



HAL
open science

Contribution à la Synchronisation des Systèmes du Type PWL via une Approche LMI

Hanene Mkaouar Mzali

► **To cite this version:**

Hanene Mkaouar Mzali. Contribution à la Synchronisation des Systèmes du Type PWL via une Approche LMI. Automatique / Robotique. Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie Tunis, 2017. Français. NNT: . tel-02864279

HAL Id: tel-02864279

<https://theses.hal.science/tel-02864279>

Submitted on 17 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université de Carthage

Institut National des Sciences
Appliquées et de Technologie



THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Informatique Industrielle

CONTRIBUTION A LA SYNCHRONISATION DES SYSTEMES DU
TYPE PWL VIA UNE APPROCHE LMI

Présentée par

Hanene MKAOUAR MZALI
Ingénieur INSAT

Soutenue le 29 juin 2017 devant le jury composé de :

M. Ahmed Braham	Professeurs, INSAT	Président
M. Jawhar Ghommam	Maître de Conférences, INSAT	Rapporteur
M. Moez Feki	Professeur, ESSTHS	Rapporteur
M. Hassen Mekki	Maître de Conférences, ENISO	Examineur
Mme. Olfa Boubaker	Professeur, INSAT	Directeur de thèse

Cette thèse a été préparée à l'Unité de Recherche : Energy, Robotics, Control and Optimization (ERCO) de l'Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie (INSAT)

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein de l'unité de recherche Energie, Robotique, commande et optimisation ERCO, de l'Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie INSAT.

Je tiens à remercier M. Ahmed Braham, Professeur à l'INSAT qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse.

J'exprime ma reconnaissance à M. Jawhar Ghommam, Maître de conférences à l'INSAT et M. Moez Feki, Professeur à l'ESSTHS d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et pour leur disponibilité et leurs conseils précieux pour l'amélioration de la qualité de ce document.

Je remercie M. Hassen Mekki, Maître de conférences à l'ENISO, d'avoir accepté d'être l'examineur de ma thèse.

Je voudrais tout particulièrement remercier mon directeur de thèse Mme Olfa Boubaker, Professeur à l'INSAT, pour son encadrement et ses encouragements tout au long de ce travail. Je lui exprime toute ma gratitude pour sa disponibilité, sa patience et pour la confiance qu'elle m'a accordée pour travailler à ses côtés.

Table des matières

Table des matières	I
Table des figures	III
Table des tableaux	VI
Nomenclature	1
Introduction Générale	1
1 Etat de l'Art et Préliminaires	11
1.1 Introduction	12
1.2 Modélisation des systèmes du type PWL.....	12
1.3 Stabilité des systèmes du type PWL	20
1.4 Incertitudes	22
1.5 Synchronisation des systèmes dynamiques.....	25
1.6 Outils mathématiques.....	29
1.7 Motivation et contribution de la thèse.....	32
1.8 Conclusion.....	33
2 Contribution à la Synchronisation des Systèmes PWL	34
2.1 Introduction	35
2.2 Position du problème.....	35
2.3 Synchronisation des systèmes PWL.....	37
2.4 Application.....	42
2.5 Etude comparative.....	54
2.6 Conclusion.....	59

3 Contribution à la Synchronisation Chaotique.....	60
3.1 Introduction	61
3.2 Position du problème.....	61
3.3 Synchronisation chaotique	62
3.4 Application	67
3.5 Etude comparative.....	84
3.6 Conclusion.....	91
4 Contribution à la Synchronisation Robuste Chaotique.....	92
4.1 Introduction	93
4.2 Position du problème.....	93
4.3 Synchronisation chaotique robuste.....	94
4.4 Application	101
4.5 Etude comparative.....	110
4.6 Conclusion.....	112
Conclusion Générale	113
Annexe 1	116
Annexe 2	118
Annexe 3	123
Annexe 4	125
Annexe 5	130
Annexe 6	133
Bibliographie.....	138

Table des figures

Figure 1.1 Répartition de l'espace d'état.....	13
Figure 1.2 Fonctions PWA (a) continue - (b) discontinue	15
Figure 1.3: Système PWL mécanique	16
Figure 1.4. Circuit non linéaire de Chua	18
Figure 1.5. Caractéristique non linéaire de la diode de Chua	19
Figure 1.6. Système maître esclave en boucle fermée	26
Figure 2.1. Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs à synchroniser	43
Figure 2.2. Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs : Erreur de synchronisation en position et en vitesse.....	45
Figure 2.3 Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs : synchronisation en positions et en vitesses.....	46
Figure 2.4. Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs : Lois de commande.....	47
Figure 2.5. Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs : Commutation du maître entre les différentes cellules polyédriques	47
Figure 2.6. Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs : Commutation de l'esclave entre les différentes cellules polyédriques	48
Figure 2.7. Manutention d'un seul objet par deux robots similaires.....	49
Figure 2.8. Analogie entre la coopération de deux robots et le système masse-ressort-amortisseur	50
Figure 2.9. Coopération de deux robots : erreur de synchronisation en position et en vitesse	51
Figure 2.10. Coopération de deux robots : synchronisation en position et en vitesse	52
Figure 2.11. Coopération de deux robots : Commutation du système maître (a) et esclave (b) entre les différentes cellules polyédriques	53
Figure 2.12. Coopération de deux robots : Lois de commande.....	54
Figure 2.13. Système mécanique masses – ressorts - amortisseurs : Erreur de synchronisation en utilisant le théorème 2.1 (a) et le théorème 1.4 (b)	55
Figure 2.14. Coopération des deux robots : Erreur de synchronisation en utilisant le théorème 2.1 et le théorème 1.4	56
Figure 3.1. Comportement chaotique de l'oscillateur de Chua : (a) Evolution des états (b) Comportement dans le plan de phase	68
Figure 3.2. Circuit de Chua : Synchronisation des variables d'état	69

Figure 3.3. Circuit de Chua : Dynamique de l'erreur de synchronisation	69
Figure 3.4. Circuit de Chua : Loi de commande appliquée au système esclave	70
Figure 3.5. Circuit de Chua : Commutation des variables d'état du système maître entre les différentes cellules polytopiques	70
Figure 3.6. Circuit de Chua : Commutation des variables d'état du système esclave entre les différentes cellules polytopiques	71
Figure 3.7. Circuit de Chua non dimensionnel : Comportement chaotique	72
Figure 3.8. Circuit de Chua non dimensionnel : Erreur de synchronisation	73
Figure 3.9. Circuit de Chua non dimensionnel : Loi de commande du système esclave	73
Figure 3.10. Circuit de Chua non dimensionnel : Commutation entre les différents domaines polytopiques des variables d'état : (a) variables d'état du maître (b) variables d'état de l'esclave	74
Figure 3.11. Système de Lur'e : Comportement chaotique	76
Figure 3.12. Système de Lur'e : Erreur de synchronisation	77
Figure 3.13. Système de Lur'e : Loi de commande appliquée à l'esclave	77
Figure 3.14. Système de Lur'e : Commutation entre les différentes cellules polytopiques des variables d'état: (a) variables d'état du maître (b) variables d'état de l'esclave	78
Figure 3.15. Attracteur à cinq spirales : Comportement chaotique	81
Figure 3.16. Attracteur à cinq spirales : Erreur de synchronisation	82
Figure 3.17. Attracteur à cinq spirales : Loi de commande	82
Figure 3.18. Attracteur à cinq spirales : Commutation entre les différents domaines polytopiques des variables d'état du circuit : (a) variables d'état du maître (b) variables d'état de l'esclave	83
Figure 4.1 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Variables d'état non encore synchronisées	102
Figure 4.2 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Variables d'état synchronisées	102
Figure 4.3 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Loi de commande robuste	103
Figure 4.4 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Erreur de synchronisation	103
Figure 4.5 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Evolution des variables d'état du maître entre les différentes cellules polytopiques	104

Figure 4.6 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Evolution des variables d'état de l'esclave entre les différentes cellules polytopiques.....	104
Figure 4.7 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Plan de phase....	107
Figure 4.8 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Variables d'état non encore synchronisées.....	107
Figure 4.9 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Variables d'état synchronisées	108
Figure 4.10 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Erreur de synchronisation.....	108
Figure 4.11 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Loi de commande	109
Figure 4.12 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Evolution des variables d'état du maître entre les différentes cellules polytopiques.....	109
Figure 4.13 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Evolution des variables d'état de l'esclave entre les différentes cellules polytopiques.....	110
Figure 4.14. Système hyper-chaotique avec incertitudes bornées en norme : Erreur de synchronisation pour des paramètres d'incertitude tolérable $V_i = 0.4$ et $V_j = 0.5$ pour les deux approches.....	111
Figure 4.15. Système hyper-chaotique avec incertitudes bornées en norme : Erreur de synchronisation pour les paramètres d'incertitude $V_i = 0.7$ et $V_j = 0.4$ pour l'approche robuste	112
Figure A3.1 Attracteur à 5 spirales : Erreur de synchronisation.....	124
Figure A3.2 Attracteur à 5 spirales : Loi de commande	124
Figure A4.1 Circuit de Chua : Erreur de synchronisation.....	126
Figure A4.2 Circuit de Chua : Loi de commande	126
Figure A4.3 Système de Chua non dimensionnel : Erreur de synchronisation.....	127
Figure A4.4 Système de Chua non dimensionnel : Loi de commande	127
Figure A4.5 Système de Lur'e : Erreur de synchronisation.....	128
Figure A4.6 Système de Lur'e : Loi de commande	128
Figure A4.7 Attracteur à 5 spirales : Erreur de synchronisation.....	129
Figure A4.8 Attracteur à 5 spirales : Loi de commande	129

Table des tableaux

Tableau 2.1. Valeur de la variation totale TV	57
Tableau 2.2. Valeur de l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur	57
Tableau 2.3. Temps de réponse et pics de l'erreur de synchronisation de deux systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs	58
Tableau 2.4. . Temps de réponse et pics de l'erreur de synchronisation de deux robots	58
Tableau 3.1. Etude comparative de l'implémentation des LMIs et de leur résolution	89
Tableau 3.2 Faisabilité des approches de synchronisation pour chaque système PWA	89
Tableau 3.3 Temps processeur CPU en secondes pour les meilleures valeurs des paramètres de réglage pour chaque approche de synchronisation pour chaque système PWA	90
Tableau 3.4 Influence du domaine d'appartenance des paramètres de réglage sur les performances de chaque méthode de synchronisation	90

Nomenclature

1. VARIABLES MATHÉMATIQUES ET PARAMÉTRIQUES

- **Lettre latines**

$A, A_i, A_j \in \mathcal{R}^{n \times n}$	Matrice d'état
A_d	Amplitude d'une entrée sinusoïdale
a_1, a_2	Distance (m)
$B \in \mathcal{R}^{n \times p}$,	Matrice de commande
$b_i, b_j \in \mathcal{R}^{n \times 1}$	Vecteur constant
C_1, C_2	Capacité d'un condensateur (F)
$D \in \mathcal{R}^{n_h \times n}$	Matrice
D_i, D_j	Matrice constante utilisée pour la définition de l'incertitude bornée en norme
d, d_1, d_2	Coefficient d'amortissement
e	Erreur de synchronisation
E	Tension correspondante au changement de la dynamique de la diode de Chua (V)
E_i, E_j	Matrice constante utilisée pour la définition de l'incertitude bornée en norme
E_{ij}	Matrice diagonale définie négative
F	Matrice diagonale définie positive
F_i	Matrice symétrique
$F_d \in \mathcal{R}^{n \times n_h}$	Matrice constante
$f_1(\cdot, \cdot), f_2(\cdot)$	Vecteur de fonction non linéaire
F_{ij}	Matrice diagonale définie négative
F_0, F_1, F_2	Matrices de dimensions adéquates utilisées dans le lemme de la S-procédure
$G \in \mathcal{R}^{n_h \times n}$	Matrice de dimension adéquate
G_a, G_b	Constantes négatives définissant les pentes de la caractéristique linéaire par morceaux de la diode de Chua
$G_j \in \mathcal{R}^n$	Vecteur utilisé pour la définition d'une fonction linéaire par morceaux continue
$g(\cdot)$	Fonction linéaire par morceaux
$H \in \mathcal{R}^{n \times n_h}$	Matrice constante

$H_i, H_j \in \mathcal{R}^{n \times d}$	Matrices constantes utilisées pour la définition des cellules polytopiques
h	Constante positive
$h_i, h_j \in \mathcal{R}^d$	Matrices constantes utilisées pour la définition des cellules polytopiques
I	Matrice identité
i_3	Courant (A)
J_1, J_2	Matrices de dimensions adéquates
K	Vecteur gain de la commande par retour d'état
k, k_1, k_2, k_3	Constante de raideur d'un ressort
L	Inductance d'une bobine (H)
M, N	Matrices de dimensions appropriées
M_i, M_j	Matrices diagonales
\bar{M}, \bar{N}	Matrices de dimensions adéquates
M_{D1}, M_{D2}, M_{D3}	Modèles dynamiques définissant un système dans deux différentes cellules polytopiques
m_1, m_2	Masse d'un corps (kg)
$N_i \in \mathcal{R}^{n \times m}$	Matrices symétriques
O	Matrice de dimension adéquate
P	Matrice constante symétrique définie positive
Q	Matrice constante définie positive
Q_1, Q_2	Matrices régulières irréversibles
$R \in \mathcal{R}^{m \times n}$	Matrice constante
R_C, R_0, R_v	Résistance (Ω)
S	Matrice constante diagonale définie positive
t	Variable temporelle (s)
T	Matrice de dimension adéquate
T_d	Matrice diagonale définie positive
T_i	Fonction quadratique
u	Vecteur de commande du système esclave
$U \in \mathcal{R}^{m \times n}$	Matrice constante diagonale
v	Vecteur de commande du système maître
V	Fonction de Lyapunov

v_1, v_2	Tension (V)
V_i, V_j	Matrice constante utilisée pour la définition de l'incertitude bornée en norme
W	Matrice constante
W	Vecteur
x	Vecteur d'état du système maître
X	Matrice constante définie positive
$X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathcal{R}^{n \times n}$	Matrices
y_m, y_s	Vecteurs de sortie
$Y \in \mathcal{R}^{p \times n}$	Matrice solution d'une LMI
$y_{1M}, y_{2M}, y_{1S}, y_{2S}$	Vecteur position d'un corps
z	Vecteur d'état du système esclave
Z	Matrice constante définie positive

- **Lettres grecques**

α	Constante pour la définition du système de Chua non dimensionnel
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	Constantes positives
$\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{32}$	Paramètres du système hyper-chaotique
β	Constante pour la définition du système de Chua non dimensionnel
β_1, β_2	Constantes positives utilisées pour la définition de la stabilité globale exponentielle d'un système PWL
β_{ij}	Constante négative
β_{1ij}, β_{2ij}	Vecteurs colonnes avec des éléments négatifs
β_{3ij}, β_{4ij}	Constantes négatives
δ	Fonction positive utilisée pour la définition d'un point d'équilibre d'un système PWL
Δ	Matrice symétrique
$\Delta A_j \in \mathcal{R}^{n \times n}$	Incertaince sur la matrice A_j
δ_i	Vecteur colonne avec des éléments positifs
Φ	Matrice symétrique définie négative
κ	Constante caractéristique de la fonction PWL
γ	Constante

Ψ	Vecteur
γ_i	Vecteur colonne avec des éléments positifs
τ_i	Constante strictement positive
τ_{1ij}, τ_{2ij}	Constante positive
ε	Constante infinitésimale
$\zeta \in \mathcal{R}^n$	Variable
ξ	Scalaire constant
ξ_{ij}	Constante négative
ξ_j	Constante positive infiniment petite
$\sigma(\cdot): \mathcal{R}^{n_h} \rightarrow \mathcal{R}^{n_h}$	Fonction non linéaire
σ_j	Constante positive infiniment petite
$\eta(\cdot, \cdot)$	Fonction de $\sigma(\cdot)$
ρ	Classe de fonctions utilisées pour la définition de la stabilité des systèmes hybrides de type PWL
$\rho_{\mathcal{L}}$	Constante Lipschitzienne
ρ_1, ρ_2, ρ_3	Paramètres utilisés pour la définition du modèle d'état du circuit de Chua
$\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$	Cellules polytopiques
Λ	Matrice diagonale définie positive
Ω, Ω_1	Matrices
Σ	Scalaire positif borne de l'amplitude de l'incertitude
$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$	Paramètres utilisés pour la définition du modèle d'état du circuit de Chua
v_1, v_2, v_3	Paramètres utilisés pour la définition du modèle d'état du circuit de Chua
ω	Pulsation d'un signal de commande (rad/s)
ω_i	Borne supérieure de l'intervalle dans lequel évolue la fonction $\sigma(\cdot)$

- **Indice**

i	Compteur relatif au système esclave
j	Compteur relatif au système maître
k	Pas des mesures discrètes
M	Borne supérieure d'une incertitude

m	Borne inférieure d'une incertitude
p	Nombre total de régions polytopiques
q	$q = i$ ou j
0	Condition initiale
n_h	Nombre de fonctions non linaires σ

2. ABBREVIATIONS

BMI	Bilinear Matrix Inequality
LMI	Linear Matrix Inequality
PWL	Piecewise Linear

Introduction Générale

Dans le domaine de la recherche, les systèmes dynamiques hybrides détiennent de nos jours une grande attention à cause des commutations qui caractérisent leurs modèles dynamiques. [Goebel *et al.*, 2009], [Lin & Antsaklis, 2014]. Ces systèmes assurent la modélisation d'un grand nombre d'applications industrielles vue qu'ils intègrent à la fois le modèle dynamique (à variable temporelle) associé au processus physique ainsi que la commutation des composants logiques [Van der Shaft & Schumacher, 2000].

Dans la littérature, il existe plusieurs classes de systèmes dynamiques hybrides. Les plus importantes sont les systèmes linéaires à saut ou, *Jump Linear Systems* (JLS), les systèmes linéaires à commutation ou, *Switched Linear Systems* (SLS) et, les systèmes linéaires par morceaux ou, *Piecewise Linear or Piecewise Affine Systems* (PWL) [Birouche, 2006]. Une fonction linéaire par morceaux est un ensemble de segments de fonctions affines. Pour cela, les termes « Piecewise affine » et « Piecewise linear » sont équivalents. Le terme « piecewise-affine » est certes plus précis, mais moins fréquent [Paoletti, 2003].

Les systèmes PWL, classe particulière des systèmes hybrides, sont caractérisés par un comportement hybride régi d'une part par un état à variable temporelle (continue ou discrète) et d'autre part par un état à événement discret. Ceci engendre une évolution du système suivant plusieurs dynamiques. Chaque dynamique est définie dans une cellule de l'espace d'état obtenue par la partition de ce dernier suivant une condition d'invariance et une dynamique de commutation entre ces cellules [Bemporad & Morari, 1999], [Pavlov *et al.*, 2007].

Plusieurs systèmes électriques et mécaniques sont modélisés par des modèles de type PWL [Hassibi & Boyd, 1998], [Johanson, 1999], [Rodrigues & How, 2003a], [Rodrigues & Boyd, 2005] ce qui pourrait justifier l'intérêt que nous porterons, dans le cadre de cette thèse, à cette classe particulière de systèmes. Les transitions exhibées par ces systèmes peuvent être soit une conséquence des approximations linéaires par morceaux des dynamiques non linéaires soit le résultat des lois issues des caractéristiques intrinsèques linéaires par morceaux de certains composants électriques ou mécaniques à commutations. Dans ce sens, notons qu'il existe deux catégories de systèmes PWL : Ceux qui sont de type continu et ceux qui sont de type discontinu. Cette classification est essentiellement basée sur la caractéristique linéaire par morceaux origine des transitions. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéresserons uniquement la première classe.

Récemment, bien que des efforts considérables de recherche ont été dispensés pour trouver des solutions au problème complexe de l'analyse et la synthèse des systèmes PWL de type continu

par utilisation de la théorie de Lyapunov, une étude bibliographique nous a permis de découvrir l'insuffisance des travaux qui ont résolu le problème de la synchronisation de ces systèmes. Des résultats, dans ce sens, seront d'une importance démesurée dans le domaine de l'industrie, la télémanipulation robotique médicale et plus particulièrement sur le domaine de la communication. L'absence de tels travaux pourrait être justifiée par la complexité des développements engendrés par l'application de la théorie de Lyapunov à des systèmes caractérisés par des commutations sur leurs variables d'état.

L'objectif de ce mémoire est donc d'apporter une contribution à la théorie de la synchronisation des systèmes PWL de type continu en utilisant la théorie de Lyapunov malgré les complexités introduites par la dynamique de commutation de ces systèmes. Le problème de la synchronisation maître-esclave peut être résolu en transformant celui-ci en un problème de stabilité asymptotique de l'erreur de synchronisation par le biais d'une loi de commande par retour d'état. De nouvelles conditions de synchronisation maître-esclave seront alors formulées sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) pour les trois cas suivants : 1) les systèmes PWL de type continu réguliers, 2) les systèmes PWL chaotiques et enfin, 3) les systèmes PWL chaotiques avec des incertitudes bornées en norme.

Ce mémoire de thèse sera organisé comme suit :

Le premier chapitre présentera dans un premier temps les notions fondamentales pour la modélisation et l'analyse des systèmes dynamiques hybrides type PWL. Une étude bibliographique sur les techniques de synchronisation des systèmes contrôlés, des systèmes chaotiques et des systèmes chaotiques incertains sera ensuite étalée afin de justifier et situer notre contribution dans le cadre de son contexte. Enfin, dans l'avant-dernier paragraphe de ce chapitre, les outils mathématiques employés tout au long de ce mémoire seront présentés afin de rendre plus accessibles les démonstrations des théorèmes proposés dans les chapitres suivants. Le dernier paragraphe de ce chapitre explicitera la contribution de cette thèse.

Dans le second chapitre, une solution au problème de la synchronisation des systèmes PWL contrôlés sera proposée. Celle-ci est résolue comme étant un problème de stabilité asymptotique globale de la dynamique d'erreur de synchronisation entre un système maître et un système esclave. En utilisant une approche de Lyapunov et le lemme de la S-procédure, de nouvelles conditions suffisantes de synchronisation seront alors proposées via une loi de commande par retour d'état. Les critères de synchronisation seront formulés sous forme de LMIs. Des

exemples de systèmes physiques seront alors conduits afin de prouver l'efficacité de la solution proposée et une étude comparative avec une approche annexe sera aussi présentée.

Le troisième chapitre de ce mémoire présente une extension des résultats déjà obtenus pour le cas des systèmes PWL chaotiques. De nouvelles conditions de synchronisation chaotique seront alors proposées. Elles seront formulées sous forme de contraintes LMI via une loi de commande par retour d'état. La nouvelle approche est appliquée à plusieurs systèmes chaotiques tirés de la bibliographie afin de démontrer son efficacité. Une étude comparative sera aussi conduite pour ces mêmes systèmes en utilisant des approches de synchronisation non linéaires issues de la littérature.

Dans le dernier chapitre, des incertitudes bornées en norme seront considérées pour les systèmes PWL de type continu objet de nos travaux. De nouvelles conditions de synchronisation chaotiques robustes seront alors formulées sous forme de contraintes LMI via une loi de commande par retour d'état. L'approche proposée sera enfin appliquée sur un système hyperchaotique de type PWL, récemment proposé dans la littérature, afin de prouver son efficacité. Une étude comparative qui mettra en valeur l'aspect robuste de l'approche proposée par rapport à celle proposée dans le chapitre qui précède sera effectuée.

Finalement et pour clôturer cette thèse, une conclusion générale mettra le point sur les contributions majeures de cette thèse pour dégager enfin quelques pistes ouvertes pour des travaux futurs.

1

Etat de l'Art et Préliminaires

1.1	Introduction	12
1.2	Modélisation des systèmes du type PWL.....	12
1.2.1	Partition de l'espace d'état	12
1.2.2	Modèles d'état	14
1.2.3	Exemples	15
1.3	Stabilité des systèmes du type PWL	20
1.4	Incertitudes	22
1.4.1	Différents type d'incertitudes	23
1.4.2	Exemple 1.3 : Cas du système de Chua non dimensionnel.....	24
1.5	Synchronisation des systèmes dynamiques.....	25
1.5.1	Différents types de synchronisation	25
1.5.2	Synchronisation des systèmes PWL.....	27
1.5.3	Synchronisation chaotique	28
1.5.4	Synchronisation chaotique robuste.....	29
1.6	Outils mathématiques.....	29
1.7	Motivation et contribution de la thèse.....	32
1.8	Conclusion.....	33

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter, dans un premier temps, les notions fondamentales de la modélisation et l'analyse des systèmes dynamiques hybrides de type PWL, ensuite de justifier, l'intérêt que nous porterons à la synchronisation de tels systèmes à travers une étude bibliographique assez approfondie. Ceci nous permettra de situer et valoriser les contributions apportées dans le cadre de nos travaux par rapport aux travaux présentés dans la littérature.

Ce chapitre sera organisé donc comme suit : Dans les trois premières sections, les techniques de modélisation et d'analyse des systèmes PWL ainsi que celles relatives aux incertitudes seront respectivement présentées. Dans la quête d'une reproduction fidèle du comportement de ces systèmes, plusieurs exemples de systèmes physiques seront aussi arborés. Dans le cinquième paragraphe, un état de l'art sur les techniques de synchronisation des systèmes contrôlés, chaotiques et chaotiques robustes sera développé. Nous exposerons dans le sixième paragraphe, les outils mathématiques et les concepts nécessaires pour l'accomplissement de nos contributions. Ce chapitre sera enfin clôturé dans la dernière section par la présentation de la contribution de cette thèse.

1.2 Modélisation des systèmes du type PWL

D'après [Sontag, 1981] et [Johanson, 2003], un système PWL évolue suivant différentes dynamiques, chacune est définie dans une région de l'espace d'état-entrée auquel il appartient. Ces dernières sont obtenues grâce à une condition d'invariant qui permet de partitionner l'espace d'état-entrée en p régions $A_j, j \in I = \{1 \dots p\}$.

1.2.1 Partition de l'espace d'état

L'espace d'état est subdivisé en un nombre fini de partitions, régions ou cellules. Dans chacune des cellules, le système PWL évolue selon une dynamique propre à cette région. Ainsi, il existe tant de cellules que de modèles dynamiques.

Il existe différents types de systèmes hybrides [Goebel *et al.*, 2009], [Lin & Antsaklis, 2014]. Nous nous intéresserons dans ce mémoire à la répartition polyédrique généralement dédiée à la classe des systèmes PWL. Cette partition est caractérisée par un maillage en polyèdres de l'espace d'état. Un polyèdre est défini comme étant l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Un polytope est un polyèdre borné.

Pour les systèmes PWL, l'action de commutation dépend de l'état du système. Autrement dit, c'est la valeur du vecteur d'état qui détermine la règle de commutation de la dynamique du système. D'après Hassibi et Boyd [Hassibi & Boyd, 1998], l'espace d'état est subdivisé en cellules polyédriques A_j délimitées par des hyperplans décrits par :

$$H_j^T x + h_j = 0.$$

où $H_j \in \mathcal{R}^{n \times r_j}$, $h_j \in \mathcal{R}^{r_j}$, n la dimension de l'espace et r_j le nombre d'hyperplans qui délimitent la région polytopique.

Les états x , appartenant aux hyperplans, obéissent aussi aux dynamiques qui régissent le comportement du système dans une cellule j . Ainsi il est possible d'écrire :

$$A_j = \{x | H_j^T x + h_j \leq 0\} \quad (1.1a)$$

Pour la cellule adjacente $j + 1$, il est possible d'écrire :

$$A_{j+1} = \{x | H_{j+1}^T x + h_{j+1} < 0\} \quad (1.1b)$$

Pour mieux expliciter la notion de répartition de l'espace d'état, considérons le système PWL défini par trois modèles M_{D1} , M_{D2} et M_{D3} dans trois régions polytopiques (Figure 1.1). Soit $x = [x_1 \ x_2]^T$ le vecteur d'état associé. Le système suit la dynamique M_{D1} quand $x_1 \leq 2$, suit la dynamique M_{D2} quand $2 < x_1 < 4$ et M_{D3} quand $x_1 \geq 4$.

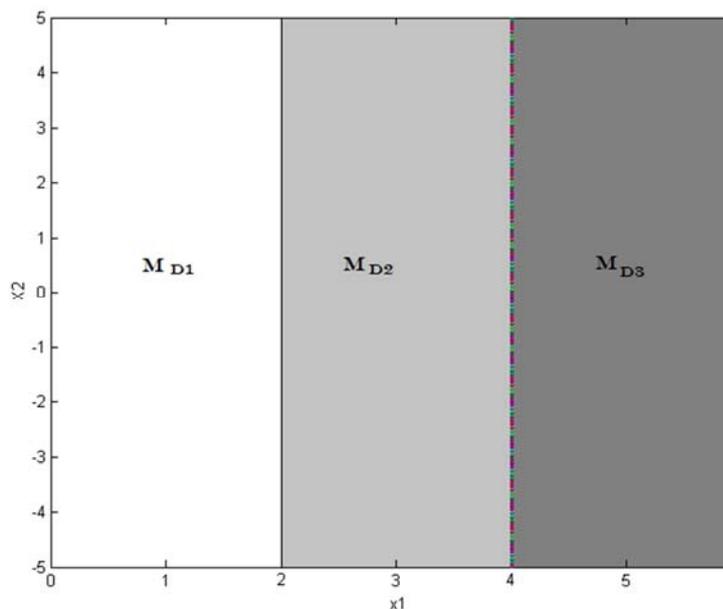


Figure 1.1 Répartition de l'espace d'état

Déterminons les matrices H_1, H_2, H_3, h_1, h_2 et h_3 selon les relations (1.1a)-(1.1b). Nous aurons pour la dynamique M_{D1} :

$$x_1 \leq 2 \rightarrow x_1 - 2 \leq 0$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$[1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 2 \leq 0$$

pour la dynamique M_{D2} :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} < 0$$

et pour la dynamique M_{D3} :

$$[-1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 4 \leq 0$$

d'où

$$H_1^T = [1 \quad 0]; h_1 = -2; H_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } h_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, H_3^T = [-1 \quad 0] \text{ et } h_3 = 4.$$

1.2.2 Modèles d'état

Pour tout $j = 1..p$ où p est le nombre de cellules polyédriques associées à une répartition de l'espace d'état et dans une cellule polyédrique Λ_j , un système PWL s'écrit sous la forme suivante:

$$\dot{x} = A_j x + Bv + b_j \tag{1.2}$$

où $x \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ et $v \in \mathcal{R}^{p \times 1}$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur d'entrée, $A_j \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état supposée constante. $B \in \mathcal{R}^{n \times p}$ est la matrice constante de commande et $b_j \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ est un vecteur constant.

Selon Pavlov et al. [Pavlov et al., 2006], deux types de systèmes PWL existent : les systèmes de type continu et les systèmes de type discontinu. Les systèmes PWL de type continu sont caractérisés par une fonction linéaire par morceaux continue en opposition aux systèmes PWL de type discontinu où la fonction linéaire par morceaux est discontinue.

La Figure 1.2 (a) illustre une fonction PWL $g(x)$ de type continue alors que la Figure 1.2 (b) illustre une fonction PWL $g(x)$ de type discontinue. Pour cette dernière, la discontinuité est localisée au point $x = 0$ où la valeur $g(0^-) = -2$ est différente de la valeur $g(0^+) = 2$.

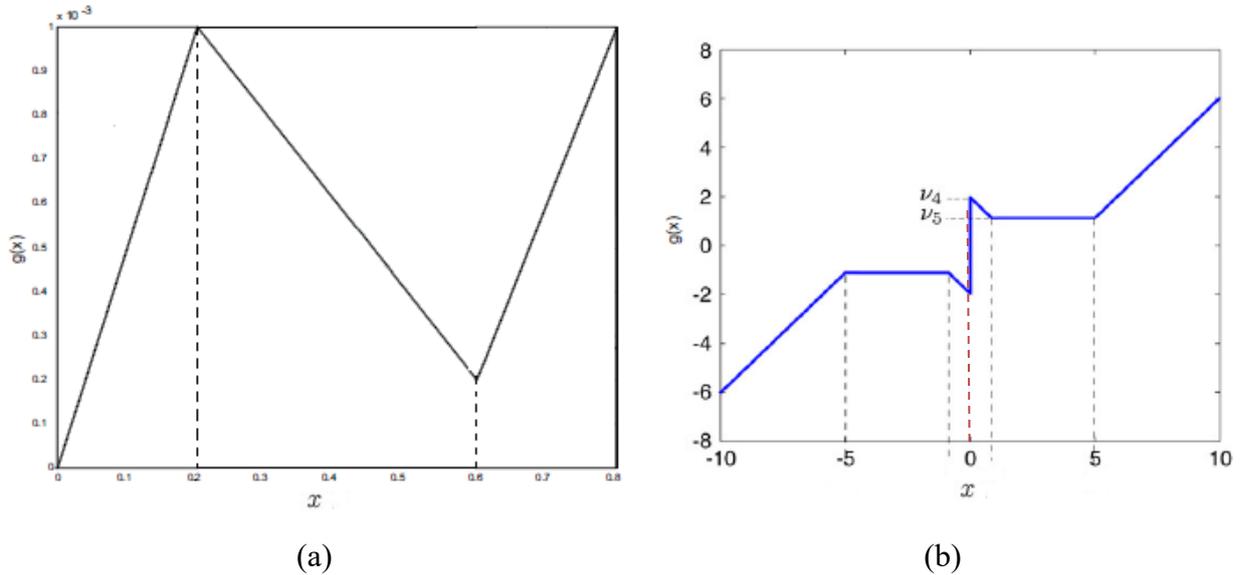


Figure 1.2 Fonctions PWL (a) continue - (b) discontinue

Dans [Pavlov *et al.*, 2007], [Pavlov *et al.*, 2006] et [Pavlov & Van de Wouw, 2008], des conditions pour la vérification de la continuité des systèmes PWL peuvent être écrites comme suit, en adoptant les notations considérées dans ce rapport:

Théorème 1.1 :

Le système PWL (1.2) est dit à second membre continu si la condition suivante est satisfaite : Pour deux cellules adjacentes A_j et A_{j+1} délimitées par un hyperplan de commutation $H_j^T x + h_j = 0$, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} G_j H_j^T &= A_j - A_{j+1} \\ G_j h_j &= b_j - b_{j+1} \end{aligned} \tag{1.3}$$

pour une matrice $G_j \in \mathcal{R}^{n \times r_j}$ donné.

Dans la suite de ce mémoire, seuls les systèmes PWL de type continu seront considérés.

1.2.3 Exemples

Dans ce paragraphe, deux systèmes physiques décrits par des modèles PWL de type continu seront présentés pour illustrer l'origine des commutations ainsi que la technique de

modélisation des systèmes PWL. Pour varier la nature des exemples traités, nous considérerons tout d'abord un système mécanique ensuite un circuit électrique très populaire pour son comportement chaotique : l'oscillateur de Chua.

Exemple 1.1 : Système mécanique à deux degrés de liberté

Considérons le système mécanique à deux degrés de liberté avec une seule face de restauration décrit par la Figure 1.3. De tels mécanismes sont très répandus dans l'industrie. Ce type de mécanismes peut par exemple décrire la dynamique d'une micro-soudeuse où le ressort dans un sens unique reflète la souplesse de la pièce à souder.

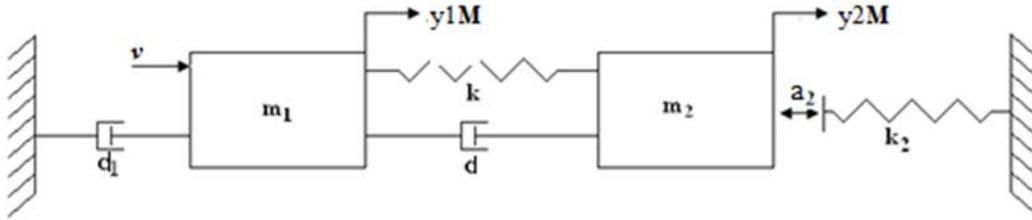


Figure 1.3: Système PWL mécanique

Le système de la Figure 1.3 se compose de deux masses m_1 et m_2 reliées entre elles par une combinaison linéaire ressort-amortisseur avec une raideur k et un coefficient d'amortissement d . La masse m_1 exerce une force d'amortissement en raison d'un amortisseur linéaire de coefficient d_1 attaché à un référentiel fixe. La masse m_1 est entraînée par une force variée dans le temps.

Soient y_{1M} et y_{2M} les positions cartésiennes des deux masses m_1 et m_2 . En utilisant le formalisme de Newton-Euler, la dynamique du système précédent peut être décrite par :

$$\begin{cases} \ddot{y}_{1M} = \frac{1}{m_1} [-k(y_{1M} - y_{2M}) - d(\dot{y}_{1M} - \dot{y}_{2M}) - d_1\dot{y}_{1M} + v] \\ \ddot{y}_{2M} = \frac{1}{m_2} [-k(y_{2M} - y_{1M}) - d(\dot{y}_{2M} - \dot{y}_{1M}) - k_2g(y_{2M})] \end{cases} \quad (1.4)$$

avec $g(y_{2M})$ est une fonction PWL dépendante de y_{2M} telle que :

$$\begin{cases} g(y_2) = y_{2M} - a_2 & \text{si } y_{2M} \geq a_2 \\ g(y_{2M}) = 0 & \text{si } y_{2M} < a_2 \end{cases} \quad (1.5)$$

Pour le vecteur d'état défini par $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [y_{1M} \ \dot{y}_{1M} \ y_{2M} \ \dot{y}_{2M}]$, le système (1.4)-(1.5) peut être écrit sous la forme (1.2) avec pour $j \in \{1,2\}$. Nous avons alors [Van de Wouw *et al.*, 2006b]:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{d+d_1}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{d}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{d}{m_2} & -\frac{k+k_2}{m_2} & -\frac{d}{m_2} \end{bmatrix}; b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2 a_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{d+d_1}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{d}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{d}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & -\frac{d}{m_2} \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Dès lors, nous sommes autorisés à dire qu'il s'agit d'un système PWL qui évolue entre deux cellules polyédriques $\Lambda_1 = \{x | x_3 \geq a_2\}$ et $\Lambda_2 = \{x | x_3 < a_2\}$ satisfaisant la description (1.1) avec $j \in \{1,2\}$ où :

$$H_1 = [0 \ 0 \ -1 \ 0]^T, H_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T, h_1 = a_2 \text{ et } h_2 = -a_2.$$

Les vecteurs b_1 et b_2 expriment les conditions initiales sur les vitesses et les accélérations des deux masses m_1 et m_2 .

Pour un vecteur $G_1 = \left[0 \ 0 \ 0 \ \frac{k_2}{m_2}\right]^T$, le théorème 1.1 est bien vérifié donc il s'agit bien d'un système PWL de type continu.

Exemple 1.2 : L'oscillateur de Chua

L'oscillateur de Chua [Chua *et al.*, 1993] est le circuit électrique le plus réputé pour présenter un comportement chaotique. Le chaos est un concept complexe, étrange et d'apparence erratique qui traduit un état de désordre et d'irrégularité. C'est un phénomène qui "peut" apparaître soudainement dans les systèmes dynamiques non linéaires suite à des changements infiniment petits ou brusques des conditions initiales. Bien que la dynamique des systèmes chaotiques soit régie par des équations différentielles assez simples donc éventuellement déterministe, le comportement du système au sein du régime chaotique ne peut être ni prévu, ni interprété qu'à l'aide de simulations numériques.

Le circuit de Chua, représenté par la Figure 1.4, est composé de cinq composants linéaires, deux capacités C_1 et C_2 , deux résistances R_0 et R_C , une inductance L et d'un composant non linéaire appelé la diode de Chua avec sa résistance R_v .

En se basant sur la loi de Kirchoff, le circuit de Chua peut être modélisé par le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{R_C} (v_2 - v_1) - g(v_1) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{R_C} (v_1 - v_2) + i_3 \\ L \frac{di_3}{dt} = -(v_2 + R_0 i_3) \end{cases} \quad (1.6)$$

où v_1 et v_2 sont respectivement les tensions aux bornes de C_1 et C_2 . i_3 étant le courant dans l'inductance L et $g(v_1)$ est la fonction linéaire par morceaux suivante :

$$g(v_1) = G_b v_1 + 0.5(G_a - G_b)(|v_1 + E| - |v_1 - E|) \quad (1.7)$$

où $G_a, G_b < 0$, $v_1 \in [-d, d]$ et $0 < E < d$.

La Figure 1.5 montre la caractéristique non linéaire de la diode de Chua. Cette diode est en réalité réalisée à partir d'un ensemble d'amplificateurs opérationnels et de composants linéaires.

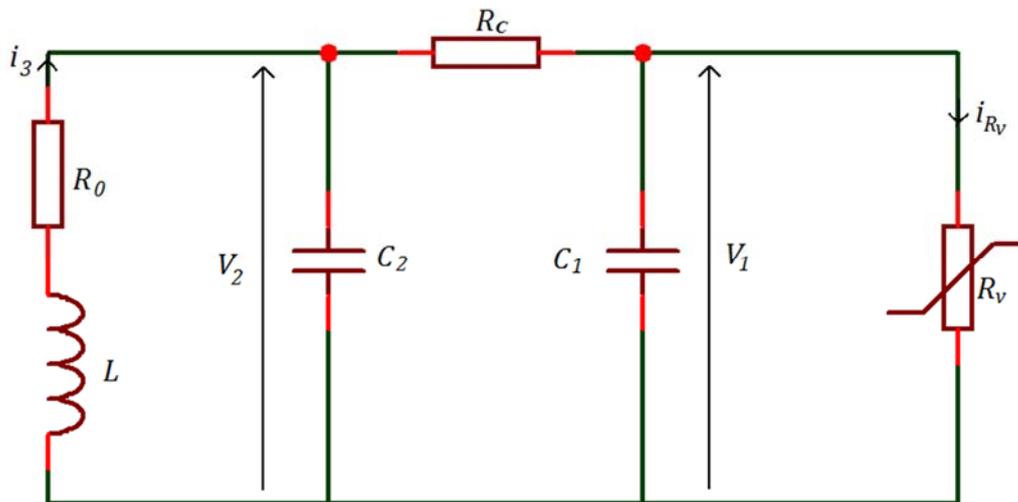


Figure 1.4. Circuit non linéaire de Chua

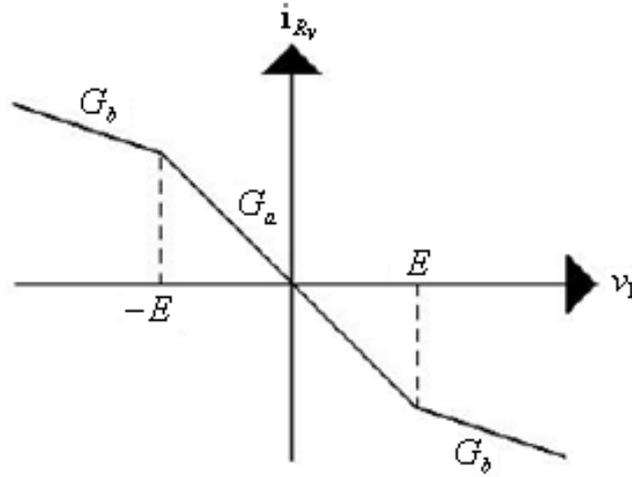


Figure 1.5. Caractéristique non linéaire de la diode de Chua

Dépendant de la valeur de la variable d'état v_1 , l'espace d'état peut être réparti en trois domaines. Soient Λ_1 , le domaine lorsque $E \leq v_1 \leq d$, Λ_2 lorsque $-E < v_1 < E$ et Λ_3 lorsque $-d \leq v_1 \leq -E$. Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$g(v_1) = \begin{cases} G_b v_1 + (G_a - G_b)E & \text{pour } v_1 \in \Lambda_1 \\ G_a v_1 & \text{pour } v_1 \in \Lambda_2 \\ G_b v_1 - (G_a - G_b)E & \text{pour } v_1 \in \Lambda_3 \end{cases} \quad (1.8)$$

Posons pour le modèle d'état du circuit de Chua (1.6) : $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [v_1 \ v_2 \ i_3]^T$,

$\mu_1 = \frac{1}{R_C C_1}$, $\mu_2 = \frac{1}{C_1}$, $\mu_3 = \frac{1}{R_C C_2}$, $\mu_4 = \frac{1}{C_2}$, $\mu_5 = \frac{1}{L}$, nous obtenons alors le système PWL suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \rho_j x_1 + \mu_1 x_2 + v_j \\ \dot{x}_2 = \mu_3 x_1 - \mu_3 x_2 + \mu_4 x_3 \\ \dot{x}_3 = -\mu_5 x_2 - R_0 \mu_5 x_3 \end{cases} \quad (1.9)$$

où $\rho_1 = \rho_3 = -(\mu_1 + \mu_2 G_b)$, $\rho_2 = -(\mu_1 + \mu_2 G_a)$, $v_1 = -v_3 = -\mu_2 (G_a - G_b)E$ et $v_2 = 0$.

Dans ce cas, l'oscillateur de Chua peut être modélisé par le modèle d'état PWL(1.2) de type continu d'un système autonome ($v = 0$) avec pour $j \in \{1,2,3\}$:

$$A_j = \begin{pmatrix} \rho_j & \mu_1 & 0 \\ \mu_3 & -\mu_3 & \mu_4 \\ 0 & -\mu_5 & -R_0 \mu_5 \end{pmatrix} \text{ et } b_j = \begin{pmatrix} v_j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec la description polyédrique (1.1) donnée par :

$$H_1 = H_2 = H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, h_1 = \begin{bmatrix} -d \\ E \end{bmatrix}; h_2 = \begin{bmatrix} -E \\ -E \end{bmatrix} \text{ et } h_3 = \begin{bmatrix} E \\ -d \end{bmatrix}$$

Remarque 1.1 : pour l'exemple 1.1, les commutations entre les différents modèles sont dues à des considérations physiques alors que pour l'exemple 1.2, les commutations sont dues à des approximations mathématiques.

1.3 Stabilité des systèmes du type PWL

Plusieurs travaux ont considéré les problèmes d'analyse et de synthèse des systèmes PWL. La théorie de Lyapunov représente l'une des principales méthodes d'analyse des systèmes dynamiques en général et des systèmes PWL en particulier et la construction des fonctions de Lyapunov constitue l'une des problématiques fondamentales.

Démontrer la stabilité au sens de Lyapunov dépend de l'existence et / ou de la construction d'une fonction d'énergie appropriée de Lyapunov qui doit être continue et dérivable. Cette fonction peut ne pas exister ou, quand elle existe, peut être difficile à construire.

La stabilité asymptotique globale pour les systèmes PWL peut être alors prouvée en utilisant tout simplement la seconde méthode de Lyapunov décrite par le théorème 1.2.

Théorème 1.2 : Seconde méthode de Lyapunov

Le système (1.2) est asymptotiquement globalement stable autour de son point d'équilibre s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ continue et dérivable telles que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases} \quad (1.10a)$$

$$\begin{cases} V(x) > 0 & \text{pour } x \in \mathcal{R}^n \setminus \{0\} \end{cases} \quad (1.10b)$$

$$\begin{cases} \dot{V}(x) < 0 & \text{pour } x \in \mathcal{R}^n \setminus \{0\} \end{cases} \quad (1.10c)$$

L'avantage de la méthode de Lyapunov est qu'elle ne cherche pas à trouver des solutions des trajectoires solutions du système non linéaire.

Pour les systèmes PWL, plusieurs types de fonctions de Lyapunov ont été considérés [Hassibi & Boyd, 1998], [Johanson & Rantzer, 1998], [Mignone *et al.*, 2000], [Sun, 2010], [Sun & Ge, 2011], [Eren *et al.*, 2014]. Parmi ces fonctions, on peut citer trois exemples.

- Une fonction quadratique de Lyapunov unique pour toutes les cellules polyédriques [Hassibi & Boyd, 1998], [Johanson & Rantzer, 1998]. Celle-ci peut donner lieu au théorème de stabilité 1.3

Théorème 1.3 [Johanson & Rantzer, 1998], [Johanson, 1999], [Mignone *et al.*, 2000]

La trajectoire $x(t)$ du système (1.2) tend vers zéro exponentiellement s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que :

$$A_j^T P + P A_j < 0 \quad (1.11)$$

Pour ce cas, la fonction de Lyapunov a été définie par :

$$V(x) = x^T P x \quad (1.12)$$

Dans ce cas, nous obtenons un problème d'optimisation convexe se basant sur des contraintes LMIs.

La condition (1.11) est intéressante vue qu'il s'agit d'une seule fonction de Lyapunov indépendante de la région polyédrique dans laquelle évolue le système ce qui assure une stabilité asymptotique quadratique globale. Néanmoins, cette méthode est assez conservative vue qu'elle impose une seule fonction de Lyapunov pour toutes les cellules polyédriques sans tenir compte des différentes dynamiques.

Cette approche est considérée par Johanson et Rantzer [Johanson & Rantzer, 1998] comme étant inutilement restrictive pour l'analyse des systèmes PWL puisque la dynamique donnée par la matrice d'état A_j est valable uniquement pour des états qui évoluent dans la cellule Λ_j .

- Une fonction de Lyapunov PWL [Hassibi & Boyd, 1998], [Johanson & Rantzer, 1998], [DeCarlo *et al.*, 2000].

La nature intrinsèque discontinue d'un système PWL suggère fortement l'utilisation de plusieurs fonctions de Lyapunov pour produire une fonction de Lyapunov non traditionnelle (continue par morceaux et dérivable par morceaux).

Dans [Hassibi & Boyd, 1998] et [Sun, 2010], la fonction de Lyapunov PWL suivante est considérée :

$$V(x) = x^T P_j x + 2q_j^T x + r_j$$

où $P_j = P_j^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $q_j \in \mathcal{R}^n$ et $r_j \in \mathcal{R}$ pour $j \in \{1 \dots p\}$

Il est clair que considérer des fonctions de Lyapunov du type PWL donnent des conditions de stabilité beaucoup moins conservatives que celles correspondantes aux fonctions quadratiques uniques. De plus, la recherche de cette fonction peut être réduite à la résolution d'un ensemble de LMI. Cependant, le calcul est trop lourd surtout pour les systèmes de grande dimension puisqu'il est nécessaire de subdiviser d'avantage les cellules polyédriques en un nombre supérieur au nombre de partitions naturelles dicté par l'évolution de la dynamique du système [Sun, 2010].

Bien qu'elles puissent assurer des conditions de stabilité globale, la résolution est certainement beaucoup plus complexe de point de vue développement analytique, surtout quand il s'agit d'appliquer cette méthode à une problématique de synchronisation.

- Fonction de Lyapunov surface [Sun, 2010], [Sun & Ge, 2011]

Cette approche consiste à construire les fonctions de Lyapunov sur la surface de commutation au lieu de travailler sur le total de l'espace d'état ce qui permettra de réduire les calculs fastidieux.

Dans les travaux présentés dans ce mémoire de thèse, nous allons considérer une seule fonction de Lyapunov quadratique pour l'ensemble des dynamiques au niveau des différentes cellules polyédriques. Ceci nous permettra d'une part d'avoir des calculs moins fastidieux, et d'autre part de garantir une stabilité globale du système PWL notamment sur les hyperplans de commutations. Par contre nous allons tenter de montrer que les approches que nous proposerons aboutiront toujours à une solution faisable malgré la complexité des systèmes considérés.

1.4 Incertitudes

La modélisation d'un système passe par plusieurs approximations des modèles dynamiques afin d'obtenir des représentations mathématiques propices pour la synthèse des lois de commande.

Cependant, les approximations élaborées, la connaissance insuffisante des paramètres ainsi que les perturbations éventuelles qui n'ont pas été considérées lors de la modélisation sont une

source imminente des incertitudes. Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'exposer les différents types d'incertitudes [Zhou *et al.*, 1996].

1.4.1 Différents type d'incertitudes

Considérons le système incertain décrit par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) = (A_j + \Delta A_j)x(t) \quad (1.13)$$

où $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état du système incertain et $x(t) \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état et soit $A_j \in \mathcal{R}^{n \times n}$ une matrice d'état du système nominale et $\Delta A_j \in \mathcal{R}^{n \times n}$ une incertitude considérée.

D'après [Labit, 2002] et [Gu *et al.*, 2013], les incertitudes peuvent être classées en deux groupes:

Incertaine non-structurées [Gu *et al.*, 2013]

Ce type d'incertitudes est considéré comme étant le plus simple et le plus pessimiste. Il est généralement relatif à toutes les dynamiques négligées et non modélisées. En effet, toutes les dynamiques négligées ainsi que les incertitudes sur les paramètres sont regroupées dans ΔA_j , une fonction matricielle inconnue mais bornée en amplitude telle que:

$$\|\Delta A_j\| \leq \Sigma \quad (1.14)$$

où Σ est un scalaire positif et $\|\cdot\|$ est la norme matricielle.

Incertaine structurées ou paramétriques [Doyle, 1985], [Barmish, 1988], [Gu *et al.*, 2013]

Ce type d'incertitudes concerne généralement la description imparfaite des caractéristiques des composants du système, leur usure... Elles sont introduites au niveau des paramètres du système et sont regroupées dans la matrice ΔA_j qui est une matrice diagonale par bloc ayant une « structure » précise [Lavigne, 2003]. L'incertitude affine [Biannic, 1996], l'incertitude polytopique [Bernussou *et al.*, 1989], et l'incertitude bornée en norme [Petersen, 1987] représentent des cas particuliers des incertitudes structurées.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéresserons uniquement aux incertitudes bornées en norme.

Pour tout $j = 1..p$ où p est le nombre de cellules polyédriques et à partir de (1.2), nous considérons le système PWL incertain modélisé dans une cellule polyédrique Λ_j par :

$$\dot{x} = (A_j + \Delta A_j)x + b_j \quad (1.15)$$

où :

$$\Delta A_j = D_j V_j E_j \quad (1.16)$$

où D_j et E_j sont deux matrices constantes de dimensions appropriées qui définissent la structure de l'incertitude et V_j est la matrice d'incertitude de dimension appropriée telle que $V_j^T V_j \leq \varepsilon I$ où ε est un scalaire positif.

1.4.2 Exemple 1.3 : Cas du système de Chua non dimensionnel

Dans [Chua *et al.*, 2000], Chua a considéré un système avec des paramètres non dimensionnels α et β reproduisant le même comportement chaotique que l'oscillateur de Chua présenté dans [Chua, 1993]. Ce système, baptisé système de Chua non dimensionnel, est modélisé par la dynamique suivante pour une résistance $R_0 = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - g(x_1)) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 \end{cases} \quad (1.17)$$

avec :

$$g(x_1) = G_b x_1 + 0.5(G_a - G_b)(|x_1 + E| - |x_1 - E|) \quad (1.18)$$

Ce système peut s'écrire sous la forme (1.2) d'un système PWL avec:

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} -G_b \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -G_a \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} -\alpha(G_a - G_b)E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} \alpha(G_a - G_b)E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sous la description polytopique (1.1) avec $j \in \{1,2,3\}$, on a :

$$H_1 = H_2 = H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, h_1 = \begin{bmatrix} -d \\ E \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} -E \\ -E \end{bmatrix} \text{ et } h_3 = \begin{bmatrix} E \\ -d \end{bmatrix}$$

Pour $j \in \{1,2,3\}$ et dans le cas où le système est muni d'une incertitude bornée en norme telle que $\beta_m < \beta < \beta_M$, le système (1.17) peut s'écrire sous la forme (1.15) avec les mêmes matrices A_j et b_j avec :

$$E_1 = E_2 = E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\beta_M - \beta_m)}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

V_j est un scalaire choisi dans l'intervalle $[-1,1]$, $\forall j \in \{1,2,3\}$.

1.5 Synchronisation des systèmes dynamiques

La synchronisation est l'action de rendre solidaires et simultanés les mouvements de deux appareils. C'est aussi faire que des mouvements, des mécanismes, des forces, etc. se déroulent pendant le même temps. Dans son interprétation la plus générale, la synchronisation signifie corrélérer ou correspondre en temps le comportement dynamique de deux ou plusieurs processus identiques ou non identiques. Le concept de la synchronisation a été évoqué initialement dans les travaux de Huygens [Huygens, 1973] lorsqu'il décrit le comportement de deux pendules fixés sur un même support ayant une faible interaction. Depuis et jusqu'à nos jours, un énorme intérêt a été porté au phénomène et aux méthodes de synchronisation.

La synchronisation est l'objet de recherches intenses dans les domaines de la biologie [Lambros & Vanderberg, 1979], la chimie [Rosenblum & Pikovsky, 2010], la technologie [Edmund *et al.*, 2005], la neuroscience [Gray *et al.*, 1989], [Varela *et al.*, 2001] et dans le domaine social [Dumas *et al.*, 2010], [Kawazaki *et al.*, 2013]. La synchronisation est aussi d'une grande importance dans l'industrie, en particulier dans les domaines de la mécanique, la robotique [Nakamura *et al.*, 2001], [Rodriguez-Angeles & Nijmeijer, 2001], [Chung *et al.*, 2009], [Bouteraa *et al.*, 2010], [Ghommam *et al.*, 2010], [Bouteraa *et al.*, 2011] et particulièrement dans le domaine de la communication [Zhang *et al.*, 2008].

1.5.1 Différents types de synchronisation

Dans la littérature, plusieurs types de synchronisation existent : la synchronisation naturelle qui ne nécessite pas d'interaction entre les systèmes concernés, l'auto-synchronisation qui est le

résultat d'un couplage non externe entre les systèmes et, la synchronisation contrôlée qui surgie suite aux lois de commande appliquées.

Deux types de synchronisation contrôlées existent : la synchronisation maître-esclave et la synchronisation mutuelle. Pour le premier type, le système esclave est commandé de façon à rejoindre le maître tandis que pour le deuxième type, un couplage bilatéral doit exister.

La classification de la synchronisation contrôlée peut être aussi dressée en se basant sur le critère de la nature des variables à synchroniser. Suivant [Luo, 2013], une grande concentration est portée sur cinq classes de synchronisation et qui sont :

- ✓ La synchronisation complète ou identique,
- ✓ La synchronisation généralisée ou d'état,
- ✓ La synchronisation de phase,
- ✓ La synchronisation anticipée et avec décalage,
- ✓ La synchronisation à enveloppe d'amplitude.

Dans ce mémoire nous nous intéressons uniquement à la synchronisation contrôlée d'état de type maître-esclave. Il va de soi que le système maître soit obligatoirement stable en boucle ouverte ou bien stabilisé via une loi commande. Ce principe est résumé par la figure 1.6 où x et z représentent respectivement le vecteur d'état du maître et de l'esclave, e est le vecteur de l'erreur de synchronisation, v et u représentent respectivement la loi de commande du maître et la loi de commande de l'esclave, K étant le vecteur de gain de retour d'état.

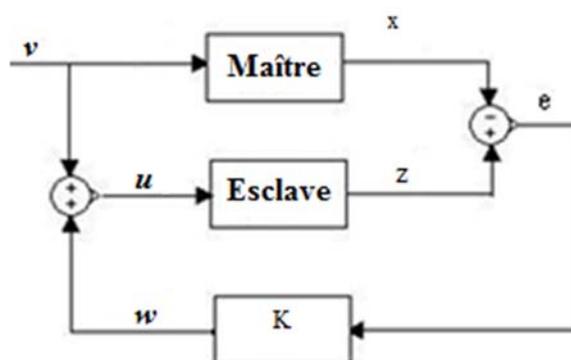


Figure 1.6. Système maître esclave en boucle fermée

1.5.2 Synchronisation des systèmes PWL

Dans la littérature, l'analyse et la synthèse des systèmes PWL de type continu a été largement discutée dans plusieurs travaux [Hassibi & Boyd, 1998], [Johanson & Rantzer, 1998], [Rodrigues & How, 2003a], [Rodrigues & How, 2003b], [Rodrigues & Boyd, 2005], [Rodrigues, 2007]. Cependant, très peu de travaux de recherche ont abordé le problème de synchronisation de ces systèmes. Le manque de résultats dans ce domaine peut être expliqué par la complexité des développements imposés par la théorie de Lyapunov quand elle est appliquée aux systèmes PWL. Les commutations des vecteurs d'état compliquent sérieusement la transformation du problème de synchronisation des systèmes PWL en un problème de stabilisation classique. Le peu de résultats qui existent dans ce sens ont été principalement rapportés par Van de Wouw *et al.* pour les systèmes PWL de type continu dans [Van de Wouw *et al.*, 2006b] et par Van de Wouw et Pavlov pour les systèmes PWL de type discontinu dans [Van de Wouw & Pavlov, 2008]. Pour les deux cas, les travaux ont résolu le problème de synchronisation en utilisant le concept de convergence des systèmes non linéaires [Pavlov *et al.*, 2004], [Pavlov *et al.*, 2007]. La solution proposée dans ce sens est basée sur l'idée d'une part de rendre le système esclave convergeant vers le système maître par le biais d'un retour d'état et, d'autre part, en garantissant que le système esclave en boucle fermée a une solution bornée. Ceci garantit une erreur de synchronisation nulle [Van der Wouw *et al.*, 2006b]. Cette idée permet d'éviter une analyse de la stabilité du système d'erreur entre le maître et l'esclave par une approche de Lyapunov. La solution de [Van der Wouw *et al.*, 2006b] est proposée dans ce qui suit.

Soit le système maître défini par la dynamique (1.2) et le système esclave défini par:

$$\dot{z} = A_i z + Bu + b_i \tag{1.19}$$

avec $z \in \mathcal{R}^n$ le vecteur d'état du système esclave et u la loi de commande du système esclave.

Les hypothèses suivantes sont adoptées :

Hypothèse 1.1 : Les systèmes (1.2) et (1.19) sont des systèmes PWL de type continu. Cette hypothèse peut être formalisée par application des égalités (1.3) du théorème 1.1.

Hypothèse 1.2 : l'état $x(t)$ du système (1.2) ainsi que l'entrée $v(t)$ sont supposées bornées.

Théorème 1.4 [Van de Wouw *et al.*, 2006b]:

Considérons le système maître-esclave (1.2) et (1.19), satisfaisant les hypothèses 1.1 et 1.2. Le système esclave (1.19) est convergent vers le système maître via la loi de commande :

$$u = v + K(z - x) = v + Ke \quad (1.20)$$

où $e = z - x$ et $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$ une matrice de gain constante à concevoir, s'il existe une matrice symétrique définie positive $P = P^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$ et une matrice $Y \in \mathcal{R}^{p \times n}$ telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$A_i P + P A_i^T + B Y + Y^T B^T < 0 \quad (1.21)$$

avec :

$$K = Y P^{-1} \quad (1.22)$$

De plus l'erreur de synchronisation $e = z - x$ converge vers zero quand $t \rightarrow \infty$.

1.5.3 Synchronisation chaotique

Depuis plusieurs années, la théorie du chaos reçoit une attention particulière dans le domaine de la recherche. Il est clair que l'application de la synchronisation du chaos dans la cryptographie [Feki, 2003a], [Feki *et al.*, 2003], [Stinson, 2005] est l'une des principales raisons de la réussite de ce domaine de recherche. En fait, c'est uniquement depuis deux décennies que la synchronisation du chaos a été abordée par les pionniers Ott, Grebogi et Yorke [Ott *et al.*, 1990] et Pecora et Carroll [Pecora & Carroll, 1990], [Pecora & Carroll, 1991]. La synchronisation chaotique implique que deux systèmes chaotiques avec des états initiaux différents sont forcés d'avoir une dynamique identique, après un certain temps de transition, via une loi de commande à concevoir. Ce champ de recherche assez récent est largement étudié et plusieurs ouvrages et numéros spéciaux ont été consacrés [Nijmeijer, 1997], [Fradkov & Pogromsky, 1998], [Chen, 1999], [Chen & Ogorzalek, 2000].

D'un autre côté, une variété de schémas de commande a été développée pour la synchronisation des systèmes chaotiques : la commande active [Yassen, 2005a], [Agrawal *et al.*, 2012], la commande adaptative [Lio, 1998], [Motallebzadeh *et al.*, 2012], [Wei *et al.*, 2016], la commande par back-stepping [Lei & Wang, 2016], la commande impulsive [Chen *et al.*, 2011], la commande en mode glissant [Zribi *et al.*, 2009], [Kajbaf *et al.*, 2016] et la commande prédictive [Senouci & Boukabou, 2014]. Toutefois, il faut noter que le contrôle linéaire par

retour d'état reste le schéma le plus attractif utilisé dans le domaine de la communication sécurisée [Yassen, 2005b] en raison de sa configuration simple, sa mise en œuvre facile et sa robustesse au bruit de transmission dans le canal [Jiang & Zheng, 2005], [Zhang *et al.*, 2009]. Lorsque la théorie de Lyapunov est utilisée pour concevoir un tel contrôleur, des outils LMI sont souvent considérés vue leur efficacité pour résoudre des problèmes complexes d'optimisation dans le domaine de la théorie moderne de contrôle.

Pour la synchronisation chaotique des systèmes PWL, il n'y a pas, à notre connaissance, des travaux dans la littérature qui répondent à ce problème pour le cas des systèmes à temps continu. Dans le cas des systèmes chaotiques à temps discret, nous avons constaté qu'il existe quelques articles récents consacrés à ce sujet [Gao *et al.*, 2009]. Nous pouvons aussi nous référer, dans ce sens, à l'un des rares papiers dans lesquels le modèle PWL du circuit de Chua est considéré [Zhang & Feng, 2007]. Le manque de résultats peut être justifié par la complexité introduite par la nature de commutation du vecteur champ des systèmes PWL de type continu [Luo, 2006], [Morse, 1997], [Liberzon & Morse, 1999] qui complique sérieusement la traduction du problème de synchronisation contrôlée des systèmes PWL de type continu dans un problème de stabilisation à l'aide de l'approche de Lyapunov.

1.5.4 Synchronisation chaotique robuste

Pendant les dix dernières années et en raison de sa vaste utilisation dans le domaine de l'ingénierie, en particulier celui de la communication sécurisée, nous avons remarqué un grand intérêt porté à la synchronisation chaotique robuste [Femat & Solis-Perales, 2008], [Feki, 2009], [Al-sawalha & Noorani, 2012], [Vembarasan *et al.*, 2014], [Senouci *et al.*, 2015]. Dans ce sens, des résultats intéressants se rapportant à la synchronisation des systèmes incertains complexes via des outils LMI existent [Chen & Zhang, 2007], [Wong *et al.*, 2012], [Liu & Lee, 2015]. D'autre part, différents types d'incertitudes ont été considérées [Shi & Wang, 2010], [Wong *et al.*, 2012], [Aghababa & Akbari, 2012], [Lee *et al.*, 2013]. Néanmoins, à notre connaissance, il semble que le problème de la synchronisation chaotique robuste de systèmes PWL avec incertitudes bornées en norme reste, dans la littérature, un problème non encore résolu.

1.6 Outils mathématiques

Dans ce paragraphe, les différents lemmes utilisés dans ce mémoire pour s'affranchir des différents problèmes et verrous mathématiques seront exposés.

Lemme 1.1-S-procédure pour des fonctions quadratiques et des inégalités non strictes [Boyd *et al.*, 1994] :

Soient T_0, \dots, T_q des matrices de fonctions quadratiques de $\zeta \in \mathcal{R}^n$ telles que :

$$T_i(\zeta) = \zeta^T F_i \zeta + 2v_i^T \zeta + w_i, \quad i = 0, \dots, q, \quad (1.23)$$

où

$$F_i = F_i^T$$

S'il existe $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_q \geq 0$ telle que pour tout ζ , nous avons :

$$T_0(\zeta) - \sum_{i=1}^q \tau_i T_i(\zeta) \geq 0 \quad (1.24)$$

Alors la condition de la S-procédure suivante est vraie :

$$T_0(\zeta) \geq 0 \text{ pour tout } \zeta \text{ satisfaisant } T_i(\zeta) \geq 0, i = 1, \dots, q \quad (1.25)$$

Pour $q = 1$ et il existe ζ_0 tel que $T_1(\zeta_0) > 0$, alors la condition de la S-procédure est nécessaire et suffisante.

Remarque : Notons que (1.24) implique :

$$\begin{bmatrix} F_0 & v_0 \\ v_0^T & w_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^q \tau_i \begin{bmatrix} F_i & v_i \\ v_i^T & w_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.26)$$

Lemme 1.2-S-procédure pour des fonctions quadratiques définies négatives [Apkarian, 2003] :

Il est possible d'étendre le lemme 1.1 de la S-procédure précédent, en utilisant un changement de variables des fonctions quadratiques définies positives $T_i(\zeta), i = 0, \dots, q$, en des fonctions définies négatives, ce qui permet d'énoncer que [Apkarian, 2017] :

Pour toutes fonctions quadratiques T_0, \dots, T_q , s'écrivant $T_i(\zeta) = \zeta^T F_i \zeta$ et vérifiant :

$$T_0(\zeta) \leq 0 \text{ pour tout } \zeta \text{ satisfaisant } T_i(\zeta) \leq 0 \text{ quelque soit } i = 1, \dots, q,$$

alors, s'il existe $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_q \geq 0$, l'expression (1.24) s'écrit dans ce cas comme suit :

$$T_0(\zeta) - \sum_{i=1}^q \tau_i T_i(\zeta) \leq 0 \quad (1.27a)$$

ou encore :

$$F_0(\zeta) - \sum_{i=1}^q \tau_i F_i(\zeta) \leq 0 \quad (1.27b)$$

Lemme 1.3-Complément de Schur [Boyd & Vandenberghe, 2009] :

Pour une matrice symétrique donnée :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}$$

Si Δ_{22} est inversible et $\Delta_{12} = \Delta_{21}^T$ alors :

1. $\Delta > 0$ si et seulement si $\Delta_{22} > 0$ et $\Delta_{11} - \Delta_{12}\Delta_{22}^{-1}\Delta_{12}^T > 0$
2. Si $\Delta_{22} > 0$, alors $\Delta \geq 0$ si et seulement si $\Delta_{11} - \Delta_{12}\Delta_{22}^{-1}\Delta_{12}^T \geq 0$

Lemme 1.4-Inversion matricielle [Kailath, 1989] :

Le lemme de l'inversion matricielle postule que :

$$(Q_1 + J_1 Q_2 J_2)^{-1} = Q_1^{-1} - Q_1^{-1} J_1 (J_2 Q_1^{-1} J_1 + Q_2^{-1})^{-1} J_2 Q_1^{-1} \quad (1.28)$$

où Q_1 et Q_2 sont deux matrices inversibles et, J_1 et J_2 sont des matrices arbitraires de dimensions adéquates.

Lemme 1.5-Propriété relative au modèle d'une incertitude bornée en norme [Shen *et al.*, 1991] :

Soient deux matrices réelles constantes D_j et E_j avec des dimensions appropriées et une matrice V_j qui satisfait la condition $V_j^T V_j \leq I$, alors, pour tout scalaire $\varepsilon > 0$ l'inégalité matricielle suivante est toujours vraie :

$$D_j V_j(t) E_j + E_j^T V_j(t)^T D_j^T \leq \varepsilon D_j D_j^T + \varepsilon^{-1} E_j^T E_j \quad (1.29)$$

1.7 Motivation et contribution de la thèse

L'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques hybrides de type PWL est une thématique de recherche de grande actualité vue la capacité de ces systèmes à fournir au mieux des modèles reflétant la nature des problèmes réels de commande.

Néanmoins, nous avons constaté qu'il existe très peu de travaux de recherche qui ont considéré le problème de synchronisation de ce type de systèmes malgré sa grande importance dans l'industrie robotique, automobile, aéronautique ainsi que pour les systèmes télé-opérés dans le domaine de la médecine ainsi que le domaine de la télécommunication. L'absence de résultats dans ce sens peut être justifiée par la complexité des développements quand il s'agit d'appliquer la théorie de Lyapunov à la synchronisation des systèmes PWL vue la présence des termes à commutations. Dans ce mémoire, on se propose de résoudre ce problème en énonçant de nouveaux résultats théoriques pour la synchronisation des systèmes PWL à variables mesurables. Le problème de synchronisation des systèmes PWL sera résolu par une approche de Lyapunov grâce au Lemme de la S-procédure et de nouvelles conditions de synchronisation dans le cas de systèmes contrôlés, présentées sous forme de LMIs, seront fournies. Le schéma énoncé sera valorisé par plusieurs applications.

D'un autre côté, bien que le problème de synchronisation des systèmes chaotiques a été bien considéré dans plusieurs travaux. Il n'existe pas, à notre connaissance, des travaux qui ont résolu ce problème pour des systèmes PWL chaotiques de type continu. Motivés par ces observations, nous essayerons d'étendre les résultats qui seront obtenus pour la synchronisation des systèmes PWL contrôlés au cas des systèmes chaotiques. Une application sur des systèmes générateurs de chaos démontrera au mieux l'efficacité du schéma qui sera proposé. Une étude comparative entre les résultats que nous avons obtenus et ceux obtenus en utilisant d'autres approches basées sur des outils LMIs sera aussi établie en impliquant différents systèmes chaotiques.

Enfin, une extension des résultats précédents à la synchronisation chaotique robuste avec incertitudes bornées en norme sera aussi proposée. Elle sera validée par des exemples numériques.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé dans un premier lieu la modélisation mathématique des systèmes PWL, classe particulière de systèmes hybrides. Quelques exemples de systèmes physiques ont été présentés et serviront, dans les chapitres suivants, pour valider les approches proposées. Nous avons présenté, dans un second lieu, les techniques d'analyse de ces systèmes. Une synthèse de différents types d'incertitudes a été aussi abordée.

Vu que ce travail constituera une contribution à la synchronisation des systèmes PWL, un état de l'art sur la théorie de la synchronisation a été étalé. Dans une dernière partie de ce chapitre, les outils mathématiques nécessaires pour la preuve des résultats théoriques ont été exposés. Finalement et en se basant sur ce qui a été énoncé, les motivations et les contributions de cette thèse ont été clairement explicitées.

2

Contribution à la Synchronisation des Systèmes PWL

2.1	Introduction	35
2.2	Position du problème.....	35
2.3	Synchronisation des systèmes PWL.....	37
2.4	Application	42
2.4.1	Exemple 2.1 : Système mécanique masses – ressorts - amortisseurs.....	43
2.4.2	Exemple 2.2 : Coopération de deux robots pour la manipulation d’un objet.....	48
2.5	Etude comparative.....	54
2.5.1	Cas du système mécanique masses – ressorts - amortisseurs.....	54
2.5.2	Cas de la coopération de deux robots.....	56
2.5.3	Analyse de l’étude comparative	57
2.6	Conclusion.....	59

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, le problème de la synchronisation maître-esclave des systèmes PWL de type continu sera résolu par une approche de Lyapunov en utilisant le lemme de la S-procédure. De nouvelles conditions suffisantes de synchronisation basées sur la résolution des contraintes LMIs seront énoncées.

Ce chapitre sera organisé comme suit : dans le second paragraphe, le problème de la synchronisation maître-esclave sera formulé. Le troisième paragraphe est dédié à la conception de la loi de commande en utilisant la théorie de Lyapunov. Dans le quatrième paragraphe, deux exemples sont présentés afin de démontrer l'efficacité du schéma de synchronisation proposé. Il s'agit d'un système mécanique masses – ressorts – amortisseurs et d'un système de coopération de deux robots manipulant un même objet. Une étude comparative avec une approche de synchronisation tirée de la littérature sera aussi proposée.

2.2 Position du problème

Soit la classe des systèmes PWL de type continu décrite pour tout $j \in Q = \{1, \dots, N\}$ et pour tout $x \in A_j$ par le modèle d'état :

$$\dot{x} = A_j x + Bv + b_j \quad (2.1)$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ et $v \in \mathcal{R}^m$ sont respectivement le vecteurs d'état et le vecteur d'entrée, $A_j \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ est la matrice d'entrée et $b_j \in \mathcal{R}^n$ est un vecteur constant. A_j est une partition de l'espace d'état en cellules polyédriques définies par la description polytopique suivante :

$$A_j = \{x \mid H_j^T x + h_j \leq 0\} \quad (2.2)$$

où :

$$H_j \in \mathcal{R}^{n \times r_j} \text{ et } h_j \in \mathcal{R}^{r_j}.$$

Nous considérons que le système (2.1) représente la dynamique d'un système maître. Considérons maintenant un système esclave décrit aussi pour tout $z \in A_i$ et $i \in Q = \{1, \dots, N\}$ par :

$$\dot{z} = A_i z + b_i + Bu \quad (2.3)$$

où $z \in \mathcal{R}^n$ et $u \in \mathcal{R}^m$ sont respectivement le vecteurs d'état et le vecteur d'entrée, $A_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ est la matrice d'entrée et $b_i \in \mathcal{R}^n$ est un vecteur constant. Λ_i est une partition de l'espace d'état en cellules polyédriques définies par la description polytopique suivante :

$$A_i = \{z \mid H_i^T z + h_i \leq 0\} \quad (2.4)$$

où :

$$H_i \in \mathcal{R}^{n \times r_i}, h_i \in \mathcal{R}^{r_i}.$$

Soit $e = z - x$, l'erreur de synchronisation entre les états du système esclave et ceux du système maître. La dynamique de l'erreur de synchronisation sera alors décrite pour tous $i, j \in Q$ par :

$$\dot{e} = A_i e + Bw + A_{ij}x + b_{ij} \quad (2.5)$$

où :

$$w = u - v, A_{ij} = A_i - A_j \text{ et } b_{ij} = b_i - b_j.$$

La problématique de la synchronisation maître-esclave consiste à concevoir une loi de commande w pour le système d'erreur (2.5) telles que $e \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ telle que la loi de commande w soit réalisable.

Pour la résolution de ce problème de synchronisation contrôlée de deux systèmes PWL maître-esclave identiques, nous considérons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1. Les systèmes (2.1) et (2.3) sont Lipchitziens.

Hypothèse 2. Le vecteur d'état x du système maître et le vecteur d'état z du système esclave sont mesurables.

Hypothèse 3. Les systèmes maître considérés sont stables ou stabilisables via une loi de commande.

Hypothèse 4. Une commande unique par retour d'état $w = Ke$ est appliquée en boucle fermée, où $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$ est une matrice de gain de retour d'état constante à calculer et qui doit assurer que $e \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Notons que le système d'erreur (2.5) est Lipchitzien puisque les systèmes maître (2.1) et esclave (2.3) sont Lipchitziens. En appliquant la loi de commande $w = Ke$, le système d'erreur suivant est obtenu en utilisant (2.5) :

$$\dot{e} = (A_i + BK)e + A_{ij}x + b_{ij} \quad (2.6)$$

Remarque 2.1. Le système bouclé (2.6) est un système PWL de type continu puisque le système maître esclave décrit par (2.1) et (2.3) est un système PWL de type continu.

2.3 Synchronisation des systèmes PWL

Pour accomplir la synchronisation entre les systèmes maître et esclave, il est nécessaire de prouver la stabilité globale de la dynamique de l'erreur (2.6) via la loi de commande $w = Ke$. Pour ce faire, nous utilisons une approche de Lyapunov. Une fonction candidate unique de Lyapunov est choisie. Elle est définie par :

$$V(e) = e^T P e \quad (2.7)$$

où P est une matrice constante symétrique définie positive.

En utilisant le théorème de Lyapunov énoncé au premier chapitre pour le système d'erreur (2.6), l'erreur de la synchronisation maître-esclave (2.6) est globalement asymptotiquement stable si la fonction de Lyapunov $V(e)$ satisfait les trois conditions suivantes [Slotine & Li, 1991] :

$$V(e) = 0 \text{ pour } e = 0 \quad (2.8)$$

$$V(e) > 0 \text{ pour } e \neq 0 \quad (2.9)$$

$$\dot{V}(e) < 0 \text{ pour } e \neq 0 \quad (2.10)$$

Par ailleurs, posons $\alpha_1 > 0$ un scalaire positif infiniment petit tel que :

$$\dot{V}(e) \leq -\alpha_1 V(e) \quad (2.11)$$

La condition (2.11) satisfait la troisième condition de Lyapunov (2.10).

Théorème 2.1 [Mkaouar et Boubaker, 2011]

Pour un scalaire donné $\alpha_1 > 0$ et pour tout couple d'indice $i, j \in Q$, s'il existe une matrice constante symétrique définie positive $S \in \mathcal{R}^{n \times n}$, une matrice constante $R \in \mathcal{R}^{m \times n}$, des matrices diagonales définies négatives $E_{ij} \in \mathcal{R}^{r_i \times r_i}$ et $F_{ij} \in \mathcal{R}^{r_j \times r_j}$ et des constantes strictement négatives β_{ij} et ξ_{ij} , telles que les inégalités matricielles linéaires LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} \xi_{ij} & \xi_{ij}|h_i|^T & \xi_{ij}|h_j|^T \\ * & \frac{1}{2}E_{ij} & 0 \\ * & * & \frac{1}{2}F_{ij} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_{1,i} & A_{ij} & SH_i & 0 & \xi_{ij}b_{ij}|h_i|^T - \frac{1}{2}SH_iM_i & \xi_{ij}b_{ij}|h_j|^T \\ * & \beta_{ij}I & H_i & H_j & -\frac{1}{2}H_iM_i & -\frac{1}{2}H_jM_j \\ * & * & 2E_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 2F_{ij} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \frac{1}{2}E_{ij} - \xi_{ij}|h_i||h_i|^T & -\xi_{ij}|h_i||h_j|^T \\ * & * & * & * & * & \frac{1}{2}F_{ij} - \xi_{ij}|h_j||h_j|^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.13)$$

$$\Delta_{1,i} = A_i S + S A_i^T + B R + R^T B^T + \alpha_1 S - \xi_{ij} b_{ij} b_{ij}^T$$

sont satisfaites, alors le système d'erreur de synchronisation maître-esclave (2.6) est globalement asymptotiquement stable pour la loi de commande :

$$w = K e \quad (2.14)$$

où :

$$K = R S^{-1} \quad (2.15)$$

Dans (2.12), (2.13) et dans ce qui suit, * désigne un bloc symétrique.

Démonstration :

Pour tout couple d'indices $i, j \in Q$, $\forall e \neq 0$ et en se basant sur la dynamique de l'erreur de synchronisation (2.6) et sur la relation (2.11), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) + \alpha_1 V(e) &= e^T ((A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P) e \\ &\quad + b_{ij}^T P e + e^T P b_{ij} + x^T A_{ij}^T P e + e^T P A_{ij} x \end{aligned}$$

Il est évident qu'on cherche les conditions qui assurent que $\forall e \neq 0$ on aura :

$$\dot{V}(e) + \alpha_1 V(e) \leq 0 \quad (2.16)$$

En appliquant le lemme 1.2 de la S-procédure, énoncé au premier chapitre, on peut confirmer que les deux relations (2.16) et (2.17) suivante sont toujours équivalentes $\forall e \neq 0$ s'il existe deux constantes α_2 et α_3 négatives vérifiant (2.17) [voir démonstration en Annexe 5] :

$$\dot{V}(e) + \alpha_1 V(e) - \alpha_2 x^T x - \alpha_3 \leq 0 \quad (2.17)$$

Substituons (2.16) dans (2.17), nous pouvons écrire que :

$$W^T F_0 W \leq 0 \quad (2.18)$$

où :

$$W = [e^T \quad x^T \quad 1]^T$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} (A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P & * & * \\ A_{ij}^T P & -\alpha_2 I & * \\ b_{ij}^T P & 0 & -\alpha_3 \end{bmatrix}$$

$I \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est la matrice identité.

Pour tout couples d'indices $i, j \in Q$, en s'appuyant sur les expressions polytopiques (2.2) et (2.4) des cellules polyédriques et pour toutes constantes infiniment petites satisfaisants $0 < \xi_j \ll 1$ et $0 < \sigma_j \ll 1$, il existe des vecteurs colonnes construits par des éléments positifs $\delta_i \in \mathcal{R}^{r_i \times 1}$ et $\gamma_j \in \mathcal{R}^{r_j \times 1}$ permettant d'écrire dans les cellules ouvertes :

$$W^T F_1 W \leq 0 \quad (2.19)$$

$$W^T F_2 W \leq 0 \quad (2.20)$$

où:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ \delta_i^T H_i^T & \delta_i^T H_i^T & 2\delta_i^T h_i \end{bmatrix}$$

et :

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 2\xi_j I & * \\ 0 & \gamma_j^T H_j^T & 2\gamma_j^T h_j + 2\sigma_j \end{bmatrix}$$

En utilisant le lemme 1.2 de la S-procédure énoncé dans le premier chapitre, s'il existe deux constantes $\tau_{1,ij} \geq 0$ et $\tau_{2,ij} \geq 0$, les inégalités (2.18), (2.19) et (2.20) peuvent être écrites comme suit:

$$F_0 - \tau_{1,ij} F_1 - \tau_{2,ij} F_2 \leq 0 \quad (2.21)$$

Pour tout couple d'indice $i, j \in Q$, posons:

$$\begin{cases} \beta_{1,ij} = -\tau_{1,ij} \delta_i \in \mathcal{R}^{r_i \times 1} \\ \beta_{2,ij} = -\tau_{2,ij} \gamma_j \in \mathcal{R}^{r_j \times 1} \\ \beta_{3,ij} = -\alpha_2 - 2\tau_{2,ij} \xi_j \in \mathcal{R} \\ \beta_{4,ij} = -\alpha_3 - 2\tau_{2,ij} \sigma_j \in \mathcal{R} \end{cases}$$

telles que :

$$\beta_{1,ij}(k)_{k=1,\dots,r_i} \leq 0, \beta_{2,ij}(k)_{k=1,\dots,r_j} \leq 0, \beta_{3,ij} \leq 0 \text{ et } \beta_{4,ij} \leq 0$$

Pour tout $i, j \in Q$, l'inégalité (2.21) peut être alors écrite sous la forme de l'Inégalité Matricielle Bilinéaire (BMI) suivante:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{2i} & * & * \\ A_{ij}^T P & \beta_{3,ij} I & * \\ b_{ij}^T P + \beta_{1,ij}^T H_i^T & \beta_{1,ij}^T H_i^T + \beta_{2,ij}^T H_j^T & 2\beta_{1,ij}^T h_i + 2\beta_{2,ij}^T h_j + \beta_{4,ij} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.22)$$

où:

$$\Delta_{2i} = (A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P$$

Soient:

$$\begin{cases} \beta_{1,ij} = E_{ij}^{-1} |h_i| \\ \beta_{2,ij} = F_{ij}^{-1} |h_j| \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} h_i = M_i |h_i| \\ h_j = M_j |h_j| \end{cases}$$

où $E_{ij} \in \mathcal{R}^{r_i \times r_i}$ et $F_{ij} \in \mathcal{R}^{r_j \times r_j}$ sont deux matrices diagonales définies négatives, $|h_i| \in \mathcal{R}^{r_i}$ et $|h_j| \in \mathcal{R}^{r_j}$ sont deux vecteurs colonnes.

$M_i \in \mathcal{R}^{r_i \times r_i}$ et $M_j \in \mathcal{R}^{r_j \times r_j}$ sont deux matrices diagonales définies comme suit :

si $h_q(k)_{k=1, \dots, r_q} \geq 0$ alors $M_q(k, k) = 1, q = i, j$.

si $h_q(k)_{k=1, \dots, r_q} < 0$ alors $M_q(k, k) = -1, q = i, j$.

En utilisant le lemme 1.3 énoncé au premier chapitre relatif au complément de Schur, l'inégalité matricielle bilinéaire (2.22) est satisfaite pour tout $i, j \in Q$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\beta_{4,ij} + 2|h_i|^T M_i E_{ij}^{-1} |h_i| + 2|h_j|^T M_j F_{ij}^{-1} |h_j| < 0 \quad (2.23)$$

$$X_1 - X_2 \Omega^{-1} X_2^T \leq 0 \quad (2.24)$$

où :

$$X_1 = \begin{bmatrix} \Delta_{2i} & * \\ A_{ij}^T P & \beta_{3ij} I \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} P b_{ij} + H_i E_{ij}^{-1} |h_i| \\ H_i E_{ij}^{-1} |h_i| + H_j F_{ij}^{-1} |h_j| \end{bmatrix}$$

et

$$\Omega = 2|h_i|^T M_i E_{ij}^{-1} |h_i| + 2|h_j|^T M_j F_{ij}^{-1} |h_j| + \beta_{4,ij}$$

Posons pour tous couple d'indice $i, j \in Q$:

$$\begin{cases} \beta_{4,ij} = \xi_{ij}^{-1} \\ \Psi = [|h_i| \quad |h_j|]^T \end{cases}$$

Il est possible d'écrire:

$$\Omega = \xi_{ij}^{-1} + \Psi^T \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} \right)^{-1} \Psi < 0 \quad (2.25)$$

En multipliant l'expression (2.25) par ξ_{ij}^2 , en admettant que $E_{ij} \leq M_i E_{ij} \leq -E_{ij}$ et $F_{ij} \leq M_j F_{ij} \leq -F_{ij}$ et en utilisant le complément de Schur, l'inégalité matricielle linéaire (2.12) est obtenue.

En utilisant le lemme 1.4 énoncé au premier chapitre (lemme d'inversion matricielle), nous obtenons pour (2.25) pour tout couple $i, j \in Q$:

$$\Omega^{-1} = \xi_{ij} - \xi_{ij}^2 \Psi^T \left(\xi_{ij} \Psi \Psi^T + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} \right)^{-1} \Psi \quad (2.26)$$

Soient, pour tous $i, j \in Q$, $\beta_{3ij} = \beta_{ij}$ et $S = P^{-1}$ et en multipliant l'expression (2.24) à gauche et à droite par la matrice $\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, nous obtenons :

$$X_3 - X_4 \Omega^{-1} X_4^T \leq 0 \quad (2.27)$$

où:

$$X_3 = \begin{bmatrix} (A_i S + BR) + (A_i S + BR)^T + \alpha_1 S & * \\ A_{ij}^T & \beta_{ij} I \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} b_{ij} + S H_i E_{ij}^{-1} |h_i| \\ H_i E_{ij}^{-1} |h_i| + H_j F_{ij}^{-1} |h_j| \end{bmatrix}$$

En substituant (2.26) dans (2.27), en admettant que, pour tout couple d'indices $i, j \in Q$ que $E_{ij} \leq M_i E_{ij} \leq -E_{ij}$ et $F_{ij} \leq M_j F_{ij} \leq -F_{ij}$ et en utilisant le lemme du complément de Schur, l'inégalité matricielle linéaire (2.13) est obtenue via quelques transformations [voir Annexe 6].

2.4 Application

Dans ce paragraphe, les résultats théoriques développés précédemment seront validés sur deux exemples de systèmes PWL contrôlés. Le premier exemple traite d'un système mécanique masses – ressorts – amortisseurs et le second expose une coopération entre deux robots pour la manutention d'un objet.

2.4.1 Exemple 2.1 : Système mécanique masses - ressorts - amortisseurs

Dans cette partie nous allons considérer la problématique de la synchronisation maître-esclave de deux systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs présentés par la Figure 2.1. Les deux systèmes sont identiques et composés chacun de deux masses m_1 et m_2 , trois ressorts caractérisés chacun par les constantes de raideur k_1 , k_2 et k_3 et deux amortisseurs caractérisés par les coefficients d'amortissement d_1 et d_2 . Les positions des masses m_1 et m_2 pour le système maître sont données respectivement par les coordonnées y_{1M} et y_{2M} . Les vitesses respectives sont définies par \dot{y}_{1M} et \dot{y}_{2M} . Nous supposons que y_{1M} , y_{2M} , \dot{y}_{1M} et \dot{y}_{2M} sont mesurables. Le système maître est contrôlé via la commande.

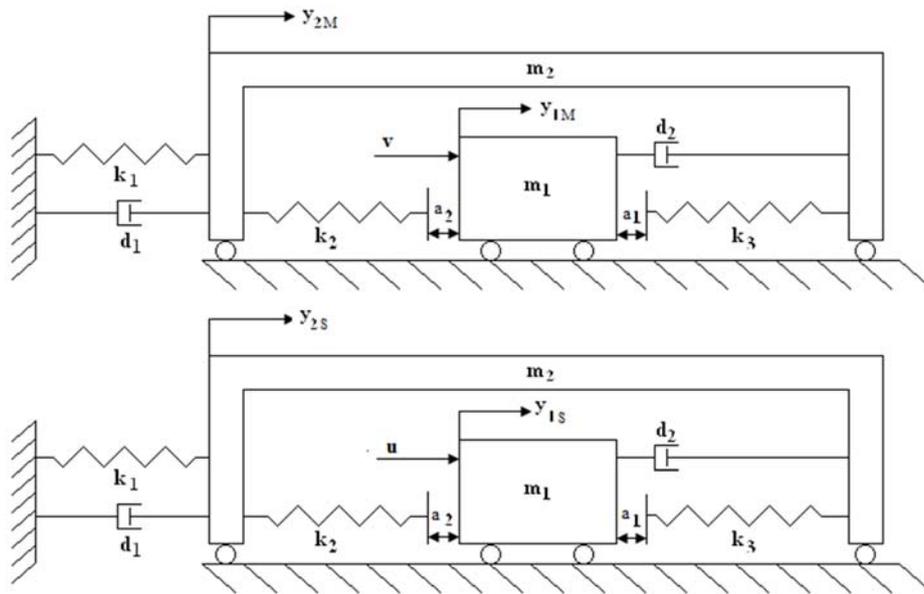


Figure 2.1. Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs à synchroniser

Le système maître est décrit par la dynamique suivante:

$$\begin{cases} \dot{y}_{1M} = \frac{1}{m_1} (-g(y_{1M}, y_{2M}) - d_2(\dot{y}_{1M} - \dot{y}_{2M}) + v) \\ \dot{y}_{2M} = \frac{1}{m_2} (g(y_{1M}, y_{2M}) - d_2(\dot{y}_{2M} - \dot{y}_{1M}) - k_1 y_{2M} - d_1 \dot{y}_{2M}) \end{cases} \quad (2.28)$$

De même et en posant y_{1S} et y_{2S} les positions des masses m_1 et m_2 pour le système esclave, \dot{y}_{1S} et \dot{y}_{2S} les vitesses respectives et u la commande, le système esclave est décrit par :

$$\begin{cases} \ddot{y}_{1S} = \frac{1}{m_1}(-g(y_{1S}, y_{2S}) - d_2(\dot{y}_{1S} - \dot{y}_{2S}) + u) \\ \ddot{y}_{2S} = \frac{1}{m_2}(g(y_{1S}, y_{2S}) - d_2(\dot{y}_{2S} - \dot{y}_{1S}) - k_1 y_{2S} - d_1 \dot{y}_{2S}) \end{cases} \quad (2.29)$$

$g(y_{1M}, y_{2M})$ et $g(y_{1S}, y_{2S})$ sont les fonctions linéaires par morceaux dépendantes respectivement de y_{1M} et y_{2M} , et de y_{1S} et y_{2S} .

Soient les vecteurs d'état du maître et de l'esclave donnés respectivement par :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [y_{1M} \ \dot{y}_{1M} \ y_{2M} \ \dot{y}_{2M}]^T$$

$$z = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T = [y_{1S} \ \dot{y}_{1S} \ y_{2S} \ \dot{y}_{2S}]^T$$

Les fonctions PWL $g(x)$ et $g(z)$ sont respectivement définies pour le maître et pour l'esclave par :

$$g(x) = \begin{cases} k_2(x_1 - x_3 + a_2) & \text{pour } x_3 \geq x_1 + a_2 \\ 0 & \text{pour } x_1 - a_1 < x_3 < x_1 + a_2 \\ k_3(x_1 - x_3 - a_1) & \text{pour } x_3 \leq x_1 - a_1 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$g(z) = \begin{cases} k_2(z_1 - z_3 + a_2) & \text{pour } z_3 \geq z_1 + a_2 \\ 0 & \text{pour } z_1 - a_1 < z_3 < z_1 + a_2 \\ k_3(z_1 - z_3 - a_1) & \text{pour } z_3 \leq z_1 - a_1 \end{cases} \quad (2.31)$$

Ainsi, pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$, l'espace d'état est décrit par les équations (2.2) et (2.4) avec :

$$H_1 = [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad H_3 = [-1 \ 0 \ 1 \ 0]^T, \quad h_1 = a_2, \\ h_2 = [-a_2 \ -a_1]^T \text{ et } h_3 = a_1.$$

Le système maître et le système esclave peuvent être écrits respectivement sous la forme (2.1) et (2.3) pour les couples $i, j \in \{1, 2, 3\}$ où [Van de Wouw *et al.*, 2006a]:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_2}{m_1} & -\frac{d_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{d_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{d_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_1}{m_2} & -\frac{d_2+d_1}{m_2} \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_2}{m_1} & 0 & \frac{d_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{d_2}{m_2} & -\frac{k_1}{m_2} & -\frac{d_2+d_1}{m_2} \end{bmatrix} \\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_3}{m_1} & -\frac{d_2}{m_1} & \frac{k_3}{m_1} & \frac{d_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_3}{m_2} & \frac{d_2}{m_2} & -\frac{k_3+k_1}{m_2} & -\frac{d_2+d_1}{m_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k_2 a_2}{m_1} \\ 0 \\ \frac{k_2 a_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_3 a_1}{m_1} \\ 0 \\ -\frac{k_3 a_1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Les paramètres physiques des systèmes maître et esclave sont donnés par les valeurs numériques suivantes : $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 0.4$, $k_3 = 0.4$, $d_1 = 0.2$, $d_2 = 0.1$, $a_1 = 0.1$ et $a_2 = 0.05$

Une entrée sinusoïdale $v = A_d \sin(\omega t)$ avec $A_d = 0.15$ et $\omega = 2\pi$ est appliquée au système maître. En utilisant la boîte à outils LMI de MatLab, les LMIs (2.12) et (2.13) issues du théorème énoncé dans ce chapitre sont résolues et le vecteur de gain de retour d'état (2.15) est déduit tel que $K = [-3.3602 \quad -1.3929 \quad 1.9483 \quad 0.9660]$.

Les résultats de simulation sont obtenus pour les conditions initiales suivantes $x_0 = [0.25 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ et $z_0 = [-0.25 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$. L'évolution de l'erreur de synchronisation qui démontre l'efficacité du schéma proposé est illustrée dans le Figure 2.2. Les coordonnées et la vitesse de synchronisation sont présentées par la Figure 2.3. La Figure 2.4 représente les lois de commande des systèmes maître et esclave. Finalement, puisqu'il s'agit d'une synchronisation de systèmes PWL, les commutations entre les différentes cellules polyédriques sont montrées respectivement pour le système maître et le système esclave par les Figures 2.5 et 2.6. Les figures montrent que la synchronisation a été bien accomplie via une loi de commande réalisable appliquée au système esclave.

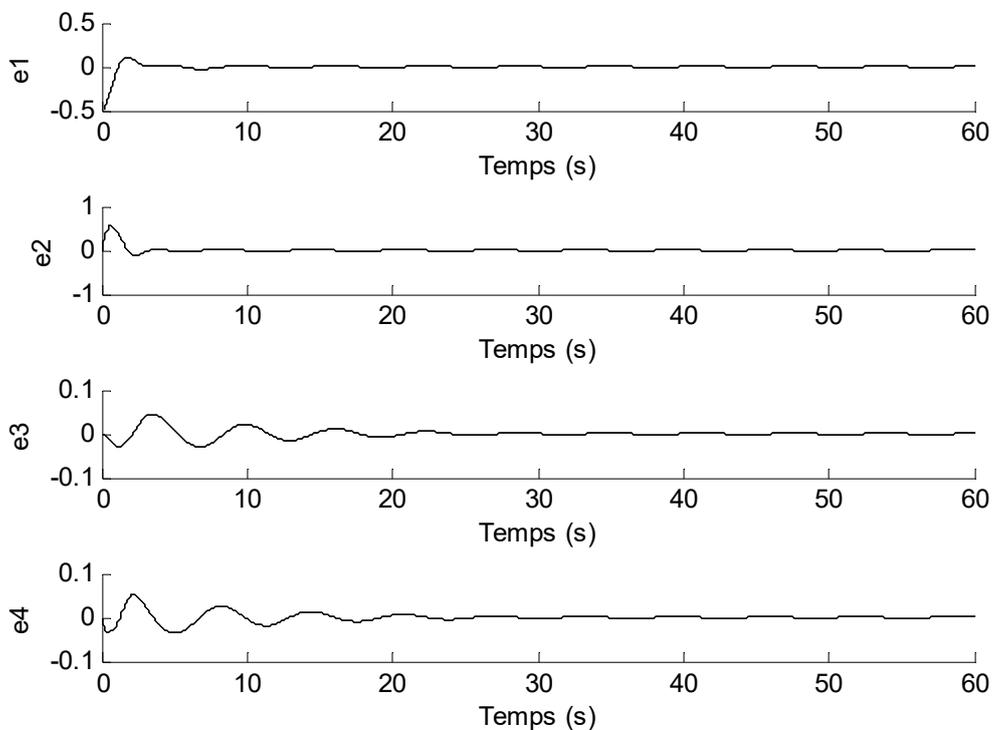


Figure 2.2. Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs : Erreur de synchronisation en position et en vitesse

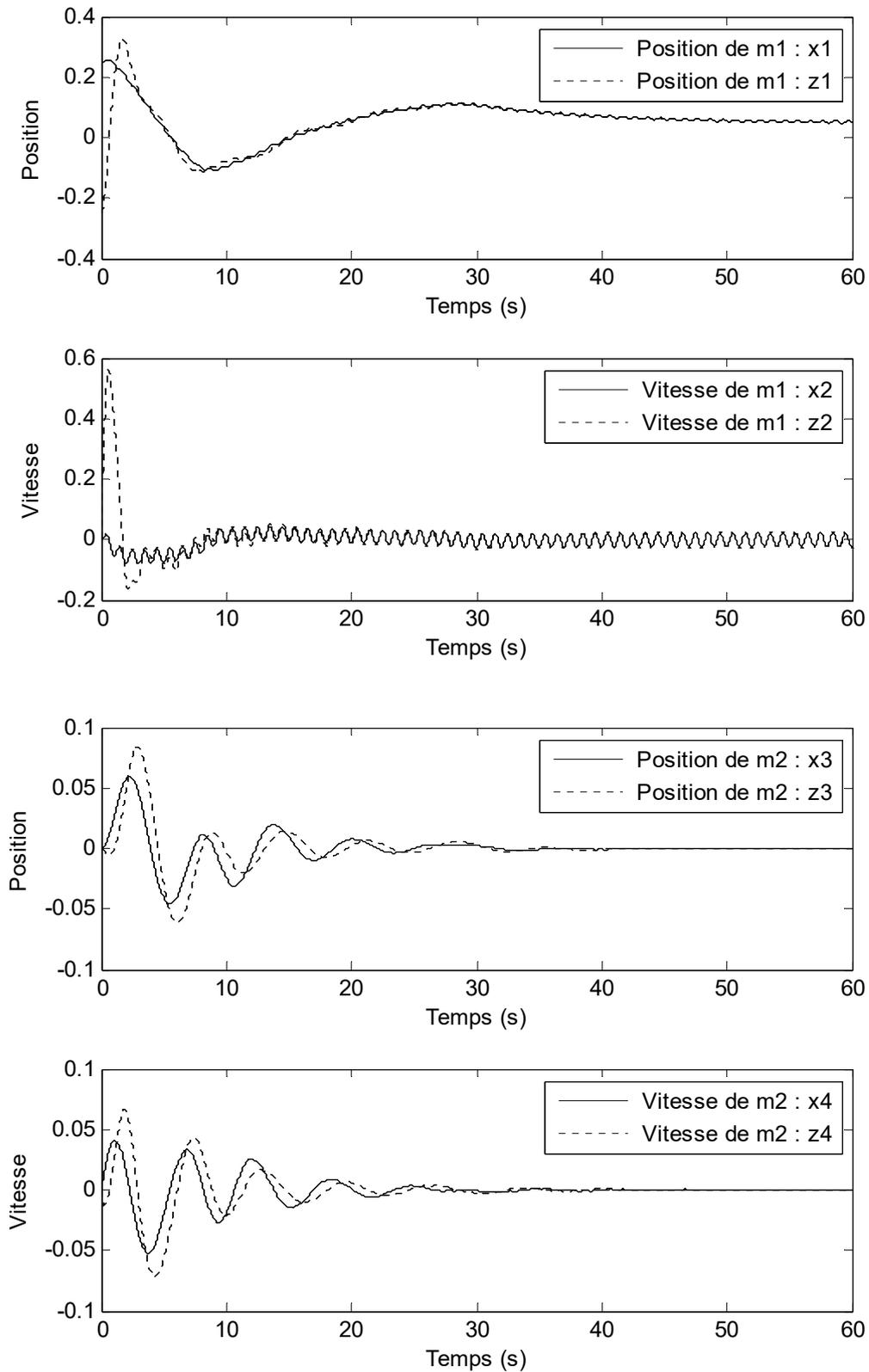


Figure 2.3 Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs : synchronisation en positions et en vitesses

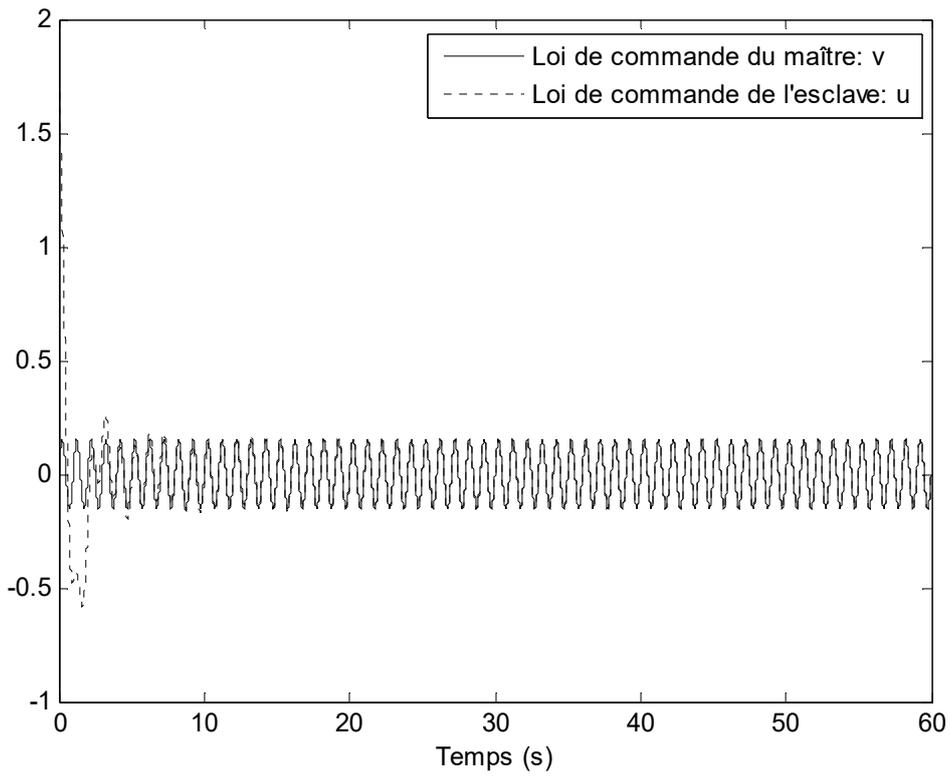


Figure 2.4. Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs : Lois de commande

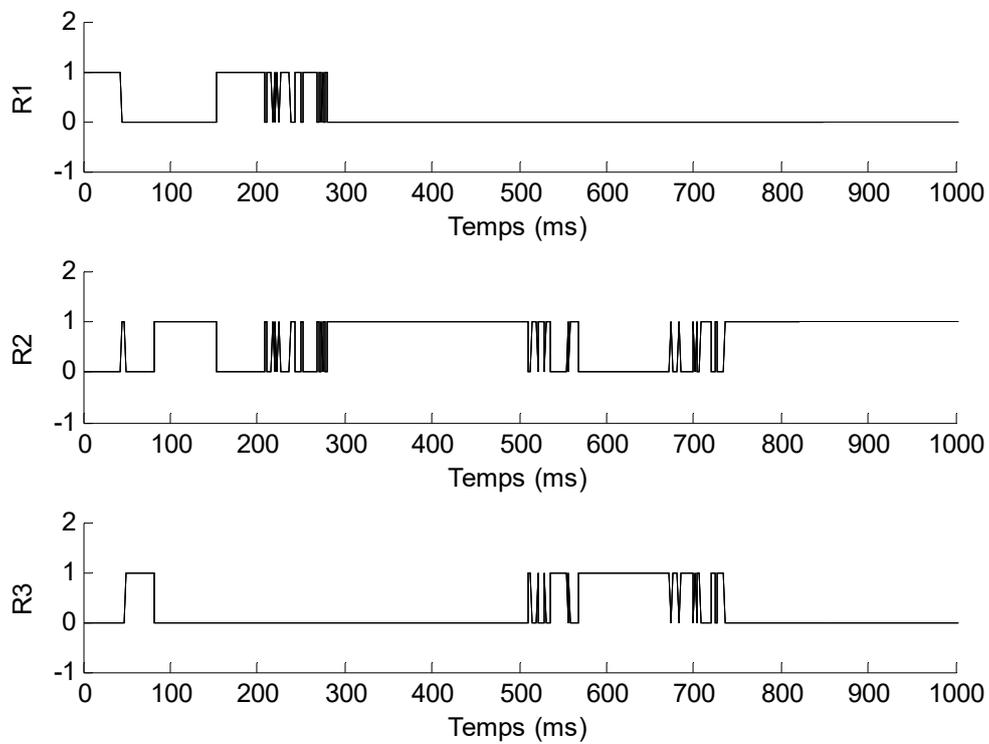


Figure 2.5. Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs : Commutation du maître entre les différentes cellules polyédriques

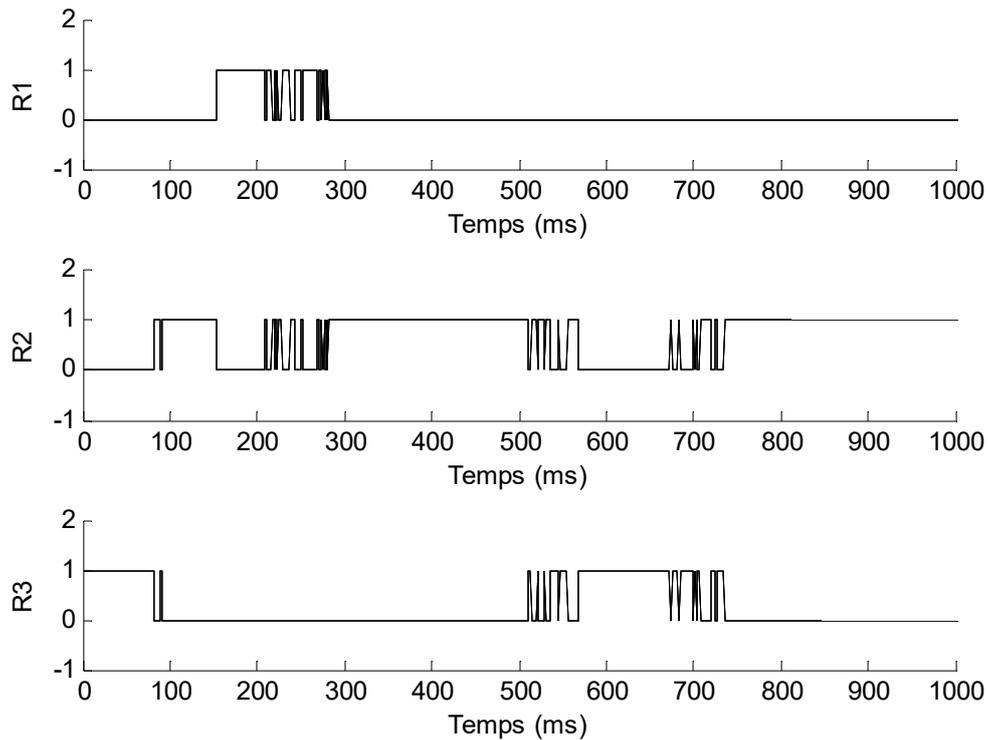


Figure 2.6. Systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs : Commutation de l’esclave entre les différentes cellules polyédriques

2.4.2 Exemple 2.2 : Coopération de deux robots pour la manipulation d’un objet

On considère le problème de la coopération de deux robots industriels manipulant un seul objet en vue de le déplacer d’une position initiale vers une position finale [Mkaouar & Boubaker, 2012b] illustré sur la Figure 2.7. La problématique de commande sera donc résolue comme étant un problème de synchronisation maître-esclave de la position et de la vitesse des deux robots où chaque robot est commandé en position et en force via une commande par impédance [Mehdi & Boubaker, 2012].

Pour résoudre le problème de synchronisation maître-esclave, le contact de chaque robot manipulant l’objet est assimilé au système masses, ressorts et amortisseurs représenté dans le premier chapitre par la Figure 1.3.

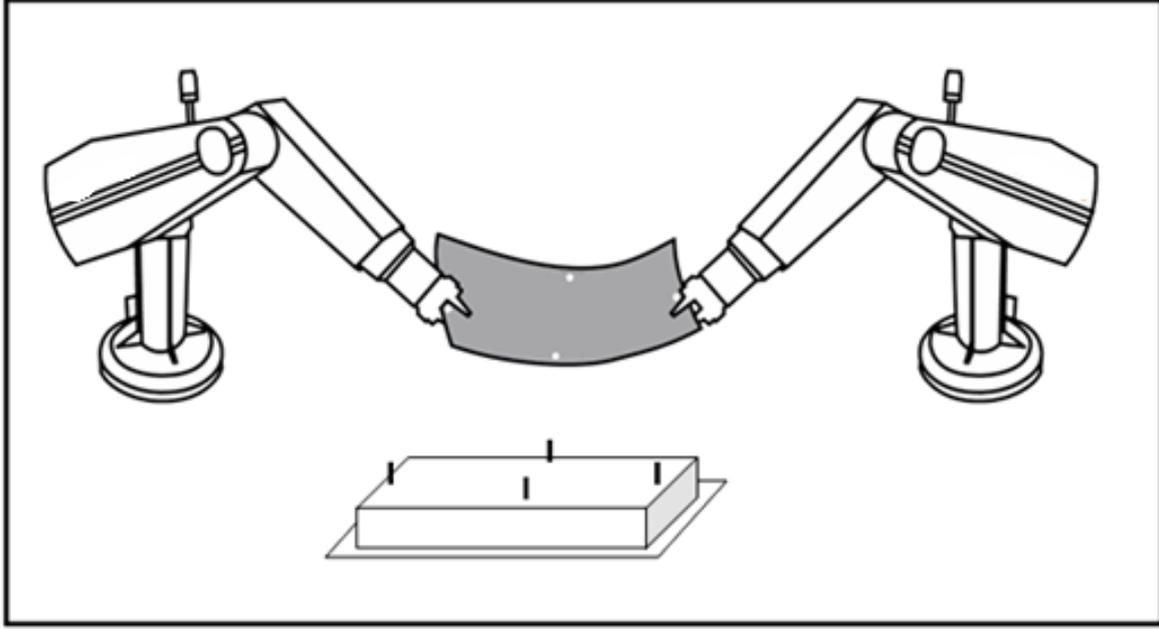


Figure 2.7. Manutention d'un seul objet par deux robots similaires

Les masses, ressorts et amortisseurs assurent l'interaction entre les robots et leur environnement (cas de l'amortisseur d_1), le robot et l'objet à déplacer (cas de l'amortisseur d et du ressort k) ou l'objet à déplacer et le deuxième robot (cas du ressort k_2). Le résultat est un comportement élastique virtuel donné à tout le système en mouvement et ceci grâce à une loi de commande dans le but d'éviter toute détérioration du robot ou de l'objet à manipuler. Ceci est équivalent à une commande en position et en force des systèmes robotiques contraints par impédance. On assume ici que le robot maître est actionné par une force variable notée $v = A_d \sin(\omega t)$ alors que le robot esclave est manipulé par une commande $u(t)$ à synthétiser. La Figure 2.8 représente les systèmes représentant l'analogie décrite précédemment.

En utilisant le formalisme de Newton Euler, le système maître est modélisé par :

$$\begin{cases} \ddot{y}_{1M} = \frac{1}{m_1} (-k(y_{1M} - y_{2M}) - d(\dot{y}_{1M} - \dot{y}_{2M}) - d_1 \dot{y}_{1M} + v) \\ \ddot{y}_{2M} = \frac{1}{m_2} (-k(y_{2M} - y_{1M}) - d(\dot{y}_{2M} - \dot{y}_{1M}) - k_2 g(y_{2M})) \end{cases} \quad (2.32)$$

alors que le système esclave est décrit par :

$$\begin{cases} \ddot{y}_{1S} = \frac{1}{m_1} (-k(y_{1S} - y_{2S}) - d(\dot{y}_{1S} - \dot{y}_{2S}) - d_1 \dot{y}_{1S} + u) \\ \ddot{y}_{2S} = \frac{1}{m_2} (-k(y_{2S} - y_{1S}) - d(\dot{y}_{2S} - \dot{y}_{1S}) - k_2 g(y_{2S})) \end{cases} \quad (2.33)$$

où $g(y_{2M})$ et $g(y_{2S})$ sont deux fonctions PWL décrites respectivement par :

$$\begin{cases} g(y_{2M}) = y_{2M} - a_2 & \text{si } y_{2M} \geq a_2 \\ g(y_{2M}) = 0 & \text{si } y_{2M} < a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(y_{2S}) = y_{2S} - a_2 & \text{si } y_{2S} \geq a_2 \\ g(y_{2S}) = 0 & \text{si } y_{2S} < a_2 \end{cases}$$

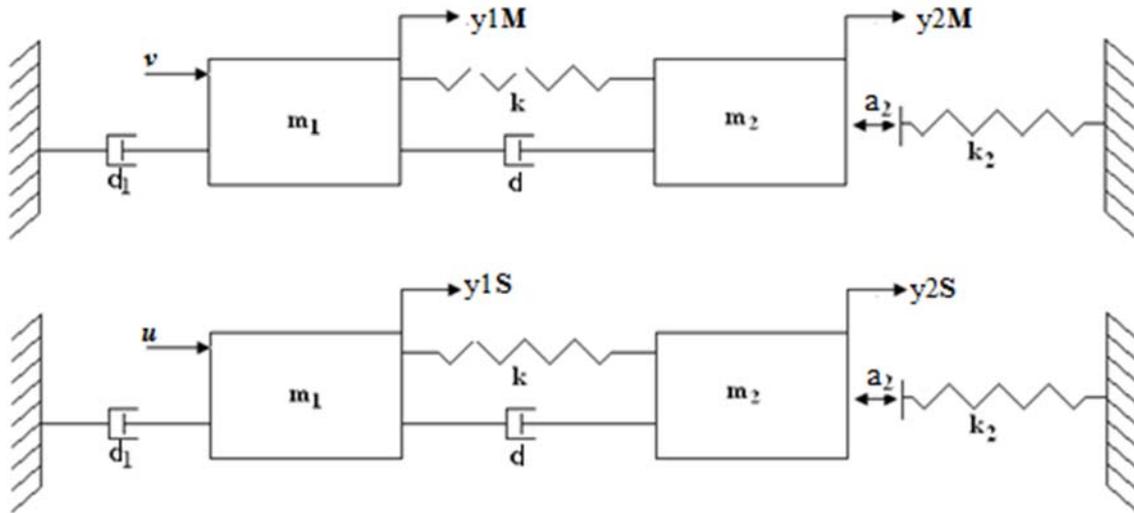


Figure 2.8. Analogie entre la coopération de deux robots et le système masse-ressort-amortisseur

Soient les vecteurs d'état du maître et de l'esclave donnés respectivement par :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [y_{1M} \ \dot{y}_{1M} \ y_{2M} \ \dot{y}_{2M}]^T$$

$$z = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T = [y_{1S} \ \dot{y}_{1S} \ y_{2S} \ \dot{y}_{2S}]^T$$

(x_1, x_2) et (z_1, z_2) sont respectivement les positions des masses m_1 et m_2 des systèmes maître et esclave et $x_3 = \dot{x}_1$, $x_4 = \dot{x}_2$, $z_3 = \dot{z}_1$ et $z_4 = \dot{z}_2$ sont les vitesses.

Les systèmes maître et esclave peuvent être écrits respectivement sous les formes PWL (2.1) et (2.3) pour le couple $i, j \in \{1, 2\}$ où [Van de Wouw *et al.*, 2006b]:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{d+d_1}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{d}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{d}{m_2} & -\frac{k+k_2}{m_2} & -\frac{d}{m_2} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{d+d_1}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{d}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{d}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & -\frac{d}{m_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2 a_1}{m_2} \end{bmatrix} \text{ et } b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les résultats de simulation sont obtenus pour les valeurs numériques suivantes : $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, $d = d_1 = 2$, $k = k_2 = 10$, $a_2 = 0.01$, $A_d = 1.5$ et $\omega = 1.5$ et pour les conditions initiales $x_0 = [1 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$ et $z_0 = [0.05 \ 0 \ 0.01 \ 1]^T$. Les cellules polyédriques : $\Lambda_1 = \{x | x_3 \geq a_2\}$ et $\Lambda_2 = \{x | x_3 < a_2\}$ satisfont la description polyédrique (2.2) et (2.4) où $H_1 = [0 \ 0 \ -1 \ 0]^T$, $H_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$, $h_1 = a_2$ et $h_2 = -a_2$.

La résolution des LMIs (2.12) et (2.13) en utilisant la boîte à outils LMI du logiciel MatLab pour le paramètre $\alpha_1 = 10^{-4}$, donne le vecteur gain (2.15) :

$$K = [-161.0298 \quad -36.4207 \quad 69.3025 \quad -25.6932] \quad (2.34)$$

La Figure 2.9 montre que les erreurs de synchronisation tendent vers zéro ce qui prouve l'efficacité de la théorie proposée et la Figure 2.10 montre la synchronisation des positions (x_1, z_1) et (x_2, z_2) et des vitesses (x_3, z_3) et (x_4, z_4) des masses m_1 et m_2 . La commutation entre les différentes cellules polyédriques est montrée par la Figure 2.11. D'autre part, la Figure 2.12 illustre la réalisabilité de la loi de commande.

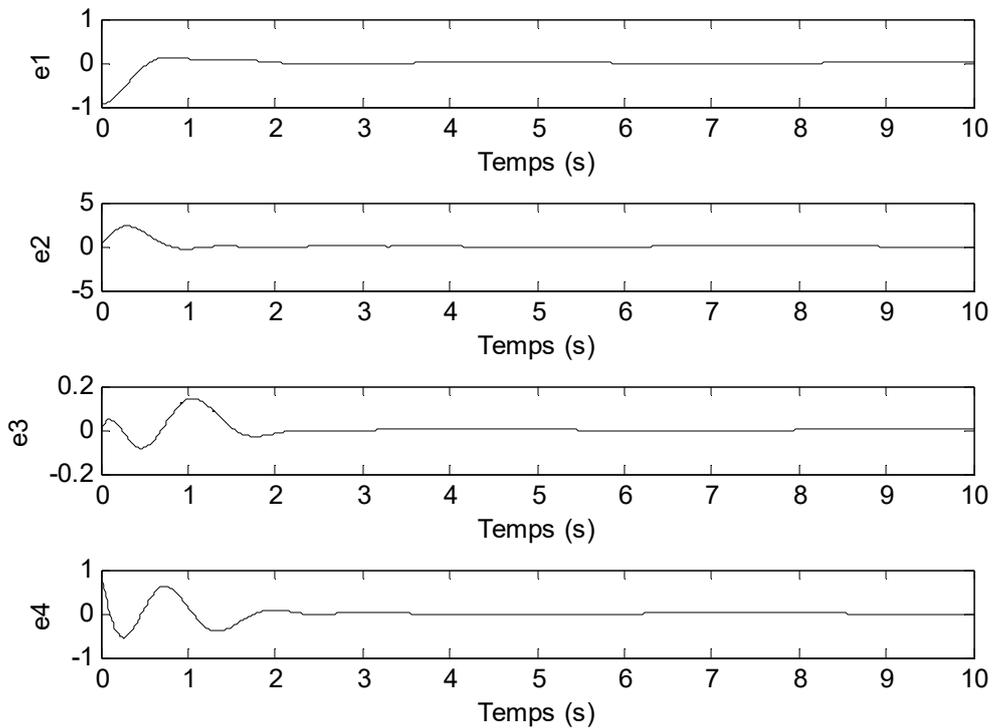


Figure 2.9. Coopération de deux robots : erreur de synchronisation en position et en vitesse

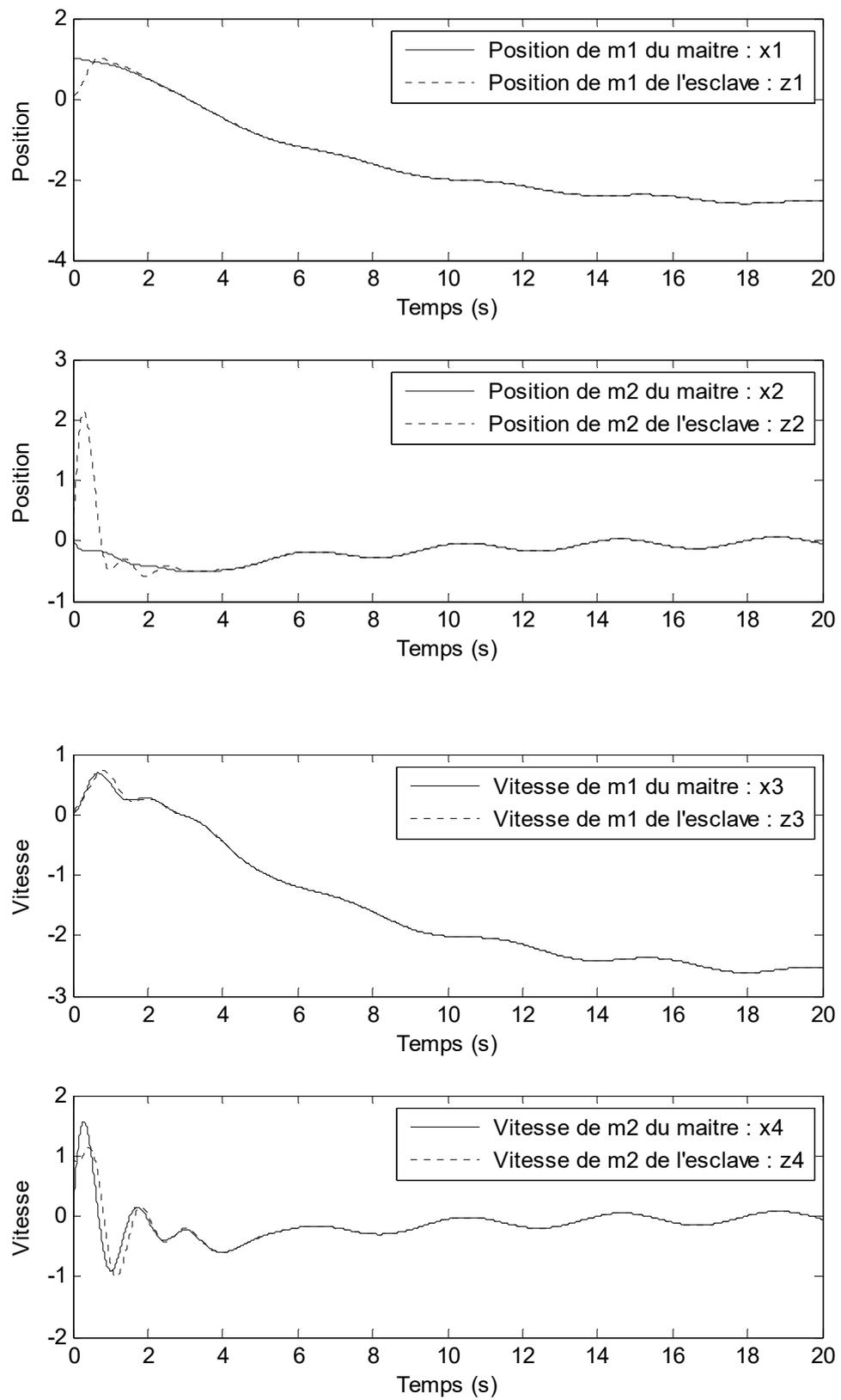
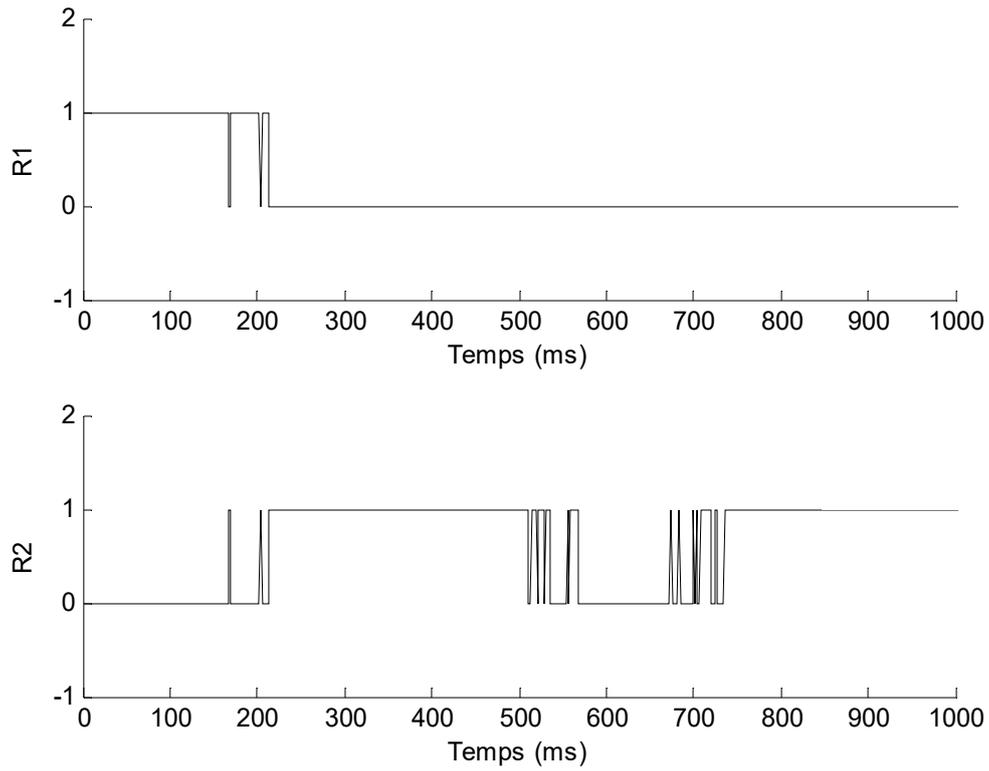
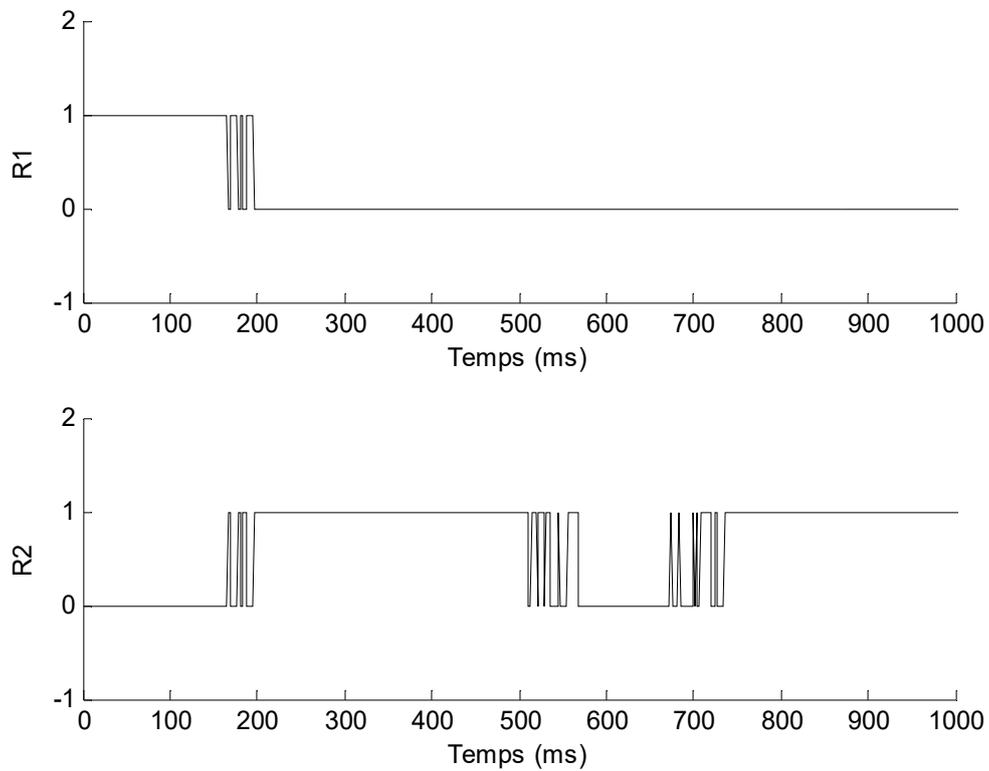


Figure 2.10. Coopération de deux robots : synchronisation en position et en vitesse



(a)



(b)

Figure 2.11. Coopération de deux robots : Commutation du système maître (a) et esclave (b) entre les différentes cellules polyédriques

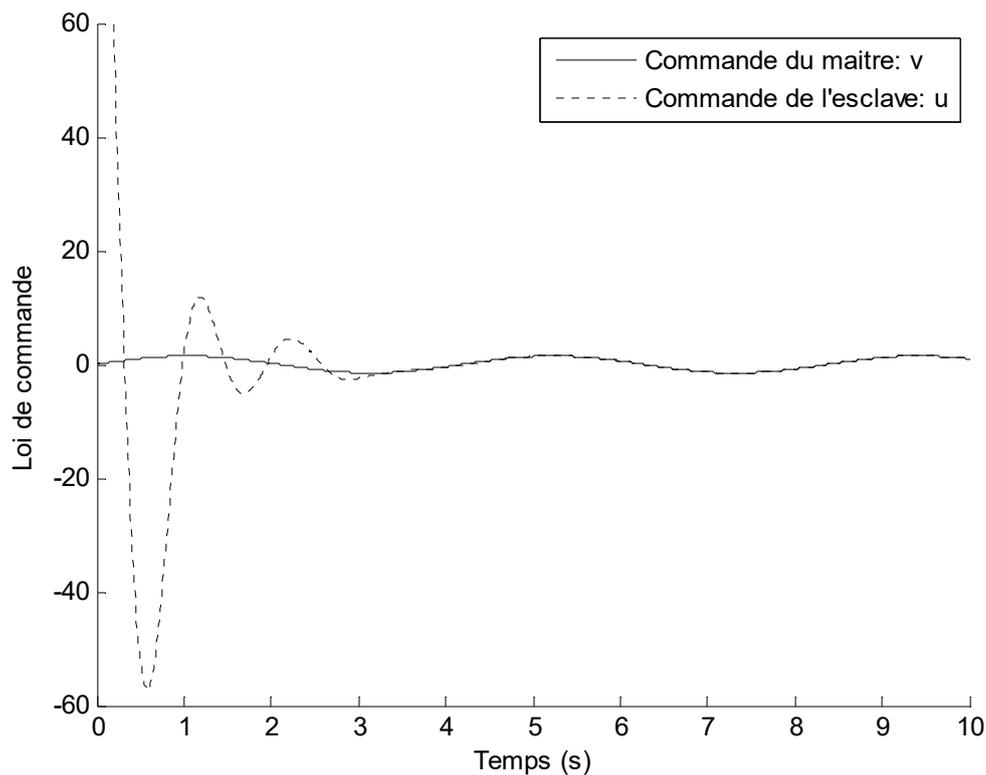


Figure 2.12. Coopération de deux robots : Lois de commande

2.5 Etude comparative

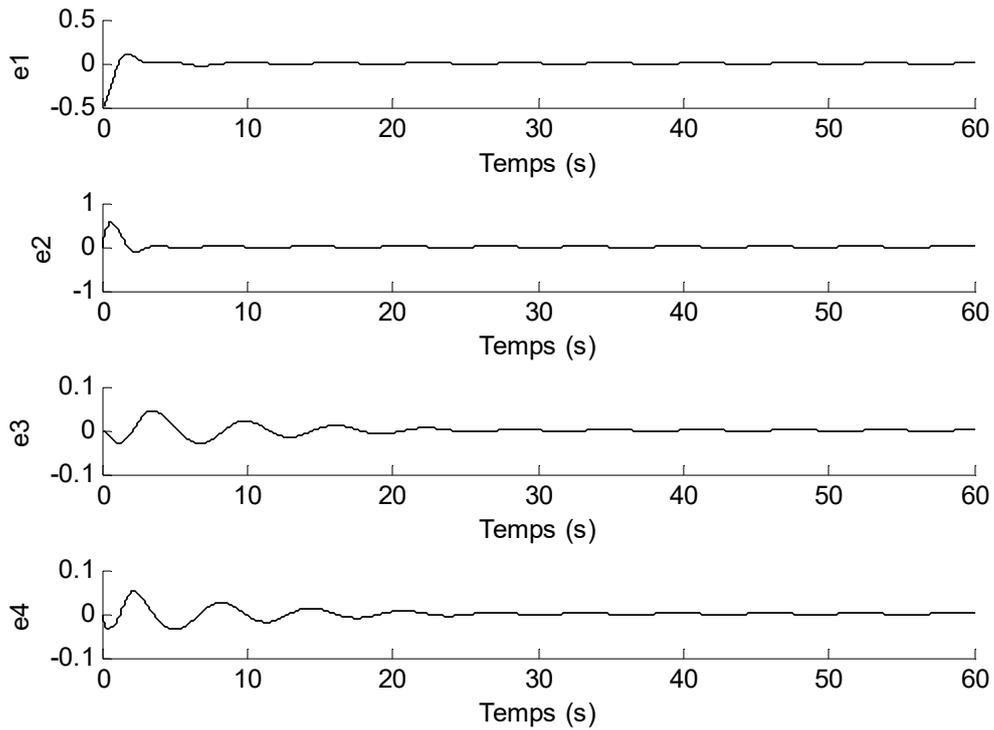
Dans ce paragraphe, une étude comparative sera dressée entre l'approche proposée dans ce chapitre et l'approche proposée par Van de Wouw *et al.* énoncée dans le théorème 1.4 du premier chapitre [Van De Wouw *et al.*, 2006b] en utilisant deux exemples déjà traités dans ce chapitre, l'exemple 2.1 du système mécanique masses – ressorts - amortisseurs et l'exemple 2.3 de la coopération des deux robots pour la manutention d'un objet.

2.5.1 Cas du système mécanique masses – ressorts - amortisseurs

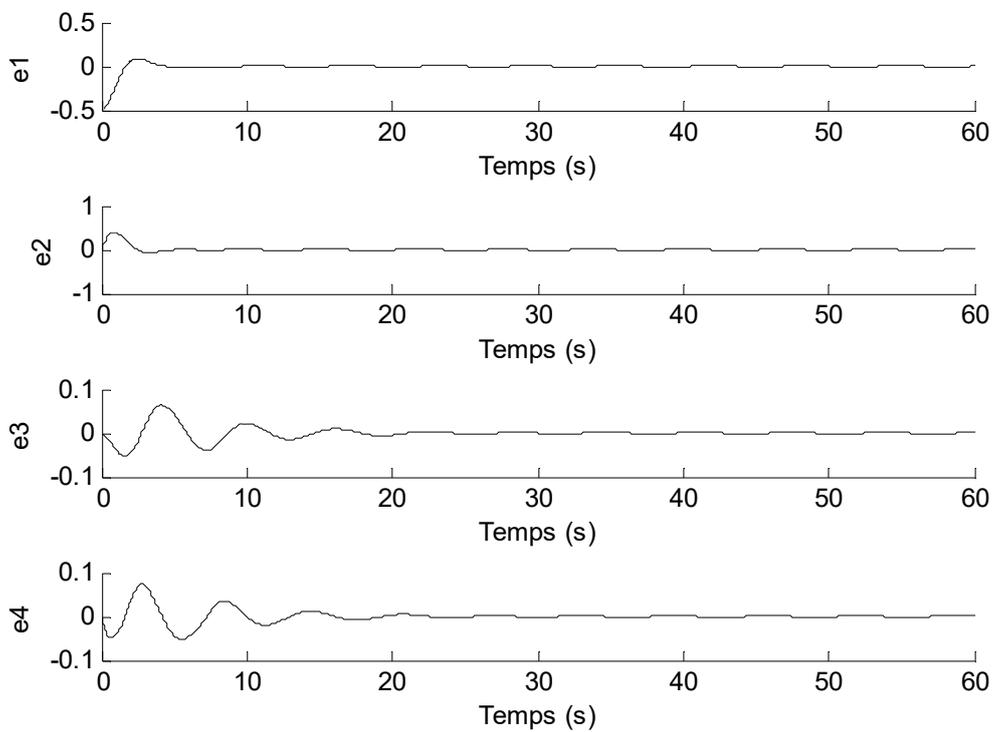
Nous allons considérer ici à nouveau l'exemple 2.1 du système mécanique masses – ressorts - amortisseurs. L'implémentation du théorème 1.4 [Van de Wouw *et al.*, 2006b] énoncé au premier chapitre nous permet d'obtenir le vecteur gain de retour d'état donné par :

$$K = [-1.6168 \quad -1.1158 \quad 0.2928 \quad -0.0680].$$

La comparaison de l'erreur de synchronisation entre les deux approches est illustrée par la Figure 2.13.



(a)



(b)

Figure 2.13. Système mécanique masses – ressorts - amortisseurs : Erreur de synchronisation en utilisant le théorème 2.1 (a) et le théorème 1.4 (b)

2.5.2 Cas de la coopération de deux robots

Considérons à présent l'exemple 2.2 de la coopération des deux robots.

Le problème de synchronisation maître-esclave est accompli en utilisant le théorème 1.4 [Van de Wouw *et al.*, 2006b] énoncé au premier chapitre. Le gain calculé est donné par $K = [-442.2604 \quad -101.6542 \quad -31.9541 \quad -80.6352]$.

Les erreurs de synchronisation obtenues en utilisant ces deux approches sont présentées par la Figure 2.14.

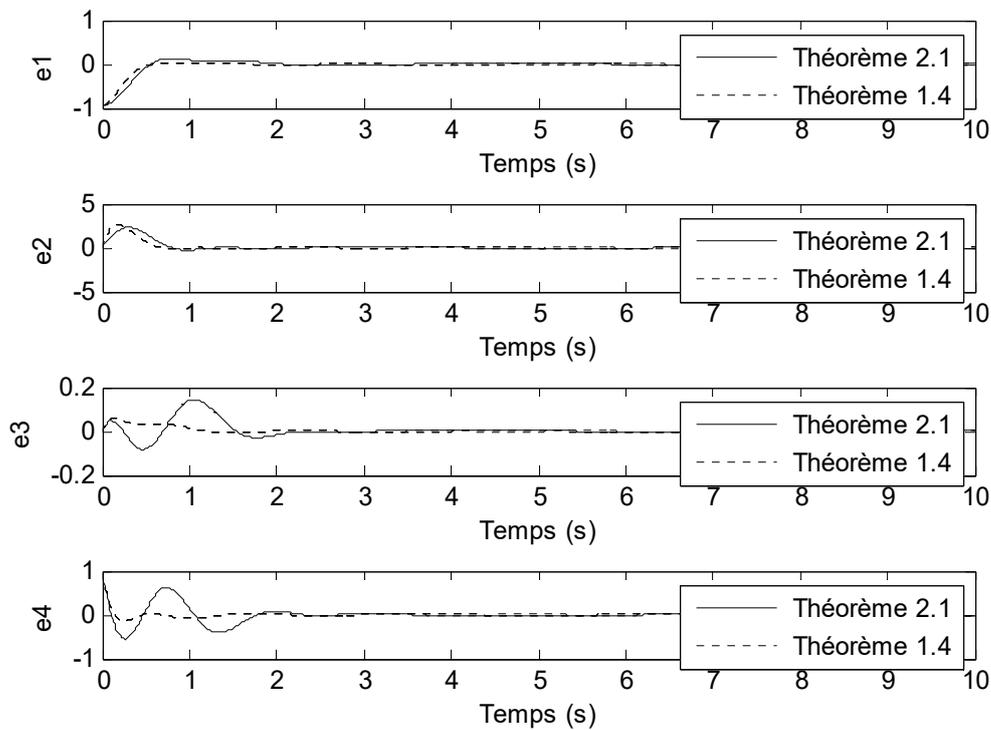


Figure 2.14. Coopération des deux robots : Erreur de synchronisation en utilisant le théorème 2.1 et le théorème 1.4

2.5.3 Analyse de l'étude comparative

Pour mieux évaluer les performances de chacun des deux algorithmes, nous utilisons le critère d'évaluation TV indicateur de la variation totale de la commande donné par :

$$TV = \sum_{k=1}^T |u(k+1) - u(k)| \quad (2.35)$$

ainsi que le critère IAE représentant l'intégral de la valeur absolue de l'erreur de synchronisation défini comme suit :

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt \quad (2.36)$$

avec T une valeur choisie quand l'erreur atteint le régime stationnaire et k l'indice de l'itération de la solution numérique.

Les valeurs calculées pour ces critères d'évaluation sont représentées dans les tableaux 2.1 et 2.2 pour la valeur de $T = 30s$.

Tableau 2.1. Valeur de la variation totale TV

	Approche Mkaouar et Boubaker [Mkaouar & Boubaker, 2011]	Approche Van de Wouw, Pavlov et Nijmeijer [Van de Wouw <i>et al.</i> , 2006b]
Système mécanique masses – ressorts - amortisseurs	$9.9305 \cdot 10^{-9}$	$5.6245 \cdot 10^{-13}$
Coopération de deux robots	$7.8747 \cdot 10^{-11}$	$4.5306 \cdot 10^{-17}$

Tableau 2.2. Valeur de l'intégrale de la valeur absolue de l'erreur

		Approche Mkaouar et Boubaker [Mkaouar & Boubaker, 2011]	Approche Van de Wouw, Pavlov et Nijmeijer [Van de Wouw <i>et al.</i> , 2006b]
Système mécanique masses – ressorts - amortisseurs	e_1	$7.4531 \cdot 10^{-5}$	$6.9589 \cdot 10^{-7}$
	e_2	$1.4607 \cdot 10^{-5}$	$3.5030 \cdot 10^{-6}$
	e_3	$8.9899 \cdot 10^{-5}$	$1.2293 \cdot 10^{-5}$
	e_4	$1.8159 \cdot 10^{-5}$	$3.7661 \cdot 10^{-6}$
Coopération de deux robots	e_1	$1.0471 \cdot 10^{-6}$	$5.4471 \cdot 10^{-10}$
	e_2	$2.3622 \cdot 10^{-6}$	$1.6747 \cdot 10^{-8}$
	e_3	$6.1816 \cdot 10^{-7}$	$1.5421 \cdot 10^{-10}$
	e_4	$2.4477 \cdot 10^{-6}$	$4.8507 \cdot 10^{-9}$

En plus, les performances des deux approches sont aussi évaluées par le temps de réponse et le pic atteint par les erreurs de synchronisation (voir tableau 2.3 et 2.4).

Tableau 2.3. Temps de réponse et pics de l'erreur de synchronisation de deux systèmes mécaniques masses – ressorts - amortisseurs

Erreur e	Approche Mkaouar et Boubaker [Mkaouar & Boubaker, 2011]		Approche Van de Wouw, Pavlov et Nijmeijer [Van de Wouw <i>et al.</i> , 2006b]	
	Temps de réponse (s)	Pic	Temps de réponse (s)	Pic
e_1	13.7279	$5.0000 \cdot 10^{-1}$	<i>11.3018</i>	$5.0000 \cdot 10^{-1}$
e_2	<i>14.6575</i>	$5.5807 \cdot 10^{-1}$	<i>12.7502</i>	$3.8647 \cdot 10^{-1}$
e_3	<i>38.7480</i>	$4.4808 \cdot 10^{-2}$	<i>26.5727</i>	$6.3728 \cdot 10^{-2}$
e_4	<i>36.9356</i>	$5.3275 \cdot 10^{-2}$	<i>27.5398</i>	$7.4985 \cdot 10^{-2}$

Tableau 2.4. . Temps de réponse et pics de l'erreur de synchronisation de deux robots

Erreur e	Approche Mkaouar et Boubaker [Mkaouar & Boubaker, 2011]		Approche Van de Wouw, Pavlov et Nijmeijer [Van de Wouw <i>et al.</i> , 2006b]	
	Temps de réponse (s)	Pic	Temps de réponse (s)	Pic
e_1	<i>2.5613</i>	$9.5000 \cdot 10^{-1}$	<i>0.5376</i>	$9.5000 \cdot 10^{-1}$
e_2	<i>2.7536</i>	2.3031	<i>0.6923</i>	2.6794
e_3	<i>3.9128</i>	$1.4525 \cdot 10^{-1}$	<i>1.8511</i>	$5.6664 \cdot 10^{-2}$
e_4	<i>3.1504</i>	$9.9000 \cdot 10^{-1}$	<i>1.6988</i>	$9.9000 \cdot 10^{-1}$

L'indice de performance TV , obtenu pour les deux approches, montre que les lois de commande des deux approches sont extrêmement lisses, alors que les indices de performance IAE montrent que les performances des deux approches en terme de stabilisation sont équivalentes avec une toute légère supériorité à l'approche de Van de Wouw, Pavlov et Nijmeijer.

En observant les deux tableaux 2.3 et 2.4, on peut aussi conclure que les deux approches sont tout à fait comparables au niveau performances.

Bien que les deux approches se montrent comparables au niveau des performances numériques, nous pensons que notre approche donne des conditions de stabilité plus serrées puisqu'elle exige une stabilité asymptotique globale de la dynamique de l'erreur de synchronisation au sens de Lyapunov alors que l'approche de Van de Wouw, Pavlov et Nijmeijer repose sur le principe de la convergence de la dynamique du système esclave vers celle du maître.

2.6 Conclusion

Nous avons prouvé dans ce chapitre, malgré les complexités introduites par la dynamique de commutation des systèmes PWL de type continu, que le problème de synchronisation maître-esclave peut être résolu en le transformant en un problème de stabilisation de l'erreur. La stabilité asymptotique globale de la dynamique d'erreur est réalisée en utilisant une approche de Lyapunov et le lemme de la S-procédure. Des nouvelles conditions suffisantes de stabilité asymptotique sont formulées via des LMIs. L'efficacité de l'approche proposée a été prouvée par les résultats de simulation à l'aide de trois exemples physiques : un système mécanique masses – ressorts – amortisseurs et une coopération de deux robots pour la manutention d'un objet. Pour chaque exemple, l'erreur de synchronisation ainsi que la loi de commande résultante de l'approche proposée sont illustrées. Les commutations des systèmes maître et esclave entre les différentes cellules polyédriques définissant l'espace d'état sont aussi représentées. Une étude comparative avec une approche annexe a montré que les deux approches se montrent comparables au niveau des performances numériques.

3

Contribution à la Synchronisation Chaotique

3.1	Introduction	61
3.2	Position du problème.....	61
3.3	Synchronisation chaotique	62
3.4	Application.....	67
3.4.1	Exemple 3.1 : Circuit de Chua	67
3.4.2	Exemple 3.2 : Système de Chua non dimensionnel	71
3.4.3	Exemple 3.3 : Système de Lur'e	75
3.4.4	Exemple 3.4 : Attracteur à 5-Spirales	79
3.5	Etude comparative.....	84
3.5.1	Approche 1	84
3.5.2	Approche 2	86
3.5.3	Analyse de l'étude comparative (Jiang, et al., 2005)	88
3.6	Conclusion.....	91

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, le problème de la synchronisation des systèmes PWL chaotiques de type continu sera résolu. Il sera formulé comme étant un problème de stabilité globale de l'erreur de synchronisation en utilisant une approche de Lyapunov et résolu à l'aide des outils LMI. Pour montrer l'efficacité des solutions proposées, quatre exemples seront utilisés : l'oscillateur de Chua qui présente le générateur du Chaos le plus réputé, le système de Chua non dimensionnel, le système de Lur'e et enfin l'attracteur à 5-Spirales. Pour se situer dans l'existant, une étude comparative avec d'autres approches de synchronisation chaotiques basées sur des outils LMIs sera établie.

Ce chapitre est structuré comme suit : Le problème de synchronisation est décrit dans la section 2. Les conditions suffisantes pour la synchronisation chaotique sont proposées dans la section 3. Dans la section 4, l'efficacité de l'approche proposée est illustrée par les résultats de simulation sur les quatre exemples de systèmes chaotiques cités précédemment. Finalement une étude comparative est dressée entre l'approche proposée dans ce chapitre et deux autres approches qui étaient exposés au premier chapitre.

3.2 Position du problème

Considérons la classe des systèmes maître-esclave PWL chaotiques de type continu décrite par :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_j x + b_j, & x \in \Lambda_j, j \in \{1, \dots, N\} \\ \dot{z} = A_i z + b_i + Bu, & z \in \Lambda_i, i \in \{1, \dots, N\} \\ u = K(z - x) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ et $z \in \mathcal{R}^n$ sont respectivement les vecteurs d'état des systèmes maître et esclave. $A_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $A_j \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $b_i \in \mathcal{R}^n$ et $b_j \in \mathcal{R}^n$ sont respectivement deux matrices et deux vecteurs constants. $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ et $u \in \mathcal{R}^m$ sont respectivement la matrice de commande et le vecteur de commande. $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$ est la matrice de gain pour la commande par retour d'état. Le système maître est un système autonome et chaotique.

Λ_j et Λ_i représentent les partitions de l'espace d'état en cellules polyédriques définies respectivement par les descriptions polytopiques suivantes :

$$A_j = \{x \mid H_j^T x + h_j \leq 0\} \quad (3.2)$$

$$A_i = \{z \mid H_i^T z + h_i \leq 0\} \quad (3.3)$$

où $H_j \in \mathcal{R}^{n \times r_j}$, $h_j \in \mathcal{R}^{r_j}$, $H_i \in \mathcal{R}^{n \times r_i}$ et $h_i \in \mathcal{R}^{r_i}$.

L'objectif du problème de synchronisation chaotique est de concevoir une loi de commande par retour d'état u et choisir une matrice de commande B telle que le couple (A_i, B) soit contrôlable, l'erreur de synchronisation $e = z - x \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ et la loi de commande u soit réalisable.

3.3 Synchronisation chaotique

A partir du système maître-esclave (3.1), la dynamique de l'erreur de synchronisation peut être écrite comme suit :

$$\dot{e} = (A_i + BK)e + A_{ij}x + b_{ij} \quad (3.4)$$

où

$$e = z - x, A_{ij} = A_i - A_j \text{ et } b_{ij} = b_i - b_j$$

Remarque 3.1. Le système bouclé (3.4) est de type PWL vue que le système maître et le système esclave décrits dans (3.1) sont aussi de type PWL.

Définition 3.1. Le système maître-esclave (3.1) est dit globalement asymptotiquement synchronisé si l'erreur de synchronisation (3.4) est globalement asymptotiquement stable.

Théorème 3.1. [Mkaouar & boubaker, 2012a]

Pour tout scalaire donné $\alpha_1 > 0$ et pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$, s'il existe une matrice $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ telle que (A_i, B) est contrôlable, une matrice constante symétrique définie positive $S \in \mathcal{R}^{n \times n}$, une matrice constante $R \in \mathcal{R}^{m \times n}$, des matrices diagonales définies négatives $E_{ij} \in \mathcal{R}^{r_i \times r_i}$ et $F_{ij} \in \mathcal{R}^{r_j \times r_j}$ et des constantes strictement négatives β_{ij} et ξ_{ij} , telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} \xi_{ij} & \xi_{ij}|h_i|^T & \xi_{ij}|h_j|^T \\ * & \frac{1}{2}E_{ij} & 0 \\ * & * & \frac{1}{2}F_{ij} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_i & A_{ij} & SH_i & 0 & \xi_{ij}b_{ij}|h_i|^T - \frac{1}{2}SH_iM_i & \xi_{ij}b_{ij}|h_j|^T \\ * & \beta_{ij}I & H_i & H_j & -\frac{1}{2}H_iM_i & -\frac{1}{2}H_jM_j \\ * & * & 2E_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 2F_{ij} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \frac{1}{2}E_{ij} - \xi_{ij}|h_i||h_i|^T & -\xi_{ij}|h_i||h_j|^T \\ * & * & * & * & * & \frac{1}{2}F_{ij} - \xi_{ij}|h_j||h_j|^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.6)$$

$$\Delta_i = A_i S + S A_i^T + B R + R^T B^T + \alpha_1 S - \xi_{ij} b_{ij} b_{ij}^T$$

alors, le système maître-esclave (3.1) est dit globalement asymptotiquement stable et la loi de commande du système esclave est donnée par :

$$u = K e \quad (3.7)$$

où :

$$K = R S^{-1} \quad (3.8)$$

Démonstration :

Soit la fonction de Lyapunov unique $V(e) = e^T P e$ pour le système d'erreur de synchronisation (3.1) où $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive. Pour $e \neq 0$ et une constante $\alpha_1 > 0$, l'erreur de synchronisation (3.4) est globalement asymptotiquement stable si [Slotine & Li, 1991]:

$$\dot{V}(e) \leq -\alpha_1 V(e) \quad (3.9)$$

En utilisant le système (3.4), il est évident qu'on cherche les conditions qui assurent que $\forall e \neq 0$ on aura :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) + \alpha_1 V(e) &= e^T ((A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P) e \\ &\quad + x^T A_{ij}^T P e + e^T P A_{ij} x + b_{ij}^T P e + e^T P b_{ij} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

En appliquant le lemme 1.2 de la S-procédure, énoncé au premier chapitre, on peut confirmer que les deux relations (3.10) et (3.11) suivante sont toujours équivalentes $\forall e \neq 0$ s'il existe deux constantes α_2 et α_3 négatives vérifiant (3.11) [voir démonstration en Annexe 5] :

$$\dot{V}(e) + \alpha_1 V(e) - \alpha_2 x^T x - \alpha_3 \leq 0 \quad (3.11)$$

En substituant (3.11) dans (3.10) nous pouvons écrire que :

$$W^T F_0 W \leq 0 \quad (3.12)$$

avec :

$$W = [e^T \quad x^T \quad 1]^T$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} (A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P & * & * \\ & A_{ij}^T P & -\alpha_2 I \\ & b_{ij}^T P & 0 \quad -\alpha_3 \end{bmatrix}$$

Dans F_0 , $*$ sont les blocs symétriques et $I \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est la matrice identité.

En utilisant les expressions des cellules polytopiques (3.2) et (3.3) et pour toutes constantes positives suffisamment petites satisfaisant $0 < \xi_j \ll 1$ et $0 < \sigma_j \ll 1$, il existe des vecteurs colonnes avec des éléments positifs $\delta_i \in \mathcal{R}^{r_i \times l}$ et $\gamma_j \in \mathcal{R}^{r_j \times l}$ permettant d'écrire dans les cellules ouvertes pour tout couple d'indice $i, j \in \{1, \dots, N\}$:

$$W^T F_1 W \leq 0 \quad (3.13)$$

$$W^T F_2 W \leq 0 \quad (3.14)$$

où :

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ \delta_i^T H_i^T & \delta_i^T H_i^T & 2\delta_i^T h_i \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 2\xi_j I & * \\ 0 & \gamma_j^T H_j^T & 2\sigma_j + 2\gamma_j^T h_j \end{bmatrix}$$

S'il existe deux constantes $\tau_{1,ij} \geq 0$ et $\tau_{2,ij} \geq 0$, en utilisant le lemme 1.2 de la S-procédure énoncé dans le premier chapitre ainsi que les inégalités (3.12), (3.13) et (3.14), nous pouvons écrire que :

$$F_0 - \tau_{1,ij} F_1 - \tau_{2,ij} F_2 \leq 0 \quad (3.15)$$

Soient :

$$\begin{cases} \beta_{1,ij} = -\tau_{1,ij}\delta_i \in \mathcal{R}^{r_i \times 1} \\ \beta_{2,ij} = -\tau_{2,ij}\gamma_j \in \mathcal{R}^{r_j \times 1} \\ \beta_{3,ij} = -\alpha_2 - 2\tau_{2,ij}\xi_j \in \mathcal{R} \\ \beta_{4,ij} = -\alpha_3 - 2\tau_{2,ij}\sigma_j \in \mathcal{R} \end{cases}$$

telles que :

$$\beta_{1,ij}(k)_{k=1,\dots,r_i} \leq 0, \beta_{2,ij}(k)_{k=1,\dots,r_j} \leq 0, \beta_{3,ij} \leq 0 \text{ et } \beta_{4,ij} \leq 0$$

L'expression (3.15) peut être écrite sous la forme de la BMI :

$$\begin{bmatrix} \Delta_{2i} & * & * \\ A_{ij}^T P & \beta_{3,ij} I & * \\ b_{ij}^T P + \beta_{1,ij}^T H_i^T & \beta_{1,ij}^T H_i^T + \beta_{2,ij}^T H_j^T & 2\beta_{1,ij}^T h_i + 2\beta_{2,ij}^T h_j + \beta_{4,ij} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.16)$$

où :

$$\Delta_{2i} = (A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P$$

Soient :

$$\begin{cases} \beta_{1,ij} = E_{ij}^{-1} |h_i| \\ \beta_{2,ij} = F_{ij}^{-1} |h_j| \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} h_i = M_i |h_i| \\ h_j = M_j |h_j| \end{cases}$$

où $|h_i| \in \mathcal{R}^{r_i}$ et $|h_j| \in \mathcal{R}^{r_j}$ sont deux vecteurs colonnes.

$E_{ij} \in \mathcal{R}^{r_i \times r_i}$ et $F_{ij} \in \mathcal{R}^{r_j \times r_j}$ sont deux matrices diagonales définies négatives et $M_i \in \mathcal{R}^{r_i \times r_i}$ et $M_j \in \mathcal{R}^{r_j \times r_j}$ sont deux matrices diagonales définies comme suit :

si $h_q(k)_{k=1,\dots,r_q} \geq 0$ alors $M_q(k, k) = 1, q = i, j$.

si $h_q(k)_{k=1,\dots,r_q} < 0$ alors $M_q(k, k) = -1, q = i, j$.

Dans ce qui suit, nous essayerons de transformer la BMI (3.16) en LMI à savoir les LMIs (3.5) et (3.6).

En utilisant le lemme 1.3 du complément de Schur énoncé au premier chapitre, la BMI (3.16) est vraie si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\beta_{4,ij} + 2|h_i|^T M_i E_{ij}^{-1} |h_i| + 2|h_j|^T M_j F_{ij}^{-1} |h_j| < 0 \quad (3.17)$$

$$X_1 - X_2 \Omega^{-1} X_2^T \leq 0 \quad (3.18)$$

où :

$$X_1 = \begin{bmatrix} \Delta_{2i} & * \\ A_{ij}^T P & \beta_{3ij} I \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} P b_{ij} + H_i E_{ij}^{-1} |h_i| \\ H_i E_{ij}^{-1} |h_i| + H_j F_{ij}^{-1} |h_j| \end{bmatrix}$$

Soient :

$$\Omega = \beta_{4,ij} + 2|h_i|^T M_i E_{ij}^{-1} |h_i| + 2|h_j|^T M_j F_{ij}^{-1} |h_j|$$

$$\beta_{4,ij} = \xi_{ij}^{-1}, \beta_{3,ij} = \beta_{ij} \text{ et } \Psi = [|h_i| \quad |h_j|]^T$$

Nous obtenons à partir de (3.18):

$$\Omega = \xi_{ij}^{-1} + \Psi^T \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} \right)^{-1} \Psi < 0 \quad (3.19)$$

En multipliant (3.19) par ξ_{ij}^2 , en admettant que $E_{ij} \leq M_i E_{ij} \leq -E_{ij}$ et $F_{ij} \leq M_j F_{ij} \leq -F_{ij}$ et en appliquant le complément de Schur, la LMI (3.5) est obtenue.

Utilisons maintenant le lemme 1.4 énoncé au premier chapitre (lemme de l'inversion matricielle) sur (3.19), nous obtenons ainsi :

$$\Omega^{-1} = \xi_{ij} - \xi_{ij}^2 \Psi^T \left(\xi_{ij} \Psi \Psi^T + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} \right)^{-1} \Psi \quad (3.20)$$

Soit $S = P^{-1}$, la multiplication de (3.18) à droite et à gauche par $\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ donne :

$$X_3 - X_4 \Omega^{-1} X_4^T \leq 0 \quad (3.21)$$

où :

$$X_3 = \begin{bmatrix} (A_i S + BR) + (A_i S + BR)^T + \alpha_1 S & * \\ A_{ij}^T & \beta_{ij} I \end{bmatrix} \text{ et } X_4 = \begin{bmatrix} b_{ij} + SH_i E_{ij}^{-1} |h_i| \\ H_i E_{ij}^{-1} |h_i| + H_j F_{ij}^{-1} |h_j| \end{bmatrix}$$

En substituant (3.20) dans (3.21), en admettant que $E_{ij} \leq M_i E_{ij} \leq -E_{ij}$ et $F_{ij} \leq M_j F_{ij} \leq -F_{ij}$ et en utilisant le complément de Schur, la LMI (3.6) est obtenue via quelques transformations [voir Annexe 6].

3.4 Application

Dans cette section, nous allons considérer les systèmes chaotiques suivants afin de démontrer l'efficacité de l'approche proposée : le circuit de Chua, le système de Chua non dimensionnel, le système de Lur'e et l'attracteur à 5-spirales.

3.4.1 Exemple 3.1 : Circuit de Chua

Nous nous proposons ici d'appliquer le théorème 3.1 à la synchronisation de deux circuits de Chua objets de l'exemple 1.2 présenté au premier chapitre dans la section §1.2.3 [Mkaouar & Boubaker, 2012c].

Les résultats de simulation sont obtenus pour les conditions initiales $x_0 = [0.5 \ 0.5 \ 0]^T$ et $z_0 = [-0.5 \ -0.5 \ 0]^T$ et pour les paramètres : $C_1 = 5.75 \cdot 10^{-9} F$, $C_2 = 21.32 \cdot 10^{-9} F$, $L = 12 \cdot 10^{-3} H$, $R_0 = 30.86 \Omega$, $R = 1.45 k\Omega$, $G_a = -0.879 \cdot 10^{-3} S$, $G_b = -0.4124 \cdot 10^{-3} S$, $E = 1V$ et $d = 5V$.

Pour les trois domaines de fonctionnement présentés au premier chapitre, les différentes matrices du système écrit sous la forme (3.1) obtenues à partir des paramètres ci-dessus sont données par :

$$A_1 = 10^7 \begin{bmatrix} -0.0048 & 0.0120 & 0 \\ 0.0032 & -0.0032 & 4.6904 \\ 0 & 0 & -0.0003 \end{bmatrix}; b_1 = 10^4 \begin{bmatrix} 8.1148 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = 10^7 \begin{bmatrix} 0.0033 & 0.0120 & 0 \\ 0.0032 & -0.0032 & 4.6904 \\ 0 & 0 & -0.0003 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = 10^7 \begin{bmatrix} -0.0048 & 0.0120 & 0 \\ 0.0032 & -0.0032 & 4.6904 \\ 0 & 0 & -0.0003 \end{bmatrix}; b_3 = 10^4 \begin{bmatrix} -8.1148 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La Figure 3.1 représente le comportement chaotique de l'oscillateur de Chua dans le domaine temporel et dans le plan de phase. Les LMIs (3.5) et (3.6) ont été résolus en utilisant une matrice

de commande $B = [5 \ 10^5 \ 0 \ 0]^T$ et un paramètre $\alpha_1 = 10^{-4}$. Au bout de 41 itérations, nous obtenons les matrices solutions suivantes :

$$R = [-5.0016 \ 10^2 \quad -4.6571 \ 10^3 \quad -3.0144]$$

$$S = 10^4 \begin{bmatrix} 2.8020 \ 10^3 & -2.4952 \ 10^1 & -7.6824 \ 10^{-1} \\ * & 1.8952 \ 10^4 & 1.2442 \ 10^1 \\ * & * & 4.5051 \ 10^{-2} \end{bmatrix}$$

et la matrice de gain (3.8) est alors déduite tel que :

$$K = [-0.1813 \quad -0.2443 \quad -2.5323].$$

Les simulations montrent bien l'efficacité de la solution proposée. La Figure 3.2 présente la parfaite synchronisation entre les variables d'état des systèmes maître et esclave. La Figure 3.3 illustre la dynamique des erreurs de synchronisation qui s'annule après un temps assez court. La Figure 3.4 représente la loi de commande ayant un profil parfaitement lisse et réalisable. Finalement, les commutations des systèmes maître et esclave entre les différentes cellules polytopiques sont données respectivement par la Figure 3.5 et la Figure 3.6.

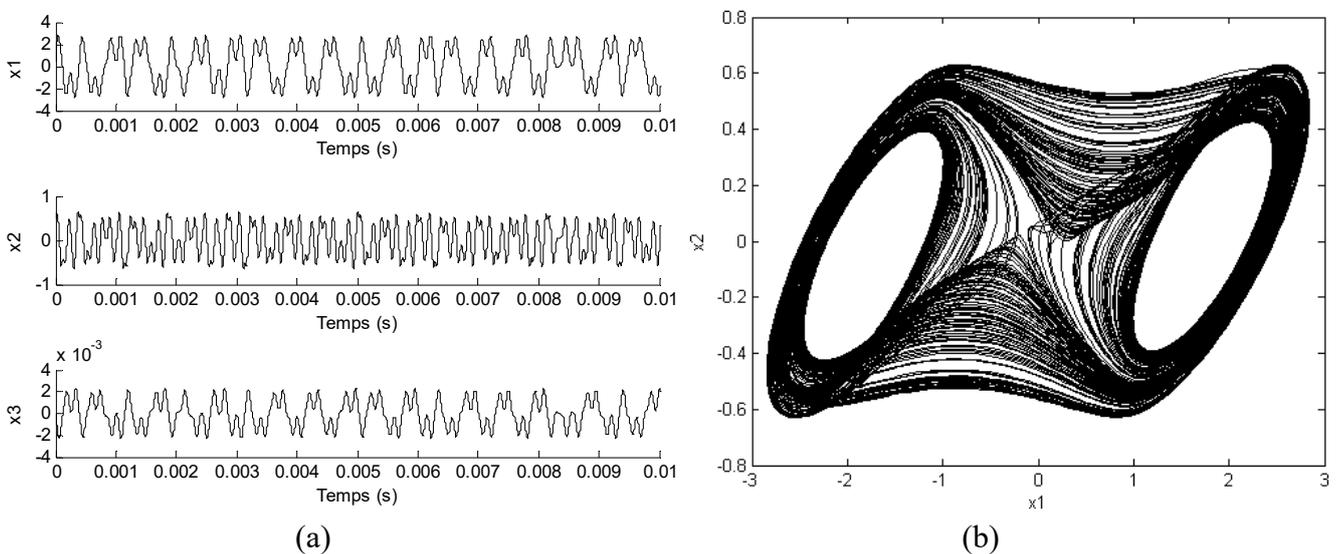


Figure 3.1. Comportement chaotique de l'oscillateur de Chua : (a) Evolution des états
(b) Comportement dans le plan de phase

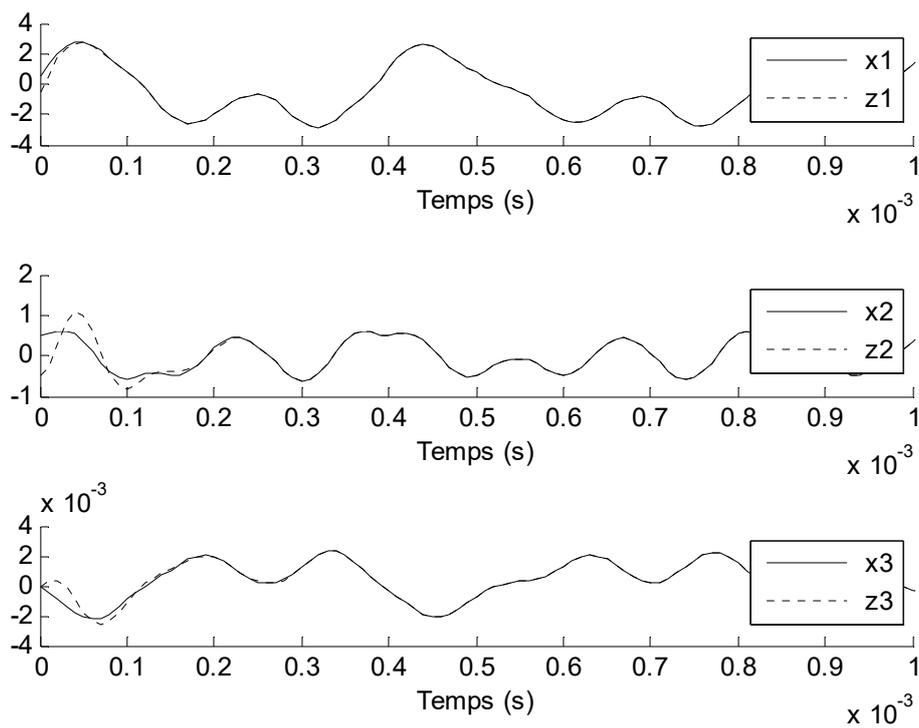


Figure 3.2. Circuit de Chua : Synchronisation des variables d'état

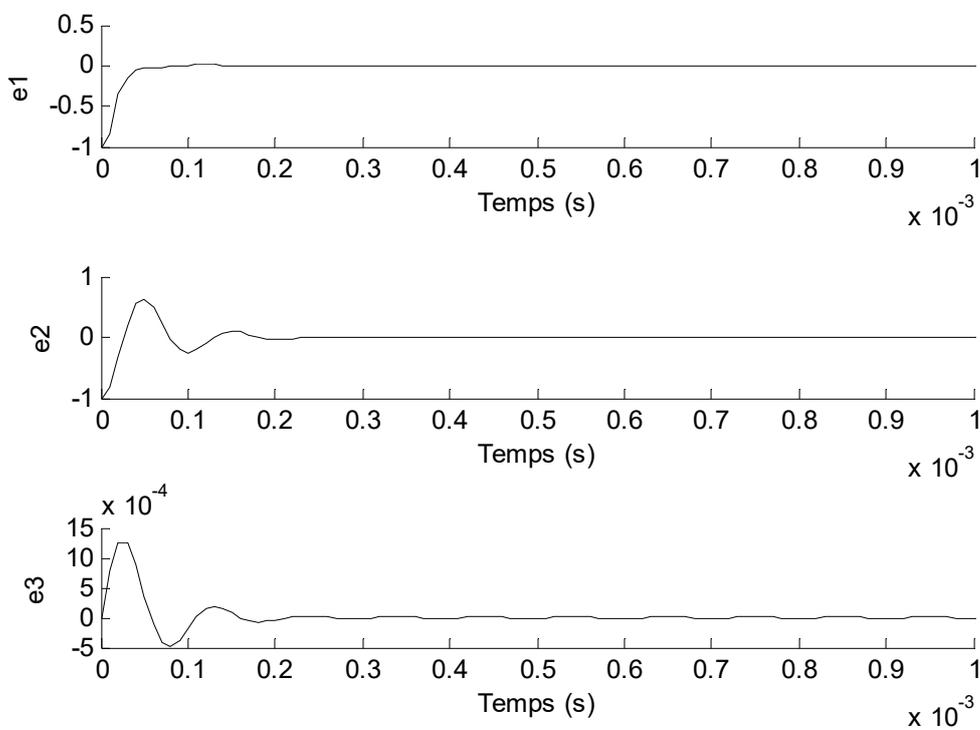


Figure 3.3. Circuit de Chua : Dynamique de l'erreur de synchronisation

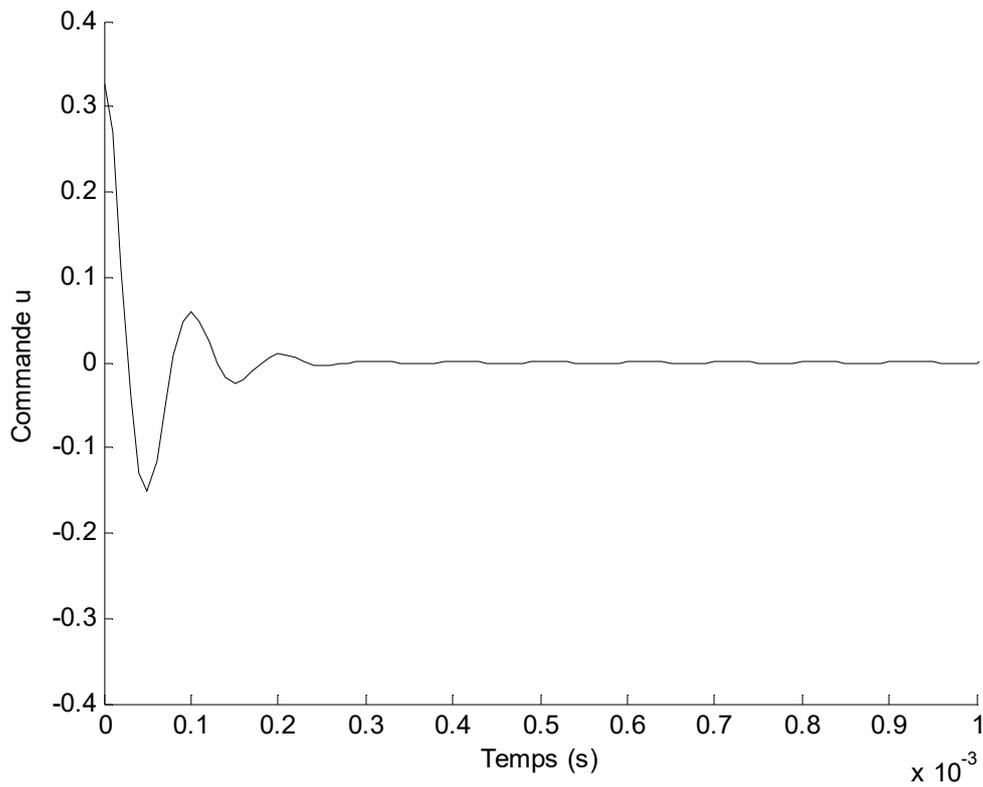


Figure 3.4. Circuit de Chua : Loi de commande appliquée au système esclave

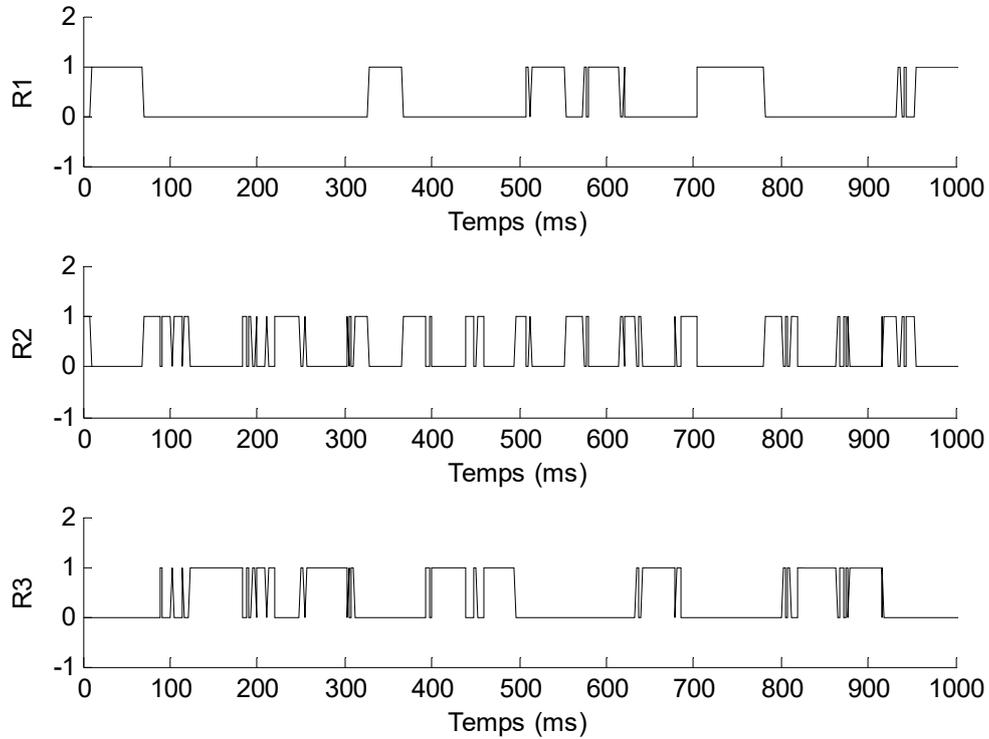


Figure 3.5. Circuit de Chua : Commutation des variables d'état du système maître entre les différentes cellules polytopiques

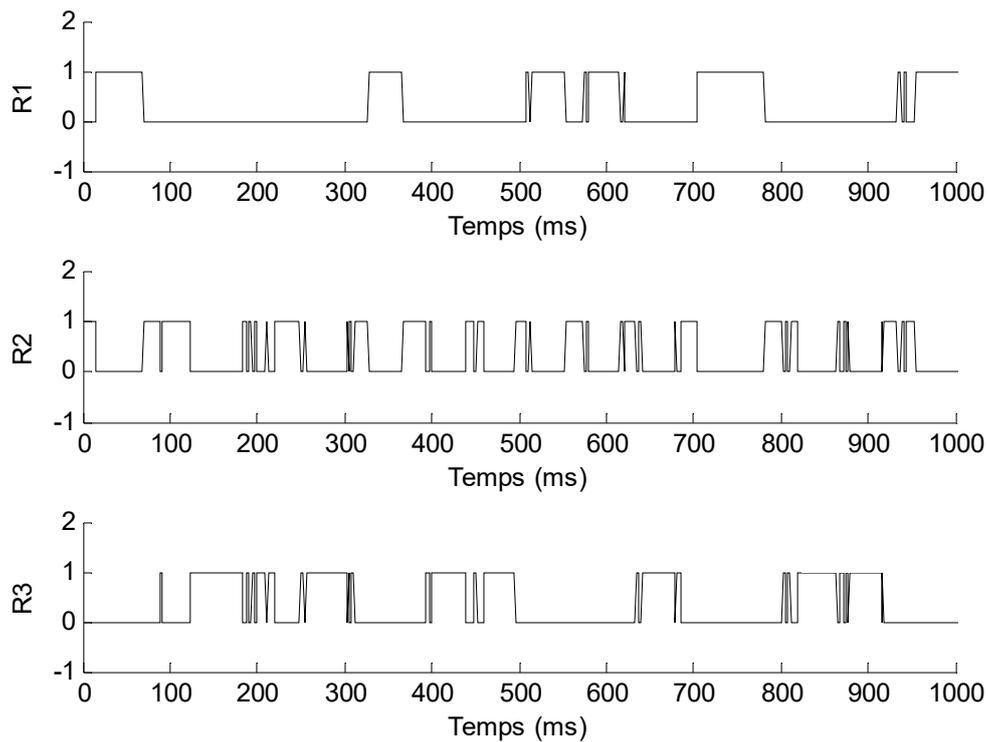


Figure 3.6. Circuit de Chua : Commutation des variables d'état du système esclave entre les différentes cellules polytopiques

3.4.2 Exemple 3.2 : Système de Chua non dimensionnel

Nous reprenons l'exemple 1.3 décrit dans la section §1.4.2 sans considération des incertitudes et on considère les valeurs numériques suivante [Yalcin *et al.*, 2000] [Suykens *et al.*, 2001] : $\alpha = 9$, $\beta = \frac{100}{7}$, $G_a = -\frac{1}{7}$, $G_b = \frac{2}{7}$, $E = 1$, $d = 5$ et la condition initiale $x_0 = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$. L'attracteur à double spirales est présenté par la Figure 3.7.

Les LMIs (3.5)-(3.6) sont résolues en utilisant la boîte à outils LMI de MatLab pour un vecteur de commande $B = [5 \ 10^5 \ 0 \ 0]^T$ et un paramètre de réglage $\alpha_1 = 10^{-4}$. Au bout de 5 itérations et pour les conditions initiales $x_0 = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ et $z_0 = [-1 \ -1 \ -1]^T$, les LMIs se trouvent réalisables. La matrice de gain de retour d'état (3.8) est calculée telle que $K = 10^{-3}[-0.6048 \ -2.2343 \ -0.041]$. Les résultats de simulation données par les Figures 3.8- 3.10 prouvent que la synchronisation chaotique est validée avec succès.

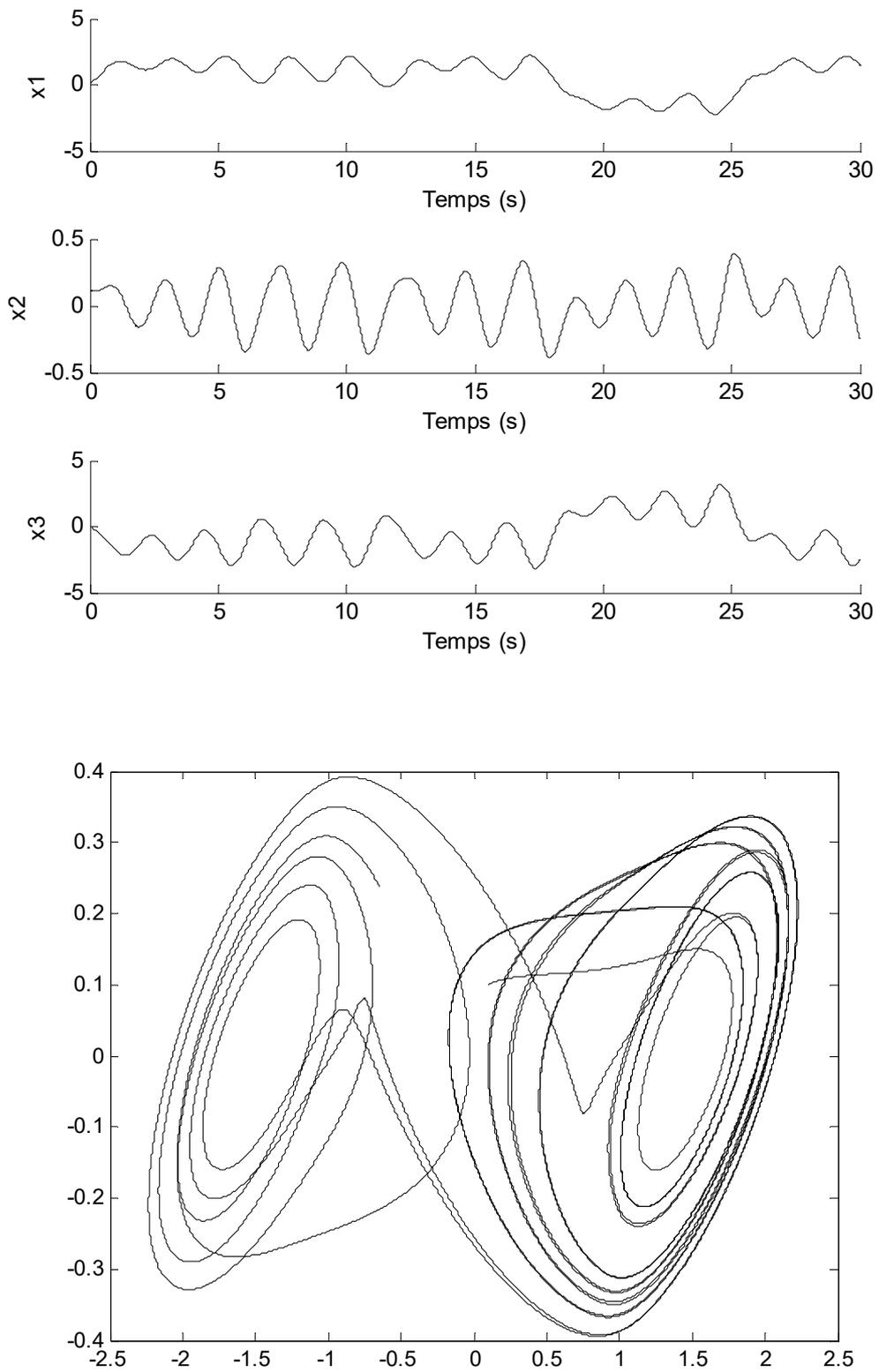


Figure 3.7. Circuit de Chua non dimensionnel : Comportement chaotique

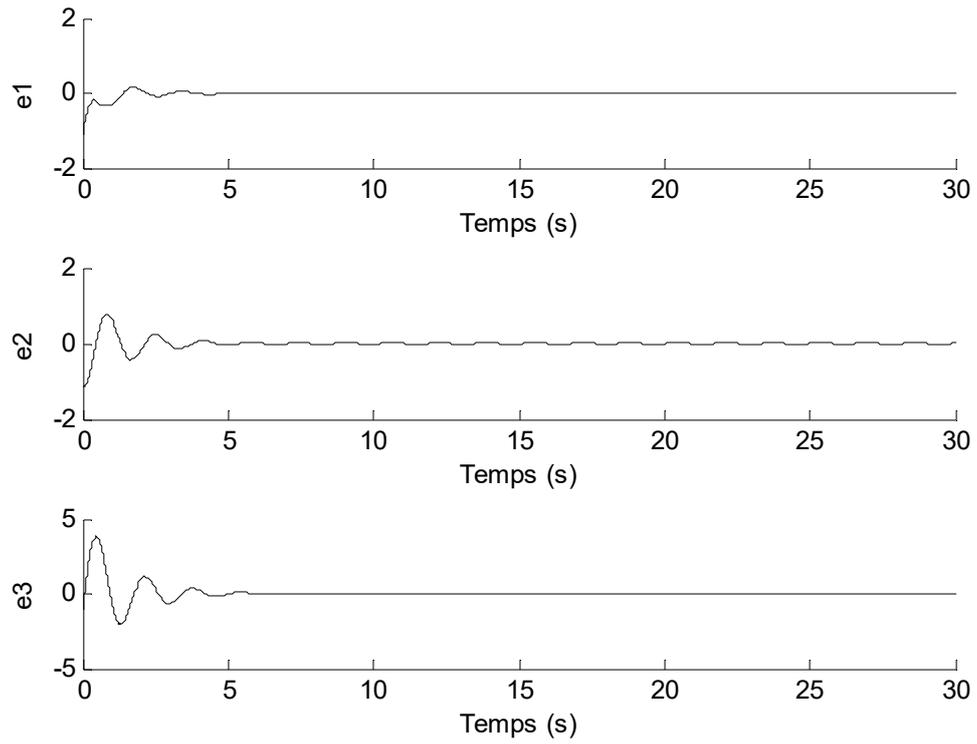


Figure 3.8. Circuit de Chua non dimensionnel : Erreur de synchronisation

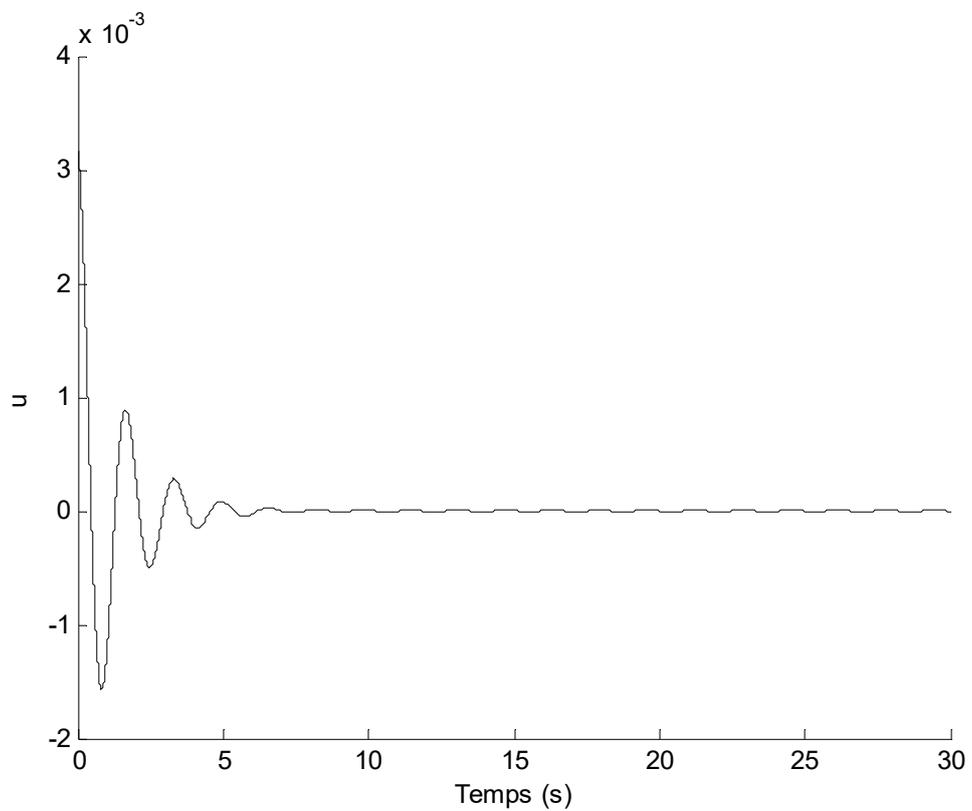


Figure 3.9. Circuit de Chua non dimensionnel : Loi de commande du système esclave

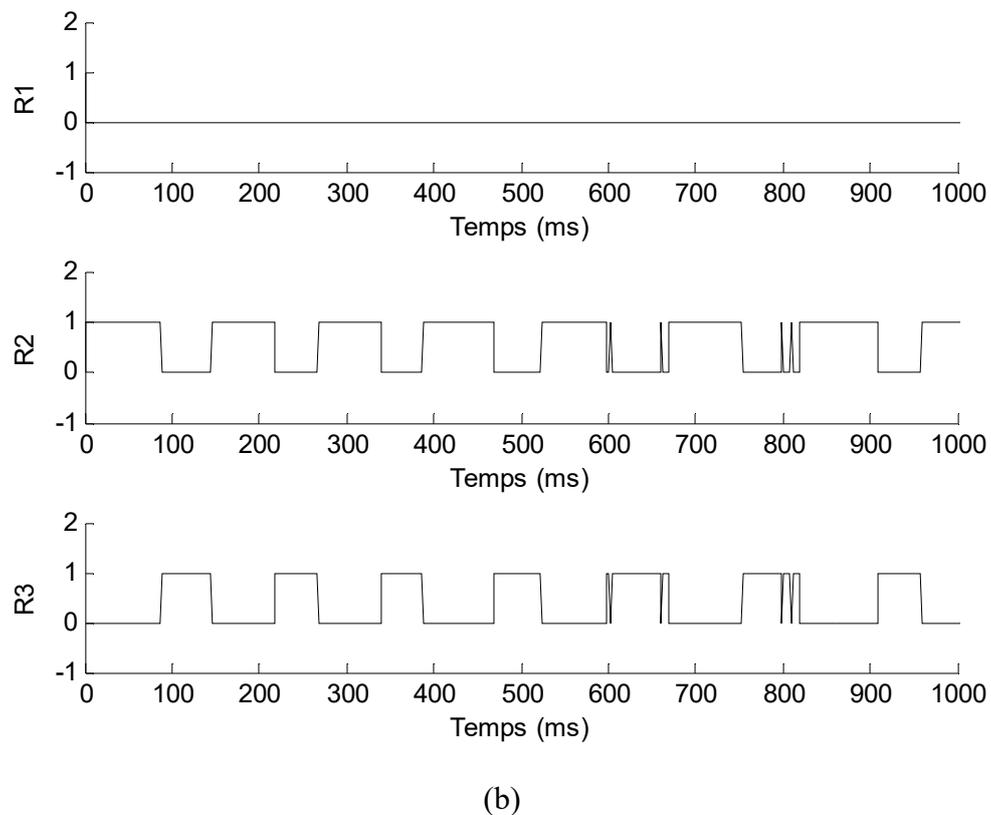
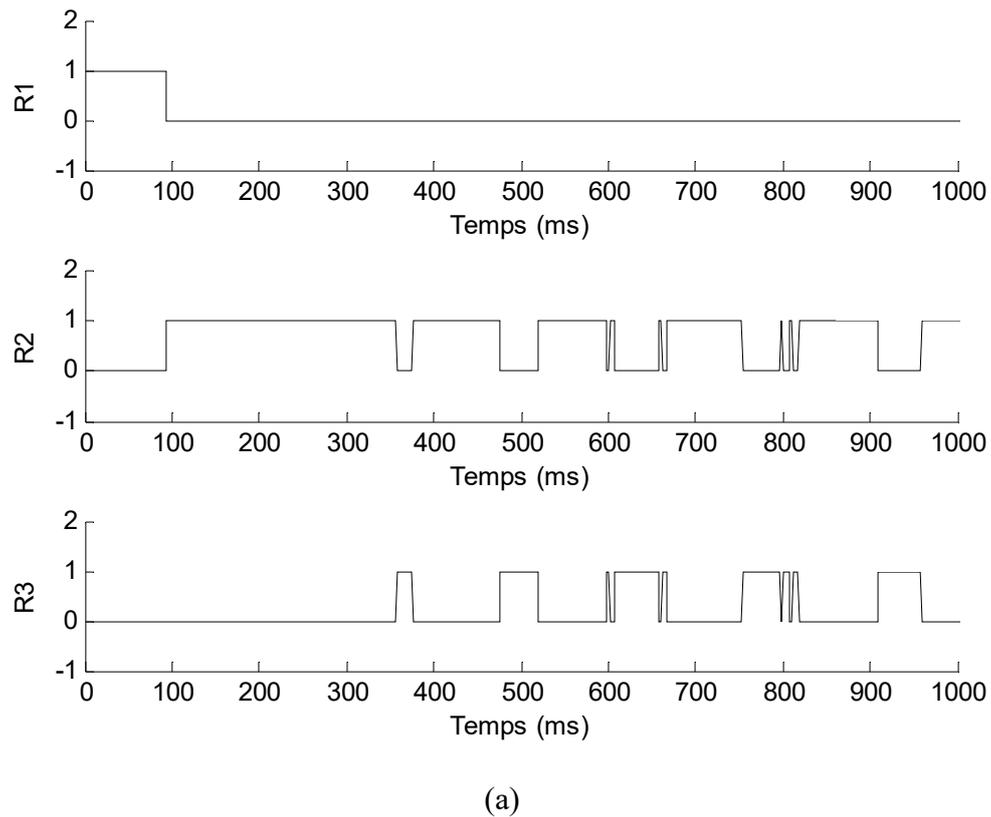


Figure 3.10. Circuit de Chua non dimensionnel : Commutation entre les différents domaines polytopiques des variables d'état : (a) variables d'état du maître (b) variables d'état de l'esclave

3.4.3 Exemple 3.3 : Système de Lur'e

Considérons le système de Lur'e décrit pour une entrée nulle par [Gyurkovics & Takacs, 2011], [Feki, 2003b] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6.8x_1 - 3.9x_2 - x_3 + 12g(x_1) \end{cases} \quad (3.22)$$

avec la fonction PWL décrite par :

$$g(x_1) = \begin{cases} \text{sign}(x_1) & \text{si } -d < x_1 \leq -\frac{1}{\kappa} \\ \kappa x_1 & \text{si } |x_1| < \frac{1}{\kappa} \\ \text{sign}(x_1) & \text{si } \frac{1}{\kappa} \leq x_1 < d \end{cases} \quad (3.23)$$

dans les régions polytopiques $\Lambda_1 = \{x \in \mathcal{R}^3 \mid -d \leq x_1 \leq -\frac{1}{\kappa}\}$, $\Lambda_2 = \{x \in \mathcal{R}^3 \mid -\frac{1}{\kappa} < x_1 < \frac{1}{\kappa}\}$ et $\Lambda_3 = \{x \in \mathcal{R}^3 \mid \frac{1}{\kappa} \leq x_1 \leq d\}$.

Pour $\kappa = 1.5$ et $d = 20$ et pour la condition initiale $x_0 = [0.5 \ 0.5 \ 0]^T$, le comportement chaotique obtenu est présenté par le Figure 3.11.

Les matrices correspondantes au système maître-esclave (3.1) pour le circuit de Lur'e décrit par (3.22)-(3.23) sont définies par :

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6.8 & -3.9 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6.8 + 12\kappa & -3.9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

La description polytopique associée (3.2)-(3.3) des cellules polyédriques est donnée par :

$$H_1 = H_2 = H_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, h_1 = \begin{bmatrix} -d \\ \frac{1}{\kappa} \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\kappa} \\ -\frac{1}{\kappa} \end{bmatrix} \text{ et } h_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} \\ -d \end{bmatrix}$$

Les LMIs (3.5)-(3.6) sont résolues en utilisant la boîte à outils LMI du logiciel MatLab pour une matrice de commande $B = [1 \ 0 \ 0]^T$ et un paramètre de réglage $\alpha_1 = 10^{-4}$. Après 7 itérations et pour les conditions initiales $x_0 = [0.5 \ 0.5 \ 0]^T$ et $z_0 = [-0.5 \ -0.5 \ 0]^T$, les LMIs se trouvent réalisables. Le vecteur de gain de retour d'état (3.8) est calculé tel que

$K = [-8.2011 \quad -0.9881 \quad -0.0330]$. Les résultats de simulation donnés par les Figures 3.12 et 3.14 prouvent que la synchronisation chaotique est validée avec succès.

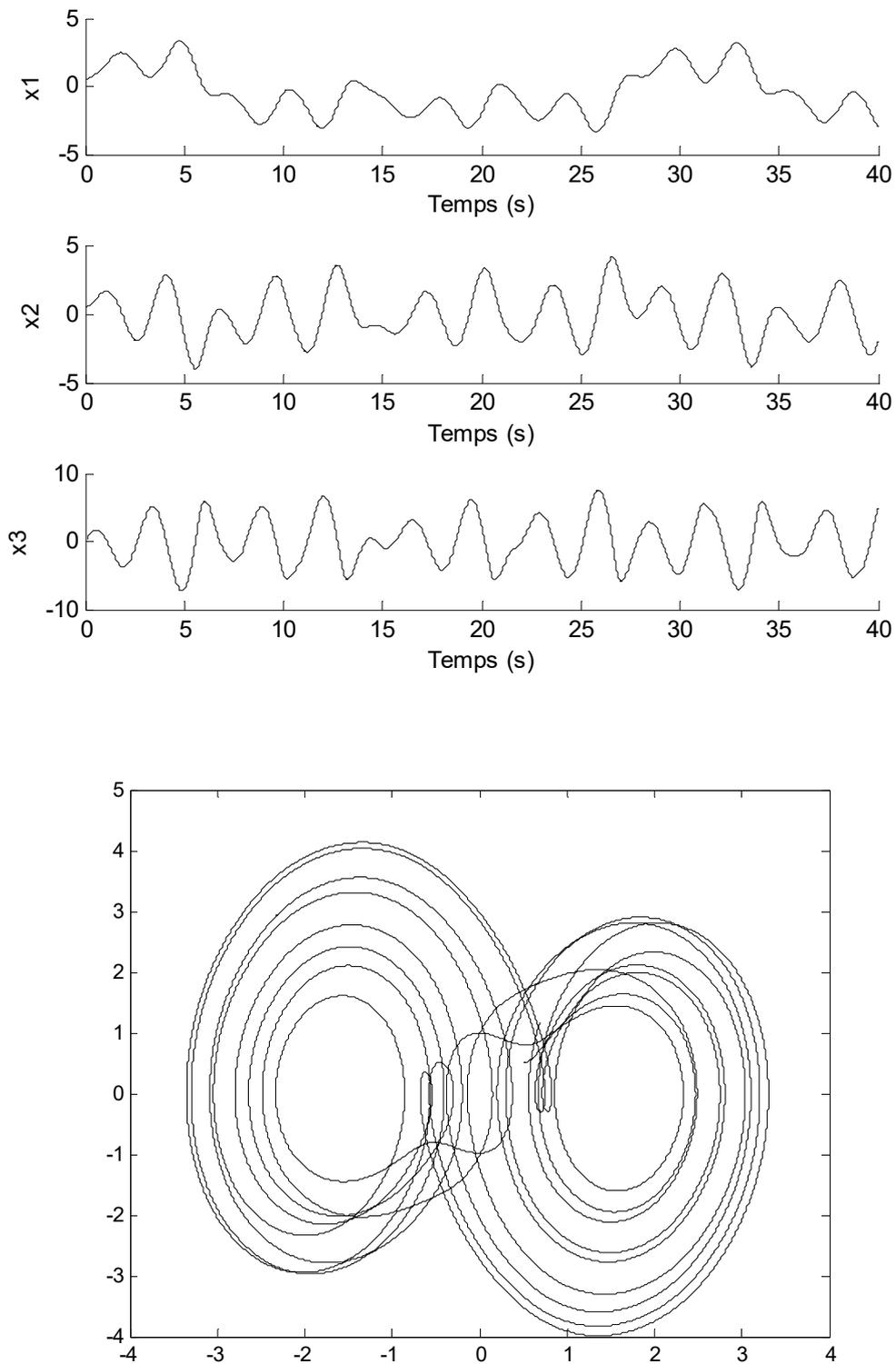


Figure 3.11. Système de Lur'e : Comportement chaotique

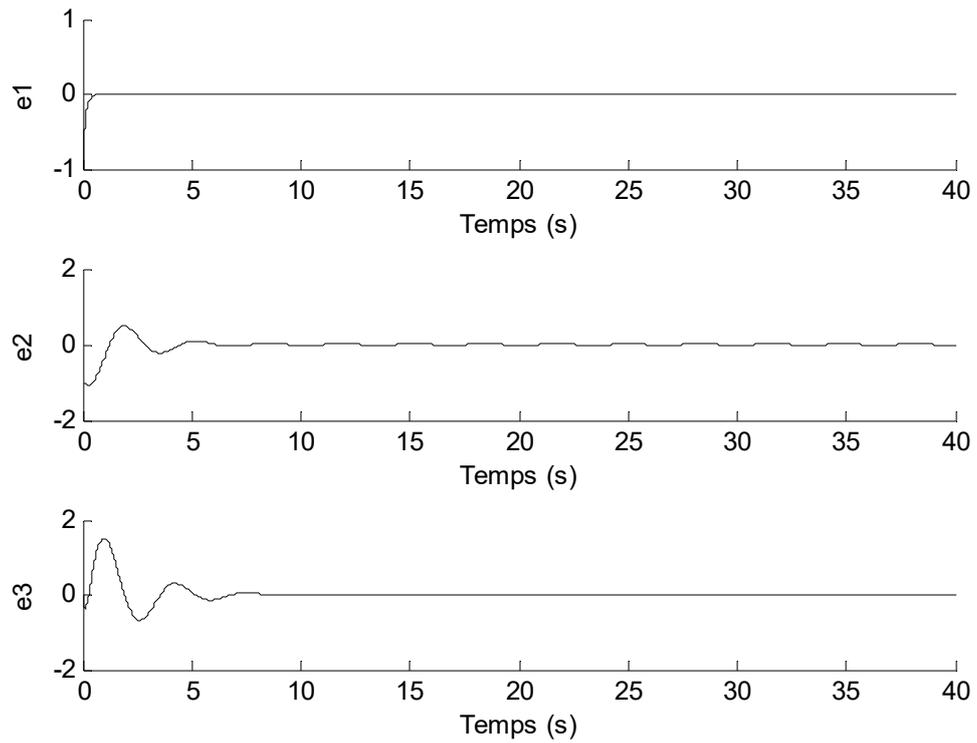


Figure 3.12. Système de Lur'e : Erreur de synchronisation

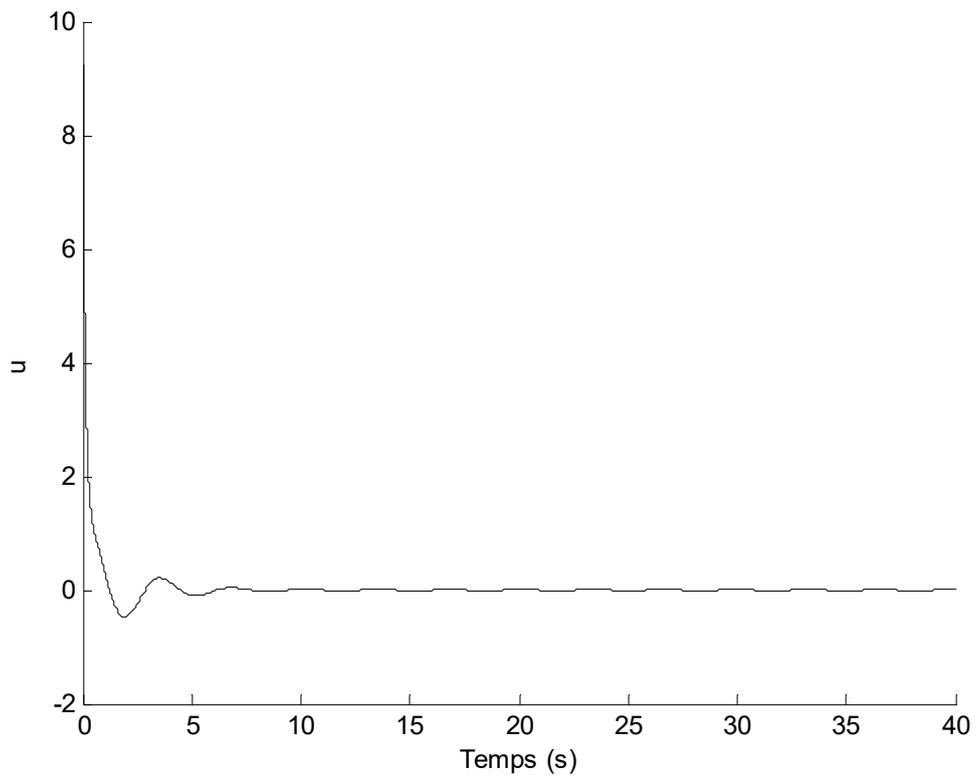
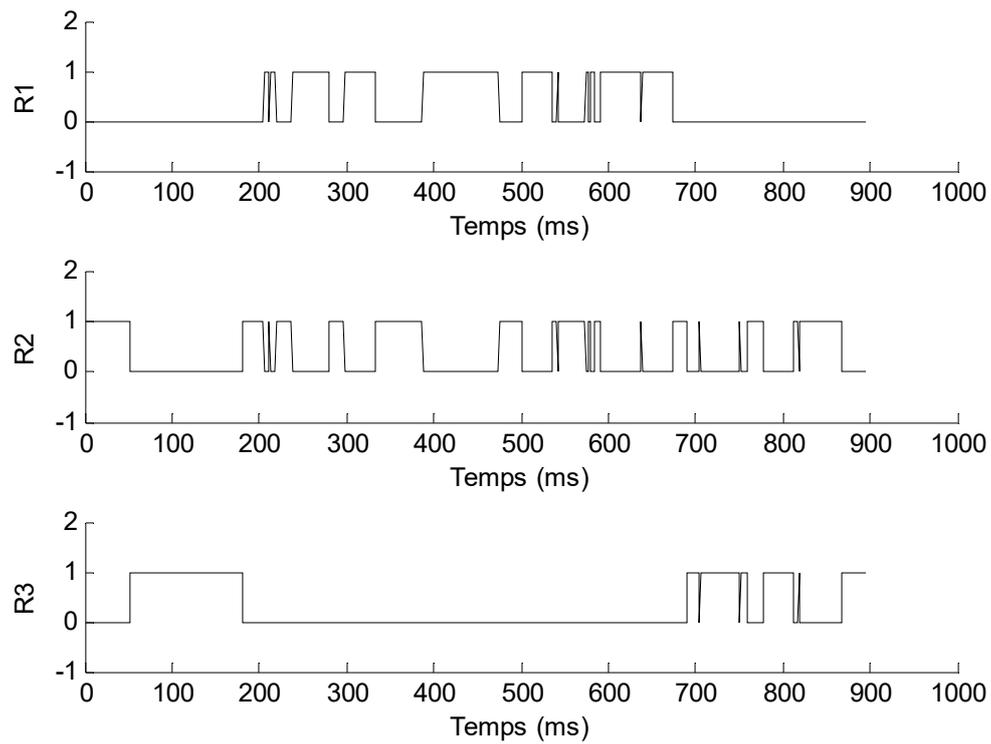
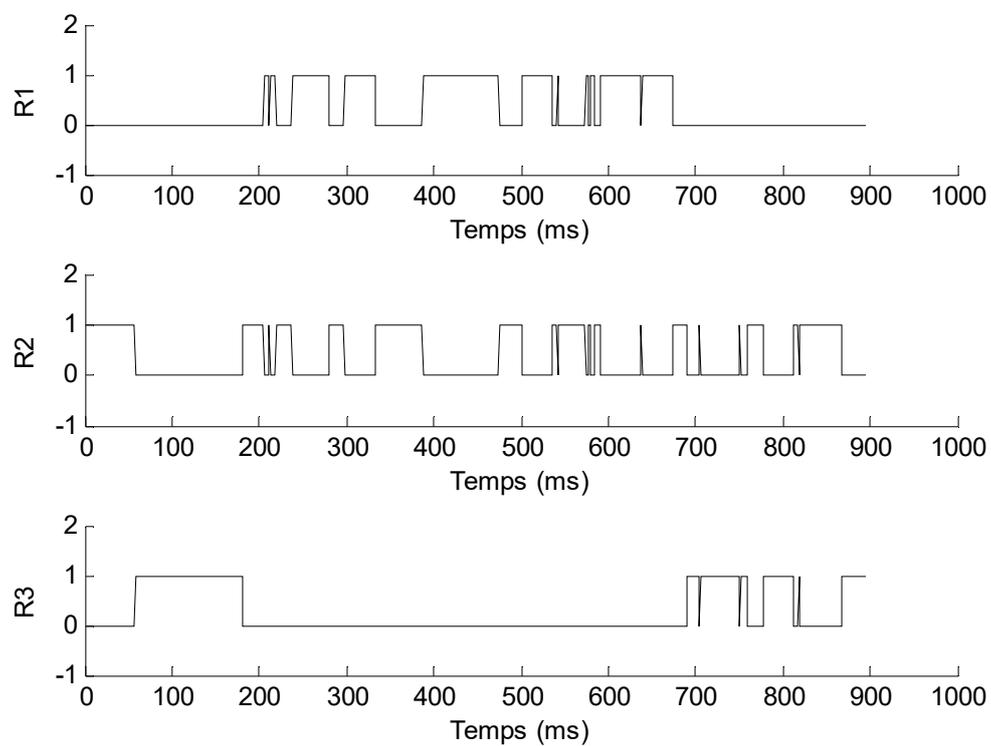


Figure 3.13. Système de Lur'e : Loi de commande appliquée à l'esclave



(a)



(b)

Figure 3.14. Système de Lur'e : Commutation entre les différentes cellules polytopiques des variables d'état: (a) variables d'état du maître (b) variables d'état de l'esclave

3.4.4 Exemple 3.4 : Attracteur à 5-Spirales

Un exemple plus complet de la famille n-spirales est considéré dans cette partie. Il est obtenu par la généralisation du circuit de Chua dans [Yalcin *et al.*, 2000], [Suykens *et al.*, 2001]. Les attracteurs à n-spirales sont décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - g(x_1)) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2 \end{cases} \quad (3.24)$$

avec la caractéristique PWL décrite par :

$$g(x_1) = m_{2q-1}x_1 + 0.5 \sum_{i=1}^{2q-1} (m_{i-1} - m_i) (|x_1 + c_i| - |x_1 - c_i|) \quad (3.25)$$

Pour $q = 3$, les paramètres suivants : $\alpha = 9$, $\beta = \frac{100}{7}$, $m_0 = \frac{0.9}{7}$, $m_1 = -\frac{3}{7}$, $m_2 = \frac{3.5}{7}$, $m_3 = -\frac{2.7}{7}$, $m_4 = \frac{4}{7}$, $m_5 = -\frac{2.4}{7}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2.15$, $c_3 = 3.6$, $c_4 = 6.2$ et $c_5 = 9$ et la condition initiale $x_0 = [-1 \quad -1 \quad -1]^T$, un attracteur à cinq spirales est obtenu comme il est illustré par la Figure.3.15.

Les matrices liées au système maître-esclave (3.1) pour l'attracteur à cinq spirales décrit par (3.24)-(3.25) sont données alors par :

$$A_j = \begin{bmatrix} \rho_j & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, A_i = \begin{bmatrix} \rho_i & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, b_j = \begin{bmatrix} v_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_i = \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, 11\}$:

$$\rho_1 = \rho_{11} = -\alpha m_5, \quad \rho_2 = \rho_{10} = -\alpha m_4, \quad \rho_3 = \rho_9 = -\alpha m_3, \quad \rho_4 = \rho_8 = -\alpha m_2,$$

$$\rho_5 = \rho_7 = -\alpha m_1, \quad \rho_6 = -\alpha m_0, \quad v_5 = -v_7 = -\alpha(m_0 - m_1)c_1, \quad v_6 = 0$$

$$v_1 = -\alpha((m_0 - m_1)c_1 + (m_1 - m_2)c_2 + (m_2 - m_3)c_3 + (m_3 - m_4)c_4 + (m_4 - m_5)c_5)$$

$$v_2 = -v_{10} = -\alpha((m_0 - m_1)c_1 + (m_1 - m_2)c_2 + (m_2 - m_3)c_3 + (m_3 - m_4)c_4)$$

$$v_3 = -v_9 = -\alpha((m_0 - m_1)c_1 + (m_1 - m_2)c_2 + (m_2 - m_3)c_3)$$

$$v_4 = -v_8 = -\alpha((m_0 - m_1)c_1 + (m_1 - m_2)c_2), \quad v_{11} = -v_1$$

Suivant la valeur de la variable d'état x_1 , l'espace d'état est constitué des cellules polytopiques suivantes: $\Lambda_1 = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid -d < x_1 \leq -c_5\}$, $\Lambda_2 = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid -c_5 < x_1 \leq -c_4\}$, $\Lambda_3 = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid -c_4 < x_1 \leq -c_3\}$, $\Lambda_4 = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid -c_3 < x_1 \leq -c_2\}$, $\Lambda_5 = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid -c_2 < x_1 \leq -c_1\}$, $\Lambda_6 = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid -c_1 < x_1 < c_1\}$, $\Lambda_7 = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid c_1 \leq x_1 < c_2\}$, $\Lambda_8 = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid c_2 \leq x_1 < c_3\}$, $\Lambda_9 = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid c_3 \leq x_1 < c_4\}$, $\Lambda_{10} = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid c_4 \leq x_1 < c_5\}$ et $\Lambda_{11} = \{x \in \mathfrak{R}^3 \mid c_5 \leq x_1 < d\}$.

La description polytopique associée (3.2)-(3.3) des cellules polyédriques est donné par :

$$H_j = H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, 11\}$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} -d \\ c_5 \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} -c_5 \\ c_4 \end{bmatrix}, h_3 = \begin{bmatrix} -c_4 \\ c_3 \end{bmatrix}, h_4 = \begin{bmatrix} -c_3 \\ c_2 \end{bmatrix}, h_5 = \begin{bmatrix} -c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}, h_6 = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_1 \end{bmatrix}, h_7 = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix}, \\ h_8 = \begin{bmatrix} c_2 \\ -c_3 \end{bmatrix}, h_9 = \begin{bmatrix} c_3 \\ -c_4 \end{bmatrix}, h_{10} = \begin{bmatrix} c_4 \\ -c_5 \end{bmatrix} \text{ et } h_{11} = \begin{bmatrix} c_5 \\ -d \end{bmatrix}$$

où d et $-d$ sont respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de x_1 (dans ce cas $d = 15$).

Les LMIs (3.5)-(3.6) sont résolus en utilisant la boîte à outils LMI du logiciel MatLab pour le vecteur de commande $B = [1 \ 0 \ 0]^T$ et un paramètre de réglage $\alpha_1 = 10$. Après 49 itérations, les LMIs se trouvent résolues. Le vecteur de gain de retour d'état (3.8) est calculé tel que $K = [-42.8177 \ -550.7423 \ 152.1583]$. Chacun des circuits maîtres et esclaves commutent entre 11 cellules polytopiques.

Pour les conditions initiales $x_0 = [-1 \ -1 \ -1]^T$ et $z_0 = [0.2 \ -0.2 \ -0.5]^T$, les résultats de simulation donnés par les Figures 3.16 - 3.17 prouvent que la synchronisation chaotique est validée avec succès.. Nous avons observé que le système maître évolue seulement entre la 7^{ème} et la 10^{ème} cellule alors que le système esclave évolue seulement entre la 6^{ème} et la 10^{ème} cellule. La figure 3.18 montre les commutations des systèmes maître et esclave entre les cellules polytopiques concernés. Pour les autres cellules, les valeurs demeurent à zéro.

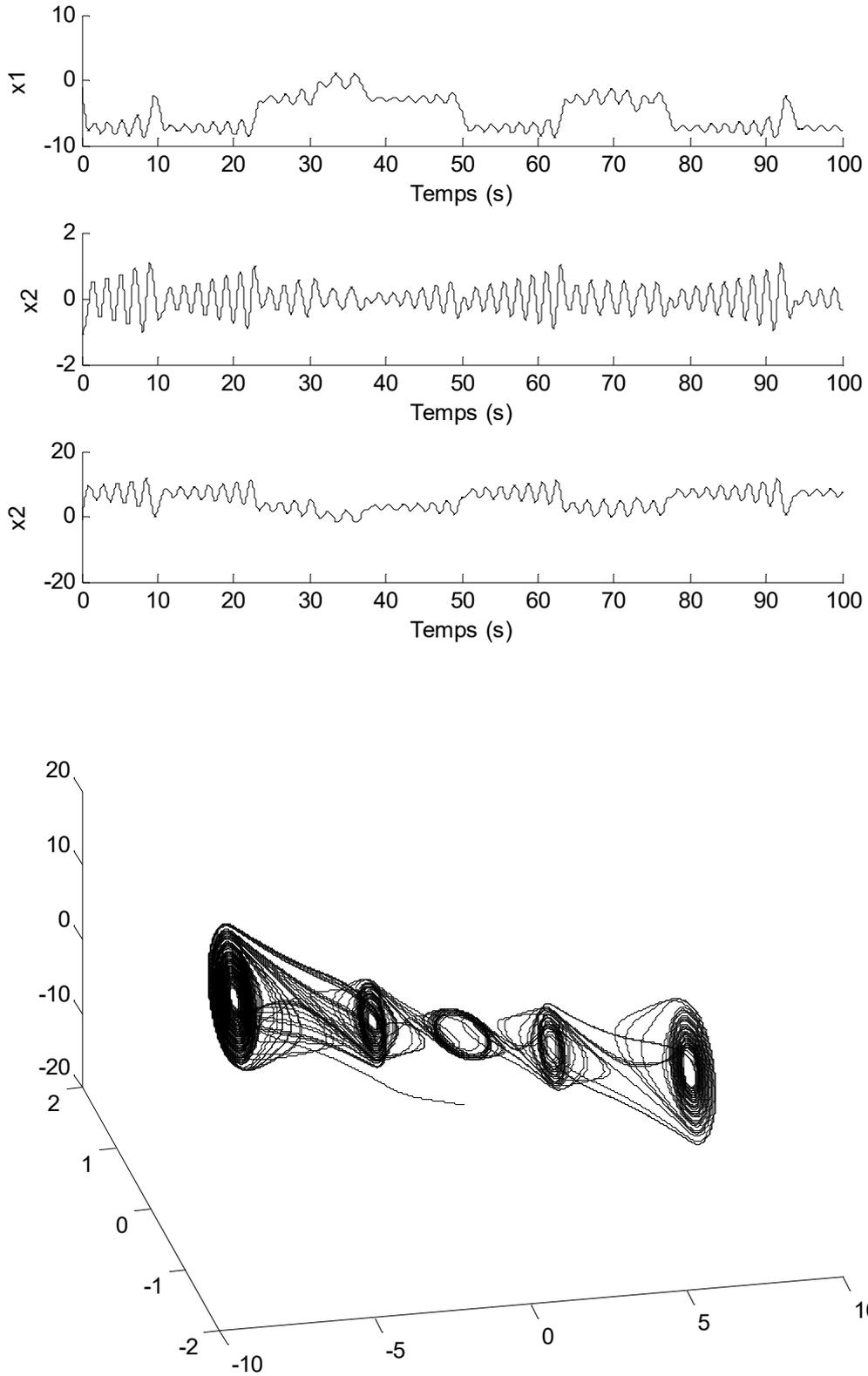


Figure 3.15. Attracteur à cinq spirales : Comportement chaotique

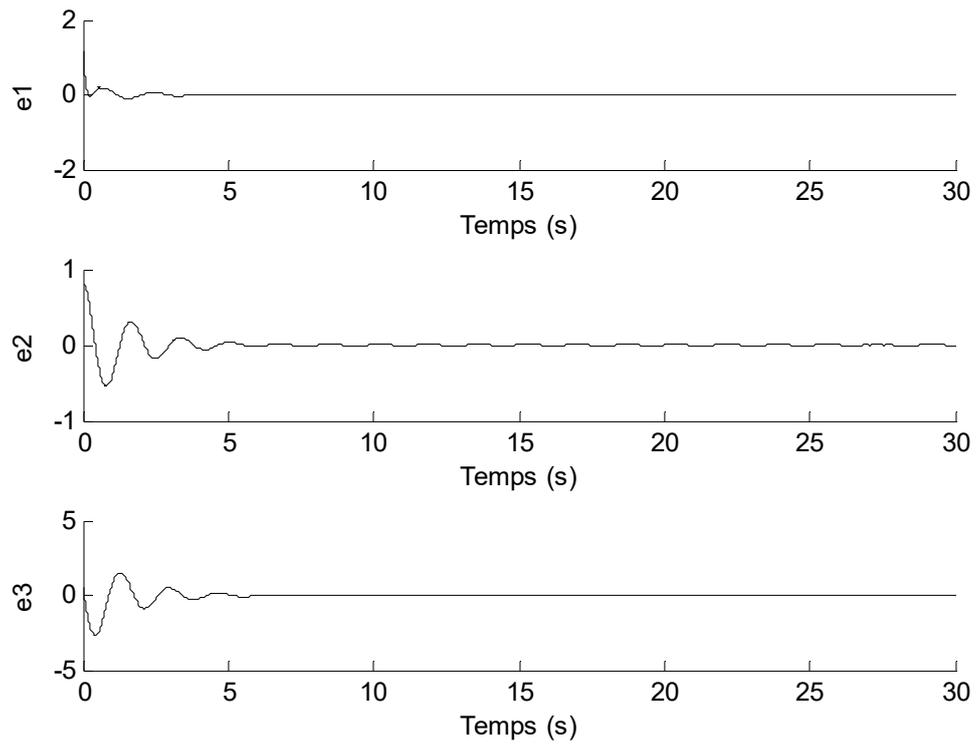


Figure 3.16. Attracteur à cinq spirales : Erreur de synchronisation

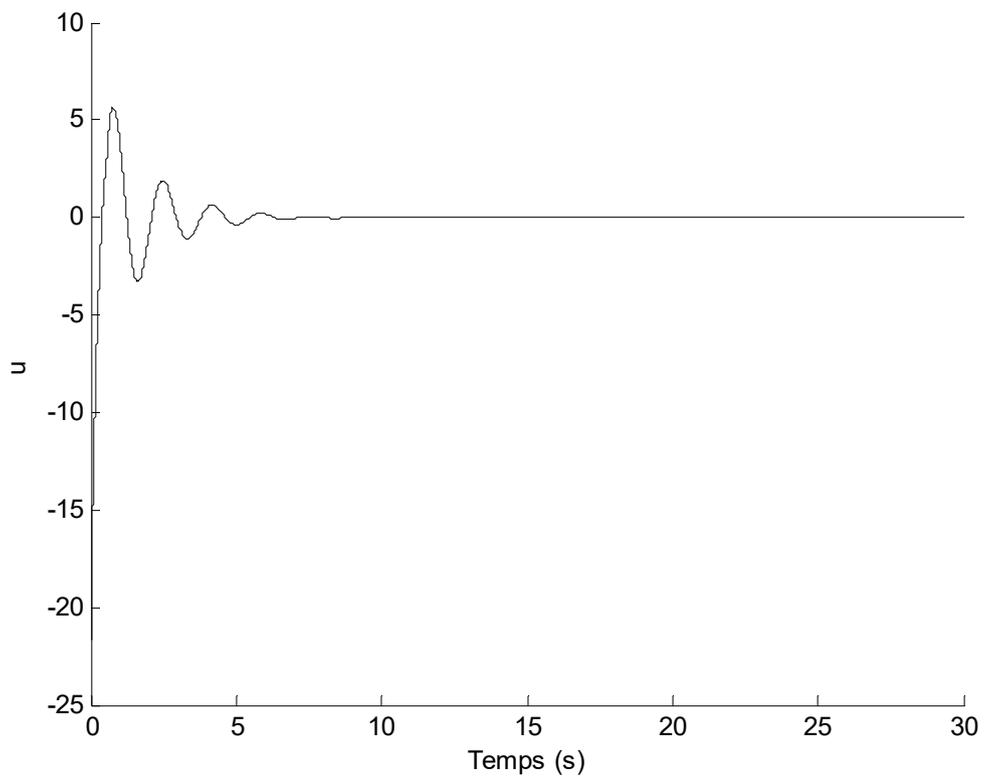
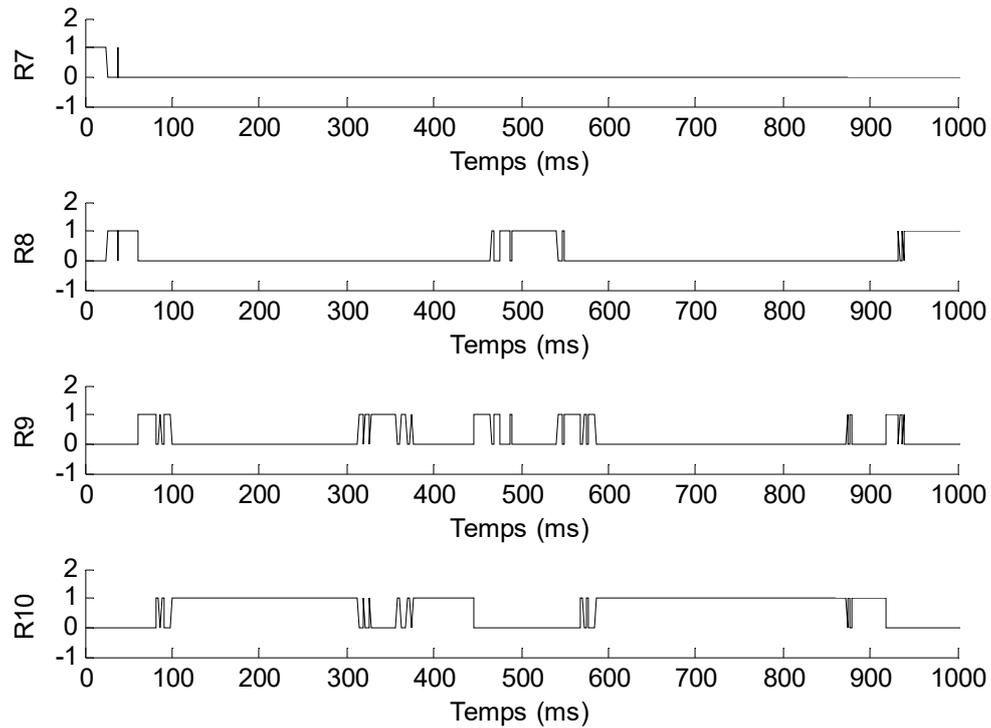
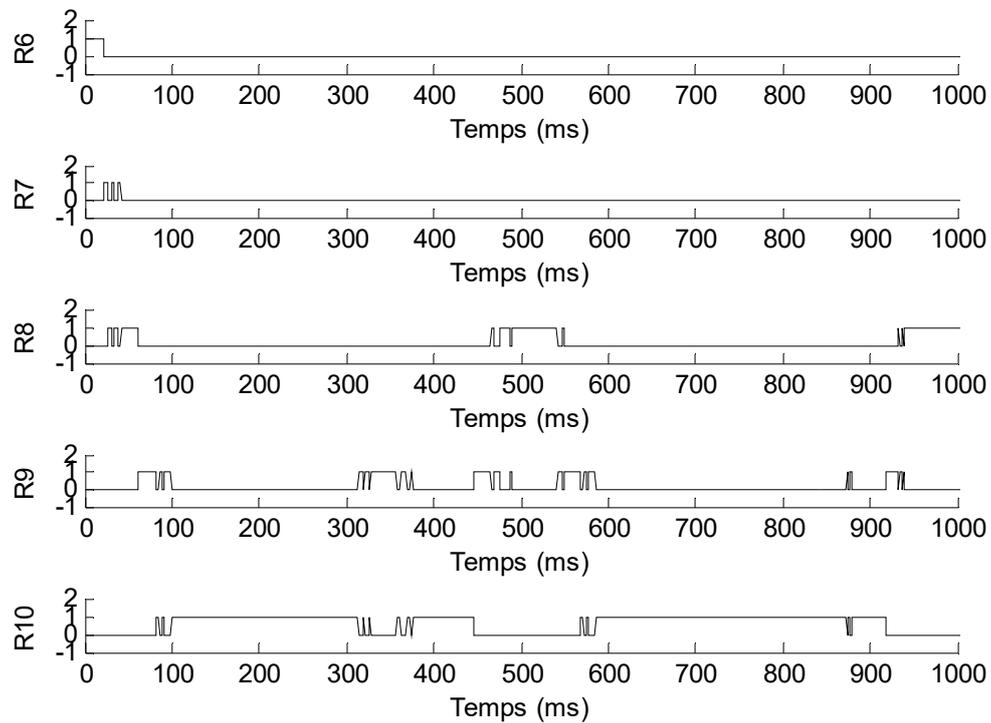


Figure 3.17. Attracteur à cinq spirales : Loi de commande



(a)



(b)

Figure 3.18. Attracteur à cinq spirales : Commutation entre les différents domaines polytopiques des variables d'état du circuit : (a) variables d'état du maître (b) variables d'état de l'esclave

3.5 Etude comparative

L'objectif de ce paragraphe est de développer une étude comparative qui a été bien explicitée dans [Mkaouar & Boubaker, 2014] entre les deux approches présentées dans l'annexe 1 développé par [Jiang & Zheng, 2005] et dans l'annexe 2 développé par [Zhang *et al.*, 2009] et l'approche que nous avons proposée dans ce chapitre. Le point commun entre ces approches est la synthèse d'une loi de commande par retour d'état via une approche LMI. Cette étude est conduite sur quatre exemples présentés au paragraphe 3.4 sur lesquels notre approche a été validée.

3.5.1 Approche 1

Dans ce paragraphe, nous utiliserons le théorème A.1 énoncé dans l'annexe 1 pour synchroniser les quatre systèmes chaotiques décrits précédemment dans la section §3.5. Pour accomplir cette tâche une mise en forme des modèles non linéaires de chaque système est nécessaire. Dans ce qui suit nous présenterons les modèles de ces systèmes ainsi que les résultats de l'application de chaque approche.

Cas du Circuit de Chua

Les matrices associées au système maître-esclave (A1.1) du théorème A.1 de l'annexe A pour le circuit original de Chua décrit par (1.6) sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} -\mu_1 & \mu_1 & 0 \\ \mu_3 & -\mu_3 & \mu_4 \\ 0 & -\mu_5 & -R_0\mu_5 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} -\mu_2 g(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } g(z) = \begin{bmatrix} -\mu_2 g(z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le paramètre Lipchitzien imposé par la condition (A1.2) est calculé tel que [Gyurkovics & Takacs, 2011] :

$$\rho_{\mathcal{L}} = \left| -\mu_2 \frac{G_a - G_b}{2} \right|$$

Le paramètre de réglage δ est fixé à 0.5 alors que le paramètre calculé est $\rho_{\mathcal{L}} = 4.0574 \cdot 10^4$. Après 16 itérations, les LMIs (A1.4)-(A1.5) ont été trouvées irréalisables.

Cas du circuit de Chua non dimensionnel

Les matrices associées au système maître-esclave (A1.1) pour le circuit de Chua décrit par (1.17)-(1.18) sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} -\alpha g(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, g(z) = \begin{bmatrix} -\alpha g(z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le paramètre Lipchitzien donné par la condition (A1.2) est donnée par :

$$\rho_L = \left| -\alpha \frac{G_a - G_b}{2} \right|$$

Le paramètre de réglage δ est fixé à 0.5 où le paramètre calculé est $\rho_L = 1.9286$. Après 22 itérations, les LMIs (A1.4)-(A1.5) ont été trouvées irréalisables.

Cas du système de Lur'e

Les matrices correspondantes au système maître-esclave (A1.1) pour le système de Lur'e décrit par (3.22)-(3.23) sont définies par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6.8 & -3.9 & -1 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12g(x) \end{bmatrix}, g(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12g(z) \end{bmatrix}$$

Le paramètre Lipchitzien donné par la condition (A1.3) est calculé $\rho_L = 12$. Le paramètre de réglage δ est fixé à 0.5. Après 11 itérations, les LMIs (A1.4)-(A1.5) ont été aussi trouvées irréalisables.

Cas de l'attracteur à 5 spirales

Les matrices liées au système maître-esclave (A1.1) pour l'attracteur à 5 spirales décrit par (3.24)-(3.25) sont données alors par :

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha m_5 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} -\alpha g(x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, g(z) = \begin{bmatrix} -\alpha g(z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le paramètre Lipchitzien donnée par la condition (A1.3) est donnée par:

$$\rho_L = \max \left| -\alpha \frac{m_{i-1} - m_i}{2} \right|$$

Le paramètre de réglage δ est fixé à 10^5 alors que le paramètre calculé est $\rho_L = 4.3071$. Après 16 itérations et pour les conditions initiales $x_0 = [-1 \ -1 \ -1]^T$ et $z_0 = [0.2 \ -0.2 \ -0.5]^T$, les LMIs (A1.4)-(A1.5) ont été trouvées réalisables. Le vecteur de gain de retour d'état (1.23) est calculé tel que $K = 10^5 [1.8613 \ -0.0174 \ 0]$. Les résultats de simulation sont donnés dans [Mkaouar & Boubaker, 2014] et les figures représentant les

erreurs de synchronisation ainsi que la loi de commande sont illustrées dans l'annexe 3 afin de ne pas encombrer ce chapitre avec des résultats de simulation.

3.5.2 Approche 2

Dans ce paragraphe, nous utiliserons le théorème A2.1 énoncé dans l'annexe 2 pour synchroniser les quatre systèmes chaotiques décrits précédemment dans la section §3.4. Pour accomplir cela une mise en forme des modèles non linéaires de chaque système est nécessaire. Dans ce qui suit nous présentons les modèles de ces systèmes ainsi que les résultats des applications de cette approche.

Cas du Circuit de Chua

Les matrices liées au système maître-esclave (A2.1) pour le circuit original de Chua décrit par (1.6) sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \mu_2 G_b & \mu_1 & 0 \\ \mu_3 & -\mu_3 & \mu_4 \\ 0 & -\mu_5 & -R_0 \mu_5 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -\mu_2(G_a - G_b) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = D = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\sigma(Dx) = 0.5(|x_1 + E| - [x_1 - E])$$

$$\sigma(Dz) = 0.5(|z_1 + E| - [z_1 - E])$$

Les paramètres de réglage ε et γ sont fixés respectivement à 10 et 2. Sous les conditions (A2.2) et (A2.3) nous avons $h = 10^{-6}$ et $W = 0.001$. Après 52 itérations et pour les conditions initiales $x_0 = [0.5 \quad 0.5 \quad 0]^T$ et $z_0 = [-0.5 \quad -0.5 \quad 0]^T$, les contraintes LMIs (A2.6)-(A2.16) sont réalisables. Le vecteur de gain de retour d'état (A2.17) est calculé comme suit $K = 10^6[2.1119 \quad 0.4552 \quad 0.0011]^T$. Les résultats de simulation sont donnés dans [Mkaouar & Boubaker, 2014] et les figures représentant les erreurs de synchronisation ainsi que la loi de commande sont illustrées dans l'annexe 4 et prouvent que la synchronisation chaotique est bien validée avec des lois de commande réalisables.

Cas du système de Chua non dimensionnel

Les matrices relatives au système maître esclave (A2.1) pour le circuit de Chua non dimensionnel décrit par (1.17) – (1.18) sont définies comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha G_b & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -\alpha(G_a - G_b) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = D = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\sigma(Dx) = 0.5(|x_1 + E| - |x_1 - E|)$$

$$\sigma(Dz) = 0.5(|z_1 + E| - |z_1 - E|)$$

Les paramètres de réglage ε et γ sont fixés respectivement à 10 et 20. Sous les conditions (A2.2) et (A2.3) nous avons $h = 0.32$ et $W = 0.2593$. Au bout de 16 itérations et pour les conditions initiales $x_0 = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1]^T$ et $z_0 = [-1 \quad -1 \quad -1]^T$, les LMIS (A2.6)-(A2.16) sont faisables. Le vecteur gain de retour d'état (A2.17) est calculé comme suit $K = [7.1656 \quad 1.5692 \quad -3.6126]^T$. Les résultats de simulation sont donnés dans [Mkaouar & Boubaker, 2014] et les figures représentant les erreurs de synchronisation ainsi que la loi de commande sont illustrées dans l'annexe 4 afin de ne pas encombrer ce chapitre avec des résultats de simulation.

Cas du système de Lur'e

Les matrices relatives au système maître esclave (A2.1) pour le système de Lur'e décrit par (3.23)-(3.23) sont définies par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6.8 & -3.9 & -1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$C = D = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\sigma(Dx) = g(x)$$

$$\sigma(Dz) = g(z)$$

Les paramètres de réglages ε et γ sont fixés respectivement à 1 et 2. Sous les conditions (A2.2) et (A2.3) nous avons $h = 0.1$ et $W = 2$. Après 7 itérations et pour les conditions initiales $x_0 = [0.5 \quad 0.5 \quad 0]^T$ et $z_0 = [-0.5 \quad -0.5 \quad 0]^T$ et les LMIS (A2.6)-(A2.16) sont faisables. Le vecteur gain de retour d'état (A2.17) est calculé tel que $K = [3.2801 \quad 3.5088 \quad 6.6266]^T$. Les résultats de simulation sont donnés dans [Mkaouar & Boubaker, 2014] et les figures représentant les erreurs de synchronisation ainsi que la loi de commande sont illustrées dans l'annexe 4.

Cas de l'attracteur à 5 spirales

Les matrices correspondantes au système maître-esclave (A2.1) pour l'attracteur à cinq spirales décrit par (3.24)-(3.25) sont donnés alors par :

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha m_5 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -0.5\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = D = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{2q-1} (m_{i-1} - m_i)(|x_i + c_i| - |x_1 - c_1|)$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{2q-1} (m_{i-1} - m_i)(|z_i + c_i| - |z_1 - c_1|)$$

Les paramètres de réglage ε et γ sont fixés respectivement à 0 et 0.02. Sous les conditions (A2.2) et (A2.3), nous avons $h = 0.2$ et $W = 0.2593$. Après 18 itérations et pour les conditions initiales $x_0 = [-1 \quad -1 \quad -1]^T$ et $z_0 = [0.2 \quad -0.2 \quad -0.5]^T$, les LMIs (A2.6)-(A2.16) sont réalisables. Le gain du vecteur de retour d'état (A2.17) est calculé tel que $K = [15.8034 \quad 0.9380 \quad -8.3458]^T$. Les résultats de simulation sont donnés dans [Mkaouar & Boubaker, 2014] et les figures représentant les erreurs de synchronisation ainsi que la loi de commande sont illustrées dans l'annexe 4.

3.5.3 Analyse de l'étude comparative

Pour analyser le degré de simplicité de l'implémentation de chacune des approches proposées, nous définissons d'abord, comme critères de comparaison, le nombre des LMIs à résoudre, le nombre des paramètres à calculer avant de résoudre les LMIs et enfin le nombre de paramètres de réglage de l'algorithme de commande.

Comme il est illustré par le tableau 3.1, l'approche de *Jiang et Zheng* [Jiang & Zheng, 2005] semble être la plus simple, elle a le plus petit nombre de LMIs à résoudre et le moins grand nombre de paramètres de réglage. Cependant, elle nécessite toujours le pré-calcul du paramètre $\rho_{\mathcal{L}}$ qui peut présenter un calcul inhérent pour certains systèmes PWL chaotiques.

D'autre part, la simplicité de mise en œuvre de l'approche de *Mkaouar et Boubaker* [Mkaouar & Boubaker, 2012a] dépend principalement du nombre de cellules polytopiques. Pour un nombre inférieur ou égale à 3 cellules, l'approche de *Mkaouar et Boubaker* sera toujours plus simple que l'approche de *Zhang et He* [Zhang et al., 2009].

Puisque toutes les approches de synchronisation présentées dans cette étude donnent des conditions suffisantes pour la synchronisation globale, l'analyse de la faisabilité des LMIs sur différents systèmes maître-esclave chaotiques est requise. Le tableau 3.2 illustre cette analyse comparative. Comme on le verra, l'approche la plus simple est celle la plus conservatrice.

Pour les solutions faisables, le temps CPU écoulé pour résoudre les LMIs prédéfinies pour les meilleures valeurs des paramètres de réglage peut être considéré comme un critère comparatif important. Comme le montre le tableau 3.3, l'approche de *Mkaouar et Boubaker* est la meilleure pour le circuit de Chua, le système de Lur'e et le système de Chua non dimensionnel mais pas pour l'attracteur à cinq spirales. Cela est dû au nombre important de cellules polytopiques : 11 cellules dans ce cas.

Tableau 3.1. Etude comparative de l'implémentation des LMIs et de leur résolution

Approche de synchronisation	Jiang et Zheng [Jiang & Zheng, 2005]	Zhang, He et Wu [Zhang <i>et al.</i>, 2009]	Mkaouar et Boubaker [Mkaouar & Boubaker, 2012a]
Critères			
LMI à résoudre	(A2.4)-(A2.5)	(A2.6)-(A2.16)	(3.5)-(3.6)
Paramètres de réglages	B, δ	$h, \varepsilon, \gamma, W$	B, α_1
Paramètres à calculer	ρ	-	-
Solutions résultantes des LMIs	Q, Y	$G, V, M, N, \Lambda, T, F, P, R, Z, X$	$S, R, E_{ij}, F_{ij}, \beta_{ij}, \xi_{ij}$ $i, j \in \{1, \dots, N\}$

Tableau 3.2 Faisabilité des approches de synchronisation pour chaque système PWA

Systèmes PWA	Circuit de Chua	Système de Chua non dimensionnel	Système de Lur'e	Attracteur à 5 spirales
Jiang et Zheng [Jiang & Zheng, 2005]	Non faisable	Non faisable	Non faisable	Faisable
Zhang, He and et [Zhang <i>et al.</i>, 2009]	Faisable	Faisable	Faisable	Faisable
Mkaouar et Boubaker [Mkaouar & Boubaker, 2012a]	Faisable	Faisable	Faisable	Faisable

Tableau 3.3 Temps processeur CPU en secondes pour les meilleures valeurs des paramètres de réglage pour chaque approche de synchronisation pour chaque système PWA

Systèmes PWL Approche	Circuit de Chua	Système de Chua non dimensionnel	Système de Lur'e	Attracteur à 5 spirales
Jiang et Zheng [Jiang & Zheng, 2005]	-	-	-	0.0168
Zhang, He et Wu [Zhang <i>et al.</i>, 2009]	7.4420	2.5026	1.1736	2.5262
Mkaouar et Boubaker [Mkaouar & Boubaker, 2012a]	0.5200	0.3160	0.3247	10.7407

L'influence du choix des paramètres de réglage sur la faisabilité des LMIs, sur la stabilité globale du système maître-esclave et sur le temps de synchronisation peut être considéré comme le critère comparatif le plus important pour cette étude comparative. L'évaluation d'une telle influence est établie par la pratique d'une simulation intensive et de modifier les valeurs des paramètres de réglage dans des intervalles de taille suffisante. Nous supposons en outre que les meilleures valeurs du paramètre de réglage sont obtenus pour le temps de synchronisation le plus bas. Le tableau 3.4 montre le résultat de cette étude d'analyse. Comme on peut le déduire l'approche énoncée par *Mkaouar et Boubaker* est l'approche la moins sensible à la variation des paramètres de réglage

Tableau 3.4 Influence du domaine d'appartenance des paramètres de réglage sur les performances de chaque méthode de synchronisation

Approche Performances	Jiang et Zheng [Jiang & Zheng, 2005]	Zhang, He et Wu [Zhang <i>et al.</i>, 2009]	Mkaouar et Boubaker [Mkaouar & Boubaker, 2012a]
Faisabilité des LMIs	Oui	Oui	Non
Stabilité de la dynamique de l'erreur	Oui	Oui	Non
Temps de synchronisation	Oui	Oui	Oui

3.6 Conclusion

Dans un premier lieu, le problème de synchronisation chaotique est résolu pour des systèmes maître-esclave PWL. Le problème de synchronisation est résolu comme étant un problème de stabilisation de l'erreur de synchronisation en utilisant une approche de Lyapunov et résolu sous forme de LMIs. Les résultats de simulation montrent clairement que la stratégie proposée est capable de synchroniser deux circuits chaotiques de Chua.

Dans un second lieu, une étude comparative entre l'approche que nous avons proposée et deux approches tirées de la littérature basées sur des outils de LMI appliquées sur quatre exemples éminents de systèmes chaotiques de type PWL. L'étude analytique a montré que les approches de synchronisation de *Zheng et He* [Zheng *et al.*, 2009], et de *Mkaouar et Boubaker* [Mkaouar & Boubaker, 2012a] sont moins conservatrices que celle de *Jiang et Zhang* [Jiang & Zheng, 2005]. Cependant, l'approche de *Mkaouar et Boubaker* obtient le meilleur compromis entre la mise en œuvre pratique des LMIs et l'influence des paramètres de réglage sur la faisabilité et les performances de l'approche de synchronisation.

4

Contribution à la Synchronisation Robuste Chaotique

4.1	Introduction	93
4.2	Position du problème.....	93
4.3	Synchronisation chaotique robuste.....	94
4.4	Application	101
4.4.1	Exemple 4.1 : Système de Chua non dimensionnel	101
4.4.2	Exemple 4.2 : Nouvelle famille hyper-chaotique.....	105
4.5	Etude comparative.....	110
4.6	Conclusion.....	112

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, le problème de la synchronisation chaotique robuste des systèmes PWL avec incertitudes bornées en norme sera résolu. Il sera formulé comme étant un problème de stabilité globale de l'erreur de synchronisation en utilisant une approche de Lyapunov puis résolu à l'aide des outils LMI. L'efficacité de la solution proposée sera montrée par des résultats de simulation sur de deux exemples numériques.

Ce chapitre sera organisé comme suit : au second paragraphe, le problème de la synchronisation robuste sera formulé. Les conditions suffisantes de synchronisation chaotique robuste présentées sous forme de LMIs seront développées au troisième paragraphe. Dans le quatrième paragraphe, l'efficacité de l'approche proposée est illustrée par des résultats de simulation sur deux exemples numériques. Le premier exemple traite du modèle non dimensionnel du circuit de Chua. Le second considère une nouvelle famille d'attracteurs hyperchaotiques multi-spirales. Une étude comparative avec la méthode présentée dans le chapitre précédent sera effectuée afin de démontrer la robustesse de l'approche proposée.

4.2 Position du problème

Considérons la classe des systèmes chaotiques PWL de type continu avec incertitudes bornées en norme décrite par :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_j + D_j V_j E_j)x + b_j, & x \in \Lambda_j, j \in \{1, \dots, N\} \\ \dot{z} = (A_i + D_i V_i E_i)z + b_i + Bu, & z \in \Lambda_i, i \in \{1, \dots, N\} \\ u = K(z - x) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ et $z \in \mathcal{R}^n$ sont respectivement le vecteurs d'état du système maître et du système esclave. $A_j \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $A_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $b_j \in \mathcal{R}^n$ et $b_i \in \mathcal{R}^n$ sont respectivement des matrices et des vecteurs constants. $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ et $u \in \mathcal{R}^m$ sont respectivement la matrice de commande et le vecteur de commande. $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$ est la matrice de gain du retour d'état. D_j, V_j, E_j, D_i, V_i et E_i sont respectivement des matrices réelles constantes de dimensions adéquates décrivant les incertitudes bornées en norme pour les matrices d'état A_j et A_i telles que $V_j^T V_j \leq I$ et $V_i^T V_i \leq I$.

Λ_j et Λ_i sont les partitions de l'espace d'état en cellules polyédriques définies respectivement par les descriptions polytopiques suivantes :

$$A_j = \{x \mid H_j^T x + h_j \leq 0\} \quad (4.2)$$

$$A_i = \{z \mid H_i^T z + h_i \leq 0\} \quad (4.3)$$

où :

$$H_j \in \mathcal{R}^{n \times r_j}, h_j \in \mathcal{R}^{r_j}, H_i \in \mathcal{R}^{n \times r_i}, \text{ et } h_i \in \mathcal{R}^{r_i}.$$

L'objectif de la synchronisation maître-esclave consiste à concevoir une loi de commande robuste u et de choisir une matrice constante de commande appropriée B telles que l'erreur de synchronisation $e = z - x \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ et la commande u soit réalisable.

4.3 Synchronisation chaotique robuste

À partir du système (4.1), la dynamique de l'erreur entre le système esclave et le système maître est décrite par :

$$\dot{e} = (A_i + D_i V_i E_i + BK)e + (A_{ij} + D_i V_i E_i - D_j V_j E_j)x + b_{ij} \quad (4.4)$$

où :

$$e = z - x, A_{ij} = A_i - A_j \text{ et } b_{ij} = b_i - b_j.$$

Remarque 4.1. Le système bouclé (4.4) est un système PWL de type continu puisque le système maître esclave décrit par (4.1) est un système PWL de type continu.

Définition 4.1. Le système maître-esclave (4.1) est globalement asymptotiquement synchronisé si le système d'erreur de synchronisation (4.4) est globalement asymptotiquement stable.

Théorème 4.1. [Mkaouar & Boubaker, 2017]

Pour un scalaire donné $\alpha_1 > 0$ et pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$, s'il existe une matrice $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ telle que la paire (A_i, B) du système PWL est contrôlable, , une matrice constante symétrique définie positive $S \in \mathcal{R}^{n \times n}$, une matrice constante $R \in \mathcal{R}^{m \times n}$, des matrices diagonales définies négatives $E_{ij} \in \mathcal{R}^{r_i \times r_i}$ et $F_{ij} \in \mathcal{R}^{r_j \times r_j}$ et des constantes strictement négatives β_{ij} et ξ_{ij} telles que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\begin{bmatrix} \xi_{ij} & \xi_{ij}|h_i|^T & \xi_{ij}|h_j|^T \\ * & \frac{1}{2}E_{ij} & 0 \\ * & * & \frac{1}{2}F_{ij} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & A_{ij} & SH_i & 0 & \Delta_3 & \Delta_6 & SE_i^T \\ * & \Delta_2 & H_i & H_j & \Delta_4 & \Delta_7 & 0 \\ * & * & 2E_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 2F_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Delta_5 & \Delta_8 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Delta_9 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.6)$$

où :

$$\Delta_1 = A_i S + SA_i^T + BR + R^T B^T + 2D_i D_i^T + D_j D_j^T + \alpha_1 S - \xi_{ij} b_{ij} b_{ij}^T$$

$$\Delta_2 = \beta_{ij} I + E_i^T E_i + E_j^T E_j$$

$$\Delta_3 = \xi_{ij} b_{ij} |h_i|^T - \frac{1}{2} S H_i M_i$$

$$\Delta_4 = -\frac{1}{2} H_i M_i$$

$$\Delta_5 = \frac{1}{2} E_{ij} - \xi_{ij} |h_i| |h_i|^T$$

$$\Delta_6 = \xi_{ij} b_{ij} |h_j|^T$$

$$\Delta_7 = -\frac{1}{2} H_j M_j$$

$$\Delta_8 = -\xi_{ij} |h_j| |h_j|^T$$

$$\Delta_9 = \frac{1}{2} F_{ij} - \xi_{ij} |h_j| |h_j|^T$$

alors le système maître-esclave (4.1) est globalement asymptotiquement stable pour la loi de commande :

$$u = Ke \quad (4.7)$$

où :

$$K = RS^{-1} \quad (4.8)$$

Démonstration

Conformément à la méthodologie empruntée dans [Mkaouar & Boubaker, 2012a], nous allons construire une fonction unique de Lyapunov $V(e) = e^T P e$ pour le système d'erreur de synchronisation (4.4) où $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est une matrice constante symétrique définie positive. En se basant sur le théorème 1.2 de Lyapunov énoncé au premier chapitre et pour $e \neq 0$ et pour un scalaire donné $\alpha_1 > 0$, l'erreur de synchronisation (4.4) est globalement asymptotiquement stable autour de son point d'équilibre si :

$$\dot{V}(e) \leq -\alpha_1 V(e) \quad (4.9)$$

En utilisant la dynamique de l'erreur de synchronisation (4.4), il est évident qu'on cherche les conditions qui assurent que $\forall e \neq 0$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) + \alpha_1 V(e) &= e^T ((A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P) e \\ &\quad + e^T ((D_i V_i E_i)^T P + P(D_i V_i E_i)) e \\ &\quad + b_{ij}^T P e + e^T P b_{ij} + x^T A_{ij}^T P e + e^T P A_{ij} x \\ &\quad + x^T (D_i V_i E_i - D_j V_j E_j)^T P e + e^T P (D_i V_i E_i - D_j V_j E_j) x \leq 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

En appliquant le lemme 1.2 de la S-procédure, énoncé au premier chapitre, on peut confirmer que les deux relations (4.10) et (4.11) suivante sont toujours équivalentes $\forall e \neq 0$ s'il existe deux constantes α_2 et α_3 négatives vérifiant (4.11) [voir démonstration en Annexe 5] :

$$\dot{V}(e) + \alpha_1 V(e) - \alpha_2 x^T x - \alpha_3 \leq 0 \quad (4.11)$$

En utilisant le lemme 1.5 défini au premier chapitre, les inégalités suivantes peuvent être écrites :

$$e^T E_i^T V_i^T D_i^T P e + e^T P D_i V_i E_i e \leq e^T P D_i D_i^T P e + e^T E_i^T E_i e \quad (4.12.a)$$

$$x^T E_i^T V_i^T D_i^T P e + e^T P D_i V_i E_i x \leq e^T P D_i D_i^T P e + x^T E_i^T E_i x \quad (4.12.a)$$

$$(-1)x^T E_j^T V_j^T D_j^T P e + (-1)e^T P D_j V_j E_j x \leq e^T P D_j D_j^T P e + x^T E_j^T E_j x \quad (4.12.a)$$

alors la LMI suivante peut être déduite à l'aide des relations (4.11) et (4.12) telle que:

$$\begin{aligned} &e^T ((A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P) e + e^T P D_i D_i^T P e \\ &\quad + e^T E_i^T E_i e + b_{ij}^T P e + e^T P b_{ij} + x^T A_{ij}^T P e + e^T P A_{ij} x \\ &\quad + e^T P D_i D_i^T P e + x^T E_i^T E_i x + e^T P D_j D_j^T P e + x^T E_j^T E_j x \leq 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

En utilisant les relations (4.10) et (4.13), nous pouvons écrire que :

$$W^T F_0 W \leq 0 \quad (4.14)$$

où :

$$W = [e^T \quad x^T \quad 1]^T$$

et :

$$F_0 = \begin{bmatrix} \Phi_1 & * & * \\ A_{ij}^T P & -\alpha_2 I + E_i^T E_i + E_j^T E_j & * \\ b_{ij}^T P & 0 & -\alpha_3 \end{bmatrix}$$

avec:

$$\Phi_1 = (A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P + 2PD_i D_i^T P + PD_j D_j^T P + E_i^T E_i$$

Dans F_0 , * désigne un bloc symétrique et $I \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ est la matrice identité.

En se basant sur la description des cellules polyédriques (4.2) et (4.3) et pour toutes petites constantes positive satisfaisant $0 < \xi_j \ll 1$ et $0 < \sigma_j \ll 1$, il existe des vecteurs colonnes avec des éléments positifs $\delta_i \in \mathfrak{R}^{r_i \times l}$ et $\gamma_j \in \mathfrak{R}^{r_j \times l}$ permettant d'écrire dans les cellules ouvertes pour tout couples d'indices $i, j \in Q$:

$$\delta_i^T H_i^T z + \delta_i^T h_i \leq 0 \rightarrow \delta_i^T H_i^T e + \delta_i^T H_i^T x + \delta_i^T h_i \leq 0$$

$$\gamma_j^T H_j^T x + \gamma_j^T h_i \leq -\xi_j x^T x - \sigma_j$$

Les deux relations précédentes peuvent être aussi écrites comme suit :

$$W^T F_1 W \leq 0 \quad (4.15)$$

$$W^T F_2 W \leq 0 \quad (4.16)$$

où :

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ \delta_i^T H_i^T & \delta_i^T H_i^T & 2\delta_i^T h_i \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 2\xi_j I & * \\ 0 & \gamma_j^T H_j^T & 2\gamma_j^T h_j + 2\sigma_j \end{bmatrix}$$

En utilisant le lemme 1.2 de la S-procédure énoncé au premier chapitre et s'il existe $\tau_{1,ij} \geq 0$ et $\tau_{2,ij} \geq 0$, nous pouvons écrire en utilisant les LMIs (4.14), (4.15) et (4.16) que :

$$F_0 - \tau_{1,ij} F_1 - \tau_{2,ij} F_2 \leq 0 \quad (4.17)$$

Ce qui peut être écrit aussi comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & * & * \\ A_{ij}^T P & \Phi_2 & * \\ b_{ij}^T P - \tau_{1,ij} \delta_i^T H_i^T & -\tau_{1,ij} \delta_i^T H_i^T - \tau_{2,ij} \gamma_j^T H_j^T & \Phi_3 \end{bmatrix} \leq 0$$

Avec :

$$\Phi_2 = -\alpha_2 I + E_i^T E_i + E_j^T E_j - 2\tau_{2,ij} \xi_j I$$

$$\Phi_3 = -\alpha_3 - 2\tau_{1,ij} \delta_i^T h_i - 2\tau_{2,ij} (\gamma_j^T h_j + \sigma_j)$$

Soient :

$$\beta_{1,ij} = -\tau_{1,ij} \delta_i$$

$$\beta_{2,ij} = -\tau_{2,ij} \gamma_j$$

$$\beta_{3,ij} = -\alpha_2 - 2\tau_{2,ij} \xi_j$$

$$\beta_{4,ij} = -\alpha_3 - 2\tau_{2,ij} \sigma_j$$

telles que:

$$\beta_{1,ij}(k)_{k=1,\dots,r_i} \leq 0, \beta_{2,ij}(k)_{k=1,\dots,r_j} \leq 0, \beta_{3,ij} \leq 0 \text{ et } \beta_{4,ij} \leq 0$$

L'inégalité (4.17) peut être écrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & * & * \\ A_{ij}^T P & \beta_{3,ij} I + E_i^T E_i + E_j^T E_j & * \\ b_{ij}^T P + \beta_{1,ij}^T H_i^T & \beta_{1,ij}^T H_i^T + \beta_{2,ij}^T H_j^T & 2\beta_{1,ij}^T h_i + 2\beta_{2,ij}^T h_j + \beta_{4,ij} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.18)$$

où:

$$\Phi_1 = (A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P + 2PD_i D_i^T P + PD_j D_j^T P + E_i^T E_i$$

Soient :

$$\beta_{1,ij} = E_{ij}^{-1} |h_i|$$

$$\beta_{2,ij} = F_{ij}^{-1} |h_j|$$

$$h_i = M_i |h_i|$$

$$h_j = M_j |h_j|$$

où $|h_i| \in \mathfrak{R}^{r_i}$ et $|h_j| \in \mathfrak{R}^{r_j}$ deux vecteurs colonnes.

$E_{ij} \in \mathcal{R}^{r_i \times r_i}$ et $F_{ij} \in \mathcal{R}^{r_j \times r_j}$ sont des matrices diagonales définies négatives, $M_i \in \mathcal{R}^{r_i \times r_i}$ et $M_j \in \mathcal{R}^{r_j \times r_j}$ sont des matrices diagonales définies comme suit :

si $h_q(k)_{k=1, \dots, r_q} \geq 0$ alors $M_q(k, k) = 1, q = i, j$

si $h_q(k)_{k=1, \dots, r_q} < 0$ alors $M_q(k, k) = -1, q = i, j$

En utilisant le lemme 1.3 du complément de Schur énoncé dans le premier chapitre, la BMI (4.18) est satisfaite lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\beta_{4,ij} + 2|h_i|^T M_i E_{ij}^{-1} |h_i| + 2|h_j|^T M_j F_{ij}^{-1} |h_j| < 0 \quad (4.19)$$

$$X_1 - X_2 \Omega^{-1} X_2^T \leq 0 \quad (4.20)$$

où :

$$X_1 = \begin{bmatrix} \Phi_1 & * \\ A_{ij}^T P & \beta_{3ij} I + E_i^T E_i + E_j^T E_j \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} P b_{ij} + H_i E_{ij}^{-1} |h_i| \\ H_i E_{ij}^{-1} |h_i| + H_j F_{ij}^{-1} |h_j| \end{bmatrix}$$

Soient :

$$\Omega = \beta_{4,ij} + 2|h_i|^T M_i E_{ij}^{-1} |h_i| + 2|h_j|^T M_j F_{ij}^{-1} |h_j|$$

$$\beta_{4,ij} = \xi_{ij}^{-1}$$

$$\beta_{3,ij} = \beta_{ij}$$

$$\Psi = [|h_i| \quad |h_j|]^T$$

Nous obtenons alors à partir de (4.20) :

$$\Omega = \xi_{ij}^{-1} + \Psi^T \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} \right)^{-1} \Psi < 0 \quad (4.21)$$

En multipliant (4.21) par ξ_{ij}^2 , en admettant que $E_{ij} \leq M_i E_{ij} \leq -E_{ij}$ et $F_{ij} \leq M_j F_{ij} \leq -F_{ij}$ et en utilisant le lemme de complément de Schur, la LMI (4.5) est alors obtenue.

En utilisant le lemme 1.4 de l'inversion matricielle énoncé au premier chapitre, nous pouvons obtenir à partir de (4.21) :

$$\Omega^{-1} = \xi_{ij} - \xi_{ij}^2 \Psi^T \left(\xi_{ij} \Psi \Psi^T + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} \right)^{-1} \Psi \quad (4.22)$$

Soit $S = P^{-1}$, la multiplication à droite et à gauche de (4.20) par $\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ donne :

$$X_3 - X_4 \Omega^{-1} X_4^T \leq 0 \quad (4.23)$$

où :

$$X_3 = \begin{bmatrix} SA_i^T + R^T B^T + A_i S + BR + \alpha_1 S + 2D_i D_i^T + D_j D_j^T + SE_i^T E_i S & * \\ & A_{ij}^T & \beta_{ij} I + E_i^T E_i + E_j^T E_j \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} b_{ij} + SH_i E_{ij}^{-1} |h_i| \\ H_i E_{ij}^{-1} |h_i| + H_j F_{ij}^{-1} |h_j| \end{bmatrix}$$

En substituant (4.22) dans (4.23), en admettant que $E_{ij} \leq M_i E_{ij} \leq -E_{ij}$ et $F_{ij} \leq M_j F_{ij} \leq -F_{ij}$ et en utilisant le complément de Schur, la LMI suivante est obtenue via quelques modifications [voir Annexe 6] :

$$\begin{bmatrix} \Delta & A_{ij} & SH_j & 0 & \Delta_3 & \Delta_6 \\ * & \Delta_2 & H_i & H_i & \Delta_4 & \Delta_7 \\ * & * & 2E_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 2F_{ij} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Delta_5 & \Delta_8 \\ * & * & * & * & * & \Delta_9 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.24)$$

avec :

$$\Delta = A_i S + S A_i^T + B R + R^T B^T + 2 D_i D_i^T + D_j D_j^T + S E_i^T E_i S + \alpha_1 S - \xi_{ij} b_{ij} b_{ij}^T$$

En utilisant le complément de Schur pour (4.24), la LMI (4.6) est alors obtenue.

4.4 Application

L'efficacité de l'algorithme proposé dans ce chapitre sera démontrée dans ce paragraphe sur le circuit du Chua, et sur une nouvelle famille hyper-chaotique d'attracteurs multi-spirales.

4.4.1 Exemple 4.1 : Système de Chua non dimensionnel

Afin de démontrer l'efficacité de la solution proposée dans ce chapitre, le théorème 4.1 sera appliqué dans ce paragraphe sur le modèle du système de Chua non dimensionnel [Chua *et al.*, 2000] décrit dans l'exemple 1.3 dans la section §1.4.2 du premier chapitre. Pour ce système écrit sous la forme (4.1) sous une représentation polytopique de l'espace d'état (4.2) et (4.3), les résultats de simulation sont conduits pour les conditions initiales $x_0 = [-1 \quad -0.5 \quad -0.5]^T$ et $z_0 = [0 \quad 0.7 \quad -0.5]^T$. L'incertitude bornée en norme est conçue pour $V_j = 0.4$ et $V_i = 0.2$ où les paramètres du système sont donnés par $\alpha = 9$, $\beta = 100/7$, $E = 1$, $G_a = -1/7$, $G_b = 2/7$, $\beta_m = 96/7$, $\beta_M = 106/7$ et $d = 5$. La Figure 4.1 affiche les signaux d'erreur du système maître-esclave chaotique non encore synchronisés.

Les LMIs (4.5) et (4.6) sont résolus en utilisant la boîte à outils LMI du logiciel Matlab pour un vecteur de commande $B = [5 \ 10^3 \ 0 \ 0]^T$ pour le paramètre $\alpha_1 = 10^{-4}$. Après 5 itérations, les LMIs sont réalisables et le vecteur de gain de commande (4.8) est alors déduit tel que :

$$K = 10^{-3}[-0.7326 \quad -2.5628 \quad -0.1024]$$

La Figure 4.2 représente les variables d'état synchronisées du système PWL maître-esclave avec incertitudes bornées en norme via le contrôleur de retour d'état robuste représenté par la Figure 4.3. Les résultats de simulation donnés par la Figure 4.4 prouvent que la synchronisation chaotique robuste du système maître et du système esclave a été bien achevée en observant que toutes les erreurs de synchronisation s'annulent après un temps assez court. Finalement, les dynamiques de commutation des variables d'état entre les différentes cellules polyédriques sont représentées respectivement par les Figures 4.5 et 4.6.

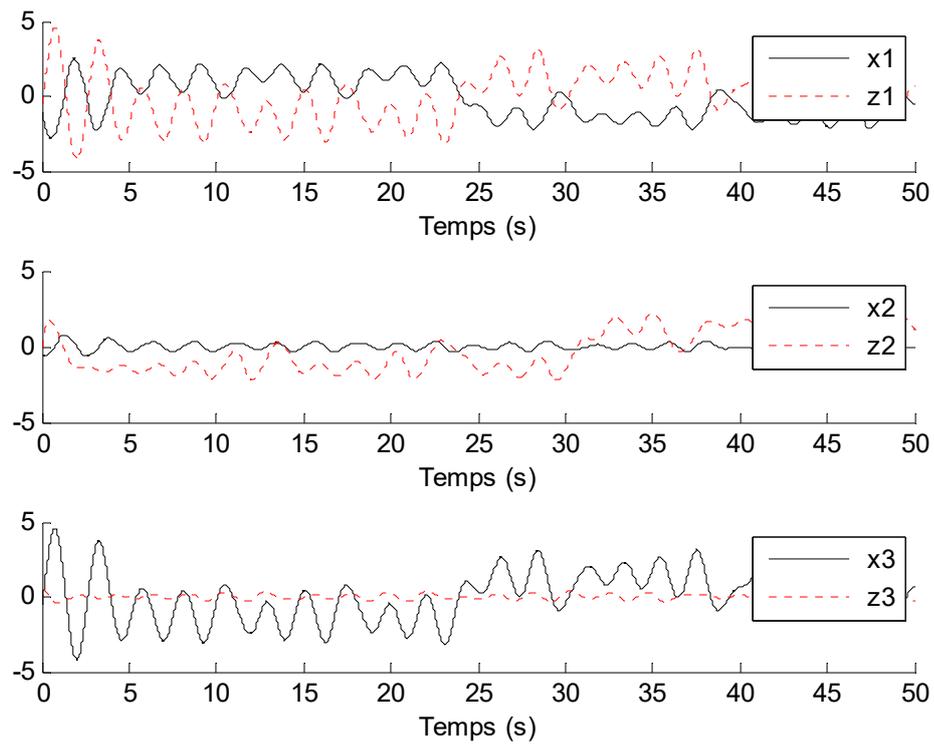


Figure 4.1 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Variables d'état non encore synchronisées

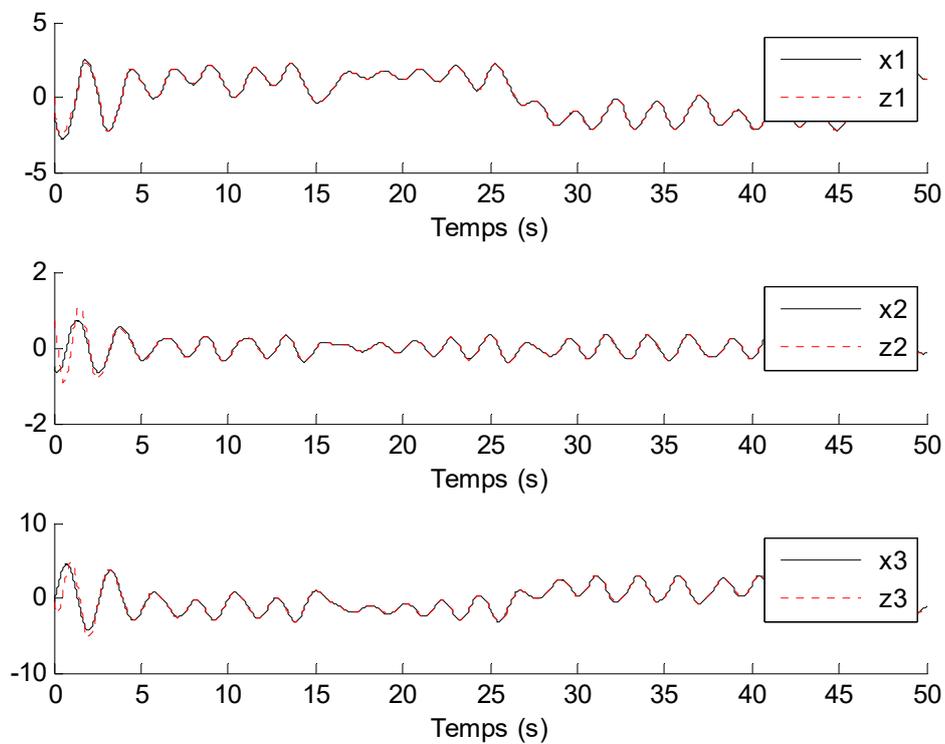


Figure 4.2 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Variables d'état synchronisées

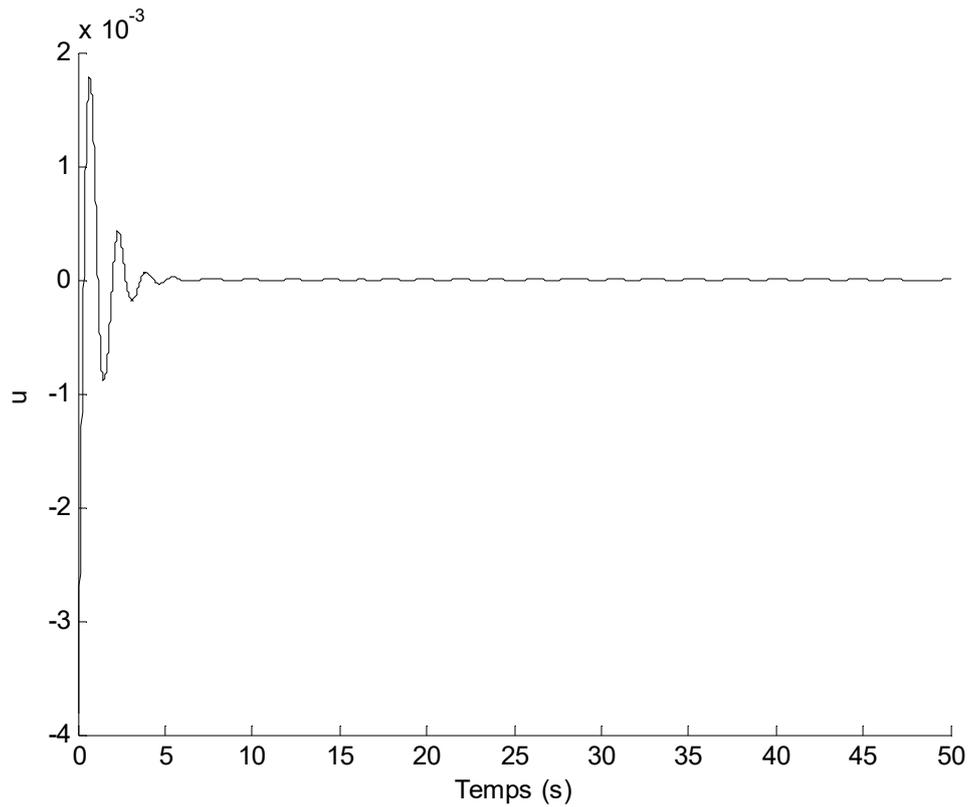


Figure 4.3 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Loi de commande robuste

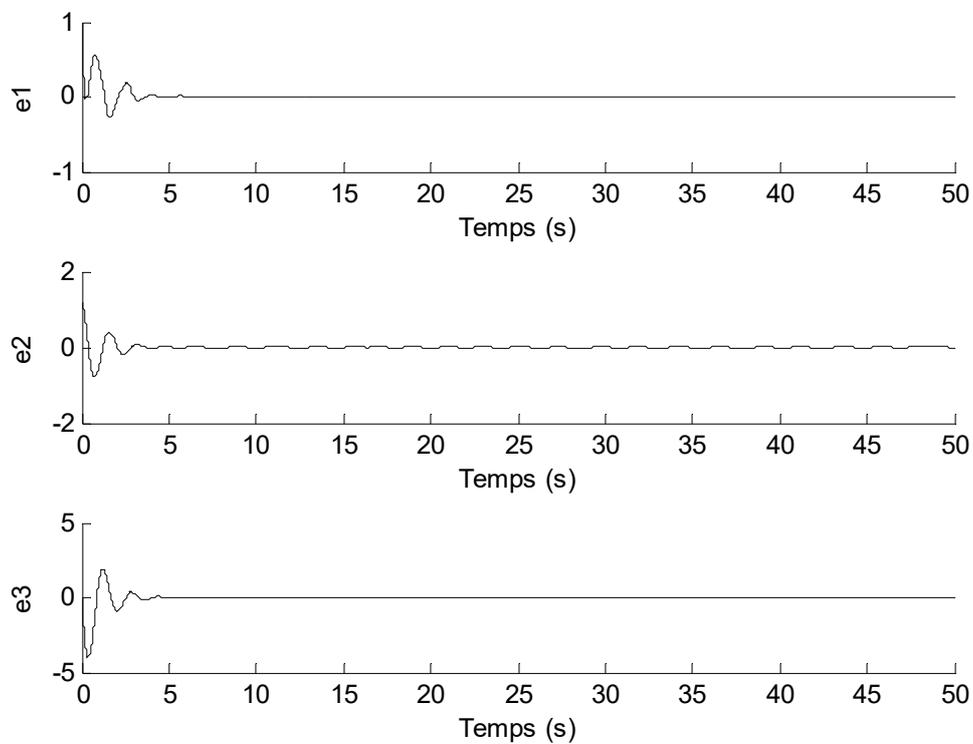


Figure 4.4 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Erreur de synchronisation

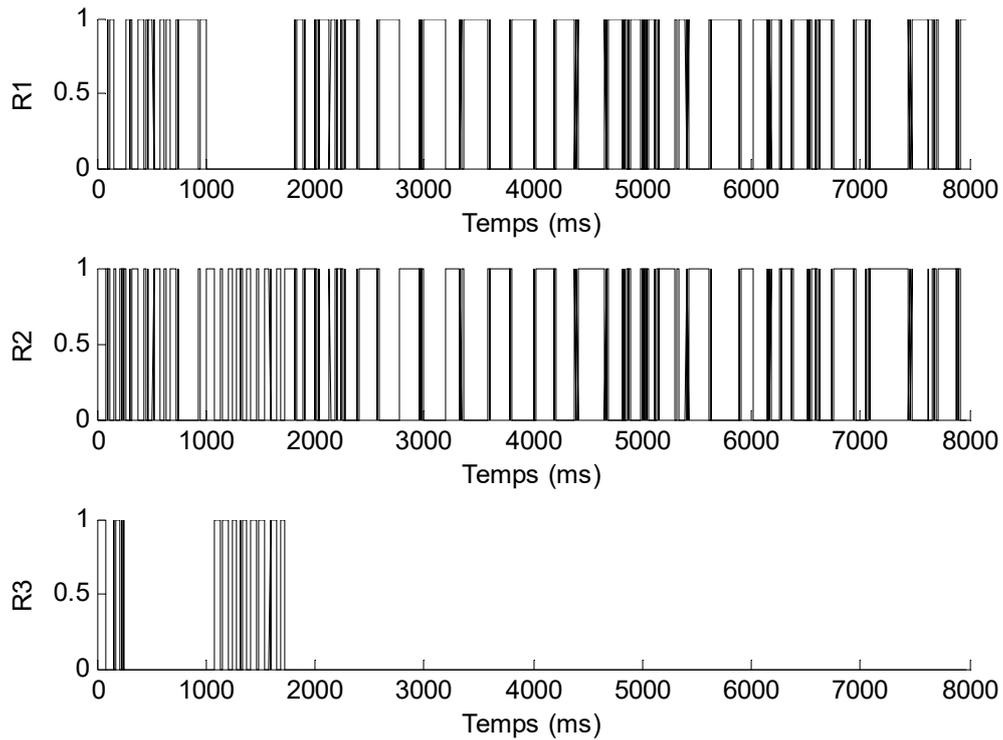


Figure 4.5 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Evolution des variables d'état du maître entre les différentes cellules polytopiques

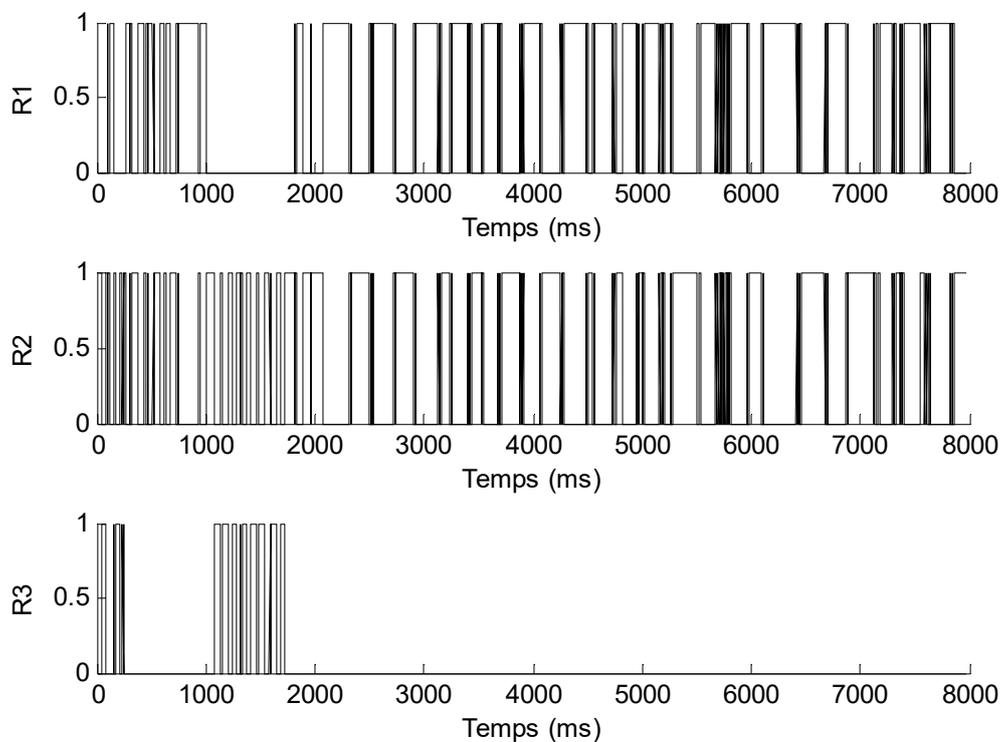


Figure 4.6 Système de Chua non dimensionnel avec incertitudes bornées en norme : Evolution des variables d'état de l'esclave entre les différentes cellules polytopiques

4.4.2 Exemple 4.2 : Nouvelle famille hyper-chaotique

Considérons la nouvelle famille hyper-chaotique récemment proposée dans [Ontanon-Garcia *et al.*, 2014] décrite par :

$$\dot{x} = Ax + b$$

où $x \in \mathfrak{R}^4$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & -\alpha_{33} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}$$

Soient :

$$\beta_3 = \beta_4 = \begin{cases} 1.8 & \text{si } x \in \Lambda_1 \\ 0.9 & \text{si } x \in \Lambda_2 \\ 0 & \text{si } x \in \Lambda_3 \\ -0.9 & \text{si } x \in \Lambda_4 \end{cases}$$

avec :

$$\Lambda_1 = \{x \in \mathfrak{R}^4 | 0.9 \leq x_1 < d\},$$

$$\Lambda_2 = \{x \in \mathfrak{R}^3 | 0.3 \leq x_1 < 0.9\},$$

$$\Lambda_3 = \{x \in \mathfrak{R}^3 | -0.3 < x_1 < 0.3\},$$

$$\Lambda_4 = \{x \in \mathfrak{R}^3 | -d < x_1 \leq -0.3\}$$

et $d = 2$.

Ce type de système peut être décrit sous la forme du modèle PWL (4.1) avec $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$A_i = A_j = A$$

et :

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.8 \\ 1.8 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9 \\ 0.9 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.9 \\ -0.9 \end{pmatrix}.$$

où $\alpha_{31m} < \alpha_{31} < \alpha_{31M}$ est l'incertitude bornée en norme.

Les descriptions polytopiques (4.2) et (4.3) associées aux régions polyédriques sont données par :

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad h_1 = \begin{bmatrix} -d \\ 0.9 \end{bmatrix} \quad h_2 = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad h_3 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix} \quad h_4 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -d \end{bmatrix}$$

Les incertitudes bornées en norme sont décrites par les matrices suivantes $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$E_i = E_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D_i = D_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_{31M} - \alpha_{31m}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V_i et V_j sont deux scalaires choisis dans $[-1, 1]$.

Les résultats de simulation sont obtenus pour les conditions initiales $x_0 = [-1 \quad -0.5 \quad -0.5 \quad 1]^T$ et $z_0 = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.2]^T$, les scalaires $V_i = 0.5$ et $V_j = 0.4$ avec les paramètres $\alpha_{31} = 1.5$, $\alpha_{32} = 1$, $\alpha_{33} = 1$, $\alpha_{31m} = 1.11$ et $\alpha_{31M} = 1.81$.

La Figure 4.7 représente le plan de phase exhibant la nature hyperchaotique du système et la Figure 4.8 montre la dynamique hyperchaotique des états du système maître et du système esclave non encore synchronisés.

Les LMIs (4.5) et (4.6) sont résolus en utilisant la boîte à outils LMI du logiciel Matlab pour une matrice de commande $B = [5 \cdot 10^3 \quad 0 \quad 0]^T$ et le paramètre $\alpha_1 = 10^{-4}$. Après 4 itérations, les contraintes LMI sont réalisables le vecteur de gain de commande (4.8) est alors déduit :

$$K = 10^{-3}[-0.5234 \quad -0.1681 \quad 0.1140 \quad -0.0189]$$

Les variables d'état du système hyper-chaotique maître-esclave sous la loi de commande robuste sont données par la Figure 4.9. La Figure 4.10 montre les erreurs de synchronisation du système hyper-chaotique maître-esclave et prouve que la synchronisation chaotique robuste a été parfaitement achevée. La loi de commande qui est bien réalisable est représentée par la Figure 4.11. Enfin, la Figure 4.12 et la Figure 4.13 montrent respectivement la commutation des variables d'état du système maître et du système esclave entre les différentes cellules polytopiques.

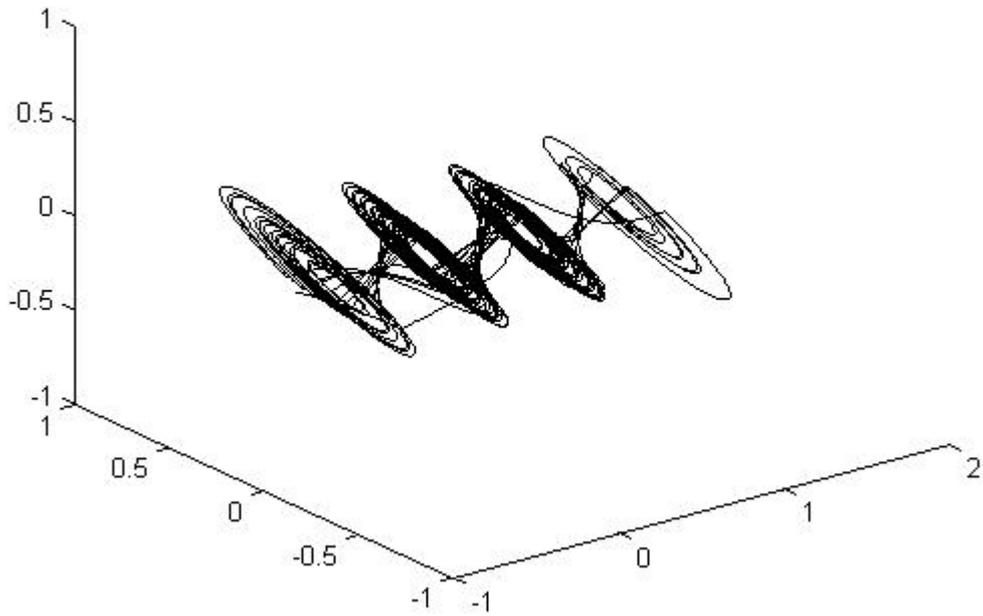


Figure 4.7 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Plan de phase

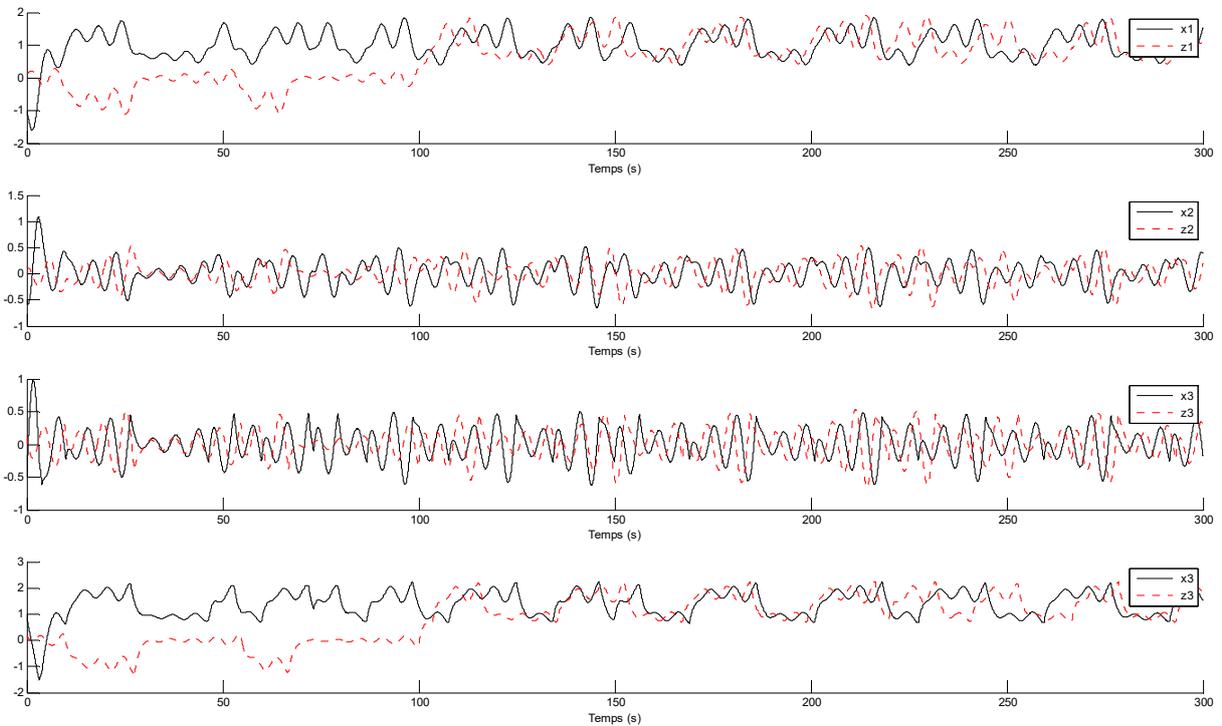


Figure 4.8 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Variables d'état non encore synchronisées

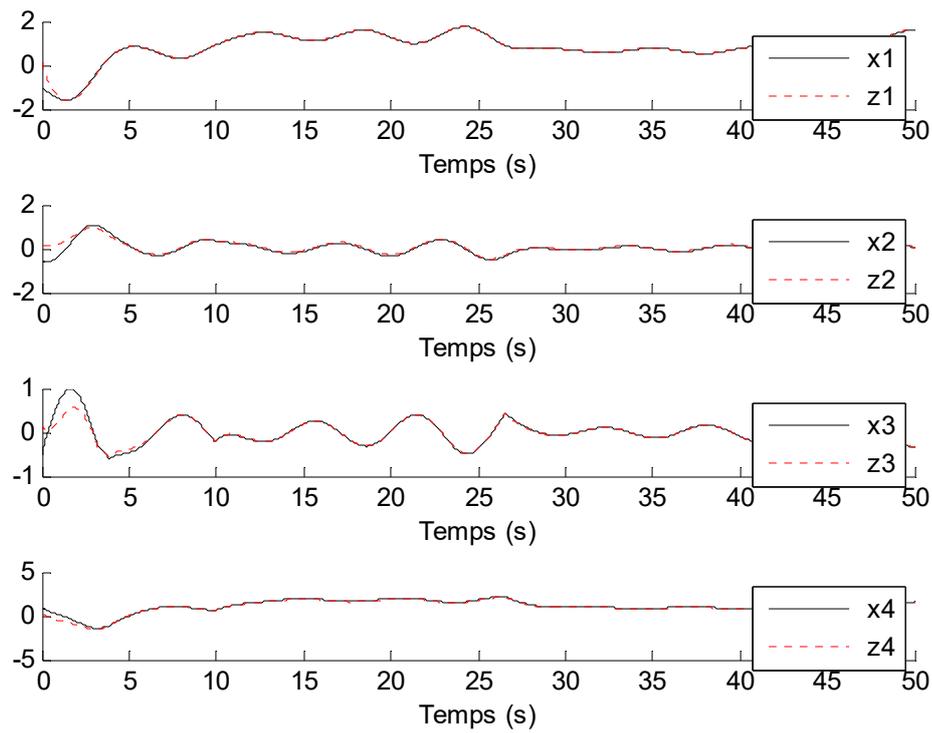


Figure 4.9 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Variables d'état synchronisées

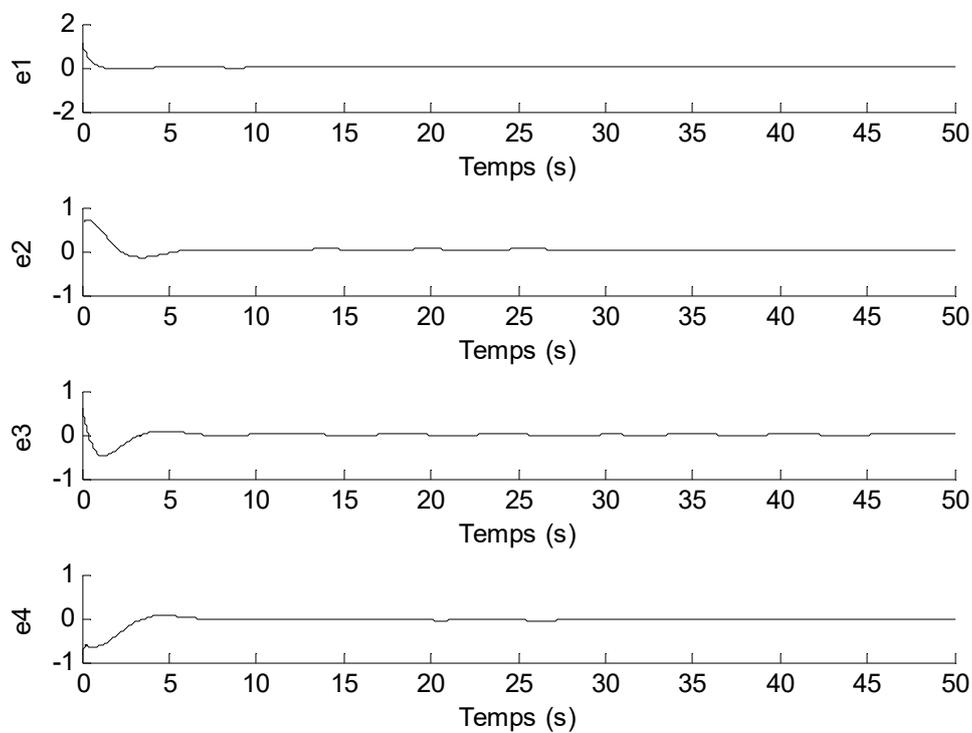


Figure 4.10 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Erreur de synchronisation

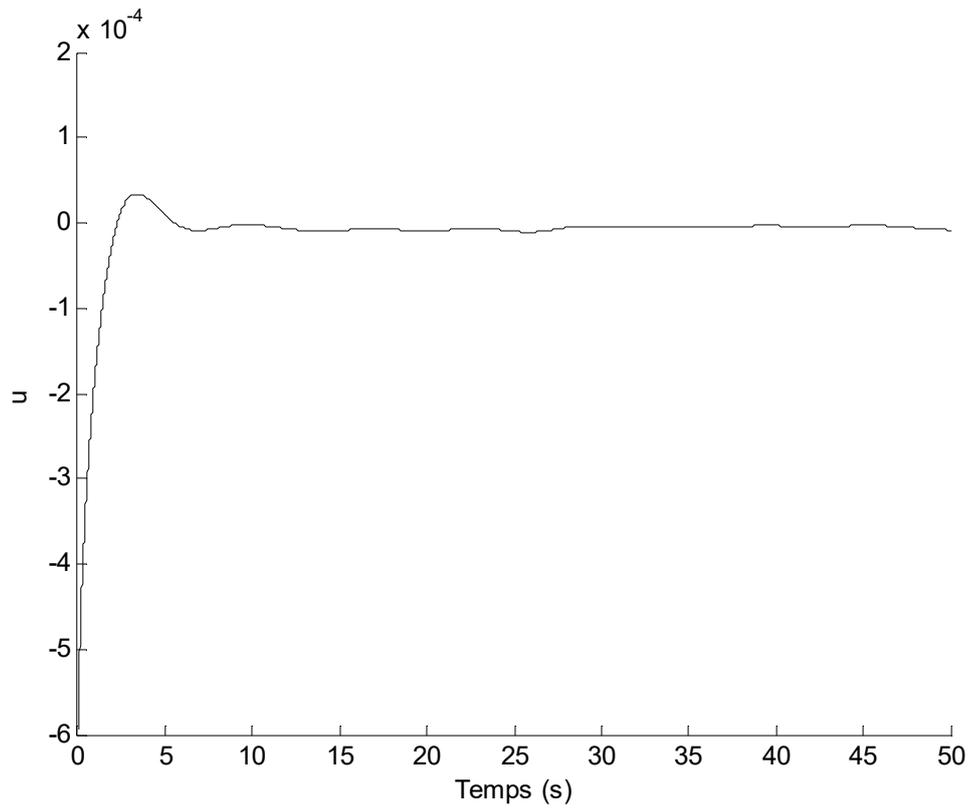


Figure 4.11 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Loi de commande

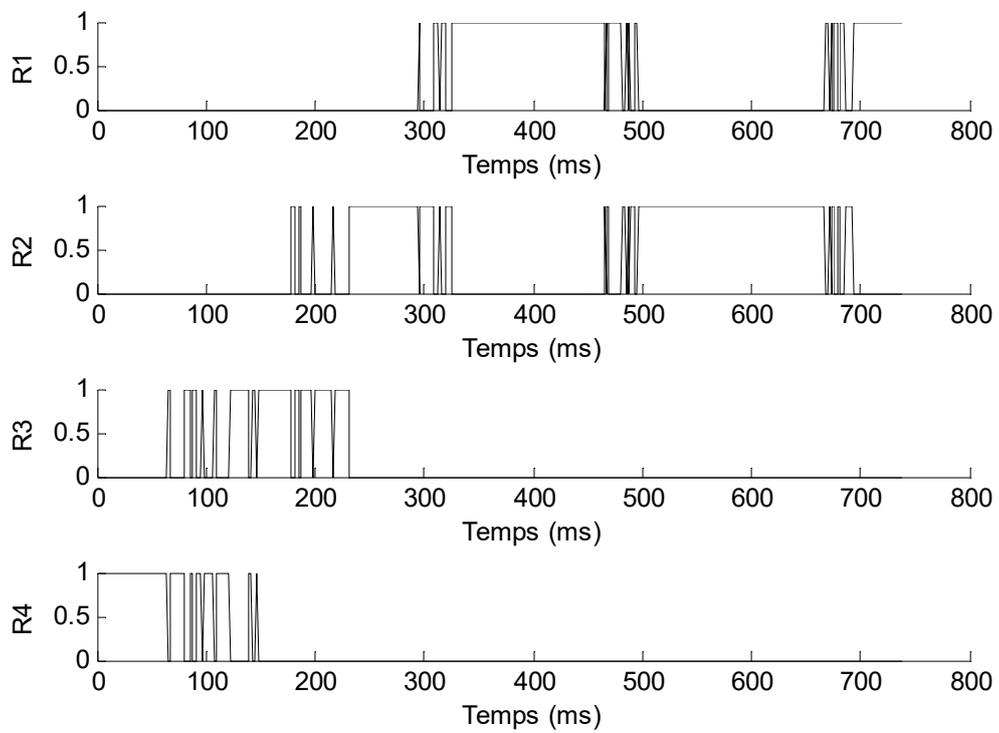


Figure 4.12 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Evolution des variables d'état du maître entre les différentes cellules polytopiques

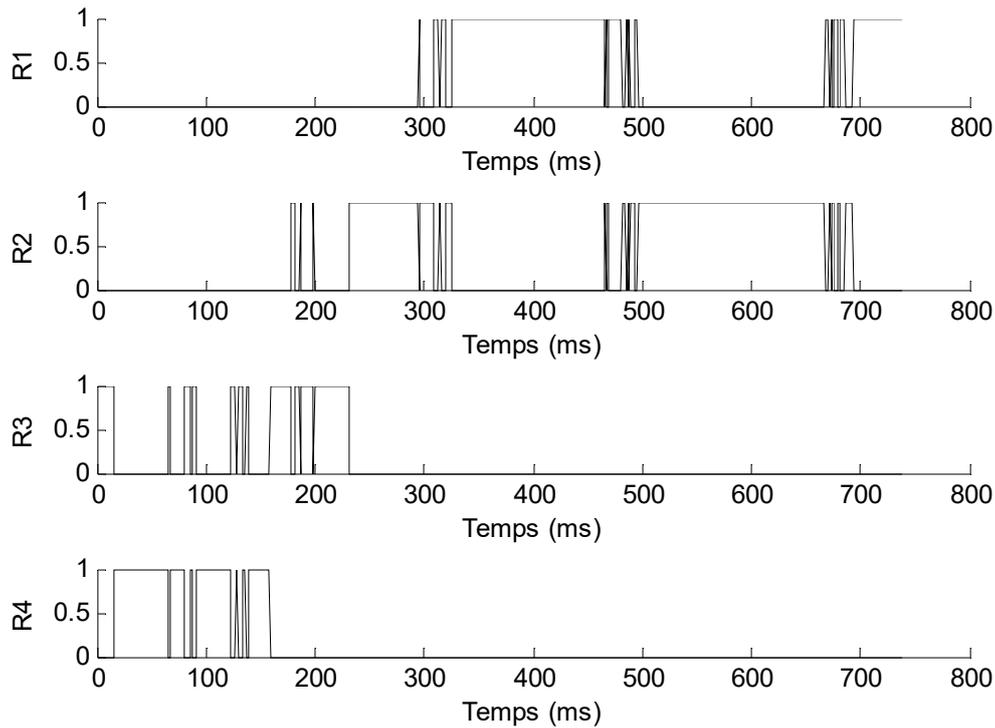


Figure 4.13 Système hyperchaotique avec incertitudes bornées en norme : Evolution des variables d'état de l'esclave entre les différentes cellules polytopiques

4.5 Etude comparative

Dans le but de démontrer la robustesse de la solution proposée, une étude comparative est établie entre l'algorithme proposé dans ce chapitre et celui proposé dans le chapitre précédent.

Pour cela nous considérons l'exemple du système hyper-chaotique pour les deux cas de paramètres d'incertitude suivants :

- $V_i = 0.4$ et $V_j = 0.5$
- $V_i = 0.7$ et $V_j = 0.4$

Pour l'approche proposée dans ce chapitre, le gain de commande obtenu pour les deux cas d'incertitude est donné par :

$$K = 10^{-3}[-0.3538 \quad -0.1241 \quad 0.1537 \quad -0.0199]$$

Il est clair que la synthèse de la loi de commande pour l'approche proposée dans le chapitre 3 est établie pour le système nominal. Le gain de commande obtenu en appliquant le théorème 3.1 est donné par :

$$K = 10^{-3}[-0.3278 \quad -0.1277 \quad 0.1485 \quad -0.0235]$$

La Figure 4.14 illustre l'évolution des erreurs de synchronisation pour $V_i = 0.4$ et $V_j = 0.5$ en utilisant les deux approches. Nous pouvons observer des dynamiques similaires qui prouvent la robustesse de l'approche [Mkaouar & Boubaker, 2012a] pour certaines incertitudes que nous qualifions de tolérables.

Pour le cas où $V_i = 0.7$ et $V_j = 0.4$, la loi de commande robuste énoncée par la théorème 4.1 permet d'assurer une parfaite synchronisation des systèmes incertains. La Figure 4.15 représente les dynamiques des erreurs de synchronisation du système hyper-chaotique maître-esclave incertain. D'un autre côté, le schéma énoncé dans le troisième chapitre ne permet plus de synchroniser les deux systèmes hyper-chaotiques. En effet, la dynamique des erreurs de synchronisation deviennent instables. Dans ce cas, le système en boucle fermée n'appartient plus à la classe des systèmes PWL continus. Comme l'état de l'esclave n'a plus de dynamique de commutation car il n'est plus capable d'être synchronisé avec le maître. Cette constatation prouve la non-robustesse de l'approche énoncée par le théorème 3.1 [Mkaouar & Boubaker, 2012a] lorsque les incertitudes deviennent plus importantes et confirme l'efficacité de l'approche proposée dans le présent chapitre.

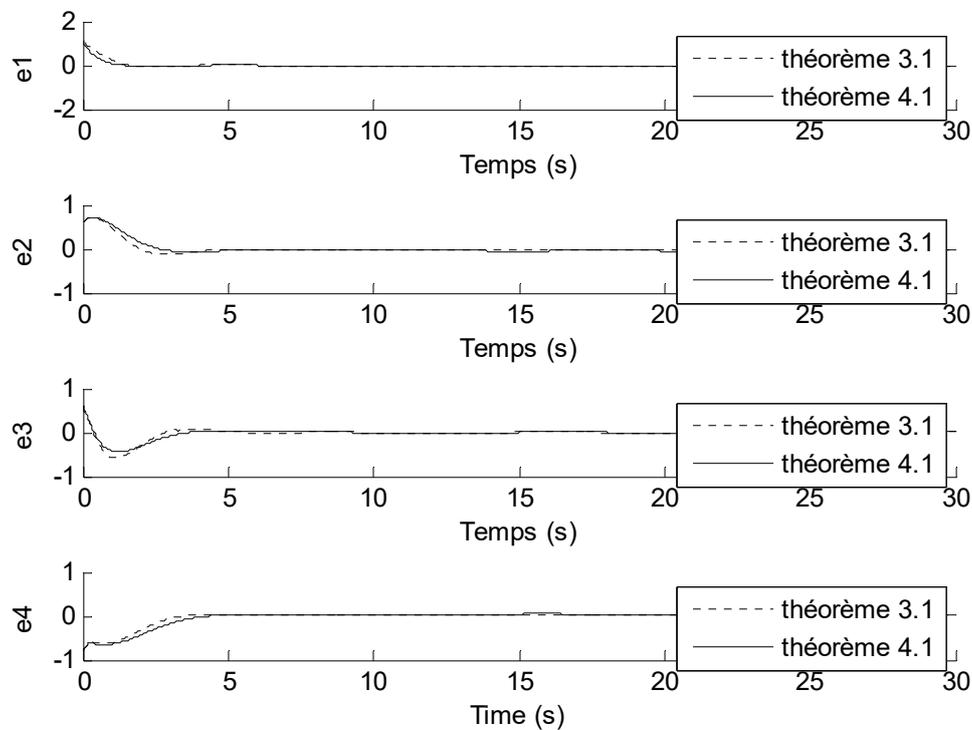


Figure 4.14. Système hyper-chaotique avec incertitudes bornées en norme : Erreur de synchronisation pour des paramètres d'incertitude tolérable $V_i = 0.4$ et $V_j = 0.5$ pour les deux approches

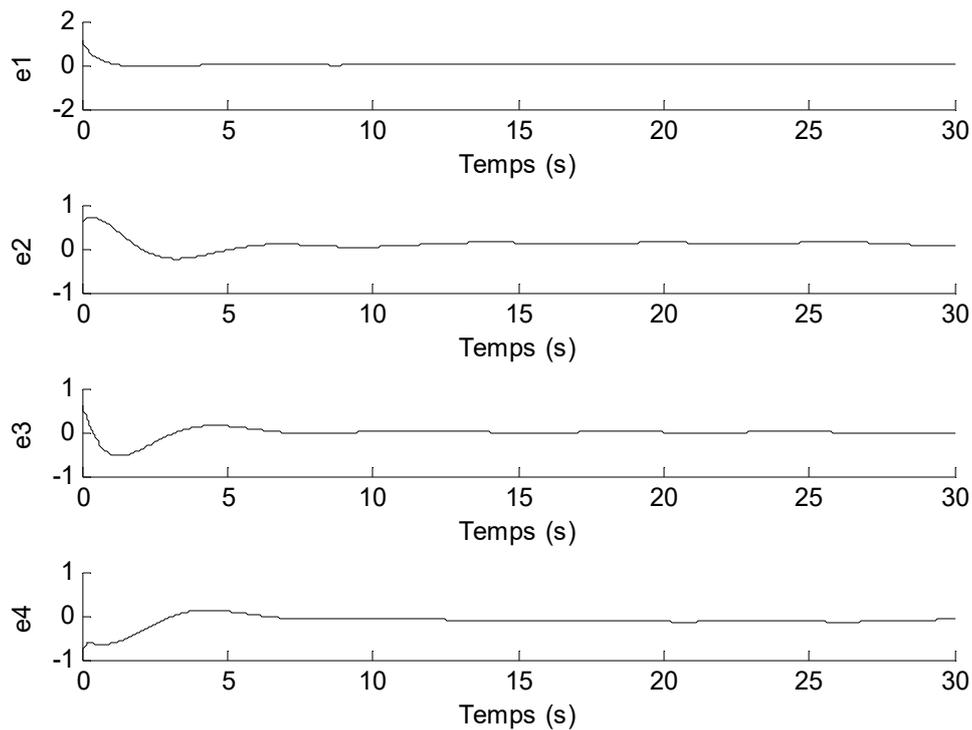


Figure 4.15. Système hyper-chaotique avec incertitudes bornées en norme : Erreur de synchronisation pour les paramètres d'incertitude $V_i = 0.7$ et $V_j = 0.4$ pour l'approche robuste

4.6 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, une approche de synchronisation chaotique robuste est proposée pour les systèmes chaotiques PWL de type continu avec incertitudes bornées en norme via un contrôleur à retour d'état. Le problème de synchronisation est formulé comme étant un problème de stabilité globale de la dynamique de l'erreur de synchronisation. Les critères de synchronisation proposés sont développés en utilisant la théorie de Lyapunov et des outils de résolutions LMI. La nouvelle méthode de synchronisation robuste est une extension de l'algorithme proposé dans le troisième chapitre en tenant compte des incertitudes des paramètres qui affectent à la fois les systèmes maître et esclave. L'efficacité de la méthode proposée a été démontrée sur le générateur le plus connu du chaos, le circuit du Chua, et sur une nouvelle famille hyper-chaotique d'attracteurs multi-spirales. Enfin, et afin de prouver la robustesse de l'approche proposée, une étude comparative est établie avec l'algorithme énoncé dans le chapitre précédent et l'efficacité de cette méthode est démontrée.

Conclusion Générale

Ces travaux constituent une contribution à la théorie de la synchronisation des systèmes PWL de type continu, classe particulière des systèmes hybrides, via une approche de Lyapunov et par utilisation d'une commande par retour d'état. En effet, de nouvelles conditions de synchronisation maître-esclave ont été établies pour les trois cas de systèmes suivants : 1) les systèmes contrôlés, 2) les systèmes chaotiques et, 3) les systèmes chaotiques incertains avec incertitude bornée en norme. Tous ces systèmes sont dotés d'une dynamique qui exhibe un comportement de commutation.

Une étude bibliographique a révélé que les travaux se rapportant à la résolution du problème de la synchronisation des systèmes PWL de type continu en se basant sur une approche de Lyapunov sont rares voire non explorés. En effet et en ce qui concerne les systèmes PWL contrôlés, le peu de travaux qui existent dans ce sens ont résolu ce problème en utilisant le concept de convergence des systèmes non linéaires et ont évité d'utiliser le concept de la stabilité au sens de Lyapunov. Dans ce mémoire, nous avons réussi à proposer une approche qui permet de résoudre ce problème au sens de Lyapunov en utilisant principalement le principe de la S-procédure et par résolution de conditions LMIs. Une étude comparative a été proposée pour montrer la supériorité de notre approche en terme de conditions de stabilité plus strictes par rapport à l'approche utilisant le principe de convergence.

En ce qui concerne la synchronisation chaotique des systèmes PWL, une solution a été proposée par une extension des résultats établis pour les systèmes contrôlés. Les conditions établies sont formulées en LMIs. Pour vérifier l'efficacité de notre proposition, une étude comparative a été dressée avec deux autres approches de synchronisation non linéaires assez récentes usant des outils LMI. Quatre systèmes chaotiques tirés de la littérature ont été utilisés pour prouver la supériorité de notre approche au sens de plusieurs critères.

Concernant la synchronisation chaotique robuste, des incertitudes de type borné en norme ont été considérées. Une loi de commande a été proposée pour donner une nouvelle solution à ce problème complexe sous forme de conditions LMI. L'approche proposée est une extension de l'algorithme présenté dans le troisième chapitre. Pour valider cette approche de synchronisation chaotique robuste, un système hyper-chaotique a été utilisé. Une comparaison entre cette approche et l'approche de synchronisation chaotique présentée au chapitre trois a été effectuée afin de mettre en valeur la robustesse de ce dernier algorithme.

Ce travail donne lieu à des perspectives assez vastes. En effet, comme continuation, nous espérons étendre ces travaux pour la génération d'une solution de synchronisation par retour de sortie ou retour d'état avec observateur pour répondre au cas où certains capteurs font défaut. La généralisation de ces lois de commande en prenant en considération des incertitudes et des bruits qui viennent s'appliquer à d'autres paramètres des systèmes PWL contrôlés ou chaotiques est aussi envisageable. Nous pensons aussi que la reconduction de ces mêmes travaux pour le cas des systèmes PWL de type discontinu sera d'une grande utilité pour des applications industrielles plus vastes.

Annexe 1

Approche de Jiang and Zheng

[Jiang & Zheng, 2005]

Approche de Jiang et Zheng [Jiang & Zheng, 2005]

Considérons le système maître-esclave chaotique décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + g(x) \\ \dot{z} = Az + g(z) + h(t) + Bu \\ u = K(x - z) \end{cases} \quad (\text{A1.1})$$

où $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ est une matrice constante, $g(x)$ et $g(z)$ sont deux fonctions non linéaires continues satisfaisant :

$$\|g(x) - g(z)\| \leq \rho_L \|x - z\| \quad (\text{A1.2})$$

où ρ_L est une constante Lipchitzienne.

La dynamique d'erreur pour le système maître-esclave (A1.1) est alors donnée par :

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{z} = (A - BK)e + g(x) - g(z) \quad (\text{A1.3})$$

Théorème A1.1 :

Si une matrice appropriée $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ est choisie telle que le couple (A, B) est contrôlable, s'ils existent des matrices $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ et $Y \in \mathcal{R}^{n \times m}$ tels que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$P = P^T > 0 \quad (\text{A1.4})$$

$$\begin{bmatrix} AP + PA^T + 2(\delta - \rho_L)P - YB^T - BY^T & \rho_L I + P \\ \rho_L I + P & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A1.5})$$

alors le système couplé (A1.1) est globalement exponentiellement synchronisé en utilisant la matrice de de gain de retour d'état linéaire :

$$K = Y^T P^{-1} \quad (\text{A1.6})$$

Annexe 2

Aapproche de Zhang, He et Wu

[Zhang et al., 2009]

Approche de Zhang, He et Wu [Zhang *et al.*, 2009]

Considérons le système maître-esclave chaotique décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + H\sigma(Dx) \\ \dot{z} = Az + H\sigma(Dz) + u \\ y_m = Cx \\ y_s = Cz \\ u = K(y_m(t_k) - y_s(t_k)) \end{cases} \quad (\text{A2.1})$$

où $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $H \in \mathcal{R}^{n \times n_h}$, $D \in \mathcal{R}^{n_h \times n}$ et $C \in \mathcal{R}^{l \times n}$ sont des matrices constantes. $y_m, y_s \in \mathcal{R}^l$ sont respectivement les vecteurs de sortie du système maître et du système esclave. $\sigma(\cdot): \mathcal{R}^{n_h} \rightarrow \mathcal{R}^{n_h}$ avec $\sigma_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n_h$, sont des fonctions non linéaires appartenant aux intervalles $[0, \omega_i]$ et satisfaisant les conditions:

$$\sigma_i(\xi)(\sigma_i(\xi) - \omega_i \xi) \leq 0 \quad \forall \xi \quad (\text{A2.2})$$

$y_m(t_k)$ et $y_s(t_k)$ sont respectivement des mesures discrètes de $y_m(t)$ et $y_s(t)$ à l'instant t_k , tel que t_k satisfait :

$$\Delta k = t_{k+1} - t_k \leq h \quad \forall k \geq 0 \quad (\text{A2.3})$$

Pour le système (A2.1), les dynamiques d'erreur peuvent être décrites par :

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{z} = Ae + H\eta(De, z) - KCe(t_k) \quad , \forall k; t_k < t < t_{k+1} \quad (\text{A2.4})$$

où:

$$\eta(De, z) = \sigma(De + Dz) - \sigma(Dz) \quad (\text{A2.5})$$

Théorème A2.1 :

Pour les scalaires constants donnés $h > 0$, ξ et γ et une matrice constante $W = \text{dig}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ satisfaisant les conditions (A2.2) et (A2.3), alors le système maître-esclave (A2.1) est globalement asymptotiquement synchronisé pour tout $\Delta k < h$, s'il existe des matrices de dimension appropriée G , O , $M = [M_1^T \ M_2^T \ M_3^T \ M_4^T \ M_5^T \ M_6^T \ M_7^T]^T$ et $N = [N_1^T \ N_2^T \ N_3^T \ N_4^T \ N_5^T \ N_6^T \ N_7^T]$, toutes matrices diagonales définies positives:

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \geq 0 \quad (\text{A2.6})$$

$$T = \text{diag}(T_1, T_2, \dots, T_n) \geq 0 \quad (\text{A2.7})$$

$$F = \text{diag}(F_1, F_2, \dots, F_n) \geq 0 \quad (\text{A2.8})$$

et toutes matrices définies semi-positives :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A2.9})$$

où:

$$P_{11} > 0 \quad (\text{A2.10})$$

et

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A2.11})$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ * & Z_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A2.12})$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} & X_{17} \\ * & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{26} & X_{27} \\ * & * & X_{33} & X_{34} & X_{35} & X_{36} & X_{37} \\ * & * & * & X_{44} & X_{45} & X_{46} & X_{47} \\ * & * & * & * & X_{55} & X_{56} & X_{57} \\ * & * & * & * & * & X_{66} & X_{67} \\ * & * & * & * & * & * & X_{77} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A2.13})$$

tels que les LMIs suivantes sont satisfaites :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} & \Phi_{16} & \Phi_{17} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} & \Phi_{26} & \Phi_{27} \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} & \Phi_{36} & \Phi_{37} \\ * & * & * & \Phi_{44} & \Phi_{45} & \Phi_{46} & \Phi_{47} \\ * & * & * & * & \Phi_{55} & \Phi_{56} & \Phi_{57} \\ * & * & * & * & * & \Phi_{66} & \Phi_{67} \\ * & * & * & * & * & * & \Phi_{77} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A2.14})$$

$$\begin{bmatrix} X & \bar{N} \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A2.15})$$

$$\begin{bmatrix} X & \bar{M} \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A2.16})$$

où:

$$\Phi_{11} = P_{13} + P_{13}^T + Q_{11} + hZ_{11} + N_1 + N_1^T - \varepsilon GA - \varepsilon A^T G^T + hX_{11}$$

$$\Phi_{12} = P_{11} + Q_{12} + hZ_{12} + N_2^T + \varepsilon G + A^T G^T + hX_{12}$$

$$\Phi_{13} = N_3^T + D^T WT + hX_{13}$$

$$\Phi_{14} = N_4 - \varepsilon GH + D^T WF + hX_{14}$$

$$\Phi_{15} = P_{23}^T - N_1 + N_5^T + M_1 + \varepsilon OC - \gamma A^T G^T + hX_{15}$$

$$\Phi_{16} = -P_{13} - M_1 + N_6^T + hX_{16}$$

$$\Phi_{17} = N_7^T + hX_{17}$$

$$\Phi_{22} = Q_{22} + hZ_{22} + G + G^T + hX_{22}$$

$$\Phi_{23} = D^T \Lambda + hX_{23}$$

$$\Phi_{24} = -GH + hX_{24}$$

$$\Phi_{25} = P_{12} - N_2 + M_2 + OC + \gamma G^T + hX_{25}$$

$$\Phi_{26} = -M_2 + hX_{26}$$

$$\Phi_{27} = hX_{27}$$

$$\Phi_{33} = -2T + hX_{33}$$

$$\Phi_{34} = hX_{34}$$

$$\Phi_{35} = -N_3 + M_3 + hX_{35}$$

$$\Phi_{36} = -M_3 + hX_{36}$$

$$\Phi_{37} = hX_{37}$$

$$\Phi_{44} = -2F + hX_{44}$$

$$\Phi_{45} = -N_4 + M_4 - \gamma H^T G^T + hX_{45}$$

$$\Phi_{46} = -M_4 + hX_{46}$$

$$\Phi_{47} = hX_{47}$$

$$\Phi_{55} = -N_5 - N_5^T + M_5 + \gamma OC + \gamma C^T O^T + hX_{55}$$

$$\Phi_{56} = -P_{23} - N_6^T + M_6^T - M_5 + hX_{56}$$

$$\Phi_{57} = -N_7^T + M_7^T + hX_{57}$$

$$\Phi_{66} = -R_{11} + M_6^T - M_6 + hX_{66}$$

$$\Phi_{67} = -Q_{12} - M_7^T + hX_{67}$$

$$\Phi_{77} = -Q_{22} + hX_{77}$$

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} -P_{33} & -P_{13}^T & 0 & 0 & 0 & P_{33} & 0 \\ N_1^T & N_2^T & N_3^T & N_4^T & N_5^T & N_6^T & N_7^T \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} -P_{33} & -P_{13}^T & 0 & 0 & 0 & P_{33} & 0 \\ M_1^T & M_2^T & M_3^T & M_4^T & M_5^T & M_6^T & M_7^T \end{bmatrix}^T$$

Le gain de la matrice de retour d'état linéaire est donnée alors par:

$$K = G^{-1}O \tag{A2.17}$$

Annexe 3

Application de l'approche de Jiang and Zheng [Jiang & Zheng, 2005]

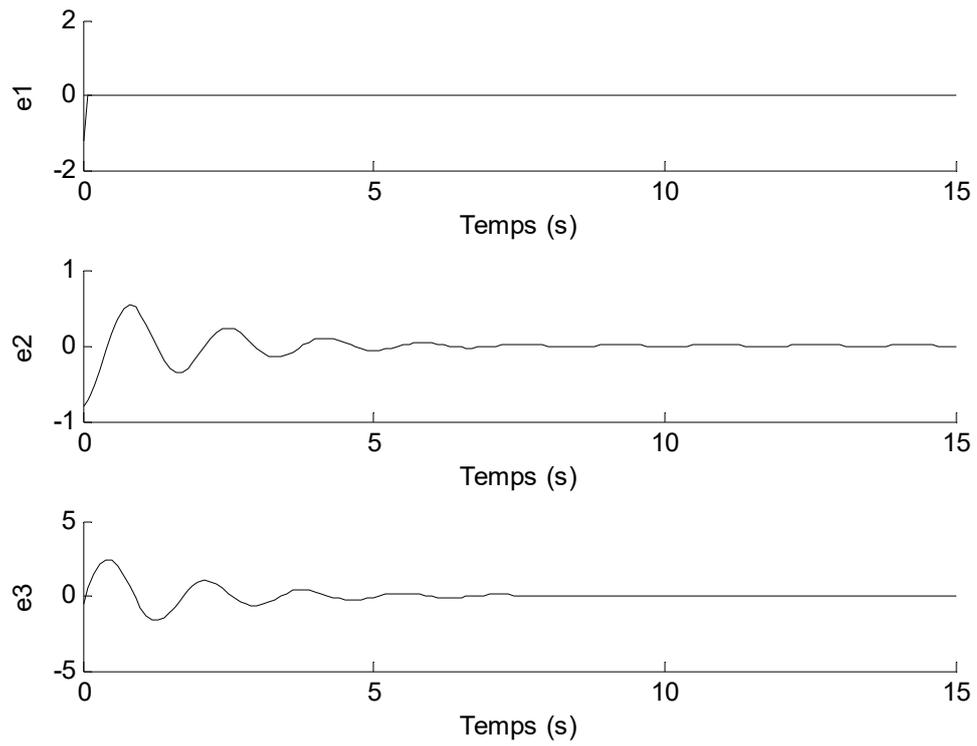


Figure A3.1 Attracteur à 5 spirales : Erreur de synchronisation

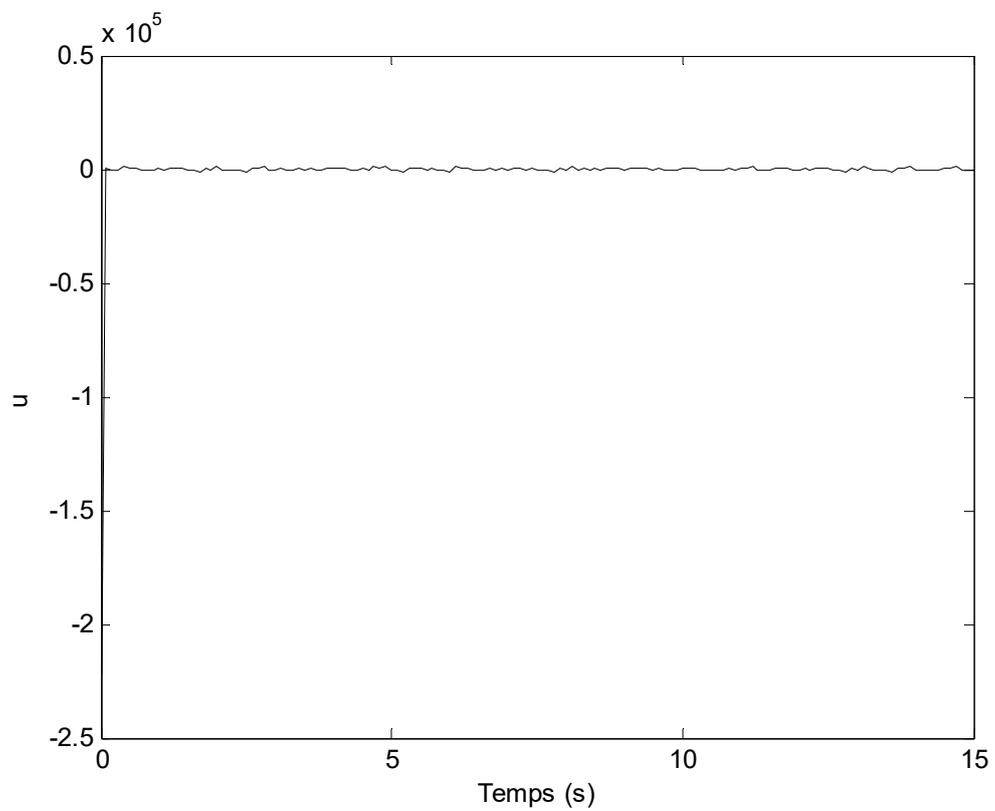


Figure A3.2 Attracteur à 5 spirales : Loi de commande

Annexe 4

**Application de l'approche de Zhang
et al. [Zhang *et al.*, 2009]**

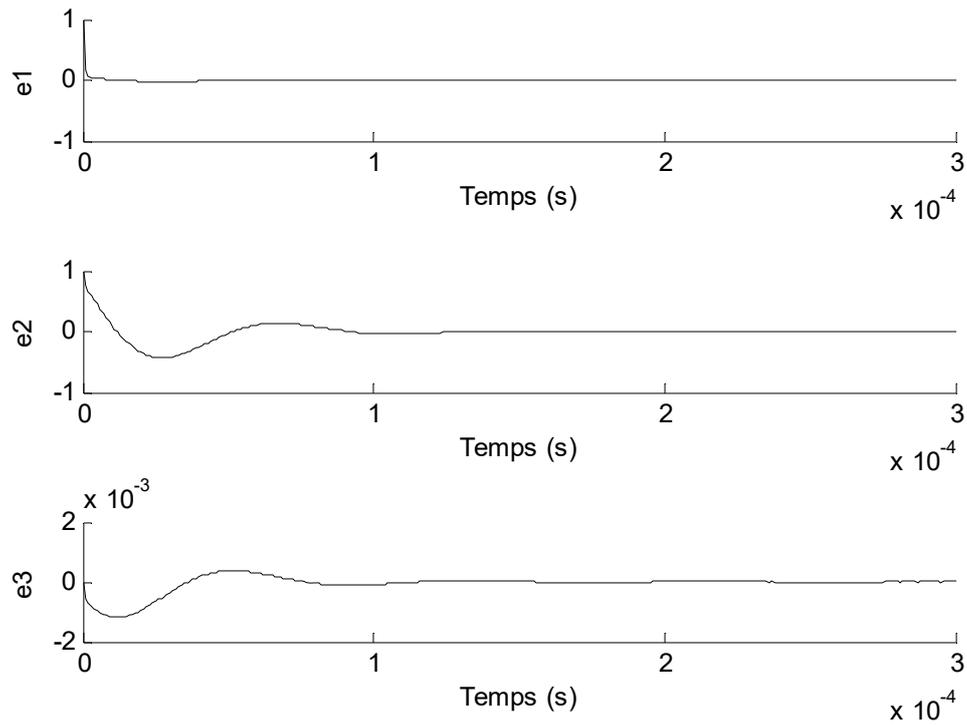


Figure A4.1 Circuit de Chua : Erreur de synchronisation

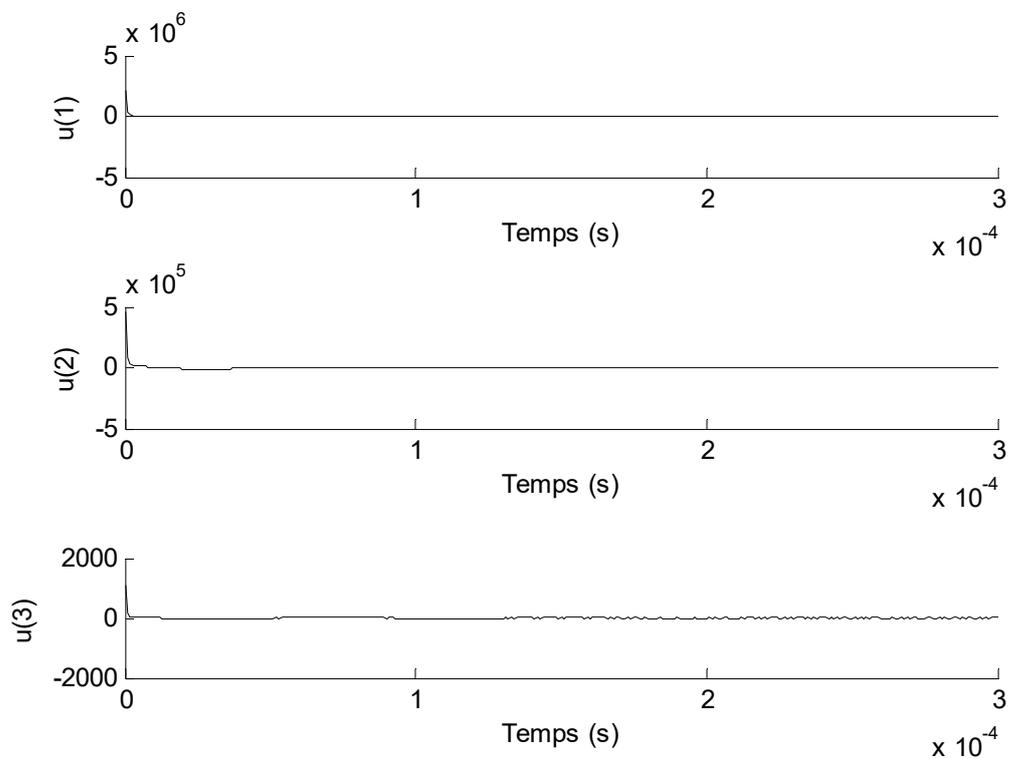


Figure A4.2 Circuit de Chua : Loi de commande

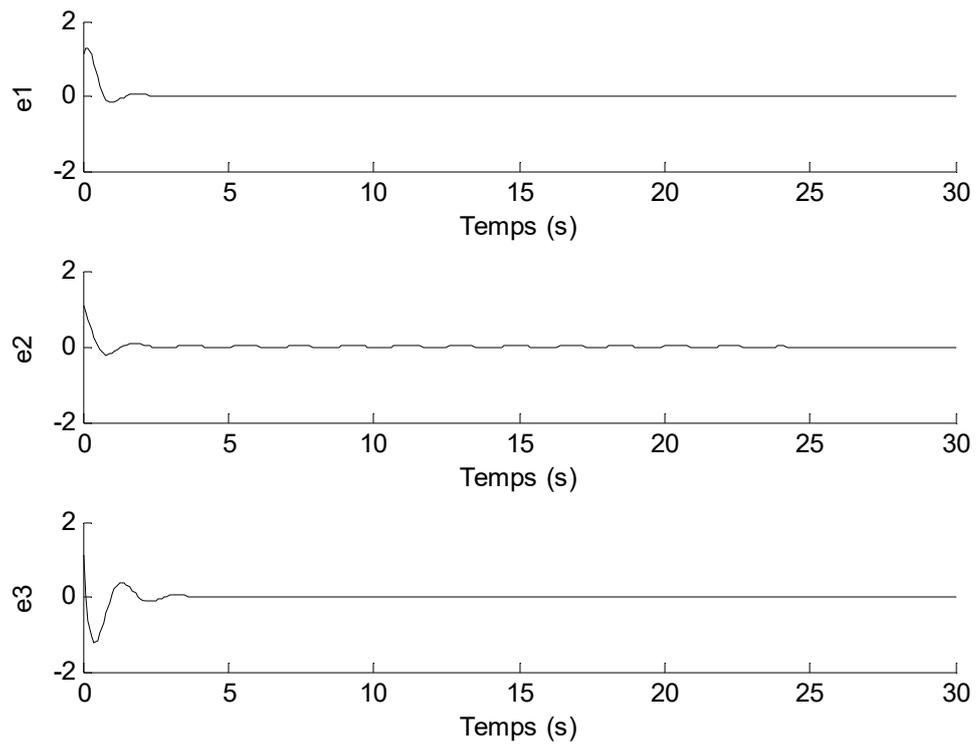


Figure A4.3 Système de Chua non dimensionnel : Erreur de synchronisation

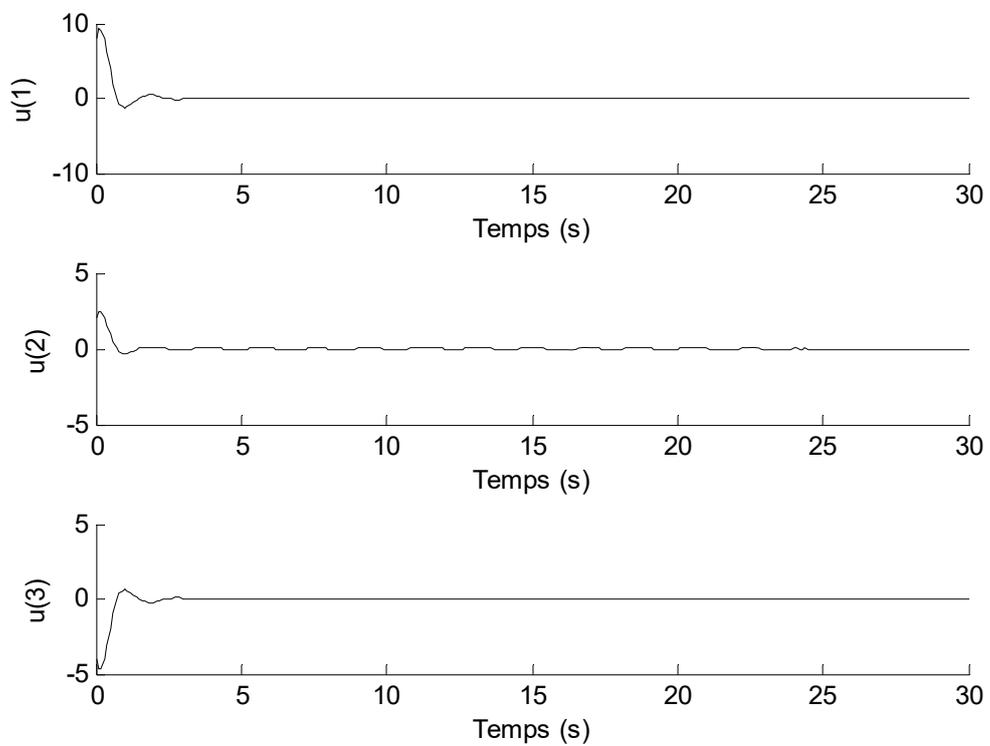


Figure A4.4 Système de Chua non dimensionnel : Loi de commande

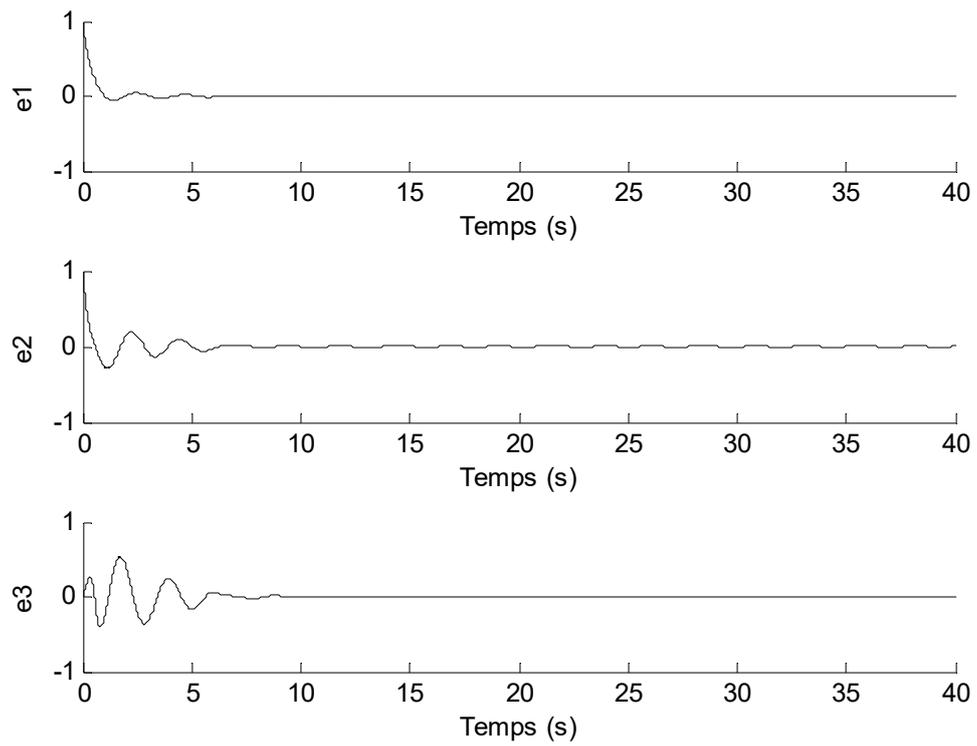


Figure A4.5 Système de Lur'e : Erreur de synchronisation

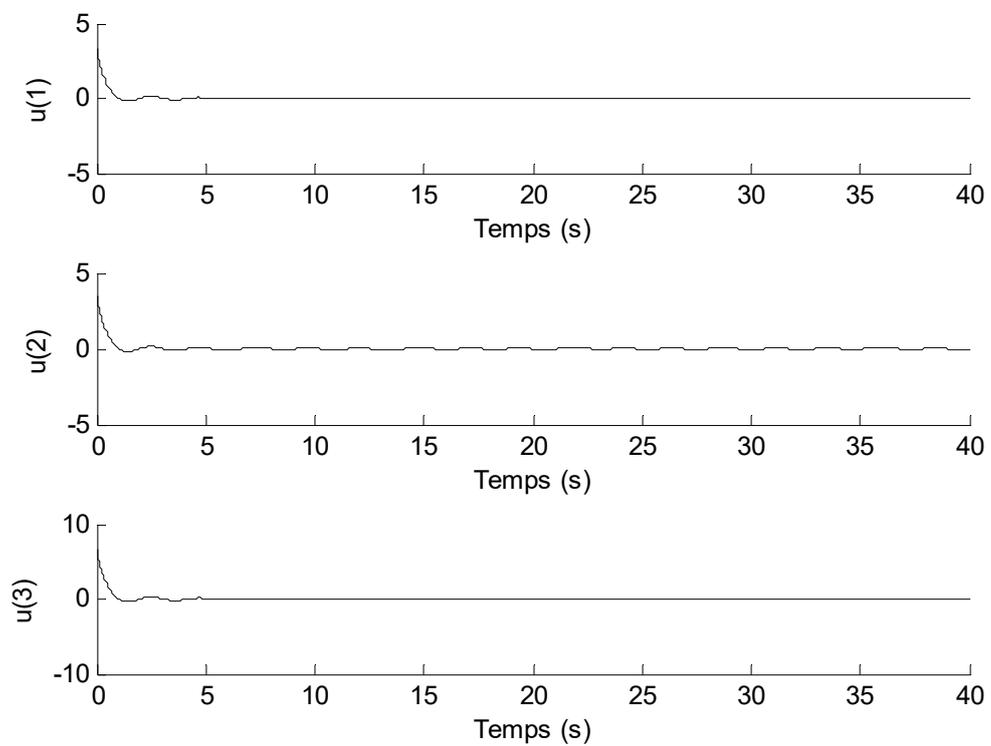


Figure A4.6 Système de Lur'e : Loi de commande

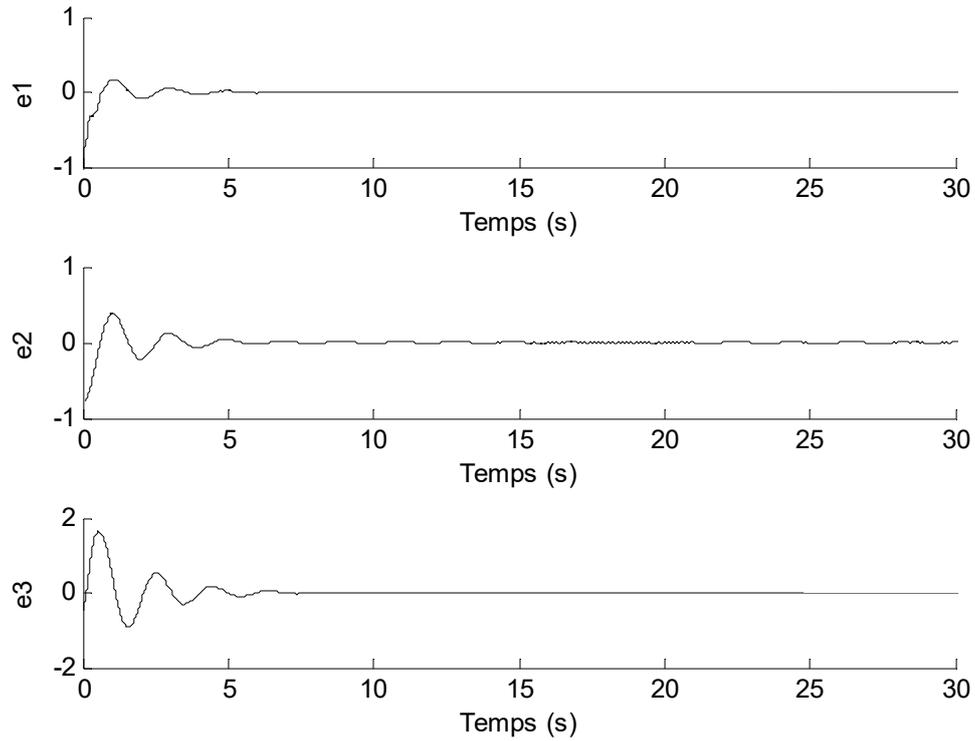


Figure A4.7 Attracteur à 5 spirales : Erreur de synchronisation

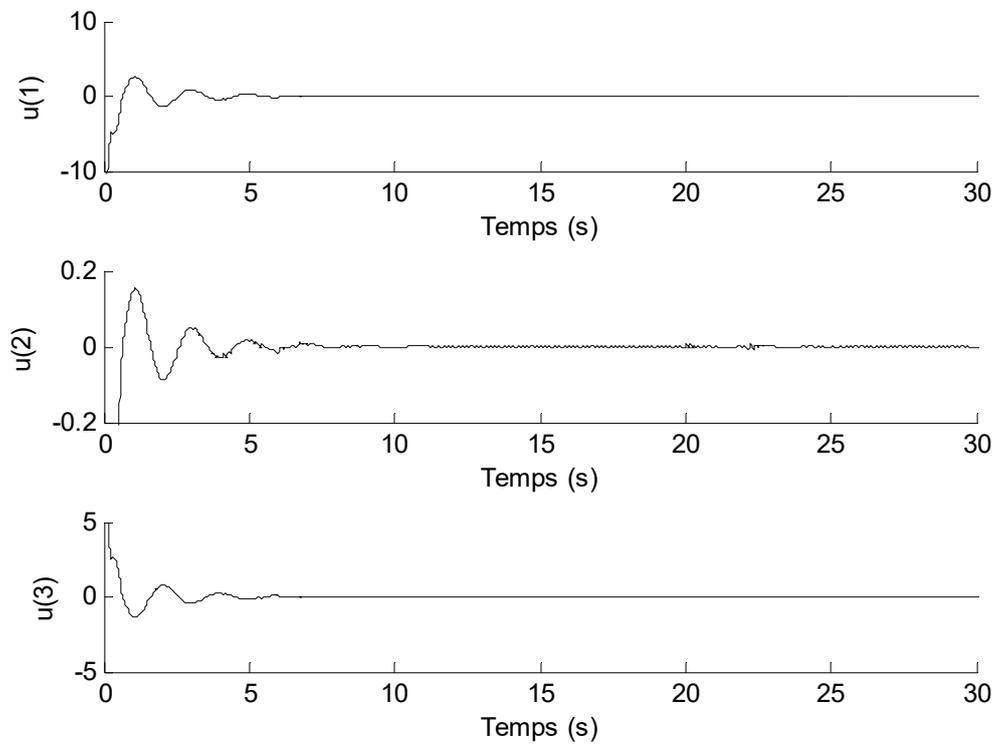


Figure A4.8 Attracteur à 5 spirales : Loi de commande

Annexe 5

Il faut noter que $\forall e \neq 0$, on aura toujours:

$$V(e) > 0$$

et

$$\dot{V}(e) + \alpha_1 V(e) \leq 0 \quad (\text{A5.1})$$

La relation (A5.1) peut s'écrire toujours sous une forme quadratique telle que :

$$\dot{V}(e) + \alpha_1 V(e) = W^T F_0 W \leq 0$$

où $W = [e^T \quad x^T \quad 1]^T$ et :

$$F_0 = \begin{bmatrix} (A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P & * & * \\ & A_{ij}^T P & 0 \\ & b_{ij}^T P & 0 \end{bmatrix} \leq 0$$

Or les inégalités suivantes sont toujours vraies :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq 0; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \leq 0; \quad I \text{ matrice identité}$$

D'après le **lemme 1.2 de la S-procedure**, s'il existe $(\tau_1 = -\alpha_2 > 0)$ et $(\tau_2 = -\alpha_3 > 0)$ tel qu'on a:

$$\begin{bmatrix} (A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P & * & * \\ & A_{ij}^T P & -\alpha_2 I \\ & b_{ij}^T P & 0 \end{bmatrix} \leq 0$$

Ce qui est équivalent à :

$$W^T \begin{bmatrix} (A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P & * & * \\ & A_{ij}^T P & -\alpha_2 I \\ & b_{ij}^T P & 0 \end{bmatrix} W \leq 0$$

ou encore à :

$$W^T \begin{bmatrix} (A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) + \alpha_1 P & * & * \\ & A_{ij}^T P & 0 \\ & b_{ij}^T P & 0 \end{bmatrix} W - \alpha_2 W^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} W - \alpha_1 W^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} W \leq 0$$

alors la relation suivante est toujours vérifiée :

$$\dot{V}(e) + \alpha_1 V(e) - \alpha_2 x^T x - \alpha_3 \leq 0 \quad (\text{A5.2})$$

et on peut confirmer que les deux relations (A5.1) et (A5.2) sont toujours équivalentes $\forall e \neq 0$ s'ils existent deux constantes α_2 et α_3 négatives vérifiant (A5.1).

Remarques :

L'existence de α_2 et α_3 est vérifiée par la faisabilité ou la non faisabilité des LMIs du théorème proposé lors de l'implémentation numérique (condition suffisante de stabilité et non nécessaire).

Annexe 6

Détails sur la démonstration

Dans cet Annexe, nous présenterons le développement détaillé de la démonstration du théorème 2.1 du chapitre 2 et du théorème 3.1 du chapitre 3.

Nous avons :

$$X_3 - X_4 \Omega^{-1} X_4^T \leq 0 \quad (\text{A6.1})$$

où:

$$X_3 = \begin{bmatrix} (A_i S + BR) + (A_i S + BR)^T + \alpha_1 S & * \\ A_{ij}^T & \beta_{ij} I \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} b_{ij} + SH_i E_{ij}^{-1} |h_i| \\ H_i E_{ij}^{-1} |h_i| + H_j F_{ij}^{-1} |h_j| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} SH_i & 0 \\ H_i & H_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & F_{ij} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} |h_i| \\ |h_j| \end{bmatrix} = X_{4,1} + X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi$$

$$\Omega^{-1} = \xi_{ij} - \xi_{ij}^2 \Psi^T \left(\xi_{ij} \Psi \Psi^T + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} \right)^{-1} \Psi = \xi_{ij} - \xi_{ij}^2 \Psi^T \Omega_1^{-1} \Psi$$

avec :

$$\Omega = \xi_{ij}^{-1} + \Psi^T \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} \right)^{-1} \Psi < 0 \quad (\text{A6.2})$$

L'expression (A6.1) s'écrit :

$$X_3 - \xi_{ij} (X_{4,1} + X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi) (X_{4,1} + X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi)^T + (\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T + \xi_{ij} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi \Psi^T) \Omega_1^{-1} (\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T + \xi_{ij} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi \Psi^T)^T \leq 0 \quad (\text{A6.3})$$

Posons :

$$\Theta = (\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T + \xi_{ij} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi \Psi^T) \Omega_1^{-1} (\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T + \xi_{ij} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi \Psi^T)^T$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \xi_{ij} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi \Psi^T &= X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \left(\xi_{ij} \Psi \Psi^T + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} \right) \\ &= X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \left(\Omega_1 - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} \right) = X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Omega_1 - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$\Theta = (\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T + X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Omega_1 - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix}) \Omega_1^{-1} (\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T + X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Omega_1 - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix})^T$$

$$\begin{aligned}
\Theta &= \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right) \Omega_1^{-1} \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right)^T \\
&\quad + X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right)^T \\
&\quad + \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right) X_{4,3}^{-1} X_{4,2}^T + X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Omega_1 X_{4,3}^{-1} X_{4,2}^T \\
\Theta &= \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right) \Omega_1^{-1} \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right)^T \\
&\quad + \xi_{ij} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi X_{4,1}^T + \xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T X_{4,3}^{-1} X_{4,2}^T - X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} X_{4,2}^T + X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Omega_1 X_{4,3}^{-1} X_{4,2}^T
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Omega_1 X_{4,3}^{-1} X_{4,2}^T &= X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \left(\xi_{ij} \Psi \Psi^T + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} X_{4,3} \right) X_{4,3}^{-1} X_{4,2}^T \\
&= \xi_{ij} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi \Psi^T X_{4,3}^{-1} X_{4,2}^T + \frac{1}{2} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} X_{4,2}^T
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\Theta &= \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right) \Omega_1^{-1} \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right)^T \\
&\quad + \xi_{ij} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi X_{4,1}^T + \xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T X_{4,3}^{-1} X_{4,2}^T - \frac{1}{2} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} X_{4,2}^T + \xi_{ij} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi \Psi^T X_{4,3}^{-1} X_{4,2}^T \\
&= \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right) \Omega_1^{-1} \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right)^T \\
&\quad + \xi_{ij} (X_{4,1} + X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi) (X_{4,1} + X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \Psi)^T - \xi_{ij} X_{4,1} X_{4,1}^T - \frac{1}{2} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} X_{4,2}^T
\end{aligned}$$

D'où l'expression (A6.3) sera reformulée comme suit :

$$\begin{aligned}
X_3 - \xi_{ij} X_{4,1} X_{4,1}^T - \frac{1}{2} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} X_{4,2}^T \\
+ (\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix}) \Omega_1^{-1} (\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix})^T \leq 0
\end{aligned} \tag{A6.4}$$

Nous admettons que $E_{ij} \leq M_i E_{ij} \leq -E_{ij}$ et $F_{ij} \leq M_j F_{ij} \leq -F_{ij}$ donc

$$\Omega_1 = \xi_{ij} \Psi \Psi^T + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_i E_{ij} & 0 \\ 0 & M_j F_{ij} \end{bmatrix} \leq \xi_{ij} \Psi \Psi^T - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & F_{ij} \end{bmatrix}$$

Il suit alors qu'au lieu de chercher les solutions de (A6.4), on cherchera les solutions de l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
& X_3 - \xi_{ij} X_{4,1} X_{4,1}^T - \frac{1}{2} X_{4,2} X_{4,3}^{-1} X_{4,2}^T \\
& - \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right) (-\Omega_{1,1})^{-1} \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right)^T < 0 \quad (A6.5)
\end{aligned}$$

L'application du complément de Schur permet de dire que (A6.5) est équivalent à

$$\begin{bmatrix} X_3 - \xi_{ij} X_{4,1} X_{4,1}^T & X_{4,2} & \xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \\ X_{4,2}^T & 2X_{4,3} & 0 \\ \left(\xi_{ij} X_{4,1} \Psi^T - \frac{1}{2} X_{4,2} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \right)^T & 0 & -\Omega_{1,1} \end{bmatrix} < 0 \quad (A6.6)$$

En réécrivant (A6.6) avec :

$$X_3 = \begin{bmatrix} (A_i S + BR) + (A_i S + BR)^T + \alpha_1 S & * \\ A_{ij}^T & \beta_{ij} I \end{bmatrix}$$

$$X_{4,1} = \begin{bmatrix} b_{ij} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{4,2} = \begin{bmatrix} SH_i & 0 \\ H_i & H_j \end{bmatrix}$$

$$X_{4,3} = \begin{bmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & F_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{1,1} = \xi_{ij} \Psi \Psi^T - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & F_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} |h_i| \\ |h_j| \end{bmatrix}$$

nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \Delta_{1,j} & A_{ij} & SH_i & 0 & \xi_{ij} b_{ij} |h_i|^T - \frac{1}{2} SH_i M_i & \xi_{ij} b_{ij} |h_j|^T \\ * & \beta_{ij} I & H_i & H_j & -\frac{1}{2} H_i M_i & -\frac{1}{2} H_j M_j \\ * & * & 2E_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 2F_{ij} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \frac{1}{2} E_{ij} - \xi_{ij} |h_i| |h_i|^T & -\xi_{ij} |h_i| |h_j|^T \\ * & * & * & * & * & \frac{1}{2} F_{ij} - \xi_{ij} |h_j| |h_j|^T \end{bmatrix} < 0 \quad (A6.7)$$

avec $\Delta_{1,i} = A_i S + S A_i^T + B R + R^T B^T + \alpha_1 S - \xi_{ij} b_{ij} b_{ij}^T$.

De manière équivalente, l'expression (A6.2) sera :

$$\xi_{ij}^{-1} < 2\Psi^T X_{4,3}^{-1} \Psi < -2\Psi^T X_{4,3}^{-1} \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_j \end{bmatrix} \Psi \quad (\text{A6.8})$$

En multipliant (A6.7) par ξ_{ij}^2 , on obtient :

$$\xi_{ij} - 2(\xi_{ij} \Psi)^T X_{4,3}^{-1} (\xi_{ij} \Psi) < 0 \quad (\text{A6.9})$$

D'où,

$$\begin{bmatrix} \xi_{ij} & (\xi_{ij} \Psi)^T \\ \xi_{ij} \Psi & \frac{1}{2} X_{4,3} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A6.10})$$

En réécrivant (A6.10) avec :

$$X_{4,3} = \begin{bmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & F_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} |h_i| \\ |h_j| \end{bmatrix}$$

nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \xi_{ij} & \xi_{ij} |h_i|^T & \xi_{ij} |h_j|^T \\ * & \frac{1}{2} E_{ij} & 0 \\ * & * & \frac{1}{2} F_{ij} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A6.11})$$

Dans le quatrième chapitre, ce détail de démonstration est considéré pour :

$$X_3 = \begin{bmatrix} S A_i^T + R^T B^T + A_i S + B R + \alpha_1 S + 2D_i D_i^T + D_j D_j^T + S E_i^T E_i S & * \\ & A_{ij}^T & \beta_{ij} I + E_i^T E_i + E_j^T E_j \end{bmatrix}$$

Bibliographie

[Aghababa & Akbari, 2012] M.P. Aghababa & M.E. Akbari, “A chattering-free robust adaptive sliding mode controller for synchronization of two different chaotic systems with unknown uncertainties and external disturbances”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 218, N°9, pp. 5757-5768.

[Agrawal *et al.*, 2012] S.K. Agrawal, M. Srivastava & S. Das, “Synchronization of fractional order chaotic systems using active control method”, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 45, N° 6, pp. 737 – 752.

[Al-sawalha & Noorani, 2012] M.M. Al-sawalha & M.S.M. Noorani, “Chaos reduced-order anti-synchronization of chaotic systems with fully unknown parameters”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17, N°4, pp. 1908-1920.

[Apkarian, 2003] P. Apkarian, “Linear Matrix inequalities and semidefinite matrix inequalities programming impacts on control system designs”, *Seminair à University of Calabria*, <http://pierre.apkarian.free.fr/COURS/CALABRIAseminar.pdf>, pp 26.

[Barmish, 1988] B. R. Barmish, “New tools for robustness analysis”, *27ème IEEE Conference on Decision and Control*, Texas, pp. 1 – 6.

[Bemporad & Morari, 1999] A. Bemporad & M. Morari, “Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints”, *Automatica*, Vol. 3, N°35, pp. 407-427.

[Bernussou *et al.*, 1989] J. Bernussou, P. Peres & J. Geromel, “A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems”, *Systems and Control Letters*, Vol. 46, N°4, pp. 399-408.

[Biannic, 1996] J. Biannic, “Commande robuste des systèmes à paramètres variables: application en aéronautique”, *Mémoire de Thèse, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace*, France.

[Birouche, 2006] A. Birouche, “Contribution sur la synthèse des observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides”, *Mémoire de Thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine*, France.

- [Bouteraa *et al.*, 2010] Y. Bouteraa, J. Ghommam, N. Derbel & G. Poisson, “Mutual and external synchronization control of multi-robot system”, 7ème International Multi-Conference on Systems, Signals and Device, Amman, pp.1 – 6.
- [Bouteraa *et al.*, 2011] Y. Bouteraa, J. Ghommam, G. Poisson & N. Derbel, “Distributed synchronization control to trajectory tracking of multiple robot manipulators”, Journal of robotics, Vol. 2011.
- [Boyd *et al.*, 1994] S.P. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron & V Balakrishnan, “Linear matrix inequalities in system and control theory”, Studies in Applied Mathematics, Vol. 15, Philadelphia.
- [Boyd & Vandenberghe, 2009] S.P. Boyd & L. Vandenberghe, “Convex optimization”, Cambridge University Press, 7ème edition, New York.
- [Chen & Zhang, 2007] F. Chen & W. Zhang, “LMI criteria for robust chaos synchronization of a class of chaotic systems”, Nonlinear Analysis, Vol. 67, N°12, pp. 3384-3393.
- [Chen, 1999] G. Chen, “Controlling chaos and bifurcation in engineering systems”, Floride : CRC Press, Florida .
- [Chen & Ogorzalek, 2000] G. Chen & M. Ogorzalek, "Control and synchronization of chaos", Numéro spécial, International Journal of Bifurcation & Chaos, Vol. 10, N°3 & N°4.
- [Chen *et al.*, 2011] J. Chen, H. Liua, J. Lua & Q. Zhang, “Projective and lag synchronization of a novel hyperchaotic system via impulsive control”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 16, N°4, pp.2033 – 2040.
- [Chua *et al.*, 1993] L.O. Chua, C.H. Wu, A. Huang, G.Q. Zhong, “A universal circuit for studying and generating chaos – part I: Routes to chaos”, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 40, N°10, pp. 732-744.
- [Chua *et al.*, 2000] L.O. Chua, M. Komuro & T. Matsumoto, “The double scroll family”, IEEE transactions on Circuit and Systems I, Vol. 33, N°11, pp. 1072-1118.
- [Chung *et al.*, 2009] S.J. Chung, I.A. Ames & J.J.E. Slotine, “Cooperative robot control and concurrent synchronization of Lagrangian systems”, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 5, N°3, pp. 686 - 700.

- [DeCarlo *et al.*, 2000] R.A. DeCarlo, M.S. Branicky, S. Pettersson & B. Lennartson, “Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems”, IEEE, Vol. 88, N°7, pp. 1069 - 1082.
- [Doyle, 1985] J. C. Doyle, “Structured uncertainty in control system design”, 24ème IEEE Conference on Decision and Control, Floride, pp. 260 – 265.
- [Dumas *et al.*, 2010] G. Dumas, J. Nadel, R. Soussignan, J. Martinerie & L. Garnero, “Inter-Brain synchronization during social interaction”, PLoS ONE, Vol. 5, N°8, e12166.
- [Edmund *et al.*, 2005] M. Edmund, E. Clarke & A. Emerson, “Design and synthesis of synchronization skeletons using branching time temporal logic”, Logics of Programs, Vol. 131, pp. 52-71.
- [Eren *et al.*, 2014] Y. Eren, J. Shen & K. Camlibel, “Quadratic stability and stabilization of bimodal piecewise linear systems”, Automatica, Vol. 50, pp. 1444 – 1450.
- [Feki, 2003a] M. Feki, “An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication”, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 18, N°1, pp. 141 – 148.
- [Feki, 2003b] M. Feki, “An adaptive feedback control of linearizable chaotic systems”, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 15, N°1, pp. 883 – 890.
- [Feki *et al.*, 2003] M. Feki, B. Robert, G. Gelle & M. Colas, “Secure digital communication using discrete-time chaos synchronization”, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 18, N°4, pp. 881 – 890.
- [Feki, 2009] M. Feki, “Sliding mode control and synchronization of chaotic systems with parametric uncertainties”, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 41, N°3, pp. 1390 – 1400.
- [Femat & Solis-Perales, 2008] R. Femat & G Solis-Perales, “Robust synchronization of chaotic systems via feedback”, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 378, Berlin : Springer.
- [Fradkov & Pogromsky, 1998] A.L. Fradkov & A.Y Pogromsky, “Introduction to control of oscillations and chaos”, Vol. 35, Singapore: World Scientific.

- [Gao *et al.*, 2009] Y.H. Gao, Z.Y. Liu & H. Chen, “Non-synchronized observer-based control of discrete-time piecewise affine systems : an LMI approach”, *Acta Automatica Sinica* , Vol. 35, N°10, pp. 1341-1346.
- [Ghommam *et al.*, 2010] J. Ghommam, H. Mehrjerdi & M. Saad, “Coordinated path-following control for a group of mobile robots with velocity recovery”, *Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 244, N°8, pp. 995 – 1006.
- [Goebel *et al.*, 2009] R. Goebel, R.G. Sanfelice & A. Teel, “Hybrid dynamical systems” *IEEE Control Systems*, Vol. 29, N°2, pp. 28 - 93.
- [Gray *et al.*, 1989] C. Gray, P. Konig, A.K. Engel & W. Singer, “Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties” *Nature*, Vol. 338, pp. 334-337.
- [Gu *et al.*, 2013] D.W. Gu, P. Petkov & M.M. Konstantinov, “Robust control design with Matlab”, 2^{ème} edition, London: Springer-Verlag.
- [Gyurkovics & Takacs, 2011] E. Gyurkovics & T. Takacs, “Application of a multiplier method to uncertain Lur'e like systems”, *Systems and Control Letters*, Vol. 60, pp. 854-862.
- [Hassibi & Boyd, 1998] A. Hassibi & S.P. Boyd, “Quadratic stabilization and control of piecewise linear systems”, *American Control Conference* , Philadelphia, Vol. 6, pp. 3659 - 3664.
- [Huygens, 1973] C. Huygens, “*Horologium oscillatorium*”, Iowa: Iowa State University Press.
- [Jiang & Zheng, 2005] G.P. Jiang & W.X. Zheng, “An LMI criterion for linear-state-feedback based chaos synchronization of a class of chaotic systems”, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 26, pp. 437-443.
- [Johanson & Rantzer, 1998] M. Johanson & A. Rantzer, “Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems”, *IEEE Transactions Automatic Control*, Vol. 43, N°4, pp. 555-559.
- [Johanson, 1999] M. Johanson, “Piecewise linear control systems”, *Mémoire de Thèse*, Department of Automatic and Control, Lunde Institute of Technology, Sweden.

- [Johanson, 2003] K.J. Johansson, “Piecewise linear control systems: a computational approach”, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 284, Berlin: Springer Verlag.
- [Kailath, 1989] T. Kailath, “Linear systems”, Englewood Cliffs : Prentice-Hall.
- [Kajbaf *et al.*, 2016] A. Kajbaf, M. A. Akhaee & M. Sheikhan, “Fast synchronization of non-identical chaotic modulation-based secure systems using a modified sliding mode controller”, Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 84, pp. 49 – 57.
- [Kawazaki *et al.*, 2013] M. Kawazaki, Y. Yamada, Y. Ushiko, E. Miyauchi & Y. Yamagushi, “Inter-brain synchronization during coordination of speech rhythm in human-to-human social interaction”, Scientific Reports, Vol. 3.
- [Labit, 2002] Y. Labit, “Contribution à la commande non linéaire par des approches non linéaires”, Mémoire de Thèse, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, CNRS, Toulouse, France.
- [Lambos & Vanderberg, 1979] C. Lambros & J.P. Vanderberg, “Synchronization of Plasmodium falciparum Erythrocytic Stages in Culture”, The Journal of Parasitology, Vol. 65, N°3, pp. 418-420.
- [Lavigne, 2003] L. Lavigne, “Outils d’analyse et de synthèse des lois de commande robuste des systèmes dynamiques plats”, Mémoire de Thèse, Université Sciences et Technologie, Bordeaux I, France.
- [Lee *et al.*, 2013] H. Lee, J.H. Park, S.M Lee & O.M. Kwon, “Robust synchronization of chaotic systems with randomly occurring uncertainties via stochastic sampled-data control”, International Journal of Control, Vol. 86, N°1, pp. 107 - 119.
- [Lei & Wang, 2016] J. Lei & L. Wang, “Backstepping synchronous control of chaotic system with reduced number of active inputs”, Optik - International Journal for Light and Electron Optics, Vol. 127, N°23, pp. 11364 – 11373.
- [Lio, 1998] T.L. Liao, “Adaptative synchronization of two Lorenz systems”, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 9, N°9, pp. 1555-1561.
- [Liberzon & Morse, 1999] D. Liberzon & A.S. Morse, “Basic problems in stability and design of switched systems”, IEEE Control Systems, Vol. 19, N°5, pp. 59-70.

- [Lin & Antsaklis, 2014] H. Lin & P.J. Antsaklis, “Hybrid dynamical systems: An introduction to control and verification”, *Foundations and Trends in Systems and Control*, Vol. 1, N°1, pp. 1-172.
- [Liu & Lee, 2015] Y. Liu & S.M Lee, “Sampled-Data Synchronization of Chaotic Lur’e Systems with Stochastic Sampling”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Vol. 34, N°12, pp. 3725-3739.
- [Luo, 2006] A.C.J. Luo, “Singularity and dynamics on discontinuous vector fields”, Amsterdam: Springer,.
- [Luo, 2013] A.C.J. Luo, “Dynamical system synchronization”, London: Springer.
- [Mehdi & Boubaker, 2012] H. Mehdi & O. Boubaker, “Stiffness and impedance control using Lyapunov theory for robot-aided rehabilitation”, *International Journal of Social robotics*, Vol. 4, N°1, pp. 107 - 119.
- [Mignone *et al.*, 2000] D. Mignone, G. Ferrari-Trecate & M. Morari, “Stability and stabilization of piecewise affine and hybrid systems: an LMI approach”, 39ème IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, Sydney, pp. 504 – 509.
- [Mkaouar & Boubaker, 2011] H. Mkaouar & O. Boubaker, “Sufficient conditions for global synchronization of continuous piecewise affine systems”, *Lecture Note in Artificial Intelligence*, Vol. 6752, pp. 199-211, In *Autonomous and Intelligent Systems*, Edition M. Kamel and F. Karray, Berlin: Springer.
- [Mkaouar & Boubaker, 2012a] H. Mkaouar & O. Boubaker, “Chaos synchronization for master slave piecewise linear systems: Application to Chua’s circuit”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol.17, N°3, pp. 1292–1302.
- [Mkaouar & Boubaker, 2012b] H. Mkaouar & O. Boubaker, “Compliant Motion Control for Handling a Single Object by Two Similar Industrial Robots”, *Procedia Engineering*, Vol. 41, pp. 1285–1291.
- [Mkaouar & Boubaker, 2012c] H. Mkaouar & O. Boubaker, “On Electronic Design of the Piecewise Linear characteristic of the Chua's Diode: Application to Chaos Synchronization”, 16ème IEEE Mediterranean Electro-technical Conference, Hammamet, pp. 993-996.

- [Mkaouar & Boubaker, 2014] H. Mkaouar & O. Boubaker, “Chaos synchronization via linear matrix inequalities: A comparative analysis”, *International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems*, Vol. 7, N°2, pp. 553-583.
- [Mkaouar & Boubaker, 2017] H. Mkaouar & O. Boubaker, “Robust control of chaotic and hyperchaotic driven systems”, *Pramana Journal of Physics*, Vol. 88, N°1, Springer.
- [Motallebzadeh *et al.*, 2012] F. Motallebzadeha, M. R. J. Motlagha & Z. Rahmani Cherati, “Synchronization of different-order chaotic systems: Adaptive active vs. optimal control”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17, N°9, pp. 3643 – 3657.
- [Morse, 1997] A.S. Morse, “Control using logic-based switching”, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 222, London: Springer.
- [Nakamura *et al.*, 2001] Y. Nakamura, K. Kishi & H. Kawakami, “Heartbeat synchronization for robotic cardiac surgery”, *IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Vol. 2, pp. 2014 - 2019.
- [Nijmeijer, 1997] H. Nijmeijer, “Focus issue on control of chaos and synchronization”, *Systems and Control Letters*, Vol. 31, N°5, pp. 259-322.
- [Ontanon-Garcia *et al.*, 2014] I.J. Ontanon-Garcia, E. Jimenez-Lopez, E. Campos-Canton & M. Basin, “A family of hyperchaotic multi-scroll attractors in \mathbb{R}^m ”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 233, pp. 522-533.
- [Ott *et al.*, 1990] E. Ott, C. Grebogi & J. Yorke, “Controlling chaos”, *Physical Review Letters*, Vol. 64, N°11, pp. 82-90.
- [Paoletti, 2003] S. Paoletti, “Identification of Piecewise affine models”, *Mémoire de Thèse*, Université de Sienne, Italie.
- [Pavlov *et al.*, 2007] A. Pavlov, A. Pogromsky, N. Van de Wouw & H. Nijmeijer, “On convergence properties of piecewise affine systems”, *International Journal of Control*, Vol. 80, N°8, pp. 1233-1247.
- [Pavlov *et al.*, 2006] A. Pavlov, N. Van de Wouw & H. Nijmeijer, “Uniform output regulation of nonlinear systems: a convergent dynamics approach”, Boston: Birkhauser.

- [Pavlov & Van de Wouw, 2008] A. Pavlov & N. Van de Wouw, “Convergent discrete-time nonlinear systems: the case of PWA systems”, the American Control Conference, Seattle, pp. 257-261.
- [Pavlov *et al.*, 2004] A. Pavlov, N. Van de Wouw & H. Nijmeijer, “Convergent dynamics, a tribute to B.P Demidovich”, *Systems and Control Letters*, Vol. 52, pp. 257-261.
- [Pecora & Carroll, 1991] L.M. Pecora & T.L. Carroll, “Driving systems with chaotic signals”, *Physical Review A*, Vol. 44, pp. 2374-2383.
- [Pecora & Carroll, 1990] L.M. Pecora & T.L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems”, *Physical Review Letters*, Vol. 64, N°8, pp. 821-824.
- [Petersen, 1987] I. Petersen, “A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems”, *Systems and Control Letters*, Vol. 8, N°4, pp. 351-357.
- [Rodrigues & Boyd, 2005] L. Rodrigues & S. Boyd, “Piecewise affine state feedback for piecewise affine slab systems using convex optimization”, *Systems and Control Letters*, Vol. 54, N°9, pp. 835-853.
- [Rodrigues & How, 2003a] L. Rodrigues & J. How, “Observer-based control of piecewise-affine systems”, *International Journal of Control*, Vol. 76, N°5, pp. 459-477.
- [Rodrigues & How, 2003b] L. Rodrigues & J. How, “Synthesis of piecewise-affine controllers for stabilization of nonlinear systems”, 42ème IEEE Conference on Decision and Control, New York, IEEE press, pp. 2071-2076.
- [Rodrigues, 2007] L. Rodrigues, “Stability of sampled-data piecewise-affine systems under state feedback”, *Automatica*, Vol. 43, N°7, pp. 1249-1256.
- [Rodriguez-Angeles & Nijmeijer, 2001] A. Rodriguez-Angeles & H. Nijmeijer, “Coordination of two robot manipulators based on position measurements only”, *International Journal of Control*, Vol. 74, N°13, pp. 1311–1323.
- [Rosenblum & Pikovsky, 2010] M. Rosenblum & A. Pikovsky, “Synchronization: From pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators”, *Contemporary Physics*, Vol. 44, N°5, pp. 401-416.

- [Senouci & Boukabou, 2014] A. Senouci & A. Boukabou, "Predictive control and synchronization of chaotic and hyperchaotic systems based on a T–S fuzzy model", *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 105, pp. 62 – 78.
- [Senouci *et al.*, 2015] A. Senouci, A. Boukabou, K. Busawon, A. Bouridane, & A. Ouslimani, "Robust chaotic communication based on indirect coupling synchronization", *Circuits, Systems, and Signal processing*, Vol. 34, N°2, pp. 393-418.
- [Shen *et al.*, 1991] J.C. Shen, B.S. Chen & F.C. Kung, "Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Ricatti equation approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, N°6, pp. 638-640.
- [Shi & Wang, 2010] X. Shi & Z. Wang, "Robust chaos synchronization of four-dimensional energy resource system via adaptive feedback control", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 60, N°4, pp. 631 - 637.
- [Slotine & Li, 1991] J.J.E. Slotine & W. Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall.
- [Sontag, 1981] E.D. Sontag, "Nonlinear regulation: the piecewise linear approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, N°2, pp. 346–358.
- [Stinson, 2005] D. Stinson, "Chryptography: theory and practice", 3ème edition, Florida: CRC Press.
- [Sun, 2010] Z. Sun, "Stability of piecewise linear systems revisited", *Annual Reviews in Control*, Vol. 34, N°2, pp. 221 – 231.
- [Sun & Ge, 2011] Z. Sun & S.S. Ge, "Stability Theory of Switched Dynamical Systems", London: Springer.
- [Suykens *et al.*, 2001] J. A. K. Suykens, A. Huang & L. O. Chua, "A Family of n-Scroll Attractors from a Generalized Chua's Circuit", *International Journal of Electronics and Communications*, Vol. 51, N°3, PP. 131 – 138.
- [Van de Wouw *et al.*, 2006a] N. Van de Wouw, A. Pavlov, K.Y Pettersen & H. Nijmeijer, "Output tracking control of PWA systems", 45ème IEEE Conference on Decision and Control, New York, IEEE Press, pp. 2637-2642.

[Van de Wouw *et al.*, 2006b] N. Van de Wouw, A. Pavlov & H. Nijmeijer, “Controlled synchronization of continuous PWA systems”, Lecture Note on Control Systems, Vol. 336, pp. 271-289, In: Group Coordination and Cooperative Control, Edition K.Y. Pettersen, J.T. Gravdahl & H. Nijmeijer, Heidelberg, Springer.

[Van de Wouw & Pavlov, 2008] N. Van de Wouw & A. Pavlov, “Tracking and synchronization for a class of PWA systems”, *Automatica*, Vol. 44, N°13, pp. 2909-2915.

[Van der Schaft & Schumacher, 2000] A. Van der Schaft & H. Schumacher, “An Introduction to hybrid dynamical systems”, Vol. 251, London: Springer.

[Varela *et al.*, 2001] F. Varela, J.P. Lachaux, E. Rodriguez & J. Martinerie, “The brainweb: Phase synchronization and large-scale integration”, *Nature Reviews Neuroscience*, Vol. 2, pp. 229-239.

[Vembarasan *et al.*, 2014] V. Vembarasan, P. Balasubramaniam & C.S. Chan, “Robust synchronization of uncertain chaotic neural networks with randomly occurring uncertainties and non-fragile output coupling delayed feedback controllers”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 78, N°3, pp. 2031-2047.

[Wei *et al.*, 2016] W. Wei, M. Wanga, D. Lib, M. Zuo & X. Wang, “Disturbance observer based active and adaptive synchronization of energy resource chaotic system”, *ISA Transactions*, Vol. 65, pp. 164 – 173.

[Wong *et al.*, 2012] W.K. Wong, H. Li & S.Y.S Leung, “Robust synchronization of fractional-order complex dynamical networks with parametric uncertainties”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 17, N°12, pp. 4877-4890.

[Yalcin *et al.*, 2000] M.E. Yalcin, J.A.K. Suykens & J. Vandewalle, “Experimental confirmation of 3-scroll and 5-scroll attractors for generalized Chua’s circuit”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamentals Theory and Applications*, Vol. 47, N°3, pp. 425-429.

[Yassen, 2005a] M.T. Yassen, “Chaos synchronization between two different chaotic systems using active control”, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 23, N°1, pp. 131-140.

[Yassen, 2005b] M.T. Yassen, “Controlling chaos and synchronization for new chaotic system using linear feedback control”, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 26, N°3, pp. 913-920.

[Zhang *et al.*, 2009] C.K. Zhang, Y. He & M. Wu, "Improved global asymptotical synchronization of chaotic Lur'e systems with sampled-data control", IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, Vol.56, N°4, pp.320-324.

[Zhang & Feng, 2007] T. Zhang & G. Feng, "Output tracking of piecewise-linear systems via error feedback regulator with application to synchronization of nonlinear Chua's circuit", IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Vol. 54, N°8, pp. 1852-1863.

[Zhang *et al.*, 2008] W.L. Zhang, W. Pan, B. Luo, X.H. Zou, M.Y. Wang & Z. Zhou, "Chaos synchronization communication using extremely unsymmetrical bidirectional injections" Optics Letters, Vol. 33, N°3, pp. 237-239.

[Zhou *et al.*, 1996] K. Zhou, J.C. Doyle & K. Glover, "Robust and optimal control", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[Zribi *et al.*, 2009] M. Zribi, N. Smaoui & H. Salim, "Synchronization of the unified chaotic systems using a sliding mode controller", Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 42, N° 5, pp. 3197-3209.