad K_3 = 40\text{g}[\text{N}] / \text{m}^3; \\ y_{h_1} &= 0.56; \quad y_{h_2} = 0.54; \end{aligned}$$

Les variables de commande sont bornées:

$$\begin{aligned} u_{1_{\max}} &= 12\text{m} / \text{h}; \quad u_{1_{\min}} = 2\text{m} / \text{h} \\ u_{2_{\max}} &= 185\text{g}[\text{DCO}] / \text{m}^3; \quad u_{2_{\min}} = 0\text{g}[\text{DCO}] / \text{m}^3 \end{aligned}$$

On laisse évoluer le système pendant 20h en boucle ouverte avec une vitesse d'écoulement de 9m/h. A l'instant $t = 20\text{h}$ on ferme la boucle en appliquant la loi de commande (4.105). Les résultats obtenus par l'algorithme (4.105) sont illustrés sur les figures 4.19 et 4.20.

Pour tester la robustesse de la loi de commande (4.105) vis-à-vis des variations de consignes nous avons élaborés des simulations avec les variations indiquées sur le tableau (4.3). Les résultats de simulation sont représentés sur la figure 4.19.

Temps (h)	y_{1_d} g[N] / m ³	y_{2_d} g[DCO] / m ³
0	boucle ouverte	
20	5	20
30	4.5	-
40	-	-
50	-	15
70	5.6	-
90	-	25
120	-	-

Tableau 4.3: Variations de consigne

Pour tester la robustesse de la loi de commande (4.105) vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations extérieures nous avons effectué des simulations avec les variations indiquées sur le tableau (4.4) sur les paramètres les plus influents. Les résultats de simulation obtenus sont représentés sur la figure 4.20.

Temps (h)	Variations paramétriques	$S_{1,in}$ g[N] / m ³	$y_{1,d}$	$y_{2,d}$
0	-	16.93	boucle ouverte	
20	—	-	5	20
30	$\mu_{1,max} = 0.4h^{-1}, \mu_{2,max} = 0.35h^{-1};$	-	-	-
40	$K_2 = 1.3g[N] / m^3$	-	-	-
50	$K_3 = 45g[N] / m^3$	-	-	-
60	-	18.5	-	-
100		-	-	-

Tableau 4.4. Variations paramétriques et perturbations extérieures

L'évolution des variables de sortie sur la figure 4.19 montre une bonne régulation aux différents paliers de consigne ainsi qu'une bonne poursuite de la consigne.

En présence des variations paramétriques et des perturbations extérieures (figure 4.20), les variables de commande réagissent assez rapidement; le système est robuste vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations extérieures mais on observe des oscillations sur les variables de sortie. Il ne s'agit pas du phénomène de broutement puisqu'on a vu que l'adjonction de la fonction sat(.) dans le cas monovarié permet de lisser les variables de commande. Il s'agit du phénomène de couplage des variables de commande qui sont au moins dans un rapport de 10.

Signalons que le paramètre ϕ_i est un paramètre délicat à régler puisqu'il introduit une erreur statique lorsque la bande de linéarisation de la fonction sat(.) augmente alors qu'il provoque l'apparition du phénomène de broutement lorsqu'elle devient très petite.

Il est à constater qu'une discontinuité d'amplitude très importante sur toutes les courbes à $t = 60h$ est observée. Ce pic est dû à l'augmentation de la pollution du nitrate dans l'eau.

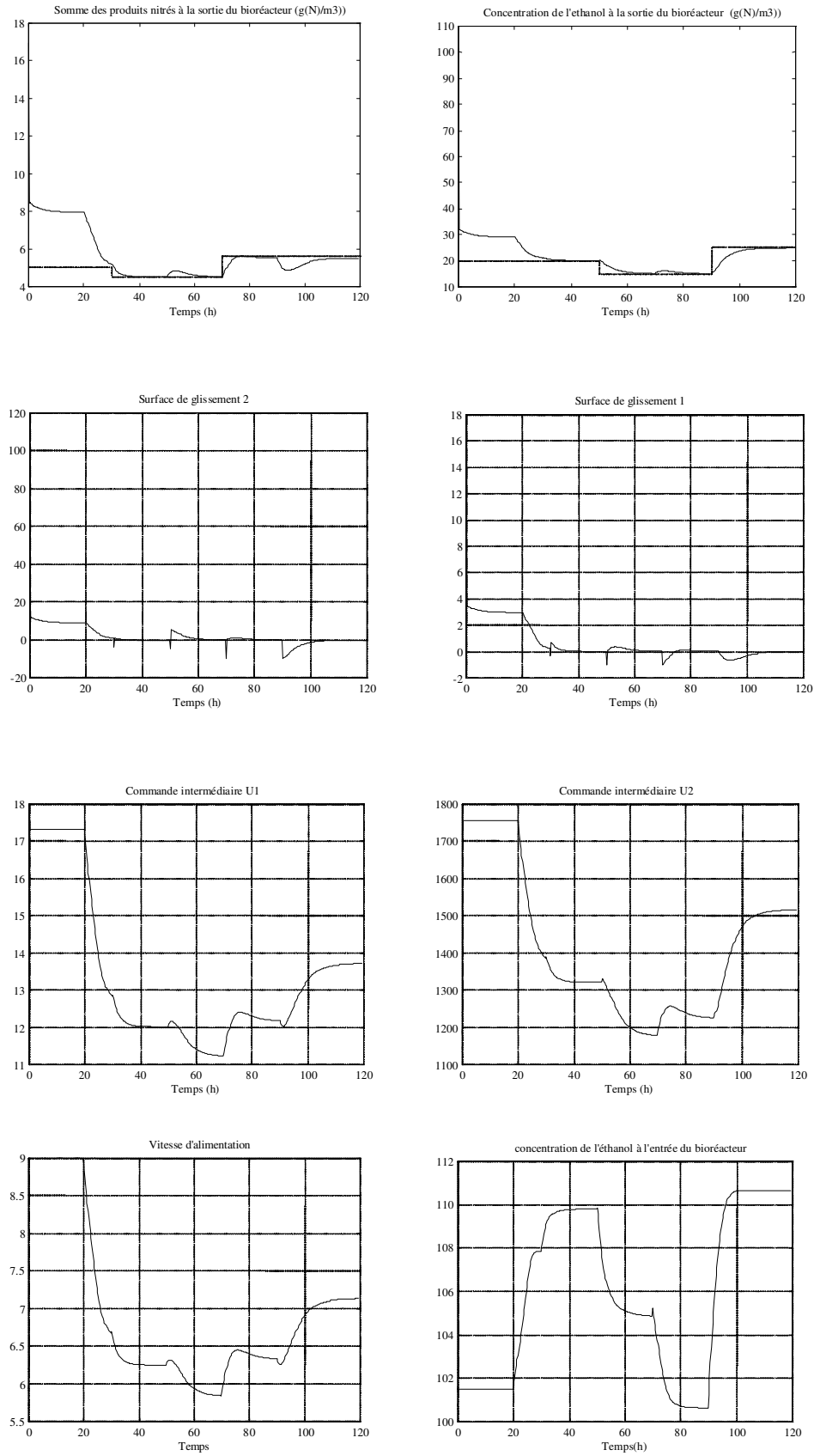


Figure 4.19. Robustesse vis-à-vis des variations de consignes: algorithme de commande équivalente augmentée à structure variable

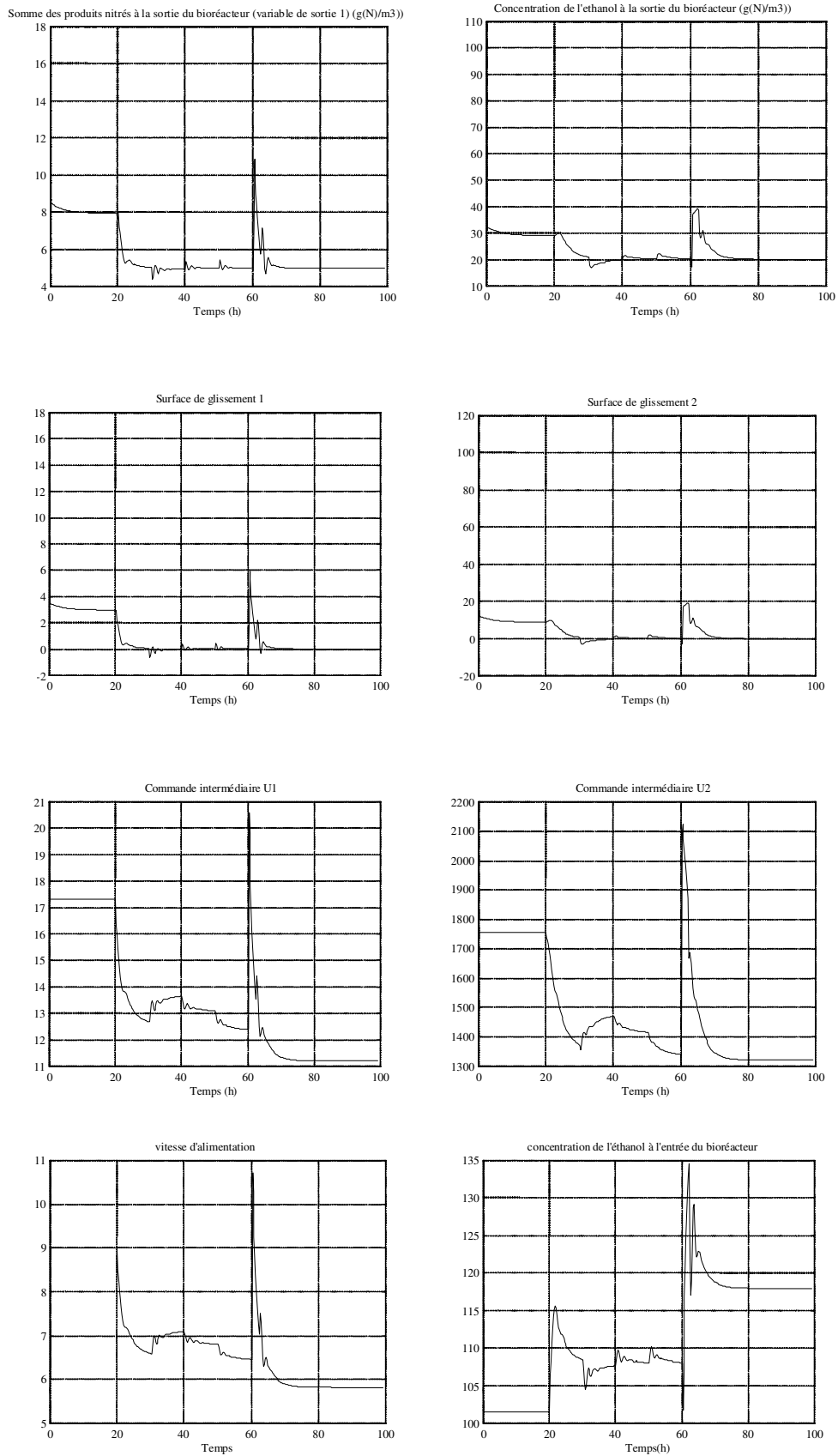


Figure 4.20. Robustesse vis-à-vis des variations de paramètres et des perturbations extérieures: algorithme de commande équivalente augmentée à structure variable

- **Approche de la commande dynamique à structure variable linéarisante**

Dans ce qui suit nous développerons une approche de la commande à structure variable que nous avons proposée au troisième chapitre et qui permet d'introduire les discontinuités sur la première dérivée de la variable commande par augmentation de l'ordre du système. Une condition de glissement tenant compte des non linéarités du système sera utilisée.

Nous avons vu qu'il est possible de transformer le système non linéaire (4.81) sous certaines hypothèses au système (4.82). Nous proposons actuellement d'augmenter l'ordre du système (4.82). Dans ce cas il est possible de l'écrire sous la forme canonique suivante:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{11} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = u_1(v_1 + v_2) - u_1 \mathbf{1}(x_1 + x_2) - k_2 \mu^2 x_4 \\ \dot{\eta}_{21} = \dot{x}_3 = u_1 v_3 - u_1 \mathbf{1} x_3 - u_2 \mathbf{1}^0 + k_3 \mu^1 x_1 - k_4 \mu^2 x_4 \end{cases} \quad (4.106)$$

La surface de glissement est définie par:

$$\sigma(x) = [\sigma_1 \quad \sigma_2]^T = [\eta_{11} \quad \eta_{21}] \quad (4.107)$$

Définissons la condition de glissement suivante:

$$\dot{\sigma} = [\dot{\eta}_{11} \quad \dot{\eta}_{21}] = \left[-\mathbf{M}_1 |\sigma_1|^a \operatorname{sgn}(\sigma_1) \quad -\mathbf{M}_2 |\sigma_2|^a \operatorname{sgn}(\sigma_2) \right]^T \quad (4.108)$$

En dérivant (4.106) on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{12} = \dot{u}_1 \left[(v_1 + v_2) - \mathbf{1}(x_1 + x_2) \right] + u_1 \left[(\dot{v}_1 + \dot{v}_2) - \mathbf{1}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \right] - k_2 \mu^2 \dot{x}_4 - k_2 \mu_{x_3}^2 \dot{x}_3 x_4 \\ - k_2 \mu_{x_2}^2 \dot{x}_2 x_4 \\ \dot{\eta}_{22} = \dot{u}_1 (v_3 - \mathbf{1} x_3) + u_1 (\dot{v}_3 - \mathbf{1} \dot{x}_3) - \dot{u}_2 \mathbf{1}^0 - k_3 \mu_{x_1}^1 \dot{x}_1 x_4 - k_3 \mu_{x_3}^1 \dot{x}_3 x_4 - k_3 \mu^1 \dot{x}_4 \\ - k_4 \mu_{x_2}^2 x_2 \dot{x}_4 - k_4 \mu_{x_3}^2 \dot{x}_3 x_4 - k_4 \mu^2 \dot{x}_4 \end{cases} \quad (4.109)$$

avec:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \sum_1 u_1 x_1 + u_1 v_{11} + v_{12}; \\ \dot{v}_2 &= \sum_1 u_1 x_2 + u_1 v_{21} + v_{22}; \\ \dot{v}_3 &= \sum_1 u_1 x_3 + u_1 v_{31} + v_{32} + \sum_2 u_2 \end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned}
 v_{11} &= \sum_{j=1}^N l_{N+1,j} \left(\sum_{i=1}^N l_{j,i} s_{1i} + l_{j,0} s_{1,in} \right) \\
 v_{12} &= \sum_{i=1}^{N+1} l_{N+1,j} \left(k_1 \mu_{1j} x_{aj} \right) \\
 v_{21} &= \sum_{j=1}^N l_{N+1,j} \left(\sum_{i=1}^N l_{j,i} s_{2i} \right) \\
 v_{22} &= \sum_{j=1}^N l_{N+1,j} \left(k_1 \mu_{1j} x_{aj} - k_2 \mu_{2j} x_{aj} \right) \\
 v_{31} &= \sum_{j=1}^N l_{N+1,j} \left(\sum_{i=1}^N l_{j,i} s_{3i} \right) \\
 v_{32} &= \sum_{j=1}^N l_{N+1,j} \left(k_3 \mu_{1j} x_{aj} + k_4 \mu_{2j} x_{aj} \right) \\
 \Sigma_1 &= \sum_{j=1}^N l_{N+1,j} l_{j,N+1} \\
 \Sigma_2 &= \sum_{j=1}^N l_{N+1,j} l_{j,0}
 \end{aligned}$$

En égalisant (4.108) à (4.109) on obtient:

$$\begin{cases}
 \dot{u}_1 = \left[(v_1 + v_2) - \mathbf{I}(x_1 + x_2) \right]^{-1} \left[\mathbf{M}_1 |\sigma_1|^\alpha \operatorname{sgn}(\sigma_1) + u_1 \left[(\dot{v}_1 + \dot{v}_2) - \mathbf{I}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \right] \right. \\
 \left. - k_2 \mu^2 \dot{x}_4 - k_2 \mu_{x_3}^2 \dot{x}_3 x_4 - k_2 \mu_{x_2}^2 \dot{x}_2 x_4 \right] \\
 \dot{u}_2 = \left(\mathbf{I}^0 \right)^{-1} \left[\dot{u}_1 (v_3 - \mathbf{I}x_3) + \mathbf{M}_2 |\sigma_2|^\alpha \operatorname{sgn}(\sigma_2) + u_1 (\dot{v}_3 - \mathbf{I}\dot{x}_3) \right. \\
 \left. - k_3 \mu_{x_1}^1 \dot{x}_1 x_4 - k_3 \mu_{x_3}^1 \dot{x}_3 x_4 - k_3 \mu^1 \dot{x}_4 - k_4 \mu_{x_2}^2 x_2 \dot{x}_4 - k_4 \mu_{x_3}^2 \dot{x}_3 x_4 - k_4 \mu^2 \dot{x}_4 \right]
 \end{cases} \quad (4.110)$$

La résolution du système différentiel (4.109) combinée avec (4.110) permet de déterminer l'évolution des variables d'état et l'évolution des variables de commande.

Pour tester la robustesse des contrôleurs vis-à-vis des variations de consigne, des variations paramétriques et des perturbations extérieures, les simulations ont été effectuées en considérant les mêmes conditions opératoires que celles du paragraphe précédent.

Les résultats obtenus par l'approche de la commande à structure variable dynamique sont illustrés sur les figures 4.21 et 4.22. On peut constater une bonne régulation aux différents paliers de consigne et une bonne poursuite lors d'un changement de consigne (figure 4.21). En présence de variations paramétriques et des perturbations extérieures, les variables de commande réagissent très rapidement et la régulation est assurée sans broutement, sans erreur statique et sans perte de la propriété de robus

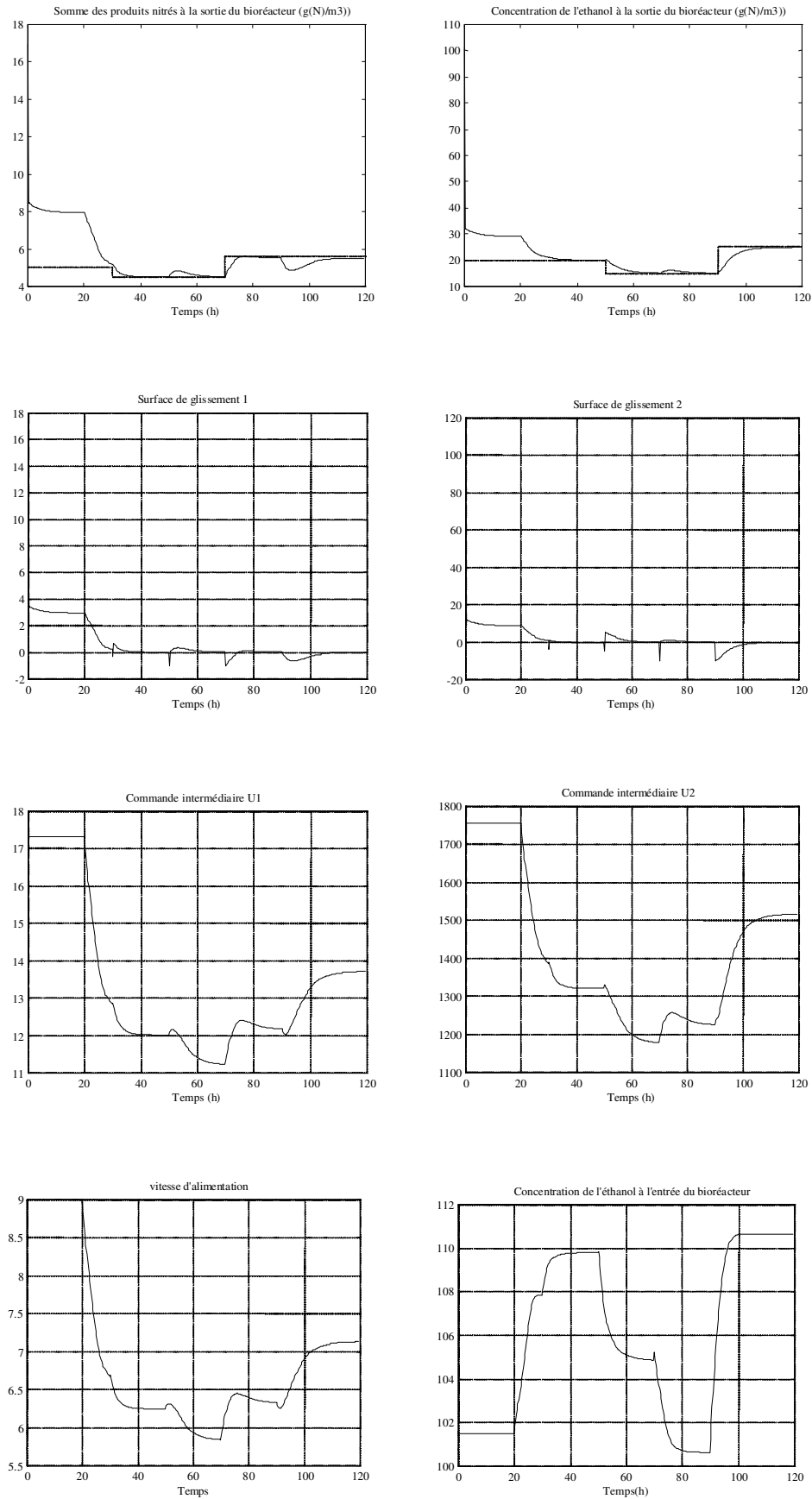


Figure 4.21. Robustesse vis-à-vis des variations de consignes: algorithme de commande à structure variable dynamique linéarisante

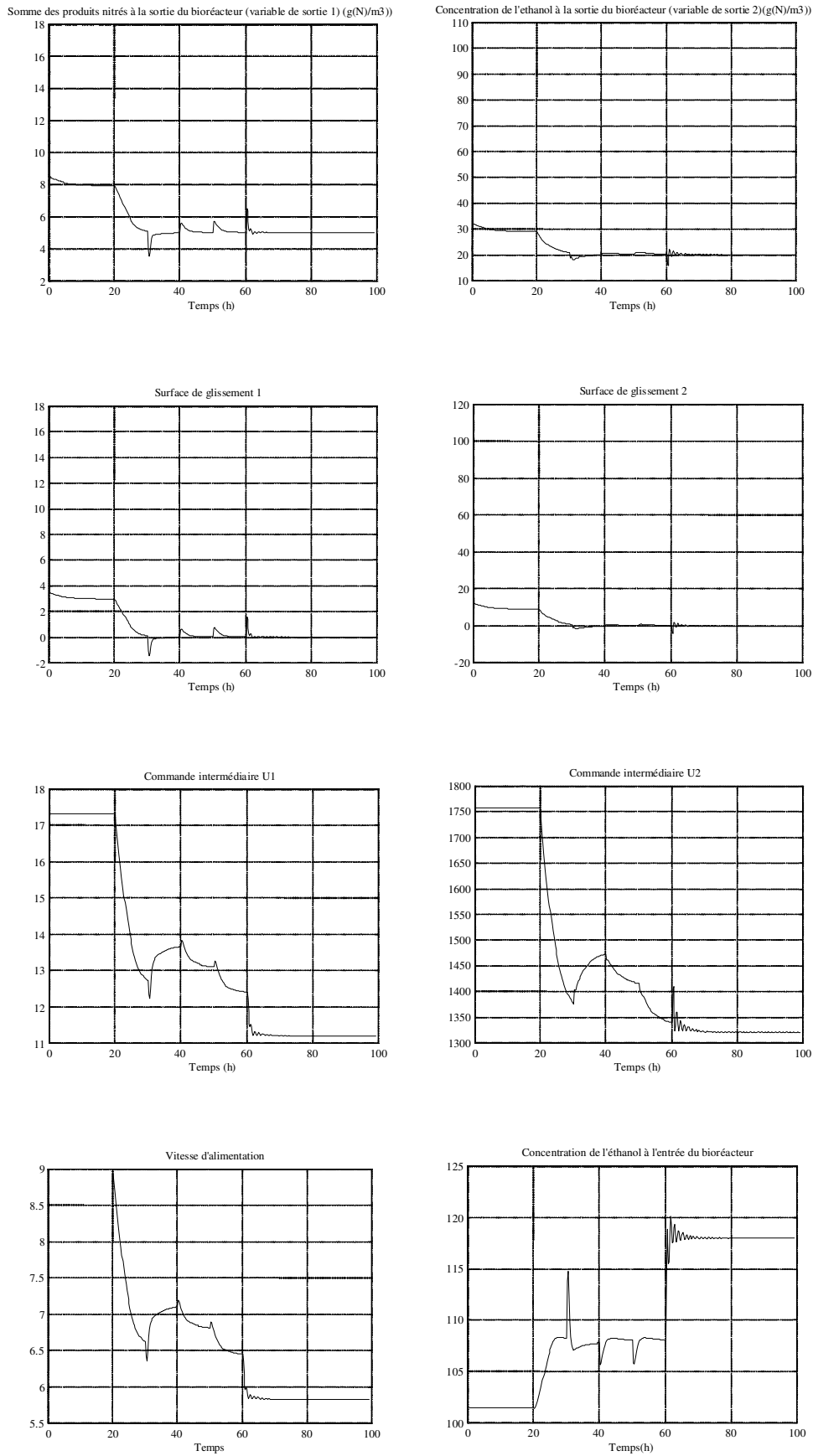


Figure 4.22. Robustesse vis-à-vis des variations de paramètres et des perturbations extérieures: algorithme de commande à structure variable dynamique linéarisante

- **Commande basée sur le modèle de dimension infinie**

L'objectif de ce paragraphe est de développer une commande basée sur le modèle de dimension infinie d'origine. Ces résultats ont été publiés dans [Boubaker et al., 1998b].

La commande vise à la régulation de la variable de sortie y_{1L} à la sortie du bioréacteur à une valeur désirée imposée par une norme de l'eau à potabiliser telle que:

$$y_{1L} = S_{1L} + S_{2L} \quad (4.111)$$

Il est aussi important d'optimiser l'addition de la source de carbone S_{3in} et ceci en contrôlant la concentration de l'éthanol y_{2L} à la sortie du bioréacteur

$$y_{2L} = S_{3L} \quad (4.112)$$

Dans la suite nous proposerons un algorithme de commande que nous avons développé dans le dernier paragraphe du troisième chapitre. Cet algorithme est basé sur le modèle à paramètres répartis. L'avantage d'une telle approche est le fait que la loi de commande tient compte des propriétés dynamiques du modèle d'origine. Considérons le modèle (4.76), les deux lois de commande (4.83) et (4.90) et posons:

$$k_1 = \frac{1 - Y_{h_1}}{1.14 Y_{h_1} \varepsilon}; \quad k_2 = \frac{1 - Y_{h_2}}{1.71 Y_{h_2} \varepsilon}; \quad k_3 = \frac{1}{Y_{h_1} \varepsilon}; \quad k_4 = \frac{1}{Y_{h_2} \varepsilon}$$

On obtient alors le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_1(z,t)}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial S_1(z,t)}{\partial z} - k_1 \mu_1(S_1, S_3) X_a(z,t) \\ \frac{\partial S_2(z,t)}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial S_2(z,t)}{\partial z} + k_1 \mu_1(S_1, S_3) X_a(z,t) - k_2 \mu_2(S_2, S_3) X_a(z,t) \\ \frac{\partial S_3(z,t)}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial S_3(z,t)}{\partial z} - k_3 \mu_1(S_1, S_3) X_a(z,t) - k_4 \mu_2(S_2, S_3) X_a(z,t) \\ \frac{\partial X_a(z,t)}{\partial t} = (\mu_1(S_1, S_3) + \mu_2(S_2, S_3) - k_d(S_1, S_2, S_3, X_a)) X_a(z,t) \end{array} \right. \quad (4.113)$$

En combinant les deux premières équations du système (4.113) avec l'équation de sortie (4.111), on obtient l'équation dynamique de la première variable de sortie:

$$\frac{dy_{1L}}{dt} = -u_1 \frac{\partial y_{1L}(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=z_L} - k_2 \mu_2 X_{aL} \quad (4.114)$$

En combinant la troisième équation du système (4.113) avec l'équation de sortie (4.112) on obtient l'équation dynamique de la seconde variable de sortie:

$$\frac{dy_{2L}}{dt} = -u_1 \frac{\partial S_3(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=z_L} - k_3 \mu_1 X_{aL} - k_4 \mu_2 X_{aL} \quad (4.115)$$

Quand l'une des méthodes d'approximation est utilisée, le terme $\frac{\partial S_3(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=z_L}$ peut être exprimé comme suit:

$$\frac{\partial S_{3L}}{\partial z} \Big|_{z=z_L} = \Delta S_{3L} + l^0 S_{3,in}(t) \quad (4.116)$$

où ΔS_{3L} et l^0 sont fonctions de quelques mesures prises le long du bioréacteur. On rappelle que $S_{3,in} \equiv u_2$.

Considérons à présent la dynamique non linéaire de sortie suivante:

$$\frac{dy_{iL}}{dt} = -M_i \text{sat}(\sigma_i); \quad i = 1,2 \quad (4.117)$$

σ est la surface de glissement définie par la différence entre les sorties du modèle et leurs valeurs désirées y_{1d} et y_{2d} comme suit:

$$\sigma(X) = [\sigma_1 \quad \sigma_2]^T$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_1 = S_{1L} + S_{2L} - y_{1d} \\ \sigma_2 = S_{3L} - y_{2d} \end{cases} \quad (4.118)$$

et vérifiant la condition de glissement suivante:

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i < 0 \quad i = 1,2 \quad (4.119)$$

$\text{sat}(\cdot)$ est la fonction saturation définie par:

$$\text{sat}(\sigma_i / \psi_i) = \begin{cases} \sigma_i / \psi_i & \text{si } |\sigma_i / \psi_i| \leq 1 \\ \text{sgn}(\sigma_i) & \text{si } |\sigma_i / \psi_i| > 1 \end{cases} \quad (4.120)$$

ψ_i doit être le plus petit que possible. M_i sont les gains de glissement déterminés de façon à ce que la condition (4.119) soit satisfaite.

Afin de découpler le système (4.113) le vecteur de commande intermédiaire (4.96) est considéré, soit:

$$U^T = [U_1 \quad U_2] = [u_1 \quad u_1 u_2]$$

En utilisant (4.114), (4.115), (4.116) et (4.117) les deux variables de commande intermédiaires suivantes sont alors déduites:

$$U_1 = \frac{-k_2 \mu_{2L} X_{aL} + M_1 \text{sat}(\sigma_1)}{\frac{\partial y_{1L}}{\partial z} |_{z=z_L}}$$

$$U_2 = -U_1 \frac{(\Delta S_{3L})}{l^0} - \frac{(k_3 \mu_{1L} + k_4 \mu_{2L}) X_{aL}}{l^0} + \frac{M_2 \text{sat}(\sigma_2)}{l^0} \quad (4.121)$$

Simulation et commentaires:

L'implantation de la loi de commande (4.121) exige le calcul des dérivées spatiales; ceci est possible par utilisation de l'une des méthodes des résidus pondérés ou de différences finies [Michelsen & Villadsen, 1972]. Le choix de la méthode d'approximation influe certainement sur la dynamique du système. Par utilisation de la méthode de collocation orthogonale l'algorithme de commande de dimension infinie coïncide avec l'algorithme de commande à structure variable par retour d'état statique exprimée par la relation (4.101).

Pour tester la robustesse des contrôleurs de dimension infinie vis-à-vis des variations de consigne, des variations paramétriques et des perturbations extérieures, les simulations ont été effectuées en considérant les mêmes conditions opératoires de simulation que celles des paragraphes précédents.

Les résultats obtenus par l'approche de la commande à structure variable de dimension infinie sont illustrés sur la figures 4.23 et 4.24. On peut constater une assez bonne régulation aux différents paliers de consigne et une bonne poursuite lors des changements de consigne (figure 4.23).

En présence des variations paramétriques et des perturbations extérieures, les variables de commande réagissent assez rapidement; le système est robuste vis-à vis des variations paramétriques et des perturbations extérieures et on n'observe pas les effets de couplage sur les variables de sortie.

Il est à constater qu'une discontinuité d'amplitude très importante sur toutes les courbes à $t = 60h$ est observée. Ce pic est dû à l'augmentation de la pollution du nitrate dans l'eau. Signalons aussi qu'une erreur statique peut apparaître lorsque la bande de linéarisation de la fonction $\text{sat}(\cdot)$ augmente alors que le phénomène de broutement apparaît lorsque celle ci devient très petite. Le paramètre ϕ_i est donc un paramètre délicat à régler.

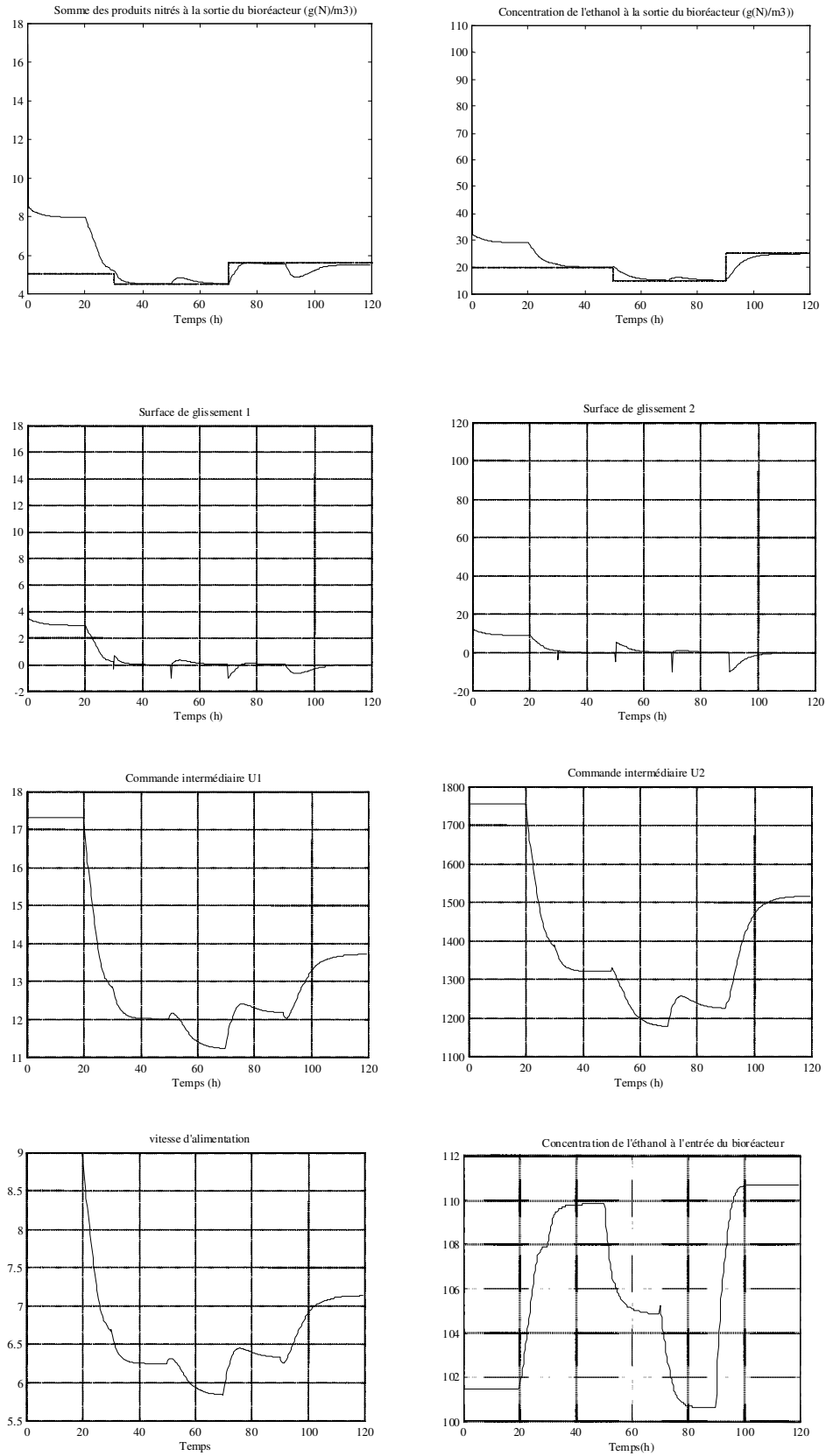


Figure 4.23. Algorithme de commande à structure variable de dimension infinie multivariable: régulation de la somme des concentrations des produits nitrés et de la concentration de l'éthanol

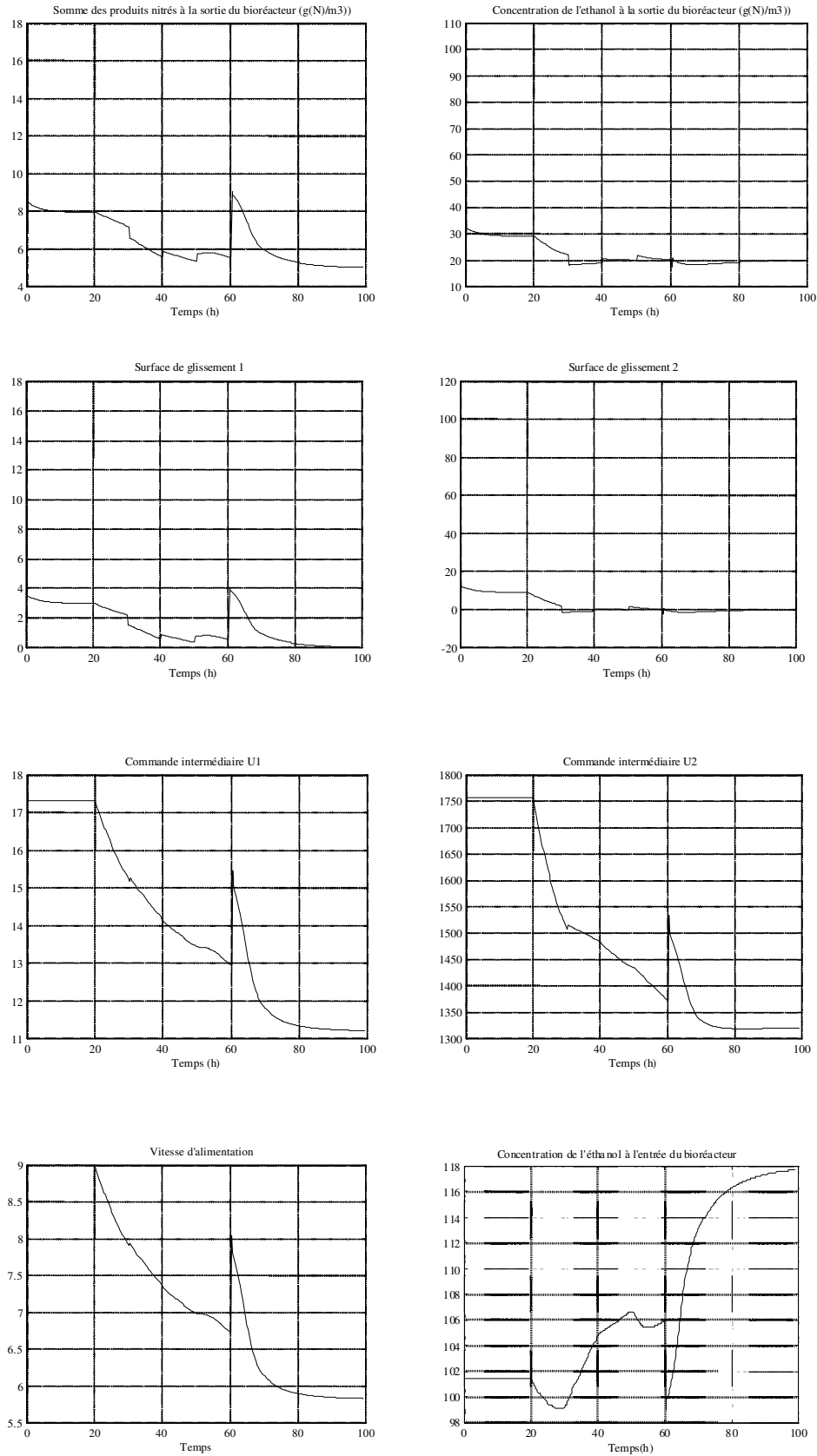


Figure 4.24. Algorithme de commande à structure variable de dimension infinie multivariable: robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations extérieures.

- **Comparaison des performances des algorithmes de commande multivariables**

L'objectif des trois algorithmes de commande à structure variable multivariables que nous avons proposés est la régulation des produits nitrés et la régulation de concentration d'éthanol à la sortie du bioréacteur de dénitrification de l'eau à potabiliser en agissant à la fois sur le débit d'alimentation et sur la concentration d'éthanol ajouté à l'entrée du bioréacteur.

Nous pouvons affirmer que tous les algorithmes proposés assurent des résultats très satisfaisants en régulation et en robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations extérieures. Quelques différences ont été cependant observées. Les différences apparaissent essentiellement au niveau de l'évolution des variables de commande (consommation de l'éthanol, fluctuations, saturations...) et au niveau des variables de sortie (robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations, convergence...) et donc sur la qualité de l'eau.

Une analyse des courbes présentant l'évolution des variables de commande des différents algorithmes nous permet d'affirmer que celles relatives à l'algorithme de commande dynamique sont les plus régulières en présence de perturbations. On peut aussi remarquer que les variables de commande de l'algorithme de commande à structure variable de dimension infinie sont moins fluctuantes que celles de l'algorithme de commande à structure variable classique. Il est important de noter que l'algorithme de commande à structure variable de dimension infinie est le plus économique en terme de consommation de l'éthanol en présence de perturbations alors que l'algorithme de commande dynamique est le plus intéressant de point de vue qualité de l'eau puisqu'il est le moins sensible aux perturbations extérieures et aux variations paramétriques. Le tableau 4.5 confirme les interprétations précédentes en signalant les pics observés à $t = 60h$ (perturbation la plus influente sur le système) pour les différents algorithmes de commande. Le tableau 4.6 donne la consommation moyenne en éthanol pour les simulations effectuées en présence de variations paramétriques et des perturbations extérieures.

	Critère économique	Qualité de l'eau à potabiliser	
Algorithmes de commande à structure variable	Concentration de l'éthanol $g[DCO]/m^3$	Somme des concentrations des produits nitrés dans l'eau potabilisée $g[N]/m^3$	Concentration de l'éthanol dans l'eau potabilisée $g[DCO]/m^3$
Commande équivalente	134.88	10.88	37.78
Commande dynamique	120.15	6.53	20.16
Commande de dimension infinie	117.76	9.04	21.69

Tableau 4. 5. Comparaison des pics observés lors de la perturbation observée à $t = 60h$ pour les différents algorithmes de commande

Algorithmes de commande	Consommation moyenne en éthanol g[DCO]/ m ³
Algorithme de commande équivalente augmentée	111.24
Algorithme de commande dynamique	110.43
Algorithme de commande de dimension infinie	107.18

Tableau 4.6: Consommation moyenne en éthanol

4. CONCLUSION

Ce chapitre traite du problème de la commande à structure variable monovariante et multivariante des bioréacteurs à gradient spatial de concentration. La mise en oeuvre de tels systèmes de conduite automatique se heurte à plusieurs problèmes; d'une part le manque de capteurs en lignes fiables et peu coûteux pour la mesure de certains états et paramètres; d'autre part les variations paramétriques inattendues et inobservables des taux de croissance et de la mortalité de la population bactérienne.

Dans le but d'illustrer l'efficacité des algorithmes d'approximation, d'observation d'état, d'estimation paramétrique à structure variable et de commande à structure variable développés dans les trois chapitres précédents, deux types de bioprocédés ont été considérés. Le premier est un procédé de fermentation à lit fixe monosubstrat. Le second est un biofiltre de dénitrification des eaux à potabiliser.

Le procédé fermentaire monosubstrat à lit fixe est représenté par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires et non stationnaire de type hyperbolique. Pour celui-ci nous avons combiné avec succès un observateur/estimateur à structure variable avec trois algorithmes de commande à structure variable monovariante.

Pour le cas du biofiltre de dénitrification des eaux à potabiliser, nous avons montré qu'une commande monovariante est insuffisante pour la maîtrise du procédé et que l'implantation d'une commande multivariante est nécessaire pour l'optimisation du fonctionnement du bioprocédé. Dans ce sens trois algorithmes de commande à structure variable ont été développés. Leurs performances ont été ensuite comparées.

L'étude présentée dans ce paragraphe confirme notre contribution au développement d'un certain nombre de techniques de commande à structure variable appliquées aux procédés biotechnologiques à gradient spatial de concentrations. En effet on a constaté que les meilleurs résultats ont été obtenus par la version modifiée de commande à structure variable dynamique. Celle-ci permet d'assurer des variables de la commande plus lisses, une parfaite régulation des consignes (sans erreur statique) avec une conservation de la propriété de robustesse même en présence de perturbations.

Nous avons montré qu'il est toujours possible de construire un régulateur à structure variable de dimension infinie dans le but de conserver au mieux les propriétés dynamiques du procédé à paramètres répartis.

Enfin nous pouvons affirmer que l'objectif principal de la thèse a été atteint en ce chapitre, à savoir la contribution à la régulation du fonctionnement d'un procédé de traitement des eaux à potabiliser par implantation d'une commande multivariable par le débit d'alimentation et par la concentration de l'éthanol: souhait exprimé par les biologistes depuis quelques années. En plus de la régulation de la somme des concentrations des produits nitrés, cette approche a permis de minimiser la consommation de l'éthanol à l'entrée du bioréacteur et d'améliorer la qualité de l'eau.

Les différents résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants; la possibilité de les transposer sur site réel est à envisager.

CONCLUSION

L'étude présentée dans ce mémoire apporte une contribution au développement de la théorie des systèmes à structure variable dans le cas des procédés de dimension infinie. Cette étude avait pour objectif la conception d'un certain nombre de techniques d'observation d'état, d'estimation paramétrique et de commande robustes, toutes basées sur la théorie des systèmes à structure variable. En particulier, elle montre l'applicabilité des algorithmes obtenus au problème de contrôle des bioprocédés à gradient spatial de concentration.

Les systèmes considérés sont très complexes. Non seulement ils sont à paramètres répartis mais ils sont aussi caractérisés par des non stationnarités et de fortes non linéarités. Ils possèdent des états et des paramètres non mesurables et peuvent être le siège de variations aléatoires et de perturbations extérieures imprévues et très brusques. La forte complexité des modèles de connaissance a conditionné notre choix pour les techniques d'observation d'état, d'estimation paramétrique et de commande.

Deux stratégies de contrôle ont été envisagées. La première méthode consiste à transformer le système à paramètres répartis représenté par des équations aux dérivées partielles, en un système à paramètres localisés représenté par des équations différentielles ordinaires. Le système réduit obtenu est utilisé pour la synthèse d'une loi de commande à structure variable dans les deux cas, monovariante et multivariante. Dans ce sens nous avons développé une approche modifiée des systèmes à structure variable classiques. Celle-ci a permis par introduction d'une forme canonique de commande modifiée d'augmenter l'ordre du système et d'appliquer ainsi les discontinuités sur les premières dérivées des variables de commande et non plus sur les variables de commande elles-mêmes. Cette approche nous a permis de lisser les variables de commande et d'obtenir un régime glissant pratiquement sans broutement tout en conservant les propriétés de robustesse. Elle a permis aussi de ne pas réduire l'ordre du système à paramètres localisés sur la surface de glissement ce qui est un avantage majeur pour certains types de système.

La seconde stratégie de contrôle nous a permis de réaliser la synthèse d'un régulateur à structure variable de dimension infinie, en conservant la nature distribuée du système. Cette approche a l'avantage de formuler la loi de commande en fonction des éléments du modèle d'origine et de conserver ses propriétés dynamiques. La discrétisation ne se fait plus qu'au niveau du contrôleur lors de la mise en oeuvre de la loi de commande. Une extension de ces résultats a été développée dans le cas multivariante. Les résultats obtenus dans le cas multivariante peuvent présenter un intérêt appréciable pour les biochimistes.

Comme il est évident que toute automatisation est tributaire de la connaissance en ligne des variables d'état et des paramètres essentiels à la conduite du processus et qu'il est désormais impossible d'accéder en temps réel à tous ces paramètres nous avons été amenés à résoudre le problème de l'observation d'état et de l'estimation paramétrique des systèmes non linéaires non linéairement paramétrés. Nous avons développé pour résoudre ce problème un algorithme d'observation d'état à structure variable à gains adaptatifs. Une extension au problème de l'estimation paramétrique à structure variable a été élaborée. Les algorithmes développés ont été testés sur un modèle non stationnaire présentant de fortes non linéarités. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux obtenus avec un observateur / estimateur conjoint. L'observateur / estimateur à structure variable a montré une meilleure rapidité de convergence et une totale invariance aux variations paramétriques et aux perturbations extérieures en mode glissant.

Bien que notre contribution ne concerne pas la partie modélisation des systèmes de dimension infinie, nous avons jugé qu'il était nécessaire d'étudier certaines méthodes d'approximation fonctionnelle de façon à mener convenablement les étapes citées précédemment, concernant la commande et l'estimation et de contourner le problème posé par le caractère réparti en réduisant le modèle de dimension infinie en un modèle de dimension finie. Plusieurs méthodes de réduction des modèles de dimension infinie ont été proposées. Particulièrement la méthode de collocation orthogonale a permis d'obtenir de bons résultats avec un nombre d'équations à résoudre relativement faible et un temps de calcul raisonnable. Des résultats de simulation ont montré les performances de cette méthode d'approximation ainsi que l'influence des paramètres de réglage sur la précision de la solution.

Dans le but d'illustrer l'efficacité de l'ensemble des algorithmes développés, nous avons testé ces derniers sur deux modèles de procédés biotechnologiques. Ce choix était motivé par le caractère non linéaire et réparti de ce type de système faisant intervenir dans la modélisation le comportement de micro-organismes vivants.

Un modèle d'un procédé fermentaire monosubstrat à lit fixe a permis d'illustrer l'efficacité des algorithmes de commande à structure variable monovariables combinés avec un observateur/estimateur à structure variable adaptatif nécessaire pour la résolution du problème de régulation de la concentration du substrat résiduel en sortie du procédé.

Sur un modèle d'un biofiltre de dénitrification des eaux à potabiliser nous avons montré que la commande monovariante déjà appliquée sur site réel est insuffisante pour la maîtrise totale du procédé biologique. Nous avons contribué dans ce sens à l'optimisation du fonctionnement du procédé par application d'une commande multivariable par le débit d'alimentation et par la concentration de l'éthanol nécessaire à la dégradation du substrat à éliminer. En plus de la régulation de la somme des concentrations des produits nitrés déjà assurée par la commande monovariante, cette approche a permis de minimiser la consommation de l'éthanol à l'entrée du bioréacteur et d'améliorer la qualité de l'eau. Une étude comparative des performances des algorithmes de commande à structure variable a été effectuée. L'approche modifiée de commande à structure variable dynamique que nous avons introduite nous a semblé la plus appropriée. En effet l'augmentation de l'ordre du système a permis de lisser les variables de commande, de résoudre le problème de broutement tout en conservant les

propriétés de robustesse. Les résultats obtenus par le contrôleur de dimension infinie sont aussi satisfaisants dans le cas multivariable.

Ce travail a donc permis d'augmenter le champ d'application de la théorie des systèmes à structure variable, d'une part par introduction de schémas modifiés permettant de résoudre le problème de broutement tout en conservant les propriétés de robustesse, et d'autre part en considérant une classe particulière de systèmes non linéaires souvent écartée dans le domaine des systèmes à structure variable: la classe des systèmes de dimension infinie. Les différents résultats obtenus par simulation sur des modèles de procédés biotechnologiques sont tout à fait satisfaisants. Il faudrait désormais compléter l'étude de la commande multivariable du procédé de dénitrification par l'étude de l'estimation d'état et de paramètres. Dans ce cas, la transposition des résultats obtenus sur site réel pourrait être envisagée.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[Babary & Damak, 1993] J.P. Babary & T. Damak, "On sliding state and parameter estimation of fixed bed reactors," European Control Conference (ECC'93), Groningen (Pays-Bas), Proceedings vol. 1, pp. 293-298, Rapport LAAS N°92345.

[Babary *et al.*, 1996] J.P. Babary, S. Bourrel, M. Nihtila, D. Dochain, " Sur la représentation d'état des systèmes à paramètres répartis," dans Les systèmes de régulation, A. Rachid, Masson, Paris, pp. 317-336.

[Babary & Bourrel, 1999] J.P. Babary & S. Bourrel, "Sliding mode control of a denitrifying biofilter," Applied Mathematical Modelling, Vol. 23, pp. 609-620.

[Bastin & Gevers, 1988] G. Bastin & M.R. Gevers "Stable adaptive observers for nonlinear time varying systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, N°7, pp. 650-657.

[Bastin & Dochain, 1990] G. Bastin & D. Dochain, " On line estimation and adaptative control of bioreactors," Elsevier, Amsterdam.

[Ben Youssef, 1996], C. Ben Youssef, "Filtrage, estimation et commande adaptative d'un procédé de traitement des eaux usées," Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, Rapport LAAS N°96116, N° d'ordre 1144.

[Ben Youssef *et al.*, 1996] C. Ben Youssef, B. Dahhou, F. Y. Zeng & J. L. Rols, "Estimation and filtering of nonlinear systems: application to a waste water treatment process," International Journal of Systems Science, Vol.27, N°5, pp. 497-505, Rapport LAAS N°94129.

[Birk & Zeitz, 1988] J. Birk et M. Zeitz, "Extended Luenberger design for nonlinear time variable systems," International Journal of Control, 38-2, pp. 419-431.

[Borne *et al.*, 1993] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis, " Analyse et régulation de processus industriels," T.1 Régulation continue, Vol. 4, Editions technip.

[Boubaker, 1995a] O. Boubaker, "Commande en régime glissant," Rapport de DEA, ESSTT, N° d'ordre A 118.

[Boubaker *et al.*, 1995b] O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J. Bernussou, " Commande robuste par mode glissant," CMGE'95, Radés (Tunisie) , 16-17 Septembre, pp. 7-12.

[Boubaker *et al.*, 1995c] O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J. Bernussou, " Sur les Systèmes à structure variable," 2ème Séminaire sur la commande robuste et ses applications (SCRA'95), Nabeul (Tunisie), 2-3 Décembre, pp.1-9.

- [Boubaker *et al.*, 1996] O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, "Commande à structure variable pour les systèmes non linéaires," 16èmes Journées Tunisiennes d'Electrotechnique et d'Automatique (JTEA'96), Nabeul (Tunisie), 8-9 Novembre.
- [Boubaker *et al.*, 1997a] O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J.P. Babary, "Commande robuste à structure variable des systèmes à paramètres répartis," 3ème Séminaire sur la commande robuste et ses applications (SCRA'97), Nabeul (Tunisie), 22-24 Février, pp.1-8. Rapport LAAS N°97074.
- [Boubaker *et al.*, 1997b] O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J.P. Babary, "Sliding control of linear input delay systems," 15th IMACS World Congress on Scientific Computation Modelling and Applied Mathematics (IMACS'97), Berlin (Allemagne), 24-29 Août, Vol.5, pp. 91-96. Rapport LAAS N°97094.
- [Boubaker *et al.*, 1997c] O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J.P. Babary "Simulation et commande en régime glissant d'un procédé biologique à paramètres répartis," 17èmes Journées Tunisiennes d'Electrotechnique et d'Automatique (JTEA'97), Nabeul (Tunisie), 8-9 Novembre, pp. 102-107. Rapport LAAS N°97449.
- [Boubaker *et al.*, 1998a] O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J.P. Babary, "MIMO variable structure control for non linear distributed parameter systems: application to fixed bed bioreactors," 2nd IMACS Multiconference IEEE CESA'98 Computational Engineering in Systems Applications, Symposium on Modelling, Analysis and Control, Nabeul-Hammamet (Tunisie), 1-4 Avril, Vol. 1, pp.79-84. Rapport LAAS N°97540.
- [Boubaker *et al.*, 1998b] O. Boubaker, M. Ksouri, J.P. Babary, "MIMO variable structure control of a denitrifying distributed parameter biofilter," Proceedings of the Fifth International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR'98), Miedzyzdroje (Pologne), 1-4 Septembre, Vol. 1, pp. 141-146, 25-29 Août. Rapport LAAS N°98156.
- [Boubaker *et al.*, 1998c] O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J.P. Babary, "SISO and MIMO variable structure control of fixed bed bioreactors," UKAC International Conference on CONTROL'98, , Swansea (GB), 1-4 Septembre, Vol. I, pp. 229-234, IEE Conference Publication n° 455, London. Rapport LAAS N°98184.
- [Boubaker *et al.*, 1998d] O. Boubaker, J.P. Babary , M. Ksouri, "Variable structure estimation and control of nonlinear distributed parameter bioreactors ," 1998 IEEE International Conference on Systems Man and Cybernetics (SMC'98), Symposium on Modelling Control, San Diego-California (USA), 11-14 Octobre, Vol. 4, pp. 3770-3774. Rapport LAAS N°98284.
- [Boubaker & Babary, 1998e] O. Boubaker & J.P. Babary, "Parameter and State Variable Estimation of Nonlinear Distributed Parameter Bioreactors," Archives of Control Sciences, Vol. 9, N°3/4, pp. 93-110. Rapport LAAS N° 98147.

[Boubaker & Babary, 1999] O. Boubaker & J.P. Babary, "On SISO and MIMO sliding control of a parameter distributed biological process," 1999 IEEE International Conference on Systems Man and Cybernetics (SMC'99), Tokyo, Japon.

[Bourrel, 1996] S. Bourrel, "Estimation et commande d'un procédé à paramètres répartis utilisé pour le traitement biologique de l'eau à potabiliser," Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, Rapport L.A.A.S. n°96412, N° d'ordre 2452.

[Bühler, 1986] H. Bühler, "Réglage par mode glissant," Lausanne: Presses polytechniques.

[Chang, 1991] L. W. Chang, "A mimo sliding control with a first order plus integral sliding condition," *Automatica*, Vol. 5, N°3, pp. 287-295.

[Casti, 1985] J.L. Casti, "Nonlinear system theory," *Mathematics in Sciences and Engineering*, Vol. 175, Academic Press, Orlando.

[Chen & Moskwa, 1997] S.X. Chen & Moskwa J.J., "Application of nonlinear sliding mode observers for cylinder pressure reconstruction," *Control Engineering Practice*, Vol.5, N°8, pp. 1115-1121.

[Cho & Joseph, 1983] Y.S. Cho & B. Joseph, "Reduced Order steady state and dynamic models of separation processes, Part I: Development of the model reduction procedure," *Aiche Journal*, Vol. 29, N°2, pp. 261-269.

[Contois, 1959] D. Contois, "Kinetics of bacterial relationship between population density and specific growth rate of continuous cultures," *Jour. of Gen. Microb.*, n°. 21, pp. 40-50.

[Curtain & Pritchard, 1978] R.F. Curtain & A.J. Pritchard, "Infinite Dimensional Linear Systems Theory," *Lecture Notes in Control Information Sciences*, vol.8, Springer Verlag, Berlin.

[Damak, 1994] T. Damak, "Modélisation, estimation, et commande de procédés biotechnologiques de type hyperbolique," Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, Rapport LAAS N°94022 N° d'ordre 1671.

[DeCarlo *et al.*, 1988] R. A. DeCarlo, S. H Zak, G. P. Matthews, "Variable Structure Control of nonlinear multivariable systems: a tutorial," *Proceedings IEEE*, vol. 76, n°3, pp. 212-232.

[De Wit & Slotine, 1991] C.C. De Wit & J.J.E. Slotine "Sliding observers for robot manipulators," *Automatica*, Vol. 27, N°5, pp. 859-864.

[Dochain & Bastin, 1984] D. Dochain & G. Bastin, "Adaptive identification and control algorithmes for nonlinear bacterial growth rate," *Automatica*, Vol. 20, pp. 621-634.

[Dochain *et al.*, 1992] D. Dochain, J. P. Babary & N. Tali Maamar, "Modelling and adaptive control of non linear distributed parameter bioreactors via orthogonal collocation," *Automatica*, vol 28, n°5, pp 873-883.

- [Drakunov,1983] S. V. Drakunov, "On adaptive quasioptimal filter with discontinuous parameters," *Automation and Remote Control*, Vol. 44, N°9, Part 2, pp. 1167-1175.
- [Drazenovic, 1969] B. Drazenovic, "The invariance conditions in variable structure systems," *Automatica*, Vol. 5, N°3, pp. 287-295.
- [El Jaï & Pritchard, 1986] A. El Jaï & A.J. Pritchard, "Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués ," Masson, Paris.
- [El Jaï & Amouroux, 1990] A. El Jaï & M. Amouroux, " Automatique des systèmes distribués ," Hermès, Paris.
- [Emelyanov, 1967] S.V. Emelyanov, " Sliding mode control systems,"(en russe) Nauka, Moscou.
- [Fernandez & Hedrick, 1987] B. Fernandez & J. K. Hedrick, "Control of multivariable non linear systems by sliding mode method ," *Int. J. Control*, Vol. 46, N°3, pp. 1019-1040.
- [Fillipov, 1961] A.G. Fillipov, "Application of the theory of differential equations with discontinuous right-hand sides to nonlinear problems in automatic control," *Proceedings of the First IFAC Congress*, Vol. 2, pp. 923-927.
- [Fillipov, 1979] A.G. Fillipov, "Differential equations with second members discontinuous on intersecting surfaces," *Diff. Urav*, Vol. 15, N°10, pp. 1814-1832.
- [Fillipov, 1988] A.G. Fillipov, *Differential equations with discontinuous right hand sides*, " Kluwer academic publishers.
- [Finlayson, 1971] B.A. Finlayson "Packed bed reactor analysis by orthogonal collocation," *Chemical Engineering Science*, Vol 26, pp. 1081-1091.
- [Finlayson, 1972] B. A. Finlayson "The method of weighted residuals and variational principles", Academic Press, New York.
- [Fliess, 1990] M. Fliess, "Generalised controller canonical forms for linear and non linear dynamics," *IEEE Trans. Automat. Control*, 35, pp. 994-1001.
- [Fliess & Messenger, 1990] M. Fliess & F. Messenger "Methods of nonlinear discontinuous stabilisation," *Nonlinear Synthesis*, C.I. Byrnes et A. Kurzhansky éd., Birkhäuser, pp. 112-131.
- [Fliess & Messenger, 1992] M. Fliess & F. Messenger "Sur la commande en régime glissant," *C. R. Acad Sc. Paris*, T. 313, Série I, pp. 951-956.
- [Fossard & Normand-Cyrot, 1993] A.J. Fossard & D. Normand-Cyrot, " Systèmes non linéaires, " T.3 Commande, Masson

[Gao & Hung, 1993] W. Gao & J. C. Hung, "Variable structure control of nonlinear systems: a new approach," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, pp. 45-55.

[Gould, 1969] L.A. Gould, "Chemical process control: theory and applications," Reading, Mass., Addison-Wesley.

[Guiot *et al.*, 1988] S. Guiot, R. A. Pauss, D. Bourque, M. El-housseini, L. Lavoie, C. Beaulieu et R. Samsaon, "Effect of upflow liquid velocity on granule size distribution in an upflow anaerobic bed filter (UBH) reactor," *Proceedings 5th International Symposium on anaerobic digestion, Bologne (Italie)*, pp. 121-124.

[Hajri *et al.*, 1996] S. Hajri, W. Perruquetti, P. Borne, "A new sliding mode controller for multivariable nonlinear systems," *IEEE SMC, Pékin (Chine), Vol.2*, pp. 917-922.

[Harashima *et al.*, 1986] F. Harashima, H. Hashimoto, K. Maryama, "Practical robust control of robot arm using variable structure systems," *Proceedings IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, San Fransisco (USA)*, pp. 532-538.

[Hung *et al.*, 1993] J. Y. Hung, W. Gao & J. C. Hung, "Variable Structure Control: a Survey," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, pp. 1-19.

[Isidori, 1989] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems," Springer-Verlag Berlin, 2nd edition.

[Itkis, 1976] U. Itkis, "Control Systems of Variable Structure Systems," Springer-Verlag, New-York.

[Jacob, 1994] J. Jacob, "Modélisation et simulation dynamique de procédés de traitement des eaux de type biofiltre: Traitement de systèmes d'équations différentielles partielles et algébriques (EDPA)," Thèse de doctorat, INP, Toulouse (France).

[Jacob *et al.*, 1996] J. Jacob, H. Pingaud, J. M. Le Lann, S. Bourrel, J. P. Babary & B. Capdeville, "Dynamic simulation of biofilters," *Simulation - Practice and Theory, Vol. 4*, pp. 335-348, Rapport LAAS 94242.

[Jha *et al.*, 1986] A.N. Jha, S. Zaman et V. Ranganathan, "Identification of nonlinear distributed systems using Laguerre operational matrices," *Int. Jour. Systems Sciences, Vol. 17, N°12*, pp.1991-1998.

[Jorgensen, 1986] S. B. Jorgensen, "Fixed bed reactor dynamics and control: A review," Copyright IFAC Control of Distillation Columns and Chemical Reactors, Pergamon, U.K, pp.11-24.

[Jorgensen & Jensen, 1989] S. B. Jorgensen & N. Jensen, "Dynamics and control of chemical reactors," Preprints IFAC Symposium on Dynamics and Control of Chemical Reactors, Distillation Columns and Batch Processes, DYCORD'89, Maastricht (Hollande).

- [Julien *et al.*, 1996] S. Julien, J. P. Babary, S. Bourrel, M.T. Nihtila, “Modelling and identification of a denitrification bioreactor,” CESA'96 IMACS Multiconference, Symposium on Modelling, Analysis and Simulation, Lille (France), pp. 124-126, Rapport LAAS 96121.
- [Labarrere *et al.*, 1982] M. Labarrere, J. P. Krief & B. Gimonet, “Le filtrage et ses applications,” Deuxième édition, Cépadues éditions.
- [Le Pourhiet, 1988] A. Le Pourhiet, “Résolution numérique des équations aux dérivées partielles: une première approche,” Cépadues Editions.
- [Ljung, 1979] L. Ljung, “Asymptotic behaviour of extended Kalman filter as parameter estimator for linear systems,” IEEE Trans. Aut. Cont., vol. 24, pp. 36-50
- [Lions, 1971] J. L. Lions, “Optimal control of systems described by partial differential equations,” Springer Verlag, Berlin.
- [Lyapunov, 1992] M. A. Lyapunov, “Lyapunov centenary issue,” International Journal of Control, vol. 55, n°3.
- [Michelsen & Villadsen, 1972] L. Michelsen & J. V. Villadsen “A convenient computational procedure for collocation constants,” Chem. Eng. Sci., Vol. 4, pp. 64-68.
- [Misawa & Hedrick, 1989] E. A. Misawa & J.K. Hedrick, “Sliding observers for robot manipulators,” Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME, Vol. 111, N°5, pp. 334-345.
- [Monod, 1949] J. Monod, “The growth of bacterial cultures,” Annual Rev. Microbiol. Vol. 3, pp. 371-394.
- [Nijmeijer & Van Der Schaft, 1990] H. Nijmeijer & A. Van Der Schaft, “Nonlinear Dynamical control systems”, Springer-Verlag, New York.
- [Nihtila *et al.*, 1994] M. T. Nihtila, T. Damak et J. P. Babary, “Recursive input delay estimation in linear systems,” IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Copenhagen (Danemark) pp. 681-686, Rapport LAAS 93362.
- [Pazy, 1983] A. Pazy, “Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,” Springer Verlag, Berlin.
- [Rosenbrock, 1963] H. H. Rosenbrock, “The stability of linear time-dependent control systems,” J. of Electronics and Control, vol. 15, N°1, pp. 73-80.
- [Roux, 1992] G. Roux, “Contribution à l'élaboration d'algorithmes de commande adaptative pour la conduite de procédés fermentaires,” Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, Rapport LAAS. N°92513 N° d'ordre 1356.

- [Sellami *et al.*, 1997] A. Sellami, R. M'hiri, O.Boubaker, M. Ksouri et J. Zrida. "Variable structure control and performance comparison" IFAC'97, Belfort (France), pp. 279-287.
- [Sibony & Mardon, 1982] M. Sibony & J.C.I. Mardon, "Approximations et équations différentielles," Analyse numérique II, Edition Hermann.
- [Sira Ramez, 1987] H. Sira-Ramez, "Variable structure control of nonlinear systems," *Int. J. Syst. Sci.*, Vol. 18, N°9, pp. 1673-1689.
- [Sira Ramez, 1988] H. Sira-Ramez, "Differential geometric methods in variable structure control," *International Journal of Control*, vol. 48, n°4, pp. 1359-1390.
- [Sira Ramez, 1992] H. Sira-Ramez, "On the sliding mode control of nonlinear systems," *Sys. & Cont. Letters*, N°19, pp. 303-312.
- [Sira Ramez, 1993] H. Sira-Ramez, "On the dynamical mode control of nonlinear systems," *International Journal of Control*, Vol. 57, N°6, pp. 1039-1061.
- [Slotine & Sastry, 1983] J.J.E. Slotine & S.S. Sastry, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators," *Int. J. of Control*, Vol. 43, N°6, pp. 1631-1951.
- [Slotine, 1984] J.J.E. Slotine, "Sliding controller design for nonlinear systems," *International Journal of Control*, Vol. 40, N°2, pp. 421-434.
- [Slotine *et al.*, 1986] J.J.E. Slotine, J. K. Hedrick & E. A. Misawa, "On sliding observer for nonlinear systems," *American Control Conference*, Seattle WA.
- [Slotine *et al.*, 1987] J.J.E. Slotine, J.K. Hedrick & E.A. Misawa, "On sliding observer for nonlinear systems," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Transactions of the ASME, Vol. 109, pp. 245-252.
- [Slotine & Li, 1991] J.J.E. Slotine & W. Li, "Applied nonlinear control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [Srivastava & Joseph, 1985] R.K. Srivastava & B. Joseph, "Reduced order steady state and dynamic models for separation columns V: Selection of collocation points," *Comput. Chem. Eng.*, Vol. 9, N°6, pp. 601-613.
- [Tali-Maamar *et al.*, 1993] N. Tali-Maamar, T. Damak, J. P. Babary, M. T. Nihtila, "Application of a collocation method for simulation of distributed parameter bioreactors," *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol 35, pp 303-309.
- [Utkin, 1977] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes: Survey paper," *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. ac 22, N°2, pp. 212-222.
- [Utkin, 1978] V.I. Utkin, "Sliding modes and their application in variable structure system," (traduit du russe), Ed. MIR, Moscou.

- [Utkin, 1983] V. I. Utkin, "Variable structure systems: present and future," Automation and remote control, N°44, pp. 1105-1120.
- [Utkin, 1987] V. I. Utkin, "Discontinuous control systems: state of the art in the theory and application," IFAC 1987, Vol. 1, pp. 75-94.
- [Utkin, 1992] V.I. Utkin, "Sliding modes in control optimization," Springer-Verlag .
- [Villadsen & Michelsen, 1978] J. V. Villadsen & L. Michelsen " Solution of differential equation models by polynomial approximation ," Prentice-Hall Internal series in the Physical and Chemical Engineering Sciences, London, UK.
- [Villiermaux, 1985] J. Villiermaux, "Génie de la reaction chimique: conception et fonctionnement des réacteurs," Technique et documentation, édition Lavoisier.
- [Walcott & Zak, 1986] B.L. Walcott & S.H. Zak, " Observation of dynamical system in the presence of bounded nonlinearities / uncerntainties," Proceedings of 25th Conference on Decision and Control, Athène (Grèce), pp. 961-966.
- [Walcott et al., 1987] B.L. Walcott, M.J. Corless & S.H. Zak, " Nonlinear Observers - A state of the art survey," , Vol. 45, N°6, pp. 2109-2132.
- [Williams & Munnecke, 1981] D. Williams & R. Munnecke, "The production of ethanol by immobilized yest cells," Biotechn. and Bioeng., Vol. 23, pp. 1813-1225.
- [Wong & Luus, 1980] K.T. Wong & R. Luus, " Model reduction of high order multistage systems by the method of orthogonal collocation ," The Canadian Journal of Chemical Engeneering, Vol. 58, pp. 382-388.
- [Wysocki, 1983] M. Wysocki, " Application of orthogonal collocation to simulation and control for first order hyperbolic systems ," Mathematics and Computers in Simulation, North Holland, N°25, pp. 335-345.
- [Xu *et al.*, 1996] J. X. Xu, Lee T. H., M. Wang, X. H. Yu, "Design of variable structure controllers with continous switching control," Int. J. Control, Vol. 65, N° 3, pp. 409, 431.
- [Young, 1993] K.K.D.Young, "Variable structure control for robotics and aerospace applications," Amsterdam, Elsevier Science.
- [Zeng *et al.*, 1993a] F. Y. Zeng, B. Dahhou & G. Goma & M. T. Nihtilä, "Adaptive observer - estimator design for a class of nonlinear systems," Proceedings of the 12th IFAC World Congress, Sydney (Australie), Vol. 6, pp.15-18, Rapport LAAS 92273.
- [Zeng *et al.*, 1993b] F. Y., Zeng, B. Dahhou, G. Goma, "Least-square observer of a class of SISO linearly parametrized nonlinear systems," Proceedings of the 2nd European Control Conference, Groningen (Pays-Bas), Procceedings Vol. 2, pp. 406-409. Rapport LAAS 92236.

[Zeng *et al.*, 1993c] F. Y. Zeng, B. Dahhou & M. T. Nihtilä, “Adaptive control of nonlinear fermentation process via MRAC technique,” *Appl. Math. Modelling*, Vol. 17, N°2, pp.58-69, Rapport LAAS 91031.

[Zinober, 1990] A. S. I. Zinober, “Deterministic control of uncertain systems,” Peter Peregrinus, London (edition).