



**HAL**  
open science

# Contribution à la Conception, l'Analyse et la Synchronisation des Systèmes Hyperchaotiques d'Ordre Fractionnaire

Abir Lassoued

► **To cite this version:**

Abir Lassoued. Contribution à la Conception, l'Analyse et la Synchronisation des Systèmes Hyperchaotiques d'Ordre Fractionnaire. Automatique / Robotique. Institut National des Sciences Appliquées et Technologie, Tunis, 2019. Français. NNT: . tel-02864125

**HAL Id: tel-02864125**

**<https://theses.hal.science/tel-02864125>**

Submitted on 10 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



المعهد الوطني للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا  
INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES  
APPLIQUEES ET DE TECHNOLOGIE



UNIVERSITE DE CARTHAGE

# THESE DE DOCTORAT

Discipline : Informatique industrielle

par

**Abir LASSOUED MAHMOUD**

Ingénieur INSAT

---

**CONTRIBUTION A LA CONCEPTION, L'ANALYSE ET LA  
SYNCHRONISATION DES SYSTEMES HYPERCHAOTIQUES  
D'ORDRE FRACTIONNAIRE**

---

Soutenue le 07 Mars 2019, devant le jury composé par :

**M. Hichem KALLEL**

Professeur, INSAT

**Président**

**M. Moez FEKI**

Professeur, ESSTHS

**Rapporteur**

**M. Rhouma RHOUMA**

Maître de Conférences, ESEN

**Rapporteur**

**M. Nabil DERBEL**

Professeur, ENIS

**Examineur**

**Mme. Olfa BOUBAKER**

Professeur, INSAT

**Directeur de thèse**

Unité de Recherche Energy, Robotics, Control and Optimization (ERCO)  
Institut National des Sciences Appliquées et Technologie (INSAT)



# Dédicaces

A mes parents,  
A mon mari,  
A mon petit frère,  
A la mémoire de mon grand-père,  
Je vous dédie ce travail.

# Remerciements

Ces travaux de recherche ont été réalisés au sein de l'unité de recherche Energie, Robotique, Contrôle et Optimisation (ERCO) à l'Institut National des Sciences Appliquées et Technologie (INSAT).

Au terme de cette thèse, je tiens à remercier particulièrement ma directrice de thèse Madame Olfa Boubaker, Professeur à l'INSAT, pour son encadrement, sa disponibilité et surtout son soutien continu tout au long de ces années. Je voudrais aussi la remercier d'avoir cru en mes capacités et m'avoir permis de mener à bien mes recherches scientifiques. Cette thèse n'aurait pas abouti sans ses conseils précieux.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mes travaux de recherche. Je remercie, particulièrement, Monsieur Hichem Kallel, Professeur à l'INSAT, pour le grand honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ma thèse. Veuillez bien trouver ici le témoignage de mon profond respect.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur Moez Feki, Professeur à l'Ecole Supérieure des Sciences et Technologies de Hammam Sousse (ESSTHS), d'avoir accepté de rapporter ce modeste travail malgré ses responsabilités scientifiques et administratives. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour les discussions fructueuses autour de mes travaux. Veuillez bien trouver ici le témoignage de mon profond estime.

Je tiens à remercier Monsieur Rhouma Rhouma, Maître de Conférences à l'Ecole Supérieure de l'Economie Numérique de la Manouba (ESEN), pour avoir accepté de se pencher sur ce mémoire. Je suis très reconnaissante pour les commentaires constructifs et les remarques enrichissantes présentés autour de mes travaux de recherche. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Tout l'honneur pour moi est d'avoir Monsieur Nebil Derbel, Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS), comme examinateur de ma thèse de Doctorat. Qu'il me soit permis de lui exprimer toute ma reconnaissance d'avoir accepté de faire partie du jury malgré ses responsabilités scientifiques. Veuillez bien trouver ici le témoignage de mon profond respect.

Je ne peux clôturer ces remerciements sans exprimer ma profonde gratitude pour le soutien permanent de Monsieur Rachid Dhifaoui, Directeur de l'unité de recherche ERCO. Ses échanges scientifiques, ses conseils permanents ainsi que son aide précieuse pour la réalisation de la partie expérimentale de cette thèse étaient pour moi d'une aide incontestable.

Enfin, tous mes remerciements vont vers Monsieur Sajad Jafari, Maître Assis- tant à l'université Amirkabir, Iran, pour sa collaboration et ses échanges scientifiques fructueux qui m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de certains résultats numériques. Nous espérons prochainement mettre en place, à travers ces travaux, une collaboration contractuelle.

Merci à tous !

# Liste des Publications

## Reuves internationales avec comité de lecture

1- A.Lassoued, O.Boubaker, "Hybrid Chaotic Synchronization between Identical and Non-Identical Fractional-Order Systems", International Journal of Computer Applications in Technology, Vol.60, N°2, 2019 (à paraître).

2- A.Lassoued, O.Boubaker, "Dynamic Analysis and Circuit Design of a Novel Hyperchaotic System with Fractional-Order Terms", Complexity, Vol.2017, ID 3273408, 2017. DOI : 10.1155/2017/3273408

**IF (ISI Thomson) :1.829**

3- A.Lassoued, O.Boubaker, "On New Chaotic and Hyperchaotic Systems : A Literature Survey", Nonlinear Analysis : Modelling and Control, Vol.21, N°6, pp.770-789, 2016. DOI : 10.15388/NA.2016.6.3

**IF (ISI Thomson) :0.896**

## Chapitres d'ouvrages

4- A.Lassoued, O.Boubaker, R.Dhifaoui, S.Jafari "Experimental observations and circuit realization of a jerk chaotic system with piecewise nonlinear function", Recent Advances in Chaotic Systems and Synchronization : From Theory to Real World Applications, Elsevier Academic Press, pp.3-21, 2019.

DOI :10.1016/B978-0-12-815838-8.00001-7

5- A.Lassoued, O.Boubaker, "Fractional-Order Hybrid Synchronization for Multiple Hyperchaotic Systems", Recent Advances in Chaotic Systems and Synchronization : From Theory to Real World Applications, Elsevier Academic Press, pp.351-366, 2019. DOI :10.1016/B978-0-12-815838-8.00017-0

6- A.Lassoued, O.Boubaker, "A New Fractional-Order Jerk System and Its Hybrid Synchronization", Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems, Springer International Publishing, pp.699-718, 2017. DOI : 10.1007/978-3-319-50249-6-24

### **Conférences internationales avec comité de lecture**

7- A.Lassoued, O.Boubaker, R.Dhifaoui, "A simple chaotic system with only one nonlinear term : Circuit design and experimental validation", IEEE : 15<sup>th</sup> International Multi-Conference on Systems, Signals Devices (SSD), Tunisie (Hammamet), 19-21 Mars 2018. DOI :10.1109/SSD.2018.8570688

8- A.Lassoued, O.Boubaker, "Hybrid Synchronization of Multiple Fractional-Order Chaotic Systems with Ring Connection", IEEE : 8<sup>th</sup> International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC), Algérie (Alger), 15-17 Novembre 2016. DOI : 10.1109/ICMIC.2016.7804282

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Les signatures du chaos . . . . .	6
1.2.1 Dissipativité . . . . .	6
1.2.2 Attracteur étrange . . . . .	6
1.2.3 Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	7
1.2.4 Points d'équilibre et bifurcations . . . . .	7
1.2.5 Exposants de Lyapunov . . . . .	8
1.3 Systèmes chaotiques et hyperchaotiques basiques . . . . .	9
1.3.1 Systèmes chaotiques . . . . .	9
1.3.2 Systèmes hyperchaotiques . . . . .	12
1.4 Nouveaux systèmes chaotiques et hyperchaotiques . . . . .	18
1.4.1 Systèmes chaotiques . . . . .	18
1.4.2 Systèmes hyperchaotiques . . . . .	22
1.4.3 Étude comparative . . . . .	27
1.5 Conclusion . . . . .	28
<b>2 Conception et analyse d'un nouveau système chaotique</b>	<b>30</b>
2.1 Introduction . . . . .	31
2.2 Proposition d'un nouveau système chaotique à base d'une fonction non linéaire par morceaux . . . . .	31
2.2.1 Modèle mathématique . . . . .	31
2.2.2 Analyse . . . . .	33
2.3 Système chaotique modifié : Introduction d'un polynôme d'ordre non entier . . . . .	42
2.3.1 Modèle mathématique . . . . .	42

2.3.2	Analyse . . . . .	43
2.4	Conclusion . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Système hyperchaotique d'ordre fractionnaire</b>	<b>54</b>
3.1	Introduction . . . . .	55
3.2	Vers un nouveau système hyperchaotique . . . . .	55
3.2.1	Modèle mathématique . . . . .	55
3.2.2	Analyse . . . . .	59
3.3	Système hyperchaotique d'ordre fractionnaire . . . . .	65
3.3.1	Le calcul fractionnaire : Propriétés basiques . . . . .	65
3.3.2	Modèle mathématique . . . . .	67
3.3.3	Analyse . . . . .	68
3.4	Conclusion . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Implémentation des systèmes proposés</b>	<b>74</b>
4.1	Introduction . . . . .	75
4.2	Implémentation des fonctions non linéaires . . . . .	75
4.2.1	La fonction valeur absolue . . . . .	75
4.2.2	La fonction signe . . . . .	76
4.2.3	La fonction racine carrée . . . . .	78
4.3	Implémentation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire . . . . .	80
4.3.1	Approximation de la dérivée fractionnaire . . . . .	80
4.3.2	Conception du circuit . . . . .	84
4.4	Implémentation des systèmes proposés . . . . .	88
4.4.1	Conception du circuit électrique du système chaotique . . . . .	88
4.4.2	Conception du circuit électrique du système hyperchaotique d'ordre entier. . . . .	92
4.4.3	Conception du circuit électrique du système hyperchaotique d'ordre fractionnaire . . . . .	96
4.5	Expérimentation . . . . .	100
4.6	Conclusion . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Synchronisation hybride d'ordre fractionnaire</b>	<b>109</b>
5.1	Introduction . . . . .	110
5.2	Préliminaires . . . . .	110
5.3	Position du problème . . . . .	112
5.4	Synchronisation chaotique hybride . . . . .	113
5.4.1	Stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes d'ordre frac- tionnaire . . . . .	113
5.4.2	Conception des contrôleurs . . . . .	114

5.5	Applications . . . . .	118
5.5.1	1 <sup>er</sup> cas : Synchronisation de systèmes hyperchaotiques identiques	118
5.5.2	2 <sup>ème</sup> cas : Synchronisation de systèmes chaotiques différents . .	122
5.6	Conclusion . . . . .	131
<b>A</b>	<b>Les diagrammes de bifurcation : Programmes Matlab</b>	<b>145</b>
A.1	Programme du diagramme de bifurcation relatif au système (2.3) . .	146
A.2	Programme du diagramme de bifurcation relatif au système (2.8) . .	146
A.3	Programme du diagramme de bifurcation relatif au système (3.1) . .	147
<b>B</b>	<b>Les matrices <math>L_1</math> et <math>L_2</math> de la synchronisation hybride</b>	<b>148</b>
B.1	1 <sup>er</sup> cas : Synchronisation de systèmes hyperchaotiques identiques . . .	149
B.2	2 <sup>ème</sup> cas : Synchronisation de systèmes chaotiques différents . . . . .	151

# Table des figures

1.1	Portrait de phase des systèmes chaotique basiques : (a) Système de Lorenz, (b) Système de Chen, (c) Système de Lü, (d) Système de Rössler, (e) Système de Lui, (f) Système de Qi. . . . .	13
1.2	Portrait de phase des systèmes hyperchaotiques basiques : (a) Système de Lorenz, (b) Système de Chen, (c) Système de Lü, (d) Système de Rössler, (e) Système de Lui, (f) Système de Qi. . . . .	17
2.1	Portraits de phase du système (2.3) : (a) $x-y-z$ ; (b) $x-y$ ; (c) $x-z$ ; (d) $y-z$ . . . . .	34
2.2	Sensibilité aux conditions initiales (en bleu $(1, 1, 1)$ et en rouge $(1 + 10^{-14}, 1, 1)$ ) du système (2.3) : les trajectoires et les erreurs des variables d'état (a) $x$ ; (b) $y$ et (c) $z$ . . . . .	35
2.3	Dynamique des points d'équilibre de type dissipatif instable : (a) Type I, (b) Type II. [Campos-Cantón et al., 2012] . . . . .	38
2.4	Diagramme de bifurcation du système (2.3) lorsque le paramètre $-c$ varie. . . . .	39
2.5	Attracteurs réguliers et étranges du système (2.3) : (a) $c = 1.5$ ; (b) $c = 1.85$ . . . . .	40
2.6	Spectre des exposants de Lyapunov du système (2.3). . . . .	41
2.7	Portraits de phases du système (2.8) : (a) $x-y-z$ ; (b) $x-y$ ; (c) $x-z$ ; (d) $y-z$ . . . . .	44
2.8	Séries chronologiques du système (2.8) : (a) $x$ , (b) $z$ , (c) $z$ . . . . .	45
2.9	Sensibilité aux conditions initiales (en bleu $(1, 1, 1)$ et en rouge $(1 + 10^{-14}, 1, 1)$ ) : les trajectoires des variables d'état $x$ , $y$ et $z$ du système (2.8) et ses erreurs. . . . .	46
2.10	Diagrammes de bifurcations : variant le paramètre $m$ pour le système (2.8) en utilisant MatCont. . . . .	51

2.11	Diagrammes de bifurcations : variant le paramètre $m$ pour le système (2.8) en utilisant Matlab. . . . .	52
2.12	Spectre des exposants de Lyapunov du système (2.8) . . . . .	53
3.1	Portraits de phase du système (3.1) : (a) $yxz$ ; (b) $wzx$ ; (c) $wyx$ . . . .	57
3.2	Série chronologique des variables d'état du système (3.1) : (a) $x$ ; (b) $y$ ; (c) $z$ ; (d) $w$ . . . . .	58
3.3	Sensibilité aux conditions initiales du système (3.1) : (en bleu (1, 1, 1) et en rouge $(1 + 10^{-14}, 1, 1, 1)$ ). . . . .	60
3.4	Diagramme de bifurcation du système (3.1) lorsque le paramètre $m$ varie. . . . .	63
3.5	Différentes formes d'attracteurs exhibées par le système (3.1) lorsque le paramètre $m$ varie. . . . .	64
3.6	Spectre des exposants de Lyapunov du système (3.1) . . . . .	65
3.7	Formes d'attracteurs possibles du système (3.10) : (a) $q = 0.88$ , (b) $q = 0.96$ , (c) $q = 0.97$ , (d) $q = 0.99$ . . . . .	69
3.8	Portraits de phase du système (3.10) lorsque $q = 0.98$ : (a) $xyz$ ; (b) $wyz$ ; (c) $wxz$ . . . . .	70
3.9	Sensibilité aux conditions initiales de la variable d'état $w$ du système (3.10) en bleu (1, 1, 1, 1) et en rouge $(1 + 10^{-6}, 1, 1, 1)$ . . . . .	71
3.10	Régions de stabilité et d'instabilité du système (3.10) lorsque $q = 0.99$ . . . . .	72
4.1	Conception du circuit valeur absolue. . . . .	76
4.2	Résultats de simulation du circuit valeur absolue sous Multisim : le signal d'entrée en bleu et le signal de sortie en rouge. . . . .	77
4.3	Conception du circuit fonction signe. . . . .	77
4.4	Résultats de simulation du circuit fonction signe sous Multisim : le signal d'entrée en bleu et le signal de sortie en rouge. . . . .	78
4.5	Composants internes d'un amplificateur opérationnel de classe AB [Kamsri et al., 2008]. . . . .	79
4.6	Circuit fonction racine carrée [Kamsri et al., 2008]. . . . .	80
4.7	Conception du circuit racine carrée sous Multisim. . . . .	81
4.8	Résultats de simulation du circuit fonction racine carrée sous Multisim : le signal d'entrée en bleu et le signal de sortie en rouge. . . . .	81
4.9	Diagramme d'amplitude de Bode de la fonction de transfert (4.8) d'ordre fractionnaire avant et après approximation avec $q = 0.97$ . . . .	85
4.10	Circuit fonction de transfert approximée de $\frac{1}{s^m}$ selon la méthode de Charef. . . . .	86
4.11	Conception du circuit intégrateur d'ordre fractionnaire 0.97. . . . .	87
4.12	Conception du circuit électrique du système chaotique jerk (2.3). . . .	89

4.13	Attracteurs exhibés par le circuit du système (2.3). . . . .	90
4.14	Portraits de phase du système (4.11). . . . .	93
4.15	Portraits de phase du système ajusté (4.12). . . . .	95
4.16	Conception du circuit électrique du système hyperchaotique (4.13). . . . .	97
4.17	Attracteurs exhibés par le circuit hyperchaotique (4.13). . . . .	98
4.18	Attracteurs exhibés par le système hyperchaotique d'ordre fractionnaire (4.14). . . . .	99
4.19	Conception du circuit électrique du système hyperchaotique d'ordre fractionnaire (4.14). . . . .	101
4.20	Attracteurs obtenus pour circuit hyperchaotique d'ordre fractionnaire (4.14). . . . .	102
4.21	Circuit réel correspondant à la fonction valeur absolue. . . . .	103
4.22	Courbes expérimentales correspondantes au circuit fonction valeur absolue. . . . .	103
4.23	Circuit réel correspondant à la fonction signe. . . . .	104
4.24	Courbes expérimentales correspondantes au circuit de la fonction signe. . . . .	104
4.25	Circuit réel correspondant à la fonction racine carrée. . . . .	105
4.26	Courbes expérimentales correspondantes au circuit de la fonction racine carrée. . . . .	105
4.27	Circuit réel du système chaotique (2.3). . . . .	105
4.28	Validation expérimentale des séries chronologiques du système (2.3). . . . .	106
4.29	Validation expérimentale du système chaotique (2.3) : (a) $xy$ ; (b) $xy$ ; (c) $yz$ . . . . .	107
4.30	Validation expérimentale des attracteurs réguliers : (a) $x-y$ ; (b) $y-z$ ; (c) $x-z$ . . . . .	108
5.1	Diagrammes de couplage des systèmes chaotiques. . . . .	111
5.2	Couplage en anneau des quatre systèmes hyperchaotiques identiques. . . . .	118
5.3	Erreurs d'anti-synchronisation des quatre systèmes fractionnaires identiques. . . . .	122
5.4	Trajectoires d'évolution des variables d'état des systèmes identiques : (a) $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}$ ; (b) $x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}$ ; (c) $x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}$ , d) $x_{14}, x_{24}, x_{34}, x_{44}$ . . . . .	123
5.5	Zoom sur des trajectoires d'évolution des variables d'état des systèmes identiques : (a) $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}$ ; (b) $x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}$ ; (c) $x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}$ , d) $x_{14}, x_{24}, x_{34}, x_{44}$ . . . . .	124
5.6	Couplage en anneau des quatre systèmes hyperchaotiques différents. . . . .	125
5.7	Erreurs d'anti-synchronisation $e_A$ des quatre systèmes fractionnaires chaotiques. . . . .	128

5.8	Trajectoires d'évolution des variables d'état des systèmes différents : (a) $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}$ ; (b) $x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}$ ; (c) $x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}$ . . . . .	129
5.9	Zoom sur des trajectoires d'évolution des variables d'état des systèmes fractionnaires différents : (a) $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}$ ; (b) $x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}$ ; (c) $x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}$ , d) $x_{14}, x_{24}, x_{34}, x_{44}$ . . . . .	130

# Liste des tableaux

1.1	Différents types d'attracteurs selon les LEs . . . . .	8
1.2	Description des nouveaux systèmes chaotiques. . . . .	19
1.3	Description des nouveaux systèmes hyperchaotiques . . . . .	23
1.4	Description de la classe des nouveaux systèmes hyperchaotiques . . . . .	26
2.1	Matrices Jacobiennes et valeurs propres correspondantes pour chaque point d'équilibre du système (2.3). . . . .	36
2.2	Étude comparative relatif au système (2.3) . . . . .	41
2.3	Matrices Jacobiennes et valeurs propres correspondantes pour chaque point d'équilibre du système (2.8). . . . .	48
2.4	Étude comparative relatif au système (2.8) . . . . .	52
3.1	Matrices Jacobiennes et les valeurs propres correspondantes pour chaque point d'équilibre du système (3.1). . . . .	61
3.2	LEs de certains attracteurs typiques exhibés par le système (3.1). . . . .	62
3.3	Étude comparative. . . . .	66
3.4	Analyse de stabilité du système fractionnaire (3.10) . . . . .	72
4.1	Coordonnées des points $H_1$ , $H_2$ et $H_3$ pour les deux trajectoires de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire. . . . .	86

# Liste des Symboles

## Modélisation des systèmes :

$x, y, z, w$  : Les variable d'état des systèmes non-linéaires.

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{w}$  : La dérivée première des variable d'état ( $x, y, z, w$ ).

$D^q x, D^q y, D^q z, D^q w$  : La dérivée d'ordre fractionnaire  $q$  des variables d'état ( $x, y, z, w$ ).

$a, b, c, d, e, f, h, k, m, r, \gamma, \beta, \alpha, \theta$  : Les paramètres des systèmes non-linéaires.

$q$  : Ordre fractionnaire.

$x^q$  : Polynôme d'ordre fractionnaire.

## Les erreurs de synchronisation :

$e_A$  : Erreur d'anti-synchronisation.

$e_C$  : Erreur de synchronisation complète.

# Introduction générale

Le chaos est défini comme étant un comportement étrange et non prédictible d'un système dynamique déterministe [Prigogine et al., 1984]. Un système chaotique exhibe au cours du temps des trajectoires de phase imprévisibles et bornées caractérisées par un exposant de Lyapunov positif. Cet exposant indique la présence d'un comportement dynamique étrange. Certes, le chaos est un phénomène ancien qui a été mis en évidence par Lorenz dans ses travaux de recherche sur la conversion atmosphérique [Lorenz, 1963]. Depuis, le système de Lorenz est devenu un paradigme dans la théorie du chaos. Celui-ci décrit l'effet papillon : phénomène étrange induit par un battement d'ailes d'un papillon et pouvant générer après un certain temps une tempête dans l'atmosphère.

Plus tardivement, la notion d'hyperchaos est apparue [Rössler, 1976]. Un système hyperchaotique est un système chaotique caractérisé par au moins deux exposants de Lyapunov. Cela indique qu'un attracteur hyperchaotique est déployé dans plus d'une direction inversement à l'attracteur chaotique qui se déploie dans une seule direction. Les systèmes chaotiques et hyperchaotiques sont extrêmement sensibles aux conditions initiales. Ils ont une dynamique imprévisible. La chaotification est la tâche de la création délibérée ou d'amélioration de ce type de comportement. Cette tâche reste encore un challenge très difficile à résoudre et un sujet de recherche très sollicité par la communauté scientifique [Zhang et al., 2017, Zhu and Zeng, 2017].

Dès son apparition, le chaos a chamboulé l'évolution de la technologie. Ainsi, plusieurs applications du chaos ont vu le jour tels que le contrôle chaotique du cœur [Ferreira et al., 2014], le cryptage de données [Rhouma and Belghith, 2008], la communication sécurisée [Feki, 2003, Liu and Zhang, 2014]... Pour répondre aux besoins réels de ces technologies, de nombreux systèmes chaotiques ont été découverts. Parmi les plus basiques, nous pouvons citer le système de Chen [Chen and Ueta, 1999] et le système de Lü [Lü and Chen, 2002]. Parmi les plus récents, on peut citer deux nouveaux systèmes dont les points d'équilibre sont différents de l'existant

[Pham et al., 2017, Singh and Roy, 2017].

Dans cette même direction, de nombreux travaux de recherche ont tenté de construire des systèmes chaotiques et hyperchaotiques caractérisés par des structures algébriques simples, fortement recommandées pour des implémentations sur circuits électriques. Le plus célèbre est le système jerk proposé par Sprott en 1994 [Sprott, 1994]. Ces travaux de recherche ont usé de l'utilisation de fonctions non linéaires classiques et non complexes pour en faire les principales génératrices du chaos. Parmi ces fonctions, nous pouvons citer la fonction linéaire par morceaux [Sprott, 2000a], le polynôme d'ordre entier [Patidar and Sud, 2005], la fonction sinusoïdale [Vaidyanathan et al., 2014] et la fonction de commutation [Li et al., 2016b]. Cependant, de nos jours, les applications de communication sécurisée et de cryptage de données nécessitent non seulement un modèle algébrique simple mais aussi un comportement dynamique très complexe capable de dissimuler et de masquer les informations transmises. Ce compromis entre un modèle simple et un comportement dynamique complexe est très difficile à satisfaire et reste encore peu exploité. C'est dans cette principale direction que vont être orientés nos travaux de recherche dans le cadre de cette thèse afin de proposer de nouveaux systèmes chaotiques et hyperchaotiques caractérisés par des fonctions non linéaires non classiques permettant de réaliser le compromis simplicité d'implémentation et génération de comportement dynamique très complexe .

D'autre part, le calcul fractionnaire, découvert depuis trois siècles, est resté depuis un concept théorique vu sa complexité inhérente [Oldham and Spanier, 1974]. Ce n'est que récemment que des travaux de recherche ont montré les avantages et le potentiel du calcul fractionnaire pour la réalisation des circuits électriques [Jia et al., 2017, Durdu and Uyaroglu, 2017]. Ceci peut être expliqué par la capacité de cette notion à décrire avec un ordre réduit des phénomènes physiques dont le fonctionnement repose sur la diffusion d'une grandeur physique telle que la tension électrique. Toutefois, la majorité des travaux qui traitent des systèmes d'ordre fractionnaire sont jusqu'aux dernières décennies majoritairement linéaires. Or, la majorité des systèmes physiques sont décrits par des dynamiques non linéaires. L'implémentation de tels systèmes peut résoudre plusieurs problèmes physiques cruciaux mais elle reste encore peu exploitée vu la complexité du calcul fractionnaire relatif aux systèmes non linéaires. Nous allons donc tenter de nous investir dans cette direction afin de résoudre le problème de l'implémentation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques en usant de la théorie des systèmes d'ordre fractionnaire.

Simultanément aux grandes avancées réalisées dans la théorie du chaos, les perspectives de l'utilisation des systèmes hyperchaotiques dans des applications d'ingénierie a motivé les chercheurs afin de s'investir dans le domaine de la synchronisation chaotique depuis les travaux de Pecora [Carroll and Pecora, 1991]. Plusieurs schémas de synchronisation chaotique ont été conçus, notamment la synchronisation avec temporisation [Yan et al., 2015] et la synchronisation projective [Chen et al., 2016a]. Très récemment, un nouveau schéma de synchronisation chaotique a submergé, c'est la synchronisation hybride [Yang and Cao, 2014, Ji, 2014]. Pour cette approche, deux types de synchronisation coexistent au même temps : l'anti-synchronisation et la synchronisation complète. Les applications de la synchronisation hybride montrent que ce schéma peut améliorer la sécurité dans la communication multilatérale tout en possédant plusieurs avantages par rapport aux techniques classiques. Cependant, lorsque plusieurs systèmes d'ordre fractionnaire doivent être synchronisés, le problème de la synchronisation chaotique hybride reste encore en suspens. Nous allons donc chercher à trouver une solution à ce problème à travers la conception de nouveaux contrôleurs d'ordre fractionnaire.

C'est dans le cadre particulier de nos constatations précédentes que vont s'inscrire nos contributions dans le cadre de cette thèse. En effet, nous allons proposer de nouveaux systèmes chaotiques et hyperchaotiques qui assureront le compromis simplicité du modèle algébrique/complexité du comportement dynamique. L'analyse de ces systèmes sera présentée en mettant l'accent sur la forme des attracteurs exhibés, le nombre de points d'équilibre, la sensibilité aux conditions initiales, les exposants et la dimension de Lyapunov ainsi que les diagrammes de bifurcation. Pour montrer à la fois l'efficacité des résultats obtenus et l'intérêt du calcul fractionnaire pour des implémentations pratiques, les circuits électriques relatifs à ces nouveaux systèmes seront conçus et réalisés. Les difficultés rencontrées dans ce sens se rapportant essentiellement à l'incertitude induite par certains composants électroniques seront résolues en appliquant des méthodes de réduction et en procédant à quelques ajustements numériques. Au final, pour mettre l'accent sur les performances des systèmes proposés, un nouveau schéma de synchronisation récemment proposé pour des systèmes d'ordre entiers sera étendu pour les systèmes d'ordre fractionnaire. Une technique de synchronisation multilatérale de type hybride sera proposée et permettra l'exploitation des systèmes chaotiques proposés.

Ce rapport est organisé en cinq chapitres. Le premier chapitre présente un état de l'art sur les systèmes chaotiques et hyperchaotiques basiques. Il expose aussi un tour d'horizon sur les dernières avancées de ces systèmes.

Dans le second chapitre, un nouveau système chaotique basé sur le concept du jerk

sera construit et analysé. Une fonction non linéaire par morceaux est utilisée dans son modèle mathématique dans l'objectif d'améliorer ses caractéristiques élémentaires. Via une chaotification de ce dernier, de nouveaux générateurs du chaos seront alors découverts pour donner naissance à un système chaotique modifié avec une complexité dynamique plus avantageuse.

Dans le troisième chapitre, un système hyperchaotique sera proposé en se basant sur le système chaotique modifié proposé au second chapitre. La supériorité de ce système par rapport à l'existant sera montrée via une analyse comparative. Pour montrer l'avantage du calcul fractionnaire, le modèle d'ordre fractionnaire relatif à ce système sera aussi étendu et analysé. Cette étape sera cruciale pour préparer à l'implémentation du circuit électrique.

Dans le quatrième chapitre, la modélisation et l'implémentation des circuits chaotiques et hyperchaotiques proposés au second et troisième chapitres seront validés et simulés via le logiciel Multisim. De plus, afin de mettre en valeur les résultats de simulation obtenus, une validation expérimentale des fonctions non linéaires proposées ainsi que des dynamiques chaotiques obtenues sera présentée.

Le cinquième chapitre sera dédié à la synchronisation hybride multilatérale d'ordre fractionnaire. Deux cas d'étude seront établis : le premier propose une synchronisation entre des systèmes hyperchaotiques identiques alors que le second propose la synchronisation entre des systèmes chaotiques différents.

Ce rapport est clôturé par une conclusion générale qui résume les contributions apportées par cette thèse et présente une liste des perspectives à mettre en place en extension à ces travaux de recherche.

Chapitre **1**

État de l'art

## 1.1 Introduction

Récemment, plusieurs systèmes chaotiques et hyperchaotiques ont vu le jour. Diverses applications d'ingénierie y sont basés. L'objectif de ce chapitre est de présenter un état de l'art sur les systèmes chaotiques et hyperchaotiques afin de comprendre leur structure et leur originalité. Dans ce sens, nous présenterons les systèmes basiques et récents qui ont révolutionné la théorie du chaos.

Ce chapitre est organisé en trois parties. Les signatures élémentaires d'un comportement chaotique seront définis au second paragraphe. Les systèmes chaotiques et hyperchaotiques basiques seront décrits dans le troisième paragraphe. Nous analysons dans le quatrième paragraphe les caractéristiques fondamentales des nouveaux systèmes en se focalisant sur leurs distinctions. Cette synthèse bibliographique a fait l'objet d'une publication scientifique [Lassoued and Boubaker, 2016b].

## 1.2 Les signatures du chaos

### 1.2.1 Dissipativité

Un système chaotique tridimensionnel, décrit par les variables d'état  $x$ ,  $y$  et  $z$ , doit satisfaire la condition générale de la dissipation [Qi et al., 2005b]. Soit  $V$  l'élément de volume d'un flux de trajectoires d'un système non linéaire. Ce système est dissipatif seulement si la divergence  $\nabla V$ , définie par  $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$  est négative. En effet, si  $\nabla V < 0$  alors le système non linéaire est dissipatif et peut exhiber un comportement chaotique. Ceci signifie que ce système converge vers un taux exponentiel de l'ordre de  $e^{-a}$ . Ainsi, à un instant donné  $t$ , le volume  $V(t)$  est égal à  $V_0 e^{-at}$  avec  $V_0$  un volume élémentaire décroissant. Par conséquent, quand  $t$  tend vers l'infini, semblablement le volume élémentaire  $V_0$  qui contient les trajectoires du système tend vers zéro. Ainsi, toutes les trajectoires dynamiques du système non linéaire sont finalement limitées et bornées dans un sous-ensemble particulier appelé attracteur étrange. Ceci permet de vérifier la caractéristique élémentaire du chaos.

### 1.2.2 Attracteur étrange

Un attracteur étrange est l'ensemble des trajectoires bornées exhibées par un système non linéaire dans le plan de phase et au cours du temps. Plus précisément, il traduit le taux de dilatation et de contraction du comportement dynamique de ce système. Cet attracteur est contenu dans un espace fini et son volume dans l'espace de phase est nul. D'autre part, il est reconnu par sa dimension de Hausdorff fractale  $d$  tel que  $2 < d < n$  avec  $n$  la dimension de l'espace de phase [Alligood et al., 1997]. Plusieurs systèmes se distinguent par la forme de leurs attracteurs étranges à savoir

des attracteurs en forme de papillon, en forme d'ailes, en forme de spires ... Chaque attracteur se disperse différemment dans le plan de phase générant ainsi des aspects distinctifs. Celui-ci peut être symétrique par rapport à un ou plusieurs axes ou même être asymétrique ce qui est un aspect très recommandé.

### 1.2.3 Sensibilité aux conditions initiales

Un système chaotique est extrêmement sensible aux conditions initiales. En effet, il a été prouvé qu'une variation infinitésimale des conditions initiales peut croître exponentiellement avec le temps et générer des comportements imprévisibles [Koçak and Palmer, 2010]. Cette sensibilité est l'une des caractéristiques fondamentales du chaos et la signature la plus visible de son comportement.

### 1.2.4 Points d'équilibre et bifurcations

Dans la théorie du chaos, les points d'équilibre des systèmes chaotiques et hyperchaotiques contribuent à l'analyse de leurs comportements dynamiques spécialement suivant la méthode de Shil'nikov [Silva, 1993]. Autour de ces points, nous pouvons déterminer la stabilité et les bifurcations possibles du système non linéaire étudié. Les bifurcations permettent d'étudier les changements de stabilité de ce système d'un point vers un autre en variant ses paramètres. Ainsi, certaines formes de trajectoires sont obtenues tels qu'un noyau, un foyer ou un centre suivant les valeurs propres correspondantes à chaque point d'équilibre [Kuznetsov, 2013]. De plus, le nombre de points d'équilibre caractérisent la forme des attracteurs (en ailes ou en rouleaux). Notons que la majorité de ces systèmes génèrent un attracteur étrange à quatre ailes le plus souvent avec cinq points d'équilibre. Le nombre de points d'équilibre change d'un système à un autre. Pour la plupart des systèmes basiques, ce nombre varie entre 1, 3 et parfois 5. Ces dernières années, de nouveaux systèmes sont apparus apportant des innovations à ce critère. Parmi ces systèmes, il existe des systèmes chaotiques dont les points d'équilibre sont définis par une trajectoire. Citons dans ce sens le système chaotique caractérisé par des points d'équilibre situés sur une trajectoire linéaire [Jafari and Sprott, 2013] et le système chaotique caractérisé par des points d'équilibre situés sur une trajectoire circulaire [Gotthans et al., 2016]. D'autre part, plusieurs types de bifurcation existent notamment la bifurcation de type Hopf et le dédoublement de périodes. Chacune de ces bifurcations a des caractéristiques bien particulières. Pour plus d'informations sur ce type de bifurcations, la référence suivante [Gros, 2015] peut être consultée.

De plus, le diagramme de bifurcation décrit l'évolution des trajectoires dynamiques d'un système non linéaire en variant l'un de ses paramètres. Il est obtenu en calculant les pics relatifs à une des variables d'état en fonction de l'un des paramètres du

système dynamique.

### 1.2.5 Exposants de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov (LE) représente le taux de croissance ou de déclinaison de la petite perturbation le long de chaque axe dans l'espace de phase d'un système non linéaire [Dingwell, 2006]. C'est le critère principal mais non suffisant pour reconnaître la présence d'un comportement chaotique. La définition mathématique des LEs d'un système dynamique continu dans un espace de phase n-dimensionnel est décrit selon l'expression suivante [Benettin et al., 1980]

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{p_i(t)}{p_i(0)}$$

avec  $\lambda_i$  les LEs classés par ordre croissant tel que  $i \in [1, n]$ .  $p_i(t)$  est la longueur de l'axe principal ellipsoïdal. Ce calcul est très difficile à obtenir à partir des équations différentielles, c'est pour cela que plusieurs algorithmes sont proposés pour déterminer les LEs [Benettin et al., 1980, Shimada and Nagashima, 1979]. Le plus utilisé est l'algorithme de Wolf qui permet de calculer un spectre de Lyapunov non-négatif à partir de données expérimentales [Wolf et al., 1985].

Généralement, les systèmes chaotiques sont décrits par un système tridimensionnel autonome. Ces systèmes génèrent trois LEs classés par ordre décroissant ( $LE_1 > LE_2 > LE_3$ ) comme illustré par dans la Table.1.1.

TABLE 1.1 – Différents types d'attracteurs selon les LEs

Signes des LEs	Type d'attracteurs	Nature des attracteurs
(-, -, -)	Point fixe	Attracteur régulier
(0, -, -)	Orbite périodique	Attracteur régulier
(0, 0, -)	Cycle Pseudo périodique	Attracteur régulier
(+, 0, -)	Attracteur chaotique	Attracteur étrange

Un attracteur chaotique est caractérisé par trois LEs dont le premier est positif. Pour ces exposants, le signe (+) et le signe (-) traduisent respectivement l'expansion et la contraction de l'attracteur étrange dans l'espace de phase. D'autre part, l'exposant nul est lié à la nature critique de l'attracteur chaotique qui ondule entre la dilatation et la contraction. Ainsi, si le premier exposant ( $LE_1$ ) augmente alors le degré de dilatation de l'attracteur deviendra plus important et apportera ainsi plus

de complexité dans le comportement dynamique de ce dernier.

Contrairement aux systèmes chaotiques, les systèmes hyperchaotiques exhibent quatre LEs quand ils sont décrits par un système autonome à quatre dimensions. Un attracteur étrange génère un comportement hyperchaotique quand il est caractérisé par deux exposants positifs. Plus précisément, les signes des exposants ( $LE_1, LE_2, LE_3, LE_4$ ) doivent être égaux à  $(+, +, 0, -)$ . Comme  $LE_1 > LE_2$ , alors le degré d'expansion sera indiqué par  $LE_1$ . Un comportement chaotique est exhibé lorsque les signes des exposants ( $LE_1, LE_2, LE_3, LE_4$ ) sont égaux à  $(+, 0, -, -)$ . Sinon, les attracteurs réguliers sont aussi retrouvés.

## 1.3 Systèmes chaotiques et hyperchaotiques basiques

Dans ce paragraphe, les systèmes chaotiques et hyperchaotiques basiques qui ont influencé la théorie du chaos seront décrits. Cette étude nous permettra d'identifier et d'extraire les caractéristiques dynamiques du comportement chaotique. Elle sera structurée comme suit : tout d'abord, nous présenterons les systèmes chaotiques basiques tels que la famille de Lorenz, le système de Rössler et le système de Chua. Nous nous intéresserons ensuite aux systèmes hyperchaotiques basiques tels que les systèmes hyperchaotiques de Lorenz, de Chen et de Lü.

Dans la suite, nous considérons pour les systèmes non linéaires le vecteur des variables d'état  $(x, y, z, w)$  et les paramètres  $(\alpha, \beta, \theta, \gamma, a, b, c, d, m, r)$ .

Les diagrammes de phase sont simulés via le pro-logiciel MatCont [Dhooge et al., 2006] et quand aux LEs ils sont simulés via le pro-logiciel Matds [Govorukhin, 2003]. Ces derniers sont utilisés sous le logiciel MATLAB.

### 1.3.1 Systèmes chaotiques

#### 1.3.1.1 La famille de Lorenz

La famille de Lorenz regroupe trois systèmes dont structure algébrique est similaire [Čelikovský and Chen, 2002]. Cependant, chacun est caractérisé par un comportement dynamique unique. Ces systèmes sont décrits par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} &= \gamma x + \beta y, \\ \dot{y} &= \alpha x + \theta y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{cases} \quad (1.1)$$

avec  $(\gamma, \beta, \alpha, \theta, b)$  des paramètres constants. En modifiant les paramètres  $(\beta, \alpha)$ , nous retrouvons le système de Lorenz, le système de Chen et le système de Lü. Le plus

important caractère de cette famille réside dans le nombre de ses termes non linéaires. En effet, chaque système contient un produit-croisé dans sa deuxième équation ( $xz$ ) et sa troisième équation ( $xy$ ). D'autre part, chaque système est caractérisé par trois points d'équilibre.

**Le système de Lorenz** Il est obtenu lorsque les paramètres  $(\gamma, \beta, \alpha, \theta, b)$  sont égaux à  $(-a, a, c, -1, b)$  pour le système (1.1). Ce système est décrit comme suit [Lorenz, 1963]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (1.2)$$

Le système (1.2) génère un attracteur chaotique à deux ailes lorsque  $a = 10, b = 8/3$  et  $c = 28$  décrit par la Fig.1.1-a. Il est caractérisé par un premier LE égale à 0.8986. En outre, ce système a été exploité dans plusieurs domaines industriels mais plus précisément dans le domaine de la communication sécurisée [Cuomo et al., 1993].

**Le système de Chen** Il est obtenu lorsque les paramètres  $(\gamma, \beta, \alpha, \theta, b)$  sont égaux à  $(-a, a, c - a, c, b)$  pour le système (1.1) [Chen and Ueta, 1999]. Il est représenté par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = (c - a)x + cy - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (1.3)$$

En fait, le système de Chen est basé sur le système de Lorenz (1.2) en ajoutant un simple retour d'état égal à  $-ax + (1 - c)y$  dans sa deuxième équation. Le système (1.3) génère un attracteur chaotique à deux spires illustré par la Fig.1.1-b lorsque  $a = 35, b = 3$  et  $c = 28$ . D'autre part, il exhibe un LE relativement plus considérable que le système de Lorenz égal à 2.

**Le système de Lü** Il est obtenu lorsque les paramètres  $(\gamma, \beta, \alpha, \theta, b)$  sont égaux à  $(-a, a, 0, c, b)$  pour le système (1.1). Il est représenté par le système d'équations suivant [Lü and Chen, 2002]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cy - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (1.4)$$

Le système (1.4) est caractérisé par un comportement plus complexe que les systèmes (1.2) et (1.3) car il peut générer deux types d'attracteurs à savoir des attracteurs

réguliers et des attracteurs étranges. En effet, quand les paramètres  $(a, b)$  sont fixés à  $(36, 3)$  et en variant le paramètre  $c$ , plusieurs formes sont obtenues. Pour  $12.7 < c < 17$  et  $23 < c < 28.5$ , les attracteurs chaotiques obtenus sont respectivement similaires aux attracteurs de Lorenz et de Chen. Par contre lorsque  $c \in [18, 22]$ , un nouveau attracteur avec une forme différente est obtenu. Ce nouveau attracteur est illustré par la Fig.1.1-c. Finalement, lorsqu'on a  $c < 12.6$  et  $23 < c < 28.5$ , des attracteurs réguliers sont respectivement générés à savoir un point fixe et un orbite périodique.

### 1.3.1.2 Le système de Rössler

Le système de Rössler est apparu en 1976 et il est considéré comme étant le système chaotique le plus simpliste avec une structure non symétrique [Rössler, 1976]. Il est décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= z(x - c) + b. \end{cases} \quad (1.5)$$

Le système (1.5) est très différent des systèmes de la famille de Lorenz (1.1) sur plusieurs points. En effet, il génère un attracteur avec une seule aile comme décrit dans la Fig.1.1-d. Il est caractérisé par un premier LE égale à 0.13. En plus, le système de Rössler a uniquement deux points d'équilibre et un terme non linéaire dans sa troisième équation.

### 1.3.1.3 Le système de Chua

Le circuit de Chua est le premier circuit électrique qui génère un comportement chaotique [Chua, 1992]. Plusieurs modélisations mathématiques de ce circuit ont vu le jour tel que le modèle de Lure [Suykens and Huang, 1997], le modèle floue [Zhang et al., 2005] et le modèle neuronal [Arena et al., 1995]. Il est composé d'une inductance, deux capacités, une résistance et une diode de Chua [Chua et al., 1993, Jackson et al., 1984, Shil'nikov, 1994]. Son modèle est le suivant

$$\begin{cases} dv_1/dt &= (1/C_1)[G(v_2 - v_1) - f(v_1)], \\ dv_2/dt &= (1/C_2)[G(v_1 - v_2) + i_3], \\ di_L/dt &= (1/L)[-v_2 - R_0 i_3]. \end{cases} \quad (1.6)$$

avec  $v_1$  et  $v_2$  les tensions qui parcourent respectivement les condensateurs  $C_1$  et  $C_2$ .  $i_L$  est le courant aux bornes de l'inductance  $L$  et  $G = 1/R$ .  $R_0$  traduit la petite résistance de l'inductance  $L$  dans le circuit physique. La fonction de la diode de

Chua  $f(v_1)$  est décrite par l'équation suivante

$$f(v_1) = G_b v_1 + 0.5(G_a - G_b)(|v_1 + E| - |v_1 - E|) \quad (1.7)$$

avec  $G_a G_b < 0$ ,  $v_1 \in [-d, d]$  et  $0 < E < d$ .  $E$  étant la tension de saturation de la diode de Chua.

#### 1.3.1.4 Le système de Liu

Le système basique de Liu est décrit par les équations différentielles suivantes [Liu et al., 2004]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = bx - kxz, \\ \dot{z} = -cz + hx^2. \end{cases} \quad (1.8)$$

Sa non linéarité réside dans un terme quadratique et un produit-croisé. Ces termes permettent de générer un attracteur étrange décrit dans la Fig.1.1-e dont le premier LE est égal à 1.643. Il a aussi trois points d'équilibre.

#### 1.3.1.5 Le système de Qi

En se basant sur le système de Lorenz (1.2), Qi a introduit un produit-croisé  $yz$  dans sa première équation [Qi et al., 2005a]. Le système obtenu est décrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + yz, \\ \dot{y} = cx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (1.9)$$

Dés lors le système Qi contient un produit-croisé dans chaque équation ce qui lui permet d'être différent des systèmes basiques précédents avec plus de termes non linéaires. Ainsi, le système (1.9) génère plusieurs bifurcations et un comportement chaotique dans une large région. En effet, quand les paramètres  $(a, b)$  sont égaux à  $(35, 8/3)$  et le paramètre  $c$  varie, plusieurs scénarios sont obtenus. Lorsque  $c \in (17, 189] \cup (194, 271]$ , ce dernier engendre un attracteur chaotique représenté par la Fig.1.1-f. D'autre part, il est caractérisé par cinq points d'équilibre.

### 1.3.2 Systèmes hyperchaotiques

#### 1.3.2.1 Le système hyperchaotique de Chen

En 2005, Y.Li et G.Chen ont découvert un nouveau modèle qui génère un comportement hyperchaotique en se basant sur le système chaotique de Chen (1.3) en

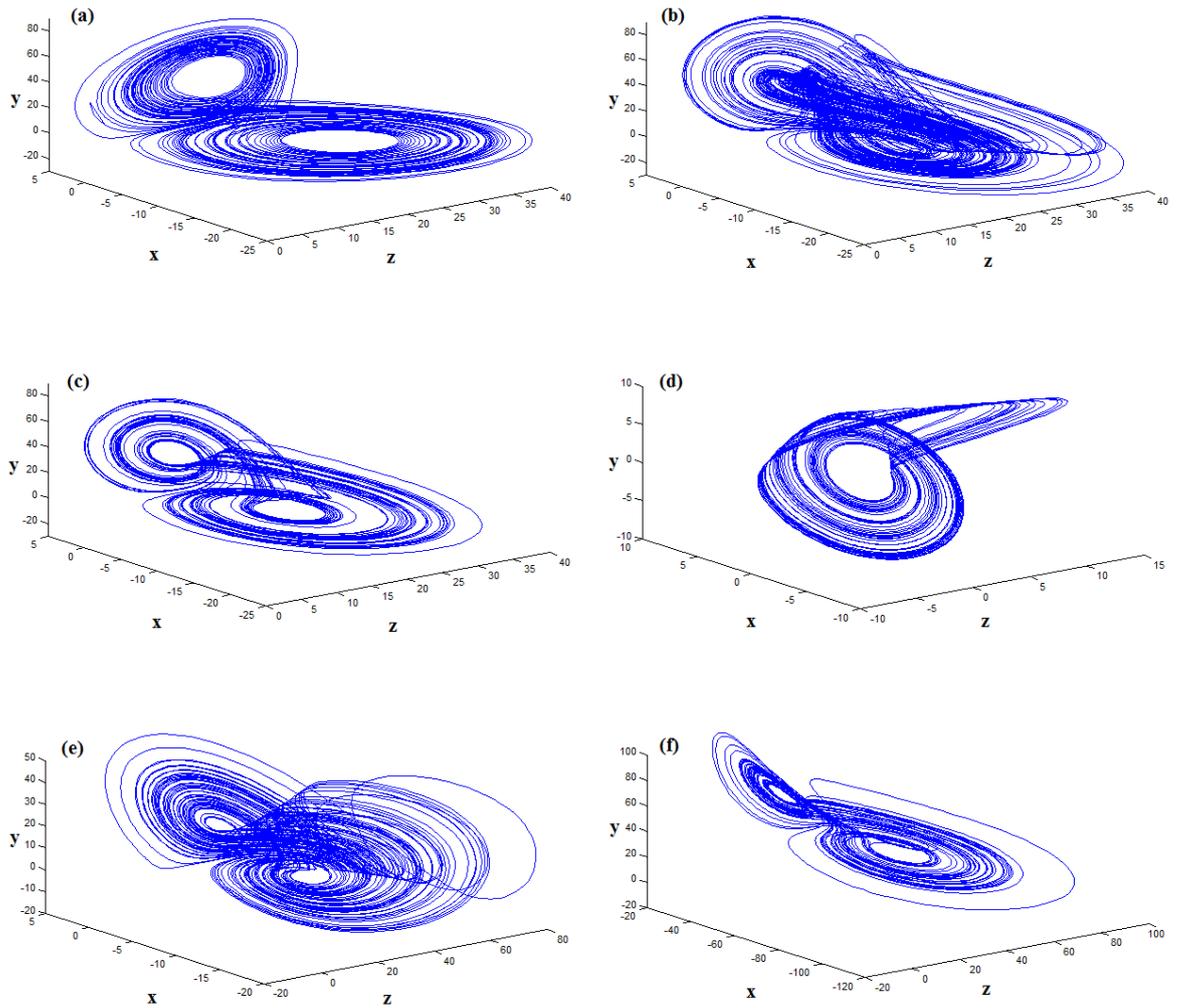


FIGURE 1.1 – Portrait de phase des systèmes chaotique basiques : (a) Système de Lorenz, (b) Système de Chen, (c) Système de Lü, (d) Système de Rössler, (e) Système de Lui, (f) Système de Qi.

rajoutant uniquement un simple retour d'état  $w$  dans la première équation. Ce dernier est décrit par [Li et al., 2005a]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + w, \\ \dot{y} = dx + cy - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{w} = yz + rw. \end{cases} \quad (1.10)$$

Lorsque les paramètres  $(a, b, c, d)$  sont égaux à  $(35, 3, 12, 7)$  et en variant le paramètre  $r$ , trois attracteurs possibles sont observés ; hyperchaotique, chaotique et périodique. L'attracteur hyperchaotique est décrit par la Fig.1.2-b. Il a un seul point d'équilibre  $O(0, 0, 0, 0)$ .

Au cours de la même année, Li et Chen ont découvert un autre système mais cette fois en rajoutant un paramètre de perturbation sinusoïdale par rapport au modèle chaotique initial [Li et al., 2005b].

En 2006, un autre système hyperchaotique a été construit en rajoutant cette fois un simple contrôleur linéaire : c'est le système de Chen, décrit par [Gao et al., 2006]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = dx - xz + cy - w, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{w} = x + k. \end{cases} \quad (1.11)$$

Ce dernier génère plusieurs formes d'attracteurs en fixant les paramètres  $(a, b, c, d)$  à  $(36, 3, 28, -16)$  et en variant le paramètre  $k$ . Si  $-0.7 < k < 0.7$  et  $0.7 \leq k < 3.5$  ou  $-3.5 \leq k < -0.7$ , le système (1.11) exhibe respectivement un comportement chaotique et hyperchaotique. L'attracteur hyperchaotique est décrit par la Fig.1.2-c. D'autre part, la majeure spécificité du système (1.11) réside dans son invariance par rapport à la transformation  $(x, y, z, w, k) \mapsto (-x, -y, -z, -w, -k)$ . Plus précisément, lorsque  $(x, y, z, w, k)$  est une solution alors  $(-x, -y, -z, -w, -k)$  est aussi une solution. Pour ces deux solutions, le même diagramme de phase est obtenu.

### 1.3.2.2 Le système hyperchaotique de Lü

En 2006, le système hyperchaotique de Lü a été conçu en se basant sur le système de Lü (1.4) en rajoutant un retour d'état [Chen et al., 2006]. Il est décrit par le

modèle suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + w, \\ \dot{y} = cy - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{w} = xz + dw. \end{cases} \quad (1.12)$$

Si  $a = 36$ ,  $b = 3$  et  $c = 20$ , plusieurs comportements dynamiques sont observés en variant le paramètre  $d$ . En effet, lorsque  $-1.03 \leq d \leq -0.46$ , un orbite périodique est obtenu. Par contre, si nous avons  $-0.46 < d \leq -0.35$  et  $-0.35 < d \leq 1.3$  alors un attracteur chaotique et hyperchaotique sont respectivement générés. L'attracteur hyperchaotique est illustré par la Fig.1.2-d.

### 1.3.2.3 Le système hyperchaotique de Liu

En se basant sur le système chaotique de Liu (1.8), un nouveau système hyperchaotique est obtenu [Fa-Qiang and Chong-Xin, 2006]. Il est décrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = bx - kxz + w, \\ \dot{z} = -cz + hx^2, \\ \dot{w} = -dx. \end{cases} \quad (1.13)$$

En fixant les paramètres  $(a, b, c, k, h)$  à  $(10, 40, 2.5, 1, 4)$  et en variant le paramètre  $d$ , le système (1.13) génère plusieurs attracteurs. Si  $42 < d \leq 52.4$  et  $64.2 < d \leq 67.2$ , un attracteur chaotique est obtenu par contre si  $0 < d \leq 42$  un attracteur hyperchaotique est observé. Cet attracteur hyperchaotique est décrit par la Fig.1.2-e. D'autre part, quand  $52.4 < d \leq 64.2$ ,  $67.2 < d \leq 75$  et  $88.6 < d \leq 90.4$ , un attracteur périodique est atteint. Finalement, lorsque  $75 < d \leq 88.6$  et  $90.4 < d \leq 100$ , un attracteur quasi-périodique (sous la forme d'un tore) est observé. Ce système de Liu a un comportement très complexe puisque son comportement dynamique pivote entre les attracteurs étrangers et réguliers. Ceci a permis d'exploiter les caractéristiques de ce dernier dans le domaine de la communication sécurisée en réalisant son circuit électrique [Xiao-Hua et al., 2009].

### 1.3.2.4 Le système hyperchaotique de Lorenz

En 2007, le système hyperchaotique basé sur le système de Lorenz (1.2) a été découvert en rajoutant un retour quadratique non linéaire [Gao et al., 2007]. Son

modèle mathématique est le suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cx + y - xz - w, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{w} = kyz. \end{cases} \quad (1.14)$$

Un comportement dynamique complexe est obtenu quand  $a = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $c = 28$  et en variant le paramètre  $k$ . Lorsque  $0 < k < 0.152$ , un attracteur hyperchaotique est observé dans la Fig.1.2-a. Ce système a été implémenté en un circuit électrique plus précisément recommandé pour les technologies de l'information [Zhen et al., 2013].

Durant la même année, un deuxième système hyperchaotique de Lorenz a été construit [Jia, 2007]. Il est représenté par les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + w, \\ \dot{y} = cx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{w} = -xz + rw. \end{cases} \quad (1.15)$$

Identiquement au modèle (1.14), ce système génère différents types d'attracteurs : hyperchaotique, chaotique et périodique.

### 1.3.2.5 Le système hyperchaotique de Qi

Plusieurs méthodes de contrôle ont été exploitées pour générer un comportement hyperchaotique basé sur le système de Qi (1.9). Nous allons nous focaliser sur l'une de ces approches [Chen et al., 2007]. Tout d'abord, pour générer le comportement hyperchaotique, un retour d'état a été inclut au système (1.9). Ensuite, pour chaque produit-croisé dans la première et la deuxième équation, un coefficient de multiplicité a été rajouté. Finalement, le signe de la variable d'état  $y$  dans la seconde équation a été inversé. Le système résultant est décrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + eyz, \\ \dot{y} = cx + y - dxz + w, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{w} = -ky. \end{cases} \quad (1.16)$$

Ce système exhibe un comportement hyperchaotique sur un très large éventail dans l'espace de phase et ceci en variant les paramètres de bifurcations  $k$  et  $b$ . L'attracteur hyperchaotique est décrit par la Fig.1.2-f. Le système (1.16) est caractérisé par un

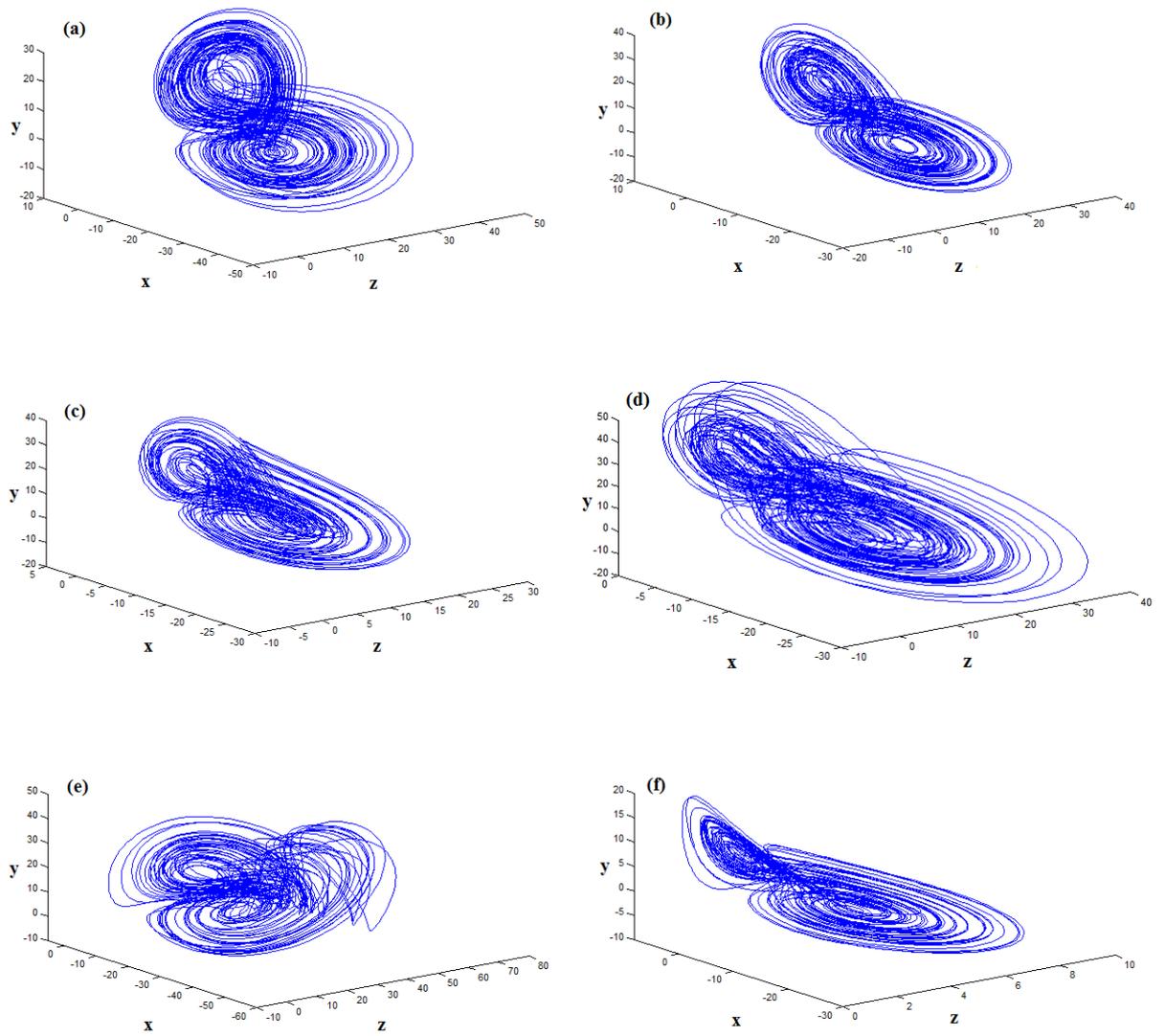


FIGURE 1.2 – Portrait de phase des systèmes hyperchaotiques basiques : (a) Système de Lorenz, (b) Système de Chen, (c) Système de Lü, (d) Système de Rössler, (e) Système de Lui, (f) Système de Qi.

seul point d'équilibre ainsi qu'un premier LE de l'ordre de 4.409.

## 1.4 Nouveaux systèmes chaotiques et hyperchaotiques

Ces dernières années, plusieurs nouveaux systèmes qui exhibent un comportement chaotique ou hyperchaotique ont été exploités dans diverses applications d'ingénierie. Nous avons constaté que chaque nouveau système apporte couramment une nouvelle originalité par rapport aux systèmes existants. Cette originalité vise le plus souvent l'optimisation de ses performances. Dans ce paragraphe, les nouveaux systèmes chaotiques et hyperchaotiques apparus pendant ces dix dernières années et dont le comportement dynamique est le plus original et complexe seront décrits et analysés.

### 1.4.1 Systèmes chaotiques

En 2005, un comportement chaotique a été généré par un système autonome à quatre dimensions [Qi et al., 2005c]. Il est caractérisé par un nombre élevé de points d'équilibre (65 points). Son modèle est le suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + yzw, \\ \dot{y} = d(x - y) + xzw, \\ \dot{z} = -cz + xyz, \\ \dot{w} = -dw + xyz. \end{cases} \quad (1.17)$$

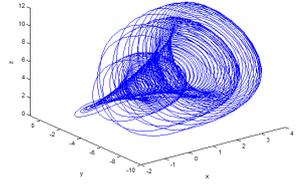
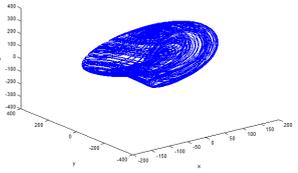
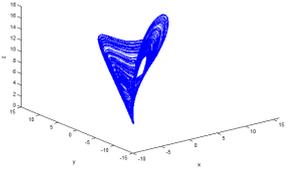
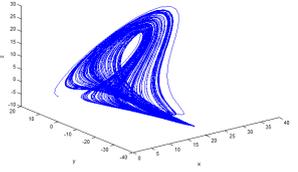
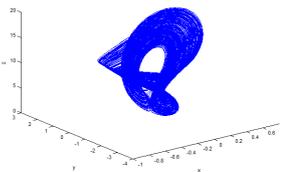
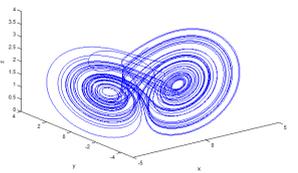
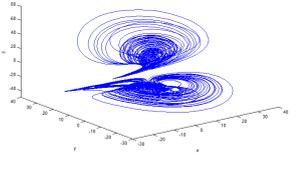
Le système (1.17) est dissipatif et contient un produit-croisé cubique dans chaque équation. Ces produits non linéaires sont les générateurs du chaos.

Afin d'illustrer les principales caractéristiques des nouveaux systèmes, nous avons établi un tableau récapitulatif (Table.1.2) qui regroupe sept systèmes chaotiques. Il contient le diagramme de phase, les LEs et les points d'équilibre relatifs à chaque système sélectionné.

Le premier système de la Table.1.2 est décrit par les équations différentielles suivantes [Dong et al., 2009]

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bx^2 - c(y + z), \\ \dot{y} = -dy - ez + kx - hx(x - z), \\ \dot{z} = -r(z - f)(x - g). \end{cases} \quad (1.18)$$

TABLE 1.2 – Description des nouveaux systèmes chaotiques.

Source	points d'équilibre	LEs	Attracteur
[Dong et al., 2009]	Variant : 1, 2 ou 3 points	$LE_1 = 0.067$ $LE_2 = 0.003 \simeq 0$ $LE_3 = -0.013$	
[Pan et al., 2010]	3 points	$LE_1 = 0.697$ $LE_2 \simeq 0$ $LE_3 = -1.481$	
[Li and Ou, 2011]	Variant : 1 or 3 points	$LE_1 = 0.426$ $LE_2 \simeq 0$ $LE_3 = -7.426$	
[Liu and Zhang, 2013]	Variant : 1, 3 or 5 points	$LE_1 \simeq 1.8$ $LE_2 \simeq 0$ $LE_3 < 0$	
[Li et al., 2013]	3 points	$LE_1 = 1.868$ $LE_2 \simeq 0$ $LE_3 = -17.736$	
[Cang et al., 2014]	2 points	$LE_1 = 0.296$ $LE_2 \simeq 0$ $LE_3 = -1.295$	
[Guan et al., 2014]	Variant : 3, 4 or 5 points	$LE_1 = 1.585$ $LE_2 \simeq 0$ $LE_3 = -13.588$	

L'originalité de ce système réside dans la forme de son attracteur. Couramment un attracteur étrange a la forme d'un papillon, d'un attracteur avec des ailes ou de roulements. Dans ce cas, nous avons un attracteur avec des couches. Il s'agit ici d'une nouvelle forme. Le nombre de ces couches varient selon les paramètres du système. Quatre formes sont possibles : quatre couches, cinq couches ou multicouches. Le système (1.18) est caractérisé aussi par un nombre de points d'équilibre variable.

Une année après la découverte du système (1.18), un nouveau système chaotique dérivé du système de Chen (1.3) a été découvert via un contrôle chaotique basé sur l'approche par perturbation paramétrique non résonnante [Pan et al., 2010]. Celui-ci est caractérisé par trois points d'équilibre et une symétrie par rapport à l'axe  $z$ . Son modèle mathématique est illustré par les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} &= a(y - x) + dxz, \\ \dot{y} &= (f - a)x - xz + fy, \\ \dot{z} &= -ex^2 + xy + cz. \end{cases} \quad (1.19)$$

Les générateurs du chaos ici sont principalement les produits-croisés. Le système (1.19) génère un attracteur avec trois rouleaux et il est caractérisé par un premier LE égal à 0.6971. En outre, ce système a un degré de désordre orbital réduit car son troisième LE qui est très faible ( $-1.4812$ ) en le comparant au système de Chen (1.3) ( $-12.0003$ ).

Le troisième système décrit dans la Table.1.2 est basé sur le système de Lorenz (1.2). Il est représenté comme suit [Li and Ou, 2011]

$$\begin{cases} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= cx - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz + ex^2. \end{cases} \quad (1.20)$$

Ce système n'est pas topologiquement équivalent aux systèmes (1.2) et (1.3) mais lorsque  $e = 0$ , il devient équivalent au système de Lü (1.4). Par conséquent, ce système traduit également la transition entre le système de Lorenz et le système de Chen. Ainsi, on l'appelle alors le nouveau système de type Lorenz. Il génère un attracteur à deux roulements et il est caractérisé par un premier LE égal à 0,426. De plus, le nombre de ses points d'équilibre varie entre 1 et 2 selon le signe de ses paramètres.

Le quatrième système décrit dans la Table.1.2 est le suivant [Liu and Zhang, 2013]

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + dyz + ky^2, \\ \dot{y} &= by + exz + hz, \\ \dot{z} &= cz + fxy. \end{cases} \quad (1.21)$$

Lorsque  $a = -3$ ,  $b = 5$ ,  $c = -10$ ,  $d = f = k = -e = 1$  et  $h \in [-50, 50]$ , le système (1.21) génère un attracteur étrange avec un double roulement. Ce système se caractérise par un nombre variable de points d'équilibre (1, 3 ou 5 points). Par rapport aux systèmes existants (double et multi-roulements), il a la capacité de garder un comportement chaotique pendant une large variation de ses paramètres. Cette propriété est très sollicitée pour maintes applications d'ingénierie.

Durant la même année, un autre système a vu le jour dont le modèle mathématique est le suivant [Li et al., 2013]

$$\begin{cases} \dot{x} &= -ax + fyz, \\ \dot{y} &= cy - dxz, \\ \dot{z} &= ey^2 - bz. \end{cases} \quad (1.22)$$

Le système (1.22) a trois points d'équilibre et génère un attracteur chaotique. La non-linéarité de ce système réside dans deux termes quadratiques. Il présente un comportement dynamique complexe caractérisé par un spectre de LE invariant lorsque les paramètres  $f$ ,  $e$  et  $d$  varient. Ainsi, les paramètres  $d$  et  $f$ , associés aux produits-croisés, sont les paramètres globaux d'ajustement d'amplitude non linéaire tandis que le paramètre  $e$ , associé au terme quadratique, est un paramètre local.

Le sixième système autonome de type Lorenz, décrit dans la Table.1.2, est basé sur le système de Chen (1.3). Il a la forme suivante [Cang et al., 2014]

$$\begin{cases} \dot{x} &= -ay - xz, \\ \dot{y} &= -dx + xy, \\ \dot{z} &= -r - xy. \end{cases} \quad (1.23)$$

Différent du système de Chen, le système (1.23) contient trois produits-croisés et un terme constant. Il a deux points d'équilibre symétriques par rapport à l'axe  $z$ . En variant les paramètres du système, ce dernier converge vers deux points fixes ou génère un attracteur chaotique sous la forme d'un papillon. Son attracteur étrange est caractérisé par un premier LE égale à 0,2963.

Finalement, le dernier système est caractérisé par trois produits-croisés et un

terme constant [Guan et al., 2014]. Il est représenté par les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax - yz - y + k, \\ \dot{y} &= -by + xz, \\ \dot{z} &= -cz + xy. \end{cases} \quad (1.24)$$

Le système (1.24) est très sensible aux conditions initiales. Pour cela, il présente un comportement dynamique assez complexe. En effet, ce système génère plusieurs attracteurs coexistants, soit des attracteurs chaotiques, soit des attracteurs périodiques ou bien des attracteurs périodiques et chaotiques. Par exemple, lorsque  $a = 4$ ,  $b = 10$ ,  $c = 5$  et  $k = 0$ , le système (1.24) génère trois attracteurs chaotiques coexistants dont les premiers LEs sont égaux à 0.69922, 0.45737 et 0.52037.

## 1.4.2 Systèmes hyperchaotiques

Nous proposons d'analyser dix nouveaux systèmes hyperchaotiques. Leurs principales caractéristiques seront présentées dans un tableau récapitulatif (Table.1.3) et suivies d'une analyse détaillée.

En 2010, deux nouveaux systèmes hyperchaotiques basés sur le système chaotique de Qi (1.9) sont apparus. Le premier décrit dans la Table.1.3 est défini comme suit [Yujun et al., 2010]

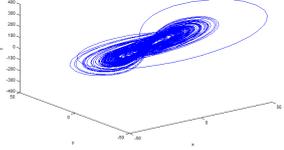
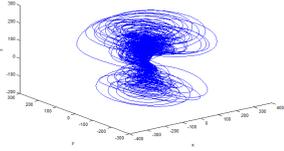
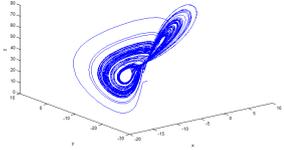
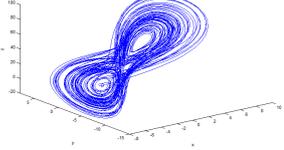
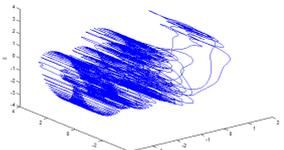
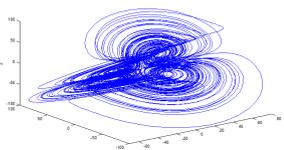
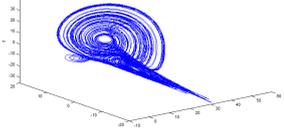
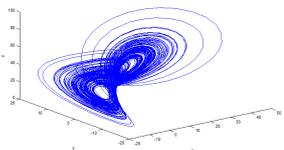
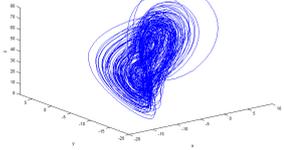
$$\begin{cases} \dot{x} &= a(y - x) + yz, \\ \dot{y} &= -cx - y - xz + w, \\ \dot{z} &= -xy - bz, \\ \dot{w} &= -xz + rw. \end{cases} \quad (1.25)$$

En variant les paramètres  $(a, b, c)$ , le système (1.25) génère différents attracteurs : chaotiques, hyperchaotiques et quelques orbites périodiques. Son attracteur hyperchaotique est caractérisé par quatre LEs dont le premier est égal à 1.4106.

Au même moment, un autre système a été découvert en rajoutant cette fois un contrôleur non linéaire au système (1.9). Contrairement au système précédent, ce dernier contient cinq produits-croisés capable d'exhiber un attracteur complexe représenté dans la Table.1.3. Son modèle algébrique est défini par les équations suivantes [Wang et al., 2010, Wang et al., 2009]

$$\begin{cases} \dot{x} &= a(y - x) + yz + bw, \\ \dot{y} &= cx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz + yw, \\ \dot{w} &= -yz + kw. \end{cases} \quad (1.26)$$

TABLE 1.3 – Description des nouveaux systèmes hyperchaotiques

Source	Points d'équilibre	LEs	Attracteurs
[Yujun et al., 2010]	5 points	$LE_1 = 1.416$ $LE_2 = 0.531$ $LE_3 \simeq 0$ $LE_4 = -39.101$	
[Wang et al., 2010] [Wang et al., 2009]	5 points	$LE_1 = 2.285$ $LE_2 = 0.864$ $LE_3 \simeq 0$ $LE_4 = -19.504$	
[Pang and Liu, 2011]	1 point	$LE_1 = 1.410$ $LE_2 = 0.123$ $LE_3 \simeq 0$ $LE_4 = -20.533$	
[Li et al., 2011]	Variant : 1 ou 3 points	$LE_1 = 1.410$ $LE_2 = 0.123$ $LE_3 \simeq 0$ $LE_4 = -20.533$	
[Wang et al., 2012]	0 point	$LE_1 = 0.87$ $LE_2 = 0.03$ $LE_3 \simeq 0$ $LE_4 = -1.01$	
[Dadras et al., 2012]	1 point	$LE_1 = 1.844$ $LE_2 = 0.500$ $LE_3 \simeq 0$ $LE_4 = -49.212$	
[Jia and Wang, 2013]	Cette classe contient 6 systèmes différents caractérisés par un comportement complexe.		
[Wan et al., 2014]	1 point	$LE_1 = 2.1083$ $LE_2 = 2.1083$ $LE_3 \simeq 0$ $LE_4 = -19.123$	
[Li et al., 2014b]	1 point	$LE_1 = 1.23062$ $LE_2 = 0.09457$ $LE_3 \simeq 0$ $LE_4 = -33.816$	
[Zhou and Yang, 2014]	Une infinité de points	$LE_1 = 0.24014$ $LE_2 = 0.08613$ $LE_3 \simeq 0$ $LE_4 = -25.826$	

Le premier LE correspondant à son attracteur hyperchaotique est relativement plus grand que le système précédent. Il est égale à 2.285.

Le troisième système de la Table.1.3 est basé sur le système chaotique de Lü (1.4) en ajoutant un retour d'état linéaire dans la deuxième équation. Il est décrit par les équations suivantes [Pang and Liu, 2011]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cy - xz + w, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{w} = kx - hy. \end{cases} \quad (1.27)$$

Le système (1.27) peut exhiber un attracteur chaotique, hyperchaotique et périodique en variant les paramètres  $k$  et  $h$ . Son attracteur hyperchaotique est caractérisé par un premier LE de l'ordre de 1, 4106. L'implémentation électrique de ce système a été réalisée. En outre, en se basant sur les simulations numériques présentées dans [Pang and Liu, 2011], le comportement hyperchaotique exhibé existe sur une large bande passante d'amplitude. Cette propriété est très sollicitée pour les applications de la communication sécurisée.

Le quatrième système, basé sur le système de Lorenz (1.2), est représenté par les équations différentielles suivantes [Li et al., 2011]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = -xz + bx - cy + w, \\ \dot{z} = xy - dz, \\ \dot{w} = -ky + rw. \end{cases} \quad (1.28)$$

En ajustant les paramètres  $(a, b, c, d, r)$  à  $(12, 23, 1, 2.1, 0.2)$  et en variant le paramètre  $k$ , quatre types d'attracteurs sont obtenus. Lorsque nous avons  $2.34 \leq k < 8.04$ ,  $12.64 \leq k < 12.69$  et  $12.79 \leq k < 15.70$ , ce système génère un attracteur hyperchaotique. Si  $0 \leq k < 2.34$ ,  $8.04 \leq k < 8.12$ ,  $12.69 \leq k < 12.79$  et  $15.70 \leq k < 16.11$  alors un attracteur chaotique est obtenu. Enfin, lorsque  $8, 12 \leq k < 12, 40$  et  $16, 11 \leq k \leq 20$  ou  $12, 40 \leq k < 12, 64$ , il génère respectivement un attracteur régulier, un orbite périodique et un attracteur quasi-périodique. Ainsi, le système proposé commute entre différents types de comportements dynamiques qui le rendent très complexe. D'autre part, ses points d'équilibre varient selon le rapport  $\frac{k}{r}$  tel qu'il est décrit dans la Table.1.3.

Le cinquième système de la Table.1.3 est le suivant [Wang et al., 2012]

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + yz + axzw, \\ \dot{z} = 1 - y^2, \\ \dot{w} = z + bxz + cxyz. \end{cases} \quad (1.29)$$

Le système (1.29) n'a aucun point d'équilibre, c'est là où réside toute son originalité. Il génère un attracteur hyperchaotique dont le premier LE est égal à 0,87. D'autre part, la forme d'attracteur obtenu est différente des systèmes existants. Elle est très complexe. Ainsi, ce système est sollicité dans plusieurs applications, notamment en cryptage, car il n'a pas de limitation par rapport à ses points d'équilibre.

Dans la même année, un autre système a été découvert. Son modèle algébrique est le suivant [Dadras et al., 2012]

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - yz + w, \\ \dot{y} = xz - by, \\ \dot{z} = xy - cz + xw, \\ \dot{w} = -y. \end{cases} \quad (1.30)$$

Le système (1.30) est dissipatif et symétrique autour de l'axe  $z$ . Lorsque les paramètres  $(a, b, c)$  sont égaux à  $(8, 40, 14.9)$ , le système proposé génère un attracteur hyperchaotique à quatre ailes, représenté dans la Table.1.3. Son premier LE est égal à 1,844. Contrairement à l'existant, ce nouveau système montre qu'un système hyperchaotique peut générer un attracteur étrange à quatre ailes avec uniquement un seul point d'équilibre et non pas cinq points.

Parmi les systèmes choisis, nous avons sélectionné une classe qui regroupe six systèmes hyperchaotiques, inspirée du système de Lorenz (1.2) en modifiant ses termes non linéaires. L'expression générale de cette classe est définie sous la forme suivante [Jia and Wang, 2013]

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = bx - 10xz + y + w, \\ \dot{z} = -cz + T(x, y), \\ \dot{w} = -dQ(x, y, z, w) + R(x, y, z, w). \end{cases} \quad (1.31)$$

avec des fonctions continues non linéaires  $T(x, y)$  et  $R(x, y, z, w)$  et linéaire  $Q(x, y, z, w)$ . Les six systèmes hyperchaotiques obtenus sont détaillés dans la Table.1.4. Cette classe est complexe car elle contient différents types de non-linéarités qui

jouent le rôle de générateurs de chaos.

TABLE 1.4 – Description de la classe des nouveaux systèmes hyperchaotiques

Systèmes	T	Q	R
(1)	$x^2$	$y$	$yw$
(2)	$xy$	$y$	$xz$
(3)	$xy$	$y$	$yw$
(4)	$x^2$	$y$	$xz$
(5)	$x^2$	$x$	$xz$
(6)	$xy$	$x$	$xz$

Le huitième système dans la Table.1.2 est décrit par les équations suivantes [Wan et al., 2014]

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + yz + y, \\ \dot{y} = cy - xz + dz - w, \\ \dot{z} = bxy - hz + yw, \\ \dot{w} = y. \end{cases} \quad (1.32)$$

Le système (1.32) est caractérisé par un seul point d'équilibre à l'origine. Si les paramètres  $(a, b, d, h)$  sont égaux à  $(4, 2, 10, 19)$  et en variant le paramètre  $c$ , différents attracteurs étranges avec un nombre variable d'ailes (1, 2 ou 3) sont obtenus. Un attracteur hyperchaotique est observé lorsque  $c = 5,5$ . Son premier LE est égal à 2.1083.

Pendant la même année, Li et al. ont construit un nouveau système hyperchaotique inspiré du système basique Qi (1.9) [Li et al., 2014b]. Ce système est décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - z) + yz, \\ \dot{y} = cx - xz + kw, \\ \dot{z} = -bz + xy + hw, \\ \dot{w} = -dy. \end{cases} \quad (1.33)$$

Le système (1.33) est caractérisé par un seul point d'équilibre à l'origine. En effet, si les paramètres  $(a, b, c, k, h)$  sont égaux à  $(30, 2.5, 35, 0.2, 0.5)$  et en variant le paramètre  $d$ , le système proposé exhibe des attracteurs périodiques, quasi périodiques, chaotiques et hyperchaotique. Un comportement hyperchaotique est observé lorsque  $d = 20$  dont le premier LE est égal à 1,23062. Son originalité réside dans sa forme chaotique qui se distingue du système Qi classique.

Finalement, le dernier système exposé dans la Table.1.2 est basé sur le système

de Lü (1.4). Celui-ci génère du chaos lorsque les paramètres  $(a, b)$  sont égaux à  $(3, 20)$ . Pour ces paramètres, ce dernier est représenté par [Zhou and Yang, 2014]

$$\begin{cases} \dot{x} = 36(y - x) + w, \\ \dot{y} = cy - xz, \\ \dot{z} = -3z + xy, \\ \dot{w} = 18x - 0.5w. \end{cases} \quad (1.34)$$

Ce système est caractérisé par un nombre de points d'équilibre infini. En effet, les coordonnées de ces points sont égaux à  $(x, 0, 0, 36x)$  où  $x$  est une variable d'état. De plus, le système (1.36) génère plusieurs comportements dynamiques en variant le paramètre  $c$ . De ce fait, lorsque  $c \in [13, 16.75]$ , le système (1.36) génère un attracteur hyperchaotique avec un premier LE égale à  $0, 24014$ . Lorsque  $c \in [4, 13] \cup (16.75, 33]$ , des attracteurs chaotiques et des orbites périodiques sont respectivement observés. Cette originalité rend le système à points d'équilibre infinis l'un des plus intéressants pour les applications d'ingénierie.

### 1.4.3 Étude comparative

Dans ce paragraphe, les systèmes chaotiques et hyperchaotiques basiques et récents décrits dans les paragraphes précédents seront comparés selon leurs caractéristiques élémentaires à savoir les exposants de Lyapunov, la forme de l'attracteur et le nombre de points d'équilibre.

Pour les systèmes chaotiques, nous avons comparé, tout d'abord, les systèmes décrits dans le tableau Table.1.2 selon leurs premiers LEs. Le système (1.22) exhibe le plus grand premier LE de l'ordre de  $1.868$ . Ce système satisfait les propriétés requises pour des applications des communications sécurisées car il possède un comportement dynamique qui permet de masquer et de baigner les informations transmises. D'autre part, le système (1.20) génère le plus bas premier LE de l'ordre de  $0.067$ . Ainsi, son degré d'expansion est assez faible. Ce système n'est donc pas recommandé pour les applications de sécurité et de transmission de données mais plutôt pour des applications de précision tel que le contrôle chaotique des battements du cœur. Quand aux systèmes hyperchaotiques, nous avons constaté que le système (1.26) présente le plus grand premier LE de l'ordre de  $2.288$ . Cependant, son second LE est égal à  $0, 864$ . En revanche, le système (1.34) exhibe deux LEs égaux à  $2.1083$  ( $LE_1 = LE_2$ ). Le système (1.32) exhibe le premier LE le plus bas de l'ordre de  $0.240$ .

Ensuite, nous avons constaté que les systèmes (1.20), (1.21), (1.24) et (1.28) ont un nombre de points d'équilibre variable. Toutefois, ce nombre est égale à ceux des

systèmes basiques. Ces quatre systèmes ont effectivement un comportement plus complexe que les systèmes caractérisés par un nombre de points d'équilibre fixe. En outre, plusieurs systèmes récents ont un grand nombre de points d'équilibre, mais un nombre dénombrable tel que le système (1.19). Enfin, il existe deux autres types de système, sans ou avec un nombre de points d'équilibre infini. Le premier est le système (1.29) qui n'a aucun point d'équilibre. Il est caractérisé par un comportement dynamique complexe par rapport aux systèmes avec un seul point. Ce système peut être utilisé dans diverses technologies notamment dans le domaine du cryptage des données [Wang et al., 2012]. En ce qui concerne le système (1.34) avec des points d'équilibre infinis, il est davantage recommandé pour les applications de sécurité et n'est pas très exploité dans le domaine du cryptage chaotique comme il est indiqué dans [Zhou and Yang, 2014]. Finalement, le nombre de points d'équilibre pour les systèmes chaotiques et hyperchaotiques peut être variable ou fixe, nul ou infini.

D'autre part, nous avons constaté que le plus grand nombre d'attracteurs sont symétriques et nous pouvons citer dans ce sens les attracteurs relatifs au système basique  $Q_i$  (1.9) et aux nouveaux systèmes (1.23) et (1.30). Le système de Rössler (1.5) se distingue quant à lui par un attracteur asymétrique. La forme de l'attracteur la plus répandue est la forme de papillon de Lorenz ou plus explicitement l'attracteur à deux ailes. Les systèmes basiques exhibent des attracteurs avec un nombre d'ailes ou de roulements fixes. Ces dernières années, divers systèmes non linéaires sont apparus avec des formes attractives complexes dont le nombre d'ailes ou roulements varie. Nous retrouvons des attracteurs avec trois, quatre, cinq ou plusieurs ailes ou roulements comme celles identifiées pour les systèmes (1.23) et (1.32). Contrairement à ces formes d'attracteurs où nous pouvons distinguer les zones de contractions et de dilatations, le système (1.29) fait la différence car uniquement les zones de dilatations sont distinctes.

## 1.5 Conclusion

Le comportement dynamique des systèmes chaotiques et hyperchaotiques est étrange et particulier. Leurs implémentations dans les applications d'ingénierie restent encore difficiles car chaque domaine nécessite des exigences particulières. Dans ce chapitre, nous avons présenté tout d'abord un aperçu général sur les signatures d'un comportement chaotique. Par la suite, nous avons décrit les systèmes chaotiques basiques afin de comprendre les caractéristiques élémentaires du chaos. Ensuite, nous avons analysé les systèmes chaotiques et hyperchaotiques les plus célèbres parus ces dernières années et qui diffèrent de l'existant que se soit par leurs modèles ou par leurs caractéristiques dynamiques. Une description de leurs attracteurs, leurs points

d'équilibre et leurs LEs est présentée. Dans le chapitre suivant, nous allons concevoir un nouveau système chaotique qui tient compte des signatures étudiées dans ce chapitre.

# Chapitre 2

Conception et analyse d'un nouveau  
système chaotique

## 2.1 Introduction

Pour la génération d'un comportement chaotique, diverses fonctions non linéaires ont été proposées dans la littérature. Néanmoins jusqu'à nos jours, d'autres fonctions n'ont jamais été utilisées dont les polynômes d'ordre non-entier sont un exemple typique. Ces fonctions peuvent avoir un grand potentiel dans la chaotification des systèmes. De plus, le polynôme d'ordre non-entier est peu étudié et son analyse reste un problème encore ouvert même si celui-ci garde les propriétés du calcul fractionnaire.

L'objectif de ce chapitre est de proposer un nouveau système chaotique dont le comportement dynamique est plus complexe que celui des systèmes existants mais ayant une structure algébrique simpliste basée sur le concept du jerk. Pour ce faire, nous proposerons tout d'abord un système avec une fonction non linéaire par morceaux. Les performances élémentaires de ce système seront améliorées en introduisant un polynôme d'ordre non entier dans son modèle algébrique. Les avantages d'une telle structure seront enfin mis en évidence.

Le chapitre sera organisé comme suit : le second paragraphe présentera une nouvelle structure d'un système chaotique suivie d'une analyse de ses caractéristiques élémentaires. Dans le troisième paragraphe, un système chaotique modifié doté de caractéristiques élémentaires avantageuses sera introduit et analysé.

## 2.2 Proposition d'un nouveau système chaotique à base d'une fonction non linéaire par morceaux

Dans ce paragraphe, nous proposons un système chaotique, basé sur une dynamique jerk, défini par [Gottlieb, 1996]

$$\ddot{x} = -a\ddot{x} - \dot{x} + G(x) \quad (2.1)$$

avec  $G(x)$  une fonction élémentaire non linéaire. Notre principale contribution est alors d'élaborer une nouvelle fonction non linéaire capable de générer des comportements dynamiques plus complexes que l'existant.

### 2.2.1 Modèle mathématique

Pour la modélisation du nouveau système, nous avons choisi pour  $G(x)$  la fonction définie par

$$\begin{cases} kx^2, & \text{si } x \geq 0, \\ -kx^2, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ainsi, nous obtenons le système chaotique suivant [Lassoued and Boubaker, 2017b]

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -az - by - cx + kx|x|. \end{cases} \quad (2.3)$$

avec  $(x, y, z)$  les variables d'état du système et  $(a, b, c, k)$  ses paramètres. Ce système est caractérisé par 6 termes dont un seul terme non linéaire. Dans la littérature, il existe des systèmes basés sur le concept du jerk et ayant des structures algébriques aussi simplistes avec un seul terme non linéaire. Par exemple, dans la référence [Sprott, 2000b] une fonction tangente a été utilisée mais dont l'implémentation sera certainement plus difficile que la fonction (2.2) que nous avons proposée. D'autre part, il existe d'autres systèmes simples mais avec plus qu'un terme non linéaire [Molaie et al., 2013].

Soit  $V$  l'élément de volume d'un flux de trajectoires du système (2.3). Il est facile de prouver que pour le système (2.3) on a

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a$$

Le système (2.3) est dissipatif si le paramètre  $a$  est positif. Il peut ainsi générer un comportement chaotique.

Pour le choix des paramètres du système (2.3), nous avons suivi la méthode suivante :

1. Identification des intervalles de variation des paramètres du système au delà desquels le système (2.3) diverge ou converge vers un point fixe. Nous avons obtenus après plusieurs tests les résultats suivants via le logiciel MatCont :  
 $a \in [1, 2], b \in [1, 2], c \in [-2.7, -1],$  et  $k \in [-1, -0.1].$
2. Identification de la combinaison optimale pour générer le premier LE le plus important via le logiciel Matds pour un comportement chaotique. Nous avons fixé au début un pas de variation des paramètres de 0.1 puis 0.01 pour affiner les recherches. Nous avons obtenu la combinaison suivante :  $(a, b, c, k)=(1, 1, -2.625, -0.25).$

Par conséquent, le système proposé exhibe un attracteur étrange lorsque ses paramètres  $(a, b, c, k)$  sont égaux à  $(1, 1, -2.625, -0.25)$ . La Fig.2.1 représente cet attracteur pour les valeurs initiales  $(1, 1, 1)$ . Celui ci est caractérisé par deux ailes.

Pour l'analyse du système (2.3), nous avons utilisé lors des simulations numériques les deux pro-logiciels énumérés dans le chapitre précédent à savoir MatCont et Matds.

Nous avons aussi observé que le système (2.3) est invariant par rapport à la transformation  $S$  tel que  $S(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ . Ainsi, l'attracteur étrange obtenu est symétrique par rapport à l'origine  $O(0, 0, 0)$ . Cette forme est assez distinctive car, d'une part, il y a la présence de deux ailes et d'un roulement. D'autre part, dans la littérature, les systèmes chaotiques sont généralement symétriques par rapport à l'un des axes principaux et non pas par rapport à un point comme l'est le système que nous proposons.

### Remarque :

Pour les systèmes chaotiques, la symétrie et la similarité fournissent un paramètre de contrôle d'amplitude. Cependant, la symétrie et la similarité elles-mêmes indiquent la régularité du comportement dynamique du système non linéaire en affaiblissant ainsi son taux de désordre et son caractère aléatoire [Li et al., 2015].

## 2.2.2 Analyse

Nous allons nous focaliser dans cette partie sur les signatures élémentaires du chaos tels que les points d'équilibre et les exposants de Lyapunov.

### Sensibilité aux conditions initiales

La signature la plus visible d'un système chaotique est sa sensibilité aux conditions initiales. Nous avons simulé le comportement dynamique du système (2.3) en partant de deux conditions initiales voisines (avec une petite variation des coordonnées). La Fig.2.2 représente le comportement dynamique des variables d'état  $(x, y, z)$  et leurs erreurs en partant de deux conditions initiales  $(1, 1, 1)$  et  $(1 + 10^{-14}, 1, 1)$ . Nous avons déduit que les deux trajectoires exhibées par le système (2.3) pour chaque variable sont au début identiques mais elles deviennent complètement différentes après un certain temps.

### Points d'équilibre

Les points d'équilibre du système (2.3) sont les solutions des équations suivantes

$$\dot{x} = 0, \dot{y} = 0 \text{ et } \dot{z} = 0.$$

Par conséquent, en gardant les mêmes paramètres précédents, les conditions sui-

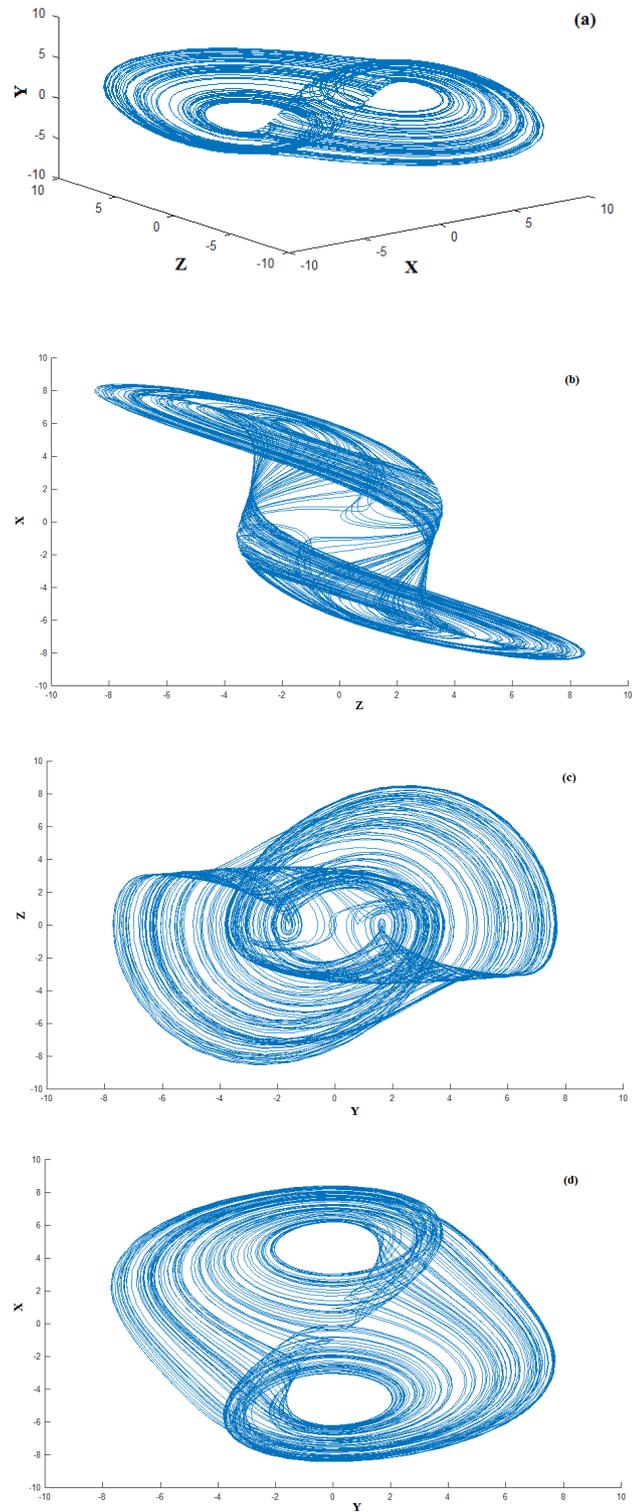


FIGURE 2.1 – Portraits de phase du système (2.3) : (a)  $x-y-z$  ; (b)  $x-y$  ; (c)  $x-z$  ; (d)  $y-z$ .

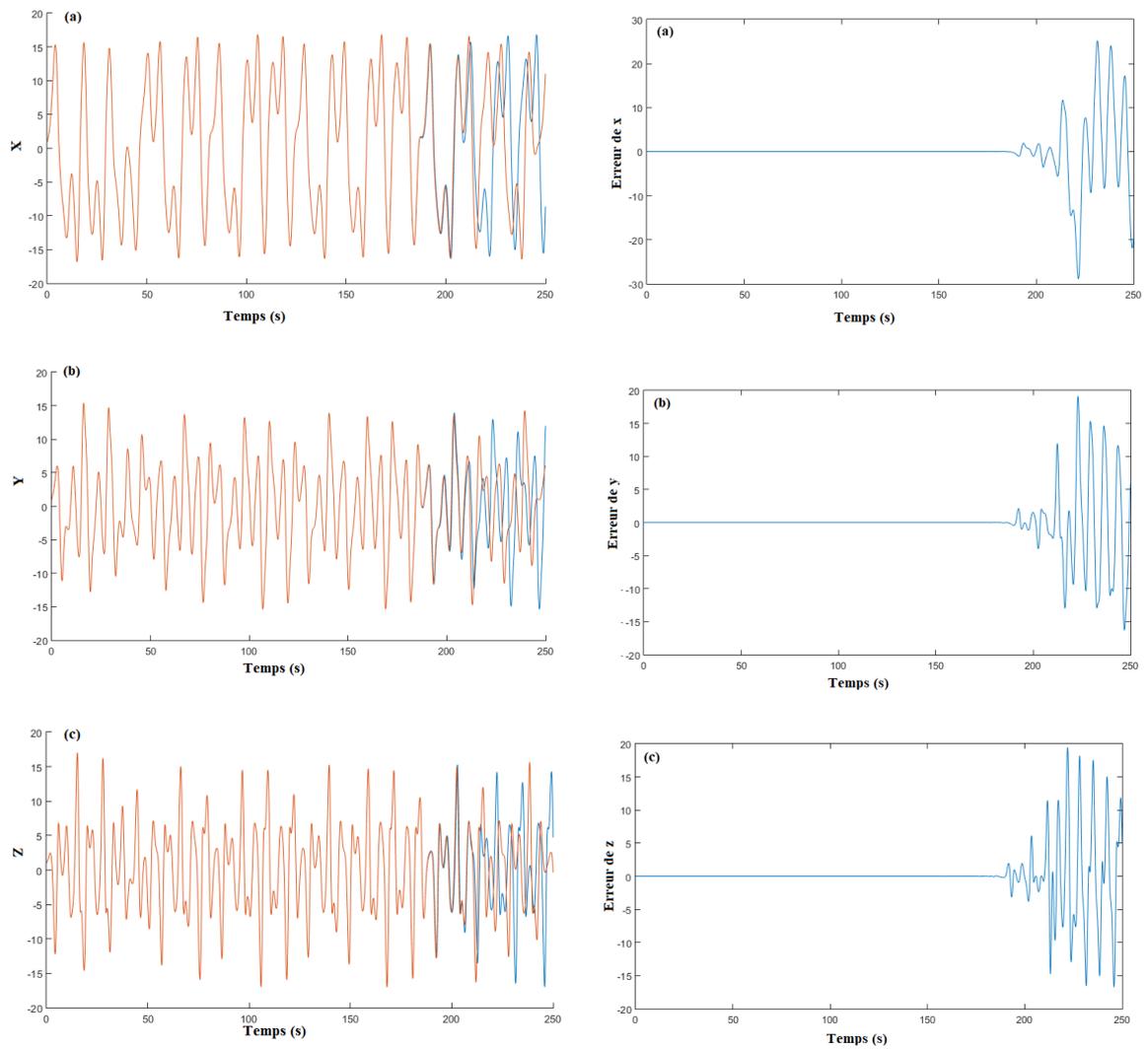


FIGURE 2.2 – Sensibilité aux conditions initiales (en bleu  $(1, 1, 1)$  et en rouge  $(1 + 10^{-14}, 1, 1)$ ) du système (2.3) : les trajectoires et les erreurs des variables d'état (a)  $x$ ; (b)  $y$  et (c)  $z$  .

vantes sont obtenues

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \\ -cx + kx|x| = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Tant que les paramètres  $c$  et  $k$  restent négatifs, le système (2.4) admet uniquement trois points d'équilibre. Ces points sont les suivants : l'origine  $E_1(0, 0, 0)$ ,  $E_2(\frac{c}{k}, 0, 0)$  et  $E_3(\frac{-c}{k}, 0, 0)$ . Nous pouvons donc remarquer que  $E_2$  et  $E_3$  sont symétriques.

### Analyse de la stabilité

Pour l'analyse de la stabilité autour de chaque point d'équilibre, nous avons déterminé la matrice Jacobienne définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c + 2k|x| & -b & -a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres correspondantes à chaque point d'équilibre sont obtenues en calculant les solutions du déterminant  $\det(J - \lambda I)$  avec le vecteur  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$  et la matrice d'identité  $I$  est de dimension 3. La Table.2.1 résume les résultats obtenus.

TABLE 2.1 – Matrices Jacobiennes et valeurs propres correspondantes pour chaque point d'équilibre du système (2.3).

Points d'équilibre	Matrice Jacobienne	Valeurs propres
$E_1(0, 0, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 0.934$ $\lambda_2 = -0.967 + 1.386i$ $\lambda_3 = -0.967 - 1.386i$
$E_2(\frac{c}{k}, 0, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & -b & -a \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -1.500$ $\lambda_2 = 0.250 + 1.299i$ $\lambda_3 = 0.250 - 1.299i$
$E_3(\frac{-c}{k}, 0, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & -b & -a \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -1.500$ $\lambda_2 = 0.250 + 1.299i$ $\lambda_3 = 0.250 - 1.299i$

Le théorème de Hartman-Grobman [Teschl, 2012] prouve que le comportement local d'un système non linéaire autour d'un point d'équilibre est déterminé topologi-

quement par le comportement d'un système linéaire. Si ce système non-linéaire est caractérisé par un point d'équilibre de la selle et que la somme de ses valeurs propres est négative alors il est appelé système dissipatif instable [Campos-Cantón et al., 2012]. Il est possible de définir deux types de systèmes dissipatifs instables correspondant à un point d'équilibre.

**Definition 2.1** [Campos-Cantón et al., 2012] : Un système non linéaire autour d'un point d'équilibre, dont les valeurs propres sont  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , est dit système dissipatif instable de type I si : la somme de ses valeurs propres est négative,  $\lambda_1$  est une valeur propre négative réelle et les deux autres sont complexes conjuguées à parties réelles positives.

**Definition 2.2** [Campos-Cantón et al., 2012] : Un système non linéaire autour d'un point d'équilibre, dont les valeurs propres sont  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , est dit système dissipatif instable de type II si : la somme de ses valeurs propres est négative,  $\lambda_1$  est une valeur propre positive réelle et les deux autres sont complexes conjuguées à parties réelles négatives.

Par correspondance, un point d'équilibre peut être un point dissipatif instable de type I ou de type II. Un point d'équilibre dissipatif instable de type I présente une direction propre rapide stable ( $E^s$ ), due à la valeur propre négative réelle, et une direction propre lente en spirale instable ( $E^u$ ), due à la partie réelle positive des valeurs propres conjuguées complexes. Le point d'équilibre dissipatif instable de type II illustre le comportement inverse. Certains systèmes chaotiques peuvent être liés à ces deux types de points dissipatifs instables. Le type le plus courant est le type I car il permet la génération des ailes. La Fig.2.3 illustre le comportement de chaque type.

D'après la Table.2.1 et les définitions 2.1 et 2.2 , pour le système (2.3), les résultats de stabilité suivants sont obtenus :

- ◇ Le système (2.3) autour du point d'équilibre  $E_1$  est dissipatif instable de type II car  $\lambda_1$  est un réel positif et  $(\lambda_2, \lambda_3)$  est une paire de valeurs propres conjuguées dont la partie réelle est négative.
- ◇ Les points d'équilibre  $E_2$  et  $E_3$  sont deux points symétriques. Ces points ont les mêmes valeurs propres et par suite le système (2.3) autour de ces deux points est dissipatif instable de type I. En effet, les valeurs propres correspondantes sont  $\lambda_1 < 0$  et une paire de valeurs propre  $(\lambda_2, \lambda_3)$  dont la partie réelle est positive.

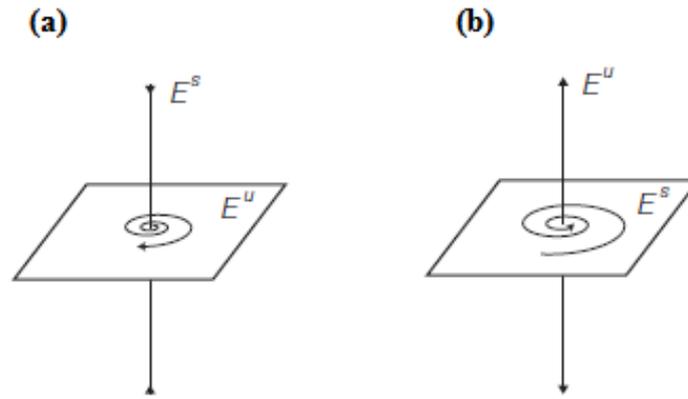


FIGURE 2.3 – Dynamique des points d'équilibre de type dissipatif instable : (a) Type I, (b) Type II. [Campos-Cantón et al., 2012]

### Remarques :

L'attracteur étrange, décrit dans la Fig.2.1, est symétrique par rapport à son point d'équilibre  $E_1$ . D'une part, autour du point d'équilibre instable  $E_1$ , il y a génération d'un roulement. D'autre part, autour des deux points d'équilibre dissipatifs instables de type I, deux ailes symétriques sont générées. L'attracteur de la Fig.2.1 est structuré autour de ses points d'équilibre. On observe une forme spécifique d'un attracteur différente de celles présentées dans l'état de l'art avec la superposition de deux ailes sur un roulement.

### Routes vers le chaos

En paramétrant  $c$ , le système (2.3) exhibe différents attracteurs réguliers et étranges. Ces derniers sont prouvés davantage par le diagramme de bifurcation illustré par la Fig.2.4. Il est obtenu en traçant les maximums locaux  $x_{max}$  de la variable d'état  $x$  en fonction du paramètre de bifurcation  $c$  (voir Annexe A). Ainsi, ce système engendre les formes suivantes :

- ◇ Si  $0.5 \leq c \leq -1.1$ , un point fixe décrit par la Fig.2.5.a est obtenu.
- ◇ Si  $-1.1 < c < -1.8$ , un orbite périodique autour du point d'équilibre  $P_2$  décrit par la Fig.2.5.b est obtenu. Lorsque  $c = -1.59$ , un dédoublement de période est détecté décrit par la Fig.2.5.c .
- ◇ Si  $-1.8 \leq c \leq -1.9$ , un autre orbite périodique est obtenu autour des deux points d'équilibre  $P_2$  et  $P_3$  décrit par la Fig.2.5.d.
- ◇ Si  $-1.9 < c \leq -2.7$ , un attracteur chaotique décrit par la Fig.2.5.e est exhibé.

### Dimension et exposants de Lyapunov

Pour le système (2.3), trois LEs sont décrits par la Fig.2.6 et sont estimés selon le

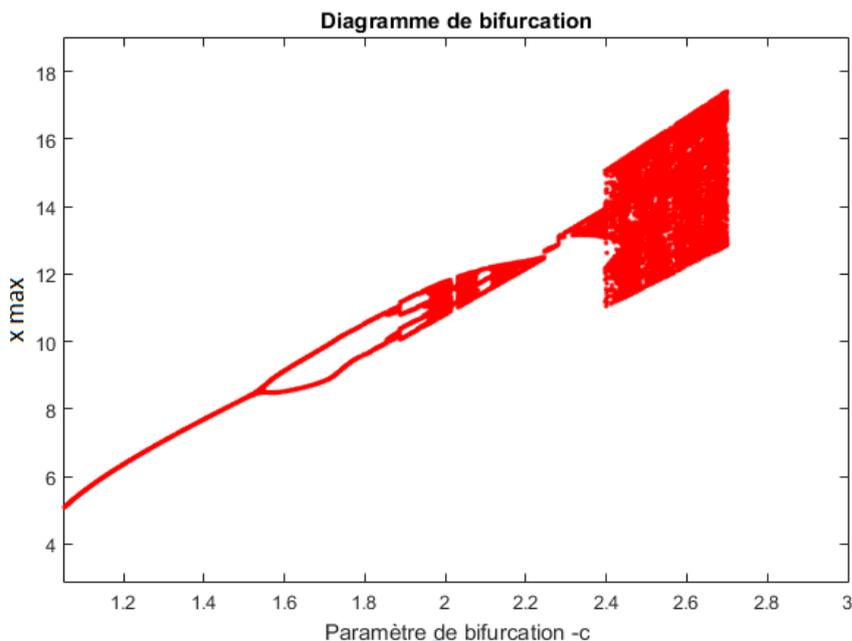


FIGURE 2.4 – Diagramme de bifurcation du système (2.3) lorsque le paramètre  $-c$  varie.

diagramme de Wolf [Wolf et al., 1985]. Le logiciel Matds qui est basé sur la fonction ode87 a été utilisé pour la résolution des équations différentiels. Par conséquent, l'erreur locale normalement attendue est de l'ordre de  $O(h^9)$ . Elle est estimée comme étant une erreur très faible puisque la fonction ode87 est un intégrateur précis du 8<sup>me</sup> ordre.

Le premier exposant  $\lambda_1$  est égal à 0.14122. Le taux de contraction du système (2.3) est traduit par le faible exposant égale à  $\lambda_3 = -1.1361$ . La dimension de Kaplan-Yorke correspondante est défini comme suit [Campos-Cantón, 2016]

$$D_L = j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|} \sum_{i=1}^j (\lambda_i) = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|} = 2.124. \quad (2.5)$$

avec le paramètre  $j$  égal à  $n - 1$  où le paramètre  $n$  représente le nombre de LEs. La dimension de Kaplan-Yorke du système (2.3) est de dimension fractale. Celle ci traduit la présence d'un attracteur étrange.

### Étude comparative

Pour l'étude comparative, nous avons choisi deux systèmes jerk récents avec des modèles algébriques similaires au système (2.3) toutefois caractérisés par des non-linéarités de type fonctions linéaires par morceaux. Le premier LE sera alors considéré comme critère comparatif. La Table.2.2 présente les LEs relatives à chaque système. D'après la Table.2.2, il est clair que le système (2.3) est caractérisé par le plus grand premier LE. Ceci confirme qu'une fonction du type non linéaire par morceaux est

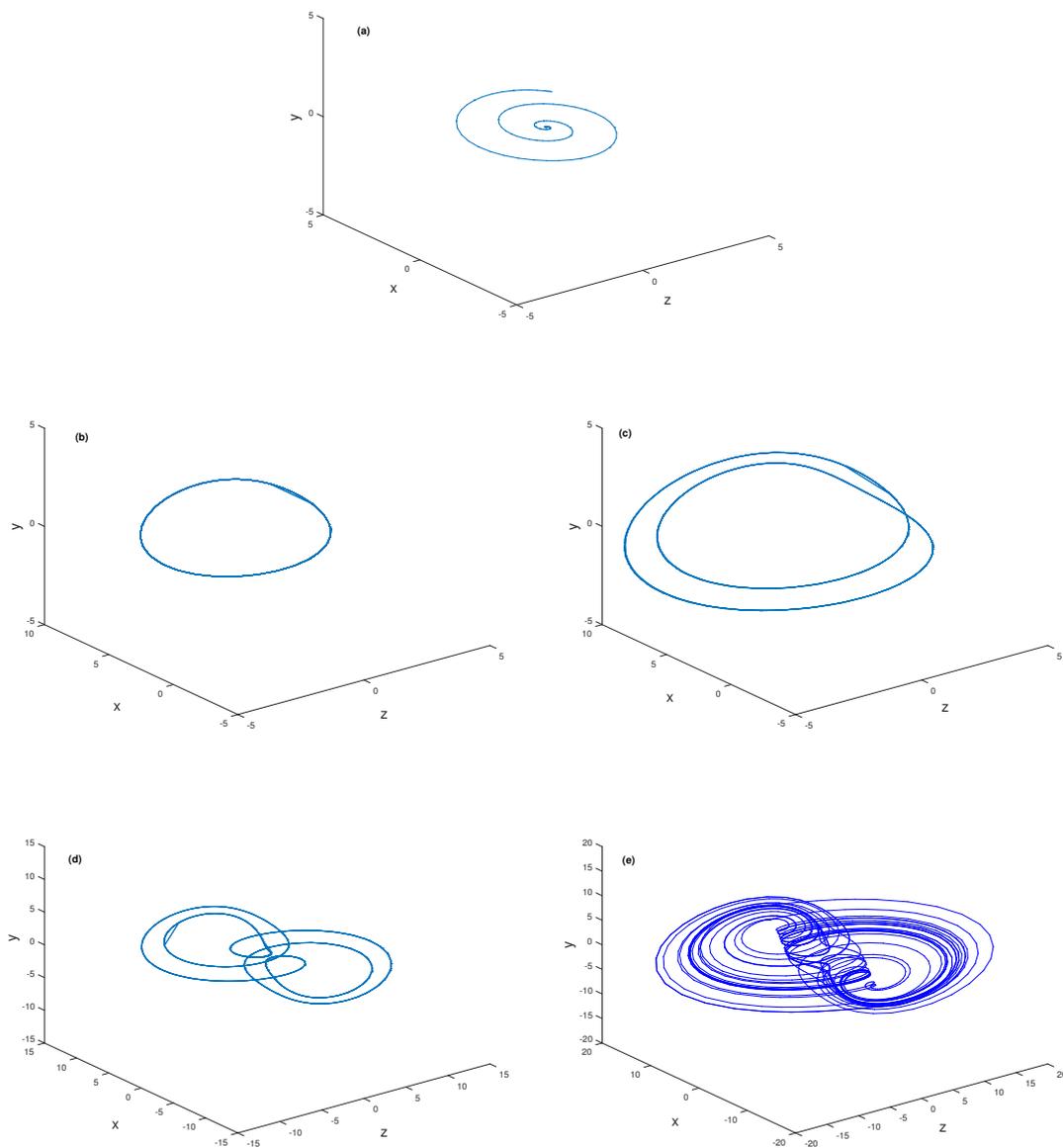


FIGURE 2.5 – Attracteurs réguliers et étranges du système (2.3) : (a)  $c = 1.5$ ; (b)  $c = 1.85$  .

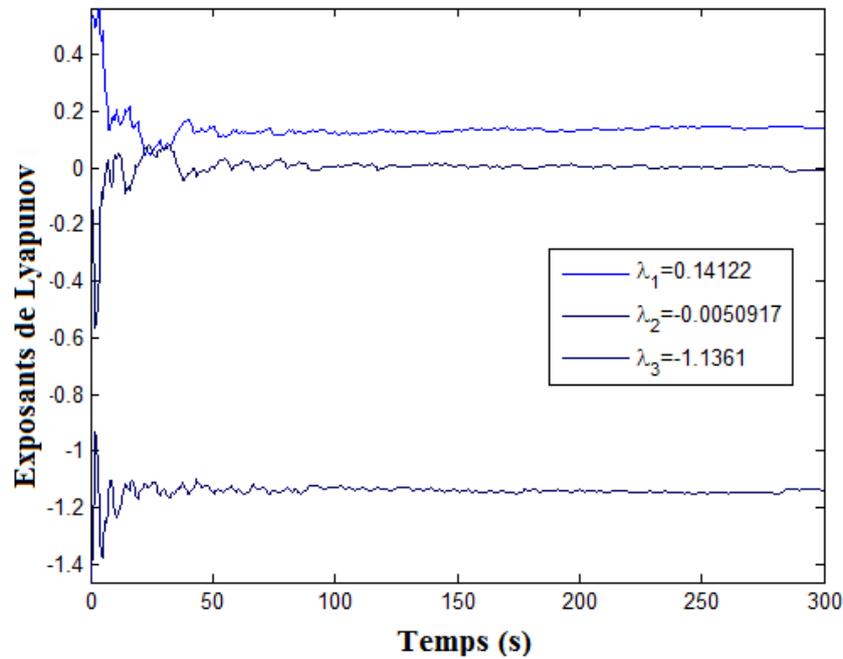


FIGURE 2.6 – Spectre des exposants de Lyapunov du système (2.3).

capable de générer un comportement plus complexe qu'une fonction linéaire par morceaux.

TABLE 2.2 – Étude comparative relatif au système (2.3)

Système proposé	LEs
Système (2.3)	$LE_1 = 0.141$ $LE_2 = 0$ $LE_3 = -1.136$
Système jerk 1 [Campos-Cantón, 2016]	$LE_1 = 0.121$ $LE_2 = 0$ $LE_3 < 0$
Système jerk 2 [Li et al., 2016b]	$LE_1 = 0.062$ $LE_2 = 0$ $LE_3 = -1.062$

Notons que le système décrit dans la référence [Kengne et al., 2018], a réussi par une légère modification de la structure du système (2.3), à avoir une légère amélioration au niveau du premier  $LE$  ( $LE_1 = 0.15$ ). Cette infime amélioration sera certainement coûteuse au niveau de la réalisation du circuit vue que un plus grand nombre de composants électroniques vont être utilisés. L'introduction de plus de composants peut être aussi la source de dégradation des comportements chaotiques. Vue que les exposants de Lyapunov des deux systèmes précédents sont relativement

identiques, nous allons améliorer les performances du système (2.3) en introduisant de nouvelles non linéarités.

## 2.3 Système chaotique modifié : Introduction d'un polynôme d'ordre non entier

Afin d'améliorer les performances du système (2.3), nous introduirons dans ce paragraphe, mise à part la fonction non linéaire par morceaux, un polynôme d'ordre non-entier, jamais utilisé auparavant dans la littérature. Notre objectif est d'apporter les avantages du calcul fractionnaire pour la création d'un comportement chaotique délibéré plus complexe.

Un polynôme d'ordre non entier est un polynôme dont les exposants sont des réels non entier définit tel que [Tan et al., 2009]

$$P(s, q) = p_0 s^{\alpha_0} + p_1 s^{\alpha_1} + \dots + p_n s^{\alpha_n}.$$

avec  $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$  des constantes réelles et  $q = [p_0, p_1, \dots, p_n]$  le vecteur de paramètres.  $s$  est l'opérateur de Laplace.

### 2.3.1 Modèle mathématique

Soit la nouvelle fonction non linéaire définit par l'expression suivante

$$G(x) = -cx^2 + d|x|x + m|x|^r x^{-1}, \quad 1 < r < 2. \quad (2.6)$$

avec  $r$  un nombre fractionnaire tel que  $1 < r < 2$ . La non-linéarité dans l'équation (2.6) réside dans un terme quadratique et deux fonctions non linéaires par morceaux à savoir la valeur absolue et un polynôme d'ordre non entier  $|x|^r$ . Puisque nous avons choisi le paramètre fractionnaire  $r \neq 1$ , alors le quotient  $|x|^r x^{-1}$  ne sera jamais une forme indéterminée. Ainsi, la fonction  $G(x)$  est écrite plus explicitement sous la forme suivante

$$G(x) = \begin{cases} (-c - d)x^2 - m(-x)^{r-1}, & \text{if } x < 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ (-c + d)x^2 + mx^{r-1}, & \text{if } x > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Pour le système (2.1), considérons le vecteur d'état  $[x, y, z] = [x, \dot{x}, \ddot{x}]$ . Le système

obtenu est décrit par les trois équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -az - by + G(x). \end{cases} \quad (2.8)$$

avec  $a$  et  $b$  les paramètres du système (2.8). Le calcul du flux de trajectoires donne le résultat suivant

$$\nabla V = \partial \dot{x} / \partial x + \partial \dot{y} / \partial y + \partial \dot{z} / \partial z \Rightarrow \nabla V = -a \quad (2.9)$$

Tant que le paramètre  $a$  est positif alors le système (2.8) est dissipatif et peut exhiber un comportement chaotique. Pour le choix des paramètres, nous avons utilisé la même méthode. En particulier, lorsque les paramètres du système ( $a, b, c, d, m, r$ ) sont égaux à (0.93, 1.11, -0.11, -0.21, 6.26, 1.32), le système (2.8) génère un attracteur chaotique. La Fig.2.7 décrit cet attracteur pour les valeurs initiales (1, 1, 1). Celui-ci est différent du système (2.3). En effet, ce système génère un attracteur asymétrique par rapport à tous les axes de coordonnées principaux mais il garde sa structure distinctive c'est à dire la présence de deux ailes et un roulement. Cette structure asymétrique est sollicitée dans le domaine de la communication sécurisée car elle peut apporter plus de complexité dans la propagation des données sécurisées. Ainsi, nous avons éliminé les problèmes que peuvent engendrer la symétrie et renforcé le taux de désordre de l'attracteur.

Afin de confirmer la complexité du comportement dynamique du système obtenu, nous avons réalisé les séries chronologiques des variables d'état  $x, y$  et  $z$ . La Fig.2.8 illustre les trajectoires obtenues. Ces signaux représentent le taux de chaotification de chaque variable. Au cours du temps, elles changent de comportement assez brutalement et évoluent d'une manière non périodique et imprévisible. La présence de plusieurs pics traduit la complexité du comportement dynamique du système (2.8). Pour le reste de ce chapitre, les paramètres ( $a, b, c, d, m, r$ ) seront égaux à (0.93, 1.11, -0.11, -0.21, 6.26, 1.32).

### 2.3.2 Analyse

Dans cette sous-section, nous analyserons le système chaotique modifié (2.8). Nous nous focaliserons sur ses caractéristiques élémentaires en les comparant par rapport aux résultats obtenus avec le premier système (2.3).

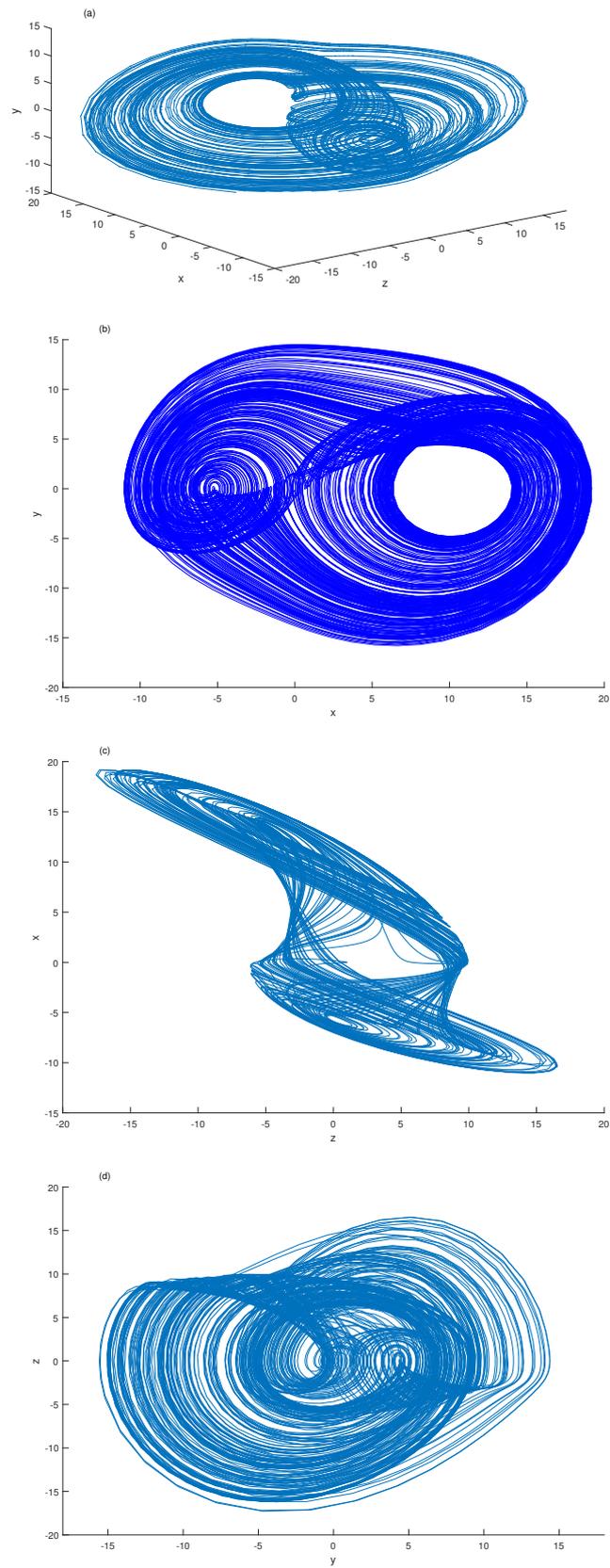
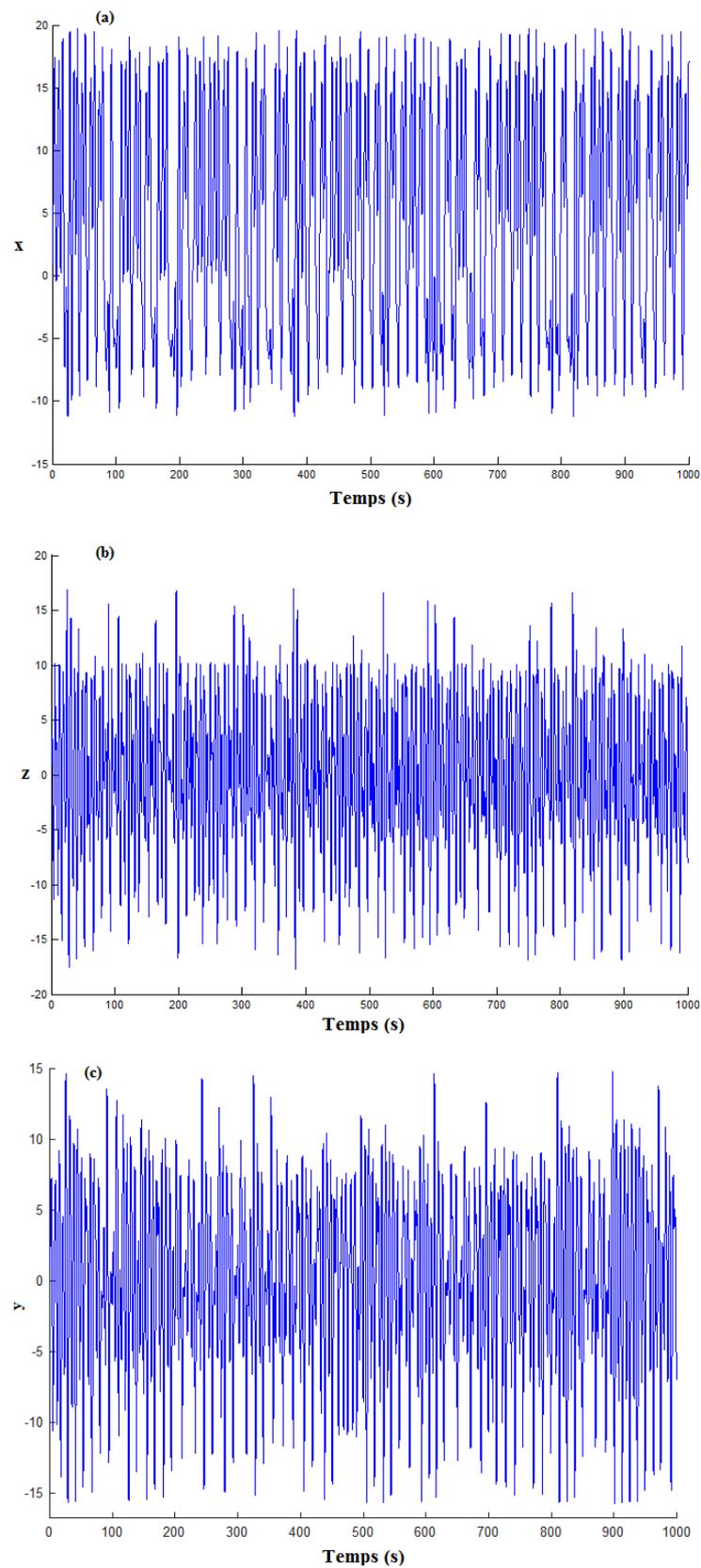


FIGURE 2.7 – Portraits de phases du système (2.8) : (a)  $x-y-z$  ; (b)  $x-y$  ; (c)  $x-z$  ; (d)  $y-z$ .

FIGURE 2.8 – Séries chronologiques du système (2.8) : (a)  $x$ , (b)  $z$ , (c)  $y$ .

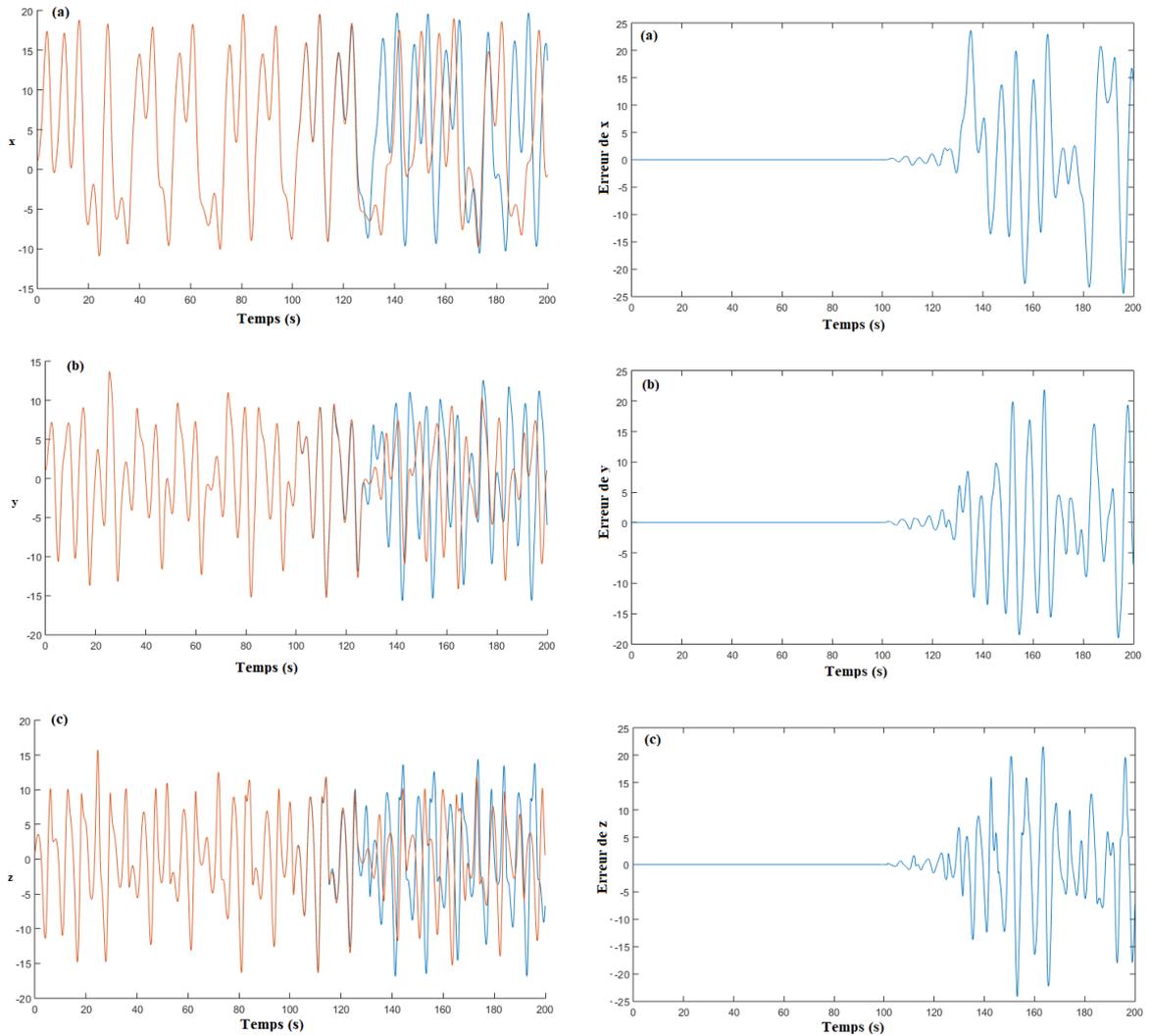


FIGURE 2.9 – Sensibilité aux conditions initiales (en bleu  $(1, 1, 1)$  et en rouge  $(1 + 10^{-14}, 1, 1)$ ) : les trajectoires des variables d'état  $x$ ,  $y$  et  $z$  du système (2.8) et ses erreurs.

### Sensibilité aux conditions initiales

Nous avons simulé le comportement dynamique du système (2.8) en partant de deux conditions initiales voisines. La Fig.2.9 représente le comportement dynamique des variables d'état  $(x, y, z)$  et leurs erreurs en partant de deux conditions initiales ; le premier est  $(1, 1, 1)$  et  $(1 + 10^{-14}, 1, 1)$ . Il est clair que le système (2.8) est sensible aux conditions initiales car les deux trajectoires exhibées pour chaque variable sont au début identiques mais après un certain temps, elles deviennent différentes.

### Points d'équilibre et stabilité

Les points d'équilibre du système (2.8) sont obtenus en résolvant les équations suivantes

$$y = 0, z = 0, -cx^2 + d|x|x + m|x|^r x^{-1} = 0. \quad (2.10)$$

**Proposition 1.**

- (i) Si  $x = 0$  alors  $P_1 = (0, 0, 0)$  est un point d'équilibre du système (2.8).
- (ii) Si  $x > 0$  alors  $P_2 = ((c - d)/m)^{1/\alpha}, 0, 0)$  est un point d'équilibre du système (2.8) avec  $\alpha = r - 3$ .
- (iii) Si  $x < 0$  alors  $P_3 = (-(-c - d)/m)^{1/\alpha}, 0, 0)$  est un point d'équilibre du système (2.8) avec  $\alpha = r - 3$ .

**Démonstration**

Le premier cas (i) est évident.

Pour le second cas (ii), nous avons tout d'abord résolu l'équation suivante :  $-c + d + mx^{r-3} = 0$  qui admet comme solution  $x^\alpha = (c - d)/m$  avec  $\alpha = r - 3$ . Par la suite, nous avons obtenu la racine de cette solution, en se basant sur [Radwan et al., 2009], tel que

$$x = |(c - d)/m|^{1/\alpha} e^{(j\theta \pm 2n\pi)/\alpha}$$

avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\theta$  la phase correspondante à la solution  $x^\alpha$  et  $\alpha$  un nombre fractionnaire. Notons que  $(c - d)/m$  est positif lorsque les paramètres  $(c, d, m)$  sont égaux à  $(-0, 11, -0, 21, 6, 26)$ . Par conséquent, la phase  $\theta$  est égale à zéro. La variable d'état  $x$  sera par suite définie par  $x = ((c - d)/m)^{1/\alpha}$ .

Pour le troisième cas (iii), nous avons au début résolu l'équation  $-c - d - mx^{r-3} = 0$  dont la solution est  $(-x)^\alpha = X^\alpha = (-c - d)/m$  avec  $\alpha = r - 3$ . Ensuite, nous avons obtenu la racine de cette solution, en se basant sur [Radwan et al., 2009], tel que

$$X = |(-c - d)/m|^{1/\alpha} e^{(j\theta \pm 2n\pi)/\alpha}$$

avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\theta$  la phase correspondante à la solution  $x^\alpha$  et  $\alpha$  un paramètre fractionnaire. Lorsque les paramètres  $(c, d, m)$  sont égaux à  $(-0, 11, -0, 21, 6, 26)$ , alors  $(-c - d)/m$  est positif et par suite la phase  $\theta$  est égale à zéro. La variable d'état  $x$  sera définie par  $x = (-(-c - d)/m)^{1/\alpha}$ .

Nous constatons que le système modifié (2.8) est différent du système (2.3) car il n'a plus de points d'équilibre symétriques. Ceci explique la forme de son attracteur asymétrique décrite par la Fig.2.7.

**Analyse de la stabilité**

Pour les simulations numériques, nous avons obtenu les points algébriques suivants :  $P_1 = (0, 0, 0)$ ,  $P_2 = (11.732, 0, 0)$  et  $P_3 = (-5.870, 0, 0)$ . Pour l'analyse

de la stabilité autour de chaque point d'équilibre, nous avons déterminé la matrice Jacobienne défini par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2cx + 2d|x| + (r-1)m|x|^{(r-2)} & -b & -a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres correspondantes à chaque point d'équilibre sont obtenues en calculant les solutions du déterminant  $\det(J - \lambda I)$  avec le vecteur  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$  et la matrice d'identité  $I$  de dimension 3. La Table.2.3 résume les résultats obtenus.

TABLE 2.3 – Matrices Jacobiennes et valeurs propres correspondantes pour chaque point d'équilibre du système (2.8).

Points d'équilibre	Matrice Jacobienne	Valeurs propres
$P_1(0, 0, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & -a \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -0.465 + 0.945i$ $\lambda_3 = -0.465 - 0.945i$
$P_2(11.732, 0, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \Delta_1 & -b & -a \end{pmatrix}$ $\Delta_1 = -2cx + 2dx + (r-1)mx^{r-2}$	$\lambda_1 = -1.273$ $\lambda_2 = 0.171 + 1.232i$ $\lambda_3 = 0.171 - 1.232i$
$P_3(-5.870, 0, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \Delta_2 & -b & -a \end{pmatrix}$ $\Delta_2 = -2cx - 2dx - (r-1)mx^{r-2}$	$\lambda_1 = 1.019$ $\lambda_2 = -0.974 + 1.465i$ $\lambda_3 = -0.974 - 1.465i$

D'après la Table.2.3 et les définitions 2.1 et 2.2, les analyses suivantes peuvent être déduites

- ◇  $P_1$  est un point d'équilibre stable car  $\lambda_1 = 0$  est une valeur propre unique et  $(\lambda_2, \lambda_3)$  est une paire de valeurs propres conjuguées complexes dont la partie réelle est négative.
- ◇  $P_2$  est un point d'équilibre dissipatif instable de type I car  $\lambda_1$  est un réel négatif et la paire de valeurs propres  $(\lambda_2, \lambda_3)$  est à partie réelle positive.

- ◇  $P_3$  est un point dissipatif instable de type II car  $\lambda_1$  est un réel positif et la paire de valeurs propres  $(\lambda_2, \lambda_3)$  est à partie réelle négative.

### Remarques :

En se référant à la Fig.2.7, nous avons constaté que l'aile générée autour du point d'équilibre  $P_2$  est bien définie et plus visible par rapport à l'aile générée autour du point d'équilibre  $P_3$ . En effet, ceci est dû à la nature du point d'équilibre  $P_2$  puisqu'il s'agit de l'unique point d'équilibre de type I.

### Analyse des bifurcations

Vu le comportement complexe du système (2.8), une analyse de ses bifurcations a été élaborée. Tout d'abord, nous avons effectué plusieurs tests pour reconnaître les paramètres de bifurcation. Deux bifurcations de type Hopf sont obtenues en variant le paramètre  $m$ . Ainsi, ce paramètre est le seul paramètre de bifurcation. La Fig.2.10-a illustre la première continuation. Les bifurcations obtenues sont notées H dans le digramme de bifurcation et elles apparaissent respectivement lorsque  $m = 1.49$  et  $m = 2.11$ . Une bifurcation de type Hopf indique un changement de stabilité, le système bascule d'un état vers un autre. Dans notre cas, un comportement chaotique est détecté lorsque le paramètre  $m$  est de l'ordre de 6.26. Les deux bifurcations sont apparues bien avant, ceci explique l'évolution du système pour atteindre le chaos. Chaque point de type Hopf est caractérisé par un premier coefficient de Lyapunov. Ce coefficient positif indique l'existence d'une bifurcation de type Hopf super-critique par contre un premier coefficient de Lyapunov négatif indique une bifurcation de Hopf sous-critique. Dans notre cas, les deux points obtenus sont des bifurcations de Hopf super-critiques. Ce type de bifurcations indique que l'évolution vers un comportement chaotique est possible [Gros, 2015].

En choisissant les deux points de bifurcation de Hopf comme étant des points initiaux, nous avons effectué la première continuation de bifurcation illustrée par la Fig.2.8-b et la Fig.2.8-c. Nous avons obtenu les résultats numériques suivants :

- ◇ A partir du premier point Hopf, nous avons constaté l'existence d'une bifurcation avec un dédoublement de période, notée PD. Cette bifurcation est caractérisée par un coefficient de forme normale négatif donc c'est une bifurcation instable de type PD sous-critique. L'apparition de ce type de bifurcation traduit la complexité du comportement dynamique car une cascade de PD sous-critique permet de générer du chaos.
- ◇ A partir du deuxième point Hopf, nous avons constaté une cascade de bifurcation PD, toutes sous-critiques. Ainsi, le comportement chaotique est généré

à partir de ce point. La dernière bifurcation PD apparaît lorsque le paramètre  $m$  est égal à 3.020.

Pour avoir plus d'informations sur la bifurcation de type Hopf et aussi sur la continuation de bifurcation, les références suivantes [Sanchez et al., 2002, Gros, 2015] peuvent être consultées.

Nous n'avons pas pu étendre la simulation jusqu'à  $m = 6.26$  car le pro-logiciel Matcont est assez limité pour ce type de calcul. Pour ceci, le diagramme de bifurcation du système (2.8) a été réalisé avec un algorithme Matlab lorsque le paramètre  $m$  varie. La Fig.2.11 illustre les maximums locaux  $x_{max}$  de la variable d'état  $x$  en fonction du paramètre de bifurcation  $m$  (voir Annexe A). D'après ce diagramme, une bifurcation de type dédoublement de période PD est détectée lorsque  $m = 3.7$ . A l'aide du logiciel MatCont, nous avons constaté que cette bifurcation est caractérisée par un coefficient de forme normale négative donc c'est une bifurcation instable de type PD sous-critique. L'apparition de ce type de bifurcation traduit la complexité du comportement dynamique car une cascade de PD sous-critique permet de générer du chaos.

En paramétrant  $c$ , le système (2.3) exhibe différents attracteurs réguliers et étranges. Ces derniers sont prouvés davantage par le diagramme de bifurcation illustré par la Fig.2.4. Il engendre les formes suivantes

- ◇ Si  $0 \leq m \leq 3.8$ , un orbite régulier est obtenu.
- ◇ Si  $3.8 < m \leq 6.3$ , un attracteur chaotique est exhibé.

### Dimension et exposants de Lyapunov

Le système (2.8) exhibe trois LEs, illustrés par la Fig.2.12 et estimés selon le diagramme de Wolf [Wolf et al., 1985].  $\lambda_1$  est le premier LE positif de l'ordre de 0.1933. Cet exposant est relativement plus grand que celui exhibé par le système (2.3). Le degré de contraction de l'attracteur chaotique dans l'espace des phases est égal à  $\lambda_3 = -1.129$ . Ce dernier a diminué en remplaçant la fonction non linéaire par morceaux par le polynôme d'ordre non entier. La dimension de Kaplan-Yorke correspondante est égale à

$$D_L = 2 + (\lambda_1 + \lambda_2)/|\lambda_3| = 2.17. \quad (2.11)$$

### Étude comparative

Nous avons choisi trois systèmes chaotiques récents qui ont la forme généralisée d'un système de jerk mais avec différentes fonctions non linéaires. Nous allons considérer le premier LE comme critère comparatif entre ces systèmes car il est un

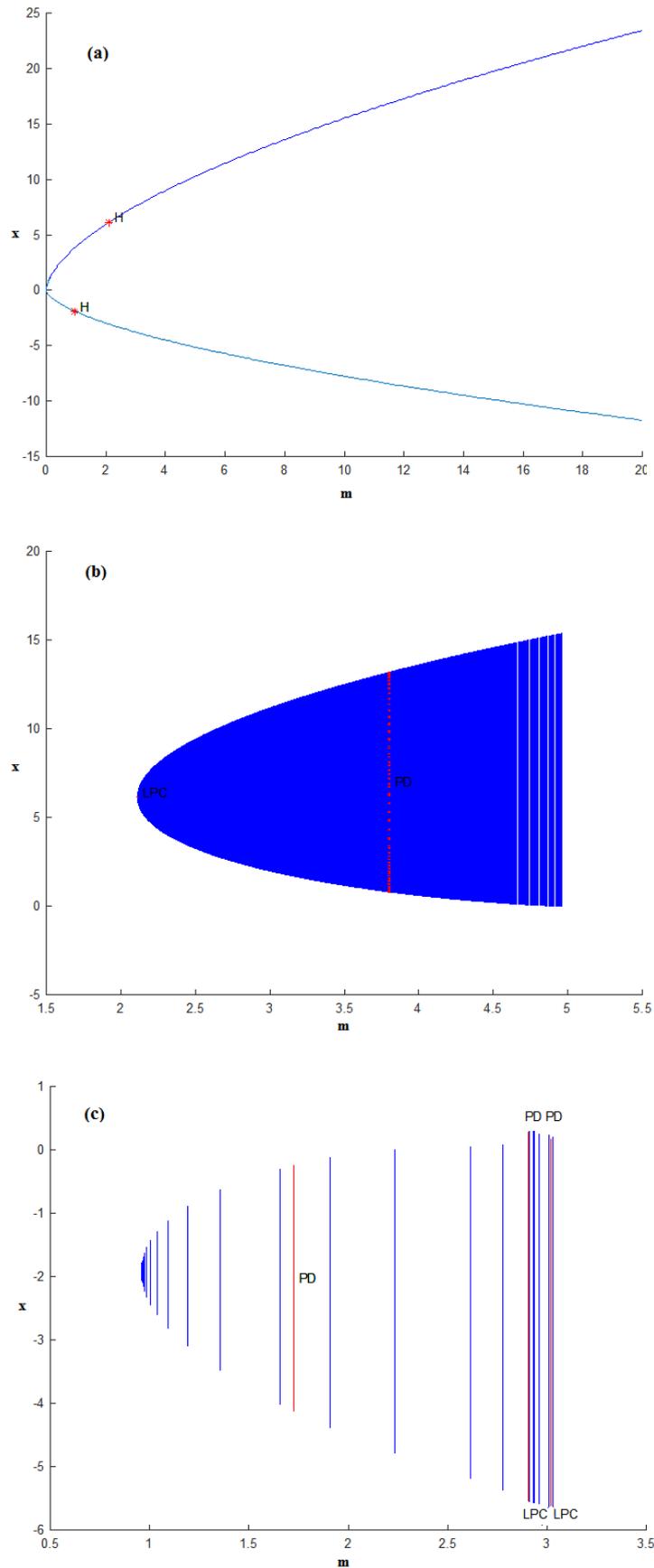


FIGURE 2.10 – Diagrammes de bifurcations : variant le paramètre  $m$  pour le système (2.8) en utilisant MatCont.

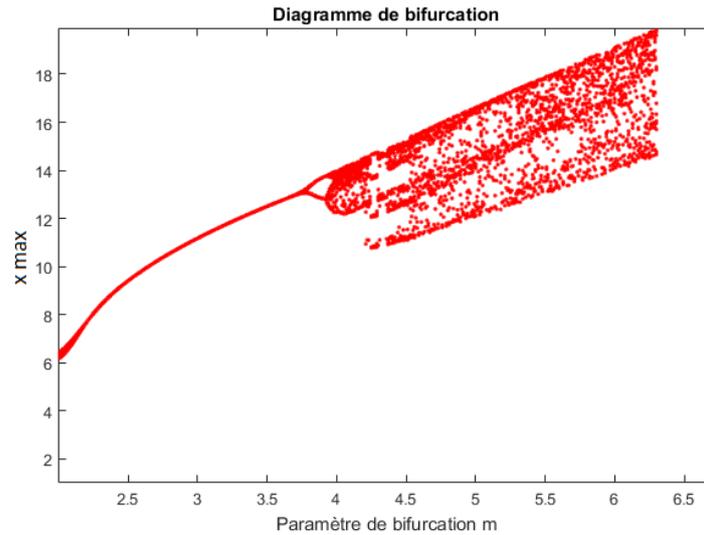


FIGURE 2.11 – Diagrammes de bifurcations : variant le paramètre  $m$  pour le système (2.8) en utilisant Matlab.

TABLE 2.4 – Étude comparative relatif au système (2.8)

Système	LEs	Dimension de Kaplan-Yorke
Système proposé (2.8)	$LE_1 = 0.193$ $LE_2 = 0$ $LE_3 = -1.129$	$D_{KY} = 2.17$
Circuit chaotique de jerk [Sprott, 2011]	$LE_1 = 0.0735$ $LE_2 = 0$ $LE_3 = -1.0735$	$D_{KY} = 2.0685$
Système Hypogenetique de jerk [Li et al., 2016a]	I/ $LE_1 = 0.0299$ $LE_2 = 0$ $LE_3 = -1.0299$ II/ $LE_1 = 0.0926$ $LE_2 = 0$ $LE_3 = -0.5052$	$D_{KY} = 2.029$    $D_{KY} = 2.183$

indicateur déterminant sur le taux de complexité dynamique. La Table.2.4 présente les LEs ainsi que leurs dimensions de Kaplan-Yorke relatives à chaque système. Il est clair que le système (2.8) est caractérisé par le plus grand premier LE. Il a alors une structure plus complexe due à la présence du polynôme d'ordre non-entier.

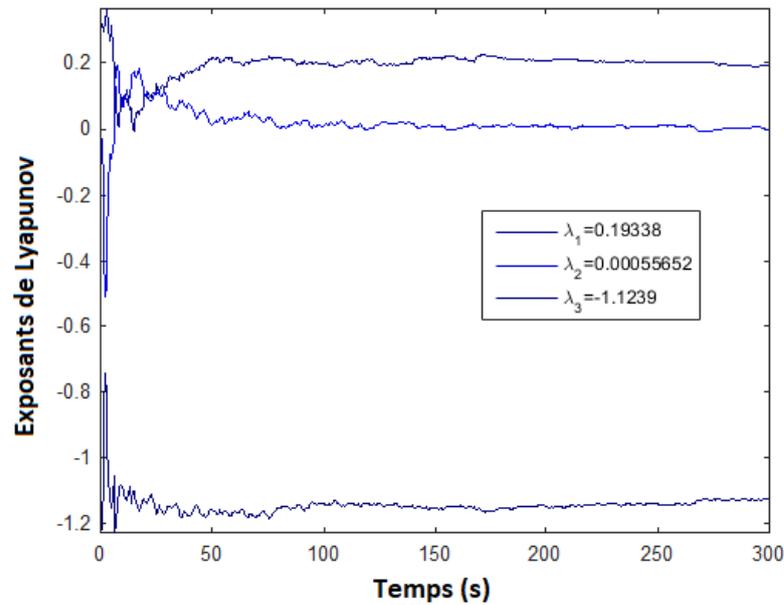


FIGURE 2.12 – Spectre des exposants de Lyapunov du système (2.8)

## 2.4 Conclusion

L'évolution des applications technologiques sollicite la découverte de nouveaux systèmes plus performants. Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord proposé un système chaotique à base d'une dynamique jerk avec une fonction non linéaire par morceaux. L'analyse des performances de ce système nous a confirmé que cette fonction non linéaire favorise la génération d'un comportement chaotique symétrique. Par la suite, dans le but d'améliorer les résultats obtenus, nous avons élaboré un second système caractérisé cette fois par un polynôme d'ordre non-entier. Ce polynôme introduit une dimension fractionnaire et prouve l'existence d'un bon générateur de chaos. Nous avons alors obtenu, dans ce cas, un attracteur chaotique asymétrique très recommandé dans le domaine de la communication sécurisée. Vue les avantages de l'hyperchaos, nous proposerons dans le chapitre suivant un nouveau système hyperchaotique caractérisé par deux polynômes d'ordre non entier. Son modèle fractionnaire sera aussi déduit pour la préparation à une implémentation pratique.

# Chapitre 3

Conception et analyse d'un système  
hyperchaotique d'ordre fractionnaire

## 3.1 Introduction

Récemment, divers travaux de recherche ont mis en évidence les avantages et le potentiel des systèmes hyperchaotiques et du calcul fractionnaire dans le domaine de la communication sécurisée et des circuits électriques. Ainsi, l'objectif de ce chapitre est d'user de ces deux avancées pour des objectifs d'implémentation et de réalisation pratique des circuits électriques exhibant des dynamiques hyperboliques. Tout d'abord, en se basant sur le système chaotique le plus performant obtenu précédemment, nous proposerons un nouveau système hyperchaotique. Notre contribution réside dans l'ajout d'une nouvelle variable d'état composée d'un polynôme d'ordre non entier capable de générer l'hyperchaos. Par la suite, nous utiliserons les dérivées d'ordre fractionnaire pour aboutir à l'élaboration du modèle hyperchaotique d'ordre fractionnaire.

Le chapitre sera organisé comme suit : le système hyperchaotique sera présenté au second paragraphe. Son analyse sera détaillée en se focalisant sur les points d'équilibre, les attracteurs étranges et les exposants de Lyapunov. Dans le troisième paragraphe, le modèle d'ordre fractionnaire correspondant au système hyperchaotique proposé sera décrit et interprété.

## 3.2 Vers un nouveau système hyperchaotique

### 3.2.1 Modèle mathématique

Pour la construction du système hyperchaotique avec un polynôme d'ordre non entier, une nouvelle variable d'état a été introduite pour le système chaotique (2.8). Ceci est nécessaire car un système hyperchaotique doit générer au minimum quatre LEs et ce nombre d'exposants est égal au nombre de variables d'état. Pour caractériser la dynamique de la nouvelle variable d'état  $w$ , nous n'avons pas considéré une méthode de contrôle classique par retour d'état tel qu'il est le cas pour la majorité des systèmes hyperchaotiques [Lassoued and Boubaker, 2016b]. Le choix pour lequel nous avons opté a été consolidé par plusieurs tests et essais qui montrent que des méthodes de contrôle classiques ne permettent pas la génération d'un comportement hyperchaotique. Ainsi, nous avons choisi de considérer pour le système (2.8) un second polynôme d'ordre non entier qui a abouti à l'apparition de l'hyperchaos. Le choix d'utiliser le même polynôme et non pas une autre fonction non linéaire est essentiellement un problème d'optimisation. En effet, par la suite, nous utiliserons lors de la modélisation du système hyperchaotique le même bloc pour les deux fonctions non linéaires existantes.

Le nouveau système est défini comme suit [Lassoued and Boubaker, 2017a]

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -az - by + G(x) \\ \dot{w} = ky - hw + G(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $(a, b, c, d, h, k, m, r)$  les paramètres du système (3.1) et  $(x, y, z, w)$  ses variables d'état. Ce système n'a plus une structure classique ni celle d'un système jerk décrite par  $\ddot{x} = J(\ddot{x}, \dot{x}, x)$  ni celle d'un système Hyperjerk décrite par  $\ddot{\ddot{x}} = J(\ddot{\ddot{x}}, \ddot{x}, \dot{x}, x)$ .

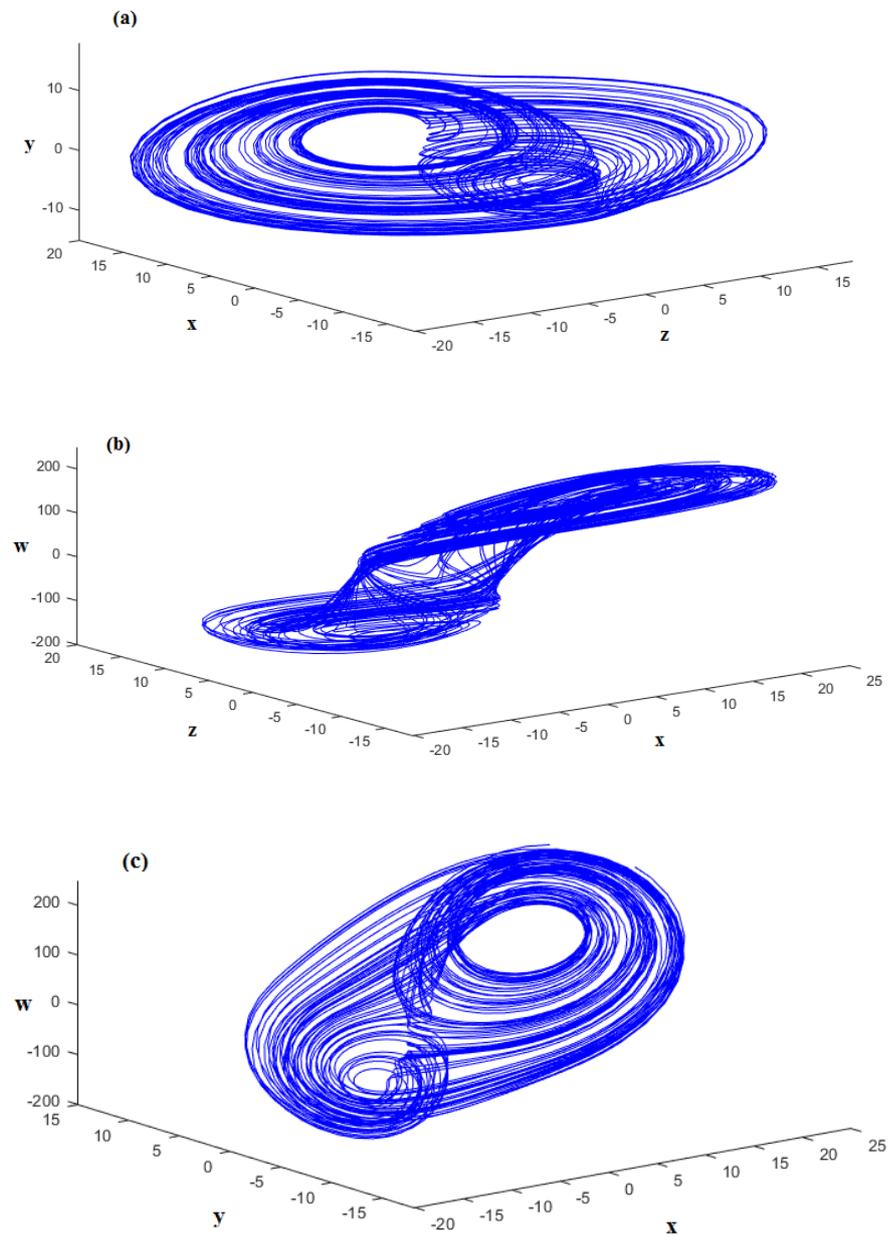
En gardant les mêmes paramètres  $(a, b, c, d, m, r) = (0.93, 1.11, -0.11, -0.21, 6.26, 1.32)$  considérées pour le système (2.8) et avec  $(h, k) = (0.001, 14)$ , le calcul de  $\nabla V$  correspondante au système (3.1) donne

$$\nabla V = \partial \dot{x} / \partial x + \partial \dot{y} / \partial y + \partial \dot{z} / \partial z + \partial \dot{w} / \partial w = -a - h < -a < 0. \quad (3.2)$$

Puisque  $\nabla V$  est négative alors le système hyperchaotique peut exhiber des attracteurs étranges (chaotiques ou hyperchaotiques). D'autre part, il est évident que le système (3.1) est plus dissipatif que le système (2.8) avec une différence assez minime mais qui peut provoquer la génération d'attracteurs plus complexes. Par conséquent, un attracteur étrange décrit par la Fig.3.1 est obtenu pour les valeurs initiales  $(1, 1, 1, 1)$ . Il a une forme asymétrique par rapport à tous les axes de coordonnées principaux conformément au système chaotique (2.8). Ainsi, nous avons gardé les avantages obtenus avec un polynôme d'ordre non entier afin que ce système soit exploité dans le domaine de la communication sécurisée. Visuellement, nous pouvons distinguer la présence de deux ailes asymétriques de tailles différentes.

Afin de confirmer la complexité du comportement dynamique du système (3.1), nous avons réalisé la série chronologique des variables d'état. L'objectif est d'analyser le comportement dynamique de ces variables au cours du temps. La Fig.3.2 illustre les trajectoires obtenues. Nous avons remarqué que la plage de variation de la variable d'état  $w$  est assez large par rapport aux autres variables. En effet, elle est de l'ordre de  $[250, -200]$ . Il faut donc tenir compte de cette caractéristique lors des applications concrètes.

Pour le reste de ce chapitre, les paramètres  $(a, b, c, d, m, r, h, k)$  seront égaux à  $(0.93, 1.11, -0.11, -0.21, 6.26, 1.32, 0.001, 14)$ .

FIGURE 3.1 – Portraits de phase du système (3.1) : (a)  $yxz$  ; (b)  $wzx$  ; (c)  $wyx$ .

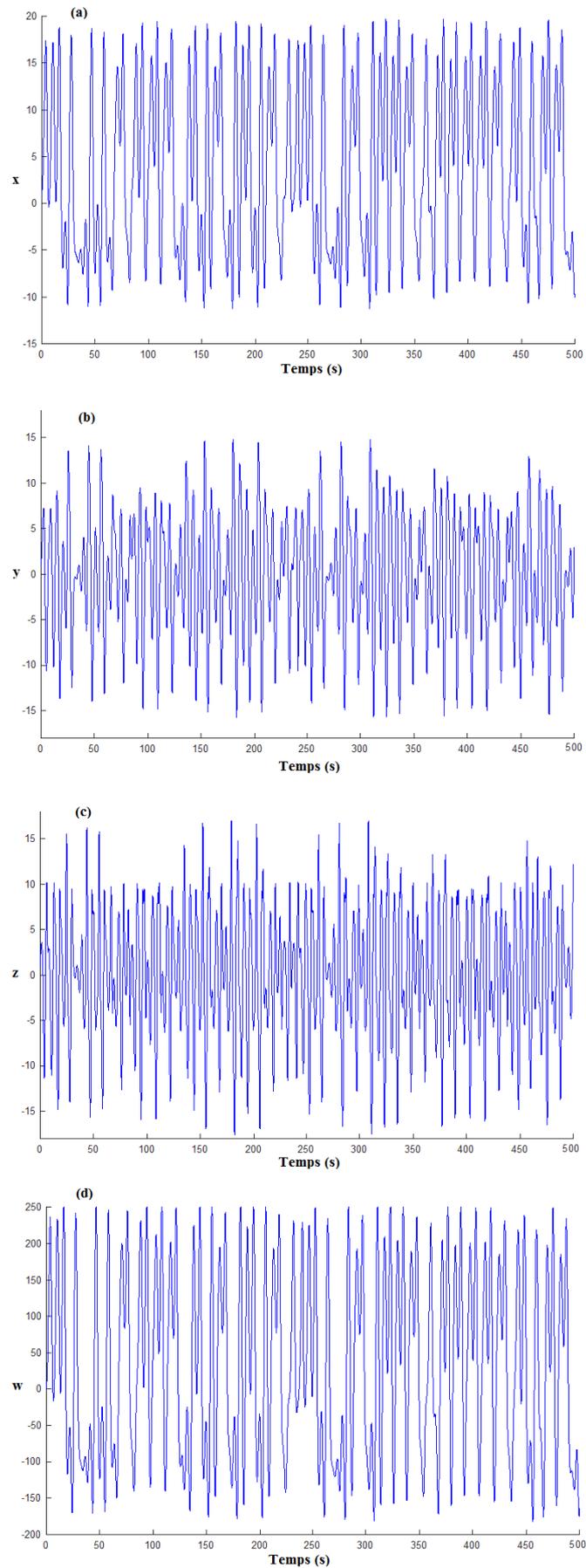


FIGURE 3.2 – Série chronologique des variables d'état du système (3.1) : (a)  $x$ ; (b)  $y$ ; (c)  $z$ ; (d)  $w$ .

### 3.2.2 Analyse

#### Sensibilité aux conditions initiales

La Fig.3.3 représente le comportement dynamique des variables d'état et leurs erreurs à partir de deux conditions initiales différentes  $(1, 1, 1, 1)$  et  $(1 + 10^{-14}, 1, 1, 1)$ . Les deux trajectoires de chaque variable d'état sont au début identiques mais elles deviennent complètement différentes après un certain temps. Il est clair que le système (3.1) est sensible aux conditions initiales.

#### Points d'équilibre

Les points d'équilibre du système (3.1) sont obtenus tel que

$$y = z = w = 0, -cx^2 + d|x|x + m|x|^r x^{-1} = 0. \quad (3.3)$$

En se basant sur l'étude précédente, nous avons obtenu les résultats suivants

- (i) Si  $x = 0$  alors  $w = 0$  ainsi l'origine  $H_1 = (0, 0, 0, 0)$  est le premier point d'équilibre du système (3.1).
- (ii) Si  $x > 0$  alors  $w = 0$  ainsi le point  $H_2 = ((c-d)/m)^{1/\alpha}, 0, 0, 0)$  est le deuxième point d'équilibre du système (3.1) avec  $\alpha = r - 3$ .
- (iii) Si  $x < 0$  alors  $w = 0$  ainsi le point  $H_3 = (-(-c-d)/m)^{1/\alpha}, 0, 0, 0)$  est le troisième point d'équilibre du système (3.1) avec  $\alpha = r - 3$ .

De ce fait, le système hyperchaotique admet aussi trois points d'équilibre asymétriques expliquant ainsi la forme asymétrique de l'attracteur étrange obtenu. Pour les simulations numériques, nous avons obtenu les trois points numériques suivants :  $H_1 = (0, 0, 0, 0)$ ,  $H_2 = (11.73, 0, 0, 0)$  et  $H_3 = (-5.87, 0, 0, 0)$ .

#### Analyse de la stabilité

Afin de mieux comprendre l'évolution du système hyperchaotique aux alentours de ses points d'équilibre, une analyse de stabilité s'impose. Pour ce faire, nous avons déterminé la matrice Jacobienne définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2cx + 2d|x| + (r-1)m|x|^{(r-2)} & -b & -a & 0 \\ -2cx + 2d|x| + (r-1)m|x|^{(r-2)} & k & 0 & -h \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres correspondantes à chaque point d'équilibre sont obtenues en calculant les solutions du déterminant  $\det(J - \lambda I)$  avec le vecteur  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$

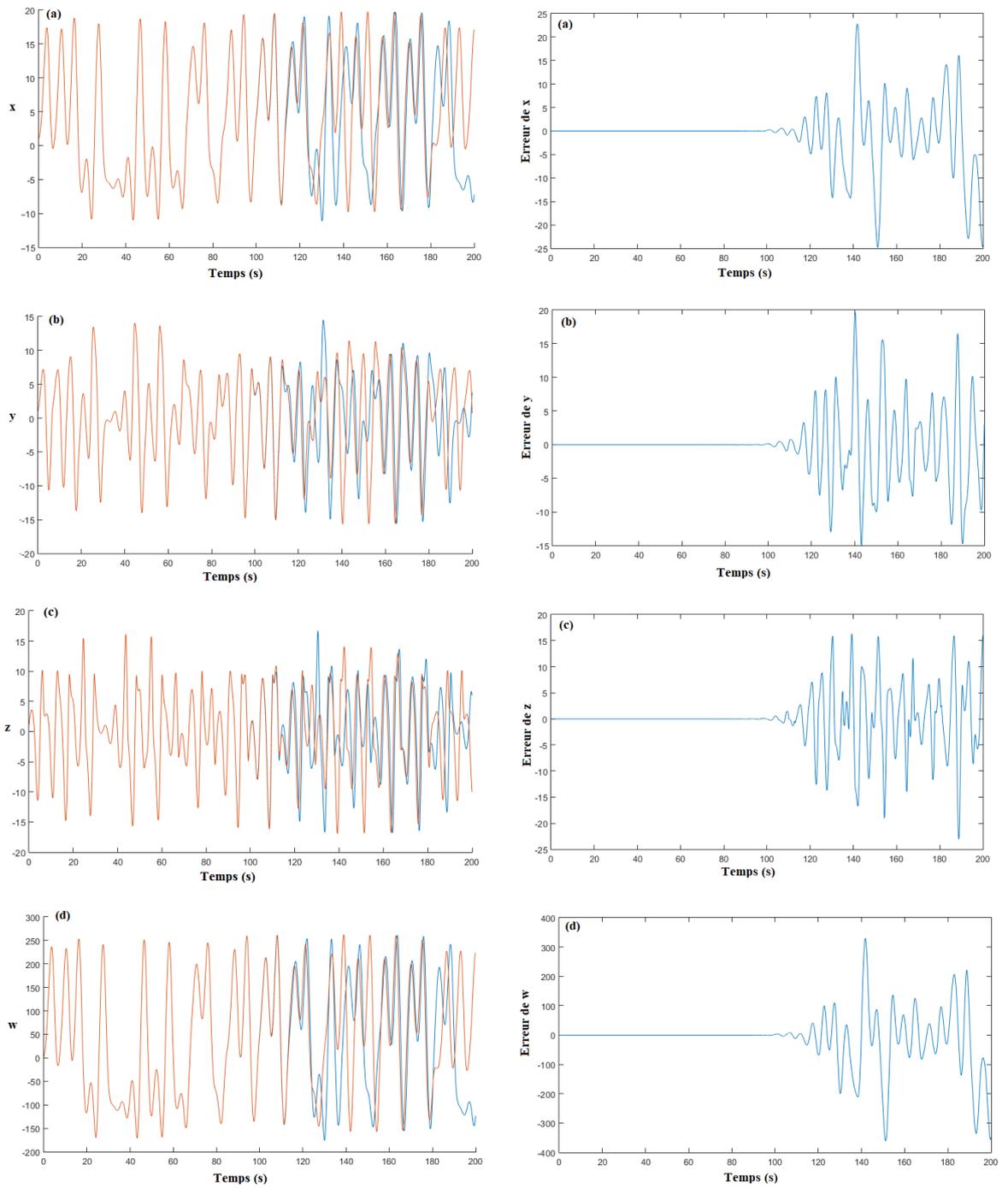


FIGURE 3.3 – Sensibilité aux conditions initiales du système (3.1) : (en bleu  $(1, 1, 1)$  et en rouge  $(1 + 10^{-14}, 1, 1)$ ).

TABLE 3.1 – Matrices Jacobiennes et les valeurs propres correspondantes pour chaque point d'équilibre du système (3.1).

Points d'équilibre	Matrice Jacobienne	Valeurs propres
$H_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & -a & 0 \\ 0 & k & 0 & -h \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -0.001 \\ \lambda_3 &= -0.465 + 0.945i \\ \lambda_4 &= -0.465 - 0.945i \end{aligned}$
$H_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta_1 & -b & -a & 0 \\ \Delta_1 & k & 0 & -h \end{pmatrix}$ $\Delta_1 = 2dx - 2cx + (r - 1)mx^{r-2}$	$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.001 \\ \lambda_2 &= -1.273 \\ \lambda_3 &= 0.171 + 1.232i \\ \lambda_4 &= 0.171 - 1.232i \end{aligned}$
$H_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta_2 & -b & -a & 0 \\ \Delta_2 & k & 0 & -h \end{pmatrix}$ $\Delta_2 = -2dx - 2cx - (r - 1)mx^{r-2}$	$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.001 \\ \lambda_2 &= -2.297 \\ \lambda_3 &= 0.683 + 1.945i \\ \lambda_4 &= 0.683 - 1.945i \end{aligned}$

et la matrice d'identité  $I$  de dimension 4. La Table.3.1 résume les résultats obtenus.

D'après la Table.3.1, nous constatons que le système (3.1) admet un point d'équilibre stable  $H_1$  (puisque  $\lambda_1 = 0$  est une valeur propre unique) et deux points d'équilibre instables  $H_2$  et  $H_3$ . L'attracteur étrange obtenu traduit cette dualité entre l'attraction et la répulsion des ces points d'équilibre. Contrairement au système chaotique, nous ne pouvons pas définir la singularité de ces points car les définitions 2.1 et 2.2 ne sont valables que pour des systèmes tridimensionnels.

### Routes vers le chaos

Le système (3.1) peut exhiber plusieurs formes d'attracteurs à savoir des orbites périodiques et des attracteurs chaotiques et hyperchaotiques selon certaines conditions. En réalité, si le paramètre  $m$  varie et les paramètres  $(a, b, c, d, r, h, k)$  sont fixes, alors deux bifurcations de type Hopf sont détectées lorsque  $m = 0.99$  et  $m = 2.11$ . Chaque point Hopf est caractérisé par un premier coefficient de Lyapunov négatif d'où ces deux bifurcations sont des bifurcations Hopf sous-critiques. Ceci indique que l'évolution vers un comportement chaotique est possible. Le diagramme de bifurcation illustré par la Fig.3.4 traduit l'évolution de ce comportement. Il est

obtenu en traçant les maximums locaux  $x_{max}$  de la variable d'état  $x$  en fonction du paramètre de bifurcation  $m$  (voir Annexe A).

En outre, si le paramètre de bifurcation  $m$  augmente alors le système (3.1) suit les routes suivantes :

- ◇ Si  $-1 \leq m \leq 0.3$ , alors système (3.1) exhibe un orbite périodique décrit par la Fig.3.5.a avec  $m = -0.5$ .
- ◇ Si  $0.3 < m \leq 2.1$ , alors il converge vers un point fixe représenté par la Fig.3.5.b.
- ◇ Si  $2.1 < m \leq 3.8$ , alors un autre orbite périodique est obtenu décrit par la Fig.3.5.c avec  $m = 1$ .
- ◇ Si  $3.8 < m \leq 5.5$ , le système (3.1) exhibe un attracteur chaotique représenté par la Fig.3.5.d avec  $m = 4.5$ .
- ◇ Si  $5.5 < m < 7$ , alors des attracteurs hyperchaotiques sont obtenus comme représenté par la Fig.3.5.e avec  $m = 6$ .

Certains attracteurs typiques sont décrits dans la Table.3.2 selon le paramètre  $m$ .

TABLE 3.2 – LEs de certains attracteurs typiques exhibés par le système (3.1).

$m$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	Attracteur
3.6	0	0	-0.42	0.8	orbite périodique
3.8	0.05	0	-0.01	-0.92	Attracteur chaotique
6	0.18	0.007	0	-1.10	Attracteur hyperchaotique
6.5	0.17	0.01	0	-1.16	Attracteur hyperchaotique

### Dimension et exposants de Lyapunov

Le système quadridimensionnel (3.1) est caractérisé par quatre LEs dont le spectre de Lyapunov est représenté par la Fig.3.6. Ces LEs sont estimés selon le diagramme de Wolf [Wolf et al., 1985] via le logiciel Matds. Nous constatons la présence de deux LEs positifs donc le système (3.1) est hyperchaotique. Ce système exhibe un premier LE plus grand que le système chaotique (2.8)(0.232 > 0.14) d'où l'avantage de passer d'un système chaotique vers un système hyperchaotique. La dimension de Kaplan-Yorke correspondante est égale à 3.19. Cette dimension est fractionnaire et supérieure à trois donc elle traduit bel et bien la présence d'un attracteur hyperchaotique.

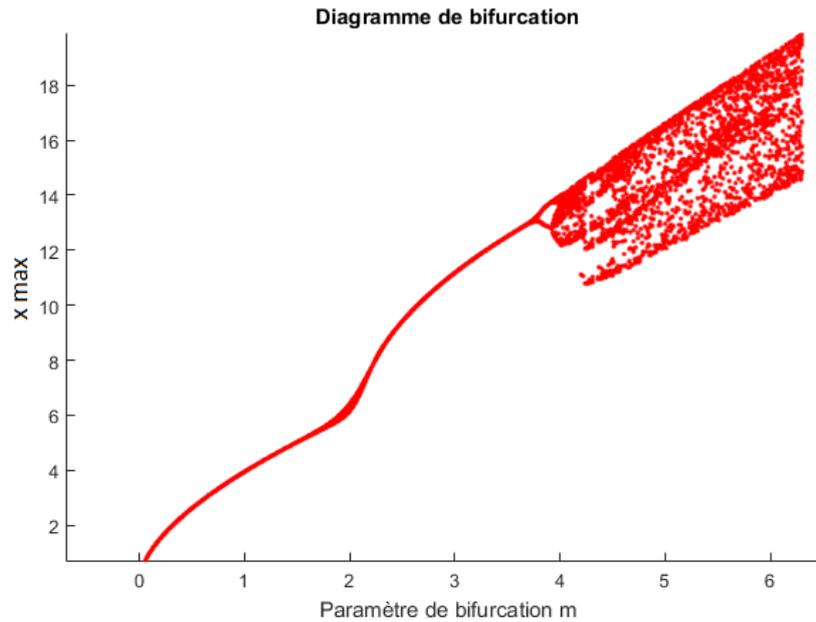


FIGURE 3.4 – Diagramme de bifurcation du système (3.1) lorsque le paramètre  $m$  varie.

### Étude comparative

Pour établir une étude comparative qui met en valeur les avantages du système hyperchaotique (3.1) proposé, nous avons choisi de la littérature deux systèmes hyperchaotiques avec des fonctions linéaires par morceaux. Nous allons considérer le premier LE comme critère comparatif entre ces systèmes. La Table.3.3 présente les LEs ainsi que les dimensions de Kaplan-Yorke. D'après cette table, le système (3.1) avec un polynôme d'ordre fractionnaire présente le plus grand LE, de plus celui-ci est nettement plus important que les autres. Certes, son deuxième LE est le plus faible mais ceci n'affecte pas ses performances car de plus il présente la plus grande dimension de Kaplan-Yorke. En effet, il faut tenir compte que cette dimension qui traduit la complexité du système.

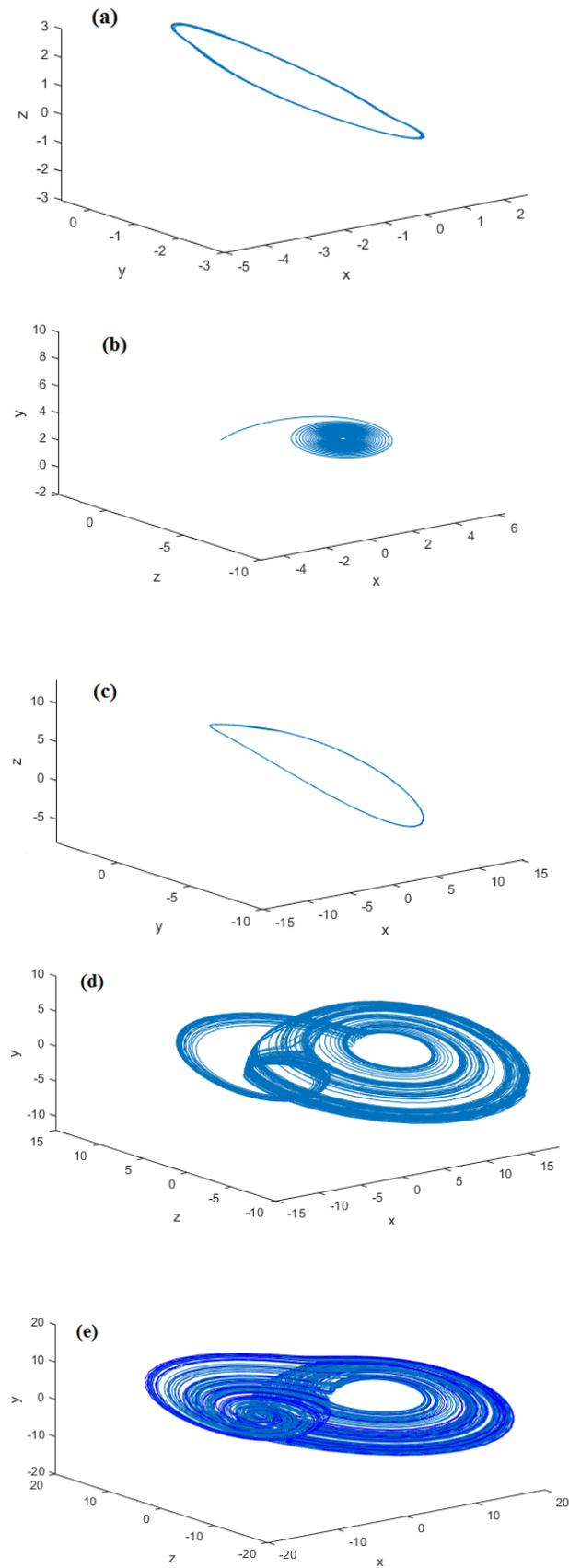


FIGURE 3.5 – Différentes formes d'attracteurs exhibées par le système (3.1) lorsque le paramètre  $m$  varie.

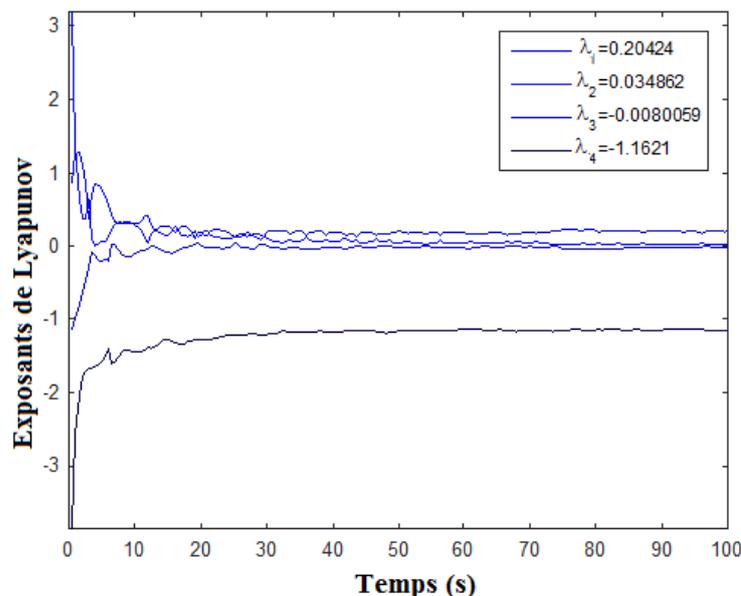


FIGURE 3.6 – Spectre des exposants de Lyapunov du système (3.1)

### 3.3 Système hyperchaotique d'ordre fractionnaire

#### 3.3.1 Le calcul fractionnaire : Propriétés basiques

Le concept généralisé de l'opérateur différentiel-intégral à ordre fractionnaire est défini comme suit [Caputo, 1967]

$${}_a D_t^q = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q}, & R(q) > 0, \\ 1, & R(q) = 0, \\ \int_a^t d\tau, & R(q) < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

avec  $q$  l'ordre fractionnaire. La fonction  $R(q)$  décrit la partie réelle du paramètre  $q$ . Les paramètres  $t$  et  $a$  sont les limites de l'opération avec  $a < t$ .

Dans le cadre de nos travaux de recherche, nous nous intéresserons uniquement à la dérivée fractionnaire. Pour la définition des dérivées fractionnaires, il existe de nombreuses définitions telles que la définition de Riemann-Liouville (R-L) [Jumarie, 2006] et la définition de Caputo [Caputo, 1967]. Ce sont les définitions les plus connues et les plus utilisées. Tout au long de ce chapitre, nous adopterons la définition de Caputo qui repose sur une approche de calcul dans le domaine temporel. Cette définition est fréquemment utilisée pour les systèmes non linéaires [Jmal et al., 2018]. Elle est adoptée pour les applications réelles car elle tient compte des conditions initiales qui ont souvent des interprétations physiques.

TABLE 3.3 – Étude comparative.

Système	LEs	Dimension de Kaplan-Yorke
Système hyperchaotique proposé	$LE_1 = 0.231$ $LE_2 = 0.020$ $LE_3 = 0$ $LE_4 = -1.169$	$D_{KY} = 3.19$
Système hyperchaotique [Li et al., 2014a]	$LE_1 = 0.064$ $LE_2 = 0.033$ $LE_3 = 0$ $LE_4 = -1.098$	$D_{KY} = 3.089$
Système hyperjerk [Vaidyanathan, 2016]	$LE_1 = 0.142$ $LE_2 = 0.046$ $LE_3 = 0$ $LE_4 = -1.396$	$D_{KY} = 3.134$

**Définition 3.1 :**

La dérivée fractionnée de Caputo est décrite comme suit [Podlubny, 1998]

$$D^q x(t) = J^{m-q} x^{(m)}(t), q > 0. \quad (3.5)$$

avec  $x^{(m)}$  la dérivée entière d'ordre  $m$  de la variable d'état  $x$ . Le paramètre  $m$  traduit la partie entière du paramètre fractionnaire  $q$  tel que  $m = [q]$ .  $J$  est un opérateur entier décrit par l'équation suivante

$$J^\beta x(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty (t - \sigma)^{\beta-1} y(\sigma) d\sigma. \quad (3.6)$$

avec la fonction Gamma  $\Gamma(\beta)$  définit par l'expression suivante

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt \quad (3.7)$$

Tout au long de ce chapitre, nous considérerons des modèles mathématiques qui reposent sur la dérivée fractionnaire écrite conformément à la forme suivante [Matignon, 1996]

$$\frac{d^q x(t)}{dt^q} = D^q x(t) = f(t, x(t)). \quad (3.8)$$

tel que  $D^q$  est l'opérateur dérivée fractionnaire de Caputo et le paramètre  $q$  son

ordre fractionnaire correspondant avec  $q \in ]0, 1[$ .

L'analyse de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire est différente de celle des systèmes d'ordre entier. De ce fait, le théorème suivant est donné

**Théorème 3.1 [Jian-Bing and Ling-Dong, 2013]** : Considérons un système décrit par un modèle d'ordre fractionnaire donné par

$$d^q x(t)/dt^q = f(x(t)); \quad (3.9)$$

avec  $0 < q < 1$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . Les points d'équilibre du système (3.9) sont localement asymptotiquement stables si seulement si toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice Jacobienne  $J = \partial f(x(t))/\partial x(t)$  évaluées autour de ces points d'équilibre satisfaisaient la condition  $|\arg(\lambda_i)| > (q\pi)/2$ .

### 3.3.2 Modèle mathématique

Le système fractionnaire relatif au système (3.1) obtenu en utilisant la définition 3.1 est donné par

$$\begin{cases} D^q x = y, \\ D^q y = z, \\ D^q z = -az - by + G(x), \\ D^q w = ky - hw + G(x). \end{cases} \quad (3.10)$$

avec  $q$  un nombre non entier tel que  $0 < q < 1$ . Les paramètres  $(a, b, c, d, k, h, m, r)$  sont égaux à  $(0.93, 1.11, -0.11, -0.21, 0.001, 14, 6.26, 1.3)$ .

Afin de déterminer le comportement dynamique du système hyperchaotique d'ordre fractionnaire (3.10), une simulation intensive est élaborée en variant l'ordre de dérivation  $q$ . Celle-ci donne

- (i) Si  $q \leq 0.96$ , des attracteurs réguliers sont obtenus (Point fixe et orbite périodique).
- (ii) Si  $q \in ]0.96 \cdots 1[$ , différents attracteurs étranges sont obtenus.

La Fig.3.7 regroupe ces attracteurs. Si  $q = 1$ , le système (3.10) sera équivalent au système (3.1). Pour  $q = 0.97$  et les valeurs initiales  $(1, 1, 1, 1)$ , nous obtenons un attracteur étrange illustré par la Fig.3.8. Cet attracteur a une forme asymétrique. Il est caractérisé par deux ailes de tailles différentes assez visibles. Donc le passage à la dimension fractale n'a pas influencé l'allure des trajectoires dynamiques du système

hyperchaotique.

### 3.3.3 Analyse

Vu la complexité du calcul fractionnaire, nous avons focalisé notre analyse essentiellement sur l'analyse de la stabilité. Les autres critères d'analyse énumérés précédemment sont assez difficile à établir avec les dérivées non entières tels que les exposants de Lyapunov et la dimension de Kaplan-Yorke.

#### Sensibilité aux conditions initiales

Cette condition de sensibilité reste encore valable pour les systèmes hyperchaotiques d'ordre fractionnaire. La Fig.3.9 représente l'évolution des variables d'état  $x$ ,  $y$  et  $z$  et leurs erreurs à partir des conditions initiales  $(1, 1, 1, 1)$  et  $(1 + 10^{-6}, 1, 1, 1)$ . Il est clair que le système (3.10) est sensible aux conditions initiales.

#### Points d'équilibre

Les points d'équilibre du système (3.10) sont obtenus en résolvant le système (3.3). Ainsi, le système (3.10) admet les mêmes points d'équilibre  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  expliquant ainsi la forme asymétrique de l'attracteur étrange obtenu. Les trois points d'équilibres que nous utiliserons par la suite sont alors  $H_1 = (0, 0, 0, 0)$ ,  $H_2 = (11.73, 0, 0, 0)$  et  $H_3 = (-5.87, 0, 0, 0)$ .

#### Analyse de la stabilité

Pour l'étude de la stabilité, nous avons déterminé la matrice jacobienne et les valeurs propres correspondantes autour de chaque point d'équilibre. La Table 3.4 résume tous les résultats obtenus. A chaque valeur propre correspond un argument noté  $\arg(\lambda_i)$ .

En se basant sur le théorème 3.1, le système hyperchaotique d'ordre fractionnaire (3.10) peut exhiber un attracteur étrange uniquement lorsqu'il admet au moins un point d'équilibre instable. Plus précisément, il faut qu'au moins un de ses points d'équilibre satisfait la condition suivante

$$q > \frac{2}{\pi} \quad |\arg(\lambda_i)| = \frac{2}{\pi} \quad \arctan \left( \frac{|Im(\lambda_i)|}{|Re(\lambda_i)|} \right) \quad (3.11)$$

avec  $i = (1 \cdots 4)$ . Les fonctions  $Im(\lambda_i)$  et  $Re(\lambda_i)$  représentent respectivement la partie imaginaire et la partie réelle d'une valeur propre  $\lambda_i$ . Pour illustrer la condition de stabilité (3.10), la Fig.3.10 présente les régions de stabilité et d'instabilité du

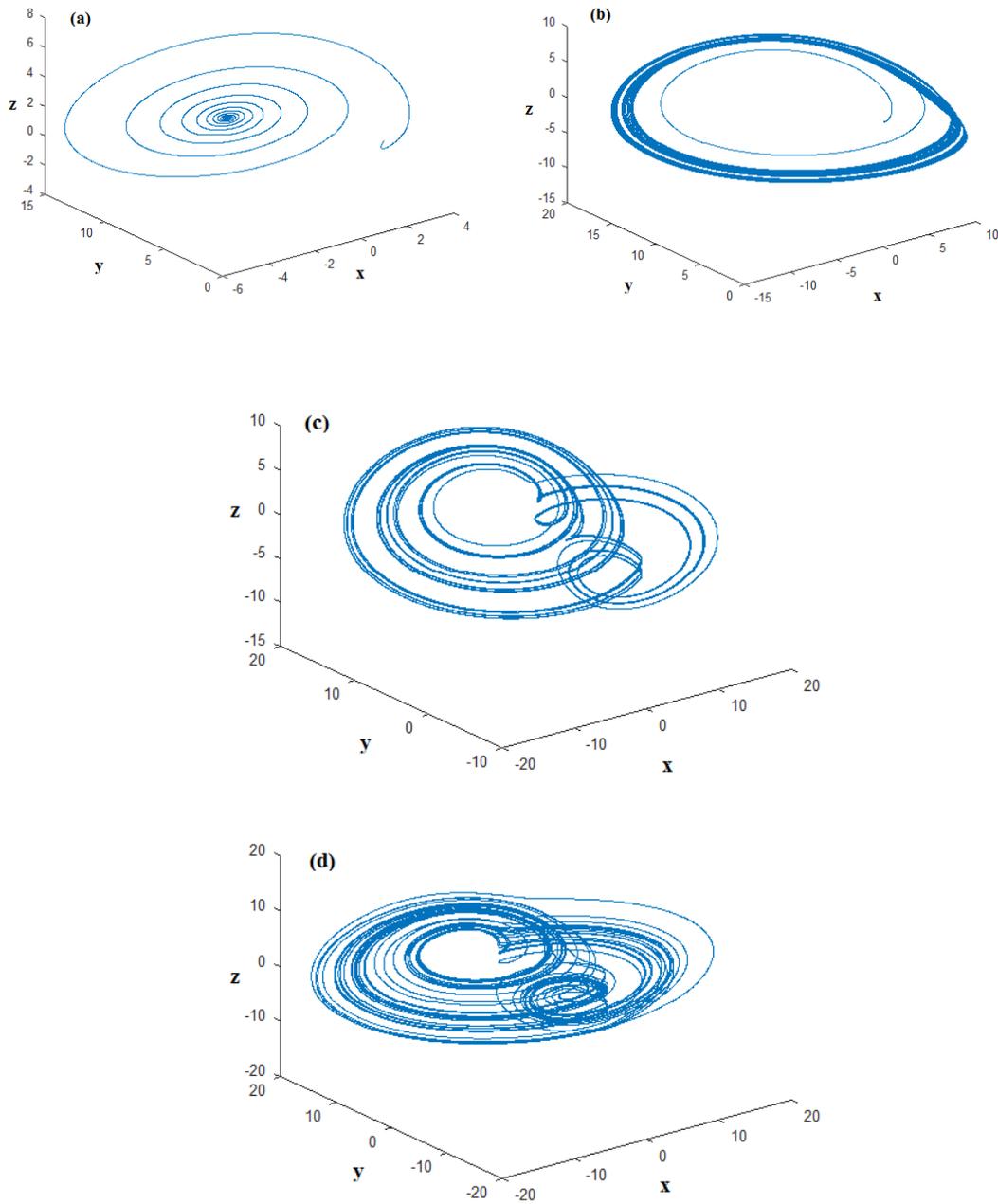


FIGURE 3.7 – Formes d'attracteurs possibles du système (3.10) : (a)  $q = 0.88$ , (b)  $q = 0.96$ , (c)  $q = 0.97$ , (d)  $q = 0.99$ .

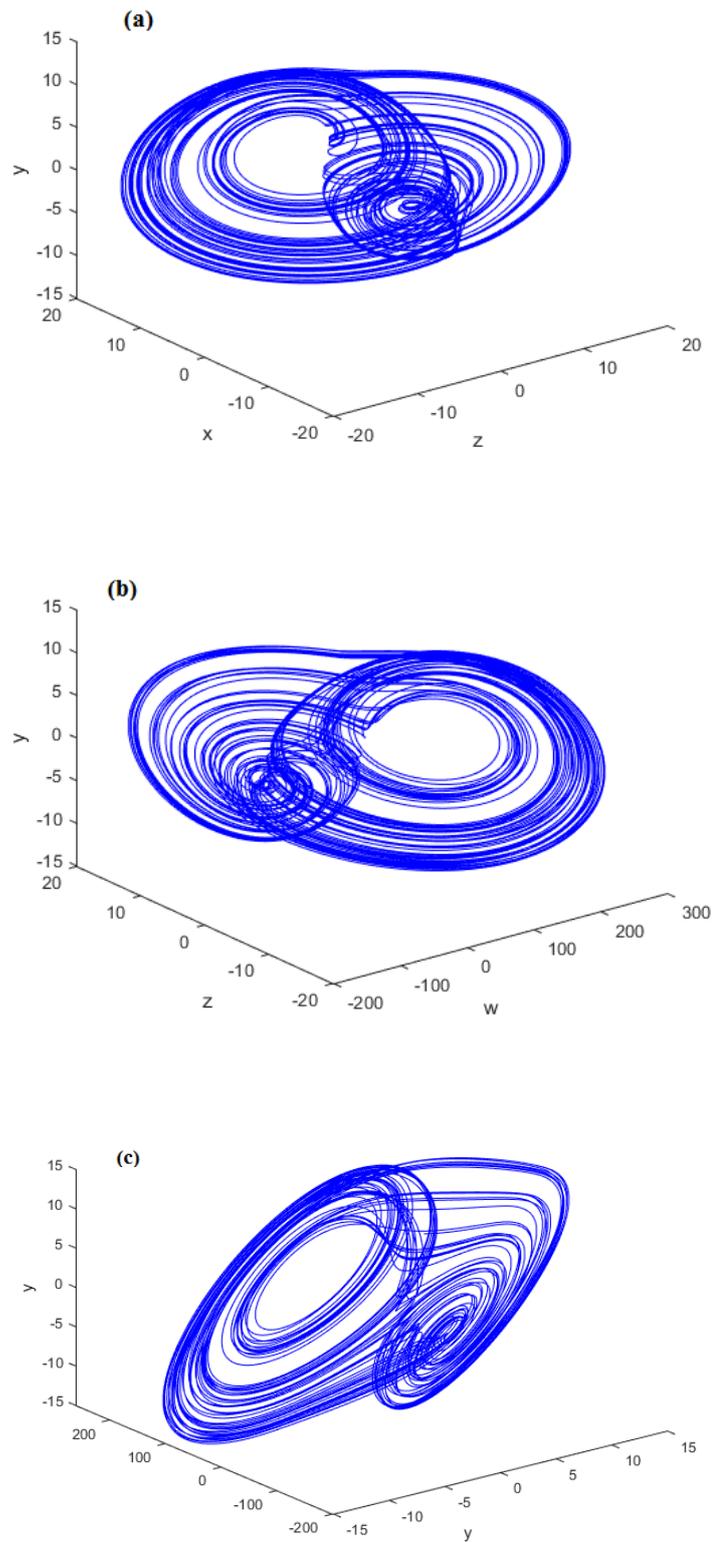


FIGURE 3.8 – Portraits de phase du système (3.10) lorsque  $q = 0.98$  : (a)  $xyz$ ; (b)  $wyz$ ; (c)  $wxz$ .

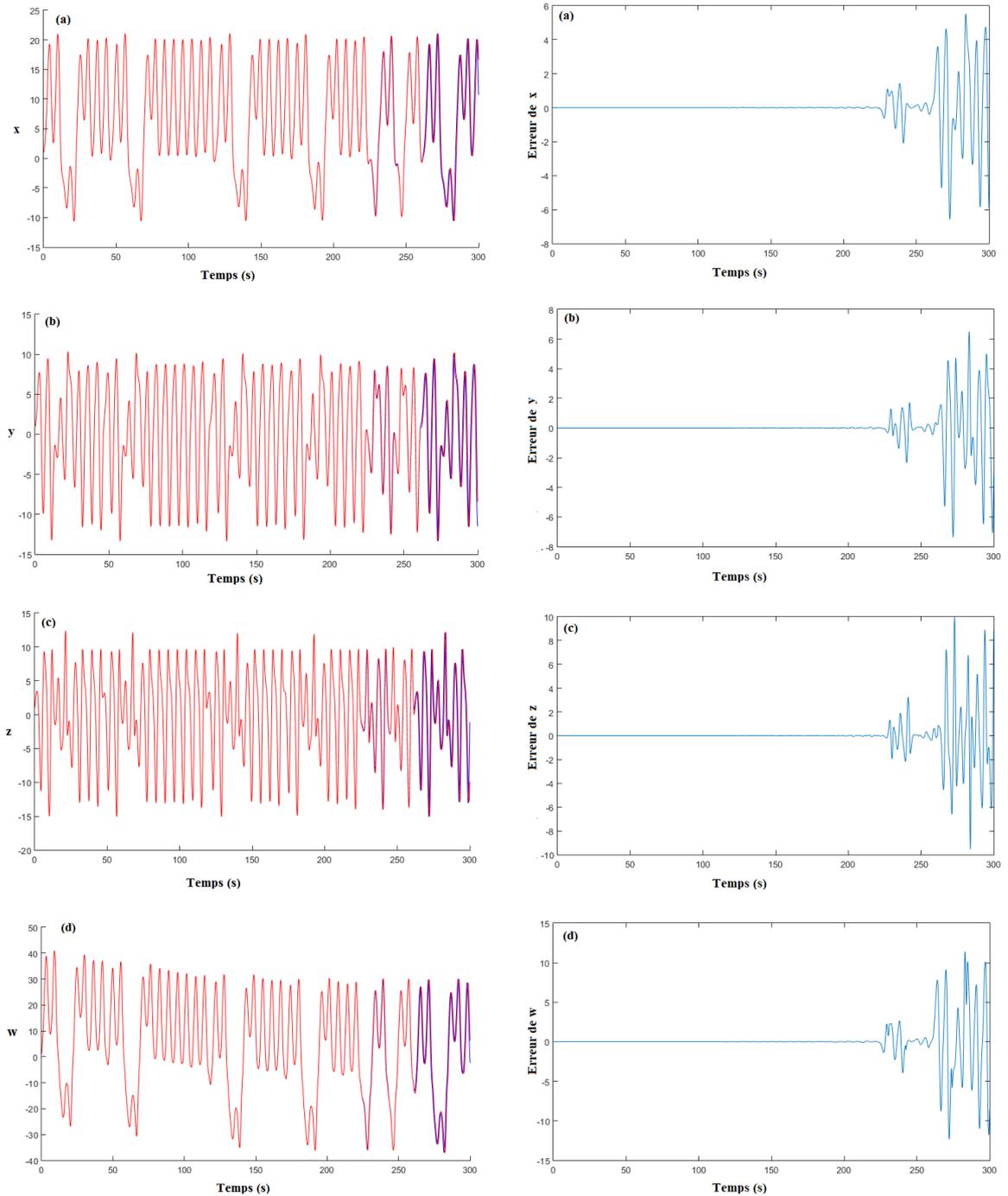
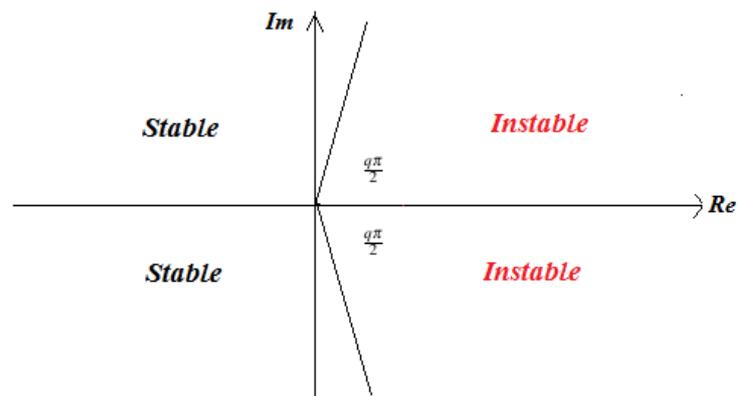


FIGURE 3.9 – Sensibilité aux conditions initiales de la variable d'état  $w$  du système (3.10) en bleu  $(1, 1, 1, 1)$  et en rouge  $(1 + 10^{-6}, 1, 1, 1)$ .

TABLE 3.4 – Analyse de stabilité du système fractionnaire (3.10)

Points d'équilibre	Matrice Jacobienne	Valeurs propres	$\arg(\lambda_i)$
$H_1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & -a & 0 \\ 0 & k & 0 & -h \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -0.001$ $\lambda_3 = -0.465 + 0.945i$ $\lambda_4 = -0.465 - 0.945i$	$\arg(\lambda_1) = 0$ $\arg(\lambda_2) = \pi$ $\arg(\lambda_3) = 2.027$ $\arg(\lambda_4) = -2.027$
$H_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta_1 & -b & -a & 0 \\ \Delta_1 & k & 0 & -h \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -0.001$ $\lambda_2 = -1.738$ $\lambda_3 = -0.404 + 1.533i$ $\lambda_4 = -0.404 - 1.533i$	$\arg(\lambda_1) = \pi$ $\arg(\lambda_2) = \pi$ $\arg(\lambda_3) = 1.313$ $\arg(\lambda_4) = -1.313$
$\Delta_1 = 2dx - 2cx + (r - 1)mx^{r-2}$			
$H_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta_2 & -b & -a & 0 \\ \Delta_2 & k & 0 & -h \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = -0.001$ $\lambda_2 = -1.193$ $\lambda_3 = -0.131 + 1.186i$ $\lambda_4 = -0.131 - 1.186i$	$\arg(\lambda_1) = \pi$ $\arg(\lambda_2) = \pi$ $\arg(\lambda_3) = 1.460$ $\arg(\lambda_4) = -1.460$
$\Delta_2 = -2dx - 2cx - (r - 1)mx^{r-2}$			


 FIGURE 3.10 – Régions de stabilité et d'instabilité du système (3.10) lorsque  $q = 0.99$ .

système (3.10) lorsque son paramètre fractionnaire  $q$  est égal à 0.99.

En se référant à la Table.3.4 et le théorème 3.1, il est évident que pour le pre-

mier point d'équilibre  $H_1$ , l'une de ses valeurs propres correspondantes appartient à la région de stabilité; c'est  $\lambda_1$ . En revanche, toutes les autres valeurs  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  appartiennent à la région d'instabilité. Par contre, pour les deux autres points d'équilibre  $H_2$  et  $H_3$ , leurs deux premières valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  appartiennent à la région d'instabilité et les deux autres  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  appartiennent à la région de stabilité. Conformément au système hyperchaotique, nous ne pouvons pas définir la singularité de ces points car les définitions 2.1 et 2.2 ne sont valables que pour des systèmes tridimensionnels.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord proposés le modèle hyperchaotique avec un polynôme d'ordre non entier. L'analyse de ses caractéristiques élémentaires a été présentée. Le système obtenu est caractérisé par deux LEs positifs et un attracteur asymétrique. En se basant sur la définition de Caputo pour le calcul fractionnaire, nous avons proposé le modèle d'ordre fractionnaire correspondant. L'analyse du comportement dynamique du système hyperchaotique d'ordre fractionnaire a été présentée en se focalisant essentiellement sur l'analyse de la stabilité. De plus, nous allons proposer dans le chapitre suivant l'implémentation du système proposé sur un circuit électrique pour pouvoir l'exploiter par la suite.

# Chapitre 4

Implémentation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques proposés

## 4.1 Introduction

La réalisation expérimentale des systèmes non linéaires permet leur exploitation dans les applications d'ingénierie. Vue la complexité de ces systèmes et les incertitudes introduites par les composants électriques qui seront utilisés, la réalisation expérimentale des circuits relatifs aux systèmes chaotiques et hyperchaotiques présente encore plusieurs difficultés. Dans ce cadre, nous tenterons dans ce chapitre d'implémenter et de réaliser des systèmes chaotiques et hyperchaotiques proposés dans les chapitres précédents.

Pour ce faire, nous proposerons, tout d'abord, de réaliser les circuits électriques de toutes les fonctions non linéaires élémentaires ainsi que l'opérateur dérivée fractionnaire qui les constituent avant de passer à la réalisation des circuits électriques dans leur totalité et ceci dans l'objectif de percevoir tous les problèmes élémentaires qui surgissent. Ce chapitre est clôturée par une étude expérimentale qui valide une partie des résultats de simulation obtenus.

## 4.2 Implémentation des fonctions non linéaires

Tout au long de ce chapitre, nous avons choisi les amplificateurs opérationnels LM741. Ce type d'amplificateur est caractérisé par une tension de saturation de  $\pm 15V$  qui englobe les valeurs des tensions désirées aux bornes des circuits proposés. D'autre part, le rapport qualité prix de ce composant est respectable pour des applications académiques simples. Cet amplificateur permet d'obtenir les résultats désirés. Nous aurons pu choisir l'amplificateur TL081 dont les caractéristiques se rapprochent de l'amplificateur LM741. L'amplificateur TL081 est composé par deux amplificateurs internes qui permet d'alléger la modélisation des circuits. Dans notre application le nombre d'amplificateurs utilisés n'est pas très grand, ainsi l'amplificateur opérationnel LM741 suffit.

### 4.2.1 La fonction valeur absolue

La Fig.4.1 représente le circuit électrique correspondant à la fonction valeur absolue. Pour la modélisation de ce dernier, nous avons utilisé des diodes et un amplificateur opérationnel. Les résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont égales à  $1k\Omega$ . L'équation de la sortie  $S$  du circuit dépend du signe du signal d'entrée  $x$  tel que

$$\begin{cases} S = x & \text{si } x \geq 0 \\ S = \frac{-R_2}{R_1} x = -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

En effet, si  $x \geq 0$  alors la sortie de l'amplificateur est négative. Ainsi,  $D_1$  est bloquée et  $D_4$  est passante. Par contre, si  $x < 0$  alors la sortie de l'amplificateur est positive. Ainsi,  $D_1$  est passante et  $D_4$  est bloquée. Les résultats de simulation du circuit représenté par la Fig.4.1 via le logiciel Multisim sont représentés par la Fig.4.2.

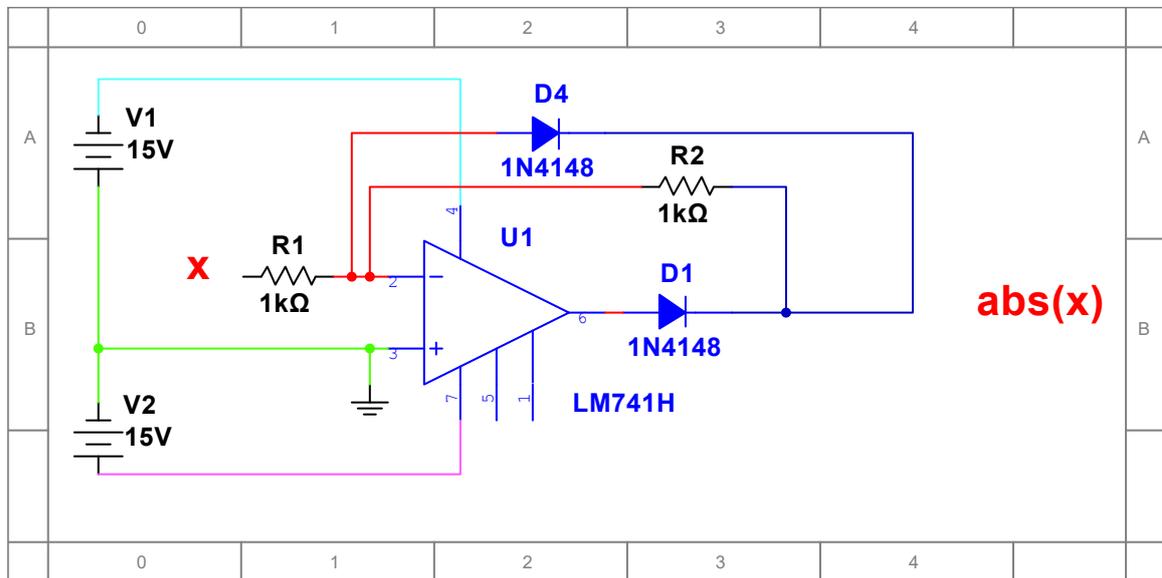


FIGURE 4.1 – Conception du circuit valeur absolue.

Le signal de sortie du circuit traduit la fonction de la valeur absolue. Toutefois, nous constatons que le signal de sortie comporte des imperfections. Ceci est du à la nature des composants électriques utilisés.

#### 4.2.2 La fonction signe

La Fig.4.3 modélise le circuit correspondant à la fonction signe en utilisant deux amplificateurs opérationnels LM741. Le premier joue le rôle d'un comparateur. En effet, le signal d'entrée est comparé par rapport à la masse. Plus précisément, si le signal  $x$  est positif (respectivement négatif), alors le signal de sortie du premier amplificateur sera  $V_2$  (respectivement  $V_1$ ). Le second amplificateur joue le rôle d'un inverseur. De plus, les deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  permettent de fixer le gain du signal de sortie. Pour avoir un signal carré parfait d'amplitude 1, nous avons choisi un gain de  $\frac{1}{14}$ . Ce choix a été fait après plusieurs essais en variant la valeur des résistances. Les résultats de simulation du circuit de la fonction signe sont représentés par la Fig.4.4.

Le signal d'entrée du circuit est un signal sinusoïdal d'amplitude  $2V$ . Le signal de sortie obtenu est un signal carré d'amplitude  $1V$  qui traduit la fonction signe.

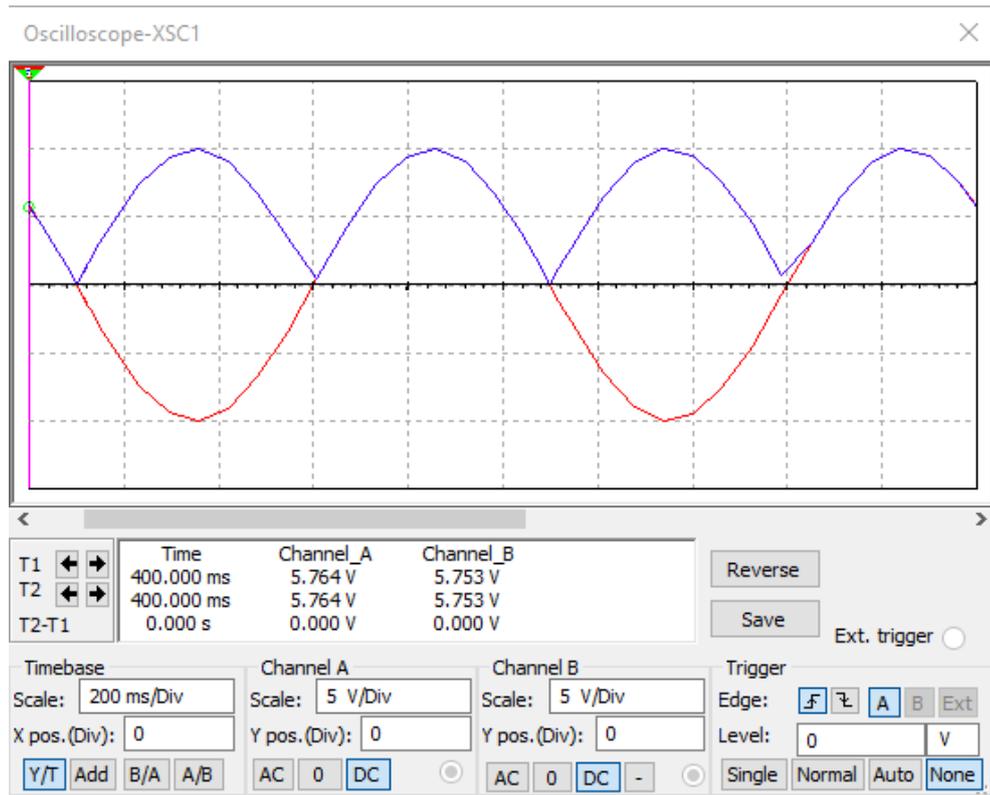


FIGURE 4.2 – Résultats de simulation du circuit valeur absolue sous Multisim : le signal d'entrée en bleu et le signal de sortie en rouge.

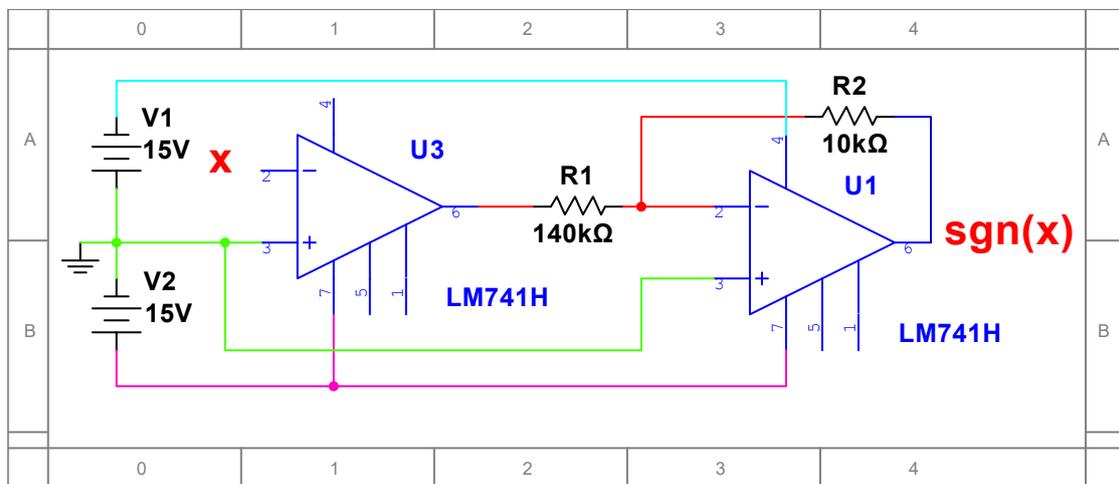


FIGURE 4.3 – Conception du circuit fonction signe.

Toutefois, nous constatons que le signal de sortie n'est pas un signal parfait. Ceci est dû à la nature des composants électriques utilisés. Toutes ces imperfections peuvent agir sur le comportement dynamique final d'où la difficulté majeure d'obtenir des comportements chaotiques.

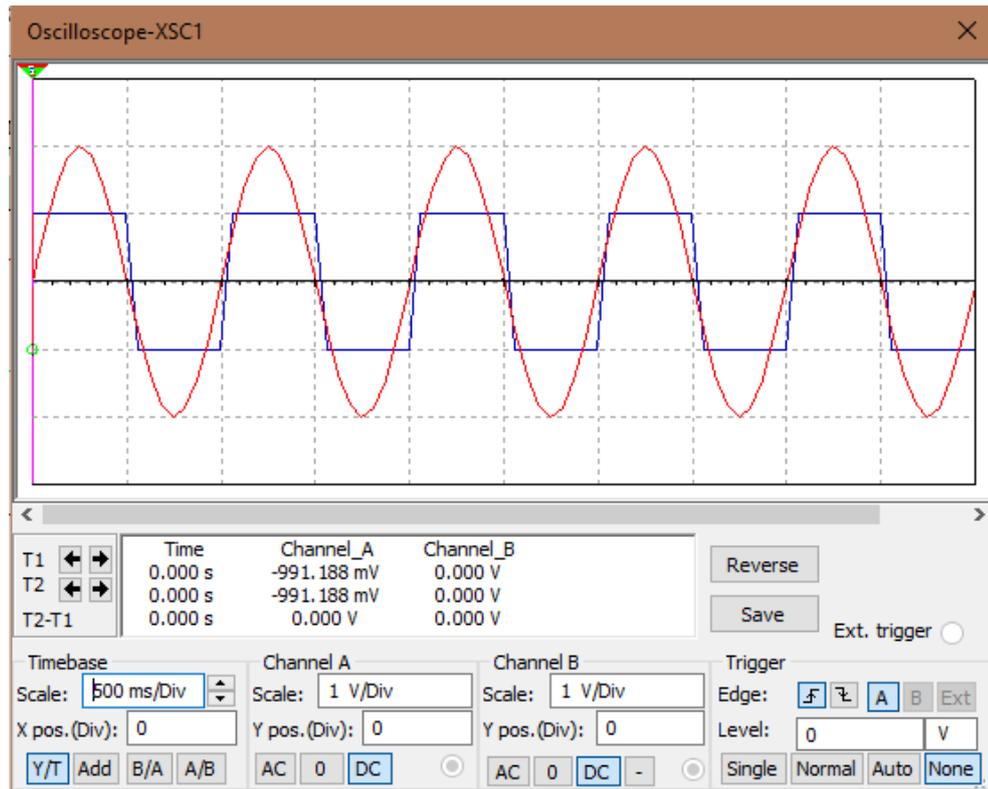


FIGURE 4.4 – Résultats de simulation du circuit fonction signe sous Multisim : le signal d'entrée en bleu et le signal de sortie en rouge.

### 4.2.3 La fonction racine carrée

Pour la modélisation électrique de la fonction racine carrée, il existe quelques méthodes dont une qui se base sur l'utilisation des amplificateurs opérationnels [Kamsri et al., 2008]. Dans nos travaux, nous avons opté pour ce type de modélisation car elle permet l'utilisation de composants électriques simples et peu coûteux. Le circuit proposé se compose de deux amplificateurs opérationnels comme éléments actifs. En règle générale, l'étage de sortie d'un amplificateur opérationnel standard de classe AB peut fournir la caractéristique quadratique existante dans le courant d'alimentation [Surakamponorn, 1988]. La Fig.4.5 décrit les composants internes d'un amplificateur opérationnel de classe AB qui permettent l'obtention d'un tel signal.

Le circuit analogique correspondant à la fonction racine carrée est décrit par la Fig.4.6. L'équation relative à sa sortie  $V_{out}$  est égale à :

$$V_{out} = k\sqrt{V_{in}}, \quad \text{avec} \quad K = \sqrt{\frac{8I_s R_1 R_7 (2R_4 + R_6)}{R_2 R_4 (R_5 + R_7)}} \quad (4.2)$$

Théoriquement, pour aboutir à un signal quadratique parfait, il faut que le para-

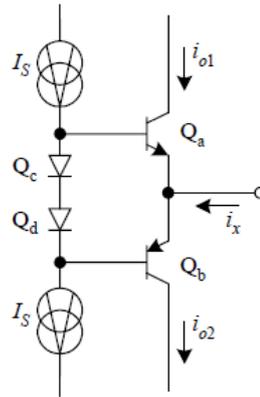


FIGURE 4.5 – Composants internes d'un amplificateur opérationnel de classe AB [Kamsri et al., 2008].

mètre  $K$  soit égal à 1. Ainsi, en utilisant des amplificateurs  $UA741$ , les deux courants internes sont respectivement égaux à  $0.8mA$  et  $0.261mA$ . Pour faciliter le calcul, tous les paramètres du circuit sont fixés en laissant uniquement une seule résistance variable qui nous permettra de varier le gain  $K$ . Cette variable est la résistance  $R_5$ . Nous avons fixé les valeurs de tous les autres composants tels que

$$-V_{cc} = -5V, \quad V_c = 2.878V$$

$$R_1 = 1K\Omega, \quad R_2 = R_3 = R_4 = R_6 = R_7 = 2K\Omega$$

Pour étudier ce circuit, nous l'avons, tout d'abord, modélisé sous Multisim comme représenté par la Fig.4.7. La résistance  $R_5$  est égale à  $8.5K\Omega$  pour aboutir à un signal quadratique.

La première source de tension  $V_{r1}$  doit être égale à  $2.878V$  pour que le gain  $K$  soit égal à 1. Cependant, dans l'expérimentation, il est assez difficile de travailler avec une tension stabilisée avec une précision de trois chiffres après la virgule. Ainsi, après plusieurs observations, nous avons constaté que la fonction racine carrée est correctement obtenue si la tension source  $V_{r1}$  est incluse dans l'intervalle  $[2.7V; 3V]$ . De ce fait, nous avons résolu le problème de la précision. Par la suite, toutes les expérimentations sont réalisées avec une tension  $V_{r1}$  égale à  $2.9V$ .

Le signal d'entrée de ce circuit doit être impérativement un signal positif. Les résultats de simulation via le logiciel Multisim sont représentés par la Fig.4.8. Le signal d'entrée choisi est un signal sinusoïdal d'amplitude  $3V$  et un décalage de  $3V$  (offset). En se basant sur les valeurs de simulation, le signal d'entrée a une valeur d'amplitude maximale de l'ordre de  $6V$  tandis que le signal de sortie a une valeur maximale de l'ordre de  $2.44V$  égale à  $\sqrt{6}V$ . Ainsi, ces tracés confirment le bon fonctionnement

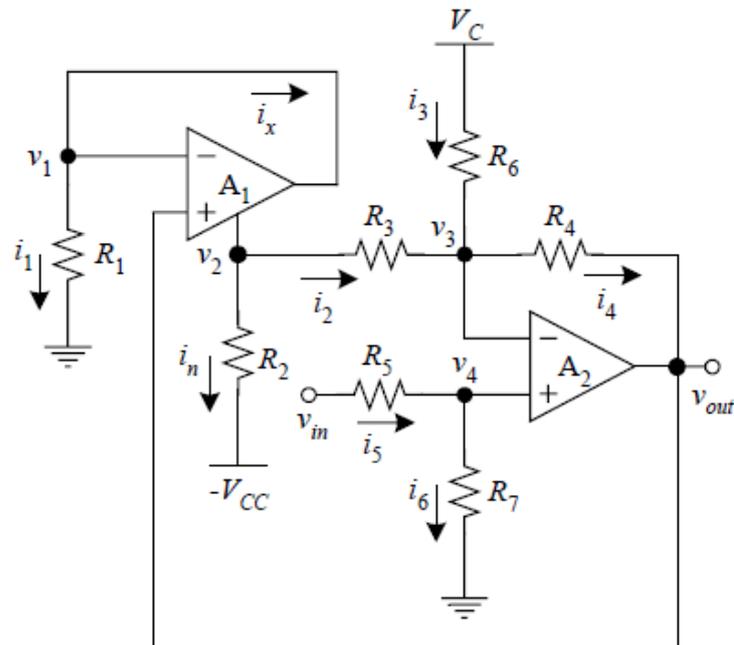


FIGURE 4.6 – Circuit fonction racine carrée [Kamsri et al., 2008].

du circuit sous le logiciel Multisim.

## 4.3 Implémentation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

### 4.3.1 Approximation de la dérivée fractionnaire

En se basant sur la définition 3.1 de Caputo et en supposant que les conditions initiales sont nulles, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire est égale à l'équation suivante [Podlubny, 1998]

$$\mathcal{L}\{D^q x(t)\} = S^q \mathcal{L}\{x(t)\}. \quad (4.3)$$

Ainsi, l'intégration d'ordre fractionnaire  $q$  est représentée par la fonction de transfert  $F(s) = \frac{1}{s^q}$  dans le domaine fractionnaire avec  $S$  l'opérateur de Laplace. Vu la complexité du calcul fractionnaire, nous devons approximer la fonction de transfert d'ordre fractionnaire  $F(s)$  par une fonction de transfert d'ordre entier. Pour ce faire, il existe certaines méthodes d'approximation et de discrétisation. Les plus utilisées sont celles qui reposent sur le concept des pôles de puissance fractionnaire (FPP) à savoir la méthode d'approximation  $n$  zéros et  $n$  pôles ou bien  $n$  zéros et  $n-1$  pôles. La méthode la plus célèbre est l'approximation de Charef [Charef et al., 1992].

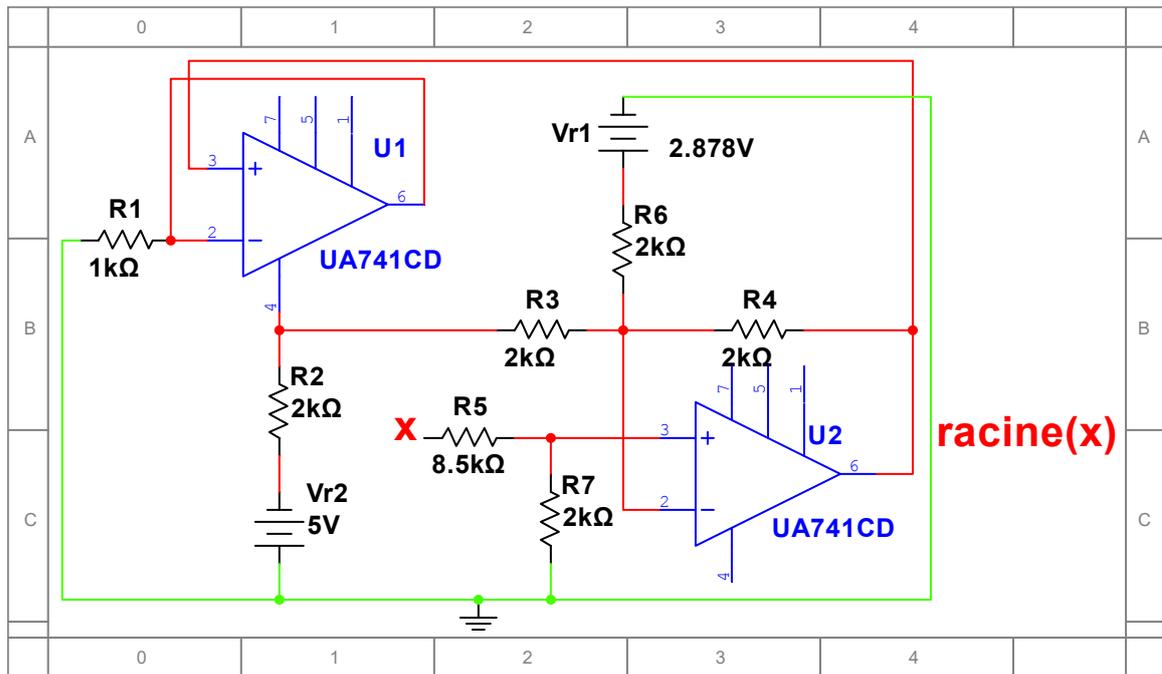


FIGURE 4.7 – Conception du circuit racine carrée sous Multisim.

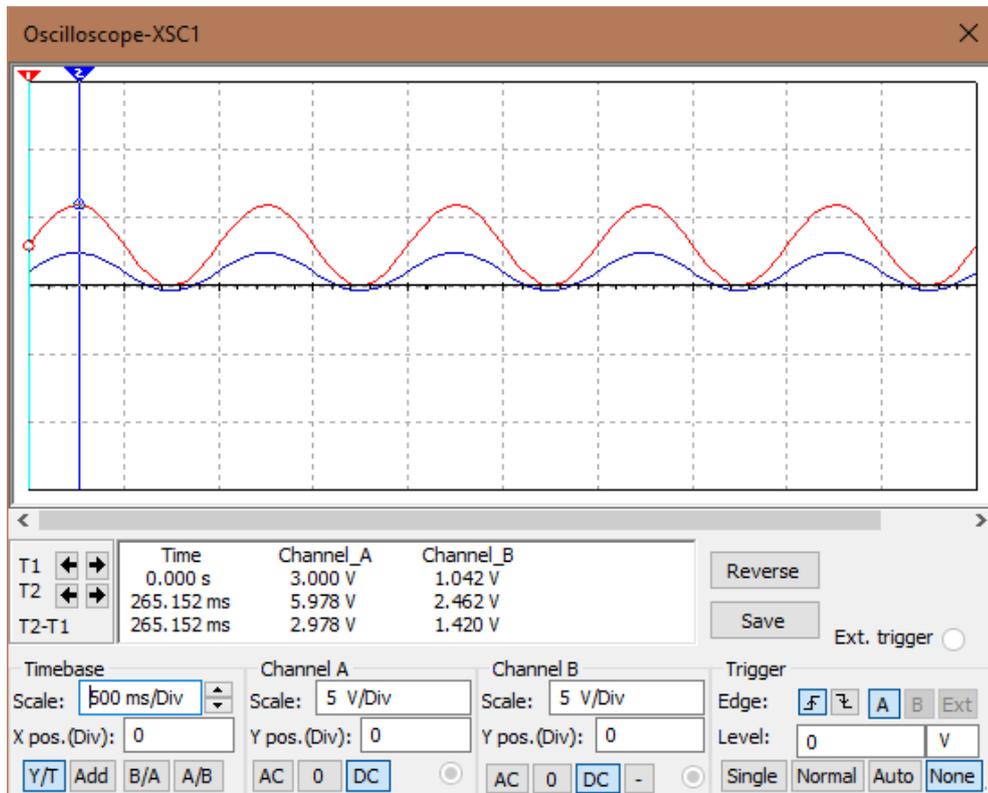


FIGURE 4.8 – Résultats de simulation du circuit fonction racine carrée sous Multisim : le signal d'entrée en bleu et le signal de sortie en rouge.

L'approximation de Charef permet de réaliser une approximation linéaire dans le domaine fréquentielle. Plus précisément, l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire ( $\frac{1}{s^q}$ ) dépendra de la bande passante désirée et de la différence d'amplitude entre les diagrammes de Bode avant et après approximation.

**Théorème 4.1 [Charef et al., 1992]** : L'approximation de Charef permet d'approximer une fonction de transfert d'ordre fractionnaire par une fonction de transfert d'ordre entier tel que

$$\frac{1}{s^q} \simeq \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^q} \simeq \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (4.4)$$

avec  $N$  l'ordre d'approximation et  $q$  l'ordre fractionnaire de la fonction de transfert.  $P_i$  et  $Z_i$  sont les pôles et les zéros de l'approximation de Charef.  $\frac{1}{p_T}$  est une constante du temps de relaxation.

Selon cette méthode, les pôles  $P_i$  et les zéros  $Z_i$  sont définis tels que :

$$\begin{aligned} P_0 &= P_\alpha \sqrt{b}, \\ P_i &= P_0 (ab)^i, \quad i = 1..N, \\ Z_i &= P_0 a (ab)^i, \quad i = 0..N - 1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec  $P_\alpha$  une fréquence limite choisie.  $a$  est le taux de localisation d'un zéro par rapport au pôle précédent et  $b$  est le taux de localisation d'un pôle par rapport au zéros précédent. Ces deux taux sont calculés comme suit

$$\begin{aligned} a &= 10^{\left(\frac{Y}{10(1-q)}\right)}, \\ b &= 10^{\left(\frac{Y}{10q}\right)}, \end{aligned}$$

avec  $Y$  l'erreur d'approximation qui traduit la différence d'amplitude entre les diagrammes de Bode avant et après approximation. Elle est alors exprimée en dB. Le choix de  $Y$  n'est pas arbitraire car il faut tenir compte de la marge d'erreur tolérée lors de l'approximation. Souvent,  $Y$  est égale à 1 ou 2 dB.

L'ordre d'approximation  $N$  est assigné pour minimiser l'erreur d'approximation

maximale. Il est calculé à partir de la définition suivante

$$N = \text{integer} \left( \frac{\log\left(\frac{w_{max}}{P_0}\right)}{\log(ab)} \right) + 1 \quad (4.6)$$

avec  $w_{max}$  la pulsation correspondante à l'erreur maximale et *integer* une fonction qui calcule la partie entière. Dans l'approximation de Charef, la pulsation  $w_{max}$  et la fréquence du coin  $P_\alpha$  sont choisis arbitrairement.

Dans la littérature, plusieurs intégrateurs d'ordre fractionnaire ont été approxi-  
més par la méthode de Charef. Il existe un tableau récapitulatif de ces ordres allant  
de 0.1 à 0.9 avec un pas de 0.1 et une erreur d'approximation de l'ordre de 1 dB. Ce  
tableau est présenté à la page 341 dans la référence [Ahmad and Sprott, 2003].

Le système d'ordre fractionnaire (3.10) exhibe un attrateur étrange lorsque  $q \in$   
]0.96...1[. Ainsi, nous devons approximer la fonction de transfert  $\frac{1}{s^{0.97}}$  correspondante  
à la dérivé fractionnaire  $D^{0.97}$ . En se basant sur les nouvelles recherches dans la  
littérature, nous n'avons pas trouvé l'approximation correspondante à  $q = 0.97$ .  
Ainsi, nous appliquerons la méthode de Charef décrite auparavant. Pour ce faire,  
nous avons sélectionné les paramètres suivants

$$P_\alpha = 10^{-3}, \quad w_{max} = 1000, \quad Y = 1dB.$$

$P_\alpha$  et  $w_{max}$  sont les fréquence limites de l'approximation. A l'aide du logiciel Matlab,  
les calculs donnent

$$\begin{aligned} N &= 2, & a &= 2154.4346, & b &= 1.2679 \\ P_0 &= 0.0011, & P_1 &= 3.0759, & P_2 &= 8402.3085, \\ Z_0 &= 2.4259, & Z_1 &= 6626.8301. \end{aligned} \quad (4.7)$$

C'est une approximation d'ordre 2 (deux zéros et trois pôles). La fonction de transfert

d'approximation obtenue est la suivante

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^{0.97}} &= \frac{\left(1 + \frac{s}{Z_0}\right) \left(1 + \frac{s}{Z_1}\right)}{\left(1 + \frac{s}{P_0}\right) \left(1 + \frac{s}{P_1}\right) \left(1 + \frac{s}{P_2}\right)} \\
&= \frac{P_0 P_1 P_2}{Z_0 Z_1} \frac{(s + Z_0) (s + Z_1)}{(s + P_0) (s + P_1) (s + P_2)} \\
&= \frac{0.018 (s + 2.4259) (s + 6626.83)}{(s + 0.0011) (s + 3.0759) (s + 8402.308)} \\
&= \frac{0.018s^2 + 12s + 29.1}{s^3 + 8405.4s^2 + 25854s + 28.4291}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Afin de vérifier l'exactitude des résultats obtenus, nous avons réalisé le diagramme d'amplitude de Bode pour l'intégrateur fractionnaire d'ordre 0.97 et pour la fonction de transfert approximée obtenue. Pour ce faire, nous avons utilisé le toolbox FOMCOM avec le logiciel Matlab. Ce dernier permet de réaliser le diagramme de Bode d'une fonction de transfert d'ordre fractionnaire. Concernant la fonction de transfert approximée, nous avons utilisé les fonctions prédéfinies sous Matlab. La Fig.4.9 regroupe les résultats obtenus.

Les deux diagrammes de Bode obtenus sont similaires. Par contre, puisque les deux simulations sont faites avec deux méthodes différentes (la boîte à outils FOMCOM et un algorithme Matlab), il était difficile de les regrouper sur un même graphe. Pour remédier à ce problème, nous avons identifié les coordonnées de trois points spécifiques sur les deux trajectoires. Ces points sont  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  correspondant respectivement aux fréquences  $10^{-3}$ , 1 et  $10^3$  (rad/s). La Table.4.2 récapitule ces coordonnées.

D'après la Fig.4.9 et la Table.4.2, nous pouvons conclure que la méthode de Charef donne de très bons résultats d'approximation avec une marge d'erreur de 1 dB dans la plage fréquentielle  $[P_\alpha, w_{max}] = [10^{-3} \quad 10^3]$ .

### 4.3.2 Conception du circuit

Nous avons défini le circuit électrique correspondant à la fonction de transfert approximée de l'intégrateur d'ordre non entier  $\frac{1}{s^{0.97}}$ . En fait, pour les approximations de  $(N + 1)$  pôles et  $N$  zéros, plusieurs circuits sont utilisés. La Fig.4.10 représente l'un des circuits utilisés pour modéliser la fonction de transfert approximée  $\frac{1}{s^q}$  selon

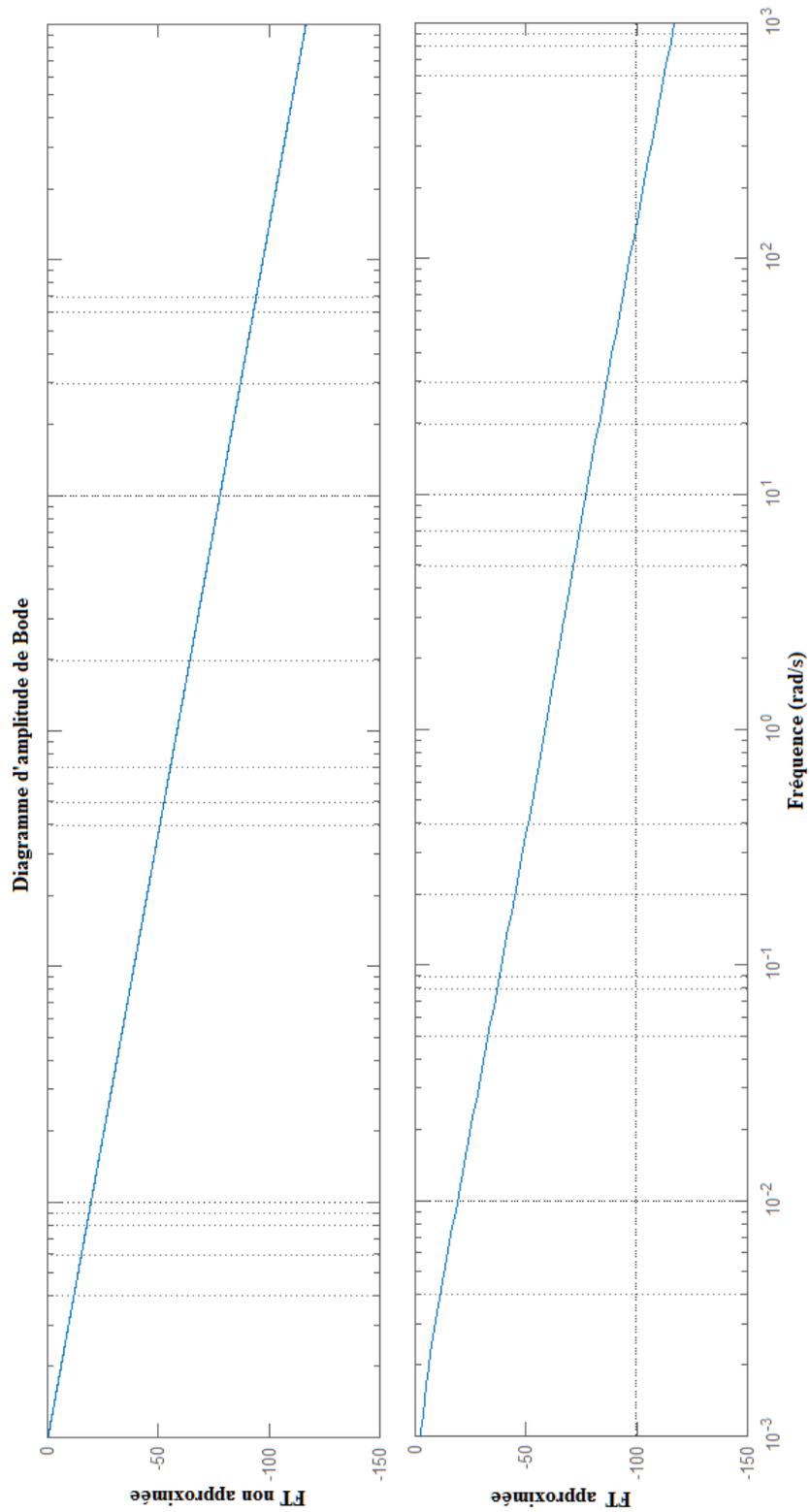
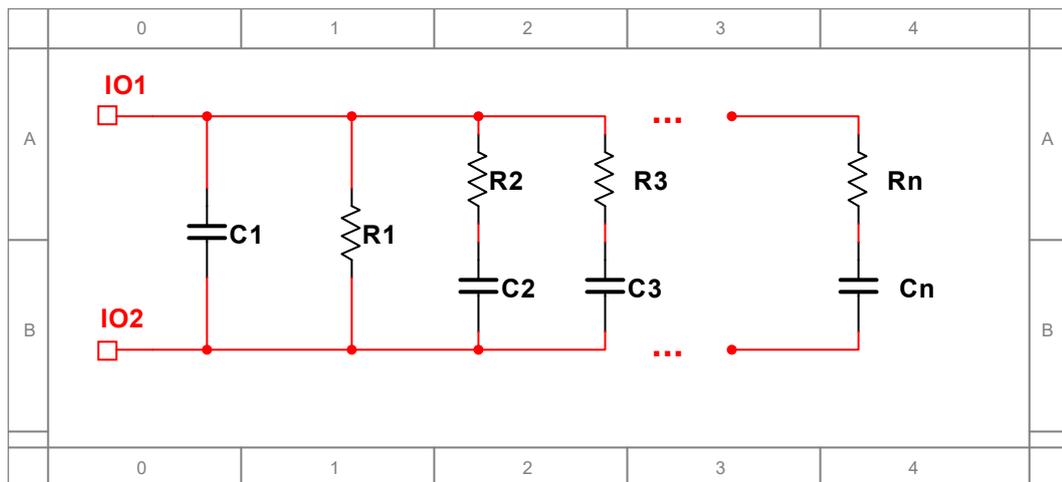


FIGURE 4.9 – Diagramme d’amplitude de Bode de la fonction de transfert (4.8) d’ordre fractionnaire avant et après approximation avec  $q = 0.97$ .

TABLE 4.1 – Coordonnées des points  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  pour les deux trajectoires de la fonction de transfert d'ordre fractionnaire.

Points	Amplitude en dB (fonction de transfert avant approximation)	Amplitude en dB (fonction de transfert après approximation)
$H_1$	-0.4	-0.71
$H_2$	-58.5	-59.1
$H_3$	-116	-116

la méthode de Charef [Ruo-Xun and Shi-Ping, 2009]. Le paramètre  $n$  est égal au nombre de pôles.

FIGURE 4.10 – Circuit fonction de transfert approximée de  $\frac{1}{s^m}$  selon la méthode de Charef.

Dans notre cas, le nombre de pôles est  $N + 1 = 3$ . Ainsi, nous obtenons un circuit à trois résistances et trois condensateurs. En utilisant les théories des circuits en parallèle et en série, nous obtenons la fonction de transfert  $H(s)$  correspondante au circuit de l'ordre 0.97 approximé selon le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 H(s) &= R_1 // \frac{1}{sC_1} // (R_2 + \frac{1}{sC_2}) // (R_3 + \frac{1}{sC_3}) \\
 &= \frac{1}{C_1} \frac{(s + \frac{1}{R_2C_2}) (s + \frac{1}{R_3C_3})}{s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

avec

$$\alpha = \frac{(R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2) R_3C_3 + R_1R_2C_2 (C_1 + C_3)}{R_3R_2R_1C_1C_2C_3}$$

$$\beta = \frac{R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2 + R_1C_3 + R_3C_3}{R_3R_2R_1C_1C_2C_3}$$

$$\gamma = \frac{1}{R_3R_2R_1C_1C_2C_3}$$

Par identification entre les équations (4.8) et (4.9), nous obtenons les valeurs numériques des résistances et des condensateurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 10.29 \text{ k}\Omega, & C_1 &= 0.5524 \text{ nF}, \\
 R_2 &= 293.70 \text{ k}\Omega, & C_2 &= 0.1396 \text{ nF}, \\
 R_3 &= 9.6 \text{ k}\Omega, & C_3 &= 0.1 \text{ nF}.
 \end{aligned}$$

Finalement, le circuit électrique de l'intégrateur d'ordre 0.97 est obtenu selon la Fig.4.11.

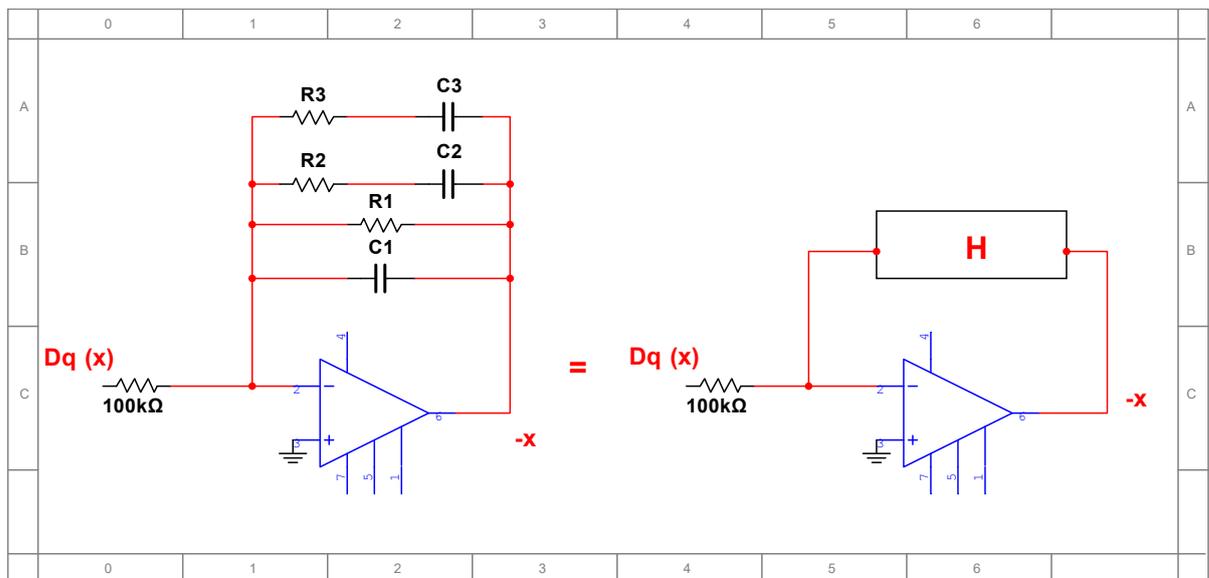


FIGURE 4.11 – Conception du circuit intégrateur d'ordre fractionnaire 0.97.

## 4.4 Implémentation des systèmes proposés

### 4.4.1 Conception du circuit électrique du système chaotique

Dans cette partie, nous nous sommes basés sur le système (2.3) décrit dans le second chapitre. Pour la réalisation du circuit électrique correspondant, les paramètres du système seront remplacés par des gains relatifs à des composants électriques simples à savoir des résistances et des condensateurs. Ce modèle est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{R_1 C_1} y, \\ \dot{y} &= \frac{1}{R_2 C_2} z, \\ \dot{z} &= -\frac{1}{R_3 C_3} z - \frac{1}{R_4 C_3} y + \frac{1}{R_5 C_3} x - \frac{1}{R_6 C_3} |x|x \end{cases} \quad (4.10)$$

Les variables d'états  $(x, y, z)$  sont obtenues en appliquant uniquement des intégrateurs simples à partir des dérivées premières  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . Ces intégrateurs sont conçus en utilisant un amplificateur opérationnel LM741, une capacité de  $1nF$  et une résistance de  $10k\Omega$ .

Pour choisir les valeurs des composants électriques, on détermine tout d'abord ces valeurs par identification avec le modèle mathématique (4.10). Toutefois, ces valeurs ne génèrent pas le plus souvent le comportement désiré vu les incertitudes introduites par les composants électriques. Ceci est dû à la sensibilité des systèmes chaotiques aux petites variations des paramètres. De plus, les fonctions non linéaires ne sont pas parfaites, il existe parfois un petit décalage qui est capable de chambouler tout le comportement dynamique du système. Par conséquent, et en tenant compte de toutes ces considérations, nous avons fixé les valeurs des résistances et des condensateurs telles que

$$C_1 = C_2 = C_3 = 1 \text{ nF}, R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 100 \text{ k}\Omega, R_5 = R_6 = 40 \text{ k}\Omega,$$

Le circuit conçu avec le logiciel MultiSIM est décrit par la Fig.4.12. Toutes les multiplications sont réalisées par des multiplicateurs AD633. De plus, tous les dispositifs actifs (LM741 et AD633) sont alimentés par une tension de  $\pm 15V$ . Afin d'obtenir les attracteurs désirés, certaines considérations ont été prises en compte pour éviter la dégradation du comportement dynamique. L'une de ces considérations est l'ajustement des valeurs des résistances et des condensateurs relatifs aux opérations d'intégration. La Fig.4.13 représente les tracés des attracteurs chaotiques symétriques à la sortie du circuit proposé. En comparant les différents attracteurs obtenus sous Matlab et Multisim, un bon accord qualitatif entre les simulations numériques sous Matlab et les simulations électriques sous Multisim ont été observés.

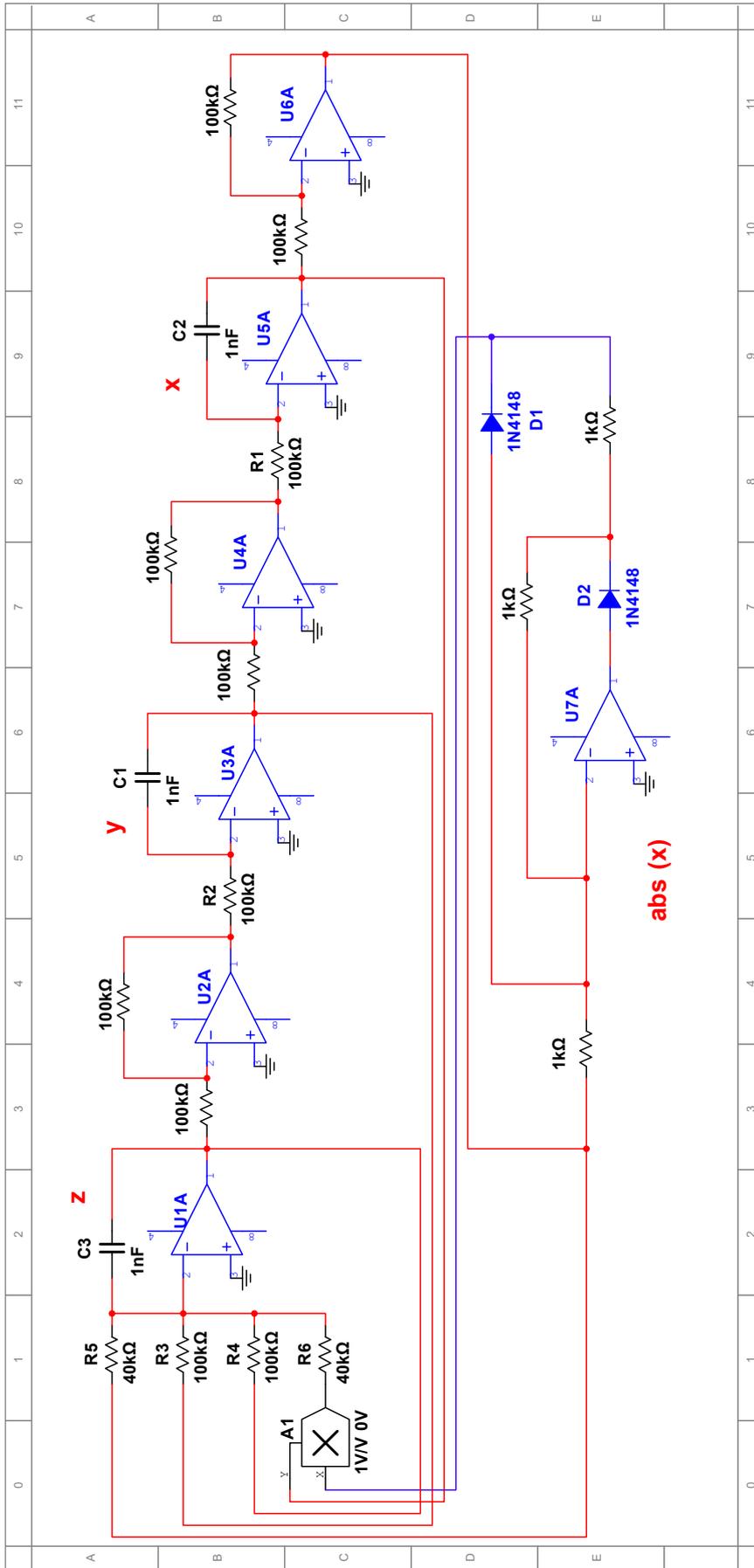


FIGURE 4.12 – Conception du circuit électrique du système chaotique jerk (2.3).

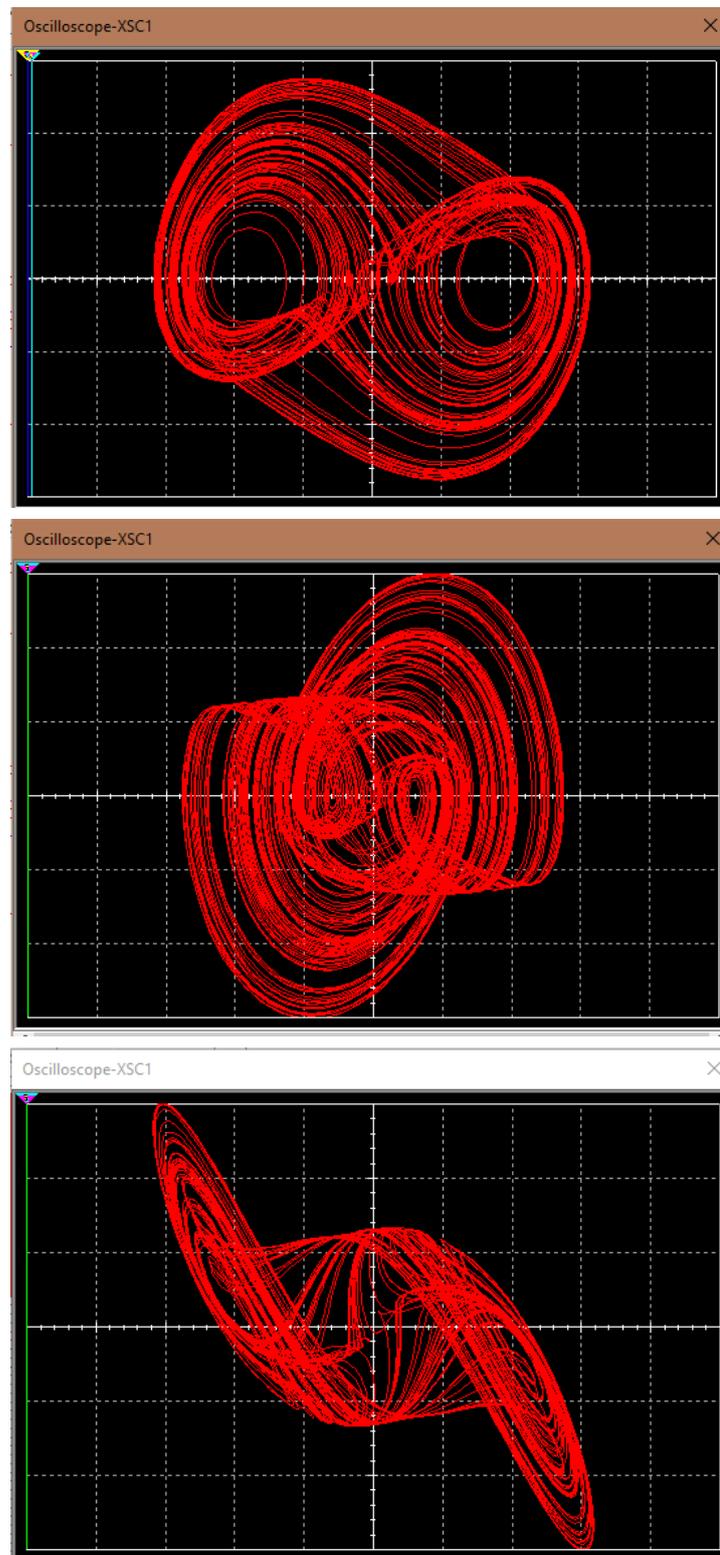
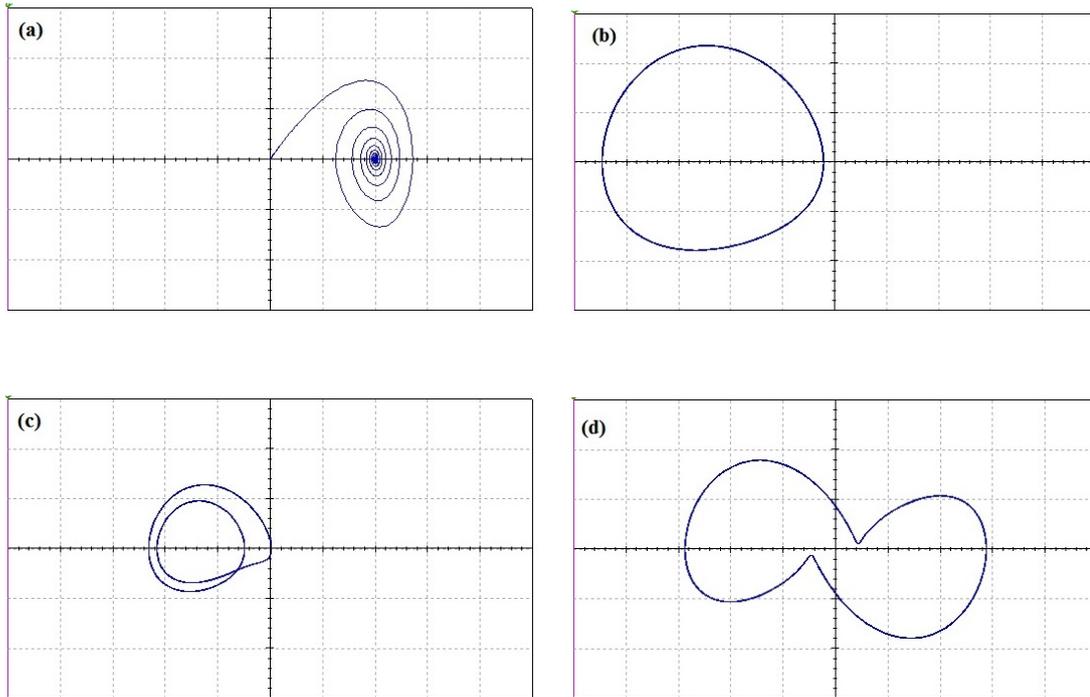


FIGURE 4.13 – Attracteurs exhibés par le circuit du système (2.3).



Différents attracteurs réguliers et étranges exhibés par le système (2.3) : (a) point fixe ; (b) orbite périodique 1 ; (c) dédoublement de période ; (d) orbite périodique 2.

Pour obtenir les différents attracteurs exhibés par système (2.3) et décrits dans le second chapitre, l'ajustement des valeurs des résistances est recommandé. Les attracteurs suivants sont obtenus en fixant la valeur des résistances  $R_1$  et  $R_2$

- ◇ Si  $R_3 = 100k\Omega$ ,  $R_4 = 20k\Omega$ ,  $R_5 = 40k\Omega$  et  $R_6 = 40k\Omega$ , alors le circuit chaotique converge vers un point fixe comme décrit sur la Fig.4.14.a.
- ◇ Si  $R_3 = 100k\Omega$ ,  $R_4 = 85k\Omega$ ,  $R_5 = 55k\Omega$  et  $R_6 = 40k\Omega$ , alors un orbite périodique autour du point d'équilibre  $P_2$  est obtenu décrit par la Fig.4.14.b. Si  $R_5 = 50k\Omega$ , un dédoublement de période est détecté et décrit par la Fig.4.14.c.
- ◇ Si  $R_3 = 100k\Omega$ ,  $R_4 = 85k\Omega$ ,  $R_5 = 40k\Omega$  et  $R_6 = 40k\Omega$ , alors un autre attracteur périodique autour des points d'équilibre  $P_2$  et  $P_3$  est obtenu comme décrit sur la Fig.4.14.d.

D'après les simulations précédentes sur Multisim, il est clair que les valeurs des résistances ( $R_3$ ,  $R_6$ ) sont fixes quelque soit le type de l'attracteur exhibé contrairement aux résistances  $R_4$  et  $R_5$ . Pour cette raison, afin d'observer les différents comportements dynamiques du système (2.3), les résistances  $R_4$  et  $R_5$  peuvent être remplacées par deux potentiomètres dont la résistance est variable.

De plus, le circuit décrit par la Fig.4.12 exhibe un attracteur chaotique lorsque la valeur des résistances  $R_4$  et  $R_5$  appartient respectivement aux intervalles  $[110k\Omega, 90k\Omega[$  et  $[50k\Omega, 36k\Omega[$ .

#### 4.4.2 Conception du circuit électrique du système hyperchaotique d'ordre entier.

Pour la réalisation des circuits relatifs aux systèmes avec polynôme d'ordre non entier, seul le système (3.1) sera implémenté afin d'éviter d'alourdir ce rapport avec des redondances. En effet, le circuit électrique du système (2.8) peut être facilement déduit à partir du système hyperchaotique (3.1).

Pour l'implémentation du système (3.1), le cas particulier  $r = 1.5$  a été considéré. Ce qui permet pour celui-ci d'écrire

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -az - by - cx^2 + d|x|x + m\sqrt{|x|}sgn(x) \\ \dot{w} = ky - hw - cx^2 + d|x|x + m\sqrt{|x|}sgn(x). \end{cases} \quad (4.11)$$

avec les paramètres  $(a, b, c, d, m, h, k)$  égaux à  $(1, 1, -0.11, -0.21, 5, 0.01, 1.4)$ . La Fig.4.15 décrit les attracteurs hyperchaotiques relatifs à ce cas particulier. Nous avons bien vérifié que cette nouvelle représentation du système (3.1) sous la forme (4.11) permet d'obtenir des LEs très proches du premier avec  $LE_1 = 0.16$ ,  $LE_2 = 0.04$ ,  $LE_3 = 0$  et  $LE_4 = -1.2$ . Notons que le choix de  $r = 1.5$  nous a permis d'introduire la fonction racine carré dans le modèle (4.11). Même si cette dernière fonction est rarement utilisée dans la littérature, elle reste plus accessible au niveau de son implémentation comparé à l'implémentation d'un polynôme d'ordre non entier.

Conformément aux portraits de phase obtenus, nous savons que le signal maximal de la variable  $w$  peut atteindre le niveau de  $50V$ . Une telle tension n'est pas réalisable avec des composants électriques simples notamment pour les amplificateurs opérationnels. Par conséquent, une transformation linéaire pour le système (4.11) est nécessaire pour réduire l'amplitude des variables d'état. La tension doit être donc inférieure à  $15V$  pour éviter la saturation des amplificateurs opérationnels.

Pour remédier à ce problème, un simple changement de variables a été considéré tel que  $x = 2.5u$ ,  $y = 2.5v$ ,  $z = 2.5g$  et  $w = 2.5f$  ce qui a permis d'écrire pour le système (4.11)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = az - by - 2.5cx^2 + 2.5d|x|x + \frac{m}{\sqrt{2.5}}\sqrt{|x|}sgn(x) \\ \dot{w} = ky - hw - 2.5cx^2 + 2.5d|x|x + \frac{m}{\sqrt{2.5}}\sqrt{|x|}sgn(x). \end{cases} \quad (4.12)$$

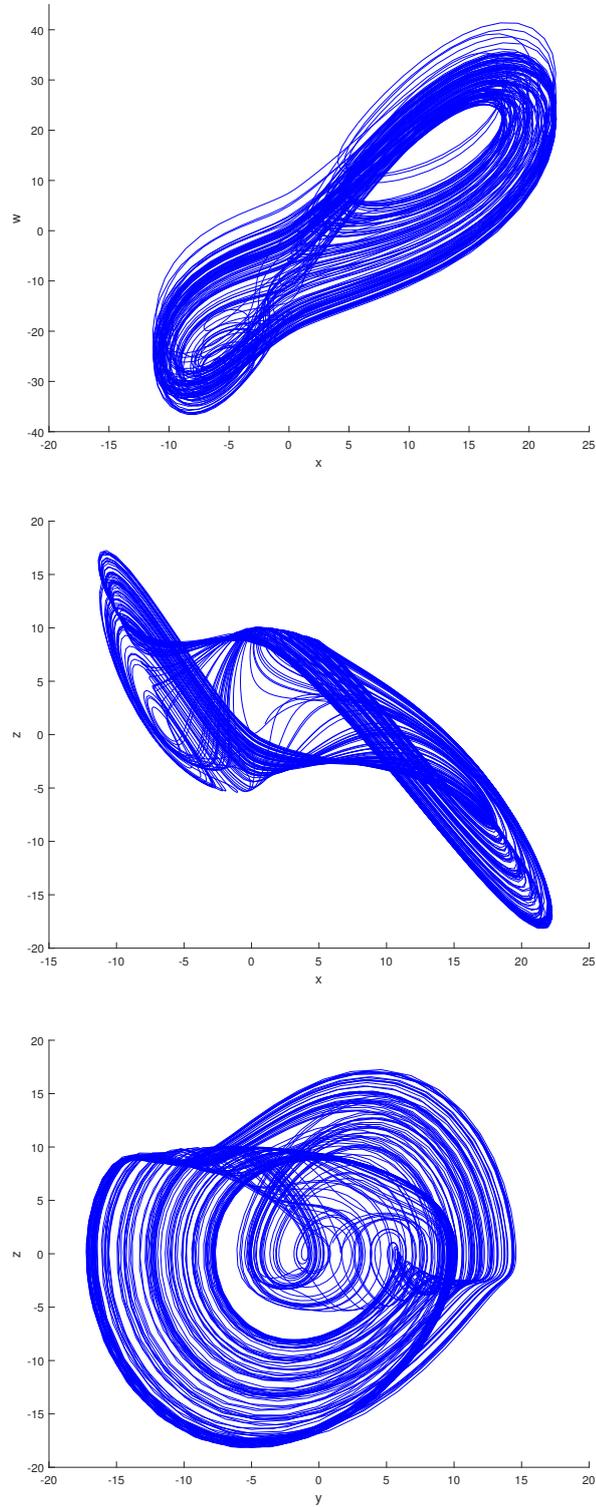


FIGURE 4.14 – Portraits de phase du système (4.11).

L'amplitude des variables d'état du système (4.12) a diminué comme on peut l'observer dans la Fig.4.16. En effet, la nouvelle plage de variation de la variable  $w$  est maintenant comprise entre  $] - 15, 15[$ . Nous avons ainsi résolu le problème d'amplitude. En outre, les deux systèmes (4.11) et (4.12) sont équivalents puisque la transformation linéaire ne modifie pas les propriétés physiques et dynamiques des systèmes non linéaires.

En se basant sur le modèle réduit du système hyperchaotique d'ordre entier (4.12), nous proposerons dans cette partie le circuit électrique correspondant. Pour ce faire, les paramètres du système seront remplacés par des gains relatifs à des composants électriques simples à savoir des résistances et des condensateurs. Ainsi, le circuit relatif au système (4.12) sera décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{R_1 C_1} y, \\ \dot{y} &= \frac{1}{R_2 C_2} z, \\ \dot{z} &= -\frac{1}{R_3 C_3} z - \frac{1}{R_4 C_3} y + \frac{1}{R_5 C_3} x^2 - \frac{1}{R_6 C_3} |x|x + \frac{1}{R_7 C_3} \sqrt{|x|} \operatorname{sgn}(x) \\ \dot{w} &= -\frac{1}{R_8 C_4} y - \frac{1}{R_9 C_4} w + \frac{1}{R_5 C_4} x^2 - \frac{1}{R_6 C_4} |x|x + \frac{1}{R_7 C_4} \sqrt{|x|} \operatorname{sgn}(x). \end{cases} \quad (4.13)$$

Il faut noter que la solution des variables d'état  $(x, y, z, w)$  sera obtenue en utilisant des intégrateurs simples à partir des dérivées premières  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{w})$ . Ces intégrateurs sont constitués d'un amplificateur opérationnel LM741, une capacité et une résistance.

Le choix des composants électriques est très crucial. Il n'est pas possible de se baser uniquement sur le modèle mathématique. Ceci étant essentiellement dû à deux raisons. D'une part, il faut tenir compte des composants disponibles sur le marché, toutes les résistances et les capacités doivent être normalisées. D'autre part, nous traitons des circuits hyperchaotiques, une petite variation peut entraîner un changement considérable sur le comportement dynamique final. Ainsi, en se basant sur le système (4.13) et sur certaines considérations expérimentales notamment les problèmes de saturation, nous avons fixé les valeurs des résistances et des condensateurs telles que

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1 \text{ nF}, R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega, R_3 = 70 \text{ k}\Omega, R_4 = 35 \text{ k}\Omega,$$

$$R_5 = 100 \text{ k}\Omega, R_6 = 35 \text{ k}\Omega, R_7 = 4.5 \text{ k}\Omega, R_8 = 40 \text{ k}\Omega, R_9 = 10 \text{ k}\Omega.$$

Par conséquent, le diagramme correspondant au circuit obtenu, conçu sous le logiciel MultiSIM, est fourni par la Fig.4.17. Afin d'obtenir les attracteurs désirés, certaines considérations ont été prises en compte pour éviter la dégradation du comportement hyperchaotique. L'une de ces considérations est l'ajustement des valeurs

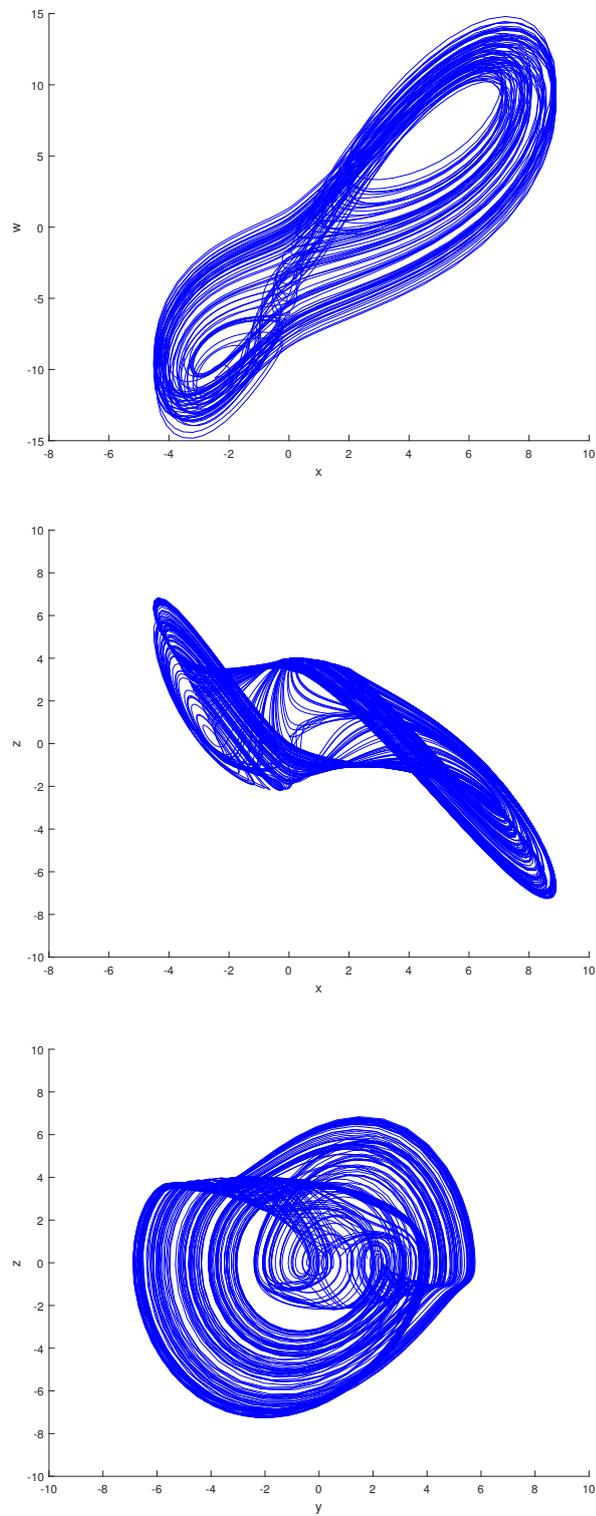


FIGURE 4.15 – Portraits de phase du système ajusté (4.12).

des résistances et des condensateurs relatifs aux opérations d'intégration. La Fig.4.18 représente les tracés des attracteurs hyperchaotiques à la sortie du circuit proposé. En comparant les différents attracteurs obtenus sous Matlab et Multisim, un accord qualitatif entre les simulations numériques et les simulations électriques a été observé. En fait, pour le logiciel Multisim, nous avons les mêmes formes d'attracteurs que celles obtenues sous Matlab. Cependant, il existe une différence minime qui n'affecte en aucun cas la structure de l'attracteur mais plus tôt agit sur son taux de dilatation et de contraction au cours du temps. Cette différence est due à la conception des fonctions non linéaires. En effet, l'implémentation électrique de ces fonctions entraîne certaines erreurs à cause de leur comportement complexe et imparfait. D'autre part, les systèmes chaotiques sont de nature très sensible, une faible variation de ces termes non linéaires peut engendrer une grande variation dans son comportement dynamique.

### 4.4.3 Conception du circuit électrique du système hyperchaotique d'ordre fractionnaire

L'objectif de cette section est de concevoir un circuit relatif au système hyperchaotique d'ordre fractionnaire (3.10). Cette modélisation se basera sur le circuit hyperchaotique d'ordre entier et le circuit de l'intégrateur d'ordre fractionnaire.

Pour la mise en œuvre du circuit d'ordre non entier, nous avons opté pour le modèle fractionnaire correspondant au système (3.10) d'ordre entier. Ainsi, le système proposé est défini par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} D^q x = y, \\ D^q y = z, \\ D^q z = -az - by - cx^2 + d|x|x + m\sqrt{|x|}sgn(x) \\ D^q w = ky - hw - cx^2 + d|x|x + m\sqrt{|x|}sgn(x). \end{cases} \quad (4.14)$$

avec les paramètres  $(a, b, c, d, m, h, k, q)$  égaux à  $(1, 1, -0.11, -0.21, 5, 0.01, 1.4, 0.97)$  et dont les attracteurs sont représentés par Fig.4.19.

En se basant sur l'équation (4.3), la transformation de Laplace du système (4.14)



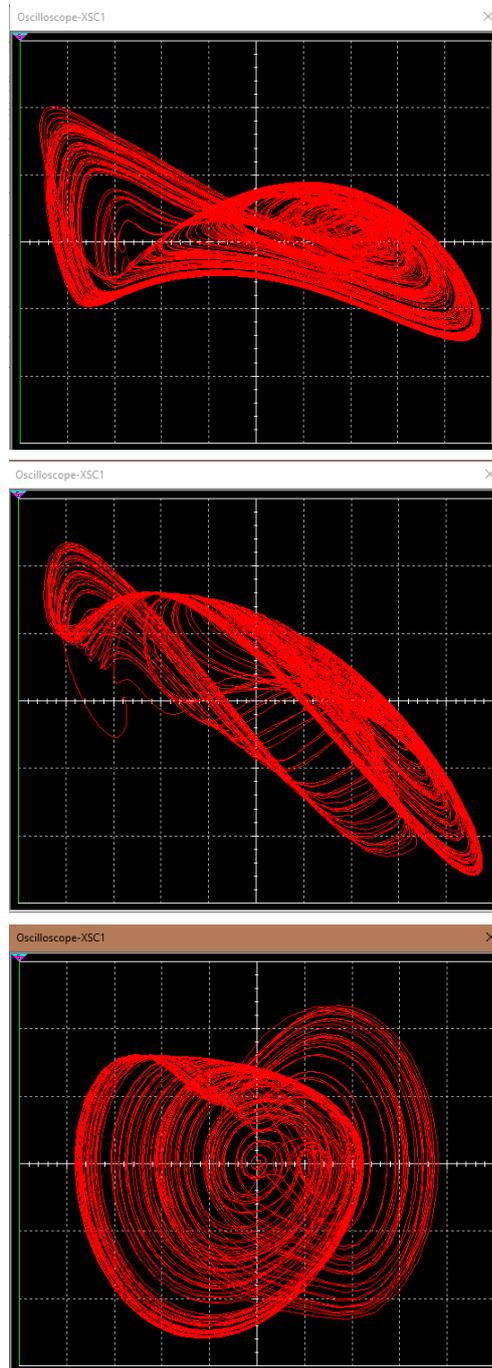


FIGURE 4.17 – Attracteurs exhibés par le circuit hyperchaotique (4.13).

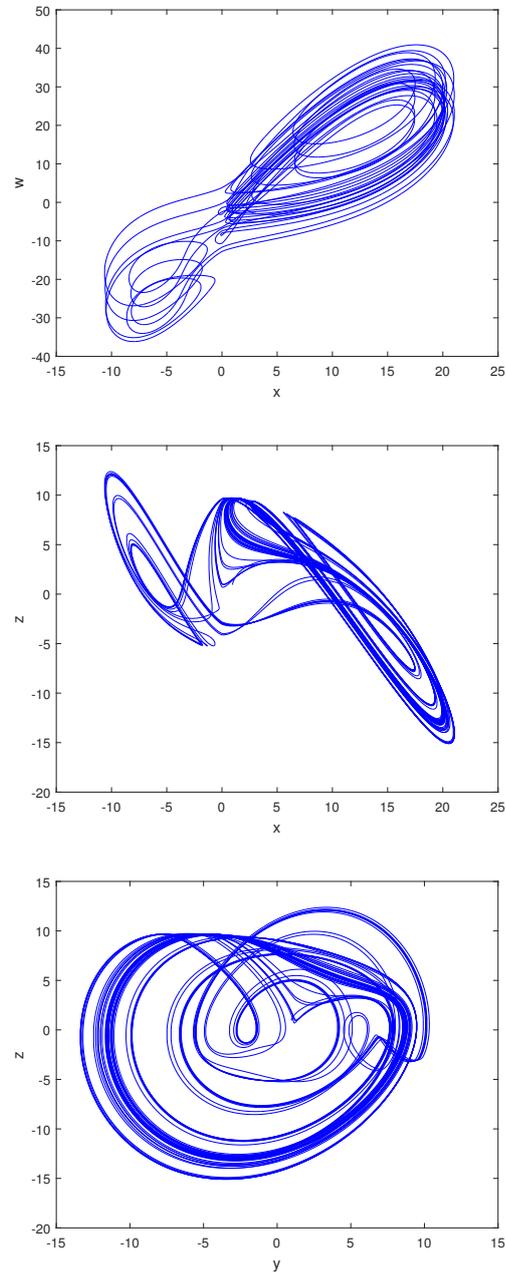


FIGURE 4.18 – Attracteurs exhibés par le système hyperchaotique d'ordre fractionnaire (4.14).

donne

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x(t)\} &= \frac{1}{s^{0.97}} \mathcal{L}\{y(t)\}, \\ \mathcal{L}\{y(t)\} &= \frac{1}{s^{0.97}} \mathcal{L}\{z(t)\}, \\ \mathcal{L}\{z(t)\} &= \frac{1}{s^{0.97}} \mathcal{L}\{-az(t) - by(t) - cx(t)^2 + d|x(t)|x(t) + m\sqrt{|x(t)|}sgn(x(t))\}, \\ \mathcal{L}\{w(t)\} &= \frac{1}{s^{0.97}} \mathcal{L}\{ky(t) - hw(t) - cx(t)^2 + d|x(t)|x(t) + m\sqrt{|x(t)|}sgn(x(t))\}. \end{cases}$$

Ainsi, en se basant sur le circuit d'ordre entier représenté par le système (4.10), nous allons remplacer le circuit correspondant réalisé par un intégrateur d'ordre 1 par l'intégrateur d'ordre fractionnaire 0.97. Le diagramme du circuit obtenu, conçu avec le logiciel Multisim, est fourni par la Fig.4.20. Afin d'obtenir les attracteurs désirés, certaines considérations ont été prise en compte pour éviter la dégradation du comportement dynamique. Pour ce faire, les valeurs des composants électriques relatifs à l'intégrateur d'ordre fractionnaire ont été ajustées. Ceci est dû en premier lieu à l'incertitude des fonctions non linéaires entre le modèle théorique et le modèle électrique. Ceci est aussi en relation avec à la disponibilité et la normalisation des composants électriques dans le marché. Après plusieurs essais, nous avons opté pour les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} R_1 &= 180 \text{ k}\Omega, & C_1 &= 0.5 \text{ nF}, \\ R_2 &= 300 \text{ k}\Omega, & C_2 &= 0.2 \text{ nF}, \\ R_3 &= 10 \text{ k}\Omega, & C_3 &= 0.1 \text{ nF}. \end{aligned}$$

La Fig.4.21 représente les tracés des attracteurs hyperchaotiques d'ordre non entier à la sortie du circuit proposé. Nous avons remarqué que les attracteurs obtenus à la sortie du circuit ont la même forme que la partie condensée des attracteurs représentée dans la Fig.4.19 (en bleue foncée). Cette partie traduit le régime permanent. Cependant, il existe une différence minimale entre les deux attracteurs, qui n'affecte pas sa structure mais plutôt qui agit sur son taux de dilatation et de sa contraction au cours du temps.

## 4.5 Expérimentation

Toutes les expérimentations ont été réalisées sur une plaque d'essai au laboratoire ERCO. L'objectif, dans cette étape, est de valider expérimentalement les résultats obtenus par simulation pour toutes fonctions non linéaires sur un oscilloscope réel. Pour ce faire, nous avons réalisé tout d'abord le circuit de la fonction valeur absolue en utilisant un amplificateur opérationnel LM741, trois résistances de  $1\text{k}\Omega$  et une diode de références 1N4148. Ce dernier est décrit par la Fig.4.22. Nous avons intro-

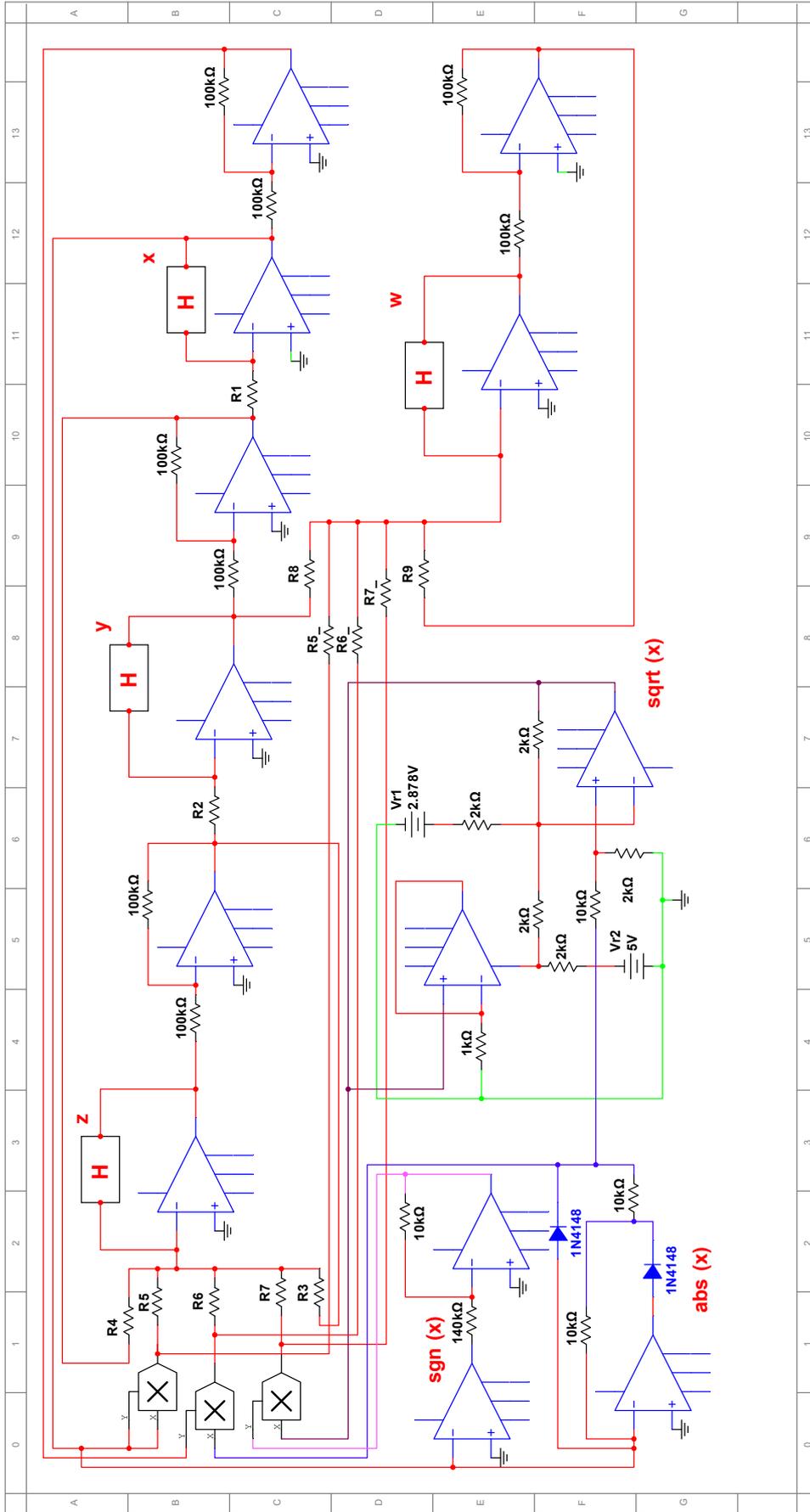


FIGURE 4.19 – Conception du circuit électrique du système hyperchaotique d'ordre fractionnaire (4.14).



FIGURE 4.20 – Attracteurs obtenus pour circuit hyperchaotique d'ordre fractionnaire (4.14).

duit à l'entrée de ce dernier un signal sinusoïdal de fréquence  $1\text{kHz}$  et d'amplitude  $2\text{V}$ . Via l'oscilloscope réel, nous avons récupéré les courbes décrites par la Fig.4.23. D'après ces résultats, nous constatons que nous avons réalisé le redressement d'un signal sinusoïdal. Toutefois, nous remarquons un petit décalage dû à la nature des composants et à l'effet d'hystérésis. Ceci pourrait influencer, dans l'étape suivante, la génération du comportement chaotique pour le circuit chaotique final.

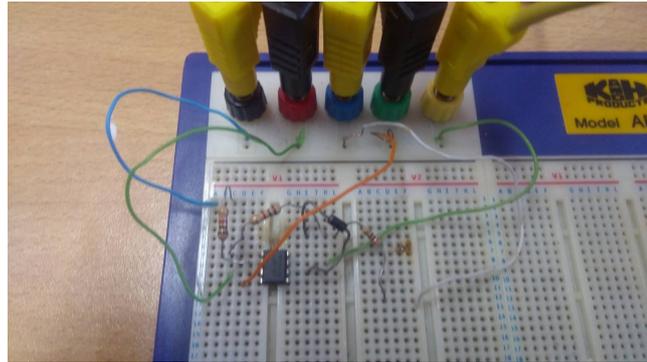


FIGURE 4.21 – Circuit réel correspondant à la fonction valeur absolue.

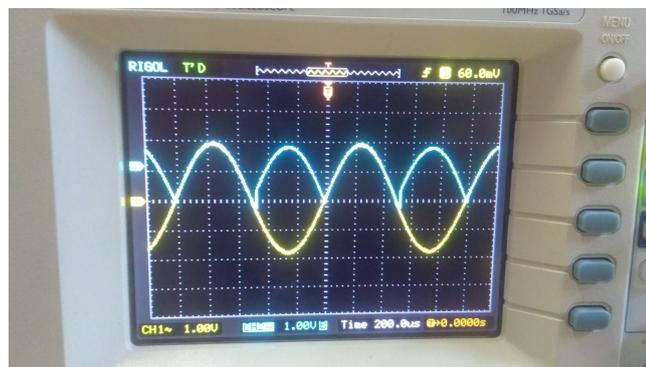


FIGURE 4.22 – Courbes expérimentales correspondantes au circuit fonction valeur absolue.

Par la suite, nous avons réalisé le circuit de la fonction signe en utilisant deux amplificateurs opérationnels LM741 et deux résistances de  $10\text{k}\Omega$  et de  $150\text{k}\Omega$ . Ce dernier est décrit par la Fig.4.24. Nous avons introduit à l'entrée de ce dernier un signal sinusoïdal de fréquence  $1\text{kHz}$  et d'amplitude  $2\text{V}$ . Via l'oscilloscope réel, nous avons récupéré les courbes expérimentales décrites par la Fig.4.25. Conformément aux résultats obtenus sous Multisim, nous remarquons un petit décalage entre le signal d'entrée et le signal de sortie.

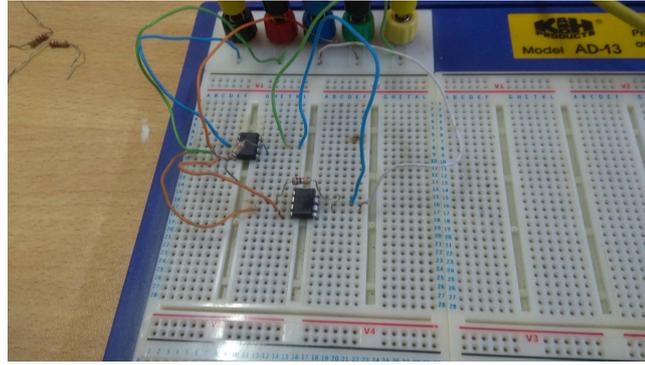


FIGURE 4.23 – Circuit réel correspondant à la fonction signe.

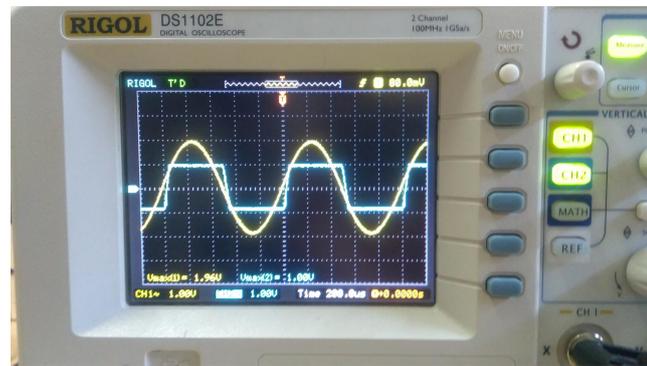


FIGURE 4.24 – Courbes expérimentales correspondantes au circuit de la fonction signe.

Par la suite, nous avons réalisé le circuit de la fonction racine carrée en utilisant deux amplificateurs opérationnels LM741, neuf résistances (1 de  $1k\Omega$ , 1 de  $0.5k\Omega$ , 6 de  $2k\Omega$  et 1 de  $6k\Omega$ ) et deux générateurs de courant continu dont la valeur des tensions est de  $-5V$  et  $2.9V$ . Ce dernier est décrit par la Fig.4.26. Nous avons introduit à l'entrée de ce dernier un signal sinusoïdal positif de fréquence  $1kHz$ . Via l'oscilloscope réel, nous avons récupéré les courbes décrites par la Fig.4.27. Cette figure décrit deux tensions, l'une est le signal d'entrée d'amplitude  $720mV$  et l'autre est le signal de sortie d'amplitude  $900mV$  égale à  $\simeq \sqrt{0.72} = 0.88$ . D'après ces résultats, le circuit de la fonction racine carrée valide bien les signaux attendus.

Finalement, nous avons opté pour la réalisation expérimentale du premier circuit chaotique avec une seule fonction non linéaire par morceaux décrit par le système 2.3). Ce circuit a été réalisé sur une plaque d'essai au laboratoire conformément à la Fig.4.28. Les résultats obtenus seront publiés dans une conférence [Lassoued et al., 2018] et étendus dans un chapitre d'ouvrage [Lassoued et al., 2019].

Le circuit réalisé génère automatiquement un signal chaotique conforme aux

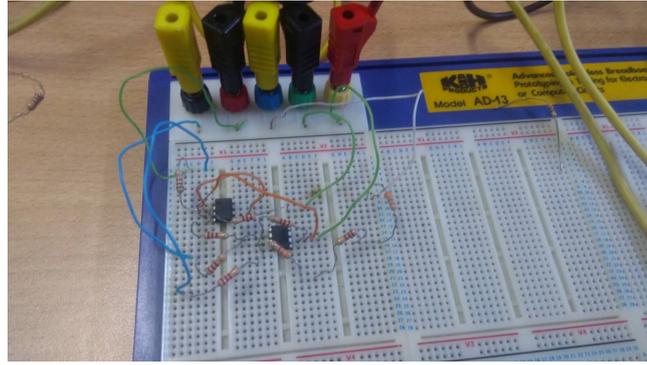


FIGURE 4.25 – Circuit réel correspondant à la fonction racine carrée.

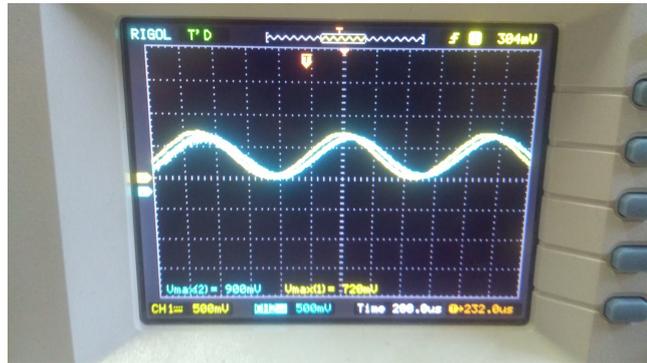


FIGURE 4.26 – Courbes expérimentales correspondantes au circuit de la fonction raciné carrée.

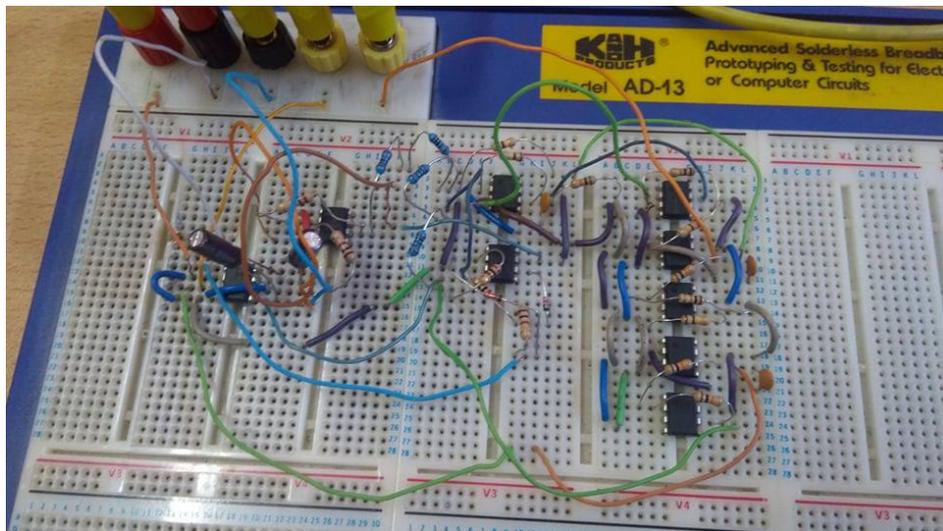


FIGURE 4.27 – Circuit réel du système chaotique (2.3).

résultats précédents. La Fig.4.29 représente les séries chronologiques des variables d'état  $x$  et  $y$ . Quant à la Fig.4.30, elle représente les trajectoires chaotiques obtenues. L'attracteur visualisé est un attracteur symétrique à deux ailes. Ainsi, nous avons

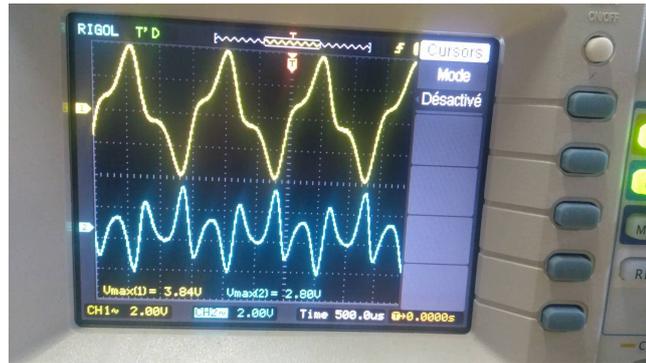


FIGURE 4.28 – Validation expérimentale des séries chronologiques du système (2.3).

pu réaliser un circuit qui nous permet d'exploiter les caractéristiques du premier système chaotique.

Par la suite, en choisissant la résistance  $R_4 = 80k\Omega$ , des attracteurs réguliers sont visualisés sur l'oscilloscope tels que décrits par la Fig.4.31. Les orbites périodiques obtenues sont cohérentes avec les simulations Multisim.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord proposé les circuits électriques de toutes les fonctions non linéaires utilisées pour la génération d'un comportement dynamique étrange. Nous avons visualisé via le logiciel Multisim les courbes relatives à chaque fonction. Par la suite, nous avons modélisé les circuits relatifs aux systèmes proposés dans les chapitres deux et trois. Finalement, des observations expérimentales sont présentées pour consolider les résultats de simulation. Le circuit du système chaotique (2.3) peut être exploré dans plusieurs domaines dont la communication sécurisée. De ce fait nous proposerons dans le chapitre suivant une application possible de ces circuits en suggérant un nouveau schéma de synchronisation.

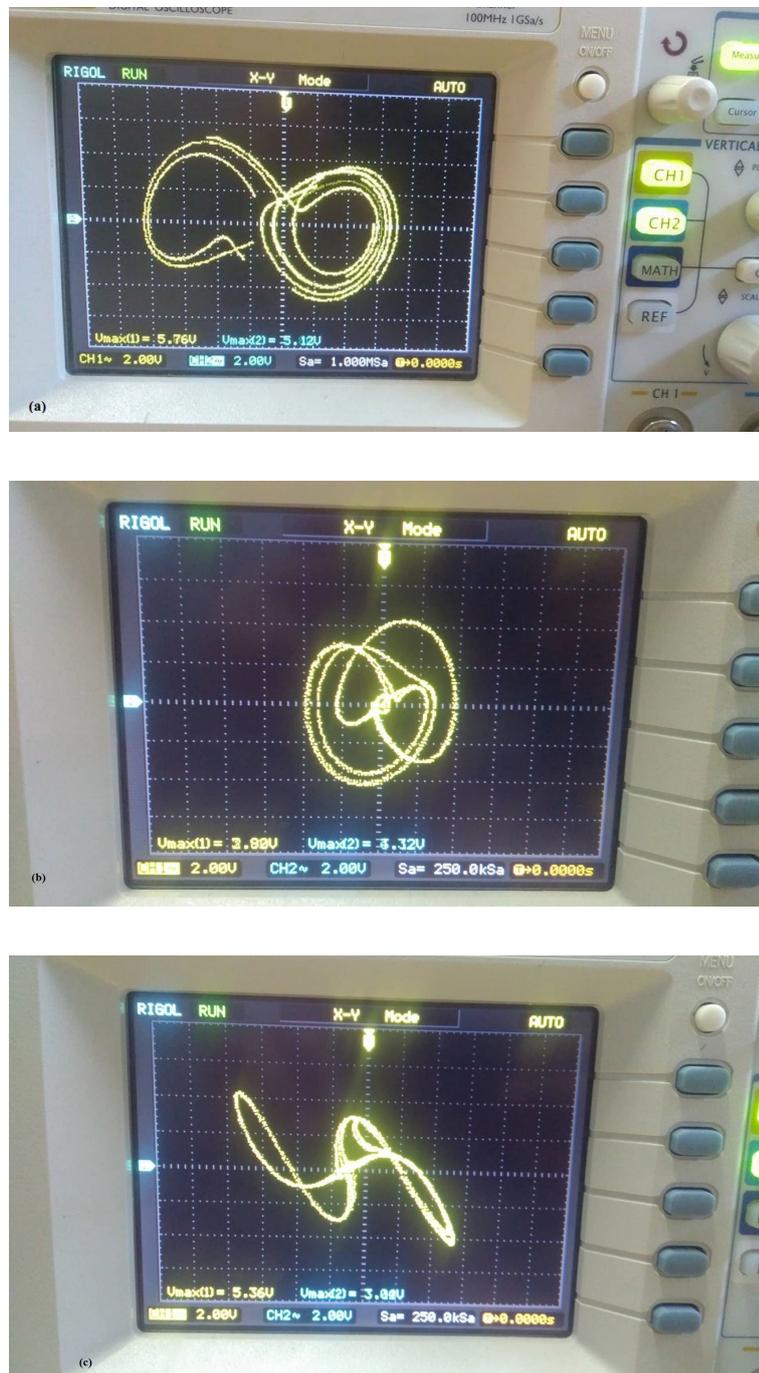


FIGURE 4.29 – Validation expérimentale du système chaotique (2.3) : (a)  $xy$ ; (b)  $xy$ ; (c)  $yz$ .

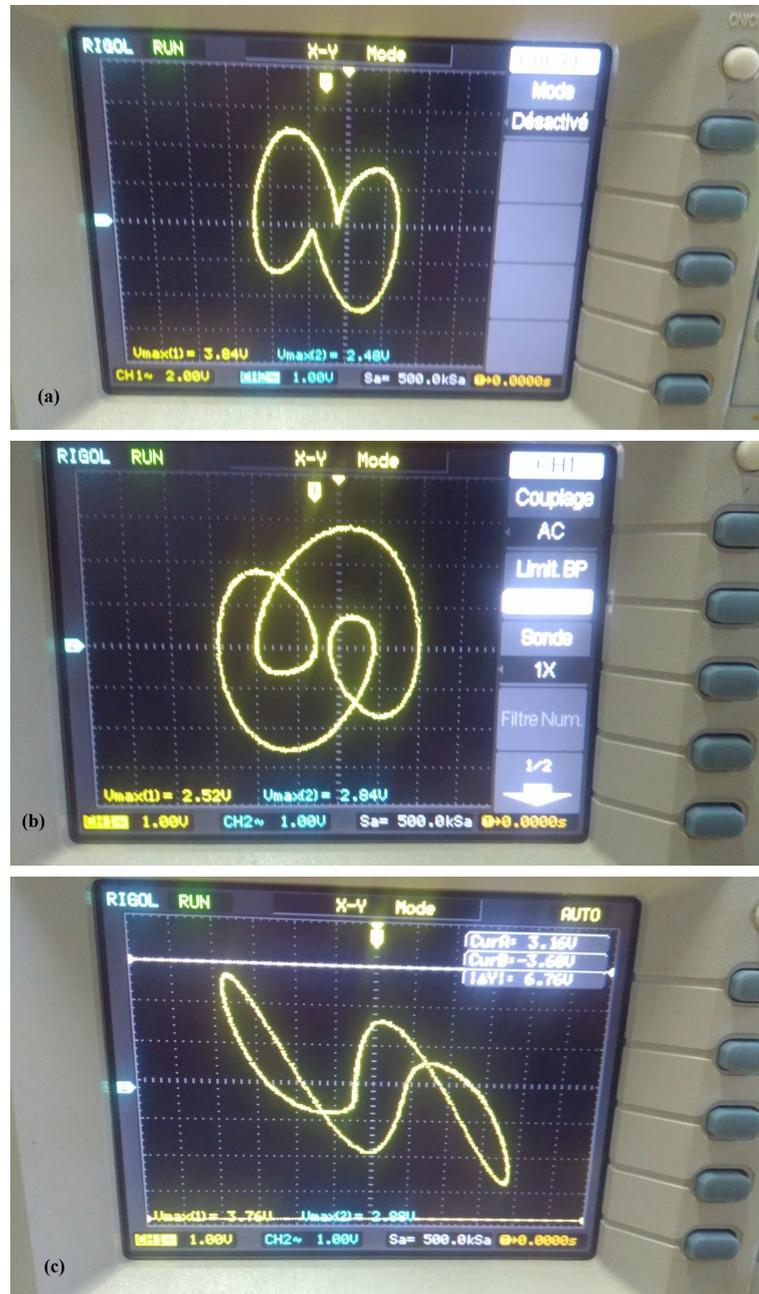


FIGURE 4.30 – Validation expérimentale des attracteurs réguliers : (a)  $x-y$ ; (b)  $y-z$ ; (c)  $x-z$ .

# Chapitre 5

Synchronisation hybride d'ordre  
fractionnaire

## 5.1 Introduction

La synchronisation chaotique est une technique de plus en plus sollicitée dans les applications d'ingénierie. Récemment, la synchronisation hybride avec connexion en anneau a vu le jour. Cette méthode a été appliquée avec succès à des systèmes d'ordre entier [Chen et al., 2016b]. Dans ce chapitre, nous proposerons d'étendre cette méthode de synchronisation pour les systèmes hyperchaotiques d'ordre fractionnaire. Deux cas d'application seront présentés pour valider l'approche proposée. Ce chapitre sera organisé en quatre paragraphes : Le premier présente quelques préliminaires. Le second paragraphe définit la problématique à résoudre dans ce chapitre. Les lois de commande et les conditions nécessaires pour satisfaire l'achèvement de ce type de synchronisation seront établies dans le troisième paragraphe. Finalement, deux cas d'application seront présentés dans le dernier paragraphe.

## 5.2 Préliminaires

La synchronisation chaotique a été largement étudiée depuis les premiers travaux de recherche de Pecora [Carroll and Pecora, 1991]. On appelle synchronisation l'action de corrélérer le comportement dynamique de deux ou plusieurs systèmes en temps. La plus populaire des techniques de synchronisation est la configuration maître-esclave ou un système appelé esclave suit la trajectoire imposée d'un autre système appelé maître. Plusieurs techniques de synchronisation ont été utilisées dans ce sens notamment la synchronisation généralisée [He and Cao, 2009] et la synchronisation projective [Sun et al., 2012].

Actuellement, un nouveau schéma de synchronisation chaotique est apparu, c'est la synchronisation hybride [Yang and Cao, 2014, Ji, 2014]. Pour cette nouvelle approche, deux types de synchronisation coexistent au même temps, l'anti-synchronisation et la synchronisation complète. Les applications de la synchronisation hybride montrent que ce schéma peut améliorer la sécurité dans la communication multilatérale numérique comparé à d'autres schémas classiques. Pour cette raison, concevoir un contrôleur approprié pour atteindre la synchronisation hybride est devenu un problème important. Plusieurs travaux de recherche ont été menés dans ce sens en utilisant différentes méthodes de contrôle [Shi and Wang, 2013, Das et al., 2013, Liu and Liu, 2012]. Le plus souvent, ces méthodes sont appliquées pour synchroniser uniquement deux ou trois systèmes chaotiques. Cependant, pour plusieurs applications d'ingénierie notamment pour les communications multilatérales, la synchronisation des systèmes multiples est requise. Ce type de synchronisation permet l'exploitation des comportements dynamiques collectifs. Plusieurs types de synchronisation ont été appliqués dans ce sens [Chen and Qiu, 2013]. Concernant la synchronisa-

tion hybride de multiples systèmes chaotiques, il existe deux modes de connexion ; en chaîne ou en anneau [Liu and Lü, 2008] telles que illustré par la Fig.4.1. La première approche (en chaîne) se caractérise par une connexion successive. Elle est assez critique. En effet, l'apparition d'un défaut lors de la synchronisation de l'un des systèmes rend la synchronisation hybride incomplète puisqu'il n'y a pas une corrélation entre les systèmes couplés. La deuxième synchronisation (en anneau) remédie à ce problème puisqu'elle se caractérise par une connexion corrélative. Ainsi, lors de la synchronisation en anneau de  $N$  systèmes, le premier système couple le  $N^{ième}$ , le second système couple le premier et ainsi de suite jusqu'à ce que le  $N^{ième}$  système chaotique couple le  $N^{ième} - 1$ . Plus précisément, si la synchronisation hybride est appliquée pour quatre systèmes alors le premier système chaotique anti-synchronise le second, le second système anti-synchronise le troisième et le troisième système anti-synchronise le quatrième. De plus, le premier système synchronise le troisième et le second système synchronise le quatrième.

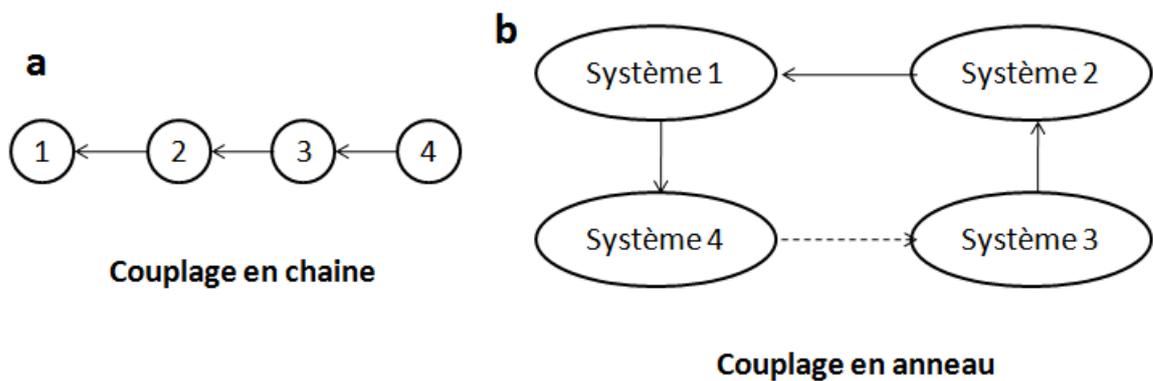


FIGURE 5.1 – Diagrammes de couplage des systèmes chaotiques.

Récemment, les systèmes chaotiques et hyperchaotiques d'ordre fractionnaire ont sollicité l'intérêt de la communauté scientifique vu leur potentiel d'application dans le domaine d'ingénierie par rapport aux systèmes d'ordre entier. Certains modèles de synchronisation ont été alors suggérés et appliqués pour ces derniers [Deng et al., 2009, El-Sayed et al., 2016, Ouannas et al., 2017, Feki and Gain, 2011, Martínez-Martínez et al., 2011]. En effet, la synchronisation chaotique d'ordre fractionnaire est devenue un sujet important mais qui reste encore un domaine de recherche peu exploité à cause de la complexité du calcul fractionnaire. Cet intérêt est dû, d'une part, à la capacité significative des systèmes d'ordre fractionnaire à décrire des problèmes réels complexes. D'autre part, les systèmes hyperchaotiques ont l'aptitude à générer des dynamiques complexes caractérisées par des attracteurs déployés dans de multiples directions. Cependant, et en particulier dans la communication sécurisée, où plusieurs systèmes d'ordre fractionnaire doivent être synchronisés, di-

vers problèmes sont encore en suspens. L'application de la synchronisation hybride via une connexion en anneau peut résoudre un grand nombre de ces problèmes. Malheureusement, une telle approche n'est pas encore très exploitée.

### 5.3 Position du problème

Considérons les  $N$  systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire d'ordre  $n$  couplés en anneau décrits par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} D^q x_1 = A_1 x_1 + g_1(x_1) + D_1(x_N - x_1), \\ D^q x_2 = A_2 x_2 + g_2(x_2) + D_2(x_1 - x_2), \\ \vdots \\ D^q x_N = A_N x_N + g_N(x_N) + D_N(x_{N-1} - x_N), \end{cases} \quad (5.1)$$

avec  $x_i$  le vecteur d'état relatif à chaque système chaotique défini par  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{in})$  avec  $i \in [1..N]$  et  $n$  la dimension du système.

Chaque équation différentielle fractionnaire est composée de trois éléments ; une matrice linéaire  $A_i$ , un vecteur de fonction non linéaire  $g_i$  et une matrice diagonale  $D_i$ . Cette matrice diagonale traduit le couplage entre deux systèmes successifs. Elle contient  $n$  termes positifs  $d_{ij}$  sur sa diagonale avec  $i \in [1..N]$  et  $j \in [1..n]$ .

Pour tout  $(i, j) \in [1..N]$  avec  $(i \neq j)$ , si  $A_i \neq A_j$  et  $g_i \neq g_j$  alors le système (5.1) représente un couplage de systèmes dynamiques non identiques.

Afin de mettre en place une synchronisation hybride via une connexion en anneau, l'objectif est de concevoir des lois de commande  $u_i$  avec  $i \in [1..N - 1]$  tel que le système contrôlé soit décrit par :

$$\begin{cases} D^q x_1 = A_1 x_1 + g_1(x_1) + D_1(x_N - x_1), \\ D^q x_2 = A_2 x_2 + g_2(x_2) + D_2(x_1 - x_2) + u_1, \\ \vdots \\ D^q x_N = A_N x_N + g_N(x_N) + D_N(x_{N-1} - x_N) + u_{N-1}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Puisque la synchronisation hybride impose la mise en place de deux types de synchronisation, définissons alors les deux types d'erreur relatives à chaque type de synchronisation.

**Définition 5.1 :** Pour le système contrôlé (5.2), on définit les deux vecteurs d'erreurs relatifs à la synchronisation hybride comme suit

- ◇ Le vecteur d'erreur d'anti-synchronisation  $e_A = [e_{A1} \cdots e_{A(N-1)}]$  satisfaisant pour chacun de ses éléments l'expression :  $e_{Ai} = x_i(t) + x_{i+1}(t)$  avec  $i \in [1..N - 1]$ .
- ◇ Le vecteur d'erreur de synchronisation complète  $e_C = [e_{C1} \cdots e_{C(N-1)}]$  satisfaisant pour chacun de ses éléments l'expression :  $e_{Cj} = x_{j+2}(t) - x_j(t)$  avec  $j \in [1..N - 1]$ .

**Definition 5.2 :** Pour le système dynamique d'ordre fractionnaire (5.2), la synchronisation hybride existe et est complètement établie si les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \| e_{Ai} \| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \| x_i(t) + x_{i+1}(t) \| = 0, \quad i \in [1..N - 1], \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \| e_{Cj} \| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \| x_{j+2}(t) - x_j(t) \| = 0, \quad j \in [1..N - 1]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

L'objectif principal de la problématique relative à la synchronisation hybride est de sélectionner des matrices diagonales  $D_i$  ( $i \in [1..N]$ ) et de synthétiser les lois de commande appropriées  $u_j$  ( $j \in [1..N - 1]$ ) telles que les conditions (5.3) soient satisfaites. Plus précisément, il faut que les systèmes d'erreur de la synchronisation complète et de l'anti-synchronisation soient asymptotiquement stables pour les matrices  $D_i$  sélectionnées et les lois de commande proposées.

## 5.4 Synchronisation chaotique hybride

Dans ce paragraphe, les lois de commande capables d'assurer des conditions de stabilité au sens de Lyapunov pour le système contrôlé d'ordre fractionnaire (5.1) seront proposées.

### 5.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes d'ordre fractionnaire

Habituellement, le théorème de la stabilité de Lyapunov est considéré comme étant le pilier de l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires. Néanmoins, pour l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire, le Théorème 3.1 énoncé au troisième chapitre de ce rapport est le plus utilisé. Pour ce dernier, le calcul de l'argument des valeurs propres de la matrice jacobienne du système non linéaire d'ordre fractionnaire autour de ses points d'équilibre dans le plan fractionnaire linéaire est requis.

Soit un système non linéaire d'ordre fractionnaire décrit par l'équation générale suivante

$$D^q x = f(x) \quad (5.4)$$

avec  $f$  une fonction non linéaire et  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  le vecteur d'état de dimension  $n$ .

Les résultats suivants concernant la stabilité des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire peuvent être considérés.

**Théorème 5.1 :**

Pour le système fractionnaire (5.4), s'il existe une fonction de Lyapunov définie positive  $V(x)$  tel que  $D^q V(x) < 0$  pour tout  $t \geq t_0$ , alors les solutions du système (5.4) sont asymptotiquement stables.

D'autre part, nous savons, d'après le Théorème 3.1 exposé au chapitre 3, que les solutions du système (5.4) sont asymptotiquement stables si toutes les valeurs  $\lambda_i$  de la matrice jacobienne  $J = \partial f(x(t))/\partial x(t)$  évaluées autour de ses points d'équilibre satisfont la condition  $|\arg(\lambda_i)| > (q\pi)/2$ .

**Démonstration :** Voir la référence [Chen et al., 2014]

**Théorème 5.2 :**

Si le système (5.4) satisfait le théorème 3.1 alors il satisfera le théorème 5.1.

**Démonstration :** Voir la référence [Chen et al., 2014]

Dans le reste de ce chapitre, nous nous baserons sur le théorème 5.1 et le théorème 5.2 pour étudier la stabilité des erreurs de synchronisation.

## 5.4.2 Conception des contrôleurs

D'après la définition 5.1, l'erreur d'anti-synchronisation du système (5.2) est donnée

$$D^q e_{Ai} = D^q x_i + D^q x_{i+1}. \quad (5.5)$$

avec  $i \in [1 \dots N - 1]$ .

En remplaçant les expressions des variables d'état du système (5.2), nous obtenons

l'expression généralisée de l'erreur d'anti-synchronisation suivante

$$D^q e_A = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & & D_1 \\ D_2 & K_4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_3 & K_5 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & D_{N-1} & & K_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{A1} \\ e_{A2} \\ e_{A3} \\ \vdots \\ e_{AN-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left( ((-1 - (-1)^N)D_1 + 2D_2 - (A_2 - A_1))x_1 + g_2(x_2) + g_1(x_1) + u_1 \right) \\ \left( (-2(D_2 - D_3) - (A_3 - A_2))x_2 + g_3(x_3) + g_2(x_2) + u_2 + u_1 \right) \\ 0 \\ \vdots \\ \left( (-2(D_{N-1} - D_N) - (A_N - A_{N-1}))x_{N-1} + g_N(x_N) + g_{N-1}(x_{N-1}) + u_{N-1} + u_{N-2} \right) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$K_1 = A_2 - (-1)^{N-1}D_1 - D_2,$$

$$K_2 = -(-1)^{N-2}D_1,$$

$$K_3 = -(-1)^{N-3}D_1,$$

$$K_4 = A_3 - D_3,$$

$$K_5 = A_4 - D_4,$$

$$\text{et } K_6 = A_N - D_N.$$

A partir de l'expression (5.6), nous devons déterminer les lois de commande capables de satisfaire les conditions (5.3). Pour ce faire, il y a plusieurs méthodes qui permettent la conception de ces contrôleurs. Nous avons opté pour une procédure simple qui permet de mettre le système (5.6) sous la forme d'une structure asymétrique stable [Cai et al., 2009, Chen et al., 2013]. Plus précisément, les lois de commande proposées permettront de compenser les termes non linéaires existants dans l'expression de l'erreur dynamique d'anti-synchronisation. Nous proposons alors les théorèmes 5.3 et 5.4 qui décrivent les lois de commande conçues et les conditions de stabilité à satisfaire pour la réalisation de la synchronisation hybride.

**Théorème 5.3** [Lassoued and Boubaker, 2016a] :

Pour les lois de commande  $u_i(t)$  d'ordres entiers,  $i \in [1 \cdots N - 1]$ ,

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - Q_1 x_1 - g_2(x_2) - g_1(x_1), \\ u_2 = v_2 - (-2(D_2 - D_3) - (A_3 - A_2))x_2 - g_3(x_3) - g_2(x_2) - u_1, \\ \vdots \\ u_{N-1} = v_{N-1} + Q_2 x_{N-1} - g_N(x_N) - g_{N-1}(x_{N-1}) - u_{N-2}. \end{cases} \quad (5.7)$$

la dynamique de l'erreur de synchronisation définie par

$$D^q e_A = D^q x_i + D^q x_{i+1} = (M + H)e_A = L e_A, \quad (5.8)$$

est asymptotiquement stable s'il existe des matrices  $L$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  et  $H$  satisfaisant les conditions suivantes

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 \\ L_1^T &= -L_1 \\ L_2 &= \text{diag}(l_1, \dots, l_N) \quad \text{et} \quad l_i < 0, i \in [1 \dots N] \end{aligned} \quad (5.9)$$

avec  $Q_1 = (-1 - (-1)^N)D_1 + 2D_2 - (A_2 - A_1)$ ,  $Q_2 = 2(D_{N-1} - D_N) + (A_N - A_{N-1})$ ,  $H$  une matrice de constante tels que  $[v_1 \dots v_{N-1}]^T = H[e_{A_1} \dots e_{A_{N-1}}]^T$  et  $M$  la matrice définie par

$$M = \begin{bmatrix} A_2 - (-1)^{N-1}D_1 - D_2 & -(-1)^{N-2}D_1 & K_3 - (-1)^{N-3}D_1 & & D_1 \\ & D_2 & A_3 - D_3 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & D_3 & A_4 - D_4 & & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & 0 & 0 & D_{N-1} & & A_N - D_N \end{bmatrix}.$$

**Démonstration :**

En remplaçant l'expression (5.7) des contrôleurs proposés dans l'équation (5.6), nous obtenons alors l'expression généralisée de la dynamique de l'erreur de l'anti-synchronisation

$$D^q e_A = (M + H)e_A = L e_A, \quad (5.10)$$

Choisissons alors une fonction de Lyapunov définie positive  $V(e_A) = (1/2)e_A^T e_A$ . Cette fonction vérifie bien les conditions du théorèmes 5.1. La dérivée fractionnaire

de la fonction  $V(e_A)$  est décrite par

$$\begin{aligned} D^q V(e_A) &= (1/2)D^q(e_A^T e_A) \\ &= (1/2)(e_A^T L^T e_A + e_A^T L e_A) \\ &= (1/2)e_A^T (L^T + L)e_A. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pour que la dérivée fractionnaire  $D^q V(e_A)$  soit négative, il faut que  $L^T + L < 0$ . En utilisant les conditions de stabilité (5.9),  $L$  peut s'écrire sous la forme  $L = L_1 + L_2$  et  $L^T = L_1^T + L_2^T$ . Ainsi, si  $L_1 = L_1^T$  et  $L_2 = \text{diag}(li)$  avec  $li < 0$  alors

$$D^q V(e_A) = e_A^T L_2 e_A. \quad (5.12)$$

Par conséquent, le système (5.10) est asymptotiquement stable autour de son point d'équilibre  $e_A = 0$  et la condition de l'anti-synchronisation du système (5.2) est satisfaite.

#### **Théorème 5.4 :**

Si l'erreur d'anti-synchronisation  $e_A$  est asymptotiquement stable via les lois de commande (5.7), l'erreur de synchronisation complète  $e_C$  est globalement asymptotiquement stable. Par conséquent, la synchronisation hybride est réalisée.

#### **Démonstration :**

D'après la définition 5.1, le vecteur d'erreur  $e_C$  peut être écrit sous la forme

$$e_{Cj}(t) = x_{j+2}(t) - x_{j+1}(t) + x_{j+1}(t) - x_j(t) \quad j \in [1 \cdots N - 1]. \quad (5.13)$$

Si l'erreur d'anti-synchronisation est asymptotiquement stable alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_{j+2} + x_{j+1}\| - \lim_{t \rightarrow -\infty} \|x_{j+1} + x_j\| = 0. \quad (5.14)$$

Par conséquent, la synchronisation complète via les mêmes contrôleurs (5.7) est garantie. En conclusion, la synchronisation hybride des systèmes d'ordre fractionnaire couplés multiples (5.2) est également réalisée.

## 5.5 Applications

### 5.5.1 1<sup>er</sup> cas : Synchronisation de systèmes hyperchaotiques identiques

Dans ce paragraphe, nous appliquerons le schéma de la synchronisation hybride pour quatre systèmes hyperchaotiques d'ordre fractionnaire identiques couplés via une connexion en anneau [Lassoued and Boubaker, 2019a]. Nous utiliserons le système hyperchaotique fractionnaire (3.10) proposé au troisième chapitre. Le couplage en anneau est illustré par la Fig.5.2.

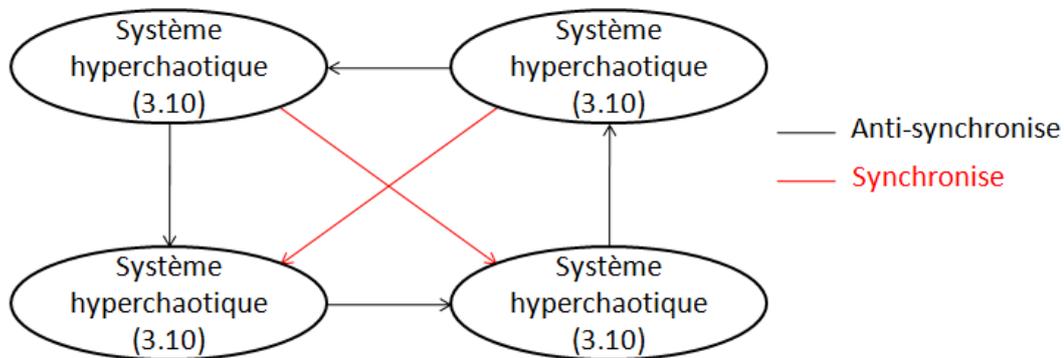


FIGURE 5.2 – Couplage en anneau des quatre systèmes hyperchaotiques identiques.

Les systèmes fractionnaires couplés sont décrits conformément au modèle (5.2) par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} D^q x_{11} = x_{12} + d_{11}(x_{41} - x_{11}), \\ D^q x_{12} = x_{13} + d_{12}(x_{42} - x_{12}), \\ D^q x_{13} = -ax_{13} - bx_{12} + G(x_{11}) + d_{13}(x_{43} - x_{13}), \\ D^q x_{14} = kx_{12} - hx_{14} + G(x_{11}) + d_{14}(x_{44} - x_{14}). \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} D^q x_{21} = x_{22} + d_{21}(x_{11} - x_{21}) + u_{11}, \\ D^q x_{22} = x_{23} + d_{22}(x_{12} - x_{22}) + u_{12}, \\ D^q x_{23} = -ax_{23} - bx_{22} + G(x_{21}) + d_{23}(x_{13} - x_{23}) + u_{13}, \\ D^q x_{24} = kx_{22} - hx_{24} + G(x_{21}) + d_{24}(x_{14} - x_{24}) + u_{14}. \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\begin{cases} D^q x_{31} = x_{32} + d_{31}(x_{21} - x_{31}) + u_{21}, \\ D^q x_{32} = x_{33} + d_{32}(x_{22} - x_{32}) + u_{22}, \\ D^q x_{33} = -ax_{33} - bx_{32} + G(x_{31}) + d_{33}(x_{23} - x_{33}) + u_{23}, \\ D^q x_{34} = kx_{32} - hx_{34} + G(x_{31}) + d_{34}(x_{24} - x_{34}) + u_{24}. \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\begin{cases} D^q x_{41} = x_{42} + d_{41}(x_{31} - x_{41}) + u_{31}, \\ D^q x_{42} = x_{43} + d_{42}(x_{32} - x_{42}) + u_{32}, \\ D^q x_{43} = -ax_{43} - bx_{42} + G(x_{41}) + d_{43}(x_{33} - x_{43}) + u_{33}, \\ D^q x_{44} = kx_{42} - hx_{44} + G(x_{41}) + d_{44}(x_{34} - x_{44}) + u_{34}. \end{cases} \quad (5.18)$$

avec  $q$  un nombre fractionnaire tel que  $0 < q < 1$ .  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  sont les contrôleurs définis chacun par le vecteur  $u_i = [u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}]$ ,  $i = 1...3$ .  $D_i = \text{diag}(d_{i1}, \dots, d_{i4})$ ,  $i = 1...4$ , sont des matrices diagonales de couplage.

Puisque les systèmes couplés sont identiques, les matrices linéaires  $A_i$  et les fonctions non linéaires  $g_i$  données dans l'équation (5.1) sont égaux. Elles sont définies par :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & -a & 0 \\ 0 & k & 0 & -h \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad g_i(x_{i1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G(x_{i1}) \\ G(x_{i1}) \end{bmatrix}$$

avec  $i = 1...4$ .

Selon la définition 5.1, pour les quatre systèmes couplés, nous définissons le vecteur d'erreur d'anti-synchronisation suivant :

$$e_A = [e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{31}, e_{32}, e_{33}].$$

Ce vecteur contient douze éléments relatifs à chaque erreur d'anti-synchronisation.

Suivant l'équation (5.7) du théorème 5.1, les lois de commande conçues et proposées pour les systèmes fractionnaires (5.15), (5.16), (5.17) et (5.18) sont définies par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = H_1 e_A + 2(D_1 - D_2)x_1 - g_2(x_2) - g_1(x_1), \\ u_2 = H_2 e_A + 2(D_2 - D_3)x_2 - g_3(x_3) - g_2(x_2) - u_1, \\ u_3 = H_3 e_A + 2(D_3 - D_4)x_3 - g_4(x_4) - g_3(x_3) - u_2. \end{cases} \quad (5.19)$$

Les matrices  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  seront définies par la suite.

La dynamique de l'erreur de synchronisation du système d'ordre fractionnaire couplé est exprimée par l'équation

$$D^q e_A = (M + H).e_A = L.e_A = \left[ L_{ij} \right] e_A \quad \text{avec } i = j = 1 \cdots 3.$$

La matrice  $M$  est une matrice constante définie selon le théorème 5.1. Par conséquent, nous devons choisir la matrice  $H$  afin que la matrice  $L$  puisse satisfaire les conditions de stabilité (5.9).

Nous avons alors obtenu les matrices  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  suivantes

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & b & -k & 0 & -d_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{43} \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & b & -k \\ 0 & 0 & -d_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$N_1 = d_{11} - d_{21},$$

$$N_2 = d_{12} - d_{22},$$

$$N_3 = d_{13} - d_{23}.$$

Ainsi, nous obtenons les matrices  $\left[ L_{ij} \right]$  (avec  $(i, j) \in [1 \cdots 3]$ ) dont les composantes sont les suivantes

$$-L_{13} = -L_{21} = L_{12} = L_{31} = -D_1 ,$$

$$L_{32} = -L_{23} = D_3,$$

$$L_{11} = \begin{bmatrix} d_{11} - d_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & d_{12} - d_{22} & 1 + b & -k \\ 0 & -1 - b & -a + d_{13} - d_{23} & 0 \\ 0 & k & 0 & -h + d_{14} - d_{24} \end{bmatrix},$$

$$L_{22} = \begin{bmatrix} -d_{31} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -d_{32} & 1 + b & -k \\ 0 & -1 - b & -a - d_{33} & 0 \\ 0 & k & 0 & -h - d_{34} \end{bmatrix},$$

$$L_{33} = \begin{bmatrix} -d_{41} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -d_{42} & 1 + b & -k \\ 0 & -1 - b & -a - d_{43} & 0 \\ 0 & k & 0 & -h - d_{44} \end{bmatrix}.$$

Conformément au théorème 5.3, nous avons  $L = L_1 + L_2$ . Dans ce cas de figure, la matrice  $L_2$  contiendra uniquement les coefficients de la diagonale des matrices  $[L_{ij}]$ . Par conséquent,  $L_1$  contiendra les autres termes. Nous obtiendrons alors les deux matrices  $L_1$  et  $L_2$  décrites dans l'annexe B.

Ainsi, la matrice  $L$  satisfait les conditions de stabilité (5.9) si seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} d_{11} - d_{21} &< 0, & d_{12} - d_{22} &< 0, \\ -a + d_{13} - d_{23} &< 0, & -h + d_{14} - d_{24} &< 0, \\ -d_{31} &< 0, & -d_{32} &< 0, \\ -a - d_{33} &< 0, & -h - d_{34} &< 0, \\ -d_{41} &< 0, & -d_{42} &< 0, \\ -a - d_{43} &< 0, & -h - d_{44} &< 0. \end{aligned}$$

Pour les simulations numériques, nous avons fixé les matrices diagonales  $D_i$  tels que les paramètres  $(d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{24}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}, d_{41}, d_{42}, d_{43}, d_{44})$  soient égaux à  $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 10, 10, 18, 18, 10, 10, 10, 10)$ . De même, les conditions initiales des quatre systèmes hyperchaotiques fractionnaires sont choisis tels que  $x_i(0) = (1, 1, 1, 1)$ . L'ordre fractionnaire de ces systèmes est égal à 0.98.

La Fig.5.3 décrit l'évolution des erreurs d'anti-synchronisation au cours du temps.

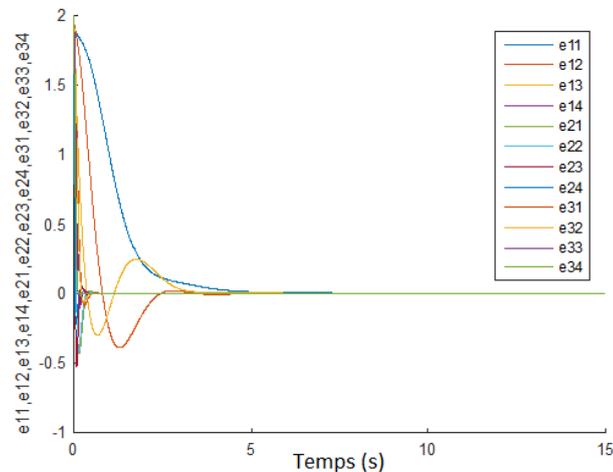


FIGURE 5.3 – Erreurs d'anti-synchronisation des quatre systèmes fractionnaires identiques.

Nous avons constaté que les erreurs d'anti-synchronisation se stabilisent vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Nous avons simulé le comportement dynamique des variables d'état de chaque système couplé. Ces trajectoires sont reportées sur la Fig.5.4. Cette figure illustre les deux modes de synchronisation. En effet, nous constatons que les couples  $(x_1(t), x_2(t))$ ,  $(x_2(t), x_3(t))$  et  $(x_3(t), x_4(t))$  traduisent l'anti-synchronisation tel que le second système de chaque couple a le comportement inverse du premier. Par contre, pour les couples  $(x_1(t), x_3(t))$  et  $(x_2(t), x_4(t))$ , la synchronisation complète est bien observée.

Un zoom est illustré sur la Fig.5.5 afin de comprendre le régime dynamique des systèmes couplés. Au début, ces trajectoires sont différentes, mais après une courte période de l'ordre de trois secondes, elles convergent par paires. Ainsi, la synchronisation hybride est atteinte en vertu des lois de commande proposées  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

### 5.5.2 2<sup>ème</sup> cas : Synchronisation de systèmes chaotiques différents

Dans ce paragraphe, nous appliquerons le schéma de la synchronisation hybride pour quatre systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire différents couplés via une connexion en anneau [Lassoued and Boubaker, 2019b]. Pour ce faire, nous avons choisi quatre systèmes chaotiques fractionnaires à savoir deux systèmes de Lorenz, un système de Chen et un système de Lü. Leur couplage via une connexion en anneau

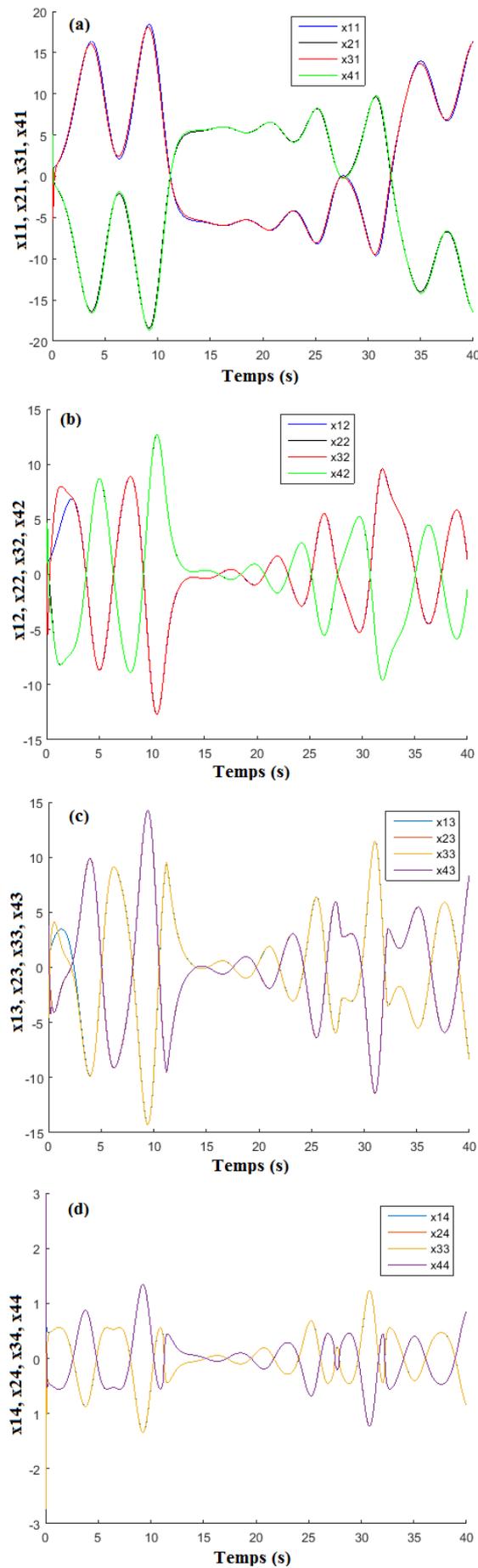


FIGURE 5.4 – Trajectoires d'évolution des variables d'état des systèmes identiques : (a)  $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}$  ; (b)  $x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}$  ; (c)  $x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}$ , d)  $x_{14}, x_{24}, x_{34}, x_{44}$ .

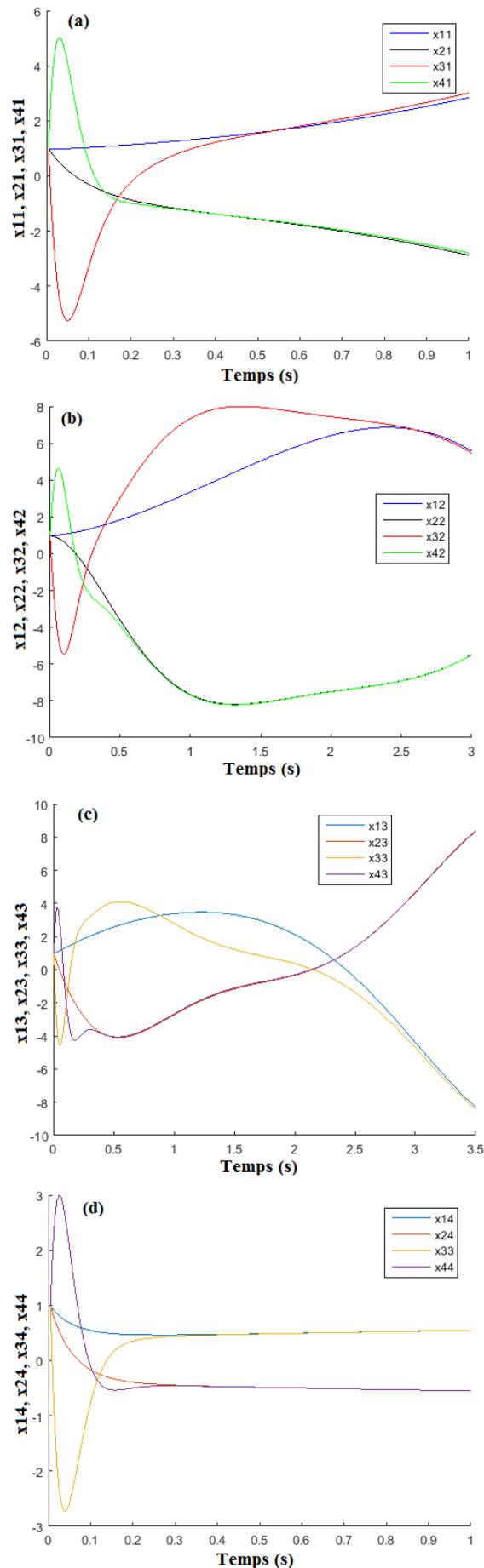


FIGURE 5.5 – Zoom sur des trajectoires d'évolution des variables d'état des systèmes identiques : (a)  $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}$  ; (b)  $x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}$  ; (c)  $x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}$ , d)  $x_{14}, x_{24}, x_{34}, x_{44}$ .

est illustré par la Fig.5.6. Ce choix affirmera aussi que ce schéma est applicable pour des systèmes différents autant que pour des systèmes identiques.

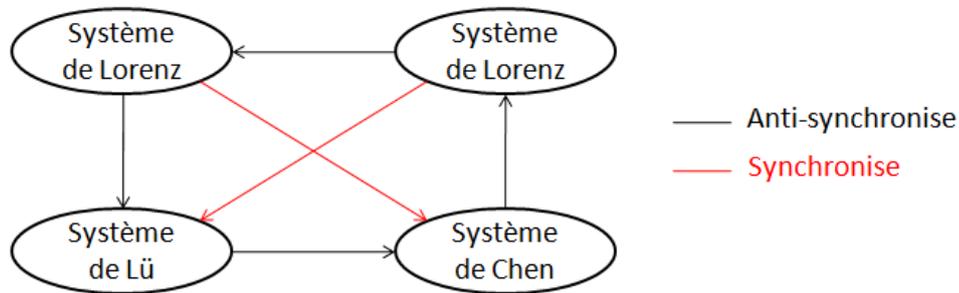


FIGURE 5.6 – Couplage en anneau des quatre systèmes hyperchaotiques différents.

Les systèmes différents d'ordre fractionnaire sont :

Le système de Lorenz décrit par [Yu et al., 2009]

$$\begin{cases} D^q x_{11} = -10x_{11} + 10x_{12}, \\ D^q x_{12} = 28x_{11} - x_{12} - x_{11}x_{13}, \\ D^q x_{13} = -\frac{8}{3}x_{13} - x_{11}x_{12}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Le système de Chen décrit par [Li and Chen, 2004]

$$\begin{cases} D^q x_{31} = -35x_{31} + 35x_{32}, \\ D^q x_{32} = -7x_{31} + 28x_{32} - x_{31}x_{33}, \\ D^q x_{33} = -3x_{33} + x_{31}x_{32}. \end{cases} \quad (5.21)$$

Le système de Lü décrit par [Lu, 2006]

$$\begin{cases} D^q x_{41} = -36x_{41} + 36x_{42}, \\ D^q x_{42} = 20x_{42} - x_{41}x_{43}, \\ D^q x_{43} = -3x_{43} + x_{41}x_{42}. \end{cases} \quad (5.22)$$

avec  $q = 0.96$  pour lequel ces systèmes conservent leurs comportements chaotiques.

Les matrices linéaires et les fonctions non linéaires décrites dans l'équation (5.1) sont données par

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -7 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -36 & 36 & 0 \\ 0 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$g_i(x_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} \end{bmatrix} \text{ avec } i = 1, 2, 3.$$

Selon la définition 5.3, nous définissons le vecteur d'erreur d'anti-synchronisation correspondant au quatre systèmes fractionnaires différents couplés en anneau :

$$e_A = [e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33}].$$

Ce vecteur contient neuf éléments chacun relatif à une erreur d'anti-synchronisation.

Les lois de commande conçues et proposées pour les systèmes fractionnaires (5.20), (5.21), (5.22) et (5.23) sont définies par les équations suivantes conformément au système (5.7) du théorème 5.1 :

$$\begin{cases} u_1 = H_1 e_A + 2(D_1 - D_2)x_1 - g_2(x_2) - g_1(x_1), \\ u_2 = H_2 e_A - (2(D_2 - D_3) - (A_3 - A_2))x_2 - g_3(x_3) - g_2(x_2) - u_1, \\ u_3 = H_3 e_A - (-2(D_3 - D_4) - (A_4 - A_3))x_3 - g_4(x_4) - g_3(x_3) - u_2. \end{cases} \quad (5.23)$$

Les matrices  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  seront définis par la suite.

La dynamique d'erreur de synchronisation relative aux systèmes d'ordre fractionnaire couplés est exprimée par l'équation

$$D^q e_A = (M + H).e_A = L.e_A = [L_{ij}] e_A \quad \text{avec } i = j = 1 \dots 3.$$

La matrice  $M$  est une matrice constante définie par le théorème 5.1. Par conséquent, nous devons choisir la matrice  $H$  afin que la matrice  $L$  puisse satisfaire les conditions de stabilité (5.9).

Nous avons alors obtenu les matrices  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  suivantes

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{31} & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & -d_{32} & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{33} \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec

$$N_1 = d_{11} - d_{21},$$

$$N_2 = d_{12} - d_{22},$$

$$N_3 = d_{13} - d_{23}.$$

Ainsi, nous obtenons les matrices  $[L_{ij}]$  (avec  $(i, j) \in [1 \cdots 3]$ ) dont les composantes sont les suivantes

$$L_{11} = \begin{bmatrix} -10 + d_{11} - d_{21} & 10 & 0 \\ -10 & -1 + d_{12} - d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} + d_{13} - d_{23} \end{bmatrix},$$

$$L_{13} = L_{21} = -L_{12} = -L_{31} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{12} & 0 \\ 0 & 0 & d_{13} \end{bmatrix},$$

$$L_{22} = \begin{bmatrix} -35 - d_{31} & 35 & 0 \\ -35 & 28 - d_{32} & 0 \\ 0 & 0 & -3 - d_{33} \end{bmatrix},$$

$$L_{32} = -L_{23} = \begin{bmatrix} d_{31} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix},$$

$$L_{33} = \begin{bmatrix} -36 - d_{41} & 36 & 0 \\ -36 & 26 - d_{42} & 0 \\ 0 & 0 & -3 - d_{43} \end{bmatrix}.$$

En se basant sur le théorème 5.1, nous avons  $L = L_1 + L_2$ . Après calcul, les deux matrices  $L_1$  et  $L_2$  sont obtenues et décrites dans l'annexe B. Ainsi, les conditions de stabilité (5.9) pour les différents systèmes fractionnaires sont satisfaites si seulement si les conditions suivantes sont respectées

$$\begin{aligned} -10 + d_{11} - d_{21} &< 0, & -1 + d_{12} - d_{22} &< 0, \\ -\frac{8}{3} + d_{13} - d_{23} &< 0, & -35 - d_{31} &< 0, \end{aligned}$$

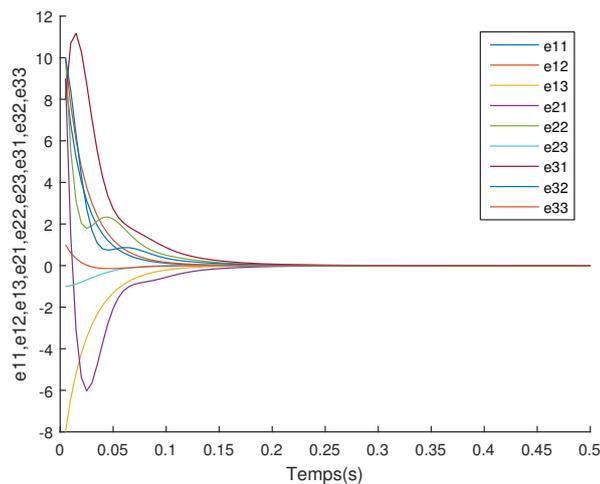


FIGURE 5.7 – Erreurs d'anti-synchronisation  $e_A$  des quatre systèmes fractionnaires chaotiques.

$$\begin{aligned}
 28 - d_{32} &< 0, & -3 - d_{33} &< 0, \\
 -36 - d_{41} &< 0, & 26 - d_{42} &< 0, \\
 -3 - d_{43} &< 0.
 \end{aligned}$$

Pour les simulations numériques, nous avons choisi les conditions initiales  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ ,  $x_3(0)$  et  $x_4(0)$  relatives à chaque système chaotique fractionnaire telles que  $x_1(0) = (4, 5, -3)$ ,  $x_2(0) = (5, 5, -5)$ ,  $x_3(0) = (4, 5, 4)$  et  $x_4(0) = (4, 5, -3)$ . Le paramètre fractionnaire  $q$  est de l'ordre de 0.96 pour ce cas de figure. D'autre part, nous avons fixé les matrices diagonales  $D_i$  tels que les paramètres  $(d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{31}, d_{32}, d_{33})$  sont égaux à  $(0, 0, 0, 62, 30, 30, 80, 50, 25, 30, 40, 40)$ .

La Fig.5.7 décrit l'évolution des erreurs d'anti-synchronisation. D'après cette figure, il est facile d'observer que chaque erreur du vecteur  $e_A$  se stabilise vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Nous pouvons conclure alors que l'anti-synchronisation est réalisée ainsi que la synchronisation complète. Pour affirmer les résultats obtenus, nous avons simulé les trajectoires des variables d'état des systèmes couplés au cours du temps. Ces trajectoires sont reportées sur la Fig.5.8.

Sur la Fig.5.8, nous constatons que les couples  $(x_1(t), x_2(t))$ ,  $(x_2(t), x_3(t))$  et  $(x_3(t), x_4(t))$  traduisent l'anti-synchronisation. Par contre, les couples  $(x_1(t), x_3(t))$  et  $(x_2(t), x_4(t))$  traduisent la synchronisation complète. Un zoom sur la partie dynamique est illustré par la Fig.5.9. Au début, ces trajectoires sont différentes, mais après une courte période elles convergent par paires. Ainsi, la synchronisation hybride est atteinte en vertu des lois de commande proposées  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

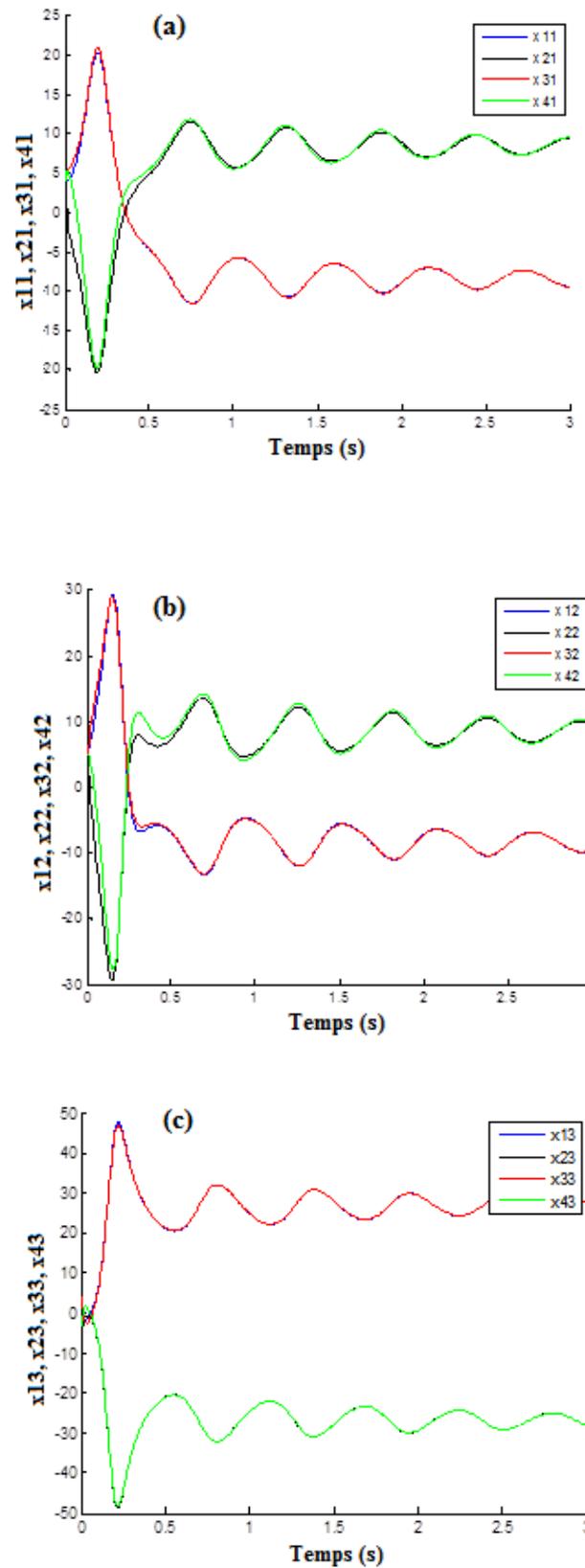


FIGURE 5.8 – Trajectoires d'évolution des variables d'état des systèmes différents : (a)  $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}$ ; (b)  $x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}$ ; (c)  $x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}$ .

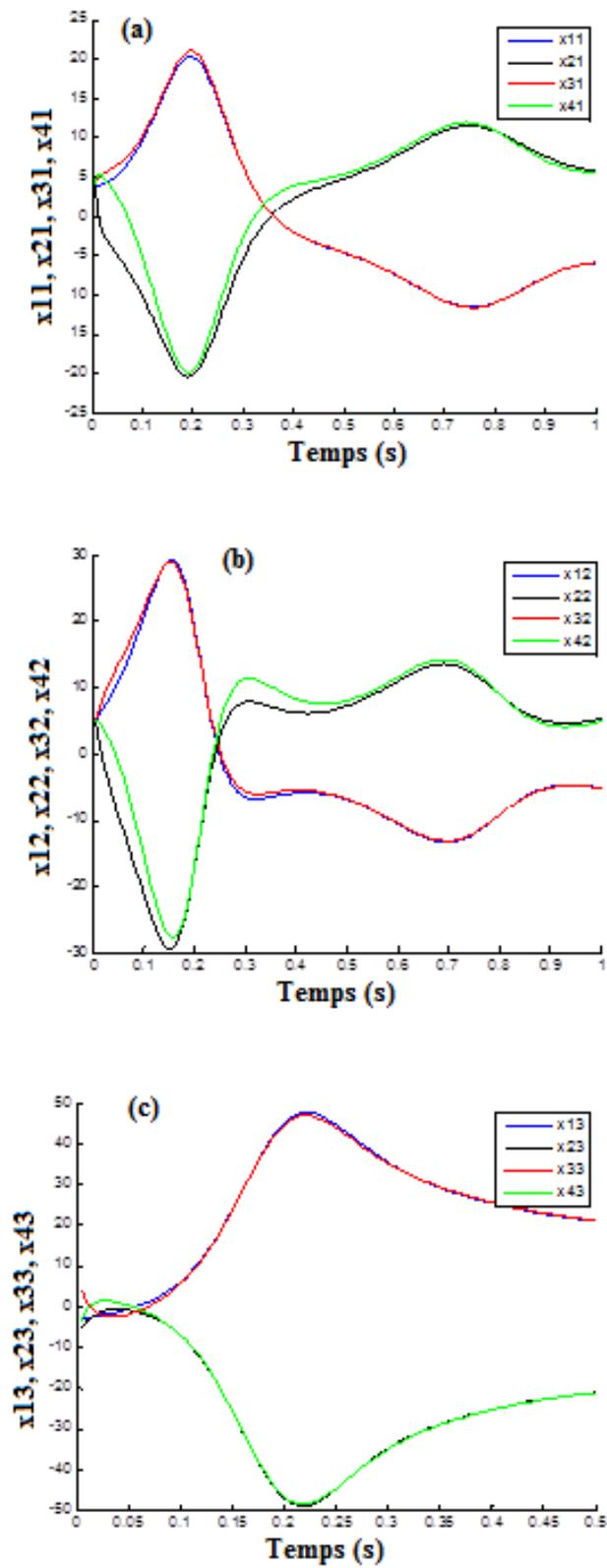


FIGURE 5.9 – Zoom sur des trajectoires d'évolution des variables d'état des systèmes fractionnaires différents : (a)  $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}$ ; (b)  $x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}$ ; (c)  $x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}$ , d)  $x_{14}, x_{24}, x_{34}, x_{44}$ .

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, le problème de la synchronisation hybride de plusieurs systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire connectés en anneau a été formulé. Afin de montrer la validité des résultats obtenus, deux exemples ont été développés. Le premier traite de la synchronisation de quatre systèmes hyperchaotiques d'ordre fractionnaire identiques. Quant au second, il résout le problème de la synchronisation de quatre systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire différents. L'implémentation des lois de commande proposées pour la synchronisation hybride en anneau est envisagée par la suite pour réaliser au final une application réelle dans le domaine de la communication sécurisée.

# Conclusion générale

Les travaux de recherche présentés dans le cadre de cette thèse exposent nos contributions dans le domaine de la conception, l'analyse et la synchronisation des systèmes chaotiques et hyperchaotiques d'ordre entiers et d'ordre fractionnaires. De nouveaux systèmes chaotiques et hyperchaotiques ont été proposés et analysés pour satisfaire le compromis entre la simplicité de l'implémentation et la génération de comportement dynamique complexe. Une validation expérimentale des résultats obtenus a été aussi menée. Ces systèmes seront sans doute exploitables dans des applications d'ingénierie notamment dans le domaine de la communication sécurisée. Dans un premier lieu, un nouveau système basé sur une dynamique jerk avec une seule fonction non linéaire par morceaux a été proposé. L'analyse des performances de ce dernier nous a confirmé que la fonction non-linéaire adoptée favorise la génération d'un comportement symétrique complexe. Ce système a exhibé un exposant de Lyapunov ( $LE = 0.141$ ) plus grand que celui engendré par des systèmes similaires. Par la suite, dans le but d'améliorer les résultats obtenus, nous avons procédé à la chaotification de ce dernier. Un système chaotique modifié avec un polynôme d'ordre non entier a été alors proposé. Ce dernier génère un premier LE assez important et supérieur au précédent ( $LE = 0.15$ ). Celui-ci est aussi caractérisé par un attracteur chaotique asymétrique fortement recommandé pour des applications de communication sécurisée.

D'un autre côté, un nouveau système hyperchaotique construit à base de polynôme d'ordre non entier a été proposé. Celui-ci est caractérisé par un attracteur asymétrique et un premier  $LE$  égale à 0.2. Son modèle d'ordre fractionnaire a été mis en place pour des objectifs d'implémentation pratique.

Pour mettre en évidence le potentiel applicatif des systèmes proposés, une implémentation sur circuits électriques a été proposée. Des résultats de simulation ont été obtenus via le logiciel Multisim et comparés aux résultats obtenus sous Matlab. Cette étude comparative a permis de soulever des problèmes liés essentiellement aux composants électroniques et aux imperfections engendrées par les fonctions non linéaires. Pour remédier à ces effets néfastes, une méthode de réduction des amplitudes

des variables d'état a été appliquée et certaines valeurs numériques des composants utilisés ont été ajustées. Dans ce cas de figure, les simulations numériques confirment bien les résultats théoriques.

Pour mettre en valeur les contributions précédentes, une validation expérimentale des résultats théoriques et des résultats de simulation obtenus via les différents logiciels utilisés a été mise en place. Les circuits électriques relatifs aux fonctions non linéaires ainsi que celles d'un système chaotique proposé ont été tout d'abord réalisés. Les données expérimentales obtenues confirment bien la validité des techniques de conception proposées. Les résultats expérimentaux montrent aussi que le système chaotique réalisé exhibe bien l'attracteur obtenu lors des résultats de simulation.

L'objectif de construire de nouveaux circuits chaotiques et hyperchaotiques est de les utiliser par la suite pour des applications concrètes. Dans ce cadre, nous avons opté pour la conception d'une technique de synchronisation chaotique d'ordre fractionnaire. Dans ce sens, un schéma de synchronisation hybride en anneau, récemment proposé dans la littérature pour des systèmes d'ordre entier, a été alors entendu pour le cas des systèmes d'ordre fractionnaire. Ainsi, les lois de commande et les paramètres adéquats pour la réalisation de la technique de synchronisation considérée ont été définis. Afin de montrer la validité des résultats obtenus, deux cas d'étude ont été réalisés. Le premier traite de la synchronisation de quatre systèmes hyperchaotiques identiques d'ordre fractionnaire. Quant au second, il propose une solution pour la synchronisation de quatre systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire différents.

En perspective aux travaux proposés dans le cadre de cette thèse, l'implémentation expérimentale du système chaotique modifié et les deux systèmes hyperchaotiques proposés est envisagée comme principale perspective de ce travail. L'implémentation des lois de commande proposés pour la synchronisation hybride en anneau est aussi envisagée par la suite. Ceci nous permettra de réaliser au final une application réelle dans le domaine de la communication sécurisée ainsi que dans le domaine du cryptage des signaux tel que le cryptage d'images.

# Bibliographie

- [Ahmad and Sprott, 2003] Ahmad, W. M. and Sprott, J. (2003). Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 16(2) :339–351.
- [Alligood et al., 1997] Alligood, K. T., Sauer, T. D., and Yorke, J. A. (1997). *Chaos : An Introduction to Dynamical Systems ; 1996*. Springer-Verlag, New-York.
- [Arena et al., 1995] Arena, P., Baglio, S., Fortuna, L., and Manganaro, G. (1995). Chua’s circuit can be generated by cnn cells. *IEEE transactions on circuits and systems. 1, Fundamental theory and applications*, 42(2) :123–125.
- [Benettin et al., 1980] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., and Strelcyn, J.-M. (1980). Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems ; a method for computing all of them. part 1 : Theory. *Meccanica*, 15(1) :9–20.
- [Cai et al., 2009] Cai, N., Jing, Y., and Zhang, S. (2009). Generalized projective synchronization of different chaotic systems based on antisymmetric structure. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(2) :1190–1196.
- [Campos-Cantón, 2016] Campos-Cantón, E. (2016). Chaotic attractors based on unstable dissipative systems via third-order differential equation. *International Journal of Modern Physics C*, 27(01) :1–11.
- [Campos-Cantón et al., 2012] Campos-Cantón, E., Femat, R., and Chen, G. (2012). Attractors generated from switching unstable dissipative systems. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(3) :1–8.
- [Cang et al., 2014] Cang, S., Wang, Z., Chen, Z., and Jia, H. (2014). Analytical and numerical investigation of a new lorenz-like chaotic attractor with compound structures. *Nonlinear Dynamics*, 15 :745–760.
- [Caputo, 1967] Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent—ii. *Geophysical Journal International*, 13(5) :529–539.
- [Carroll and Pecora, 1991] Carroll, T. L. and Pecora, L. M. (1991). Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 38(4) :453–456.

- [Čelikovský and Chen, 2002] Čelikovský, S. and Chen, G. (2002). On a generalized lorenz canonical form of chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(08) :1789–1812.
- [Charef et al., 1992] Charef, A., Sun, H., Tsao, Y., and Onaral, B. (1992). Fractal system as represented by singularity function. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9) :1465–1470.
- [Chen et al., 2006] Chen, A., Lu, J., Lü, J., and Yu, S. (2006). Generating hyperchaotic liu attractor via state feedback control. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 364 :103–110.
- [Chen et al., 2014] Chen, D., Zhang, R., Liu, X., and Ma, X. (2014). Fractional order lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(12) :4105–4121.
- [Chen and Ueta, 1999] Chen, G. and Ueta, T. (1999). Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9(07) :1465–1466.
- [Chen et al., 2016a] Chen, X., Cao, J., Qiu, J., and Yang, C. (2016a). *Transmission synchronization control of multiple non-identical coupled chaotic systems*. Springer, Cham.
- [Chen and Qiu, 2013] Chen, X. and Qiu, J. (2013). Synchronization of different chaotic systems based on antisymmetric structure. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013 :1–6.
- [Chen et al., 2016b] Chen, X., Qiu, J., Cao, J., and He, H. (2016b). Hybrid synchronization behavior in an array of coupled chaotic systems with ring connection. *Neurocomputing*, 173 :1299–1309.
- [Chen et al., 2013] Chen, X., Qiu, J., Song, Q., and Zhang, A. (2013). Synchronization of coupled chaotic systems with ring connection based on special antisymmetric structure. *Abstract and Applied Analysis*, 2013 :1–7.
- [Chen et al., 2007] Chen, Z., Yang, Y., Qi, G., and Yuan, Z. (2007). A novel hyperchaos system only with one equilibrium. *Physics Letters A*, 360(6) :696–701.
- [Chua, 1992] Chua, L. O. (1992). The genesis of chua’s circuit. *Archiv für Elektronik and Übertragungstechnik*, 46(4) :250–257.
- [Chua et al., 1993] Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A., and Zhong, G.-Q. (1993). A universal circuit for studying and generating chaos. i. routes to chaos. *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 40(10) :732–744.
- [Cuomo et al., 1993] Cuomo, K. M., Oppenheim, A. V., and Strogatz, S. H. (1993). Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with applications to communi-

- cations. *Circuits and systems II : Analog and digital signal processing, IEEE Transactions on*, 40(10) :626–633.
- [Dadras et al., 2012] Dadras, S., Momeni, H. R., Qi, G., and Wang, Z.-l. (2012). Four-wing hyperchaotic attractor generated from a new 4d system with one equilibrium and its fractional-order form. *Nonlinear Dynamics*, 67(2) :1161–1173.
- [Das et al., 2013] Das, S., Srivastava, M., and Leung, A. (2013). Hybrid phase synchronization between identical and nonidentical three-dimensional chaotic systems using the active control method. *Nonlinear Dynamics*, 73(4) :2261–2272.
- [Deng et al., 2009] Deng, H., Li, T., Wang, Q., and Li, H. (2009). A fractional-order hyperchaotic system and its synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*, 41(2) :962–969.
- [Dhooge et al., 2006] Dhooge, A., Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A., Mestrom, W., Riet, A., and Sautois, B. (2006). Matcont and cl matcont : Continuation toolboxes in matlab. *Universiteit Gent, Belgium and Utrecht University, The Netherlands*.
- [Dingwell, 2006] Dingwell, J. B. (2006). Lyapunov exponents. *Wiley Encyclopedia of Biomedical Engineering*, 1 :1–12.
- [Dong et al., 2009] Dong, G., Du, R., Tian, L., and Jia, Q. (2009). A novel 3d autonomous system with different multilayer chaotic attractors. *Physics Letters A*, 373(42) :3838–3845.
- [Durdu and Uyaroglu, 2017] Durdu, A. and Uyaroglu, Y. (2017). The shortest synchronization time with optimal fractional order value using a novel chaotic attractor based on secure communication. *Chaos, Solitons & Fractals*, 104 :98–106.
- [El-Sayed et al., 2016] El-Sayed, A., Nour, H., Elsaid, A., Matouk, A., and Elsonbaty, A. (2016). Dynamical behaviors, circuit realization, chaos control, and synchronization of a new fractional order hyperchaotic system. *Applied Mathematical Modelling*, 40(5) :3516–3534.
- [Fa-Qiang and Chong-Xin, 2006] Fa-Qiang, W. and Chong-Xin, L. (2006). Hyperchaos evolved from the liu chaotic system. *Chinese Physics*, 15(5) :963–968.
- [Feki, 2003] Feki, M. (2003). An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication. *Chaos, Solitons & Fractals*, 18(1) :141–148.
- [Feki and Gain, 2011] Feki, M. and Gain, R. (2011). Synchronizing fractional order chaotic systems with an integer order observer. In *Systems, Signals and Devices (SSD), 2011 8th International Multi-Conference on*, pages 1–5, Sousse, Tunisia. IEEE.
- [Ferreira et al., 2014] Ferreira, B. B., Savi, M. A., and de Paula, A. S. (2014). Chaos control applied to cardiac rhythms represented by ecg signals. *Physica Scripta*, 89(10) :1–10.

- [Gao et al., 2007] Gao, T., Chen, G., Chen, Z., and Cang, S. (2007). The generation and circuit implementation of a new hyper-chaos based upon lorenz system. *Physics Letters A*, 361(1) :78–86.
- [Gao et al., 2006] Gao, T., Chen, Z., Yuan, Z., and Chen, G. (2006). A hyper-chaos generated from chen’s system. *International Journal of Modern Physics C*, 17(04) :471–478.
- [Gotthans et al., 2016] Gotthans, T., Sprott, J. C., and Petrzela, J. (2016). Simple chaotic flow with circle and square equilibrium. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(08). Doi : 10.1142/S0218127416501376.
- [Gottlieb, 1996] Gottlieb, H. (1996). What is the simplest jerk function that gives chaos? *American Journal of Physics*, 64(5) :525–525.
- [Govorukhin, 2003] Govorukhin, V. (2003). Matds-matlab-based for dynamical system. <http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/matds/Begin>.
- [Gros, 2015] Gros, C. (2015). Bifurcations and chaos in dynamical systems. In *Complex and Adaptive Dynamical Systems*, pages 43–77. Springer.
- [Guan et al., 2014] Guan, Z.-H., Lai, Q., Chi, M., Cheng, X.-M., and Liu, F. (2014). Analysis of a new three-dimensional system with multiple chaotic attractors. *Nonlinear Dynamics*, 75(1-2) :331–343.
- [He and Cao, 2009] He, W. and Cao, J. (2009). Generalized synchronization of chaotic systems : an auxiliary system approach via matrix measure. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(1) :1–10.
- [Jackson et al., 1984] Jackson, L., Lindgren, A., Kim, Y., et al. (1984). A chaotic attractor from chua’s circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 31 :1055–1058.
- [Jafari and Sprott, 2013] Jafari, S. and Sprott, J. (2013). Simple chaotic flows with a line equilibrium. *Chaos, Solitons & Fractals*, 57 :79–84.
- [Ji, 2014] Ji, X. H. (2014). Hybrid synchronization of three identical coupled chaotic systems using the direct design method. *Advanced Materials Research*, 912 :695–699.
- [Jia et al., 2017] Jia, H., Guo, Z., Qi, G., and Chen, Z. (2017). Analysis of a four-wing fractional-order chaotic system via frequency-domain and time-domain approaches and circuit implementation for secure communication. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*. Doi : 10.1016/j.ijleo.2017.10.076.
- [Jia and Wang, 2013] Jia, N. and Wang, T. (2013). Generation and modified projective synchronization for a class of new hyperchaotic systems. *Abstract and Applied Analysis*, 2013 :1–11.

- [Jia, 2007] Jia, Q. (2007). Hyperchaos generated from the lorenz chaotic system and its control. *Physics Letters A*, 366(3) :217–222.
- [Jian-Bing and Ling-Dong, 2013] Jian-Bing, H. and Ling-Dong, Z. (2013). Stability theorem and control of fractional systems. *Acta Physica Sinica*, 62(24) :1–7.
- [Jmal et al., 2018] Jmal, A., Naifar, O., Ben Makhlouf, A., Derbel, N., and Hammami, M. A. (2018). On observer design for nonlinear caputo fractional-order systems. *Asian Journal of Control*, 20(5) :1–8.
- [Jumarie, 2006] Jumarie, G. (2006). Modified riemann-liouville derivative and fractional taylor series of nondifferentiable functions further results. *Computers & Mathematics with Applications*, 51(9-10) :1367–1376.
- [Kamsri et al., 2008] Kamsri, T., Julsereewong, P., and Riewruja, V. (2008). Simple square-root extractor using op amps. In *International Conference on Control, Automation and Systems ICCAS*, pages 1812–1815, Seoul, South Korea. IEEE.
- [Kengne et al., 2018] Kengne, J., Signing, V. F., Chedjou, J., and Leutcho, G. (2018). Nonlinear behavior of a novel chaotic jerk system : antimonotonicity, crises, and multiple coexisting attractors. *International Journal of Dynamics and Control*, 6(2) :468–485.
- [Koçak and Palmer, 2010] Koçak, H. and Palmer, K. J. (2010). Lyapunov exponents and sensitive dependence. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 22(3) :381–398.
- [Kuznetsov, 2013] Kuznetsov, Y. A. (2013). *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, New York.
- [Lassoued and Boubaker, 2016a] Lassoued, A. and Boubaker, O. (2016a). Hybrid synchronization of multiple fractional-order chaotic systems with ring connection. In *Modelling, Identification and Control (ICMIC), 2016 8th International Conference on*, pages 109–114, Algiers, Algeria. IEEE. Doi :10.1007/978-3-319-50249-6-24.
- [Lassoued and Boubaker, 2016b] Lassoued, A. and Boubaker, O. (2016b). On new chaotic and hyperchaotic systems : A literature survey. *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, 21(6) :770–789. Doi : 10.15388/NA.2016.6.3.
- [Lassoued and Boubaker, 2017a] Lassoued, A. and Boubaker, O. (2017a). Dynamic analysis and circuit design of a novel hyperchaotic system with fractional-order terms. *Complexity*, 2017. Doi : 10.1155/2017/3273408.
- [Lassoued and Boubaker, 2017b] Lassoued, A. and Boubaker, O. (2017b). A new fractional-order jerk system and its hybrid synchronization. In *Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems*, pages 699–718. Springer. Doi :10.1007/978-3-319-50249-6-24.

- [Lassoued and Boubaker, 2019a] Lassoued, A. and Boubaker, O. (2019a). Fractional-order hybrid synchronization for multiple hyperchaotic systems. In *Recent Advances in Chaotic Systems and Synchronization : From Theory to Real World Applications*, pages 351–366. Elsevier. Doi :10.1016/B978-0-12-815838-8.00017-0.
- [Lassoued and Boubaker, 2019b] Lassoued, A. and Boubaker, O. (2019b). Hybrid chaotic synchronization between identical and non-identical fractional-order systems. *International Journal of Computer Applications in Technology*, 60(2). In press.
- [Lassoued et al., 2018] Lassoued, A., Boubaker, O., and Dhifaoui, R. (2018). A simple chaotic system with only one nonlinear term : Circuit design and experimental validation. In *International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*. Hammamet, Tunisia. Doi :10.1109/SSD.2018.8570688.
- [Lassoued et al., 2019] Lassoued, A., Boubaker, O., Dhifaoui, R., and Jafari, S. (2019). Experimental observations and circuit realization of a jerk chaotic system with piecewise nonlinear function. In *Recent Advances in Chaotic Systems and Synchronization : From Theory to Real World Applications*, pages 3–21. Elsevier. Doi :10.1016/B978-0-12-815838-8.00001-7.
- [Li and Chen, 2004] Li, C. and Chen, G. (2004). Chaos in the fractional order chen system and its control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(3) :549–554.
- [Li et al., 2015] Li, C., Hu, W., Sprott, J. C., and Wang, X. (2015). Multistability in symmetric chaotic systems. *The European Physical Journal Special Topics*, 224(8) :1493–1506.
- [Li et al., 2013] Li, C., Li, H., and Tong, Y. (2013). Analysis of a novel three-dimensional chaotic system. *Optik*, 124(13) :1516–1522.
- [Li et al., 2014a] Li, C., Sprott, J. C., Thio, W., and Zhu, H. (2014a). A new piecewise linear hyperchaotic circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 61(12) :977–981.
- [Li et al., 2016a] Li, C., Sprott, J. C., and Xing, H. (2016a). Hypogenetic chaotic jerk flows. *Physics Letters A*, 380(11) :1172–1177.
- [Li et al., 2014b] Li, C.-L., Xiong, J.-B., and Li, W. (2014b). A new hyperchaotic system and its generalized synchronization. *Optik*, 125(1) :575–579.
- [Li et al., 2016b] Li, P., Zheng, T., Li, C., Wang, X., and Hu, W. (2016b). A unique jerk system with hidden chaotic oscillation. *Nonlinear Dynamics*, 86(1) :197–203.
- [Li and Ou, 2011] Li, X. and Ou, Q. (2011). Dynamical properties and simulation of a new lorenz-like chaotic system. *Nonlinear Dynamics*, 65(3) :255–270.

- [Li et al., 2011] Li, Y., Liu, X., Chen, G., and Liao, X. (2011). A new hyperchaotic lorenz-type system : Generation, analysis, and implementation. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 39(8) :865–879.
- [Li et al., 2005a] Li, Y., Tang, W. K., and Chen, G. (2005a). Generating hyperchaos via state feedback control. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(10) :3367–3375.
- [Li et al., 2005b] Li, Y., Tang, W. K., and Chen, G. (2005b). Hyperchaos evolved from the generalized lorenz equation. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 33(4) :235–251.
- [Liu et al., 2004] Liu, C., Liu, T., Liu, L., and Liu, K. (2004). A new chaotic attractor. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(5) :1031–1038.
- [Liu and Zhang, 2013] Liu, J. and Zhang, W. (2013). A new three-dimensional chaotic system with wide range of parameters. *Optik*, 124(22) :5528–5532.
- [Liu and Liu, 2012] Liu, P. and Liu, S. (2012). Robust adaptive full state hybrid synchronization of chaotic complex systems with unknown parameters and external disturbances. *Nonlinear Dynamics*, 70(1) :585–599.
- [Liu and Zhang, 2014] Liu, S. and Zhang, F. (2014). Complex function projective synchronization of complex chaotic system and its applications in secure communication. *Nonlinear Dynamics*, 76 :1087–1097.
- [Liu and Lü, 2008] Liu, Y. and Lü, L. (2008). Synchronization of n different coupled chaotic systems with ring and chain connections. *Applied Mathematics and Mechanics*, 29(10) :1299–1308.
- [Lorenz, 1963] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2) :130–141.
- [Lü and Chen, 2002] Lü, J. and Chen, G. (2002). A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 12(03) :659–661.
- [Lu, 2006] Lu, J. G. (2006). Chaotic dynamics of the fractional-order lü system and its synchronization. *Physics Letters A*, 354(4) :305–311.
- [Martínez-Martínez et al., 2011] Martínez-Martínez, R., Mata-Machuca, J. L., Martínez-Guerra, R., León, J. A., and Fernández-Anaya, G. (2011). Synchronization of nonlinear fractional order systems. *Applied Mathematics and Computation*, 218(7) :3338–3347.
- [Matignon, 1996] Matignon, D. (1996). Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Computational engineering in systems applications*, volume 2, pages 963–968. IMACS, IEEE-SMC Lille, France.

- [Molaie et al., 2013] Molaie, M., Jafari, S., Sprott, J. C., and Golpayegani, S. M. R. H. (2013). Simple chaotic flows with one stable equilibrium. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(11) :1–8.
- [Oldham and Spanier, 1974] Oldham, K. B. and Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, volume 111. Academic Press, New York and London.
- [Ouannas et al., 2017] Ouannas, A., Wang, X., Pham, V.-T., and Ziar, T. (2017). Dynamic analysis of complex synchronization schemes between integer order and fractional order chaotic systems with different dimensions. *Complexity*, 2017. Doi : 10.1155/2017/4948392.
- [Pan et al., 2010] Pan, L., Zhou, W., and Fang, J. (2010). On dynamics analysis of a novel three-scroll chaotic attractor. *Journal of the Franklin Institute*, 347(2) :508–522.
- [Pang and Liu, 2011] Pang, S. and Liu, Y. (2011). A new hyperchaotic system from the Lü system and its control. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(8) :2775–2789.
- [Patidar and Sud, 2005] Patidar, V. and Sud, K. (2005). Bifurcation and chaos in simple jerk dynamical systems. *Pramana*, 64(1) :75–93.
- [Pham et al., 2017] Pham, V.-T., Jafari, S., and Volos, C. (2017). A novel chaotic system with heart-shaped equilibrium and its circuital implementation. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 131 :343–349.
- [Podlubny, 1998] Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volume 198. Academic press, United State of America.
- [Prigogine et al., 1984] Prigogine, I., Stengers, I., and Prigogine, I. (1984). *Order out of chaos : Man's new dialogue with nature*, volume 13. Bantam books, New York.
- [Qi et al., 2005a] Qi, G., Chen, G., Du, S., Chen, Z., and Yuan, Z. (2005a). Analysis of a new chaotic system. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 352(2) :295–308.
- [Qi et al., 2005b] Qi, G., Du, S., Chen, G., Chen, Z., et al. (2005b). On a four-dimensional chaotic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(5) :1671–1682.
- [Qi et al., 2005c] Qi, G., Du, S., Chen, G., Chen, Z., et al. (2005c). On a four-dimensional chaotic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(5) :1671–1682.
- [Radwan et al., 2009] Radwan, A., Soliman, A., Elwakil, A., and Sedeek, A. (2009). On the stability of linear systems with fractional-order elements. *Chaos Solitons Fract.*, 40(5) :2317–2328.

- [Rhouma and Belghith, 2008] Rhouma, R. and Belghith, S. (2008). Cryptanalysis of a new image encryption algorithm based on hyper-chaos. *Physics Letters A*, 372(38) :5973–5978.
- [Rössler, 1976] Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5) :397–398.
- [Ruo-Xun and Shi-Ping, 2009] Ruo-Xun, Z. and Shi-Ping, Y. (2009). Chaos in fractional-order generalized lorenz system and its synchronization circuit simulation. *Chinese Physics B*, 18(8). Doi :10.1088/1674-1056/18/8/033.
- [Sanchez et al., 2002] Sanchez, J., Marques, F., and Lopez, J. (2002). A continuation and bifurcation technique for navier–stokes flows. *Journal of Computational Physics*, 180(1) :78–98.
- [Shi and Wang, 2013] Shi, X. and Wang, Z. (2013). Hybrid synchronization phenomenon in two coupled delay hyperchaotic lorenz systems with unknown parameters via a single linear controller. *Journal of Vibration and Control*, 19(7) :1051–1060.
- [Shil'nikov, 1994] Shil'nikov, L. P. (1994). Chua's circuit : Rigorous results and future problems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(03) :489–519.
- [Shimada and Nagashima, 1979] Shimada, I. and Nagashima, T. (1979). A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progress of theoretical physics*, 61(6) :1605–1616.
- [Silva, 1993] Silva, C. P. (1993). Shil'nikov's theorem-a tutorial. *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 40(10) :675–682.
- [Singh and Roy, 2017] Singh, J. P. and Roy, B. (2017). The simplest 4-d chaotic system with line of equilibria, chaotic 2-torus and 3-torus behaviour. *Nonlinear Dynamics*, 89(3) :1845–1862.
- [Sprott, 1994] Sprott, J. (1994). Some simple chaotic flows. *Physical review E*, 50(2). Doi : 10.1103/PhysRevE.50.R647.
- [Sprott, 2000a] Sprott, J. C. (2000a). A new class of chaotic circuit. *Physics Letters A*, 266(1) :19–23.
- [Sprott, 2000b] Sprott, J. C. (2000b). Simple chaotic systems and circuits. *American Journal of Physics*, 68(8) :758–763.
- [Sprott, 2011] Sprott, J. C. (2011). A new chaotic jerk circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 58(4) :240–243.
- [Sun et al., 2012] Sun, J., Shen, Y., and Zhang, G. (2012). Transmission projective synchronization of multi-systems with non-delayed and delayed coupling via im-

- pulsive control. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(4).  
Doi : 10.1063/1.4760251.
- [Surakampontrorn, 1988] Surakampontrorn, W. (1988). Sinusoidal frequency doublers using operational amplifiers. *IEEE transactions on instrumentation and measurement*, 37(2) :259–262.
- [Suykens and Huang, 1997] Suykens, J. A. and Huang, A. (1997). A family of n-scroll attractors from a generalized chua’s circuit. *Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik*, 51(3) :131–137.
- [Tan et al., 2009] Tan, N., Özgüven, Ö. F., and Özyetkin, M. M. (2009). Robust stability analysis of fractional order interval polynomials. *ISA transactions*, 48(2) :166–172.
- [Teschl, 2012] Teschl, G. (2012). *Ordinary differential equations and dynamical systems*, volume 140. American Mathematical Society Providence, Rhode Island.
- [Vaidyanathan, 2016] Vaidyanathan, S. (2016). Analysis, adaptive control and synchronization of a novel 4-d hyperchaotic hyperjerk system via backstepping control method. *Archives of Control Sciences*, 26(3) :311–338.
- [Vaidyanathan et al., 2014] Vaidyanathan, S., Volos, C., Pham, V.-T., Madhavan, K., and Idowu, B. A. (2014). Adaptive backstepping control, synchronization and circuit simulation of a 3-d novel jerk chaotic system with two hyperbolic sinusoidal nonlinearities. *Archives of Control Sciences*, 24(3) :375–403.
- [Wan et al., 2014] Wan, Z., Wang, C., Luo, X., Lin, Y., and Huang, T. (2014). Generating variable number of wings from a novel four-dimensional hyperchaotic system with one equilibrium. *Optik*, 125(3) :1371–1376.
- [Wang et al., 2009] Wang, X., Zhang, Y., and Gao, Y. (2009). Hyperchaos generated from qi system and its observer. *Modern Physics Letters B*, 23(07) :963–974.
- [Wang et al., 2010] Wang, X.-Y., Gao, Y.-F., and Zhang, Y.-X. (2010). Hyperchaos qi system. *International Journal of Modern Physics B*, 24(24) :4771–4778.
- [Wang et al., 2012] Wang, Z., Cang, S., Ochola, E. O., and Sun, Y. (2012). A hyperchaotic system without equilibrium. *Nonlinear Dynamics*, 69(1-2) :531–537.
- [Wolf et al., 1985] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., and Vastano, J. A. (1985). Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 16(3) :285–317.
- [Xiao-Hua et al., 2009] Xiao-Hua, L., Wei, Z., Rui, L., Yi-Long, L., and Ming-Wei, L. (2009). Circuitry implementation of a novel four-dimensional nonautonomous hyperchaotic liu system and its experimental studies on synchronization control. *Chinese Physics B*, 18(6) :2168–2175.

- [Yan et al., 2015] Yan, C., Li, Y., Zhang, J., and Hou, J. (2015). Master-slave synchronisation criteria of chaotic neural networks systems with time delay feedback control. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 24(2) :149–155.
- [Yang and Cao, 2014] Yang, X. and Cao, J. (2014). Hybrid adaptive and impulsive synchronization of uncertain complex networks with delays and general uncertain perturbations. *Applied Mathematics and Computation*, 227 :480–493.
- [Yu et al., 2009] Yu, Y., Li, H.-X., Wang, S., and Yu, J. (2009). Dynamic analysis of a fractional-order lorenz chaotic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(2) :1181–1189.
- [Yujun et al., 2010] Yujun, N., Xingyuan, W., Mingjun, W., and Huaguang, Z. (2010). A new hyperchaotic system and its circuit implementation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(11) :3518–3524.
- [Zhang et al., 2005] Zhang, H., Liao, X., and Yu, J. (2005). Fuzzy modeling and synchronization of hyperchaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(3) :835–843.
- [Zhang et al., 2017] Zhang, Y., Shi, P., Lim, C.-C., Zhu, H., Hu, J., and Zeng, Y. (2017). Chaotification of a class of linear switching systems based on a shilnikov criterion. *Journal of the Franklin Institute*, 354(13) :5519–5536.
- [Zhen et al., 2013] Zhen, W., Xia, H., Yu-Xia, L., and Xiao-Na, S. (2013). A new image encryption algorithm based on the fractional-order hyperchaotic lorenz system. *Chinese Physics B*, 22(1) :1–7.
- [Zhou and Yang, 2014] Zhou, P. and Yang, F. (2014). Hyperchaos, chaos, and horseshoe in a 4d nonlinear system with an infinite number of equilibrium points. *Nonlinear Dynamics*, 76 :473–480.
- [Zhu and Zeng, 2017] Zhu, H. and Zeng, C. (2017). A novel chaotification scheme for fractional system and its application. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Doi : 10.1016/j.cam.2017.10.008.

# Annexe A

Les diagrammes de bifurcation :  
Programmes Matlab

## A.1 Programme du diagramme de bifurcation relatif au système (2.3)

```

clear; clc;
a = 1; b = 1; e = -0.25; global c; arange = 1:0.001:2.7; k = 0; tspan = 0:0.01:200; xmax = [];
for c = arange
    f = @(t,x) [x(2); x(3); -a*x(3)-b*x(2)+c*x(1)+e*x(1)*abs(x(1))];
    x0 = [1 1 1];
    k = k + 1;
    [t,x] = ode45(f,tspan,x0);
    count = find(t>100);
    x = x(count,:);
    j = 1;
    n = length(x(:,1));
    for i = 2:n-1
        if (x(i-1,1)+eps) < x(i,1) && x(i,1) > (x(i+1,1)+eps)
            xmax(k,j)=x(i,1);
            j=j+1; end
        end
        if j>1 |
            plot(c,xmax(k,1:j-1),'r.'): end
        hold on;
        index(k)=j-1;
    end
end
xlabel('Paramètre de bifurcation -c');
ylabel('x max');
title('Diagramme de bifurcation');

```

## A.2 Programme du diagramme de bifurcation relatif au système (2.8)

```

clear; clc;
a = 0.93; b = 1.11; c = -0.11; d = -0.21; r = 1.32; global m;
mrange = 2:0.01:6.3; k = 0; tspan = 0:0.01:200; xmax = [];
for m = mrange
    f = @(t,x) [x(2); x(3); -a*x(3)-b*x(2)-c*x(1)*x(1)+d*x(1)*abs(x(1))+m*((abs(x(1)))^r)*((x(1)).^(-1))];
    x0 = [1 1 1];
    k = k + 1;
    [t,x] = ode45(f,tspan,x0);
    count = find(t>100);
    x = x(count,:);
    j = 1;
    n = length(x(:,1));
    for i = 2:n-1
        if (x(i-1,1)+eps) < x(i,1) && x(i,1) > (x(i+1,1)+eps)
            xmax(k,j)=x(i,1);
            j=j+1; end
        end
        if j>1 |
            plot(m,xmax(k,1:j-1),'r.'): end
        hold on;
        index(k)=j-1;
    end
end
xlabel('Paramètre de bifurcation m');
ylabel('x max');
title('Diagramme de bifurcation');

```

### A.3 Programme du diagramme de bifurcation relatif au système (3.1)

```

clear; clc;
a= 0.93; b = 1.11; c = -0.11; d = -0.21; r = 1.32; h=0.001; k=14; global m;
mrange = 0:0.01:6.3; k = 0; tspan = 0:0.01:200; x = [];
for m = mrange
    f=@(t,x)[x(2);x(3);-a*x(3)-b*x(2)-c*x(1)+d*x(1)*abs(x(1))+m*((abs(x(1))).^z)*((x(1)).^(-1));k*x(2)-h*x(4)-c*x(1)*x(1)+d*x(1)*abs(x(1))+m*((abs(x(1))).^z)*((x(1)).^(-1))];
    x0 = [1 1 1 1];
    k = k + 1;
    [t,x] = ode45(f,tspan,x0);
    count = find(t>100);
    x = x(count,:);
    j = 1;
    n = length(x(:,1));
    for i = 2:n-1
        if (x(i-1,1)+eps) < x(i,1) && x(i,1) > (x(i+1,1)+eps)
            xmax(k,j)=x(i,1);
            j=j+1; end
    end
    if j>1
        plot(m,xmax(k,1:j-1),'r.'): end
    hold on;
    index(k)=j-1;
end
xlabel('Paramètre de bifurcation m');
ylabel('x max');
title('Diagramme de bifurcation');

```

# Annexe **B**

Les matrices  $L_1$  et  $L_2$  de la  
synchronisation hybride





## B.2 2<sup>ème</sup> cas : Synchronisation de systèmes chaotiques différents

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & d_{11} & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{12} & 0 & 0 & 0 & d_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{13} & 0 & 0 & 0 & d_{13} \\ \hline d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & -d_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{12} & 0 & 0 & -35 & 0 & 0 & 0 & -d_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{33} \\ \hline -d_{11} & 0 & 0 & d_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & -d_{12} & 0 & 0 & 0 & d_{32} & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_{13} & 0 & 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

