HAL
open science

Homologies lagrangiennes, symplectiques et attachement d'anse

Amiel Peiffer-Smadja

To cite this version:

Amiel Peiffer-Smadja. Homologies lagrangiennes, symplectiques et attachement d'anse. Géométrie symplectique [math.SG]. Sorbonne Université, 2018. Français. NNT : 2018SORUS370 . tel-02865356

HAL Id: tel-02865356

https://theses.hal.science/tel-02865356

Submitted on 11 Jun 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sorbonne Université

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Amiel Peiffer-Smadja

Homologies lagrangiennes, symplectiques et attachement d'anse

---

dirigée par Alexandru Oancea

Soutenue le 28 Septembre 2018 devant le jury composé de :

M. Jean-François Barraud	Université de Toulouse	rapporteur
M. Frédéric Bourgeois	Université Paris-Sud	examinateur
M. Kai Cieliebak	Université d'Augsburg	rapporteur *
M. Vincent Colin	Université de Nantes	examinateur
M. Vincent Humilière	Sorbonne Université	examinateur
M. Grégory Ginot	Université Paris 13	examinateur
M. Alexandru Oancea	Sorbonne Université	directeur

* Non présent lors de la soutenance

Institut de mathématiques de Jussieu-
Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Sorbonne Université.
École doctorale de sciences
mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Remerciements

C'est seulement en les écrivant que je me suis rendu compte combien la coutume des remerciements en début de thèse était justifiée. Tant de gens ont contribué, sans en avoir pleinement conscience, à ce manuscrit. Ces personnes m'ont aidé à lutter contre l'isolement et la dépression qui sont malheureusement si caractéristiques de la vie d'un·e doctorant·e. Leur soutien moral m'a été essentiel.

Je remercie Jean-François Barraud et Kai Cieliebak d'avoir accepté d'être mes rapporteurs. Merci à Jean-François Barraud pour ses nombreux commentaires qui m'ont permis d'améliorer considérablement le manuscrit. Merci à Frédéric Bourgeois, Vincent Colin, Grégory Ginot et Vincent Humilière d'avoir fait partie de mon jury. Merci aussi à la communauté mathématique pour l'accueil chaleureux que j'ai reçu. Merci à l'équipe AA et ses pots mémorables, à Nicolas Bergeron pour son soutien, à Patrick Massot et à Paolo Ghiggini dont l'intérêt m'a encouragé à avancer. Je pense aussi aux autres chercheurs et chercheuses avec qui j'ai pu discuter lors des rencontres de l'ANR microlocal et autres conférences, merci notamment à Anne Vaugon, Claude Viterbo, Emmanuel Ferrand, Emmanuel Giroux, Hélène Eynard-Bontemps, Honghao Gao, Nicolas Vichery, Rémi Leclercq, Stéphane Guillermou et Sylvain Courte. Merci à tout l'institut de mathématiques de Jussieu, notamment aux secrétaires. Merci aussi au très sympathique personnel du restaurant administratif de Jussieu qui m'a nourri ces quatre dernières années.

Je n'aurais jamais pu réaliser ce manuscrit sans un directeur aussi exceptionnel qu'Alexandru. Sa bienveillance, sa disponiblité et son optimisme m'ont été aussi importants que ses nombreux et judicieux conseils mathématiques et extra-mathématiques.

Progressivement, je me suis mis à considérer le couloir 15-16 comme une deuxième maison. Cela m'a toujours fait chaud au coeur de revenir dans ce lieu après une absence et d'entendre tout le monde se réjouir de mon retour : merci notamment à Hugo pour sa joie naturelle, à Léo pour ses conseils avisés et à Jean-Michel qui va sûrement travailler beaucoup plus efficacement après mon départ. Merci aussi à tous les autres qui ont fait vivre ce lieu et l'ont rendu agréable : Adrien, Anne, Arthur, Benoit, Damien, Fabio, Jesua, Juliette, Long, Louis, Malick, Martin, Maÿlis, Milan, Ruben, Thomas et merci à l'armoire à gâteaux de Vincent.

Malgré les rares nouvelles que je leur donnais, ma famille m'a toujours soutenu et

encouragé. Merci à ma maman et à mon papa qui continuent de m'apporter des fruits de leur jardin, à Nathan, Océane et Solal.

Merci à mes amis avec qui j'ai partagé soirées, films, débats : aux grotas, Adrien, Bénédicte, Jonas, Léa, Louis, Marc, Marion, Maud, Maxime, Nicolas, Odile, Pablo, Paul. Merci à mes camarades d'explorations pour m'avoir montré des lieux étonnants, Bibi, Machin et Zolto et merci à BZL et au CSA. Merci aussi à Alexandre, Axelle, Guillaume, Joran, Julien, Mendes et Oscar.

Toute ma reconnaissance va aussi vers ceux avec qui j'ai partagé un toit et tant de joies, merci à Antoine dont l'énergie m'a toujours impressionné, Ahlem, Maguelone, Marie pour son optimisme sans faille, Matthieu pour les nombreuses soirées jeux et films, Nathan, Redwan, Romain et Valentin. Les réunions colocs, soirées films, documentaires, politiques et jeux que nous avons organisées ont été des moments privilégiés et ont rythmé ma vie pendant ces dernières années.

Tu as su m'apaiser et me soutenir même pendant les moments difficiles et ces quelques lignes ne peuvent rendre justice à tout ce que tu as fait pour moi. Pour ces huit années partagées, merci à toi Marine.

Résumé

Dans cette thèse, je présente une nouvelle construction du complexe de Fukaya enroulé d'une lagrangienne ainsi que de l'algèbre de Chekanov d'une legendrienne en utilisant des techniques développées par Cieliebak, Ekholm et Oancea. Ces constructions vérifient des propriétés de fonctorialité par rapport aux cobordismes et sont donc adaptées pour étudier un attachement d'anse symplectique. Ainsi, je démontre que le complexe de Fukaya enroulé de la coâme est isomorphe à l'algèbre de Chekanov de la sphère d'attachement d'anse et je montre que cet isomorphisme se factorise par l'application « Open-Closed » de Abouzaid. Je présente ensuite une stratégie pour déduire de ces résultats deux théorèmes importants annoncés par Bourgeois, Ekholm et Eliashberg concernant le comportement de l'homologie symplectique par attachement d'anse et la génération de la catégorie de Fukaya enroulée. Dans le dernier chapitre, je définis en suivant une idée de A'Campo un flot géodésique sur le squelette des variétés de Brieskorn-Pham et je relie ce dernier au flot de Reeb sur l'entrelacs de contact de la singularité dans l'optique de généraliser le théorème de Viterbo qui relie homologie symplectique du cotangent et homologie d'un espace de lacets.

Mots-clés

Géométrie différentielle, géométrie symplectique, sous-variété lagrangienne, catégorie de Fukaya, homologie de Floer, attachement d'anse, variétés de Brieskorn-Pham.

Lagrangian and symplectic homologies and handle attachment

Abstract

In this PhD thesis, I present a new construction of the wrapped Fukaya complex of a Lagrangian and of the Chekanov algebra of a Legendrian using techniques developed by Cieliebak, Ekholm and Oancea. These constructions behave well under cobordisms and thus are fit to study the symplectic handle attachment procedure. I prove that the wrapped Fukaya complex of the cocore is isomorphic to the Chekanov algebra of the attachment sphere and show that this isomorphism factors through Abouzaid's Open-Closed map. I then give a strategy in order to deduce from these results two important theorems announced by Bourgeois, Ekholm and Eliashberg concerning the behaviour of symplectic homology under handle attachment and the generation of the Fukaya category. In the last chapter, I define following an idea of A'Campo a geodesic flow on the skeleton of a Brieskorn manifold and relate this flow to the Reeb flow on the link of the singularity in order to try to generalize Viterbo's isomorphism between the symplectic homology of a cotangent bundle and the homology of a loop space.

Keywords

Differential geometry, symplectic geometry, Lagrangian, Floer homology, Fukaya category, handle attachment, Brieskorn-Pham manifolds.

Table des matières

Introduction **13**

1 De la mécanique classique à la géométrie symplectique 13
2 Invariants de Morse, invariants symplectiques 15
3 Homologie symplectique 18
4 Mon travail de thèse 24
4.1 Homologies lagrangiennes 24
4.2 Liens entre la coâme et l'âme d'un attachement d'anse 27
4.3 Génération de la catégorie de Fukaya 28
4.4 Variétés de Brieskorn-Pham 31
5 Présentation des chapitres 31

1 Espaces de modules de surfaces **33**

1.1 Notations et définitions 33
1.2 Quelques compactifications d'espaces de modules 36
1.2.1 Disques épointés 36
1.2.2 Demi-cylindres épointés 39
1.2.3 Anneaux pincés 42
1.2.4 Anneaux épointés 44
1.3 Données sur courbes nodales 48
1.4 Ce qu'il faut retenir 51

2 Équation de Floer, transversalité et compacité **53**

2.1 Un peu de géométrie symplectique 53
2.1.1 Variétés symplectiques, domaines de Liouville 53
2.1.2 Flots hamiltoniens et flot de Reeb 56
2.2 Indices de Conley-Zehnder 58
2.2.1 Indices de Conley-Zehnder d'orbites 59
2.2.2 Indices de Conley-Zehnder de cordes 61
2.3 Equation de Floer à surface de Riemann fixée 63
2.3.1 Surface de Riemann épointée à bord cylindrique 63

2.3.2 Structures presque complexes cylindriques 63
2.3.3 Terme de perturbation hamiltonienne 64
2.3.4 Équation de Floer 64
2.3.5 Conditions asymptotiques 65
2.3.6 Transversalité 65
2.4 Espaces de modules de solutions de l'équation de Floer 66
2.4.1 Conditions asymptotiques 66
2.4.2 Choix des données 66
2.4.3 Espaces de modules 67
2.4.4 Transversalité 68
2.4.5 Compacité et bord 68
2.5 Espaces de modules à paramètres et cobordismes 71
2.6 Ce qu'il faut retenir 71

3 Étude d'espaces de modules 75
3.1 Calcul d'indices d'opérateur de Fredholm 75
3.2 Espaces de modules à hamiltonien fixé 79
3.2.1 Surfaces épointées non stables 80
3.2.2 Disques épointés 81
3.2.3 Demi-cylindres négatifs 84
3.2.4 Demi-cylindres positifs 85
3.2.5 Anneaux pincés épointés 87
3.2.6 Anneaux épointés 89
3.3 Espaces de modules de cobordismes entre hamiltoniens 92
3.3.1 Cobordismes complets 92
3.3.2 Cobordismes partiels 96

4 Homologies lagrangiennes et symplectiques 101
4.1 Hamiltoniens et variétés non compactes 101
4.1.1 Hamiltoniens sur domaine de Liouville 102
4.1.2 Hamiltoniens sur cobordisme 103
4.1.3 Hamiltoniens concaves 104
4.1.4 Trajectoires de Floer 105
4.2 Cordes hamiltoniennes et lagrangiennes 106
4.2.1 Homologie lagrangienne 106
4.2.2 Fonctorialité de l'homologie lagrangienne 111
4.2.3 L'algèbre de Chekanov d'une legendrienne 114
4.3 Orbites hamiltoniennes et homologies symplectiques 120
4.3.1 Homologie symplectique d'un domaine de Liouville 120
4.3.2 Homologie symplectique d'un cobordisme de Liouville 121

4.4 Quelques morphismes 123
4.4.1 Application Open-Closed 123
4.4.2 Application "Closed-Open" 127
4.4.3 Morphisme F 132
4.4.4 Homotopie A 135

5 Attachement d'anse symplectique et catégorie de Fukaya 139
5.1 Dynamique de l'attachement d'anse 139
5.2 Homologie symplectique de l'attachement d'anse 146

6 Variétés de Brieskorn-Pham 159
6.1 Fibre de Milnor déformée 161
6.2 Premier exemple 162
6.3 Cotangent du squelette 164
6.4 Flot de Reeb et flot géodésique 165

A Coproduit et hamiltoniens convexes 169

B A_∞-algèbres et A_∞-cogèbres 175
B.1 A_∞-algèbre 177
B.2 A_∞-cogèbre 179

C Homologies de Hochschild 181
C.1 Algèbres et foncteurs dérivés 181
C.2 Algèbres différentielles graduées 183
C.3 A_∞-algèbre 183
C.4 Homologie de Hochschild d'une algèbre tensorielle 184
C.4.1 Avec les catégories dérivées 185
C.4.2 Calculs explicites 185
C.5 Homologie de Hochschild d'une construction cobar 187

Introduction

1 De la mécanique classique à la géométrie symplectique

Considérons une particule se déplaçant sur une variété X (par exemple l'espace standard à 3 coordonnées $\mathbb{R}^3$). On souhaite comprendre au mieux la dynamique de cette particule, c'est-à-dire l'ensemble de ses trajectoires possibles.

Formulation Newtonienne

Un des principes fondamentaux de la mécanique classique assure que la position et la vitesse initiale déterminent tout le mouvement de la particule. Par exemple, en lançant un objet, on lui communique une vitesse initiale depuis la position où on le lance. Ce principe assure alors que la trajectoire de l'objet est déterminée uniquement par cette position et cette vitesse initiale. C'est pourquoi on peut estimer le point d'arrivée de l'objet en se rappelant de lancers précédents avec vitesse initiale similaire. Mathématiquement, on traduit ce principe par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{q} = F(t, q, \dot{q}) \tag{1}$$

où q désigne la position de la particule, $\dot{q}$ sa dérivée (c'est-à-dire la vitesse de la particule) et F est une fonction dépendant de X et des forces qui s'appliquent sur la particule. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que pour toute donnée initiale $(q(t_0), \dot{q}(t_0))$, il existe une unique solution de l'équation (1) : on retrouve le principe énoncé plus haut. Une solution de l'équation (1) vit dans l'espace tangent de X qu'on note TX.

Formulation lagrangienne

On se place maintenant dans le cas où l'équation est dite conservative. Cela veut dire qu'on suppose que le champ de vecteurs F peut s'écrire sous la forme d'un gradient : $F = -\frac{\partial U}{\partial q}$ où U est une fonction de q. Lagrange va alors proposer une autre équation pour déterminer la trajectoire de la particule q. Il énonce le principe de moindre action qui affirme qu'une particule se déplace en minimisant l'action (ou, en reformulant, on dit qu'une particule se déplace sur le chemin qui oppose le moins de résistance). Donc les

chemins $\gamma : [t_0; t_1] \to X$ qui correspondent aux solutions $q(t)$ de l'équation de Newton (1) sont les minima de la fonctionnelle d'action :

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$$

où $L(q, v) = \frac{1}{2}mv^2 - U(q)$ est une fonction $TX \to \mathbb{R}$. Le calcul variationnel assure alors que les γ minimisant la fonctionnelle d'action Φ vérifient les équations d' Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\right) = \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)). \tag{2}$$

Hamilton va alors utiliser cette équation pour en écrire une nouvelle qui vit dans l'espace des phases T^*X en utilisant la *transformée de Legendre.*

Formulation hamiltonienne

Supposons que la fonction L est convexe par rapport à la variable v. Donc, pour tout $(q, p) \in T^*X$, il existe un unique $v(q, p) \in TX$ tel que $\frac{\partial L}{\partial v}(q, v(q, p)) = p$. On note alors H la fonction définie sur T^*X suivante :

$$H(q, p) = p \cdot v(q, p) - L(q, v(q, p)).$$

Un calcul direct assure que l'équation de Lagrange (2) est équivalente aux équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \end{cases} \tag{3}$$

Géométrie symplectique

On va dorénavant généraliser la question que l'on souhaite se poser. Soit M une variété et ω une 2-forme de M non dégénérée. On dit que (M, ω) est une *variété symplectique* et toute variété symplectique est de dimension paire. Prenons maintenant $H : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique suivant la variable $\mathbb{R}$ et définissons le champ de vecteur X_H comme l'unique champ de vecteur vérifiant $i_{X_H}\omega = -dH$. Le champ de vecteur X_H s'appelle le champ de vecteur hamiltonien de H. Le *flot* φ_t^H de ce champ de vecteur vérifie l'équation suivante pour tout $x \in M$:

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^H(x) = X_H(\varphi_t^H(x)). \tag{4}$$

L'équation (4) est une généralisation de l'équation de Hamilton. En effet, si on se place dans le cas particulier où M est le cotangent d'une variété T^*X, on retrouve exactement l'équation (3). Si on comprend bien, dans ce cadre plus général, la dynamique du flot hamiltonien pour n'importe quel hamiltonien H, on aura donc en particulier compris la

dynamique des objets soumis à un champ de force conservatif. On se ramène donc à la question suivante :

Question 1. *Soit M une variété symplectique et H un hamiltonien sur M. Quelle est la dynamique du flot du champ de vecteur hamiltonien X_H ?*

Une bonne façon de comprendre la dynamique d'un champ de vecteur est de s'intéresser à ses *orbites périodiques*. On reformule la question 1 en :

Question 2. *Quelles sont les orbites périodiques du champ de vecteur hamiltonien ?*

2 Invariants de Morse, invariants symplectiques

On va maintenant faire un détour par l'homologie de Morse d'une fonction sur une variété différentielle.

Homologie de Morse

Soient X une variété compacte et $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction de Morse (c'est-à-dire une fonction dont tous les points critiques sont non dégénérés).

Choisissons g une métrique riemannienne sur X et notons ∇f le champ de vecteur gradient de f qui vérifie l'équation :

$$g(\nabla f, \cdot) = df.$$

Finalement, notons φ_t le flot de ce champ de vecteur. Pour tout point $x \in X$, le flot de ∇f converge en $\pm\infty$ vers un point critique de f. Pour tout point critique q de f, on peut définir la variété stable et la variété instable de q par :

$$W^s(q) = \{x \in X; \lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = q\},$$

$$W^u(q) = \{x \in X; \lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x) = q\}.$$

La dimension de la variété $W^s(q)$ s'appelle l'indice de q et sera noté $\mathrm{ind}(q)$.

Théorème 1. *(chapitre 3 de [AD10])*

(i) Pour une métrique Riemannienne générique g, les variétés stables et instables des différents points critiques de f s'intersectent transversalement. En particulier, pour tous q_+ et q_- points critiques de f, l'espace

$$\mathcal{M}(q_+, q_-) = W^s(q_+) \cap W^u(q_-) = \{x \in X; \lim_{t \to \pm\infty} \varphi_t(x) = q_\pm\}$$

est une variété de dimension ind(q_+)-ind(q_-).

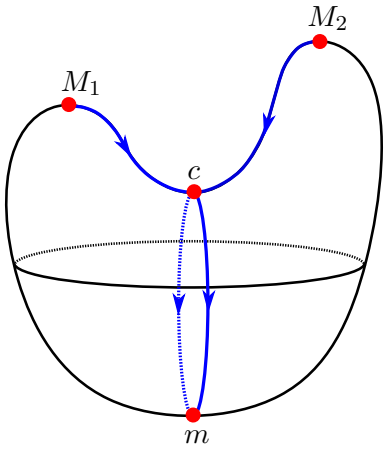


FIGURE 1 – Présentation d'une fonction de Morse (la fonction hauteur) sur la sphère qui a 4 points critiques (2 maximums, 1 point selle et 1 minimum). La différentielle du complexe de Morse engendré par les points critiques compte modulo 2 le nombre de trajectoires bleues reliant deux points critiques.

(ii) L'espace vectoriel $MC(f) = \oplus_{q \in Crit(f)} \mathbb{Z}/2 \cdot \langle q \rangle$ gradué par l'indice des points critiques peut être muni d'une structure de complexe de chaînes via la différentielle :

$$\begin{aligned} d : & MC(f) \to MC(f) \\ & q \mapsto \sum_{\substack{q' \in Crit(f) \\ |q'| = |q| - 1}} (\#\mathcal{M}(q; q')/\mathbb{R}) \cdot q'. \end{aligned}$$

Ce complexe de chaînes s'appelle le complexe de Morse de la fonction f.

(iii) L'homologie du complexe de Morse de f est isomorphe à l'homologie singulière de X.

Ce théorème est particulièrement intéressant si l'on s'intéresse aux points critiques de la fonction f : en effet, il nous assure par exemple que toute fonction de Morse f sur une variété X possède au moins $\dim(H^{sing}(X))$ points critiques. Si l'on arrive donc à prouver un théorème similaire où les orbites périodiques hamiltoniennes jouent le rôle des points critiques, on obtiendra donc des informations sur le nombre de telles orbites périodiques. D'où la question suivante pour M une variété symplectique et H un hamiltonien quelconque :

Question 3. *Peut-on construire une fonctionnelle sur l'espace des lacets de M dont les points critiques sont les orbites périodiques hamiltoniennes et dont on peut calculer l'homologie de Morse ?*

Homologie de Floer et homologie symplectique

La fonctionnelle d'action était déjà connue par Lagrange mais c'est Andreas Floer qui aura l'idée de construire un complexe de Morse à partir de cette fonctionnelle. On se place

maintenant dans la situation suivante : M est une variété symplectique exacte (cela signifie qu'il existe une primitive λ à la 2-forme symplectique ω). La forme λ s'appelle une *forme de Liouville* et vérifie donc l'équation $d\lambda = \omega$. On peut lui associer le *champ de Liouville* qui est l'unique champ de vecteur X_λ vérifiant l'équation $i_{X_\lambda}\omega = \lambda$.

Prenons $H : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien sur M. On note A_H la fonctionnelle d'action hamiltonienne définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\longmapsto \int_{S^1} \lambda^*\gamma - \int_0^1 H(t, \gamma(t)). \end{aligned}$$

Les points critiques de A_H sont exactement les orbites périodiques du flot hamiltonien de H et on peut prouver un théorème similaire au théorème 1. Avant de l'énoncer, on va dire comment toutes les notions introduites dans l'homologie de Morse se transposent dans ce nouveau cadre et on pourra se référer au chapitre 2 pour plus de détails sur la colonne de droite.

Variété X	Espace de lacets $\mathcal{L}M$
Fonction de Morse f	Fonctionnelle d'action A_H
Point critique de f	Orbite périodique de X_H
Métrique Riemannienne g	Structure presque complexe J
Trajectoires de gradient $u : \mathbb{R}_s \to X$ vérifiant l'équation de gradient $\partial_s u = \nabla f(u)$	Cylindres $u : \mathbb{R} \to \mathcal{L}M$ ou $u : \mathbb{R}_s \times S^1_t \to M$ vérifiant l'équation de Floer $\partial_s u + J(\partial_t u - X_H(u)) = 0$

Le théorème 1 devient alors :

Théorème 2. *[Floer]*

On suppose que M est une variété compacte et symplectiquement asphérique c'est-à-dire que ω s'annule sur $\pi_2(M)$.

(i) En suivant l'analogie avec le cas des fonctions de Morse, on peut définir l'homologie de Morse de la fonctionnelle d'action A_H. Cette homologie s'appelle l'homologie de Floer du hamiltonien H et est notée $FH(H)$.

(ii) Si M est une variété symplectique compacte et symplectiquement asphérique (c'est-à-dire que ω s'annule sur $\pi_2(M)$), alors pour tout hamiltonien H sur M, il existe un isomorphisme $FH(H) \simeq H_*(M)$.

Ce théorème répond en partie à la question 2 dans le cadre des variétés symplectiques compactes et symplectiquement asphériques. En effet, on arrive à donner par exemple un nombre minimum ($\dim(H_*(M))$) d'orbites périodiques pour n'importe quel hamiltonien sur une variété M. On va maintenant se demander si on peut avoir un résultat similaire dans le cadre des variétés symplectiques non compactes (pour traiter notamment le cas

du cotangent d'une variété). La question étant assez vaste, on va se restreindre à un cas particulier de variété symplectique non compacte : il s'agit des *complétions de domaines de Liouville*. Cette condition permet de mieux contrôler la dynamique dans la partie non compacte de la variété car on suppose que celle-ci est *cylindrique*.

Avant de définir plus précisément ce qu'est un domaine de Liouville et sa complétion, il faut parler des *variétés de contact* qui sont les analogues en dimension impaire des variétés symplectiques. Une variété de contact est un couple (Y, α) où Y est une variété fermée de dimension $2n-1$ et α une 1-forme de Y telle que $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ est une forme volume sur Y. À toute variété de contact, on peut associer sa symplectisation positive $S_+Y = [1; +\infty[_r \times Y$ munie de la forme symplectique exacte $d(r\alpha)$. Un *domaine de Liouville* est une variété symplectique compacte à bord M munie d'une forme de Liouville λ tel que le champ de Liouville soit sortant sur le bord ∂M. Cela assure en particulier que $(\partial M, \lambda|_{\partial M})$ est une variété de contact. On définit alors la *complétion* $\widehat{M}$ du domaine de Liouville M comme la variété symplectique non compacte suivante :

$$\widehat{M} = M \cup S_+(\partial M) = M \cup [1; +\infty[\times \partial M.$$

Cette complétion peut être donc découpée en deux parties : une partie compacte qui correspond au domaine de Liouville M de départ et une partie non compacte qui correspond à la symplectisation positive du bord ∂M. En particulier, si X est une variété riemannienne, alors DT^*X est un domaine de Liouville dont la complétion est isomorphe à T^*X. L'étude des domaines de Liouville est aujourd'hui centrale en géométrie symplectique (voir par exemple [CE12], [CO18] et [Sei08a]).

Pour tout domaine de Liouville M, une approche similaire à celle développée par Floer pour prouver le théorème 2 permet de définir l'homologie symplectique de M qu'on note $SH(M)$. Cette homologie est l'homologie d'un complexe de chaînes dont les générateurs sont les orbites périodiques d'un flot hamiltonien. Donc si on arrive à trouver un isomorphisme entre $SH(M)$ et une autre homologie connue, on trouvera une borne inférieure sur le nombre d'orbites hamiltoniennes périodiques de manière similaire au théorème 2.

Question 4. *Que peut-on dire sur l'invariant $SH(M)$ quand M est un domaine de Liouville ?*

3 Homologie symplectique

Définition de l'homologie symplectique

Soit M un domaine de Liouville. On rappelle que M est une variété symplectique compacte à bord contact. L'homologie symplectique est un invariant construit en mélangeant deux dynamiques : la dynamique du flot hamiltonien sur M et la dynamique du flot de Reeb sur la variété de contact ∂M.

Le champ de Reeb sur une variété de contact (Y, α) est l'unique champ de vecteur R vérifiant les équations $R \in \ker(d\alpha)$ et $i_R\alpha = 1$. Par exemple, le flot de Reeb du fibré unitaire cotangent ST^*X de X est le flot géodésique de X. Le flot de Reeb peut être vu comme un cas particulier de flot hamiltonien de la manière suivante. On prend H un hamiltonien sur $S_+(Y) = [1; +\infty[_r \times Y$ ne dépendant que de la variable r. Alors le champ de vecteur hamiltonien X_H est proportionnel au champ de Reeb R.

L'homologie symplectique est définie comme l'homologie de Floer d'un hamiltonien H défini sur la complétion $\widehat{M} = M \cup S_+(\partial M)$ d'un domaine de Liouville et qui est quadratique sur la partie $S_+(\partial M)$. Cette hypothèse permet de contrôler la dynamique sur la partie non compacte de $\widehat{M}$. On peut aussi utiliser des hamiltoniens linéaires sur $S_+(\partial M)$ et prendre la limite quand la pente tend vers l'infini. Les générateurs de l'homologie symplectique peuvent être décomposés en deux sous-ensembles : d'une part les orbites périodiques du flot hamiltonien situées dans la partie compacte de M et d'autre part les orbites périodiques du flot de Reeb de ∂M.

Cotangent de variété

On peut répondre assez précisément à la question 4 quand le domaine de Liouville considéré est un cotangent de variété :

Théorème 3. *[Vit99], [AS06], [SW06], [Abo15]*
Il existe un isomorphisme $SH(T^*X) \xrightarrow{\sim} H(\mathcal{L}X)$.

Ce théorème répond à la question 4 mais permet aussi de mieux comprendre la structure sous-jacente de l'homologie symplectique. En effet, les espaces de lacets ont été très étudiés (voir par exemple [GM69], [Hin84]) et possèdent une structure riche (voir par exemple [GH09]). Mettons en évidence une structure de l'homologie de lacets qui possède un analogue pour l'homologie symplectique et qui jouera un rôle important dans cette thèse : il s'agit de la catégorie de Fukaya.

Théorème de Goodwillie et catégorie de Fukaya

Soit X une variété fermée munie d'un point base $x \in X$. On note $\mathcal{L}X$ l'espace des lacets de X et ΩX l'espace des lacets basés en x. Le complexe de chaînes $C_*(\Omega X)$ peut être muni d'une structure d'algèbre différentielle graduée en considérant le produit venant de la composition des lacets.

Théorème 4. *[Goo85], [BF86]*
Il existe un isomorphisme :

$$HH_*(C_*(\Omega X)) \to H_*(\mathcal{L}X)$$

où HH désigne l'homologie de Hochschild d'une algèbre différentielle graduée.

On peut reformuler ce théorème d'un point de vue catégorique en suivant l'approche de [BCT09]. On considère la catégorie $\mathcal{C}(\Omega X)$ (appelée parfois catégorie de Pontryagin dans la littérature) suivante : les objets de $\mathcal{C}(\Omega X)$ sont les points de la variété X et les morphismes entre deux points x_1 et x_2 correspondent aux complexes de chaînes $C_*(\Omega_{x_1,x_2}X)$ où $\Omega_{x_1,x_2}X$ désigne l'ensemble des chemins reliant x_1 à x_2. Alors le théorème 4 peut se réécrire sous la forme :

$$HH_*(\mathcal{C}(\Omega X)) \xrightarrow{\sim} H_*(\mathcal{L}X)$$

où HH est l'homologie de Hochschild de la dg-catégorie $\mathcal{C}(\Omega X)$.

Un théorème analogue peut s'écrire pour l'homologie symplectique d'un domaine de Liouville. Prenons M un domaine de Liouville. Une lagrangienne de M est une sous-variété $i : L \hookrightarrow M$ de dimension moitié sur laquelle la forme symplectique ω s'annule. Si on suppose de plus que la forme de Liouville $i^*\lambda$ restreinte à L admet une primitive, c'est-à-dire qu'il existe $f : L \to \mathbb{R}$ telle que $df = i^*\lambda$, on dit que la lagrangienne est *exacte*. Pour une variété de contact de dimension $2n-1$ (Y, α), l'analogue d'une lagrangienne s'appelle une legendrienne et il s'agit d'une variété Λ de dimension $n-1$ sur laquelle la forme α s'annule.

On peut alors définir la catégorie de Fukaya enroulée $WFuk(M)$ de M dont les objets sont les lagrangiennes exactes de M à bord legendrien (qu'on appellera dans la suite du texte lagrangiennes pour raccourcir les notations). Si on se donne deux telles lagrangiennes L_1 et L_2, on note $SC(L_1, L_2)$ l'ensemble des morphismes de L_1 à L_2 appelé *complexe de Fukaya enroulé de la paire* (L_1, L_2). Il est engendré par les cordes hamiltoniennes reliant L_1 à L_2 qu'on munit d'une structure de complexe de chaînes en comptant des bandes solutions de l'équation de Floer. On appellera l'homologie de ce complexe l'*homologie lagrangienne* de la paire (L_1, L_2) dans ce manuscrit. La construction précise de la catégorie de Fukaya enroulée est longue et difficile (voir par exemple [Aur14] et [Sei08b]) et on ne donnera pas plus de détails dans cette introduction. Cependant, il existe un analogue symplectique au théorème de Goodwillie :

Théorème 5. *[Abo10][Gan12]*

(i) Pour tout domaine de Liouville M, il existe un morphisme Open-Closed [1] *noté $\mathcal{OC}$ entre l'homologie de Hochschild de $WFuk(M)$ et l'homologie symplectique de M :*

$$\mathcal{OC} : HH_*(WFuk(M)) \to SH(M)$$

(ii) L'application $\mathcal{OC}$ est un isomorphisme pour les cotangents de variétés. Les domaines de Liouville M tels que $\mathcal{OC}$ est un isomorphisme sont appelés non dégénérés *(définition 1.1 de [Gan12]).*

(iii) Si une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $WFuk(M)$ est telle que $\mathcal{OC}|_{\mathcal{C}} : HH(\mathcal{C}) \to SH(M)$ est un

1. Ce morphisme envoie des cordes hamiltoniennes (dites ouvertes) sur des orbites hamiltoniennes (dites fermées) d'où son nom.

isomorphisme, alors $\mathcal{C}$ engendre formellement la catégorie $WFuk(M)$ (on parle de split-génération*).*

Présentons l'analogie développée dans cette partie entre l'homologie d'un espace de lacets et homologie symplectique dans le tableau suivant :

Variété X	Domaine de Liouville M
Lacets de X Courbes $\gamma : S^1 \to X$	Orbites périodiques hamiltoniennes $\gamma : S^1 \to M$, $\dot{\gamma} = X_H(\gamma)$
Catégorie de Pontryagin $\mathcal{C}(\Omega X)$	Catégorie de Fukaya enroulée $WFuk(M)$
Espace des chemins entre deux points $C_*(\Omega_{x_1,x_2}X)$	Espace des cordes hamiltoniennes entre deux lagrangiennes $SC(L_1, L_2)$
Homologie de l'espace de lacets $H_*(\mathcal{L}X)$	Homologie symplectique $SH(M)$
Théorème de Goodwillie $HH_*(\mathcal{C}(\Omega X)) \xrightarrow{\sim} H_*(\mathcal{L}X)$	Application $\mathcal{OC}$ $HH_*(WFuk(M)) \to SH(M)$

Si $M = T^*X$, cette analogie peut être rendue rigoureuse et ce fait est utilisé dans l'article [Abo11] pour prouver un résultat important sur la catégorie de Fukaya $WFuk(T^*X)$. Dans cet article, Abouzaid prouve que cette catégorie est formellement engendrée par la sous catégorie composée d'un seul objet de $WFuk(T^*X)$ (n'importe quelle fibre cotangente au dessus d'un point base T^*_xX fonctionne) en utilisant le théorème 4 et le (iii) du théorème 5.

Attachements d'anses symplectiques

Comme on l'a vu, le théorème 3 a permis de mettre en évidence plusieurs structures de l'homologie symplectique. Mais il ne répond à la question 4 que dans les cas des cotangents de variétés. L'idée pour donner une réponse plus complète est maintenant la suivante : il s'agit de décomposer chaque domaine de Liouville en briques élémentaires et d'étudier l'évolution de l'homologie symplectique quand on ajoute une brique élémentaire. De manière similaire au cas des variétés standard (voir par exemple les travaux de Smale [Sma62]), les briques élémentaires seront les *anses symplectiques*. Il y a évidemment un lien entre les notions d'attachement d'anses pour les variétés et d'attachements d'anses symplectiques pour les variétés symplectiques. Par exemple, si la variété X est obtenue à partir de la variété Y via un attachement d'anse, alors T^*X est obtenue à partir de T^*Y via un attachement d'anse symplectique.

Rappelons la construction de l'attachement d'anse symplectique due à Weinstein [Wei91] : on se donne M un domaine de Liouville de dimension $2n$ et Λ une sphère isotrope de dimension $k-1$ dans ∂M ce qui signifie que $T\Lambda \subset \ker(\alpha)$ où α est la forme de contact de ∂M. On fixe aussi une trivialisation du fibré symplectique normal de Λ. Alors le domaine

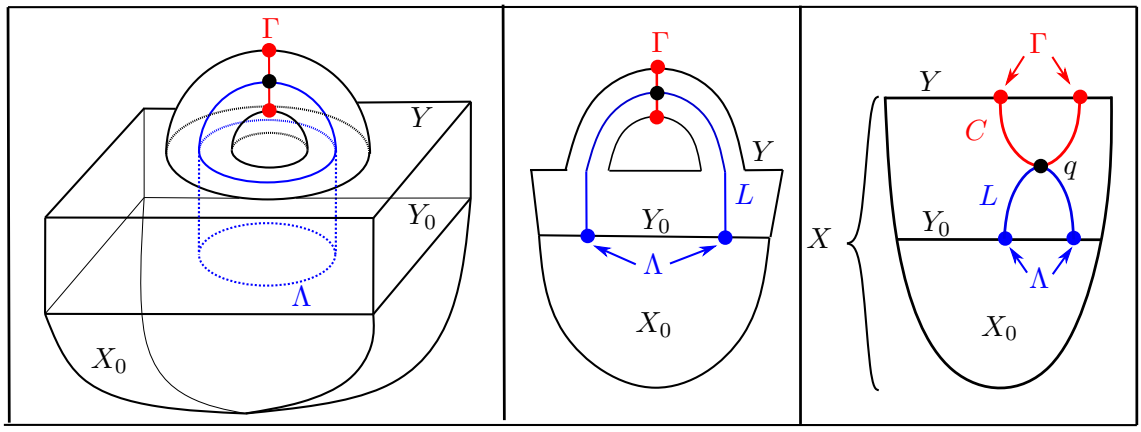


FIGURE 2 – Trois représentations graphiques de l'attachement d'anse de la moins schématique à la plus schématique. Dans ces figures, X est obtenue par attachement d'anse à partir de X_0 le long de $\Lambda \subset \partial X_0 = Y_0$. L'âme de l'anse est L et la coâme est C de bord $\Gamma \subset \partial X = Y$. Finalement, C et L s'intersectent en un unique point qu'on note q.

de Liouville M_Λ obtenu par attachement d'anse symplectique le long de Λ est défini comme la variété obtenue par un recollement :

$$M_\Lambda = M \cup (DT^*D_k \times D^{2n-2k})$$

où le recollement est tel que le bord de la section nulle D^k dans DT^*D^k coïncide avec la sphère $\Lambda \subset \partial M$ (voir figure 2) et tel que D^{2n-2k} est induit par la trivialisation du fibré symplectique normal. Quand la sphère Λ est de dimension $n-1$, alors l'anse attachée correspond à DT^*D^n qui possède deux lagrangiennes remarquables : D^n sera appelée l'*âme* de l'anse et $DT^*_0D^n$ sera appelée la coâme de l'anse.

Théorème 6. *Théorème 1 de [Cie02] et théorèmes 5.6, 5.8 de [BEE12]*

Prenons M un domaine de Liouville de dimension $2n$ et $\Lambda \subset \partial M$ une sphère isotrope. Alors on peut relier l'homologie symplectique de M_Λ à celle de M de la manière suivante :

(i) Si Λ est de dimension $< n-1$ (on dit que l'attachement d'anse est sous-critique*), alors $SH(M_\Lambda) \simeq SH(M)$.*

(ii) Si Λ est de dimension $n-1$ (on dit que l'attachement d'anse est critique *et que Λ est une sphère* legendrienne*), alors il existe une homologie $LH^{Ho}(\Lambda)$ dépendant uniquement de $\Lambda \subset M_0$ et un triangle exact :*

$$\begin{tikzcd} SH(M_\Lambda) \arrow[rr] & & SH(M) \arrow[dl] \\ & LH^{Ho}(\Lambda) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

(iii) Si Λ est de dimension $n-1$, alors il existe un A_∞-isomorphisme entre l'homologie

de Fukaya enroulée de la coâme et l'algèbre de Chekanov de Λ.

Le triangle exact du théorème 6 fait penser à un résultat récent de [CO18]. Dans leur article, les auteurs prouvent le théorème :

Théorème 7. *[Théorème 1.2 de [CO18]]*
Si $M_0 \subset M$ *est un sous-domaine de Liouville de* M*, alors il existe une homologie symplectique relative* $SH(M, M_0)$ *et un triangle exact :*

$$\begin{tikzcd} SH(M) \arrow[rr] & & SH(M_0) \arrow[dl] \\ & SH(M, M_0) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Question 5. *Peut-on relier les triangles exacts des théorèmes 6 et 7 ? Ou plus précisément existe-t-il un isomorphisme entre* $LH^{Ho}(\Lambda)$ *et* $SH(M_\Lambda, M)$ *quand* M_Λ *est obtenue à partir de* M *par attachement d'anse le long d'une sphère legendrienne* Λ *?*

Pour construire l'homologie symplectique relative $SH(M, M_0)$, les auteurs de [CO18] utilisent l'équation de Floer $\partial_s u + J(\partial_t u - X_H)$ pour $u : \mathbb{R} \times S^1 \to M$ avec différents types d'hamiltoniens H (certaines de ces familles sont illustrées en figure 17). Cette approche leur permet, en reliant les différentes familles d'hamiltoniens considérées, de montrer le triangle exact du théorème 7 ainsi que d'autres propriétés fonctorielles de l'homologie symplectique (morphisme de transfert, propriété d'excision...). La question 5 amène naturellement à vouloir utiliser leur formalisme afin de définir différentes versions de l'homologie lagrangienne c'est-à-dire à adopter la même démarche pour étudier des cordes hamiltoniennes et non des orbites hamiltoniennes. En effet, l'invariant $LH^{Ho}(\Lambda)$ est un invariant construit en considérant des cordes et non des orbites.

Or, comme on l'a vu, les cordes hamiltoniennes reliant des lagrangiennes sont utilisées dans la définition de la catégorie de Fukaya enroulée. De plus, on sait que la catégorie de Fukaya enroulée est reliée à l'homologie symplectique via le théorème 5 d'où la question suivante :

Question 6. *Peut-on étendre les constructions de [CO18] à la catégorie de Fukaya enroulée d'un domaine de Liouville ? Existe-t-il un théorème analogue au théorème 6 au niveau des catégories de Fukaya enroulées de* M *et* M_Λ *?*

Répondre positivement à la première partie de cette question devrait permettre, si on reprend les preuves de [CO18], de mieux comprendre la structure de la catégorie de Fukaya enroulée et notamment son comportement sous les cobordismes de domaines de Liouville.

Une dernière question que pose le théorème 6 concerne sa preuve située dans l'article [BEE12]. En effet, les auteurs utilisent des espaces de modules de courbes pseudo-holomorphes dont on ne maîtrise pas totalement la définition à cause de difficultés liées à la

transversalité des espaces de modules en question (on pourra voir à ce sujet les travaux de [HWZ17], de [FOOO09] et de [Par16]). Or de nombreux travaux (voir par exemple [BO10] et [BO09b]) relient des espaces de modules de courbes pseudo-holomorphes à des espaces de modules de courbes avec perturbation hamiltonienne qui eux sont systématiquement transverses.

Question 7. *Peut-on réinterpréter la preuve de [BEE12] en utilisant uniquement des espaces de modules bien définis ?*

4 Mon travail de thèse

Mon travail de thèse s'inscrit dans le cadre posé par les questions 5, 6 et 7.

On se place dans la situation géométrique suivante : on considère un domaine de Liouville X_0 et une sphère legendrienne $\Lambda \subset \partial X_0$ possédant un remplissage lagrangien exact (c'est-à-dire qu'il existe une lagrangienne $L_0 \subset X$ à bord Λ). On dira que (X_0, L_0) remplit $(\partial X_0, \Lambda)$. On note X la variété obtenue à partir de X_0 par attachement d'anse le long de Λ. Finalement, on note C la coâme de l'anse attachée (on pourra se reporter à la partie de droite de la figure 2).

4.1 Homologies lagrangiennes

Complexe de Fukaya enroulé

Si C est une lagrangienne de X, il existe dans la littérature deux définitions de l'homologie lagrangienne $SC(C, C)$ (notée aussi $WF(C, C)$ dans la littérature) : la première dans [Abo10] et la seconde dans [AS10]. Il n'y a actuellement pas de preuve de l'isomorphisme entre ces deux définitions et aucune des deux n'était utilisable dans mon cadre. En effet, on a besoin d'une définition qui utilise deux propriétés de l'homologie lagrangienne. D'une part, on veut pouvoir construire l'application $\mathcal{OC}$, comme introduite dans le théorème 5 :

$$\mathcal{OC} : HH(SC(C, C)) \to SH(X).$$

D'autre part, on veut que $SC(C)$ [2] vérifie des propriétés de fonctorialité vis-à-vis des inclusions : si $(X_0, C_0) \subset (X, C)$ est une inclusion de domaines de Liouville et de lagrangiennes, alors il doit exister un morphisme de transfert :

$$F^{X,C}_{X_0,C_0} : SC(C) \to SC(C_0).$$

2. abbréviation de $SC(C, C)$.

De plus, ces deux morphismes doivent s'intégrer dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} HH(SC(C)) & \xrightarrow{\mathcal{OC}(X)} & SH(X) \\ {\scriptstyle HH(F)}\downarrow & & \downarrow \\ HH(SC(C_0)) & \xrightarrow{\mathcal{OC}(X_0)} & SH(X_0) \end{array} \tag{5}$$

où la flèche verticale de droite est le morphisme de transfert de Viterbo construit dans [Vit99] et dont [CO18] donne une nouvelle définition.

Or la définition de [AS10] vérifie la propriété de fonctorialité sous l'inclusion mais je ne suis pas arrivé à construire l'application $\mathcal{OC}$ en utilisant cette définition. D'autre part, la définition de [Abo10] permet de construire l'application $\mathcal{OC}$ mais n'est pas adaptée pour construire un morphisme de transfert. Je donne donc une nouvelle définition de l'homologie lagrangienne de manière analogue à la définition de l'homologie symplectique dans [CO18] :

Théorème A. *[Théorèmes 4.1, 4.2 et 4.5]*

On peut construire des homologies $HH(SC(C))$ fonctorielles sous les cobordismes de domaines de Liouville. De plus, il existe des applications $\mathcal{OC} : HH(SC(C)) \to SH(X)$ telles que le diagramme (5) soit commutatif.

Je définis $HH(SC(C))$ comme une limite directe d'homologies de Floer lagrangiennes définies en utilisant des hamiltoniens à pente linéaire sur la partie non compacte de la complétion du domaine de Liouville. C'est ce qui permet de récupérer la propriété de fonctorialité (théorème 4.2) de $HH(SC(C))$ en s'inspirant de la définition du morphisme de transfert $SH(X) \to SH(X_0)$ dans [CO18] (définition 5.2 de [CO18]).

D'autre part cette définition vérifie une propriété universelle (théorème 4.1) qui la rend simple d'utilisation et, en l'utilisant, je construis le foncteur $\mathcal{OC}$ (théorème 4.5). La construction de [AS10] ne vérifie pas de telle propriété universelle (ou alors elle n'est pas énoncée dans l'article) et c'est ce qui m'a empêché de l'utiliser pour définir l'application $\mathcal{OC}$. Finalement, la commutativité du diagramme (5) découle du fait qu'on a utilisé la même démarche pour définir les deux morphismes de transfert qui correspondent aux applications verticales du diagramme.

Deux extensions naturelles de ce théorème sont en cours de rédaction. La première consiste à démontrer le fait, bien connu des spécialistes, que la catégorie des A_∞-algèbres admet les colimites homotopiques. Cela permettrait de donner une nouvelle définition de $SC(C)$ et, en généralisant, de la catégorie de Fukaya enroulée alors que je n'ai pour l'instant qu'une nouvelle définition de $HH(SC(C))$. La seconde extension du théorème A est la conjecture suivante :

Conjecture 1 (Conjecture 4.2)**.**

Notons $SC^{quad}(C)$ la construction de [Abo10] et $HH(SC(C))$ l'homologie de Hochschild

comme définie dans le théorème 4.1. Il existe un isomorphisme

$$HH(SC(C)) \xrightarrow{\sim} HH(SC^{quad}(C)).$$

Algèbre de Chekanov

Soit Λ une legendrienne dans une variété de contact Y. L'article [BEE12] utilise l'algèbre de Chekanov de Λ dans son cadre le plus général (sans hypothèses sur Y ou Λ). Or cette algèbre a été définie en dimension 3 par Chekanov [Che02] et dans le cas $Y = P \times \mathbb{R}$ où P est une variété symplectique par Ekholm, Etnyre et Sullivan [EES07]. L'algèbre de Chekanov est un objet central dans l'étude des noeuds legendriens en dimension 3.

Sans hypothèses sur Y ou Λ, la définition de l'algèbre de Chekanov nécessite d'utiliser des courbes pseudo-holomorphes qui peuvent être non transverses. Afin de répondre positivement à la question 7, il a fallu donc donner une définition hamiltonienne de cette algèbre de Chekanov. Pour ce faire, j'ai eu besoin de rajouter l'hypothèse suivante : il existe un remplissage de (Y_0, Λ) par (X_0, L_0) c'est-à-dire que X_0 est un domaine de Liouville à bord Y_0 et que L_0 est une lagrangienne de X_0 à bord Λ. J'ai alors construit une homologie de Chekanov hamiltonienne $HCH(\Lambda, L_0)$ qui vérifie le théorème suivant :

Théorème B. *[Définitions 4.1, 4.2 et théorème 4.3]*
Soit Λ une legendrienne d'une variété de contact Y_0 telle qu'il existe un remplissage de (Y_0, Λ) par (X_0, L_0). Alors il existe un isomorphisme

$$H_*(CH(\Lambda, L_0)) \xrightarrow{\sim} HCH(\Lambda, L_0)$$

où $CH(\Lambda, L_0)$ désigne la construction standard de l'algèbre de Chekanov de Λ augmentée par l'augmentation géométrique provenant du remplissage L_0 (définition 4.2).

La construction de $HCH(\Lambda, L_0)$ n'utilise que des courbes à perturbation hamiltonienne qui vérifient donc la propriété de transversalité. Il s'agit donc d'une extension de la définition de l'algèbre de Chekanov dans un nouveau cadre. Il existe une autre construction hamiltonienne de $CH(\Lambda, L_0)$ dans [EO17]. Ils utilisent des hamiltoniens convexes à poids indicés par des simplexes alors que la définition 4.1 n'a pas besoin de poids car elle utilise des hamiltoniens concaves.

La comparaison entre ces deux définitions m'a amené à développer dans l'annexe A l'heuristique suivante : les hamiltoniens concaves sont plus adaptés pour perturber des espaces de modules de courbes avec plusieurs pointes négatives alors que les hamiltoniens convexes sont plus adaptés pour perturber des espaces de modules de courbes avec plusieurs pointes positives. Si on souhaite utiliser un hamiltonien convexe (respectivement concave) pour perturber un espace de modules de courbes avec plusieurs pointes négatives (respectivement positives), il faudra tenir compte des poids associés à chaque pointe. Je pense que cette heuristique est une émanation d'une propriété de dualité concernant les

homologies lagrangiennes similaires aux propriétés de dualité de l'homologie symplectique présentes dans [CO18]. Une première conjecture qui permettrait d'explorer ces propriétés de dualité serait la suivante :

Conjecture 2. Il existe un isomorphisme canonique entre les deux constructions hamiltoniennes de l'algèbre de Chekanov : la définition 4.1 et la définition donnée dans la section 5.3 de [EO17].

Les deux constructions présentées dans les théorèmes A et B constituent un premier pas vers une réponse à la première partie de la question 6. En effet, on adopte des démarches similaires pour définir $HCH(\Lambda, L_0)$ et $HH(SC(C))$: on considère un complexe de chaînes engendré par des cordes hamiltoniennes et la forme de la famille d'hamiltoniens choisie change la structure algébrique sous-jacente.

4.2 Liens entre la coâme et l'âme d'un attachement d'anse

Homologie de Hochschild de l'algèbre de Chekanov

Je construis dans l'annexe C un nouveau complexe de chaînes qui calcule l'homologie de Hochschild de la construction cobar d'une A_∞-cogèbre :

Théorème C (Théorème C.1)**.**

(i) Soit C une A_∞-cogèbre et ΩC sa construction cobar. On construit un complexe de chaînes $CC^p_*(\Omega C)$ rétracte par déformation forte de $CC_*(\Omega C)$ c'est-à-dire qu'il existe des applications p, I et H tels que :

$$\begin{tikzcd} (CC_*(\Omega C), d_{CC_*}) \arrow[loop left, "H"] \arrow[r, shift left, "p"] & (CC^p_*(\Omega C), d_{CC^p_*}). \arrow[l, shift left, "I"] \end{tikzcd}$$

(ii) $LH^{Ho}(\Lambda) = HH^p(CH(\Lambda))$ où $CH(\Lambda)$ désigne l'algèbre de Chekanov de Λ (non augmentée) définie dans la proposition 4.3 de [BEE12].

J'ai construit le complexe CC^p en m'inspirant d'une construction bien connue analogue pour l'homologie de Hochschild d'une algèbre tensorielle (voir section C.4). Ce théorème présente un intérêt double : d'une part, il construit un complexe plus simple qui calcule l'homologie de Hochschild de la construction cobar d'une A_∞-cogèbre. D'autre part, il apporte un éclairage nouveau sur la définition de $LH^{Ho}(\Lambda)$ (proposition 4.10 de [BEE12]).

Diagramme commutatif

On définit ensuite un isomorphisme entre l'homologie lagrangienne de la coâme et l'algèbre de Chekanov de Λ définie de manière hamiltonienne.

Théorème D. *[Théorèmes 4.7, 4.8, 4.10, 5.4]*

(a) Soient $X_0 \subset X$ deux domaines de Liouville et L et C deux lagrangiennes de X vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $C \cap X_0 = \varnothing$,

(ii) pour tout hamiltonien H de $\mathcal{H}(X, X_0)$ (voir définition dans la section 4.1.2), il existe une unique corde hamiltonienne reliant L à C.

Alors il existe des morphismes $HH^p(F) : HH(SC(C)) \to HH^p(HCH(\Lambda, L_0))$ et $\mathcal{CO} : HH^p(HCH(\Lambda, L_0)) \to SH(X, X_0)$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} HH(SC(C)) \arrow[rr, "HH^p(F)"] \arrow[dr, "\mathcal{OC}"'] & & HH^p(HCH(\Lambda, L_0)) \\ & SH(X, X_0) \arrow[ur, "\mathcal{CO}"'] & \end{tikzcd}$$

(b) Soit X obtenu par attachement d'anse à partir de X_0 le long de Λ. On suppose que $(\partial X_0, \Lambda)$ possède un remplissage lagrangien (X_0, L_0). Notons respectivement C et L_1 la coâme et l'âme de l'attachement d'anse. Alors C et $L = L_0 \cup L_1$ vérifient les conditions de (a). De plus l'application $HH^p(F)$ introduite en (a) est un isomorphisme.

Toutes les constructions dans ce théorème n'utilisent que des espaces de modules de courbes à perturbations hamiltoniennes. Ce théorème répond donc positivement à la question 7 pour le (iii) du théorème 6.

4.3 Génération de la catégorie de Fukaya

Le théorème D est la conséquence de résultats concernant la dynamique du flot de Reeb sur la variété obtenue après chirurgie :

Théorème 8. *[section 6.1 de [BEE12]]*
Pour tout $\lambda > 0$, il existe une manière d'attacher l'anse telle que :

(i) les cordes de Reeb de longueur $< \lambda$ reliant $C \cap \partial X$ dans ∂X sont en bijection avec les mots de longueur $< \lambda$ en les cordes de Reeb de Λ,

(ii) les orbites de Reeb de longueur $< \lambda$ dans ∂X sont en bijection avec :

(a) les mots cycliques de longueur $< \lambda$ en les cordes de Reeb de Λ,

(b) les orbites de Reeb de ∂X_0 de longueur $< \lambda$.

L'énoncé (i) de ce théorème est un des ingrédients de la preuve du théorème D. Je ne suis pas arrivé à appliquer la même procédure pour les orbites hamiltoniennes afin de déduire du (ii) le résultat suivant :

Conjecture 3. [Reformulation de la conjecture 5.1]

Il existe une famille d'hamiltoniens H admissibles sur X de type $\mathcal{H}(X, X_0)$ (voir section 4.1.2) dont les orbites périodiques contribuant à l'homologies de Floer de H sont en correspondance avec des S^1-familles indicées par les mots cycliques en les cordes de Reeb de Λ.

Cette conjecture m'a posé un problème car il faut arriver à ne pas tenir compte des anciennes orbites hamiltoniennes venant de X_0. Ce problème n'apparait pas quand on étudie les cordes hamiltoniennes de la coâme C car $C \cap X_0 = \varnothing$, il n'y a donc pas d'anciennes cordes hamiltoniennes de C.

Pour arriver à déduire du théorème 5.1 la conjecture ci-dessus, il s'agit donc de construire une famille d'hamiltoniens dont les anciennes orbites périodiques ((b) dans le théorème 5.1) ne contribuent pas à l'homologie. Or la variété $X \backslash X_0$ peut être décomposée en deux parties : une partie correspond à l'anse DT^*D^n et l'autre partie est un cobordisme trivial de la forme $[1;2] \times Y$ où Y est une variété de contact. Si on arrive à prolonger une famille de hamiltoniens linéaires sur le cobordisme trivial $[1;2] \times Y$ dans l'anse, alors on pourrait démontrer la conjecture ci-dessus car on arriverait à décomposer le complexe de Floer en la somme d'un complexe acyclique et d'un complexe engendré par les nouvelles orbites de Reeb. En admettant la conjecture 3, on démontre :

Théorème E. *[Utilise la conjecture 3, théorème 5.5]*

Le diagramme commutatif du théorème D reproduit ici

$$\begin{tikzcd}
HH(SC(C)) \arrow[rr, "HH^p(F)"] \arrow[dr, "\mathcal{OC}"'] & & HH^p(HCH(\Lambda, L_0)) \\
& SH(X, X_0) \arrow[ur, "\mathcal{CO}"'] &
\end{tikzcd}$$

n'est composé que d'isomorphismes.

Ce théorème, sous condition de la conjecture 3, répond complètement à la question 5 : en effet on montre que l'application $\mathcal{CO} : SH(X, X_0) \to HH^p(HCH(\Lambda, L_0))$ est un isomorphisme. Or les théorèmes B et C assurent que $HH^p(HCH(\Lambda, L_0)) \simeq LH^{Ho}(\Lambda)$. D'autre part ce théorème donne une réponse partielle à la question 6. En effet, comme l'indique le théorème 4, l'application $\mathcal{OC}$ est extrêmement importante pour comprendre la catégorie de Fukaya enroulée d'un domaine de Liouville. Or on montre ici que cette application $\mathcal{OC}$ réalise un isomorphisme entre $HH(SC(C))$ et $SH(X, X_0)$. En particulier, si X_0 est sous-critique c'est-à-dire si $SH(X_0) = 0$, alors, comme $SH(X) \simeq SH(X, X_0)$, on en déduit que X est non dégénéré et que C split-engendre la catégorie de Fukaya de X. Ce résultat suffit pour récupérer le théorème de split-génération d'Abouzaid sur les cotangents de variétés.

J'ai ensuite cherché à étendre par récurrence le résultat de split-génération ci-dessus au cas où on attache plusieurs anses successivement en partant d'un domaine de Liouville sous-critique (par exemple D^{2n}). Notons dorénavant X_0 le domaine de Liouville obtenu à partir de D^{2n} en attachant successivement des anses de coâmes $C_1, \dots C_k$. On suppose que l'application $\mathcal{OC} : HH(SC(\{C_1^0, \dots, C_l^0\})) \to SH(X_0)$ est un isomorphisme. On construit X par attachement d'anse à partir de X_0 et on note C la coâme de cet attachement. Finalement, on prolonge par des cylindres triviaux au-dessus de leur bord legendrien les lagrangiennes $C_i^0 \subset X_0$ pour obtenir des lagrangiennes $C_i \subset X$. On construit dans la section 4.4.1 un diagramme commutatif (diagramme (4.14)) de suites exactes longues :

$$\begin{tikzcd}
H_*(\mathrm{Cone}(F)) \arrow[r] \arrow[d, "G"] & HH(SC(\{C_i^X\}_i \cup \{C\})) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathcal{OC}(X)"] & HH(SC(\{C_i^0\}_i)) \arrow[d, "\mathcal{OC}(X_0)"] \\
H_*(\mathrm{Cone}(F_{X_0}^X)) \arrow[r] & SH(X) \arrow[r, "F_{X_0}^X"] & SH(X_0).
\end{tikzcd} \tag{6}$$

On sait que $H(\mathrm{Cone}(F_{X_0}^X)) \simeq SH(X, X_0)$ (théorème 7.1 de [CO18]). On conjecture un résultat analogue dans notre cas :

Conjecture 4. [Conjecture 4.3]
Il existe un isomorphisme

$$HH_*(SC(C, \varnothing)) \simeq H_*(\mathrm{Cone}(F)).$$

De plus l'application G de (6) correspond à $\mathcal{OC}(X, X_0)$ via les isomorphismes

$$HH_*(SC(C, \varnothing)) \simeq H_*(\mathrm{Cone}(F)) \text{ et } SH_*(X, X_0) \simeq H_*\left(\mathrm{Cone}\left(F_{X_0}^X\right)\right).$$

Cette conjecture permet alors de finir la récurrence souhaitée en appliquant le lemme des 5 au diagramme (6) et d'obtenir ainsi le théorème suivant :

Théorème F. *[Utilise les conjectures 3 et 4]*
Si X est un domaine de Liouville obtenu à partir du disque D^{2n} par attachements d'anses successifs le long de legendriennes possédant des remplissages lagrangiens, alors l'ensemble des coâmes split-engendre la catégorie de Fukaya de X.

Ce théorème répond positivement à la question 6. Une version plus forte de ce théorème a été démontrée dans [CDGG17] avec des techniques complètement différentes qui ont été développées aussi dans [GPS17].

En conclusion de ce travail, on peut tout d'abord remarquer que les théorèmes énoncés dans la thèse n'utilisent que des espaces de modules transverses. On retrouve ainsi une nouvelle preuve du théorème 6 qui constitue le résultat principal de [BEE12]. De plus, on

prolonge les résultats de [BEE12] en démontrant les théorèmes E et F qui permettent de mieux comprendre la catégorie de Fukaya après attachement d'anse. Toutefois, certains théorèmes ont des preuves incomplètes à cause des conjectures admises. On récapitule les différentes dépendances dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{Théorèmes A, B, C}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \boxed{\text{Théorème D}} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & & \boxed{\text{(iii) du théorème 6}} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\boxed{\text{Conjecture 3}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{Théorème E}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & \boxed{\text{(i) et (ii) du theorème 6}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{Théorème 6}} \\
\boxed{\text{Conjecture 4}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{Théorème F}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{Nouveaux résultats}} &
\end{tikzcd}$$

Les constructions des théorèmes A, B et C ont permis de mener à bien la preuve du théorème 6. On s'attend à ce que ces constructions aient un champ vaste d'applications. On pourrait ainsi explorer les propriétés de fonctorialité et de dualité que vérifient les homologies lagrangiennes définies dans cette thèse (conjecture 2). On pourrait aussi chercher à généraliser la conjecture 4 en définissant une catégorie de Fukaya relative de la même manière qu'on définit l'homologie symplectique relative.

4.4 Variétés de Brieskorn-Pham

Les variétés de Brieskorn-Pham font l'objet d'un chapitre à part, le chapitre 6, pour présenter un travail de recherche en cours et sans lien direct avec les autres chapitres de la thèse. Il s'agit d'une généralisation d'un travail de A'Campo [A'C09] qui relie le flot de Reeb sur le lien d'une singularité à un flot dit "de billard" sur le squelette de la fibre de Milnor de la singularité en dimension 2. On espère ainsi voir dans quelle mesure le théorème 3 qui relie $SH(T^*M)$ et $H_*(\mathcal{L}M)$ peut se généraliser dans le cas des variétés de Brieskorn-Pham. On définit un flot de billard sur le squelette de la variété de Brieskorn-Pham qu'on conjecture être isomorphe au flot de Reeb. On énonce de plus dans ce chapitre la conjecture suivante :

Conjecture 5 (Conjecture 6.1)**.** [A'C09]

Soit W une fibre de Milnor dont le squelette S est une variété branchée. Alors on peut munir le squelette S de structures supplémentaires qui permettent de reconstruire la variété W. La définition d'un flot de billard sur S ferait partie de ces structures supplémentaires.

5 Présentation des chapitres

Dans le chapitre 1, je présente les espaces de modules de surfaces épointées et le théorème de compactification de Deligne-Mumford. Cette présentation, assez élémentaire,

est souvent laissée en exercice dans les articles de recherche et j'ai profité de la liberté qu'offre un manuscrit de thèse pour donner des détails et présenter des exemples personnels (notamment les figures 6, 8 et 11).

Le deuxième chapitre est consacré à l'équation pseudo-holomorphe avec perturbation hamiltonienne appelée aussi *équation de Floer*. La définition complète et précise de cette équation est assez longue et technique et a été effectuée dans quelques articles et livres fondateurs (par exemple [FHS95], [MS04] et [Sei08b]). J'ai choisi de mettre l'accent sur l'ensemble des données nécessaires pour définir un espace de modules de solutions de l'équation de Floer et sur les méthodes utilisées pour construire ces données de manière cohérente. Pour quiconque découvre ce domaine des mathématiques, il est difficile d'avoir une vision globale de toute cette construction et le but de ce chapitre est justement de présenter une telle vision globale et en donnant des références utiles pour les vérifications nécessaires et non effectuées dans ce manuscrit.

Dans le troisième et le quatrième chapitre, on effectue des constructions d'invariants de variétés symplectiques et de morphismes entre ces différents invariants. C'est notamment là où se trouvent les théorèmes A, B et la première partie du théorème D. Pour des raisons de présentation, cette partie a été divisée en deux chapitres afin de séparer la construction algébrique (chapitre 4) de la géométrie sous-jacente (chapitre 3). Je conseille de lire le chapitre 4 et de se reporter au chapitre 3 (notamment aux figures récapitulatives 12 et 13) quand cela est nécessaire.

On trouve dans le chapitre 5 les théorèmes D, E et F. On y présente une version élémentaire de l'attachement d'anse qui a cependant le défaut de ne pas être lisse. L'analyse nécessaire pour adapter les résultats qu'on prouve dans le cadre de cette construction non lisse au cadre standard n'est pas effectuée et c'est pour cela qu'on admet le théorème 8 (annoncé dans la section 6.1 de [BEE12]). On adapte ensuite les preuves de [BEE12] dans notre cadre hamiltonien.

Le chapitre 6 est indépendant et consacré aux variétés de Brieskorn-Pham. On y présente une construction d'un flot de billard généralisé sur le squelette d'une variété de Brieskorn-Pham.

L'annexe A présente un calcul élémentaire qui a guidé les constructions effectuées dans les chapitres 3 et 4 et qui explique l'heuristique derrière la conjecture 2.

Les annexes B et C fixent les définitions des A_∞-algèbres, A_∞-cogèbres et de l'homologie de Hochschild qu'on utilise dans le reste de la thèse. On y présente notamment une version condensée et utilisable de la construction de l'homologie de Hochschild avec quelques calculs élémentaires mais éclairants. Les références dans la littérature pour la définition et les propriétés de l'homologie de Hochschild sont assez éparpillées dans des articles parfois très algébriques et j'espère que le fait de regrouper dans ces annexes une présentation élémentaire aidera les géomètres à mieux appréhender les A_∞-algèbres et l'homologie de Hochschild. De plus, on démontre dans l'annexe C le théorème C.

Chapitre 1

Espaces de modules de surfaces

1.1 Notations et définitions

On souhaite décrire géométriquement des compactifications d'espaces de modules de surfaces.

Soit S une surface compacte possiblement à bord. Un ensemble ordonné Γ de *points marqués avec marqueurs asymptotiques* de S est la donnée :

(i) d'une collection ordonnée de points Γ de S (qui sont soit intérieurs soit sur le bord de S),

(ii) d'un *marqueur asymptotique* - i.e. un élément de l'espace projectif $P_+(T_zS)$ - pour chaque point intérieur z de Γ.

La surface $\widehat{S} = S\backslash\Gamma$ est appelée la *surface épointée* associée à la surface avec points marqués (S, Γ).

Une *structure complexe* sur une surface épointée $\widehat{S} = S\backslash\Gamma$ est une structure complexe sur $\widehat{S}$ qui s'étend en une structure complexe sur S. Un ensemble de *coordonnées cylindriques* pour une structure complexe est la donnée de coordonnées holomorphes φ_z allant d'un modèle standard dans un voisinage V de z dans $\widehat{S} = S\backslash\Gamma$, où le modèle standard varie :

(i) si z est un point marqué sur le bord : $\varphi_z : [0; +\infty[\times[0; 1] \to V$,

(ii) si z est un point marqué intérieur muni d'un marqueur asymptotique u, φ_z : $[0; +\infty[\times S^1 \to V$ tel que la génératrice $[0; +\infty[\times\{1\}$ soit envoyée sur la direction u si l'on étend φ_z en une application $D^2 \to V \cup \{z\} \subset S$ en utilisant le théorème d'élimination des singularités.

Pour simplifier l'écriture du modèle standard selon les cas, $I(z)$ désignera respectivement $[0; 1]$ ou S^1 selon que la pointe est sur le bord ou intérieure. Il existe toujours des

coordonnées cylindriques et l'ensemble des choix de coordonnées cylindriques est contractile (lemme 2.5.2 de [Abo15]).

Pour une surface avec points marqués (S, Γ), on appelle *espace de pré-modules* de (S, Γ) l'ensemble $\mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$ des structures complexes sur la surface épointée $\widehat{S}$. On introduit une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$ en disant que $j \sim j'$ s'il existe un biholomorphisme $\psi : (S, j) \to (S, j')$ qui vérifie de plus :

(i) pour tout $z_0 \in \Gamma$, $\psi(z_0) = z_0$,

(ii) pour toute pointe intérieure z munie d'un marqueur asymptotique u, $d\psi_z(u) = u$.

Un tel ψ s'appelle un *biholomorphisme de surfaces épointées.*

Quand pour tout élément $j, j' \in \mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$, l'ensemble des biholomorphismes de surfaces épointées qui réalisent l'équivalence entre j et j' est un ensemble fini, on dit que la surface est *stable.* On définit alors l'*espace de modules* $\mathcal{M}(S, \Gamma)$ de (S, Γ) comme le quotient de $\mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$ par cette relation d'équivalence. On admet que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^{pr}$ peuvent être munis naturellement d'une structure d'orbifold topologique et que si (S, Γ) est difféomorphe à (S', Γ'), $\mathcal{M}(S, \Gamma)$ et $\mathcal{M}(S', \Gamma')$ sont homéomorphes.

Une *surface nodale* est une collection de surfaces épointées avec un ensemble de noeuds c'est-à-dire d'une collection de points marqués supplémentaires regroupés par paires disjointes de mêmes types (c'est-à-dire qu'un point sur le bord et un point intérieur ne peuvent être appariés). On travaillera avec des surfaces nodales *décorées* c'est-à-dire que chaque noeud intérieur (z_1, z_2) est muni d'une application renversant l'orientation :

$$\theta : P_+(T_{z_1}S_1) \to P_+(T_{z_2}S_2).$$

On remarque que si on fixe des coordonnées cylindriques près de z_1 et z_2, cela fournit une identification $P_+(T_{z_i}S_i) \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et donc une décoration θ est juste un angle $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Une surface nodale est dite *stable* si l'ensemble de ses automorphismes (biholomorphismes de surfaces épointées qui préservent les noeuds et les décorations) est fini.

On peut éliminer un nœud $z_1 \sim z_2$ entre deux surfaces épointées S_1 et S_2 (on autorise le cas $S_1 = S_2$) de la manière suivante. On se donne des coordonnées cylindriques pour chaque S_i près du nœud, c'est à dire des plongements holomorphes :

$$\begin{aligned} &\varphi_1 : [0; +\infty[\times I \hookrightarrow S_1, && \lim_{s \to \infty} \varphi_1(s, \cdot) = z_1, \\ &\varphi_2 :]-\infty; 0] \times I \hookrightarrow S_2, && \lim_{s \to -\infty} \varphi_2(s, \cdot) = z_2, \end{aligned}$$

où $I = S^1$ si le nœud est un point intérieur et $I = [0;1]$ si le nœud est un point sur le bord et où on a choisi des coordonnées cylindriques négatives près de z_2 afin de simplifier la description du recollement (ce qui est possible car $]-\infty;0] \times I$ est biholomorphe à $[0;+\infty[\times I)$. Si le noeud est sur le bord, alors on définit pour $R > 0$:

$$S_1\#_R S_2 = \big(S_1\backslash\varphi_1([R;+\infty[\times I)\big) \cup \big(S_2\backslash\varphi_2(]-\infty;-R]\times I)\big)/\sim, \quad \text{où } \varphi_1(R,t) \sim \varphi_2(-R,t). \tag{1.1}$$

Si le noeud est intérieur (et donc muni d'une décoration c'est-à-dire d'un angle θ), alors on définit :

$$S_1\#_R S_2 = \big(S_1\backslash\varphi_1([R;+\infty[\times I)\big) \cup \big(S_2\backslash\varphi_2(]-\infty;-R]\times I)\big)/\sim, \quad \text{où } \varphi_1(R,t) \sim \varphi_2(-R,t+\theta).$$

Les surfaces épointées $(S_1\#_R S_2, \Gamma)$ sont toutes difféomorphes. Cela assure que l'espace de modules $\mathcal{M}(S_1\#_R S_2, \Gamma)$ est indépendant de R et on note cet espace $\mathcal{M}(S_1\#S_2, \Gamma)$. On dit que $S_1\#S_2$ est la surface épointée obtenue après *recollement* le long du nœud (z_1, z_2).

Si N est une surface nodale, on appelle $\#N$ la surface obtenue après recollement le long de tous ses nœuds. On peut alors formuler le théorème admis suivant :

Théorème 1.1 (Compactification de Deligne-Mumford décorée, théorème 4.2 de [BEH+03])**.**

Soit S une surface de Riemann munie d'un ensemble ordonné de points marqués Γ avec marqueurs asymptotiques. Alors l'ensemble $\mathcal{N}(S)$ des surfaces nodales décorées stables N (à difféomorphisme près) telles que $\#N \simeq S$ est fini et

$$\overline{\mathcal{M}}(S) = \bigcup_{N\in\mathcal{N}(S)} \mathcal{M}(N)$$

peut être muni d'une structure d'orbifold topologique. Cet orbifold est compact et on l'appelle la compactification de Deligne-Mumford décorée *de l'espace de modules de S.*

Remarque 1.1. Tous les espaces de modules qu'on considèrera dans ce chapitre seront des variétés topologiques à coins. Cela est du au fait que les courbes stables qu'on considère dans ce chapitre ont toutes un groupe d'automorphisme réduit à l'identité.

En particulier, on peut dans ce cas préciser le théorème 1.1 de la manière suivante :

(i) l'espace $\overline{\mathcal{M}}(S)$ est une variété topologique à coins,

(ii) l'intérieur de $\overline{\mathcal{M}}(S)$ est $\mathcal{M}(S)$,

(iii) si N est une surface nodale stable apparaissant dans la compactification de Deligne-Mumford décorée de $\mathcal{M}(S)$, le nombre de nœuds de N est égal à la codimension du coin $\mathcal{M}(N) \subset \overline{\mathcal{M}}(S)$.

Remarque 1.2. Par la suite, si (S, Γ) est une surface avec points marqués, on associera

un signe + ou - à chaque pointe. Cela permettra dans les chapitres suivants de définir une équation de Floer pour une application allant d'une surface épointée dans une variété symplectique (voir chapitre 2).

1.2 Quelques compactifications d'espaces de modules

Dans toutes les descriptions de bord, N désigne un nœud qui doit apparaitre deux fois. Afin de simplifier les notations, on introduira dans cette section deux termes non standards : *anneau pincé* et *demi-cylindre*.

1.2.1 Disques épointés

Le lemme suivant est classique.

Lemme 1.1 (Condition de stabilité pour un disque)**.** *Les biholomorphismes du disque D^2 agissent transitivement et librement sur les triplets de points de $\partial D^2 = S^1$. De plus un disque épointé est stable si l'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :*

(i) il y a au moins trois points marqués sur le bord du disque,

(ii) il y a au moins un point marqué intérieur avec un marqueur asymptotique.

On appellera D_n la surface épointée $(D, \{z_1, \dots, z_n\})$ où $z_1, \dots, z_n$ sont des points sur le bord de D ordonnés dans le sens trigonométrique. On remarque que d'après le lemme 1.1, les surfaces épointées D_0, D_1 et D_2 ne sont pas stables. Une autre conséquence directe du lemme 1.1 est que $\mathcal{M}(D_3)$ est réduit à un point. Les espaces de modules $\mathcal{M}(D_4)$ et $\mathcal{M}(D_5)$ sont représentés dans les figures 3 et 4 respectivement.

Dans un premier temps, on va appliquer le théorème de Deligne-Mumford pour traiter le cas général. Pour faciliter l'écriture, on dira que Γ_1, Γ_2 est une *décomposition cyclique* de $\{z_1, \dots, z_n\}$ si

(i) $z_1 \in \Gamma_1$,

(ii) Γ_1 et Γ_2 contiennent chacun un élément qu'on notera N (abréviation de nœud) et partitionnent les z_i. On demande de plus que N soit le dernier élément de Γ_1 et le premier de Γ_2.

(iii) si z_i est dans Γ_1 ou Γ_2, alors l'élément qui suit z_i ne peut être que z_{i+1} ou N,

(iv) on récupère l'ordre cyclique de Γ si on lit les éléments de $\Gamma_2 \backslash \{\mathrm{N}\}$ à la suite des éléments de $\Gamma_1 \backslash \{\mathrm{N}\}$.

Par exemple, $\{z_6, z_1, z_2, \mathrm{N}\}$ et $\{\mathrm{N}, z_3, z_4, z_5\}$ est une décomposition cyclique de $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$ mais pas $\{z_5, z_1, \mathrm{N}\}$ et $\{\mathrm{N}, z_3, z_4, z_6, z_2\}$.

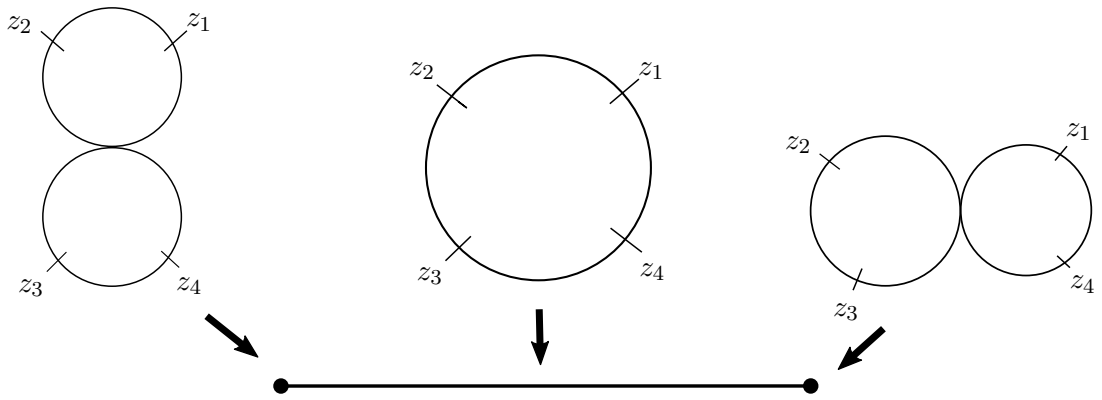


FIGURE 3 – L'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}(D_4)$ est un segment.

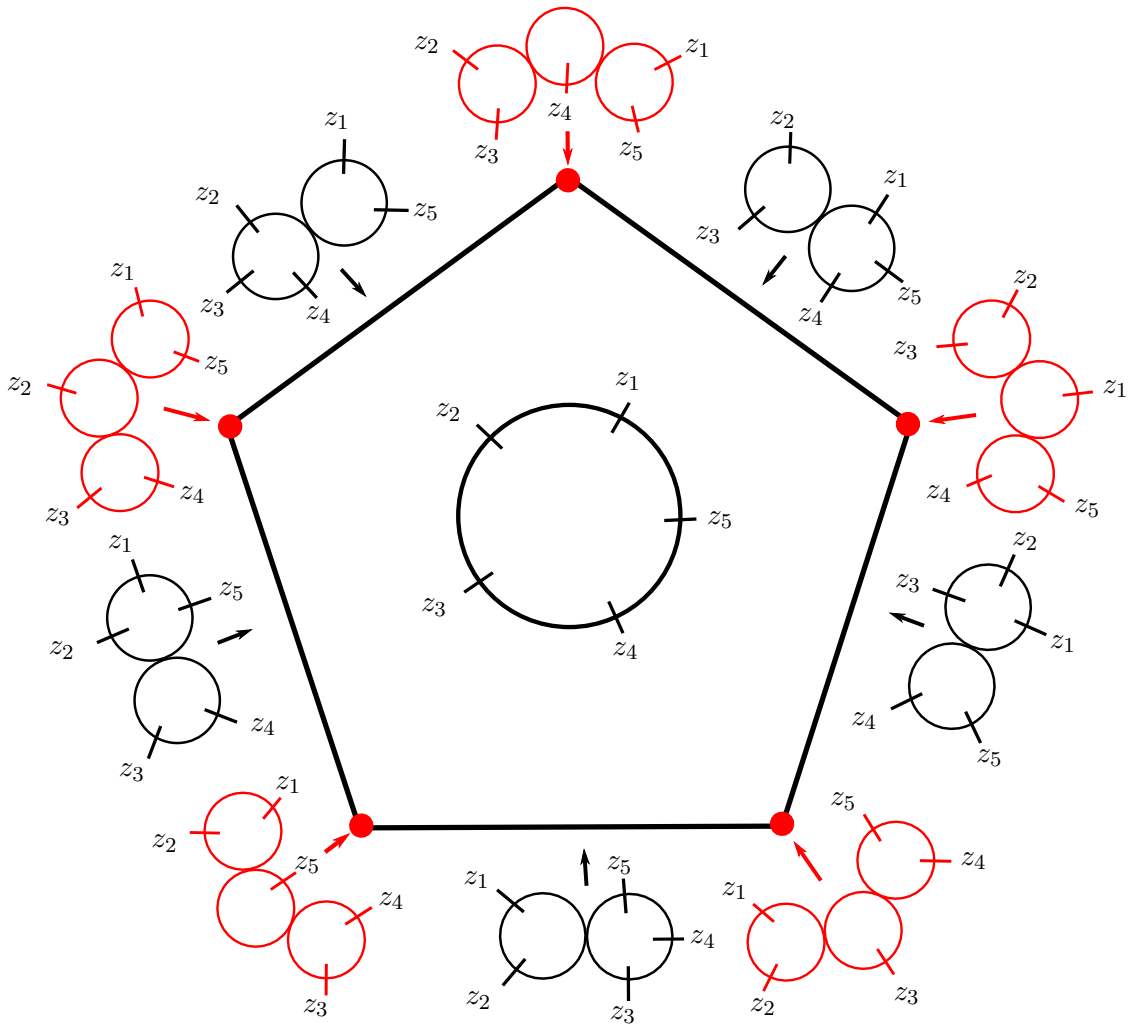


FIGURE 4 – On obtient l'*associahèdre de Stasheff* quand on considère l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}(D_5)$.

Lemme 1.2. *La variété topologique $\overline{\mathcal{M}}(D_n)$ est une variété compacte de dimension $n-3$. Pour chaque décomposition cyclique Γ_1, Γ_2 de $\{z_1, \ldots, z_n\}$ telle que Γ_1 et Γ_2 soient chacun de cardinal supérieur à 3, on voit une copie de $\mathcal{M}(D, \Gamma_1) \times \mathcal{M}(D, \Gamma_2)$ dans le bord de codimension 1.*

Cet espace de modules correspond à l'espace de modules de la courbe nodale formée de deux disques épointés (D_1, Γ_1) et (D_2, Γ_2) et où N est le nœud. On peut résumer par la formule suivante :

$$\partial_1 \overline{\mathcal{M}}(D, \Gamma) = \bigcup_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ j-i \geqslant 2 \\ n-(j-i) \geqslant 2}} \mathcal{M}(D, \{z_{j+1}, \ldots, z_n, z_1, \ldots, z_i, \mathrm{N}\}) \times \mathcal{M}(D, \{\mathrm{N}, z_{i+1}, \ldots, z_j\}).$$

Par exemple, il n'y a que deux décompositions cycliques de $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ qui vérifient les conditions du lemme :

1. $\Gamma_1 = \{z_1, z_2, N\}$ et $\Gamma_2 = \{N, z_3, z_4\}$,
2. $\Gamma_1 = \{z_4, z_1, N\}$ et $\Gamma_2 = \{N, z_2, z_3\}$.

Démonstration. On applique le théorème de compactification de Deligne-Mumford et on sait qu'on cherche des courbes nodales stables N avec un nœud N tel que $\#N = (D, \{z_1, \ldots, z_n\}$. Nécessairement, les deux surfaces apparaissant dans la courbe nodale N seront des disques épointés. On sait donc que Γ sera partitionné en deux ensembles $\Gamma_1 \backslash \{\mathrm{N}\}$ et $\Gamma_2 \backslash \{\mathrm{N}\}$. La condition de stabilité assure que les cardinaux de Γ_1 et Γ_2 seront plus grands que 3. Les conditions (ii) et (iii) imposés sur les décompositions cycliques de Γ assurent qu'après recollement le long du nœud on retrouve l'ordre cyclique de Γ. Les conditions (i) et (iv) permettent de ne pas compter plusieurs fois les mêmes courbes nodales. □

On va donner une autre description dans le lemme suivant afin de voir dans ce cas simple les différentes approches qui permettent de construire la compactification de Deligne-Mumford. Cette description sera celle utilisée dans la suite de la thèse car elle brise la symétrie du problème et isole z_1. Or, dans la suite, z_1 sera l'unique pointe de signes différents des autres pointes et jouera donc un rôle particulier.

Lemme 1.3. *La variété topologique $\overline{\mathcal{M}}(D_n)$ est une variété compacte de dimension $n-3$. Le bord de codimension 1 de $\overline{\mathcal{M}}(D_n)$ est :*

$$\partial_1 \ \overline{\mathcal{M}}(D_n) = \bigcup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ 2 \leqslant j-i \leqslant n-2}} \mathcal{M}(D, \{z_1, \ldots, z_i, N, z_{j+1}, \ldots, z_n\}) \times \mathcal{M}(D, \{N, z_{i+1}, \ldots, z_j\}).$$

Démonstration. Pour tout élément de $\mathcal{M}(D, \{z_1, \ldots, z_n\})$, on choisit l'unique représentant D tel que z_1 soit envoyé sur 1, z_2 sur i et z_n sur $-i$, où D est identifié avec le disque unité dans $\mathbb{C}$. Les autres éléments $z_3, \ldots, z_{n-1}$ se déplacent alors sur le demi-cercle reliant

i à $-i$. L'espace de modules est alors en bijection avec l'ensemble des configurations de $n-3$ points ordonnés sur un segment. Cet espace est clairement de dimension $n-3$ et les différents éléments du bord de codimension 1 sont obtenus quand des points se rejoignent sur le segment $[z_2; z_n]$ ou touchent le bord. Distinguons quelques cas dans l'union du lemme.

On obtient les cas où $n > j > i > 1$ quand les points $z_{i+1}, \ldots, z_j$ se rejoignent en un unique point à l'intérieur du segment $[z_2; z_n]$. Les cas où $i = 1$ sont obtenus quand les points $z_3, \ldots, z_j$ rejoignent le point z_2. Finalement les cas où $j = n$ sont obtenus quand les points $z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}$ rejoignent le point z_n. □

Dans la suite de la thèse, on notera $\mathcal{M}(D_{n;1})$ l'espace de modules des disques avec n pointes positives et 1 pointe négative, $\mathcal{M}(D_{1;n})$ l'espace de modules des disques avec 1 pointe positive et n pointes négatives, et $\mathcal{M}(D_{n+1)}$ si les signes des $n+1$ pointes ne sont pas précisés. La description ci-dessus est toujours valable.

1.2.2 Demi-cylindres épointés

On appelle *demi-cylindre épointé* un disque avec un point marqué intérieur et un nombre arbitraire de pointes sur le bord. Selon que le point marqué intérieur est positif ou négatif, on parlera respectivement de demi-cylindre positif ou négatif. On appelle un tel disque un demi-cylindre épointé car $D\backslash\{0\}$ est homéomorphe à $[0; +\infty[\times S^1$.

Considérons donc un disque avec n points marqués $z_1, \ldots, z_n$ sur le bord et 1 point marqué intérieur z avec un marqueur asymptotique. On remarque que le marqueur asymptotique détermine un point sur le bord du disque. On va distinguer deux cas pour la suite : soit le marqueur asymptotique est aligné avec un point marqué du bord, soit il pointe strictement entre des points marqués du bord. Cette distinction de cas correspond à considérer ce qu'on appelle des *chambres* dans l'espace de modules total dans lequel il y a toutes les structures complexes de tels disques sans se préoccuper de questions d'alignement.

On notera $\mathcal{M}(\widetilde{D}^1_n)$ l'espace des disques avec n points marqués sur le bord et un point marqué intérieur avec le marqueur asymptotique qui est aligné avec le premier point marqué, et $\mathcal{M}(D^1_n)$ l'analogue quand le marqueur asymptotique est aligné avec un point dans l'intervalle ouvert $]z_n; z_1[$. Des éléments de ces espaces sont représentés dans la figure 5. Si on souhaite spécifier le nom des pointes, on écrira aussi :

$$\mathcal{M}(\widetilde{D}, \{z; z_1, \ldots, z_n\}) \text{ et } \mathcal{M}(D, \{z; z_1, \ldots, z_n\})$$

où z est l'unique pointe intérieure et $z_1, \ldots, z_n$ les pointes sur le bord.

On décrit dans le lemme suivant la compactification de ces espaces de modules et l'espace $\overline{\mathcal{M}}(D^1_2)$ est représenté dans la figure 6.

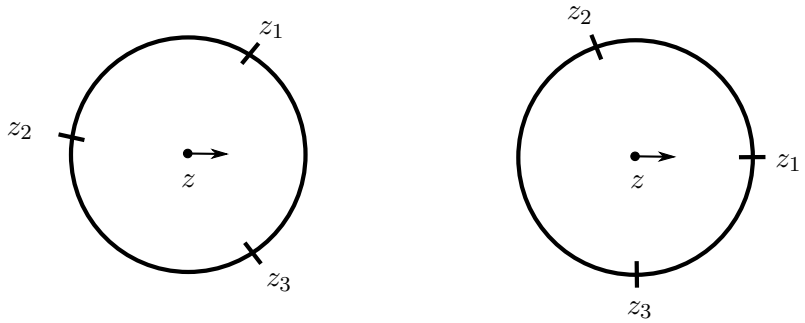


FIGURE 5 – A gauche, un élément de $\mathcal{M}(D_3^1)$ et à droite un élément de $\mathcal{M}(\widetilde{D}_3^1)$

Lemme 1.4.

(i) La variété topologique $\overline{\mathcal{M}}(\widetilde{D}_n^1)$ est une variété compacte de dimension $n-1$. Son bord de codimension 1 est composé de copies de $\mathcal{M}(D_{k+1}) \times \mathcal{M}(\widetilde{D}_{n-k+1}^1)$ où $n \geqslant k \geqslant 2$.

(ii) La variété topologique $\overline{\mathcal{M}}(D_n^1)$ est une variété compacte de dimension n. Son bord de codimension 1 est composé de deux copies de $\mathcal{M}(\widetilde{D}_n^1)$ et de copies de $\mathcal{M}(D_{k+1}) \times \mathcal{M}(D_{n-k+1}^1)$ pour $n \geqslant k \geqslant 2$.

Démonstration. Pour chaque demi-cylindre épointé D, on choisit l'unique représentant tel que $z = 0$ et où le marqueur asymptotique vise 1. L'espace de modules $\mathcal{M}(D_n^1)$ est donc en bijection avec l'espace des configurations de n points ordonnés sur $S^1 \backslash \{1\}$, de dimension n. Par contre $\mathcal{M}(\widetilde{D}_n^1)$ est de dimension $n-1$ car z_1 est fixé en 1. Commençons par donner une description explicite du bord de codimension 1 de $\mathcal{M}(\widetilde{D}_n^1)$ dans la compactification de Deligne-Mumford. On sait qu'il s'agit des courbes nodales avec un nœud tel que lorsqu'on recolle le nœud, on tombe sur l'espace de modules du départ. On voit qu'il y a deux cas à distinguer selon que le nœud N coïncide ou pas avec $z_1 = 1$ (i.e. le point aligné avec le marqueur asymptotique) :

$$\begin{aligned}\partial_1 \mathcal{M}(\widetilde{D}_n^1) = & \bigcup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ j-i \geqslant 2}} \mathcal{M}(\widetilde{D}, \{z; z_1, \ldots, z_i, \mathrm{N}, z_{j+1}, \ldots, z_n\}) \times \mathcal{M}(D, \{\mathrm{N}, z_{i+1}, \ldots, z_j\}) \\ & \cup \bigcup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ n-(j-i) \geqslant 2}} \mathcal{M}(\widetilde{D}, \{z; \mathrm{N}, z_{i+1}, \ldots, z_j\}) \times \mathcal{M}(D, \{\mathrm{N}, z_{j+1}, \ldots, z_n, z_1, \ldots, z_i\}).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Quand des points se rejoignent en $z_1 = 1$, on voit qu'ils peuvent arriver des deux côtés ce qui explique qu'on voie dans la deuxième ligne de (1.2) les pointes dans l'ordre $\{z_{j+1}, \ldots, z_n, z_1, \ldots, z_i\}$.

Dans le cas de D_n^1, cela ne peut pas se produire car z_1 et z_n ne peuvent pas "traverser" le point aligné avec le marqueur asymptotique. De plus, il y a deux nouvelles

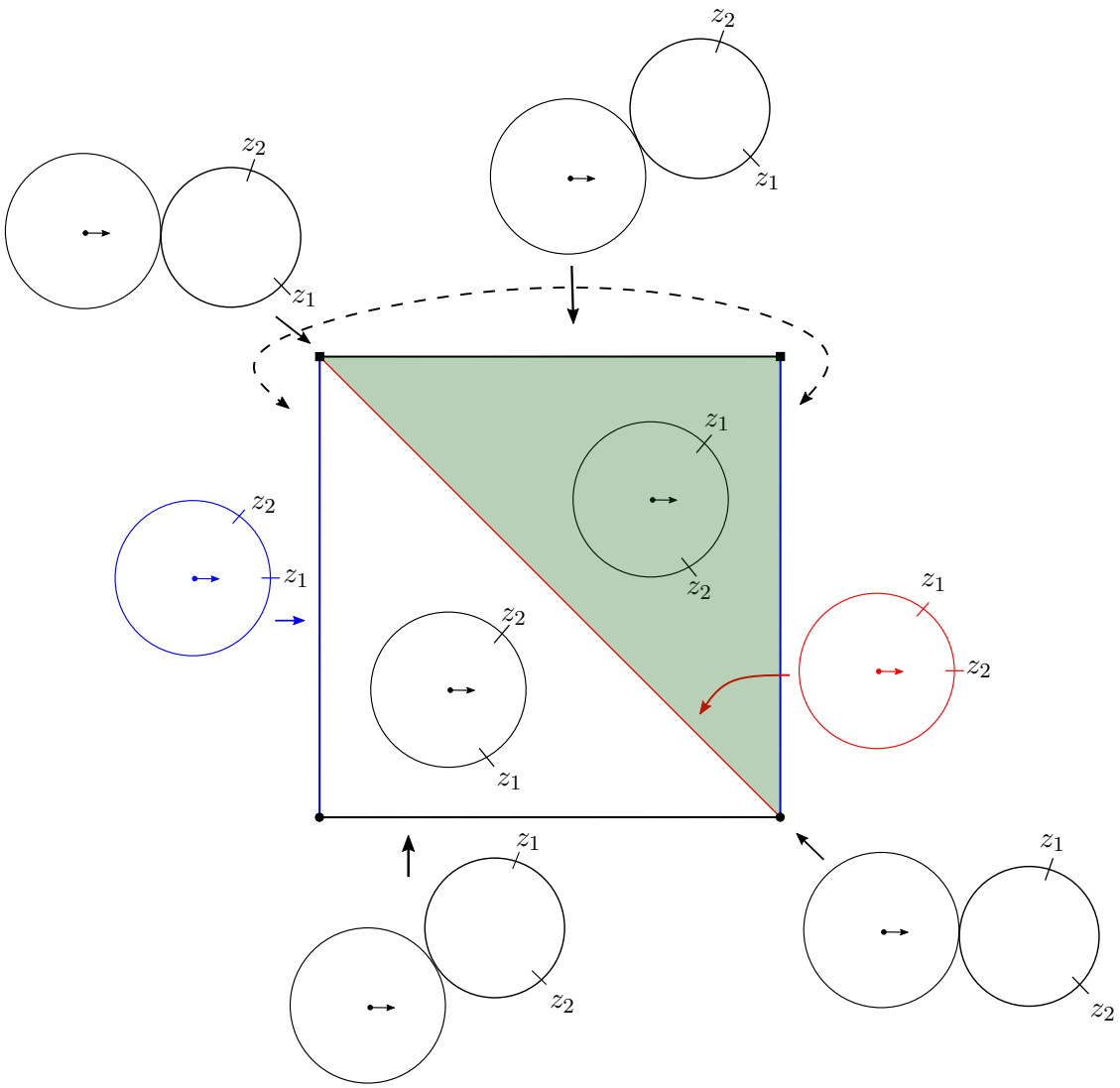


FIGURE 6 – L'espace de modules des disques avec un point intérieur et deux points sur le bord est un cylindre. Quand on le découpe en plusieurs chambres selon l'alignement des points sur le bord avec le marqueur asymptotique, on voit apparaître deux triangles inscrits dans le cylindre qui le remplissent. L'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}(D_2^1)$ est le triangle dont l'intérieur est colorié en vert et l'espace $\overline{\mathcal{M}}(\widetilde{D}_2^1)$ est le segment bleu.

possibilités de bord dans D_n^1 : quand z_1 ou z_n s'alignent avec le marqueur asymptotique. À part cela, la description du bord de codimension 1 de $\mathcal{M}(D_n^1)$ est similaire :

$$\partial_1\mathcal{M}(D_n^1) = \bigcup_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ j-i\geqslant 2}} \mathcal{M}(D, \{z, z_1, \ldots, z_i, \mathrm{N}, z_{j+1}, \ldots, z_n\} \times \mathcal{M}(D, \{\mathrm{N}, z_{i+1}, \ldots, z_j\})$$
$$\cup\, \mathcal{M}(\widetilde{D}, \{z; z_1, \ldots, z_n\}) \cup \mathcal{M}(\widetilde{D}, \{z; z_n, z_1, \ldots, z_{n-1}). \tag{1.3}$$

□

Remarquons que la distinction des cas selon l'alignement avec le marqueur asymptotique rajoute artificiellement un bord intérieur à l'espace $\mathcal{M}(D_n^1)$: les deux copies de $\mathcal{M}(\widetilde{D}_n^1)$. En effet $\mathcal{M}(D_n^1)$ est une chambre (i.e. une cellule de dimension maximale) dans un espace de modules total plus grand.

Dans la suite de la thèse, on notera $\mathcal{M}(\widetilde{D}_{n-}^{1+})$ l'espace de modules des disques avec une pointe intérieure positive et n pointes sur le bord négatives tel que le marqueur asymptotique vise la première pointe négative. On utilisera aussi les notations $\mathcal{M}(D_{n-}^{1+})$, $\mathcal{M}(\widetilde{D}_{n+}^{1-})$ et $\mathcal{M}(D_{n+}^{1-})$.

1.2.3 Anneaux pincés

On appellera *anneau pincé* une courbe nodale composée d'un disque avec $n+m+2$ points marqués sur le bord dont un noeud. On pourra voir la figure 7 pour voir l'anneau pincé quand on attache les noeuds ensemble [1].

Supposons que dans l'ordre trigonométrique, on voit n points marqués puis le noeud N puis m points et finalement le noeud N. Pour préciser les notations, on va noter $z_1, \ldots, z_n$ et $y_1, \ldots, y_m$ les points marqués situés respectivement sur les deux arcs de cercles délimités par les deux noeuds. Si on considère que les noeuds N sont situés en -1 et 1, les points sont ordonnés sur les arcs de cercles en partant du noeud -1 et en allant vers le noeud 1. On note $D_{n;2;m}$ la surface pointée $(D, \{\mathrm{N}, z_1, \ldots, z_n, \mathrm{N}, y_m, \ldots, y_1\})$ et on la notera aussi pour unifier l'écriture avec la section suivante qui s'intéressera aux anneaux non pincés :

$$\mathcal{M}(D, \{z_1, \ldots, z_n; N; y_1, \ldots, y_m\}).$$

On va décrire une compactification géométrique de l'espace de modules $\mathcal{M}(D_{n;2;m})$ en le considérant comme étant une chambre dans un espace de modules plus grand : celui de tout les anneaux pincés ayant le même ordre cyclique de pointes. Intuitivement, cela veut dire qu'on laisse le droit aux z_i et aux y_j à "traverser le noeud" et à se retrouver sur le même arc de cercle que celui de départ mais de l'autre côté. Cet espace de modules plus

1. Il est utile de visualiser l'anneau pincé comme s'il s'agissait d'un anneau infiniment fin.

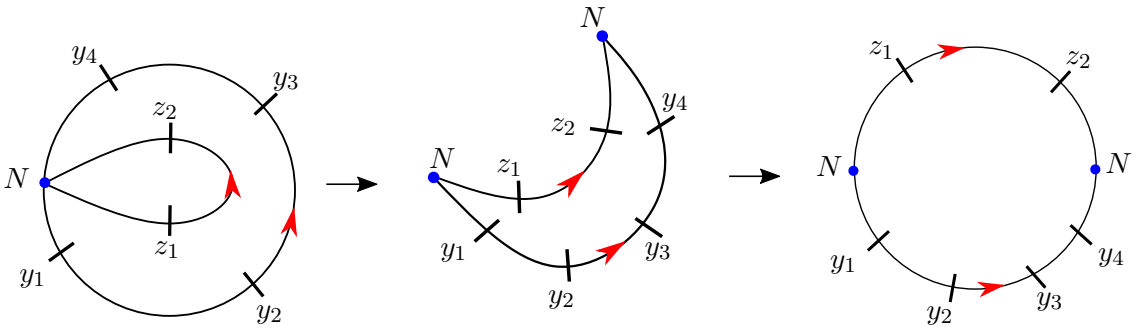


FIGURE 7 – On munit l'anneau pincé de l'orientation de l'anneau induite par le sens trigonométrique. Quand on le "déplie", cela induit une orientation particulière sur le bord du disque (à droite).

grand peut donc s'écrire :

$$\bigcup_{\substack{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ j\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}} \mathcal{M}(D, \{z_{1+i}, \dots, z_{n+i}; N; y_{1+j}, \dots, y_{m+j}\}).$$

On va maintenant décrire la compactification de l'espace de modules $\mathcal{M}(D_{n;2;m})$ et l'exemple $\mathcal{M}(D_{1;2;2})$ est illustré dans la figure 8.

Lemme 1.5. *La variété topologique $\overline{\mathcal{M}}(D_{n;2;m})$ est une variété compacte de dimension $n+m-1$. Son bord de codimension 1 est composé de*

(i) copies de $\mathcal{M}(D_{n-i+1;2;m}) \times \mathcal{M}(D_{i+1})$ pour $n \geqslant i \geqslant 2$,

(ii) copies de $\mathcal{M}(D_{n;2;m-j+1}) \times \mathcal{M}(D_{j+1})$ pour $m \geqslant j \geqslant 2$,

(iii) copies de $\mathcal{M}(D_{n-i;2;m-j}) \times \mathcal{M}(D_{i;2;j})$ pour $n \geqslant i \geqslant 0$, $m \geqslant j \geqslant 0$ et $n+m-1 \geqslant i+j \geqslant 1$.

Les cas (i) et (ii) se produisent quand des points parmi $z_1, \dots, z_n$ ou $y_1, \dots, y_m$ respectivement se rencontrent. Le cas (iii) arrive quand des points vont sur le noeud N et créent une nouvelle bulle du même type. En effet, le disque privé des deux noeuds peut être identifié à une bande infinie. Quand des points se rapprochent d'un noeud, c'est comme s'ils partaient à l'infini dans cette bande. En reparamétrant la bande près de l'infini, on obtient donc deux bandes qui se séparent à la limite : c'est le cas (iii).

On peut écrire une formule explicite, où on note $\mathbf{z} = z_1, \dots, z_n$ et $\mathbf{y} = y_1, \dots, y_m$:

$$\begin{aligned}
&\partial_1 \mathcal{M}(D, \{\mathbf{z}; N; \mathbf{y}\}) = \\
&\quad \bigcup_{\substack{n-j+i+m\geqslant 1\\ j-i\geqslant 2}} \mathcal{M}(D, \{z_1, \dots, z_i, N', z_{j+1}, \dots, z_n; N; \mathbf{y}\}) \times \mathcal{M}(D; \{N', z_{i+1}, \dots, z_j\}) \\
&\cup \bigcup_{\substack{n+m-j+i\geqslant 1\\ j-i\geqslant 2}} \mathcal{M}(D, \{\mathbf{z}; N; y_1, \dots, y_i, N', y_{j+1}, \dots, y_m\}) \times \mathcal{M}(D; \{N', y_{i+1}, \dots, y_j\})
\end{aligned}$$

$$\cup \bigcup_{1\leqslant j+i\leqslant n+m-1} \mathcal{M}(\{z_1,\dots,z_i;N;y_1,\dots,y_j\})\times\mathcal{M}(D,\{z_{i+1},\dots,z_n;N;y_{j+1},\dots,y_m\}).$$

On écrira quelques fois la dernière ligne $\mathcal{M}(z_{(1)};N;y_{(1)})\times\mathcal{M}(z_{(2)};N;y_{(2)})$ pour signifier que z et y ont été coupés en 2 ensembles $z=z_{(1)},z_{(2)}$ et $y=y_{(1)},y_{(2)}$.

Dans la suite de la thèse, $\mathcal{M}(D_{n;2;m},\{z_1,\dots,z_n;N;y_1,\dots,y_m\})$ désigne l'espace de module muni des signes suivants : tous les z_i ont un signe $+$ et tous les y_i ont un signe $-$.

1.2.4 Anneaux épointés

Lemme 1.6. *Le groupe des biholomorphismes de l'anneau est difféomorphe à $\mathbb{R}\times S^1$. Il s'agit des homothéties et des rotations. Un anneau avec points marqués sur le bord est stable si et seulement s'il possède au moins un point marqué sur chacun des deux bords de l'anneau.*

On considère un anneau avec k_+ pointes sur le bord intérieur qu'on note $z_1,\dots,z_{k_+}$ et k_- pointes sur le bord extérieur qu'on note $y_1,\dots,y_{k_-}$ numérotées dans l'ordre donné par l'orientation. On va distinguer les cas selon l'alignement de z_1 avec les points y_i situés sur le bord extérieur. Le premier cas qui nous intéresse est celui où z_1 pointe entre y_{k_-} et y_1. On notera cet anneau $A^{k_+}_{k_-}$. D'autre part, on notera $\widetilde{A}^{k_+}_{k_-}$ l'anneau épointé où z_1 et y_1 sont alignés (voir figure 9). Les espaces de modules s'écriront :

$$\mathcal{M}(A,\{z_1,\dots,z_n;y_1,\dots,y_m\}) \text{ et } \mathcal{M}(\widetilde{A},\{z_1,\dots,z_n;y_1,\dots,y_m\}).$$

Encore une fois ces conditions d'alignement permettent de partitionner l'espace de modules de tout les anneaux avec k_+ points sur le bord intérieur et k_- points sur le bord extérieur en plusieurs chambres. On s'intéresse à des chambres spécifiques dont on va préciser maintenant la dimension et le bord. On pourra voir la figure 11 pour voir une compactification de l'espace de modules total et le découpage en chambre dans le cas de A^1_2.

Lemme 1.7.

(i) La variété topologique $\overline{\mathcal{M}}(\widetilde{A}^{k_+}_{k_-})$ est une variété compacte de dimension k_-+k_+-1. Son bord de codimension 1 est composé de :

- *(a) copies de $\mathcal{M}(\widetilde{A}^{i+1}_{k_-})\times\mathcal{M}(D_{k_+-i+1})$ pour $k_+-2\geqslant i\geqslant 0$,*
- *(b) copies de $\mathcal{M}(\widetilde{A}^{k_+}_{i+1})\times\mathcal{M}(D_{k_--i+1})$ pour $k_--2\geqslant i\geqslant 0$,*
- *(c) une copie de $\mathcal{M}(\widetilde{D}^1_{k_+})\times\mathcal{M}(\widetilde{D}^1_{k_-})$,*
- *(d) copies de $\mathcal{M}(D_{i;2;j})\times\mathcal{M}(D_{k_+-i;2;k_--j})$ pour $k_-+k_+-1\geqslant i+j\geqslant 1$.*

(ii) La variété topologique $\overline{\mathcal{M}}(A^{k_+}_{k_-})$ est une variété compacte de dimension k_-+k_+. Son bord de codimension 1 est composé de :

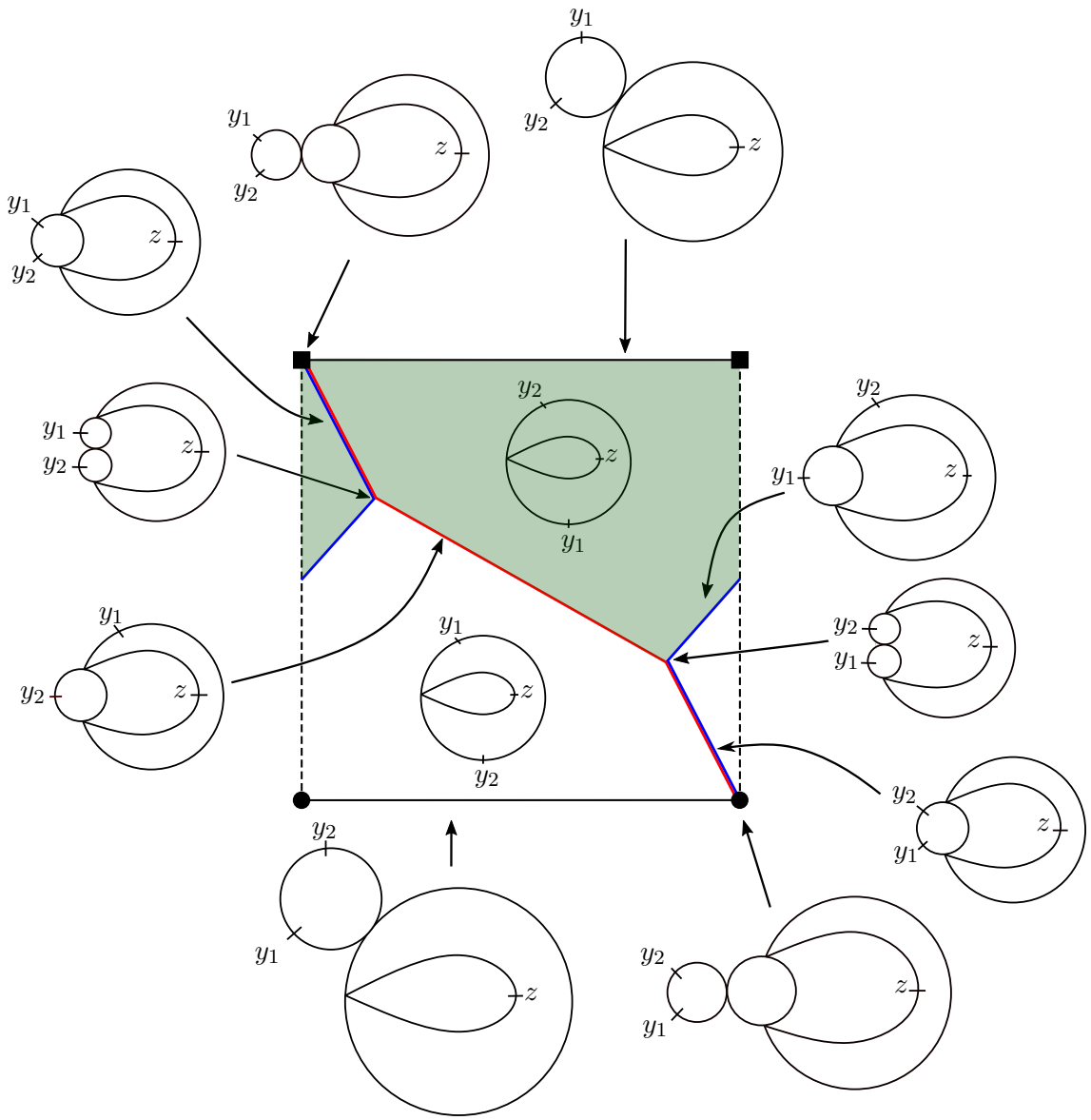


FIGURE 8 – L'espace de modules de tous les anneaux pincés avec $(1, 2)$ points est un cylindre. Quand on le découpe en plusieurs chambres selon la rencontre de points avec le noeud, on voit apparaître deux chambres qui le remplissent. L'espace de modules $\mathcal{M}(D_{1;2;2})$ est colorié en vert. Les segments colorés le sont pour anticiper le fait que cet espace de module apparait comme le cas $R = 0$ de l'espace de module situé dans la figure 11 et pour montrer comment ce bord se recolle sur l'espace de module plus grand de la figure 11.

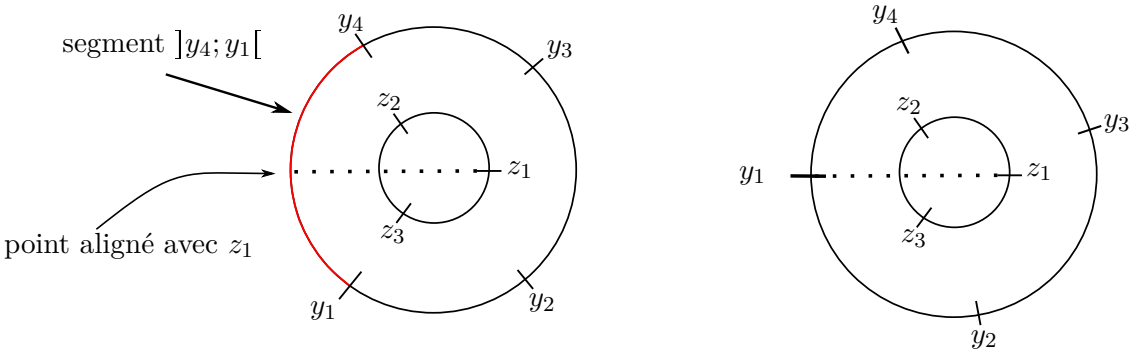


FIGURE 9 – À gauche, un élément de $\mathcal{M}(A_4^3)$ et à droite un élément de $\mathcal{M}(\widetilde{A}_4^3)$.

(a) copies de $\mathcal{M}(A_{k_-}^{i+1}) \times \mathcal{M}(D_{k_+-i+1})$ *pour* $k_+ - 2 \geqslant i \geqslant 0$,

(b) copies de $\mathcal{M}(A_{i+1}^{k_+}) \times \mathcal{M}(D_{k_--i+1})$ *pour* $k_- - 2 \geqslant i \geqslant 0$,

(c) une copie de $\mathcal{M}(\widetilde{D}_{k_+}^1) \times \mathcal{M}(D_{k_-}^1)$,

(d) copies de $\mathcal{M}(D_{k_+;2;k_-})$,

(e) deux copies de $\mathcal{M}(\widetilde{A}_{k_-}^{k_+})$.

Calculons la dimensions de $\mathcal{M}(A_{k_-}^{k_+})$: les $k_+ + k_-$ points se déplacent librement sur des espaces de dimension 1 et les paramètres des rayons ρ_1 et ρ_2 varient chacun sur $\mathbb{R}^+$. Cela fait donc un espace de dimension $k_+ + k_- + 2$ qu'on quotiente par l'action de $\mathbb{R} \times S^1$ ce qui enlève deux dimensions d'où la formule annoncée. Il est de plus clair que la dimension de de $\mathcal{M}(\widetilde{A}_{k_-}^{k_+})$ est égale à celle de $\mathcal{M}(A_{k_-}^{k_+})$ moins un.

Explicitons maintenant comment les différentes courbes nodales apparaissent dans le bord de notre espace de module. Il est important de remarquer que tout biholomorphisme de l'anneau fixe le paramètre $R = \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \in [0; +\infty]$ (qu'on appelle le module de l'anneau) et on va donc distinguer les cas selon que le bord de codimension 1 est situé sur la fibre $R = 0$, $R = \infty$, et $R \in]0; +\infty[$.

Les cas (a) et (b) se produisent quand des points se rencontrent soit sur le bord intérieur (cas a), soit sur le bord extérieur (cas b) pour $R \in]0; +\infty[$.

Le cas (c) arrive quand $R = +\infty$ et alors l'anneau se scinde en deux cylindres semi-infinis. La condition d'alignement impose une restriction sur la position relative des deux marqueurs asymptotiques. Pour fixer le deuxième degré de liberté (car on a deux marqueurs asymptotiques), on demande que celui du demi-cylindre négatif soit aligné avec la première pointe sur le bord. Le deuxième marqueur doit alors pointer soit sur $]y_{k_-}; y_1[$ soit sur y_1 selon qu'on se place dans le cas de A ou $\widetilde{A}$.

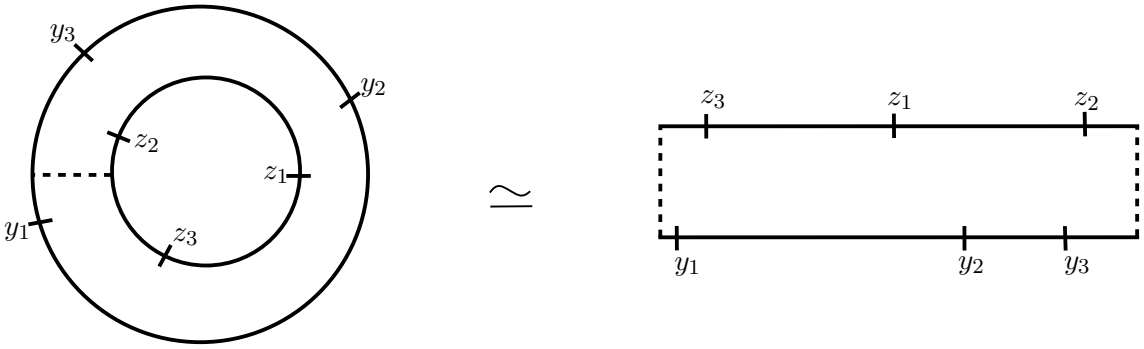


FIGURE 10 – Le découpage de l'anneau en une bande permet de mieux voir comment l'anneau pincé apparaît quand le module tend vers 0.

Le cas (d) se produit quand $R = 0$ et l'anneau devient infiniment fin et donc se pince en un point qu'on peut choisir être celui aligné avec z_1 vu qu'on travaille sur une chambre spécifique. On peut expliquer d'une autre manière comment l'anneau pincé apparait. Si pour chaque élément de l'espace de pré-modules de module suffisamment petit, on choisit l'unique représentant tel que $\rho_2 = \rho_1 + 1$ et $z_1 \in \mathbb{R}^{+*}$, le fait que le module $\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$ tende vers 0 correspond au cas où $\rho_1, \rho_2 \to +\infty$. On peut alors se représenter l'anneau comme une bande $[-r; r] \times [-1; 1]/(-r, t) \sim (r, t)$ et avec $z_1 = (0, 1)$ (cf figure 10). Quand $\rho_1, \rho_2 \to +\infty$, cela signifie que $r \to +\infty$ et donc que la bande devient infinie, le point à l'infini correspondant au point opposé à z_1. On voit l'anneau pincé apparaître.

Quand z_1 et y_1 ne sont pas alignés, on voit sur le bord de la bande infinie qui correspondait au bord extérieur les éléments $y_1, \ldots, y_{k_-}$ qui apparaissent dans le "bon" ordre. Par contre, sur le bord de la bande infinie qui correspondait au bord intérieur, on voit une permutation cyclique de $z_1, \ldots, z_{k_+}$. Quand on suppose que les points z_1 et y_1 sont alignés, on voit que la distance sur la bande entre z_1 et y_1 devient elle aussi infinie ce qui correspond au fait qu'on voit à la limite deux bandes infinies (donc deux anneaux pincés) avec l'une qui contient z_1 et l'autre y_1. Toutes les combinaisons de pointes sur les deux bandes infinies qui sont compatibles avec l'ordre cyclique et le fait que z_1 et y_1 ne soient pas sur la même bande peuvent alors se produire.

Finalement le cas (e) est une conséquence du fait qu'on travaille sur une chambre de l'espace de modules d'anneaux total et on voit apparaître un bord "intérieur" à l'espace de modules. Il se produit quand soit y_{k_-} soit y_1 se retrouve aligné avec z_1.

On va maintenant donner des formules explicites pour les bords de codimension 1. Ces formules sont techniques mais elles seront utiles dans la suite. On note $\mathbf{z} = z_1, \ldots, z_{k_+}$ et $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_{k_-}$. D'une part, on a :

$$\partial_1 \mathcal{M}(A, \{\mathbf{z}; \mathbf{y}\}) =$$

$$\bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k_+\\ 2\leqslant j-i}} \mathcal{M}(A,\{z_1,\dots,z_i,\mathrm{N},z_{j+1},\dots,z_{k_+};\mathbf{y}\})\times\mathcal{M}(D,\{\mathrm{N},z_{i+1},\dots,z_j\}) \tag{a}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k_+\\ 2\leqslant k_+-j+i}} \mathcal{M}(A,\{N,z_{i+1},\dots,z_j;\mathbf{y}\})\times\mathcal{M}(D,\{N,z_{j+1},\dots,z_{k_+},z_1,\dots,z_i\}) \tag{a}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k_-\\ 2\leqslant j-i}} \mathcal{M}(A,\{\mathbf{z};y_1,\dots,y_i,\mathrm{N},y_{j+1},\dots,y_{k_-}\})\times\mathcal{M}(D,\{\mathrm{N},y_{i+1},\dots,y_j\}) \tag{b}$$

$$\cup\, \mathcal{M}(\widetilde{D}^1_{k_+},\{\mathrm{N},\mathbf{z}\})\times\mathcal{M}(D^1_{k_-},\{\mathrm{N},\mathbf{y}\}) \tag{c}$$

$$\cup \bigcup_{i\in\mathbb{Z}/k_+\mathbb{Z}} \mathcal{M}(D_{k_+;2;k_-},\{z_{1+i},\dots,z_{k_++i};\mathrm{N};y_1,\dots,y_{k_-}\}) \tag{d}$$

$$\cup\, \mathcal{M}(\widetilde{A},\{\mathbf{z};\mathbf{y}\})\cup\mathcal{M}(\widetilde{A},\{\mathbf{z};y_{k_-},y_1,\dots,y_{k_--1}\}). \tag{e}$$

Et d'autre part :

$$\partial_1\mathcal{M}(\widetilde{A},\{\mathbf{z};\mathbf{y}\}) =$$

$$\bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k_+\\ 2\leqslant j-i}} \mathcal{M}(\widetilde{A},\{z_1,\dots,z_i,\mathrm{N},z_{j+1},\dots,z_{k_+};\mathbf{y}\})\times\mathcal{M}(D,\{\mathrm{N},z_{i+1},\dots,z_j\}) \tag{a}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k_+\\ 2\leqslant k_+-j+i}} \widetilde{\mathcal{M}}(A,\{N,z_{i+1},\dots,z_j;\mathbf{y}\})\times\mathcal{M}(D,\{N,z_{j+1},\dots,z_{k_+},z_1,\dots,z_i\}) \tag{a}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k_-\\ 2\leqslant j-i}} \widetilde{\mathcal{M}}(A,\{\mathbf{z};y_1,\dots,y_i,\mathrm{N},y_{j+1},\dots,y_{k_-}\})\times\mathcal{M}(D,\{\mathrm{N},y_{i+1},\dots,y_j\}) \tag{b}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k_-\\ 2\leqslant k_--j+i}} \widetilde{\mathcal{M}}(A,\{\mathbf{z};N,y_{i+1},\dots,y_j\})\times\mathcal{M}(D,\{N,y_{j+1},\dots,y_{k_-},y_1,\dots,y_i\}) \tag{b}$$

$$\cup\, \mathcal{M}(\widetilde{D^1_{k_+}},\{N;\mathbf{z}\})\times\mathcal{M}(\widetilde{D^1_{k_-}},\{N;\mathbf{y}\}) \tag{c}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{k_+\geqslant j\geqslant i\geqslant 1\\ k_-\geqslant l\geqslant r\geqslant 1}} \mathcal{M}(D,\{z_{j+1},\dots,z_{k_+},z_1,\dots,z_i;N;y_{r+1},\dots,y_l\})$$

$$\times\,\mathcal{M}(D,\{z_{i+1},\dots,z_j;N;y_{l+1},\dots,y_{k_-},y_1,\dots,y_r\}). \tag{d}$$

Dans la suite de la thèse, les pointes situées sur le bord intérieur seront positives et les pointes sur le bord extérieur seront négatives.

1.3 Données sur courbes nodales

En anticipant sur le chapitre 2, on va expliquer comment on peut recoller des données sur une courbe nodale afin d'en obtenir sur son recollé $\#N$. Cela permettra par exemple de définir des choix de structures presques complexes ou de termes de perturbations hamiltoniennes qui se comportent bien sur la compactification de Deligne-Mumford.

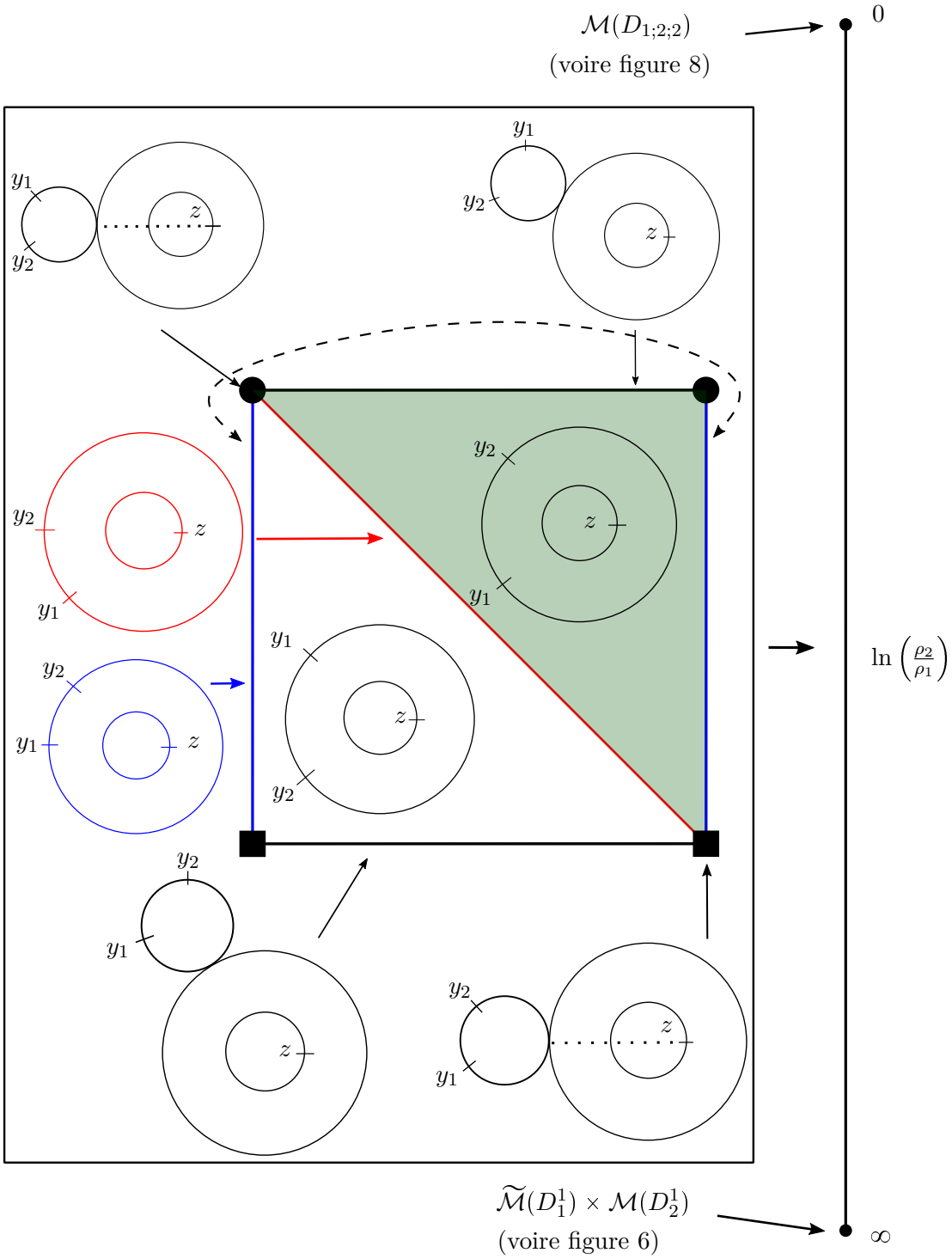


FIGURE 11 – L'espace de modules $\mathcal{M}(A_2^1)$ des anneaux avec $(1,2)$ points sur le bord colorié en vert fibre au dessus du paramètre $\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \in [0;+\infty]$. L'espace de modules $\mathcal{M}(\widetilde{A_2^1})$ est en bleu.

Soit (S, Γ) une surface avec points marqués et $\Sigma \in \mathcal{M}^{pr}(S)$. Un ensemble de coordonnées cylindriques près des pointes de Σ est la donnée pour chaque pointe z

(i) d'un voisinage V_z de la pointe z dans Σ,

(ii) d'un biholomorphisme, $\varphi_z : \mathbb{R}^{\mathrm{sgn}(z)} \times I(z) \to V_z$,

où $\mathrm{sgn}(z)$ désigne le marqueur $+$ ou $-$ de z.

On définit ainsi le fibré des coordonnées cylindriques $Cyl_S(\Sigma)$ au dessus de $\mathcal{M}^{pr}(S)$. Si N est une courbe nodale et $\mathcal{N} \in \mathcal{M}^{pr}(N)$, le fibré $Cyl_N(\mathcal{N})$ est similaire : on demande des coordonnées cylindriques près des pointes et près des nœuds (des deux côtés de chaque nœud). On remarque que le groupe des biholomorphismes agit sur le fibré des coordonnées cylindriques.

Prenons N une courbe nodale avec un unique nœud $z_1 \sim z_2$, z_1 positif et z_2 négatif. Supposons donnée une section lisse du fibré Cyl_N au dessus de $\mathcal{M}^{pr}(N)$. On a donc pour chaque élément $\mathcal{N} \in \mathcal{M}^{pr}(N)$ des coordonnés cylindriques près de chacune des pointes et notamment $\varphi_{z_1} : [0; +\infty[\times I \to V(z_1, \mathcal{N})$ et $\varphi_{z_2} :]-\infty; 0] \times I \to V(z_2, \mathcal{N})$. Grâce à cette section de Cyl_N, on peut définir l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{pr}(N) \times [0; +\infty[&\to \mathcal{M}^{pr}(\#N) \\ (\mathcal{N}, R) &\mapsto \#_R\mathcal{N}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

où $\#_R\mathcal{N}$ est la variété complexe définie en (1.1). On rappelle aussi que l'ensemble des points marqués vérifie : $\Gamma_{\#N} = \Gamma_N \backslash \{z_1, z_2\}$.

Cette application se relève en un morphisme de fibrés :

$$\begin{aligned} \# : Cyl_N \times [0; +\infty[&\longrightarrow Cyl_{\#N} \\ (\mathcal{N}, (\varphi_z)_{z \in \Gamma_N \backslash \{z_1, z_2\}}, \varphi_{z_1}, \varphi_{z_2}, R) &\longmapsto (\#_R\mathcal{N}, (\varphi_z)_{z \in \Gamma_{\#N}}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Toutes ces applications ont été définies sur $\mathcal{M}^{pr}$ mais, quitte à prendre des objets invariants sous l'action du groupe des biholomorphismes, on peut faire de même sur $\mathcal{M}$. Par abus de notation, on appellera Cyl_N le fibré des coordonnées cylindriques qu'il soit considéré au-dessus de $\mathcal{M}^{pr}(N)$ ou au-dessus de $\mathcal{M}(N)$.

Donnons nous une section s de Cyl_S, on dira que cette section a été choisie de manière *cohérente* avec la compactification de Deligne-Mumford de $\mathcal{M}(S)$ si pour toute courbe nodale N apparaissant dans la compactification de S, il existe une section s_N de Cyl_N tel que pour $\mathcal{N} \in \mathcal{M}^{pr}(N)$ et R suffisamment grand, $s(\#_R\mathcal{N})$ et $\#_R s_N$ (cf formule (1.5)) coïncident en tant que coordonnées cylindriques au dessus de $\#_R\mathcal{N}$.

Prenons (S, Γ) une surface épointée. On suppose avoir choisi une section de Cyl_S de manière compatible avec la compactification de Deligne-Mumford de $\mathcal{M}(S)$. On se donne un fibré $\mathcal{F}$ tel que :

(i) $\mathcal{F}_N$ est un fibré défini au-dessus de $\mathcal{M}^{pr}(N)$ pour toute courbe nodale N,

(ii) l'application $\# : \mathcal{M}^{pr}(N) \times [0; +\infty[\to \mathcal{M}^{pr}(\#N)$ se prolonge en un morphisme de fibrés $\mathcal{F}_N \to \mathcal{F}_{\#N}$.

On dira alors qu'une section $s : \mathcal{M}^{pr}(S) \to \mathcal{F}_S$ est *compatible* avec la compactification de Deligne-Mumford de $\mathcal{M}(S)$ si

(i) s est invariante sous l'action du groupe des biholomorphismes,

(ii) pour toute courbe nodale N apparaissant dans la compactification de Deligne-Mumford de $\mathcal{M}(S)$, il existe une section s_N de $\mathcal{F}_N$ tel que s et s_N coïncident via $\#$ dès que R est suffisamment grand.

On aurait pu aussi considérer un fibré au-dessus de la variété à coin $\overline{\mathcal{M}}(S)$ et dire que les sections compatibles sont les sections de ce fibré au-dessus de la variété à coins. La version présentée ci-dessus est cependant différente car on demande une stabilisation des données près des coins vis-à-vis de cartes spécifiques. Cela permettra de recoller plus facilement les équations de Floer.

Afin de construire des données compatibles avec la compactification de Deligne-Mumford d'un espace de module, l'idée générale est assez simple même si techniquement compliquée. On choisit des sections des fibrés au-dessus des strates les plus profondes de l'espace de module. Ces choix imposent des conditions sur des voisinages de ces strates les plus profondes à cause de la condition de compatibilité. On cherche alors à prolonger ces choix en remontant progressivement vers la strate de dimension maximale. Afin de pouvoir prolonger, on utilisera la contractibilité des fibrés considérés.

1.4 Ce qu'il faut retenir

Dans la suite, on considère des espaces de modules de surface épointée et on suppose avoir fixé des coordonnées cylindriques pour chaque élément de l'espace de modules près des pointes de manière compatible avec la compactification de Deligne-Mumford.

Soit S une variété de dimension 2 avec un ensemble de points marqués Γ, les points étant ordonnés et avec signes. Quand on dit qu'on se donne Σ un élément de l'espace de modules $\mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$ (souvent noté $\mathcal{M}^{pr}(S)$ pour raccourcir les notations), cela signifie qu'on a :

(i) une structure complexe j sur $\widehat{S} = S \backslash \Gamma$,

(ii) des coordonnées cylindriques au voisinage de chacun des pointes, c'est à dire des applications biholomorphes $\varphi_z : I(z) \times \mathbb{R}^{\mathrm{sgn}(z)} \to V$ où $I(z)$ est $[0;1]$ ou S^1 selon que la pointe est sur le bord ou intérieure, et où V est un voisinage de z dans $\widehat{S}$,

(iii) ce choix doit être invariant sous l'action des biholomorphismes,

(iv) ce choix de coordonnées doit être *compatible* avec la compactification de Deligne-Mumford.

On se réfèrera à la section 1.3 pour une définition précise de la compatibilité avec la compactification de Deligne-Mumford. Cela veut dire approximativement que les choix de coordonnées cylindriques se stabilisent quand on se rapproche du bord de l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}(S)$ ce qui permet d'assurer que ces choix restent bien définis pour les courbes nodales qui apparaissent dans le bord.

Chapitre 2

Équation de Floer, transversalité et compacité

2.1 Un peu de géométrie symplectique

Dans cette section, on présentera juste les notions clés qui serviront dans le reste du manuscrit. On invite le lecteur à se référer à [Gei08], [Wei79] et [Wen10] pour des introductions au sujet. On recommande aussi les livres [MS04] et [Sei08b] qui ont servi de références pour les chapitres 1 et 2.

2.1.1 Variétés symplectiques, domaines de Liouville

Une *variété symplectique* est un couple (M, ω) tel que :

(i) M est une variété sans bord de dimension $2n$,

(ii) ω est une 2-forme différentielle,

(iii) $d\omega = 0$,

(iv) ω^n est une forme volume sur M ou, de manière équivalente, ω_x est une forme quadratique non-dégénérée pour tout $x \in M$.

On dira que la variété symplectique (M, ω) est *exacte* si elle a une *forme de Liouville*, c'est-à-dire une 1-forme λ qui vérifie $d\lambda = \omega$. Dans ce cas, on notera X_λ le *champ de Liouville* qui est l'unique champ de vecteur vérifiant : $i_{X_\lambda}\omega = \lambda$.

Une *variété de contact* (avec forme de contact) est un couple (Y, α) tel que :

(i) Y est une variété sans bord de dimension $2n - 1$,

(ii) α est une 1-forme différentielle de Y,

(iii) $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ est une forme volume sur Y.

Le champ d'hyperplans $\xi = \ker(\alpha)$ s'appelle la structure de contact de la variété Y [1]. On remarque que $(\xi, d\alpha)$ est un fibré symplectique au-dessus de Y.

A toute variété de contact (Y, α), on peut associer sa *symplectisation* SY. Plusieurs définitions de la symplectisation d'une variété de contact coexistent dans la littérature et on va donner 3 définitions différentes :

(a) $S_aY =]0; +\infty[_r \times Y$ munie de la forme symplectique exacte $\omega = d(r\pi_2^*\alpha)$ où π_2 est la projection,

(b) $S_bY = \mathbb{R}_t \times Y$ munie de la forme symplectique exacte $\omega = d(e^t\pi_2^*\alpha)$ où π_2 est la projection,

(c) $S_cY = \{(q,p) \in T^*Y; \ker(p) = \xi_q\}$ munie de la forme symplectique exacte $\omega = \omega_{T^*Y}|_{S_cY}$.

Les applications suivantes fournissent des symplectomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} S_bY \to S_aY & \text{et} & S_aY \to S_cY \\ (r,y) \mapsto (e^r, y) & & (r,y) \mapsto (y, r\alpha). \end{array}$$

Dans la suite, on notera SY la variété S_aY donnée dans la définition (a). La variété SY est donc une variété symplectique exacte munie de la forme de Liouville $r\alpha$ où α désigne, par abus de notation, la 1-forme $\pi_2^*\alpha$ avec $\pi_2 : SY \to Y$ la projection. On utilisera aussi les demi-symplectisations positives et négatives : $S_+Y = [1; +\infty[\times Y$ et $S_-Y =]0; 1] \times Y$.

On va regrouper ces définitions dans la notion de domaine de Liouville. Un *domaine de Liouville* est un couple (X, λ) tel que :

1. X est une variété compacte de dimension $2n$ à bord ∂X,
2. λ est une 1-forme de Liouville pour X^{int} (l'intérieur de X),
3. le champ de Liouville X_λ est sortant sur le bord ∂X.

Si (X, λ) est un domaine de Liouville alors $(\partial X, \lambda)$ est une variété de contact (par abus de notation, on identifie λ et $i^*\lambda$ où $i : \partial X \to X$). On peut donc dire qu'un domaine de Liouville est une variété symplectique exacte à bord positif contact.

On définit aussi la *complétion* d'un domaine de Liouville (X, λ) comme la variété symplectique exacte et non compacte suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{X} &= X \cup S_+(\partial X) \\ &= X \cup [1; +\infty[\times \partial X. \end{aligned}$$

1. On peut définir de manière plus intrinsèque la notion de variété de contact sans spécifier une forme de contact particulière. On n'a pas choisi cette approche dans le manuscrit afin de simplifier la présentation qui suit.

Le flot de Liouville donne un plongement :

$$\begin{aligned}[1-\varepsilon;1]\times\partial X &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Vois}(\partial X)\\ (r,y) &\longmapsto \varphi^{X_\lambda}_{\ln(r)}(y).\end{aligned}$$

En utilisant ce plongement pour recoller le long de $\partial X \simeq \{1\}\times\partial X$, on peut munir $\widehat{X}$ d'une structure de variété symplectique lisse et exacte. On appelle X la *partie compacte* de $\widehat{X}$ et $[1;+\infty[\times\partial X$ le *bout cylindrique* de $\widehat{X}$.

Un *cobordisme de domaines de Liouville*[2] W est un couple de domaines de Liouville (X_0, X) tel que $X_0 \subset X$. La complétion d'un cobordisme W est :

$$\widehat{W} = (\widehat{X, X_0}) = X_0 \cup \overline{X\backslash X_0} \cup [1;+\infty[\times\partial X.$$

On écrira souvent $\widehat{W}$ sous une forme légèrement différente pour mettre en évidence un bout de la symplectisation négative de ∂X_0. Pour tout $\delta > 0$, on peut plonger $]\delta;1]\times\partial X_0 \hookrightarrow X_0$ via le flot du champ de Liouville de X_0. On peut donc écrire pour tout $\delta > 0$:

$$\widehat{W} = (X_0\backslash\ ]\delta;1]\times\partial X_0)\cup]\delta;1]\times\partial X_0 \cup \overline{X\backslash X_0} \cup [1;+\infty[\times\partial X.$$

Par abus de notation, on s'autorisera quelques fois à prendre $\delta = 0$ dans la description ci-dessus et à écrire alors :

$$\widehat{W} = (X_0\backslash\ ]0;1]\times\partial X_0)\cup]0;1]\times\partial X_0 \cup \overline{X\backslash X_0} \cup [1;+\infty[\times\partial X.$$

Il sera utile de considérer une autre complétion que cette dernière quand on a un cobordisme de domaines de Liouville : $X_0 \subset X$. On notera :

$$\widehat{X\backslash X_0} = S_-(\partial X_0) \cup X\backslash X_0 \cup S_+(\partial X) =]0;1]\times\partial X_0 \cup X\backslash X_0 \cup [1;+\infty[\times\partial X.$$

On pourra voir des illustrations de ces différentes complétions dans la figure 17.

On va définir les notions de lagrangienne et legendrienne dans les différentes variétés vues ci-dessus.

1. Si M est une variété symplectique, une *lagrangienne* L dans M est une sous-variété de dimension n sur laquelle ω s'annule : $i_L^*\omega = 0$ où $i_L : L \to M$.
2. Si M est une variété symplectique exacte, une *lagrangienne exacte* L est une sous-variété de dimension n tel que $i_L^*\lambda$ est une 1-forme exacte.
3. Si Y est une variété de contact, une *legendrienne* Λ est une sous-variété de dimension $n-1$ tel que $i_\Lambda^*(\alpha) = 0$ (ou de manière équivalente, on peut demander que $T\Lambda \subset \xi$).

2. Cet objet est aussi appelé dans la littérature cobordisme de Liouville avec remplissage du bord négatif.

4. Si X est un domaine de Liouville, une *lagrangienne exacte à bord legendrien* est une sous-variété de dimension n tel que $L \cap X^{int}$ soit une lagrangienne exacte et tel que $L \cap \partial X$ soit une legendrienne.
5. Si X est un domaine de Liouville et L une lagrangienne exacte à bord legendrien, on définit la *complétion* de L par : $\widehat{L} = L \cup [1; +\infty[\times (L \cap \partial X)$. On dira que $\widehat{L}$ est une *lagrangienne à bout cylindrique.*
6. Si (X, X_0) est un cobordisme de domaines de Liouville, alors un *cobordisme lagrangien*[3] est un couple (L, L_0) où L est une lagrangienne dans X, L_0 est une lagrangienne dans X_0 et $L_0 = L \cap X_0$.

Dans ce manuscrit, on travaillera systématiquement dans des variétés symplectiques exactes et *toutes les lagrangiennes seront supposées exactes.*

2.1.2 Flots hamiltoniens et flot de Reeb

On va définir maintenant des champs de vecteurs sur ces variétés.

Flots hamiltoniens

Sur une variété symplectique M, un *hamiltonien* est une fonction

$$H : M \times [0; 1] \to \mathbb{R}$$

tel que $H(\cdot, 1) = H(\cdot, 0)$ (on parle aussi de hamiltoniens périodiques et on peut aussi considérer de manière équivalente des hamiltoniens $H : M \times S^1 \to \mathbb{R}$ où $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). On notera :

$$H_t = H(\cdot, t).$$

Si H est un hamiltonien, on note X_H le *champ de vecteur hamiltonien* défini par l'équation, pour $t \in [0; 1]$,

$$\omega(X_{H_t}, \cdot) = -dH_t.$$

Ce champ de vecteurs est bien défini et unique car ω est une 2-forme non dégénérée. Le *flot hamiltonien* $(\varphi_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot de ce champ de vecteurs qui vérifie donc l'équation pour tout $x \in M$,

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^H(x) = X_{H_t}\left(\varphi_t^H(x)\right).$$

Une *orbite périodique hamiltonienne* de H est une 1-orbite du flot hamiltonien c'est-à-dire un point $x \in M$ tel que

$$\varphi_1^H(x) = x.$$

3. L'appellation est encore une fois non standard. On pourrait définir d'autres types de cobordismes lagrangiens.

On dira qu'une orbite est *non dégénérée* si $(d\varphi_1^H)_x : T_xM \to T_xM$ n'admet pas 1 comme valeur propre. L'*action hamiltonienne* d'une orbite hamiltonienne est donnée par la formule suivante :

$$A_H(\gamma) = \int_{S^1} \gamma^*\lambda - \int_0^1 H(\gamma(t), t)\ \mathrm{d}t$$

où $\gamma(t) = \varphi_t^H(x)$.

Si $L_0, L_1 \subset M$ sont deux lagrangiennes, une *corde hamiltonienne de L_0 à L_1* est une *corde de temps* 1 du flot hamiltonien, c'est-à-dire un point $x \in M$ tel que :

$$x \in L_0 \text{ et } \varphi_1^H(x) \in L_1.$$

On dit qu'une corde hamiltonienne est *non dégénérée* si $(d\varphi_1^H)_x(T_xL_0)$ intersecte transversalement $T_{\varphi_1^H(x)}L_1$:

$$(d\varphi_1^H)_x(T_xL_0) \oplus T_{\varphi_1^H(x)}L_1 = T_{\varphi_1^H(x)}M.$$

L'*action hamiltonienne* d'une orbite hamiltonienne est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} A_H(c) &= \int_{[0;1]} c^*\lambda - \int_0^1 H(c(t), t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \lambda_{c(t)}(\dot{c}(t))\mathrm{d}t - \int_0^1 H(c(t), t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

où $c(t) = \varphi_t^H(x)$ est la corde hamiltonienne.

Flot de Reeb

Sur une variété de contact (Y, α), on peut définir le *champ de Reeb* comme l'unique solution R_α des équations :

$$i_{R_\alpha}\alpha = 1 \text{ et } i_{R_\alpha}d\alpha = 0.$$

Le *flot de Reeb* est le flot $(\varphi_t^{R_\alpha})$ de ce champ de vecteur. Une *orbite de Reeb* est une orbite périodique du champ de Reeb c'est-à-dire un couple $(x, T) \in Y \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\varphi_T^{R_\alpha}(x) = x.$$

T s'appelle la *longueur* de l'orbite de Reeb. On définit de la même manière que pour les orbites hamiltoniennes les orbites *non dégénérées* : une orbite est non dégénérée si l'application

$$(d\varphi_T^{R_\alpha})_x\Big|_{\xi_x} : \xi_x \to \xi_x$$

n'admet pas 1 comme valeur propre.

Si Λ_0 et Λ_1 sont deux legendriennes, une *corde de Reeb reliant* Λ_0 *à* Λ_1 est un couple $(x, T) \in Y \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$x \in \Lambda_0 \text{ et } \varphi_T^{R_\alpha}(x) \in \Lambda_1.$$

T s'appelle la *longueur* de l'orbite de Reeb. On définit de la même manière que pour les cordes hamiltoniennes les cordes *non dégénérées*, on demande la condition suivante :

$$(d\varphi_T^{R_\alpha})_x(T_x\Lambda_0) \oplus T_{\varphi_T^{R_\alpha}(x)}\Lambda_1 = \xi_{\varphi_T^{R_\alpha}(x)}.$$

Quelques liens

Sur une symplectisation $]0; +\infty[\times Y$ d'une variété de contact Y, on va faire le lien entre les champs de vecteurs hamiltoniens et le champ de Reeb. On considère un hamiltonien indépendant du temps et de la forme :

$$\begin{aligned} H :]0; +\infty[\times Y \times [0; 1] &\to \mathbb{R} \\ (r, y, t) &\longmapsto h(r). \end{aligned}$$

Alors le champ de vecteur hamiltonien vérifie $X_H = h'(r)R_\alpha$. Donc le flot hamiltonien laisse la stratification $\{r\} \times Y$ invariante et les orbites périodiques du flot hamiltonien sur la strate $\{r\} \times Y$ sont en bijection avec les orbites périodiques du champ de Reeb de longueur $h'(r)$. De plus l'action hamiltonienne d'une orbite γ vaut

$$A_H(\gamma) = rh'(r) - h(r) = rT - h(r).$$

Ces orbites hamiltoniennes viennent en S^1-familles car le hamiltonien est indépendant du temps : si x est le point de départ d'une orbite, alors $\varphi_t^H(x)$ est aussi le point de départ d'une orbite pour tout $t \in S^1$.

Si Λ_0 et Λ_1 sont deux legendriennes de Y alors les cordes hamiltoniennes reliant $\mathbb{R} \times \Lambda_0$ à $\mathbb{R} \times \Lambda_1$ sur la strate $\{r\} \times Y$ sont en bijection avec les cordes de Reeb reliant Λ_0 à Λ_1 de longueur $h'(r)$. De plus on a une formule similaire pour l'action hamiltonienne d'une corde c :

$$A_H(c) = rh'(r) - h(r) = rT - h(r).$$

2.2 Indices de Conley-Zehnder

Dans cette section, on va définir l'indice de Conley-Zehnder des orbites hamiltoniennes, orbites de Reeb, cordes hamiltoniennes et cordes de Reeb et relier ces notions en s'inspirant de l'article [BO09b]. Ces indices seront utiles pour calculer des indices d'opérateurs de Fredholm et des dimensions d'espaces de module.

2.2.1 Indices de Conley-Zehnder d'orbites

Orbites hamiltoniennes

On considère des orbites hamiltoniennes contractiles γ d'un hamiltonien H défini sur une variété symplectique X^{2n} exacte. On supposera aussi que la première classe de Chern s'annule $c_1(TX) = 0$.

Soit $H : X \times S^1 \to \mathbb{R}$ un hamiltonien et (γ, σ_γ) un couple formé d'une orbite hamiltonienne contractile de H, $\gamma : S^1 \to X$, et d'un remplissage $\sigma_\gamma : D^2 \to X$, de cette orbite, i.e. σ_γ se restreint à γ sur le bord du disque D^2. Remarquons que $\sigma_\gamma^* TX$ est un fibré symplectique sur D^2, un espace contractile. Ce fibré est donc trivialisable :

$$\begin{array}{ccc} \sigma_\gamma^* TX & \simeq & D^2 \times \mathbb{R}^{2n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2 & & D^2. \end{array}$$

Grâce à cette trivialisation, on peut considérer $d\varphi_\theta^H : T_{\gamma(0)}X \to T_{\gamma(\theta)}X$ comme une application symplectique de $\mathbb{R}^{2n}$. On obtient donc un chemin d'applications symplectiques $d\varphi_\bullet^H : [0,1] \to \mathrm{Sp}(2n)$.

Si on suppose que l'orbite hamiltonienne est non dégénérée, alors $d\varphi_1^H$ n'a pas 1 comme valeur propre. D'après [AD10], on peut calculer l'indice de Maslov d'un tel chemin et cela nous définit *l'indice de Conley-Zehnder* de (γ, σ_γ) : $CZ(\gamma) = \mu(d\varphi_\bullet^H)$

Si on choisit un autre σ_γ pour la même orbite hamiltonienne γ qu'on note σ'_γ, alors on va trouver un indice de Conley-Zehnder qui différera de 2 fois la classe de Chern $c_1(TX)$ appliqué à la sphère $\sigma_\gamma \# \sigma'_\gamma$. L'hypothèse $c_1(TX) = 0$ assure donc que l'indice de Conley-Zehnder est bien défini indépendamment du choix de σ_γ.

Si l'orbite hamiltonienne est dégénérée, on peut quand même associer un indice au chemin de symplectomorphisme : on utilise pour cela l'indice de Robbin-Salamon [RS93]. Il s'agit alors d'un demi-entier et on pose $RS(\gamma) = RS(d\varphi_\bullet^H)$. Les deux définitions coïncident si l'orbite γ est non dégénérée : $RS(\gamma) = CZ(\gamma)$.

Orbite de Reeb

On suppose que $c_1(\xi) = 0$.

On fait essentiellement la même chose sur la variété de contact (Y^{2n-1}, α). Si $\gamma : S^1 \to Y$ est une orbite périodique contractile de R_α de longueur T, alors grâce à un choix de remplissage $\sigma_\gamma : D^2 \to Y$, on va associer un indice de Conley-Zehnder à cette orbite γ. On

trivialise $\sigma_\gamma^*\xi$:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_\gamma^*\xi & \simeq & D^2 \times \mathbb{R}^{2n-2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2 & & D^2. \end{array}$$

Ainsi on peut considérer $d\varphi_\theta^{R_\alpha}\Big|_\xi : \xi_{\gamma(0)} \to \xi_{\gamma(\theta)}$ comme un chemin de symplectomorphisme : $d\varphi_\bullet^{R_\alpha}\big|_\xi : [0,T] \to \mathrm{Sp}(2n-2)$. Le fait de supposer l'orbite de Reeb non dégénérée implique que $d\varphi_T^{R_\alpha}\Big|_\xi$ n'a pas 1 comme valeur propre. On peut donc définir l'indice de Conley-Zehnder de (γ, σ_γ) :

$$CZ_R(\gamma) = \mu\left(d\varphi_\bullet^{R_\alpha}\big|_\xi\right).$$

Un autre choix de remplissage σ'_γ différent de σ_γ fera que l'indice de Conley-Zehnder diffèrera de $2 \cdot \langle c_1(\xi), \sigma'_\gamma \# \sigma_\gamma \rangle$.

Lien entre les deux définitions sur une symplectisation

Soit un hamiltonien $H :]0; +\infty[_r \times Y \to \mathbb{R}$ indépendant du temps sur la variété symplectique exacte $]0; +\infty[_r \times Y$ munie de la 1-forme $r\alpha$. Supposons que cet hamiltonien s'écrit $H(r, y) = h(r)$ et pour simplifier, supposons aussi que $h'(r) > 0$ partout. Dans ce cas, d'après la section 2.1.2 :

$$X_H = h'(r)R_\alpha \text{ avec } i_{X_H}\omega = -dH.$$

Le flot hamiltonien préserve les sous niveaux $\{r\} \times Y$. Les orbites 1-périodiques du flot hamiltonien sur ce niveau sont exactement les orbites périodiques du flot de Reeb R_α de longueur $h'(r)$ et viennent en S^1-familles car H est indépendant du temps t.

Le flot hamiltonien est donc dégénéré, on doit utiliser l'indice de Robbin-Salamon. Notre but est de comparer cet indice de Robbin-Salamon avec l'indice de Conley-Zehnder de l'orbite de Reeb en suivant [BO09b].

On décompose $T(Y \times \mathbb{R}) = \xi \oplus \mathbb{R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \oplus \mathbb{R} \cdot R_\alpha$ où $\xi = \ker \alpha$, puis on écrit la matrice $d\varphi_t^H$ dans cette base :

$$d\varphi_t^H = d\varphi_{h'(r)t}^{R_\alpha}\Big|_\xi \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h''(r)t & 1 \end{pmatrix}$$

L'indice de Robbin-Salamon est tel que $RS(d\varphi_t^H) = \mu\left(d\varphi_{h'(r)t}^{R_\alpha}\Big|_\xi\right) + \frac{1}{2}\mathrm{sign}(h''(r))$ car l'orbite de Reeb étant non dégénérée, le chemin de matrices symplectiques $d\varphi_{h'(r)t}^{R_\alpha}\Big|_\xi$ est non dégénéré aussi.

Cela permet de conclure que si γ est une orbite hamiltonienne sur $[1;+\infty[_r \times Y$ au niveau r associée à une orbite de Reeb γ_R sur Y, alors

$$RS(\gamma) = CZ_R(\gamma_R) + \frac{1}{2}\mathrm{sign}(h''(r)).$$

On pourra voir dans [CFHW96] et [BO09b] la suite logique de cette construction où on perturbe la S^1-famille d'orbites hamiltoniennes γ en deux orbites non dégénérées γ^{min} et γ^{max} et où on compare l'indice de Robbin-Salamon de γ et les indices de Conley-Zehnder de γ^{min} et γ^{max}. On trouve alors que :

$$\begin{aligned} CZ(\gamma^{min,max}) &= RS(\gamma) \pm \frac{1}{2} \\ &= CZ_R(\gamma_R) + \frac{1}{2}\mathrm{sign}(h''(r)) \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si on avait fait les mêmes calculs pour $h'(r) < 0$, on aurait

$$d\varphi_t^H = d\varphi_{h'(r)t}^{R_\alpha}\Big|_\xi \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h''(r)\theta & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$RS(\gamma) = -CZ_R(\gamma_R) + \frac{1}{2}\mathrm{sign}(h''(r)).$$

2.2.2 Indices de Conley-Zehnder de cordes

Corde hamiltonienne

On se donne $c : [0,1] \to X$ une corde hamiltonienne entre deux lagrangiennes L et L' tel que $c(0) = x \in L$ et $c(1) = x' \in L'$. On souhaite définir un indice de Conley-Zehnder pour cette corde. On va se ramener à calculer l'indice de Maslov d'un lacet de lagrangiennes dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Pour cela, on sait que $d\varphi_t^H(T_xL)$ fournit un chemin de lagrangiennes dans $T_{c(t)}X$ et que la lagrangienne $d\varphi_1^H(T_xL)$ est transverse à $T_{x'}L'$ dans $T_{x'}X$ si la corde est non dégénérée. On peut donc composer ce chemin avec un chemin *court* canonique qui permet d'envoyer une lagrangienne sur une autre lagrangienne transverse. On obtient ainsi un chemin

$$T_xL \xrightarrow{d\varphi_t^H} d\varphi_1^H(T_xL) \xrightarrow{court} T_{x'}L'.$$

Pour clore le chemin, il manque un chemin de lagrangiennes entre $T_{x'}L'$ et T_xL pour tout couple (x, x'), via des lagrangiennes dans $T_{\gamma(t)}X$ où γ est un chemin reliant x à x' dans X. Cela peut être fait de manière à ce que ce choix ne dépende que des composantes

connexes de x dans L et de x' dans L' et cela est expliqué dans la section 4.1 de [EO17]. Si on compose c et γ et si on a une application $\sigma_c : D^2 \to X$ dont le bord est exactement $c\#\gamma$, alors on peut trivialiser :

$$\begin{array}{ccc} \sigma_c^* TX & \simeq & D^2 \times \mathbb{R}^{2n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2 & & D^2. \end{array}$$

Sous cette identification, on a un lacet de lagrangiennes dans $\mathbb{R}^{2n}$ dont on peut calculer l'indice de Maslov. Il s'agit de l'indice de Conley-Zehnder $CZ(c)$.

On a fait deux choix : le choix du chemin reliant $T_{x'}L'$ et T_xL ainsi que le choix de σ_c. L'indice de Conley-Zehnder est indépendant du choix de σ_c si $c_1(TX) = 0$ et va différer d'une constante si on effectue un autre choix de chemin. Comme on ne considèrera que des différences d'indices de Conley-Zehnder dans la suite pour calculer les dimensions d'espaces de modules, cette constante sera systématiquement éliminée de nos calculs et on fera comme si elle n'existait pas.

Corde de Reeb

Les mêmes techniques permettent de définir l'indice de Conley-Zehnder d'une corde de Reeb quand on considère des lagrangiennes dans ξ au lieu de TX.

Lien entre les deux définitions sur une symplectisation

On se donne un hamiltonien $H :]0; +\infty[_r \times Y \to \mathbb{R}$ indépendant du temps sur la variété symplectique exacte $SY = (]0; +\infty[\times Y, d(r\alpha))$ tel que $H(r, y) = h(r)$. Supposons de plus que $h'(r) > 0$ pour simplifier la situation. Rappelons que ce flot hamiltonien préserve les sous-niveaux $\{r\} \times Y$.

Si on se donne deux lagrangiennes coniques : $L =]0; +\infty[\times \Lambda$ et $L' =]0; +\infty[\times \Lambda'$ alors les cordes hamiltoniennes reliant $\{r\} \times \Lambda$ et $\{r\} \times \Lambda'$ sont en bijection avec les cordes de Reeb reliant Λ et Λ' de longueur $h'(r)$. Considérons une telle corde hamiltonienne c reliant $(r, y) \in L$ à $(r, y') \in L'$ et notons c_{R_α} la corde de Reeb correspondante reliant y à y'.

Comme $d\varphi_t^H(\frac{\partial}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial r} + h''(r)tR_\alpha$ et $TL = T\Lambda \times \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial r}$, on peut écrire que :

$$d\varphi_t^H(TL) = d\varphi_{h'(r)t}^R(T\Lambda) \times \mathbb{R} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} + h''(r)tR_\alpha \right).$$

Si on choisit les chemins qui relient $T_{(r,y')}L'$ à $T_{(r,y)}L$ comme relèvement de chemins qui relient $T_{y'}\Lambda'$ à $T_y\Lambda$, on voit que dans le lacet de lagrangiennes qu'on considère selon qu'on calcule $CZ(c)$ ou $CZ(c_{R_\alpha})$ il y a très peu de changements. La seule chose qui change dans l'indice de Maslov est le chemin court canonique qui relie $\mathbb{R}\left(\frac{\partial}{\partial r} + h''(r)R_\alpha\right)$ à $\mathbb{R}\frac{\partial}{\partial r}$ dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial r} \oplus \mathbb{R}R_\alpha$.

Le chemin court consiste dans ce cadre à tourner dans le sens positif donc on voit que si $h''(r) > 0$, on va faire un tour complet ce qui va augmenter l'indice de Maslov de 1 alors que si $h''(r) < 0$, on ne changera pas l'indice de Maslov. Ce qui nous amène au résultat suivant :

$$CZ(c) = \begin{cases} CZ(c_R) + 1 \text{ si } h''(r) > 0, \\ CZ(c_R) \qquad \text{si } h''(r) < 0. \end{cases}$$

2.3 Equation de Floer à surface de Riemann fixée

2.3.1 Surface de Riemann épointée à bord cylindrique

On se donne une surface épointée (S, Γ) stable comme définie au chapitre 1 : S est une surface, et Γ un ensemble ordonné de points de S avec signes et marqueurs asymptotiques. On se donne un élément de l'espace de modules $\mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$: on choisit j une structure complexe sur $S \backslash \Gamma$ qui respecte les signes (cf section 1.4). On note Σ la surface de Riemann obtenue. On se donne des coordonnées cylindriques près des pointes, c'est à dire des biholomorphismes entre des voisinages de ces pointes et :

- $]-\infty; 0] \times S^1$ si il s'agit d'une pointe intérieure négative,
- $[0; +\infty[\times S^1$ si il s'agit d'une pointe intérieure positive,
- $]-\infty; 0] \times [0; 1]$ si il s'agit d'une pointe sur le bord négative,
- $[0; +\infty[\times [0; 1]$ si il s'agit d'une pointe sur le bord positive.

On note les coordonnées de ces surfaces modèles $z = s + it$ où i est la structure complexe, s est le paramètre $\mathbb{R}^\pm$ et t est respectivement un élément de S^1 ou de $[0; 1]$ si la pointe est respectivement intérieure ou sur le bord. On notera par la suite $Cyl(\Sigma)$ le fibré des coordonnées cylindriques près des pointes de Σ.

A partir de maintenant, on supposera qu'une section du fibré des coordonnées cylindriques a été fixée.

2.3.2 Structures presque complexes cylindriques

On note $\mathcal{J}_S(\Sigma)$ l'ensemble des applications lisses allant de Σ dans les structures presque complexes de X cylindriques près des pointes c'est à dire l'ensemble des $J \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma, End(TX))$ vérifiant :

- pour tout $z \in \Sigma$, $J(z)^2 = -Id_{TX}$,
- pour tout $z \in \Sigma$, $\omega(\cdot, J(z)\cdot)$ est une métrique Riemannienne sur X,
- au voisinage d'une pointe, $J(s+it)$ ne dépend que de t.

On remarque que $\mathcal{J}_S$ définit ainsi un fibré au-dessus de $\mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)$ et que la fibre est convexe. Cela assure que l'ensemble des sections de $\mathcal{J}_S$ est un espace convexe donc contractile.

2.3.3 Terme de perturbation hamiltonienne

Le cas le plus général de terme de perturbation hamiltonienne sur une surface de Riemann Σ est le suivant. On se donne un hamiltonien $H \in \mathcal{C}^\infty(X \times \Sigma, \mathbb{R})$ dépendant de la surface Σ et une 1-forme $\beta \in \Omega^1(\Sigma)$ vérifiant :

- près de chaque pointe z, H_{s+it} ne dépend que de $t \in I(z)$, on notera cet hamiltonien $H^z(t)$,
- près des pointes, $\beta = dt$.

On associe à un tel hamiltonien une famille de champs de vecteurs $X_H \in \Gamma(TX)^\Sigma$ vérifiant pour tout $z \in \Sigma$, $i_{X_{H_z}}\omega = -dH_z$. X_{H_z} s'appelle le champ de vecteurs hamiltonien associé à H_z. On note alors $B = X_H \otimes \beta$ une 1-forme *à valeur dans les champs de vecteurs hamiltoniens.*

On note $\mathcal{B}_S(\Sigma)$ l'ensemble des 1-formes de Σ à valeurs dans les champs de vecteurs hamiltoniens tel que décrit ci-dessus :

$$\mathcal{B}_S(\Sigma) = \{B : T\Sigma \to \Gamma(TM), \exists \beta \in \Omega^1(\Sigma), \exists H \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma \times X, \mathbb{R}), B(v) = \beta_z(v) X_{H_z}\}.$$

Le cas le plus simple est quand H_z ne dépend pas de z. Dans ce cas, un terme de perturbation hamiltonien est simplement un hamiltonien $H \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ et une 1-forme $\beta \in \Omega^1(\Sigma)$ qui vaut dt près des pointes.

On remarque qu'on définit ainsi un fibré $\mathcal{B}_S$ au dessus de $\mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)$ et que la fibre est convexe. Cela assure que l'ensemble des sections de $\mathcal{B}_S$ est un espace convexe donc contractile.

2.3.4 Équation de Floer

Pour $(\Sigma, j) \in \mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)$, $J \in \mathcal{J}_S(\Sigma)$ et $B \in \mathcal{B}_S(\Sigma)$, on appelle équation de Floer associée à (Σ, j, J, B) l'équation suivante d'inconnue $u : \Sigma \to X$ de régularité H^2 :

$$(du - B)^{0,1} = (du - X_H(u) \otimes \beta)^{0,1} = 0 \tag{2.1}$$

où $(du - X_H(u) \otimes \beta) : T\Sigma \to u^*TX$ s'évalue en $v \in T_z\Sigma$ de la manière suivante :

$$(du - X_H(u) \otimes \beta)(v) = du_z(v) - \beta_z(v) \cdot X_{H_z}(u(z)) \in T_{u(z)}X.$$

On rappelle que l'équation (2.1) signifie que $(du - X_H(u) \otimes \beta)$ est (J, j)-holomorphe c'est-à-dire que $(du - X_H \otimes \beta) \circ j = J \circ (du - X_H \otimes \beta)$. Il est aussi utile d'écrire explicitement ce que devient cette équation près d'une pointe :

$$\begin{aligned} 2 \cdot (du - X_{H_t} \otimes \beta)^{0,1} &= du - X_{H_t} \otimes \beta + J(du - X_{H_t} \otimes \beta)j \\ &= (\partial_s u \cdot ds + \partial_t u \cdot dt - X_{H_t} \cdot dt) + J(\partial_s u \cdot ds + \partial_t u \cdot dt - X_{H_t} \cdot dt)j \\ &= (\partial_s u \cdot ds + \partial_t u \cdot dt - X_{H_t} \cdot dt) + J(-\partial_s u \cdot dt + \partial_t u \cdot ds - X_{H_t} \cdot ds) \\ &= (\partial_s u + J(\partial_t u - X_{H_t}))ds + (-J\partial_s u + \partial_t u - X_{H_t})dt. \end{aligned}$$

Donc l'équation de Floer est équivalente près d'une pointe à l'équation :

$$\partial_s u + J(\partial_t u - X_{H_t}(u)) = 0. \tag{2.2}$$

2.3.5 Conditions asymptotiques

On choisit un ensemble de *décorations lagrangiennes*, c'est-à-dire des lagrangiennes L_C dans X pour chaque composante connexe C du bord $\partial\Sigma = \partial(S \backslash \Gamma)$. Pour chaque pointe z sur le bord, on note L_0^z et L_1^z les lagrangiennes associées aux deux composantes connexes de $\partial\Sigma$ adjacentes à la pointe z. Si z est une pointe positive, L_1^z est la lagrangienne située avant la pointe pour l'orientation de $\partial\Sigma$ et l'inverse si z est une pointe négative.

Pour z une pointe et $H^z : X \times I(z) \to \mathbb{R}$ un hamiltonien dépendant du temps (qui a été fixé en section 2.3.3 par le choix de B), on définit $A(z, H^z)$ comme étant :

- l'ensemble des orbites hamiltoniennes de H^z si z est une pointe intérieure,
- l'ensemble des cordes hamiltoniennes allant de L_0^z à L_1^z si z est une pointe sur le bord.

On se donne un *ensemble de convergences asymptotiques*, c'est-à-dire pour chaque pointe $z \in \Gamma$, on choisit un élément $c_z \in A(z, H^z)$.

On définit l'*espace des solutions de l'équation de Floer associée à* (Σ, j, J, B) *avec conditions* $(L, \{c_z\}_{z\in\Gamma})$, noté $\mathcal{S}(\Sigma, j, J, B; L, \{c_z\})$, comme étant l'ensemble des $u : \Sigma \to X$ de régularité H^2 vérifiant :

- u est solution de l'équation de Floer (2.1),
- si $z \in C$ où C est une composante connexe de $\partial\Sigma$, alors $u(z) \in L_C$,
- près d'une pointe positive z, $\lim\limits_{s\to+\infty} u(s + it) = c_z(t)$,
- près d'une pointe négative z, $\lim\limits_{s\to-\infty} u(s + it) = c_z(t)$.

2.3.6 Transversalité

Théorème 2.1 ([FHS95], théorème 3.1.6 de [MS04] et section 4.4 de [MS17])**.**

Fixons (Σ, j, B) *des données et* $(L, \{c_z\})$ *des conditions définies comme ci-dessus c'est*

à dire que :

(i) (Σ, j) *est une surface de Riemann épointée,*

(ii) B *est un terme de perturbation hamiltonienne sur* Σ*,*

(iii) L *est un ensemble de décorations lagrangiennes,*

(iv) pour chaque pointe z*,* c_z *est soit une corde hamiltonienne reliant deux lagrangiennes soit une orbite hamiltonienne de* H^z *selon que* z *est une pointe sur le bord ou intérieure,*

(v) toutes les cordes et orbites hamiltoniennes sont non dégénérées.

Alors il existe un sous-ensemble dense $\mathcal{J}_{reg}$ *de* $\mathcal{J}(\Sigma)$ *tel que pour tout* $J \in \mathcal{J}_{reg}$*, l'espace des solutions de l'équation de Floer* $\mathcal{S}(\Sigma, j, J, B; L, c)$ *est une variété de dimension finie.*

2.4 Espaces de modules de solutions de l'équation de Floer

On veut maintenant définir un espace de solutions de l'équation de Floer sans que cela dépende du choix de la structure complexe $(\Sigma, j) \in \mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$. On va donc faire ce qui a été fait dans la section 2.3 en famille sur $\mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$. On recommence la présentation depuis le début.

2.4.1 Conditions asymptotiques

Soit X une variété symplectique et (S, Γ) une surface épointée. On choisit dans l'ordre :

- pour chaque pointe z, un hamiltonien $H^z : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times X \to \mathbb{R}$ périodique,
- un ensemble de décorations lagrangiennes (cf section 2.3.5),
- un ensemble de convergences asymptotiques non dégénérées (cf section 2.3.5).

On rappelle que pour toute pointe z, $A(z, H^z)$ désigne l'ensemble

- des orbites 1-périodiques du flot de H^z si z est une pointe intérieure,
- des cordes hamiltoniennes allant de L_0^z à L_1^z si z est une pointe sur le bord.

Alors un ensemble de convergences asymptotiques non dégénérées est la donnée d'un élément $c_z \in A(z, H^z)$ non dégénéré pour toute pointe z.

2.4.2 Choix des données

Tout les choix qu'on a fait dans la section 2.3 doivent être faits en famille sur $\mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$. On doit donc faire, dans l'ordre suivant, des choix de section :

(i) $(V_z, \varphi_z)_{z \in \Gamma}$ du fibré coordonnées cylindriques près des pointes $Cyl(\Sigma)$ (2.3.1),

(ii) B du fibré des termes de perturbation hamiltonienne $\mathcal{B}_S$ (2.3.3) tel que près de la pointe z, B soit égal à $X_{H^z} \otimes dt$,

(iii) J du fibré des structures presque complexes cylindriques $\mathcal{J}_S$ (2.3.2).

Tout ces choix doivent être invariants sous l'action des biholomorphismes et compatibles avec la compactification de Deligne-Mumford de l'espace de modules $\mathcal{M}(S,\Gamma)$ (voir 1.4). On peut alors définir l'équation de Floer pour un couple (Σ, u) où $\Sigma \in \mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)$ et $u : \Sigma \to X$:

$$(du - B(\Sigma))^{0,1} = \frac{1}{2}\cdot\Big(du - B(\Sigma) + J(\Sigma)\circ(du - B(\Sigma))\circ j_\Sigma\Big) = 0.$$

Dans la suite de cette section, on suppose que ces choix ont été fixés.

La procédure pour faire en sorte qu'un choix de données est compatible avec la compactification de Deligne-Mumford est expliquée dans la section 9g de [Sei08b]. Il faut faire des choix de données sur les strates les plus profondes de l'espace de module de surface. Ensuite, en recollant ces choix, on obtient des données près du bord de la strate de dimension +1. Comme les espaces de choix sont contractiles, on sait qu'on peut alors prolonger ces données définies sur le bord à l'ensemble de la strate. On procède ainsi jusqu'à arriver à l'ensemble de l'espace de modules.

2.4.3 Espaces de modules

Pour toute pointe z, on a déjà choisi un élément de $c_z \in A(z, H^z)$ qui est donc soit une corde hamiltonienne, soit une orbite hamiltonienne.

Si on se donne un couple (Σ, u) où $\Sigma \in \mathcal{M}^{pr}(S)$ et $u \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma, u)$, on dit que u converge près de la pointe z vers c_z si :

1. quand z est une pointe positive, $\lim\limits_{s\to+\infty} u(\varphi_z(s+it)) = c_z(t)$,
2. quand z est une pointe négative, $\lim\limits_{s\to-\infty} u(\varphi_z(s+it)) = c_z(t)$.

On rappelle que φ_z est un biholomorphisme fixé qui va de $\mathbb{R}^{sgn(z)} \times I(z)$ dans un voisinage de la pointe dans Σ et que $I(z)$ vaut $[0;1]$ ou S^1 selon que la pointe z est sur le bord ou à l'intérieur de Σ.

L'espace des solutions de l'équation de Floer associés à tout ces choix (coordonnées cylindriques, structures presque complexes cylindriques, termes de perturbations hamiltonienne, cordes c_z, décorations lagrangiennes) est l'ensemble $\mathcal{M}^{pr}(S, J, B; L_C, \{H^z, c_z\})$ des couples (Σ, u) où $(\Sigma, j) \in \mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)$ et $u \in S(\Sigma, j, J(\Sigma), B(\Sigma); L, c)$ pour reprendre les notations de la section 2.3.5. Pour être plus explicite, cela signifie que $u \in C^\infty(\Sigma, X)$ doit vérifier :

1. u est solution de l'équation de Floer : $(du - B(\Sigma))^{0,1} = 0$,
2. pour tout $z \in C$, $u(z) \in L_C$,

3. u converge près de la pointe z vers c_z.

On remarque que le groupe des biholomorphismes agissant sur $\mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)$ agit sur l'espace des solutions de l'équation de Floer. L'espace de modules des solutions de l'équation de Floer $\mathcal{M}(S,J,B;L_C,\{H^z,c_z\})$ est l'espace quotient de $\mathcal{M}^{pr}(S,J,B;L_C,\{H^z,c_z\})$ par cette action. Si on suppose que la surface (S,Γ) est stable, l'action du groupe des biholomorphismes sur $\mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)$ est libre par définition et le quotient définit donc bien une variété. Quand les données nécessaire à la définition de cet espace de modules ont été spécifiées, on notera souvent cet espace $\mathcal{M}(c_z)$ pour simplifier les notations.

2.4.4 Transversalité

On divise l'ensemble des pointes $\Gamma = \Gamma^+_{int} \cup \Gamma^-_{int} \cup \Gamma^+_{bord} \cup \Gamma^-_{bord}$ selon que les pointes sont positives ou négatives et intérieures ou sur le bord.

On a alors le théorème suivant qui est une conséquence directe du théorème 2.1.

Théorème 2.2 (Conséquence du théorème 2.1)**.**

On fixe L_C, H^z, c_z des conditions de convergence et on choisit B une section de $\mathcal{B}_S$ compatible avec le choix de H^z. Pour un choix de section J de $\mathcal{J}_S$ générique, l'espace de modules $\mathcal{M}(S,J,B;L_C,\{H^z,c_z\})$ est une variété de dimension finie.

On a la formule suivante pour la dimension :

$$\begin{aligned} dim\ \mathcal{M}(c_z) = dim\ \mathcal{M}(S,\Gamma) + n\chi(S) + \sum_{z\in\Gamma^+_{int}} (CZ(\gamma^+_z) - n) \\ + \sum_{z\in\Gamma^+_{bord}} (CZ(c^+_z) - n) - \sum_{z\in\Gamma^-_{int}} (CZ(\gamma^-_z) + n) - \sum_{z\in\Gamma^-_{bord}} CZ(c^-_z). \end{aligned}$$

On propose une méthode pour retrouver rapidement cette formule dans la section 3.1.

2.4.5 Compacité et bord

Sur une variété compacte

On suppose que X est une variété symplectique compacte. Dans ce cas, les espaces de modules considérés peuvent être compactifiés en des variétés à coins : ce sont les *compactifications de Gromov-Floer*. On va décrire seulement le bord de codimension 1 de cette compactification et, par itération, on pourra comprendre la compactification totale. Si N est une courbe nodale, on peut définir, de la même manière que précédemment, l'espace de modules des solutions u de l'équation de Floer ayant $\mathcal{M}^{pr}(N)$ comme domaine de départ. Plus précisément, pour définir une équation de Floer sur une courbe nodale, on demande que pour chaque nœud $z_1 \sim z_2$:

1. les décorations lagrangiennes soient compatibles : $L^{z_1}_\varepsilon = L^{z_2}_\varepsilon$ pour $\varepsilon = 0,1$,
2. les hamiltoniens coïncident : $H^{z_1} = H^{z_2}$,

3. on a choisi la même corde hamiltonienne $c \in A(z_1, H^{z_1}) = A(z_2, H^{z_2})$ des deux côtés du nœud.

Dans ce cas, on peut recoller les structures presque complexes cylindriques et les termes de perturbation le long d'un nœud et on peut aussi recoller les solutions de l'équation de Floer. En effet, comme on a demandé des modèles standards près des noeuds, les données se recollent directement sur les variétés recollées (voir formule (1.4)).

Dans le bord de codimension 1 de $\mathcal{M}(S, J, B; L_C, H^z, c_z)$, il peut se produire :

(i) La surface de Riemann $\Sigma \in \mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$ dégénère en une courbe nodale N de codimension 1 et les données pour définir l'équation de Floer sur N proviennent naturellement de celles choisies pour S. Ce cas de figure est décrit par les éléments de

$$\bigcup_{\substack{N \in \partial_1 \mathcal{M}(S,\Gamma) \\ c \in A(\text{nœud}, H^{\text{nœud}})}} \mathcal{M}(N; c_z, c).^{4} \tag{2.3}$$

(ii) L'équation de Floer dégénère près d'une pointe de manière similaire au cas d'une équation de gradient dans le cas de l'homologie de Morse. Ce cas de figure est décrit alors par (quand z_0 est une pointe positive) :

$$\bigcup_{\substack{z_0 \in \Gamma \\ c \in A(z_0, H^{z_0})}} \mathcal{M}(S; (c_z)_{z \neq z_0}, c) \times \mathcal{M}(\mathbb{R} \times I(z_0); c_{z_0}, c) \tag{2.4}$$

où $I(z_0)$ est égal à $[0; 1]$ ou S^1 selon que la pointe z_0 est sur le bord ou intérieur. On définira plus précisément au chapitre 3 l'espace de modules $\mathcal{M}(\mathbb{R} \times I(z_0); c_{z_0}, c)$ (cela est légèrement différent du cas qu'on a considéré jusque là car on travaille sur une surface épointée non stable).

Souvent ces deux cas peuvent être décrits de manière simultanée en considérant des dégénérescences de S en surfaces nodales stables et non stables. En effet, les dégénérescences de type (ii) n'apparaissent pas dans la compactification de Deligne-Mumford car $\mathbb{R} \times I$ n'est pas stable mais on a quand même la propriété de recollement : $S \# \mathbb{R} \times I$ est homéomorphe à S.

On dira que les dégénérescences de type (i) viennent de la compactification de Deligne-Mumford de l'espace de modules et que les dégénérescences de type (ii) sont de type Floer.

4. Un lecteur attentif pourra remarquer que H^{noeud} n'a jamais été défini explicitement. Cela a été fait de manière cachée en choisissant un terme de perturbation hamiltonien B compatible avec la compactification de Deligne-Mumford.

Sur une variété non compacte

Prenons maintenant $\widehat{X}$ une variété non compacte. Plus précisément, supposons que $\widehat{X}$ s'écrit comme la complétion d'un domaine de Liouville (voir section 2.1)

$$\widehat{X} = X \cup [1; +\infty[\times \partial X.$$

On suppose que toutes les lagrangiennes considérées sont des complétions cylindriques de lagrangiennes définies sur X. La partie non compacte de $\widehat{X}$ est $[1; +\infty[\times \partial X$ et il suffit donc de faire en sorte que toutes les solutions u de l'équation de Floer restent uniformément dans une sous-partie compacte de $\widehat{X}$ pour obtenir la compacité des espaces de modules. Pour cela on demande que pour tout $x \in X$ et $\Sigma \in \mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$, si $B(\Sigma) = H_z^{\Sigma} \beta_{\Sigma}$, alors

$$d(H_z^{\Sigma}(x)\beta_{\Sigma}) \in \Omega^2(\Sigma) \leqslant 0. \tag{2.5}$$

Dans ce cas, on sait que si $a : \widehat{X} \to \mathbb{R}^+$ désigne la fonction projection sur $\mathbb{R}^+$ sur $[1; +\infty[\times \partial X$ et égale à 1 ailleurs (qu'on a lissé près de $\{1\} \times \partial X$), alors $a \circ u$ vérifie le principe du maximum (voir section (3c) de [Sei08a]). Donc $a \circ u \leqslant C$ où la constante C est le maximum des $a \circ c_z(t)$ pour $z \in \Gamma$ ce qui assure que les solutions de l'équation de Floer restent uniformément dans une sous-partie compacte de $\widehat{X}$.

On peut trouver une section $B \in \mathcal{B}(\Sigma)$ qui vérifie la condition (2.5) si et seulement si pour tout $x \in X$

$$\sum_{z \in \Gamma^+} \int_{I(z)} H_t^z(x) dt - \sum_{z \in \Gamma^-} \int_{I(z)} H_t^z(x) dt \leqslant 0.$$

Dans ce cas, la description du bord de codimension 1 décrite dans le cadre des variétés symplectiques compactes est toujours valable. De plus si la forme B vérifie la condition (2.5), alors on sait que les éléments $u \in \mathcal{M}(c_z)$ font décroître l'action, c'est-à-dire que s'il existe $u \in \mathcal{M}(S, \Gamma; c_z)$, alors :

$$\sum_{z \in \Gamma^-} A_{H^z}(c_z) \leqslant \sum_{z \in \Gamma^+} A_{H^z}(c_z)$$

où A_H désigne l'action hamiltonienne définie dans la section 2.1.2.

On peut aussi affaiblir la condition (2.5) et demander que l'inégalité ne soit vérifiée que sur la partie non compacte $[1; +\infty[\times \partial X$. Dans ce cas, le principe du maximum s'applique de la même manière ce qui donne la compacité voulue. Cependant la décroissance de l'action n'est plus vérifiée. On obtient quand même une inégalité sur les actions pour B

bien choisie :

$$\sum_{z\in\Gamma^-} A_{H^z}(c_z) \leqslant \sum_{z\in\Gamma^+} A_{H^z}(c_z) + \left|\left|\sum_{z\in\Gamma^+} H^z - \sum_{z\in\Gamma^-} H^z\right|\right|_{\infty,X} \tag{2.6}$$

où $||\cdot||_{\infty,X}$ est la norme infinie calculée sur la partie compacte $X \subset \widehat{X}$.

2.5 Espaces de modules à paramètres et cobordismes

Il est souvent utile de considérer des solutions de l'équation de Floer en famille sur d'autres espaces que $\mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)$. Par exemple pour montrer une certaine forme d'indépendance de l'espace $\mathcal{M}(S,B,J;L,H,c)$ en fonction du choix des sections B et J nécessaires pour définir l'équation de Floer, on considère des solutions de l'équation de Floer en famille sur l'espace $\mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)\times[0;1]$. Notons $\mathcal{P}$ l'espace des paramètres sur lequel on veut définir l'équation de Floer et on suppose que le groupe des biholomorphismes de $\mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)$ agit sur $\mathcal{P}$ et que $\mathcal{P}$ est une variété compacte à coin. On définit alors

$$\mathcal{M}^{pr}(\mathcal{P};L,H,c) = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} \mathcal{M}^{pr}(p;L,H,c)$$

et $\mathcal{M}(\mathcal{P};L,H,c)$ est égal au quotient de $\mathcal{M}^{pr}$ par l'action du groupe des biholomorphismes.

Tout les théorèmes de transversalité et de compacité valables dans le cas des solutions de l'équation de Floer à paramètres $p\in\mathcal{P}$ fixé se transmettent aux espaces $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ et $\mathcal{M}^{pr}(\mathcal{P})$ (dans le cas des surfaces épointées stables pour assurer que le quotient reste bien une variété). La description du bord de codimension 1 est de même similaire et peut se résumer approximativement en la formule suivante :

$$\begin{aligned}\partial_1\mathcal{M}(\mathcal{P}) = \mathcal{M}(\partial_1\mathcal{P}) \cup & \bigcup_{\substack{z\in\Gamma^+\\ c\in A(z,H^z)}} \mathcal{M}(\mathcal{P})\times\mathcal{M}(\mathbb{R}\times I(z);c_z,c)\\ \cup & \bigcup_{\substack{z\in\Gamma^-\\ c\in A(z,H^z)}} \mathcal{M}(\mathcal{P})\times\mathcal{M}(\mathbb{R}\times I(z);c,c_z).\end{aligned}$$

2.6 Ce qu'il faut retenir

Équation de Floer

Pour définir une équation de Floer sur une surface de Riemann $\Sigma\in\mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)$ à valeurs dans un domaine de Liouville X, on doit choisir une 1-forme $\beta\in\Omega^1(\Sigma)$, un hamiltonien $H\in\mathcal{C}^\infty(X\times\Sigma,\mathbb{R})$ et une structure presque complexe dépendant de Σ, $J\in\mathcal{C}^\infty(\Sigma,End(TX))$ tels que :

1. dans des coordonnées cylindriques $s + it$ près des pointes, $\beta = dt$, H_{s+it} et J_{s+it} ne dépendent que de t,
2. pour tout $z \in \Sigma$, J_z est une structure presque complexe sur X.

L'équation de Floer s'écrit alors pour $u : \Sigma \to X$:

$$(du - X_H(u) \otimes \beta)^{0,1} = 0. \tag{2.7}$$

Solutions de l'équation de Floer

Pour définir l'ensemble des solutions de l'équation de Floer, il faut faire un choix de décorations lagrangiennes pour chaque composante connexe de $\partial(S \backslash \Gamma)$ et des cordes ou orbites hamiltoniennes pour chaque pointe selon que la pointe est sur le bord ou intérieure. L'ensemble des solutions de l'équation de Floer avec données (L, H, c) est alors l'ensemble des $u : \Sigma \to X$ vérifiant :

1. u est solution de l'équation de Floer (2.7),
2. u converge près des pointes vers les cordes ou orbites hamiltoniennes choisies,
3. u envoie les composantes connexes de $\partial(S \backslash \Gamma)$ sur les lagrangiennes choisies.

Espaces de modules de solutions

Pour définir un espace de modules de solutions de l'équation de Floer, on procède dans l'ordre suivant. On a (S, Γ) une surface épointée. Dans un premier temps, on choisit l'ensemble des décorations lagrangiennes, des hamiltoniens H^z périodiques pour chaque pointe $z \in \Gamma$ et des orbites ou cordes hamiltoniennes $c_z \in A(z, H^z)$ pour chaque pointe z.

Ensuite on sait qu'il existe une section B du fibré $\mathcal{B}_S$ des termes de perturbations hamiltoniens qui sont compatibles avec les choix des H^z et qu'il existe aussi une section $J \in \Gamma(\mathcal{J}_S)$.

L'espace $\mathcal{M}^{pr}(S, B, J; L, H, c)$ est l'ensemble des couples (Σ, u) où $\Sigma \in \mathcal{M}^{pr}(S, \Gamma)$ et $u : \Sigma \to X$ est solution de l'équation de Floer avec données (L, H, c). On suppose que cette action est libre (ce qui est automatique si (S, Γ) est stable) et on définit alors l'espace de modules des solutions de l'équation de Floer $\mathcal{M}(S, B, J; L, H, c)$ comme le quotient de $\mathcal{M}^{pr}$ sous cette action.

Transversalité

Si toutes les cordes c_z choisies précédemment sont non dégénérées, alors pour J générique, tout les espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^{pr}$ définis précédemment sont des variétés : la propriété de transversalité est vérifiée. De plus, on a la formule donnée dans le théorème 2.2 pour la dimension de cet espace.

Compacité

On veut que les espaces définis ci-dessus (espace de modules de solutions et espace de solutions) soient compactifiables en des variétés compactes à coins : il s'agit de la compactification de Gromov-Floer. On suppose que les conditions demandées précédemment pour la transversalité sont vérifiées. Si on travaille dans une variété symplectique X compacte, la compacité est automatique pour tout ces espaces de modules.

Dans le cas où la variété est non compacte, on demande la condition suivante :

$$\sum_{z\in\Gamma^+}\int_{I(z)} H_t^z(x)dt - \sum_{z\in\Gamma^-}\int_{I(z)} H_t^z(x)dt \leqslant 0$$

qui est notamment vraie si

$$\sum_{z\in\Gamma^+} H^z \leqslant \sum_{z\in\Gamma^-} H^z. \tag{2.8}$$

Alors on peut choisir des termes de perturbations hamiltoniens qui rendent l'espace de module compact.

Bord

Quand l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}(S;(c_z)_{z\in\Gamma})$ est coupé transversalement et compact, on peut décrire le bord de codimension 1 de cet espace. Les éléments de $\partial_1\overline{\mathcal{M}}(S;(c_z)_{z\in\Gamma})$ sont de deux types :

(i) les dégénérescences de type Floer qui font apparaître des espaces de modules de solutions définis sur $\mathbb{R}\times I$ où $I=[0;1]$ ou S^1,

(ii) les dégénérescences dues à la compactification de Deligne-Mumford de $\mathcal{M}(S,\Gamma)$ qui font apparaître des espaces de modules de solutions définis sur des courbes nodales dans $\partial_1\overline{\mathcal{M}}(S,\Gamma)$.

Chapitre 3

Étude d'espaces de modules

On présente un tableau récapitulatif (figures 12 et 13) qui sera surement utile au lecteur tout au long de la thèse avec les principaux espaces de modules qu'on va utiliser. On avait étudié au chapitre 1 des compactifications d'espaces de modules de surfaces de Riemann et au chapitre 2 comment on pouvait définir des équations de Floer définies sur ces compactifications. On va maintenant utiliser ces résultats pour définir des variétés de solutions d'équations de Floer, calculer leurs dimensions et expliciter leur bord. On conseille de lire d'abord le chapitre 4 et de se reporter aux figures 12, 13 et au chapitre 3 quand cela est nécessaire.

3.1 Calcul d'indices d'opérateur de Fredholm

En s'inspirant de la section 4.1 de [EO17], on va présenter une manière simple de retrouver des formules de dimension pour tous types d'espaces de modules de courbes solutions de l'équation de Floer ou pseudo-holomorphes. On rappelle que si $\mathcal{P}$ est un espace de paramètres (par exemple un espace de pré-modules d'une surface épointée) sur lequel l'équation de Floer est définie avec conditions asymptotiques c, alors :

$$\dim \mathcal{M}(\mathcal{P}; c)) = \dim(\mathcal{P}) + ind(D_c) - \dim(\mathrm{Aut}) \tag{3.1}$$

où D_c est l'opérateur de Fredholm de l'équation de Floer à paramètre $p \in \mathcal{P}$ fixé et Aut désigne l'ensemble des automorphismes de l'espace de pré-module de la surface épointée considérée.

Si c est une corde hamiltonienne, alors l'opérateur de Fredholm associé à l'équation de Floer définie sur le disque avec une unique pointe sur le bord est noté $o_+(c)$ si la pointe est positive et $o_-(c)$ si la pointe est négative. De même on définit l'opérateur $o_+(\gamma)$ (resp. $o_-(\gamma)$) associé à l'équation de Floer défini sur la sphère avec une unique pointe positive (resp. négative) et condition asymptotique γ près de cette pointe. On a le lemme suivant :

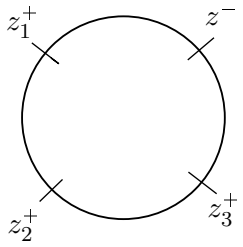
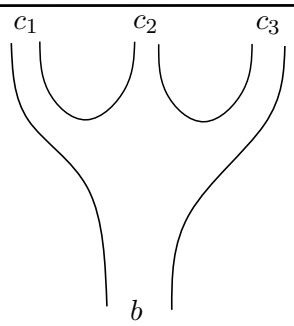
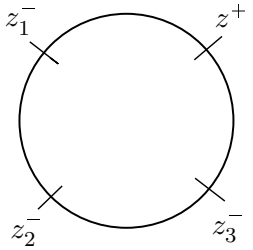
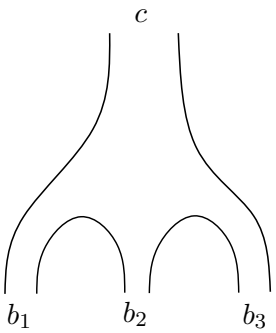
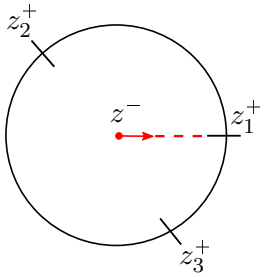
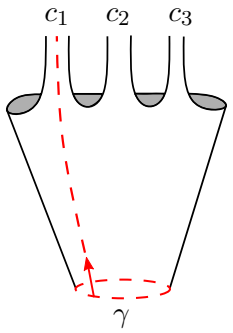
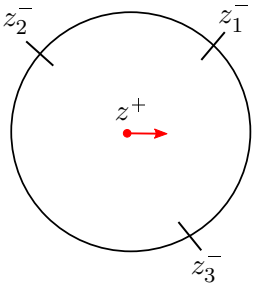
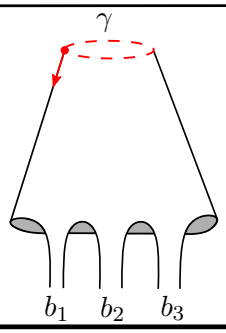
Nom de l'espace de modules (selon conditions asymptotiques)	Dessin de la surface épointée	Dessin holomorphe avec conditions asymptotiques	Application qui utilise ces espaces
Disque épointé $\mathcal{M}(D_{k;1})$ ou $\mathcal{M}(c_1, c_2, c_3; b)$			Structure de A_∞-algèbre sur $SC_*(C)$
Disque épointé $\mathcal{M}(D_{1;k})$ ou $\mathcal{M}(c; b_1, b_2, b_3)$			Structure de A_∞-cogèbre sur $SC_*(\Lambda, L_0)$
Demi-cylindre négatif épointé $\mathcal{M}(\widetilde{D}_{k+}^{1-})$ ou $\widetilde{\mathcal{M}}(c_1, c_2, c_3; \gamma)$			Application Open-Closed $\mathcal{OC}$
Demi-cylindre positif épointé $\mathcal{M}(D_{k-}^{1+})$ ou $\mathcal{M}(\gamma; b_1, b_2, b_3)$			Application Closed-Open $\mathcal{CO}_1$

FIGURE 12 – Partie 1 du tableau récapitulatif.

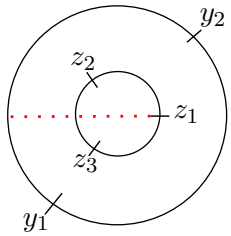
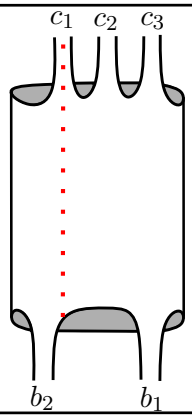
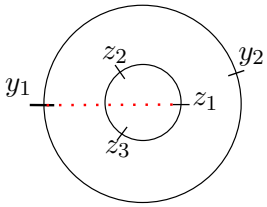
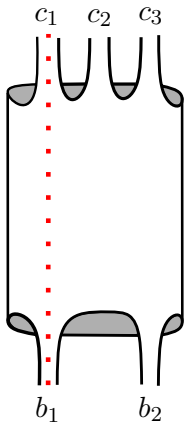
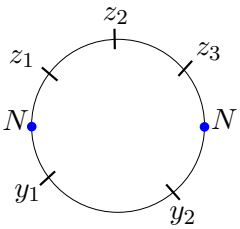
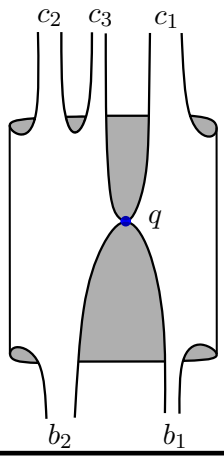
Nom de l'espace de modules (selon conditions asymptotiques)	Dessin de la surface épointée	Dessin holomorphe avec conditions asymptotiques	Application qui utilise ces espaces
Anneau épointé $\mathcal{M}\left(A_{k_-}^{k_+}\right)$ ou $\mathcal{M}(c_1, c_2, c_3; b_1, b_2)$			Homotopie A_1
Anneau épointé avec conditions d'alignement $\mathcal{M}\left(\widetilde{A}_{k_-}^{k_+}\right)$ ou $\widetilde{\mathcal{M}}(c_1, c_2, c_3; b_1, b_2)$			Homotopie A_2
Anneau pincé $\mathcal{M}(D_{k_+;2;k_-})$ ou $\mathcal{M}(c_1, c_2, c_3; q; b_1, b_2)$			Application F

FIGURE 13 – Partie 2 du tableau récapitulatif.

Lemme 3.1 (Section 4.1 de [EO17]).

Si on considère des courbes à valeurs une variété symplectique X de dimension $2n$, alors on a les formules suivantes :

(i) sur une surface sans pointe S, $ind(D_S) = n\chi(S)$,

(ii) $ind(o_+(c)) = CZ(c)$,

(iii) $ind(o_-(c) = n - CZ(c)$,

(iv) $ind(o_+(\gamma)) = n + CZ(\gamma)$,

(v) $ind(o_-(\gamma)) = n - CZ(\gamma)$.

De plus quand on recolle le long d'un noeud N deux surfaces avec conditions asymptotiques, l'indice de l'opérateur sur la surface recollée est égal à la somme des indices des opérateurs sur les surfaces de départ.

Avec ce lemme, on peut calculer l'indice d'une équation de Floer définie sur une surface quelconque S : il suffit de recoller les opérateurs $o_\pm$ au niveau de chaque pointe pour obtenir une surface sans pointe et d'appliquer les formules du lemme. Par exemple l'indice de l'opérateur de Fredholm $D_{k;l}$ associé à l'équation de Floer définie sur un disque avec k pointes positives et l pointes négatives sur le bord et des conditions asymptotiques $c_1, \dots, c_k$ et $b_1, \dots, b_l$ vérifie :

$$ind(D_{k;l}) + \sum_{i=1}^{k} ind(o_-(c_i)) + \sum_{i=1}^{k} ind(o_+(b_i)) = ind(D_{0;0}) = n.$$

Et donc :

$$ind(D_{k;l}) = \sum_{i=1}^{k} (CZ(c_i) - n) - \sum_{i=1}^{k} CZ(b_i) + n.$$

On va donner les formules similaires dans le cas où on considère des équations pseudo-holomorphes (sans termes de perturbations hamiltonienne donc) définis sur des bouts cylindriques et conditions asymptotiques en cordes ou orbites de Reeb.

Si γ_R est une orbite périodique du flot de Reeb sur une variété de contact Y^{2n-1}, on note $o_\pm(\gamma_R)$ l'opérateur de Fredholm associé à l'équation holomorphe suivante :

$$u : S^2 \backslash \{z_\pm\} \to \mathbb{R} \times Y,\ du^{0,1} = 0,\ \lim_{z \to z_\pm} u(z) = \{\pm\infty\} \times \gamma.$$

Si c_R est une corde de Reeb reliant Λ sur une variété de contact Y, on note $o_\pm(c)$ l'opérateur de Fredholm associé à l'équation holomorphe suivante :

$$u : (D^2 \backslash \{z_\pm\}, \partial D^2 \backslash \{z_\pm\}) \to (\mathbb{R} \times Y, \mathbb{R} \times \Lambda),\ du^{0,1} = 0,\ \lim_{z \to z_\pm} u(z) = \{\pm\infty\} \times c.$$

Lemme 3.2. *[DR16], [EES07], [BM04], [Bou02]*

Si on considère des courbes à valeurs dans une symplectisation SY d'une variété de contact Y de dimension $2n-1$, alors on a les formules suivantes :

(i) pour une surface sans pointe S, $ind(S) = n\chi(S)$,

(ii) $ind(o_+(c_R)) = CZ(c_R)+1$,

(iii) $ind(o_-(c_R) = n - CZ(c_R)$,

(iv) $ind(o_+(\gamma_R)) = n + CZ(\gamma_R) + 1$,

(v) $ind(o_-(\gamma_R)) = n - CZ(\gamma_R) + 1$.

De plus si on recolle deux surfaces le long d'un noeud sur le bord, l'indice de l'opérateur sur la surface recollée est égal à la somme des indices moins un. Si on recolle deux surfaces le long d'un noeud intérieur, l'indice de l'opérateur sur la surface recollée est égal à la somme des indices moins 2.

Par exemple l'indice de l'équation holomorphe définie sur un disque avec 1 pointe positive et d pointes négatives avec conditions asymptotiques c, $b_1, \dots, b_d$ vérifie :

$$ind(D) + \sum_{i=1}^{d}(CZ(b_i) + 1) + n - CZ(c) - (d+1) = n$$

$$\text{et donc } ind(D) = CZ(c) + 1 - \sum_{i=1}^{d} CZ(b_i).$$

3.2 Espaces de modules à hamiltonien fixé

Dans toute cette section, on va réintroduire les surfaces épointées (S, Γ) présentées au chapitre 1 et décrire explicitement les espaces de modules des solutions de l'équation de Floer définies sur ces surfaces comme dans la section 2.4. On rappelle que pour définir ces espaces de modules, on a besoin de spécifier des conditions :

(i) un ensemble de décorations lagrangiennes c'est-à-dire une lagrangienne L_C pour chaque composante connexe C de $\partial(S\backslash\Gamma)$,

(ii) des hamiltoniens près de chaque pointe $H^z : I(z) \times X \to \mathbb{R}$,

(iii) pour chaque pointe z, un élément de $A(z, H^z)$ c'est-à-dire une corde hamiltonienne de H^z allant de L_0^z à L_1^z si z est sur le bord ou une orbite hamiltonienne de H^z si z est intérieure.

On doit ensuite construire les données nécessaires pour définir l'équation de Floer c'est-à-dire :

(i) une section du fibré $\mathcal{B}_S$ des termes de perturbations hamiltoniens compatibles avec les choix des H^z,

(ii) une section du fibré $\mathcal{J}_S^{reg}$ des structures presque complexes sur TX.

On sait qu'il existe de telles données et on ne les construira pas explicitement. On peut alors définir $\mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma,J,B;\{L_C\},\{H^z,c_z\})$ et $\mathcal{M}(S,\Gamma,J,B;\{L_C\},\{H^z,c_z\})$ de la manière suivante :

$$\mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma,J,B;\{L_C\},\{H^z,c_z\}) = \bigcup_{(\Sigma,j)\in\mathcal{M}^{pr}(S,\Gamma)} \mathcal{S}(\Sigma,j,J(\Sigma),B(\Sigma);\{L_C\},\{H^z,c_z\})$$

et $\mathcal{M}$ est le quotient de $\mathcal{M}^{pr}$ sous l'action du groupe des biholomorphismes. On sous-entendra la majorité des données pour raccourcir les notations et on écrira uniquement $\mathcal{M}(c_z)$.

On suppose systématiquement que les conditions nécessaires pour avoir des espaces de modules transverses et compacts sont vérifiées. En particulier, dans tout ce chapitre, toutes les cordes et orbites hamiltoniennes considérées seront supposées *non dégénérées*.

3.2.1 Surfaces épointées non stables

Sphère avec 2 points marqués

Plutôt que de travailler sur le pré-espace de modules de la sphère avec 2 points marqués, on va présenter une autre approche équivalente et plus standard dans ce cadre.

Prenons $H : S^1 \times X \to \mathbb{R}$ un hamiltonien et $(J_t)_{t\in S^1}$ un lacet de structures presque complexes de X. On définit l'équation de Floer pour $u : \mathbb{R}\times S^1 \to X$ par

$$(du - X_{H_t}\otimes dt)^{0,1} = 0 \Longleftrightarrow \partial_s u + J_t(\partial_t u - X_{H_t}(u)) = 0.$$

Si on se donne maintenant deux orbites hamiltoniennes non dégénérées γ_+ et γ_-, on définit $\mathcal{M}^{pr}(\gamma^+,\gamma_-)$ comme l'ensemble des $u : \mathbb{R}\times S^1 \to X$ vérifiant :

(i) u est solution de l'équation de Floer,

(ii) u converge en $\pm\infty$ vers l'orbite $\gamma_\pm$, c'est-à-dire, $\lim\limits_{s\to\pm\infty} u(s+it) = \gamma_\pm(t)$.

L'espace de modules qui nous intéresse est l'espace $\mathcal{M}^{pr}(\gamma_+;\gamma_-)$ quotienté par l'action de la translation le long du facteur $\mathbb{R}$. On note cet espace $\mathcal{M}(\gamma_+,\gamma_-)$.

Théorème 3.1 (Théorème 9.2.1 de [AD10])**.**

Si J_t est générique et $\gamma_+ \neq \gamma_-$ sont non dégénérées, l'espace $\mathcal{M}(\gamma_+;\gamma_-)$ est une variété de dimension $CZ(\gamma_+) - CZ(\gamma_-) - 1$. Le bord de codimension 1 de sa compactification de Floer notée $\overline{\mathcal{M}}(\gamma_+,\gamma_-)$ est égal à :

$$\partial_1\ \overline{\mathcal{M}}(\gamma_+,\gamma_-) = \bigcup_{\substack{\gamma \text{ orbite de } H \\ CZ(\gamma_-)+1\leqslant CZ(\gamma)\leqslant CZ(\gamma_+)-1}} \mathcal{M}(\gamma_+;\gamma)\times\mathcal{M}(\gamma;\gamma_-).$$

Disque avec 2 points marqués

Comme précédemment, on choisit de travailler sur $\mathbb{R} \times [0;1]$ plutôt que sur l'espace de pré-modules des disques avec 2 points marqués. Cette approche est plus classique dans la littérature et équivalente.

Prenons L_0 et L_1 deux lagrangiennes de X (on autorise $L_0 = L_1$), $H : [0;1] \times X \to \mathbb{R}$ un hamiltonien et $(J_t)_{t\in\ [0;1]}$ un segment de structures presque complexes. On définit l'équation de Floer pour $u : \mathbb{R} \times [0;1] \to X$ par

$$(du - X_{H_t} \otimes dt)^{0,1} = 0 \Longleftrightarrow \partial_s u + J_t(\partial_t u - X_{H_t}(u)) = 0.$$

Soient c_+ et c_- deux cordes hamiltoniennes non dégénérées allant de L_0 à L_1, on définit $\mathcal{M}^{pr}(c_+; c_-)$ comme l'ensemble des $u : \mathbb{R} \times [0;1] \to X$ tels que :

(i) u est solution de l'équation de Floer,

(ii) $u(\mathbb{R} \times \{0\}) \subset L_0$,

(iii) $u(\mathbb{R} \times \{1\}) \subset L_1$,

(iv) u converge en $\pm\infty$ vers $c_\pm$ c'est-à-dire $\lim\limits_{s\to\pm\infty} u(s + it) = c_\pm(t)$.

L'espace de modules des solutions est l'espace $\mathcal{M}^{pr}(c_+; c_-)$ quotienté par l'action des translations le long du facteur $\mathbb{R}$. On note cet espace $\mathcal{M}(c_+; c_-)$

Théorème 3.2 (Chapitre 8 de [Sei08b])**.**
Si J_t est générique et $c_+ \neq c_-$, l'espace $\mathcal{M}(c_+; c_-)$ est une variété de dimension $CZ(c_+) - CZ(c_-) - 1$. Le bord de codimension 1 de sa compactification de Floer notée $\overline{\mathcal{M}}(c_+; c_-)$ est égal à :

$$\partial_1 \overline{\mathcal{M}}(c_+, c_-) = \bigcup_{\substack{c \text{ corde reliant } L_0 \text{ à } L_1 \\ CZ(c_-)+1 \leqslant CZ(c) \leqslant CZ(c_+)-1}} \mathcal{M}(c_+; c) \times \mathcal{M}(c; c_-).$$

3.2.2 Disques épointés

Une pointe positive et un nombre arbitraire de pointes négatives

On travaille sur l'espace de modules $\mathcal{M}(D_{1;k})$, représenté dans les figures 3, 4 et 12, des disques avec une pointe positive et k pointes négatives sur le bord où $k \geqslant 2$. Suivant la section 2.6, on choisit :

1. la même lagrangienne L pour chacune des $k + 1$ composantes connexes de ∂D,
2. des cordes hamiltoniennes $c^+, b_1, \ldots, b_k$ de H reliant L pour chacune des $k+1$ pointes sur le bord,
3. un choix compatible de 1-forme β tel que $\beta = dt$ près des pointes et $d\beta \leqslant 0$

On note $\mathcal{M}(c^+; b_1, \ldots, b_k)$, représenté dans la figure 12, l'ensemble des couples (D, u) où $D \in \mathcal{M}(D_{1;k})$, $u : (D, \partial D) \to (X, L)$ solutions de l'équation de Floer : $(du - X_H \otimes \beta)^{0,1} = 0$ et convergeant près des pointes vers les cordes choisies. On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.3 (Chapitre 9 de [Sei08b])**.**
On peut munir $\mathcal{M}(c^+; b_1, \ldots, b_k)$ d'une structure de variété de dimension

$$\begin{aligned} dim\ \mathcal{M}(c^+; b_1, \ldots, b_k) &= CZ(c^+) - \sum_{i=1}^{k} CZ(b_i) + (k-2) \\ &= (CZ(c^+) - 1) - \sum_{i=1}^{k} (CZ(b_i) - 1) - 1. \end{aligned}$$

Quand cette variété est de dimension 1*, alors le bord de la compactification de Gromov-Floer de cet espace de modules est décrit de la manière suivante :*

$$\partial \overline{\mathcal{M}}(c^+; \boldsymbol{b}) = \bigcup_{\substack{i<j \\ b\ corde}} \mathcal{M}(c^+; b_1, \ldots, b_i, b, b_{j+1}, \ldots, b_k) \times \mathcal{M}(b; b_{i+1}, \ldots, b_j) \tag{3.2}$$

$$\cup \bigcup_{c\ corde} \mathcal{M}(c^+; c) \times \mathcal{M}(c; b_1, \ldots, b_k). \tag{3.3}$$

On note de plus que dans l'union ci-dessus, $CZ(b)$ ne peut prendre qu'une seule valeur si on veut que l'ensemble considéré soit non vide. En effet il faut que $CZ(b)$ vérifie :

$$(CZ(b) - 1) - \sum_{r=i+1}^{j} (CZ(b_r) - 1) = 1.$$

Démonstration. D'après la formule (3.1), on sait que la dimension de cet espace de modules vérifie :

$$\dim \mathcal{M}(c^+; b_1, \ldots, b_k) = \dim \mathcal{M}^{pr}(D_{k+1}) - \dim(\mathrm{Aut}(D_{k+1})) + \mathrm{ind}(D_{c;b})$$

où $D_{c;b}$ désigne l'opérateur de Fredholm associé à l'équation de Floer avec conditions asymptotiques c^+ et $b_1, \ldots, b_k$. Le lemme 3.1 assure que

$$\mathrm{ind}(D_{c;b}) + n - CZ(c^+) + \sum_{i=1}^{k} CZ(b_i) = n$$

et donc que $\mathrm{ind}(D_{c;b}) = CZ(c^+) - \sum_{i=1}^{k} CZ(b_i)$. D'autre part d'après la section 1.2.1, on sait que $\dim \mathcal{M}^{pr}(D_{k+1}) = k+1$ et que $\dim(\mathrm{Aut}(D_{k+1})) = 3$. On retrouve ainsi la formule annoncée pour la dimension de $\mathcal{M}(c^+; b_1, \ldots, b_k)$.

La description du bord découle des formules (2.3) et (2.4) : les cas $j > i+1$ dans (3.2) correspondent à des dégénérescences dues à la compactification de l'espace de modules de

$D_{1,k}$. Les autres éléments du bord ($j = i + 1$ dans (3.2) et (3.3))) sont des dégénérescences de type Floer. □

Une pointe négative et un nombre arbitraire de pointes positives

On considère l'espace de modules $\mathcal{M}(D_{k;1})$ des disques avec une pointe négative et k pointes positives (représenté dans les figures 3, 4 et 12). Suivant la section 2.6, on choisit :

1. la même lagrangienne C pour chacune des $k+1$ composantes connexes de ∂D,
2. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $c_1, \ldots, c_k$ de H reliant C pour chacune des k pointes positives sur le bord,
3. une corde hamiltonienne non dégénérée b de kH reliant C,
4. un choix compatible de 1-forme B vérifiant $dB = 0$ et $B = X_H \otimes dt$ dans des coordonnées cylindriques près des pointes positives et $B = X_{kH} \otimes dt$ près de l'unique pointe négative.

On note $\mathcal{M}(c_1, \ldots, c_k; b)$, représenté dans la figure 12, l'ensemble des couples (D, u) où $D \in \mathcal{M}(D_{1;k})$ et $u : (D, \partial D) \to (X, L)$ vérifie $(du - B)^{0,1} = 0$ et converge près des pointes vers les orbites choisies.

Théorème 3.4. *On peut munir $\mathcal{M}(c_1, \ldots, c_k; b)$ d'une structure de variété de dimension*

$$dim\ \mathcal{M}(c_1, \ldots, c_k; b) = \sum_{i=1}^{k} (CZ(c_i) - n) - (CZ(b) - n) + k - 2.$$

Quand cette variété est de dimension 1*, alors le bord de sa compactification de Gromov-Floer est décrit de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}\partial\overline{\mathcal{M}}(c_1, \ldots, c_k; b) = &\bigcup_{\substack{i<j \\ c\ corde}} \mathcal{M}(c_{i+1}, \ldots, c_j; c) \times \mathcal{M}(c_1, \ldots, c_i, c, c_{j+1}, \ldots, c_k; b) \\ &\cup \bigcup_{b'\ corde} \mathcal{M}(c_1, \ldots, c_k; b') \times \mathcal{M}(b'; b).\end{aligned}$$

Démonstration. Ce théorème est dual au théorème 3.3 et les mêmes techniques de preuve fournissent le résultat. □

À partir de maintenant, les espaces qu'on considère servent à définir des applications. Il faudra que ces applications commutent aux opérations de cobordisme (cf section 3.3) à la fois en entrée et en sortie. On se donnera systématiquement deux hamiltoniens H et K où H jouera le rôle d'entrée et K celui de sortie.

3.2.3 Demi-cylindres négatifs

Par demi-cylindre négatif, on entend les espaces de modules introduits à la section 1.2.2 c'est-à-dire des disques épointés avec une pointe intérieure négative et un nombre arbitraire de pointes positives sur le bord noté D^{1-}_{k+}.

Avec marqueur asymptotique pointant sur la première pointe

Considérons l'espace de modules $\mathcal{M}(\widetilde{D}^{1-}_{k+})$ des disques avec 1 pointe intérieure négative avec marqueur asymptotique et k_- pointes positives sur le bord et tel que le marqueur asymptotique de la pointe intérieure soit aligné avec la première pointe sur le bord, comme représentés dans les figures 5 et 12.

On se donne H, K deux hamiltoniens et $r_1, \dots, r_k$ des entiers plus grands que 1 tels que :

$$(r_1 + \cdots + r_k)H \leqslant K.$$

Suivant la section 2.6, on choisit :

1. la même lagrangienne C pour chacune des $k+1$ composantes connexes de ∂D,
2. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $c_1, \dots, c_k$ de $r_1 H, \dots, r_k H$ reliant C,
3. une orbite hamiltonienne non dégénérée γ de K,
4. un choix de 1-forme à valeurs dans les termes de perturbations hamiltoniennes B tel que $B = X_{r_i H} \otimes dt$ près des pointes positives z_i et $B = X_K \otimes dt$ près de la pointe négative et $dB \leqslant 0$.

On note alors $\widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \dots, c_k; \gamma)$, représenté dans la figure 12, l'espace de modules des couples (D, u) où $D \in \mathcal{M}(\widetilde{D}^{1-}_{k+})$ et $u : (D, \partial D) \to (X, C)$ solution de l'équation de Floer $(du - B)^{0,1} = 0$ et qui converge près des pointes vers les cordes et orbites choisies. Un élément de $\widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \dots, c_k; \gamma)$ est représenté dans la figure 12 où on a dessiné en pointillé l'orbite γ située à l'infini. On a le théorème suivant :

Théorème 3.5 (section 5.3 de [Abo10])**.**
On peut munir $\widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \dots, c_k; \gamma)$ d'une structure de variété de dimension

$$dim\ \widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \dots, c_k; \gamma) = \sum_{i=1}^{k} (CZ(c_i) - n) + k - 1 - CZ(\gamma)$$

De plus quand cette variété est de dimension 1*, alors le bord de sa compactification de*

Gromov-Floer (qu'on note encore $\widetilde{\mathcal{M}}$) est décrit de la manière suivante :

$$\partial\widetilde{\mathcal{M}}(\boldsymbol{c};\gamma) = \bigcup_{\substack{\gamma' \text{ orbite} \\ CZ(\gamma')=CZ(\gamma)-1}} \widetilde{\mathcal{M}}(c_1,\dots,c_k;\gamma') \times \mathcal{M}(\gamma',\gamma) \tag{3.4}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{0<i<j \\ c \text{ corde}}} \mathcal{M}(c_{i+1},\dots,c_j;c) \times \widetilde{\mathcal{M}}(c_1,\dots,c_i,c,c_{j+1},\dots,c_k;\gamma) \tag{3.5}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n \\ c \text{ corde}}} \mathcal{M}(c_{j+1},\dots,c_n,c_1,\dots,c_i;c) \times \widetilde{\mathcal{M}}(c,c_{i+1},\dots,c_j;\gamma) \tag{3.6}$$

Démonstration. La formule de la dimension découle des méthodes décrites dans la section 3.1. On trouve en effet que l'opérateur de Fredholm associé à l'équation a pour indice :

$$\operatorname{ind}(D_{\mathbf{c};\gamma}) = \sum_{i=1}^{k}(CZ(c_i)-n) - CZ(\gamma)$$

et la section 1.2.2 assure que les automorphismes sont de dimension 3 et que l'espace de prémodule est de dimension $k+2$.

Dans la description du bord, les dégénérescences de type Floer correspondent aux cas suivants :

(a) la ligne (3.4),

(b) les cas $j = i+1$ dans (3.5),

(c) le cas $j = n$ et $i = 1$ dans (3.6).

Le reste des dégénérescences vient de la compactification de Deligne-Mumford de l'espace $\widetilde{D}^1_n$ et on se réfère à la formule (1.2). □

3.2.4 Demi-cylindres positifs

Avec marqueur asymptotique aligné avec une pointe sur le bord

On travaille sur l'espace de modules $\mathcal{M}(\widetilde{D}^{1+}_{k-})$ des demi-cylindres positifs avec conditions d'alignement et k pointes négatives sur le bord (voir section 1.2.2). On se donne deux hamiltoniens H et K tels que $H \leqslant K$.

Suivant la section 2.6, on choisit :

1. la même lagrangienne L pour chacune des $k+1$ composantes connexes de ∂D,
2. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $b_1,\dots,b_k$ de K reliant L,
3. une orbite hamiltonienne non dégénérée γ de H,
4. un choix de 1-forme à valeurs dans les termes de perturbations hamiltoniennes B tel que $B = X_H \otimes dt$ près de la pointe positive et $B = X_K \otimes dt$ près des pointes négatives et $dB \leqslant 0$.

On note alors $\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; b_1, \ldots, b_k)$ l'espace de modules des couples (D, u) où $D \in \mathcal{M}(\widetilde{D}^{1+}_{k-})$ et $u : (D, \partial D) \to (X, L)$ solution de l'équation de Floer $(du - B)^{0,1} = 0$ et qui converge près des pointes vers les cordes et orbites choisies. On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.6. *On peut munir $\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; b_1, \ldots, b_k)$ d'une structure de variété de dimension*

$$dim\ \widetilde{\mathcal{M}}(\gamma_1; b_1, \ldots, b_k) = CZ(\gamma) - \left(\sum_{i=1}^{k} (CZ(b_i) - 1) + 1 \right).$$

De plus quand cette variété est de dimension 1, alors le bord de sa compactification de Gromov-Floer est décrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \partial \widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; b_1, \ldots, b_k) = & \bigcup_{\substack{\gamma' \text{ orbite} \\ CZ(\gamma') = CZ(\gamma) - 1}} \mathcal{M}(\gamma; \gamma') \times \widetilde{\mathcal{M}}(\gamma'; b_1, \ldots, b_k) \\ & \cup \bigcup_{\substack{0 < i < j \leqslant k \\ b \text{ corde}}} \widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; b_1, \ldots, b_i, b, b_{j+1}, \ldots, b_k) \times \mathcal{M}(b; b_{i+1}, \ldots, b_j) \\ & \cup \bigcup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \\ b \text{ corde}}} \widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; b, b_{i+1}, \ldots, b_j) \times \mathcal{M}(b; b_{j+1}, \ldots, b_k, b_1, \ldots, b_i). \end{aligned}$$

Démonstration. Ce théorème est dual au théorème 3.5 et la même preuve s'applique. □

Avec marqueur asymptotique pointant entre la dernière et la première pointe

On travaille sur l'espace de modules $\mathcal{M}(D^{1+}_{k-})$ des disques avec une pointe intérieure positive et k pointes négatives sur le bord et tel que le marqueur asymptotique de la pointe intérieure pointe sur l'intervalle $]z_k; z_1[$ du cercle unité.

On se donne deux hamiltoniens H et K tels que $H \leqslant K$. Suivant la section 2.6, on choisit :

1. la même lagrangienne L pour chacune des $k+1$ composantes connexes de ∂D,
2. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $b_1, \ldots, b_k$ de K reliant L,
3. une orbite hamiltonienne non dégénérée γ de H,
4. un choix de 1-forme à valeurs dans les termes de perturbation hamiltoniennes B tel que $B = X_H \otimes dt$ près de la pointe positive et $B = X_K \otimes dt$ près des pointes négatives et $dB \leqslant 0$.

On note alors $\mathcal{M}(\gamma; b_1, \ldots, b_k)$, représenté dans la figure 12, l'espace de modules des couples (D, u) où $D \in \mathcal{M}(D^{1+}_{k-})$ et $u : (D, \partial D) \to (X, L)$ solution de l'équation de Floer $(du - B)^{0,1} = 0$ et qui converge près des pointes vers les cordes et orbites choisies. On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.7. *On peut munir $\mathcal{M}(\gamma; b_1, \ldots, b_k)$ d'une structure de variété de dimension*

$$dim\ \mathcal{M}(\gamma; b_1, \ldots, b_k) = CZ(\gamma) - \sum_{i=1}^{k}(CZ(b_i) - 1).$$

De plus quand cette variété est de dimension 1*, alors le bord de sa compactification de Gromov-Floer est décrit de la manière suivante :*

$$\partial\mathcal{M}(\gamma; \boldsymbol{b}) = \bigcup_{\substack{\gamma' \text{ orbite} \\ CZ(g')=CZ(g)-1}} \mathcal{M}(\gamma; \gamma') \times \mathcal{M}(\gamma'; b_1, \ldots, b_k) \tag{3.7}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant k \\ b \text{ corde}}} \mathcal{M}(\gamma; b_1, \ldots, b_i, b, b_{j+1}, \ldots, b_k) \times \mathcal{M}(b; b_{i+1}, \ldots, b_j) \tag{3.8}$$

$$\cup\ \widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; b_1, \ldots, b_k) \cup \widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; b_k, b_1, \ldots, b_{k-1}). \tag{3.9}$$

Démonstration. L'indice de l'opérateur de Fredholm associé à l'équation de Floer avec ces conditions asymptotiques est égal à :

$$\mathrm{ind}(D_{\gamma;\mathbf{b}}) = CZ(\gamma) - \sum_{i=1}^{k} CZ(b_i).$$

L'espace de pré-module est de dimension $k + 3$ et les automorphismes sont de dimension 3. On retrouve donc la formule annoncée.

Dans la formule pour le bord, les dégénérescences de type Floer correspondent aux cas suivants :

(a) ligne (3.7),

(b) cas $j = i + 1$ dans (3.8).

Le reste du bord correspond à des dégénérescences dues à la compactification de Deligne-Mumford et on retrouve la formule (1.3). □

3.2.5 Anneaux pincés épointés

A partir de maintenant C et L désignent deux lagrangiennes telles que, pour tout hamiltonien considéré, il existe une unique corde hamiltonienne allant de L à C qu'on note q. On travaille sur l'espace de modules $\mathcal{M}(D_{k;2;l})$ des anneaux pincés avec k pointes positives, l pointes négatives et 2 pointes qui forment un nœud sachant que les deux nœuds marquent la séparation entre pointes positives et négatives (cf figure 7). Les pointes positives sont ordonnées dans le sens indirect et les pointes négatives sont ordonnées dans le sens direct.

On se donne $r_1, \dots, r_k$ des entiers plus grands que 1 et deux hamiltoniens H et K tels que :

$$(r_1 + \cdots + r_k)H \leqslant K.$$

Suivant la section 2.6, on choisit :

1. la lagrangienne C pour chacune des $k+1$ composantes connexes de ∂D touchant au moins une pointe positive,
2. la lagrangienne L pour chacune des $l+1$ composantes connexes du bord de ∂D touchant au moins une pointe négative,
3. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $c_1, \dots, c_k$ de $r_1 H, \dots, r_k H$ reliant C,
4. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $b_1, \dots, b_l$ de K reliant L,
5. la corde hamiltonienne q de H allant de L à C pour le noeud,
6. un choix de 1-forme à valeurs dans les termes de perturbations hamiltoniennes B tel que $B = X_{r_i H} \otimes dt$ près des pointes positives z_i et $B = X_K \otimes dt$ près des pointes négatives, $B = X_H \otimes dt$ près du noeud et $dB \leqslant 0$.

On note alors $\mathcal{M}(c_1, \dots, c_k; q; b_1, \dots, b_l)$, représenté dans la figure 13, l'espace de modules des couples (D, u) où $D \in \mathcal{M}(D_{k;2;l})$ et $u : (D, \partial D) \to (X, L \cup C)$ solution de l'équation de Floer $(du - B)^{0,1} = 0$ et qui converge près des pointes vers les cordes choisies. On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.8. *On peut munir $\mathcal{M}(c_1, \dots, c_k; q; b_1, \dots, b_l)$ d'une structure de variété de dimension*

$$\begin{aligned} dim\ \mathcal{M}(c_1, \dots, c_k; q; b_1, \dots, bl) &= \sum_{i=1}^{k} (CZ(c_i) - n) - \sum_{i=1}^{l} CZ(b_i) + k + l - 1 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} (CZ(c_i) - n) + (k-1) \right) - \left(\sum_{i=1}^{l} (CZ(b_i) - 1) \right). \end{aligned}$$

Quand cette variété est de dimension 1, le bord de sa compactification de Gromov-Floer peut être décrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \partial \overline{\mathcal{M}}(c_1, \dots, c_k; q; b_1, \dots, b_l) = & \\ & \bigcup_{\substack{c \text{ corde reliant } C \\ 0 \leqslant i < j \leqslant k}} \mathcal{M}(c_{i+1}, \dots, c_j; c) \times \mathcal{M}(c_1, \dots, c_i, c, c_{j+1}, \dots, c_{k_+}; q; b_1, \dots, b_l) \\ & \cup \bigcup_{\substack{b \text{ corde reliant } L \\ 0 \leqslant i < j \leqslant l}} \mathcal{M}(c_1, \dots, c_k; q; b_1, \dots, b_i, b, b_{j+1}, \dots, b_l) \times \mathcal{M}(b; b_{i+1}, \dots, b_j) \\ & \cup \bigcup_{\substack{0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 \leqslant j \leqslant l \\ 0 < i+j < k+l}} \mathcal{M}(c_1, \dots c_i; q; b_1, \dots, b_j) \times \mathcal{M}(c_{i+1}, \dots c_k; q; b_{j+1}, \dots, b_l). \end{aligned}$$

3.2.6 Anneaux épointés

Avec alignement de deux pointes

On travaille sur l'espace de modules d'anneaux $\mathcal{M}(\widetilde{A}_l^k)$ avec k pointes positives sur le bord intérieur, l pointes négatives sur le bord extérieur et tels que les premières pointes de chaque bord soient alignées (voir figure 9)

On se donne $r_1, \ldots, r_k$ des entiers plus grands que 1 et deux hamiltoniens H et K tels que :

$$(r_1 + \cdots + r_k)H \leqslant K.$$

Suivant la section 2.6, on choisit :

1. la même lagrangienne C pour chacune des $k+1$ composantes connexes du bord intérieur de ∂A,
2. la même lagrangienne L pour chacune des $l+1$ composantes connexes du bord extérieur de ∂A,
3. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $c_1, \ldots, c_k$ de $r_1 H, \ldots, r_k H$ reliant C,
4. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $b_1, \ldots, b_l$ de K reliant L,
5. un choix de 1-forme à valeurs dans les termes de perturbations hamiltoniennes B tel que $B = X_{r_i H} \otimes dt$ près de la pointes positive z_i, $B = X_K \otimes dt$ près des pointes négatives et $dB \leqslant 0$.

On note alors $\widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \ldots, c_k; b_1, \ldots, b_l)$, représenté dans la figure 13, l'espace de modules des couples (A, u) où $A \in \mathcal{M}(\widetilde{A}_l^k)$ et $u : (A, \partial A) \to (X, C \cup L)$ solution de l'équation de Floer $(du - B)^{0,1} = 0$ et qui converge près des pointes vers les cordes choisies. On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.9. *On peut munir $\widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \ldots, c_k; b_1, \ldots, b_l)$ d'une structure de variété de dimension*

$$dim\ \widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \ldots, c_k; b_1, \ldots, b_l) = \left(\sum_{i=1}^{k} (CZ(c_i) - n) + k - 1 \right) - \left(\sum_{i=1}^{l} (CZ(b_i) - 1) \right).$$

De plus, quand cette variété est de dimension 1, alors le bord de sa compactification de Gromov-Floer est décrit de la manière suivante :

$$\partial \widetilde{\mathcal{M}}(\boldsymbol{c}; \boldsymbol{b}) = \bigcup_{\substack{c \text{ corde reliant } C \\ 1 \leqslant i < j \leqslant k+1}} \mathcal{M}(c_{i+1}, \ldots, c_j; c) \times \widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \ldots, c_i, c, c_{j+1}, \ldots, c_k; \boldsymbol{b}) \tag{3.10}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{c \text{ corde reliant } C \\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k}} \mathcal{M}(c_{j+1}, \ldots, c_k, c_1, \ldots, c_i; c) \times \widetilde{\mathcal{M}}(c, c_{i+1}, \ldots c_j; \boldsymbol{b}) \tag{3.11}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{b \text{ corde reliant } L \\ 1\leqslant i<j\leqslant l}} \widetilde{\mathcal{M}}(\boldsymbol{c}; b_1, \ldots, b_i, b, b_{j+1}, \ldots, b_l) \times \mathcal{M}(b; b_{i+1}, \ldots, b_j) \tag{3.12}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{b \text{ corde reliant } L \\ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant l}} \widetilde{\mathcal{M}}(\boldsymbol{c}; b, b_{i+1}, \ldots, b_j) \times \mathcal{M}(b; b_{j+1}, \ldots, b_l, b_1, \ldots, b_i) \tag{3.13}$$

$$\cup \bigcup_{\gamma \text{ orbite}} \widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \ldots, c_k; \gamma) \times \widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; b_1, \ldots, b_l) \tag{3.14}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{k\geqslant j\geqslant i\geqslant 1 \\ l\geqslant t\geqslant r\geqslant 1}} \mathcal{M}(c_{j+1}, \ldots, c_k, c_1, \ldots, c_i; q; b_{r+1}, \ldots, b_t) \times \mathcal{M}(c_{i+1}, \ldots, c_j; q; b_{t+1}, \ldots, b_l, b_1, \ldots, b_r) \tag{3.15}$$

où q est l'unique corde hamiltonienne reliant L à C.

Démonstration. On trouve la dimension en appliquant le lemme 3.1. En effet des calculs directs assurent que l'indice de l'opérateur de Fredholm associé à l'équation vérifie

$$ind = \sum_{i=1}^{k} (CZ(c_i) - n) - \sum_{i=1}^{l} CZ(b_i),$$

que l'espace de pré-module est de dimension $k + l - 1 + 2$ et que les automorphismes sont de dimension 2.

On va expliciter d'où viennent les différentes dégénérescences. Pour plus de détails, on pourra se référer à la preuve du lemme 1.7.

(a) Dans (3.10), les cas $j = i + 1$ correspondent à des dégénérescences de type Floer et les cas $j > i + 1$ apparaissent dans la compactification de Deligne-Mumford quand une bulle ne contenant pas c_1 se forme sur le bord intérieur.

(b) Dans (3.11), le cas $j = n$ et $i = 1$ correspond à la dégénérescence de type Floer près de c_1. Les autres cas correspondent à la formation d'une bulle contenant c_1 sur le bord intérieur.

(c) Les cas (3.12) et (3.13) sont similaires aux deux précédents si on considère des bulles sur le bord extérieur et non intérieur.

(d) Le cas (3.14) arrive quand le module de l'anneau tend vers l'infini et que l'anneau devient infiniment grand. Il se scinde alors en demi-cylindres.

(e) Le dernier cas (3.15) arrive quand le module de l'anneau tend vers 0 et on renvoie à la preuve du lemme 1.7 pour expliquer pourquoi on voit alors deux anneaux pincés, l'un contenant c_1 et l'autre b_1. □

Sans alignement de pointes

On travaille sur l'espace de modules d'anneaux $\mathcal{M}(A_l^k)$ avec k pointes positives sur le bord intérieur et l pointes négatives sur le bord extérieur. On demande aussi que la

génératrice passant par la première pointe positive intersecte l'intervalle entre la dernière et la première pointe négative du cercle intérieur (cf figure 9).

On se donne $r_1, \dots, r_k$ des entiers plus grand que 1 et des hamiltoniens H et K tels que :

$$(r_1 + \cdots + r_k)H \leqslant K.$$

Suivant la section 2.6, on choisit :

1. la même lagrangienne C pour chacune des $k+1$ composantes connexes du bord intérieur de ∂A,
2. la même lagrangienne L pour chacune des $l+1$ composantes connexes du bord extérieur de ∂A,
3. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $c_1, \dots, c_k$ de $r_i H$ reliant C,
4. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $b_1, \dots, b_l$ de K reliant L,
5. un choix de 1-forme à valeurs dans les termes de perturbations hamiltoniennes B tel que $B = X_{r_i H} \otimes dt$ près des pointes positives z_i et $B = X_K \otimes dt$ près des pointes négatives et $dB \leqslant 0$.

On note alors $\mathcal{M}(c_1, \dots, c_k; b_1, \dots, b_l)$, représenté dans la figure 13, l'espace de modules des couples (A, u) où $A \in \mathcal{M}(A_l^k)$ et $u : (A, \partial A) \to (X, C \cup L)$ solution de l'équation de Floer $(du - B)^{0,1} = 0$ et qui converge près des pointes vers les cordes choisies. On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.10. *On peut munir $\mathcal{M}(c_1, \dots, c_k; b_1, \dots, b_l)$ d'une structure de variété de dimension :*

$$dim\ \mathcal{M}(c_1, \dots, c_k; b_1, \dots, b_l) = \left(\sum_{i=1}^{k} (CZ(c_i) - n) + (k-1) \right) - \left(\sum_{i=1}^{l} (CZ(b_i) - 1) \right) + 1.$$

De plus quand cette variété est de dimension 1, le bord de sa compactification de Gromov-Floer peut être décrit de la manière suivante (cf figure 14) :

$$\begin{aligned}
\partial \mathcal{M}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = & \bigcup_{\substack{c \text{ corde reliant } C \\ 1 \leqslant i < j \leqslant k}} \mathcal{M}(c_{i+1}, \dots, c_j; c) \times \mathcal{M}(c_1, \dots, c_i, c, c_{j+1}, \dots, c_k; b_1, \dots, b_l) \\
& \cup \bigcup_{\substack{c \text{ corde reliant } C \\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k}} \mathcal{M}(c_{j+1}, \dots, c_k, c_1, \dots, c_i; c) \times \mathcal{M}(c; c_{i+1}, \dots, c_j; b) \\
& \cup \bigcup_{\substack{b \text{ corde reliant } L \\ 0 \leqslant i < j \leqslant l}} \mathcal{M}(c_1, \dots, c_k; b_1, \dots, b_i, b, b_{j+1}, \dots, b_l) \times \mathcal{M}(b; b_{i+1}, \dots, b_j) \\
& \cup \bigcup_{\gamma \text{ orbite}} \widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \dots, c_k; \gamma) \times \mathcal{M}(\gamma; b_1, \dots, b_l)
\end{aligned}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{q\in\hat{C}\cap\hat{L}\\ i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}} \mathcal{M}(c_{1+i},\dots,c_{k+i};q;b_1,\dots,b_l)$$
$$\cup\ \widetilde{\mathcal{M}}(c_1,\dots,c_k;b_1,\dots,b_l)\cup\widetilde{\mathcal{M}}(c_1,\dots,c_k;b_l,b_1,\dots,b_{l-1})$$

où q est l'unique corde hamiltonienne reliant L à C.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 3.9 et les espaces de modules apparaissant dans le bord sont illustrés dans la figure 14. □

3.3 Espaces de modules de cobordismes entre hamiltoniens

On devra souvent considérer des limites et colimites indicées par des hamiltoniens. Il s'agit donc cette fois de décrire des espaces de modules qui permettent d'interpoler entre différents hamiltoniens

Dans cette section, on ne va pas traiter exactement de la même manière les cas où on a considéré un seul hamiltonien H pour définir les espaces de module dans la section 3.2 et ceux où on a utilisé deux hamiltoniens H et K. La raison est simple : dans les premiers cas, les espaces de modules serviront à définir des structures de complexes de chaînes alors que dans les deuxièmes cas, ils serviront à construire des morphismes entre ces complexes de chaînes (cf chapitre 4). Or quand on définit des applications, il faut montrer des compatibilités avec les applications de continuation des "deux côtés". C'est pour cela qu'on parlera de cobordismes complets ou de cobordismes partiels.

3.3.1 Cobordismes complets

Dans un premier temps, on va présenter l'idée générale pour traiter les cas des disques épointés, sphères épointées et demi-cylindres. On notera S une surface épointée qui peut donc être soit un disque épointé, soit une sphère épointée soit un demi-cylindre.

On se donne deux hamiltoniens $H \leqslant H'$ et on veut que H soit l'hamiltonien associé à toutes les pointes positives et H' celui associé aux pointes négatives. On note respectivement B_H et $B_{H'}$ les formes qui auraient été celles utilisées dans la section 3.2 en considérant respectivement le hamiltonien H ou le hamiltonien H'.

On construit alors une famille de 1-formes indicée par $\mathbb{R}$ qu'on note $(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ qui vérifie :

1. pour tout $t\in\mathbb{R}$, $B_t = X_H\otimes dt$ près des pointes positives,
2. pour tout $t\in\mathbb{R}$, $B_t = X_{H'}\otimes dt$ près des pointes négatives,
3. pour tout $z\in S$, si t est suffisamment proche de $+\infty$, $B_t(z) = B_{H'}(z)$,
4. pour tout $z\in S$, si t est suffisamment proche de $-\infty$, $B_t(z) = B_H(z)$.

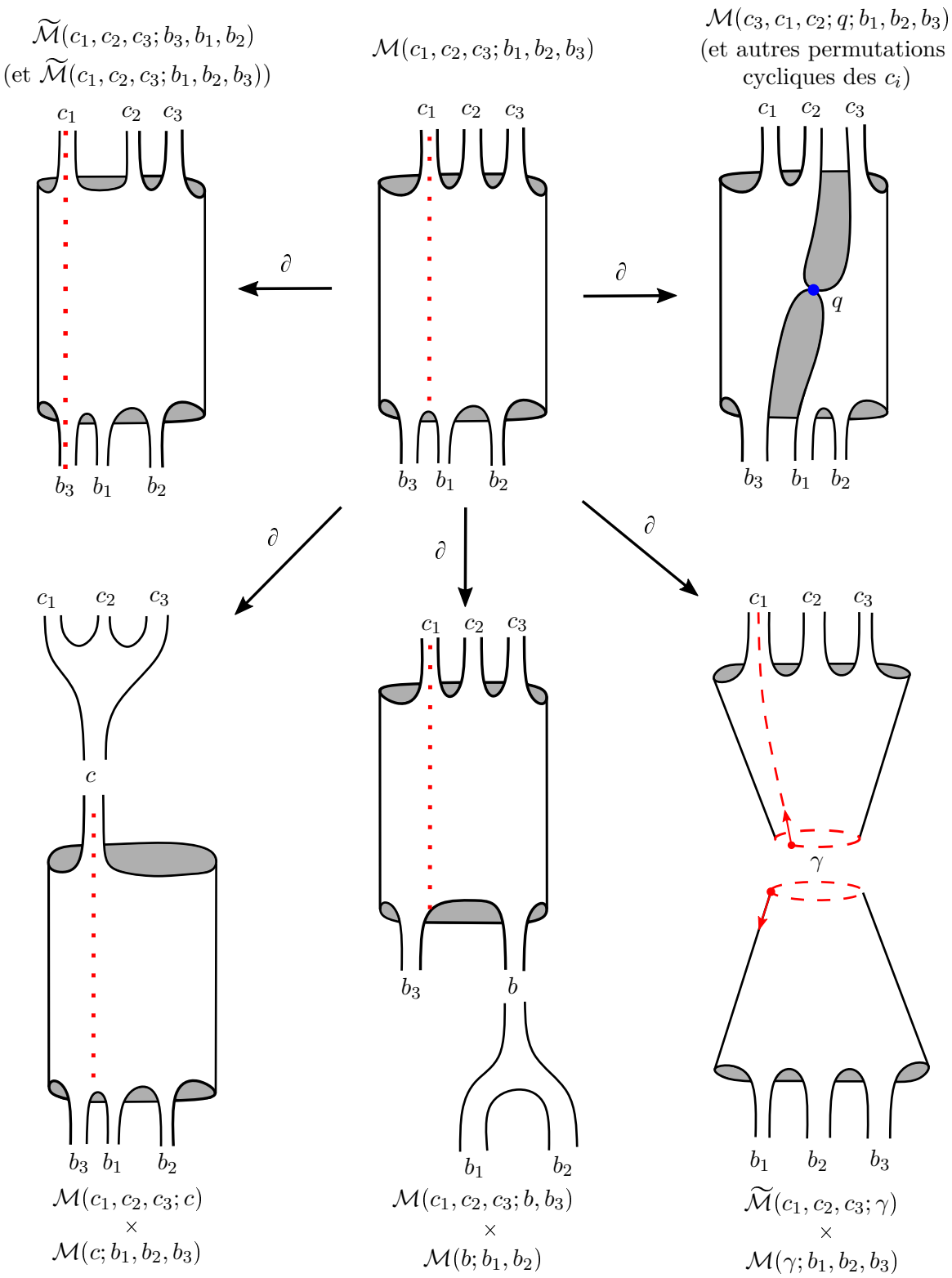


FIGURE 14 – Description du bord de codimension 1 de l'espace de modules d'anneaux avec conditions asymptotiqes.

On dira qu'une telle famille B_t est *admissible pour l'interpolation* entre H et H'.

On note alors $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ l'espace de modules $\cup_{t\in\mathbb{R}}\mathcal{M}(B_t)$ où $\mathcal{M}(B_t)$ désigne l'espace de modules considéré avec l'équation associée à B_t : $(du - B_t)^{0,1} = 0$. L'espace $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ sera toujours de dimension égale à la dimension de $\mathcal{M}$ plus un. Le but dans les sections suivantes sera juste de décrire le bord de ces espaces pour un choix particulier de familles B_t. La construction de familles B_t admissibles est technique et longue, on ne le fera pas et on se reportera à [EO17] pour un cas détaillé d'une telle construction (section 2.6 de [EO17]). Donnons maintenant quelques exemples.

Disques épointés

On se donne $H \leqslant H'$. Sur l'espace de modules $\mathcal{M}(D_{1;k})$ des disques avec une pointe positive et k pointes négatives, on associe à la pointe positive l'hamiltonien H et aux pointes négatives l'hamiltonien H'.

On se donne une famille de B_t admissible pour l'interpolation entre H et H', des cordes $b_1, \dots, b_k$ de H' et une corde c de H. Alors $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(c; b)$ désigne l'ensemble des triplets (t, D, u) où (D, u) est une solution de l'équation de Floer pour B_t c'est-à-dire

$$(du - B_t)^{0,1} = 0$$

et où u converge près des pointes vers les cordes choisies.

Théorème 3.11 (Théorème 4.6 de [EO17])**.**
Il existe une famille (B_t) de 1-formes admissible pour l'interpolation telle que

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(c; b_1, \dots, b_k) = &\bigcup_{\substack{b\in FC(H')\\ i,j}} \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(c; b_1, \dots b_i, b, b_{j+1} \dots, b_k) \times \mathcal{M}(b; b_{i+1}, \dots, b_j; H') \\
\cup &\bigcup_{c'\in FC(H)} \mathcal{M}(c; c'; H) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(c'; b_1, \dots, b_k) \\
\cup &\bigcup_{c'\in FC(H')} \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(c; c') \times \mathcal{M}(c'; b_1, \dots, b_k; H') \\
\cup &\bigcup_{\substack{0=i_0<\dots<i_r=k\\ d_j\in FC(H)}} \mathcal{M}(c; d_1, \dots, d_r; H) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(d_1; b_1, \dots, b_{i_1}) \times \dots \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(d_r; b_{i_{r-1}+1}, \dots, b_k).
\end{aligned}$$

On pourra voir la figure 15 pour une illustration des dégénérescences apparaissant sur la dernière et l'avant-dernière ligne.

La situation pour les disques avec pointes positives et une unique pointe négative est similaire et il suffit d'inverser les rôles de b et c dans l'exemple précédent pour obtenir le bord.

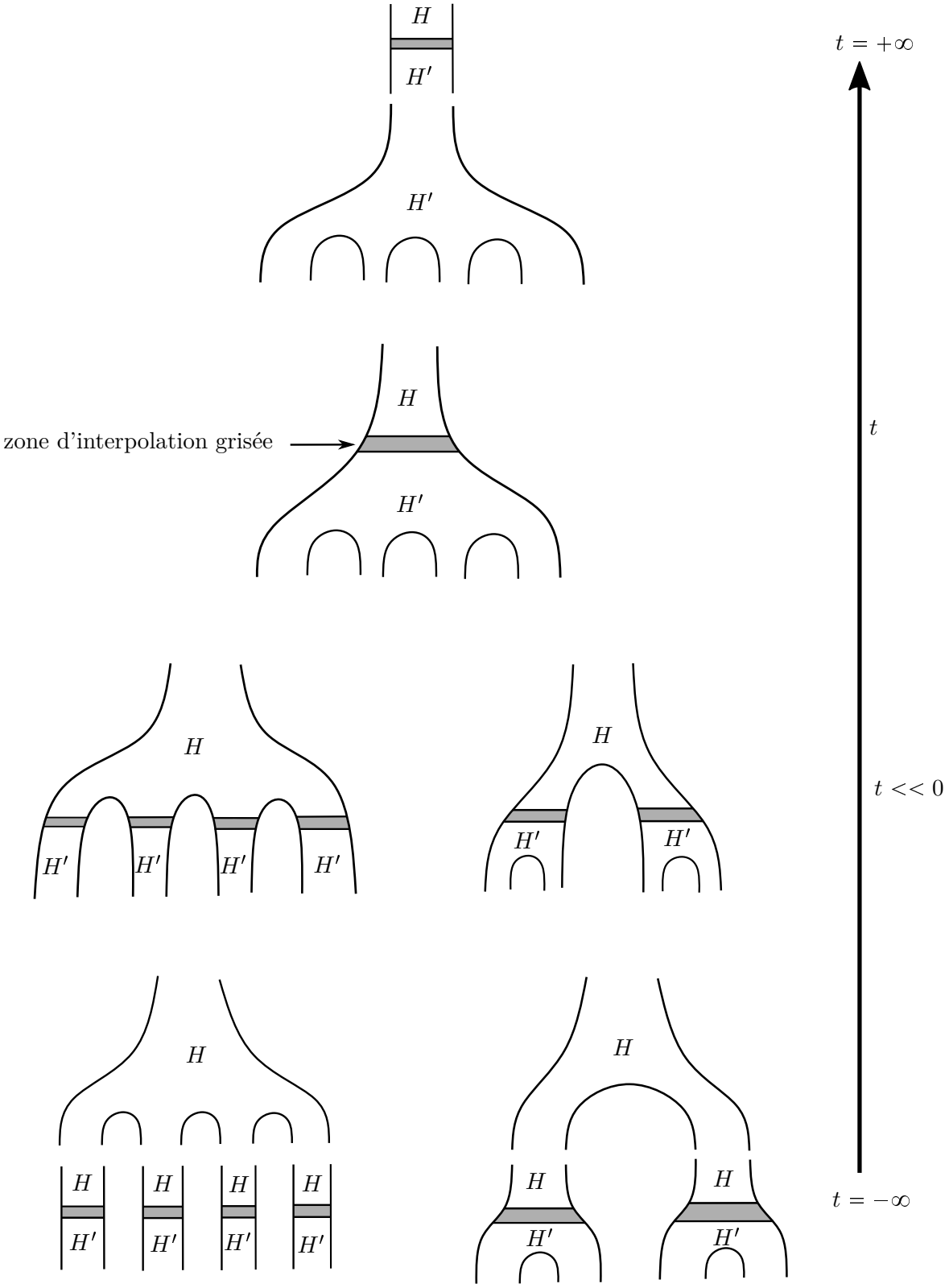


FIGURE 15 – En dehors des zones grisées, la forme B_t est égale à B_H ou $B_{H'}$. Le paramètre t joue le rôle de hauteur de la zone d'interpolation. Différentes dégénérescences des espaces de modules $\mathcal{M}(B_t; D_{1;4})$ sont illustrées dans cette figure quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Demi-cylindres

On se donne $H' \leqslant H$. Sur l'espace de modules $\mathcal{M}(\widetilde{D}^{1+}_{k-})$, on associe à la pointe positive l'hamiltonien H et aux pointes négatives l'hamiltonien H'.

Théorème 3.12. *Il existe une famille (B_t) de 1-formes admissible pour l'interpolation telle que*

$$\begin{aligned}
\partial\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R}}(\gamma; b_1, \ldots, b_k) = & \bigcup_{\gamma' \in FC(H)} \mathcal{M}(\gamma; \gamma'; H) \times \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R}}(\gamma'; b_1, \ldots, b_k) \\
\cup & \bigcup_{b \in FC(H')} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R}}(\gamma; b_1, \ldots, b_i, b, b_{j+1}, \ldots, b_k) \times \mathcal{M}(b; b_{i+1}, \ldots, b_j; H') \\
\cup & \bigcup_{b \in FC(H')} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{R}}(\gamma; b, b_{i+1}, \ldots, b_j) \times \mathcal{M}(b; b_{j+1}, \ldots, b_n, b_1, \ldots, b_i; H') \\
\cup & \bigcup_{\gamma' \in FC(H')} \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\gamma, \gamma') \times \widetilde{\mathcal{M}}(\gamma'; b_1, \ldots, b_k; H') \\
\cup & \bigcup_{d_i \in FC(H)} \widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; d_1, \ldots, d_r; H) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(d_1; b_{i_r+1}, \ldots, b_k, b_1, \ldots, b_{i_1}) \ldots \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(d_r; b_{i_{r-1}+1}, \ldots, b_{i_r}).
\end{aligned}$$

3.3.2 Cobordismes partiels

On va présenter l'idée générale pour traiter les cas des anneaux pincés et anneaux épointés et on traitera un exemple graphiquement ensuite. Dans la section 3.2, on avait choisi deux hamiltoniens H et K qui vérifiaient une certaine inégalité et H était l'hamiltonien associé aux entrées alors que K était l'hamiltonien associé aux sorties. Supposons qu'on souhaite interpoler l'entrée et donc prendre $H \leqslant H'$ tels que les couples (H, K) et (H', K) vérifient tout deux l'inégalité souhaitée. On se donne des formes $B_{(H,K)}$ et $B_{(H',K)}$ qui auraient été les formes considérées dans la section 3.2 si on avait travaillé avec les couples (H, K) ou (H', K).

On construit alors une famille $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ qui vérifie :

1. $B_0 = B_{(H,K)}$,
2. pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $B_t = X_H \otimes dt$ près des pointes positives,
3. pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $B_t = X_K \otimes dt$ près des pointes négatives,
4. pour tout $z \in \Sigma$, si t est suffisamment grand, alors $B_t(z) = B_{(H',K)}(z)$.

À t fixé, B_t joue un rôle similaire à la forme $B_{(H,K)}$ standard mais quand t tend vers $+\infty$, B_t se rapproche de la forme $B_{(H',K)}$ tout en restant près des pointes égale à $X_H \otimes dt$.

On définit, si on se donne des conditions asymptotiques non dégénérées, l'espace de module :

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}^+} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \mathcal{M}(B_t).$$

On peut définir des espaces $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^-}$ de manière similaire si l'on souhaiter interpoler la sortie K. Traitons maintenant un exemple.

Anneau pincé

Soient C et L deux lagrangiennes avec un unique point d'intersection. On travaille sur $\mathcal{M}(D_{k;2;l})$ et on se donne des hamiltoniens H, H', K et des entiers $r_1, \dots, r_k$ vérifiant :

$$H \leqslant H' \text{ et } (r_1 + \cdots + r_k)H' \leqslant K.$$

On choisit :

1. la lagrangienne C pour chacune des $k+1$ composantes connexes de ∂D touchant au moins une pointe positive,
2. la lagrangienne L pour chacune des $l+1$ composantes connexes du bord de ∂D touchant au moins une pointe négative,
3. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $c_1, \dots, c_k$ de $r_i H$ reliant C,
4. des cordes hamiltoniennes non dégénérées $b_1, \dots, b_l$ de K reliant L.

Théorème 3.13. *Il existe une famille de 1-formes $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ telle que le bord de la variété $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^+}(c_1, \dots, c_k; q; b_1, \dots, b_l)$ soit comme celui illustré dans la figure 16. On peut donner une formule explicite pour le bord :*

$$\partial_1 \mathcal{M}_{\mathbb{R}^+}(c; q; b) = \bigcup_{\substack{k \geqslant j > i \geqslant 0 \\ c \text{ corde de } (r^j_{i+1})H}} \mathcal{M}(c_{i+1}, \dots, c_j; c) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}^+}(c_1, \dots, c_i, c, c_{j+1}, \dots, c_k; q; b) \tag{i}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 \leqslant j \leqslant k \\ 0 < i+j < k+l \\ d_q \text{ corde de } H'}} \mathcal{M}_{\mathbb{R}^+}(c_1, \dots, c_i; q; b_1, \dots, b_j) \times \mathcal{M}(d_1, \dots, d_l; q; b_{j+1}, \dots, b_l)$$

$$\times \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(c_{i+1}, \dots, c_{t_1}; d_1) \times \cdots \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(c_{t_{l-1}+1}, \dots, c_k; d_l) \tag{ii}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 \leqslant j \leqslant k \\ 0 < i+j < k+l}} \mathcal{M}(c_1, \dots, c_i; q; b_1, \dots, b_j) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}^+}(c_{i+1}, \dots, c_k; q; b_{j+1}, \dots, b_l) \tag{iii}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{l \geqslant j > i \geqslant 0 \\ b \text{ corde de } K}} \mathcal{M}_{\mathbb{R}^+}(c; q; b_1, \dots, b_i, b, b_{j+1}, \dots, b_l) \times \mathcal{M}(b; b_{i+1}, \dots, b_j) \tag{iv}$$

$$\cup \mathcal{M}(c; q; b) \tag{v}$$

$$\cup \bigcup_{\substack{1 \leqslant r \leqslant k \\ 0 = i_0 < \cdots < i_r = k \\ d_p \text{ corde de } (r^{i_p}_{i_{p-1}+1})H'}} \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(c_1, \dots, c_{i_1}; d_1) \times \cdots \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(c_{i_{r-1}+1}, \dots, c_k; d_r)$$

$$\times \mathcal{M}(d; q; b; B_{H',K}). \tag{vi}$$

On pourra voir dans la stratégie de preuve les descriptions des différentes dégénérescences (i)-(vi).

Stratégie de preuve. Commentons la figure 16. On travaille sur l'anneau pincé vu comme une bande infinie. Au centre se trouve l'espace $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^+}$, la ligne d'interpolation en rouge se déplace à droite quand $t \to 0$ et à gauche quand $t \to +\infty$. Elle vérifie pour tout t le fait que si on se place très à droite de la bande infinie, on voit la forme $B_{H',K}$ et si on se place très à gauche, on voit la forme $B_{H,K}$. On va maintenant décrire les différentes dégénérescences qui apparaissent en partant de la figure située en haut et en suivant le sens horaire.

(i) La figure du haut décrit les dégénérescences à t fixé qui concernent les cordes de H. Une dégénérescence de type Floer est illustrée sur la figure mais il pourrait se produire aussi des rencontres de pointes du bord supérieur.

(ii) La deuxième figure décrit les dégénérescences à t fixé quand des pointes s'échappent vers la droite de la bande. Il faut alors zoomer près des pointes pour voir l'interpolation entre H et H' se produire : la bande de droite se brise donc en 2 étages : l'un avec la forme $B_{H',K}$, l'autre avec un espace de module d'interpolation entre H et H'.

(iii) La troisième figure décrit les dégénérescences à t fixé quand des pointes s'échappent vers la gauche de la bande. Il n'y alors plus d'interpolation entre H et H' sur la bande de gauche.

(iv) La quatrième figure décrit les dégénérescences à t fixé quand des pointes du bord inférieur de la bande se rencontrent. On pourrait aussi voir des dégénérescences de type Floer.

(v) La cinquième figure décrit le cas $t = 0$.

(vi) La sixième et dernière figure décrit le cas $t = +\infty$. □

Stratégie de preuve pour disques épointés

Même si les résultats présentés dans les théorèmes de cobordisme ne sont pas des résultats classiques et représentent une interprétation personnelle inspirée de la lecture de l'article [EO17], on ne les démontrera pas dans ce manuscrit. On va donner cependant les idées principales derrière ces constructions. Pour simplifier, on va présenter cette stratégie dans le cas de la figure 15.

On pense au paramètre t comme à la "hauteur" de l'interpolation (cf figure 15). Si on choisit une fonction hauteur pour tout élément D d'un espace de module $\varphi : D \to \mathbb{R}$ tel que φ soit égal à $+\infty$ près des pointes positives et à $-\infty$ près des pointes négatives, alors on construit la 1-forme B_t (la forme B_t correspond à la forme B_τ définie en (2.8) dans [EO17] via $]0; 1[\simeq \mathbb{R}$) telle que :

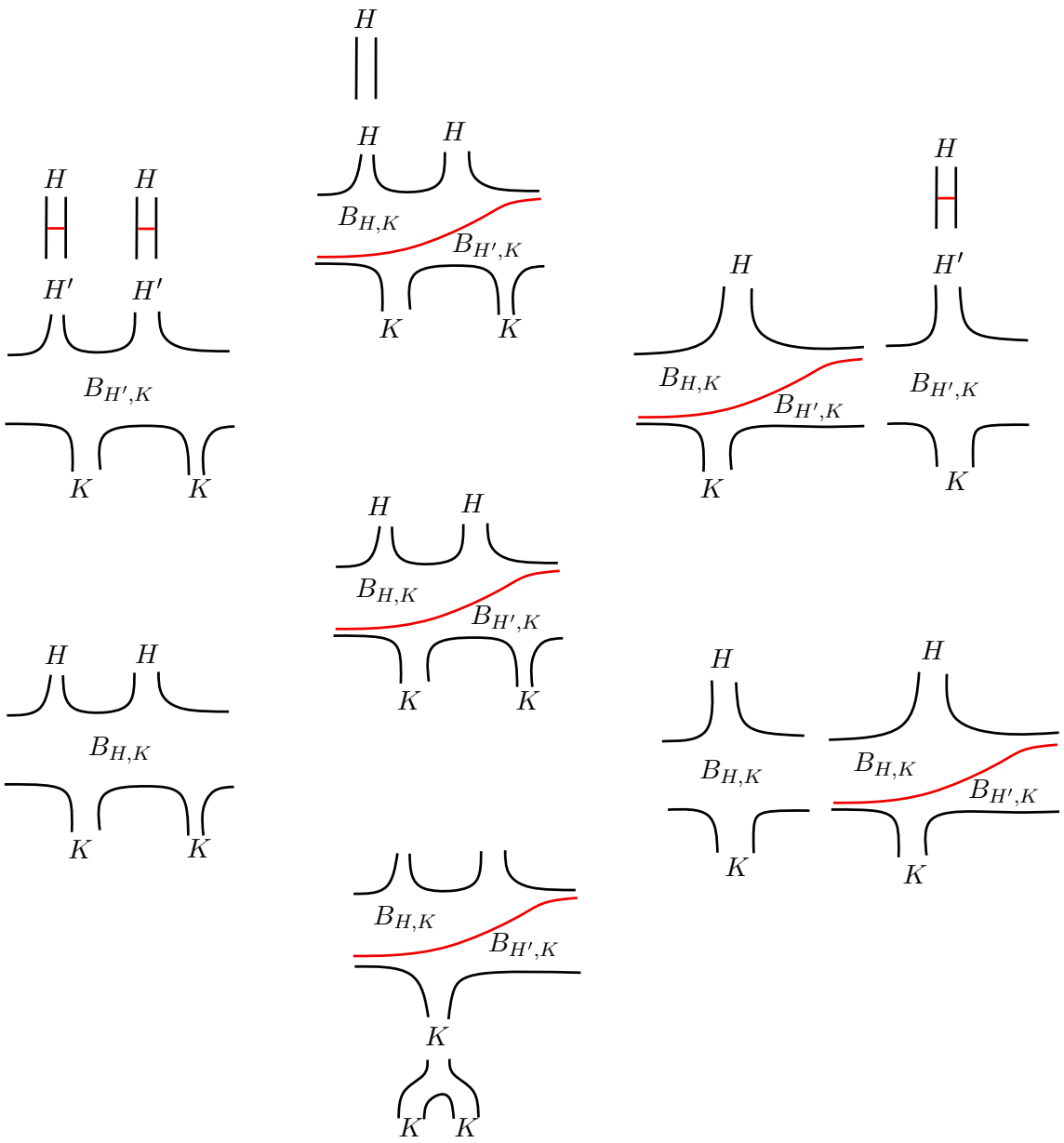


FIGURE 16 – Au centre se trouve l'espace de module $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^+}(c;q;b)$. Autour de cet espace, sont illustrés différents éléments qui peuvent apparaître dans le bord.

1. $B_t(z) = B_H(z)$ si $\varphi(z) > t + \varepsilon$,
2. $B_t(z) = B_{H'}(z)$ si $\varphi(z) < t - \varepsilon$,
3. B_t interpole entre B_H et $B_{H'}$ sur $\varphi^{-1}([t-\varepsilon; t+\varepsilon])$.

On va maintenant décrire les dégénérescences qui peuvent apparaître dans le bord d'un $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ avec une telle forme. A t fixé, on voit le bord de l'espace module standard car B_t est juste un choix de 1-forme compatible et donc la situation est similaire au cas des espaces de modules à hamiltoniens fixés. Le bord supplémentaire de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ apparait quand t tend soit vers $+\infty$ soit vers $-\infty$. Par exemple, quand $t \to -\infty$, on voit alors que l'espace de modules de départ s'approche d'un espace de modules à hamiltonien fixé, celui associé à H. Il faut alors redimensionner l'équation près des pointes négatives pour voir l'interpolation se produire : c'est ainsi que se créent des bulles près de chaque pointe négative.

Dans le cas où, simultanément au fait que le paramètre t tende vers $-\infty$, des pointes convergent ensemble à une vitesse proportionnelle à t, on peut voir apparaître des espaces de modules d'interpolation faisant apparaître plusieurs pointes négatives comme illutrées en bas à droite dans la figure 15.

Chapitre 4

Homologies lagrangiennes et symplectiques

Dans ce chapitre, on revisite des constructions bien connues : le complexe de Fukaya enroulé d'une lagrangienne, l'algèbre de Chekanov d'une legendrienne, l'application $\mathcal{OC}$...

4.1 Hamiltoniens et variétés non compactes

On travaille avec des hamiltoniens indépendants du temps et non lisses. Systématiquement, il faudra prendre une petite perturbation de ces modèles standards de manière à avoir un hamiltonien lisse dépendant du temps qui a des orbites et des cordes hamiltoniennes non dégénérées. Ces perturbations seront sous-entendues.

On se place dans la situation suivante : X est obtenu à partir de X_0 via un attachement d'anse. En particulier, X_0 est un sous-domaine de Liouville de X et (X, X_0) est un cobordisme de domaines de Liouville. Si H est un hamiltonien, on note $FC_*(H)$ l'espace vectoriel gradué engendré par les orbites 1-périodiques de H. La graduation dépend de l'indice de Conley-Zehnder $CZ(\gamma)$. Si C est une lagrangienne, on note $FC_*(C, H)$ l'espace vectoriel gradué engendré par les cordes hamiltoniennes de H reliant C avec une graduation qui dépendra de l'indice de Conley-Zehnder des cordes hamiltoniennes. Il se peut de plus qu'on veuille considérer seulement des sous-espaces vectoriels engendrés par des orbites ou des cordes spécifiques de ces hamiltoniens, on va donc essayer de comprendre les différentes zones de générateurs et calculer les actions de ces générateurs. Si $A \in \mathbb{R}$, $FC^{]-\infty;A]}$ désigne l'ensemble des cordes ou orbites d'action inférieures à A.

Pour éviter de distinguer les cas entre orbites et cordes hamiltoniennes qui sont traités exactement de la même manière dans cette section, les cordes et les orbites hamiltoniennes seront appelées des générateurs et notées γ.

Action hamiltonienne

On rappelle que pour un générateur γ dans un domaine de Liouville, la fonction d'action hamiltonienne vaut

$$A_H(\gamma) = \int_{I(\gamma)} \gamma^* \lambda - \int_0^1 H(t, \gamma(t)).$$

En particulier, si le générateur considéré est constant (donc correspond à un point critique z de H), alors la formule donne $A_H(\gamma) = -H(z)$.

Si le générateur γ considéré est situé dans une zone de symplectisation du type $I_r \times Y$ avec $H = h(r)$ un hamiltonien ne dépendant que de r, alors $A_H(\gamma) = rh'(r) - h(r)$ (cf section 2.1.2)

4.1.1 Hamiltoniens sur domaine de Liouville

On rappelle (cf section 2.1) que la complétion d'un domaine de Liouville X est donnée par $\widehat{X} = X \cup [1; +\infty[_r \times \partial X$ muni de la 1-forme de Liouville égale à λ_X sur X et $r\alpha$ sur $[1; +\infty[\times \partial X$. L'ensemble $\mathcal{H}(X)$ désigne l'ensemble des hamiltoniens H, représentés en figure 17, tels que :

(i) $H(x) = 0$ sur X,

(ii) $H(r, y) = \mu r$ sur $[1; +\infty[\times \partial X$ où $\mu > 0$ est une constante qui n'appartient pas au spectre du flot de Reeb de ∂X.

où le spectre du flot de Reeb est l'ensembles des longueurs des générateurs de Reeb qui se situent sur ∂X. Plus précisément, si on s'intéresse à des cordes hamiltoniennes reliant une lagrangienne $C \subset X$, le spectre est égal à l'ensemble des longueurs des cordes de Reeb de $\partial C \subset \partial X$ et si on s'intéresse à des orbites hamiltoniennes, le spectre est égal à l'ensemble des longueurs des orbites de Reeb de ∂X. En particulier, on voit que la définition de $\mathcal{H}(X, X_0)$ dépend de la situation qu'on considère.

On remarque que cet hamiltonien n'est pas lisse en $\{1\} \times \partial X$. Il s'agit d'un abus de notation pour considérer un hamiltonien de la forme $H(r, y) = h(r)$ où h est une fonction convexe croissante qui vaut 0 en 1 et μr pour $r \geqslant 1 + \varepsilon$ avec ε très petit. Dans ce cas, le champ de vecteur hamiltonien X_H est égal à $h'(r)R$ où R est le champ de Reeb sur ∂X. On sait donc que les générateurs hamiltoniens sont de deux types : soit ils se trouvent dans la partie compacte X (et alors le complexe engendré ressemble à un complexe de Morse) soit ils se trouvent dans la partie de jonction, c'est-à-dire proche de $\{1\} \times \partial X$. On parlera respectivement de générateurs de type I^0 et de type I^+. Avec la convention choisie pour l'action, on sait que les générateurs de type I^0 ont une action nulle et que les générateurs de type I^+ ont une action comprise entre l_{min} et $\mu - \eta_\mu$ où l_{min} désigne la longueur du plus petit générateur de Reeb et η_μ la distance entre μ et le spectre du flot de Reeb. En particulier, on constate que $I^0 < I^+$ c'est-à-dire que toutes les générateurs de I^0 ont une action strictement plus petite que tout les générateurs de I^+. On peut résumer ces

informations par le tableau suivant :

nom	type	zone	action
I^0	Morse dans X	X	0
I^+	Reeb sur ∂X	$\{1\} \times \partial X$	$[l_{min}; \mu - \eta_\mu]$

4.1.2 Hamiltoniens sur cobordisme

On rappelle (cf section 2.1) qu'un cobordisme de domaines de Liouville est une paire $W = (X, X_0)$ où X_0 est un sous-domaine de Liouville de X. Dans ce cas $\widehat{W} = \widehat{X}$ mais, pour tout $\delta > 0$, on peut décomposer $\widehat{W}$ de la manière suivante :

1. le domaine $X_0 \backslash]\varepsilon; 1] \times \partial X_0$,
2. le collier $]\varepsilon; 1] \times \partial_+ X_0$,
3. la partie $X \backslash X_0$,
4. la partie non compacte $[1; +\infty[\times \partial_+ X$.

On dira qu'un hamiltonien est dans $\mathcal{H}(X, X_0)$ s'il est défini sur $\widehat{W}$ (cf figure 17) et de la forme :

(i) $H(x) = -\lambda(1-\varepsilon)$ sur $X_0 \backslash [\varepsilon; 1] \times \partial_+ X_0$ où $0 < \varepsilon < 1$ est une constante,

(ii) $H(r, y) = -\lambda(1-r)$ sur $[\varepsilon; 1] \times \partial_+ X_0$,

(iii) $H(x) = 0$ sur $X \backslash X_0$,

(iv) $H(r, y) = \mu r$ sur $[1; +\infty[\times \partial_+ X$ où $\mu > 0$ est une constante.

Dans ce cas, on va distinguer 5 types de générateurs hamiltoniens : I^0, I^+, II^-, II^0 et II^+ (voir la figure 17) et le tableau ci-dessous décrit où se situent ces générateurs et leurs actions.

nom	type	zone	action
I^0	Morse dans X_0	$X_0 \backslash [\varepsilon; 1] \times \partial X_0$	$\lambda(1-\varepsilon)$
I^+	Reeb sur ∂X_0	$\{\varepsilon\} \times \partial X_0$	$\lambda(1-\varepsilon) + [\varepsilon l^0_{min}; \varepsilon(\lambda - \eta^0_\lambda)]$
II^-	Reeb sur ∂X_0	$\{1\} \times \partial X_0$	$[l^0_{min}; \lambda - \eta^0_\lambda]$
II^0	Morse sur $X \backslash X_0$	$X \backslash X_0$	0
II^+	Reeb sur ∂X	$\{1\} \times \partial X$	$[l_{min}; \mu - \eta_\mu]$

On dit qu'une orbite est de type II si elle est dans II^-, II^0 ou II^+. À λ fixé, si on choisit ε suffisamment petit, on peut montrer que $II < I^0 < I^+$. En effet fixons $\lambda >> \mu$ et on sait alors que $\eta_\lambda > 0$. Alors la plus grande valeur possible pour II est $\lambda - \eta^0_\lambda$ et

$$\lambda(1-\varepsilon) - (\lambda - \eta^0_\lambda) = \eta^0_\lambda - \varepsilon\lambda > 0 \text{ si } \varepsilon \text{ est suffisamment petit.}$$

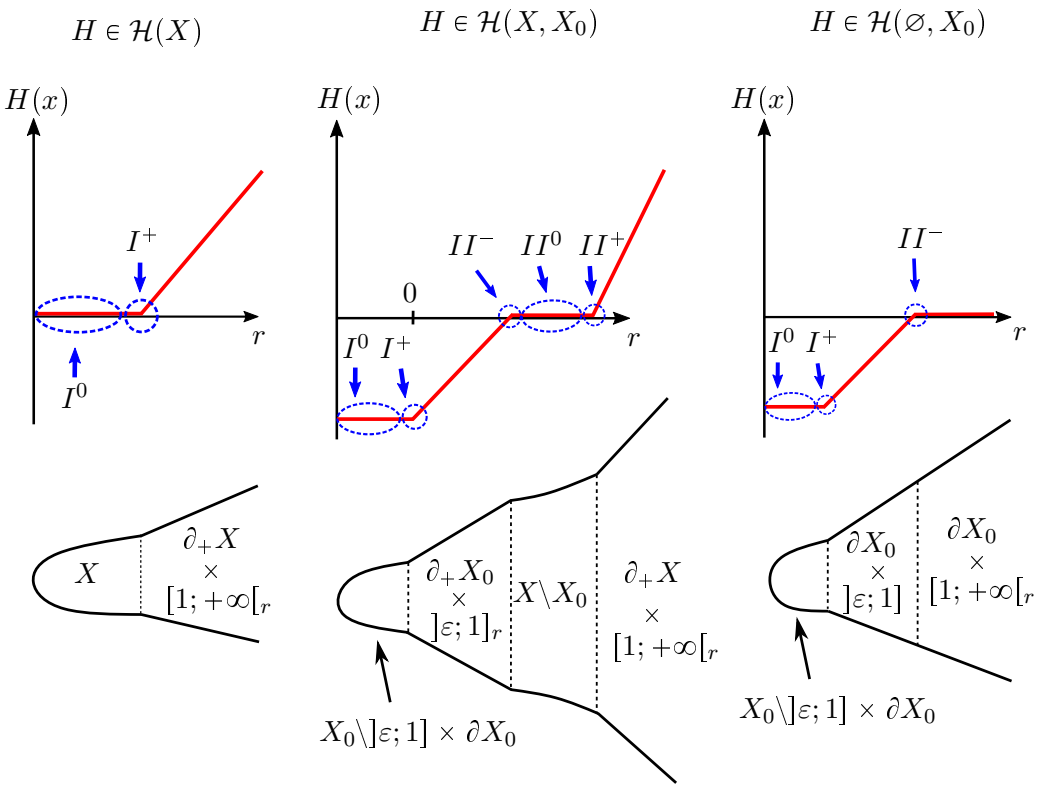


FIGURE 17 – Domaines de définitions et graphe des différents hamiltoniens considérés.

4.1.3 Hamiltoniens concaves

On rappelle que $\widehat{X_0} = X_0 \cup [1; +\infty[\times \partial X_0$. Pour tout $\delta > 0$, on peut décomposer $\widehat{X_0}$ en :

1. $X_0 \backslash]\varepsilon; 1] \times \partial X_0$,
2. $]\varepsilon; 1] \times \partial X_0$,
3. $[1; +\infty[\times \partial X_0$.

On dira qu'un hamiltonien H est dans $\mathcal{H}(\varnothing, X_0)$ (cf figure 17) s'il est défini sur $\widehat{X_0}$ et de la forme

(i) $H(x) = -\lambda(1-\varepsilon)$ sur $X_0 \backslash]\varepsilon; 1] \times \partial X_0$ où $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$ sont des constantes,

(ii) $H(r, y) = -\lambda(1-r)$ sur $]\varepsilon; 1] \times \partial X_0$ où $\lambda > 0$,

(iii) $H(x) = 0$ sur $[1; +\infty[\times \partial X_0$.

Si H est un hamiltonien dans $\mathcal{H}(\varnothing, X_0)$, on distingue 3 types d'orbites : I^0, I^+, II^-.

nom	type	zone	action
I^0	Morse dans X_0	$X_0 \backslash]\varepsilon; 1] \times \partial X_0$	$\lambda(1-\varepsilon)$
I^+	Reeb sur ∂X_0	$\{\varepsilon\} \times \partial X_0$	$\lambda(1-\varepsilon) + [\varepsilon l_{min}; \varepsilon(\lambda - \eta_\lambda)]$
II^-	Reeb sur ∂X_0	$\{1\} \times \partial X_0$	$[l_{min}; \lambda - \eta_\lambda]$

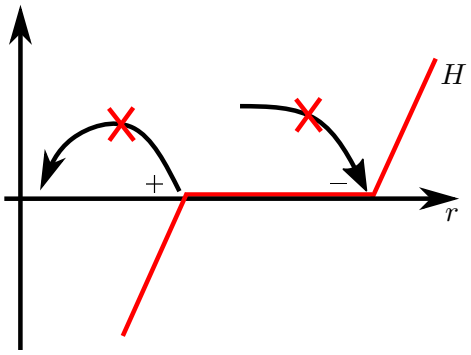


FIGURE 18 – Ces trajectoires de Floer sont interdites d'après [CO18].

On remarque que, à λ fixé, si ε est suffisamment petit, on a $II^- < I^0 < I^+$. En effet fixons $\lambda > 0$ et donc $\eta_\lambda > 0$. Alors la plus grande valeur possible pour II^- est $\lambda - \eta_\lambda$ et

$$\lambda(1-\varepsilon) - (\lambda - \eta_\lambda) = \eta_\lambda - \varepsilon\lambda > 0 \text{ si } \varepsilon \text{ est suffisamment petit.}$$

Cette remarque assurera que les générateurs de type II forment un sous-complexe. On aurait pu arriver au même résultat en utilisant les lemmes 2.2 et 2.3 de [CO18] (cf figure 18) sans avoir à supposer ε très petit.

4.1.4 Trajectoires de Floer

On rappelle ici suivant [CO18] quelques restrictions sur les trajectoires de Floer qui seront utiles dans la suite. La première remarque clé est que les trajectoires de Floer font décroître l'action : si u est une solution de l'équation de Floer de forme $(du - B)^{0,1} = 0$ où dB est une forme négative (formule (2.5)), alors la somme des actions hamiltoniennes des pointes positives est supérieure à celle des pointes négatives. Les autres contraintes sur les trajectoires de Floer qu'on utilisera ont été prouvées dans [CO18] aux lemmes 2.2 et 2.3.

Pour présenter ces lemmes, on se donne quelques notations. Soit X une variété symplectique qui comprend des bouts de symplectisation $I \times Y$ où I est un intervalle de $]0; +\infty[$ et Y est une variété de contact. On note $a : X \to]0; +\infty[$ l'application de projection sur les intervalles I. Si $u : \Sigma \to X$ est une solution de l'équation de Floer à asymptotes $(c_z)_{z \text{ pointe}}$, alors on sait que $a(c_z)$ est une constante pour toute pointe z. Les lemmes 2.2 et 2.3 de [CO18] disent que (voir figure 18) :

1. si $a(c_z)$ atteint son maximum en $a(c_{z_0})$ dans une zone de symplectisation où $H(r, y) = h(r)$ avec h convexe, alors c_{z_0} ne peut pas être une pointe négative,

2. si $a(c_z)$ atteint son maximum en $a(c_{z_0})$ dans une zone de symplectisation où $H(r, y) = h(r)$ avec h concave, alors c_{z_0} ne peut pas être une pointe positive.

4.2 Cordes hamiltoniennes et lagrangiennes

4.2.1 Homologie lagrangienne

Construction pour un hamiltonien fixé

Soit C une lagrangienne dans un domaine de Liouville X. On souhaite définir le complexe de Fukaya enroulé de C qu'on notera $SC_*(C)$ dans ce manuscrit. On va s'inspirer de [AS10] pour définir ce complexe mais il serait beaucoup trop technique de refaire dans ce manuscrit toute la démarche de l'article. On propose donc une manière plus rapide et plus pratique dans notre cadre de définir l'homologie de Hochschild de $SC_*(C)$ et non la structure de A_∞-algèbre complète.

On suppose qu'on a une lagrangienne C dans un domaine de Liouville X. On considère alors un hamiltonien $H \in \mathcal{H}(X)$ dont la pente à l'infini n'est pas rationnellement proportionnelle à la longueur d'une corde de Reeb reliant ∂C. La graduation de l'espace vectoriel $FC_*(C,H)$ est donnée par la formule suivante dépendant de l'indice de Conley-Zehnder :

$$|c| = CZ(c) - n.$$

On remarque que si H est un hamiltonien dans $\mathcal{H}(X)$, nH est aussi dans $\mathcal{H}(X)$ si $n \geqslant 1$. On note $A(C,H)$ l'espace vectoriel gradué $A(C,H) = \bigoplus_{k\geqslant 1} FC_*(C,kH)$.

Pour $d \geqslant 1$, on note $\mu_d : A(C,H)^{\otimes d} \to A(C,H)[d-2]$ l'application définie sur les générateurs par :

$$\begin{aligned} \mu_d : FC_*(C,k_1H) \otimes \cdots \otimes FC_*(C,k_dH) &\to FC_*(C,(r_1+\cdots+r_d)H)[d-2] \\ c_1 \otimes \cdots \otimes c_d &\mapsto \sum_{\substack{|c|=|c_1|+\cdots+|c_d|+d-1 \\ c\in FC(C,r_1^dH)}} \#\mathcal{M}(c_1,\ldots,c_d;c)c \end{aligned}$$

où $r_i^j = \sum_{l=i}^j r_l$ et $\mathcal{M}(c_1,\ldots,c_d;c)$ a été introduit dans la section 3.2.2. Cette variété est une variété compacte de dimension 0 si $CZ(c) - n = \sum_{i=1}^d (CZ(c_i) - n) + d - 2$.

Lemme 4.1. *Les μ_d définissent une structure de A_∞-algèbre sur $A(C,H) = \bigoplus_{k\geqslant 1} FC_*(C,kH)$.*

Démonstration. Un calcul direct montre que :

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant k} \langle \mu_{k-j+1+i}(c_1,\ldots,c_i\mu_{j-i}(c_{i+1},\ldots,c_j),c_{j+1},\ldots,c_k);b\rangle = \#\partial\mathcal{M}(c_1,\ldots,c_k;b).$$

Or si $|b| = |c| + k - 3$, l'espace de modules $\mathcal{M}(c_1,\ldots,c_k;b)$ est une variété compacte de dimension 1 et donc $\#\partial\mathcal{M}(c_1,\ldots,c_k;b) = 0$. □

Pour tout $H \in \mathcal{H}(X)$, $A(C,H)$ est donc une A_∞-algèbre. D'une part, on a des inclusions triviales

$$i(n,H) : A(C,nH) \hookrightarrow A(C,H).$$

D'autre part, si $H \leqslant H'$, on peut construire un A_∞-morphisme $A(C,H) \to A(C,H')$ qui correspond à un morphisme de continuation par la formule :

$$\begin{aligned}(\varphi^H_{H'})_d : FC_*(k_1H) \otimes \cdots \otimes FC_*(k_dH) &\to FC_*\left((k_1+\cdots+k_d)H'\right)[d-1] \\ c_1 \otimes \cdots \otimes c_d &\mapsto \sum_{|c|=|c_1|+\cdots+|c_d|+1-d} \#\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(c_1,\ldots,c_d;c)c.\end{aligned}$$

De plus, les $\varphi^H_{H'}$ commutent à homotopie près. À partir de maintenant, pour simplifier les notations, on suppose que les colimites à homotopie près existent dans la catégorie des A_∞-algèbres. On écrit donc la conjecture suivante :

Conjecture 4.1. La catégorie des A_∞-algèbres admet les colimites homotopiques.

Je n'ai pas trouvé de référence dans la littérature sur ce sujet mais il semblerait que cette conjecture est une conséquence du fait que toute A_∞-algèbre est quasi-isomorphe à une dg-algèbre et que la catégorie des dg-algèbres admet les colimites homotopiques. Il s'agit d'un travail en cours. On donnera à la fin de la construction de $SC(C)$ un argument permettant d'éviter cette conjecture et qui construit seulement $HH(SC(C))$ et non $SC(C)$. On note :

$$A(C,H_\infty) = \underset{H\in\mathcal{H}(X)}{\overrightarrow{\mathrm{hocolim}}}\left((A(C,H)),\varphi)\right).$$

De plus, pour tout $n \geqslant 1$, il est clair que :

$$A(C,H_\infty) = \underset{H\in\mathcal{H}(X)}{\overrightarrow{\mathrm{hocolim}}}\left((A(C,nH)),\varphi^{n\cdot}_{n\cdot})\right).$$

car $\{nH, H \in \mathcal{H}(X)\} = \mathcal{H}(X)$. On remarque que les $i(n,H)$ commutent aux applications de continuation φ à homotopie près. On a donc le diagramme commutatif suivant à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} A(C,nH) \arrow[r, "i(n,H)"] \arrow[d, "\varphi^{nH}_{nH'}"] & A(C,H) \arrow[r, "\psi_H"] \arrow[d, "\varphi^H_{H'}"] & A(C,H_\infty) \arrow[d, equal] \\ A(C,nH') \arrow[r, "i(n,H')"] & A(C,H') \arrow[r, "\psi_{H'}"] & A(C,H_\infty). \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

On vérifie directement que le carré de gauche de (4.1) est commutatif à homotopie près (les i sont juste des injections de sous-A_∞-algèbres). D'autre part, le carré de droite commute par la propriété de la colimite homotopique. Cela assure donc que pour tout

$n \geqslant 1$, il existe une unique application définie à homotopie près :

$$i(n) : A(C, H_\infty) \to A(C, H_\infty) \text{ vérifiant } i(n) \circ \psi_{nH} = \psi_H \circ i(n, H)$$

et où $i(1)$ est juste l'identité. On définit maintenant $SC(C)$ comme le coégalisateur homotopique de tout les $i(n)$ pour $n \geqslant 1$, c'est-à-dire comme la colimite homotopique du diagramme composé de deux copies de $A(C, H_\infty)$ et ayant pour tout $n \geqslant 1$, une flèche $i(n)$ allant de la première copie de $A(C, H_\infty)$ à la seconde copie de $A(C, H_\infty)$.

$$SC(C) = \operatorname{hocoeg}\big(\{i(n)\}_{n \geqslant 1}\big). \tag{4.2}$$

On note $\theta : A(C, H_\infty) \to SC(C)$ l'unique morphisme de A_∞-algèbres à homotopie près vérifiant $\theta \circ i(n)$ homotope à θ pour tout $n \geqslant 1$.

Pour éviter d'utiliser la conjecture 4.1, on propose de réécrire la procédure ci-dessus en passant à l'homologie de Hochschild. Cela signifie que l'on remplace les $A(C, H)$ par $HH(A(C, H))$, les φ par $HH(\varphi)$ et les i par $HH(i)$. Les diagrammes commutent alors et il suffit de prendre des colimites standard dans la catégorie des espaces vectoriels gradués. On définit ainsi une homologie :

$$HH(SC(C)) = \operatorname*{coeg}_{HH(i)} \operatorname*{colim}_{HH(\varphi)} HH(A(C, H)). \tag{4.3}$$

Théorème 4.1. *(i) Supposons que la conjecture 4.1 soit vraie. Alors la A_∞-algèbre $SC(C)$ définie en (4.2) vérifie la propriété universelle suivante. Soit B une A_∞-algèbre et g_H des morphismes tels que :*

$$\begin{cases} g_{H'} \circ \varphi^H_{H'} \text{ homotope à } g_H, \\ g_H|_{A(nH)} = g_{nH}. \end{cases}$$

Alors il existe un unique morphisme de A_∞-algèbres g à homotopie près telle que, pour tout $H \in \mathcal{H}(X)$, le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} A(C,H) \arrow[r, "\psi_H"] \arrow[dr, "g_H"'] & A(C,H_\infty) \arrow[r, "\theta"] & SC(C) \arrow[dl, "g"] \\ & B. & \end{tikzcd}$$

(ii) Soit B une A_∞-algèbre et $g_H : A(C, H) \to B$ des A_∞-morphismes vérifiant pour tout $H \leqslant H'$ et $n \geqslant 1$:

$$\begin{cases} g_{H'} \circ \varphi^H_{H'} \text{ homotope à } g_H, \\ g_H|_{A(nH)} = g_{nH}. \end{cases}$$

Alors il existe une unique application

$$HH_*(g) : HH_*(SC(C)) \to HH_*(B)$$

relevant les $HH_*(g_H)$.

(iii) Si D *est un complexe de chaînes et* $f_H : CC_*(A(C,H)) \to D$ *des morphismes de complexes de chaînes vérifiant pour tout* $H \leqslant H'$ *et* $n \geqslant 1$ *:*

$$\begin{cases} f_{H'} \circ CC_*(\varphi_H^{H'}) \text{ homotope à } f_H, \\ f_H|_{CC_*(A(nH))} = f_{nH}. \end{cases}$$

Alors il existe une unique application

$$H_*(f) : HH_*(SC(C)) \to H_*(D)$$

relevant les $H_*(f_H)$.

Démonstration. Prouvons dans un premier temps (i). On admet la conjecture 4.1. Alors, comme le carré de gauche dans le diagramme ci-dessous commute à homotopie près pour tout $H < H'$, on sait qu'il existe un unique g_∞ à homotopie près tel que :

$$\begin{tikzcd} A(C,H) \arrow[r, "\varphi_{H'}^{H}"] \arrow[dr, "g_H"'] & A(C,H') \arrow[r, "\psi_{H'}"] \arrow[d, "g_{H'}"] & A(C,H_\infty) \arrow[dl, dashed, "g_\infty"] \\ & B. & \end{tikzcd}$$

Donc g_∞ est l'unique morphisme de A_∞-algèbres à homotopie près vérifiant

$$(\forall H \in \mathcal{H}(X), g_\infty \circ \psi_H = g_H) \iff (\forall H \in \mathcal{H}(X), g_\infty \circ \psi_{nH} = g_{nH}).$$

Or, on sait que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} & A(C,H_\infty) \arrow[dr, "i(n)"] & \\ A(C,nH) \arrow[ur, "\psi_{nH}"] \arrow[r, "i(n,H)"] \arrow[dr, "g_{nH}"'] & A(C,H) \arrow[r, "\psi_H"] \arrow[d, "g_H"] & A(C,H_\infty) \arrow[dl, "g_\infty"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

En effet, la partie du haut commute de par la définition de $i(n)$ et la partie du bas commute par la définition de g_∞ et l'équation de commutation entre g et i. Donc $g_\infty \circ i(n) \circ \psi_{nH} = g_{nH}$ et donc $g_\infty \circ i(n)$ vérifie la même propriété universelle que g_∞. Cela assure que $g_\infty \circ i(n)$ est homotope à g_∞. Il existe donc une unique application g vérifiant, pour tout $n \geqslant 1$, que

le diagramme suivant commute à homotopie près.

$$\begin{tikzcd} A(C,H_\infty) \arrow[r, "i(n)"] \arrow[dr, "g_\infty"] & A(C,H_\infty) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "g_\infty"] & SC(C) \arrow[dl, "g"] \\ & B. & \end{tikzcd}$$

Finalement, l'unicité à homotopie près est claire car, si h est telle que :

$$\begin{tikzcd} A(C,H) \arrow[r, "\psi_H"] \arrow[dr, "g_H"] & A(C,H_\infty) \arrow[r, "\theta"] & SC(C) \arrow[dl, "h"] \\ & B. & \end{tikzcd}$$

Alors $h_\infty = h \circ \theta$ vérifie la même propriété universelle que g_∞ et donc h_∞ est homotope à g_∞. Finalement, h vérifie la même propriété universelle que g et donc $h = g$ à homotopie près.

Pour prouver (iii), on recopie la preuve de (i) en passant à l'homologie de Hochschild. Finalement, (ii) est une conséquence directe de (iii) si l'on pose $f_H = CC_*(g_H)$. □

Essayons d'expliquer heuristiquement l'intuition derrière la définition de $SC(C)$ comme limite directe des φ puis coégalisateur des $i(n)$. Idéalement, la A_∞-algèbre $SC(C)$ est égale au complexe $FC(C, H_\infty)$ où H_∞ est un hamiltonien avec une pente linéaire infinie. Quand on prend la limite directe selon les applications de continuation $\varphi^H_{H'}$ des $A(C,H)$, on obtient la A_∞-algèbre $A(C, H_\infty)$. Cette dernière contient encore une infinité de fois le complexe $FC(C, H_\infty)$:

$$A(C, H_\infty) = \bigoplus_{n \geqslant 1} E_n \text{ où } \forall n \geqslant 1, E_n = FC(C, H_\infty).$$

Les $i(n)$ sont alors les applications identité $E_k \to E_{nk}$. En effet à H fixé, $i(2,H)$: $A(C, 2H) \to A(C,H)$ envoie $FC(k \cdot (2H))$ sur $FC((2k) \cdot H)$. Dans ce cadre heuristique, il est alors facile de vérifier que le coégalisateur de tout les $i(k)$ est tout simplement $FC(C, H_\infty)$. En effet, on cherche un espace vectoriel G tel que se donner une application de G dans un autre espace vectoriel G' est équivalent à se donner une application de $A(C, H_\infty)$ dans G' qui commute avec tout les $i(n)$.

Donc en considérant le coégalisateur de tout les $i(n)$, on obtient bien $FC(C, H_\infty)$.

Remarque 4.1. (a) On remarque qu'on pourrait directement considérer la colimite homotopique du diagramme de A_∞-algèbres composé des $A(C,H)$ munis des applications $\varphi^H_{H'}$ dès que $H \leqslant H'$ et $i(n,H)$. Cela donnerait le même résultat et fournirait une preuve plus rapide. On a cependant choisi de faire en deux temps afin de clarifier les colimites étudiées (notamment montrer qu'on considère un coégalisateur selon les injections i) et pour présenter l'heuristique ci-dessus.

(b) Dans le théorème 4.1, on pourrait demander seulement une commutation à homotopie

près avec les i. Dans la pratique, cela n'est pas utile car il parait peu judicieux de considérer des applications sur $FC(nH)$ définies différemment selon qu'on considère $FC(nH)$ dans $A(C,H)$ ou $A(C,nH)$. Dans toute les constructions effectuées dans ce manuscrit, les applications sont définies directement sur les complexes $FC(H)$ et donc la commutation avec i est triviale.

Conjecture 4.2. Notons $SC^{quad}(C)$ la construction de [Abo10] et $HH(SC(C))$ l'homologie de Hochschild comme définie dans le théorème 4.1. Il existe un isomorphisme

$$HH(SC(C)) \xrightarrow{\sim} HH(SC^{quad}(C)).$$

Pour prouver cette conjecture, on propose de considérer des hamiltoniens linéaires qui coïncident avec un hamiltonien quadratique avant de devenir linéaire. On peut alors montrer que les applications de continuation entre les hamiltoniens linéaires et le hamiltonien quadratique commutent avec les $\varphi^H_{H'}$ ce qui permet de construire un A_∞-morphisme :

$$F : SC(C) \to SC^{quad}(C).$$

Pour montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, il suffit alors de montrer que F_1 est un isomorphisme. Or, si on borne l'action hamiltonienne, les générateurs sont en bijection avec même action. On peut alors vérifier que F_1 est triangulaire supérieure et que les éléments diagonaux comptent uniquement la bande triviale entre mêmes générateurs de même action. Cela est un travail en cours.

4.2.2 Fonctorialité de l'homologie lagrangienne

Soit $X_0 \subset X$ un cobordisme de domaines de Liouville et C une lagrangienne dans X. Quitte à perturber C, on peut supposer que $C \cap X_0$ est une lagrangienne de X_0.

Théorème 4.2. *Il existe un morphisme de transfert*

$$HH_*(SC(C)) \to HH_*(SC(C \cap X_0)).$$

On énoncera dans la section 4.4.1 une propriété de commutation avec le morphisme de transfert de Viterbo ce qui assurera que le morphisme de transfert construit ici n'est pas trivial.

Démonstration. Un tel morphisme de transfert a déjà été construit dans [AS10]. On va juste construire le morphisme de transfert et l'équivalence avec leur construction est directe si leur construction de $SC(C)$ vérifie les mêmes propriétés universelles que notre construction (cf théorème 4.1). Soit K un hamiltonien de $(\widehat{X, X_0})$ défini de la manière suivante (voire figure 19) avec $\mu, \lambda, \varepsilon > 0$ des constantes :

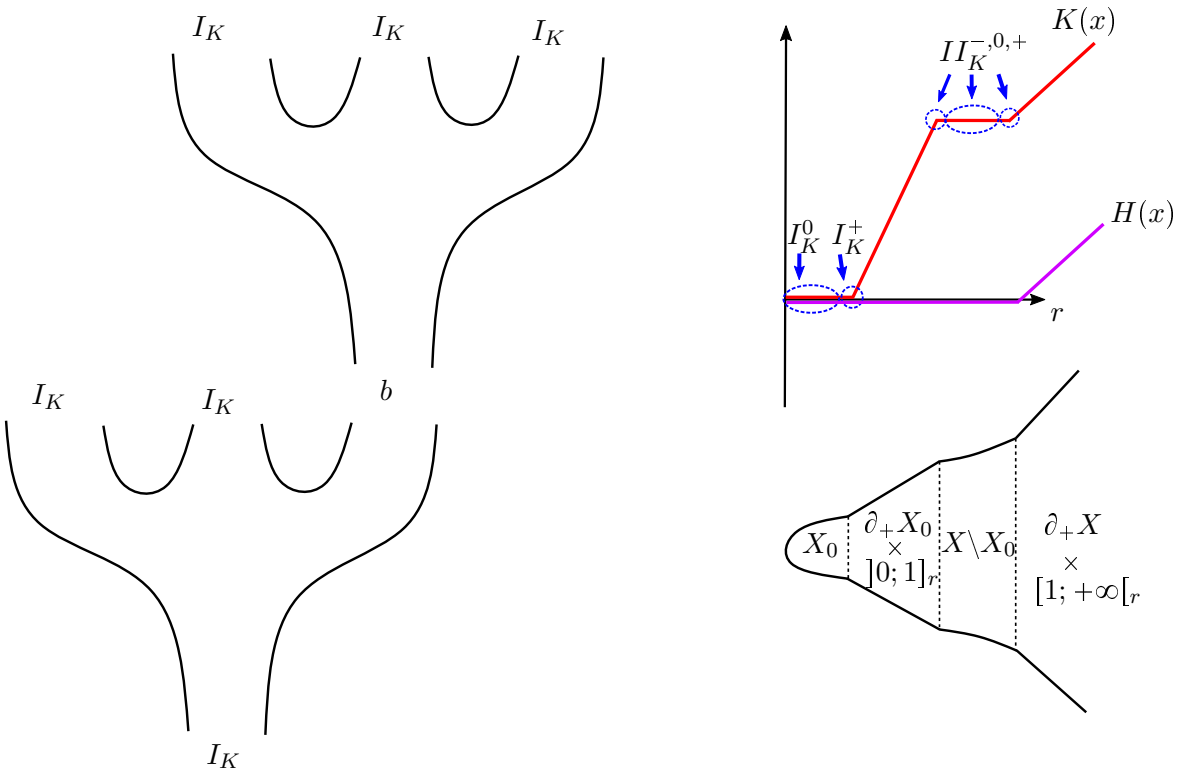


FIGURE 19 – Hamiltoniens en escalier pour la définition de l'application de transfert et preuve du fait que $A_{I_K}(C,K)$ est une A_∞-algèbre.

1. $K(x) = 0$ sur $X_0\backslash]\varepsilon;1] \times \partial X_0$,
2. $K(x) = \lambda(r-\varepsilon)$ sur $[\varepsilon;1] \times \partial X_0$,
3. $K(x) = \lambda(1-\varepsilon)$ sur $X\backslash X_0$,
4. $K(x) = \mu(r-1) + \lambda(1-\varepsilon)$ sur $[1;+\infty[\times\partial X$.

On peut distinguer différents types de cordes pour un tel hamiltonien K :

nom	type	zone	action
I_K^0	Morse dans X_0	$X_0\backslash]\varepsilon;1] \times \partial X_0$	0
I_K^+	Reeb sur ∂X_0	$\{\varepsilon\} \times \partial X_0$	$[\varepsilon l^0_{min};\varepsilon(\lambda-\eta^0_\lambda)]$
II_K^-	Reeb sur ∂X_0	$\{1\} \times \partial X_0$	$-\lambda(1-\varepsilon) + [l^0_{min};\lambda-\eta^0_\lambda]$
II_K^0	Morse dans $X\backslash X_0$	$X\backslash X_0$	$-\lambda(1-\varepsilon)$
II_K^+	Reeb sur ∂X	$\{1\} \times \partial X$	$-\lambda(1-\varepsilon) + [l_{min};\mu-\eta_\mu]$

Si ε est suffisamment petit et $\lambda >> \mu$, alors on voit que $II_K < I_K$. En particulier cela implique que $FC_{I_K}(C,K)$ est un complexe quotient de $FC(C,K)$. On va maintenant

démontrer que les opérations μ_d définies par :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}_d :& FC_{I_K}(C, r_1K) \otimes \cdots \otimes FC_{I_K}(C, r_dK) \to FC_{I_K}(C, r_1^dK)[d-2] \\ c_1 \otimes \cdots \otimes c_d \mapsto & \sum_{\substack{c \in FC_{I_K}(r_1^dK, c) \\ |c| = |c_1| + \cdots + |c_d| + d - 2}} \#\mathcal{M}(c_1, \ldots, c_d; c)c\end{aligned}$$

définissent une structure de A_∞-algèbre sur $A_{I_K}(C, K)$. Prenons $c_1, \ldots, c_d, c$ de type I et tels que $|c| = |c_1| + \cdots + |c_d| + d - 1$, alors le bord de l'espace de modules $\mathcal{M}(c_1, \ldots, c_d; c)$ est :

$$\partial\mathcal{M}(c_1, \ldots, c_d; c) = \bigcup_{\substack{0 \leqslant i < j \leqslant d \\ b \in FC(C, r_{i+1}^j K)}} \mathcal{M}(c_{i+1}, \ldots, c_j; b) \times \mathcal{M}(c_1, \ldots, c_i, b, c_{j+1}, \ldots, c_d; c).$$

On peut montrer que $\widetilde{\mu}$ définit une A_∞-algèbres si les seules cordes b apparaissant dans le bord (cf figure 19) sont elles aussi de type I. Les lemmes 2.2 et 2.3 de [CO18] assurent que b ne peut ni être de type II^- ni de type II^+. En effet, comme H est concave en II^-, $\mathcal{M}(c_1, \ldots, c_i, b, c_{j+1}, \ldots, c_d; c)$ est vide si b est de type II^-. Comme H est convexe en II^+, $\mathcal{M}(c_{i+1}, \ldots, c_j; b)$ est vide si b est de type II^+ (cf figure 18).

Finalement, le lemme 2.5 de [CO18] assure que b ne peut pas être de type II^0. Cela conclut la preuve du fait que $A(I_K, K)$ est une A_∞-algèbre. Les applications $\widetilde{\mu}$ ne comptent que des courbes dont les conditions asymptotiques sont toutes comprises dans le domaine de Liouville X_0. On sait alors que ces courbes restent contenues dans X_0 (lemme 2.2 de [CO18]). Cela assure que $A_{I_K}(C, K)$ est une A_∞-algèbre égale à la A_∞-algèbre $A(C \cap X_0, K^{X_0})$ où K^{X_0} est définie sur $\widehat{X_0}$ et vérifie :

$$\begin{cases} K^{X_0} = K \text{ sur } X_0, \\ K^{X_0}(r, y) = \lambda_K r \text{ sur } [1 + \infty[\times \partial X_0. \end{cases}$$

En passant à la limite, on trouve donc que :

$$\varinjlim_K HH_*(A_{I_K}(C, K)) = HH_*(SC(C \cap X_0)).$$

On choisit maintenant H un hamiltonien de type $\mathcal{H}(X)$ avec pente μ à l'infini. Alors il est clair (cf figure 19) que $H \leqslant K$ et il existe donc un morphisme de A_∞-algèbre :

$$A(C, H) \to A_{I_K}(C, K)$$

Les mêmes arguments qui assuraient que $A_{I_K}(C, K)$ est une A_∞-algèbre permettent de montrer que l'application :

$$A(C, H) \to A_{I_K}(C, K)$$

est aussi un morphisme de A_∞-algèbre. En particulier, il existe des applications

$$HH_*(A(C,H)) \to HH_*(A_{I_K}(C,K)) \to HH_*(SC(C \cap X_0)).$$

Il suffit alors de montrer que ces applications commutent aux applications de continuation pour construire le morphisme de transfert voulu :

$$HH_*(SC(C)) \to HH_*(SC(C \cap X_0)). \quad \square$$

4.2.3 L'algèbre de Chekanov d'une legendrienne

Construction hamiltonienne

Soient X_0 un domaine de Liouville et L_0 une lagrangienne dans X_0 à bord legendrien Λ dans ∂X_0 et un hamiltonien $H \in \mathcal{H}(\varnothing, X_0)$. On remarque que $FC_{II^-}(L_0,H)$ est un sous-complexe de $FC_*(L_0,H)$ car $II^- < I^0 < I^+$. On gradue ce complexe via l'indice de Conley-Zehnder :

$$|c| = CZ(c).$$

On définit alors le morphisme Δ_d pour $d \geqslant 1$, par

$$\begin{aligned} \Delta_d : FC_*(L_0,H) &\to FC_*(L_0,H)^{\otimes d}[d-2] \\ b &\mapsto \sum_{|b_1|+\cdots+|b_d|=|b|+d-2} \#\mathcal{M}(b;b_1,\ldots,b_d) b_1 \otimes \cdots \otimes b_d. \end{aligned}$$

Montrons que $\Delta_d(FC_{II}(L_0,H)) \subset FC_{II}(L_0,H)^{\otimes d}$. On a choisi un hamiltonien H tel que $II < I$. Donc si $\mathcal{M}(b;b_1,\ldots,b_d)$ est non vide, on sait que :

$$A_H(b) \geqslant \sum_{i=1}^{d} A_H(b_i).$$

Or comme toutes les actions sont positives, pour tout j, $\sum_{i=1}^{d} A_H(b_i) \geqslant A_H(b_j)$. Cela assure que si b est une corde de type II, alors tout les b_i sont de type II car $I > II$. Cela permet de munir $FC_{II}(L_0,H)$ d'une structure de A_∞-cogèbre.

Si H' est un autre hamiltonien du même type avec $H' \leqslant H$ (c'est-à-dire que la pente λ' de H' est plus grande que la pente λ de H), alors on peut construire des applications de continuation entre ces A_∞-cogèbres. Pour $k \geqslant 1$, on pose :

$$\begin{aligned} f_k : FC_*(L_0,H) &\to FC_*(L_0,H')^{\otimes k}[k-1] \\ b &\mapsto \sum_{|b_1|+\cdots+|b_k|=|b|+k-1} \#\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(b;b_1,\ldots,b_k) b_1 \otimes \cdots \otimes b_k. \end{aligned}$$

On remarque que les f_k ne font pas décroître l'action (car on a $H' \leqslant H$ et non $H \leqslant H'$ mais on a quand même la compacité de notre espace de modules et on sait aussi que si l'espace $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(b; b_1, \dots, b_k)$ est non vide, alors (voir formule (2.6) dans la section2.4.5)) :

$$A_{H'}(b_1 \dots b_k) \leqslant A_H(b) + ||H - H'||_\infty.$$

Or si on choisit b de type II_H et si on a choisi H de telle sorte que $I_H > II_H$ (c'est-à-dire $\eta_\lambda - \varepsilon\lambda > 0$, voir section 4.1.3), cela suffit pour assurer que $b_1, \dots b_k$ sont de type $II_{H'}$. En effet, on sait que :

$$\begin{aligned} A_{H'}(b_1 \dots b_k) \leqslant A_H(b) + +||H - H'||_\infty \leqslant \lambda - \eta_\lambda + (1-\varepsilon)(\lambda' - \lambda) \leqslant \lambda'(1-\varepsilon) + \varepsilon\lambda - \eta_\lambda \\ < \lambda'(1-\varepsilon) \end{aligned}$$

Et donc aucun des b_i ne peut être de type $I_{H'}$ car $I_{H'} \geqslant \lambda'(1-\varepsilon)$ et toutes les cordes ont une action positive. Cela assure que ces applications f_k se factorisent naturellement par FC_{II} (et on note aussi f ces applications par abus de langage) :

$$f_k : FC_{II}(L_0, H) \to FC_{II}(L_0, H')^{\otimes k}[k-1].$$

L'étude des espaces $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(b; b_1, \dots, b_k)$ assure que les f_k définissent des morphismes de A_∞-cogèbres (on pourra comparer les figures 15 et 37).

En passant à la construction cobar, on obtient un morphisme $\Omega f : \Omega FC_{II}(L_0, H') \to \Omega FC_{II}(L_0, H)$. Pour ne pas avoir à considérer des limites dans la catégorie des algèbres différentielles graduées à homotopie près (et donc des A_∞-algèbres), on passe à l'homologie.

Définition 4.1. L'*algèbre augmentée de Chekanov version hamiltonienne* de Λ est :

$$\mathrm{HCH}_*(\Lambda, L_0) = \varinjlim_{\lambda_H > 0} H_*(\Omega FC_{II}(L_0, H))$$

où λ_H désigne la pente de H.

Construction holomorphe

On va décrire brièvement une construction de l'algèbre de Chekanov associée à une legendrienne Λ dans une variété de contact Y_0 (la référence est [EES07] et on suivra la présentation de [BEE12]). Pour $c, b_1, \dots, b_d$ des cordes de Reeb reliant Λ, on note :

$$\mathcal{M}^{hol}(c; b) = \bigcup_{D \in \mathcal{M}(D_{1;k})} \left\{ u : (D, \partial D) \to (\mathbb{R} \times Y_0, \mathbb{R} \times \Lambda); \begin{cases} du^{0,1} = 0 \\ \lim\limits_{z \to z^+} u(z) = \{+\infty\} \times c \\ \lim\limits_{z \to z_i^-} u(z) = \{-\infty\} \times b_i \end{cases} \right\}$$

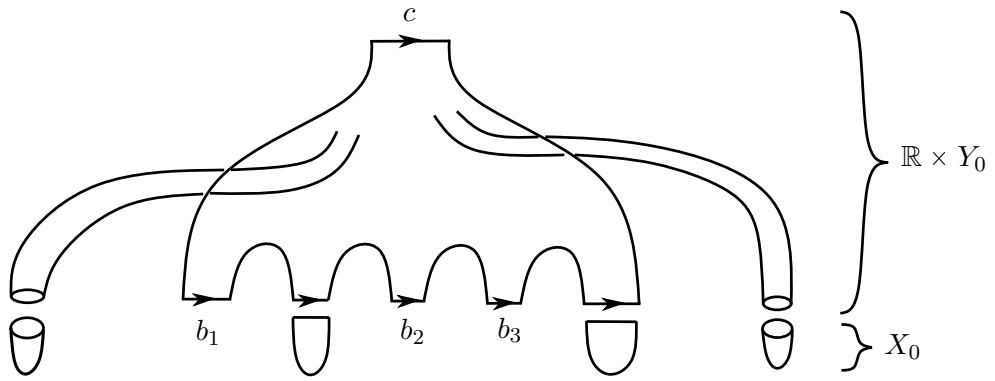


FIGURE 20 – Exemple d'une courbe de $\mathcal{M}^{hol}(c; b_1, b_2, b_3)$ ancrée dans X_0.

ancrées dans (X_0, L_0). On rappelle (voir section 2.2 de [BEE12]) qu'une courbe ancrée $\mathcal{M}^{hol}(c; b)$ peut être définie sur des surfaces de Riemann avec des pointes supplémentaires (intérieures ou sur le bord) et que pour chacune de ces pointes, il existe des plans ou des demi-plans holomorphes à valeurs dans (X_0, L_0) qui "bouchent" ces pointes supplémentaires (cf figure 20). Dans la suite, on fera comme si ces pointes supplémentaires n'existent pas pour simplifier les notations. Une fois quotienté par les automorphismes de $D_{1;n}$ et par la translation selon $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times Y_0$, l'espace $\mathcal{M}^{hol}$ est de dimension (cf lemme 3.2) :

$$\dim \mathcal{M}^{hol}(c; b_1, \ldots, b_k) = CZ_R(c) - \sum_{i=1}^{d} CZ_R(b_i) + d - 2.$$

Définition 4.2. Soit Y une variété de contact et $\Lambda \subset Y$ une legendrienne de Y. On suppose que (Y, Λ) possède un remplissage par (X, L_0) où X est un domaine de Liouville et L_0 une lagrangienne de X à bord Λ. On suppose de plus que Y est hypertendue, c'est-à-dire que Y ne possède pas d'orbites périodiques contractiles. On peut munir l'espace vectoriel engendré par les cordes de Reeb reliant Λ d'une structure de A_∞-cogèbre en la graduant par l'indice de Conley-Zehnder et en posant :

$$\begin{aligned} \Delta_d : \bigoplus_{c \text{ corde de } \Lambda} \mathbb{Z}/2 \cdot c &\longrightarrow \left(\bigoplus_{c \text{corde de } \Lambda} \mathbb{Z}/2 \cdot c \right) [d-2] \\ c &\longmapsto \sum_{|b_1| + \cdots + |b_d| = |c| + d - 2} \# \mathcal{M}^{hol}(c; b_1, \ldots, b_d) b_1 \otimes \cdots \otimes b_d. \end{aligned}$$

L'algèbre de Chekanov augmentée de Chekanov [1] de Λ est la construction cobar de cette A_∞-cogèbre et on la note $CH(\Lambda, L_0)$, il s'agit d'une algèbre différentielle graduée.

Théorème 4.3. *Pour chaque $H \in \mathcal{H}(\varnothing, X_0)$ suffisamment petit, il existe des morphismes*

1. Si on avait considéré des courbes non ancrées dans (X_0, L_0), on aurait obtenu l'algèbre de Chekanov.

d'algèbres différentielles graduée :

$$CH(\Lambda, L_0) \to \Omega FC_{II}(L_0, H)$$

qui commutent aux applications de continuation. De plus, l'application induite quand on prend la limite selon la pente de H induit un isomorphisme en homologie :

$$H_*(CH(\Lambda, L_0)) \xrightarrow{\sim} HCH(\Lambda).$$

Démonstration. Pour prouver ce théorème, on va construire des nouveaux espaces de modules dont on ne fera pas l'analyse précise comme dans les chapitres 1 et 2. Les résultats sur ces espaces de modules sont classiques et on pourra se référer à [BO09a] pour voir des discussions analogues dans le cadre des orbites hamiltoniennes et non des cordes hamiltoniennes.

Soit $H \in \mathcal{H}(\varnothing, X_0)$. On note β_D une section du fibré des 1-forme sur $\mathcal{M}(D_{1;d})$ qui valent dt près de chacune des pointes. Pour c corde de Reeb de Λ dans $Y_0 = \partial X_0$, $d \geqslant 0$ et $b_1, \dots b_d$ cordes hamiltoniennes de type II de H, on pose :

$$\mathcal{M}_H^{hol}(c; b) = \bigcup_{D \in \mathcal{M}(D_{1;k})} \left\{ u : D \to \widehat{X_0}; \begin{cases} \lim\limits_{z \to z^+} u(z) = \{+\infty\} \times c \\ \lim\limits_{z \to z_i^-} u(z) = \{r_i\} \times b_i \\ (du - X_H \otimes \beta_D)^{0,1} = 0 \end{cases} \right\}$$

où on note r_i l'abscisse où on voit la corde b_i. Si b_i est la corde hamiltonienne de $\widehat{L_0}$ correspondant à une corde de Reeb de Λ de longueur l alors r_i est tel que $h'(r_i) = l$. Si on applique les formules des lemmes 3.1 et 3.2, on trouve que la dimension de cet espace de modules est :

$$\dim \mathcal{M}_H^{hol}(c; b_1, \dots, b_d) = CZ_R(c) + 1 - \sum_{i=1}^{d} CZ_H(b_i) + d - 2.$$

Pour $d \geqslant 1$, on définit :

$$\begin{aligned} f_d : CH(\Lambda, L_0) &\to FC_{II}(L_0, H)^{\otimes d}[d-1] \\ c &\mapsto \sum_{|b_1| + \dots + |b_k| = |c| + d - 1} \# \mathcal{M}_H^{hol}(c; b_1, \dots, b_k) b_1 \dots b_k. \end{aligned}$$

On va décrire le bord de codimension 1 de $\mathcal{M}^{hol}(c; b_1, \dots, b_k)$ et la formule du bord assurera

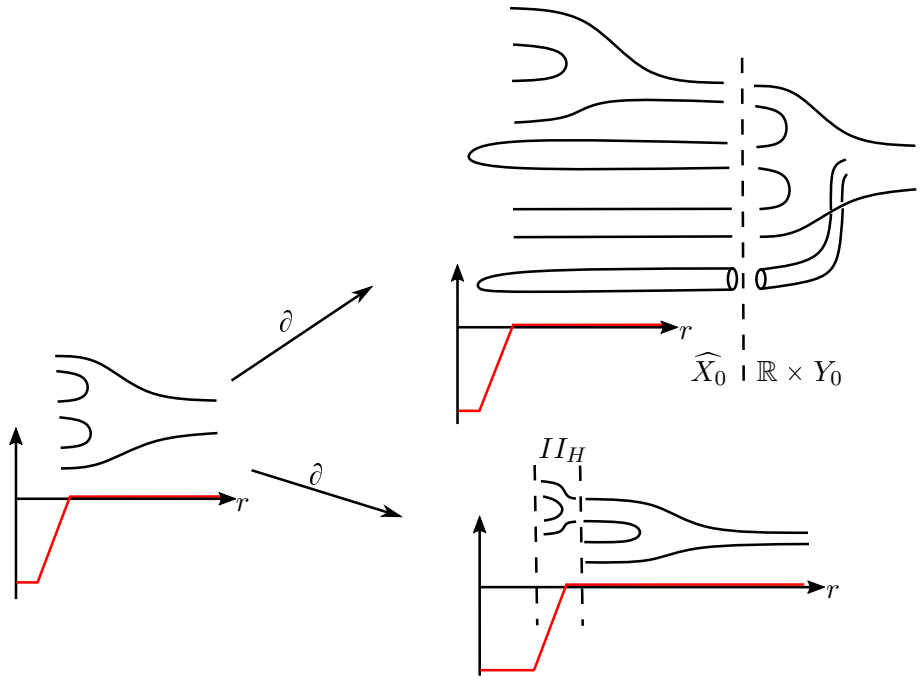


FIGURE 21 – Quand on décrit le bord d'un espace de module de courbes non compactes, on a un nouveau type de dégénérescence qui correspond à l'empilement d' "immeubles" holomorphes à l'infini (en haut à droite dans la figure).

que $(f_d)_{d\geqslant 1}$ définit un morphisme de A_∞-cogèbre. On a (cf figure 21) :

$$\partial\mathcal{M}_H^{hol}(c;b_1,\dots,b_d) = \bigcup_{0\leqslant i<j\leqslant d} \mathcal{M}_H^{hol}(c;b_1,\dots,b_i,b,b_{j+1},\dots,b_d)\times\mathcal{M}(b;b_{i+1},\dots,b_j) \tag{4.4}$$

$$\cup \bigcup_{c_1,\dots,c_k} \mathcal{M}^{hol}(c;c_1,\dots,c_k;\gamma_1,\dots,\gamma_k)\times\mathcal{M}_H^{hol}(c_1;b_1,\dots,b_{i_1})\times\dots$$
$$\times\mathcal{M}_H^{hol}(c_k;b_{i_{k-1}-1},\dots,b_d)\times\mathcal{M}(\gamma_1)\times\dots\mathcal{M}(\gamma_k) \tag{4.5}$$

où on autorise $i_k = i_{k+1}$. La ligne (4.4) correspond à des dégénérescences de type Floer ou Deligne-Mumford standards. Le fait que les courbes de $\mathcal{M}_H^{hol}$ soient non compactes en $+\infty$ rajoute des nouveaux éléments au bord qui correspond à l'empilement d'un étage holomorphe à valeurs dans $\mathbb{R}\times Y_0$ dans la ligne (4.5). On voit alors des courbes ancrées apparaître et les γ_i correspondent à des pointes intérieures qui sont bouchées par les des demi plans $\mathcal{M}(\gamma_i)$.

Cette formule du bord assure que f est un morphisme de A_∞-cogèbres. Montrons maintenant que pour tout λ_H, f établit un isomorphisme :

$$WA^{\leqslant\lambda_H}(\Lambda,L_0)\xrightarrow{\sim}\Omega FC_{II}(L_0,H)$$

où $WA^{\leqslant \lambda_H}$ désigne la sous-dga de $CH(\Lambda, L_0)$ des mots en les cordes de Reeb de longueur plus petite que λ_H (on demande que chaque corde de Reeb dans le mot est de longueur plus petite que λ_H). Il suffit de montrer que f_1 est un isomorphisme au niveau des complexes de chaînes sous-jacents qui ont les mêmes générateurs (les cordes de Reeb de Λ de longueur inférieures à λ_H). Si c est une corbe de Reeb de Λ de longueur inférieure à λ_H, on note c_H la corde hamiltonienne correspondante de H reliant L_0 de type II. On va faire la démonstration en deux étapes : d'abord on va montrer que les graduations coincident sous cette bijection puis on va construire explicitement l'unique courbe de $\mathcal{M}^{hol}(c; c_H)$.

Le fait que les graduations coincident est une conséquence de la section 2.2 car H est concave dans la zone II. Cela assure $CZ_R(c_R) = CZ(c_H)$ et donc que l'espace $\mathcal{M}^{hol}(c; c_H)$ est de dimension 0.

L'unique courbe dans $\mathcal{M}^{hol}(c; c_H)$ va être construite de la même manière que dans [BO09a]. On cherche une courbe $u \in \mathcal{M}^{hol}(c; c_H)$ de la forme :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} \times [0;1] &\to [1; +\infty[\times \partial X_0 \\ (s, \theta) &\mapsto \big(a(s,\theta), c \circ b(s,\theta)\big). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Cela implique que :

$$\partial_s u = (\partial_s a)\partial_r + (\partial_s b)R \text{ et } \partial_\theta u = (\partial_\theta a)\partial_r + (\partial_\theta b)R.$$

L'équation de Floer devient donc :

$$\begin{aligned} \partial_s u + J_\theta(\partial_\theta u - X_H(u)) = 0 &\Leftrightarrow (\partial_s a)\partial_r + (\partial_s b)R + J((\partial_\theta a)\partial_r + (\partial_\theta b)R - h'(a)R) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\partial_s a - \partial_\theta b + h'(a))\partial_r + (\partial_s b + \partial_\theta a)R = 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

avec conditions asymptotiques :

$$\lim_{s \to +\infty} a(s,\theta) = +\infty, \lim_{s \to -\infty} a(s,\theta) = a_0,$$

$$\lim_{s \to \pm\infty} b(s,\theta) = h'(a_0)\theta.$$

L'analyse d'une équation aux dérivées partielles du même type est effectuée dans [BO09a] (équation 79 page 41) et cette analyse assure qu'il existe une unique solution à cette équation. En effet, on doit d'abord montrer que toute courbe $u \in \mathcal{M}^{hol}(c; c_H)$ est bien de la forme (4.6). Cela est fait en remarquant que si u est dans $\mathcal{M}^{hol}(c; c_H)$, alors

$$\int_{\mathbb{R} \times [0;1]} u^*(d\alpha) = \int_{[0;1]} c^*(\alpha) - \int_{[0;1]} c_H^*(\alpha) = 0. \tag{4.8}$$

Or $du : T(\mathbb{R}\times[0;1]) \to T(\mathbb{R}\times\partial X_0) = \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial r}\oplus\mathbb{R}R_\alpha\oplus\xi$ est une application (J,j)-holomorphe. Si on note du^ξ la projection de du sur le fibré ξ, on sait que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times[0;1]} u^*(d\alpha) &= \int_{\mathbb{R}\times[0;1]} d\alpha_{u(s,t)}(du(\partial s), du(\partial t)) = \int_{\mathbb{R}\times[0;1]} d\alpha_{u(s,t)}(du^\xi(\partial s), du^\xi(\partial t)) \\ &= E(du^\xi).\end{aligned}$$

En effet du^ξ est une application (J^ξ, j)-holomorphe à valeurs dans le fibré symplectique $(\xi, d\alpha)$ et donc un calcul classique assure que cette intégrale est égale à l'énergie de du^ξ qui est donc nulle d'après (4.8). Donc u est bien de la forme souhaitée. Pour effectuer l'analyse de l'équation (4.7), il suffit de vérifier que la preuve de la proposition 4.2 de **??** se transpose telle quelle si l'on travaille sur $\mathbb{R}\times[0;1]$ plutôt que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On déduit alors que $\mathcal{M}^{hol}(c;c_H)$ est un espace de modules réduit à un élément ce qui assure que f_1 est un isomorphisme. Donc on a établi que :

$$WA^{\leqslant\lambda_H} \xrightarrow{\sim} \Omega FC_{II}(L_0, H).$$

Or on sait que :

$$HCH(\Lambda, L_0) = \operatorname*{colim}_{\lambda_H} H_*(\Omega FC_{II}(L_0, H))$$

et on va montrer que :

$$H_*(CH(\Lambda, L_0)) = \operatorname*{colim}_{\lambda_H} H_*(WA^{\leqslant\lambda_H}). \tag{4.9}$$

Comme le foncteur colim est covariant, on en déduit qu'il existe une application :

$$H_*(CH(\Lambda, L_0)) \to HCH(\Lambda, L_0)$$

et que cette application est un isomorphisme. Dans (4.9), on remarque que les $WA^{\leqslant\lambda_H}$ forment une suite croissante de sous-dga de $CH(\Lambda, L_0)$ qui la remplissent à l'infini. La colimite d'une telle filtration est la dga complète et on peut vérifier directement la propriété universelle. □

4.3 Orbites hamiltoniennes et homologies symplectiques

4.3.1 Homologie symplectique d'un domaine de Liouville

On suit la construction de [CO18] (voir définition 2.13). On note X un domaine de Liouville et on prend H un hamiltonien dans $\mathcal{H}(X)$. On gradue $FC_*(H)$ par l'indice de Conley-Zehnder : $|\gamma| = CZ(\gamma)$ et on munit $FC_*(H)$ d'une structure de complexe de chaînes

par la formule suivante :

$$\begin{aligned} d : & FC_*(H) \to FC_*(H) \\ \gamma_+ \mapsto & \sum_{|\gamma_-|=|\gamma_+|-1} \#\mathcal{M}(\gamma_+,\gamma_-)\gamma_- \end{aligned}$$

La formule du bord donnée dans le théorème 3.1 assure que $d^2 = 0$. De plus, on peut montrer que si $H \leqslant H'$, il existe un morphisme de continuation $\varphi^H_{H'} : FC(H) \to FC(H')$ et les morphismes de continuation commutent à homotopie près. On pourrait prendre la colimite dans la catégorie des complexes de chaînes à homotopie près pour définir $SC_*(X)$ mais, on va simplement définir $SH_*(X)$:

$$SH(X) = \varinjlim_{H\in\mathcal{H}(X)} FH_*(H).$$

4.3.2 Homologie symplectique d'un cobordisme de Liouville

On se réfèrera à la définition 2.13 de [CO18] pour les détails de la construction de $SH(X, X_0)$, on n'exposera ici que les principales étapes. On se donne $X_0 \subset X$ un cobordisme de Liouville et $H \in \mathcal{H}(X, X_0)$. On considère alors $FC^{II}_*(H)$ le sous-complexe de chaînes muni de la différentielle usuelle c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} d : & FC^{II}_*(H) \to FC^{II}_*(H) \\ \gamma_+ \mapsto & \sum_{|\gamma_-|=|\gamma_+|-1} \#\mathcal{M}(\gamma_+,\gamma_-)\gamma_-. \end{aligned}$$

On rappelle que dans la définition de $\mathcal{H}(X, X_0)$ donnée en section 4.1.2, H est définie par zones et que $H(x) = \mu r$ sur $[1; +\infty[\times\partial X$ et $H(x) = \lambda r - \lambda$ sur $]\varepsilon; 1] \times \partial X_0$. Notons un tel hamiltonien $H^{\lambda,\mu}$. Prenons $\lambda' > \lambda$ et fixons $\mu << \lambda, \lambda'$. On sait alors que $H^{\lambda',\mu} \leqslant H^{\lambda,\mu}$. On va utiliser une application de continuation :

$$FC_*(H^{\lambda,\mu}) \to FC_*(H^{\lambda',\mu})$$

qui compte les courbes $u : \mathbb{R} \times S^1 \to (\widehat{X, X_0})$ asymptotes en $+\infty$ à une orbite de $H^{\lambda,\mu}$ et en $-\infty$ à une orbite de $H^{\lambda',\mu}$. La condition de compacité (2.8) n'est pas vérifiée sur la partie compacte pour ces espaces de module (car $H^{\lambda',\mu} \leqslant H^{\lambda,\mu}$ et non l'inverse) mais comme on l'a remarqué dans la section 2.4.5, ces espaces de modules admettent quand même une compactification de Gromov-Floer. La seule différence est que l'action ne décroit pas le long de ces espaces mais on a l'inégalité suivante (cf formule 2.6) :

$$A_{H^{\lambda',\mu}}(\gamma_-) \leqslant A_{H^{\lambda,\mu}}(\gamma_+) + ||H^{\lambda,\mu} - H^{\lambda',\mu}||_\infty. \tag{4.10}$$

Montrons maintenant que cette application se factorise en une application :

$$FC_*^{II}(H^{\lambda,\mu}) \to FC_*^{II}(H^{\lambda',\mu}).$$

En effet, si $\gamma_+ \in FC_*^{II}(H^{\lambda,\mu})$ alors, $A_{H^{\lambda,\mu}}(\gamma_+) \leqslant \lambda$. De plus $||H^{\lambda,\mu} - H^{\lambda',\mu}||_\infty = (\lambda' - \lambda)(1-\varepsilon)$ et donc la formule (4.10) assure que :

$$\begin{aligned} A_{H^{\lambda',\mu}}(\gamma_-) &\leqslant A_{H^{\lambda,\mu}}(\gamma_+) + (\lambda' - \lambda)(1-\varepsilon) \\ &\leqslant \lambda + (\lambda' - \lambda)(1-\varepsilon) \leqslant \lambda'(1-\varepsilon) - \varepsilon\lambda \\ A_{H^{\lambda',\mu}}(\gamma_-) &< \lambda'(1-\varepsilon) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Donc γ_- est bien de type $II_{H^{\lambda',\mu}}$ car les orbite de type $I_{H^{\lambda',\mu}}$ sont d'action plus grandes que $\lambda(1-\varepsilon)$ (voir le tableau de la section 4.1.1). D'autre part, à λ fixé, si $\mu' > \mu$, comme $H^{\lambda,\mu} \leqslant H^{\lambda,\mu'}$, il existe une application de continuation standard :

$$FC_*(H^{\lambda,\mu}) \to FC_*(H^{\lambda,\mu'})$$

Cette application se factorise :

$$FC_*^{II}(H^{\lambda,\mu}) \to FC_*^{II}(H^{\lambda,\mu'})$$

car $II_{H^{\lambda,\mu}} < I_{H^{\lambda,\mu'}}$. Tout ces morphismes de continuation commutent à homotopie près. On peut donc définir $SH(X, X_0)$ comme étant la limite directe suivante :

$$SH(X, X_0) = \varinjlim_{\mu} \varinjlim_{\lambda} FH^{II}(H^{\lambda,\mu}).$$

Théorème 4.4 (Théorème 2.2 de [Vit99], théorème 7.1 de [CO18])**.**

Si X_0 est un sous-domaine de Liouville de X, alors il existe un morphisme de transfert [Vit99] :

$$F_{X_0}^X : SC(X) \to SC(X_0).$$

De plus, il existe un isomorphisme

$$SH(X, X_0) \xrightarrow{\sim} H_*(Cone(F_{X_0}^X)).$$

4.4 Quelques morphismes

4.4.1 Application Open-Closed

Construction

L'application $\mathcal{OC}$ qu'on considère est similaire à celle définie par Abouzaid dans [Abo10] mais avec une définition légèrement différente et des indices inversés (on utilise la convention inverse de celle d'Abouzaid, cela est explicité dans l'annexe B). On se donne C une lagrangienne dans un domaine de Liouville X et $H, K \in \mathcal{H}(X)$ tels que $H \leqslant K$.

Définition 4.3. Pour $r_1, \dots, r_k$ des entiers plus grands que 1 tels que $(r_1 + \cdots + r_k)H \leqslant K$, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{OC}(H, dK) : & FC(C, r_1 H) \otimes \cdots \otimes FC(C, r_k H) \to FC_*(K)[k-1] \\ & c_1 \otimes \cdots \otimes c_k \mapsto \sum_{|\gamma| = |c_1| + \cdots + |c_k| + k - 1} \#\widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \dots, c_k; \gamma)\gamma. \end{aligned}$$

est bien définie et vérifie la relation suivante :

$$\mathcal{OC} \circ d_{CC_*(A(C,H))} = d_{FC(K)} \circ \mathcal{OC}.$$

Démonstration. Une vérification rapide assure que

$$CC_*^{\leqslant K}(A(C,H)) = \bigcup_{(r_1 + \cdots + r_k)H \leqslant K} FC(C, r_1 H) \otimes FC(C, r_2 H)[-1] \cdots \otimes FC(C, r_k H)[-1]$$

est bien un sous-complexe de $CC_*(A(C,H))$.

D'après le théorème 3.5, la dimension de la variété compacte $\widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \dots, c_k; \gamma)$ est égale à $\sum_{i=1}^k (CZ(c_i) - n) - CZ(\gamma) + k - 1 = |c_1| + \sum_{i=2}^k (|c_i| + 1) - |\gamma|$ et donc l'application est bien définie et de degré 0.

On va montrer que :

$$\left\langle \left(\mathcal{OC} \circ d_{CC_*} + d_{FC(K)} \circ \mathcal{OC} \right) (c_1, \dots, c_k); \gamma \right\rangle = \#\partial \widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \dots, c_k; \gamma)$$

Prenons donc $c_1 \dots c_k$ dans le sous-complexe $CC_*^{\leqslant K}(A(C,H))$ et on peut simplifier :

$$\begin{aligned} \mathcal{OC}(d_{CC_*}(c_1, \dots, c_k)) = & \mathcal{OC}\left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} c_1 \dots c_i \mu_{j-i}(c_{i+1}, \dots, c_j) c_{j+1} \dots c_k \right) \\ & + \mathcal{OC}\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k} \mu_{k-j+i}(c_{j+1}, \dots, c_k, c_1, \dots, c_i) c_{i+1} \dots c_j \right) \end{aligned}$$

Donc on a d'une part :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{OC}(d_{CC_*}(c)); \gamma\rangle = & \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant k\\ c\in FC(C,r_{i+1}^j H)}} \#\mathcal{M}(c_{i+1},\dots,c_j;c)\#\widetilde{\mathcal{M}}(c_1,\dots,c_i,c,c_{j+1},\dots,c_d;\gamma)\\ & + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\\ c\in FC(C,(r_1^i+r_{j+1}^k)H)}} \#\mathcal{M}(c_{j+1}\dots,c_k,c_1,\dots c_i;c)\#\widetilde{\mathcal{M}}(c,c_{i+1},\dots,c_j;\gamma)\end{aligned}$$

où $r_a^b = \sum_{l=a}^b r_l$. D'autre part, on a :

$$\langle d_{FC(H)} \circ \mathcal{OC}(c);\gamma\rangle = \sum_{\gamma'\in FC(H)} \#\widetilde{\mathcal{M}}(c_1,\dots,c_k;\gamma')\#\mathcal{M}(\gamma';\gamma).$$

On retrouve bien le bord de la compactification de Gromov-Floer de $\widetilde{\mathcal{M}}(c_1,\dots,c_k;\gamma)$ (cf formules (3.4), (3.5) et (3.6)). Comme $\widetilde{\mathcal{M}}(c_1,\dots,c_k;\gamma)$ est une variété compacte de dimension 1 quand $|g| = |c_1| + \dots + |c_k| + k$, cela suffit pour conclure. □

Théorème 4.5. *Il existe une application relevant les $H_*(\mathcal{OC}(H,K))$ c'est-à-dire une application*

$$H_*(\mathcal{OC}) : HH_*(SC(C)) \to SH_*(X)$$

Démonstration. On va procéder en deux étapes : d'abord prendre la limite selon K puis prendre la limite selon H. La description des espaces $\mathcal{M}_{]-\infty;0]}(c_1,\dots,c_k;\gamma)$ assure que, pour tout $K \leqslant K'$, il existe une homotopie θ telle que :

$$\varphi_{K'}^K \circ \mathcal{OC}(H,K) - \mathcal{OC}(H,K') = d_{FC(K')} \circ \theta + \theta \circ d_{CC_*}.$$

Cela permet de montrer que $H_*(\mathcal{OC}(H,\cdot)$ commute aux applications de continuation $\varphi_{K'}^K$. D'autre part, quand on fait tendre K vers l'infini, on voit que les sous-complexes $CC_*^{\leqslant K}(A(C,H))$ remplissent $CC_*(A(C,H))$. En passant à la limite, on peut donc définir $H_*(\mathcal{OC}(H,\cdot)) : HH_*(A(C,H)) \to SH_*(X)$.

La description des espaces $\widetilde{\mathcal{M}}_{[0;+\infty[}(c_1,\dots,c_k;\gamma)$ assure maintenant que ces applications commutent avec les applications de continuation $A(C,H) \to A(C,H')$. En effet, on sait que pour tout $H \leqslant H'$, il existe θ tel que :

$$\mathcal{OC}(H',K) \circ CC_*(\varphi_{H'}^H) - \mathcal{OC}(H,K) = d_{FC(K)} \circ \theta + \theta \circ d_{CC_*(A(C,H))}$$

Si on passe à l'homologie et qu'on prend la limite selon K, on trouve donc que :

$$H_*(\mathcal{OC}(H',\cdot) \circ HH_*(\varphi_{H'}^H) = H_*(\mathcal{OC}(H,\cdot)).$$

Et donc cela permet de considérer l'application limite en utilisant la propriété universelle

du théorème 4.1. On a donc bien construit une application :

$$H_*(\mathcal{OC}) : HH_*(SC(C)) \to SH_*(X). \quad \square$$

Fonctorialité

Précisons quelques éléments sur l'homologie de Hochschild d'une lagrangienne présentée dans la section 4.2.1. Si X est un domaine de Liouville et $\{C_i\}_i$ une famille de lagrangiennes de X, alors on peut définir une A_∞-catégorie $SC(\{C_i\}_i)$ et construire l'homologie de Hochschild de cette A_∞-catégorie en reprenant les arguments de la section 4.2.1 dans ce cadre plus compliqué. Le morphisme de transfert se récupère aussi : prenons $X_0 \subset X$ un sous-domaine de Liouville. Quitte à perturber les C_i, la famille $\{C_i \cap X_0\}_i$ est une famille de lagrangiennes de X_0.

On a montré la fonctorialité de $HH_*(SC(C))$ (théorème 4.2) pour une unique lagrangienne et on peut de même montrer qu'il existe un morphisme de transfert entre les homologies de Hochschild :

$$HH_*(SC(\{C_i\}_i)) \to HH_*(SC(\{C_i \cap X_0\}_i))$$

où on considère des homologies de Hochschild définies sur des sous A_∞-catégories de la catégorie de Fukaya (voir définition 2.28 de [Gan12]). De plus, on peut montrer que l'application $\mathcal{OC}$ est fonctorielle vis-à-vis des morphismes de transfert, c'est-à-dire que le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} HH(SC(\{C_i\})) & \longrightarrow & HH(SC(\{C_i \cap X_0\}_i)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{OC}(X)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{OC}(X_0)} \\ SH(X) & \longrightarrow & SH(X_0). \end{array} \tag{4.12}$$

On se place maintenant dans la situation suivante : X est obtenue à partir de X_0 via attachement d'anse le long d'une sphère legendrienne $\Lambda \subset \partial X_0$. En particulier (X, X_0) est un cobordisme de domaines de Liouville. On se donne $(C_i^0)_{i=1,\dots,k}$ des lagrangiennes coniques de X_0 qui ne rencontrent pas Λ. Si on fait l'attachement d'anse sur un voisinage suffisamment petit qui ne rencontre pas les C_i^0, alors on sait que C_i^0 induit une lagrangienne conique de X qu'on note C_i^X car le cobordisme (X, X_0) est trivial en dehors de la zone d'attachement d'anse. En particulier $C_i^X \cap X_0 = C_i^0$. Finalement, on note C la coâme de l'attachement d'anse qui vérifie $C \cap X_0 = \varnothing$.

Dans ce cadre le diagramme commutatif (4.12) devient :

$$\begin{array}{ccc} HH(SC(\{C_i^X\}_i \cup \{C\})) & \xrightarrow{F} & HH(SC(\{C_i^0\}_i)) \\ \downarrow \mathcal{OC}(X) & & \downarrow \mathcal{OC}(X_0) \\ SH(X) & \xrightarrow{F_{X_0}^X} & SH(X_0). \end{array} \tag{4.13}$$

On sait alors qu'on peut compléter ce diagramme en des suites exactes longues et on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} H_*(\mathrm{Cone}(F)) & \longrightarrow & HH(SC(\{C_i^X\}_i \cup \{C\})) & \xrightarrow{F} & HH(SC(\{C_i^0\}_i)) \\ \downarrow G & & \downarrow \mathcal{OC}(X) & & \downarrow \mathcal{OC}(X_0) \\ H_*(\mathrm{Cone}(F_{X_0}^X)) & \longrightarrow & SH(X) & \xrightarrow{F_{X_0}^X} & SH(X_0). \end{array} \tag{4.14}$$

Avant d'aller plus loin, on va construire une application $\mathcal{OC}(X, X_0) : HH_*(SC(C, \varnothing)) \to SH(X, X_0)$ et préciser ce qu'on entend par $SC(C, \varnothing)$.

Lemme 4.2. *Soient X_0 un sous-domaine de Liouville de X et C est une lagrangienne de X telle que $C \cap X_0 = \varnothing$.*

Alors on peut utiliser des hamiltoniens $H \in \mathcal{H}(X, X_0)$ pour définir une homologie de Hochschild $HH(SC(C, \varnothing))$ isomorphe à $HH(SC(C))$ (cf section 4.2.1). Plus précisément, si on note $H^{\lambda,\mu}$ les hamiltoniens de $\mathcal{H}(X, X_0)$ de pentes (λ, μ) (voir section 4.1.2), on montre que :

$$A(C, H_\infty) = \operatorname*{hocolim}_{\mu} A(C, H^{0,\mu}) = \operatorname*{hocolim}_{\mu} \operatorname*{hocolim}_{\lambda} A(C, H^{\lambda,\mu}).$$

Démonstration. On note $H^{\lambda,\mu}$ les hamiltoniens de $\mathcal{H}(X, X_0)$ avec pente λ sur $]\varepsilon; 1] \times \partial X_0$ et de pente μ sur $[1; +\infty[\times \partial X$. On remarque alors que les hamiltoniens de $\mathcal{H}(X)$ sont des hamiltoniens $H^{0,\mu}$ et que $H^{0,\mu} = H^{\lambda,\mu}$ en dehors de X_0. On répète les arguments de la section 4.2.1 pour munir $A(C, H^{\lambda,\mu})$ d'une structure de A_∞-algèbre. Montrons maintenant que le morphisme de continuation

$$\varphi_{H^{0,\mu}}^{H^{\lambda,\mu}} : A(C, H^{\lambda,\mu}) \to A(C, H^{0,\mu})$$

est un isomorphisme de A_∞-algèbre. Ce morphisme est bien défini car clairement $H^{\lambda,\mu} \leqslant H^{0,\mu}$. Montrons maintenant que $\varphi_1 : FC(nH^{\lambda,\mu}) \to FC(nH^{0,\mu})$ est un isomorphisme. On peut supposer sans perdre de généralités que $n = 1$. On remarque alors que, comme $C \cap X_0 = \varnothing$, les générateurs de $FC(H^{\lambda,\mu})$ et $FC(H^{0,\mu})$ sont exactement les mêmes avec même action. Comme φ_1 fait décroître l'action, sa matrice est triangulaire supérieure. Ses éléments diagonaux comptent les courbes $\mathbb{R} \times [0; 1] \to X$ reliant deux cordes de même action. Il ne peut donc s'agir que de la bande triviale. Cette bande est comptée par φ_1 si

on avait bien choisi une interpolation triviale sur $X\backslash X_0 \cup [1;+\infty[\times \partial X$, zone sur laquelle $H^{\lambda,\mu} = H^{0,\mu}$.

Les coefficients diagonaux de φ_1 sont donc égaux à 1 ce qui assure que φ_1 est un isomorphisme de complexe de chaînes et donc φ est un isomorphisme de A_∞-algèbre. Donc $A(C, H^{\lambda,\mu}) \simeq A(C, H^{0,\mu})$ pour tout λ et donc $\operatorname{hocolim}_\lambda A(C, H^{\lambda,\mu}) = A(C, H^{0,\mu})$ ce qui conclut la preuve du lemme 4.2. □

En considérant maintenant des hamiltoniens de type $\mathcal{H}(X, X_0)$, on peut construire une application

$$\mathcal{OC}(X, X_0) : HH_*(SC(C, \varnothing)) \to SH(X, X_0)$$

de la même manière qu'on a construit l'application $\mathcal{OC}$ avec des hamiltoniens de type $\mathcal{H}(X)$. On peut maintenant conjecturer la propriété de fonctorialité suivante :

Conjecture 4.3. Il existe un isomorphisme

$$HH_*(SC(C, \varnothing)) \simeq H_*(\mathrm{Cone}(F)).$$

De plus l'application G de (4.14) correspond à $\mathcal{OC}(X, X_0)$ via les isomorphismes

$$HH_*(SC(C, \varnothing)) \simeq H_*(\mathrm{Cone}(F)) \text{ et } SH_*(X, X_0) \simeq H_*\left(\mathrm{Cone}\left(F^X_{X_0}\right)\right).$$

Cette conjecture impliquerait notamment la commutativité du diagramme suivant entre les suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccc}
HH(SC(C,\varnothing)) & \longrightarrow & HH(SC(\{C_i^X\}_i \cup \{C\})) & \longrightarrow & HH(SC(\{C_i^0\}_i)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{OC}(X,X_0)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{OC}(X)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{OC}(X_0)} \\
SH(X,X_0) & \longrightarrow & SH(X) & \longrightarrow & SH(X_0).
\end{array}$$

4.4.2 Application "Closed-Open"

Avant de définir l'application Closed-Open, il est important de faire une remarque sur la construction de l'algèbre de Chekanov Hamiltonienne. On se place dans le cadre suivant : $X_0 \subset X$ est un sous-domaine de Liouville et L est une lagrangienne de X telle que $L \cap \partial X = \varnothing$. On note $L_0 = L \cap X_0$ et $\Lambda = L \cap \partial X_0$. Alors on a le lemme élémentaire suivant :

Lemme 4.3. *On peut utiliser indifféremment des hamiltoniens de type $\mathcal{H}(X, X_0)$ sur $(\widehat{X, X_0})$ ou de type $H(\varnothing, X_0)$ sur $\widehat{X_0}$ pour construire la version hamiltonienne de l'algèbre de Chekanov $HCH(\Lambda, L_0)$:*

$$HCH(\Lambda, L_0) = \varinjlim_{\lambda_H} \varinjlim_{\mu_H} H_*(\Omega FC_{II^-}(L, H)).$$

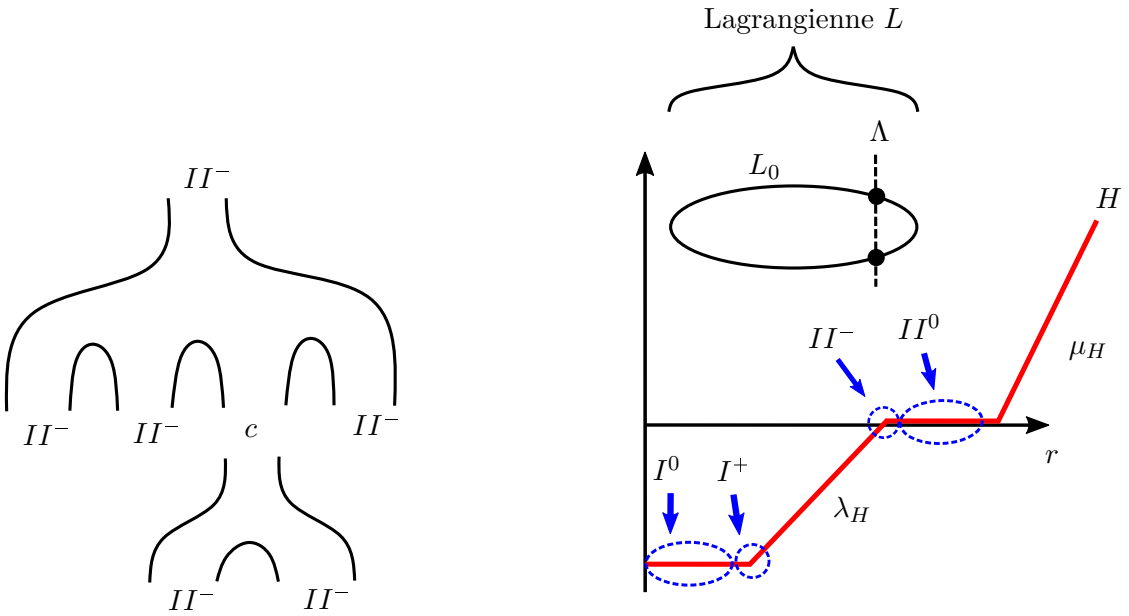


FIGURE 22 – À droite, on présente la situation géométrique pour la construction de $\mathcal{CO}$ ainsi que le hamiltonien considéré. À gauche, on illustre un raisonnement sur l'action qui assure que, dans ce cas, c doit être une corde de type II^-.

Démonstration. Soit $H \in \mathcal{H}(X, X_0)$ qui vérifie $I_H > II_H$. Les cordes hamiltoniennes de H reliant L sont de type $I^{0,+}$, $II^{-,0}$. Montrons maintenant directement que les

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}_d : & FC_{II^-}(L,H) \to FC_{II^-}(L,H)^{\otimes d}[d-2] \\ & b \mapsto \sum_{\substack{(b_i)\in(FC^{\leqslant a}_{II^-})^{\otimes d} \\ |b_1|+\ldots|b_d|=|b|+d-2}} \mathcal{M}(b;b_1,\ldots,b_d)b_1\ldots b_d \end{aligned}$$

définissent bien une structure de A_∞-cogèbre sur $FC^{\leqslant a}_{II^-}(L,H)$. Pour cela, il suffit de remarquer que quand b, $b_1,\ldots,b_d \in FC_{II^-}(L,H)$ sont tels que $\mathcal{M}(b;b_1,\ldots,b_d)$ est de dimension 1, le bord de cet espace de module ne fait intervenir que des cordes de type II^-. La seule corde qui pourrait ne pas être de type II^- dans la description du bord qui apparait dans le théorème 3.3 est la corde intermédiaire qui est associée au noeud qu'on note c (cf figure 22) :

$$\partial\mathcal{M}(b;b_1,\ldots,b_k) = \bigcup_{\substack{0\leqslant i<j\leqslant k \\ c\in FC(H)}} \mathcal{M}(b;b_1,\ldots,b_i,c,b_{j+1},\ldots,b_k)\times\mathcal{M}(c;b_{i+1},\ldots,b_j).$$

Or cette corde c ne peut pas être de type I car l'étage "supérieur" $\mathcal{M}(b;b_1,\ldots,b_i,c,b_{j+1},\ldots,b_k)$ serait vide par décroissance de l'action : en effet toutes les actions des cordes sont positives et $I_H > II_H$.

La corde c ne peut pas être de type II^0 car alors, l'étage "inférieur" $\mathcal{M}(c;b_{i+1},\ldots,b_j)$

serait vide par décroissance de l'action. En effet, c serait d'action nulle et chaque b_i d'action strictement positive. Donc c est forcément de type II^- ce qui conclue le fait que $\widetilde{\Delta}$ définit bien une structure de A_∞-cogèbre.

Les applications $\widetilde{\Delta}$ ne comptent que des courbes dont les conditions asymptotiques sont toutes comprises dans le domaine de Liouville X_0. On sait alors que ces courbes restent toutes contenues dans le domaine de Liouville X_0 (lemme 2.2 de [CO18]). Donc ces courbes ne voient pas la partie qui distingue les hamiltoniens $\mathcal{H}(X, X_0)$ des hamiltoniens $\mathcal{H}(\varnothing, X_0)$. Tous les comptages de courbes sont donc strictement égaux pour tout les μ_H et il est clair qu'on retrouve ainsi une définition de l'algèbre de Chekanov $HCH(\Lambda, L_0))$:

$$HCH(\Lambda, L_0) = \varinjlim_{\lambda_H} \varinjlim_{\mu_H} H_*(\Omega FC_{II^-}(L, H)). \quad \square$$

Soient $H, K \in \mathcal{H}(X, X_0)$ tels que $\lambda_K \geqslant \lambda_H$ et $\mu_K \geqslant \mu_H$ et vérifiant $I_H > II_H$ et $I_K > II_K$. On va décrire une flèche $FC_{II}(H) \to CC^p_*(\Omega FC_{II^-}(L, K))$. On rappelle que si C est une A_∞-cogèbre, le complexe $CC^p_*(\Omega C)$ est égal à (cf section C.5) :

$$\begin{tikzcd}
0 & \Omega C \arrow[l] \arrow[loop above, "d_1"] & \Omega C \otimes C \arrow[l, "d_0"'] \arrow[loop above, "\widetilde{d_1}"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où $d_1 : \Omega C \to \Omega C$ est la différentielle standard de ΩC, $d_0(a \otimes b) = ab - ba$, $\widetilde{d_1}(a \otimes b) = d_1 a \otimes b + aS(d_1 b)$ et

$$aS(b_1 \dots b_k) = \sum_{i=1}^{k} ab_1 \dots \widehat{b_i} \dots b_k = \sum_{i=1}^{k} b_{i+1} \dots b_l a b_1 \dots b_{i-1} \otimes b_i.$$

On pose :

$$\begin{aligned}
\mathcal{CO}_1 : FC_{II}(H) &\longrightarrow \Omega FC_{II^-}(L, K) \\
\gamma &\mapsto \sum_{\substack{b_1, \dots, b_k \in FC_{II^-}(L,K)^{\otimes k} \\ |b_1 \dots b_k| = |\gamma|}} \#\mathcal{M}(\gamma; b) b
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathcal{CO}_2 : FC_{II}(H) &\longrightarrow \Omega FC_{II^-}(L, K) \otimes FC_{II^-}(L, K) \\
\gamma &\mapsto \sum_{\substack{b_1, \dots, b_k \in FC_{II^-}(L,K)^{\otimes k} \\ |\widehat{b_1} \dots b_k| = |\gamma|}} \#\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; b) \widehat{b_1} b_2 \dots b_k.
\end{aligned}$$

Théorème 4.6. *L'application* $(\mathcal{CO}_1 \oplus \mathcal{CO}_2)(H,K) : FC_{II}(H) \to CC^p_*(\Omega FC_{II^-}(L,K))$ *est bien définie et est un morphisme de complexe de chaînes.*

Démonstration. Avant toute chose, il faut vérifier que les applications $\mathcal{CO}$ sont bien à valeurs dans $CC^p(\Omega FC_{II^-})$ c'est-à-dire que toutes les cordes de K apparaissant dans les espaces de modules considérés sont bien de type II^-. Il suffit pour cela de calculer la décroissance de l'action en appliquant la formule (2.6) exactement de la même manière que dans (4.11).

On sait que $\dim \mathcal{M}(\gamma; b_1, \dots, b_k) = CZ(\gamma) - \sum_{i=1}^k (CZ(b_i) - 1)$ d'après la section 3.2.4 et donc quand $|\gamma| = |b_1 \dots b_k|$, cet espace est une variété compacte de dimension 0. Donc $\mathcal{CO}_1$ est bien définie et on montre la même chose pour $\mathcal{CO}_2$. Vérifions maintenant que $\mathcal{CO}_1 \oplus \mathcal{CO}_2$ est bien un morphisme de complexes de chaînes c'est-à-dire que

$$(\mathcal{CO}_2 + \mathcal{CO}_1) \circ d = (\widetilde{d_1} + d_0 + d_1)(\mathcal{CO}_2 + \mathcal{CO}_1)$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{CO}_2 \circ d = \widetilde{d_1} \circ \mathcal{CO}_2 \text{ et } \mathcal{CO}_1 \circ d = d_0 \circ \mathcal{CO}_2 + d_1 \circ \mathcal{CO}_1.$$

Prenons γ et $b_1, \dots, b_k$ tel que $|\gamma| = |\widehat{b_1} \dots b_k| + 1$. On souhaite alors montrer que $\langle \mathcal{CO}_2(d\gamma) + \widetilde{d_1}\mathcal{CO}_2(\gamma); \widehat{b_1} \dots b_k \rangle = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{CO}_2(d\gamma) &= \mathcal{CO}_2 \left(\sum_{|\gamma'| = |\gamma| - 1} \#\mathcal{M}(\gamma, \gamma')\gamma' \right) \\
&= \sum_{|\gamma'| = |\gamma| - 1} \sum_{|\widehat{b_1} \dots b_k| = |\gamma'|} \#\mathcal{M}(\gamma, \gamma') \#\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma'; b_1, \dots, b_k) \widehat{b_1} \dots, b_k
\end{aligned}$$

et donc $\langle \mathcal{CO}_2(d\gamma); \widehat{b_1} \dots b_k \rangle = \sum_{|\gamma'| = |\gamma| - 1} \#\mathcal{M}(\gamma, \gamma') \#\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma'; b_1, \dots, b_k)$. On calcule maintenant :

$$\begin{aligned}
\widetilde{d_1}(\mathcal{CO}_2(\gamma)) &= \widetilde{d_1} \left(\sum_{|\widehat{d_1} \dots d_l| = |\gamma|} \#\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; d_1, \dots, d_l) \widehat{d_1} \dots d_l \right) \\
&= \sum_{|\widehat{d_1} \dots d_l| = |\gamma|} \sum_{\substack{i \geqslant 2 \\ |e_1 \dots e_r| = |d_i| - 1}} \#\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; d_1, \dots, d_l) \#\mathcal{M}(d_i; e_1, \dots, e_r) \widehat{d_1} \dots d_{i-1} e_1 \dots e_r d_{i+1} \dots d_l \\
&+ \sum_{|\widehat{d_1} \dots d_l| = |\gamma|} \sum_{\substack{|e_1 \dots e_r| = |d_1| - 1 \\ 1 \leqslant i \leqslant r}} \#\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; d_1, \dots, d_l) \#\mathcal{M}(d_1; e_1, \dots, e_r) e_1 \dots \widehat{e_i} \dots e_r d_2 \dots d_l.
\end{aligned}$$

Donc

$$\langle \widetilde{d_1}(\mathcal{CO}_2(\gamma)); \widehat{b_1} \dots, b_k \rangle = \sum_{|d| = |b_{i+1} \dots b_j| + 1} \#\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; b_1, \dots, b_i, d, b_{j+1}, \dots, b_k) \#\mathcal{M}(d; b_{i+1}, \dots, b_j) +$$

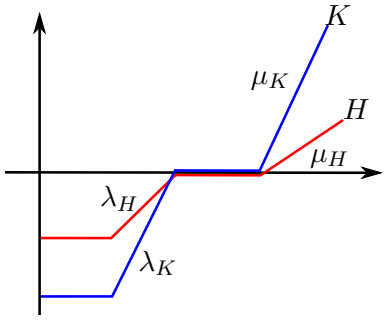


FIGURE 23 – Hamiltoniens pour $\mathcal{CO}$.

$$+ \sum_{|d|=|b_{j+1}\dots b_n b_1 \dots b_i|} \#\widetilde{\mathcal{M}}(\gamma; b, b_{i+1}, \dots, b_j)\#\mathcal{M}(d; b_{i+1}, \dots, b_n, b_1, \dots, b_i).$$

Donc la formule du bord donnée dans le théorème 3.6 assure bien que $\mathcal{CO}_2 \circ d + \widetilde{d_1} \circ \mathcal{CO}_2 = 0$. On montre de même que la formule du bord donnée dans le théorème 3.7 implique $\mathcal{CO}_1 \circ d = d_0 \circ \mathcal{CO}_2 + d_1 \circ \mathcal{CO}_1$. □

Théorème 4.7. *Il existe une application*

$$H_*(\mathcal{CO}_1 \oplus \mathcal{CO}_2) : SH_*(X, X_0) \to HH^p_*(\Omega SC(L))$$

relevant les applications $H_*(\mathcal{CO}_1 \oplus \mathcal{CO}_2)(H, K)$.

On peut montrer que $H_*(\mathcal{CO}_1 \oplus \mathcal{CO}_2)$ commute aux applications de continuation en utilisant des espaces $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. Pour simplifier les notations, posons $\mathcal{CO} = \mathcal{CO}_1 \oplus \mathcal{CO}_2$.

On note λ_H, μ_H, λ_K et μ_K les pentes respectives de H et K (cf figure 23). On remarque que toutes les limites sont directes selon tout les λ, μ. Donc, essentiellement, on utilise juste la covariance du foncteur limite directe. Cependant, il faut penser à prendre les limites selon K avant celles selon H car on a utilisé l'hypothèse $\lambda_H \leqslant \lambda_K$ et $\mu_H \leqslant \mu_K$. On montre que si $\lambda'_K \geqslant \lambda_K$ et $\mu_{K'} \geqslant \mu_K$, le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
FC_{II}(H) \arrow[r, "\mathcal{CO}(H,K)"] \arrow[dr, "\mathcal{CO}(H,K')"'] & CC^p(\Omega FC_{II}(K)) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{hocolim}_{\lambda_K,\mu_K} CC^p(\Omega FC_{II}(K)). \\
& CC^p(\Omega FC_{II}(K'))) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On pose :

$$\mathcal{CO}(H, \cdot) : FC_{II}(H) \to CC^p(\Omega FC_{II}(K)) \to \operatorname{hocolim}_{\lambda_K,\mu_K} CC^p(\Omega FC_{II}(K)).$$

D'autre part, on montre que, si $\lambda_{H'} \geqslant \lambda_H$ et $\mu_{H'} \geqslant \mu_H$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} FC_{II}(H) \arrow[r] \arrow[d] & CC^p(\Omega FC_{II}(K)) \arrow[r] & \operatorname{hocolim}_{\lambda_K,\mu_K} CC^p(\Omega FC_{II}(K)) \\ FC_{II}(H') \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Et la propriété universelle de colimite homotopique assure qu'il existe une application :

$$\mathcal{CO} : \operatorname*{hocolim}_{\lambda_H,\mu_H} FC_{II}(H) \to \operatorname*{hocolim}_{\lambda_K,\mu_K} CC^p(\Omega FC_{II}(K))$$

et donc en prenant l'homologie, on obtient bien :

$$H_*(\mathcal{CO}_1 \oplus \mathcal{CO}_2) : SH_*(X, X_0) \to HH^p_*(\Omega SC(L)).$$

4.4.3 Morphisme F

Soient $X_0 \subset X$ un cobordisme de Liouville et C et L deux lagrangiennes de X telles que :

1. $C \cap X_0 = \varnothing$,
2. $L \cap \partial X = \varnothing$,
3. pour tout hamiltonien H considéré, il existe une unique corde hamiltonienne reliant L à C qu'on note q.

On note $\Lambda = L \cap \partial X_0$ et $L_0 = L \cap X_0$. Soient $H, K \in \mathcal{H}(X, X_0)$ tels que $\lambda_K \geqslant \lambda_H$, $\mu_K \geqslant \mu_H$, $I_K > II_K$ et $I_H > II_H$. Pour $d \geqslant 1$, $l \geqslant 1$ et $r_1, \dots, r_d$ des entiers tels que

$$(r_1 + \cdots + r_d)\lambda_H \leqslant \lambda_K \text{ et } (r_1 + \cdots + r_d)\mu_H \leqslant \mu_K \tag{4.15}$$

on pose :

$$\begin{aligned} F^l_d : & FC(C, r_1 H) \otimes \cdots \otimes FC(C, r_d H) \to FC_{II^-}(L, K)^{\otimes l}[l + d - 1] \\ & c_1 \dots c_d \mapsto \sum_{\substack{|b| = |c| + n - 1 \\ b_i \in FC_{II^-}(L,K)}} \#\mathcal{M}(c_1, \dots, c_d; q; b_1, \dots, b_l) b_1 \dots b_l \end{aligned}$$

On rappelle que l'espace $\mathcal{M}(c_1, \dots, c_d; q; b_1, \dots, b_l)$ est de dimension $\sum_{i=1}^d (CZ(c_i) - n) - \sum_{i=1}^l (CZ(b_i) - 1) + (d - 1)$ d'après le théorème 3.8 donc quand $|b| = |c| + l + d - 1$, l'espace considéré est bien une variété compacte de dimension 0. D'autre part, on peut vérifier que les cordes b_i apparaissant dans F^l_d sont bien de type II en appliquant la formule (4.11).

En considérant $\oplus F^l_d$, on définit une application $F_d : A(C, H)^{\otimes d} \to \Omega FC_{II^-}(L, K)[d-1]$.

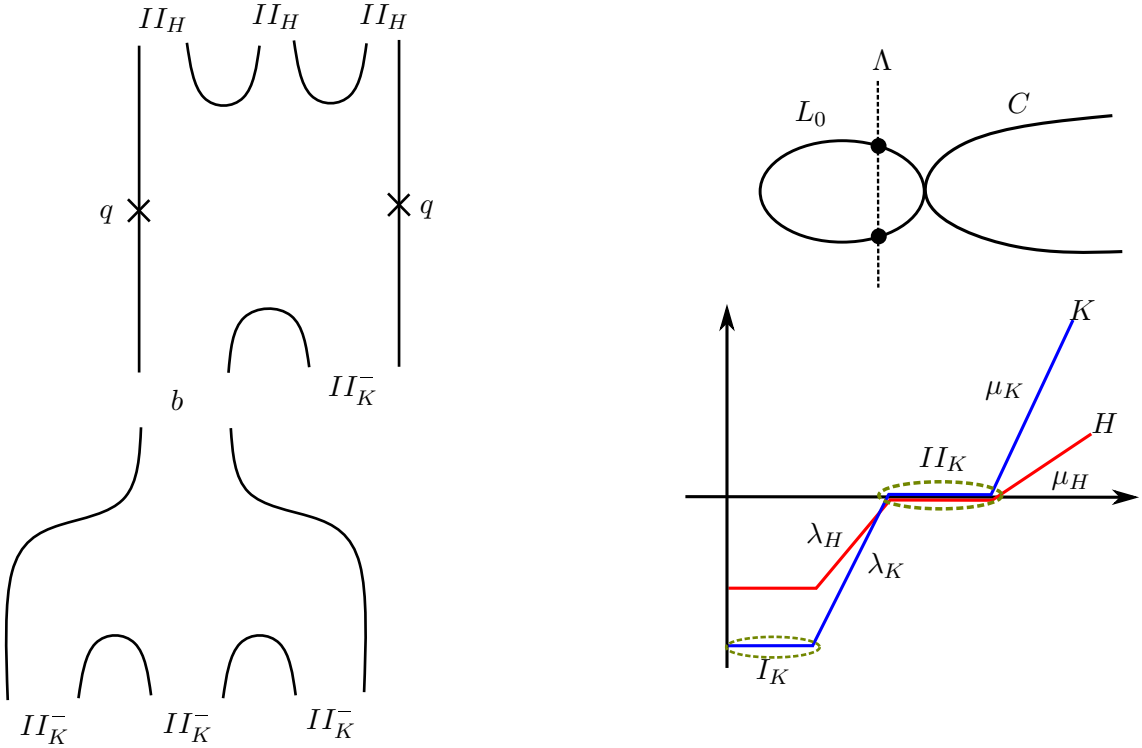


FIGURE 24 – Construction du morphisme F et vérification de la factorisation de F sur $FC_{II^-}(L,K)$.

Lemme 4.4. *Les F_d ainsi définis forment un morphisme de A_∞-algèbre de $A^{\leqslant K}(C,H)$ dans $\Omega^{\leqslant a}FC_{II^-}(L,K)$*

Démonstration. On remarque que F_d^l n'est pas défini sur $A(C,H)$ mais sur une sous-A_∞-algèbre de $A(C,H)$ à cause de la condition (4.15). On note cette sous-A_∞-algèbre $A^{\leqslant K}(C,H)$. Cela ne posera pas de difficultés dans la discussion qui suit car on prendra la limite selon K. On remarque d'abord que les seules cordes de K apparaissant dans les espaces de modules considérés et leurs bords sont de type II_K^-. En effet, le seul cas où des cordes de type I_K ou II_K^0 peut apparaître est illustré dans la figure 24. Or on voit que b ne peut être de type II_K^0 car l'étage inférieur serait interdit par décroissance de l'action sur l'étage inférieur. D'autre part, b ne peut pas être de type I_K car l'étage supérieur serait interdit par décroissance de l'action (voir formule (4.11)).

On rappelle que $(\Omega FC_{II_K^-}(L,K),\Delta,\otimes)$ est une algèbre différentielle graduée et donc une A_∞-algèbre avec des $\mu_d^{\Omega FC_{II_K^-}(L,K)}$ nuls pour $d \geqslant 3$. Montrons que, pour tout $d \geqslant 1$ et $c_1,\dots,c_d \in A^{\leqslant K}(C,H)^{\otimes n}$, F vérifie les relations des A_∞-morphismes :

$$A = F_{d-k+1}(c_1,\dots,\mu_k(c_{i+1},\dots,c_{i+k}),\dots,c_d) + \Delta F_d(c_1,\dots,c_d) \\ + \sum_{d_1+d_2=d} F_{d_1}(c_1,\dots,c_{d_1}) \otimes F_{d_2}(c_{d_1+1},\dots,c_d) = 0.$$

Fixons $b_1 \dots b_l \in FC_{II^-}(L,K)^{\otimes l}$ et montrons que $\langle A; b_1 \dots b_l \rangle = 0$. On sait que :

$$\begin{aligned}&\langle F_{d-k+1}(c_1, \dots, \mu_k(c_{i+1}, \dots, c_{i+k}), \dots, c_d); b\rangle \\ &\qquad = \sum_{|c|=|c_{i+1}\dots c_{i+k}|-1} \#\mathcal{M}(c_{i+1}, \dots, c_{i+k}; c)\#\mathcal{M}(c_1, \dots, c_i, c, c_{i+k+1}, \dots, c_d; q; b_1, \dots, b_l).\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\langle \Delta F_d(c_1, \dots, c_d); b\rangle &= \sum_{p+q=l+1} \langle \Delta_p F_d^q(c_1, \dots, c_d); b\rangle \\ &= \sum_{|b|=|b_{i+1}\dots b_j|+1} \#\mathcal{M}(c_1, \dots, c_n; q; b_1, \dots, b_i, b, b_{j+1}, \dots b_l)\#\mathcal{M}(b; b_{i+1}, \dots, b_j).\end{aligned}$$

Et :

$$\langle \sum_{d_1+d_2=d} F_{d_1}(c_{(1)}) \otimes F_{d_2}(c_{(2)}); b\rangle = \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ l_1+l_2=l}} \#\mathcal{M}(c_{(1)}; q; b_1 \dots b_{l_1})\#\mathcal{M}(c_{(2)}; q; b_{l_1+1}, \dots, b_l).$$

On retrouve la formule du bord de $\mathcal{M}(c_1, \dots, c_d; q; b_1, \dots, b_l)$ et cela assure que $A = 0$ d'après le théorème 3.8 et donc que F est bien un morphisme A_∞. □

Théorème 4.8. *Les F_d^l induisent une application :*

$$HH_*(F) : HH_*(SC(C)) \to HH_*(HCH(\Lambda, L_0)).$$

Démonstration. On remarque que la preuve du lemme 4.3 assure que les $HH_*(\Omega FC_{II^-}(L,K))$ permettent de calculer $HH_*(HCH(\Lambda, L_0))$ quand on fait passer λ_K et μ_K à la limite. D'autre part, le lemme 4.2 assure que les $HH_*(A(C,H))$ permettent de calculer $HH_*(SC(C))$ quand on fait passer λ_H et μ_H à la limite. Il s'agit donc de montrer que les A_∞-morphismes $F_d(H,K)$ commutent bien aux applications de continuation à homotopie de A_∞-morphisme près.

Soient $H \leqslant H'$ et $r_1, \dots, r_d$ tels que $r_1^d \lambda_{H'} \leqslant \lambda_K$ et $r_1^d \mu_{H'} \leqslant \mu_K$. On note

$$\begin{aligned}\theta_d :& FC(r_1 H) \otimes \dots \otimes FC(r_d H) \to \Omega FC_{II^-}(L,K)[d] \\ & c_1 \otimes \dots \otimes c_d \mapsto \sum_{\substack{b_i \in FC_{II^-}(L,K) \\ |b_1 \dots b_d| = |c|+d}} \mathcal{M}_{[0;+\infty[}(c_1, \dots, c_d; q; b_1, \dots, b_l)\end{aligned}$$

On souhaite montrer que θ réalise une homotopie entre les morphismes de A_∞-algèbres $F(H',K) \circ \varphi_{H'}^H$ et $F(H,K)$. On écrit la relation d'homotopie sous forme graphique (figure 25) et on laisse le lecteur comparer cette relation et la figure 16 qui décrit le bord de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^+}$. On pourrait montrer de même que F commute bien aux homotopies de K. On passe alors à la limite de la même manière que pour l'application $\mathcal{CO}$ (voir la preuve du théorème 4.7)

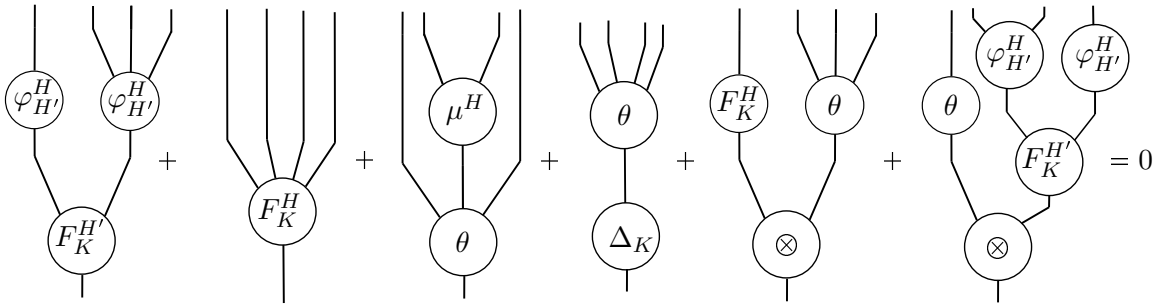


FIGURE 25 – Condition de compatibilité pour le A_∞-morphisme F avec les applications de continuation.

pour obtenir le résultat voulu. □

On rappelle (cf section C.5) qu'il existe une application

$$p : HH_*(HCH(\Lambda, L_0)) \to HH^p_*(HCH(\Lambda, L_0)).$$

On pose

$$HH^p_*(F) = p \circ HH_*(F)$$

et on va donner une formule explicite pour $HH^p_*(F)$:

$$\begin{aligned}
&HH^p_*(F)(c_1, \dots, c_d) = p\big(CC_*(F)(c_1, \dots, c_d)\big) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} p(F_d(c_{1+k}, \dots, c_{d+k})) + \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}} p(F_{d_1}(c_{1+k}, \dots, c_{d_1+k}) \otimes F_{d_2}(c_{d_1+1+k}, \dots, c_{d+k}) + 0 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} F_d(c_{1+k}, \dots, c_{d+k}) + \sum_{d \geqslant j > i \geqslant 1} F_{d-j+i}(c_{j+1}, \dots, c_d, c_1, \dots c_i) S(F_{j-i}(c_{i+1}, \dots, c_j)) \\
&= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\ |b_1 \dots b_l| = |c| + d - 1}} \#\mathcal{M}(c_{1+k}, \dots, c_{d+k}; q; b) b \\
&+ \sum_{d \geqslant j > i \geqslant 1} \#\mathcal{M}(c_{j+1}, \dots, c_d, c_1, \dots c_i; b) \#\mathcal{M}(c_{i+1}, \dots, c_j; q; e) b_1 \dots b_l S(e_1 \dots e_r).
\end{aligned}$$

On a donc construit une application :

$$HH^p_*(F) : HH_*(SC(C)) \to HH^p_*(HCH(\Lambda, L_0))$$

4.4.4 Homotopie A

Soient $X_0 \subset X$ et C et L des lagrangiennes de X comme dans la section 4.4.3. On fixe $H, K \in \mathcal{H}(X, X_0)$ tels que $\lambda_H \leqslant \lambda_K$, $\mu_H \leqslant \mu_K$, $I_H > II_H$ et $I_K > II_K$.

Pour $d \geqslant 1$, $l \geqslant 1$ et $r_1, \dots, r_d$ des entiers plus grands que 1 vérifiant

$$(r_1 + \cdots + r_d)\lambda_H \leqslant \lambda_K \text{ et } (r_1 + \cdots + r_d)\mu_H \leqslant \mu_K,$$

on pose :

$$\begin{aligned} A_d^{l,1} :& FC(C, r_1 H) \otimes \cdots \otimes FC(C, r_d H) \to FC_{II^-}(L, K)^{\otimes l}[d + l] \\ & c_1 \dots c_d \mapsto \sum_{|b| = |c| + d} \#\mathcal{M}(c_1, \dots, c_d; b_1, \dots, b_l) b_1 \dots b_l \end{aligned}$$

On remarque que quand $|b|_\Omega = |c| + d$, l'espace de modules considéré est bien de dimension 0 car, d'après le théorème 3.10,

$$\dim \mathcal{M}(c_1, \dots, c_d; b_1, \dots, b_l) = \left(\sum_{i=1}^{k_+} (CZ(c_i) - n)) \right) - \left(\sum_{i=1}^{l} (CZ(b_i) - 1) \right) + d.$$

On pose de même :

$$\begin{aligned} A_d^{l,2} :& FC(C, r_1 H) \otimes \cdots \otimes FC(C, r_d H) \to FC_{II^-}(L, K)^{\otimes (l-1)} \otimes FC_{II^-}(L, K) \\ & c_1 \dots c_d \mapsto \sum_{|\widehat{b_1} \dots b_l| = |c| + d} \#\widetilde{\mathcal{M}}(c_1, \dots, c_d; b_1, \dots, b_l) \widehat{b_1} \dots b_l. \end{aligned}$$

Théorème 4.9. *L'application $A^1 \oplus A^2 : CC_*(A(C, H)) \to CC_*^p(\Omega FC_{II^-}(L, K))$ de degré 1 vérifie l'équation d'homotopie suivante :*

$$A \circ d_{CC_*} + d_{CC_*^p} \circ A = CC_*^p(F) - \mathcal{CO} \circ \mathcal{OC}.$$

Démonstration. Il s'agit de montrer d'une part que :

$$A^2 \circ d_{CC_*} + \widetilde{d}_1 A^2 = CC_*^{p,2}(F) - \mathcal{CO}_2 \circ \mathcal{OC}$$

et d'autre part que :

$$A^1 \circ d_{CC_*} + d_1 A^1 + d_0 A^2 = CC_*^{p,1}(F) - \mathcal{CO}_1 \circ \mathcal{OC}.$$

Or, pour $c_1, \dots, c_d$ et $b_1, \dots b_l$, des calculs directs (se reporter aux théorèmes 3.10 et 3.9) montrent que :

$$\left\langle \left(A^2 \circ d_{CC_*} + \widetilde{d}_1 A^2 - CC_*^{p,2}(F) + \mathcal{CO}_2 \circ \mathcal{OC} \right)(c); \widehat{b_1} \dots b_l \right\rangle = \#\partial \widetilde{\mathcal{M}}(c; b).$$

En effet, si on reprend la preuve du théorème 3.9, on voit que :

(a) les lignes (3.10) et (3.11) correspondent à $\langle A^2 \circ d_{CC_*}(c); \widehat{b_1} \dots b_k \rangle$,

(b) les lignes (3.12) et (3.13) correspondent à $\langle \widetilde{d_1} A^2(c); \widehat{b_1} \dots b_k \rangle$,

(c) la ligne (3.14) correspond à $\langle \mathcal{CO}_2 \circ \mathcal{OC}\big)(c); \widehat{b_1} \dots b_k \rangle$,

(d) la ligne (3.15) correspond à $\langle CC_*^{p,2}(F)(c); \widehat{b_1} \dots b_k \rangle$.

On montre de la même manière que :

$$\Big\langle \big(A^1 \circ d_{CC_*} + d_1 A^1 + d_0 A^2 = CC_*^{p,1}(F) - \mathcal{CO}_1 \circ \mathcal{OC}\big)(c); b \Big\rangle = \#\partial\mathcal{M}(c;b)$$

ce qui permet de conclure la preuve. □

Cette relation d'homotopie assure que $HH_*^p(F(H,K)) = H_*(\mathcal{CO}(H,K)) \circ H_*(\mathcal{OC}(H,K))$ pour tout hamiltoniens H et K. Donc à la limite, on obtient le théorème

Théorème 4.10. *Les applications suivantes qui vont de $HH_*(SC(C))$ dans $HH_*^p(HCH(\Lambda, L_0))$ sont égales :*

$$H_*(\mathcal{CO}) \circ H_*(\mathcal{OC}) = HH_*^p(F).$$

Chapitre 5

Attachement d'anse symplectique et catégorie de Fukaya

Le but de ce chapitre est de décrire l'évolution d'invariants symplectiques après un attachement d'anse critique sur un domaine de Liouville. Pour cela, on étudie la dynamique de Reeb sur une variété de contact obtenue après chirurgie dans un premier temps. On donne une heuristique permettant de comprendre deux théorèmes annoncés dans la section 6.1 de [BEE12] : les théorèmes 5.1 et 5.2. Les arguments donnés dans cette section, s'ils étaient plus détaillés, devraient être suffisants pour démontrer ces théorèmes. Dans la section 5.2, on en déduit l'isomorphisme de A_∞-algèbres entre le complexe de Fukaya enroulé de la coâme et l'algèbre de Chekanov de l'âme (le théorème 5.4). Le théorème de split-génération 5.6 devrait découler de cet isomorphisme mais on a du admettre deux conjectures pour compléter la preuve : les conjectures 5.1 et 4.3.

5.1 Dynamique de l'attachement d'anse

On va décrire une construction non lisse de l'attachement d'anse symplectique et travailler tout le long de cette thèse avec cette construction. Pour voir une construction plus précise de l'attachement d'anse symplectique, on pourra lire [Wei91].

On se donne X_0 un domaine de Liouville ainsi qu'une sphère legendrienne $\Lambda \subset \partial X_0$. On sait qu'un voisinage de Λ dans ∂X_0 ressemble au fibré en disques :

$$\mathrm{Vois}(\Lambda) \simeq D_\varepsilon(T^*S^{n-1} \times \mathbb{R}) = \{(x, v, t) \in T^*S^{n-1} \times \mathbb{R}; |v|^2 + t^2 \leqslant \varepsilon^2\}$$

et on fixe un tel contactomorphisme à partir de maintenant. Or on peut remplir $T^*S^{n-1} \times \mathbb{R}$ par T^*D^n car

$$\begin{aligned} T^*D^n|_{S^{n-1}} &\xrightarrow{\sim} T^*S^{n-1} \times \mathbb{R} \\ (x, v + tx) &\mapsto (x, v, t) \text{ où } \langle v; x\rangle = 0. \end{aligned}$$

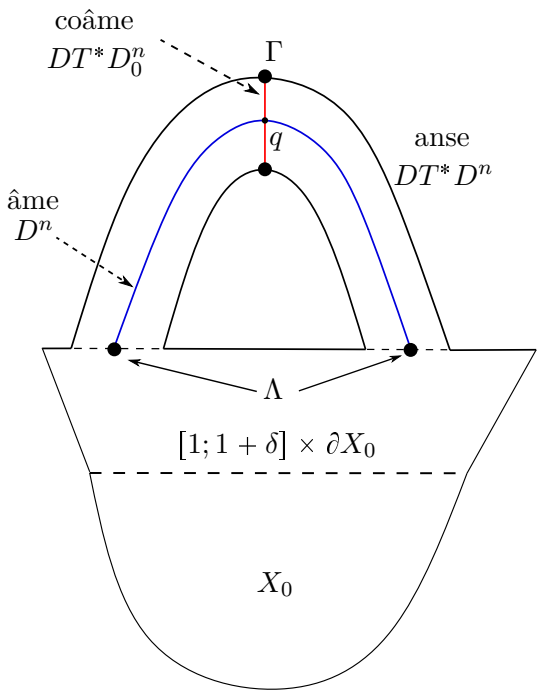


FIGURE 26 – Attachement d'anse sur un domaine de Liouville X_0 le long d'une sphère legendrienne Λ.

On dira alors que la variété obtenue par *attachement d'anse symplectique* sur X_0 le long de Λ est la variété (illustrée en figure 26) :

$$X = X_0 \cup [1;1+\delta]\times\partial X_0 \cup D_\varepsilon T^*D^n$$

où $D_\varepsilon T^*D^n$ est attaché sur $\mathrm{Vois}(\Lambda) \subset \{1+\delta\}\times\partial X_0$. On munit X de la 1-forme de Liouville λ définie par morceaux :

(a) $\lambda = \lambda_{X_0}$ sur X_0,

(b) $\lambda = r\,\lambda_{X_0}|_{\partial X_0}$ sur $[1;1+\delta]_r\times\partial X_0$,

(c) $\lambda = (2pdq + qdp)$ sur $D_\varepsilon T^*D^n$.

Cette forme de Liouville n'est pas lisse mais on la traitera comme si elle l'était dans la suite. On supposera δ très petit de manière à justifier l'approximation suivante : les cordes de Reeb sur $\{1+\delta\}\times\partial X_0$ sont de même longueur que les cordes de Reeb sur $\{1\}\times\partial X$. La constante δ n'apparaîtra pas dans les calculs de longueur de corde de Reeb. Cette approximation n'aura aucun effet quand on calculera l'action hamiltonienne [1]. L'âme de l'anse est la section nulle $L = D^n \subset D_\varepsilon T^*D^n$ et la coâme est $C = D_\varepsilon T_0^*D^n$ de bord

1. L'action hamiltonienne associée à une corde de Reeb est égale à $rh'(r)$ où $h'(r)$ est la longueur de la corde de Reeb. Or si la corde de Reeb se trouve sur la tranche $\{r\}\times Y$, le flot de Reeb est à vitesse $\frac{1}{r}$: l'action hamiltonienne est inchangée.

$\Gamma = S_\varepsilon T_0^* D^n$. On peut maintenant décrire le flot de Reeb sur le bord de X. On remarque que :

$$\partial X = \partial X_0 \backslash \mathrm{Vois}(\Lambda) \cup S_\varepsilon T^* D^n$$

et on dira que ∂X est la variété obtenue par *chirurgie* de ∂X_0 le long de Λ.

Lemme 5.1 (Description du flot de Reeb)**.** *Avant l'attachement d'anse, le flot de Reeb sur ∂X_0 pouvait être décrit comme un flot défini par morceaux :*

1. φ^{R_0} *sur* $\partial X_0 \backslash Vois(\Lambda)$,
2. $(\varphi_\theta^{R_0})(x, v + tx) = (x, v + (t + \theta)x)$ *sur* $Vois(\Lambda) \simeq D_\varepsilon T^* D^n|_{S^{n-1}}$ *où* $\langle v; x\rangle = 0$.

Après l'attachement d'anse, le flot de Reeb sur ∂X peut être décrit comme un flot défini par morceaux :

1. φ^{R_0} *sur* $\partial X_0 \backslash Vois(\Lambda)$,
2. $(\varphi_\theta^{R})(x, w) = (x + \frac{1}{2\varepsilon^2}\theta w, w)$ *sur* $S_\varepsilon T^* D^n$.

On remarque aussi que si le flot de Reeb rentre dans la zone dite de chirurgie en (x, w), on a (qu'on se place avant ou après la chirurgie) :

$$\langle x; w\rangle < 0, x \in S^{n-1} \text{ et } |w| = \varepsilon.$$

Démonstration. On travaille dans $\mathbb{R}^{2n}$ munie de la 1-forme de Liouville

$$\lambda = 2pdq + qdp.$$

On remarque que $S^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ est une hypersurface de contact dans $\mathbb{R}^{2n}$ et que $S^{n-1} \times \{0\}$ est une legendrienne dans $S^{n-1} \times \mathbb{R}^n$. On peut alors montrer [Wei91] qu'il existe un difféomorphisme :

$$\psi : Vois_{\partial X_0}(\Lambda) \simeq S^{n-1} \times D^n_\varepsilon$$

et on peut étendre ψ à un voisinage de Λ dans X_0 à valeurs dans un voisinage de $S^{n-1} \times \{0\}$ dans $\{(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}; |q| \geqslant 1\}$ grâce au flot de Liouville. Avec cet isomorphisme ψ, on attache sur X_0 l'anse $D^n \times D^n_\varepsilon \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Sur la variété de contact $S^{n-1} \times D^n_\varepsilon \subset \mathbb{R}^{2n}$ munie de la forme de contact $2pdq + qdp$, le champ de Reeb vaut :

$$R^{S^{n-1} \times D^n_\varepsilon} = q\frac{\partial}{\partial p}.$$

On vérifie de même que :

$$R^{D^n \times S^{n-1}_\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon^2} p\frac{\partial}{\partial q}.$$

Cela nous donne les formules annoncées. □

Remarque 5.1. On attache une variété à coins sur X_0 ce qui fait que la variété X obtenue par attachement d'anses n'est pas lisse en les coins de rattachement. Cela n'est pas gênant

car on peut toujours lisser l'anse afin qu'elle n'ait pas de coins. Les calculs seront effectués par la suite dans le cadre non lisse pour éviter de s'occuper des petites perturbations.

On va maintenant s'intéresser aux cordes de Reeb reliant Λ avant chirurgie et à leur évolution après attachement d'anse. Une corde de Reeb est un couple (x, T) tel que $x \in \Lambda$ et $\varphi_T^{R_0}(x) = y \in \Lambda$ avec $T > 0$. D'après le lemme 5.1, on sait donc que

$$\varphi_\varepsilon^{R_0}(x) = (x, \varepsilon x) \text{ et } \varphi_{T-\varepsilon}^{R_0}(x) = (y, -\varepsilon y).$$

On suppose de plus qu'on a choisi ε suffisamment petit afin que la corde de Reeb ne passe pas dans la zone $\mathrm{Vois}(\Lambda)$ en dehors des temps $[0; \varepsilon] \cup [T - \varepsilon; T]$. On peut alors décrire le comportement de cette corde après la chirurgie. D'une part on a un segment de Reeb de longueur $T - 2\varepsilon$ qui relie $(x, \varepsilon x)$ à $(y, -\varepsilon y)$ en dehors de la zone de chirurgie et d'autre part :

$$\varphi_{-\theta}^R(x, \varepsilon x) = (x - \frac{\theta}{2\varepsilon}x, \varepsilon x) \text{ et } \varphi_{T-2\varepsilon+\theta}^R(x, \varepsilon x) = \varphi_\theta^R(y, -\varepsilon y) = (y + \frac{\theta}{2\varepsilon} \cdot (-y), -\varepsilon y).$$

En particulier, on remarque que :

$$\varphi_{T+2\varepsilon}^R(0, \varepsilon x) = (0, -\varepsilon y).$$

Donc toute corde de Reeb de Λ dans ∂X_0 induit une corde de Reeb de $\Gamma = S_\varepsilon T^* D^n$ de quasiment même longueur, cette situation est représentée dans la figure 27. Ce fait est un cas particulier du théorème suivant :

Théorème 5.1 (section 6.1 de [BEE12])**.**

Pour tout $\lambda > 0$, si on choisit ε suffisamment petit, alors

(i) les cordes de Reeb de longueur $< \lambda$ reliant Γ dans ∂X sont en bijection avec les mots de longueur $< \lambda$ en les cordes de Reeb de Λ,

(ii) les orbites de Reeb de longueur $< \lambda$ dans ∂X sont en bijection avec :

(a) les mots cycliques de longueur $< \lambda$ en les cordes de Reeb de Λ,

(b) les orbites de Reeb de ∂X_0 de longueur $< \lambda$.

Stratégie de démonstration. On ne va pas prouver ce théorème dans ce manuscrit. Il a été annoncé dans [BEE12] et leur preuve actuellement non publiée a été écrite dans la proposition 2.2.10 de [Rou17] . J'ai aussi prouvé ce résultat dans mon mémoire de Master [PS13] avec une méthode différente. On va présenter les étapes essentielles de cette dernière preuve.

Près de chaque corde c de Reeb de Λ reliant $(x, 0) \in S^{n-1}$ à $(y, 0) \in S^{n-1}$, on sait que $\varphi_{T-2\varepsilon}(x, \varepsilon x) = (y, -\varepsilon y)$. On peut alors considérer l'application P de retour de Poincaré qui établit une bijection entre un voisinage U de $(x, \varepsilon x) \in S_\varepsilon T^* D^{n-1}\big|_{S^{n-1}}$ dans un voisinage

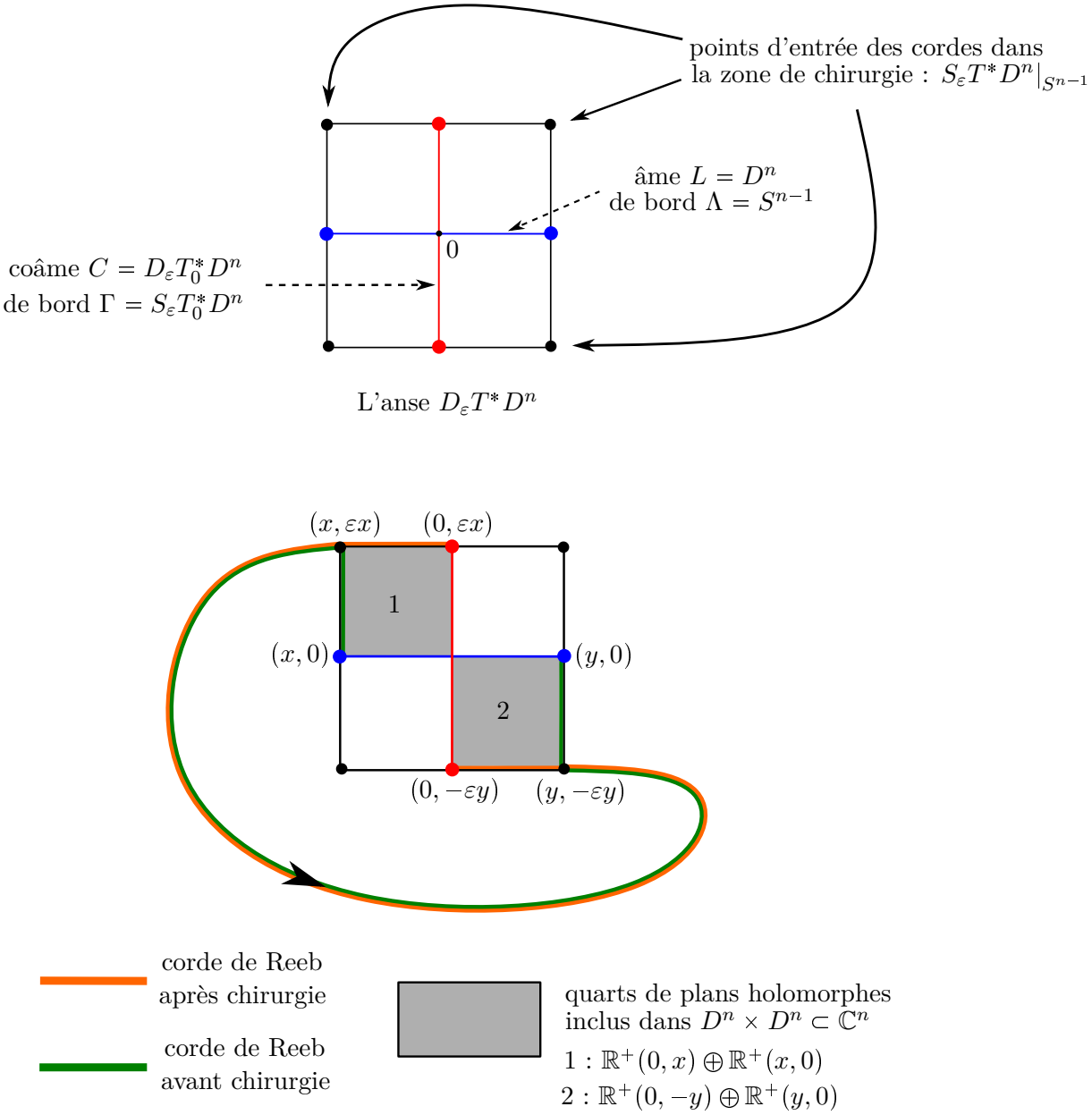


FIGURE 27 – Représentation graphique de l'évolution du champ de Reeb à l'intérieur de l'anse le long d'une corde de Reeb. Afin de ne pas surcharger la figure, on présente l'anse en haut et les cordes de Reeb en bas.

V de $(y, -\varepsilon y) \in S_\varepsilon T^* D^{n-1}\big|_{S^{n-1}}$.

Cette application de retour de Poincaré ne fait intervenir que le flot de Reeb en dehors de la zone de chirurgie donc l'application est invariante sous la chirurgie. De plus, les tailles des voisinages U et V sont indépendantes de ε. Donc si on choisit ε assez petit, on sait que pour tout $u \in S^{n-1}$, $(y, \varepsilon u) \in V$.

Si à partir de ce point $(y, \varepsilon u)$, on continue de suivre le flot de Reeb après la chirurgie (c'est-à-dire le flot géodésique de D^n), on ressortira de $S_\varepsilon T^* D^n$ en $(y + t(y,u)u, \varepsilon u)$ où $t(y,u)$ est l'unique $t > 0$ tel que $|y + t(y,u)u| = 1$. On appelle f l'application qui consiste à suivre le flot de Reeb en partant du voisinage U de $(x, \varepsilon x)$ jusqu'à arriver en V puis de suivre le flot géodésique de $S_\varepsilon T^* D^n$ jusqu'à sortir de la zone de chirurgie :

$$f : U \to S_\varepsilon T^* D^{n-1}\big|_{S^{n-1}}$$

Alors on peut montrer que :

(i) l'application f est hyperbolique,

(ii) l'application f est surjective à 2ε près (c'est-à-dire que pour tout $z \in S_\varepsilon T^* D^{n-1}\big|_{S^{n-1}}$, il existe $x \in U$ tel que $|f(x) - z| \leqslant 2\varepsilon$).

Ces deux propriétés permettent de refermer des mots en cordes de Reeb de Λ en orbite de Reeb ou en cordes de Reeb reliant Γ (cf figure 28). □

Pour tout corde de Reeb κ de Λ, on note $G(\kappa)$ la corde de Reeb de Γ induite par cette corde en appliquant le théorème 5.1. On note de plus que l'âme et la coâme ne s'intersectent qu'en un point qu'on notera q : $C \cap L = \{q\}$. On note $\mathcal{M}^{hol}(G(\kappa); q; \kappa)$ l'espace de modules des disques holomorphes $u : \mathcal{M}(D_{1;2;1}) \to \widehat{X \backslash X_0}$ asymptote près de la pointe positive à $\{+\infty\} \times G(\kappa)$ et près de la pointe négative à $\{0\} \times \kappa$ et où on rappelle que $\widehat{X \backslash X_0} =]0;1] \times \partial X_0 \cup X \backslash X_0 \cup \partial X \times [1; +\infty[$.

Théorème 5.2 (section 6.1 de [BEE12])**.**

L'espace de modules $\mathcal{M}^{hol}(G(\kappa); q; \kappa)$ est réduit à un point. De plus l'indice de Conley-Zehnder de $G(\kappa)$ vaut :

$$CZ_R(G(\kappa)) = CZ_R(\kappa) + n - 2.$$

Stratégie de démonstration. On présente une preuve incomplète de ce théorème sachant qu'il a été annoncé dans [BEE12]. On va juste construire explicitement dans notre modèle non lisse le disque holomorphe (cf figures 27 et 29) et montrer son unicité. On note $(x, 0) \in S^{n-1} = \Lambda$ le point de départ de la corde c et $(y, 0)$ son point d'arrivée. On va construire le disque holomorphe dans $X \backslash X_0$ et il suffira de prendre la complétion cylindrique de ce disque dans $\widehat{X \backslash X_0}$ pour conclure. On rappelle que

$$X \backslash X_0 = D_\varepsilon T^* D^n \cup \partial X_0 \times [1; 1 + \delta].$$

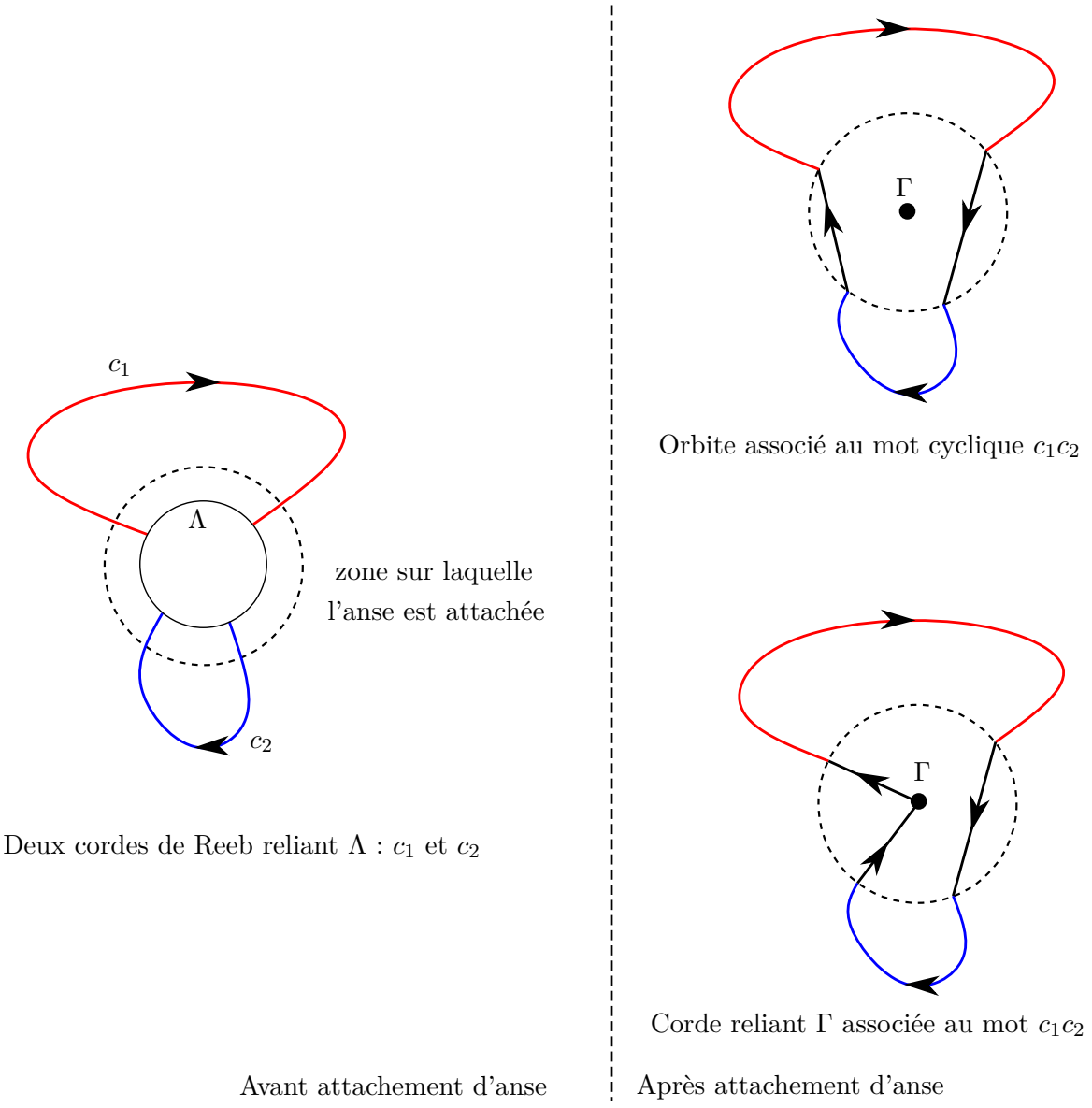


FIGURE 28 – Heuristiquement, quand on rentre dans la zone de chirurgie, quitte à perturber légèrement, on peut ressortir n'importe où. Cela permet de refermer des mots en les cordes de Λ en des cordes de Γ ou en orbites.

On définit D comme la réunion $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ (cf figure 29) où

1. $D_1 = (\mathbb{R}^+(x,0) \times \mathbb{R}^+(0,\varepsilon x)) \cap D_\varepsilon T^* D^n$,
2. $D_2 = \mathbb{R}^+(y,0) \times \mathbb{R}^+(0,-\varepsilon y) \cap D_\varepsilon T^* D^n$,
3. $D_3 = [1;1+\delta] \times \kappa \subset [1;1+\delta] \times \partial X_0$.

D_1 et D_2 sont des quarts de plans holomorphes de $\mathbb{C}^n$ et D_3 est un disque holomorphe car il s'écrit comme un produit d'une corde de Reeb par un intervalle dans une symplectisation. Les disques D_1 et D_2 sont évidemment réguliers (c'est-à-dire que l'équation $du^{0,1} = 0$ vérifie la propriété de transversalité, on pourra voir le lemme 9.24 de [EES05]) et on le lemme 8.2 de [DR16] assure la régularité de D_3.

On a donc construit un disque $D \in \mathcal{M}^{hol}(G(\kappa);q;\kappa)$. L'unicité découle du fait que $G(\kappa)$ et κ ont des actions extrêmement proches et donc nécessairement tout disque de $\mathcal{M}^{hol}$ doit se trouver dans la partie $[1;1+\delta] \times \partial X_0$ dans un voisinage de $[1;1+\delta] \times \kappa$. On peut alors se placer dans des modèles locaux pour vérifier l'unicité.

Le disque est régulier c'est-à-dire que l'équation holomorphe est transverse. Donc l'espace de modules $\mathcal{M}^{hol}$ est de dimension 0. Or un calcul de dimension assure que :

$$\dim \mathcal{M}^{hol}(G(\kappa);q;\kappa) = CZ_R(G(\kappa)) - n - CZ_R(\kappa) + 2.$$

En effet, pour calculer l'indice de l'opérateur de Fredholm, on colle 2 disques de type $o_\pm(c)$ au niveau de chacune des pointes du disque $D \in \mathcal{M}^{hol}(G(\kappa);q;\kappa)$. On trouve donc que :

$$\mathrm{ind}(D) + n - CZ_R(G(\kappa)) + CZ_R(\kappa) + 1 - 2 = 0$$

car $\mathrm{ind}(D_{0;1;0}) = 0$.

$$\text{Donc } \dim \mathcal{M}^{hol}(G(\kappa);q;\kappa) = \mathrm{ind}(D) + 1 = CZ_R(G(\kappa)) - n - CZ_R(\kappa) + 2.$$

Cela nous donne la formule annoncée pour l'indice de Conley-Zehnder de $G(\kappa)$. □

5.2 Homologie symplectique de l'attachement d'anse

On commence par prouver le lemme qui assure qu'on peut utiliser les constructions de F et le théorème 4.10.

Lemme 5.2. *Pour tout hamiltonien $H \in \mathcal{H}(X,X_0)$, il existe une unique corde hamiltonienne reliant L à C. On notera cette corde q.*

Démonstration. En dehors du point d'intersection q, les lagrangiennes L et C vivent dans deux parties distinctes du cobordisme. En effet, heuristiquement : $C\backslash\{q\} \subset]0;+\infty[\times\partial X$ et $L\backslash\{q\} \subset X_0 \cup [1;+\infty[\times\partial X_0$ où on a plongé dans X les parties $]0;1] \times \partial X$ et $[1;+\infty[\times\partial X_0$ via le flot de Liouville. Un hamiltonien $H \in \mathcal{H}(X,X_0)$ ne pourra donc pas créer de nouveaux

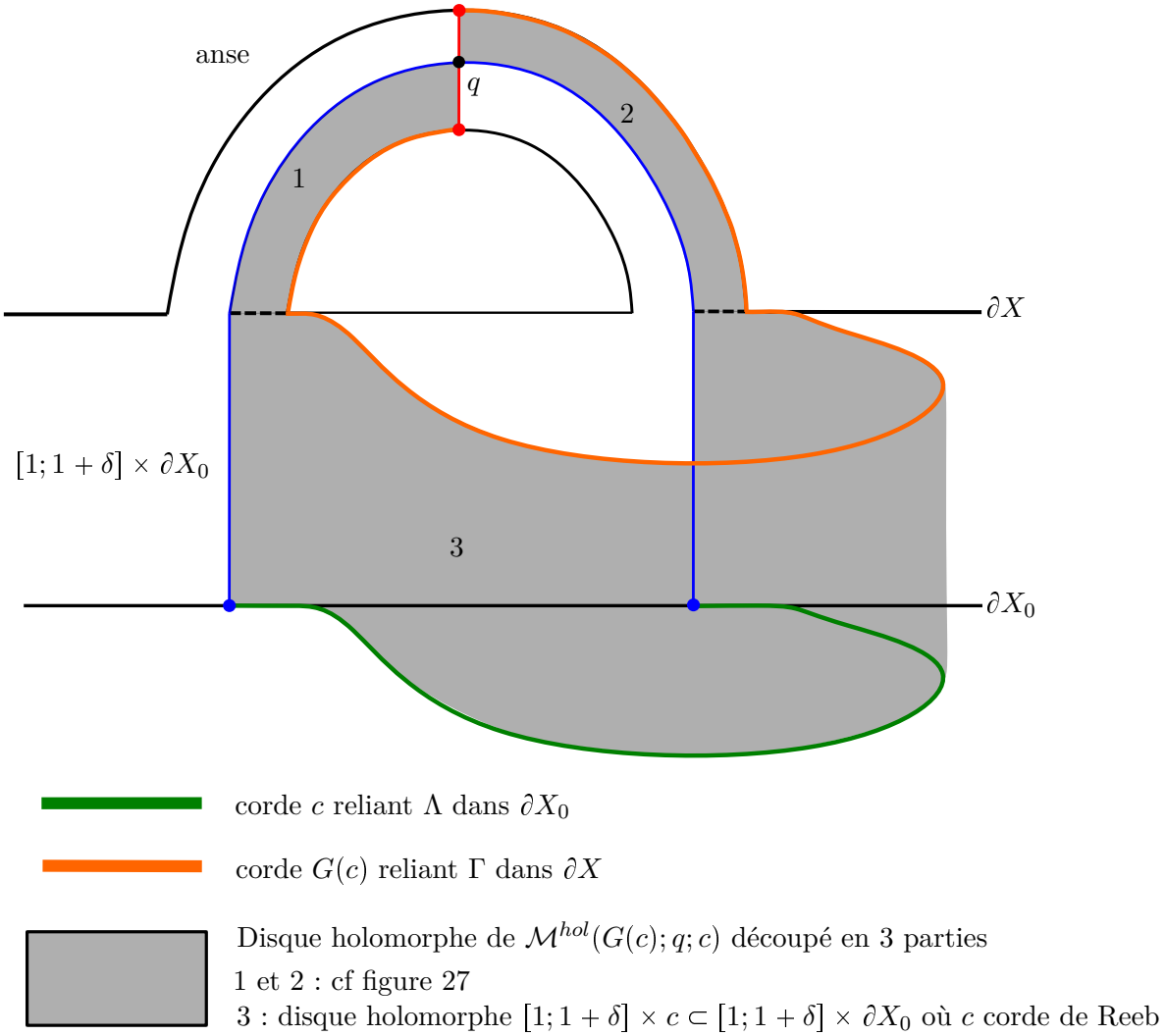


FIGURE 29 – L'unique élément de $\mathcal{M}^{hol}(G(c);q;c)$ est représenté en gris. Il est défini par morceaux et donc non lisse (car le modèle qu'on a choisi pour l'attachement d'anse est non lisse).

points d'intersection autres que le point géométrique q.

En effet un tel hamiltonien est C^2-petit près du point d'intersection de l'âme et de la coâme qui est transverse. On peut donc même assurer que l'unique corde hamiltonienne reliant L à C est arbitrairement proche du point d'intersection si on choisit un H suffisamment petit. □

On se place maintenant dans $(\widehat{X, X_0})$ avec un hamiltonien H de type (X, X_0). On suppose de plus que la sphère Λ sur laquelle on fait un attachement d'anse possède un remplissage L_0 dans X_0. On sait que les cordes hamiltoniennes de C sont en bijection avec les cordes de Reeb de Γ dans ∂X et que les cordes hamiltoniennes de $L \cup L_0$ de type II^- sont en bijection avec les cordes de Reeb de Λ dans ∂X_0. On fixe λ et on choisit un attachement d'anse tel que le théorème 5.1 soit vrai. On a alors le lemme :

Lemme 5.3.

Les générateurs de $FC_*^{\leqslant\lambda, II+}(C, H)$ sont en bijection avec les mots en les cordes de Reeb de Λ dans ∂X_0 de longueur $\leqslant \lambda$.

Les générateurs de $FC_*^{\leqslant\lambda, II-}(L \cup L_0, H)$ sont en bijection avec les cordes de Reeb de Λ.

Théorème 5.3. *Soit c une corde hamiltonienne de $L \cup L_0$ de type II^-. On note $G(c)$ la corde hamiltonienne de C correspondante. Alors le cardinal de l'espace de modules $\mathcal{M}(G(c); q; c)$ est impair et donc égal à 1 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Afin de clarifier la situation, on va se donner des notations. Les différents types de cordes qui apparaitront seront notées de la manière suivante :

(i) κ désigne la corde de Reeb reliant Λ,

(ii) $G(\kappa)$ désigne la corbe de Reeb reliant Γ associée à κ (cf théorème 5.1),

(iii) c_T désigne la corbe hamiltonienne reliant $L \cup L_0$ associée à κ où T est un hamiltonien,

(iv) $G(c_T)$ désigne la corde hamiltonienne reliant C associée à $G(\kappa)$ où T est un hamiltonien.

On sait que $\mathcal{M}^{hol}(G(\kappa); q; \kappa)$ est un ensemble à 1 élément d'après le théorème 5.2. On souhaite montrer que cela implique que $\mathcal{M}(G(c_H); q; c_H)$ est lui aussi de cardinal impair pour $H \in \mathcal{H}(X, X_0)$. Avant de commencer la preuve, on propose de vérifier que $\mathcal{M}(G(c_H); q; c_H)$ est bien de dimension 0 :

$$\dim \mathcal{M}(G(c_H); q; c_H) = CZ(G(c_H)) - n - CZ(c_H) + 1 = CZ_R(G(\kappa)) + 1 - n - CZ_R(\kappa) + 1 = 0$$

où on a utilisé le théorème 3.8 et les formules de la section 2.2.

On va procéder à deux allongements de cous ("neck stretching") successifs illustrés en

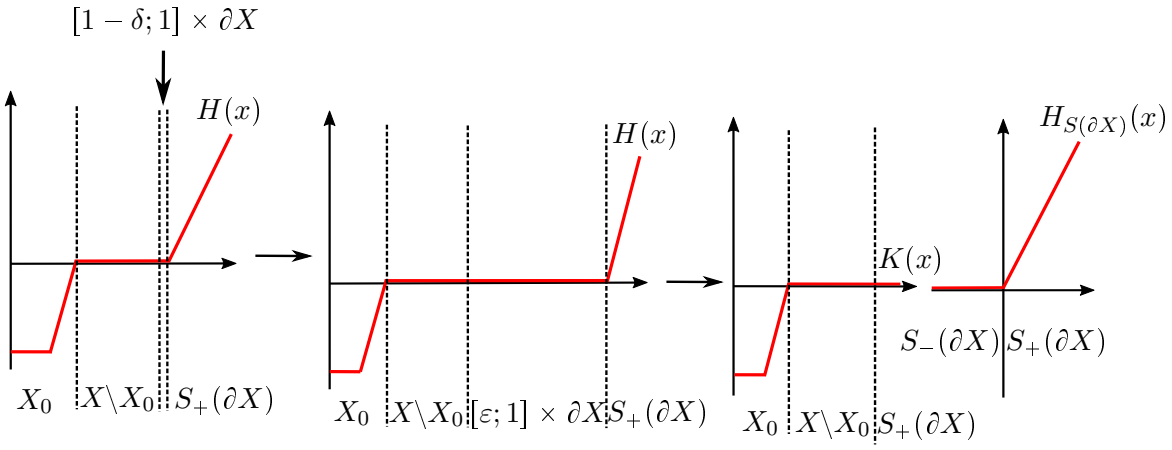


FIGURE 30 – Allongement du cou près de $\{1\}\times\partial X$.

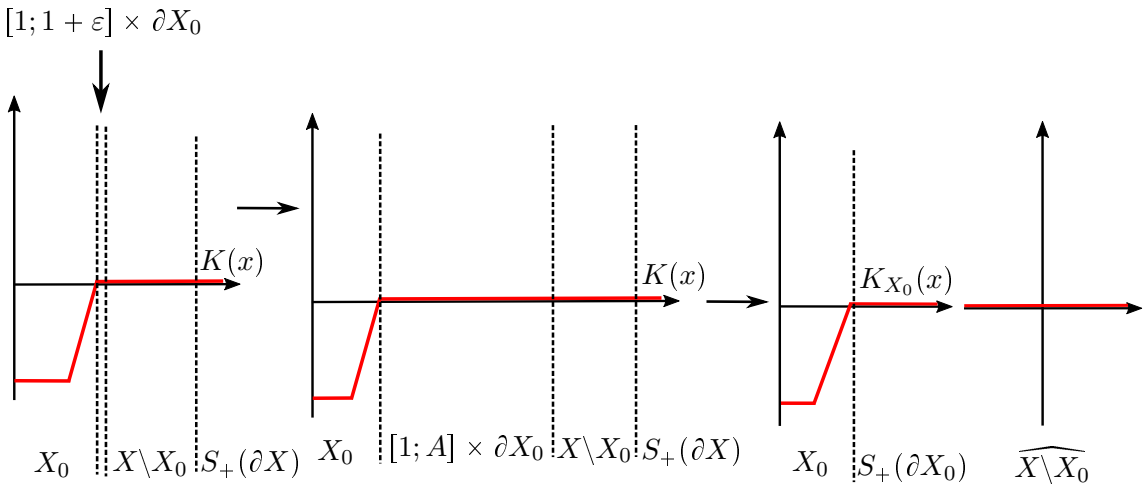


FIGURE 31 – Allongement du cou près de $\{1\}\times\partial X_0$.

figures 30 et 31. Les notations précises seront assez techniques et on invite à se référer aux figures pour visualiser la preuve. On montrera ainsi qu'il existe un cobordisme entre (figure 30) :

$$\mathcal{M}(G(c_H);q;c_H) \text{ et } \mathcal{M}(G(\kappa);q;c_K)\times\mathcal{M}_{hol}^{H_{S_X}}(G(c_{H_{SX}});G(\kappa))$$

et entre (figure 31) :

$$\mathcal{M}(G(\kappa);q;c_K) \text{ et } \mathcal{M}(G(\kappa);q;\kappa)\times\mathcal{M}_{K_{X_0}}^{hol}(\kappa;c_{K_{X_0}}).$$

Procédons au premier allongement de cou. On va décomposer $\widehat{X}$ en plusieurs morceaux et définir sur ces morceaux des structures presques complexes J_1, J_A pour $A\geqslant 1$ et deux hamiltoniens H et K comme indiqué dans le tableau suivant :

zone	H	K	J_1	J_A
$X_0 \backslash]\varepsilon;1] \times \partial X_0$	$\lambda(\varepsilon-1)$	$\lambda(\varepsilon-1))$	J_{X_0}	J_{X_0}
$]\varepsilon;1] \times \partial X_0$	$\lambda(r-1)$	$\lambda(r-1)$	J^0_{cyl}	J^0_{cyl}
$X \backslash ([1-\delta;1] \times \partial X)$	0	0	J_X	J_X
$[1-\delta;1] \times \partial X$	0	0	$J_{\xi_0} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$J_{\xi_0} \oplus \begin{pmatrix} 0 & A \\ -\frac{1}{A} & 0 \end{pmatrix}$
$[1;+\infty[\times \partial X$	μr	0	J^X_{cyl}	J^X_{cyl}

Dans la quatrième ligne du tableau, les structures presques complexes sont écrites dans la décomposition suivante :

$$T([1-\delta;1] \times \partial X) = \xi \oplus \mathbb{R}R^{\partial X} \oplus \mathbb{R}\partial_r.$$

On peut vérifier qu'il existe un isomorphisme :

$$\left([1-\delta;1] \times \partial X_0, J_{\xi_0} \oplus \begin{pmatrix} 0 & A \\ -\frac{1}{A} & 0 \end{pmatrix}\right) \simeq \left([A(1-\delta);A] \times \partial X_0, J_{\xi_0} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Les structures J_A permettent d'allonger le cou situé en $\partial X_0 \times [1-\delta;1]$ et J_1 est juste une structure standard sur $(\widehat{X, X_0})$. Finalement on note $H_{S(\partial X)}$ le hamiltonien défini sur $S(\partial X)$ par :

1. $H(r,y) = 0$ sur $]0;1] \times \partial X$,
2. $H(r,y) = \mu r$ sur $[1;+\infty[\times \partial X$.

On définit l'espace $\mathcal{M}_A(G(c_H);q;c_H)$ comme l'ensemble des couples (D,u) où $D \in \mathcal{M}(D_{1;2;1})$ et

$$u : D \to (\widehat{X, X_0}), \text{ et } (du - X_H \otimes \beta) \circ j + J_A \circ (du - X_H \otimes \beta) = 0$$

avec les conditions asymptotiques :

$$\lim_{z \to z^+} u(z) = \{r_{G(c_H)}\} \times G(c_H) \text{ et } \lim_{z \to z^-} u(z) = \{r\} \times c_H.$$

On pose :

$$\mathcal{M}_{[1;+\infty[}(G(c_H);q;c_H) = \bigcup_{A \in [1;+\infty[} \mathcal{M}_A(G(c_H);q;c_H).$$

Le bord de l'espace $\mathcal{M}_{[1;+\infty[}$ peut être constitué de :

1. dégénérescences de type Floer,
2. dégénérescences dues à la compactification de Deligne-Mumford de $\mathcal{M}(D_{1;2;1})$,
3. dégénérescences quand $A = 1$ ou $A \to +\infty$.

Comme les actions de $G(c_H)$ et c_H sont très proches, on peut interdire les courbes de type 1 et 2. Quand A tend vers l'infini, on voit (cf figure 30) que la courbe se sépare en deux :

$$\mathcal{M}_\infty(G(c_H);q;c_H) = \bigcup_{\kappa' \text{corde de } \Gamma} \mathcal{M}^{hol}(\kappa';q;c_K) \times \mathcal{M}_{hol}^{H_{S(\partial X)}}(G(c_{H_{S(\partial X)}});\kappa').$$

Comme les actions de $G(c_H)$ et c_H sont très proches, la seule corde κ' de Γ qui pourrait apparaître dans $\mathcal{M}_\infty$ est $G(\kappa)$. On obtient finalement :

$$\partial\mathcal{M}_{[1;+\infty[}(G(c_H);q;c_H) = \mathcal{M}(G(c_H);q;c_H) \cup \mathcal{M}^{hol}(G(\kappa);q;c_K) \times \mathcal{M}_{hol}^{H_{S(\partial X)}}(G(c_{H_{S(\partial X)}});G(\kappa)).$$

L'argument dual de celui utilisé pour prouver l'équivalence entre l'algèbre de Chekanov holomorphe et l'algèbre de Chekanov hamiltonienne du théorème 4.3 assure que $\mathcal{M}_{hol}^{H_{S(\partial X)}}(G(c_{H_{S(\partial X)}});G(\kappa))$ est réduit à un élément (cela est une conséquence de [BO09a]). On en déduit donc que :

$$\mathcal{M}(G(c_H);q;c_H) = \mathcal{M}^{hol}(G(\kappa);q;c_K) \bmod 2. \tag{5.1}$$

On peut maintenant procéder au deuxième allongement de cou comme présenté dans la figure 31. On découpe $\widehat{X}$ en :

$$\widehat{X} = X_0 \backslash]\varepsilon;1] \times \partial X_0 \cup]\varepsilon;1] \times \partial X_0 \cup X \backslash]1-\delta;1] \times \partial X \cup]1-\delta;1] \times \partial X \cup S_+(\partial X).$$

On allonge alors le cou en modifiant une structure presque complexe J_1 sur la zone $]1-\delta;1] \times \partial X$ et on définit l'espace $\mathcal{M}_A(G(\kappa);q;c_K)$ comme l'ensemble des couples (D,u) où $D \in \mathcal{M}(D_{1;2;1})$ et

$$u : D \to (\widehat{X,X_0}), \text{ et } (du - X_K \otimes \beta) \circ j + J_A \circ (du - X_K \otimes \beta) = 0$$

avec les conditions asymptotiques :

$$\lim_{z \to z^+} u(z) = \{+\infty\} \times G(\kappa) \text{ et } \lim_{z \to z^-} u(z) = \{1\} \times c.$$

On pose :

$$\mathcal{M}_{[1;+\infty[}(G(\kappa);q;c_K) = \bigcup_{A \in [1;+\infty[} \mathcal{M}_A(G(\kappa);q;c_K).$$

On peut ensuite effectuer l'allongement de cou illustré en figure 31. Les mêmes arguments que précedemment assurent que :

$$\partial_1\mathcal{M}_{[1;+\infty[}(G(\kappa);q;c_K) = \mathcal{M}^{hol}(G(\kappa);q;\kappa) \times \mathcal{M}_{K_{X_0}}^{hol}(\kappa;c_{K_{X_0}}) \cup \mathcal{M}_1(G(\kappa);q;c_K).$$

où K_{X_0} est un hamiltonien de $\mathcal{H}(\varnothing,X_0)$ vérifiant :

1. sur $X_0 \backslash]\varepsilon; 1] \times \partial X_0$, $K_{X_0}(x) = \lambda(\varepsilon - 1)$,
2. sur $]\varepsilon; 1] \times \partial X_0$, $K_{X_0}(x) = \lambda(r - 1)$,
3. sur $S_+(\partial X_0)$, $K(r, y) = 0$.

Or on on sait que les espaces $\mathcal{M}^{hol}(G(\kappa); q; \kappa)$ et $\mathcal{M}^{hol}_{K_{X_0}}(\kappa; c_{K_{X_0}})$ sont constitués d'un élément (cf preuve du théorème 4.3 pour l'étude de l'espace $\mathcal{M}^{hol}_{K_{X_0}}(\kappa; c_{K_{X_0}})$). Cela assure donc que l'espace $\mathcal{M}_1(G(\kappa); q; c_K)$ est de cardinal impair. L'équation (5.1) assure donc que $\mathcal{M}(G(c_H); q; c_H)$ est de cardinal impair. □

Une conséquence du théorème 5.3 est le théorème suivant :

Théorème 5.4.

Supposons que la sphère legendrienne Λ sur laquelle on attache l'anse est remplie par une lagrangienne exacte L_0.

(a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le A_∞-morphisme $F : A^{\leqslant\lambda}(C, H) \to \Omega FC^{\leqslant\lambda}(L_0, H)$ introduit dans le théorème 4.4 est un isomorphisme.

(b) L'application $HH^p(F) : HH(SC(C)) \to HH^p(HCH(\Lambda, L_0))$ est un isomorphisme.

Démonstration. On suit la preuve de la section 6.3 de [BEE12] dans notre cadre hamiltonien. On sait que le morphisme $HH_*(F)$ est la limite directe de morphisme $HH_*(F(H, K))$ où les $F(H, K)$ sont des morphismes de A_∞-algèbres $A^{\leqslant\lambda}(C, H) \to \Omega FC^{\leqslant\lambda}_{II-}(L \cup L_0, K)$. Il suffit donc de montrer que $F_1 : FC^{\leqslant\lambda}_*(C, H) \to \Omega FC^{\leqslant\lambda}_{II-}(L \cup L_0, K)$ est un isomorphisme à H et K fixé puis prendre la limite. On sait que ces deux complexes de chaînes ont les mêmes générateurs avec même action (dès que les pentes de H et K sont suffisamment grandes) et le morphisme F_1 décroit l'action hamiltonienne. Donc ce morphisme est triangulaire supérieure dans la famille génératrice décrite dans le lemme 5.3. On rappelle que cette famille génératrice est l'ensemble des mots en les cordes de Reeb de Λ de longueur $\leqslant \lambda$.

On sait d'après le théorème 5.3 que pour les mots avec un unique élément c, $\langle F(G(c)); c\rangle = 1$[2]. Considérons maintenant un mot à 2 éléments c_1 et c_2. On note $G(c_1, c_2)$ la corde hamiltonienne de C correspondant au mot c_1c_2. Comme on connait les indices de Conley-Zehnder de c_1 et c_2, on sait que l'espace de modules $\mathcal{M}(G(c_1), G(c_2); q; c_1, c_2)$ est de dimension 1 et le bord de cet espace de modules est composé de :

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{M} = &\bigcup_c \mathcal{M}(G(c_1), G(c_2); c) \times \mathcal{M}(c; q; c_1, c_2) \\
&\cup \bigcup_c \mathcal{M}(G(c_1); c) \times \mathcal{M}(c, G(c_2); q; c_1, c_2) \\
&\cup \bigcup_c \mathcal{M}(G(c_2); c) \times \mathcal{M}(G(c_1), c; q; c_1, c_2) \\
&\cup \cdots \cup \mathcal{M}(G(c_2); q; c_2) \times \mathcal{M}(G(c_1); q; c_1)
\end{aligned}$$

Or on sait que l'action des disques dans $\mathcal{M}(G(c_1), G(c_2); q; c_1, c_2)$ est très petite car c_i et $G(c_i)$ ont des actions très proches. On peut donc éliminer la plupart des espaces de modules apparaissant dans l'union ci-dessus. Par exemple, on sait qu'il n'y a pas de cordes c de C avec une action suffisamment proche de $G(c_1)$ pour qu'il y existe un disque de type $\mathcal{M}(G(c_1); c)$ dans le bord de $\mathcal{M}(G(c_1), G(c_2); q; c_1, c_2)$. Après élimination, on voit qu'il ne reste que :

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{M} =& \mathcal{M}(G(c_1), G(c_2); G(c_1, c_2)) \times \mathcal{M}(G(c_1c_2); q; c_1, c_2)\\ &\cup \mathcal{M}(G(c_2); q; c_2) \times \mathcal{M}(G(c_1); q; c_1).\end{aligned}$$

Or on sait que les espaces $\mathcal{M}(G(c_2); q; c_2)$ et $\mathcal{M}(G(c_1); q; c_1)$ sont de cardinaux impairs. Cela implique donc que les espaces $\mathcal{M}(G(c_1c_2); q; c_1, c_2)$ et $\mathcal{M}(G(c_1), G(c_2); c)$ sont aussi de cardinaux impairs. Plus particulièrement, on en déduit que ;

$$\#\mathcal{M}(G(c_1c_2); q; c_1, c_2) = 1[2].$$

On peut appliquer ce raisonnement par récurrence pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $c_1, \dots, c_n$ cordes de Λ :

$$\#\mathcal{M}(G(c_1 \dots c_n); q; c_1, \dots, c_n) = 1[2].$$

En effet, on considère le bord de l'espace de module $\mathcal{M}(G(c_1 \dots c_{n-1}), G(c_n); q; c_1 \dots c_n)$ et on fait le même raisonnement que pour les mots à 2 cordes pour obtenir le résultat voulu. Cela veut dire que tout les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire F_1 sont impairs donc non nuls ce qui implique que F_1 est un isomorphisme de complexe de chaînes. □

On va maintenant s'intéresser aux orbites hamiltoniennes de H et on n'a pas réussi à montrer la conjecture technique suivante sur $SH(X, X_0)$.

Conjecture 5.1. Il existe un hamiltonien $H \in \mathcal{H}(X, X_0)$ tel qu'une famille d'éléments de $FC^{II,\leqslant\lambda}(H)$ soit en bijection avec

$$\{b_1 \dots b_k; b_i \text{ cordes de Reeb de } \Lambda\} \cup \{\widehat{b_1} \dots b_k; b_i \text{ cordes de Reeb de } \Lambda\}.$$

De plus, le sous-complexe engendré par cette famille est un rétracte de $SC(X, X_0)$. On notera ce complexe $SC^n(X, X_0)$ [2].

Idée de démonstration. On travaille sur l'attachement d'anse non lisse présenté dans la section 5.1 et avec un hamiltonien $H \in \mathcal{H}(X)$ indépendant du temps. Dans ce cadre, on sait que les orbites hamiltoniennes est la réunion de S^1-familles d'orbites de Reeb de ∂X et

2. Ce complexe est engendré seulement par les nouvelles orbites hamiltoniennes d'où le n.

de S^1-familles d'orbites de Reeb de ∂X_0. On avait décrit dans le théorème 5.1 les orbites de Reeb de ∂X et on rappelle que cet ensemble est en bijection avec

(a) les orbites de Reeb de ∂X_0,

(b) les mots cycliques en les cordes de Reeb de $\Lambda \subset \partial X_0$.

Quand on a un hamiltonien autonome, on peut le perturber en utilisant des fonctions de Morse afin d'avoir un nombre fini d'orbites hamiltoniennes et non des S^1-familles. Chaque S^1-famille donne alors naissance à une orbite hamiltonienne par point critique de la fonction de Morse choisie [BO09b]. On définit des sous-espaces vectoriels de $SC(X, X_0)$:

(i) $C_-(X_0)$ est l'espace vectoriel engendré par les orbites hamiltoniennes situées en $\{1\} \times \partial X_0$ qui correspondent donc aux orbites de Reeb de ∂X_0,

(ii) $C_+(X_0)$ est l'espace vectoriel engendré par les orbites hamiltoniennes situées en $\{1\} \times \partial X$ qui correspondent aux orbites de Reeb de ∂X de type (a),

(iii) $C_+(X)$ est l'espace vectoriel engendré par les orbites hamiltoniennes situées en $\{1\} \times \partial X$ qui correspondent aux orbites de Reeb de ∂X de type (b).

On va perturber les orbites de Reeb apparaissant dans (i) et (ii) de la même manière afin d'obtenir les mêmes espaces vectoriels $C_-(X_0)[1] \simeq C_+(X_0)$ (le décalage de 1 vient du calcul effectué dans la section 2.2 de l'indice de Conley-Zehnder dans le cas d'un hamiltonien concave). Les orbites de Reeb de type (b) seront perturbées de la manière suivante. On se donne $b_1 \dots b_d$ un mot cyclique en les cordes de Reeb de Λ. On choisit alors une fonction de Morse avec $2d$ points critiques, d maximum et d minimum (un maximum et un minimum pour chaque b_i). On note alors les orbites hamiltoniennes obtenues :

$$b_1 \dots \check{b_i} \dots b_k \text{ et } b_1 \dots \widehat{b_i} \dots b_k.$$

On peut montrer géométriquement que dans la décomposition

$$SC(X, X_0) = C_-(X_0) \oplus C_+(X_0) \oplus C_+(X),$$

la différentielle peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} d_0[1] & f & * \\ 0 & d_0 & * \\ 0 & * & d_{C_+(X)} \end{pmatrix}$$

où f est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale (donc un isomorphisme). En effet, les 0 sont des conséquences de restrictions sur les trajectoires de Floer (on ne peut pas aller $\{1\} \times \partial X_0$ vers $\{1\} \times \partial X$ par le lemme 2.3 de [CO18]). Le fait que f est un isomorphisme vient de la géométrie de l'attachement d'anse choisi : on ordonne les

orbites hamiltoniennes par l'action et on sait que f est triangulaire supérieure car f décroit l'action. De plus les coefficients diagonaux comptent tout simplement les cylindres triviaux car le cobordisme entre ∂X et ∂X_0 est trivial en dehors de la zone d'attachement d'anse.

Une analyse détaillée des coefficients $*$ apparaissant dans cette matrice devrait permettre de perturber le sous-espace vectoriel $C_+(X)$ afin d'obtenir un sous-complexe $SC^n(X)$ qui vérifie les propriétés de la conjecture. □

Remarque 5.2. Les conjectures 4.3 et 5.1 sont similaires et l'analyse qui permettrait de prouver l'une s'appliquerait à l'autre. En effet dans les deux conjectures, on souhaite simplifier un cône en enlevant des générateurs qui semblent s'annuler entre eux.

Dans la conjecture 4.3, on souhaite montrer que l'on peut oublier les cordes reliant les lagrangiennes C_i^X et C_i^0 dans le cône de l'application $SC(\{C_i^X\}_i \cup C) \to SC(\{C_i^0\})$ et se ramener à l'étude de $SC(C, \varnothing)$ car le cobordisme entre C_i^X et C_i^0 est trivial.

De même dans la conjecture 5.1, on souhaite oublier les orbites hamiltoniennes de X_0 (qui ne rencontrent pas la zone de chirurgie) dans $SH(X, X_0)$ et se ramener à l'étude des nouvelles orbites hamiltoniennes de X car le cobordisme est trivial en dehors de la zone de chirurgie.

Théorème 5.5. *[Utilise conjecture 5.1]*

On suppose qu'on attache l'anse le long d'une legendrienne possédant un remplissage lagrangien exact. L'application

$$H_*(\mathcal{OC}) : HH_*(SC(C)) \to SH(X, X_0)$$

entre l'homologie de Hochschild de la coâme et l'homologie symplectique relative de l'attachement d'anse est un isomorphisme.

Démonstration. On sait que $H_*(\mathcal{CO}) \circ H_*(\mathcal{OC}) : HH^*(SC(C)) \to HH_*^p(\Omega SC(L \cup L_0))$ est un isomorphisme en combinant les théorèmes 4.10 et 5.4. On sait de plus que $HH_*^p(\Omega SC(L))$ est l'homologie d'un complexe engendré par la famille

$$\{b_1 \dots b_k; b_i \text{ cordes de Reeb de } \Lambda\} \cup \{\widehat{b_1} \dots b_k; b_i \text{ cordes de Reeb de } \Lambda\}.$$

Donc si on intercale via la rétraction le complexe $SC^n(X, X_0)$ dans le diagramme commutatif entre les complexes de chaînes, on obtient le diagramme suivant qui commute à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
CC_*(SC(C)) \arrow[rr, "CC_*^p(F)"] \arrow[dr, "\mathcal{OC}"] \arrow[ddr, "p\circ\mathcal{OC}"'] & & CC_*^p(\Omega SC(L \cup L_0)) \\
& SC(X, X_0) \arrow[ur, "\mathcal{CO}"] \arrow[d, shift left, "p"] & \\
& SC^n(X, X_0) \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[uur, "\mathcal{CO}\circ i"'] &
\end{tikzcd}$$

Or on sait que les complexes $CC_*^p(\Omega SC(L \cup L_0))$ et $SC^n(X, X_0)$ ont les mêmes familles génératrices avec mêmes actions hamiltoniennes. Via l'isomorphisme $CC_*^p(F)$, on peut transférer cette famille génératrice à $CC_*(SC(C))$ pour obtenir un sous-complexe quasi-isomorphe. On obtient ainsi un diagramme commutatif entre trois complexes de chaînes avec la même famille génératrice et donc les morphismes peuvent être représentés par des matrices carrées. Or vu que toutes les applications décroissent l'action, on sait que les matrices sont triangulaires supérieures dans la famille génératrice choisie. On a montré que $CC_*^p(F)$ avait des 1 sur la diagonale dans le théorème 5.4, cela implique donc que $p \circ \mathcal{OC}$ et $\mathcal{CO} \circ i$ sont des isomorphismes entre les complexes de chaînes. C'est ce qu'il fallait démontrer. □

Avec le critère d'Abouzaid [Abo10], on peut alors montrer le théorème de split-génération suivant :

Théorème 5.6. *[Utilise conjectures 4.3 et 5.1]*

Si X est obtenu à partir de D^{2n} via des attachements d'anses successifs le long de legendriennes remplies par des lagrangiennes exactes, alors l'ensemble des coâmes de ces attachements d'anse split-engendrent la catégorie de Fukaya de X.

Démonstration. On note $C_1, \dots C_n$ les coâmes et on va effectuer une récurrence sur n. S'il y a un unique attachement d'anse de coâme C_1, on sait que

$$SH(D^{2n}) = 0 \text{ et } SH(X, D^{2n}) \simeq SH(X).$$

Or on a montré que

$$H_*(\mathcal{OC}) : HH_*(SC(C)) \to SH(X, D^{2n}) \simeq SH(X)$$

est un isomorphisme. Cela implique donc, en utilisant le critère de split-génération de [Abo10], que C split-engendre la catégorie de Fukaya de X.

On raisonne ensuite par récurrence sur le nombre d'attachement d'anses. Soit X_0 obtenu par attachement d'anses successifs à partir de D^{2n} avec coâmes $C_1, \dots, C_n$. On sait par l'hypothèse de récurrence que $C_1, \dots, C_n$ split-engendrent la catégorie de Fukaya. On attache alors sur X_0 une anse de coâme C et on note X le domaine de Liouville ainsi obtenu. On peut maintenant écrire le diagramme commutatif à homotopie près entre les suites exactes longues d'homologie de la conjecture 4.3 :

$$\begin{tikzcd}
HH_*(SC(C, \varnothing)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{OC}(X,X_0)"] & HH_*(SC(\{C_1, \dots, C_n, C\})) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{OC}(X)"] & HH_*(SC(\{C_1, \dots, C_n\})) \arrow[d, "\mathcal{OC}(X_0)"] \\
SH(X, X_0) \arrow[r] & SH(X) \arrow[r] & SH(X_0)
\end{tikzcd}$$

Comme $C_1, \dots C_n$ split-engendrent la catégorie de Fukaya de X_0, $\mathcal{OC}(X_0)$ est un isomor-

phisme. Le théorème 5.5 assure que $\mathcal{OC}(X, X_0)$ est aussi un isomorphisme. On conclue donc que $\mathcal{OC}(X)$ est un isomorphisme par le lemme des cinq. En appliquant le critère de split-génération, cela finit la récurrence et donc la preuve du théorème. □

Remarque 5.3. On remarque qu'on montre indépendamment des conjectures 5.1 et 4.3 le théorème de split-génération quand il y a un unique attachement d'anse critique. Si on applique ce résultat à T^*X muni d'une décomposition en anse adaptée, cela fournit une nouvelle preuve du fait que pour toute variété compacte X, T^*_xX split-engendre la catégorie de Fukaya de T^*X, résultat déjà prouvé dans [Abo11].

Chapitre 6

Variétés de Brieskorn-Pham

On rappelle que si 0 est un point critique (aussi appelé une *singularité* dans ce cadre) d'une fonction holomorphe $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$, on peut définir :

1. la fibre de Milnor de la singularité qui est une variété de Stein,
2. le lien de la singularité qui est une variété de contact et le bord de la fibre de Milnor,
3. le squelette de la fibre de Milnor.

En dimension 2, A'Campo ([A'C09] et [A'C03]) montre qu'on peut décrire un flot particulier sur le squelette d'une singularité réelle qu'il appelle flot de billard et que ce flot correspond au flot de Reeb sur le lien de la singularité. Le but de ce chapitre est de démontrer une généralisation de ce fait en dimension supérieure dans le cadre des variétés de Brieskorn-Pham.

Soient $a_0, \dots, a_n$ des entiers supérieurs à 2. On rappelle que le lien de la singularité de $f(z_0, \dots, z_n) = \sum_{i=0}^n z_i^{a_i}$ en 0 s'appelle la variété de Brieskorn-Pham. Le squelette de la singularité est homéomorphe au joint $J = \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$ défini par Milnor [Mil56] :

$$\begin{aligned} J &= \left\{ x_0\varepsilon_0 \oplus \cdots \oplus x_n\varepsilon_n ; x_i \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \varepsilon_i \in \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z} \text{ et } \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\}. \qquad (6.1) \\ &= \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z} \times \Delta/\sim \ \text{ où } (\varepsilon, x) \sim (\varepsilon', x') \text{ ssi } \forall i, \begin{cases} \text{soit } (\varepsilon_i, x_i) = (\varepsilon_i', x_i'), \\ \text{soit } x_i = x_i' = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dans la deuxième ligne Δ désigne le simplexe standard : $\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} ; \sum_{i=0}^n x_i = 1\}$. On va proposer une construction naturelle du cotangent de J et d'un flot de billard (qu'on appellera géodésique) sur J. Si on admet la conjecture 6.2, on démontre le théorème suivant :

Théorème 6.1 (Utilise conjecture 6.2)**.**

La fibre de Milnor M_f^a est difféomorphe à la variété DT^*J où J est le joint $\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$. Via ce difféomorphisme, le flot de Reeb sur ∂M_f^a est envoyé sur le flot géodésique de ST^*J.

De plus le difféomorphisme construit ci-dessus généralise le difféomorphisme standard qui identifie la fibre de Milnor M_f^a et T^*S^n quand $a_0 = \cdots = a_n = 2$.

Ce théorème appelle la généralisation suivante :

Conjecture 6.1. [A'C09]

Soit W une fibre de Milnor dont le squelette S est une variété branchée. Alors on peut munir le squelette S de structures supplémentaires qui permettent de reconstruire la variété W. La définition d'un flot de billard sur S ferait partie de ces structures supplémentaires.

Précisons ce qu'on entend par la fibre de Milnor M_f^a car la définition est non standard. On va donner deux définitions différentes de la fibre de Milnor de la fonction $f(z) = \sum_{i=0}^n z_i^{a_i}$. Les articles [Mil68] et [KvK16] définissent la fibre de Milnor M_f de la manière suivante :

$$M_f = \left\{ (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}; \begin{cases} \sum_{i=0}^n z_i^{a_i} \in \mathbb{R}^{+*} \\ \sum_{i=0}^n |z_i|^2 = 1 \end{cases} \right\}. \tag{6.2}$$

Le bord de M_f est égal à $f^{-1}(\{0\}) \cap S^{2n+1}$ et correspond à la variété de Brieskorn-Pham.

Pour des raisons de symétries, on va plutôt considérer la variété $M_f^a = f^{-1}(\mathbb{R}^{+*}) \cap S_a^{2n+1}$ où S_a^{2n+1} est une sphère à poids c'est-à-dire $S_a^{2n+1} = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}; \sum_{i=0}^n |z_i|^{a_i} = 1\}$. La définition de la fibre de Milnor M_f^a devient alors :

$$M_f^a = \left\{ (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}; \begin{cases} \sum_{i=0}^n z_i^{a_i} \in \mathbb{R}^{+*} \\ \sum_{i=0}^n |z_i|^{a_i} = 1 \end{cases} \right\}. \tag{6.3}$$

Dans la première section, on va essayer de définir une structure symplectique sur M_f^a et identifier clairement les problèmes qui apparaissent. La seconde section décrit une construction de S^n en union de simplexes (les octants de la sphère) et introduit la définition du flot de billard sur un simplexe sphérique. Dans la troisième section, on construit DT^*J et un flot qu'on appelle géodésique sur l'espace topologique J. On explicite ensuite la bijection entre DT^*J et M_f dans la quatrième section et on vérifiera que le flot de Reeb sur ∂M_f correspond bien au flot géodésique sur ST^*J via cette bijection.

6.1 Fibre de Milnor déformée

On souhaite munir la fibre de Milnor M_f^a d'une structure de domaine de Liouville et le bord de la fibre d'une structure de contact dont on précisera la forme de contact et le champ de Reeb. On sait ([Gei08], chapitre 7 et [KvK16]) que sur le domaine de Liouville M_f, le flot de Reeb induit sur ∂M_f (voir définition en (6.2)) est donné par la formule :

$$\varphi_T^R(z_0, \dots, z_n) = (e^{\frac{it}{a_0}} z_0, \dots, e^{\frac{it}{a_n}} z_n). \tag{6.4}$$

Conjecture 6.2. Il existe une 1-forme de Liouville sur M_f^a tel que le flot de Reeb sur ∂M_f^a soit donné par la formule (6.4).

La conjecture signifie qu'on peut modifier la variété M_f en la variété M_f^a tout en gardant le même flot de Reeb sur le bord contact. On va présenter maintenant des calculs partiels qui utilisent des formes de Liouville et symplectiques singulières pour retrouver la formule (6.4).

Preuve incomplète. On travaille dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et on considère la forme symplectique à poids $\omega_a = \frac{i}{4}\sum_{j=0}^n a_j^2 |z_j|^{a_j-2} dz_j \wedge d\bar{z}_j$ et la forme de Liouville $\lambda_a = \frac{i}{4}\sum_{j=0}^n a_j |z_j|^{a_j-2}(z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j)$. On ne se préoccupera pas des singularités de ces formes sur les hyperplans $\{z_j = 0\}$ dans la suite de cette preuve car je ne sais actuellement pas comment les gérer. On rappelle la formule suivante :

$$d(|z|^\alpha) = \frac{\alpha}{2}|z|^{\alpha-2}(z d\bar{z} + \bar{z} dz).$$

Vérifions dans un premier temps que λ_a est une forme de Liouville de $\mathbb{C}^{n+1}$ pour ω_a c'est-à-dire que $d\lambda_a = \omega_a$:

$$\begin{aligned}
d\lambda_a &= \frac{i}{4}\sum_{j=0}^n a_j d(|z_j|^{a_j-2}) \wedge (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) + a_j |z_j|^{a_j-2} d(z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) \\
&= \frac{i}{4}\sum_{j=0}^n \frac{a_j(a_j-2)}{2}|z_j|^{a_j-4}(z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j) \wedge (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j) + 2a_j |z_j|^{a_j-2} dz_j \wedge d\bar{z}_j \\
&= \frac{i}{4}\sum_{j=0}^n a_j^2 |z_j|^{a_j-2} dz_j \wedge d\bar{z}_j = \omega_a.
\end{aligned}$$

Vérifions maintenant que ω_a est bien une forme symplectique quand on la restreint à $M_f = f^{-1}(\mathbb{R}^{+*}) \cap S_a^{2n+1}$. On note

$$g(z) = \mathrm{Im}(f(z)) = \frac{1}{2i}\sum_{j=0}^n z_j^{a_j} - \bar{z}_j^{a_j} \text{ et } h(z) = \sum_{j=0}^n |z_j|^{a_j}.$$

On remarque alors que $M_f = g^{-1}(\{0\}) \cap h^{-1}(\{1\})$ et $(M_f, \omega_a|_{M_f})$ est une variété symplec-

tique si et seulement si

$$dh(X_g) = -dg(X_h) = \omega_a(X_g, X_h) \neq 0 \text{ où } \begin{cases} \omega_a(X_g, \cdot) = -dg, \\ \omega_a(X_h, \cdot) = -dh. \end{cases}$$

En effet $T(g^{-1}(0) \cap h^{-1}(1))^{\perp_\omega} = Vect(X_g, X_h)$ et si $dg(X_h) \neq 0$, alors $X_h \notin T(g^{-1}(0) \cap h^{-1}(1))$ et de même pour X_g. Or on calcule que :

$$dh = \sum_{j=0}^{n} d(|z_j|^{a_j}) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{2} |z_j|^{a_j-2}(z_j d\bar{z_j} + \bar{z_j} dz_j).$$

$$\text{Et donc } X_h = i \sum_{j=0}^{n} \frac{2}{a_j} \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z_j}} \right).$$

$$\text{Or } dg = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} a_j (z_j^{a_j-1} dz_j - \bar{z_j}^{a_j-1} d\bar{z_j})$$

et donc

$$dg(X_h) = \sum_{j=0}^{n} z_j^{a_j} + \bar{z_j}^{a_j} = 2\mathrm{Re}(f(z)) > 0.$$

Et donc (M_f^a, λ_a) est bien un domaine de Liouville. Le bord à l'infini de M_f^a est $S_a^{2n+1} \cap f^{-1}(\{0\})$ et on peut vérifier que :

$$R = i \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{a_j} \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z_j}} \right)$$

est le champ de Reeb sur ∂M_f c'est-à-dire que $i_R \lambda_a = 1$ et $i_R d\lambda_a = 0$ où $\alpha = \lambda_a|_{\partial M_f^a}$ sur ∂M_f^a. Le flot de R est alors :

$$\varphi_T^R(z_0, \ldots, z_n) = (e^{\frac{it}{a_0}} z_0, \ldots, e^{\frac{it}{a_n}} z_n). \quad \square$$

6.2 Premier exemple

Pour illustrer ce qu'on va faire dans le cas général, on va commencer par donner une description assez compliquée de la sphère S^n, de son espace tangent et de son flot géodésique. On va découper la sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en 2^{n+1} octants via les signes comme illustré dans la figure 32. On note Δ^n le simplexe sphérique standard :

$$\Delta^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}; \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\}.$$

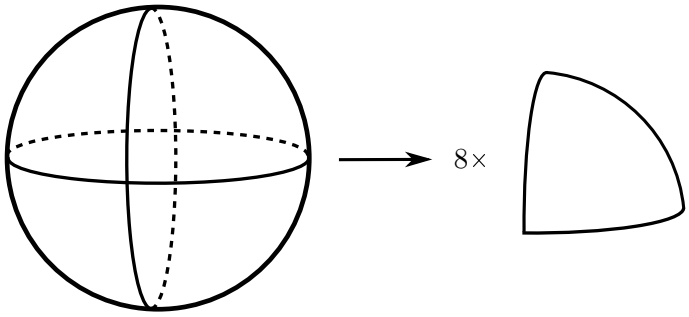


FIGURE 32 – Découpage de la sphère en octant

On définit alors la sphère découpée en octant comme :

$$S^{oct} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1} \times \Delta^n/\sim \text{ où } (\varepsilon, x) \sim (\varepsilon', x') \text{ si } \forall i, \begin{cases} \text{soit } (\varepsilon_i, x_i) = (\varepsilon'_i, x'_i), \\ \text{soit } x_i = x'_i = 0. \end{cases}$$

On remarque qu'il existe une bijection :

$$\begin{aligned} S^n &\to S^{oct} \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (\mathrm{sgn}(x_0), \dots, \mathrm{sgn}(x_n), |x_0|, \dots, |x_n|). \end{aligned}$$

On peut définir l'espace tangent de S^{oct} de la manière suivante :

$$TS^{oct} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n+1} \times T\Delta^n/\sim \text{ où } (\varepsilon, x, v) \sim (\varepsilon', x', v') \text{ si } \forall i, \begin{cases} \text{soit } x_i = x'_i, v_i = v'_i \text{ et } \varepsilon_i = \varepsilon'_i, \\ \text{soit } x_i = x'_i = 0 \text{ et } \varepsilon_i v_i = \varepsilon'_i v'_i. \end{cases}$$

La bijection $S^n \longrightarrow S^{oct}$ se prolonge en une bijection :

$$\begin{aligned} TS^n &\to TS^{oct} \\ (x_0, \dots, x_n, v_0, \dots, v_n) &\mapsto (\mathrm{sgn}(x_0), \dots, \mathrm{sgn}(x_n), |x_0|, \dots, |x_n|, \mathrm{sgn}(x_0)v_0, \dots, \mathrm{sgn}(x_n)v_n). \end{aligned}$$

On peut alors définir le flot géodésique sur TS^{oct} comme l'image du flot géodésique de S^n via cette application comme illustré en figure 33. En fait, le flot géodésique de TS^{oct} est un cas particulier d'un *flot de billard avec comptage* comme défini ci-dessous.

Définition 6.1. On définit le *flot de billard* sur le simplexe sphérique $\Delta \subset S^n$ comme la projection du flot géodésique de S^n via l'application :

$$\begin{aligned} \pi : TS^n &\longrightarrow T\Delta^n \\ (x_0, \dots, x_n, v_0, \dots, v_n) &\mapsto (|x_0|, \dots, |x_n|, \mathrm{sgn}(x_0)v_0, \dots, \mathrm{sgn}(x_n)v_n) \end{aligned}$$

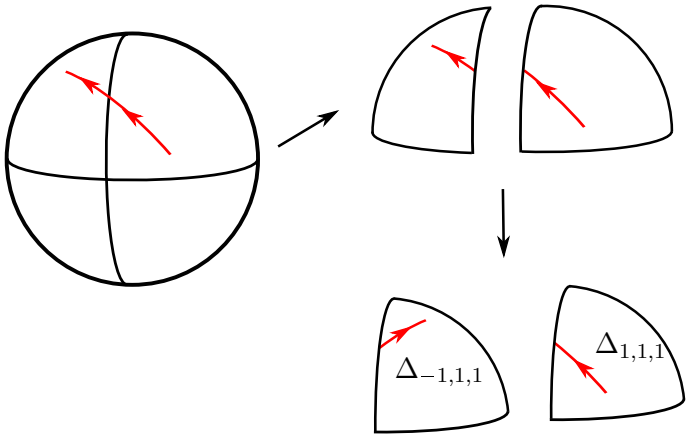


FIGURE 33 – Découpage du flot géodésique selon les octants.

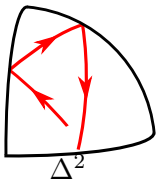


FIGURE 34 – Flot de billard sur un simplexe sphérique.

Le *flot de billard avec comptage* est l'application

$$\begin{aligned}\varphi_t :& ST\Delta \to \mathbb{Z}^{n+1} \times ST\Delta \\ & (x,v) \mapsto (a_0(t,x,v),\dots,a_n(t,x,v),\varphi_t^{billard}(x,v))\end{aligned}$$

où $a_i(t,x,v)$ compte le nombre de fois où le flot de billard a "rebondi" sur la face i.

Le lemme suivant est juste une conséquence triviale de ces définitions (cf figures 34 33).

Lemme 6.1. *Le flot géodésique de STS^{oct} est exactement le flot de billard de Δ avec comptage dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

On va s'inspirer de cette description de la sphère en réunion d'octants pour les définitions qui vont suivre : on définira des objets avec non plus 2^{n+1} octants mais $a_0 \dots a_n$ octants.

6.3 Cotangent du squelette

Prenons $a_0,\dots,a_n$ des entiers supérieurs à 2. On remarque qu'il existe un homéomorphisme :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/a_0\mathbb{Z} \times \dots \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z} \times \Delta/\sim \longrightarrow \mathbb{Z}/a_0\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z} \\ (\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n,x_0,\dots,x_n) \mapsto x_0^2\varepsilon_0 \oplus \dots \oplus x_n^2\varepsilon_n\end{aligned}$$

On va donc suivre l'exemple de S^{oct} pour définir l'espace tangent de J et le flot géodésique de J où J désigne le joint $\mathbb{Z}/a_0\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$. On définit l'espace tangent du joint J par :

$$TJ = \mathbb{Z}/a_0\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z} \times T\Delta/\sim$$

$$\text{où } (\varepsilon, x, v) \sim (\varepsilon', x', v') \text{ si } \forall i, \begin{cases} \text{soit } (\varepsilon_i, x_i, v_i) = (\varepsilon'_i, x'_i, v'_i), \\ \text{soit } x_i = x'_i = 0, v_i = v'_i = 0, \\ \text{soit } x_i = x'_i = 0, v_i = -v'_i \neq 0 \text{ et } \varepsilon'_i = \varepsilon_i + \operatorname{sgn}(v_i). \end{cases} \tag{6.5}$$

On peut comprendre le joint J comme une sphère dans un espace à $n+1$ dimensions où la j-ième composante a a_j signes différents indicés par $\mathbb{Z}/a_j\mathbb{Z}$.

Définition 6.2. Le flot géodésique de J est défini comme le flot de billard Δ avec comptage dans $\mathbb{Z}/a_0\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$.

On a donc défini un flot $\varphi_t^{geo} : STJ \to STJ$ qu'on appellera le *flot géodésique de* ST^*J (on se permet d'identifier STJ et ST^*J car on a choisi une métrique sphérique sur le joint).

6.4 Flot de Reeb et flot géodésique

On va ici donner la formule de $\varphi : M_f^a \to DTJ$ qui réalise l'homéomorphisme entre la fibre de Milnor M_f^a (formule (6.3)) et DTJ comme défini dans la section 6.3. Il est intéressant de remarquer que dans la définition de M_f^a, seul $z_j^{a_j}$ apparait et jamais z_j en tant que tel. Or si on connait $z_j^{a_j}$, il y a a_j antécédents possibles pour z_j qui correspondent aux a_j signes dont on parlait précédemment. Cela est à l'origine de la formule que l'on va donner ci-dessous.

Prenons $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ et écrivons chaque z_j sous la forme :

$$z_j = r_j e^{i\theta_j} e^{\frac{2i\varepsilon_j \pi}{a_j}} \text{ où } \begin{cases} r_j \in \mathbb{R}^+, \\ \theta_j \in [-\frac{\pi}{a_j}; \frac{\pi}{a_j}], \\ \text{et } \varepsilon_j \in \mathbb{Z}/a_j\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} M_f^a &\longrightarrow DT^*J \\ \psi : \begin{pmatrix} r_0 e^{i\theta_0} e^{\frac{2i\varepsilon_0\pi}{a_0}} \\ \vdots \\ r_n e^{i\theta_n} e^{\frac{2i\varepsilon_n\pi}{a_n}} \end{pmatrix} &\longmapsto \left(\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_0^{\frac{a_0}{2}} \cos\left(\frac{a_0\theta_0}{2}\right) \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_n^{\frac{a_n}{2}} \cos\left(\frac{a_n\theta_n}{2}\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_0^{\frac{a_0}{2}} \sin\left(\frac{a_0\theta_0}{2}\right) \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_n^{\frac{a_n}{2}} \sin\left(\frac{a_n\theta_n}{2}\right) \end{pmatrix} \right)_\varepsilon \text{ où } \alpha = \sum_{i=0}^n z_j^{a_j}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Lemme 6.2. *La fonction ψ définie en (6.7) est bien définie, continue et bijective.*

Démonstration. Notons $(\varepsilon_j, x_j, v_j) = \psi_j(z)$. Pour vérifier que ψ est bien définie, il faut vérifier que ψ ne dépend pas du choix de l'écriture $z_j = r_j e^{i\theta_j} e^{\frac{2i\varepsilon_j \pi}{a_j}}$ et que $\psi(z) \in DT^*\Delta_\varepsilon$, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n x_j^2 = 1, \\ \sum_{j=0}^n x_j v_j = 0, \\ \sum_{j=0}^n v_j^2 \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{sachant que} \quad \begin{cases} \sum_{j=0}^n r_j^{a_j} \cos(a_j\theta_j) = \alpha, \\ \sum_{j=0}^n r_j^{a_j} \sin(a_j\theta_j) = 0 \\ \sum_{j=0}^n r_j^{a_j} = 1. \end{cases} \tag{6.8}$$

Pour la non unicité de l'écriture de $z_j = r_j e^{i\theta_j} e^{\frac{2i\varepsilon_j \pi}{a_j}}$, on voit que le cas $r_j = 0$ correspond au cas $t_j = v_j = 0$ dans (6.5) et que le cas $\theta_j \in \{\frac{-\pi}{a_j}; \frac{\pi}{a_j}\}$ correspond au dernier cas d'équivalence dans (6.5).

Vérifions maintenant les équations (6.8) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n x_j^2 &= \frac{2}{1+\alpha} \sum_{j=0}^n r_j^{a_j} \cos^2\left(\frac{a_j\theta_j}{2}\right) = \frac{2}{1+\alpha} \sum_{j=0}^n r_j^{a_j} \frac{1+\cos(a_j\theta_j)}{2} = 1, \\ \sum_{j=0}^n x_j v_j &= \frac{2}{1+\alpha} \sum_{j=0}^n r_j^{a_j} \cos\left(\frac{a_j\theta_j}{2}\right) \sin\left(\frac{a_j\theta_j}{2}\right) = \frac{2}{1+\alpha} \sum_{j=0}^n r_j^{a_j} \sin(a_j\theta_j) = 0, \\ \sum_{j=0}^n v_j^2 &= \frac{2}{1+\alpha} \sum_{j=0}^n r_j^{a_j} \sin^2\left(\frac{a_j\theta_j}{2}\right) = \frac{2}{1+\alpha} \sum_{j=0}^n r_j^{a_j} \frac{1-\cos(a_j\theta_j)}{2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}. \end{aligned}$$

La continuité de ψ découle directement des vérifications ci-dessus concernant la bonne définition de ψ et de la topologie quotient.

On pourrait donner la formule de l'application inverse de ψ pour montrer que ψ est bien bijective mais on va plutôt montrer comment on reconstruit z à partir de $\psi(z)$. Supposons $\psi(z) = (\varepsilon, x, v)$ connu et essayons de retrouver z. On sait qu'on peut retrouver $f(z) = \alpha$ en calculant $|v|^2$. Ainsi, on connait le couple $\left(r_j^{\frac{a_j}{2}} \cos\left(\frac{a_j\theta_j}{2}\right), r_j^{\frac{a_j}{2}} \sin\left(\frac{a_j\theta_j}{2}\right)\right)$ et ε_j. Cela suffit pour connaître de manière unique z_j. □

Remarque 6.1. La fonction ψ identifie le squelette $J \subset DT^*J$ avec l'ensemble des $z \in S_a$ tels que pour tout j, z_j est proportionnel à une racine j-ième de l'unité, c'est à dire avec l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^n, \sum z_j^{a_j} = \sum |z_j|^{a_j} = 1\}$.

L'ensemble STJ est quant à lui identifié avec ce qu'on appelle le lien de la singularité $f^{-1}(\{0\}) \cap S_a$.

Lemme 6.3. *L'homéomorphisme ψ envoie le flot donné par la formule (6.4) de ∂M_f^a sur le flot géodésique de STJ.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $t \in \mathbb{R}^+$ suffisamment petit tel que :

$$z_j = r_j e^{i\theta_j} e^{\frac{2i\varepsilon_j \pi}{a_j}} \text{ et } z_j e^{\frac{it}{2a_j}} = r_j e^{i\theta_j + \frac{it}{2a_i}} e^{\frac{2i\varepsilon_j \pi}{a_j}} \text{ soient de la forme (6.6).}$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\psi \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2a_0}} z_0 \\ \vdots \\ e^{\frac{it}{2a_n}} z_0 \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_0^{\frac{a_0}{2}} \cos\left(\frac{a_0\theta_0}{2} + t\right) \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_n^{\frac{a_n}{2}} \cos\left(\frac{a_n\theta_n}{2} + t\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_0^{\frac{a_0}{2}} \sin\left(\frac{a_0\theta_0}{2} + t\right) \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_n^{\frac{a_n}{2}} \sin\left(\frac{a_n\theta_n}{2} + t\right) \end{pmatrix} \right)_\varepsilon \\
&= \varphi_t^{geo} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_0^{\frac{a_0}{2}} \cos\left(\frac{a_0\theta_0}{2}\right) \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_n^{\frac{a_n}{2}} \cos\left(\frac{a_n\theta_n}{2}\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_0^{\frac{a_0}{2}} \sin\left(\frac{a_0\theta_0}{2}\right) \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} r_n^{\frac{a_n}{2}} \sin\left(\frac{a_n\theta_n}{2}\right) \end{pmatrix} \right)_\varepsilon \\
&= \varphi_t^{geo}(\psi(z_0, \ldots, z_n)).
\end{aligned}$$

Donc le flot de Reeb est bien envoyé sur le flot géodésique pour les petits t. Il suffit de vérifier que cela continue d'être dans le cas quand on traverse une face pour conclure la preuve du lemme 6.3 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(\varphi^R_{\frac{t}{2}}(z_0, \ldots, z_n)) = \varphi_t^{geo}(\psi(z_0, \ldots, z_n)).$$

Le théorème 6.1 est une conséquence des lemmes 6.2 et 6.3 si on admet la conjecture 6.2. □

Annexe A

Coproduit et hamiltoniens convexes

Idée générale

Soit X un domaine de Liouville. On va définir une application $SH(X) \to SH(X)^{\otimes 2}$ de manière naïve et on va montrer que cette application se factorise par une application $SH(X) \to SH^{=0}(X)^{\otimes 2}$. Cela permettra d'expliciter la remarque suivante :

Remarque A.1. Il n'est pas judicieux de compter les solutions d'une équation de Floer perturbée par un hamiltonien convexe définis sur une surface S avec plusieurs pointes négatives. Il vaut mieux tenir compte de poids à chaque pointe négative comme dans [EO17].

La version duale de ce fait dit qu'il n'est pas judicieux de compter les solutions d'une équation de Floer perturbée par un hamiltonien concave définis sur une surface S avec plusieurs pointes positives.

Algébriquement, cette remarque indique que les hamiltoniens convexes donnent naturellement naissance à des structures d'algèbres alors que les hamiltoniens concaves donnent naturellement naissance à des structures de cogèbres.

Explicitons maintenant pourquoi la définition naïve d'un coproduit en utilisant des hamiltoniens convexes produit une opération triviale.

Un exemple

On note S_3 la sphère privée de 3 points intérieurs avec marqueurs asymptotiques qu'on note z^+, z_1^- et z_2^-. On se donne aussi un réel $1 > w > 0$. On peut construire une 1-forme β_w telle que :

(i) Près de z^+, $\beta_w = dt$ dans des coordonnées cylindriques $[0; +\infty[\times S^1$,

(ii) près de z_1^-, $\beta_w = wdt$,

(iii) près de z_2^-, $\beta_w = (1-w)dt$,

(iv) $d\beta_w = 0$.

On fixe aussi un réel $\lambda > 0$ et un hamiltonien $H \in \mathcal{H}(X)$ de pente μ à l'infini (cf figure 17). On remarque que, quand μ est suffisamment grand, les complexes de chaînes $FC^{\leqslant\lambda}(H)$ et $FC^{\leqslant\lambda}(wH)$ sont isomorphes et que sous cet isomorphisme, l'action hamiltonienne est préservée. C'est pourquoi on n'utilisera que le complexe $FC^{\leqslant\lambda}(H)$ dans la suite de cette section.

Pour γ^+, γ_1^- et γ_2^- orbites 1-périodiques de H, on définit :

$$\mathcal{M}(\gamma^+;\gamma_1^-,\gamma_2^-;\beta_w) = \left\{ (S,u); S \in \mathcal{M}(S_3), u : S \to \widehat{X} \text{ et } \begin{cases} (du - X_H \otimes \beta_w)^{0,1} = 0 \\ \lim\limits_{z\to z^+} u(z) = \gamma^+(t) \\ \lim\limits_{z\to z_1^-} u(z) = \gamma_1^-(t) \\ \lim\limits_{z\to z_2^-} u(z) = \gamma_2^-(t) \end{cases} \right\}.$$

Si on travaille avec des orbites non dégénérées, alors cet espace de modules est transverse et compact et de dimension :

$$\dim\mathcal{M}(\gamma^+;\gamma_1^-,\gamma_2^-) = CZ(\gamma^+) - CZ(\gamma_1^-) - CZ(\gamma_2^-) - n = |\gamma^+| - |\gamma_1^-| - |\gamma_2^-| - n.$$

On peut alors définir un morphisme de complexes de chaines de degré $-n$ par :

$$\begin{aligned} \psi_w^H : FC^{\leqslant\lambda}(H) &\to FC^{\leqslant\lambda}(H) \otimes FC^{\leqslant\lambda}(H) \\ \gamma &\mapsto \sum_{|\gamma_1|+|\gamma_2|=|\gamma|-n} \#\mathcal{M}(\gamma;\gamma_1,\gamma_2;\beta_w)\gamma_1 \otimes \gamma_2. \end{aligned}$$

En considérant $H_*(\psi_w^H)$ et en prenant la limite directe selon le hamiltonien H (donc quand la pente $\mu \to +\infty$), on construit une opération $\psi_w : SH^{\leqslant\lambda}(X) \to SH^{\leqslant\lambda}(X)^{\otimes 2}[-n]$.

Les lemmes suivants sont élémentaires :

Lemme A.1. *Pour tout $1 > w > 0$, $\psi_w = \psi_{\frac{1}{2}}$ sur $SH^{\leqslant\lambda}(X)$.*

Lemme A.2. *L'application ψ_w^H se factorise en une application*

$$FC^{\leqslant\lambda}(H) \to FC^{\leqslant w\lambda}(H) \otimes FC^{\leqslant(1-w)\lambda}(H).$$

Les lemmes 1 et 2 nous assurent le résultat voulu :

Théorème A.1. *Pour tout $\lambda > 0$, l'application $\psi_{\frac{1}{2}} : SH^{\leqslant\lambda}(X) \to SH^{\leqslant\lambda}(X)^{\otimes 2}$ est à valeurs dans $SH^{=0}(X)^{\otimes 2}$.*

Démonstration du théorème A.1. On sait que $\psi_{\frac{1}{2}} = \psi_w$ d'après le lemme A.1 et que, pour tout $1 > w > 0$, $\psi_w : SH^{\leqslant\lambda}(X) \to SH^{\leqslant w\lambda}(X) \otimes SH^{\leqslant(1-w)\lambda}(X)$ d'après le lemme A.2. Il suffit donc de faire tendre w vers 0 et 1 pour conclure. □

Démonstration du lemme A.1. Il s'agit juste d'un lemme d'interpolation entre β_w et $\beta_{\frac{1}{2}}$. On considère une famille lisse de 1-forme β_{w_t} où $w_0 = w$ et $w_1 = \frac{1}{2}$ et on définit pour $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in FC_*^{\leqslant\lambda}(H)$:

$$\mathcal{M}_{[0;1]}(\gamma;\gamma_1,\gamma_2) = \bigcup_{t\in[0;1]} \mathcal{M}(\gamma;\gamma_1,\gamma_2;\beta_{w_t})$$

$$\text{de dimension : } \dim \mathcal{M}_{[0;1]}(\gamma;\gamma_1,\gamma_2) = |\gamma| - |\gamma_1| - |\gamma_2| - n + 1.$$

On définit alors l'application $\psi_{[0;1]}$ par :

$$\begin{aligned} \psi^H_{[0;1]} : FC^{\leqslant\lambda}(H) &\to FC^{\leqslant\lambda}(H) \otimes FC^{\leqslant\lambda}(H) \\ \gamma &\mapsto \sum_{|\gamma_1|+|\gamma_2|=|\gamma|-n+1} \#\mathcal{M}_{[0;1]}(\gamma;\gamma_1,\gamma_2)\gamma_1 \otimes \gamma_2. \end{aligned}$$

Et la formule pour le bord de codimension 1 de $\mathcal{M}_{[0;1]}$ assure que :

$$\psi^H_w - \psi^H_{\frac{1}{2}} = d_{FC\otimes FC} \circ \psi^H_{[0;1]} + \psi^H_{[0;1]} \circ d_{FC}.$$

Cela assure donc que $H_*(\psi^H_w) = H_*(\psi^H_{\frac{1}{2}})$ ce qui conclue la preuve du lemme. □

Démonstration du lemme A.2. On fixe w et on considère une courbe $u \in \mathcal{M}(\gamma^+;\gamma_1^-,\gamma_2^-)$ et on note :

$$\lim_{z\to z^+} u(z) = (r^+, \gamma^+(t)).$$

On définit de même r_1^- et r_2^-. L'hamiltonien $H = h(r)$ choisi est convexe près de $\{1\} \times \partial X$ donc on sait d'après le lemme 2.3 dans [CO18] (cf figure 35) que nécessairement : $r_1^- \leqslant r^+$ et $r_2^- \leqslant r^+$. Or pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un H tel que :

$$\lambda \geqslant A_H(\gamma^+) = r^+h'(r^+) - h(r^+) > h'(r^+) - \varepsilon$$

et donc, comme h est convexe,

$$A_{wH}(\gamma_1^-) = wr_1^-h'(r_1^-) - wh(r_1^-) < wh'(r_1^-) + \varepsilon \leqslant wh'(r^+) + \varepsilon < w\lambda + 2\varepsilon$$

et de même pour γ_2^-. □

Ce même raisonnement fonctionne dès que plusieurs pointes négatives sont présentes sur une zone où le hamiltonien est convexe. On peut aussi montrer un théorème similaire s'il y a plusieurs pointes positives là où l'hamiltonien est concave.

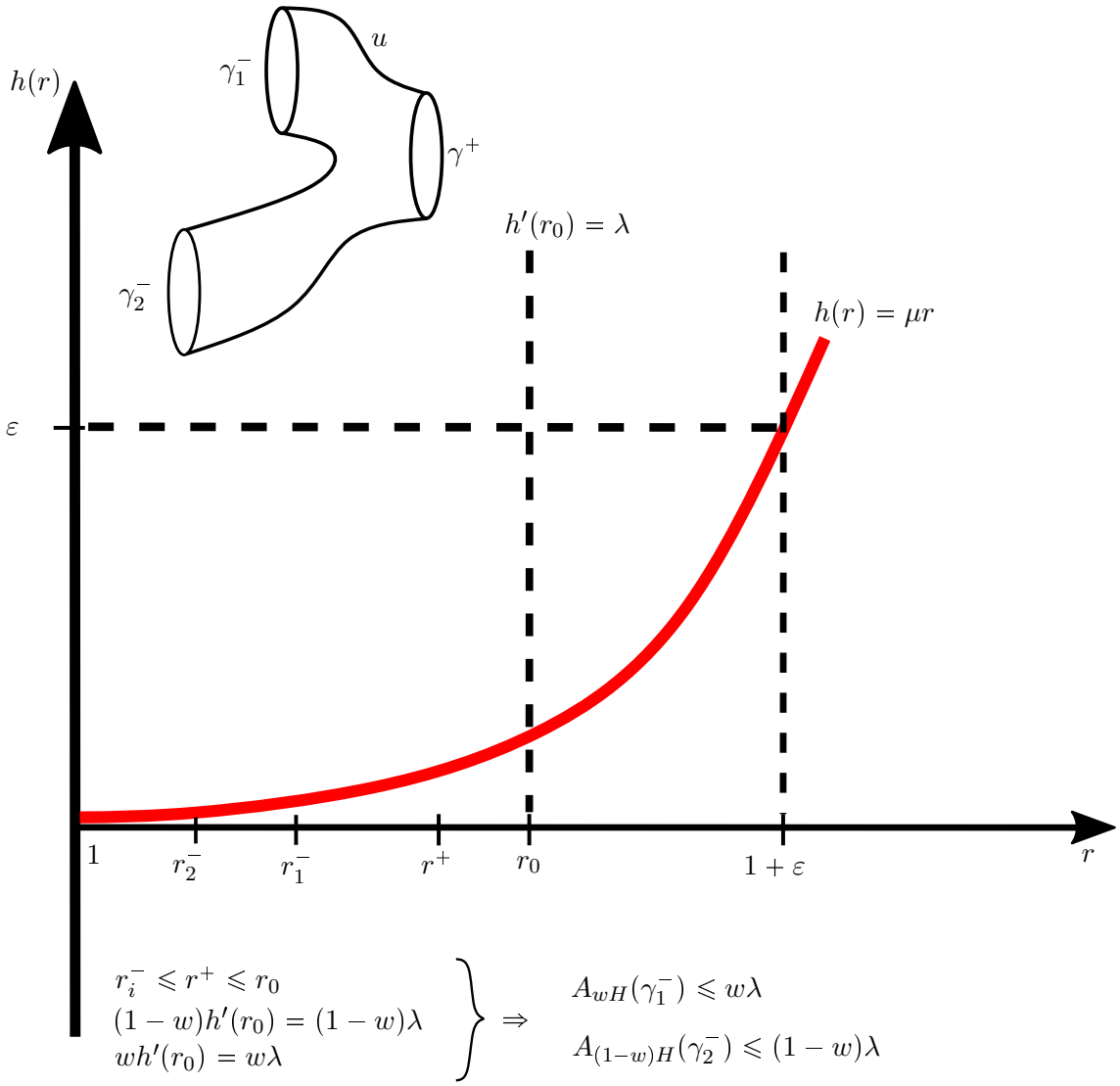


FIGURE 35 – Quand on fait un zoom sur la zone proche de $\{1\} \times \partial X$ où se situent toutes les orbites périodiques de H d'action strictement positives, le principe du maximum sur la courbe u assure que γ^+ est l'orbite située la plus à droite. C'est l'élément clé de la preuve du lemme A.2.

On peut conclure par l'heuristique suivante. Si H est défini sur une variété symplectique qui possède des bouts de symplectisation $I_r \times Y$ et est de la forme $h(r)$, alors :

(i) si on veut compter des courbes avec plusieurs pointes positives, il faut que h soit convexe ou alors que h soit concave et qu'on tienne compte des poids associés aux pointes,

(ii) si on veut compter des courbes avec plusieurs pointes négatives, il faut que h soit concave ou alors que h soit convexe et qu'on tienne compte des poids associés aux pointes.

Annexe B

A_∞-algèbres et A_∞-cogèbres

Avant de commencer ce chapitre, il paraît important d'expliquer certains choix de graduation. En effet, on va demander que les opérations A_∞ qu'on notera μ_d et Δ_d soient de degré $d-2$ et non $2-d$ ce qui est rare dans la littérature.

En géométrie symplectique, deux conventions de graduation coexistent et si on veut obtenir un document cohérent, il faut faire un choix de convention cohérent. Or, dans cette thèse, on mélange beaucoup de structures et toutes sont interconnectées donc le choix d'une convention implique une graduation pour tout le reste. On présente tout les choix qu'on a fait dans le tableau récapitulatif suivant. On a choisi la convention de la colonne de gauche afin d'avoir une homologie de Hochschild homologique et non cohomologique.

	Convention choisie	Convention alternative
Nom de l'objet	Graduation	Graduation
Homologie symplectique $SH_*(X)$ ou cohomologie symplectique $SH^*(X)$	Convention homologique Orbite hamiltonienne γ $\lvert\gamma\rvert = CZ(\gamma)$	Convention cohomologique Orbite hamiltonienne γ $\lvert\gamma\rvert = -CZ(\gamma)$
Homologie lagrangienne $SC_*(C)$ ou complexe de Fukaya enroulé $CW^*(C)$	Convention homologique Corde hamiltonienne c $\lvert c\rvert = CZ(c) - n$	Convention cohomologique Corde hamiltonienne c $\lvert c\rvert = n - CZ(c)$
Algèbre de Chekanov $CH_*(\Lambda)$ ou $CH^*(\Lambda)$	Corde hamiltonienne b $\lvert b\rvert = CZ(b) - 1$	Corde hamiltonienne b $\lvert b\rvert = 1 - CZ(b)$
Algèbre différentielle graduée $(A, d, \cdot)$ DGA	$\lvert d\rvert = -1$	$\lvert d\rvert = 1$
Cogèbre différentielle graduée (C, b, Δ) (coDGA)	$\lvert b\rvert = -1$	$\lvert b\rvert = 1$
A_∞-algèbre (A, μ)	$\lvert\mu_d\rvert = d - 2$	$\lvert\mu_d\rvert = 2 - d$
Construction Bar d'une A_∞-algèbre	$(BA, d) = (\overline{T}^c A[-1], \widehat{\mu})$ $\lvert\widehat{\mu}\rvert = -1$	$(BA, d) = (\overline{T}^c A[1], \widehat{\mu})$ $\lvert\widehat{\mu}\rvert = 1$
A_∞-cogèbre (C, Δ)	$\lvert\Delta_d\rvert = d - 2$	$\lvert\Delta_d\rvert = 2 - d$
Construction Cobar d'une A_∞-cogèbre	$(\Omega C, d) = (TC[1], \widehat{\Delta})$ $\lvert\widehat{\Delta}\rvert = -1$	$(\Omega C, d) = (TC[-1], \widehat{\Delta})$ $\lvert\widehat{\Delta}\rvert = 1$
Homologie de Hochschild d'une DGA ou A_∞-algèbre	Homologique	Cohomologique

B.1 A_∞-algèbre

Les définitions données dans cette partie sont bien connues. Pour avoir une vision plus complète du sujet, on recommande [Gan12] ainsi que l'excellent [LH03]. On fixe un corps de base k.

Une A_∞-algèbre est un espace vectoriel gradué A muni d'opérations

$$\mu_d : A^{\otimes d} \to A, d \geqslant 1$$

de degré $d-2$ tel que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (-1)^{\maltese_i} \mu_k(w_1, \ldots, x_i, \mu_{j-i}(x_{i+1}, \ldots, x_j), x_{j+1}, \ldots, x_d) = 0$$

où le signe est déterminé par : $\maltese_i = |x_1| + \cdots + |x_i| - i$. Les premières relations donnent par exemple :

$$\mu_1(\mu_1(x)) = 0,$$

$$\mu_1(\mu_2(x_1, x_2)) = \pm\mu_2(x_1, \mu_1(x_2)) \pm \mu_2(\mu_1(x_1), x_2),$$

$$\begin{aligned}\mu_2(x_1, \mu_2(x_2, x_3)) \mp \mu_2(\mu_2(x_1, x_2), x_3) = \mu_1(\mu_3(x_1, x_2, x_3)) + \pm\mu_3(\mu_1(x_1), x_2, x_3) \\ \pm \mu_3(x_1, \mu_1(x_2), x_3) \pm \mu_3(x_1, x_2, \mu_1(x_3))\end{aligned}$$

ce qui nous assure par exemple que (A, μ_1) est un complexe de cochaînes et que μ_2 descend en un produit associatif sur $H_*(A, \mu_1)$.

Remarque B.1. Prenons $(A, d, \cdot)$ une algèbre différentielle graduée c'est-à-dire que d est une différentielle sur A de degré -1, que $(A, \cdot)$ est une algèbre associative et que la relation de Leibnitz est vérifiée : $d(x \cdot y) = dx \cdot y + (-1)^{\deg(x)} x \cdot dy$. Alors on peut munir A d'une structure de A_∞-algèbre en posant $\mu_1 = d$, $\mu_2(x, y) = x \cdot y$ et $\mu_n = 0$ pour $n \geqslant 3$.

Il est utile de donner une autre interprétation des relations A_∞ via la construction bar. Notons

$$\overline{T}^c A[-1] = \bigoplus_{k \geqslant 1} A[-1]^{\otimes k}$$

la cogèbre tensorielle de l'espace vectoriel décalé $A[-1]$ munie du coproduit usuel et où le degré $|\cdot|$ vérifie $|x|_{A[-1]} = |x| + 1$. Pour n'importe quel morphisme d'espace vectoriel gradué $\psi : \overline{T}^c A[-1] \to A[-1]$, il existe une unique extension $\widehat{\psi} : \overline{T}^c A[-1] \to \overline{T}^c A[-1]$ morphisme de cogèbre définie par :

$$\widehat{\psi}(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \psi(x_{i+1}, \ldots, x_j) \otimes x_{j+1} \otimes \cdots \otimes x_k.$$

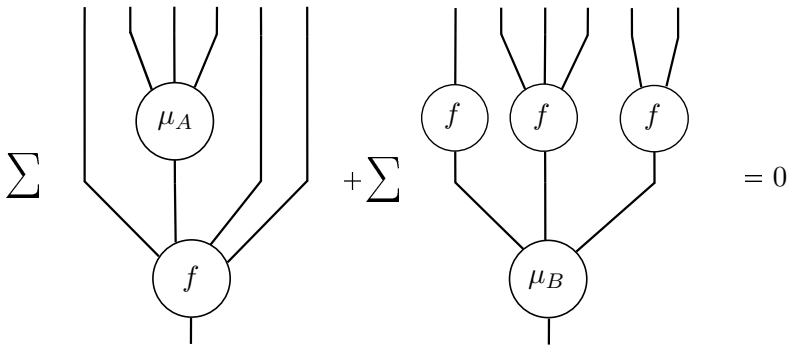


FIGURE 36 – Représentation graphique des équations que vérifient un A_∞-morphisme f. Les branches en haut sont des éléments de A qui sont en entrées et la branche du bas est la sortie dans B.

Les opérations A_∞ forment ensemble une application $\mu : \overline{T}^c A[-1] \to A[-1]$ de degré 1. Donc, d'après la propriété universelle ci-dessus, on peut construire $\widehat{\mu}$. Les relations A_∞ peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\mu \circ \widehat{\mu} = 0$$

ce qui est équivalent au fait que $\widehat{\mu}^2 = 0$ c'est-à-dire que $\widehat{\mu}$ définit une différentielle sur $\overline{T}^c A[-1]$. On appelle $(\overline{T}^c A[-1], \widehat{\mu})$ la construction bar de la A_∞-algèbre A et on la notera par la suite BA. Il s'agit d'une cogèbre différentielle graduée (la définition d'une cogèbre différentielle graduée est donnée dans la remarque B.2).

Un morphisme $f : A \to B$ de A_∞-algèbre est la donnée de morphismes gradués

$$f_n : A^{\otimes n} \to B[n-1]$$

de degrés $n-1$ vérifiant, pour tout $n \geqslant 1$, l'équation (cf figure 36)

$$\sum_{\substack{j+1+l=i \\ k+j+l=n \\ k\geqslant 1}} (-1)^{jk+l} f_i(1_A^{\otimes j} \otimes \mu_k^A \otimes 1_A^{\otimes l}) = \sum_{\substack{r\geqslant 1 \\ i_1+\cdots+i_r=n}} (-1)^s \mu_r^B(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r})$$

$$\text{où } s = \sum_{2\leqslant u\leqslant r} \left((1-i_u) \cdot \sum_{1\leqslant v\leqslant u} i_v \right).$$

Un morphisme de A_∞-algèbre induit un morphisme de cogèbre différentielle graduée entre les constructions bar.

Une homotopie entre deux A_∞-morphismes $f, g : A \to B$ est la donnée d'applica-

tions pour $n \geqslant 1$:

$$h_n : A^{\otimes n} \to B[n]$$

telle que pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n - g_n = \sum_{i_1+\cdots+i_r+k+j_1+\cdots+j_l=n} \mu^B_{r+1+l}(f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_r}\otimes h_k\otimes g_{j_1}\otimes\cdots\otimes g_{j_l}) + \sum_{\substack{j+1+l=i\\ j+k+l=n}} \pm h_i(1_A^{\otimes j}\otimes\mu^A_k\otimes 1_1^{\otimes l}).$$

Un idéal I d'une A_∞-algèbre est un sous-espace vectoriel I de A tel que pour tout $n \geqslant 1$, $i \in I$ et $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$, on a :

$$\mu_n(a_1, \ldots, i, \ldots, a_n) \in I.$$

Si I est un idéal, alors A/I peut être muni d'une structure de A_∞-algèbre et la projection $\pi : A \to A/I$ est un A_∞-morphisme.

B.2 A_∞-cogèbre

Une A_∞-cogèbre est un espace vectoriel gradué C muni d'opérations

$$\Delta_d : C \to C^{\otimes d}, \qquad d \geqslant 1$$

de degré $d-2$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{\substack{i+1+k=l\\ i+j+k=n}} (-1)^{i+jk}(1_C^{\otimes i} \otimes \Delta_j \otimes 1_C^{\otimes k})\Delta_l = 0.$$

On demande aussi une condition technique supplémentaire : on demande que pour tout $c \in C$, la somme $\sum_{k\geqslant 1} \Delta_k(c)$ est bien définie c'est-à-dire qu'il existe un K tel que pour tout $k \geqslant K$, $\Delta_k(c) = 0$.

Remarque B.2. Une cogèbre différentielle graduée est un triplet (C, b, Δ) où C est un espace vectoriel gradué, b est une dérivation de degré -1 et $\Delta : C \to C^{\otimes 2}$ est un coproduit de degré 0 et vérifiant :

1. Δ est coassociatif : $(\Delta \otimes 1_C)\Delta = (1_C \otimes \Delta)\Delta$,
2. la règle de Leibnitz duale : $\Delta \circ b = (b \otimes 1_C)\Delta + (1_C \otimes b)\Delta$,

Alors C peut être muni d'une structure de A_∞-cogèbre en posant $\Delta_1 = b$, $\Delta_2 = \Delta$ et $\Delta_n = 0$ pour $n \geqslant 3$.

On va maintenant présenter la construction cobar d'une A_∞-cogèbre. On considère l'algèbre tensorielle $TC[1]$ où la graduation vérifie $|x|_{C[1]} = |x| - 1$. On sait que la somme des Δ_k est bien définie comme application vectorielle de $C[1]$ dans $TC[1]$ de degré -1 et

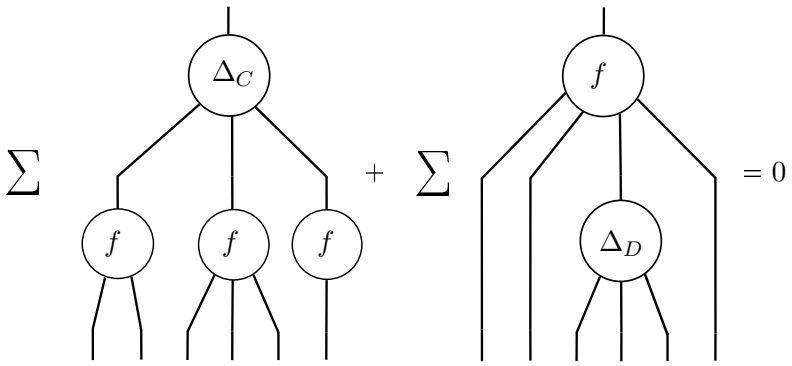


FIGURE 37 – Représentation graphique des équations que vérifient un morphisme f de A_∞-cogèbres. La branche en haut est la branche d'entrée qui prend un élément de C et les branches du bas sont les sorties qui sont des éléments de D.

donc, par la propriété universelle de l'algèbre tensorielle, il existe un unique morphisme d'algèbre

$$\widehat{\Delta} : TC[1] \to TC[1].$$

Cette application est de degré -1 et les relations A_∞ impliquent que $\widehat{\Delta}^2 = 0$. Le triplet $(TC[1], \otimes, \widehat{\Delta})$ forme ainsi une algèbre différentielle graduée qu'on appelle *construction cobar de C* . On la notera dorénavant ΩC.

Un morphisme de A_∞-cogèbres $f : C \to D$ est la donnée d'applications $f_k : C \to D^{\otimes k}$ pour $k \geqslant 1$ qui vérifient, pour tout $n \geqslant 1$, les équations duales aux équations des A_∞-morphismes :

$$\sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ i_1 + \cdots + i_k = n}} (f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}) \circ \Delta_k^C = \sum_{\substack{j+1+l=i \\ j+k+l=n}} (1_D^{\otimes j} \otimes \Delta_k^D \otimes 1_D^{\otimes l}) \circ f_i$$

Annexe C

Homologies de Hochschild

On aurait pu donner directement les formules qui nous intéressent mais on choisit ici une approche plus "pédagogique" où on détaille de nombreuses preuves et définitions. Le but de cette annexe est de fixer certaines conventions concernant l'homologie de Hochschild et aussi de démontrer le théorème C.1 pour justifier l'introduction du complexe de Hochschild petit dans le corps de la thèse.

C.1 Algèbres et foncteurs dérivés

Soit A une algèbre. L'*homologie de Hochschild* de A notée $CC_*(A)$ est l'homologie du complexe de chaînes suivant :

$$0 \leftarrow A \leftarrow A^{\otimes 2} \leftarrow A^{\otimes 3} \leftarrow A^{\otimes 4} \leftarrow \dots$$

où $A^{\otimes(n+1)}$ se trouve en degré n et où les flèches $A^{\otimes(n+1)} \to A^{\otimes n}$ sont données par la formule :

$$(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) \mapsto (-1)^n (x_n x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x_0 \otimes \dots x_i x_{i+1} \cdots \otimes x_n.$$

Pour la culture générale, on va faire le lien avec une définition équivalente utilisant les foncteurs dérivés ce qui permet de retrouver la formule donnée ci-dessus et qui nous sera utile à la section C.4. On munit A d'une structure de $A \otimes A^{op}$-module à gauche par la formule $(a \otimes a') \cdot x = axa'$ et d'une structure de $A \otimes A^{op}$-module à droite par la formule $x \cdot (a \otimes a') = a'xa$. Or on rappelle que si M est un B-module à droite et N un B-module à gauche, on peut définir le produit tensoriel $M \otimes_B N$ [1]. On peut donc définir le produit tensoriel $A \otimes_{A \otimes A^{op}} A$ ce qui nous amène à la seconde définition de l'homologie de Hochschild suivante :

1. On a alors $(mb) \otimes n \sim m \otimes (bn)$. Si on avait deux B-modules à gauche, on aurait un problème de définition quand B est non commutatif car dans ce cas $m \otimes (bb'n) \sim (bb'm) \otimes n \sim (b'm) \otimes (bm) \sim m \otimes (b'bn)$.

Définition C.1. L'homologie de Hochschild de A est l'homologie du complexe de chaînes $A \otimes^{\mathbb{L}}_{A\otimes A^{op}} A$ où $\otimes^{\mathbb{L}}_{A\otimes A^{op}}$ désigne le produit tensoriel dérivé dans la catégorie des $A \otimes A^{op}$-modules.

On ne va pas définir le produit tensoriel dérivé (on pourra consulter [KS06] pour une introduction au sujet) et on va plutôt admettre un résultat usuel des catégories dérivées dans la suite du document en faisant un détour par la construction bar. On connait une résolution de A en $A \otimes A^{op}$-modules à gauche libres , il s'agit de la résolution bar de A qui est la suivante :

$$0 \longleftarrow A^{\otimes 2} \longleftarrow A^{\otimes 3} \longleftarrow A^{\otimes 4} \longleftarrow \dots$$

où les flèches $A^{\otimes n} \to A^{\otimes(n-1)}$ sont données par la formule suivante :

$$d_n : x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n.$$

Il s'agit d'une résolution de $0 \leftarrow A \leftarrow 0$ car la suite $0 \leftarrow A \leftarrow A^{\otimes 2} \leftarrow A^{\otimes 3} \leftarrow \dots$ est une suite exacte [Lod92]. On admet alors que l'homologie de $A \otimes^{\mathbb{L}}_{A\otimes A^{op}} A$ est isomorphe à l'homologie du complexe de chaînes (car on dispose d'une résolution libre donc plate) :

$$0 \leftarrow A \otimes_{A\otimes A^{op}} A^{\otimes 2} \leftarrow A \otimes_{A\otimes A^{op}} A^{\otimes 3} \leftarrow \dots$$

où les flèches sont données par $A \otimes_{A\otimes A^{op}} d_n$. Or ce complexe de chaînes peut être simplifié de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
0 & A \otimes_{A\otimes A^{op}} A^{\otimes 2} \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & A \otimes_{A\otimes A^{op}} A^{\otimes 3} \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & A \otimes_{A\otimes A^{op}} A^{\otimes 4} \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & \dots \arrow[l] \\
0 & A \arrow[l] & A^{\otimes 2} \arrow[l] & A^{\otimes 3} \arrow[l] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont données par $a \otimes (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \mapsto (x_n a x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1})$ et d'inverse $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}) \mapsto (x_1 \otimes (1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \otimes 1))$. Sous ces identifications, on peut comprendre les flèches $A^{\otimes(n+1)} \to A^{\otimes n}$ de la seconde ligne (pour simplifier l'écriture on note $B = A \otimes A^{op}$) en suivant le diagramme :

$$\begin{aligned}
&(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) \xrightarrow{A^{\otimes(n+1)} \to A\otimes_B A^{\otimes(n+2)}} (x_0 \otimes (1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1) \\
&\xrightarrow{A\otimes_B A^{\otimes(n+2)} \to A\otimes_B A^{\otimes(n+1)}} x_0 \otimes \left(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i 1 \otimes x_1 \otimes x_i x_{i+1} \cdots \otimes x_n \otimes 1 \right) \\
&\xrightarrow{A\otimes_B A^{\otimes(n+1)} \to A^{\otimes n}} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x_0 \otimes \dots x_i x_{i+1} \cdots \otimes x_n + (-1)^n (x_n x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n-1})
\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la définition de l'homologie de Hochschild donnée au début.

C.2 Algèbres différentielles graduées

On prend A une algèbre différentielle graduée c'est-à-dire une algèbre munie d'une différentielle de degré -1. La graduation d'un élément $a \in A$ est notée $\deg(a)$. On définit un bicomplexe de chaînes $\oplus_{n\geqslant 1} A^{\otimes n}$ avec les deux graduations $|a_0 \otimes \cdots \otimes a_n|_0 = n$ et $|a_0 \otimes \cdots \otimes a_n|_1 = \sum_{i=0}^{n} deg(a_i)$. Les différentielles sont données par la règle de Leibnitz et par la différentielle de Hochschild usuelle c'est-à-dire :

$$d_0(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^n (a_n a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \ldots a_i a_{i+1} \cdots \otimes a_n.$$

$$d_1(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{\bigstar_i} a_0 \otimes \cdots \otimes d_1 a_i \otimes \cdots \otimes a_n$$

où $\bigstar_i = \sum_{r=0}^{i-1} \deg(a_r)$. Le complexe de Hochschild est le complexe total associé à ce bicomplexe et on le note $CC_*(A)$. Par la définition du complexe total, $CC_*(A)$ est le complexe de chaînes $\oplus_{n\geqslant 1} A^{\otimes n}$ muni de la graduation $|\cdot| = |\cdot|_0 + |\cdot|_1$ et de la différentielle $d_0 + d_1$.

Si $f : A \to B$ un morphisme d'algèbres différentielles graduées, alors f induit un morphisme $CC_*(f)$ entre les homologies de Hochschild par la formule $CC_*(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = f(a_1) \otimes \cdots \otimes f(a_n)$.

C.3 A_∞-algèbre

Si A est une A_∞-algèbre, le complexe Bar cyclique de A s'appelle le complexe de Hochschild de A. On le note $CC_*(A)$ et il est défini de la manière suivante :

$$CC_*(A) = \bigoplus_{k\geqslant 1} A \otimes A[-1]^{\otimes (k-1)}$$

et la différentielle d_{CC} est définie par :

$$\begin{aligned} d_{CC}(x_1, \ldots, x_d) = & \sum_{1\leqslant i<j\leqslant d} \pm \mu^{d-j+i}(a_{j+1}, \ldots, a_d, a_1, \ldots, a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j) \\ & + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant d} \pm a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes \mu^{j-i}(a_{i+1}, \ldots, a_j) \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_d \end{aligned}$$

On remarque que les définitions pour les A_∞-algèbres et les algèbres différentielles graduées sont compatibles : on obtient la même définition pour l'homologie de Hochschild d'une algèbre différentielle graduée qu'on la considère comme A_∞-algèbre ou comme algèbre différentielle graduée.

Si $f : A \to B$ est un morphisme de A_∞-algèbres, alors f induit un morphisme $CC_*(f)$

entre les homologies de Hochschild (lemme 4.2 de [Abo11]). Cette application est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} CC_*(f)(a_1,\dots,a_d) = \sum_{1\leqslant s_1<\dots<s_k\leqslant d} & \pm f_{d+s_1-s_k}(a_{s_k+1},\dots,a_d,a_1,\dots,a_{s_1}) \\ & \otimes f_{s_2-s_1}(a_{s_1+1},\dots,a_{s_2})\otimes\dots\otimes f_{s_k-s_{k-1}}(a_{s_{k-1}+1},\dots,a_{s_k}) \end{aligned}$$

C.4 Homologie de Hochschild d'une algèbre tensorielle

On prend V un espace vectoriel sur un corps k et on rappelle que l'algèbre tensorielle de V est notée $TV = \oplus_{n\geqslant 1} V^{\otimes n}$. On rappelle que l'homologie de Hochschild est calculée par le complexe $(CC_*(TV), d_0)$ (cf section C.1) :

$$0 \leftarrow TV \leftarrow TV^{\otimes 2} \leftarrow TV^{\otimes 3} \leftarrow TV^{\otimes 4} \leftarrow \dots$$

On définit maintenant un autre complexe qu'on notera $(CC^p_*(TV), \widetilde{d_0})$ [2] qui est le suivant :

$$0 \leftarrow TV \leftarrow TV\otimes V \leftarrow 0$$

où TV se situe aussi en degré 0, $TV\otimes V$ est en degré 1 et l'unique flèche non triviale est :

$$\begin{aligned} \widetilde{d_0} : & TV\otimes V \to TV \\ & a\otimes v \mapsto av - va. \end{aligned}$$

On va démontrer le lemme suivant :

Lemme C.1 (Proposition 1.1.13 de [Lod92])**.**
Le complexe $CC^p_*(TV, \widetilde{d_0})$ est un rétracte par déformation forte du complexe $CC_*(TV, d_0)$ c'est-à-dire qu'il existe des applications p, i et h tels que

(i) $p : CC_* \to CC^p_*$ *est un morphisme de complexes de chaînes,*

(ii) $i : CC^p_* \to CC_*$ *est un morphisme de complexes de chaînes,*

(iii) $p\circ i = Id_{CC^p_*}$,

(iv) $i\circ p = id_{CC_*} + d_0 h + h d_0$, *où* $h : CC_* \to CC_{*+1}$ *est une homotopie.*

On peut résumer ces énoncés par le diagramme suivant :

$$h \circlearrowright (CC_*(TV), d) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (CC^p_*(TV), \widetilde{d}).$$

2. La lettre p est une abréviation de petit car on utilise la résolution petite de TV dans la preuve.

En particulier, cela implique que p et i induisent des isomorphismes en homologie et donc que $HH_*^p(TV, \widetilde{d_0}) \simeq HH_*(TV, d_0)$.

C.4.1 Avec les catégories dérivées

Pour les deux preuves du lemme C.1, on va simplifier l'écriture en posant $A = TV$. Il existe une résolution de A en $A \otimes A^{op}$-bimodule libre plus simple que la résolution bar. On appelle cette dernière la résolution petite de A :

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow A \leftarrow A \otimes A \leftarrow A \otimes V \otimes A \leftarrow 0 \\ xy \leftarrow x \otimes y \\ xy \otimes z - x \otimes yz \leftarrow x \otimes y \otimes z \end{aligned}$$

Donc on peut donner un nouveau complexe pour calculer l'homologie de Hochschild de A :

$$\begin{tikzcd} 0 & A \otimes_{A\otimes A^{op}} A^{\otimes 2} \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & A \otimes_{A\otimes A^{op}} A \otimes V \otimes A \arrow[l] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \arrow[l] \\ 0 & A \arrow[l] & A \otimes V \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Et en faisant les calculs, on trouve que l'application $A \otimes V \to A$ est induite par $a \otimes v \mapsto av - va$. La théorie des catégories dérivées assure que ce complexe calcule bien l'homologie de Hochschild. Dans [Lod92], on donne une homotopie explicite entre ce complexe et le complexe bar cyclique de A comme défini ci-dessus. C'est ce que l'on va faire dans la section suivante.

C.4.2 Calculs explicites

Dorénavant on va noter $A = TV$ et on travaille sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour faciliter la lecture. L'application i est juste l'injection $CC_*^p \to CC_*$, une vérification triviale assure que i est bien un morphisme de chaînes. Avant de construire les applications p et h, il est utile de se donner des notations :

$$x_0 \otimes \cdots \otimes (x_n \widehat{v} y) = (yx_0) \otimes \cdots \otimes x_n \otimes v \in A^{\otimes(n+2)} \text{ où } x_i, y \in A \text{ et } v \in V$$

$$S(v_1 \dots v_l) = \sum_{i=1}^{l} v_1 \dots \widehat{v_i} \dots v_l \text{ où } v_1 \dots v_l \in A \text{ et } v_i \in V$$

On pose $p_0 : A \to A$ égale à l'identité, $h_0 : A \to A^{\otimes 2}$ égale à l'application nulle et :

$$\begin{aligned} p_1 = \varphi : A^{\otimes 2} &\to A \otimes V \\ x \otimes y &\mapsto xS(y) \end{aligned}$$

$$x \otimes v_1 \dots v_l \mapsto \sum_{i=1}^{l} x v_1 \dots \widehat{v_i} \dots v_l = \sum_{i=1}^{l} v_{i+1} \dots v_l x v_1 \dots v_{i-1} \otimes v_i,$$

et :

$$\begin{aligned}
h_n : A^{\otimes(n+1)} &\to A^{\otimes(n+2)} \\
x_0 \otimes \dots \otimes v_1 x'_n &\mapsto x_0 \otimes \dots \otimes v S(x'_n) \\
x_0 \otimes \dots \otimes v_1 \dots v_l &\mapsto \sum_{i=2}^{l} x_0 \dots \otimes v_1 \dots \widehat{v_i} \dots v_l = \sum_{i=2}^{l} v_{i+1} \dots v_l x_0 \otimes \dots \otimes v_1 \dots v_{i-1} \otimes v_i.
\end{aligned}$$

On a alors les diagrammes suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 & A \arrow[l] \arrow[d, equal] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "d"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "d"'] \arrow[d, shift left, "0"] & \dots \arrow[l] \\
0 & A \arrow[l] & A \otimes V \arrow[l, "\tilde{d}"] \arrow[u, shift left, "i"] & 0 \arrow[l] \arrow[u, shift left] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
0 & A \arrow[l] \arrow[dr, "0"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "d_1"'] \arrow[dr, "h_1"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "d_2"'] \arrow[dr, "h_2"] & \dots \arrow[l] \\
0 & A \arrow[l] & A^{\otimes 2} \arrow[l] & A^{\otimes 3} \arrow[l] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}.$$

Lemme C.2. *(a) p et i sont des morphismes de complexes de chaînes,*

(b) $d_1 h_0 + h_{-1} d_0 = 0$,

(c) $d_2 h_1 + h_0 d_1 = Id + i \circ \varphi$,

(d) $d_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n = Id$ pour $n \geqslant 2$.

Démonstration.

(a) L'application i est juste une inclusion de sous-complexe de chaînes. Montrons maintenant que p est un morphisme de complexes de chaînes. Vu que p s'annule sur $A^{\otimes n}$ pour $n \geqslant 3$, il suffit de montrer que $pd(a \otimes b) = \widetilde{d}p(a \otimes b)$ et que $pd(a \otimes b \otimes c) = 0$. On prend $a \in A$ et $v_1 \dots v_l \in A$ et on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{d}p(a \otimes v_1 \dots v_l) &= \widetilde{d}\left(\sum_{i=1}^{l} v_{i+1} \dots v_l x v_1 \dots v_{i-1} \otimes v_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{l} v_{i+1} \dots v_l x v_1 \dots v_{i-1} v_i - v_i v_{i+1} \dots v_l x v_1 \dots v_{i-1} \\
&= x v_1 \dots v_l - v_1 \dots v_l x \\
&= pd(a \otimes v_1 \dots v_l).
\end{aligned}$$

Prenons maintenant $a \otimes b \otimes c \in A^{\otimes 3}$ et on montre :

$$pd(a \otimes b \otimes c) = p(ab \otimes c + a \otimes bc + ca \otimes b) = abS(c) + aS(bc) + caS(b) = 0$$

ce qui finit la démonstration de (a).

Le cas (b) est clair car $h_0 = 0$ et $d_0 = 0$.

(c) Prenons $n \geqslant 1$ et calculons (on note $v_1 \dots v_l = v_1 x'_n = x_n$) :

$$\begin{aligned}
&d_{n+1}h_n(x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \otimes v_1 \dots v_l) = d(x_0 \otimes \cdots \otimes v_1 S(x'_n)) \\
&= d\left(\sum_{i=2}^{l} (v_{i+1} \dots v_l x_0) \otimes \cdots \otimes (v_1 \dots v_{i-1}) \otimes v_i\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (x_0 \otimes \dots x_j x_{j+1} \cdots \otimes v_1 S(x'_n)) + \sum_{i=2}^{l} (v_{i+1} \dots v_l x_0 \otimes \cdots \otimes v_1 \dots v_i) \\
&+ \sum_{i=2}^{l} (v_i \dots v_l x_0 \otimes \cdots \otimes v_1 \dots v_{i-1}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (x_0 \otimes \dots x_j x_{j+1} \cdots \otimes v_1 S(x'_n)) + x_0 \otimes \cdots \otimes v_1 \dots v_l + x_o \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \widehat{v_1} \dots v_l \\
&= x_0 \otimes \cdots \otimes x_n + \sum_{j=0}^{n-2} (x_0 \otimes \dots x_j x_{j+1} \cdots \otimes x_{n-1} \otimes v_1 S(x'_n)) + x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} S(x_n).
\end{aligned}$$

Le cas (c) découle directement de ce calcul car $h_0 = 0$.

(d)Prenons maintenant $n \geqslant 2$ et on note $x_n = v_1 \dots v_l = v_1 x'_n$ et $x_{n-1} = w_1 x'_{n-1}$

$$\begin{aligned}
h_{n-1}d_n(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) &= h\left(\sum_{j=0}^{n-2} x_0 \otimes \dots x_j x_{j+1} \cdots \otimes x_n\right) + h(x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}x_n) \\
&\quad + h(x_n x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n-2} x_0 \otimes \dots x_j x_{j+1} \cdots \otimes x_{n-1} \otimes v_1 S(x'_n)\right) + x_0 \otimes \cdots \otimes w_1 S(x_{n-1}x_n) \\
&\quad + x_n x_0 \otimes \cdots \otimes w_1 S(x'_{n-1})
\end{aligned}$$

Or $x_0 \otimes \cdots \otimes w_1 S(x_{n-1}x_n) = (x_n x_0) \otimes \cdots \otimes w_1 S(x'_{n-1}) + x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} S(x_n)$ et donc $d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n = \mathrm{Id}$ si $n \geqslant 2$ ce qui achève la preuve du lemme C.1. □

C.5 Homologie de Hochschild d'une construction cobar

Prenons C une A_∞-cogèbre et considérons $(\Omega C, d_1, \otimes)$ la construction cobar de C. Il s'agit une algèbre différentielle graduée et on rappelle qu'on a défini à la section C.2 le

complexe $CC_*(\Omega C)$ de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
0 & \Omega C \arrow[l, "d_0"'] \arrow[loop above, "d_1"] & \Omega C \otimes \Omega C \arrow[l, "d_0"'] \arrow[loop above, "d_1"] & \Omega C^{\otimes 3} \arrow[l, "d_0"'] \arrow[loop above, "d_1"] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

On définit maintenant de manière similaire à la section C.4 un complexe $CC_*^p(\Omega C)$:

$$\begin{tikzcd}
0 & \Omega C \arrow[l] \arrow[loop above, "\widetilde{d_1}"] & \Omega C \otimes C \arrow[l, "\widetilde{d_0}"'] \arrow[loop above, "\widetilde{d_1}"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

de la manière suivante :

(i) la graduation sur ΩC est celle de ΩC,

(ii) la graduation sur $\Omega C \otimes C$ est donnée par $|a \otimes c| = |a|_{\Omega C} + |c|_{\Omega C} + 1$,

(iii) l'application $\Omega C \otimes C \to \Omega C$ est $\widetilde{d_0} : a \otimes c \mapsto ac - ca$,

(iv) l'application $\widetilde{d_1}$ est donnée par la formule $\widetilde{d_1}(a \otimes c) = d_1 a \otimes c + (-1)^{|a|} a S(d_1 c)$.

Afin d'avoir des sections indépendantes, on fait quelques rappels de la section C.4. On rappelle que :

$$x\widehat{v}y = yx \otimes v \text{ où } x \in \Omega C, v \in C, y \in \Omega C,$$

$$S(v_1 \dots v_l) = \sum_{i=1}^{l} v_1 \dots \widehat{v_i} \dots v_l \text{ où } v_1 \dots v_l \in \Omega C \text{ et } v_i \in C.$$

L'application p jouera aussi un rôle particulièrement important et on rappelle sa définition :

$$\begin{aligned}
p : & CC_*(\Omega C) \longrightarrow CC_*^p(\Omega C) \\
& x \in \Omega C \longmapsto x \\
& x \otimes y \in \Omega C \otimes \Omega C \mapsto xS(y) \\
& a \in \Omega C^{\otimes(n+3)} \mapsto 0, n \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Théorème C.1. *L'application p est un morphisme de bicomplexe de chaînes qui induit un isomorphisme en homologie.*

De plus, sous des conditions techniques supplémentaires (la condition (C.1)), CC_*^p est un rétracte par déformation forte de CC_*, c'est-à-dire qu'il existe des applications

$I : CC_*^p \to CC_*$ et $H : CC_* \to CC_{*+1}$ tel que :

$$H \circlearrowright (CC_*(\Omega C), d_0 + d_1) \underset{I}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (CC_*^p(\Omega C), \widetilde{d_0} + \widetilde{d_1}).$$

Ce théorème est en fait un théorème de transfert de structure : on avait montré à la section C.4 qu'il y avait une rétraction forte

$$h \circlearrowright (CC_*(\Omega C), d_0) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (CC_*^p(\Omega C), \widetilde{d_0}).$$

On ajoute une structure supplémentaire à $(CC_*(\Omega C), d_0)$ c'est-à-dire une nouvelle différentielle d_1 et on veut transférer cette nouvelle différentielle à CC_*^p. Cela est possible en utilisant la théorie des multicomplexes (qu'on pourrait définir comme les bicomplexes à homotopie près) car CC_*^p est un rétracte par déformation forte de CC_*. On pourra trouver dans [Mey78], [Lap01] et [DSV15] les résultats nécessaires pour conclure. Cependant, on préfère donner une preuve directe et calculatoire (avec une condition technique supplémentaire) afin de ne pas avoir à introduire toute la théorie nécessaire pour obtenir ce résultat. On démontrera donc la deuxième partie du théorème qui est vraie sous l'hypothèse (C.1) et le cas général (qui est une conséquence de la théorie des multicomplexes) du théorème ne sera pas démontré ici.

Démonstration avec l'hypothèse (C.1). La preuve se résume à des manipulations algébriques une fois qu'on a trouvé les bons objets à considérer. Notons $i_k = (hd_1)^k \circ i : CC_*^p \to CC_*$ et $h_k = (hd_1)^k \circ h : CC_* \to CC_*$. On suppose que :

$$\forall x \in CC_*, \exists K \geqslant 1, \forall k \geqslant K, (hd_1)^k(x) = 0. \tag{C.1}$$

Dans les cas que nous considèrerons, cette hypothèse sera vérifiée à cause de la décroissance stricte de l'action. Cela nous assure que les sommes

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} i_k \text{ et } H = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k$$

sont bien définies. On travaille aussi dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On découpe la preuve du théorème en le lemme suivant :

Lemme C.3. *(a) p est un morphisme de bicomplexes,*

(b) $i_{k+1}\widetilde{d_0} + i_k\widetilde{d_1} = d_1 i_k + d_0 i_{k+1}$ pour tout $k \geqslant 0$,

(c) $I(\widetilde{d_0} + \widetilde{d_1}) = (d_0 + d_1)I$,

(d) $p \circ I = id_{CC^p_*(\Omega C)}$,

(e) $I \circ p = id_{CC_*(\Omega C)} + (d_0 + d_1)H + H(d_0 + d_1)$.

(a) On sait d'après la section C.4 que $\widetilde{d_0}p = pd_0$. On remarque que $\widetilde{d_1} = pd_1 i$ et donc

$$\widetilde{d_1}p = pd_1 ip = pd_1(\mathrm{Id} + hd_0 + d_0 h) = pd_1 + pd_1 hd_0 + pd_1 d_0 h = pd_1 + pd_1 hd_0 + \widetilde{d_0}pd_1 h.$$

Or on sait que l'image de h dans CC_* est incluse dans $\bigoplus_{k\geqslant 3}(\Omega C)^k$, que d_1 laisse cet ensemble stable et que p s'annule sur cet ensemble donc $pd_1 h = 0$ et donc $\widetilde{d_1}p = pd_1$. Cela permet de conclure que p est bien un morphisme de bicomplexes.

(b) On note que sur l'image de $d_1 h$, $d_1 h$ et d_0 commutent : en effet $d_1 hd_0 = d_1(d_0 h + \mathrm{Id} + ip) = d_1 d_0 h + d_1 + d_1 ip$. Or comme on est sur l'image de $d_1 h$, on sait que p s'annule et que d_1 s'annule et donc $d_1 hd_0 = d_1 d_0 h = d_0 d_1 h$. Donc :

$$\begin{aligned}
i_{k+1}\widetilde{d_0} + i_k\widetilde{d_1} &= (hd_1)^{k+1} i\widetilde{d_0} + (hd_1)^k i\widetilde{d_1} \\
&= (hd_1)^{k+1} d_0 i + (hd_1)^k ipd_1 i \\
&= (hd_1)^{k+1} d_0 i + (hd_1)^k (hd_0 + d_0 h + \mathrm{Id})d_1 i \\
&= (hd_1)^{k+1} d_0 i + (hd_1)^k hd_0 d_1 i + (hd_1)^k d_0 hd_1 i + (hd_1)^k d_1 i \\
&= 0 + (hd_1)^k d_0 hd_1 i + (hd_1)^k d_1 i.
\end{aligned}$$

Distinguons maintenant le cas $k = 0$ et $k \geqslant 1$: si $k = 0$, le calcul donne : $i_1\widetilde{d_0} + i_0\widetilde{d_1} = d_0 hd_1 i + d_1 i = d_0 i_1 + d_1 i_0$ ce qui est la formule souhaitée. Si $k \geqslant 1$, on remarque que $(hd_1)^k d_1 = 0$ et donc :

$$\begin{aligned}
i_{k+1}\widetilde{d_0} + i_k\widetilde{d_1} &= (hd_1)^k d_0 hd_1 i \\
&= h(d_1 h)^{k-1} d_1 d_0 (hd_1 i) \\
&= h(d_1 h)^{k-1} d_0 (d_1 h) d_1 i.
\end{aligned}$$

Or on sait que d_0 et $d_1 h$ commutent sur l'image de $d_1 h$ donc :

$$\begin{aligned}
i_{k+1}\widetilde{d_0} + i_k\widetilde{d_1} &= hd_0 (d_1 h)^k d_1 i \\
&= (d_0 h + \mathrm{Id} + ip)(d_1 h)^k d_1 i \\
&= d_0 (hd_1)^{k+1} i + d_1 (hd_1)^k i + ip(d_1 h)^k d_1 i \\
&= d_0 i_{k+1} + d_1 i_k + 0
\end{aligned}$$

ce qui était la formule souhaitée dans (b).

On peut maintenant prouver (c) :

$$\begin{aligned}
I(\widetilde{d_0}+\widetilde{d_1}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} i_k\widetilde{d_0} + \sum_{k=0}^{+\infty} i_k\widetilde{d_1} \\
&= i_0\widetilde{d_0} + \sum_{k=0}^{+\infty} i_{k+1}\widetilde{d_0} + \sum_{k=0}^{+\infty} i_k\widetilde{d_1} \\
&= d_0 i_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} (i_{k+1}\widetilde{d_0} + i_k\widetilde{d_1}) \\
&= d_0 i_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} (d_0 i_{k+1} + d_1 i_k) \text{ d'après (b)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (d_0+d_1) i_k \\
&= (d_0+d_1)I.
\end{aligned}$$

La formule (d) est claire car :

$$pI = \sum_{k=0}^{+\infty} pi_k = \sum_{k=0}^{+\infty} p(hd_1)^k i = pi + 0 = \mathrm{Id}.$$

Pour montrer la formule (e), on simplifie :

$$\begin{aligned}
Hd_0 &= \sum_{k=0}^{+\infty} (hd_1)^k hd_0 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (hd_1)^k (d_0 h + \mathrm{Id} + ip) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (hd_1)^k d_0 h + \sum_{k=0}^{+\infty} (hd_1)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (hd_1)^k ip \\
&= d_0 h + \sum_{k=0}^{+\infty} (hd_1)^{k+1} d_0 h + \mathrm{Id} + \sum_{k=0}^{+\infty} (hd_1)^{k+1} + Ip \\
&= d_0 h + \sum_{k=0}^{+\infty} h(d_1 h)^k d_1 d_0 h + \mathrm{Id} + \sum_{k=0}^{+\infty} (hd_1)^k hd_1 + Ip \\
&= d_0 h + hd_0 \sum_{k=0}^{+\infty} (d_1 h)^{k+1} + \mathrm{Id} + Hd_1 + Ip \\
&= d_0 h + (d_0 h + \mathrm{Id} + ip) \sum_{k=0}^{+\infty} (d_1 h)^{k+1} + \mathrm{Id} + Hd_1 + Ip \\
&= d_0 h + d_0 \sum_{k=0}^{+\infty} (hd_1)^{k+1} h + \sum_{k=0}^{+\infty} (d_1 h)^{k+1} + 0 + \mathrm{Id} + Hd_1 + Ip
\end{aligned}$$

$$= d_0 H + d_1 H + \mathrm{Id} + H d_1 + I p.$$

Cela conclut la preuve de (e). On sait donc que $p : (CC_*, d_0 + d_1) \to (CC_*^p, \widetilde{d_0} + \widetilde{d_1})$ admet un inverse à homotopie près et donc induit un isomorphisme en homologie. $\square$

Table des figures

1 Homologie de Morse de la sphère 16
2 Représentation schématique de l'attachement d'anse 22

3 La variété $\overline{\mathcal{M}}(D_4)$ 37
4 La variété $\overline{\mathcal{M}}(D_5)$ 37
5 Exemples de demi-cylindres 40
6 La variété $\overline{\mathcal{M}}(D_2^1)$ 41
7 Orientation et anneau pincé 43
8 La variété $\overline{\mathcal{M}}(D_{1;2;2})$ 45
9 Exemples d'anneaux épointés 46
10 Anneaux et bandes 47
11 La variété $\overline{\mathcal{M}}(A_2^1)$ 49

12 Partie 1 du tableau récapitulatif. 76
13 Partie 2 du tableau récapitulatif. 77
14 Bord d'un espace de modules d'anneaux 93
15 Exemple d'espaces de modules de cobordisme 95
16 Espace de modules de cobordisme sur l'anneau pincé 99

17 Hamiltoniens sur complétions 104
18 Restrictions sur les trajectoires de Floer 105
19 Hamiltoniens en escaliers et fonctorialité de l'homologie lagrangienne 112
20 Courbes holomorphes ancrées 116
21 Immeubles holomorphes et algèbres de Chekanov 118
22 Hamiltoniens pour $\mathcal{CO}$ 128
23 Passage à la limite pour $\mathcal{CO}$ 131
24 Construction du morphisme F 133
25 A_∞-homotopie et applications de continuation 135

26 Attachement d'anse symplectique 140
27 Dynamique du flot de Reeb après chirurgie 143
28 Nouvelles cordes et orbites de Reeb après chirurgie 145

29 Disque holomorphe dans l'anse 147
30 Premier allongement de cou : interpolation holomorphe-hamiltonien 149
31 Deuxième allongement de cou 149

32 Découpage de la sphère en octant 163
33 Flot géodésique de la sphère sur octants 164
34 Flot de billard sphérique 164

35 Coproduit trivial pour hamiltoniens convexe 172

36 Les équations A_∞ 178
37 Les équations co-A_∞ 180

Bibliographie

[AS06] Alberto Abbondandolo and Matthias Schwarz. On the Floer homology of cotangent bundles. *Comm. Pure Appl. Math.*, 59(2) :254–316, 2006.

[Abo10] Mohammed Abouzaid. A geometric criterion for generating the Fukaya category. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (112) :191–240, 2010.

[Abo11] Mohammed Abouzaid. A cotangent fibre generates the Fukaya category. *Adv. Math.*, 228(2) :894–939, 2011.

[Abo15] Mohammed Abouzaid. Symplectic cohomology and Viterbo's theorem. In *Free loop spaces in geometry and topology*, volume 24 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 271–485. Eur. Math. Soc., Zürich, 2015.

[AS10] Mohammed Abouzaid and Paul Seidel. An open string analogue of Viterbo functoriality. *Geom. Topol.*, 14(2) :627–718, 2010.

[A'C03] Norbert A'Campo. Monodromy of real isolated singularities. *Topology*, 42(6) :1229–1240, 2003.

[A'C09] Norbert A'Campo. Tête-à-tête twists and geometric monodromy. *Talk notes MPI Bonn*, 2009.

[AD10] Michèle Audin and Mihai Damian. *Théorie de Morse et homologie de Floer*. Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2010.

[Aur14] Denis Auroux. A beginner's introduction to Fukaya categories. In *Contact and symplectic topology*, volume 26 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 85–136. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2014.

[BCT09] Andrew J. Blumberg, Ralph L. Cohen, and Constantin Teleman. Open-closed field theories, string topology, and Hochschild homology. In *Alpine perspectives on algebraic topology*, volume 504 of *Contemp. Math.*, pages 53–76. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[BEH$^+$03] F. Bourgeois, Y. Eliashberg, H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Compactness results in symplectic field theory. *Geom. Topol.*, 7 :799–888, 2003.

[Bou02] Frederic Bourgeois. *A Morse-Bott approach to contact homology*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2002. Thesis (Ph.D.)–Stanford University.

[BEE12] Frédéric Bourgeois, Tobias Ekholm, and Yasha Eliashberg. Effect of Legendrian surgery. *Geom. Topol.*, 16(1) :301–389, 2012. With an appendix by Sheel Ganatra and Maksim Maydanskiy.

[BM04] Frédéric Bourgeois and Klaus Mohnke. Coherent orientations in symplectic field theory. *Math. Z.*, 248(1) :123–146, 2004.

[BO09a] Frédéric Bourgeois and Alexandru Oancea. An exact sequence for contact- and symplectic homology. *Invent. Math.*, 175(3) :611–680, 2009.

[BO09b] Frédéric Bourgeois and Alexandru Oancea. Symplectic homology, autonomous Hamiltonians, and Morse-Bott moduli spaces. *Duke Math. J.*, 146(1) :71–174, 2009.

[BO10] Frédéric Bourgeois and Alexandru Oancea. Fredholm theory and transversality for the parametrized and for the S^1-invariant symplectic action. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 12(5) :1181–1229, 2010.

[BF86] D. Burghelea and Z. Fiedorowicz. Cyclic homology and algebraic K-theory of spaces. II. *Topology*, 25(3) :303–317, 1986.

[CDGG17] B. Chantraine, G. Dimitroglou Rizell, P. Ghiggini, and R. Golovko. Geometric generation of the wrapped Fukaya category of Weinstein manifolds and sectors. *arxiv :1712.09126*, December 2017.

[Che02] Yuri Chekanov. Differential algebra of Legendrian links. *Invent. Math.*, 150(3) :441–483, 2002.

[CFHW96] K. Cieliebak, A. Floer, H. Hofer, and K. Wysocki. Applications of symplectic homology. II. Stability of the action spectrum. *Math. Z.*, 223(1) :27–45, 1996.

[Cie02] Kai Cieliebak. Handle attaching in symplectic homology and the chord conjecture. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 4(2) :115–142, 2002.

[CE12] Kai Cieliebak and Yakov Eliashberg. *From Stein to Weinstein and back*, volume 59 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. Symplectic geometry of affine complex manifolds.

[CO18] Kai Cieliebak and Alexandru Oancea. Symplectic homology and the Eilenberg–Steenrod axioms. *Algebr. Geom. Topol.*, 18(4) :1953–2130, 2018.

[DR16] Georgios Dimitroglou Rizell. Lifting pseudo-holomorphic polygons to the symplectisation of $P \times \mathbb{R}$ and applications. *Quantum Topol.*, 7(1) :29–105, 2016.

[DSV15] Vladimir Dotsenko, Sergey Shadrin, and Bruno Vallette. De Rham cohomology and homotopy Frobenius manifolds. *Journal of the European Mathematical Society*, page 13 pages, March 2015.

[EES05] Tobias Ekholm, John Etnyre, and Michael Sullivan. The contact homology of Legendrian submanifolds in $\mathbb{R}^{2n+1}$. *J. Differential Geom.*, 71(2) :177–305, 2005.

[EES07] Tobias Ekholm, John Etnyre, and Michael Sullivan. Legendrian contact homology in $P \times \mathbb{R}$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(7) :3301–3335, 2007.

[EO17] Tobias Ekholm and Alexandru Oancea. Symplectic and contact differential graded algebras. *Geom. Topol.*, 21(4) :2161–2230, 2017.

[FHS95] Andreas Floer, Helmut Hofer, and Dietmar Salamon. Transversality in elliptic Morse theory for the symplectic action. *Duke Math. J.*, 80(1) :251–292, 1995.

[FOOO09] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono. *Lagrangian intersection Floer theory : anomaly and obstruction. Part I*, volume 46 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI ; International Press, Somerville, MA, 2009.

[GPS17] S. Ganatra, J. Pardon, and V. Shende. Covariantly functorial wrapped Floer theory on Liouville sectors. *arxiv :1706.03152*, June 2017.

[Gan12] Sheel Ganatra. *Symplectic Cohomology and Duality for the Wrapped Fukaya Category*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2012. Thesis (Ph.D.)–Massachusetts Institute of Technology.

[Gei08] Hansjörg Geiges. *An introduction to contact topology*, volume 109 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[Goo85] Thomas G. Goodwillie. Cyclic homology, derivations, and the free loopspace. *Topology*, 24(2) :187–215, 1985.

[GH09] Mark Goresky and Nancy Hingston. Loop products and closed geodesics. *Duke Math. J.*, 150(1) :117–209, 2009.

[GM69] Detlef Gromoll and Wolfgang Meyer. Periodic geodesics on compact riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, 3 :493–510, 1969.

[Hin84] N. Hingston. Equivariant Morse theory and closed geodesics. *J. Differential Geom.*, 19(1) :85–116, 1984.

[HWZ17] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Applications of polyfold theory I : The polyfolds of Gromov-Witten theory. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 248(1179) :v+218, 2017.

[KS06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[KvK16] Myeonggi Kwon and Otto van Koert. Brieskorn manifolds in contact topology. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 48(2) :173–241, 2016.

[Lap01] S. V. Lapin. Differential perturbations and d-differential modules. *Mat. Sb.*, 192(11) :55–76, 2001.

[LH03] Kenji Lefèvre-Hasegawa. *On A-infinity-categories.* Theses, Université Paris-Diderot - Paris VII, November 2003.

[Lod92] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*, volume 301 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1992. Appendix E by María O. Ronco.

[MS04] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *American Mathematical Society Colloquium Publications.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[MS17] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology.* Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford, third edition, 2017.

[Mey78] Jean-Pierre Meyer. Acyclic models for multicomplexes. *Duke Math. J.*, 45(1) :67–85, 03 1978.

[Mil56] John Milnor. Construction of universal bundles. II. *Ann. of Math. (2)*, 63 :430–436, 1956.

[Mil68] John Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces.* Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968.

[Par16] John Pardon. An algebraic approach to virtual fundamental cycles on moduli spaces of pseudo-holomorphic curves. *Geom. Topol.*, 20(2) :779–1034, 2016.

[PS13] Amiel Peiffer-Smadja. Etude dynamique du champ de Reeb après chirurgie legendrienne sur une variété de contact, 2013. Mémoire de Master, https ://webusers.imj-prg.fr/amiel.peiffer-smadja/Research.

[RS93] Joel Robbin and Dietmar Salamon. The Maslov index for paths. *Topology*, 32(4) :827–844, 1993.

[Rou17] Guillaume Roux. *A particular case of the high-dimensional Weinstein conjecture.* Thèse, Université de Nantes, 2017.

[SW06] D. A. Salamon and J. Weber. Floer homology and the heat flow. *Geom. Funct. Anal.*, 16(5) :1050–1138, 2006.

[Sei08a] Paul Seidel. A biased view of symplectic cohomology. In *Current developments in mathematics, 2006*, pages 211–253. Int. Press, Somerville, MA, 2008.

[Sei08b] Paul Seidel. *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory.* Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[Sma62] S. Smale. On the structure of manifolds. *Amer. J. Math.*, 84 :387–399, 1962.

[Vit99] C. Viterbo. Functors and computations in Floer homology with applications. I. *Geom. Funct. Anal.*, 9(5) :985–1033, 1999.

[Wei79] Alan Weinstein. *Lectures on symplectic manifolds*, volume 29 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979. Corrected reprint.

[Wei91] Alan Weinstein. Contact surgery and symplectic handlebodies. *Hokkaido Math. J.*, 20(2) :241–251, 1991.

[Wen10] C. Wendl. Lectures on Holomorphic Curves in Symplectic and Contact Geometry. *arxiv :1011.1690*, November 2010.