



HAL
open science

Commande Robuste des Systèmes Non Linéaires

Olfa Boubaker

► **To cite this version:**

Olfa Boubaker. Commande Robuste des Systèmes Non Linéaires. Automatique / Robotique. Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS), 2007. tel-02864083

HAL Id: tel-02864083

<https://theses.hal.science/tel-02864083>

Submitted on 10 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



RAPPORT DE SYNTHÈSE

présenté à

l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax

en vue de l'obtention de

L'HABILITATION UNIVERSITAIRE

dans la discipline Génie Electrique
Automatique - Informatique Industrielle

par

Olfa BOUBAKER née KHELIA

(Docteur en Génie Electrique)

CONTRIBUTION A LA COMMANDE ROBUSTE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Soutenu le 07 Avril 2007, devant le jury composé de :

MM	Mohamed KAMOUN	(ENI – Sfax)	Président
	Ridha BEN ABDENNOUR	(ENI – Gabès)	Membre
	Jacques BERNUSSOU	(LAAS – CNRS - Toulouse)	Membre
	Mohamed CHAABANE	(ENI – Sfax)	Membre
	Hichem KALLEL	(INSAT –Tunis)	Membre

Madame Olfa BOUBAKER née KHELIA

CONTRIBUTION A LA COMMANDE ROBUSTE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Résumé:

La théorie des systèmes non linéaires reste encore un domaine ouvert à la recherche, même si des résultats importants à caractère théorique ont été obtenus depuis bien longtemps dans le domaine de l'Automatique. La complexité des outils et des méthodes développés pour l'analyse et la synthèse des systèmes non linéaires ont représenté le verrou réel de ces approches lors de l'application sur un plan industriel. La contribution de ce travail réside dans le développement ou l'extension de résultats théoriques pour des classes génériques des systèmes non linéaires tout en assurant le compromis simplicité, robustesse et applicabilité.

Deux approches ont été proposées pour assurer la commande robuste des systèmes non linéaires. La première assure la systématisation de la synthèse de lois de commande pour une classe particulière des systèmes non linéaires. Celle-ci est caractérisée par des couplages en forme de multiplicités entre les variables de commande. Ce problème a été résolu dans les deux cas de systèmes de dimension infinie et dans le cas de systèmes de dimension finie. Les preuves de stabilité des lois de commande proposées ont été démontrées en utilisant une approche de Lyapunov.

La seconde approche de commande robuste exige la représentation des systèmes non linéaires au moyen de modèles linéaires par morceaux par des formes canoniques de préférence affectées d'incertitudes. Une extension à l'approche quadratique de Lyapunov classique appliquée aux systèmes linéaires a été étendue à la base de modèles linéaires par morceaux représentant le modèle non linéaire. L'intérêt majeur de cette approche est qu'elle permet de réduire le conservatisme de l'approche classique tout en choisissant une matrice de Lyapunov différente pour chaque sommet d'un modèle linéaire incertain de type polytopique. De plus un régulateur unique est synthétisé pour l'ensemble des modèles incertains représentant le modèle non linéaire.

Pour faire face aux problèmes d'estimation d'état des systèmes considérés, deux philosophies de synthèse d'observateurs robustes ont été adoptées. La première consiste en une estimation de tous les états du système par le biais d'observateurs à entrées inconnues d'ordre complet, la seconde restreint le problème en une estimation des états non accessibles par le biais d'observateurs à entrées inconnues d'ordre réduit. Une étude comparative a permis de distinguer les avantages et les inconvénients de chacune des approches développées.

Enfin des applications dans le domaine des procédés biotechnologiques ont été conduites pour valoriser certains résultats théoriques de modélisation et d'optimisation. La difficulté majeure retenue dans ce sens se situe principalement dans la pluridisciplinarité des théories considérées dans ce domaine industriel particulier et les coûts très élevés des expérimentations.

Mots Clés:

Modélisation, Systèmes non linéaires, systèmes linéaires, systèmes de dimension infinie, systèmes de dimension finie, Modèles incertains, stabilité, théorie de Lyapunov, découplage, commande robuste, observateurs robustes, observateurs à entrées inconnues, procédés biotechnologiques.

	PAGE
INTRODUCTION GENERALE.....	1

PARTIE I : APPROCHES ET CONTRIBUTIONS THEORIQUES

AXE DE RECHERCHE 1:

DECOUPLAGE DES SYSTEMES NON LINEAIRES MULTIVARIABLES	4
1.1. Introduction.....	5
1.2. Contribution au découplage des systèmes non linéaires de dimension infinie.....	6
1.2.1. Commande des systèmes de dimension infinie.....	5
1.2.2. Pourquoi la commande à structure variable ?.....	7
1.2.3. Proposition d'un modèle générique.....	8
1.2.4. Contribution à la commande monovariable.....	9
1.2.5. Contribution à la commande multivariable.....	10
1.2.6. Preuve de stabilité.....	12
1.3. Contribution au découplage des systèmes non linéaires de dimension finie.....	13
1.3.1. Proposition d'un modèle générique.....	13
1.3.2. Systématisation de la synthèse de lois de commande.....	14
1.3.3. Preuve de stabilité.....	16
1.4. Conclusion et Perspectives.....	17
Bibliographie.....	19

TABLE DES MATIERES

AXE DE RECHERCHE 2 :

COMMANDE ROBUSTE DES SYSTEMES NON LINEAIRES	24
2.1. Introduction.....	25
2.2. Position du problème.....	27
2.3. Définitions et préliminaires.....	28
2.3.1. Fonctions PWLs et CPWLs.....	28
2.3.2. Partition simpliciale.....	29
2.3.3. Approximation des fonctions PWLs par des HL-CPWLs.....	30
2.4. Approximation des fonctions non linéaires par morceaux.....	33
2.4.1. Minimisation de l'erreur par un critère H_∞	33
2.4.2. Minimisation de l'erreur par un critère H_2	36
2.5. Approximation des systèmes non linéaires par des HL-CPWLs.....	37
2.6. Construction de la base des modèles affines.....	41
2.7. Commande robuste séquencée: Vers une Approche quadratique étendue....	44
2.7.1. Stabilité.....	45
2.7.2. Séquencement de gains robustes.....	46
2.7.2.1. Stabilisation.....	47
2.7.2.2. Synthèse...	48
2.7.2.3. Synthèse H_∞	50
2.7.2.4. Synthèse Multicritère.....	51
2.9. Conclusions et perspectives.....	53
Bibliographie.....	55

AXE DE RECHERCHE 3 :

SYNTHESE DES OBSERVATEURS ROBUSTES	60
3.1 Introduction.....	61
3.2. Observateurs robustes à entrées inconnues.....	62
3.2.1. Observateurs d'ordre complet.....	63
3.2.2. Observateurs d'ordre réduit.....	64
3.2.3. Exemple numérique.....	68

TABLE DES MATIERES

3. 3. Observation des systèmes linéaires incertains.....	69
3.3.1. Synthèse du filtre H_2	70
3.3.2. Synthèse du filtre H_∞	71
3.4. Conclusion et perspectives.....	72
Bibliographie.....	74
 PARTIE II : CONTRIBUTIONS A CARACTERE APPLICATIF	
 AXE DE RECHERCHE 4 : MODELISATION ET MAITRISE DES BIOPROCEDES	
4.1. Introduction.....	81
4.2. Principe de modélisation des procédés biotechnologiques.....	82
4.3. Identification des paramètres des modèles de comportement.....	83
4.4. Optimisation des modèles de comportement.....	85
4.5. Applications	87
4.5.1. Application 1 : Procédé de traitement des eaux usées	87
4.5.2. Application 2 : Procédé de traitement des effluents industriels	94
4.5.3. Application 3 : Procédé de production d'un arôme naturel	101
4.7. Conclusion.....	103
Bibliographie.....	104
 CONCLUSION GENERALE.....	 108
 ANNEXES.....	 110
Annexe 1 : Travaux de recherche dirigés à caractère diplômant	111
Annexes 2 : Publications personnelles	114

INTRODUCTION GENERALE

CONTEXTE ET MOTIVATIONS

La théorie des systèmes linéaires a gagné une maturité certaine et un aboutissement très élevé des résultats alors que la théorie des systèmes non linéaires reste encore un domaine ouvert à la recherche, même s'il est vrai que des résultats importants à caractère théorique ont été obtenus depuis bien longtemps.

La diversité des classes des systèmes non linéaires, la diversité des comportements dynamiques observés fera encore de ce domaine, un objet d'attention très particulier. Il faut reconnaître que la complexité des outils et des méthodes développés jusque là dans ce domaine constitue un verrou réel de ces approches lors de l'application sur un plan industriel. Le compromis complexité performances est rarement réussi. Sauf peut être pour les approches prédictives qui ont gagné une popularité certaine grâce à leur simplicité aussi bien sur un plan théorique que sur le plan applicatif. Avouons qu'un manque de robustesse et une non garantie de convergence des schémas de commande ont été reprochés à ces techniques. C'est donc dans l'objectif d'assurer le compromis simplicité, robustesse et applicabilité que nous avons orienté nos travaux de recherche. Les discussions apportées dans ce rapport et qui présentent une synthèse de nos activités de recherche et nos contributions dans le domaine assez vaste de la **commande robuste des systèmes non linéaires** s'inscrivent bien dans ce sens.

Dans ce rapport, nous avons choisi de présenter d'une manière très succincte les travaux développés dans le cadre de la thèse. Ce choix nous a permis de développer d'avantage les nouvelles orientations abordées dans nos axes de recherche après la thèse. Ce choix nous a permis aussi d'exposer au mieux les applications engagées par les étudiants dirigés. Par ailleurs, nous avons aussi choisi de montrer très peu de résultats de simulation relatifs aux approches proposées. Ce soin est laissé plutôt à la rédaction des travaux d'initiation à la recherche des étudiants que nous avons dirigés (rapports de Mastères, communications rédigées par les jeunes chercheurs). L'objectif est de mettre le point sur les résultats théoriques développés. Des validations expérimentales ont toutefois été présentées à la fin de ce rapport pour montrer l'applicabilité de certains résultats sur procédés réels.

ORGANISATION DU RAPPORT

Pour aider le lecteur à identifier nos axes de recherche et apprécier nos contributions, nous avons divisé ce rapport en deux grands volets :

Un **premier volet**, à caractère théorique, où trois axes de recherche sont identifiés et développés, les contributions à caractère théorique sont assorties, les perspectives sont exposées et une bibliographie abondante relative à chaque axe de recherche y ait rattachée.

Un **second volet** à caractère applicatif qui est renforcé par une diversité des applications dans le domaine du génie des procédés industriels. Nous justifions notre choix pour des applications liées à l'eau, l'environnement et la sécurité alimentaire, tout d'abord par la nature des non linéarités décrites dans les modèles ensuite par l'intérêt majeur qu'occupe la résolution de tels problèmes sur le plan national et enfin aux nombreuses coopérations que nous avons pu élaborer dans ce domaine.

CONTENU DU RAPPORT

Le volet à caractère théorique est présenté comme suit :

Un **premier chapitre** qui présente les travaux développés sur le découplage des systèmes non linéaires de dimension infinie et de dimension finie. En particulier, pour une classe particulière des systèmes non linéaires caractérisée par des multiplicités entre les variables d'entrée, des modèles assez génériques seront proposés permettant la systématisation de la synthèse de lois de commande découplées.

Un **second chapitre** qui présente une approche de modélisation des systèmes non linéaires en utilisant une partition simpliciale de haut niveau des fonctions non linéaires. La synthèse robuste à retour d'état par séquençement de gains robustes est ensuite abordée. Une extension de l'approche quadratique classique sera proposée et discutée.

Un **troisième chapitre** qui présente un état de l'art des techniques d'observation robuste. Un intérêt particulier sera dédié aux observateurs robustes à entrées inconnues. Ceci est justifié par la nature des applications considérées. Des perspectives pour la synthèse des observateurs non linéaires seront exposées.

Le **second volet** expose le dernier axe de recherche à caractère applicatif. Il s'agit d'applications développées dans le domaine du génie des procédés industriels. Les techniques d'élaboration des modèles mathématiques, l'identification des paramètres des modèles de comportement établis ainsi que les techniques de dimensionnement des réacteurs en vue d'une optimisation du fonctionnement en boucle ouverte seront tout d'abord présentées. Des validations expérimentales seront enfin exposées.

Nous terminerons ce rapport par une conclusion générale où l'accent sera mis sur les contributions apportées pour la résolution des problèmes des systèmes non linéaires ainsi que les perspectives envisagées sur les deux plans théorique et expérimental.

Deux annexes sont enfin joints à ce rapport : Le premier présente la liste des travaux de recherche dirigés à caractère diplômant. Le second établit la liste des publications scientifiques personnelles.

AXE DE RECHERCHE 1:
DECOUPLAGE DES SYSTEMES NON LINEAIRES MULTIVARIABLES

1.1. INTRODUCTION

Ce chapitre présente une synthèse de nos travaux élaborés dans le cadre du découplage et de la synthèse d'une classe particulière de systèmes non linéaires multivariables caractérisée par des termes de multiplicités entre les variables d'entrées. Dans ce sens, deux types de contributions seront présentées.

La première contribution concerne la systématisation de la synthèse de lois de commande découplantes pour une classe particulière des systèmes de dimension infinie proposée récemment dans [Boubaker et Babary, 2003]. Il sera aussi possible de montrer qu'il sera possible de conserver la nature distribuée du système et de concevoir des lois de commande stabilisantes sur la base des modèles de dimension infinie en opposition aux résultats issus des travaux de la thèse [Boubaker, 2000] où une réduction de la dimension du modèle original à paramètres distribués en un modèle à paramètres localisés a été toujours élaborée afin de pouvoir appliquer toutes les méthodes de la théorie des systèmes à paramètres localisés (propriétés de stabilité, d'observabilité ou de commandabilité).

La seconde contribution apportée dans ce chapitre concerne la systématisation de la synthèse de lois commande découplantes d'une classe des systèmes non linéaires de dimension finie [Boubaker, 2004] [Boubaker, 2005]. Les résultats assez génériques établis concernent aussi une classe particulière des systèmes non linéaires caractérisée par des couplages en forme de multiplicités entre les variables de commande.

Nous discuterons enfin dans ces deux cas les avantages ainsi que les verrous auxquelles nous sommes confrontés dans l'applicabilité de ces nouveaux résultats.

1.2. CONTRIBUTION AU DECOUPLAGE DES SYSTEMES NON LINEAIRES DE DIMENSION INFINIE

Les systèmes de dimension infinie sont des systèmes qui sont modélisés par des équations aux dérivés partielles ou des équations integro -différentielles dont les variables dépendent du temps et de l'espace [Taylor, 1996]. L'étude de tels modèles date au moins des années 60 alors que le problème de la commande de tels systèmes commence à peine d'être posé.

1.2.1. COMMANDE DES SYSTEMES DE DIMENSION INFINIE

La commande des systèmes de dimension infinie est un problème très complexe. Les premiers travaux à ce propos datent à peine des années 90. En effet, La méthode des caractéristiques qui a été décrite dans le livre d'Arnold [Arnold, 1983] et qui propose de transformer le modèle de dimension infinie en un ensemble fini d'équations différentielles ordinaires a été initialement appliquée pour synthétiser une commande par mode glissant par Sira-Ramirez [Sira-Ramirez, 1989] et puis par Hanczyc & Palazoglu [Hanczyc et Palazođlu, 1995]. Cette technique est restreinte aux systèmes de type hyperbolique et à quelques systèmes de type parabolique.

La méthode de collocation orthogonale présentée dans le livre de Michelsen [Villadsen et Michelsen, 1978] a été appliquée pour rapprocher les équations aux dérivées partielles par des équations aux dérivées ordinaires dans l'objectif de concevoir des lois de commande de type adaptative [Dochain *et al.*, 1992] et des lois de commande en mode glissant [Boubaker *et al.*, 2001].

Une approche de type géométrique a été récemment proposée par [Christofides et Daoutidis, 1996]. Celle ci introduit le concept d'indice caractéristique pour faire la synthèse par retour d'état des systèmes à paramètres distribués.

Une approche qui a été proposée la même année par [Hanczyc et Palazođlu, 1996] utilise la notion des groupes de symétries. La plus part des concepts utilisés dans ce sens sont donnés dans le livre d'Olver [Olver, 1995]. Un groupe de symétrie est une entité qui transforme les solutions d'un système en d'autres solutions. La transformation agit sur les variables indépendantes du système. Les groupes de symétries sont utilisés pour déterminer le groupe de solutions explicites invariantes qui ont moins de variables indépendantes que le système original. L'intérêt de cette méthode se trouve dans la disponibilité d'outils numériques explicites pour déterminer les symétries.

En partant de l'idée des groupes de symétrie, [Palazoglu et Karakas, 2000] ont généralisé très récemment la notion d'invariants pour fournir une structure pour une loi de commande à paramètres distribués. La contribution d'une telle approche est l'extension d'expression quantitative généralisée de stabilité pour tous les systèmes non-linéaire de dimension infinie.

Il est important de noter que toutes les méthodes précitées ont été appliquées pour dériver des contrôleurs de type monovarié. Lorsqu'il s'agit d'un problème de commande multivarié où les conditions aux limites doivent être considérées comme des variables de commande le problème devient plus complexe. Notre principale contribution, après la thèse réside dans la conception et la généralisation de ce type de contrôleurs multivariés.

1.2.2. POURQUOI LA COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE ?

Il était souvent question de justifier l'utilisation de la théorie des systèmes à structure variable pour les systèmes de dimension infinie. Rappelons tout abord que cette théorie a été initialement introduite en Ex-Union soviétique par le professeur russe Emelyanov. [Emelyanov, 1967]. Elle a été essentiellement développée grâce aux travaux du mathématicien russe Filippov, [Fillipov, 1961] sur les équations différentielles ordinaires à second membre discontinu. Le développement de la théorie des systèmes à structure variable débouche sur une bibliographie abondante. Les livres d'Emelyanov [Emelyanov, 1967], d'Itkis [Itkis, 1976], d'Utkin [Utkin, 1977, 1992], de Buhler [Bühler, 1986], de Slotine [Slotine et Li, 1991], les volumes de Young [Young, 1993] et les surveys d'Utkin [Utkin, 1978], [Utkin, 1983], [Utkin, 1987], de Decarlo [DeCarlo et al., 1988] et de Hung [Hung et al., 1993] révèlent la richesse, le développement et la maturité de cette théorie.

Le principe de base d'un système à structure variable consiste à amener le point représentatif de l'évolution du système sur une hyper-surface de l'espace grâce à une loi de commande d'état discontinue. Le système est dit alors en régime glissant lorsque ce point évolue sur cette hyper-surface, dite surface de glissement. Sur cette hyper-surface le système est de dimension réduite, son comportement ne dépend plus que de la dynamique de la surface de glissement; il devient donc insensible aux erreurs de modélisation, aux variations paramétriques et aux perturbations extérieures.

La théorie des systèmes à structure variable repose donc sur une approche géométrique : c'est la raison pour laquelle elle est largement utilisée pour la commande des systèmes de dimension infinie. De plus elle a gagné une popularité certaine grâce à sa maturité, sa simplicité et sa propriété de robustesse. Son application reste encore un thème ouvert à la recherche pour les systèmes de dimension infinie.

1.2.3. PROPOSITION D'UN MODELE GENERIQUE

La première contribution de ce travail consiste à montrer qu'il est possible de conserver la nature distribuée du système et de concevoir des lois de commande robustes stabilisantes sur la base des modèles de dimension infinie de manière à conserver les propriétés dynamiques du système. Pour atteindre cet objectif, on considère la classe des systèmes non-linéaires spatio-temporels récemment proposée dans [Boubaker & Babary, 2003] qui présentent un grand nombre de processus. La plupart de ces processus sont concernés par des variables d'entrées appliquées aux conditions aux limites et sont représentés par le système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i(z,t)}{\partial t} &= -u_1(t) \frac{\partial X_i(z,t)}{\partial z} + h_i(X, z, t) \quad i = 1, \dots, k \\ X(z,t) &= [X_1(z,t) \quad \dots \quad X_k(z,t)]^T \quad 0 < z \leq z_L \end{aligned} \quad (1.1)$$

où t est la variable temporelle définie sur $T \subset \mathfrak{R}$ et z est la variable spatiale définie sur $[0 \ z_L] \subset \mathfrak{R}$. $u_1(t)$ étant la variable d'entrée et $h_i(X, z, t)$ sont des fonctions non linéaires des variables d'états $X_i(z, t)$ définies sur les domaines temporel et spatial avec les conditions initiales suivantes :

$$X_i(z, t_0) = X_{i,0}(z), \quad i = 1, \dots, k \quad (1.2)$$

et les conditions aux limites :

$$X_i(z=0, t) = X_{i,in}(t), \quad i = 1, \dots, k \quad (1.3)$$

1.2.4. CONTRIBUTION A LA COMMANDE MONOVARIABLE

L'objectif est la conception d'un contrôleur monovariante à structure variable basé sur le modèle de dimension infinie représenté par équation (1.1) à (1.3). Le problème de commande est formulé sous les hypothèses suivantes:

A_1 : La variable de commande est la variable d'entrée $u_1(t)$ indépendante de la variable spatiale z .

A_2 : La variable de sortie à contrôler est:

$$Y(z = z_L, t) = C^T X(z = z_L, t)$$

$$C^T = [C_1 \quad \dots \quad C_k]$$

A_3 : La surface de glissement appropriée est définie par la différence entre la sortie du modèle et la sortie du système y_d supposée constante:

$$\sigma(X) = y_L - y_d$$

où

$$y_L = Y(z = z_L, t)$$

Théorème : [Boubaker et Babary, 2003]

Considérons le système à paramètres distribués (1.1) associé aux conditions initiales (1.2) et la limite condition aux limites (1.3). Si les hypothèses A_1 à A_3 sont satisfaites et quelle que soit une constante définie positive M , la condition de glissement:

$$\dot{\sigma}(X) = -M \text{sign}(\sigma(X))$$

est satisfaite en appliquant la loi de commande suivante:

$$u_1(t) = \frac{\sum_{i=1}^k C_i h_i(X, z = z_L, t) + M \text{sign}(\sigma(X))}{\sum_{i=1}^k C_i \frac{\partial X_i}{\partial z} \Big|_{z=z_L}}$$

Démonstration

Si l'hypothèse A_3 est vérifiée alors:

$$\dot{\sigma} = \frac{d}{dt}(y_L - y_d) = \frac{dy_L}{dt}$$

Considérons l'hypothèse A_2 , y_L peut être exprimée comme suit:

$$y_L = \sum_{i=1}^k C_i X_i(z = z_L, t)$$

Par combinaison des différentes équations de (1.1) et dérivation de la sortie, la dynamique de la sortie contrôlée est donnée par:

$$\frac{dy_L}{dt} = -u_1(t) \sum_{i=1}^k C_i \frac{\partial X_i}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + \sum_{i=1}^k C_i h_i(X, z = z_L, t)$$

Substituons la variable de commande u_1 dans l'expression précédente, la condition d'attraction à la surface de glissement:

$$\dot{\mathbf{s}}(X) = \frac{dy_L}{dt} = -M \text{sign}(\mathbf{s}(X))$$

est toujours vérifiée.

1.2.5. CONTRIBUTION A LA COMMANDE MULTIVARIABLE

L'objectif consiste à la conception d'un contrôleur à structure variable basé sur le modèle à paramètres distribués représenté par les équations (1.1) à (1.3). Le problème de commande est formulé sous les hypothèses suivantes:

A_4 : Les variables de commande sont la variable $u_1(t)$ et $(k - 1)$ variables de commande $u_i(t) = X_{b,in}$, $b \in [1, \dots, k]$, parmi k conditions aux limites du modèle représenté par les équations (1.1) to (1.3). Les variables d'entrée $u_i(t) = X_{b,in}$ sont supposées agir aux conditions aux limites.

A_5 : Les k variables de sortie y_{L_i} ($i = 1, \dots, k$) à réguler aux valeurs désirées y_{d_i} à $z = z_L$ sont définies par:

$$y_{L_i} = Y_i(z = z_L, t) = C_i^T X(z = z_L, t), \quad i = 1, \dots, k$$

$$C_i^T = [C_{i1} \quad \dots \quad C_{ik}]$$

A_6 : Les k surfaces de glissement appropriées sont découplées et définies par la différence entre la sortie du modèle y_{L_i} et les k valeurs désirés des sorties y_{d_i} :

$$\sigma_i(X) = y_{L_i} - y_{d_i}, \quad i = 1, \dots, k$$

où

$$y_{L_i} = Y_i(z = z_L, t), \quad i = 1, \dots, k$$

A_7 : En utilisant la méthode de collocation orthogonale ou la méthode des différences finies [Boubaker et al., 2001] les dérivées spatiales peuvent être approximées comme suit:

$$\left. \frac{\partial X_i(z, t)}{\partial z} \right|_{z=z_L} = \Delta X_i(z = z_L, t) + b_{i,in} X_{i,in}, \quad i = 1, \dots, k$$

Théorème [Boubaker et Babary, 2003]

Considérons le système à paramètres distribués (1.1) associé aux conditions initiales (1.2) et la limite condition aux limites (1.3). Si les hypothèses A_4 à A_7 sont satisfaites et quel que soient k constantes définies positives M_i , les k conditions de glissement sont données par: $\dot{\mathbf{s}}_i(X) = -M_i \text{sign}(\mathbf{s}_i(X))$, $i = 1, \dots, k$ sont satisfaites en appliquant les lois de commande suivantes :

$$u_1(t) = \frac{\sum_{j=1}^k C_{1j} h_j(X, t, z = z_L) + M_1 \text{sign}(\sigma_1(X))}{\sum_{j=1}^k C_{1j} \frac{\partial X_j}{\partial z} \Big|_{z=z_L}}$$

et

$$u_i(t) = - \frac{\left[\sum_{j=1}^{b-1} C_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + \sum_{b+1}^k C_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial z} \Big|_{z=z_L} + C_{ib} \Delta X_b(z = z_L, t) \right]}{C_{ib} b_{b,in}} + \frac{\sum_{j=1}^k C_{ij} h_j(X, t, z = z_L)}{u_1(t) C_{ib} b_{b,in}} + \frac{M_i \text{sign}(\sigma_i(X))}{u_1(t) C_{ib} b_{b,in}}$$

$i = 1, \dots, k, \quad b \in [1, \dots, k]$

Démonstration

A partir de l'hypothèse A_5 , y_{L_i} peut être exprimée comme suit:

$$y_{L_i} = \sum_{j=1}^k C_{ij} X_j(z = z_L, t), \quad i = 1, \dots, k$$

Si l'hypothèse A_6 est satisfaite alors

$$\frac{dy_{L_i}}{dt} = -M_i \text{sign}(\mathbf{s}_i(X)), \quad i = 1, \dots, k$$

Par combinaison des différentes équations du système (1.1) et par dérivation de l'équation de sortie, la dynamique de la sortie contrôlée est donnée par :

$$\frac{dy_{L_i}}{dt} = -u_1(t) \sum_{j=1}^k C_{ij} \frac{\mathcal{I}X_j}{\mathcal{I}k} \Big|_{z=z_L} + \sum_{j=1}^k C_{ij} h_j(X, z = z_L, t), \quad i = 1, \dots, k$$

ce qui peut s'exprimer par :

$$\frac{dy_{L_i}}{dt} = -u_1(t) \left[\sum_{j=1}^{b-1} C_{ij} \frac{\mathcal{I}X_j}{\mathcal{I}k} \Big|_{z=z_L} + \sum_{b+1}^k C_{ij} \frac{\mathcal{I}X_j}{\mathcal{I}k} \Big|_{z=z_L} \right] - u_1(t) C_{ib} \frac{\mathcal{I}X_b}{\mathcal{I}k} \Big|_{z=z_L} + \sum_{j=1}^k C_{ij} h_j(X, z = z_L, t),$$

$$i = 1, \dots, k, \quad b \in [1, \dots, k]$$

Considérons l'hypothèse A_7 , la dynamique de la sortie contrôlée peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned} \frac{dy_{L_i}}{dt} = & -u_1(t) \left[\sum_{j=1}^{b-1} C_{ij} \frac{\mathcal{I}X_j}{\mathcal{I}k} \Big|_{z=z_L} + \sum_{b+1}^k C_{ij} \frac{\mathcal{I}X_j}{\mathcal{I}k} \Big|_{z=z_L} \right] - u_1(t) C_{ib} [\Delta X_b(z = z_L, t) + b_{b,in} X_{b,in}] \\ & + \sum_{j=1}^k C_{ij} h_j(X, t, z = z_L), \quad i = 1, \dots, k, \quad b \in [1, \dots, k] \end{aligned}$$

Par substitution des variables de commande $u_i(t)$ ($i = 1, \dots, k$, $b \in [1, \dots, k]$) dans l'expression précédente, la condition d'attraction:

$$\dot{\mathbf{s}}_i(X) = -M_i \text{sign}(\mathbf{s}_i(X)), \quad i = 1, \dots, k$$

est toujours vérifiée.

1. 2.6. PREUVE DE STABILITE

La commande à structure variable de dimension infinie proposée doit être conçue en deux étapes. La première étape consiste à choisir m surfaces de glissement de dimension infinie $\mathbf{s}(X_1, X_2, \dots, X_k)$ selon lesquelles le système doit avoir une dynamique désirée. m étant la dimension du vecteur de commande. La seconde étape consiste à concevoir une loi de commande qui contraint chaque état du système $X_i(z, t)$, $i = 1, \dots, k$ à rattraper la surface de glissement en un temps fini. La commande à structure variable de dimension infinie est par suite globalement asymptotiquement stable. $\mathbf{s}(X_1, X_2, \dots, X_k)$ est appelée surface de glissement et la condition sous laquelle l'état rattrape la surface de glissement est appelée condition d'attraction.

L'étude du problème de la stabilité du point de vue classique et qui implique à trouver la solution du système différentiel ne peut être considérée. Le problème de la stabilité peut être étudié en utilisant la deuxième méthode Lyapunov ou en montrant le principe de l'attractivité du point de fonctionnement à la surface de glissement [Boubaker et Babary, 2003].

La méthode de Lyapunov consiste à déterminer une fonction de Lyapunov dont la dérivée est de signe opposé par rapport à la fonction proposée. [Palazođlu et Karakas, 2000] proposent pour montrer la stabilité dans le cas d'une commande monovariante une fonction de Lyapunov vérifiant:

$$\dot{V} = \lambda V, \quad \lambda < 0$$

La systématisation dans le cas des systèmes multivariants est difficile. Nous proposons donc d'utiliser la loi d'atteignabilité proposée par [Gao et Hung, 1993] au cas de la commande des systèmes décrits par [Boubaker et Babary, 2003] telles que on impose les conditions

$$\dot{\mathbf{s}}(X_1, X_2, \dots, X_k) = -M \text{sign} \mathbf{s}(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

qui ont la particularité de spécifier au même temps les dynamiques des m fonctions de commutation et les conditions de glissement. La stabilité est donc garantie pendant les deux phases d'attractivité et de glissement ce qui engendre une réponse plus rapide et plus robuste.

1.3. CONTRIBUTION AU DECOUPLAGE DES SYSTEMES NON LINEAIRES DE DIMENSION FINIE

Dans cette partie, la systématisation de la synthèse de lois de commande découplées pour une classe des systèmes non linéaires sera développée.

1.3.1. PROPOSITION D'UN MODELE GENERIQUE

Considérons la classe particulière des systèmes non linéaires décrits par la forme canonique non standard récemment proposée dans [Boubaker, 2004] puis simplifiée dans [Boubaker, 2005] par:

$$\frac{dy_{c,i}(t)}{dt} = g_i(\hat{\xi}) - \gamma_i \hat{\xi}_i(t) w(t) + \gamma_i u_i(t) w(t) \quad i = 1, \dots, p \quad (1.9)$$

où $y_c = [y_{c,1} \ \dots \ y_{c,p}]^T$ est le vecteur de sortie, $u = [u_1 \ \dots \ u_p]^T$ et $w(t)$ sont respectivement $(p+1)$ variables d'entrée. g_i sont des fonctions non linéaires définies par (2) et γ_i sont des constantes connues.

Le model (1.9) expose trois caractéristiques importantes:

- des non linéarités correspondantes aux fonctions $g_i(\hat{\xi})$
- des multiplicités entre les variables d'entrées exprimées par les termes $\gamma_i u_i(t)w(t)$
- des multiplicités entre états et variables d'entrées exprimées par les termes $\gamma_i \hat{\xi}_i(t)w(t)$

1.3.2. SYSTEMATISATION DE LA SYNTHESE DE LOIS DE COMMANDE

Le problème de commande est formulé sous les hypothèses suivantes:

A_1 : Les $(p+1)$ variables d'entrées sont supposées des fonctions continues et bornées telles que :

$$\begin{cases} 0 < u_i < u_{i,\max} & i = 1, \dots, p \\ 0 < w < w_{\max} \end{cases}$$

où $u_{i,\max}$ et w_{\max} définissent les bornes respectives de u_i ($i = 1, \dots, p$) et w .

A_2 : Les variables de sortie $y_{c,i}$ ($i = 1, \dots, p$) à réguler aux valeurs désirées $y_{d,i}$ sont toujours bornées telles que $y_{c,i} \in [y_i^-, y_i^+]$.

A_3 : Toutes les variables d'état sont supposées mesurables par des capteurs physiques ou des capteurs logiciels.

A_4 : Les $(n - \kappa)$ dynamiques internes du système sont au moins stables [Isodori, 1995].

Théorème [Boubaker, 2005]

Considérons le système non linéaire (1.9). Si les hypothèses A_1 à A_4 sont vérifiées et quelles que soient les conditions:

$$\frac{dy_{c,i}}{dt} = -Q_i h_i(y_{c,i} - y_{d,i}) \quad i = 1, \dots, p \quad (1.10)$$

sont satisfaites quels que soient Q_i des constantes définies positives et h_i des fonctions scalaires vérifiant les conditions $h_i(0)=0$, $(y_{c,i} - y_{d,i})h_i(y_{c,i} - y_{d,i}) > 0$ avec $y_{c,i} - y_{d,i} \neq 0$, le système (1.9) est asymptotiquement stable et la sortie $y_{c,i}$ attrape sa valeur désirée $y_{d,i}$ en appliquant le vecteur de commande auxiliaire $U = [U_1 \ \dots \ U_p]^T$ définis par:

$$\begin{cases} \text{pour } i=1, \dots, p \\ w(t) = \sum_{i=1}^p U_i(t) \\ u_i = u_{i,\max} \frac{U_i(t)}{\sum_{i=1}^p U_i(t)} \end{cases} \quad (1.11)$$

où

$$U = A^{-1}B \quad (1.12)$$

$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathfrak{R}^{p \times p}$, $B = [b_i]_{1 \leq i \leq p} \in \mathfrak{R}^{p \times 1}$ sont respectivement définis par leurs blocs scalaires

suivants pour $i=1, \dots, p$:

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \gamma_i \hat{\xi}_i(t) \quad i \neq j \\ a_{i,j} &= -\gamma_i \hat{\xi}_i(t) + \gamma_i u_{i,\max}, \quad i = j \\ b_i &= -Q_i h_i(y_{c,i} - y_{d,i}) - g_i(\hat{\xi}) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Démonstration

Pour prouver la régulation des sorties aux valeurs désirées sous les contrôleurs (1.11), considérons la relation (1.9) sous (1.10), (1.11) et (1.12) ce qui permet d'écrire :

$$\frac{dy_{c,i}(t)}{dt} = g_i(\hat{\xi}) - \gamma_i \hat{\xi}_i(t) \sum_{i=1}^p U_i(t) + \gamma_i u_{i,\max} \frac{U_i(t)}{\sum_{i=1}^p U_i(t)} \sum_{i=1}^p U_i(t)$$

qui peut se simplifier comme suit:

$$\frac{dy_{c,i}(t)}{dt} = g_i(\hat{\xi}) - \gamma_i \hat{\xi}_i(t) \sum_{i=1}^p U_i(t) + \gamma_i u_{i,\max} U_i(t)$$

Isoler les termes U_i donne :

$$\frac{dy_{c,i}(t)}{dt} = g_i(\hat{\xi}) - \gamma_i \hat{\xi}_i(t) \left(U_i + \sum_{i=1}^{k-1} U_i(t) + \sum_{k+1}^p U_i(t) \right) + \gamma_i u_{i,\max} U_i(t)$$

En groupant les termes U_i , la dynamique de la sortie est exprimée par :

$$\frac{dy_{c,i}(t)}{dt} = g_i(\hat{\xi}) - \gamma_i \hat{\xi}_i(t) \left(\sum_{i=1}^{k-1} U_i(t) + \sum_{k+1}^p U_i(t) \right) + \left[-\gamma_i \hat{\xi}_i(t) + \gamma_i u_{i,\max} \right] U_i(t)$$

Imposons la dynamique (1.10) aux sorties implique l'égalité suivante:

$$-\gamma_i \hat{\xi}_i(t) \left(\sum_{i=1}^{k-1} U_i(t) + \sum_{k+1}^p U_i(t) \right) + \left[-\gamma_i \hat{\xi}_i(t) + \gamma_i u_{i,\max} \right] U_i(t) + g_i(\hat{\xi}) = -Q_i h_i(y_{c,i} - y_{d,i})$$

En écrivant la dernière expression en une forme matricielle donne :

$$U = A^{-1} B, \quad \det(A) \neq 0$$

où A et B sont donnés par (1.13).

1.3.3. PREUVE DE STABILITE

L'idée clé pour prouver la stabilité du système (1.9) sous la condition (1.10) donné par le théorème est de décomposer le système global en deux sous-systèmes: un commandable et l'autre au moins stable.

Pour prouver la stabilité du premier sous-système, on choisit les candidates de Lyapunov définies positives suivantes:

$$V_i = (y_{c,i} - y_{d,i})^2 \quad i = 1, \dots, p$$

dont les dérivées sont données par :

$$\dot{V}_i = 2(y_{c,i} - y_{d,i}) \frac{dy_{c,i}}{dt} \quad i = 1, \dots, p$$

Celles ci peuvent s'écrire comme suit

$$\dot{V}_i = -2Q_i (y_{c,i} - y_{d,i}) h_i(y_{c,i} - y_{d,i}) \quad i = 1, \dots, p$$

et sont toujours négatives. La stabilité est toujours vérifiée pour le premier sous-système et par suite pour le système global.

1.4. CONCLUSIONS ET PROSPECTIVES

Les résultats que nous avons développés dans le cadre des travaux de la thèse, ont permis dans un premier temps d'approcher des systèmes non linéaires de dimension infinie par des modèles non linéaires de dimension finie puis proposer dans un second temps des versions améliorées de lois de commande à structure variable [Boubaker *et al.*, 1998]. Les lois de commande synthétisées ont été validées sur un modèle d'un processus réel de traitement des eaux potables [Boubaker et Babary, 1999]. Des extensions au cas multivariable basés sur des modèles réduits ont été enfin proposées dans [Boubaker *et al.*, 2001].

Depuis, Nous avons commencé à réaliser qu'il serait difficile de croire qu'il est possible conserver les propriétés dynamiques des systèmes non linéaires de dimension infinie ou même de dimension finie par des techniques de réduction de l'ordre. Nous avons même montré les inconvénients de la réduction des modèles non linéaires à travers des résultats de simulation [Cherif et Boubaker, 2003], [Boubaker et Cherif, 2004]. Nous avons justifié les problèmes rencontrés par la possibilité de la présence de dynamiques internes instables (équivalentes aux zéros instables dans le cas linéaire monovarié). Des discussions sur ces propos sont fournies dans [Boubaker, 2005]. Plus de détails sont exposés dans [Hannu *et al.*, 2003] [Joshua *et al.*, 2002], [Kolavennu *et al.*, 2001] [Michael *et al.*, 1991] [Wei, 1999].

Pour une classe particulière de systèmes non linéaires caractérisés par des multiplicités entre les variables de commande, nous avons développé une approche assez originale permettant de synthétiser des lois de commande multivariables découplées dans le cas des systèmes non linéaires de dimension infinie [Boubaker et Babary, 2003] et dans le cas de dimension finie [Boubaker, 2005]. L'intérêt de telles approches est la systématisation de la synthèse proposée et la preuve de stabilité fournie. De plus dans le cas des systèmes de dimension infinie, les lois de commande sont basées sur les modèles non réduits par des techniques d'approximation. Il faut cependant avouer que le verrou essentiel de ces approches est la manifestation des problèmes de poursuite dans le cas où le système pourrait présenter des dynamiques internes instables.

Parmi nos prospectives sur cet axe de recherche, nous envisageons étendre nos travaux à la synthèse de lois de commande multivariables des systèmes non linéaires plats [Fliess *et al.*, 1992] [Fliess *et al.*, 1995]. Notons qu'un état de l'art de cette approche a été présenté récemment dans [Lévine, 2004a] où plusieurs contributions dans ce domaine ont été révisées et des exemples de systèmes de dimension finie ont été développés pour mettre le point sur l'intérêt de cette approche. Rappelons que les aspects théoriques de cette approche ont été récemment évoqués dans [Fliess *et al.*, 1999], [Levine et Nguyn, 2003], [Lévine, 2004a] [Lévine, 2004b]. Cette approche a été généralisée au cas des systèmes de dimension infinie dans [Roudolph, 2003] [Roudolph *et al.*, 2003]. Des applications dans le cas des systèmes de dimension infinie sont décrites dans [Fliess *et al.*, 1999] [Fleck *et al.*, 2004][Ratering et Eberhard, 2004]. Le principal aspect qui motive notre intérêt est le suivant : alors que pour les systèmes de dimension finie aucune méthode générique n'existe pour justifier de la platitude ou la non platitude d'un système non linéaire, de très récents résultats sont parus pour prouver la platitude ou la non platitude des systèmes décrits par des équations différentielles partielles [Lynch et Rudolph, 2000] [Petit et Rouchon, 2001] [Meurer et Zeitz, 2004].

Nous envisageons aussi tenter d'étendre la théorie de Lyapunov au cas des systèmes de dimension infinie. Il s'agit d'un problème plus complexe mais pour lequel on peut penser que les résultats sont susceptibles de développements et d'extension. Les plus rares travaux qui ont traité ce problème sont ceux de [Coron *et al.*, 2002], [Coron *et al.*, 2004]. Ces résultats sont en relation avec des systèmes de type hyperbolique conservatifs d'ordre deux avec du contrôle aux frontières. Une application concernant ce résultat est donnée dans [Helleux *et al.*, 2003] dans le cas de la régulation et du flux dans un bief de canal horizontal. L'idée de la résolution des Inégalités matricielles non linéaires de dimension finie ou mieux encore de dimension infinie pourrait s'avérer une solution très efficace à ce problème très complexe.

Dans le chapitre suivant sera développée le second axe de recherche pour lequel une approche différente de celle exposé dans ce chapitre sera développé pour la synthèse de lois de commande des systèmes non linéaires. Il s'agit plutôt d'approcher les systèmes non linéaires

par des systèmes linéaires par morceaux et d'appliquer un séquençement robuste au modèle obtenu.

BIBLIOGRAPHIE

[Arnold, 1983] A. Arnold "Geometric methods in the theory of ordinary differential equations," Springer-Verlag, New York, 1983.

[Boubaker, 2000] O. Boubaker, "Estimation et commande à structure variable des systèmes de dimension infinie," Doctorat de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT), 2000.

[Boubaker, 2004] O. Boubaker, "Decoupling and synthesis of non linear systems with input multiplicities," IEEE First International Symposium on Control Communications and Signal Processing ISCCSP'04, pp. 127-130, 2004.

[Boubaker, 2005] O. Boubaker, "Decoupling control strategy for bioreactor models designed by a non standard canonical form," International Journal on Automatic Control and System Engineering, Vol. 5, n°3, 2005

[Boubaker et Babary, 1999] O. Boubaker, J.P. Babary, "On SISO and MIMO sliding control of a distributed parameter biological process," 1999 IEEE International Conference on Systems Man and Cybernetics (SMC'99), Tokyo, Japon, 1999.

[Boubaker et Babary, 2003] O. Boubaker, J.P. Babary, "On SISO and MIMO variable structure control of non linear distributed parameter systems: application to fixed bed reactors," IFAC Journal of Process Control, Volume 13, N° 8, pp. 729-737, décembre 2003.

[Boubaker et Cherif, 2004] O. Boubaker, F. Cherif, "Discussion on synthesis of non linear Spatio-temporal systems with unstable zeros dynamics," IEEE ISCCSP'04, 21-24 Mars 2004, pp. 475- 478.

[Boubaker *et al.*, 1998] O. Boubaker, J.P. Babary, M. Ksouri, "Variable structure estimation and control of nonlinear distributed parameter bioreactors," 1998 IEEE SMC'98, San Diego-California (USA), 11-14 Octobre, Vol. 4, pp. 3770-3774, 1998.

[Boubaker *et al.*, 2001] O. Boubaker, M. Ksouri, J.P. Babary, "MIMO sliding mode control of a distributed parameter denitrifying biofilter", Applied Mathematical Modeling, vol.25, n°8, pp. 671-682, Elsevier Science, 2001.

[Bühler, 1986] H. Bühler, "Réglage par mode glissant," Lausanne: Presses polytechniques, 1986.

[Cherif et Boubaker, 2003] F.Cherif, O.Boubaker, "Linearizing control of a denitrifying distributed parameter biofilter," IEEE International Conference On Intelligent Engineering Systems, INES 2003, Assiut-Luxor (Egypt), pp. 735-740, 2003.

[Christofides et Daoutidis, 1996] P. D.Christofides, P. Daoutidis, "Feedback control of hyperbolic PDE systems," AIChE Journal, Vol. 42, pp. 3063-3086, 1996.

[Coron et al., 2002] J. M. Coron, J. de Halleux, G. Bastin, B. d'Andréa-Novel, "On boundary control design for quasi linear linear hyperbolic systems," 34^{ème} IEEE Conference on Control and Decision, Las Vegas, USA, décembre, 2002.

[Coron et al., 2004] J. M. Coron, B. d'Andréa-Novel, G. Bastin, "Une fonction de Lyapunov stricte pour l'analyse du contrôle frontière d'un système hyperbolique de lois de conservation," IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA'2004, 22-24 novembre, Douz, Tunisie, 2004.

[DeCarlo et al., 1988] R. A. DeCarlo, S. H Zak, G. P. Matthews, "Variable Structure Control of nonlinear multivariable systems: a tutorial," Proceedings IEEE, Vol. 76,n°3, pp. 212-232, 1988.

[Dochain et al., 1992] D.Dochain, J.P. Babary et N. Tali-Maamar, "Modelling and adaptive control of non linear distributed parameter bioreactors via orthogonal collocation," Automatica, Vol. 28, pp. 873-883, 1992.

[Emelyanov, 1967] S.V. Emelyanov, " Sliding mode control systems,"(en russe) Nauka, Moscou, 1967

[Fleck et al., 2004] Ch. Fleck, Th. Paulus, A. Schonbohm, D. Abel, F. Ollinier, "Flatness based open loop control for the twin roll strip casting process ," Preprints 6^{ème} IFAC Symposium Non linear Control Systems, NOLCOS 2004 (Frank Allgower, Ed.) Germany, Vol. 1, pp. 131-136.

[Fliess et al., 1992] M. Fliess, J. Lévine, Ph Martin, P. Rouchon, "Sur les systèmes plats différentiellement plats," C.R. Acad. Sci. Paris, I-315, 619-624, 1992.

[Fliess et al., 1995] M. Fliess, J. Lévine, Ph Martin, P. Rouchon, "Flatness and defect of non linear systems : introductory theory and examples," International Journal of Control, Vol.61, N°6, pp. 1327-1361, 1995.

[Fliess *et al.*, 1999] M. Fliess, J. Lévine, Ph Martin, P. Rouchon, “A lie Back-lund approach to equivalence and flatness of non linear systems,” IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.44, N°5, pp. 922-937, 1999.

[Fillipov, 1961] A.G. Fillipov, “Application of the theory of differential equations with discontinuous right-hand sides to nonlinear problems in automatic control,” Proceedings of the First IFAC Congress, Vol. 2, pp. 923-927, 1961

[Gao et Hung, 1993] W. Gao, J. C. Hung, “ Variable structure control of nonlinear systems: a new approach,” IEEE Transactions on Industrial Electronics, pp. 45-55, 1993.

[Helleux *et al.*, 2003] J. de Halleux, C. Pireur, J. M. Coron, B. D’Andréa-Novel, G. Bastin, “Boundary feedback control in networks of open channels,” Automatica, vol. 39, pp. 1365-1376, 2003.

[Hanczyc et Palazođlu, 1995] E.M. Hanczyc and A. Palazođlu, “Sliding mode control of non linear distributed parameter chemical processes,” Industrial and Engineering Chemistry Research, N°34, pp. 557-566, 1995.

[Hanczyc et Palazođlu, 1996] Hanczyc E.M. and A. Palazođlu, "Use of symmetry groups in sliding mode control of non-linear distributed parameter systems," International Journal of Control, Vol. 63, N°6, pp. 1149-1116, 1996.

[Hung *et al.*, 1993] J. Y.Hung, W. Gao, J. C. Hung, “Variable Structure Control: a Survey,” IEEE Transactions on Industrial Electronics, pp. 1-19, 1993.

[Hannu *et al.*, 2003] T. Hannu, Toivonen, Kati V. Sandström and Rasmus H. Nyström, “Internal model control of nonlinear systems described by velocity-based linearization,” Journal of Process Control, Volume 13, N° 3, pp. 215-224, 2003

[Itkis, 1976] U. Itkis, “Control Systems of Variable Structure Systems,” Springer-Verlag, New-York, 1976.

[Joshua *et al.*, 2002] M. Joshua Kanter, Soroush M. and Warren M. Seider, ‘Nonlinear feedback control of multivariable non-minimum-phase processes, ’ Journal of Process Control, V. 12, N° 6, pp. 667-686, 2002.

[Kolavennu *et al.*, 2001] S. Kolavennu, Palanki and J.C. Cockburn, "Nonlinear control of non-square multivariable systems," *Chemical Engineering Science*, V.56, N° 6, pp. 2103-2110, 2001.

[Levine, 2004a] J. Levine, "Systèmes Plats : Mode d'Emploi," *IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA'2004*, 22-24 novembre, Douz, Tunisie, 2004.

[Levine, 2004b] J. Levine, "On necessary and sufficient conditions for differential flatness," 6^{ème} IFAC Symposium Non linear Control Systems, NOLCOS 2004 (Frank Allgower, Ed.) Germany, Vol. 1, pp. 191-196, 2004.

[Levine et Nguyn, 2003] J. Levine, D.V. Nguyn, "Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices," *Systems and Control letters*, Vol. 48, pp. 69-75, 2003.

[Lynch et Rudolph, 2000] A.F. Lynch et J. Rudolph, "Flatness based boundary control of coupled non linear PDE's modelling a tubular reactor," *International Symposium on non linear Theory and its application, NOLTA 2000*, Vol. II, Elsevier, Dresden, pp. 614-644, 2000.

[Michael *et al.*, 1991] A. Michael, H. Dale, E. Seborg, "Critique of exact linearization strategies for process control," *Journal of Process Control*, Volume 1, N° 3, pp. 122-139, 1991.

[Meurer et Zeitz, 2004] T. Meurer et M. Zeitz, "Flatness based boundary control of coupled non linear PDE's modeling a tubular reactor," 6^{ème} IFAC Symposium Non linear Control Systems, NOLCOS 2004 (Frank Allgower, Ed.) Germany, Vol. 1, pp. 191-196, 2004.

[Olver, 1995] P.J. Olver, "Equivalence invariance and symmetry," New York: Cambridge University Press, 1995.

[Palazođlu et Karakas, 2000] A. Palazođlu, A. Karakas, "Control of non linear distributed parameter systems using generalized invariants," *Automatica*, 36, 697-703, 2000.

[Petit et Rouchon, 2001] N. Petit et P. Rouchon, "Flatness based feedback control of diffusion convection reaction reaction systems via k-summable power series," *SIAM Journal of Control and Optimisation*, Vol. 40, pp. 475-495, 2001.

[Ratering et Eberhard, 2004] A. Ratering et P. Eberhard, "Flatness based control of a machine tool with lambda kinematic," 6^{ème} IFAC Symposium Non linear Control Systems, NOLCOS 2004 (Frank Allgower, Ed.) Germany, Vol. 1, pp. 137-142, 2004.

- [Rudolph et *al.*,2003] J. Rudolph, “ Flatness based control of distributed parameter systems,” Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [Rudolph et *al.*,2003] J. Rudolph, J. Winkler, F. Woittenek, “ Flatness based control of distributed parameter systems: examples and computer exercises from various technological domains, ” Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [Sira-Ramirez, 1989] H. Sira-Ramirez, “Distributed sliding mode control in systems described by quasilinear partial differential equations,” *Systems and Control Letters*, Vol. 13, pp.177-181, 1989.
- [Slotine et Li, 1991] J.J.E. Slotine, W. Li, “Applied nonlinear control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [Taylor, 1996] M.E. Taylor, “Partial differential Equations,” Tome III, dans *Non linear equations*, Applied Mathematical Sciences, 1996.
- [Utkin, 1977] V.I. Utkin, “Sliding modes and their application in variable structure system,” (traduit du russe), Ed. MIR, Moscou, 1977.
- [Utkin, 1978] V. I. Utkin, “Variable structure systems with sliding modes: Survey paper,” *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. ac 22, N°2, pp. 212-222, 1978.
- [Utkin, 1983] V. I. Utkin, “Variable structure systems: present and future,” *Automation and remote control*, N°44, pp. 1105-1120, 1983.
- [Utkin, 1987] V. I. Utkin, “Discontinuous control systems: state of the art in the theory and application,” *IFAC 1987*, Vol. 1, pp. 75-94, 1987
- [Utkin, 1992] V.I. Utkin, “Sliding modes in control optimization,” Springer-Verlag, 1992.
- [Villadsen et Michelsen, 1978] J. V. Villadsen, L. Michelsen “ Solution of differential equation models by polynomial approximation ,” *Prentice-Hall Internal series in the Physical and Chemical Engineering Sciences*, London, UK, 1978.
- [Wei, 1999] W. Wei, “Stable inverse control for non minimum phase nonlinear processes,” *Journal of Process Control*, V. 9, N° 2, pp. 171-183, 1999.
- [Young, 1993] K.K.D.Young, “Variable structure control for robotics and aerospace applications,” Amsterdam, Elsevier Science, 1993.

AXE DE RECHERCHE N°2 :
COMMANDE ROBUSTE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

2.1. INTRODUCTION

L'analyse des systèmes non linéaires a été toujours considérée comme une tâche délicate ce qui justifie le recours incessant aux techniques linéaristes de modélisation des systèmes non linéaires. En effet, la linéarisation des systèmes non linéaires permet de profiter de la richesse et la maturité de la théorie des systèmes linéaires. Cependant, il est clair que la technique de linéarisation autour d'un point d'équilibre est une approche d'approximation locale. Elle présente des handicaps gênants et s'avère insuffisante du fait qu'elle néglige l'évolution des états d'équilibre en écrasant les non-linéarités. Récemment, la modélisation des systèmes non linéaires a été orientée vers des approches linéaires par morceaux ce qui permet en général de tenir compte de la variation des points d'équilibre dans un domaine plus étendu.

Une solution prometteuse qui permet de s'affranchir des problèmes des approximations locales est d'approcher les systèmes non linéaires par un ensemble de morceaux linéaires qui sont capables de mieux décrire le comportement des systèmes non linéaires dans la totalité de leur espace admissible d'état. Cette philosophie s'appuie sur le formalisme des formes canoniques linéaires par morceaux (*CPWL*) qui a été initialement introduit par les mathématiciens [Chua et Kang, 1977], [Kang et Chua, 1978] pour représenter par une formule compacte avec un nombre minimal de paramètres toutes les fonctions linéaires par morceaux (*PWL*). Cette contribution a non seulement des retombées dans le domaine des systèmes linéaires mais elle a permis aussi un développement très important dans le domaine des systèmes non linéaires. L'utilisation des *CPWL* pour l'approximation des systèmes non linéaires a été initialement proposée par [Chua et Ying, 1983], [Chua et Deng, 1986], [Chua et Deng, 1988]. Néanmoins, cette approche était entravée par certaines limitations. Son majeur handicap était marqué par le fait que les *CPWL* n'étaient capables de représenter que des fonctions non linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Une version plus généralisée a été récemment proposée par Juliân [Juliân, 1999], [Juliân *et al.*, 1999] et a permis de déterminer une forme canonique linéaire par morceaux de haut niveau (*HL-CPWL*) approximation d'une fonction non linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Les fonctions proposées sont définies par les hyper rectangles $S \subset \mathbb{R}^n$ définis par:

$$S = \{x_i \in \mathbb{R}^n : \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.1)$$

Chaque composante x_i du domaine S peut être divisée en m_i intervalles qui définit $\prod_{i=1}^n m_i$ hyper rectangles contenant $N = \prod_{i=1}^n (m_i + 1)$ frontières.

Dans chaque hyper rectangle, une partition simpliciale S , sera ensuite définie par un produit pondéré par N fonctions génératrices avec des pondérations w . Plusieurs choix sont possibles pour les fonctions génératrices [Chien et Kuh, 1977]. Les pondérations w peuvent être déterminées en utilisant des critères d'optimisation de l'erreur de type H_2 ou H_∞ [Lin *et al.*, 1994], [Storace *et al.*, 2002], [Storace *et al.*, 2003]. La forme obtenue dans ce cas n'est généralement pas explicite et présente des problèmes pour l'analyse et la commande. Une opération de reconstitution permet en général d'obtenir un modèle plus explicite décrit par la représentation suivante [Sontag, 1981] [Njal *et al.*, 1995] :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + a_i + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.2)$$

où $x \in X_i$ et X_i est la $i^{\text{ème}}$ région de la répartition, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $a_i \in \mathbb{R}^n$ sont respectivement la jacobienne de la $i^{\text{ème}}$ région et le vecteur image de l'origine. Un simple changement de variable permettrait d'écrire le multimodèle sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = A_i X + Bu \\ Y = CX \end{cases} \quad (2.3)$$

L'originalité de cette approche par rapport aux approches multimodèles déjà proposées par des théories heuristiques (logique flou, réseaux de neurones), est qu'elle présente une méthodologie claire, concise et systématique pour reconstruire des bases de modèles linéaires permettant l'approximation de systèmes non linéaires.

L'analyse de la stabilité et de la stabilisabilité des multimodèles linéaires avaient au début engendré des difficultés quant à la garantie de la stabilité globale des modèles locaux. Parmi les premières approches proposées, on peut citer les travaux de [Shamma et Athans, 1990], [Rugh, 1991] et [Shamma et Athans, 1992]. Une solution particulièrement plus intéressante était d'étendre les régions de stabilité par l'usage des outils de programmation convexe [Sharuz et Behtash, 1992] par des approches quadratiques de résolution d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI).

2.2. POSITION DU PROBLEME

On considère les systèmes non linéaires de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.4)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^q$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur de commande, le vecteur de sortie, la matrice de commande et la matrice d'observation. f est un vecteur de fonctions non linéaires définies de $S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Notons qu'il est possible de considérer sans diminution de généralité que ces fonctions forment un ensemble de n fonctions indépendantes de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définies par [Kahlert et Chua, 1992] :

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_k(x) \\ \vdots \\ h_n(x) \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

les fonctions h_i sont définies de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soit par :

$$h_i(x) = G_i x, \quad G_i \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (2.6)$$

soit par :

$$h_i(x) = G_{ii} x + h_{ii}(z_1) \quad (2.7)$$

où

- Si h_i est une non-linéarité mono-argument, $z_1 = x_k$ ($z_1 \in \mathbb{R}$)
- Si h_i est une non-linéarité bi-argument, $z_1 = [x_k \ x_l]^T$ ($z_1 \in \mathbb{R}^2$)

On se limitera dans ce document au cas des non linéarités à bi-argument mais il sera possible d'étendre le problème au cas multi-argument. Pour plus de détails à ce propos se référer à [Juliân *et al.*, 1999]. L'objectif est de proposer une base de modèles linéaires de la forme (2.3) par approximation du vecteur des fonctions non linéaires (2.7).

2.3. DEFINITIONS ET PRELIMINAIRES

2.3.1. FONCTIONS PWLS ET CPWLS

Une fonction f_{PWL} définie de $S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ où S est un domaine compact, est dite linéaire par morceaux (PWL) si et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites [Chua et Kang, 1977] :

- Le domaine S correspond à un nombre fini N de régions polyédrales non vides $R^{(i)} \neq \emptyset$ telles que $S = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup \dots \cup R^{(N)}$, et par un ensemble fini de frontières H , $H = \{H_i \subset S, i = 1 \dots N\}$ telles que chaque frontière de région est un hyperplan de dimension $(n-1)$ défini par :

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \pi_i(x) = \alpha_i^T x - \beta_i = 0\} \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{R}^n, \beta_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1 \dots N$$

- L'expression f_{PWL} est donnée sous forme de restriction $f^{(i)}(x)$ valide dans une région telle que :

$$f^{(i)}(x) = a_i x + b_i, \quad \forall x \in R^{(i)} \quad (2.8)$$

où $a_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b_i \in \mathbb{R}^m$ sont la matrice Jacobienne de la région $R^{(i)}$ et l'ordonné aux origines. La fonction f_{PWL} est donnée par :

$$f_{PWL}(x) = f^{(i)}(x), \quad \forall x \in R^{(i)} \quad (2.9)$$

- f est continue pour chaque frontière entre deux régions, ce qui peut s'exprimer par :

$$a_i x + b_i = a_k x + b_k \quad \forall x \in R^{(i)} \cap R^{(k)}$$

Cette définition n'est pas très explicite [Van Bokhoven, 1981], [Juliân, 1999] dans le sens qu'elle a besoin de beaucoup plus de paramètres que c'est strictement nécessaire pour modéliser une fonction PWL. C'est la raison pour laquelle des représentations canoniques linéaires par morceaux (CPWL) ont été introduites. Ces représentations sont donc des formes utilitaires exigeant seulement un nombre minimal de paramètres pour représenter une fonction PWL.

Une fonction f_{CPWL} définie de $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est dite canonique linéaire par morceaux [Chua et Kang, 1977] si elle peut être représentée sous la forme suivante :

$$f_{CPWL}(x) = a + Bx + \sum_{i=1}^{\sigma} c_i \left| \alpha_i^T x - \beta_i \right| \quad (2.10)$$

où $a, c_i \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}$

Cette représentation sera capable de représenter des fonctions non linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m dans le seul cas où les fonctions ont la même logique de variation tout au long du même domaine [Juliân *et al.*, 1999]. C'est la raison pour laquelle les fonctions canoniques linéaires par morceaux de haut niveau (*HL-CPWL*) ont été introduites.

2.3.2. PARTITION SIMPLICIALE

En extension aux définitions données par [Chien et Kuh, 1977], il est possible de définir une fonction sur un domaine $S \subset \mathbb{R}^n$ de la forme :

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \underline{x}_i \leq x_i \leq (\underline{x}_i + m_i \delta_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (2.11)$$

où δ_i et m_i ($m_i \in \mathbb{Z}_+$) sont respectivement, un pas de grille fixé et un nombre de cellules associées avec l'axe x_i . Le domaine est divisé en hyper-cubes de la forme $[0, \delta_1] \times [0, \delta_2] \times \dots \times [0, \delta_n]$ et chaque hyper-cube est subdivisé en simplices limités par des hyperplans de la forme :

- $\left\{ x : \pi_q^{(k_q \delta_q)}(x) = (x_q - \underline{x}_q) - k_q \delta_q = 0 \right\}$
- $\left\{ x : \pi_{i,j}^{(0, k_j \delta_j)}(x) = (x_i - \underline{x}_i) - ((x_j - \underline{x}_j) - k_j \delta_j) = 0 \right\}$
- $\left\{ x : \pi_{i,j}^{(k_i \delta_i, 0)}(x) = ((x_i - \underline{x}_i) - k_i \delta_i) - (x_j - \underline{x}_j) = 0 \right\}$

où

$$q \in \{1, \dots, n\}, k_q \in \{1, \dots, m_q - 1\}, k_j \in \{0, \dots, m_j - 1\}, k_i \in \{1, \dots, m_i - 1\},$$

$$i \in \{1, \dots, n-1\}, j \in \{i+1, \dots, n\}$$

Les hyperplans définis précédemment subdivisent le domaine S en simplices de la forme $\delta(p + \Delta(v_1, \dots, v_n))$ où $\Delta(v_1, \dots, v_n)$ est le simplexe tout au long de l'hyper-cube $[0, 1]^n$. avec $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_j \in \{0, \dots, m_j - 1\} \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Formellement, un simplexe (ou polytope) est défini par l'ensemble :

$$\Delta(x_0, x_1, \dots, x_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^n \mu_i x_i \right\} \quad (2.12)$$

où $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$, $\mu_i \geq 0$ et x_i sont des points dans \mathbb{R}^n , $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Exemple :

L'hyper cube $[0, \delta_1] \times [0, \delta_2]$ dans \mathbb{R}^2 est partitionné en les simplices suivants : $\Delta(0, (0, \delta_1), (\delta_1, \delta_2))$, $\Delta(0, (0, \delta_2), (\delta_1, \delta_2))$. Le domaine \mathbb{R}^2 partitionné par cette méthodologie est illustré sur la figure 2.1.

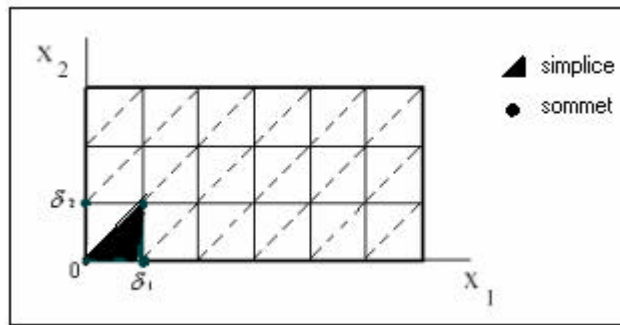


Figure 2.1. Partition en régions simpliciales du domaine \mathbb{R}^2

2.3.3. APPROXIMATION DES PWLS PAR DES HL-CPWLS

Il est possible de représenter toute fonction *PWL* sur un domaine compact par la forme :

$$f_{CP-PWL}(x) = W^T \Phi(x) \quad (2.13)$$

où $W = [W_0^T, W_1^T, \dots, W_n^T]^T$ un ensemble de vecteurs poids associés tel que :

$$W = \Lambda^{-1} \Gamma, \quad (2.14)$$

où

$$\Lambda = \begin{bmatrix} {}^0\Phi^T(V_S^0) & \cdot & \cdot & \cdot & {}^n\Phi^T(V_S^0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^0\Phi^T(V_S^n) & \cdot & \cdot & \cdot & {}^n\Phi^T(V_S^n) \end{bmatrix}$$

et

$$\Gamma = \begin{bmatrix} f(V_S^0) \\ f(V_S^1) \\ \vdots \\ f(V_S^n) \end{bmatrix}$$

L'ensemble V_S est l'ensemble de tous les sommets des simplex contenus dans S dénoté

$V_s = \{V_s^0, \dots, V_s^n\}$ et organisé selon la démarche exposée dans [Julian *et al.*, 1999]. L'ensemble V_s joue un rôle très important du fait que les valeurs de la fonction aux sommets de V_s constituent toute l'information nécessaire pour caractériser toute fonction *PWL*. Les ${}^i\Phi$ forment la forme vectorielle rangée :

$$\Phi_s = [{}^0\Phi_s^T, {}^1\Phi_s^T, \dots, {}^n\Phi_s^T]^T \quad (2.15)$$

construite selon la stratégie de construction exposée dans [Julian *et al.*, 1999]. La fonction génératrice utilisée est de la forme:

$$\gamma(f_1, f_2) = \frac{1}{4} \left(\left| -|f_1| + |f_2| \right| - \left| -|f_1| + |f_2| \right| + \left| -|f_1| + |f_2| \right| - \left| -|f_1| + |f_2| \right| \right) \quad (2.16)$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions réelles. Une résolution de cette dernière formule est donnée par:

$$\mathbf{g}(f_1, f_2) = \begin{cases} f_1 & \text{si } 0 < f_1 < f_2 \\ f_2 & \text{si } 0 < f_2 < f_1 \\ 0 & \text{si } f_1 < 0 \text{ ou } f_2 < 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

avec la considération des notations suivantes:

$$\mathbf{g}^0(f_1) = f_1,$$

$$\mathbf{g}^1(f_1) = \mathbf{g}(f_1, f_1),$$

$$\mathbf{g}^2(f_1, f_2) = \mathbf{g}(f_1, f_2)$$

$$\mathbf{g}^k(f_1, \dots, f_k) = \mathbf{g}(f_1, \mathbf{g}^{k-1}(f_2, \dots, f_k)), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

Application 1:

On désire déterminer une fonction *HL-CPWL* de la fonction *PWL* définie par :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} [-1 \quad -1] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 & \text{si } x_1 \in [0,1] \text{ et } x_2 \in [0,1] \\ [1 \quad -1] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \in [1,2] \text{ et } x_2 \in [0,1] \\ [-1 \quad 1] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \text{si } x_1 \in [0,1] \text{ et } x_2 \in [1,2] \\ [1 \quad 1] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2 & \text{si } x_1 \in [1,2] \text{ et } x_2 \in [1,2] \end{cases}$$

sur $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_i \leq 2, i=1,2\}$. L'ensemble des sommets sur le domaine S avec les pas de grille δ_1 et δ_2 est donné sous forme des classes suivantes :

- **Classe V_s^0** : $\{(0,0)\}$
- **Classe V_s^1** : $\{(1,0), (2,0), (0,1), (0,2)\}$
- **Classe V_s^2** : $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

L'ensemble de sommets est donc donné par :

$$V_s : \{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

Le vecteur B (ordonnés des différents sommets) est donné par :

$$\Gamma = [f(0,0), f(1,0), f(2,0), f(0,1), f(0,2), f(1,1), f(1,2), f(2,1), f(2,2)]^T = [2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2]^T$$

La configuration de la limite simpliciale H_S est définie par l'ensemble des hyperplans :

- $\{x : \pi_1^{(1)}(x) = x_1 - 1 = 0\}$
- $\{x : \pi_2^{(1)}(x) = x_2 - 1 = 0\}$
- $\{x : \pi_{1,2}^{-(0,0)}(x) = x_1 - x_2 = 0\}$
- $\{x : \pi_{1,2}^{-(0,1)}(x) = x_1 - (x_2 - 1) = 0\}$
- $\{x : \pi_{1,2}^{-(1,0)}(x) = (x_1 - 1) - x_2 = 0\}$

Les fonctions génératrices correspondantes sont:

- ${}^0\Phi_s = [{}^0\gamma(1) = 1]$
- ${}^1\Phi_s = [{}^1\gamma(\pi_1^{(0)}), {}^1\gamma(\pi_1^{(1)}), {}^1\gamma(\pi_2^{(0)}), {}^1\gamma(\pi_2^{(1)})]$
- ${}^2\Phi_s = [{}^2\gamma(\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}), {}^2\gamma(\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(1)}), {}^2\gamma(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(0)}), {}^2\gamma(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)})]$

Le vecteur W obtenu par résolution de l'équation (2.14) est:

$$W = [2 \ -1 \ 2 \ -1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

et enfin la fonction PWL peut être représentée sous la forme $HL-CPWL$ suivante :

$$f(x_1, x_2) = 2 - \gamma(x_1, x_1) + 2\gamma(x_1 - 1, x_1 - 1) - \gamma(x_2, x_2) + 2\gamma(x_2 - 1, x_2 - 1)$$

La représentation graphique de cette dernière fonction est donnée sur la figure 2.2.

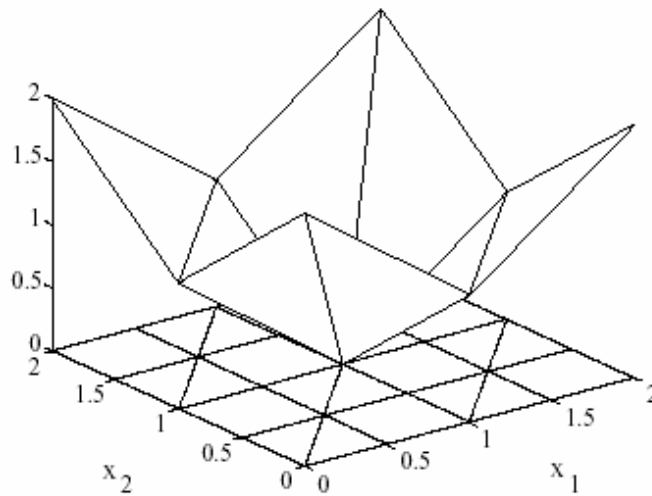


Figure 2.2 : Approximation de $f(x_1, x_2)$

2.4. APPROXIMATION DES FONCTIONS NON LINEAIRES PAR MORCEAUX

Soit l'ensemble fini de points de mesures :

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

où $x_i \in S$, $i = 1, \dots, N$. et soit :

$$F = \{y^1, y^2, \dots, y^N\} \tag{2.18}$$

avec

$$f(x_i) = y^i \tag{2.19}$$

Une fonction *HL-CPWL* est alors proposée pour approcher l'ensemble (2.18) sous un critère d'optimisation de l'erreur [Storace *et al.*, 2002], [Storace *et al.*, 2003]. Plusieurs critères d'optimisation peuvent être utilisés.

2.4.1. MINIMISATION DE L'ERREUR PAR UN CRITERE H_∞

Un critère basé sur la minimisation de la norme H_∞ de l'erreur d'approximation sera utilisée dans cette section. Dans ce cas la fonction objectif est la valeur absolue maximale de l'erreur entre f_{HL-PWL} et f aux points appartenant à l'ensemble F , tel que :

$$E_\infty = \max_{x_i \in X} \left\{ \left| y^i - f_{HL-PWL}(x_i) \right| \right\} \tag{2.20}$$

En conséquence, il est évident que l'approximation envisagée est un problème d'optimisation min-max de la forme :

$$\min_{f_{HL-CPWL} \in PWL_{H_S}[D]} \left(\max_{x_i \in X} \left\{ \left| {}^i y - f_{HL-PWL}(x_i) \right| \right\} \right) \quad (2.21)$$

En utilisant l'équation (2.13), la relation (2.21) peut être alors écrite sous la forme équivalente :

$$\min_{W \in \mathbb{R}^{nq}} \left(\max_{x_i \in X} \left\{ \left| {}^i y - W^T \Phi(x_i) \right| \right\} \right) \quad (2.22)$$

si λ est défini comme

$$\lambda = \max_{x_i \in X} \left\{ \left| {}^i y - W^T \Phi(x_i) \right| \right\} \quad \lambda \geq 0 \quad (2.23)$$

il suit alors que

$$\left| {}^i y - W^T \Phi(x_i) \right| \leq \lambda, \quad \forall x_i \in X, \quad (2.24)$$

qui peut s'écrire:

$$\begin{cases} +({}^i y - W^T \Phi(x_i)) \leq \lambda & \forall x_i \in X, \\ -({}^i y - W^T \Phi(x_i)) \leq \lambda & \forall x_i \in X \end{cases} \quad (2.25)$$

Le problème (2.22) peut être exprimé comme un problème de minimisation de λ sous la contrainte (2.24). Il s'agit d'un problème de programmation linéaire qui peut être formulé comme suit :

Problème 1: *minimiser* λ

sous:

$$\begin{cases} W^T \Phi(x) + \lambda \geq {}^i y & \forall x_i \in X \\ W^T \Phi(x) - \lambda \leq {}^i y, & \forall x_i \in X, \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

sur les paramètres W et λ

Application 2

Soit la fonction $f(x) = \tanh(x)$ définie de $[-10 \ 10] \rightarrow [-1 \ 1]$. On se propose de modéliser cette fonction par 5 morceaux linéaires. Son domaine S est donc divisé en 5 morceaux, soit un pas de grille $\delta = 4$. A titre d'exemple l'ensemble de valeurs de mesures disponibles est :

$$X = \{x_i : x_i = -10 + 0.1i, \ x_i \leq 10, \ i = 1, 2, \dots, 5\}$$

auquel est associé l'ensemble de mesures. L'ensemble de sommets est donné par :

$$V_S = \{-10, -6, -2, 2, 6, 10\}$$

La résolution du problème de programmation linéaire posé par le problème.1 donne :

$$W = [-0.811 \ 0 \ -0.0904 \ 0.6719 \ -0.5725 \ -0.0090]^T \text{ et } \lambda = 0.1989$$

la forme *HL-CPWL* cherchée est exprimée par :

$$f_{HL-CPWL}(x) = -0.811 + 0.0904\gamma(x + 6, x + 6) + 0.6719\gamma(x + 2, x + 2) - 0.5725\gamma(x - 2, x - 2) - 0.009\gamma(x - 6, x - 6)$$

La simulation des variations de la fonction non linéaire et de son approximation linéaire par morceaux est donnée sur la figure 2.3 dans les deux cas de 5 et 20 morceaux.

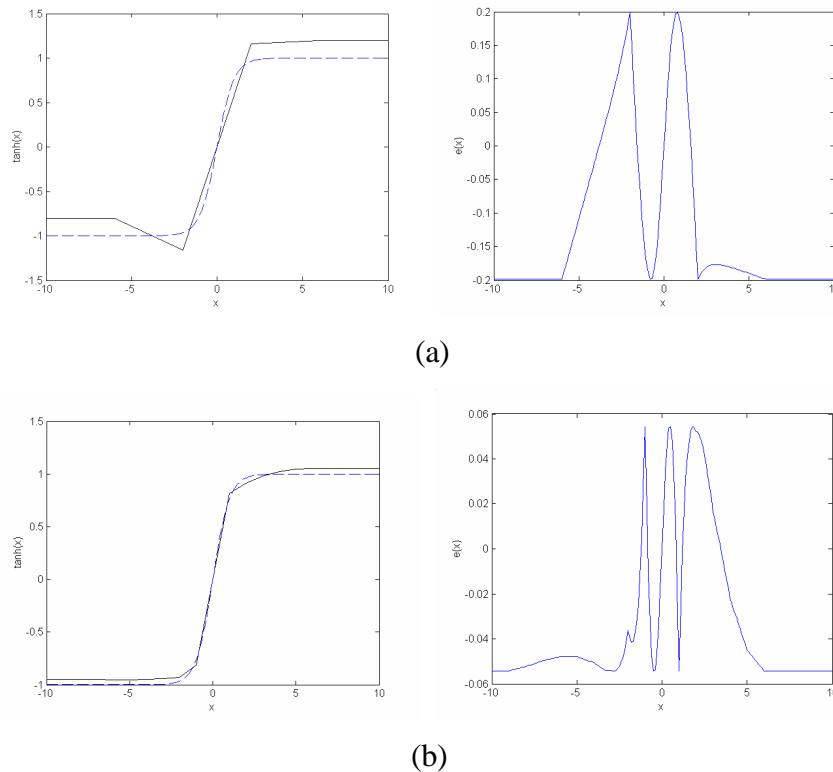


Figure 2.3 : Approximation de la fonction $\tanh(x)$ par *HL-CPWL* sous un critère d'optimisation H_∞ : (a) 5morceaux, (b) 20 morceaux

2.4.2. MINIMISATION DE L'ERREUR PAR UN CRITERE H_2

Soit la fonction objectif quadratique à minimiser :

$$E_2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f_{HL-CPWL}(x_i))^2 \quad (2.26)$$

qui peut s'exprimer sous la forme :

$$E_2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - W^T \Phi(x_i))^2 \quad (2.27)$$

En utilisant (1.19), Celle ci peut s'écrire sous la forme :

$$E_2 = (y - \Phi(X)^T W)^T (y - \Phi(X)^T W) \quad (2.28)$$

La minimisation de (2.27) revient à chercher la solution de l'équation :

$$\frac{\partial E_2}{\partial W} = -y^T \Phi(X) + W^T \Phi(X) \Phi(X)^T = 0 \quad (2.29)$$

La solution est donnée par:

$$W = (\Phi(X) \Phi(X)^T)^{-1} \Phi(X) y. \quad (2.30)$$

Application 3:

Reprenons la fonction traitée dans l'application 2. Le vecteur paramètres W calculé par résolution de l'équation (2.30) est donné par :

$$W = [-1.0106 \quad 0.0082 \quad -0.0323 \quad 0.5613 \quad -0.5613 \quad 0.0323]^T$$

la forme $HL-CPWL$ cherchée est donnée par :

$$f_{HL-CPWL}(x) = -1.0106 + 0.0082\gamma(x + 10, x + 10) - 0.0323\gamma(x + 6, x + 6) + 0.5613\gamma(x + 2, x + 2) - 0.5613\gamma(x - 2, x - 2) + 0.0323\gamma(x - 6, x - 6)$$

La simulation des variations de la fonction non linéaire et de son approximation linéaire par cinq morceaux est donnée sur la figure 2.4.

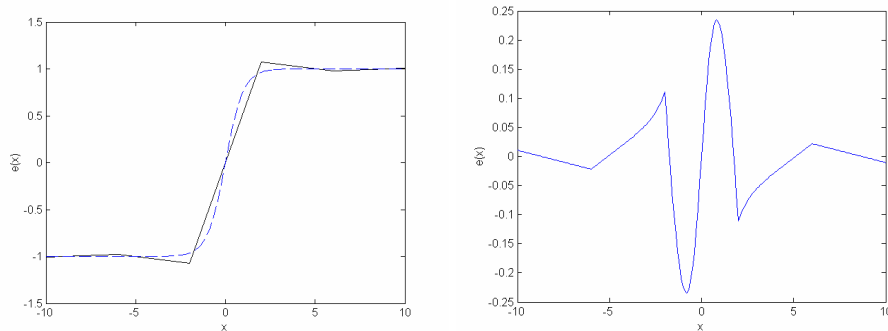


Figure 2.4 : Approximation de la fonction $\tanh(x)$ par $HL-CPWL$ sous un critère d'optimisation H_2

2.5. APPROXIMATION DES SYSTEMES NON LINEAIRES PAR *HL-CPWL*

Soit l'ensemble de points de mesures défini par :

- $X = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}\}$ où $x_{i_k} \in S_i$ ($k = 1, \dots, l$) est une variable de non linéarité si la fonction non linéaire correspondante est mono-argument
- $X = \{(x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_2}, x_{j_2}), \dots, (x_{i_l}, x_{j_l})\}$ où $(x_{i_k}, x_{j_k}) \in S_i \times S_j$ ($k = 1, \dots, l$) est un couple de variables de non linéarités si la fonction non linéaire correspondante est bi-argument. Les domaines de variation des variables d'état x_i et x_j (S_i et S_j) sont mis sous la forme (2.1).

Pour chaque ensemble de points de mesures, il est associé un ensemble de valeurs des fonctions non linéaires correspondantes du type (2.18) avec :

- $h(x_{i_k}) = y$ si h est mono-argument
- $h(x_{i_k}, x_{j_k}) = y$ si h est bi-argument.

Les modèles recherchés seront de la forme :

$$\dot{x} = \overline{f}(x) + Bu \quad (2.31.a)$$

$$y = Cx \quad (2.31.b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^q$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ sont les variables et paramètres du modèle (2.4). La fonction $\overline{f}(x)$ est une forme *HL-CPWL* approximative de la fonction $f(x)$. Elle est donnée par :

$$\overline{f}(x(t)) = \begin{bmatrix} \overline{h}_1(x) \\ \vdots \\ \overline{h}_k(x) \\ \vdots \\ \overline{h}_n(x) \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

où $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ est le domaine de variation des variables d'état (S_i est associé à la variation de la variable x_i). Les fonctions $\overline{h}_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ sont soit :

- $\overline{h}_i(x) = h_i(x)$ si la fonction h_i est linéaire.

- $\overline{h}_i(x) = G_{ii}x + \overline{h}_{ii}(z_1)$ si la fonction h_i est non linéaire.

Chaque \overline{h}_{ii} est une forme *HL-CPWL* approximative de la fonction non linéaire h_{ii} qui s'écrit sous la forme $\overline{h}_{ii}(z_1) = W^T \Phi(z_1)$ où $\Phi(x)$ est une base liée au domaine de variation des variables des non-linéarités et W est un vecteur paramètres déterminé par résolution du problème 1 de programmation linéaire.

Application 4:

Soit le modèle non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_2(t) - x_3(t) + \tanh(x_1(t)) + u(t) \end{cases} \quad (2.33)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t)$$

$$x \in S = S_1 \times S_2 \times S_3 = [-10;10] \times [0;22.11] \times [0.1;30.01] \text{ et } x(t_0) = [-10 \ 0 \ 0.1]^T.$$

On rappelle que l'approximation de la fonction non linéaire $\tanh(x_1(t))$ pour une division du domaine S en 5 morceaux est donnée pour :

- une optimisation H_∞ de l'erreur (voir application 2) par :

$$\begin{aligned} \overline{h}_{33}(x(t)) = & -1.0106 + 0.0082g(x_1(t)+10, x_1(t)+10) - 0.0323g(x_1(t)+6, x_1(t)+6) + \\ & 0.5613g(x_1(t)+2, x_1(t)+2) - 0.5613g(x_1(t)-2, x_1(t)-2) + 0.0323g(x_1(t)-6, x_1(t)-6) \end{aligned}$$

- une optimisation H_2 de l'erreur d'approximation (voir application 3) par:

$$\begin{aligned} \overline{h}_{33}(x_1) = & -0.811 + 0.0904\gamma(x_1 + 6, x_1 + 6) + 0.6719\gamma(x_1 + 2, x_1 + 2) - 0.5725\gamma(x_1 - 2, x_1 - 2) \\ & - 0.009\gamma(x_1 - 6, x_1 - 6) \end{aligned}$$

Pour un échelon de commande $u(t)=50$, le modèle approché par morceaux est validé en comparaison avec le modèle non linéaire dans le cas d'une optimisation H_∞ sur la figure 2.5 et dans le cas d'une optimisation H_2 sur la figure 2.6.

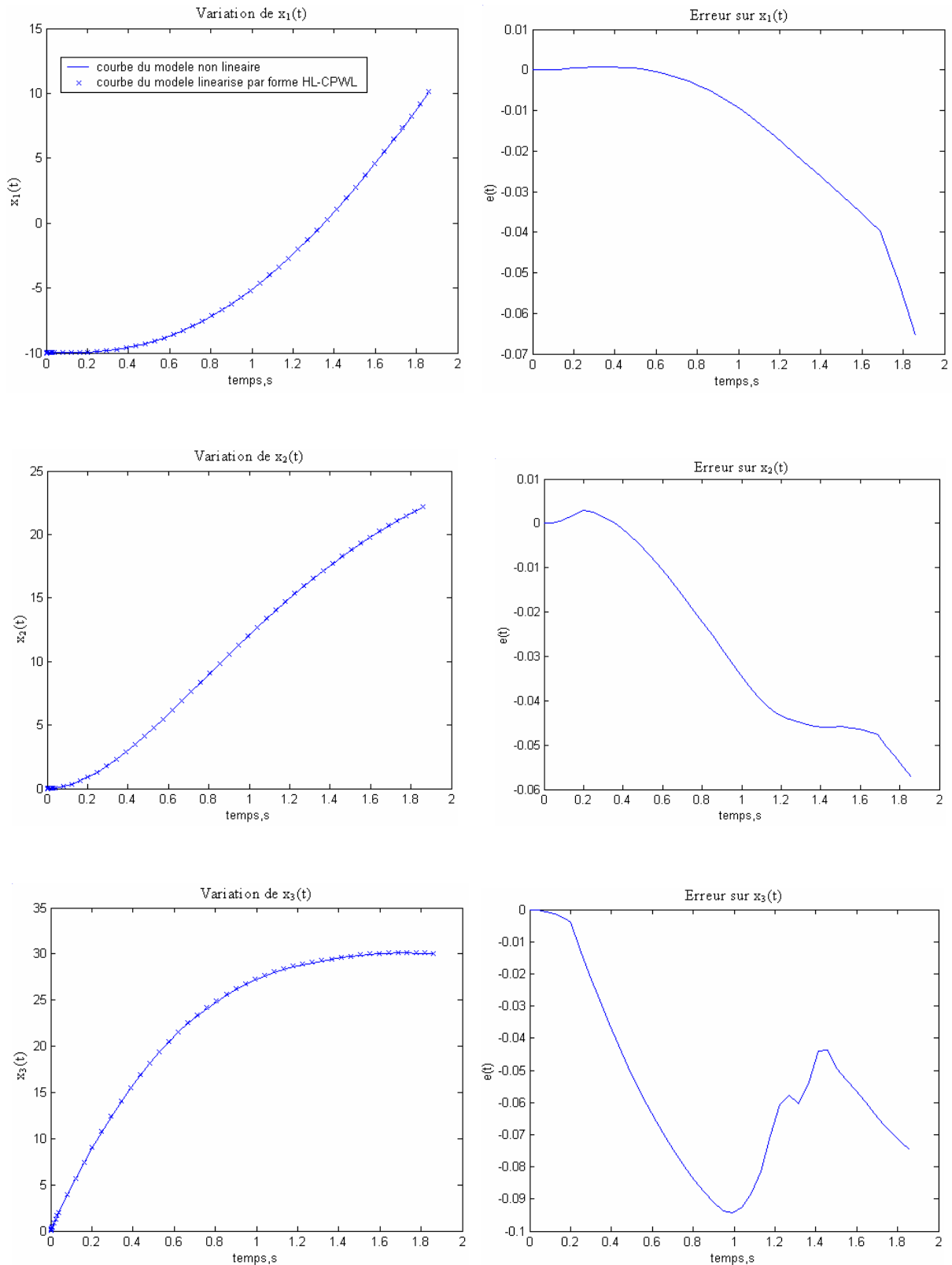


Figure 2.5. Validation du modèle linéaire par morceaux par rapport au modèle non linéaire sous un critère d'optimisation H_∞

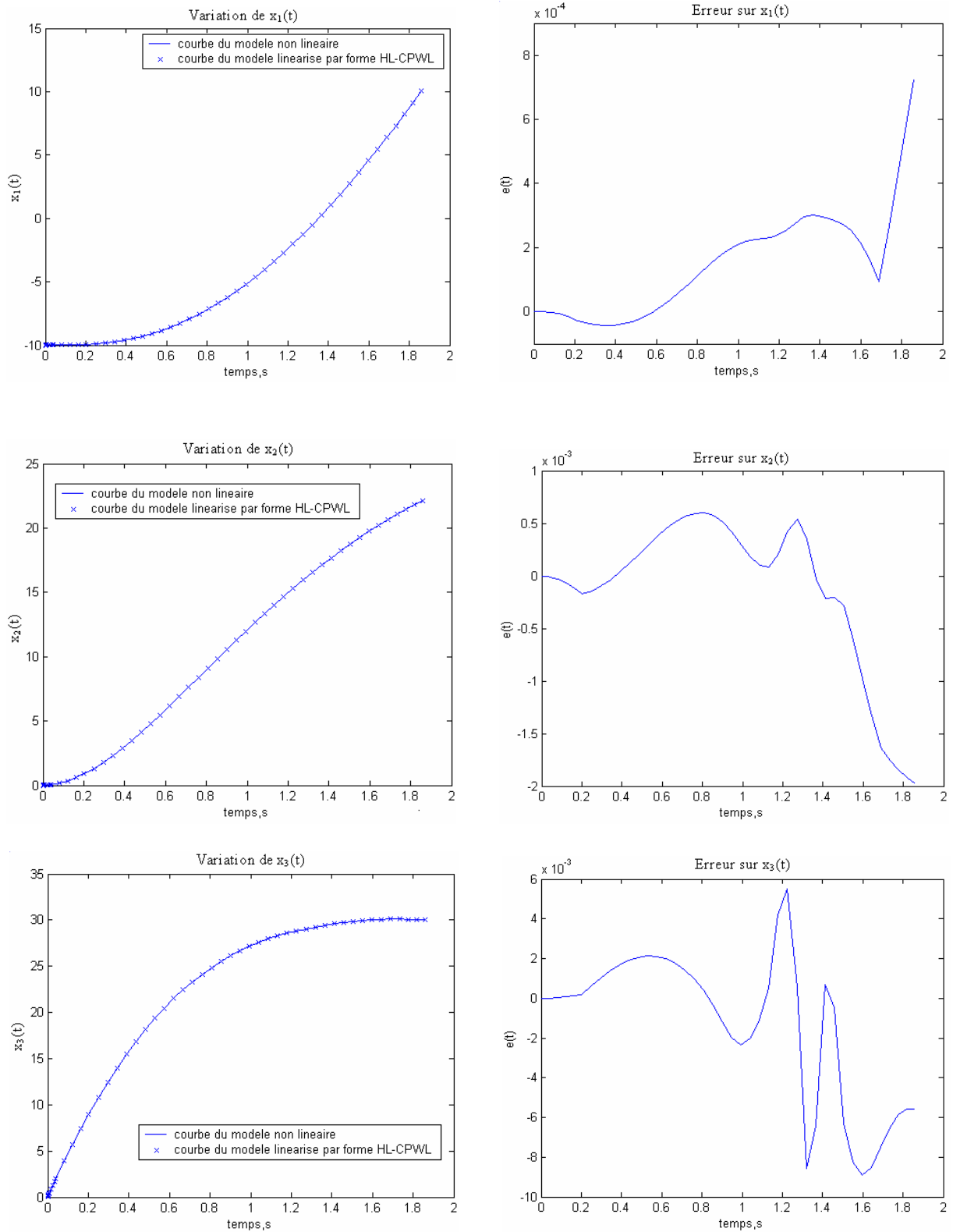


Figure 2.6 : Validation du modèle linéaire par morceaux par rapport au modèle non linéaire sous un critère d'optimisation H_2

2.6. CONSTRUCTION DE LA BASE DES MODELES AFFINES

La construction des multimodèles linéaires à partir des fonctions canoniques linéaires par morceaux (*HL-CPWL*) approximation des fonctions non linéaires est une opération nécessaire pour l'analyse et la commande bien qu'elle s'avère difficile à cause des difficultés engendrées par l'analyse des fonctions comportant des valeurs absolues. Pour remédier à ces difficultés, l'idée est d'établir une base de modèles linéaires, défini chacun sur une région limitée et valable dans une région de l'espace d'état. La commutation entre sous modèles, se fait si la valeur d'une variable de non-linéarité dépasse la limite de la région de validité d'un sous modèle et entre dans l'intervalle ou la région de validité d'un autre sous modèle. La représentation multimodèle d'un modèle non linéaire de type (2.4) respectant les conditions (2.6) et (2.7) doit avoir la forme suivante $\forall x \in R^{(i)} \subset S, \quad i = 1, 2, \dots, N :$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + a_i + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.34)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^q, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ sont les variables et paramètres du modèle (2.4). S est l'espace total de variation des différentes variables d'état ($S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$), $R^{(i)} = [BP_i \quad BP_{i+1}]$ est la région de validité du i^{me} modèle linéaire limité par deux points de cassures consécutifs BP_i et BP_{i+1} . N étant le nombre total de modèles linéaires (voir figure 2.7).

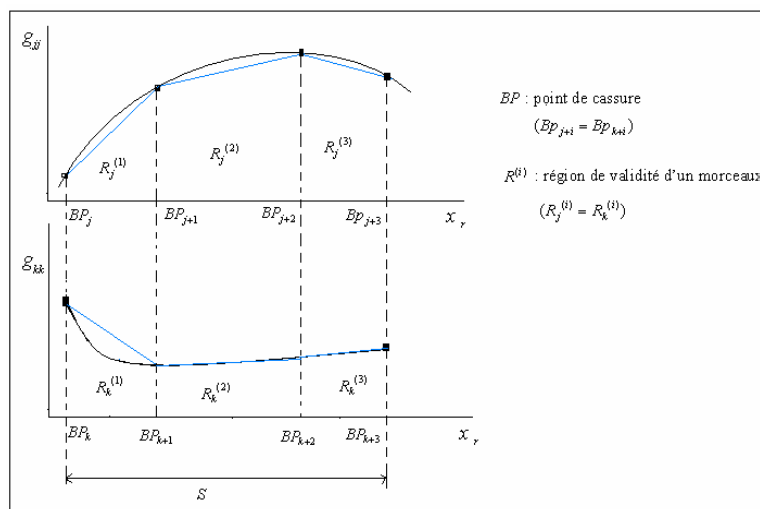


Figure 2.7. Exemple de subdivision d'un domaine S en régions par approximation de deux fonctions non linéaires monovariables par approche *HL-CPWL*

La matrice carrée A_i de dimension $n \times n$ et le vecteur a_i de dimension $n \times 1$ sont respectivement la matrice Jacobienne de la région $R^{(i)}$ et le vecteur ordonné aux origines de la restriction $f^{(i)}(x)$ de la forme canonique $HL-CPWL$ $\bar{f}(x)$. Ces deux derniers sont de la forme suivante :

$$\bar{f}(x) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1(x) \\ \vdots \\ \bar{h}_k(x) \\ \vdots \\ \bar{h}_n(x) \end{bmatrix},$$

où

- $\bar{h}_k(x) = G_k x$ si h_k est de la forme (2.6)
- $\bar{h}_k(x) = G_k z_1 + \bar{h}_{kk}(z_2)$ si h_k est de la forme (2.7) \bar{h}_{kk} étant la forme canonique approximative de la fonction h_{kk} .

Les deux paramètres G_k et b_{i_k} sont déterminés par identification des paramètres de l'équation du i^{me} morceau défini sur la région $R^{(i)}$ soit par exemple par résolution sur la région $R^{(i)}$ de:

$$\begin{cases} G_{i_{kk}} BP_i + b_{i_k} = \bar{h}_{kk}(BP_i) \\ G_{i_{kk}} BP_{i+1} + b_{i_k} = \bar{h}_{kk}(BP_{i+1}) \end{cases} \quad \text{si } h_{kk} \text{ est mono argument } G_{i_{kk}} \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

où

$$\begin{cases} G_{i_{kk}} BP_i + b_{i_k} = \bar{h}_{kk}(BP_i) \\ G_{i_{kk}} \frac{BP_i + BP_{i+1}}{2} + b_{i_k} = \bar{h}_{kk}\left(\frac{BP_i + BP_{i+1}}{2}\right) \\ G_{i_{kk}} BP_{i+1} + b_{i_k} = \bar{h}_{kk}(BP_{i+1}) \end{cases} \quad \text{si } h_{kk} \text{ est bi-argument } G_{i_{kk}} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.36)$$

$BP_i = \underline{x} + i\mathbf{d}$ où \underline{x} étant la borne inférieure du domaine de variation des variables de non linéarité et \mathbf{d} est le vecteur pas de grille associé à chaque variable de non-linéarité.

Application 5 :

Pour le modèle de l'application 3, les points de cassure sur la première variable sont :

$$\{BP_1, BP_2, BP_3, BP_4, BP_5, BP_6\} = \{-10, -6, -2, 2, 6, 10\}$$

alors que l'ensemble des ordonnés de ces points est donné par :

$$\{\overline{h_{33}}(BP_1), \overline{h_{33}}(BP_2), \overline{h_{33}}(BP_3), \overline{h_{33}}(BP_4), \overline{h_{33}}(BP_5), \overline{h_{33}}(BP_6)\} = \{-0.811, -0.811, -1.1726, 1.1534, -1.1894, 1.1894\}$$

La représentation multimodèle associée, est donnée par :

- $\forall x(t) \in R^{(1)} = [-10 \quad -6]$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x(t) + a_1 + Bu(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.0082 & -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.9286 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \quad 0 \quad 0)x(t) \end{cases}$$

- $\forall x(t) \in R^{(2)} = [-6 \quad -2]$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x(t) + a_2 + Bu(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -0.0241 & -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.1224 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \quad 0 \quad 0)x(t) \end{cases}$$

- $\forall x(t) \in R^{(3)} = [-2 \quad 2]$

$$\begin{cases} \dot{x}_3(t) = A_3 x(t) + a_3 + Bu(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.5371 & -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \quad 0 \quad 0)x(t) \end{cases}$$

- $\forall x(t) \in R^{(4)} = [2 \quad 6]$

$$\begin{cases} \dot{x}_4(t) = A_4 x(t) + a_4 + Bu(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -0.0241 & -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.1224 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \quad 0 \quad 0)x(t) \end{cases}$$

- $\forall x(t) \in R^{(5)} = [6 \quad 10]$

$$\begin{cases} \dot{x}_5(t) = A_5 x(t) + a_5 + Bu(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0.0082 & -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9286 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \quad 0 \quad 0)x(t) \end{cases}$$

Un changement de variable :

$$X = x - x_{0,i}$$

$$U = u - u_{0,i}$$

permettrait d'écrire le modèle sous la forme (2.3) avec :

$$\forall x_1(t) \in R^{(1)} = [-10; -6] ;$$

$$\forall x_1(t) \in R^{(2)} = [-6; -2] ;$$

$$\forall x_1(t) \in R^{(3)} = [-2; 2]$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0.0082 & -1 & -1 \end{pmatrix} ;$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -0.0241 & -1 & -1 \end{pmatrix} ;$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0.5371 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\forall x_1(t) \in R^{(4)} = [2; 6] ;$$

$$\forall x_1(t) \in R^{(5)} = [6; 10]$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -0.0241 & -1 & -1 \end{pmatrix} ;$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0.0082 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et ceci pour un ensemble des points d'équilibre appartenant à une trajectoire prédéfinie.

2.7. COMMANDE ROBUSTE SEQUENCEE : VERS UNE APPROCHE QUADRATIQUE ETENDUE

L'approche qui sera adoptée s'inscrit dans le cadre de la stabilité quadratique et s'appuie sur la théorie de Lyapunov. Cette approche a permis d'apporter des contributions importantes dans le domaine de la stabilité [Dorato *et al.*, 1993]. Le problème de la stabilité quadratique des multimodèles (2.3), proposé précédemment, peut être vu comme une extension de cette théorie au cas des incertitudes de type polytopique. Le problème peut se réduire donc à un problème d'optimisation convexe qui sera résolu en utilisant des Inégalités matricielles [Boyd *et al.*, 1996]. Cependant, la recherche d'une fonction de Lyapunov unique impose un certain conservatisme. Pour réduire ce conservatisme, plusieurs approches ont proposé la recherche de fonctions de Lyapunov plus générales. Des fonctions non quadratiques ont été proposées par [Blanchini et Miani, 1999] alors que la construction de fonctions dépendant de paramètres avait été proposée par [Dasgupta *et al.*, 1994], [Feron *et al.*, 1996], [Gahinet *et al.*, 1996].

En extension aux travaux présentés par [Oliveira *et al.*, 1999], [Daafouz et Bernussou, 2002] [Daafouz *et al.*, 2002] nous proposons ici une approche quadratique étendue qui peut être adoptée pour les multimodèles linéaires par approche *HL-CPWL* et qui permet de réduire le conservatisme de l'approche quadratique classique. L'intérêt réside dans le fait que l'on peut considérer des matrices de Lyapunov différentes pour chaque modèle, respectivement pour chaque sommet d'un polytope pour des incertitudes de type polytopiques.

2.7.1. STABILITE

L'étude de la stabilité des multimodèles certains peut être établie en utilisant la méthode directe de Lyapunov étendue au cas des systèmes incertains de type polytopique qui a été initialement introduite par [Bernussou *et al.*, 1989]. Celle ci peut être énoncée par le théorème suivant :

THEOREME :

Le multimodèle certain (2.3) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice $P = P'$ définie positive, solution de :

$$A_i' P + P A_i < 0 \quad \forall i = 1 \dots N$$

Ce résultat a été étendu au cas des multimodèles incertains [Turki et Boubaker, 2003]. Pour réduire le conservatisme de l'approche quadratique déjà énoncée qui impose dans ce cas une solution unique de la fonction de Lyapunov pour tous les modèles et tous les sommets du polytope, nous proposons ici une approche quadratique étendue qui peut être énoncée selon le théorème suivant :

THEOREME :

Le système (2.3) est poly quadratiquement stable s' il existe des matrices $F = F'$ et $P_i = P_i'$ définies positives et une matrice G de dimension appropriée telles que ($G \ll 0$) :

pour $i = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{pmatrix} A_i F + F' A_i' & A_i G - F' + P_i \\ G' A_i' - F + P_i & -G - G' \end{pmatrix} < 0$$

Pour $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N v_i P_i$ (> 0) on a :

$$\left(\begin{array}{cc} A_i F + F' A_i' & A_i G - F' + \sum_{i=1}^{n_a} v_i P_i \\ G' A_i' - F + \sum_{i=1}^{n_a} v_i P_i & -G - G' \end{array} \right) < 0$$

Pour $F = P$, cette condition englobe la condition de stabilité quadratique antérieure :

$$P > 0 \quad A_i P + P A_i' < 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

L'intérêt d'une telle approche est qu'elle permet l'utilisation d'une matrice de Lyapunov différente pour chaque modèle.

2.7.2. SEQUENCEMENT DE GAINS ROBUSTES

On considère les modèles linéaires par morceaux et perturbés décrits pour $i = 1, \dots, N$ par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_i X(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ Z(t) = C_1 X(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t), \\ Y(t) = C_2 X(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

où $X \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^l$, $u \in \mathbb{R}^m$, $Y \in \mathbb{R}^q$ et $Z \in \mathbb{R}^q$ sont respectivement les vecteurs d'état, de perturbation, de commande, de sortie mesurée et de sortie contrôlée. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_w \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $B_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ et $C_2 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ sont respectivement la matrice d'état du $i^{ème}$ sous modèle, la matrice de perturbation, la matrice de commande, la matrice d'observation de la sortie contrôlée et la matrice d'observation de la sortie mesurée. Les matrices restantes sont les matrices de transfert entre chacune des entrées ou de perturbations et la sortie correspondante.

2.7.2.1. STABILISATION

Si les sorties mesurées Y s'identifient aux sorties contrôlées Z , et s'il n'y a pas de transfert direct des perturbations et de commandes sur la sortie, la représentation générale se réécrit de la manière suivante : Pour $i = 1, \dots, N$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_i X(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases} \quad (2.38)$$

THEOREME

La base de N modèles (2.38), est asymptotiquement stabilisable en boucle fermée par $u_i(t) = K_i X(t)$, pour tout $i=1, \dots, N$ si pour toute matrice R_i , il existe une matrice $P=P'$ définie positive, solution de :

$$A_i P + P' A_i' + B_u R_i + R_i' B_u' < 0 \quad (2.39)$$

un gain de retour d'état est alors donné pour chaque sous modèle défini par :

$$K_i = R_i P^{-1} \quad (2.40)$$

L'extension de ce résultat au cas du multimodèle incertain avec des incertitudes de type polytopique est donné dans [Turki et Boubaker, 2004a]. Pour réduire le conservatisme de l'approche quadratique classique énoncée dans le théorème précédent on propose le théorème suivant :

THEOREME

Le système (2.3) est poly quadratiquement stabilisable pour tout $i = 1, 2, \dots, N$, si il existe des matrices $P_i = P_i'$ définies positives, une matrice $G = \varepsilon F$, (ε scalaire petit) et une matrice R de dimensions appropriées telles que :

$$\begin{pmatrix} A_i F + F' A_i' + B_u' R + R' B_u & \mathbf{e}(A_i F + B_u R) - F' + P_i \\ \mathbf{e}(A_i F + B_u R) - F + P_i & -\mathbf{e}(F + F') \end{pmatrix} < 0 \quad (2.41)$$

Le régulateur est donné par :

$$K = R F^{-1} \quad (2.42)$$

L'inégalité est bilinéaire mais il possible de la résoudre en toute rigueur par une recherche opérationnelle mono-dimensionnelle par rapport à \mathbf{e} .

2.7.2.2. SYNTHÈSE H2

On considère le système (2.38). On cherche dans ce cas une séquence de retour d'état $u_i(t) = K_i \cdot X(t)$ stabilisant et minimisant la norme $\|T_{zw}\|_2^2$ tel que T_{zw} est le transfert entre la sortie commandée z et l'entrée de perturbation exogène w .

Théorème :

La base de N modèles (2.38), est stabilisable par retour d'état $u_i(t) = K_i \cdot X(t)$ ($i=1, \dots, N$) si, il existe une matrice $P = P'$ définie positive et des matrices R_i solutions du problème:

$$\begin{cases} \min_K \text{Trace}[B'_w P B_w] \\ \text{sous } P = P' > 0 \\ (A_i + B_u K)' P + P(A_i + B_u K) + C' C = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

L'égalité dans la dernière équation peut être remplacée par l'inégalité par raison de la croissance de P ce qui est équivalent au problème :

$$\begin{cases} \min_K \text{Trace} W \\ \text{sous } B'_w P B_w \leq W \\ (A_i + B_u K)' P + P(A_i + B_u K) + C' C \leq 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

et dans ce cas $\forall i, \|T_{zw,i}\|_2 \leq \text{Trace}(B'_w P^* B)$ où P^* est la solution optimale.

En utilisant le complément de Schur, $Q = P^{-1}$ et $R_i = K_i Q$, il vient :

$$\begin{cases} \min_K \text{Trace} W \\ \begin{pmatrix} W & B'_w \\ B_w & Q \end{pmatrix} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} A_i Q + Q A'_i + B_u R_i + R'_i B'_u & Q C' \\ C Q & -I \end{pmatrix} \leq 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

qui est une LMI par rapport à W, Q et R_i . La solution optimale correspond à :

$$K_{opti} = R_i Q^{-1} \quad (2.46)$$

Un autre problème d'intérêt peut être posé de la manière suivante : Trouver K stabilisant et assurant $\|T_{zw}\|_2^2 \leq m$ ce qui donne :

$$\begin{cases} \text{Trace } W \leq m \\ \begin{pmatrix} W & B'_w \\ B_w & Q \end{pmatrix} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} A_i Q + Q A'_i + B_u R_i + R'_i B'_u & C' \\ C & -I \end{pmatrix} \leq 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

Une façon alternative, par utilisation du gramien d'observabilité donne :

$$\begin{cases} \min_K \text{Trace}[CPC'] \\ \text{sous } (A_i + B_u K_i)P + P(A_i + B_u K_i)' + B_w B'_w = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

soit

$$\begin{cases} \min_K \text{Trace}[W] \\ CPP^{-1}PC' - W \leq 0 \\ (A_i + B_u K_i)P + P(A_i + B_u K_i)' + B_w B'_w \leq 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

enfin en utilisant le complément de Schur, il est possible d'écrire:

$$\begin{cases} \min_K \text{Trace}[W] \\ \begin{pmatrix} -W & CP \\ PC' & \underbrace{-P}_{P \geq 0} \end{pmatrix} \leq 0 \\ \underbrace{A_i P + P A'_i + B_u R_i + R'_i B'_u}_{\text{stabilité}} + B_w B'_w \leq 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

La relation précédente est une LMI par rapport W, P et R_i . Le régulateur est donné par :

$$K_i = R_i P \quad (2.51)$$

Pour réduire le conservatisme de l'approche quadratique classique énoncée précédemment on propose le théorème suivant :

Théorème :

La base de N modèles (2.38), est stabilisable par retour d'état $u_i(t) = K_i \cdot X(t)$ ($i=1, \dots, N$)

si, il existe une matrice $P = P'$ définie positive et des matrices R_i solution du problème:

$$\begin{aligned} & \text{Trace}[W] \leq \mathbf{m} \\ & \begin{pmatrix} -W & CF + B_u R \\ (CF + B_u R)' & -F - F' + P \end{pmatrix} > 0 \\ & \begin{pmatrix} A_i F + F A_i' + B_u R + R' B_u' + B_w B_w' & \mathbf{e}(A_i F + B_u R) - F' + P_i \\ \mathbf{e}(A_i F + B_u R)' - F + P_i & -\mathbf{e}(F + F') \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Le régulateur est exprimé par :

$$K = R F^{-1} \quad (2.53)$$

et dans ce cas :

$$\|T_{zw}\|_2^2 \leq \mu,$$

Le problème précédent est une inégalité matricielle bilinéaire par rapport à \mathbf{e}, W, F et R mais il est possible de la résoudre en toute rigueur par une recherche opérationnelle mono-dimensionnelle par rapport à \mathbf{e} .

2.7.2.3. SYNTHÈSE H_∞

On cherche dans ce cas une séquence de retour d'état $u_i(t) = K_i X(t)$ stabilisant et minimisant la norme $\|T_{zw}\|_\infty$ tel que T_{zw} est le transfert entre la sortie commandée z et l'entrée de perturbation exogène w avec des matrices de transfert directe nulles. Le problème est de faire la synthèse d'une loi de commande de type rétroaction qui :

- stabilise
- vérifie $\|T_{zw}\|_\infty < \mathbf{g}$,

Le problème est de déterminer la séquence de retour d'état K_i stabilisant qui satisfait

$$\|T_{zwi}\|_\infty < \mathbf{g}$$

Théorème :

La base des N modèles (2.38), est stabilisable par retour d'état $u_i(t) = K_i X(t)$

$\forall \|T_{zw,i}\|_\infty < \gamma$ si il existe une matrice unique $P = P'$ définie positive et des matrices R_i ($i = 1, \dots, N$) existent solution de :

$$\begin{pmatrix} A_i P + P A_i' + B_u R_i + R_i' B_u' + B_w B_w' & P C' \\ CP & -\mathbf{g} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.54)$$

tel que :

$$K_i = R_i P^{-1} \quad (2.55)$$

La relation précédente est une LMI par rapport P et R_i . L'extension de ce résultat au cas du multimodèle est donné dans [Turki et Boubaker, 2005] et dans le cas du multimodèle incertain avec des incertitudes de type polytopique est donné dans [Turki et Boubaker, 2004b]. Pour réduire le conservatisme de l'approche quadratique classique énoncée dans le théorème précédent on propose le théorème suivant :

Théorème :

La base de N modèles (2.37), est stabilisable par retour d'état $u_i(t) = K_i X(t)$

$\forall \|T_{zw,i}\|_\infty < \gamma$ ($i = 1, \dots, N$) si il existe une matrice unique $P = P'$ définie positive $\mathbf{e} > 0, F, R$ solution de :

$$\begin{pmatrix} A_i F + F A_i' + B_2 R + R B_2' + B_1 B_1' & \mathbf{e}(A F + B_2 R) - F' + P & F' C' + R' D_{12}' \\ \mathbf{e}(A F + B_2 R)' - F + P & -\mathbf{e}(F + F') & 0 \\ CF + D_{12} R & 0 & -\mathbf{g} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.56)$$

2.7.2.4. SYNTHÈSE MULTICRITÈRE

L'extension à la synthèse multicritère peut s'exprimer comme suit pour le système défini par :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_i X + B_{12} \omega_2 + B_{1\infty} \omega_\infty + B_2 u \\ Z_2 &= C_{12} X + D_{122} u \\ Z_\infty &= C_{1\infty} X + D_{12\infty} u \\ Y &= C_2 X + D_{22} \omega_2 + D_{2\infty} \omega_\infty \end{aligned} \quad (2.57)$$

Le problème est de faire la synthèse de la lois de commande u_i qui :

- stabilise la boucle
- vérifie $\|T_{z_2 w_2}\|_2^2 \leq \mathbf{m}$
- vérifie $\|T_{z_\infty w_\infty}\|_\infty \leq \mathbf{g}$

La loi de commande $u_i = K_i X$ doit satisfaire :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trace}[W] \leq \mathbf{m} \\
 & \begin{pmatrix} W & B'_{12} \\ B_{12} & P \end{pmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{pmatrix} A_i P + P A'_i + B_2 R + R' B'_2 & (C_{12} P + D'_{122} R)' \\ C_{12} P + D'_{122} R & -I \end{pmatrix} \leq 0 \\
 & \begin{pmatrix} A_i P + P A'_i + B_2 R + R' B'_2 + B_{1\infty} B'_{1\infty} & (C_{1\infty} P + D'_{1\infty 2} R)' \\ C_{1\infty} P + D'_{1\infty 2} R & -\mathbf{g} \end{pmatrix} < 0
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

La loi de commande est donnée par :

$$K_i = R_i P^{-1} \tag{2.59}$$

Le problème tel il posé contraint la solution à une matrice de Lyapunov unique pour tous les modèles et toutes les contraintes ce qui intègre un énorme conservatisme pour la résolution du problème. Pour réduire ce conservatisme, on propose donc de résoudre le problème tel que :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trace}[W] \leq \mu \\
 & \begin{pmatrix} W & C_1 F + D_{122} R \\ (C_1 F + D_{122} R)' & -F - F' + P_2 \end{pmatrix} > 0 \\
 & \begin{pmatrix} A_i F + F' A'_i + B_2 R + R' B'_2 + B_{12} B'_{12} & \varepsilon(A_i F + B_2 R) - F' + P_2 \\ \varepsilon(A_i F + B_2 R)' - F + P_2 & -\varepsilon(F + F') \end{pmatrix} < 0 \\
 & \begin{pmatrix} A_i F + F' A'_i + B_2 R + R' B'_2 + B_{1\infty} B'_{1\infty} & \varepsilon(A_i F + B_2 R) - F' + P_\infty & F' C'_1 + R' D'_{12} \\ \varepsilon(A_i F + B_2 R)' - F + P_\infty & -\varepsilon(F + F') & 0 \\ C_1 F + D_{1\infty 2} R & 0 & \gamma I \end{pmatrix} < 0
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Le régulateur est exprimé par :

$$K = R F^{-1} \tag{2.61}$$

L'intérêt d'une telle approche découle du fait surtout que l'on peut utiliser des matrices de Lyapunov différentes selon le type de contrainte. De plus un régulateur unique est obtenu pour la séquence des modèles est dérivé.

2.9. CONCLUSIONS ET PROSPECTIVES

L'axe de recherche « Commande Robuste des Systèmes Non linéaires » a été lancé suite à l'organisation des « Journées de la Commande Robuste » et la « Première Journée Doctorale » de l'INSAT sur les théories de la commande au cours desquels des conférences portant sur le sujet ont été présentées [Bernussou et al. 2003a] et [Bernussou et al. 2003b].

Les résultats que nous avons développés sur cet axe de recherche ont permis l'approximation de systèmes non linéaires par un ensemble de modèles linéaires dénombrables. Nous avons par contre pensé qu'il serait difficile de croire qu'il est possible d'assurer la stabilité globale par la simple utilisation des modèles obtenus et qu'il sera possible d'assurer cette propriété dans le cas où les non-linéarités sont approximées au moyen de linéarités affectées d'incertitudes avec un choix approprié de ces dernières. Cette pensée a été proposée et discutée en application sur un modèle fortement non linéaire d'un procédé réel de dépollution des effluents industriels [Turki et Boubaker, 2003], [Turki et Boubaker, 2004a,b]. L'approximation des systèmes non linéaires par des formes canoniques *CPLW* et *HL-CPWL* sans introduction d'incertitudes est présenté dans [Boubaker et Maamar, 2005].

Actuellement, nous pensons qu'il serait plus judicieux de considérer ce problème comme étant un problème de stabilité de systèmes hybrides. Un état de l'art de cette classe a été récemment exposé dans [Liberson et Morse, 1999], [Blondel et Tsitsiklis, 1999] [Pettersson, 1999]. Dans ces références plusieurs contributions dans ce domaine ont été révisées. Des extensions à ces travaux ont évoqué les problèmes de stabilité [Zhao et Dimirovski, 2004] et de commande par retour d'état [Johansson et Rantzer, 1998], [Hassibi et Boyd, 1998], [Rodrigues & Hassibi, 1999], [Johansson, 1999] [Mignone *et al.*, 2000], [Lee *et al.*, 2000], [Mehr et Chen, 2000], [Johansson et Rantzer, 2000], [Magni et Scattoloni, 2004] et [Rodrigues & Boyd, 2005]. La proposition est de tenter d'étendre ce type de résultats au cas de lois de commande par retour de sortie, situations rencontrées plus fréquemment en pratique. Il s'agit d'un problème plus complexe mais pour lequel les travaux de recherche sont très rares [Daafouz et Bernussou, 2001], [Daafouz et Bernussou, 2002]. Dans un premier temps nous nous intéresserons au problème de la commande par retour de sortie de systèmes discrets instationnaires. Il sera intéressant de synthétiser tout d'abord un observateur pour l'ensemble dénombrable fini de systèmes linéaires. Les plus rares travaux qui traitent de

problème sont [Sworder & Boyd, 1999] et [Rodrigues, 2003]. La question fondamentale qui se pose est l'élaboration d'une loi de commande utilisant l'estimée fournie par l'observateur qui assure la stabilité à long terme du processus commandé. Les résultats obtenus sur cette question constitueront certainement une extension originale du principe de séparation à la commande de systèmes instationnaires.

Des extensions des premiers résultats au problème plus complexe de la commande de systèmes à temps discrets instationnaires et incertains sont prévues. Le cas d'incertitudes non structurées de type borné en norme sera considéré en premier lieu et la synthèse d'un « observateur » sera envisagée par des techniques de filtrage robuste par rapport à un critère à définir de manière judicieuse en fonction du problème de commande. Dans ce cas le principe de séparation ne s'applique pas directement et devront être élaborés des conditions suffisantes de stabilité pour le système ainsi commandé.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bernussou *et al.*, 1989] J. Bernussou, P. Peres, et J. Geromel, “A linear programming oriented procedure for quadratic stabilisation of uncertain systems,” *Systems and Control letters*, Vol. n°13, pp. 65-72, 1989.
- [Bernussou *et al.*,2003a] J. Bernussou, Y. Labit, P. Teppa, G. Garcia, “Techniques de séquençement de gains robustes pour systèmes non linéaires, ”*Journées de la Commande Robuste et de ses Applications*, 27-28 septembre 2003, Hammamet, pp.1-8.
- [Bernussou et Teppa,2003b] J. Bernussou et P. Teppa, “Approche linéariste de robustesse pour commande séquencée des systèmes non linéaires,” 1^{ère} Journée Doctorale de l’Automatique sur les théories de la commande, 17 décembre 2003, INSAT, Tunis.
- [Blanchini et Miani, 1999] Blanchini, Miani “A new class of universal Lyapunov functions for the control of uncertain linear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. 44, pp. 641-647, 1999.
- [Boubaker et Maamar, 2005] O. Boubaker, F. Maamar, “Linear multimodel approximation of non Linear systems: A high level piecewise linear approach under H_2/H_∞ error optimization,” *IEEE Third International Conference on Systems, Signals et Devices*, 21-24, mars 2005, Sousse, Tunisie, 2005.
- [Blondel et Tsitsiklis, 1999] V.D. Blondel, J.N. Tsitsiklis, “Complexity of stability and controllability of elementary hybrid systems, *Automatica*, Vol. 35, pp. 479, 489, 1999.
- [Boyd *et al.*, 1996] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron et V. Balakrishnan, “Linear Matrix Inequalities in system and control theory,” Volume 15, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [Chien et Kuh, 1977] M. Chien and E. Kuh, “Solving nonlinear resistive networks using piecewise-linear analysis and simplicial subdivision,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, Vol. 40, pp. 305-317, 1977.
- [Chua et Deng, 1986] L. Chua et A. Deng, “Canonical piecewise-linear modelling,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-33, pp. 511-525, 1986.
- [Chua et Kang,1977] L.O. Chua et S. Kang, “Section-wise piecewise-linear functions: Canonical representation, properties, and applications,” *In Proceedings IEEE*, Vol. 65, pp. 915-929,1977.
- [Chua et Deng, 1988] L. Chua et A. Deng, “Canonical piecewise-linear representation,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-35, pp. 511-525, 1988.

- [Chua et Ying, 1983] L. Chua et R. Ying, "Canonical piecewise-linear analysis," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-30, pp. 125-140, 1983.
- [Daafouz et Bernussou, 2001], J.Daafouz et J.Bernussou "Parameter dependent Lyapunov Functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties," Systems and Control Letters,2001.
- [Daafouz et Bernussou, 2002], J. Daafouz et J. Bernussou "Robust dynamic output feedback control for switched systems," Proceedings of Conference on Decision and Control, 2002.
- [Daafouz *et al.*, 2002] J. Daafouz, G. Mellerious, C.Iung, "A poly quadratic stability based approach for linear switched systems," special issue of International Journal of Control on "Switched, piecewise and polytopic linear systems," Vol. 47, N°10, November 2002, pp. 1302-1310, 2002.
- [Dasgupta *et al.*, 1994] S. Dasgupta, G. Chockalingam, B.D.O. Anderson, M. Fu, "Lyapunov functions for uncertain systems with applications to stability to time varying systems," IEEE Transactions on Automatic Control Vol. 41, pp. 93-106, 1994.
- [Dorato *et al.*, 1993] P. Dorato, R. Tempo, G. Muscato, "Bibliography on robust control," Automatica, Vol.29, pp. 201-214, 1993.
- [Feron *et al.*, 1996] E. Ferron, P. Apkarian, M. Chilali, "Analysis and synthesis of robust control systems via parameter dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty," IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 41, pp. 1041-1046, 1996.
- [Gahinet *et al.*, 1996] P. Gahinet, P. Apkarian, M. Chilali, "Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty," IEEE transactions on Automatic Control, Vol. 41, pp.436-442, 1996.
- [Hassibi et Boyd, 1998] A. Hassibi, S.P. Boyd, "Quadratic stabilization and control of piecewise-linear systems, in:Proceedings of the American Control Conference, pp. 3659-3664, 1998.
- [Johansson, 1999] M. Johansson, Piecewise linear control systems, Phd. Thesis , Lund Institue of Technology, 1999.
- [Johansson et Rantzer, 1998] M. Johansson et A. Rantzer, "Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, n°4, pp. 555-559, 1998.
- [Johansson et Rantzer , 2000] M. Johansson, A. Rantzer, Piecewise linear quadratic optimal control, IEEE Trans. On Automat. Control, Vol. 45, pp. 629-637, 2000.

- [Juliân *et al.*, 1999] P. Juliân, A. Desages et O. Agamennoni, “High-Level Canonical Piecewise Linear representation using a simplicial partition,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 46, N°4, pp. 461-480, 1999.
- [Juliân, 1999] P. Juliân, “Un haut Niveau théorie de la représentation piecewise-linéaire Canoniale et Candidatures,” Thèse de Doctorat, Universidad Nacional Del Sur, Bahia Blanca, Argentine, 1999.
- [Kahlert et Chua, 1992] C. Kahlert and L.O. Chua, “The complete canonical piecewise-linear representation-Part I: The geometry of the domain space,” *IEEE Transactions on circuits and Systems I*, Vol. CAS-24, pp. 222-236, 1992.
- [Kang et Chua, 1978] S. Kang et L. Chua, “A global representation of multi-dimensional piecewise-linear functions with linear partitions,” *IEEE Transactions on circuits and Systems*, Vol.. CAS-25, pp938-940, 1978.
- [Lee *et al.*, 2000] S.H. Lee, T. H. Kim, J.T. Lim, “A new stability Analysis of switched systems,” *Automatica*, Vol. 36, pp. 917-922, 2000.
- [Liberson et Morse, 1999] D. Liberson, A. Stephen Morse, “Basic problems in stability and design of switched systems,” *IEEE Control Systems*, Vol.. 19, n°5, pp. 59-70, 1999.
- [Lin *et al.*, 1994] J. N. Lin, H. Xu, and R. Unbehauen, “A generalization of canonical piecewise-linear functions,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, Vol. 40, pp345-347, 1994.
- [Magni et Scattoloni, 2004] L. Magni, R. Scattolini, “Model Predictive Control of Continuous-Time Nonlinear Systems With Piecewise Constant Control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, n°6, 2004.
- [Mignone *et al.*, 2000] D. Mignone, G. Ferrari-Trecate and M. Morari, Stability and stabilisation of piecewise affine and hybrid systems: An LMI approach,” *Proceedings of Conference on Decision and Control*, Sydney-Australia, december 2000.
- [Mehr et Chen, 2000] A. S. Mehr et T. Chen, “Proprieties of linear switched time varying discrete time systems with applications,” *Systems and Control letters*, Vol. 39, pp. 229-235, 2000.
- [Njal *et al.*, 1995] B.O.L Njal et P. E Pettit, ?Wellstead, “Analysing piecewise linear dynamical systems,” *IEEE Transactions on Control Systems*, Vol. 15, pp.43-50, 1995.
- [Oliveira *et al.*,1999] M.C. de Oliveira, J. Bernussou, J. C. Geromel, “A new discrete-time robust stability condition,” *Systems and Control letters*, Vol. n°36, pp. 135-141, 1999.

- [Pettersson, 1999] S. Pettersson, "Analysis and Design of hybrid systems, Phd Dissertation, Chalmers University of Technology, 1999.
- [Rodrigues & How 2003] L. Rodrigues, J. How, "Observer based control of piecewise affine systems," *International J. Control*, Vol. 76, pp. 459- 477, 2003.
- [Rodrigues & Boyd, 2005] L. Rodrigues, S. Boyd, "Piecewise affine state feedback for piecewise affine slab systems using convex optimization," *Systems and control letters*, Vol. 54, pp. 835-853, 2005.
- [Rodrigues & Hassibi, 1999] L. Rodrigues, A. Hassibi and J.P. How, *Stability and control of piecewise affine systems with multiple equilibria*, Research report, Stanford University, Septembre 1999.
- [Rugh, 1991] W.J. Rugh, "Analytical framework for gain-scheduling," *IEEE Transactions on Control Systems*, Vol 11, n°1, pp79-92, 1991.
- [Shamma et Athans, 1990] J.S. Shamma et M. Athans, "Analysis of nonlinear gain-scheduled," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol 35, n°8, pp 398-907, 1990.
- [Shamma et Athans, 1992] J.S. Shamma et M. Athans, "Gain scheduling : Potential hazards and possible remedies," *IEEE Trans. on Control Systems*, Vol.12, n°3, pp.101-107, 1992.
- [Sharuz et Behtash, 1992] S. Sharuz et S. Behtash, "Design controls for linear parameter varying systems by the gain scheduling technique," *Int J Math Anal Appli*, Vol. 168, pp. 195-217, 1992.
- [Sontag, 1981] E.D. Sontag, "Nonlinear regulation: The piecewise linear approach," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 26, pp.346-357, 1981.
- [Storace *et al.*, 2002] M. Storace, P. Juliân and M. Parodi, "Synthesis of nonlinear multi port resistors: a PWL approach," *IEEE Trans. on CAS I*, Vol. 49, pp.1138-1149, 2002.
- [Storace *et al.*, 2003] M. Storace, L. repetto and M. Parodi, "A method for the approximate synthesis of cellular nonlinear networks-part 1: Circuit definition," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, Vol. 31, 2003.
- [Sworder & Boyd, 1999] D. D. Sworder, and E. John Boyd, "Estimation problems in hybrid systems, Cambridge University Press, 1999.
- [Turki et Boubaker, 2003] K. Turki et O.Boubaker, "Modélisation multimodèle incertaine d'un procédé de dépollution des eaux usées, " *Séminaire Tunisien d'Automatique STA'03*, 20 et 22 Décembre 2003, pp 60-65, 2003

[Turki et Boubaker, 2004a] K. Turki, O. Boubaker, “Commande robuste séquencée : Application au contrôle des effluents industriels,” IEEE Conférence Internationale Signaux, circuits et systèmes, 21-22 Mars 2004, Monastir, pp. 85, 90, 2004.

[Turki et Boubaker, 2004b] K. Turki, O. Boubaker, “Vers une modélisation multimodèle et une commande robuste séquencée des bioprocédés,” IEEE Conférence Internationale Francophone d’Automatique CIFA’2004, Douz, Tunisie, 2004.

[Turki et Boubaker, 2005] K. Turki, O. Boubaker, “ H^∞ Gain scheduling control of a non linear bioprocess: A multiple model approach,” International Journal on Artificial Intelligence and Machine Learning,” Vol.5, N°3, pp. 79-85, décembre 2005.

[Van Bokhoven, 1981] W. van Bokhoven, “Piecewise linear modelling and analysis,” dans Deventer, The Netherlands: Kluwer Technishe Boeken, 1981.

[Zhao et Dimirovski, 2004] J. Zhao, G.M. Dimirovski, “Quadratic stability of a class of switched nonlinear systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, N°4, pp. 574- 578, 2004.

AXE DE RECHERCHE 3:

SYNTHESE DES OBSERVATEURS ROBUSTES

3.1. INTRODUCTION

Ce chapitre présente un état de l'art que nous élaboré autour des techniques de synthèse d'observateurs robustes des systèmes linéaires [Boubaker, 2005]. Il présente aussi un ensemble de perspectives de travaux de recherche et des extensions au cas des systèmes non linéaires. Nous pensons que cet axe de recherche est un axe incontournable pour tout automaticien du fait que les observateurs sont une alternative incontournable pour l'implantation de lois de commande sur processus réels. En effet, la mise en oeuvre de tout système automatisé efficace exige la disponibilité d'informations en temps réel sur les états du système contrôlé alors qu'il est souvent très coûteux de tenter de mesurer toutes les variables d'état du système. Les difficultés rencontrées proviennent essentiellement des techniques de mesure en ligne utilisées. Le manque de capteurs nécessaires pour l'instrumentation de certains paramètres physiques et les problèmes liés aux délais de traitement trop longs sont des problèmes d'ampleur. Les observateurs permettent donc de reconstruire l'évolution des variables d'état non mesurables à partir des mesures en ligne, des variables d'état mesurables et d'un modèle du procédé (figure 3.1).

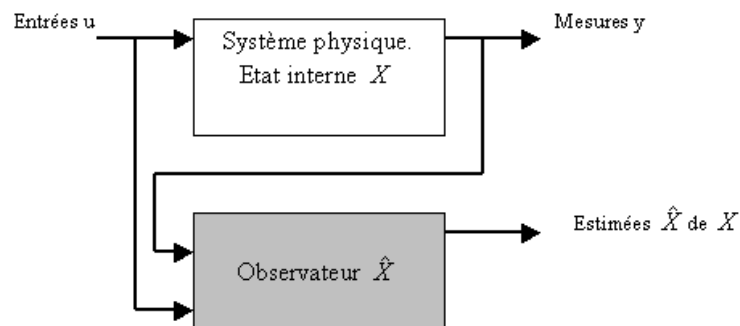


Figure 3.1. Principe de base d'un observateur

Le concept des observateurs d'état a prouvé initialement son efficacité dans le domaine de contrôle et de la régulation des systèmes avec la conception du filtre de Kalman [Kalman et Bucy, 1961] et de l'observateur standard de Luenberger [Luenberger, 1966] développés pour les systèmes linéaires. Suite à cette réussite, le problème d'observation a été étendu vers celui des systèmes non linéaires avec la conception du filtre de Kalman étendu [Labarrere *et al.*, 1982] et de l'observateur de Luenberger étendu [Birk et Zeitz, 1988].

Durant les années 90, les observateurs non linéaires basés sur la théorie des systèmes à structure variable initialement introduits par [Drakunov, 1983] ont reçu beaucoup d'intérêt. Ces observateurs ont été principalement développés par Slotine [Slotine *et al.*, 1986,1987][De Wit et Slotine, 1991]. Ils présentent l'avantage d'assurer simultanément simplicité, garantie de la stabilité, rapidité de convergence et robustesse. Le principal inconvénient de ce type d'observateurs se manifeste au niveau du phénomène de broutement qu'ils intègrent. C'est autour de cette théorie que nous avons développée certains de nos travaux de thèse [Boubaker *et al.* , 1998], [Boubaker et Babary, 1999].

Plus récemment, des méthodes qui prennent en compte de manière explicite l'existence de perturbations et des incertitudes dynamiques sont apparues. Cette nouvelle catégorie d'observateurs a été marquée par les travaux de [Bhattacharya, 1978], [Kudva *et al.* ,1980], [Kurek, 1983], [Yang et Wild, 1988], [Hou et Muller, 1991] et [Darouach *et al.* ,1994] dans le cadre des systèmes linéaires à entrées inconnues et de [Bhattacharyya, 1976], [Haddad et Berstein, 1995], [Akpan, 2001] et [Collins et Song, 2001] dans le cadre du filtrage robuste des systèmes linéaires incertains.

3.2. OBSERVATEURS ROBUSTES A ENTREES INCONNUES

Pour faire face aux problèmes d'estimation d'état des systèmes à entrées inconnues, deux philosophies ont été adoptées [Boubaker, 2005]. La première consiste en une estimation de tous les états du système [Sfaihi et Boubaker, 2004], la deuxième restreint le problème en une estimation des états non accessibles [Boubaker et Sfaihi, 2005]. Considérons les systèmes linéaires à entrées inconnues modélisés par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x \in \mathfrak{R}^n$ représente l'état du système, $y \in \mathfrak{R}^p$ la sortie, $u \in \mathfrak{R}^k$ l'entrée connue et $v \in \mathfrak{R}^m$ l'entrée inconnue. A , B , D et C sont des matrices certaines de dimensions convenables avec $\text{rang}C=p$, $\text{rang}D=m$ et $p \geq m$.

3.2.1. OBSERVATEURS D'ORDRE COMPLET [Sfaihi et Boubaker, 2004],

Une description de l'observateur d'ordre complet pour les systèmes linéaires invariants (3.41) peut être donnée par la représentation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Nz + Ly + Gu \\ \hat{x} &= z - Ey \end{aligned} \quad (3.2)$$

où z est le vecteur de dimension n , \hat{x} est le vecteur état estimé de dimension n , N , L , G et E représentent respectivement des matrices de dimensions appropriées assurant la convergence asymptotique de \hat{x} vers x . Définissons l'erreur de l'observation e comme suit:

$$e = \hat{x} - x \quad (3.3)$$

La dynamique de l'erreur est alors décrite par l'équation suivante :

$$\dot{e} = Ne + (NP + LC - PA)x + (G - PB)u - PDv \quad (3.4)$$

$$\text{où : } P = I_n + EC \quad (3.5)$$

Si les conditions suivantes sont assurées:

$$- \quad NP + LC - PA = 0 ; \quad (3.6)$$

$$- \quad G - PB = 0 ; \quad (3.7)$$

$$- \quad (I_n + EC)D = 0 \text{ ou } PD = [0] \quad (3.8)$$

- N est une matrice stable.

\hat{x} Convergera asymptotiquement vers x . Les conditions de convergence (3.6 –3.8) ont été utilisées pour développer différentes approches.

La résolution de (3.6)-(3.8) définira les matrices N, L, G, E ; le résultat est l'équation dynamique de l'observateur décrite par :

$$\dot{z} = [PA - KC]z + [K(I_p + CE) - PAE]y + PBu \quad (3.9)$$

$$\hat{x} = z - Ey \quad (3.10)$$

Le problème de conception de l'observateur à entrées inconnues d'ordre plein se réduit à trouver :

- La matrice E tel que $(I_n + EC)D = 0$
- La matrice K tel que $(PA - KC)$ soit stable.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour concevoir un observateur stable sont spécifiées par les théorèmes suivants :

Théorème [Darouach et *al.*, 1994]:

Pour le système (3.1), un observateur stable (3.9-3.10) existe si seulement si:

- $\text{rang}(CD) = \text{rang}(D) = m$
- $\text{rang} \begin{bmatrix} pP - PA \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \quad p \in C, \quad \text{Re}(p) \geq 0$

Théorème [Darouach et *al.*, 1994]:

Supposons que $\text{rang}(CD) = \text{rang}(D) = m$ et $\text{rang}(P) = n - m$ alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- La paire (PA, C) est observable, au moins détectable.
- $\text{rang} \begin{bmatrix} pP - PA \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \quad p \in C, \quad \text{Re}(p) \geq 0$
- $\text{rang} \begin{bmatrix} pI_n - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad \forall \quad p \in C, \text{Re}(p) \geq 0$

Pour la synthèse de la matrice E , si $\text{rang}(CD) = m$ alors:

$$E = -D(CD)^+ + Y(I_p - (CD)(CD)^+)$$

où (CD) est une colonne de rang plein et Y est une matrice arbitraire de dimension appropriée, $(CD)^+$ est la matrice inverse généralisée de (CD) .

3.2.2. OBSERVATEURS D'ORDRE REDUIT [Boubaker et Sfaihi, 2005]

- **Conception sans reconstruction des entrées inconnues**

Il s'agit de transformer le vecteur de l'état et le diviser en deux parties. La première partie inclut les états mesurables et le deuxième ceux non mesurables. Si C est de rang plein, alors une transformation convenable de l'espace peut être trouvée tel que C sera écrite sous la forme du vecteur $[I_p \mid 0]$; I_p est une matrice unitaire de dimension $(p \times p)$. Le système (3.1) peut alors s'écrire sous la forme subdivisée :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} v(t) \quad (3.11)$$

où $w \in \mathfrak{R}^{n-p}$ est la partie non mesurable du vecteur d'état. Si (C, A) est observable, alors la paire (A_{12}, A_{22}) est aussi observable et un observateur d'ordre réduit de dimension $(n-p)$ peut être construit comme suit:

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Hu(t) + Jv(t) \quad (3.12)$$

où :

$$F = A_{22} - LA_{12} \quad (3.13)$$

$$G = FL + A_{21} - LA_{11} \quad (3.14)$$

$$H = B_2 - LB_1 \quad (3.15)$$

$$J = D_2 - LD_1 \quad (3.16)$$

Dans le cas standard où $v(t)$ est mesurable, la matrice L de dimension $(n-p) \times p$ est choisie telle que F possède des modes stables et l'estimée $\hat{w}(t)$ de $w(t)$ est obtenue telle que :

$$\hat{w}(t) = z(t) + Ly(t) \quad (3.17)$$

Or dans ce cas particulier où $v(t)$ est non mesurable. L'observateur (3.12) ne peut être trouvé que si la matrice L est calculée telles que :

$$\blacksquare \quad J = D_2 - LD_1 = 0 \quad (3.18)$$

$$\blacksquare \quad F = A_{22} - LA_{12} \text{ possède des valeurs propres stables} \quad (3.19)$$

Tous les détails de calcul des différentes matrices de synthèse de l'observateur sont donnés dans [Boubaker, 2005].

- **Conception avec reconstruction des entrées inconnues**

Cette approche propose de diviser le vecteur de l'état en deux parties: une partie ne contenant pas les entrées inconnues et une deuxième partie contenant les entrées inconnues. Le système donné (3.1) est alors équivalent à:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u + \bar{D}v \quad (3.20)$$

$$y = \bar{C}\bar{x} \quad (3.21)$$

où:

$T = [N \quad D]$ est une matrice singulière avec $N \in \mathfrak{R}^{n \times (n-m)}$. Soit

$x = T\bar{x} = T \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ avec $\bar{x}_1 \in \mathfrak{R}^{n-m}$, $\bar{x}_2 \in \mathfrak{R}^m$ et :

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \bar{D} = T^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \bar{C} = CT = [CN \quad CD]$$

Le système (3.20 - 3.21) peut alors s'écrire:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + \bar{B}_1u \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{B}_2u + I_m y \\ y = \bar{C}_1\bar{x}_1 + \bar{C}_2\bar{x}_2 \end{cases} \quad (3.22)$$

Dans ce cas il s'avère plus judicieux d'estimer le vecteur \bar{x}_2 plutôt que le vecteur \bar{x}_1 puisque ce dernier ne considère pas l'entrée inconnue. Considérons le nouveau système :

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + \bar{B}_1u \quad (3.23)$$

$$y = \bar{C}_1\bar{x}_1 + \bar{C}_2\bar{x}_2 \quad (3.24)$$

Supposons qu'il existe une matrice singulière U tel que:

$$U = [CD \quad Q] \text{ avec } Q \in \mathfrak{R}^{p \times (p-m)} \text{ et notons par } U^{-1} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \text{ avec } U_1 \in \mathfrak{R}^{m \times p}, U_2 \in \mathfrak{R}^{(p-m) \times p}$$

Pré-multipliant des deux côtés d'équation de la mesure (3.24) par U^{-1} donne :

$$\begin{cases} U_1 y = U_1 CN \bar{x}_1 + U_1 CD \bar{x}_2 \\ U_2 y = U_2 CN \bar{x}_1 + U_2 CD \bar{x}_2 \end{cases} \quad (3.25)$$

donne :

$$U_1 y = U_1 CN \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \quad (3.26)$$

$$U_2 y = U_2 CN \bar{x}_1 \quad (3.27)$$

le vecteur \bar{x}_2 est alors réduit tel que :

$$\bar{x}_2 = U_1 y - U_1 CN \bar{x}_1 \quad (3.28)$$

Substituons (3.28) dans (3.23-3.24) donne:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \tilde{A}_1 \bar{x}_1 + \bar{B}_1 u + E_1 y \\ \bar{y} = \tilde{C}_1 \bar{x} \end{cases} \quad (3.29)$$

où

$$\tilde{A}_1 = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} U_1 CN, E_1 = \bar{A}_{12} U_1, \tilde{C}_1 = U_2 CN \text{ et } \bar{y} = U_2 y$$

Si la paire $(\tilde{A}_1, \tilde{C}_1)$ est observable ou détectable et en suivant la procédure de la conception d'un observateur de Luenberger conventionnel, il est possible de concevoir un observateur d'ordre réduit pour l'entrée inconnue du système (3.29) comme suit:

$$\dot{\hat{x}}_1 = (\tilde{A}_1 - L\tilde{C}_1)\hat{x}_1 + \bar{B}_1 u + L^* y \quad (3.30)$$

où

$$L \in \mathfrak{R}^{(n-m) \times (p-m)} \text{ et } L^* = LU_2 + E_1 .$$

alors :

$$\hat{x} = T\hat{\tilde{x}} = T \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ U_1 y - U_1 CN\mathbf{w} \end{bmatrix}$$

avec $\hat{x} \rightarrow x$ quand $t \rightarrow \infty$. En outre, pour l'observateur de l'ordre réduit décrit par (3.30), une estimation des entrées inconnues peut être obtenue comme suit:

$$\hat{v} = U_1 \dot{y} + G_3 \mathbf{w} + G_4 y + G_5 u \quad (3.31)$$

où:

$$G_3 = U_1 CNLU_2 CN + U_1 CN\bar{A}_{12}U_1 CNN - U_1 CN\bar{A}_{11} - \bar{A}_{21} + \bar{A}_{22}U_1 C$$

$$G_4 = -U_1 CNLU_2 - U_1 CN\bar{A}_{12}U_1 - \bar{A}_{22}U_1$$

$$G_5 = -U_1 CN\bar{B}_1 - \bar{B}_2$$

Les conditions d'existence de l'observateur décrit par (3.30) sont données par les théorèmes suivants:

Théorème [Hou et Muller, 1992]:

Pour le système donné (3.1), l'observateur (3.30) existe si:

- $rank(CD) = rank(D)$
- $rank \begin{bmatrix} pI_{n-m} - \bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ CN & CD \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in C, \quad Re(p) \geq 0$

Théorème [Hou et Muller, 1992]:

Si $rank(CD) = rank(D) = m$, alors les déclarations suivantes sont équivalentes:

- La paire $(\tilde{A}_1, \tilde{C}_1)$ est détectable
- $rank \begin{bmatrix} pI_{n-m} - \bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} \\ CN & CD \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in C, \quad Re(p) \geq 0$
- $rank \begin{bmatrix} pI_n - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad \forall p \in C, \quad Re(p) \geq 0$

3.2.3. Exemple numérique

Considérons le système linéaire (3.1) telles que :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sous une entrée inconnue modélisée par :

$$v = \begin{bmatrix} 0.1 * (\sin(4p) + \sin(6p) + \cos(8p)) \\ 0.15 * (v1 + \sin(3p)) \end{bmatrix}$$

L'observateur conçu en utilisant la technique proposée par [Yang et Wild, 1988] est :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} h_b & 0 & 4+h_b \\ 0 & h_a & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$\hat{x} = z - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y$$

L'observateur conçu en utilisant de la technique proposée par [Darouach *et al.*, 1994] est :

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$\hat{x} = z - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y$$

Le système transformé en utilisant la technique exposée dans [Kudva *et al.*, 1980] est donné par :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}$$

L'observateur réduit conçu pour estimer la variable d'état non mesurable est:

$$\dot{z} = -4z + [0 \quad -3]y - u$$

L'observateur conçu en s'inspirant de la technique proposée [Hou et Muller, 1992] est :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Le sous-système suivant est extrait:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = -4\bar{x}_1 + [0 \quad -3]\bar{x}_2 - u \\ y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases}$$

L'observateur réduit obtenu est régi par l'équation :

$$\dot{\hat{x}}_1 = -4\hat{x}_1 - u - 3y_2$$

L'entrée inconnue v construite est donnée par :

$$\hat{v} = I_2 \dot{y} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \hat{x}_1 + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y$$

Le développement ainsi que les résultats de simulation sont exposés dans [Sfaihi et Boubaker, 2004] pour les observateurs d'ordre complet et dans [Boubaker et Sfaihi, 2005] pour les observateurs d'ordre réduits.

3.3. OBSERVATION DES SYSTEMES LINEAIRES INCERTAINS

La synthèse des observateurs robustes pour des systèmes linéaires incertains est un problème qui a suscité beaucoup d'intérêt et a fait l'objet de plusieurs recherches. Nous notons dans ce sens les approches développées par [Bhattacharyya, 1976], [Haddad and Berstein, 1995], [Akpan, 2001] et [Collins et Song, 2001]. Dans ces travaux, il s'agit d'un problème de minimisation d'une borne supérieure d'un transfert entre le bruit d'entrée et l'erreur d'estimation $e = z - \hat{z}$. Très utilisés dans la littérature pour résoudre ce genre de problème, les critères de type H_2 et H_∞ s'avèrent efficaces. Par conséquent nous allons introduire, dans ce qui suit, comme solutions, les filtres H_2 et H_∞ . Ainsi que nous considérons dans la suite des développements, des systèmes linéaires incertains à incertitudes polytopiques décrit par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_w(t)w(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D_w(t)w(t) \\ z(t) = Lx(t) \end{cases} \quad (3.32)$$

où $x \in \mathfrak{R}^n$ représente l'état du système, $y \in \mathfrak{R}^p$ la sortie mesurée, $w \in \mathfrak{R}^m$ un bruit blanc gaussien unitaire avec une matrice de covariance égale à la matrice identité et $z \in \mathfrak{R}^q$ la sortie à observer. L est une matrice de gains connus. Le système représenté par :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A(t) & B_w(t) \\ C(t) & D_w(t) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

est incertain et appartient au domaine d'incertitudes polytopiques suivant :

$$\Sigma := \left\{ \Sigma(\zeta) = \sum_{i=1}^N \zeta_i \Sigma_i, \zeta_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1 \right\} \quad (3.34)$$

3. 3.1. SYNTHÈSE DU FILTRE H_2

Nous supposons que le filtre s'exprime à travers les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_f \hat{x}(t) + B_f y(t) \\ \hat{z}(t) = C_f \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.35)$$

où $A_f \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_f \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ et $C_f \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ sont les matrices d'état qu'on déterminera ultérieurement. La fonction de transfert associée s'écrit alors sous la forme :

$$T_f(s) = C_f(sI - A_f)^{-1} B_f \quad (3.36)$$

Pour chaque membre du domaine incertain D_M , le transfert entre l'erreur d'estimation $e = z - \hat{z}$ et le bruit d'entrée w est exprimé à travers :

$$T_M(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} \quad (3.37)$$

$$\text{où } \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_w \\ B_f D_w \end{bmatrix}, \tilde{C} = [L \quad -C_f]$$

Afin d'obtenir un filtre robuste, nous proposons de minimiser la norme H_2 du transfert T_Σ :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \mu \\ & \text{sous } \|T_\Sigma(p)\|_2 \leq \mu \end{aligned} \quad (3.38)$$

où $\mu > 0$ est une borne supérieure de la norme H_2 sur l'ensemble d'incertitudes. Une solution au problème est présentée dans le théorème suivant.

Théorème :

Supposons que la matrice $\Sigma \in D_\Sigma$ est fixe et arbitraire et le scalaire $\mu > 0$ est donné. Alors la matrice de transfert $T_\Sigma(p)$ satisfait l'inégalité $\|T_\Sigma(p)\|_2 \leq \mu$ pour tout $\Sigma \in D_\Sigma$ si et seulement si l'observateur s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_f \hat{x}(t) + B_f y(t) \\ \hat{z}(t) = C_f \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.39)$$

avec

$$A_f = U^{-1} Q (U^T Z)^{-1}$$

$$B_f = V^{-1} F$$

$$C_f = G (U^T Z)^{-1}$$

où le couple (U, V) satisfait la relation $XY + UV^T = I$ et les matrices $W = W^T$, $Z = Z^T$, $Y = Y^T$, Q , F et G sont les solutions du problème convexe exprimé au moyen des LMIs suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{Trace}(W), \\ & \text{w, Z, Y, Q, F, G} \\ & \begin{bmatrix} Z & Z & L^T & -G^T \\ Z & Y & L^T & \\ L-G & L & W & \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} ZA + A^T Z & ZA + A^T Y + C^T F^T + Q^T & ZB_w \\ A^T Z + YA + FC + Q & YA + FC + A^T Y + C^T F^T & YB_w + FD_w \\ B_w^T Z & B_w^T Y + D_w^T F^T & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.3.2. SYNTHÈSE DU FILTRE H_∞ [De Souza, 1993]

Théorème :

Étant donné un niveau d'atténuation de bruit $\gamma > 0$, le problème de filtrage H_∞ peut être résolu s'il existe une solution stabilisante $P = P^T \geq 0$ de l'équation algébrique de Riccati :

$$[A - B_w D_w^T V^{-1} C]P + P[A - B_w D_w^T V^{-1} C]P^T + P[g^{-2} L^T L - C^T V^{-1} C]P + B_w [I - D_w^T V^{-1} D_w] B_w^T = 0 \quad (3.41)$$

ayant satisfait les hypothèses suivantes:

- $V(t) = D(t)D^T(t) > 0, \forall t \in [0, t];$
- $(C(t), A(t))$ détectable ;
- $(A_c(t), B_c(t))$ stabilisable ;

avec

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = -V(t) - (A(t) - B_w(t)D_w^T(t)V^{-1}(t)C(t))V(t) - V(t)(A(t) - B_w(t)D_w^T(t)V^{-1}(t)C(t))^T \\ B_w(t) = B_w(t)[I - D_w^T(t)V^{-1}(t)D_w(t)]B_w^T(t) \end{cases} \quad (3.42)$$

alors l'observateur est décrit par:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x} + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \\ \hat{z}(t) = L(t)\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.43)$$

où la matrice du gain K est donnée par :

$$K(t) = [P(t)C^T(t) + B_w(t)D_w^T(t)]V^{-1}(t) \quad (3.44)$$

3.4. CONCLUSION ET PROSPECTIVES

Les premiers travaux que nous avons élaborés sur la synthèse des observateurs, se situent dans le cadre de la thèse et se rapportaient à la preuve de stabilité des observateurs de Lunberger non linéaires étendus [Boubaker *et al.*, 1998] et à la conception des observateurs à structure variable [Boubaker et Babary, 1999] [Boubaker, 2000] pour des systèmes de dimension infinie réduits. Ces résultats étaient désormais marqués par des propriétés locales de convergence des observateurs.

Nous avons par contre concentré nos efforts après la thèse sur la conception d'observateurs robustes capables de reconstituer les états non mesurables des systèmes à entrées inconnues [Sfaihi et Boubaker, 2004] [Sfaihi et Boubaker, 2005] [Boubaker, 2005]. Nous justifions notre intérêt pour ce type d'observateurs par la nature des applications que nous sommes entrain de développer dans le domaine du traitement biologique des eaux.

En effet, les charges polluantes qui sont appliquées aux entrées des procédés de traitement des effluents industriels ou urbains sont caractérisées par des variations journalières et mensuelles. On trouvera dans le dernier volet de ce manuscrit, la validation expérimentale d'un multi-observateur robuste à entrées inconnues par des données expérimentales recueillies sur un procédé réel de traitement des eaux usées au LIPE/INSA/Toulouse. Il faut bien reconnaître que les multi-observateurs robustes sont une bonne alternative pour améliorer les propriétés dynamiques des observateurs classiques [Sfaïhi et Boubaker, 2006]. Notons que d'autres techniques existent dans ce sens et font appel à des observateurs de type intervalle [Haj-Sadok et Gouzé, 2001] ou à la notion de batterie d'observateurs [Busvelle et Gautier, 2002].

Dans nos perspectives, nous envisageons étendre nos travaux vers la synthèse des observateurs robustes des systèmes non linéaires. Les observateurs à grands gains [Deza et al., 1992] et ceux à entrées inconnues [Liu et al., 2005] seront d'un intérêt particulier. D'autre part, les techniques d'approximation des systèmes non linéaires par morceaux seront considérées. Les problèmes de la stabilité, de commandabilité et d'observabilité de ces systèmes ont été très récemment développés dans la littérature [Bemporad et al., 1999] [Vidal et al., 2002] [Vidal et al., 2003] [Lygeros et al., 2003] [Benali et al., 2004]. Les travaux montrent que ces systèmes font désormais partie des systèmes dynamiques hybrides qui exhibent une grande majorité des phénomènes non linéaires parmi lesquels on trouve le phénomène chaotique [Birouche et al., 2004]. Quant à la synthèse des observateurs des systèmes linéaires par morceaux, ce problème constitue encore un problème encore ouvert à la recherche. En effet, malgré les résultats intéressants qui ont été récemment obtenus sur le sujet [Daafouz et al., 2002] [Millerioux et Daafouz, 2002], les solutions disponibles aujourd'hui et qui sont généralement fondés sur la théorie de l'automatique continue montrent leur limitation dès que l'aspect hybride devient important (commutation du modèle presque à chaque itération). Les défaillances de l'application des principes de l'automatique continue sur ce type de systèmes ont été illustrées dans [Birouche et al., 2004] en application sur deux nouvelles approches [Ferrari-Trecate et al., 2002] [Raw et al., 2001].

BIBLIOGRAPHIE

- [Akpan, 2001] E. Akpan, "Robust observer for uncertain linear systems," Proceedings of American Control Conference, Vol. 6, pp. 4220-4221, 2001.
- [Benali *et al.*, 2004] A. Benali, D. Boutat et J. Barbot, "Une condition algébrique pour l'observabilité d'une classe des systèmes hybrides," CIFA'04, novembre, Douz, 2004
- [Bhattacharyya, 1976] S. P. Bhattacharyya, "The structure of robust observers," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 21, pp. 581-588, 1976.
- [Bhattacharyya, 1978] S. P. Bhattacharyya, "Observer design for linear system with unknown inputs", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-23, pp. 483-484, June 1978
- [Birk et Zeitz, 1988] J. Birk et M. Zeitz, "Extended Luenberger design for nonlinear time variable systems," International Journal of Control, Vol. 38-2, pp. 419-431, 1988.
- [Boubaker, 2000] O. Boubaker, "estimation et commande à structure variable des systèmes de dimension infinie," Doctorat en Génie Electrique de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT), Février 2000.
- [Boubaker, 2005] O. Boubaker, "Robust observers for linear systems with unknown inputs: a Review," International Journal on Automatic Control and System Engineering," Vol. 5, N°2, mai 2005, pp. 45-51, ICGST Edition.
- [Boubaker *et al.*, 1998] O. Boubaker, J.P. Babary, M. Ksouri, "Variable structure estimation and control of nonlinear distributed parameter bioreactors," 1998 IEEE International Conference on Systems Man and Cybernetics (SMC'98), Symposium on Modelling Control, Vol. 4, pp. 3770-3774, 11-14 Octobre 1998, San Diego-California (USA).
- [Boubaker et Babary, 1999] O. Boubaker, J.P. Babary, "Parameter and state variable estimation of non linear distributed parameter bioreactors," Archives of Control Sciences, Vol.9, N°3-4, pp.93-110, 1999.
- [Boubaker et Sfaïhi, 2005] O. Boubaker, B. Sfaïhi, "Robust observers for linear systems with unknown inputs: a Comparative Study," IEEE Third International Conference on Systems, Signals & Devices, 21-24, mars 2005, Sousse (Tunisie), dans le cd-rom. [Bemporad *et al.*, 2000] A. Bemporad G. Ferrai-Trecati, M. Morari, "Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, N°10, pp. 1864-1876, 2000.

[Collins and Song, 2001] E. G. Collins, and T. Song, “robust estimation Using the Popov-Tsytkin Multiplier with Applications to Robust Fault Detection,” *International Journal of Control*, vol. 74, no. 3, pp. 303-313, 2001.

[Daafouz *et al.*, 2002] J. Daafouz, G. Mellerious, C. Iung, “A poly quadratic stability based approach for linear switched systems,” special issue of *International Journal of Control* on “Switched, piecewise and polytopic linear systems,” Vol. 47, N°10, November 2002, pp. 1302-1310, 2002.

[Darouach *et al.*, 1994] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S. J. Xu, “Full-Order observers for linear systems with unknown inputs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-39, 1994, pp. 606-609, 1994

[De Souza, 1993] C. E. DE Souza, *Robust State Estimation*, Ecole d’Eté d’Automatique de Grenoble, Grenoble, France, 1993.

[Drakunov, 1983] S. V. Drakunov, “On adaptive quasi-optimal filter with discontinuous parameters,” *Automation and Remote Control*, Vol. 44, N°9, Part 2, pp. 1167-1175, 1983.

[Deza *et al.*, 1992] F. Deza, E. Busvelle, J. P. Gauthier, and D. Rakotopara, “High gain estimation for non linear systems”, *Systems & Control Letters*, vol. 18, 1992, pp. 292–299.

[De Wit et Slotine, 1991] C.C. De Wit et J.J.E. Slotine “ Sliding observers for robot manipulators,” *Automatica*, Vol. 27, N°5, pp. 859-864, 1991.

[Ferrai-Trecati *et al.*, 2002] G. Ferrai-Trecati, D. Mignone, M. Morari, “Moving horizon estimation for hybrid systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, N°10, pp. 1663-1676, 2002.

[Haddad and Berstein, 1995] W. M. Haddad et D. S. Berstein, “Parameter-dependent Lyapunov functions and the Popov criterion in robust analysis and synthesis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, pp. 536-543, 1995.

[Haj-Sadok et Gouzé, 2001] M.Z. Haj-Sadok et J.L. Gouzé, “Estimation of Uncertain models of activated sludge process with interval observers,” *Journal of Process Control*, Vol. 11, pp. 299-310.

[Hou et Muller, 1992] M. Hou, P. C. Muller, “Design of observers for linear systems with unknown inputs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-37, 1992, pp. 871-875, 1992.

[Jiang *et al.*, 2000] G. P. Jiang, S. P. Yang et W. Z. song, “Design of observer with integrators for linear systems with unknown input disturbances,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, pp. 1168-1169, 2000.

[Johanson, 2003] M. Johanson, “Piecewise linear control systems,” *Lecture notes in control and information sciences*, LNCIS 284, Springer Germany, 2003.

[Kalman et Bucy, 1961] R. E. Kalman et R. S. Bucy, “New results in linear filtering and prediction problems”, *Transactions .ASME ser. D, J. Basic Engineering*, Vol. 83, pp. 95-108, 1961.

[Kudva, 1980] P. Kudva, N. Viswandam, and A. Ramakrishna, “Observers for linear systems with unknown inputs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-25, 1980, pp. 113-115, 1980.

[Kurek, 1983] J. E. Kurek, “The state vector reconstitution for linear systems with unknown inputs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC 28, n°12, 1983, pp. 1120-1122, 1983.

[Labarrere *et al.*, 1982] M. Labarrere, J. P. Krief et B. Gimonet, “Le filtrage et ses applications,” Deuxième édition, Cépadues éditions.

[Liu et al., 2005] F.L. Liu, M. Sekher, M. Farza, and M. M’saad, “Nonlinear Observers Design for State and Unknown Inputs”, *Proceedings of the IEEE International Conference on Systems, Signals & Devices SSD’05*, Sousse, Tunisie, 2005.

[Luenberger, 1966] G. Luenberger,” An introduction to observers,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-16, pp. 596-602, 1971 ;

[Lygeros, 2003] J. Lygeros, “Lecture notes on Hybrid systems,” Cambridge, 2003.

[Mellerious et Daafouz., 2002] G. Mellerious, J. Daafouz “An observer based approach for input independent global chaos synchronizof discrete time switched systems,” *IEEE Transaction circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* pp. 1270-1279, Octobre 2002

[Sfaïhi et Boubaker, 2004] B. Sfaïhi, O. Boubaker “Full order observer design for linear systems with unknown inputs,” *IEEE International Conference on Industrial Technology*, 8 – 10 December, Hammamet, Tunisie, 2004.

[Sfaihi et Boubaker, 2006] B. Sfaihi, O. Boubaker, "Piecewise robust observer for a Nonlinear Biological process with Unknown Inputs," International Journal of Artificial Intelligence and Machine Learning, Vol. 6, N°1, pp. 55-65, Janvier 2006. ICGST Edition

[Slotine *et al.*, 1986] J.J.E. Slotine, J. K. Hedrick et E. A. Misawa, "On sliding observer for nonlinear systems," American Control Conference, Seattle WA, 1986.

[Slotine *et al.*, 1987] J.J.E. Slotine, J.K. Hedrick et E.A. Misawa, "On sliding observer for nonlinear systems," Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Transactions of the ASME, Vol. 109, pp. 245-252, 1987.

[Rao *et al.*, 2001] C. Rao, J. Rawlings, J. Lee, "Constrained linear state estimation – Amoving horizon estimation of hybrid systems," Automatica, Vol. 37, N°10, pp.1619-1628, 2002.

[Yang et Wild , 1988] F. Yang and R. W. Wild, "Observers for linear systems with unknown inputs", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC 33, pp. 677-681, 1988.

[Vidal *et al.*, 2003] R. Vidal, A. Chiuso, S. Soatto, S.S. Sastry, "Observability of Linear Hybrid Systems: Computation and Control," Lecture Notes in Computer Sciences in Springer Verlag, Vol. 2623, pp. 526-539, 2003.

[Vidal *et al.*, 2002] R. Vidal, A. Chiuso, S. Soatto, S.S. Sastry, "Observability and identifiability of of jum linear systems," Proceedings du 38^{ème}Conference of Decision and Control, pp. 3614-3619, 2002.

AXE DE RECHERCHE 4:
MODELISATION ET MAITRISE DES BIOPROCEDES

4.1. INTRODUCTION

Ce chapitre présente nos contributions sur le plan applicatif dans le domaine des procédés biotechnologiques. Seuls des exemples d'applications validées par des expériences sur sites réels sont présentés dans cette partie. Les résultats validés uniquement sur des résultats de simulation n'ont pas été considérés dans ce chapitre.

Nous justifions notre choix pour des applications dans le domaine des bioprocédés par le fait que les procédés biotechnologiques sont généralement caractérisés par des modèles qui intègrent de fortes non linéarités, des couplages entre les variables d'entrées, des variations paramétriques et des entrées non mesurables. La maîtrise de tels procédés est donc une tâche très délicate. Elle exige l'établissement d'un modèle mathématique fiable, outil indispensable pour l'analyse et la commande du système. Il faut avouer que dans le domaine du génie des procédés industriels, il est très difficile d'élaborer un modèle. En plus, l'expérimentation qui permet de valider les modèles dérivés est confrontée à plusieurs verrous : les capteurs font défauts et les coûts sont assez importants. Le développement des modèles mathématiques implique aussi des compromis. Le modèle doit être suffisamment précis et suffisamment simple pour éviter des complexités numériques de simulation. Toute action de modélisation doit être donc précédée par une définition des objectifs. Les objectifs peuvent varier entre le test de certaines hypothèses ou mécanismes, la prédiction et la prévision de la dynamique du procédé, l'estimation de paramètres non directement mesurables, l'optimisation ou la commande du procédé.

Un modèle mathématique général qui simulerait toutes les propriétés d'un système n'est donc pas réaliste. Il est donc illusoire de vouloir utiliser un modèle conçu pour un objectif bien déterminé pour une application différente de celle pour laquelle il a été conçu. La négligence de certaines non linéarités dans la modélisation, la réduction de certaines dynamiques ou encore la non restitution de certaines singularités telle que la transmission des zéros, peut aboutir à des modèles mathématiques exhibant un écart entre le comportement du modèle physique et le comportement du modèle de connaissance.

4.2. PRINCIPE DE MODELISATION DES PROCEDES BIOTECHNOLOGIQUES

La modélisation des procédés biotechnologiques fait appel à une analyse compartimentale. Chaque compartiment est équivalent à un réservoir unitaire caractérisé par un ensemble de concentrations de réactifs. Des flux entre les différents compartiments circulent et doivent être considérés dans la modélisation. Le modèle mathématique pour un compartiment est établi à partir des équations bilans matières pour chaque élément macroscopique de la réaction biologique dans ce compartiment. L'équation régissant l'évolution de ces éléments est donnée par la formule suivante :

$$\text{Variation} = \pm \text{conversion} + \text{alimentation} - \text{soutirage}$$

La figure 4.1 représente un système à compartiment. Le réactant 1 se transforme en un réactant 2 avec un flux a_{21} . Ensuite le réactant 2 se transforme en réactant 1 avec un flux a_{12} .

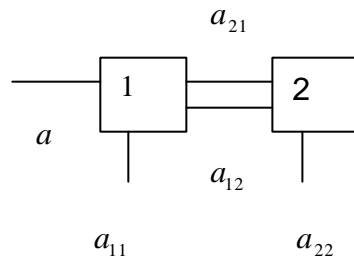


Figure 4.1: Système à compartiments

Nous définirons ainsi les flux entre entrées/sorties pour le système de la figure 4.1 comme suit:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = au - (a_{11} + a_{21})x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 - (a_{12} + a_{22})x_2 \end{cases}$$

avec x_1 et x_2 variables d'état et a_{ij} des termes de transformations. Les termes a_{ij} sont en général des fonctions non linéaires des concentrations des différentes réactants. Elles expriment en général des cinétiques de croissance ou de mortalité de microorganismes vivants, des cinétiques de synthèse ou de dégradations de réactants chimiques.

Plus de soixante modèles non linéaires existent dans la littérature pour décrire les termes cinétiques [Bastin et Dochain, 1990]. Un exemple de modélisation d'un procédé de fermentation alcoolique est donné dans [Maamar et Boubaker, 2004] alors qu'un exemple de modélisation d'un procédé de traitement des effluents industriels est donné dans [Rezouga et *al.*, 2004b].

4.3. IDENTIFICATION DES PARAMETRES DES MODELES DE COMPORTEMENT

L'identification des paramètres des modèles de comportement exige une étape d'identifiabilité structurelle qui est une technique d'analyse qui permet de déduire s'il est possible, à partir d'une base de données expérimentales, d'estimer la valeur des paramètres du système. Le résultat de cette analyse sera un ensemble ou une combinaison de paramètres jugés comme étant identifiables. Un paramètre est dit alors:

- globalement identifiable, s'il existe une seule solution numérique pour ce paramètre
- localement identifiable, s'il existe un nombre fini de valeurs pour les paramètres
- non identifiable, si le nombre de solutions est infini (ou très grand)

Les deux exemples suivants illustrent bien le concept d'identifiabilité structurelle pour des systèmes linéaires.

Exemple 1 : soit l'équation de la sortie $y = ax_1 + bx_2 + cx_3$ avec x_1, x_2, x_3 trois variables d'état et a, b et c trois paramètres à identifier. Il est clair que a, b et c sont structurellement identifiables.

Exemple 2:

Pour l'équation de la sortie $y = ax_1 + bx_2 + c(x_1 + x_2)$, seule les combinaisons des paramètres $(a + b)$ et $(a + c)$ sont structurellement identifiables et non pas les trois paramètres a, b et c ; deux paramètres (par exemple, a et b) seront identifiables si la valeur d'un troisième (ici c) est connue *a priori*.

L'étude de l'identifiabilité structurelle a été initiée avec les travaux de Bellman et Astrom [Bellman et Astrom, 1970]. Par la suite, de nombreuses méthodes ont été développées, particulièrement pour les systèmes linéaires invariants dans le temps [Walter et Lecourtier, 1982] [Godfrey et DiStefano, 1987].

Seules quelques approches ont été étendues pour les modèles non linéaires dans le cas des procédés biotechnologiques. Parmi ces approches on peut citer :

- la transformation du modèle non linéaire en un modèle linéaire [Godfrey et DiStefano, 1987], [Dochain *et al.*, 1995], [Bourrel *et al.*, 1998], [Spérandio et Paul, 2000]
- le développement en séries de Taylor, en séries génératrices [Holmberg, 1982], [Godfrey et DiStefano, 1987], [Dochain *et al.*, 1995] [Jeppsson, 1996], [Bourrel *et al.*, 1998], [Spérandio et Paul, 2000], [Petersen *et al.*, 2000]
- la transformation de similarité (ou isomorphisme d'état local) [Julien *et al.*, 2000]
- l'étude d'observabilité des systèmes non linéaires [Bourrel, 1998]

Des comparaisons entre ces méthodes ont été présentées dans des cas particuliers, mais il n'existe pas vraiment de critère pour déterminer a priori la méthode la plus efficace à utiliser dans un cas donné [Denis-Vidal et Joly-Blanchard, 1995], [Dochain *et al.*, 1995], [Walter et Pronzato, 1996]. Des conditions mathématiques de nécessité et de suffisance pour tester l'identifiabilité locale et globale des systèmes linéaires ont été établies.

Dans [Boubaker et Fourati, 2004] une vue d'ensemble des différentes approches qui permettent de tester l'identifiabilité structurelle des systèmes non linéaires est donnée. Les aspects les plus importants et les difficultés d'analyse sont examinés et sont illustrés par un exemple d'un bioprocédé caractérisé par des non-linéarités polynomiales rationnelles et des conditions initiales spécifiées. Ce papier renseigne aussi sur une nouvelle approche d'identifiabilité paramétrique qui utilise le concept des systèmes non linéaires plats [Ljung et Glad, 1994], [Saccomani *et al.*, 1997], [Saccomani *et al.*, 2001].

L'identifiabilité paramétrique est complémentaire de l'identifiabilité structurelle. Le problème d'identification paramétrique consiste à déterminer les paramètres caractéristiques d'un modèle mathématique à partir d'un ensemble de mesures entrées sorties du processus. Pour cela, un algorithme d'identification qui minimise un certain critère doit être choisi.

Cette approche est souvent limitée par le manque d'informations du à l'absence de certains capteurs physiques mais aussi par la corrélation entre les différents paramètres. Concernant les travaux élaborés dans cet axe de recherche, une distinction doit être faite en un premier temps entre les différentes méthodes d'identification paramétrique des systèmes non linéaires. Celle ci se base sur le mode d'exécution de l'algorithme dans le temps: en ligne ou hors-ligne. Les méthodes d'identification utilisées en ligne (filtre de Kalman, méthodes des variables instrumentales, de moindres carrés récursifs sur les corrélations, de régression, etc.) calculent les valeurs estimées de manière récursive, au fur et à mesure que les données arrivent [Walter et Pronzato, 1997]. Ce type de méthodes récursives est très utile pour faire de la commande adaptative. Les méthodes d'identification paramétriques hors-ligne ont recours à des ensembles de données qui ont été obtenus préalablement pendant une certaine période de temps. La procédure consiste à faire la simulation avec des valeurs constantes de paramètres sur tout l'intervalle de temps, et à trouver une valeur minimale des erreurs entre les mesures et la solution du modèle selon le critère de minimisation d'erreur utilisé. Le problème devient donc un problème d'optimisation. Le critère de minimisation est un facteur très important. Il doit être toujours précisé et son choix doit être autant que possible justifié. Les méthodes les plus utilisées dans ce sens sont des approches classiques de Newton et quasi-Newton, de gradients conjugués, de Levenberg-Marquardt et de simplexe [Walter et Pronzato, 1997].

4.4. OPTIMISATION DES MODELES DE COMPORTEMENT

L'optimisation des procédés dont les modèles non linéaires ont été déjà établis et dont les paramètres ont été déjà identifiés consiste à déterminer les séquences d'entrée, les volumes des réacteurs qui sont capables de générer un régime optimal de fonctionnement du procédé en boucle ouverte. Cette étape est primordiale dans le domaine des génies des procédés. En effet, elle est considérée comme une étape de dimensionnement du système. Elle est aussi considérée comme une aide à la conception du procédé et permet de préciser les contraintes technologiques des réservoirs, des pompes, de la purges, les débits...

Cette étape est généralement élaborée en utilisant des séquences des simulations intensives. Dans [Rezouga *et al.*, 2004a] une méthodologie claire et concise d'optimisation multiobjectif a été proposée pour atteindre de tels objectifs. Généralement et d'après [Andersson, 2000] et [Carlos et Coello, 2000], le problème de l'optimisation multiobjectif peut être manié dans quatre chemins différents selon l'instant où le décideur articule sa préférence sur l'objectif: jamais, avant, pendant ou après la procédure de l'optimisation réelle. Dans le premier groupe, les méthodes sont développées sans aucune information de la préférence. Des exemples de ces méthodes sont celles relatives à la formulation de Min-Max et celles relatives au critère global [Hwang *et al.*, 1980], [Osyczka, 1984] et [Steuer, 1986]. La deuxième classe de méthodes de l'optimisation multi-objectif est celle conduite par articulation des préférences du décideur. Avant de conduire l'optimisation, les différents objectifs sont agrégés à une seule fonction d'une façon ou d'une autre. Le chemin le plus commun est d'utiliser des pondérations [Steuer, 1986].

Le troisième groupe de méthodes est formé par des approches basées sur une articulation progressive d'information de la préférence. Elle est généralement connue sous le nom de méthodes interactives [Benayoun *et al.*, 1971].

Finalement, les problèmes d'optimisation peuvent être résolus par articulation du *posteriori* d'information de la préférence. Ces techniques offrent au décideur un grand espace de la solution Pareto optimal de la solution [Rosenman et Gero, 1985]. L'analyse doit être exécutée comme si l'ensemble Pareto ne changerait pas tout au long que la description du problème [Andersson, 2000]. Plusieurs approches ont été proposées dans ce sens [Steuer, 1986] [Ritzel *et al.*, 1994] [Das Dennis, 1998], [Suppaitnarm, 1999]... Un point dans l'espace du critère faisable est appelé Pareto optimal s'il n'existe aucun autre point dans cet espace qui cède une amélioration dans un critère sans causer une déchéance dans l'autre. Le domaine Pareto peut représenter aussi un ensemble de conditions du fonctionnement qui peuvent servir comme optimum, selon l'importance relative placée sur chacun des objectifs. Cet aspect donne la flexibilité au décideur pour sélectionner la meilleure solution du compromis d'un tel ensemble [Zhou et Titchener-talonneur, 2003] [Halsall-Whitney *et al.*, 2003] selon des préférences qu'il exprime en précisant les valeurs des seuils des paramètres de décision pour chaque critère.

4.5. APPLICATIONS

4.5.1. APPLICATION 1 : PROCEDE DE TRAITEMENT DES EAUX USEES

Ce travail a visé la conception d'un observateur à entrées inconnues d'un procédé de traitement des eaux usées fonctionnement en alternance de phase (figure 4.2) .Le procédé est une unité pilote installée au sein du Laboratoire d'Ingénierie des Procédés de l'Environnement (LIPE) de l'I.N.S.A. de Toulouse. Il permet l'élimination des substrats polluants carbonés et azotés au niveau du traitement secondaire dans un ensemble composé d'un bassin mélangeur, d'un bassin d'aération et d'un décanteur. L'eau polluée entrante provient de la station d'épuration de la ville de Toulouse. La charge appliquée par jour est de 0.6 à 0.12 kg de DCO en entrée par kg de matière en suspension dans le réacteur. L'eau polluée circule dans l'aérateur à l'intérieur duquel la biomasse bactérienne est chargée de dégrader la matière organique. Les micro-organismes peuvent s'agglomérer progressivement en floc pour prendre l'aspect d'une boue. Le mélange eau épurée-floc bactérien est ensuite envoyé dans le décanteur où les deux éléments sont séparés par gravité. Une fraction des boues décantées est recyclée vers l'aérateur pour maintenir sa capacité d'épuration, le reste est extrait pour être éliminé. L'eau épurée est rejetée dans le milieu naturel.

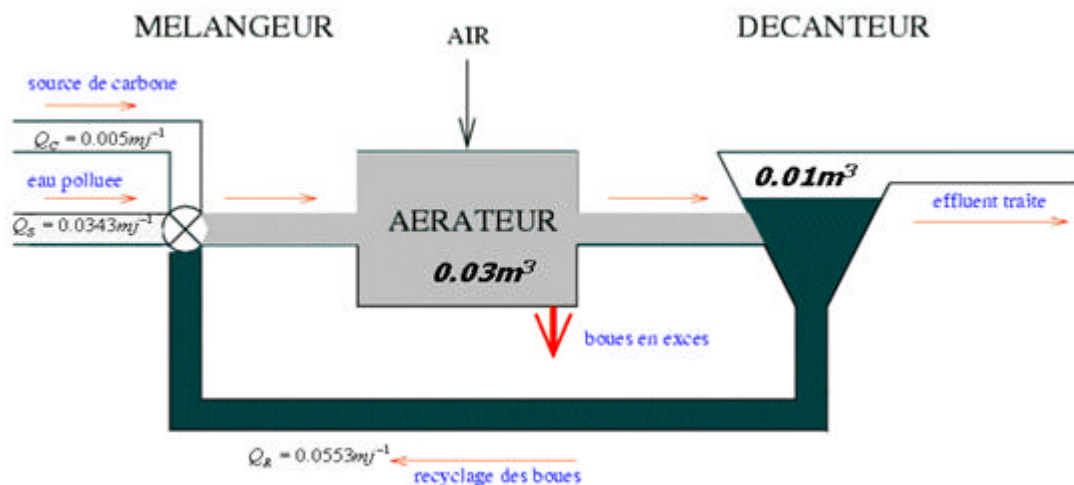


Figure 4.2 Synoptique du processus de traitement des eaux usées à alternances de phases

Une représentation relativement complète de toutes les variables d'état du pilote, comprenant onze variables d'état et une vingtaine de paramètres est donnée dans [Jeppson, 1995], [Julien et al., 2000]. Un modèle mathématique plus réduit a été introduit dans [Goméz-Quintero et al., 2000]. Celui-ci est décrit par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{S}_S = D_S S_{S,in} + D_C S_{C,in} - (D_S + D_C) S_S - \frac{1}{Y_H} (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_5 \\ \dot{S}_{NO_3} = -(D_S + D_C) S_{NO_3} - \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 \\ \dot{S}_{NH_4} = D_S S_{NH_4,in} - (D_S + D_C) S_{NH_4} - i_{NBM} (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) - \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4 \\ \dot{S}_{O_2} = -(D_S + D_C) S_{O_2} + k_{La} (S_{O_2,sat} - S_{O_2}) - \frac{1 - Y_H}{Y_H} \mathbf{b}_1 - 4.57 \mathbf{b}_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

où

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = I_1 S_S \frac{S_{O_2}}{S_{O_2} + K_{O_2H}} \\ \mathbf{b}_2 = I_1 S_S \frac{S_{NO_3}}{S_{NO_3} + K_{NO_3}} \frac{K_{O_2H}}{S_{O_2} + K_{O_2H}} \\ \mathbf{b}_3 = I_2 \frac{S_{O_2}}{S_{O_2} + K_{O_2H}} \frac{S_{NH_4}}{S_{NH_4} + K_{NH_4AUT}} \\ \mathbf{b}_4 = I_3 \\ \mathbf{b}_5 = I_4 \left(\frac{S_{O_2}}{S_{O_2} + K_{O_2H}} + h_{NO_3^h} \frac{S_{NO_3}}{S_{NO_3} + K_{NO_3}} \frac{K_{O_2H}}{S_{O_2} + K_{O_2H}} \right) \end{cases}$$

Nomenclature

S_S (g / m^{-3})	Concentration de substrat facilement biodégradable.
S_{NH_4} (g / m^{-3})	Concentration d'azote sous forme d'ammoniac.
S_{NO_3} (g / m^{-3})	Concentration de nitrate (et de nitrite).
S_{O_2} (g / m^{-3})	Concentration d'oxygène dissous.
$S_{O_2,sat}$ (g / m^{-3})	Concentration de saturation de l'oxygène dissous.
$S_{C,in}$ (g / m^{-3})	Concentration de la source de carbone externe.

$S_{NH_{4in}} (g / m^{-3})$	Concentration d'azote sous forme d'ammoniac en entrée.
$S_{NO_{3in}} (g / m^{-3})$	Concentration de nitrate (et de nitrite) en entrée.
$k_L a (j^{-1})$	Coefficient de transfert de l'oxygène.
$D_S (j^{-1})$	Taux de dilution relatif à l'entrée.
$D_C (j^{-1})$	Taux de dilution relatif à la source de carbone externe.
Y_H	Coefficient de rendement de la biomasse hétérotrophe.
i_{NBM}	Masse d'azote contenue dans la biomasse
I_i	Paramètre spécifique du modèle non linéaire réduit.

Afin de générer une base de modèles permettant de décrire le processus, il est judicieux de remarquer que dans l'aérateur, le processus se déroule en alternance de phase. La première phase est une phase aérobie pour laquelle le coefficient de transfert de l'oxygène $k_L a$ est différent zéro; Il s'agit d'injecter durant cette phase de l'oxygène en grande quantité dans le réacteur. L'oxygène dissout est nécessaire au métabolisme des micro-organismes afin d'accomplir le processus de nitrification permettant de transformer la pollution en nitrate. La seconde phase consiste à couper l'action d'aération ce qui correspond à un transfert d'oxygène $k_L a$ égal à zéro. Les micro-organismes continuent alors à consommer l'oxygène dissous qui reste dans le réacteur jusqu'à qu'il soit épuisé. Cette période transitoire, généralement très courte et correspond à une seconde phase aérobie durant laquelle l'oxygène va diminuer jusqu'à s'annuler. A ce moment se déclenche une troisième phase qui est caractérisée par un rajout d'une source de carbone externe au niveau du mélangeur dans un objectif de dénitrification; c'est une action qui permet de transformer le nitrate en azote. A l'instant où l'aération est relancée, la concentration d'oxygène n'est plus nulle et une nouvelle phase aérobie commence. La base des modèles générée sera décrite par des modèles linéaires représentés sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + D_i d_i(t) \\ y_i = C_i x_i(t) \end{cases}$$

où $x_i(t), u_i(t), d_i(t)$ et $y_i(t)$ sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur des entrées connues, le vecteur des entrées inconnues et le vecteur des mesures. A_i, B_i, C_i et D_i sont des matrices de dimensions appropriées variant selon le mode d'alternance. L'indice i étant relatif au i^{me} modèle. Dans le cas des procédés fonctionnant en alternance de phase le point d'équilibre n'existe pas car le système n'atteint jamais son régime d'équilibre. Les trois modèles seront donnés selon les conditions opératoires suivantes:

- Premier modèle : $k_L a \neq 0$ et $S_{O_2} \neq 0$
- deuxième modèle : $k_L a = 0$ et $S_{O_2} \neq 0$
- Troisième modèle : $k_L a = 0$ et $S_{O_2} = 0$

Le tableau 4.2. illustre l'ensemble des approximations élaborées qui ont permis de représenter par un modèle linéaire par morceaux le modèle non linéaire (4.2) sans tout de même détruire sa structure non linéaire.

Tableau 4.1. Hypothèses d'approximation du modèle non linéaire

paramètres	modèle 1	modèle 2	modèle 3
k_{La}	k_{La}	0	0
\mathbf{b}_1	$\mathbf{j}_1 S_S$	$\mathbf{j}_1 S_S$	0
\mathbf{b}_2	0	$\mathbf{j}_2 S_{NO_3} + \mathbf{j}_3 S_S$	$\mathbf{j}_2 S_{NO_3} + \mathbf{j}_3 S_S$
\mathbf{b}_3	$\mathbf{j}_4 S_{NH_4} + \mathbf{j}_5$	0	0
\mathbf{b}_4	\mathbf{j}_6	\mathbf{j}_6	\mathbf{j}_6
\mathbf{b}_5	\mathbf{j}_7	$\mathbf{j}_8 S_{NO_3} + \mathbf{j}_9$	$\mathbf{j}_8 S_{NO_3} + \mathbf{j}_9$

Les instants de commutation T_1, T_2 et T_3 entre les trois modèles d'un même cycle sont obtenus par une optimisation du processus.

Les durées d'aération et de non-aération peuvent être contrôlées par l'analyse des courbes du potentiel d'oxydoréduction, qui montrent les trois points d'inflexion correspondant à la fin de la consommation d'ammonium NH_4^+ accumulé durant la phase de dénitrification précédente, au début de la phase anoxie et au début de la phase anaérobie. Les basculements se font à des périodes prés-définis par une table de temps. Les modèles obtenus sont données par :

Modèle 1 : $k_L a \neq 0$ et $S_{O_2} \neq 0$

$$x_1 = [S_S \quad S_{NO_3} \quad S_{NH_4} \quad S_{O_2}]^T, \quad u_1 = [S_{Sc} \quad S_{Sin} \quad 1]^T, \quad d_1 = [S_{NH_4in}] \text{ et } y_1 = [S_{O_2} \quad S_{NH_4}]$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -(D_C + D_S) - \frac{j_1}{Y_H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(D_C + D_S) & j_4 & 0 \\ -i_{NBM} j_1 & 0 & -j_4 - (D_C + D_S) & 0 \\ -\frac{1-Y_H}{Y_H} j_1 & 0 & -4.57 j_4 & -(D_S + D_C) S_{O_2} - k_{La} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} D_C & D_S & j_7 \\ 0 & 0 & j_5 \\ 0 & 0 & -j_5 + j_6 \\ 0 & 0 & k_L a S_{O_2sat} - 4.57 j_5 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modèle 2 : $k_L a = 0$ et $S_{O_2} \neq 0$

$$x_2 = [S_S \quad S_{NO_3} \quad S_{NH_4} \quad S_{O_2}]^T, \quad u_2 = [S_{Sc} \quad S_{Sin} \quad 1]^T, \quad d_2 = [S_{NH_4in}] \text{ et } y_2 = [S_{O_2} \quad S_{NH_4}]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -(D_C + D_S) - \frac{\phi_1}{Y_H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(D_C + D_S) & \phi_4 & 0 \\ -i_{NBM} \phi_1 & 0 & -\phi_4 - (D_C + D_S) & 0 \\ -\frac{1-Y_H}{Y_H} \phi_1 & 0 & -4.57 \phi_4 & -(D_S + D_C) S_{O_2} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} D_C & D_S & \phi_7 \\ 0 & 0 & \phi_5 \\ 0 & 0 & -\phi_5 + \phi_6 \\ 0 & 0 & -4.57 \phi_5 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_S \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modèle 3 : $k_L a \neq 0$ et $S_{O_2} \neq 0$

$$x_3 = [S_S \quad S_{NO_3} \quad S_{NH_4}]^T \quad u_3 = [S_{Sc} \quad S_{Sin} \quad 1]^T, \quad d_2 = [S_{NH_4in}] \quad \text{et} \quad y = S_{NH_4}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -(D_C + D_S) - \frac{j_3}{Y_H} & -\frac{j_2}{Y_H} + j_8 & 0 \\ -\frac{(1-Y_H)j_3}{2.86Y_H} & -(D_C + D_S) - \frac{(1-Y_H)j_2}{2.86Y_H} & 0 \\ -i_{NBM}j_3 & -i_{NBM}j_2 & -(D_C + D_S) \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} D_C & D_S & j_9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j_6 \end{bmatrix}, \quad C_3 = [0 \quad 0 \quad 1], \quad D_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_S \end{bmatrix}$$

Les paramètres j_i des modèles linéaires sont déterminés par identification. La figure 4.3, 4.4 et 4.5 montrent une confrontation entre le modèle non linéaire, le multimodèle linéaire, le multi-observateur et les mesures expérimentales pour les variables d'état mesurables. Nous pouvons remarquer que l'observateur a permis, malgré un modèle imparfait, de bien retrouver le comportement réel du nitrate et de l'ammonium et corriger la concentration d'oxygène, dont la reconstruction étaient l'objectif du départ.

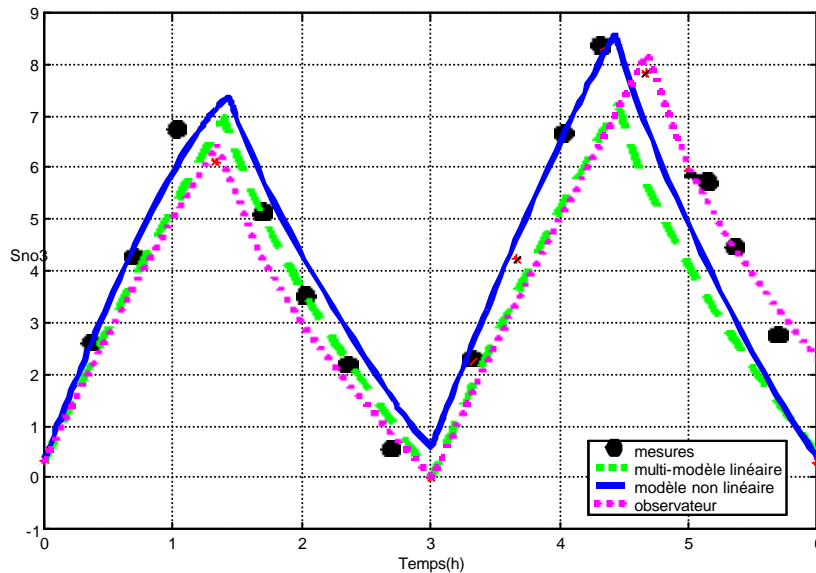


Figure 4.3. Confrontation entre modèle non linéaire, multimodèle, Multi-observateur et mesures expérimentales pour le nitrate

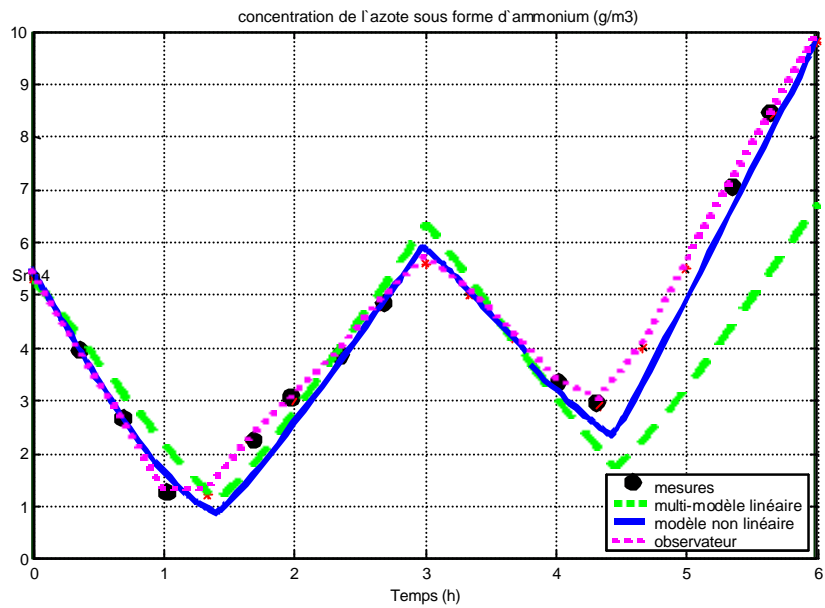


Figure 4.4. Confrontation entre modèle non linéaire, multimodèle, multiobservateur et mesures expérimentales de l'azote

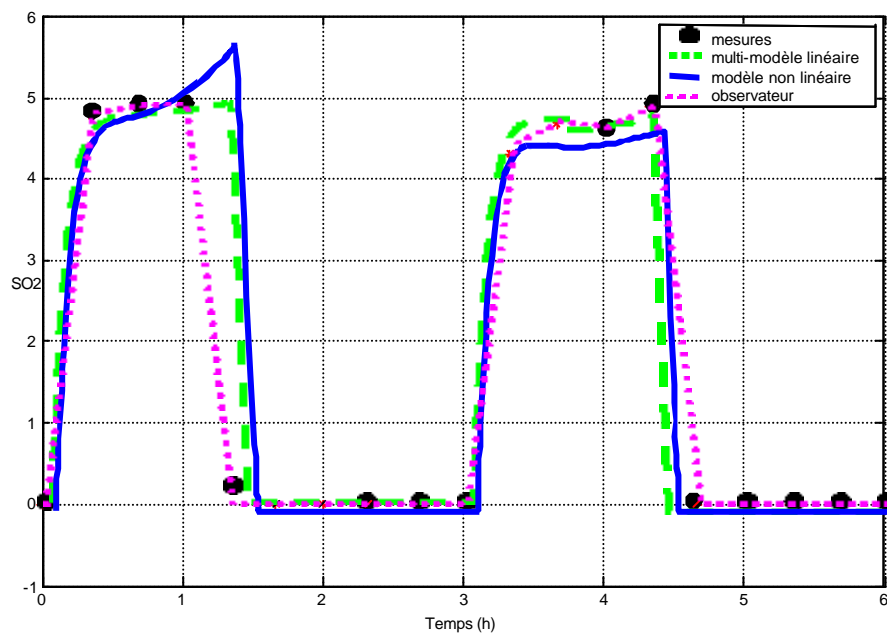


Figure 4.5. Confrontation entre modèle non linéaire, multimodèle, multi-observateur et mesures expérimentales de l'oxygène

4.5.2. APPLICATION 2 : PROCEDE DE TRAITEMENT DES EFFLUENTS INDUSTRIELS

Dans ce paragraphe est présenté le travail qui a été élaboré pour l'établissement, la validation expérimentale et l'optimisation d'un modèle mathématique d'un procédé de traitement d'effluents industriels traitant un toxique difficilement biodégradable du type phénol [Rezouga et al., 2004a] [Rezouga et al., 2004b] [Rezouga et al., 2005].

Le modèle mathématique tient compte du phénomène d'acclimation, jusque là rarement formalisé dans les modèles classiques [Carvalho et al., 2001]. La principale originalité de ces travaux réside donc dans l'intégration d'une non linéarité particulière dans le modèle qui était capable de modéliser parfaitement le phénomène d'acclimation, en vue de prédire au mieux les phases d'activation/désactivation.

Dans le cas du traitement d'une charge polluante continue, ce modèle a été utilisé pour simuler l'impact des paramètres de dimensionnement (temps de séjour hydraulique, charge massique et âge des boues) sur les performances d'épuration et la production de boues, par le biais de méthodes d'optimisation multicritères [Rezouga et al., 2004.a]. Certains paramètres cinétiques ont été identifiés à partir des données expérimentales obtenues par des mesures respirométriques (figure 4.6).

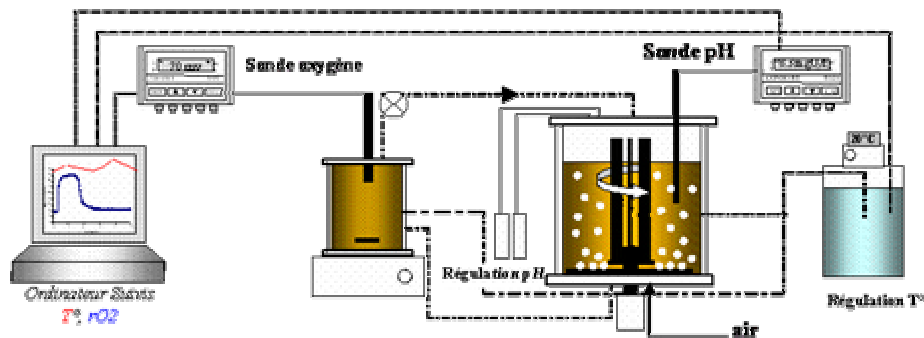
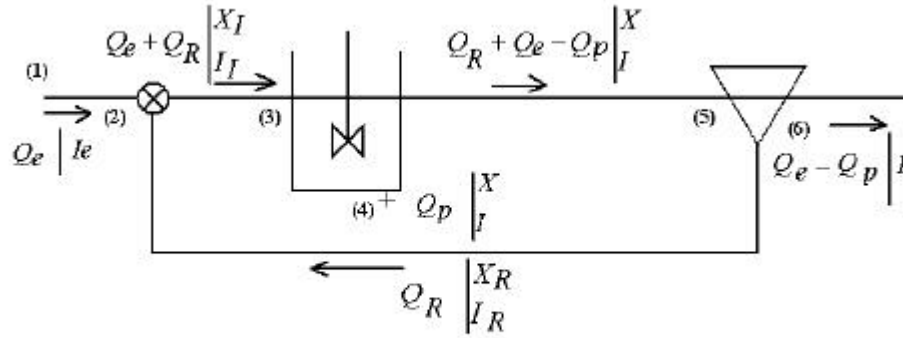


Figure 4.6. Respiromètre

Le modèle a été enfin appliqué à six cas pratiques de fonctionnement d'une station traitant des rejets industriels contenant un toxique de type *p*-nitrophénol, alimentée par campagne [Rezouga et *al.*, 2005]. Dans cette dernière partie, l'impact de différentes périodicités sur le rendement d'épuration, la croissance bactérienne, et le niveau d'acclimatation des micro-organismes sont montrées. Ce travail met en évidence l'avantage que présentent les systèmes à alimentation séquencée pour augmenter le niveau de résistance d'une population. Les résultats montrent que l'acclimatation peut être liée à une augmentation de la résistance des bactéries à l'inhibition et ou simultanément à la croissance spécifique d'une fraction adaptée de la population bactérienne.

Le procédé tel qu'il est présenté par la figure 4.7. est constitué d'un réacteur biologique (3) considéré parfaitement mélangé dans lequel les eaux usées sont mises en contact avec une biomasse (concentration notée X) aérée en continu. Lors de l'alimentation en charge polluante, le *p*-NP représente la seule source de carbone contenue dans les eaux usées industrielles (I_e), à l'entrée du procédé (1) arrivant avec un débit Q_e . Ce composé phénolé est généralement inhibiteur de l'activité d'un large spectre de microorganismes hétérotrophes. On peut donc considérer que les boues présentes dans le réacteur contiennent initialement, en proportion variable, une population (dont la concentration est notée X_{IP}) capable de se développer dans les eaux résiduaires industrielles chargées en *p*-NP. Cependant le reste de la population hétérotrophe ($X_{B,H}$) voit son activité inhibée par le *p*-NP. A la sortie du réacteur, la biomasse contenue dans la liqueur mixte ($X = X_{B,H} + X_{IP}$) est séparée du surnageant par décantation gravitaire (5) puis est recyclée en partie dans le réacteur (2) avec un débit Q_R . La décantation étant supposée parfaite, aucune fuite de biomasse n'est considérée dans le surnageant traité sortant de la station. Les effluents traités (6) ne contiennent donc que le composé phénolé résiduaire (I).

La boue excédentaire est extraite (4) avec un débit de purge (Q_p), soutiré directement dans le réacteur biologique (le soutirage sera réalisé au niveau industriel au fond du décanteur mais cela n'a pas de conséquence sur les résultats de la simulation) (voir figure.1).



(1) : arrivée des eaux résiduaires industrielles - (2) : mélangeur - (3) : réacteur biologique
(4) : robinet de purge - (5) : décanteur - (6) : eaux résiduaires industrielles traitées

Figure 4.7. Synoptique de l'unité pilote

Sur la base d'un bilan matière décrit en détail par [Rezouga et *al.*, 2004.b]. Les dynamiques du processus, modélisées pour chaque élément macroscopique de la réaction biologique qu'il soit soluble (substrat) ou particulaire (biomasse), sont détaillées dans le système d'équations différentielles (4.2).

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{dX_{IP}}{dt} = -D_p X_{IP} + \mathbf{m}_I^{\max} \frac{I}{I + K_S^I + \frac{I^2}{K_I}} X_{IP} - b_I X_{IP} \quad (a) \\
 \frac{dX_{B,H}}{dt} = -D_p X_{B,H} - b_{B,H} X_{B,H} \quad (b) \\
 \frac{dI}{dt} = D_e (I_0 - I) - \frac{1}{Y_I} \mathbf{m}_I^{\max} \frac{I}{I + K_S^I + \frac{I^2}{K_I}} X_{IP} \quad (c) \\
 \frac{dK_I}{dt} = a \frac{I}{K_S^I + I} (K_I^{\max} - K_I) - b \frac{K_S^I}{K_S^I + I} (K_I - K_I^{\min}) \quad (d) \\
 \frac{dO_2}{dt} = D_e (O_{2e} - O_2) + k_L a (O_2^* - O_2) + \frac{1 - Y_I}{Y_I} \mathbf{m}_I^{\max} \frac{I}{I + K_S^I + \frac{I^2}{K_I}} X_{IP} + \\
 b_I (1 - f_{X_I}) X_{IP} + b_{B,H} \frac{k}{k + I} (1 - f_{X_{B,H}}) X_{B,H} \quad (e)
 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Nomenclature			
Q_e	Débit d'alimentation en affluent en m^3/j	O_2^*	Concentration en oxygène à la saturation en gO_2/m^3
Q_p	Débit de purge du réacteur en m^3/j	O_2	Concentration en oxygène dans le réacteur en gO_2/m^3
Q_R	Débit de recyclage en m^3/j	O_{2e}	Concentration en oxygène dans l'affluent en gO_2/m^3
D_i	Différents taux de dilution appliqués ($D_i=Q_i/V$) en j^{-1}	K_I	Coefficient d'inhibition en $gDCO/m^3$
e,p,R		K_I^{max}	Coefficient d'inhibition maximal en $gDCO/m^3$
V	Volume du réacteur en m^3	K_I^{min}	Coefficient d'inhibition minimal en $gDCO/m^3$
I_e	Concentration en inhibiteur dans l'affluent en $gDCO/m^3$	a	Taux d'activation (acclimatation) en j^{-1}
X_I	Concentration en biomasse totale à la sortie du mélangeur en $gDCO/m^3$	b	Taux de désactivation (désacclimatation) en j^{-1}
I_I	Concentration en inhibiteur à la sortie du mélangeur en $gDCO/m^3$	μ_I^{max}	Taux spécifique maximal de croissance de X_I en j^{-1}
X	Concentration en biomasse totale dans le réacteur en $gDCO/m^3$	Y_I	Rendement de conversion en $gDCO_X/gDCO_I$
I	Concentration en inhibiteur dans le réacteur en $gDCO/m^3$	K_S^I	Constante d'affinité par rapport à I en $gDCO/m^3$
X_R	Concentration en biomasse totale recyclée en $gDCO/m^3$	b_I	Taux de décès de X_I en j^{-1}
I_R	Concentration en inhibiteur recyclé en $gDCO/m^3$	$b_{B,H}$	Taux de décès de $X_{B,H}$ en j^{-1}
X_{IP}	Concentration de la biomasse dégradant le toxique en $gDCO/m^3$	fx_I	Fraction de la population X_I active
$X_{B,H}$	Concentration de la biomasse hétérotrophe en $gDCO/m^3$	$fx_{B,H}$	Fraction de la population $X_{B,H}$ active
k_{Ia}	Coefficient de transfert d'oxygène de la phase gazeuse à la phase liquide en j^{-1}		

Dans le modèle (4.2) La cinétique de multiplication des micro-organismes qui dégradent le composé phénolé est régie par l'équation (a), la cinétique d'évolution de la biomasse hétérotrophe par l'équation (b), la cinétique de dégradation du substrat I par l'équation (c), la cinétique de consommation d'oxygène par l'équation (e), et la cinétique d'évolution du coefficient d'inhibition par l'équation (d).

L'originalité du modèle repose principalement sur cette dernière expression, qui décrit la variation du niveau d'inhibition de la population dégradant l'inhibiteur. Plus la valeur de K_I est importante et moins l'inhibition est importante et donc les microorganismes ont été acclimatés aux toxiques. Plusieurs cas de figures d'alimentation en nitrophénol sont envisagés comme le montrent le tableau 4.2 et les figures 4.8 et 4.9.

Tableau 4.2. Caractérisation des différents modes d'alimentation étudiés

Cycle	De (m ³ /j)	TSH (h)	Période d'apport (j)	Période de carence (j)
1	960	11,36	30	0
2	12697,54	1,73	0,042	1
3	1022,86	11,04	1	1
4	1917,86	7,82	1	3
5	3068,57	5,69	1	6
6	958,93	11,37	7	7

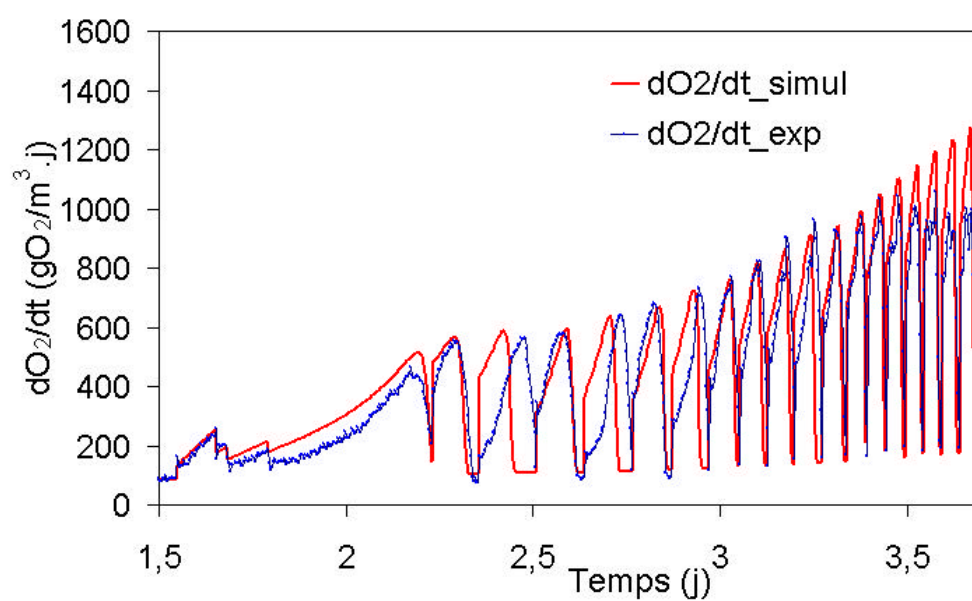


Figure 4.8. Validation expérimentale du modèle mathématique (cas de l'oxygène)

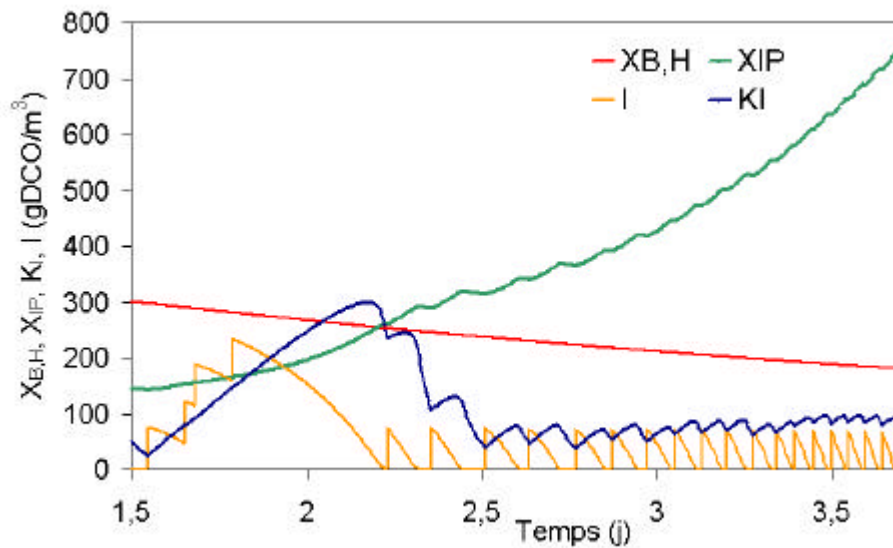


Figure 4.9. Simulation des variables non mesurables

En observant respectivement les figures 4.8 et 4.9, on constate que, pour les 3 premières injections (entre 1,5 et 2 j), le *p*-NP n'est pas dégradé en totalité par les microorganismes, avant l'injection qui suit. Pour cette première période (jusqu'à $t=2,2$ j), la concentration en inhibiteur reste élevée, ce qui conduit à une augmentation progressive de K_I de 10 à 300 gDCO/m³ (soit une adaptation progressive de la population). Jusqu'à la quatrième injection, un apport en *p*-NP a provoqué une baisse immédiate de l'activité respiratoire des microorganismes. Toutefois, au fur et à mesure que le substrat est dégradé, même à de faibles proportions, la vitesse de consommation d'oxygène augmente progressivement. A $t = 2,18$ j une grande partie du substrat est dégradée ($I = 36,6$ gDCO/m³) et une valeur maximale relative de K_I de l'ordre de 300 gDCO/m³ est obtenue. La biomasse a alors atteint une valeur de 260 gDCO/m³. Durant cette première période l'acclimatation s'est produite de deux manières :

- Augmentation de K_I (donc diminution du seuil d'inhibition)
- Augmentation de la population adaptée (X_{IP}) au détriment des autres ($X_{B,H}$)

A partir de la cinquième injection, on constate que la cinétique de dégradation du *p*-NP est déclenchée immédiatement après chaque apport en substrat et la totalité de la quantité injectée est dégradée avant l'injection suivante.

En outre, d'une injection à l'autre, le temps nécessaire à la biomasse pour consommer la totalité du substrat diminue et passe de 0,150 j pour la sixième injection à 0,048 j pour dernière injection, soit plus de trois fois moins. Entre ces deux injections la concentration moyenne en population adaptée X_P augmente de 60% et passe de 307,8 gDCO/m³ à 731,1 gDCO/m³ alors que le coefficient d'inhibition diminue de 26% et passe de 116,51 gDCO/m³ à 86,31 gDCO/m³. Il y aurait donc un double phénomène qui intervient lors de l'acclimatation d'une biomasse hétérotrophe à une concentration constante de toxique dans un réacteur batch à accumulation de biomasse. L'acclimatation « apparente » que l'on pourrait déduire de l'augmentation de la vitesse de respiration maximale, atteinte pour chaque injection, est due à une levée progressive d'inhibition et à une croissance significative de la biomasse concernée par la cinétique de dépollution. Au fur et à mesure que l'on progresse dans le cycle d'acclimatation, la quantité de *p*-NP est dégradée plus rapidement suite à la croissance microbienne, par conséquent la quantité apparente de substrat pour la biomasse X_P est de plus en plus faible dans le réacteur biologique et la valeur du coefficient d'inhibition K_I de moins en moins importante. En d'autres termes, une quantité importante de bactéries adaptées au *p*-NP a été développée mais celle-ci sera sensible à une inhibition si la concentration en *p*-NP augmente brutalement.

En conclusion, le nouveau modèle proposé a été validé par des données expérimentales. Il nous a permis de comparer différents modes de conduite du procédé à boues activées en fonction des scénarios de production. Il a été montré que l'alimentation séquencée favorise le développement d'une résistance aux fortes concentrations de toxiques. Cependant le procédé à alimentation continue permet d'atteindre malgré tout une meilleure épuration. Les simulations du modèle en mode séquencé (ou semi-continu) ont montré l'importance des périodes de carence et d'apport en agent inhibiteur (*p*-NP), et le compromis qu'il faudrait trouver entre le niveau de dégradation du composé, le développement d'une biomasse avec un niveau d'acclimatation assez élevé et la réduction de la production de boues, pour une meilleure exploitation des stations d'épuration.

4.5.3. APPLICATION 3 : PROCEDE DE PRODUCTION D'AROME NATUREL

Dans ce paragraphe est présente le travail qui a été élaboré pour l'établissement et la validation expérimentale d'un modèle mathématique d'une opération de production extraction d'un arôme naturel à partir de matières végétales en faisant appel à un couplage d'enzymes de faible coût.

Les arômes constituent un ensemble complexe de composés volatils et sont classés en arômes naturels et en arômes de synthèse. Ces derniers sont séparés de manière chimique peu sélective et possédant rarement la même odeur que ceux obtenus par voie naturelle d'où la demande croissante des industriels des molécules aromatisantes ayant le label « naturel ». L'objectif de ce travail était de maîtriser la réaction visant la transformations des huiles végétales pour la synthèse de composés aromatiques naturels en présence de substrat et préparation enzymatiques de faible coût. Les arômes synthétisés sont de type aldéhydes et alcools responsables de la note verte ou « odeur de l'herbe coupé » chez les végétaux [Akacha *et al.*, 2004].

Deux types d'originalité sont considérés dans ce travail : tout d'abord la considération d'un couplage d'enzyme ensuite l'intégration d'une non linéarité supplémentaire pour la modélisation de l'évolution du produit final responsable de l'odeur caractéristique de l'arôme.

En utilisant des bilans masse matière, le modèle qui a été proposé [Akacha *et al.*, 2005] est régi par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dHP}{dt} = - \frac{V_{\max 1}}{K_{M1} + HP} HP \\ \frac{dAd}{dt} = \frac{V_{\max 1}}{K_{M1} + HP} HP - \frac{V_{\max 2}}{K_{M2} + Ad + Ad^2 / Ki} Ad \\ \frac{dAc}{dt} = \frac{V_{\max 2}}{K_{M2} + Ad + Ad^2 / Ki} Ad \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Nomenclature :

HP : Hydroperoxyde-acide gras (substrat)

Ad : Aldéhyde (héxanal)

Ac : Alcool (héxanol)

K_{M1} , K_{M2} : Constantes de Michaelis

Ki : constante d'inhibition

La première équation modélise le déclin du substrat (Hydroperoxyde-acide gras) pour favoriser la production de l'aldéhyde (hexanal). La seconde équation décrit l'apparition de l'aldéhyde (hexanal) pendant une courte période pour disparaître à son tour pour favoriser la production de l'alcool responsable de l'odeur de l'herbe coupée (hexenol). La troisième équation décrit de l'évolution de l'alcool dont la cinétique intègre une non linéarité particulière. C'est grâce à cette non linéarité que nous avons pu rapprocher au mieux le modèle établi aux données expérimentales. Les profils prédits ont été validés par des données expérimentales (Figure 4.10), ce qui confirme bien l'adéquation du modèle cinétique proposé aux données expérimentales.

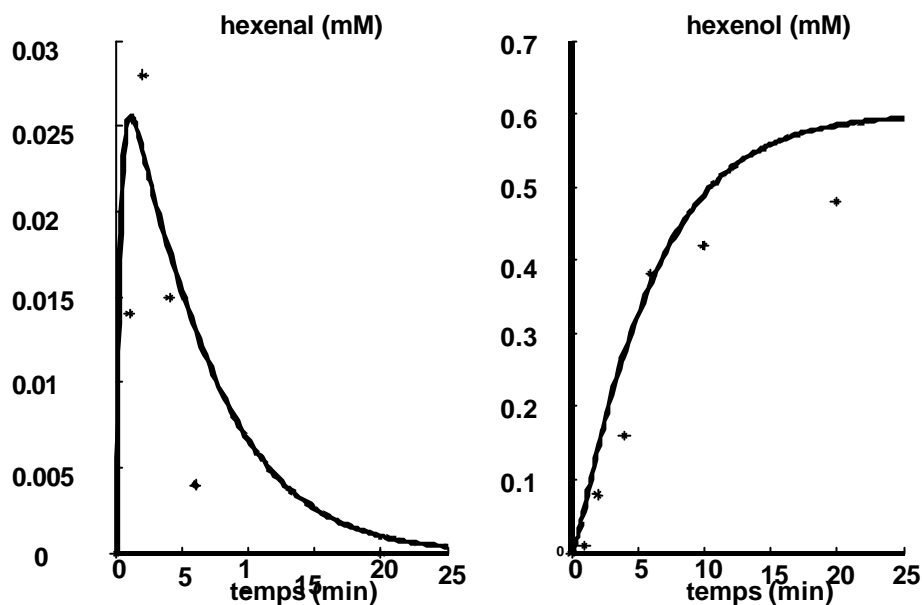


Figure 4.10. Validation expérimentale de l'évolution de l'Aldéhyde et de l'alcool pendant 20 min de réaction associé.

(*: résultats expérimentaux - résultats de simulation)

Des travaux sont en cours et vont certainement permettre d'affiner au mieux le modèle déjà établi. Nous visons aussi d'optimiser la production de l'arôme naturel que nous avons évalué jusque là à 20% en présence d'extraits d'oliviers. Sur un plan technologique, l'extraction de l'arôme représente un intérêt fondamental pour la bonne conduite de tels projets.

4.7. CONCLUSION

La conduite des procédés biotechnologiques fait appel à des compétences variées : mathématique, biologie, chimie, automatique... rarement réunies au sein d'un même laboratoire de recherche voir dans un même institut. Le point fort de l'Institut National des sciences Appliquées et de Technologie de Tunis est qu'elle réunie au sein de ses Unités de Recherche toutes ces compétences ce qui permet de percer avec beaucoup d'assurance dans ce domaine. Une validation expérimentale des différentes stratégies proposées a été élaborée dans des laboratoires associées tel que le UPMA (INSAT/Tunis), Unité Enzymologie (INSA/Tunis), LIPE (INSA/Toulouse), LBE (Narbonne), LEE (INRST/Tunis) ... et a permis certainement une valorisation des résultats.

Trois applications parmi au moins une dizaine d'applications élaborées ont été succinctement décrites. Ce choix est certainement justifié par la qualité et l'importance des résultats obtenus. Les applications exposées traitent des sujets d'actualité particulièrement liés au problème de l'environnement, de la sécurité alimentaire et de la santé. Ces processus sont caractérisés par des modèles exhibant de fortes non linéarités, des incertitudes de modélisation et des paramètres non mesurables. Des contributions, aussi bien sur un plan théorique que sur le plan applicatif, émanant de la théorie des systèmes non linéaires sont toujours attendues.

BIBLIOGRAPHIE

[Andersson, 2000] J. Andersson, “A Survey of Multiobjective Optimization in Engineering Design,” Technical report LiTH-IKP-R-1097, Department of Mechanical Engineering, Linköping University, Linköping, Sweden, 2000.

[Akacha et al., 2004] N. Ben Akacha, O. Boubaker, M. Gargouri, “Mise en œuvre et modélisation mathématique d’un système bi-enzymatique pour la production d’arôme, ” 15^{ème} journées Biologiques, p. 15 dans les actes des résumés, 18-20 Mars 2004, Hammam Sousse, Tunisie.

[Akacha et al., 2005] N. Akacha, O. Boubaker, M. Gargouri, “Production of hexenol in a two-enzyme system: kinetic study and modelling,” *Biotechnology Letters*, Vol. 27, N°23-24, décembre 2005, pp.1875-1878, Springer Edition.

[Bastin et Dochain, 1990] G. Bastin, D. Dochain, “On-line estimation and adaptive control of bioreactors,” Elsevier, Amsterdam, 1990.

[Bellman et Aström, 1970] G. Bellman, K.J. Aström, “ On structural identifiability, ” *Math. Biosci.*, Vol. 7, pp. 313-328, 1970.

[Benayoun et al., 1971] R. Benayoun, J. Montgolfier, J. Tergny, O.Laritchev, “Linear programming with multiple objective functions: Step Method (STEM),” *Mathematical Programming*, Vol.1, pp.366-375, 1971.

[Boubaker et Fourati, 2004] Boubaker O., Fourati A., “Structural Identifiability of Non Linear Systems : An Overview, ”IEEE International Conference on Industrial Technology, 8 – 10 December, Hammamet, Tunisia, 2004.

[Bourrel et al., 1998] S. Bourrel, J.P. Babary, S. Julien, M.T. Nihtilä, D. Dochain, “ Modelling and identification of a fixed-bed denitrification bioreactor, ” *System Analysis Modelling Simulation (SAMS)*, Vol. 30, pp. 289-309, 1998.

[Carlos et Coello, 2000] A. Carlos, C. Coello, “Handling Preferences in Evolutionary Multiobjective Optimization: A Survey,” 2000 Congress on Evolutionary Computation, San Diego, California, July 2000.

- [Cavalho et al., 2000] Carvalho G., Nopens I., Novais J.M., Vanrolleghem P.A. and Pinheiro H.M., 2001, Modelling of activated sludge acclimatisation to a non-ionic surfactant, *Wat. Sci. Tech.*, 43 (7), 9-17, 2000.
- [Das et Dennis, 1998] I. Das J. Dennis, "Normal-boundary interaction: A new method for generating the pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems," *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 8, pp. 631-657, 1998.
- [Denis-Vidal et Joly-Blanchard, 1995] L. Denis-Vidal, G. Joly-Blanchard, " Structural global identifiability of a biochemical system : comparaison of method, " 3^{ème} European Control Conference, pp. 1144-1149, 1995.
- [Dochain et al., 1995] D. Dochain, P.A.Vanrolleghem, M. van Daele, "Structural identifiability of biokinetic models of activated sludge respiration, " *Water Research*, vol. 29, p. 2571-2579, 1995.
- [Godfrey et Di Stefano, 1987] K.R. Godfrey, J.J. Di Stefano III, " Identifiability of model parameters, " dans *Identifiability of parametric models*, pp. 1-20, Pergamon Press, Oxford, 1985.
- [Goméz-Quintero et al., 2000] C. Goméz-Quintero, I. Queinnec, et J.P. Babary, " A reduced nonlinear model of an activated sludge process, " *Int. symp. on Advanced Control of Chemical Processes*, pp. 1037-1042, 2000.
- [Halsall-Whitney et al., 2003] H. Halsall-Whitney, D. Taylor, J. Thibault, "Multicriteria optimization of gluconic acid production using net flow", *Bioprocess Biosyst. Eng.*, n°25, pp. 299-307, 2003.
- [Holmberg, 1982] A. Holmberg, " On the practical identifiability of microbial growth models incorporating Michaëlis-Menten type nonlinearities, " *Math. Biosci.*, Vol.62, pp. 23-43, 1982.
- [Hwang et al., 1980] C. Hwang, S. Paidy, K. Yoon, "Mathematical programming with multiple objectives: a tutorial," *Computers et Operations Research*, Vol. 7, pp. 5-31, 1980.
- [Jeppsson, 1995] U. Jeppsson, "Modelling aspects of wastewater treatment processes, " Thèse de doctorat, Dep. Ind. Elec. Eng. Aut., Lund Inst. Technol., Suède, 1996.
- [Julien et al., 2000] S. Julien, J.P. Babary, P. Lessard, " Theoretical and practical identifiability of an activated sludge process model, " *Systems Analysis Modelling Simulation*, vol. 37, pp. 481-500, 2000.

- [Jeppson, 1995] U. Jeppsson, "A simplified control-oriented model of the activated sludge process," *Mathematical Modeling of Systems*, pp.13-16, 1995.
- [Ljung et Glad, 1994] L. Ljung and S.T. Glad, "On global identifiability for arbitrary model parameterisations," *Automatica*, Vol. 30, pp.265–276, 1994.
- [Mammar et Boubaker, 2004] F. Maamar, O.Boubaker, "Sur la modélisation et l'analyse d'un procédé de fermentation alcoolique continu," *IEEE 7^{ème} Conférence Internationale des Sciences Electroniques, Techniques d'Information et Télécommunications*, 15-20 Mars, pp.152, 2004.
- [Osyczka, 1984] A. Osyczka, "Multicriterion Optimization in Engineering - with FORTRAN Programs," Chichester, Ellis Horwood, 1984.
- [Petersen et al., 2000] B.Petersen, K.Gernaey, P.A. Vanrolleghem, "Improved theoretical identifiability of model parameters by combined respirometric-titrimetric measurements: A generalisation of results," *Proc. IMACS 3rd MATHMOD Conference*, Vienne, Autriche, vol. 2, pp. 639-642, 2000.
- [Rezouga et al., 2004a] F. Rezouga, O. Boubaker, M. Sperendio, M. Hamdi, "Multi-objective Dynamic optimisation of continuous activated sludge process treating industrial wastewater," *6th International Multi Objective Programming and Goal Programming: New Trends and Applications*, avril 2004.
- [Rezouga et al., 2004b] F. Rezouga, O. Boubaker, M. Sperendio, M. Hamdi, "Sur la modélisation d'un procédé à boues activés traitant des effluent industriels contenant des composés phénolés," dans le Cd-rom de *IEEE Conférence Internationale Francophone de l'Automatique CIFA'2004*, 22-24 Novembre, 2004.
- [Rezouga et al., 2005] Fériel Rezouga, Olfa Boubaker, Moktar Hamdi, Mathieu Sperendio "Etude et Optimisation du traitement biologique de molécules organiques inhibitrices : impact des productions industrielles continues," dans la collection *Récents Progrès en Génie des procédés*, n°92, 2005, ISBN 2-910239, Lavoisier Edition.
- [Ritzel et al., 1994] B.J. Ritzel, E.J. Wayland, and S. Ranjithan, "Using genetic algorithms to solve a multiple objective groundwater pollution containment problem", *Water Resources Research*, Vol.30, n°5, pp.1589-1603, 1994.

[Rosenman et Gero, 1985] M. A. Rosenman et J. S. Gero, "Reducing the Pareto optimal set in multicriteria optimization (With application to Pareto optimal dynamic programming)," *Engineering Optimization*, Vol.8, pp. 189-206, 1985.

[Saccomani *et al.*, 1997] M.P. Saccomani, S. Audoly, G. Bellu, L. D'Angio and C. Cobelli, "Global identifiability of nonlinear model parameters," In Proc. SYSID '97 11th IFAC Symp. System Identification, Vol. 3, pp. 219-224, 1997.

[Saccomani *et al.*, 2001] M.P. Saccomani, S. Audoly, G. Bellu, L. D'Angio, "A new differential algebra algorithm to test identifiability of non linear systems with given initial conditions," Proceedings of the 40th IEEE conference on Decision and Control, pp. 3108- 3112, Orlando, Florida USA, December 2001.

[Spérandio et Paul, 2000] M. Spérandio, E. Paul, " Estimation of wastewater biodegradable COD fractions by combining respirometric experiments in various SO/XO ratios, " *Water Research*, Vol. 34, pp. 1233-1246, 2000.

[Steuer, 1986] R. Steuer, "Multiple criteria optimization: theory, computation and application," New York, John Wiley & Sons, Inc., 1986.

[Suppapitnarm *et al.*, 1999] A. Suppapitnarm, K. A. Seffen, G. T. Parks, P. J. Clarkson, J. S. Liu "Design by multiobjective optimization using simulated annealing," presented at International conference on engineering design ICED 99, Munich, Germany, 1999.

[Walter et Lecourtier, 1982] E. Walter, Y. Lecourtier, " Global approaches to identifiability testing for linear and nonlinear state space models, " *Math. Computers Sim.*, Vol. 24, pp. 472-482, 1982.

[Walter et Pronzato, 1997] E.Walter, L.Pronzato, " On the identifiability and distinguishability of nonlinear parametric models, " *Math. and Comput. In Sim.*, Vol. 42, pp. 125-143, 1997.

[Zhou et Titchener-Hooker, 2003] Y.H. Zhou, N.J. Titchener-Hooker, "The application of a Pareto optimisation method in the design of an integrated bioprocess," *Bioprocess Biosyst. Eng.*, Vol. 25, pp. 349-355, 2003.

CONCLUSION GENERALE

Ce rapport présente les grandes lignes de nos orientations scientifiques dans le domaine vaste de l'**Automatique** et plus particulièrement dans le domaine de la **commande robuste des systèmes non linéaires et multivariables**. A travers ce rapport assez synthétique, quatre axes de recherche sont identifiés. Des applications dans le domaine des procédés biotechnologiques sont présentées. Des activités diplomantes de recherche ont été dirigées [Annexe 1] dans ce sens. Ces travaux ont aboutit à certains résultats diffusables [Annexe 2].

Le premier axe de recherche traite du problème de découplage des systèmes non linéaires multivariables. Ces travaux sont marqués par la systématisation de lois de commande découplées pour une classe particulière des systèmes non linéaires que nous avons récemment proposée par le biais de modèles assez génériques dans le cas des systèmes de dimension infinie et dans le cas des systèmes de dimension finie. Cette classe est caractérisée par des couplages en forme de multiplicités entre les variables de commande. Les preuves de stabilité des lois de commande proposées ont été démontrées en utilisant une approche de Lyapunov.

Le second axe de recherche traite du problème de séquençement des gains robustes pour des systèmes non linéaires. Les systèmes non linéaires sont alors représentés au moyen de modèles linéaires par morceaux. Les résultats que nous avons développés sur cet axe de recherche ont permis l'approximation des systèmes non linéaires par des formes canoniques *CPLW* et *HL-CPWL*. Nous avons par contre pensé qu'il serait difficile de croire qu'il est possible d'assurer la stabilité globale par la simple utilisation des modèles obtenus et qu'il sera possible d'assurer cette propriété dans le cas où les non-linéarités seraient approximées au moyen de linéarités affectées d'incertitudes avec un choix approprié de ces dernières.

En extension à l'approche quadratique classique, nous avons proposé une nouvelle approche, qui permet de réduire le conservatisme. L'intérêt majeur de cette approche qu'elle permet de choisir une matrice de Lyapunov différente pour chaque modèle et chaque sommet d'un multimodèle incertain de type polytopique. De plus un régulateur unique est synthétisé pour l'ensemble des modèles incertains.

Concernant le troisième axe de recherche, nous ne prétendons pas apporter jusque là une contribution théorique dans ce sens. Nous avons par contre réussi à établir un état de l'art des différentes approches de synthèse d'observateurs robustes dans le cas des systèmes linéaires. Cette étude bibliographique assez importante nous permettra certainement de proposer des extensions dans le cas des systèmes non linéaires en utilisant les outils déjà développés sur le second axe de recherche : le résultat serait des observateurs linéaires par morceaux pour des systèmes non linéaires incertains. Le problème majeur qui sera posé est certainement la preuve de stabilité globale de tels observateurs.

Enfin le dernier axe de recherche traite de la modélisation et la maîtrise des procédés biotechnologiques. La difficulté majeure retenue dans la conduite de tels procédés se situe principalement dans la pluridisciplinarité des approches et les coûts très élevés des expérimentations. Nous avons pu surmonter ce type de problèmes grâce aux nombreuses coopérations que nous avons pu établir. Les validations expérimentales élaborées dans les laboratoires associés ont permis certainement une valorisation des résultats obtenus.

ANNEXE 1 :
TRAVAUX DE RECHERCHE DIRIGES
A CARACTERE DIPLOMANT

AIDE A LA DIRECTION DE THESES

1. Fériel Rezouga, Modélisation mathématique et optimisation d'un procédé de traitement des effluents industriels. (Directeur de thèse : M. Hamdi), en cours.
2. Faouzi Mammar, Commande optimale robuste des systèmes non linéaires incertains - Application à la robotique mobile. (Directeur de thèse : H. Kallel), en cours.
3. Boutheina Sfaihi, Observateurs robustes pour les systèmes non linéaires incertains- Application aux bio-procédés. (Directeur de thèse : H. Kallel), en cours.

MASTERS DIRIGES ET SOUTENUS

1. Karima Turki, Modélisation multi-modèle et commande robuste : Application à un procédé de traitement des effluents industriels, Mastère Informatique Industrielle et Automatique, janvier 2004, INSAT (Tunis).
2. Farouk Cherif, Découplage et synthèse multivariable d'une classe des systèmes non Linéaires spatio-temporels : Application au traitement biologique des eaux potables, Mastère Informatique Industrielle et Automatique, juin 2004, INSAT (Tunis).
3. Taoufik Ladhari, Conception des Observateurs robustes à entrées inconnues, Mastère Informatique Industrielle et Automatique, juillet 2004, INSAT (Tunis).
4. Najla Akacha, Modélisation mathématique de la production d'arômes, Mastère Bio-Chimie, septembre 2004, Faculté des Sciences de Tunis (Tunis).
5. Aida Fourati, Identifiabilité structurelle et Identification paramétrique des systèmes non linéaires : Aide à la fiabilisation des stations d'épuration des effluents industriels, Mastère Informatique Industrielle et Automatique, octobre 2004, INSAT (Tunis).
6. Amel Mahjoub, Contribution à la commande directe du couple de la machine asynchrone : Application à une éolienne industrielle, Mastère Informatique Industrielle et Automatique, janvier 2005, INSAT (Tunis).
7. Faouzi Maamar, Contribution à la modélisation des systèmes non linéaires par des approches linéaires et synthèse de lois de commande auto-séquencées, Mastère Informatique Industrielle et Automatique, février 2005, INSAT (Tunis).
8. Boutheina Sfaihi, «Observateurs robustes des systèmes linéaires à entrées inconnues, » Mastère Informatique Industrielle et Automatique, Mai 2005, INSAT (Tunis).

9. Imen Zitoun, « Modélisation des systèmes non linéaires par les réseaux de neurones artificiels : Approche multimodèle, » Mastère Informatique Industrielle et Automatique Mai 2005, INSAT (Tunis).

10. Amine Chabouni, Synthèse des observateurs robustes par des approches LMI : Prédiction de la prolifération des algues dans l'écosystème, Mastère Informatique Industrielle et Automatique, juin 2006, INSAT (Tunis).

ANNEXE 2 :
PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

ARTICLES

1. Boutheina Sfaihi, Olfa Boubaker, "Piecewise robust observer for a Nonlinear Biological process with Unknown Inputs," *International Journal of Artificial Intelligence and Machine Learning*, Vol. 6, N°1, pp. 55-65, Janvier 2006. ICGST Edition
2. Olfa Boubaker, "MIMO quadratic stabilisation of non linear infinite dimensional systems via linear matrix inequalities," *Mediterranean Journal of Measurement and Control*, numéro spécial "On Simply Structured multivariable control," pp. 41-46, Vol. 2, N°2, 2006.
3. O. Boubaker, "Robust observers for linear systems with unknown inputs: a Review," *International Journal on Automatic Control and System Engineering*," Vol. 5, N°2, mai 2005, pp. 45-51, ICGST Edition.
4. O. Boubaker, "Decoupling control strategy for bioreactor models designed by a non standard canonical form," *International Journal on Automatic Control and System Engineering*, Vol.5, N°3, novembre 2005, pp.1-8, ICGST Edition.
5. N. Akacha, O. Boubaker, M. Gargouri, "Production of hexenol in a two-enzyme system: kinetic study and modelling," *Biotechnology Letters*, Vol. 27, N°23-24, décembre 2005, pp.1875-1878, Springer Edition.
6. F. Rezouga, O. Boubaker, M. Hamdi, M. Sperendio "Etude et Optimisation du traitement biologique de molécules organiques inhibitrices : impact des productions industrielles continues, " dans la collection Récents Progrès en Génie des procédés, n°92, octobre 2005, ISBN 2-910239, Lavoisier Edition.
7. K. Turki, O. Boubaker, " H^∞ Gain scheduling control of a non linear bioprocess: A multiple model approach," *International Journal on Artificial Intelligence and Machine Learning*," Vol.5, N°3, pp. 79-85, décembre 2005.
8. O. Boubaker, J.P. Babary , " On SISO and MIMO variable structure control of non linear distributed parameter systems," *IFAC Journal of Process Control*, Vol. 13, N° 8, décembre 2003, pp. 729-737, Elsevier Edition.
9. O. Boubaker, J.P. Babary , M. Ksouri, "MIMO sliding mode control of a distributed parameter denitrifying biofilter ," *Applied Mathematical Modelling*, Vol.25, N°8, août 2001, pp. 671-682, Elsevier Edition

10. O. Boubaker & J.P. Babary, "Parameter and state variable estimation of non linear distributed parameter bioreactors," Archives of Control Sciences, Vol.9, N°3-4, décembre 1999, pp. 93-110.

COMMUNICATIONS DANS DES MANIFESTATION A COMITE DE LECTURE

1. O. Boubaker, F. Maamar, "Gain scheduling control, dans les Proceedings de la septième conférence internationale des Sciences et Techniques de l'Automatique (STA'2006), 17-19 décembre 2006, Hammamet (Tunisie).
2. O. Boubaker, F. Maamar, "Linear multimodel approximation of non Linear systems: A high level piecewise linear approach under H_2/H_∞ error optimization, " IEEE Third International Conference on Systems, Signals & Devices, 21-24 mars 2005, Sousse (Tunisie), dans le cd-rom.
3. O. Boubaker, B. Sfaihi, "Robust observers for linear systems with unknown inputs: a Comparative Study," IEEE Third International Conference on Systems, Signals & Devices, 21-24, mars 2005, Sousse (Tunisie), dans le cd-rom.
4. O. Boubaker, A. Fourati, "Structural identifiability of non linear systems : an overview, " IEEE International Conference on Industrial Technology, 8-10 décembre 2004 Hammamet, (Tunisie), dans le cd-rom.
5. B. Sfaihi, O. Boubaker "Full order observer design for linear systems with unknown inputs," IEEE International Conference on Industrial Technology, 8-10 décembre 2004, Hammamet (Tunisie), dans le cd-rom.
6. K. Turki, O. Boubaker, "Vers une modélisation multimodèle et une commande robuste séquencée des bioprocédés," IEEE Conférence International Francophone de l'Automatique, CIFA'2004, 22-24 novembre 2004, Douz (Tunisie), dans le CD-rom.
7. F. Rezouga, O. Boubaker, M. Sperendio, M. Hamdi, "Sur la modélisation d'un procédé à boues activés traitant des effluents industriels contenant des composés phénolés, " IEEE Conférence Internationale Francophone de l'Automatique, 22-24 novembre 2004, Douz (Tunisie), dans le Cd-rom.
8. F. Rezouga, O. Boubaker, M. Sperendio, M. Hamdi, "Multi-objective dynamic optimisation of continuous activated sludge process treating industrial wastewater," 6th International Multi Objective Programming and Goal Programming, "New Trends and Applications" MOPGP'04, 14-16 avril 2004, Hammamet, (Tunisie), dans le cd-rom.

9. O. Boubaker, "Decoupling and synthesis of non linear systems with input multiplicities," IEEE First International Symposium on Control Communications and Signal Processing ISCCSP'04, 21-24 Mars 2004, Hammamet (Tunisie), pp. 127-130.
10. O. Boubaker, F. Cherif, "Discussion on synthesis of non linear Spatio-temporal systems with unstable zeros dynamics," IEEE First International Symposium on Control Communications and Signal Processing ISCCSP'04, 21-24 Mars 2004, Hammamet (Tunisie), pp 475- 478.
11. K. Turki, O. Boubaker, "Commande robuste séquencée : Application au contrôle des effluents industriels," IEEE, Conférence Internationale Signaux, circuits et systèmes, 21-22 Mars 2004, Monastir (Tunisie), pp. 85, 90.
12. F. Maamar, O. Boubaker, "Sur la modélisation et l'analyse d'un procédé de fermentation alcoolique continu," IEEE 7^{ème} Conférence Internationale des Sciences Electroniques, Techniques d'Information et Télécommunications SETIT 2004, 15-20 Mars 2004, dans le CD-rom.
13. O. Boubaker, K. Turki, T. Ladhari, "Multivariable stabilisation of a continuous wastewater treatment process," IEEE 7^{ème} Conférence Internationale des Sciences Electroniques, Techniques d'Information et Télécommunications SETIT, du 15 au 20 Mars 2004, Sousse (Tunisie), 2004, dans le CD-rom.
14. F. Cherif, O. Boubaker, "Linearizing Control of a Denitrifying Distributed Parameter Biofilter," IEEE International Conference On Intelligent Engineering Systems, INES 2003, Assiut-Luxor (Egypt), 4-6 Mars 2003, pp 735-740.
15. K. Turki et O. Boubaker, "Modélisation multimodèle incertaine d'un procédé de dépollution des eaux usées," Séminaire Tunisien d'Automatique STA'03, 20-22 décembre 2003, pp 60-65.
16. T. Ladhari & O. Boubaker, "Commande multivariable d'un bioréacteur de traitement des eaux usées," Séminaire Tunisien d'Automatique, 24-26 décembre 2002, Monastir 2002, pp. 29-34.
17. O. Boubaker & J.P. Babary, "On SISO and MIMO sliding control of a parameter distributed biological process," 1999 IEEE Systems, Man and Cybernetics Conference (SMC'99), Tokyo (Japon), 12-15 Octobre 1999, Vol.1, pp.50-55.
18. O. Boubaker, J.P. Babary, M. Ksouri, "Variable structure estimation and control of nonlinear distributed parameter bioreactors," 1998 IEEE International Conference on Systems Man and Cybernetics (SMC'98), Symposium on Modelling Control, San Diego-California (USA), 11-14 Octobre 1998, Vol. 4, pp. 3770-3774.

19. O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J.P. Babary, " MIMO variable structure control for non linear distributed parameter systems: application to fixed bed bioreactors," 2nd IMACS Multiconference IEEE CESA'98 Computational Engineering in Systems Applications, Symposium on Modelling, Analysis and Control, Nabeul-Hammamet (Tunisie), 1-4 avril 1998, Vol. 1, pp.79-84.
20. O. Boubaker, M. Ksouri, J.P. Babary, " MIMO variable structure control of a denitrifying distributed parameter biofilter," IEEE Fifth International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR'98), Miedzyzdroje (Pologne), 25-29 Août 1998, Vol. 1, pp. 141-146.
21. O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J.P. Babary, " SISO and MIMO variable structure control of fixed bed bioreactors," IEE UKAC International Conference on CONTROL'98, Swansea (GB), 1-4 septembre 1998, Vol. I, pp. 229-234, IEE Conference Publication n° 455, London.
22. O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J.P. Babary, " Sliding control of linear input delay systems," 15th IEEE IMACS World Congress on Scientific Computation Modelling and Applied Mathematics (IMACS'97), Berlin (Allemagne), 24-29 Août 1997, Vol.5, pp. 91-96.
23. Sellami, R. M'hiri, O.Boubaker, M. Ksouri et J. Zrida. "Variable structure control and performance comparison," IFAC'97, Mai 1997, Belfort (France), pp. 279-287.
24. O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J.P. Babary, " Simulation et commande en régime glissant d'un procédé biologique à paramètres répartis," 17èmes Journées Tunisiennes d'Electrotechnique et d'Automatique (JTEA'97), Nabeul (Tunisie), 8-9 novembre 1997, pp. 102-107. 9.
25. O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, " Commande à structure variable pour les systèmes non linéaires," 16èmes Journées Tunisiennes d'Electrotechnique et d'Automatique (JTEA'96), Nabeul (Tunisie), 8-9 novembre 1996.
26. O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J. Bernussou, "Commande robuste par mode glissant," CMGE'95, Radés (Tunisie) , 16-17 septembre 1995, pp. 7-12.

COMMUNICATIONS A DIFFUSION LIMITEE

1. N. Ben Akacha, O. Boubaker; M. Gargouri, "Mise en œuvre et modélisation mathématique d'un système bi-enzymatique pour la production d'arôme, " 15^{ème} journées Biologiques, dans le CD-rom, 18-20 Mars 2004, Hammam Sousse, Tunisie.
2. O.Boubaker, "Sur une nouvelle stratégie de découplage des procédés biochimiques exhibant des multiplicités interactives d'entrées, " Journées de la commande robuste et ses applications JCRA'2003, Yasmine Hammamet, 26-27 septembre 2003, pp 74, 75.
3. F. Rezouga, M. Sprendio, O. Boubaker, I. Queinnec, M. Hamdi, "Estimation des paramètres cinétiques de la biodégradation du para-Nitrophénone dans une population mixte par respirométrie," Journées de la commande robuste et ses applications JCRA'2003, Yasmine Hammamet, 26 et 27 septembre 2003, pp 84, 85.
5. K. Turki et O.Boubaker, "Contribution à la modélisation multimodèle et la commande robuste autoséquencée d'un procédé de dépollution des eaux usées, " Journées de la commande robuste et ses applications JCRA'2003, Yasmine Hammamet, 26 et 27 septembre 2003, pp 80-81.
8. O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J.P. Babary, " Commande robuste à structure variable des systèmes à paramètres répartis," 3ème Séminaire sur la commande robuste et ses applications (SCRA'97), Nabeul (Tunisie), 22-24 février 1997, pp.1-8.
11. O. Boubaker, R. M'hiri, M. Ksouri, J. Bernussou, " Sur les Systèmes à structure variable," 2ème Séminaire sur la commande robuste et ses applications (SCRA'95), Nabeul (Tunisie), 2-3 décembre 1995.

Habilitation Universitaire en Automatique et Informatique Industrielle

Madame Olfa BOUBAKER née KHELIA

Contribution à la commande robuste des systèmes non linéaires

Résumé: La théorie des systèmes non linéaires reste encore un domaine ouvert à la recherche, même si des résultats importants à caractère théorique ont été obtenus depuis bien longtemps dans le domaine de l'Automatique. La complexité des outils et des méthodes développés pour l'analyse et la synthèse des systèmes non linéaires ont représenté le verrou réel de ces approches lors de l'application sur un plan industriel. La contribution de ce travail réside dans le développement ou l'extension de résultats théoriques pour des classes génériques des systèmes non linéaires tout en assurant le compromis simplicité, robustesse et applicabilité. Deux approches ont été proposées pour assurer la commande robuste des systèmes non linéaires. La première assure la systématisation de la synthèse de lois de commande pour une classe particulière des systèmes non linéaires. Celle-ci est caractérisée par des couplages en forme de multiplicités entre les variables de commande. Ce problème a été résolu dans les deux cas de systèmes de dimension infinie et dans le cas de systèmes de dimension finie. Les preuves de stabilité des lois de commande proposées ont été démontrées en utilisant une approche de Lyapunov. La seconde approche de commande robuste exige la représentation des systèmes non linéaires au moyen de modèles linéaires par morceaux par des formes canoniques de préférence affectées d'incertitudes. Une extension à l'approche quadratique de Lyapunov classique appliquée aux systèmes linéaires a été étendue à la base de modèles linéaires par morceaux représentant le modèle non linéaire. L'intérêt majeur de cette approche est qu'elle permet de réduire le conservatisme de l'approche classique tout en choisissant une matrice de Lyapunov différente pour chaque sommet d'un modèle linéaire incertain de type polytopique. De plus un régulateur unique est synthétisé pour l'ensemble des modèles incertains représentant le modèle non linéaire. Pour faire face aux problèmes d'estimation d'état des systèmes considérés, deux philosophies de synthèse d'observateurs robustes ont été adoptées. La première consiste en une estimation de tous les états du système par le biais d'observateurs à entrées inconnues d'ordre complet, la seconde restreint le problème en une estimation des états non accessibles par le biais d'observateurs à entrées inconnues d'ordre réduit. Une étude comparative a permis de distinguer les avantages et les inconvénients de chacune des approches développées. Enfin des applications dans le domaine des procédés biotechnologiques ont été conduites pour valoriser certains résultats théoriques de modélisation et d'optimisation. La difficulté majeure retenue dans ce sens se situe principalement dans la pluridisciplinarité des théories considérées dans ce domaine industriel particulier et les coûts très élevés des expérimentations.

Mots Clés:

Modélisation, Systèmes non linéaires, systèmes linéaires, systèmes de dimension infinie, systèmes de dimension finie, Modèles incertains, stabilité, théorie de Lyapunov, découplage, commande robuste, observateurs robustes, observateurs à entrées inconnues, procédés biotechnologiques.